Dr. ing. **BOŽIDAR STEFANINI**

Redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta
Sveučilišta u Zagrebu
Direktor Sveučilišnog računskog centra

Mr. ing. **SRĐAN BABIĆ**

Predavač Elektrotehničkog fakulteta
Sveučilišta u Zagrebu

Mr. ing. **MIRJANA URBIHA-FEUERBACH**

Asistent Elektrotehničkog fakulteta
Sveučilišta u Zagrebu

Matrične metode u analizi električnih mreža

1950 1975 ŠK »Školska knjiga« — Zagreb, 1975

Predgovor

Ova je knjiga prvenstveno napisana sa svrhom da na sustavan i jednostavan način upozna čitaoca s osnovama moderne analize električnih mreža. Kada kažemo »moderna analiza«, pod time danas mislimo na postupke analize prilagođene za upotrebu digitalnih elektroničkih računala. S tim u vezi posebna je pažnja obraćena na to da se u izlaganju održi logičan redoslijed, kako bi se čitalac postupno i bez posebnih poteškoća doveo do svakog mjesta u knjizi.

Da gradivo kao cjelina bude zaokruženo, u prvom poglavlju obrađujemo neke pojmove i osnovne zakone analize mreža koji su čitaocu vjerovatno otprije poznati. Međutim, ti su pojmovi i zakoni u ovom poglavlju prilagođeni kasnijem tekstu. Isto su tako, nekima kao podsjetnik, a nekima možda i da se s time upoznaju, u slijedeća dva poglavlja na elementaran način izložene osnove matrične algebre i topologije mreža. Njihovo je poznavanje ovdje neophodno makar u tom elementarnom obliku. Da bismo pripremili sav potreban alat za objašnjenje metoda analize mreža, u četvrtom poglavlju obradili smo u matričnom obliku neke od osnovnih topoloških relacija.

Peto, šesto i sedmo poglavlje temeljni su dio knjige: u petom poglavlju izvedene su jednadžbe mreže, u šestom poglavlju prikazana je primjena linearnih transformacija u analizi mreža, a u sedmom poglavlju izvedene su formule redukcije. Radi lakšeg razumijevanja teorije, u ovim su poglavljima izrađeni i neki numerički primjeri.

Budući da rješavanje brojčanih zadataka u praksi zahtijeva poznavanje numeričkih metoda rješavanja sustava jednadžbi i određivanja inverzne matrice, neki postupci pri njihovu rješavanju opisani su u osmom poglavlju, i to na način kako se primjenjuju u praksi. To je prikazano u programu za elektroničko računalo u devetom poglavlju. Osim toga, u devetom poglavlju čitalac se uvodi u tehniku programiranja i upoznaje s osnovama simboličkog jezika FORTRAN. Tako je gradivo u knjizi zaokruženo, jer je sastavljanje programa za elektroničko računalo krajnji cilj kome težimo.

Postupci analize mreža kako su ovdje izloženi mogu se podjednako primijeniti na sve električne mreže, neovisno o tome da li se radi o mrežama jake ili slabe struje. Zato se u ovoj knjizi nismo posebno zanimali izborom odgovarajućeg modela za neko pogonsko stanje, već smo kao polaznu točku uzeli već zadani model mreže.

Nadamo se — i to bi nam bilo najveće zadovoljstvo — da će ova knjiga korisno poslužiti prvenstveno studentima fakulteta, visokih i viših škola, a zatim i onim inženjerima iz prakse koji se sami žele uputiti u ovo područje elektrotehnike. Oni

koji žele proširiti svoje znanje morat će posegnuti za literaturom koja detaljnije obrađuje posebna područja analize mreža. Nastojali smo da ova knjiga bude takva oblika da prijelaz na naprednije tečajeve analize bude što lakši.

Mnogi kolege iz Zavoda za visoki napon Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu prepoznat će ovdje i svoje ideje. Posebno nam je ugodna dužnost da zahvalimo akademiku prof. dr ing. Hrvoju Požaru za ohrabrenje i podršku u toku rada na knjizi. Mnogo nas je zadužio i doc. ing. Milan Šodan koji je s velikom pažnjom pročitao rukopis i dao nam korisne savjete. Mnogo hvala i docentu dr ing. Vjekoslavu Filipoviću za mnoge korisne napomene i asistentu mr ing. Zdravku Hebelu za suradnju na programu za elektroničko računalo.

U Zagrebu, 20. *listopada* 1972.

B. S.
S. B.
M. U. F.

Ako želiš planirati jednu godinu unaprijed, tada obrađuj rižu; želiš li planirati deset godina unaprijed, uzgajaj drveće; želiš li planirati jedno stoljeće unaprijed, odgajaj ljude.

Chuang-tse

Našem zajedničkom učitelju akademiku prof. dr Josipu Lončaru, u znak zahvalnosti,

posvećujemo.

Sadržaj

Prvo poglavlje

OSNOVNI POJMOVI I RELACIJE ANALIZE ELEKTRIČNIH MREŽA 1

1.1 Uvod 1
1.2 Elementi modela mreže 3
1.3 Osnovni zakoni i relacije strujnih krugova 6
1.4 Zavojnica u strujnom krugu 18
1.5 Kondenzator u strujnom krugu 39
1.6 Sinusoidni naponi i struje 40

Drugo poglavlje

OSNOVE MATRIČNE ALGEBRE 65

2.1 Definicija i označavanje matrice 65
2.2 Neki tipovi matrica 67
2.3 Računske operacije s matricama 70
2.4 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi u matričnom obliku 87
2.5 Matrice i linearne transformacije 88
2.6 Podjela matrica u podmatrice 92
2.7 Rang matrice 97
2.8 Redukcija sustava linearnih algebarskih jednadžbi . . . 99

Treće poglavlje

NEKI POJMOVI I JEDNADŽBE TOPOLOGIJE MREŽA . . 103

3.1 Graf modela mreže 103
3.2 Definicije pojmova 105
3.3 Određivanje stabla zadanog grafa 107
3.4 Broj grana stabla i broj nezavisnih grana 108

Četvrto poglavlje

TOPOLOŠKE RELACIJE U MATRIČNOM OBLIKU 111
4.1 I. Kirchhoffov zakon i proširena matrica incidencija . . 111
4.2 II. Kirchhoffov zakon i proširena spojna matrica 117
4.3 Matrica incidencija 125
4.4 Relacija koja povezuje struje u granama stabla i struje u nezavisnim granama 127
4.5 Spojna matrica 131
4.6 Struje nezavisnih petlji 133

Peto poglavlje

JEDNADŽBE MREŽE 137
5.1 Uvod 137
5.2 Metoda petlji 138
5.3 Metoda čvorišta 159

Šesto poglavlje

PRIMJENA LINEARNIH TRANSFORMACIJA 193
6.1 Uvod 193
6.2 Metoda analize mreža prema Kronu (transformacija uz uvjet invarijantne snage) 195
6.3 Proizvoljne transformacije 218

Sedmo poglavlje

FORMULE REDUKCIJE 229
7.1 Formula redukcije za jednadžbe metode čvorišta 229
7.2 Formula redukcije za jednadžbe metode petlji 238

Osmo poglavlje

RJEŠAVANJE SUSTAVA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNADŽBI 243
8.1 Uvod 243
8.2 Direktne metode 245
8.3 Iterativne metode 252
8.4 Numeričke metode inverzije matrica 257

Deveto poglavlje

UPOTREBA DIGITALNIH ELEKTRONIČKIH RAČUNALA U ANALIZI MREŽA 267
9.1 Općenito o digitalnim elektroničkim računalima 267
9.2 Uvod u tehniku programiranja 273
9.3 Osnove simboličkog jezika FORTRAN 282
9.4 Program za izračunavanje napona i struja metodom čvorišta 289

Matrične metode u analizi električnih mreža

Prvo poglavlje

I putovanje od tisuću milja, uvijek počinje prvim korakom.
Lao-tse

OSNOVNI POJMOVI I RELACIJE ANALIZE ELEKTRIČNIH MREŽA

Na početku ovog poglavlja navodimo i ukratko objašnjavamo osnovne pojmove analize električnih mreža. Zatim govorimo o tri temeljna zakona strujnih krugova: o Ohmovu zakonu i o dva Kirchhoffova zakona. Nakon toga — u zasebnim odjeljcima — dajemo napon-struja jednadžbe kojima se matematički opisuje prisutnost zavojnica i kondenzatora u modelu mreže. Na kraju poglavlja opisujemo tzv. »simboličku metodu« koja se primjenjuje u analizi električnih mreža kada su naponi i struje sinusne funkcije vremena.

1.1. Uvod

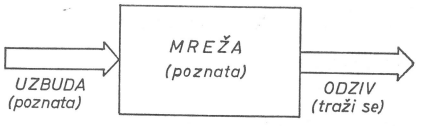
Analizu električnih mreža definiramo pomoću tri osnovna pojma; to su:

— uzbuda,
— mreža,
— odziv.

Električna mreža, ili kraće *mreža*, skup je električnih uređaja povezanih vodljivo ili ulančanih magnetskim tokom; *uzbuda* je zajednički naziv za elektromagnetske veličine narinute mreži, a *odziv* je zajednički naziv za elektromagnetske veličine koje se u mreži pojavljuju kao reakcija na primijenjenu uzbudu.

Zamislimo — radi ilustracije — da u neku električnu mrežu, koja je prethodno električki »mrtva«, priključimo izvor električne energije. Time smo zapravo, između priključnica mreže u kojima je izvor priključen, narinuli električni napon. Posljedica je toga da će kroz vodiče poteći struje, a razlike električnih potencijala pojavit će se i između ostalih točaka u mreži. Osim toga, u jezgri transformatora i prigušnica stvorit će se magnetski tok, na oblozima kondenzatora sakupit će se suprotni električni naboji, a u dielektriku kondenzatora pojavit će se električno polje, itd. Mogli bismo nabrojiti još mnoge elektromagnetske, ali i mehaničke, toplinske i druge pojave u mreži, koje su posljedica tog narinutog napona. Sve ovo što smo sada rekli možemo ukratko i općenitije kazati ovako: narine li se električnoj mreži *uzbuda*, pojavit će se u mreži *odziv*.

Ako su poznate *uzbudne veličine* i ako je poznata *mreža*, a traže se *odzivne veličine*, taj se problem definira kao *analiza električnih mreža** (slika 1.1). To je predmet kojim ćemo se ovdje baviti. Pritom ćemo se ograničiti samo na one slučajeve kada su zadane uzbudne veličine samo *struje* ili *naponi* — bilo istosmjerni ili sinusoidni — a isto tako samo *struje* i *naponi* — i to samo u ustaljenom stanju (dakle, nakon prigušenja prijelazne pojave) — biti će tražene odzivne veličine. Osim toga, ovdje će pasivni elementi modela mreže uvijek biti *linearni*, ili, drugim riječima, parametri pasivnih elemenata (otpor, induktivitet i kapacitet) bit će konstantne veličine, neovisne o struji i naponu. Pritom podrobnije govorimo o *linearnom modelu mreže* i o *analizi linearnih električnih mreža*. Analiza prijelaznih pojava posebno je područje i prelazi okvire ovog gradiva jer u računu uključuje varijablu vrijeme.



Sl. 1.1. Problem koji se definira kao analiza električnih mreža

Treba naglasiti da stvarne električne uređaje ne možemo zamijeniti linearnim modelom a da ne uvedemo izvjesne pretpostavke. Međutim, u velikom broju praktičnih problema te pretpostavke redovito nisu toliko grube da bi njihovo uvođenje bitno utjecalo na zahtjevanu točnost rezultata. Osim toga, ostajući tako u području analize linearnih mreža, zadatak je matematički razmjerno jednostavan za rješavanje: jednadžbe koje opisuju ponašanje mreže u pogonu u općem su slučaju *linearne diferencijalne jednadžbe*, a u posebnim slučajevima *linearne algebarske jednadžbe*; poznato je da njihovo rješavanje ne predstavlja naročit problem.

Ako mrežu ne možemo predočiti linearnim modelom, npr. ako moramo uzeti u obzir i zasićenje jezgre transformatora, tada su jednadžbe kojima opisujemo ponašanje mreže u pogonu *nelinearne jednadžbe*, pa govorimo o *nelinearnom modelu mreže* i o *analizi nelinearnih mreža*. Rješenje nelinearnih jednadžbi nije lako naći, jer, osim u posebnim slučajevima, ne postoje određeni postupci za njihovo rješavanje; veoma često moramo se zadovoljiti samo aproksimativnim rješenjima.

Osim analize električnih mreža definiramo i drugi problem koji se svodi na određivanje *mreže* kada su zadane *uzbudne* i *odzivne* veličine; u ovom slučaju govorimo o *sintezi električnih mreža***. Time se ovdje nećemo baviti. Spomenimo samo to da je jedna od razlika između analize mreža i sinteze mreža u tome što je rješenje u analizi mreža uvijek jednoznačno, dok u sintezi mreža može biti mnogo rješenja, a ponekad rješenje i ne postoji. Također, u sintezi mreža postupak je pri nalaženju rješenja općenito teži nego u analizi mreža, iako ni u analizi mreža postupak ne mora uvijek biti lagan.

Treća mogućnost — određivanje uzbudnih veličina ako su poznate odzivne veličine i ako je poznata mreža — ne definira se.

---

*Riječ »analiza« potječe od grčke riječi 'αναλύω, što u prijevodu znači raščlanjujem ili razrješujem.

**Na grčkom jeziku σύνθεσις znači sastavljanje.

1.2. Elementi modela mreže

Električnu mrežu grafički prikazujemo *shemom mreže*. U shemi mreže pojedini su električni uređaji i vodovi stvarne mreže prikazani grafičkim simbolima koji se međusobno povežu crtama na isti način kao što su vodičima povezani uređaji u mreži. Radi ilustracije prikazujemo na slici 1.2. određen broj grafičkih simbola električnih uređaja kako su definirani prema JUS i IEC standardima.

Na osnovi sheme zadane mreže potrebno je, kao prvi korak u analizi mreža, odabrati *grafički model mreže*; najprije se odlučimo za određeni grafički model svakog pojedinog električnog uređaja i voda (ovisno o problemu i željenoj točnosti rezultata), a zatim pojedine modele povežemo u model mreže. Dakle, pri analizi električnih mreža izvori i trošila električne energije, transformatori i vodovi, nadomještaju se odgovarajućim modelima; analizom dobiveni nepoznati naponi i struje na priključnicama pojedinog modela u zadanom modelu mreže moraju odgovarati traženim naponima i strujama na priključnicama pripadnih realnih uređaja. O tome kako izgledaju grafički modeli realnih električnih uređaja ovdje nećemo posebno govoriti, ali ćemo nešto kasnije govoriti o modelima dvonamotnog transformatora. Radi toga ćemo metode analize mreža ilustrirati primjerima u kojima je konfiguracija modela mreže izabrana proizvoljno.

Grafički modeli linearnih mreža mogu biti sastavljeni od ukupno šest različitih elemenata; njihovi su nazivi:

— idealni otpornik,

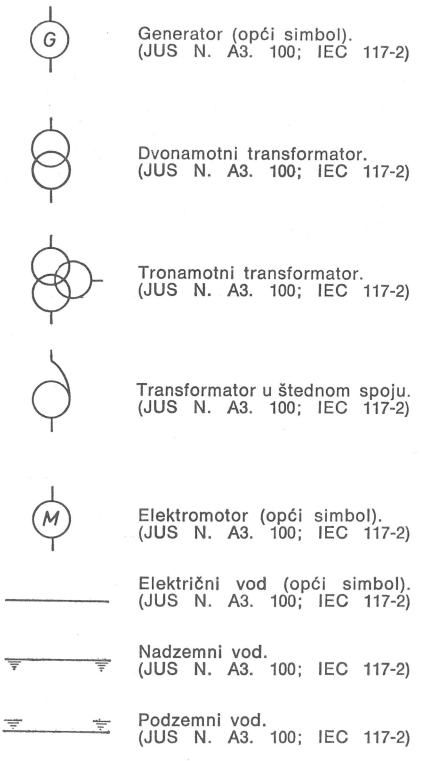
— idealna zavojnica,

— idealni kondenzator,

— idealni transformator,

— idealni izvor napona i

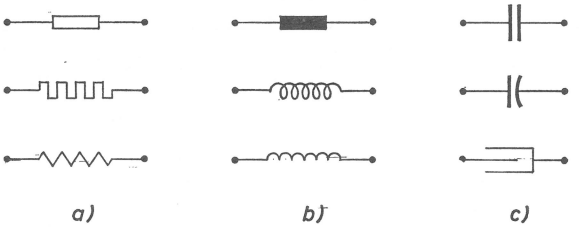
— idealni izvor struje.



Sl. 1.2. Grafički simboli nekih električnih uređaja

Prva tri elementa — idealni otpornik, idealna zavojnica i idealni kondenzator — nazivaju se jednim imenom *pasivni elementi*, a dva posljednja elementa — idealni izvor napona i idealni izvor struje — nazivaju se *aktivni elementi*. Pasivni i aktivni elementi imaju po dvije priključnice. Za razliku od njih, idealni transformator ima četiri priključnice; o idealnom transformatoru reći ćemo nešto više kasnije, u posebnom odjeljku.

Grafički simboli za idealni otpornik, idealnu zavojnicu i idealni kondenzator nisu u literaturi uvijek jednaki, pa zato na slici 1.3. prikazujemo po tri simbola za svaki od tih elemenata koje najčešće susrećemo.

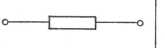
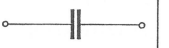
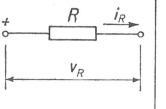
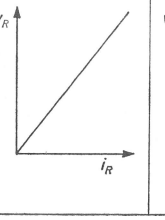
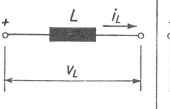
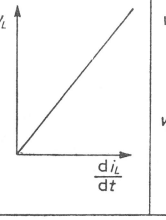
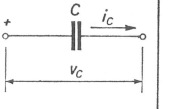
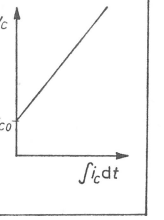


Sl. 1.3. Grafički simboli kojima se prikazuju: a) idealni otpornik, b) idealna zavojnica, c) idealni kondenzator

Nasuprot tome, u općim jednadžbama analize mreža pasivne elemente označavamo matematičkim simbolima, obično slovima: idealni otpornik redovito označavamo simbolom R, idealnu zavojnicu simbolom L, a idealni kondenzator simbolom C. Simboli R, L, i C su *parametri* pasivnih elemenata: parametar R naziva se *otpor*, parametar L *induktivitet*, a parametar C *kapacitet*.

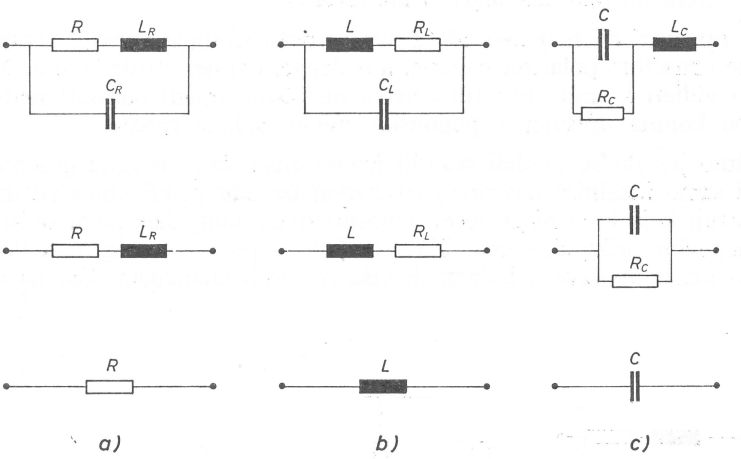
Grafički simboli što ćemo ih ovdje upotrebljavati i osnovna svojstva pasivnih elemenata koja definiramo kao odnos napona između priključnica i struje kroz element prikazani su u tablici 1.1.

Tablica 1.1

Naziv elementa:	Idealni otpornik	Idealna zavojnica	Idealni kondenzator
Grafički simbol:			
Naziv parametra:	Otpor	Induktivitet	Kapacitet
Oznaka parametra:	R	L	C
Odnos između napona i struje:	 $v_R = Ri_R$ $i_R = \frac{1}{R} v_R$ 	 $v_L = L \frac{di_L}{dt}$ $i_L = \frac{1}{L}\int_0^t v_L\,dt + i_L(0)$ 	 $v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C dt + v_C(0)$ $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$ 

Moramo naglasiti da su idealni otpornik, idealna zavojnica i idealni kondenzator samo *zamišljeni* uređaji koji nam služe u analizi mreža, a da se stvarni otpornik, stvarna zavojnica i stvarni kondenzator nikada ne mogu izraditi tako da imaju potpuno ista svojstva kao što su ona kojima su definirani spomenuti idealni uređaji. Stoga će samo u nekim slučajevima rezultati analize biti dovoljno točni ako otpornik modeliramo idealnim otpornikom, zavojnicu idealnom zavojnicom, a kondenzator idealnim kondenzatorom. U drugim slučajevima morat ćemo te stvarne uređaje prikazati složenijim modelom. Tako na primjer često nećemo moći zanemariti otpor žice od koje je namotana zavojnica, pa će model zavojnice biti sastavljen i od idealne zavojnice i od idealnog otpornika, odnosno morat ćemo računati i s parametrom R i s parametrom L; nadalje, ako je frekvencija struje vrlo visoka, tada ni kapacitet među zavojima ne može biti zanemariv: model zavojnice tada čine sva tri pasivna elementa, pa računamo sa R, L i C.

Neki modeli otpornika, zavojnica i kondenzatora prikazani su na slici 1.4.



Sl. 1.4. a) Modeli otpornika, b) modeli zavojnice i c) modeli kondenzatora

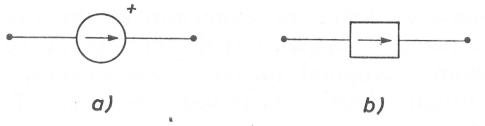
Modeli nekih električnih uređaja — na primjer modeli izvora električne energije — sadrže pored pasivnih elemenata i *aktivne elemente*. Njihova svojstva definiraju se ovako:

Idealni izvor napona takav je izvor električne energije koji između svojih priključnica održava napon određenog iznosa i oblika bez obzira na struju koja kroz njega teče.

Idealni izvor struje takav je izvor električne energije koji proizvodi struju određenog iznosa i oblika bez obzira na napon među njegovim priključnicama.

Umjesto spomenutih naziva nailazimo u literaturi i na nazive »izvor konstantnog napona« i »izvor konstantne struje«. Te nazive nećemo upotrebljavati jer se može pomisliti da se radi o izvorima kojih su napon i struja nepromjenjivi s vremenom, a to iz navedenih definicija ne mora slijediti. Naime, iz definicija vidimo da napon izvora i struja izvora mogu biti bilo koje periodičke funkcije vremena, pri čemu amplituda i oblik tih funkcija ostaju nepromjenjivi.

Grafički simboli aktivnih elemenata prikazani su na slici 1.5.



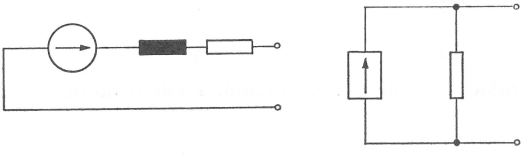
Sl. 1.5. Grafički simboli aktivnih elemenata: a) idealni izvor napona, b) idealni izvor struje

Za idealni izvor napona simbol je kružnica s ucrtanom strelicom ili s napisanim znakom plus sa strane jedne od priključnica. Jedan od ta dva znaka — bilo strelicu, bilo znak plus — možemo izostaviti jer i jedan i drugi označavaju isto — *polaritet napona izvora*; strelica se uvijek usmjeri prema priključnici pozitivnog polariteta!

Kao što vidimo na desnoj slici, za idealni izvor struje simbol je pravokutnik u kojem je strelicom označen *smjer struje izvora.*

Moramo upamtiti da ni jedan od ta dva grafička simbola nemaju značenje ako u prvom ne označimo polaritet napona, a u drugom smjer struje izvora. Naime, kao što ćemo vidjeti kasnije, bez tih oznaka ne bismo mogli napisati nedvosmislene jednadžbe kojima opisujemo pogonsko stanje zadane mreže.

Spomenimo još da se modeli realnih izvora električne energije obično ne mogu predočiti samo idealnim izvorima, jer napon između priključnica stvarnog izvora ovisi o struji koja kroz njega teče, odnosno struja koju daje izvor ovisi o naponu među njegovim priključnicama. Te promjene napona i struje modeliraju se dodavanjem idealnom izvoru jednog ili više pasivnih elemenata, kao na primjer na slici 1.6.



Sl. 1.6. Modeli realnih izvora električne energije

1.3. Osnovni zakoni i relacije strujnih krugova

Osnovni zakoni analize električnih mreža — Ohmov zakon i dva Kirchhoffova zakona — temelje se na eksperimentima što su ih u prvoj polovini prošloga stoljeća izvodila dva Nijemca: Georg Simon Ohm (1789—1854) i Gustav Robert Kirchhoff (1824—1887).

G. S. Ohm bio je profesor matematike, a 1824. god. počeo je eksperimentirati s elektricitetom. Među ostalim proučavao je proticanje istosmjerne struje kroz metalne žice raznih dužina, različitog poprečnog presjeka i od različitog materijala. Kao izvor električne energije služio mu je Voltin članak. Rezultate svojih eksperimenata objavio je 1827. god. u raspravi »Galvanski krug što ga je matematički

razradio G. S. Ohm«. Jedan od rezultata tih eksperimenata, kojim je definiran odnos između jakosti struje u metalnoj žici i napona među krajevima žice, danas se naziva Ohmov zakon. Zanimljivo je spomenuti da Ohmovi suvremenici nisu vjerovali da su njegova otkrića ispravna, pa je — kao što to često biva — zbog njih bio javno napadan.

Dvadesetak godina nakon Ohmovih otkrića, fizičar G. R. Kirchhoff istraživao je strujne i naponske prilike u električnim mrežama. God. 1845, još kao student, objavio je rad u kojem je izložio pravila o zbroju struja što se sastaju u nekom čvorištu mreže i o zbroju napona duž zatvorenog strujnog kruga; to su danas poznati I. i II. Kirchhoffov zakon (ili, kako se još nazivaju, »Kirchhoffov zakon za struje« i »Kirchhoffov zakon za napone«). Kirchhoff je veoma poznat i po otkrićima u drugim granama fizike (npr. u nauci o toplini i u nauci o svjetlosti); po značenju svojih radova pripada među najveće učenjake XIX stoljeća.

Ohmov zakon i Kirchhoffovi zakoni temelj su analize električnih mreža; svi postupci i metode analize mreža slijede iz tih zakona.

Ohmov zakon

Protiče li kroz metalnu žicu vremenski stalna struja, napon između krajeva te žice direktno je proporcionalan jakosti struje. Ako napon između krajeva žice označimo sa v_R, a jakost struje sa i_R, Ohmov zakon u matematičkom obliku glasi:

$$v_R = R \cdot i_R, \tag{1.1}$$

gdje je sa R označena konstanta proporcionalnosti koja se naziva *električni otpor* ili kraće *otpor*.

Ako je R konstantan, relacija (1.1) vrijedi za svaki trenutak i kada je struja vremenski promjenjiva (a ne samo za vremenski stalnu struju), uz pretpostavku da su induktivitet L i kapacitet C strujnog kruga zanemarivo mali prema otporu R. Tada se piše općenitije: $v_R(t) = R \cdot i_R(t)$.

U daljnjem ćemo tekstu, kao što je često običaj, vremenski promjenjiv napon $v(t)$ i vremenski promjenjivu jakost struje $i(t)$ označavati kraće samo sa v, odnosno sa i. Također ćemo umjesto »jakost struje« govoriti samo »struja«.

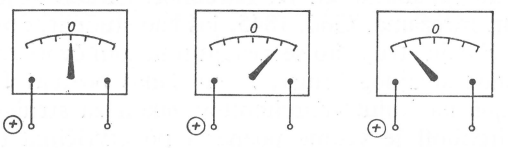
I. Kirchhoffov zakon

Prije nego navedemo definicije I. Kirchhoffova zakona, kažimo najprije nešto o smjeru električne struje.

Smjer električne struje definira se od pozitivne priključnice izvora električne energije kroz vanjski dio strujnog kruga prema negativnoj priključnici izvora i od negativne priključnice prema pozitivnoj priključnici unutar izvora. Taj smjer podudara se sa smjerom *pozitivnih** naboja, dakle suprotan je smjeru gibanja elektrona. Možemo ga odrediti na više načina, na primjer na osnovi otklona kazaljke ampermetra. Priključimo li u seriju s vodičem kroz koji teče struja ampermetar kojemu je osnovni položaj kazaljke u sredini skale (a kazaljka se može otkloniti i na jednu i na drugu stranu od osnovnog položaja) i kojega je — kako se to redovito označava

*U metalnim vodičima gibaju se zapravo samo slobodni elektroni, a pozitivne se jezgre, kako se smatra, ne pomiču na veću udaljenost.

— priključnica pozitivnog polariteta označena sa ⊕ (sl. 1.7 a), tada će se, ako struja teče u smjeru *od* ⊕ prema drugoj priključnici, kazaljka uvijek otkloniti na istu stranu, npr. udesno (sl. 1.7 b); ako je smjer struje obratan, dakle *prema* ⊕ priključnici, kazaljka će se otkloniti na drugu stranu, dakle ulijevo (sl. 1.7 c).



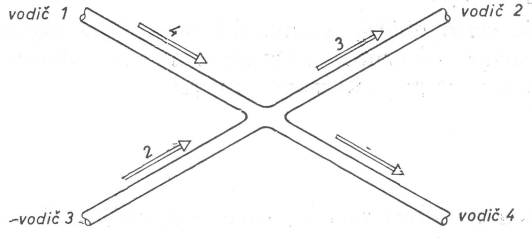
Sl. 1.7. Položaj kazaljke ampermetra: a) struja je nula, b) struja teče kroz instrument *od* ⊕ priključnice i c) struja teče kroz instrument *prema* ⊕ priključnici.

Zamislimo sada jedan jednostavan eksperiment. Neka su vodiči 1, 2, 3 i 4 na slici 1.8. dio neke mreže i neka kroz svaki od njih teče istosmjerna struja. Najprije ampermetrom odredimo jakost i smjer struje u svakom vodiču; pretpostavimo da su dobiveni smjerovi struja oni, koji su označeni dvostrukim strelicama uz vodiče, a da su izmjerene jakosti struja u vodičima brojevi uz pojedine strelice. Kao što vidimo na slici, kroz vodiče 1 i 3 struje teku *prema* čvorištu (»ulazne struje«), a kroz vodiče 2 i 4 *od* čvorišta (»izlazne struje«). Zbrojimo li zatim posebno iznose ulaznih struja, a posebno iznose izlaznih struja, dobivamo da je:

ukupna ulazna struja $= 4 + 2 = 6$,
ukupna izlazna struja $= 3 + 3 = 6$,

odnosno,

ukupna ulazna struja $= 6 = 6 =$ ukupna izlazna struja.



Sl. 1.8. Vodičima 1, 2, 3 i 4 teku struje u smjeru koji je označen strelicom. Iznosi struja označeni su brojevima iznad strelica.

Ma koliko puta ponovili sličan eksperiment, za različit broj vodiča i razne smjerove struja, u svakom slučaju dobit ćemo da je:

ukupna »stvarna« struja koja ulazi u neko čvorište mreže jednaka ukupnoj »stvarnoj« struji koja iz njega izlazi.

To je jedna formulacija I. Kirchhoffova zakona; naziv »stvarna struja« upotrijebili smo zato da istaknemo da je poznat i iznos struje i smjer struje u vodičima.

U našim se zadacima traže struje u vodičima; struje će biti nepoznate u svim vodičima, ili će biti nepoznate samo u nekima, a u preostalima će biti poznate. Struje

koje tražimo nepoznate su ne samo po iznosu već i po smjeru. Zato prije nego što napišemo jednadžbe I. Kirchhoffova zakona moramo smjerove nepoznatih struja pretpostaviti: od dva moguća smjera struje kroz vodič odaberemo jedan; taj pretpostavljeni smjer struje naziva se *referentni smjer*. Za razliku od stvarnog smjera, koji smo označili dvostrukom strelicom, referentni smjer struje označavat ćemo jednostrukom strelicom. Također ćemo nepoznate struje u matematičkim relacijama označavati simbolom i_g, gdje nam indeks g kaže da se radi o struji kroz vodič g.

Zamislimo sada da su nam na slici 1.9. poznate struje u vodičima 1, 2 i 3; struje u vodičima 1 i 3 ulazne su struje, a struja u vodiču 2 izlazna je struja. U vodiču 4 struja nam nije poznata pa smo je označili sa i_4; smjer te struje pretpostavili smo prema čvorištu, dakle uzeli smo kao da je ta struja ulazna struja. Napišemo li sada sumu ulaznih struja s jedne strane znaka jednakosti, a sumu izlaznih struja s druge, tj. napišemo li jednadžbu:

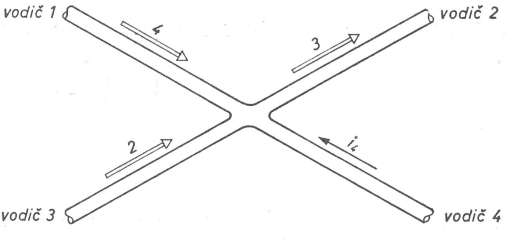
$$\Sigma i_u = \Sigma i_i, \tag{1.2}$$

gdje su sa i_u označene ulazne struje, a sa i_i izlazne struje (bilo stvarne, bilo referentne), imamo:

$$\text{suma ulaznih struja} = 4 + 2 + i_4 = 3 = \text{suma izlaznih struja.}$$

Sve ulazne struje nalaze se s jedne strane znaka jednakosti s plus predznakom, a izlazna je struja s istim predznakom s druge strane znaka jednakosti (očito: da smo uzeli primjer s više izlaznih struja, sve bi one ovdje bile pozitivnog predznaka na desnoj strani od znaka jednakosti). Iz te jednadžbe možemo izračunati i_4:

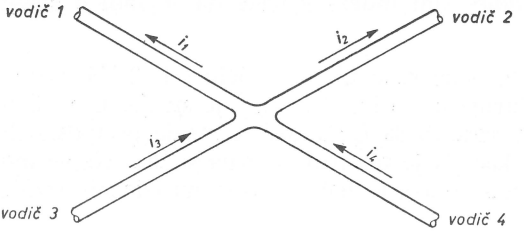
$$i_4 = -3.$$



Sl. 1.9. U vodičima 1, 2 i 3 struje su poznate, a u vodiču 4 struja nije poznata

Dakle, iznos struje u vodiču 4 jednak je 3. Što znači predznak minus ispred tog broja? Očigledno je da predznak minus ispred broja 3 znači da je *pretpostavljeni smjer struje suprotan stvarnome smjeru*! Naime, jasno je da umjesto uvrštene vrijednosti (−3) s lijeve strane znaka jednakosti možemo napisati (+3) s desne strane. Stvarna je struja u vodiču 4 prema tome izlazna struja. Da smo računom dobili pozitivnu brojčanu vrijednost nepoznate struje, to bi značilo da se referentni smjer i stvarni smjer struje podudaraju. Upamtimo prema tome da *pozitivna ili negativna brojčana vrijednost struje ima značenje samo u odnosu prema nekom određenom smjeru.* Pokazat ćemo sada još i to da jednadžbe I. Kirchhoffova zakona vrijede bez obzira da li su svi smjerovi struja poznati ili su smjerovi struja pretpostavljeni. Jasno je da jednadžbe pritom moramo napisati tako da budu u skladu s naznačenim smjerovima struja.

Najprije smjerove struja u svim vodičima na slici 1.10. pretpostavimo; u vodičima 3 i 4 pretpostavili smo smjerove struja prema čvorištu, a u vodičima 1 i 2 od čvorišta. Ako su stvarni smjerovi struja oni koji su označeni na slici 1.8, to znači da se u vodičima 2 i 3 stvarni i pretpostavljeni smjerovi struja podudaraju, a u vodičima 1 i 4 suprotni su.



Sl. 1.10. U svim su vodičima smjerovi struja pretpostavljeni

Za pretpostavljene smjerove struja na osnovi (1.2) imamo:

$$\text{suma ulaznih struja} = i_3 + i_4 = i_1 + i_2 = \text{suma izlaznih struja} \tag{1.3}$$

Zamislimo zatim slijedeći eksperiment: u seriju sa svakim vodičem priključimo ampermetar tako da je $\oplus$ priključnica instrumenta sa strane repa referentne strelice. Prema onome što smo rekli maloprije, ako se stvarni smjer i referentni smjer struje u vodiču podudaraju, tada ćemo brojčanu vrijednost izmjerene struje očitati s predznakom plus, a ako su oni suprotni, brojčanu vrijednost struje očitat ćemo s predznakom minus. Dakle, u našem će primjeru biti:

$$i_1 = -4,\ i_2 = +3,\ i_3 = +2,\ i_4 = -3.$$

Uvrstimo li te vrijednosti u (1.3), imamo:

$$2 + (-3) = -4 + 3,$$

ili:

$$-1 = -1.$$

Znači, i kada su svi smjerovi strujâ pretpostavljeni vrijedi da je suma ulaznih struja jednaka sumi izlaznih struja. Jedino primjećujemo da se dobivene sume s jedne i s druge strane znaka jednakosti sada razlikuju od ukupnih stvarnih struja; ukupne stvarne struje (ulazne i izlazne) iznosile su 6, a sume koje smo sada dobili iznose (−1). Da smo referentne smjerove struja odabrali drukčije, tada bi suma ulaznih struja i suma izlaznih struja opet bile međusobno jednake, ali bi bile neki treći broj. Sa stajališta analize mreža važno je međutim da relacija (1.2) vrijedi bez obzira jesu li smjerovi struja zadani ili pretpostavljeni. Prema tome, I. Kirchhoffov zakon možemo općenitije izraziti ovako:

suma struja (bilo stvarnih, bilo referentnih) usmjerenih prema čvorištu jednaka je sumi struja usmjerenih od čvorišta,

ili kraće:

suma ulaznih struja jednaka je sumi izlaznih struja.

Umjesto oba pojma — »ulazne struje« i »izlazne struje« — često se u analizi mreža upotrebljava samo jedan pojam: ili samo »ulazne struje« ili samo »izlazne struje«. Ako upotrebljavamo samo pojam »ulazne struje«, tada ćemo umjesto relacije (1.3) pisati:

$$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0, \tag{1.4}$$

ili općenito:

$$\text{alg. } \Sigma i_u = 0, \tag{1.5}$$

što možemo kazati ovako:

algebarska suma ulaznih struja jednaka je nuli.

Upotrebljavamo li samo pojam »izlazne struje«, tada ćemo umjesto (1.3) pisati:

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0, \tag{1.6}$$

ili općenito:

$$\text{alg. } \Sigma i_i = 0. \tag{1.7}$$

Dakle, u ovom slučaju kažemo:

algebarska suma izlaznih struja jednaka je nuli.

Obratimo pažnju na slijedeće: kada relaciju I. Kirchhoffova zakona pišemo u obliku (1.5) ili (1.7), dakle s nulom s jedne strane znaka jednakosti, tada imamo jedan predznak ispred simbola za struje kojih je referentni smjer prema čvorištu, a drugi predznak ispred simbola za struje kojih je referentni smjer od čvorišta. Da bismo to istaknuli, rekli smo »algebarska suma«, a ne kratko »suma«. Naglasimo sada da te predznake ispred općih simbola za struje pri pisanju općenitih relacija I. Kirchhoffova zakona ne smijemo miješati s predznacima ispred brojčanih vrijednosti strujâ koje ćemo dobiti računom.

Kod izmjeničnih struja njihova se momentana vrijednost mijenja i po iznosu i po smjeru. Stoga relacije I. Kirchhoffova zakona vrijede u tom slučaju samo za određeni trenutak; u protivnom one ne bi bile nedvosmislene.

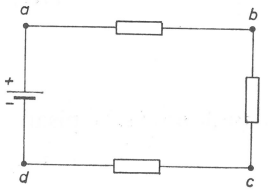
II. Kirchhoffov zakon

Prije nego što smo definirali I. Kirchhoffov zakon podsjetili smo se kako je definiran smjer električne struje. Zatim smo, pri definiranju tog zakona, upotrijebili izraze »ulazna struja« i »izlazna struja«, misleći pritom na smjer struje prema zadanom čvorištu ili od zadanog čvorišta.

Slično tome, sada ćemo najprije dogovorno pridati smjer električnom naponu, a zatim ćemo definirati II. Kirchhoffov zakon, upotrebljavajući pritom pojmove »porast napona« i »pad napona« koji su u vezi s odabranim smjerom obilaženja zatvorenog strujnog kruga. Spomenimo, međutim, još i to da se II. Kirchhoffov zakon često definira i bez upotrebe tih pojmova.

Da bismo razjasnili što mislimo pod »smjerom« napona, uzmimo za ilustraciju strujni krug na slici 1.11, u kojem je izvor električne energije jedna baterija, a preostala tri elementa kruga su otpornici. Jedna priključnica baterije označena je znakom plus, pa kažemo da je odgovarajuća priključnica pozitivnog polariteta. Druga je priključnica baterije, koja je označena znakom minus, priključnica negativnog polariteta. Što ovdje znače plus i minus?

Uslijed kemijskog procesa koji se zbiva u bateriji, unutar baterije dolazi do odvajanja električnih naboja; pritom se na jednoj elektrodi baterije pojavi višak elektrona, a na drugoj nastane manjak elektrona; priključnica baterije uz elektrodu s viškom elektrona je »negativna«, a priključnica uz elektrodu s manjkom elektrona je »pozitivna«. Pozitivna priključnica označava se znakom plus, a negativna znakom minus.



Sl. 1.11. Promatrani strujni krug

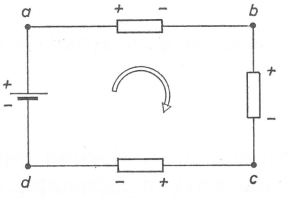
Na slici 1.11. krajevi pojedinih elemenata kruga označeni su slovima *a*, *b*, *c*, i *d*. Kako je, prema definiciji, smjer struje u dijelu kruga izvan baterije od njezine plus priključnice prema minus priključnici, a unutar baterije od minus priključnice prema plus priključnici, struja će kroz otpornike teći u smjeru *a-b-c-d*, a unutar baterije u smjeru od *d* prema *a*. Budući da se pod smjerom struje razumijeva smjer gibanja pozitivnih naboja, znači da je smjer struje *unutar* baterije suprotan smjeru električnog polja (jer se smjer električnog polja definira od pozitivnog prema negativnom polaritetu). Da bi pozitivni naboj pri kretanju od minus prema plus priključnici baterije mogao savladati sile polja, on mora odnekuda dobiti energiju; potrebnu energiju dobiva kemijskim procesom koji se zbiva u bateriji. Znači, duž puta unutar baterije mogu se pozitivnom naboju pridati različiti nivoi energije, pa i između jedne i druge priključnice baterije postoji razlika u nivoima energije, pri čemu je pozitivna priključnica na višem nivou energije nego negativna. Ako zamislimo da je *jedinični pozitivni naboj* prešao put od minus do plus priključnice, tada se, prema definiciji, odgovarajući nivoi energije nazivaju *električni potencijali*. Prema tome, razlika električnih potencijala, ili »električni napon« između priključnica, nije ništa drugo do energija koju jedinični pozitivni naboj dobiva na tom putu, ili, drugim riječima, to je radnja koju je pri gibanju pozitivnog jediničnog naboja potrebno izvršiti protiv silâ polja.

Pod utjecajem postojećeg električnog polja pozitivni se naboji u *vanjskome* dijelu strujnog kruga (izvan baterije) gibaju u *smjeru polja*: od *a*, preko *b* i *c*, do *d*, odnosno od priključnice baterije pozitivnog polariteta prema priključnici negativnog polariteta. Budući da u vanjskome dijelu strujnog kruga električno polje vrši rad, znači da se u tom dijelu kruga, u smjeru od *a* prema *d*, nivoi energije smanjuju. Na tom putu pozitivni naboj predaje energiju koju je dobio u bateriji. Prema tome, električni potencijal u točki *b* niži je nego u točki *a*, u točki *c* niži je nego u *b*, a u točki *d* niži je nego u *c*.

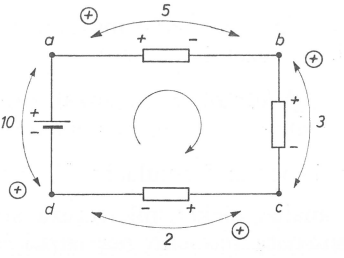
Znači, ako se pozitivni električni naboj mora prisiliti da se u električnom polju giba između dvije točke, na primjer od točke *m* do točke *n*, tada je točka *n* na višem električnom potencijalu nego točka *m*. Ako se pak pozitivni električni naboj uslijed djelovanja silâ električnog polja giba od točke *m* do točke *n* tada je točka *m* na višem potencijalu nego točka *n*. Analogno kao i priključnice baterije, tako se i krajevi pasivnih elemenata strujnog kruga koji su na višem potencijalu mogu označiti znakom plus, a krajevi na nižem potencijalu znakom minus (sl. 1.12).

Umjesto da kažemo da je točka + višeg potencijala nego točka —, odnosno da je točka — nižeg potencijala nego točka +, možemo kazati i ovako: u smjeru od + prema — postoji *pad napona*, odnosno u smjeru od — prema + postoji *porast napona*. Tako su dodavanjem riječi »pad« i »porast« ispred riječi »napon« uvedeni novi pojmovi kojima je obuhvaćen i *smjer* napona. Odsad ćemo te pojmove upotrebljavati umjesto riječi »napon« jer time izbjegavamo mnoge nesporazume koji često mogu nastati pri pisanju jednadžbi II. Kirchhoffova zakona. Obilazimo li strujni krug na slici 1.12. u smjeru zakrivljene strelice, kažemo da:

— od *a* prema *b* postoji *pad napona*,
— od *b* prema *c* postoji *pad napona*,
— od *c* prema *d* postoji *pad napona* i
— od *d* prema *a* postoji *porast napona*.



Sl. 1.12. Strujni krug s označenim polaritetima napona



Sl. 1.13. Strujni krug s označenim vrijednostima izmjerenih napona između krajeva pojedinih elemenata

Nakon što smo se dogovorili o smjeru napona, zamislimo slijedeći eksperiment. Između krajeva svakog pojedinog elementa na slici 1.13. izmjerimo napon pomoću voltmetra kojemu je osnovni položaj kazaljke u sredini skale, a pritom voltmetar uvijek priključimo tako da je njegova ⊕ priključnica na onom kraju pojedinog elementa strujnog kruga koji je sa strane repa zakrivljene strelice unutar kruga. Neka su, na primjer, iznosi napona dobiveni mjerenjem: 5, 3, 2 i 10, kao što se vidi na slici.

Prilikom mjerenja ustanoviti ćemo da se kazaljka voltmetra ne otklanja uvijek na istu stranu; isto tako možemo se uvjeriti da je ukupan iznos napona koji dobivamo kada zbrojimo napone pri otklonu kazaljke ulijevo jednak ukupnom iznosu napona koji dobivamo kada zbrojimo napone izmjerene pri otklonu kazaljke udesno. Na osnovi onoga što smo prije rekli, u našem će se primjeru kazaljka otkloniti udesno kada mjerimo napon između krajeva *a*—*b*, *b*—*c*, *c*—*d*, a ulijevo kada mjerimo napon između krajeva *d*—*a*. Budući da u smjeru obilaženja strujnog kruga, koji je na slici naznačen zakrivljenom strelicom, imamo od *d* prema *a* porast napona, a u smjeru od *a* prema *b*, zatim u smjeru od *b* prema *c*, te od *c* prema *d* imamo pad napona, dobivamo da je:

ukupan stvarni porast napona = 10

i

ukupan stvarni pad napona = 5 + 3 + 2 = 10,

odnosno da je:

ukupan stvarni porast napona = 10 = 10 = ukupan stvarni pad napona.

Ponovimo mjerenje, ali sada neka je smjer obilaženja strujnog kruga suprotan od smjera okretanja kazaljke na satu. Međutim, ⊕ priključnica voltmetra neka je opet, kao i prije, sa strane repa strelice koja pokazuje smjer obilaženja kruga (znači da se ⊕ priključnica voltmetra sada nalazi na drugom kraju pojedinog elementa nego što se nalazila prilikom prijašnjeg mjerenja). Očito je da će sada otkloni kazaljke voltmetra biti na suprotnu stranu nego prije. Dakle, sada je:

ukupan stvarni porast napona $= 5 + 3 + 2 = 10$

i

ukupan stvarni pad napona $= 10$,

odnosno:

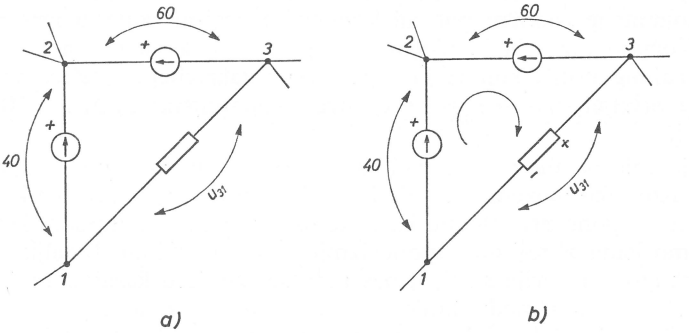
ukupan stvarni porast napona $= 10 = 10 =$ ukupan stvarni pad napona.

Slične eksperimente možemo ponoviti za različite strujne krugove; u svakom slučaju pokazat će se isto:

Obilazimo li zatvoreni strujni krug u jednom smjeru, ukupan »stvarni« porast napona jednak je ukupnom »stvarnom« padu napon.

To je jedna formulacija II. Kirchhoffova zakona.

U analizi električnih mreža stvarni su polariteti napona na krajevima pasivnih elemenata redovito nepoznati jer su nepoznate i struje kroz te elemente. Nasuprot tome, polariteti izvora zadani su. Da bismo napisali jednadžbu II. Kirchhoffova zakona za neki strujni krug, moramo polaritete napona između krajeva pojedinih pasivnih elemenata pretpostaviti; ti pretpostavljeni polariteti napona nazivaju se *referentni polariteti.*



Sl. 1.14. a) Jedan izdvojeni dio iz nekog većeg modela mreže; napon u_{31} nije poznat. b) Sa zakrivljenom strelicom unutar petlje označen je zadani smjer obilaženja petlje, a sa + i − polariteti napona između krajeva

Neka je, na primjer, strujni krug na slici 1.14 a. dio nekog modela mreže. Napon između krajeva 1 i 3 nije nam poznat, pa ćemo ga označiti simbolom u_{31}; prema slici, napon izvora kojemu su krajevi 1 i 2 iznosi 40, a napon izvora kojemu su krajevi 2 i 3 iznosi 60; polariteti obaju izvora zadani su.

Da bismo napisali jednadžbu II. Kirchhoffova zakona za zadani strujni krug, treba da pretpostavimo smjer obilaženja kruga i polaritet napona između krajeva

otpornika. Ako su oni takvi kako je naznačeno na slici 1.14 b, tada simbol u_{31} predstavlja *pad napona* u smjeru od 3 prema 1.

Napišimo jednadžbu tako da je suma porasta napona u smjeru obilaženja kruga jednaka sumi padova napona u istom smjeru, tj.:

$$\Sigma u_{porast\ napona} = \Sigma u_{pad\ napona}. \tag{1.6}$$

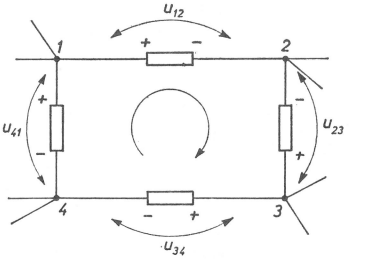
Imamo:

$$\text{suma porasta napona} = 40 = 60 + u_{31} = \text{suma padova napona}$$

Porast napona označen je s lijeve strane znaka jednakosti s predznakom plus, a s plus predznakom označeni su padovi napona s desne strane znaka jednakosti. Odatle slijedi da je:

$$u_{31} = -20.$$

Dobili smo da je iznos napona između krajeva otpornika jednak 20. Negativan predznak ispred tog broja znači da je *pretpostavljeni polaritet napona* u_{31} *suprotan stvarnome polaritetu.* U to se možemo vrlo lako uvjeriti, jer umjesto da u gornju jednadžbu uvrstimo za u_{31} zdesna od znaka jednakosti broj (−20), možemo s lijeve strane pribrojiti broj 20 (s plus predznakom). Prema tome, u naznačenom smjeru obilaženja kruga napon u_{31} u stvarnosti je *porast napona.* Da smo računom dobili pozitivnu brojčanu vrijednost napona u_{31} to bi značilo da se referentni i stvarni polariteti podudaraju. Dakle, *pozitivna ili negativna brojčana vrijednost napona ima značenje samo u odnosu prema pretpostavljenim polaritetima napona.* Uvažimo li to što smo upravo rekli o predznaku uz brojčanu vrijednost napona, eksperimentom se možemo lako uvjeriti da će i u slučaju kada su polariteti napona između krajeva *svih* pasivnih elemenata u krugu pretpostavljeni, vrijediti da je u smjeru obilaženja kruga suma porasta napona jednaka sumi padova napona. Jedino što se u ovom slučaju iznos sume može razlikovati od iznosa ukupnog *stvarnog* porasta napona (odnosno, od ukupnog stvarnog pada napona) duž zadanog strujnog kruga.



Sl. 1.15. Zadani strujni krug s označenim smjerom obilaženja i polaritetima napona

Uzmimo za ilustraciju strujni krug na slici 1.15. Smjer obilaženja kruga neka je u smjeru okretanja kazaljke na satu, a pretpostavljeni polariteti napona neka su oni koji su naznačeni na slici; dakle, u ovom slučaju simboli u_{41} i u_{23} predstavljaju porast napona, a u_{12} i u_{34} predstavljaju pad napona.

Možemo napisati:

$$\text{suma porasta napona} = u_{41} + u_{23} = u_{12} + u_{34} = \text{suma padova napona} \tag{1.7}$$

Neka je između krajeva pojedinih otpornika voltmetar priključen tako da je ⊕ priključnica voltmetra u svakom slučaju priključena na onom kraju pojedinog elementa koji se nalazi sa strane repa strelice što pokazuje smjer obilaženja kruga. Pretpostavimo, također, da nam je poznato da uz dogovoreni način priključenja voltmetra:

— otklon kazaljke voltmetra *ulijevo* od osnovnog položaja pokazuje da od ⊕ priključnice voltmetra prema drugoj priključnici stvarno postoji *porast* napona, a

— otklon kazaljke voltmetra *udesno* od osnovnog položaja pokazuje da od ⊕ priključnice prema drugoj priključnici stvarno postoji *pad* napona.

Zamislimo sada da smo mjerenjem ustanovili da se kazaljka voltmetra otklonila udesno kada smo mjerili napone između krajeva 1 i 2 i između krajeva 2 i 3, a da se otklonila ulijevo kada smo mjerili napone između 3 i 4 i između 4 i 1 (sl. 1.16). Na osnovi podataka sa slike 1.16. i na osnovi onoga što smo rekli u vezi s predznakom ispred brojčane vrijednosti napona, slijedi da je:

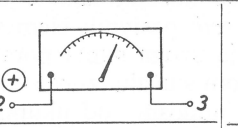
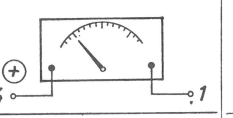
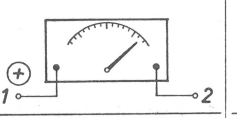
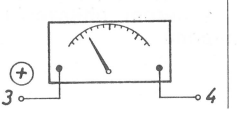
$$u_{12} = 6,\ u_{23} = -3,\ u_{34} = -4 \text{ i } u_{41} = 5.$$

Uvrštenjem tih vrijednosti u jednadžbu (1.7), dobivamo da je:

suma porasta napona $= 5 + (-3) = 6 + (-4) =$ suma padova napona,

a odatle je:

suma porasta napona $= 2 = 2 =$ suma padova napona.

Simboli kojima su označeni naponi između krajeva otpornika:	Uz predpostavljene polaritete napona i dani smjer obilaženja, odgovarajući simboli pretstavljaju:	Dobiveni otklon kazaljke voltmetra prilikom mjerenja.	Izmjereni iznosi napona:
u_{23}	porast napona		3
u_{41}			5
u_{12}	pad napona		6
u_{34}			4

Sl. 1.16. Otkloni kazaljke voltmetra i izmjereni iznosi napona u zamišljenom eksperimentu

Prema podacima na slici 1.16. možemo lako zaključiti da u zadanom strujnom krugu stvarni porast napona (odnosno, stvarni pad napona) iznosi 9. Međutim, sada smo vidjeli da i uz *pretpostavljene* polaritete napona izlazi — kao što smo i očekivali — da je suma porasta napona jednaka sumi padova napona. Ta bi suma očito

bila neki drugi broj da smo polaritete napona pretpostavili nekako drukčije. Važno je, međutim, da relacija (1.6) vrijedi za bilo kako odabrane polaritete napona ako imamo na umu predznake uz brojčane vrijednosti napona. Stoga II. Kirchhoffov zakon glasi općenitije ovako:

Obilazimo li zatvoreni strujni krug u jednom smjeru, suma porasta napona (bilo stvarnih, bilo pretpostavljenih) jednaka je sumi padova napona (bilo stvarnih, bilo pretpostavljenih).

U analizi električnih mreža umjesto oba pojma — »porast napona« i »pad napona« — često se upotrebljava samo jedan od njih. Ako upotrebljavamo samo pojam »porast napona«, tada jednadžbu (1.7) pišemo ovako:

$$-u_{12} + u_{23} - u_{34} + u_{41} = 0,$$

ili općenito:

$$\text{alg.} \sum u_{\text{porast napona}} = 0, \tag{1.8}$$

pa tada II. Kirchhoffov zakon glasi ovako:

Obilazimo li zatvoreni strujni krug u jednom smjeru, algebarska suma porasta napona jednaka je nuli.

Upotrebljavamo li samo pojam »pad napona«, tada jednadžba (1.7) ima oblik:

$$u_{12} - u_{23} + u_{34} - u_{41} = 0,$$

ili općenito:

$$\text{alg.} \sum u_{\text{pad napona}} = 0. \tag{1.9}$$

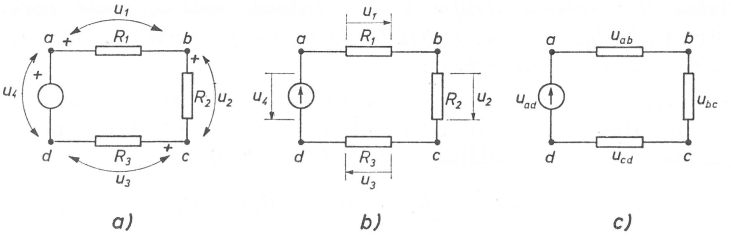
Riječima možemo kazati ovako:

Obilazimo li zatvoreni strujni krug u jednom smjeru, algebarska suma padova napona jednaka je nuli.

Pišemo li jednadžbe II. Kirchhoffova zakona u obliku (1.8) ili (1.9), tada ispred simbola za napon pišemo jedan predznak kada — za odabrane polaritete napona — u smjeru obilaženja strujnog kruga napon »raste«, a drugi predznak kada se u istom smjeru obilaženja napon »smanjuje«. Naglasimo i ovdje, kao i prije kod I. Kirchhoffova zakona, da predznake ispred simbola za napone u općim jednadžbama ne smijemo miješati s predznacima ispred brojčanih vrijednosti napona koji se dobiju kao rezultat računanja.

I na kraju, kažimo još nešto o nekim drugim načinima označavanja polariteta napona koji se također primjenjuju. Naime, da se naznači smjer napona u grafičkom modelu mreže, nije baš najprikladnije, a nije ni potrebno, krajeve svakog pasivnog elementa označiti s oba znaka — i s plus i s minus — kao što smo to do sada činili. Zapravo, dovoljno je označiti samo jedan kraj elementa u modelu mreže; redovito se označava kraj pozitivnog polariteta (sl. 1.17 a). Drugi način označavanja polariteta napona koji se često primjenjuje prikazan je na slici 1.17 b: uz pojedini pasivni element povučena je strelica u smjeru od kraja višeg potencijala (plus) prema kraju nižeg potencijala (minus); dakle, smjer strelice pritom pokazuje pad napona. Naravno da se strelicom može dogovorno označiti i porast napona. Ponekad se primjenjuje i označavanje polariteta napona pomoću dva indeksa uz simbol za napon (sl. 1.17 c). U tom slučaju moramo se dogovoriti da li nam simbol za napon predstavlja porast napona ili pad napona. Na primjer, ako simbol u upotreblja-

vamo za pad napona, tada u_{ab} označava pad napona u smjeru od a prema b, a u_{ac} označava pad napona od d prema c, itd.; znači, pad napona uzeli smo u smjeru od kraja elementa označenog prvim indeksom prema kraju označenom drugim indeksom.

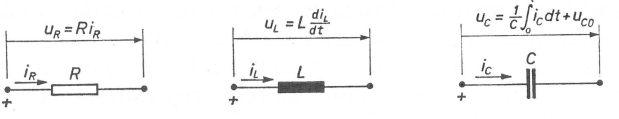


Sl. 1.17. Različiti načini označavanja polariteta napona

Referentne smjerove struja i referentne polaritete napona možemo odabrati proizvoljno i međusobno potpuno neovisno. Ali da bismo izbjegli dvostruko označavanje, ovdje ćemo se pridržavati slijedećeg dogovora (što treba dobro upamtiti):

> Pretpostavljeni *pozitivni polaritet napona* uvijek će biti na strani *repa referentne strelice za struju*. Znači da *u smjeru referentne strelice za struju* pretpostavljamo *pad napona*.

Prema tome, u jednadžbi $v_R = R\,i_R$, v_R predstavlja *pad napona* u idealnom otporniku otpora R u smjeru referentne struje i_R; u jednadžbi $v_L = L\,(\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t)$, v_L označava *pad napona* u idealnoj zavojnici induktiviteta L u smjeru referentne struje i_L; u jednadžbi $v_c = (1/C)\int i_c\,\mathrm{d}t + v_{c0}$, v_c označava *pad napona* u idealnom kondenzatoru kapaciteta C u smjeru referentne struje i_c (uzima se da je referentni polaritet napona v_{c0} jednak polaritetu od v_c). Ovo što smo sada rekli prikazano je na slici 1.18. (na slici je umjesto v oznaka u).



Sl. 1.18. Dogovoreno označavanje smjerova struja i padova napona na pasivnim elementima

1.4. Zavojnica u strujnom krugu

Napon samoindukcije i samoinduktiviteti

Svega nekoliko godina nakon Ohmovih otkrića, oko 1830. god. otkrivene su pojave elektromagnetske indukcije. To su učinili gotovo istodobno, ali potpuno neovisno jedan od drugoga, Michael Faraday (1791—1867) u Londonu i Joseph Henry (1797—1878) u Americi, na univerzitetu koji se danas zove Princeton.

Eksperimenti su pokazali da se među krajevima žice namotane u obliku zavojnice uvijek pojavi napon kada se unutar zavojnice mijenja magnetski tok. Taj napon nazvan je *inducirani napon*. Njegova veličina ovisi o brzini kojom se mijenja magnetski tok i o broju zavoja zavojnice koji obuhvaćaju taj tok. Prolazi li isti magnetski tok svakim zavojem zavojnice, inducirani napon proporcionalan je broju zavoja i brzini promjene toka:

$$v = n\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{1.10}$$

gdje je:

v — inducirani napon između krajeva zavojnice,
n — broj zavoja zavojnice,
φ — magnetski tok kroz jedan zavoj.

Jednadžba (1.10) matematička je formulacija Faradayeva zakona elektromagnetske indukcije.

Ako isti tok φ prolazi svakim od n zavoja zavojnice, kažemo da je to *ulančani tok* $(n \cdot \varphi)$. Dakle, ulančani tok određen je produktom broja zavoja i toka što ga ti zavoji obuhvaćaju:

$$\Phi = n\varphi, \tag{1.11}$$

gdje je ulančani tok označen sa Φ.

Na osnovi jednadžbi (1.10) i (1.11) slijedi da je:

$$v = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{1.12}$$

ili riječima: inducirani napon proporcionalan je brzini promjene ulančanog toka.

Spomenimo i to da pojam ulančani tok ima značenje ne samo kada tok prolazi svakim od zavoja zavojnice već i onda kada prolazi samo nekim zavojima.

Mijenja li se magnetski tok unutar neke zavojnice uslijed promjenjive struje u samoj toj zavojnici, tada se govori o samoindukciji, a inducirani napon naziva se *napon samoindukcije*. Ako je zavojnica od neferomagnetskog materijala, a nalazi se u prostoru konstantnog permeabiliteta (npr. u uzduhu), tada je ulančani magnetski tok što je proizveden strujom i kroz tu zavojnicu proporcionalan struji:

$$\Phi = L\,i. \tag{1.13}$$

Konstanta proporcionalnosti koju smo označili sa L naziva se *koeficijent samoindukcije*, ili kraće *samoinduktivitet*, a ima — prema (1.13) — značenje ulančanog toka po jedinici struje:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{n\varphi}{i}. \tag{1.14}$$

Na osnovi jednadžbi (1.12) i (1.13) možemo napisati:

$$v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \tag{1.15}$$

gdje je sa v_L označen inducirani napon samoindukcije.

Ako prostor oko zavojnice nije konstantnog permeabiliteta, tada se ne može govoriti o određenim vrijednostima samoinduktiviteta. Najobičniji primjer toga imamo kada je zavojnica namotana na čeličnoj jezgri, kao npr. kod učinskih transformatora, i sl. U tom je slučaju samoinduktivitet konstantan samo u pravocrtnom dijelu magnetske karakteristike, dok je u zakrivljenom dijelu funkcija struje kroz zavojnicu.

Napon međusobne indukcije i međuinduktiviteti

Ako se magnetski tok unutar neke zavojnice mijenja uslijed promjene struje u nekoj drugoj zavojnici, tada govorimo o međusobnoj indukciji, a inducirani napon nazivamo *napon međusobne indukcije.*

Nazovimo dvije zavojnice, koje ne mijenjaju položaj u prostoru jedna u odnosu prema drugoj, zavojnica 1 i zavojnica 2. Vremenski promjenjiva struja i_1 kroz zavojnicu 1 inducirat će napon v_{M2} u zavojnici 2 ako dio magnetskog toka koji proizvodi struja i_1 prolazi kroz zavojnicu 2. Označimo li ulančani magnetski tok kroz zavojnicu 2 uslijed struje i_1 sa Φ_{12}, tada je, na osnovi (1.12), inducirani napon međusobne indukcije v_{M2} u zavojnici 2:

$$v_{M2} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.16}$$

Ako su zavojnice od neferomagnetskog materijala, a nalaze se u prostoru konstantnog permeabiliteta, tada su ulančani tok Φ_{12} i struja i_1 proporcionalni:

$$\Phi_{12} = M_{12}\, i_1. \tag{1.17}$$

Konstanta proporcionalnosti M_{12} naziva se *koeficijent međusobne indukcije*, ili kraće *međuinduktivitet*. Međuinduktivitet M_{12} ima značenje ulančanog toka kroz zavojnicu 2 po jedinici struje u zavojnici 1:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1}. \tag{1.18}$$

Na osnovi jednadžbi (1.16) i (1.17) slijedi da je inducirani napon v_{M2} u zavojnici 2 uslijed promjenjive struje i_1 u zavojnici 1:

$$v_{M2} = M_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{1.19}$$

Analogno tome, promjenjiva struja i_2 kroz zavojnicu 2 inducirat će napon v_{M1} u zavojnici 1 ako dio magnetskog toka koji proizvodi struja i_2 ulančuje zavojnicu 1. Ako ulančani tok kroz zavojnicu 1 uslijed struje i_2 označimo sa Φ_{21}, tada je inducirani napon međusobne indukcije v_{M1} u zavojnici 1:

$$v_{M1} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.20}$$

Uz istu pretpostavku kao i prije, ulančani tok Φ_{21} i struja i_2 proporcionalni su, tj.:

$$\Phi_{21} = M_{21}\, i_2. \tag{1.21}$$

Konstanta proporcionalnosti M_{21} u ovom slučaju ima smisao ulančanog toka kroz zavojnicu 1 po jedinici struje u zavojnici 2:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_2}. \tag{1.22}$$

Prema (1.20) i (1.21), inducirani napon v_{M1} u zavojnici 1 uslijed promjenjive struje i_2 kroz zavojnicu 2 iznosi:

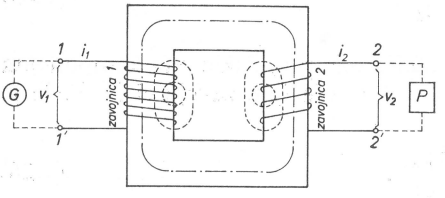
$$v_{M1} = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}. \tag{1.23}$$

Na osnovi eksperimenata slijedi, a može se izvesti i matematički na osnovi energetskih relacija, da su međuinduktiviteti M_{12} i M_{21} međusobno jednaki. Vrijedi dakle:

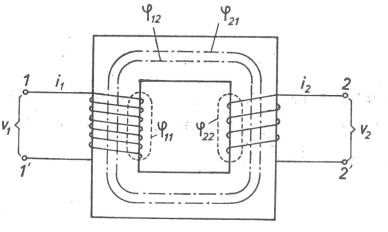
$$M_{12} = M_{21} = M. \tag{1.24}$$

Osnovne relacije magnetski ulančanih krugova

Sada ćemo vidjeti kako se u analizi mreža uzima u obzir slučaj kada su dva ili više galvanski odvojenih strujnih krugova međusobno povezani magnetskim tokom. Kao najčešći primjer takve veze razmotrit ćemo slučaj kada u mreži postoji transformator. Pritom ćemo pretpostaviti da je permeabilnost puta magnetskog toka konstantna veličina, jer se tada transformatori ponašaju kao linearni elementi kruga. Ta je pretpostavka zadovoljena kod transformatora sa zračnom jezgrom; međutim, u mnogim pogonskim uvjetima mogu se, sa zadovoljavajućom točnošću, linearnim elementima mreže smatrati i transformatori sa čeličnom jezgrom.



Sl. 1.19. Dvonamotni transformator s označenim putovima magnetskih silnica



Sl. 1.20. Magnetski tok kroz jezgru transformatora rastavljen u komponente φ_{11}, φ_{12}, φ_{22} i φ_{21}

Zamislimo da su na slici 1.19. krajevi 1—1′ zavojnice 1 i krajevi 2—2′ zavojnice 2 priključeni na preostali dio mreže, dakle da je taj transformator element jedne veće mreže. Kroz zavojnicu 1 teče struja i_1, a kroz zavojnicu 2 struja i_2. Između krajeva 1 i 1′ vlada napon v_1, a između krajeva 2 i 2′ napon v_2. Ako se struje mijenjaju s vremenom, u prostoru unutar i izvan zavojnica postojat će *vremenski promjenjivo* magnetsko polje. Pritom će neke od magnetskih silnica prolaziti unutar svih zavoja *obiju* zavojnica, a preostale će obuhvaćati ili sve ili samo neke zavoje jedne ili druge zavojnice. Da bismo razmatranje pojednostavnili, pretpostavit ćemo da je broj silnica što ulančuje samo neke, a ne sve zavoje pojedinih zavojnica, zanemarivo malen.

U stvarnosti su takvi uvjeti najbolje ostvareni ako je žica od koje su namotane zavojnice što tanja i ako su zavoji što tješnje namotani jedan uz drugoga. Dakle, uz tu pretpostavku jedan će dio magnetskih silnica prolaziti svim zavojima obiju zavojnica, a preostale će silnice prolaziti svim zavojima samo jedne ili samo druge zavojnice. U tom je slučaju sa svakim zavojem pojedine zavojnice ulančan isti magnetski tok; to je prikazano na slici 1.20.

Na slici 1.20 označeni su sa:

φ_{11} — magnetski tok uslijed struje i_1 koji prolazi svim zavojima zavojnice 1, a ne prolazi ni jednim zavojem zavojnice 2;

φ_{12} — magnetski tok uslijed struje i_1 koji prolazi svim zavojima obiju zavojnica;

φ_{22} — magnetski tok uslijed struje i_2 koji prolazi svim zavojima zavojnice 2, a ne prolazi ni jednim zavojem zavojnice 1.

φ_{21} — magnetski tok uslijed struje i_2 koji prolazi svim zavojima obiju zavojnica.

Ako magnetski tok što ga unutar zavojnice 1 proizvodi struja i_1 označimo sa φ_1, tada ga možemo izraziti sumom komponentnih tokova φ_{11} i φ_{12}, tj. tada je:

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}.$$

Analogno tome, ako magnetski tok što ga unutar zavojnice 2 proizvodi struja i_2 označimo sa φ_2, imamo:

$$\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{21}.$$

Na osnovi toga možemo zamisliti da je i inducirani napon između krajeva zavojnice 1 sastavljen od dviju komponenata. Jednu od njih inducira tok φ_1 što ga proizvodi struja i_1. Ako je ukupan broj zavoja zavojnice 1 jednak n_1, tada je prema (1.10):

$$v_{L1} = n_1 \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}. \tag{1.25}$$

Drugu komponentu napona u zavojnici 1 inducira tok φ_{21}, dakle ona komponenta magnetskog toka kroz tu zavojnicu kojoj je uzrok struja i_2 u zavojnici 2. Tada je prema (1.20):

$$v_{M1} = n_1 \frac{\mathrm{d}\varphi_{21}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.26}$$

Isto će tako napone između krajeva 2 i 2′ zavojnice 2 inducirati tokovi φ_2 i φ_{12}. Ako je n_2 ukupan broj zavoja zavojnice 2, tada je napon što ga inducira tok φ_2:

$$v_{L2} = n_2 \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.27}$$

a napon induciran tokom φ_{12}:

$$v_{M2} = n_2 \frac{\mathrm{d}\varphi_{12}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.28}$$

U analizi električnih mreža povoljnije je inducirane napone v_{L1}, v_{M1}, v_{L2} i v_{M2} izraziti pomoću struje nego pomoću magnetskog toka. Ti izrazi slijede — kao što

je poznato otprije — iz definicije pojma samoinduktiviteta i međuinduktiviteta. Tako je prema (1.14) samoinduktivitet L_1 zavojnice 1:

$$L_1 = \frac{n_1 \varphi_1}{i_1}, \tag{1.29}$$

a samoinduktivitet L_2 zavojnice 2:

$$L_2 = \frac{n_2 \varphi_2}{i_2}, \tag{1.30}$$

dok je prema (1.18) i (1.22) međuinduktivitet M_{12}:

$$M_{12} = \frac{n_2 \varphi_{12}}{i_1}, \tag{1.31}$$

a međuinduktivitet M_{21}:

$$M_{21} = \frac{n_1 \varphi_{21}}{i_2}. \tag{1.32}$$

Odatle je uspoređenjem relacija (1.25) i (1.29):

$$v_{L1} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}, \tag{1.33}$$

a uspoređenjem (1.26) i (1.32):

$$v_{M1} = M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.34}$$

dok je prema (1.27) i (1.30):

$$v_{L2} = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.35}$$

a prema (1.28) i (1.31):

$$v_{M2} = M_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{1.36}$$

Budući da u analizi mreža upotrebljavamo pojmove pad napona ili porast napona, a ne jednostavno napon, moramo sve što smo do sada rekli još upotpuniti.

Na strani 18 pretpostavili smo da je *pad napona* na idealnom otporniku $v_R = Ri_R$ u smjeru referentne struje i_R, a na idealnoj zavojnici $v_L = L\,(\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t)$ u smjeru referentne struje i_L. Pritom su parametri R i L uvijek *pozitivni* brojevi. U skladu s tim, inducirani napon samoindukcije u zavojnici 1, $v_{L1} = L_1\,(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t)$, uzimat ćemo kao *pad napona* u smjeru referentne struje i_1, a inducirani napon samoindukcije u zavojnici 2, $v_{L2} = L_2\,(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)$, kao *pad napona* u smjeru referentne struje i_2. Analogno tome, i inducirane napone međusobne indukcije uvest ćemo na osnovi *pâda napona*. Dakle, $v_{M1} = M_{21}\,(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)$ bit će *pad napona* u zavojnici 1 u smjeru struje i_1, a $v_{M2} = M_{12}\,(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t)$ bit će *pad napona* u zavojnici 2 u smjeru struje i_2.

Sada možemo napisati da je ukupan inducirani pad napona između krajeva 1 i 1′ zavojnice 1 (koji ćemo označiti sa v_1) i ukupan inducirani pad napona između krajeva 2 i 2′ zavojnice 2 (označit ćemo ga sa v_2) dan slijedećim relacijama:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt}, \tag{1.37}$$

$$v_2 = M_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \tag{1.38}$$

To su *osnovne relacije magnetski ulančanih krugova*. U njima često umjesto dva parametra, M_{12} i M_{21}, pišemo samo jedan, koji redovito označavamo sa M, jer je $M_{12} = M_{21}$.

Predznak međuinduktiviteta

Dok su samoinduktiviteti uvijek pozitivni brojevi, kao što je npr. i otpor uvijek pozitivan broj, međuinduktiviteti mogu biti i pozitivni i negativni brojevi ako su u osnovnim relacijama magnetski ulančanih krugova članovi s međuinduktivitetima napisani s predznakom plus, kao u (1.37) i (1.38). Kakav će u određenom slučaju biti predznak brojčane vrijednosti međuinduktiviteta ovisi, s jedne strane, o geometriji ulančanih krugova, a s druge strane, o odabranim referentnim smjerovima struja. Objasnimo to pobliže.

Jedan član u jednadžbama (1.37) i (1.38) predstavlja inducirani napon samoindukcije, a drugi je član inducirani napon međusobne indukcije. Očito je da će i jedna i druga komponenta induciranog napona u pojedinoj zavojnici imati isti smjer onda kada se podudaraju polariteti induciranog napona samoindukcije i induciranog napona međusobne indukcije i na jednom i na drugom kraju pojedine zavojnice, ili, drugim riječima, ako su na jednom kraju svake zavojnice oba polariteta plus ili ako su oba minus. U tom slučaju se međuinduktivitet uvrštava u gornje jednadžbe kao pozitivan broj. Nasuprot tome, ako su polariteti komponentnih napona takvi da na istom kraju zavojnice imamo suprotne polaritete, tj. i plus i minus polaritet, tada inducirani napon samoindukcije i inducirani napon međusobne indukcije djeluju jedan suprotno drugome, pa se brojčana vrijednost međuinduktiviteta piše s negativnim predznakom.

Lako je uvidjeti da će se polariteti induciranih napona u svakoj zavojnici podudarati na jednom i na drugom kraju onda ako komponenta magnetskog toka unutar zavojnice što je proizvodi struja kroz tu zavojnicu, ima isti smjer kao i komponenta magnetskog toka uslijed struje u drugoj zavojnici. Stoga je, da bi se odredio predznak brojčane vrijednosti međuinduktiviteta, neophodno potrebno poznavati smisao namatanja zavojnicâ i smjerove referentnih struja.

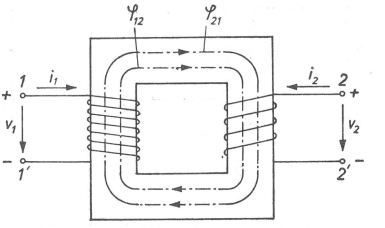
Na primjer, neka su dvije zavojnice u međusobnom položaju i namotane kao na slici 1.21. Da bismo eksperimentalno utvrdili predznak međuinduktiviteta, pretpostavimo da su struje i_1 i i_2 sinusoidnog oblika i međusobno *vremenski* u *fazi*, a da su referentni smjerovi oni koji su označeni strelicama. Magnetski tok unutar zavojnice 1 imat će smjer odozdo prema gore kada struja i_1 teče u smjeru strelice, a istog će smjera unutar te zavojnice biti i magnetski tok što ga proizvodi referentna struja i_2. Komponentni tokovi uslijed struja i_1 i i_2 imaju unutar zavojnice 2 smjer odozgo prema dolje. Prema tome, u ovom primjeru magnetski tokovi što

ih unutar pojedinih zavojnica proizvodi vlastita struja i struja druge zavojnice za naznačene referentne smjerove struja međusobno se potpomažu.

Povećava li se struja i_1, povećavat će se i tok proizveden tom strujom. Prema Lenzovom zakonu, polaritet induciranog napona samoindukcije i polaritet induciranog napona međusobne indukcije u zavojnici 1 bit će — kao što je označeno na slici — plus na priključnicama 1 i 2, a minus na priključnicama 1′ i 2′. Budući da se istovremeno povećava i struja i_2 u zavojnici 2, inducirani napon samoindukcije u toj zavojnici i inducirani napon međusobne indukcije u zavojnici 1 opet će biti takvog polariteta da su priključnice 1 i 2 plus, a 1′ i 2′ minus.

Nasuprot tome, kada se struje i_1 i i_2 smanjuju u naznačenom smjeru, polariteti komponentnih napona bit će suprotni od onih na slici 1.21. Međutim, i u ovom slučaju, kao i kada obje struje rastu, polariteti oba inducirana napona podudaraju se i na jednom i na drugom kraju zavojnice 1 i zavojnice 2. Dakle:

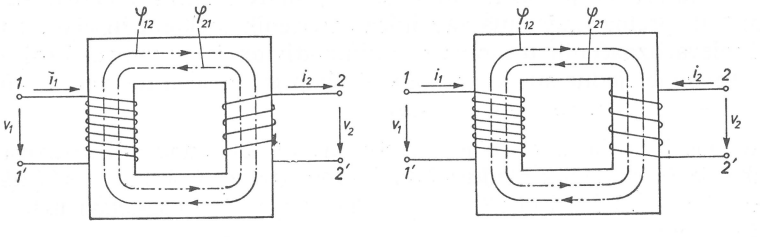
međuinduktivitet je pozitivan broj ako magnetski tokovi unutar zavojnica 1 i 2, što ih proizvode referentne struje i_1 i i_2, obilaze jezgru u istom smjeru.



Sl. 1.21. Dvije zavojnice na zajedničkoj jezgri. Za dani smisao namatanja i smjerove referentnih struja komponentni tokovi prolaze jezgrom u istom smislu. Međuinduktivitet je pozitivan broj.

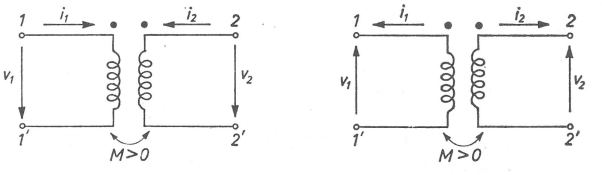
Obrnemo li referentni smjer struje samo u jednom krugu (sl. 1.22 a), ili obrnemo li smisao namatanja samo jedne zavojnice (sl. 1.22 b), tokovi što ih unutar jezgre proizvode struje i_1 i i_2 obilazit će jezgru u suprotnim smjerovima, dakle djelovat će jedan suprotno drugome. Kada se struje i_1 i i_2 povećavaju, inducirani naponi samoindukcije i međusobne indukcije na istim krajevima zavojnicâ biti će suprotnih polariteta, a tako je i u slučaju ako se obje struje smanjuju. Međuinduktivitet je tada negativan broj. Upamtimo:

međuinduktivitet je negativan broj ako magnetski tokovi unutar zavojnica 1 i 2, što proizvode ih referentne struje i_1 i i_2, obilaze jezgru u suprotnim smjerovima.

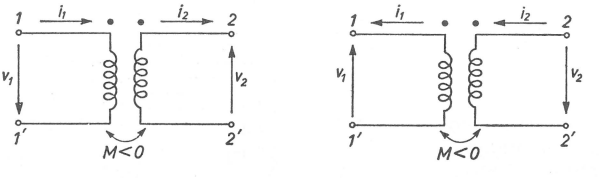


Sl. 1.22. a) Smisao namatanja zavojnicâ i smjer referentne struje i_1 isti je kao na slici 1.21, a smjer je referentne struje i_2 suprotan. b) Smjerovi referentnih struja i_1 i i_2 i smisao namatanja zavojnice 1 isti su kao na slici 1.21, a smisao je namatanja zavojnice 2 suprotan.

Prilikom crtanja nije uobičajeno prikazivanje zavojnica tako da se vidi smisao namatanja. Umjesto toga, da se odredi polaritet induciranog napona međusobne indukcije, odnosno predznak brojčane vrijednosti međuinduktiviteta, često se primjenjuje način označavanja prikazan na slikama 1.23 i 1.24. Kao što vidimo, na jednom kraju grafičkog simbola svake od zavojnica između kojih postoji induktivna veza nalazi se točka. To su tzv. *korespodentni krajevi ulančanih zavojnica.*



Sl. 1.23. a) Referentni smjerovi struja i_1 i i_2 usmjereni su prema krajevima zavojnica koji su označeni točkama. b) Referentni smjerovi obiju struja usmjereni su od točaka. Međuinduktivitet je pozitivan broj.



Sl. 1.24. a) Referentni smjer struje i_1 usmjeren je prema točki, a struje i_2 od točke. b) Referentni smjer struje i_1 je od točke, a struje i_2 prema točki. Međuinduktivitet je negativan broj.

Prema dogovoru, ako obje struje ulaze u zavojnice na onim krajevima koji su označeni točkama (sl. 1.23 a) ili ako obje struje izlaze iz njih (sl. 1.23 b), tokovi koje te struje proizvode djeluju unutar jezgre u istom smjeru. Nasuprot tome, ako jedna struja ulazi na onom kraju koji je označen točkom, a druga izlazi iz kraja označenog točkom (sl. 1.24), tada tokovi uslijed struja i_1 i i_2 obilaze jezgru u suprotnim smjerovima. Prema tome, da bismo odredili korespodentne krajeve primjenjujemo slijedeći postupak: Proizvoljno označimo točkom jedan kraj bilo koje zavojnice pa utvrdimo u kojem će smjeru tok obilaziti jezgru ako struja ulazi u zavojnicu na tom kraju. Nakon toga točkom označimo onaj kraj druge zavojnice u koji struja mora ulaziti da proizvede tok unutar jezgre u istom smjeru kao što je bio i prijašnji. S tim u vezi možemo izreći slijedeće pravilo:

> Međuinduktivitet je pozitivan broj ako su referentni smjerovi obiju struja usmjereni prema krajevima zavojnica označenih točkom, ili ako su usmjereni od krajeva označenih točkom; međuinduktivitet je negativan broj ako je referentni smjer jedne struje prema kraju koji je označen točkom, a smjer druge struje od kraja označenog točkom.

Naglasimo još i to da se opće jednadžbe magnetski ulančanih krugova ponekad pišu i tako da se članovi s međuinduktivitetom izraze u obliku $\pm M\,(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$, dakle — umjesto kao u (1.37) i (1.38) — osnovne jednadžbe magnetski ulančanih krugova tada glase:

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t},$$

$$v_2 = \pm M_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

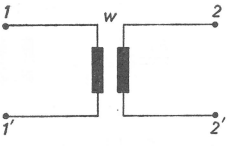
U ovom se slučaju međuinduktivitet uvijek uvrštava kao pozitivan broj, dok pravilo koje smo upravo naveli — a odnosilo se na određivanje predznaka brojčane vrijednosti od M ako se jednadžbe pišu u obliku (1.37) i (1.38) — vrijedi ovdje za određivanje predznaka ispred članova s međuinduktivitetom u općim jednadžbama koje smo upravo napisali.

Idealni transformator

Kažimo sada nešto više o idealnom transformatoru što smo ga prije naveli kao jedan od ukupno šest elemenata modela mreže. Do sada smo rekli samo to da — za razliku od ostalih elemenata modela mreže — idealni transformator ima *dva para* priključnica (ostali elementi modela mreže imaju, kao što smo vidjeli, po dvije priključnice).

Idealni transformator upotrebljava se kao sastavni dio modela realnih transformatora. Naime, samo u sasvim pojednostavnjenim slučajevima analize mreža (kada se ne traži veća točnost) stvarni se transformator može nadomjestiti modelom koji se sastoji samo od idealnog transformatora. U većini slučajeva model stvarnog transformatora sastoji se od idealnog transformatora i od određene kombinacije idealnih pasivnih elemenata. Razlog je tome što stvarni transformator ima svojstva koja se mogu samo više ili manje približiti svojstvima idealnog transformatora, ali ih nikada ne može u potpunosti postići.

Ovdje ćemo se služiti grafičkim prikazom idealnog transformatora kao na slici 1.25. w se naziva *omjer transformacije.*



Sl. 1.25. Grafički simbol idealnog transformatora

Definira se:

omjer napona u_1 među primarnim priključnicama i napona u_2 među sekundarnim priključnicama idealnog transformatora jednak je omjeru transformacije w:

$$\frac{u_1}{u_2} = w, \tag{1.39}$$

a omjer primarne struje i_1 i sekundarne struje i_2 jednak je recipročnoj vrijednosti omjera transformacije:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{w}. \tag{1.40}$$

Na osnovi tih definicija slijede dva svojstva idealnog transformatora. Prvo, na osnovi (1.39) i (1.40) neposredno slijedi da je:

$$u_1 i_1 = u_2 i_2, \tag{1.41}$$

ili riječima: električna snaga koju idealni transformator uzima na primarnoj strani jednaka je električnoj snazi koju predaje na sekundarnoj strani. Slijedi, dakle, da je prvo svojstvo idealnog transformatora da nema gubitaka snage.

Drugo je svojstvo koje slijedi iz navedenih definicija da idealni transformator mijenja iznos otpora priključenog na njegove priključnice. Da bismo izveli formulu transformacije, pretpostavimo da je između sekundarnih priključnica 2 i 2′ na slici 1.26. priključen otpornik otpora R_2. Otpor gledan od primarnih priključnica 1—1′ u smjeru strelice, što smo ga označili sa R_u, iznosi:

$$R_u = \frac{u_1}{i_1}. \tag{1.42}$$

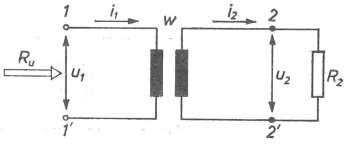
Na osnovi definicije idealnog transformatora izlazi da je $u_1 = w\,u_2$ i $i_1 = (1/w)\,i_2$, pa je odatle:

$$\frac{u_1}{i_1} = w^2 \frac{u_2}{i_2}.$$

Kako je u_2/i_2 identično sa R_2, a u_1/i_1 označili smo u (1.42) kraće sa R_u, možemo napisati:

$$R_u = w^2 R_2. \tag{1.43}$$

Prema tome, idealni transformator transformira otpor R_2 u otpor $w^2 R_2$. Možemo kazati: priključi li se između sekundarnih priključnica idealnog transformatora teret otpora R_2, on se — gledajući s primarne strane — manifestira kao otpor kojeg je iznos w^2 puta stvarni iznos otpora*.



Sl. 1.26. Idealni transformator opterećen otporom R_2

Na osnovi jednadžbe (1.43) slijedi da je otpor idealnog transformatora gledan s primarne strane jednak nuli ako je sekundarna strana kratko spojena, a beskonačno je velik ako je sekundarna strana otvorena.

Pretpostavke uz koje realni transformator poprima svojstva idealnog transformatora

Realni bi transformator imao ista svojstva kao i idealni, odnosno, drugim riječima, za realni bi transformator vrijedile jednadžbe (1.39) i (1.40):

- kada bi gubici snage bili zanemarivo mali,
- kada bi se cijeli magnetski tok zatvarao kroz sve zavoje obiju zavojnica transformatora (dakle, kada ne bi bilo rasipnog toka), te
- kada bi magnetska permeabilnost jezgre bila konstantna veličina vrlo velikog iznosa, tako da je za uspostavljanje magnetskog toka u jezgri dovoljna zanemarivo mala uzbudna struja.

*Općenitije se može pokazati da idealni transformator transformira iznos impedancije a da se kut impedancije pritom ne mijenja. Ako je $Z_2 = |Z_2|\,\underline{/\varphi_2}$, tada je $Z_u = w^2 Z_2$.

