



Petar Kulišić

MEHANIKA I TOPLINA



školska knjiga

prof. dr. sc. Petar Kulišić

MEHANIKA I TOPLINA

udžbenik fizike

za studente Fakulteta elektrotehnike i računarstva

IX. izdanje priredio

prof. dr. sc. Dubravko Pevec

 **školska knjiga**

ZAGREB, 2005.

SADRŽAJ

PREDGOVOR	IX
1. UVOD	1
1.1. O fizici	1
1.2. Mjerenje u fizici	2
1.3. Fizikalne veličine i jedinice	5
1.4. Međunarodni sustav jedinica (SI)	6
1.5. Skalarne i vektorske fizikalne veličine	10
<i>Pitanja i zadaci</i>	14
2. KINEMATIKA ČESTICE	16
2.1. Materijalna točka	16
2.2. Jednoliko pravocrtno gibanje. Brzina	18
2.3. Nejednoliko pravocrtno gibanje. Akceleracija	20
2.4. Gibanje s konstantnom akceleracijom. Slobodni pad	23
2.5. Jednoliko kružno gibanje	26
2.6. Nejednoliko kružno gibanje	28
2.7. Općenito krivocrtno gibanje u ravnini	30
2.8. Kosi hitac	33
<i>Pitanja i zadaci</i>	36
3. DINAMIKA ČESTICE	38
3.1. Masa i sila	38
3.2. Prvi Newtonov zakon. Inercijalni sustavi	40
3.3. Drugi Newtonov zakon	40
3.4. Masa i težina	43
3.5. Treći Newtonov zakon	44
3.6. Količina gibanja i impuls sile	45
3.7. Zakon očuvanja količine gibanja	48
3.8. Primjene zakona očuvanja količine gibanja	49
3.9. Sistem materijalnih točaka. Centar mase	52
3.10. Trenje	55
3.11. Centripetalna sila	57
<i>Pitanja i zadaci</i>	58
4. RAD I ENERGIJA	61
4.1. Rad	61
4.2. Energija	64
4.3. Kinetička energija	65
4.4. Potencijalna energija	66
4.5. Zakon očuvanja energije	70
4.6. Snaga	72
4.7. Sudari	73
4.7.1. Savršeno elastičan sudar	74
4.7.2. Savršeno neelastičan sudar	75
<i>Pitanja i zadaci</i>	77

5. STATIKA	79
5.1. Uvod	79
5.2. Ravnoteža materijalne točke	79
5.3. Djelovanje konkurentnih sila na kruto tijelo	80
5.4. Moment sile	81
5.5. Djelovanje nekonkurentnih sila na kruto tijelo	82
5.6. Par sila	84
5.7. Ravnoteža krutog tijela	84
<i>Pitanja i zadaci</i>	87
6. ROTACIJA KRUTOG TIJELA	88
6.1. Uvod	88
6.2. Općenito gibanje krutog tijela	88
6.3. Rotacija krutog tijela oko nepomične osi	89
6.4. Momenti tromosti	93
6.5. Moment količine gibanja	96
6.6. Zakon očuvanja momenta količine gibanja	98
6.7. Gibanje zvrka	100
6.8. Rad i kinetička energija pri rotaciji	103
<i>Pitanja i zadaci</i>	106
7. INERCIJSKI I NEINERCIJSKI SUSTAVI	108
7.1. Uvod	108
7.2. Inercijski sustavi. Galilejev princip relativnosti	108
7.3. Jednoliko ubrzani sustavi. Inercijske sile	110
7.4. Rotirajući sustav. Centrifugalna i Coriolisova sila	114
<i>Pitanja i zadaci</i>	117
8. GRAVITACIJA	119
8.1. Newtonov zakon gravitacije	119
8.2. Određivanje gravitacijske konstante	120
8.3. Keplerovi zakoni	121
8.4. Gravitacijsko polje	123
8.5. Gravitacijsko polje Zemlje. Akceleracija sile teže	124
8.6. Gravitacijska potencijalna energija	126
8.7. Troma i teška masa	129
<i>Pitanja i zadaci</i>	130
9. RELATIVISTIČKA MEHANIKA	132
9.1. Uvod	132
9.2. Michelson-Morleyev eksperiment	132
9.3. Lorentzove transformacije	135
9.4. Posljedice Lorentzovih transformacija	137
9.5. Relativistička dinamika	141
<i>Pitanja i zadaci</i>	144

10. STATIKA FLUIDA	146
10.1. Uvod	146
10.2. Tlak	146
10.3. Atmosferski tlak	150
10.4. Uzgon	152
10.5. Napetost površine	155
10.6. Kapilarnost	158
<i>Pitanja i zadaci</i>	160
11. DINAMIKA FLUIDA	161
11.1. Uvod	161
11.2. Strujanje idealnog fluida	161
11.3. Jednadžba kontinuiteta	162
11.4. Bernoullijeva jednadžba	163
11.5. Primjene Bernoullijeve jednadžbe	166
11.6. Viskoznost	169
11.7. Laminarno i turbulentno strujanje. Reynoldsov broj	170
11.8. Protjecanje realnog fluida kroz cijev	171
11.9. Otpor sredstava	174
11.10. Magnusov efekt	177
<i>Pitanja i zadaci</i>	177
12. TOPLINA I TEMPERATURA	179
12.1. Termometrija	179
12.2. Toplinsko rastezanje čvrstih tvari i tekućina	181
12.3. Plinski zakoni	184
12.4. Količina topline. Specifični toplinski kapacitet	188
12.5. Promjena agregatnog stanja. Latentna topline	192
12.6. Fazni dijagrami. Kritična i trojna točka	195
12.7. Prijenos topline	197
12.7.1. Vođenje topline	197
12.7.2. Konvekcija	200
12.7.3. Toplinsko zračenje	201
12.7.4. Prijenos topline zračenjem	205
<i>Pitanja i zadaci</i>	206
13. TERMODINAMIKA	208
13.1. Uvod	208
13.2. Termodinamički procesi	208
13.3. Prvi zakon termodinamike	211
13.4. Rad pri promjeni stanja plina	212
13.5. Entalpija	215
13.6. Drugi zakon termodinamike	217
13.7. Carnotov kružni proces	218
13.8. Entropija	221
13.9. Rashladni stroj i toplinska pumpa	226
<i>Pitanja i zadaci</i>	229

14. KINETIČKO-MOLEKULARNA TEORIJA TOPLINE	231
14.1. Uvod	231
14.2. Tlak idealnog plina	232
14.3. Kinetičko objašnjenje temperature	235
14.4. Raspodjela molekularnih brzina u plinu	236
14.5. Maxwell-Boltzmannova energetska raspodjela molekula	239
14.6. Kinetička teorija molarnih toplinskih kapaciteta	240
14.7. Jednadžba stanja realnog plina	245
<i>Pitanja i zadaci</i>	247
 FIZIKALNE VELIČINE I JEDINICE	249
VAŽNIJE KONSTANTE	251
LITERATURA	252
KAZALO POJMOVA	253
KAZALO IMENA	261
PERIODNI SUSTAV ELEMENATA	263

PREDGOVOR I. IZDANJU

Ovaj je udžbenik priređen prema nastavnom planu i programu predmeta fizika I za studente prve godine Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu. Nastao je na temelju skripata i predavanja autora na Elektrotehničkom i Tehnološkom fakultetu, a njime se mogu služiti studenti tehničkih fakulteta.

Uz pružanje osnovnih fizikalnih znanja najvažniji je zadatak nastave fizike da formira znanstveni pogled na svijet i da studente nauči fizikalno razmišljati i u praksi primjenjivati fizikalne zakonitosti.

U udžbeniku je obrađeno gradivo iz mehanike, mehanike fluida i topline. Mehanička valova, optika i atomska fizika bit će obrađena u drugom dijelu. Obrada nastavnih sadržaja prilagođena je suvremenim tendencijama u nastavi fizike. Uz makroskopski opis, pojave su, gdje god je bilo moguće, tumačene i mikroskopski, tj. uzeta je u obzir atomistička struktura materijala. Naročito je naglašeno kinetičko-molekularno objašnjenje toplinskih pojava.

Mnogi sadržaji ilustrirani su primjerima. Na kraju su svakog poglavlja pitanja i zadaci za uvježbavanje gradiva, kao i mnoga pitanja s usmenih ispita iz fizike. Međunarodni sustav jedinica (SI) dosljedno se upotrebljava u čitavom udžbeniku. U pripremi je *Zbirka riješenih zadataka iz fizike* prilagođena ovom udžbeniku koja će biti njegov sastavni dio.

Predavanja iz fizike na Elektrotehničkom fakultetu zapravo su predavanja s demonstracijskih pokusa, koje je u Zavodu za fiziku Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu razvio prof. dr. V. Lopašić. Neki od tih pokusa ukratko su prikazani u ovom udžbeniku da bi studente podsjetili na ono što su vidjeli na predavanjima.

Postoji mnogo izvrsnih udžbenika iz fizike i autor se, pri obradi ovog nastavnog sadržaja, koristio mnogima od njih, prilagođavajući sadržaje nastavnom programu i čitateljstvu kojem je namijenjeno. Popis literature nalazi se na kraju knjige.

Kolege iz Zavoda za fiziku mnogo su mi pomogli u toku naše višegodišnje suradnje u nastavi fizike pa im najsrdačnije zahvaljujem. Rukopis ove knjige pregledali su prof. dr. Jadranka Vuletin, prof. dr. Tomislav Ivezić i dipl. inž. Marijan Brezinščak. Posebno im se zahvaljujem na korisnim primjedbama i sugestijama. Svakome tko me upozori na propuste i greške, kojih će sigurno biti u ovom prvom izdanju, bit ću zahvalan.

U Zagrebu, u rujnu 1985.

Autor

PREDGOVOR IX. IZDANJU

Niz godina ova je knjiga bila udžbenik za kolegij Fizika I na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Knjiga je u svojem izvornom obliku doživjela osam izdanja. U ovome devetom, prerađenom izdanju osuvremenjen je metodički pristup pojedinim temama. To se posebno odnosi na preinake dijelova knjige u kojima se tretiraju masa i

težina u nerelativističkoj fizici te masa, energija i količina gibanja u relativističkoj fizici. Definicije i nazivi usklađeni su sa suvremenim mjeriteljskim standardima i ispravljene uočene pogreške. Popis literature nadopunjen je standardnim djelima iz opće fizike za sveučilišne studije.

Očekujem da navedene promjene i nadalje osiguravaju aktualnost ovoga udžbenika te da i ubuduće bude korisan studentima na Fakultetu elektrotehnike i računarstva kao i na drugim tehničkim fakultetima sa srodnim programima fizike. Zahvaljujem se recenzentima ovoga izdanja dr. sc. Vjeri Lopac, dr. sc. Vesni Volovšek i dr. sc. Tomislavu Petkoviću na poticajima da se ovaj udžbenik ponovo objavi uz učinjene promjene i dopune.

U Zagrebu, mjeseca srpnja 2005.

Prof. dr. sc. Dubravko Pevec

Mehanika i toplina

1. UVOD

1.1. O FIZICI

Današnja tehnička dostignuća proizašla su iz dosadašnjih znanstvenih istraživanja u fizici i drugim prirodnim znanostima. Bez razvoja prirodnih znanosti nezamisliv je i budući razvoj tehnike. Uloga studija fizike u izobrazbi inženjera vrlo je velika: poznavanje prirodnih zakona nužno je za razumijevanje raznih tehničkih problema, putem nastave fizike formira se znanstveni pogled na svijet, a fizikalni način razmišljanja omogućuje znanstvenoistraživački pristup rješavanju različitih problema u znanosti i tehnici.

Fizika je fundamentalna prirodna znanost, ona se bavi proučavanjem općih svojstava i zakona kretanja materije, počevši od gibanja tijela pa sve do strukture i svojstava fizikalnog prostora i polja. Fizika proučava makrosvijet, tj. tijela na Zemlji, planete, zvijezde itd., i mikrosvijet, tj. molekule, atome, elementarne čestice i dr.

Fizičari nastoje otkriti zakone ponašanja materije u različitim uvjetima i tako dobivene spoznaje primijeniti u tehnologiji i tehnici.

Riječ fizika potječe od grčke riječi $\phi\upsilon\sigma\iota\varsigma$ (fizis), što znači priroda, pa se fizika dugo vremena zvala filozofija prirode.

Tvar je jedan od osnovnih oblika materije; tvari sačinjavaju sva tijela u prirodi. Fizičko polje (gravitacijsko, električno, itd.) također je oblik materije. Materija se nalazi u neprestanom kretanju, prelazi iz jednog oblika u drugi oblik, a pritom ostaje neuništiva i očuvana.

Kretanje je bitno svojstvo materije. Uz gibanje, kao jedan svoj oblik, ono obuhvaća svaku promjenu u prirodi, prelaženje materije iz jednog oblika u drugi oblik, tj. sve procese koji se događaju u prirodi. Prostor i vrijeme također su oblici materije i vezani su uz njezino kretanje.

Fizika i ostale prirodne znanosti prožimaju se i ponekad je teško povući granicu između fizike, kemije i biologije. Moderna fizika i kemija toliko su isprepletene da se danas dijelovi kemije mogu smatrati posebnim granama fizike. Moderna biologija, posebno njezina grana biofizika, usko je vezana i uz fiziku i uz kemiju. Fizika ima fundamentalno značenje za ostale prirodne i tehničke znanosti. Posebno je važna uloga fizike u razvoju tehnike, jer fundamentalne spoznaje u fizici nailaze na praktičnu primjenu u tehnici. Ima mnogo primjera kako su otkrića u fizici utjecala na razvoj tehničkih ostvarenja. Spomenimo samo otkriće fisije, koje je omogućilo razvoj nuklearnih reaktora i dobivanje nuklearne energije, pronalazak tranzistora, što je potaklo nagli razvoj elektronike, itd. Podjela na prirodne i tehničke znanosti zapravo je umjetna, nastala zbog povijesnih razloga te kad kažemo da je fizika prirodna znanost ne smijemo zaboraviti da je ona osnova tehnike i obratno, razvoj tehnike omogućit će primjenu sve dotjeranijih metoda istraživanja u fizici, tako da su tehnika i fizika međusobno vezane i bitno utječu jedna na drugu.

Fizika kao eksperimentalna znanost osniva se na promatranju prirodnih pojava, izvođenju eksperimenata i mjerenju. Međutim ponekad je lakše doći do određenog fizikalnog zakona teorijski, a zatim ga, eventualno, provjeriti eksperimentom. Ako eksperiment potvrdi teorijsku pretpostavku, tada se ona prihvaća kao prirodni zakon, a ako je opovrgne tada se ta pretpostavka mora promijeniti da bi bila u skladu s mjerenjem.

Matematika je važno oruđe fizičara, to je jezik kojim se simbolički izražavaju fizikalne zakonitosti, međutim fizika je mnogo više od matematičkih formula i relacija koje se u njoj pojavljuju. Matematika nam služi da fizikalne zakone prikažemo koncizno i jasno, da ih povežujemo i jedan iz drugoga izvodimo. Pri učenju fizike, u svakoj formuli, u svakoj matematičkoj jednadžbi moramo uočiti fizikalno značenje, odnosno mjerenje koje je dovelo da tog fizikalnog zakona.

Fiziku možemo podijeliti na klasičnu i modernu. *Klasična fizika* proučava pojave iz našeg tzv. makrosvijeta, dakle pojave koje možemo vidjeti i neposredno mjeriti. Klasična mehanika, osnovni i najstariji dio fizike, opisuje gibanja i interakcije „običnih tijela”, tj. tijela čije su dimenzije velike u usporedbi s veličinom atoma (10^{-10} m) i koja se gibaju brzinama znatno manjima od brzine svjetlosti ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Ona se temelji na tri aksioma koja je Newton formulirao još u 17. stoljeću. Mnogi fizičari 19. stoljeća smatrali su da klasična fizika može objasniti bilo koju fizikalnu pojavu. Međutim, krajem 19. i početkom 20. stoljeća otkrivene su nove činjenice koje se nisu mogle uklopiti u okvire klasične fizike. Tako se pojavljuje *moderna fizika*: relativistička i kvantna mehanika. Teorijom relativnosti Einstein je 1905. godine radikalno promijenio dotadašnje shvaćanje prostora i vremena te razradio mehaniku velikih brzina, *relativističku mehaniku*. Međutim, time nije bila opovrgnuta klasična mehanika jer zakoni relativističke mehanike prelaze u zakone klasične fizike kada su brzine malene u usporedbi s brzinom svjetlosti. Početkom 20. stoljeća nastala je i *kvantna mehanika*, jer klasična fizika nije mogla objasniti pojave u svijetu atoma.

Uobičajeno je, uglavnom zbog povijesnih razloga, fiziku dijeliti na pojedina područja: mehaniku, toplinu, elektromagnetizam, optiku, atomistiku, nuklearnu fiziku, itd. U ovome udžbeniku obradit ćemo dio tzv. opće fizike, i to mehaniku i toplinu, u opsegu predviđenom nastavnim programom predmeta Fizika 1 Fakulteta elektrotehnike i računarstva.

1.2. MJERENJE U FIZICI

Mjerenje je osnova svih prirodnih znanosti, pa i fizike, koja je tipična eksperimentalna znanost. Engleski fizičar i matematičar William Thomson, lord Kelvin (1824 – 1907), istakao je važnost mjerenja ovim riječima:

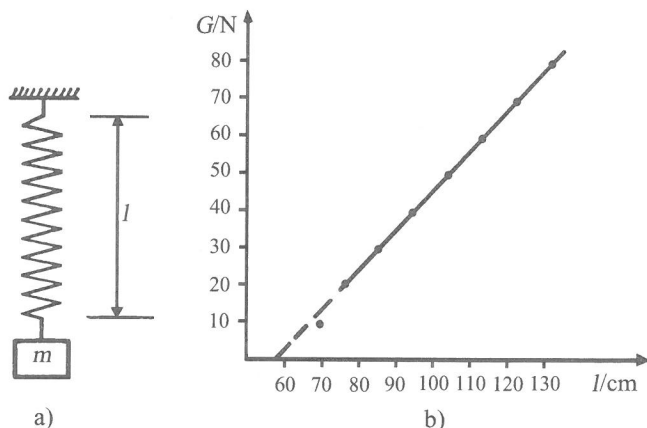
„... Kada ono o čemu govorite možete i izmjeriti i izraziti brojevima, tada znate nešto o tome; kada to ne možete izmjeriti, tada je vaše znanje oskudno i nedovoljno...”

Pri istraživanju u fizici najprije moramo uočiti neriješen problem koji je od znanstvenog interesa. Zatim precizno mjerimo. Mjerenje ponavljamo nekoliko puta da bismo što više smanjili pogreške mjerenja. Rezultate mjerenja unosimo u tablice, predložimo ih grafički ili pohranjujemo u kompjutor. Zatim slijedi analiza eksperimentalnih podataka, fizikalno objašnjenje eksperimenta i pronalaženje fizikalnog zakona.

Eksperimentalnu metodu razmotrit ćemo na primjeru mjerenja ovisnosti duljine spiralne opruge o težini utega koji visi na njezinu kraju.* To je jednostavan problem čije je rješenje već odavno poznato, ali će nam ilustrirati kako se mjerenjem dolazi do fizikalnog zakona.

* Prema: V. Lopašić, *Predavanja iz fizike*, I. dio, Sveučilište u Zagrebu, 1966.

Pokus izvodimo tako da mjerimo dužinu opruge l za razne težine $G = mg$ utega koji vise na njezinu donjem kraju (sl. 1.1.a). Parove veličina (l_i , G_i) upisujemo u tablicu.



Slika 1.1. Ovisnost dužine opruge o opterećenju

Rezultati takvog mjerenja dani su u tablici 1.1. Težina utega izražena je jedinicom njutn (N), a odgovarajuća dužina opruge l u centimetrima. Rezultati mjerenja prikazani su i grafički na slici 1.1.b.

Tablica 1.1. Rezultati mjerenja ovisnosti duljine opruge o opterećenju

m/kg	0	1	2	3	4	5	6	7	8
G/N	0	9,8	19,6	29,4	39,2	49,1	58,9	68,7	78,5
l/cm	68,5	69,4	76,2	85,5	94,8	104,1	113,4	122,8	132,2

Iz tablice 1.1, a još bolje iz slike 1.1.b, vidimo da se opruga produžuje linearno u području G od oko 30 N do 80 N. Da bi se odredio pravac koji je u tom području najbliži mjerenim točkama, upotrebljava se *metoda najmanjih kvadrata**, tj. povuče se takav pravac da zbroj kvadrata devijacija izmjerenih vrijednosti od vrijednosti što leže na pravcu bude minimalan. Tu metodu, koja se često zove i *metoda linearne regresije*, primijenit ćemo na našem primjeru.

Pretpostavimo da je jednadžba pravca

$$G = al + b \quad (1.1)$$

i, pomoću metode najmanjih kvadrata, odredimo koeficijent smjera a i odrezak na ordinati b . Kada u (1.1) uvrstimo za l vrijednosti l_i iz tablice 1.1, nećemo dobiti G_i , već $G_i + \Delta G_i$, gdje je ΔG_i devijacija izmjerene vrijednosti od vrijednosti koja leži na pravcu. U smislu metode najmanjih kvadrata izraz

$$\sum_{i=1}^n (\Delta G_i)^2 = \sum_{i=1}^n (G_i - al_i - b)^2 \quad (1.2)$$

* Vidjeti npr. V. Vranić, *Vjerojatnost i statistika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1958.

treba da bude minimalan, tj. derivacija izraza (1.2) po a , odnosno b treba da iščezava:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n G_i l_i - a \sum_{i=1}^n l_i^2 - b \sum_{i=1}^n l_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n G_i - a \sum_{i=1}^n l_i - nb &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Iz te dvije jednačbe možemo odrediti a i b :

$$a = \frac{\frac{\sum l_i \sum G_i}{n} - \sum l_i G_i}{\frac{(\sum l_i)^2}{n} - \sum l_i^2} = \frac{n \sum l_i G_i - \sum l_i \sum G_i}{n \sum l_i^2 - (\sum l_i)^2} \quad (1.4)$$

$$b = \bar{G} - a \bar{l}. \quad (1.5)$$

gdje je srednja vrijednost $\bar{l}$, odnosno $\bar{G}$:

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n}, \quad \bar{G} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i}{n} \quad (1.6)$$

Uvrstimo li u te formule vrijednosti iz tablice ($l_1 = 85,5$ cm, $G_1 = 29,4$ N, $l_2 = 94,8$ cm, $G_2 = 39,2$ N, itd.), dobit ćemo $a = 1,05$ N/cm i $b = -60,6$ N. Zakon linearnog rastezanja promatrane opruge možemo, dakle, napisati u obliku:

$$G = k(l - l_0) \quad (1.7)$$

gdje je konstanta opruge $k = 1,05$ N/cm, a $l_0 = 57,4$ cm.

Za malene vrijednosti opterećenja, kao što se vidi iz slike 1.1.b, promatrana opruga ne rasteže se linearно.

Mjerenjem nastojimo dobiti što točniju vrijednost fizikalne veličine. Međutim, koliko god pažljivo i precizno proveli mjerenje, nikada ne dobivamo apsolutno točnu vrijednost mjerene veličine, već se učini veća ili manja pogreška.*

Mjereći dužinu opruge u prije navedenom pokusu dobili smo, npr., za $G = 39,2$ N ove rezultate: 94,80 cm, 94,85 cm, 94,75 cm, 94,85 cm, 94,80 cm i 94,75 cm. Prava je vrijednost duljine opruge negdje između vrijednosti od 94,75 cm do 94,85 cm.

Aritmetička sredina (srednjak) tih mjerenja jest:

$$\bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = 94,8 \text{ cm} \quad (1.8)$$

i prilično je dobra aproksimacija prave vrijednosti.

Pojedina mjerenja razlikuju se od srednjaka za određenu *devijaciju*:

$$\Delta l_i = \bar{l} - l_i \quad (1.9)$$

* Za opsežniji prikaz vidjeti, npr., M. Brezinščak, *Mjerna nesigurnost*, Tehnička enciklopedija 8(1982), 604-610.

Kada bi srednjak $\bar{l}$ zaista bio prava vrijednost, tada bi Δl_i bila pogreška mjerenja. Budući da je $\bar{l}$ prilično dobra aproksimacija prave vrijednosti, to i devijacija (1.9) prilično dobro opisuje pogrešku mjerenja.

Rezultat mjerenja iskazujemo u obliku

$$l = \bar{l} \pm \Delta l \quad (1.10)$$

gdje za Δl možemo uzeti maksimalnu devijaciju (u našem primjeru 0,05 cm) ili, još bolje, pogotovo kad provedemo više mjerenja, *srednju kvadratičnu pogrešku*

$$\Delta l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l - l_i)^2}{n(n-1)}} \quad (1.11)$$

koja u našem primjeru iznosi 0,02 cm. Možemo, dakle, s prilično velikom vjerojatnošću očekivati da će prava vrijednost dužine opruge za opterećenje 39,2 N iznositi

$$l = (94,80 \pm 0,02) \text{ cm.}$$

1.3. FIZIKALNE VELIČINE I JEDINICE

Fizikalna veličina je mjerljivo svojstvo (parametar) fizikalnog stanja, procesa ili tijela. Ona omogućuje definiranje fizikalne pojave i njezino opisivanje u matematičkom obliku, pomoću odgovarajućih jednadžbi. Fizikalne su veličine, npr., put, vrijeme, masa, brzina, rad, energija, temperatura, itd.

Fizikalne veličine označavaju se malim i velikim slovima latinske abecede i grčkog alfabeta. Znakovi (simboli) fizikalnih veličina međunarodno su dogovoreni (ISO, IUPAP)*. To su većinom početna slova engleskih ili latinskih naziva odgovarajućih fizikalnih veličina. Tako je znak za brzinu v (velocity, velocitas), za vrijeme t (time, tempus), za silu F (force), za rad W (work), za kutnu brzinu ω , itd.

Fizikalni se zakoni mogu precizno izraziti pomoću fizikalnih jednadžbi (formula), koje povezuju fizikalne veličine u tom zakonu. Tako činjenicu da je put pri jednolikom gibanju po pravcu jednak umnošku brzine i vremena možemo jednostavno i precizno izraziti jednadžbom $s = v t$.

Mjeriti neku veličinu znači odrediti broj koji pokazuje koliko puta ta veličina sadrži u sebi istovrsnu veličinu dogovorom uzetu za jedinicu. Na primjer, izmjeriti duljinu stola znači usporediti je s jedinicom duljine (metrom) i utvrditi koliko promatrana duljina ima tih jedinica ili, drukčije rečeno, koliko je mjernih jedinica (metara) sadržano u duljini stola. Tako ćemo dobiti brojčanu vrijednost fizikalne veličine koju mjerimo. Nije dovoljno poznavati samo brojčanu vrijednost neke fizikalne veličine, već treba znati i njezinu jedinicu. Svaka se fizikalna veličina, naime, izražava pomoću brojčane vrijednosti i mjerne jedinice:

$$A = \{A\} \cdot [A] \quad (1.12)$$

gdje je $\{A\}$ brojčana vrijednost, a $[A]$ mjerna jedinica fizičke veličine.

*International Standard Organisation
International Union for Pure and Applied Physics

Ako je, npr., duljina stola $l = 1,06$ m, tada je $\{l\} = 1,06$, a $[l] = \text{m}$. Nije dovoljno reći da je duljina $l = 1,06$, nego treba napisati i jedinicu, $l = 1,06$ m. Ako izaberemo drugu jedinicu, npr. centimetar, tada se i brojčana vrijednost, naravno, promijeni.

Mjerenjem, mjernim jedinicama i sl. bavi se metrologija. Postoje razni međunarodni organi, metrološke organizacije, koje nastoje uskladiti i, zatim, pronaći najpogodnije mjerne jedinice i oznake. Isto tako, nastoji se uvesti jedinstven međunarodni sustav jedinica u sve grane znanosti i tehnike.

Najviše su međunarodne metrološke organizacije u svijetu *Generalna konferencija za utege i mjere* (CGPM — *Conférence Générale des Poids et Mesures*), koja zasjeda najmanje jedanput svakih šest godina, i *Međunarodni komitet za utege i mjere* (CIPM — *Comité International des Poids et Mesures*).

Mjeriteljska djelatnost u Republici Hrvatskoj regulirana je Zakonom o mjeriteljstvu. Za provedbu zakona o mjeriteljskoj djelatnosti i za nadzor nad njegovom provedbom mjerodavan je Državni zavod za mjeriteljstvo. Temeljna je mjeriteljska djelatnost osiguranje mjeriteljske sljedivosti kao preduvjet usporedivosti rezultata mjerenja. Zadaci zakonskog mjeriteljstva ostvaruju se umjeravanjem etalona i ispitivanjem ispravnosti mjerila.

1.4. MEĐUNARODNI SUSTAV JEDINICA (SI)

Na XI zasjedanju Generalne konferencije za utege i mjere, u listopadu 1960, prihvaćen je Međunarodni sustav mjernih jedinica, tzv. SI (*Système International d'Unités*), koji je i u nas obavezan.*

Dogovorom je odabrano sedam osnovnih mjernih jedinica Međunarodnog sustava iz kojih se matematičkim operacijama izvode sve ostale jedinice. Uvjetno, samo zbog tog razloga, one fizikalne veličine čije su pramjere odabrane za osnovne mjerne jedinice možemo nazvati osnovnim ili polaznim fizikalnim veličinama.

Osnovne jedinice Međunarodnog sustava i pripadne fizikalne veličine dane su u tablici 1.2.

Tablica 1.2. Fizikalne veličine i osnovne mjerne jedinice

Fizikalna veličina	Znak	Mjerna jedinica	Znak
duljina	l	metar	m
masa	m	kilogram	kg
vrijeme	t	sekunda	s
termodinamička temperatura	T	kelvin	K
električna struja	I	amper	A
jakost svjetlosti	I	kandela	cd
množina (količina tvari)	n	mol	mol

Definicija metra mijenjala se u posljednjih stotinu godina. Najprije je metar definiran kao četrdesetmilijunti dio Zemljina meridijana. Od 1889. do 1960. godine metar se definirao pomoću pramjere (prototipa, etalona) metra. To je šipka napravljena od legure (90%) platine i (10%) iridija, a čuva se u Sèvresu kraj Pariza. Razmak između dva zareza na toj šipci (u normiranim uvjetima) dug je jedan metar.

* Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima, Narodne novine br. 58/1993

Takva definicija jedinice duljine pokazala se nepouzdanom i nedovoljno točnom. (Preciznost etalona bila je oko $1 \mu\text{m}$.) Naime, prototip je trebalo držati uvijek u istim uvjetima, teško je bilo izraditi precizne kopije, mjerenje vrlo malih duljina pomoću takvog prototipa nije bilo precizno, itd. Zato je na XI zasjedanju CGPM (1960) odlučeno da se usvoji prirodniji, precizniji i neuništiv standard za duljinu, temeljen na zračenju izotopa kriptona-86 u točno određenim uvjetima. Tako se 1960. metar definirao pomoću valne duljine svjetlosti koju emitiraju atomi izotopa kriptona-86.

Metar (m) je duljina jednaka $1\,650\,763,73$ valnih duljina u vakuumu elektromagnetskog zračenja (narančaste svjetlosti) izotopa kriptona-86 koje odgovara prijelazu elektrona između energetskih razina $5d_5$ i $2p_{10}$.

Na XVII zasjedanju Generalne konferencije za utege i mjere (1983) usvojena je nova definicija metra:

Metar (znak: m) je duljina puta koji u vakuumu svjetlost prijeđe za vrijeme $1/299\,792\,458$ sekunde.

Time je definirana i brzina svjetlosti kao prirodna konstanta koja iznosi

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

Jedinica mase je kilogram (znak: kg). Definicija koju je prihvatila CGPM na svom prvom (1889) i trećem zasjedanju (1901) vrijedi i danas.

Kilogram (znak: kg) je masa međunarodne pramjere (prototipa) koja se čuva u Međunarodnom uredu za utege i mjere u Sèvresu kraj Pariza.

Ta međunarodna pramjera izrađena je od legure (90%) platine i (10%) iridija, u obliku jednakostraničnog valjka promjera (odnosno visine) 39 mm. Osim originala, izrađene su kopije pramjera za sve zemlje članice CGPM.

Jedinica vremena ili vremenskog razdoblja jest sekunda. Za mjerenje vremena uvijek se koristimo nekom periodičnom pojavom.

Sekunda se ranije definirala kao $\frac{1}{86\,400}$ dio srednjega Sunčeva dana, odnosno kao $31\,556\,925,9747$ -ti dio tropske godine 1900.

Na XIII zasjedanju CGPM (1967) usvojena je nova, točnija definicija sekunde pomoću tzv. cezijeva atomskog sata, tj. frekvencije koju emitira atom ^{133}Cs .

Sekunda (znak: s) je trajanje $9\,192\,631\,770$ perioda zračenja koje nastaje pri prijelazu elektrona između dviju hiperfinskih razina osnovnog stanja atoma ^{133}Cs .

Takva definicija sekunde mnogo je točnija: pogreška je 10^{-13} s, tj. jedna sekunda u 300 000 godina.

Današnja definicija ampera, jedinice električne struje, prihvaćena je na IX zasjedanju CGPM (1948).

Stalna električna struja ima vrijednost jedan amper (znak: A) ako, prolazeći u svakom od dva paralelna, ravna, beskonačno dugačka vodiča, zanemarivo malenog presjeka, razmaknuta jedan metar u vakuumu, uzrokuje između njih silu $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po jednome metru duljine vodiča.

Jedinica termodinamičke (apsolutne) temperature jest kelvin. Na XIII zasjedanju CGPM definiran je ovako:

Kelvin (znak: K) je termodinamička temperatura koja je jednaka 273,16-tom dijelu termodinamičke temperature trojne točke vode.

Temperatura trojne točke vode jest ona temperatura na kojoj je voda u ravnoteži u sva tri agregatna stanja (faze), tj. u čvrstoj, tekućoj i plinovitoj fazi. Za vodu je temperatura trojne točke $t = 0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$, odnosno $T = 273,16\text{ K}$. (Pri tom je tlak $p_0 = 6,1\text{ mbar}$.)

Za iskazivanje temperature, osim kelvina, dopuštena je upotreba Celzijeva stupnja (znak: $^{\circ}\text{C}$). Veza između termodinamičke temperature (T) i temperature izražene u Celzijevim stupnjevima (t) jest:

$$t = T - T_0 \quad (1.13)$$

gdje je $T_0 = 273,15\text{ K}$.

Uočite da je temperaturni interval u kelvinima jednak temperaturnom intervalu u Celzijevim stupnjevima. Temperatura tzv. apsolutne nule jest 0 K , odnosno $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Jedinica jakosti svjetlosti jest kandela.

Na XIII zasjedanju CGPM (1967) kandela je definirana ovako:

Kandela je jakost svjetlosti koju u okomitom pravcu zrači površina $\frac{1}{600\ 000}\text{ m}^2$ crnog tijela na temperaturi skrutnjavanja platine pod tlakom $101\ 325\text{ Pa}$.

Na XVI zasjedanju Generalne konferencije (1979) promijenjena je definicija jedinice kandela, pa nova definicija kande le glasi:

Kandela (znak: cd) je jakost svjetlosti u danom pravcu izvora koji emitira monokromatsko zračenje frekvencije $5,4 \cdot 10^{14}\text{ Hz}$ i čija je energetska jakost u tom pravcu $1/683$ vata po steradijanu.

Jedinica množine ili količine tvari definirana je na XIV zasjedanju CGPM (1971) ovako:

Mol (znak: mol) je količina tvari koja sadrži toliko jednakih čestica (molekula, atoma, elektrona, iona i sl.) koliko ima atoma u $0,012\text{ kg}$ izotopa ugljika $^{12}_6\text{C}$.

Potrebno je razlikovati množinu i masu, jer se te dvije veličine, iako proporcionalne, bitno razlikuju. Veza između množine i mase jest:

$$\begin{aligned} \text{množina} &= \frac{\text{masa}}{\text{molna masa}} \\ n &= \frac{m}{M} \end{aligned} \quad (1.14)$$

gdje množinu n izražavamo jedinicom mol, masu m kilogramom, a molnu masu M kilogramom po molu. Tako množini vodika 1 mol odgovara masa vodika 0,002016 kg, a množini kisika 1 mol odgovara masa 0,032 kg itd.

Izvedene jedinice izvode se iz osnovnih pomoću algebarskih izraza, matematičkim operacijama. Tako se jedinica brzine izvodi iz definicijske jednadžbe za brzinu jednolikoga gibanja:

$$\text{brzina} = \frac{\text{put}}{\text{vrijeme}}, \quad v = \frac{s}{t},$$

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Jedinica brzine je dakle metar u sekundi (znak: m/s).

Spomenimo dvije izvedene fizikalne veličine, plošni kut i prostorni kut, čije su jedinice radijan (rad) i steradian (sr). Na 20. općoj konferenciji za utege i mjere 1995. g. te su jedinice proglašene izvedenim jedinicama SI, bez dimenzije, a skupina *dopunskih jedinica SI*, kojoj su do tada pripadale, je ukinuta.

Radijan (znak rad ili 1) je ravninski kut, s vrhom u središtu kružnice, čiji krakovi na njoj omeđuju luk duljine jednake polumjeru kružnice (CGPM, 1960).

Steradian (znak: sr) jednak je prostornom kutu stošca, s vrhom u središtu kugle, koji na površini te kugle omeđuje površinu jednaku kvadratu polumjera (CGPM, 1960).

Pomoću određenih predmetaka dobivamo decimalne višekratnike i dijelove jedinica, npr. 1 km = 10³ m, 1 ns = 10⁻⁹ s i sl. (Uočite da se decimalne mjerne jedinice mase dobivaju stavljanjem decimalnih predmetaka ispred znaka gram.) U tablici 1.3. dani su međunarodno prihvaćeni predmeci.

Tablica 1.3. Predmeci za tvorbu decimalnih jedinica

Znak predmetka	Naziv predmetka	Vrijednost predmetka	Znak predmetka	Naziv predmetka	Vrijednost predmetka
E	eksa	10 ¹⁸	d	deci	10 ⁻¹
P	peta	10 ¹⁵	c	centi	10 ⁻²
T	tera	10 ¹²	m	mili	10 ⁻³
G	giga	10 ⁹	μ	mikro	10 ⁻⁶
M	mega	10 ⁶	n	nano	10 ⁻⁹
k	kilo	10 ³	p	piko	10 ⁻¹²
h	hekto	10 ²	f	femto	10 ⁻¹⁵
da	deka	10 ¹	a	ato	10 ⁻¹⁸

Zakonom o mjernim jedinicama i mjerilima propisana je uporaba mjernih jedinica. U zakonite mjerne jedinice pripadaju jedinice Međunarodnog sustava (SI), decimalne jedinice koje nastaju iz jedinica SI i decimalnih predmetaka, mješovite jedinice koje se tvore iz svih zakonitih jedinica te jedinice koje nisu SI, ali zakon dopušta njihovu uporabu u pojedinim područjima gdje njihovo izbacivanje ne bi bilo svrsishodno. One će se u tim područjima moći i dalje upotrebljavati. To su primjerice morska milja, čvor,

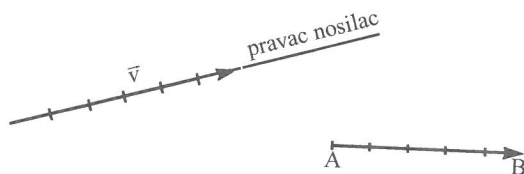
ar (a), hektar (ha), litra (L), stupanj ($^{\circ}$), jedinica atomske mase (u), minuta (min), sat (h), dan (d), vatsat (Wh), elektronvolt (eV), Celzijev stupanj ($^{\circ}\text{C}$), bar (bar) i još neke.

1.5. SKALARNE I VEKTORSKE FIZIKALNE VELIČINE

Fizikalne veličine većinom su skalari ili vektori. Skalarnе su veličine potpuno određene svojom brojčanom vrijednošću i odgovarajućom jedinicom. Primjeri skalarnih veličina jesu volumen, gustoća, temperatura, masa, frekvencija, rad, snaga, jakost struje, vrijeme, itd. Na primjer, kad kažemo da je masa nekog tijela 25 kg, potpuno smo odredili tu skalarnu veličinu.

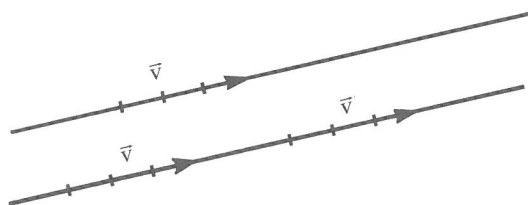
Naprotiv, za potpuno određivanje vektora moramo poznavati **pravac** nosilac, **smjer** vektora i **iznos**. Pravac na kojem leži vektor zove se pravac nosilac. Brojčana vrijednost izražena u odgovarajućim jedinicama zove se iznos (intenzitet, modul ili apsolutna vrijednost) vektora. Iznos (modul) vektora uvijek je pozitivan. Tako je brzina vektorska veličina. Zato nije dovoljno reći da je brzina 100 km/h, već treba odrediti i pravac nosilac i smjer. Mnoge su fizikalne veličine vektori, npr. brzina, akceleracija, sila, količina gibanja, moment sile, kutna brzina, itd.

Vektor označavamo strelicom čija duljina (u odgovarajućem mjerilu) daje iznos vektora, dok smjer strelice pokazuje smjer vektora (sl. 1.2). Vektorsku fizikalnu veličinu označavamo malom strelicom iznad simbola: $\vec{v}$, dok iznos vektora označavamo samo slovom bez strelice: v , a često i ovako: $|\vec{v}|$. Vektore možemo obilježavati i velikim slovima, koja označuju početak i kraj vektora (npr. $\vec{AB}$ na sl. 1.2). Vektori se često tiskaju masnim slovima (i tada nije potrebna strelica), pa tada isto slovo pisano običnim slogom označuje iznos vektora.



Slika 1.2. Označavanje vektora

Vektori su kolinearni ako su njihovi pravci nosioci paralelni. Pri tom vektori mogu biti istog ili suprotnog smjera. Kolinearne slobodne vektore jednakog smjera smatramo jednakima. To znači da slobodne vektore smijemo pomicati po pravcu nosiocu i paralelno translirati jer im se pri tom ne mijenja ni iznos ni smjer (sl. 1.3).



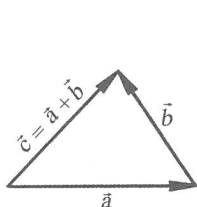
Slika 1.3. Vektori se smiju translirati

Zbrajanje vektora. Zbroj dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ opet je vektor $\vec{c}$:

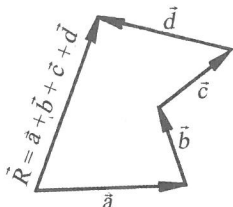
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (1.15)$$

Grafički vektore zbrajamo tako da početak drugog vektora paralelnom translacijom dovedemo na kraj prvoga: rezultanta je vektor koji ide od početka prvog do kraja drugog vektora (sl. 1.4).

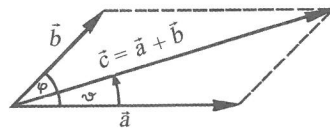
Uočite da vektorski zbroj nije isto što i algebarski, jer iznos vektora $|\vec{c}|$ nije općenito jednak zbroju iznosa $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$; $c = a + b$ samo kada su smjerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ isti, inače je $c < a + b$.



Slika 1.4. Zbrajanje dvaju vektora



Slika 1.5. Zbrajanje vektora – vektorski poligon



Slika 1.6. Metoda paralelograma

Ako imamo više vektora, grafički ih zbrajamo na isti način: kraj jednoga dovedemo na početak drugoga, početak trećega na kraj drugoga, itd. Rezultanta je vektor koji spaja početak prvog i kraj posljednjeg vektora. Tako dobivamo vektorski poligon (mnogokut). Pri tom redoslijed crtanja nije bitan (sl. 1.5).

Drugi je način zbrajanja vektora metodom paralelograma. Početke vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedemo u istu točku i nacrtamo odgovarajući paralelogram kojem su ti vektori stranice (sl. 1.6). Dijagonala paralelograma je rezultantni vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Iznos rezultante možemo izračunati upotrebom kosinusova poučka:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi} \quad (1.16)$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Smjer rezultante možemo odrediti kutom ϑ (sl. 1.6):

$$\cos \vartheta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad (1.17)$$

Oduzimanje vektora svodi se na zbrajanje. Razlika $\vec{a} - \vec{b}$ dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest vektor $\vec{c}$, koji nastaje zbrajanjem vektora $\vec{a}$ i vektora $-\vec{b}$ (sl. 1.7). Negativni vektor $-\vec{b}$ po iznosu je jednak vektoru $\vec{b}$, kolinearan je s njim, ali je suprotnog smjera. Dakle:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (1.18)$$

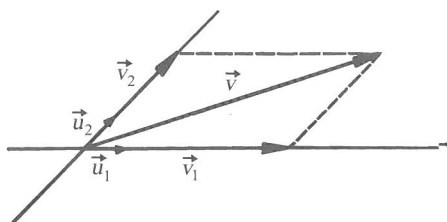
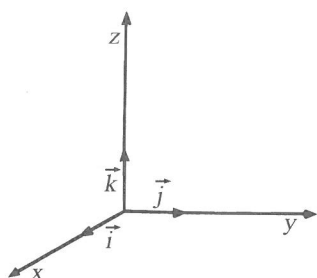
Da bismo vektor $\vec{b}$ oduzeli od vektora $\vec{a}$, početak obaju vektora dovedemo u istu točku: razlika $\vec{a} - \vec{b}$ je vektor koji ide od kraja vektora $\vec{b}$ do kraja vektora $\vec{a}$ (sl. 1.7).

Vektor $\vec{a}$ množi se s pozitivnim skalarom α tako da mu se iznos pomnoži, a smjer ostaje isti. Pri množenju s negativnim skalarom ($\alpha < 0$) smjer vektora $\alpha\vec{a}$ suprotan je smjeru vektora $\vec{a}$.



Slika 1.7. Oduzimanje vektora

Komponente vektora. Koordinatni sustav. Svaki vektor možemo prikazati kao zbroj dvaju ili više vektora, koje nazivamo njegovim vektorskim komponentama. To je obratan postupak od zbrajanja vektora. Da bi rastavljanje na komponente bilo jednoznačno određeno, potrebno je poznavati pravce nosioce komponentata (sl. 1.8), a osim toga broj komponentata mora biti jednak dimenziji prostora u kojem se nalaze vektori.

Slika 1.8. Rastavljanje vektora $\vec{v}$ na dvije komponente $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ Slika 1.9. Jedinичni vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

Smjer u prostoru najčešće definiramo jedinичnim vektorom (ortom) kojem je iznos jednak jedinici. Tako je jedinичni vektor $\vec{a}_0$ u smjeru vektora $\vec{a}$ definiran relacijom:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a} \quad (1.19)$$

Izborom triju smjerova, određenih jedinичnim vektorima $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$, definiramo koordinatni sustav u trodimenzionalnom prostoru. Izborom koordinatnog sustava možemo svaki vektor $\vec{v}$ jednoznačno rastaviti na tri komponente, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3 \quad (1.20)$$

gdje su v_1 , v_2 i v_3 skalarne komponente vektora $\vec{v}$. (Komponenta v_i sadrži u sebi i predznak; ako je u smjeru $\vec{u}_i$, pozitivna je, a ako je u smjeru $-\vec{u}_i$, negativna je.)

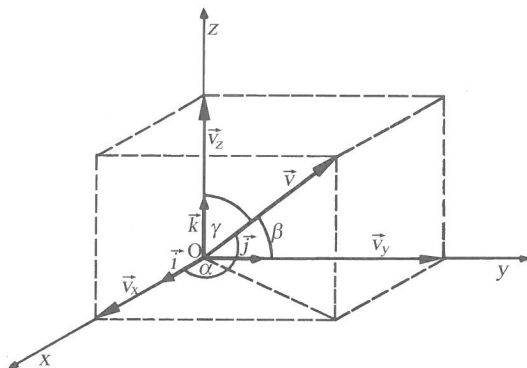
Najčešće se upotrebljava koordinatni sustav sa tri međusobno okomita jedinичna vektora, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, tzv. Kartezijev koordinatni sustav (sl. 1.9).

U Kartezijevu sustavu vektor $\vec{v}$ rastavlja se na komponente ovako:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (1.21)$$

gdje su v_x , v_y i v_z skalarne komponente vektora $\vec{v}$ (sl. 1.10). Kako su osi x , y i z međusobno okomite, veza između iznosa vektora $\vec{v}$ i njegovih skalarnih komponenta jest:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.22)$$



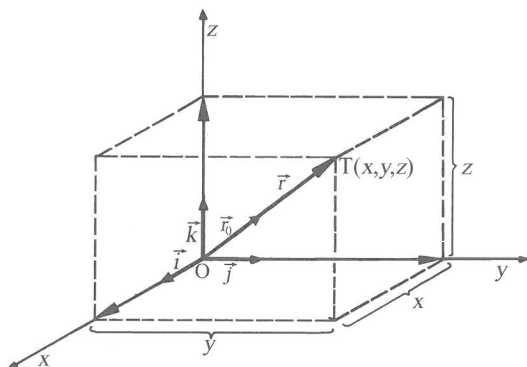
Slika 1.10. Komponente vektora u prostornom Kartezijevu sustavu

U fizikalnim razmatranjima često se pojavljuje vektor položaja (radijusvektor) $\vec{r}$ koji opisuje položaj točke u prostoru:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1.23)$$

Skalarne komponente radijusvektora jesu x , y i z (sl. 1.11), a njegov je iznos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.24)$$



Slika 1.11. Radijusvektor

Skalarni produkt. Dva se vektora mogu pomnožiti skalarno i vektorski. Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se sa $\vec{a} \cdot \vec{b}$, skalarna je veličina i jednak je umnošku iznosa obaju vektora i kosinusa kuta među njima:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha \quad (1.25)$$

Ovisno o veličini kuta α , skalarni produkt (1.25) može se mijenjati od $a b$ do $-a b$; ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno okomiti, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, jer je $\cos 90^\circ = 0$. Pišemo li (1.25) u obliku $(a \cos \alpha) b$ ili $a (b \cos \alpha)$, vidimo da je skalarni produkt dvaju vektora, u stvari, produkt komponente jednoga od njih u smjeru drugoga i iznosa drugog vektora.

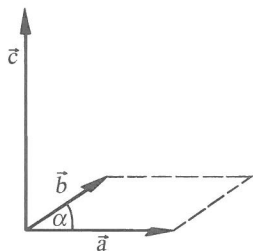
Ako su vektori zadani pomoću svojih komponentata, npr. $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, tada je skalarni produkt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.26)$$

jer je $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ i sl.

Vektorski produkt. Rezultat vektorskog produkta dvaju vektora opet je vektor. Vektorski produkt $\vec{c}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se sa $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Iznos vektorskog produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ jednak je umnošku iznosa jednog i drugog vektora te sinusa kuta među njima

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \alpha \quad (1.27)$$



Slika 1.12. Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$

Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ okomit je na oba vektora (sl. 1.12), a njegov se smjer određuje pravilom desne ruke. Ako prstima desne ruke idemo kraćim putem od prvog do drugog vektora, palac će nam pokazati smjer vektorskog produkta $\vec{c}$. (Sn jer možemo odrediti i pravilom desnog vijka: ako se desni vijak vrti od vektora $\vec{a}$ do $\vec{b}$, tada će napredovati u smjeru $\vec{a} \times \vec{b}$.) Valja uočiti da je iznos vektorskog produkta brojčano jednak površini paralelograma čije su stranice vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Za vektorski produkt ne vrijedi zakon komutacije

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (1.28)$$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelni, njihov je vektorski produkt nula, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Zadamo li vektore pomoću komponentata

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{ i } \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

vektorski je produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

PITANJA I ZADACI

1. Što je fizika? Objasnite pojmove: klasična fizika, moderna fizika, Newtonova mehanika, relativistička i kvantna mehanika.
2. Što je materija i u kojim se oblicima pojavljuje?
3. Kakve su metode istraživanja u fizici?
4. Kakva je uloga eksperimenta u fizici?
5. Objasnite eksperimentalnu metodu u pokusu određivanja ovisnosti duljine opruge o sili koja je rasteže.
6. Objasnite metodu linearne regresije i primijenite je na jednom primjeru.
7. Što je pogreška mjerenja i kako se izračunava?

8. Što je fizikalna veličina? Što treba znati da bi neka fizikalna veličina bila potpuno određena? Nabrojte nekoliko fizikalnih veličina.
9. Što znači izmjeriti neku fizikalnu veličinu?
10. Što je sustav jedinica? Koji se sustavi jedinica pojavljuju u literaturi? Koji je službeni sustav jedinica?
11. Što su osnovne fizikalne veličine i jedinice, a što izvedene?
12. Koje su polazne fizikalne veličine i osnovne jedinice u Međunarodnom sustavu (SI)?
13. Kako se definiraju osnovne jedinice Međunarodnog sustava (SI)?
14. Kako se označavaju decimalni višekratnici i dijelovi jedinica?
15. Navedite nekoliko mjernih instrumenata za mjerenje duljine. Kolika je njihova točnost?
16. Koje se jedinice izvan sustava SI mogu upotrebljavati u posebnim područjima?
17. Što su skalarne, a što vektorske fizikalne veličine? Navedite nekoliko primjera.
18. Koje su od navedenih fizikalnih veličina vektori: masa, brzina, sila, vrijeme, rad, temperatura, jakost struje, jakost električnog polja, jakost svjetlosti?
19. Kako se zbrajaju i oduzimaju vektori? Zadaite tri vektora i zbrojte ih.
20. Što je jedinični vektor?
21. Kako se vektor rastavlja u komponente?
22. Što je vektor položaja?
23. Objasnite skalarni i vektorski produkt dva vektora.
24. Zadane su dvije sile: F_1 ima iznos 8 N i zatvara kut 30° sa pozitivnim smjerom osi x , a F_2 ima iznos 6 N i zatvara kut 150° s osi $+x$. Izračunajte zbroj tih dviju sila.
25. Na materijalnu točku djeluju u horizontalnoj ravnini tri sile: prva sila $F_1 = 3$ N u smjeru prema jugu, druga sila $F_2 = 2$ N prema sjeveroistoku i treća sila $F_3 = 4$ N prema zapadu. Izračunajte iznos rezultantne sile i smjer rezultante s obzirom na smjer istoka.
26. Točka koja se nalazi u ravnini (x y) ima koordinate $(-6$ m, 8 m). Koliki je vektor položaja te točke?
27. Da bi došao do cilja automobilist vozi 6 km prema sjeveroistoku, a zatim 2 km prema jugu te 1 km prema zapadu. Napišite izraz za vektor položaja cilja. Kolika je udaljenost cilja od polazne točke?
28. Automobil težine $G = 2 \cdot 10^4$ N parkiran je na uzbrdici nagiba 10° . Rastavite njegovu težinu na dvije komponente, jednu koja djeluje niz cestu i drugu koja djeluje okomito na cestu.
29. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zatvaraju kut 60° . Koliki je $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ako je $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 5$?
30. Zadana su dva vektora $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$. Odredite $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$. Koliki je vektor $\vec{c}$ tako da je $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = 0$?
31. U točki A (2m, 2m, 0m) djeluju dvije sile $\vec{F}_1/\text{N} = 6\vec{i}$ i $\vec{F}_2/\text{N} = -2\vec{i} + 10\vec{j}$. Izračunajte:
 - a) $\vec{r} \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ i
 - b) $\vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$, gdje je $\vec{r}$ radijus vektor od ishodišta do točke A.
32. Zadana su tri vektora: $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, i $\vec{c} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Izračunajte:
 - a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ i $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
 - b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ i
 - c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.
 - d) Pokažite da vrijedi $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

2. KINEMATIKA ČESTICE

Mehanika je dio fizike koji proučava zakone gibanja tijela, tj. vremensku promjenu položaja tijela u prostoru (npr. gibanje planeta, vlakova, automobila, raketa, molekula, itd.). Mehanika se dijeli na kinematiku, dinamiku i statiku, kao posebni slučaj dinamike. Mehaniku možemo podijeliti na mehaniku materijalne točke, sistema materijalnih točaka, krutog tijela, mehaniku fluida i mehaniku titranja i valova.

Kinematika (grč. kinein = gibati) proučava gibanje, bez obzira na uzroke gibanja i na svojstva tijela koja se gibaju, tj. ne uzima u obzir njihovu masu i sile što djeluju na njih. Ona gibanje tretira matematički, te određuje položaj, brzinu i akceleraciju tijela ovisno o vremenu.

Dinamika (grč. dynamis = sila) proučava uzroke gibanja i utjecaj sile i mase na gibanje. Za razliku od kinematike, dinamika daje fizikalnu bit gibanja. Statika proučava uvjete ravnoteže tijela.

Gibanje je jedan od temeljnih problema fizike. Prve zakone gibanja našli su Galilei* i Newton**. Tijelo se giba ako mijenja položaj prema nekom drugom tijelu (okolini). Da bismo tu promjenu položaja izmjerili, za okolinu većemo određeni referentni sustav, te kažemo da se tijelo giba ako mijenja položaj prema tom referentnom sustavu. Tako putnik koji sjedi u vlaku miruje s obzirom na referentni sustav vezan za vlak, ali se giba s obzirom na sustav vezan za zemlju. Svako gibanje je relativno gibanje prema određenom referentnom sustavu.

Mirovanje je poseban oblik gibanja. Tijelo miruje ako ima stalne, nepromijenjene koordinate s obzirom na izabrani referentni sustav. Budući da u svemiru nema nijedne točke koja apsolutno miruje i za koju bismo mogli vezati apsolutni referentni sustav, to ne postoji apsolutno, već samo relativno gibanje, odnosno mirovanje.

2.1. MATERIJALNA TOČKA

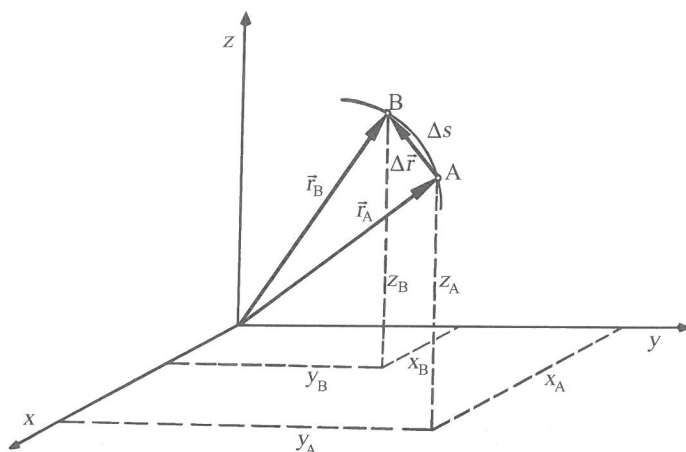
Ponekad se pri proučavanju gibanja mogu zanemariti dimenzije tijela, i čitavo tijelo predočiti jednom točkom mase m . Takva aproksimacija zove se *materijalna točka*, *čestica*, odnosno *sitno tijelo*. Tako vlak, automobil, raketu, itd., pri proučavanju njihova gibanja često aproksimiramo materijalnom točkom. Zemlja se može aproksimirati česticom kada promatramo njezino gibanje oko Sunca, ali se ne može kada promatramo njezinu vrtnju oko vlastite osi. Atom možemo smatrati česticom pri promatranju gibanja atoma, ali ne i onda kada proučavamo njegovu strukturu.

Položaj, odnosno koordinate materijalne točke ovise o izabranom referentnom sustavu. Izbor referentnog sustava proizvoljan je, ali se obično kao najpraktičniji odabire sustav koji miruje s obzirom na Zemlju (tzv. laboratorijski sustav).

* Galileo Galilei (1564—1642), talijanski fizičar i astronom, jedan od osnivača eksperimentalne metode. Među ostalim, pronašao je zakone slobodnog pada, princip inercije i zakon slaganja brzina.

** Isaac Newton (1643—1727), engleski znanstvenik, jedan od najvećih fizičara, postavio je temelje fizike. Istovremeno s Leibnizom pronašao je infinitezimalni račun. Najpoznatije je njegovo djelo *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

Najčešće ćemo položaj materijalne točke određivati pomoću njezinih pravocrtnih koordinata u pravokutnom Kartezijevu koordinatnom sustavu. Tako je položaj materijalne točke na slici 2.1. određen sa tri broja, tj. udaljenostima x , y i z od koordinatnih ravnina. Umjesto sa x , y i z , položaj točke možemo odrediti i radijusvektorom $\vec{r}$ koji spaja ishodište koordinatnog sustava s materijalnom točkom. Vektor $\vec{r}$ zove se vektor položaja materijalne točke.



Slika 2.1. Određivanje položaja materijalne točke

Ako se materijalna točka giba, njezine se koordinate mijenjaju u vremenu, tako da ona u prostoru opisuje neku krivulju (putanju), čija je jednadžba:

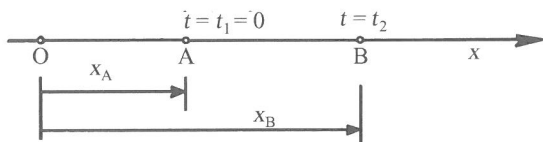
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (2.1)$$

Putanja je, dakle, skup svih točaka kroz koje prolazi materijalna točka koja se giba; to je geometrijsko mjesto krajeva vektora $\vec{r}(t)$. Dio putanje koji materijalna točka prijeđe u određenom vremenu zove se *put*; to je prijeđena udaljenost po putanji od neke početne točke. Tako je na slici 2.1. u trenutku t_1 točka bila u položaju A, koji je određen vektorom položaja $\vec{r}_A$, a u trenutku $t_1 + \Delta t$ u položaju B, koji je određen vektorom položaja $\vec{r}_B$. Pri tom je put Δs jednak dijelu luka putanje AB. Vektor $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ zove se vektor pomaka materijalne točke. Pomak je, dakle, promjena vektora položaja. Pri pravocrtnom gibanju, uvijek u istom smjeru, pomak je jednak prijeđenom putu.

Gibanja materijalne točke s obzirom na njihovu putanju dijelimo na pravocrtna i krivocrtna. Najprije ćemo proučavati gibanje duž pravca, zatim posebni vid krivocrtnoga gibanja — gibanje po kružnici i, napokon, općenito krivocrtno gibanje u ravnini.

2.2. JEDNOLIKO PRAVOCRTNO GIBANJE. BRZINA

Najjednostavnije gibanje je jednoliko gibanje po pravcu. Uzmimo da je taj pravac upravo os x našega koordinatnog sustava (sl. 2.2). Položaj čestice (npr. automobila, rakete, elektrona, atoma i sl.) određujemo koordinatom x , tj. udaljenošću od neke referentne točke koju uzimamo kao ishodište O. Položaj je pozitivan ako je desno od ishodišta, a negativan ako je lijevo. Pomak čestice, tj. promjena njezina položaja $\Delta x = x_B - x_A$, može također biti pozitivan i negativan. Pomak je pozitivan kada se čestica giba slijeva nadesno, a negativan kada se giba zdesna nalijevo. Uglavnom ćemo promatrati pravocrtna gibanja u istom smjeru i os x odabrati tako da pomak bude pozitivan.



Slika 2.2. Jednoliko gibanje po pravcu

Potrebno je razlikovati pomak od prijađenog puta, tj. ukupne dužine putanje koju čestica prijeđe u promatranom vremenskom intervalu i koji je uvijek (po definiciji) pozitivan. Za pravocrtno gibanje, koje je uvijek u istom smjeru, pomak je jednak prijađenom putu.

U početku ($t = 0$) tijelo se nalazi u točki A, s koordinatom x_A , a nakon vremena t , tijelo će doći u točku B, s koordinatom x_B . Gibanje je jednoliko, što znači da tijelo u jednakim vremenskim intervalima prevaljuje jednake putove. Omjer prijađenog puta $s = x_B - x_A$ i za to potrebnog vremena $t = t_2 - t_1$ konstantan je i zove se brzina tijela:

$$v = \frac{s}{t} \quad (2.2)$$

gdje smo sa s označili prevaljeni put, a sa t proteklo vrijeme.

Iz definicijske jednadžbe (2.2) nalazimo jedinicu brzine:

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

U praksi se brzina često izražava i drugim jedinicama:

kilometar na sat $\text{km/h} = 0,278 \text{ m/s}$;

čvor = morska milja/sat = $1,852 \text{ km/h} = 0,514 \text{ m/s}$;

milja/sat = $1,609 \text{ km/h} = 0,447 \text{ m/s}$.

U tablici 2.1. prikazane su neke tipične brzine, od najmanjih do najvećih.

Tablica 2.1. Neke tipične brzine

Rast ljudske kose	10^{-9} m/s	
Pješak	1,4 m/s	(5 km/h)
Najbrži maratonci	5,4 m/s	(19 km/h)
Biciklist	6 m/s	(20 km/h)
Automobil	45 m/s	(160 km/h)
Zvuk u zraku	340 m/s	
Točka na ekvatoru	465 m/s	
Puščani metak	800 m/s	
Mjesec oko Zemlje	1 000 m/s	
Zemlja oko Sunca	$3 \cdot 10^4$ m/s	
Elektron u atomu	$2 \cdot 10^6$ m/s	
Brzina svjetlosti u vakuumu	$3 \cdot 10^8$ m/s	

Pri jednolikom pravocrtnom gibanju put koji prijeđe materijalna točka proporcionalan je vremenu. Izraz za put slijedi iz jednadžbe (2.2):

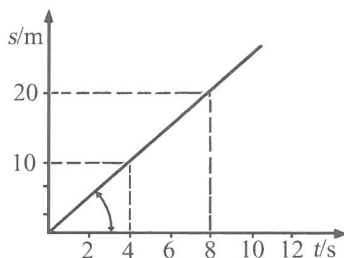
$$s = v t \quad (2.3)$$

Položaj materijalne točke (koji je na sl. 2.2. određen koordinatom x) mijenja se u vremenu po zakonu:

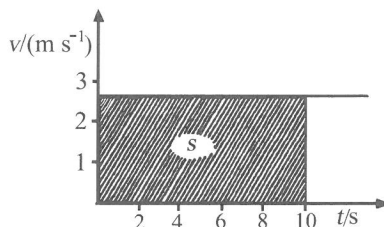
$$x = x_0 + v t \quad (2.4)$$

gdje je x_0 koordinata točke u trenutku $t = 0$. To je zakon jednolikoga gibanja po pravcu. Budući da je $s = x - x_0$, relacija (2.3) slijedi iz (2.4).

Put materijalne točke kao funkciju vremena, $s(t)$, možemo prikazati analitički, grafički ili na neki drugi način. Grafički izražena ovisnost puta o vremenu zove se prostorno-vremenski ili $s(t)$ dijagram. Slično se ovisnost pomaka o vremenu može prikazati u $x(t)$, a brzine o vremenu u $v(t)$ dijagramu.



Slika 2.3. Grafički prikaz ovisnosti puta o vremenu pri jednolikom gibanju po pravcu



Slika 2.4. Grafički prikaz ovisnosti brzine o vremenu pri jednolikom gibanju po pravcu

Na slici 2.3. i 2.4. prikazani su $s(t)$ i $v(t)$ dijagrami za jednoliko pravocrtno gibanje brzinom $v = 2,5$ m/s. Put je linearna funkcija vremena; koeficijent smjera tog pravca ($\tan \alpha$) ovisi o brzini tijela. Budući da je brzina konstanta, $v(t)$ dijagram je pravac paralelan s osi t ; površina ispod tog pravca (iscrtkani pravokutnik na sl. 2.4) označava prijeđeni put u vremenu t .

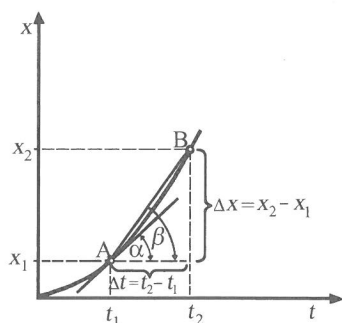
U ovom smo odjeljku proučavali jednoliko gibanje po pravcu pri kojem je brzina konstantna i po smjeru i po iznosu, što možemo izraziti vektorskom jednadžbom:

$$\vec{v} = \text{konst} \quad (2.5)$$

Nejednoliko gibanje, i posebno, jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje razmatrat ćemo u sljedećim odjeljcima.

2.3. NEJEDNOLIKO PRAVOCRTNO GIBANJE. AKCELERACIJA

Pri nejednolikom pravocrtном gibanju smjer brzine je konstantan, ali se njegov iznos tokom vremena mijenja. (Pretpostavit ćemo da je gibanje uvijek u istom smjeru, tj. da se u promatranom vremenskom intervalu smjer gibanja čestice, odnosno smjer brzine ne mijenja.) Tako se giba automobil pri ubrzanju ili kočenju, zrno u pušcanoj cijevi, itd.



Slika 2.5. $x(t)$ dijagram za nejednoliko gibanje po pravcu

Ovisnost pomaka, odnosno puta, o vremenu više nije linearna, kao pri jednolikom gibanju, već neka općenita funkcija vremena. Zato je i $x(t)$, odnosno $s(t)$ dijagram neka krivulja, npr. kvadratna parabola ako se tijelo giba po pravcu tako da njegov pomak raste s kvadratom vremena ($x = \text{konst} \cdot t^2$), kao na slici 2.5.

Pri nejednolikom gibanju brzina se stalno mijenja s vremenom. Zato pri takvom gibanju često govorimo o srednjoj brzini. Na primjer, ako automobil, gibajući se po ravnoj cesti, prevali udaljenost 40 km za pola sata, njegova je prosječna ili srednja brzina 80 km/h. Pri tom se automobil možda nije gibao stalno tom brzinom, i njegova prava brzina u određenom trenutku ne mora biti jednaka toj srednjoj brzini.

Ako je u trenutku t_1 položaj čestice određen koordinatom x_1 (sl. 2.5), a u trenutku t_2 koordinatom x_2 , tada je srednja brzina u tom intervalu:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.6)$$

(Srednju vrijednost fizikalne veličine označavamo crticom iznad slova, te smo zato srednju brzinu označili sa $\bar{v}$.)

Srednja brzina u vremenskom intervalu između t_1 i t_2 na slici 2.5. određena je nagibom (koeficijentom smjera — $\text{tg } \beta$) spojnice točaka A i B (sekante).

Da bismo dobili pravu (trenutnu) brzinu tijela u trenutku t (npr. u točki A na sl. 2.5), zamislimo da je točka B sve bliže točki A i nađimo graničnu vrijednost prema kojoj teži srednja brzina:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (2.7)$$

gdje $\dot{x}$ označava vremensku derivaciju puta ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$).

Trenutna brzina jednaka je prvoj vremenskoj derivaciji koordinate položaja. Tako je na slici 2.5. trenutna brzina u točki A određena nagibom (koeficijentom smjera $-\tan \alpha$) tangente u toj točki.

Budući da je $dx = ds$, brzina je također jednaka vremenskoj derivaciji prijeđenog puta:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2.8)$$

Primjer

Tijelo se giba pravocrtno po zakonu $\frac{x}{\text{m/s}^2} = 5 t^2$. Kolika je trenutna brzina nakon prve sekunde? Kolika je srednja brzina za vrijeme prve dvije sekunde?

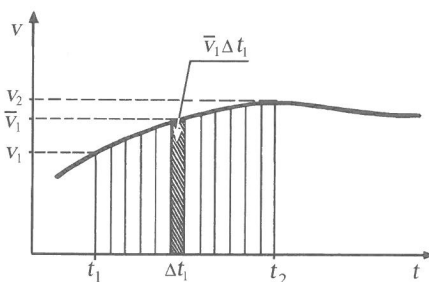
$$v = \frac{dx}{dt} = 10 (\text{m/s}^2) t = 10 (\text{m/s}^2) \cdot 1 \text{ s} = 10 \text{ m/s.}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 10 \text{ m/s.}$$

Izračunavanje puta iz brzine. Pri jednolikom pravocrtnom gibanju, a poznavajući brzinu v , možemo izračunati put pomoću formule $s = vt$. Pri nejednolikom gibanju problem je složeniji, jer je brzina funkcija vremena. Pretpostavimo da je brzina zadana krivuljom $v(t)$ (sl. 2.6).

Vremenski interval $t_2 - t_1$ u kojemu računamo prijeđeni put podijelimo na intervale Δt_i i promjenljivu brzinu v u svakom intervalu zamijenimo srednjom vrijednošću $\bar{v}_i$ (sl. 2.6). Put prijeđen u intervalu Δt_i približno je jednak $\bar{v}_i \Delta t_i$, a zbroj $\bar{v}_i \Delta t_i$ aproksimacija je prijeđenog puta između trenutka t_1 i t_2 :

$$s \approx \sum_i \bar{v}_i \Delta t_i \quad (2.9)$$



Slika 2.6. Izračunavanje preavljenog puta iz poznate zavisnosti $v(t)$

Točan izraz za prijeđeni put s između vremena t_1 i t_2 dobivamo kao graničnu vrijednost izraza (2.9) kada svaki vremenski interval Δt_i teži nuli; tada će srednja brzina težiti trenutnoj brzini, a preavljeni put bit će jednak vremenskom integralu brzine:

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \bar{v}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (2.10)$$

Preavljeni put možemo odrediti i grafički (iz sl. 2.6). Zbroj u izrazu (2.9) zapravo je približan, a integral (2.10) točan iznos površine ispod krivulje $v(t)$. Preavljeni je put, dakle, po iznosu jednak površini ispod krivulje $v(t)$ između početnog i krajnjeg trenutka gibanja.

Primjer

Koliki put prevali raketa između 17. i 19. sekunde gibanja ako se njezina brzina mijenja prema jednadžbi $v = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$?

Prema jednadžbi (2.10), preavljeni je put:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{17}^{19} 50 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) t dt = 1800 \text{ m.}$$

Akceleracija. Pri nejednolikom gibanju brzina se mijenja. Promjenu brzine možemo opisati akceleracijom (ubrzanjem). Omjer promjene brzine $\Delta v = v_2 - v_1$ i pripadnog vremenskog intervala $\Delta t = t_2 - t_1$ zovemo srednjom (prosječnom) akceleracijom i označavamo sa $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.11)$$

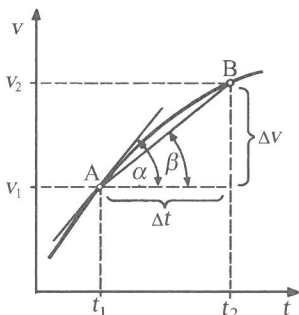
gdje su v_1 i v_2 brzine materijalne točke u trenucima t_1 i t_2 .

Kao i kod brzine, i ovdje definiramo pravu (trenutnu) akceleraciju u trenutku t kao graničnu vrijednost srednje akceleracije:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (2.12)$$

ili, uzevši u obzir relacije (2.7) i (2.8), dobivamo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (2.13)$$



Slika 2.7. Ovisnost brzine o vremenu pri ubrzanom gibanju

i

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (2.13a)$$

Trenutna akceleracija jednaka je prvoj derivaciji brzine po vremenu, odnosno drugoj derivaciji koordinate položaja (puta) po vremenu. Jedinica je akceleracije, kao što se vidi iz formule (2.13), metar u sekundi na kvadrat (m/s^2).

Srednja akceleracija u vremenskom intervalu između t_1 i t_2 (na sl. 2.7) određena je nagibom sekante $\overline{AB}$, ($\text{tg } \beta$), dok je trenutna akceleracija određena nagibom tangente (npr. $\text{tg } \alpha$ u točki A) na krivulju $v(t)$.

Ako znamo akceleraciju $a(t)$, brzinu možemo dobiti integriranjem; iz formule (2.12) $a = dv/dt$, imamo $dv = a dt$, te je:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \quad \text{ili} \quad v = v_0 + \int_0^t a dt \quad (2.14)$$

gdje je v_0 početna brzina, tj. brzina u trenutku $t = 0$.

Brzina je jednaka vremenskom integralu akceleracije.

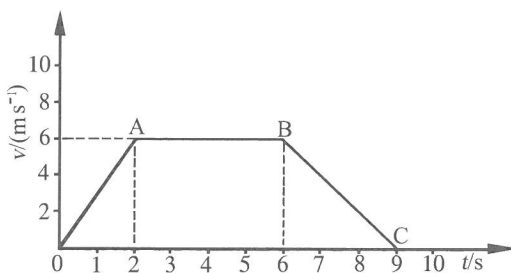
Kada se brzina s vremenom povećava, akceleracija je pozitivna, a kada se brzina s vremenom smanjuje, akceleracija je negativna. Negativna akceleracija često se zove usporenje ili deceleracija.

Akceleracija može biti stalna i promjenljiva. Gibanje sa stalnom akceleracijom ($\vec{a} = \text{konst.}$) razmatrat ćemo posebno.

U izrazu (2.14) v , v_0 i a su, zapravo, projekcije odgovarajućih vektora na os x , tj. v_x , v_{0x} i a_x , ali ih radi jednostavnosti pišemo bez indeksa. Prema tome, to su algebarske veličine i mogu biti pozitivne i negativne, ovisno o tome kakav je predznak projekcija v_x , v_{0x} i a_x .

Primjer

Gibanje tijela prikazano je $v(t)$ dijagramom na slici 2.8. Kolika je trenutna akceleracija tijela u $t = 1$ s, $t = 5$ s i $t = 8$ s?



Slika 2.8. $v(t)$ dijagram gibanja (za primjer u tekstu)

Iz koeficijenta smjera pravca OA dobivamo da je akceleracija nakon prve sekunde $a = 3 \text{ m/s}^2$. Slično možemo odrediti da je $a(5 \text{ s}) = 0$ i $a(8 \text{ s}) = -2 \text{ m/s}^2$. Pokažite da je srednja brzina za prvih devet sekundi gibanja $\bar{v} = 4,3 \text{ m/s}$. Nacrtajte odgovarajući $a(t)$ i $s(t)$ dijagram.

2.4. GIBANJE S KONSTANTNOM AKCELERACIJOM. SLOBODNI PAD

Gibanje s konstantnom akceleracijom ($\vec{a} = \text{konst.}$) posebni je važni slučaj nejednolikoga gibanja. Mnoga ubrzana ili usporena gibanja (ubrzanje ili kočenje automobila, slobodni pad, itd.) možemo dobro aproksimirati takvim gibanjem.

Pretpostavimo da se tijelo giba u koordinatnom sustavu po osi x . Ako je u početnom trenutku $t = 0$ tijelo u točki x_0 i ima početnu brzinu v_0 , njegovu brzinu nakon razdoblja t dobit ćemo primjenom formule (2.14):

$$v = v_0 + \int_0^t a \, dt = v_0 + at \quad (2.15)$$

Položaj tijela x u trenutku t dobivamo integriranjem brzine (2.15):

$$x = x_0 + \int_0^t v(t) \, dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) \, dt \quad (2.16)$$

gdje je x_0 položaj tijela u početnom trenutku $t = 0$.

Rješanjem integrala (2.16) dobivamo izraz za položaj tijela pri gibanju s konstantnom akceleracijom:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.16a)$$

Pri pravocrtном gibanju vektor brzine $\vec{v}$ usmjeren je stalno duž istog pravca, dok vektor akceleracije $\vec{a}$ može biti smjera istog ili suprotnog smjeru brzine. Ako je $\vec{a}$ u smjeru brzine, gibanje je ubrzano, inače je usporeno.

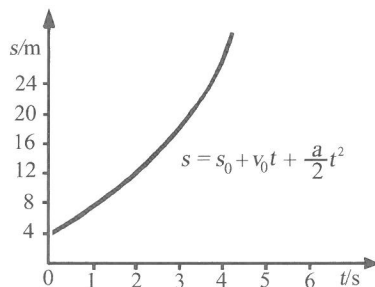
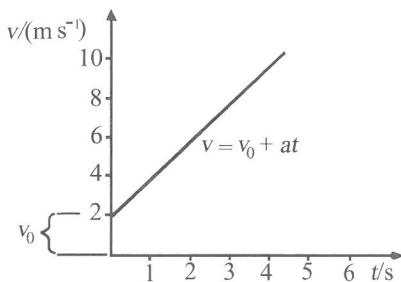
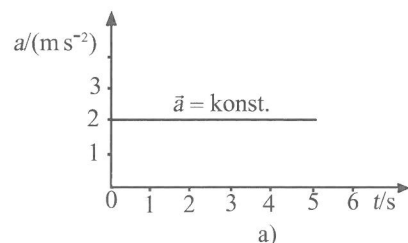
Pri ubrzanom gibanju po pravcu pomak, brzina i ubrzanje na istom su pravcu i istog su smjera, te su njihove projekcije x , v , v_0 i a u (2.16a) pozitivne. Pri usporenom gibanju po pravcu akceleracija a ima negativan predznak.

Put koji tijelo prevali u razdoblju t pri jednoliko ubrzanom gibanju jest $s = x - x_0$, odnosno:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \quad (2.16b)$$

Iz te relacije i $v = v_0 + at$ slijedi veza između puta i brzine:

$$v = \sqrt{2as + v_0^2} \quad (2.17)$$



Slika 2.9. Vremenska zavisnost akceleracije, brzine i prevaljenog puta pri jednoliko ubrzanom gibanju po pravcu

Slobodni pad. Jedan od najvažnijih primjera gibanja s konstantnim ubrzanjem je slobodni pad na Zemljinoj površini. Već je G. Galilei, proučavajući slobodni pad s kosog tornja u Pisi, pokazao da je vrijeme padanja lakših i težih tijela gotovo jednako. U to se možemo i sami uvjeriti ako ispustimo manji ili veći kamen: oba će pasti na zemlju gotovo istodobno.

Budući da otpor zraka utječe na padanje tijela, tijelo za koje je otpor zraka manji padat će brže. Ako u staklenu cijev stavimo metalnu kuglicu, komadić papira i perce, te je zatvorimo i preokrenemo, metalna će kuglica pasti najbrže, papirić sporije, a perce najsporije. Međutim, ako iz cijevi isisamo zrak, sva tri predmeta past će istovremeno. Taj i drugi pokusi pokazuju da u vakuumu sva tijela padaju jednako dugo bez obzira na njihov oblik, veličinu i materijal od kojeg su napravljena.

Proučavajući slobodni pad zanemarit ćemo otpor zraka i pretpostaviti da sva tijela padaju jednako dugo. Naravno, izvedeni zakoni neće vrijediti za padanje tijela za koja je otpor zraka velik (npr. padobranac), dok ćemo ih moći primijeniti za padanje tijela za koja je otpor zraka malen (npr. bomba, kamen i sl.).

Uzrok slobodnom padu tijela na Zemljinoj površini je sila teža: to je rezultanta gravitacijske sile između mase Zemlje i mase tijela koje slobodno pada i centrifugalne sile zbog Zemljine vlastite vrtnje. (Poblje o sili teži i gravitaciji govorit ćemo u posebnom poglavlju.) Ubrzanje koje ta sila uzrokuje, tzv. ubrzanje sile teže ovisi o geografskoj širini i nadmorskoj visini. Tako je na polu $g_p = 9,83 \text{ m/s}^2$, na ekvatoru $g_e = 9,78 \text{ m/s}^2$, dok je na našoj geografskoj širini oko $9,81 \text{ m/s}^2$. Dogovorom je utvrđeno *normirano ubrzanje padanja* $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$ (zaokruženo 9,81), i tu vrijednost ćemo uglavnom upotrebljavati.

Akceleracija ili ubrzanje slobodnog pada ovisi i o visini iznad površine Zemlje, ali su promjene za slobodni pad od nekoliko stotina metara zanemarive, te ih nećemo uzeti u obzir.