Zamislimo da transformator na slici 1.27. zadovoljava navedene pretpostavke. Ako nema rasipnog toka, tj. ako je $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$, znači da je tok φ_1 što ga unutar zavojnice 1 proizvodi struja i_1 jednak toku φ_{12} koji uslijed iste struje prolazi unutar zavojnice 2; također, tok φ_2 unutar zavojnice 2 uslijed struje i_2 jednak je toku φ_{21} što ga struja i_2 proizvodi unutar zavojnice 1. Dakle:

$$\varphi_1 = \varphi_{12} \tag{1.44}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{21}. \tag{1.45}$$

Uvažimo li to, tada dijeljenjem (1.31) sa (1.29) i dijeljenjem (1.32) sa (1.30) slijedi da je:

$$\frac{M_{12}}{L_1} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{1.46}$$

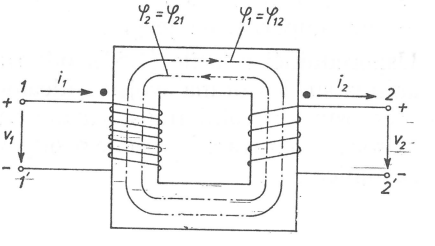
$$\frac{M_{21}}{L_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{1.47}$$

Za odabrane smjerove struja i polariteta napona možemo napisati:

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.48}$$

$$-v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}, \tag{1.49}$$

pri čemu su zanemareni otpori zavojnica R_1 i R_2 jer prema prvoj od navedenih pretpostavki ne postoje gubici snage u transformatoru.



Sl. 1.27. Dvonamotni transformator za koji smo pretpostavili da nema rasipnog toka

Međuinduktiviteti M_{12} i M_{21} ovdje su negativni brojevi, jer tokovi φ_{12} i φ_{21} obilaze jezgru u suprotnom smjeru. Uzmemo li to u obzir, pa na osnovi (1.46) zamijenimo M_{12} sa $(-L_1 n_2/n_1)$, a na osnovi (1.47) M_{21} sa $(-L_2 n_1/n_2)$, relacije (1.48) i (1.49) poprimaju oblik:

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{n_1}{n_2} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.50}$$

$$-v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - L_1 \frac{n_2}{n_1} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{1.51}$$

Ako sada, na primjer, pomnožimo (1.50) sa $(-n_2/n_1)$, pa zatim podijelimo sa (1.51) dobivamo da se naponi v_1 i v_2 odnose kao brojevi zavoja n_1 i n_2:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{1.53}$$

Nadalje, budući da su prema prvoj pretpostavci zanemareni gubici snage, što drugim riječima znači da je trenutna ulazna snaga jednaka trenutnoj izlaznoj snazi, $v_1 i_1 = v_2 i_2$, vrijedi i odnos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{i_2}{i_1}, \tag{1.54}$$

a odatle je u vezi sa (1.53):

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{1.55}$$

Dakle, struje i_1 i i_2 odnose se obrnuto razmjerno kao brojevi zavoja n_1 i n_2.

U zavojnicama transformatora napone inducira promjenjivi magnetski tok, koji je u ovom slučaju rezultanta tokova φ_{12} i φ_{21}, jer je pretpostavljeno da ne postoje rasipni tokovi. Da bi magnetski tok u jezgri mogao postojati, moraju rezultantni amperzavoji jezgre biti različiti od nule, dok je na osnovi (1.55):

$$n_1 i_1 = n_2 i_2,$$

ili:

$$n_1 i_1 - n_2 i_2 = 0.$$

Znači, rezultantni amperzavoji jezgre jednaki su nuli. To je razlog zašto je uvedena i treća pretpostavka: ako je magnetska permeabilnost jezgre vrlo velika, možemo zamisliti da će u jezgri postojati magnetski tok i uz zanemarivo male rezultantne amperzavoje jezgre.

Uspoređujući relacije (1.53), odnosno (1.55), s relacijama (1.39), odnosno (1.40), kojima su definirana svojstva idealnog transformatora, vidimo da bi uz zadovoljene pretpostavke realni transformator zaista poprimio svojstva idealnog transformatora. Pritom omjer transformacije w odgovara omjeru broja zavoja primarne i sekundarne zavojnice:

$$w = \frac{n_1}{n_2}. \tag{1.56}$$

Na kraju, kažimo još nešto o predznaku omjera transformacije n_1/n_2. Uz polaritete napona v_1 i v_2, smjerove referentnih struja i_1 i i_2 i uz smisao namatanja zavojnica kao na slici 1.27, dobiveno je da su naponi v_1 i v_2 vremenski u fazi, a isto su tako vremenski u fazi i struje i_1 i i_2, jer su omjer napona v_1/v_2 i omjer strujâ i_1/i_2 pozitivni brojevi. Na sličan način kao što je to ovdje pokazano za sasvim određen slučaj, može se izvesti da će, općenito, odnos napona v_1 i v_2 biti jednak odnosu broja zavoja n_1 i n_2 s pozitivnim predznakom, tj. da je $v_1/v_2 = +(n_1/n_2)$ ako su oba pozitivna polariteta naponâ v_1 i v_2 na onim krajevima zavojnicâ koji su označeni točkama, ili ako su oba pozitivna polariteta tih napona na neoznačenim krajevima zavojnicâ. U protivnom, ako je jedan pozitivni polaritet napona na kraju

zavojnice označenom točkom, a pozitivni polaritet drugog napona na neoznačenom kraju, tada omjer broja zavoja n_1 i n_2 ima negativan predznak, tj. $v_1/v_2 = -(n_1/n_2)$.

Također je, omjer strujâ i_1 i i_2 jednak omjeru broja zavojâ n_2 i n_1 s pozitivnim predznakom, odnosno $i_1/i_2 = +(n_2/n_1)$ ako je smjer jedne referentne struje prema onom kraju zavojnice koji je označen točkom, a smjer druge struje od kraja označenog točkom. U protivnom je $i_1/i_2 = -(n_2/n_1)$.

Modeli transformatora uz zanemarene gubitke u čeličnoj jezgri

Zanemarenja uz koja realni transformator poprima svojstva idealnog transformatora, što smo ih naveli, najčešće se u analizi električnih mreža ne mogu učiniti, jer bi u tom slučaju točnost rezultata analize bila osjetno smanjena. Naime, gubici snage u transformatoru redovito nisu beznačajni, a isto se tako ne može zanemariti ni postojanje rasipnih tokova, iako su oni kod transformatora sa čeličnom jezgrom relativno mali u odnosu na ukupan tok kroz jezgru. Radi toga se kao model realnog transformatora u većini slučajeva ne može uzeti samo idealni transformator, već se — kao što ćemo sada pokazati — model realnog transformatora sastoji od idealnog transformatora i određene kombinacije idealnih otpornika i zavojnica. Ovdje ćemo do modela transformatora doći matematičkim putem oslanjajući se na već uvedene relacije.

Kao što smo rekli, uzmimo sada u obzir postojanje gubitaka snage (najprije samo $I^2 R$ gubitaka u bakru) i postojanje rasipnih tokova, kao i to da magnetska permeabilnost jezgre ima određenu konačnu vrijednost. Dakle, zadržat ćemo još samo pretpostavku da su *gubici snage u čeličnoj jezgri zanemarivi.*

U jednadžbama magnetski ulančanih krugova koje ćemo napisati rasipne tokove uvest ćemo pomoću pojma *rasipnog samoinduktiviteta.* Ako su rasipni tokovi φ_{11} i φ_{22}, tada se rasipni samoinduktivitet zavojnice 1 definira relacijom:

$$L_{11} = \frac{n_1 \varphi_{11}}{i_1}, \tag{1.57}$$

a rasipni samoinduktivitet zavojnice 2 relacijom:

$$L_{22} = \frac{n_2 \varphi_{22}}{i_2}, \tag{1.58}$$

gdje je i_1 struja u primarnoj zavojnici, a i_2 struja u sekundarnoj zavojnici, dok su n_1 i n_2 brojevi zavoja primarne, odnosno sekundarne zavojnice. Izrazimo najprije samoinduktivitet L_1 zavojnice 1 i samoinduktivitet L_2 zavojnice 2 pomoću rasipnog samoinduktiviteta i pomoću međuinduktiviteta. Kako je $\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}$, a $L_1 = n_1 \varphi_1 / i_1$, možemo napisati:

$$L_1 = \frac{n_1 (\varphi_{11} + \varphi_{12})}{i_1},$$

ili:

$$L_1 = \frac{n_1 \varphi_{11}}{i_1} + \frac{n_1 \varphi_{12}}{i_1} = \frac{n_1 \varphi_{11}}{i_1} + \frac{n_1}{n_2} \frac{n_2 \varphi_{12}}{i_1}.$$

Uzmemo li još u obzir (1.31) i (1.57), slijedi da je:

$$L_1 = L_{11} + \frac{n_1}{n_2} M_{12}. \tag{1.59}$$

Analogno tome dobivamo da je:

$$L_2 = L_{22} + \frac{n_2}{n_1} M_{21}. \tag{1.60}$$

Ako su R_1 i R_2 otpori zavojnica 1 i 2, tada je za primjer na slici 1.28:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.61}$$

$$-v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}, \tag{1.62}$$

pri čemu smo ovdje, za razliku od prije, članove s međuinduktivitetima napisali s predznakom minus, dakle u jednadžbama koje smo napisali sa općim simbolima već smo uzeli u obzir predznak brojčane vrijednosti međuinduktiviteta koji je u ovom slučaju negativan.
U relacije (1.61) i (1.62) uvrstimo umjesto L_1 i L_2 desne strane u relacijama (1.59) i (1.60). Slijedi da je:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{n_1}{n_2} M_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.61a}$$

$$-v_2 = R_2 i_2 + L_{22} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{n_2}{n_1} M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{1.62a}$$

Kako je $M = M_{12} = M_{21}$, te označimo li omjer n_1/n_2 sa w, imamo dalje da je:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + w M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.61b}$$

$$-v_2 = R_2 i_2 + L_{22} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{w} M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{1.62b}$$

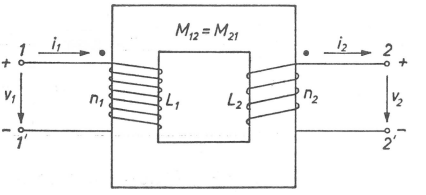
Ako svaki član u tim jednadžbama u kojem se nalazi struja i_2 proširimo sa w/w, a k tome drugu jednadžbu pomnožimo još i sa w, dobivamo:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + w M \left(\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{w} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \right), \tag{1.61c}$$

$$-w v_2 = w^2 R_2 \left(\frac{1}{w} i_2 \right) + w^2 L_{22} \left(\frac{1}{w} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \right) + w M \left(\frac{1}{w} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \right). \tag{1.62c}$$

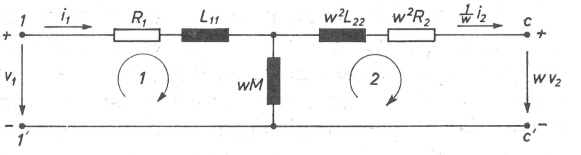
Dobiveni par jednadžbi što smo ga upravo napisali za ulančani krug na slici 1.28 predstavlja ujedno i sustav nezavisnih jednadžbi metode petlji kada se one napišu za mrežu na slici 1.29.

Kako o metodi petlji još nismo govorili, moramo za sada u to vjerovati. Međutim, kasnije, nakon poglavlja o jednadžbama mreže, lako ćemo se i sami uvjeriti da je zaista tako kako smo upravo ustvrdili.



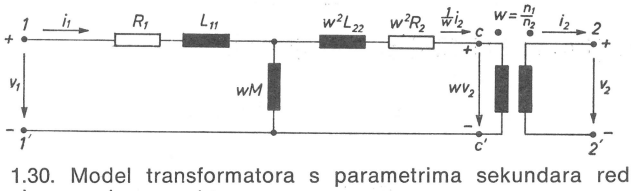
Sl. 1.28. Shema dvonamotnog transformatora

Mreža na slici 1.29. obično se naziva T-mreža ili T-model transformatora. Taj se model transformatora primjenjuje veoma često u analizi mreža. Međutim, moramo naglasiti slijedeće: ako se usporede transformator na slici 1.28. i model transformatora na slici 1.29, tada se vidi da taj model nije u potpunosti električki ekvivalentan transformatoru. Naime, u modelu je sekundarna struja transformatora i_2 zamijenjena sa i_2/w, a sekundarni napon v_2 zamijenjen je sa wv_2. Osim toga, ako je na sekundarnim priključnicama transformatora priključen teret otpora R, pa u tom otporu napon v_2 proizvede struju i_2, tada će u modelu na slici 1.29. napon $w\,v_2$ proizvesti struju i_2/w ako otpor tereta ima vrijednost $w^2\,R$. To znači da stvarnu vrijednost otpora tereta treba preračunati na novu vrijednost.



Sl. 1.29. T-model transformatora

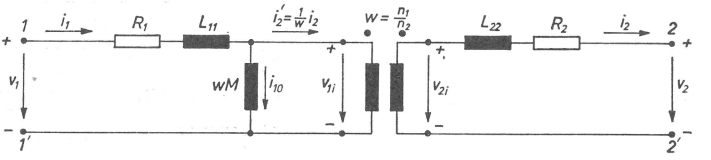
Spomenuta preračunavanja izbjeći ćemo ako na priključnice c i c' na slici 1.29. priključimo idealni transformator omjera transformacije $w = n_1/n_2$, kao što je učinjeno na slici 1.30. Taj je model transformatora — za razliku od modela na slici 1.29. — električki ekvivalentan magnetski ulančanom krugu na slici 1.28. Naime, na osnovi svojstava idealnog transformatora koja su dana definicijom slijedi da će u otporu R između priključnica 2 i 2′ napon v_2 proizvesti struju i_2.



Sl. 1.30. Model transformatora s parametrima sekundara reduciranim na primarnu stranu

Model transformatora na slici 1.30. ima sekundarne parametre transformatora s primarne strane idealnog transformatora, pri čemu su otpor R_2 i rasipni samoinduktivitet L_{22} sekundarne zavojnice transformatora pomnoženi sa w^2. Ako te para-

metre premjestimo na sekundarnu stranu idealnog transformatora, dobit ćemo model transformatora prikazan na slici 1.31. u kojem sekundarni parametri transformatora imaju stvarne vrijednosti (R_2 i L_{22}).



Sl. 1.31. Model transformatora u kojem su otpor i rasipni samoinduktivitet sekundara sa sekundarne strane idealnog transformatora

Da bismo dokazali da su modeli transformatora na slici 1.30. i na slici 1.31. električki ekvivalentni, moramo utvrditi da li postoji isti pad napona na primarnoj strani idealnog transformatora ako se na sekundarnoj strani nalazi otpor R_2 i samoinduktivitet L_{22} ili ako su na primarnoj strani otpor $w^2 R_2$ i samoinduktivitet $w^2 L_{22}$. To ćemo sada pokazati.

U otporniku R_2, koji je na slici 1.31. sa sekundarne strane idealnog transformatora, teče struja i_2, pa je pad napona $R_2 i_2$. Kako je omjer transformacije idealnog transformatora w, taj pad napona postoji sa sekundarne strane ako je na primarnoj strani pad napona $w R_2 i_2$. Na slici 1.30. nalazi se na primarnoj strani otpornik otpora $w^2 R_2$, a kroz njega teče struja i_2/w. Stoga je pad napona $(w^2 R_2) \cdot (i_2/w) = w R_2 i_2$; dakle, kada je na sekundarnoj strani otpor R_2, kao na slici 1.31, ili kada je na primarnoj strani otpor $w^2 R_2$, kao na slici 1.30, na primarnoj strani je isti pad napona. Sasvim analogno tome može se pokazati da će pad napona na primarnoj strani biti isti ako je na sekundarnoj strani zavojnica samoinduktiviteta L_{22}, ili ako je na primarnoj strani zavojnica samoinduktiviteta $w^2 L_{22}$. Prema tome, model na slici 1.31. ekvivalentan je modelu na slici 1.30.

Do modela transformatora došli smo ovdje matematičkim putem. Sada, na kraju, kažimo još nešto o modelu transformatora s fizikalnog stajališta.

Ako označimo kraće da je:

$$v_{1i} = \frac{n_1}{n_2} M_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.63}$$

$$v_{2i} = M_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - \frac{n_2}{n_1} M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{1.64}$$

tada jednadžbe (1.61 a) i (1.62 a) poprimaju oblik:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + v_{1i}, \tag{1.65}$$

$$-v_2 = R_2 i_2 + L_{22} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - v_{2i}. \tag{1.66}$$

Pokažimo sada da su v_{1i}, odnosno v_{2i}, oni naponi što ih između krajeva zavojnice 1, odnosno zavojnice 2, inducira tzv. *glavni* ili *korisni* tok. To je tok koji se zatvara isključivo kroz jezgru transformatora, pa je, znači, rezultanta tokova φ_{12} i φ_{21}.

Ako glavni tok označimo sa φ, možemo prema slici 1.28. napisati:

$$\varphi = \varphi_{12} - \varphi_{21}. \tag{1.67}$$

Dalje je, prema (1.31), $M_{12} = n_2\,\varphi_{12}/i_1$, pa je odatle:

$$M_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = n_2\frac{\mathrm{d}\varphi_{12}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.68}$$

dok je prema (1.32) $M_{21} = n_1\,\varphi_{21}/i_2$, pa je također:

$$M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = n_1\frac{\mathrm{d}\varphi_{21}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.69}$$

Uvrstimo li najprije (1.68) i (1.69) u (1.63), dobivamo:

$$v_{1i} = \frac{n_1}{n_2}n_2\frac{\mathrm{d}\varphi_{12}}{\mathrm{d}t} - n_1\frac{\mathrm{d}\varphi_{21}}{\mathrm{d}t},$$

ili:

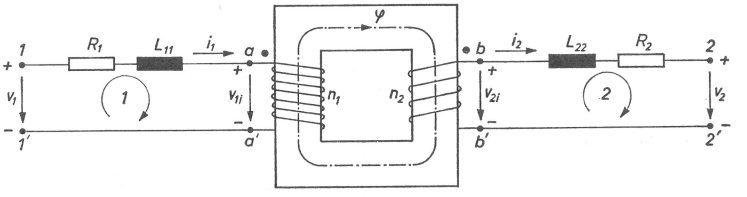
$$v_{1i} = n_1\frac{\mathrm{d}\,(\varphi_{12} - \varphi_{21})}{\mathrm{d}t}.$$

Odatle na osnovi (1.67) slijedi da je:

$$v_{1i} = n_1\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{1.70}$$

Na sasvim identičan način — uvrštenjem (1.68) i (1.69) u (1.64) i uzimajući u obzir (1.67) — izlazi da je:

$$v_{2i} = n_2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{1.71}$$



Sl. 1.32. Shema transformatora u kojoj su otpori i rasipni samoinduktiviteti zavojnica prikazani u vanjskim krugovima

Prema tome, ako uzmemo u obzir da se naponi v_{1i} i v_{2i} induciraju u zavojnicama promjenom glavnog toka, tada na osnovi jednadžbi (1.65) i (1.66) možemo transformator s priključnicama $1-1'$ i $2-2'$ na slici 1.28 nadomjestiti shemom prema slici 1.32. Ovdje jezgrom prolazi samo glavni tok, a otpor R_1 i rasipni samoinduktivitet L_{11} zavojnice 1 te otpor R_2 i rasipni samoinduktivitet L_{22} zavojnice 2 prikazani su izvan priključnica $a-a'$ i $b-b'$ pojedinih zavojnica.

Dijeljenjem jednadžbi (1.70) i (1.71) ili jednadžbi (1.63) i (1.64) izlazi da se naponi v_{1i} i v_{2i} odnose direktno kao brojevi zavoja n_1 i n_2:

$$\frac{v_{1i}}{v_{2i}} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{1.72}$$

Kada bi se struja i_1 kroz zavojnicu 1 i struja i_2 kroz zavojnicu 2 odnosile obrnuto kao brojevi zavoja n_1 i n_2, to bi značilo da transformator s priključnicama $a-a'$ i $b-b'$ na slici 1.32. možemo jednostavno nadomjestiti idealnim transformatorom omjera transformacije $w = n_1/n_2$. Međutim, odatle bi dalje slijedilo da je $n_1 i_1 = n_2 i_2$, ili, drugim riječima, da su rezultantni amperzavoji potrebni za proizvodnju glavnog toka φ jednaki nuli. Kako je to moguće zamisliti samo uz pretpostavku da je magnetska permeabilnost jezgre beskonačno velika, a kao što znamo ona je konačnog iznosa, mora biti:

$$n_1 i_1 \neq n_2 i_2. \tag{1.73}$$

Razlika $n_1 i_1 - n_2 i_2$ predstavlja amperzavoje potrebne za proizvodnju glavnog toka.

Usporedimo sada sliku 1.32. s modelom transformatora na slici 1.31. Primjećujemo da je transformator s priključnicama $a-a'$ i $b-b'$, jezgrom kojega prolazi samo glavni tok, nadomješten u modelu na slici 1.31. kombinacijom idealnog transformatora omjera transformacije $w = n_1/n_2$ i idealne zavojnice induktiviteta wM koja je priključena paralelno primarnoj zavojnici (može se pokazati da taj usporedni element modela transformatora možemo staviti umjesto s primarne strane idealnog transformatora na sekundarnu stranu; tada induktivitet zavojnice iznosi M/w). Prema toj slici, primarnu struju transformatora i_1 možemo predočiti sumom dviju komponentnih struja: jedna je i_{10}, a druga i_2'. Možemo napisati:

$$i_1 = i_2' + i_{10}.$$

Kako je $i_2' = \frac{n_2}{n_1} i_2$, imamo dalje:

$$i_1 = \frac{n_2}{n_1} i_2 + i_{10},$$

a odatle slijedi da je:

$$n_1 i_1 = n_2 i_2 + n_1 i_{10}. \tag{1.74}$$

Ako tu jednadžbu usporedimo s nejednadžbom (1.73), doći ćemo do zaključka da produkt struje i_{10} i ukupnog broja zavoja primarne zavojnice n_1 predstavlja one amperzavoje koji proizvode glavni tok transformatora.

Ako je transformator neopterećen, dakle ako je struja i_2 jednaka nuli, tada je jednaka nuli i primarna struja idealnog transformatora i_2'', u modelu na slici 1.31, pa je tada $i_1 = i_{10}$. Prema tome, i_{10} je struja koja teče u primarnom krugu transformatora kada je on neopterećen; ona se naziva *uzbudna struja* transformatora. U modelu se uzbudna struja zatvara kroz usporednu zavojnicu wM.

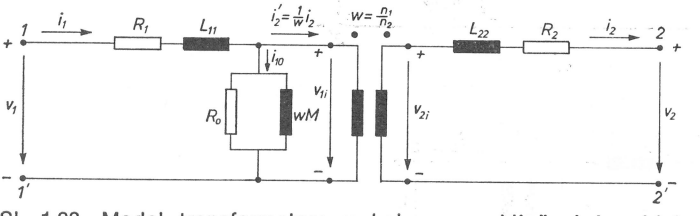
Nasuprot tome, kada je između sekundarnih priključnica transformatora priključen teret, pa u sekundarnom krugu teče struja i_2, tada postoji i struja i_2', pri čemu je na osnovi definicije idealnog transformatora:

$$n_1 i_2' = n_2 i_2.$$

To znači da je ta komponenta primarne struje upravo tolika da kompenzira amperzavoje sekundarne struje. Ona ne utječe na veličinu toka u jezgri transformatora, odnosno glavni je tok jednak bez obzira je li transformator opterećen ili nije. Struja i_2' naziva se *komponenta opterećenja.*

Modeli transformatora kada su uzeti u obzir i gubici u čeličnoj jezgri

Promjenjivi magnetski tok u čeličnoj jezgri transformatora uzrok je gubicima snage koji se manifestiraju u njezinom ugrijavanju. S jedne strane, ti gubici nastaju zbog svojstva feromagnetskih materijala tako da se pri svakom potpunom ciklusu magnetiziranja izgubi neki iznos energije. Ti su gubici proporcionalni površini petlje histereze i nazivaju se *gubici histereze.* S druge strane, zbog električke vodljivosti čelika promjenjivi magnetski tok inducira u jezgri struje, što dovodi do Jouleovih gubitaka. Ti se gubici nazivaju *gubici vrtložnih struja.*



Sl. 1.33. Model transformatora u kojem su uključeni i gubici snage u jezgri

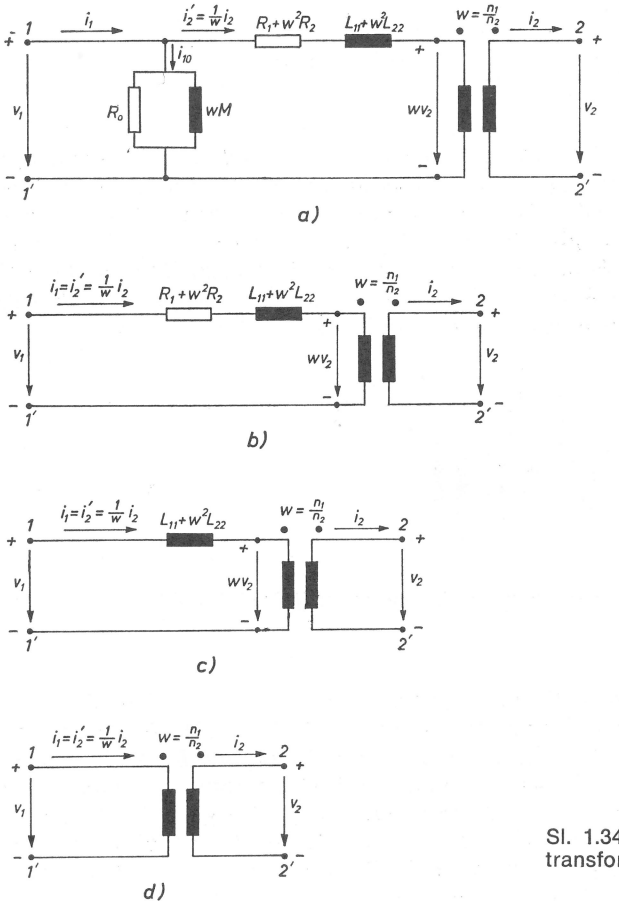
Gubitke snage u čeličnoj jezgri nismo u prethodnom odjeljku uzeli u obzir, pa nisu uključeni u modelima transformatora na slikama 1.30. i 1.31. Ako se ti gubici ne mogu zanemariti, modeliraju se obično pomoću otpora R_0 koji se stavi paralelno zavojnici $w\,M$, kao što je prikazano na slici 1.33. Pri tome se pretpostavlja da su gubici u jezgri proporcionalni kvadratu napona v_{1i} što ga inducira glavni tok, a konstanta je proporcionalnosti $1/R_0$. Budući da se R_0 redovito određuje za nominalni napon i frekvenciju, uzima se da je R_0 konstantan pri malim promjenama napona v_{1i} koje mogu nastati u normalnom pogonu.

Pojednostavnjeni modeli transformatora

Da bismo skratili računanje, često upotrebljavamo i pojednostavnjene modele transformatora ako time znatnije ne umanjujemo točnost dobivenih rezultata. Četiri takva modela prikazana su na slici 1.34.

U prvom modelu, na slici 1.34 a, zanemareni su padovi napona na otporu i na rasipnom samoinduktivitetu primarne zavojnice uslijed uzbudne komponente primarne struje. Što je veće opterećenje transformatora, to činimo manju pogrešku ako upotrijebimo taj model.

Kod vrlo velikih opterećenja, kao što je npr. kratki spoj, možemo upotrijebiti još jednostavniji model (sl. 1.34 b), jer je tada uzbudna komponenta primarne struje zanemariva prema komponenti opterećenja.



Sl. 1.34. Pojednostavnjeni modeli transformatora

Na slici 1.34 c. zanemareni su i otpori zavojnica prema rasipnim samoinduktivitetima, što je obično dozvoljeno kod transformatora velike snage, pa se tada model transformatora svodi na jednu idealnu zavojnicu i na idealni transformator.

I konačno, najjednostavniji model transformatora je sam idealni transformator; taj model (sl. 1.34 d) možemo primijeniti u približnim računima.

1.5. Kondenzator u strujnom krugu

U tablici 1-1. napisana je — među ostalima — i relacija koja povezuje pad napona v_c od pozitivne priključnice kondenzatora do negativne priključnice i struju i_c u smjeru tog pada napona. Kako je i ta relacija, kao i ostale u toj tablici, osnovna relacija analize električnih mreža, pokazat ćemo kako do nje dolazimo.

Na osnovi eksperimenata zna se da je količina naboja q na kondenzatoru proporcionalna naponu v_c između njegovih priključnica:

$$q = C\,v_c, \tag{1.75}$$

gdje je faktor proporcionalnosti, koji se naziva *električni kapacitet*, označen sa C. Uz određene fizikalne uvjete kapacitet C je konstantna veličina. U tom je slučaju, derivirajući obje strane jednadžbe (1.75) po vremenu:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}. \tag{1.76}$$

Derivacija naboja po vremenu, $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, predstavlja brzinu povećavanja ili smanjivanja naboja q na oblogama kondenzatora; ako se količina naboja q povećava, tada je $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ jednak struji nabijanja i_c, pa je prema (1.76):

$$i_c = C\frac{\mathrm{d}v_c}{dt}. \tag{1.77}$$

Time smo došli do tražene relacije.

Da bismo izrazili eksplicitno napon v_c pomoću struje i_c, napišemo najprije na osnovi (1.77):

$$C\,\mathrm{d}v_c = i_c\,\mathrm{d}t,$$

a potom obje strane integriramo:

$$\int_{v_{c0}}^{v_{c1}} C\,\mathrm{d}v_c = \int_{t_0}^{t_1} i_c\,\mathrm{d}t.$$

Odatle je:

$$[Cv_c]_{v_{c0}}^{v_{c1}} = \int_{t_0}^{t_1} i_c\,\mathrm{d}t.$$

Donje i gornje granice integrala predstavljaju vrijednosti varijabli u istom trenutku; to znači da je $v_c = v_{c0}$ kada je $t = t_0$, a $v_c = v_{c1}$ kada je $t = t_1$. Kako je integral na lijevoj strani jednak $C(v_{c1} - v_{c0})$, nakon preuređenja dobivamo:

$$v_{c1} = v_{c0} + \frac{1}{C}\int_{t0}^{t1} i_c\,\mathrm{d}t.$$

Ako početni trenutak označimo sa $t_0 = 0$ i ako izbrišemo indeks 1 — jer je v_{c1} napon nakon bilo kojeg vremena t_1 — imamo konačno:

$$v_c = v_{c0} + \frac{1}{C} \int_0^t i_c \, dt. \tag{1.78}$$

Relacije (1.77) i (1.78) osnovne su relacije za struju i napon u idealnom kondenzatoru. Zapravo to nisu dvije, već jedna jednadžba napisana u dva oblika.

Ako kondenzator u početnom trenutku nije nabijen, tada je:

$$v_c = \frac{1}{C} \int_0^t i_c \, dt. \tag{1.79}$$

1.6. Sinusoidni naponi i struje

Ohmov zakon i dva Kirchhoffova zakona vrijede bez obzira da li su naponi i struje promjenjivi s vremenom ili nisu. Dakle, budući da ih možemo primijeniti i u jednom i u drugom slučaju, očito je da će i metode analize električnih mreža, koje ćemo na osnovi tih zakona kasnije izvesti, vrijediti za mreže s istosmjernim i sa sinusoidnim naponima i strujama.

Kada kažemo *istosmjerni* napon i struja, mislimo na napon i struju što su vremenski konstantni (istosmjerni *stalni* naponi i struje). Nepromjenjivi s vremenom bit će svi odzivni naponi i struje u modelu mreže ako su vremenski nepromjenjivi svi uzbudni naponi i struje nakon što se priguše prijelazne pojave. Već smo rekli da se naše razmatranje odnosi samo na ovaj, tzv. stacionarni odziv. U tom slučaju od parametara pasivnih elemenata imamo u modelu mreže samo otpor R. Naime, kada je struja vremenski nepromjenjiva, tada se u zavojnici ne inducira napon, pa prema tome induktiviteti L i M ne utječu na rezultate analize; s druge strane, kako istosmjerna struja ne može proći kroz kondenzator, on za nju predstavlja prekid kruga.

Drugo područje analize električnih mreža na koje se naše razmatranje odnosi jest određivanje stacionarnih odzivnih napona i struja kada su uzbudni naponi i struje *sinusoidno* promjenjivi s vremenom i kada su *iste frekvencije*. Pritom je karakteristično da će — ako su parametri R, L i C kruga konstantne veličine — i stacionarni *odzivni naponi* i *struje* također biti sinusoide iste frekvencije kao uzbudne veličine. Uz to će, kao što je poznato, sinusoidno promjenjivi napon među krajevima otpornika biti u fazi sa sinusoidnom strujom kroz otpornik, dok će sinusoidni napon među priključnicama zavojnice ili kondenzatora biti pomaknut za jednu četvrtinu perioda prema sinusoidnoj struji kroz te elemente (samo s tom razlikom što sinusoida napona među priključnicama zavojnice vremenski prethodi sinusoidi struje, a među priključnicama kondenzatora vremenski zaostaje za sinusoidom struje).

Kad bismo Kirchhoffove zakone primjenjivali za sinusoidne napone i struje, naišli bismo na znatne poteškoće ako bismo do rezultata željeli doći računajući sa sinus funkcijama, pogotovu onda ako imamo veći broj pribrojnika i ako su, kao što to redovito biva, sinusoide vremenski međusobno pomaknute.

Na sreću, postoji veoma poznata *simbolička metoda* koja nam računanje sa sinusoidnim veličinama znatno pojednostavnjuje i skraćuje. Ta se metoda sastoji u tome da se sinusoidni val predoči *simbolom*: grafički je simbol sinusoidnog vala usmjerena crta u ravnini — nazivat ćemo je *fazor* — a matematički je simbol *kompleksan broj*.

Radi potpunosti, bit simboličke metode i definicije osnovnih pojmova, kao i osnovnih zakona strujnih krugova u simboličkom obliku, objasniti ćemo nešto podrobnije.

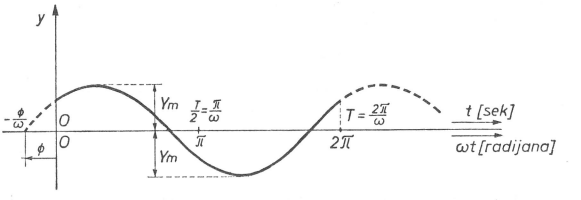
Sinus funkcija

Matematički izraz za sinus funkciju u općem obliku glasi:

$$y = Y_m \sin(\omega t + \Phi). \tag{1.80}$$

Argument $(\omega t + \Phi)$ ovdje je linearna funkcija vremena t; nazivat ćemo ga *fazni kut* ili *faza*. ω i Φ su konstante; ω ćemo nazivati *kružna frekvencija*, a Φ *početni fazni kut**. Faktor Y_m naziva se *amplituda*, *maksimalna vrijednost* ili *tjemena vrijednost*.

Funkcija (1.80) grafički je prikazana kao sinusoida na slici 1.35, gdje je y nanesen u ovisnosti o ωt i u ovisnosti o t.



Sl. 1.35. Grafički prikaz sinus funkcije $y = Y_m \sin(\omega t + \Phi)$

Budući da ωt predstavlja kut, možemo ga izraziti u stupnjevima ili radijanima; u teoriji strujnih krugova ωt se izražava u radijanima, a t u sekundama; prema tome ω je u radijanima u sekundi.

Svojstvo je sinus funkcije da je ona periodična funkcija s temeljnim periodom 2π radijana jer je $\sin(\omega t + \Phi) \equiv \sin(\omega t + \Phi + 2\pi)$. To znači da se nakon $\omega t = 2\pi$ radijana val sinusoide počinje ponavljati. Ako vrijeme trajanja jednog perioda označimo sa T, onda je:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ sekundi.}$$

Broj perioda u jednoj sekundi naziva se *frekvencija*, a označava se sa f:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ perioda u sekundi.}$$

*U literaturi se mogu naći i drugi nazivi za te veličine; međutim te smo nazive ovdje usvojili zato što nam se čini da se najčešće susreću.

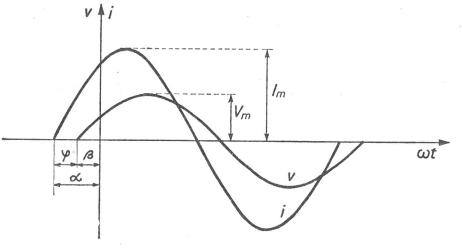
Odatle izlazi da postoji slijedeći odnos između ω i f:

$$\omega = 2\pi f \text{ radijana u sekundi.}$$

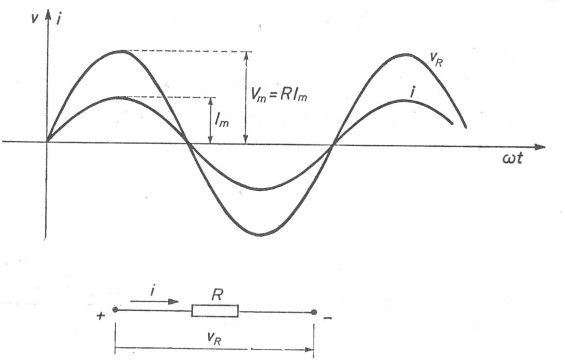
Kada imamo dvije ili više sinusoida *iste frekvencije*, kažemo da jedna sinusoida *prethodi* drugoj ako neku točku vala postiže prije nego što druga sinusoida postigne odgovarajuću točku svoga vala. Na primjer, ako na slici 1.36. uočimo točku koja odgovara pozitivnoj maksimalnoj vrijednosti jedne sinusoide i odgovarajuću točku druge sinusoide, vidimo da sinusoda $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$ spomenutu točku postiže za kraće vrijeme nego sinusoida $v = V_m \sin(\omega t + \beta)$; dakle, sinusoida i prethodi sinusodi v; isto tako možemo kazati da sinusoida v *zaostaje* za sinusoidom i.

Položaj jedne sinusoide u odnosu prema drugoj određen je *pomakom faze* ili *pomakom faznog kuta* koji je na slici 1.36. označen sa φ. Taj se kut definira kao razlika faza obiju sinusoida, a budući da je ta razlika jednaka razlici početnih faznih kutova kada su frekvencije iste, možemo napisati:

$$\varphi = \alpha - \beta.$$



Sl. 1.36. Sinusoida struje $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$ i napona $v = V_m \sin(\omega t + \beta)$



Sl. 1.37. Sinusoidni napon i struja kroz otpornik

Ako sinusoide uz jednaku frekvenciju imaju i jednake početne fazne kutove, tada kažemo da su sinusoide u *fazi*; ako je apsolutna vrijednost razlike tih kutova π radijana, kažemo da su sinusoide *suprotnih* faza.

Sinusoidna struja kroz otpornik

Odaberemo li vremenski trenutak $t = 0$ tako da je sinusoidna struja kroz otpornik:

$$i = I_m \sin \omega t, \tag{1.81}$$

tada je prema Ohmovu zakonu —relacija (1.1) — napon među krajevima otpornika v_R jednak produktu $R\, i_R$, pa je pri prolazu sinusoidne struje (1.81):

$$v_R = R\, I_m \sin \omega t = V_m \sin \omega t, \tag{1.82}$$

gdje je $V_m = R\, I_m$ maksimalna vrijednost napona. Dakle, i napon je v_R, kao i struja i, sinusoidnog oblika, a obje su sinusoide u fazi (sl. 1.37).

Sinusoidna struja kroz zavojnicu

Kroz zavojnicu induktiviteta L neka teče struja koja se sinusoidno mijenja s vremenom prema relaciji (1.81), $i = I_m \sin \omega t$. Tada je prema Faradayevu zakonu elektromagnetske indukcije — relacija (1.15) — napon među krajevima zavojnice v_L:

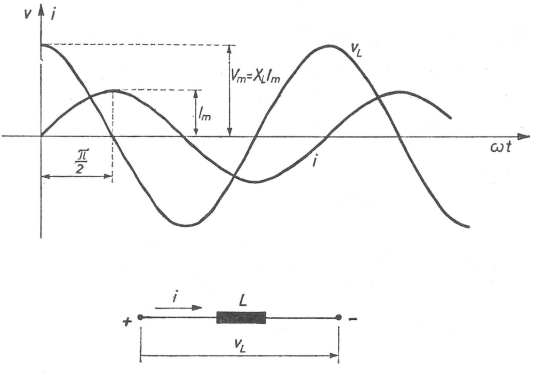
$$v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_m \sin \omega t),$$

odnosno, nakon deriviranja:

$$v_L = \omega L I_m \cos \omega t = V_m \cos \omega t = V_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.83}$$

pri čemu je maksimalna vrijednost napona V_m:

$$V_m = \omega L I_m. \tag{1.84}$$



Sl. 1.38. Sinusoidni napon i struja kroz zavojnicu

I napon se v_L — kao i struja i — mijenja s vremenom po zakonu sinusa, ali ovdje sinusoide struje i napona nisu u fazi, već sinusoida struje vremenski zaostaje za sinusoidom napona za $\pi/2$ radijana ili za 90 stupnjeva (odnosno, sinusoida napona prethodi sinusoidi struje za taj kut). Obje sinusoide prikazane su na slici 1.38. Prema (1.84), omjer maksimalne vrijednosti napona, V_m, i struje, I_m, jednak je produktu ωL, tj. $V_m/I_m = \omega L$. Produkt ωL obično se označava sa X_L:

$$X_L = \omega L, \tag{1.85}$$

i naziva se *induktivna reaktancija*. Prema tome je:

$$V_m = X_L I_m. \tag{1.86}$$

Sinusoidna struja nabijanja kondenzatora

Ako je struja nabijanja kondenzatora sinusoidnog oblika, $i = I_m \sin \omega t$, tada ćemo napon među priključnicama dobiti uvrštenjem te struje u jednadžbu (1.78):

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = \frac{1}{C} \int_0^t I_m \sin \omega t \, dt.$$

Konstantu integracije ovdje smo zanemarili, iako ona zapravo može imati vrijednost različitu od nule. Ako je različita od nule, ona predstavlja istosmjernu komponentu napona; međutim, ovdje promatramo samo stacionarno stanje simetrično s obzirom na vremensku os.

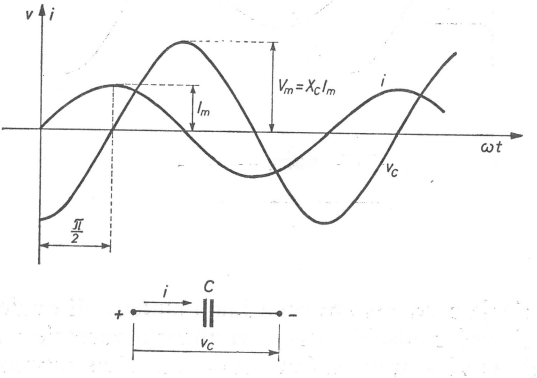
Nakon integriranja slijedi:

$$v_C = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = -V_m \cos \omega t = V_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \qquad (1.87)$$

gdje je V_m maksimalna vrijednost napona:

$$V_m = \frac{1}{\omega C} I_m. \qquad (1.88)$$

Rezultat pokazuje da je napon v_C sinusoidnog oblika i da su — kao i kod zavojnice — struja i napon pomaknuti međusobno za $\pi/2$ radijana ili za 90 stupnjeva; međutim, kao što vidimo na slici 1.39, sada sinusoida struje *prethodi* sinusoidi napona, a kod zavojnice je obratno.



Sl. 1.39. Sinusoidni napon i struja kondenzatora

Prema (1.88), omjer maksimalne vrijednosti napona V_m i maksimalne vrijednosti struje I_m jednak je omjeru $1/\omega C$, tj. $V_m/I_m = 1/\omega C$. Omjer $1/\omega C$ kraće se označava sa X_C:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \qquad (1.89)$$

i naziva se *kapacitivna reaktancija*. Možemo napisati:

$$V_m = X_C I_m. \qquad (1.90)$$

Sinusoidna struja kroz serijski RLC spoj

Kao što smo upravo vidjeli, ako odaberemo vremenski trenutak nula, tako da je $i = I_m \sin \omega t$, tada je napon v_R između krajeva otpornika:

$$v_R = R\, I_m \sin \omega t,$$

napon v_L između krajeva zavojnice:

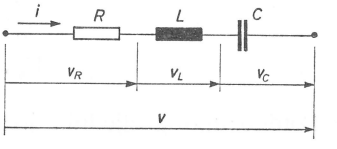
$$v_L = \omega L\, I_m \cos \omega t,$$

a napon v_C između krajeva kondenzatora:

$$v_C = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t.$$

Dakle, sva su tri napona, kao i struja, sinus funkcije vremena. To slijedi iz svojstva sinus funkcije, prema kojem će sinusoidni oblik ostati nepromijenjen nakon množenja s konstantom, nakon deriviranja po vremenu i nakon integriranja po vremenu. Razlika je jedino u tome što se nakon množenja s konstantom promijeni samo amplituda sinusoide, a nakon deriviranja i integriranja nastaje i fazni pomak od $\pi/2$ radijana. Zato su u otporniku struja i napon u fazi, dok u zavojnici napon prethodi struji za $\pi/2$ radijana, a u kondenzatoru zaostaje za isti kut.

Razmotrimo sada slučaj kada su sva tri pasivna elementa — otpornik, zavojnica i kondenzator — spojena u seriju (sl. 1.40), uz pretpostavku da je, kao i prije, struja oblika $i = I_m \sin \omega t$.



Sl. 1.40. Serijski spoj otpornika, zavojnice i kondenzatora

Kako je pad napona među krajevima serijskog spoja jednak zbroju komponentnih padova napona:

$$v = v_R + v_L + v_C,$$

možemo napisati:

$$v = R\, I_m \sin \omega t + \omega L\, I_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \qquad (1.91)$$

Zbrajanjem ili odbijanjem sinus i kosinus funkcija iste frekvencije neće se promijeniti oblik vala; prema tome, v je također sinus funkcija s kružnom frekvencijom ω. Međutim, u općem slučaju bit će sinusoida napona v pomaknuta prema sinusoidi struje i za neki kut koji ćemo označiti sa φ. Dakle, općenito je:

$$v = V_m \sin (\omega t + \varphi). \qquad (1.92)$$

Pokažimo kako se V_m i φ dobiju računom iz poznate amplitude struje I_m i zadanih parametara R, L i C.

Neka je radi jednostavnijeg pisanja $V_{mR} = R\,I_m$, $V_{mL} = \omega\,L\,I_m$ i $V_{mC} = (1/\omega\,C)\,I_m$. Tada jednadžba (1.91) poprima oblik:

$$v = V_{mR} \sin \omega\,t + V_{mL} \cos \omega\,t - V_{mC} \cos \omega\,t,$$

ili:

$$v = V_{mR} \sin \omega\,t + (V_{mL} - V_{mC}) \cos \omega\,t.$$

Uvedemo li kraće da je:

$$V_{mi} = V_{mL} - V_{mC}, \tag{1.93}$$

dobivamo:

$$v = V_{mR} \sin \omega\,t + V_{mi} \cos \omega\,t. \tag{1.94}$$

Podijelimo lijevu i desnu stranu te jednadžbe sa V_{mR}:

$$\frac{v}{V_{mR}} = \sin \omega\,t + \frac{V_{mi}}{V_{mR}} \cos \omega\,t,$$

a zatim uvedimo da je omjer V_{mi}/V_{mR} jednak tangensu nekog pomoćnog kuta φ (dakle $\operatorname{tg} \varphi = V_{mi}/V_{mR}$). Imamo prema tome:

$$\frac{v}{V_{mR}} = \sin \omega\,t + \operatorname{tg} \varphi \cos \omega\,t,$$

ili, jer je $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi/\cos \varphi$:

$$\frac{v}{V_{mR}} = \sin \omega t + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \omega\,t.$$

Pomnožimo posljednju jednadžbu sa $\cos \varphi$:

$$\frac{v}{V_{mR}} \cos \varphi = \sin \omega\,t \cos \varphi + \cos \omega\,t \sin \varphi.$$

Odatle je na osnovi poznate formule za sinus zbroja dvaju kutova:

$$\frac{v}{V_{mR}} \cos \varphi = \sin (\omega\,t + \varphi),$$

odnosno, nakon preuređenja:

$$v = \frac{V_{mR}}{\cos \varphi} \sin (\omega\,t + \varphi). \tag{1.95}$$

Dakle, dobili smo da je sinusoida napona v:

$$v = V_m \sin (\omega\,t + \varphi), \tag{1.96}$$

gdje je $V_m = V_{mR}/\cos \varphi$ njezina maksimalna vrijednost, a početni je fazni kut $\varphi = \operatorname{arc\,tg} (V_{mi}/V_{mR})$.

Maksimalnu vrijednost napona v, za koju smo dobili da iznosi $V_{mR}/\cos\varphi$, izrazimo na drugi način. Uzmemo li u obzir da je $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$, te da je, kao što smo prije uveli, $\operatorname{tg}\varphi = V_{mi}/V_{mR}$, uvrštenjem posljednjeg izraza u jednadžbu za $\cos\varphi$ slijedi da je $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + (V_{mi}/V_{mR})^2}$, odnosno $\cos\varphi = V_{mR}/\sqrt{V_{mR}^2 + V_{mi}^2}$. Prema tome, $V_{mR}/\cos\varphi = \sqrt{V_{mR}^2 + V_{mi}^2}$, pa je:

$$V_m = \sqrt{V_{mR}^2 + V_{mi}^2}. \tag{1.97}$$

Nadalje, kako je $V_{mR} = R\,I_m$, a $V_{mi} = V_{mL} - V_{mC} = \omega\,L\,I_m - (1/\omega\,C)\,I_m = (\omega\,L - 1/\omega\,C)\,I_m$, uvrštenjem u (1.97) dobivamo:

$$V_m = \sqrt{R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2}\cdot I_m, \tag{1.98}$$

ili, ako uvedemo kraću oznaku:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2}. \tag{1.99}$$

odakle slijedi:

$$V_m = Z\,I_m. \tag{1.100}$$

Isto tako, budući da je $\operatorname{tg}\varphi = V_{mi}/V_{mR} = (V_{mL} - V_{mC})/V_{mR}$, slijedi da je:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega\,L - \dfrac{1}{\omega\,C}}{R}. \tag{1.101}$$

Primjer. Neka su zadane vrijednosti parametara $R = 1{,}5$, $L = 180\cdot 10^{-3}$ i $C = 500\cdot 10^{-6}$ i neka je $I_m = 2$ maksimalna vrijednost, a $\omega = 100$ kružna frekvencija sinusoidne struje kroz serijski spojene R, L i C. Odredimo napon v između krajeva tog serijskog spoja uz pretpostavku da je vremenski trenutak nula tako odabran da je početni fazni kut struje jednak nuli, tj. da je:

$$i = 2\sin 100\,t.$$

Pad napona v_R između krajeva otpornika jednak je $R\,I_m\sin\omega\,t$, dakle:

$$v_R = 3\sin 100\,t.$$

Pad napona v_L između krajeva zavojnice iznosi $\omega\,L\,I_m\cos\omega\,t$, pa je:

$$v_L = 36\cos 100\,t.$$

Pad napona v_C između priključnica kondenzatora iznosi $(-1/\omega\,C)\,I_m\cos\omega\,t$; znači:

$$v_C = -40\cos 100\,t.$$

Kako je $v_L + v_C = -4\cos 100\,t$, ukupan pad napona v iznosi:

$$v = 3\sin 100\,t - 4\cos 100\,t.$$

Amplituda tog napona jednaka je $\sqrt{3^2 + 4^2}$, dakle iznosi 5; početni fazni kut od v je arc tg $(-4/3)$, ili $-53{,}1°$. Prema tome je:

$$v = 5 \sin (100\, t - 53{,}1°).$$

Kako je početni fazni kut od v manji za 53,1° nego početni fazni kut od i, kažemo da napon v zaostaje za strujom i za 53,1°.

Vrijednosti od V_m i φ možemo dobiti i direktno, primjenom formula (1.98) i (1.101):

$$V_m = 2 \cdot \sqrt{1{,}5^2 + \left(100 \cdot 180 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{100 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 5,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{100 \cdot 180 \cdot 10^{-3} - \dfrac{1}{100 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}}{1{,}5} = -\frac{4}{3},$$

odnosno:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{4}{3}\right) = -53{,}1°,$$

dakle, dobili smo iste vrijednosti kao i prije.

Napišimo sada jednadžbu (1.92) u obliku u kojem je napon v prikazan kao suma dvaju komponentnih napona:

$$v = V_m \cos \varphi \sin \omega\, t + V_m \sin \varphi \cos \omega\, t. \tag{1.102}$$

Ako je $\cos \varphi$ pozitivan, tada je komponenta $V_m \cos \varphi \sin \omega\, t$ napona v vremenski u fazi sa strujom $i = I_m \sin \omega\, t$. Ako je uz to i $\sin \varphi$ pozitivan, tada komponenta $V_m \sin \varphi \cos \omega\, t$ prethodi struji i za 90°, a u protivnom slučaju, kada je $\sin \varphi$ negativan, ta komponenta zaostaje 90° za strujom i. Kako je prema (1.91):

$$v = R\, I_m \sin \omega\, t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos \omega\, t, \tag{1.103}$$

uspoređenjem (1.102) i (1.103) izlazi da je:

$$V_m \cos \varphi = R\, I_m, \tag{1.104}$$

$$V_m \sin \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m. \tag{1.105}$$

Iz jednadžbe (1.105) vidimo da će kut φ biti pozitivan kada je ωL veće od $1/\omega C$; tada napon v prethodi struji i. U protivnom kada je ωL manje od $1/\omega C$ kut φ bit će negativan, dakle, tada će napon v zaostajati za strujom i. Ako je $\omega L = 1/\omega C$, kut φ jednak je nuli, pa su tada napon v i struja i međusobno u fazi, iako u krugu postoje određeni induktivitet i kapacitet; takav krug nazivamo *rezonantnim*.

Komponenta pada napona v koja je u fazi sa strujom i predstavlja pad napona uslijed otpora i naziva se *aktivni* ili *djelatni* pad napona; druga komponenta, koja je pomaknuta 90° prema struji i, predstavlja zbroj induktivnog i kapacitivnog pada napona, a naziva se *reaktivni* pad napona.

Kako riješiti obratan problem: zadani je napon između krajeva serijskog *RLC* spoja $v = V_m \sin \omega t$, a treba odrediti amplitudu i početni fazni kut struje i kroz taj serijski spoj.

Kako je $v_R + v_L + v_C = v$, prema (1.1), (1.15) i (1.79) ukupan je pad napona v izražen strujom i:

$$R i + L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} \int_0^t i \, \mathrm{d}t = v. \tag{1.106}$$

Tu jednadžbu nazivamo *osnovna integralno-diferencijalna jednadžba strujnog kruga.* Poznato je da je rješenje te jednadžbe jednako zbroju rješenja i' odgovarajuće skraćene ili homogene jednadžbe (tu jednadžbu dobijemo ako stavimo da je slobodan član jednak nuli) i partikularnog rješenja i'' zadane neskraćene ili nehomogene diferencijalne jednadžbe. Prema tome, struja je i:

$$i = i' + i''.$$

Komponenta i' struje i ovdje nas ne zanima, jer predstavlja prijelazni odziv strujnog kruga, budući da se nakon veoma kratkog vremena iza ukapčanja priguši. Znači, traženo rješenje, dakle struja koja teče kroz *RLC* spoj nakon prigušenja prijelazne pojave, jest $i = i''$. U ovom je slučaju, gdje je slobodan član sinus funkcija vremena, $v = V_m \sin \omega t$, i partikularno je rješenje i'' također sinus funkcija vremena iste frekvencije, ali je u općem slučaju vremenski pomaknuta prema sinusoidi napona. Dakle:

$$i'' = I_m \sin (\omega t - \varphi),$$

gdje je:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

i:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

odnosno:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

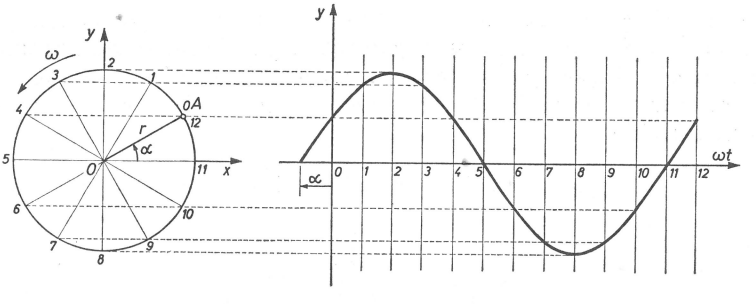
Prema tome, stacionarna odzivna struja u krugu iznosi:

$$i = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin \left(\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \tag{1.107}$$

Simboličko predočavanje sinusoidnih veličina

Ako je model mreže nešto složeniji, pa se u čvorištima sastaje više grana i sadrži više petlji, za izračunavanje odzivnih napona i struja moramo primijeniti Kirchhoffove zakone; primjenjujući I. Kirchhoffov zakon zbrajamo struje, a primjenjujući II. Kirchhoffov zakon zbrajamo napone. Iako je zbrajanje, u načelu, najjednostavnija računska operacija, u ovom slučaju, kada su naponi i struje sinusoidne funkcije vremena (pod sinusoidnom funkcijom ovdje smatramo i sinus i kosinus funkciju, jer imaju isti valni oblik), računanje je neprikladno i dugotrajno. U to smo se uvjerili na jednostavnom primjeru *RLC* spoja, kada smo na strani 46 tražili zbroj funkcija $V_{mR} \sin \omega t$ i $V_{mi} \cos \omega t$. Jasno je, kada imamo više nego dva pribrojnika, treba očekivati još mnogo veći posao. Štoviše, računajući s momentanim vrijednostima naići ćemo praktički na nepremostive poteškoće kada želimo odrediti napone i struje već u relativno jednostavnom modelu mreže.

Na sreću, postoji — kao što je poznato — vrlo prikladna tzv. *simbolička metoda*, kojom se analiza mreža sa sinusoidnim naponima i strujama u stacionarnim prilikama bitno pojednostavnjuje. Zapravo, to je jedan od primjera primjene transformacija u elektrotehnici.



a) b)

Sl. 1.41. Geometrijska konstrukcija sinusoide pomoću rotirajuće dužine $\overline{OA}$

Bit simboličke metode prikazana je na slici 1.41. Zamislimo da se točka A na slici 1.41 a. giba konstantnom brzinom po kružnici polumjera r, a pritom je, kao što je naznačeno zakrivljenom strelicom, smjer gibanja točke suprotan smjeru okretanja kazaljke na satu. Kutna brzina kojom se okreće crta što predstavlja spojnicu ishodišta O i točke A neka je ω. Nakon vremena t od početka okretanja, kut prema horizontalnoj osi za koji se okrene dužina $\overline{OA}$ povećat će se za ωt. Ako proizvoljno odredimo da je početak okretanja točke A u trenutku kada je $\overline{OA}$ pod kutem α, tada je nakon vremena t od tog trenutka kut dužine $\overline{OA}$ prema horizontalnoj osi $\omega t + \alpha$. Označimo li udaljenost projekcije točke A na vertikalnu os od ishodišta O sa y, možemo napisati:

$$y = r \sin (\omega t + \alpha). \tag{1.108}$$

Odatle vidimo da se projekcija točke A na vertikalnu os giba po zakonu sinusa; amplituda je sinusoide $r = \overline{OA}$, dakle odgovara polumjeru kružnice, a početni je fazni kut sinusoide α, što znači da je jednak nagibu dužine $\overline{OA}$ prema horizontalnoj osi u proizvoljno odabranom trenutku $t = 0$. U tom je trenutku $y = r \sin \alpha$.

Vidimo također da jedan period sinusoide odgovara jednom potpunom okretaju točke A; ako je kutna brzina ω u radijanima u sekundi, tada je vrijeme potrebno za jedan potpun okretaj točke A: $T = 2\pi/\omega$ sekundi.

Ovisnost veličine y o kutu ωt u Descartesovu koordinatnom sustavu prikazana je na slici 1.41 b. Tu vidimo i kako je određen izvjestan broj točaka sinusoide koje su zatim spojene u nacrtanu krivulju. Najprije smo kružnicu na slici (a) podijelili na dvanaest jednakih dijelova, počevši od trenutka označenog sa 0 u kojem je nagib dužine $\overline{OA}$ prema horizontalnoj osi kut α. Nakon što smo brojevima 1,2 ..., 12 označili položaj točke A za svakih 30° pomaka, projiciranjem točke A na ordinatu na slici (b) dobivene su — u sjecištu paralele s apscisom i vertikale iznad odgovarajućeg kuta na apscisi — pripadne točke sinusoide.

Sve su točke sinusoide određene ako znamo položaj točke na kružnici u *svakom trenutku*. Kako je položaj točke na kružnici definiran rotirajućom dužinom, to znači da poznavajući kretanje dužine $\overline{OA}$ znamo sve i o sinusoidi. Ali vrijedi i obratno: ako je zadana sinusoidna funkcija vremena, simbolički je možemo predočiti dužinom koja rotira oko jednog svog kraja. U tome je, kao što ćemo vidjeti, bît simboličke metode.

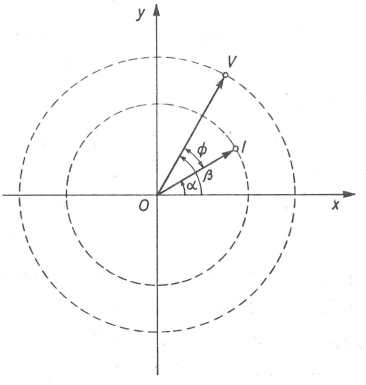
Na slici 1.41 a. crta $\overline{OA}$ pod kutom α izvučena je deblje negoli preostalih jedanaest, koje odgovaraju drugim vremenskim trenucima. Ta se crta u elektrotehnici i posebno naziva. Mi ćemo rotirajuću dužinu koja simbolizira sinusoidne napone i struje, nacrtanu za vremenski trenutak $t = 0$, nazivati *fazor**. Duljina fazora odgovara amplitudi sinusoide, a kut prema pozitivnoj osi x odgovara početnom faznom kutu sinusoide. Međutim, kako su zbog čisto praktičnih razloga obično važne *efektivne* vrijednosti sinusoidnih napona i struja, a ne njihove maksimalne vrijednosti, prikladno je da mjerilo za dužine odaberemo tako da duljina fazora odgovara efektivnim vrijednostima. Osim toga, iako nije neophodno, na kraju dužine koja predočava fazor obično se strelicom naznači položaj točke na kružnici. Time što je fazoru određen smjer, jednoznačno je određen kut prema pozitivnoj osi x.

Uvijek kada su frekvencije svih sinusoida jednake — a samo u tom slučaju moći ćemo primijeniti simboličku metodu — kutovi koji odgovaraju razlici faznih kutova bit će nepromjenjivi s vremenom. Uzmimo, radi ilustracije, da je kružna frekvencija $\omega = 314$ radijana u sekundi, efektivna vrijednost struje $I = 2$, efektivna vrijednost napona $V = 3$, te da struja zaostaje vremenski za naponom za $\alpha = \pi/6$ radijana ili za 30°. Ako je trenutak $t = 0$ tako odabran da početni fazni kut napona iznosi $\beta = \pi/3$ radijana ili 60°, tada je sinus funkcija napona $v = 3\sqrt{2}\sin(314\,t + \pi/3)$, a sinus funkcija struje $i = 2\sqrt{2}\sin(314\,t + \pi/6)$. Odgovarajući fazori prikazani su na slici 1.42; fazor napona je pod kutom 60° prema pozitivnoj osi x, a fazor struje pod kutom 30°; kut među tim fazorima označen je sa Φ i iznosi 30°.

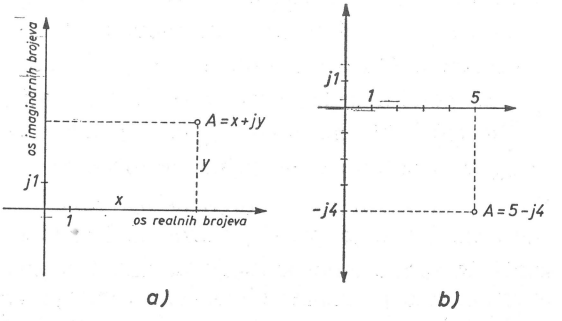
---

*Osim naziva »fazor«, često se susreću i drugi nazivi za isti pojam, npr. sinor, kompleksor, vektor.

Zamislimo li da oba fazora na slici 1.42. rotiraju oko ishodišta istom kutnom brzinom, kut Φ se neće mijenjati s vremenom; fazor napona stalno će prethoditi fazoru struje za kut Φ, odnosno fazor struje stalno će zaostajati iza fazora napona za taj kut. Promatramo li ne dvije, nego više sinusoida naponâ i strujâ, relativni kutovi između odgovarajućih fazora bit će nepromjenjivi. Stoga, umjesto da kutove u početnom trenutku, koji je proizvoljan, uzimamo prema horizontalnoj osi, možemo jedan fazor postaviti pod bilo kojim kutom, a kutove ostalih fazora uzimati u odnosu na položaj tog, *referentnog fazora*. Obično je kut referentnog fazora nula.



Sl. 1.42. Struja i napon prikazani kao fazori



Sl. 1.43. a) Kompleksan broj $A = x + jy$ predočen točkom u ravnini. b) Točka s koordinatama 5 i —4 odgovara kompleksnom broju 5—$j4$.

Razni oblici kompleksnog broja

Kvadratni korijen iz negativnog broja zove se *imaginarni broj*, a piše se u obliku produkta jy, pri čemu je j simbol za $\sqrt{-1}$, a y je realan broj. Prema tome, produkt jy predstavlja samo drukčiju oznaku za $\sqrt{-y^2}$. Iz $j = \sqrt{-1}$ slijedi da je $j^2 = -1$ i $(1/j) = -j$.

Prema definiciji, zbroj realnog broja x i imaginarnog broja jy, koji ćemo označiti sa A, nazivamo *kompleksnim brojem*, tj.:

$$A = x + jy. \tag{1.109}$$

Broj x *realni je dio*, a broj y *imaginarni dio* kompleksnog broja $x + jy$ (primijetimo da je *realan* broj ne samo realni dio kompleksnog broja, nego i imaginarni dio). Na primjer, realan dio kompleksnog broja $5 - j4$ jest 5, a imaginarni je dio —4. Obično pišemo:

$$x = \mathrm{Re}\, A, \quad y = \mathrm{Im}\, A. \tag{1.110}$$

Ako se na apscisi pravokutnog koordinatnog sustava nalaze realni brojevi, a na ordinati imaginarni brojevi, tada, prema dogovoru, kompleksnom broju $A = x + jy$ odgovara točka s koordinatama x i y; projekcija točke na horizontalnu os predočava realan dio kompleksnog broja, a projekcija na vertikalnu os imaginarni dio (sl. 1.43). Ravnina xy u kojoj su kompleksni brojevi predočeni geometrijski naziva se *ravni-*

*nom kompleksnih brojeva**; os x zove se *os realnih brojeva*, a os y *os imaginarnih brojeva*. Svakoj točki ravnine odgovara samo jedan kompleksan broj; jasno je da vrijedi i obratno: svakom kompleksnom broju pripada samo jedna točka u ravnini.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Umjesto koordinatama x i y, položaj točke A, koja odgovara kompleksnom broju $A = x + jy$, možemo opisati i s druge dvije veličine: dužinom $\overline{OA}$ i kutom pod kojim je ta dužina nagnuta prema pozitivnoj osi x (sl. 1.44). Udaljenost od O do A označimo sa r, a kut dužine $\overline{OA}$ prema pozitivnoj osi realnih brojeva sa Φ. Prema slici je:

$$x = r \cos \Phi, \quad y = r \sin \Phi.$$

Odatle uvrštenjem slijedi da kompleksan broj $A = x + jy$ možemo predočiti i u obliku:

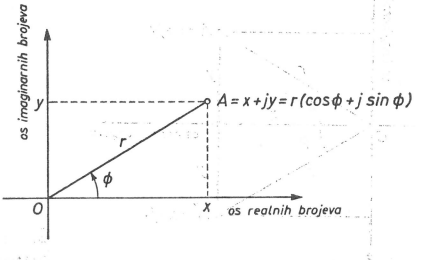
$$A = x + jy = r \cos \Phi + jr \sin \Phi = r (\cos \Phi + j \sin \Phi), \qquad (1.111)$$

koji nazivamo *trigonometrijskim oblikom* kompleksnog broja. r se naziva *modul* ili *apsolutna vrijednost*, a kut Φ naziva se *argument* kompleksnog broja. Prema slici 1.44. izlazi da je:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{y}{x}.$$

I modul i argument *realni* su brojevi, pri čemu je modul uvijek pozitivan broj.



Sl. 1.44. Kompleksan broj $A = x + jy$ predočen u trigonometrijskom obliku

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja. Prema Eulerovoj formuli je:

$$\cos \Phi + j \sin \Phi = e^{j\Phi}.$$

Pomnožimo li tu jednadžbu sa r, prema (1.111) izlazi da je:

$$A = x + jy = r\, e^{j\Phi}. \qquad (1.112)$$

Taj se oblik kompleksnog broja naziva *eksponencijalnim*. I on je, kao i trigonometrijski oblik kompleksnog broja, predočen modulom r i argumentom Φ, pa se oba skraćeno pišu $r\underline{/\Phi}$.

*Upotrebljavaju se još i nazivi kompleksna ravnina, Gaussova ili Cauchyjeva ravnina, ili Argandov dijagram.

Budući da je modul kompleksnog broja uvijek pozitivan broj, ovdje ćemo za modul upotrebljavati isti simbol kao i za odgovarajući kompleksni broj, samo što ćemo ga staviti između dvije vertikalne crte. Na primjer:

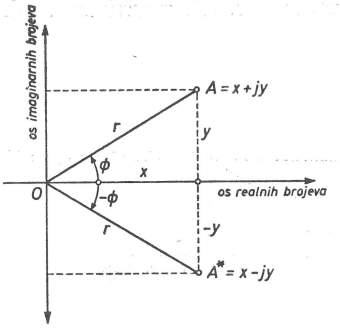
$$A = x + jy = |A|(\cos \Phi + j \sin \Phi) = |A| e^{j\Phi} = |A| \underline{/\Phi}.$$

Uvođenje trigonometrijskog i eksponencijalnog oblika pogodno je zato što se neke računske operacije (npr. množenje i dijeljenje) u tom obliku lakše izvode. Inače, za računske operacije s kompleksnim brojevima vrijede isti zakoni kao i za realne brojeve; realan broj može se shvatiti kao poseban slučaj kompleksnog broja: ako je $y = 0$, kompleksan broj $x + jy$ svodi se na realan broj x. Jedino što u području kompleksnih brojeva nemaju značenje nejednakosti $A > B$ i $A < B$. O računskim operacijama s kompleksnim brojevima ovdje nećemo posebno govoriti.

Kompleksni brojevi koji u ravnini kompleksnih brojeva leže simetrično prema osi realnih brojeva predstavljaju par *konjugirano kompleksnih brojeva*. Znači, konjugirano kompleksni brojevi oni su brojevi koji imaju jednake realne dijelove, a imaginarni su im dijelovi jednaki po apsolutnoj vrijednosti i suprotnog predznaka. Ako je $A = x + jy$, pišemo:

$$A^* = x - jy.$$

Na primjer, konjugirano kompleksan broj od $-5 - j4$ jest $-5 + j4$. Par konjugirano kompleksnih brojeva prikazan je u ravnini kompleksnih brojeva na slici 1.45.



Sl. 1.45. Par konjugirano kompleksnih brojeva

Predočivanje sinusoidnih napona i struja kompleksnim brojevima. Transformacije.

Vidjeli smo da svakoj točki u ravnini kompleksnih brojeva odgovara jedan kompleksan broj, a položaj točke određen je dužinom od ishodišta do točke i kutom koji ta dužina zatvara s osi realnih brojeva. Na primjer, ako je udaljenost točke od ishodišta $|A|$, a kut α, toj točki odgovara kompleksan broj $A = |A| e^{j\alpha} = |A| \cos \alpha + j|A| \sin \alpha$.

Prednost pisanja kompleksnog broja u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku dolazi do izražaja kada je kut α promjenjiv s vremenom, kao što je, na primjer slučaj kada se točka okreće oko ishodišta na udaljenosti $|A|$ konstantnom kutnom

brzinom ω. Kako je $\alpha = \omega t + \Phi$, gdje je Φ nagib dužine $\overline{OA}$ u trenutku $t = 0$, položaj točke u svakom trenutku opisuje kompleksna veličina:

$$A = |A| e^{j(\omega t + \Phi)} = |A| \cos(\omega t + \Phi) + j |A| \sin(\omega t + \Phi). \quad (1.113)$$

Već smo geometrijski utvrdili: ako se točka A giba po kružnici konstantnom kutnom brzinom, tada se njezina projekcija na vertikalnu os giba po zakonu sinusa. To isto kaže nam jednadžba (1.113). Prema tome, izrazom (1.113) moći ćemo sinusoidne veličine predočiti pomoću kompleksnih veličina. Naime, prema toj jednadžbi je $|A| \cos(\omega t + \Phi)$ realni dio, a $|A| \sin(\omega t + \Phi)$ imaginarni dio kompleksnog broja $|A| e^{j(\omega t + \Phi)}$. Prema uvedenom označavanju pišemo:

$$|A| \cos(\omega t + \Phi) = \mathrm{Re}[|A| e^{j(\omega t + \Phi)}],$$

$$|A| \sin(\omega t + \Phi) = \mathrm{Im}[|A| e^{j(\omega t + \Phi)}].$$

Neka su sinusoidna struja i napon:

$$i = \sqrt{2} |I| \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.114)$$

$$v = \sqrt{2} |V| \sin(\omega t + \beta), \quad (1.115)$$

gdje je $\sqrt{2} |I|$ maksimalna vrijednost struje, a $\sqrt{2} |V|$ maksimalna vrijednost napona; $|I|$ i $|V|$ su efektivne vrijednosti, a α i β su početni fazni kutovi. Umjesto kao sinus funkcije, možemo te vrijednosti izraziti u obliku:

$$i = \mathrm{Im}[\sqrt{2} |I| e^{j(\omega t + \alpha)}], \quad (1.116)$$

$$v = \mathrm{Im}[\sqrt{2} |V| e^{j(\omega t + \beta)}], \quad (1.117)$$

ili, kako je $e^{j(\omega t + \alpha)} = e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha}$, onda je:

$$i = \mathrm{Im}[\sqrt{2} |I| e^{j\alpha} e^{j\omega t}], \quad (1.118)$$

$$v = \mathrm{Im}[\sqrt{2} |V| e^{j\beta} e^{j\omega t}]. \quad (1.119)$$

Uz zadanu kružnu frekvenciju ω, veličina $|I| e^{j\alpha}$ kaže nam sve o sinusoidnoj struji; poznavajući tu veličinu, struja je $i = \sqrt{2} |I| \sin(\omega t + \alpha)$. Budući da je $|I| e^{j\alpha}$ kompleksan broj, označit ćemo ga sa I:

$$I = |I| e^{j\alpha}. \quad (1.120)$$

I predstavlja *transformaciju* struje $i = \sqrt{2} |I| \sin(\omega t + \alpha)$. Analogno tome neka je transformacija V napona $v = \sqrt{2} |V| \sin(\omega t + \beta)$ kompleksan broj:

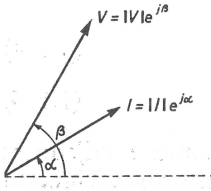
$$V = |V| e^{j\beta}. \quad (1.121)$$

Pomoću uvedenih transformacija možemo momentane vrijednosti sinusoidnih struja i napona izraziti ovako:

$$i = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\, I e^{j\omega t}], \quad (1.122)$$

$$v = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\, V e^{j\omega t}]. \quad (1.123)$$

Fazor smo definirali kao crtu koje duljina odgovara efektivnoj vrijednosti sinusoidne veličine, a nagnuta je prema horizontalnoj osi pod kutom koji je jednak početnom faznom kutu sinusoide. Sada vidimo, na osnovi (1.120) i (1.121), da fazor struje $i = \sqrt{2}\,|\,I\,|\sin(\omega t + \alpha)$ i fazor napona $v = \sqrt{2}\,|\,V\,|\sin(\omega t + \beta)$ nisu ništa drugo do geometrijska interpretacija transformacija I i V. Naime, kompleksan broj $|\,I\,|\,e^{j\alpha}$ može se u ravnini kompleksnih brojeva također predočiti crtom duljine $|\,I\,|$ ($|\,I\,|$ je efektivna vrijednost struje) pod kutom α prema osi realnih brojeva (α je početni fazni kut struje). Isto vrijedi i za kompleksan broj $|\,V\,|\,e^{j\beta}$. Na primjer, na slici 1.46. prikazana je u ravnini kompleksnih brojeva transformacija $I = 3\,e^{j30°} = \underline{3/30°}$ struje $i = 3\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°)$ i transformacija $V = 4\,e^{j60°} = \underline{4/60°}$ napona $v = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 60°)$. Grafičko prikazivanje transformacija I i V veoma je pogodno, jer tako možemo bolje uočiti odnose između sinusoidnih struja i napona u danoj mreži. U jednostavnijim slučajevima, grafičko prikazivanje olakšava i računanje.



Sl. 1.46. Grafički prikaz transformacije struje i napona

Osnovna jednadžba strujnog kruga u transformiranom obliku

Pomoću (1.120) i (1.121) definirane su transformacije I i V:

I je transformacija struje $\sqrt{2}\,|\,I\,|\sin(\omega t + \alpha)$;
V je transformacija napona $\sqrt{2}\,|\,V\,|\sin(\omega t + \beta)$.

Sada ćemo prikazati kako se pomoću uvedenih transformacija transformiraju jednadžbe strujnih krugova sa sinusoidnim naponima i strujama u jednadžbe koje ne sadrže varijablu t (vrijeme); transformirane jednadžbe *algebarske* su jednadžbe. Iako su I i V kompleksni brojevi, a ne realni, ipak je računanje s transformiranim veličinama znatno jednostavnije nego računanje s momentanim vrijednostima. Kako se ponekad kaže da su I i V simboli sinusoidnih struja i napona, rješavanje mreža pomoću transformiranih jednadžbi zove se *simbolička metoda*.

Kao što smo i prije učinili, uzmimo ponovno kao primjer opći slučaj serijskog RLC spoja. Prema (1.106) imamo:

$$v = R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t.$$

Budući da promatramo samo stacionarno stanje, struja je $i = \sqrt{2}\,|\,V\,|\sin(\omega t + \alpha)$ a ukupan je pad napona $v = \sqrt{2}\,|\,V\,|\sin(\omega t + \beta)$, pa uvrštenjem u (1.106) dobivamo:

$$\sqrt{2}\,|V|\sin(\omega t+\beta)=R\sqrt{2}\,|I|\sin(\omega t+\alpha)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sqrt{2}\,|I|\sin(\omega t+\alpha)\right]+$$

$$+\frac{1}{C}\int_0^t\sqrt{2}\,|I|\sin(\omega t+\alpha)\,\mathrm{d}t,$$

odnosno nakon uvođenja transformiranih veličina, prema (1.122) i (1.123):

$$\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,V e^{j\omega t}\right]=R\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,I e^{j\omega t}\right]+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,I e^{j\omega t}\right]+$$

$$+\frac{1}{C}\int_0^t\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,I e^{j\omega t}\right]\mathrm{d}t. \tag{1.124}$$

Iz matematike je poznato da je derivacija po vremenu imaginarnog dijela kompleksne funkcije identična imaginarnom dijelu derivacije kompleksne funkcije. To znači da je:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,I e^{j\omega t}\right]\equiv\operatorname{Im}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{2}\,I e^{j\omega t}\right]=\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,j\omega\,I e^{j\omega t}\right].$$

Slično vrijedi i za integral po vremenu, tj.:

$$\int_0^t\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,I e^{j\omega t}\right]\mathrm{d}t=\operatorname{Im}\left[\int_0^t\sqrt{2}\,I e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t\right]=\operatorname{Im}\left[\frac{1}{j\omega}\sqrt{2}\,I e^{j\omega t}\right].$$

Odatle je uvrštenjem u (1.124):

$$\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,V e^{j\omega t}\right]=\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,R\,I e^{j\omega t}\right]+\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\,j\omega L\,I e^{j\omega t}\right]+\operatorname{Im}\left[\sqrt{2}\frac{1}{j\omega C}\,I e^{j\omega t}\right],$$

ili:

$$\sqrt{2}\operatorname{Im}\left[V e^{j\omega t}\right]=\sqrt{2}\operatorname{Im}\left[R\,I e^{j\omega t}\right]+\sqrt{2}\operatorname{Im}\left[j\omega L\,I e^{j\omega t}\right]+\sqrt{2}\operatorname{Im}\left[\frac{1}{j\omega C}\,I e^{j\omega t}\right].$$

Kako je $\sqrt{2}$ faktor u svim članovima na lijevoj i desnoj strani, možemo ga izostaviti. Nadalje, kako je suma imaginarnih dijelova kompleksnih brojeva jednaka imaginarnom dijelu njihove sume, možemo napisati:

$$\operatorname{Im}\left[V e^{j\omega t}\right]=\operatorname{Im}\left[\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)I e^{j\omega t}\right]. \tag{1.125}$$

Na identičan način mogli bismo pokazati da je i:

$$\operatorname{Re}\left[V e^{j\omega t}\right]=\operatorname{Re}\left[\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega L}\right)I e^{j\omega t}\right]. \tag{1.126}$$

Poznato je: kada su međusobno jednaki i realni i imaginarni dijelovi dvaju kompleksnih brojeva, tada su — prema definiciji — i kompleksni brojevi međusobno jednaki. Odatle, na osnovi (1.125) i (1.126), slijedi da je:

$$V e^{j\omega t} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) I e^{j\omega t}.$$

Kako je $e^{j\omega t}$ različit od nule za svaki t, možemo gornju jednadžbu podijeliti s tim faktorom. Dobivamo konačno:

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) I, \tag{1.127}$$

ili:

$$V = RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I. \tag{1.128}$$

Tako smo uvođenjem transformacija (1.120) i (1.121) polaznu integralno-diferencijalnu jednadžbu (1.106) sveli na algebarsku jednadžbu (1.127) koja ne sadrži varijablu vrijeme. Dobivena jednadžba opisuje odnos između fazora I i V, ili, drugim riječima — jer je $I = |I| e^{j\alpha}$ i $V = |V| e^{j\beta}$ — odnos između efektivnih vrijednosti i početnih faznih kutova sinusoidnih struja i napona.

Rješenje jednadžbe (1.127) po I iznosi:

$$I = \frac{V}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}. \tag{1.129}$$

Dakle, ako nam je zadan napon $v = \sqrt{2}\,|V| \sin(\omega t + \beta)$ i ako su poznati parametri R, L i C, simboličkom metodom možemo lako odrediti struju i. Najprije v izrazimo transformacijom $V = |V| e^{j\beta} = |V| \underline{/\beta}$, a zatim, nakon uvrštenja u (1.129), izračunamo I.

Primjenjujući simboličku metodu, s vremenom smo se privikli da rješenje u transformiranom području smatramo konačnim rješenjem. Međutim, treba reći da je stvarno rješenje tek ono što ga dobivamo nakon *inverzne transformacije* kojom se struja izrazi kao sinus funkcija vremena.

Primjer. Neka je $R = 2$, $\omega L = 6$ i $(1/\omega C) = 8$. Ako je zadani napon $v = 3\sqrt{2} \sin \omega t$, tada je $V = 3\underline{/0°}$. Prema (1.129) dobivamo:

$$I = \frac{V}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{3\underline{/0°}}{2 + j(6 - 8)} = \frac{3\underline{/0°}}{2 - j2} = \frac{3\underline{/0°}}{2\underline{/-45°}} =$$

$$= 1{,}5\underline{/45°} = 1{,}5\, e^{j45°}.$$

Odatle možemo napisati direktno: $i = 1{,}5\sqrt{2} \sin(\omega t + 45°)$. Struju kao funkciju vremena dobivamo zapravo na osnovi (1.122) ako fazor I pomnožimo sa $\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$, a zatim uzmemo imaginarni dio produkta:

$$i = \mathrm{Im}\left[1{,}5\sqrt{2}\, e^{j\omega t} e^{j45°}\right] = \mathrm{Im}\left[1{,}5\sqrt{2}\, e^{j(\omega t + 45°)}\right] = 1{,}5\sqrt{2} \sin(\omega t + 45°).$$

Direktno pisanje jednadžbi u transformiranom obliku

Upravo smo pokazali kako se jednadžba (1.106):

$$v = R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t$$

transformira u jednadžbu (1.127):

$$V = RI + j\,\omega\,LI + \frac{1}{j\omega C}I.$$

Usporedimo li te jednadžbe, vidimo da je pad napona uslijed otpora, $v_R = R\,i$, transformiran u RI, pad napona uslijed samoinduktiviteta, $v_L = L\,(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$, u $j\,\omega\,LI$, a pad napona uslijed kapaciteta, $v_C = (1/C)\int i\,\mathrm{d}t$, u $(1/j\,\omega\,C)\,I$. Znak zbrajanja ostao je nepromijenjen i u transformiranoj jednadžbi.

Na sličan način kao i jednadžbu (1.106) možemo transformirati svaku diferencijalnu jednadžbu strujnog kruga koja je istog tipa (linearna jednadžba s konstantnim koeficijentima). Pritom postupak kojim dolazimo do transformirane jednadžbe možemo izostaviti (tako se redovito i radi), a jednadžbu možemo napisati direktno, tako da zamijenimo:

$$\begin{aligned}
v &\;\ldots\ldots\ldots\; V,\\
i &\;\ldots\ldots\ldots\; I,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} &\;\ldots\ldots\ldots\; j\,\omega,\\
\int_0^t \ldots\,\mathrm{d}t &\;\ldots\ldots\ldots\; \frac{1}{j\,\omega} \text{ ili } -\frac{j}{\omega}.
\end{aligned}$$

Operacije zbrajanja, odbijanja i množenja s konstantom prenose se u transformirano područje nepromijenjene. Međutim, pri ostalim računskim operacijama moramo biti pažljivi. Na primjer, momentana snaga definira se produktom $v\,i$, ali produkt VI ne predstavlja snagu u transformiranom području.

Množenje kompleksnog broja sa j i sa —j

Neka je zadan kompleksan broj $A = |A|\,e^{j\alpha}$ koji je geometrijski prikazan na slici 1.47. crtom r. Produkt kompleksnog broja A sa j opet je kompleksan broj. Pitanje je kakva je geometrijska interpretacija kompleksnog broja $j\,A$?

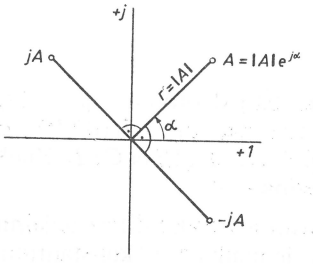
Prema Eulerovoj relaciji, $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$, možemo j napisati u eksponencijalnom obliku ovako:

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Prema tome, dobivamo:

$$jA = j\,|A|\,e^{j\alpha} = e^{j\frac{\pi}{2}}\,|A|\,e^{j\alpha} = |A|\,e^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Odatle vidimo da množenjem kompleksnog broja $A = |A|\,e^{j\alpha}$ sa j dobivamo kompleksan broj istog modula, a argumenta uvećanog za $\pi/2$ radijana ili za 90°. Geometrijska je interpretacija broja jA, prema tome, crta duljine $|A|$ koja je prema crti r na slici 1.47. zakrenuta za 90° u smjeru suprotnom od okretanja kazaljke na satu.



Sl. 1.47. Geometrijska interpretacija kompleksnih brojeva A, jA i $-jA$

Slično se množenjem kompleksnog broja $A = |A|\,e^{j\alpha}$ sa $(-j)$ dobiva kompleksan broj kojeg je modul $|A|$, a argument $(\alpha - \pi/2)$. Dakle, geometrijska interpretacija broja $(-jA)$ jest crta duljine $|A|$ koja je prema crti r na slici 1.47. zakrenuta za 90° u smjeru okretanja kazaljke na satu. Dokaz je sličan onome prije: kako je:

$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

uvrštenjem slijedi da je:

$$-jA = -j\,|A|\,e^{j\alpha} = e^{-j\frac{\pi}{2}}\,|A|\,e^{j\alpha} = |A|\,e^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Impedancija i admitancija

Prema definiciji, omjer transformacije napona $V = |V|\,e^{j\beta}$, i transformacije struje $I = |I|\,e^{j\alpha}$, naziva se *impedancija*, a označava se sa Z:

$$Z = \frac{V}{I}. \tag{1.130}$$

Budući da je impedancija omjer dvaju kompleksnih brojeva, i ona je u općem slučaju kompleksan broj, pa je stoga možemo napisati u obliku:

$$Z = |Z|\,e^{j\varphi} = |Z|\angle\varphi. \tag{1.131}$$

Prema (1.130) imamo:

$$Z = \frac{|V|\,e^{j\beta}}{|I|\,e^{j\alpha}} = \frac{|V|}{|I|}\,e^{j(\beta-\alpha)}, \tag{1.132}$$

pa odatle uspoređenjem sa (1.131) slijedi da je modul impedancije, $|Z|$, jednak omjeru efektivnih vrijednosti napona i struje, a argument, φ, jednak je razlici kutova od V i I, tj.:

$$|Z| = \frac{|V|}{|I|}, \quad \varphi = \beta - \alpha.$$

Treba naglasiti da Z, koji je kompleksan broj, nema značenje fazora, jer ne simbolizira veličinu koja se sinusoidno mijenja s vremenom. Također spomenimo usput da omjer momentanih vrijednosti sinusoidnih napona i strujâ, v/i, nije impedancija i nema praktično značenje.

Na osnovi definicije dane jednadžbom (1.130) i prema jednadžbi (1.129) slijedi da je impedancija serijskog RLC spoja:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) =$$

$$= R + j(X_L - X_C) = R + jX. \tag{1.133}$$

R je realni dio impedancije, a $X = X_L - X_C$ je imaginarni dio. X se naziva *reaktancija*.

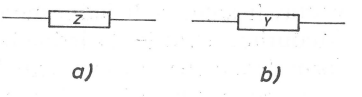
U eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku, pisano skraćeno, imamo:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \; \underline{/\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)} =$$

$$= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \; \underline{/\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)} = \tag{1.134}$$

$$= \sqrt{R^2 + X^2} \; \underline{/\operatorname{arc\,tg}\frac{X}{R}}.$$

Različite kombinacije pasivnih elemenata često se u modelu mreže prikazuju jednim grafičkim simbolom koji predočava impedanciju te kombinacije. U tom pogledu postoji u literaturi prilično raznolikosti; naime, razni autori upotrebljavaju različite simbole. Grafički simbol za impedanciju, prema IEC 117-1 i JUS N. A3. 011, prikazan je na slici 1.48 a.



Sl. 1.48. a) Grafički simbol za impedenciju prema IEC 117-1 i JUS N. A3. O11. b) Grafički simbol za admitanciju koji ćemo upotrebljavati.

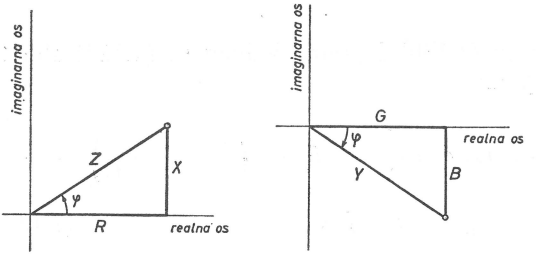
Recipročna vrijednost impedancije naziva se *admitancija* i označava se sa Y:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = \frac{|I|}{|V|} e^{j(\alpha - \beta)} = |Y| e^{-\varphi} = |Y| \underline{/-\varphi}, \tag{1.135}$$

ili:

$$Y = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB. \qquad (1.136)$$

G se naziva konduktancija, a B susceptancija. Konduktancija je realni dio, a susceptancija imaginarni dio admitancije. Grafički simbol koji ćemo upotrebljavati prikazan je na slici 1.48 b. U ravnini kompleksnih brojeva impedancija je prikazana na slici 1.49 a, a admitancija na slici 1.49 b.



Sl. 1.49. a) Impedancija i b) admitancija prikazane u ravnini kompleksnih brojeva

Ohmov zakon i Kirchhoffovi zakoni u simboličkom obliku

Ohmov zakon. Vratimo se na početak ovog poglavlja i podsjetimo se da se jednadžba (1.1), $v = Ri$, koja predstavlja matematičku formulaciju Ohmovog zakona, odnosi na strujne krugove s istosmjernom strujom, ali isto tako i na krugove u kojima je struja vremenski promjenjiva ako induktiviteti i kapaciteti u krugu ne utječu osjetnije na odnos napona i struja. Omjer napona v među krajevima vodiča i struje i kroz vodič u svakom trenutku vremena jednak je otporu R.

Ako se struja i napon mijenjaju sinusoidno s vremenom, a u krugu postoje R, L i C, dobili smo primjenjujući simboličku metodu, da je omjer V/I jednak impedanciji Z, što možemo napisati u obliku:

$$V = ZI. \qquad (1.137)$$

Kako nas podsjeća na (1.1), jednadžbu (1.137) nazivamo Ohmov zakon u simboličkom obliku.