Uz te pretpostavke, slobodni pad je jednoliko ubrzano gibanje po pravcu. Ako u formule (2.15) i (2.16) uvrstimo $a = g$ i $v_0 = 0$, dobivamo brzinu

$$v = g t \quad (2.18)$$

i put pri slobodnom padu

$$s = h = \frac{g}{2} t^2 \quad (2.19)$$

Iz te dvije formule mogu se izvesti još dvije korisne relacije. Tijelo koje slobodno pada s visine h postići će brzinu

$$v = \sqrt{2 g h} \quad (2.20)$$

dok su put, brzina i vrijeme pri slobodnom padu povezani relacijom:

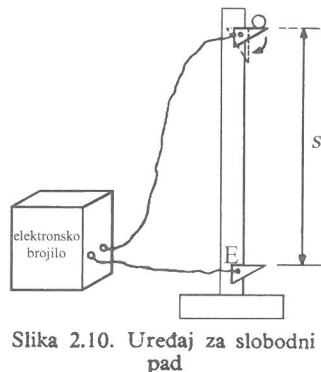
$$s = \frac{v t}{2} \quad (2.21)$$

Zakone slobodnog pada možemo pokazati pokusom*, mjereći vrijeme potrebno da metalna kuglica padne s određene visine (sl. 2.10). Kuglica se ispušta tako da se klupica zbog vlastite težine zakrene prema dolje. Klupica pri tom uključi elektronski sat. Kada kuglica padajući prijeđe put s , nailazi na električni kontakt E i zaustavlja elektronski sat. Tako se može precizno izmjeriti vrijeme potrebno za slobodni pad na putu s .

U tablici 2.2. prikazani su rezultati takvog mjerenja a na slici 2.11. nacrtan je $s(t)$ dijagram za to mjerenje.

Tablica 2.2. Rezultati mjerenja slobodnog pada

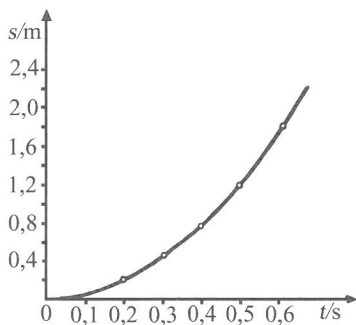
s/m	0,200	0,500	0,800	1,200	1,800
t/s	0,2020	0,3193	0,4040	0,4948	0,6060



Slika 2.10. Uređaj za slobodni pad

* Vidjeti: V. Lopašić, V. Henč-Bartolić, V. Kos, *Predavanja iz fizike*, I dio, Sveučilište u Zagrebu, 1981.

Opisani pokus pokazuje da je put parabolična funkcija vremena. Povučemo li, metodom najmanjih kvadrata, parabolu $s = Ax^2 + Bx + C$ kroz izmjerene točke, dobit ćemo da je $s \approx At^2$ i $A = 4,9 \text{ m/s}^2$. Gibanje tijela u tom pokusu jest jednoliko ubrzano gibanje ubrzanjem $g = 2A = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Slika 2.11. Ovisnost puta o vremenu pri slobodnom padu

Primjer

Tokom posljednje sekunde slobodnog pada tijelo prevali polovicu ukupne duljine puta. S koje visine i koliko je dugo tijelo padalo?

Pretpostavimo da tijelo pada s visine h u vremenu t , pri čemu je

$$h = \frac{g}{2} t^2.$$

Budući da do posljednje sekunde, tj. u vremenu $t - 1$ tijelo prevali polovicu puta, to je:

$$\frac{h}{2} = \frac{g}{2} (t - 1)^2.$$

Iz te dvije jednačbe dobivamo da je vrijeme padanja $t = 3,42 \text{ s}$, a visina $h = 57,4 \text{ m}$.

2.5. JEDNOLIKO KRUŽNO GIBANJE

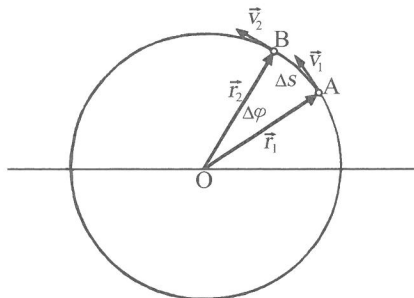
Kad akceleracija materijalne točke nema isti pravac kao brzina, već se brzinom zatvara kut različit od nule, materijalna se točka giba po zakrivljenoj liniji. Najjednostavnije krivocrtno gibanje jest jednoliko kruženje. Pri tom gibanju brzina ostaje konstantna po iznosu, ali stalno mijenja smjer, što rezultira radijalnom akceleracijom prema središtu kružnice.

Za vrijeme Δt materijalna točka, gibajući se po kružnici (sl. 2.12), prevali put Δs (dio kružnog luka), odnosno kut $\Delta \varphi$. Pri tom je njezin pomak $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Veza između prijedenog kuta $\Delta \varphi$ i puta Δs jest

$$\Delta s = r \Delta \varphi \quad (2.22)$$

pri čemu se prijedeni kut izražava u radijanima

$$1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi = 57,3^\circ.$$



Slika 2.12. Gibanje po kružnici

Linearna (obodna) brzina pri gibanju materijalne točke po kružnici jest

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \omega \quad (2.23)$$

Fizikalna veličina $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ zove se kutna brzina tijela.

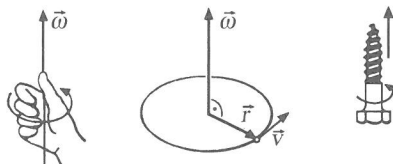
Jedinica je kutne brzine radijan u sekundi (znak: rad/s ili samo s⁻¹, jer za dopunsku jedinicu rad često pišemo samo znak 1).

Kutna brzina je vektor; definira se jednačbom $\omega = dq/dt$, i po definiciji ima smjer na pravcu osi rotacije a određen je pravilom desne ruke (sl. 2.13). Ako prsti desne ruke slijede materijalnu točku, palac pokazuje smjer $\vec{\omega}$. Smjer vektora $\vec{\omega}$ možemo odrediti i pomoću desnog vijka: ako se vijak vrti u smjeru kruženja materijalne točke, kutna će brzina imati smjer napredovanja vijka. Uočite da je pravac vektora kutne brzine uvijek okomit na ravninu kruženja.

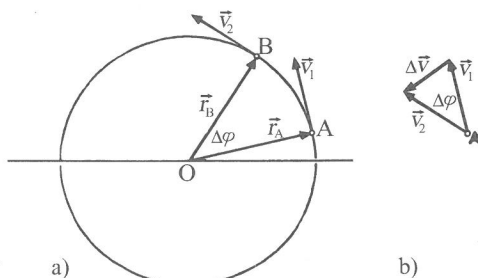
Budući da su sve tri veličine (obodna brzina $\vec{v}$, kutna brzina $\vec{\omega}$ i radijusvektor $\vec{r}$ od ishodišta do materijalne točke) u jednačbi (2.23) vektori, tu relaciju možemo napisati i vektorski. Prisjetimo se da je vektorski produkt dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektor $\vec{c}$ koji je okomit na oba vektora (v. § 1.5), a da mu je iznos $c = ab \sin \alpha$. Obodna brzina $\vec{v}$ uvijek je okomita i na vektor $\vec{r}$ i na vektor $\vec{\omega}$ (sl. 2.13). Kut između $\vec{r}$ i $\vec{\omega}$ iznosi $\pi/2$, tj. $\sin \alpha = 1$. Zbog toga se relacija (2.23) može pisati kao vektorski produkt:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.23a)$$

(Pazite na redoslijed vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$ u (2.23a) jer se zamjenom redoslijeda mijenja predznak, tj. $\vec{\omega} \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{\omega}$.)



Slika 2.13. Smjer kutne brzine



Slika 2.14. Uz izračunavanje centripetalne akceleracije

Jednoliko kružno gibanje zapravo je ubrzano gibanje, jer se pri njemu stalno mijenja smjer obodne brzine, iako njezin iznos ostaje konstantan. Da bismo odredili ubrzanje koje nastaje promjenom smjera brzine — tzv. radijalnu ili centripetalnu akceleraciju — promatrajmo jednoliko kruženje na slici 2.14. Neka se materijalna točka u trenutku t_1 nalazi u točki A, a u trenutku $t_2 = t_1 + \Delta t$ u točki B (sl. 2.14a). Pri tom se brzina promijeni po smjeru od $\vec{v}_1$ do $\vec{v}_2$. Da bismo odredili $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, dovedemo translacijom oba vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ u istu točku i nađemo njihovu razliku. Iz istokračnog trokuta (sl. 2.14b) slijedi da je iznos vektora $\Delta \vec{v}$:

$$|\Delta \vec{v}| = v \Delta \varphi \quad (2.24)$$

za male $\Delta \varphi$, odnosno Δt .

Podijelimo li obje strane te relacije sa Δt , uz granični prijelaz $\Delta t \rightarrow 0$, dobivamo za akceleraciju nastalu promjenom smjera brzine:

$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta \varphi}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = v \omega \quad (2.25)$$

Ta akceleracija ima smjer prema središtu kružnice (sl. 2.14b) i zbog toga se zove radijalna (centripetalna) akceleracija. Ako sa $-\vec{r}_0$ označimo jedinični radijusvektor radijalno prema središtu kružnice, izraz (2.25) za radijalnu akceleraciju možemo napisati vektorski:

$$\vec{a}_r = -r \omega^2 \vec{r}_0 = -\frac{v^2}{r} \vec{r}_0 = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.25a)$$

gdje smo različite izraze za radijalnu akceleraciju dobili kombinirajući izraze (2.25) i (2.23).

Jednoliko kružno gibanje je kruženje konstantnom kutnom brzinom:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{konst.} \quad (2.26)$$

Integriranjem izraza (2.26) dobiva se linearna ovisnost prijednog kuta o vremenu:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (2.27)$$

gdje je φ_0 kut u vremenu $t = 0$. Ta je formula analogna formuli (2.4) pri jednolikom pravocrtном gibanju.

Za opisivanje jednolikoga kružnog gibanja korisno je definirati frekvenciju i ophodno vrijeme. Omjer broja okreta i vremena (broj okreta u sekundi) je frekvencija f , dok je ophodno vrijeme T ono vrijeme koje je potrebno da materijalna točka jedanput obiđe kružnicu. Očito je za jednoliko kružno gibanje:

$$\omega = 2\pi f; \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.28)$$

2.6. NEJEDNOLIKO KRUŽNO GIBANJE

Pri nejednolikom kruženju iznos obodne brzine više nije konstantan, već se mijenja s vremenom. Zbog toga je ukupna akceleracija sastavljena od radijalne akceleracije $\vec{a}_r$ i tangencijalne akceleracije $\vec{a}_t$. Radijalna akceleracija komponenta je ukupne akceleracije u smjeru $-\vec{r}$, dok je tangencijalna akceleracija komponenta ukupne akceleracije u smjeru tangente, odnosno jediničnog vektora $\vec{t}_0$.

Tangencijalna akceleracija nastaje zbog promjene iznosa obodne brzine:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha \quad (2.29)$$

gdje je

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (2.30)$$

kutna akceleracija. (Komponentu kutne akceleracije nastalu promjenom smjera kutne brzine ovdje nećemo razmatrati jer ćemo pretpostaviti da je os vrtnje nepomična, tj. smjer kutne brzine konstantan.)

Jedinica kutne akceleracije jest radijan u sekundi na kvadrat (rad/s^2 ili s^{-2}).

Ako kutnu akceleraciju definiramo kao vektor čiji je iznos određen formulom (2.30), dok joj je smjer okomit na ravninu kruženja (isti ili suprotan smjeru kutne brzine $\vec{\omega}$), tada relaciju (2.30) možemo napisati u vektorskom obliku ovako:

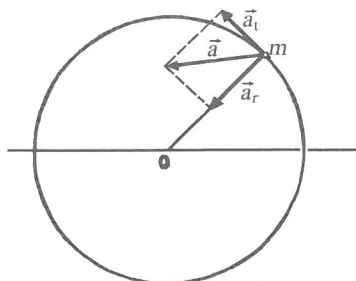
$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad (2.31)$$

Pri jednolikom gibanju po kružnici $\vec{\omega} = \text{konst.}$, odnosno $\alpha = 0$, te je i tangencijalna akceleracija nula. To je i razumljivo jer se pri takvom gibanju brzina čestice mijenja samo po smjeru, dok joj je iznos konstantan. Pri nejednolikom kružnom (ili bilo kojem krivocrtnom) gibanju postoji i radijalna i tangencijalna akceleracija (sl. 2.15). Prva od njih ima smjer $-\vec{r}_0$, dakle prema središtu kružnice, dok je druga u smjeru tangente: one su, dakle, okomite jedna na drugu. Ukupnu akceleraciju $\vec{a}$ dobivamo ako vektorski zbrojimo te dvije akceleracije:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r \quad (2.32)$$

Iznos ukupne akceleracije pri nejednolikom kružnom gibanju jest

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}} \quad (2.33)$$



Slika 2.15. Tangencijalna i radijalna komponenta akceleracije

Posebni slučaj nejednolikoga kružnog gibanja jest gibanje s konstantnom kutnom akceleracijom ($\vec{\alpha} = \text{konst.}$). Zakone takvoga gibanja možemo dobiti iz formule (2.30), uzimajući u obzir da je $\alpha = \text{konst.}$ i da je u trenutku $t = 0$, kut $\varphi = 0$, a $\omega = \omega_0$. Integrirajući izraz $d\omega = \alpha dt$ dobivamo:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt \quad (2.34)$$

odnosno

$$\omega = \alpha t + \omega_0 \quad (2.35)$$

Daljnjim integriranjem izraza (2.35) napisanog u obliku $d\varphi = (\alpha t + \omega_0) dt$ dobivamo izraz za kut:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\alpha t + \omega_0) dt \quad (2.36)$$

odnosno

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} t^2 + \omega_0 t \quad (2.37)$$

Ti su izrazi analogni relacijama za pravocrtno gibanje. U tablici 2.3. dana je formalna analogija među formulama pravocrtnog i kružnog gibanja. Ako u formule pravocrtnog gibanja umjesto s , v i a uvrstimo φ , ω i α , dobivamo formule kružnog gibanja.

Tablica 2.3. Analogija pravocrtnog i kružnog gibanja

Pravocrtno gibanje	Kružno gibanje
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{d^2s}{dt^2}$	$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
$s = vt + s_0$	$\varphi = \omega t + \varphi_0$
$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0$	$\varphi = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
$v^2 = 2as + v_0^2$	$\omega^2 = 2\alpha\varphi + \omega_0^2$

Primjer

Nadite ukupnu akceleraciju čestice koja se giba po kružnici promjera 40 cm u trenutku kad je kutna brzina 2 rad/s, a kutno ubrzanje 5 rad/s².

Prema relacijama (2.25) i (2.29), slijedi:

$$a_r = \omega^2 r = 0,8 \text{ m s}^{-2}$$

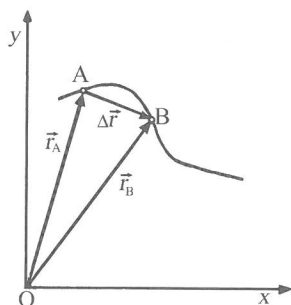
$$a_t = r\alpha = 1 \text{ m s}^{-2}.$$

Ukupna je akceleracija:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{(0,8 \text{ m/s}^2)^2 + (1 \text{ m/s}^2)^2} = 1,3 \text{ m/s}^2.$$

2.7. OPĆENITO KRIVOCRTNO GIBANJE U RAVNINI

Pri proučavanju pravocrtnog gibanja većinu relacija pisali smo u skalarnom obliku. Kada proučavamo gibanje u dvije ili tri dimenzije, pomak, brzinu i akceleraciju moramo razmatrati vektorski.



Slika 2.16. Krivocrtno gibanje u ravnini

Pretpostavimo da se materijalna točka (čestica) giba u ravnini po nekoj putanji kao što je prikazano na slici 2.16. Gibanje možemo opisati pomoću koordinata x i y ili, još bolje, pomoću vektora položaja (radiusvektora) $\vec{r}$. U trenutku t_1 čestica je u točki A, a u trenutku $t_2 = t_1 + \Delta t$ u točki B. Pomak čestice iz točke A u točku B određen je vektorom pomaka:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad (2.38)$$

Srednja brzina, kojom se čestica pri tom giba, kvocijent je pomaka i vremena potrebnog za taj pomak:

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.39)$$

Trenutna brzina je granična vrijednost srednje brzine:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (2.40)$$

Brzina je vremenska derivacija radijusvektora (vektora položaja) čestice koja se giba. Iz (2.40) se vidi da je vektor brzine u nekoj točki putanje usmjeren po tangenti na putanju u toj točki, i to u smjeru gibanja čestice.

Znamo li vektor brzine, tada integracijom izraza (2.40) možemo izračunati položaj čestice $\vec{r}(t)$ u bilo kojem trenutku t , odnosno pomak čestice $\Delta \vec{r}$ u nekom intervalu $t_2 - t_1$:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt + \vec{c}_1 \quad (2.41)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt \quad (2.42)$$

gdje integracijsku konstantu $\vec{c}_1$ možemo odrediti iz početnih uvjeta: ako je, na primjer, $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = 0$, tada je $\vec{c}_1 = 0$.

Iznos (apsolutna vrijednost) vektora brzine može se odrediti iz (2.40):

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \quad (2.43)$$

Želimo li odrediti put pri krivocrtном gibanju, treba izračunati duljinu luka krivulje (putanje) koji čestica prijeđe u intervalu od t_1 do t_2 . U tu svrhu vremenski interval $t_2 - t_1$ podijelimo na intervale $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_i, \dots, \Delta t_n$, slično kao što smo radili pri nejednolikom pravocrtном gibanju. Put prijeđen u intervalu Δt_i približno je jednak $\Delta s_i = v_i \Delta t_i$, gdje je v_i iznos brzine čestice u bilo kojem trenutku u intervalu Δt_i , na primjer iznos brzine u sredini intervala. Ukupni prijeđeni put između trenutka t_1 i t_2 jest:

$$s \approx \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 \dots + \Delta s_n \approx \sum_{i=1}^n \Delta s_i \approx \sum_i v_i \Delta t_i \quad (2.44)$$

U graničnom prijelazu, kada svi Δt_i teže nuli, iznos brzine v_i teži iznosu trenutne brzine, a izraz na desnoj strani relacije (2.43) prevaljenom putu:

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (2.45)$$

Prijeđeni put jednak je vremenskom integralu iznosa vektora brzine, dok je pomak jednak vremenskom integralu vektora brzine. Prijeđeni put može se odrediti i grafički: on je brojčano jednak površini lika koji u $v(t)$ dijagramu omeđuje krivulja $v = v(t)$, apscisa t i pravci $t = t_1$ i $t = t_2$.

Pri krivocrtном gibanju brzina mijenja smjer, a često i iznos. Promjena brzine po smjeru ili po iznosu, ili po obojem, opisuje se akceleracijom na sličan način kao što smo to radili pri pravocrtном gibanju. Prosječna je akceleracija:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.46)$$

dok je trenutna akceleracija:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2.47)$$

Akceleracija je prva vremenska derivacija brzine, odnosno druga vremenska derivacija radijusvektora (vektora položaja).

Pri krivocrtnom gibanju u ravnini jednadžba putanje može biti zadana na više načina: u parametarskom obliku pomoću funkcija $x(t)$ i $y(t)$, eksplicite kao $y = y(x)$ ili u implicitnom obliku kao $f(x, y) = 0$. Kad je jednadžba putanje zadana u parametarskom obliku, tada su vektor položaja i elementarni pomak:

$$\vec{r} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} \quad (2.48)$$

$$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy \quad (2.49)$$

brzina:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad (2.50)$$

i akceleracija:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad (2.51)$$

Pri tom je iznos brzine:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2.52)$$

a iznos akceleracije:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (2.53)$$

Promatrajući (2.48), (2.50) i (2.51) vidimo da krivocrtno gibanje u ravnini možemo formalno smatrati superpozicijom dvaju istovremenih gibanja u dva međusobno okomita smjera, u našem slučaju u smjeru osi x i y . Komponente pomaka (x i y), brzine (v_x i v_y) i akceleracije (a_x i a_y) možemo smatrati pomacima, brzinama i akceleracijama projekcija materijalne točke na osi x i y .

Jednoliko kružno gibanje, najjednostavniji primjer krivocrtnoga gibanja u ravnini, možemo opisati jednadžbama:

$$x = r \cos \omega t$$

$$y = r \sin \omega t \quad (2.54)$$

gdje je r polumjer kružnice, a ω kutna brzina. Iz (2.54) izlaze izrazi za brzinu i akceleraciju pri kružnom gibanju:

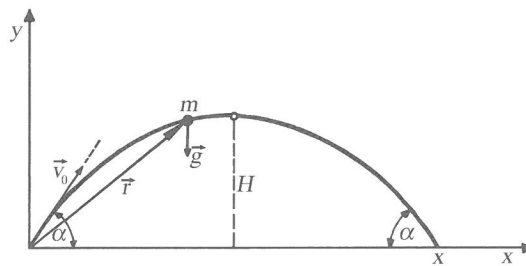
$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r \omega \sin \omega t, \quad v_y = r \omega \cos \omega t, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r \omega \quad (2.55)$$

$$a_x = -r \omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = -r \omega^2 \sin \omega t, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r \omega^2 \quad (2.56)$$

2.8. KOSI HITAC

Kao primjer krivocrtnoga gibanja u ravnini obradit ćemo kosi hitac. To je gibanje u vertikalnoj ravnini s konstantnom akceleracijom $\vec{g}$ (akceleracijom sile teže).

Pretpostavimo da je tijelo izbačeno početnom brzinom $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$, pod nekim kutom elevacije α prema horizontali (sl. 2.17). Kao i do sada, zanemarit ćemo otpor zraka, a na kraju osvrnut ćemo se na utjecaj otpora zraka na gibanje tijela.



Slika 2.17. Kosi hitac

Pri kosom hica na tijelo djeluje sila teža, i daje mu akceleraciju $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$ u smjeru osi $-y$. Dakle:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \quad (2.57)$$

ili, pisano pomoću komponentata:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (2.58)$$

Integriramo li te jednadžbe, dobivamo:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \quad (2.59)$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2 \quad (2.60)$$

Jednadžbe (2.59) i (2.60) možemo napisati i pomoću komponentata u smjeru osi x , odnosno y :

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad \text{ i } \quad v_y = v_{0y} - g t = v_0 \sin \alpha - g t \quad (2.61)$$

$$x = v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha \quad (2.62a)$$

$$y = v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \quad (2.62b)$$

Pomak kod kosog hica, sastavljen od dva doprinosa: pomaka $v_0 t$ uzduž pravca na kojemu leži početna brzina i pomaka $gt^2/2$ vertikalno prema dolje, te kosi hitac možemo smatrati gibanjem složenim od dva komponentna gibanja.

Eliminacijom zajedničkog parametra t iz jednadžbi (2.62) dobivamo:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (2.63)$$

To je jednadžba parabole. Tijelo se pri kosom hicu, uz zanemaren otpor zraka, giba po putanji koja je dio parabole.

Iz jednadžbe putanje možemo odrediti: vrijeme uspinjanja t_H , maksimalnu visinu hica H , vrijeme trajanja hica t_u i horizontalni domet X .

Na najvećoj visini (tj. u tjemenu putanje vertikalna komponenta brzine je nula):

$$v_y = 0, \quad \text{odnosno} \quad v_0 \sin \alpha - g t_H = 0 \quad (2.64)$$

a vrijeme uspinjanja:

$$t_H = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (2.65)$$

Maksimalna visina hica je ordinata tjemena parabole. Nju ćemo dobiti ako u jednadžbu (2.63) uvrstimo $t = t_H$ i $y = H$:

$$H = v_0 t_H \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_H^2 = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.66)$$

Ukupno vrijeme trajanja hica jednako je zbroju vremena potrebnoga za uzlazni i silazni dio putanje. Zbog simetrije parabole $t_u = 2 t_H$:

$$t_u = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (2.67)$$

Horizontalni domet (X) je horizontalna udaljenost između polazne i udarne točke, a možemo ga izračunati iz jednadžbe putanje, izjednačavajući ordinatu y s nulom:

$$X \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} X^2 = 0 \quad (2.68)$$

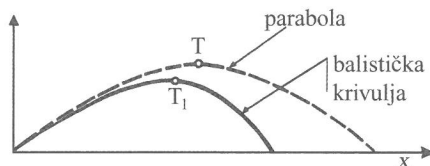
Jedno od rješenja te jednadžbe jest ishodište, a drugo domet hica. Dakle:

$$X = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (2.69)$$

Pokažite da je maksimalni domet kosog hica za $\alpha = 45^\circ$. Uočite da neki cilj možemo pogoditi pucajući istom početnom brzinom iz dva elevacijska kuta: domet je, naime, isti za elevacijske kutove α i $90^\circ - \alpha$.

Izvedene zakone možemo primijeniti i na horizontalni hitac ($\alpha = 0^\circ$), vertikalni hitac ($\alpha = 90^\circ$) i hitac prema dolje ($\alpha = 270^\circ$).

Balistička krivulja. Pri razmatranju kosog hica zanemarili smo otpor zraka i druge faktore koji utječu na let zrna, granata i sl. Stvarna putanja zrna zato neće biti parabola, već takozvana balistička krivulja (sl. 2.18). Dok je tjeme parabole



Slika 2.18. Balistička krivulja

(T) na polovici dometa, tjeme balističke krivulje (T_1) je bliže cilju; za iste početne uvjete stvarni domet i visina hica u zraku manji su nego za kosi hitac u vakuumu. Otpor zraka ovisi o mnogim faktorima (presjeku i obliku zrna, brzini gibanja, temperaturi, tlaku, vjetru i sl.), pa i oblik i domet balističke krivulje ovise o tim faktorima.

Primjer

Metak je ispaljen početnom brzinom $v_0 = 400 \text{ m/s}$ pod kutom $\alpha = 30^\circ$ prema horizontali. Izračunajte a) iznos i smjer brzine i b) radijalnu (normalnu) i tangencijalnu akceleraciju metka 2 s nakon ispaljivanja.

Gibanje metka možemo opisati vektorskim jednadžbama

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t,$$

koje, u odabranom koordinatnom sustavu (nacrtajte sliku), prelaze u skalarne

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2,$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g t.$$

Komponente brzine metka u trenutku $t = 2 \text{ s}$ iznose:

$$v_x = v_0 \cos \alpha = 346 \text{ m/s},$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t = 180 \text{ m/s},$$

dok je ukupna brzina

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 390 \text{ m/s}.$$

Smjer brzine možemo opisati kutom β , koji brzina zatvara s osi x

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = 0,52 \Rightarrow \beta = 27,5^\circ.$$

Ukupna akceleracija metka u bilo kojoj točki je $\vec{g}$; nju možemo rastaviti u tangencijalnu i radijalnu (normalnu) komponentu

$$a_t = -g \sin \beta = -g \frac{v_y}{v} = -\frac{g(v_0 \sin \alpha - g t)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g t)^2}} = -4,5 \text{ m/s}^2,$$

$$a_r = -g \cos \beta = -g \frac{v_x}{v} = -\frac{g v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g t)^2}} = -8,7 \text{ m/s}^2.$$

Negativan predznak tangencijalne akceleracije pokazuje da se metak u zadanom trenutku nalazi na uzlaznom dijelu putanje, tj. u području gdje se iznos brzine smanjuje; radijalna akceleracija za čitavo vrijeme hica ima negativan predznak.

Tangencijalnu akceleraciju možemo izračunati i pomoću izraza

$$a_t = -\frac{dv}{dt} = -\frac{g(v_0 \sin \alpha - g t)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g t)^2}} = -4,5 \text{ m/s}^2.$$

Da bismo provjerili rezultat, izračunajmo ukupnu akceleraciju:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = 9,81 \text{ m/s}^2 = g.$$

PITANJA I ZADACI

1. Što proučava kinematika, a što dinamika?
2. Definirajte materijalnu točku (česticu). Kako se može opisati položaj materijalne točke?
3. Što je pomak, a što put? Koja je razlika između puta i pomaka?
4. Što znače pojmovi: jednoliko gibanje, nejednoliko gibanje, pravocrtno gibanje i krivocrtno gibanje?
5. Kako se definira srednja, a kako trenutna brzina pri pravocrtном gibanju?
6. Prikažite prostorno-vremenski dijagram jednolikog i nejednolikog gibanja čestice po pravcu.
7. Prikažite grafički ovisnost brzine o vremenu za česticu koja se giba: **a)** jednoliko po pravcu, **b)** kojoj brzina raste linearno s vremenom, **c)** kojoj brzina raste s kvadratom vremena.
8. Kako se određuje srednja, a kako trenutna brzina u prostorno-vremenskom dijagramu nejednolikoga gibanja čestice po pravcu?
9. Što je akceleracija? Kako se definira srednja, a kako trenutna akceleracija?
10. Nacrtajte ovisnost pomaka o vremenu za proizvoljno nejednoliko gibanje po pravcu. Iz te krivulje odredite dijagram ovisnosti brzine o vremenu. Iz tako dobivene ovisnosti brzine o vremenu odredite grafički prikaz ovisnosti akceleracije o vremenu.
11. Izvedite izraz za brzinu i pomak pri pravocrtном gibanju s konstantnom akceleracijom.
12. Nacrtajte (v, t) dijagram za: **a)** gibanje konstantnom brzinom, **b)** jednoliko ubrzano gibanje i **c)** jednoliko usporeno gibanje.
13. Izvedite izraze za put i brzinu pri jednoliko ubrzanom gibanju po pravcu uz početne uvjete: **a)** $t = 0, v_0 = 0$ i **b)** $v(t = 0) = v_0$.
14. Kako se put izračunava iz poznate brzine pri pravocrtном nejednolikom gibanju?
15. Kako se može pokusom pokazati da sva tijela u vakuumu padaju jednako?
16. Što je slobodni pad?
17. Kako se može izmjeriti padanje tijela i odrediti akceleracija padanja?
18. Za slobodni pad nacrtajte ovisnost: **a)** pomaka, **b)** brzine i **c)** akceleracije o vremenu.
19. Definirajte kinematičke veličine pri kružnom gibanju materijalne točke.
20. Zašto se akceleracija u jednolikom gibanju po kružnici zove centripetalna, odnosno radijalna?
21. Izvedite izraz za centripetalnu (radijalnu) i ukupnu akceleraciju pri kružnom gibanju.
22. Izvedite u vektorskom obliku vezu između: **a)** obodne i kutne brzine i **b)** tangencijalne i kutne akceleracije.
23. Uočite formalnu analogiju između pravocrtного i kružnog gibanja. Načinite tablicu koja daje korespondenciju formula za pravocrtно i kružno gibanje.
24. Definirajte put i pomak pri općenitom krivocrtном gibanju u ravnini.
25. Kako se definira srednja brzina pri krivocrtном gibanju? Definirajte srednju brzinu pomoću pomaka i pomoću puta te uočite razliku.
26. Definirajte brzinu i akceleraciju pri općenitom krivocrtном gibanju u ravnini.
27. Kako se računa pomak, a kako put ako je poznata brzina pri krivocrtном gibanju?
28. Napišite izraze za $\vec{r}(t)$ i $\vec{v}(t)$ za ravnijsko gibanje s konstantnom akceleracijom. Primijenite ih za kosi, horizontalni i vertikalni hitac.
29. Za kosi hitac izvedite jednadžbu putanje, domet, vrijeme trajanja i visinu hica.
30. Što je balistička krivulja?

31. Dva trkača sudjeluju u maratonskoj utrci (42 km), trčeći 21 km u jednom smjeru, a zatim se vraćaju istim putem do mjesta odakle su krenuli. Brzina jednog od njih je 18 km/h, a drugoga 12 km/h. Koliko je daleko od starta drugi trkač kada se susretnu? Koliko će kasnije drugi trkač stići na cilj? Riješite zadatak računski i grafički.
32. Autobus se giba iza kamiona na razmaku $d = 20$ m. Oba vozila imaju jednaku brzinu $v_0 = 36$ km/h. U trenutku kad autobus ubrza akceleracijom $a_1 = 0,8$ m/s², da bi pretekao kamion, kamion ubrza akceleracijom $a_2 = 0,4$ m/s². a) Odredite kada će autobus dostići kamion. b) Koliki će put pri tom prevaliti autobus, a koliki kamion?
33. Osobni automobil giba se brzinom 60 km/h iza kamiona kojemu je brzina 30 km/h. Približivši se na udaljenost d iza kamiona, vozač automobila počinje kočiti akceleracijom -3 m/s². Odredite kolika mora biti minimalna udaljenost d da se ne dogodi sudar.
34. Najbolji trkači mogu pretrčati 100 m u 10 s. Koju maksimalnu brzinu pri tom postižu? Koliki će put u istom vremenu prevaliti automobil koji se jednoliko ubrzava iz mirovanja? Pretpostavite da su trkaču potrebne 3 s da postigne maksimalnu brzinu kojom dalje trči jednoliko, a da je automobilu potrebno 11,7 s da jednoliko ubrza od 0 do 80 km/h.
35. Ulazeći u stanicu vlak počinje jednoliko usporavati i prvih $s_1 = 50$ m prijeđe za $t_1 = 5$ s, a sljedećih $s_2 = 50$ m za $t_2 = 7$ s. Izračunajte ubrzanje vlaka.
36. Čestica se giba u x, y ravnini, tako da joj vektor položaja ovisi o vremenu, po zakonu $\vec{r} = (5t^2 - 3t)\vec{i} + 4t^2\vec{j}$, gdje je r iskazan metrima, a t sekundama. a) Izračunajte $\vec{r}$, $\vec{v}$ i $\vec{a}$ u $t = 0$ s i $t = 1$ s. b) Kada x komponenta brzine postane jednaka nuli? Kolika je tada y komponenta brzine?
37. Izračunajte koliki put pređe tijelo za vrijeme prve sekunde slobodnog pada. Koliko je vrijeme za koje tijelo slobodno padajući pređe prvi metar puta? Ako pada s visine 9,8 m za koje vrijeme pređe posljednji metar puta?
38. Lopta je bačena vertikalno uvis brzinom 10 m/s s ruba krova zgrade visoke 20 m. Odredite a) vrijeme uspinjanja, b) maksimalnu visinu koju dosegne lopta, c) vrijeme potrebno da se lopta vrati do ruba zgrade, d) položaj i brzinu lopte u trenutku $t_1 = 0,5$ s i $t_2 = 3$ s i e) trenutak udara lopte u tlo ispred zgrade. Zanemarite otpor zraka.
39. Bombarder koji leti horizontalno brzinom 450 km/h na visini od 1000 m ispusti bombu. a) Kako dugo će bomba padati? b) Gdje se nalazi avion u trenutku kada bomba udari u tlo, ako od trenutka izbacivanja bombe nije mijenjao brzinu ni po smjeru ni po iznosu? c) Koliki je iznos i smjer brzine kojom bomba udari u tlo? Zanemarite otpor zraka.
40. Iz vozila koje se giba brzinom 72 km/h ispaljen je metak početnom brzinom 400 m/s u horizontalnom smjeru a) prema naprijed, b) prema natrag. Koliki je dolet metka ako je cijev oružja 2 m iznad tla? Zanemarite otpor zraka.
41. Izračunajte kutnu i obodnu brzinu, te centripetalnu akceleraciju za gibanje a) Zemlje oko Sunca, b) Mjeseca oko Zemlje.
42. Materijalna točka giba se jednoliko po kružnici polumjera 2 m centripetalnom akceleracijom 4,5 m/s². Kolika joj je brzina i ophodno vrijeme?
43. Kolika je brzina automobila koji je u prvoj brzini sa 1000 okr/min. Prenos u mjenjaču je 1:3,583 dok je omjer prenosa u diferencijalu 13:53. Opseg točkova je 1,7 m.
44. Kotač polumjera 0,1 m kotrlja se po horizontalnoj podlozi konstantnom kutnom akceleracijom. U trenutku $t = 10$ s nakon početka kotrljanja kutna brzina kotača je 30 s⁻¹. Odredite kutnu akceleraciju, te akceleraciju i brzinu središta kotača u tom trenutku. Koliki je ukupan broj okretaja?

3. DINAMIKA ČESTICE

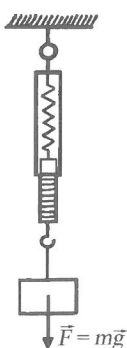
U kinematici smo proučavali zakone gibanja bez obzira na to što je uzrokovalo to gibanje. Sada ćemo proučavati dinamiku, koja razmatra fizikalne uzroke gibanja. Osnova su dinamike tri Newtonova zakona, koje je 1686. formulirao engleski fizičar Isaac Newton. Iz tih zakona može se izgraditi tzv. klasična ili Newtonova mehanika. Newton je svoje zakone objavio 1686. godine u djelu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Newtonova mehanika odlično opisuje makroskopske pojave, dakle tijela dimenzija većih od atoma i molekula te brzine mnogo manje od brzine svjetlosti. Za opisivanje mikrosvijeta (atoma i molekula) moraju se primijeniti zakoni kvantne fizike, a za velike brzine upotrebljavaju se zakoni relativističke mehanike (Einsteinove teorije relativnosti). Međutim, i kvantna i relativistička mehanika svode se na klasičnu mehaniku u graničnom slučaju, tj. za udaljenosti koje su velike s obzirom na veličinu atoma, i za brzine malene u usporedbi s brzinom svjetlosti.

3.1. MASA I SILA

Najvažnije su fizičke veličine dinamike **sila** i **masa**. Teško je točno odgovoriti na pitanje što je sila ili međudjelovanje. Međutim, iz svakodnevnoga iskustva znamo kako djeluju razne sile: kad guramo ili vučemo neki predmet, kad istežemo elastičnu oprugu, kažemo da djelujemo silom. Pritom tu silu osjećamo kao naprezanje naših mišića. U fizici silu opisujemo pomoću njezina djelovanja. Djelovanje sile može biti dvojako:

- sila može ubrzati ili usporiti neko tijelo, tj. promijeniti mu stanje gibanja
- sila može promijeniti oblik tijela, tj. deformirati ga.



Slika 3.1.
Dinamometar

U dinamici ćemo proučavati samo prvo djelovanje, tj. silu kao uzrok promjene stanja gibanja nekog tijela, smatrajući pritom da se oblik tijela ne mijenja.

Sila je vektorska veličina te je uz iznos važno znati i smjer u kojemu djeluje. Označava se znakom F , prema engleskoj riječi *force*, što znači sila.

Silu možemo odrediti tako da mjerimo ili akceleraciju tijela ili njegovu deformaciju. Obično se za određivanje sile upotrebljava deformacija tijela. Najjednostavnije silu mjerimo pomoću **dinamometra** (sl. 3.1), tj. pomoću elastične opruge jednim krajem učvršćene na vrhu metalnoga valjka, dok je drugi kraj slobodan i može se izvlačiti pod utjecajem sile. Što je veća sila koja djeluje na dinamometar, to će se opruga više produljiti; mjereći produljenje, može se odrediti sila. Produljenje opruge pod utjecajem vanjske sile linearno je u granicama elastičnosti opruge i može se prikazati izrazom:

$$F = k \Delta l \quad (3.1)$$

gdje je F sila koja djeluje na oprugu, Δl produljenje opruge, a k tzv. konstanta opruge. Baždarenjem dinamometra može se iz produženja opruge očitati sila koja djeluje na dinamometar.

U prirodi se pojavljuju različite sile. Kada guramo predmet, naprezanje mišića proizvodi silu, ako tijelo vučemo po podlozi pojavit će se sila trenja, na svako tijelo u blizini Zemljine površine djeluje sila teža, pri deformacijama elastičnih sila pojavljuje se harmonička sila, magnet djeluje na komad željeza magnetskom silom, dva se nabijena tijela privlače ili odbijaju elektrostatskom silom, sastojci jezgre privlače se nuklearnom silom, itd. Ipak, usprkos tako velikoj raznolikosti, sve se sile u prirodi mogu svesti na četiri vrste međudjelovanja. To su privlačna **gravitacijska sila** između bilo koja dva tijela, **elektromagnetska sila** između električnih naboja u mirovanju, odnosno u gibanju, **sila jake interakcije** između nukleona u jezgri i **sila slabe interakcije** koja se pojavljuje pri radioaktivnom β -raspadu jezgre. Samo prve dvije od njih pojavljuju se u klasičnoj fizici. Druge sile koje ćemo razmatrati proučavajući klasičnu fiziku mogu se objasniti pomoću njih dviju. Tako se, na primjer, pri deformaciji mijenja razmak među atomima u čvrstom tijelu i te se submikroskopske promjene razmaka atoma odražavaju u promjeni veličine i oblika čvrstoga tijela, tj. međumolekularne sile, koje su električne prirode, manifestiraju se (gledano makroskopski) kao elastična (harmonička) sila.

Masa je svojstvo svakog tijela koje određuje njegovo ponašanje pri djelovanju sile: što je masa tijela veća, ono je tromije, to ga je teže ubrzati ili usporiti, tj. promijeniti mu stanje gibanja.

Tijelo se opire promjeni stanja svojega gibanja. Svojstvo tijela da održava svoje stanje gibanja (odnosno, u posebnom slučaju, mirovanja) zovemo *ustrajnost*, *tromost* ili *inercija*. Masa je kvantitativna mjera tromosti tijela.

Osim mase i sile u dinamici se upotrebljavaju i druge fizikalne veličine: **količina gibanja**, **moment sile**, **moment količine gibanja**, **rad**, **energija**, itd. Definirat ćemo samo količinu gibanja, dok ćemo o ostalim veličinama govoriti poslije.

Količina gibanja materijalne točke mase m i brzine $\vec{v}$ jest

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.2)$$

Smjer vektora $\vec{p}$ isti je kao i smjer brzine.

Jedinica je količine gibanja kilogram metar u sekundi (kg m/s).

U relativističkoj mehanici količina gibanja ovisi o brzini prema izrazu

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.3)$$

što se pri malim brzinama svodi na jednadžbu (3.2). O relativističkoj količini gibanja detaljnije ćemo govoriti u 9. poglavlju.

Gibanje tijela fizikalno je bolje opisano pomoću količine gibanja nego, npr., pomoću kinematičke veličine brzine. Kad kažemo da je brzina nekog vozila 100 km/h, nije svejedno da li je to, npr., teški kamion ili neko putničko vozilo. Međutim, specificiravši da je količina gibanja tog tijela, recimo, $3 \cdot 10^5$ kg m/s, mnogo smo preciznije opisali to gibanje.

3.2. PRVI NEWTONOV ZAKON. INERCIJALNI SUSTAVI

Još je Galilei uočio da tijelo na koje ne djeluju vanjske sile miruje ili se jednoliko giba po pravcu. Da bismo pokrenuli tijelo koje miruje, potrebna je određena sila; tijelo koje se giba jednoliko po pravcu ostat će u tom stanju gibanja sve dok na nj ne djeluje neka vanjska sila. Kuglica na horizontalnoj ravnini bez trenja gibat će se jednoliko čim je jednom stavimo u pokret. Kažemo da svako tijelo ima svojstvo da održava svoje stanje gibanja ili mirovanja. To svojstvo zove se inercija tijela.

Proširivši Galilejeva razmatranja, Newton je postavio svoj prvi zakon:

Svako će tijelo ostati u stanju mirovanja ili jednolikoga gibanja po pravcu sve dok pod djelovanjem vanjskih sila to stanje ne promijeni.

Prvi Newtonov zakon često se zove i princip ustrajnosti (tromosti ili inercije). Po njemu je uzrok promjene gibanja djelovanje sile na tijelo. Ako sila ne djeluje, odnosno, što je češće, ako se sile poništavaju tako da je rezultatna sila na tijelo jednaka nuli, akceleracija tijela je nula, odnosno $\vec{v} = \text{konst.}$

Položaj tijela s obzirom na neko drugo tijelo (okolinu) određujemo izborom referentnog sustava. Prvi Newtonov zakon ne vrijedi u svakom referentnom sustavu. Tako će se kuglica koja miruje na stolu u vlaku koji se giba jednoliko po pravcu pomaknuti čim vlak uspori ili ubrza, iako na nju okolina pri tom ne djeluje. Sustavi u kojima vrijedi prvi Newtonov zakon *inercijalni* su sustavi; prihvaćanjem tog zakona ograničili smo se na opisivanje pojava u inercijalnim sustavima.

Svaki sustav koji miruje ili se jednoliko giba po pravcu s obzirom na neki inercijalni sustav opet je inercijalni sustav. Mirovanje i jednoliko gibanje po pravcu ravnopravni su. Tijelo koje u jednom inercijalnom sustavu miruje, u drugom inercijalnom sustavu može mirovati ili se jednoliko gibati po pravcu.

Jedan od inercijalnih sustava je heliocentrički referentni sustav vezan za Sunce. Sustav vezan za Zemlju (laboratorijski sustav) samo je približno inercijalan jer Zemlja kruži oko Sunca i vrti se oko svoje osi, dakle s obzirom na Sunce ima određenu akceleraciju. Međutim, ta je akceleracija malena pa se u većini razmatranja može zanemariti i laboratorijski sustav smatrati inercijalnim. (Ni sustav vezan za Sunce nije sasvim inercijalan jer se Sunce giba krivocrtno oko centra galaksije, međutim akceleracija tog gibanja vrlo je malena, oko 10^8 puta manja nego akceleracija gibanja Zemlje oko Sunca.) Detaljnije ćemo o inercijalnim i ne-inercijalnim sustavima govoriti u 7. poglavlju. Tada ćemo se osvrnuti i na neke posljedice neinercijalnosti sustava vezanoga za Zemlju.

3.3. DRUGI NEWTONOV ZAKON

Prvi zakon opisuje ponašanje tijela kad na nj ne djeluju druga tijela ili kad je rezultanta sila nula. Drugi zakon opisuje ponašanje tijela kad na nj djeluje određena vanjska sila F .

Iz iskustva je poznato, a to mogu potvrditi i brojni pokusi, da je akceleracija tijela razmjerna sili i ima smjer sile. Konstanta proporcionalnosti između sile i akceleracije jest masa tijela m :

$$F = m a \quad (3.4)$$

Što je masa tijela veća, to je za isto ubrzanje potrebna veća sila. Masa koja se pojavljuje u relaciji (3.4) naziva se, upravo zbog toga svojstva, tromom masom tijela.

Pomoću jednadžbe (3.4) možemo izvesti jedinicu sile:

$$F = m a.$$

$$[F] = [m] [a] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}.$$

Jedinica sile je, dakle, njutn (znak: N). Njutn je sila koja tijelu mase jedan kilogram daje akceleraciju metar u sekundi na kvadrat.

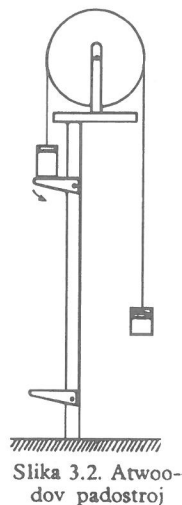
Djelovanje stalne sile na gibanje tijela možemo ispitati pomoću Atwoodova padostroja (sl. 3.2). Preko kolotura prebačena je tanka čelična žica na čijim krajevima vise dva jednaka utega mase, npr., 200 g. Gornji dio jednog utega je razrezan u tanke, pločaste kriške, te se prebacivanjem kriški s jednog utega na drugi može povećati masa jednom od njih, a smanjiti drugome. Kada su mase utega jednake, sistem, naravno, miruje, a kad su različite, sistem se giba pod djelovanjem težine pretega ($m_2 - m_1$) g . Masu kolotura i trenja pri tom zanemarujemo.

U tablici 3.1. dani su rezultati takvog mjerenja u kojemu se pod utjecajem stalne sile ($m_2 - m_1$) $g = (0,22 - 0,18) \cdot 9,81 \text{ N} = 0,39 \text{ N}$ giba sistem utega mase $m_1 + m_2 = 0,4 \text{ kg}$ i mjeri vrijeme potrebno da bi utezi prevalili različite putove. Kao što se vidi iz rezultata mjerenja, gibanje je jednoliko ubrzano, opisano izrazom $s = at^2/2$. Stalna sila izaziva gibanje sa stalnom akceleracijom.

Mijenjamo li silu (mijenjajući težinu pretega), uz jednaku masu, mijenjat će se akceleracija. Rezultati takvog mjerenja također su dani u tablici 3.1.

Akceleracija je proporcionalna sili koja djeluje na sistem: $a \propto (m_2 - m_1) g$.

Slično bismo mogli pokazati, mijenjajući masu sistema $m_1 + m_2$ uz stalnu silu ($m_2 - m_1$) g , da je akceleracija obrnuto razmjerna masi: $a \propto 1/(m_1 + m_2)$.



Tablica 3.1. Rezultati mjerenja Atwoodovim padostrojem

m_1/kg	m_2/kg	$(m_2 - m_1) g$	s/m	t/s	$a = 2s/t^2$
0,18	0,22	0,39 N	0,2	0,687	0,87 m/s ²
0,18	0,22	0,39 N	0,8	1,359	0,866 m/s ²
0,18	0,22	0,39 N	1,8	2,04	0,867 m/s ²
0,185	0,215	0,29 N	1,8	2,4	0,63 m/s ²
0,19	0,21	0,19 N	1,8	2,9	0,43 m/s ²

Primjer

Preko kolotura Atwoodova padostroja (sl. 3.2) prebačena je tanka čelična žica na čijim krajevima vise utezi mase $m_1 = 0,18$ kg i $m_2 = 0,22$ kg. Izračunajte akceleraciju utega i napetosti niti. Zanemarite trenje te masu žice i kolotura.

Budući da je masa kolotura zanemariva, napetosti niti N_1 i N_2 jednake su. Lakši uteg mase m_1 gibat će se nagore pod utjecajem rezultantne sile $N - m_1g$, dok će sila $m_2g - N$ davati jednaku akceleraciju utegu mase m_2 prema dolje. Prema drugom Newtonovu zakonu, možemo, dakle, pisati:

$$N - m_1g = m_1a \quad (3.5a)$$

$$m_2g - N = m_2a \quad (3.5b)$$

Zbrajanjem tih dviju jednadžbi dobivamo akceleraciju utega:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = 0,98 \text{ m/s}^2 \quad (3.6)$$

Uvrstivši izraz za akceleraciju u jednu od navedenih jednadžbi dobivamo napetost niti:

$$N = m_1g + m_1a = m_1g + \frac{m_1(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} g = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g = 1,94 \text{ N} \quad (3.7)$$

Akceleraciju utega možemo izračunati i tako da promatramo gibanje sistema kao cjeline. Ukupna vanjska sila koja djeluje na sistem mase $m_1 + m_2$ jest $(m_2 - m_1)g$, i ona daje sistemu stalnu akceleraciju

$$a = \frac{F}{m} = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} = 0,98 \text{ m/s}^2 \quad (3.8)$$

Usporedivši taj rezultat s mjerenjem (tablica 3.1), vidimo da je izmjerena vrijednost nešto manja. Zašto?

Drugi Newtonov zakon, u stvari, kaže kako sila utječe na promjenu količine gibanja tijela. Newtonova formulacija drugoga zakona, prevedena na današnji jezik fizike, glasi:

Brzina promjene količine gibanja proporcionalna je sili i zbiva se u pravcu te sile:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.9)$$

Ako je $\vec{p} = m\vec{v}$, što je ispunjeno u Newtonovoj mehanici (tj. za $v \ll c$), jednadžba (3.9) prelazi u jednadžbu (3.4):

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (3.10)$$

Drugi Newtonov zakon može se, dakle, izraziti u dva oblika: općenitom obliku $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, koji vrijedi i u Newtonovoj i u relativističkoj mehanici te se često zove relativistički oblik, i u nerelativističkom obliku $\vec{F} = m\vec{a}$, koji vrijedi samo u Newtonovoj mehanici.

Pri praktičnom rješavanju problema gibanja potrebno je napisati jednadžbu gibanja (drugi Newtonov zakon) i riješiti je uz odgovarajuće uvjete. U tu svrhu treba najprije odrediti sve sile koje djeluju na promatrano tijelo, a zatim napisati jednadžbu:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i \quad (3.11)$$

Da bi se riješila ta vektorska jednadžba, odabire se koordinatni sustav i jednadžba (3.11) napiše pomoću projekcije vektora na koordinatne osi, kao što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer

Tijelo mase 2 kg počinje kliziti niz kosinu koja je prema horizontali nagnuta za 45° i u prvoj sekundi prevari put 2,5 m. Kolika je sila trenja? Kolikom bi silom F trebalo djelovati da bi se tijelo gibalo jednoliko uz kosinu?

Na tijelo koje klizi niz kosinu djeluju sile: sila

teža $\vec{G} = m\vec{g}$, sila normalne reakcije podloge $\vec{F}_N$ i

sila trenja $\vec{F}_{tr}$ (sl. 3.3). Jednadžba gibanja tijela proistječe iz drugoga Newtonova zakona:

$$m\vec{a} = \Sigma \vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_N + \vec{F}_{tr} \quad (3.12)$$

Odaberemo li os x koordinatnog sustava tako da je paralelna kosini, u smjeru gibanja tijela, a os y okomita na kosinu, jednadžba (3.12) prelazi u:

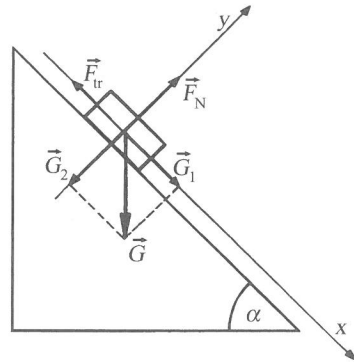
$$ma = mg \sin \alpha - F_{tr} \quad (3.12a)$$

$$0 = F_N - G \cos \alpha \quad (3.12b)$$

Odatle je

$$F_{tr} = mg \sin \alpha - ma = m \left(g \sin \alpha - \frac{2s}{t^2} \right) = 3,9 \text{ N} \quad (3.12c)$$

Iz $ma = F - mg \sin \alpha - F_{tr} = 0$ slijedi $F = mg \sin \alpha + F_{tr} = 17,8 \text{ N}$.



Slika 3.3. Gibanje niz kosinu

3.4. MASA I TEŽINA

Na svako tijelo koje se nalazi na Zemljinoj površini djeluje sila koju nazivamo težina ili sila teža. Ta je sila razmjerna masi m tijela i može se pisati kao

$$\vec{G} = m\vec{g} \quad (3.13)$$

Vektor $\vec{g}$ nazivamo akceleracijom sile teže. Iako težina uglavnom potječe od gravitacijske sile kojom Zemlja privlači tijelo, nije joj sasvim jednaka, već je u nju osim gravitacijskog privlačenja (gravitacijskog polja, o kojem će biti više riječi u 8. poglavlju) uračunata i mala popravka zbog neinercijalne centrifugalne sile, prouzročene vrtnjom Zemlje oko vlastite osi (vidi 7. poglavlje). Budući da je korekcija uslijed vrtnje Zemlje oko vlastite osi vrlo mala u usporedbi s gravitacijskom silom, u većini proračuna može se smatrati da je težina usmjerena od tijela prema središtu Zemlje. Izmjereni iznos g akceleracije sile teže ponešto se mijenja još i ovisno o geografskoj širini, nadmorskoj visini i sastavu Zemljine unutrašnjosti.

Na geografskoj širini od 45° on iznosi približno $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Masa i težina su dvije različite veličine: masa je osobina tijela i iskazuje se jedinicom kilogram, a težina je sila i njezina mjerna jedinica je njutn.

Masa tijela, kojom je određena težina tijela, naziva se teška masa, za razliku od tromе mase, koja se pojavljuje u drugom Newtonovom zakonu (3.4). Sva dosadašnja mjerenja upućuju na to da su teška i troma masa jednake, pa se mogu pokratiti u jednadžbi gibanja, koja se dobije kad se izjednače desne strane jednadžbi (3.4) i (3.13)

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad (3.14)$$

Zato veličinu $\vec{g}$ i nazivamo akceleracijom sile teže, iako ona ima fizikalni smisao polja (sile podijeljene s masom, vidi odjeljak 8.4).

Masa nekoga tijela ovisi o njegovu volumenu V i o materijalu od kojega je tijelo napravljeno. Kvocijent mase i volumena tijela jest gustoća tijela:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.15)$$

Formula (3.15) vrijedi, naravno samo za homogena tijela. Ako tijelo nije homogeno, gustoća u pojedinoj točki tijela definira se pomoću derivacije:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (3.15.a)$$

Tablica 3.2. Gustoće nekih tvari

Tvar	$\rho / (\text{kg/m}^3)$	Tvar	$\rho / (\text{kg/m}^3)$
zrak (0 °C; 101 325 hPa)	1,29	željezo	7 800
pluto	250	bakar	8 900
benzin	700	srebro	10 500
alkohol	790	olovo	11 300
led	920	živa	13 600
voda	1 000	uran	18 700
aluminij	2 700	zlato	19 000
cink	7 100	platina	21 500

3.5. TREĆI NEWTONOV ZAKON

Sile koje djeluju na neko tijelo potječu iz okoline toga tijela. Treći Newtonov zakon govori o interakciji određenog tijela i njegove okoline. Ako tijelo A djeluje na tijelo B silom $\vec{F}_{AB}$, tada i tijelo B djeluje na tijelo A jednako velikom silom po iznosu, ali suprotnoga smjera $\vec{F}_{BA}$:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (3.16)$$

Prvu silu možemo zvati akcija, a drugu reakcija, te pisati:

$$\text{sila akcije } \vec{F}_{AB} = -\text{sila reakcije } \vec{F}_{BA}.$$

Tu činjenicu izrazio je Newton u trećem zakonu mehanike, koji glasi:

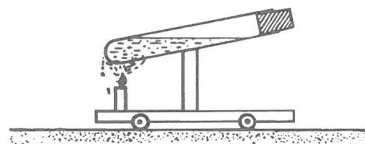
Svakom djelovanju (akciji) uvijek je suprotno i jednako protudjelovanje (reakcija). Djelovanja dvaju tijela jednoga na drugo uvijek su jednaka i protivnog smjera.

Primjere za treći Newtonov zakon opažamo na svakom koraku. Promatrajmo, npr., uteg mase m koji miruje na horizontalnoj podlozi stola. Na uteg djeluju dvije sile: sila teža $\vec{F}_G$, kojom ga Zemlja privlači, i sila $\vec{F}_N$, kojom podloga stola djeluje na uteg prema gore. Budući da uteg miruje ($\vec{a} = 0$), prema drugom Newtonovu zakonu ukupna sila na uteg iščezava, te je $\vec{F}_G = -\vec{F}_N$. Ut eg djeluje na stol svojom težinom $\vec{G}$, koja je, prema trećem Newtonovu zakonu, jednaka po iznosu, a suprotna po smjeru sili $\vec{F}_N$ kojom podloga stola djeluje na uteg: $\vec{G} = -\vec{F}_N$. Odatle slijedi da je težina utega $\vec{G}$ (tj. sila kojom uteg djeluje na horizontalnu podlogu) jednaka sili teži: $\vec{G} = \vec{F}_G = m\vec{g}$.

Uočite sile akcije i reakcije u ovom primjeru: sila akcije $\vec{G}$ djeluje na podlogu stola, dok sila reakcije $\vec{F}_N$ djeluje na uteg. Promatramo li, međutim, interakciju utega i Zemlje, sila akcije je sila $\vec{F}_G$ kojom Zemlja privlači uteg, dok silom reakcije uteg privlači Zemlju. Sile $\vec{F}_G$ i $\vec{F}_N$, premda su jednake po iznosu, a suprotnog smjera, nisu akcija i reakcija; one djeluju na isto tijelo, dok sila akcije i reakcije uvijek djeluju na različita tijela.

Treći Newtonov zakon mogu opaziti i dva klizača na ledu koji se, okrenuti jedan prema drugome, drže za uže. Ako samo jedan od njih vuče uže, nastojeći privući k sebi onoga drugoga, oba će se klizača pomaknuti s mjesta i približavati jedan drugome jer se uz silu akcije, kojom prvi klizač djeluje na drugoga, javlja i sila reakcije, kojom drugi djeluje na prvoga.

Pokus s „topom” lijepo ilustrira treći Newtonov zakon (sl. 3.4). Metalna cijev, zatvorena na jednom kraju i pričvršćena na kolicima, može nam poslužiti kao „top”. Cijev do polovice napunimo vodom, zatvorimo gumenim čepom i grijemo vodu. Kada tlak pare bude dovoljno velik, „top” će eksplodirati, čep će odletjeti na jednu, a „top” na drugu stranu. (Pokus možemo izvesti i tako da cijev napunimo smjesom zraka i rasvjetnog plina, koju upalimo pomoću električne iskre.)



Slika 3.4. „Top” i čep

Sila kojom „top” djeluje na čep jednaka je i suprotna sili kojom čep djeluje na „top”:

$$m_c \vec{a}_c = -m_t \vec{a}_t \quad (3.17)$$

Zbog veće mase topa njegova je akceleracija manja.

Posljedice trećeg Newtonova zakona uočavamo i u mnogim drugim slučajevima, npr. pri iskakanju iz čamca, reaktivnom gibanju (mlazni avion, raketa), sudarima, itd.

3.6. KOLIČINA GIBANJA I IMPULS SILE

Količinu gibanja materijalne točke definirali smo kao umnožak mase i brzine:

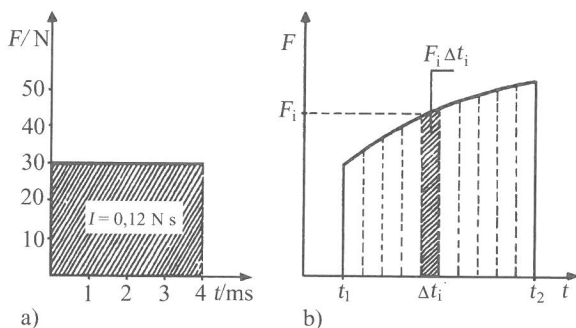
$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (3.18)$$

Ta dinamička veličina označava osobinu tijela koje se giba. Iz iskustva znamo da je teže zaustaviti tijelo s većom količinom gibanja nego ono s manjom, i da je za svaku promjenu količine gibanja potrebno da na tijelo neko vrijeme djeluje sila. Što je veća sila koja pri tom djeluje, odnosno što je duži vremenski interval djelovanja, bit će veća i promjena količine gibanja. Da bismo opisali djelovanje sile na tijelo, definiramo *impuls sile*.

Pretpostavimo da na tijelo djeluje stalna sila $\vec{F}$ u određenom vremenskom intervalu Δt ; kažemo da je pri tome tijelo dobilo *impuls sile* $F \Delta t$. Impuls sile je, dakle, umnožak sile i vremenskog intervala u kojemu djeluje ta sila. Jedinica impulsa je njutnsekunda (znak: N s). Impuls sile $\vec{I}$ je vektorska veličina i ima smjer sile:

$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t \quad (3.18a)$$

U $F-t$ dijagramu (sl. 3.5) impuls sile je brojčano jednak površini ispod krivulje $F(t)$.



Slika 3.5. Impuls: a) stalne i b) promjenljive sile

Ako sila nije stalna, nego se mijenja u vremenu (sl. 3.5b), tada impuls nadamo tako da vremenski interval podijelimo u mnogo malenih intervala. U svakom takvom intervalu impuls je približno jednak umnošku sile i vremenskog intervala, jer se sila u tako malom vremenskom intervalu bitno ne promijeni. Ukupni impuls jednak je zbroju svih tih impulsa. Točnu vrijednost impulsa sile dobivamo tako da uzmemo granične vrijednosti tog izraza:

$$\vec{I} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad (3.19)$$

Impuls sile jednak je integralu sile po vremenu u kojemu djeluje ta sila.

Pogledajmo kako impuls sile mijenja količinu gibanja tijela koje je primilo taj impuls. Kada nogom udarimo loptu i time joj damo određeni impuls, lopta odleti, jer joj se promijeni brzina, odnosno količina gibanja. Slično, pri sudaru dvaju tijela, dolazi do njihova međudjelovanja: svako tijelo primi određeni impuls sile i promijeni mu se količina gibanja.

Primjenom drugoga Newtonova zakona pokazat ćemo povezanost između impulsa sile i količine gibanja tijela na koje djeluje sila. Prema drugom Newtonovu zakonu, sila je jednaka brzini promjene količine gibanja:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (3.20)$$

Za infinitezimalno vrijeme dt tijelo će dobiti impuls sile:

$$\vec{F} dt = d\vec{p}, \quad (3.21)$$

dok će u vremenskom intervalu između t_1 i t_2 primljeni impuls sile biti jednak:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (3.22)$$

Relacija (3.22) daje vezu između impulsa sile i količine gibanja: impuls sile jednak je promjeni količine gibanja tijela na koje djeluje ta sila. Ako je tijelo u početku (prije djelovanja sile) mirovalo, tada je impuls sile jednak količini gibanja koju tijelo ima nakon djelovanja impulsa sile.

Vremenska ovisnost sile često nije poznata, te impuls sile ne možemo odrediti integrirajući silu po vremenu; u tom je slučaju mjerenje promjene količine gibanja i upotreba relacije (3.22) jedini način određivanja impulsa sile.

Primjer

Ako udarac traje 10 ms, a lopta mase 500 g odleti brzinom 5 m/s, odredite kolika je srednja sila za vrijeme djelovanja noge na loptu.

Promjena količine gibanja jednaka je primijenjenom impulsu sile. Lopka je u početku mirovala, te je promjena količine gibanja jednaka $m v$. Srednja je sila:

$$\vec{F} = \frac{m v}{\Delta t} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ N.}$$

Pri sudaru, eksploziji i sl. djeluje posebna vrsta sile, tzv. impulsne sile. Točnu vremensku ovisnost takve sile ne poznajemo, znamo samo da je sila dosta velika i da traje kratko vrijeme. Te sile nisu konstantne, počinju djelovati u trenutku t_1 , zatim brzo rastu do maksimalne vrijednosti, a onda padaju na nulu, u trenutku t_2 . Približni oblik impulsne sile prikazan je na slici 3.6, uz uvjet da je vremenski interval $t_2 - t_1$ vrlo kratak. Takva je sila, npr., djelovala u pokusu s „topom”.

Primjer

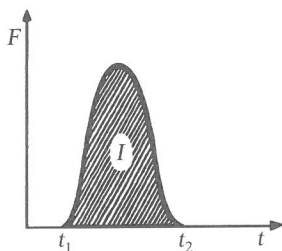
Molekula vodika brzine 1000 m/s udara u stijenku posude pod pravim kutom i elastično se odbije. Nadite impuls sile koji je pri tom primila stijenka posude.

Pri elastičnom sudaru sa stijenkom molekula promijeni smjer brzine, ali ne i iznos. Promjena je količine gibanja:

$$\Delta p = m v - (-m v) = 2 m v,$$

te je impuls sile:

$$I = 2 m v = 2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1000 \text{ kg m/s} = 3,34 \cdot 10^{-24} \text{ N s.}$$

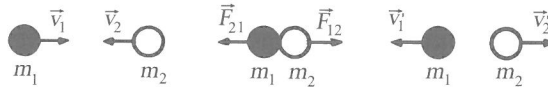


Slika 3.6. Impulsna sila

3.7. ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

Promatrajmo sistem od dvije ili više čestica mase $m_1, m_2, m_3, \dots$. Čestice unutar sistema mogu djelovati jedna na drugu tzv. unutrašnjim silama, a tijela izvan sistema mogu djelovati na sistem tzv. vanjskim silama. Ako nema vanjskih sila (ili se međusobno poništavaju, pa im je rezultanta nula), kažemo da je sistem izoliran (zatvoren).

Pokazat ćemo da za izolirani sistem vrijedi zakon o očuvanju količine gibanja. Radi jednostavnosti, zamislimo sistem od dvije materijalne točke mase m_1 i m_2 koje se centralno i elastično sudare (sl. 3.7).



Slika 3.7. Uz izvod zakona očuvanja količine gibanja za sistem od dvije čestice

Brzine čestica prije sudara označimo sa $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, a nakon sudara sa $\vec{v}_1'$ i $\vec{v}_2'$. Za vrijeme sudara, koje traje vrlo kratko, čestice djeluju jedna na drugu silama. Po trećem Newtonovu zakonu, sila kojom prva čestica djeluje na drugu ($\vec{F}_{12}$) jednaka je po iznosu, a suprotna po smjeru sili $\vec{F}_{21}$ kojom druga čestica djeluje na prvu, tj.:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3.23)$$

Količina gibanja prve čestice prije sudara jest $m_1\vec{v}_1$, a nakon sudara $m_1\vec{v}_1'$. Nastala promjena količine gibanja jednaka je primljenom impulsu sile $\vec{I}_1$:

$$\vec{I}_1 = m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 \quad (3.24)$$

Slično vrijedi i za drugu česticu:

$$\vec{I}_2 = m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2 \quad (3.25)$$

Zbog trećega Newtonova zakona $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, te su i primljeni impulsi sile jednaki po iznosu, a suprotnog smjera: $\vec{I}_1 = -\vec{I}_2$. Kada to uvažimo, iz jednadžbi (3.24) i (3.25) dobivamo:

$$m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 = -(m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2) \quad (3.26)$$

odnosno:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \quad (3.27)$$

Na lijevoj je strani jednadžbe (3.27) ukupna količina gibanja sistema prije sudara, a na desnoj strani ukupna količina gibanja nakon sudara. Pri sudaru se količina gibanja toga zatvorenog sistema od dvije čestice nije promijenila.

Taj se zaključak može proširiti na izolirani sistem od proizvoljnog broja čestica. Iz drugoga Newtonova zakona za izolirani sistem od n čestica vrijedi:

$$\vec{F}_u = \Sigma \vec{F}_{un} + \Sigma \vec{F}_v = \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n) = \frac{d\vec{p}_u}{dt} \quad (3.28)$$

Budući da je $\Sigma \vec{F}_v = 0$, a unutrašnje sile se, po trećem Newtonovu zakonu, u parovima poništavaju, slijedi:

$$\frac{d\vec{p}_u}{dt} = 0 \quad (3.29)$$

odnosno

$$\vec{p}_u = \sum_i^n m_i \vec{v}_i = \text{konst.} \quad (3.30)$$

Ukupna količina gibanja zatvorenog sistema konstantna je bez obzira na to kakvi se procesi i međudjelovanje događaju u sistemu.

To je zakon **očuvanja količine gibanja**, jedan od najvažnijih zakona u fizici koji vrijedi, bez izuzetka, za sve zatvorene sisteme. On proistječe iz homogenosti prostora, tj. iz činjenice da sve točke prostora imaju iste osobine i da su prirodni zakoni isti u svakoj točki prostora. Iako ovdje izveden iz Newtonovih zakona, on je općenitiji od njih te vrijedi i onda kada se oni ne mogu primijeniti. Uz taj zakon, još se dva zakona očuvanja mogu izvesti iz osnovnih svojstava prostora i vremena: *zakon očuvanja energije* i *zakon očuvanja momenta količine gibanja*, o kojima ćemo govoriti kasnije.

Već spomenuti pokus s „topom” dobro ilustrira taj zakon jer „top”, zajedno s tanetom, čini zatvoreni sistem. Prije eksplozije ukupna količina gibanja je nula („top” i tane miruju), te i nakon eksplozije ukupna količina gibanja ($m_t \vec{u}_t + m_z \vec{u}_z$) mora biti nula, zbog čega „top” ode na jednu stranu, a čep na drugu, brzinama koje su obrnuto razmjerne njihovim masama.

Primjer

Atom radija emitira α -česticu. Kolikom brzinom će se gibati nastali atom ^{222}Rn ako je brzina emitirane α -čestice $1,5 \cdot 10^7$ m/s. Pretpostavite da je atom ^{226}Ra prije raspada mirovao.

Za taj zatvoreni sustav vrijedi zakon očuvanja količine gibanja:

$$0 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2.$$

Odatle je:

$$v'_2 = -\frac{m_1}{m_2} v'_1 = -\frac{4}{222} \cdot 1,5 \cdot 10^7 \text{ m/s} = -2,7 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

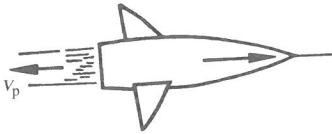
Predznak minus pokazuje da će atom ^{222}Rn i α -čestica otići u suprotnim smjerovima.

3.8. PRIMJENE ZAKONA OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

Zakoni očuvanja pomažu pri rješavanju mnogih problema u mehanici. Pomoću njih često možemo, ne rješavajući jednadžbe gibanja (što često nije jednostavan posao), proračunati ponašanje mehaničkih sustava te učinkovitije i elegantnije riješiti zadani problem.

Kao primjer zakona očuvanja količine gibanja ovdje ćemo obraditi gibanje rake-te. U odjeljku 4.7. primijenit ćemo taj zakon na rješavanje sudara dvaju tijela. Na primjenu tog zakona nailazit ćemo i poslije, u raznim područjima fizike.

Raketa je projektil koji se giba tako da izbacuje čestice užarenog plina. Izgaranjem goriva razvijaju se, naime, plinovi što izlaze kroz mlaznice rakete velikom brzinom koja doseže i do 3 000 m/s. Uz gorivo raketa sadrži i sredstvo za izgaranje goriva te joj nije potreban kisik iz atmosfere i može se gibati i u zrakopraznom prostoru. Možda će nam jednostavan primjer pomoći da shvatimo raketni pogon. Zamislimo da smo na kolicima na kojima su naslagane drvene kockice. Bacanjem kockica unatrag možemo kolica pokretati naprijed. Što brže bacamo kocke, to će se i kolica brže gibati. Slično se događa i pri gibanju rakete ili mlaznog (raketnog) aviona. Izgaranjem goriva nastaju plinovi koji tlače stijenke rakete, a zbog toga tlaka plinovi izlaze velikom brzinom kroz mlaznicu na stražnjem dijelu rakete. Što je veća sila kojom se izbacuju plinovi (akcija), to je veća i reakcija na suprotnom kraju



Slika 3.8. Raketa

rakete, odnosno to je veća akceleracija rakete. Raketu, dakle, tjera potisak $\vec{F}_p$ koji djeluje na zatvorenom kraju (sl. 3.8). Veličina rakete iskazuje se potiskom; npr. potisak američke rakete *Atlas* iznosio je $1,7 \cdot 10^6$ N.

Masa rakete neprestano se smanjuje zbog izgaranja goriva. Da bismo izračunali akceleraciju i brzinu rakete, izračunajmo povećanje brzine rakete $d\vec{v}$ zbog izbacivanja mase plinova dm_p brzinom $\vec{v}_p$ u odnosu prema raketi (sl. 3.8).

Pretpostavimo da se raketa nalazi daleko od svemirskih tijela i da na nju ne djeluje gravitacija ni druge vanjske sile. U tom su slučaju raketa i produkti izgaranja izolirani sistem u kojemu je očuvana ukupna količina gibanja. Zakon očuvanja ukupne količine gibanja možemo napisati u obliku:

$$\vec{p}_{\text{ukupna}} = \vec{p}_{\text{raketa}} + \vec{p}_{\text{plinovi}} = \text{konst.} \quad (3.31)$$

Ako je u trenutku t masa rakete m a $\vec{v}$ brzina s obzirom na laboratorijski sustav u kojemu promatramo gibanje, tada je ukupna količina gibanja rakete i goriva $m\vec{v}$. Zbog izbačenoga izgorjeloga goriva mase dm_p , masa rakete u trenutku $t + dt$ jest $m - dm_p$, dok je brzina rakete $\vec{v} + d\vec{v}$. Plinovi iz rakete pri tom izlaze brzinom $\vec{v}_p$ u odnosu prema raketi, odnosno brzinom $\vec{v} + \vec{v}_p$ u odnosu prema laboratorijskom sustavu. Dakle, ukupna količina gibanja sistema rakete i goriva (plinova) u trenutku $t + dt$ jest:

$$(m - dm_p)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_p(\vec{v} + \vec{v}_p) \quad (3.32)$$

Zakon očuvanja količine gibanja zahtijeva:

$$m\vec{v} = (m - dm_p)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_p(\vec{v} + \vec{v}_p) \quad (3.33)$$

Kako su dm_p i $d\vec{v}$ malene veličine, umnožak $dm_p d\vec{v}$ možemo zanemariti te (3.33) nakon sređivanja prelazi u:

$$dm_p \vec{v}_p + m d\vec{v} = 0 \quad (3.34)$$

Promjena brzine rakete iznosi dakle:

$$d\vec{v} = - \frac{dm_p}{m} \vec{v}_p \quad (3.35)$$

gdje je $\bar{v}_p$ brzina izbacivanja čestica plina (koja je konstantna), dm_p masa izbačenog plina, a m masa rakete u trenutku kad joj je brzina $\bar{v}$. Promjena mase rakete dm jednaka je po iznosu masi izbačenih plinova, ali je negativnog predznaka jer se masa rakete smanjuje, tj. $dm = -dm_p$, te jednadžba (3.35) poprima oblik:

$$d\bar{v} = \frac{dm}{m} \bar{v}_p \quad (3.36)$$

gdje je sada dm promjena mase rakete. Dijeljenjem jednadžbe (3.36) sa dt dobivamo akceleraciju rakete:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\bar{v}_p}{m} \frac{dm}{dt} \quad (3.37)$$

odnosno silu koja pokreće raketu:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{v}_p \frac{dm}{dt} = \bar{F}_p \quad (3.38)$$

gdje je $\bar{F}_p$ potisak rakete, unutrašnja sila koja nastaje izbacivanjem plinova iz rakete i koja ubrzava raketu.

Ako na raketu djeluju vanjske sile $\bar{F}_v$ (npr. gravitacija), jednadžba gibanja glasi:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}_v + \bar{v}_p \frac{dm}{dt} \quad (3.39)$$

Integriranjem jednadžbe (3.36) dobivamo:

$$\int_{v_0}^v d\bar{v} = \int_{m_0}^m \bar{v}_p \frac{dm}{m} \quad (3.40)$$

odnosno:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 - \bar{v}_p \ln \frac{m_0}{m} \quad (3.41)$$

ili, pisano u skalarnom obliku:

$$v = v_0 + v_p \ln \frac{m_0}{m} \quad (3.42)$$

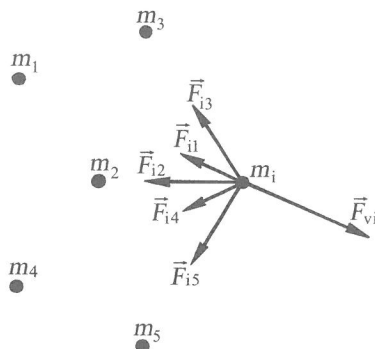
gdje je m_0 početna, a m konačna masa rakete. Ta jednadžba proistječe iz vektorske jednadžbe (3.41) odabiranjem koordinatne osi x u smjeru gibanja rakete; tada je $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$ i $v_{px} = -v_p$.

Konačna brzina rakete ovisi linearno o brzini izbacivanja plinova i o prirodnom logaritmu omjera početne i konačne mase.

Pri brzini izbacivanja plinova $v_p = 3\,000$ m/s i početnoj brzini $v_0 = 0$, formula (3.42) kaže da bi raketa postigla prvu kozmičku brzinu ($v = 7,9$ km/s) kada utroši 96% svoje mase. Ako se uzme u obzir otpor zraka, privlačna sila Zemlje i dr., tada je za postizanje prve kozmičke brzine potrebno utrošiti čak i do 99,5% početne mase. Da bi se postigle velike brzine, upotrebljavaju se rakete s više stupnjeva. Kada prvi stupanj potroši sve gorivo, raketa odbaci kućište tog stupnja i nastavlja gibanje pomoću goriva drugog stupnja. Ako raketa s jednim stupnjem postiže brzinu v_1 , raketa sa dva stupnja postiže približno dvostruku brzinu, jer je omjer m_0/m za drugi stupanj približno jednak omjeru m_0/m za prvi stupanj.

3.9. SISTEM MATERIJALNIH TOČAKA. CENTAR MASE

Do sada smo uglavnom promatrali gibanje jedne materijalne točke (čestice). U prirodi često nailazimo na sistem čestica koje se gibaju. Čvrsta tijela možemo također shvatiti kao sistem velikog mnoštva čestica.



Slika 3.9. Sistem čestica

Promatrajmo sistem od n čestica mase $m_1, m_2 \dots m_n$ (sl. 3.9). Na svaku česticu djeluje rezultanta vanjskih sila $\vec{F}_{vi}$ i unutrašnje sile $\vec{F}_{ik}$, kojima ostale čestice djeluju na nju. Drugi Newtonov zakon, primijenjen na taj sistem, glasi:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_{v1} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_{v2} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n} \\ &\dots \dots \dots \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_{vn} + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n, n-1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Zbrajanjem tih n jednadžbi dobivamo:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_{v1} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \dots \\ &\quad + \vec{F}_{n-1, n} + \vec{F}_{n, n-1} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Prema trećem Newtonovu zakonu, sila kojom prva čestica djeluje na drugu česticu jednaka je po iznosu sili kojom druga čestica djeluje na prvu, a suprotnog smjera, i to vrijedi za svaku česticu u sistemu. Uvijek je, dakle, $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$, te je zbroj svih unutrašnjih sila nula, bez obzira na to kako velik bio sistem i bez obzira na sile koje djeluju unutar sistema. Za sistem, dakle, vrijedi:

$$\sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij} = 0 \quad (3.45)$$

gdje je $\vec{F}_{ij}$ unutrašnja sila između i -te i j -te čestice.

Jednadžbu gibanja sistema (3.44) možemo, dakle, pisati ovako:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{vi} = \vec{F}_v \quad (3.46)$$

Centar mase. Gibanje sistema mogli bismo proučavati promatranjem gibanja svake pojedine čestice tog sistema. U slučaju velikog broja čestica to bi bio složen, a često i nemoguć posao. Zato se definira posebna, zamišljena točka, tzv. centar mase sistema, pomoću koje možemo lakše i jednostavnije opisati gibanje sistema kao cjeline. Sada ćemo naučiti kako se nalazi položaj centra mase i dokazati da je moguće opisati gibanje zamišljajući da je cijeli sistem koncentriran u jednu točku — centar mase. Time ćemo problem gibanja mnogo čestica svesti na problem gibanja jedne čestice, a taj smo problem već riješili.

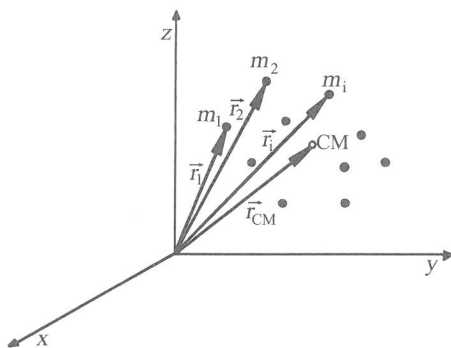
Centar mase sistema od n čestica definiramo kao točku čije koordinate zadovoljavaju relacije:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ y_{CM} &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ z_{CM} &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{aligned} \quad (3.47)$$

odnosno, napisano pomoću radiusvektora:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \end{aligned} \quad (3.48)$$

gdje je m_i masa i -te materijalne točke, $r_i(x_i, y_i, z_i)$ koordinate te točke (sl. 3.10), a m masa ukupnog sistema.



Slika 3.10. Centar mase sistema

Kruto tijelo posebna je vrsta sistema velikog broja čestica. Koordinate centra mase krutog tijela dobivamo analognim proširenjem definicije (3.48) na beskonačno mnogo čestica infinitezimalno male mase dm , pri čemu naravno, umjesto zbrajanjem računamo integriranjem:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{\int \rho dV} \quad (3.49)$$

odnosno u komponentama:

$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm}; \quad y_{CM} = \frac{\int y dm}{\int dm}; \quad z_{CM} = \frac{\int z dm}{\int dm} \quad (3.50)$$

Centar mase definiran relacijom (3.48) i (3.49) nalazi se negdje u „sredini” sistema, i ta se definicija poklapa s našom intuitivnom predodžbom centra mase. Tako je centar mase homogene kugle u središtu kugle, a slično vrijedi za valjak, šipku, itd.

Primjer

Izračunajte položaj centra mase nehomogene šipke duljine d čija linearna gustoća (masa po jedinici duljine) raste od jednog do drugog kraja po zakonu $\lambda = Ax$, gdje je A konstanta, a x udaljenost od početka šipke.

Primjenom relacije (3.50) dobivamo:

$$x_{CM} = \frac{\int_0^d x \lambda dx}{\int_0^d \lambda dx} = \frac{\int_0^d A x^2 dx}{\int_0^d A x dx} = \frac{2}{3} d.$$

Gibanje centra mase. Pokazat ćemo da se pri proučavanju translatornoga gibanja čitav sistem može zamijeniti centrom mase. Pomnoživši jednadžbu za koordinate centra mase sistema (3.48) s ukupnom masom sistema $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, dobivamo:

$$m \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (3.51)$$

Deriviravši tu jednadžbu po vremenu dobivamo:

$$m \dot{\vec{r}}_{CM} = m \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (3.52)$$

odnosno, nakon ponovnog deriviranja,

$$m \ddot{\vec{r}}_{CM} = m \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \vec{F}_v + \vec{F}_u \quad (3.53)$$

gdje je $\vec{F}_v$ rezultantna vanjska sila a $\vec{F}_u$ rezultanta unutrašnjih sila.