I. Kirchhoffov zakon. Kada smo govorili o I. Kirchhoffovu zakonu, pretpostavili smo, radi jednostavnije predodžbe, da vodičima teku istosmjerne struje. Međutim, očito je da jednadžbe (1.2), (1.5) i (1.7), koje predstavljaju matematičku formulaciju tog zakona, vrijede i kada su struje vremenski promjenjive, što slijedi iz načela o održanju električnih naboja. Znači, ako je $i(t)$ simbol za momentalnu vrijednost jakosti struje (bilo za »ulazne« struje ili za »izlazne« struje), općenito je:

$$\Sigma i(t) = 0$$

u svakom trenutku vremena.

Uzmimo sada posebno slučaj kada se struje mijenjaju sinusoidno s vremenom a frekvencije su im jednake. Znamo otprije da zbrajanjem sinusoidnih valova iste frekvencije dobivamo kao rezultat opet val sinusoidnog oblika kojega je frekvencija jednaka frekvenciji komponentnih valova. Prema tome, ako su zadane dvije struje:

$$i_1(t) = \sqrt{2}\,|\,I_1\,|\sin(\omega t + \alpha_1)$$

i

$$i_2(t) = \sqrt{2}\,|\,I_2\,|\sin(\omega t + \alpha_2),$$

njihov je zbroj struja $i_3(t)$ koja je sinusoidnog oblika i kružne frekvencije ω:

$$i_3(t) = \sqrt{2}\,|\,I_3\,|\sin(\omega t + \alpha_3).$$

Struja $i_3(t)$ određena je ako znamo $|\,I_3\,|$ i α_3. Da bismo odredili $|\,I_3\,|$ i α_3 iz poznatih $|\,I_1\,|$, $|\,I_2\,|$, α_1 i α_2, pođimo od jednadžbe:

$$\sqrt{2}\,|\,I_3\,|\sin(\omega t + \alpha_3) = \sqrt{2}\,|\,I_1\,|\sin(\omega t + \alpha_1) + \sqrt{2}\,|\,I_2\,|\sin(\omega t + \alpha_2).$$

Odatle je, dijeljenjem sa $\sqrt{2}$ i prema formuli za sinus zbroja dvaju kutova, nakon preuređenja:

$$|\,I_3\,|\cos\alpha_3 \sin\omega t + |\,I_3\,|\sin\alpha_3\cos\omega t =$$
$$= (\,|\,I_1\,|\cos\alpha_1 + |\,I_2\,|\cos\alpha_2)\sin\omega t + (\,|\,I_1\,|\sin\alpha_1 + |\,I_2\,|\sin\alpha_2)\cos\omega t.$$

Ta jednadžba vrijedi za svaki t samo ako su koeficijenti uz članove sa $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ na lijevoj i desnoj strani međusobno jednaki, tj. ako je:

$$|\,I_3\,|\sin\alpha_3 = |\,I_1\,|\sin\alpha_1 + |\,I_2\,|\sin\alpha_2, \tag{1.138}$$

$$|\,I_3\,|\cos\alpha_3 = |\,I_1\,|\cos\alpha_1 + |\,I_2\,|\cos\alpha_2. \tag{1.139}$$

Kvadriramo li obje jednadžbe, pa ih zatim zbrojimo, dobivamo da je:

$$|\,I_3\,| = \sqrt{(\,|\,I_1\,|\cos\alpha_1 + |\,I_2\,|\cos\alpha_2)^2 + (\,|\,I_1\,|\sin\alpha_1 + |\,I_2\,|\sin\alpha_2)^2},$$

a dijeljenjem (1.138) sa (1.139) slijedi da je:

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{|\,I_1\,|\sin\alpha_1 + |\,I_2\,|\sin\alpha_2}{|\,I_1\,|\cos\alpha_1 + |\,I_2\,|\cos\alpha_2},$$

odnosno:

$$\alpha_3 = \operatorname{arc\,tg}\frac{|\,I_1\,|\sin\alpha_1 + |\,I_2\,|\sin\alpha_2}{|\,I_1\,|\cos\alpha_1 + |\,I_2\,|\cos\alpha_2}.$$

Prema tome, struja $i_3(t)$ iznosi:

$$i_3(t) = \sqrt{2}\,|\,I_3\,|\sin(\omega t + \alpha_3) =$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{(\,|\,I_1\,|\cos\alpha_1 + |\,I_2\,|\cos\alpha_2)^2 + (\,|\,I_1\,|\sin\alpha_1 + |\,I_2\,|\sin\alpha_2)^2}\cdot$$
$$\cdot\sin\left(\omega t + \operatorname{arc\,tg}\frac{|\,I_1\,|\sin\alpha_1 + |\,I_2\,|\sin\alpha_2}{|\,I_1\,|\cos\alpha_1 + |\,I_2\,|\cos\alpha_2}\right). \tag{1.140}$$

Pokažimo sada da ćemo do istog rezultata doći ako struje $i_1(t)$ i $i_2(t)$ predočimo njihovim transformacijama:

$$I_1 = |I_1| e^{j\alpha_1} = |I_1| (\cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1),$$
$$I_2 = |I_2| e^{j\alpha_2} = |I_2| (\cos \alpha_2 + j \sin \alpha_2).$$

Zbrajanjem I_1 i I_2 dobivamo:

$$I_3 = I_1 + I_2 = |I_1| (\cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1) + |I_2| (\cos \alpha_2 + j \sin \alpha_2) =$$
$$= (|I_1| \cos \alpha_1 + |I_2| \cos \alpha_2) + j (|I_1| \sin \alpha_1 + |I_2| \sin \alpha_2),$$

ili u eksponencijalnom obliku:

$$I_3 = \sqrt{(|I_1| \cos \alpha_1 + |I_2| \cos \alpha_2)^2 + (|I_1| \sin \alpha_1 + |I_2| \sin \alpha_2)^2} \cdot$$
$$\cdot e^{j \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{|I_1| \sin \alpha_1 + |I_2| \sin \alpha_2}{|I_1| \cos \alpha_1 + |I_2| \cos \alpha_2} \right)}.$$

Odatle inverznom transformacijom neposredno slijedi (1.140).

Prema tome, kada se struje mijenjaju sinusoidno s vremenom, umjesto da pišemo I. Kirchhoffov zakon kao algebarsku sumu momentanih vrijednosti struja, možemo napisati:

$$\Sigma I = 0. \tag{1.141}$$

Jednadžba (1.141) predstavlja I. Kirchhoffov zakon u simboličkom obliku.

II. Kirchhoffov zakon. Kao što smo pokazali da vrijedi jednadžba (1.141), koja predstavlja I. Kirchhoffov zakon u simboličkom obliku, analogno tome možemo napisati i jednadžbu II. Kirchhoffova zakona. Ako su naponi vremenski promjenjivi, pa nam $v(t)$ predstavlja simbol bilo za »pad napona«, bilo za »porast napona«, tada za bilo koji strujni krug vrijedi da je:

$$\Sigma v(t) = 0$$

u svakom trenutku t. U posebnom slučaju, kada su naponi sinusoidnog oblika, možemo napisati:

$$\Sigma V = 0, \tag{1.142}$$

gdje je V transformacija napona $v(t)$ prema (1.121). Jednadžba (1.142) predstavlja II. Kirchhoffov zakon u simboličkom obliku.

Drugo poglavlje

OSNOVE MATRIČNE ALGEBRE

Prošlo je već više od sto godina otkako je engleski matematičar James Joseph Sylvester (1814—1897) u matematiku uveo matrice (1850. god.). Međutim, one se u nauci široko primjenjuju tek u posljednje vrijeme, nakon što su se počela upotrebljavati digitalna elektronička računala.

Primjena matrične algebre u analizi električnih mreža i strojeva temelji se na radovima Gabrijela Krona što ih je objavio neposredno pred drugi svjetski rat. Kron je razvio općenitu teoriju primjenjujući tenzore, ali kasnije je primijećeno da se velik broj problema u analizi mreža može riješiti i samo pomoću matrica. Ovdje ćemo dati osnove matrične algebre, ali samo u onolikom opsegu koliko je dovoljno za praćenje onoga što dalje slijedi.

2.1. Definicija i označavanje matrice

Matricom nazivamo pravokutni raspored od $m \times n$ brojeva svrstanih u m redaka i n stupaca. Pojedini brojevi nazivaju se *elementi* matrice.

Ovdje ćemo matrice prikazivati tako što ćemo pojedine elemente međusobno odvojiti horizontalnim i vertikalnim crtama, a sve zajedno uokviriti. Na primjer:

$$\left|\begin{array}{c|c|c} 1 & 5 & -8 \\ \hline 3 & -2 & 6 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c|c} 2 & -3 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline 4 & 7 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c|c|c} 9 & 5 & -4 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & -6 & 0 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} 5 & 0 & -7 & 4 & 9 \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c} 3+j2 & 4-j9 & -1-j3 \\ \hline 0{,}5 & -j6 & 4/3 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c|c} (x-2)^3 & 3 \\ \hline -0{,}7 & x^{-1} \end{array}\right|.$$

Elementi matrica mogu biti realni i kompleksni brojevi, opći simboli, algebarski izrazi itd, pa čak i same matrice, kao što ćemo vidjeti kasnije.

Često se elementi matrice označavaju općim simbolom. Ako matrica ima više nego jedan redak i stupac, tada položaj elementa u matrici određuju dva indeksa uz opći simbol. Prema dogovoru, prvi indeks uvijek ooznačava redak kojemu

element pripada, a drugi indeks označava stupac. Ako matrica ima jedan redak ili jedan stupac, tada uz opći simbol pišemo jedan indeks koji označava redak ili stupac u kojem se nalazi element. Na primjer:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}.$$

Matrica koja ima samo jedan redak naziva se *redna matrica* ili *redni vektor*, a ona koja ima samo jedan stupac *stupčana matrica* ili *stupčani vektor*.

Matrica može imati i samo jedan element. Na primjer u matrici:

$$\begin{vmatrix} 23 \end{vmatrix}$$

broj 23 je jedini element. Taj broj treba razlikovati od same matrice, jer se, kao što ćemo vidjeti, brojem može pomnožiti bilo koja matrica, ali matricu koja ima samo jedan element možemo pomnožiti samo vektorom.

Primjenjuje se i skraćeno pisanje matrica. Ovdje ćemo za skraćeno označavanje upotrebljavati masna slova, ili ćemo opći element matrice staviti u uglatu zagradu. Na primjer:

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}.$$

Od ostalih načina označavanja matrica u literaturi se najčešće susreću:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}.$$

ili skraćeno:

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = (a_{jk}) = \{a_{jk}\} = \| a_{jk} \|.$$

Pisanje matrica ovako kako smo ovdje prihvatili pogodno je onda kada je veći broj elemenata u matrici jednak nuli, a to će ovdje biti veoma često. Izostavimo li nule, matrica će i dalje biti pregledno napisana; npr:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 5 & & & & 2 \\ \hline & 6 & 1 & & \\ \hline & & & 7 & \\ \hline \end{array}.$$

Treba upamtiti da nam pri takvom pisanju matrica praznine uvijek nadomještaju element nula!

2.2. Neki tipovi matrica

Kvadratne matrice. Kvadratne su matrice one matrice koje imaju jednak broj redaka i stupaca. Ako je broj redaka i stupaca n, kažemo da je kvadratna matrica n-tog reda.

Elementi kvadratne matrice koji se protežu od gornjeg lijevog ugla do donjeg desnog ugla nazivaju se elementima glavne dijagonale, ili kraće dijagonalni elementi. Na primjer, matrica:

3	−2	1	10
4	2	7	8
5	−1	1	4
2	6	17	8

e kvadratna matrica koje su dijagonalni elementi 3, 2, 1 i 8.

Trokutaste matrice. Razlikuju se *donje trokutaste matrice* i *gornje trokutaste matrice*. Ako su svi elementi iznad glavne dijagonale u kvadratnoj matrici jednaki nuli, ona se tada naziva donja trokutasta matrica. Suprotno tome, gornja je trokutasta matrica ona kvadratna matrica u kojoj su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli. Na primjer, matrica:

4	0	0	0
2	−1	0	0
7	5	5	0
1	3	−6	2

je donja trokutasta matrica, a matrica:

8	3	−4	2
0	1	6	3
0	0	7	−4
0	0	0	5

je gornja trokutasta matrica.

Simetrične matrice. Simetrične su matrice sve one kvadratne matrice u kojima su elementi što se nalaze u simetričnom položaju prema glavnoj dijagonali međusobno jednaki. Prema tome, u takvim je matricama općenito:

$$a_{jk} = a_{kj},$$

gdje je a_{jk} element matrice u j-tom retku i k-tom stupcu, a a_{kj} u k-tom retku i j-tom stupcu. Na primjer, simetrična je matrica:

1	4	6	−5
4	3	0	−1
6	0	2	7
−5	−1	7	4

.

Hermitove matrice. Kvadratne matrice u kojima su svi dijagonalni elementi realni brojevi, a elementi koji leže simetrično prema glavnoj dijagonali konjugirano kompleksni brojevi, nazivaju se Hermitove matrice. Dakle, u Hermitovim je matricama:

$$a_{jk} = a_{kj}^{*},$$

gdje zvjezdica iznad a označava konjugirano kompleksnu vrijednost od a. Na primjer, slijedeća je matrica Hermitova matrica:

10	$3 + j2$	$-j6$
$3 - j2$	6	$3 + j1$
$j6$	$3 - j1$	-3

.

Dijagonalna matrica. To je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli. Na primjer:

4	0	0
0	12	0
0	0	$5+j3$

.

Jedinična matrica. Ako su u kvadratnoj matrici svi elementi glavne dijagonale jedinice, a svi preostali elementi nule, takva matrica naziva se jedinična. Označavat ćemo je skraćeno simbolom **1**. Na primjer:

$$\mathbf{1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Spomenimo još da su uobičajene i druge oznake za jediničnu matricu, na primjer **E**, **U**, **I**.

Nulmatrica. Matrica u kojoj su svi elementi nule naziva se nulmatrica. Označava se skraćeno simbolom **0**. Na primjer:

$$\mathbf{0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Transponirana matrica. Zamijenimo li u istom poretku retke i stupce neke matrice, dobivamo transponiranu matricu zadane matrice. Označavat ćemo je istim slovom kao i polaznu matricu, ali s dodanim znakom »~« iznad simbola polazne matrice. Tako ćemo npr. transponiranu matricu od matrice **A** označiti simbolom $\widetilde{\mathbf{A}}$. Uobičajene su i druge oznake: $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}_t$, itd. Na primjer, ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

tada je transponirana matrica od **A**:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 2 \\ 9 & 10 & 1 \end{vmatrix}.$$

Konjugirana matrica. Ako su elementi neke matrice kompleksni brojevi, pa ih zamijenimo njihovim konjugirano kompleksnim vrijednostima, dobivamo matricu koju nazivamo konjugirana matrica zadane matrice. Označavat ćemo je istim slovom kao i polaznu matricu, ali s dodanim znakom »*« s gornje desne strane. Prema tome, konjugiranu matricu od **A** označit ćemo sa $\mathbf{A}^*$. Na primjer, ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5+j3 & -4 \\ -1-j6 & j1 \\ -j2 & 3-j4 \end{vmatrix},$$

tada je konjugirana matrica:

$$\mathbf{A}^* = \begin{vmatrix} 5-j3 & -4 \\ -1+j6 & -j1 \\ j2 & 3+j4 \end{vmatrix}.$$

2.3. Računske operacije s matricama

Jednakost matrica

Dvije matrice jednake su ako je svaki element jedne matrice jednak odgovarajućem elementu druge matrice. Odatle slijedi da dvije matrice mogu biti jednake samo ako imaju jednak broj redaka i jednak broj stupaca.

Prema tome, ako su i matrica $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ i matrica $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ $m \times n$ matrice, možemo napisati:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B},$$

kada je

$$a_{jk} = b_{jk} \text{ za sve } j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n.$$

Na primjer, jednake su matrice:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 12 \\ -3 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 12 \\ -3 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3+j4 & -j2 \\ -5 & -6-j2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+j4 & -j2 \\ -5 & -6-j2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

Ako je na primjer:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

iz definicije jednakosti matrica slijedi da je:

$$a = 5,\ b = -4,\ c = 2,\ d = 7,\ e = 3,\ f = 0.$$

Zbrajanje i odbijanje matrica

Dvije se matrice zbrajaju ili odbijaju tako da se zbroje ili odbiju odgovarajući elementi obiju matrica. Budući da odgovarajući elementi postoje samo ako matrice imaju isti broj redaka i isti broj stupaca, to znači da matrice možemo zbrajati ili odbijati samo u tom slučaju. Na primjer:

$$\begin{array}{|ccc|} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{array} + \begin{array}{|ccc|} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & -2 \end{array} = \begin{array}{|ccc|} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{array},$$

$$\begin{array}{|ccc|} 4 & 3 & 6 \\ 5 & -10 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \end{array} - \begin{array}{|ccc|} 2 & 8 & 4 \\ -7 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{array} = \begin{array}{|ccc|} 2 & -5 & 2 \\ 12 & -10 & -2 \\ 0 & 10 & -2 \end{array}.$$

Općenito, ako su $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ i $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ dvije $m \times n$ matrice, njihov zbroj definiran je kao $m \times n$ matrica $\mathbf{C} = [c_{jk}]$, kojeg su elementi:

$$c_{jk} = a_{jk} + b_{jk} \text{ za } j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n.$$

Pišemo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Analogno tome razlika matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je $m \times n$ matrica $\mathbf{D} = [d_{jk}]$, gdje je:

$$d_{jk} = a_{jk} - b_{jk}.$$

Pišemo:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

Kako zakoni komutacije i asocijacije vrijede za zbroj odgovarajućih elemenata, oni vrijede i za zbroj matrica, tj.:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

i

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

Množenje matrice brojem

Matricu množimo brojem tako da svaki element matrice pomnožimo tim brojem. Ta definicija slijedi iz definicije zbrajanja matrica.
Na primjer:

$$5 \cdot \begin{array}{|ccc|} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{array} = \begin{array}{|ccc|} 15 & -5 & 30 \\ 10 & 20 & 25 \end{array},$$

$$\frac{1}{k} \cdot \begin{array}{|cc|} a & c \\ b & d \end{array} = \begin{array}{|cc|} a/k & c/k \\ b/k & d/k \end{array},$$

$$\begin{array}{|cc|} 5+j2 & -6-j3 \\ 4 & -j7 \end{array} \cdot (-2) = \begin{array}{|cc|} -10-j4 & 12+j6 \\ -8 & j14 \end{array}.$$

Općenito, ako je b skalar, a $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, njihov je produkt:

$$b\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,b = b\,[a_{jk}].$$

Umjesto $(-1) \cdot \mathbf{A}$ pišemo $(-\mathbf{A})$, pa je:

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

Osim što iz same definicije slijedi zakon komutacije, ovdje vrijedi i zakon asocijacije (ako se matrica množi produktom više brojeva):

$$(k \cdot m) \cdot \mathbf{A} = k \cdot (m \cdot \mathbf{A}) = m \cdot (k \cdot \mathbf{A})$$

i zakon distribucije:

$$(k + m) \cdot \mathbf{A} = k \cdot \mathbf{A} + m \cdot \mathbf{A}$$

i:

$$k \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k \cdot \mathbf{A} + k \cdot \mathbf{B}.$$

Množenje matrica

Iako se množenje matrica razlikuje od množenja u uobičajenom smislu, produkt dviju matrica označavamo na isti način kao i produkt brojeva. Na primjer, produkt matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ pišemo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ili $\mathbf{AB}$. Međutim, treba upamtiti da neka pravila koja vrijede za množenje brojeva ne vrijede i za množenje matrica.

Definicija. Ako matrica $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ ima m redaka i p stupaca, dakle ako je $m \times p$ matrica*, a matrica $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ ima p redaka i n stupaca, dakle ako je $p \times n$ matrica, produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (u ovom redoslijedu) je $m \times n$ matrica $\mathbf{C} = [c_{jk}]$, kojeg su elementi:

$$c_{jk} = a_{j1}\,b_{1k} + a_{j2}\,b_{2k} + \ldots + a_{jp}\,b_{pk} = \sum_{s=1}^{p} a_{js}b_{sk}$$

za sve $j = 1, \ldots, m$ i $k = 1, \ldots, n$.

Pišemo kraće:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Odatle slijedi da element matrice $\mathbf{C}$ u j-tom retku i k-tom stupcu dobivamo množenjem elemenata j-tog retka od $\mathbf{A}$ i k-tog stupca od $\mathbf{B}$ redom kako dolaze, a zatim pojedine produkte zbrojimo. Da bismo postupak lakše upamtili prikazali smo ga shematski na slici 2.1.

Na primjer:

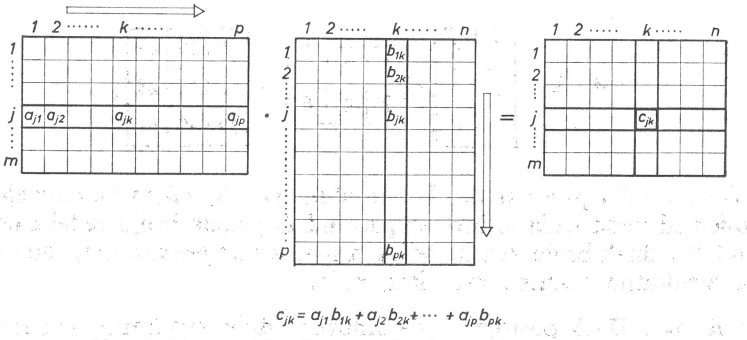
$$\begin{array}{|cc|}\hline 3 & -2 \\ \hline 5 & -1 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & -3 & 2 & 5 \\ \hline -4 & 6 & 8 & -6 \\ \hline\end{array} =$$

*Umjesto da pišemo $m \times p$ matrica, kasnije ćemo pisati i (m, p)-matrica.

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3\cdot 1+(-2)(-4) & 3(-3)+(-2)6 & 3\cdot 2+(-2)8 & 3\cdot 5+(-2)(-6) \\ \hline 5\cdot 1+(-1)(-4) & 5(-3)+(-1)6 & 5\cdot 2+(-1)8 & 5\cdot 5+(-1)(-6) \\ \hline 0\cdot 1+4\cdot(-4) & 0(-3)+4\cdot 6 & 0\cdot 2+4\cdot 8 & 0\cdot 5+4\cdot(-6) \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & -21 & -10 & 27 \\ \hline 9 & -21 & 2 & 31 \\ \hline -16 & 24 & 32 & -24 \\ \hline \end{array}.$$

Produkt ima toliko redaka koliko redaka ima lijeva matrica i toliko stupaca koliko stupaca ima desna matrica.



$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jp}b_{pk}$$

Sl. 2.1. Shematski prikaz množenja matrica

Kako je produkt matrica definiran samo kada je broj stupaca lijeve matrice jednak broju redaka desne, iz toga slijedi da se ne mogu međusobno pomnožiti bilo koje dvije matrice. Osim toga, slijedi i to da množenje matrica općenito *nije komutativno*. Dakle općenito je:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}.$$

Na primjer, ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & -1 & 3 \\ \hline 4 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 3 & 4 \\ \hline -2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array},$$

tada je:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & -1 & 3 \\ \hline 4 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 3 & 4 \\ \hline -2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 14 & 12 \\ \hline 6 & 9 & 2 \\ \hline \end{array},$$

ali produkt $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ ne postoji, jer je broj stupaca matrice **B** tri, a broj redaka matrice **A** dva, pa ih prema definiciji ne možemo pomnožiti u tom poretku.

Ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix},$$

tada je:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32 & 43 \\ 40 & 56 \end{vmatrix},$$

a:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 19 & 29 \\ 8 & 18 & 28 \\ 17 & 39 & 61 \end{vmatrix}.$$

Dakle, iako postoji i produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ i produkt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, zakon komutacije ne može biti ispunjen ni onda kada je broj stupaca od **A** jednak broju redaka od **B** i broj stupaca od **B** jednak broju redaka od **A**, a matrice su *pravokutne;* tada su matrice produkta kvadratne matrice različitog reda.

Produkti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ postoje i kada množimo dvije kvadratne matrice (možemo množiti samo kvadratne matrice istoga reda). Tada su i matrice produkta $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ istoga reda kao i matrice pojedinih faktora. Međutim, zakon komutacije ni ovdje općenito ne vrijedi, osim u sasvim iznimnim slučajevima. Na primjer, ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 7 & 6 \end{vmatrix},$$

ali je:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 11 & 14 \end{vmatrix},$$

dakle, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Evo i jedan primjer kada zakon komutacije vrijedi:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 16 & -1 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}.$$

Nakon ovih primjera u kojima smo vidjeli da zakon komutacije za produkt dviju matrica općenito ne vrijedi, jasno je da *redoslijed matrica u produktu ne smijemo mijenjati.* Zato i kažemo da je u produktu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ matrica $\mathbf{A}$ pomnožena *zdesna* matricom $\mathbf{B}$, a da je matrica $\mathbf{B}$ pomnožena *slijeva* matricom $\mathbf{A}$.

Zadovoljavaju li matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, i $\mathbf{C}$ zahtjeve za množenje i zbrajanje s obzirom na broj redaka i stupaca, tada vrijedi *zakon asocijacije*:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

i *zakon distribucije*:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C},$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}.$$

Množenje s jediničnom matricom. Množimo li neku matricu s jediničnom matricom s kojom se s obzirom na broj redaka i stupaca može pomnožiti, kao rezultat dobivamo uvijek tu istu matricu. Ako je $\mathbf{1}$ jedinična matrica n-tog reda, a $\mathbf{B}$ je $m \times n$ matrica, tada je:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{B},$$

a ako je $\mathbf{C}$ $n \times m$ matrica, tada je:

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}.$$

Ako je matrica $\mathbf{A}$ kvadratna n-matrica, možemo je pomnožiti s jediničnom n-matricom s lijeve ili s desne strane. U oba će slučaja matrica $\mathbf{A}$ ostati nepromijenjena. To znači da je:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Množenje nulmatricom. Pomnožimo li neku matricu nulmatricom (koje je broj redaka i stupaca takav da se one mogu pomnožiti), dobivamo nulmatricu. Dobivena nulmatrica općenito nije istog oblika kao matrica kojom smo množili. Na primjer:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 4 & 2 \\ -7 & 0 & 8 & 1 & -9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nulmatrica kojom smo množili je (5×2)-matrica, a produkt (2×2)-nulmatrica. Ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica, pa je množimo nulmatricom istoga reda, tada je:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Na primjer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Uočimo ovdje jednu razliku prema produktu običnih brojeva. Množimo li dva broja, njihov je produkt jednak nuli samo ako je barem jedan faktor nula. Množimo li dvije matrice, produkt može biti nulmatrica i onda kada ni jedan faktor nije nulmatrica. Na primjer:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ne slijedi, međutim, da množenjem tih matrica u obratnom redoslijedu moramo dobiti nulmatricu. Zamijenimo li u gornjem produktu faktore, dobivamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Transponirana matrica zbroja, razlike i produkta

Istu matricu dobit ćemo ako dvije ili više matrica najprije zbrojimo, pa zatim matricu sume transponiramo, ili ako najprije matrice pojedinih sumanada transponiramo, pa ih nakon toga zbrojimo. Za dva sumanda možemo napisati:

$$\widetilde{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}} + \widetilde{\mathbf{B}}.$$

Za razliku je analogno:

$$\widetilde{\mathbf{A} - \mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{B}}.$$

Da bismo odredili *transponiranu matricu produkta dviju ili više matrica* — umjesto da matrice najprije međusobno pomnožimo, a zatim produkt transponiramo — možemo postupiti i tako da najprije transponiramo svaku pojedinu matricu, a zatim da pojedine transponirane matrice međusobno pomnožimo, ali u *obratnom redoslijedu.*

Za dva faktora je:

$$\widetilde{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{B}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}},$$

a za tri faktora:

$$\widetilde{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}} = \widetilde{\mathbf{C}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}, \quad \text{itd.}$$

Na primjer:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 16 \\ 45 & 49 \end{vmatrix},$$

a

$$\widetilde{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \begin{vmatrix} 10 & 45 \\ 16 & 49 \end{vmatrix}.$$

Ili:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\widetilde{\mathbf{B}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 45 \\ 16 & 49 \end{vmatrix} = \widetilde{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}.$$

Konjugirana matrica zbroja, razlike i produkta

Konjugirana matrica *zbroja* ili *razlike* dviju matrica jednaka je zbroju ili razlici konjugiranih pojedinih matrica:

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \pm \mathbf{B}^*.$$

Konjugirana matrica produkta dviju matrica jednaka je produktu konjugiranih pojedinih matrica u *istom redoslijedu*:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^*.$$

Ova se dva pravila i pravila za zbroj i produkt transponiranih matrica često primjenjuju u izvodima kako bi se izrazi pojednostavnili.

Inverzija matrice

Dijeljenje matrica nije definirano. Zašto nije definirano pokazat ćemo na primjeru. Neka je:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{vmatrix}.$$

Množenjem tih matrica dobivamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \end{bmatrix}.$$

Na osnovi pravila aritmetike mogli bismo napisati:

$$\frac{\begin{bmatrix} 34 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Međutim, na osnovi definicije množenja matrica također je na primjer:

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \end{bmatrix}$$

i:

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \end{bmatrix},$$

pa bismo, napišemo li kao prije, u obliku kvocijenta:

$$\frac{\begin{bmatrix} 34 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$\frac{\begin{bmatrix} 34 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 7 \end{bmatrix},$$

dijeleći dvije iste matrice dobili tri različita rezultata. Ovo su samo proizvoljno izabrani primjeri, ali lako bismo mogli pronaći još mnogo matrica koje pomnožene matricom:

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{vmatrix}$$

daju matricu $\begin{vmatrix} 34 \end{vmatrix}$. Zapravo, takvih matrica ima beskonačno mnogo. Znači da operacija dijeljenja matrica uvedena na ovaj način ne bi bila jednoznačna.

Umjesto operacije »dijeljenja« matrica definirana je operacija *inverzije* matrica. Zašto smo rekli »umjesto« objasnit ćemo slijedećom analogijom. Podijelimo li npr. broj 5 samim sobom, rezultat je broj 1. Umjesto $5 : 5 = 1$ možemo napisati to isto i u obliku $5 \cdot (1/5) = 1$. Također je i $(1/5) \cdot 5 = 1$. Kažemo da broj 5 pomnožen njegovom recipročnom ili inverznom vrijednošću bilo slijeva bilo zdesna daje kao rezultat broj 1. To vrijedi za svaki broj osim nule, tj.:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad (a \neq 0),$$

što možemo napisati i ovako:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \quad (a \neq 0).$$

Slično je definirana inverzna matrica.

Definicija. Ako je zadana kvadratna matrica $\mathbf{A}$, drugu kvadratnu matricu, koju označavamo sa $\mathbf{A}^{-1}$, nazivamo inverznom matricom od matrice $\mathbf{A}$ kada su zadovoljene slijedeće relacije:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}. \tag{2.1}$$

Samo *kvadratne matrice mogu imati inverznu matricu*, jer iz pravila o množenju matrica slijedi da relacija (2.1) može biti ispunjena samo kada je matrica $\mathbf{A}$ kvadratna. Međutim, *sve kvadratne matrice nemaju inverznu matricu*. To su one kvadratne matrice kojih je determinanta jednaka nuli. Zašto je to tako vidjet ćemo malo dalje. Za sada spomenimo samo to da takve matrice nazivamo *singularne* da bismo ih razlikovali od onih kojih je determinanta različita od nule, a nazivamo ih *nesingularne* ili *regularne*. Dakle, kada kažemo da je matrica singularna, to je isto kao da kažemo da ta matrica »nema inverzne matrice«.

Ako je matrica regularna, tada postoji samo *jedna* inverzna matrica te regularne matrice.

Određivanje inverzne matrice

Uvedimo najprije pojam *adjungirana matrica* zadane matrice $\mathbf{A}$. Neka na primjer matrica $\mathbf{A}$ ima tri retka i tri stupca:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Označimo li determinantu matrice **A** sa *det* **A**, imamo:

$$det\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \tag{2.3}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}.$$

Uzmimo sada sve kofaktore te determinante kao elemente jedne nove matrice koju ćemo označiti sa **K**:

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Označimo li element te matrice u j-tom retku i k-tom stupcu sa A_{jk}, imamo kraće:

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Transponirana matrica od matrice **K** naziva se *adjungirana matrica* zadane matrice **A**. Mi ćemo je označavati *adj* **A**. Dakle:

$$adj\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.4.}$$

Elementi matrice *adj* **A** kofaktori su determinante zadane matrice **A** u transponiranom poretku.

Da bismo našli inverznu matricu od **A**, najprije pomnožimo zadanu matricu **A** matricom *adj* **A**:

$$\mathbf{A} \cdot adj\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

Odredimo li vrijednost determinante (2.3) tako da je najprije razvijemo po elementima prvog retka, zatim po elementima drugog retka i konačno po elementima trećeg retka, a onda pogledamo dijagonalne elemente matrice (2.5), vidjet ćemo da su ti elementi upravo vrijednost determinante zadane matrice **A** koju smo označili sa *det* **A**. Ostali elementi matrice (2.5) imaju vrijednost nula, jer predstavljaju razvoj determinante (2.3) po elementima jednog od redaka pomoću kofaktora nekog drugog retka*. Prema tome je:

$$\mathbf{A} \cdot adj\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det \mathbf{A} \end{vmatrix}, \tag{2.6}$$

ili:

$$\mathbf{A} \cdot adj\,\mathbf{A} = det\,\mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desna matrica u produktu jedinična je matrica. Zato možemo napisati kraće:

$$\mathbf{A} \cdot adj\,\mathbf{A} = det\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{1}. \tag{2.7}$$

Na isti način mogli bismo se uvjeriti da je:

$$adj\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = det\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{1}, \tag{2.8}$$

ako bismo pomnožili matrice **A** i *adj* **A** u obratnom redoslijedu nego u izrazu (2.5), tj. da smo odredili produkt (*adj* **A** · **A**).

Kako je *det* **A** skalar, možemo relacije (2.7) i (2.8) pomnožiti sa (1/*det* **A**). Slijedi:

$$\mathbf{A} \cdot \frac{adj\,\mathbf{A}}{det\,\mathbf{A}} = \frac{adj\,\mathbf{A}}{det\,\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}. \tag{2.9}$$

*Dokaz možemo naći npr. u L. 4, str. 255.

Usporedimo li izraz (2.9) s izrazom (2.1), kojim je definirana inverzna matrica, dobivamo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det\ \mathbf{A}} \cdot adj\ \mathbf{A}. \tag{2.10}$$

Prema tome, inverznu matricu zadane matrice **A** dobit ćemo tako da adjungiranu matricu od **A** pomnožimo recipročnom vrijednošću determinante od **A**.

Iz (2.10) vidimo da kvadratna matrica **A** ima inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ samo ako je determinanta matrice **A** različita od nule. U protivnom nije moguće odrediti kvocijent $1/det\ \mathbf{A}$, pa ni inverznu matricu.

Primjer 2.1.

Odredimo inverznu matricu zadane matrice **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 1 \\ \hline 5 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

— Determinanta je zadane matrice **A**:

$$det\ \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -84.$$

— Odredimo li sve kofaktore determinante matrice **A**, možemo napisati matricu kofaktora **K**. Imamo:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{|r|r|r|} \hline 12 & -3 & -30 \\ \hline -4 & -13 & 10 \\ \hline -16 & 11 & -2 \\ \hline \end{array}.$$

— Transponiranjem matrice **K** dobivamo matricu *adj* **A**. Dakle:

$$adj\ \mathbf{A} = \begin{array}{|r|r|r|} \hline 12 & -4 & -16 \\ \hline -3 & -13 & 11 \\ \hline -30 & 10 & -2 \\ \hline \end{array}.$$

— Prema (2.10) inverzna je matrica zadane matrice **A**:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{84} \begin{array}{|r|r|r|} \hline 12 & -4 & -16 \\ \hline -3 & -13 & 11 \\ \hline -30 & 10 & -2 \\ \hline \end{array},$$

odnosno konačno:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{12}{84} & \frac{4}{84} & \frac{16}{84} \\ \hline \frac{3}{84} & \frac{13}{84} & -\frac{11}{84} \\ \hline \frac{30}{84} & -\frac{10}{84} & \frac{2}{84} \\ \hline \end{array}.$$

Primjer 2.2.

Odredimo inverznu matricu zadane matrice **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1+j2 & 2+j1 \\ \hline 3-j1 & 1+j1 \\ \hline \end{array}.$$

— Determinanta je zadane matrice **C**:

$$det\,\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1+j2 & 2+j1 \\ 3-j1 & 1+j1 \end{vmatrix} = -8+j2.$$

— Matrica je kofaktora od *det* **C**:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1+j1 & -3+j1 \\ \hline -2-j1 & 1+j2 \\ \hline \end{array}.$$

— Transponirana je matrica **K**:

$$adj\,\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1+j1 & -2-j1 \\ \hline -3+j1 & 1+j2 \\ \hline \end{array}.$$

— Inverzna je matrica od **C**:

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{-8+j2} \begin{array}{|c|c|} \hline 1+j1 & -2-j1 \\ \hline -3+j1 & 1+j2 \\ \hline \end{array},$$

dakle je:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{-6-j10}{68} & \frac{14+j12}{68} \\ \hline \frac{26-j2}{68} & \frac{-4-j18}{68} \\ \hline \end{array}.$$

Određivanje inverzne matrice kada su elementi kompleksni brojevi

Ovaj postupak možemo primijeniti ako želimo izbjeći računanje s kompleksnim brojevima. Pritom zadanu matricu s kompleksnim elementima prikažemo kao sumu dviju matrica s realnim elementima. Ako je na primjer dana matrica:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1+j2 & 2+j1 \\ 3-j1 & 1+j1 \end{vmatrix},$$

tada prema definiciji za sumu dviju matrica, možemo napisati:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j2 & j1 \\ -j1 & j1 \end{vmatrix},$$

ili:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Označimo li:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

matrica **C** napisana skraćeno glasi:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + j\,\mathbf{B}. \tag{2.11}$$

U tom obliku možemo napisati svaku matricu s kompleksnim elementima. Pritom su, kao što vidimo, elementi matrica **A** i **B** realni brojevi.

Da bismo odredili inverznu matricu $\mathbf{C}^{-1}$ zadane matrice **C** pretpostavimo da je:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D} + j\,\mathbf{F}. \tag{2.12}$$

Znači, zadatak nam je da nađemo elemente matrica **D** i **F**.

Kako je prema definiciji inverzne matrice $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{1}$, to prema (2.11) i (2.12) možemo napisati:

$$(\mathbf{A} + j\,\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{D} + j\,\mathbf{F}) = \mathbf{1} + j\,\mathbf{0},$$

odakle množenjem dobivamo:

$$(\mathbf{AD} - \mathbf{BF}) + j\,(\mathbf{AF} + \mathbf{BD}) = \mathbf{1} + j\,\mathbf{0}.$$

Iz definicije jednakosti dviju matrica slijedi:

$$\mathbf{AD} - \mathbf{BF} = \mathbf{1} \tag{2.13}$$

i:

$$\mathbf{BD} + \mathbf{AF} = \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

Pomnožimo li (2.14) slijeva sa $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}, \tag{2.15}$$

i tu relaciju uvrstimo u (2.13), imamo:

$$\mathbf{AD} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{BD} = \mathbf{1},$$

a odatle je:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B})\,\mathbf{D} = \mathbf{1}. \tag{2.16}$$

Množenjem (2.16) slijeva sa $(\mathbf{A} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ izlazi da je:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{A} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}. \tag{2.17}$$

Kako su **A** i **B** zadane matrice, možemo pomoću (2.17) odrediti elemente matrice **D** koja predstavlja realni dio tražene matrice $\mathbf{C}^{-1}$. Uvrstimo li nakon toga matricu **D** u (2.15), dobit ćemo i imaginarni dio od **C**. Dakle, ako je $\mathbf{C} = \mathbf{A} + j\,\mathbf{B}$, tada je:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D} + j\,\mathbf{F},$$

gdje je:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{A} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \text{ a } \mathbf{F} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BD}.$$

Primjer 2.3.

Odredimo inverznu matricu zadane matrice **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1+j2 & 2+j1 \\ 3-j1 & 1+j1 \end{vmatrix}.$$

— Zadanu matricu napišemo u obliku $\mathbf{C} = \mathbf{A} + j\,\mathbf{B}$:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

gdje je:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

— Odredimo $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \end{vmatrix}.$$

— Izračunamo:

$$\mathbf{A} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 2{,}8 \\ 5{,}2 & 1{,}2 \end{vmatrix}.$$

— Prema (2.17) odredimo **D**:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{A} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{6}{68} & \frac{14}{68} \\ \frac{26}{68} & -\frac{4}{68} \end{vmatrix}.$$

— Prema (2.15) odredimo **F**:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BD} = (-1) \begin{vmatrix} -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{6}{68} & \frac{14}{68} \\ \frac{26}{68} & -\frac{4}{68} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{10}{68} & \frac{12}{68} \\ -\frac{2}{68} & -\frac{18}{68} \end{vmatrix}.$$

— Kako je $\mathbf{C} = \mathbf{D} + j\mathbf{F}$, dobivamo:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{6}{68} & \frac{14}{68} \\ \frac{26}{68} & -\frac{4}{68} \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} -\frac{10}{68} & \frac{12}{68} \\ -\frac{2}{68} & -\frac{18}{68} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-6-j10}{68} & \frac{14+j12}{68} \\ \frac{26-j2}{68} & \frac{-4-j18}{68} \end{vmatrix}.$$

Inverzna matrica produkta dviju ili više matrica

Ako su **A** i **B** regularne matrice, inverznu matricu produkta **AB** dobit ćemo množenjem inverznih matrica pojedinih faktora u *obratnom redoslijedu*:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

Za više faktora vrijedi:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \ldots \mathbf{M} \cdot \mathbf{N})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

Znači da i ovdje, kao i kod transpozicije produkta više matrica, moramo pri množenju imati na umu promjenu redoslijeda!

Na primjer, ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix},$$

tada je:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix},$$

pa inverzijom tog produkta dobivamo:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Istu matricu dobit ćemo množeći $\mathbf{B}^{-1}$ sa $\mathbf{A}^{-1}$. Kako je:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{a} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},$$

slijedi da je:

$$\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix},$$

pa je prema tome $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1}$.

2.4. Sustav linearnih algebarskih jednadžbi u matričnom obliku

Neka su zadane, na primjer, tri linearne algebarske jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= y_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= y_2, \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= y_3. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ako su nepoznanice x_1, x_2 i x_3, a y_1, y_2 i y_3 su poznate veličine, tada te tri jednadžbe čine sustav *simultanih linearnih algebarskih jednadžbi.*

Na osnovi definicije množenja matrica sustav jednadžbi (2.18) možemo napisati kao *jednu* matričnu jednadžbu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}, \tag{2.19}$$

ili prema skraćenom matričnom označavanju:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{2.20}$$

gdje je:

A — matrica koeficijenata sustava jednadžbi,
x — stupčani vektor nepoznatih varijabli,
y — stupčani vektor poznatih konstanti.

Kasnije ćemo vidjeti da se prilikom izvoda matematičkih relacija može mnogo uštedjeti na pisanju, ako se primjeni ovaj skraćeni način označavanja. Osim toga i sami izrazi tada su pregledniji.

Da su matrična jednadžba (2.19) i sustav jednadžbi (2.18) međusobno ekvivalentni lako ćemo se uvjeriti ako matrice na lijevoj strani u (2.19) međusobno pomnožimo. Izlazi:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}. \tag{2.21}$$

Kako su dvije matrice jednake kada su jednaki odgovarajući elementi obiju matrica, izjednačenjem elemenata istoga retka u (2.21) dobivamo upravo zadani sustav jednadžbi.

Rješenje sustava jednadžbi (2.18) u matričnom obliku dobit ćemo pomnožimo li (2.20) slijeva sa $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}. \tag{2.22}$$

Kako je $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$, a $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, slijedi da je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}. \tag{2.23}$$

Rješenje sustava jednadžbi postoji samo ako je matrica koeficijenata **A** regularna matrica, tj. ako je $det\ \mathbf{A} \neq 0$, jer samo tada postoji inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$.

2.5. Matrice i linearne transformacije

Ako je problem obratan negoli u prethodnom odjeljku, pa su u jednadžbama (2.18) nepoznanice y_1, y_2 i y_3 a poznate su veličine x_1, x_2 i x_3, tada nepoznanice y možemo odrediti jednostavnom supstitucijom poznatih veličina x u svaku jednadžbu zadanog niza. Pritom kažemo da dani niz linearnih jednadžbi predstavlja primjer *linearne transformacije* kojom zadane veličine x zamjenjujemo novim veličinama y.

Neka je zadani niz jednadžbi:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{2.24}$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}. \tag{2.25}$$

Matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

karakteristična je za transformaciju, a nazivamo je *matrica transformacije*. Općenito ta matrica nije kvadratna matrica.

Neka su veličine y_1, y_2 i y_3 iz (2.24) povezane s novim veličinama y_1', y_2' i y_3' slijedećim relacijama:

$$\begin{aligned} y_1' &= b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3, \\ y_2' &= b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + b_{23} y_3, \\ y_3' &= b_{31} y_1 + b_{32} y_2 + b_{33} y_3, \end{aligned} \tag{2.27}$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}. \tag{2.28}$$

Ovdje je matrica transformacije:

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.29}$$

Na osnovi (2.24) i (2.27) možemo uspostaviti relacije koje povezuju veličine x s veličinama y':

$$\begin{aligned} y_1' = {} & b_{11}(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) + b_{12}(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) + \\ & + b_{13}(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3), \\ y_2' = {} & b_{21}(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) + b_{22}(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) + \\ & + b_{23}(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3), \\ y_3' = {} & b_{31}(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) + b_{32}(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) + \\ & + b_{33}(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3), \end{aligned}$$

odakle preuređenjem dobivamo:

$$y_1' = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32})x_2 + \\ + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33})x_3,$$

$$y_2' = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32})x_2 + \\ + (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33})x_3, \qquad (2.30)$$

$$y_3' = (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31})x_1 + (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32})x_2 + \\ + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33})x_3,$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.31)$$

Odatle je matrica transformacije:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2.32)$$

Jednadžbama (2.30) izražene su veličine y_1', y_2' i y_3' neposredno pomoću veličina x_1, x_2 i x_3, ili, drugim riječima, veličine x_1, x_2 i x_3 transformirane su u veličine y_1', y_2' i y_3'. Ta linearna transformacija predočena je matričnom jednadžbom (2.31), a karakterizirana matricom transformacije (2.32).

Istu transformaciju možemo dobiti na pregledniji način pomoću matričnog računa. Kako je:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}, \qquad (2.33)$$

a:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\,\mathbf{y}, \qquad (2.34)$$

množenjem (2.33) sa $\mathbf{B}$ izlazi da je:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{y} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x},$$

pa uvrštenjem $\mathbf{y}'$ umjesto $(\mathbf{B}\,\mathbf{y})$ prema (2.34) dobivamo matričnu jednadžbu koja povezuje nove veličine $\mathbf{y}'$ s veličinama $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}. \tag{2.35}$$

Dakle, matrica transformacije $\mathbf{C}$ jednaka je produktu matrica transformacije $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ u *obratnom redoslijedu* nego što su provedene spomenute transformacije, tj.:

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA}. \tag{2.36}$$

U našem je primjeru:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Množenjem ćemo dobiti upravo matricu (2.32). Možemo kazati ovako:

> — Mijenjaju li se veličine $\mathbf{x}$ u veličine $\mathbf{y}$ pomoću matrice transformacije $\mathbf{A}$, a veličine $\mathbf{y}$ u veličine $\mathbf{y}'$ pomoću matrice transformacije $\mathbf{B}$, tada matrica transformacije $\mathbf{BA}$ predstavlja linearnu transformaciju kojom veličine $\mathbf{x}$ prelaze u veličine $\mathbf{y}'$.

Primjenu linearnih transformacija u analizi mreža prikazat ćemo u šestom poglavlju. Vidjet ćemo da uvođenjem novih varijabli analizu često možemo pojednostavniti. Osnovna je ideja slijedeća:

Neka je zadan sustav simultanih linearnih algebarskih jednadžbi $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$. Nepoznanice $\mathbf{x}$ možemo odrediti množenjem vektora $\mathbf{y}$ slijeva sa $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{y}.$$

Međutim, uvedemo li transformacije:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\,\mathbf{y} \tag{2.37}$$

i:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}', \tag{2.38}$$

tada uvrštenjem (2.38) u polaznu jednadžbu $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ dobivamo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{C}\,\mathbf{x}',$$

a množenjem slijeva matricom $\mathbf{B}$ dobivamo:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{y} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\mathbf{C}\,\mathbf{x}'.$$

Kako smo uveli transformaciju (2.37), imamo dalje:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\mathbf{C}\,\mathbf{x}'. \tag{2.39}$$

Dobili smo relaciju koja povezuje nove veličine $\mathbf{x}'$ i nove veličine $\mathbf{y}'$. Uvedemo li kraće:

$$\mathbf{T} = \mathbf{BAC}, \tag{2.40}$$

slijedi:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{T}\,\mathbf{x}' \tag{2.41}$$

i:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{y}'. \tag{2.42}$$

Ako smo transformacije odabrali tako da inverznu matricu $\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{BAC})^{-1}$ nađemo lakše nego inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ (npr. ako je matrica $\mathbf{T}$ dijagonalna matrica), tada ćemo lakše odrediti i nepoznanice $\mathbf{x}$. Naime, prema (2.38), (2.42) i (2.37):

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}' = \mathbf{C}\,\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{y}. \tag{2.43}$$

Dalje je prema (2.40):

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\,(\mathbf{BAC})^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{y}. \tag{2.44}$$

2.6. Podjela matrica na podmatrice

Često je pogodno da matrice podijelimo u grupe elemenata koje nazivamo *podmatrice* ili *blokovi*. Tako podijeljene matrice nazivaju se *složene* matrice. Ako su ispunjeni izvjesni zahtjevi, možemo sa složenim matricama formalno računati kao i s matricama kojih su elementi pojedini brojevi: možemo ih zbrajati, odbijati i množiti. Tako u mnogim prilikama izvode možemo pojednostavniti, računanje skratiti, a i izrazi su pregledniji.

Ovdje ćemo podjelu matrica na podmatrice označavati debljim horizontalnim i vertikalnim crtama između elemenata matrice. Na primjer, neka je zadana matrica $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 6 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \end{array}\right].$$

Povučemo li deblju horizontalnu crtu između drugog i trećeg retka, podijelili smo matricu $\mathbf{A}$ u dvije podmatrice:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 6 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \end{array}\right].$$

Označimo li ih skraćeno $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 6 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{A}_2 = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \end{array}\right],$$

možemo napisati:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \hline \mathbf{A}_2 \end{array}\right].$$

Isto tako povučemo li četiri deblje vertikalne crte:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 6 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ \hline 8 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \end{array}\right],$$

podijelili smo zadanu matricu u pet slijedećih podmatrica:

$$\mathbf{A}_1 = \left[\begin{array}{c} 6 \\ \hline 8 \\ \hline 3 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_2 = \left[\begin{array}{c} -2 \\ \hline 9 \\ \hline 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_3 = \left[\begin{array}{c} 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_4 = \left[\begin{array}{c} -1 \\ \hline 2 \\ \hline -6 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_5 = \left[\begin{array}{c} 4 \\ \hline 1 \\ \hline 7 \end{array}\right],$$

pa je kraće:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_5 \end{array}\right].$$

I treći primjer: rastavimo danu matricu **A** u četiri podmatrice jednom debljom horizontalnom i jednom debljom vertikalnom crtom ovako:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 6 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 2 & -6 & 7 \end{array}\right].$$

Označimo li da je:

$$\mathbf{A}_{11} = \left[\begin{array}{c|c|c} 6 & -2 & 3 \\ \hline 8 & 9 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_{12} = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 4 \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad \text{i} \quad \mathbf{A}_{22} = \left[\begin{array}{c|c} -6 & 7 \end{array}\right],$$

imamo:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right].$$

Postoji još mnogo načina kako matricu **A** možemo rastaviti u podmatrice. U krajnjem slučaju i same elemente zadane matrice možemo smatrati njezinim podmatricama.

Dvije složene matrice jednake su onda kada su jednake u nepodijeljenom obliku.

Zbroj i razlika složenih matrica

Da bismo dvije složene matrice mogli zbrojiti ili odbiti, one moraju biti *identično podijeljene*. To drugim riječima znači da broj redaka i broj stupaca odgovarajućih podmatrica u objema složenim matricama mora biti isti. Na primjer, identično su podijeljene matrice:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 5 & 6 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline -2 & -8 & -2 \end{array}\right] \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 5 & -2 \\ \hline 6 & 1 & -4 \end{array}\right].$$

Označimo li da je:

$$\mathbf{A}_{11} = \left[\begin{array}{c|c} 5 & 6 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_{12} = \left[\begin{array}{c} 2 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline -2 & -8 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_{22} = \left[\begin{array}{c} 7 \\ \hline -2 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{B}_{11} = \left[\begin{array}{c|c} 4 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{B}_{12} = \left[\begin{array}{c} 1 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{B}_{21} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 5 \\ \hline 6 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{B}_{22} = \left[\begin{array}{c} -2 \\ \hline -4 \end{array}\right],$$

tada je zbroj matrica **A** i **B**:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} \end{array}\right],$$

odnosno:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} 5 & 6 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline -2 & -8 & -2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 5 & -2 \\ \hline 6 & 1 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 9 & 7 & 3 \\ \hline 5 & 9 & 5 \\ \hline 4 & -7 & -6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 9 & 7 & 3 \\ \hline 5 & 9 & 5 \\ \hline 4 & -7 & -6 \end{array}\right].$$

Analogno tome matrice odbijamo:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_{22} \end{array}\right],$$

pa je:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} 5 & 6 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline -2 & -8 & -2 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 5 & -2 \\ \hline 6 & 1 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 5 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 9 \\ \hline -8 & -9 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 5 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 9 \\ \hline -8 & -9 & 2 \end{array}\right].$$

Množenje složenih matrica

Ako je $\mathbf{A}$ $m \times p$ matrica, a $\mathbf{B}$ je $p \times n$ matrica, produkt $\mathbf{AB}$, koji je $m \times n$ matrica, možemo odrediti i tako da matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ prethodno rastavimo u podmatrice, a zatim, prilikom množenja, s podmatricama postupamo kao s elementima. Ali ni ovdje, kao ni pri odbijanju i zbrajanju složenih matrica, matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ ne možemo rastaviti u podmatrice bilo kako. Lako je uvidjeti da će uvjet za množenje složenih matrica biti ispunjen samo ako je podjela stupaca lijeve matrice identična podjeli redaka desne matrice. Naprotiv, retke lijeve matrice i stupce desne matrice možemo rastaviti proizvoljno. Pokažimo to primjerima.

Neka je:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

Kako je $\mathbf{A}$ 4×3 matrica, a $\mathbf{B}$ je 3×5 matrica, produkt $\mathbf{AB}$ je 4×5 matrica. Množenjem dobivamo:

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{ccccc} 18 & 14 & 11 & 16 & 21 \\ 22 & 14 & 9 & 14 & 19 \\ 25 & 16 & 11 & 18 & 25 \\ 16 & 10 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right].$$

Rastavimo sada matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ u podmatrice. Povučemo li deblju vertikalnu crtu između prvog i drugog *stupca* matrice $\mathbf{A}$, podjela matrice $\mathbf{B}$ u podmatrice mora biti takva da je deblja horizontalna crta između prvog i drugog *retka* te matrice. Podijelimo li još matricu $\mathbf{A}$ debljom horizontalnom crtom između trećeg i četvrtog retka, imamo:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]$$

i:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right].$$

Pomnožimo li matrice **A** i **B** prema pravilu o množenju matrica — kao da su podmatrice $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}$ elementi matrice **A**, a podmatrice $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ elementi matrice **B** — dobivamo:

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{array}\right].$$

Kako je:

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 3 & 6 & 9 \\ 16 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{array}\right], \qquad \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 14 & 12 & 10 & 14 & 18 \\ 10 & 8 & 6 & 8 & 10 \\ 9 & 8 & 7 & 10 & 13 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 8 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right], \qquad \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 8 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right],$$

imamo:

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 3 & 6 & 9 \\ 16 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 14 & 12 & 10 & 14 & 18 \\ 10 & 8 & 6 & 8 & 10 \\ 9 & 8 & 7 & 10 & 13 \end{array}\right] \\ \hline \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 8 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 8 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \end{array}\right],$$

odakle je nakon zbrajanja:

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 18 & 14 & 11 & 16 & 21 \\ 22 & 14 & 9 & 14 & 19 \\ 25 & 16 & 11 & 18 & 25 \end{array}\right] \\ \hline \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 16 & 10 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 18 & 14 & 11 & 16 & 21 \\ 22 & 14 & 9 & 14 & 19 \\ 25 & 16 & 11 & 18 & 25 \\ \hline 16 & 10 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right].$$

Rezultat je posve ista matrica koju smo dobili kada smo matrice **A** i **B** neposredno pomnožili.

Uzmimo još jedan primjer. Podjela matrica **A** i **B** u podmatrice neka je sada:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ \hline 4 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \hline \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} \end{array}\right]$$

i:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right].$$

Dakle:

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \hline \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \\ \hline \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{22} \end{array}\right].$$

Možemo se lako uvjeriti da je nakon množenja i zbrajanja:

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{cccc|c} 18 & 14 & 11 & 16 & 21 \\ 22 & 14 & 9 & 14 & 19 \\ \hline 25 & 16 & 11 & 18 & 25 \\ \hline 16 & 10 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right].$$

2.7. Rang matrice

Rang matrice veoma je važan pojam u teoriji matrica, posebno u vezi s linearnom zavisnosti sustava linearnih jednadžbi. Obično se rang matrice označava slovom r, a odnosi se na kvadratne i pravokutne matrice.

Kažemo da je matrica ranga r ako postoji *najmanje jedna* kvadratna podmatrica od r redaka zadane matrice **A** koje je determinanta različita od nule, dok *sve* kvadratne podmatrice zadane matrice **A** s više od r redaka imaju determinantu jednaku nuli. Odatle slijedi:

— Kvadratna matrica sa n redaka ima rang $r = n$ ako je njezina determinanta različita od nule.

— Rang matrice je nula samo ako su svi njezini elementi nule; dakle, samo nulmatrice imaju rang nula.

Prikažimo definiciju ranga matrice primjerima. Prvo, kvadratna 3×3 matrica:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

ima rang $r = 3$ jer je njezina determinanta različita od nule:

$$det\ \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

Kvadratna 3×3 matrica:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 7 & 6 \\ \hline \end{array}$$

ima rang $r = 2$ jer je, na primjer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1,$$

dok je:

$$det\ \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

u što se lako možemo uvjeriti odbijemo li elemente prvog stupca pomnožene brojem 2 od elemenata trećeg stupca.

Pravokutna 3×4 matrica:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 6 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 9 & 10 \\ \hline 4 & 3 & 12 & 6 \\ \hline \end{array}$$

također ima rang $r = 2$ jer su determinante *svih* podmatrica s tri retka i tri stupca jednake nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 10 \\ 4 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 10 \\ 3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

a na primjer:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

Kvadratna 2×2 matrica:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 9 & 12 \\ \hline \end{array}$$

ima rang $r = 1$ jer je $det\ \mathbf{D} = 0$.

2.8. Redukcija sustava linearnih algebarskih jednadžbi

Kada je zadan sustav od n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica, a želimo izračunati samo neke a ne sve nepoznanice, možemo primijeniti postupak redukcije broja jednadžbi koji ćemo sada pokazati na primjeru sustava od pet jednadžbi s pet nepoznanica. Neka je:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= b_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 &= b_3,\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 &= b_4,\\
a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 &= b_5,
\end{aligned}
$$

ili u matričnom obliku:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\\ b_5 \end{bmatrix},
$$

što pišemo kratko:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Rastavimo matricu $\mathbf{A}$ u četiri podmatrice $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$ i $\mathbf{A}_{22}$, a matrice $\mathbf{x}$ i $\mathbf{b}$ u dvije podmatrice $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$, odnosno $\mathbf{b}_1$ i $\mathbf{b}_2$. Broj redaka i broj stupaca tih podmatrica ovisi o broju jednadžbi na koji želimo reducirati zadani sustav. Na primjer, da bismo zadani sustav jednadžbi reducirali na tri jednadžbe s nepoznanicama x_1, x_2 i x_3, rastavljanje u podmatrice provest ćemo ovako:

$$
\left[\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\
\hline
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{array}\right]
\cdot
\left[\begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \hline x_4\\ x_5 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} b_1\\ b_2\\ b_3\\ \hline b_4\\ b_5 \end{array}\right].
$$

Općenito, ako želimo odrediti prvih k nepoznanica $x_1, \ldots, x_k$, matricu $\mathbf{A}$ rastavit ćemo u podmatrice između k-tog i $(k+1)$-og retka, te k-tog i $(k+1)$-og stupca, a matrice $\mathbf{x}$ i $\mathbf{b}$ rastavit ćemo u podmatrice između k-tog i $(k+1)$-og retka.

Skraćeno pišemo:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right].$$

Množenjem dobivamo:

$$\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1, \tag{2.45}$$

$$\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2. \tag{2.46}$$

Da bismo odatle eliminirali $\mathbf{x}_2$, pomnožit ćemo najprije (2.46) slijeva sa $\mathbf{A}_{22}^{-1}$:

$$\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2.$$

Kako je $\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{22} = \mathbf{1}$, a $\mathbf{1}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$, imamo dalje:

$$\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{b}_2.$$

Nakon preuređenja slijedi:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_{22}^{-1}\,(\mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{x}_1). \tag{2.47}$$

Uvrstimo sada $\mathbf{x}_2$ iz (2.47) u (2.45):

$$\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,(\mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1.$$

Odatle možemo konačno napisati:

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21})\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{b}_2. \tag{2.48}$$

Dobivena matrična jednadžba ekvivalentna je sustavu od k linearnih algebarskih jednadžbi sa k nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Ostale smo nepoznanice $x_{k+1}, \ldots, x_n$ iz zadanog sustava jednadžbi na taj način eliminirali.

Primjer 2.4.

Zadan je sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -7, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiranjem nepoznanica x_3 i x_4 reducirajmo zadani sustav na dvije jednadžbe s nepoznanicama x_1 i x_2.

— Zadani sustav jednadžbi napišemo u matričnom obliku, a zatim na opisan način rastavimo u podmatrice matricu koeficijenata uz nepoznanice, vektor nepoznanica i vektor slobodnih članova. Imamo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & -9 & 2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 10 \\ -7 \\ \hline 2 \\ 0 \end{array}\right],$$

pa je:

$$\mathbf{A}_{11} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_{12} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{array}\right], \quad \mathbf{A}_{22} = \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ -9 & 2 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{x}_1 = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right], \quad \mathbf{x}_2 = \left[\begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \end{array}\right], \quad \mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{c} 10 \\ -7 \end{array}\right], \quad \mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right].$$

— Inverzna je matrica od $\mathbf{A}_{22}$:

$$\mathbf{A}_{22}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0{,}4 & -0{,}2 \\ 1{,}8 & -0{,}4 \end{array}\right].$$

— Sada možemo izračunati produkte $\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}$ i $\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 0{,}4 & -0{,}2 \\ 1{,}8 & -0{,}4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1{,}4 & -2 \\ -3{,}6 & 0 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 0{,}4 & -0{,}2 \\ 1{,}8 & -0{,}4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 4{,}4 \\ -5{,}6 \end{array}\right].$$

— Razlika $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}$ glasi:

$$\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc} 1{,}4 & -2 \\ -3{,}6 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -0{,}4 & 3 \\ 6{,}6 & -4 \end{array}\right],$$

a razlika $\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{b}_2 = \left|\begin{array}{r} 10 \\ -7 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{r} 4{,}4 \\ -5{,}6 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} 5{,}6 \\ -1{,}4 \end{array}\right|.$$

— Na osnovi (2.48) možemo napisati:

$$\left|\begin{array}{rr} -0{,}4 & 3 \\ 6{,}6 & -4 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} 5{,}6 \\ -1{,}4 \end{array}\right|.$$

— Prema tome, reducirani sustav jednadžbi s nepoznanicama x_1 i x_2 glasi:

$$\begin{aligned} -0{,}4\,x_1 + 3\,x_2 &= 5{,}6 \\ 6{,}6\,x_1 - 4\,x_2 &= -1{,}4. \end{aligned}$$

Treće poglavlje

NEKI POJMOVI I JEDNADŽBE TOPOLOGIJE MREŽA

Znameniti švicarski matematičar Leonhard Euler (1707—1783), kojeg radovi obuhvaćaju gotovo sva područja matematike, objavio je 1736. god. članak o tzv. »problemu mostova u Königsbergu«. Drži se danas da je to jedan od prvih publiciranih radova na osnovi kojih se kasnije razvila *topologija* ili *teorija grafova*.

Topologija je grana matematike koja proučava svojstva geometrijskih tvorevina — grafova. Osim u elektrotehnici, topologija se danas primjenjuje i u mnogim drugim područjima znanosti. Kada pomoću topologije proučavamo geometrijska svojstva električnih mreža, dakle ona svojstva koja su u vezi s konfiguracijom ili »geometrijskom strukturom« mreža (bez obzira na fizikalna svojstva mreža), obično određenije govorimo o *topologiji mreža*.

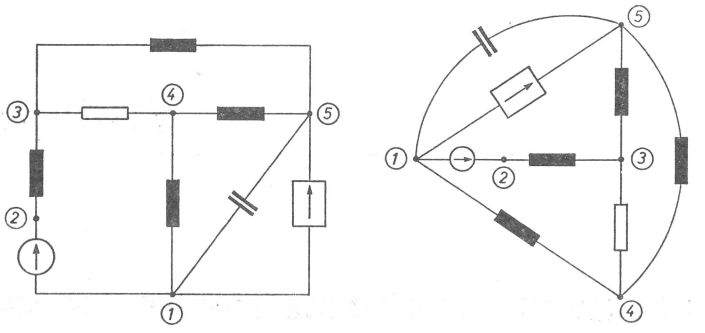
Kao i u ostalim granama matematike, tako se i u topologiji definira velik broj apstraktnih pojmova. Međutim, u primjeni topologije u elektrotehnici susrećemo se samo s nekima od tih pojmova. Osim toga, i same su definicije pojednostavnjene, pa prema tome i ne sasvim matematički egzaktne, a temelje se, kao što ćemo vidjeti, na geometrijskim predodžbama, što nam olakšava razumijevanje.

U ovome poglavlju navest ćemo samo one pojmove i jednadžbe topologije mreža kojima ćemo se kasnije služiti.

3.1. Graf modela mreže

Model mreže što je nacrtan na slici 3.1 a. sastavljen je od ukupno osam elemenata: šest pasivnih elemenata i dva aktivna. Crte povučene s obje strane grafičkog simbola svakog elementa (koje su zapravo njegov sastavni dio) služe nam da pojedine elemente međusobno povežemo. Promijenimo li samo dužinu i zakrivljenost tih crta, dobit ćemo, očito, isti model mreže, ali s drukčijim relativnim rasporedom elemenata. Na primjer, iako na prvi pogled tako ne izgleda, pažljivim promatranjem možemo ustanoviti da je na slici 3.1 b. nacrtan isti model mreže kao i na slici 3.1 a. Kažemo da modeli mreže na slikama 3.1 a. i 3.1 b. imaju istu *geometrijsku strukturu* ili *konfiguraciju*.

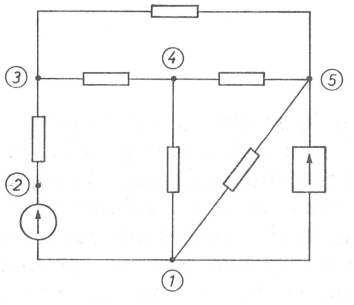
Zamijenimo li neke, ili sve, pasivne elemente u modelu mreže na slici 3.1. drugim pasivnim elementima, dobiveni model mreže iste je geometrijske strukture kao i prijašnji, iako je to sada s fizikalnog stajališta drugi model mreže. Radi ilustracije nacrtan je na slici 3.2. model mreže iste geometrijske strukture kao i onaj na slici 3.1. ali u kojem su svi pasivni elementi otpornici. Očito, geometrijska struktura modela mreže nije ovisna o fizikalnom karakteru pasivnih elemenata.



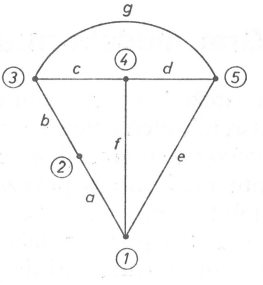
Sl. 3.1. a) Model neke mreže. b) Model iste mreže kao na slici a), ali s drukčijim relativnim rasporedom elemenata.

Istražujemo li stoga samo *geometrijska* svojstva mreže, možemo izostaviti grafičke simbole pasivnih elemenata, a njihove priključnice jednostavno ćemo povezati crtom. Nadalje, sve idealne izvore napona možemo zamisliti kratko spojene i također ih nadomjestiti crtom između priključnica, a idealne izvore struje možemo zamisliti otvorene, te ih prilikom crtanja izostaviti. Tako dobivenu sliku nazivamo *graf modela mreže* (slika 3.3). Treba naglasiti da crte koje kratko spajaju priključnice pojedinih elemenata, a povučene su umjesto njihovih grafičkih simbola, ne znače ovdje da su elementi zaista i električki »kratko spojeni«.

Kao što vidimo, modeli mreža na slikama 3.1. i 3.2. imaju isti graf (slika 3.3). Za te modele kažemo da su *topološki ekvivalentni*.



Sl. 3.2. Model mreže iste geometrijske strukture kao na slici 3.1.



Sl. 3.3. Graf modela mreže koji se odnosi na slike 3.1. i 3.2.

Graf na slici 3.3. možemo nacrtati i s drukčijim relativnim rasporedom označenih točaka. Međutim, svojstva grafa nisu o tome ovisna, kao ni o duljini i zakrivljenosti pojedinih crta. Svojstva ovise prvenstveno o tome jesu li ili nisu dvije točke povezane crtom.

3.2. Definicije pojmova

Grana. Granom nazivamo dio crte zajedno s njezinim različitim krajnjim točkama. Ona nam u grafu nadomješta jedan element modela mreže ili serijsku kombinaciju elemenata. U literaturi se često umjesto naziva »grana« upotrebljava i naziv »element«, a i drugi nazivi.

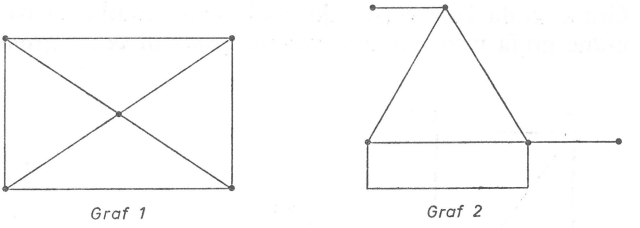
Čvorište ili **čvor.** Čvorište je krajnja točka grane. Ako iz nekog čvorišta izlazi k grana, kažemo da je to čvorište k-tog reda. Ponekad se čvorište reda $k \geq 3$, dakle ono čvorište u kojem se sastaju tri ili više grana, naziva razgranište.

Incidencija. Čvorište i grana međusobno su incidentni ako je čvorište krajnja točka grane. Na primjer, na slici 3.3. čvorište 4 incidentno je granama c, d i f, i obratno. Grana c incidentna je još sa čvorištem 3, grana d sa čvorištem 5, a grana f sa čvorištem 1. Nisu incidentni, na primjer, grana a i čvorište 3.

Put. Kažemo da smo prešli put ako pođemo od jednog čvorišta, pa putujući granama stignemo do istog ili nekog drugog čvorišta. Ako je polazno i konačno čvorište isto, put se naziva *zatvorenim.* U protivnom, put se naziva *otvorenim.* Na primjer, zatvoreni su putovi na slici 3.3: 1-*a*-2-*b*-3-*c*-4-*f*-1; 5-*e*-1-*f*-4-*d*-5; 4-*c*-3-*g*-5-*d*-4. Otvoreni su putovi npr.: 2-*a*-1-*e*-5-*d*-4; 3-*c*-4-*f*-1; 5-*g*-3-*b*-2.

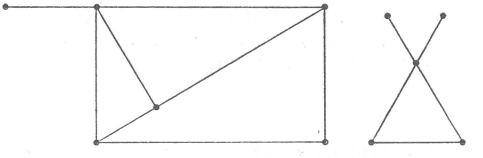
Petlja ili **zamka.** Niz grana koje čine zatvoreni put naziva se petlja ili zamka.

Povezani graf. Graf se naziva povezanim ako postoji put između svaka dva različita čvorišta. Na primjer, na slici 3.4. nacrtana su dva povezana grafa.



Sl. 3.4. Dva primjera povezanih grafova

Odvojeni dio grafa. Dio grafa koji nije direktno spojen s nekim drugim dijelom grafa naziva se odvojeni dio grafa. Primjer grafa što ga čine dva odvojena dijela prikazan je na slici 3.5.

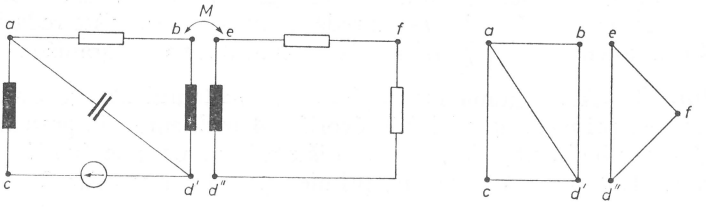


Sl. 3.5. Primjer grafa što ga čine dva odvojena dijela

Kada neki model mreže zamijenimo njegovim grafom, taj će se graf sastojati od odvojenih dijelova samo onda ako između pojedinih dijelova modela mreže postoji međuinduktivna veza, a vodljive veze između tih dijelova nema.

Rješavanjem jednadžbi metode čvorišta — o kojoj ćemo govoriti u petom poglavlju — dobivamo napone između pojedinih čvorišta modela mreže i jednog, tzv. referentnog čvorišta. Da bismo definirali napone između čvorišta koja pripadaju

odvojenim dijelovima grafa (npr. između čvorišta c i f na slici 3.6), moramo od odvojenih dijelova grafa načiniti »povezani graf« tako da svaka dva odvojena dijela povežemo u jednom čvorištu (obično se za to zajedničko čvorište odabire čvorište koje je na potencijalu zemlje). Radi ilustracije graf na slici 3.6 b, koji se sastoji od dva odvojena dijela, prikazan je na slici 3.7. kao »povezani graf« u kojem je čvorište d zajedničko čvorište obaju dijelova.

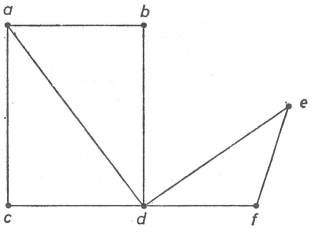


a) b)

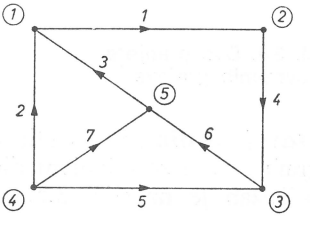
Sl. 3.6. a) Model mreže s međuinduktivnom vezom među granama bd' i ed''. b) Graf modela sa slike a).

Stablo. Niz grana nekog povezanog grafa, koji sadrži sva čvorišta grafa, a ne sadrži ni jednu petlju, naziva se stablo. Iz definicije slijedi da je stablo sastavljeno od najmanjeg broja grana zadanog grafa, koji je još dovoljan da poveže sva njegova čvorišta.

Grane grafa koje pripadaju odabranom stablu nazivaju se *grane stabla*. Preostale grane grafa nazivaju se *nezavisne grane* ili *vezne grane*.



Sl. 3.7. Povezani graf u kojem je čvorište d zajedničko čvorište dvaju odvojenih dijelova grafa na slici 3.6b



Sl. 3.8. Primjer orijentiranog grafa

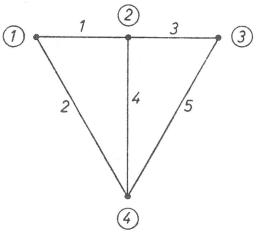
Orijentirani graf. Usmjerimo li svaku granu grafa strelicom, tada se graf naziva orijentiranim grafom. Pojedine se grane u tom slučaju nazivaju orijentirane grane. U topologiji mreža smjer strelice u grani predstavlja, prema dogovoru, referentni smjer struje. Primjer orijentiranog grafa prikazan je na slici 3.8.

Planarni graf. Graf se naziva planarnim ako se može nacrtati u ravnini tako da se grane ne sijeku nigdje, osim u čvorištima. U protivnom graf se naziva neplanarni graf.

3.3. Određivanje stabla zadanog grafa

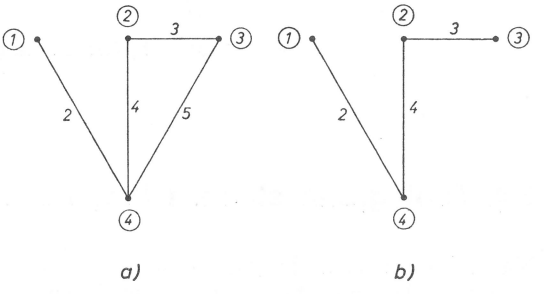
Budući da je stablo jedan od središnjih pojmova topologije mreža, pokazat ćemo sada način kako možemo doći do nekog stabla zadanog grafa.

Uzmimo zadani graf na slici 3.9; čvorišta tog grafa označena su brojevima ①, ..., ④ (unutar kružnica), a grane brojevima 1, ..., 5. Kao prvo, uočimo na slici jednu petlju grafa; neka je to, na primjer, petlja koju čine grane 1, 2 i 4. Budući da, prema definiciji, stablo ne sadrži ni jednu petlju, izbrišimo bilo koju granu spomenute petlje.



Sl. 3.9. Zadani graf s numeriranim čvorištima i granama

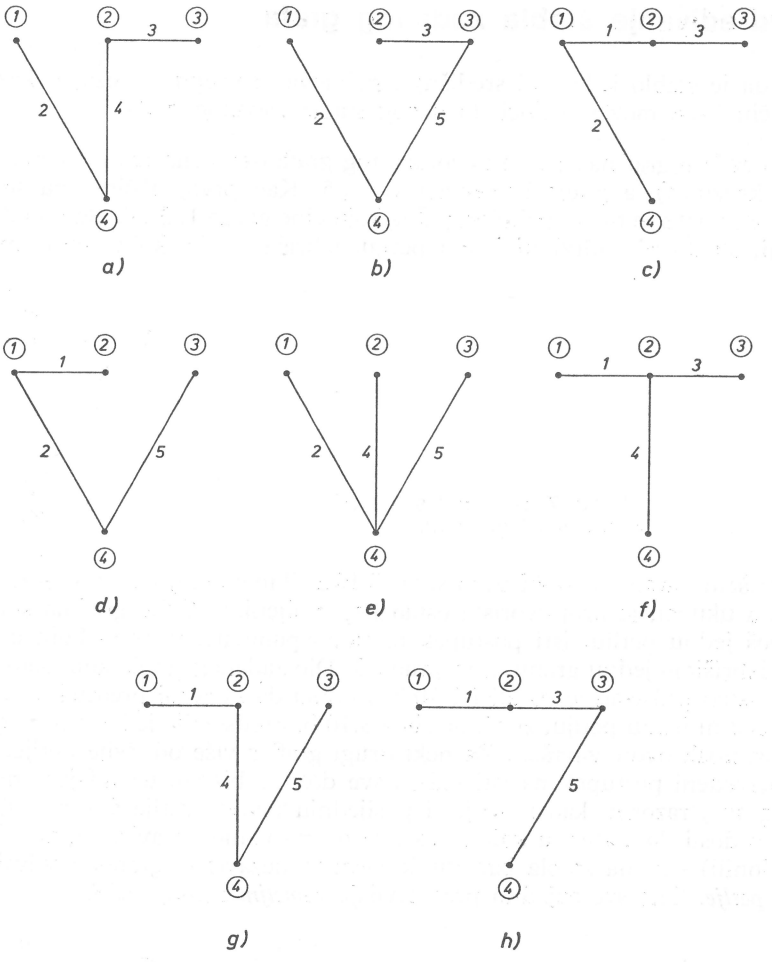
Ako izbrišemo granu 1, dobivamo sliku 3.10 a. Time smo, kao što vidimo, petlju razorili, a ukupan je broj čvorišta ostao nepromijenjen. Kako graf na slici 3.10 a. sadrži još jednu petlju, isti postupak moramo ponoviti: u petlji koju čine grane 3, 4 i 5 izbrišimo jednu granu, npr. granu 5. Dio zadanog grafa koji nam je nakon toga preostao prikazan je na slici 3.10 b. Budući da sada taj preostali dio zadanog grafa nema ni jednu petlju, znači da slika 3.10 b. predstavlja jedno stablo tog grafa, pa je postupak ovdje završen. Za neki drugi graf, s više od dvije petlje, nastavili bismo navedeni postupak na isti način, sve dok ne bismo, uklanjajući redom pojedine grane, razorili, kao i ovdje, i posljednju petlju. Petlje što smo ih razorili da bismo došli do stabla, a koje se sastoje od po jedne nezavisne grane (one koju smo uklonili) i grana stabla između krajeva te nezavisne grane, nazivaju se *nezavisne petlje*. One sve zajedno predstavljaju *temeljni sustav petlji*.



Sl. 3.10. a) Graf sa slike 3.9. nakon što je uklonjena grana 1. b) Jedno stablo grafa sa slike 3.9.

Za stablo na slici 3.10 b. temeljni je sustav petlji: ①-1-②-4-④-2-① i ③-5-④--4-②-3-③.

Kako grane koje treba izbrisati da bi se razorile petlje nisu jednoznačno određene, jedan graf može sadržavati više stabala. Prema tome, o granama stabla i o nezavisnim granama možemo govoriti samo u odnosu prema odabranom stablu. Radi ilustracije na slici 3.11. nacrtana su sva stabla grafa zadanog na slici 3.9.



Sl. 3.11. a) — h) Sva stabla grafa sa slike 3.9.

3.4. Broj grana stabla i broj nezavisnih grana

Na slici 3.9. nacrtan je graf koji ima ukupno četiri čvorišta, a na slici 3.11. prikazana su sva stabla tog grafa; kao što vidimo, svako stablo zadanog grafa ima po tri grane. To nije slučaj samo u ovom primjeru: možemo dokazati da sva stabla nekog zadanog grafa sadrže uvijek jednaki broj grana i da je taj broj za jedan manji od ukupnog broja čvorišta grafa. Ako je općenito:

g_s — broj grana stabla,

n — ukupan broj čvorišta grafa,

tada je:

$$g_s = n - 1. \tag{3.1}$$

Prema tome, ako graf ima ukupno n čvorišta, tada svako stablo tog grafa — bez obzira na ukupan broj grana grafa — ima broj grana g_s za jedan manji od n. Na primjer, graf na slici 3.9. ima četiri čvorišta, pa je broj grana stabla: $g_s = 4 - 1 = 3$.

Iz toga dalje slijedi da i ukupan broj grana koje smo uklonili da bismo došli do bilo kojeg stabla zadanog grafa (te grane smo nazvali »nezavisne grane«) mora u svakom slučaju biti jednak. Označimo li sa:

g — ukupan broj grana grafa,
g_n — broj nezavisnih grana,

očito da je:

$$g_n = g - g_s, \tag{3.2}$$

odnosno, ako uvrstimo g_s iz (3.1), onda je:

$$g_n = g - n + 1. \tag{3.3}$$

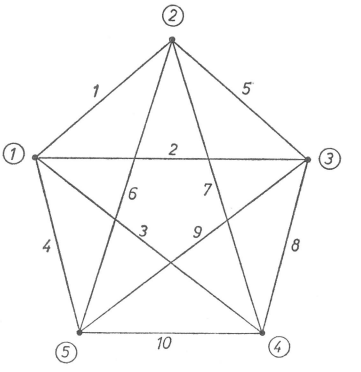
Kako je broj nezavisnih grana jednak broju nezavisnih petlji, znači da povezani graf, koji ima ukupno g grana i n čvorišta ima također i $(g - n + 1)$ nezavisnih petlji.

Ilustracija. Zadan je graf na slici 3.12. Prebrojimo li grane i čvorišta, vidimo da je $g = 10$ i $n = 5$. Prema (3.3) slijedi da je broj nezavisnih grana kao i broj nezavisnih petlji tog grafa:

$$g_n = 10 - 5 + 1 = 6.$$

Ako graf nije povezan, nego ima d odvojenih dijelova, i ako ukupan broj grana označimo — kao i do sada — sa g, a sa n ukupan broj čvorišta grafa, tada je broj nezavisnih grana, odnosno broj nezavisnih petlji:

$$g_n = g - n + d. \tag{3.4}$$



Sl. 3.12. Zadani povezani graf

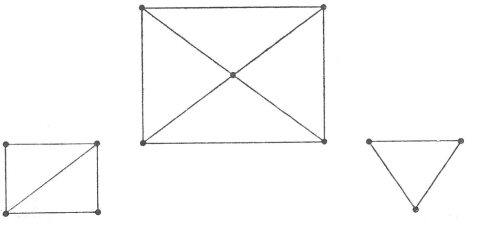
Taj izraz možemo lako dokazati. Ako imamo graf s odvojenim dijelovima, a želimo dobiti povezani graf, moramo po dva odvojena dijela povezati u zajedničkom čvorištu. Iz toga slijedi, na osnovi (3.3), da je ukupan broj nezavisnih grana tog »povezanog grafa«:

$$g_n = g - n' + 1,$$

gdje smo sa n' označili broj čvorišta »povezanog grafa«. Nadalje, kako pri povezivanju svaka dva odvojena dijela grafa izgubimo po jedno čvorište, ukupan broj čvorišta grafa n i broj čvorišta »povezanog grafa« n' vezani su slijedećom jednadžbom:

$$n' = n - (d - 1).$$

Uvrstimo li n' iz posljednje jednadžbe u pretposljednju jednadžbu, dobivamo upravo (3.4).



Sl. 3.13. Zadani graf sastavljen od tri odvojena dijela

Ilustracija. Zadani graf na slici 3.13. sastoji se od tri odvojena dijela ($d = 3$). Ukupan je broj grana tog grafa $g = 16$, a ukupan je broj čvorišta $n = 12$. Prema jednadžbi (3.4) slijedi da je broj nezavisnih grana, kao i broj nezavisnih petlji:

$$g_n = 16 - 12 + 3 = 7.$$

Četvrto poglavlje

Želiš li sa mnom razgovarati, definiraj svoje pojmove.

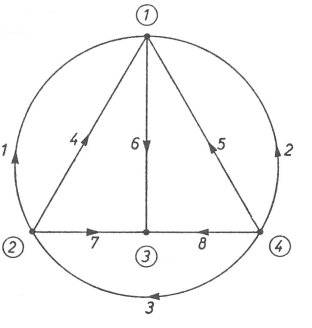
Voltaire

TOPOLOŠKE RELACIJE U MATRIČNOM OBLIKU

4.1. I. Kirchhoffov zakon i proširena matrica incidencija

Na slici 4.1. nacrtan je graf koji smo proizvoljno izabrali. Pojedine grane usmjerene su strelicama i označene brojevima 1, 2, ..., 8, a čvorišta su numerirana od 1 do 4.

Uzmemo li, prema prijašnjem dogovoru, da se referentni smjer struje u pojedinoj grani podudara s usmjerenjem grane, možemo za svako čvorište napisati jednadžbu I. Kirchhoffova zakona. Na osnovi formulacije tog zakona koja kaže da je algebarska suma *ulaznih* struja u svakom čvorištu jednaka nuli imamo*:



Sl. 4.1. Zadani orijentirani graf s proizvoljno numeriranim granama i čvorištima

$$
\begin{aligned}
&\text{Čvorište } 1: \quad i_1 + i_2 \qquad + i_4 + i_5 - i_6 \qquad\qquad = 0,\\
&\text{„ } \quad 2: \quad -i_1 \qquad + i_3 - i_4 \qquad\qquad -i_7 \qquad = 0,\\
&\text{„ } \quad 3: \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad i_5 + i_7 + i_8 = 0,\\
&\text{„ } \quad 4: \qquad -i_2 - i_3 \qquad\quad -i_5 \qquad\qquad -i_8 = 0,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

*Moramo naglasiti da su u prvome poglavlju malim slovima označavane *momentane* vrijednosti struja (i) i napona (v, odnosno u). Međutim, od sada ćemo kompleksne vrijednosti u simboličkom označavanju sinusoidnih struja i napona, a također i iznose istosmjernih struja i napona, označavati i malim slovima (a ne samo velikim).

ili u matričnom obliku:

$$\begin{array}{|cccccccc|} \hline 1 & 1 & & 1 & 1 & -1 & & \\ -1 & & 1 & -1 & & & -1 & \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & -1 & -1 & & -1 & & & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \\ \\ \\ \hline \end{array} . \tag{4.1a}$$

Ako matricu koeficijenata označimo sa $\mathbf{M}_p$, a vektor struja grana sa $\mathbf{i}$, tada I. Kirchhoffov zakon, napisan za sva čvorišta grafa, u skraćenom matričnom označavanju glasi:

$$\mathbf{M}_p \, \mathbf{i} = \mathbf{0}. \tag{4.2}$$

U ovom primjeru matrice su $\mathbf{M}_p$, $\mathbf{i}$ i $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{M}_p = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline ① & 1 & 1 & & 1 & 1 & -1 & & \\ ② & -1 & & 1 & -1 & & & -1 & \\ ③ & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ ④ & & -1 & -1 & & -1 & & & -1 \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{i} = \begin{array}{c|c} 1 & i_1 \\ 2 & i_2 \\ 3 & i_3 \\ 4 & i_4 \\ 5 & i_5 \\ 6 & i_6 \\ 7 & i_7 \\ 8 & i_8 \end{array}, \qquad \mathbf{O} = \begin{array}{c|c} ① & \\ ② & \\ ③ & \\ ④ & \end{array}.$$

Matricu koeficijenata $\mathbf{M}_p = [m_{jk}]$ nazivat ćemo *proširena matrica incidencija*. Kao što vidimo, elementi matrice $\mathbf{M}_p$ mogu poprimiti samo tri vrijednosti: $+1$, -1 ili 0. Ovdje će biti:

$m_{jk} = +1$, ako je grana k incidentna sa čvorištem j, a orijentacija grane je *prema* čvorištu;

$m_{jk} = -1$, ako je grana k incidentna sa čvorištem j, a orijentacija grane je *od* čvorišta;

$m_{jk} = 0$, ako grana k nije incidentna sa čvorištem j.

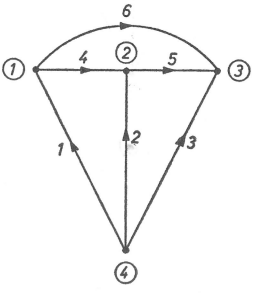
Ako znamo matricu $\mathbf{M}_p$ nekog grafa, tada ujedno znamo i koliko taj graf ima čvorišta i grana, jer broj redaka matrice $\mathbf{M}_p$ odgovara broju čvorišta grafa, a broj stupaca — broju grana. Tada također znamo i kako su grane i čvorišta grafa međusobno povezani, pa prema tome možemo na osnovi poznate matrice $\mathbf{M}_p$ nacrtati pripadni graf; možemo kazati da matrica $\mathbf{M}_p$ opisuje geometrijsku strukturu grafa.

Ilustracija. Zadana je matrica $\mathbf{M}_p$:

$$\mathbf{M}_p = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & 1 & & & -1 & & -1 \\ ② & & 1 & & 1 & -1 & \\ ③ & & & 1 & & 1 & 1 \\ ④ & -1 & -1 & -1 & & & \end{array} . \qquad (4.3)$$

Na osnovi zadane matrice nacrtajmo pripadni orijentirani graf.

Broj redaka zadane matrice je četiri, a broj stupaca šest. Prema tome, graf ima četiri čvorišta i šest grana. Nadalje, prema elementima prvog stupca vidimo da se grana 1 završava sa čvorištima 1 i 4 i da je usmjerena prema čvorištu 1; iz drugog stupca vidimo da su krajevi grane 2 čvorišta 2 i 4 i da je ona usmjerena prema čovorištu 2; grana 3 nalazi se između čvorišta 3 i 4, a smjer strelice je prema čvorištu 3, itd. Na osnovi ovakvog zaključivanja možemo — nakon što odredimo krajeve svih grana — nacrtati odgovarajući graf (slika 4.2).



Sl. 4.2. Orijentirani graf nacrtan na osnovi zadane matrice M_p

Svojstva proširene matrice incidencija

— *Svaki stupac matrice* $\mathbf{M}_p$ *sadrži jednu pozitivnu i jednu negativnu jedinicu.* To je zato što stupci matrice $\mathbf{M}_p$ odgovaraju granama grafa, a svaka grana završava s dva čvorišta, pri čemu je smjer strelice prema jednom čvorištu i od drugog čvorišta. Radi toga su pojedini elementi u bilo kojem retku matrice $\mathbf{M}_p$ jednaki sumi odgovarajućih elemenata preostalih redaka, ali sa suprotnim predznakom. Ako je ukupan broj čvorišta grafa n, onda rang matrice $\mathbf{M}_p$ može biti najviše $(n - 1)$.

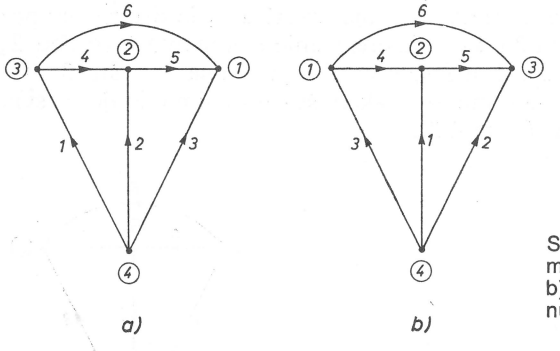
—*Svaki redak matrice* $\mathbf{M}_p$ *mora imati barem jedan element različit od nule.* Kada tako ne bi bilo čvorište ne bi bilo povezano s grafom, jer reci matrice $\mathbf{M}_p$ odgovaraju čvorištima grafa.

— *Promjenom numeracije čvorišta, promijenit će se redoslijed redaka u matrici* $\mathbf{M}_p$. Analogno tome, *promjenom numeracije grana, promijenit će se redoslijed stupaca.* Radi ilustracije pokazat ćemo to na dva primjera.

Grafu prikazanom na slici 4.2. zamijenimo numeracije čvorišta 1 i 3 (slika 4.3 a). Napišimo matricu $\mathbf{M}_p$ za taj slučaj:

$$\mathbf{M}_p = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & & & 1 & & 1 & 1 \\ ② & & 1 & & 1 & -1 & \\ ③ & 1 & & & -1 & & -1 \\ ④ & -1 & -1 & -1 & & & \end{array} . \tag{4.4}$$

Dakle, matricu (4.4) možemo dobiti i jednostavnom zamjenom prvog i trećeg retka u matrici (4.3). Zamijenimo li numeraciju grana 1, 2 i 3 na slici 4.2. tako da granu 1 označimo sa 3, granu 2 sa 1, a granu 3 sa 2 (slika 4.3 b), matrica (4.3) poprima oblik:



Sl. 4.3. a) Graf sa slike 4.2. sa zamijenjenom numeracijom čvorišta 1 i 3. b) Graf sa slike 4.2. sa zamijenjenom numeracijom grana 1, 2 i 3.

$$\mathbf{M}_p = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & & & 1 & -1 & & -1 \\ ② & 1 & & & 1 & -1 & \\ ③ & & 1 & & & 1 & 1 \\ ④ & -1 & -1 & -1 & & & \end{array} . \tag{4.5}$$

Usporedimo li prva tri stupca u matricama (4.3) i (4.5), vidimo da je prvi stupac u matrici (4.3) treći stupac u matrici (4.5), da je drugi stupac u (4.3) — prvi u (4.5), a treći u (4.3) — drugi u (4.5). Numeracija grana 4,5 i 6 nije se promijenila, pa su i odgovarajući stupci u spomenutim matricama identični.

— *Rang matrice* $\mathbf{M}_p$ *povezanog grafa jednak je* $(n-1)$, *gdje je* n *broj čvorišta grafa.* Budući da je linearna zavisnost sustava linearnih algebarskih jednadžbi određena rangom matrice koeficijenata uz nepoznanice, iz toga slijedi da je $(n-1)$ jednadžba I. Kirchhoffova zakona linearno nezavisna. Tu ćemo tvrdnju dokazati na jednom primjeru.

Rekli smo da rang matrice $\mathbf{M}_p$ može biti najviše $(n-1)$. To slijedi iz svojstva matrice $\mathbf{M}_p$ prema kojem se u svakom stupcu te matrice nalazi jedna pozitivna jedinica i jedna negativna jedinica, a ostali su elementi nula. Napišemo li bilo koju determinantu n-tog reda matrice $\mathbf{M}_p$, pa zbrojimo elemente svakog stupca bilo kojih $(n-1)$ redaka, a zatim dobivene sume pribrojimo odgovarajućim elementima n-tog retka, dobit ćemo u n-tom retku same nule. Prema tome, svaka je determinanta n-tog reda matrice $\mathbf{M}_p$ jednaka nuli, pa rang te matrice mora biti manji od ukupnog broja redaka matrice, odnosno manji od ukupnog broja čvorišta grafa n.

Da bismo dokazali da je rang matrice $\mathbf{M}_p$ upravo $(n-1)$, uzet ćemo kao primjer jedan povezani graf sa n čvorišta i g grana, pri čemu ćemo grane i čvorišta numerirati na poseban način.

Prvi korak. Označimo bilo koje čvorište grafa sa 1; također označimo sa 1 i bilo koju granu koja je incidentna s tim čvorištem. Čvorište na drugom kraju grane 1 označimo sa n. Zatim numerirajmo sve preostale grane kojima je jedan kraj čvorište 1 (ako takvih ima), a istovremeno numerirajmo i čvorišta na drugom kraju grana, i to brojevima u rastućem nizu počevši od broja 2.

Radi ilustracije na slici 4.4 a. nacrtan je proizvoljni graf koji ima $n = 7$ čvorišta i $g = 10$ grana. Na slijedećoj slici (sl. 4.4 b) jedno čvorište i njemu incidentna grana označeni su sa 1, a čvorište na drugom kraju grane 1 označeno je sa 7. Zatim su brojevima 2 i 3 označene i preostale dvije grane incidentne sa čvorištem 1 a isto tako i čvorišta na krajevima tih grana.

Drugi korak. Numeriramo jedno od preostalih čvorišta u grafu koje još nije numerirano, ali kojeg je jedna pripadna grana incidentna s nekim od čvorišta koje smo već numerirali, uključujući i čvorište n. Numeracija tog čvorišta i te grane za jedan je veća od broja kojim smo završili numeriranje u prvom koraku (isključujući n). Zatim nastavimo numerirati u rastućem poretku preostale grane koje su incidentne s novonumeriranim čvorištem (ako takvih ima), a usporedo i čvorišta na drugom kraju tih grana. Pritom ne numeriramo one grane kojima je čvorište na drugom kraju već bilo numerirano u prethodnom koraku.

Na slici 4.4c. jedno čvorište kojemu je jedna od pripadnih grana incidentna s već numeriranim čvorištem označili smo sa 4. Čvorište 4 je kraj dviju grana koje su incidentne s već numeriranim čvorištima 2 i 3. Bilo koju od te dvije grane moramo numerirati sa 4. Nakon toga numeriramo preostale grane incidentne sa čvorištem 4, ali samo one kojih drugi kraj nije još numeriran; također numeriramo i čvorišta na drugom kraju tih grana. Na našoj slici to su grana 5 i čvorište 5.

Treći korak. Opisani postupak u drugom koraku nastavljamo sve dok ne numeriramo svih n čvorišta i ukupno $(n-1)$ granâ. Tako je svaka od numeriranih grana incidentna sa čvorištima kojih je numeracija broj jednak ili manji od broja numeracije grane, ili je čvorište n. Tako numerirana $(n-1)$ grana ne zatvara ni jednu petlju: te grane su grane stabla.

Na slici 4.4 d. numerirano je jedino preostalo čvorište: čvorište 6. Isto tako numerirana je i grana 6. Grane 1, ..., 6 grane su stabla, pa su na slici izvučene debljim crtama.

Četvrti korak. Nakon što je numerirano svih n čvorišta grafa i ukupno $(n-1)$ grana, preostalih $[g-(n-1)]$ grana numeriramo brojevima od n do g proizvoljnim redom. Svaka od tih grana zatvara jednu petlju s granama stabla.

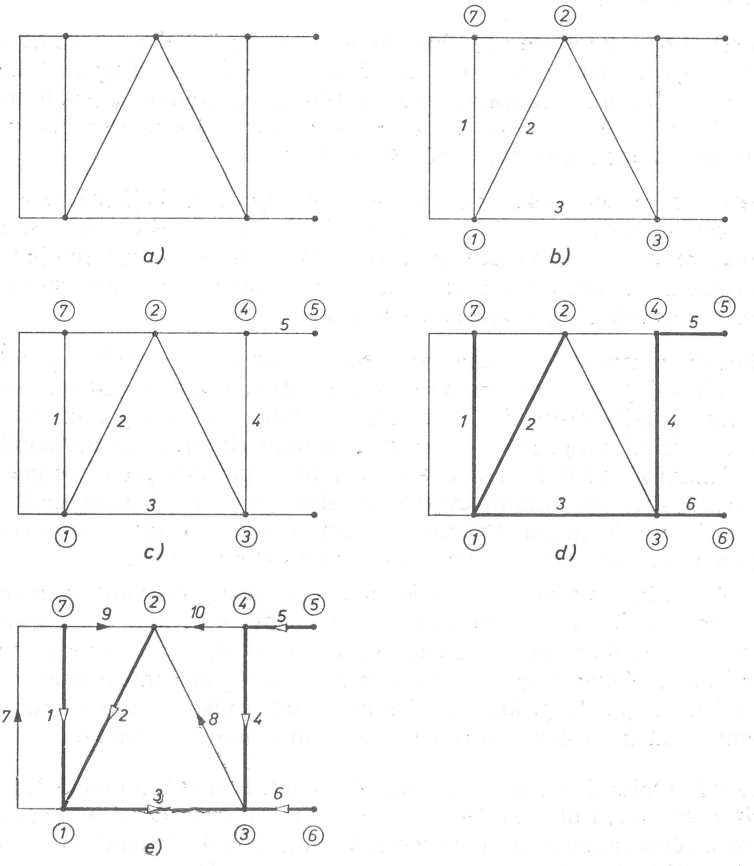
Na slici 4.4 e. preostale grane označene su brojevima 7, ..., 10.

Peti korak. Grane grafa orijentiramo proizvoljno, kao na primjer na slici 4.4 e.

Nakon što smo numerirali sve grane i sva čvorišta grafa, a grane usmjerili strelicama, vidjet ćemo da matrica $\mathbf{M}_p$ u ovom slučaju ima slijedeća svojstva:

— dijagonalni elementi podmatrice koja se sastoji od prvih $(n - 1)$ redaka i stupaca jednaki su 1 ili (-1),

— svi elementi ispod glavne dijagonale u spomenutoj podmatrici jednaki su nula.



Sl. 4.4. Odabrani graf pomoću kojeg smo dokazali da je rang matrice M_p jednak $(n-1)$, gdje je n ukupan broj čvorišta grafa

Odatle slijedi da je subdeterminanta matrice $\mathbf{M}_p$ koja se sastoji od elemenata prvih $(n - 1)$ redaka i stupaca različita od nule. To dokazuje da je rang matrice $\mathbf{M}_p$: $r = n - 1$.

U našem primjeru matrica $\mathbf{M}_p$ glasi:

$$\mathbf{M}_p = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline ① & 1 & 1 & -1 & & & & -1 & & & \\ ② & & -1 & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ ③ & & & 1 & 1 & & 1 & & -1 & & \\ ④ & & & & -1 & 1 & & & & & -1 \\ ⑤ & & & & & -1 & & & & & \\ ⑥ & & & & & & -1 & & & & \\ ⑦ & -1 & & & & & & 1 & & -1 & \end{array} . \qquad (4.6)$$

Jedna od subdeterminanti šestog reda koja je različita od nule jest ona kojoj se elementi nalaze u presjecištu prvih šest redaka i šest stupaca (njezina je vrijednost 1). Prema tome, rang matrice (4.6) je $r = 6$, a to je broj za jedan manji od ukupnog broja čvorišta.

— *Elementi matrice* $\mathbf{M}_p$ *u sjecištima redaka, koji odgovaraju čvorištima, i stupaca, koji odgovaraju granama neke petlje, čine podmatricu koje je determinanta jednaka nuli.*

Dokaz. Broj čvorišta koji pripadaju petlji jednak je broju grana što čine petlju. Stoga možemo uvijek napisati determinantu podmatrice od $\mathbf{M}_p$ koja odgovara petlji, jer će u svakom slučaju broj redaka i stupaca biti jednak. S druge strane, svaka je grana incidentna s dva čvorišta, pa će u svakom stupcu determinante jedan element biti jednak 1, jedan element (−1), a ostali elementi bit će nule. Pribrojimo li bilo kojem retku determinante odgovarajuće elemente ostalih redaka, vrijednost determinante neće se promijeniti. Budući da ćemo tada u tom retku dobiti same nule, znači da je i vrijednost determinante jednaka nuli.

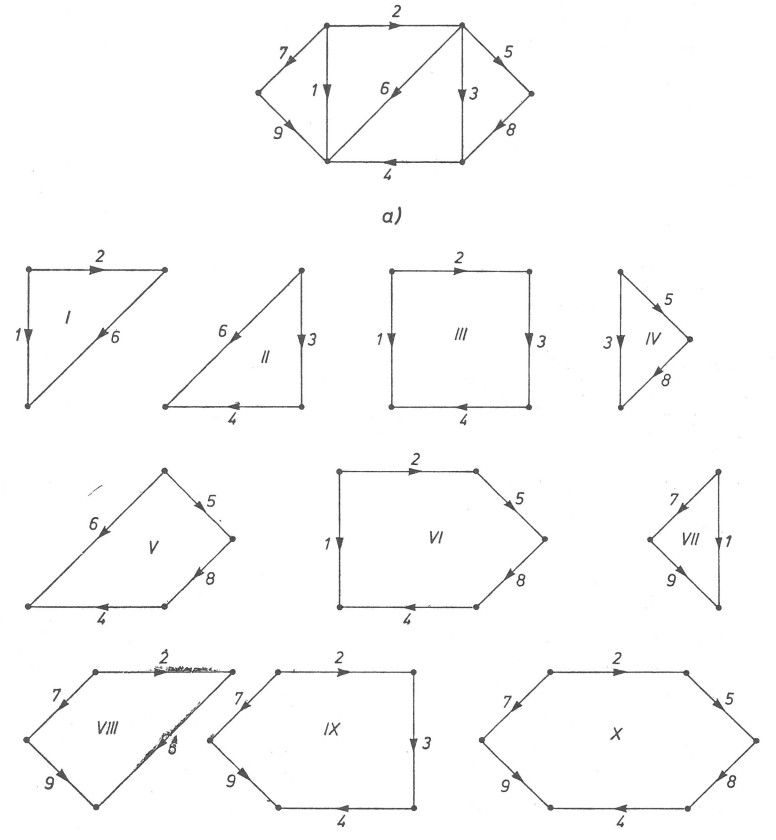
Ilustracija. Na slici 4.4 e. jednu petlju čine grane 2, 3 i 8. Determinanta je podmatrice od matrice $\mathbf{M}_p$ koja odgovara toj petlji:

$$D = \begin{array}{c|ccc|} & 2 & 3 & 8 \\ ① & 1 & -1 & 0 \\ ② & -1 & 0 & 1 \\ ③ & 0 & 1 & -1 \end{array} = 0,$$

dakle, jednaka je nuli.

4.2. II. Kirchhoffov zakon i proširena spojna matrica

Zadani orijentirani graf na slici 4.5 a. sadrži ukupno deset petlji. Sve petlje prikazane su izdvojeno na slici 4.5 b. Prema prijašnjem dogovoru smatramo da je pad napona u grani u smjeru referentne struje, dakle i u smjeru orijentacije grane. Odaberemo li smjer obilaženja petlji u smislu gibanja kazaljke na satu, pa za svaku petlju napišemo jednadžbu II. Kirchhoffova zakona, tada, na osnovi formulacije da je algebarska suma *padova napona* duž zatvorene petlje jednaka nuli, imamo:



Sl. 4.5. a) Zadani orijentirani graf. b) Sve petlje zadanog grafa.

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrr}
\text{Petlja } 1: & -u_1 & +u_2 & & & +u_6 & & & & = 0, \\
\text{„ } 2: & & & u_3 & +u_4 & -u_6 & & & & = 0, \\
\text{„ } 3: & -u_1 & +u_2 & +u_3 & +u_4 & & & & & = 0, \\
\text{„ } 4: & & & -u_3 & & +u_5 & & +u_8 & & = 0, \\
\text{„ } 5: & & & & u_4 & +u_5 & -u_6 & +u_8 & & = 0, \\
\text{„ } 6: & -u_1 & +u_2 & & +u_4 & +u_5 & & +u_8 & & = 0, \\
\text{„ } 7: & u_1 & & & & & -u_7 & & -u_9 & = 0, \\
\text{„ } 8: & & u_2 & & & +u_6 & -u_7 & & -u_9 & = 0, \\
\text{„ } 9: & & u_2 & +u_3 & +u_4 & & -u_7 & & -u_9 & = 0, \\
\text{„ } 10: & & u_2 & + & u_4 & +u_5 & -u_7 & +u_8 & -u_9 & = 0,
\end{array}
\tag{4.7}
$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{array}{|ccccccccc|}
\hline
-1 & 1 & & & & 1 & & & \\ \hline
 & & 1 & 1 & & -1 & & & \\ \hline
-1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ \hline
 & & -1 & & 1 & & & 1 & \\ \hline
 & & & 1 & 1 & -1 & & 1 & \\ \hline
-1 & 1 & & 1 & 1 & & & 1 & \\ \hline
1 & & & & & & -1 & & -1 \\ \hline
 & 1 & & & & 1 & -1 & & -1 \\ \hline
 & 1 & 1 & 1 & & & -1 & & -1 \\ \hline
 & 1 & & 1 & 1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline
\end{array}
\cdot
\begin{array}{|c|}
\hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline u_3 \\ \hline u_4 \\ \hline u_5 \\ \hline u_6 \\ \hline u_7 \\ \hline u_8 \\ \hline u_9 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline
\end{array}
. \qquad (4.7a)$$

Označimo li matricu koeficijenata sa $\mathbf{C}_p$, a vektor padova napona u granama sa $\mathbf{u}$, II. Kirchhoffov zakon u skraćenom matričnom obliku glasi:

$$\mathbf{C}_p\,\mathbf{u} = \mathbf{0}. \qquad (4.8)$$

U našem je primjeru:

$$\mathbf{C}_p = \begin{array}{c|ccccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline
p_1 & -1 & 1 & & & & 1 & & & \\ \hline
p_2 & & & 1 & 1 & & -1 & & & \\ \hline
p_3 & -1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ \hline
p_4 & & & -1 & & 1 & & & 1 & \\ \hline
p_5 & & & & 1 & 1 & -1 & & 1 & \\ \hline
p_6 & -1 & 1 & & 1 & 1 & & & 1 & \\ \hline
p_7 & 1 & & & & & & -1 & & -1 \\ \hline
p_8 & & 1 & & & & 1 & -1 & & -1 \\ \hline
p_9 & & 1 & 1 & 1 & & & -1 & & -1 \\ \hline
p_{10} & & 1 & & 1 & 1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline
\end{array},$$

$$\mathbf{u} = \begin{array}{c|c|}
1 & u_1 \\ \hline
2 & u_2 \\ \hline
3 & u_3 \\ \hline
4 & u_4 \\ \hline
5 & u_5 \\ \hline
6 & u_6 \\ \hline
7 & u_7 \\ \hline
8 & u_8 \\ \hline
9 & u_9 \\ \hline
\end{array}, \qquad \mathbf{O} = \begin{array}{c|c|}
p_1 & \\ \hline
p_2 & \\ \hline
p_3 & \\ \hline
p_4 & \\ \hline
p_5 & \\ \hline
p_6 & \\ \hline
p_7 & \\ \hline
p_8 & \\ \hline
p_9 & \\ \hline
p_{10} & \\ \hline
\end{array}.$$

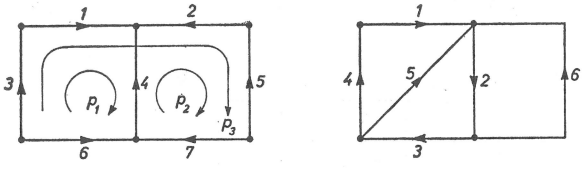
Matricu koeficijenata $\mathbf{C}_p = [c_{jk}]$ nazivat ćemo *proširena spojna matrica.* Reci matrice $\mathbf{C}_p$ odgovaraju petljama, a stupci granama grafa. Pojedini elementi imaju vrijednost $+1$, -1 ili 0:

$c_{jk} = +1$, ako grana k pripada petlji j, a orijentacija grane i petlje podudaraju se;

$c_{jk} = -1$, ako grana k pripada petlji j, a orijentacija grane i petlje se ne podudaraju;

$c_{jk} = 0$, ako grana k ne pripada petlji j.

U našem je primjeru matrica $\mathbf{C}_p$ pravokutna 10×9 matrica, dakle ima veći broj redaka nego stupaca. To međutim nije pravilo. Matrica $\mathbf{C}_p$ nekog drugog grafa može imati manje redaka nego stupaca ili broj stupaca i redaka može biti jednak. Napišemo li radi ilustracije matricu $\mathbf{C}_p$ za graf na slici 4.6 a, vidjet ćemo da je ona 3×7 matrica, jer taj graf ima ukupno tri petlje i sedam grana. Međutim matrica $\mathbf{C}_p$ grafa na slici 4.6 b. kvadratna je 6×6 matrica, jer je broj petlji i grana jednak, a iznosi šest.



Sl. 4.6. a) Graf s ukupno tri petlje i sedam grana. b) Graf s ukupno šest petlji i šest grana.

Svojstva proširene spojne matrice

— *Promjenom numeracije petlji promijenit će se redoslijed redaka u matrici* $\mathbf{C}_p$. Također *promjenom numeracije grana promijenit će se redoslijed stupaca.*

Ilustracija. Matrica je $\mathbf{C}_p$ grafa na slici 4.6 a.:

$$\mathbf{C}_p = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline p_1 & 1 & & 1 & -1 & & -1 & \\ p_2 & & -1 & & 1 & -1 & & 1 \\ p_3 & 1 & -1 & 1 & & -1 & -1 & 1 \end{array} . \qquad (4.9)$$

Zamijenimo li numeraciju petlje 1 i petlje 3 dobit ćemo:

$$\mathbf{C}_p = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline p_1 & 1 & -1 & 1 & & -1 & -1 & 1 \\ p_2 & & -1 & & 1 & -1 & & 1 \\ p_3 & 1 & & 1 & -1 & & -1 & \end{array} . \qquad (4.9a)$$

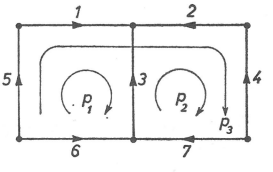
Zamijenimo li numeraciju grana 3, 4 i 5 na slici 4.6 a tako da granu 3 označimo sa 5, granu 4 sa 3, a granu 5 sa 4 (slika 4.7), matrica (4.9) poprima oblik:

$$\mathbf{C}_p = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ p_1 & 1 & & -1 & & 1 & -1 & \\ p_2 & & -1 & 1 & -1 & & & 1 \\ p_3 & 1 & -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}. \qquad (4.9b)$$

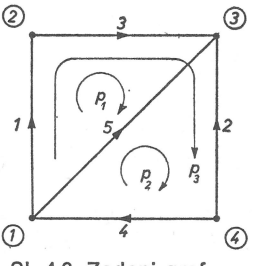
— *Promijenimo li orijentaciju petlje, promijenit će se predznaci elemenata u odgovarajućem retku matrica* $\mathbf{C}_p$. Također, *promijenimo li orijentaciju grane, promijenit će predznak elementi u odgovarajućem stupcu.* I to je jasno samo po sebi, a lako se dade i provjeriti.

— *Ako su stupci matrica* $\mathbf{M}_p$ i $\mathbf{C}_p$ *poredani prema istom redoslijedu grana, tada je*:

$$\mathbf{M}_p \widetilde{\mathbf{C}}_p = \mathbf{0} \text{ i } \mathbf{C}_p \widetilde{\mathbf{M}}_p = \mathbf{0}. \qquad (4.10)$$



Sl. 4.7. Graf sa slike 4.6a s promijenjenom numeracijom grana



Sl. 4.8. Zadani graf

Ilustracija. Za graf prikazan na slici (4.8) matrice $\mathbf{M}_p$ i $\mathbf{C}_p$ koje odgovaraju istom redoslijedu grana jesu:

$$\mathbf{M}_p = \begin{array}{c|ccccc} & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ ① & & & -1 & 1 & -1 \\ ② & -1 & & 1 & & \\ ③ & 1 & 1 & & & 1 \\ ④ & & -1 & & -1 & \end{array}$$

i:

$$\mathbf{C}_p = \begin{array}{c|ccccc} & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ p_1 & 1 & & 1 & & -1 \\ p_2 & & -1 & & 1 & 1 \\ p_3 & 1 & -1 & 1 & 1 & \end{array},$$

pa je produkt $\mathbf{M}_p \widetilde{\mathbf{C}}_p$:

$$\mathbf{M}_p \widetilde{\mathbf{C}}_p = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & & -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & & & 1 \\ \hline & -1 & & -1 & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 1 \\ \hline & -1 & -1 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} . \tag{4.11}$$

Također je:

$$\mathbf{C}_p \widetilde{\mathbf{M}}_p = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & 1 & & -1 \\ \hline & -1 & & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & -1 & 1 & \\ \hline & & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & & \\ \hline 1 & & & -1 \\ \hline -1 & & 1 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} . \tag{4.11a}$$

Dokaz. Kada množimo matricu $\mathbf{M}_p$ sa $\widetilde{\mathbf{C}}_p$, a isto tako kada množimo $\mathbf{C}_p$ sa $\widetilde{\mathbf{M}}_p$, postoje samo slijedeća dva slučaja:

— svi sumandi unutarnjeg produkta retka i stupca jednaki su nuli,
— samo dva sumanda unutarnjeg produkta retka i stupca različita su od nule, pri čemu je jedan uvijek $(+1)$, a drugi (-1).

Na primjer, element (4,1) produkta matrica $\mathbf{M}_p$ i $\widetilde{\mathbf{C}}_p$ (relacija 4.11) dobit ćemo nakon slijedećih množenja i zbrajanja:

$$0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1),$$

dakle svi su sumandi nule. S druge strane, element (2,3) dobit ćemo ovako:

$$(-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0,$$

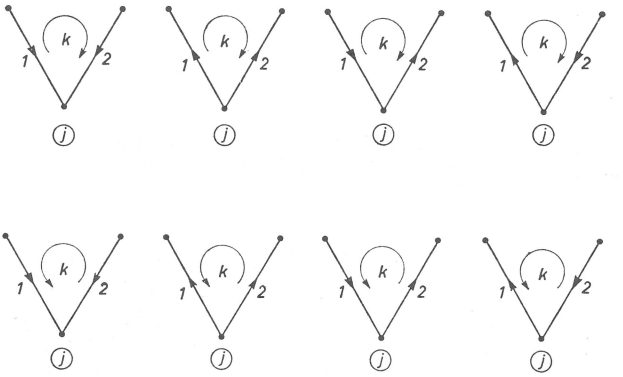
pa je ovdje prvi sumand (-1), treći je sumand $(+1)$, a ostali su nule.

Pogledamo li graf na slici 4.8, vidjet ćemo da u prvom od ova dva slučaja čvorište 4 (kojemu odgovara četvrti redak matrice $\mathbf{M}_p$) ne pripada petlji 1 (kojoj odgovara prvi stupac matrice $\widetilde{\mathbf{C}}_p$), a u drugom slučaju (pri množenju drugog retka od $\mathbf{M}_p$ s trećim retkom od $\widetilde{\mathbf{C}}_p$) čvorište 2 pripada petlji 3. Dakle, u prvom slučaju čvorište kojemu odgovara redak u matrici $\mathbf{M}_p$ nije pripadalo petlji kojoj je odgovarao stupac u matrici $\widetilde{\mathbf{C}}_p$, a u drugom slučaju jeste. Treći slučaj ne može postojati: čvorište grafa ili pripada ili ne pripada nekoj petlji grafa. Općenito:

— Ako čvorište j *ne pripada* petlji k, tada u sastav petlje k ne ulazi ni jedna grana koja je incidentna sa čvorištem j. Dakle, u k-tom stupcu matrice $\widetilde{\mathbf{C}}_p$ jednaki su nuli oni elementi matrice koji odgovaraju granama grafa incidentnima sa čvorištem j. S druge strane, nuli su jednaki oni elementi u j-tom retku matrice $\mathbf{M}_p$

koji odgovaraju granama grafa što ulaze u sastav petlje k. To je zato što grane grafa koje pripadaju petlji k nisu incidentne sa čvorištem j. Prema tome, produkt retka j matrice $\mathbf{M}_p$ i stupca k matrice $\widetilde{\mathbf{C}}_p$, tj. element (j, k) produkta $\mathbf{M}_p \widetilde{\mathbf{C}}_p$, mora biti jednak nuli.

Ako čvorište j *pripada* petlji k, tada su sa čvorištem j incidentne dvije grane petlje k. Ostale grane koje su incidentne sa čvorištem j (ako postoje) ne pripadaju petlji k. Također preostale grane koje pripadaju petlji k nisu incidentne sa čvorištem j. Odatle slijedi da su samo dva sumanda unutarnjeg produkta retka matrice $\mathbf{M}_p$ i stupca matrice $\widetilde{\mathbf{C}}_p$ različita od nule. Pogledamo li sliku 4.9, na kojoj su prikazane sve moguće orijentacije petlje k u odnosu na orijentaciju dviju grana što se sastaju u čvorištu j, možemo zaključiti da od dva sumanda različita od nule jedan uvijek mora biti $(+1)$, a drugi (-1), pa je njihov zbroj jednak nuli.



Sl. 4.9. Sve moguće orijentacije petlje k i dviju grana koje se sastaju u čvorištu j

Da vrijedi i druga relacija (4.10) možemo pokazati sličnim razmatranjem.

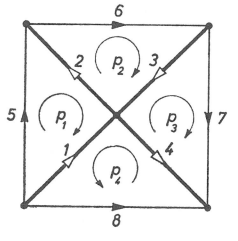
— *Rang matrice* $\mathbf{C}_p$ *povezanog grafa jednak je* $(g - n + 1)$, *gdje je* g *broj grana, a* n *broj čvorišta grafa.*

Odatle slijedi da je $(g - n + 1)$ jednadžba II. Kirchhoffova zakona linearno nezavisna.

Dokažimo najprije da je rang matrice $\mathbf{C}_p$ najmanje $(g - n + 1)$. Da bismo to dokazali, odaberimo bilo koje stablo grafa, pa grane stabla numerirajmo od 1 do $(n - 1)$, a grane koje ne pripadaju stablu (nezavisne grane) od n do g (n je ukupan broj čvorišta, a g je ukupan broj grana grafa). Budući da svaka nezavisna grana pripada jednoj nezavisnoj petlji, koju osim te grane čine još samo grane stabla, a nezavisnih grana ima $(g - n + 1)$, znači da nezavisne grane zatvaraju s granama stabla $(g - n + 1)$ nezavisnu petlju. Nezavisne petlje i pripadne nezavisne grane orijentirajmo tako da im se orijentacije podudaraju. Napišimo zatim samo one retke matrice $\mathbf{C}_p$ koji odgovaraju nezavisnim petljama, pa tu skraćenu matricu označimo sa $\mathbf{C}$. Vidjet ćemo da je podmatrica, koju čine svi reci matrice $\mathbf{C}$ i samo

oni stupci koji odgovaraju nezavisnim granama, jedinična matrica. Kako ta matrica ima $(g - n + 1)$ redak i stupac, znači da je rang matrice $\mathbf{C}_p$ barem $(g - n + 1)$. Na primjer, graf na slici 4.10. ima ukupno $n = 5$ čvorišta i $g = 8$ grana. Grane stabla numerirane su od 1 do 4, a nezavisne grane od 5 do 8. Orijentacija nezavisnih petlji podudara se s orijentacijom pripadnih nezavisnih grana. Matrica $\mathbf{C}$ u ovom slučaju glasi:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline p_1 & -1 & -1 & & & 1 & & & \\ p_2 & & 1 & 1 & & & 1 & & \\ p_3 & & & -1 & -1 & & & 1 & \\ p_4 & -1 & & & -1 & & & & 1 \end{array} . \tag{4.12}$$



Sl. 4.10. Zadani orijentirani graf s naznačenim jednim stablom grafa

Podmatrica koju čine svi reci matrice (4.12) i stupci koji odgovaraju granama 5, 6, 7, i 8 jedinična je matrica četvrtog reda, pa rang matrice $\mathbf{C}$ iznosi $r = 4$, dakle jednak je ukupnom broju nezavisnih grana, odnosno nezavisnih petlji zadanog grafa. Sada moramo još dokazati da rang matrice $\mathbf{C}_p$ nije veći od $(g - n + 1)$. Da bismo to dokazali primijenit ćemo jedan teorem matrične algebre* koji kaže:

— Ako (p, g)-matrica $\mathbf{A}$ ima rang r, a (g, n)-matrica $\mathbf{B}$ ima rang s, onda za rang t njihova produkta $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, koji je (p, n)-matrica, vrijedi:

$$t \geq r + s - g. \tag{4.13}$$

Primijenimo sada taj teorem na jednu od relacija (4.10), i to na onu koja kaže da je $\mathbf{C}_p \, \widetilde{\mathbf{M}}_p = \mathbf{0}$. Poznato nam je otprije: ako je n ukupan broj čvorišta grafa, tada je rang matrice $\mathbf{M}_p$ jednak $(n - 1)$, a rang nulmatrice jednak je nuli. Uvažimo li značenje oznaka u (4.13), možemo napisati da je:

$$t = 0 \text{ i } s = n - 1.$$

Uvažimo li to, tada uvrštenjem u (4.13) dobivamo:

$$0 \geq r + (n - 1) - g,$$

ili:

$$r \leq g - n + 1. \tag{4.14}$$

* Vidi npr. [L. 4] strana 336

U (4.14) g predstavlja ukupan broj grana grafa, n ukupan broj čvorišta grafa, a r je rang matrice $\mathbf{C}_p$.

Maloprije smo pokazali da rang r matrice $\mathbf{C}_p$ iznosi najmanje $(g - n + 1)$. Sada na osnovi (4.14) slijedi da rang r može biti najviše $(g - n + 1)$. Prema tome, rang matrice $\mathbf{C}_p$ upravo je $r = g - n + 1$.

4.3. Matrica incidencija

Kao što smo pokazali, ako je n ukupan broj čvorišta grafa, tada je rang proširene matrice incidencija $\mathbf{M}_p$ jednak $(n - 1)$, što drugim riječima znači da je $(n - 1)$ jednadžba I. Kirchhoffova zakona linearno nezavisna. Prema tome, izostavimo li bilo koju od ukupno n jednadžbi, preostalih $(n - 1)$ jednadžbi čine sustav međusobno *nezavisnih jednadžbi* I. Kirchhoffova zakona, što u skraćenom matričnom obliku pišemo:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{i} = \mathbf{0}. \tag{4.15}$$

Podmatricu matrice $\mathbf{M}_p$, koja ima $(n - 1)$ redaka i g stupaca (n je ukupan broj čvorišta grafa, a g je ukupan broj grana grafa), a ovdje smo je označili sa $\mathbf{M}$, nazivamo *skraćena matrica incidencija* ili kraće *matrica incidencija**. Kako je broj grana stabla jednak $(n - 1)$, slijedi da je, ako graf sadrži barem jednu petlju, matrica $\mathbf{M}$ pravokutna matrica s većim brojem stupaca nego redaka.

Sada ćemo dokazati slijedeću tvrdnju:

— *Podmatrica matrice* $\mathbf{M}$ *reda* $(n - 1)$ *regularna je matrica ako njezini stupci odgovaraju granama stabla.*

Dokaz. Odaberimo jedno stablo grafa, a bilo koje čvorište grafa označimo sa 0. Ostala čvorišta numerirajmo redom od 1 do $(n - 1)$, i to tako da je, putujući od čvorišta 0 po granama stabla, svako daljnje čvorište označeno većim brojem. Grane stabla orijentirajmo od čvorišta označenog manjim brojem prema onom s većim brojem, a numerirajmo ih tako da se numeracija grane poklapa s numeracijom onog čvorišta prema kojem je grana usmjerena. Nezavisne grane numerirajmo proizvoljno brojevima većim od $(n - 1)$.

Napišemo li matricu incidencija tako da reci odgovaraju redom čvorištima 1,2, ..., $(n - 1)$ (redak koji odgovara čvorištu 0 izostavimo), a stupci najprije redom granama stabla 1, 2, ..., $(n - 1)$, a tek potom nezavisnim granama, vidjet ćemo da je podmatrica koje reci odgovaraju čvorištima 1 do $(n - 1)$, a stupci granama stabla, trokutasta matrica. U toj su podmatrici svi elementi glavne dijagonale pozitivne jedinice, a svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki su 0. Stoga je vrijednost determinante te podmatrice jednaka 1 (vrijednost trokutaste determinante dobije se množenjem dijagonalnih elemenata). Prema tome, podmatrica matrice $\mathbf{M}$ koja odgovara granama stabla regularna je matrica.

---

*Treba napomenuti da se ponegdje u literaturi matrica incidencija definira i tako da reci matrice odgovaraju granama grafa, a stupci čvorištima, dakle obratno nego smo je mi ovdje definirali. Također neki uzimaju da je element matrice $\mathbf{M}$ jednak $+1$ ako je orijentacija grane u smjeru od odgovarajućeg čvorišta, a -1 ako je prema čvorištu (takvi predznaci dobiju se ako se pođe od definicije I. Kirchhoffova zakona, prema kojem je algebarska suma *izlaznih* struja u čvorištu jednaka nuli). Da li ćemo usvojiti ovakvu ili onakvu definiciju matrice $\mathbf{M}$ ovisi o dogovoru, a kada smo jednom jednu definiciju usvojili, moramo se nje i pridržavati.

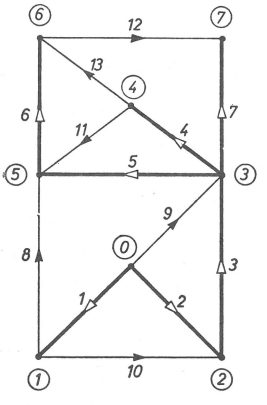
Ilustracija. U zadanom grafu na slici 4.11. odabrano stablo izvučeno je debljim crtama, jedno je čvorište označeno sa 0, a ostala čvorišta i sve grane numerirali smo na upravo opisan način. Matrica incidencija **M** glasi:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|ccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ \hline ① & 1 & & & & & & & -1 & & -1 & & & \\ ② & & 1 & -1 & & & & & & & 1 & & & \\ ③ & & & 1 & -1 & -1 & & -1 & & 1 & & & & \\ ④ & & & & 1 & & & & & & & -1 & & -1 \\ ⑤ & & & & & 1 & -1 & & 1 & & & 1 & & \\ ⑥ & & & & & & 1 & & & & & & -1 & 1 \\ ⑦ & & & & & & & 1 & & & & & 1 & \end{array}.$$

Dakle, podmatrica matrice **M** koja odgovara čvorištima 1, 2, ..., 7 i granama stabla 1, 2, ..., 7 ima sve dijagonalne elemente jednake 1, a svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki su 0. To je prema tome regularna matrica.

Ako podmatricu matrice **M** koja odgovara granama stabla označimo sa $\mathbf{M}_{11}$, a podmatricu koja odgovara nezavisnim granama sa $\mathbf{M}_{12}$, možemo napisati:

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \end{array}\right]. \tag{4.16}$$



Sl. 4.11. Zadani graf s naznačenim stablom i numeriranim čvorištima i granama

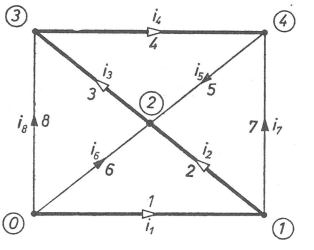
U našem je primjeru:

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline ① & 1 & & & & & & \\ ② & & 1 & -1 & & & & \\ ③ & & & 1 & -1 & -1 & & -1 \\ ④ & & & & 1 & & & \\ ⑤ & & & & & 1 & -1 & \\ ⑥ & & & & & & 1 & \\ ⑦ & & & & & & & 1 \end{array},$$

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{array}{c|cccccc} & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ \hline ① & -1 & & -1 & & & \\ ② & & & 1 & & & \\ ③ & & 1 & & & & \\ ④ & & & & -1 & & -1 \\ ⑤ & 1 & & & 1 & & \\ ⑥ & & & & & -1 & 1 \\ ⑦ & & & & & 1 & \end{array}.$$

4.4. Relacija koja povezuje struje u granama stabla i struje u nezavisnim granama

Uz poznate struje u nezavisnim granama možemo potpuno jednoznačno odrediti struje u granama stabla. Pokažimo to najprije na primjeru.



Sl. 4. 12. Zadani orijentirani graf

U zadanom grafu na slici 4.12. najprije su numerirane grane stabla brojevima od 1 do 4, a zatim nezavisne grane od 5 do 8. Struje u granama stabla jesu i_1, i_2, i_3, i_4, a struje u nezavisnim granama i_5, i_6, i_7, i_8. Smjerovi struja odabrani su proizvoljno. Jednadžbe I. Kirchhoffova zakona za odabrane smjerove struja glase:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 \qquad\qquad - i_7 &= 0, \\ i_2 - i_3 + i_5 + i_6 &= 0, \\ i_3 - i_4 \qquad\qquad + i_8 &= 0, \\ i_4 - i_5 + i_7 &= 0. \end{aligned}$$

Struje u granama stabla napišimo s lijeve strane znaka jednakosti, a struje u nezavisnim granama s desne strane:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 &= i_7, \\ i_2 - i_3 &= -i_5 - i_6, \\ i_3 - i_4 &= -i_8, \\ i_4 &= i_5 - i_7. \end{aligned}$$

Ako su struje u granama stabla nepoznate veličine, a struje u nezavisnim granama poznate veličine, taj sustav jednadžbi ima rješenje, jer je matrica koeficijenata uz nepoznanice i_1, i_2, i_3 i i_4 regularna matrica. To slijedi iz tvrdnje dokazane u prethodnom odjeljku, prema kojoj je determinanta koeficijenata uz struje u granama stabla uvijek različita od nule. U ovom slučaju rješenje glasi:

$$\begin{aligned} i_1 &= -i_6 - i_8, \\ i_2 &= -i_6 - i_7 - i_8, \\ i_3 &= i_5 - i_7 - i_8, \\ i_4 &= i_5 - i_7. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Vezu između struja u granama stabla i struja u nezavisnim granama, što smo je upravo pokazali na primjeru, napisat ćemo sada poopćeno u matričnom obliku.

Neka je zadan neki graf s ukupno n čvorišta i g grana, koji sadrži i petlje. Odaberimo jedno stablo grafa, pa numerirajmo grane stabla od 1 do $(n-1)$, a nezavisne grane od n do g. Smjer struje u granama možemo odabrati proizvoljno.

Sustav nezavisnih jednadžbi I. Kirchhoffova zakona u matričnom obliku (4.15) glasi:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Rastavimo li matricu $\mathbf{M}$ u dvije podmatrice $\mathbf{M}_{11}$ i $\mathbf{M}_{12}$ prema (4.16), a vektor struja grana $\mathbf{i}$ u dva podvektora $\mathbf{i}_s$ i $\mathbf{i}_v$, tako da su elementi od $\mathbf{i}_s$ struje u granama stabla $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$, a elementi od $\mathbf{i}_v$ struje u nezavisnim granama $i_n, i_{n+1}, \ldots, i_g$, možemo napisati:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{i}_s \\ \hline \mathbf{i}_v \end{array}\right] = \left[\mathbf{0}\right]. \tag{4.18}$$

Ovdje je:

$$\mathbf{i}_s = \left[\begin{array}{c} i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline \vdots \\ \hline i_{n-1} \end{array}\right], \qquad \mathbf{i}_v = \left[\begin{array}{c} i_n \\ \hline i_{n+1} \\ \hline \vdots \\ \hline i_g \end{array}\right].$$

Nakon množenja u (4.18) dobivamo:

$$\mathbf{M}_{11}\,\mathbf{i}_s + \mathbf{M}_{12}\,\mathbf{i}_v = \mathbf{0}.$$

a odatle je:

$$\mathbf{M}_{11}\,\mathbf{i}_s = -\,\mathbf{M}_{12}\,\mathbf{i}_v. \tag{4.19}$$

Dokazali smo u prethodnom odjeljku da je matrica $\mathbf{M}_{11}$ regularna matrica, pa prema tome postoji njezina inverzna matrica $\mathbf{M}_{11}^{-1}$. Pomnožimo li slijeva obje strane u (4.19) s $\mathbf{M}_{11}^{-1}$, imamo:

$$\mathbf{M}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{11}\,\mathbf{i}_s = -\,\mathbf{M}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{12}\,\mathbf{i}_v,$$

a odatle je:

$$\mathbf{i}_s = -\mathbf{M}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{12}\,\mathbf{i}_v. \tag{4.20}$$

To je tražena matrična relacija što povezuje struje u granama stabla $\mathbf{i}_s$ i struje u nezavisnim granama $\mathbf{i}_v$.

Uvedemo li kraće:

$$\mathbf{P} = -\mathbf{M}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{12}, \tag{4.21}$$

gdje je $\mathbf{P}$ $(n-1)\times(g-n+1)$ matrica, slijedi da je:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{P}\,\mathbf{i}_v. \tag{4.22}$$

Uvedemo li i identitet:

$$\mathbf{i}_v = \mathbf{1}\,\mathbf{i}_v, \tag{4.23}$$

gdje je $\mathbf{1}$ jedinična matrica $(g-n+1)$-tog reda, tada relacije (4.22) i (4.23) možemo napisati kao jednu matričnu relaciju:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{i}_s\\ \hline \mathbf{i}_v\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ \hline \mathbf{1}\end{array}\right]\cdot\left[\mathbf{i}_v\right]. \tag{4.24}$$

Kako je:

$$\mathbf{i} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{i}_s\\ \hline \mathbf{i}_v\end{array}\right],$$

prema (4.24) slijedi da je:

$$\mathbf{i} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ \hline \mathbf{1}\end{array}\right]\mathbf{i}_v. \tag{4.25}$$

Primjer. Zadan je graf na slici 4.12. Pomoću relacije (4.20) uspostavimo jednadžbe koje povezuju struje u granama stabla i_1, i_2, i_3, i_4 sa strujama u nezavisnim granama i_5, i_6, i_7, i_8.

Matrica incidencija $\mathbf{M}$ glasi:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ \hline ① & 1 & -1 & & & & & -1 & \\ ② & & 1 & -1 & & 1 & 1 & & \\ ③ & & & 1 & -1 & & & & 1\\ ④ & & & & 1 & -1 & & 1 & \end{array},$$

pa su podmatrice $\mathbf{M}_{11}$ i $\mathbf{M}_{12}$:

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline ① & 1 & -1 & & \\ ② & & 1 & -1 & \\ ③ & & & 1 & -1 \\ ④ & & & & 1 \end{array}, \quad \mathbf{M}_{12} = \begin{array}{c|cccc} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline ① & & & -1 & \\ ② & 1 & 1 & & \\ ③ & & & & 1 \\ ④ & -1 & & 1 & \end{array}.$$

Inverzna matrica od $\mathbf{M}_{11}$ glasi:

$$\mathbf{M}_{11}^{-1} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline ① & 1 & 1 & 1 & 1 \\ ② & & 1 & 1 & 1 \\ ③ & & & 1 & 1 \\ ④ & & & & 1 \end{array}.$$

Nadalje:

$$\mathbf{i}_s = \begin{array}{c|c} 1 & i_1 \\ 2 & i_2 \\ 3 & i_3 \\ 4 & i_4 \end{array}, \quad \mathbf{i}_v = \begin{array}{c|c} 5 & i_5 \\ 6 & i_6 \\ 7 & i_7 \\ 8 & i_8 \end{array}.$$

Uvrštenjem u (4.20) imamo:

$$\begin{array}{|c|}\hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline i_3 \\ \hline i_4 \\ \hline \end{array} = (-1) \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|cccc|}\hline & -1 & & \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline & & & 1 \\ \hline -1 & & 1 & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline i_5 \\ \hline i_6 \\ \hline i_7 \\ \hline i_8 \\ \hline \end{array},$$

a odatle je:

$$\begin{array}{|c|}\hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline i_3 \\ \hline i_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cccc|}\hline & -1 & & -1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & & -1 & -1 \\ \hline 1 & & -1 & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline i_5 \\ \hline i_6 \\ \hline i_7 \\ \hline i_8 \\ \hline \end{array},$$

odnosno:

$$\begin{aligned} i_1 &= -i_6 - i_8, \\ i_2 &= -i_6 - i_7 - i_8, \\ i_3 &= i_5 - i_7 - i_8, \\ i_4 &= i_5 - i_7. \end{aligned}$$

Te su relacije identične relacijama (4.17).

4.5. Spojna matrica

U odjeljku 4.2. pokazali smo da rang proširene spojne matrice $\mathbf{C}_p$ iznosi $(g - n + 1)$. To znači da je $(g - n + 1)$ jednadžba II. Kirchhoffova zakona linearno nezavisna. Nadalje, pokazali smo da su međusobno nezavisne upravo one jednadžbe koje odgovaraju sustavu *nezavisnih petlji*. Te jednadžbe u skraćenom matričnom obliku pišemo:

$$\mathbf{C}\,\mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{4.26}$$

Podmatricu $\mathbf{C}$ matrice $\mathbf{C}_p$, koja ima $(g - n + 1)$ redaka i g stupaca, a koje reci odgovaraju nezavisnim petljama, nazivamo *skraćena spojna matrica* ili kraće *spojna matrica**.

Sada ćemo dokazati slijedeće:

— *Ako je numeracija grana takva da su najprije redom numerirane grane stabla, a tek potom nezavisne grane, te ako je numeracija nezavisnih petlji u istom redoslijedu kao i numeracija pripadnih nezavisnih grana, a orijentacija im se podudara, tada je*:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} -\tilde{\mathbf{M}}_{12}\,\tilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1} & \mathbf{1} \end{array}\right]. \tag{4.27}$$

Prema (4.16), $\mathbf{M}_{11}$ i $\mathbf{M}_{12}$ su podmatrice matrice $\mathbf{M}$, a $\mathbf{1}$ je jedinična matrica $(g - n + 1)$-tog reda.

Dokaz. Rastavimo spojnu matricu $\mathbf{C}$ u dvije podmatrice $\mathbf{C}_{11}$ i $\mathbf{C}_{12}$ onako kako smo rastavili matricu $\mathbf{M}$: stupci od $\mathbf{C}_{11}$ neka odgovaraju granama stabla, a stupci od $\mathbf{C}_{12}$ neka odgovaraju nezavisnim granama. Tada je:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \end{array}\right]. \tag{4.28}$$

Budući da svaka nezavisna grana ulazi u sastav samo jedne nezavisne petlje, to svaki stupac podmatrice $\mathbf{C}_{12}$ ima samo jedan element različit od nule. Ti se elementi nalaze u glavnoj dijagonali podmatrice $\mathbf{C}_{12}$ jer je odabran isti redoslijed nezavisnih grana i pripadnih nezavisnih petlji. Također, svi su ti elementi pozitivne jedinice jer se orijentacija nezavisnih grana i odgovarajućih nezavisnih petlji podudara. Prema tome, podmatrica $\mathbf{C}_{12}$ jedinična je matrica $(g - n + 1)$-tog reda, pa možemo napisati:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{1} \end{array}\right]. \tag{4.28a}$$

---

*Kao i matrica incidencija tako se i spojna matrica ponegdje u literaturi definira drukčije nego što je to ovdje učinjeno, na primjer tako da reci odgovaraju granama grafa, a stupci nezavisnim petljama, ili se predznaci uz jedinice uzimaju suprotno nego što ih ovdje uzimamo.

Za matricu $\mathbf{M}$ i za matricu $\mathbf{C}$ neki upotrebljavaju i drukčije nazive od ovih koje smo ovdje usvojili.

Transponirana matrica od $\mathbf{C}$ glasi:

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{C}}_{11} \\ \hline \mathbf{1} \end{array}\right].$$

Na osnovi relacije $\mathbf{M}\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$, koja slijedi iz relacije (4.10), $\mathbf{M}_p \widetilde{\mathbf{C}}_p = \mathbf{0}$, imamo:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{C}}_{11} \\ \hline \mathbf{1} \end{array}\right] = \mathbf{0},$$

a odatle množenjem dobivamo:

$$\mathbf{M}_{11}\, \widetilde{\mathbf{C}}_{11} + \mathbf{M}_{12} = \mathbf{0}.$$

U odjeljku 4.3. dokazali smo da je matrica $\mathbf{M}_{11}$ regularna matrica. Znači da postoji inverzna matrica $\mathbf{M}_{11}^{-1}$. Pomnožimo li slijeva posljednju relaciju sa $\mathbf{M}_{11}^{-1}$, dobivamo:

$$\mathbf{M}_{11}^{-1}\, \mathbf{M}_{11}\, \widetilde{\mathbf{C}}_{11} + \mathbf{M}_{11}^{-1}\, \mathbf{M}_{12} = \mathbf{0}.$$

Odatle slijedi da je:

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{11} = -\, \mathbf{M}_{11}^{-1}\, \mathbf{M}_{12}, \tag{4.29}$$

odnosno:

$$\mathbf{C}_{11} = -\, \widetilde{\mathbf{M}}_{12}\, \widetilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1}. \tag{4.30}$$

Uvrstimo li (4.30) u (4.28 a), proizlazi da je:

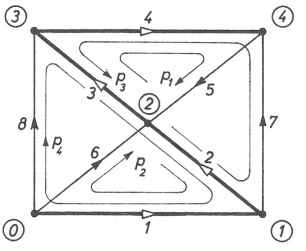
$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} -\, \widetilde{\mathbf{M}}_{12}\, \widetilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1} & \mathbf{1} \end{array}\right],$$

a to je upravo relacija (4.27) koju smo htjeli dokazati.

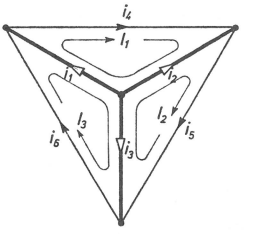
Ilustracija. Na slici 4.13. ponovno je nacrtan graf sa slike 4.12, ali ovdje su naznačene i nezavisne petlje 1, 2, 3 i 4. Za danu numeraciju i orijentaciju petlji i grana spojna matrica $\mathbf{C}$ glasi:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline p_1 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ p_2 & -1 & -1 & & & & 1 & & \\ p_3 & & -1 & -1 & -1 & & & 1 & \\ p_4 & -1 & -1 & -1 & & & & & 1 \end{array}. \tag{4.31}$$

Kako je numeracija grana takva da su najprije numerirane grane stabla redom od 1 do 4, a tek potom nezavisne grane od 5 do 8, i kako redoslijed numeracije nezavisnih petlji odgovara redoslijedu pripadnih nezavisnih grana (grana 5 pripada petlji 1, grana 6 pripada petlji 2, itd.), a orijentacije im se podudaraju, podmatrica $\mathbf{C}_{12}$ matrice $\mathbf{C}$ jedinična je matrica.



Sl. 4.13. Graf sa slike 4.12. u kojem je naznačen i jedan sustav nezavisnih petlji



Sl. 4.14. Zadani graf s naznačenim strujama grana i strujama nezavisnih petlji

U odjeljku 4.4. napisane su za zadani graf podmatrice $\mathbf{M}_{11}$ i $\mathbf{M}_{12}$ matrice $\mathbf{M}$ i inverzna matrica $\widetilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1}$ podmatrice $\mathbf{M}_{11}$. Prema (4.30), podmatrica $\mathbf{C}_{11}$ matrice (4.31), koja odgovara granama stabla, mora biti:

$$\mathbf{C}_{11} = -\widetilde{\mathbf{M}}_{12}\widetilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1} = (-1)\begin{vmatrix} & 1 & & -1 \\ & 1 & & \\ -1 & & & 1 \\ & & 1 & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} & & 1 & 1 \\ -1 & -1 & & \\ & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \end{vmatrix}.$$

4.6. Struje nezavisnih petlji

Zamislimo da se struja pojedine nezavisne grane zatvara kroz nezavisnu petlju koja odgovara toj grani. Tu zamišljenu struju nazivamo *struja nezavisne petlje*. Označavat ćemo je sa I_p, gdje indeks p odgovara numeraciji nezavisne petlje. Ako se smjer kruženja struje nezavisne petlje podudara s referentnim smjerom struje u nezavisnoj grani, možemo napisati:

$$\mathbf{i}_v = \mathbf{I}, \tag{4.32}$$

gdje je:

$\mathbf{i}_v$ — vektor struja u nezavisnim granama,
$\mathbf{I}$ — vektor struja pripadnih nezavisnih petlji.

Na primjer, neka je zadan orijentirani graf prema slici 4.14. Slijedi da je:

$$i_4 = I_1,$$
$$i_5 = I_2,$$
$$i_6 = I_3.$$

Ako su grane grafa numerirane tako da su najprije redom numerirane grane stabla, a zatim nezavisne grane, tada je, prema (4.22), $\mathbf{i}_s = \mathbf{P}\,\mathbf{i}_v$, pa na osnovi (4.32) vrijedi:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{PI}, \tag{4.33}$$

gdje je $\mathbf{P} = -\mathbf{M}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{12}$. Relacija (4.33) povezuje struje u granama stabla i struje nezavisnih petlji. Kako je prema (4.29) $\widetilde{\mathbf{C}}_{11} = -\mathbf{M}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{12}$, dakle kako je $\mathbf{P} = \widetilde{\mathbf{C}}_{11}$, imamo također i slijedeću vezu

$$\mathbf{i}_s = \widetilde{\mathbf{C}}_{11}\,\mathbf{I}. \tag{4.34}$$

Relacija koja povezuje struje svih grana i struje nezavisnih petlji slijedi iz (4.32) i (4.25), tj.:

$$\mathbf{i} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ \hline \mathbf{1}\end{array}\right] \cdot \mathbf{I}. \tag{4.35}$$

Budući da je prema (4.27) transponirana matrica $\widetilde{\mathbf{C}}$ spojne matrice $\mathbf{C}$:

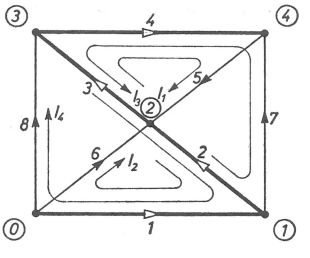
$$\widetilde{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{c}-\mathbf{M}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{12}\\ \hline \mathbf{1}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ \hline \mathbf{1}\end{array}\right],$$

uvrštenjem u (4.35) dobivamo:

$$\mathbf{i} = \widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{I}, \tag{4.36}$$

gdje je:

$\mathbf{i}$ — vektor struja u granama grafa,
$\widetilde{\mathbf{C}}$ — transponirana matrica spojne matrice $\mathbf{C}$,
$\mathbf{I}$ — vektor struja nezavisnih petlji.



Sl. 4.15. Zadani orijentirani graf u kojem su struje nezavisnih petlji označene sa I_1, I_2, I_3 i I_4

Relacija (4.36) jedna je od osnovnih topoloških relacija koja se često primjenjuje u analizi električnih mreža. Ta jednadžba transformira struje nezavisnih petlji u struje grana, a pritom je $\tilde{\mathbf{C}}$ matrica transformacije. Prema tome, u svim slučajevima kada su nam poznate struje nezavisnih petlji možemo potpuno jednoznačno odrediti struje u svim granama grafa.

Ilustracija. Zadan je orijentirani graf prema slici 4.15. Na toj su slici struje nezavisnih petlji označene sa I_1, I_2, I_3 i I_4, a usmjerene su u istom smislu kao i pripadne im nezavisne grane. U ovom slučaju spojna matrica **C** glasi:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline p_1 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ p_2 & -1 & -1 & & & & 1 & & \\ p_3 & & -1 & -1 & -1 & & & 1 & \\ p_4 & -1 & -1 & -1 & & & & & 1 \end{array},$$

pa na osnovi relacije (4.36) možemo napisati:

$$\begin{array}{|c|} \hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline i_3 \\ \hline i_4 \\ \hline i_5 \\ \hline i_6 \\ \hline i_7 \\ \hline i_8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cccc|} \hline & -1 & & -1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & & -1 & -1 \\ \hline 1 & & -1 & \\ \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline I_4 \\ \hline \end{array},$$

odakle nakon množenja dobivamo:

$$\begin{aligned} i_1 &= -I_2 - I_4, \\ i_2 &= -I_2 - I_3 - I_4, \\ i_3 &= I_1 - I_3 - I_4, \\ i_4 &= I_1 - I_3, \\ i_5 &= I_1, \\ i_6 &= I_2, \\ i_7 &= I_3, \\ i_8 &= I_4. \end{aligned}$$

Možemo se lako uvjeriti u ispravnost tih jednadžbi.

Ako grana grafa ulazi u sastav samo jedne nezavisne petlje, a one su orijentirane u istom smislu, struja grane jednaka je struji petlje (peta, šesta, sedma i osma jednadžba); ako su orijentacije u suprotnom smislu, struja grane jednaka je negativnoj struji petlje.

Kada grana grafa ulazi u sastav dviju ili više nezavisnih petlji, kroz nju prolazi nekoliko struja petlji. U tom je slučaju struja grane, prema teoremu superpozicije, jednaka zbroju struja nezavisnih petlji koje prolaze kroz tu granu, uzetih s odgovarajućim predznacima (prva, druga, treća i četvrta jednadžba).

Peto poglavlje

JEDNADŽBE MREŽE

5.1. Uvod

Sve o čemu smo do sada govorili predstavlja u širem smislu uvod u ovo poglavlje u kojem ćemo vidjeti kako se na osnovi danih relacija mogu odrediti nepoznate struje i naponi u modelu mreže. Prikazat ćemo dvije metode analize mrežâ: metodu petlji i metodu čvorišta. Najprije ćemo izvesti matrične jednadžbe jedne i druge metode, a zatim ćemo napisati eksplicitne izraze za struje u granama modela mreže. Jednadžbe ćemo izvesti za sinusoidne napone i struje, a te iste jednadžbe vrijede i za istosmjerne struje i napone.

U prethodnom poglavlju predočili smo model mreže odgovarajućim grafom, a zatim smo u općem matričnom obliku napisali sustav međusobno nezavisnih jednadžbi I. i II. Kirchhoffova zakona. Iste jednadžbe dobit ćemo za svaki graf koji je iste geometrijske strukture, bez obzira od kojih je elemenata sastavljen pripadni model mreže. Međutim, kako odzivni naponi i struje ovise i o fizikalnim karakteristikama modela mreže, a ne samo o njegovoj konfiguraciji, to ćemo pri rješavanju mrežâ morati kao dodatne jednadžbe uzeti u obzir i relacije iz prvog poglavlja koje povezuju struju kroz pasivne elemente i napon među njihovim krajevima.

Kao što smo pokazali, ako je n ukupan broj čvorišta, a g ukupan broj grana grafa, tada su međusobno nezavisne one jednadžbe I. Kirchhoffova zakona koje odgovaraju $(n - 1)$-om čvorištu, kao i one jednadžbe II. Kirchhoffova zakona koje odgovaraju $(g - n + 1)$-oj nezavisnoj petlji. To znači da se nijedna od tih jednadžbi ne može dobiti iz bilo koje druge jednadžbe, kao ni iz kombinacije ostalih jednadžbi. Nepoznanice su ovdje struje u granama i naponi među krajevima grana; ukupno je, dakle, $2g$ nepoznanica i g jednadžbi. Napišemo li za svaku granu još i jednadžbu koja te struje i napone povezuje s parametrima grane, tada će ukupan broj jednadžbi zajedno s jednadžbama dva Kirchhoffova zakona biti $2g$; znači, upravo toliko koliko ima i nepoznanica. Sada taj sustav jednadžbi možemo riješiti, pa ćemo dobiti vrijednosti struja u granama i napone grana. Zapravo, tako možemo riješiti svaki naš zadatak; sve što pritom treba da znamo jesu dva Kirchhoffova zakona i Ohmov zakon. Razlog zašto se koristimo metodama analize mreža koje ćemo upoznati u ovom poglavlju prvenstveno je taj što se primjenom topologije mreža i matrične algebre jednadžbe pišu organizirano i rješavaju sustavno prema točno određenom postupku. Prednosti te metode naročito su izrazite pri upotrebi digitalnih elektroničkih računala. Drugi razlog je u tome što je broj jednadžbi koje treba da riješimo manji, pa do rezultata dolazimo brže.

Metoda petlji, ili, kako se još naziva, *metoda zamki*, potječe od Maxwella. Svaka jednadžba iz sustava jednadžbi te metode odnosi se na jednu nezavisnu petlju, dakle, ukupan je broj jednadžbi $g - n + 1$. Nepoznanice u jednadžbama jesu »struje petlji« ili »Maxwellove struje«. Odredimo li te zamišljene struje, lako ćemo naći i struje u granama: struja grane predstavlja zbroj struja petlji koje prolaze kroz granu.

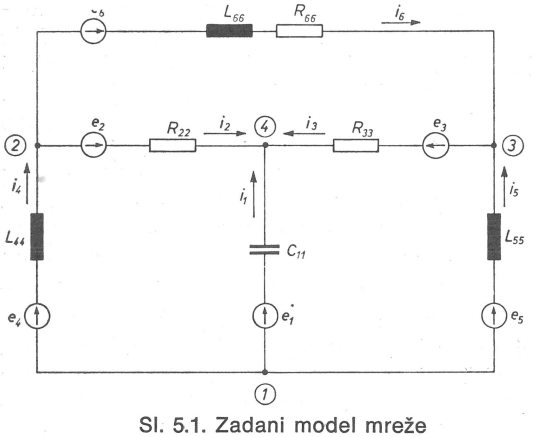
Metoda čvorišta novijeg je datuma. U jednadžbama te metode nepoznate su veličine »naponi čvorišta«; pod tim pojmom razumijevamo potencijale pojedinih čvorišta (nezavisna čvorišta) s obzirom na potencijal jednog čvorišta (referentno čvorište). Broj jednadžbi jednak je broju nezavisnih čvorišta, dakle za jedan je manji od ukupnog broja čvorišta u modelu mreže. Kako je taj broj vrlo često manji i od ukupnog broja nezavisnih petlji, to je jedan od razloga zašto se u praksi metoda čvorišta češće primjenjuje negoli metoda petlji. Nakon što smo odredili napone čvorišta, pomoću II. Kirchhoffova zakona dobivamo napone grana, a potom pomoću Ohmova zakona i struje u granama.

5.2. Metoda petlji

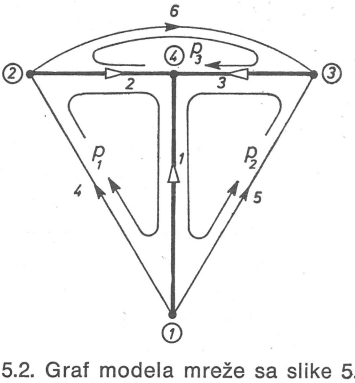
Jednadžbe metode petlji

Krajnji nam je cilj u analizi mreža da odredimo struje i napone u svim granama modela mreže, jer na osnovi toga možemo odrediti nepoznate struje i napone u elementima stvarne mreže.

U prethodnom poglavlju pokazali smo da struje u granama možemo izračunati na jednostavan način ako nam je poznat bilo koji sustav struja nezavisnih petlji. Sada ćemo vidjeti kako struje nezavisnih petlji dobivamo rješenjem jednadžbi metode petlji: to je sustav simultanih linearnih algebarskih jednadžbi u kojem su struje nezavisnih petlji nepoznanice. Izvod tih jednadžbi pokazat ćemo na primjeru jednog modela mreže, a pri izvodu služit ćemo se matričnom algebrom.



Sl. 5.1. Zadani model mreže



Sl. 5.2. Graf modela mreže sa slike 5.1. s naznačenim stablom i sustavom nezavisnih petlji

Na slici 5.1. nacrtan je model mreže u kojem se u *svakoj grani* (radi općenitosti izvoda) nalazi po jedan idealan izvor napona. Naponi izvorâ označeni su sa e_k, struje u granama sa i_k, a parametri pasivnih elemenata sa R_{kk}, L_{kk} i C_{kk}, gdje indeks k odgovara numeraciji grane. Referentni smjerovi struja u granama označeni su strelicama uz pojedine grane. Treba upamtiti da je ovdje — prema dogovoru — referentni smjer struje u pojedinoj grani odabran tako da *struja kroz izvor napona teče u smjeru od njegove minus priključnice prema plus priključnici*. Radi preglednosti jedan smo sustav nezavisnih petlji — koji smo odabrali proizvoljno — naznačili na posebnoj slici (u grafu zadanog modela mreže na slici 5.2). Kao što na slici vidimo, nezavisne petlje 1, 2 i 3 odgovaraju ovdje nezavisnim granama 4, 5 i 6 respektivno. Za odabrani sustav nezavisnih petlji i odabranu numeraciju i orijentaciju petlji i grana napišimo najprije spojnu matricu **C**, jer će nam ta matrica trebati nešto kasnije, pri izvodu jednadžbi. Spojna matrica glasi:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_1 & -1 & 1 & & 1 & & \\ p_2 & -1 & & 1 & & 1 & \\ p_3 & & -1 & 1 & & & 1 \end{array} . \tag{5.1}$$

Izvod jednadžbi metode petlji počinjemo tako da najprije napišemo II. Kirchhoffov zakon za nezavisne petlje 1, 2 i 3. Označimo sa v_k *pad napona* na pojedinom pasivnom elementu u grani k ili na serijskoj kombinaciji pasivnih elemenata ako u grani k imamo dva ili više takvih elemenata. Prema formulaciji da je pri obilaženju petlje u jednom smjeru algebarska suma padova napona jednaka nuli, imamo:

$$\begin{aligned} &\text{petlja } 1\text{: } e_1 - v_1 - e_2 + v_2 - e_4 + v_4 = 0, \\ &\text{„ } 2\text{: } e_1 - v_1 - e_3 + v_3 - e_5 + v_5 = 0, \\ &\text{„ } 3\text{: } e_2 - v_2 - e_3 + v_3 - e_6 + v_6 = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Prebacimo li padove napona na pasivnim elementima (v_k) na desnu stranu znaka jednakosti, pa cijelu jednadžbu pomnožimo sa (-1), dobivamo:

$$\begin{aligned} -e_1 + e_2 + e_4 &= -v_1 + v_2 + v_4, \\ -e_1 + e_3 + e_5 &= -v_1 + v_3 + v_5, \\ -e_2 + e_3 + e_6 &= -v_2 + v_3 + v_6. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Označimo li zatim algebarsku sumu aktivnih napona e_k na lijevoj strani jednadžbi (5.3) slovom E s indeksom koji odgovara numeraciji pripadne nezavisne petlje, dobivamo:

$$\begin{aligned} E_1 &= -e_1 + e_2 + e_4, \\ E_2 &= -e_1 + e_3 + e_5, \\ E_3 &= -e_2 + e_3 + e_6. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Naponi E_1, E_2 i E_3 nazivaju se *obilazni aktivni naponi nezavisnih petlji* ili kraće (*obilazni*) *naponi petlji.*

Sada možemo prema (5.3) i (5.4) dalje napisati:

$$\begin{aligned} E_1 &= -v_1 + v_2 + v_4, \\ E_2 &= -v_1 + v_3 + v_5, \\ E_3 &= -v_2 + v_3 + v_6, \end{aligned} \tag{5.5}$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{array}{|c|} \hline E_1 \\ \hline E_2 \\ \hline E_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 1 & & 1 & & \\ \hline -1 & & 1 & & 1 & \\ \hline & -1 & 1 & & & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_3 \\ \hline v_4 \\ \hline v_5 \\ \hline v_6 \\ \hline \end{array} . \tag{5.6}$$

U jednadžbama (5.5) imamo ispred pojedinih napona v_k pozitivan predznak ako se smisao obilaženja petlje i orijentacija pripadne grane k podudaraju, a negativan ako se ne podudaraju. Prema onome kako je u prethodnom poglavlju definirana spojna matrica, slijedi da je matrica koeficijenata uz v_k u (5.5) spojna matrica za zadani graf. U našem primjeru u to ćemo se lako uvjeriti ako usporedimo matricu koeficijenata u (5.6) s matricom (5.1) koju smo prije napisali. Znači da je u općem matričnom obliku:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}\,\mathbf{v}. \tag{5.7}$$

Nadalje, ako usporedimo (5.5) sa (5.4), vidimo da također vrijedi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}\,\mathbf{e}. \tag{5.8}$$

U relacijama (5.7) i (5.8) simboli su:

E — vektor obilaznih aktivnih napona nezavisnih petlji,
C — spojna matrica,
v — vektor padova napona na pasivnim elementima,
e — vektor aktivnih napona grana.

Učinimo sada jedan korak dalje, pa na osnovi Ohmova zakona izrazimo pad napona na pasivnim elementima svake grane produktom struje kroz granu i impedancije grane. Za granu k je:

$$v_k = z_{kk}\, i_k, \tag{5.9}$$

gdje je:

v_k — pad napona u impedanciji grane k,
z_{kk} — impedancija grane k,
i_k — struja u grani k.

U našem primjeru na slici 5.1. imamo:

$$v_1 = z_{11}\, i_1, \quad v_2 = z_{22}\, i_2, \quad v_3 = z_{33}\, i_3,$$
$$v_4 = z_{44}\, i_4, \quad v_5 = z_{55}\, i_5, \quad v_6 = z_{66}\, i_6, \tag{5.10}$$

gdje su impedancije pojedinih grana:

$$z_{11} = \frac{1}{j\,\omega\, C_{11}}, \quad z_{22} = R_{22}, \qquad z_{33} = R_{33},$$

$$z_{44} = j\,\omega\, L_{44}, \quad z_{55} = j\,\omega\, L_{55}, \quad z_{66} = R_{66} + j\,\omega\, L_{66}.$$

U matričnom obliku sustav jednadžbi (5.10) glasi:

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} & & & & & \\ & z_{22} & & & & \\ & & z_{33} & & & \\ & & & z_{44} & & \\ & & & & z_{55} & \\ & & & & & z_{66} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{vmatrix}, \tag{5.11}$$

ili skraćeno:

$$\mathbf{v} = \mathbf{z}\,\mathbf{i}, \tag{5.12}$$

gdje je:

v — vektor padova napona u impedancijama grana,
z — matrica impedancija grana,
i — vektor struja u granama.

Matrica **z**, koju nazivamo *matrica impedancija grana*, kvadratna je $g \times g$ matrica u kojoj je broj redaka, odnosno stupaca, jednak broju grana g. Ovdje je ona i dijagonalna matrica, jer su dijagonalni elementi impedancije pojedinih grana. To je slučaj kada između grana nema induktivnih veza. Ako induktivne veze postoje, matrica **z** nije više dijagonalna matrica nego, kao što ćemo vidjeti, simetrična matrica.

U slijedećim koracima u izvodu upotrijebit ćemo dobivene relacije (4.36), (5.7) i (5.12). Prema (5.7) $\mathbf{E} = \mathbf{C}\,\mathbf{v}$, a prema (5.12) $\mathbf{v} = \mathbf{z}\,\mathbf{i}$. Uvrštenjem **v** iz (5.12) u (5.7) dobivamo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\mathbf{i}. \tag{5.13}$$

Dalje je prema (4.36) $\mathbf{i} = \widetilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{I}$, pa je:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{I}. \tag{5.14}$$

Uvedemo li kraće:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}, \tag{5.15}$$

imamo konačno:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}, \tag{5.16}$$

gdje je:

E — vektor obilaznih aktivnih napona nezavisnih petlji, ili kraće vektor (obilaznih) napona petlji;
Z — matrica impedancija petlji;
I — vektor struja nezavisnih petlji, ili kraće vektor struja petlji.

Relacija (5.16) koju smo upravo izveli matrična je jednadžba metode petlji. Ako je broj nezavisnih petlji p, relacija (5.16) napisana opširnije glasi:

$$\begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1p} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{p1} & Z_{p2} & \cdots & Z_{pp} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \end{vmatrix}, \tag{5.17}$$

što odgovara slijedećem sustavu jednadžbi:

$$\begin{aligned} E_1 &= Z_{11}\, I_1 + Z_{12}\, I_2 + \ldots + Z_{1p}\, I_p, \\ E_2 &= Z_{21}\, I_1 + Z_{22}\, I_2 + \ldots + Z_{2p}\, I_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_p &= Z_{p1}\, I_1 + Z_{p2}\, I_2 + \ldots + Z_{pp}\, I_p. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Matrica impedancija petlji **Z**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{z}\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1p} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{p1} & Z_{p2} & \cdots & Z_{pp} \end{vmatrix}$$

kvadratna je $p \times p$ matrica. Elementi glavne dijagonale te matrice nazivaju se *vlastite impedancije petlji*, a elementi izvan glavne dijagonale nazivaju se *međusobne impedancije petlji*.

Svojstva matrice impedancija petlji

— Matrica impedancija petlji **Z** je *kvadratna* matrica. Ako je broj grana g, a broj nezavisnih petlji p, tada je spojna matrica **C** $p \times g$ matrica, a matrica impedancija grana **z** je $g \times g$ matrica. Prema (5.15) $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}$, pa odatle slijedi da je matrica **Z** $p \times p$ matrica. Dakle, broj redaka i stupaca matrice **Z** jednak je broju nezavisnih petlji grafa.

— Matrica **Z** je *simetrična* matrica ako je i matrica impedancija grana **z** simetrična.

Dokaz. Prema (5.15) $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}$, a prema pravilu o transpoziciji produkta matrica, $\widetilde{\mathbf{Z}}$ je:

$$\widetilde{\mathbf{Z}} = \widetilde{\mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{C}\,\widetilde{\mathbf{z}}\,\widetilde{\widetilde{\mathbf{C}}}. \tag{5.19}$$

Ako je matrica impedancija grana $\mathbf{z}$ simetrična matrica, mora biti $\mathbf{z} = \widetilde{\mathbf{z}}$. Uvrstimo li to u (5.19), dobivamo:

$$\widetilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}. \tag{5.20}$$

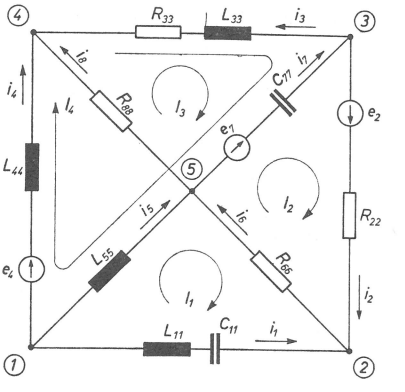
Usporedimo sada (5.20) i (5.15). Slijedi da je:

$$\mathbf{Z} = \widetilde{\mathbf{Z}}, \tag{5.21}$$

pa je prema tome matrica $\mathbf{Z}$ simetrična matrica.

Primjer 5.1.

Na slici 5.3. nacrtan je model mreže u kome je naznačen i jedan sustav nezavisnih petlji. Referentni smjerovi struja $i_1, i_2, \ldots, i_8$ u granama 1,2, ..., 8 i odabrani smjerovi struja nezavisnih petlji I_1, I_2, I_3, I_4 označeni su strelicama. Na osnovi relacije (5.8) odredimo vektor obilaznih napona petlji $\mathbf{E}$, a pomoću (5.15) matricu impedancija petlji $\mathbf{Z}$, pa zatim napišemo jednadžbu metode petlji.



Sl. 5.3. Zadani model mreže iz primjera 5.1.

— Promatranjem modela mreže napišemo spojnu matricu $\mathbf{C}$, vektor aktivnih napona grana $\mathbf{e}$ i matricu impedancija grana $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline p_1 & -1 & & & & 1 & -1 & & \\ p_2 & & 1 & & & & 1 & 1 & \\ p_3 & & & -1 & & & & -1 & 1 \\ p_4 & & & -1 & 1 & -1 & & -1 & \end{array},$$

$$\mathbf{e} = \begin{array}{c|c} 1 & \\ 2 & e_2 \\ 3 & \\ 4 & e_4 \\ 5 & \\ 6 & \\ 7 & e_7 \\ 8 & \end{array}, \qquad \mathbf{z} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & z_{11} & & & & & & & \\ 2 & & z_{22} & & & & & & \\ 3 & & & z_{33} & & & & & \\ 4 & & & & z_{44} & & & & \\ 5 & & & & & z_{55} & & & \\ 6 & & & & & & z_{66} & & \\ 7 & & & & & & & z_{77} & \\ 8 & & & & & & & & z_{88} \end{array}.$$

Ovdje je:

$$z_{11} = j\,\omega\,L_{11} + \frac{1}{j\,\omega\,C_{11}}, \qquad z_{22} = R_{22},$$

$$z_{33} = R_{33} + j\,\omega\,L_{33}, \qquad z_{44} = j\,\omega\,L_{44},$$

$$z_{55} = j\,\omega\,L_{55}, \qquad z_{66} = R_{66},$$

$$z_{77} = \frac{1}{j\,\omega\,C_{77}}, \qquad z_{88} = R_{88}.$$

— Prema (5.8) vektor je obilaznih napona petlji **E**:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Ce} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ p_1 & -1 & & & & 1 & -1 & & \\ p_2 & & 1 & & & & 1 & 1 & \\ p_3 & & & -1 & & & & -1 & 1 \\ p_4 & & & -1 & 1 & -1 & & -1 & \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & \\ 2 & e_2 \\ 3 & \\ 4 & e_4 \\ 5 & \\ 6 & \\ 7 & e_7 \\ 8 & \end{array} = \begin{array}{c|c} p_1 & \\ p_2 & e_2 + e_7 \\ p_3 & -e_7 \\ p_4 & e_4 - e_7 \end{array},$$

a prema (5.15) matrica je impedancija petlji **Z**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Cz}\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ p_1 & -1 & & & & 1 & -1 & & \\ p_2 & & 1 & & & & 1 & 1 & \\ p_3 & & & -1 & & & & -1 & 1 \\ p_4 & & & -1 & 1 & -1 & & -1 & \end{array}.$$

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
1 & z_{11} & & & & & & & \\
2 & & z_{22} & & & & & & \\
3 & & & z_{33} & & & & & \\
4 & & & & z_{44} & & & & \\
5 & & & & & z_{55} & & & \\
6 & & & & & & z_{66} & & \\
7 & & & & & & & z_{77} & \\
8 & & & & & & & & z_{88}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c|cccc}
 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\
\hline
1 & -1 & & & \\
2 & & 1 & & \\
3 & & & -1 & -1 \\
4 & & & & 1 \\
5 & 1 & & & -1 \\
6 & -1 & 1 & & \\
7 & & 1 & -1 & -1 \\
8 & & & 1 &
\end{array}
=
$$

$$
= \begin{array}{c|cccc}
 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\
\hline
p_1 & z_{11}+z_{55}+z_{66} & -z_{66} & & -z_{55} \\
p_2 & -z_{66} & z_{22}+z_{66}+z_{77} & -z_{77} & -z_{77} \\
p_3 & & -z_{77} & z_{33}+z_{77}+z_{88} & z_{33}+z_{77} \\
p_4 & -z_{55} & -z_{77} & z_{33}+z_{77} & z_{33}+z_{44}+z_{55}+z_{77}
\end{array}.
$$

— Sada možemo napisati jednadžbu metode petlji za naš primjer. Ona glasi:

$$
\begin{array}{|c|}
\hline
 \\
\hline
e_2+e_7 \\
\hline
-e_7 \\
\hline
e_4-e_7 \\
\hline
\end{array}
=
$$

$$
= \begin{array}{|cccc|}
\hline
z_{11}+z_{55}+z_{66} & -z_{66} & & -z_{55} \\
\hline
-z_{66} & z_{22}+z_{66}+z_{77} & -z_{77} & -z_{77} \\
\hline
 & -z_{77} & z_{33}+z_{77}+z_{88} & z_{33}+z_{77} \\
\hline
-z_{55} & -z_{77} & z_{33}+z_{77} & z_{33}+z_{44}+z_{55}+z_{77} \\
\hline
\end{array}
\cdot
\begin{array}{|c|}
\hline
I_1 \\
\hline
I_2 \\
\hline
I_3 \\
\hline
I_4 \\
\hline
\end{array}.
$$

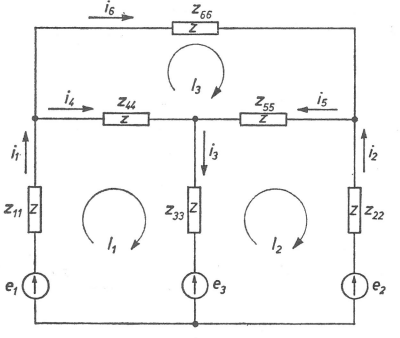
Primjer 5.2.

Za razliku od prethodnog primjera u kojem smo jednadžbe metode petlji napisali pomoću relacija (5.8) i (5.15), pokažimo sada kako te jednadžbe možemo napisati a da ne primijenimo spomenute relacije.

Neka je na primjer zadan model mreže prema slici 5.4. Strelicama su naznačeni referentni smjerovi struja $i_1, i_2, \ldots, i_6$ u granama $1, 2, \ldots, 6$ i odabrani smjerovi struja nezavisnih petlji I_1, I_2, I_3.

Izrazimo li struje u granama pomoću struja nezavisnih petlji, imamo:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1, \\ i_2 &= -I_2, \\ i_3 &= I_1 - I_2, \\ i_4 &= I_1 - I_3, \\ i_5 &= -I_2 + I_3, \\ i_6 &= I_3. \end{aligned} \tag{5.22}$$



Sl. 5.4. Zadani model mreže uz primjer 5.2.

Prema Ohmovu zakonu padovi su napona u impedancijama pojedinih grana:

$$\begin{aligned} v_1 &= z_{11}\, i_1, \quad v_2 = z_{22}\, i_2, \quad v_3 = z_{33}\, i_3, \\ v_4 &= z_{44}\, i_4, \quad v_5 = z_{55}\, i_5, \quad v_6 = z_{66}\, i_6, \end{aligned} \tag{5.23}$$

a prema II. Kirchhoffovu zakonu, koji kaže da je algebarska suma padova napona duž zatvorene petlje jednaka nuli, imamo:

$$\begin{aligned} -e_1 + v_1 + e_3 + v_3 + v_4 &= 0, \\ e_2 - v_2 - e_3 - v_3 - v_5 &= 0, \\ -v_4 + v_5 + v_6 &= 0, \end{aligned}$$

ili ako sve napone izvora napišemo s desne strane:

$$\begin{aligned} v_1 + v_3 + v_4 &= e_1 - e_3, \\ -v_2 - v_3 - v_5 &= -e_2 - e_3, \\ -v_4 + v_5 + v_6 &= 0. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Uvrštenjem (5.22) i (5.23) u (5.24) dobivamo:

$$\begin{aligned} z_{11}\, I_1 + z_{33}\,(I_1 - I_2) + z_{44}\,(I_1 - I_3) &= e_1 - e_3, \\ -z_{22}\,(-I_2) - z_{33}\,(I_1 - I_2) - z_{55}\,(-I_2 + I_3) &= -e_2 - e_3, \\ -z_{44}\,(I_1 - I_3) + z_{55}\,(-I_2 + I_3) + z_{66}\, I_3 &= 0, \end{aligned}$$

ili nakon preuređenja:

$$\begin{aligned}
(z_{11}+z_{33}+z_{44})\,I_1 \quad & -z_{33}\,I_2 \quad & -z_{44}\,I_3 = \;\; e_1-e_3,\\
-z_{33}\,I_1+(z_{22}+z_{33}+z_{55})\,I_2 \quad & & -z_{55}\,I_3 = -e_2-e_3,\\
-z_{44}\,I_1 \quad & -z_{55}\,I_2+(z_{44}+z_{55}+z_{66})\,I_3 = 0.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Jednadžbe (5.25) čine traženi sustav jednadžbi metode petlji. Koeficijenti uz struje petlji I_1, I_2 i I_3 elementi su matrice impedancija petlji **Z**, a algebarske sume napona izvora s desne strane znaka jednakosti elementi su vektora obilaznih napona petlji **E**. Kao što već znamo, te jednadžbe u općem obliku pišemo ovako:

$$\begin{aligned}
Z_{11}\,I_1+Z_{12}\,I_2+Z_{13}\,I_3 &= E_1,\\
Z_{21}\,I_1+Z_{22}\,I_2+Z_{23}\,I_3 &= E_2,\\
Z_{31}\,I_1+Z_{32}\,I_2+Z_{33}\,I_3 &= E_3.
\end{aligned}$$

Umjesto da sustav jednadžbi metode petlji izvodimo za svaki slučaj posebno, bilo pomoću (5.8) i (5.15) kao u prethodnom primjeru, ili ovako kao u ovom primjeru, možemo ih napisati i neposredno, promatranjem modela mreže. Pritom obilazne napone petlji i impedancije petlji dobivamo na slijedeći način:

Obilazni napon E_j nezavisne petlje j jednak je algebarskoj sumi napona izvora unutar petlje j. Ispred pojedinih sumanada predznak je pozitivan, ako se orijentacija petlje i smjer strelice koja pokazuje polaritet napona podudaraju. U protivnom slučaju predznak je negativan.

Vlastita impedancija nezavisne petlje Z_{jj} jednaka je ukupnoj impedanciji svih grana koje ulaze u sastav petlje j. Međusobna impedancija nezavisnih petlji Z_{jk} $(j \neq k)$ jednaka je algebarskoj sumi impedancija svih grana koje su zajedničke i petlji j i petlji k. Pojedini članovi te sume pozitivni su ako se orijentacije j-te i k-te petlje podudaraju, a negativni ako se orijentacije ne podudaraju.

U prvi čas može nam izgledati da je direktno sastavljanje jednadžbi metode petlji jednostavnije i brže, odnosno ako impedancije petlji i obilazne napone petlji napišemo promatranjem modela mreže. Kada je model mreže veoma jednostavan, sa svega nekoliko nezavisnih petlji, kao u ovim našim primjerima, to je zaista tako. Međutim, već kod malo većeg broja nezavisnih petlji, a pogotovu ako između pojedinih grana postoje induktivne veze, sustavno pisanje jednadžbi i njihovo rješavanje pomoću matrične algebre ima znatne prednosti.

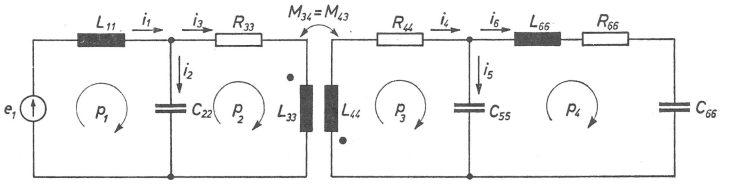
Matrice impedancija grana i petlji kada među granama postoji induktivna veza

Razmotrimo sada slučaj kada između nekih grana u modelu mreže postoji induktivna veza, kao na primjer na slici 5.5, gdje su induktivno vezane grane 3 i 4. Prema slici, pad je napona v_3 u grani 3:

$$v_3 = R_{33}\,i_3 + j\,\omega\,L_{33}\,i_3 + j\,\omega\,M_{34}\,i_4, \tag{5.26}$$

a pad je napona v_4 u grani 4:

$$v_4 = R_{44}\, i_4 + j\,\omega\, L_{44}\, i_4 + j\,\omega\, M_{43}\, i_3. \tag{5.27}$$



Sl. 5.5. Model mreže s induktivno vezanim granama 3 i 4

Poznato nam je da koeficijenti međusobne indukcije M_{34} i M_{43} mogu imati pozitivnu ili negativnu vrijednost, što ovisi o smještaju točaka uz krajeve zavojnica 3 i 4 i o smjerovima referentnih struja u granama 3 i 4. U našem su primjeru M_{34} i M_{43} pozitivni brojevi, jer su struje i_3 i i_4 ulazne struje u odnosu prema krajevima koji su označeni točkama.