Sumand $m_i \vec{a}_i$ u relaciji (3.53) jednak je, prema drugom Newtonovu zakonu, sili $\vec{P}_i$ koja djeluje na česticu mase m_i . Zbroj unutrašnjih sila jednak je nuli, prema trećem Newtonovu zakonu, te zbog toga relaciju (3.53) možemo pisati ovako:

$$m \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{vi} = \vec{F}_v \quad (3.54)$$

Ta jednadžba kaže da se centar mase sistema giba kao da je u njemu koncentrirana ukupna masa sistema i kao da sve vanjske sile djeluju u toj točki. Centar mase giba se kao materijalna točka mase $m = \sum_i m_i$ na koju djeluje ukupna vanjska sila

$\vec{F}_v$. Time je gibanje sistema svedeno na gibanje jedne materijalne točke, centra mase, bez obzira na to kako složen bio taj sistem. U tome je velika važnost centra mase u opisivanju gibanja sistema čestica i čvrstog tijela.

Kada na sistem čestica (tijelo) ne djeluju nikakve vanjske sile, odnosno kad je njihova rezultanta jednaka nuli, onda je:

$$m \vec{a}_{CM} = \vec{F}_v = 0 \quad (3.55)$$

Odatle i iz $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$ izlazi:

$$\vec{v}_{CM} = \text{konst.}$$

$$\vec{r}_{CM} = \vec{v}_{CM} t + \vec{r}_0 \quad (3.56)$$

Dakle, kad je rezultanta svih vanjskih sila jednaka nuli, centar mase ili miruje ili se giba konstantnom brzinom (jednoliko) po pravcu. Tako pri eksploziji, radioaktivnom raspadu i sl. centar mase tijela (sistema) ostaje u istoj točki ako je tijelo prije procesa mirovalo. U pokusu s „topom” centar mase je prije eksplozije mirovao, te i nakon eksplozije centar mase ostaje u istoj točki, iako se i „top” i čep pomaknu. Kada bomba udari u zemlju i eksplodira, njezin centar mase ostaje na tome mjestu iako se bomba raspadne u mnoštvo komadića, koji se razlete različitom brzinom u različitim smjerovima.

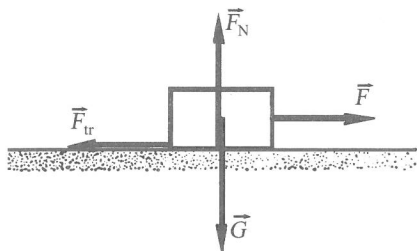
Kada u statici budemo govorili o težištu, vidjet ćemo da je to zamišljena točka u kojoj je hvatište težine tijela. Budući da je na Zemljinoj površini u svim točkama nekog tijela sila teže homogena, težište i centar mase tijela nalaze se u istoj točki, odnosno računaju se istim izrazima.

3.10. TRENJE

Ako tijelo vučemo po nekoj, npr. horizontalnoj, podlozi (sl. 3.11), osjetit ćemo silu trenja, koja djeluje u smjeru paralelnom s dodirnim površinama, a smjer joj je suprotan smjeru sile kojom vučemo tijelo. Sila trenja pojavljuje se uvijek kada se dva tijela koja su međusobno u kontaktu gibaju jedno prema drugome.

Razlikujemo trenje među čvrstim površinama (tzv. vanjsko trenje) te trenje među dijelovima fluida, odnosno između čvrstog tijela i fluida (unutrašnje trenje ili viskoznost). Sada ćemo govoriti samo o vanjskom trenju, a viskozno trenje obradit ćemo kasnije.

Trenje među dvjema površinama, bez prisutnosti nekog sredstva za podmazivanje između njih, zove se suho trenje. Ono se, npr., pojavljuje kada guramo neki sanduk po podu, u kočnicama automobila i sl.



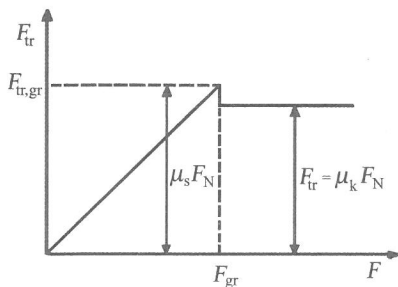
Slika 3.11. Sila trenja

Prisiljava tijelo da još miruje zove se sila trenja mirovanja (statičkog trenja). Kad vučna sila F nadmaši silu statičkog trenja, tijelo počne kliziti. Iskustvo pokazuje da je sila potrebna za održanje gibanja manja od sile potrebne za pokretanje tijela: sila trenja gibanja (kinetičkog trenja) manja je od sile trenja mirovanja. Ovisnost sile trenja o vučnoj sili prikazana je na slici 3.12.

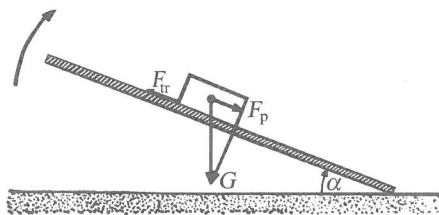
Pokusi pokazuju da maksimalna vrijednost sile statičkog trenja ne ovisi o veličini dodirnih ploha i da je proporcionalna normalnoj komponenti sile kojom tijelo djeluje na podlogu (tj. sili kojom jedna površina pritišće drugu):

$$F_{tr,s} \leq \mu_s F_N \quad (3.57)$$

pri čemu statički faktor trenja μ_s ovisi o osobinama obiju dodirnih ploha.



Slika 3.12. Ovisnost sile trenja o vučnoj sili



Slika 3.13. Određivanje faktora trenja

Sila kinetičkog trenja također ne ovisi o veličini dodirnih ploha, već samo o njihovim osobinama, i proporcionalna je normalnoj komponenti sile F_N :

$$F_{tr} = \mu_k F_N \quad (3.58)$$

gdje je μ_k faktor kinetičkog trenja.

Oba faktora trenja (μ_s i μ_k) ovise o materijalu, hrapavosti i čistoći dodirnih ploha. Kinetički faktor trenja ovisi i o relativnoj brzini dodirnih ploha, ali tu ovisnost, jer je premalena, često ne uzimamo u obzir.

Faktor trenja može se odrediti pomoću kosine kojoj se može mijenjati kut nagiba α (sl. 3.13). Kosina se podiže (povećava kut α) sve dok tijelo ne počne kliziti. Na horizontalnoj podlozi normalna komponenta sile F_N jednaka je po iznosu težini

G. Ako je tijelo na kosini nagiba α , normalna komponenta sile F_N jednaka je komponenti težine $\vec{G}$ u smjeru normale na kosinu ($F_N = G \cos \alpha$). U trenutku kada tijelo počne kliziti (granični kut α_m) komponenta težine paralelna kosini jednaka je sili statičkog trenja:

$$F_p = G \sin \alpha_m = F_{tr,s} \quad (3.59)$$

Mjereći kut α_m , možemo, dakle, izračunati faktor trenja mirovanja. Naime, iz formule (3.57) dobivamo:

$$\mu_s = \frac{F_{tr,s}}{F_N} = \frac{G \sin \alpha_m}{G \cos \alpha_m} = \operatorname{tg} \alpha_m \quad (3.60)$$

Kad se tijelo već giba po kosini, ono će se gibati i za manji kut nagiba od α_m , jer je trenje gibanja manje od trenja mirovanja. Mjereći najmanji kut za koji tijelo još jednoliko klizi možemo, pomoću formule slične relaciji (3.60), odrediti faktor kinetičkog trenja.

Ako se tijelo po podlozi kotrlja, trenje je mnogo manje nego pri klizanju. Sila trenja kotrljanja može se definirati na sličan način kao sila kinetičkog trenja (3.58), ali je ovdje faktor trenja manji. U praksi, upotrebom kugličnih ležaja i kotača, smanjujemo trenje u mnogim uređajima.

Tablica 3.3. Neki tipični faktori trenja mirovanja, klizanja i kotrljanja

Dodirne površine	Faktor trenja mirovanja	Faktor trenja klizanja	Faktor trenja kotrljanja
drvo na drvu	0,5	0,3	0,05
čelik na čeliku	0,7	0,5	0,003
guma na suhom asfaltu	0,8	0,6	0,01
guma na mokrom asfaltu	0,3	0,2	0,005
guma na ledu	0,02	0,01	
čelik na ledu	0,03	0,01	

Ograničili smo se, uglavnom, na neke eksperimentalne činjenice u vezi s trenjem jer je teorija trenja vrlo složena, a njegov mehanizam još nije dovoljno poznat, te se ne možemo upuštati u njegova tumačenja. Spomenut ćemo samo da je trenje posljedica međumolekularnih sila na površini tijela.

3.11. CENTRIPETALNA SILA

Prema prvom Newtonovu zakonu, ako na tijelo ne djeluje sila, ono miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Da bi se tijelo gibalo krivocrtno, npr. po kružnici, na nj mora djelovati sila koja će mu mijenjati smjer brzine, odnosno davati mu radijalnu (centripetalnu) akceleraciju. Ta sila koja mijenja smjer brzine i usmjerena je prema središtu zakrivljenosti (pri kruženju prema središtu kružnice) zove se centripetalna (radijalna) sila.

Izraz za centripetalnu akceleraciju već smo izveli u odjeljku 2.5. te je, prema drugom Newtonovu zakonu, veza između centripetalne sile i akceleracije:

$$F_{cp} = m a_r = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r} \quad (3.61)$$

ili, pisano vektorski,

$$\vec{F}_{cp} = -m \omega^2 \vec{r} \quad (3.62)$$

Pri nejednolikom kružnom gibanju osim centripetalne sile koja mijenja smjer brzine djeluje i tangencijalna sila koja mijenja iznos brzine, te je ukupna sila njihov vektorski zbroj.

Centripetalna sila može biti različite prirode, ovisno o tome što uzrokuje gibanje po kružnici. Tako u slučaju gibanja Mjeseca oko Zemlje centripetalna sila je gravitacijska sila privlačenja Mjeseca i Zemlje, pri gibanju elektrona oko jezgre centripetalnu silu daje električna privlačna sila, kada vrtimo neki predmet na užetu, tada je to rezultanta sile teže i napetosti niti, itd. Kada se automobil giba u horizontalnom zavoju, tada centripetalnu silu daje trenje između kotača i ceste. Ako to trenje nije dovoljno (mokri asfalt, poledica, velika brzina), automobil ne može svladati zavoj. Centripetalna sila nije, dakle, neka nova vrsta sile, nego samo poseban naziv za svaku silu koja mijenja smjer brzine i čini da se tijelo giba po krivocrtnoj putanji.

Primjer

Tijelo mase 2 kg bačeno je s krova zgrade u horizontalnom smjeru početnom brzinom 10 m/s. Kolika je tangencijalna i centripetalna sila 1 s nakon bacanja? Zanemarite otpor zraka.

Tijelo opisuje putanju horizontalnog hica (parabolu). U zadanoj točki putanje horizontalna komponenta brzine je v_0 , a vertikalna komponenta brzine je $g t$, jer u vertikalnom smjeru tijelo slobodno pada. Ukupna brzina iznosi dakle

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

Tangencijalna sila je

$$F_t = m \frac{dv}{dt} = \frac{m g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = 13,7 \text{ N.}$$

Iz činjenice da je rezultanta tangencijalne i centripetalne sile jednaka sili teži dobivamo

$$F_{cp} = \sqrt{G^2 - F_t^2} = \sqrt{m^2 g^2 - \frac{m^2 g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{m g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = 14 \text{ N.}$$

PITANJA I ZADACI

1. Što je sila? Kakvo može biti njezino djelovanje? Kako se mjeri?
2. Koje su četiri osnovne sile u prirodi?
3. Što je masa? Koja je razlika između teške i tromе mase?
4. Što je gustoća nekog materijala? Navedite gustoće nekih poznatijih vrsta materijala.
5. Kako glasi prvi Newtonov zakon? Što je inercija? Kako se giba slobodna čestica?
6. Što su inercijalni sustavi?

7. Definirajte količinu gibanja čestice? Kako se računa količina gibanja kad je brzina čestice usporediva s brzinom svjetlosti?
8. Kako glasi drugi Newtonov zakon? Iz relativističkog oblika drugog zakona izvedite ne-relativistički.
9. Koja se sve mjerenja mogu izvesti Atwoodovim padostrojem?
10. Što je težina? U kojim se jedinicama iskazuje?
11. Kako se težina tijela mijenja s geografskom širinom?
12. Kako glasi treći Newtonov zakon? Navedite nekoliko primjera sila akcija—reakcija, posebno za sistem „topa” i taneta.
13. Što je impuls sile i kako se računa? Kakvo je djelovanje impulsa sile na česticu?
14. Što je centar mase? Izvedite izraze za koordinate centra mase sistema od dvije čestice.
15. Kako se računa položaj centra mase: a) sistema čestica, b) krutog tijela?
16. Kako se giba centar mase izoliranog sistema čestica?
17. Što je težište? Koja je razlika između težišta i centra mase? Kad je težište u istoj točki kao i centar mase?
18. Što je zatvoreni sistem materijalnih točaka? Napišite drugi Newtonov zakon za takav sistem.
19. Kolika je rezultanta unutrašnjih sila u sistemu čestica?
20. Izvedite zakon o očuvanju količine gibanja. Primijenite ga na sistem „topa” i taneta.
21. Raketa početne mase m_0 ubrzava se iz mirovanja tako da, izgarajući gorivo, izbacuje plinove. Brzina je plinova u odnosu prema raketi v_p . Koliku će brzinu postići raketa kada potroši sve gorivo ako je m_r masa rakete bez goriva?
22. Kakva je sila koja djeluje pri kružnom gibanju? Zašto je potrebna centripetalna sila i u slučaju jednolikog kruženja, kad je brzina po iznosu konstanta?
23. Izraz za centripetalnu silu napišite u nekoliko oblika. Nabrojte nekoliko primjera u kojima se vidi da kružno gibanje može biti uzrokovano raznim vrstama sila.
24. Što je trenje? Kako se računa sila trenja? Kako se može izmjeriti: a) statički, b) dinamički faktor trenja?
25. Tijelo mase m giba se po osi x po zakonu $x = A \cos \omega t$, gdje su A i ω konstantni. Izračunajte silu koja djeluje na tijelo. Kolika je sila po iznosu i po smjeru kada je tijelo u položaju $x = C$ i $x = \pm A$?
26. Na tijelo djeluje stalna sila, i u vremenu 10 s poveća mu količinu gibanja sa 20 kg m/s na 30 kg m/s. Izračunajte tu silu.
27. Čovjek mase 100 kg nalazi se u dizalu koje se jednoliko spušta. Kolika je težina čovjeka? Kojom silom djeluje pod dizala na čovjeka?
28. Kolika je vučna sila potrebna da bi se vlak mase 400 t ubrzao od 0 do 36 km/h na putu 1 000 m: a) ne uzimajući u obzir trenje, b) ako je faktor trenja 0,005?
29. Na užetu dizalice visi teret mase 1 500 kg. Maksimalno opterećenje užeta ne smije prijeći 15 kN. Pretpostavivši da se teret iz mirovanja podiže jednoliko ubrzano, izračunajte koja se najveća brzina smije postići nakon 2 s.
30. Čovjek gura teret mase 30 kg stalnom brzinom po horizontalnoj podlozi silom koja zatvara kut od 37° s horizontalom. Faktor trenja je 0,3. a) Kolika je sila? b) Kolika bi bila sila kad bi čovjek u istim uvjetima teret vukao?
31. Saonice se počinju spuštati, bez početne brzine, niz brijeg dugačak 80 m, s visinskom razlikom 10 m. Došavši do podnožja brijega, nastave gibanje po horizontalnom putu sve do zaustavljanja. Koliku će brzinu saonice imati na podnožju brijega? Koliko daleko od podnožja će se zaustaviti? Faktor trenja je 0,04.
32. Izračunajte izraz za brzinu $v(t)$ kojom padobran pada u zraku. Pretpostavite da je sila otpora zraka proporcionalna brzini, $F_o = -bv$, gdje je $b = 150 \text{ N/s}$, i da je masa padobranca i padobrana 90 kg. Izračunajte graničnu brzinu kojom će padobranac, kad je postigne, padati jednoliko.
33. Top na željezničkoj platformi giba se po horizontalnim tračnicama brzinom 18 km/h. Masa topa s platformom je 50 t. Kolika je brzina platforme pošto top ispali tane mase 200 kg pod kutom 45° u smjeru gibanja platforme? Brzina taneta na izlasku iz cijevi topa je 400 m/s.
34. Raketa mase 20 kg lansirana je iz mirovanja vertikalno uvis. Izbacivši 0,4 kg plina, raketa nakon prve sekunde postigne brzinu 20 m/s. Kolika je brzina izbacivanja plinova u odnosu prema raketi? Uzmite u obzir utjecaj sile teže na gibanje rakete.
35. Sistem se sastoji od četiri materijalne točke čije su mase i položaj: $m_1 = 1 \text{ kg}$, $\vec{r}_1 = 2\vec{i} \text{ m}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $\vec{r}_2 = (2\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m}$, $m_3 = 1 \text{ kg}$, $\vec{r}_3 = 2\vec{j} \text{ m}$ i $m_4 = 4 \text{ kg}$, $\vec{r}_4 = 0 \text{ m}$. Odredite vektor položaja centra mase sistema.

36. Automobil mase 2 000 kg vozi stalnom brzinom 36 km/h preko mosta koji ima oblik: a) izbočenog, b) udubljenog luka. Polumjer zakrivljenosti mosta je 100 m. Kolika je u oba slučaja sila pritiska automobila na podlogu u sredini mosta? Pri kojoj brzini sila pritiska na podlogu u sredini izbočenog mosta iščezne?
37. Zavoj polumjera zakrivljenosti 200 m nagnut je tako da je pri brzini 54 km/h ukupna sila koja djeluje na automobil okomita na cestu. Izračunajte maksimalnu brzinu kojom automobil može voziti ako je faktor trenja između guma i površine ceste 0,5.
38. Štap dugačak 1 m ima jednu polovicu od željeza, a drugu od aluminija. Gdje se nalazi centar mase štapa? Gustoća željeza je $7\,800\text{ kg/m}^3$, a gustoća aluminija je $2\,600\text{ kg/m}^3$.
39. Lift mase $m_1 = 100\text{ kg}$ ubrzava se prema gore konstantnom silom $F = 1\,500\text{ N}$. Koliko je ubrzanje lifta? Ako o strop lifta objesimo na konopcu teret mase $m_2 = 50\text{ kg}$ i na lift djelujemo jednakom silom kolika je akceleracija? Kolika je sila napetosti u konopcu?
40. Tijelo mase 4 kg nalazi se na kosini nagnutoj pod kutom od 30° prema horizontali. Izračunajte koliku silu treba primijeniti na tijelo, da bi klizilo akceleracijom $0,25\text{ m/s}^2$ a) prema gore i b) prema dolje. Faktor trenja klizanja je 0,4.
41. Molekula vodika (H_2) brzine $1\,800\text{ m/s}$ udari u zid posude i odbije se elastično tako da joj se brzina ne promijeni po iznosu, već samo po smjeru. Odredite impuls sile koji je pri tom sudaru primio zid posude, ako je a) molekula udarila okomito u zid posude i b) ako je udarila pod kutom 30° u odnosu na površinu zida.
42. Cesta na zavoju većinom je nagnuta prema unutrašnjoj strani zavoja, tako da bi za određenu brzinu horizontalna komponenta reakcijske sile ceste na automobil bila jednaka potrebnoj centripetalnoj sili. a) Koliki mora biti nagib ceste na zavoju polumjera zakrivljenosti 200 m da bi automobil mogao voziti brzinom 54 km/h neovisno o trenju? b) Kada cesta ne bi bila nagnuta, koliki bi trebao biti minimalni faktor trenja pri toj brzini?

4. RAD I ENERGIJA

4.1. RAD

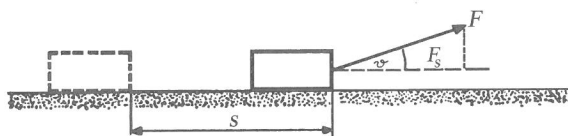
Za razliku od pojma rada u svakodnevnom životu, u fizici rad je jednoznačno definiran kao svladavanje sile na određenom putu. Sila koja djeluje na tijelo mijenja mu brzinu ili kompenzira djelovanje drugih sila koje djeluju suprotno gibanju, ili oboje. Tako gurajući tijelo uz kosinu svladavamo silu trenja, Zemljinu silu težu i, eventualno, ubrzavamo tijelo.

Najjednostavniji je primjer pravocrtno gibanje tijela pod utjecajem stalne sile koja djeluje u smjeru pravca gibanja (brzine) tijela. Tada je rad jednak umnošku sile i prijeđenog puta:

$$W = F s \quad (4.1)$$

Ako stalna sila F ne djeluje na tijelo u smjeru puta, nego pod kutom ϑ prema putu (sl. 4.1), tada samo komponenta sile u smjeru puta F_s vrši rad, te je, uz pretpostavku da je F_s konstanta, izvršeni rad:

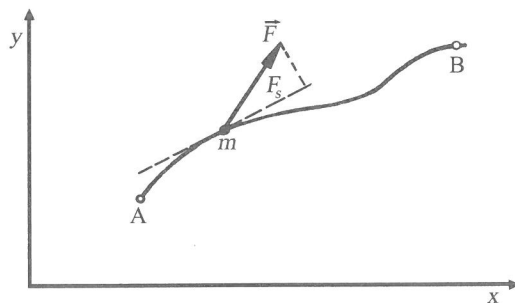
$$W = F_s s = F s \cos \vartheta \quad (4.1a)$$



Slika 4.1. Uz definiciju rada

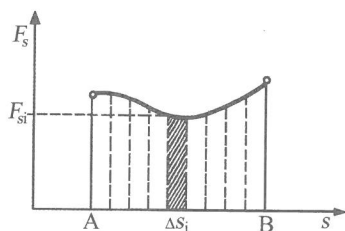
Rad je skalarna veličina koja može biti pozitivna ili negativna. Kad je $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, rad je pozitivan, za $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ rad je nula, a za $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ rad je negativan. Tako je pri jednolikom kružnom gibanju sila stalno okomita na put i ne obavi se nikakav rad, smjer sile trenja je suprotan smjeru gibanja, te je rad sile trenja negativan, pri padanju tijela sila teže je u smjeru gibanja, pa je rad sile teže pozitivan i sl.

Razmotrimo općenit slučaj kada se čestica giba uzduž krivocrtna trajektorije od A do B pod utjecajem promjenljive sile F (sl. 4.2). Projekcija sile na tangentu na



Slika 4.2. Rad promjenljive sile

putanju F_s nije na čitavom putu konstantna, već je funkcija puta s i može se grafički prikazati kao na slici 4.3. Da bismo izračunali rad u tom općenitom slučaju, ukupni put s podijelimo na male dijelove Δs_i . Ako je podjela na elementarne dijelove Δs_i



Slika 4.3. Izračunavanje rada pomoću F_s - s dijagrama

dovoljno fina, tada će sila F_s duž pojedinoga Δs_i biti gotovo stalna, te je rad sile na tom djeliću jednak površini uskoga pravokutnika na slici 4.3:

$$\Delta W_i \approx F_{si} \Delta s_i \quad (4.2)$$

Ukupni je rad jednak graničnoj vrijednosti zbroya svih radova ΔW_i kada širina svih intervala Δs_i teži prema nuli:

$$W = \lim_{\substack{\Delta s_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n F_{si} \Delta s_i = \int_A^B F_s ds \quad (4.3)$$

Da bismo riješili taj integral, potrebno je poznavati silu kao funkciju prostornih koordinata (npr. x , y i z) i jednadžbu putanje čestice.

Rad se može odrediti i grafički u dijagramu kojemu je ordinata projekcija sile u smjeru puta (F_s), a apscisa put s . Na slici 4.3. jasno se vidi da je rad jednak površini ispod krivulje $F_s(s)$, tj. površini lika omeđenoga krivuljom F_s , apscisom i ordinatama u A i B.

Kada se čestica pod djelovanjem sile F pomakne za ds , rad je $dW = F ds \cos \vartheta = F_s ds$. Budući da je iznos elementarnog pomaka $|d\vec{r}|$ jednak elementarnom putu ds , možemo elementarni pomak $d\vec{r}$ pisati i kao $d\vec{s}$ ($d\vec{r} = d\vec{s}$). Elementarni rad je, dakle, jednak umnošku elementarnog pomaka (puta) i projekcije sile na pravac pomaka. Sila i pomak su vektorske veličine, a rad je skalarna veličina. Takav produkt dvaju vektora čiji je rezultat skalarna veličina zove se skalarni produkt. Prisjetimo se da se skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava simbolom $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i da je jednak umnošku iznosa obaju vektora i kosinusa kuta među njima, odnosno umnošku iznosa jednog vektora i projekcije drugog vektora na pravac prvoga:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \vartheta \quad (4.4)$$

Služeći se skalarnim produktom vektora, izraz za rad sile $\vec{F}$ na elementarnom pomaku $d\vec{r}$ jest $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, dok je izraz za rad kada se čestica giba po putanji od točke A do točke B

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (4.5)$$

Rad je linijski integral sile uzduž staze od početne do krajnje točke.

Jedinica rada dobiva se iz definicijske formule za rad (4.1): ona je jednaka umnošku jedinice sile i jedinice puta. Jedinica rada u Međunarodnom sustavu zove se džul* (joule, znak: J):

$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2/s^2.$$

U atomskoj fizici i u nekim drugim posebnim područjima fizike i tehnike dopuštena je upotreba još jedne jedinice rada: elektronvolt (znak: eV):

$$eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J.$$

* U čast engleskog fizičara J. P. Joulea (1818—1889).

Rad električne struje često se izražava u vatsatima ($W h$) odnosno kilovat-satima ($k W h$):

$$W h = 3\,600 J.$$

Rad dizanja. Da bismo tijelo mase m podigli za visinu h (sl. 4.4), potrebno je svladati silu težu $G = m g$. Dizanje ćemo izvoditi bez ubrzavanja tijela, tako da silu kojom dižemo tijelo možemo stalno smatrati jednakom po iznosu (ali suprotnog smjera) sili teži $m g$. Tada je rad dizanja (sl. 4.4):

$$W = F s = m g h \quad (4.6)$$

Budući da je vanjska sila F uvijek u smjeru puta, njezin rad je pozitivan. Napomenimo da je rad sile teže pri dizanju negativan ($-m g h$), jer se tijelo podiže protiv sile teže, tj. sila teža i pomak stalno imaju suprotan predznak. Naprotiv, kad tijelo pada s visine h , rad sile teže je pozitivan i iznosi $m g h$.

Ako se, npr., automobil mase $1\,000\text{ kg}$ giba uz brijeg nagiba 10° stalnom brzinom 36 km/h , rad sile motora za vrijeme 1 min jest:

$$W = F s = m g s \sin \alpha = m g v t \sin \alpha = 1,02 \cdot 10^6 J.$$

Pri tom se automobil popeo za visinsku razliku $h = v t \sin \alpha = 104\text{ m}$.

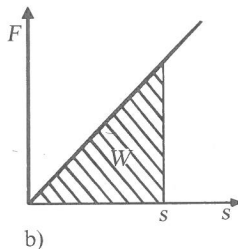
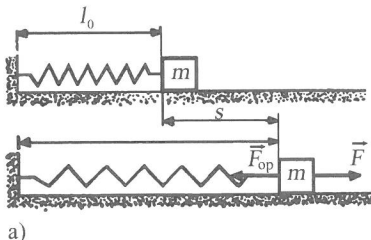
Rad pri rastezanju opruge. Rastezanje elastične opruge izvodit ćemo polako, „gotovo ravnotežno”, tako da silu kojom djelujemo na oprugu možemo smatrati po iznosu jednakom, a po smjeru suprotnom elastičnoj sili opruge (sl. 4.5a). U granicama elastičnosti, čvrsta tijela opiru se linearno istežanju i stlačivanju silom koja je upravo razmjerna deformaciji i suprotnog smjera. Ta je činjenica poznata pod imenom Hookeov zakon, a jedan njegov oblik je i zakon opruge:

$$F = -k s \quad (4.7)$$

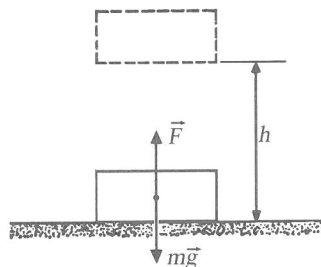
gdje je F sila opruge (elastična sila), k konstanta opruge, a s pomak (produženje ili skraćenje) iz ravnotežnog položaja ($s = \Delta l = l - l_0$).

Želimo li oprugu izvlačiti jednoliko, potrebno je primijeniti jednaku i suprotnu silu, $F = k s$. Prema relaciji (4.3), rad koji treba izvršiti za rastezanje (stezanje) opruge iz položaja ravnoteže za elongaciju s jednak je:

$$W = \int_0^s F ds = \int_0^s k s ds = \frac{1}{2} k s^2. \quad (4.8)$$



Slika 4.5. Uz izračunavanje rada pri rastezanju opruge

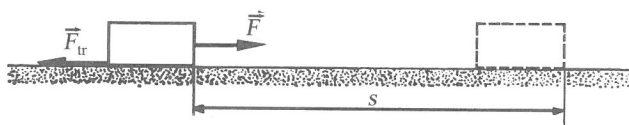


Slika 4.4. Uz izračunavanje rada pri dizanju tijela na visinu h

Grafički je sila F ovisno o pomaku s prikazana pravcem na slici 4.5b. Iscrtkana površina odgovara radu sile kojom djelujemo na oprugu pri rastezanju opruge iz položaja ravnoteže do neke elongacije s . Rad elastične sile opruge je pri tom $-\frac{1}{2}ks^2$, jer je sila opruge uvijek suprotna pomaku.

Rad pri svladavanju sile trenja. Da bi se tijelo gibalo jednoliko, svladavajući pri tom silu trenja, potrebno je da na nj djeluje vanjska sila F po iznosu jednaka, a po smjeru suprotna sili trenja (sl. 4.6). Budući da je F_{tr} suprotna pomaku, to će sila F biti u smjeru pomaka i potreban je rad:

$$W = \int_0^s F ds = F_{tr} s = \mu F_N s. \quad (4.9)$$



Slika 4.6. Uz izračunavanje rada sile trenja

Pri tom je rad sile trenja uvijek negativan, tj. $W_{tr} = -\mu F_N s$, jer je sila trenja suprotna pomaku.

4.2. ENERGIJA

Energija je sposobnost tijela ili sistema tijela da obavljaju rad: što tijelo ima veću energiju, to je sposobnije da obavi veći rad. Kad tijelo obavlja rad, energija mu se smanjuje, i obratno, ako okolina obavlja rad na tijelu, energija tijela se povećava. Rad, dakle, može prelaziti u energiju, i obratno. Jedinica rada i energije je identična.

Postoji više oblika energije: mehanička, električna, termalna (unutrašnja), kemijska, solarna, nuklearna itd., ili, ukratko, postoje mehanički i nemehanički oblici energije.

Mehanička energija makroskopskih tijela ili sistema tijela jest zbroj kinetičke i potencijalne energije tih tijela. Kinetičku energiju uzrokuje gibanje tijela nekom brzinom, a potencijalnu energiju uzrokuje položaj tijela unutar sistema. Potencijalna i kinetička energija mogu se pretvarati jedna u drugu, mehanička energija može prelaziti u nemehaničke oblike energije, i obratno. Opće je poznata iskustvena činjenica da energija može prelaziti iz jednog oblika u drugi oblik, ali se ne može ni stvoriti ni uništiti.

Ta podjela na mehaničku i nemehaničku energiju je makroskopska i ne može se sasvim opravdati kada se nemehanički oblici energije promatraju na mikroskopskoj skali. U stvari, promatrano mikroskopski, postoje samo dvije vrste energije: kinetička i potencijalna, a svi se ostali oblici mogu na njih svesti. Tako je termalna energija makroskopski pojam za ukupnu potencijalnu i kinetičku (tzv. unutrašnju) energiju mikroskopskoga gibanja molekula tijela, kemijska je energija makroskopski pojam za energiju što nastaje u kemijskim procesima a u vezi je s električnim interakcijama među molekulama, solarna energija je kinetička energija čestica svjetlosti (fotona), itd.

4.3. KINETIČKA ENERGIJA

Kinetička energija je sposobnost tijela da mogu izvršiti rad zbog toga što imaju određenu brzinu. Da bismo izračunali kolika je kinetička energija tijela mase m koje se giba brzinom v , izračunajmo rad što je potreban da bi sila F ubrzala to tijelo na nekom putu iz mirovanja ($v = 0$) do brzine v :

$$W = \int F \cdot ds = \int ma \, ds = \int m \frac{dv}{dt} \, ds = m \int \frac{dv}{dt} v \, dt = m \int_0^v v \, dv = \frac{1}{2} mv^2 \quad (4.10)$$

Veličinu

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (4.11)$$

nazivamo kinetičkom energijom tijela mase m i brzine v . Slično, ako sila F ubrzava tijelo od početne brzine v_1 do konačne brzine v_2 , rad potreban za to ubrzanje jest:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \, ds = m \int_{v_1}^{v_2} v \, dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad (4.12)$$

Taj nam rezultat kaže da smo obavljenim radom tijelu koje je na početku imalo kinetičku energiju $E_{k1} = \frac{mv_1^2}{2}$ povećali kinetičku energiju na konačnu vrijednost

$E_{k2} = \frac{mv_2^2}{2}$. Promjena kinetičke energije jednaka je, dakle, izvršenom radu:

$$W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \quad (4.13)$$

Ako tijelo izvrši rad ($W < 0$), kinetička energija mu se smanjuje ($\Delta E_k < 0$); kada se nad tijelom izvrši rad ($W > 0$), kinetička energija mu se povećava ($\Delta E_k > 0$). Kad je rad jednak nuli, kinetička energija tijela ostaje konstantna. Relacija (4.13), koja povezuje rad i promjenu kinetičke energije, zove se *poučak o radu i kinetičkoj energiji*.

Relacija (4.11) izraz je za kinetičku energiju materijalne točke (čestice) mase m koja se giba brzinom v . Ako imamo sistem čestica mase $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ i brzine $v_1, v_2 \dots v_n$, tada je ukupna kinetička energija sistema:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (4.14)$$

Kruto tijelo možemo smatrati sistemom čestica kojima se međusobni razmak ne mijenja. Pri translaciji krutog tijela sve njegove točke imaju jednaku brzinu, koja je ujedno jednaka brzini centra mase tog tijela. U tom je slučaju kinetička energija:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \quad (4.15)$$

gdje je m ukupna masa tijela, a v_{CM} brzina njegova centra mase. Kinetičku energiju rotacije krutog tijela izračunat ćemo u odjeljku 6.8.

Primjer

Kolika je brzina molekula vodika čija je kinetička energija 0,025 eV?

Iz $E_k = m v^2/2$ dobivamo:

$$v = \sqrt{\frac{2 E_k}{m}}.$$

Masa molekule vodika H, jest 2,016 u (v. periodički sistem elemenata), tj. $2,016 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Kinetičku energiju, koja je zadana i iskazana jedinicom elektronvolt, potrebno je izraziti u džulima: $E_k = 0,025 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

Uvrstivši te podatke, dobivamo da je brzina molekula vodika $v = 1\,560 \text{ m/s}$.

4.4. POTENCIJALNA ENERGIJA

Osim kinetičke energije, što je uzrokuje gibanje, tijelo može imati i potencijalnu energiju, koja dolazi zbog njegova položaja prema drugim tijelima ili zbog konfiguracije tijela, odnosno sistema tijela. Tako tijelo mase m podignuto na visinu h iznad Zemljine površine ima određenu potencijalnu energiju i sposobno je, spuštajući se s te visine, izvršiti određeni rad. Slično i nategnuta opruga ima potencijalnu energiju i može, vraćajući se u položaj ravnoteže, izvršiti rad.

Ovisno o sili koja djeluje na tijelo, razlikujemo ove vrste potencijalne energije: gravitacijsku, elastičnu, elektrostatsku, magnetsku. U mehanici ćemo razmatrati prve dvije: gravitacijsku i elastičnu.

Gravitacijska potencijalna energija. Da bismo izračunali potencijalnu energiju tijela u gravitacijskom polju na Zemljinoj površini, pretpostavimo da se čestica mase m pomiče u homogenom polju sile teže (odnosno, što je približno isto, gravitacijskom polju Zemlje) od točke A do točke B (sl. 4.7). Pomakne li se čestica za diferencijal puta ds , rad je sile teže:

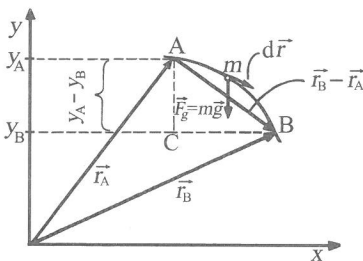
$$dW = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} \quad (4.16)$$

gdje je $\vec{F}_g = m\vec{g}$.

Rad je sile teže na putu od A do B:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = m\vec{g} \int_A^B d\vec{r} = \\ &= m\vec{g} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Slika 4.7. Uz izračunavanje gravitacijske potencijalne energije



Budući da je $\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\vec{j}$ i $\vec{j} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = y_B - y_A$, to je

$$W = -(mgy_B - mgy_A) \quad (4.18)$$

Dobili smo da je rad sile teže jednak razlici dviju funkcija položaja. Funkcija mgy zove se gravitacijska potencijalna energija tijela na visini y :

$$E_p = mgy \quad (4.19)$$

Razlika potencijalne energije početne i konačne točke jednaka je, dakle, radu sile teže:

$$W = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p \quad (4.20)$$

Pri tom smo pretpostavili da je za $y = 0$ potencijalna energija jednaka nuli. Referentna razina ($E_p = 0$) može se odabrati na razne načine (za sistem Zemlja—tijelo na njezinoj površini, kao razina mora, površina tla, pod, ploha stola i sl.), te je potencijalna energija određena do na aditivnu konstantu. Međutim, u svim se razmatranjima pojavljuju razlike potencijalne energije, te nam ta proizvoljnost ne smeta. Za razliku od kinetičke energije, koja je uvijek pozitivna, potencijalna energija može biti i pozitivna i negativna. Uočite da je potencijalna energija svojstvo sistema tijela koja su u interakciji. Kada kažemo da je potencijalna energija tijela na visini h iznad Zemljine površine jednaka mgh , zapravo mislimo da je potencijalna energija sistema Zemlja—tijelo jednaka mgh .

Pri izvodu izraza (4.19) pretpostavili smo da je gravitacijska sila konstantna, što je ispunjeno na Zemljinoj površini za nadmorske visine y koje su malene u usporedbi s polumjerom Zemlje. Kasnije ćemo pokazati da je u općenitom slučaju dvaju tijela mase m_1 i m_2 udaljenih za r gravitacijska potencijalna energija dana izrazom:

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (4.21)$$

gdje je G univerzalna gravitacijska konstanta (v. odjeljak 8.6).

Rad sile teže (4.18) ne ovisi o obliku puta već samo o početnom i konačnom položaju tijela. Isti rezultat bismo dobili kada bi se tijelo iz točke A do točke B gibalo bilo kojom putanjom. To se vidi i iz (4.17): vektorska razlika $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ ista je za bilo koju stazu koja prolazi kroz točke A i B. Da bi nam ta važna činjenica bila još jasnija, izračunajmo rad sile teže u slučaju da se tijelo pomiče iz točke A u B preko točke C (v. sl. 4.7):

$$W = \int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AC} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{CB} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{=0} = \int_{AC} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg(y_B - y_A) \quad (4.22)$$

dakle jednak rezultat kao u slučaju kad je put krivocrtna putanja AB.

Sila kojoj rad ne ovisi o putu već samo o početnoj i konačnoj točki zove se *konzervativna sila*. Takve su gravitacijska, elastična i Coulombova sila. One ovise samo o položaju tijela na koje djeluju.

Rad konzervativne sile po zatvorenom putu jednak je nuli:

$$\oint \vec{F}_k \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4.23)$$

gdje smo kružićem preko znaka integrala istakli da je put po kojemu integriramo zatvoren. Ako, naime, rad ne ovisi o putu, tada ćemo, kao jedan put, odabrati put koji se vraća u polaznu točku, dakle zatvoreni put: drugi put neka bude nula — jer i on povezuje polaznu točku sa samim sobom. Rad po drugom putu jednak je nuli, te je i rad po prvom, bilo kojem zatvorenom putu, jednak nuli.

Kada se, npr., tijelo mase m podigne na visinu h , rad sile teže je $-mgh$, a kada tijelo padajući s visine h dođe u početnu točku, rad sile teže je $+mgh$: ukupni rad po tom zatvorenom putu je nula.

Druga vrsta sila su one kojima rad između dvije iste točke A i B ovisi o putu kojim je tijelo došlo iz jedne točke u drugu točku. To su nekonzervativne sile. Tako rad sile trenja ovisi o putu: što je put duži, rad je veći. Rad nekonzervativne sile po zatvorenom putu različit je od nule. Nekonzervativne sile zovu se i disipativne sile jer kad one djeluju mehanička energija tijela nije očuvana.

Kada na tijelo djeluje konzervativna sila, tada svakom položaju tijela možemo pridijeliti određenu potencijalnu energiju. Potencijalna energija može se definirati samo za konzervativne sile. U mehanici ćemo razmatrati gravitacijsku potencijalnu energiju i potencijalnu energiju elastične sile (sile opruge).

Pri pomaku tijela iz točke A u B u polju sile teže dobili smo da je rad $W_{AB} = -(E_{pB} - E_{pA})$. Taj rezultat vrijedi za svaku konzervativnu silu, te možemo zaključiti:

Rad svake konzervativne sile možemo izraziti razlikom potencijalnih energija.

Kada se čestica pomakne u polju konzervativne sile iz jednog položaja u drugi položaj, rad konzervativne sile pri tom je:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -[E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)] \quad (4.23a)$$

Rad konzervativne sile između dva položaja tijela jednak je razlici potencijalne energije početnog i krajnjeg položaja. To je veza rada i promjene potencijalne energije (poučak o radu i potencijalnoj energiji).

Potencijalna energija opruge. Već smo izračunali rad vanjske sile pri rastezanju opruge za elongaciju s :

$$W = \frac{1}{2} k s^2 \quad (4.24)$$

Pri tom je vanjska sila bila jednaka po iznosu, a suprotna po smjeru sili opruge, pa je rad sile opruge jednak radu vanjske sile (4.24) s negativnim predznakom:

$$W_{op} = -\frac{1}{2} k s^2 \quad (4.25)$$

Rad sile opruge pri pomaku tijela iz položaja s_1 u položaj s_2

$$W_{op} = \int_{s_1}^{s_2} F ds = \frac{1}{2} k s_1^2 - \frac{1}{2} k s_2^2 \quad (4.26)$$

Slično kao za gravitacijsku silu, potencijalna energija elastične sile opruge definira se izrazom:

$$W_{op} = E_p(s_1) - E_p(s_2) = \frac{1}{2} k s_1^2 - \frac{1}{2} k s_2^2 \quad (4.27)$$

Uzmemo li, dogovorom, da je potencijalna energija nula u položaju ravnoteže ($s = 0$), tada je potencijalna energija elastične sile opruge:

$$E_p(s) = \frac{1}{2} k s^2 \quad (4.28)$$

gdje je s elongacija, tj. pomak iz položaja ravnoteže.

I na kraju ovog razmatranja o potencijalnoj i kinetičkoj energiji izvedimo vezu između rada vanjske sile koja djeluje na tijelo što se nalazi u prostoru u kojemu, osim te vanjske sile, djeluju i druge konzervativne i nekonzervativne sile, tj. nađimo vezu između rada vanjske sile i promjene energije sistema.

Pretpostavimo da vanjskom silom F' pomičemo tijelo uz kosinu (ili neku drugu putanju) u polju sile teže (sl. 4.8). Smatrat ćemo pri tom da su površine glatke, da nema trenja.

Prema drugom Newtonovu zakonu, slijedi:

$$F' - mg \sin \alpha = ma \quad (4.29)$$

Pri tom je rad vanjske sile:

$$\begin{aligned} W' &= \int F' \cdot ds = \int \left(mg \sin \alpha + m \frac{dv}{dt} \right) ds = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} mg \sin \alpha \, ds + \int_{v_1}^{v_2} m \frac{dv}{dt} v \, dt = \\ &= mg(y_2 - y_1) + \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) + E_{k2} - E_{k1} \quad (4.30) \end{aligned}$$

odnosno

$$W' = \Delta E_p + \Delta E_k \quad (4.31)$$

Taj rezultat izveden za ovaj posebni slučaj vrijedi i općenito.

Kada vanjska sila $\vec{F}'$ djeluje na neko tijelo koje se nalazi u polju konzervativnih sila (npr. polju sile teže), tijelu će se mijenjati potencijalna i kinetička energija.

Rad vanjske sile (jedne ili više njih) $W' = \int_A^B \vec{F}' \cdot d\vec{s}$ i rad konzervativne sile $W =$

$= \int_A^B \vec{F}_k \cdot d\vec{s}$ promijenit će kinetičku energiju:

$$W + W' = E_{k2} - E_{k1} \quad (4.32)$$

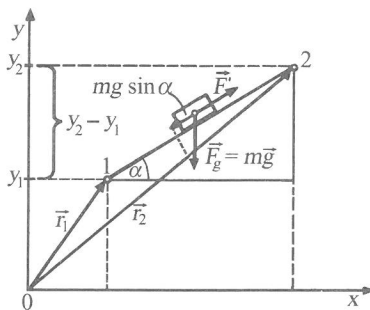
Budući da je rad konzervativne sile:

$$W = \int \vec{F}_k \cdot d\vec{s} = E_p(r_1) - E_p(r_2) \quad (4.33)$$

to je rad ostalih sila F' :

$$W' = E_{p2} - E_{p1} + E_{k2} - E_{k1} = E_2 - E_1 \quad (4.33a)$$

gdje je $E_1 = E_{p1} + E_{k1}$ i $E_2 = E_{p2} + E_{k2}$ ukupna mehanička energija sistema u početnom i konačnom položaju. Relacija (4.31) je veza između rada vanjskih sila i promjene kinetičke i potencijalne energije tijela. Mogli bismo je nazvati poučak o radu i ukupnoj energiji.



Slika 4.8. Gibanje tijela uz kosinu bez trenja

Primjer

Tijelo mase 100 g bačeno vertikalno uvis popne se 10 m. Kolika je potencijalna, kinetička i ukupna energija tijela: a) u trenutku bacanja, b) na pola puta prema gore i c) u trenutku kada se ponovo vrati u točku odakle je bačeno? Zanemarite otpor zraka.

a) U trenutku bacanja potencijalna energija tijela je nula, kinetička energija je $m v_0^2/2$, gdje je v_0 početna brzina kojom je tijelo bačeno. Budući da je visina hica $h = \frac{v_0^2}{2g}$, to je:

$$E_k = \frac{m v_0^2}{2} = \frac{2 m g h}{2} = m g h = 9,8 \text{ J.}$$

b) Iz $v_0^2 - v^2 = 2 g s = 2 g h/2 = g h$ dobivamo da je na pola puta kinetička energija $E_k = m g h/2 = 4,9 \text{ J}$ i jednaka potencijalnoj.

c) U trenutku kada se tijelo ponovo vrati u točku odakle je bačeno, kinetička i potencijalna energija jednake su onima u trenutku bacanja, tj. $E_k = 9,8 \text{ J}$ i $E_p = 0$.

Ukupna energija je u svakoj točki konstantna i iznosi:

$$E = E_k + E_p = 9,8 \text{ J.}$$

4.5. ZAKON OČUVANJA ENERGIJE

Energija se pojavljuje u različitim oblicima, kao mehanička, električna, unutrašnja, solarna, itd. Opće je poznata iskustvena činjenica da se energija može pretvarati iz jednog oblika u drugi oblik, pri čemu je u izoliranom sistemu zbroj energija konstantan. To je zakon očuvanja ukupne energije.

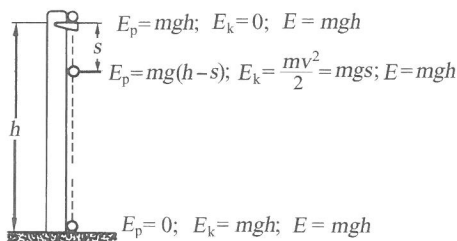
Promatrajmo ukupnu mehaničku (tj. kinetičku i potencijalnu) energiju pri slobodnom padu. Tijelo mase m u početku je na visini h i miruje (sl. 4.9), te je potencijalna energija $E_p = m g h$, kinetička energija $E_k = 0$, a ukupna mehanička energija $E = E_k + E_p = m g h$.

Kada tijelo, slobodno padajući, prevali put s , potencijalna mu je energija $E_p = m g (h - s)$, kinetička $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\sqrt{2gs})^2$, te je ukupna energija:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \cdot 2 g s + m g (h - s) = m g h.$$

U trenutku kada tijelo padne na tlo potencijalna energija je nula, brzina tijela (na osnovi jednadžbe za slobodni pad) iznosi $v = \sqrt{2gh}$, te je kinetička energija $E_k = \frac{m v^2}{2} = m g h$ jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji tijela. U svakoj točki putanje slobodnog pada zbroj kinetičke i potencijalne energije je konstantan: ukupna mehanička energija je očuvana:

$$E_k + E_p = \text{konst.} \quad (4.34)$$



Slika 4.9. Mehanička energija pri slobodnom padu

Kada se njihalo (kuglica obješena na laganu nit, sl. 4.10) njiše oko položaja ravnoteže, kinetička energija se pretvara u potencijalnu, i obratno. Kada kuglica prolazi kroz položaj ravnoteže (A), kinetička energija joj je maksimalna, a potencijalna nula. Kad je pomak maksimalan (B), kinetička energija je nula, a potencijalna maksimalna. Kad bi trenje bilo zanemarivo (što je ovdje dosta dobro ispunjeno), ukupna mehanička energija bila bi konstantna. Međutim, zbog otpora zraka, ukupna mehanička energija njihala smanjivat će se tokom vremena i njihanje će biti prigušeno.

Relacija (4.34) je zakon očuvanja mehaničke energije. Da li on vrijedi uvijek, kao zakon očuvanja ukupne energije, ili samo u određenim slučajevima? Iz iskustva znamo da se dio mehaničke energije često zbog trenja pretvara u druge, nemehaničke oblike (unutrašnju energiju). Tako se pri padanju tijela u zraku dio mehaničke energije troši na svladavanje otpora zraka, pa u tom slučaju više ne vrijedi relacija (4.34). Vučemo li tijelo uz kosinu nekom vanjskom silom F' , tada je, prema (4.31), rad vanjske sile:

$$W' = \Delta E_k + \Delta E_p - W_{tr} = E_2 - E_1 - W_{tr} \quad (4.35)$$

gdje je W_{tr} rad sile trenja (koji je uvijek negativan), a E_1 i E_2 ukupna mehanička energija u položaju 1 i 2 (sl. 4.8).

U tim i mnogim drugim slučajevima mehanička energija nije očuvana. Zakon očuvanja mehaničke energije vrijedi onda kad su rad sile trenja (disipativne sile) i rad vanjskih (nekonzervativnih) sila jednaki nuli, tj. kad su sve sile koje djeluju na sistem konzervativne. Možemo općenito zaključiti: kada na česticu djeluju samo konzervativne sile, ukupna mehanička energija čestice je očuvana. Zbog toga sile koje imaju potencijalnu energiju zovemo konzervativnima*.

Međutim, ako osim konzervativnih sila F_k djeluje i sila trenja F_{tr} i neke druge nekonzervativne sile F' , tada je ukupni rad svih sila jednak promjeni kinetičke energije:

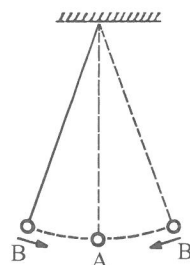
$$W_k + W_{tr} + W' = \Delta E_k \quad (4.36)$$

gdje je W_k rad što ga izvrše konzervativne sile, W_{tr} rad sile trenja, a W' rad nekih drugih nekonzervativnih sila (npr. rad vanjske sile pri gibanju tijela uz kosinu na sl. 4.8). Zamijenimo li rad konzervativne sile promjenom potencijalne energije ($W_k = -\Delta E_p$), dobivamo:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = W_{tr} + W' \quad (4.37)$$

To je jedan od načina pisanja zakona održanja ukupne energije: ukupna energija ne može se uništiti niti ni iz čega stvoriti, ona se može samo pretvarati iz jednog oblika u drugi oblik.

Zakon očuvanja mehaničke energije izveden je iz Newtonovih aksioma i može poslužiti umjesto njih za rješavanje raznih problema u mehanici.



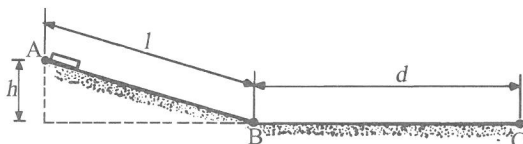
$$E_p = \text{maks.} = E; E_p = 0 \\ E_k = 0 \quad E_k = \text{maks.} = E$$

Slika 4.10. Očuvanje mehaničke energije pri gibanju matematičkog njihala

* Conservare (lat.) — očuvati, održati.

Primjer

Saonice se s vrha brijega visine $h = 10$ m i dužine $l = 80$ m počinju spuštati bez početne brzine i dođavši do podnožja brijega, nastave gibanje po horizontalnom putu BC sve dok se ne zaustave (sl. 4.11). Faktor trenja je konstantan duž cijelog puta ABC i iznosi $\mu = 0,05$. Koliko će se daleko od podnožja zaustaviti saonice? Kolika će im biti brzina na podnožju brijega?



Slika 4.11. Slika uz primjer u tekstu

Zadatak se može riješiti na dva načina: primjenom drugoga Newtonova zakona ili primjenom zakona očuvanja energije; upotrijebit ćemo ovaj drugi pristup.

Saonice krenu iz mirovanja (točka A) i zaustave se u točki C, te je promjena kinetičke energije nula. Pri spuštanju s brijega potencijalna energija saonice se smanji. Promjena potencijalne energije jednaka je radu sile trenja:

$$mgh = F_{tr1}l + F_{tr2} \cdot d.$$

Sila trenja duž puta AB jest $F_{tr1} = \mu F_N = \mu mg \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$, a duž puta BC sila trenja jest $F_{tr2} = \mu mg$, te je:

$$mgh = \mu mg \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} l + \mu mg d.$$

Odatle dobivamo horizontalni put saonica BC:

$$d = \frac{h}{\mu} - \sqrt{l^2 - h^2} = 121 \text{ m}.$$

Brzinu na dnu brijega izračunat ćemo primjenom relacije $E_2 - E_1 = W$, tj. izjednačivši promjenu potencijalne energije na putu AB sa zbrojem promjene kinetičke energije i rada sile trenja na istom putu:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \mu mg \sqrt{l^2 - h^2},$$

$$v = \sqrt{2g(h - \mu \sqrt{l^2 - h^2})} = 10,87 \text{ m/s} \approx 39 \text{ km/h}.$$

4.6. SNAGA

Snaga se definira omjerom rada i vremena, pa bismo je mogli shvatiti kao brzinu obavljanja rada odnosno prijenosa energije. Ako je u promatranom vremenskom intervalu $t_2 - t_1$ izvršen rad $W_2 - W_1$, odnosno prenesena energija $E_2 - E_1$, srednja je snaga:

$$P = \frac{W_2 - W_1}{t_2 - t_1} \quad (4.38)$$

odnosno

$$P = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1} \quad (4.39)$$

Trenutna je vrijednost snage:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{P} = \frac{dW}{dt}. \quad (4.40)$$

Budući da je $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$, snagu možemo pisati i u obliku:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F v \cos \alpha \quad (4.41)$$

gdje je α kut između smjera sile i smjera brzine tijela. Snaga je jednaka skalarnom produktu sile i brzine.

Jedinica za snagu* je vat (znak: W): $W = J/s$.

Navedimo neke tipične vrijednosti za snagu: čovjek pri brzom hodanju razvije snagu iznosa oko 50 W, pri penjanju, odnosno trčanju do 200 W, konj oko 500 W, automobil oko 50 kW, elektrana 500 MW, i sl.

4.7. SUDARI

Kao primjer primjene zakona očuvanja količine gibanja i energije razmatrat ćemo sudare dviju čestica. Do sudara dolazi kada dvije čestice (ili dva sistema čestica), približavajući se jedna drugoj, međusobno djeluju i time promijene svoje gibanje. Na primjer, kada se dvije elastične kuglice sudare, svaka se deformira pod djelovanjem impulsne sile nastale njihovom interakcijom, nakon kratkog vremena kuglice se odvoje, vraćajući se u prvobitni oblik, i nastave gibanje promijenjenim brzinama. Pri sudaru ne mora uvijek doći do fizičkog dodira među tijelima, kao pri makroskopskom sudaru dviju kuglica. Kada se, npr., proton približava jezgri, odbojne Coulombove sile mijenjaju mu putanju i proton se otkloni prije nego što dotakne jezgru.

Promatrat ćemo posebni primjer kada se čestice prije i poslije sudara gibaju po istom pravcu, tj. centralni sudar. Pretpostavit ćemo da nema vanjskih sila, odnosno da se sve vanjske sile uravnotežuju, tako da je sistem izoliran. Čestice jedna na drugu međusobno djeluju za vrijeme sudara unutrašnjim silama $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$, pri čemu je, prema trećem Newtonovu zakonu, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. U odjeljku 3.7. vidjeli smo da za takav sistem vrijedi zakon očuvanja količine gibanja, te će ukupna količina gibanja prije sudara biti jednaka ukupnoj količini gibanja nakon sudara. Ako su $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$ količine gibanja čestica prije sudara, a $\vec{p}'_1$ i $\vec{p}'_2$ nakon sudara, tada je

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (4.42)$$

Sudar može biti savršeno elastičan i savršeno neelastičan odnosno djelomično elastičan. Ako je sudar *savršeno elastičan*, tijela se nakon sudara vraćaju u prvobitni oblik, potencijalna energija elastične deformacije nastala prilikom sudara tijela ponovo prelazi u kinetičku energiju, i tijela se razilaze tako da im je ukupna kinetička energija nakon sudara jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji prije sudara. Da bi sudar dvaju makroskopskih tijela bio savršeno elastičan, tijela bi morala biti savršeno kruta, tako da ne dožive nikakvu deformaciju, ili savršeno elastična, tako da unutraš-

* Po Zakonu o mjernim jedinicama i mjerilima, 31. XII 1980. jedinica konjska snaga (znak: KS) prestala je biti zakonita:

$$KS = 75 \cdot 9,80665 \text{ W} = 735,5 \text{ W}.$$

nja potencijalna energija sistema bude jednaka prije i poslije sudara. Takve uvjete dosta dobro ispunjavaju dvije čelične kuglice, kuglice od slonove kosti, odnosno kuglice od plastične mase. Pravi savršeno elastični sudari događaju se samo među atomskim i nuklearnim česticama, dakle u mikrosvijetu (npr. sudari molekula plina, elementarnih čestica i sl.).

Pri savršeno neelastičnom sudaru ne nastaje potencijalna energija deformacije, već se tijela nakon sudara slijepljena gibaju zajedno kao jedno tijelo, ili miruju. Pri takvom se sudaru kinetička energija djelomično ili potpuno pretvara u unutrašnju energiju (potencijalnu i kinetičku energiju termičkoga gibanja molekula), te se stoga pri takvim sudarima tijela zagriju.

U neelastičnom sudaru je održana ukupna količina gibanja, ali ukupna mehanička energija nije jer se jedan njezin dio pretvorio u nemehanički oblik energije. Većina je makroskopskih sudara međutim, između obadva ekstremna slučaja, dakle djelomično su elastični.

4.7.1. Savršeno elastičan sudar

Promatrat ćemo centralni savršeno elastičan sudar dviju kuglica, tj. sudar pri kojem brzine obiju kuglica leže na istom pravcu nosiocu koji prolazi središtem obiju kuglica.

Dvije kuglice (ili dvije čestice) mase m_1 i m_2 , brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ sudaraju se elastično, i nakon sudara imaju brzine $\vec{v}'_1$ i $\vec{v}'_2$ (sl. 4.12). Taj je sistem izoliran za vrijeme čitavog procesa, na kuglice ne djeluju vanjske sile (odnosno zbroj vanjskih sila je nula), i zbog toga vrijedi zakon očuvanja količine gibanja:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (4.43)$$



Slika 4.12. Centralni elastični sudar

Budući da je sudar savršeno elastičan, ukupna je kinetička energija prije i poslije sudara ista:

$$\frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{v}'_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}'_2^2}{2} \quad (4.44)$$

Preinačimo li jednadžbu (4.44), dobijemo:

$$m_1 (\vec{v}_1^2 - \vec{v}'_1^2) = -m_2 (\vec{v}_2^2 - \vec{v}'_2^2) \quad (4.45)$$

odnosno:

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}'_1) = -m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}'_2) \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}'_2) \quad (4.46)$$

Ako jednadžbu (4.43) napišemo u obliku

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = -m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}'_2) \quad (4.47)$$

te desnu stranu jednadžbe (4.47) uvrstimo u desnu stranu jednadžbe (4.46) i preuredimo, dobijemo:

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}'_2) = 0 \quad (4.48)$$

Budući da su pri centralnom sudaru brzine kolinearni vektori, uvjet (4.48) je ispunjen samo ako je jedan od faktora jednak nuli. Ako je prvi faktor u (4.48) jednak nuli, brzine se nisu mijenjale, te se nije dogodio ni sudar; zato taj slučaj ne uzimamo u obzir.

Dakle, drugi faktor mora iščezavati, što daje:

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = -(\bar{v}'_1 - \bar{v}'_2) \quad (4.49)$$

Relativna brzina primicanja kuglica prije sudara jednaka je po iznosu, a suprotna po smjeru relativnoj brzini odmicanja kuglica poslije sudara. Relativne brzine promijenile su samo smjer, a ne iznos.

Iz jednadžbe (4.49) vidimo da brzine kuglica poslije savršeno elastičnog sudara ne mogu biti jednake. Kad bi, naime, bile $\bar{v}_1 = \bar{v}'_2$, tada bi, prema (4.49), $\bar{v}_1$ morao biti jednak $\bar{v}_2$, tj. kuglice bi se prije sudara gibale jednakim brzinama, pa se ne bi ni sudarile.

Iz jednadžbe (4.49) i (4.43) možemo izračunati brzine poslije sudara $\bar{v}'_1$ i $\bar{v}'_2$:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_1 &= \frac{(m_1 - m_2) \bar{v}_1 + 2 m_2 \bar{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \bar{v}'_2 &= \frac{(m_2 - m_1) \bar{v}_2 + 2 m_1 \bar{v}_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Posebni slučajevi

1. $m_1 = m_2 = m$. U slučaju jednakih masa $\bar{v}'_1 = \bar{v}_2$, i $\bar{v}'_2 = \bar{v}_1$, tj. čestice jednostavno zamijene brzine. Ako druga kugla miruje ($\bar{v}_2 = 0$), tada je $\bar{v}'_1 = 0$, a $\bar{v}'_2 = \bar{v}_1$; poslije sudara prva kugla stane, dok druga odleti brzinom koju je prije sudara imala prva kugla.

2. $m_1 \ll m_2$; $v_2 = 0$. Savršeno elastična kugla mase m_1 i brzine v_1 udara u vrlo veliku kuglu ili savršeno elastični zid. Iz (4.50) dobivamo $\bar{v}'_1 = -\bar{v}_1$, tj. kugla se odbija jednakom brzinom kojom je došla. Zid pri tome dobiva impuls sile $2 m_1 v_1$; naprotiv zid ne dobiva nikakvu energiju, jer kugla prilikom sudara ne mijenja energiju. Ukupna promjena količine gibanja kugle prilikom takva sudara jest $2 m_1 v_1$.

3. $m_1 \gg m_2$ i $v_2 = 0$. Iz (4.50) slijedi $v'_1 \approx v_1$ i $v'_2 \approx 2 v_1$. Kada vrlo velika kugla udari u kuglicu koja miruje, brzina joj se vrlo malo promijeni, dok lagana kuglica odleti brzinom dva puta većom od brzine upadne kugle.

4.7.2. Savršeno neelastičan sudar

Pri savršeno neelastičnom sudaru kugle se nakon sudara deformiraju, slijepe i gibaju zajedno brzinom $\bar{v}'_1 = \bar{v}'_2 = \bar{v}'$. Pri tom sudaru kinetička energija nije očuvana, jedan njezin dio utroši se na promjenu unutrašnje energije. Pomoću zakona očuvanja količine gibanja odredit ćemo brzinu nakon sudara:

$$\begin{aligned} m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 &= (m_1 + m_2) \bar{v}' \\ \bar{v}' &= \frac{m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Kinetička se energija prilikom neelastičnog sudara smanjuje a unutrašnja se energija za isti iznos povećava. Ukupna je kinetička energija prije sudara:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (4.52)$$

dok je kinetička energija poslije sudara:

$$E'_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = \frac{(m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} \quad (4.53)$$

Označimo razliku između konačne i početne kinetičke energije sa Q :

$$Q = E'_k - E_k = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) \quad (4.54)$$

Pri savršeno elastičnom sudaru $E_k = E'_k$, te je $Q = 0$. Pri savršeno neelastičnom sudaru $Q < 0$ i iznosi:

$$Q = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) = - \frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2 \quad (4.55)$$

Veličina $-Q$ je promjena unutrašnje energije sistema, i pri neelastičnom sudaru to je pozitivna veličina.

Posebni slučajevi

1. $m_1 = m_2 = m \Rightarrow \bar{v}' = \frac{1}{2} (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$. Kada se dvije kuglice (npr. od mekane gline) jednake mase sudare, brzina nakon sudara bit će jednaka polovici vektorskog zbroja brzina prije sudara. Ako je prije sudara jedna kuglica na miru, tada obje kuglice priljubljene zajedno nastave gibanje brzinom $v' = \frac{1}{2} v_1$. Ako su se prije sudara kuglice gibale jedna prema drugoj jednakom brzinom ($\bar{v}_1 = -\bar{v}_2$), tada nakon sudara obje kuglice stanu, tj. $v' = 0$.

2. $m_1 \ll m_2, v_2 = 0 \Rightarrow v' = 0$. Kada kuglica od gline padne na tlo, ondje i ostane. Kada komad željeza na nakovanju udaramo čekićem, kinetička energija čekića pretvara se u energiju deformacije komada željeza i u unutrašnju energiju, i željezo se zagrijava.

Primjer

Balističko njihalo sastoji se od komada drva mase m_2 , obješenoga kao njihalo (sl. 4.13). Kada se metak mase m_1 zarine u drvo, njihalo se zanjše do visine h . Kolika je brzina metka?

Sudar metka i drva je neelastičan, te se brzina metka može odrediti iz zakona očuvanja količine gibanja:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v' \Rightarrow v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v'.$$

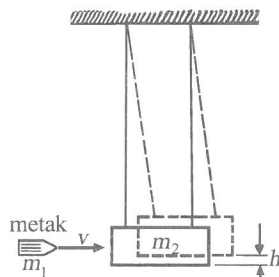
Kada se metak zarine u drvo, njihalo dobije određenu kinetičku energiju $\frac{m_1 + m_2}{2} v'^2$ koja se, kad se njihalo zaniže do visine h , pretvori u potencijalnu energiju $(m_1 + m_2) g h$. Dakle:

$$\frac{m_1 + m_2}{2} v'^2 = (m_1 + m_2) g h \Rightarrow v' = \sqrt{2 g h}.$$

Brzina metka je

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v' = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2 g h}.$$

Kolika je vrijednost Q za taj sudar?



Slika 4.13. Balističko njihalo

PITANJA I ZADACI

1. Što je rad i kako se računa? Kojim se jedinicama izražava?
2. Prikažite u (F, s) dijagramu rad stalne i rad promjenljive sile.
3. Izračunajte rad potreban za dizanje čestice mase m u polju sile teže.
4. Koliki je rad potreban za produženje opruge?
5. Izračunajte rad sile trenja. Koliki je rad sile trenja po zatvorenom putu?
6. Što je energija i u kojim se oblicima pojavljuje? Objasnite pojmove kinetičke i potencijalne energije.
7. Izvedite izraz za kinetičku energiju materijalne točke i sistema materijalnih točaka.
8. Izračunajte potencijalnu energiju čestice u homogenom polju sile teže.
9. Kolika je potencijalna energija opruge?
10. Izvedite izraz koji povezuje rad vanjskih sila i promjenu kinetičke energije sistema.
11. Kako glasi zakon očuvanja energije? Izvedite zakon očuvanja mehaničke energije.
12. Pokažite zakon očuvanja mehaničke energije na primjeru slobodnog pada i pomoću njega izračunajte brzinu tijela koje slobodno pada s visine h .
13. Kamo odlazi mehanička energija koja se troši na svladavanje trenja?
14. Što su konzervativne, a što nekonzervativne sile?
15. Koliki je rad konzervativne sile po zatvorenom putu?
16. Kako se računa snaga i kojim se jedinicama izražava?
17. Što je elastični a što neelastični sudar?
18. Izračunajte brzine nakon sudara dviju elastičnih kugli. Razmatrajte razne posebne slučajeve. Kako se pri tom giba centar mase tog sistema?
19. Izračunajte brzinu nakon neelastičnog sudara dvaju tijela. Kako se giba centar mase sistema?
20. Koliko se umanju mehanička energija pri neelastičnom sudaru dvaju tijela?
21. Čovjek mase 100 kg penje se stepenicama na vrh zgrade visoke 20 m. Koliki rad pri tom obavi? Kolika je prosječna snaga za to potrebna, ako penjanje traje 200 s?
22. Koliki je rad potrebno izvršiti da bi se 50 vreća cementa podiglo iz prizemlja na prvi kat (visinska razlika 2,5 m). Kolika je prosječna snaga ako se jedna vreća podigne za 30 s?
23. Koliko se visoko popne tijelo mase 1 kg kada ga bacimo vertikalno uvis kinetičkom energijom iznosa 98 J? (Zanemarite otpor zraka.)
24. Automobil mase 1 000 kg i maksimalne snage 40 kW giba se uz brijeg uspona 10%. Koliku bi maksimalnu brzinu mogao postići kad ne bi bilo gubitaka zbog trenja?
25. Automobil mase 1 000 kg giba se uz brijeg uspona 10% konstantnom brzinom od 54 km/h. Izračunajte upotrijebljenu snagu. Koliki je rad motora za vrijeme jedne minute vožnje? Zanimajte gubitke zbog trenja.
26. Tijelo je izbačeno početnom brzinom v_0 pod kutom α prema horizontali. Pomoću zakona o očuvanju energije odredite maksimalnu visinu koju će doseći uz pretpostavku da na njega djeluje samo konstantna sila teža.

27. Dizalo mase 100 kg ubrzava se akceleracijom 1 m/s^2 od mirovanja do brzine 4 m/s , a zatim se nastavi dizati jednoliko po pravcu. Za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila trenja 500 N. Kolika je: a) prosječna, b) maksimalna snaga potrebna motoru da ubrza dizalo iz mirovanja do brzine 4 m/s ? c) Koliku snagu razvija motor pri jednolikom dizanju? d) Koliki je rad motora za vrijeme 7 s od početka dizanja?
28. Sila $F = At$ djeluje na česticu mase m ubrzavajući je iz mirovanja. Koliki je rad obavljen nakon vremena t ?
29. Predmet mase 20 kg guramo uz kosinu nagiba 30° stalnom silom 200 N koja je paralelna kosini i pri tom prevalimo put 3 m. Faktor trenja između predmeta i kosine je 0,3. a) Koliki se rad obavi silom F ? b) Koliki je rad uslijed sile trenja? c) Kolika je promjena potencijalne energije predmeta? d) Kolika je promjena kinetičke energije predmeta?
30. Na vrhu kosine dugačke $l = 2 \text{ m}$ i visoke $h = 1,2 \text{ m}$ nalazi se nepomična kolotura. Na jednom kraju niti prebačene preko kolotura visi uteg $m_1 = 10 \text{ kg}$, a drugi kraj niti spojen je s tijelom mase $m_2 = 5 \text{ kg}$ koje klizi po kosini. Faktor trenja između tijela i kosine je 0,5. Kolika je brzina tijela pošto uteg mase m_1 padajući iz mirovanja prijeđe put $s = 1 \text{ m}$? Zanimajte gibanje kolotura i niti. Zadatak riješite energetske razmatranjima.
31. Tijelo mase $m_1 = 0,5 \text{ kg}$, gibajući se jednoliko po pravcu brzinom $v_1 = 2,5 \text{ m/s}$, dostigne drugo tijelo mase $m_2 = 1 \text{ kg}$ koje se giba u istom smjeru brzinom $v_2 = 2 \text{ m/s}$. Tijela se centralno neelastično sudare i nakon sudara gibaju zajedno. a) Odredite im brzinu nakon sudara. b) Kolika bi bila brzina nakon neelastičnog sudara da su se gibala jedno nasuprot drugome?
32. Kugla mase m giba se brzinom v po horizontalnoj podlozi bez trenja i udari u mirnu kuglu mase $\frac{m}{2}$. Sudar je centralan i elastičan. Kolike su brzine kugli poslije sudara?
33. Molekula kisika, brzine 300 m/s , sudari se centralno i elastično s molekulom CO_2 , kojoj je brzina 100 m/s : a) u istom smjeru, b) u protivnom smjeru. Odredite brzinu molekula nakon sudara. Uzmite u obzir da je $m(\text{O}_2)/m(\text{CO}_2) = \frac{32}{44}$.

5. STATIKA

5.1. UVOD

Statika je dio mehanike koji proučava zakone slaganja sila što djeluju na tijela i ravnotežu tijela. Tijelo je u ravnoteži kada se ne ubrzava. Pri tom tijelo može mirovati, gibati se jednoliko po pravcu ili se jednoliko vrtjeti oko osi koja prolazi kroz centar mase. Često se, međutim, pogrešno smatra da biti u ravnoteži znači mirovati. Mirovanje je uistinu vrsta ravnoteže, ali nije jedina.

Može se pokazati da se općenito gibanje krutog tijela može rastaviti na translaciju tog tijela brzinom kojom se giba neka njegova točka (npr. centar mase) i rotaciju oko osi koja prolazi kroz tu točku. Najjednostavnija je vrsta ravnoteže krutog tijela mirovanje, a najopćenitija jednolika translacija i jednolika rotacija oko osi koja prolazi kroz centar mase.

U ovom ćemo poglavlju najprije obraditi djelovanje sila na materijalnu točku i uvjete njezine ravnoteže, a zatim ćemo razmotriti djelovanje sila na kruto tijelo.

Ako tijelo pod utjecajem sila ne mijenja oblik, kažemo da je kruto. Možemo zamisliti da je kruto tijelo sistem od mnogo materijalnih točaka čiji međusobni razmaci uvijek ostaju isti. Naravno, kruto tijelo je idealizirani model; u prirodi postoje čvrsta tijela koja se, više ili manje, približuju modelu krutog tijela.

Pri razmatranju ravnoteže krutog tijela treba uvesti novu fizikalnu veličinu — moment sile, koji će nam, osim u ovom poglavlju, trebati i pri opisivanju gibanja krutog tijela.

5.2. RAVNOTEŽA MATERIJALNE TOČKE

Sile koje djeluju u istoj točki zovu se konkurentne sile. Njihova rezultanta je njihov vektorski zbroj:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i \quad (5.1)$$

Kada dvije ili više sila djeluje na zajedničkom pravcu, a istog su smjera, tada se te sile mogu nadomjestiti rezultatnom silom koja djeluje u istom pravcu i smjeru i po iznosu je jednaka zbroju iznosa svih sila. Ako dvije sile djeluju na zajedničkom pravcu u suprotnim smjerovima, iznos rezultante jednak je razlici iznosa komponenta, a smjer joj je isti kao i smjer veće komponente. Kada na česticu istovremeno djeluju dvije sile pod nekim kutom, rezultatnu dobivamo konstrukcijom paralelograma ili trokuta sila, a kada u istom hvatištu djeluju više od dvije sile, vektorski ih možemo zbrojiti pomoću poligona sila (v. odjeljak 1.5).

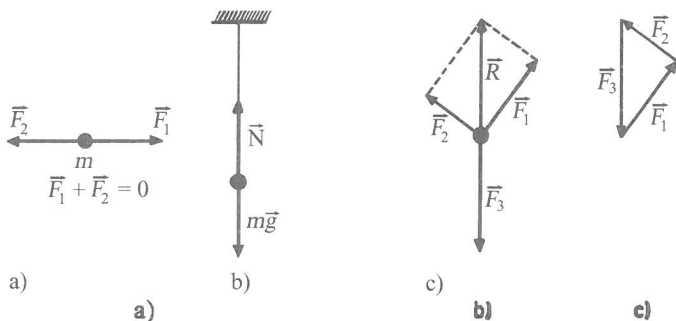
Čestica je u ravnoteži kad joj je akceleracija nula ($\vec{a} = 0$), odnosno, kako slijedi iz drugoga Newtonova zakona, kada iščezava rezultanta svih sila koje djeluju na nju. Uvjet ravnoteže čestice dakle glasi:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (5.2)$$

ili, što je ekvivalentno,

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad \sum_i F_{iz} = 0 \quad (5.2a)$$

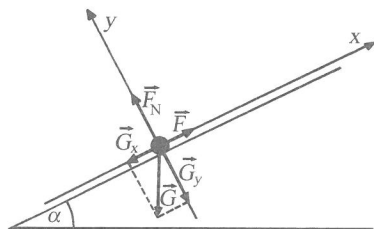
Najjednostavnija vrsta ravnoteže jest kada na česticu djeluju konkurentne sile jednakog iznosa, a suprotnog smjera (sl. 5.1a). Kada na česticu djeluju tri sile koje su u ravnoteži, tada je rezultanta dviju sila po iznosu jednaka trećoj sili, ali je suprotnog smjera (sl. 5.1b). Možemo općenito zaključiti da je čestica u ravnoteži kad je zatvoren vektorski poligon sila koje djeluju na nju (sl. 5.1c).



Slika 5.1. Ravnoteža čestice

Primjer

Čestica mase m je u ravnoteži na kosini nagnutoj pod kutom α (sl. 5.2). Izračunajte silu F koja djeluje paralelno uz kosinu i silu kojom podloga djeluje na česticu. Zanemarite trenje.



Slika 5.2. Ravnoteža na kosini

Na česticu na kosini djeluju ove sile: sila teža $\vec{G} = m\vec{g}$, sila $\vec{F}$ i normalna reakcija podloge $\vec{F}_N$. Uvjet je ravnoteže:

$$\vec{G} + \vec{F} + \vec{F}_N = 0.$$

Te su tri sile konkurentne i djeluju u istoj ravnini, te uvjet ravnoteže u koordinatnom sustavu xy možemo pisati:

$$G_x + F = 0$$

$$G_y + F_N = 0,$$

odnosno:

$$F - G \sin \alpha = 0$$

$$F_N - G \cos \alpha = 0.$$

Odatle je

$$F = G \sin \alpha \quad F_N = G \cos \alpha.$$

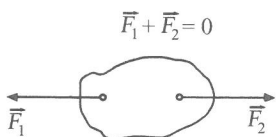
5.3. DJELOVANJE KONKURENTNIH SILA NA KRUTO TIJELO

Najjednostavnije je kada sve sile djeluju u istoj točki krutog tijela (tj. imaju zajedničko hvatište), a svodi se na djelovanje sila na materijalnu točku. Rezultanta takvih sila jednaka je njihovu vektorskom zbroju i ima hvatište u toj točki. Da bi kruto tijelo u tom slučaju bilo u ravnoteži, nužno je i dovoljno da bude zatvoren poligon konstruiran od tih sila.

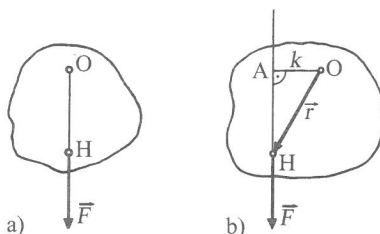
Kada na kruto tijelo djeluju dvije sile s različitim hvatištem, koje leže na istom pravcu djelovanja, kruto tijelo je u ravnoteži ako su te sile jednake po iznosu, a sup-

rotnog smjera (sl. 5.3). To je jedan od osnovnih aksioma statike koji proistječe iz niza eksperimenata i opažanja. Iz njega proistječe da se hvatište sile koja djeluje na kruto tijelo može pomicati duž pravca nosioca a da se pri tom njezino djelovanje na gibanje krutog tijela ne promijeni. (Zbog toga kažemo da je sila koja djeluje na kruto tijelo klizni vektor.)

Sistem sila koje djeluju u različitim točkama krutog tijela, ali kojima se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki možemo svesti na sistem sila što djeluju u jednoj točki i zamijeniti njihovim vektorskim zbrojem koji djeluje u točki gdje se sijeku pravci djelovanja tih sila. Budući da se hvatište sile smije pomicati po pravcu nosiocu, sve se te sile mogu pomaknuti tako da djeluju u jednoj točki, sjecištu pravca djelovanja, i tako i taj primjer svodi na prethodni.



Slika 5.3. Djelovanje dviju sila na kruto tijelo



Slika 5.4. Uz definiciju momenta sile

5.4. MOMENT SILE

Kruto tijelo pod utjecajem sila može, uz translacijsko gibanje, i rotirati oko neke osi ili neke točke. Utjecaj sile na rotaciju opisuje se njezinim momentom.

Promatrajmo tijelo koje može rotirati oko točke O (sl. 5.4). Neka na tijelo djeluje vanjska sila $\vec{F}$. Djelovanje sile na kruto tijelo ne ovisi samo o njezinu iznosu i smjeru, već i o njezinu hvatištu, tj. o točki u kojoj ona djeluje na tijelo, ili, točnije, o položaju pravca nosioca te sile s obzirom na kruto tijelo. Iznos i smjer sile u oba su primjera na slici 5.4. jednaki, samo je pravac nosilac različit. Sila će utjecati na rotaciju tijela oko točke O samo ako pravac sile ne prolazi kroz tu točku (sl. 5.4b). Iz iskustva, nadalje, znamo da je efikasnost djelovanja sile na rotaciju to veća što je veća okomita udaljenost pravca djelovanja sile od točke O, tzv. krak sile $k = OA$. Zato se za opisivanje utjecaja sile na rotaciju uvodi moment sile $\vec{M}$ čiji je iznos jednak umnošku sile i kraka sile:

$$M = k F \quad (5.3)$$

Jedinica je momenta sile, kao što se vidi iz (5.3), njutn-metar (znak: N m).

Ako sa $\vec{r} = \overrightarrow{OH}$ označimo vektor položaja hvatišta sile s obzirom na točku O, moment sile (5.3) možemo pisati:

$$M = r F \sin \varphi \quad (5.4)$$

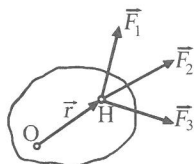
gdje je φ kut između vektora $\vec{r}$ i $\vec{F}$ (sl. 5.4b). Moment sile je vektor čiji je iznos dan sa (5.4) ili sa (5.3), dok mu je smjer okomit na ravninu u kojoj leže sila i točka O.

Odatle možemo zaključiti da se moment sile može prikazati kao vektorski produkt radijusvektora (vektora položaja) hvatišta sile i sile:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5.5)$$

Smjer $\vec{M}$ određujemo pravilom desne ruke: ako prstima idemo od $\vec{r}$ prema $\vec{F}$ (kraćim putem), palac pokazuje smjer $\vec{M}$.* Moment sile je vektor kojem se na navedeni način određuju iznos i smjer, dok mu pravac djelovanja može biti bilo gdje okomito na ravninu (sl. 5.4b), a obično se uzima da leži na osi rotacije. Takve vektore koji nisu vezani za određeni pravac djelovanja, već se smiju paralelno translirati, nazivamo aksijalnim vektorima.