Relacije (5.26) i (5.27) možemo napisati u obliku:

$$v_3 = (R_{33} + j\,\omega\, L_{33})\, i_3 + j\,\omega\, M_{34}\, i_4,$$
$$v_4 = (R_{44} + j\,\omega\, L_{44})\, i_4 + j\,\omega\, M_{43}\, i_3.$$

Uvedemo li da je:

$$z_{33} = R_{33} + j\,\omega\, L_{33}, \quad z_{34} = j\,\omega\, M_{34},$$
$$z_{44} = R_{44} + j\,\omega\, L_{44}, \quad z_{43} = j\,\omega\, M_{43},$$

imamo:

$$v_3 = z_{33}\, i_3 + z_{34}\, i_4 \tag{5.28}$$
$$v_4 = z_{44}\, i_4 + z_{43}\, i_3. \tag{5.29}$$

Tako smo padove napona u granama 3 i 4 rastavili u dvije komponente: prvi je sumand u relacijama (5.28) i (5.29) pad napona u granama uslijed vlastite struje, a drugi je sumand pad napona u jednoj grani uslijed struje u drugoj grani. Izrazimo li padove napona u onim granama koje nisu induktivno vezane s ostalim granama u modelu kao produkt struje kroz granu i impedancije grane, tada zajedno s relacijama (5.28) i (5.29) imamo ovih šest jednadžbi:

$$v_1 = z_{11}\, i_1,$$
$$v_2 = z_{22}\, i_2,$$
$$v_3 = z_{33}\, i_3 + z_{34}\, i_4,$$
$$v_4 = z_{43}\, i_3 + z_{44}\, i_4,$$
$$v_5 = z_{55}\, i_5,$$
$$v_6 = z_{66}\, i_6,$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} & & & & & \\ & z_{22} & & & & \\ & & z_{33} & z_{34} & & \\ & & z_{43} & z_{44} & & \\ & & & & z_{55} & \\ & & & & & z_{66} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{vmatrix}, \tag{5.30}$$

gdje je:

$$z_{11} = j\,\omega\,L_{11}, \qquad z_{22} = \frac{1}{j\,\omega\,C_{22}}, \qquad z_{33} = R_{33} + j\,\omega\,L_{33},$$

$$z_{34} = j\,\omega\,M_{34}, \qquad z_{43} = j\,\omega\,M_{43}, \qquad z_{44} = R_{44} + j\,\omega\,L_{44},$$

$$z_{55} = \frac{1}{j\,\omega\,C_{55}}, \qquad z_{66} = R_{66} + j\,\omega\,L_{66} + \frac{1}{j\,\omega\,C_{66}}.$$

Kraće pišemo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{z}\,\mathbf{i}, \tag{5.31}$$

gdje je:

v — vektor padova napona u granama,
z — matrica impedancija grana,
i — vektor struja u granama.

Treba uočiti da je opća relacija (5.31), koja povezuje vektor padova napona u granama **v** i vektor struja u granama **i** u slučaju kada postoje induktivne veze među granama, identična relaciji (5.12) što smo je napisali za slučaj kada između grana nije bilo induktivnih veza. Međutim, za razliku od matrice **z** u (5.12), u jednadžbi (5.31) matrica impedancija grana **z** nije dijagonalna matrica. Naime, prema (5.30) matrica je **z**:

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & z_{11} & & & & & \\ 2 & & z_{22} & & & & \\ 3 & & & z_{33} & z_{34} & & \\ 4 & & & z_{43} & z_{44} & & \\ 5 & & & & & z_{55} & \\ 6 & & & & & & z_{66} \end{array}.$$

Općenito, ako između grana postoje induktivne veze, tada su neki (ili svi) izvandijagonalni elementi matrice **z** različiti od nule. Ako su grane j i k induktivno vezane, tada će u sjecištu j-tog retka i k-tog stupca matrice **z** biti element $z_{jk} = \pm j\,\omega\,M_{jk}$,

a u sjecištu k-tog retka i j-tog stupca element je $z_{kj} = \pm j\,\omega\,M_{kj}$. Kako je zbog fizikalnog svojstva međuinduktiviteta uvijek $M_{jk} = M_{kj}$, slijedi da su izvandijagonalni elementi koji su smješteni simetrično prema glavnoj dijagonali međusobno jednaki, tj.:

$$z_{jk} = z_{kj}.$$

Prema tome, ako među granama postoje induktivne veze, matrica je **z** simetrična matrica: elementi matrice **z** izvan glavne dijagonale (koji su različiti od nule) sadrže međuinduktivitete; svi ostali parametri mogu se pojaviti samo u glavnoj dijagonali. U našem su primjeru izvandijagonalni elementi z_{34} i z_{43} različiti od nule:

$$z_{34} = j\,\omega\,M_{34}, \quad z_{43} = j\,\omega\,M_{43}.$$

Matricu impedancija grana **z** i u ovom slučaju uspostavljamo promatranjem modela mreže.

Nakon što smo odredili matrice **z** i **C**, matricu impedancija petlji **Z** možemo izračunati pomoću relacije (5.15): $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}$.

Postoje li induktivne veze samo između nekih, a ne između svih grana modela mreže, tada posebnom numeracijom grana možemo umjesto (5.15) primijeniti i jednu drugu relaciju koja je izvedena iz (5.15). Time se postupak još više sistematizira. Tu ćemo relaciju sada izvesti.

U modelu mreže numerirajmo redom najprije one grane koje su induktivno vezane s drugim granama, a potom preostale. Napišimo matricu impedancija grana **z**, a zatim je rastavimo u podmatrice prema (5.32):

$$\mathbf{z} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{z}_s & \\ \hline & \mathbf{z}_d \end{array}\right] \tag{5.32}$$

Elementi podmatrice $\mathbf{z}_s$ odgovaraju granama koje imaju induktivnu vezu s drugim granama; ta je podmatrica simetrična. Podmatrica $\mathbf{z}_d$ dijagonalna je matrica, a njezini elementi odgovaraju granama koje nemaju induktivnu vezu s drugim granama.

Kao što smo matricu **z** rastavili u podmatrice, na odgovarajući način rastavimo u dvije podmatrice i spojnu matricu **C**, tj.:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_d \end{array}\right], \tag{5.33}$$

pa je odatle:

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{C}}_s \\ \hline \widetilde{\mathbf{C}}_d \end{array}\right].$$

Uvrštenjem u (5.15) dobivamo:

$$\mathbf{Z} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{z}_s & \\ \hline & \mathbf{z}_d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{C}}_s \\ \hline \widetilde{\mathbf{C}}_d \end{array}\right],$$

odnosno nakon množenja:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}_s \mathbf{z}_s \widetilde{\mathbf{C}}_s + \mathbf{C}_d \mathbf{z}_d \widetilde{\mathbf{C}}_d. \tag{5.34}$$

Uvedemo li kraće da je:

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{C}_s \mathbf{z}_s \widetilde{\mathbf{C}}_s, \tag{5.35}$$

$$\mathbf{Z}_d = \mathbf{C}_d \mathbf{z}_d \widetilde{\mathbf{C}}_d, \tag{5.36}$$

imamo:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_d. \tag{5.37}$$

Primjer 5.3.

Za model mreže na slici 5.5, u kojem su induktivno vezane grane 3 i 4, odredimo pomoću relacije (5.8) vektor obilaznih napona petlji **E**, a pomoću relacije (5.15) matricu impedancija petlji **Z**, pa zatim napišimo jednadžbu metode petlji. Orijentacija i numeracija grana i nezavisnih petlji označene su na slici.

— Promatranjem modela mreže napišemo najprije spojnu matricu **C**, vektor aktivnih napona grana **e** i matricu impedancija grana **z**. Imamo:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_1 & 1 & 1 & & & & \\ p_2 & & -1 & 1 & & & \\ p_3 & & & & 1 & 1 & \\ p_4 & & & & & -1 & 1 \end{array},$$

$$\mathbf{e} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & e_1 \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \end{array}, \qquad \mathbf{z} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & z_{11} & & & & & \\ 2 & & z_{22} & & & & \\ 3 & & & z_{33} & z_{34} & & \\ 4 & & & z_{43} & z_{44} & & \\ 5 & & & & & z_{55} & \\ 6 & & & & & & z_{66} \end{array}.$$

Ovdje je:

$$z_{11} = j\,\omega\,L_{11}, \qquad z_{22} = \frac{1}{j\,\omega\,C_{22}},$$

$$z_{33} = R_{33} + j\,\omega\,L_{33}, \qquad z_{34} = j\,\omega\,M_{34},$$

$$z_{43} = j\,\omega\,M_{43}, \qquad z_{44} = R_{44} + j\,\omega\,L_{44},$$

$$z_{55} = \frac{1}{j\,\omega\,C_{55}}, \qquad z_{66} = R_{66} + j\,\omega\,L_{66} + \frac{1}{j\,\omega\,C_{66}}.$$

— Prema (5.8) vektor obilaznih napona petlji **E** glasi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Ce} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_1 & 1 & 1 & & & & \\ p_2 & & -1 & 1 & & & \\ p_3 & & & & 1 & 1 & \\ p_4 & & & & & -1 & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & e_1 \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \end{array} = \begin{array}{c|c} p_1 & e_1 \\ p_2 & \\ p_3 & \\ p_4 & \end{array},$$

a prema (5.15) matrica impedancija petlji **Z** glasi:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}z\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_1 & 1 & 1 & & & & \\ p_2 & & -1 & 1 & & & \\ p_3 & & & & 1 & 1 & \\ p_4 & & & & & -1 & 1 \end{array} \cdot$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & z_{11} & & & & & \\ 2 & & z_{22} & & & & \\ 3 & & & z_{33} & z_{34} & & \\ 4 & & & z_{43} & z_{44} & & \\ 5 & & & & & z_{55} & \\ 6 & & & & & & z_{66} \end{array} \cdot \begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & -1 & & \\ 3 & & 1 & & \\ 4 & & & 1 & \\ 5 & & & 1 & -1 \\ 6 & & & & 1 \end{array} =$$

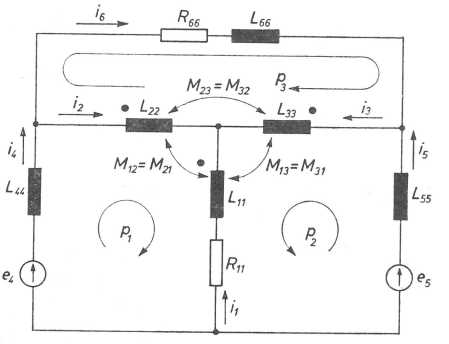
$$= \begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \hline p_1 & z_{11} + z_{22} & -z_{22} & & \\ p_2 & -z_{22} & z_{22} + z_{33} & z_{34} & \\ p_3 & & z_{43} & z_{44} + z_{55} & -z_{55} \\ p_4 & & & -z_{55} & z_{55} + z_{66} \end{array}$$

— Jednadžba metode petlji konačno glasi:

$$\begin{array}{c|c} e_1 & \\ & \\ & \\ & \end{array} = \begin{array}{cccc} z_{11} + z_{22} & -z_{22} & & \\ -z_{22} & z_{22} + z_{33} & z_{34} & \\ & z_{43} & z_{44} + z_{55} & -z_{55} \\ & & -z_{55} & z_{55} + z_{66} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} I_1 & \\ I_2 & \\ I_3 & \\ I_4 & \end{array}.$$

Primjer 5.4.

U modelu mreže na slici 5.6. najprije su brojevima 1, 2 i 3 numerirane grane između kojih postoji induktivna veza, a tek zatim brojevima 4, 5 i 6 one grane koje nemaju induktivne veze s drugim granama. Za odabrani sustav nezavisnih petlji i naznačenu orijentaciju grana i petlji treba primjenom relacije (5.37) odrediti matricu impedancija petlji **Z**.



Sl. 5.6. Zadani model mreže uz primjer 5.4.

— Spojna matrica **C** glasi:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_1 & -1 & 1 & & 1 & & \\ p_2 & -1 & & 1 & & 1 & \\ p_3 & & -1 & 1 & & & 1 \end{array},$$

pa su podmatrice $\mathbf{C}_s$ i $\mathbf{C}_d$:

$$\mathbf{C}_s = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_1 & -1 & 1 & \\ p_2 & -1 & & 1 \\ p_3 & & -1 & 1 \end{array}, \qquad \mathbf{C}_d = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_1 & 1 & & \\ p_2 & & 1 & \\ p_3 & & & 1 \end{array}.$$

— Matrica impedancija grana **z** glasi:

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & z_{11} & z_{12} & z_{13} & & & \\ 2 & z_{21} & z_{22} & z_{23} & & & \\ 3 & z_{31} & z_{32} & z_{33} & & & \\ 4 & & & & z_{44} & & \\ 5 & & & & & z_{55} & \\ 6 & & & & & & z_{66} \end{array}$$

gdje je:

$$z_{11} = R_{11} + j\omega L_{11}, \quad z_{22} = j\omega L_{22},$$
$$z_{33} = j\omega L_{33}, \quad z_{44} = j\omega L_{44},$$
$$z_{55} = j\omega L_{55}, \quad z_{66} = R_{66} + j\omega L_{66},$$
$$z_{12} = -j\omega M_{12}, \quad z_{21} = -j\omega M_{21},$$
$$z_{13} = -j\omega M_{13}, \quad z_{31} = -j\omega M_{31},$$
$$z_{23} = j\omega M_{23}, \quad z_{32} = j\omega M_{32}.$$

Podmatrice $\mathbf{z}_s$ i $\mathbf{z}_d$ glase:

$$\mathbf{z}_s = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ 2 & z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ 3 & z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{array}, \qquad \mathbf{z}_d = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & z_{44} & & \\ 5 & & z_{55} & \\ 6 & & & z_{66} \end{array}.$$

— Sada možemo na osnovi (5.35) i (5.36) odrediti podmatrice $\mathbf{Z}_s$ i $\mathbf{Z}_d$ matrice impedancija petlji $\mathbf{Z}$. Imamo:

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{C}_s \mathbf{z}_s \widetilde{\mathbf{C}}_s = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_1 & -1 & 1 & \\ p_2 & -1 & & 1 \\ p_3 & & -1 & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ 2 & z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ 3 & z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccc} & p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ 2 & 1 & & -1 \\ 3 & & 1 & 1 \end{array},$$

ili nakon množenja:

$$\mathbf{Z}_s = \begin{array}{c|ccc} & p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline p_1 & z_{11} - z_{21} - z_{12} + z_{22} & z_{11} - z_{21} - z_{13} + z_{23} & z_{12} - z_{22} - z_{13} + z_{33} \\ p_2 & z_{11} - z_{31} - z_{12} + z_{32} & z_{11} - z_{31} - z_{13} + z_{33} & z_{12} - z_{32} - z_{13} + z_{33} \\ p_3 & z_{21} - z_{31} - z_{22} + z_{32} & z_{21} - z_{31} - z_{23} + z_{33} & z_{22} - z_{32} - z_{23} + z_{33} \end{array}.$$

Također je:

$$\mathbf{Z}_d = \mathbf{C}_d \mathbf{z}_d \widetilde{\mathbf{C}}_d = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_1 & 1 & & \\ p_2 & & 1 & \\ p_3 & & & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & z_{44} & & \\ 5 & & z_{55} & \\ 6 & & & z_{66} \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccc} & p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline 4 & 1 & & \\ 5 & & 1 & \\ 6 & & & 1 \end{array},$$

odnosno:

$$\mathbf{Z}_d = \begin{array}{c|ccc} & p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline p_1 & z_{44} & & \\ p_2 & & z_{55} & \\ p_3 & & & z_{66} \end{array}.$$

Prema (5.37) zbrajanjem matrica $\mathbf{Z}_s$ i $\mathbf{Z}_d$ dobivamo traženu matricu $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_d =$$

$$= \begin{array}{c|ccc} & p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline p_1 & z_{11}+z_{22}+z_{44}-z_{21}-z_{12} & z_{11}-z_{21}-z_{13}+z_{23} & z_{12}-z_{22}-z_{13}+z_{23} \\ p_2 & z_{11}-z_{12}-z_{31}+z_{23} & z_{11}+z_{33}+z_{55}-z_{13}-z_{31} & z_{12}-z_{32}-z_{13}+z_{33} \\ p_3 & z_{21}-z_{22}-z_{31}+z_{32} & z_{21}-z_{23}-z_{31}+z_{33} & z_{22}+z_{33}+z_{66}-z_{23}-z_{32} \end{array}.$$

Određivanje struja u granama

Formalno rješenje matrične jednadžbe metode petlji $\mathbf{E} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}$ (relacija 5.16) dobit ćemo ako tu jednadžbu pomnožimo slijeva s inverznom matricom $\mathbf{Z}^{-1}$. Imamo:

$$\mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{E} = \mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{I},$$

a kako je $\mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{Z} = \mathbf{1}$, slijedi da je:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{E}, \tag{5.38}$$

gdje je:

- $\mathbf{I}$ — vektor struja petlji,
- $\mathbf{Z}^{-1}$ — inverzna matrica matrice impedancija petlji $\mathbf{Z}$,
- $\mathbf{E}$ — vektor obilaznih napona petlji.

Kada znamo struje nezavisnih petlji $\mathbf{I}$, možemo struje u granama modela mreže $\mathbf{i}$ izračunati pomoću relacije (4.36): $\mathbf{i} = \widetilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{I}$. Naime, nakon što $\mathbf{i}$ iz (4.36) uvrstimo u (5.38), dobivamo:

$$\mathbf{i} = \widetilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{E}.$$

Kako je prema (5.20) $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}$, a prema (5.8) $\mathbf{E} = \mathbf{C}\,\mathbf{e}$, dobivamo da je konačno:

$$\mathbf{i} = \widetilde{\mathbf{C}}\,(\mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}})^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{e}, \tag{5.39}$$

gdje je:

- $\mathbf{i}$ — vektor struja u granama modela mreže,
- $\mathbf{C}$ — spojna matrica,
- $\widetilde{\mathbf{C}}$ — transponirana spojna matrica,
- $\mathbf{z}$ — matrica impedancija grana,
- $\mathbf{e}$ — vektor aktivnih napona grana.

Uvedemo li da je:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = (\mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}})^{-1}, \tag{5.40}$$

možemo relaciju (5.39) napisati kraće:

$$\mathbf{i} = \widetilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{C}\,\mathbf{e}. \tag{5.41}$$

Kao što vidimo, matrica **Y** ima značenje admitancije. Ona se naziva *matrica admitancija petlji.* Dijagonalni elementi te matrice nazivaju se *vlastite admitancije petlji,* a izvandijagonalni elementi nazivaju se *međusobne admitancije petlji.*

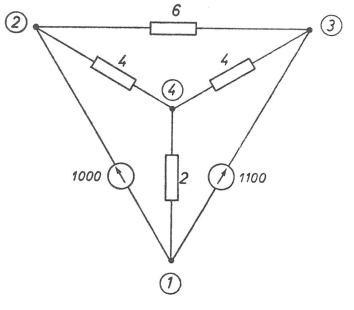
Redoslijed koraka kako dolazimo do traženih veličina

Vektor struja u granama modela mreže **i** izražen je u relaciji (5.39) matricama **C** (odnosno $\widetilde{\mathbf{C}}$), **z** i **e**. Te matrice dobivamo neposredno promatranjem modela mreže: matricom **C**, koja je topološka matrica, na određen način opišemo odabrani sustav nezavisnih petlji; pomoću matrice **z** opišemo sve pasivne elemente, a pomoću vektora **e** opišemo sve izvore napona u modelu mreže. Nakon toga možemo prema (5.39) izračunati tražene struje **i**, pridržavajući se pritom određenog redoslijeda. Postupak možemo ukratko opisati ovako:

1. numeriramo i orijentiramo grane modela mreže; odaberemo jedan sustav nezavisnih petlji; numeriramo i orijentiramo nezavisne petlje;
2. promatranjem modela mreže napišemo spojnu matricu **C**, matricu impedancija grana **z** i vektor aktivnih napona grana **e**;
3. odredimo matricu impedancija petlji **Z**: $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}}$;
4. odredimo matricu admitancija petlji **Y**: $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$;
5. odredimo vektor struja u granama **i**: $\mathbf{i} = \widetilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{C}\,\mathbf{e}$.

Primjer 5.5.

Zadan je model mreže prema slici 5.7. Treba odrediti struje u granama.



Sl. 5.7. Zadani model mreže u primjeru 5.5.

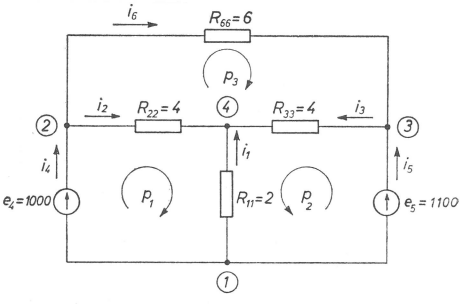
Rješavanje:

1. Zadani model mreže nacrtali smo još jednom na slici 5.8. Na toj slici strelicama smo označili odabranu orijentaciju grana, a indeks uz simbol za struju grane odgovara odabranoj numeraciji grane. Zakrivljene strelice unutar modela mreže pokazuju odabrani sustav i orijentaciju nezavisnih petlji. Prema provedenoj numeraciji grana pišemo:

$$R_{11} = 2, \quad R_{22} = 4, \quad R_{33} = 4, \quad R_{44} = 0, \quad R_{55} = 0, \quad R_{66} = 6,$$

i:

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 1000, \quad e_5 = 1100, \quad e_6 = 0.$$



Sl. 5.8. Zadani model mreže u kojem su naznačene odabrana numeracija i orijentacija grana i nezavisnih petlji

2. Promatrajući model mreže na slici 5.8. pišemo spojnu matricu **C**, matricu impedancija grana **z** i vektor aktivnih napona grana **e**:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_1 & -1 & 1 & & 1 & & \\ p_2 & -1 & & 1 & & 1 & \\ p_3 & & -1 & 1 & & & 1 \end{array},$$

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & & & & & \\ 2 & & 4 & & & & \\ 3 & & & 4 & & & \\ 4 & & & & & & \\ 5 & & & & & & \\ 6 & & & & & & 6 \end{array}, \qquad \mathbf{e} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & 1000 \\ 5 & 1100 \\ 6 & \end{array}.$$

3. Odredimo matricu impedancija petlji **Z**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\widetilde{\mathbf{C}} =$$

	1	2	3	4	5	6
p_1	−1	1		1		
p_2	−1		1		1	
p_3		−1	1			1

·

	1	2	3	4	5	6
1	2					
2		4				
3			4			
4						
5						
6						6

·

	p_1	p_2	p_3
1	−1	−1	
2	1		−1
3		1	1
4	1		
5		1	
6			1

=

	p_1	p_2	p_3
p_1	6	2	−4
p_2	2	6	4
p_3	−4	4	14

.

4. Odredimo matricu admitancija petlji **Y**. Nakon računanja dobivamo:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} =$$

	p_1	p_2	p_3
p_1	0,35417	−0,22917	0,16667
p_2	−0,22917	0,35417	−0,16667
p_3	0,16667	−0,16667	0,16667

.

5. Izračunamo struje u granama **i**:

$$\mathbf{i} = \widetilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{C}\,\mathbf{e} =$$

	p_1	p_2	p_3
1	−1	−1	
2	1		−1
3		1	1
4	1		
5		1	
6			1

·

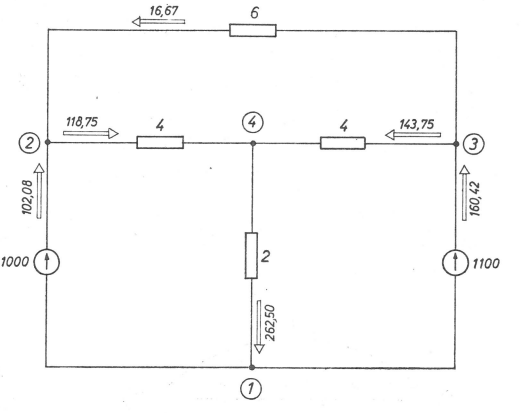
	p_1	p_2	p_3
p_1	0,35417	−0,22917	0,16667
p_2	−0,22917	0,35417	−0,16667
p_3	0,16667	−0,16667	0,16667

.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
p_1 & -1 & 1 & & 1 & & \\
p_2 & -1 & & 1 & & 1 & \\
p_3 & & -1 & 1 & & & 1
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c|c}
1 & \\
2 & \\
3 & \\
4 & 1000 \\
5 & 1100 \\
6 &
\end{array}
$$

$$
\mathbf{i} = \begin{array}{c|c}
1 & -262{,}50 \\
2 & 118{,}75 \\
3 & 143{,}75 \\
4 & 102{,}08 \\
5 & 160{,}42 \\
6 & -16{,}67
\end{array}
$$

6. Dobivena raspodjela struja u zadanom primjeru prikazana je na slici 5.9.



Sl. 5.9. Raspodjela struja u modelu mreže iz primjera 5.5.

5.3. Metoda čvorišta

Uvod

Kao što je u metodi petlji, tako je i u metodi čvorišta ponašanje električnih mreža opisano pomoću sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Ako izvore električne energije modeliramo pomoću idealnih izvora struje, a impedancije zamijenimo admitancijama, tada su jednadžbe metode petlji i jednadžbe metode čvorišta dualne: u jednadžbama metode petlji nepoznanice su *struje* nezavisnih petlji, koeficijenti uz nepoznanice su *impedancije* nezavisnih petlji, a slobodni članovi su obilazni

naponi nezavisnih petlji; s druge strane, u jednadžbama metode čvorišta nepoznanice su *naponi* nezavisnih čvorišta, koeficijenti uz nepoznanice su *admitancije* nezavisnih čvorišta, a slobodni članovi su ukupne *struje* izvora u nezavisnim čvorištima.

Vidjeli smo da su struje nezavisnih petlji definirane tako da je u svim čvorištima automatski zadovoljen I. Kirchhoffov zakon, a jednadžbe metode petlji slijede iz primjene II. Kirchhoffova zakona na nezavisne petlje. Tako se ukupan broj jednadžbi koje treba riješiti svodi na broj nezavisnih petlji.

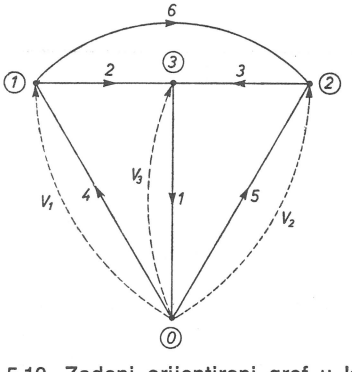
Uvođenjem pojma »naponi nezavisnih čvorišta« automatski je u metodi čvorišta zadovoljen II. Kirchhoffov zakon za sve petlje, pa se jednadžbe metode čvorišta dobiju primjenom I. Kirchhoffova zakona na sva čvorišta osim na referentno čvorište. Dakle, broj jednadžbi jednak je broju nezavisnih čvorišta, odnosno za jedan je manji od ukupnog broja čvorišta.

Konfiguracija električnih mreža gotovo je uvijek takva da je broj jednadžbi manji, a često i znatno manji, ako primijenimo metodu čvorišta. To je jedan od razloga zašto ta metoda danas ima veću praktičnu primjenu negoli metoda petlji.

Naponi nezavisnih čvorišta i relacija koja povezuje napone grana i napone nezavisnih čvorišta

Odaberemo li jedno čvorište u grafu zadanog modela mreže pa to čvorište nazovemo *referentno čvorište*, tada napone između svakog od preostalih čvorišta i referentnog čvorišta nazivamo *naponi nezavisnih čvorišta* ili kraće *naponi čvorišta* (za referentno čvorište može se odabrati bilo koje čvorište, međutim najčešće se odabire čvorište koje je na potencijalu zemlje. Tada su naponi čvorišta koje dobivamo računom ujedno i naponi prema zemlji).

Neka je u grafu na slici 5.10. referentno čvorište ono označeno sa 0. Naponi nezavisnih čvorišta označeni su sa V_1, V_2 i V_3. Uzmimo da su, kao što je i strelicama naznačeno, sa V_1, V_2 i V_3 označeni *padovi napona u smjeru od referentnog čvorišta prema ostalim čvorištima.*



Sl. 5.10. Zadani orijentirani graf u kojem su naponi nezavisnih čvorišta 1, 2 i 3 prema referentnom čvorištu O označeni sa V_1, V_2, V_3.

Ako padove napona u granama 1, 2, ..., 6 označimo sa $v_1, v_2, \ldots, v_6$ (smjer je pada napona u smjeru naznačenog referentnog smjera za struju), tada pad napona u svakoj grani možemo izraziti pomoću padova napona nezavisnih čvorišta ovako:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= & & & - V_3,\\
v_2 &= - V_1 & & & + V_3,\\
v_3 &= & & - V_2 & + V_3,\\
v_4 &= & V_1, & & \\
v_5 &= & & V_2, & \\
v_6 &= - V_1 & + V_2, & &
\end{aligned}
$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & -1 \\ -1 & & 1 \\ & -1 & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

Vidimo da je matrica koeficijenata u jednadžbi (5.42) transponirana matrica incidencija zadanog orijentiranog grafa. Naime, očito je da reci te matrice odgovaraju granama, a stupci nezavisnim čvorištima grafa. Zatim, u svakom retku može biti ili samo jedan element različit od nule ili mogu biti dva elementa različita od nule; ti su brojevi samo (+1) i (−1). Jedan je element različit od nule ako je grana direktno spojena s referentnim čvorištem, a u suprotnom slučaju dva su elementa različita od nule; jedan je od njih tada (+1), a drugi (−1). Kada su grana i čvorište incidentni, u sjecištu odgovarajućeg retka i stupca imamo (+1) ako je grana usmjerena prema čvorištu, a (−1) ako je usmjerena od čvorišta. Napišemo li matricu incidencija zadanog grafa pa usporedimo to što smo rekli s postupkom sastavljanja te matrice, slijedi da je matrica koeficijenata u (5.42) zaista transponirana matrica incidencija. Dakle, možemo napisati:

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}, \tag{5.43}$$

gdje je:

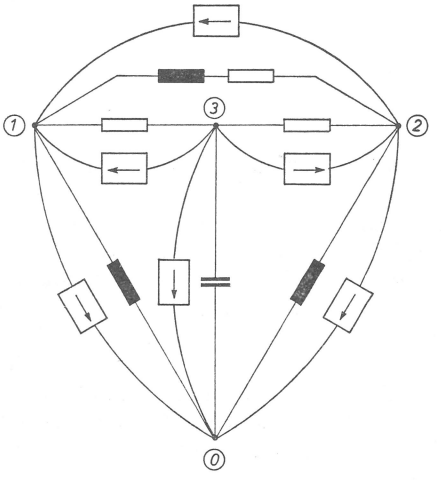
- $\mathbf{v}$ — vektor padova napona u granama,
- $\tilde{\mathbf{M}}$ — transponirana matrica incidencija,
- $\mathbf{V}$ — vektor padova napona nezavisnih čvorišta ili kraće vektor napona čvorišta (pad je napona nezavisnog čvorišta u smjeru od referentnog čvorišta prema nezavisnom čvorištu).

Očito je da jednadžba (5.43) vrijedi općenito za svaki graf. Ako je g broj grana grafa, a N broj nezavisnih čvorišta, tada je $\mathbf{v}$ g-komponentni, a $\mathbf{V}$ N-komponentni stupčani vektor.

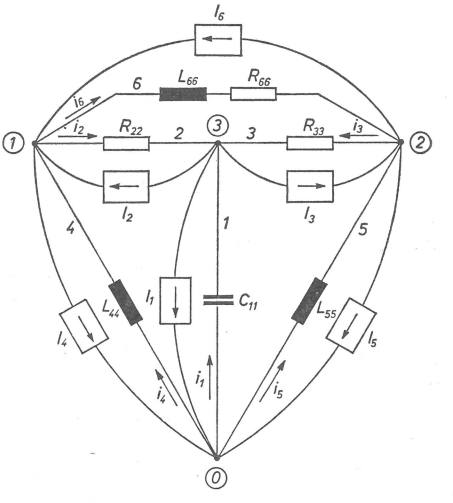
Jednadžbe metode čvorišta

Na slici 5.11. nacrtan je model mreže u kojem je — radi općenitosti izvoda — svakoj pasivnoj grani paralelno priključen idealni izvor struje. Na slici 5.12. najprije su proizvoljno numerirane pojedine pasivne grane, a zatim su označene struje grana, parametri pasivnih elemenata i struje izvora, pri čemu indeksi uz pojedine simbole odgovaraju odabranoj numeraciji pasivnih grana: općenito je struja grane k označena sa i_k, parametri pasivnih elemenata sa R_{kk}, L_{kk} i C_{kk}, a struja izvora koji je

priključen paralelno grani k označena je sa I_k. S druge strane, orijentaciju grana odabrali smo prema slijedećem dogovoru: *smjer strelice u grani uvijek je od onog čvorišta prema kojemu je usmjerena struja izvora što je priključen paralelno toj grani.* Na primjer, orijentacija grane 3 je od čvorišta 2 prema čvorištu 3, jer je smjer struje I_3 prema čvorištu 2.



Sl. 5.11. Zadani model mreže u kojem je svakoj pasivnoj grani paralelno priključen idealni izvor struje



Sl. 5.12. Model mreže sa slike 5.11. s numeriranim i orijentiranim granama

Napišimo sada I. Kirchhoffov zakon za nezavisna čvorišta 1, 2 i 3. Prema formulaciji da je algebarska suma izlaznih struja jednaka nuli, imamo:

$$\begin{aligned} \text{Čvorište } 1: &\quad -I_2 + i_2 + I_4 - i_4 - I_6 + i_6 = 0, \\ \text{„ } 2: &\quad -I_3 + i_3 + I_5 - i_5 + I_6 - i_6 = 0, \\ \text{„ } 3: &\quad I_1 - i_1 + I_2 - i_2 + I_3 - i_3 = 0, \end{aligned} \tag{5.44}$$

ili, ako sve struje grana napišemo s desne strane znaka jednakosti:

$$\begin{aligned} -I_2 + I_4 - I_6 &= -i_2 + i_4 - i_6, \\ -I_3 + I_5 + I_6 &= -i_3 + i_5 + i_6, \\ I_1 + I_2 + I_3 &= \quad i_1 + i_2 + i_3. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Algebarsku sumu struja izvora u čvorištima 1, 2 i 3 označimo kraće sa $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ odnosno $\mathcal{J}_3$. Znači da je:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= -I_2 + I_4 - I_6, \\ \mathcal{J}_2 &= -I_3 + I_5 + I_6, \\ \mathcal{J}_3 &= \quad I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Prema (5.45) i (5.46) dalje slijedi da je:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= -i_2 + i_4 - i_6, \\ \mathcal{J}_2 &= -i_3 + i_5 + i_6, \\ \mathcal{J}_3 &= i_1 + i_2 + i_3, \end{aligned} \tag{5.47}$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & -1 & & 1 & & -1 \\ & & -1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{vmatrix}. \tag{5.48}$$

Možemo zaključiti da je matrica koeficijenata u (5.48) zapravo matrica incidencija orijentiranog grafa koji odgovara modelu mreže na slici 5.12. Budući da to vrijedi općenito, možemo napisati:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\,\mathbf{i}, \tag{5.49}$$

gdje je:

J — vektor ukupnih struja izvora u nezavisnim čvorištima,
M — matrica incidencija,
i — vektor struja grana.

Nadalje, ako usporedimo (5.47) i (5.46), možemo vidjeti da je:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\,\mathbf{I}. \tag{5.50}$$

Sa **I** smo označili vektor struja izvora*:

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix}.$$

*Prisjetimo se da smo sa **I** bili označili vektor struja nezavisnih petlji. Iako smo sada upotrijebili isti simbol i za vektor struja izvora, očito je da se radi o sasvim različitim pojmovima kojih je smisao potpuno drukčiji.

Napišimo sada Ohmov zakon za svaku granu zadanog modela mreže, i to tako da struju grane izrazimo kao produkt admitancije grane i pada napona između krajeva grana. Imamo:

$$\begin{aligned} i_1 &= y_{11}\, v_1, \quad i_2 = y_{22}\, v_2, \quad i_3 = y_{33}\, v_3, \\ i_4 &= y_{44}\, v_4, \quad i_5 = y_{55}\, v_5, \quad i_6 = y_{66}\, v_6, \end{aligned} \tag{5.51}$$

ili u matričnom obliku,

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & & & & & \\ & y_{22} & & & & \\ & & y_{33} & & & \\ & & & y_{44} & & \\ & & & & y_{55} & \\ & & & & & y_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}. \tag{5.52}$$

Tu su admitancije grana:

$$y_{11} = j\,\omega\, C_{11}, \qquad y_{22} = \frac{1}{R_{22}}, \qquad y_{33} = \frac{1}{R_{33}},$$

$$y_{44} = \frac{1}{j\,\omega\, L_{44}}, \qquad y_{55} = \frac{1}{j\,\omega\, L_{55}}, \qquad y_{66} = \frac{1}{R_{66} + j\,\omega\, L_{66}}.$$

Jednadžbu (5.52) u skraćenom matričnom obliku općenito pišemo:

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\mathbf{v}, \tag{5.53}$$

gdje je:

i — vektor struja grana,

y — matrica admitancija grana,

v — vektor padova napona u granama.

Kao što je matrica impedancija grana **z** kvadratna $g \times g$ matrica, tako je i matrica admitancija grana **y** kvadratna $g \times g$ matrica. Također, ako ne postoje induktivne veze između pojedinih grana, tada je i matrica **y** dijagonalna matrica; elementi glavne dijagonale odgovaraju admitancijama grana. Prema (5.12) i (5.53) slijedi da je:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1}, \tag{5.54}$$

ali samo ako je matrica **z** regularna matrica.

Ako između neka dva čvorišta u modelu mreže ne postoji grana s pasivnim elementima, a između njih je priključen idealni izvor struje, tada zamišljamo da je paralelno idealnom izvoru struje priključena grana koje je admitancija jednaka nuli, pa je tako i uvrštavamo u matricu **y**. To ćemo vidjeti u primjeru.

Nakon što smo napisali relacije (5.43), (5.49) i (5.53) možemo do matrične jednadžbe metode čvorišta doći jednostavno. Kao prvo, uvrstimo **i** iz (5.53) u (5.49). Dobivamo:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\mathbf{v}. \tag{5.55}$$

Kako je prema (5.43) $\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{V}$, uvrštenjem u (5.55) slijedi da je:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}. \tag{5.56}$$

Uvedemo li kraće:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}}, \tag{5.57}$$

možemo konačno napisati:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}\,\mathbf{V}. \tag{5.58}$$

Relacija (5.58) matrična je jednadžba metode čvorišta. U njoj je:

J — vektor ukupnih struja izvora u nezavisnim čvorištima, ili kraće vektor ukupnih struja izvora,

Y — matrica admitancija čvorišta,

V — vektor padova napona nezavisnih čvorišta, ili kraće vektor napona čvorišta.

Ako ukupan broj *nezavisnih čvorišta* označimo sa N (N je broj za jedan manji od ukupnog broja čvorišta n), tada relaciju (5.58) pišemo u širem obliku općenito ovako:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{J}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{vmatrix}, \tag{5·59}$$

ili kao sustav linearnih algebarskih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= Y_{11}\,V_1 + Y_{12}\,V_2 + \dots + Y_{1N}\,V_N, \\ \mathcal{J}_2 &= Y_{21}\,V_1 + Y_{22}\,V_2 + \dots + Y_{2N}\,V_N, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{J}_N &= Y_{N1}\,V_1 + Y_{N2}\,V_2 + \dots + Y_{NN}\,V_N. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Matrica admitancija čvorišta **Y**:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{vmatrix}$$

kvadratna je $N \times N$ matrica. Elementi glavne dijagonale nazivaju se *vlastite admitancije čvorišta*, a izvandijagonalni elementi nazivaju se *međusobne admitancije čvorišta*.

Inverzna matrica od matrice admitancija čvorišta **Y** obično se označava sa **Z**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}. \tag{5.61}$$

Matrica **Z** naziva se *matrica impedancija čvorišta.* Dijagonalni elementi te matrice nazivaju se *vlastite impedancije čvorišta,* a izvandijagonalni elementi nazivaju se *međusobne impedancije čvorišta.*

Iako se označavaju istim simbolom **Z**, moramo strogo razlikovati matricu impedancije petlji od matrice impedancija čvorišta. Isto tako moramo razlikovati matricu admitancija čvorišta od matrice admitancija petlji, iako se obje označavaju sa **Y**.

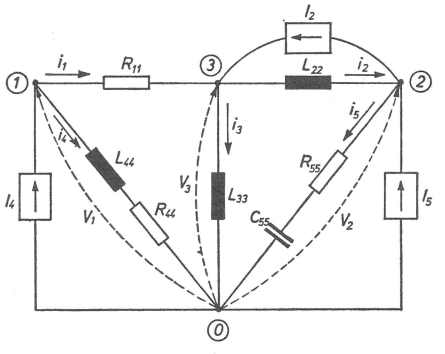
Svojstva matrice admitancija čvorišta

—Matrica admitancija čvorišta **Y** *kvadratna* je matrica. Jer, ako je broj nezavisnih čvorišta N, a broj grana g, tada je matrica incidencija **M** $N \times g$ matrica, a matrica admitancija grana **y** je $g \times g$ matrica. Prema (5.57) $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}}$, pa odatle slijedi da je matrica **Y** $N \times N$ matrica. Dakle, broj redaka i broj stupaca matrice **Y** jednak je broju nezavisnih čvorišta N.

— Matrica **Y** *simetrična* je matrica ako je simetrična i matrica admitancija grana **y**. Dokaz je potpuno analogan dokazu za simetričnost matrice impedancija petlji **Z**.

Primjer 5.6.

Na slici 5.13. nacrtan je model mreže s naznačenim referentnim smjerovima struja u granama. Ako je referentno čvorište ono označeno sa 0, treba pomoću relacije (5.50) odrediti vektor ukupnih struja izvora **J**, a pomoću (5.57) matricu admitancija čvorišta **Y**. Nakon toga treba napisati jednadžbu metode čvorišta.



Sl. 5.13. Zadani model mreže uz primjer 5.6.

— Promatranjem modela mreže napišemo matricu incidencija **M**, vektor struja izvora **I** i matricu admitancija grana **y**:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline ① & -1 & & & -1 & \\ ② & & 1 & & & -1 \\ ③ & 1 & -1 & -1 & & \end{array}, \qquad \mathbf{I} = \begin{array}{c|c} 1 & \\ 2 & I_2 \\ 3 & \\ 4 & I_4 \\ 5 & I_5 \end{array},$$

$$\mathbf{y} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & y_{11} & & & & \\ 2 & & y_{22} & & & \\ 3 & & & y_{33} & & \\ 4 & & & & y_{44} & \\ 5 & & & & & y_{55} \end{array}.$$

Tu su admitancije grana:

$$y_{11} = \frac{1}{R_{11}}, \qquad y_{22} = \frac{1}{j\,\omega\,L_{22}},$$

$$y_{33} = \frac{1}{j\,\omega\,L_{33}}, \qquad y_{44} = \frac{1}{R_{44} + j\,\omega\,L_{44}},$$

$$y_{55} = \frac{1}{R_{55} + \dfrac{1}{j\,\omega\,C_{55}}}.$$

— Prema (5.50) vektor ukupnih struja izvora **J** glasi:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\mathbf{I} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline ① & -1 & & & -1 & \\ ② & & 1 & & & -1 \\ ③ & 1 & -1 & -1 & & \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & \\ 2 & I_2 \\ 3 & \\ 4 & I_4 \\ 5 & I_5 \end{array} = \begin{array}{c|c} ① & -I_4 \\ ② & I_2 - I_5 \\ ③ & -I_2 \end{array},$$

a prema (5.57) matrica admitancija čvorišta **Y** glasi:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline ① & -1 & & & -1 & \\ ② & & 1 & & & -1 \\ ③ & 1 & -1 & -1 & & \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & y_{11} & & & & \\ 2 & & y_{22} & & & \\ 3 & & & y_{33} & & \\ 4 & & & & y_{44} & \\ 5 & & & & & y_{55} \end{array}.$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & ① & ② & ③ \\
\hline
1 & -1 & & 1 \\
2 & & 1 & -1 \\
3 & & & -1 \\
4 & -1 & & \\
5 & & -1 &
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c|ccc}
 & ① & ② & ③ \\
\hline
① & y_{11}+y_{44} & & -y_{11} \\
② & & y_{22}+y_{55} & -y_{22} \\
③ & -y_{11} & -y_{22} & y_{11}+y_{22}+y_{33}
\end{array}
$$

— Matrična jednadžba metode čvorišta glasi:

$$
\begin{array}{|c|}
\hline
-I_4 \\
\hline
I_2-I_5 \\
\hline
-I_2 \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|ccc|}
\hline
y_{11}+y_{44} & & -y_{11} \\
\hline
 & y_{22}+y_{55} & -y_{22} \\
\hline
-y_{11} & -y_{22} & y_{11}+y_{22}+y_{33} \\
\hline
\end{array}
\cdot
\begin{array}{|c|}
\hline
V_1 \\
\hline
V_2 \\
\hline
V_3 \\
\hline
\end{array}
$$

Primjer 5.7.

Napišimo sada, radi ilustracije, sustav jednadžbi metode čvorišta za model mreže na slici 5.13. bez upotrebe matrične algebre.

Izrazimo li padove napona grana pomoću padova napona nezavisnih čvorišta (V_1, V_2 i V_3 su u smjeru od referentnog čvorišta prema nezavisnim čvorištima):

$$
\begin{aligned}
v_1 &= V_3 - V_1, \\
v_2 &= V_2 - V_3, \\
v_3 &= -V_3, \\
v_4 &= -V_1, \\
v_5 &= -V_2,
\end{aligned}
$$

tada Ohmov zakon za svaku granu možemo napisati ovako:

$$
\begin{aligned}
i_1 &= y_{11}(V_3 - V_1), \\
i_2 &= y_{22}(V_2 - V_3), \\
i_3 &= y_{33}(-V_3), \\
i_4 &= y_{44}(-V_1), \\
i_5 &= y_{55}(-V_2).
\end{aligned}
\qquad (5.62)
$$

Primijenimo zatim I. Kirchhoffov zakon na nezavisna čvorišta 1, 2 i 3. Stavimo li sve struje izvora s jedne strane znaka jednakosti, imamo:

$$
\begin{aligned}
-i_1 - i_4 &= -I_4, \\
i_2 - i_5 &= I_2 - I_5, \\
i_1 - i_2 - i_3 &= -I_2,
\end{aligned}
$$

odnosno, nakon što uvrstimo desne strane jednadžbi (5.62):

$$\begin{aligned} -y_{11}(V_3 - V_1) - y_{44}(-V_1) &= -I_4, \\ y_{22}(V_2 - V_3) - y_{55}(-V_2) &= I_2 - I_5, \\ y_{11}(V_3 - V_1) - y_{22}(V_2 - V_3) - y_{33}(-V_3) &= -I_2. \end{aligned}$$

Nakon preuređenja dobivamo:

$$\begin{aligned} (y_{11} + y_{44})V_1 \qquad\qquad & -y_{11}V_3 = -I_4, \\ (y_{22} + y_{55})V_2 \qquad & -y_{22}V_3 = I_2 - I_5, \\ -y_{11}V_1 \quad -y_{22}V_2 + (y_{11} + y_{22} + y_{33})V_3 &= -I_2. \end{aligned}$$

Dobiveni sustav jednadžbi ekvivalentan je matričnoj jednadžbi metode čvorišta koju smo napisali u primjeru 5.6.

Istu jednadžbu možemo napisati i neposredno, promatranjem modela mreže, prema slijedećim pravilima (koja vrijede općenito):

— Ako su naponi nezavisnih čvorišta definirani kao padovi napona u smjeru od referentnog čvorišta prema nezavisnim čvorištima, tada je ukupna struja izvora $\mathcal{J}_j$ u čvorištu j jednaka algebarskoj sumi pojedinih struja izvora koje se sastaju u tom čvorištu. Pritom je ispred pojedinih sumanada predznak pozitivan ako struja izvora izlazi iz čvorišta, a negativan ako ulazi u čvorište. U našem je primjeru:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -I_4 \\ I_2 - I_5 \\ -I_2 \end{vmatrix}.$$

— Ako nema induktivnih veza između grana, tada je vlastita amitancija čvorišta koja odgovara dijagonalnom elementu Y_{jj} matrice $\mathbf{Y}$ jednaka sumi svih admitancija koje su priključene na j-to čvorište. Međusobna admitancija čvorišta koja odgovara izvandijagonalnim elementima $Y_{jk} = Y_{kj}$ jednaka je negativnoj sumi svih admitancija koje međusobno povezuju j-to i k-to čvorište.

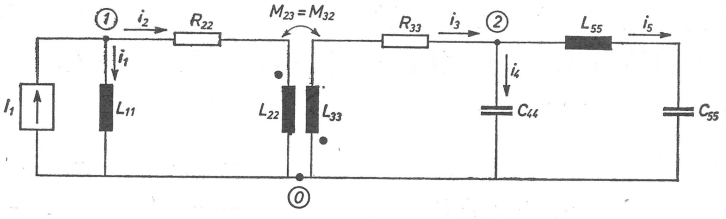
Prema slici 5.13. izlazi da je:

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} y_{11} + y_{44} & & -y_{11} \\ & y_{22} + y_{55} & -y_{22} \\ -y_{11} & -y_{22} & y_{11} + y_{22} + y_{33} \end{vmatrix}.$$

Matrice admitancija grana i čvorišta kada između grana postoje induktivne veze

Ako između grana u modelu mreže postoje induktivne veze, matrica admitancija grana $\mathbf{y}$ nije više — kao što ćemo sada vidjeti na jednom primjeru — dijagonalna matrica. Neki (ili svi) izvandijagonalni elementi u tom su slučaju različiti od nule,

pri čemu su elementi u simetričnom položaju prema glavnoj dijagonali međusobno jednaki. Znači, matrica **y** je *simetrična matrica.*



Sl. 5.14. Zadani model mreže u kojemu su induktivno vezane grane 2 i 3

Na slici 5.14. induktivno su vezane samo dvije grane: to su grane 2 i 3. Poznato nam je otprije da padove napona u granama možemo napisati pomoću impedancija i struja, a za ovaj primjer ovako:

$$\begin{aligned} v_1 &= z_{11}\, i_1, \\ v_2 &= z_{22}\, i_2 + z_{23}\, i_3, \\ v_3 &= z_{32}\, i_2 + z_{33}\, i_3, \\ v_4 &= z_{44}\, i_4, \\ v_5 &= z_{55}\, i_5, \end{aligned} \tag{5.63}$$

gdje je:

$$z_{11} = j\,\omega\, L_{11}, \qquad z_{22} = R_{22} + j\,\omega\, L_{22},$$

$$z_{23} = j\,\omega\, M_{23}, \qquad z_{32} = j\,\omega\, M_{32},$$

$$z_{33} = R_{33} + j\,\omega\, L_{33}, \qquad z_{44} = \frac{1}{j\,\omega\, C_{44}},$$

$$z_{55} = j\,\omega\, L_{55} + \frac{1}{j\,\omega\, C_{55}}.$$

Budući da referentne struje i_2 i i_3 ulaze u zavojnice 2 i 3 na krajevima koji su označeni točkama, međuinduktiviteti M_{23} i M_{32} pozitivni su, pa je ispred $j\omega M_{23}$ i $j\omega M_{32}$ predznak plus.

Iz jednadžbi (5.63) izrazimo sada struje grana eksplicitno. Kao što vidimo, struje i_1, i_4 i i_5 možemo odmah napisati, a struje i_2 i i_3 dobivamo eksplicitno napisane tek kada simultano riješimo drugu i treću jednadžbu. Što je više grana povezanih induktivno, to više jednadžbi moramo simultano riješiti, dakle račun je to duži. Ovdje dobivamo:

$$i_1 = \frac{1}{z_{11}}\, v_1,$$

$$i_2 = \frac{z_{33}}{z_{22}\, z_{33} - z_{23}\, z_{32}}\, v_2 + \frac{-z_{23}}{z_{22}\, z_{33} - z_{23}\, z_{32}}\, v_3,$$

$$i_3 = \frac{-z_{32}}{z_{22}z_{33} - z_{32}z_{23}} v_2 + \frac{z_{22}}{z_{22}z_{33} - z_{32}z_{23}} v_3, \qquad (5.64)$$

$$i_4 = \frac{1}{z_{44}} v_4,$$

$$i_5 = \frac{1}{z_{55}} v_5.$$

Koeficijenti uz padove napona imaju značenje admitancija. Označimo ih sa:

$$y_{11} = \frac{1}{z_{11}},$$

$$y_{22} = \frac{z_{33}}{z_{22}z_{23} - z_{23}z_{32}},$$

$$y_{23} = \frac{-z_{23}}{z_{22}z_{33} - z_{23}z_{32}},$$

$$y_{32} = \frac{-z_{32}}{z_{22}z_{33} - z_{32}z_{23}},$$

$$y_{33} = \frac{z_{22}}{z_{22}z_{33} - z_{32}z_{23}},$$

$$y_{44} = \frac{1}{z_{44}},$$

$$y_{55} = \frac{1}{z_{55}}.$$

Jednadžbe (5.64) možemo prema tome napisati ovako:

$$i_1 = y_{11} v_1,$$
$$i_2 = y_{22} v_2 + y_{23} v_3,$$
$$i_3 = y_{32} v_2 + y_{33} v_3,$$
$$i_4 = y_{44} v_4,$$
$$i_5 = y_{55} v_5,$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & & & & \\ & y_{22} & y_{23} & & \\ & y_{32} & y_{33} & & \\ & & & y_{44} & \\ & & & & y_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{vmatrix}, \qquad (5.65)$$

odnosno skraćeno:

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\mathbf{v}. \tag{5.66}$$

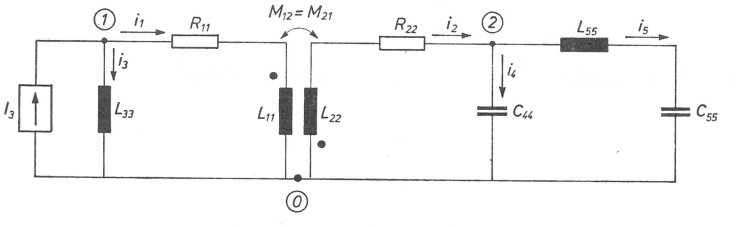
U općem matričnom obliku relacija (5.66) identična je relaciji (5.53), ali sada matrica admitancija grana **y** nije više dijagonalna matrica. U našem su primjeru izvandijagonalni elementi y_{23} i y_{32} različiti od nule, jer su induktivno povezane samo grane 2 i 3. U općem slučaju, kada su induktivno vezane grane j i k, bit će različiti od nule elementi što se nalaze u sjecištu j-tog retka i k-tog stupca i u sjecištu k-tog retka i j-tog stupca. Kako je zbog fizikalnog svojstva međuinduktiviteta $M_{jk} = M_{kj}$, elementi y_{jk} i y_{kj} međusobno su jednaki. Prema tome, matrica **y** simetrična je matrica.

Vidjeli smo da se matrica impedancija grana **z** uvijek određuje promatranjem modela mreže, dakle i kada postoje induktivne veze između grana. Nasuprot tome, kao što sada vidimo, ako postoje induktivne veze između grana, matricu admitancija grana **y** ne možemo odrediti promatranjem modela mreže. Ako je matrica impedancija grana **z** regularna matrica, tada ćemo matricu **y** dobiti inverzijom matrice **z**, tj.:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1}, \tag{5.67}$$

što slijedi iz $\mathbf{v} = \mathbf{z}\,\mathbf{i}$ i $\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\mathbf{v}$.

Ako su samo neke, a ne sve grane u modelu mreže međusobno induktivno povezane, prikladno ih je numerirati tako da se najprije numeriraju redom sve grane s međuinduktivnom vezom, a zatim preostale, ili obratno. Tako smo radi ilustracije numerirali grane na slici 5.15.



Sl. 5.15. Model mreže kao na slici 5.14. u kome su najprije numerirane grane s međuinduktivnom vezom

Matrica je impedancija grana **z**:

$$\mathbf{z} = \begin{array}{|ccc|cc|}
\hline
z_{11} & z_{12} & & & \\
z_{21} & z_{22} & & & \\
\hline
 & & z_{33} & & \\
 & & & z_{44} & \\
 & & & & z_{55} \\
\hline
\end{array},$$

gdje je:

$$z_{11} = R_{11} + j\,\omega\,L_{11}, \qquad z_{12} = j\,\omega\,M_{12},$$

$$z_{21} = j\,\omega\,M_{21}, \qquad z_{22} = R_{22} + j\,\omega\,L_{22},$$

$$z_{33} = j\,\omega\,L_{33}, \qquad z_{44} = \frac{1}{j\,\omega\,C_{44}},$$

$$z_{55} = j\,\omega\,L_{55} + \frac{1}{j\,\omega\,C_{55}}.$$

Ako tu matricu rastavimo u podmatrice kako je naznačeno, općenito možemo pisati:

$$\mathbf{z} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{z}_s & \\ \hline & \mathbf{z}_d \end{array}\right], \tag{5.68}$$

pri čemu je podmatrica $\mathbf{z}_s$ simetrična matrica, a podmatrica $\mathbf{z}_d$ dijagonalna matrica. Matrica admitancija grana $\mathbf{y}$ tada je:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{z}_s^{-1} & \\ \hline & \mathbf{z}_d^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{y}_s & \\ \hline & \mathbf{y}_d \end{array}\right], \tag{5.69}$$

ako je matrica $\mathbf{z}$ regularna matrica.

Prednost je takvog numeriranja u tome što je potrebno izračunati samo inverznu matricu $\mathbf{y}_s = \mathbf{z}_s^{-1}$ koja ima toliko redaka i stupaca koliko ima magnetski povezanih grana. Elementi matrice $\mathbf{y}_d = \mathbf{z}_d^{-1}$, koja je također dijagonalna matrica kao i $\mathbf{z}_d$, dobiju se jednostavno kao recipročne vrijednosti elemenata od $\mathbf{z}_d$. Na primjer, prema slici 5.15:

$$\mathbf{z}_s = \left[\begin{array}{c|c} z_{11} & z_{12} \\ \hline z_{21} & z_{22} \end{array}\right],$$

a:

$$\mathbf{z}_d = \left[\begin{array}{c|c|c} z_{33} & & \\ \hline & z_{44} & \\ \hline & & z_{55} \end{array}\right].$$

Elemente matrice $\mathbf{y}_s$ dobivamo inverzijom matrice $\mathbf{z}_s$, tj.:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{z}_s^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{z_{22}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} & \dfrac{-z_{12}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \\ \hline \dfrac{-z_{21}}{z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}} & \dfrac{z_{11}}{z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}} \end{array}\right],$$

a elemente matrice $\mathbf{y}_d$ možemo odmah napisati:

$$\mathbf{y}_d = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dfrac{1}{z_{33}} & & \\ \hline & \dfrac{1}{z_{44}} & \\ \hline & & \dfrac{1}{z_{55}} \\ \hline \end{array} .$$

Prema tome, matrica je admitancija grana $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \dfrac{z_{22}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} & \dfrac{-z_{12}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} & & & \\ \hline \dfrac{-z_{21}}{z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}} & \dfrac{z_{11}}{z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}} & & & \\ \hline & & \dfrac{1}{z_{33}} & & \\ \hline & & & \dfrac{1}{z_{44}} & \\ \hline & & & & \dfrac{1}{z_{55}} \\ \hline \end{array} .$$

Ako pogledamo kako je izvedena relacija (5.57), vidimo da i u slučaju kada postoje induktivno povezane grane u modelu mreže, a ne samo kada nema takvih grana, možemo matricu admitancija čvorišta $\mathbf{Y}$ izračunati množenjem matrice incidencija $\mathbf{M}$, matrice admitancija grana $\mathbf{y}$ i transponirane matrice incidencija $\widetilde{\mathbf{M}}$: $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}}$. Samo što u ovom slučaju matricu $\mathbf{y}$ ne možemo, kao tamo, napisati uvidom u mrežu.

Kada su u modelu mreže magnetski ulančane samo *neke*, a ne sve grane, tada matricu $\mathbf{Y}$ možemo odrediti i pomoću jedne druge relacije, koju dobivamo iz relacije (5.57) na sličan način kao što smo u metodi petlji (5.37) dobili iz (5.15). Međutim, baš zato što matricu admitancija grana $\mathbf{y}$ sada moramo izračunati, a ne dobivamo je promatranjem modela mreže, korisnije je ovdje primijeniti relaciju koju ćemo sada izvesti nego ako u metodi petlji umjesto (5.15) upotrijebimo (5.37).

Najprije ćemo numerirati grane koje su magnetski povezane s drugim granama, a zatim i preostale. Tada matricu impedancija grana $\mathbf{z}$ možemo napisati u obliku (5.68):

$$\mathbf{z} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{z}_s & \\ \hline & \mathbf{z}_d \\ \hline \end{array} ,$$

a zatim matricu admitancija grana $\mathbf{y}$ prema (5.69):

$$\mathbf{y} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{y}_s & \\ \hline & \mathbf{y}_d \end{array}\right],$$

gdje je:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{z}_s^{-1}$$

$$\mathbf{y}_d = \mathbf{z}_d^{-1}.$$

Matricu incidencija $\mathbf{M}$ podijelimo u podmatrice $\mathbf{M}_s$ i $\mathbf{M}_d$ tako da stupci podmatrice $\mathbf{M}_s$ odgovaraju granama koje imaju međuinduktivnu vezu, a da stupci podmatrice $\mathbf{M}_d$ odgovaraju granama bez međuinduktivne veze:

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_d \end{array}\right], \tag{5.70}$$

pa je također:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \left[\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{M}}_s \\ \hline \widetilde{\mathbf{M}}_d \end{array}\right]. \tag{5.71}$$

Nakon što uvrstimo (5.70), (5.69) i (5.71) u (5.57), dobivamo:

$$\mathbf{Y} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{y}_s & \\ \hline & \mathbf{y}_d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{M}}_s \\ \hline \widetilde{\mathbf{M}}_d \end{array}\right],$$

pa je nakon množenja:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}_s\, \mathbf{y}_s\, \widetilde{\mathbf{M}}_s + \mathbf{M}_d\, \mathbf{y}_d\, \widetilde{\mathbf{M}}_d. \tag{5.72}$$

Ako skraćeno napišemo:

$$\mathbf{Y}_s = \mathbf{M}_s\, \mathbf{y}_s\, \widetilde{\mathbf{M}}_s, \tag{5.73}$$

$$\mathbf{Y}_d = \mathbf{M}_d\, \mathbf{y}_d\, \widetilde{\mathbf{M}}_d, \tag{5.74}$$

imamo konačno:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_s + \mathbf{Y}_d. \tag{5.75}$$

Primjer 5.8.

U modelu mreže na slici 5.14. povezane su međuinduktivitetima $M_{23} = M_{32}$ grane 2 i 3. Ako je referentno čvorište ono označeno sa 0, a nezavisna su čvorišta 1 i 2, odredimo pomoću (5.50) vektor ukupnih struja izvora $\mathbf{J}$, a pomoću (5.57) matricu admitancija čvorišta $\mathbf{Y}$, pa zatim napišimo jednadžbu metode čvorišta. Orijentacija i numeracija svih grana kao i referentni polariteti zavojnica 2 i 3 označeni su na slici.

— Promatranjem modela mreže napišemo matricu incidencija **M**, vektor struja izvora **I** i matricu impedancija grana **z**:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline ① & -1 & -1 & & & \\ ② & & & 1 & -1 & -1 \end{array},$$

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & I_1 \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \end{array}, \qquad \mathbf{z} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & z_{11} & & & & \\ 2 & & z_{22} & z_{23} & & \\ 3 & & z_{32} & z_{33} & & \\ 4 & & & & z_{44} & \\ 5 & & & & & z_{55} \end{array}.$$

Ovdje je:

$$z_{11} = j\,\omega\,L_{11}, \qquad z_{22} = R_{22} + j\,\omega\,L_{22},$$

$$z_{23} = j\,\omega\,M_{23}, \qquad z_{32} = j\,\omega\,M_{32},$$

$$z_{33} = R_{33} + j\,\omega\,L_{33}, \qquad z_{44} = \frac{1}{j\,\omega\,C_{44}},$$

$$z_{55} = j\,\omega\,L_{55} + \frac{1}{j\,\omega\,C_{55}}.$$

— Matricu admitancija grana **y** dobivamo inverzijom matrice impedancije grana **z**. Nakon računanja imamo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & y_{11} & & & & \\ 2 & & y_{22} & y_{23} & & \\ 3 & & y_{32} & y_{33} & & \\ 4 & & & & y_{44} & \\ 5 & & & & & y_{55} \end{array},$$

gdje je:

$$y_{11} = \frac{1}{z_{11}}, \qquad y_{22} = \frac{z_{33}}{z_{22}\,z_{33} - z_{23}\,z_{32}},$$

$$y_{23} = \frac{-z_{23}}{z_{22}\,z_{33} - z_{23}\,z_{32}}, \qquad y_{32} = \frac{-z_{32}}{z_{22}\,z_{33} - z_{32}\,z_{23}},$$

$$y_{33} = \frac{z_{22}}{z_{22} z_{33} - z_{32} z_{23}}, \qquad y_{44} = \frac{1}{z_{44}},$$

$$y_{55} = \frac{1}{z_{55}}.$$

— Prema (5.50) vektor je ukupnih struja izvora **J**:

$$\mathbf{J} = \mathbf{MI} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline ① & -1 & -1 & & & \\ ② & & & 1 & -1 & -1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & I_1 \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \end{array} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline ① & -I_1 \\ ② & \end{array},$$

a prema (5.57) matrica je admitancija čvorišta **Y**:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}y\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline ① & -1 & -1 & & & \\ ② & & & 1 & -1 & -1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & y_{11} & & & & \\ 2 & & y_{22} & y_{23} & & \\ 3 & & y_{32} & y_{33} & & \\ 4 & & & & y_{44} & \\ 5 & & & & & y_{55} \end{array} \cdot$$

$$\cdot \begin{array}{c|cc} & ① & ② \\ \hline 1 & -1 & \\ 2 & -1 & \\ 3 & & 1 \\ 4 & & -1 \\ 5 & & -1 \end{array}.$$

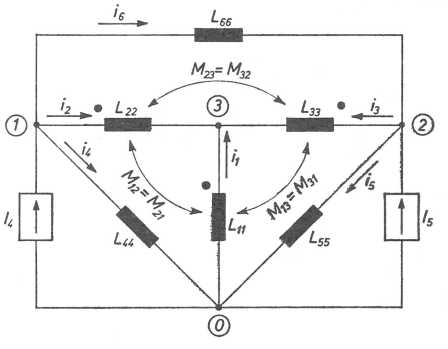
$$\mathbf{Y} = \begin{array}{c|cc} & ① & ② \\ \hline ① & y_{11} + y_{22} & -y_{23} \\ ② & -y_{32} & y_{33} + y_{44} + y_{55} \end{array}.$$

— U ovom primjeru matrična jednadžba metode čvorišta glasi:

$$\begin{array}{|c|} \hline -I_1 \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline y_{11} + y_{22} & -y_{23} \\ \hline -y_{32} & y_{33} + y_{44} + y_{55} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline \end{array}.$$

Primjer 5.9.

Zadan je model mreže na slici 5.16. Numeracija grana ovdje je takva da su najprije sa 1, 2 i 3 numerirane grane između kojih postoji induktivna veza, a zatim sa 4, 5 i 6 preostale grane. Ako je referentno čvorište ono označeno sa 0, odredimo primjenom relacije (5.75) matricu admitancija čvorišta **Y**.



Sl. 5.16. Zadani model mreže iz primjera 5.9.

— Matrica incidencija **M** glasi:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & & -1 & & -1 & & -1 \\ ② & & & -1 & & -1 & 1 \\ ③ & 1 & 1 & 1 & & & \end{array},$$

pa su podmatrice $\mathbf{M}_s$ i $\mathbf{M}_d$:

$$\mathbf{M}_s = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline ① & & -1 & \\ ② & & & -1 \\ ③ & 1 & 1 & 1 \end{array}, \qquad \mathbf{M}_d = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & -1 & & -1 \\ ② & & -1 & 1 \\ ③ & & & \end{array}.$$

— Matrica impedancija grana **z** glasi:

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & z_{11} & z_{12} & z_{13} & & & \\ 2 & z_{21} & z_{22} & z_{23} & & & \\ 3 & z_{31} & z_{32} & z_{33} & & & \\ 4 & & & & z_{44} & & \\ 5 & & & & & z_{55} & \\ 6 & & & & & & z_{66} \end{array},$$

gdje je:

$$z_{11} = j\omega L_{11},\quad z_{12} = -j\omega M_{12},\quad z_{13} = -j\omega M_{13},$$
$$z_{21} = -j\omega M_{21},\quad z_{22} = j\omega L_{22},\quad z_{23} = j\omega M_{23},$$
$$z_{31} = -j\omega M_{31},\quad z_{32} = j\omega M_{32},\quad z_{33} = j\omega L_{33},$$
$$z_{44} = j\omega L_{44},\quad z_{55} = j\omega L_{55},\quad z_{66} = j\omega L_{66}.$$

Podmatrice $\mathbf{z}_s$ i $\mathbf{z}_d$ glase:

$$\mathbf{z}_s = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ 2 & z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ 3 & z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{array},\qquad \mathbf{z}_d = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & z_{44} & & \\ 5 & & z_{55} & \\ 6 & & & z_{66} \end{array}.$$

— Podmatrice $\mathbf{y}_s$ i $\mathbf{y}_d$ matrice admitancija grana $\mathbf{y}$ iznose:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{z}_s^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ 2 & z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ 3 & z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{array}^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array},$$

$$\mathbf{y}_d = \mathbf{z}_d^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & z_{44} & & \\ 5 & & z_{55} & \\ 6 & & & z_{66} \end{array}^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & 1/z_{44} & & \\ 5 & & 1/z_{55} & \\ 6 & & & 1/z_{66} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & y_{44} & & \\ 5 & & y_{55} & \\ 6 & & & y_{66} \end{array}.$$

— Podmatrice $\mathbf{Y}_s$ i $\mathbf{Y}_d$ matrice admitancija čvorišta $\mathbf{Y}$ dobiju se pomoću (5.73) i (5.74). Izlazi da je:

$$\mathbf{Y}_s = \mathbf{M}_s\mathbf{y}_s\widetilde{\mathbf{M}}_s = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline ① & & -1 & \\ ② & & & -1 \\ ③ & 1 & 1 & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline 1 & & & 1 \\ 2 & -1 & & 1 \\ 3 & & -1 & 1 \end{array},$$

ili:

$$\mathbf{Y}_s = \begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline ① & a_{22} & a_{23} & -(a_{21}+a_{22}+a_{23}) \\ ② & a_{32} & a_{33} & -(a_{31}+a_{32}+a_{33}) \\ ③ & -(a_{12}+a_{22}+a_{32}) & -(a_{13}+a_{23}+a_{33}) & \begin{array}{l} a_{11}+a_{21}+a_{31}+ \\ +a_{12}+a_{22}+a_{32}+ \\ +a_{13}+a_{23}+a_{33} \end{array} \end{array},$$

a $\mathbf{Y}_d$:

$$\mathbf{Y}_d = \mathbf{M}_d\,\mathbf{y}_d\,\widetilde{\mathbf{M}}_d =$$

	4	5	6
①	−1		−1
②		−1	1
③			

·

	4	5	6
4	y_{44}		
5		y_{55}	
6			y_{66}

·

	①	②	③
4	−1		
5		−1	
6	−1	1	

ili:

$$\mathbf{Y}_d =$$

	①	②	③
①	$y_{44} + y_{66}$	$-y_{66}$	
②	$-y_{66}$	$y_{55} + y_{66}$	
③			

.

— Prema relaciji (5.75), matrica je admitancija čvorišta $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_s + \mathbf{Y}_d =$$

	①	②	③
①	$a_{22} + y_{44} + y_{66}$	$a_{23} + y_{66}$	$-(a_{21} + a_{22} + a_{23})$
②	$a_{32} - y_{66}$	$a_{33} + y_{55} + y_{66}$	$-(a_{31} + a_{32} + a_{33})$
③	$-(a_{12} + a_{22} + a_{32})$	$-(a_{13} + a_{23} + a_{33})$	$a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{13} + a_{23} + a_{33}$

.

Određivanje struja u granama

Rješenje matrične jednadžbe metode čvorišta $\mathbf{J} = \mathbf{Y}\,\mathbf{V}$ (relacija 5.58) dobivamo množenjem te jednadžbe slijeva sa $\mathbf{Y}^{-1}$:

$$\mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{J} = \mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{V},$$

a kako je $\mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{Y} = \mathbf{1}$, slijedi da je:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{J}, \tag{5.76}$$

gdje je:

- $\mathbf{J}$ — vektor ukupnih struja izvora,
- $\mathbf{Y}^{-1}$ — inverzna matrica matrice admitancija čvorišta $\mathbf{Y}$,
- $\mathbf{V}$ — vektor napona čvorišta.

Napišimo sada relaciju u kojoj su padovi napona u granama $\mathbf{v}$ izraženi pomoću $\mathbf{M}$, $\mathbf{y}$ i $\mathbf{I}$, dakle pomoću matrica koje se odrede neposredno iz zadanog modela mreže. Budući da su prema (5.43) vektor padova napona grana $\mathbf{v}$ i vektor padova napona nezavisnih čvorišta $\mathbf{V}$ međuosobno povezani relacijom $\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}$, ako na osnovi posljednje relacije umjesto $\mathbf{V}$ napišemo produkt $\mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{J}$, dobivamo:

$$\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{J}.$$

Nadalje, kako je $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}}$ (relacija (5.57)), a $\mathbf{J} = \mathbf{M}\,\mathbf{I}$ (relacija (5.50)), uvrštenjem dobivamo konačno:

$$\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{M}}\,(\mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}})^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathbf{I}. \tag{5.77}$$

Sada, na kraju, slijedi i izraz pomoću kojeg možemo izračunati struje grana **i**. Treba samo da uvrstimo **v** iz (5.77) u relaciju (5.66) prema kojoj je $\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\mathbf{v}$. Dobivamo:

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,(\mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}})^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathbf{I}. \tag{5.78}$$

Ako je matrica **z** regularna matrica, tada je $\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1}$, pa je također:

$$\mathbf{i} = \mathbf{z}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,(\mathbf{M}\,\mathbf{z}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{M}})^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathbf{I}. \tag{5.79}$$

U tim su relacijama:

i — vektor struja grana,
y — matrica admitancija grana,
z — matrica impedancija grana,
M — matrica incidencija,
$\widetilde{\mathbf{M}}$ — transponirana matrica incidencija,
I — vektor struja izvora.

Skraćeno pišemo:

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{M}\,\mathbf{I}. \tag{5.80}$$

Matrica **Z** je matrica impedancija čvorišta, a uvedena je relacijom (5.61): $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = (\mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}})^{-1}$.

Redoslijed koraka kojima dolazimo do traženih veličina

Ako pogledamo relacije (5.78) i (5.79) — koje su zapravo iste relacije, samo što je u (5.79) matrica **y** napisana kao inverzna matrica $\mathbf{z}^{-1}$ — vidimo da se u metodi čvorišta struje u granama dobiju iz poznatih **z** (ili **y**), **M** i **I**. Matrica **z**, kojom se popišu svi pasivni elementi, zatim matrica **M**, kojom se opiše geometrijska struktura, te vektor **I**, kojim se popišu svi izvori struje, dobiju se u svakom slučaju promatranjem modela mreže. Isto se tako promatranjem modela mreže dobije direktno i matrica **y**, ali samo kada između pojedinih grana ne postoje induktivne veze.

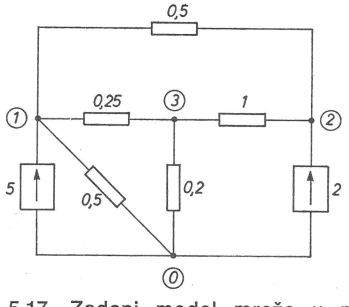
Na osnovi tih relacija možemo napisati slijedeći niz koraka da bismo izračunali struje u granama; ujedno se ovdje kao međurezultati dobiju i naponi nezavisnih čvorišta i padovi napona u granama:

1. numeriramo i orijentiramo sve grane u modelu mreže; numeriramo sva čvorišta i odaberemo referentno čvorište;

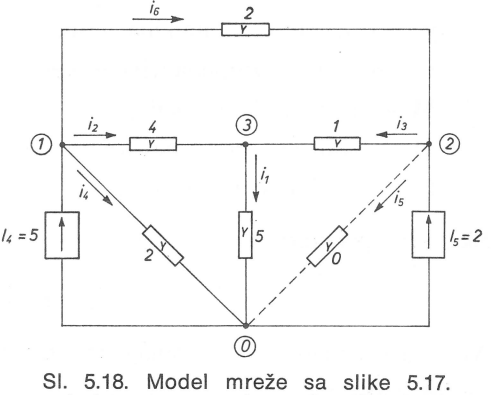
2. napišemo matricu incidencija **M**, vektor struja izvora **I** i matricu impedancija grana **z** ili matricu admitancija grana **y**;
3. odredimo matricu admitancija čvorišta **Y**: $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\,\mathbf{z}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{M}}$ ili $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\widetilde{\mathbf{M}}$;
4. odredimo matricu impedancija čvorišta **Z**: $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$;
5. odredimo napone nezavisnih čvorišta **V**: $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\,\mathbf{M}\,\mathbf{I}$ ili $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\,\mathbf{J}$;
6. odredimo padove napona u granama **v**: $\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}$;
7. odredimo struje u granama **i**: $\mathbf{i} = \mathbf{z}^{-1}\,\mathbf{v}$ ili $\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\mathbf{v}$.

Primjer 5.10.

Pomoću metode čvorišta treba u zadanom modelu mreže (sl. 5.17) odrediti napone nezavisnih čvorišta, padove napona u granama i struje u granama. Referentno čvorište označeno je sa 0.



Sl. 5.17. Zadani model mreže u primjeru 5.10.



Sl. 5.18. Model mreže sa slike 5.17. u kojem su numerirana čvorišta i numerirane i orijentirane grane

Rješavanje:

1. Referentni smjerovi struja i odabrana numeracija čvorišta i grana (numeracija grane podudara se s indeksom uz simbol za struju grane i) naznačeni su na slici 5.18.

Kako između čvorišta 0 i 2 ne postoji grana s pasivnim elementima, a postoji izvor struje I_5, moramo paralelno tom izvoru zamisliti granu impedancije $z_{55} = \infty$, odnosno granu admitancije $y_{55} = 0$. To je na slici prikazano isprekidanom crtom. Osim toga, na slici su umjesto vrijednosti impedancija napisane admitancije grana jer ćemo matricu admitancija grana **y** odrediti neposredno, promatranjem modela mreže. Naime, prema onome kako smo definirali inverznu matricu, ovdje ne postoji $\mathbf{z}^{-1}$.

2. Promatranjem modela mreže napišemo matricu incidencija **M**, matricu admitancija grana **y** i vektor struja izvora **I**:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & & -1 & & -1 & & -1 \\ ② & & & -1 & & -1 & 1 \\ ③ & -1 & 1 & 1 & & & \end{array},$$

$$\mathbf{y} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 5 & & & & & \\ 2 & & 4 & & & & \\ 3 & & & 1 & & & \\ 4 & & & & 2 & & \\ 5 & & & & & & \\ 6 & & & & & & 2 \end{array}, \quad \mathbf{I} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 6 & \end{array}.$$

3. Odredimo matricu admitancija čvorišta **Y**:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & & -1 & & -1 & & -1 \\ ② & & & -1 & & -1 & 1 \\ ③ & -1 & 1 & 1 & & & \end{array}.$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 5 & & & & & \\ 2 & & 4 & & & & \\ 3 & & & 1 & & & \\ 4 & & & & 2 & & \\ 5 & & & & & & \\ 6 & & & & & & 2 \end{array} \cdot \begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline 1 & & & -1 \\ 2 & -1 & & 1 \\ 3 & & -1 & 1 \\ 4 & -1 & & \\ 5 & & -1 & \\ 6 & -1 & 1 & \end{array} \cdot,$$

$$\mathbf{Y} = \begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline ① & 8 & -2 & -4 \\ ② & -2 & 3 & -1 \\ ③ & -4 & -1 & 10 \end{array}.$$

4. Izračunamo matricu impedancija čvorišta **Z**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline ① & 8 & -2 & -4 \\ ② & -2 & 3 & -1 \\ ③ & -4 & -1 & 10 \end{array}^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline ① & 0{,}22656 & 0{,}18750 & 0{,}10938 \\ ② & 0{,}18750 & 0{,}50001 & 0{,}12500 \\ ③ & 0{,}10938 & 0{,}12500 & 0{,}15625 \end{array}.$$

5. Odredimo vektor ukupnih struja izvora **J**:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\,\mathbf{I} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & & -1 & & -1 & & -1 \\ ② & & & -1 & & -1 & 1 \\ ③ & -1 & 1 & 1 & & & \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 6 & \end{array} = \begin{array}{c|c} ① & -5 \\ ② & -2 \\ ③ & \end{array}.$$

6. Odredimo vektor padova napona nezavisnih čvorišta **V**:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{J} = \begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline ① & 0{,}22656 & 0{,}18750 & 0{,}10938 \\ ② & 0{,}18750 & 0{,}50001 & 0{,}12500 \\ ③ & 0{,}10938 & 0{,}12500 & 0{,}15625 \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} ① & -5 \\ ② & -2 \\ ③ & \end{array} = \begin{array}{c|c} ① & -1{,}50783 \\ ② & -1{,}93752 \\ ③ & -0{,}79688 \end{array}.$$

7. Odredimo vektor padova napona u granama **v**:

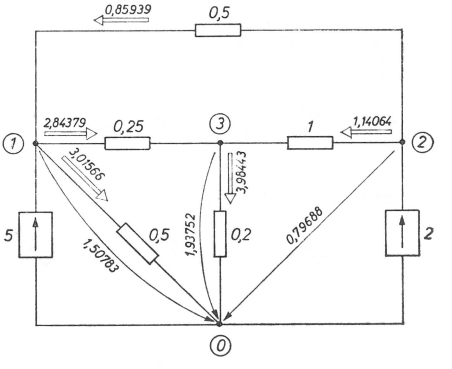
$$\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V} = \begin{array}{c|ccc} & ① & ② & ③ \\ \hline 1 & & & -1 \\ 2 & -1 & & 1 \\ 3 & & -1 & 1 \\ 4 & -1 & & \\ 5 & & -1 & \\ 6 & -1 & 1 & \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} ① & -1{,}50783 \\ ② & -1{,}93752 \\ ③ & -0{,}79688 \end{array} = \begin{array}{c|c} 1 & 0{,}79688 \\ 2 & 0{,}71095 \\ 3 & 1{,}14064 \\ 4 & 1{,}50783 \\ 5 & 1{,}93752 \\ 6 & -0{,}42969 \end{array}.$$

8. Odredimo vektor struja u granama **i**:

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\mathbf{v} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 5 & & & & & \\ 2 & & 4 & & & & \\ 3 & & & 1 & & & \\ 4 & & & & 2 & & \\ 5 & & & & & & \\ 6 & & & & & & 2 \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 0{,}79688 \\ 2 & 0{,}71095 \\ 3 & 1{,}14064 \\ 4 & 1{,}50783 \\ 5 & 1{,}93752 \\ 6 & -0{,}42969 \end{array},$$

$$\mathbf{i} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3{,}98443 \\ \hline 2 & 2{,}84379 \\ \hline 3 & 1{,}14064 \\ \hline 4 & 3{,}01566 \\ \hline 5 & \\ \hline 6 & -0{,}85939 \\ \hline \end{array}.$$

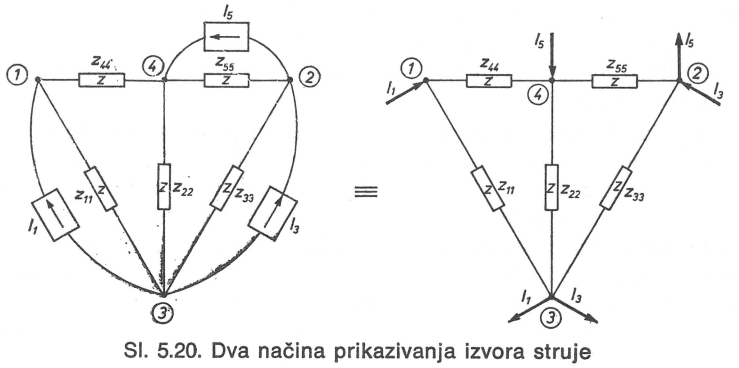
9. Na slici 5.19. prikazani su raspodjela struja u granama i naponi nezavisnih čvorišta prema referentnom čvorištu.



Sl. 5.19. Raspodjela struja u granama i naponi nezavisnih čvorišta u modelu mreže iz primjera 5.10.

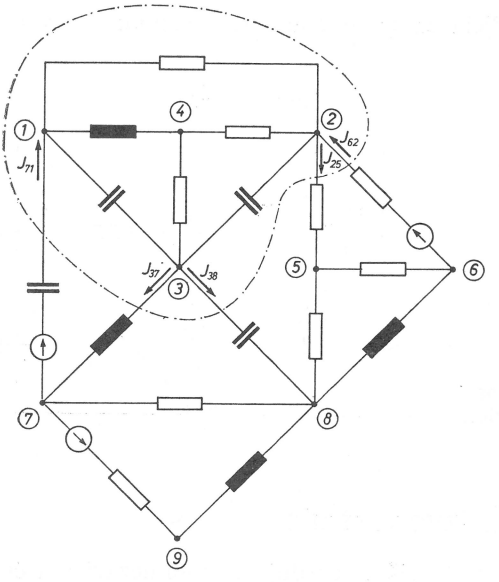
Još jedan način prikazivanja izvora struje

Upravo smo pokazali kako se metodom čvorišta određuju naponi nezavisnih čvorišta i struje u granama modela mreže kada su izvori električne energije modelirani pomoću idealnih izvora struje. Pritom smo pojedine izvore struje prikazali grafičkim simbolom što smo ga uveli u prvom poglavlju. Međutim, radi potpunosti treba spomenuti da se veoma često umjesto grafičkog simbola idealnog izvora struje nacrtaju samo dvije strelice što pokazuju u koje čvorište struja izvora ulazi, a iz kojega čvorišta izlazi (sl. 5.20). Razumljivo je samo po sebi da i u tom slučaju možemo primijeniti metodu čvorišta bez ikakvih preinaka na potpuno isti način kao i ranije.



Sl. 5.20. Dva načina prikazivanja izvora struje

Model mreže na slici 5.20. predstavlja zasebnu, potpunu cjelinu. Ali se isto tako metoda čvorišta može primijeniti tako da se odrede struje i naponi samo u jednom dijelu modela mreže ako su poznate struje koje iz ostalog dijela ulaze u taj dio modela mreže, kao i struje koje izlaze u preostali dio (sl. 5.21), bez obzira kakva su porijekla. Samo u tom slučaju, kao što slijedi iz prijašnjeg izvoda, vektor ukupne struje izvora u nezavisnim čvorištima $\mathbf{J}$ općenito ne možemo odrediti pomoću relacije $\mathbf{J} = \mathbf{M}\,\mathbf{I}$, nego ćemo pojedine elemente tog vektora odrediti direktno promatranjem modela mreže, kao algebarsku sumu strujâ koje se sastaju u odgovarajućem čvorištu. Pritom će, kao što smo pokazali, narinute struje koje izlaze iz čvorišta imati predznak plus, a one koje ulaze u čvorište predznak minus.



Sl. 5.21. Dio modela mreže (obuhvaćen isprekidanom crtom) u koji izvana ulaze poznate struje J_{62} i J_{71}, a iz njega u vanjski dio izlaze poznate struje J_{25}, J_{37} i J_{38}

Kako ukupna struja koja izvana ulazi u model mreže mora uvijek biti jednaka ukupnoj struji koja iz njega izlazi, za primjer na slici 5.21. izlazi da je

$$\mathcal{J}_{62} + \mathcal{J}_{71} = \mathcal{J}_{25} + \mathcal{J}_{37} + \mathcal{J}_{38}.$$

Metoda čvorišta kada su uzbudne veličine u modelu mreže naponi izvora

Na početku ovog poglavlja izveli smo jednadžbe metode petlji uz pretpostavku da u modelu mreže postoje od aktivnih elemenata samo idealni izvori napona. Nakon toga smo izveli jednadžbe metode čvorišta na primjerima u kojima su jedini aktivni elementi u modelu mreže bili idealni izvori struje. Tako su dobivene jednadžbe metode petlji i metode čvorišta u dualnom obliku. Međutim, kako se stvarni izvori električne energije često modeliraju upravo pomoću idealnih izvora napona (i kombinacije pasivnih elemenata), ovdje ćemo izvesti jednadžbe metode čvorišta i za taj slučaj.

Ako je u seriji s idealnim izvorom napona (kojeg je napon e_k) priključena impedancija z_{kk} (sl. 5.22 a), možemo tu granu nadomjestiti paralelnom kombinacijom idealnog izvora struje (kojeg je struja I_k) i iste vrijednosti impedancije z_{kk} (sl. 5.22 b). Ta dva modela bit će ekvivalentna u odnosu na preostali vanjski dio modela mreže — to drugim riječima znači da će između priključnica a i b vladati i u jednom i u drugom slučaju jednaki napon u_k, a iz jedne u drugu priključnicu teći će jednaka struja i_k (naravno, uz uvjet da je dio modela mreže izvan priključnica a i b ostao nepromijenjen) — ako je $I_k = -y_{kk} \cdot e_k$. Naime, na osnovi slike 5.22 a slijedi:

ako je i_k struja koja izlazi iz b u vanjski dio modela mreže, tada je pad napona između a i b:

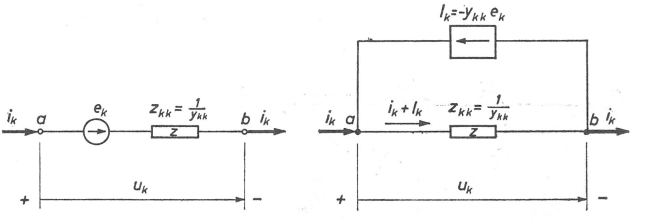
$$u_k' = -e_k + z_{kk}\, i_k.$$

Prema slici 5.22 b, pad napona između a i b iznosi:

$$u_k'' = (i_k + I_k)\, z_{kk}.$$

Odatle slijedi da je neophodan uvjet da napon između priključnica a i b bude u oba slučaja jednak, tj. da bude $u_k = u_k' = u_k''$:

$$I_k = -\frac{e_k}{z_{kk}} = -y_{kk}\, e_k. \tag{5.81}$$



Sl. 5.22. Dva ekvivalenta modela izvora električne energije

Prema tome, ako u modelu mreže postoji grana u kojoj je idealni izvor napona u seriji s impedancijom z_{kk}, taj izvor napona možemo zamijeniti s idealnim izvorom struje, priključenim paralelno istoj impedanciji, uz uvjet da su struja izvora I_k i napon izvora e_k u odnosu kao (5.81). Ako na taj način sve izvore napona u modelu mreže zamijenimo s izvorima struje, možemo metodu čvorišta primijeniti na isti način kao i prije.

Ovdje treba naglasiti da postoji izuzetak kada spomenutu pretvorbu ne možemo učiniti. To je onda ako u seriji s idealnim izvorom napona ne postoji impedancija. Tada je, prema (5.81), struja I_k nedefinirana.

Prijeđimo sada na izvod opće matrične jednadžbe metode čvorišta kada su izvori električne energije modelirani pomoću idealnih izvora napona. Kao što ćemo vidjeti, izvedene jednadžbe moći ćemo primijeniti a da formalno ne provedemo pretvorbu jednog izvora u drugi.

Pretpostavimo da je idealni izvor napona priključen u seriju s impedancijom svake grane kao na slici 5.23. Orijentacija grana neka je takva da struja prolazi kroz izvor od njegove minus priključnice prema plus priključnici. Padovi napona u granama (u smjeru referentne strelice za struju) iznose:

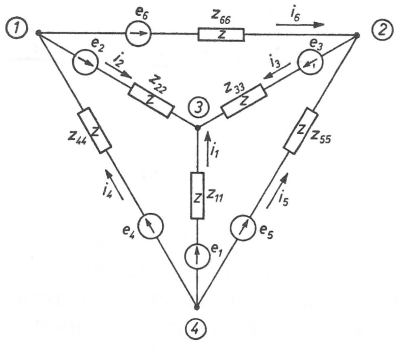
$$\begin{aligned}
u_1 &= -e_1 + z_{11}\, i_1, \\
u_2 &= -e_2 + z_{22}\, i_2, \\
u_3 &= -e_3 + z_{33}\, i_3, \\
u_4 &= -e_4 + z_{44}\, i_4, \\
u_5 &= -e_5 + z_{55}\, i_5, \\
u_6 &= -e_6 + z_{66}\, i_6.
\end{aligned}$$

U matričnom obliku to pišemo:

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_{11} & & & & & \\ & z_{22} & & & & \\ & & z_{33} & & & \\ & & & z_{44} & & \\ & & & & z_{55} & \\ & & & & & z_{66} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{vmatrix}, \tag{5.83}$$

ili kraće:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{e} + \mathbf{zi}. \tag{5.84}$$



Sl. 5.23. Model mreže s idealnim izvorom napona u seriji s impedancijom svake grane

Inverzna matrica $\mathbf{z}^{-1}$ postoji samo ako je matrica impedancija grana $\mathbf{z}$ regularna matrica, dakle samo ako su impedancije svih grana različite od nule. Tada tom matricom možemo pomnožiti (5.84) slijeva, pa imamo:

$$\mathbf{z}^{-1}\,\mathbf{u} = -\mathbf{z}^{-1}\,\mathbf{e} + \mathbf{z}^{-1}\,\mathbf{zi},$$

odnosno, jer je $\mathbf{z}^{-1}\,\mathbf{z} = \mathbf{1}$, nakon preuređenja dobivamo:

$$\mathbf{i} = \mathbf{z}^{-1}\,(\mathbf{u} + \mathbf{e}) \tag{5.85}$$

Odaberimo jedno čvorište za referentno. Kao i u (5.43), padove napona u granama $\mathbf{u}$ možemo izraziti pomoću padova napona nezavisnih čvorišta $\mathbf{V}$ (u smjeru od referentnog čvorišta prema nezavisnim čvorištima) relacijom:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{V}.$$

Uvrštenjem u (5.85) dobivamo:

$$\mathbf{i} = \mathbf{z}^{-1}\,(\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{V} + \mathbf{e}).$$

Pomnožimo li posljednju relaciju slijeva sa $\mathbf{M}$, imamo:

$$\mathbf{Mi} = \mathbf{Mz}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{V} + \mathbf{Mz}^{-1}\,\mathbf{e}.$$

Kako je $\mathbf{Mi} = \mathbf{0}$, možemo napisati:

$$-\mathbf{Mz}^{-1}\,\mathbf{e} = \mathbf{Mz}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{V}, \tag{5.86}$$

ili ako označimo da je $\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1}$:

$$-\mathbf{Mye} = \mathbf{My}\,\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{V}. \tag{5.87}$$

Uvedemo li kraće $\mathbf{Y} = \mathbf{My}\widetilde{\mathbf{M}}$, dobivamo matričnu jednadžbu metode čvorišta kada su izvori električne energije modelirani pomoću idealnih izvora napona:

$$-\mathbf{Mye} = \mathbf{YV}. \tag{5.88}$$

Ovdje je:

$\mathbf{M}$ — matrica incidencija,
$\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1}$ — matrica admitancija grana,
$\mathbf{e}$ — vektor aktivnih napona grana,
$\mathbf{Y} = \mathbf{Mz}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{M}}$ — matrica admitancija čvorišta,
$\mathbf{V}$ — vektor padova napona nezavisnih čvorišta.

Rješenje jednadžbe (5.88) glasi:

$$\mathbf{V} = -\,\mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{Mye}. \tag{5.89}$$

Da bismo dobili i relaciju kojom se mogu odrediti struje u granama, pomnožit ćemo (5.89) slijeva sa $\widetilde{\mathbf{M}}$.

$$\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{V} = -\,\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{Mye}.$$

Kako je $\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{V}$, slijedi da je:

$$\mathbf{u} = -\,\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{Mye}, \tag{5.90}$$

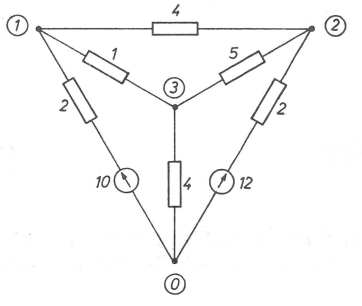
pa nakon uvrštenja u (5.85) konačno dobivamo:

$$\mathbf{i} = \mathbf{ye} - \mathbf{y}\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{Mye}, \tag{5.91}$$

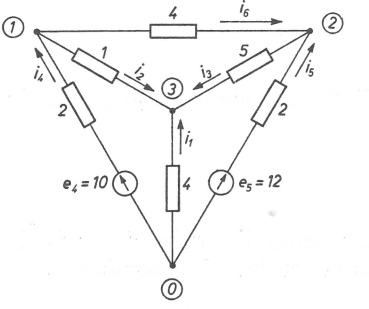
gdje je $\mathbf{i}$ vektor struja granâ.

Primjer 5.11.

Zadan je model mreže na slici 5.24. Izračunajmo metodom čvorišta napone nezavisnih čvorišta i raspodjelu struja u granama; referentno čvorište označeno je sa 0.



Sl. 5.24. Zadani model mreže uz primjer 5.11.



Sl. 5.25. Zadani model mreže s orijentiranim granama i numeriranim čvorištima i granama

Rješavanje:

1. Referentni smjerovi struja i odabrana numeracija čvorišta i grana prikazani su na slici 5.25.

2. Promatranjem modela mreže napišemo matricu incidencija **M**, matricu impedancija grana **z** i vektor aktivnih napona grana **e**:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & & -1 & & 1 & & -1 \\ ② & & & -1 & & 1 & 1 \\ ③ & 1 & 1 & 1 & & & \end{array},$$

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 4 & & & & & \\ 2 & & 1 & & & & \\ 3 & & & 5 & & & \\ 4 & & & & 2 & & \\ 5 & & & & & 2 & \\ 6 & & & & & & 4 \end{array}, \qquad \mathbf{e} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & 10 \\ 5 & 12 \\ 6 & \end{array}.$$

3. Odredimo matricu admitancija grana **y**:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1} =$$

	1	2	3	4	5	6
1	0,25					
2		1				
3			0,20			
4				0,50		
5					0,50	
6						0,25

.

4. Odredimo matricu admitancija čvorišta **Y**:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{M}} =$$

	①	②	③
①	1,75	−0,25	−1,00
②	−0,25	0,95	−0,20
③	−1,00	−0,20	1,45

.

5. Odredimo matricu impedancija čvorišta **Z**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} =$$

	①	②	③
①	1,11458	0,46875	0,83333
②	0,46875	1,28125	0,50000
③	0,83333	0,50000	1,33333

.

6. Odredimo vektor padova napona nezavisnih čvorišta **V**:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{Z}\mathbf{M}\mathbf{y}\mathbf{e} =$$

①	−8,38542
②	−10,03125
③	−7,16667

.

7. Odredimo vektor padova napona u granama **u**:

$$\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{V} =$$

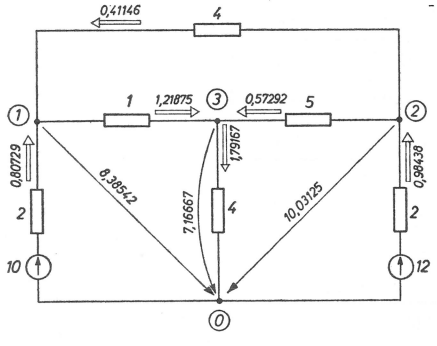
1	− 7,16667
2	1,21875
3	2,86457
4	− 8,38542
5	−10,03125
6	− 1,64583

.

8. Odredimo vektor struja grana **i**:

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}(\mathbf{e} + \mathbf{u}) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -1{,}79167 \\ \hline 2 & 1{,}21875 \\ \hline 3 & 0{,}57292 \\ \hline 4 & 0{,}80729 \\ \hline 5 & 0{,}98438 \\ \hline 6 & -0{,}41146 \\ \hline \end{array}.$$

9. Izračunate vrijednosti napona nezavisnih čvorišta i struja u granama naznačene su na slici 5.26.



Sl. 5.26. Izračunate vrijednosti struja u granama i vrijednosti napona nezavisnih čvorišta

Šesto poglavlje

Jednom sam ja, Chuang Chou, sanjao da sam leptir, i bio sam sretan poput leptira. Bio sam svjestan da sam posve zadovoljan sa sobom, no nisam znao da sam Chou. Najednom se probudih, i eto me, očito Chou. Ne znam je li to bio Chou, koji je sanjao da je leptir, ili leptir, što sanja da je Chou. Između Choua i leptira mora da je neka razlika (no jedan može biti drugi). Ovo se zove transformacijom stvari.

Chuang-tse

PRIMJENA LINEARNIH TRANSFORMACIJA

6.1. Uvod

Kao i u nekim drugim granama tehnike, tako je i u elektrotehnici ponekad veoma prikladna primjena linearnih transformacija, pa ćemo u ovom poglavlju o tome reći nešto više u vezi s analizom mreža u stacionarnom stanju, nadovezujući se na ono što smo već rekli u drugom poglavlju u odjeljku 2.5.

Svrha je primjene linearnih transformacija da se pojednostavni matematički postupak kojim se dolazi do traženog rješenja. Tako, na primjer, ponekad možemo pogodnim izborom transformacije zadani sustav diferencijalnih jednadžbi svesti na sustav algebarskih jednadžbi, a ponekad možemo, jedan sustav linearnih algebarskih jednadžbi svesti na sustav istih takvih jednadžbi, ali s manjim brojem nepoznanica, i sl. Da bismo se podsjetili, spomenimo nekoliko primjera primjene transformacija, pogotovu zato što se ponekad taj postupak — iako nam je poznat — ne naziva tim imenom, pa možda nismo svjesni da je radi o primjeni transformacija.

Najpoznatiji primjer primjene transformacija u elektrotehnici jest tzv. simbolička metoda o kojoj smo mnogo govorili već u prvom poglavlju, a poznata nam je i otprije. Kao što znamo, ako su struje i naponi iste frekvencije, tada umjesto sa sinus funkcijama možemo računati s kompleksnim brojevima. Naime, transformiramo li sinusoidnu struju $i(t) = |I_m| \sin(\omega t + \alpha)$ u kompleksnu veličinu $I = (|I_m|/\sqrt{2})\, e^{j\alpha}$, a sinusoidni napon $v(t) = |V_m| \sin(\omega t + \beta)$ u kompleksnu veličinu $V = (|V_m|/\sqrt{2}) e^{j\beta}$, tada je osnovna integralno-diferencijalna jednadžba strujnog kruga (1.106):

$$v(t) = R\, i(t) + L \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)\, \mathrm{d}t$$

transformira u algebarsku jednadžbu (1.127):

$$V = R\,I + j\,\omega\,L\,I + \frac{1}{j\,\omega\,C}\,I,$$

rješenje koje je:

$$I = \frac{V}{R + j\,\omega\,L + \dfrac{1}{j\,\omega\,C}}.$$

Odatle je veoma jednostavno struju izraziti kao funkciju vremena.

Kao drugi primjer spomenimo primjenu Laplaceove transformacije, pomoću koje se — za razliku od simboličke metode koja je ograničena na rješavanje mreža sa sinusoidnim naponima i strujama jednake frekvencije i u ustaljenom stanju — rješavaju problemi u vezi s nestacionarnim pojavama napona i struja što nastaju ako se, na primjer, unutar mreže naglo narine ili isključi napon. Prema definiciji, originalna funkcija vremena f (t) transformira se u funkciju F (p) pomoću integrala:

$$\mathrm{F}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Računanje primjenom Laplaceove transformacije olakšano je, slično kao i simboličkom metodom, time što u transformiranom području treba da riješimo sustav algebarskih jednadžbi umjesto sustava diferencijalnih jednadžbi u originalnom području funkcija. Međutim, dok je u simboličkoj metodi prelaženje iz transformiranog područja u originalno područje veoma jednostavan postupak, dotle u primjeni Laplaceove transformacije inverzna transformacija može biti problem, pa je stoga i primjena te transformacije ograničena.

Još jedan, ništa manje poznat primjer primjene transformacija u elektrotehnici jest tzv. »metoda simetričnih komponenata« koja se primjenjuje pri proračunu struja kratkog spoja u trofaznim mrežama kao i u teoriji električnih strojeva. Na kraju ovog poglavlja pokazat ćemo na jednom primjeru kakva je korist od primjene te metode. To je u prvom redu mogućnost da se određenom matricom transformacije prvotna matrica impedancija svede na dijagonalnu matricu, koje je inverznu matricu lako naći; naime, svaki se dijagonalni element jednostavno zamijeni njegovom recipročnom vrijednošću.

Sada ćemo, na početku, najprije ukratko objasniti Kronovu metodu transformacije, služeći se pritom matričnom algebrom, što je zapravo i dovoljno za pojednostavnjeno razmatranje (kao što je poznato, općenitu teoriju s egzaktnim dokazima razvio je G. Kron pomoću tenzorskog računa). Zatim ćemo primjenom Kronove metode izvesti matrične jednadžbe metode petlji i metode čvorišta koje smo u prethodnom poglavlju izveli pomoću topoloških relacija. Nadalje, kao primjer primjene te metode dat ćemo potpun izvod jednadžbe metode čvorišta kada su u modelu mreže uključeni i idealni transformatori. I na kraju, napisat ćemo formule transformacije kojima se služimo kada transformaciju napona izaberemo neovisno o transformaciji struje, što nije slučaj kod Kronove metode, kod koje izbor transformacije za napon nije proizvoljan, već na određen način ovisi o izboru transformacije za struju (i obratno).

6.2. Metoda analize mreža prema Kronu (transformacija uz uvjet invarijantne snage)

Metoda kojom je 1935. god. G. Kron postavio temelje moderne analize električnih mreža osniva se na transformaciji jednog niza varijabli (»stare varijable«) u drugi niz varijabli (»nove varijable«) uz uvjet da je ukupna ulazna prividna snaga kada je izrazimo pomoću novih napona i struja jednaka ukupnoj ulaznoj prividnoj snazi izraženoj pomoću starih napona i struja. To je tzv. princip »invarijantne snage«.

Formule pomoću kojih se struje, naponi i impedancije starog sustava varijabli transformiraju u novi sustav nazivaju se *formule transformacije* ili *jednadžbe transformacije*. Pritom je jedna od dviju relacija — bilo formula transformacije za struju, bilo formula transformacije za napon — uvijek *pretpostavljena*. Tom relacijom određena je *matrica transformacije* koja predstavlja osnovu cijele metode. Preostale dvije relacije su izvedene.

Označimo sa:

$\mathbf{e}_s$ — stupčani vektor napona u starom sustavu varijabli,
$\mathbf{i}_s$ — stupčani vektor struja u starom sustavu varijabli,
$\mathbf{z}_s$ — matricu impedancija u starom sustavu varijabli,

a sa:

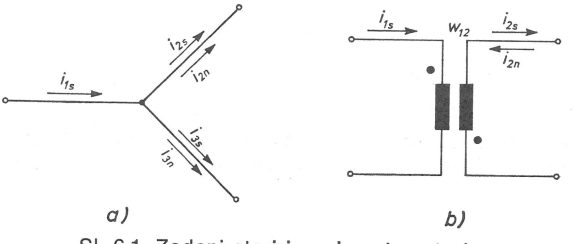
$\mathbf{e}_n$ — stupčani vektor napona u novom sustavu varijabli,
$\mathbf{i}_n$ — stupčani vektor struja u novom sustavu varijabli,
$\mathbf{z}_n$ — matricu impedancija u novom sustavu varijabli,

pa transformaciju starog sustava u novi sustav definirajmo odnosom između starih i novih struja. U matričnom obliku pišemo:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{i}_n, \tag{6.1}$$

gdje je sa $\mathbf{T}$ označena matrica transformacije. Ta je matrica najčešće pravokutna, pa u općem slučaju ne vrijedi relacija $\mathbf{i}_n = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{i}_s$. Karakteristično je da nove struje ne moraju imati fizikalno značenje, iako mogu. Na primjer, u metodi petlji nove struje $\mathbf{I}$ fiktivne su struje.

Matrična relacija (6.1) skraćeno je napisan niz linearnih relacija u kojima se s lijeve strane znaka jednakosti nalaze struje starog sustava, a s desne strane linearne kombinacije strujâ novog sustava. Prikažimo to na dva primjera.



Sl. 6.1. Zadani stari i novi sustav struja

Na slici 6.1 a. stare su struje i_{1s}, i_{2s} i i_{3s}, a nove struje i_{2n} i i_{3n}. Pomoću I. Kirchoffova zakona možemo napisati:

$$i_{1s} = i_{2n} + i_{3n},$$

$$i_{2s} = i_{2n},$$

$$i_{3s} = i_{3n},$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} i_{1s} \\ i_{2s} \\ i_{3s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{2n} \\ i_{3n} \end{bmatrix}.$$

Matrica je transformacije prema tome:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

U drugom primjeru, prema slici 6.1 b, stare su struje i_{1s} i i_{2s}, a nova je struja i_{2n}. Iz definicije idealnog transformatora slijedi da je:

$$i_{1s} = -\frac{1}{w_{12}} i_{2n},$$

$$i_{2s} = -i_{2n},$$

ili:

$$\begin{bmatrix} i_{1s} \\ i_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{w_{12}} \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{2n} \end{bmatrix},$$

pa matrica transformacije u ovom slučaju glasi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{w_{12}} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Osim što će biti ispunjen uvjet »invarijantne snage«, pri izvodu preostalih dviju relacija — formule transformacije za napone i formule transformacije za impedancije — pretpostavit ćemo da je oblik jednadžbi za napon i snagu *isti* ako su napisane pomoću starih varijabli ili ako su napisane pomoću novih varijabli. To znači, ako je:

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{z}_s \mathbf{i}_s, \tag{6.2}$$

tada je:

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{z}_n \mathbf{i}_n, \tag{6.3}$$

odnosno ako je:

$$\mathbf{S}_s = \widetilde{\mathbf{e}}_s \mathbf{i}_s^*, \tag{6.4}$$

tada je:

$$\mathbf{S}_n = \widetilde{\mathbf{e}}_n \mathbf{i}_n^*. \tag{6.5}$$

$\mathbf{S}_s$ i $\mathbf{S}_n$ su 1×1 matrice: $\mathbf{S}_s$ je ukupna prividna snaga u starom sustavu varijabli, a $\mathbf{S}_n$ je ukupna prividna snaga u novom sustavu varijabli.

Budući da smo pošli od toga da su vektor napona $\mathbf{e}$ i vektor struje $\mathbf{i}$ stupčani vektori, da bismo dobili ispravan izraz za ukupnu snagu, moramo snagu u matričnom obliku izraziti pomoću *rednog vektora* $\widetilde{\mathbf{e}}$. To se vidi, na primjer, iz slijedećeg produkta:

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c|c} e_1 & e_2 & e_3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} i_1^* \\ \hline i_2^* \\ \hline i_3^* \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} e_1 i_1^* + e_2 i_2^* + e_3 i_3^* \end{array}\right].$$

Formula transformacije za napone

Napišimo najprije uvjet invarijantne snage u matematičkom obliku. Taj uvjet glasi:

$$\mathbf{S}_s = \widetilde{\mathbf{e}}_s \mathbf{i}_s^* = \widetilde{\mathbf{e}}_n \mathbf{i}_n^* = \mathbf{S}_n. \tag{6.6}$$

Da bismo izveli formulu transformacije za napone, moramo poći od relacije (6.1): $\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{i}_n$. Konjugiranjem dobivamo:

$$\mathbf{i}_s^* = \mathbf{T}^* \mathbf{i}_n^*.$$

Uvrstimo li sada u (6.4), $\mathbf{S}_s = \widetilde{\mathbf{e}}_s \mathbf{i}_s^*$, umjesto $\mathbf{i}_s^*$ produkt $(\mathbf{T}^* \mathbf{i}_n^*,)$ slijedi da je:

$$\mathbf{S}_s = \widetilde{\mathbf{e}}_s \mathbf{T}^* \mathbf{i}_n^*,$$

odakle je nakon transponiranja:

$$\widetilde{\mathbf{S}}_s = \widetilde{\mathbf{i}}_n^* \widetilde{\mathbf{T}}^* \mathbf{e}_s.$$

Kako je $\widetilde{\mathbf{S}}_s = \mathbf{S}_s$ ($\mathbf{S}_s$ je 1×1 matrica), vrijedi također:

$$\mathbf{S}_s = \widetilde{\mathbf{i}}_n^* \widetilde{\mathbf{T}}^* \mathbf{e}_s.$$

Pretpostavimo sada da tražena veza između novih i starih napona glasi: $\mathbf{e}_n = \widetilde{\mathbf{T}}^* \mathbf{e}_s$. Da bismo dokazali da ta relacija vrijedi, moramo u posljednju relaciju umjesto produkta $(\widetilde{\mathbf{T}}^* \mathbf{e}_s)$ uvrstiti $\mathbf{e}_n$.

Tada je:

$$\mathbf{S}_s = \tilde{\mathbf{i}}_n^* \, \mathbf{e}_n.$$

Ako tu jednadžbu transponiramo, jer je $\tilde{\mathbf{S}}_s = \mathbf{S}_s$, izlazi da je:

$$\mathbf{S}_s = \tilde{\mathbf{e}}_n \, \mathbf{i}_n^*.$$

Dobili smo da je produkt vektora $\tilde{\mathbf{e}}_n$ i vektora $\mathbf{i}_n^*$ jednak ukupnoj prividnoj snazi, $\mathbf{S}_s$. Kako je prema (6.5) taj produkt jednak i ukupnoj prividnoj snazi u novom sustavu varijabli $\mathbf{S}_n$, znači da je ispunjen uvjet (6.6), pa formula transformacije za napone zaista ima oblik koji smo maloprije pretpostavili:

$$\mathbf{e}_n = \tilde{\mathbf{T}}^* \, \mathbf{e}_s. \tag{6.7}$$

Elementi matrice $\mathbf{T}$ veoma su često realni brojevi. Kako je tada $\tilde{\mathbf{T}}^* = \tilde{\mathbf{T}}$, u jednadžbi (6.7) možemo izostaviti znak za konjugiranu matricu, pa je:

$$\mathbf{e}_n = \tilde{\mathbf{T}} \, \mathbf{e}_s. \tag{6.8}$$

Formula transformacije za impendancije

Da bismo izveli formulu transformacije za impedancije, pomnožit ćemo najprije obje strane jednadžbe (6.2), $\mathbf{e}_s = \mathbf{z}_s \, \mathbf{i}_s$, slijeva sa $\tilde{\mathbf{T}}^*$. Dobivamo:

$$\tilde{\mathbf{T}}^* \, \mathbf{e}_s = \tilde{\mathbf{T}}^* \, \mathbf{z}_s \, \mathbf{i}_s.$$

Kako je prema (6.1) $\mathbf{i}_s = \mathbf{T} \, \mathbf{i}_n$, a prema (6.7) $\mathbf{e}_n = \tilde{\mathbf{T}}^* \, \mathbf{e}_s$, dalje uvrštenjem slijedi da je:

$$\mathbf{e}_n = \tilde{\mathbf{T}}^* \, \mathbf{z}_s \, \mathbf{T} \, \mathbf{i}_n.$$

Uspoređenjem posljednje jednadžbe sa (6.3), prema kojoj je $\mathbf{e}_n = \mathbf{z}_n \, \mathbf{i}_n$, konačno dobivamo:

$$\mathbf{z}_n = \tilde{\mathbf{T}}^* \, \mathbf{z}_s \, \mathbf{T}. \tag{6.9}$$

Ako su elementi matrice $\mathbf{T}$ realni brojevi, tj. ako je $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$, možemo napisati:

$$\mathbf{z}_n = \tilde{\mathbf{T}} \, \mathbf{z}_s \, \mathbf{T}. \tag{6.10}$$

Formule transformacije za struje i admitancije ako je pretpostavljena veza između napona

U prethodnom odjeljku pretpostavljena je veza između starih i novih struja, a izvedene su formule transformacije za napon i impedanciju. U nekim je slučajevima prikladnije pretpostaviti vezu između starih i novih napona. Ako smo tu vezu napisali u obliku relacije:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{T} \, \mathbf{v}_n, \tag{6.11}$$

tapa uz pretpostavku da je:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{y}_s \mathbf{v}_s,$$
$$\mathbf{i}_n = \mathbf{y}_n \mathbf{v}_n,$$
$$\mathbf{S}_s = \tilde{\mathbf{v}}_s \mathbf{i}_s^*,$$
$$\mathbf{S}_n = \tilde{\mathbf{v}}_n \mathbf{i}_n^*,$$

i uz ispunjen uvjet da je $\mathbf{S}_s = \mathbf{S}_n$, dobivamo na identičan način kao prije formulu transformacije za struje:

$$\mathbf{i}_n = \tilde{\mathbf{T}}^* \mathbf{i}_s \tag{6.12}$$

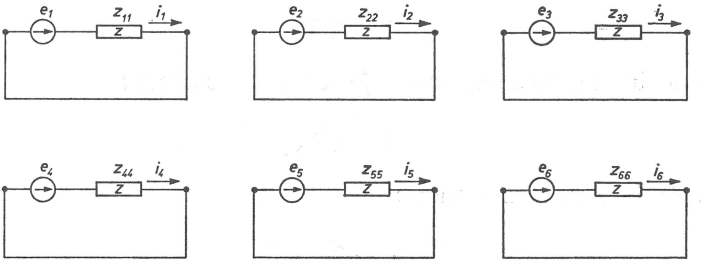
i formulu transformacije za admitancije:

$$\mathbf{y}_n = \tilde{\mathbf{T}}^* \mathbf{y}_s \mathbf{T}. \tag{6.13}$$

Metoda petlji i metoda čvorišta

Da bismo ilustrirali primjenu Kronove metode, pokazat ćemo kako se — polazeći od jednadžbe »primitivne mreže« — do jednadžbi metode petlji i metode čvorišta može doći jednostavnije nego što je to učinjeno u prethodnom poglavlju.

Zamislimo da je u seriji s impedancijom svake grane u modelu mreže priključen idealni izvor napona, pa nacrtajmo tzv. primitivnu mrežu, koju je uveo Kron, a dobivamo je tako da pojedine grane modela mreže odvojimo i kratko spojimo. Na primjer, ako neki model ima ukupno šest grana, a između njih nema induktivne veze, primitivna mreža sastoji se od šest strujnih krugova (sl. 6.2).



Sl. 6.2. Primjer »primitivne mreže«

Prema slici možemo napisati slijedećih šest jednadžbi:

$$e_1 = z_{11} i_1,$$
$$e_2 = z_{22} i_2,$$
$$e_3 = z_{33} i_3,$$
$$e_4 = z_{44} i_4,$$
$$e_5 = z_{55} i_5,$$
$$e_6 = z_{66} i_6.$$

U matričnom je obliku:

$$\begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} & & & & & \\ & z_{22} & & & & \\ & & z_{33} & & & \\ & & & z_{44} & & \\ & & & & z_{55} & \\ & & & & & z_{66} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{vmatrix},$$

ili kraće:

$$\mathbf{e} = \mathbf{z}\,\mathbf{i}. \tag{6.14}$$

Matrice **e**, **i** i **z** odgovaraju matricama što smo ih istim simbolima označili u prethodnom poglavlju:

e — je vektor aktivnih napona u granama,
z — je matrica impedancija grana,
i — je vektor struja grana.

Ako između pojedinih grana nema induktivnih veza, tada je u (6.14) matrica **z** dijagonalna matrica, a ako induktivne veze između grana postoje, matrica **z** je simetrična.

Zamislimo da **e**, **i** i **z** pripadaju starom sustavu varijabli. Pretpostavimo nadalje da struje nezavisnih petlji **I** odgovaraju novim strujama. Vezu između starih i novih struja možemo tada napisati u obliku:

$$\mathbf{i} = \mathbf{T}\,\mathbf{I}. \tag{6.15}$$

Prema Kronovim formulama, napon je u novom sustavu:

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{T}}^{*}\,\mathbf{e}, \tag{6.16}$$

a impedancija je u novom sustavu:

$$\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{T}}^{*}\,\mathbf{z}\,\mathbf{T}. \tag{6.17}$$

U novom sustavu varijabli ponašanje mreže opisuje jednadžba:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{I}.$$

Odatle vidimo da nas postupak prema Kronu vodi do istih jednadžbi metode petlji kao i postupak u prethodnom poglavlju. Naime, budući da je prema (4.36) $\mathbf{i} = \tilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{I}$, a ovdje smo, prema (6.15), uveli da je $\mathbf{i} = \mathbf{T}\,\mathbf{I}$, znači da je $\mathbf{T} \equiv \tilde{\mathbf{C}}$, odnosno $\tilde{\mathbf{T}} \equiv \mathbf{C}$. Elementi spojne matrice realni su brojevi, pa je i $\tilde{\mathbf{T}}^{*} \equiv \mathbf{C}$. Stoga ako u jednadžbe (6.16) i (6.17) uvrstimo $\tilde{\mathbf{C}}$ umjesto **T**, a **C** umjesto $\tilde{\mathbf{T}}^{*}$, dobivamo $\mathbf{E} = \mathbf{C}\,\mathbf{e}$ i $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\,\mathbf{z}\,\tilde{\mathbf{C}}$, dakle, dobivamo upravo relacije (5.8) i (5.15).

Ipak moramo naglasiti: iako nas postupak prema Kronu vodi do istih jednadžbi što smo ih prije dobili na drugi način, polazna jednadžba $\mathbf{e} = \mathbf{z}\,\mathbf{i}$ nema stvarnog značenja jer vrijedi uz pretpostavku da su sve grane modela mreže kratko spojene. Prema tome, struje grana dobivene pomoću $\mathbf{i} = \mathbf{z}^{-1}\,\mathbf{e}$ nisu jednake strujama grana u zadanom modelu mreže. Opravdanje za upotrebu primitivne mreže jest u tome što su pritom konačni rezultati ispravni, iako se primitivna mreža ne može fizikalno objasniti.

Spomenimo još, ali samo ukratko, da i jednadžbe metode čvorišta — slično kao i jednadžbe metode petlji — možemo dobiti ako pođemo od jednadžbe primitivne mreže. Međutim, sada se primitivna mreža sastoji od pojedinih međusobno odvojenih grana modela mreže, koje su — za razliku od prethodnog slučaja — otvorene, a ne kratko spojene, dok su na krajevima svake grane narinute vanjske struje.

Polazna jednadžba kojom je opisano ponašanje primitivne mreže glasi:

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\mathbf{v}, \tag{6.18}$$

gdje su $\mathbf{i}$ struje, $\mathbf{y}$ admitancije, a $\mathbf{v}$ padovi napona primitivne mreže napisani kao matrice.

Ako transformaciju uvedemo pomoću relacije:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\,\mathbf{V}, \tag{6.19}$$

gdje je $\mathbf{V}$ vektor napona nezavisnih čvorišta, tada je, prema Kronu, novi niz struja dan relacijom:

$$\mathbf{J} = \tilde{\mathbf{T}}^{*}\,\mathbf{i}, \tag{6.20}$$

a novi niz admitancija relacijom:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{T}}^{*}\,\mathbf{y}\,\mathbf{T}. \tag{6.21}$$

Jednadžba ponašanja mreže u novom sustavu varijabli glasi:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}\,\mathbf{V}. \tag{6.22}$$

Primjer 6.1.

Uzmimo da nam je poznata jednadžba metode petlji za primjer koji je prikazan na slici 6.3 a. Ta jednadžba glasi:

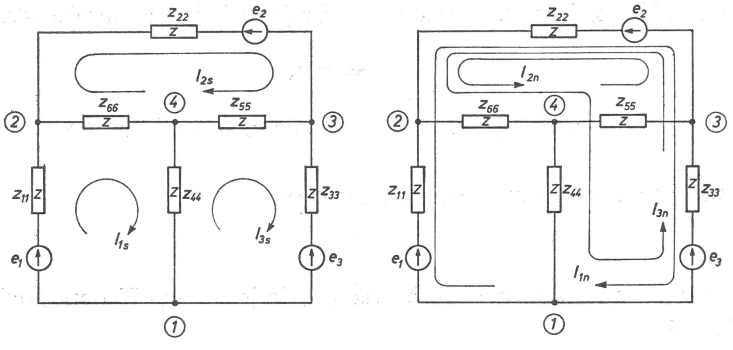
$$\begin{vmatrix} e_1 \\ -e_2 \\ -e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11}+z_{44}+z_{66} & -z_{66} & -z_{44} \\ -z_{66} & z_{22}+z_{55}+z_{66} & -z_{55} \\ -z_{44} & -z_{55} & z_{33}+z_{44}+z_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_{1s} \\ I_{2s} \\ I_{3s} \end{vmatrix}.$$

Primjenom Kronove transformacije uspostavit ćemo jednadžbe metode petlji kada je novi sustav nezavisnih petlji onaj na slici 6.3 b.

Matrica impedancija, vektor napona i vektor struja starog sustava varijabli glase:

$$\mathbf{Z}_s = \begin{vmatrix} z_{11}+z_{44}+z_{66} & -z_{66} & -z_{44} \\ -z_{66} & z_{22}+z_{55}+z_{66} & -z_{55} \\ -z_{44} & -z_{55} & z_{33}+z_{44}+z_{55} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{E}_s = \begin{vmatrix} e_1 \\ -e_2 \\ -e_3 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{I}_s = \begin{vmatrix} I_{1s} \\ I_{2s} \\ I_{3s} \end{vmatrix}.$$



Sl. 6.3. a) Zadani model mreže i stari sustav struja nezavisnih petlji. b) Novi sustav struja nezavisnih petlji.

Da veza između starih struja I_{1s}, I_{2s}, I_{3s} i novih struja I_{1n}, I_{2n}, I_{3n}, koju ćemo sada uspostaviti, bude uočljivija, na slici 6.4 a naznačeno je stablo koje odgovara starim strujama petlji, a na slici 6.4 b naznačeno je stablo koje odgovara novim strujama petlji. Uspoređenjem slika 6.4 a i 6.4 b. možemo napisati:

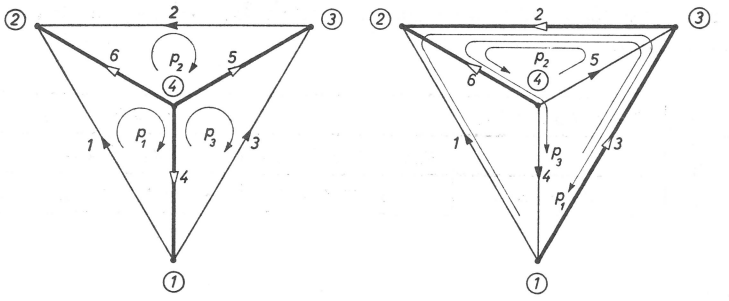
$$\begin{aligned} I_{1s} &= I_{1n}, \\ I_{2s} &= I_{1n} - I_{2n} - I_{3n}, \\ I_{3s} &= I_{1n} \qquad\quad - I_{3n}. \end{aligned}$$

U matričnom obliku ta veza glasi:

$$\begin{vmatrix} I_{1s} \\ I_{2s} \\ I_{3s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_{1n} \\ I_{2n} \\ I_{3n} \end{vmatrix},$$

ili kraće:

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{I}_n.$$



Sl. 6.4. a) Graf zadanog modela mreže s naznačenim stablom koje odgovara starom sustavu nezavisnih petlji. b) Naznačeno stablo odgovara novom sustavu nezavisnih petlji.

Matrica je transformacije prema tome:

$$\mathbf{T} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & & -1 \\ \hline \end{array} .$$

Sada možemo jednostavno odrediti napone i impedancije u novom sustavu. Na osnovi (6.7) dobivamo:

$$\mathbf{E}_n = \widetilde{\mathbf{T}}^{\star}\mathbf{E}_s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline -e_2 \\ \hline -e_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline e_1 - e_2 - e_3 \\ \hline e_2 \\ \hline e_2 + e_3 \\ \hline \end{array} ,$$

a na osnovi (6.9):

$$\mathbf{Z}_n = \widetilde{\mathbf{T}}^{\star}\,\mathbf{Z}_s\,\mathbf{T} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot$$

$$\cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_{11} + z_{44} + z_{66} & -z_{66} & -z_{44} \\ \hline -z_{66} & z_{22} + z_{55} + z_{66} & -z_{55} \\ \hline -z_{44} & -z_{55} & z_{33} + z_{44} + z_{55} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & & -1 \\ \hline \end{array} ,$$

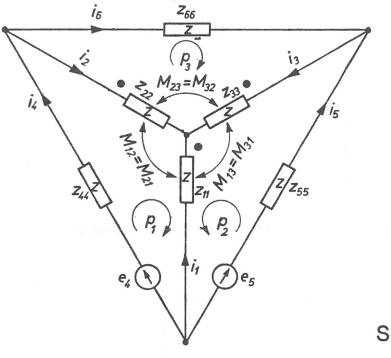
$$\mathbf{Z}_n = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_{11} + z_{22} + z_{33} & -z_{22} & -z_{22} - z_{33} \\ \hline -z_{22} & z_{22} + z_{55} + z_{66} & z_{22} + z_{66} \\ \hline -z_{22} - z_{33} & z_{22} + z_{66} & z_{22} + z_{33} + z_{44} + z_{66} \\ \hline \end{array} .$$

Prema tome, matrična jednadžba metode petlji $\mathbf{E}_n = \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n$ za novi sustav nezavisnih petlji glasi:

$$\begin{vmatrix} e_1 - e_2 - e_3 \\ e_2 \\ e_2 + e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} + z_{22} + z_{33} & -z_{22} & -z_{22} - z_{33} \\ -z_{22} & z_{22} + z_{55} + z_{66} & z_{22} + z_{66} \\ -z_{22} - z_{33} & z_{22} + z_{66} & z_{22} + z_{33} + z_{44} + z_{66} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_{1n} \\ I_{2n} \\ I_{3n} \end{vmatrix}.$$

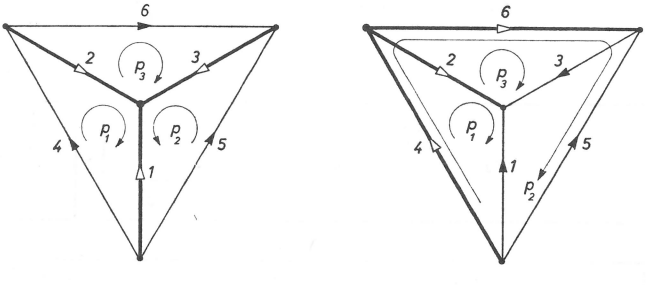
Primjer 6.2.

Još jedanput ćemo izraditi sličan primjer kao što je i prethodni. Razlika je uglavnom u tome što u modelu mreže na slici 6.5. postoje i induktivne veze između nekih grana, a prije ih nije bilo.



Sl. 6.5. Zadani model mreže

Ako je stari sustav nezavisnih petlji onaj na slici 6.6 a, tada matrična jednadžba metode petlji glasi (usporedimo matricu impedancija petlji iz ove jednadžbe s matricom **Z** iz primjera 5.4):



Sl. 6.6. a) Graf zadanog modela mreže i stari sustav nezavisnih petlji. b) Novi sustav nezavisnih petlji.

$$\begin{array}{|c|}\hline e_4 \\ \hline e_5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline z_{11}+z_{22}+z_{44}-z_{21}-z_{12} & z_{11}-z_{21}-z_{13}+z_{23} & z_{12}-z_{22}-z_{13}+z_{23} \\ \hline z_{11}-z_{12}-z_{31}+z_{32} & z_{11}+z_{33}+z_{55}-z_{13}-z_{31} & z_{12}-z_{32}-z_{13}+z_{33} \\ \hline z_{21}-z_{22}-z_{31}+z_{32} & z_{11}-z_{23}-z_{31}+z_{33} & z_{22}+z_{33}+z_{66}-z_{23}-z_{32} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline I_{1s} \\ \hline I_{2s} \\ \hline I_{3s} \\ \hline \end{array},$$

kraće:

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{Z}_s \mathbf{I}_s.$$

Novi sustav nezavisnih petlji prikazan je na slici 6.6 b. Uspoređenjem slika 6.6 a. i 6.6 b. dobivamo relacije koje povezuju stari i novi sustav struja nezavisnih petlji:

$$I_{1s} = I_{1n} + I_{2n},$$

$$I_{2s} = \quad - I_{2n},$$

$$I_{3s} = \quad I_{2n} + I_{3n}.$$

U matričnom obliku imamo:

$$\begin{array}{|c|}\hline I_{1s} \\ \hline I_{2s} \\ \hline I_{3s} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & \\ \hline & -1 & \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline I_{1n} \\ \hline I_{2n} \\ \hline I_{3n} \\ \hline \end{array},$$

odnosno:

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{I}_n.$$

Matrica je transformacije prema tome:

$$\mathbf{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & \\ \hline & -1 & \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Dalje je sasvim šablonski, bez razmišljanja:

$$\mathbf{E}_n = \widetilde{\mathbf{T}}^{\star}\,\mathbf{E}_s = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline e_4 \\ \hline e_5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline e_4 \\ \hline e_4 - e_5 \\ \hline \end{array}$$

i:

$$\mathbf{Z}_n = \widetilde{\mathbf{T}}^{\star}\,\mathbf{Z}_s\,\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ 1 & -1 & 1 \\ & & 1 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} z_{11}+z_{22}+z_{44}-z_{21}-z_{12} & z_{11}-z_{21}-z_{13}+z_{23} & z_{12}-z_{22}-z_{13}+z_{23} \\ z_{11}-z_{12}-z_{31}+z_{32} & z_{11}+z_{33}+z_{55}-z_{13}-z_{31} & z_{12}-z_{32}-z_{13}+z_{33} \\ z_{21}-z_{22}-z_{31}+z_{32} & z_{21}-z_{23}-z_{31}+z_{33} & z_{22}+z_{33}+z_{66}-z_{23}-z_{32} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ & -1 & \\ & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_n = \begin{vmatrix} z_{11}+z_{22}+z_{44}-z_{21}-z_{12} & z_{44} & z_{12}-z_{22}-z_{13}+z_{23} \\ z_{44} & z_{44}+z_{55}+z_{66} & z_{66} \\ z_{21}-z_{22}-z_{31}+z_{32} & z_{66} & z_{22}+z_{33}+z_{66}-z_{23}-z_{32} \end{vmatrix}.$$

Dakle, matrična jednadžba metode petlji, $\mathbf{E}_n = \mathbf{Z}_n\,\mathbf{I}_n$, za novi sustav nezavisnih petlji ima oblik:

$$\begin{vmatrix} e_4 \\ e_4 - e_5 \\ \cdot \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_{11}+z_{22}+z_{44}-z_{21}-z_{12} & z_{44} & z_{12}-z_{22}-z_{13}+z_{23} \\ z_{44} & z_{44}+z_{55}+z_{66} & z_{66} \\ z_{21}-z_{22}-z_{31}+z_{32} & z_{66} & z_{22}+z_{33}+z_{66}-z_{23}-z_{32} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} I_{1n} \\ I_{2n} \\ I_{3n} \end{vmatrix}.$$

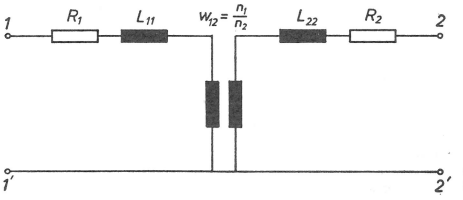
Mreže s transformatorima

Vidjeli smo u prvom poglavlju, u dijelu gdje se govori o modelima transformatora, da je u tim modelima uključen i element što smo ga nazvali idealni transformator. Kasnije, u petom poglavlju, u kojem su opisane metoda petlji i metoda čvorišta, nije ništa spomenuto o tome kako se postupa ako u zadanom modelu mreže postoji i taj element. Sada ćemo pokazati kako možemo — pomoću Kronove transformacije — proširiti primjenu metoda iz prethodnog poglavlja i na taj slučaj. Postupak ćemo ilustrirati samo na metodi čvorišta, a slično se postupa i u metodi petlji.

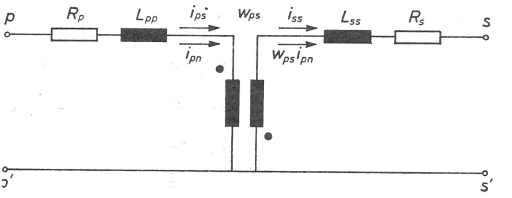
Možemo se zapitati zašto je pogodna primjena modela transformatora koji sadrži i idealni transformator? Znamo naime da mreže s transformatorima možemo rješavati onako kako smo to prije pokazali samo ako transformatore predočimo pomoću tzv. »reduciranog modela« u kojem nema idealnog transformatora i u kojem su sve impedancije svedene na primarni ili na sekundarni napon. Ali u tom slučaju moramo svesti na tzv. osnovni ili bazni napon sve impedancije i parametre pogonskog stanja (napone i struje izvora) svih onih elemenata mreže koji su na naponskom nivou različitom od baznog. Osim toga, nakon što odredimo raspodjelu napona i struja u ovom tzv. »reduciranom modelu mreže«, potrebno je još da se dobivene vrijednosti napona i struja preračunaju u stvarne vrijednosti, ovisno o naponskim nivoima u mreži.

Ako primijenimo model transformatora u kojem je uključen i idealni transformator, izbjeći ćemo spomenuta preračunavanja. Osim toga, taj model moramo primijeniti i onda ako u mreži postoje transformatori s kompleksnim omjerom transformacije.

Ovdje u metodi čvorišta nećemo moći primijeniti »točan model transformatora« prikazan na slici 1.33, i to zato što je u tom modelu posebna grana jedna od zavojnica idealnog transformatora. Kako prema definiciji idealni transformator nema impedanciju, tu granu ne možemo uvrstiti u matricu impedancija grana, a to je jedna od polaznih matrica. Taj problem možemo riješiti primjenom pojednostavnjenog modela transformatora u kojem je izostavljena poprečna grana, dakle primjenom takvog modela u kojem je zanemarena uzbudna struja (sl. 6.7). Kao što je poznato, u analizi energetskih mreža ta pretpostavka redovito neznatno utječe na točnost rezultata.



Sl. 6.7. Pojednostavnjeni model transformatora što ćemo ga primijeniti u metodi čvorišta



Sl. 6.8. Stare i nove struje u modelu transformatora

Uvaživši spomenutu pretpostavku, sada ćemo izvesti matrične jednadžbe čvorišta kada je u modelu mreže uključen i idealni transformator, ali samo ako su pritom uzbudne veličine u modelu mreže naponi izvora. Uz to ćemo još pretpostaviti da je omjer transformacije idealnog transformatora realan broj, jer je taj omjer tako i definiran u prvom poglavlju.

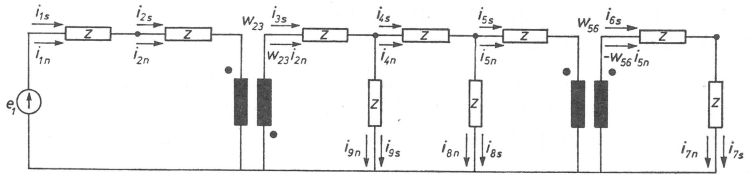
Kao prvo, uspostavit ćemo matricu transformacije **T**, i to pomoću struja. Ako su, kao na slici 6.8, primarna i sekundarna struja transformatora u starom sustavu varijabli i_{ps}, odnosno i_{ss}, a primarna je struja u novom sustavu varijabli i_{pn}, tada je na osnovi definicije idealnog transformatora:

$$i_{ps} = i_{pn},$$

$$i_{ss} = w_{ps}\, i_{pn}.$$

Tako ćemo uspostaviti vezu između starih i novih struja za sve transformatore koje imamo u modelu mreže; pritom moramo imati na umu predznak omjera transformacije, koji, kao što znamo, ovisi o odabranim referentnim smjerovima struja i o polaritetima transformatora. U ostalim granama modela mreže struje ćemo identično transformirati; na primjer, ako je i_{gs} stara struja u grani g, a i_{gn} nova struja u istoj grani, pišemo:

$$i_{gs} = i_{gn}.$$



Sl. 6.9. Stare i nove struje u zadanom modelu mreže

Ilustrirajmo to na primjeru modela mreže na slici 6.9. Za naznačene referentne smjerove starih i novih struja imamo:

$$\begin{aligned}
i_{1s} &= i_{1n}, \\
i_{2s} &= \quad i_{2n}, \\
i_{3s} &= w_{23}\, i_{2n}, \\
i_{4s} &= \quad i_{4n}, \\
i_{5s} &= \quad i_{5n}, \\
i_{6s} &= -w_{56}\, i_{5n}, \\
i_{7s} &= \quad i_{7n}, \\
i_{8s} &= \quad i_{8n}, \\
i_{9s} &= \quad i_{9n}.
\end{aligned}$$

Kako je u matričnom obliku:

$$\begin{vmatrix} i_{1s} \\ i_{2s} \\ i_{3s} \\ i_{4s} \\ i_{5s} \\ i_{6s} \\ i_{7s} \\ i_{8s} \\ i_{9s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & w_{23} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -w_{56} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_{1n} \\ i_{2n} \\ i_{4n} \\ i_{5n} \\ i_{7n} \\ i_{8n} \\ i_{9n} \end{vmatrix},$$

ili kraće:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{i}_n, \tag{6.23}$$

matrica transformacije glasi:

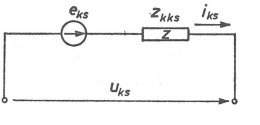
$$\mathbf{T} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & \\ \hline & w_{23} & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & & & \\ \hline & & & -w_{56} & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ \hline & & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Da bi izvod vrijedio općenito, pretpostavimo sada, kao što smo to učinili u petom poglavlju, da je idealni izvor napona priključen u seriju s impedancijom *svake grane* i da se referentni smjer pâda napona podudara s referentnim smjerom struje (sl. 6.10). Ako model mreže sadrži g grana, pa su $i_{1s}, i_{2s}, \ldots, i_{gs}$ struje u granama, $u_{1s}, u_{2s}, \ldots, u_{gs}$ padovi napona među krajevima serijskog spoja idealnog izvora napona i impedancije grane, a $z_{11s}, z_{22s}, \ldots, z_{ggs}$ impedancije pojedinih grana, tada niz od g jednadžbi Ohmova zakona u skraćenom matričnom obliku glasi:

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{e}_s + \mathbf{z}_s\,\mathbf{i}_s, \tag{6.24}$$

gdje je indeksom s označen stari sustav varijabli u kojem je:

- $\mathbf{u}_s$ — stupčani vektor padova napona između krajeva serijskog spoja idealnog izvora napona i impedancije;
- $\mathbf{e}_s$ — stupčani vektor naponâ izvorâ;
- $\mathbf{z}_{ss}$ — matrica impedancija grana (dijagonalna matrica);
- $\mathbf{i}_s$ — stupčani vektor struja u granama.



Sl. 6.10. Referentni smjer struje i_{ks} i pada napona u_{ks} te polaritet napona izvora e_{ks}, kako smo ih uzeli u izvodu

Ako je ispunjen uvjet invarijantne snage:

$$\mathbf{S}_s = \tilde{\mathbf{u}}_s\,\mathbf{i}_s^{\star} = \tilde{\mathbf{u}}_n\,\mathbf{i}_n^{\star} = \mathbf{S}_n,$$

i uz pretpostavku da za novi sustav varijabli vrijedi jednadžba:

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{e}_n + \mathbf{z}_n\,\mathbf{i}_n, \tag{6.25}$$

te ako su elementi matrice transformacije $\mathbf{T}$ realni brojevi, prema Kronovim formulama naponi su novog sustava:

$$\mathbf{u}_n = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_s, \tag{6.26}$$

$$\mathbf{e}_n = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s, \tag{6.27}$$

a nova je impedancija:

$$\mathbf{z}_n = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{z}_s\,\mathbf{T}. \tag{6.28}$$

Da bismo izveli jednadžbu metode čvorišta, poći ćemo od relacije (6.25). Ako je $\mathbf{z}_n$ regularna matrica, tada je:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{z}_n^{-1}\,(\mathbf{e}_n + \mathbf{u}_n). \tag{6.29}$$

Pomnožimo li tu jednadžbu slijeva sa $\mathbf{T}$, dobivamo:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{i}_n = \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,(\mathbf{e}_n + \mathbf{u}_n).$$

Dalje, uvrstimo li prema (6.23) $\mathbf{i}_s$ umjesto produkta $(\mathbf{T}\,\mathbf{i}_n)$, zatim prema (6.26) produkt $(\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_s)$ umjesto $\mathbf{u}_n$, te prema (6.27) produkt $(\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s)$ umjesto $\mathbf{e}_n$, slijedi da je:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,(\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s + \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_s). \tag{6.30}$$

Kada u modelu mreže ne bi bili uključeni idealni transformatori, tada bi, na osnovi relacije (5.43) iz prethodnog poglavlja, suma na desnoj strani znaka jednakosti u (6.24) bila identična produktu $\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}$, gdje je $\mathbf{V}$ stupčani vektor padova napona nezavisnih čvorišta. Međutim, radi prisutnosti idealnih transformatora taj identitet nije ispunjen. Ali kako se može pokazati da je produkt $(\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_s)$ identičan produktu $(\mathbf{T}\,\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V})$, ipak u gornju jednadžbu možemo umjesto $\mathbf{u}_s$ uvrstiti $(\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V})$, pa je:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,(\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s + \tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}), \tag{6.31}$$

a odatle je nakon množenja slijeva matricom incidencija $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}\mathbf{i}_s = \mathbf{M}\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-1}(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{e}_s + \tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}). \tag{6.32}$$

Budući da u čvorištima nisu narinute vanjske struje (ovdje pod time mislimo i na struje izvora), to je $\mathbf{M}\,\mathbf{i}_s = \mathbf{0}$. Prema tome dalje je:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,(\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s + \tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}) = \mathbf{0},$$

ili nakon preuređenja:

$$-\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s = \mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}. \tag{6.32'}$$

Uvedemo li kraće:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}}, \tag{6.33}$$

dobivamo konačno:

$$-\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s = \mathbf{Y}_t\,\mathbf{V}. \tag{6.34}$$

Posljednja jednadžba predstavlja matričnu jednadžbu metode čvorišta kada su u modelu mreže uključeni idealni transformatori i kada su uzbudne veličine naponi izvora. Ovdje je, kao i prije, vektor padova napona nezavisnih čvorišta označen sa **V** (smjer je pâda napona od referentnog čvorišta prema nezavisnim čvorištima).

Na kraju izvedimo još i izraz za određivanje struja u granama modela mreže. Na osnovi (6.31) možemo napisati:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s + \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}. \tag{6.35}$$

Kako je prema (6.34):

$$\mathbf{V} = -\,\mathbf{Y}_t^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s, \tag{6.36}$$

uvrštenjem **V** iz (6.36) u (6.35) izlazi da je:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s - \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}}\,(\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}})^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s. \tag{6.37}$$

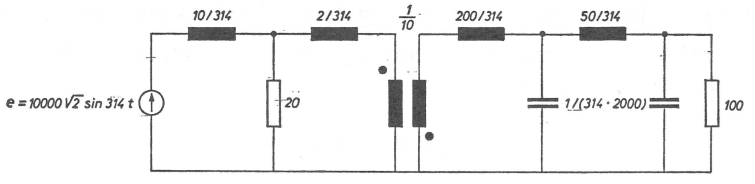
$\mathbf{i}_s$ je vektor struja grana starog sustava varijabli; dakle, on nam opisuje raspodjelu struja u granama modela mreže. Sada na temelju izvedenih jednadžbi možemo navesti slijedeći niz koraka kojima dolazimo do nepoznatih struja i napona:

1. numeriramo grane i čvorišta; odaberemo referentno čvorište; naznačimo referentne smjerove starih i novih struja grana;
2. promatranjem modela mreže napišemo:
   — matricu incidencija **M**,
   — matricu impedancija grana starog sustava $\mathbf{z}_s$,
   — vektor aktivnih napona grana starog sustava $\mathbf{e}_s$;
3. uspostavimo relacije koje povezuju stare i nove struje grana; napišemo matricu transformacije **T**;
4. odredimo matricu $\mathbf{z}_n$: $\mathbf{z}_n = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{z}_s\,\mathbf{T}$;
5. odredimo inverznu matricu $\mathbf{z}_n^{-1}$;
6. odredimo produkt $\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}$;
7. odredimo produkt $(\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}})\,\tilde{\mathbf{M}}$;
8. odredimo matricu $\mathbf{Y}_t$: $\mathbf{Y}_t = \mathbf{M}\,(\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}})$;
9. odredimo inverznu matricu $\mathbf{Y}_t^{-1}$;
10. odredimo produkt $(\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}})\,\mathbf{e}_s$;
11. odredimo produkt $\mathbf{M}\,(\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s)$;
12. izračunamo napone nezavisnih čvorišta **V**: $\mathbf{V} = -\,\mathbf{Y}_t^{-1}\,(\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s)$;
13. odredimo produkt $(\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}})\,\mathbf{V}$;
14. izračunamo struje u granama $\mathbf{i}_s$: $\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s + \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\tilde{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}$;

Navedene korake računanja ilustrirat ćemo u slijedećem primjeru.

Primjer 6.3.

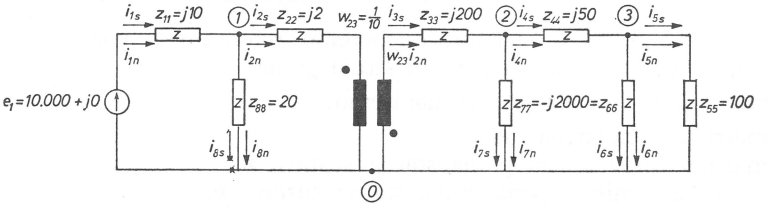
Zadani model mreže prikazan je na slici 6.11. Treba odrediti napone pojedinih čvorišta prema zemlji i struje u granama.



Sl. 6.11. Zadani model mreže

Rješavanje:

1. Odabrana numeracija grana i čvorišta i referentni smjerovi starih i novih struja grana prikazani su na slici 6.12. Čvorište 0, koje je na potencijalu zemlje, referentno je čvorište.



Sl. 6.12. Odabrana numeracija grana i čvorišta, te odabrani smjerovi struja grana starog i novog sustava varijabli

Na osnovi odabrane numeracije grana možemo napisati:

$$z_{11} = j \cdot 314 \cdot \left(\frac{10}{314}\right) = j\,10,$$

$$z_{22} = j \cdot 314 \cdot \left(\frac{2}{314}\right) = j\,2,$$

$$z_{33} = j \cdot 314 \cdot \left(\frac{200}{314}\right) = j\,200,$$

$$z_{44} = j \cdot 314 \cdot \left(\frac{50}{314}\right) = j\,50,$$

$$z_{55} = 100,$$

$$z_{66} = z_{77} = \frac{1}{j \cdot 314 \cdot \left(\frac{1}{314 \cdot 2000}\right)} = -j\,2000,$$

$$z_{88} = 20,$$

$$e_1 = 10\,000 + j\,0 = 10\,000/\underline{0°} = 10\,000,$$

$$w_{23} = 0{,}1.$$

2. Promatranjem modela mreže na slici 6.12. pišemo matrice **M**, $\mathbf{z}_s$ i $\mathbf{e}_s$.

Matrica incidencija **M**:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline ① & 1 & -1 & & & & & & -1 \\ ② & & & 1 & -1 & & & -1 & \\ ③ & & & & 1 & -1 & -1 & & \end{array}.$$

Matrica impedancija grana starog sustava $\mathbf{z}_s$:

$$\mathbf{z}_s = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & j10 & & & & & & & \\ 2 & & j2 & & & & & & \\ 3 & & & j200 & & & & & \\ 4 & & & & j50 & & & & \\ 5 & & & & & 100 & & & \\ 6 & & & & & & -j2000 & & \\ 7 & & & & & & & -j2000 & \\ 8 & & & & & & & & 20 \end{array}.$$

Vektor aktivnih napona grana starog sustava $\mathbf{e}_s$:

$$\mathbf{e}_s = \begin{array}{c|c} 1 & 10\,000 \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \\ 7 & \\ 8 & \end{array}.$$

3. Jednadžbe koje povezuju struje grana starog i novog sustava:

$$i_{1s} = i_{1n},$$

$$i_{2s} = i_{2n},$$

$$i_{3s} = w_{23}\, i_{2n},$$

$$i_{4s} = i_{4n},$$

$$i_{5s} = i_{5n},$$

$$i_{6s} = i_{6n},$$

$$i_{7s} = i_{7n},$$

$$i_{8s} = i_{8n}.$$

U matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} i_{1s} \\ i_{2s} \\ i_{3s} \\ i_{4s} \\ i_{5s} \\ i_{6s} \\ i_{7s} \\ i_{8s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & w_{23} & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{1n} \\ i_{2n} \\ i_{4n} \\ i_{5n} \\ i_{6n} \\ i_{7n} \\ i_{8n} \end{bmatrix}.$$

Prema tome, matrica transformacije glasi (uz uvršteno $w_{23} = 0{,}1$):

$$\mathbf{T} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & 0{,}1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

4. Matrica $\mathbf{z}_n = \widetilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{z}_s\,\mathbf{T}$:

$$\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{z}_s = \begin{bmatrix} j10 & & & & & & & \\ & j2 & j20 & & & & & \\ & & & j50 & & & & \\ & & & & 100 & & & \\ & & & & & -j2000 & & \\ & & & & & & -j2000 & \\ & & & & & & & 20 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_n = (\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{z}_s)\,\mathbf{T} = \begin{bmatrix} j10 & & & & & & \\ & j4 & & & & & \\ & & j50 & & & & \\ & & & 100 & & & \\ & & & & -j2000 & & \\ & & & & & -j2000 & \\ & & & & & & 20 \end{bmatrix}.$$

5. Inverznu matricu $\mathbf{z}_n^{-1}$ dobivamo nakon provedenog računa:

$$\mathbf{z}_n^{-1} = \begin{bmatrix} -j0{,}1000 & & & & & & \\ & -j0{,}2500 & & & & & \\ & & -j0{,}0200 & & & & \\ & & & 0{,}0100 & & & \\ & & & & j0{,}0005 & & \\ & & & & & j0{,}0005 & \\ & & & & & & 0{,}0500 \end{bmatrix}.$$

6. Produkt $\mathbf{T}\,\mathbf{z}_i^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-1} = \begin{bmatrix} -j0{,}1000 & & & & & & \\ & -j0{,}2500 & & & & & \\ & -j0{,}0250 & & & & & \\ & & -j0{,}0200 & & & & \\ & & & 0{,}0100 & & & \\ & & & & j0{,}0005 & & \\ & & & & & j0{,}0005 & \\ & & & & & & 0{,}0500 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-1})\,\widetilde{\mathbf{T}} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
-j0{,}1000 & & & & & & & \\ \hline
 & -j0{,}2500 & -j0{,}0250 & & & & & \\ \hline
 & -j0{,}0250 & -j0{,}0025 & & & & & \\ \hline
 & & & -j0{,}0200 & & & & \\ \hline
 & & & & 0{,}0100 & & & \\ \hline
 & & & & & j0{,}0005 & & \\ \hline
 & & & & & & j0{,}0005 & \\ \hline
 & & & & & & & 0{,}0500 \\ \hline
\end{array}.$$

7. Produkt $(\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}})\,\widetilde{\mathbf{M}}$:

$$(\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}})\,\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{array}{|c|c|c|}
\hline
-j0{,}1000 & & \\ \hline
j0{,}2500 & -j0{,}0250 & \\ \hline
j0{,}0250 & -j0{,}0025 & \\ \hline
 & j0{,}0200 & -j0{,}0200 \\ \hline
 & & -0{,}0100 \\ \hline
 & & -j0{,}0005 \\ \hline
 & -j0{,}0005 & \\ \hline
-0{,}0500 & & \\ \hline
\end{array}.$$

8. Matrica $\mathbf{Y}_t = \mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\,\widetilde{\mathbf{M}}$:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{M}\,(\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-}\ \widetilde{\mathbf{T}}\widetilde{\mathbf{M}}) = \begin{array}{|c|c|c|}
\hline
0{,}0500-j0{,}3500 & j0{,}0250 & \\ \hline
j0{,}025 & -j0{,}0220 & j0{,}0200 \\ \hline
 & j0{,}0200 & 0{,}0100-j0{,}0195 \\ \hline
\end{array}.$$

9. Inverznu matricu $\mathbf{Y}_t^{-1}$ dobivamo nakon provedenog računa:

$$\mathbf{Y}_t^{-1} = \frac{10^2}{-72{,}2000-j13{,}0375} \begin{array}{|c|c|c|}
\hline
-0{,}290-j2{,}200 & -4{,}875-j2{,}500 & -5{,}000 \\ \hline
-4{,}875-j2{,}500 & -63{,}250-j44{,}750 & -70{,}000-j10{,}000 \\ \hline
-5{,}000 & -70{,}000-j10{,}000 & -70{,}750-j11{,}000 \\ \hline
\end{array}.$$

10. Produkt $\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s$:

$$(\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}})\,\mathbf{e}_s = \begin{array}{|c|}\hline -j1000{,}000 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

11. Produkt $\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s$:

$$\mathbf{M}\,(\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{e}_s) = \begin{array}{|c|}\hline -j1000{,}000 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

12. Vektor naponâ nezavisnih čvorišta $\mathbf{V} = -\,\mathbf{Y}_t^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s$:

$$\mathbf{V} = -\,\mathbf{Y}_t^{-1}\,(\mathbf{M}\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{e}_s) = \frac{1}{-72{,}2000 - j13{,}0375} \begin{array}{|c|}\hline 220\,000 - j29\,000 \\ \hline 250\,000 - j487\,500 \\ \hline -j500\,000 \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{V} = \begin{array}{|c|}\hline -2\,880{,}63105 + j921{,}83129 \\ \hline -2\,172{,}50869 + j7\,144{,}28306 \\ \hline 1\,211{,}02926 + j6\,706{,}52443 \\ \hline \end{array}.$$

13. Produkt $\mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}$:

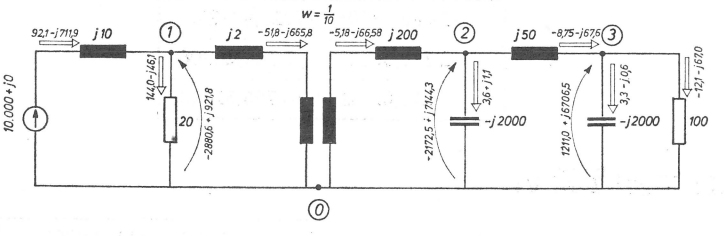
$$(\mathbf{T}\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\widetilde{\mathbf{M}})\,\mathbf{V} = \frac{100}{72{,}20000 + j13{,}03750} \begin{array}{|c|}\hline 29{,}00000 + j220{,}00000 \\ \hline 49{,}37500 - j487{,}50000 \\ \hline 4{,}93750 - j48{,}75000 \\ \hline 2{,}50000 - j50{,}00000 \\ \hline -j50{,}00000 \\ \hline 2{,}50000 \\ \hline 2{,}43750 + j1{,}25000 \\ \hline 110{,}00000 - j14{,}50000 \\ \hline \end{array}.$$

14. Vektor struja grana $\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{e}_s + \mathbf{T}\,\mathbf{z}_n^{-1}\,\widetilde{\mathbf{T}}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}$:

$$\mathbf{i}_s = \frac{100}{72{,}20000 + j13{,}03750} \begin{array}{|r|}\hline 159{,}37500 - j502{,}00000 \\ \hline 49{,}37500 - j487{,}50000 \\ \hline 4{,}93750 - j48{,}75000 \\ \hline 2{,}50000 - j50{,}00000 \\ \hline - j50{,}00000 \\ \hline 2{,}50000 \\ \hline 2{,}43750 + j1{,}25000 \\ \hline 110{,}00000 - j14{,}50000 \\ \hline \end{array}.$$

$$\mathbf{i}_s = \begin{array}{|r|}\hline 92{,}18313 - j711{,}93661 \\ \hline -51{,}84842 - j665{,}84504 \\ \hline -5{,}18484 - j66{,}58450 \\ \hline -8{,}75703 - j67{,}67076 \\ \hline -12{,}11029 - j67{,}06524 \\ \hline 3{,}35326 - j0{,}60551 \\ \hline 3{,}57219 + j1{,}08625 \\ \hline 144{,}03155 - j46{,}09156 \\ \hline \end{array}.$$

15. Dobiveni naponi nezavisnih čvorišta i struje u granama modela mreže naznačeni su na slici 6.13.



Sl. 6.13. Struje u granama i naponi nezavisnih čvorišta u primjeru 6.3.

6.3. Proizvoljne transformacije

Do sada smo u ovome poglavlju pokazali na nekoliko primjera samo primjenu transformacija kod kojih je ispunjen uvjet invarijantne snage. Međutim, u analizi električnih mreža uvjet invarijantne snage ne mora biti ispunjen u svakom slučaju: matricu transformacije za napone možemo izabrati i potpuno neovisno o

matrici transformacije za struje, i obratno. Tada govorimo o *proizvoljnim* ili *neinvarijantnim transformacijama.*

Primjer primjene proizvoljnih transformacija predstavlja poznata metoda simetričnih komponenata kojom se fazne veličine (struje i naponi) u trofaznoj mreži transformiraju u direktnu, inverznu i nultu komponentu struje, odnosno napona. Ako matricu transformacije uvedemo na osnovi jednadžbi u kojima su fazni naponi i struje izraženi pomoću direktne, inverzne i nulte komponente i operatora a, kako je to učinio Fortescue, tada uvjet invarijantne snage prilikom transformacije *nije ispunjen.* Kasnije je Kron pomnožio matricu transformacije koja slijedi iz Fortescueovih relacija sa $1/\sqrt{3}$, pa je time uvedena transformacija koja je invarijantna s obzirom na snagu, što je pogodno pri analizi električnih strojeva i u nekim teorijskim razmatranjima.

Transformacijom koja je uvedena metodom simetričnih komponenata ne smanjuje se broj jednadžbi koje treba riješiti, već se samo matrica impedancija svodi na pogodniji oblik (na dijagonalnu matricu). Mi ćemo to ilustrirati na primjeru modela trofazne mreže s balansiranim impedancijama faza.

Formula transformacije za impedancije

Niz linearnih jednadžbi koji povezuje napone i struje starog sustava varijabli neka je u matričnom obliku:

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{z}_s \mathbf{i}_s, \tag{6.38}$$

pa pretpostavimo da je u novom sustavu varijabli veza između napona i struja opisana nizom jednadžbi u obliku:

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{z}_n \mathbf{i}_n. \tag{6.39}$$

Neka su transformacije struja i napona dane s dvije različite matrice: transformaciju struje uvedimo matricom transformacije **A**, a transformaciju napona matricom transformacije **B**, tj. neka je:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{A}\,\mathbf{i}_n, \tag{6.40}$$

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{B}\,\mathbf{e}_n. \tag{6.41}$$

Matrice transformacije **A** i **B** moraju biti nesingularne matrice. Tada na osnovi (6.40) i (6.41) možemo napisati:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{i}_s, \tag{6.42}$$

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{e}_s. \tag{6.43}$$

Da bismo izveli formulu transformacije za impedancije moramo jednadžbe (6.40) i (6.41) uvrstiti u jednadžbu (6.38). Dobivamo:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{e}_n = \mathbf{z}_s\,\mathbf{A}\,\mathbf{i}_n,$$

a odatle je nakon množenja slijeva sa $\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{z}_s\,\mathbf{A}\,\mathbf{i}_n. \tag{6.44}$$

Usporeñenjem te jednadžbe s jednadžbom (6.39) dobivamo:

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{z}_s\,\mathbf{A}, \tag{6.45}$$

što predstavlja formulu transformacije za impedancije.

Ako je transformacija struja i napona uvedena istom matricom transformacije, tj. ako je $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{T}$, pa je:

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{i}_n, \tag{6.46}$$

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{T}\,\mathbf{e}_n, \tag{6.47}$$

tada jednadžbe koje povezuju nove struje, napone i impedancije sa starim veličinama glase:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{i}_s, \tag{6.48}$$

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{e}_s, \tag{6.49}$$

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{z}_s\,\mathbf{T}. \tag{6.50}$$

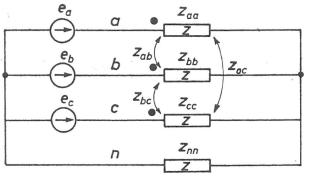
Usporedimo li jednadžbu (6.46) sa (6.1), (6.49) sa (6.7) i (6.50) sa (6.9), vidimo da će uvjet invarijantne snage prilikom transformacije biti ispunjen onda kada je inverzna matrica od $\mathbf{T}$ jednaka njezinoj konjugirano transponiranoj matrici, tj. kada je:

$$\mathbf{T}^{-1} = \widetilde{\mathbf{T}}^{*}. \tag{6.51}$$

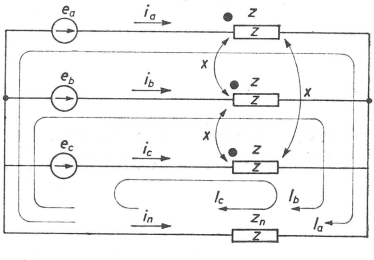
Matrice s tim svojstvom nazivaju se unitarne matrice, pa se i transformacije kod kojih je matrica transformacije unitarna matrica nazivaju — *unitarne transformacije.*

Primjer 6.4.

Jedan od najpoznatijih primjera primjene proizvoljnih transformacija u analizi električnih mreža predstavlja — kao što smo već rekli — metoda simetričnih komponenata. Tu metodu ilustrirat ćemo na jednostavnom primjeru modela trofazne mreže koji je prikazan na slici 6.14. Međutim, prije toga ćemo — radi usporedbe koju ćemo učiniti kasnije — napisati matričnu jednadžbu metode petlji ako je sustav nezavisnih petlji onaj koji je naznačen na slici 6.15.



Sl. 6.14. Zadani model trofazne mreže



Sl. 6.15. Smjerovi referentnih struja u granama i sustav struja nezavisnih petlji u zadanom modelu mreže

Zadani su:

— naponi izvorâ e_a, e_b i e_c u granama a, b i c;
— impedancije $z = z_{aa} = z_{bb} = z_{cc}$, $x = z_{ab} = z_{ac} = z_{bc}$, i impedancija z_n grane n.

Traže se struje i_a, i_b i i_c u granama a, b i c.

1. Za odabrani sustav nezavisnih petlji i naznačenu orijentaciju grana i petlji spojna matrica glasi:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & n \\ \hline p_a & 1 & & & -1 \\ p_b & & 1 & & -1 \\ p_c & & & 1 & -1 \end{array},$$

a matrica impedancija grana:

$$\mathbf{z} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & n \\ \hline a & z & x & x & \\ b & x & z & x & \\ c & x & x & z & \\ n & & & & z_n \end{array},$$

i vektor aktivnih napona grana:

$$\mathbf{e} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline a & e_a \\ b & e_b \\ c & e_c \\ n & \end{array}.$$

Prema tome je vektor obilaznih aktivnih napona petlji:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Ce} = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & & & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline e_a \\ e_b \\ e_c \\ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline e_a \\ e_b \\ e_c \\ \\ \hline \end{array},$$

što smo mogli lako napisati i neposredno, dok je matrica impedancija petlji:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Cz}\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|cccc|} \hline z & x & x & \\ x & z & x & \\ x & x & z & \\ & & & z_n \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array},$$

odnosno nakon množenja:

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} z + z_n & x + z_n & x + z_n \\ x + z_n & z + z_n & x + z_n \\ x + z_n & x + z_n & z + z_n \end{vmatrix},$$

ili:

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z & X & X \\ X & Z & X \\ X & X & Z \end{vmatrix}, \tag{6.52}$$

gdje je:

$$\begin{aligned} Z &= z + z_n, \\ X &= x + z_n. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Matrična jednadžba metode petlji prema tome glasi:

$$\begin{vmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z & X & X \\ X & Z & X \\ X & X & Z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{vmatrix}. \tag{6.54}$$

Budući da smo nezavisne petlje odabrali tako da je:

$$\begin{aligned} I_a &= i_a, \\ I_b &= i_b, \\ I_c &= i_c, \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix},$$

možemo dalje napisati:

$$\begin{vmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z & X & X \\ X & Z & X \\ X & X & Z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}, \tag{6.55}$$

pa struje u granama a, b i c možemo odatle izračunati ovako:

$$\begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z & X & X \\ X & Z & X \\ X & X & Z \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{vmatrix}. \tag{6.56}$$

Dakle, da bismo odredili struje i_a, i_b i i_c moramo najprije naći inverznu matricu simetrične matrice (6.52), a potom izračunati produkt prema (6.56).

2. Nakon što smo napisali jednadžbu metode petlji (6.55), pokazat ćemo kako se struje i_a, i_b i i_c u granama a, b i c zadanog modela mreže mogu odrediti metodom simetričnih komponenata. U tu svrhu poći ćemo od jednadžbe (6.55) koja u skraćenom matričnom obliku glasi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}\,\mathbf{i}, \tag{6.57}$$

gdje je:

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z & X & X \\ X & Z & X \\ X & X & Z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}.$$

Pretpostavimo da su **E**, **Z** i **i** matrice *starih* napona, impedancija i struja, te da su stare struje i naponi povezani sa zamišljenim *novim* strujama i_0, i_d i i_i i *novim* naponima e_o, e_d i e_i slijedećim relacijama što ih je uveo Fortescue:

$$\begin{aligned} i_a &= i_0 + i_d + i_i, \\ i_b &= i_0 + a^2 i_d + a\, i_i, \\ i_c &= i_0 + a\, i_d + a^2 i_i \end{aligned} \tag{6.58}$$

i:

$$\begin{aligned} e_a &= e_0 + e_d + e_i, \\ e_b &= e_0 + a^2 e_d + a\, e_i, \\ e_c &= e_0 + a\, e_d + a^2 e_i. \end{aligned} \tag{6.59}$$

i_0, i_d i i_i nazivaju se nulta, direktna i inverzna struja, a e_0, e_d i e_i nazivaju se nulti, direktni i inverzni napon; operatori a i a^2 iznose:

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{j120°},$$

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-j120°}.$$

Konjugiranjem kompleksnog broja a dobivamo a^2, i obratno. Osim toga, vrijedi:

$$1 + a + a^2 = 0,$$

a također i:

$$a^3 = 1,\ a^4 = a,\ a^5 = a^2 \ldots$$

Jednadžbe (6.58) i (6.59) napisane kao matrične jednadžbe imaju oblik:

$$\begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_i \end{vmatrix}, \tag{6.60}$$

ili kraće:

$$\mathbf{i} = \mathbf{T}\,\mathbf{i}', \tag{6.61}$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_0 \\ e_d \\ e_i \end{vmatrix}, \tag{6.62}$$

ili kraće:

$$\mathbf{E} = \mathbf{T}\,\mathbf{e}'. \tag{6.63}$$

Dakle, matrica transformacije za struje i za napone glasi:

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}. \tag{6.64}$$

Lako se može pokazati da je inverzna matrica od matrice transformacije **T**:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}. \tag{6.65}$$

Na osnovi (6.48), (6.49) i (6.50) izrazimo sada nove struje, napone i impedancije pomoću starih veličina. Kako je $\mathbf{i}' = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{i}$, slijedi da je:

$$\mathbf{i}' = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} i_a + i_b + i_c \\ i_a + a i_b + a^2 i_c \\ i_a + a^2 i_b + a i_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_i \end{vmatrix}, \tag{6.66}$$

a kako je $\mathbf{e}' = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{E}$, imamo:

$$\mathbf{e}' = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} e_a + e_b + e_c \\ e_a + a\,e_b + a^2\,e_c \\ e_a + a^2\,e_b + a\,e_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_0 \\ e_d \\ e_i \end{vmatrix}. \qquad (6.67)$$

Uz uvjet da nova jednadžba koja povezuje napone i struje ima oblik $\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}'$, matrica novih impedancija glasi:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{T} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Z & X & X \\ X & Z & X \\ X & X & Z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix},$$

odnosno nakon množenja:

$$\mathbf{z}' = \begin{vmatrix} Z + 2X & & \\ & Z - X & \\ & & Z - X \end{vmatrix}, \qquad (6.68)$$

ili skraćeno, prema označavanju koje je uobičajeno u metodi simetričnih komponenata:

$$\mathbf{z}' = \begin{vmatrix} z_0 & & \\ & z_d & \\ & & z_i \end{vmatrix}, \qquad (6.69)$$

gdje je:

$$z_0 = Z + 2X = z + 2x + 3z_n,$$

$$z_d = z_i = Z - X = z - x.$$

z_0, z_d i z_i nazivaju se nulta, direktna i inverzna impedancija.

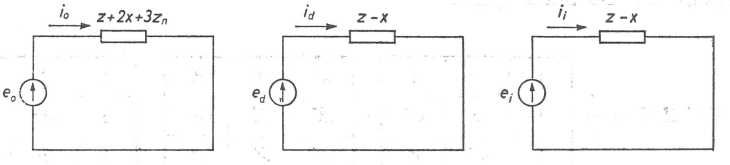
Kao što vidimo, prvotnu matricu impedancija (6.52) sveli smo transformacijom na dijagonalni oblik (6.69); posljedica je toga da komponente strujâ i naponâ novog sustava varijabli nisu međusobno ovisne. To ćemo odmah uočiti ako matričnu jednadžbu $\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}'$ napišemo u širem obliku:

$$\begin{vmatrix} e_0 \\ e_d \\ e_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_0 & & \\ & z_d & \\ & & z_i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_i \end{vmatrix},$$

ili kao niz algebarskih jednadžbi:

$$e_0 = z_0\, i_0,$$
$$e_d = z_d\, i_d,$$
$$e_i = z_i\, i_i.$$

Prema tome, model trofazne mreže s balansiranim impedancijama (sl. 6.14) možemo zamijeniti s tri odvojena modela prema slici 6.16.



Sl. 6.16. Modeli nultog, direktnog i inverznog sustava u metodi simetričnih komponenata

Iako je broj jednadžbi koje treba riješiti da bi se dobile struje i_a, i_b i i_c u granama a, b i c zadanog modela mreže ostao isti kao i pri rješavanju metodom petlji, primjenom uvedene transformacije račun je pojednostavnjen: umjesto da se traži inverzna matrica *simetrične matrice* (6.52), treba odrediti inverznu matricu *dijagonalne matrice* (6.69). Kao što znamo, inverzna matrica dijagonalne matrice dobije se jednostavno tako da se svaki dijagonalni element zadane matrice zamijeni njegovom recipročnom vrijednošću. To znači:

$$(\mathbf{z}')^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z_0} & & \\ & \frac{1}{z_d} & \\ & & \frac{1}{z_i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z+2x+3z_n} & & \\ & \frac{1}{z-x} & \\ & & \frac{1}{z-x} \end{vmatrix}.$$

Struje i_a, i_b i i_c dobit ćemo ako u jednadžbu (6.61), $\mathbf{i} = \mathbf{T}\,\mathbf{i}'$, najprije umjesto $\mathbf{i}'$ uvrstimo produkt $(\mathbf{z}')^{-1} \cdot \mathbf{e}'$ (što slijedi iz pretpostavljene jednadžbe $\mathbf{e}' = \mathbf{z}' \cdot \mathbf{i}'$), a zatim na osnovi (6.63) umjesto $\mathbf{e}'$ uvrstimo produkt $\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{E}$. Dobivamo konačno:

$$\mathbf{i} = \mathbf{T}\,(\mathbf{z}')^{-1}\,\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{E}, \tag{6.70}$$

ili šire napisano:

$$\begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{z+2x+3z_n} & & \\ & \frac{1}{z-x} & \\ & & \frac{1}{z-x} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{vmatrix}.$$

Uz ovaj prikaz primjene metode simetričnih komponenata spomenimo na kraju još i to da matrica transformacije (6.64) svodi na dijagonalni oblik i matricu:

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z & X_1 & X_2 \\ \hline X_2 & Z & X_1 \\ \hline X_1 & X_2 & Z \\ \hline \end{array} .$$

Matrica tog oblika naziva se *ciklički simetrična matrica*, a susreće se u analizi trofaznih sinhronih i indukcijskih strojeva kod kojih međusobni induktiviteti faznih namotaja nisu bilateralni. Matrica impedancija nakon transformacije glasi:

$$\mathbf{z}' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z + X_1 + X_2 & & \\ \hline & Z + a^2 X_1 + aX_2 & \\ \hline & & Z + a X_1 + a^2 X_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_0 & & \\ \hline & Z_d & \\ \hline & & Z_i \\ \hline \end{array} .$$

Nesimetrične matrice impedancija **Z** koje dobivamo kada su impedancije faza u trofaznom sustavu nebalansirane ne možemo transformacijom (6.64) svesti na dijagonalni oblik. Iako metodu simetričnih komponenata možemo primijeniti, ona u tom slučaju nema nikakvih prednosti pred metodama kojima određujemo struje i napone pomoću modela trofazne mreže. Izuzetak je samo u slučaju ako je jedini nesimetrični teret u mreži nesimetrični kratki spoj; međutim, ovdje o tome nećemo govoriti.

Sedmo poglavlje

FORMULE REDUKCIJE

Ponekad se u analizi mreža ne traže vrijednosti napona u svim čvorištima modela mreže, nego samo u nekima od njih, odnosno ne promatra se potpun model mreže, nego samo jedan njegov dio. U tim se slučajevima računanje može skratiti ako se iz jednadžbi mreže eliminiraju nepoznanice kojih se vrijednosti ne traže.

Matričnu jednadžbu reduciranog sustava linearnih algebarskih jednadžbi izveli smo u drugom poglavlju u odjeljku 2.8. Primjenu te jednadžbe u metodi čvorišta i u metodi petlji prikazat ćemo u ovom poglavlju. Zapravo, matematički se ne radi ni o čemu bitno novom, ali ćemo upozoriti na neke pojedinosti u vezi s tim metodama.

7.1. Formula redukcije za jednadžbe metode čvorišta

Kao što smo i do sada radili, radi preglednijeg pisanja, i formulu redukcije za jednadžbe metode čvorišta izvest ćemo na primjeru određenog broja jednadžbi koji ćemo proizvoljno izabrati. Razumljivo je i bez posebnog upozorenja da će se isti postupak moći primijeniti na bilo koji broj jednadžbi, a i na slučaj kada se eliminira neki drugi broj nepoznanica.

Neka npr. zadani model mreže sadrži ukupno šest čvorišta. Broj jednadžbi metode čvorišta tada je pet, što u matričnom obliku možemo napisati ovako:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \\ \mathcal{J}_4 \\ \mathcal{J}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

Pretpostavimo da se ne traže vrijednosti nepoznatih napona V_4 i V_5, već samo vrijednosti napona V_1, V_2 i V_3. Zato smo čvorišta već unaprijed numerirali tako da naponi V_4 i V_5 dođu u posljednja dva retka matrice **V**. Podijelimo zatim matrice u jednadžbi (7.1) u podmatrice na slijedeći način:

$$\left|\begin{array}{c} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \\ \hline \mathcal{J}_4 \\ \mathcal{J}_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ \hline Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \hline V_4 \\ V_5 \end{array}\right|, \tag{7.2}$$

što skraćeno možemo napisati ovako:

$$\left|\begin{array}{c} \mathbf{J}_a \\ \hline \mathbf{J}_b \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_{aa} & \mathbf{Y}_{ab} \\ \hline \mathbf{Y}_{ba} & \mathbf{Y}_{bb} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} \mathbf{V}_a \\ \hline \mathbf{V}_b \end{array}\right|, \tag{7.3}$$

gdje se indeks »*a*« uz simbol za struju i napon odnosi na čvorišta koja se neće eliminirati, a indeks »*b*« na čvorišta koja će se eliminirati.

U ovom je primjeru:

$$\mathbf{J}_a = \left|\begin{array}{c} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{array}\right|, \quad \mathbf{J}_b = \left|\begin{array}{c} \mathcal{J}_4 \\ \hline \mathcal{J}_5 \end{array}\right|, \quad \mathbf{V}_a = \left|\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}\right|, \quad \mathbf{V}_b = \left|\begin{array}{c} V_4 \\ \hline V_5 \end{array}\right|,$$

a podmatrice $\mathbf{Y}_{aa}$, $\mathbf{Y}_{ab}$, $\mathbf{Y}_{ba}$ i $\mathbf{Y}_{bb}$ matrice su admitancija čvorišta $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Y}_{aa} = \left|\begin{array}{ccc} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{array}\right|, \quad \mathbf{Y}_{ab} = \left|\begin{array}{cc} Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{34} & Y_{35} \end{array}\right|,$$

$$\mathbf{Y}_{ba} = \left|\begin{array}{ccc} Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} \\ \hline Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} \end{array}\right|, \quad \mathbf{Y}_{bb} = \left|\begin{array}{cc} Y_{44} & Y_{45} \\ \hline Y_{54} & Y_{55} \end{array}\right|.$$

Ako sada matrice s desne strane znaka jednakosti u jednadžbi (7.3) međusobno pomnožimo, dobivamo:

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{Y}_{aa}\,\mathbf{V}_a + \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{V}_b, \tag{7.4 a}$$

$$\mathbf{J}_b = \mathbf{Y}_{ba}\,\mathbf{V}_a + \mathbf{Y}_{bb}\,\mathbf{V}_b. \tag{7.4 b}$$

Da bismo eliminirali $\mathbf{V}_b$, pomnožimo najprije jednadžbu (7.4 b) slijeva sa $\mathbf{Y}_{bb}^{-1}$. Slijedi da je:

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{J}_b - \mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Y}_{ba}\,\mathbf{V}_a, \tag{7.5}$$

a zatim, uvrštenjem $\mathbf{V}_b$ iz (7.5) u (7.4 a) i nakon preuređenja dobivamo:

$$(\mathbf{Y}_{aa} - \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Y}_{ba})\,\mathbf{V}_a = \mathbf{J}_a - \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{J}_b. \tag{7.6}$$

Označimo li izraz u zagradi s lijeve strane znaka jednakosti kraće sa $\mathbf{Y}'$:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}_{aa} - \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Y}_{ba}, \tag{7.7}$$

a izraz s desne strane sa $\mathbf{J}'$:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}_a - \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{J}_b, \tag{7.8}$$

tada jednadžba (7.6) napisana skraćeno glasi:

$$\mathbf{Y}'\,\mathbf{V}_a = \mathbf{J}'. \tag{7.9}$$

Jednadžba (7.6) (usporedimo je s jednadžbom (2.48) iz drugog poglavlja) je tražena *formula redukcije za jednadžbe metode čvorišta*. Jednadžba (7.7) je *formula redukcije za admitancije*, a jednadžba (7.8) je *formula redukcije za struje*. Na taj način prvobitan model mreže sa $(a + b)$ nezavisnih čvorišta svedemo na ekvivalentni model mreže sa a nezavisnih čvorišta kojih je matrica admitancija $\mathbf{Y}'$, a vektor vanjskih struja $\mathbf{J}'$. Broj redaka i broj stupaca reducirane matrice admitancija $\mathbf{Y}'$ odgovara broju nepoznatih napona koji nisu eliminirani iz zadanog sustava jednadžbi (odnosno, odgovara broju preostalih nepoznanica). Zapravo, možemo reći da nakon izvršene redukcije broja jednadžbi matrica admitancija $\mathbf{Y}_{aa}$ »prelazi« u matricu $\mathbf{Y}'$.

Ako želimo odrediti nepoznate napone $\mathbf{V}_a$, na osnovi (7.9) imamo:

$$\mathbf{V}_a = (\mathbf{Y}')^{-1}\,\mathbf{J}'. \tag{7.10}$$

U mnogim praktičnim problemima (npr. pri istraživanju statičke ili dinamičke stabilnosti nekog elektroenergetskog sistema) želi se u modelu mreže eliminirati ona čvorišta u kojima nema narinutih vanjskih struja. U tom je slučaju $\mathbf{J}_b = \mathbf{0}$, pa je, na osnovi (7.8), $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_a$. Formula redukcije za jednadžbe metode čvorišta tada glasi:

$$(\mathbf{Y}_{aa} - \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Y}_{ba})\,\mathbf{V}_a = \mathbf{J}_a, \tag{7.11}$$

ili, uzmemo li u obzir (7.7):

$$\mathbf{Y}'\,\mathbf{V}_a = \mathbf{J}_a. \tag{7.12}$$

Dakle, naponi preostalih nezavisnih čvorišta tada su:

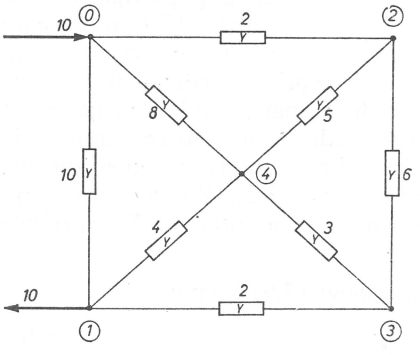
$$\mathbf{V}_a = (\mathbf{Y}')^{-1}\,\mathbf{J}_a. \tag{7.13}$$

Kako se pomoću (7.6), odnosno (7.11), može eliminirati proizvoljan broj jednadžbi iz zadanog sustava jednadžbi metode čvorišta, očito da je time obuhvaćen i slučaj kada se eliminira samo jedna jednadžba. S obzirom na model mreže, tome odgovara eliminacija jednog čvorišta. Time se u matrici admitancija čvorišta $\mathbf{Y}$ zadanog modela mreže eliminira jedan redak i jedan stupac. U teoriji mreža to odgovara poznatoj pretvorbi »zvijezda-poligon«. Međutim, dok se redukcija modela mreže pomoću pretvorbe »zvijezda-poligon« odnosi samo na čvorišta u kojima nema narinutih vanjskih struja (samo na »pasivni« dio modela mreže), jer se samo za taj slučaj mogu izvesti formule za spomenutu pretvorbu, dotle se pomoću jednadžbe (7.6) mogu eliminirati i ona čvorišta u kojima su narinute vanjske struje. To ćemo pokazati na primjerima.