Ako u točki H (sl. 5.5) ne djeluje jedna, već više konkurentnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, moment svake od njih s obzirom na točku O jest $\vec{M}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i$, dok je moment rezultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$ jednak zbroju momenata sila komponenata:



Slika 5.5. Djelovanje više konkurentnih sila na kruto tijelo

$$\begin{aligned} \vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots = \\ &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

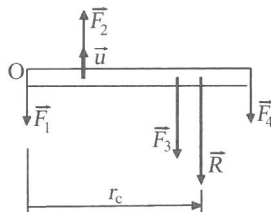
Pri proučavanju gibanja krutog tijela sistem konkurentnih sila može se zamijeniti jednom silom — njihovom rezultantom. Međutim, općenito, kada sile nisu konkurentne, djelovanje sistema sila ne može se zamijeniti njihovom rezultantom, kao što ćemo vidjeti, npr., pri proučavanju para sila.

5.5. DJELOVANJE NEKONKURENTNIH SILA NA KRUTO TIJELO

Kada na kruto tijelo djeluje više nekonkurentnih sila (tj. sila čiji se pravci djelovanja ne sijeku u istoj točki tijela), tada se one općenito ne mogu zamijeniti jednom silom, njihovim vektorskim zbrojem. Može se pokazati da će gibanje tijela u tom slučaju biti superpozicija translacije i rotacije, s tim što je translacija određena rezultantom (vektorskim zbrojem) svih sila, a rotacija rezultantom momenta sila s obzirom na točku oko koje tijelo rotira. Razmotrit ćemo nekoliko jednostavnih primjera.

Slaganje paralelnih sila. Pretpostavimo da na tijelo djeluju dvije ili više sila kojima su pravci djelovanja paralelni (sl. 5.6). Odaberemo li pozitivan smjer jediničnim vektorom $\vec{u}$, tada te sile možemo prikazati izrazom $F_i \vec{u}$, gdje će F_i biti pozitivno ili negativno, ovisno o tome da li je smjer sile $\vec{F}_i$ jednak ili suprotan smjeru vektora $\vec{u}$. Vektorski zbroj tih sila jest:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \vec{u} (F_1 + F_2 + \dots) \quad (5.7)$$



Slika 5.6. Paralelne sile

* Sjetimo se da je vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ čiji je iznos jednak $ab \sin \varphi$ (odnosno površini paralelograma konstruiranoga nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$). Vektor $\vec{c}$ okomit je na ravninu koju čine vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a smjer mu je određen pravilom desne ruke.

Iznos rezultante dobiva se zbrajanjem iznosa komponentata, uzimajući pri tom komponente u jednom smjeru pozitivnima, a u drugome negativnima. Pravac djelovanja rezultante paralelan je pravcima djelovanja komponentata. Potrebno je još samo odrediti hvatište (položaj djelovanja) rezultante.

Izračunamo li moment svake od sila $\vec{F}_i$, $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ i dobivene momente vektorski zbrojimo, dobivamo:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots = (\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + \dots) \times \vec{u} \quad (5.8)$$

Rezultantni moment okomit je na jedinični vektor $\vec{u}$, te i na rezultantu sila $\vec{R}$. Da bi taj moment bio po iznosu jednak momentu rezultante, potrebno je da rezultanta djeluje u točki C određenoj vektorom položaja $\vec{r}_e$, odabranoj tako da je

$$(\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + \dots) \times \vec{u} = \vec{r}_e \times \vec{R} = \vec{r}_e \times (F_1 + F_2 + \dots) \vec{u} = \vec{r}_e (F_1 + F_2 + \dots) \times \vec{u} \quad (5.9)$$

Odatle se dobije položaj pravca djelovanja rezultantne sile $\vec{R}$:

$$\vec{r}_e = \frac{\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} = \frac{\sum \vec{r}_i F_i}{\sum F_i} \quad (5.10)$$

Možemo zaključiti da se sistem paralelnih sila, čija je rezultanta po iznosu različita od nule, može zamijeniti jednom silom — vektorskim zbrojem pojedinih komponentnih sila — čiji je pravac djelovanja određen relacijom (5.10). U slučaju dviju, po iznosu jednakih a po smjeru suprotnih sila $\sum F_i = 0$, navedeno razmatranje ne možemo primijeniti, pa ćemo taj primjer, tzv. para sila razmotriti posebno.

Težište. Kao primjer djelovanja paralelnih sila na kruto tijelo promatrajmo djelovanje sile teže na neko tijelo. Zemlja privlači svaku česticu tijela određenom silom, koju nazivamo silom težom i koja je uzrok težine tog tijela. Ako su dimenzije tijela malene u usporedbi s dimenzijama Zemlje (tj. ako je u svakoj točki tijela $\vec{g} = \text{konst.}$), možemo smatrati da je ukupna sila teža na tijelo rezultanta paralelnih sila — sila teža na svaku od pojedinih čestica tijela (sl. 5.7).

Budući da je onda kada tijelo miruje ili se giba jednoliko

težina jednaka sili teži, ukupna je težina tijela $\vec{G} = \sum_i \Delta m_i \vec{g}$

s hvatištem u točki:

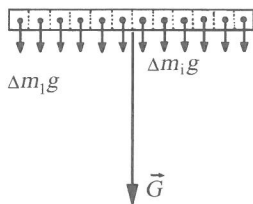
$$\vec{r}_T = \frac{\sum \vec{r}_i \Delta m_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum \vec{r}_i \Delta m_i}{m} = \vec{r}_{CM} \quad (5.11)$$

Tako određeno hvatište težine zove se težište. Usporedivši tu formulu sa (3.48) vidimo da nema razlike između položaja težišta i položaja centra mase.

Da bi se odredio položaj težišta krutog tijela, tijelo treba podijeliti na velik broj malih volumena ΔV , i na te dijelove primijeniti izraz (5.10) te u graničnom slučaju, kad svi ΔV teže nuli, umjesto zbrajanja u tim izrazima prijeći na integriranje. Tako se dobiju izrazi za koordinate težišta krutih tijela:

$$x_T = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} = \frac{\int x dV}{V} \quad y_T = \frac{\int y dV}{V} \quad \text{i} \quad z_T = \frac{\int z dV}{V} \quad (5.12)$$

gdje je V volumen tijela, a ρ gustoća tijela, za koju smo pretpostavili da je konstantna.



Slika 5.7. Djelovanje sile teže na kruto tijelo

Eksperimentalno možemo odrediti težište tijela tako da ga objesimo u nekoj točki i pustimo da se uravnoteži. Težište će ležati na vertikali kroz objesište. Zatim ponovimo pokus objesivši tijelo u nekoj drugoj točki. Sjecište tih dvaju vertikala odredit će težište. Takav je način pogodan za određivanje položaja težišta složenih nehomogenih tijela za koja se težište ne može proračunati.

5.6. PAR SILA

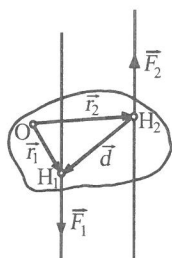
Kada na kruto tijelo djeluje više paralelnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ čiji je vektorski zbroj jednak nuli ($\sum \vec{F}_i = 0$), one se mogu zamijeniti dvjema paralelnim silama istog iznosa, a suprotnog smjera. Zbrojimo li, npr., prvih $n - 1$ sila, dobit ćemo $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i$.

Budući da je $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, to je sila $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i$ jednaka po iznosu, a suprotnog smjera posljednjoj sili, koju možemo nazvati $\vec{F}' = \vec{F}_n$. Time smo sistem od n paralelnih sila čiji je vektorski zbroj nula sveli na dvije antiparalelne sile istog iznosa $\vec{F}$ i $\vec{F}'$, tzv. par sila.

Promatrajmo kako par sila dviju paralelnih sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, istog iznosa, a suprotnog smjera, djeluje na gibanje krutog tijela (sl. 5.8).

Vektorski zbroj (rezultanta) tih dviju sila očito je nula, dok je rezultantni moment:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{d} \times \vec{F}_1\end{aligned}\quad (5.13)$$



Slika 5.8. Par sila

gdje je $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ vektor od hvatišta sile $\vec{F}_2$ do hvatišta sile $\vec{F}_1$. Moment para sila okomit je na ravninu u kojoj leže sile, po iznosu jednak umnošku jedne od sila i udaljenosti pravaca djelovanja sila (tj. kraka $k = d \sin \varphi$), i ne ovisi o izboru točke s obzirom na koju smo računali momente sile. Budući da je rezultantna sila nula, a rezultantni moment različit od nule, par sila ne uzrokuje translaciju, već samo rotaciju. Kada, naime, na nepomično kruto tijelo počne djelovati samo par sila ($\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$), tada je vektorski zbroj vanjskih sila jednak nuli ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$), te centar mase tijela ostaje i dalje na miru, a tijelo se počne vrtjeti oko osi koja prolazi kroz centar mase i određena je smjerom momenta para. Par sila se često susreće u praksi, a nastaje, npr., pri okretanju volana, kotrljanju, odvijanju vijka i sl.

Za razliku od paralelnih sila istog smjera i antiparalelnih sila različitog iznosa, par sila ne možemo zamijeniti jednom silom.

5.7. RAVNOTEŽA KRUTOG TIJELA

Djelovanje sila na kruto tijelo može proizvesti translacijsko i rotacijsko gibanje. Kruto tijelo je u ravnoteži ako je, promatrano u nekom inercijalnom sustavu, linearna akceleracija njegova centra mase jednaka nuli i ako je njegova kutna akceleracija

oko bilo koje nepomične osi u tom sustavu jednaka nuli. Moraju, dakle, biti ispunjena dva uvjeta da bi se osigurala translacijska i rotacijska ravnoteža.

Translacijsko gibanje krutog tijela može se opisati jednadžbom:

$$m \vec{a}_{CM} = \vec{F} \quad (5.14)$$

gdje je $\vec{F}$ vektorski zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo. Budući da u ravnoteži $\vec{a}_{CM}$ mora iščezavati, prvi je uvjet ravnoteže krutog tijela:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (5.15)$$

Vektorski zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na kruto tijelo u ravnoteži jednak je nuli.

Što se tiče rotacijskoga gibanja, uravnoteženo kruto tijelo vrti se stalnom kutnom brzinom ili miruje, tj. njegova kutna akceleracija oko bilo koje nepomične osi mora biti jednaka nuli. Kutna akceleracija je proporcionalna ukupnom momentu vanjskih sila koje djeluju na tijelo (v. 6. poglavlje), te drugi uvjet ravnoteže glasi:

$$\sum \vec{M}_i = 0 \quad (5.16)$$

Vektorski zbroj svih vanjskih momenata (s obzirom na bilo koju točku) što djeluju na uravnoteženo kruto tijelo mora biti jednak nuli.

Kruto tijelo je u ravnoteži samo ako su istovremeno ispunjena oba uvjeta (5.15) i (5.16). U tom slučaju kruto tijelo miruje, odnosno giba se jednoliko po pravcu ili jednoliko rotira, ili i jedno i drugo.

U posebnom slučaju, kada sile koje djeluju na tijelo leže u jednoj ravnini, navedeni uvjeti prelaze u tri skalarne jednadžbe:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_{iz} = 0 \quad (5.17)$$

Tada su, naime, svi momenti okomiti na ravninu u kojoj djeluju sile, tj. imaju isti pravac nosilac, samo im se predznak može razlikovati. Vektorski zbroj momenta pretvara se zato u algebarski, s tim da se oni momenti koji uzrokuju rotaciju u smjeru suprotnom hodu kazaljke na satu smatraju pozitivnima, a kad uzrokuju vrtnju u istom smjeru kretanja kazaljki na satu negativnima. Uočite, također, da par sila ne može biti uravnotežen jednom silom, već samo drugim parom, čiji je moment jednak po iznosu, a suprotnog smjera. Djeluju li momenti u različitim ravninama, tada se momenti moraju zbrajati vektorski i upotrijebiti ravnotežni uvjet (5.16).

Primjer

Poluga duga 2 m, poduprta 0,5 m od jednog kraja, upotrijebljena je za dizanje predmeta mase 200 kg. Kolika je potrebna sila na jednom njezinu kraju da bi uravnotežila težinu predmeta na drugom kraju?

Poluga je jednostavan uređaj pomoću kojega se može manjom silom svladati veća sila. (Nacrtajte sliku.) Sila F na jednom kraju može podići teret težine F' na drugom kraju. Iz uvjeta ravnoteže slijedi

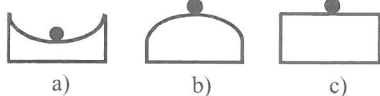
$$F a = F' b,$$

gdje su a i b dužine krakova poluge. Ovdje je $F' = 200 \cdot 9,81 \text{ N} = 1962 \text{ N}$, $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$, te je potrebna sila:

$$F = \frac{F' b}{a} = 654 \text{ N}.$$

Idealan je mehanički učinak poluge $\frac{F'}{F} = \frac{a}{b}$, a u našem primjeru iznosi 3.

Razlikujemo tri vrste ravnoteže tijela: stabilnu, labilnu i indiferentnu. Za sve tri su ispunjeni uvjeti ravnoteže, ali je stabilnost tijela različita. Kada kratkotrajna sila djeluje na tijelo u stabilnoj ravnoteži, ono se malo pomakne iz ravnotežnog



Slika 5.9. Stabilna, labilna i indiferentna ravnoteža

položaja, ali se nakon prestanka djelovanja sile vraća u taj položaj. Naprotiv, tijelo pomaknuto iz položaja labilne ravnoteže više se u taj položaj ne vraća, već teži da se od njega udalji. Ako tijelo pomaknuto iz ravnotežnog položaja ostane i u novom položaju uravnoteženo, kažemo da se tijelo nalazi u indiferentnoj ravnoteži. Na slici 5.9. pokazana je kuglica u sve tri vrste ravno-

teže. Može se pokazati da je u stabilnoj ravnoteži potencijalna energija tijela minimalna, a u labilnoj maksimalna.

Primjer

Ljestve mase 10 kg prislonjene su uz vertikalni zid pod kutom 45° , kao što prikazuje slika 5.10. Odredite sile koje djeluju na ljestve u točkama A i B. Pretpostavite da je trenje u točki B zanemarivo.

Na slici 5.10. prikazane su sile koje djeluju na ljestve: sila teža mg u težištu T ljestvi, normalna reakcija zida F_B , normalna reakcija poda F_{Ay} te sila koja sprečava ljestve da kliznu F_{Ax} (koja je uzrokovana trenjem).

Prvi uvjet ravnoteže kaže da vektorski zbroj svih sila mora biti jednak nuli. Napišemo li taj uvjet za x i y komponente sila, izlazi:

$$\sum_i F_{ix} = -F_B + F_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i F_{iy} = -G + F_{Ay} = 0$$

Drugi uvjet ravnoteže kaže da je algebarski zbroj momenata svih sila jednak nuli. Odredimo li, npr., sve momente sila s obzirom na točku A, dobivamo:

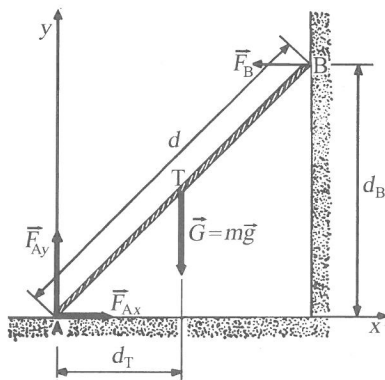
$$G d_T - F_B d_B = 0, \quad G \frac{d}{2} \cos \varphi - F_B d \sin \varphi = 0$$

ili

$$G \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - F_B d \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (2)$$

Odatle je

$$F_B = \frac{G}{2} = 49 \text{ N}.$$



Slika 5.10. Ravnoteža ljestava

Iz (1) dobijemo ostale dvije sile:

$$F_{Ax} = F_B = 49 \text{ N},$$

$$F_{Ay} = G = 98 \text{ N}.$$

Izbor točke A za računanje momenata sila osobito je pogodan zato što su takvim izborom momenti sila F_{Ax} i F_{Ay} jednaki nuli; računanjem momenata s obzirom na neku drugu točku dobili bismo isti rezultat, samo bi jednadžbe (2) bile malo složenije.

Uočite da sile $\vec{F}_{Ay}$ i $\vec{G}$ čine jedan par sila, a sile $\vec{F}_{Ax}$ i $\vec{F}_B$ drugi par. Momenti sila tih dvaju parova po veličini su jednaki i iznose $\frac{Gd}{2\sqrt{2}} = F_B \frac{d\sqrt{2}}{2}$, ali su suprotnih smjerova, te se međusobno uravnotežuju. Uvijek kada na tijelo djeluje jedan par sila, za postizanje ravnoteže potreban je još jedan par jednakog momenta po veličini, ali u suprotnom smjeru.

PITANJA I ZADACI

1. Kakva je razlika između statike i dinamike?
2. Što je kruto tijelo? Kako se kruto tijelo može gibati?
3. Kako se giba: a) čestica, b) kruto tijelo u ravnoteži?
4. Kada je čestica u ravnoteži? Razmotrite ravnotežu na kosini.
5. Što je to pravac djelovanja sile? Zašto je sila koja djeluje na kruto tijelo klizni vektor?
6. Što su konkurentne sile? Kada je n različitih konkurentnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, koje djeluju na kruto tijelo, u ravnoteži?
7. Kako se definira moment sile? Kako mu se određuje smjer?
8. Kako na kruto tijelo djeluje više paralelnih sila istog smjera?
9. Kako se definira težište krutog tijela? Kakva je razlika između težišta i centra mase? Kako se pokusom može odrediti težište?
10. Kako na kruto tijelo djeluju dvije paralelne sile jednakog iznosa, ali suprotnog smjera?
11. Što je par sila? Koliki je moment para sila?
12. Kada se sistem sila koje djeluju na kruto tijelo može zamijeniti jednom jedinom silom?
13. Kako se određuje hvatište rezultante kada više sila djeluje u raznim točkama tijela?
14. Kako glase uvjeti ravnoteže krutog tijela? Primijenite te uvjete na jednom primjeru.
15. Napišite uvjete ravnoteže krutog tijela kada su sve sile koje djeluju na nj u istoj ravnini.
16. Kakva je razlika između stabilne, labilne i indiferentne ravnoteže?
17. Kolika je potencijalna energija tijela u ravnoteži?
18. Na materijalnu točku djeluju u horizontalnoj ravnini tri sile: sila $F_1 = 3 \text{ N}$ prema sjeveru, sila $F_2 = 2 \text{ N}$ prema jugozapadu, a sila $F_3 = 4 \text{ N}$ prema istoku. Izračunajte iznos i smjer rezultante.
19. Na šipku dugu 2 m djeluju četiri sile: $F_1 = 3 \text{ N}$ na jednom kraju, $F_2 = 4 \text{ N}$ na udaljenosti 1 m od tog kraja, $F_3 = 4 \text{ N}$ na udaljenosti 150 cm od kraja i $F_4 = 3 \text{ N}$ na drugom kraju. Sve sile imaju paralelne pravce djelovanja okomito na šipku. Sila F_3 je suprotnog smjera od ostalih. Odredite hvatište, pravac djelovanja i iznos sile kojom bismo mogli uravnotežiti tu šipku.
20. Čovjek gura teret mase 60 kg stalnom brzinom po horizontalnoj podlozi silom koja zatvara kut 30° s horizontalom. Faktor trenja je 0,2. Kolika je sila? Kolika bi bila sila kad bi čovjek u istim uvjetima teret vukao?
21. Štap jednolikog presjeka, dug 2 m, napravljen je tako da mu je polovica od željeza, a polovica od aluminija. Gdje je težište?
22. Izračunajte položaj težišta nehomogene šipke duljine d kojoj gustoća linearno raste od jednog kraja do drugog po zakonu $\lambda = \lambda_0 + 2ax$, gdje je x udaljenost od početka šipke.
23. Položaj težišta može se odrediti vaganjem. Ako se prednji kotači nekog vozila mase 3 200 kg postavljaju na platformu vage, vaga pokaže da je sila pritiska kotača 21 kN. Razmak između osovina kotača je 3 m. Koliko je težište vozila udaljeno od pravca djelovanja pritiska kotača?
24. Na dužem kraju klijesta djeluje sila od 100 N. Kolika sila pri tom djeluje na čavao? Klijesta su duga 16,5 cm, a kraći kraj kraka klijesta dug je 3,5 cm.
25. Greda mase 18 kg poduprta je na 1/4 svoje dužine. Kolikom je silom potrebno djelovati na rubu kraćeg dijela da bi greda bila u ravnoteži?
26. Homogena greda mase 20 kg poduprta je na dva kraja. Kolikom silama djeluje greda na oslonce?

6. ROTACIJA KRUTOG TIJELA

6.1. UVOD

Promatramo li djelovanje sile na neko tijelo, možemo uočiti dva učinka: promjenu oblika tijela (deformaciju) i promjenu stanja gibanja tijela. Ako tijelo pod utjecajem sile ne mijenja svoj oblik, kažemo da je kruto. Možemo zamisliti da se kruto tijelo sastoji od čestica čiji međusobni razmaci uvijek ostaju isti. Naravno, kruto tijelo je idealizirani model, a u prirodi ima čvrstih tijela koja se, više ili manje, približuju idealiziranom modelu krutog tijela. Često se oblik tijela koje se giba ne mijenja, ili se mijenja tako malo da tu promjenu možemo zanemariti, i tada je umjesno pretpostaviti da je tijelo savršeno kruto te na nj primijeniti zakone gibanja krutog tijela.

Razlikuju se dvije vrste gibanja krutog tijela: translacija i rotacija. Tijelo se giba translatorno ako linija koja povezuje bilo koje dvije njegove čestice zadržava svoj smjer u prostoru, tj. ako za vrijeme gibanja ostaje paralelna svom početnom položaju. U nekom promatranom trenutku sve točke tijela imaju jednake brzine i akceleracije. Za opisivanje translacije dovoljno je poznavati gibanje jedne točke tijela (npr. centra mase), jer se ostale točke gibaju na isti način. Translatorno gibanje krutog tijela svodi se, dakle, na gibanje jedne točke njegova centra mase. Pri tom se smatra da je čitava masa tijela u toj točki (centru mase) i da rezultanta vanjskih sila ima hvatište u toj točki. Kada kruto tijelo rotira, sve se njegove čestice gibaju istom kutnom brzinom po kružnicama čija središta leže na pravcu koji se zove os rotacije.

Može se smatrati da je najopćenitije gibanje krutog tijela sastavljeno iz ta dva jednostavna oblika gibanja: translacije njegova centra mase i rotacije oko osi koja prolazi kroz centar mase. Pri tom os može biti nepomična ili tokom gibanja mijenjati svoj položaj prema tijelu. Kada se automobil giba pravocrtno, njegov kotač izvodi gibanje složeno od rotacije oko osi kroz centar mase i translacije centra mase kotača u smjeru gibanja automobila.

U ovom ćemo poglavlju razmotriti rotaciju krutog tijela i pri tom se ograničiti na jednostavnije primjere: rotaciju krutog tijela oko nepomične osi i rotaciju zvrka oko pomične osi, učvršćene u jednoj točki.

6.2. OPĆENITO GIBANJE KRUTOG TIJELA

Pod utjecajem vanjskih sila kruto se tijelo može gibati translacijom ili rotacijom, ili složenim gibanjem sastavljenim od te dvije vrste gibanja.

Pri translaciji sve točke tijela imaju jednaku brzinu $\vec{v}$ i akceleraciju $\vec{a}$, te za svaki djelić mase Δm_i toga tijela vrijedi jednadžba gibanja:

$$\Delta m_i \cdot \vec{a} = \vec{F}_u + \vec{F}_v \quad (6.1)$$

gdje je $\vec{F}_u$ unutrašnja, a $\vec{F}_v$ vanjska sila koja djeluje na promatrani djelić mase. Zbrajaјуći po svim elementarnim masama Δm_i na koje smo rastavili kruto tijelo iz jednadžbe (6.1), izlazi:

$$\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{a} = \sum_i (\vec{F}_{ui} + \vec{F}_{vi}) \quad (6.2)$$

Prema trećem Newtonovu zakonu, zbroj svih unutrašnjih sila je nula, te jednadžba (6.2) prelazi u:

$$m \vec{a} = \vec{F}_v \quad (6.3)$$

gdje je $m = \sum_i \Delta m_i$ masa tijela, a $\vec{F}_v = \sum_i \vec{F}_{vi}$ rezultanta vanjskih sila.

Iz ovih razmatranja možemo zaključiti da se pri translatornom gibanju kruto tijelo može zamijeniti jednom materijalnom točkom (npr. centrom mase) čija je masa jednaka masi tijela i na koju djeluje ukupna vanjska sila. Tako se translacija krutog tijela svodi na gibanje materijalne točke, koje smo proučili u 3. poglavlju.

Pri složenom gibanju krutog tijela njegove točke imaju općenito različite brzine i akceleracije, te jednadžba gibanja ima oblik:

$$\sum_i \Delta m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_{ui} + \vec{F}_{vi}) = \vec{F} \quad (6.4)$$

Uvedemo li u (6.4) akceleraciju centra mase krutog tijela

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{a}_i}{m} \quad (6.5)$$

jednadžba gibanja prelazi u:

$$m \vec{a}_{CM} = \vec{F} \quad (6.6)$$

gdje je m masa tijela, a $\vec{F}$ rezultanta vanjskih sila.

Pri bilo kakvom složenom gibanju centar mase tijela giba se kao materijalna točka (čija je masa jednaka ukupnoj masi tijela) na koju djeluje rezultanta vanjskih sila. Gibanje pojedinih točaka tijela, iako je u principu opisano jednadžbom (6.4), može se izračunati samo u jednostavnijim primjerima od kojih ćemo neke razmotriti.

Najjednostavniji je primjer rotacija krutog tijela oko nepomične osi, i nju ćemo najprije proučiti. Zatim ćemo opisati gibanje zvrka — rotaciono simetričnog tijela, učvršćenog u jednoj točki, koje se vrti oko vlastite osi simetrije.

6.3. ROTACIJA KRUTOG TIJELA OKO NEPOMIČNE OSI

Pri rotaciji krutog tijela oko nepomične osi sve točke tijela izvode gibanje po kružnicama čija središta leže na osi rotacije, za koju pretpostavimo da se poklapa s osi z koordinatnog sustava.

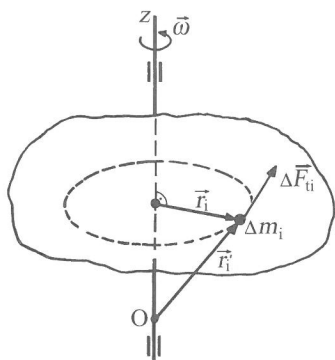
U statici smo moment sile s obzirom na neku točku definirali kao vektorski produkt vektora položaja hvatišta sile s obzirom na tu točku i vektora sile. Pri proučavanju rotacije krutog tijela oko nepomične osi treba definirati moment sile s obzirom na tu os, jer upravo ta komponenta ukupnog momenta opisuje utjecaj sile na rotaciju oko te osi.

Kada na kruto tijelo čija je os rotacije nepomična, djeluje neka vanjska sila $\vec{F}$, tada na rotaciju utječe samo komponenta te sile koja leži u ravnini okomitoj na os rotacije. (Silu $\vec{F}$ možemo, naime, rastaviti na dvije komponente: komponentu okomitu na os rotacije i komponentu paralelnu osi rotacije; komponenta paralelna

osi rotacije teži samo pomaknuti tijelo duž osi i ne utječe na rotaciju oko osi.) Prema tome, na rotaciju oko nepomične osi utječe samo moment okomite sile, dakle moment sile $\vec{F}$ s obzirom na os rotacije, koji ćemo označiti sa M_z .

Moment sile $\vec{F}$ s obzirom na os rotacije z jednak je umnošku sile i kraka sile, tj. najkraće udaljenosti između osi i pravca djelovanja sile. To je skalarna veličina, koja može biti pozitivna ili negativna, ovisno o tome uzrokuje li rotaciju u smjeru suprotnom kazaljki na satu (pozitivnom smjeru) ili u smjeru kazaljke na satu.

Izvedimo jednadžbu gibanja za takvu rotaciju. U tu svrhu podijelimo tijelo na n dijelova (materijalnih točaka), od kojih svaki dio ima masu Δm_i i udaljen je od



Slika 6.1. Uz izvod jednadžbe rotacije krutog tijela

osi rotacije za r_i (sl. 6.1). Moment sile i -te čestice s obzirom na točku O jest $\Delta \vec{M}_i = \vec{r}_i' \times \Delta \vec{F}_i$, gdje je $\Delta \vec{F}_i$ rezultanta svih (vanjskih i unutrašnjih) sila koje djeluju na tijelo mase Δm_i a $\vec{r}_i'$ vektor položaja s obzirom na tu točku. Na kruženje tijela elementarne mase Δm_i utječe samo tangencijalna komponenta sile ΔF_{ui} , odnosno komponenta momenta sile u smjeru osi z , tj.:

$$\Delta M_{zi} = r_i \Delta F_{ui} = r_i \Delta m_i a_{ui} = \alpha \Delta m_i r_i^2 \quad (6.7)$$

jer je tangencijalna akceleracija točke a_{ui} jednaka produktu $r_i \alpha$. (Kutnoj akceleraciji α ne treba pisati indeks i jer je pri rotaciji krutog tijela oko nepomične osi kutna akceleracija svih točaka jednaka.)

Zbrajajući po svim elementarnim masama Δm_i , na koje smo tijelo podijelili, iz jednadžbe (6.7) izlazi:

$$M_z = \sum_i \Delta M_{zi} = \alpha \sum_i \Delta m_i r_i^2 = I_z \alpha \quad (6.8)$$

gdje je zbroj umnožaka elementarnih masa i njihovih udaljenosti od neke osi z moment tromosti tijela s obzirom na os z :

$$I_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad (6.9)$$

Može se pokazati da je zbroj svih unutrašnjih sila jednak nuli, te je $M_z = \sum_i \Delta M_{zi}$

u jednadžbi (6.8) rezultatni moment tangencijalne komponente vanjskih sila s obzirom na os rotacije. Ostale komponente momenata komponentiraju se u ležajima osovine (koja je učvršćena tako da se ne može micati), pa ne utječu na rotaciju.

Jednadžbe (6.8) i (6.9) su aproksimativne i postaju egzaktna u graničnom prijelazu, kada se dijelovi Δm_i približavaju materijalnim točkama, a njihov broj teži prema beskonačnosti. U tom slučaju zbrojevi u (6.8) i (6.9) prelaze u integrale.

Jednadžba (6.8)

$$M_z = I_z \alpha$$

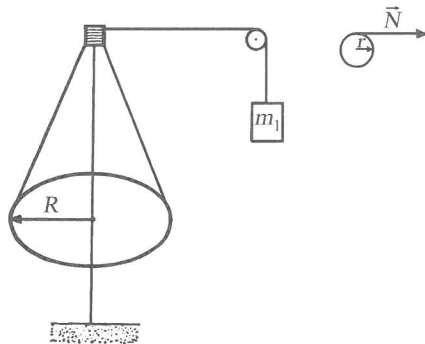
gdje je M_z rezultatni moment svih vanjskih sila s obzirom na os rotacije, I_z moment tromosti s obzirom na tu istu os, a α kutna akceleracija tijela, osnovna je jednadžba (drugi Newtonov zakon) za rotaciju krutog tijela oko nepomične osi. Ona

je analogna drugom Newtonovu zakonu za materijalnu točku ($F = ma$) u tom smislu da sili odgovara moment sile, masi moment tromosti, a linearna akceleracija kutnoj akceleraciji.

Ako je rezultantni moment vanjskih sila $\vec{M} = 0$, tada je $\vec{\alpha} = 0$, te će tijelo ili mirovati ili se jednoliko vrtjeti. Ako je $M_z = \text{konst.}$, tijelo će se vrtjeti oko nepomične osi konstantnom kutnom akceleracijom ($\alpha = \text{konst.}$).

Rotaciju krutog tijela oko nepomične osi možemo prikazati pokusom u kojemu se metalni prsten, pod utjecajem stalnog momenta, vrti oko svoje vertikalne osi*.

Šuplji valjak (sl. 6.2) poduprt je čeličnim šiljkom, tako da može rotirati oko nepomične vertikalne osi. Na valjak je obješen metalni prsten mase m i polumjera R . Oko valjka je namotan konac koji je zatim prebačen preko kolotura i zavezan za uteg mase m_1 . Težina utega nateže konac, te na prsten djeluje moment sile $M = = N r$, gdje je N napetost konca, a r polumjer valjka. Zbog toga se valjak zajedno s prstenom vrti oko osi koja prolazi središtem prstena. Trenje je dosta maleno, te ga možemo zanemariti.



Slika 6.2. Rotacija prstena

Mjerenjem vremena potrebnoga za jedan, dva . . . okreta može se pokazati da, uz stalni moment sile, prsten rotira konstantnom kutnom akceleracijom α . Podaci i rezultati takvog mjerenja dani su u tablici 6.1a.

Tablica 6.1. Rezultati mjerenja pri rotaciji prstena

Tablica 6.1a

	$\varphi/2\pi$	t/s	$\alpha/(\text{rad/s}^2)$
$m = 0,6 \text{ kg}$	1	7,9	0,201
$R = 0,125 \text{ m}$	2	11,3	0,197
$r = 0,01 \text{ m}$	3	13,8	0,198
$m_1 = 0,02 \text{ kg}$	4	15,9	0,199
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	9	23,8	0,199

Već letimičan pogled na rezultate pokazuje da je vrtnja ubrzana. Izračunamo li kutnu akceleraciju iz izraza za rotaciju s konstantnom akceleracijom: $\varphi = \frac{1}{2} \alpha t^2$, dobit ćemo rezultate dane u trećem stupcu tablice 6.1a. Iz takvih mjerenja slijedi zaključak: pod utjecajem stalnog momenta sile tijelo rotira oko nepomične osi s konstantnom kutnom akceleracijom.

* Vidjeti: V. Lopašić, *Predavanja iz fizike*, I dio, Sveučilište u Zagrebu, 1966.

Mijenjajući masu utega ili polumjer valjka, možemo ispitati kako promjena momenta sile utječe na vrtnju. Budući da je zbog $m \gg m_1$ i $r \ll R$ akceleracija utega mase m , mnogo manja od akceleracije sile teže g , napetost konca približno je jednaka sili teži na uteg, te je moment sile $M = N r = m_1 g r$. Poveća li se masa m_1 dva puta, tj. sa 0,02 kg na 0,04 kg, uz sve ostalo kao prije, moment sile će se dvaput povećati. Mjerenja pokazuju da je i kutna akceleracija dvaput veća (tablica 6.1b). Slično, ako dvaput povećamo polumjer vretena, postizemo dvostruko veću kutnu akceleraciju.

Tablica 6.1b

	$\varphi/2\pi$	t/s	α (rad/s ²)
$m = 0,6$ kg	1	5,5	0,42
$R = 0,125$ m	2	7,7	0,42
$r = 0,01$ m	.	.	.
	.	.	.
$m_1 = 0,04$ kg	4	11,2	0,40

Kutna akceleracija proporcionalna je momentu vanjske sile.

Da bismo utvrdili kako masa tijela utječe na rotaciju, uzet ćemo prsten dvostruko veće mase ($m = 1,2$ kg), ali istog polumjera. Rezultati mjerenja (tablica 6.1c) pokazuju: ako se dvaput poveća masa, kutna je akceleracija dvostruko manja.

Tablica 6.1c

	$\varphi/2\pi$	t/s	α (rad/s ²)
$m = 1,2$ kg	1	7,9	0,20
$R = 0,125$ m	2	11,2	0,20
$r = 0,01$ m	3	13,9	0,195
$m_1 = 0,04$ kg	4	15,9	0,199

Promijenimo li polumjer, tj. ako umjesto prstena mase 1,2 kg i polumjera 0,125 m upotrijebimo prsten iste mase ali dvostruko većeg polumjera ($R = 0,25$ m), uz iste ostale podatke, opazit ćemo da je akceleracija četiri puta manja (tablica 6.1d).

Tablica 6.1d

	$\varphi/2\pi$	t/s	α (rad/s ²)
$m = 1,2$ kg	1	15,71	0,051
$R = 0,25$ m	.	.	.
$r = 0,01$ m	.	.	.
	.	.	.
$m_1 = 0,04$ kg	4	32	0,049

Kutna akceleracija je obrnuto razmjerna kvadratu udaljenosti na kojoj je masa raspoređena od osi vrtnje.

Rezimiramo li rezultate pokusa, možemo pisati:

$$\alpha = \frac{M}{m R^2} = \frac{M}{I} \quad (6.10)$$

gdje je $I = m R^2$ moment tromosti prstena.

Primjer

Za opisani pokus u kojemu je upotrijebljeno vreteno polumjera $r = 0,01$ m, prsten mase $m = 0,6$ kg i polumjera $R = 0,125$ m te uteg mase $m_1 = 0,02$ kg izračunajte kutnu akceleraciju i usporedite s vrijednošću dobivenom mjerenjem. Kolika je akceleracija gibanja utega mase m_1 ?

Moment sile kojim konac djeluje na vreteno jest:

$$M = r N,$$

gdje je N napetost konca. Jednadžba je gibanja prstena:

$$M = I \alpha = r N, \quad (1)$$

gdje je $I = m R^2$ moment tromosti prstena. (Gibanje vretena i kolotura možemo u ovom slučaju zanemariti.)

Drugi Newtonov zakon, napisan za gibanje utega, glasi:

$$m_1 a = m_1 g - N \quad (2)$$

gdje je a akceleracija utega. Iz (1) i (2) te veze kutne i tangencijalne akceleracije $\left(\alpha = \frac{a}{r}\right)$, dobivamo:

$$\alpha = \frac{m_1 g r}{m R^2 + m_1 r^2}.$$

Budući da je u našem primjeru $m \gg m_1$ i $R \gg r$, to je $m_1 r^2 \ll m R^2$, pa možemo pisati:

$$\alpha = \frac{m_1 g r}{m R^2} = 0,209 \text{ rad/s}^2,$$

što se dobro slaže s izmjerenom vrijednošću.

Linearna je akceleracija utega mase m_1 :

$$a = \alpha r = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2.$$

Budući da je a relativno malena, možemo je zanemariti i smatrati da je moment sile $M = N r = m_1 g r$.

6.4. MOMENT TROMOSTI

Moment tromosti (inercije) jest veličina karakteristična za svako tijelo koje rotira oko izabrane osi; on utječe na rotaciju slično kao što masa utječe na translaciju materijalne točke. Tijela s velikim momentom tromosti teže je zarotirati nego ona s malim momentom tromosti; moment tromosti mjera je tromosti tijela pri rotaciji.

Moment tromosti krutog tijela, s obzirom na neku os rotacije, kao što smo pokazali u odjeljku 6.3, jednak je:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad (6.11)$$

Prirodnije je integral po masi prevesti u integral po volumenu; budući da je $dm = \rho dV$, formulu (6.11) možemo pisati i u obliku:

$$I = \int_V \rho r^2 dV \quad (6.12)$$

gdje gustoća

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (6.13)$$

može biti funkcija koordinata tijela. Za homogena tijela gustoća je konstantna, te je možemo pisati ispred integrala:

$$I = \rho \int_V r^2 dV \quad (6.14)$$

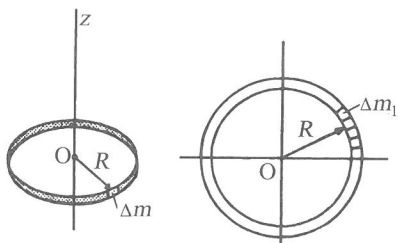
gdje je integral preko čitavog volumena tijela. Osim o masi tijela, moment tromosti, kao što se vidi iz formule (6.11), ovisi o raspodjeli mase s obzirom na os rotacije. Preraspodjelom mase što dalje od osi rotacije možemo povećati moment tromosti tijela.

Izračunat ćemo, radi ilustracije, momente tromosti nekih jednostavnih tijela.

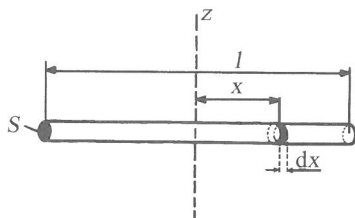
Moment tromosti prstena. Izračunajmo moment tromosti tankog kružnog, homogenog prstena polumjera R i mase m s obzirom na os okomitu na ravninu prstena, koja prolazi kroz središte prstena (sl. 6.3).

Budući da čitava masa ima praktički istu udaljenost od osi rotacije, to je r u izrazu za moment tromosti (6.14) konstantan i moment je tromosti prstena:

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = m R^2 \quad (6.15)$$



Slika 6.3. Uz izračunavanje momenta tromosti prstena



Slika 6.4. Izračunavanje momenta tromosti štapa

Moment tromosti homogenog štapa. Izračunat ćemo moment tromosti štapa duljine l i mase m s obzirom na os okomitu na štap, koja prolazi kroz sredinu štapa (sl. 6.4).

Primjenom formule (6.14) dobivamo:

$$I = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 S dx = \rho S \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{4} = m \frac{l^2}{12} \quad (6.16)$$

gdje smo uzeli u obzir da je masa štapa jednaka $m = \rho S l$.

Slično se mogu izračunati momenti tromosti još nekih jednostavnijih tijela. Izostavivši izvod, navest ćemo samo koliko iznose momenti tromosti s obzirom na os kroz centar mase tijela za neke od njih.

Tijelo	Moment tromosti	Položaj osi
tanak prsten	$m r^2$	okomito na ravninu prstena
okrugla ploča	$\frac{m r^2}{2}$	okomito na ravninu ploče
puni valjak	$\frac{m r^2}{2}$	uzdužna os valjka
tanak, šuplji valjak	$m r^2$	uzdužna os valjka
kugla	$\frac{2m r^2}{5}$	kroz središte kugle
tanka, šuplja kugla	$\frac{2m r^2}{3}$	kroz središte kugle
tanak štap duljine l	$\frac{m l^2}{12}$	okomito kroz središte štapa

Steinerov poučak. Moment tromosti ovisi o osi oko koje tijelo rotira. Steinerov poučak o paralelnim osima omogućuje računanje momenta tromosti za bilo koju paralelnu os ako je poznat moment tromosti s obzirom na os kroz centar mase. Neka tijelo rotira oko osi z Kartezijeva koordinatnog sustava koja prolazi kroz centar mase tijela (sl. 6.5) okomito na ravninu crteža. Moment je tromosti oko te osi:

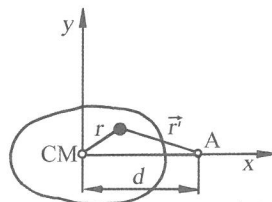
$$I_{CM} = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \quad (6.17)$$

dok je moment tromosti za paralelnu os (kroz točku A), udaljenu za d (sl. 6.5):

$$\begin{aligned} I &= \int r'^2 dm = \int [(d-x)^2 + y^2] dm = \\ &= \int (x^2 + y^2) dm - 2d \int x dm + d^2 \int dm \end{aligned} \quad (6.18)$$

Prvi član je moment tromosti oko osi kroz centar mase, drugi član jednak je nuli, jer $\int x dm = m x_{CM} = 0$ (zato što je centar mase u ishodištu), te je moment tromosti oko paralelne osi:

$$I = I_{CM} + m d^2 \quad (6.19)$$



Slika 6.5. Uz izvođenje Steinerova poučka

Moment tromosti s obzirom na neku os jednak je momentu tromosti s obzirom na paralelnu os kroz centar mase, uvećanom za umnožak mase tijela i kvadrata udaljenosti tih dviju osi.

Iz formule (6.19) izlazi da je $I > I_{CM}$, tj. da je od svih momenata tromosti najmanji moment tromosti s obzirom na os kroz centar mase.

Primjer

Primjenom Steinerova poučka odredite moment tromosti štapa s obzirom na os koja prolazi jednim njegovim krajem.

Prema Steinerovu poučku slijedi:

$$I = I_{CM} + m d^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{m l^2}{3}$$

jer je, prema (6.16), $I_{CM} = \frac{m l^2}{12}$, a udaljenost osi $d = \frac{l}{2}$.

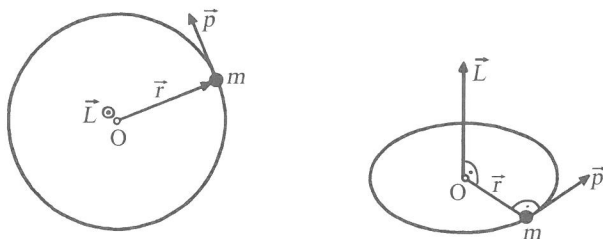
6.5. MOMENT KOLIČINE GIBANJA (KUTNA KOLIČINA GIBANJA)

Slično kao što smo jednadžbu gibanja (drugi Newtonov zakon) materijalne točke izrazili pomoću količine gibanja ($\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$), možemo rotaciju krutog tijela opisati pomoću momenta količine gibanja — veličine analogne količini gibanja.

Najprije ćemo definirati moment količine gibanja materijalne točke, a zatim ćemo izračunati moment količine gibanja krutog tijela koje rotira oko nepomične osi.

Moment količine gibanja $\vec{L}$ materijalne točke mase m i količine gibanja $\vec{p} = m \vec{v}$ s obzirom na referentnu točku O (npr. središte kružnice na sl. 6.6, koordinatno ishodište i sl.) definira se kao vektorski produkt radijusvektora $\vec{r}$ (koji spaja točku O i materijalnu točku) i količine gibanja:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad (6.20)$$



Slika 6.6. Moment količine gibanja čestice mase m koja se giba po kružnici

Znak jedinice momenta količine gibanja jest $\text{kg m}^2/\text{s}$. Smjer momenta količine gibanja određujemo, kao i smjer svakoga vektorskog produkta, pomoću pravila desne ruke. Moment količine gibanja čestice koja se giba po kružnici (sl. 6.6) često se zove orbitalni, jer se odnosi na orbitalno gibanje čestice. U slučaju kružnoga gibanja čestice, $\vec{L}$ ima isti smjer kao i $\vec{\omega}$.

Ova razmatranja za materijalnu točku mogu se proširiti i na kruto tijelo koje rotira oko nepomične osi (sl. 6.7). Podijelimo tijelo na materijalne točke mase Δm_i i brzine v_i . Udaljenost materijalne točke od osi rotacije jest r_i , dok je $\vec{r}_i$ radijusvektor od točke O, koja se nalazi na osi rotacije. Moment količine gibanja s obzirom na točku O jest $\Delta \vec{L}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i$. Projekcija je vektora $\vec{L}_i$ na os rotacije $\Delta L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$, jer je $v_i = r_i \omega$. Projekcija ukupnog momenta količine gibanja krutog tijela na os z dobije se zbrajanjem momenata svih čestica tijela:

$$L_z = \sum_i \Delta L_{zi} = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = I_z \omega \quad (6.21)$$

Ta relacija vrijedi za bilo koju nepomičnu os oko koje rotira kruto tijelo. Međutim, ako homogeno tijelo rotira oko svoje osi simetrije, tada ukupni moment količine gibanja $\vec{L}$ ima smjer kutne brzine $\vec{\omega}$, te osim relacije (6.21) vrijedi i:

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (6.22)$$

tj. $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ imaju isti smjer i leže na osi rotacije. Općenito, za nesimetrično tijelo smjer $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ ne mora biti jednak, relacija (6.22) više ne vrijedi, dok, naprotiv, relacija (6.21) vrijedi i za simetrična i za nesimetrična tijela.

Jednadžbu rotacije krutog tijela napisat ćemo pomoću momenta sile i momenta količine gibanja, slično kao što smo jednadžbu gibanja materijalne točke pisali pomoću sile i količine gibanja ($\vec{F} = d\vec{p}/dt$).

Vezu između vektora $\vec{M}$ i $\vec{L}$ za tijelo koje rotira oko nepomične osi možemo odrediti derivirajući izraz za moment količine gibanja krutog tijela. Neka je $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ moment količine gibanja jedne od materijalnih točaka tijela s obzirom na neku čvrstu točku O koja leži na osi rotacije. Deriviravši taj izraz po vremenu dobivamo:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_i \quad (6.23)$$

jer je

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i = \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i.$$

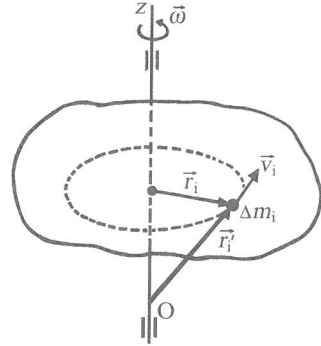
Zbrajanjem ukupnog momenta svih čestica tijela dobivamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{L}_i \right) = \sum_i \vec{M}_i,$$

odnosno:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (6.24)$$

gdje je $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ ukupni moment količine gibanja s obzirom na točku O, a $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$ ukupni moment vanjskih sila s obzirom na istu točku.



Slika 6.7. Uz izvod momenta količine gibanja krutog tijela

(Ukupni moment unutrašnjih sila jednak je nuli, jer je za svaki par sila $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ moment $\vec{M}_{ij} = \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{ij} = 0$ za svaku centralnu silu $\vec{F}_{ij}$ koja ima smjer $\vec{r}_j - \vec{r}_i$.)

Može se pokazati da jednačba (6.24), osim za rotaciju oko nepomične osi, vrijedi i za rotaciju oko osi koja prolazi kroz centar mase i učvršćena je u jednoj točki. Pri najopćenitijem gibanju tijela oko pomične osi relacija (6.24) nešto je složenija.

Jednačba (6.24) vrijedi i za projekciju vektora $\vec{M}$ i $\vec{L}$ na os rotacije z :

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad (6.25)$$

Uvrstimo li (6.24) u (6.25), dobivamo za rotaciju tijela oko nepomične osi:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha,$$

dakle jednačbu (6.8).

6.6. ZAKON OČUVANJA MOMENTA KOLIČINE GIBANJA

Moment vanjskih sila koje djeluju na kruto tijelo mijenja njegov moment količine gibanja prema jednačbi (6.24):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (6.24)$$

gdje je $\vec{M}$ vektorski zbroj momenata svih vanjskih sila s obzirom na neku točku, a $\vec{L}$ moment količine gibanja tog tijela s obzirom na istu točku. Relacija (6.24), koju smo izveli za kruto tijelo, vrijedi i za sistem čestica, te možemo općenito reći da je vremenska promjena ukupnog momenta količine gibanja sistema čestica s obzirom na neku točku jednaka ukupnom momentu vanjskih sila s obzirom na tu istu točku.

Ako je sistem zatvoren, odnosno ako na kruto tijelo ne djeluju vanjske sile (ili ako rezultatni moment vanjskih sila iščezava), tada iz (6.24) slijedi da je $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, odnosno

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.} \quad (6.26)$$

Unutrašnje sile ne mogu promijeniti moment količine gibanja sistema. To mogu učiniti samo vanjske sile ako im je moment različit od nule. U zatvorenom sistemu je moment količine gibanja očuvan.

U posebnom je slučaju, kad se mehanički sistem vrti oko nepomične osi z , ukupni moment količine gibanja dan izrazom (6.21)

$$L_z = I_z \omega.$$

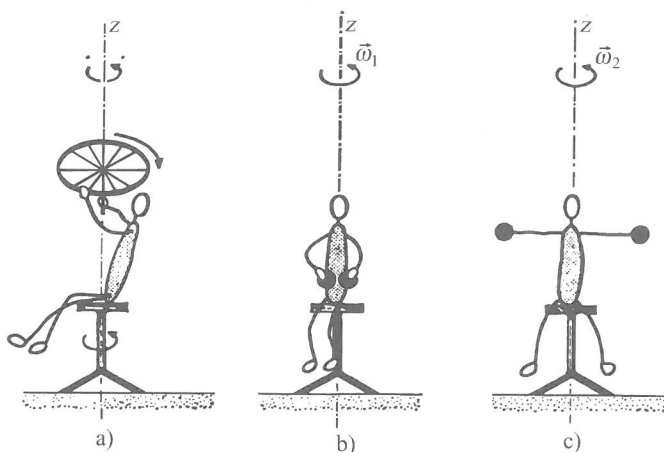
Ako je sistem izoliran, odnosno ako je komponenta ukupnog momenta vanjskih sila u smjeru osi z jednaka nuli, tada je:

$$L_z = I_z \omega = \text{konst.} \quad (6.27)$$

Ako je $I_z = \text{konst.}$ (kruto tijelo), iz (6.27) slijedi da je i $\omega = \text{konst.}$, tj. da kruto tijelo rotira oko čvrste osi stalnom kutnom brzinom. Naprotiv, ako se I_z mijenja za vrijeme vrtnje (npr. udaljavanjem pojedinih točaka sistema od osi rotacije), tada se i ω mijenja tako da bi $I_z \omega$ bilo konstantno. Unutrašnje sile mogu, dakle, mijenjati kutnu brzinu rotirajućeg sistema, premda pri tom L_z ostaje konstantan.

Pokusima na Prandtlovu stoliću možemo lijepo ilustrirati taj zakon. To je stolić koji se može vrtjeti, na kugličnim ležajima, oko vertikalne osi z . Čovjek koji sjedi na stoliću predstavlja dosta dobro izolirani sistem za koji vrijedi da je moment vanjskih sila s obzirom na os z jednak nuli, te je za takav sistem moment količine gibanja s obzirom na os z očuvan.

Čovjek koji sjedi na Prandtlovu stoliću može se zavrtjeti oko vertikalne osi ako rukom zarotira kotač bicikla u protivnom smjeru, kao što je pokazano na slici 6.8a.



Slika 6.8. Prandtlov stolić

Prije početka gibanja moment količine gibanja sistema (čovjek, stolić i kotač) jest nula, te ukupni $\vec{L}$ mora biti jednak nuli i za vrijeme vrtnje. Zbog toga se čovjek vrti u suprotnom smjeru od kotača da bi se moment količine gibanja kotača poništio s momentom količine gibanja čovjeka na stoliću:

$$\vec{L}_{\text{ukupni}} = \vec{L}_c + \vec{L}_k = 0 \quad (6.28)$$

$$\vec{L}_c = -\vec{L}_k$$

Na slici 6.8b i 6.8c prikazan je na stoliću čovjek koji na rukama ima utege da bi povećao masu ruku. Ako se vrti ruku priljubljenih uz tijelo, pa ruke naglo ispruži, njegova se kutna brzina smanji. Naprotiv, ako ruke ponovo priljubi uz tijelo, njegova se kutna brzina povećava.

Ako je I_{z1} moment inercije čovjeka s utezima priljubljenima uz tijelo, a I_{z2} moment inercije kada su ruke ispružene, tada zbog (6.27) možemo pisati:

$$I_{z1} \omega_1 = I_{z2} \omega_2 \quad (6.29)$$

te je, zbog $I_{z1} < I_{z2}$, $\omega_2 < \omega_1$.

Akrobati, plesači, klizači na ledu i sl. često se koriste tim zakonom očuvanja ukupnog momenta količine gibanja. Tako klizač na ledu priljubljuju ruku uz tijelo smanjuje moment inercije i time povećava brzinu vrtnje (pirueta). Kad se želi zaustaviti, širenjem ruku povećava moment tromosti i tako smanjuje kutnu brzinu.

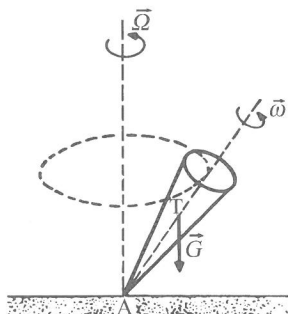
Zakon očuvanja momenta količine gibanja posebno je važan u proučavanju atoma i molekula, te ćemo se njime koristiti pri proučavanju strukture atoma.

6.7. GIBANJE ZVRKA

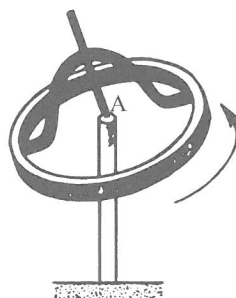
Do sada smo promatrali najjednostavniju rotaciju krutog tijela, rotaciju oko nepomične osi. Sada ćemo promatrati gibanje tijela učvršćenoga u jednoj točki, posebno gibanje zvrka.

Zvrk je rotaciono simetrično tijelo koje se vrlo brzo vrti oko svoje osi simetrije, pri čemu je stalno učvršćeno u jednoj točki koja leži na toj osi (sl. 6.9).

Promatrat ćemo kako moment vanjskih sila (npr. moment sile teže $\vec{M}_A = \vec{r}_A \times m \vec{g}$) utječe na gibanje zvrka. Pri tom ćemo razlikovati dva primjera: gibanje slobodnog zvrka ($\vec{M}_A = 0$) i gibanje zvrka kada se moment s obzirom na točku A razlikuje od nule (tzv. precesiju zvrka).



Slika 6.9. Zvrk



Slika 6.10. Slobodni zvrk

Slobodni zvrk. Neka je zvrk učvršćen (poduprt) u svom težištu (sl. 6.10). Ako je sila teža jedina vanjska sila koja djeluje na zvrk, tada je ukupni moment vanjskih sila jednak nuli ($\vec{M}_A = 0$), i kažemo da je zvrk slobodan.

Gibanje zvrka opisujemo jednačbom (6.24):

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

gdje je $\vec{M}_A$ rezultatni moment vanjskih sila, a $\vec{L}_A$ ukupni moment količine gibanja zvrka, oba s obzirom na točku A u kojoj je zvrk učvršćen.

Budući da je za slobodni zvrk $\vec{M}_A = 0$, iz jednačbe (6.24) izlazi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{ili} \quad \vec{L} = \text{konst.} \quad (6.30)$$

Smjer i iznos momenta količine gibanja konstantni su jer nema vanjskog momenta sile. Moment količine gibanja usmjeren je u ovom slučaju u pravcu osi rotacije, tj. ima smjer vektora $\vec{\omega}$ i iznosi:

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega},$$

gdje je I_z moment tromosti s obzirom na os zvrka, a ω kutna brzina rotacije zvrka oko osi simetrije. Ako je zvrk slobodan, $\vec{L} = \text{konst.}$, te i os zvrka ostaje stalna u prostoru.

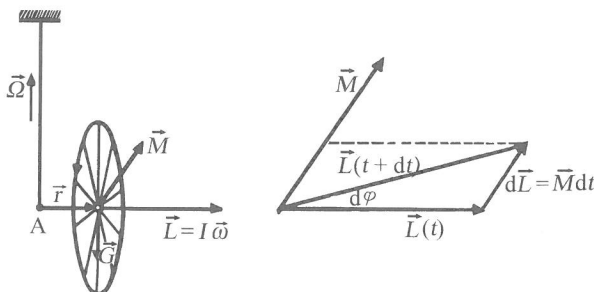
Os slobodnog zvrka zadržava stalan pravac u prostoru u odnosu prema inercijalnom referentnom sustavu, npr. koordinatnom sustavu prema zvijezdama. Pri rotaciji Zemlje oko njezine osi samo je Zemljina os nepomična, te slobodan zvrk ne mijenja os vrtnje s obzirom na sustav vezan za Zemlju samo onda kada se os vrtnje zvrka i Zemlje poklapaju.

Poseban način učvršćivanja zvrka u težištu zove se Cardanovo učvršćenje. Takav se zvrk može istodobno okretati oko tri okomite osi koje prolaze kroz težište, a izveden je tako da na nj ne djeluje nikakav vanjski moment. Tako učvršćeni zvrk stalno zadržava isti smjer svoje osi u prostoru ($\vec{L} = \text{konst.}$) bez obzira na to kako mi gibamo stalak zvrka. Naravno, trenje u težištima utjecat će na gibanje zvrka, i takav će se zvrk, prepušten sam sebi, nakon nekog vremena zaustaviti.

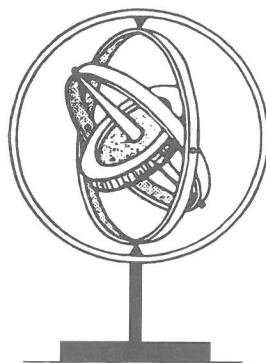
Precesija zvrka. Ako zvrk nije učvršćen u težištu, nego u nekoj drugoj točki A (kao na sl. 6.9), tada će na os zvrka stalno djelovati moment sile teže, i zvrk će izvoditi gibanje koje se zove precesija. Precesiju zvrka možemo ilustrirati ovim pokusom: kotač bicikla s produženom osovinom zavrtimo kutnom brzinom $\vec{\omega}$ i objesimo na užu tako da osovina zvrka bude horizontalna (sl. 6.12). Kada kotač prepustimo samome sebi, on ne padne, iako na nj djeluje sila teža, već izvodi precesiju. Os se zvrka zakreće, a težište zvrka giba se po kružnici.

Izračunajmo kutnu brzinu precesije zvrka (sl. 6.9. ili 6.12). Na zvrk djeluje moment sile koji nastaje zbog njegove težine $\vec{G} = m \vec{g}$:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{G} \quad (6.31)$$



Slika 6.12. Precesija zvrka



Slika 6.11. Cardanovo učvršćenje

i koji je okomit na vektore $\vec{r}_A$ i $\vec{G}$, tj. na os rotacije i smjer sile $\vec{G}$. Iznos je vektora $\vec{M}$.

$$M = G r_A \sin \alpha \quad (6.32)$$

gdje je α kut između vektora $\vec{G}$ i $\vec{r}$ ($\alpha = 90^\circ$ na sl. 6.12, a različit od 90° na sl. 6.9).

U ovoj približnoj teoriji gibanja zvrka možemo pretpostaviti da je moment količine gibanja zvrka $\vec{L}_A$ (s obzirom na točku A) u smjeru osi rotacije zvrka i da s njim polako precesira oko točke A. Ta pretpostavka je to opravdanija što se zvrk brže vrti oko svoje osi. Možemo, dakle, pretpostaviti da približno vrijedi relacija $\vec{L} = I \vec{\omega}$. U vremenskom intervalu dt moment količine gibanja $\vec{L}$ promijenit će se za određeni $d\vec{L} = \vec{M} dt$ i u trenutku $t + dt$ bit će $\vec{L} + d\vec{L}$ (sl. 6.12). Budući da je $\vec{M}$ uvijek okomit na $\vec{L}$, smjer od $\vec{L}$ stalno se mijenja, a njegov iznos ostaje konstantan: vrh vektora $\vec{L}$, dakle, opisuje kružnicu, odnosno zvrk precesira. (To je analogija kružnom gibanju u kojemu je sila $\vec{F}$ okomita na količinu gibanja $\vec{p}$.)

Os zvrka (kao i vektor momenta količine gibanja koji koindicira s osi) u vremenu dt opiše kut $d\varphi$, te je kutna brzina precesije:

$$\Omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|}{L dt} = \frac{M dt}{L dt} = \frac{M}{L} \quad (6.33)$$

Budući da je vektor $\vec{M}$ međusobno okomit na vektore $\vec{L}$ i $\vec{\Omega}$ formulu za kutnu brzinu precesije (6.33) možemo napisati u obliku vektorskog produkta:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (6.34)$$

Uzevši u obzir da je $L_z = I_z \omega$, kutnu brzinu precesije možemo pisati i ovako:

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega} \quad (6.35)$$

Formula (6.34) vrijedi i za precesiju zvrka na slici 6.9. Tu je kut α između $\vec{\Omega}$ i $\vec{L}$ različit od 90° , te je

$$M = \Omega L \sin \alpha \quad (6.36)$$

odnosno

$$\Omega = \frac{M}{L \sin \alpha} = \frac{mg r \sin \alpha}{L \sin \alpha} = \frac{mgr}{L} \quad (6.37)$$

dakle isto kao i u primjeru na slici 6.12.

Kutna brzina precesije upravo je razmjerna momentu sile, a obrnuto razmjerna momentu tromosti i kutnoj brzini zvrka. Kad je ω velika, tada je kutna brzina precesije Ω malena. Kako se s vremenom (zbog trenja) ω smanjuje, Ω se povećava.

Žirokompas se pod utjecajem Zemljine rotacije svojom osovinom postavlja u smjer meridijana. Uređaji žirohorizont i žirovertikala temelje se na gibanju zvrka i služe za mjerenje odstupanja od pravca leta aviona, raketa, itd. Principi na kojima se osnivaju konstrukcije tih instrumenata vrlo su različiti, ali se, u biti, koriste svojstvima zvrka razmotrenima u ovom odjeljku.

6.8. RAD I KINETIČKA ENERGIJA PRI ROTACIJI

Promatrajmo tijelo koje rotira kutnom brzinom ω oko nepomične osi z , koja prolazi kroz točku O okomito na ravninu slike 6.13. Na materijalnu točku mase dm_i pri tom djeluju unutrašnja sila $\vec{F}_{ui}$ i vanjska sila $\vec{F}_{vi}$, odnosno ukupna sila $\vec{F}_i = \vec{F}_{ui} + \vec{F}_{vi}$. Rad obavlja samo tangencijalna komponenta sile $\vec{F}_{it}$, koja ima smjer pomaka $d\vec{s}$.

$$dW = F_{it} ds_i = F_{it} r_i d\varphi \quad (6.38)$$

jer je $ds_i = r_i d\varphi$, gdje je $d\varphi$ kut za koji se tijelo zavrtjelo, a $\frac{d\varphi}{dt}$ kutna brzina vrtnje. Budući da je

$F_{it} r_i = M_{iz}$ komponenta momenta sile s obzirom na os rotacije, izraz za rad možemo pisati u obliku:

$$dW_i = M_{iz} d\varphi \quad (6.39)$$

Zbrojimo li doprinose po svim elementarnim masama, dobivamo elementarni rad koji sila izvrši na tijelo u vremenu dt :

$$dW = \Sigma dW_i = M_z d\varphi \quad (6.40)$$

gdje je M_z komponenta ukupnog momenta vanjskih sila, jer je zbroj svih momenata unutrašnjih sila jednak nuli, kao što smo pokazali u odjeljku 6.5. Relacija (6.40) analogna je izrazu $dW = F_s ds$ pri translaciji.

Pri rotaciji za kut φ rad je

$$W = \int_0^\varphi M_z d\varphi \quad (6.41)$$

Kinetičku energiju tijela koje rotira oko nepomične osi možemo odrediti tako da uzmemo u obzir da se taj rad (6.41) pretvara u rotacionu kinetičku energiju:

$$dE_k = dW = M_z d\varphi = I_z \alpha \omega dt = I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega,$$

odnosno

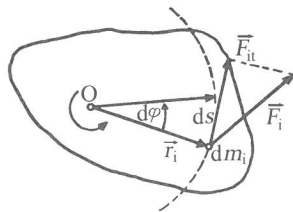
$$E_k = \int_0^\omega I_z \omega d\omega = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (6.42)$$

Taj izraz možemo dobiti i tako da izračunamo kinetičku energiju materijalne točke tijela Δm_i i zbrojimo po svim točkama na koje smo tijelo podijelili.

Kada se tijelo vrti oko nepomične osi, brzina bilo koje njegove točke jest $v_i = r_i \omega$, gdje je ω kutna brzina rotacije, a r_i udaljenost točke od osi rotacije, te je kinetička energija te točke $E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$. Kinetička energija krutog tijela jednaka je zbroju kinetičkih energija svih točaka:

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (\Delta m_i r_i^2) = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (6.43)$$

jer je $\sum_i (\Delta m_i r_i^2)$ moment tromosti tijela s obzirom na os z .



Slika 6.13. Izračunavanje rada pri rotaciji

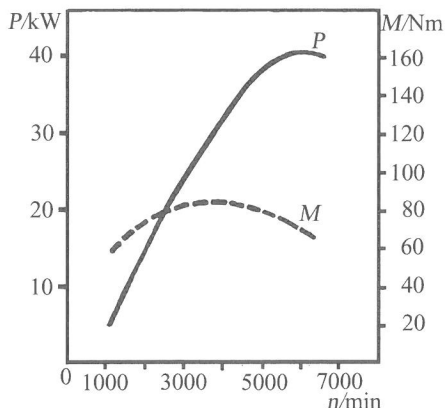
Tako smo na dva načina izveli da kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom ω oko nepomične osi z iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (6.44)$$

Uočite analogiju tog izraza s izrazom za kinetičku energiju translacije $E_k = \frac{1}{2} m v^2$.

Snaga je pri rotaciji:

$$P = \frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega \quad (6.45)$$



Slika 6.14. Ovisnost snage i zakretnog momenta automobilskeg motora o broju okretaja

Snaga je jednaka umnošku komponente momenta sile s obzirom na os rotacije z i kutne brzine tijela ω . Može se pokazati da općenito vrijedi relacija $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$, tj. da je snaga skalarni produkt ukupnog momenta vanjskih sila i vektora kutne brzine, analogno kao što je snaga pri translaciji bila jednaka skalarnom produktu sile i brzine tijela ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$).

Na slici 6.14. prikazana je ovisnost snage i zakretnog momenta automobilskeg motora o broju okretaja. Za svaki ω snaga je dana relacijom (6.45), međutim zakretni moment je funkcija kutne brzine ω , pa je u ovom primjeru zakretni moment maksimalan na 3 500 o/min, a snaga maksimalna na 5 500 o/min.

Primjer

Puni valjak počne se kotrljati bez klizanja s vrha kosine visoke $h = 2$ m koja zatvara kut $\beta = 30^\circ$ prema horizontali. Kolika je brzina i akceleracija centra mase valjka na dnu kosine? Kolika bi bila brzina kad bi valjak klizio bez trenja?

I način: Zadatak ćemo najprije riješiti primjerom drugog Newtonova zakona za translaciju centra mase i rotaciju valjka. Na valjak djeluje sila teža $\vec{mg}$, sila podloge $\vec{F}_N$, i sila trenja. Rastavimo li te sile u komponente paralelno i okomito na kosinu, možemo pisati

$$F_x = mg \sin \beta - F_{tr} = m a$$

$$F_y = F_N - mg \cos \beta = 0.$$

Za rotaciju oko osi kroz centar mase momenti svih sila osim sile trenja iščezavaju. Moment sile trenja s obzirom na os kroz centar mase je:

$$M = F_{tr} R.$$

Jednadžba rotacije, dakle, glasi:

$$M = F_{tr} R = I \alpha,$$

gdje je R polumjer valjka, $I = \frac{m R^2}{2}$ moment tromosti valjka, a $\alpha = \frac{a}{R}$ kutna akceleracija. Odatle je

$$F_{tr} = \frac{I \alpha}{R} = \frac{m a}{2}$$

i

$$a = \frac{2}{3} g \sin \beta = 3,3 \text{ m/s}^2.$$

Iz $v^2 = 2 a s = \frac{2 a h}{\sin \beta}$ dobivamo brzinu valjka na dnu kosine:

$$v = \sqrt{\frac{4 g h}{3}} = 5,1 \text{ m/s}.$$

Iz $F_{tr} = \mu F_N = \mu m g \cos \beta = \frac{m a}{2}$ slijedi da mora biti $\mu \geq \frac{\tan \beta}{3} = 0,19$ ako se želi dobiti čisto kotrljanje bez klizanja.

II način: Zadatak se može riješiti i pomoću zakona o očuvanju energije. Na vrhu kosine prije početka gibanja kinetička energija je nula a potencijalna $m g h$, te je ukupna mehanička energija $m g h$. Kako se valjak kotrlja niz kosinu, potencijalna energija se pretvara u kinetičku, tako da je na dnu kosine potencijalna energija nula, a kinetička $m g h$. (Kada se tijelo kotrlja bez klizanja, iako postoji sila trenja, ukupna energija je ipak sačuvana jer je sila trenja, koja je paralelna podlozi, stalno okomita na pomak i — zbog toga je njen rad nula.) Kinetička energija pri kotrljanju je zbroj kinetičke energije translacije centra mase i kinetičke energije rotacije tijela

$$E_k = \frac{m v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}.$$

Zakon očuvanja mehaničke energije daje

$$m g h = \frac{m v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}. \quad (1)$$

Budući da je moment tromosti valjka $I = \frac{m R^2}{2}$, a za kotrljanje bez klizanja $\omega = v/R$, to iz (1) dobivamo

$$v = \sqrt{\frac{4 g h}{3}} = 5,1 \text{ m/s}.$$

Deriviranjem $v^2 = \frac{4 g h}{3} = \frac{4}{3} g s \sin \beta$, gdje je s pređeni put, dobivamo:

$$2 v \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} g \frac{ds}{dt} \sin \beta = \frac{4}{3} g v \sin \beta,$$

odnosno

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{2}{3} g \sin \beta = 3,3 \text{ m/s}^2.$$

U slučaju da valjak klizi niz kosinu bez trenja, zakon održanja mehaničke energije glasi

$$m g h = \frac{m v^2}{2},$$

te je brzina

$$v = \sqrt{2gh} = 6,3 \text{ m/s},$$

odnosno akceleracija

$$a = g \sin \beta = 4,9 \text{ m/s}^2.$$

Kotrljanje možemo u bilo kojem trenutku shvatiti kao rotaciju oko točke dodira A koja je stalno nepomična. Prema takvom gledištu, ukupna kinetička energija je kinetička energija rotacije oko osi koja prolazi kroz A i tangencijalna je na plašt valjka.

Prema Steinerovom poučku, moment tromosti je $I_A = \frac{m R^2}{2} + m R^2 = \frac{3 m R^2}{2}$ te je

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m R^2 \cdot \omega^2 = \frac{3}{4} m R^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v^2,$$

odnosno

$$m g h = \frac{3}{4} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 5,1 \text{ m/s}.$$

Princip virtualnog rada. Vanjska sila koja djeluje na kruto tijelo ili sistem tijela može proizvesti translaciju i rotaciju tijela te izvršiti određeni rad nad tijelom:

$$dW = \Sigma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \Sigma \vec{M} d\vec{\varphi} \quad (6.46)$$

gdje je $d\vec{r}$ i $d\vec{\varphi}$ linearni i kutni pomak materijalne točke tijela. (Kutni pomak $d\vec{\varphi}$ možemo smatrati vektorom čiji je smjer u smjeru kutne brzine rotacije tijela.) Da bi tijelo bilo u ravnoteži, ukupni rad vanjskih sila pri bilo kakvoj zamišljenoj (virtualnoj) maloj promjeni položaja mora biti jednak nuli. Uvjet ravnoteže možemo, dakle, izraziti uvjetom:

$$\delta W = 0, \quad \Sigma \vec{F} \delta\vec{r} + \Sigma \vec{M} \delta\vec{\varphi} = 0 \quad (6.47)$$

tj. virtualni rad za bilo koji virtualni pomak jednak $\delta\vec{r}$, odnosno $\delta\vec{\varphi}$ mora biti nula. (Elementarne virtualne pomake označavamo sa δ .) Relacija (6.47) ispunjena je samo ako je:

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\Sigma \vec{M} = 0 \quad (6.48)$$

a te smo uvjete za ravnotežu već dobili, na drugi način, i u poglavlju *Statika*. Princip virtualnog rada često nam omogućuje rješavanje problema ravnoteže krutog tijela, odnosno sistema tijela. Pomaci su pri tom virtualni i zapravo ne postoje, već ih samo zamišljamo da bismo od svih mogućih položaja tijela izabrali pravi ravnotežni položaj.

PITANJA I ZADACI

1. Što je kruto tijelo? Kako se može gibati kruto tijelo? Napišite jednadžbu za njegovo najopćenitije gibanje.
2. Izvedite jednadžbu rotacije krutog tijela oko nepomične osi.
3. Što je moment tromosti krutog tijela s obzirom na neku os?

4. Izračunajte moment tromosti tankog prstena s obzirom na os simetrije.
5. Što kaže Steinerov poučak? Odredite moment tromosti tankog štapa mase m i duljine d s obzirom na os kroz centar mase i na paralelnu os koja prolazi krajem štapa.
6. Kako se definira moment količine gibanja: a) materijalne točke koja se giba po kružnici i b) krutog tijela što rotira oko neke nepomične osi?
7. Kakva je veza između momenta sile i momenta količine gibanja?
8. Što kaže zakon očuvanja momenta količine gibanja? Kako se on može prikazati pokusima na Prandtlovu stoliću?
9. Što je zvrk? Objasnite gibanje slobodnog zvrka.
10. Objasnite precesiju zvrka. Izračunajte kutnu brzinu precesije.
11. Promatrajte kotrljanje kugle niz kosinu. Izračunajte akceleraciju centra mase.
12. Koliki je rad momenta sile pri rotaciji krutog tijela?
13. Kako se izračunava kinetička energija krutog tijela koje rotira oko nepomične osi?
14. O čemu ovisi snaga pri rotaciji?
15. Kolotur Atwoodova padostroja (v. sl. 3.2) je u obliku diska mase 0,3 kg i polumjera 0,1 m. Preko njega je prebačena tanka žica na čijim krajevima vise utezi mase 0,18 kg i 0,22 kg. Izračunajte akceleraciju utega i napetosti niti. Zanemarite masu žice i trenje u osovinu kolotura.
16. Tanak, šuplji valjak počne se kotrljati, bez klizanja, s vrha kosine visoke 2 m koja zatvara kut $\rho = 30^\circ$ prema horizontali. Kolika je brzina i akceleracija centra mase valjka pri dnu kosine?
17. Izračunajte moment tromosti valjka mase 4 kg i polumjera 0,1 m s obzirom na os koja je paralelna osi simetrije, a od nje udaljena 0,6 m.
18. Prema Bohrovu modelu, vodikov atom sastoji se od protona oko kojega se po kružnici polumjera $0,5 \cdot 10^{-10}$ m elektron giba brzinom $2,2 \cdot 10^6$ m/s. Izračunajte moment količine gibanja elektrona.
19. Kolika je ukupna kinetička energija prstena koji se kotrlja ako mu je kinetička energija rotacije 100 J?
20. Koliki je zakretni moment automobilskeg motora koji pri 3 600 o/min razvija snagu 29 kW?
21. Izračunajte moment tromosti dvoatomne molekule s obzirom na os koja je okomita na spojnici atoma i prolazi kroz centar mase molekule. Pretpostavite da su atomi materijalne točke i međusobno udaljeni za r . Primijenite dobiveni rezultat na molekulu HCl uz pretpostavku da je $r = 1,3 \cdot 10^{-10}$ m.
22. Izvedite izraz za moment tromosti a) šupljeg valjka b) punog homogenog valjka mase m i polumjera R s obzirom na os okomitu na bazu valjka koja prolazi kroz centar mase.
23. Izračunajte moment tromosti kugle mase 8 kg i promjera 0,4 m u odnosu na os koja je udaljena 0,6 m od njenog središta.
24. Na rubu homogene okrugle ploče polumjera 0,2 m i mase 4 kg, koja se vrti kutnom brzinom od 10 rad/s oko osi koja prolazi središtem ploče, počne djelovati stalna tangencijalna sila trenja od 0,5 N. Nakon koliko okreta će se ploča zaustaviti?
25. Homogeni valjak od aluminijskog polumjera 2 cm i visine 10 cm rotira oko svoje uzdužne osi kutnom brzinom 2π rad/s. Izračunajte moment količine gibanja valjka.
26. Čestica mase 2 kg giba se brzinom $\vec{v}/(\text{ms}^{-1}) = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Koliki je moment količine gibanja čestice s obzirom na ishodište u trenutku kada joj je vektor položaja $\vec{r}/\text{m} = (3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$?
27. Horizontalno položena platforma oblika diska, polumjera 2 m okrene se jednom u vremenu 3 s oko vertikalne osi koja prolazi središtem platforme. Na njenom rubu je dječak mase 50 kg. Kolika će biti frekvencija vrtnje, ako se dječak premjesti s ruba platforme na udaljenost 1 m od osi. Masa platforme je 150 kg.
28. Puni valjak i prsten jednakih masa i polumjera slobodno se kotrljaju niz kosinu. Kako se odnose njihove brzine na dnu kosine ako su krenuli iz mirovanja s vrha kosine?
29. Homogena kugla kotrlja se brzinom 5 m/s. Koliko će se visoko popeti i koliki će put prevaliti ako se počne kotrljati uz kosinu nagiba 45° ?

7. INERCIJSKI I NEINERCIJSKI SUSTAVI

7.1. UVOD

Da bismo opisali neko gibanje, moramo odabrati određeni koordinatni sustav i proučavati gibanje relativno prema njemu. Vektor položaja, brzina i akceleracija materijalne točke ovise o izboru referentnog sustava, pa se mijenjaju s prelaskom iz jednog sustava u drugi sustav. Obično se pri proučavanju gibanja odabire referentni sustav vezan za Zemljinu površinu (npr. laboratorij), ali se mogu izabrati i drugi sustavi koji se, u odnosu prema laboratorijskom, gibaju bilo jednoliko, bilo ubrzano. U ovom ćemo poglavlju razmotriti različite referentne sustave i odrediti transformacije koje ih povezuju.

Vanjske sile koje djeluju na tijelo ovise samo o međusobnom položaju tijela i okoline, a ne o izboru sustava. Budući da drugi Newtonov sustav zakon kaže da je akceleracija razmjerna sili, taj zakon ima isti oblik u svim sustavima u kojima je akceleracija tijela jednaka. To su inercijski referentni sustavi koji se jedan u odnosu prema drugome gibaju jednoliko pravocrtno. Izvest ćemo Galileijeve transformacije koje povezuju koordinate i brzine u dva takva inercijska sustava i pokazati da za inercijske sustave vrijedi Galileijevo načelo relativnosti.

Sustavi koji se gibaju ubrzano s obzirom na neki inercijski sustav jesu neiner-cijski. Za njih ne vrijede Newtonovi zakoni. Međutim, uvođenjem inercijskih sila, možemo i u ubrzanim sustavima primijeniti drugi Newtonov zakon u istom obliku kao i u inercijskim. Nakon uvođenja inercijske sile u jednoliko ubrzanom sustavu, razmatrat ćemo sustav koji jednoliko rotira i izvesti dvije inercijske sile što se pojavljuju u takvom sustavu: centrifugalnu i Coriolisovu silu.

7.2. INERCIJSKI SUSTAVI. GALILEIJEV PRINCIP RELATIVNOSTI

Pri opisivanju gibanja pogodno je izabrati takav koordinatni sustav u kojemu vrijede Newtonovi zakoni. Proučavamo li npr. slobodni pad u vlaku koji se giba jednoliko pravocrtno, dobit ćemo iste rezultate kao i pri proučavanju slobodnog pada u našem laboratoriju. Naprotiv, u vlaku koji se ubrzava ili usporava, pojave se ne događaju na jednak način kao u vlaku koji se giba konstantnom brzinom $\vec{v}$. Tako se kuglica koja miruje na stolu u laboratoriju neće pokrenuti sve dok na nju ne djelujemo nekom silom: kažemo da za nju vrijedi prvi Newtonov zakon inercije ($\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$).

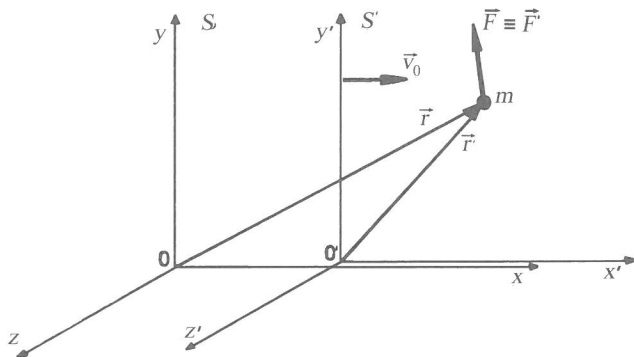
Naprotiv, ista kuglica u vlaku koji koči dobit će određenu akceleraciju prema naprijed iako na nju ne djeluju druga tijela. Za tijela u ubrzanim sustavima ne vrijedi prvi Newtonov zakon: iako ne djeluje vanjska sila, tijelo se ubrzava.

U odjeljku 3.2. uočili smo da se sustavi u kojima vrijede Newtonovi zakoni, posebno prvi Newtonov zakon inercije, zovu inercijski sustavi. Ako je sustav S inercijski, tada je inercijski svaki drugi sustav S' , koji u odnosu prema njemu miruje ili se jednoliko pravocrtno giba.