Umjesto da se odjednom eliminira nekoliko jednadžbi, eliminacija jedne po jedne jednadžbe u izvjesnom je smislu pojednostavnjenje računanja. Naime, tada se matrica $\mathbf{Y}_{bb}$ sastoji samo od jednog elementa kojeg je recipročna vrijednost jedini element inverzne matrice $\mathbf{Y}_{bb}^{-1}$. Tako do traženog rješenja dolazimo postepeno, u onoliko koraka koliko ukupno jednadžbi želimo eliminirati.

Primjer 7.1.

Zadan je model mreže na slici 7.1. u kojem brojevi uz pojedine grane predstavljaju vrijednosti admitancija grana. Referentno čvorište neka je ono označeno sa 0. Pretpostavimo da se traži napon čvorišta 1 prema referentnom čvorištu 0.



Sl. 7.1. Model mreže uz primjer 7.1.

Sustav jednadžbi metode čvorišta u ovom slučaju glasi:

$$16\,V_1 - 2\,V_3 - 4\,V_4 = -10,$$
$$13\,V_2 - 6\,V_3 - 5\,V_4 = 0,$$
$$-2\,V_1 - 6\,V_2 + 11\,V_3 - 3\,V_4 = 0,$$
$$-4\,V_1 - 5\,V_2 - 3\,V_3 + 20\,V_4 = 0.$$

Da bismo odredili nepoznati napon V_1, eliminirat ćemo iz tih jednadžbi napone V_2, V_3 i V_4 tako što ćemo zadani sustav jednadžbi reducirati od četiri jednadžbe na jednu jednadžbu. Time se model mreže sa slike 7.1. svodi na ekvivalentnu admitanciju između čvorišta 1 i 0.

Broj jednadžbi možemo reducirati na dva načina:

A) odjednom ćemo eliminirati sve tri jednadžbe;

B) eliminirat ćemo postepeno jednu po jednu jednadžbu u tri koraka.

A. Napišimo najprije sustav jednadžbi metode čvorišta u matričnom obliku, a zatim pojedine matrice podijelimo u podmatrice:

$$\begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|cccc|} \hline 16 & & -2 & -4 \\ \hline & 13 & -6 & -5 \\ -2 & -6 & 11 & -3 \\ -4 & -5 & -3 & 20 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline V_4 \\ \hline \end{array}.$$

Ovdje je:

$$\mathbf{Y}_{aa} = \begin{array}{|c|}\hline 16 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{Y}_{ab} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -2 & -4 \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{Y}_{ba} = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline -2 \\ \hline -4 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{Y}_{bb} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 13 & -6 & -5 \\ \hline -6 & 11 & -3 \\ \hline -5 & -3 & 20 \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{J}_a = \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{V}_a = \begin{array}{|c|}\hline V_1 \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{J}_b = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{V}_b = \begin{array}{|c|}\hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline V_4 \\ \hline \end{array}.$$

Budući da je $\mathbf{J}_b = \mathbf{0}$, primijenit ćemo formulu redukcije (7.12).

Izračunamo li $\mathbf{Y}_{bb}^{-1}$, dobivamo da je:

$$\mathbf{Y}_{bb}^{-1} = \frac{1}{1568} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 211 & 135 & 73 \\ \hline 135 & 235 & 69 \\ \hline 73 & 69 & 109 \\ \hline \end{array}.$$

Prema (7.7) imamo $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}_{aa} - \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Y}_{ba}$, pa je uvrštenjem:

$$\mathbf{Y}' = \begin{array}{|c|}\hline 16 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -2 & -4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 13 & -6 & -5 \\ \hline -6 & 11 & -3 \\ \hline -5 & -3 & 20 \\ \hline \end{array}^{-1} \cdot \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline -2 \\ \hline -4 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|}\hline 16 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -2 & -4 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{1568} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 211 & 135 & 73 \\ \hline 135 & 235 & 69 \\ \hline 73 & 69 & 109 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline -2 \\ \hline -4 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|}\hline 16 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|}\hline 2{,}395 \\ \hline \end{array}.$$

Dakle:

$$\mathbf{Y}' = \begin{array}{|c|}\hline 13{,}605 \\ \hline \end{array}.$$

Prema (7.12) imamo konačno:

$$\begin{array}{|c|}\hline 13{,}605 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline V_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline \end{array},$$

ili:

$$\boxed{\boxed{13{,}605\,V_1}} = \boxed{\boxed{10}},$$

a odatle je traženi napon: $V_1 = 0{,}734$.

B. Isti zadatak možemo riješiti i tako da napone V_4, V_3 i V_2 eliminiramo iz zadanih jednadžbi u tri koraka. U modelu mreže to odgovara redom eliminaciji čvorišta 4, zatim čvorišta 3 i na kraju čvorišta 2.

Prvi korak (eliminacija V_4):

Matrice u jednadžbi koja predstavlja matričnu jednadžbu metode čvorišta podijelimo u podmatrice ovako:

$$\left|\begin{array}{c} 10 \\ \\ \\ \hline \\ \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 16 & & -2 & -4 \\ & 13 & -6 & -5 \\ -2 & -6 & 11 & -3 \\ \hline -4 & -5 & -3 & 20 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \hline V_4 \end{array}\right|.$$

Kako je ovdje $\mathbf{Y}_{bb} = \boxed{\boxed{20}}$, znači da je $\mathbf{Y}_{bb}^{-1} = \boxed{\boxed{\frac{1}{20}}} = \boxed{\boxed{0{,}05}}$.

Uvrštenjem odgovarajućih podmatrica u (7.7) dobivamo:

$$\mathbf{Y}'^{(1)} = \left|\begin{array}{ccc} 16 & & -2 \\ & 13 & -6 \\ -2 & -6 & 11 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{c} -4 \\ -5 \\ -3 \end{array}\right| \cdot \boxed{\boxed{0{,}05}} \cdot \left|\begin{array}{ccc} -4 & -5 & -3 \end{array}\right|,$$

a odatle je:

$$\mathbf{Y}'^{(1)} = 0{,}05 \cdot \left|\begin{array}{ccc} 304 & -20 & -52 \\ -20 & 235 & -135 \\ -52 & -135 & 211 \end{array}\right|.$$

Pokažimo usput kako upravo provedena eliminacija napona V_4 iz jednadžbi metode čvorišta — koja rezultira novom, reduciranom matricom admitancija $\mathbf{Y}'^{(1)}$ — odgovara pretvorbi zvijezde admitancija ④ — ⓪, ④ — ①, ④ — ②, ④ — ③ u ekvivalentni četverokut sa stranicama ⓪ — ①, ① — ③, ③ — ② i ② — ⓪ i dijagonalama ⓪ — ③ i ① — ②. Na slici 7.2. prikazan je promatrani dio modela mreže nakon pretvorbe, tj. nakon eliminacije čvorišta ④.

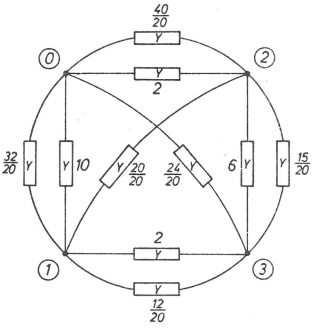
Pomoću poznate formule za pretvorbu zvijezde u poligon dobivamo slijedeće vrijednosti admitancija:

$$y_{0-1} = \frac{32}{20},\quad y_{1-3} = \frac{12}{20},\quad y_{3-2} = \frac{15}{20},\quad y_{2-0} = \frac{40}{20},\quad y_{0-3} = \frac{24}{20},\ \text{i}\ y_{1-2} = \frac{20}{20}.$$

Ako uspostavimo matricu admitancija čvorišta za reducirani model mreže, dobivamo:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} 32+200+12+20+40 & -20 & -(12+40) \\ -20 & 40+40+20+15+120 & -(15+120) \\ -(12+40) & -(15+120) & 24+12+40+15+120 \end{vmatrix},$$

pri čemu je 0 i sada referentno čvorište. Možemo se lako uvjeriti da elementi te matrice odgovaraju elementima reducirane matrice admitancija $\mathbf{Y}'^{(1)}$. Sasvim isto mogli bismo pokazati i u ostalim koracima, ali to nećemo ponavljati.



Sl. 7.2. Pasivni dio modela mreže sa slike 7.1. nakon eliminacije čvorišta 4 pomoću pretvorbe zvijezda-poligon

Drugi korak (eliminacija V_3):

Matricu $\mathbf{Y}'^{(1)}$ koju smo dobili u prvom koraku podijelimo na podmatrice:

$$\mathbf{Y}'^{(1)} = 0{,}05\left|\begin{array}{cc|c} 304 & -20 & -52 \\ -20 & 235 & -135 \\ \hline -52 & -135 & 211 \end{array}\right|.$$

Na osnovi (7.7) imamo dalje:

$$\mathbf{Y}'^{(2)} = 0{,}05\left|\begin{array}{cc} 304 & -20 \\ -20 & 235 \end{array}\right| - 0{,}05\left|\begin{array}{c} -52 \\ -135 \end{array}\right| \cdot \left|\frac{1}{211}\right| \cdot \underline{\left|\begin{array}{cc} -52 & -135 \end{array}\right|},$$

a odatle je nakon računskih operacija:

$$\mathbf{Y}'^{(2)} = \frac{1}{4220}\left|\begin{array}{cc} 61440 & -11240 \\ -11240 & 31360 \end{array}\right|.$$

Treći korak (eliminacija V_2):

Najprije $\mathbf{Y}'^{(2)}$ podijelimo u podmatrice:

$$\mathbf{Y}'^{(2)} = \frac{1}{4220}\left[\begin{array}{c|c} 61440 & -11240 \\ \hline -11240 & 31360 \end{array}\right],$$

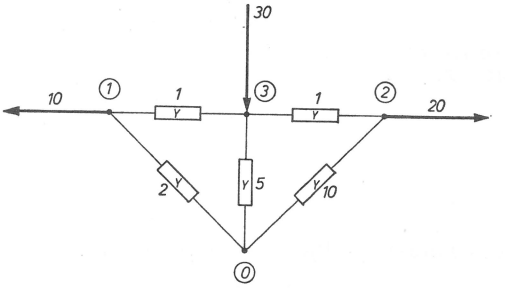
a zatim odredimo $\mathbf{Y}'^{(3)}$:

$$\mathbf{Y}'^{(3)} = \frac{1}{4220}\left(\boxed{61440} - \boxed{-11240} \cdot \boxed{\frac{1}{31360}} \cdot \boxed{-11240}\right).$$

Odatle je:

$$\mathbf{Y}'^{(3)} = \boxed{13{,}605},$$

dakle, $\mathbf{Y}'^{(3)} = \mathbf{Y}'$, što smo i očekivali. Dalje je prema (7.13), kao i prije, $V_1 = 0{,}734$.



Sl. 7.3. Zadani model mreže uz primjer 7.2. (brojevi uz grane pripadne su admitancije)

Primjer 7.2.

Zadan je model mreže na slici 7.3, koji ima ukupno četiri čvorišta od kojih ćemo čvorište 0 odabrati za referentno čvorište.

Ako se traže naponi čvorišta 1 i 2 prema referentnom čvorištu, možemo zadatak riješiti i tako da iz ukupno tri jednadžbe, koje čine sustav jednadžbi metode čvorišta, eliminiramo napon V_3, pa da zatim nađemo rješenje preostalih dviju jednadžbi. Tako se zapravo iz zadanog modela mreže na slici 7.3. eliminira čvorište 3, odnosno zadani model mreže reducira se na čvorištu 0, 1 i 2. Za razliku od prethodnog primjera, ovdje eliminiramo čvorište u kojem postoji vanjska struja, pa ćemo morati primijeniti i formulu redukcije za struje (7.8).

Rješavanje:

1. Sustav jednadžbi metode čvorišta napišemo u matričnom obliku, a zatim pojedine matrice rastavimo u podmatrice tako kako to zahtijeva eliminacija nepoznanice V_3:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & -1 \\ & 11 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}.$$

Tu je:

$$\mathbf{Y}_{aa} = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 11 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}_{ab} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_{ba} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}_{bb} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_b = \begin{bmatrix} -30 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} V_3 \end{bmatrix}.$$

2. Prema (7.7), $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}_{aa} - \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Y}_{ba}$, reducirana je matrica admitancija čvorišta:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix},$$

odnosno nakon računanja:

$$\mathbf{Y}' = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 20 & -1 \\ -1 & 76 \end{bmatrix}.$$

3. Vrijednosti reduciranih struja u čvorištima 1 i 2 dobiju se pomoću jednadžbe (7.8): $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_a - \mathbf{Y}_{ab}\,\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\,\mathbf{J}_b$. Uvrštenjem izlazi da je:

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -30 \end{bmatrix},$$

a odatle je:

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1' \\ \mathcal{J}_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 40 \\ 110 \end{bmatrix}.$$

4. Reducirani sustav jednadžbi prema tome glasi:

$$\begin{vmatrix} \frac{40}{7} \\ \hline \frac{110}{7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{1}{7} \\ \hline -\frac{1}{7} & \frac{76}{7} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ \hline V_2 \end{vmatrix},$$

ili:

$$\frac{20}{7} V_1 - \frac{1}{7} V_2 = \frac{40}{7},$$

$$-\frac{1}{7} V_1 + \frac{76}{7} V_2 = \frac{110}{7}.$$

5. Na osnovi dobivene jednadžbe $\mathbf{J}' = \mathbf{Y}' \mathbf{V}_a$, traženi su naponi V_1 i V_2:

$$\mathbf{V}_a = (\mathbf{Y}')^{-1} \mathbf{J}' = \begin{vmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{1}{7} \\ \hline -\frac{1}{7} & \frac{76}{7} \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \frac{40}{7} \\ \hline \frac{110}{7} \end{vmatrix},$$

odnosno nakon računskih operacija:

$$\mathbf{V}_a = \begin{vmatrix} V_1 \\ \hline V_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1519} \begin{vmatrix} 3150 \\ \hline 2240 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2{,}074 \\ \hline 1{,}475 \end{vmatrix}.$$

Dakle je:

$$V_1 = 2{,}074, \text{ a } V_2 = 1{,}475.$$

7.2. Formula redukcije za jednadžbe metode petlji

Budući da su jednadžbe metode petlji i jednadžbe metode čvorišta dualna oblika, formule redukcije za jednadžbe metode petlji dobit ćemo ako zamijenimo $\mathbf{J}_a$ i $\mathbf{J}_b$ sa $\mathbf{E}_a$ i $\mathbf{E}_b$, $\mathbf{V}_a$ i $\mathbf{V}_b$ sa $\mathbf{I}_a$ i $\mathbf{I}_b$, a $\mathbf{Y}_{aa}$, $\mathbf{Y}_{ab}$, $\mathbf{Y}_{ba}$ i $\mathbf{Y}_{bb}$ sa $\mathbf{Z}_{aa}$, $\mathbf{Z}_{ab}$, $\mathbf{Z}_{ba}$ i $\mathbf{Z}_{bb}$, respektivno. To znači da sustav jednadžbi metode petlji moramo napisati u obliku:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_a \\ \hline \mathbf{E}_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{Z}_{ab} \\ \hline \mathbf{Z}_{ba} & \mathbf{Z}_{bb} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{I}_a \\ \hline \mathbf{I}_b \end{vmatrix}. \tag{7.14}$$

Pritom se indeks »a« uz simbol za napon i struju odnosi na petlje koje se neće eliminirati, a indeks »b« na petlje koje će se eliminirati. *Formula redukcije za jednadžbe metode petlji* glasi prema tome:

$$(\mathbf{Z}_{aa} - \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{bb}^{-1} \mathbf{Z}_{ba}) \mathbf{I}_a = \mathbf{E}_a - \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{bb}^{-1} \mathbf{E}_b, \tag{7.15}$$

pri čemu je:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_{aa} - \mathbf{Z}_{ab}\,\mathbf{Z}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Z}_{ba} \tag{7.16}$$

formula redukcije za impedancije, a:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_a - \mathbf{Z}_{ab}\,\mathbf{Z}_{bb}^{-1}\,\mathbf{E}_b \tag{7.17}$$

formula redukcije za napone. Dakle kraće pišemo:

$$\mathbf{Z}'\,\mathbf{I}_a = \mathbf{E}'. \tag{7.18}$$

Pomoću jednadžbi (7.16) i (7.17) zadani se model mreže koji sadrži $(a + b)$ nezavisnih petlji reducira u ekvivalentni model mreže s ukupno a nezavisnih petlji; matrica impedancija petlji reduciranog modela mreže je $\mathbf{Z}'$, a vektor je obilaznih napona petlji $\mathbf{E}'$.

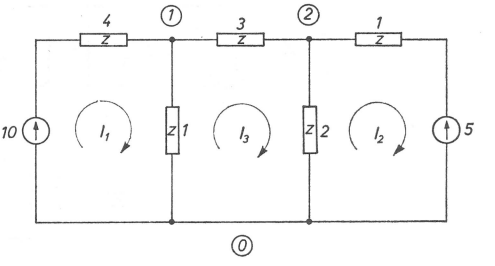
Ako u granama petlji koje se eliminiraju nema izvora napona, onda je $\mathbf{E}_b = \mathbf{0}$, pa je na osnovi (7.17) $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_a$. Formula redukcije u tom slučaju glasi:

$$(\mathbf{Z}_{aa} - \mathbf{Z}_{ab}\,\mathbf{Z}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Z}_{ba})\,\mathbf{I}_a = \mathbf{E}_a, \tag{7.19}$$

ili kraće:

$$\mathbf{Z}'\,\mathbf{I}_a = \mathbf{E}_a. \tag{7.20}$$

Spomenimo na kraju da eliminacija jednog retka i jednog stupca u matrici impedancija petlji $\mathbf{Z}$ odgovara pretvorbi trokut-zvijezda, poznatoj iz osnova elektrotehnike. Međutim, dok je tom pretvorbom moguće eliminirati petlju od samo tri grane (»trokut«), od kojih ni jedna ne smije sadržavati izvor napona, dotle se, prema formulama koje smo ovdje naveli, iz zadanog modela mreže mogu eliminirati i one petlje koje sadrže i više od tri grane u kojima postoje izvori napona i koje su induktivno vezane s bilo kojim granama u modelu mreže.



Sl. 7.4. Model mreže uz primjer 7.3. (brojevi uz grane pripadne su impedancije)

Primjer 7.3.

Na slici 7.4. zadan je model mreže koji ima ukupno tri nezavisne petlje. Za odabrani sustav nezavisnih petlji (petlje 1, 2 i 3 na slici) sustav jednadžbi metode petlji glasi:

$$5\,I_1 - I_3 = 10,$$

$$3\,I_2 - 2\,I_3 = -5,$$

$$-I_1 - 2\,I_2 + 6\,I_3 = 0.$$

Pretpostavimo da se traži ekvivalentni model mreže koji ne sadrži petlju 3.

Da bismo našli rješenje, eliminirat ćemo iz gornjeg sustava jednadžbi struju I_3. Stoga najprije napišemo dani sustav jednadžbi u matričnom obliku, a potom pojedine matrice rastavimo u podmatrice na slijedeći način:

$$\begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline -5 \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & & -1 \\ \hline & 3 & -2 \\ \hline -1 & -2 & 6 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline \end{array}.$$

Tu je:

$$\mathbf{Z}_{aa} = \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array}, \qquad \mathbf{Z}_{ab} = \begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{Z}_{ba} = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & -2 \\ \hline \end{array}, \qquad \mathbf{Z}_{bb} = \begin{array}{|c|}\hline 6 \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{E}_a = \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline -5 \\ \hline \end{array}, \qquad \mathbf{I}_a = \begin{array}{|c|}\hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{E}_b = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}, \qquad \mathbf{I}_b = \begin{array}{|c|}\hline I_3 \\ \hline \end{array}.$$

Izračunajmo zatim reduciranu matricu impedancija $\mathbf{Z}'$. Pomoću jednadžbe (7.16), $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_{aa} - \mathbf{Z}_{ab}\,\mathbf{Z}_{bb}^{-1}\,\mathbf{Z}_{ba}$, dobivamo:

$$\mathbf{Z}' = \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{6} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & -2 \\ \hline \end{array},$$

odnosno:

$$\mathbf{Z}' = \frac{1}{6} \begin{array}{|c|c|}\hline 29 & -2 \\ \hline -2 & 14 \\ \hline \end{array}.$$

Eliminacija trećeg retka i trećeg stupca matrice $\mathbf{Z}$ odgovara pretvorbi trokuta što ga čine grane ⓪—①, ①—② i ②—⓪ u ekvivalentnu zvijezdu s granama ③—⓪, ③—① i ③—② Naime, prema poznatoj formuli za pretvorbu trokuta u zvijezdu lako dobivamo da je:

$$z_{3-0} = \frac{2}{6}, \quad z_{3-1} = \frac{3}{6} \text{ i } z_{3-2} = \frac{6}{6},$$

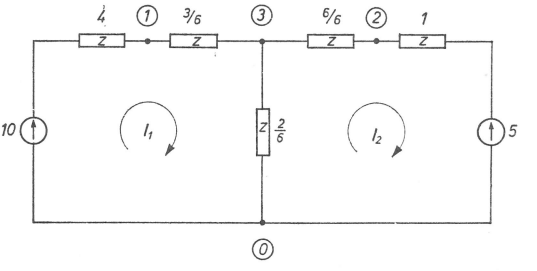
jer je

$$z_{0-1} = 1, \; z_{1-2} = 3 \text{ i } z_{2-0} = 2.$$

Nacrtamo li model mreže koji je ekvivalentan modelu zadanom na slici 7.4, a koji odgovara stanju nakon pretvorbe trokut-zvijezda, dobit ćemo sliku 7.5. Kao što vidimo, matrica impedancija petlji (ako su nezavisne petlje 1 i 2) tada glasi:

$$\mathbf{Z}'' = \begin{vmatrix} 4+\frac{3}{6}+\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & 1+\frac{6}{6}+\frac{2}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 29 & -2 \\ -2 & 14 \end{vmatrix},$$

dakle, identična je reduciranoj matrici impedancija $\mathbf{Z}'$ što smo je prije dobili.



Sl. 7.5. Model mreže nakon pretvorbe trokuta impedancija ⓪—①, ①—②, ②—⓪, u ekvivalentnu zvijezdu ③—⓪, ③—①, ③—②

Ako se traže struje nezavisnih petlji 1 i 2, dakle struje I_1 i I_2, tada na osnovi jednadžbe (7.20), $\mathbf{Z}'\,\mathbf{I}_a = \mathbf{E}_a$, dobivamo:

$$\mathbf{I}_a = (\mathbf{Z}')^{-1}\,\mathbf{E}_a = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 29 & -2 \\ -2 & 14 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{67}\begin{vmatrix} 130 \\ -125 \end{vmatrix},$$

pa je prema tome:

$$\mathbf{I}_a = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{,}94 \\ -1{,}87 \end{vmatrix}.$$

Osmo poglavlje

Ne smije se reći: »Ovo je gore nego ono«, jer sve je dobro u pravi čas.
Knjiga Sirahova

RJEŠAVANJE SUSTAVA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNADŽBI

8.1. Uvod

Jednadžbe metode petlji i jednadžbe metode čvorišta čine sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojima su nepoznanice struje nezavisnih petlji **I**, odnosno naponi nezavisnih čvorišta **V**. Rješavanje takvog tipa jednadžbi u načelu je jednostavno, ali već pri malo većem broju nepoznanica može biti veoma dugotrajno, čak ako raspolažemo s veoma brzim računskim strojevima, osobito ako su koeficijenti uz nepoznanice i slobodni članovi kompleksni brojevi, kao što su u analizi ilektričnih mreža sinusoidni naponi i struje.

Koliko je to računanje dugotrajno prisjetimo se Cramerova pravila, koje je inače veoma važno u matematičkoj teoriji. Prema tom pravilu sustav linearnih algebarskih jednadžbi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

ima rješenje u obliku:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad x_k = \frac{D_k}{D}, \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

gdje je D determinanta koju čine koeficijenti uz nepoznanice (naziva se *determinanta sustava*):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

a ostale se determinante, koje se nalaze u brojnicima, npr. determinanta D_k, dobiju tako da u determinanti D zamijenimo elemente k-tog stupca sa $b_1, b_2, \ldots, b_n$. To znači da je, šire napisano:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}, \text{ itd.}$$

Dakle, da bi se odredile sve nepoznanice potrebno je izračunati determinantu sustava i sve determinante u brojnicima, kojih ima koliko i nepoznanica, a zatim i odgovarajuće kvocijente.

Pretpostavimo da imamo na raspolaganju elektroničko računalo koje u jednoj sekundi obavi 100 000 operacija množenja. Kako broj množenja koje treba obaviti da bi se izračunala vrijednost jedne n-redne determinante iznosi $(n-1)\,n!$, lako se možemo uvjeriti da vrijeme potrebno za izračunavanje jedne determinante od npr. $n = 5, 10, 12, 14, 16, 18, 20$ i 30 redaka i stupaca približno iznosi:

Broj redaka i stupaca n	$(n-1)\,n!$	Potrebno vrijeme za računanje
5	$5 \cdot 10^2$	0,005 sekundi
10	$3 \cdot 10^7$	5 minuta
12	$5 \cdot 10^9$	14 sati
14	$1 \cdot 10^{12}$	4 mjeseca
16	$3 \cdot 10^{14}$	100 godina
18	$1 \cdot 10^{17}$	30 000 godina
20	$4 \cdot 10^{19}$	10 000 000 godina
30	$1 \cdot 10^{34}$	$3 \cdot 10^{21}$ godina

Kao što vidimo, već za $n = 16$ vrijeme računanja nadilazi jedan ljudski vijek, a za $n = 30$ znatno premašuje čak i starost Zemlje (spomenimo radi usporedbe da je prema nekim istraživanjima starost Zemlje oko $3 \cdot 10^9$ godina).

Iako računanje pomoću Cramerova pravila možemo znatno skratiti koristeći se već jednom izračunatim vrijednostima subdeterminanata, a i nekim matematičkim operacijama, ipak je vrijeme potrebno za rješavanje još uvijek dugotrajno. Stoga ćemo ovdje opisati neke od postojećih numeričkih metoda rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi pomoću kojih se do traženih rješenja dolazi uz

znatno manje računskih operacija. Osim toga, prednost je tih metoda i u tome što se mogu sustavno opisati pomoću niza koraka koji se ponavljaju. Naime, tako je lakše sastaviti *program za digitalno elektroničko računalo.*

Budući da je postupak pri nalaženju inverzne matrice koji slijedi iz definicije navedene u drugom poglavlju ekvivalentan rješavanju sustava linearnih jednadžbi pomoću Cramerova pravila, primjena tog postupka nije — kao ni primjena spomenutog pravila — pogodna. Zato ćemo neke *numeričke metode* inverzije matrica pokazati na primjerima.

Podjela metoda rješavanja

Sve metode rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi možemo podijeliti u dvije osnovne skupine:

— direktne ili egzaktne metode,
— indirektne ili iterativne metode.

Osnovna je značajka direktnih metoda u tome što daju rezultat nakon *konačnog broja računskih operacija*; ako rješenje postoji, tim ga metodama možemo uvijek naći. Nasuprot tome, indirektne metode temelje se na *beskonačnom ponavljanju pojedinih koraka računanja*, a daju rješenje samo u nekim, a ne u svim slučajevima.

Ako postupak konvergira, tada smo nakon svakog slijedećeg koraka računanja iterativnim metodama bliže »točnom« rješenju. Dakle, s obzirom na točnost dobivenih rezultata, ovdje bismo točno rješenje dobili tek nakon beskonačnog broja koraka. Međutim, jasno je da se pri rješavanju uvijek moramo zadovoljiti konačnim brojem računskih operacija. Stoga moramo unaprijed odrediti koja nas točnost rezultata zadovoljava, pa će o tome ovisiti i broj potrebnih koraka. Pritom ćemo uzeti u obzir da su koeficijenti uz nepoznanice i slobodni članovi u jednadžbama mreže također samo približni brojevi, pa zato nema nikakva smisla zahtijevati da rješenje ima veću točnost od točnosti spomenutih veličina.

Iako direktnim metodama do rješenja dolazimo konačnim brojem računskih operacija, one ne daju točnije rezultate od indirektnih metoda. Zapravo je obratno. Naime, u toku računanja, bilo da taj posao radi čovjek ili računski stroj, u obzir se uvijek uzima samo konačan broj znamenaka. Odbacujući ostale znamenke unosimo u račun pogreške, a one se u toku računanja direktnim metodama gomilaju, što može dovesti do toga da dobiveni rezultati i znatnije odstupaju od točnih vrijednosti. Kod indirektnih metoda nema gomilanja pogrešaka: svaki daljnji korak u računu daje točniji rezultat.

8.2. Direktne metode

Gaussova metoda eliminacije

Jedna od najstarijih, ali ujedno i jedna od najviše primjenjivanih direktnih metoda u rješavanju sustava linearnih algebarskih jednadžbi jest *Gaussova metoda eliminacije* ili, kako se još naziva, *Gaussov algoritam.* Karakteristika te metode je u tome

da zadani sustav jednadžbi najprije elementarnim operacijama svedemo na tzv. *trokutasti oblik*, a zatim *povratnom supstitucijom* odredimo nepoznanice. Prednost je te metode, u usporedbi s Cramerovim pravilom, u tome što do rješenja dolazimo uz znatno manje računskih operacija, naročito kod većeg broja jednadžbi. Radi ilustracije pogledajmo slijedeću tablicu:

Broj jednadžbi i broj nepoznanica	Ukupan broj operacija množenja i dijeljenja	
	Cramerovo pravilo	Gaussov algoritam
3	51	23
5	2 885	85
10	359 251 210	520

Ovdje ćemo korake računanja pokazati na primjeru sustava od četiri jednadžbe sa četiri nepoznanice. Na osnovi toga lako je zaključiti kako se postupa ako imamo neki drugi broj jednadžbi.

Zadano je:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \tag{8.1}$$

a pretpostavljamo da je $a_{11} \neq 0$. Ako je $a_{11} = 0$, zamijenimo redoslijed jednadžbi tako da u prvoj jednadžbi koeficijent uz x_1 bude različit od nule. Zatim nastavljamo na slijedeći način:

1. — Pomnožimo prvu jednadžbu sa (a_{21}/a_{11}) i odbijemo od druge;
   — pomnožimo prvu jednadžbu sa (a_{31}/a_{11}) i odbijemo od treće;
   — pomnožimo prvu jednadžbu sa (a_{41}/a_{11}) i odbijemo od četvrte.

Na taj način eliminiramo nepoznanicu x_1 iz druge, treće i četvrte jednadžbe. Sustav jednadžbi koji smo tako dobili, a glasi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 &= b'_3, \\ a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 &= b'_4, \end{aligned} \tag{8.2}$$

ekvivalentan je zadanom sustavu jednadžbi (8.1), ali sada posljednje tri jednadžbe sadrže samo tri nepoznanice.

2. Eliminiramo x_2 iz treće i četvrte jednadžbe u (8.2). Ako je $a'_{22} = 0$, redoslijed posljednjih triju jednadžbi treba zamijeniti tako da koeficijent uz x_2 u drugoj po redu jednadžbi bude različit od nule. Ako su $a'_{22} = 0$, $a'_{32} = 0$ i $a'_{42} = 0$, tada je sustav jednadžbi singularan, pa jednoznačnog rješenja nema.

Postupamo ovako:

— pomnožimo drugu jednadžbu sa (a'_{32}/a'_{22}) i odbijemo od treće,

— pomnožimo drugu jednadžbu sa (a'_{42}/a'_{22}) i odbijemo od četvrte

(naglasimo da se nazivi »druga«, »treća« i »četvrta« jednadžba odnose na redoslijed *nakon zamjene jednadžbi*, naravno ako je to bilo potrebno učiniti).

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4 &= b_1, \\ a'_{22}\,x_2 + a'_{23}\,x_3 + a'_{24}\,x_4 &= b'_2, \\ a''_{33}\,x_3 + a''_{34}\,x_4 &= b''_3, \\ a''_{43}\,x_3 + a''_{44}\,x_4 &= b''_4. \end{aligned} \tag{8.3}$$

3. Eliminiramo x_3 iz četvrte jednadžbe u (8.3). Ako je $a''_{33} = 0$, moramo zamijeniti posljednje dvije jednadžbe (ako je osim $a''_{33} = 0$ također i $a''_{43} = 0$, sustav jednadžbi je singularan), pa tako dobivamo zadani sustav jednadžbi u novom obliku. Ako je $a_{33} \neq 0$,

— treću jednadžbu pomnožimo sa (a''_{43}/a''_{33}) i odbijemo od četvrte.

Tako smo, kao što vidimo, zadani sustav jednadžbi (8.1) sveli na *trokutasti oblik*:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4 &= b_1, \\ a'_{22}\,x_2 + a'_{23}\,x_3 + a'_{24}\,x_4 &= b'_2, \\ a''_{33}\,x_3 + a''_{34}\,x_4 &= b''_3, \\ a'''_{44}\,x_4 &= b'''_4. \end{aligned} \tag{8.4}$$

4. Povratnom supstitucijom izračunamo nepoznanice x_4, x_3, x_2, i x_1:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{b'''_4}{a'''_{44}}, \\ x_3 &= \frac{(b''_3 - a''_{34}\,x_4)}{a''_{33}}, \\ x_2 &= \frac{(b'_2 - a'_{23}\,x_3 - a'_{24}\,x_4)}{a'_{22}}, \\ x_1 &= \frac{(b_1 - a_{12}\,x_2 - a_{13}\,x_3 - a_{14}\,x_4)}{a_{11}}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Postupak ćemo sada pokazati na jednom primjeru.

Primjer 8.1.

Zadani sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 8x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 5, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2, \\ -4x_1 - x_2 + 10x_3 &= 0, \end{aligned}$$

treba da riješimo pomoću Gaussova algoritma.

Rješavanje:

1. Koeficijent uz x_1 u prvoj jednadžbi različit je od nule pa redoslijed jednadžbi ne moramo promijeniti. Stoga najprije pomnožimo prvu jednadžbu sa $(a_{21}/a_{11}) = (-2/8)$, a zatim odbijemo od druge jednadžbe. Dobivamo:

$$\frac{20}{8}x_2 - 2x_3 = \frac{26}{8}.$$

Nakon toga prvu jednadžbu pomnožimo sa $(a_{31}/a_{11}) = (-4/8)$ i odbijemo od treće. Dobivamo:

$$-2x_2 + 8x_3 = \frac{20}{8}.$$

Imamo dakle:

$$\begin{aligned} 8x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 5, \\ \frac{20}{8}x_2 - 2x_3 &= \frac{26}{8}, \\ -2x_2 + 8x_3 &= \frac{20}{8}. \end{aligned}$$

2. Koeficijent uz x_2 u drugoj jednadžbi različit je od nule, pa zato drugu jednadžbu pomnožimo sa:

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{-2}{(20/8)} = -\frac{4}{5}$$

i odbijemo od treće jednadžbe. Dobivamo:

$$\frac{32}{5}x_3 = \frac{51}{10}.$$

Tako smo zadani sustav jednadžbi sveli na trokutasti oblik:

$$\begin{aligned} 8x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 5, \\ \frac{20}{8}x_2 - 2x_3 &= \frac{26}{8}, \\ \frac{32}{5}x_3 &= \frac{51}{10}. \end{aligned}$$

3. Povratnom supstitucijom konačno dobivamo:

$$x_3 = \frac{51}{64},$$

$$x_2 = \frac{\frac{26}{8} + 2\frac{51}{64}}{\frac{20}{8}} = \frac{31}{16},$$

$$x_1 = \frac{5 + 2\frac{31}{16} + 4\frac{51}{64}}{8} = \frac{193}{128}.$$

Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Kao što ćemo sada vidjeti, Gauss-Jordanova metoda eliminacije samo je modifikacija Gaussova algoritma što smo ga upravo opisali. Ovdje se, za razliku od prethodnog postupka, nepoznanice određuju direktno tako što se zadani sustav jednadžbi svede na ekvivalentni sustav u kojemu se sve nepoznanice napišu odvojeno, s jedne strane znaka jednakosti. To znači da se sustav jednadžbi (8.1) svodi na oblik:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1, \\ x_2 &= r_2, \\ x_3 &= r_3, \\ x_4 &= r_4, \end{aligned}$$

gdje su r_1, r_2, r_3 i r_4 tražene vrijednosti nepoznanica.

Postupak ćemo pokazati na sustavu jednadžbi iz primjera (8.1), ali ćemo, da skratimo pisanje, izostaviti nepoznanice i znakove jednakosti. I ovdje ćemo, kao i prije, radi preglednosti, računanje prikazati nizom koraka.

Zadan je sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 8x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 5, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2, \\ -4x_1 - x_2 + 10x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Najprije napišemo tablicu brojeva koju čine koeficijenti uz nepoznanice i slobodni članovi (napišemo ih u krajnjem desnom stupcu):

8	−2	−4	5
−2	3	−1	2
−4	−1	10	0

.

Zatim nastavimo ovako:

1. Iz prvog stupca odaberemo najveći broj po *apsolutnoj vrijednosti*, pa retke zamijenimo tako da taj broj dođe na položaj (1,1).

U našem je primjeru najveći broj 8, a kako se on već nalazi na mjestu (1,1), možemo odmah prijeći na slijedeći korak.

2. Podijelimo svaki element prvog retka elementom (1,1). Dobivamo:

1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
−2	3	−1	2
−4	−1	10	0

.

3. Pomnožimo prvi redak elementom koji se nalazi na mjestu (2,1) i tako dobivene vrijednosti elemenata prvog retka odbijemo od elemenata drugog retka u odgovarajućim stupcima:

1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
0	$\frac{5}{2}$	−2	$\frac{13}{4}$
−4	−1	10	0

.

4. Pomnožimo elemente prvog retka elementom na mjestu (3,1) i tako dobivene vrijednosti elemenata prvog retka odbijemo od elemenata u odgovarajućim stupcima trećeg retka:

1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
0	$\frac{5}{2}$	−2	$\frac{13}{4}$
0	−2	8	$\frac{5}{2}$

.

5. Postupak dalje ponavljamo na sličan način. Najprije odaberemo najveći broj po apsolutnoj vrijednosti iz drugog stupca, a ispod prvog retka, pa ako se taj broj ne nalazi u drugome retku, tada zamijenimo retke tako da on dođe na mjesto (2,2). U našem primjeru taj korak opet otpada, jer je (5/2) veće nego 2, a već se nalazi na mjestu (2,2).

6. Podijelimo svaki element drugog retka elementom (2,2):

1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{13}{10}$
0	−2	8	$\frac{5}{2}$

.

7. Pomnožimo drugi redak elementom (1,2) i dobivene vrijednosti odbijemo od odgovarajućih elemenata u prvom retku:

1	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{38}{40}$
0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{13}{10}$
0	−2	8	$\frac{5}{2}$

.

8. Pomnožimo elemente drugog retka elementom na mjestu (3,2) i dobivene vrijednosti odbijemo od odgovarajućih elemenata trećeg retka:

1	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{38}{40}$
0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{13}{10}$
0	0	$\frac{32}{5}$	$\frac{51}{10}$

.

9. Podijelimo elemente trećeg retka elementom (3,3):

1	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{38}{40}$
0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{13}{10}$
0	0	1	$\frac{255}{320}$

.

10. Pomnožimo treći redak elementom (1,3) i tako dobivene vrijednosti elemenata trećeg retka odbijemo od odgovarajućih elemenata prvog retka:

1	0	0	$\frac{4825}{3200}$
0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{13}{10}$
0	0	1	$\frac{255}{320}$

.

11. Pomnožimo treći redak elementom (2,3) i odbijemo od drugog retka;

1	0	0	$\frac{4825}{3200}$
0	1	0	$\frac{3100}{1600}$
0	0	1	$\frac{255}{320}$

.

Time smo tablicu koeficijenata sveli na oblik u kojem se u dijagonali prva tri retka i tri stupca nalaze jedinice, a ostali su elementi u tim recima i stupcima nule. Elementi krajnjeg desnog stupca jesu vrijednosti nepoznanica. Nakon kraćenja dobivamo kao i u primjeru 8.1:

$$x_1 = \frac{4825}{3200} = \frac{193}{128},$$

$$x_2 = \frac{3100}{1600} = \frac{31}{16},$$

$$x_3 = \frac{255}{320} = \frac{51}{64}.$$

Analogno tome postupa se za bilo koji drugi broj jednadžbi.

Iako smo metodu prikazali samo na jednom primjeru, očito je da ovdje nema onog dijela postupka koji odgovara povratnoj supstituciji, pa se po tome ova metoda razlikuje od Gaussova algoritma.

8.3. Iterativne metode

Rješavanje iterativnim metodama počinjemo od *pretpostavljenih vrijednosti nepoznanica* koje ćemo ovdje označavati sa $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$. Zatim ćemo ponavljanjem određenih računskih operacija (u latinskom jeziku *iteratio* znači *ponavljanje*) te pretpostavljene vrijednosti postepeno približavati točnim vrijedno-

stima nepoznanica. Operacije ponavljamo sve dok vrijednosti nepoznanica $x_i^{(k)}$ (za $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) nakon k-te iteracije ne budu dovoljno blizu vrijednostima nepoznanica $x_i^{(k-1)}$ iz prethodne iteracije. To drugim riječima znači da je računanje završeno onda kada je najveća apsolutna vrijednost razlike $(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})$ manja od nekog unaprijed zadanog broja ε. To pišemo ovako:

$$\text{Max.} \mid x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \mid < \varepsilon, \text{ za } i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{8.6}$$

Ako je taj uvjet ispunjen, tada su $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ rješenje zadanog sustava jednadžbi, a za odabrani postupak kažemo da *konvergira*.

U nekim se slučajevima razlike $\mid x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \mid$ neće smanjivati, nego povećavati. Tada vrijednosti nepoznanica ne možemo odrediti odabranim iterativnim postupkom. Kažemo da postupak *divergira*. Prema tome, iterativne metode imaju ograničenu primjenu jer je mogućnost da rješenje nađemo nekom metodom uvjetovana određenim uvjetima koje nazivamo *uvjeti konvergencije*.

Od postojećih iterativnih metoda za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi prikazat ćemo samo Gauss-Seidelovu metodu koja je prikladna za primjenu na digitalnim elektroničkim računalima.

Gauss-Seidelova metoda iteracije

Neka je, na primjer, zadan sustav od četiri jednadžbe sa četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= b_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 &= b_3, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 &= b_4. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Uz pretpostavku da je $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$ i $a_{44} \neq 0$, transformiramo te jednadžbe u oblik:

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad\quad c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{14} x_4 + d_1, \\ x_2 &= c_{21} x_1 \quad\quad + c_{23} x_3 + c_{24} x_4 + d_2, \\ x_3 &= c_{31} x_1 + c_{32} x_2 \quad\quad + c_{34} x_4 + d_3, \\ x_4 &= c_{41} x_1 + c_{42} x_2 + c_{43} x_3 \quad\quad + d_4, \end{aligned} \tag{8.8}$$

gdje je:

$$c_{jk} = -\frac{a_{jk}}{a_{jj}} \quad (j = k, \quad j, k = 1, 2, 3, 4),$$

$$d_j = \frac{b_j}{a_{jj}} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Nakon toga:

1. Pretpostavimo početne vrijednosti nepoznanica $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$, $x_4^{(0)}$ i točnost ε. Zatim:

2. Izračunamo slijedeću aproksimaciju $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, $x_4^{(1)}$ uvrštenjem u (8.8) pretpostavljenih vrijednosti nepoznanica iz koraka 1, a također i novo izračunate vrijednosti iz ovog koraka, kako je naznačeno:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= c_{12}\,x_2^{(0)} + c_{13}\,x_3^{(0)} + c_{14}\,x_4^{(0)} + d_1, \\ x_2^{(1)} &= c_{21}\,x_1^{(1)} + c_{23}\,x_3^{(0)} + c_{24}\,x_4^{(0)} + d_2, \\ x_3^{(1)} &= c_{31}\,x_1^{(1)} + c_{32}\,x_2^{(1)} + c_{34}\,x_4^{(0)} + d_3, \\ x_4^{(1)} &= c_{41}\,x_1^{(1)} + c_{42}\,x_2^{(1)} + c_{43}\,x_3^{(1)} + d_4. \end{aligned} \tag{8.9}$$

3. Ispitujemo je li:

$$\text{Max.} \mid x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \mid < \varepsilon, \text{ za } i = 1, 2, 3, 4.$$

Ako taj uvjet nije ispunjen, nastavljamo postupak do k-te aproksimacije, nakon koje je:

$$\text{Max.} \mid x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \mid < \varepsilon, \text{ za } i = 1, 2, 3, 4.$$

4. Za k-tu iteraciju imamo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= c_{12}\,x_2^{(k-1)} + c_{13}\,x_3^{(k-1)} + c_{14}\,x_4^{(k-1)} + d_1, \\ x_2^{(k)} &= c_{21}\,x_1^{(k)} + c_{23}\,x_3^{(k-1)} + c_{24}\,x_4^{(k-1)} + d_2, \\ x_3^{(k)} &= c_{31}\,x_1^{(k)} + c_{32}\,x_2^{(k)} + c_{34}\,x_4^{(k-1)} + d_3, \\ x_4^{(k)} &= c_{41}\,x_1^{(k)} + c_{42}\,x_2^{(k)} + c_{43}\,x_3^{(k)} + d_4. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Određivanjem razlika $\mid x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)} \mid$ možemo u toku računanja provjeriti da li postupak konvergira: ako te razlike nakon svakog slijedećeg koraka postaju sve manje, tada postupak konvergira, a u protivnom slučaju ne konvergira. Osim toga, da li će postupak konvergirati može se ispitati i prije početka rješavanja. Tako je za konvergentnost Gauss-Seidelova postupka za sustav jednadžbi (8.7) *dovoljan uvjet* da je:

$$\begin{aligned} \mid a_{11} \mid &> \mid a_{12} \mid + \mid a_{13} \mid + \mid a_{14} \mid, \\ \mid a_{22} \mid &> \mid a_{21} \mid + \mid a_{23} \mid + \mid a_{24} \mid, \\ \mid a_{33} \mid &> \mid a_{31} \mid + \mid a_{32} \mid + \mid a_{34} \mid, \\ \mid a_{44} \mid &> \mid a_{41} \mid + \mid a_{42} \mid + \mid a_{43} \mid. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Pod time da je uvjet konvergentnosti »dovoljan« razumijevamo to da uz ispunjene nejednadžbe (8.11) postupak sigurno konvergira. Međutim, taj uvjet nije i neophodan jer u nekim slučajevima postupak može konvergirati i onda ako uvjeti (8.11)

nisu ispunjeni. U općem slučaju, za sustav od n linearnih algebarskih jednadžbi sa n nepoznanica, dovoljan uvjet za konvergentnost Gauss-Seidelova postupka iteracije glasi:

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}| \qquad (8.12)$$

za $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Kao što vidimo, Gauss-Seidelov postupak konvergirat će ako apsolutne vrijednosti koeficijenata dijagonalnih članova u jednadžbama dominiraju po veličini. Kako je u jednadžbama metode petlji i metode čvorišta, radi fizikalnog značenja koeficijenata, to redovito ispunjeno, Gauss-Seidelova metoda iteracije prikladna je za primjenu.

Primjer 8.2.

Zadan je sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 30x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= 0, \\ -4x_1 + 40x_2 - 6x_4 &= 0, \\ -6x_1 + 20x_3 - 2x_4 &= -10, \\ -2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 20x_4 &= -20. \end{aligned}$$

Rješenje ćemo naći Gauss-Seidelovom metodom iteracije, uz pretpostavku da je zahtjevana točnost $\varepsilon = 0{,}00020$.

Rješavanje:

Ispitajmo najprije je li ispunjen uvjet konvergencije. Na osnovi (8.11) vidimo da je:

$$\begin{aligned} 30 &> 4 + 6 + 2 = 12, \\ 40 &> 4 + 0 + 6 = 10, \\ 20 &> 6 + 0 + 2 = 8, \\ 20 &> 2 + 6 + 2 = 10, \end{aligned}$$

pa je prema tome odgovor potvrdan. Zato, kao slijedeći korak, napišemo zadani sustav jednadžbi u obliku (8.8). Dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{30}x_2 + \frac{6}{30}x_3 + \frac{2}{30}x_4, \\ x_2 &= \frac{4}{40}x_1 + \frac{6}{40}x_4, \\ x_3 &= \frac{6}{20}x_1 + \frac{2}{20}x_4 - \frac{10}{20}, \\ x_4 &= \frac{2}{20}x_1 + \frac{6}{20}x_2 + \frac{2}{20}x_3 - \frac{20}{20}, \end{aligned}$$

odnosno nakon dijeljenja:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}13333\,x_2 + 0{,}20000\,x_3 + 0{,}06666\,x_4, \\ x_2 &= 0{,}10000\,x_1 + 0{,}15000\,x_4, \\ x_3 &= 0{,}30000\,x_1 + 0{,}10000\,x_4 - 0{,}50000, \\ x_4 &= 0{,}10000\,x_1 + 0{,}30000\,x_2 + 0{,}10000\,x_3 - 1{,}00000. \end{aligned}$$

Nakon toga postupamo ovako:

1. Pretpostavimo početne vrijednosti nepoznanica. Neka one iznose:

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} &= 0{,}00000, \\ x_2^{(0)} &= 0{,}00000, \\ x_3^{(0)} &= -0{,}50000, \\ x_4^{(0)} &= -1{,}00000. \end{aligned}$$

2. Računamo vrijednosti nepoznanica nakon prve iteracije. Uvrštenjem dobivamo:

$$x_1^{(1)} = 0{,}13333 \cdot 0{,}00000 + 0{,}20000 \cdot (-0{,}50000) + 0{,}06666 \cdot (-1{,}00000),$$
$$x_1^{(1)} = -0{,}16666,$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}10000 \cdot (-0{,}16666) + 0{,}15000 \cdot (-1{,}00000),$$
$$x_2^{(1)} = -0{,}16666,$$

$$x_3^{(1)} = 0{,}30000 \cdot (-0{,}16666) + 0{,}10000 \cdot (-1{,}00000) - 0{,}50000,$$
$$x_3^{(1)} = -0{,}64998,$$

$$x_4^{(1)} = 0{,}10000 \cdot (-0{,}16666) + 0{,}30000 \cdot (-0{,}16666) + 0{,}10000 \cdot (-0{,}64998) - -1{,}00000,$$

$$x_4^{(1)} = -1{,}13165.$$

3. Ispitamo da li dobivene vrijednosti nepoznanica zadovoljavaju s obzirom na traženu točnost rezultata. Kako je:

$$\begin{aligned} |x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| &= |-0{,}16666 - 0{,}00000| = 0{,}16666, \\ |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| &= |-0{,}16666 - 0{,}00000| = 0{,}16666, \\ |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| &= |-0{,}64998 - (-0{,}50000)| = 0{,}14998, \\ |x_4^{(1)} - x_4^{(0)}| &= |-1{,}13165 - (-1{,}00000)| = 0{,}13165, \end{aligned}$$

slijedi da je:

$$\text{Max.}\ |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = 0{,}16666 > 0{,}00020.$$

Dakle, moramo učiniti i slijedeću iteraciju. Sve preostale potrebne korake u računu prikazat ćemo skraćeno u slijedećoj tablici:

Iteracija k	x_1	x_2	x_3	x_4	Max. $\lvert x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \rvert$
0	0,00000	0,00000	−0,50000	−1,00000	0,16666
1	−0,16666	−0,16666	−0,64998	−1,13165	0,06087
2	−0,22753	−0,19250	−0,68142	−1,14864	0,01085
3	−0,23838	−0,19613	−0,68638	−1,15131	0,00166
4	−0,24004	−0,19670	−0,68714	−1,15172	0,00025
5	−0,24029	−0,19678	−0,68726	−1,15179	0,00004
6	−0,24033	−0,19680	−0,68727	−1,15180	

Konačno je:

$$\text{Max.} \mid x_i^{(6)} - x_i^{(5)} \mid = 0{,}00004 < 0{,}00020,$$

pa je prema tome:

$$x_1^{(6)} = -0{,}24033,$$
$$x_2^{(6)} = -0{,}19680,$$
$$x_3^{(6)} = -0{,}68727,$$
$$x_4^{(6)} = -1{,}15180.$$

traženo rješenje zadanog sustava jednadžbi.

8.4. Numeričke metode inverzije matrica

Ovdje ćemo pokazati (i to na primjerima) samo dvije od više postojećih metoda za numeričko određivanje inverzne matrice. Obje se metode primjenjuju u praksi jer u velikoj mjeri smanjuju broj računskih operacija koje je potrebno obaviti u odnosu prema postupku inverzije matrica koji slijedi iz same definicije. Osim toga, te ćemo metode ovdje prikazati i zato da bismo ilustrirali kako se i određivanje inverzne matrice može opisati sustavno — nizom uzastopnih koraka, što olakšava pisanje programa za elektroničko računalo.

Prva od opisanih metoda zapravo je proširenje Gauss-Jordanove metode eliminacije za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi koju smo prikazali u odjeljku 8.2. Zato tu metodu nazivamo *Gauss-Jordanova shema za inverziju matrica*. Možemo je primijeniti na svaku nesingularnu matricu (i na simetrične i na nesimetrične matrice).

Druga metoda koju ćemo opisati predstavlja također proširenje jedne numeričke metode za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi, ali o toj metodi ovdje još nismo govorili. Ona se, po svome autoru, naziva *Banachiewiczeva shema*, a slijedi iz Gaussova algoritma. Ovdje ćemo pokazati samo Banachiewiczevu shemu

za inverziju *simetričnih matrica*, iako postoji i odgovarajući postupak za računanje inverzne matrice nesimetričnih matrica. Ostale numeričke metode inverzije matrica, koje nećemo spominjati, a mogu se naći u literaturi, u nekim posebnim slučajevima mogu imati određene prednosti pred ovima koje ćemo sada opisati. Međutim, te pojedinosti prelaze okvir ovog poglavlja.

Gauss-Jordanova shema

Zadana je, na primjer, matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|ccc|}\hline -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \\ \hline\end{array},$$

a traži se inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$. Kao prvi korak napišemo tablicu što je čine elementi matrice $\mathbf{A}$ kojima su s desne strane dodani elementi jedinične matrice istoga reda. Dakle pišemo:

1.

−3	6	−11	1	0	0
3	−4	6	0	1	0
4	−8	13	0	0	1

.

2. U prvom stupcu pronađemo najveći broj po *apsolutnoj vrijednosti*, pa retke zamijenimo tako da taj broj dođe na mjesto (1,1).

U našem primjeru to je broj 4. Zamijenimo stoga prvi i treći redak:

4	−8	13	0	0	1
3	−4	6	0	1	0
−3	6	−11	1	0	0

.

3. Podijelimo prvi redak brojem na mjestu (1,1):

1	−2	$\frac{13}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	−4	6	0	1	0
−3	6	−11	1	0	0

.

4. Pomnožimo prvi redak brojem na mjestu (2,1) i tako dobivene vrijednosti prvog retka odbijemo od drugog retka:

1	−2	$\frac{13}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	2	$-\frac{15}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
−3	6	−11	1	0	0

5. Pomnožimo prvi redak brojem na mjestu (3,1) i tako dobivene vrijednosti prvog retka odbijemo od trećeg retka:

1	−2	$\frac{13}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	2	$-\frac{15}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
0	0	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$

6. U drugom stupcu pronađemo najveći broj po apsolutnoj vrijednosti, ali uzimajući u obzir samo brojeve ispod prvog retka. Zamijenimo zatim retke tako da taj broj dođe na mjesto (2,2).

U našem je primjeru najveći broj 2, a on se već nalazi u drugom retku, pa taj korak otpada.

7. Podijelimo drugi redak brojem na mjestu (2,2):

1	−2	$\frac{13}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	1	$-\frac{15}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$
0	0	$\frac{5}{4}$	−1	0	$-\frac{3}{4}$

8. Pomnožimo drugi redak brojem na mjestu (1,2) i tako dobivene vrijednosti drugog retka odbijemo od prvog retka:

1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
0	1	$-\frac{15}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$
0	0	$\frac{5}{4}$	−1	0	$-\frac{3}{4}$

9. Pomnožimo drugi redak brojem na mjestu (3,2) i dobivene vrijednosti odbijemo od trećeg retka.

U našem je primjeru broj na mjestu (3,2) nula, pa treći redak ostaje nakon tog koraka nepromijenjen.

10. Podijelimo treći redak brojem na mjestu (3,3):

1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
0	1	$-\frac{15}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$
0	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$

.

11. Pomnožimo treći redak brojem na mjestu (1,3) i dobivene vrijednosti odbijemo od prvog retka:

1	0	0	$-\frac{4}{10}$	1	$-\frac{8}{10}$
0	1	$-\frac{15}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$
0	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$

.

12. Pomnožimo treći redak brojem na mjestu (2,3) i dobivene vrijednosti odbijemo od drugog retka:

1	0	0	$-\frac{4}{10}$	1	$-\frac{8}{10}$
0	1	0	$-\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{10}$
0	0	1	$-\frac{8}{10}$	0	$-\frac{6}{10}$

.

Tako smo došli do kraja rješavanja jer smo elemente zadane matrice **A**, kojoj tražimo inverznu matricu, elementarnim operacijama sveli na jediničnu matricu. Dobiveni brojevi u preostalim stupcima s desne strane elementi su tražene inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$. Dakle:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -0{,}4 & 1{,}0 & -0{,}8 \\ \hline -1{,}5 & 0{,}5 & -1{,}5 \\ \hline -0{,}8 & 0 & -0{,}6 \\ \hline \end{array}.$$

Na temelju ovog primjera možemo zaključiti kako bi postupili ako matrica **A** ima veći broj redaka i stupaca. Pridržavajući se gornjeg slijeda koraka, pravilnost kojeg se može uočiti, elementarnim operacijama na recima sveli bismo zadanu matricu **A** na jediničnu matricu **1**, a jediničnu matricu istog reda, koju bismo napisali s desne strane, na inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$.

Banachiewiczeva shema za određivanje inverzne matrice simetričnih matrica

A. Rastavljanje kvadratne matrice u produkt dviju trokutastih matrica

Svaka kvadratna matrica može se rastaviti u produkt dviju trokutastih matrica. Pri tome su svi dijagonalni elementi lijeve matrice u produktu jednaki 1, a ta je matrica donja trokutasta matrica; desna matrica produkta gornja je trokutasta matrica. Ako je zadana matrica označena sa **A**, tada je:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\mathbf{B},$$

ili, ako napišemo u širem obliku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ c_{21} & 1 & & & \\ c_{31} & c_{32} & 1 & & \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ & & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ & & & & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Elemente c_{jk} matrice **C** i elemente b_{jk} matrice **B** možemo odrediti ako se pridržavamo slijedećeg redoslijeda računanja:

1. Napišemo elemente *prvog retka matrice* **B**. Ti elementi dobiju se prepisivanjem prvog retka matrice **A**. Naime, pomnožimo li prvi redak matrice **C** najprije s prvim stupcem matrice **B**, a zatim redom s drugim, trećim, ..., n-tim stupcem, prema definiciji jednakosti matrica slijedi da je:

$$b_{11} = a_{11},\ b_{12} = a_{12},\ b_{13} = a_{13},\ \dots,\ b_{1n} = a_{1n}.$$

2. Odredimo elemente *prvog stupca matrice* **C** koji se nalaze ispod dijagonalnog elementa jer je taj elemet 1. Množimo li redom drugi, treći, ..., n-ti redak od **C** s prvim stupcem od **B**, pa dobivene produkte izjednačimo s odgovarajućim elementima matrice **A**, dobivamo:

$$c_{21} = \frac{a_{21}}{b_{11}},$$

$$c_{31} = \frac{a_{31}}{b_{11}},$$

$$\vdots$$

$$c_{n1} = \frac{a_{n1}}{b_{11}}.$$

3. Sada možemo odrediti elemente *drugog retka matrice* **B**. Najprije odredimo dijagonalni element b_{22} iz produkta drugog retka od **C** i drugog stupca od **B**. Preostale elemente drugog retka matrice **B** dobivamo nakon množenja tog retka u **C** s trećim, četvrtim, ..., n-tim stupcem od **B**. Nakon izjednačenja s odgovarajućim elementima u **A** izlazi da je:

$$b_{22} = a_{22} - c_{21}\, b_{12}, \quad b_{23} = a_{23} - c_{21}\, b_{13}, \ldots, \quad b_{2n} = a_{2n} - c_{21}\, b_{1n}.$$

4. Odredimo elemente *drugog stupca matrice* **C** ispod dijagonalnog elementa. Iz produkta trećeg, četvrtog, ..., n-tog retka od **C** s drugim stupcem od **B** slijedi da je:

$$c_{32} = \frac{a_{32} - c_{31}\, b_{12}}{b_{22}},$$

$$\vdots$$

$$c_{n2} = \frac{a_{n2} - c_{n1}\, b_{12}}{b_{22}}.$$

5. Zatim odredimo elemente *trećeg retka* od **B** počevši od dijagonalnog elementa b_{33} pa sve do b_{3n}. Množenjem trećeg retka matrice **C** s trećim, četvrtim, ..., n-tim stupcem matrice **B** dobivamo:

$$b_{33} = a_{33} - c_{31}\, b_{13} - c_{32}\, b_{23}, \ldots, \quad b_{3n} = a_{3n} - c_{31}\, b_{1n} - c_{32}\, b_{2n}.$$

Nakon toga nastavljamo na sličan način određivanjem elemenata trećeg stupca od **C**, pa četvrtog retka od **B**, četvrtog stupca od **C**, itd., sve dok ne odredimo posljednji element b_{nn}.

U općem je obliku:

$$b_{jk} = a_{jk} - \sum_{t=1}^{j-1} c_{jt}\, b_{tk}, \tag{8.13}$$

$$c_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{t=1}^{k-1} c_{jt}\, b_{tk}}{b_{kk}}. \tag{8.14}$$

Kada je matrica **A** *simetrična matrica*, dakle kada je $a_{jk} = a_{kj}$, tada je formula za određivanje elemenata matrice **C** jednostavnija:

$$c_{jk} = \frac{b_{kj}}{b_{kk}}, \tag{8.14a}$$

a to znači, što je i za očekivati, da je tada potreban manii broj računskih operacija nego kada je matrica **A** nesimetrična.

Nakon što smo matricu **A** tako rastavili u produkt trokutastih matrica **C** i **B**, možemo odrediti elemente inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$.

B. Određivanje elemenata inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$

Kada je matrica **A** *simetrična matrica*, tada se elementi inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$ izračunaju pomoću formula:

$$a_{kk} = \frac{1 - b_{kn}\, a_{nk} - b_{k,n-1}\, a_{n-1,k} - \ldots - b_{k,k+1}\, a_{k+1,k}}{b_{kk}}, \tag{8.15}$$

i:

$$a_{jk} = -\frac{b_{jn}\, a_{nk} + b_{j,n-1}\, a_{n-1,k} + \ldots + b_{j,j+1}\, a_{j+1,k}}{b_{jj}}, \tag{8.16}$$

gdje je $j = k - 1,\ k - 2, \ldots, 2,1;\quad k = n, n - 1,\ n - 2, \ldots, 2,\ 1.$

Elementi a_{kk} u glavnoj su dijagonali, a elementi a_{jk} iznad glavne dijagonale. Kako je inverzna matrica simetrične matrice također simetrična matrica, to je $a_{kj} = a_{jk}$.

Računanje počinjemo određivanjem dijagonalnog elementa a_{nn}. Zatim izračunamo sve elemente a_{jn} $(j = n - 1,\ n - 2, \ldots, 2,1)$ u n-tom stupcu, idući redom odozdo prema gore. Nakon toga odredimo element $a_{n-1,n-1}$, a potom redom odozdo prema gore elemente $a_{j,n-1}$ $(j = n - 2,\ n - 3, \ldots, 2,1)$, tj. elemente u istom stupcu u kojem je element $a_{n-1,n-1}$. Istim redoslijedom nastavljamo sve dotle dok ne odredimo posljednji element a_{11}. To ćemo sada pokazati na primjeru.

Primjer 8.3.

Pomoću Banachiewiczeve sheme treba da odredimo inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ zadane matrice **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0{,}70 & -0{,}20 & & \\ \hline -0{,}20 & 0{,}80 & -0{,}25 & -0{,}10 \\ \hline & -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}50 \\ \hline & -0{,}10 & -0{,}50 & 1{,}60 \\ \hline \end{array}.$$

Rješavanje:

A. Rastavljanje zadane matrice **A** u produkt trokutastih matrica **C** i **B**:

1. Prvi je redak matrice **B**:

$$b_{11} = 0{,}70,\ b_{12} = -0{,}20,\ b_{13} = 0{,}00,\ b_{14} = 0{,}00.$$

2. Prvi je stupac matrice **C**:

$$c_{21} = \frac{b_{12}}{b_{11}} = -\,0{,}28571,$$

$$c_{31} = \frac{b_{13}}{b_{11}} = 0{,}00000,$$

$$c_{41} = \frac{b_{14}}{b_{11}} = 0{,}00000.$$

3. Drugi je redak matrice **B**:

$$b_{22} = a_{22} - c_{21}\,b_{12}, \quad b_{23} = a_{23} - c_{21}\,b_{13}, \quad b_{24} = a_{24} - c_{21}\,b_{14},$$

pa je nakon uvrštenja odgovarajućih vrijednosti:

$$b_{22} = 0{,}74286, \quad b_{23} = -\,0{,}25000, \quad b_{24} = -\,0{,}10000.$$

4. Drugi je stupac matrice **C**:

$$c_{32} = \frac{b_{23}}{b_{22}} = -\,0{,}33654,$$

$$c_{42} = \frac{b_{24}}{b_{22}} = -\,0{,}13462.$$

5. Treći je redak matrice **B**:

$$b_{33} = a_{33} - c_{31}\,b_{13} - c_{32}\,b_{23}, \quad b_{34} = a_{34} - c_{31}\,b_{14} - c_{32}\,b_{24},$$

odnosno:

$$b_{33} = 0{,}66587, \quad b_{34} = -\,0{,}53365.$$

6. Treći je stupac matrice **C**:

$$c_{43} = \frac{b_{34}}{b_{33}} = -\,0{,}80144.$$

7. Četvrti je redak matrice **B**:

$$b_{44} = a_{44} - c_{41}\,b_{14} - c_{42}\,b_{24} - c_{43}\,b_{34} = 1{,}15885.$$

Nakon što smo odredili sve elemente možemo napisati:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & & & \\ \hline -0{,}28571 & 1 & & \\ \hline & -0{,}33654 & 1 & \\ \hline & -0{,}13462 & -0{,}80144 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

0,70000	−0,20000		
	0,74286	−0,25000	−0,10000
		0,66587	−0,53365
			1,15885

B. Prema formulama (8.15) i (8.16), elementi su inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$:

1. Četvrti stupac:

$$a_{44} = \frac{1}{b_{44}} = 0{,}86292,$$

$$a_{34} = -\frac{b_{34}\, a_{44}}{b_{33}} = 0{,}69158,$$

$$a_{24} = -\frac{b_{24}\, a_{44} + b_{23}\, a_{34}}{b_{22}} = 0{,}34891,$$

$$a_{14} = -\frac{b_{14}\, a_{44} + b_{13}\, a_{34} + b_{12}\, a_{24}}{b_{11}} = 0{,}09969.$$

2. Treći stupac:

$$a_{33} = \frac{1 - b_{34}\, a_{43}}{b_{33}} = 2{,}05606,$$

$$a_{23} = -\frac{b_{24}\, a_{43} + b_{23}\, a_{33}}{b_{22}} = 0{,}78504,$$

$$a_{13} = -\frac{b_{14}\, a_{43} + b_{13}\, a_{33} + b_{12}\, a_{23}}{b_{11}} = 0{,}22429,$$

3. Drugi stupac:

$$a_{22} = \frac{1 - b_{24}\, a_{42} - b_{23}\, a_{32}}{b_{22}} = 1{,}65732,$$

$$a_{12} = -\frac{b_{14}\, a_{42} + b_{13}\, a_{32} + b_{12}\, a_{22}}{b_{11}} = 0{,}47352.$$

4. Prvi stupac:

$$a_{11} = \frac{1 - b_{14}\, a_{41} - b_{13}\, a_{31} - b_{12}\, a_{21}}{b_{11}} = 1{,}56386.$$

Prema tome, inverzna matrica zadane matrice **A** glasi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1{,}56386 & 0{,}47352 & 0{,}22429 & 0{,}09969 \\ \hline 0{,}47352 & 1{,}65732 & 0{,}78504 & 0{,}34891 \\ \hline 0{,}22429 & 0{,}78504 & 2{,}05606 & 0{,}69158 \\ \hline 0{,}09969 & 0{,}34891 & 0{,}69158 & 0{,}86292 \\ \hline \end{array}.$$

Deveto poglavlje

Razuman se čovjek prilagođuje okolini, nerazuman uporno nastoji da okolinu prilagodi sebi. Stoga sav napredak ovisi o nerazumnom.

G. B. Shaw

UPOTREBA DIGITALNIH ELEKTRONIČKIH RAČUNALA U ANALIZI MREŽA

9.1. Općenito o digitalnim elektroničkim računalima

Poznato je da se *digitalna elektronička računala* danas upotrebljavaju u mnogim područjima ljudske djelatnosti. Bez njihove upotrebe današnji brzi razvoj tehnike bio bi gotovo nezamisliv. Osim u tehnici ta se računala upotrebljavaju i u svim ostalim primijenjenim znanostima, npr. u fizici, kemiji, astronomiji, biologiji, medicini itd., zatim u raznim granama kulturne i društvene djelatnosti, pri ekonomskim analizama, u trgovini i poslovanju banaka itd. Široj je javnosti naročito poznat njihov udio u dostignućima svemirske tehnike kojoj su zaista dali odlučujući poticaj.

Još donedavno mnogi problemi analize električnih mreža nisu bili rješivi samo zato što bi računanje pomoću stolnih računskih strojeva trajalo predugo, makar bi posao bio podijeljen i na više ljudi, pa čak i uz pretpostavku da oni pri računanju ne pogriješe. Moderne metode analize mreža ne bi zapravo još ni danas bile praktično primjenjive da to nisu omogućila upravo digitalna elektronička računala. To se podjednako odnosi na analizu ustaljenih ili stacionarnih stanja (raspodjela napona, struja i snaga u mreži za zadano pogonsko stanje, proračun kratkog spoja itd.), kao i na analizu prijelaznih stanja (dinamička stabilnost, određivanje prenapona u mreži itd.).

Prvo digitalno elektroničko računalo, kojega su osnovni princip rada zadržala i suvremena digitalna računala, zvalo se ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer). Građeno je od 1942. do 1945. god. na Pennsylvania univerzitetu u Sjedinjenim Američkim Državama, a konstruirali su ga J. P. Eckert i J. W. Mauchly. Ono je u svom unutarnjem radu koristilo elektronske cijevi i po tome spada u tzv. prvu generaciju digitalnih elektroničkih računala. Slijedile su potom još dvije generacije računala: jedna, u kojoj su se umjesto elektronskih cijevi upotrebljavali tranzistori, i slijedeća, izrađena u tehnici integriranih krugova. Spomenimo radi ilustracije da je već 1953. god. u SAD bilo u upotrebi oko pedesetak

računala, a da ih danas, kako se računa, ima oko sto tisuća. I u ostalim zemljama svijeta njihov se broj veoma brzo povećava.

U usporedbi s prvim digitalnim elektroničkim računalima, karakteristika je suvremenih računala u tome što računske operacije izvode mnogo brže, što imaju mnogo veću memoriju i što su mnogo elastičnija u radu nego starija računala.

Svrha je ovog poglavlja da samo informativno i u najkraćim crtama upozna čitatelja s osnovnim sastavom digitalnih elektroničkih računala, kao i s osnovnim pojmovima u vezi s njihovim radom, a zatim da uputi kako se na jednom od jezika računala — koji se zove FORTRAN — može za odabrani matematički model sastaviti program za računalo. Na kraju ćemo prikazati i rezultate rješavanja jednog zadatka što smo ga u petom poglavlju riješili pomoću olovke i papira.

Osnovni sastav digitalnog elektroničkog računala

Digitalna elektronička računala automatski su strojevi za računanje pomoću unutarnjeg programa kojeg osnovni sastav čine elektronički elementi što izvode osnovne računske operacije velikom brzinom, i to s brojevima koji imaju *diskretne vrijednosti*. Da se varijable u problemima izražavaju diskretnim vrijednostima istaknuto je u samom nazivu »digitalna računala«, naime riječ »digit« u engleskom jeziku znači znamenka. Ovo treba istaknuti zato što postoji još jedna skupina elektroničkih računala koja se nazivaju *analogna elektronička računala*, a karakteristika im je da računske operacije izvode s *kontinuiranim varijablama* koje predstavljaju istosmjerni naponi. Ovdje ćemo pod nazivom »elektronička računala« misliti isključivo na digitalna računala.

Bitno svojstvo digitalnog elektroničkog računala jest da pamti — bilo trajno, bilo privremeno — određen broj informacija. Informacije se spremaju u dio računala koji se naziva *memorija*, i to u obliku kombinacije pojedinih simbola. U većini suvremenih računala sve se informacije prikazuju kombinacijom od samo *dva* simbola ili dvije znamenke, dakle u *binarnom brojevnom sustavu* gdje su znamenke samo 0 i 1. Budući da se binarna znamenka naziva *bit* (skraćeno napisan engleski naziv *binary digit*), može se kazati da se jedna informacija sastoji od niza bitova. Niz bitova koji čini informaciju naziva se *riječ*.

Postoje dva osnovna tipa informacija ili riječi: jedno su *podaci* (brojevi ili tekst), a drugo su *naredbe* računalu. Iako su i podaci i naredbe sastavljeni od binarnih znamenaka, računalo je sposobno da razlikuje da li se u određenom slučaju radi o podatku (i to ili o broju ili o tekstu) ili o naredbi. Ovisno o tipu računala, bitovi se organiziraju u riječi od npr. 16, 24, 32, itd. bita.

U elektroničkim računalima brojeve zapravo predstavljaju električni impulsi kojima se u memoriji magnetiziraju određeni magnetski materijali u jednom ili drugom smjeru, pa se tako impulsi pamte. Jedno stanje magnetiziranja ima matematički vrijednost nula, a drugo vrijednost jedan. Kako je na taj način fizikalno jednostavno prikazati dvije znamenke (koliko ih ima binarni brojevni sustav), to je razlog zašto se u računalima upotrebljava baš taj brojevni sustav.

Svako digitalno elektroničko računalo ima tzv. *glavnu* ili *brzu memoriju* koja se sastoji od sitnih magnetskih jezgara, a redovito još i *vanjske* ili *pomoćne memorije* (ili »spore« memorije) što se sastoje od magnetskog sloja u kojem u gustom nizu nastaje odgovarajuće magnetiziranje. Vanjska memorija izvodi se u obliku magnet-

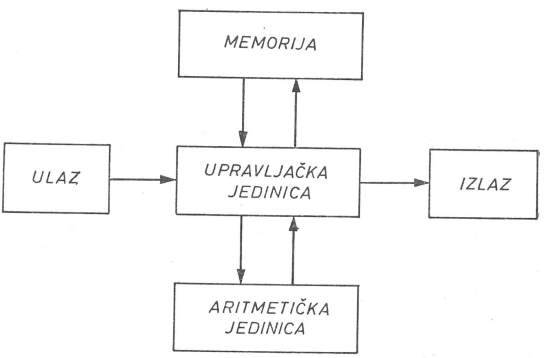
skih vrpci, magnetskih diskova i magnetskih bubnjeva, pri čemu se podaci zapisuju i čitaju pomoću magnetskih glava; ta memorija radi polaganije nego brza baš zato što je potrebno određeno vrijeme da magnetska glava dođe na položaj koji točno odgovara potrebnom bitu. Osim toga, dobra je strana te memorije u tome što se na razmjerno malom prostoru može spremiti veoma mnogo informacija. Za spremanje iste količine informacija u brzu memoriju to bi bilo veoma skupo.

Glavna je memorija sastavljena od određenog broja dijelova koji se sastoje od određenog broja magnetskih jezgara, a nazivaju se ćelije, pri čemu svaka ćelija ima svoju *numeraciju* ili *adresu*. Kako istovremeno u jednoj ćeliji može biti pohranjena samo jedna riječ, to je i položaj neke riječi u glavnoj memoriji poznat prema numeraciji ćelije.

Brojevi što su spremljeni u memoriji matematički se obrađuju u dijelu računala koji se naziva *aritmetička jedinica*. Taj dio računala sastoji se od nekoliko ćelija u kojima se izvode osnovne računske operacije. Složenije računske operacije od osnovnih stroj ne izvodi, pa se sve složenije računske operacije svode na osnovne. Osim izvođenja osnovnih računskih operacija, u aritmetičkoj se jedinici donose i neke logičke odluke, kao na primjer: je li neki broj u toj jedinici različit od nule ili je jednak nuli, odnosno je li broj pozitivan ili negativan. Na osnovi tih podataka čovjek može odlučiti na kojem mjestu stroj treba da nastavi s računanjem.

Dio računala što se naziva *upravljačka jedinica* usklađuje čitav rad računala. Taj dio upravlja redoslijedom izršavanja pojedinih instrukcija ili naredbi: naredbe najprije uzima iz memorije, te ih interpretira (npr. jedna kombinacija bitova koja čini riječ znači zbrajanje, druga kombinacija bitova znači množenje, itd.), a zatim na osnovi interpretacije upućuje vlastitim signalima aritmetičku jedinicu na određeno djelovanje.

Glavna memorija, aritmetička jedinica i upravljačka jedinica čine zajedno *centralnu jedinicu* računala. Osim centralne jedinice, računalo sadrži i tzv. *periferne jedinice*: to su *ulazne jedinice* i *izlazne jedinice*. Te jedinice omogućuju čovjeku komuniciranje s računalom jer mora postojati mogućnost da čovjek izvana dade podatke računalu i da računalo — nakon što podatke obradi — rezultate preda čovjeku. Uzajamna veza između jedinica računala prikazana je na slici 9.1. Sve jedinice računala zaedno nazivaju se jednim imenom *hardver*.



Sl. 9.1. Blok-shema digitalnog elektroničkog računala

Ulazne jedinice služe čovjeku za predavanje informacija računalu. U računalo se unose dvije vrste informacija: brojčane vrijednosti koje treba obraditi u računalu i program s naredbama kako te brojčane vrijednosti treba obraditi.

Postoji više načina kako da se brojevi i naredbe unesu u računalo. To se može učiniti pomoću bušenih kartica, bušene vrpce, pomoću magnetskog diska, magnetske vrpce ili ručno pomoću tastature slične onoj u pisaćeg stroja (na taj način radi se rijetko, jer je takvo unošenje podataka veoma sporo). Danas se podaci unose u računalo najčešće pomoću bušenih kartica. Pri bušenju kartica (kao i pri bušenju vrpci) primjenjuje se određeni kôd u kojem određena kombinacija rupica ima sasvim određeni smisao. Čitav snop kartica stavlja se u čitač kartica koji rupice na karticama interpretira kao bitove i to prenosi u centralnu jedinicu.

Rezultate računanja računalo predaje čovjeku putem izlaznih jedinica. Jedna od izlaznih jedinica koja se najčešće upotrebljava je štampač koji štampa rezultate u dekadskom brojevnom sustavu, a komentar slovima abecede na »beskonačnom« papiru određene širine, pri čemu čitav redak otisne najednom. Osim na štampaču, izlazne informacije mogu se dobiti i putem pisaćeg stroja; međutim to je mnogo sporije jer stroj piše znak po znak. Rezultati se zatim mogu predavati pomoću bušenih kartica, bušenih vrpci i magnetskih vrpci, ali tada rezultate treba posebno interpretirati. Osim spomenutih, kao izlazne jedinice upotrebljavaju se i neke što ne ostavljaju trajan trag, kao npr. ekran (sličan po izgledu ekranu televizora), na kojem se praktički momentano može pojaviti rezultat u nekoliko desetaka redaka s po stotinjak znakova u retku.

Postoji mogućnost da se rezultati prikažu i grafički, u obliku dijagrama. U tu svrhu se kao izlazna jedinica koristi tzv. crtač, koji grafički predoči rezultate na način kako mu se programom propiše.

Ako želimo da računalo pamti veći broj informacija nego što može stati u brzu memoriju, koristimo se pomoćnim memorijama. I u pomoćne memorije možemo spremiti osim brojeva i naredbe koje kažu kojim redom i kako treba obrađivati brojčane podatke. Informacije se pritom preko ulazne jedinice (npr. čitača kartica) unose u centralnu jedinicu, a odatle u pomoćnu memoriju (npr. na disk). S diska se informacije, kada je to potrebno, unose natrag u brzu memoriju (bilo da su to brojčani podaci, bilo naredbe) gdje se prema tim naredbama brojčane vrijednosti obrađuju. Međurezultati se mogu opet iz centralne jedinice spremiti na disk i ponovno s diska vratiti u centralnu jedinicu kada je to potrebno. Konačno, rezultati se mogu direktno iz centralne jedinice prenijeti u izlaznu jedinicu (npr. u štampač) i štampati ili na neki drugi način predati čovjeku. Isto tako, rezultati se mogu privremeno spremiti na disk, a kasnije opet pozvati u brzu memoriju preko koje se potom daju štampaču kao izlazna informacija.

Davanje podataka računalu

Podaci se računalu daju pomoću *brojeva*, *slova* i nekih *posebnih znakova* (takvi su npr. znakovi za neke računske operacije).

Davanje brojčanih podataka računalu danas je veoma jednostavno jer se brojevi daju računalu u dekadskom brojevnom sustavu. Na primjer , na tastaturi posebnog pisaćeg stroja, koji se naziva *bušilica kartica*, otipkamo broj na isti način kao što to radimo na običnom pisaćem stroju. Međutim, umjesto da se na papiru otisne znamenka — kao kod pisaćeg stroja— bušilica kartica izbuši rupicu u jednom stupcu na posebnom tvrdom papiru određenih dimenzija (tzv. kartica). Dakle, pojedinoj znamenci u svakom stupcu pripada samo jedno od deset mjesta koje kada je izbušeno ima značenje jedne znamenke. Prema tome, ako računalu želimo dati broj-

čanu vrijednost 123, na tastaturi bušilice kartica pritisnut ćemo redom tipke s oznakom 1, 2, 3. Pritom će se na kartici u jednom stupcu izbušiti rupica na mjestu koje na kartici odgovara znamenci 1, u slijedećem stupcu rupica na mjestu koje odgovara znamenci 2, i u slijedećem stupcu na mjestu koje odgovara znamenci 3. Kada tu karticu stavimo u čitač kartica, računalo će tu brojčanu vrijednost (koja je dana u dekadskom brojevnom sustavu) pretvoriti u binarni oblik i tako je spremiti u svoju memoriju. Ukupan broj stupaca na jednoj kartici danas je obično osamdeset (svaki stupac s dvanaest mjesta).

Pojedino slovo ili pojedini znak također se izbuše u pojedinom stupcu kartice, ali kao kombinacija od dvije ili više rupica.

Ako se podaci unose u računalo pomoću vrpce, a ne pomoću kartica, tada se na sličan način pomoću *bušača vrpce* izbuše rupice na posebnoj vrpci s određenim brojem kanala (npr. pet), pri čemu sada određena kombinacija rupica u kanalima odgovara pojedinoj znamenci, slovu ili znaku.

Programi za računalo

Da bi se iskoristila velika brzina kojom računalo izvodi računske operacije, ono je tako napravljeno da mu se najednom može dati čitav niz naredbi i uputa što i kojim redoslijedom treba da radi od početka rješavanja pa sve do izdavanja rezultata. Računalo dakle ne treba čekati nikakve dodatne upute tijekom rješavanja, pa to pospješuje brzinu njegova rada. Niz naredbi, uključivo s čitavim postupkom pri rješavanju određenog problema, naziva se *program*. Svaka slijedeća naredba u programu mora biti jednoznačno određena prethodnim naredbama i onim brojevima koji se već nalaze u memoriji računala.

Da bi se izrada programa olakšala i ubrzala, sastavljeni su tzv. *simbolički jezici* (danas su najpoznatiji FORTRAN, ALGOL i COBOL), prilagođeni čovjekovu načinu razmišljanja. Radi toga računalo mora imati mogućnost da simbolički jezik prevede u svoj tzv. *interni jezik*. U tu svrhu u računalo se unosi poseban program za prevođenje, tzv. *kompajler* pomoću kojeg računalo prevodi na svoj jezik naredbe što su na karticama izbušene u simboličkom jeziku.

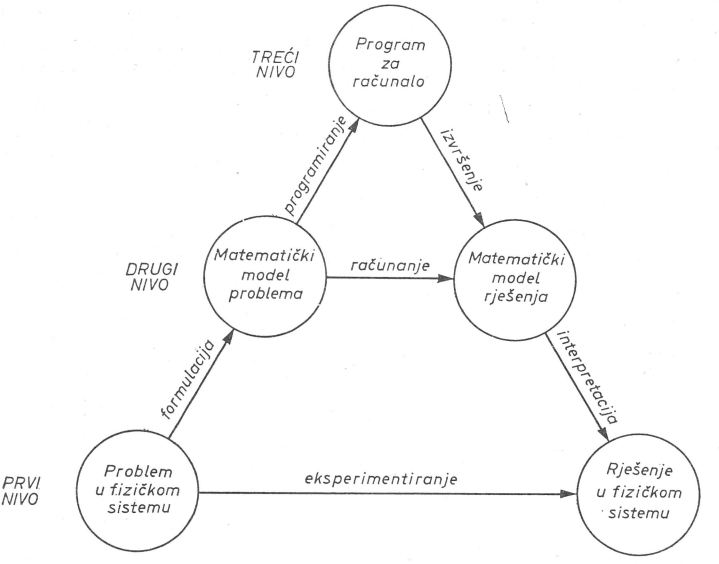
S unošenjem programa u računalo, zatim njegovim prevođenjem i spremanjem u memoriji završena je prva faza rada. Druga je faza izvršenje tog programa za zadane brojčane vrijednosti koje dajemo računalu tek nakon završene prve faze. Takav način rada, u dvije vremenski odvojene faze, omogućuje da se programi mogu izraditi veoma općenito, pa se isti program može upotrijebiti za rješavanje neograničenog broja istovrsnih zadataka. Na primjer, program za određivanje raspodjele struja u mreži metodom čvorišta bit će napravljen tako da se može upotrijebiti za bilo kakvu konfiguraciju modela mreže, pri čemu model mreže može imati bilo koji broj čvorišta i grana (do određene gornje granice), kao i proizvoljne vrijednosti uzbudnih struja i parametara pojedinih grana. Dakle, kada je program jednom izrađen, a njegova ispravnost provjerena, možemo se njime koristiti neograničen broj puta, pri čemu ćemo rezultate dobiti uvijek veoma brzo, bez obzira što smo unijeli nove podatke.

Treba spomenuti da su u programu za određeni simbolički jezik sadržani i *potprogrami* za složenije računske operacije (npr. za vađenje drugog korijena) i za neke najvažnije funkcije (npr. za sinus, logaritam i sl.). Osim toga, od proizvođača računala obično se dobiju i posebni programi, tzv. *rutine*, za rješavanje nekih ma-

tematičkih problema na koje češće nailazimo (npr. rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi, numeričko integriranje, itd.). Uz to suvremena računala imaju i posebne programe, tzv. *upravljačke programe*, koji upravljaju radom računala i tako dobrim dijelom operatere rasterećuju ručnog rada. Sve to zajedno nazivamo — za razliku od hardvera — jednim imenom *softver*.

Rješavanje tehničkih problema pomoću računala

Tehnički problemi redovito su zadani u fizičkom sustavu. Na primjer, ako između krajeva neke žice priključimo izvor električne energije (npr. jednu bateriju), možemo se pitati kolika će biti jakost struje u žici. Odgovor na to pitanje možemo naći eksperimentalnim putem tako da u strujni krug priključimo ampermetar; otklon kazaljke ampermetra direktno nam pokazuje jakost struje. Tako smo rješenje zadatka dobili neposredno u fizičkom sustavu: nazovimo to rješavanjem na prvom nivou (v. sl. 9.2). Tako se redovito radi kada se počinje istraživati neki novi tehnički problem.



Sl. 9.2. Mogućnosti rješavanja tehničkog problema

Međutim, na temelju nekih eksperimentalnih podataka problem često možemo matematički formulirati pomoću izraza koji opisuju funkcionalnu ovisnost između pojedinih veličina: to je tzv. matematički model problema. U spomenutom primjeru matematički je model poznata jednadžba Ohmova zakona prema kojoj je jakost struje u žici jednaka naponu između krajeva žice podijeljenom električnim otporom žice. Uz poznati napon i poznati otpor dobivamo jednostavnim računom traženu struju. Taj rezultat predstavlja tzv. matematički model rješenja. Općenito se, u složenijim problemima od ovoga, traženo rješenje u fizičkom sustavu dobije

tek nakon interpretacije matematičkog modela rješenja. Nazovimo to rješavanjem na drugom nivou.

Rješavanje na drugom nivou ima određene prednosti, ali i nedostatke, u usporedbi s postupkom eksperimentiranja. Prednost može biti u tome što na raspolaganju ne moramo imati fizički sustav (u nekim slučajevima to nije ni moguće), pa do rješenja dolazimo »pomoću olovke i papira«. Nedostatak je obično u tome što je matematički model problema ponekad prilično teško formulirati; isto je tako ponekad teško pronaći prikladne metode rješavanja, pa je rješavanje problema često veoma dugotrajno. No ovdje nam danas pomažu elektronička računala, jer ona izvode računske operacije veoma velikom brzinom, neuporedivo brže u odnosu prema brzini kojom računa čovjek. Na temelju poznatog matematičkog modela sastavi se program za elektroničko računalo, koji sadrži i postupak računskog rješavanja problema. Nakon što se program izvede u računalu, dobivamo matematički model rješenja koji zatim treba interpretirati. Takvo rješavanje nazovimo rješavanjem na trećem nivou.

I rješavanje na trećem nivou ima prednosti i nedostatke. Prednosti su u tome što se program može izraditi prilično općenito, tako da se može koristiti mnogo puta za razne zadatke istog tipa; pritom je računanje veoma brzo i točno i ne zahtijeva utrošak ljudskog truda. Nedostatak je uglavnom u tome što izrada programa traje prilično dugo, a i cijena nabave računala razmjerno je visoka. Međutim, dobrim korištenjem računala taj se novac brzo vrati korisniku računala, što dokazuje brz porast upotrebe računala u svim zemljama.

9.2. Uvod u tehniku programiranja

Osnovno o organizaciji rada

Osnovni princip kojeg se moramo pridržavati prilikom pripremnih radova, organizacije programa, njegova pisanja u simboličkom jeziku i izvođenja u računalu sastoji se u tome da čitav taj složeni rad podijelimo u *pojedine faze*. Već prema tome radi li se o većem ili manjem poslu, broj faza može biti veći ili manji. Radi olakšanja cijeli posao možemo raspodijeliti tako da svaka faza za sebe čini zaokruženu cjelinu. Pri manjem poslu pojedine faze mogu se spojiti zajedno. Pritom faza treba da bude toliko široka da čitav posao koji ona uključuje možemo razmjerno lako odjednom sagledati.

Tek nakon što je završena jedna faza rada pristupamo izradi slijedeće faze, pri čemu korak koji činimo unaprijed ne smije biti prevelik kako ne bismo izgubili potpunu kontrolu nad našim vlastitim radom. Takva nam raspodjela olakšava rad i smanjuje mogućnost da načinimo grešku.

Jedna od tipično loših navika pri programiranju, naročito u početnika, jest da želimo raditi prevelike korake. Na primjer, često želimo da program napišemo odmah u FORTRAN-u, iako problem još nismo potpuno razjasnili u svojoj glavi. Takav način rada nije preporučljiv, jer je — iako možda tako na prvi pogled ne izgleda — teži i naporniji od postupnog, a osim toga uzrokom je mnogih pogrešaka, ispravljanje kojih kasnije zahtijeva mnogo truda, vremena i umnog napora.

O pojedinim fazama rada posebno ćemo govoriti. Međutim, treba naglasiti da pojedine faze rada svatko može prilagoditi svome znanju, iskustvu, pa i navikama. Ali pritom uvijek moramo poštovati princip da prijelaz iz jedne faze u drugu treba da bude pregledan i lak, da ne izaziva poseban umni napor i da čitav taj dio rada — kao cjelina — treba da bude obuhvaćen i držan pod kontrolom.