Promatrajmo dva inercijska sustava S i S' (sl. 7.1) koji se jedan prema drugome gibaju konstantnom brzinom $\vec{v}_0$. Radi jednostavnosti pretpostavimo da su to pravokutni Kartezijevi koordinatni sustavi čije se osi x i x' poklapaju, a osi y i z paralelne su osi y' i z' . U početnom trenutku $t = t' = 0$ sustavi se poklapaju, tj. ishodišta O i O' su u istoj točki.

Položaj materijalne točke u referentnom sustavu **S** određen je radijusvektorom $\vec{r}$, a u referentnom sustavu **S'** radijusvektorom $\vec{r}'$ dok su ishodišta sustava povezana vektorom $\vec{r}_0$. Vektori položaja, s obzirom na sustav **S** i **S'**, povezani su relacijom:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 \quad (7.1)$$



Slika 7.1. Izvod iz Galileijevih transformacija

Promatrači u oba sustava sinhroniziraju svoje satove tako da pokazuju isto vrijeme u oba sustava, tj.

$$t = t'.$$

Deriviravši relaciju (7.1) po vremenu, dobivamo vezu među brzinama u sustavima **S** i **S'**:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \quad (7.2)$$

gdje je $\vec{v}$ brzina u sustavu **S**, $\vec{v}'$ brzina u sustavu **S'**, a $\vec{v}_0$ brzina sustava **S'** prema sustavu **S**.

Ponovnim deriviranjem dobivamo relaciju za akceleracije:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (7.3)$$

gdje je $\vec{a}$ akceleracija tijela u sustavu **S** i $\vec{a}'$ akceleracija tijela u sustavu **S'**.

Te relacije, umjesto u vektorskom obliku, možemo izraziti i pomoću komponenta:

$$\begin{aligned} x &= x' + v_0 t & v_x &= v'_x + v_0 \\ y &= y' & v_y &= v'_y \\ z &= z' & v_z &= v'_z \\ t &= t' \end{aligned} \quad (7.4)$$

Relacije (7.3) i (7.4) poznate su Galileijeve transformacije za koordinate, brzine i akceleracije materijalne točke u inercijskim sustavima **S** i **S'**.

Te su relacije očite iz slike 7.1, i iz svakodnevnog iskustva. Metarske se vrpce ne mijenjaju ako se jedna prema drugoj relativno gibaju, satovi pokazuju isto vrijeme bez obzira miruju li ili se relativno gibaju jedan prema drugome.

Za klasičnog fizičara sat na tlu i isti takav sat u vlaku koji se giba konstantnom brzinom $\vec{v}$ pokazuju isto vrijeme; gibanje ne utječe na vrijeme i prostor, dužinski i vremenski intervali su apsolutni i ne ovise o koordinatnom sustavu. To su vrlo logične pretpostavke sa stajališta klasične fizike. Međutim, u relativističkoj mehanici, za brzine usporedive s brzinom svjetlosti, relacije (7.4) imaju drukčiji oblik, o čemu ćemo detaljnije govoriti u 9. poglavlju.

Ako na materijalnu točku u sustavu S djeluje sila $\vec{F}$, tada je prema drugomu Newtonovu zakonu, $\vec{F} = m\vec{a}$. Kako je $\vec{a} = \vec{a}'$, a masa m ne ovisi o brzini, to je u sustavu S' :

$$\vec{F}' = m'\vec{a}' = m\vec{a} = \vec{F} \quad (7.4a)$$

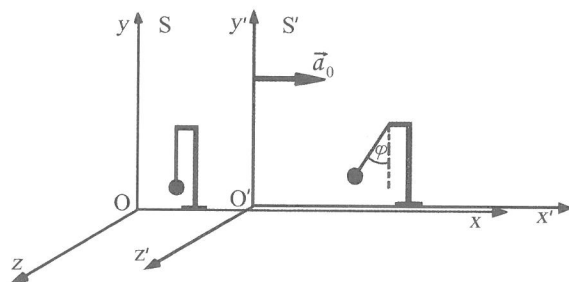
Drugi Newtonov zakon u oba inercijalna sustava ima, dakle, isti oblik.

Iz tih i sličnih razmatranja zaključujemo da Newtonovi zakoni imaju isti oblik u svim inercijalnim sustavima; oni su invarijantni s obzirom na Galilejeve transformacije. Budući da se iz Newtonovih zakona izvode ostali zakoni mehanike, slijedi da svi zakoni mehanike imaju isti oblik u svim inercijalnim sustavima. Svi inercijalni sustavi međusobno su, dakle, jednako vrijedni, ekvivalentni. Ni na koji način ne možemo pokusima ustanoviti koji sustav miruje, a koji se jednoliko giba. Svaki od njih možemo smatrati „apsolutno” mirnim, što znači da nema apsolutno mirnog sustava. To je poznati Galilejev princip relativnosti koji vrijedi u klasičnoj mehanici.

7.3. JEDNOLIKO UBRZANI SUSTAVI. INERCIJALNE SILE

U odjeljku 7.2. ustanovili smo da Newtonovi zakoni vrijede u svim inercijalnim sustavima. Tako se tijelo na koje ne djeluju vanjske sile giba konstantnom brzinom $\vec{v}$. To međutim ne vrijedi u ubrzanim sustavima; u njima ne vrijede Newtonovi zakoni. Kada, npr., vlak ili automobil ubrzava, osjećamo silu prema natrag, dok pri kočenju djeluje sila prema naprijed. Te sile ne nastaju zbog djelovanja drugih tijela, već zbog neinercijalnosti sustava, a nazivamo ih inercijalnim silama. (Ponekad se te sile zovu i fiktivne, odnosno pseudosile, da bi se istakla razlika prema silama nastalima međudjelovanjem s drugim tijelima.)

Neka se neinercijalni sustav S' giba translatorno prema inercijalnom sustavu S konstantnom akceleracijom $\vec{a}_0$ (sl. 7.2). Položaj materijalne točke u sustavu S određen je koordinatama x, y, z , a u sustavu S' koordinatama x', y', z' . Brzina



Slika 7.2. Jednoliko ubrzani sustav

i akceleracija tijela u sustavu **S** jesu $\vec{v}$ i $\vec{a}$, a u sustavu **S'** jesu $\vec{v}'$ i $\vec{a}'$. Vezu između veličina u sustavu **S** i sustavu **S'** možemo u ovom posebnom primjeru izvesti ovako:

$$\begin{aligned}x' &= x - v_0 t - \frac{a_0}{2} t^2 \\y' &= y & v'_x &= v_x - v_0 - a_0 t \\z' &= z & a'_x &= a_x - a_0 \\t' &= t\end{aligned}\tag{7.5}$$

Taj rezultat možemo proširiti i na općenit slučaj kada se sustav **S'** prema sustavu **S** giba stalnom akceleracijom $\vec{a}_0$, a akceleraciju tijela u sustavu **S'** izraziti relacijom:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0\tag{7.6}$$

Ako je rezultanta vanjskih sila koje djeluju na tijelo jednaka $\vec{F}$, tada drugi Newtonov zakon u sustavu **S** glasi $\vec{F} = m \vec{a}$. U ubrzanom sustavu **S'** taj zakon prelazi u:

$$m \vec{a}' = m (\vec{a} - \vec{a}_0) = m \vec{a} - m \vec{a}_0 = \vec{F} - m \vec{a}_0\tag{7.7}$$

Čak i onda kad je rezultanta vanjskih sila jednaka nuli, tijelo će se s obzirom na sustav **S'** gibati ubrzano kao da na nj djeluje sila $-m \vec{a}_0$. Tu silu, koju, za razliku od vanjske, „prave” sile $\vec{F}$, ne uzrokuje djelovanje drugog tijela, nego je posljedica ubrzanja referentnog sustava, zovemo inercijalnom silom:

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}_0\tag{7.8}$$

Drugi Newtonov zakon imat će formalno isti oblik i u ubrzanom sustavu samo ako silama koje nastaju zbog djelovanja drugih tijela dodamo i inercijalnu silu, što nastaje zbog neinercijalnosti sustava. Dakle, za sustav **S'** drugi Newtonov zakon glasi:

$$m \vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i\tag{7.9}$$

Kao primjer djelovanja inercijalnih sila promotrimo sustav vezan za dizalo koje se ubrzano giba sa stalnom akceleracijom $\vec{a}_0$ prema gore, odnosno prema dolje (sl. 7.3). Na stropu dizala visi uteg na dinamometru.

Kada dizalo miruje ili se giba jednoliko po pravcu (sl. 7.3a), dinamometar pokazuje težinu utega, koja je jednaka sili teži, tj. $G = mg$. (Uzgon u zraku pri tom zanemarujemo.) Ubrzava li se dizalo prema gore s akceleracijom $\vec{a}_0$ (sl. 7.3b), dinamometar pokazuje više nego kad dizalo miruje. Na tijelo osim vanjskih sila (sile teže $\vec{G}$ i sile opruge $\vec{F}_{op}$) u ubrzanom sustavu vezanome za dizalo djeluje i inercijalna sila $\vec{F}_i = -m \vec{a}_0$ (koja u ovom slučaju djeluje prema dolje), te je drugi Newtonov zakon napisan za taj sustav:

$$m \vec{a}' = \vec{F}' = \vec{F}_{op} + \vec{F}_G + \vec{F}_i = 0\tag{7.10}$$

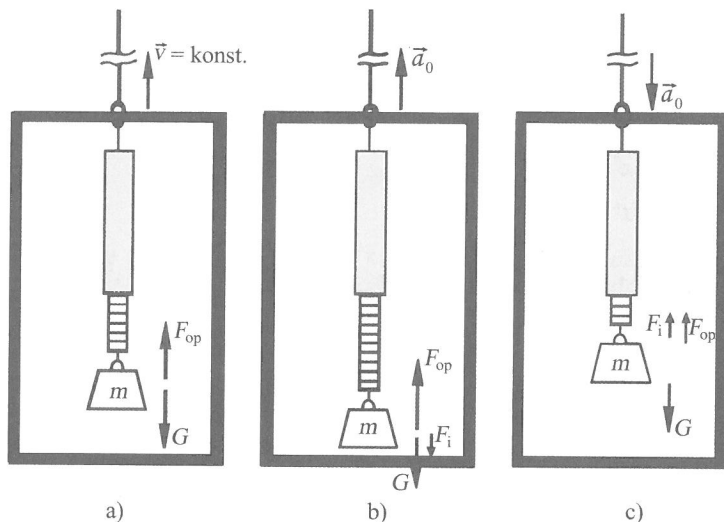
Odatle je težina tijela:

$$\vec{G}' = -\vec{F}_{op} = \vec{F}_G + \vec{F}_i = m \vec{g} - m \vec{a}_0\tag{7.11}$$

ili, pisano skalarno,

$$G' = mg + m a_0\tag{7.12}$$

Giba li se dizalo ubrzano vertikalno prema dolje s akceleracijom $\vec{a}_0$ (sl. 7.3c), inercijalna sila usmjerena je prema gore, te je sada sila na tijelo manja i iznosi



Slika 7.3. Ubrzani sustav vezan za dizalo

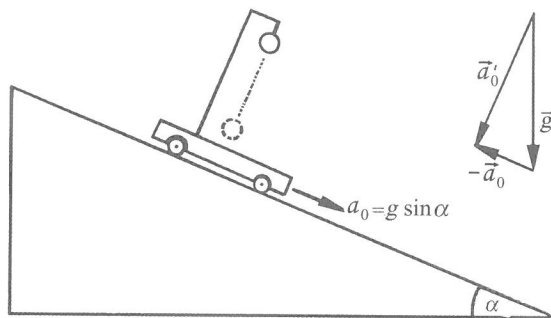
$mg - ma_0$. Budući da je težina tijela (tj. sila kojom tijelo djeluje na objesište) po iznosu jednaka toj sili, zaključujemo da će težina tijela u ovom slučaju biti:

$$G'' = mg - ma_0 = m(g - a_0) \quad (7.13)$$

Ako dizalo slobodno pada, $G'' = 0$, i tijela u tom sustavu su bez težine.

Kolica koja se spuštaju niz kosinu također su primjer ubrzanog sustava. Ako je trenje zanemarivo, akceleracija $a_0 = g \sin \alpha$ i usmjerena je niz kosinu. Drugi Newtonov zakon za tijelo koje, npr., slobodno pada u tom sustavu ima oblik:

$$m\vec{a}' = m\vec{g} - m\vec{a}_0 \quad (7.14)$$



Slika 7.4. Ubrzani sustav vezan za kolica koja se gibaju niz kosinu

tako da je akceleracija tijela:

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_0 \quad (7.15)$$

Uzevši u obzir smjer i iznos $\vec{a}_0$, dobivamo da je $a' = g \cos \alpha$, gdje je α kut nagiba kosine.

Pogledajmo kako visi visak obješen na stropu vozila koje se ubrzava. Položaj viska više nije vertikalni, kao pri jednolikom gibanju vozila po pravcu, već u smjeru vektora $\vec{g} - \vec{a}_0$ i zatvara kut φ s vertikalom, tako da je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m a_0}{m g} = \frac{a_0}{g} \quad (7.16)$$

Mjerenjem kuta φ može se odrediti akceleracija vozila. Slično je i s viskom na kolicima koja se spuštaju niz kosinu.

Inercijalne sile treba uvesti samo ako promatramo gibanje u neinercijalnom sustavu. Kada to isto gibanje promatramo u inercijalnom sustavu, te se sile ne pojavljuju. Promatramo li, npr., tijelo u dizalu koje se giba s akceleracijom $\vec{a}_0$ prema gore (sl. 7.3b), ali sada u inercijalnom sustavu vezanom za laboratorij, jednadžba je gibanja tijela:

$$m \vec{a}_0 = m \vec{g} + \vec{F}_{op} \quad (7.17)$$

gdje je $\vec{F}_{op}$ sila kojom opruga dinamometra djeluje na tijelo. Težina tijela, tj. sila kojom tijelo djeluje na dinamometar jest, prema trećem Newtonovu zakonu, jednaka $-\vec{F}_{op}$, te je

$$\vec{G}' = -\vec{F}_{op} = m \vec{g} - m \vec{a}_0 \quad (7.18)$$

Dakle, dobili smo isti rezultat (7.11) kao i pri razmatranju u neinercijalnom sustavu.

Primjer

Kolikom silom čovjek mase 70 kg djeluje na pod lifta kada se lift a) diže konstantnom brzinom, b) diže akceleracijom 1 m/s^2 i c) spušta akceleracijom 1 m/s^2 ?

I način: Rješavanje zadatka s gledišta promatrača iz inercijalnog sustava vezanog za površinu Zemlje.

a) Na čovjeka u liftu djeluju dvije sile: sila teža $\vec{G} = m \vec{g}$ i reakciona sila poda $\vec{F}_N$.

Sila kojom čovjek djeluje na pod lifta po iznosu je jednaka reakcionoj sili $\vec{F}_N$ ali suprotnog smjera. Kada lift miruje ili se giba jednoliko po pravcu ($a = 0$), ove dvije sile se uravnotežuju:

$$\vec{F}_N + \vec{G} = 0,$$

te je $F_N = G = mg = 687 \text{ N}$. Dakle u prvom slučaju čovjek djeluje na pod lifta silom 687 N.

b) Giba li se lift jednoliko ubrzano, Newtonov zakon primijenjen na čovjeka koji se nalazi u tom liftu glasi:

$$m \vec{a} = \vec{F}_N + \vec{G}$$

Odaaberemo li pozitivni smjer vertikalno nagore, ta se jednadžba može pisati skalarno ovako:

$$m a = F_N - m g.$$

Odatle je

$$F_N = m(g + a) = 757 \text{ N}.$$

Kada se lift giba jednoliko ubrzano nagore akceleracijom 1 m/s^2 , čovjek pritišće pod lifta silom 757 N .

c) U slučaju da se lift spušta jednoliko ubrzano prema dolje, akceleraciju uzimamo kao negativnu, te je

$$F_N = m(g - a) = 617 \text{ N}.$$

II način: Rješavanje zadatka s gledišta promatrača koji se nalazi u ubrzanom (neinercijalnom) sustavu:

U sustavu vezanom za lift drugi Newtonov zakon glasi:

$$m \vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i,$$

gdje je m masa čovjeka, $\vec{a}'$ akceleracija čovjeka s obzirom prema liftu, $\vec{F}$ rezultanta vanjskih sila koje djeluju na čovjeka, a $\vec{F}_i$ inercijalna sila koja je jednaka $-m\vec{a}_0$. Budući da je $\vec{a}' = 0$, to je u slučaju b):

$$F_N - G - m a_0 = 0,$$

odnosno

$$F_N = m(g + a_0) = 757 \text{ N}.$$

Slično dobivamo za slučaj c)

$$F_N - G + m a_0 = 0,$$

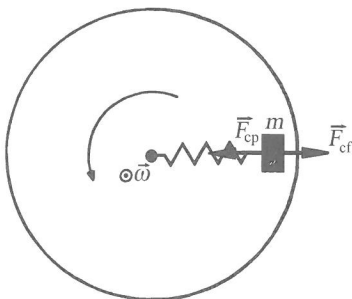
odnosno

$$F_N = m(g - a_0) = 617 \text{ N}.$$

Uočite da smo u svim slučajevima pisali jednadžbu gibanja čovjeka i računali silu kojom pod lifta djeluje na čovjeka; tražena sila $\vec{F}'_N$ kojom čovjek djeluje na pod po iznosu je jednaka — prema trećem Newtonovu zakonu — izračunatoj sili $\vec{F}_N$, ali suprotnog smjera.

7.4. ROTIRAJUĆI SUSTAV. CENTRIFUGALNA I CORIOLISOVA SILA

Drugi primjer neinercijalnog sustava koji ćemo razmotriti jest sustav S' koji jednoliko rotira konstantnom kutnom brzinom ($\vec{\omega} = \text{konst.}$) s obzirom na neki inercijalni sustav S . Neka oba sustava imaju isto ishodište. Takav sustav može



Slika 7.5. Rotirajući sustav

biti, npr., vezan za ploču (disk) koja rotira oko osi z' okomite na ploču kroz njezino središte, kao što je prikazano na slici 7.5. Neka je predmet (npr. kuglica) mase m pričvršćen za središte ploče pomoću opruge. Dok ploča rotira kutnom brzinom ω opruga je nategnuta silom $\vec{F}_{cp} = -m\omega^2 \vec{r}$. Promatrač iz inercijalnog sustava (laboratorija) vidi da se predmet giba po kružnici jer mu sila opruge osigurava za to potrebnu centripetalnu silu:

$$\vec{F}_{cp} = \vec{F}_{op} = -m\omega^2 \vec{r} \quad (7.19)$$

Položaj tijela određen je u inercijalnom sustavu S radijusvektorom $\vec{r}$, a u rotirajućem sustavu S' radijusvektorom $\vec{r}'$. Ta su dva vektora, međutim, identična: $\vec{r} = \vec{r}'$.

Promatrač u ubrzanom sustavu vezanom za ploču (tj. onaj koji bi se vrtio zajedno s pločom) opaža da predmet miruje u tom sustavu, iako opruga na nj djeluje određenom silom $\vec{F}_{op}$. Da bi objasnio tu pojavu, uvodi inercijalnu silu F_{ef} , koja na tijelo djeluje od središta ploče prema van tako da rezultanta tih dviju sila bude nula:

$$\vec{F}_{op} + \vec{F}_{ef} = 0 \quad (7.20)$$

Odatle i iz (7.19) izlazi:

$$\vec{F}_{ef} = -\vec{F}_{op} = m \omega^2 \vec{r}', \quad (7.21)$$

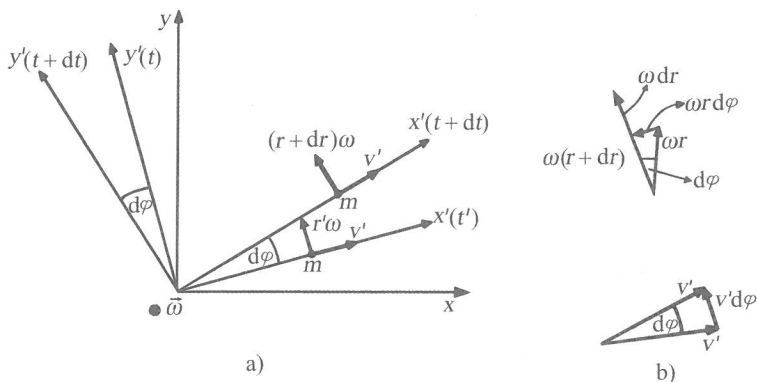
Inercijalna sila koja djeluje na tijelo u rotirajućem sustavu zove se centrifugalna sila. Ona je po iznosu jednaka centripetalnoj sili, ali je suprotnog smjera, tj. usmjerena od osi rotacije prema obodu. Međutim, postoji bitna razlika između centripetalne i centrifugalne sile. Centripetalna sila je naziv za silu koja uzrokuje kružno gibanje, i nije neka posebna vrsta sile, a centrifugalna sila je sila koja se javlja u rotirajućem sustavu kao inercijska sila.

Kada se tijelo giba, s obzirom na rotirajući sustav, nekom brzinom $\vec{v}'$, tada na nj uz centrifugalnu silu $F_{ef} = m \omega^2 \vec{r}'$, djeluje i tzv. Coriolisova sila, dana izrazom:

$$\vec{F}_C = 2 m \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad (7.22)$$

gdje je m masa tijela, $\vec{v}'$ brzina tijela s obzirom na rotirajući sustav, a $\vec{\omega}$ kutna brzina rotacije sustava. Coriolisova sila, kao što se vidi iz (7.22), uvijek je okomita na smjer brzine tijela i na smjer kutne brzine, a smjer joj se može odrediti pomoću pravila za smjer vektorskog produkta. Iznos je Coriolisove sile

$$F_C = 2 m v' \omega \sin(\vec{v}', \vec{\omega}) \quad (7.22a)$$



Slika 7.6. Uz izvod Coriolisove sile

Ona iščezava ako tijelo s obzirom na sustav miruje, odnosno ako je brzina $\vec{v}'$ paralelna s kutnom brzinom $\vec{\omega}$. Ukupna inercijalna sila koja djeluje na tijelo u rotirajućem sustavu jest zbroj centrifugalne i Coriolisove sile:

$$\vec{F}_i = m \omega^2 \vec{r}' + 2 m \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad (7.23)$$

Izvest ćemo izraz za inercijalnu silu (7.23) kad se materijalna točka giba u sustavu $\mathbf{S}'$ jednoliko u radijalnom smjeru, brzinom $v' = \frac{d\tilde{r}'}{dt} = \frac{dr}{dt}$. S obzirom na inercijalni sustav $\mathbf{S}$, točka ima dvije komponente brzine: radijalnu $\frac{dr}{dt} = v'$ i tangencijalnu (obodnu) $v = \omega r$. U sustavu $\mathbf{S}'$ točka se giba jednoliko, ali je s obzirom na sustav $\mathbf{S}$ gibanje ubrzano, te postoje radijalna i tangencijalna komponenta akceleracije.

Radijalna akceleracija materijalne točke u sustavu $\mathbf{S}$ nastaje zbog radijalne komponente promjene brzine (sl. 7.6b):

$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = \omega r \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 r \quad (7.24)$$

odnosno, pisano vektorski,

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r} \quad (7.24a)$$

Tangencijalna akceleracija nastaje i zbog promjene radijalne brzine tijela po smjeru (sl. 7.6b) i zbog promjene tangencijalne komponente brzine po iznosu, tj.:

$$a_t = v' \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv}{dt} = v' \frac{d\varphi}{dt} + \omega \frac{dr}{dt} = v' \omega + \omega v' = 2 \omega v' \quad (7.25)$$

Izraz za tangencijalnu akceleraciju možemo pisati i vektorski:

$$\vec{a}_t = -2 \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad (7.25a)$$

Ukupna akceleracija materijalne točke s obzirom na inercijalni sustav $\mathbf{S}$ jest

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = -\omega^2 \vec{r} - 2 \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad (7.26)$$

Drugi Newton ov zakon za sustav $\mathbf{S}$ glasi:

$$\vec{F} = m \vec{a} = -m \omega^2 \vec{r} - 2 m \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad (7.27)$$

gdje je $\vec{F}$ stvarna vanjska sila koja djeluje na materijalnu točku.

U rotirajućem sustavu $\mathbf{S}'$ gibanje je jednoliko ($\vec{a}' = 0$). Da bi Newtonovi zakoni imali isti oblik i u tom sustavu, vanjskoj sili $\vec{F}$ dodajemo inercijalnu silu $\vec{F}_i$ i pišemo:

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i = m \vec{a}' = 0 \quad (7.28)$$

Ako u (7.28) za $\vec{F}$ uvrstimo izraz (7.27), slijedi da je inercijalna sila

$$\vec{F}_i = -\vec{F} = m \omega^2 \vec{r} + 2 m \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad (7.29)$$

U prvom članu relacije (7.29) prepoznajemo centrifugalnu silu F_{cf} , a drugi je član Coriolisova sila. Iako smo izraz (7.29) izveli za posebni primjer i kada se čestica u sustavu $\mathbf{S}'$ giba jednoliko u radijalnom smjeru, on vrijedi i općenito za bilo kakvo gibanje čestice u rotirajućem sustavu.

Zbog rotacije Zemlje sustav vezan za Zemlju je neinercijalan i u njemu se mogu opaziti centrifugalna i Coriolisova sila. Utjecaj centrifugalne sile na tijelo na Zemljinoj površini obradit ćemo u odjeljku 8.3. Coriolisova sila djeluje na tijela koja se gibaju relativno prema Zemlji. Tako rijeke koje na Sjevernoj polutki teku od juga prema sjeveru imaju desnu obalu strmiju (jer Coriolisova sila djeluje na čestice vode u smjeru prema desnoj obali), sjeverni vjetar postaje sjeveroistočni, itd. Pri slobodnom padu na Zemljinu površinu na tijelo djeluje i Coriolisova sila te uzrokuje otklon tijela prema istoku.

Razmotrit ćemo djelovanje Coriolisove sile na let topovske granate, projektila i sl. Pri gibanju duž meridijana, prema sjeveru na Sjevernoj polutki, Coriolisova sila otklanja č projektil prema istoku. Ako projektil leti duž paralele prema zapadu, Coriolisova sila djeluje prema Zemljinoj površini, odnosno prema gore ako projektil leti prema istoku. Općenito smjer Coriolisove sile možemo odrediti pomoću relacije (7.22).

Coriolisova sila može se opaziti pri njihanju Foucaultova njihala, koje se sastoji od teške metalne kugle obješene na dugačku nit (žicu). Pomoću takvog njihala J. B. L. Foucault je dokazao da Zemlja rotira oko svoje osi. Zbog Coriolisove sile ravnina njihanja zakreće se na Sjevernoj polutki u smjeru kazaljke na satu s obzirom na Zemlju (tj. od istoka prema zapadu), a na Južnoj polutki obratno. Njihalo na polu napravilo bi za 24 sata potpuni okret (360°), na našoj geografskoj širini (npr. 45°) za puni okret trebala bi 33,5 sata, dok na ekvatoru nema zakretanja.

PITANJA I ZADACI

1. Što su inercijalni, a što neinercijalni referentni sustavi?
2. Izvedite Galilejeve transformacije za dva inercijalna sustava.
3. Za kakve brzine vrijede Galilejeve transformacije? Što je u slučaju relativističkih brzina?
4. Što kaže Galilejev princip relativnosti?
5. Kada se pojavljuju inercijalne sile?
6. Izvedite transformacije koje povezuju jednoliko ubrzani i inercijalni sustav.
7. Kakva je veza između akceleracije tijela u jednoliko ubrzanom sustavu i akceleracije tog tijela u inercijalnom sustavu?
8. Kolika je inercijalna sila u jednoliko ubrzanom sustavu?
9. Kako glasi drugi Newtonov zakon za neinercijalni sustav?
10. Kolika je težina tijela u sustavu vezanom za dizalo koje se: a) giba jednoliko, b) giba jednoliko ubrzano s akceleracijom $\vec{a}_0$ prema gore i c) giba jednoliko ubrzano akceleracijom $\vec{a}_0$ prema dolje?
11. Ubrzani sustav vezan je za kolica koja se bez trenja gibaju niz kosinu nagiba 30° . Kolika je akceleracija slobodnog pada u tom sustavu? Koliki je kut između položaja viska i površine vode u tom sustavu i smjera vertikale, odnosno horizontale u inercijalnom sustavu?
12. Koje se inercijalne sile javljaju u sustavu što se vrti stalnom kutnom brzinom?
13. Što je centrifugalna sila i koliko iznosi?
14. Izvedite izraz za inercijalnu silu u rotirajućem sustavu S' u slučaju: a) ako materijalna točka miruje u tom sustavu, b) ako se točka giba jednoliko u radijalnom smjeru i c) ako se u sustavu S' točka giba jednoliko u tangencijalnom smjeru.
15. O čemu ovisi Coriolisova sila?
16. Navedite nekoliko primjera djelovanja Coriolisove sile.
17. Visak obješen na stropu vozila zatvara s vertikalom kut od 12° prema natrag. Kolika je akceleracija vozila?
18. Kolikom silom čovjek mase 100 kg djeluje na pod lifta kada se lift diže: a) konstantnom brzinom, b) akceleracijom $9,81 \text{ m/s}^2$ i c) spušta akceleracijom od $9,81 \text{ m/s}^2$? Riješite zadatak s gledišta promatrača u inercijalnom sustavu vezanom za površinu Zemlje i s gledišta promatrača koji se nalazi u ubrzanom sustavu.

19. Kolika je sila kojom astronaut pritišće sjedalo u raketi: a) kad raketa miruje na Zemljinoj površini, b) kad se raketa lansira sa Zemljine površine s akceleracijom $3g$ i c) kad se raketa u svemirskom prostoru, daleko od planeta, ubrzava s akceleracijom g ?
20. Svemirski brod, daleko od ostalih svemirskih tijela, ubrzava se sa $a_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$. Kolika je akceleracija slobodnog pada u tom brodu? Kolika bi bila akceleracija slobodnog pada kad bi se brod dizao uvis iznad Zemljine površine s tom istom akceleracijom?
21. Čovjek mase 100 kg nalazi se u liftu koji se a) diže konstantnom brzinom, b) diže akceleracijom 1 m/s^2 i c) spušta akceleracijom 1 m/s^2 ? Ako čovjek ispusti kuglicu na visini 1 m iznad poda lifta, koliko će vremena kuglica slobodno padati?
22. Kolika je centrifugalna sila na tijelo mase 100 kg koje se nalazi na geografskoj širini $\varphi = 45^\circ$: a) koja nastaje zbog rotacije Zemlje oko njezine osi, b) zbog rotacije Zemlje oko Sunca?
23. Koliko puta brže bi se morala okretati Zemlja oko svoje osi da bi tijelo na ekvatoru bilo u bestežinskom stanju?
24. Na horizontalnoj ploči koja se vrti oko vertikalne osi periodom $T = 1,6 \text{ s}$ visi visak tako da je udaljenost objesašta viska od osi rotacije $r = 0,3 \text{ m}$, a duljina konca viska $l = 0,5 \text{ m}$. Koliki je otklon viska od vertikale?
25. Kolika Coriolisova sila djeluje na tijelo mase 1 kg koje slobodno pada s tornja visokog 100 m na geografskoj širini 45° ? Koliko je skretanje i u kojem smjeru?
26. Koliko je vremena bilo potrebno da u Foucaultovu pokusu u Pantheonu u Parizu njihalo napravi potpuni okret?
27. Nacrtajte trajektoriju koju bi šiljak na kugli Foucaultova njihala na Sjevernom polu ispisivao na tlu? Koliko bi vremena bilo potrebno da njihalo napravi potpuni okret?
28. Kolika centrifugalna sila djeluje na česticu mase $0,1 \text{ g}$ u ultracentrifugi polumjera $0,2 \text{ m}$. Koliko je ta sila veća od težine čestice? Centrifuga se vrti s 10^5 o/min .
29. Kolika centrifugalna sila djeluje na čovjeka mase 100 kg a) na ekvatoru, b) u Zagrebu ($\varphi = 45,8^\circ$) i c) na polu?
30. Projektil mase 1000 kg giba se brzinom 1800 km/h , a) po paraleli od zapada prema istoku i b) po meridijanu od juga prema sjeveru. Kolika je Coriolisova sila kad se projektil nalazi na $\varphi = 45^\circ \text{N}$?

8. GRAVITACIJA

8.1. NEWTONOV ZAKON GRAVITACIJE

Problem privlačnog djelovanja Zemlje na sva tijela koja se nalaze u njezinoj blizini stoljećima je zaokupljao pažnju ljudi.

Proučavanjem gibanja nebeskih tijela otkriveno je da među tijelima postoji privlačna sila, nazvana gravitacija, koja je uzrok gibanja nebeskih tijela i Zemljine sile teže. Gravitacijska sila djeluje među svim tijelima, ali ju je često teško opaziti jer je relativno slabog intenziteta.

Priča se da je Newton, uspoređujući padanje jabuke sa stabla i gibanje Mjeseca oko Zemlje, zaključio da centripetalnu akceleraciju Mjeseca i akceleraciju slobodnog pada na Zemljinoj površini uzrokuje ista vrsta sile — gravitacijsko privlačenje dviju masa. Slobodni pad uzrokuje gravitacijsko privlačenje mase tijela i mase Zemlje, a i centripetalnu silu, potrebnu za gibanje Mjeseca oko Zemlje, uzrokuje gravitacijska sila između Mjeseca i Zemlje.

Iz činjenice da akceleracija slobodnog pada ne ovisi o masi tijela koje pada zaključujemo da je gravitacijska sila razmjerna masi tijela. Po zakonu akcije i reakcije, sila kojom jedno tijelo privlači drugo tijelo jednaka je po iznosu sili kojom drugo tijelo privlači prvo tijelo što znači da gravitacijska sila mora biti razmjerna umnošku masa obaju tijela. Sila ovisi i o udaljenosti među tijelima. Tako je srednja udaljenost između Zemlje i Mjeseca r oko 60 puta veća od polumjera Zemlje R_z , a akceleracija slobodnog pada manja je od centripetalne akceleracije Mjeseca za

$$\frac{g}{a_{ep}} = \frac{g}{\frac{4\pi^2}{T^2} r} \approx 3600 = 60^2.$$

Akceleracija i gravitacijska sila obrnuto su razmjerne kvadratu udaljenosti.

Izraz za gravitacijsku silu kojom tijelo mase m_1 djeluje na tijelo mase m_2 (sl. 8.1a) izgleda dakle ovako:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0 \quad (8.1)$$

gdje je $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ gravitacijska konstanta.



Slika 8.1. Gravitacijska sila između dvije materijalne točke (a) i dva tijela (b)

Za određivanje gravitacijskih sila među tijelima koje ne možemo aproksimirati materijalnim točkama potrebno je masu tijela raščlaniti na elementarne mase Δm_i ,

od kojih se svaka može smatrati materijalnom točkom. Sila kojom takva materijalna točka mase Δm_i prvog tijela djeluje na materijalnu točku mase Δm_j drugog tijela (sl. 8.1b) jest:

$$\Delta \vec{F}_{ij} = -G \frac{\Delta m_i \Delta m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_{0ij} \quad (8.2)$$

gdje je r_{ij} udaljenost elementarnih masa, a $\vec{r}_{0ij}$ jedinični vektor usmjeren od mase Δm_i prema Δm_j . Sila kojom prvo tijelo djeluje na drugo dobije se zbrajanjem za sve vrijednosti indeksa:

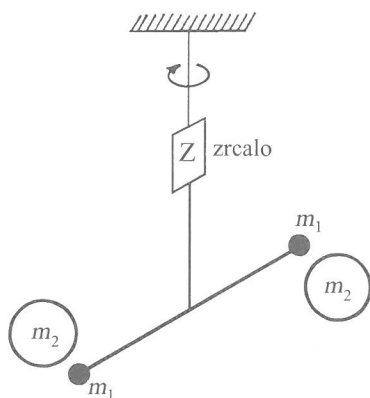
$$\vec{F}_{12} = - \sum_i \sum_j G \frac{\Delta m_i \Delta m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_{0ij} \quad (8.3)$$

To zbrajanje — koje se, u stvari, svodi na integriranje — vrlo je složeno, osim za kuglasta tijela čija je gustoća u svim točkama tijela jednaka (homogena tijela) ili ovisi samo o udaljenosti od središta kugle (centralno simetrična raspodjela mase). U tom slučaju izraz (8.3) prelazi u (8.1), tj. kugle se privlače kao materijalne točke koje imaju mase jednake masama kugli, a nalaze se u središtima kugli.

Newtonov zakon gravitacije jedan je od osnovnih zakona mehanike: pomoću njega mogu se izračunati gibanja planeta oko Sunca, gibanje Mjeseca i umjetnih satelita oko Zemlje i sl. To je jedno od najvećih dostignuća u povijesti znanosti.

8.2 ODREĐIVANJE GRAVITACIJSKE KONSTANTE

Univerzalna gravitacijska konstanta G određena je eksperimentalno, a prvo takvo mjerenje izveo je 1798. engleski fizičar i kemičar H. Cavendish (1731 — 1810), upotrijebivši torzionu vagu.



Slika 8.2. Cavendishova torziona vaga

Na slici 8.2. shematski je prikazana Cavendishova torziona vaga. Na laganoj šipci, obješenoj na elastičnoj niti poznate torzione konstante, vise dvije male kugle mase m_1 . Dvije velike kugle, svaka mase m_2 , nalaze se u njihovoj blizini. (U Cavendishovim pokusima $m_1 = 0,729$ kg i $m_2 = 158$ kg.) Zbog gravitacijskog privlačenja, manje kugle približe se većima, i nit se uvije za određeni kut, koji se mjeri pomoću svjetlosnog snopa reflektiranoga na malom zrcalu Z. Iz otklona i poznate torzione konstante može se izračunati sila između kugli mase m_1 i m_2 , a zatim i gravitacijska konstanta G .

Kasnije su i drugi fizičari mjerili gravitacijsku konstantu, a od vrijednosti utvrđenih na različite načine uzima se kao najtočnija vrijednost:

$$G = (6,6720 \pm 0,004) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2.$$

Gravitacijska konstanta je vrlo malog iznosa što pokazuje da su gravitacijske sile vrlo slabe, mnogo slabije od elektromagnetskih sila. Tako je Coulombova sila

između protona i elektrona u vodikovu atomu oko 10^{39} puta veća od gravitacijske sile između te dvije čestice; dva tijela mase 100 kg na udaljenosti 1 m privlače se silom 10^{-6} N. Relativno velika sila kojom Zemlja privlači tijela na svojoj površini posljedica je velike Zemljine mase.

Ako znamo gravitacijsku konstantu G , možemo izračunati masu Zemlje. Cavendish je, u stvari, želio i odrediti masu Zemlje i zato je izmjerio gravitacijsku konstantu, a zatim izračunao masu i gustoću Zemlje, pa se zato često kaže da je Cavendish „izvagao” Zemlju.

Primjer

Izračunajte masu i gustoću Zemlje.

Na tijelo mase m koje se nalazi na Zemljinoj površini djeluje sila $G \frac{m M_Z}{R_Z^2}$, gdje je M_Z i R_Z masa i polumjer Zemlje. Prema drugom Newtonovu zakonu, ta je sila jednaka mg . Odatle slijedi:

$$M_Z = \frac{g R_Z^2}{G} = 5,895 \cdot 10^{24} \text{ kg.}$$

Podijelimo li masu Zemlje s njezinim volumenom, dobit ćemo srednju gustoću Zemlje:

$$\rho = \frac{M_Z}{V_Z} = \frac{3g}{4R_Z G} = 5\,500 \text{ kg/m}^3.$$

8.3. KEPLEROVI ZAKONI

U 16. stoljeću poljski astronom N. Kopernik (1473–1543) postavio je teoriju heliocentričkog sustava, pretpostavivši da Zemlja nije središte svemira, kako je to tumačio Ptolomejev geocentrički sustav, već da se s ostalim planetima okreće oko Sunca.

J. Kepler (1571–1630), njemački astronom, pronašao je tri zakona gibanja planeta oko Sunca iz kojih je Newton kasnije izveo opći zakon gravitacije.

Keplerovi zakoni glase:

1. Svi planeti kreću se po elipsama u čijem se jednom žarištu nalazi Sunce.
2. Radijusvektor (tj. vektor koji ide od središta Sunca do središta planeta) u jednakim vremenskim intervalima opisuje jednake površine.
3. Kvadrati ophodnih vremena planeta oko Sunca odnose se kao kubovi velikih poluosi njihovih eliptičnih putanja:

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3. \quad (8.4)$$

Sva tri Keplerova zakona mogu se izvesti iz Newtonovih zakona i zakona gravitacije, ali te izvode ovdje nećemo iznositi.

Tablica 8.1. Neke karakteristične veličine planeta

Planet	Masa/kg	Polumjer/m	Srednji polumjer putanje/m	Period/dan
Sunce	$2 \cdot 10^{30}$	$9,95 \cdot 10^6$	—	—
Merkur	$3 \cdot 10^{23}$	$2,4 \cdot 10^6$	$5,8 \cdot 10^{10}$	88
Venera	$4,9 \cdot 10^{24}$	$6,1 \cdot 10^6$	$1,08 \cdot 10^{11}$	225
Zemlja	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^{11}$	365,26
Mars	$6 \cdot 10^{23}$	$3,4 \cdot 10^6$	$2,3 \cdot 10^{11}$	687
Jupiter	$1,9 \cdot 10^{27}$	$70 \cdot 10^6$	$7,8 \cdot 10^{11}$	4 332
Saturn	$5,7 \cdot 10^{26}$	$58 \cdot 10^6$	$1,43 \cdot 10^{12}$	10 759
Uran	$8,7 \cdot 10^{25}$	$23 \cdot 10^6$	$2,87 \cdot 10^{12}$	30 684
Neptun	$1,03 \cdot 10^{26}$	$23 \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^{12}$	60 184
Pluton	10^{24}	$6 \cdot 10^6$	$5,9 \cdot 10^{12}$	90 710

Primjer

Izračunajte ophodno vrijeme umjetnog Zemljina satelita koji kruži na udaljenosti r od središta Zemlje.

Kada se satelit mase m_1 giba po kružnici polumjera r oko središta planeta, gravitacijska sila jednaka je centripetalnoj:

$$G \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r,$$

gdje je m_2 masa planete, a ω kružna frekvencija kruženja.

Odatle je

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_2} r^3; \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G m_2} r^3}. \quad (8.4a)$$

Period T ne ovisi o masi satelita, već samo o polumjeru njegove putanje. To je treći Keplerov zakon u posebnom primjeru kružne orbite. Iz (8.4a) može se, ako se zna period i polumjer putanje nekog satelita, izračunati masa planeta: npr. iz podataka za Mjesec izračunati masa Zemlje, iz podataka za Zemlju masa Sunca i sl.

Primjer

Satelit kruži oko Zemlje na visini 1 000 km. Odredite brzinu i ophodno vrijeme satelita.

Privlačna sila između Zemlje i satelita $F = G \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2}$ daje satelitu centripetalnu akceleraciju $\frac{v^2}{R_Z + h}$, te jednadžba gibanja satelita ima oblik

$$G \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2} = \frac{m v^2}{R_Z + h}, \quad (1)$$

gdje je $R_Z + h$ polumjer putanje satelita, m masa satelita, a M_Z masa Zemlje.

Budući da je sila teža na površini Zemlje jednaka privlačnoj sili tijela i Zemlje (uz zanemarivanje efekta vrtnje Zemlje)

$$m g = G \frac{m M_Z}{R_Z^2},$$

dobivamo

$$M_Z = \frac{g R_Z^2}{G}. \quad (2)$$

Uvrštavanjem (2) u (1) i rješavanjem dobivene jednadžbe po brzini izlazi:

$$v = R_Z \sqrt{\frac{g}{R_Z + h}} = 7,3 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

Ophodno vrijeme satelita oko Zemlje je

$$T = \frac{2\pi(R_Z + h)}{v} = 2\pi \frac{R_Z + h}{R_Z} \sqrt{\frac{R_Z + h}{g}} = 6,3 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

8.4. GRAVITACIJSKO POLJE

Određeno tijelo mase m djeluje na sva ostala tijela u prostoru gravitacijskom silom danom Newtonovim zakonom (8.1). Umjesto da djelovanje jednog ili više tijela na drugo tijelo opisujemo silom među njima, često ćemo se poslužiti, slično kao i u elektromagnetizmu, pojmom polja. Kažemo da svako tijelo (koje ima masu) u prostoru oko sebe stvara gravitacijsko polje. Prostor oko svakog tijela ima posebna svojstva. To više nije „obični” prostor: u njemu se osjeća gravitacijsko djelovanje. Uvođenjem fizičkog polja često se pojednostavnjuju razni problemi i lakše shvaćaju različite fizikalne pojave.

Da bismo izračunali uzajamno djelovanje dvaju tijela, umjesto da po relaciji (8.1) računamo silu među njima, možemo naći polje jednog tijela i utjecaj tog polja na drugo tijelo.

Tijelo mase m_1 proizvodi u prostoru oko sebe gravitacijsko polje. Ono je to jače što smo bliže tijelu a smanjuje se s kvadratom udaljenosti. Svako tijelo mase m_2 koje se nađe u tom polju osjeća njegovo djelovanje, to više što mu je veća masa.

Jakost (intenzitet) gravitacijskog polja tijela mase m_1 definiramo kao omjer gravitacijske sile i mase tijela na koje djeluje ta sila:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = -G \frac{m_1 m_2 \vec{r}_0}{m_2 r^2} = -G \frac{m_1}{r^2} \vec{r}_0 \quad (8.5)$$

Jedinica je gravitacijskog polja njutn po kilogramu (N/kg) ili metar u sekundi na kvadrat (m/s²), dakle ista kao za akceleraciju.

Primjer

Gdje se između Mjeseca i Zemlje poništavaju njihova gravitacijska polja? Masa Mjeseca je oko 81 put manja od mase Zemlje.

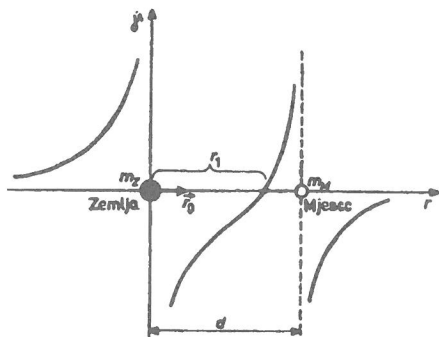
Gravitacijsko polje u prostoru između ta dva tijela (sl. 8.3) jednako je:

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_Z + \vec{\gamma}_M = -G \frac{m_Z}{r_1^2} \vec{r}_0 + G \frac{m_M}{(d - r_1)^2} \vec{r}_0$$

i poništava se kad je $\frac{m_Z}{r^2} = \frac{m_M}{(d - r_1)^2}$, odnosno $\frac{d - r_1}{r} = \pm \sqrt{\frac{m_M}{m_Z}}$.

U obzir dolazi samo pozitivni predznak, što daje rješenje za r_1 (na sl. 8.3):

$$r_1 = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{m_M}{m_Z}}} = 0,9 d.$$



Slika 8.3. Gravitacijsko polje između Zemlje i Mjeseca

Usporedivši formulu (8.4) s izrazom za silu težu, napisanim u obliku $\vec{g} = \frac{\vec{G}}{m}$,

vidimo da se akceleracija slobodnog pada može smatrati jakošću gravitacijskog polja na Zemljinoj površini. Detaljnije o tome bit će govora u odjeljku 8.5.

Gravitacijsko polje je vektorsko polje, i svakoj točki prostora oko nekog tijela mase m_1 pridružen je vektor dan relacijom (8.5). Smjer gravitacijskog polja uvijek je prema tijelu koje ga je proizvelo.

Ako ima više materijalnih točaka masa $m_1, m_2, \dots, m_n$, svaka od njih proizvest će u prostoru svoje gravitacijsko polje. Ukupna sila na materijalnu točku mase m u nekoj točki prostora T bit će:

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}_1 + m \vec{\gamma}_2 + \dots + m \vec{\gamma}_n = m (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 + \dots + \vec{\gamma}_n) \quad (8.6)$$

gdje je $\vec{\gamma}_i$ gravitacijsko polje mase m_i dano formulom (8.5). Iz nje izlazi da je ukupno gravitacijsko polje vektorski zbroj pojedinih polja:

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 + \dots + \vec{\gamma}_n \quad (8.6a)$$

8.5. GRAVITACIJSKO POLJE ZEMLJE. AKCELERACIJA SILE TEŽE

Na svako tijelo na Zemljinoj površini djeluje privlačna sila vertikalno prema dolje, koja se zove sila teža. Zemlja daje svakom tijelu koje slobodno pada određenu akceleraciju padanja, tzv. akceleraciju sile teže $\vec{g}$; sila teža koja djeluje na tijelo mase m jest $\vec{G} = m \vec{g}$. Tu silu nazivamo još i težina.

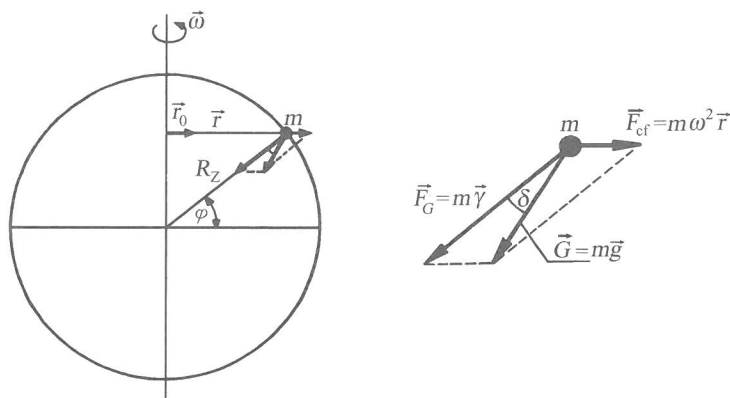
Referentni sustav vezan za Zemlju nije inercijalan, jer Zemlja kruži oko Sunca i vrti se oko svoje osi. Akceleracija zbog gibanja oko Sunca mnogo je manja nego zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi, te možemo uzeti da ukupna neinercijalnost sustava nastaje zbog dnevne rotacije Zemlje. Zbog toga će na tijelo mase m , koje se nalazi na Zemljinoj površini, djelovati inercijalna centrifugalna sila (sl. 8.4):

$$\vec{F}_{cf} = m \omega^2 \vec{r} = m \omega^2 R_Z \cos \varphi \vec{r}_0 \quad (8.7)$$

gdje je R_Z polumjer Zemlje, $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ kutna brzina Zemlje, a φ geografska širina. Rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile jest sila teža:

$$\vec{G} = \vec{F}_G + \vec{F}_{cf} \quad (8.8)$$

Dakle, sila teža nešto se razlikuje od gravitacijske sile $\vec{F}_G$ i po smjeru i po iznosu, iako ne suviše jer je centrifugalna sila mnogo manja od gravitacijske sile. Slično je gravitacijsko polje Zemlje jednako polju sile teže samo na polovima, dok je razlika najveća na ekvatoru, gdje iznosi 0,3 %. Zemlja ima oblik rotacionog elipsoida, spljoštenoga na polovima, te je i zbog te spljoštenosti gravitacijsko polje



Slika 8.4. Sila teža

(a i akceleracija sile teže) na ekvatoru manje nego na polovima za približno 0,2 %. Kao konačni rezultat, akceleracija sile teže mijenja se s geografskom širinom; najveća je na polovima, $g_p = 9,832 \text{ m/s}^2$, a najmanja na ekvatoru, $g_e = 9,780 \text{ m/s}^2$. Dogovorom je utvrđena normirana vrijednost

$$g_n = 9,806\,65 \text{ m/s}^2 \approx 9,81 \text{ m/s}^2,$$

koja približno odgovara akceleraciji sile teže na $\varphi = 45^\circ$. Gravitacijsko polje Zemlje, a time i akceleracija sile teže, mijenja se s udaljenošću r od središta Zemlje kao $\frac{1}{r^2}$ (formula 8.5). U točki na nadmorskoj visini h , udaljenoj za $R_z + h$ od središta Zemlje, gravitacijsko polje iznosi:

$$\gamma_z = G \frac{m_z}{(R_z + h)^2} = G \frac{m_z}{R_z^2} \left(\frac{R_z}{R_z + h} \right)^2 \quad (8.9)$$

Zanemarimo li doprinos centrifugalne akceleracije (koja je malena), gravitacijsko polje jednako je akceleraciji sile teže g :

$$\gamma_z = g = g_0 \left(\frac{R_z}{R_z + h} \right)^2 \quad (8.9a)$$

gdje smo sa g_0 označili akceleraciju na Zemljinoj površini.

Tablica 8.2. Promjena akceleracije sile teže s udaljenošću od Zemljine površine

h/km	0	10	100	1 000 (sateliti)	380 000 (Mjesec)
$g/(\text{m/s}^2)$	9,81	9,78	9,51	7,34	0,0027

Primjer

Kolika je akceleracija sile teže na visini 1 000 km iznad Zemljine površine, na geografskoj širini $\varphi = 45^\circ$?

Prema formuli (8.8) $\vec{g} = \vec{\gamma}_Z + \vec{a}_{cf}$, izlazi:

$$\begin{aligned} g_h &= \gamma_Z - a_{cf} \cos \varphi = G \frac{m_Z}{R_Z^2} \frac{R_Z^2}{(R_Z + h)^2} - \omega^2 (R_Z + h) \cos^2 \varphi = \\ &= g_0 \left(\frac{R_Z}{R_Z + h} \right)^2 - \omega^2 (R_Z + h) \cos^2 \varphi = \\ &= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}{7,37 \cdot 10^6 \text{ m}} \right)^2 - (7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 \cdot 7,37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \cos^2 45^\circ = 7,31 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Približan račun, uz zanemaren doprinos centrifugalne akceleracije, daje:

$$g = g_0 \left(\frac{R_Z}{R_Z + h} \right)^2 = 7,33 \text{ m/s}^2,$$

dakle samo 0,3% veći rezultat.

8.6. GRAVITACIJSKA POTENCIJALNA ENERGIJA

Proučavajući potencijalnu energiju, vidjeli smo da je gravitacijska sila konzervativna i da tijela u polju te sile imaju potencijalnu energiju. Tada smo izračunali da je potencijalna energija tijela na visini h iznad Zemljine površine:

$$E_p = m g h \quad (8.10)$$

Pri tom smo pretpostavili da je $E_p = 0$ na Zemljinoj površini ($h = 0$) i da je g konstantno, tj. da je tijelo maleno i blizu Zemljine površine. Formula (8.10) vrijedi samo za visine koje su dosta manje od Zemljina polumjera, inače je potrebno uzeti u obzir mijenjanje gravitacijske sile s udaljenošću.

Sada ćemo izračunati rad dizanja, npr. rad potreban za lansiranje određene rakete, satelita i sl. Da bismo dobili najopćenitiju formulu, pretpostavimo da smo masu m_2 iz položaja r_1 dovoljno sporo (bez ubrzavanja) doveli u položaj r_2 u gravitacijskom polju mase m_1 (sl. 8.5). Pri tom je sila $\vec{F}$, kojom se tijelo stalno podiže, u ravnoteži s gravitacijskom silom $\vec{F}_G$, tj. $\vec{F} = -\vec{F}_G$. Rad obavljen pri premještanju tijela jednak je:

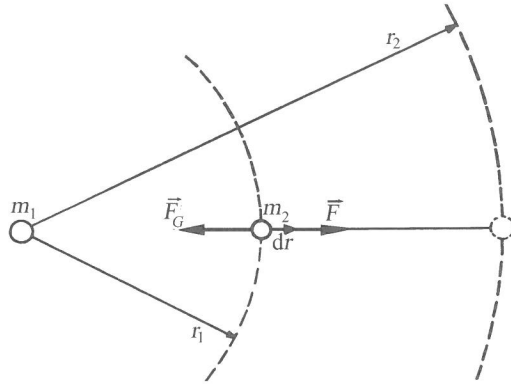
$$W = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.11)$$

To je rad potreban da bi se tijelo mase m_2 u gravitacijskom polju tijela mase m_1 „podiglo” od r_1 do r_2 . On ne ovisi o putu, nego samo o početnom i konačnom položaju tijela mase m_2 u odnosu prema tijelu mase m_1 i možemo ga izraziti razlikom potencijalnih energija:

$$W = E_p(r_2) - E_p(r_1) = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (8.12)$$

Obično se uzima da je potencijalna energija nula kada su tijela beskonačno daleko, jer je tada i sila jednaka nuli. Uz taj dogovor, uvrštavanjem $r_1 = \infty$ i $r_2 = r$ u izrazu (8.12), dobivamo potencijalnu energiju dvaju tijela masa m_1 i m_2 , udaljenih za r :

$$E_p(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (8.13)$$



Slika 8.5. Uz izračunavanje gravitacijske potencijalne energije

Potencijalna energija uvijek je negativna, i raste kada se povećava udaljenost r . Na slici 8.6. prikazana je $E_p(r)$ za dvije mase, m_1 i m_2 .

Kada se radi o potencijalnoj energiji nekog tijela s obzirom na Zemlju, često se uzima da je na Zemljinoj površini potencijalna energija nula. Time, i uvrstivši $r_1 = R_z$ i $r_2 = r$ u izrazu (8.11), dobivamo za potencijalnu energiju:

$$E_p(r) = G m_1 m_z \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{r} \right) \quad (8.14)$$

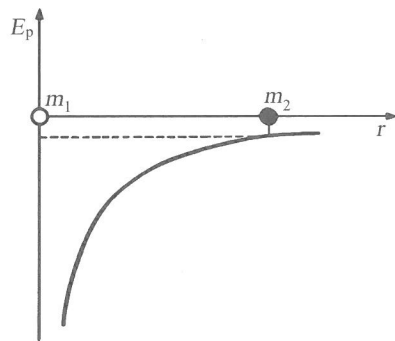
odnosno:

$$E_p(r) = G m_1 m_z \frac{r - R_z}{R_z r} \quad (8.15)$$

Ako je visina $h = r - R_z \ll R_z$, izraz za gravitacijsku potencijalnu energiju (8.15) prelazi u poznati oblik:

$$E_p = \frac{G m_1 m_z}{R_z^2} h = m_1 g h \quad (8.15a)$$

jer je $g = G m_z / R_z^2$.



Slika 8.6. Ovisnost potencijalne energije dviju materijalnih točaka o njihovoj udaljenosti

Slično kao što djelovanje konzervativne sile možemo opisati potencijalnom energijom, tako se i konzervativno polje može opisivati potencijalom. Potencijal je omjer potencijalne energije i mase:

$$\varphi(r) = \frac{E_p(r)}{m_1} = -G \frac{m_2}{r} \quad (8.16)$$

a potencijalna energija jednaka je umnošku mase i potencijala:

$$E_p(r) = m_1 \varphi(r) \quad (8.17)$$

Primjer

Kolika je potencijalna energija tijela mase $m = 1$ kg na Zemljinoj površini? Koliki je potencijal Zemljine površine?

Uz dogovor da je potencijalna energija nula kada su tijela beskonačno daleko, potencijalna je energija:

$$E_p = -G \frac{m_Z m}{R_Z} = -6,26 \cdot 10^7 \text{ J.}$$

Potencijal je Zemljine površine:

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -6,26 \cdot 10^7 \text{ J/kg.}$$

Gravitacijska sila je centralna sila, tj. ovisi samo o iznosu radijusvektora r . Usporedivši izraze (8.1) i (8.13), vidimo da je veza između sile i potencijalne energije:

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{r}_0 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0 \quad (8.18)$$

Veza između gravitacijskog polja i potencijala jest:

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dr} \vec{r}_0 \quad (8.19)$$

Važnost potencijala za opisivanje polja očituje se još bolje u elektricitetu, gdje se pojam električnog potencijala mnogo koristi, možda i češće nego električnog polja.

Primjer

Kolika je prva i druga kozmička brzina?

Da bi tijelo mase m kružilo oko Zemlje, tj. postalo njezin umjetni satelit, treba ga lansirati najmanje prvom kozmičkom brzinom v_1 . U tom slučaju tijelo kruži iznad same Zemljine površine po kružnici polumjera R_Z . Veličinu te brzine možemo odrediti iz uvjeta da je centripetalna sila potrebna za kružno gibanje jednaka gravitacijskoj sili (sili teži):

$$\frac{m v_1^2}{R_Z} = m g.$$

Odatle je prva kozmička brzina:

$$v_1 = \sqrt{g R_Z} = 7,9 \text{ km/s.}$$

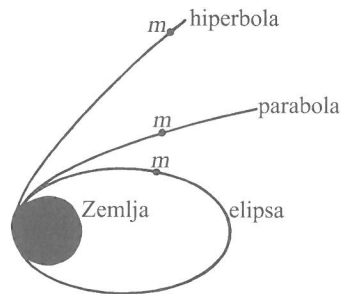
Lansiramo li tijelo brzinom v_1 , ono neće pasti natrag na Zemlju, već će kružiti oko nje. Da bi tijelo zauvijek napustilo Zemlju, tj. izišlo iz područja djelovanja njezine sile teže, treba ga izbaciti najmanje drugom kozmičkom brzinom v_2 . Da bismo odredili tu brzinu, moramo izračunati rad koji treba izvršiti protiv Zemljine gravitacijske sile pri udaljavanju tijela mase m s površine Zemlje u beskonačnost. Dakle:

$$W = \int_{R_Z}^{\infty} F dr = \int_{R_Z}^{\infty} G \frac{m m_Z}{r^2} dr = G \frac{m m_Z}{R_Z} = m g R_Z.$$

Taj se rad dobije na račun kinetičke energije tijela, te je minimalna brzina potrebna za lansiranje tijela u svemir — izvan djelovanja gravitacijskog polja Zemlje — jednaka:

$$\begin{aligned} \frac{m v_2^2}{2} &= m g R_Z \Rightarrow v_2 = \\ &= \sqrt{2 g R_Z} = \sqrt{2} v_1 = 11,2 \text{ km/s.} \end{aligned}$$

Ako tijelo lansiramo s površine Zemlje brzinom $v < v_1$, ono će pasti natrag (hitac uvis). Ako je $v_1 < v < v_2$, tijelo će kao umjetni satelit kružiti oko Zemlje po eliptičnoj putanji, to dalje što je brzina lansiranja veća (sl. 8.7). Kada je $v \geq v_2$, tijelo će po paraboličnoj, odnosno hiperboličnoj putanji napustiti Zemljino gravitacijsko polje.



Slika 8.7. Različite putanje tijela lansiranih u Svemir

8.7. TROMA I TEŠKA MASA

U dinamici smo se susreli s tromom (inertnom) masom da bismo iskazali inerciju nekog tijela. Svako tijelo je tromo (inertno), jer je za njegovo ubrzanje potrebna određena sila. Tromu masu m_t možemo odrediti mjerenjem akceleracije koju tijelo dobiva pod utjecajem određene sile, upotrijebivši relaciju $F = m_t a$, što je tzv. dinamičko mjerenje mase. Za istu silu akceleracija je obrnuto razmjerna inertnoj masi tijela.

S druge strane, masa se pojavljuje u izrazu za gravitacijsku silu kao mjera gravitacijskog „naboja” tijela i svojstvo tijela koje oko tijela uzrokuje gravitacijsko polje. Ta tzv. teška (gravitacijska) masa pojavljuje se u izrazu za gravitacijsku silu koja je za tijelo blizu Zemljine površine jednaka:

$$F_g = G \frac{m_g m_{zg}}{R_z^2} \quad (8.20)$$

gdje je m_g gravitacijska masa tijela, m_{zg} gravitacijska masa Zemlje, a R_z polumjer Zemlje.

Pod djelovanjem gravitacijske sile, tijelo dobiva akceleraciju:

$$a = \frac{F_g}{m_t} = G \frac{m_{zg}}{R_z^2} \frac{m_g}{m_t} \quad (8.21)$$

Pokusi sa slobodnim padom pokazuju da je ta akceleracija za sva tijela jednaka bez obzira na njihov oblik, masu i materijal od kojega su načinjena. Budući da je $\frac{G m_{zg}}{R_z^2}$ za sva tijela jednako, slijedi da je omjer teške i tromе mase za sva tijela isti.

Konstantnost omjera teške i trome mase potvrđena je i složenijim eksperimentima, s velikom točnošću. U većini naših razmatranja nećemo razlikovati tromu i tešku masu, već ćemo i jednu i drugu nazivati masom tijela, obje obilježavati istim znakom m .

Upravo tolika točnost proporcionalnosti teške i trome mase osnova je principa ekvivalencije, koji kaže da ne možemo razlikovati inercijalni sustav u gravitacijskom polju, gdje je ubrzanje gravitacije g , od neinercijalnog sustava daleko od svih drugih tijela, koji se giba ubrzano s ubrzanjem $\vec{a} = -\vec{g}$. Gravitacijska sila $m_i g$ na tijelo u prvom inercijalnom sustavu jednaka je inercijalnoj sili $-m_i \vec{a} = m_i \vec{g}$ u drugom neinercijalnom sustavu, jer su teška i troma masa jednake. To je osnova Einsteinove opće teorije relativnosti.

PITANJA I ZADACI

1. Kako je Newton zaključio da je gravitacijska sila obrnuto razmjerna kvadratu udaljenosti?
2. Objasnite Newtonov zakon gravitacije. Napišite (u vektorskom obliku) izraz za gravitacijsku silu između dvije čestice.
3. Kako je izmjerena gravitacijska konstanta? Iz gravitacijske konstante, polumjera Zemlje i akceleracije sile teže izračunajte masu Zemlje.
4. Što je gravitacijsko polje? Kako se računa gravitacijsko polje Zemlje?
5. Kako se mijenja jakost gravitacijskog polja s visinom iznad Zemljine površine?
6. Izračunajte gravitacijsko polje unutar Zemlje na udaljenosti r od središta. Pretpostavite da je Zemlja homogena kugla polumjera R_Z i mase m_Z .
7. Kolikom silom Zemlja privlači tijelo mase 1 kg koje se nalazi na Mjesecu? Kolikom silom Mjesec privlači tijelo mase 1 kg koje se nalazi na Zemlji?
8. Što je sila teža i polje sile teže? Što je težina tijela?
9. Koja je veza između gravitacijskog polja i polja sile teže?
10. Kako glase Keplerovi zakoni?
11. Koliko bi visoko skočio na Mjesecu atletičar koji na Zemlji skoči 2 m?
12. Izračunajte, pomoću trećega Keplerova zakona, visinu Zemljina umjetnog satelita čije je ophodno vrijeme 103 minute.
13. Izvedite vezu između obodne brzine i polumjera putanje za umjetni Zemljin satelit koji se oko Zemlje giba po kružnici.
14. Izvedite izraz za gravitacijsku potencijalnu energiju dviju čestica.
15. Kako se definira gravitacijski potencijal? Koliki je gravitacijski potencijal na Zemljinoj površini?
16. Kakva je veza između gravitacijske sile i gravitacijske potencijalne energije, između gravitacijskog polja i potencijala?
17. Izračunajte prvu i drugu kozmičku brzinu.
18. Kakva je razlika između trome i teške mase? Kako se eksperimentalno određuje jedna, a kako druga?
19. Na kojoj je visini iznad Zemljine površine gravitacijsko polje Zemlje četiri puta manje nego na Zemljinoj površini?
20. Satelit mase 1 000 kg kruži oko Zemlje na visini 1 000 km. Odredite brzinu, ophodno vrijeme, kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju satelita.
21. Koliki je polumjer putanje satelita koji kruži oko Zemlje s ophodnim vremenom 90 min? Na kojoj visini iznad Zemljine površine kruži satelit?
22. Izračunajte rad potreban da bi tijelo mase 1 000 kg napustilo Zemljino gravitacijsko polje. Koliki je gravitacijski potencijal Zemljine površine? Riješite zadatak i za Mjesec.

23. Izračunajte rad potreban da bi se tijelo mase 1 000 kg s površine Zemlje dovelo u točku između Mjeseca i Zemlje, gdje se gravitacijska polja Zemlje i Mjeseca poništavaju.
24. Izračunajte gravitacijsku silu a) između Zemlje i Mjeseca i b) između dva protona kada su u molekuli H_2 međusobno udaljeni 74 pm.
25. Na kojoj udaljenosti između Zemlje i Mjeseca, mjereno od površine Zemlje, će na raketu, koja putuje prema Mjesecu, sile privlačenja Zemlje i Mjeseca biti jednake?
26. Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Mjeseca? Kolika je tamo težina čovjeka mase 100 kg?
27. Odredite kut između vektora gravitacijskog polja i vektora akceleracije sile teže na geografskoj širini 0° , 45° i 90° .
28. Satelit mase 1 000 kg kruži oko Zemlje na visini 1 000 km. Odredite brzinu, ophodno vrijeme, kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju. Kolika je jakost gravitacijskog polja i gravitacijski potencijal u točkama te putanje. Koliko je tu gravitacijsko polje Sunca?
29. Izračunajte visinu i brzinu umjetnog satelita, koji se oko Zemlje giba po kružnici u ekvatorijalnoj ravnini, a uvijek se nalazi iznad iste točke Zemljine površine.

9. RELATIVISTIČKA MEHANIKA

9.1. UVOD

Newtonova mehanika vrijedi samo za brzine mnogo manje od brzine svjetlosti. Za opisivanje pojava pri kojima su brzine usporedive s brzinom svjetlosti potrebna je specijalna teorija relativnosti, koju je početkom 20. stoljeća, koristeći se eksperimentalnim činjenicama, razvio Albert Einstein (1879 – 1955). On je Galileijev princip relativnosti proširio na cijelu fiziku, pretpostavivši da ne samo zakoni mehanike, već i svi fizikalni zakoni imaju isti oblik u svim inercijalnim sustavima. Uzevši u obzir taj postulat i konstantnost brzine svjetlosti u svim inercijalnim sustavima, umjesto Galileijevih transformacija dobivaju se relativističke (Lorentzove) transformacije, fizikalni zakoni mogu se izraziti u relativističkom obliku, i umjesto klasične mehanike dobivamo općenitiju relativističku mehaniku koja u aproksimaciji $v \ll c$ prelazi u klasičnu.

U ovome ćemo poglavlju najprije iznijeti neke teškoće na koje je krajem 19. stoljeća naišla klasična fizika, kada su se počeli uočavati problemi nerješivi pomoću znanja i metoda klasične fizike (teorija relativnosti uspjela je objasniti neke od njih). Zatim ćemo upoznati relativistički oblik fizikalnih zakona i vidjeti da je klasična mehanika samo posebni slučaj relativističke mehanike. Pri tom ćemo se zadržavati samo na najvažnijim rezultatima specijalne teorije relativnosti, uglavnom na onima koji će nam kasnije trebati u proučavanju atomske i nuklearne fizike.

9.2. MICHELSON-MORLEYEV EKSPERIMENT

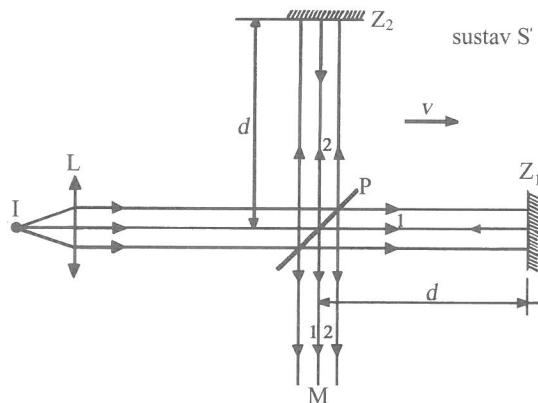
Do početka 20. stoljeća vjerovalo se da je svemir ispunjen nevidljivom mehaničkom tvari zvanom eter, koja apsolutno miruje i u kojoj se gibaju svemirska tijela. Tadašnji fizičari nisu mogli zamisliti da se svjetlost može širiti kroz vakuum, nego su smatrali da je za svjetlost, kao i za ostale valove (npr. zvuk), potrebno elastično sredstvo koje titra kada prolazi val. Eter je bio sredstvo vrlo čudnih svojstava: smatralo se da mu je gustoća nula, da je nevidljivo, ali da ima elastična svojstva.

Budući da se Zemlja giba kroz svemir (brzina gibanja Zemlje oko Sunca je iznosi 30 km/s), očekivalo se da postoji "eterski vjetar" koji puše oko Zemlje. Ako eter apsolutno miruje, tada bi se mjerenjem brzine eterskog vjetera mogla izmjeriti brzina Zemlje kroz eter, dakle apsolutna brzina Zemlje. Svjetlost bi u odnosu prema eteru trebalo da ima konstantnu brzinu ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s), dok bi promatrači, koji se relativno gibaju u odnosu prema eteru, trebali imati različite brzine svjetlosti ovisno o svojoj brzini. Slično razmatranje, naime, vrijedi za valove zvuka te se pretpostavljalo da mora vrijediti i za valove svjetlosti.

Američki fizičar A. A. Michelson pokušao je 1881. godine izmjeriti gibanje Zemlje u odnosu prema eteru i tako dokazati njegovo postojanje. Pokus je ponovio 1887. u suradnji s E. W. Morleyem.

Na slici 9.1. prikazana je shema Michelsonova eksperimenta. Paralelni snop zraka, dobiven pomoću leće iz izvora I, dijeli se na poluprozirnoj staklenoj ploči P u dva dijela: reflektirani i propušteni snop. Ti se snopovi, nakon refleksije na zrcalima Z_1 , odnosno Z_2 , vraćaju, reflektiraju na ploči P (odnosno kroz nju prolaze) i nastavljaju zajedno put prema zastoru M. Interferencijska slika koja se pojavljuje na zasto-

ru ovisi o faznoj razlici obaju snopova, odnosno o vremenskoj razlici dolaska snopa 1 i 2 do zastora.



Slika 9.1. Michelsonov interferometar

Kada bi uređaj u svemiru (tj. prema "eteru") mirovao, brzina svjetlosti bila bi u svim smjerovima jednaka c . Međutim, uređaj se giba zajedno sa Zemljom u smjeru PZ_1 brzinom v . Neka je koordinatni sustav S vezan za eter, a koordinatni sustav S' vezan za Zemlju. Ako je u sustavu S brzina svjetlosti c , u sustavu S' brzina svjetlosti trebala bi (prema Galileijevim transformacijama) biti $c - v$ za zraku PZ_1 , a $c + v$ za zraku Z_1P . (Usporedite s čamcem na rijeci ili sa zrakoplovom kad puše vjetar.)

Vrijeme t_1 potrebno zraku 1 da napravi put PZ_1P jest:

$$t_1 = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = \frac{2dc}{c^2 - v^2} \quad (9.1)$$

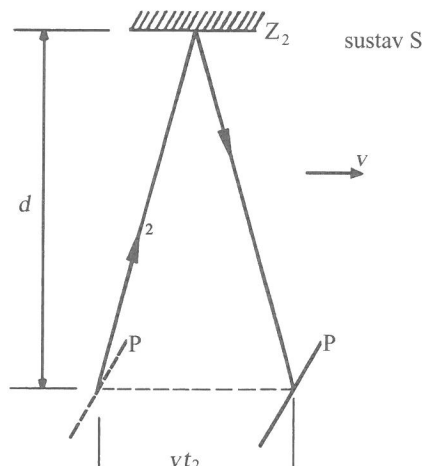
$$t_1 = \frac{\frac{2d}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Razvijanjem izraza (9.1) u red i zanemarivanjem članova višeg reda dobivamo:

$$t_1 \approx \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Vrijeme t_2 , potrebno zraku 2, koja se giba okomito na smjer gibanja Zemlje, da stigne do zrcala Z_2 i natrag do P , najlakše ćemo izračunati promatrajući eksperiment iz sustava S , čvrsto vezanoga za eter (sl. 9.2). Dok svjetlost prođe put ct_2 , Zemlja (odnosno ploča P) prewali put vt_2 , te je:

$$ct_2 = 2\sqrt{d^2 - \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2}.$$



Slika 9.2. Uz izračunavanje vremena potrebnoga da zraku svjetlosti prevali put PZ_2P

Odatle se dobije vrijeme t_2 :

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx \frac{2d}{c} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad (9.2)$$

Razlika u vremenu dolaska zrake 1 i 2 na zastor M jest:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2d}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{d}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (9.3)$$

Ako se aparat zarotira za 90° , tada zraka 1 postaje zraka 2, i obratno, te se i ta razlika u vremenu između dolaska obje zrake promijeni i iznosi:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \frac{2d}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \approx -\frac{d}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (9.4)$$

Ukupna je vremenska razlika nastala rotacijom uređaja:

$$\Delta t - \Delta t' \approx \frac{2d}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (9.5)$$

Interferencijska slika morala bi se, dakle, promijeniti kada se uređaj zarotira u novi položaj, jer se rotacijom promijenila fazna razlika između snopova 1 i 2.

Ti su rezultati dobiveni primjenom klasičnih zakona gibanja, Posebno Galileijevih transformacija za brzinu. Uočite da smo t_1 i t_2 računali u dva različita sustava: t_1 u sustavu S' , a t_2 u sustavu S .

Međutim, rezultat Michelsonova eksperimenta bio je drukčiji. Njegov eksperiment, ponovljen mnogo puta, pokazao je da nema nikakve razlike u interferencijskoj slici kad je uređaj u jednom ili u drugom položaju. To znači da je brzina svjetlosti i u sustavu S (vezanom za svemir) i u sustavu S' vezanom za Zemlju ista, tj. c . Taj je rezultat očito u suprotnosti s Galileijevim transformacijama i zakonima klasične fizike. Eksperiment nije, suprotno očekivanjima, potvrdio postojanje etera.

Rezultat Michelsonova eksperimenta protumačio je Albert Einstein (1905). Zaključivši da eter ne postoji, postulirao je **da je brzina svjetlosti u vakuumu jednaka u svim inercijskim referentnim sustavima** ($c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s), i **da ne ovisi o gibanju izvora ili detektora svjetlosti**. Ta eksperimentalna činjenica je *prvi postulat* specijalne teorije relativnosti, tzv. *princip konstantnosti brzine svjetlosti*.

Zatim je Einstein proširio Galileijev princip relativnosti, postavivši tako *drugi postulat* specijalne teorije relativnosti:

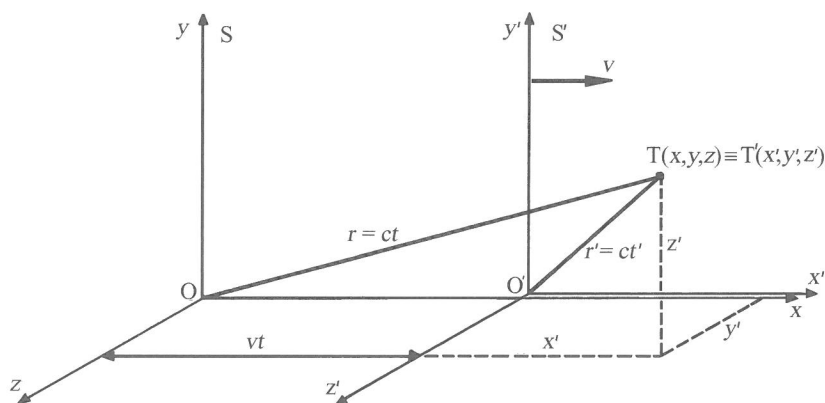
Svi prirodni zakoni imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima, tj. u sustavima koji se relativno jedan prema drugome gibaju jednoliko pravocrtno.

Iz principa konstantnosti brzine svjetlosti proistječe da dva događaja koja su istodobna u jednom sustavu nisu istodobna u drugome sustavu. Apsolutna istodobnost, svojstvena za klasičnu fiziku, ne postoji u teoriji relativnosti. Svaki sustav ima vlastito vrijeme, odnosno vrijeme u različitim sustavima teče različito. Brzina svjetlosti je najveća moguća u prirodi, i nikakav signal ne može se širiti brže od te brzine; samo je

ona jednaka u svim referentnim sustavima. Brzina svjetlosti u relativnosti ima istu ulogu kakvu u klasičnoj fizici ima beskonačno velika brzina.

9.3. LORENTZOVE TRANSFORMACIJE

Promatrajmo dva inercijska sustava S i S' . Sustav S' giba se s obzirom na sustav S jednoliko pravocrtno uzduž osi x brzinom v , kao što je prikazano na slici 9.3. U klasičnoj mehanici ($v \ll c$) Galilejeve transformacije pokazuju kako se koordinate transformiraju pri prijelazu iz jednog inercijskog sustava u drugi sustav (v. odjeljak 7.2). Newtonovi zakoni ne mijenjaju oblik kada prijedemo iz jednog sustava u drugi sustav, oni su invarijantni prema Galilejevim transformacijama.



Slika 9.3. Uz izvod Lorentzovih transformacija

Maxwellove jednadžbe, koje opisuju pojave u elektrodinamici i iz kojih se dobiva valna jednadžba za elektromagnetske valove, naprotiv, nisu invarijantne prema Galilejevim transformacijama. Međutim, iskustvena je činjenica da elektromagnetske pojave ne ovise o izboru inercijskog sustava, te je još H. Lorentz, u 19. stoljeću, Galilejeve transformacije pokušao zamijeniti drugima, tako da bi zakoni elektrodinamike bili isti u svim inercijskim sustavima.

Galilejeve transformacije nisu konzistentne ni s prvim osnovnim postulatom teorije relativnosti. Ako je u sustavu S brzina svjetlosti c , tada bi u sustavu S' (sl. 9.3) brzina svjetlosti prema Galilejevim transformacijama bila $c + v$, a to je u suprotnosti s Michelsonovim eksperimentom i postulatom o konstantnosti brzine svjetlosti. Zato Galilejeve transformacije treba zamijeniti drugim transformacijama, tako da bude udovoljeno osnovnim postulatima specijalne teorije relativnosti. To su Lorentzove transformacije, koje ćemo izvesti iz ta dva postulata.

Neka se u početnom trenutku $t = t' = 0$ (tj. kada se oba sustava poklapaju) iz ishodišta sustava pošalje svjetlosni signal. Nakon razdoblja t taj signal dođe u neku točku T . Udaljenost OT je $r = ct$. Promatrač u sustavu S' opaziti će da

je svjetlost došla u istu točku u momentu t' . Udaljenost koju je signal prešao s obzirom na taj sustav jest $O'T = r'$. Budući da je brzina svjetlosti jednaka u oba sustava, vrijedi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (9.6a)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (9.6b)$$

Treba naći transformaciju koja će sustav S prevesti u S' a da pri tom budu ispunjeni navedeni uvjeti. Ona mora biti linearna (zbog homogenosti i izotropnosti prostora):

$$x' = Ax + Bt \quad t' = Cx + Dt \quad (9.7)$$

i mora udovoljiti ovim uvjetima:

$$t = 0, \quad t' = 0, \quad x = 0, \quad x' = 0 \quad (\text{sustavi se poklapaju u početnom trenutku}) \quad (9.8)$$

$$x' = 0, \quad x = vt \quad (\text{gibanje ishodišta } O' \text{ s obzirom na sustav } S \text{ jest jednoliko po pravcu})$$

Transformacije, dakle, moraju imati oblik:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), & y' &= y, & z' &= z, \\ t' &= \gamma'(t - ax) \end{aligned} \quad (9.9)$$

Konstante $\gamma = A$, $\gamma' = D$ i $a = -\frac{C}{D}$ odredit ćemo iz zahtjeva da brzina svjetlosti bude jednaka u oba sustava.

Uvrstivši vrijednosti za x' , y' , z' i t' iz formule (9.9) u (9.6b) i usporedivši dobiveni izraz s izrazom (9.6a), dobivamo:

$$\gamma = \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad a = \frac{v}{c^2} \quad (9.10)$$

Kada (9.10) uvrstimo u (9.9), dobivamo Lorentzove transformacije za prijelaz iz sustava S u sustav S' :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.11a)$$

$$y' = y \quad (9.11b)$$

$$z' = z \quad (9.11c)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.11d)$$

gdje smo $\frac{v}{c}$ označili oznakom β .

Iz transformacija (9.11) koje opisuju prelaz od koordinata prostora i vremena mjerenih u sustavu S na koordinate mjerene u sustavu S' , možemo lako dobiti transformacije za prelaz iz S' u S :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.12)$$

Lako se pokazuje da za klasične brzine ($\beta \ll 1$, tj. $v \ll c$) Lorentzove transformacije prelaze u Galilejeve. Zato Galilejeve transformacije vrijede za brzine koje su malene u usporedbi s brzinom svjetlosti, tj. za klasičnu mehaniku.

Iz Lorentzovih se transformacija čak i formalno vidi da je c najveća moguća brzina u prirodi. Kada bi v bila veća od c , izraz $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ bio bi imaginaran i transformacije ne bi imale fizikalnog smisla.

Važno je uočiti bitnu razliku između klasičnih i relativističkih transformacija. Dok smo u klasičnoj fizici smatrali da je vrijeme u sustavu koji se giba isto kao i u sustavu što miruje ($t = t'$), u relativističkoj se fizici ta dva vremena razlikuju. Događaji koji su istovremeni u jednom sustavu neće biti istovremeni u drugome. Vrijeme teče različito u raznim referentnim sustavima.

9.4. POSLJEDICE LORENTZOVIH TRANSFORMACIJA

Lorentzove su transformacije osnova Einsteinove specijalne teorije relativnosti. Iz njih se može vidjeti da je brzina svjetlosti u svim inercijalnim sustavima jednaka c , kao i niz drugih posljedica neobičnih s gledišta klasične mehanike.

Kontrakcija dužine. Zamislimo neki štap čvrsto vezan za sustav S' . Za promatrača u tom sustavu taj štap ima duljinu d_0 . Ta dužina, mjerena s obzirom na sustav u kojemu štap miruje, zove se vlastita dužina. Pogledajmo koliku će duljinu d izmjeriti promatrač u sustavu S , pokraj kojega taj štap i promatrač u sustavu S' prođu brzinom v u smjeru osi x .

Ako je štap orijentiran u smjeru osi y ili z , duljina će u sustavu S biti jednaka duljini štapa u sustavu S' :

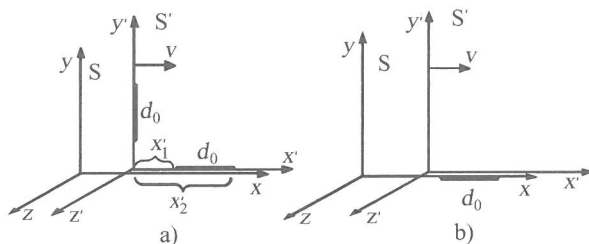
$$d_0 = y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 = d \quad (9.13)$$

Ako je štap duljine d_0 u smjeru osi x' (sl. 9.4a) čvrsto vezan za sustav S' , promatrač u S' izmjeri duljinu tog štapa $d_0 = x'_2 - x'_1$. Promatrač u sustavu S pokraj kojega taj štap prođe brzinom v u smjeru osi x izmjerit će duljinu $d = x_2 - x_1$. Vezu između duljine štapa u ta dva sustava možemo naći primjenom Lorentzovih transformacija (9.11):

$$d = x_2 - x_1 = x'_2 \sqrt{1 - \beta^2} + vt - x'_1 \sqrt{1 - \beta^2} - vt = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$d = d_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (9.14)$$

Štap, koji se relativno prema promatraču giba brzinom v , izgleda promatraču skraćen za faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$. Ta se pojava zove Fitzgeraldova (Lorentzova) kontrakcija. Uočite da je ovdje bitno da promatrač u sustavu S istovremeno (u istom trenutku t) obilježi početak i kraj štapa bez obzira na to što takvo mjerenje nije istovremeno u vlastitom sustavu štapa S' , jer je za promatrača u sustavu S' promatrač iz sustava S prednju točku štapa obilježio u ranijem trenutku nego kraj štapa i zato dobio manju duljinu.



Slika 9.4. Kontrakcija dužine

Slično, ako promatrač u sustavu S' (npr. vlaku), koji se giba jednoliko po pravcu brzinom v , mjeri neku duljinu u smjeru osi x sustava S , kao rezultat dobiva (sl. 9.4b):

$$d' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma v(t_2 - t_1) \quad (9.15)$$

Objek koordinata x'_1 i x'_2 treba mjeriti istovremeno u sustavu S' . Stoga je vrijeme t_2 različito od t_1 , dok su vremena t'_2 i t'_1 ista. Upotrebom transformacija za vrijeme (9.11d) dobivamo:

$$t'_2 = t'_1 \Rightarrow \gamma\left(t_2 - \frac{v x_2}{c^2}\right) = \gamma\left(t_1 - \frac{v x_1}{c^2}\right) \quad (9.16)$$

ili

$$t_2 - t_1 = -\frac{v(x_2 - x_1)}{c^2} \quad (9.17)$$

Uvrstimo li (9.17) u (9.15), izlazi:

$$d' = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma \frac{v^2(x_2 - x_1)}{c^2} = \frac{x_2 - x_1}{\gamma} = d_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (9.18)$$

U oba primjera izmjeri se za faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ kraća duljina nego onda kada predmet miruje. To je poznata relativistička kontrakcija dužine. Promatrač prema kojemu se tijelo giba brzinom v opaža kontrakciju duljine tijela u smjeru gibanja za faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$. Dimenzije okomito na smjer gibanja promatraču izgledaju nepromijenjene.

Dilatacija vremena. Slično se može pokazati da je promatraču u sustavu S' proces koji se događa u S duži nego promatraču koji se giba zajedno sa sustavom u kojemu se događa taj proces. Tu dilataciju vremena možemo izračunati

primjenom Lorentzovih transformacija. Neka se u sustavu S' na mjestu x' odvija određeni proces u vremenu $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Promatrač u sustavu S izmjeri da je proces trajao $\Delta t = t_2 - t_1$, što je, prema transformacijama (9.12), jednako:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.19)$$

odnosno

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.20)$$

Pri tom je bitno da je promatrač u sustavu S obilježio početak i kraj događaja na istome mjestu x' sustava S' .

Promatraču u sustavu S proces koji se događa u S' izgleda duži nego promatraču koji miruje s obzirom na mjesto događaja. Sat ide najbrže u onom sustavu u kojemu miruje prema promatraču; čim se giba relativno prema promatraču, opaža se dilatacija vremena dana relacijom (9.20).

Sustav u kojemu tijelo miruje često se zove vlastiti sustav. Duljina tijela u tom sustavu zove se vlastita duljina, a vlastiti vremenski interval je vrijeme zabilježeno satom vezanim za promatrano tijelo. Ako vlastito vrijeme obilježimo sa $\Delta \tau$, tada relaciju za dilataciju vremena možemo pisati:

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.20a)$$

Primjer

Elementarna čestica π -mezon nestabilna je i vrijeme poluraspada joj je $T = 1,77 \cdot 10^{-8}$ s u sustavu u kojemu miruje (vlastitom sustavu). Snop π -mezona iz nekog akceleratora giba se brzinom 0,99 c . Koliki put prevali prije nego što se intenzitet snopa smanji napola?

Zbog dilatacije vremena bit će vrijeme poluraspada mezona u laboratorijskom sustavu duže nego u vlastitom sustavu:

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,26 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

Zbog toga snop prijeđe put $s = 0,99 c \cdot \Delta t = 37,4$ m prije nego što se polovica mezona u njemu raspadne. Kada bismo putovali s mezonom, ta udaljenost izgledala bi nam kraća i iznosila bi samo $s' = v \Delta \tau = 5,3$ m.

Ta dva puta s i s' , mjerena iz dva različita sustava, povezana su relacijom za kontrakciju dužine:

$$s' = s \sqrt{1 - \beta^2} = 37,4 \cdot 0,141 \text{ m} = 5,3 \text{ m.}$$

Dilatacija vremena može se opaziti pri raspadanju μ -mezona kozmičkih zraka. Na visinama 10–20 km nastaju u atmosferi μ -mezoni čije je prosječno trajanje života $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Kad ne bi postojala dilatacija vremena, svi bi se mezoni raspali prije nego što stignu na Zemljinu površinu, što se ne događa jer velik dio nastalih mezona dođe do Zemljine površine. To je još jedan eksperimentalni dokaz dilatacije vremena.

Relativističko slaganje brzina. U odjeljku 7.2. vidjeli smo kako se zbrajaju brzine u klasičnoj fizici. Ako se vlak (sustav S') giba brzinom $\vec{v}$ s obzirom na Zemlju, odnosno na sustav S , vezan za nju, a putnik brzinom $\vec{u}'$ s obzirom na vlak, tada je brzina putnika s obzirom na Zemlju $\vec{u}$ vektorski zbroj tih dviju brzina:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \quad (9.21)$$

To je poznata Galilejeva transformacija za klasične brzine. Kako se zbrajaju relativističke brzine?

Ako materijalna točka u sustavu S ima komponente brzine:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad (9.22)$$

u sustavu S' brzina će biti zadana prvim derivacijama koordinata x' , y' i z' po vremenu t' :

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (9.23)$$

Veza između brzine čestice u sustavu S i sustavu S' može se naći pomoću Lorentzovih transformacija. Iz formula (9.11) slijedi:

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.24)$$

Podijelimo li prve tri jednadžbe u (9.24) s četvrtom, dobivamo transformacione formule za brzinu:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}; \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}; \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \quad (9.25)$$

To su izrazi za relativističku transformaciju brzina.

Ako je $v \ll c$, izrazi (9.25) prelaze u Galilejeve transformacije za brzinu:

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z \quad (9.26)$$

Već smo na više primjera vidjeli da relativističke formule prelaze u klasične kad je $v \ll c$. Klasični su zakoni ispravni u području manjih „klasičnih” brzina: klasična mehanika je aproksimacija relativističke mehanike.

Relacija (9.25) također kaže da je brzina svjetlosti ista za promatrače u sustavu S i S' . Ako je $u_x = c$, tada je $u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}}$ $= c$. Ako se bilo koja brzina doda br-

zini c , rezultat je ponovo c . Brzina svjetlosti u relativističkoj fizici ima istu ulogu kao beskonačna brzina u klasičnoj fizici. Ako su u i v manji od c , tada je i u' manje od c : u' nikad ne može biti veća od c .

9.5. RELATIVISTIČKA DINAMIKA

Drugi Newtonov zakon, $\vec{F} = m\vec{a}$, vrijedi samo u inercijskim referentnim sustavima koji su povezani Galileijevim transformacijama. U svim tim sustavima jednadžba gibanja $\vec{F} = m\vec{a}$ za odabrano gibanje ista je, i zbog toga kažemo da je jednadžba gibanja invarijantna s obzirom na Galileijeve transformacije. U relativističkoj mehanici inercijski referentni sustavi povezani su s Lorentzovim transformacijama, te i jednadžba gibanja mora biti invarijantna s obzirom na Lorentzove transformacije.

U klasičnoj mehanici ukupna je količina gibanja izoliranoga sustava očuvana. Tako pri sudaru dviju kuglica količina gibanja sustava prije sudara jednaka je količini gibanja sustava poslije sudara. Upotrijebimo li klasičan izraz za količinu gibanja, tada zakon očuvanja količine gibanja nije invarijantan s obzirom na Lorentzove transformacije.

Može se, međutim, pokazati da je zakon očuvanja količine gibanja u skladu s teorijom relativnosti ako količinu gibanja definiramo izrazom (3.3), što se može pisati i kao

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \quad (9.27)$$

gdje je m masa tijela, $\vec{v}$ brzina, a γ faktor ovisan o brzini

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.28)$$

Relativistički izraz za količinu gibanja razlikuje se od klasičnog u tome što u njemu umjesto mase m dolazi umnožak $m\gamma$, ovisan o brzini. (Taj se umnožak ponekad naziva relativističkom masom.) Ako je $v \ll c$, relativistički izraz za $\vec{p}$, naravno, prelazi u klasični: $m\vec{v}$.

Relativističku količinu gibanja (9.27) definirali smo tako da je očuvana u izoliranim sustavima, tj. u sustavima na koje ne djeluje vanjska sila. Ako postoji vanjska sila F , tada je ona jednaka prvoj vremenskoj derivaciji relativističke količine gibanja:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma v) \quad (9.29)$$

To je relativistička jednadžba gibanja (relativistički oblik drugoga Newtonova zakona); ona je invarijantna prema Lorentzovim transformacijama.

Slično se klasični izraz za kinetičku energiju $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ne može upotrijebiti u slučaju velikih (relativističkih) brzina.

Da bismo dobili relativistički izraz za kinetičku energiju, poslužimo se definicijom kinetičke energije (v. odjeljak 4.2). Rad izvršen silom F na putu ds pojavljuje se u obliku povećanja kinetičke energije čestice na koju djeluje sila:

$$dE_k = Fds = Fvdt = \frac{d}{dt}(m\gamma v)vdt = m(\gamma dv + v d\gamma)v \quad (9.30)$$

Da bismo odatle dobili relativistički izraz za kinetičku energiju, kvadrirat ćemo formulu (9.28) i napisati je u obliku

$$\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = c^2 \quad (9.31)$$

te diferenciranjem dobiti

$$v\gamma dv + v^2 d\gamma = c^2 d\gamma \quad (9.32)$$

Kad izraz (9.32) uvrstimo u (9.30), dobivamo:

$$dE_k = d(m\gamma c^2) \quad (9.33)$$

Integracijom izraza (9.33) u granicama od brzine jednake nuli (gdje je kinetička energija jednaka nuli) do konačne brzine v dobijemo relativistički izraz za kinetičku energiju:

$$E_k = m\gamma c^2 - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \quad (9.34)$$

Ako je brzina $v \ll c$, relativistički izraz (9.34) prelazi u klasični:

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots - 1 \right) = \frac{mv^2}{2} \quad (9.35)$$

Iz relacije (9.34) možemo kinetičku energiju shvatiti kao razliku ukupne energije

$$E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.36a)$$

koju ima slobodna čestica kad se giba brzinom v , i energije

$$E_0 = mc^2 \quad (9.36b)$$

što je čestica ima kad miruje.

Ukupna energija tijela u relativističkoj mehanici definira se kao zbroj njegove kinetičke energije i energije mirovanja

$$E = E_0 + E_k \quad (9.36c)$$

U tablici 9.1. prikazano je kako energija raste s brzinom. Što se više približavamo brzini svjetlosti, ukupna energija čestice postaje sve veća i česticu je sve teže ubrzati. Brzina svjetlosti je granična brzina za svako gibanje: ako je $v = c$, energija postaje beskonačna.

Tablica 9.1 Ovisnost omjera ukupne relativističke energije i energije mirovanja o brzini

v/c	E/E_0	v/c	E/E_0
0,1	1,005	0,7	1,400
0,2	1,021	0,8	1,667
0,3	1,048	0,9	2,294
0,4	1,091	0,99	7,089
0,5	1,155	0,9999	70,712
0,6	1,250	0,999999	707,107

Važan rezultat ove tzv. specijalne teorije relativnosti jest činjenica da svako tijelo ima energiju mirovanja $E_0 = m c^2$. Ta je energija vrlo velika, ali se ne opaža sve dok se ne dogodi neka reakcija koja izaziva raspad ili neku drugu promjenu strukture tijela.

Prema relativističkoj mehanici, gubitak mase koji se pojavljuje pri različitim nuklearnim reakcijama pretvara se u energiju i obratno, promjena u energiji prelazi u promjenu u relativističkoj masi po formuli

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 \quad (9.37)$$

Ta razlika energije, proistekla iz energije mirovanja, može biti vrlo velika: masi jednog grama odgovara energija od oko 10^{14} J. Upravo tim procesom dobivaju se goleme količine energije u nuklearnim reakcijama. Pri fisiji ^{235}U , raspadom samo jedne jezgre, oslobađa se energija oko $5 \cdot 10^{-11}$ J, te se iz relativno malo goriva mogu u nuklearnim elektranama dobiti veliki iznosi energije. Energija mirovanja se oslobađa i u kemijskim reakcijama, ali su oslobođeni iznosi zanemarivo mali u usporedbi s oslobođenom energijom u nuklearnim procesima.

I, na kraju, izvedimo još jednu korisnu relaciju, vezu između relativističke energije i relativističke količine gibanja. Ako se jednadžba (9.27) podijeli s jednadžbom (9.36), dobiva se

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E} \quad (9.40)$$

Uvrštavanjem izraza (9.40) u kvadriranu jednadžbu (9.36), nakon uređivanja razlomaka dobiva se izraz

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4 \quad (9.41)$$

iz čega proizlaze izrazi za ukupnu energiju

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad (9.42)$$

i za kinetičku energiju

$$E_k = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (9.43)$$

Izraz (9.41) može se napisati i kao

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \quad (9.44)$$

Može se pokazati da je relacija (9.44) invarijantna prema Lorentzovim transformacijama. Za čestice koje nemju mase ($m = 0$), primjerice za fotone, prethodni izrazi poprimaju jednostavniji oblik:

$$E = pc, \quad p = \frac{E}{c}, \quad E_0 = 0, \quad E_k = E = pc, \quad v = c \quad (9.45)$$

Za česticu bez mase energija mirovanja jednaka je nuli, a kinetička je energija jednaka ukupnoj energiji. Takva se čestica uvijek giba brzinom svjetlosti.

Primjer

Odredite energiju mirovanja, ukupnu energiju, omjer ukupne energije i energije mirovanja, brzinu i količinu gibanja elektrona kinetičke energije $E_k = 6,55 \cdot 10^{-13} \text{ J}$.

Energija mirovanja elektrona je

$$E_0 = mc^2 = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Energije u atomskoj fizici često se izražavaju i u elektronvoltima; pokažite da je energija elektrona 0,511 eV.

Ukupna je energija

$$E = E_k + E_0 = 7,37 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 4,605 \text{ eV}$$

Omjer ukupne energije i energije mirovanja jest

$$\frac{E}{E_0} = \gamma = \frac{7,37 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{8,19 \cdot 10^{-14} \text{ J}} = 9.$$

Iz istog izraza izračunamo brzinu elektrona:

$$E_k = E_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \Rightarrow \beta = 0,994 \Rightarrow v = 0,994c = 2,98 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Količina gibanja je

$$p = m\gamma v = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(2E_0 + E_k)} = 2,44 \cdot 10^{-21} \text{ kg m/s}.$$

PITANJA I ZADACI

1. Kada se mora primijeniti relativistička mehanika, a ne klasična?
2. Što je pokazano Michelson-Morleyevim eksperimentom?
3. Kako glase postulati specijalne teorije relativnosti?
4. Kako se iz postulata specijalne teorije relativnosti mogu izvesti Lorentzove transformacije?
5. Kakva je razlika između Galileijevih i Lorentzovih transformacija?
6. Navedite nekoliko posljedica Lorentzovih transformacija.
7. Što je kontrakcija dužine? Kako bi promatraču izgledala kugla koja se giba relativističkom brzinom?
8. Izvedite izraz za dilataciju vremena. Navedite primjere u kojima se očituje ta pojava.
9. Kako se zbrajaju relativističke brzine?
10. Kakav je relativistički izraz za količinu gibanja?
11. Vrijedi li pri relativističkim brzinama zakon očuvanja količine gibanja?
12. Objasnite relativističku jednadžbu gibanja.
13. Izvedite izraz za kinetičku energiju pri relativističkim brzinama.
14. Kako se definira ukupna energija, a kako energija mirovanja?
15. Izvedite vezu između energije i količine gibanja.
16. Pokažite da je izraz $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$ invarijantan s obzirom na Lorentzove transformacije.
17. Kakva je veza između energije i količine gibanja za fotone?
18. Kolika je kontrakcija dužine pri brzinama: a) 3 000 km/s, b) 30 000 km/s i c) 150 000 km/s?
19. Koliku bi udaljenost prešao astronaut u toku jedne godine svoga života gibajući se brzinom $0,9 c$: a) s obzirom na vlastiti sustav i b) s obzirom na promatrača na Zemlji? Koliko bi trajalo to putovanje mjereno iz sustava vezanoga za Zemlju?
20. Vlastito srednje vrijeme života μ -mezona jest $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Kolika je minimalna brzina mezona koji su nastali u atmosferi na 20 km nadmorske visine i uspjeli doći na Zemlju prije nego što su se raspali?
21. Nestabilne čestice π^+ mezoni proizvedeni u sinkrociklotronu imaju brzinu $0,6 c$. Vlastito srednje vrijeme života π^+ mezona je $2,6 \cdot 10^{-8}$ s. Koliki će put te čestice prijeći u laboratorijskom sustavu prije nego što se raspadnu? Koliki bi bio rezultat kad ne bi bilo relativističke dilatacije vremena?
22. Vrijeme poluraspada slobodnog nerelativističkog neutrona je 12 minuta. Koliki bi put prevalio snop neutrona brzine $0,6 c$ u svemirskom prostoru prije nego bi mu se intenzitet smanjio na polovicu? Koliki bi put prevalio snop neutrona energije 10 MeV?
23. Elektron i pozitron nastali raspadom γ -zrake energije 2 MeV emitiraju se istodobno u suprotnim smjerovima jednakim brzinama. Kolika je relativna brzina pozitrona prema elektronu?
24. Kolika je energija mirovanja a) elektrona, b) protona, c) neutrona?
25. Kolika je brzina elektrona kad mu je ukupna energija dvaput veća od energije mirovanja?
26. Kolika se energija oslobodi u eksploziji nuklearne bombe ako je ukupna masa mirovanja produkata nakon eksplozije manja za 1,5 g od početne mase mirovanja goriva (npr. plutonija)?
27. Solarna konstanta (snaga koja upada na jediničnu površinu okomitu na smjer Sunčevih zraka na rubu Zemljine atmosfere, tj. na udaljenosti $1,5 \cdot 10^{11}$ m od Sunca) iznosi $1,353 \text{ kW/m}^2$. Kolika je ukupna snaga koju zrači Sunce? Koliko se zbog toga svake sekunde smanjuje masa Sunca? Pod pretpostavkom da je zračenje Sunca konstantno, nakon kojeg vremena bi se masa Sunca smanjila na polovicu?
28. Kada elektron i pozitron interagiraju, oba iščezavaju, i umjesto njih nastaju dva jednaka γ -fotona. Ako je kinetička energija elektrona i pozitrona u trenutku interakcije zanemariva, kolika je energija svakog od nastalih fotona?
29. Koliko iznose količina gibanja, kinetička energija, ukupna energija i omjer γ ukupne energije i energije mirovanja za elektron, ako se on giba brzinom $0,8 c$?

10. STATIKA FLUIDA

10.1. UVOD

Tvar može postojati u tri agregatna stanja: čvrstom, tekućem i plinovitom. Čvrsta tijela zadržavaju određeni oblik i volumen zbog relativno jakih kohezionih sila među atomima. Tekućine poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze, ali teško mijenjaju svoj volumen. U plinovima su molekule relativno daleko jedna od druge te je plinove lako stlačiti, dakle, oni lako mijenjaju svoj volumen i poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze.

Fluidima nazivamo tekućine i plinove. To su tvari koje lako mijenjaju oblik, odnosno mogu teći. Mehanika fluida često se zove hidromehanika, a dijeli se na hidrostatiku, koja opisuje fluide u mirovanju, i hidrodinamiku, koja proučava fluide u gibanju.

U ovom ćemo poglavlju obraditi statiku, a u sljedećem dinamiku fluida. Razmotrit ćemo tlak u fluidu i uzgon koji djeluje na tijela uronjena u fluide. Na kraju ćemo se osvrnuti na međumolekularne sile u tekućinama i posljedice tih sila: napetost površine tekućina i kapilarnost.

10.2. TLAK

Čestice u fluidu djeluju jedna na drugu i na stijenke posude u kojoj se nalazi fluid, odnosno na svaku površinu tijela uronjenoga u fluid. U fluidima u mirovanju sile su uvijek okomite na površinu s kojom je fluid u kontaktu. Takve sile koje djeluju okomito na površinu zovemo pritisknim silama.

Tlak se definira kao omjer sile i površine na koju ta sila djeluje okomito:

$$p = \frac{F}{S} \quad (10.1)$$

Ako sila nije jednaka u svim točkama površine S , tada (10.1) daje srednju vrijednost tlaka. U tom slučaju možemo definirati tlak u određenoj točki pomoću izraza:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (10.2)$$

Tlak je skalarna veličina. Relaciju (10.2) možemo pisati i ovako:

$$d\vec{F} = p d\vec{S},$$

gdje je $d\vec{S}$ vektor u smjeru normale na element površine dS . U svakoj točki mirnog fluida tlak je isti u svim smjerovima.

Iz definicije (10.1) slijedi jedinica tlaka, koja se zove paskal (znak: Pa):

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}.$$

Osim jedinice paskal može se upotrebljavati i jedinica bar (znak: bar):

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}.$$

Fluidi lako mijenjaju oblik i poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze. Međutim, da bismo im promijenili volumen, potrebno je djelovati silom. Pri tom je plinove lako stlačiti, dok je stlačivost tekućine vrlo malena i potrebne su velike sile da bi se opazila promjena volumena tekućine. Obično tekućine smatramo nestlačivima.

Stlačivost fluida (pri izotermnoj kompresiji) definira se izrazom:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dp} \right)_T \quad (10.3)$$

Budući da je promjena volumena uvijek suprotnog predznaka od promjene tlaka, predznak minus u (10.3) čini stlačivost pozitivnom. Jedinica stlačivosti je recipročni paskal, Pa^{-1} , odnosno bar^{-1} .

Kao što se vidi iz tablice 10.1, promjena je volumena tekućina s tlakom malena pa ćemo je većinom zanemariti.

Tablica 10.1. Stlačivost nekih tekućina

Tekućina	κ/Pa^{-1}	Tekućina	κ/Pa^{-1}
aceton	$12 \cdot 10^{-10}$	voda	$5 \cdot 10^{-10}$
alkohol	$11 \cdot 10^{-10}$	živa	$0,4 \cdot 10^{-10}$

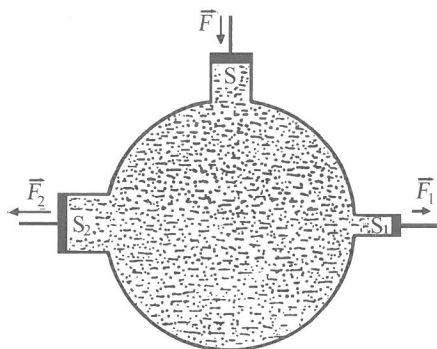
Za razliku od tekućina, plinovi lakše mijenjaju obujam. Pri izotermnoj kompresiji umnožak volumena i tlaka ostaje konstantan (Boyle–Mariotteov zakon) i stlačivost plinova je

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{p} \quad (10.3a)$$

Djelujemo li na tekućinu u ravnoteži izvana nekom silom F , tada se taj vanjski tlak širi u tekućini jednako na sve strane. Na primjer, ako na posudu napunjenu vodom preko klipa površine S djelujemo vanjskom silom F (sl. 10.1), sila se fluidom prenosi u svim smjerovima, tako da se tlak $p = \frac{F}{S}$ koji stvara vanjska sila pojavljuje u svim točkama fluida, te je

$$\frac{F}{S} = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p \quad (10.4)$$

To je poznati Pascalov zakon za vanjski (ili, kako se još zove, hidraulički) tlak. Možemo ga izraziti i tako da kažemo da je u svakoj točki nestlačivoga, mirnog fluida tlak jednak. U ovim razmatranjima nismo uzeli u obzir djelovanje sile teže na čestice fluida, što ćemo obraditi u sljedećem odjeljku.



Slika 10.1. Hidraulički tlak

Na tom principu temelje se hidraulički uređaji: preša, kočnice, dizalice i sl.



Slika 10.2. Hidraulička preša

Princip rada hidrauličke preše pokazan je na slici 10.2. Ako na klip (manje) površine S_1 djelujemo silom F_1 , tlak F_1/S_1 prenosit će se jednako u svim smjerovima, te i na klip (veće) površine S_2 na drugom kraju preše, pa je

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}, \text{ odnosno}$$

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} \quad (10.5)$$

Budući da je S_2 veći od S_1 , bit će veća i sila F_2 . Rad koji izvrše te sile jednak je $dW = F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2 = p \Delta V$. Tako se hidrauličkom prešom pomoću manjih sila dobivaju veće sile, te je preša primjer mehaničkog stroja kojim se korisni rad, koji bi se bez stroja morao izvršiti velikom silom, može izvršiti manjom silom.

Djelovanjem sile na papučicu hidrauličke kočnice preko klipa u glavnom cilindru automobila tlak se prenosi na sve dijelove nestlačive tekućine, pa tako i na klip cilindra u kotačima. Budući da je površina klipa glavnog cilindra nekoliko (npr. desetak) puta manja, sila kojom djeluje na kočnice toliko je puta veća od sile na papučicu kočnice.

Hidrostatski tlak. Na fluid djeluje i sila teža. To je volumna sila koja, za razliku od površinskih sila, što smo ih razmotrili u prethodnom odjeljku, djeluje na sve čestice fluida. Tlak uzrokovan težinom samog fluida nazivamo hidrostatskim tlakom. Tako atmosferski tlak uzrokuje težina stupca zraka koji se proteže od Zemljine površine do vrha atmosfere, tlak na dno posude napunjene vodom uzrokuje težina stupca vode iznad dna i sl.

Da bismo izračunali hidrostatski tlak, zamislimo tekućinu u posudi (sl. 10.3) i izračunajmo koliki tlak djeluje na površinu ΔS na dubini h . Neka je ta površina baza zamišljenog valjka unutar tekućine. Pretpostavimo da je gustoća konstantna, a tekućina nestlačiva.

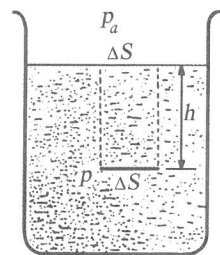
Na gornju bazu djeluje sila $F_1 = p_a \Delta S$, gdje je p_a atmosferski tlak, a na donju bazu djeluje sila $F_2 = p \Delta S$, gdje je p tlak na mjestu gdje se nalazi površina ΔS na dubini h , kao i težina stupca tekućine nad tom površinom, $G = \Delta m g = \rho g \Delta V = \rho g h \Delta S$. Budući da je zamišljeni volumen u ravnoteži, te se sile poništavaju:

$$p \Delta S - p_a \Delta S - \rho g h \Delta S = 0 \quad (10.6)$$

Odatle dobivamo ukupni tlak koji djeluje u svim točkama tekućine na dubini h :

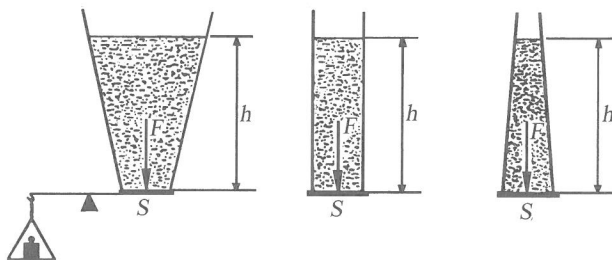
$$p = p_a + \rho g h \quad (10.7)$$

U relaciji (10.7) dio $\rho g h$ uzrokuje težina tekućine i zove se hidrostatski tlak.



Slika 10.3. Hidrostatski tlak

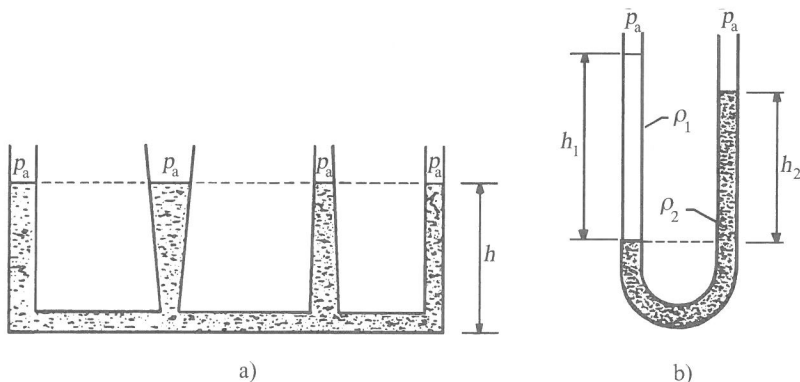
Na slici 10.4. prikazan je pokus kojim možemo pokazati da sila hidrostatskog tlaka na dno ovisi o površini dna ΔS i visini stupca vode h , ali ne i o obliku posude. Tako je u sva tri primjera na sl. 10.4. sila na dno jednaka, iako je u primjeru



Slika 10.4. Hidrostatski paradoks: tlak na dno posude ne ovisi o obliku posude

a) ukupna težina tekućine veća, a u primjeru c) manja od sile pritiska vode na dno. To je poznati hidrostatski paradoks koji, zapravo, i nije paradoks, već posljedica zakona za hidrostatski tlak.

U međusobno spojenim posudama (sl. 10.5a) razina tekućine u svim posudama nalazi se na istoj visini, bez obzira na oblik posuda. To izlazi iz činjenice što je hidrostatski tlak jednak u svim točkama na jednakoj dubini. (Pri tom pretpo-



Slika 10.5. Spojene posude

stavljamo da nema kapilarnih pojava). Ako se u spojenim posudama nalaze dvije različite tekućine, gustoće ρ_1 i ρ_2 (sl. 10.5b), tada je razina tekućine različita. Budući da u svim točkama određenoga horizontalnog presjeka ukupni tlak mora biti jednak, možemo pisati:

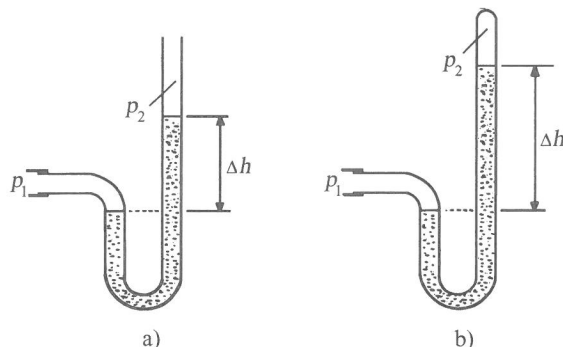
$$p_a + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_2 g h_2 \quad (10.8)$$

gdje su h_1 i h_2 visine stupca jedne i druge tekućine, mjerene od granice između njih (sl. 10.5b). Mjereći h_1 i h_2 , ako znamo ρ_1 , možemo odrediti nepoznatu gustoću:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2} \quad (10.9)$$

Na principu spojenih posuda rade uređaji za mjerenje tlaka, hidraulički manometri (tlakomjeri). Ako su vanjski tlakovi p_1 i p_2 različiti (sl. 10.6a i b), razina tekućine u obje posude je različita. Primjenom zakona za hidrostatski tlak dobivamo:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \rho g \Delta h \quad (10.7a)$$

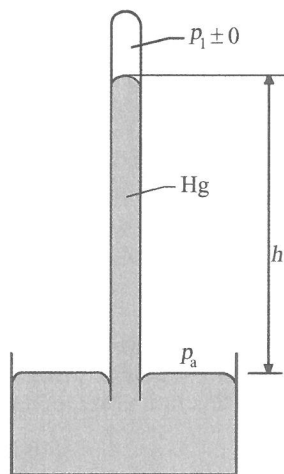


Slika 10.6. Manometri

te mjerenjem razlike razina tekućine Δh možemo mjeriti razliku tlaka Δp . Kada se upotrebljava otvoreni (sl. 10.6a), a kada zatvoreni (sl. 10.6b) manometar? Kada je prikladniji manometar s vodom, a kada sa živom?

10.3. ATMOSFERSKI TLAK

Zemlja svojom privlačnom silom drži oko sebe zračni omotač, Zemljinu atmosferu. Atmosferski tlak nastaje zbog vlastite težine zračnog stupca iznad Zemljine površine. Tlak zraka može se demonstrirati raznim pokusima, od kojih ćemo spomenuti Guerickeov i Torricellijev pokus.*



Slika 10.7. Živin barometar

Otto von Guericke prvi je pokazao silu pritiska zraka. Kad je iz dvije spojene šuplje polukugle izvučen zrak, pritisna sila okolne atmosfere na vanjsku površinu polukugle bila je tako velika da je za odvajanje jedne polukugle od druge bilo potrebno osam konja sa svake strane.

Tlak zraka možemo izmjeriti pomoću Torricellijeva pokusa. Ako staklenu cijev duljine oko 1 m, zatvorenu na jednom kraju, ispunimo živom, a vrh joj zatvorimo prstom, preokrenemo je i uronimo u posudu sa živom (sl. 10.7), živa će se u cijevi spustiti do određene visine h ovisne o vanjskom tlaku. Iznad žive u gornjem dijelu cijevi nema zraka, već samo nešto živinih para, te je tu tlak $p_1 \approx 0$. Na vanjsku površinu žive u posudi djeluje atmosferski tlak p_a .

* Otto von Guericke (1602—1686), gradonačelnik Magdeburga, poznat po pokusu s magdeburgskim polukuglama i pronalasku zračne pumpe.

E. Torricelli (1608—1647), talijanski matematičar i fizičar, poznat po otkriću živina barometra.

Napišemo li izraz za hidrostatski tlak za točke u horizontalnoj ravnini koja prolazi površinom žive u posudi, dobivamo:

$$p_a = \rho g h + p_1 = \rho g h \quad (10.10)$$

gdje je ρ gustoća žive, a h visina živina stupca.

Pri normiranom atmosferskom tlaku, koji iznosi 101 325 Pa, visina stupca žive u živinu barometru (sl. 10.7) jest 0,76 m. Budući da je gustoća žive pri 0 °C $\rho = 13,595 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, iz (10.10) zaista dobivamo:

$$p_a = \rho g h = 13,595 \cdot 10^3 \cdot 9,80 665 \cdot 0,76 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 101 325 \text{ Pa.}$$

Atmosferski tlak se mijenja s nadmorskom visinom i pada po tzv. barometarskoj formuli koju ćemo, uz određene aproksimacije, ovdje izvesti.

Neka je na visini h (sl. 10.8) atmosferski tlak jednak p , a na visini $h + dh$ tlak $p + dp$. Ako je dh pozitivan, tada je dp negativan, jer tlak pada s visinom. Razlika u tlaku dp između ta dva sloja nastaje zbog težine stupca zraka presjeka 1 m^2 i visine dh , a iznosi:

$$dp = -\rho g dh \quad (10.11)$$

gdje je ρ gustoća zraka na toj visini. Da bismo iz te jednadžbe odredili p kao funkciju h , moramo znati promjenu gustoće zraka s tlakom. Gustoća zraka funkcija je tlaka i temperature. Pretpostavimo li da je atmosfera izotermna ($T = \text{konst.}$), tada iz Boyle–Mariotteova zakona slijedi:

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} p(h) \quad (10.12)$$

gdje su p_0 i ρ_0 tlak i gustoća zraka na nadmorskoj visini $h = 0$.

Uvrštavanjem (10.12) u (10.11) i integriranjem, dobivamo

$$\int_0^h dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g p_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p},$$

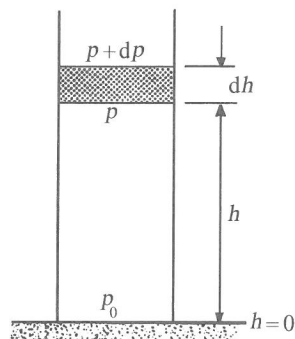
odnosno

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h} \quad (10.13)$$

Pri normiranoj temperaturi i tlaku (0 °C i 101 325 Pa) gustoća zraka $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$, te formulu (10.13) možemo pisati u obliku:

$$p = p_0 e^{-\frac{h/m}{7990}} \quad (10.13a)$$

što pokazuje da za približno svakih 8 000 metara tlak pada za faktor e (2,718). To je barometarska formula izvedena uz pretpostavku da je $g = \text{konst.}$ i da je veza



Slika 10.8. Uz izvod barometarske formule

tlaka i gustoće dana relacijom (10.12). Točniju formulu dobili bismo uzevši u obzir padanje temperature s visinom, pa bismo tada imali:

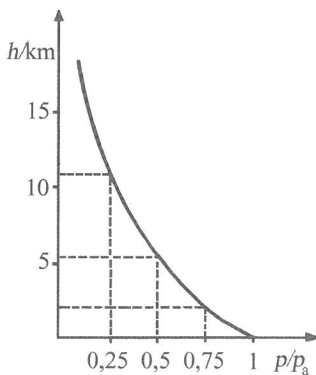
$$p = p_0 \left(1 - \frac{0,0065h}{288} \right)^{5,255} \quad (10.13b)$$

gdje je h nadmorska visina (metri), a 288 K (15 °C) temperatura na nadmorskoj visini $h \approx 0$.

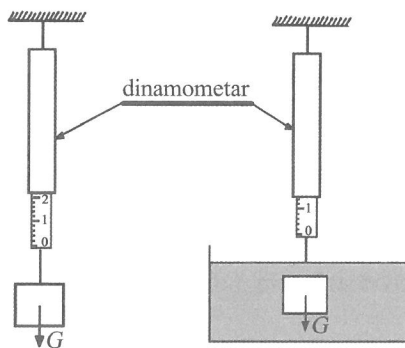
Ovisnost tlaka o visini za izotermnu atmosferu prikazana je na slici 10.9, a u tablici 10.2. ta je ovisnost dana za standardnu atmosferu u kojoj temperatura pada s visinom.

Tablica 10.2. Ovisnost atmosferskog tlaka o nadmorskoj visini

h/m	p/mbar	h/m	p/mbar
0	1 013	1 000	899
100	1 001	2 000	794
200	989	5 000	539
500	954	10 000	264



Slika 10.9. Promjena tlaka s nadmorskom visinom u izotermnoj atmosferi (barometarska formula)



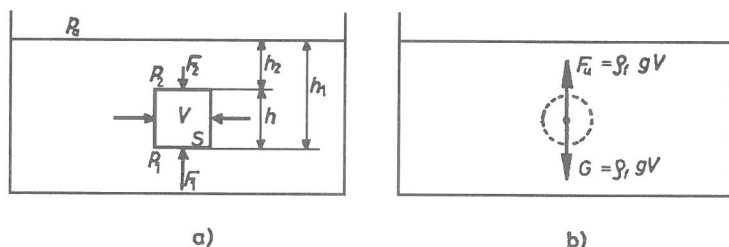
Slika 10.10. Uzgon

10.4. UZGON

Kad je tijelo uronjeno u fluid (tekućinu ili plin), javlja se rezultantna sila prema gore kao posljedica hidrostatskog tlaka. Tu silu nazivamo uzgonom.

Na slici 10.10. prikazan je pokus kojim možemo ilustrirati uzgon. Kada tijelo koje visi na dinamometru uronimo u vodu, dinamometar pokazuje manje jer uzgon prividno smanjuje težinu tijela.

Da bismo izveli formulu za uzgon, zamislimo tijelo volumena V uronjeno u fluid gustoće ϱ_f (sl. 10.11). Radi jednostavnosti pretpostavimo da je tijelo u obliku kocke ili valjka. (Uostalom, svako tijelo, bilo kakvog oblika, možemo razdijeliti na valjke ili kocke s dovoljno malim bazama, tako da će dobiveni rezultat vrijediti općenito.)



Slika 10.11. Uz izvod formule za uzgon

Sile pritiska koje djeluju na bočne strane kocke poništavaju se jer su na istoj horizontalnoj ravnini jednake po iznosu, a suprotnog smjera. Na mjestu gdje je gornja baza tlak je $p_2 = p_a + \varrho g h_2$, a na drugoj bazi tlak je $p_1 = p_a + \varrho g h_1$. Zbog toga je sila na donju bazu $F_1 = p_1 S$, dok je sila na gornju bazu $F_2 = p_2 S$, gdje je S površina baze. Sila F_1 ima smjer prema gore, a sila F_2 usmjerena je prema dolje. Budući da je hidrostatski tlak na razini $h_1 = h_2 + h$ veći nego na razini h_2 , sila F_1 bit će veća nego F_2 , i ka o rezultat pojavit će se sila prema gore — uzgon:

$$F_u = F_1 - F_2 = \varrho_f g h_1 S - \varrho_f g h_2 S$$

$$F_u = \varrho_f V g = m_f g \quad (10.14)$$

gdje je m_f masa istisnutog fluida. Može se pokazati da je uzgon za tijelo bilo kakvog oblika dan istom formulom (10.14).

Isti rezultat možemo dobiti i na nešto drukčiji način. Zamislimo dio fluida volumena V (sl. 10.11b). Težina tog dijela tekućine je $G_f = \varrho_f g V$ i djeluje prema dolje. Budući da tekućina miruje, tu težinu uravnotežuje druga sila, koja je jednaka po iznosu, ali suprotnog smjera, tj. uzgon. Prema tome, uzgon na taj volumen tekućine iznosi $F_u = \varrho_f g V$. Ako je umjesto tekućine na tom mjestu neko drugo tijelo istog oblika i volumena, hidrostatski tlakovi i njihove sile neće se promijeniti, te će uzgon biti isti kao i prije, tj. $F_u = \varrho_f g V$.

Uzgon je sila koja djeluje vertikalno prema gore i po iznosu je jednak težini istisnutog fluida. To je poznati Arhimedov* princip, koji možemo i ovako iskazati:

Težina tijela uronjenog u fluid smanjuje se za iznos težine istisnutog fluida.

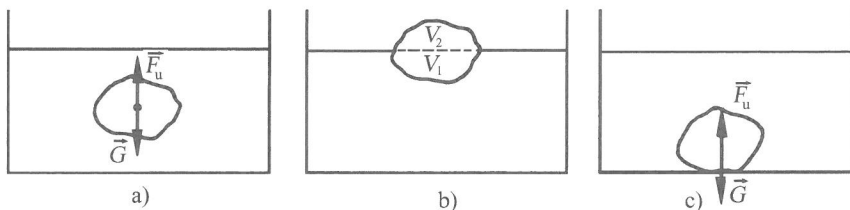
Tijelo lebdi u fluidu ako je težina tijela uravnotežena uzgonom (sl. 10.12a). Ako je tijelo homogeno, tada uvjet lebdjenja možemo pisati u obliku:

$$\varrho_f g V = \varrho_t g V \quad \text{ili} \quad \varrho_f = \varrho_t \quad (10.15)$$

* Arhimed (287—212), grčki matematičar, fizičar i izumitelj, otkrio je uzgon, zakon polumu, itd. Poznat je i po tome što je našao izraze za oplošje i volumen kugle i valjka.

Ako je uzgon veći od težine, tijelo se ubrzano diže (npr. balon u zraku), pa će tijelo uronjeno u tekućinu djelomično izroniti iz tekućine i plivati (sl. 10.12b). Tijelo koje pliva bit će toliko uronjeno da će uzgon na uronjeni dio (volumen V_1) na slici 10.11b biti jednak ukupnoj težini tijela:

$$G = \rho_f g V_1 \quad (10.16)$$



Slika 10.12. Uvjet plivanja

ili za homogena tijela:

$$\rho_{\text{tijela}} V g = \rho_f V_1 g \quad (10.17)$$

odnosno

$$V_1 = \frac{\rho_{\text{tijela}}}{\rho_f} V \quad (10.18)$$

Ako je težina tijela veća od uzgona, tijelo se ubrzano giba prema dolje i tone (sl. 10.11c).

Primjer

Koliki dio ledene sante viri iznad morske površine? (Gustoća leda je 900 kg/m^3 , a gustoća morske vode 1020 kg/m^3 .)

Santa leda volumena V pliva na vodi tako da je volumen V_1 ispod vode, a V_2 iznad vode. Uzgon na uronjeni dio $\rho_f g V_1$ mora biti jednak težini sante $\rho_l g V$, te je:

$$V_1 = \frac{\rho_l}{\rho_v} V, \quad V_2 = V - V_1,$$

odnosno

$$V_2 = \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_v}\right) V = 0,118 V.$$

Uređaj za mjerenje gustoće areometar (sl. 10.13) osniva se na pojavi uzgona. To je staklena cijev, otežana na donjem kraju, na kojoj se nalazi baždarena skala. Što je gustoća tekućine veća, to će areometar manje uroniti u tekućinu, te se uranjanjem areometra vertikalno u tekućinu može direktno očitati njezina gustoća.

Ako se pri preciznom vaganju volumen uzorka mnogo razlikuje od volumena utega, treba uzeti u obzir i uzgon u zraku. Masa uzorka više nije jednaka masi utega, već je

$$m_{\text{uzorka}} = m_{\text{utega}} \frac{1 - \rho/\rho_1}{1 - \rho/\rho_2} \quad (10.19)$$

gdje je ρ gustoća zraka, ρ_1 gustoća utega, a ρ_2 gustoća uzorka. Na primjer, ako je $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$, $\rho_1 = 8600 \text{ kg/m}^3$, a $\rho_2 = 100 \text{ kg/m}^3$, m_{uzorka} je 1,003 veća od mase utega.



Slika 10.13. Areometar

Primjer

Predmet od legure bakra i zlata teži u zraku 0,490 N, a uronjen u alkohol 0,460 N. Odredite masu zlata u predmetu. Zanemarite uzgon u zraku.

Težina predmeta u alkoholu jednaka je

$$G' = G - F_u = mg - \varrho_a (V_1 + V_2)g,$$

gdje je m masa predmeta, a V_1 i V_2 volumeni zlata i bakra u predmetu.

Odatle

$$V_1 + V_2 = \frac{G - G'}{\varrho_a g}.$$

Uzevši u obzir $V_1 = \frac{m_1}{\varrho_1}$ i $V_2 = \frac{m_2}{\varrho_2}$, dobivamo

$$\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} = \frac{G - G'}{\varrho_a g}.$$

Budući da je $m_2 = m - m_1 = \frac{G}{g} - m_1$, to je

$$\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{G}{\varrho_2 g} - \frac{m_1}{\varrho_2} = \frac{G - G'}{\varrho_a g},$$

ili

$$m_1 = \frac{\frac{G - G'}{\varrho_a g} - \frac{G}{\varrho_2 g}}{\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}} = 2,88 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 28,8 \text{ g}.$$

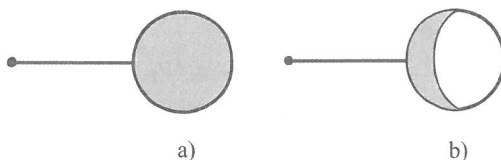
10.5. NAPETOST POVRŠINE

U čvrstom tijelu atomi su poredani u kristalnoj rešetki i ne mogu se slobodno translacijski gibati, već samo titrati oko položaja ravnoteže. Suprotno tome, u plinovima atomi (molekule) nisu vezani jedan za drugog i gibaju se kaotično u posudi u kojoj se nalazi plin. U tekućem stanju molekule nisu vezane kao u čvrstom stanju, ali ni slobodne kao u plinu. U tekućini su molekule relativno blizu jedna drugoj, te su privlačne međumolekularne sile dosta jake sve do određene udaljenosti, koju možemo nazvati radijus molekularnog djelovanja, a zatim naglo padnu na nulu. Možemo, dakle, smatrati da svaka molekula djeluje na sve ostale koje se nalaze unutar kugle s radijusom molekularnog djelovanja. Polumjer takve kugle je desetak puta veći od razmaka molekula u tekućinama.

Molekularne sile među istoimenim molekulama često se zovu kohezivne sile, a sile među molekulama različitih tvari adhezivne sile.

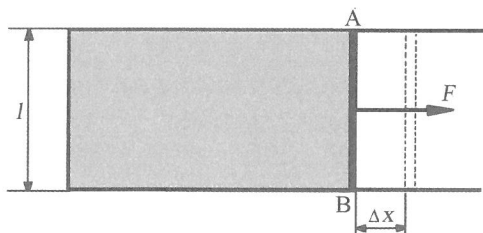
Pojava napetosti površine tekućina može se objasniti navedenim svojstvima međumolekularnih sila. Poznato je, naime, da se površina tekućina ponaša kao neka rastegnuta, napeta opna. Iglu, žilet, aluminijsku pločicu i sl. možemo položiti na površinu vode tako da na njoj plivaju. Kukci mogu trčati po vodenoj površini. Ako na kolot od žice u kojemu se nalazi končić uhvatimo opnu od sapunice (sl.

10.14) i probušimo je s jedne strane končića, preostali dio opne slegne se na najmanju površinu i konac dobije oblik kružnog luka (sl. 10.14b).



Slika 10.14. Napetost površine opne od sapunice

Da bismo izmjerili napetost površine zamislimo pokus s pravokutnim okvirom od žice na kojemu je opna od sapunice (sl. 10.15). Jedna je stranica pravokutnika pomična, i opna će je u svom nastojanju da se skupi nastojati povući i tako smanjiti površinu. Kažemo da na stranicu AB djeluje sila napetosti površine. Tu silu možemo uravnotežiti vanjskom silom F koja je po iznosu jednaka sili napetosti površine.



Slika 10.15. Uz definiciju koeficijenta površinske napetosti

Da bismo povećali površinu opne, pomični dio AB na slici 10.15. polako djelovanjem vanjske sile F pomaknemo za Δx . Pri tom se izvrši rad $\Delta W = F \Delta x$. Budući da se opna sastoji od dvije površine između kojih je tanak sloj tekućine, povećanje površine je $\Delta S = 2 l \Delta x$.

Koeficijent površinske napetosti σ definira se izrazom:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} \quad (10.20)$$

gdje je ΔW rad potreban za povećanje površine ΔS . Zamijenimo li u (10.20) $W = F \Delta x$ i $S = 2 l \Delta x$, to je:

$$\sigma = \frac{F}{2l} \quad (10.21)$$

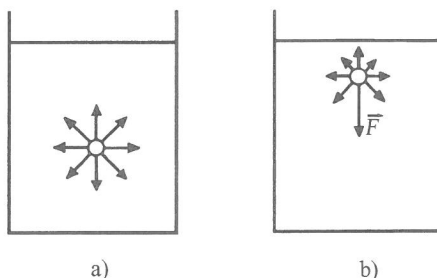
Koeficijent površinske napetosti σ može se, dakle, definirati pomoću rada potrebnoga za povećanje površine ili pomoću sile površinske napetosti. Iz toga slijedi da je jedinica koeficijenta površinske napetosti njutn po metru N/m ili J/m².

Sila površinske napetosti djeluje tangencijalno na površinu tekućine, a okomito na rub površine. Za razliku od elastične sile koja djeluje pri izvlačenju elastične opne, sila površinske napetosti ne ovisi o veličini površine.

U unutrašnjosti tekućine (sl. 10.16a) molekula je sa svih strana okružena susjednim molekulama s kojima interagira tako da je resultantna sila nula. U površinskom sloju (debljine manje od radijusa međumolekularnog djelovanja R) molekula nije sa svih strana okružena jednakim brojem molekula jer je unutar kugle radijusa R s donje strane veći broj molekula nego s gornje. Zato će na molekule

na površini djelovati rezultantna sila F usmjerena prema unutrašnjosti tekućine (sl. 10.16b). Da bi se molekule iz unutrašnjosti dovele na površinu, potreban je određeni rad; molekule na površini imaju veću potencijalnu energiju nego one u unutrašnjosti tekućine. Da bi bio ispunjen uvjet ravnoteže — minimum potencijalne energije — tekućina nastoji smanjiti slobodnu površinu i zato se javlja površinska napetost. Povećanjem površine molekule se iz unutrašnjosti prenose na površinu i povećava im se potencijalna energija na račun izvršenog rada.

Koeficijent površinska napetost ovisi o vrsti tekućine (sastavu, čistoći i sl.), temperaturi tekućine i sredstvu s kojim tekućina graniči.



Slika 10.16. Rezultantna sila na molekulu: a) u unutrašnjosti, b) na površini tekućine

Tablica 10.3. Koeficijent površinske napetosti nekih tekućina kad je iznad površine zrak

Tekućina	Voda (20 °C)	Voda (100 °C)	Živa (20 °C)	Alkohol (20 °C)	Petrolej (20 °C)
$\sigma/(\text{N/m})$	0,073	0,06	0,48	0,022	0,03

Tlak ispod zakrivljene površine tekućine. U mjehuriću sapunice (ili mjehuriću zraka u vodi i sl.) tlak je veći od vanjskog tlaka za neki dodatni „nadtak“ Δp . Površinska napetost u mjehuriću nastoji stegnuti mjehurić sve dok se ne uspostavi ravnoteža zbog tlaka unutar mjehurića.

Da bi se povećao mjehurić polumjera r na polumjer $r + dr$, mora se izvršiti rad:

$$dW = 2 \sigma dS = 2 \sigma \cdot 8 r \pi dr \quad (10.22)$$

Uzima se faktor 2 jer mjehurić ima dvije površine, a umjesto dS uvrstili smo $8 r \pi dr$.

Unutar mjehurića je nadtak Δp i sila koja zbog toga djeluje na unutrašnju površinu mjehura jest $\Delta p S$. Pri povećanju mjehurića rad je te sile:

$$dW = \Delta p S dr = \Delta p \cdot 4 r^2 \pi dr \quad (10.23)$$

Izjednačavanjem izraza (10.22) i (10.23) dobivamo nadtak u mjehuriću sapunice:

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r} \quad (10.24)$$

Nadtak u mjehuriću sapunice proporcionalan je površinskoj napetosti, a obrnuto proporcionalan polumjeru mjehurića. To je poseban oblik Laplaceove formule za tlak ispod zakrivljene površine tekućine.

Ako dva mjehura sapunice međusobno spojimo staklenom cijevi, tada će zrak iz manjeg mjehura prelaziti u veći, tako da će se manji mjehur još više smanjivati na račun većega, koji će rasti sve dok manji mjehur ne nestane.

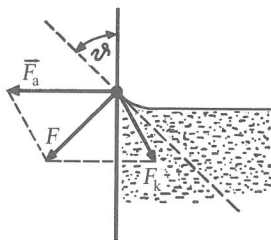
Formula (10.24) izvedena je za mjehurić s dvije površine. U slučaju mjehurića zraka u tekućini ili kapljice tekućine dodatni je tlak unutar takve jednostruke sferne površine:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad (10.24a)$$

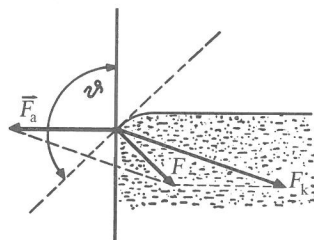
10.6. KAPILARNOST

Do sada smo govorili o površinskom sloju na granici tekućine sa zrakom, a sada ćemo se osvrnuti na pojave na granici tekućine i čvrstog tijela (npr. stijenke posude). Između molekula tekućine i molekula materijala stijenke posude djeluju također međumolekularne sile, te ponašanje tekućine uz stijenku posude ovisi o odnosu kohezionih i adhezionih sila. Površina tekućine postavlja se okomito na rezultantu svih tih međumolekularnih sila.

Ako su adhezione sile veće od kohezionih (npr. na granici voda—staklo), površina tekućine poprima konkavni oblik (sl. 10.17), i kažemo da tekućina kvasi stijenku posude. Naprotiv, ako su kohezione sile veće, npr. kao na granici živa—staklo, tekućina ne kvasi stijenku, već poprima konveksni oblik (sl. 10.18).



Slika 10.17. Tekućina kvasi stijenku posude: okrajni kut manji od 90°



Slika 10.18. Tekućina ne kvasi stijenku posude: okrajni kut veći od 90°

Kut što ga zatvara stijenka posude i tangenta na površinu tekućine zove se **okrajni kut** (sl. 10.17. i 10.18). Ako je $\vartheta < 90^\circ$, tekućina kvasi stijenku posude, a ne kvasi je ako je ϑ između 90° i 180° .

Tablica 10.4. Vrijednosti za okrajni kut između stijenke posude i nekih tekućina

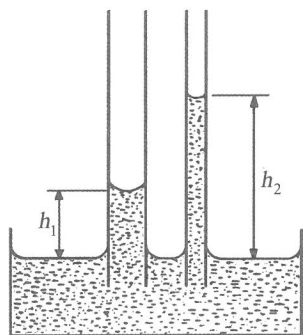
Sistem	Okrajni kut
Alkohol—staklo	0°
Voda—staklo	0°
Živa—staklo	140°
Voda—parafin	109°

Ako na čistu podlogu (npr. metalnu ili staklenu pločicu) kapnemo kap neke tekućine, oblik kapi ovisit će o površinskoj napetosti za granicu čvrsto tijelo—tekući-

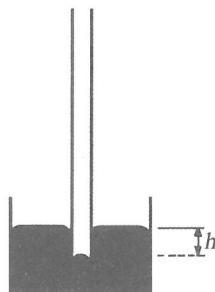
na, tekućina—plin i čvrsto tijelo—plin, odnosno o okrajnom kutu koji je funkcija tih površinskih napetosti. Tako će kapljica žive biti gotovo sferna, dok će alkohol ili petrolej teći preko površine, ne formirajući kapljice.

Ako usku cjevčicu (kapilaru) uronimo u posudu s vodom (sl. 10.19), opaziti ćemo da će se voda u njoj podići do neke visine h (koja ovisi o polumjeru kapilare) i da će meniskus vode u kapilari biti konkavan. Slično vrijedi i za ostale tekućine koje kvase stijenku kapilare. Visina stupca tekućine pri tom ovisi i o vrsti tekućine i o polumjeru kapilare.

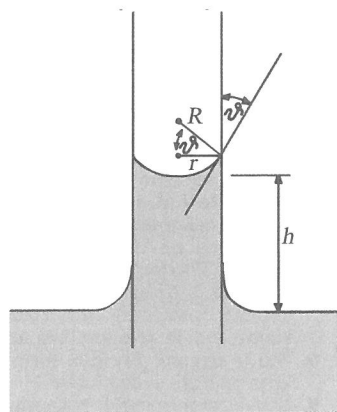
Naprotiv, razina žive u staklenoj kapilari niža je od razine u širokoj posudi (sl. 10.20), i meniskus žive je konveksan. Obje pojave, koje se zovu kapilarna elevacija i kapilarna depresija, posljedica su napetosti površine.



Slika 10.19. Kapilarna elevacija



Slika 10.20. Kapilarna depresija



Slika 10.21. Visina stupca tekućine u kapilari

Izračunat ćemo visinu tekućine u kapilari u slučaju kapilarne elevacije. Slična razmatranja za kapilarnu depresiju dovela bi do istog rezultata.

Zbog konkavnog meniskusa tekućine u kapilari (sl. 10.21) tlak ispod meniskusa manji je nego (atmosferski) tlak iznad, i tekućina se podiže sve dok se ta razlika tlaka Δp ne izjednači s hidrostatskim tlakom, uzrokovanim težinom stupca tekućine u kapilari:

$$\Delta p = \rho g h \quad (10.25)$$

Budući da je $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$, gdje je R polumjer meniskusa, odnosno $\Delta p = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{r}$, gdje je $r = R \cos \vartheta$ polumjer kapilare, ϑ okrajni kut, a σ površinska napetost, to iz (10.25) slijedi:

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g r} \quad (10.26)$$

Isti rezultat možemo dobiti tako da vertikalnu komponentu površinske napetosti, koja podiže tekućinu u kapilari (sl. 10.21), izjednačimo s težinom stupca tekućine.

Sila zbog površinske napetosti na graničnoj liniji (kružnici) između površine tekućine i posude jest $\sigma \cdot l = \sigma \cdot 2r\pi$, gdje je $2r\pi$ opseg te kružnice, te je njezina vertikalna komponenta $2r\pi\sigma \cos \vartheta$. Težina stupca tekućine je $r^2\pi h \rho g$. Vertikalna komponenta sile površinske napetosti podiže tekućinu u kapilari sve dok težina stupca tekućine ne postane jednaka toj sili:

$$2r\pi\sigma \cos \vartheta = r^2\pi h \rho g \quad (10.27)$$

Odatle je

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g r} \quad (10.26)$$

PITANJA I ZADACI

1. Definirajte tlak i navedite jedinice za tlak.
2. Što kaže Pascalov zakon (princip)? Koji se uređaji na njemu baziraju?
3. Izvedite relaciju za hidrostatski tlak u tekućini. Koliki je npr. ukupni tlak u dubini vode 10 m pri normiranom atmosferskom tlaku?
4. Opišite spojene posude. Kako se pomoću spojenih posuda može izmjeriti gustoća tekućine? Objasnite hidrostatski paradoks.
5. Što je manometar? Koliki je tlak u posudi ako zatvoreni živin (odnosno vođeni) manometar priključen na tu posudu pokazuje razliku nivoa od 20 cm?
6. Opišite Torricellijev pokus. Objasnite živin barometar. Koliki je normirani atmosferski tlak?
7. Izvedite i objasnite barometarsku formulu. Ako je na podnožju planine (nadmorska visina 100 m) normirani atmosferski tlak, koliki je tlak na vrhu planine visoke 1 000 m? (Pretpostavite da je temperatura zraka 0 °C i da se ne mijenja s visinom.)
8. Što je uzgon? Izvedite formulu za uzgon. Što kaže Arhimedov princip? Opišite neke od pokusa u vezi s uzgonom.
9. Što je areometar i koja mu je primjena?
10. Objasnite napetost površine. Opišite neke od pokusa koji pokazuju tu pojavu.
11. Definirajte koeficijent površinske napetosti. O čemu ovisi? U kojim se jedinicama izražava?
12. Što znate o tlaku ispod zakrivljene površine tekućine? Koliki je nadtlak u mjehuriću od sapunice a koliki u mjehuriću zraka u tekućini?
13. Opišite kapilarnu elevaciju i depresiju. Izvedite izraz za visinu stupca tekućine u kapilari.
14. Što je okrajni kut? Koliki je npr. za živu odnosno vodu u staklenoj posudi?
15. Koliki je ukupni tlak u dubini mora od 100 m ako je na morskoj površini normirani atmosferski tlak? Kolika je sila koja djeluje na prozor podmornice površine 500 cm² kada se nalazi na toj dubini ako je u unutrašnjosti podmornice tlak jednak atmosferskom?
16. U U-cijev nalivena je voda a onda u jedan krak tekućina nepoznate gustoće, tako da se ne miješa s vodom. Visina stupca vode mjerena od razine gdje se tekućine dodiruju je 20 cm, a visina stupca druge tekućine je 25 cm. Kolika je gustoća tekućine?
17. U Torricellijevoj cijevi između žive i vakuuma nalazi se voda. Pri normalnom atmosferskom tlaku ukupna visina stupca žive i vode je 2 m. Koliko je visok stupac vode?
18. Koliki se udjel obujma ledene sante nalazi ispod površine mora?
19. Predmet uronjen u vodu teži 8,34 N, a u benzin 9,32 N. Kolika je gustoća predmeta?
20. Željezna kocka kojoj je brid $a = 1$ cm pliva na živi. Koliko duboko uroni kocka u živu?
21. Tijelo u obliku kocke pliva na živi tako, da je trećina njegovog volumena uronjena u živu. Koji će dio volumena biti uronjen u živu, ako na nju dolijemo toliko vode da pokriva cijelo tijelo?
Gustoća žive je $13,6 \cdot 10^3$ kg/m³.
22. Da bi se izvukla tanka igla duljine 2 cm iz tekućine, potrebna je vertikalna sila $2,8 \cdot 10^{-3}$ N. Koliki je koeficijent površinske napetosti tekućine?
23. Okvir od žice u obliku jednakostraničnog trokuta stranice $a = 3$ cm uronjen je u sapunicu i izvučen tako da je na njemu formirana opna od sapunice. Koliki je potreban rad za formiranje te opne ako je $\sigma = 2,2 \cdot 10^{-2}$ N/m?
24. U U-cijev kojoj krakovi imaju različite polumjere ulivena je a) voda, b) živa. Kolika je razlika razina ako su polumjeri $r_1 = 4$ mm i $r_2 = 0,6$ mm? Uzeti da voda potpuno moči, a živa uopće ne moči stijenku.

11. DINAMIKA FLUIDA

11.1. UVOD

U ovom dijelu mehanike razmotrit ćemo gibanje nestlačivog fluida, najprije idealnoga, a zatim ćemo uzeti u obzir unutrašnje trenje (viskoznost). Mehanika fluida često se zove i hidromehanika i dio je mehanike kontinua, kojemu, osim hidromehanike, pripada i teorija elastičnosti.

Kada se fluid giba (struji), pojavljuje se među njegovim česticama i slojevima unutrašnje (viskozno) trenje uzrokovano međumolekularnim koheznim silama. Ako je to trenje zanemarivo, kažemo da je fluid idealan. Zakoni izvedeni za strujanje idealnog fluida mogu se u mnogo slučajeva, bilo direktno, bilo uz određene promjene, primijeniti i na realni fluid.

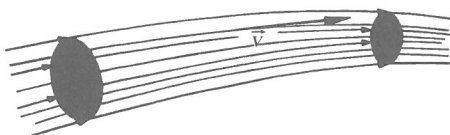
Pretpostavit ćemo, također, da je fluid nestlačiv, tj. da mu je gustoća konstantna. Ta je aproksimacija dobra za tekućine, a vrijedi i za plinove kada brzine strujanja nisu prevelike (npr. manje od 100 m/s). Naime, pri manjim brzinama promjene su tlaka (a time i volumenā) zanemarivo malene, te je gustoća približno konstantna.

Nakon proučavanja zakona strujanja idealnog fluida obradit ćemo unutrašnje trenje i protjecanje realnog fluida. Osvrnut ćemo se na laminarno i turbulentno strujanje i na Reynoldsov broj, koji služi kao kriterij određivanja vrste strujanja. Govorit ćemo i o otporu sredstva i dinamičkom uzgonu na tijela koja se gibaju kroz zrak.

11.2. STRUJANJE IDEALNOG FLUIDA

Gibanje tekućine ili plina nazivamo strujanjem. Strujanje nastaje zbog vlastite težine fluida ili zbog razlike u tlakovima. Pri strujanju razni slojevi fluida imaju različite brzine i među tim slojevima javljaju se sile unutrašnjeg trenja (viskoznosti). Kada se tijelo giba kroz viskozni fluid, također nastaje sila trenja, zbog viskoznosti fluida, tzv. otpor sredstva. Radi jednostavnosti, u većini naših razmatranja pretpostavit ćemo da je fluid idealan, tj. da nema unutrašnjeg trenja među njegovim slojevima, čime ćemo pojednostaviti matematičku obradu strujanja fluida.

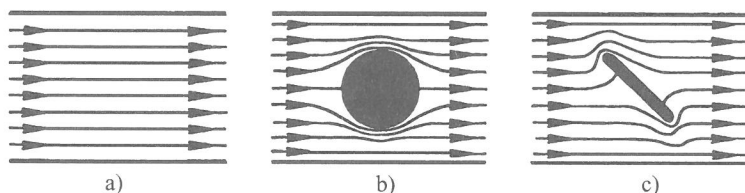
Strujanje fluida možemo opisati tako da brzinu u svakoj točki prostora odredimo kao funkciju vremena. Strujnica je zamišljena linija u fluidu čija tangenta u svakoj točki pokazuje smjer brzine. Gustoća strujnica proporcionalna je iznosu brzine: tamo gdje su strujnice gušće, brzina fluida je veća, i obratno. Dio fluida omeđen strujnicama nazivamo strujnom cijevi (sl. 11.1).



Slika 11.1. Strujna cijev

Ako se slika strujanja u prostoru ne mijenja u vremenu, strujanje je stacionarno. Pri takvom strujanju brzina čestica i tlak funkcije su samo položaja, a ne i vremena. Dok se brzina i tlak mogu mijenjati od mjesta do mjesta, u određenoj točki fluida oni su uvijek isti. Naprotiv, pri nestacionarnom strujanju brzina i

tlak u pojedinoj točki ovisi i o vremenu. Pri stacionarnom strujanju putanja (tj. niz uzastopnih položaja koje čestica fluida zauzima pri gibanju) poklapa se sa strujnicom; strujnice pri takvom strujanju ne ulaze niti izlaze iz strujne cijevi (sl. 11.1).



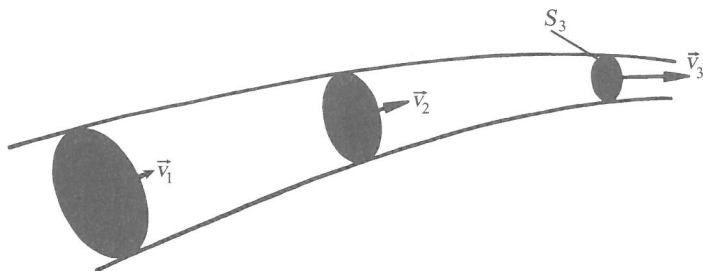
Slika 11.2. Strujanje idealnog fluida

Jedan je od važnih problema u hidromehanici gibanje tijela kroz fluid. To se može proučavati i tako da se promatra strujanje fluida oko nepomičnog tijela. Za neka jednostavnija tijela ti se problemi mogu riješiti i matematički, ali je sliku stacionarnog strujanja u prostoru najlakše dobiti pokusom. Na slici 11.2a, b i c prikazano je strujanje idealnog fluida kroz cijev, oko kružnog valjka i ravne ploče. Iz slike 11.2b vidimo, npr., da su iza i ispred valjka u simetričnim točkama brzine jednake, te i tlakovi, tako da je resultantna sila pritiska nula, i valjak se giba kroz fluid bez otpora.

11.3. JEDNADŽBA KONTINUITETA

Promatrajmo strujanje fluida kroz strujnu cijev različitog presjeka (sl. 11.3). Ako je unutrašnje trenje zanemarivo (idealni fluid), brzina je u svim točkama određenog presjeka jednaka. Za vrijeme Δt kroz promatrani presjek S prođe volumen fluida $V = S v \Delta t$. Omjer volumena tvari koja protekne za vrijeme Δt i tog vremena je volumni protok

$$q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S v \quad (11.1)$$



Slika 11.3. Uz izvod jednadžbe kontinuiteta

Ako je gustoća fluida svuda konstantna (nestlačivi fluid), i ako unutar strujne cijevi nema izvora ni ponora, masa fluida, koja u vremenu Δt protekne kroz bilo koji presjek, konstantna je:

$$\rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t = \text{konst.} \quad (11.2)$$

te je konstantan i protok

$$S v = \text{konst.} \quad (11.3)$$

To je jednačba kontinuiteta, zapravo zakon o neuništivosti tvari.

Iz jednačbe kontinuiteta slijedi da je tamo gdje je cijev uža (S manji) brzina fluida veća (strujnice su gušće), i obrnuto. Fluid se ubrzava tamo gdje se cijev suzuje, dakle na čestice fluida djeluje sila usmjerena od šireg dijela cijevi prema užem dijelu. Ta sila nastaje zbog razlike tlakova; tlak u širem dijelu cijevi već i je nego u užem dijelu.

Ako brzina nije jednaka u svim točkama presjeka S , protok se računa tako da se presjek podijeli na dovoljno malene elemente površine ΔS , tako malene da je na njima brzina konstantna. Protok kroz presjek S u tom je slučaju jednak zbroju (odnosno, u graničnom slučaju integralu):

$$q_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (11.4)$$

gdje vektor $d\vec{S}$ ima smjer normale na element površine. Ako tekućina izlazi iz površine, $\vec{v} \cdot d\vec{S}$ je pozitivan, a ako ulazi negativan. Ukupan protok kroz dio strujne cijevi omeđen presjecima S_1 i S_2 jest:

$$\iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (11.5)$$

jer je na plaštu cijevi $\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$. (Tekućina ne prolazi kroz plašt cijevi, tamo je $\vec{v} \perp d\vec{S}$.) Jednačbu (11.5) možemo pisati i u obliku:

$$\oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (11.6)$$

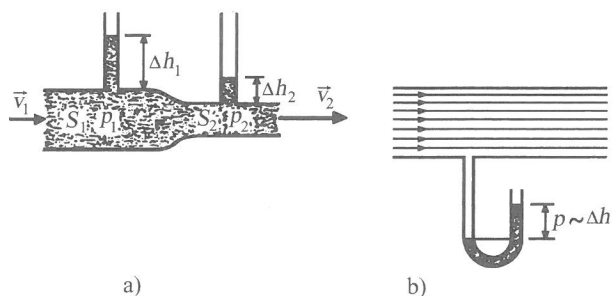
gdje je S zatvorena površina sastavljena od presjeka S_1 i S_2 te plašta cijevi. (Smjer $d\vec{S}$ je u smjeru vanjske normale na zatvorenu površinu.) To je općeniti oblik jednačbe kontinuiteta ako je gustoća konstantna. Ako gustoća nije konstantna, može se pokazati da jednačba kontinuiteta glasi:

$$\oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV \quad (11.7)$$

gdje je V volumen omeđen zatvorenom površinom S .

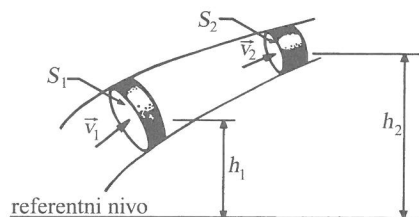
11.4. BERNOULLIJEVA JEDNAČBA

Bernoulli je 1738. postavio **zakon o raspodjeli tlakova unutar strujne cijevi**, danas poznat kao *Bernoullijeva jednačba*. Pokus pokazuje da je na mjestu gdje je brzina veća tlak manji nego tamo gdje je brzina manja (sl. 11.4a). Tlak na pojedinome mjestu u strujnoj cijevi možemo mjeriti pomoću vertikalne staklene cjevčice ili vertikalnog otvorenog manometra (sl. 11.4b). Taj tzv. statički tlak proporcionalan je visini stupca tekućine u cjevčici.



Slika 11.4. Mjerenje statičkog tlaka: a) u tekućini i b) u plinu

Da bismo izveli Bernoullijevu jednadžbu, promatrajmo stacionarno strujanje idealnog fluida kroz strujnu cijev promjenljivog presjeka (sl. 11.5). Pretpostavit ćemo da je fluid idealan, tj. zanemarit ćemo unutrašnje trenje (viskoznost). Strujanje fluida je stacionarno, te na određenom mjestu u cijevi čestice uvijek imaju istu brzinu.



Slika 11.5. Uz izvod Bernoullijeve jednadžbe

Uočimo u cijevi presjek S_1 gdje je brzina v_1 i tlak p_1 i presjek S_2 gdje je brzina v_2 i tlak p_2 . Neka za vrijeme Δt kroz presjek S_1 protokne masa fluida $\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t$. Jednaka masa (volumen) mora u tom vremenu proći i kroz presjek S_2 , te će iscrtkani volumeni na slici 11.5. biti jednaki:

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho} \quad (11.8)$$

To je, u stvari, jednadžba kontinuiteta primijenjena na ovaj slučaj.

Dok fluid mase Δm prolazi kroz presjek S_1 , rad tlačne sile jest:

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta s_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \frac{\Delta m}{\rho} \quad (11.9)$$

Rad koji izvrši fluid mase Δm pri izlasku kroz presjek S_2 iz promatranog dijela strujne cijevi jest:

$$\Delta W_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t = -p_2 \frac{\Delta m}{\rho} \quad (11.10)$$

gdje smo s predznakom minus uzeli u obzir da su smjerovi sile i pomaka suprotni. Uočite da je na presjeku S_1 rad ΔW_1 izvršen nad sistemom, a da na presjeku S_2 sistem izvrši rad protiv sila vanjskog tlaka p_2 . Zato je ukupni rad izvršen nad sistemom:

$$\Delta W = \Delta W_1 - \Delta W_2 = (p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\rho} \quad (11.11)$$

Kako smo prepostavili da nema trenja, taj rad vanjskih sila pritiska jednak je promjeni energije čitavoga razmatranog volumena fluida, ograničenoga stijen-kama strujne cijevi i presjecima S_1 i S_2 . Međutim, promjena energije čitavog tog volumena jednaka je razlici kinetičke i potencijalne energije iscrtanih malih volumena $\Delta V_1 = S_1 \Delta s_1$ i $\Delta V_2 = S_2 \Delta s_2$ (v. sl. 11.5):

$$\Delta E = E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_2 - m g h_1 \quad (11.12)$$

Kada izjednačimo rad ΔW i promjenu energije ΔE i sredimo, dobivamo:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (11.13)$$

To je Bernoullijeva jednadžba za stacionarno strujanje nestlačivog idealnog fluida. Često je pišemo u obliku:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.} \quad (11.14)$$

i kažemo da je u svakoj točki neke strujnice zbroj statičkog tlaka p , tlaka $\rho g h$, uzrokovana visinskom razlikom pojedinih dijelova fluida, i dinamičkog (brzinskog) tlaka $\frac{1}{2} \rho v^2$ uvijek konstantan.

Ako je cijev horizontalna, ili ako je gustoća fluida malena (kao kod plinova), te je tlak $\rho g (h_2 - h_1)$ zanemariv, Bernoullijeva jednadžba poprima oblik:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \text{konst.} \quad (11.15)$$

Iz te jednadžbe jasno vidimo da je na mjestima gdje je veća brzina fluida tlak manji, i obrnuto (sl. 11.4a).

Kad fluid miruje ($v_1 = v_2 = 0$), Bernoullijeva jednadžba prelazi u:

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1) \quad (11.16)$$

To je već poznati izraz za razliku tlakova u mirnom fluidu.

Primjer

Promjer šireg dijela valjkaste štrcaljke za injekcije je 2 cm, a užega je 1 mm. Ako na klip štrcaljke djeluje stalna sila 10 N, kolika je brzina kojom tekućina štrca? Za koje će vrijeme sva voda biti istisnuta iz horizontalno položene štrcaljke? Hcd klipa je $d = 6,5$ cm. Zanimarite trenje klipa u cilindru i unutrašnje trenje u tekućini.

Tlak i brzina u širem dijelu su p_1 i v_1 , a u užem p_2 i v_2 . Volumen tekućine koji istekne iz štrcaljke je $S_1 v_1 t = S_2 v_2 t$, gdje su $S_1 = r_1^2 \pi$ i $S_2 = r_2^2 \pi$ presjeci cijevi, a t vrijeme istjecanja. Štrcaljka je položena horizontalno, te Bernoullijeva jednadžba napisana za širi i užu dio cijevi glasi

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (1)$$

Tlak koji djeluje na tekućinu u širem dijelu je zbroj tlaka koji dolazi od sile F i atmosferskog tlaka, dok na tekućinu na presjeku S_2 djeluje atmosferski tlak:

$$p_1 = \frac{F}{S_1} + p_a; \quad p_2 = p_a.$$

Stoga (1) poprima oblik

$$\frac{F}{S_1} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2. \quad (2)$$

Izlučivanjem v_1 iz jednadžbe kontinuiteta $S_1 v_1 = S_2 v_2$ i uvrštavanjem u (2) dobivamo brzinu istjecanja

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 F S_1}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Budući da je $S_1^2 \gg S_2^2$, možemo S_2^2 zanemariti prema S_1^2 , te je

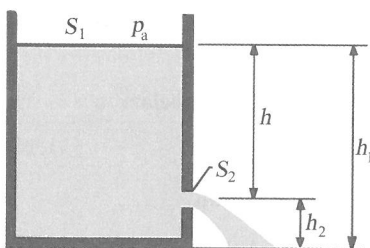
$$v_2 \approx \sqrt{\frac{2 F}{\rho S_1}} = \sqrt{\frac{2 F}{\rho r_1^2 \pi}} = 8 \text{ m/s}.$$

Ukupni volumen tekućine u štrcaljki je $S_1 d$ stoga je vrijeme potrebno za istiskanje tekućine:

$$t = \frac{V}{q} = \frac{S_1 d}{S_2 v_2} = \frac{S_1 d}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2 F} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]} \approx \frac{S_1 d}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2 F}} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 d \sqrt{\frac{\rho r_1^2 \pi}{2 F}} = 3,3 \text{ s}.$$

11.5. PRIMJENE BERNOULLIJEVE JEDNADŽBE

Primijenit ćemo Bernoullijevu jednadžbu na nekoliko jednostavnijih primjera, te izračunati brzinu i protok tekućine kroz mali otvor i brzinu protoka fluida kroz Venturijevu i Pitot—Prandtlovu cijev.



Slika 11.6. Istjecanje tekućine kroz mali otvor

Istjecanje tekućine kroz mali otvor.

Neka se na stijenci otvorene široke posude (sl. 11.6) nalazi mali otvor na dubini h tekućine. Kolika je brzina i protok tekućine kroz taj otvor?