Kao što smo rekli, kod jednostavnijih problema možemo nekoliko faza rada spojiti zajedno u jednu fazu. Nasuprot tome, pri rješavanju složenijeg problema može se pojaviti potreba da se pojedine faze rada rastave na više sastavnih dijelova. Na primjer, opsežan se program redovito rastavlja u dijelove, pa se svaki dio posebno razrađuje; tek nakon što je završen taj dio posla, pojedini se dijelovi povežu u jedan jedinstveni program.

Prilikom rada treba uvijek imati na umu spomenuti princip — princip rada korak po korak. Jedna od prednosti toga principa sastoji se u tome što se u nekim slučajevima rad može organizirati tako da se — nakon što se pojedine faze rada raščlane u dijelove — rad na njima povjeri različitim ljudima koji mogu raditi istodobno. Kasnije se ti dijelovi povežu u jednu fazu. Prednost je takve organizacije u tome što se pritom možemo koncentrirati na uži dio posla i lakše ga uspješno savladati. Tek nakon što jednu fazu rada završimo i provjerimo, možemo prijeći na slijedeću fazu rada.

Faze rada možemo podijeliti ovako:

1. analiza problema,
2. organizacija programa,
3. programiranje,
4. korištenje programa.

Analiza problema

Analizu problema možemo raščlaniti u slijedeće tri faze: sazrijevanje problema, sređivanje problema i postavljanje cilja.

Sazrijevanje problema. Nakon što se neki problem pojavio, on se u nama razvija i sazrijeva sve dok nam se ne učini da možemo pristupiti njegovu rješavanju. To je općenito; ovdje međutim mislimo na probleme koji sazriju u tom smislu da ih možemo riješiti pomoću elektroničkog računala.

Uzroci postojanja te faze znatnim su dijelom izvan nas samih. Možemo ih nazvati objektivnim uzrocima. Naime, problem u prvo vrijeme redovito doživljavamo samo pasivno. Od mnogih problema koje susrećemo redovito su samo neki od njih takvi da — po samoj njihovoj naravi — zahtijevaju upotrebu elektroničkih računala, dakle takvi su samo zbog objektivnih uzroka. Za većinu ostalih problema čovjek tek treba doći do spoznaje da je i njih moguće i korisno rješavati pomoću računala. Čovjek zapravo u tu fazu rada treba da unese osobnu notu tako da:

— razmišlja o tome koji bi se problemi mogli rješavati pomoću računala, te da svaku ideju zabilježi i to kasnije sredi;

— zainteresira i druge ljude da o istom problemu razmišljaju;

— vodi razgovore o tome koji bi se problem mogao rješavati pomoću računala,

— organizira javne razgovore o tome.

Sređivanje problema. Sve ono do čega smo došli dok je problem u nama sazrijevao, dakle sve ono što nam je u mislima i sve ono što imamo pribilježeno o problemu, treba u drugoj fazi, u okviru analize problema, da bolje razjasnimo i sredimo. Na primjer, to ćemo uraditi tako da napišemo najprije naslov problema, a zatim sve ono što o tome znamo, i to na što sređeniji način. Pritom je poželjno da istaknemo sve pojedinosti, npr. u čemu se sastoji problem, koja je korist od riješenog problema, na koji način bi se problem mogao riješiti. Isto tako moramo utvrditi koje podatke trebamo, s kojima od tih podataka raspolažemo, a koje ćemo morati potražiti, te kakva je valjanost tih podataka s obzirom na problem. Također moramo analizirati i to koju ćemo korist od rezultata i zaključaka postići rješavanjem problema pomoću računala, jer iz toga mogu slijediti daljnji zahtjevi pri izradi programa.

Postavljanje cilja. U svakom slučaju korisno je da postavljanje cilja posebno razmotrimo, naročito kod složenijih problema. Naime, cilj treba da odredimo unaprijed, i to posve jasno. To je važno naglasiti zato što se često ne smatra dovoljno važnim da unaprijed točno predvidimo koje sve rezultate očekujemo i trebamo, već se smatra da je za početak dobro ako dobijemo samo neke od rezultata. Međutim, kada rezultate dobijemo, naše se želje povećaju, pa program želimo naknadno promijeniti, što ne samo da zahtijeva mnogo vremena nego je i izvor pogrešaka u programu. Mnogo je racionalnije da odmah u početku sagledamo (ako je to moguće) koje sve rezultate trebamo. Program izrađen na osnovi jasnog cilja bit će organiziran na najefikasniji način i nikakve naknadne izmjene i modifikacije u programu neće biti potrebne.

Organizacija programa

Ovdje možemo razaznati uglavnom slijedeće tri faze: *koncept rješenja*, *organizaciju programa* i *tok programa*.

Koncept rješenja. U ovoj fazi treba donijeti odluku kako ćemo doći do rješenja. Pri rješavanju tehničkih problema ovdje treba obuhvatiti i matematički postupak. Pod time ne mislimo na izvode pojedinih formula, jer njih nije potrebno ovdje obuhvatiti, već samo na konačne izraze kojima ćemo se direktno koristiti pri pisanju programa.

Najbolje je tom poslu pristupiti tako da najprije riječima opišemo pojedine postupke, i to redom točku po točku: riječima opišemo što treba raditi, a po potrebi to još i dopunimo matematičkim izrazima. Tako postavljamo prvi koncept. Pri tome poslu često se dogodi da se neki postupak ponavlja. Kada to primjetimo, nije više potrebno ponovno pisati pojedine točke, već jednostavno ustvrdimo da se čitav taj i taj postupak ponavlja dotle i dotle.

Nakon što smo sastavili prvi koncept rješenja, pristupit ćemo njegovu pregledu i redovito modifikaciji i dotjerivanju. U prvom redu, one dijelove koji se ponavljaju obuhvatit ćemo samo u jedan niz postupaka, s naznakom kako se ponavljaju. Nadalje, pregledat ćemo ima li dijelova koji se sastoje od istih matematičkih postupaka. Ako ima, uvrstit ćemo ih u program kao potprograme kako ih ne bi ponavljali na različitim mjestima u programu. Sve nove ideje do kojih dođemo pregledom prvog koncepta prikladno je da naznačimo u istom konceptu drugom bojom, tako da nam prvi koncept ostane potpuno sačuvan. Na temelju izvršenih promjena napišemo zatim uredno drugi koncept.

Nakon što smo potpuno zadovoljni konceptom rješenja, moramo analizirati uvjete kojima se do rješenja dolazi. U tom dijelu posla nastojimo sagledati sve mogućnosti koje se pri rješavanju mogu pojaviti, a zatim kontroliramo kako naš koncept rješenja zadovoljava s obzirom na pojedine uvjete. Radi ilustracije uzmimo kao primjer rješavanje kvadratne jednadžbe koja u općem obliku sadrži koeficijente *a*, *b* i *c*. Nakon što smo utvrdili koncept rješenja, istražujemo koji se sve mogući slučajevi pri rješavanju mogu pojaviti s obzirom na vrijednosti koeficijenata. Na primjer, kako će se na rješavanje odraziti ako je koeficijent *a* jednak nuli, što će biti ako je *b* jednak nuli, a što ako je *c* jednak nuli. Za svaki od spomenutih slučajeva moramo kontrolirati da li će postavljeni koncept dovesti do ispravnog rješenja. Ako to ne učinimo, može se dogoditi da u tim posebnim slučajevima naš program zataji. Ako smo o tim mogućnostima mislili već pri pisanju koncepta, tada smo u ovom primjeru rješavanja kvadratne jednadžbe vjerojatno već u konceptu predvidjeli tri mogućnosti: kako postupiti ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe veća od nule, kako ako je manja od nule, a kako ako je jednaka nuli. Iz ovog primjera vidimo da često postoje daljnje mogućnosti koje moramo predvidjeti ako želimo da nam program ima opće značenje.

Pojedine točke u konceptu ne moramo razraditi sasvim detaljno, a to ovisi o tome u kojoj su mjeri one važne za pisanje ostalih točaka u konceptu. Na primjer, u jednoj točki možemo napisati samo »štampanje rezultata«. Tu točku ćemo tek kasnije, u jednom od slijedećih koncepata, rastaviti na veći broj točaka ako nam je u danom momentu glavni problem razrada matematičkog postupka. Međutim, ako je štampanje rezultata u vezi s računanjem, očito je da zajedno s matematičkim postupkom moramo odmah i tu točku detaljno razraditi, odnosno »štampanje rezultata« rastavit ćemo na veći broj točaka. U svakom slučaju, koncept rješenja mora obuhvatiti *čitav problem* od početka do kraja; on mora biti potpuno zaokružena cjelina; tek nakon što izradimo potpuni koncept rješenja možemo, ako je potrebno, prijeći na njegovo dotjerivanje, odnosno na pisanje novog oblika koncepta rješenja.

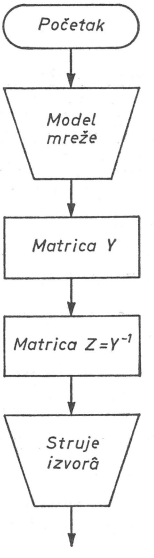
Organizacija programa. Već pri pisanju koncepta možemo uočiti kako će program biti organiziran. Ovdje ćemo navesti nekoliko tipičnih oblika organizacije programa. Pritom ćemo organizaciju programa prikazati *blok-shemom*, koja je zapravo zbiti oblik sheme toka, o kojoj ćemo kasnije podrobnije govoriti. Stoga pri crtanju blok-sheme možemo upotrebljavati iste grafičke simbole što se upotrebljavaju i pri crtanju sheme toka.

Blok-shemom obuhvaćen je u okviru pojedinih simbola složeniji postupak nego u shemi toka, tako da u okviru jednog simbola redovito obuhvaćamo čitavu jednu rutinu. Radi ilustracije uzmimo dio jednog programa za određivanje raspodjele struja metodom čvorišta. Možemo raditi tako da najprije učitamo vrijednosti parametara pojedinih grana modela mreže, zatim da sastavimo matricu admitancija čvorišta, nakon toga da inverzijom matrice **Y** odredimo matricu impedancija čvorišta **Z**, potom da učitamo vrijednosti uzbudnih struja, itd. U obliku blok-sheme to prikazujemo na slici 9.3.

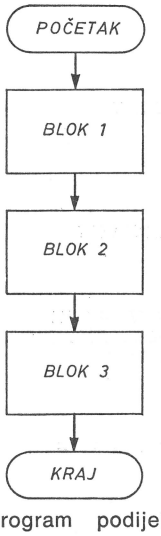
Kod većih i složenijih programa obično radimo tako da program rastavimo na blokove, a svakom bloku pridamo neko ime. Blok-shema tada izgleda kao ona na slici 9.4. Podjelu na blokove izvršimo tako da svaki blok za sebe čini zaokruženu cjelinu. Tako svaki blok možemo razraditi sam za sebe — odvojeno od ostalih blokova. Tako radimo zato što nam je na taj način lakše sastaviti čitav program.

Ako program sastavlja jedan čovjek, rad mu je olakšan već time što se može koncentrirati najprije samo na jedan blok dok ga ne završi; nakon toga može se koncentrirati na sastavljanje drugog bloka, itd., dok ne razradi sve blokove, odnosno čitav program. Organiziramo li posao tako da program sastavlja istodobno više ljudi, svaki čovjek razrađuje po jedan blok koje potom sastavimo u cjelinu.

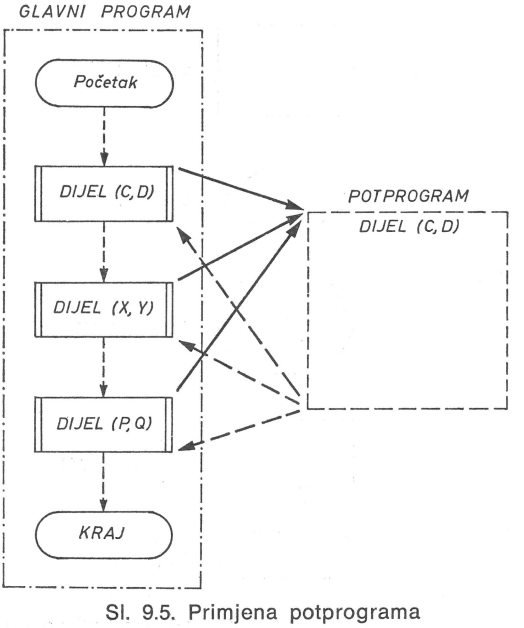
Ako se pri izvršenju programa neka rutina proizvoljan broj puta ponavlja, i to na proizvoljnim mjestima u programu, pa čak i s proizvoljnim varijablama, ali uvijek s istim načinom obrade, možemo za to izraditi samo jedan potprogram, koji na odgovarajućim mjestima u glavnom programu pozovemo na izvršenje. S tim se, dakako, skraćuje dužina čitavog programa, što je povoljno kod pisanja programa, kod kompajliranja i kod prenošenja u brzu memoriju prilikom izvođenja programa. Naročito je povoljno to što se pri svakom izvođenju programa mogu uzeti druge varijable koje kao argumente stavimo u poziv potprograma. Blok-shema za takav slučaj prikazana je na slici 9.5.



Sl. 9.3. Primjer dijela blok-sheme



Sl. 9.4. Program podijeljen u blokove



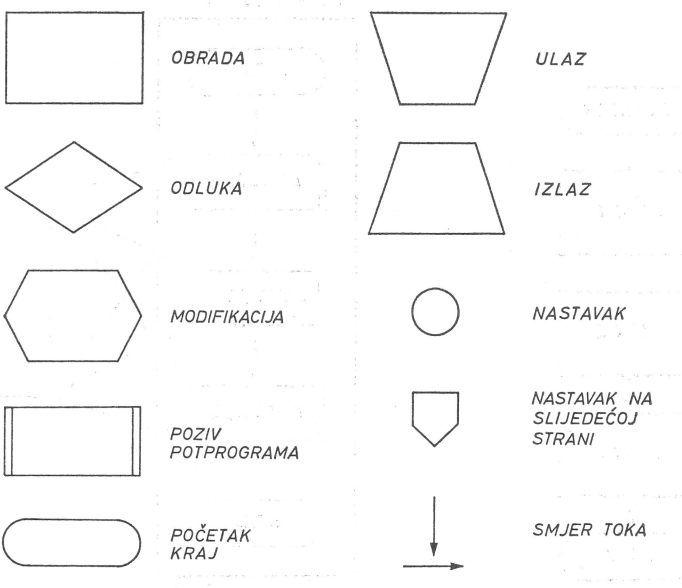
Sl. 9.5. Primjena potprograma

Spomenimo još i tzv. matematičku blok-shemu. U blok-shemi o kojoj smo do sada govorili u pojedine grafičke simbole upisujemo riječima koje se operacije ili koje se skupine operacija izvode. U problemima u kojima su matematičke podloge dovoljno opširne, korisno je izraditi i takvu blok-shemu u koju se upišu matematički izrazi što se upotrebljavaju. Takvu blok-shemu s upisanim matematičkim izrazima nazivamo matematička blok-shema. Ona nam bitno olakšava kasniju izradu sheme toka.

Tok programa. Tok programa ili, drugim riječima, redoslijed svih operacija prikazujemo pomoću *sheme toka*. Shema toka ima svrhu da nam što preglednije prikaže tok izvršenja programa. Radi toga shemu toka treba crtati tako da jedan crtež predstavlja zaokruženu cjelinu. Ona mora biti toliko detaljna da na temelju nje možemo direktno napisati program u simboličkom jeziku, npr. u FORTRAN-u. Međutim, ona ne smije biti previše detaljna jer tada postaje nepreglednom. Preglednost takve sheme toka možemo poboljšati tako da je uočljivo podijelimo u dijelove, a svakom dijelu damo naslov koji mu odgovara.

Sređivanje sheme toka zapravo je prekretnica u radu. Naime, sve što smo do tog trenutka radili mora se naći u shemi toka, a iz toga slijede i daljnje faze rada. Prema tome, ako u daljnjim fazama rada učinimo nešto što nije u skladu sa shemom toka, to moramo u nju naknadno unijeti.

Pri crtanju sheme toka grafičke simbole upotrebljavamo uvijek u istom značenju, pa tako ne moramo pisati mnogo teksta, što povećava preglednost sheme. Nažalost, ti simboli još nisu potpuno unificirani, pa postoji više simbola s istim značenjem. Simboli koje ćemo ovdje upotrebljavati prikazani su na slici 9.6.



Sl. 9.6. Simboli za crtanje sheme toka

Pri izradi sheme toka treba da izvršimo i organizaciju ulaznih podataka. Pritom treba odrediti kojim će redom ulazni podaci biti učitavani u računalo i kako će biti smješteni na kartice. Treba naglasiti da se u tehničkim problemima radije polaže važnost na preglednost podataka na karticama nego na iskorištenje svih raspoloživih stupaca u kartici.

Izlazne podatke poželjno je organizirati tako da pri upotrebi budu što pregledniji. To naročito vrijedi ako je broj izlaznih rezultata velik. Tada ćemo, na primjer, izlazne rezultate organizirat u obliku tablice, ali pritom moramo imati na umu mogućnosti štampača.

Programiranje

Nakon što smo završili dvije već opisane faze rada, koje smo nazvali analiza problema i organizacija programa, pristupamo slijedećoj fazi rada koju nazivamo *programiranje*. Pritom razlikujemo slijedeće korake:

1. pisanje programa,
2. testiranje programa,
3. izrada uputa za korištenje programa.

Pisanje programa. Program pišemo na osnovi sheme toka u jednom od postojećih simboličkih jezika, npr. u FORTRAN-u, ALGOL-u ili COBOL-u.

Opći princip koji vrijedi za prethodne faze — a koji kaže da treba izbjegavati bilo kakvo mijenjanje onoga što je već načinjeno — treba, po mogućnosti, biti ispunjen i pri pisanju programa jer je svako naknadno mijenjanje izvor pogrešaka. Kada je već jednom odabran simbol ili naziv za jednu varijablu, ili kada je odabran broj neke naredbe, najpoželjnije je da ih više ne mijenjamo, iako će nam se ponekad učiniti da bi neki drugi simbol ili numeracija bili prikladniji.

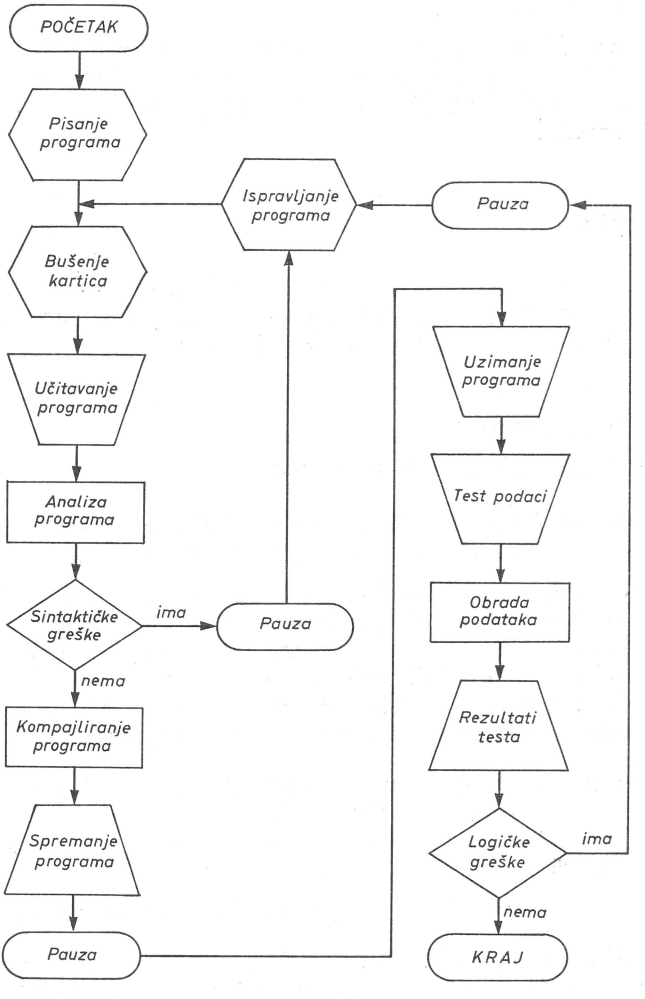
Testiranje programa. Kada je program u simboličkom jeziku napisan, treba ga, kao prvo, testirati, ili, drugim riječima, treba provjeriti nema li u programu grešaka bilo koje vrste. Ako ne provjerimo ispravnost programa, ne možemo smatrati da je program završen i ne možemo ga početi izvoditi.

Pri testiranju programa obraćamo pažnju na dvije vrste pogrešaka:

1. Sintaktičke pogreške: kada su naredbe neispravno napisane, pa ih računalo uopće ne prihvaća jer ne odgovaraju pravilima simboličkog jezika.
2. Logičke pogreške: kada napisani program ne odražava postupak koji smo mi željeli provesti, iako su naredbe u simboličkom jeziku ispravno napisane, a računalo bi ih prihvatilo.

Program testiramo za pisaćim stolom ili na računalu. Testiranje za pisaćim stolom rasterećuje računalo, ali opterećuje čovjeka. Pritom na osnovi napisanog programa ili sheme toka, ako je ona dovoljno detaljno razrađena (i, dakako, nakon što smo provjerili da pri pisanju programa u simboličkom jeziku prema toj shemi toka nisu učinjene pogreške), izradimo jedan ili više zadataka istim redoslijedom koraka kojim će raditi i računalo pri izvršenju programa. Obično nastojimo oda-

brati što jednostavnije i kraće zadatke s obzirom na vrijeme koje je potrebno za njihovo rješavanje, ali pritom moramo paziti da zadaci budu takvi da su u njima obuhvaćene sve mogućnosti koje se tijekom primjene programa mogu pojaviti.



Sl. 9.7. Testiranje programa na računalu

Čitav postupak pri pisanju programa i njegovu testiranju na računalu prikazan je na slici 9.7. Kao što vidimo, računalo najprije analizira naredbe napisane u simboličkom jeziku i pritom traži eventualne sintaktičke pogreške. Ako na takve pogreške naiđe, računalo ih odštampa, a zatim obustavi rad. U tom slučaju moramo napisati nove, ispravne naredbe, zamijeniti odgovarajuće kartice, te ih dati računalu koje će postupak ponoviti. Kako više ne nailazi na sintaktičke pogreške, računalo program do kraja kompajlira i prevodi u svoj interni jezik. Nakon što učita i dane podatke, računalo pristupa izvršenju programa u užem smislu, obra-

đujući učitane brojčane veličine onako kako mu je to propisano programom. Posljednji je korak pri izvršenju programa štampanje izlaznih rezultata. Time je računalo svoj posao završilo. Nakon toga čovjek pažljivo pregledava rezultate. Ako utvrdimo da rezultati nisu ispravni, moramo prići traženju logičkih pogrešaka u programu. Ako logičkih pogrešaka ima, rad s računalom privremeno se prekida sve dok se ne napiše program bez uočenih pogrešaka i dok se ne izbuše ispravne kartice. Postupak s računalom zatim ponavljamo, i to sve dotle dok ne utvrdimo da u programu više nema logičkih pogrešaka. Tek tada možemo reći da je program spreman za upotrebu.

Upute za korištenje programa. Ako je program opsežniji, korisno je izraditi uputu za njegovo korištenje. Ta uputa može poslužiti ne samo drugim ljudima koji će raditi s tim programom nego i nama samima kada se budemo, nakon nekog vremena, opet koristili tim programom. Koliko će uputa biti opsežna ovisi prvenstveno o naravi samog programa.

Korištenje programa

Na kraju čitava rada dolazi posljednja faza: testirani program treba što svrsishodnije pripremiti za korištenje. Pritom mislimo na izradu dokumentacije o programu i na spremanje programa.

Izrada dokumentacije. Sve što smo radili tijekom sastavljanja programa korisno je da sakupimo na jednom mjestu, npr. u obliku elaborata koji onda predstavlja potpunu dokumentaciju o tom programu. Radi ilustracije navedimo redom što takav elaborat treba da sadrži:

1. NASLOV
2. PROBLEM
   - — Raspoloživi podaci
   - — Traženi rezultati
3. ZADATAK
4. REZULTATI
   - — Tablica rezultata
   - — Grafički prikaz rezultata
   - — Zaključci koje donosi računalo na osnovi rezultata
5. MATEMATIČKA PODLOGA ZA RJEŠAVANJE
   - — Oznake
   - — Matematičke formule
   - — Algoritam
6. BLOK-SHEMA
   - — Principi izrade programa

7. SHEMA TOKA
8. PROGRAM
9. TESTIRANJE
   — Podaci
   — Rezultati
10. UPUTA ZA KORIŠTENJE PROGRAMA
   — Mogućnosti programa
   — Redoslijed podataka
11. TRAJANJE PROGRAMA

Spremanje programa. Program možemo spremiti na više načina, npr.:

— u obliku liste s naredbama programa koju po našoj želji računalo odštampa prilikom učitavanja i kompajliranja programa;
— kao skup bušenih kartica koje sadrže čitav program u simboličkom jeziku;
— kao skup kartica izbušenih u binarnom kodu. Te se kartice izbuše tako da se kompajlirani program s diska prenese na kartice u internom jeziku računala. Prednost je tog načina u tome što tako dobivamo mnogo manji broj kartica nego kada je program pisan u simboličkom jeziku. Osim toga, ponovno učitavanje programa u ovom je slučaju mnogo brže, jer nije potrebno kompajliranje, nego samo prenošenje bitova u brzu memoriju;
— u obliku bušene vrpce, itd.

Izvršenje programa

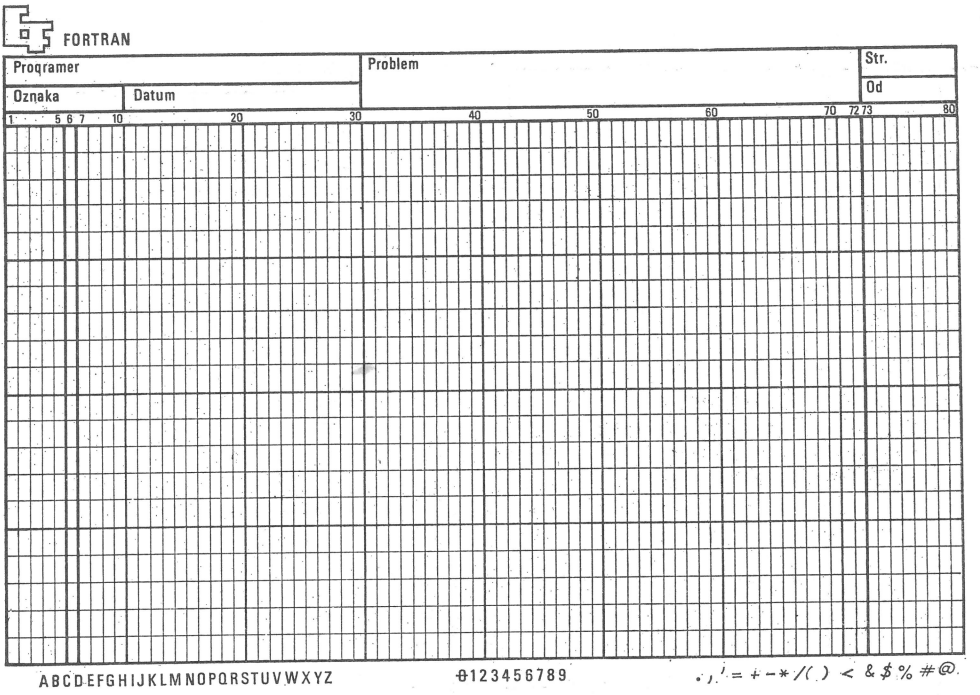
Kada je tako sve u vezi s izradom programa završeno, programom se možemo koristiti, tj. možemo pristupiti izvršenju programa uz zadane podatke.

9.3. Osnove simboličkog jezika FORTRAN

Konstrukcija FORTRAN-a

Simbolički jezik FORTRAN (naziv je kraćenje od FORmula TRANslation) služi čovjeku da dovoljno lako napiše program s nizom naredaba koje će računalo jednoznačno razumjeti. U FORTRAN-u primjenjujemo, koliko god je to moguće, uobičajeni način pisanja brojeva, uobičajeno matematičko označavanje i riječi iz engleskoga jezika s odgovarajućim značenjem. Radi jasnijeg definiranja značenja program u FORTRAN-u pišemo *na posebnom obrascu* s osamdeset stupaca (slika 9.8), a svakom retku obrasca odgovara jedna bušena kartica (koja također ima osamdeset stupaca).

FORTRAN se s vremenom razvijao, pa postoji nekoliko njegovih varijanata, npr. FORTRAN II, FORTRAN IV, FORTRAN V. I unutar iste varijante postoje razlike, već prema tome što je za pojedino računalo usvojio njegov proizvođač.



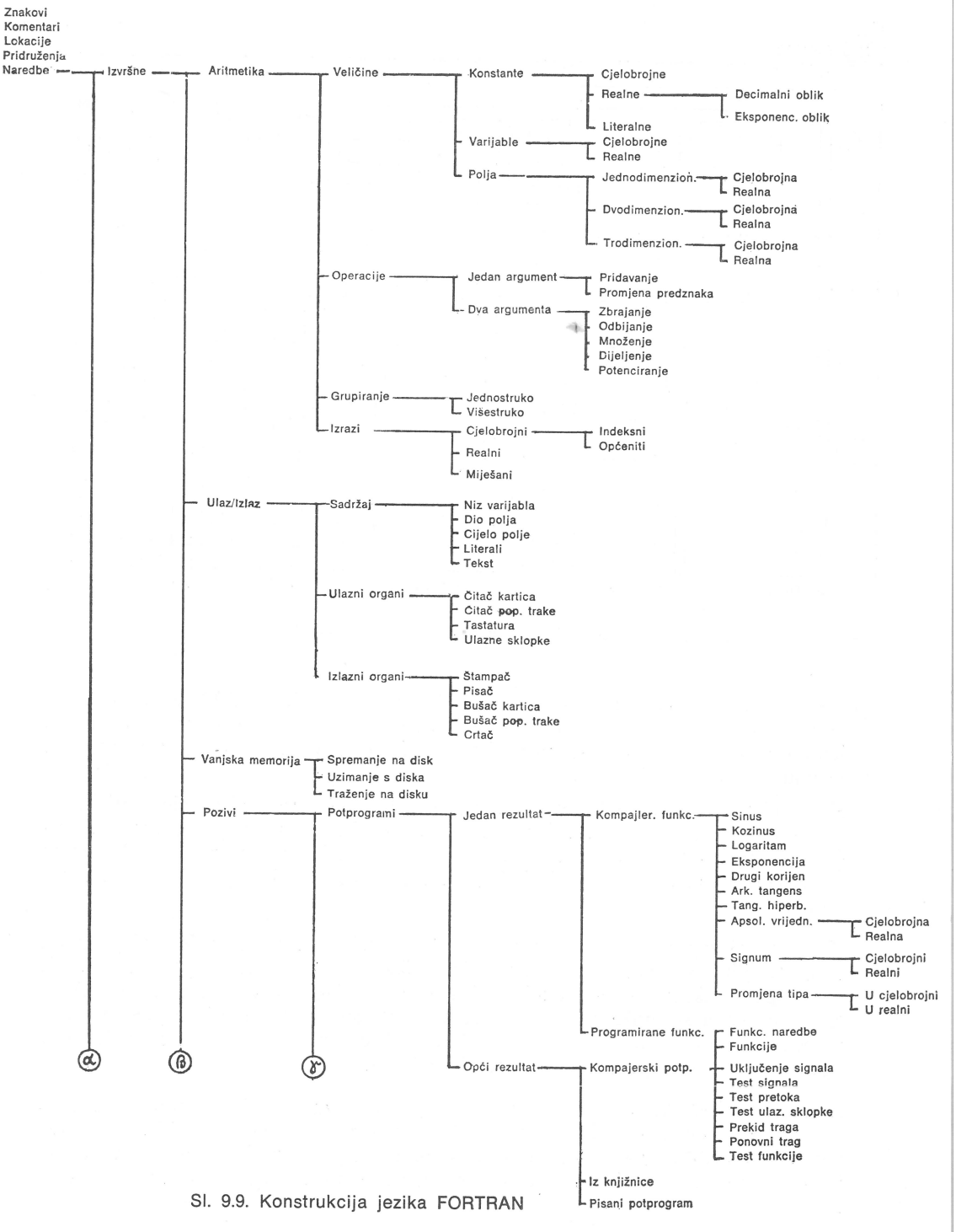
Sl. 9.8. Obrazac za pisanje programa u FORTRAN-u

Ovdje ćemo u glavnim crtama opisati konstrukciju FORTRAN-a za računalo IBM 1130; to je skraćena verzija FORTRAN-a IV. U daljnjem ćemo tekstu radi jednostavnosti pisati samo »FORTRAN«, što će se odnositi isključivo na spomenutu verziju.

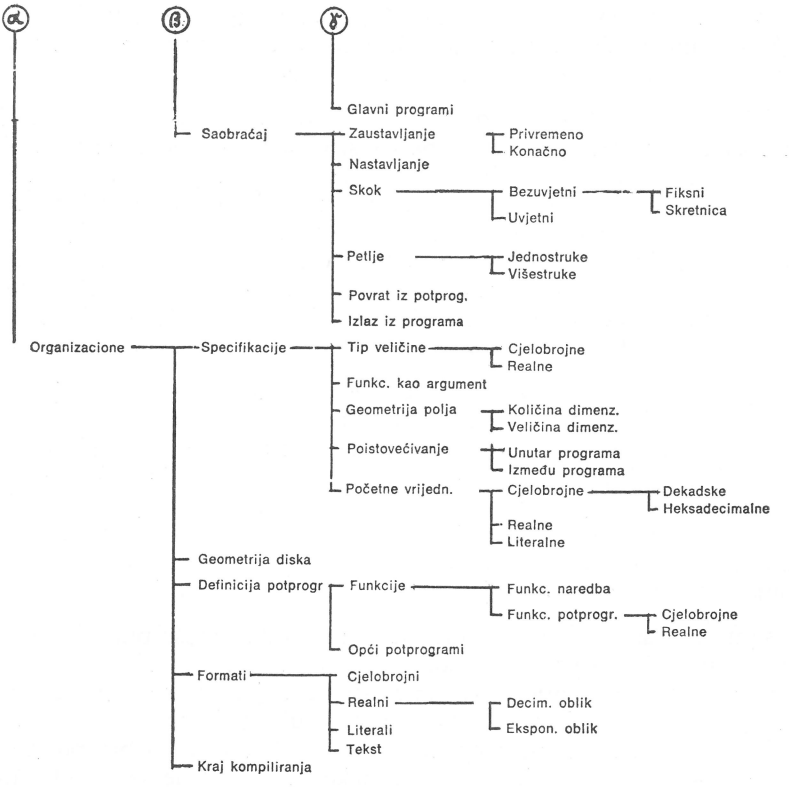
Konstrukcija FORTRAN-a prikazana je na slici 9.9. Osnovni su elementi jezika velika slova engleske abecede (od A do Z), znamenke dekadskog brojevnog sustava (od 0 do 9) i posebni *znakovi* (npr. + — * / = , itd). Od tih osnovnih elemenata sastavljaju se složeni elementi jezika, i to: komentari, lokacije, produženja i naredbe.

Komentari zapravo nisu dio programa, i kompajler ih zanemaruje, već program pomoću njih postaje čovjeku preglednijim. Pišu se tako da se u prvi stupac upiše C, a iza toga se piše komentar, u koju svrhu se mogu iskoristiti svi daljnji stupci. Osim toga, komentar se može pisati u stupcima 73 do 80, jer ono što je napisano u tim stupcima kompajler ne uzima u obzir. Tu se obično piše tzv. identifikacija kartice, npr. skraćeno ime programa i redni broj kartice.

Lokacije određuju položaj naredbi u programu. One se pišu unutar prvih pet stupaca kao bilo koji broj od 1 do 99999, bez obzira na redoslijed. Služe kao numeracija naredbe koja je napisana u istom retku obrasca (odnosno izbušena na istoj kartici), pa se pozivom na broj naredbe možemo u programu pozvati na samu naredbu.



Sl. 9.9. Konstrukcija jezika FORTRAN



Sl. 9.9. (nastavak). Konstrukcija jezika FORTRAN

Produženja su potrebna ako za naredbu nema mjesta u jednom retku. U tom slučaju može se za istu naredbu iskoristiti najviše pet slijedećih redaka. Pritom se u šestom stupcu svakog produžetka mora upisati bilo koji znak osim nule. Prvi redak naredbe mora u šestom stupcu imati bilo nulu bilo bjelinu (pod riječi »bjelina« razumjeva se da nije upisano ništa).

Naredbe se pišu od 7. do 72. stupca. U pravilu se jedna naredba piše u jednom retku; međutim, može se upotrijebiti do pet produženja. Naredbe dijelimo na izvršne i organizacijske. Izvršne naredbe dolaze do izražaja pri izvršenju programa (tj. pri njegovoj primjeni u rješavanju određenog zadatka). Organizacijske naredbe dolaze do izražaja samo u fazi kompajliranja programa, za vrijeme dok se program unutar računala organizira (zato ih neki zovu i »neizvršne naredbe«).

Izvršne naredbe možemo svrstati u *aritmetičke naredbe*, *ulazno-izlazne naredbe*, *pozivne naredbe* i *saobraćajne naredbe*. Postoje i naredbe za prenošenje podataka iz glavne u vanjsku memoriju i obratno; te naredbe možemo svrstati posebno ili zajedno s ulazno-izlaznim naredbama.

Aritmetičke naredbe služe za definiranje aritmetičke operacije koju treba izvršiti. Pritom se primjenjuje označavanje koje je vrlo slično uobičajenom matematičkom označavanju. Razlike su uglavnom slijedeće: znak jednakosti znači naredbu da se

veličini s lijeve strane prida vrijednost izračunata prema aritmetičkom izrazu s desne strane; množenje se označuje zvjezdicom, a potenciranje s dvije zvjezdice; umjesto decimalnog zareza upotrebljava se decimalna točka.

Aritmetički izraz sadrži operande, konstante, varijable i članove polja. Operandi označuju koju računsku operaciju treba izvršiti; npr. + znači zbrajanje. Konstante su brojčane veličine koje su definirane unutar samog programa, a mogu biti cjelobrojne ili realne. Realne veličine definirane su mantisom s uobičajenom točnošću na sedam znamenaka i s eksponentom baze 10, što bi se u uobičajenom matematičkom označavanju pisalo npr. 0,1587623 · 10^9. Varijable se označavaju imenima s do pet znakova (prvi znak mora biti slovo). Član nekog polja označava se imenom i indeksima, pri čemu može biti najviše tri indeksa. Indeksi se pišu u zagradi iza imena polja, a mogu biti pisani kao cjelobrojne varijable ili kao cjelobrojne konstante.

Ulazno-izlazne naredbe služe za unošenje podataka u računalo (»učitavanje«), odnosno za davanje rezultata iz računala (»štampanje«), i to za vrijeme izvođenja programa. Ulazna naredba kaže kakve podatke treba učitati i kojim varijablama treba pridati te brojčane vrijednosti. Izlazna naredba kaže da treba štampati brojčane vrijednosti navedenih varijabla. Osim toga, u ulaznoj (ili izlaznoj) naredbi određuje se periferna jedinica na kojoj se izvodi učitavanje (odnosno štampanje). Konačno, obje vrste naredbi sadrže i broj naredbe »FORMAT« koja definira oblik učitavanja, odnosno štampanja (o tome će biti riječi kasnije).

Pozivi se u programu obično upotrebljavaju zato da se više puta na izvršenje pozove ista rutina (tj. dio programa koji čini zaokruženu cjelinu), tzv. »potprogram«. Potprograma ima uglavnom dvije vrste: funkcije (dobiva se samo jedan rezultat) i općeniti potprogrami (količina dobivenih rezultata je proizvoljna). Potprogram se piše i kompajlira samo jedanput, bez obzira koliko će puta biti pozvan na izvršenje. No, u samom kompajleru postoje neke funkcije koje se također mogu pozvati na izvršenje, kao npr. sinus, logaritam, itd.

Saobraćajne naredbe služe da se odredi kojom naredbom treba nastaviti izvršenje programa. Ako saobraćajne naredbe nema, program se izvršava redoslijedom kako je napisan. Postoji naredba za skok na uvijek istu naredbu, ili tzv. skretnica za skok na jednu od više naredaba. Postoji i naredba za uvjetni skok koji ovisi o brojčanoj vrijednosti nekog aritmetičkog izraza. Postoje i naredbe za petlje, tj. za ponovljeno izvršenje niza naredaba određen broj puta. Tu spadaju i naredbe za zaustavljanje.

Organizacijske naredbe ne izvršavaju se za vrijeme izvođenja programa, nego služe samo da kompajler lakše organizira program za vrijeme kompajliranja. Najvažnije su: *specifikacije* i *formati*. Tu spada i naredba za svršetak kompajliranja.

Specifikacije služe za eksplicitno određivanje tipa neke veličine (cjelobrojna ili realna), za definiranje polja i rezervaciju potrebnog mjesta u memoriji, za poistovjećivanje varijable unutar istog programa ili među različitim programima i za definiranje početnih vrijednosti varijabla.

Formati su naredbe vezane uvijek za pripadnu ulazno-izlaznu naredbu. Njima se definira npr. kako da se organiziraju ulazni podaci na karticama, odnosno kako da se organizira štampanje rezultata. Spomenimo kao primjer da se na jednoj kartici može nalaziti ili jedan ulazni podatak ili više njih. U potonjem slučaju oni mogu biti na kartici raspoređeni različito. To se sve mora saopćiti računalu, a to omogućuju ove naredbe.

Primjeri naredaba u FORTRAN-u

Radi ilustracije navest ćemo ovdje nekoliko primjera naredaba pisanih u jeziku FORTRAN. Treba podsjetiti da se upotrebljavaju samo velika štampana slova, a naredbe se pišu na posebnom obrascu u stupcima od 7. do 72.

Ovdje ćemo dati samo najosnovnije pojmove, tek toliko da prikažemo što je to simbolički jezik FORTRAN, no i to će nam biti dovoljno da uočimo ono što je bitno i zanimljivo u programu navedenom u slijedećem odjeljku. Tko međutim bude htio koristiti FORTRAN pri pisanju vlastitih programa, morat će taj simbolički jezik posebno učiti.

Komentar se može upotrijebiti kao naslov programa (počam od prvog stupca!): Npr.:

```
C PRORACUN KRATKOG SPOJA
```

Treba podsjetiti da se mogu upotrijebiti samo slova engleske abecede!

Aritmetička naredba može imati npr. ovaj oblik (počam od sedmog stupca!):

```
A = B + C - D * (E + F) + G ** 2
```

To se izvodi ovako:

```
P = B + C (zbrajanje),
Q = E + F (zbrajanje),
R = D * Q (množenje),
S = P - R (odbijanje),
T = G ** 2 (kvadriranje),
A = S + T (zbrajanje).
```

Član nekog polja može se označiti npr. ovako:

```
LONJA (5, I + 2, JJJ)
```

Tu je LONJA ime polja. U ovom članu postoje tri ideksa, što znači da je polje trodimenzionalno; prvi je indeks konstanta s vrijednošću 5, dakle navedeni je član po toj dimenziji peti po redu; drugi indeks treba izračunati iz izraza (I + 2), a treći indeks ima vrijednost varijable JJJ.

Ulazna naredba može imati npr. ovakav oblik:

```
READ (2,100) ALFA, BETA, GAMA (5)
```

gdje je:

READ — naredba za učitavanje;

2 — karakteristika čitača kartica, što znači da se brojčani podaci koji se unose u računalo nalaze u čitaču kartica, u prvoj slijedećoj izbušenoj kartici;

100 — proizvoljno izabran broj za vezu s naredbom FORMAT;

ALFA, BETA i GAMA (5) — proizvoljno izabrana imena varijabli, odnosno polja, i proizvoljno izabran peti član polja GAMA. To znači da treba učitati tri ulazna podatka i njihove vrijednosti pridati varijablama ALFA i BETA i petom članu polja GAMA.

Izlazna naredba može imati npr. ovakav oblik:

```
WRITE (3,101) N, (LIVNO (I), I = 1, N)
```

gdje je:

WRITE — naredba za štampanje;

3 — karakteristika linijskog štampača na kojem će biti štampani rezultati;
101 — proizvoljni broj za vezu s naredbom FORMAT;

N i LIVNO (I) — predstavlja ono što će biti štampano. Dakle, u ovom primjeru bit će najprije štampana brojčana vrijednost varijable N, a zatim brojčane vrijednosti članova polja LIVNO, i to od prvog do *n*-tog člana.

Poziv funkcije može imati ovakav oblik:

$$Y = SIN (X) + A * B$$

To znači da će biti izračunat sinus brojčane veličine X (u radijanima!) i tome dodan umnožak brojčanih veličina A i B. Izračunata veličina pridaje se varijabli Y.

Poziv općenitog potprograma može imati ovakav oblik:

CALL POLAR

gdje je:

CALL — naredba za poziv;

POLAR — proizvoljno ime općenitog potprograma, koji mora biti kompajliran i koji se mora nalaziti u računalu prije izvođenja programa u kojem se poziva na izvršenje.

Bezuvjetni skok. Saobraćajna naredba za bezuvjetni skok ima oblik:

GO TO 50

To znači da treba skočiti na naredbu broj 50.

Uvjetni skok izvodi se npr. ovako:

IF (KOLIK) 20, 30, 40

gdje je:

IF — naredba za uvjetni skok;

KOLIK — proizvoljna varijabla koje se brojčana vrijednost ispituje;

20 — broj naredbe na koju se skače ako je KOLIK manji od nule, 30 — broj naredbe na koju se skače ako je KOLIK jednak nuli, a 40 — broj naredbe na koju se skače ako je KOLIK veći od nule (brojevi naredbi uzeti su proizvoljno).

Naredba za zaustavljanje općenito glasi:

STOP

a naredba za privremeno zaustavljanje

PAUSE

Specifikacija za definiranje polja može npr. biti ovakva:

DIMENSION LONJA (10, 15, 20)

gdje je:

DIMENSION — odnosna organizacijska naredba;
LONJA — proizvoljno ime polja;
10 — maksimalan broj članova u prvoj dimenziji polja;
15 — maksimalan broj članova u drugoj dimenziji polja;
20 — maksimalni broj članova u trećoj dimenziji polja (10, 15 i 20 odabrani su proizvoljno prema potrebama prilikom izvođenja programa).

Poistovjećivanje. U glavnom programu (u kojem se nalazi poziv za potprogram) neka bude naredba:

COMMON A, B

a u potprogramu neka bude

COMMON X, Y

gdje je:

COMMON — naredba za poistovjećivanje;
A i X — proizvoljne su varijable koje se međusobno poistovjećuju;
B i Y — proizvoljne su varijable koje se međusobno poistovjećuju.

Naredba FORMAT. Primjer za naredbu FORMAT neka bude (počam od prvog stupca):

100 FORMAT (3 F10.2)

gdje je:

100 — proizvoljno odabran broj naredbe FORMAT (isti kao u pripadnoj naredbi READ, odnosno WRITE);
FORMAT — sama naredba;
3 — znači da se naredba odnosi na tri jednako organizirane brojčane veličine;
F — znači da je veličina realna;
10 — znači da je za brojčanu vrijednost predviđen prostor od 10 stupaca;
2 — znači da brojčana vrijednost ima dva decimalna mjesta.

I na kraju navedimo naredbu za **svršetak kompajliranja.** Ona glasi:

END

9.4. Program za izračunavanje napona i struja metodom čvorišta

Da bismo upotpunili i zaokružili prethodni dio ovog poglavlja i da bismo ujedno pokazali prikladnost prikazanih metoda analize električnih mreža kada se služimo elektroničkim računalima ovdje ćemo prikazati jedan program za elektroničko računalo koji se osniva na metodi čvorišta. Program je izrađen na osnovi matematičkog modela koji je dan u petom poglavlju (odjeljak 5.3), i to samo za poseban slučaj kada su uzbudne veličine u modelu mreže *istosmjerne struje*. Program je zato nešto jednostavniji nego kada bi bio izrađen za izmjenične stuje i napone (gdje treba računati s kompleksnim brojevima), pa pažljiv čitalac može čak i na osnovi ovog prikaza je-

zika FORTRAN s razumijevanjem slijediti niz naredbi. Da bismo to još olakšali, uz program smo dali i posebne komentare, kao i svu potrebnu popratnu dokumentaciju.

Kao što je običaj, program ima radi raspoznavanja svoje ime: nazvali smo ga MECVO, što je kratica od MEtoda ČVOrišta.

Pretpostavke i ograničenja u programu MECVO

Program MECVO izrađen je uz slijedeće pretpostavke i ograničenja:

1. U modelu mreže mogu postojati samo idealni izvori struje.
2. Uzbudne su veličine istosmjerne struje.
3. Pretpostavlja se da je idealni izvor struje priključen paralelno svakoj pasivnoj grani. Ako u zadanom modelu mreže stvarno nije priključen izvor struje paralelno nekoj od pasivnih grana, uzima se kao da izvor postoji, a da je vrijednost struje izvora jednaka nuli; ako pak paralelno nekom izvoru struje nije u zadanom modelu mreže priključena paralelno pasivna grana, uzima se da grana postoji, a da je admitancija grane jednaka nuli.
4. Strelice kojima se u modelu mreže označava referentni smjer struje moraju se usmjeriti u svakoj grani prema onom kraju koji je označen većim brojem.
5. Referentno čvorište mora se numerirati najvećim brojem od niza prirodnih brojeva kojima su numerirana čvorišta u modelu mreže.
6. Prema ovom programu, najveći broj čvorišta što ih može sadržavati zadani model mreže jest dvadeset, a najveći je mogući broj grana sto.

Napomena. — Radi uštede u memoriji računala u programu se MECVO matrica admitancija grana, koja je ovdje dijagonalna matrica, učitava kao stupčani vektor. Naravno, to je pri izvođenju matematičkih operacija s matricom **y** u programu uzeto u obzir. Zato smo u programu nakon inverzije matrice **Y** ostavili simbol **Y** i za inverznu matricu. To smo mogli učiniti zato što se nakon inverzije matrica admitancija čvorišta više ne susreće u programu. Time što smo na njezino mjesto u memoriji računala spremili elemente matrice impedancija čvorišta (koja je istog reda kao i matrica **Y**) također smo uštedjeli na memoriji.

Matematička podloga

1. Za izradu programa koristimo se metodom čvorišta.
2. Matematički model definiran je matričnom jednadžbom (jednadžba 5.58):

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}\,\mathbf{V},$$

gdje je na osnovi (5.50):

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\,\mathbf{I},$$

a prema (5.57):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\tilde{\mathbf{M}}.$$

3. Tražene su veličine: naponi nezavisnih čvorišta, padovi napona u granama struje u granama modela mreže. Odredit ćemo ih slijedećim redom:

— Naponi nezavisnih čvorišta (na osnovi jednadžbi u točki 2):

$$\mathbf{V} = (\mathbf{M}\,\mathbf{y}\,\tilde{\mathbf{M}})^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathbf{I}.$$

— Padovi napona u granama (jednadžba 5.77):

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{V}.$$

— Struje u granama (jednadžbe 5.66):

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\mathbf{v}.$$

Ovdje je:

M — matrica incidencija,
$\tilde{\mathbf{M}}$ — transponirana matrica od matrice **M**,
y — matrica admitancija grana,
I — vektor struja izvora,
V — vektor padova napona nezavisnih čvorišta,
v — vektor padova napona u granama,
i — vektor struja u granama,
J — vektor ukupnih struja izvora,
Y — matrica admitancija čvorišta.

Blok-shema

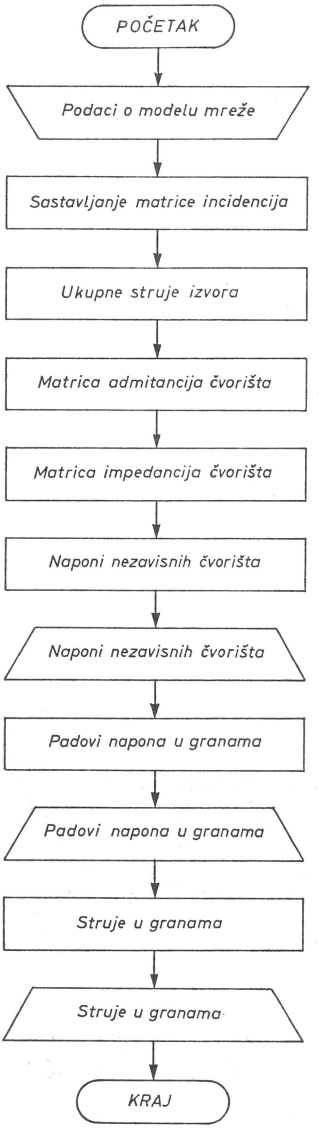
Blok-shema je prikazana na slici 9.10. Najprije se učitavaju podaci o modelu mreže, zatim se sastavlja matrica incidencija i određuje vektor ukupnih struja izvora. Nakon toga izračunavaju se najprije matrica admitancija čvorišta pa njezina inverzna matrica, a zatim vrijednosti napona nezavisnih čvorišta, padova napona u granama i vrijednosti struja u granama, koje se odmah i štampaju.

Gruba shema toka

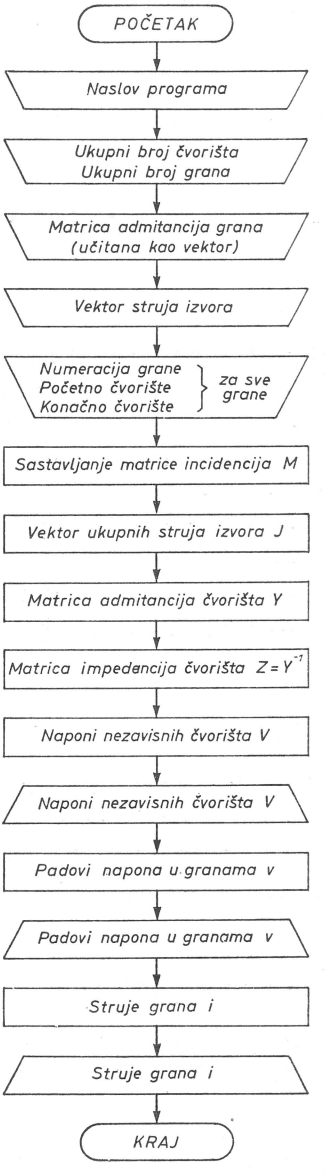
Radi veće preglednosti (u ovom programu samo u onom dijelu kada se učitavaju podaci), prije detaljne sheme toka nacrtana je na slici 9.11. gruba shema toka.

Shema toka za glavni program MECVO

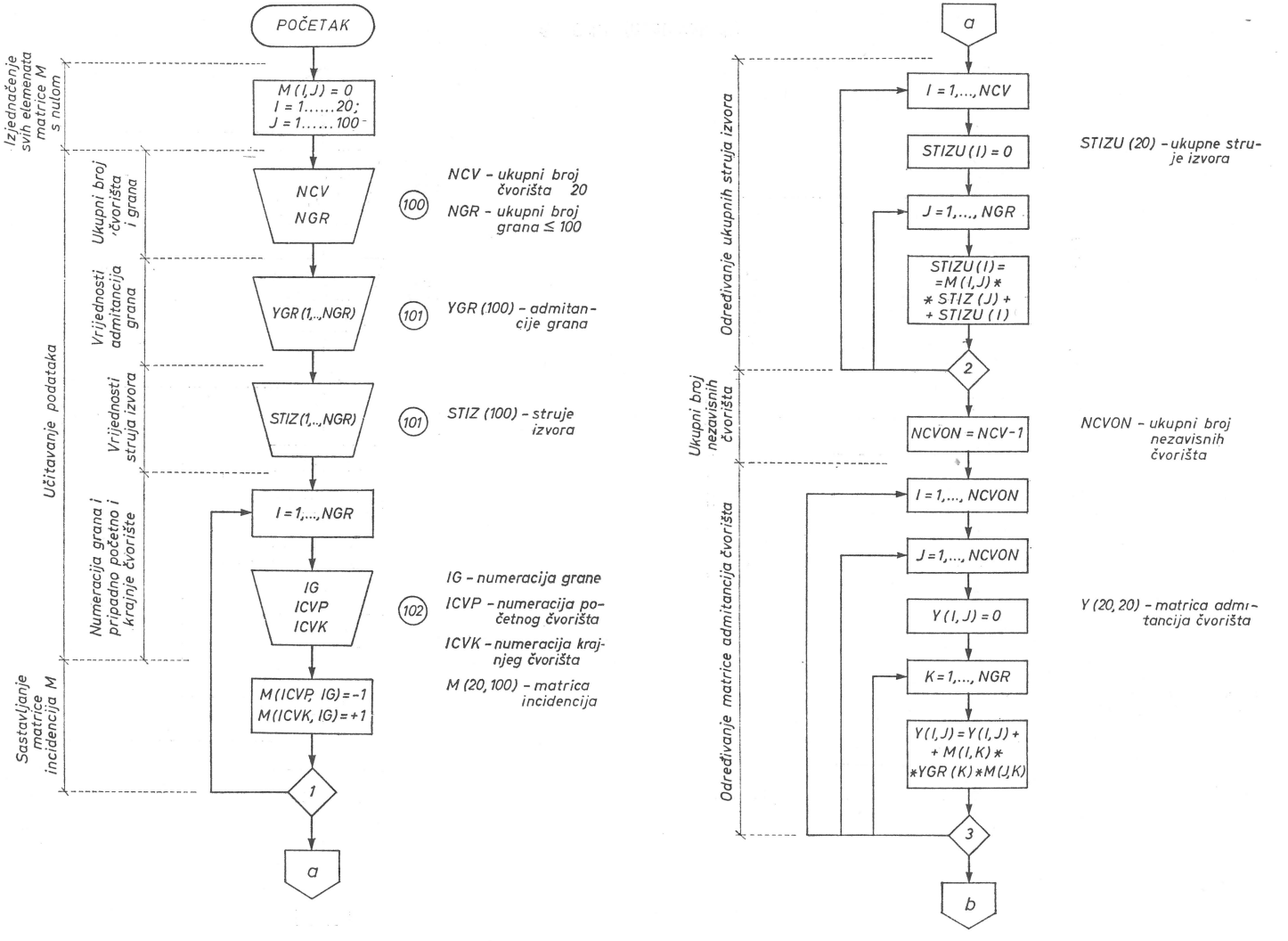
Detaljna shema toka prikazana je na slici 9.12. S lijeve strane sheme toka označeno je na koji se dio postupka odnosi određeni dio te sheme, a na desnoj su strani tumačenja za imena pojedinih varijabli. Pritom je uz imena polja naznačena i potrebna rezervacija memorije. Shema toka za potprogram INVE 2 dana je zasebno na slici 9.14.



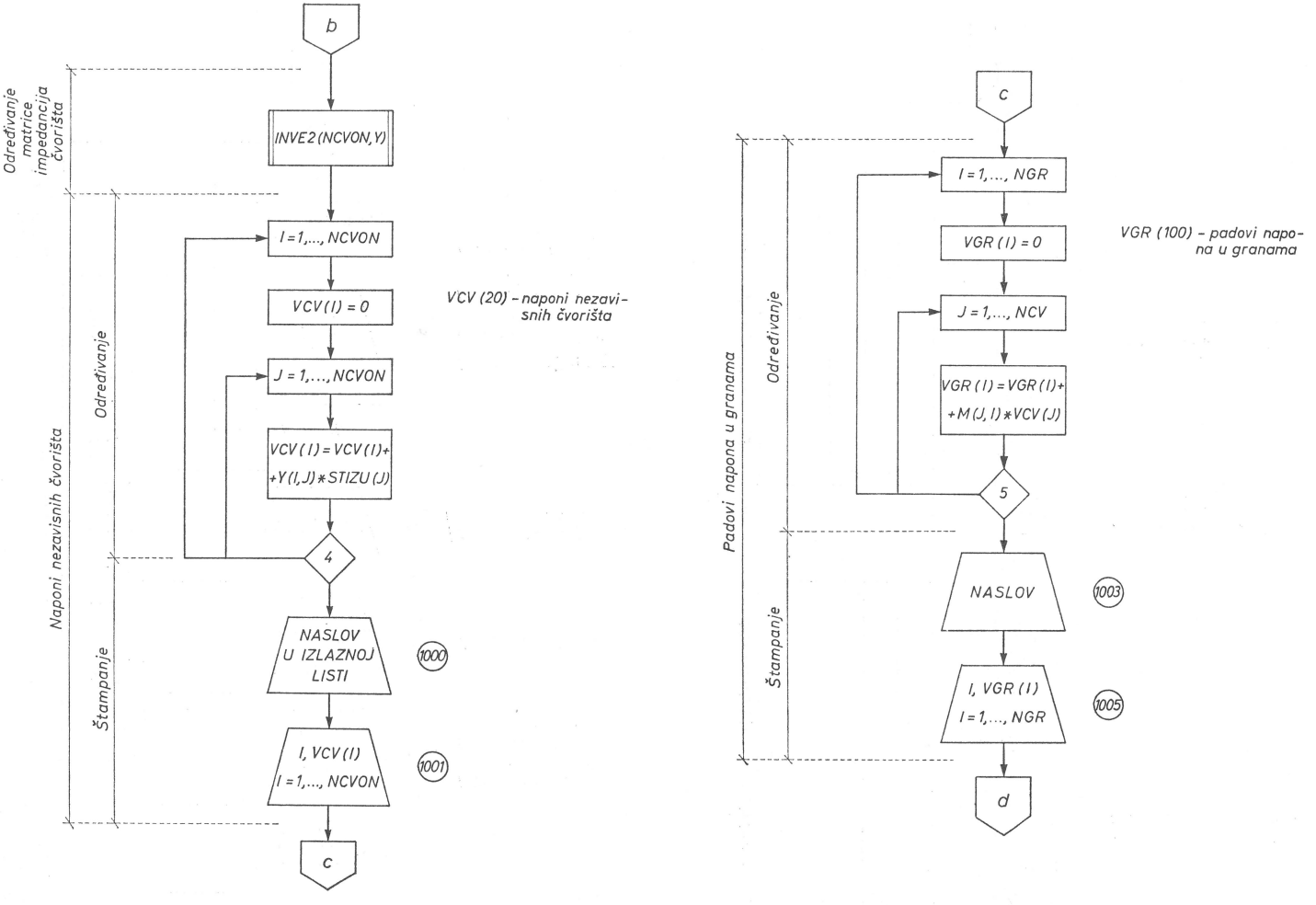
Sl. 9.10. Blok-shema za program MECVO



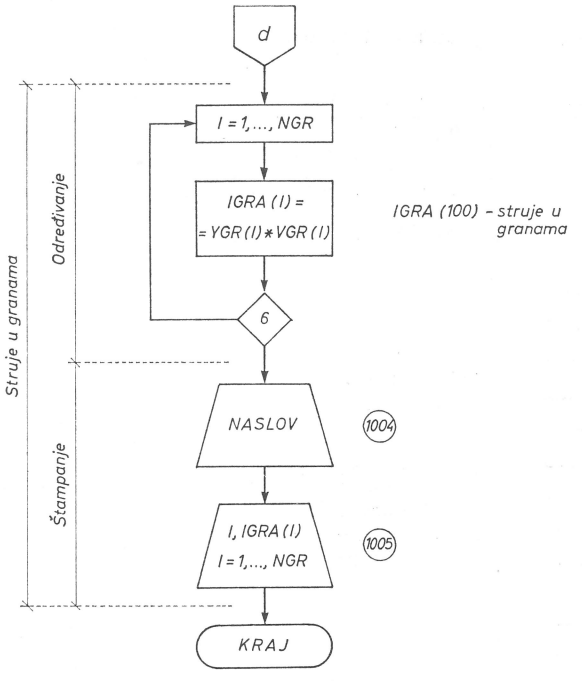
Sl. 9.11. Gruba shema toka za program MECVO



Sl. 9.12. Shema toka za glavni program MECVO



Sl. 9.12. (nastavak 1.)



Sl. 9.12. (nastavak 2.)



Sl. 9.13. Blok-shema za inverziju matrice

Potprogram INVE 2 za inverziju matrice admitancija čvorišta

Za inverziju matrice **Y** izrađen je poseban potprogram nazvan INVE 2. Primijenjen je postupak prema Banachiewiczevoj shemi, koji je opisan u osmom poglavlju (odjeljak 8.4).

Blok-shema za inverziju matrice nacrtana je na slici 9.13.

Algoritam glasi:

1. Matrica **Y** rastavlja se u produkt donje trokutaste matrice **C** i gornje trokutaste matrice **B**. Elementi matrice **B** računaju se prema formuli (jednadžba 8.13):

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{t=1}^{i-1} c_{it}\, b_{tj},$$

a elementi matrice **C** prema formuli (jednadžba 8.14 a):

$$c_{ij} = \frac{b_{ji}}{b_{jj}}.$$

2. Računaju se elementi inverzne matrice $\mathbf{Y}^{-1}$ prema formulama:

   a) dijagonalni elementi (jednadžba 8.15):

$$z_{jj} = \frac{1 - b_{jn}\, z_{nj} - b_{j,n-1}\, z_{n-1,j} - \ldots - b_{j,j+1}\, z_{j+1,j}}{b_{jj}},$$

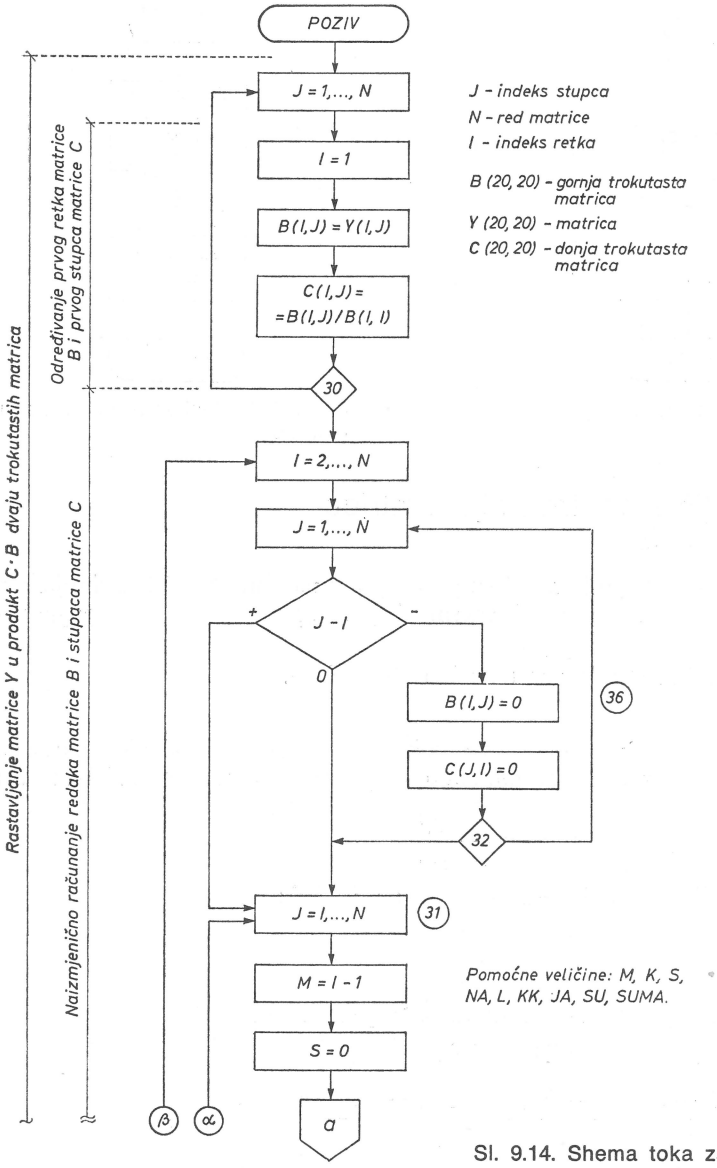
gdje je $j = n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots, 2, 1$;

b) elementi iznad glavne dijagonale (jednadžba 8.16):

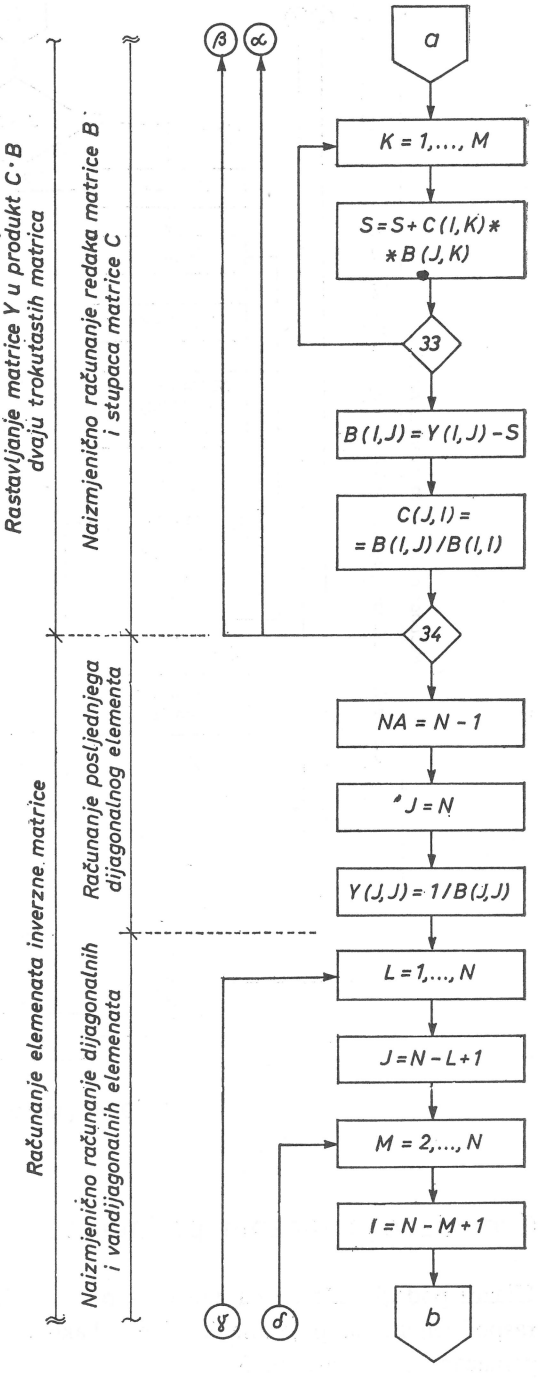
$$z_{ij} = -\frac{b_{in}\, z_{nj} + b_{i,n-1}\, z_{n-1,j} + \ldots + b_{i,i+1}\, z_{i+1,j}}{b_{ii}},$$

gdje je $i = j - 1,\ j - 2, \ldots, 2,1;\ \ j = n,\ n - 1,\ n - 2, \ldots, 2,\ 1.$

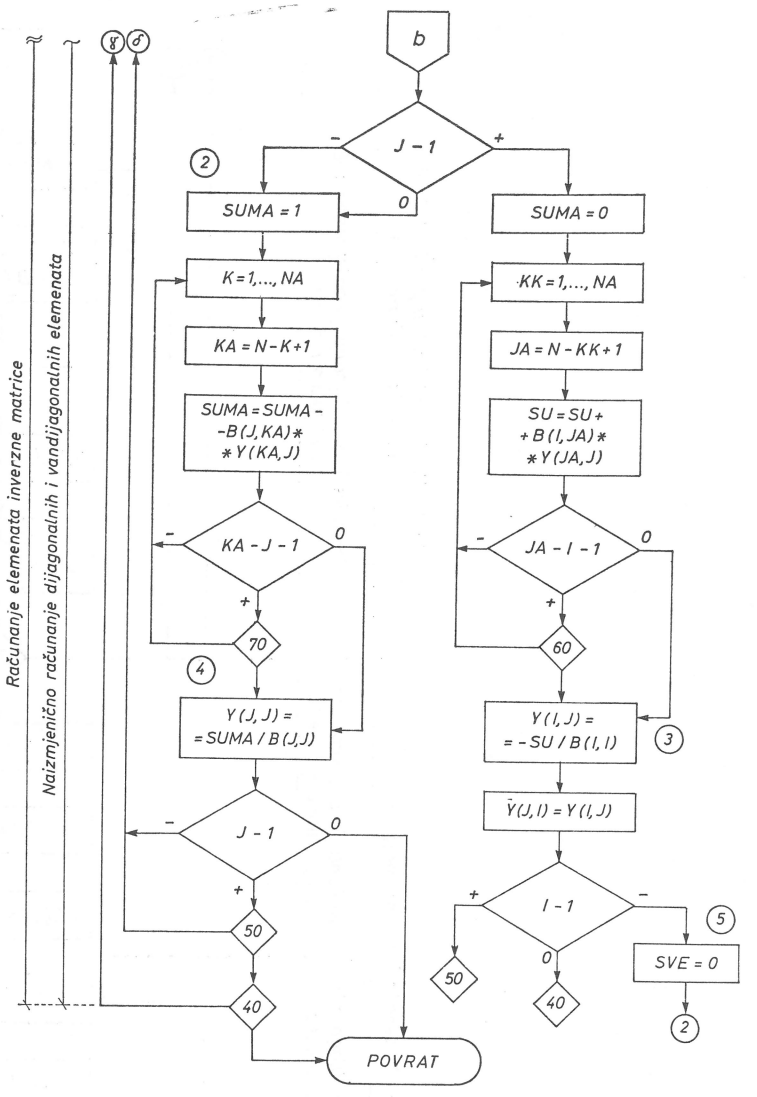
Shema toka za inverziju matrice prikazana je na slici 9.14.



Sl. 9.14. Shema toka za potprogram INVE2



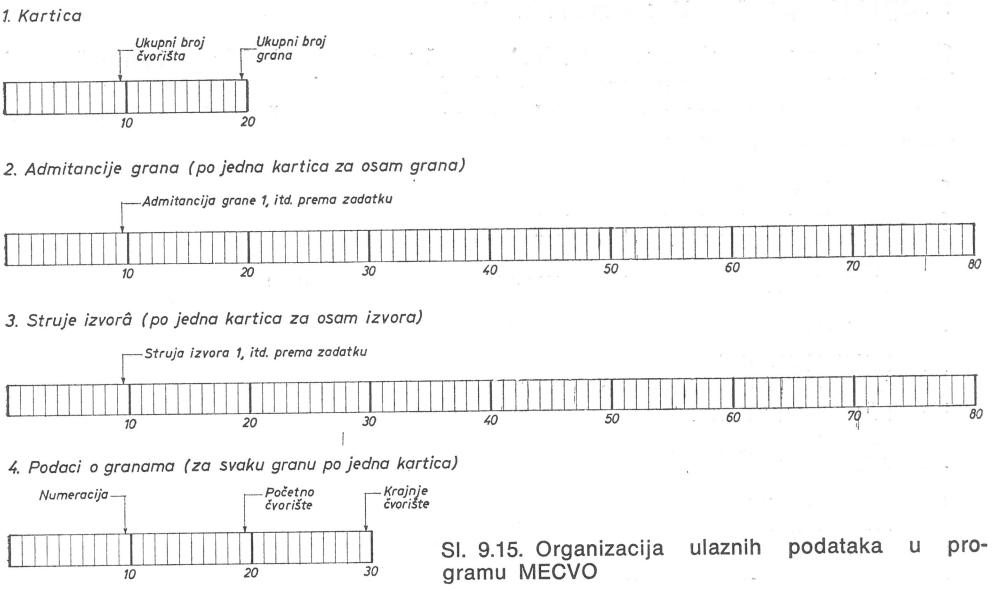
Sl. 9.14. (nastavak 1.)



Sl. 9.14. (nastavak 2.)

Organizacija ulaznih podataka

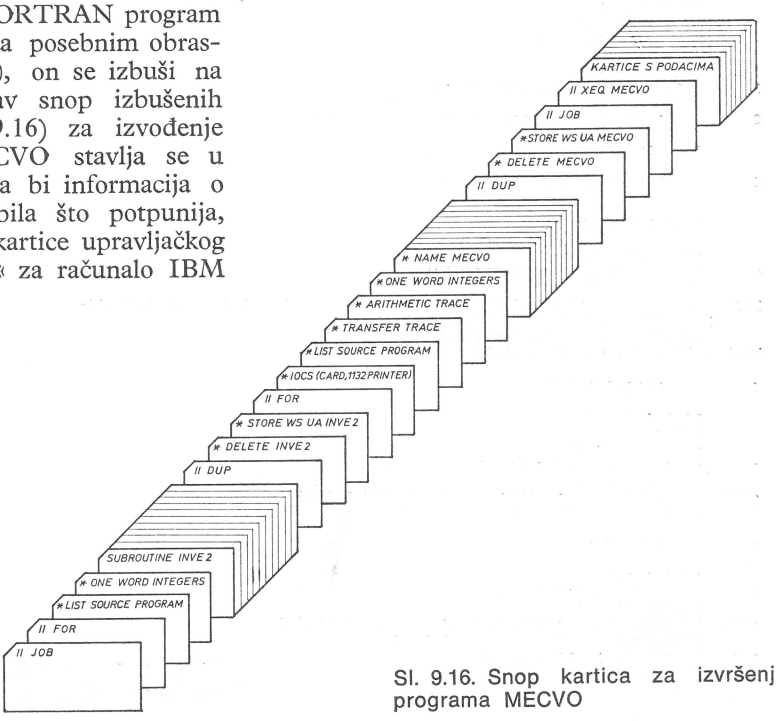
Ulazni podaci buše se na kartice s po osamdeset stupaca. Kako su ulazni podaci raspodijeljeni na pojedine kartice i kako su smješteni unutar pojedinih kartica prikazano je na slici 9.15.



Sl. 9.15. Organizacija ulaznih podataka u programu MECVO

Snop kartica

Nakon što se FORTRAN program napiše rukom na posebnim obrascima (slika 9.8), on se izbuši na karticama. Čitav snop izbušenih kartica (slika 9.16) za izvođenje programa MECVO stavlja se u čitač kartica (da bi informacija o snopu kartica bila što potpunija, prikazane su i kartice upravljačkog jezika »Monitor« za računalo IBM 1130).



Sl. 9.16. Snop kartica za izvršenje programa MECVO

Programi pisani u FORTRAN-u

Glavni program napisan u FORTRAN-u, štampan na linijskom štampaču, prikazan je na slici 9.17, a potprogram INVE 2 prikazan je na slici 9.18. Unutar jednog i drugog programa nalazi se više komentara da se lakše može uočiti na što se odnosi koji dio programa.

```
C          GLAVNI PROGRAM MECVO
C
C          RJESAVANJE MREZA METODOM CVORISTA
C          ---------------------------------
      REAL IGRA(100),VGR(100)
      DIMENSION YGR(100),STIZ(100),STIZU(20),Y(20,20),VCV(20),M(20,100)
      DATA M/2000*0/
C          PODACI
      READ(2,100)NCV,NGR
100   FORMAT(2I10)
      READ(2,101)(YGR(I),I=1,NGR)
101   FORMAT(8F10.0)
      READ(2,101)(STIZ(I),I=1,NGR)
      DO 1 I=1,NGR
      READ(2,102)IG,ICVP,ICVK
102   FORMAT(3I10)
C          MATRICA INCIDENCIJA
      M(ICVP,IG)=-1
1     M(ICVK,IG)=1
C          VEKTOR UKUPNIH STRUJA IZVORA
      DO 2 I=1,NCV
      STIZU(I)=0.
      DO 2 J=1,NGR
2     STIZU(I)=M(I,J)*STIZ(J)+STIZU(I)
C          MATRICA ADMITANCIJA CVORISTA
      NCVON=NCV-1
      DO 3 I=1,NCVON
      DO 3 J=1,NCVON
      Y(I,J)=0.
      DO 3 K=1,NGR
3     Y(I,J)=Y(I,J)+M(I,K)*YGR(K)*M(J,K)
C          INVERZIJA MATRICE ADMITANCIJA CVORISTA
      CALL INVE2(NCVON,Y)
C          NAPONI NEZAVISNIH CVORISTA
      DO 4 I=1,NCVON
      VCV(I)=0.
      DO 4 J=1,NCVON
4     VCV(I)=VCV(I)+Y(I,J)*STIZU(J)
      WRITE(3,1000)
1000  FORMAT(1H1,5(/),4X,'METODA CVORISTA - REZULTATI' / 4X 27('-') //,
     1      1H0,'CVORISTE',11X,'NAPON CVORISTA' )
      WRITE(3,1001)(I,VCV(I),I=1,NCVON)
1001  FORMAT(1H ,I8,11X,F14.5)
C          NAPONI GRANA
      DO 5 I=1,NGR
      VGR(I)=0
      DO 5 J=1,NCVON
5     VGR(I)=VGR(I)+M(J,I)*VCV(J)
      WRITE(3,1003)
1003  FORMAT(1H0,3X,'GRANA',11X,'  NAPON GRANE' )
      WRITE(3,1005)(I,VGR(I),I=1,NGR)
C          STRUJE GRANA
      DO 6 I=1,NGR
6     IGRA(I)=YGR(I)*VGR(I)
      WRITE(3,1004)
1004  FORMAT(1H0,3X,'GRANA',11X,' STRUJA GRANE')
      WRITE(3,1005)(I,IGRA(I),I=1,NGR)
1005  FORMAT(1H I8,11X,F14.5)
      STOP 9999
      END
```

Sl. 9.17. Glavni program MECVO napisan u FORTRAN-u

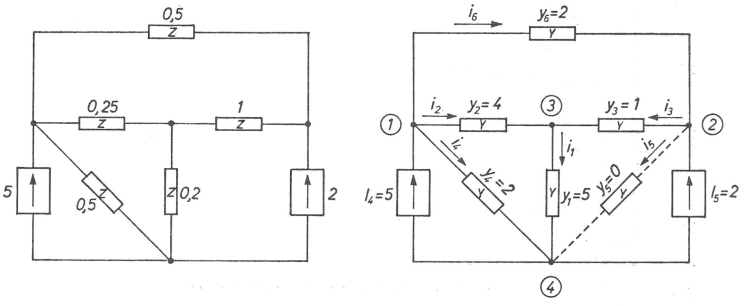
```
C                    INVERZIJA SIMETRICNE MATRICE SA REALNIM ELEMENTIMA
C                              BANACHIEWICZEVA SHEMA

      SUBROUTINE INVE2(N,Y)
C     ---------------------
C     N=RED MATRICE, ULAZNI ARGUMENT
C     Y=MATRICA, ULAZNO/IZLAZNI ARGUMENT
      DIMENSION Y(20,20),B(20,20),C(20,20)

C                    RASTAVLJANJE MATRICE U PRODUKT DVIJU
C                    TROKUTASTIH MATRICA

      DO 30 J=1,N
      I=1
      B(I,J)=Y(I,J)
30    C(J,I)=B(I,J)/B(I,I)
      DO 34 I=2,N
      DO 32 J=1,N
      IF(J-I)36,31,31
36    B(I,J)=0
32    C(J,I)=0
31    DO 34 J=I,N
      M=I-1
      S=0
      DO 33 K=1,M
33    S=S+C(I,K)*B(K,J)
      B(I,J)=Y(I,J)-S
34    C(J,I)=B(I,J)/B(I,I)

C                    RACUNANJE ELEMENATA INVERZNE MATRICE

      NA=N-1
      J=N
      Y(J,J)=1./B(J,J)
      DO 40 L=1,N
      J=N-L+1
      DO 50 M=2,N
      I=N-M+1
      IF(J-I)2,2,1
1     SU=0
      DO 60 KK=1,NA
      JA=N-KK+1
      SU=SU+B(I,JA)*Y(JA,J)
      IF(JA-I-1)60,3,60
60    CONTINUE
3     Y(I,J)=-SU/B(I,I)
      Y(J,I)=Y(I,J)
      IF(I-1)5,40,50
5     SVE=0
2     SUMA=1
      DO 70 K=1,NA

      KA=N-K+1
      SUMA=SUMA-B(J,KA)*Y(KA,J)
      IF(KA-J-1)70,4,70
70    CONTINUE
4     Y(J,J)=SUMA/B(J,J)
      IF(J-1)50,200,50
50    CONTINUE
40    CONTINUE
200   RETURN
      END
```

Sl. 9.18. Potprogram INVE2 napisan u FORTRAN-u

Primjer izvođenja programa MECVO

Izračunat ćemo napone i struje u modelu mreže prikazanom na slici 9.19 a. Na slici su označene vrijednosti otpora pojedinih grana i vrijednosti struja izvorâ. To je isti model mreže kao i onaj u primjeru 5.10. u petom poglavlju (slika 5.16). Radi pripreme zadatka za rješavanje na računalu, dakle radi bušenja kartica s podacima, na slici 9.19 b označena je numeracija grana i čvorišta; numeracija grana podudara se s numeracijom u primjeru 5.10, a podudara se i numeracija čvorišta, osim što je ovdje referentno čvorište označeno sa 4, a ne sa 0, jer u ovom programu — kao što smo rekli — referentno čvorište mora biti označeno najvećim brojem što ih nose čvorišta. Također je na slici 9.19 b označena i orijentacija pasivnih grana, gdje je grana orijentirana prema čvorištu koje je označeno većim brojem, jer je i to jedan od uvjeta u ovom programu. Budući da se numeracija grana i ne-

zavisnih čvorišta, kao i orijentacija grana, na slikama 9.19 b. i 5.16. podudaraju, možemo lako usporediti rezultate dobivene pomoću računala s onima u primjeru 5.10. Kako izvoru struje kojeg struja iznosi 2 nije u zadanom modelu mreže na slici 9.19 a. paralelno priključena pasivna grana, na slici 9.19 b. morali smo između odgovarajućih čvorišta umetnuti granu admitancije jednaku 0.



a) b)

Sl. 9.19. a) Zadani model mreže. b) Zadani model mreže s označenom numeracijom čvorišta i grana i s orijentiranim granama.

Nakon tako obavljene pripreme, možemo pristupiti bušenju kartica s podacima. Sadržaj kartica pripremljenih za izvođenje programa prikazan je na slici 9.20. Svaki ispisani redak na slici odgovara jednoj bušenoj kartici:

FORTRAN

Programer		Problem	Str.
Oznaka	Datum		Od

1 5 6 7 10 20 30 40 50 60 70 72 73 80

| | | |

— u prvom retku (dakle, na prvoj kartici) nalazi se ukupan broj čvorišta zadanog modela mreže (4) i ukupan broj grana (6);
— u drugom su retku (druga kartica) vrijednosti admitancija pojedinih grana (redom od grane 1 do grane 6);
— u trećem su retku (treća kartica) vrijednosti struja izvora (također redom od I_1 do I_6);
— u recima od četvrtog do devetog (od četvrte do devete kartice) nalaze se tri broja: prvi broj predstavlja numeraciju grane, drugi broj odgovara numeraciji početnog čvorišta te grane (dakle, to je onaj kraj grane koji je numeriran manjim brojem), a treći broj odgovara numeraciji krajnjeg čvorišta grane (kraj grane koji je označen većim brojem).

Rezultat izvođenja programa MECVO s navedenim podacima prikazan je na slici 9.21. Možemo se lako uvjeriti da se rezultati dobiveni pomoću elektroničkog računala i rezultati dobiveni u primjeru 5.10. pomoću ručnog računskog stroja podudaraju sa zadovoljavajućom točnošću. Tako smo ujedno provjerili ispravnost napisanog programa.

```
                    METODA CVORISTA - REZULTATI
                    ---------------------------

CVORISTE                NAPON CVORISTA
      1                       -1.50781
      2                       -1.93750
      3                       -0.79687

GRANA                     NAPON GRANE
      1                        0.79687
      2                        0.71093
      3                        1.14062
      4                        1.50781
      5                        1.93750
      6                       -0.42968

GRANA                    STRUJA GRANE
      1                        3.98437
      2                        2.84375
      3                        1.14062
      4                        3.01562
      5                        0.00000
      6                       -0.85937
```

Sl. 9.21. Rezultati izvođenja programa MECVO

1. *ANĐELIĆ, T. P.:* Matrice, Naučna knjiga, Beograd, 1962.
2. *ANGOT, A.:* Matematika dlja elektro i radioinženjerov, Nauka, Moskva, 1967.
3. *BEWLEY, L. V.:* Tensor Analysis of Electric Circuits and Machines, The Ronald Press Co., New York, 1961.
4. *BLANUŠA, D.:* Viša matematika, I. dio, Prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963.
5. *BRAMELLER, A., M. N. JOHN and M. R. SCOTT:* Practical Diakoptics for Electrical Networks, Chapman & Hall, Ltd., 11 New Fetter Lane EC 4, 1969.
6. *BROWN, R. G. and J. W. NILSSON:* Introduction to Linear System Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
7. *CARLIN, H. J. and A. B. GIORDANO:* Network Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964.
8. *CASSEL, W. L.:* Linear Electric Circuits, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964,
9. *CHEN, W. H.:* The Analysis of Linear Systems, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York. 1963.
10. *CHENG, D. K.:* Analysis of Linear Systems, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1959.
11. *DESPOTOVIĆ, S. T.:* Matematički modeli u analizi elektroenergetskih sistema, Zajednica jugoslovenske elektroprivrede, Beograd, 1965.
12. *DESPOTOVIĆ, S. T.:* Savremene metode u rešavanju problema elektroenergetskih sistema, Zajednica jugoslovenske elektroprivrede, Beograd, 1968.
13. *EDELMANN, H.:* Berechnung elektrischer Verbundnetze, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
14. *HENKOK, N.:* Matričnij analiz električeskih mašin, Energija, Moskva, 1967.
15. *HLAWICZKA, P.:* Matrix Algebra for Electronic Engineers, New York Hayden Book Co., Inc., 1965.
16. *HOLT, C. A.:* Introduction to Electromagnetic Fields and Waves, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
17. *HORE, R. A.:* Advanced Studies in Electrical Power System Design, Chapman & Hall, 11 New Fetter Lane, London, E. C. 4, 1966.
18. *HUGHES, J. K.:* Programming the IBM 1130, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
19. *KERCHNER, R. M. and G. F. CORCORAN:* Alternating-current Circuits, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
20. *KHABAZA, I. M.:* Numerical Analysis, Pergamon Press, Oxford, 1965.
21. *KNABLE, A. H.:* Electrical Power Systems Engineering — Problems and Solutions, McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.
22. *KREYSZIG, E.:* Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.
23. *KRON, G.:* Tensor Analysis of Networks, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1939.
24. *KUO, F. F.:* Networks Analysis and Synthesis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
25. *LeCORBEILLER, P.:* Matrix Analysis of Electric Networks, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.
26. *LePAGE. W. R.:* Analysis of Alternating-current Circuits, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1952.
27. *LONČAR, J.:* Osnovi elektrotehnike, Knjiga prva i Knjiga druga, III. izdanje, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1948.
28. *MARKOVIĆ, Ž.:* Uvod u višu analizu, I. dio i II. dio, III. izdanje, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1950.
29. *MELJNIKOV, N. A.:* Matričnij metod analiza električeskih cjepjej, Energija, Moskva, 1966.

30. *MESSERLE, H. K.:* Dynamic Circuit Theory, Pergamon Press, Oxford, 1965.
31. M. I. T., Electrical Engineering Staff: Electric Circuits, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1955.
32. *MORTLOCK, J. R. and M. W. HUMPHREY DAVIES:* Power System Analysis, Chapman & Hall, Ltd., London, 1952.
33. *RADIĆ, M.:* Sistemi linearnih jednadžbi i linearno programiranje, Školska knjiga, Zagreb, 1967.
34. *REZA, F. M. i S. SEELY:* Sovremenij analiz električeskih cjepjej, Energija, Moskva, 1964.
35. *ROMANOWITZ, H. A.:* Electrical Fundamentals and Circuit Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
36. *SESHU, S. i N. BALABANIAN:* Analiz linejnih cjepjej, Gosudarstvenoje energetičeskoje izdateljstvo, Moskva, 1963.
37. *SESHU, S. and M. B. REED:* Linear Graphs and Electrical Networks, Adison-Wesley Publishing Co., Inc., 1961.
38. *SKILLING, H. H.:* Electrical Engineering Circuits, John Wiley & Sons, Inc., New York 1965.
39. *STAGG, G. W. and A. H. El-ABIAD:* Computer Methods in Power System Analysis, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
40. *Van VALKENBURG, M. E.:* Network Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
41. *Van VALKENBURG, M. E.:* Introduction to Modern Network Synthesis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
42. *WAGNER, C. F. and R. D. EVANS:* Symmetrical Components, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1933.
43. *WEH, H.:* Elektrische Netzwerke und Maschinen in Matrizendarstellung, Bibliographisches Institut, Mannheim/Zürich, Hochschultaschenebücher-Verlag, 1968.