Primijenit ćemo Bernoullijevu jednadžbu za dva presjeka, i to za otvorenu površinu tekućine (S_1) i za presjek S_2 mlaza tekućine na otvoru. Na presjeku S_1 tlak p_1 jednak je atmosferskom, a brzina vrlo malena, zanemari-va. Na presjeku S_2 tlak je također p_a , a brzina v_2 , te je:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (11.17)$$

odnosno:

$$p_a + \rho g h_1 = p_a + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \quad (11.18)$$

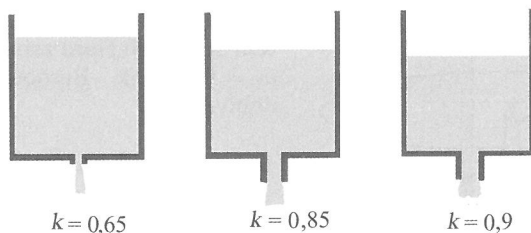
Odatle je

$$v_2 = \sqrt{2 g (h_1 - h_2)} = \sqrt{2 g h} \quad (11.19)$$

To je **Torricellijev zakon** istjecanja tekućine kroz mali otvor. Rezultat (11.19) kaže da je brzina tekućine ista kao kad tekućina slobodno pada s iste visine. Formula (11.19) vrijedi samo za idealne tekućine, a za realne, zbog unutrašnjeg trenja, brzina istjecanja je manja.

Pri istjecanju tekućina kroz otvor javlja se i kontrakcija mlaza: efektivni presjek mlaza obično je manji od presjeka otvora (sl. 11.7). Koeficijent kontrakcije k , koji ovisi o tekućini i o obliku otvora, obično iznosi od 0,6 do 0,9. Protok je u tom slučaju:

$$q_v = k S v = k S \sqrt{2 g h} \quad (11.20)$$



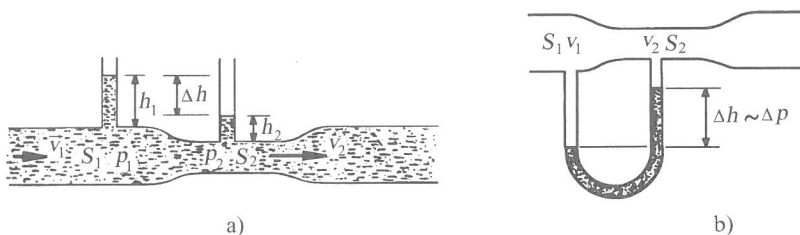
Slika 11.7. Kontrakcija mlaza

Venturijeva* cijev. Ta cijev, sa suženjem u sredini, služi za mjerenje brzine i protoka fluida. Primjenom Bernoullijeve jednadžbe i jednadžbe kontinuiteta može se iz razlike tlakova Δp na širem i užem presjeku cijevi izračunati brzina i protok fluida.

Napišemo li Bernoullijevu jednadžbu i jednadžbu kontinuiteta za širi i uži presjek cijevi (sl. 11.8), dobivamo:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \quad (11.21)$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$



Slika 11.8. Venturijeva cijev

Odatle se dobije brzina fluida:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]}} \quad (11.22)$$

* G. B. Venturi (1746–1822), talijanski fizičar.

odnosno protok

$$q_v = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}} \quad (11.23)$$

Iz poznatih presjeka S_1 i S_2 , očitavanjem razlike tlakova na manometru Venturijeve cijevi, možemo izračunati brzinu, odnosno protok fluida kroz cijev.

Venturijeva cijev može poslužiti za mjerenje protoka fluida. Koristi se i u karburatoru benzinskog motora gdje pad tlaka omogućuje raspršenje goriva.

Pitot—Prandtlova* cijev. U toj cijevi (sl. 11.9), mjerenjem dinamičkog tlaka, možemo odrediti brzinu strujanja plina. Manometar Pitot—Prandtlove cijevi ima takav oblik da mjeri razliku ukupnog tlaka i statičkog tlaka, jer je jedan njegov otvor u smjeru strujanja fluida. U tom se otvoru fluid zaustavlja, te je brzina $v_2 = 0$, i iz Bernoullijeve jednadžbe dobivamo:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 \quad (11.24)$$

odnosno

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 - p_1 = \Delta p \quad (11.25)$$

Odatle je

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} \quad (11.26)$$

Pitot—Prandtlova cijev može poslužiti za mjerenje brzine aviona. Ona je pogodnija za mjerenje većih brzina, a za manje brzine točnija je Venturijeva cijev.

Primjer

Iz pumpe u prizemlju zgrade voda ulazi u cijev promjera 2,4 cm pod tlakom 400 kPa, brzinom 1 m/s. Koliki je volumni protok vode? Kolika je brzina i tlak u potkrovlju zgrade na visini 30 m ako je tamo promjer cijevi dva puta manji nego u prizemlju?

Volumni protok je produkt presjeka cijevi i brzine fluida:

$$q_v = S_1 v_1 = r_1^2 \pi v_1 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Brzinu v_2 određujemo iz jednadžbe kontinuiteta

$$\begin{aligned} S_1 v_1 &= S_2 v_2 \\ v_2 \frac{S_1 v_1}{S_2} &= \frac{r_1^2}{r_2^2} v_1 = 4 v_1 = 4 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Iz Bernoullijeve jednadžbe

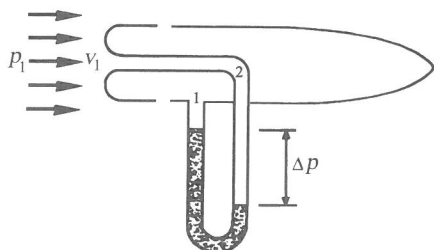
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2.$$

dobivamo tlak u potkrovlju zgrade

$$p_2 = p_1 - \rho g (h_2 - h_1) - \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \right) = p_1 - \rho g h - \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{r_1^4}{r_2^4} - 1 \right) = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

* H. Pitot (1695–1771), francuski fizičar.

L. Prandtl (1875–1953), njemački fizičar, zaslužan za proučavanje strujanja fluida.

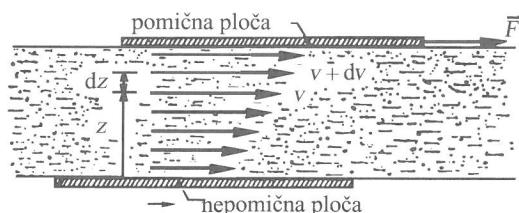


Slika 11.9. Pitot-Prandtlova cijev

11.6. VISKOZNOST

Do sada smo promatrali idealni fluid, tj. zanemarili smo trenje među njegovim slojevima. Međutim, pri protjecanju realnog fluida međumolekularne sile uzrokuju unutrašnje trenje ili viskoznost. Pri gibanju tijela kroz realni fluid također se pojavljuje sila viskoznosti, koja djeluje suprotno gibanju. Uočite razliku između viskoznosti i trenja u mehanici. Naime, pri običnom trenju postoji sila i kada tijelo miruje, dok se viskoznost očituje samo pri gibanju.

Zamislimo sloj fluida između dviju ploča od kojih je jedna (donja) nepomična, a na gornju (pomičnu) djelujemo tangencijalnom silom F (sl. 11.10), tako da se ploča giba jednoliko.



Slika 11.10. Trenje u fluidu

Kada se ploča giba, ona povlači za sobom sloj fluida, a taj sloj silama djeluje na susjedni, itd. Najbrže će se gibati sloj uz gornju ploču, dok će sljedeći slojevi imati sve manju i manju brzinu.

Takvo gibanje fluida u slojevima nazivamo laminarnim ili slojevitim strujanjem. Pri laminarnom strujanju slojevi se fluida ne miješaju. Ako je brzina fluida veća od tzv. kritične brzine, laminarno strujanje prelazi u turbulentno, tj. strujanje pri kojemu se slojevi miješaju i nastaju vrtlozi.

Kada se ploča na koju djelujemo stalnom silom F (sl. 11.10) giba jednoliko, sila unutrašnjeg trenja uravnotežuje vanjsku silu F . Već je Newton uvidio da sila unutrašnjeg trenja ovisi o površini dodirnih slojeva S , vrsti fluida i promjeni brzine od sloja do sloja, tzv. gradijentu brzine dv/dz .

Sila unutrašnjeg trenja između dva susjedna sloja fluida, čija je površina S i koji su međusobno udaljeni dz , jest:

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dz} \quad (11.27)$$

gdje je η koeficijent dinamičke viskoznosti, koja ovisi o vrsti fluida i o temperaturi.

Jedinicu koeficijenta dinamičke viskoznosti paskalsekunda (znak: Pa s) određujemo iz relacije (11.27):

$$[\eta] = \frac{\text{N s}}{\text{m}^2} = \text{Pa s}.$$

Kinematička viskoznost je omjer dinamičke viskoznosti i gustoće fluida:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (11.28)$$

Jedinicu kinematičke viskoznosti određujemo također iz definicijske jednadžbe

$$[\nu] = \text{m}^2/\text{s}.$$

U tablici 11.1. uočite ovisnost viskoznosti o temperaturi. S porastom temperature viskoznost tekućine pada, a plinova raste. Zašto?

Tablica 11.1. Dinamičke viskoznosti nekih fluida pri različitim temperaturama

Fluid	$\eta/(\text{Pa s})$	Fluid	$\eta/(\text{Pa s})$
voda (20 °C)	10^{-3}	živa (20 °C)	$1,6 \cdot 10^{-3}$
voda (50 °C)	$0,55 \cdot 10^{-3}$	zrak (0 °C)	$1,7 \cdot 10^{-3}$
voda (100 °C)	$0,28 \cdot 10^{-3}$	zrak (20 °C)	$1,8 \cdot 10^{-3}$
alkohol (20 °C)	$0,12 \cdot 10^{-3}$	zrak (40 °C)	$1,9 \cdot 10^{-3}$
glicerol (20 °C)	1,49		

Viskoznost motornih ulja izražava se po posebnoj skali američkoga Društva automobilskih inženjera SAD (Society of Automotive Engineers, skraćeno SAE), oznakama SAE 10, SAE 20, SAE 30, itd. Što je broj oznake veći, to je veća viskoznost. Tako se u automobilskom motoru zimi upotrebljava, npr., ulje SAE 10, ljeti SAE 30 a u diferencijalu i mjenjaču brzina ulje SAE 90. Dinamička je viskoznost ulja SAE 30 oko 0,4 Pa s pri temperaturi 55 °C, SAE 10 oko 0,1 Pa s i sl.

11.7. LAMINARNO I TURBULENTNO STRUJANJE. REYNOLDSOV BROJ

Pri manjim brzinama realni fluid struji laminarno, tj. u slojevima (lat. lamina = sloj). Svaki sloj tekućine ima svoju brzinu, koje se obično razlikuju.

Ako brzina fluida postane veća od neke kritične brzine v_k , strujanje iz laminarnog prelazi u turbulentno. Pri tom nastaje miješanje slojeva fluida, čestice prelaze iz jednog sloja u drugi sloj, i nastaju vrtlozi. Kritična brzina pri kojoj laminarno strujanje prelazi u turbulentno ovisi o viskoznosti i gustoći fluida te o obliku cijevi kroz koju fluid struji, odnosno o obliku tijela što se giba kroz fluid.

Hoće li fluid teći laminarno ili turbulentno, može se odrediti pomoću bezdimenzionalnog parametra koji se zove Reynoldsov broj:

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (11.29)$$

gdje je ρ gustoća fluida, η dinamička viskoznost, v brzina strujanja fluida (odnosno brzina tijela koje se giba kroz fluid). Reynoldsov broj ovisi i o obliku cijevi, odnosno tijela, a ta ovisnost se određuje karakterističnom dužinom l u relaciji (11.29), koja je, npr., za cijev kružnog presjeka jednaka promjeru, za kvadratni presjek jednaka stranici kvadrata, za kuglu polumjeru ili promjeru kugle i sl.

Protjecanje fluida je laminarno ako je Reynoldsov broj manji od kritičnoga Re_k , dok je za $\text{Re} > \text{Re}_k$ protjecanje turbulentno. Za strujanje kroz cijevi Re_k je oko 2 300, za strujanje preko ravne ploče Re_k je oko $4 \cdot 10^5$, za avione Re_k je oko $5 \cdot 10^6$, itd.

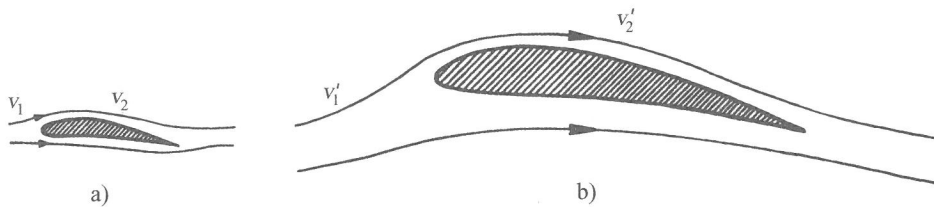
Ako, npr., kroz cijev polumjera 1 cm struji voda ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 10^{-3} \text{ Pa s}$), kritična je brzina:

$$v_k = \frac{\eta \text{Re}_k}{D \rho} = \frac{\eta \text{Re}_k}{2 r \rho} = 0,1 \text{ m/s} \quad (11.30)$$

Ako kroz istu cijev struji zrak ($\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$), tada je kritična brzina oko 2 m/s.

Vrijednost za kritični Reynoldsov broj (npr. $\text{Re}_k = 2\,300$) samo je aproksimativna, prelazno područje iz laminarnoga u turbulentno proteže se u određenom području vrijednosti Reynoldsova broja (npr. 2 000—4 000), a točnu granicu treba u konkretnom slučaju odrediti mjerenjem.

Pri proučavanju strujanja fluida oko nekih tijela (npr. brodova, aviona i sl.) u praksi se obično primjenjuju umanjeni modeli. Da bi se dobiveni rezultati mogli primijeniti na originalni sistem, osim što model mora biti geometrijski sličan predmetu, potrebno je da uvjeti pri ispitivanju modela budu dinamički slični stvarnim uvjetima. Može se pokazati da su dva strujanja dinamički slična ako su im Reynoldsovi brojevi jednaki. Tako na slici 11.11, na kojoj je prikazano strujanje zraka oko



Slika 11.11. Strujanje oko avionskog krila i njegova modela

avionskog krila i njegova modela, osim geometrijske postoji i dinamička sličnost, te se, npr., brzine fluida u određenim točkama jednog sistema odnose kao brzine u odgovarajućim točkama drugog sistema:

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{v'_2}{v_2} \quad (11.31)$$

ako su gustoća fluida i viskoznost u oba slučaja jednake.

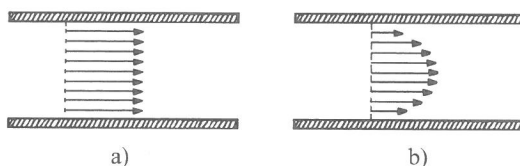
Iz izraza (11.29) vidi se da će Reynoldsov broj ostati isti ako model, koji je n puta manji od originala, ispitujemo u fluidu kojemu je brzina n puta veća, uz istu gustoću ρ i dinamičku viskoznost η . Koristeći se tom činjenicom, mogu se pomoću modela rješavati problemi u hidrodinamici koje je teško ili nemoguće drukčije riješiti.

11.8. PROTJEKANJE REALNOG FLUIDA KROZ CIJEV

Kad idealni fluid struji kroz cijev, u svim točkama presjeka brzina je jednaka (sl. 11.12a) i protok je dan relacijom:

$$q_v = S v$$

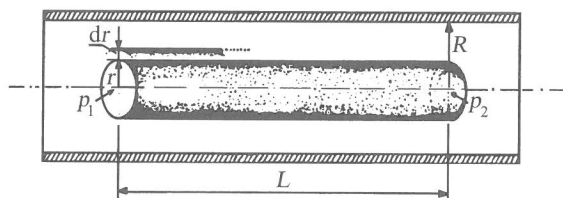
Kada realni fluid struji kroz usku cijev, najveća je brzina u sredini cijevi, dok se prema krajevima brzina smanjuje, te je uz samu stijenku cijevi nula (sl. 11.12b).



Slika 11.12. Protjecanje fluida kroz cijev

Kada realni fluid struji uz neku zapreku (ili se neko tijelo giba u fluidu), tada se uz zapreku stvara tzv. **granični sloj** fluida, čija brzina nije jednaka brzini fluida daleko od zapreke. Tik uz zapreku čestice fluida jedva se miču, malo dalje njihova se brzina povećava, a ubrzo dosežu brzinu koju bi imale kada ne bi postojala zapreka. Slično se oko tijela koje se giba u fluidu formira granični sloj u kojemu zbog trenja čestice gube na brzini, to više što su bliže tijelu. Određeni sloj fluida pranja uz tijelo i giba se zajedno s njim, povlačeći za sobom susjedne slojeve. Slojevi fluida koji su dalje od tijela gibaju se sve sporije, a na određenoj udaljenosti (tj. izvan graničnog sloja) fluid miruje.

Izvedimo izraze za raspodjelu brzina i protok u uskoj cijevi (kapilari) polumjera R (koji je manji nego debljina graničnog sloja) kroz koju laminarno struji realna tekućina dinamičke viskoznosti η (sl. 11.13).



Slika 11.13. Uz izvod Poiseuilleova zakona

Sila koja djeluje na sloj fluida u obliku valjka polumjera r i dužine L (sl. 11.13) nastaje zbog razlike tlakova i iznosi:

$$F = r^2 \pi (p_1 - p_2) \quad (11.32)$$

Sila trenja kojom taj sloj tekućine djeluje na susjedni sloj iznosi:

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dr} = \eta 2 r \pi L \frac{dv}{dr} \quad (11.33)$$

Zbroj tih dviju sila jednak je nuli:

$$\vec{F} + \vec{F}_{tr} = 0 \quad (11.34)$$

Odatle je:

$$r^2 \pi (p_1 - p_2) = - \eta 2 r \pi L \frac{dv}{dr} \quad (11.35)$$

Integriranjem izraza dobivamo brzinu kao funkciju udaljenosti od središta cijevi:

$$\int_r^R (p_1 - p_2) r \, dr = - \int_v^0 2 \eta L \, dv \quad (11.36)$$

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta L} (R^2 - r^2) \quad (11.37)$$

Brzina se mijenja po zakonu parabole (sl. 11.12b).

Volumen je tekućine koja u vremenu t protekne kroz određeni presjek cijevi

$$V = \int_V dV = \int_0^R 2 r \pi \, dr \, v \, t = \frac{\pi (p_1 - p_2) t}{2 \eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr \quad (11.38)$$

Integriranjem dobivamo protok:

$$q_v = \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8 \eta} \frac{p_1 - p_2}{L} R^4 \quad (11.39)$$

Protok ovisi o dinamičkoj viskoznosti η , gradijentu tlaka (razlici tlaka po metru dužine cijevi) i o četvrtoj potenciji radijusa cijevi. To je poznati **Poiseuilleov*** zakon laminarnog protjecanja realne tekućine kroz uske cijevi.

Pomoću relacije (11.39) možemo odrediti dinamičku viskoznost tekućine mjereći protok (Englerov viskozimetar).

Koristeći se relacijom (11.39) možemo naći izraz za otpor pri laminarnom strujanju viskozne tekućine. Sila trenja jednaka je ukupnoj sili zbog razlike tlakova:

$$F_{tr} = R^2 \pi (p_1 - p_2) \quad (11.40)$$

Relaciju (11.40) možemo pomoću (11.39) transformirati u:

$$F_{tr} = \frac{8 \eta L}{R^2} q_v \quad (11.41)$$

Ako sa $\bar{v}$ označimo srednju brzinu laminarnog strujanja fluida kroz cijev, tada je:

$$q_v = S \bar{v} = R^2 \pi \bar{v} \quad (11.42)$$

odnosno sila trenja:

$$F_{tr} = 8 \pi \eta L \bar{v} \quad (11.43)$$

To je Poiseuilleova formula za otpor pri laminarnom protjecanju viskozne tekućine kroz horizontalnu cijev.

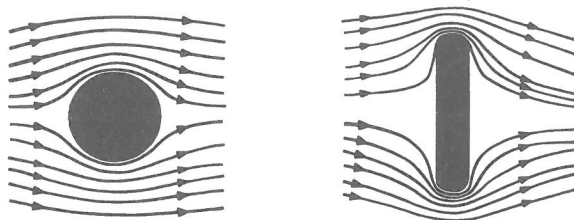
* Jean Poiseuille (1799–1869), francuski fiziolog i fizičar, poznat po proučavanju viskoznosti fluida.

11.9. OTPOR SREDSTAVA

Kada se tijelo giba kroz idealni fluid (ili, što je isto, kada idealni fluid struji oko nepomičnog tijela) nema otpora sredstva. Na slici 11.14. prikazane su strujnice idealnog fluida oko ploče i valjka. Strujnice su simetrično raspoređene s obje strane. Tlakovi su s prednje (p_1) i stražnje strane (p_2) jednaki i veći nego tlak (p_3) na gornjoj, odnosno p_4 na donjoj strani:

$$p_1 = p_2$$

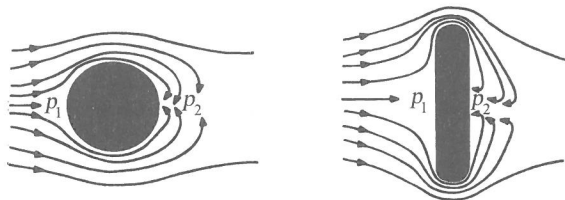
$$p_3 = p_4 \quad p_1 > p_3$$



Slika 11.14. Strujanje idealnog fluida oko tijela: nema otpora sredstva

Kada se tijelo giba kroz realni (viskozni) fluid, odnosno kad viskozni fluid teče oko tijela, pojavljuje se otpor sredstva, koji ovisi o veličini (obliku) tijela, vrsti fluida i o brzini gibanja tijela. Ako je strujanje laminarno, taj otpor nastaje zbog sila unutrašnjeg trenja u fluidu, dok se pri turbulentnom strujanju otpor povećava zbog stvaranja vrtloga.

Na slici 11.15. prikazano je turbulentno strujanje oko valjka i ravne ploče. U prostoru iza tijela nastaju vrtlozi. Dio fluida u graničnom sloju bliže tijelu ima manju brzinu, dok se čestice fluida dalje od tijela gibaju brže, i zbog toga nastaje rotacija čestica fluida. Tlakovi na prednjoj i stražnjoj strani tijela više nisu jednaki. Iza tijela tlak je manji nego ispred tijela. Ta razlika tlakova uzrokuje silu koja se suprotstavlja gibanju i tako povećava otpor sredstva.



Slika 11.15. Turbulentno strujanje oko ploče i valjka: pojavljuje se otpor zbog razlike tlakova

Pri malim brzinama (mali Reynoldsovi brojevi) otpor sredstva razmjernan je brzini i dinamičkoj viskoznosti i ovisi o obliku tijela. Stokes je npr. pronašao da na kuglicu polumjera r koja se giba kroz viskozni fluid konstantnom brzinom v djeluje sila trenja

$$F_{tr} = 6\pi\eta r v \quad (11.44)$$

Taj zakon vrijedi samo za male brzine (npr. za $Re = \frac{2r\varrho v}{\eta} < 0,1$).

Tako će kuglica u viskoznom fluidu padati jednoliko jer će se uravnotežiti sila teža, uzgon i sila trenja:

$$F_{tr} = mg - U = \frac{4}{3} r^3 \pi \varrho g - \frac{4}{3} r^3 \pi \varrho_f g \quad (11.45)$$

Ako je ispunjen uvjet za primjenu Stokesova zakona, tada je $F_{tr} = 6\pi\eta r v$, te iz (11.45) možemo izračunati bilo brzinu padanja, bilo dinamičku viskoznost.

Stokesov zakon (11.44) može se upotrijebiti za određivanje dinamičke viskoznosti fluida (Höpplerov viskozimetar). Pomoću tog zakona Millikan je izmjerio polumjer sitnih kapljica ulja u poznatom eksperimentu kojim je određen naboj elektrona.

Primjer

Metalna kuglica polumjera 3 mm i gustoće 2,8 g/cm³ pada u tekućini, gustoće 1,25 g/cm³, brzinom 2 cm/s. Kolika je dinamička viskoznost?

Primjenom Stokesova zakona dobivamo:

$$F_{tr} = mg - U$$

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3} r^3 \pi \varrho g - \frac{4}{3} r^3 \pi \varrho_f g.$$

Odatle je

$$\eta = \frac{2(\varrho - \varrho_f)gr^2}{9v} = 1,5 \text{ Pa}\cdot\text{s}.$$

Da bismo utvrdili smijemo li u ovom primjeru primijeniti Stokesov zakon, izračunat ćemo Reynoldsov broj.

$$Re = \frac{\varrho_f v l}{\eta} = 0,1.$$

Budući da je Re relativno malen ($Re_k = 2$), u ovom primjeru vrijedi Stokesov zakon.

Kada su brzine veće od kritične (odnosno Reynoldsov broj veći od kritičnoga), otpor sredstva uglavnom nastaje zbog razlike tlakova, jer je sila zbog razlike tlakova bitno veća od sile viskoznog trenja. Silu otpora sredstava možemo pisati u obliku:

$$F_{ot} = \frac{1}{2} c_{ot} \varrho v^2 S \quad (11.46)$$

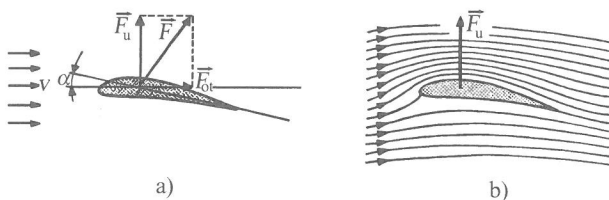
gdje je c_{ot} otporni broj (ili aerodinamički faktor), S čeonu površinu tijela izloženu struji fluida, ϱ gustoća, a v brzina fluida.

Otpor sredstva bitno ovisi o obliku tijela, njegovu profilu; ta se ovisnost izražava aerodinamičkim faktorom c_{ot} . U tablici 11.2. dane su tipične vrijednosti c_{ot} za neke profile.

Tablica 11.2. Aerodinamički faktori

Profil	c_{ot}
aerodinamički oblik	0,05
avionsko krilo	0,05
automobil	0,35
kugla	0,35
polukugla (otvorena prema struji fluida)	1,3
polukugla (zatvorena prema struji fluida)	0,4
padobran	1,35

Kada se tijelo, npr. avionsko krilo, nalazi u struji fluida, uz silu otpora sredstva $\vec{F}_{ot}$ (čiji je smjer u smjeru strujanja fluida) pojavljuje se i aerodinamički uzgon okomito na smjer strujanja. On nastaje zbog cirkulacije zraka oko tijela, a ovisi o obliku tijela i nagibu profila prema struji zraka. Na slici 11.16. prikazan je aerodinamički uzgon $\vec{F}_u$, otpor zraka $\vec{F}_{ot}$ i rezultanta sila $\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_{ot}$ na avionsko



Slika 11.16. Aerodinamički uzgon i otpor sredstva na avionsko krilo

krilo. Strujnice iznad krila su gušće, brzina veća, a tlak manji nego ispod krila, gdje su strujnice rjeđe. Zbog te razlike tlakova upravo i nastaje aerodinamički uzgon koji omogućuje let aviona. Avionsko krilo ima takav (aerodinamički) oblik da otpor (odnosno c_{ot}) bude što manji, a $\vec{F}_u$ što veći. Analogno otporu (11.46) i $\vec{F}_u$ možemo formalno prikazati formulom:

$$F_u = \frac{1}{2} c_u \rho v^2 S \quad (11.47)$$

tako da je ukupna sila koja djeluje pri jednolikom gibanju tijela kroz fluid

$$F = \sqrt{F_{ot}^2 + F_u^2} = \frac{1}{2} c \rho v^2 S \quad (11.48)$$

gdje je

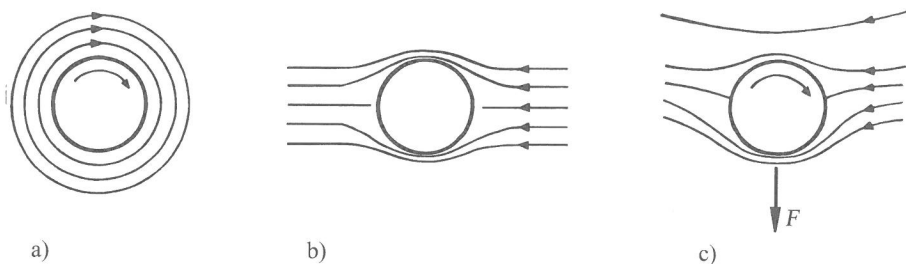
$$c = \sqrt{c_{ot}^2 + c_u^2} \quad (11.49)$$

Vrijednosti faktora c_u i c_{ot} mogu se odrediti mjerenjem sila na profil avionskog krila u zračnom tunelu. Oni ovise o obliku krila i o kutu α pod kojim je profil naklonjen prema brzini strujanja (sl. 11.16). Uočite da je za simetrična tijela (npr. valjak, kuglu i sl.), kod kojih su strujnice iznad i ispod tijela simetrično raspoređene, aerodinamički uzgon jednak nuli i da je ukupna sila jednaka otporu sredstva.

11.10. MAGNUSOV EFEKT

Na tijelo koje rotira u struji fluida djeluje sila okomito na smjer strujanja. To je Magnusov efekt, nazvan tako po njemačkom fizičaru H. G. Magnusu (1802–1870).

Da bismo razumjeli Magnusov efekt, promatrajmo kako struji fluid (npr. zrak) oko rotirajućeg valjka koji se giba u fluidu. Kada valjak rotira u mirnom fluidu, strujnice su koncentrične kružnice oko valjka, kao što je prikazano na slici 11.17a. Zbog viskoznosti će čestice fluida oko valjka također rotirati to brže što su bliže valjku, da bi sloj fluida uz valjak imao istu obodnu brzinu kao i valjak. Naprotiv, ako valjak miruje, a fluid struji, strujnice imaju oblik kao na slici 11.17b. (Pret-

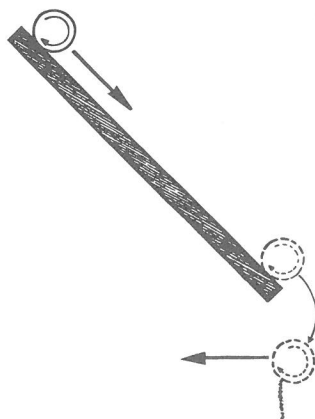


Slika 11.17. Uz objašnjenje Magnusova efekta: a) valjak rotira u mirnom fluidu, b) fluid struji oko nepomičnog valjka i c) fluid struji oko rotirajućeg valjka

postaviti ćemo da je strujanje laminarno, tj. da se ne pojavljuju vrtlozi.) Ako valjak rotira, a fluid struji, tada strujnice izgledaju kao na slici 11.17c. Brzina strujanja je veća ispod valjka jer se smjerovi obaju gibanja podudaraju, a manja je iznad valjka, gdje su oni suprotni. Zbog veće brzine strujanja ispod valjka tlak je manji nego iznad valjka, te se javlja sila prema dolje.

Magnusov efekt možemo ilustrirati pokusom prikazanim na slici 11.18. Tanak papirni valjak koji se kotrlja niz kosinu past će ispod daske jer ga nastala sila gura u tom smjeru. U to se možemo uvjeriti ako nacrtamo oko valjka strujnice, slično kao što je načinjeno na slici 11.17.

Magnusov efekt opaža se u mnogim primjerima (npr. artiljerijske granate, lopte i sl.), tj. uvijek kad se rotirajuće tijelo giba kroz fluid.



Slika 11.18. Magnusov efekt u pokusu s papirnim valjkom

PITANJA I ZADACI

1. Što je idealni, a što realni fluid? Kako struji idealni fluid?
2. Što je strujnica? Prikažite pomoću strujnica strujanje idealnog fluida kroz cijev, oko kružnog valjka i oko ravne ploče.

3. Kako se definira protok fluida? Izvedite i objasnite jednadžbu kontinuiteta. U kojim uvjetima ona vrijedi?
4. Izvedite Bernoullijevu jednadžbu. Objasnite njezinu primjenu.
5. Što je statički, a što dinamički tlak? Kako se mjere? Koliki je dinamički tlak ako zrak struji brzinom 108 km/h?
6. Pomoću Bernoullijeve jednadžbe izračunajte brzinu istjecanja tekućine kroz mali otvor (Torricellijev zakon).
7. Objasnite Venturijevu i Pitot–Prandtlovu cijev. Koja je njihova primjena?
8. Što je unutrašnje trenje (viskoznost)? O čemu ovisi sila viskoznog trenja? Definirajte koeficijent viskoznosti.
9. Kakva je razlika između kinetičke i dinamičke viskoznosti? Kada se upotrebljava jedna, a kada druga? U kojim se jedinicama izražavaju?
10. Kako viskoznost tekućina i plinova ovisi o temperaturi?
11. Što je laminarno, a što turbulentno strujanje? Kada jedno prelazi u drugo?
12. Kako se definira Reynoldsov broj? Koje je njegovo značenje? Što je dinamička sličnost?
13. Što kaže Poiseuilleov zakon? U kojim se uvjetima može primijeniti?
14. Koje se sile javljaju pri strujanju fluida? O čemu ovisi otpor sredstva pri gibanju tijela kroz fluid?
15. O čemu ovisi otpor sredstva pri malim brzinama? Što kaže Stokesov zakon?
16. O čemu ovisi otpor sredstva pri brzinama većima od kritične? Što je aerodinamički faktor?
17. Kada se pojavljuje aerodinamički uzgon?
18. Kolika je ukupna sila koja djeluje na tijelo (npr. avionsko krilo) što se giba u fluidu?
19. Objasnite Magnusov efekt.
20. Kroz cijev promjera 2 cm teče voda konstantnim protokom od 0,2 L/s. Na jednom mjestu cijev je sužena tako da joj je promjer 0,5 cm. Kolika je brzina vode u cijevi, a kolika u suženju cijevi? Kolika je razlika tlakova u širem i užem dijelu cijevi?
21. Valjkasta posuda je napunjena do visine 0,5 m vodom. Na dnu ima otvor površine 1 cm². Za koje vrijeme će iz posude isticati 2 litre vode? Promjenu visine nivoa za vrijeme istjecanja zanemarite.
22. Koliki tlak iznad atmosferskog mora biti u cilindru kojim se pumpa voda, ako je cilindar položen horizontalno, ima promjer klipa 20 cm, a otvor mu je promjera 2 cm? Iz otvora isticje voda brzinom 100 m/s.
23. Cjevčice manometra spojene su na horizontalnu cijev s različitim poprečnim presjecima $S_1 = 2 \text{ cm}^2$ i $S_2 = 3 \text{ cm}^2$? U cijevi teče voda. Koja količina vode protječe u jedinici vremena kroz cijev, ako je razlika nivoa vode u manometru $h = 5 \text{ cm}$?
24. Voda teče kroz cijev promjera 4 cm koja je na jednom mjestu sužena tako da joj je tu promjer 1 cm. Visinska razlika razina vode u manometrima u široj i užoj cijevi je 10 cm. Koliki je protok vode kroz cijev?
25. U valjkastoj posudi, čija je površina dna 1 cm², nalazi se 1 L vode. Pri dnu posude iz uske vodoravne cjevčice isticje voda. Odredite domet mlaza ako je dno posude 3 m iznad tla.
26. Kroz Venturijevu cijev protječe plin konstantne gustoće $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$. Polumjer cijevi je 2,5 cm dok je polumjer na suženom dijelu 1 cm. Razlika tlakova je 1 mbar. Koliki je volumni protok plina?
27. Tekućina gustoće 850 kg/m³ i koeficijenta viskoznosti 0,1 N s/m² protječe kroz cijev promjera 0,3 m i dužine 1,20 km. Razlika tlaka na početku i kraju cijevi je $8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Koliki je volumni i maseni protok?

12. TOPLINA I TEMPERATURA

12.1. TERMOMETRIJA

Često dodirom određujemo da li je neko tijelo hladno, toplo ili vruće, odnosno da li je toplije ili hladnije nego neko drugo tijelo. Osim tog sasvim subjektivnog i netočnog procjenjivanja kolika je temperatura nekog tijela, postoje objektivni, o našim osjetilima neovisni načini mjerenja temperature.

U svim se tijelima čestice neprekidno gibaju, a to gibanje nazivamo toplinskim gibanjem. Zbog toga gibanja čestice posjeduju toplinsku energiju. Naš osjećaj toplijeg i hladnijeg ovisi o kinetičkoj energiji čestica tvari s kojom dolazimo u dodir.

Temperatura je fizikalna veličina koja karakterizira stupanj zagrijanosti nekog tijela. To je jedna od sedam osnovnih fizikalnih veličina. Pravo fizikalno značenje temperature upoznat ćemo kasnije — u kinetičkoj teoriji topline. Spomenimo sada samo da je temperatura proporcionalna srednjoj kinetičkoj energiji molekula.

Dovedemo li dva tijela, hladnije i toplije, u međusobni kontakt, čestice s većom kinetičkom energijom u sudarima predaju energiju onima s manjom energijom. Na taj način energija u obliku topline prelazi s jednog tijela na drugo tijelo. Za tijelo koje pri tom gubi energiju kažemo da je toplije, a za ono na koje energija prelazi da je hladnije. Prijelaz topline teče sve dok se ne uspostavi **termička ravnoteža**. Molekule koje se brže gibaju u toplijem tijelu predaju svoju energiju molekulama hladnijeg tijela, usporavaju se, i toplije tijelo se hladi; molekule hladnijeg tijela ubrzavaju se, i hladnije tijelo se grije. U termičkoj ravnoteži srednja je kinetička energija istovrsnoga gibanja molekula obaju tijela jednaka. Budući da je temperatura proporcionalna srednjoj kinetičkoj energiji molekula, tijela koja se nalaze u termičkoj ravnoteži imaju istu temperaturu, odnosno kada dva tijela imaju jednaku temperaturu, kažemo da su u termičkoj ravnoteži.

Mnoge su fizikalne veličine funkcija temperature, te se mjerenjem tih veličina (tzv. termometrijskih svojstava) može mjeriti temperatura. Termometrijska svojstva, koja se iskorištavaju pri izradi uređaja za mjerenje temperature (termometara), jesu: dimenzije čvrstih tijela, volumen tekućina, električni otpor metala, tlak plina pri stalnom volumenu, elektromotorna sila termočlanka i ovisnost zračenja o temperaturi.

Da bismo mjerili temperaturu, potrebno je izabrati određeno termometrijsko svojstvo čiju ovisnost o temperaturi poznamo i tako mjerenje temperature svesti na mjerenje toga termometrijskog svojstva. Zatim je potrebno definirati temperaturnu skalu i jedinicu temperature. Da bismo kalibrirali termometar, potrebno je odabrati tzv. fiksne točke, tj. sisteme koji u danim uvjetima uvijek imaju istu temperaturu, koja se može lako dobiti i reproducirati. Obično se kao jedna fiksna točka uzima temperatura smjese destilirane vode i leda u termičkoj ravnoteži (leđište vode) pri normiranom atmosferskom tlaku (1 013 mbar). Za drugu fiksnu točku uzima se temperatura vrelišta destilirane vode pri normalnom tlaku. U Celsiusovoj* se temperaturnoj skali temperatura leđišta vode označava kao nula (0 °C), a temperatura vrelišta kao 100 °C. Razmak između te dvije fiksne točke dijeli se na sto dijelova, od kojih svaki odgovara promjeni temperature za 1 °C. Temperaturna se skala može ekstrapolacijom proširiti i ispod prve, odnosno iznad

* Anders Celsius (1701 — 1744), švedski učenjak, tvorac centigradne termometrijske skale, koja je kasnije po njemu nazvana Celsiusovom.

druge fiksne točke, te se tako termometri mogu kalibrirati u odgovarajućem temperaturnom intervalu. Za kalibraciju termometra mogu se upotrebljavati i druge fiksne točke, npr. vrelište kisika ($-182,96^{\circ}\text{C}$), **trojna točka vode** ($0,01^{\circ}\text{C}$), vrelište sumpora ($444,67^{\circ}\text{C}$), talište platine ($1\,772^{\circ}\text{C}$), itd.

U literaturi anglosaksonskih zemalja još uvijek ćemo nailaziti na Fahrenheitovu temperaturnu skalu. Ledište vode označeno je sa 32°F , vrelište vode sa 212°F , te je dakle osnovni razmak ledišta do vrelišta podijeljen na 180 jednakih dijelova.

U fizici se najčešće upotrebljava termodinamička temperaturna skala. Temperatura se u apsolutnoj skali izražavaju jedinicom kelvin (K)*. Temperatura 0 K zove se apsolutna nula i odgovara Celsiusovoj temperaturi $-273,15^{\circ}\text{C}$. Veza između termodinamičke temperature T i Celsiusove temperature t jest:

$$\frac{T}{\text{K}} = 273,15 + \frac{t}{^{\circ}\text{C}} \quad (12.1)$$

Uočite da je neki temperaturni interval izražen kelvinima jednak temperaturnom intervalu izraženom Celzijevim stupnjevima, tj. $\Delta t = \Delta T$ ($\text{K} = ^{\circ}\text{C}$).

Kelvin je SI-jedinica temperature, ali je dopuštena i upotreba Celzijevog stupnja.

Za definiciju kelvina služi temperatura trojnog stanja** vode $273,16\text{ K}$.

Kelvin je $\frac{1}{273,16}$ -dio termodinamičke temperature trojnog stanja vode.

Za mjerenje temperature obično služi živin termometar koji se sastoji od staklene kapilare na čijem je donjem kraju staklena posudica napunjena živom, dok je gornji kraj kapilare zatvoren. U kapilari je vakuum. Dužina stupca žive u kapilari ovisi o temperaturi, i mjerenjem visine stupca može se mjeriti temperatura. Mjerno je područje takvog termometra od oko -38°C (točka očvršćivanja, odnosno talište žive) do oko 300°C . Ako se kapilara iznad žive napuni dušikom pod tlakom od nekoliko bara, takvim živinim termometrom može se mjeriti i temperatura iznad vrelišta žive (357°C) do oko 650°C . Za niže temperature može se upotrijebiti termometar napunjen metilnim alkoholom, toluolom i sl.

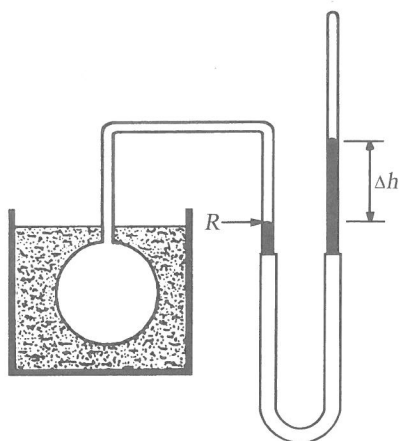
Otporni termometri, konstruirani na principu pravilne promjene električne otpornosti s temperaturom, mogu se koristiti za precizno mjerenje temperature u širokom intervalu. Tako se platinski termometri mogu upotrebljavati od -200°C do oko $1\,000^{\circ}\text{C}$. Osim metalnih mogu se upotrebljavati termometri s termistorima čiji otpor brzo pada s porastom temperature, tako da omogućuju precizno mjerenje vrlo malih temperaturnih razlika.

Termočlanak se također može uspješno iskoristiti kao osjetljiv termometar. Kada se dvije žice od različitih metala spoje na oba kraja, i ti spojevi drže na različitoj temperaturi, među njima nastaje elektromotorna sila. Obično se jedan kraj termočlanaka drži na nekoj referentnoj temperaturi (npr. ledištu vode), a drugi spoj na mjestu gdje želimo odrediti temperaturu. Poznavajući vezu između elektromotorne sile i razlike temperature, moguće je, mjereći elektromotornu silu, precizno odrediti temperaturu.

* Lord Kelvin (pravo ime William Thomson, 1824–1907), britanski matematičar i fizičar, jedan od osnivača termodinamike.

** Trojna točka je stanje pri određenoj temperaturi i tlaku u kojem su sve tri faze (agregatna stanja) u ravnoteži. Za vodu je temperatura trojnog stanja $0,01^{\circ}\text{C}$, a tlak $6,1\text{ mbar}$.

Plinski termometar je najprecizniji i najosjetljiviji, iako ne i najpraktičniji instrument za mjerenje temperature. Ovdje se kao termometrijsko svojstvo iskorištava promjena tlaka idealnog plina s temperaturom, uz stalni volumen. Plin, obično helij ili vodik, nalazi se u posudi stalnog volumena, dok se tlak, koji se mijenja s temperaturom, mjeri pomoću otvorenog živina manometra. Manometar se uvijek, pošto je postignuta toplinska ravnoteža, a prije mjerenja temperature, namjesti tako da je volumen plina konstantan. To se postiže podizanjem ili spuštanjem cijevi manometra tako da se razina žive dovede do referentne linije R. Za idealne je plinove promjena tlaka s temperaturom linearna, te je temperatura plina u posudi proporcionalna tlaku p , odnosno visini živina stupca Δh . Plinski se termometar može upotrebljavati u vrlo velikom temperaturnom području, vrlo je točan i može poslužiti za baždarenje drugih termometara.



Slika 12.1. Plinski termometar

Energija i spektralni sastav zračenja užarenog tijela ovise o temperaturi, i to se svojstvo može iskoristiti za mjerenje visokih temperatura pomoću radijacijskih **pirometara**. Prednost je takvih instrumenata što mogu mjeriti visoke temperature na daljinu, tj. bez kontakta s užarenim tijelom. Interval mjerenja pirometra jest od oko 500 °C do 3 000 °C.

12.2. TOPLINSKO RASTEZANJE ČVRSTIH TVARI I TEKUĆINA

Gotovo se sva tijela zagrijavanjem rastežu, tj. povećava im se volumen. (Izuzetak je, npr., voda kojoj se u intervalu od 0 °C do 4 °C zagrijavanjem obujam smanjuje.) Iako je rastezanje svakog tijela uvijek trodimenzionalno, kod tijela čije su dvije dimenzije znatno manje od treće (npr. štapovi, šipke, cijevi i sl.) razmatramo samo linearno širenje, a za tijela čija je debljina zanemariva (npr. ploče) površinsko širenje.

Linearno rastezanje. Eksperimentalno je utvrđeno da se dužina nekog tijela, zagrijanoga od početne temperature T_0 do konačne temperature T , pravilno mijenja:

$$l = l_0 (1 + \alpha \Delta T) \quad (12.2)$$

gdje je l_0 početna dužina tijela na temperaturi T (obično 0 °C), l dužina tijela na temperaturi T , tj. nakon porasta temperature za $\Delta T = T - T_0$, a α koeficijent linearnog rastezanja definiran relacijom:

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{l - l_0}{T - T_0} = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta T} \quad (12.3)$$

Jedinica za koeficijent linearnog rastezanja, kao što se vidi iz definicijske relacije (12.3) jest recipročni kelvin (znak: K^{-1}).

Koeficijenti linearnog rastezanja različiti su za razne materijale (v. tablicu 12.1) i vrlo su maleni (reda veličine $10^{-6} K^{-1}$). Za manje temperaturne intervale α je praktično konstantan, te je relacija (12.2) za većinu proračuna dovoljno točna.

Tablica 12.1. Koeficijenti linearnog rastezanja za nekoliko materijala

Materijal	α/K^{-1}	Materijal	α/K^{-1}
aluminij	$24 \cdot 10^{-6}$	platina	$9 \cdot 10^{-6}$
bakar	$17 \cdot 10^{-6}$	srebro	$19 \cdot 10^{-6}$
beton	$10 \cdot 10^{-6}$	staklo	oko $9 \cdot 10^{-6}$
cink	$30 \cdot 10^{-6}$	staklo (Pyrex)	$3 \cdot 10^{-6}$
čelik (željezo)	$12 \cdot 10^{-6}$	volfram	$4,5 \cdot 10^{-6}$

Kada su krajevi nekog štapa, šipke i sl. učvršćeni tako da se ne može mijenjati njegova dužina, pri temperaturnim promjenama dolazi do mehaničkih napetosti koje štap mogu deformirati, pa i slomiti. Napetosti koje pri tom nastaju možemo izračunati pomoću Hookeova zakona:

$$p = \frac{\Delta F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} = E \alpha \Delta T \quad (12.4)$$

gdje je E Youngov modul elastičnosti materijala. Slično se mogu izračunati i napetosti koje nastaju širenjem volumena tijela.

Primjer

Čeličnu šipku čija je dužina 2,000 m na temperaturi $0^\circ C$ zagrijemo do $50^\circ C$. Koliko je relativno produženje šipke? Kolika je dužina šipke na $50^\circ C$? Kolika bi se napetost pojavila kada bismo učvršćenjem šipke na oba kraja spriječili temperaturno rastezanje? ($E = 2 \cdot 10^{11} N/m^2$)

Relativno je produženje:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Dužina je šipke na $50^\circ C$:

$$l_1 = l_0 + \Delta l = 2,0012 \text{ m.}$$

Napetost u šipci određujemo pomoću Hookeova zakona:

$$p = \frac{\Delta l}{l} E = \alpha E \Delta T = 1,2 \cdot 10^8 N/m^2.$$

Volumno rastezanje. Zakon za volumno rastezanje može se iz zakona za linearno rastezanje dobiti ovako:

$$V = l_0(1 + \alpha \Delta T) \cdot l_0(1 + \alpha \Delta T) \cdot l_0(1 + \alpha \Delta T) = l_0^3(1 + 3\alpha \Delta T + 3(\alpha \Delta T)^2 + (\alpha \Delta T)^3) \quad (12.5)$$

$$V = V_0(1 + 3\alpha \Delta T) = V_0(1 + \gamma \Delta T)$$

gdje smo, radi jednostavnosti izvoda, pretpostavili da je tijelo u obliku kocke, te zanemarili članove višeg reda $(\alpha \Delta T)^2$ i $(\alpha \Delta T)^3$ koji su vrlo maleni u usporedbi s ostalim članovima.

Zakon volumnog širenja čvrstih tijela možemo, dakle, s dobrom točnošću pisati u obliku:

$$V = V_0 (1 + \gamma \Delta T) \quad (12.6)$$

gdje je V_0 početni volumen tijela, V volumen tijela pošto smo ga zagrijali za ΔT , a γ koeficijent toplinskog širenja definiran izrazom:

$$\gamma = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta T} = 3 \alpha \quad (12.7)$$

Jedinica koeficijenta toplinskog širenja γ jest također K^{-1} .

Širenje većine tekućina u manjim temperaturnim intervalima (npr. između $0^\circ C$ i $100^\circ C$) možemo također računati pomoću izraza (12.6), smatrajući γ konstantnim. Posebno to vrijedi za živu, što je vrlo pogodno pri izradi živinih termometara.

Koeficijent toplinskog širenja tekućina je za red veličine veći nego čvrstih tijela.

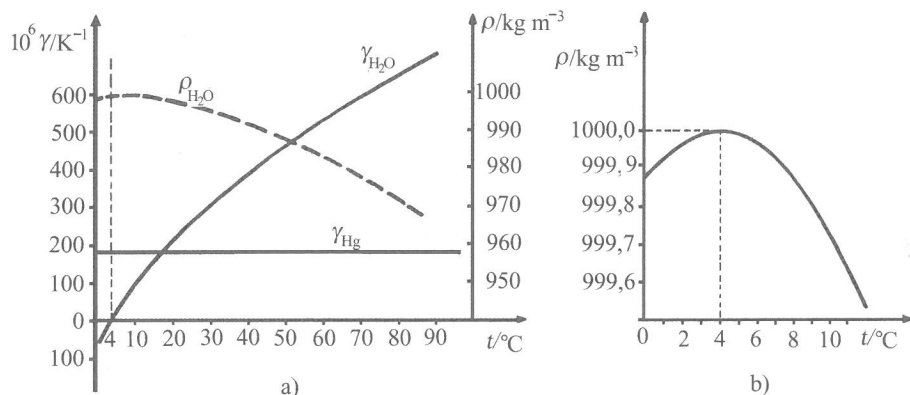
Tablica 12.2. Koeficijent toplinskog širenja za neke tekućine pri sobnoj temperaturi

Tekućina	γ/K^{-1}	Tekućina	γ/K^{-1}
alkohol (etanol)	$1,1 \cdot 10^{-3}$	voda	$0,2 \cdot 10^{-3}$
benzin	$0,95 \cdot 10^{-3}$	živa	$0,18 \cdot 10^{-3}$

Pri računanju toplinskog širenja tekućina treba uzeti u obzir i širenje posude. Pri tom treba imati na umu da se šupljine u materijalu šire na isti način kao da su ispunjene tim materijalom, te će se volumen šuplje posude mijenjati prema izrazu (12.6) za čvrsta tijela. Također se ne smije zaboraviti da je toplinsko širenje tekućina često dosta ovisno o temperaturi te je često pri primjeni formule (12.6) potrebno uzeti malene temperaturne promjene ΔT . Osobitu nepravilnost pri toplinskom širenju pokazuje voda. Obujam vode se s povećanjem temperature u intervalu od $0^\circ C$ do $4^\circ C$ smanjuje (koeficijent toplinskog širenja je negativan), zatim se zagrijavanjem iznad $4^\circ C$ volumen povećava (γ pozitivan).

Koeficijent toplinskog širenja vode dosta se mijenja s temperaturom. Na slici 12.2. prikazana je promjena koeficijenta γ i gustoće vode s temperaturom. Voda ima maksimalnu gustoću na temperaturi $+4^\circ C$, a počam od ove temperature gustoća se smanjuje, bez obzira na to da li vodu grijemo ili hladimo.

To je poznata anomalija vode koja ima vrlo važne posljedice. Tako je voda hladnija od $4^\circ C$ rjeđa i lakša pa se diže prema površini ili na primjer, dok je površina nekih voda smrznuta, u dubini im je temperatura oko $4^\circ C$.



Slika 12.2. Anomalno rastezanje vode

Primjer

Čelični automobilski rezervoar napunjen je do vrha pri temperaturi 0°C s 40,0 L benzina. Koliko će benzina isteći ako se temperatura povisi na 30°C ?

Kad se rezervoar i benzin zagriju od 0°C na 30°C , tj. za razliku temperatura $\Delta T = 30 \text{ K}$, volumen rezervoara poveća se od V_0 na V_r , a volumen benzina od V_0 na V_b . Budući da se tijela rastežu isto bez obzira jesu li ispunjena ili sadrže šupljine, to će se i čelični rezervoar rastezati po formuli

$$V_r = V_0 (1 + 3\alpha \Delta T),$$

a benzin će se širiti po formuli

$$V_b = V_0 (1 + \gamma \Delta T).$$

Volumen benzina koji će isteći iznosi dakle:

$$\Delta V = V_b - V_r = V_0 (\gamma - 3\alpha) \Delta T = 1,157 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \approx 1,16 \text{ L}.$$

12.3. PLINSKI ZAKONI

Pri proučavanju plinova uglavnom ćemo se služiti modelom *idealnog* plina, i zakoni o kojima ćemo govoriti odnosit će se na tu aproksimaciju. U idealnom plinu međumolekularne sile su zanemarive, volumen molekula je također zanemariv u usporedbi s volumenom posude u kojoj se nalazi plin, te molekule možemo smatrati materijalnim točkama koje jedna na drugu ne djeluju, osim u slučaju sudara.

Većina realnih plinova (npr. helij, vodik, zrak) može se dosta dobro aproksimirati tim modelom pri običnim tlakovima i temperaturama. Plin se to više približuje idealnome što mu je tlak (gustoća) manji, a temperatura veća.

Najprije ćemo ukratko upoznati tri empirijska zakona koji točno vrijede za idealni plin, ali dosta dobro i za realne, a zatim ćemo iz tih zakona izvesti jednadžbu stanja idealnog plina.

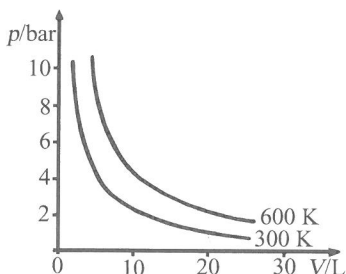
Još u 17. stoljeću Boyle i Mariotte* su, nezavisno jedan od drugoga, proučavali ovisnost volumena plina o tlaku i ustanovili da su obrnuto razmjerni.

* Edme Mariotte (1620–1684), francuski fizičar i kemičar, Robert Boyle (1627–1691), britanski fizičar i kemičar.

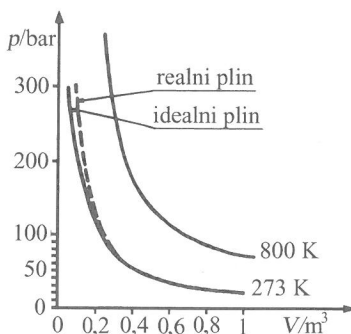
Mijenja li se tlak, odnosno volumen plina, uz stalnu temperaturu (izotermno), tada za idealni plin vrijedi Boyle–Mariotteov zakon:

$$pV = \text{konst.} \quad (T = \text{konst.}) \quad (12.8)$$

U p – V dijagramu ovisnost tlaka idealnog plina o volumenu plina prikazuje se istostranom hiperbolom, čija je jednadžba dana relacijom (12.8), koju nazivamo *izotermom*, jer se ovisnost tlaka o volumenu razmatra pri stalnoj temperaturi. Na slici 12.3. nacrtane su dvije izoterme za idealni plin.



Slika 12.3. Ovisnost volumena plina o tlaku pri izotermnom procesu



Slika 12.4. Izoterma za idealni i realni plin

Boyle–Mariotteov zakon (12.8) vrijedi točno samo za idealni plin, dok za realne plinove pri visokim tlakovima nastaju određena odstupanja, jer se tada volumen pri kompresiji polaganije smanjuje nego što predviđa taj zakon. Na slici 12.4. prikazana je izotermna kompresija idealnog plina i vodika. Odstupanja se počinju pojavljivati za tlakove oko 100 bara i postaju to veća što je veći tlak. Detaljnije o realnim plinovima govorit ćemo u odjeljku 14.7.

Širenje plinova pri zagrijavanju mnogo je veće nego širenje tekućina i čvrstih tijela. Kada se plin zagrijava uz stalni tlak (izobarno), volumen mu se linearno povećava s temperaturom po Gay-Lussacovu* zakonu:

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \quad (12.9)$$

gdje je V_0 volumen plina na 0°C , V volumen plina na temperaturi t , a α toplinski koeficijent širenja plina, koji se mnogo ne razlikuje za razne vrste plinova i iznosi oko $\frac{1}{273} \text{ K}^{-1} = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Gay–Lussacov zakon možemo pisati i u obliku:

$$V = V_0 \left(1 + \frac{t}{273 \text{ K}} \right) = V_0 \frac{t + 273 \text{ K}}{273 \text{ K}} = V_0 \frac{T}{T_0}$$

* J. L. Gay-Lussac (1778–1850), francuski kemičar, zaslužan je za prve spoznaje o ponašanju plinova.

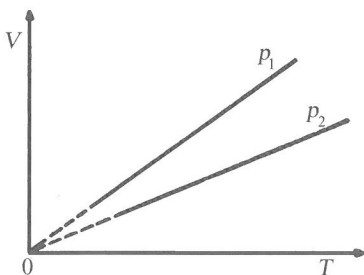
odnosno

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \quad (12.10)$$

ili

$$\frac{V}{T} = \text{konst.}$$

Volumen plina pri stalnom tlaku upravo je razmjeran njegovoj termodinamičkoj temperaturi. Krivulja ovisnosti volumena o temperaturi pri stalnom tlaku zove se *izobara*, a za idealni plin to je pravac u $V-T$ dijagramu. Na slici 12.5. prikazane su dvije izobare, za dva različita tlaka, p_1 i p_2 ($p_1 < p_2$). Uočite da njihova produženja sijeku os apscisa u točki kojoj odgovara temperatura apsolutne nule. Svi plinovi prije nego što se ohlade do temperatura bliskih apsolutnoj nuli prelaze u tekuće, odnosno čvrsto stanje, tako da plinski zakoni u blizini apsolutne nule nemaju fizikalni smisao te je taj dio pravaca na slici 12.5. označen crtkanom linijom.



Slika 12.5. Izobarno zagrijavanje plina

Sličan zakon vrijedi za *izohornu* ($V = \text{konst.}$) promjenu stanja plina. Tada je ovisnost tlaka o temperaturi dana Charlesovim* zakonom:

$$p = p_0 (1 + \beta t) \quad (12.11)$$

gdje je p_0 tlak plina na 0°C , p tlak na temperaturi t , a β toplinski koeficijent promjene tlaka, koji je za idealni plin jednak toplinskom koeficijentu širenja plina, tj.:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1} \quad (12.12)$$

Slično Gay-Lussacovu, i Charlesov zakon možemo pisati u obliku:

$$p = p_0 \frac{T}{T_0}, \quad V = \text{konst.} \quad (12.13)$$

gdje je p_0 tlak plina na temperaturi T_0 , a p tlak plina na temperaturi T .

Stanje idealnog plina (kao što se vidi iz promatranih zakona) potpuno je određeno sa tri veličine: tlakom, volumenom i temperaturom. To vrijedi i općenito, ne samo za idealni plin, već i za realne plinove te za tekuće i čvrsto agregatno stanje. Relacija koja povezuje tlak, volumen i temperaturu neke tvari zove se *jednadžba stanja* i može se pisati kao funkcija $f(p, V, T) = 0$. Općenito je ta funkcija složena, često se ne može analitički izraziti. Međutim, u slučaju idealnog plina jednadžba stanja ima jednostavan oblik. Ponekad je funkciju stanja lakše predočiti grafički kao plohu u trodimenzionalnom $p-V-T$ prostoru, odnosno pomoću projekcija $p-V-T$ plohe na $p-V$, $p-T$, odnosno $V-T$ ravninu. Umjesto trodimenzionalnog $p-V-T$ dijagrama dovoljno je, naime, nacrtati dvije njegove projekcije, npr. $p-V$ i $p-T$ dijagram. Određeno stanje promatrane tvari jednoznačno je određeno točkom na $p-V-T$ plohi, odnosno točkom u odgovarajućim $p-V$ i $p-T$ dijagramima.

* J. A. C. Charles (1746 – 1823), francuski fizičar.

Da bismo iz plinskih zakona dobili jednadžbu stanja idealnog plina, prevedimo određenu količinu plina iz početnog stanja, određenoga volumenom V_0 na temperaturi $T_0 = 273,15 \text{ K}$ (0°C) i normiranom atmosferskom tlaku $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$, u konačno stanje, određeno tlakom p , volumenom V i temperaturom T .

Plin iz početnog stanja u konačno stanje možemo dovesti na razne načine, recimo izobarnim zagrijavanjem do konačne temperature, pa izotermnom kompresijom do konačnog tlaka i volumena. Zagrijemo li plin izobarno na temperaturu T , volumen plina nakon zagrijavanja bit će dan Gay–Lussacovim zakonom:

$$V' = \frac{T}{T_0} V_0 \quad (12.14)$$

Izotermnom kompresijom možemo sada tlak plina povećati od početnoga p_0 na konačni p . Pri tom će se volumen smanjiti sa V' na V prema Boyle–Mariotteovu zakonu:

$$p V = p_0 V' \quad (12.15)$$

Uvrstimo li V' iz (12.14) u (12.15), dobivamo vezu između veličina početnog i konačnog stanja:

$$\frac{p V}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \quad (12.16)$$

To je jedan oblik jednadžbe stanja idealnog plina. Upotrebom Avogadrova zakona ta se jednadžba, međutim, može svesti na još pogodniji oblik.

Avogadrov zakon. Talijanski fizičar A. Avogadro* pronašao je 1811. godine da za plinove vrijedi ovaj zakon:

Jednaki volumeni svih plinova pri istoj temperaturi i tlaku imaju jednak broj čestica.

Broj čestica (atoma, molekula i sl.) N koji sadrži neki sustav povezan je s fizikalnom veličinom množina ili količina tvari n jednadžbom:

$$N = n N_A \quad (12.17)$$

gdje je $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ Avogadrova konstanta. Jedinica količine tvari je mol* (znak: mol), a Avogadrova konstanta je broj molekula u količini tvari 1 mol. Mol je količina tvari sustava koji ima toliko osnovnih čestica (jedinki) koliko je atoma u 12 g ugljika ^{12}C . Pri tom jedinke mogu biti atomi, molekule, ioni i sl.

Iz Avogadrova zakona slijedi da količina tvari (množina) 1 mol (tj. $n = 1$ mol) bilo kojeg plina u istim uvjetima ima jednak volumen, koji se zove molarni volumen plina i obično označava sa V_m . U normiranim uvjetima ($T_0 = 273,15 \text{ K}$, $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$) molarni volumen V_{m0} iznosi:

$$V_{m0} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol} \quad (12.18)$$

Plinska jednadžba. Definiramo li univerzalnu plinsku konstantu izrazom

$$R = \frac{p_0 V_{m0}}{T_0} = \frac{1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,0224 \text{ m}^3/\text{mol}}{273,15 \text{ K}} = 8,314 \text{ J}/(\text{mol K}),$$

* Amadeo Avogadro (1776–1856), talijanski fizičar.

tada jednadžba (12.16) prelazi u

$$p V = n R T \quad (12.19)$$

gdje je $n = \frac{V_0}{V_{m0}}$ množina plina.

Ako množinu n izrazimo omjerom mase plina m , i molarne mase plina M

$$n = \frac{m}{M}$$

tada plinska jednadžba (12.19) poprima oblik:

$$p V = \frac{m}{M} R T \quad (12.19a)$$

Ako u (12.19) uvrstimo $n = N/N_A$ i Boltzmannovu konstantu $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K, dobivamo još jedan oblik plinske jednadžbe:

$$p V = N k T \quad (12.20)$$

Jednadžba (12.19) vrijedi točno samo za idealne plinove a približno za realne, to točnije što je temperatura plina viša a tlak manji. Korigiranu jednadžbu za realne plinove razmotrit ćemo kasnije.

Primjer

Odredite masu dušika u posudi volumena 0,01 m³ ako je tlak 250 Pa i temperatura 300 K.

Primjenom plinske jednadžbe (12.20) dobivamo:

$$p V = \frac{m}{M} R T \quad m = \frac{p V M}{R T}.$$

Uvrstimo li $p = 250$ Pa, $V = 0,01$ m³, $M = 28 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, $T = 300$ K i $R = 8,314$ J/(mol K), **dobivamo** $m = 28$ mg.

12.4. KOLIČINA TOPLINE. SPECIFIČNI TOPLINSKI KAPACITET

Toplina je energija koja prelazi s jednog tijela na drugo tijelo zbog njihove temperaturne razlike. Jedinica topline definirana je prije nego što se stvarno znalo što je toplina. Tako je svojedobno bila definirana kalorija kao toplina koja je potrebna da se jedan gram vode ugrije od 14,5° do 15,5 °C. Danas, kada znamo da je toplina jedan od oblika energije, jasno je da toplinu treba izražavati istim jedinicama kao energiju i rad. Dakle, jedinica topline je džul (joule). Veza između kalorije* i džula

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}.$$

Toplinski kapacitet nekog tijela definira se kao omjer topline Q , koju je potrebno dovesti tijelu da bi mu se povisila temperatura za ΔT , i temperaturne razlike ΔT :

$$C_t = \frac{Q}{\Delta T} \quad (12.21)$$

* Od 31. XII 1980. kalorija se više ne upotrebljava („Sl. list”, 13, 1976, 341).

Toplinski kapacitet ovisi o materijalu od kojega je napravljeno tijelo i o masi tijela, a često i o temperaturi tijela.

Da bi se dobila veličina karakteristična za određeni materijal, koja ne ovisi o masi tijela, definira se specifični toplinski kapacitet c tako da se toplinski kapacitet podijeli s masom:

$$c = \frac{C_t}{m}$$

$$c = \frac{1}{m} \frac{Q}{\Delta T} \quad (12.22)$$

Jedinica je specifičnoga toplinskog kapaciteta džul po kelvinu i kilogramu, J/(K kg). Za veličinu c upotrebljava se i naziv specifična toplota, ali se ne preporučuje.

Toplina Q koju dovodimo nekom tijelu, ili od tog tijela odvodimo, jest:

$$Q = m c \Delta T, \quad (12.23)$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet materijala od kojega je napravljeno tijelo, a ΔT razlika između početne i konačne temperature tijela. Pri tom smo pretpostavili da je u promatranom temperaturnom intervalu specifični toplinski kapacitet konstanta, što je za manje temperaturne intervale obično ispunjeno.

Općenito je specifični toplinski kapacitet funkcija temperature, te se jednadžbe (12.22) i (12.23) pišu u obliku:

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (12.22a)$$

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c dT \quad (12.23a)$$

Molarni toplinski kapacitet C jest omjer toplinskog kapaciteta i množine tvari, te je

$$C = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} = M c \quad (12.24)$$

gdje je M molarna masa a c specifični toplinski kapacitet.

Količina topline Q potrebna da se tijelu povisi temperatura za ΔT ovisi o načinu kako tijelo zagrijavamo. Zagrijemo li, npr., tijelo pri stalnom tlaku (izobarno), tada mu se osim unutrašnje energije (temperature) povećava i volumen, dok će se pri izohornom ($V = \text{konst.}$) zagrijavanju sva dovedena toplota utrošiti na povećanje unutrašnje energije, jer volumen ostaje konstantan. Topline u ta dva različita procesa su različite iako je razlika temperature ista. U principu postoje i različiti drugi procesi kojima se tijelo može prevesti iz početnog stanja u konačno stanje, te odatle slijedi da specifični toplinski kapacitet nije jednoznačno definiran i da pri njegovoj definiciji moramo naznačiti proces kojim smo tijelo preveli iz početnog

u konačno stanje. Obično se definiraju specifični toplinski kapacitet pri stalnom tlaku c_p i pri stalnom volumenu c_v (izobarni i izohorni toplinski kapacitet):

$$c_p = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{p=\text{konst}}$$

$$c_v = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{V=\text{konst}}$$

Tablica 12.3. Specifični toplinski kapaciteti za neka čvrsta tijela i tekućine

Tvar	$c/(kJ/kg\ K)$	Tvar	$c/(kJ/kg\ K)$
alkohol	2,4	platina	0,12
aluminij	0,9	srebro	0,23
bakar	0,39	staklo	0,8
cink	0,39	voda	4,19
led	2,1	željezo	0,45
olovo	0,13	živa	0,14

Tablica 12.4. Specifični toplinski kapaciteti nekih plinova

Plin	$c_p/(kJ/kg\ K)$	$c_v/(kJ/kg\ K)$
dušik N_2	1,04	0,74
helij He	5,23	3,15
kisik O_2	0,92	0,650
vodena para H_2O	1,9	1,4
vodik H_2	14,2	10,1
zrak $N_2 + O_2$	1	0,71

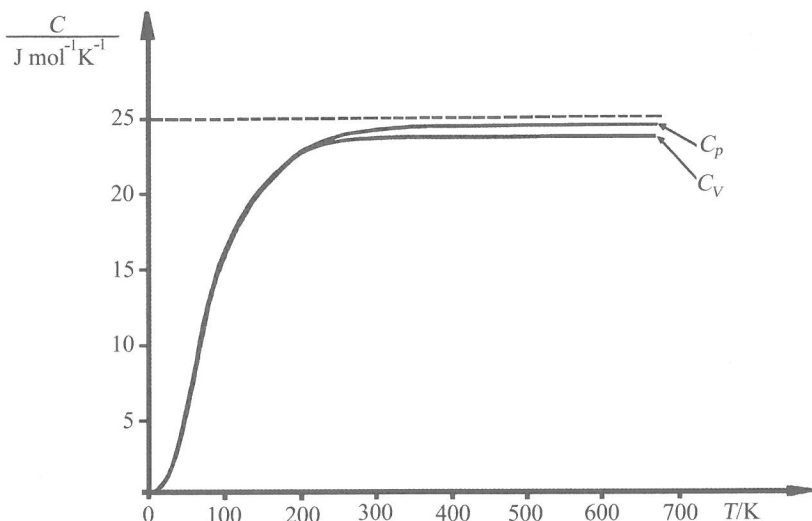
U tablici 12.3. i 12.4. prikazani su specifični toplinski kapaciteti za neke tvari. To su srednje vrijednosti na sobnim temperaturama. Uočite naročito velik specifični toplinski kapacitet vode, što je, uz ostala svojstva, čini izvrsnim sredstvom za prijenos topline i za uskladištenje toplinske energije.

Specifične topline plinova zaslužuju posebnu pažnju, i njih ćemo razmotriti kasnije. Eksperimentalno se specifični toplinski kapacitet čvrstih tijela i tekućina određuje tako da se uzorak zagrijava pri stalnom tlaku. Izohorni specifični toplinski kapacitet za čvrsta tijela i tekućine gotovo je nemoguće mjeriti zbog velikih naponosti koje pri tom nastaju u materijalu i zbog tehničkih problema što bi ih pri takvim mjerenjima trebalo riješiti. Međutim, ako je poznat c_p , može se izračunati c_v . Nernst – Lindemannova relacija povezuje te dvije veličine:

$$c_v = c_p \left(1 - 0,0051 \frac{\text{mol K}}{J} M c_p T/T_m \right) \quad (12.25)$$

gdje je T temperatura čvrstog tijela, a T_m temperatura taljenja.

Pomoću te relacije i eksperimentalnih vrijednosti za c_p napravljena je i slika 12.6. na kojoj je prikazana ovisnost molarnog toplinskog kapaciteta bakra o temperaturi.



Slika 12.6. Ovisnost molarnoga toplinskog kapaciteta bakra o temperaturi

Slične bi se krivulje mogle dobiti i za druge metale i imale bi sličan oblik. Sve te krivulje počinju na apsolutnoj nuli, u početku naglo rastu s temperaturom (po zakonu $C = \text{konst. } T^3$), da bi na višim temperaturama poprimile konstantnu vrijednost oko $3R = 3 \cdot 8,3 \text{ J/(mol K)} \approx 25 \text{ J/(mol K)}$.

Dok se specifični toplinski kapaciteti za razne metale dosta razlikuju, molarni su približno isti i iznose oko 25 J/(mol K) . Tu su pravilnost već početkom 19. stoljeća opazila dva francuska fizičara, te se po njima zove **Dulong—Petitov zakon**. Iako taj zakon nema nekoga posebnog praktičnog značenja, jer je vrlo aproksimativan, on pokazuje vrlo važnu činjenicu da toplina potrebna da se neki metal zagrije ovisi samo o broju molekula, a ne o njihovoj veličini i masi. Za čvrsta tijela potreban je isti iznos topline po molekuli da im se povisi temperatura za 1 K (približno $(25/6) \cdot 10^{-23} = 4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$), bez obzira na masu molekule (isto i za aluminij i za olovo). Važnost je tog empirijskog zakona u tome što je jedno makroskopsko svojstvo tvari direktno vezano za njezinu atomističku strukturu.

Kalorimetrija. Kalorimetrija je grana fizike, odnosno fizikalne kemije koja se bavi mjerenjem topline, specifičnih i molarnih topline i drugih toplinskih svojstava materijala.

Najjednostavnija metoda mjerenja srednjih specifičnih toplinskih kapaciteta u području običnih temperatura (npr. od 0°C do 100°C) jest tzv. *metoda smjese*. Mjerenje se vrši u kalorimetru, koji se obično sastoji od dvije posude što su postavljene jedna u drugu, a između kojih je toplinski izolator (zrak, vakuum i sl.). Kada se dva sistema, jedan mase m_1 i temperature T_1 i drugi mase m_2 i temperature T_2 , pomiješaju u kalorimetru, toplina prelazi iz toplijeg sistema u hladniji sistem sve

dok se ne uspostavi toplinska ravnoteža, tj. ne izjednači temperatura. Pri tom je, uz pretpostavku da nema toplinskih gubitaka, toplina Q_1 koju preda topliji sistem jednaka toplini Q_2 što je primi hladniji sistem.

Iako su gubici u kalorimetru najčešće relativno maleni, pri preciznijim mjerenjima treba ih uzeti u obzir. Da bismo zagrijali posudu kalorimetra, miješalicu i onaj dio termometra koji je uronjen u vodu, za razliku temperature ΔT potrebna je toplina:

$$Q' = m_k c_k \Delta T + m_m c_m \Delta T + m_t c_t \Delta T.$$

Te ćemo gubitke najjednostavnije uključiti tako da umjesto toplinskog kapaciteta kalorimetra, termometra i miješalice uzmemo ekvivalentni toplinski kapacitet vode mase m' , tako da je

$$Q' = m' c_v \Delta T,$$

te smatramo da je kalorimetar bez gubitaka, ali da je u njemu masa vode veća za m' . Zato se masa m' često zove vodena vrijednost kalorimetra.

Ako se, npr., u posudi kalorimetra nalazi tekućina mase m_1 , specifičnoga toplinskog kapaciteta c_1 i temperature T_1 , i ako tijelo mase m_2 , specifičnoga toplinskog kapaciteta c_2 , zagrijano na temperaturu T_2 , uronimo u tekućinu, nakon uspostavljanja toplinske ravnoteže, temperatura smjese bit će T . Energetsku bilancu možemo u ovom primjeru pisati ovako:

$$m_2 c_2 (T_2 - T) = m_1 c_1 (T - T_1) + m' c_v (T - T_1).$$

To je tzv. Richmannovo pravilo za određivanje specifičnih toplina. Odatle se može, npr., izračunati nepoznati specifični toplinski kapacitet c_2 .

To je bio samo princip jedne od metoda u kalorimetriji. Stvarno kalorimetrijsko mjerenje inače je vrlo složeno, jer sadrži mnogo praktičnih problema koje treba riješiti.

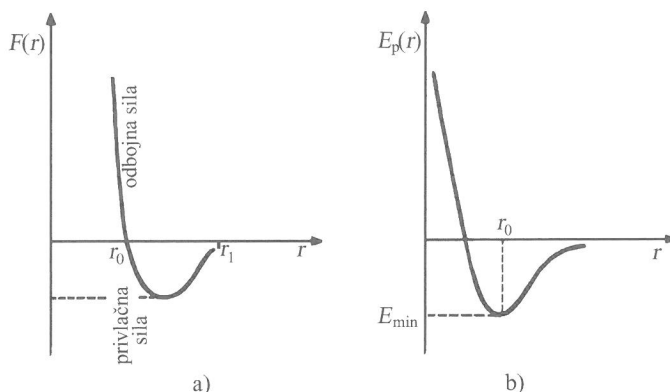
12.5. PROMJENA AGREGATNOG STANJA. LATENTNA TOPLINA

Tvar se može nalaziti u tri različita **agregatna stanja**: čvrstom, tekućem i plinovitom. Tako je voda u čvrstom stanju u obliku leda, u tekućem je poznamo kao vodu, a u plinovitom je para. Umjesto agregatnog stanja često se, međutim, upotrebljava izraz **faza**. Međutim, faza i agregatno stanje nisu sasvim identični pojmovi. **Fazu bismo mogli definirati kao homogeni dio nekog sistema koji u svim svojim dijelovima ima ista svojstva i koji je određenom granicom odvojen od ostalih dijelova sistema.** Dakle, u jednom agregatnom stanju može biti i više faza. Tako se sumpor u čvrstom stanju pojavljuje u dvije različite kristalne faze, natrij-sulfat u obliku $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ (Glauberova sol) i u obliku Na_2SO_4 , led pri visokim tlakovima u obliku više raznih kristalnih faza, itd.

Da bismo razumjeli prijelaz tvari iz jednog agregatnog stanja u drugo stanje, potrebno je promotriti molekularnu strukturu tvari.

Atomi unutar molekule vezani su silama čije je porijeklo električne prirode. Molekularna i atomska struktura mogu se shvatiti samo pomoću kvantne fizike, te ćemo se zadržati samo na kvalitativnom opisu međudjelovanja atoma i molekula.

Na slici 12.7a pokazano je kako sila ovisi o udaljenosti dvaju atoma u dvoatomnoj molekuli, a na slici 12.7b odgovarajuća potencijalna energija $E_p(r)$. Kada su atomi na međusobnoj udaljenosti $r = r_0$, molekula je u ravnotežnom stanju, potencijalna je energija minimalna. Kad je udaljenost manja od r_0 ($r < r_0$), atomi se odbijaju jakim silama. Za veće udaljenosti ($r > r_0$) atomi se privlače.

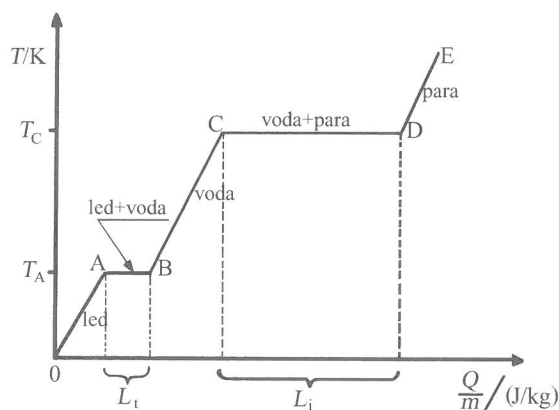


Slika 12.7. Ovisnost: a) sile i b) potencijalne energije o razmaku atoma

Molekule također djeluju jedna na drugu međumolekularnim — tzv. *Van der Waalsovim* — silama koje su po obliku slične onima na slici 12.7. ali im je intenzitet manji. U idealnom plinu molekule su tako daleko jedna od druge ($r > r_1$) tako da su molekularne sile zanemarive.

Molekule se stalno gibaju. Kod čvrstih tijela molekule (atomi) titraju oko manje-više fiksnih centara, koji su pravilno raspoređeni, tvoreći kristalnu rešetku. U tekućinama su međumolekularne udaljenosti nešto veće, privlačne sile slabije, te su molekule pokretljivije. U plinovima su molekule daleko jedna od druge, međumolekularne sile vrlo su slabe, te se molekule gibaju gotovo slobodno i ne utječu jedna na drugu.

Kada se tvar nalazi u čvrstom kristalnom stanju, molekule su poredane u kristalnoj rešetki i titraju oko položaja koji su određeni minimalnom potencijalnom energijom molekule. Titranje svake molekule je superpozicija vrlo velikog broja harmoničkih titranja čije frekvencije ovise o molekularnim silama. Kako se dovodi toplina, titranje se povećava, te i srednja kinetička energija, što se očituje kao porast temperature tvari. Na slici 12.8. prikazan je $T-Q$ dijagram grijanja neke čiste kristalne tvari. Područje OA odgovara zagrijavanju čvrste faze tog materijala. Kada temperatura dosegne talište (T_A na sl. 12.8), uzbuda molekula je dovoljno velika da većina molekula napusti svoja mjesta u rešetki i rešetka se počinje raspadati: tvar se tali, čvrsta faza prelazi u tekuću. Sve dok se sva tvar ne rastali, energija koja se u obliku topline dovodi tvari troši se na gibanje i sudare molekula te uvjetuje povećanje potencijalne energije molekula, dok srednja kinetička energija (dakle i temperatura) pri tom ostaje konstantna (dio dijagrama AB na sl. 12.8). Kada se sva tvar rastali, daljnjim dovodenjem topline ponovo se povećava temperatura tekućine (pravac BC na sl. 12.8).

Slika 12.8. T - Q dijagram za H_2O

Kad je dovedena energija dovoljna da svlada privlačne sile među molekulama tekućine (točka C), molekule se oslobađaju i izlaze iznad površine tekućine, počinje proces vrenja. Pri tom temperatura ostaje ista sve dok se sva tekućina ne pretvori u paru. Dovedena toplina troši se na svladavanje privlačnih sila među molekulama sve dok se sve molekule ne oslobode, odnosno sva tekućina ne ispari. Privlačne sile koje vežu molekule u tekućinama dosta su velike te je potrebna relativno velika toplina za isparavanje.

Daljnijim dovodenjem topline (dio DE na sl. 12.8) povećava se kinetička energija molekula te i temperatura pare.

Toplina koja se apsorbira ili oslobađa pri prijelazu jedne faze u drugu fazu zove se **latentna toplina transformacije**. Tako je za taljenje:

$$Q = m L_t \quad (12.26)$$

gdje je L_t specifična toplina taljenja (ili, kako se još zove, latentna toplina taljenja). Jednaku toplinu predaje tekućina pri očvršćivanju. Slično vrijedi i za isparavanje. U tablici 12.5. su prikazane specifične topline taljenja L_t i isparavanja L_v nekih tvari.

Tablica 12.5. Latentne topline transformacije

Materijal	Talište °C	L_t kJ/kg	Vrelište °C	L_v kJ/kg
alkohol (etanol)	−114	105	78	850
aluminij	660	390	2 056	8 375
bakar	1 083	180	2 300	7 327
dušik	−210	26	−196	200
kisik	−219	14	−183	213
olovo	327	25		
platina	1 774	114	4 300	2 680
voda	0	333	100	2 260
željezo	1 535	23	3 000	6 780
živa	−39	12	357	280

Primjer

Promatrajte zagrijavanje 1 kg leda od -10°C . Potrebnu toplinu dovodimo konstantnom snagom 330 W sve dok se voda nastala iz leda potpuno ne ispari. Kolika je potrebna ukupna toplina i koliko je potrebno vrijeme? Nacrtajte ovisnost temperature sustava o vremenu zagrijavanja.

Za zagrijavanje leda od $t_1 = -10^\circ\text{C}$ do $t_2 = 0^\circ\text{C}$ potrebno je $Q_1 = m c_1 (t_2 - t_1)$, za otapanje leda $Q_2 = m L_t$, za zagrijavanje vode $Q_3 = m c_2 (t_3 - t_2)$ i za isparavanje vode $Q_4 = m L_v$. Ukupna toplina je

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = m c_1 (t_2 - t_1) + m L_t + m c_2 (t_3 - t_2) + m L_v = 21 \text{ kJ} + 335 \text{ kJ} + 419 \text{ kJ} + 2260 \text{ kJ} = 3,04 \text{ MJ}.$$

Potrebno vrijeme je

$$t = \frac{Q}{P} = 9,2 \cdot 10^3 \text{ s} = 153 \text{ min}.$$

12.6. FAZNI DIJAGRAMI. KRITIČNA I TROJNA TOČKA

Fazni dijagrami pokazuju kako se mijenjaju svojstva sistema pri promjeni temperature, tlaka, odnosno volumena, posebno prijelaze sistema iz jednog agregatnog stanja u drugo stanje, iz jedne faze u drugu fazu. Za svaku čistu tvar može se odrediti veza između tlaka, temperature i volumena, koju obično grafički prikazujemo kao plohu u p - V - T koordinatnom sustavu.

Obično se umjesto volumena razmatra specifični volumen

$$v = V/m,$$

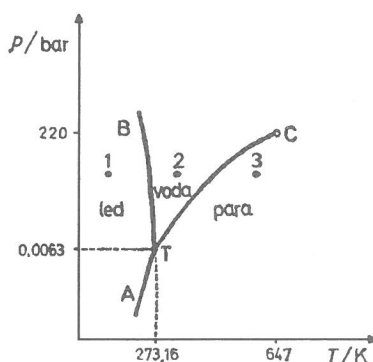
tj. volumen podijeljen s masom, odnosno molarni volumen

$$V_m = V/n,$$

tj. volumen podijeljen s množinom tako da se, u stvari, crtaju p - v - T , odnosno p - V_m - T dijagrami. Međutim, na našim dijagramima, koji su uglavnom kvalitativni, razmatrat ćemo p - V - T dijagrame ne specificirajući pri tom da li je riječ o molarnom ili o specifičnom volumenu.

Trodimenzijski dijagrami, odnosno p - V - T plohe, dosta su nepregledni i teško ih je crtati, pa se često crtaju i razmatraju samo njihove projekcije: dvodimenzijski p - T i p - V dijagrami.

Na slici 12.9. prikazan je fazni p - T dijagram za vodu. Svaka točka dijagrama označava određeno stanje vode, karakteristično za te uvjete. Tako je u točki 1 ($p = 10 \text{ bar}$, $T = 223 \text{ K}$) voda u obliku leda, u točki 2 ($p = 10 \text{ bar}$, $T = 323 \text{ K}$) u tekućem stanju, u točki 3 ($p = 10 \text{ bar}$, $T = 573 \text{ K}$) u plinovitom. Za sve točke (temperature i tlakove) ispod krivulje ATC voda je u obliku pare, za točke lijevo od krivulje ATB u obliku leda, dok je u području omeđenom krivuljama TC i TB u obliku tekućine. Krivulja AT je skup točaka ravnotežnih stanja čvrstog stanja i



Slika 12.9. Fazni p - T dijagram za H_2O

i pare (krivulja sublimacije), krivulja TC pokazuje u kojim je uvjetima ravnoteža između vode i pare, a krivulja TB ravnotežna stanja leda i vode. Krivulja isparavanja (kondenzacije) TC završava u točki C, za razliku od krivulje TB koja nema

završetka. Točka C zove se kritična točka i određena je kritičnom temperaturom T_c , kritičnim tlakom p_c i kritičnim volumenom v_c , odnosno V_{mc} . Na temperaturama većima od kritične temperature izoternom kompresijom plina nije moguće plin ukapljiti tj. opaziti likvefakciju i stvaranje kapi tekućine odnosno formiranje granice između tekuće i plinovite faze. Povećanjem tlaka može se u području $p > p_c$ i $T > T_c$ postići kontinuiran prijelaz iz rijetkih u vrlo zgusnute plinove, koji se po svojim svojstvima i ne razlikuju od tekućine. U kritičnoj točki volumeni tvari u plinskoj i tekućoj fazi su jednaki (za vodu, npr., 3,1 L/kg).

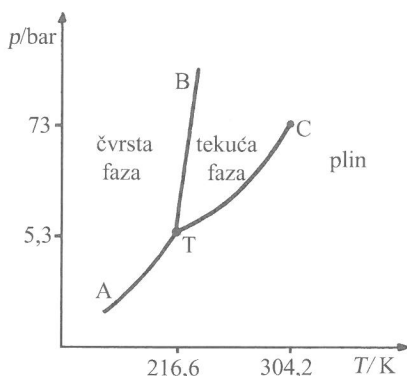
Tablica 12.6. Kritične konstante za neke plinove

Plin	T_c/K	p_c/bar	$V_c/(\text{m}^3/\text{kg})$
He	5	2,3	$14,4 \cdot 10^{-3}$
H ₂	33	13	$32,3 \cdot 10^{-3}$
N ₂	126	33,9	$3,2 \cdot 10^{-3}$
CO ₂	304	74	$2,2 \cdot 10^{-3}$
NH ₃	406	113	$4,2 \cdot 10^{-3}$
H ₂ O	647	220,9	$3,14 \cdot 10^{-3}$

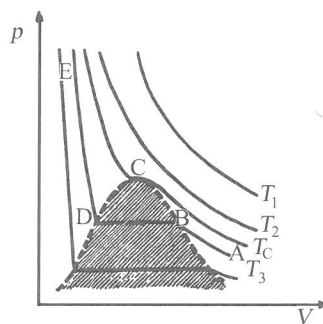
Na $p-T$ dijagramu postoji jedna točka (p_c, T_c) kada su sve tri faze u ravnoteži, tj. kada se tvar istovremeno nalazi u sve tri faze. To je tzv. **trojna točka**. Za vodu se ravnoteža svih triju faza postiže pri $p_t = 6,309 \text{ mbar}$ i $T_t = 273,16 \text{ K}$ ($0,01^\circ \text{C}$), za CO₂ trojno stanje je pri $p_t = 5,3 \text{ bar}$ i $T_t = 216,55 \text{ K}$ i sl.

Temperatura trojnog stanja vode vrlo je važna jer je uz apsolutnu nulu, fiksna točka za termodinamičku temperaturnu skalu.

Na slici 12.10. prikazan je fazni dijagram za CO₂. Uočite razliku između tog dijagrama i dijagrama za H₂O na slici 12.9. Posebno se CO₂ i H₂O razlikuju u dijelu krivulje TB: za H₂O temperatura tališta se snizuje s povećanjem tlaka, dok je za CO₂ obratno, tj. s povećanjem tlaka povećava se temperatura taljenja. Iz dijagrama se, npr., vidi da pri tlaku 1 bar, CO₂ ne može biti u tekućem stanju.



Slika 12.10. Fazni $p-T$ dijagram za CO₂



Slika 12.11. Fazni $p-V$ dijagram

Tipični fazni $p-V$ dijagram prikazan je na slici 12.11. Na većim temperaturama (npr. T_1) plin se ponaša kao idealan, i izoterma ima oblik hiperbole ($pV = \text{konst.}$). Kinetička energija molekula vrlo je velika i privlačne sile među njima

zanemarive. U tom području vrijedi jednadžba stanja za idealni plin. Kada temperatura pada, počinju dolaziti do izražaja privlačne sile među molekulama, plin sve manje slijedi Boyle–Mariotteov zakon, te izoterme više nisu hiperbole (T_2). U tom području stanje plina dobro opisuje tzv. Van der Waalsova jednadžba za realne plinove, o kojoj ćemo govoriti kasnije. Na temperaturama koje su iznad kritične, plin se ne može pretvoriti u tekućinu bez obzira kako velik tlak primijenili. Kritična temperatura T_c najveća je temperatura za koju tvar može postojati u tekućoj fazi.

Izoterma T_3 ima interesantan oblik. Promatrajmo izotermnu kompresiju na toj temperaturi. Pri većim volumenima (točka A) kompresijom se volumen smanjuje i tlak povećava sve dok ne dođemo do iscrtkanog područja (točka B). Tu tlak ostaje konstantan, iako volumen smanjujemo: plin se počinje kondenzirati u tekućinu. Taj tlak se zove tlak zasićenih para za određenu temperaturu. Kada se sav plin pretvori u tekućinu (točka D), daljom kompresijom tekućine volumen se ponovo smanjuje, ali sada znatno manje jer je kompresibilnost tekućina mnogo manja nego plinova.

U stanjima u kojima su tekućina i para u ravnoteži, para se naziva zasićena para a tekućina zasićena tekućina. Stanja zasićene pare predložena su na sl. 12.11. isprekidanom linijom koja ide od C preko B, a stanja zasićene tekućine linijom od C preko D. Površina ispod isprekidane linije je područje u kojem su dvije faze u ravnoteži.

12.7. PRIJENOS TOPLINE

Toplina je energija koja zbog razlike temperatura prelazi iz područja više temperature u područje niže temperature. Postoje tri načina prijenosa topline: vođenje (kondukcija), strujanje (konvekcija) i zračenje (radijacija).

Ako u nekom sredstvu postoji temperaturna razlika, toplinska će energija vođenjem prelaziti s mjesta više temperature prema mjestu niže temperature. Tako se toplina prenosi kroz čvrsta tijela. U fluidima (tekućinama i plinovima) toplina se obično prenosi konvekcijom. Za razliku od vođenja gdje se prijenos topline ostvaruje molekularnim gibanjem, a samo sredstvo je na miru, pri prenošenju topline konvekcijom giba se i samo sredstvo. Zato je konvekcija moguća samo u tekućinama i plinovima. Vođenje topline u fluidima dolazi do izražaja samo ako nije moguć prijenos topline konvekcijom.

Pri prijenosu topline zračenjem toplinska energija tijela pretvara se u elektromagnetsko zračenje koje tijelo emitira u okolni prostor. Energija koja se zračenjem prenosi od jednog do drugog mjesta bitno ovisi o temperaturi tijela. Svako tijelo ugrijano na neku temperaturu emitira toplinsko zračenje čiji sastav i energija bitno ovise o temperaturi tijela. Lijep je primjer prijenosa energije zračenjem Sunčeva energija koja na taj način sa Sunca dolazi na Zemljinu površinu.

12.7.1. Vođenje topline

Kada među raznim dijelovima nekog sredstva postoji temperaturna razlika, nastat će vođenje topline, i energija će prelaziti iz područja više temperature u područje niže temperature. Pri tom se energija prenosi od molekule do molekule, toplina prelazi s jednog kraja na drugi kraj, a samo sredstvo miruje.

Držimo li, npr., jedan kraj metalnog štapa u ruci, a drugi zagrijavamo, osjetit ćemo da se kroz štap širi toplina. Uključimo li električni štednjak, toplina će se vođenjem prenositi od užarene ploče na posudu koja se nalazi na ploči.

Vođenje topline kroz plinove može se shvatiti pomoću kinetičke teorije topline. Na mjestima više temperature srednja kinetička energija molekula je veća nego tamo gdje je temperatura niža. Zbog kaotičnoga gibanja i stalnih sudara molekula brže molekule predaju dio svoje kinetičke energije susjednim sporijim molekulama, one pak svojim susjedima, i tako se energija prenosi kroz plin iz područja više temperature prema području niže temperature. U tekućinama se toplinska energija prenosi posredstvom elastičnih titranja molekula, u vođenju topline kroz metale važni su slobodni elektroni. Teorija toplinske vodljivosti i njezino mikroskopsko objašnjenje prelazi, međutim, okvir ove knjige, te ćemo se zadržati samo na fenomenološkom opisu procesa vodljivosti.

Vođenje topline kroz homogeni materijal može se računati pomoću Fourierova zakona. Da bismo shvatili taj zakon, promatrajmo vođenje topline kroz štap poprečnog presjeka S (sl. 12.12). Pretpostavit ćemo da temperatura u štapu linearно pada od jednog kraja do drugog i da je u svakoj točki određenog presjeka ista. Također ćemo razmatrati stacionarni prijenos topline što znači da ćemo pretpostaviti da temperatura bilo koje točke sredstva ne ovisi o vremenu, već samo o mjestu u sredstvu. Uočit ćemo dva presjeka na kojima su temperature T_1 i T_2 međusobno udaljena za Δx i izračunati toplinu koja u određenom vremenu t prođe kroz taj dio sredstva.

$$Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S t \quad (12.27)$$

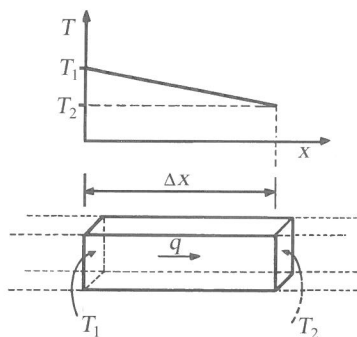
gdje je λ koeficijent toplinske vodljivosti materijala, $\Delta T = T_2 - T_1$ razlika temperatura na krajevima sloja, a S površina kroz koju prolazi

toplina. Veličina $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ zove se temperaturni gradijent, koji možemo shvatiti i kao

vektor kojemu je to iznos, a smjer mu je u smjeru normale na plohu kroz koju prolazi toplina. Predznak minus nastaje zbog poznate činjenice da toplina prelazi iz područja više temperature prema području niže temperature, tj. da je Q pozitivan za negativni $\frac{\Delta T}{\Delta x}$. (Predznak minus, radi jednostavnosti, ponekad izostavljamo i računamo s apsolutnom vrijednošću ΔT .)

Fourierov zakon (12.27) možemo napisati i pomoću toplinskog toka Φ , odnosno gustoće toplinskog toka q . Toplinski tok je omjer topline i vremena, $\Phi = \frac{Q}{t}$, dok je gustoća omjer toplinskog toka i površine, $q = \frac{\Phi}{S}$. Obično se Fourierov zakon piše pomoću gustoće toplinskog toka:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{ili} \quad q = -\lambda \text{ grad } T \quad (12.28)$$



Slika 12.12. Uz objašnjenje Fourierova zakona vođenja topline

Uočite da su jedinice za ove fizikalne veličine slijedeće:

$$[q] = \text{W/m}^2, \quad [\lambda] = \text{W/(K m)}, \quad [x] = \text{m}, \quad [\Delta T] = \text{K}$$

Koeficijent toplinske vodljivosti λ toplinska je karakteristika određenog materijala, a ovisi o temperaturi i o tlaku. Često se, međutim, ta ovisnost može zanemariti i računati sa srednjom vrijednošću u promatranom temperaturnom intervalu. Materijal kojemu je λ velik dobar je toplinski vodič (npr. metali). Suprotno tome, materijal je to bolji toplinski izolator što mu je manji λ . Posebno je dobar toplinski izolator šupljikav (porozan) materijal, kao poliuretanska pjena, staklena vuna i sl.

Tablica 12.7. Koeficijenti toplinske vodljivosti nekih vrsta materijala na sobnoj temperaturi

Materijal	λ W/(m K)	Materijal	λ W/(m K)
srebro	420	voda	0,6
bakar	385	azbestni cement	0,5
aluminij	205	drvo	0,13
željezo	60	guma	0,15
beton	1,3	papir	0,13
staklo	0,8	polistiren	0,01
žbuka	0,8	staklena vuna	0,035
cigla	0,7	poliuretanska pjena	0,03
zemlja	0,5	zrak	0,025

Napišemo li jednadžbu za toplinski tok kao produkt gustoće toka i površine

$$\Phi = q S = - \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{\lambda S}} = \frac{\Delta T}{R} \quad (12.29)$$

tada veličinu $R = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{\Delta x}{\lambda S}$ možemo nazvati toplinskim otporom, u analogiji s Ohmovim zakonom $R = \frac{U}{I}$ u elektricitetu, jer se usporedbom tih dviju formula vidi da je toplinski tok analogan električnoj struji, ΔT razlici potencijala U , a toplinski otpor $R = \frac{\Delta x}{\lambda S}$ analogan je električnom otporu. Jedinica je toplinskog otpora K/W. Analogija s električnom strujom pomaže nam u rješavanju problema prijenosa topline, kao što ćemo vidjeti kasnije.

Primjer

Betonski zid ($\lambda_1 = 1,3 \text{ W/m}^2\text{K}^{-1}$), **debeo 30 cm, prekriven je s unutrašnje strane izolacijskim slojem debljine 2 cm i toplinske vodljivosti** $\lambda_2 = 0,05 \text{ W/(m K)}$. **Izračunajte gustoću toplinskog toka kroz zid ako je temperatura unutrašnje površine zida 20 °C, a vanjske površine 0 °C.**

Budući da je gustoća toplinskog toka kroz izolacijski sloj jednaka gustoći toka kroz betonski zid, možemo pisati:

$$q = \frac{T_1 - T}{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1}} = \frac{T' - T_2}{\frac{\Delta x_2}{\lambda_2}},$$

gdje je T_1 temperatura unutrašnje plohe, T' temperatura na granici izolacijskog sloja i betona, a T_2 temperatura vanjske plohe zida. Eliminirajući T' dobivamo:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2}} = 33 \text{ W/m}^2.$$

Pokažite da bi gustoća toplinskog toka kroz taj zid, ali bez izolacije, iznosila $q = 87 \text{ W/m}^2$.

12.7.2. Konvekcija

U tekućinama i plinovima toplina se prenosi uglavnom konvekcijom, tj. strujanjem fluida s jednog mjesta na drugo mjesto. Vođenje topline u fluidima je vrlo slabo i uvijek je zanemarivo kad je moguća konvekcija. Tako nastaje, npr., prijenos topline u posudi s vodom koju zagrijavamo nad plamenikom, na ploči štednjaka i sl. Topla voda sa dna posude diže se prema gore zbog manje gustoće, a hladnija se spušta prema dolje. Takva, tzv. prirodna ili slobodna konvekcija susreće se u mnogim primjerima prijenosa topline. Tako se zagrijavaju i prostorije. Konvekcijom se toplina s radijatora prenosi po cijeloj sobi, jer se zagrijani zrak iznad radijatora diže uvis, a hladan zrak dolazi do radijatora odozdo, te se strujanjem zraka toplina raznosi po sobi. Sistemi koji rade na tom principu često se zovu termosifonski sistemi.

Osim slobodne postoji i prisilna konvekcija, kad se strujanje fluida postiže pomoću pumpi, ventilatora i sl. Prijenos topline je veći kod prisilne konvekcije nego kod slobodne, ali su potrebni uređaji za postizanje prisilnog strujanja i energija za pogon tih uređaja.

Prijenos topline konvekcijom možemo računati pomoću Newtonova zakona hlađenja:

$$q = h_c (T_p - T_f) \quad (12.30)$$

gdje je T_p temperatura čvrste plohe uz koju struji fluid, T_f temperatura fluida dalje od granične plohe, a h_c koeficijent konvekcije koji se izražava u $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ i za jednostavnije slučajeve može se izračunati pomoću semiempiričkih relacija (koje se mogu naći u literaturi koja detaljnije opisuje prijenos topline). Taj koeficijent ovisi o nizu parametara, npr. o razlici temperature, geometrijskoj konfiguraciji, obliku i položaju plohe, brzini i načinu strujanja fluida (laminarno ili turbulentno), vrsti fluida, njegovim svojstvima – toplinskoj vodljivosti fluida, itd. Navest ćemo samo red veličine tih koeficijenata za neke primjere. Za prijenos topline konvekcijom od zida, prozora, krova i sl. u okolnu atmosferu koeficijent konvekcije je oko $6 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ kad nema vjetera, i raste s brzinom vjetera, te je, npr., $20 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ za brzinu vjetera oko 15 km/h . Za slobodnu konvekciju oko vertikalne ploče u zraku (npr. između prozora i zraka u sobi) h_c je oko $4 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, za toplu vodu oko grijača $1\,000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, itd.

Primjer

Kolika je gustoća toplinskog toka kroz prozorako staklo debljine 2 mm ako je temperatura zraka u sobi 20 °C, a temperatura vanjskog zraka — 10 °C?

Pretpostavimo da je koeficijent konvekcije s vanjske strane $h_1 = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, a s unutrašnje strane $h_2 = 6 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$. Toplinska vodljivost stakla je $\lambda = 0,8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$.

Kolika je gustoća toplinskog toka kroz dvostruki prozor, načinjen tako da je između stakala debljine 2 mm sloj zraka debljine 5 mm, ako je koeficijent prijenosa topline kroz taj sloj zraka $h_z = 4 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$?

Toplina se iz zraka u sobi konvekcijom prenosi do prozorakog stakla, a zatim, vođenjem kroz staklo i konvekcijom od stakla, u atmosferu. Pri tom je toplinski tok konvekcijom u sobi jednak toplinskom toku vođenja kroz staklo, odnosno toplinskom toku konvekcijom od stakla u atmosferu. Ukupni toplinski otpor jednak je serijskom spoju toplinskog otpora prve konvekcije, toplinskog otpora vođenja i toplinskog otpora druge konvekcije, tj. njihovu zbroju:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{h_1 S} + \frac{\Delta x}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S},$$

gdje je S površina prozora. Gustoća toplinskog toka jednaka je, dakle,

$$q = \frac{\Delta T}{R} \cdot \frac{1}{S} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} = 137 \text{ W}/\text{m}^2.$$

Ako je prozor dvostruk, imamo ekvivalentni toplinski krug od pet serijski spojenih toplinskih otpora: R_1 zbog konvekcije u sobi, R_2 zbog vođenja kroz prvo staklo, R_3 zbog prijenosa topline vođenjem i konvekcijom između dva stakla, R_4 zbog vođenja kroz drugo staklo i R_5 zbog konvekcije od drugog stakla u atmosferu. Napomenimo da bi, kad ne bi bilo konvekcije između stakala, koeficijent prijenosa topline bio $\Delta x_z/\lambda_z = 0,05/0,025 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) = 2 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, dakle manji nego što smo pretpostavili u zadatku.

Gustoća je toplinskog toka:

$$q = \frac{\Delta T}{\sum_i R_i} \cdot \frac{1}{S} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{\lambda} + \frac{1}{h_z} + \frac{\Delta x_2}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} = 64 \text{ W}/\text{m}^2.$$

Vidimo da dvostruki prozor bitno smanjuje toplinske gubitke. Ukupni je koeficijent prijenosa topline (toplinskih gubitaka) $k = q/\Delta T$ i u prvom primjeru iznosi 4,6 W/(m² K), a u drugome 2,1 W/(m² K).

12.7.3. Toplinsko zračenje

Toplinsko zračenje nastaje kad atomi ili molekule tijela, pobuđeni termičkim gibanjem, emitiraju elektromagnetske valove. Užarena tijela zrače elektromagnetske valove uglavnom u infracrvenom području. Upaljena peć grije okolne predmete to jače što joj je veća temperatura. Intenzitet i spektralni sastav izračene toplinske energije nekog tijela uglavnom ovise o njegovoj temperaturi.

Iako na visokim temperaturama tijela svijetle, ne smijemo zaboraviti da vidljiva svjetlost nije jedino zračenje koje emitiraju. Pri nižim temperaturama tijela emitiraju infracrveno zračenje, ako su temperature veće od oko 800 K, tijela počinju uz infracrvenu zračiti i vidljivu svjetlost, a pri vrlo visokim temperaturama, osim infracrvene i vidljive, emitiraju i ultraljubičastu svjetlost.

Infracrveno zračenje (koje često nazivamo i toplinskim zračenjem) dio je spektra elektromagnetskih valova valne dužine između $0,75 \mu\text{m}$ i $1\,000 \mu\text{m}$, dakle između vidljive (crvene) svjetlosti ($0,4 \mu\text{m} < \lambda < 0,75 \mu\text{m}$) i mikroradio-valova ($\lambda > 1\,000 \mu\text{m}$). Veći je dio spektra zračenja tijela na temperaturama manjima od $3\,000 \text{ K}$ u infracrvenom području, a pri običnoj temperaturi (300 K) čitav spektar zračenja je u infracrvenom području i proteže se od oko $2 \mu\text{m}$ do $25 \mu\text{m}$, s maksimumom na oko $10 \mu\text{m}$.

Emisioni spektri čvrstih tijela su kontinuirani i sastoje se od svih valnih dužina, od neke minimalne do maksimalne. Osim o temperaturi, oblik spektra i raspored energije po pojedinim valnim dužinama ovise i o svojstvima površine tijela koje zrači.

Kada zračenje upada na površinu nekog neprozirnog tijela, dio upadnog zračenja se odbija, a dio apsorbira. Omjer apsorbiranog i upadnog toka zove se **faktor apsorpcije**:

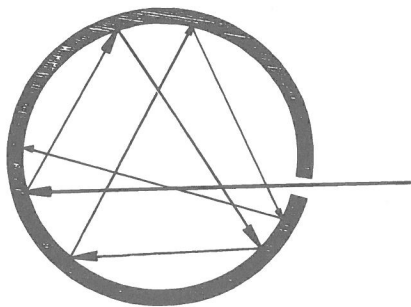
$$\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_u} \quad (12.31)$$

a omjer reflektiranog i upadnog toka **faktor refleksije**:

$$\varrho = \frac{\Phi_r}{\Phi_u} \quad (12.32)$$

Upadni tok dijeli se na apsorbirani i reflektirani dio, pa stoga vrijedi:

$$\alpha + \varrho = 1 \quad (12.33)$$



Slika 12.13. Idealno crno tijelo

Idealno crno tijelo potpuno apsorbira sve upadno zračenje, te mu je, dakle, faktor apsorpcije $\alpha = 1$, a faktor refleksije $\varrho = 0$. Tijelo koje bi bilo idealno crno u prirodi ne postoji. Ipak, vrlo je dobra aproksimacija crnog tijela šupljina s malim otvorom (sl. 12.13). Otvor takve šupljine ponaša se kao crno tijelo, jer gotovo potpuno apsorbira sve upadno zračenje koje kroza nj uđe u šupljinu. Naime, ušavši kroz otvor u šupljinu zraka se djelomično apsorbira u stijenci šupljine, a djelomično reflektira; reflektirani dio ponovo upada na stijenku šupljine (kao

što je shematski prikazano na sl. 12.13), gdje se djelomično apsorbira. Nakon nekoliko refleksija zraka se praktički potpuno apsorbira, i vjerojatnost da nešto od upadnog zračenja iziđe vrlo je mala, to manja što je manja površina otvora (u usporedbi s površinom unutrašnjosti šupljine). Ako su stijenke šupljine ugrijane na temperaturu T , kroz otvor će izlaziti energija: zračenje tog otvora nazivamo zračenjem crnog tijela za tu temperaturu.

Tijelo koje potpuno apsorbira određene valne dužine crno je za to područje spektra. Ako tijelo potpuno (ili gotovo potpuno) apsorbira vidljivu svjetlost, ono tada izgleda crno. Tijelo koje potpuno reflektira zračenje u određenom intervalu valnih dužina bijelo je u tom području. Tijelo koje djelomično, ali podjednako

reflektira sve valne dužine zove se **sivo** tijelo. Faktor refleksije sivog tijela jest između 0 i 1, a ne ovisi o valnoj dužini ($\rho = \text{konst.}$). Općenito tijela nisu siva, i faktor refleksije je funkcija valne dužine. Međutim, model sivog tijela, slično kao i model crnog tijela, korisna je aproksimacija za teoretska razmatranja i proračune.

Ukupni energetski tok koji zrači površina S tijela u čitavi poluprostor (hemisferu od 2π steradiana) označimo sa Φ_e . Ako tok Φ_e podijelimo s površinom tijela S , dobivamo gustoću toka energije:

$$M = \frac{\Phi_e}{S} \quad (12.34)$$

Ta se veličina često zove energetska (radijacijska) egzitancija, označava se znakom M i izražava, kao što se vidi iz definicijske formule, jedinicom W/m^2 .

Budući da egzitancija ovisi o valnoj dužini, definira se i spektralna egzitancija kao gustoća energetskog toka koji se izrači u interval valnih dužina između λ i $\lambda + d\lambda$:

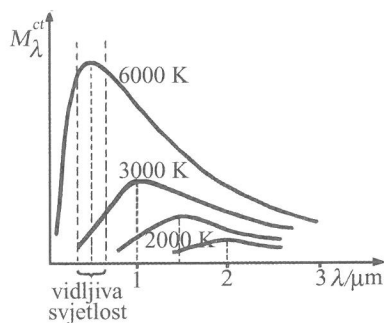
$$M_\lambda = \frac{dM}{d\lambda} \quad (12.35)$$

Spektralna egzitancija (spektralna gustoća toka zračenja) ponekad se zove i emisijska moć tijela.

Ukupna egzitancija dobiva se, naravno, integriranjem spektralne egzitancije po svim valnim dužinama:

$$M = \int_0^\infty M_\lambda d\lambda \quad (12.36)$$

Na slici 12.14. prikazani su emisijski spektri crnog tijela na različitim temperaturama, tj. M_λ kao funkcija valne dužine i temperature. Spektri imaju karakterističan zvonolik oblik, s maksimumom na određenoj valnoj dužini λ_m , koja je to niža što je veća temperatura tijela. Ukupna energija koju tijelo izrači proporcionalna je površini ispod krivulje, a naglo se povećava s povećanjem temperature.



Slika 12.14. Spektar crnog tijela

Spektralna egzitancija (tj. svaka krivulja na slici 12.14) koju emitira crno tijelo temperature T (npr. otvor na sl. 12.13) može se izračunati pomoću Planckove* formule:

$$M_\lambda^{ct} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (12.37)$$

gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, a $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$, tzv. Planckova konstanta.

* Max Planck (1858–1947), njemački fizičar, jedan od osnivača moderne fizike, dobitnik Nobelove nagrade (1918).

Integriramo li spektralnu egzitanciju po svim valnim dužinama, dobivamo snagu koju izrači jedinica površine nekog tijela u čitav poluprostor iznad te površine. J. Stefan* i L. Boltzmann**, nezavisno jedan od drugoga, došli su do rezultata da je ta energija proporcionalna četvrtoj potenciji apsolutne temperature tijela. Stefan—Boltzmannov zakon za crno tijelo pišemo u obliku:

$$M^e = \sigma T^4 \quad (12.38)$$

gdje je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ Stefan—Boltzmannova konstanta.

Ako tijelo nije idealno crno, njegov je faktor emisije manji od jedinice i ovisi o valnoj dužini. Emisioni spektri takvog tijela razlikovat će se i oblikom i intenzitetom od spektara crnog tijela. Ukupna je egzitancija u tom slučaju:

$$M(T) = \int_0^\infty \varepsilon(\lambda) M_\lambda^e(T) d\lambda \quad (12.39)$$

gdje je ε faktor emisije definiran omjerom emitiranog toka tog tijela i toka crnog tijela iste površine pri istoj temperaturi. Za sivo tijelo ($\varepsilon = \text{konst.}$) Boltzmann—Stefanov zakon poprima oblik:

$$M = \varepsilon \sigma T^4 \quad (12.40)$$

Valna dužina λ_m , kod koje spektralna gustoća zračenja $M_\lambda^e(T)$ postiže maksimum, ovisi o temperaturi crnog tijela, i pomiče se prema kraćim valnim dužinama kada temperatura raste (sl. 12.14). Tu činjenicu izražava Wienov*** zakon:

$$\lambda_m T = \text{konst.} \quad (12.41)$$

gdje je Wienova konstanta jednaka $2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K m}$.

Kirchhoffov zakon. Idealno crno tijelo ima koeficijent apsorpcije i koeficijent emisije jednak jedinici za sve valne dužine i ono je od svih tijela na istoj temperaturi najbolji apsorber i emiter. Ako tijelo nije idealno crno, tada njegovi koeficijenti apsorpcije i emisije, osim o temperaturi, ovise o valnoj dužini, kutu upada (emitiranja) i o svojstvima površina tijela.

R. G. Kirchhoff je našao vezu između faktora apsorpcije i faktora emisije neke površine. Da bismo objasnili Kirchhoffov zakon, zamislimo dva tijela, jedno sivo, drugo crno, unutar zatvorene evakuirane posude. Kada se uspostavi termička ravnoteža, površina tijela i stijenke posude imaju istu temperaturu T . Tada će energetski tok, koji tijelo zračenjem predaje stijenka posude, biti jednak toku što ga apsorbira od stijenke posude. Kada je unutar posude idealno crno tijelo možemo napisati:

$$\Phi_a^e = \Phi_r^e = \sigma S T^4 = \Phi_u.$$

Zamijenimo crno tijelo sivim istog oblika. Upadni tok se time ne promijeni, dok je apsorbirani tok manji jer se dio $q \Phi_u$ reflektira od sivog tijela:

$$\Phi_a = (1 - q) \Phi_u = \alpha \Phi_u = \Phi_e.$$

* Jožef Stefan (1835—1893), slovenski fizičar, profesor na Sveučilištu u Beču, poznat po eksperimentalnim radovima iz toplinskog zračenja.

** Ludwig Ludwig Boltzmann (1844—1906), njemački fizičar, poznat po radovima iz statističke mehanike i kinetičke teorije plinova.

*** Wilhelm Wien (1864—1928), njemački fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku (1911) za radove iz zračenja crnog tijela.

Budući da je faktor emisije ε jednak omjeru emitiranog toka sivog tijela i crnog tijela na istoj temperaturi, to je

$$\Phi_e = \varepsilon \Phi_e' = \alpha \Phi_u = \alpha \Phi_e',$$

jer je upadni tok jednak emitiranom toku crnog tijela.

Ovim smo razmatranjem došli do zaključka da je u toplinskoj ravnoteži (tj. kada tijelo od kojega dolazi zračenje i tijelo koje prima zračenje imaju istu temperaturu) faktor emisije jednak faktoru apsorpcije. Isti rezultat vrijedi i za svaku valnu dužinu posebno. Jednakost spektralnih faktora emisije i apsorpcije

$$\varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda) \quad (12.42)$$

zove se Kirchhoffov* zakon. Dok rezultat za integralne faktore $\alpha = \varepsilon$ ne mora vrijediti ako nije uspostavljena toplinska ravnoteža, jednakost spektralnih faktora dana relacijom (12.42) vrijedi općenito.

12.7.4. Prijenos topline zračenjem

Pri razmatranju prijenosa topline zračenjem treba uzeti u obzir energiju koju tijelo izrači i energiju što je apsorbira, te rezultatni toplinski tok dobiti kao razliku tih dvaju tokova. Pri tom će razmjena energije ovisiti o svojstvima tijela i njegove okoline, međusobnom položaju i površini pojedinih tijela. Najjednostavniji je primjer kada se tijelo površine S_1 , temperature T_1 i koeficijenta emisije ε_1 nalazi unutar šupljine čije stijenke imaju temperaturu T_2 . Ako je površina stijenki šupljine velika u usporedbi s površinom tijela, odnosno ako je površina stijenki šupljine savršen apsorber, izmjena topline dana je jednadžbom:

$$\Phi_{12} = \varepsilon_1 \sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (12.43)$$

U slučaju dviju ravnih, paralelnih ploha, čija je površina S mnogo veća od njihova međusobnog razmaka, a koeficijent emisije, odnosno apsorpcije jednak jedinici, rezultatni je toplinski tok:

$$\Phi_{12} = \sigma S (T_1^4 - T_2^4) \quad (12.44)$$

jer je tok koji izrači prva ploha $\sigma S T_1^4$, a tok što ga ona primi od druge plohe i apsorbira $\sigma S T_2^4$. Međutim, ako plohe nisu crne, već sive, treba uzeti u obzir faktor emisije ε i imati na umu da će se dio energije koji se ne apsorbira reflektirati, doći na drugu plohu, ondje djelomično apsorbirati i djelomično reflektirati, itd., sve dok se najzad ne apsorbira sva energija. Može se pokazati da je u tom slučaju toplinski tok koji prijeđe s ravnine više temperature na onu s nižom temperaturom dan izrazom:

$$\Phi_{12} = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (12.45)$$

Ponekad je praktično prienos topline zračenjem računati sličnom formulom kao i prienos topline konvekcijom, odnosno vođenjem, tj. kao umnožak površine, koeficijenta prijenosa topline i razlike temperatura:

$$\Phi = h_r S (T_1 - T_2), \quad (12.46)$$

* Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), njemački fizičar.

gdje je h_r koeficijent prijenosa topline zračenjem od jedne plohe temperature T_1 prema drugoj plohi temperature T_2 . Rastavimo li $T_1^4 - T_2^4$ u $(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2)$, vidimo da je koeficijent prijenosa topline zračenjem između dviju paralelnih ravnina u izrazu (12.45):

$$h_r = \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (12.47)$$

Primjer

Koliki je toplinski tok između dvaju prozorskih stakala površine 2 m^2 ako je temperatura unutrašnjeg stakla 293 K , temperatura vanjskoga 273 K , a koeficijent konvekcije u zraku između stakala $2 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$. Koeficijent emisije stakla je 0.9 .

Toplinski tok nastaje zbog konvekcije i razmjene energije zračenjem. Toplinski je tok zbog konvekcije:

$$\Phi_c = h_c S (T_1 - T_2) = 80 \text{ W},$$

a toplinski tok zbog zračenja:

$$\Phi_r = h_r S (T_1 - T_2) = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = 169 \text{ W}.$$

Ukupan je toplinski tok zbroj tih dvaju:

$$\Phi = \Phi_r + \Phi_c = 249 \text{ W}.$$

PITANJA I ZADACI

1. Što je temperatura? Kako možemo temperaturu tijela povezati s gibanjem molekula?
2. Što je toplina?
3. Objasnite kako nastaje toplinska ravnoteža.
4. Kako se mjeri temperatura?
5. Koje temperaturne skale poznajete?
6. Definirajte apsolutnu temperaturnu skalu i osnovnu jedinicu za mjerenje temperature.
7. Navedite nekoliko vrsta termometra i njihova osnovna svojstva.
8. Kako se definira koeficijent linearnog rastezanja čvrstog tijela?
9. Kako se računa linearno i volumno rastezanje?
10. Što znate o temperaturnom rastezanju tekućina, posebno vode?
11. Navedite neke primjene toplinskog rastezanja.
12. Što je idealni plin?
13. Objasnite Boyle—Mariotteov zakon, Gay—Lussacov i Charlesov zakon za idealni plin.
14. Iz plinskih zakona izvedite jednadžbu stanja idealnog plina.
15. Što kaže Avogadrov zakon?
16. Što je univerzalna plinska konstanta?
17. Iz činjenice da molarni volumen idealnog plina iznosi $22,4 \text{ L}$ u normiranim uvjetima, izračunajte plinsku konstantu.
18. Što je količina toplina? U kojim se jedinicama mjeri?
19. O čemu ovisi količina toplina potrebna da se zagrije neko tijelo?
20. Kako se definira specifični toplinski kapacitet pri stalnom tlaku i stalnom volumenu?
21. Kako molarni kapacitet čvrstih tijela ovisi o temperaturi? Objasnite Dulong—Petitov zakon.
22. Koji element ima veći specifični toplinski kapacitet, aluminij ili olovo?
23. Objasnite mjerenje specifičnih toplinskih kapaciteta.

24. Nacrtajte $T-Q$ dijagram za vodu u području $-263\text{ K} < T < 400\text{ K}$ i objasnite prijelaz iz jednog agregatnog stanja u drugo agregatno stanje.
25. Što su latentne topline transformacije?
26. Kako se definira specifična toplina taljenja i isparavanja? Koliko one iznose za vodu?
27. Nacrtajte $p-T$ i $p-V$ fazne dijagrame za H_2O i CO_2 . Objasnite što je kritična, a što trojna točka.
28. U kojoj je fazi CO_2 pri: a) $p = 4,05\text{ bar}$ i $t = -70\text{ }^\circ\text{C}$, b) $p = 500\text{ bar}$ i $t = 40\text{ }^\circ\text{C}$? U kojoj je fazi H_2O pri $0,006\text{ bar}$ i 300 K ?
29. Kako se može prenositi toplina?
30. Kako se toplina prenosi vođenjem? Što kaže Fourierov zakon? Što je toplinska vodljivost materijala?
31. Što je toplinski otpor? Nacrtajte toplinsku shemu za jedan primjer prijenosa topline.
32. Kako se toplina prenosi konvekcijom? Definirajte koeficijent konvekcije.
33. Što znate o toplinskom zračenju? O čemu ovisi toplinsko zračenje nekog tijela?
34. Definirajte faktore apsorpcije i refleksije. Kakva je veza između ta dva faktora?
35. Što je idealno crno tijelo?
36. Kako se definira energetska egzitancija? Što je spektralna egzitancija?
37. Nacrtajte spektre crnog tijela za nekoliko različitih temperatura.
38. Što kaže Stefan–Boltzmannov i Wienov zakon?
39. Kako glasi Planckova formula? Kako se iz nje mogu dobiti Stefan–Boltzmannov i Wienov zakon?
40. Kako se definira koeficijent emisije?
41. Što kaže Kirchhoffov zakon? Kada smijemo reći da je $\epsilon = \alpha$?
42. Objasnite prijenos topline zračenjem i izračunajte toplinski tok za jedan primjer takvog prijenosa.
43. Kako se definira koeficijent prijenosa topline zračenjem?
44. Što je ukupni koeficijent prijenosa topline onda kada imamo sva tri procesa prijenosa? U kojim se jedinicama izražava?
45. Pri $20\text{ }^\circ\text{C}$ dvije šipke, aluminijska i željezna, imaju jednaku duljinu 50 m . Koliko im se razlikuje duljina pri $40\text{ }^\circ\text{C}$?
46. Odredite napetost u čeličnom štapu koji je učvršćen na oba kraja na $20\text{ }^\circ\text{C}$ ako ga zagrijemo na $50\text{ }^\circ\text{C}$.
47. a) Izračunajte gustoću dušika i kisika pri normiranim uvjetima. b) Kolika je gustoća zraka pri tlaku od 950 mbar i temperaturi $20\text{ }^\circ\text{C}$ ako je pri normiranim uvjetima gustoća $1,293\text{ kg/m}^3$?
48. U automobilske gume je gumni nadtlak zraka $1,6\text{ bara}$ pri temperaturi od $0\text{ }^\circ\text{C}$ i vanjskom tlaku od 1 bara . Koliki je nadtlak u gumi kada se zbog vožnje temperatura zraka u njoj povisi na $50\text{ }^\circ\text{C}$? Pretpostavite da je promjena volumena zanemariva.
49. U boci volumena 10 L nalazi se komprimirani helij pod tlakom od 10 bara i temperaturom $0\text{ }^\circ\text{C}$. Kolika je masa plina u boci? Iz boce se ispusti $1/4$ mase plina i temperatura se povisi na $27\text{ }^\circ\text{C}$. Koliki je tlak plina?
50. a) Izračunajte volumen jednog mola idealnog plina pri normiranim uvjetima, tj. pri $0\text{ }^\circ\text{C}$ i $1,01 \cdot 10^5\text{ Pa}$. b) Koliko ima molekula u 1 m^3 svakog plina pri normiranim uvjetima?
51. Koliko je potrebno energije da se 80 kg vode u bojleru zagrije od $20\text{ }^\circ\text{C}$ do $60\text{ }^\circ\text{C}$ ako je korisnost 90% ?
52. Grijačem snage 600 W zagrijava se u kalorimetru tekućina mase $1,6\text{ kg}$ za vrijeme od 285 s . Temperatura se pri tom poveća od $20\text{ }^\circ\text{C}$ do $43,7\text{ }^\circ\text{C}$. Odredite specifični toplinski kapacitet tekućine. Pretpostavite da je vodena vrijednost kalorimetra 500 J/K .
53. Pri kojoj bi temperaturi maksimum spektralne gustoće zračenja crnog tijela bio na valnoj dužini od a) 240 nm , b) $0,48\text{ }\mu\text{m}$, c) $9,7\text{ }\mu\text{m}$.
54. Iz činjenice da je srednja gustoća energetskog toka koja od Sunca dolazi do Zemljine površine $1,35\text{ kW/m}^2$, izračunajte temperaturu Sunca.
55. Kolika je temperatura peći ako se iz njenog otvora površine 10 cm^2 emitira snaga od 50 W ? Za koju valnu dužinu spektralna gustoća zračenja iz peći ima maksimum? Pretpostavite da peć zrači kao idealno crno tijelo.
56. Kolika je temperatura crnog tijela koje pri temperaturi okoline od $17\text{ }^\circ\text{C}$ emitira 64 puta više energije nego što apsorbira. Zanemarite toplinske gubitke vođenjem i konvekcijom.
57. Ako se temperatura crnog tijela smanji od 1500 K na 1100 K , koliko se promijeni gustoća energetskog toka i valna dužina koja odgovara maksimumu spektralne gustoće zračenja?

13. TERMODINAMIKA

13.1. UVOD

Termodinamika je dio eksperimentalne fizike koji proučava vezu između topline i drugih oblika energije, posebno uvjete pretvaranja topline u mehanički rad. U termodinamici proučava se rad različitih toplinskih strojeva: parnog stroja, motora s unutrašnjim izgaranjem, hladionika i sl. Pri tom se ne ulazi u mikroskopski opis pojava u sistemu, već se proučavaju samo makroskopske veličine, kao što su tlak, temperatura, toplina, entalpija, rad i sl., razmatraju interakcije među sistemima i promjene sistema između različitih ravnotežnih stanja.

Termodinamika se osniva na dva osnovna zakona ili principa. Prvi zakon termodinamike zapravo je poseban primjer općih zakona očuvanja energije, koji obuhvaća i toplinsku energiju. On kaže da u izoliranom sistemu ukupna energija ostaje konstantna bez obzira na procese koji se u njemu događaju. Drugi zakon govori o uvjetima u kojima se iz topline može dobiti mehanički rad.

13.2. TERMODINAMIČKI PROCESI

Termodinamički sistem sastoji se od određene količine tvari unutar neke zatvorene površine. Najjednostavniji je takav sistem idealni plin u cilindru s klipom. U ravnotežnom stanju u svim točkama tog sistema vlada jednak tlak i temperatura, te se na takvo stanje može primijeniti jednadžba stanja idealnog plina.

Termodinamički proces je promjena stanja nekog sistema. Posebno su važni kružni procesi, u kojima se sistem vraća u početno stanje. Toplinski strojevi, upravo ponavljajući određeni termodinamički kružni proces, pretvaraju toplinsku energiju u mehanički rad.

Razlikujemo reverzibilne (povratne) i ireverzibilne (nepovratne) termodinamičke procese. Proces je reverzibilan ako sistem prolazi kroz niz ravnotežnih stanja. U tom slučaju proces se može odvijati i u suprotnom smjeru, vraćajući se kroz ista ravnotežna stanja u početno stanje.

Svako od tih ravnotežnih stanja može se opisati točkom u (p, V) dijagramu tako da će čitav proces biti predstavljen krivuljom $p = f(V, T)$.

Ako, npr., idealnom plinu povećamo izovolumno tlak za infinitezimalni iznos dp , temperatura će mu porasti za dT , i plin će iz jedne termodinamičke ravnoteže prijeći u drugu. Prije procesa sve su točke sistema imale iste termodinamičke koordinate (p, V, T) , a poslije procesa ponovno sve točke sistema imaju jednake koordinate $(p + dp, V, T + dT)$. Plin se može vratiti u prvobitno stanje jednostavno, smanjivanjem tlaka za dp , pri čemu će se temperatura sniziti za dT .

Reverzibilni se proces mora odvijati dovoljno sporo, tako da sistem bude u ravnoteži u svakom momentu procesa; takav proces vodi sistem preko niza ravnotežnih stanja, od početnog do konačnog stanja. Na primjer, ako smanjujemo volumen plina nizom infinitezimalnih promjena tlaka, dopuštajući nakon svake promjene uspostavljanje ravnoteže, tada je proces povratan, jer se moguće vratiti natrag preko tih istih ravnotežnih stanja, i u svakom momentu procesa imati definirane termodinamičke koordinate sistema.

Pri nagloj kompresiji plin će iz početnog stanja prijeći u konačno stanje kroz niz neravnotežnih stanja, i proces će biti ireverzibilan (nepovratan). Takav se proces ne može opisati krivuljom u p – V dijagramu niti načiniti u obratnom smjeru, tako da se okolina i sistem vrte u isto početno stanje.

Stvarni termodinamički procesi uvijek su manje ili više ireverzibilni. Idealan reverzibilni proces u prirodi ne postoji. Međutim, teoretski je moguće obraditi samo reverzibilne procese te iz rezultata dobivenih za takve idealne slučajeve zaključiti o ponašanju stvarnih sistema.

Zagrijavanjem energija u obliku topline prelazi u neki sistem. Ta energija može povećati unutrašnju energiju sistema, odnosno može osposobiti sistem da izvrši određeni mehanički rad. Toplina je, dakle, jedan oblik energije koju razmjenjuje sistem i njegova okolina i u tome je slična mehaničkom radu.

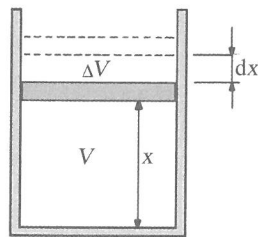
Unutrašnja energija nekog tijela jest zbroj kinetičke energije termičkoga gibanja molekula i potencijalne energije međumolekularnog djelovanja. U idealnom plinu nema sila među molekulama, te je unutrašnja energija jednaka zbroju kinetičke energije svih molekula. Kada se dva sistema različite temperature dovedu u međusobni kontakt, molekule sistema više temperature predavat će sudarima energiju molekulama u sistemu niže temperature, sve dok se temperature ne izjednače. Toplina će, dakle, prelaziti s tijela više temperature na tijelo niže temperature, i pri tom će se unutrašnja energija toplijeg tijela smanjiti, a hladnijega povećati. Osim prijenosom topline unutrašnja se energija može mijenjati i radom, s tim što se smanjuje kada sistem obavlja rad, a povećava kada se obavlja rad na sistemu. Uočite bitnu razliku između unutrašnje energije, koja je svojstvo sistema, i rada i topline, koji označavaju razmjenu energije između sistema i okoline.

Promatrajmo jedan od najjednostavnijih termodinamičkih sistema, cilindar s klipom u kojemu se nalazi idealni plin (sl. 13.1). Kada sistemu dovedemo toplinu Q , dovedena toplina utroši se na promjenu unutrašnje energije i na rad koji sistem obavi nad okolinom. Ako je proces izovoluman, tj. ako se klip ne može pomicati, dovedena količina topline jednaka je promjeni unutrašnje energije sistema: $Q = \Delta U$. Međutim, ako se klip može pomicati, dovodenjem topline plin se širi, klip se diže i obavlja rad.

Pretpostavimo da se zbog širenja plina klip pomakao za infinitezimalni pomak dx (sl. 13.1). Rad je pri tom

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = p S dx = p dV \quad (13.1)$$

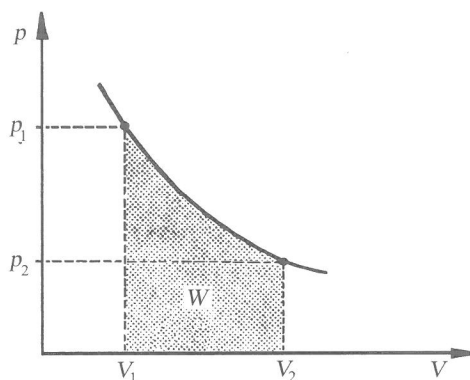
gdje je S površina klipa, a dV infinitezimalna promjena volumena plina. Pretpostavit ćemo da se ukupna promjena volumena sastoji od beskonačnog broja takvih ravnotežnih infinitezimalnih promjena stanja, tj. da je nakon svake promjene volumena za dV plin prešao u novo ravnotežno stanje, pri kojemu su u čitavom volumenu isti tlak i temperatura. Drugim riječima, promatrat ćemo takve konačne procese u kojima nizom infinitezimalnih promjena tlaka volumena i temperature plin iz početnog stanja u konačno stanje dovodimo preko beskonačno mnogo ravnotežnih stanja. Takav proces možemo prikazati krivuljom u p – V dijagramu.



Slika 13.1. Rad pri rastezanju plina

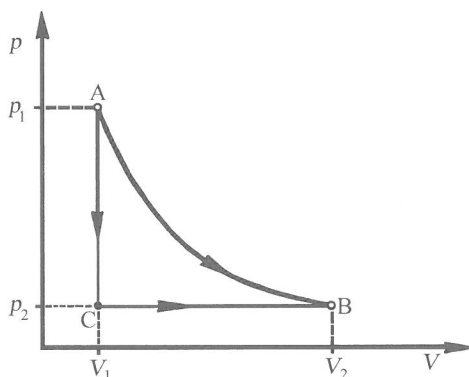
Ukupni rad je tada proporcionalan površini ispod krivulja (sl. 13.2) i jednak je integralu

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (13.2)$$



Slika 13.2. Određivanje rada idealnog plina u p V dijagramu

Očito je da postoji beskonačan broj različitih procesa kojima se sistem može dovesti iz početnog stanja u konačno stanje. Takva dva procesa prikazana su na slici 13.3. Iz slike se vidi da rad ovisi i o načinu kako smo iz početnog stanja došli



Slika 13.3. Rad ovisi o procesu i nije funkcija stanja

u konačno stanje. Ako iz početnog stanja A idemo u konačno stanje B izotermno, rad W_{AB} je veći nego ako najprije plin izovolumno ohladimo do točke C, a zatim ga izobarno zagrijemo na istu temperaturu i tako dođemo do točke B. Rad koji obavlja neki termodinamički sistem nije, dakle, funkcija stanja, već funkcija procesa, jer osim o početnom i konačnom stanju ovisi i o putu kojim smo sistem doveli iz početnog stanja u konačno stanje.

Toplina Q koja ulazi u sistem, odnosno izlazi iz sistema također nije funkcija stanja, već procesa. Promjena unutrašnje energije sistema, naprotiv, ne ovisi o procesu, nego samo o početnom i konačnom stanju sistema (početnoj i konačnoj temperaturi plina). Kada se plin doveden iz nekog početnog stanja u konačno stanje vrati u početno stanje, unutrašnja energija poprimat će početnu vrijednost. Unutrašnja energija U , za razliku od topline Q i rada W , funkcija je stanja.

Beskonačno malena (infinitesimalna) promjena unutrašnje energije dU jest totalni diferencijal funkcije U . Međutim, beskonačno malena količina topline koja se dovodi sistemu nije totalni diferencijal, jer Q nije jednoznačno definiran, te je ne možemo označavati sa dQ , već nekako drukčije, npr. sa dQ . Slično ćemo pisati dW za infinitesimalno mali rad koji obavi sistem. Integral od dU ovisit će samo o početnom i konačnom stanju (granicama integracije), dok pri računanju integrala od dQ i dW treba, osim granica integracije, specificirati i proces kojim sistem prevodimo iz početnog stanja u konačno stanje.

13.3. PRVI ZAKON TERMODINAMIKE

Kada sistemu dovodimo toplinu Q , tada se jedan njezin dio može utrošiti na povećanje unutrašnje energije sistema ΔU , a ostatak se pretvara u rad W koji sistem daje okolini. Pri tom iz zakona održanja energije slijedi:

$$Q = \Delta U + W \quad (13.3)$$

To je prvi zakon termodinamike, izravna posljedica zakona očuvanja energije, koji kaže da u izoliranom sistemu ukupna energija ostaje konstantna bez obzira na procese koji se događaju u sistemu.

Dogovorit ćemo se da je u (13.3) i sličnim izrazima Q pozitivna kada toplina ulazi, a negativna kada izlazi iz sistema; rad je pozitivan kad ga vrši sistem a negativan kad ga okolina vrši nad sistemom.

Za infinitesimalne procese prvi zakon termodinamike glasi:

$$dQ = dU + dW \quad (13.4)$$

Posebno, za idealni plin relacija (13.4) poprima oblik:

$$dQ = m c_v dT + p dV \quad (13.5)$$

Pri izovolumnom procesu $dW = 0$, te se sva dovedena toplina pretvara u unutrašnju energiju ($dQ = dU$). Ako je proces izoterman, nema promjene unutrašnje energije, te se sva dovedena toplina pretvara u mehanički rad ($dQ = dW$). Pri adijabatskom procesu ($dQ = 0$) rad se obavlja na račun promjene unutrašnje energije ($dW = dU$).

Za kružni proces početno i konačno stanje su identični, te je $\Delta U = 0$, $Q = -W$. Toplina koja se dovede sistemu za vrijeme kružnog procesa u toplinskom stroju jednaka je radu što ga izvrši sistem. Toplinski stroj je pretvarač toplinske energije u mehaničku. Međutim, nemoguće je konstruirati stroj koji bi dao više energije u obliku rada nego što je apsorbirao u obliku topline. Nemoguće je napraviti stroj koji bi stvarao energiju ni iz čega. Prvi zakon termodinamike kaže da je perpetuum mobile prve vrste nemoguć. (O perpetuumu mobile druge vrste govorit ćemo kasnije.)

13.4. RAD PRI PROMJENI STANJA PLINA

Pomoću prvog zakona termodinamike izračunat ćemo rad za neke procese u kojima se mijenja stanje idealnog plina.

Pri izovolumnom zagrijavanju, odnosno hlađenju, ne vrši se rad, jer je $dV = 0$ te je i $dW = 0$. Prvi zakon termodinamike za izovolumni (izohorni) proces daje:

$$dQ = dU \quad (13.6)$$

Sva apsorbirana toplina troši se na povećanje unutrašnje energije sistema.

Ako plin zagrijavamo izobarno ($p_1 = \text{konst.}$), tada je izvršeni rad:

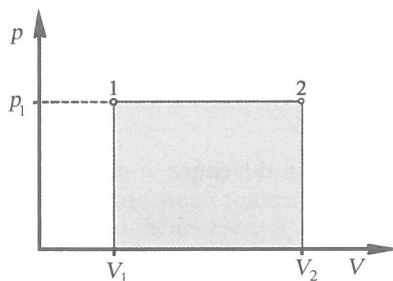
$$W = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1 (V_2 - V_1) \quad (13.7)$$

U p – V dijagramu rad je proporcionalan površini ispod krivulje, u ovom slučaju izobare (pravca paralelnog apscisi), omeđenoj pravcima $V = V_1$ i $V = V_2$ (sl. 13.4).

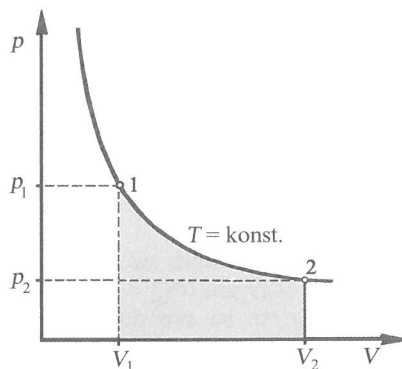
Pri izotermnoj ekspanziji temperatura je konstantna, plin se ponaša po Boyleovu zakonu $pV = \text{konst.}$, pa je rad:

$$W_t = \int_1^2 p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$W_t = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (13.8)$$



Slika 13.4. Rad pri izobarnoj ekspanziji idealnog plina



Slika 13.5. Rad pri izotermnoj promjeni stanja idealnog plina

Rad je jednak površini ispod izoterme $pV = nRT$ u p – V dijagramu (sl. 13.5).

Za adijabatski proces, pri kojem sistem ne razmjenjuje toplinu s okolinom, $dQ = 0$, te je:

$$dU = -dW \quad (13.9)$$

Kada sistem vrši rad (adijabatska ekspanzija), njegova se unutrašnja energija (te i temperatura) smanjuje, i on se hladi; kada se plin adijabatski komprimira, on se grije. Proces će biti adijabatski ako je sistem dobro toplinski izoliran. Budući da prijenos topline teče sporo, brzi su procesi također adijabatski.

Jednadžba adijabate. Adijabatska ekspanzija i kompresija idealnog plina prikazuju se u p – V dijagramu krivuljom koja se zove adijabata. Budući da se adijabatskom ekspanzijom (za razliku od izotermne) temperatura plina snizuje, adijabata je strmija od izoterme, tj. za istu promjenu tlaka promjena volumena je ovdje veća.

Prije nego što izvedemo jednadžbu adijabate, odredimo vezu između specifičnih toplinskih kapaciteta pri stalnom tlaku i stalnom volumenu za idealne plinove.

Molarni toplinski kapaciteti definiraju se relacijama:

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad V = \text{konst.} \quad (13.10)$$

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \quad p = \text{konst.} \quad (13.11)$$

Omjer $\kappa = C_p/C_V$ (odnosno $\kappa = c_p/c_V$) naziva se adijabatski koeficijent.

Iz prvog zakona termodinamike i plinske jednadžbe dobivamo za idealni plin vezu između C_p i C_V :

$$\begin{aligned} dQ &= dU + dW \\ n C_p dT &= n C_V dT + p dV \\ n (C_p - C_V) dT &= n R dT \\ C_p - C_V &= R \end{aligned} \quad (13.12)$$

To je Mayerova relacija za molarne toplinske kapacitete idealnog plina. Ona se može napisati i za specifične toplinske kapacitete:

$$c_p - c_V = R/M$$

Budući da je $\frac{C_p}{C_V} = \kappa$, to je $\kappa C_V - C_V = R$, odnosno

$$C_V = \frac{R}{\kappa - 1}; \quad C_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \quad (13.13)$$

Jednadžbu adijabate možemo izvesti iz prvog zakona termodinamike, koji za adijabatski proces s idealnim plinovima ima oblik $dU = -dW = p dV$.

Uvrstimo li (13.13) u (13.9) dobivamo:

$$n \frac{R}{\kappa - 1} dT = -p dV = -n R T \frac{dV}{V} \quad (13.14)$$

odnosno

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -(\kappa - 1) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

Nakon integriranja dobivamo jednadžbu:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -(\kappa - 1) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

odnosno

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \quad (13.15)$$

ili

$$T V^{\kappa-1} = \text{konst.} \quad (13.15a)$$

Odatle, primjenom plinske jednadžbe $pV = nRT$, izlazi veza između tlaka i volumena pri adijabatskom procesu:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa} \quad (13.16)$$

ili

$$p V^{\kappa} = \text{konst.} \quad (13.16a)$$

Iz jednadžbi (13.15) i (13.16) dobivamo

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (13.17)$$

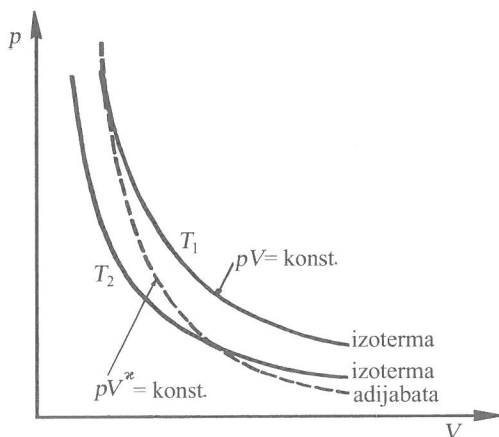
ili

$$T^{\kappa} p^{1-\kappa} = \text{konst.} \quad (13.17a)$$

Relacije (13.15), (13.16) i (13.17) nazivaju se Poissonove jednadžbe.

Adijabatski koeficijent κ ovisi o vrsti plina. Za jednoatomne plinove iznosi 1,67 i ne ovisi o temperaturi, za višeatomne plinove je nešto manji i ovisi o temperaturi; za dvoatomne plinove oko sobne temperature $\kappa = 1,4$.

Na slici 13.6. uspoređena je izoterma $pV = \text{konst.}$ i adijabata $pV^{\kappa} = \text{konst.}$. Budući da je $\kappa > 1$, i iz jednadžbe adijabate zaključujemo da je strmija od izoterme.



Slika 13.6. Izoterma i adijabata

Rad koji idealni plin izvrši pri adijabatskoj ekspanziji jest:

$$W_a = \int_1^2 p \, dV = nR \int_1^2 T \frac{dV}{V} = \frac{nR}{1-\kappa} \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{nR}{\kappa-1} (T_1 - T_2) \quad (13.18)$$

Primjer

Kolika je konačna temperatura i tlak kada množinu 1 mol idealnog plina adijabatski komprimiramo na 1/10 početnog volumena? Početni tlak je 10^5 Pa, a početna temperatura 300 K. Koliki je pri tom obavljeni rad? Adijabatski koeficijent je 1,4.

Iz relacije $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$ dobivamo

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = 750 \text{ K.}$$

Slično dobivamo i konačni tlak:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa.}$$

Obavljeni rad potreban za tu adijabatsku kompresiju jest:

$$W_a = \frac{nR}{\kappa-1} (T_1 - T_2) = 9,35 \text{ kJ.}$$

13.5. ENTALPIJA

U odjeljku 13.2. uočili smo da postoje dvije vrste termodinamičkih veličina: funkcije stanja i funkcije procesa. Već smo vidjeli da je unutrašnja energija funkcija stanja, a ne i načina na koji smo taj sistem doveli iz jednog stanja u drugo stanje, kao što je to npr. slučaj s radom i količinom topline. Sada ćemo definirati još jednu funkciju stanja — entalpiju.

Entalpija* H definira se izrazom:

$$H = U + pV \quad (13.19)$$

i iskazuje se jedinicom džul. Može se pokazati da je entalpija funkcija stanja i da ne ovisi o procesu kojim smo sistem preveli iz početnog stanja u konačno stanje.

Specifična entalpija $\frac{H}{m}$, odnosno molarna entalpija $\frac{H}{n}$ iskazuju se jedinicama J/kg, odnosno J/mol.

Za infinitesimalni proces, (13.18) prelazi u:

$$dH = dU + d(pV) \quad (13.19a)$$

Budući da su unutrašnja energija i entalpija funkcije stanja, odnosno dU i dH egzaktni diferencijali, to iz (13.19) vidimo da je i pV funkcija stanja.

* Riječ entalpija je grčkog porijekla i znači sadržaj topline.

U slučaju izobarnog procesa ($p = \text{konst.}$), $d(pV) = p dV + V dp = p dV$, te je

$$dH = dU + p dV \quad (13.20)$$

što s prvim zakonom termodinamike $dQ = dU + p dV$ daje:

$$dH = dQ \quad (13.21)$$

odnosno

$$\Delta H = Q \quad (13.22)$$

U slučaju izobarnog procesa apsorbirana, odnosno oslobođena toplota iz sistema jednaka je promjeni entalpije sistema. Budući da su mnogi procesi izobarni, ili se barem mogu aproksimirati izobarnima, entalpija ima važnu ulogu i ima veliko praktično značenje u termodinamici.

Iskoristivši (13.21), specifični toplinski kapacitet pri stalnom tlaku možemo definirati pomoću entalpije:

$$dH = dQ = m c_p dT \quad (13.23)$$

$$c_p = \frac{1}{m} \left(\frac{dH}{dT} \right)_p \quad (13.24)$$

Tako je i c_p definirano pomoću funkcije stanja slično kao što je i c_v bilo definirano derivacijom unutrašnje energije:

$$c_v = \frac{1}{m} \left(\frac{dU}{dT} \right)_v \quad (13.25)$$

Zagrijavamo li, npr., vodu, njezina se unutrašnja energija i entalpija povećavaju; jer je zagrijavanje izobarno, dovedena količina topline jednaka je promjeni entalpije. Kada voda prelazi iz tekućeg stanja u paru, promjena entalpije jednaka je latentnoj toplini transformacije faze, tj.

$$\Delta H_i = m L_i \quad (13.26)$$

Odatle se i specifična toplota isparavanja može definirati pomoću entalpije:

$$L_i = \frac{1}{m} \Delta H_i \quad (13.27)$$

Zato ćemo, npr., količinu topline potrebnu da vodu temperature t_1 prevedemo izobarno u paru temperature t_2 napisati ovako:

$$Q = \int_{t_1}^{100^\circ\text{C}} m c_{p1} dt + \Delta H_i + \int_{100}^{t_2} m c_{p2} dt = \Delta H_1 + \Delta H_i + \Delta H_2 \quad (13.28)$$

Obično se u praksi uzima da je entalpija vode jednaka nuli pri $T = 273 \text{ K}$.

Tako voda temperature 0°C ima entalpiju jednaku nuli, voda 100°C ima specifičnu entalpiju 420 kJ/kg i sl.

Primjer

Izračunajte molarnu unutrašnju energiju i entalpiju vode i zasićene vodene pare pri 1 013 mbar i 100 °C. Molarni volumen vode pri 1 013 mbar i 100 °C jest 18,8 cm³/mol, a pare 30 L/mol. Specifična toplota isparavanja vode jest 2 256 kJ/kg. Pretpostavite da je entalpija i unutrašnja energija vode jednaka nuli pri temperaturi 0 °C. Kolika je entalpija zasićene pare pri 750 °C?

Entalpija nekog sistema definira se izrazom:

$$H = U + p V.$$

Zagrijavanjem vode od 0 °C do 100 °C (pri konstantnom tlaku) entalpija se povećava od nule do H_V :

$$H_V = \Delta H = \Delta U + p \Delta V = Q = C_p \Delta T = M c_p \Delta T = 7,54 \text{ kJ/mol.}$$

Unutrašnja je energija vode:

$$U_V = H - p V = (7,54 \cdot 10^3 - 1,013 \cdot 10^5 \cdot 18,8 \cdot 10^{-6}) \text{ J/mol} = 7,538 \text{ kJ/mol} \approx H_V$$

jer je $p V$ zanemarivo malen.

Za zasićenu paru

$$H_{zp} = H_V + M L_i = 48,15 \text{ kJ/mol}, \quad U_{zp} = H_{zp} - p V_{zp} = 45,1 \text{ kJ/mol.}$$

Vrelište vode je 150 °C kad je tlak 4,76 bar. Specifični je toplinski kapacitet vodene pare 1,9 kJ/kg K. Molarna je entalpija vode zagrijane do 150 °C:

$$H_V = M c_p \Delta T = 18 \cdot 10^{-3} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot 150 \text{ kJ/mol} = 11,3 \text{ kJ/mol.}$$

Entalpija pare pri toj temperaturi bit će:

$$H_p = H_V + M L_i = 11,3 \text{ kJ/mol} + 40,6 \text{ kJ/mol} = 52 \text{ kJ/mol,}$$

uz pretpostavku da L ne ovisi o temperaturi. Međutim, L_i se smanjuje s porastom temperature, te je stvarni rezultat nešto manji.

13.6. DRUGI ZAKON TERMODINAMIKE

Govoreći o prvom zakonu termodinamike u odjeljku 13.3. ustanovili smo da je to, u stvari, zakon očuvanja energije primijenjen na termodinamiku. On govori o tome da se pri pretvaranju rada u toplinu i topline u rad energija ne može ni stvoriti ni uništiti, već se samo pretvara iz jednog oblika u drugi oblik. Prema tom zakonu, nemoguće je napraviti perpetuum mobile prve vrste, koji bi proizvodio više rada nego što bi utrošio energije.

Drugi zakon termodinamike govori o uvjetima u kojima se iz topline može dobiti mehanički rad. Razni oblici energije lako prelaze u toplinsku energiju bez nekih posebnih ograničenja, mehanički se rad može potpuno pretvoriti u toplinu, ali je prijelaz topline u mehanički rad moguć samo ako su ispunjeni određeni uvjeti. Također, toplota spontano prelazi s toplijeg tijela na hladnije tijelo, ali ne i obratno. Nemoguće je ostvariti stroj koji bi u periodičnom kružnom procesu prenosio toplinu iz hladnijeg spremnika (npr. okolne atmosfere) u topliji spremnik (npr. unutrašnjost zgrade) bez uloženog vanjskog rada ili topline. Za rad strojeva za hlađenje i toplinskih pumpi potrebna je energija u obliku mehaničkog rada ili topline iz nekog izvora visoke temperature.

Iskustvena je činjenica da je nemoguće napraviti toplinski stroj koji bi neprekidno, nizom kružnih procesa, obavljao rad crpeći toplinsku energiju iz jednog spremnika topline i potpuno je pretvarajući u rad. Takav bi stroj imao efikasnost

jednaku jedinici i ne bi bio u suprotnosti s prvim zakonom termodinamike, međutim, to se protivi onome što znamo iz iskustva. Svima nam je jasno da je nemoguće napraviti stroj koji bi, npr., uzimao toplinu iz mora (pri čemu bi ga neznatno hladio) i proizvodio rad (pokretao brod). To bi bio perpetuum mobile druge vrste, koji je prema drugom zakonu termodinamike nemoguć. Svaki toplinski stroj koji toplinu pretvara u rad radi tako da samo dio dovedene topline pretvara u rad, a ostatak predaje okolini. Za rad toplinskog stroja potrebna su dva spremnika različite temperature, jedan više temperature, iz kojega toplina prelazi u radni fluid, i drugi niže temperature, u koji se predaje ostatak topline koji nije pretvoren u mehanički rad.

Za formulaciju i fizikalnu interpretaciju drugoga zakona termodinamike zaslužno je nekoliko fizičara u prošlom stoljeću: lord Kelvin (1824–1907), R. Clausius (1822–1888), S. Carnot (1796–1832), W. Ostwald (1853–1932) i dr.

Evo nekoliko formulacija tog zakona:

Nemoguće je napraviti toplinski stroj koji bi, ponavljajući kružni proces, svu toplinu uzetu iz jednog spremnika pretvorio u rad. Ako se želi dobiti rad iz topline, uvijek dio te topline mora prijeći u hladniji spremnik (okolinu).

Nemoguć je proces pri kojemu bi toplina spontano prelazila iz spremnika niže temperature u spremnik više temperature.

Nemoguć je perpetuum mobile druge vrste.

Drugi zakon termodinamike može se definirati i pomoću entropije, o čemu ćemo govoriti u odjeljku 13.8.

13.7. CARNOTOV KRUŽNI PROCES

Da bi se u nekom toplinskom stroju iz topline dobio rad, radni fluid (npr. idealni plin), pošto izvrši rad, treba da se vrati u početno stanje, obavivši kružni proces, i taj se proces mora stalno ponavljati. Promatrat ćemo pri tom reverzibilne kružne procese koji se odvijaju gotovo ravnotežno, bez gubitaka (npr. trenja). Pri tom treba imati na umu da će takvi idealni procesi dati maksimalan koeficijent iskorištenja, dok se realni procesi njima mogu samo više ili manje približiti, ali ih, naravno, nikada ne mogu premašiti.

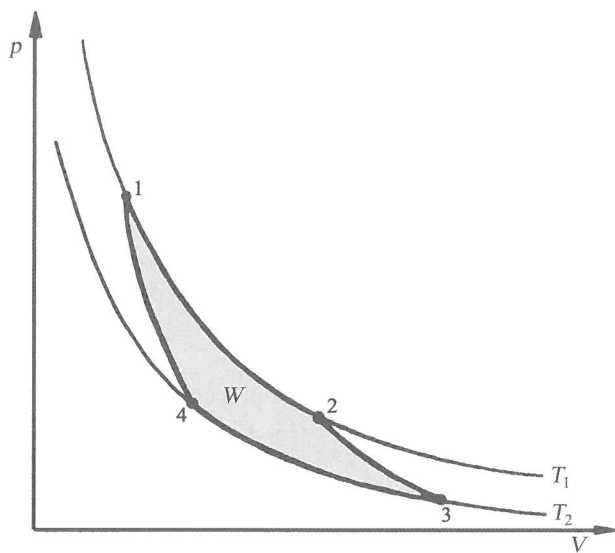
Najpoznatiji kružni proces jest Carnotov* kružni proces u kojemu se sistem s idealnim plinom nakon dva izotermna i dva adijabatska procesa vraća u početno stanje, te tako dovedenu toplinu djelomično pretvara u mehanički rad. Osim Carnotovog, poznati su i drugi kružni procesi (ciklusi): Diesellov, Ottov, Stirlingov itd. . . . , međutim o njima ovdje nećemo detaljnije govoriti.

Kao što ćemo vidjeti kasnije, za rad toplinskog stroja potrebna su dva spremnika topline, jedan više temperature T_1 (grijač), iz kojega se uzima toplina Q_1 , i jedan niže temperature T_2 (hladnjak), kojemu se predaje količina topline Q_2 . Pri tom je dobiveni rad jednak upravo razlici između dovedene i predane količine topline. Hladniji spremnik je obično okolina (npr. atmosfera), te pri radu toplinskih strojeva u nj prelazi toplina Q_2 .

* Sadi Carnot (1796–1832), francuski fizičar, zaslužan za razvoj termodinamike.

Na slici 13.7. prikazan je Carnotov kružni proces u $p-V$ dijagramu. U početku je plin u stanju p_1 , V_1 i T_1 (točka 1 na sl. 13.7). Dovodenjem količine topline Q_1 iz grijača stalne temperature T_1 plin se za vrijeme prvog procesa izotermno širi do stanja 2, određenoga koordinatama p_2 , V_2 i T_1 . Plin pri toj izotermnoj ekspanziji obavi rad

$$W_{12} = n R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (13.29)$$



Slika 13.7. Carnotov kružni proces

koji je proporcionalan površini ispod krivulje 1–2 na slici 13.7. i jednak apsorbiranoj količini topline:

$$Q_1 = n R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (13.30)$$

Prema dogovoru, obje veličine W_{12} i Q_1 pozitivne su jer sistem obavlja rad, a toplina ulazi u sistem.

Za vrijeme sljedećeg procesa, od 2 do 3, sistem je dobro izoliran od okoline, tako da nema razmjene topline s okolinom ($Q = 0$). Plin se pri tom adijabatski širi od volumena V_2 do volumena V_3 i hladi od temperature T_1 na temperaturu T_2 . Pri tom se obavi rad na račun unutrašnje energije plina:

$$W_{23} = \frac{n R}{\kappa - 1} (T_1 - T_2) \quad (13.31)$$

Zatim se plin pri stalnoj temperaturi T_2 izotermno stisne na volumen V_4 . Za taj izotermni proces potreban je vanjski rad:

$$W_{34} = n R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} \quad (13.32)$$

koji sistem prima od okoline. Pri tom se količine toplina

$$Q_2 = n R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} \quad (13.33)$$

odvodi iz sistema u hladnjak. Rad W_{34} i toplina Q_2 sada su negativne veličine.

U točki 4 sistem se ponovno termički izolira i počinje adijabatska kompresija ($Q = 0$), koja sistem vraća u početno stanje. Za taj proces potreban je rad:

$$W_{41} = \frac{n R}{\kappa - 1} (T_2 - T_1) \quad (13.34)$$

koji okolina obavlja nad sistemom.

Ukupni je rad pri tom kružnom procesu:

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \quad (13.35)$$

i proporcionalan je površini unutar lika 1 2 3 4.

Budući da je rad dobiven adijabatskom ekspanzijom jednak radu utrošenom pri adijabatskoj kompresiji, dobiveni rad jednak je razlici rada pri izotermnoj ekspanziji i kompresiji:

$$W = W_{12} + W_{34} \quad (13.36)$$

Sistem je za vrijeme kružnog procesa primio količinu topline $Q_1 + Q_2 = = |Q_1| - |Q_2|$. Budući da je proces kružni, i sistem se vratio u početno stanje, promjena unutrašnje energije je nula, te je, prema prvom zakonu termodinamike,

$$W = Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2| \quad (13.37)$$

Jedan dio dovedene topline pretvorio se u rad, a drugi dio predan je hladnijem spremniku. Ponavljanjem takvoga kružnog procesa može se iz topline dobiti rad, i to je upravo način kako rade toplinski strojevi.

Koeficijent korisnog djelovanja η jest omjer izvršenog rada i utrošene topline:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \quad (13.38)$$

Samo dio topline uzete iz toplijeg spremnika pretvara se u rad, a ostatak se predaje hladnijem spremniku. Pri tom toplina Q_2 nikad ne može biti jednaka nuli, te je koeficijent iskorištenja uvijek manji od 100%. Carnotov proces daje gornju granicu iskorištenja toplinskog stroja: za realne strojeve η je još manji.

Uvrštavanjem izraza za Q_2 i Q_1 u (13.38) i uzevši u obzir da je

$$\begin{aligned} T_1 V_2^{\kappa-1} &= T_2 V_3^{\kappa-1} \\ T_1 V_1^{\kappa-1} &= T_2 V_4^{\kappa-1} \end{aligned} \quad (13.39)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{T_1 V_2^{\kappa-1}}{T_1 V_1^{\kappa-1}} &= \frac{T_2 V_3^{\kappa-1}}{T_2 V_4^{\kappa-1}} \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{V_3}{V_4} \end{aligned} \quad (13.40)$$

dobivamo za koeficijent iskorištenja Carnotova stroja s idealnim plinom:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (13.41)$$

Vidimo da efikasnost toplinskog stroja ovisi o temperaturi spremnika, a ne o vrsti plina. Temperatura mora biti što veća kad plin obavlja rad, a što manja za vrijeme kompresije, odnosno grijač mora biti na što višoj temperaturi, a hladnjak na što nižoj. Nemoguće je da oba spremnika budu na istoj temperaturi ($T_1 = T_2 \Rightarrow \eta = 0$). Također je nemoguće dobiti $\eta = 100\%$, jer bi tada trebalo biti $T_2 = 0 \text{ K}$, tj. hladnjak na apsolutnoj nuli, što je čak i teoretski neostvarivo.

Motori s unutrašnjim izgaranjem rade tako da se toplina dovodi radnom fluidu u samom ekspanzionom prostoru. Benzinski motor koristi Ottov ciklus od dvije adijabate i dvije izohore. Kod Dieselog procesa, koji se sastoji od adijabatske kompresije, izobarnog zagrijavanja, adijabatske ekspanzije i izovolumnog hlađenja, izgaranje goriva je u vrućem zraku pri stalnom tlaku.

Pokažite da je koeficijent korisnog djelovanja benzinskog motora (Ottova ciklusa)

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}$$

gdje je ε omjer kompresije a κ adijabatski koeficijent radnog fluida. Koeficijent korisnog djelovanja Dieselog procesa je

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1} - 1} \frac{\delta^{\kappa} - 1}{\kappa(\delta - 1)}$$

gdje je κ adijabatski koeficijent, ε omjer adijabatske kompresije i δ omjer izobarne ekspanzije.

13.8. ENTROPIJA

Govoreći o termodinamičkim funkcijama stanja uočili smo da količina topline koja se izmijeni pri prijelazu iz jednog stanja u drugo stanje, nije funkcija stanja, već ovisi o procesu kojim je sistem došao iz početnog stanja u konačno stanje, odnosno da dQ nije totalni diferencijal. Sada ćemo pokazati da pri reverzibilnom procesu tzv. reducirana toplina $\frac{Q}{T}$ ne ovisi o procesu, već samo o početnom i konačnom stanju, tj. da je $\frac{dQ}{T}$ totalni diferencijal funkcije koju ćemo nazvati entropijom.

Entropiju S definiramo kao funkciju stanja, čiji je totalni diferencijal:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (13.42)$$

a promjenu entropije pri prijelazu između dva stanja:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (13.43)$$

Pri tom prijelaz iz jednog stanja u drugo stanje mora biti reverzibilan. Za svaki reverzibilni proces između dva ista stanja promjena entropije je, naravno, ista, jer entropija ne ovisi o procesu, već samo o stanju. Referentnu vrijednost entropije potrebno je utvrditi dogovorom. U praksi se uzima da je entropija nula za vodu od 0°C pri normiranom tlaku. Međutim, pokazuje se da entropija sistema iščezava tek na apsolutnoj nuli ($-273,15^\circ\text{C}$), o čemu detaljnije govori treći zakon termodinamike.

Budući da ćemo računati samo razlike entropije, a ne njezinu apsolutnu vrijednost, dogovor o $S = 0$ ima samo teoretsko značenje.

Budući da je entropija funkcija stanja, promjena entropije pri svakom reverzibilnom kružnom procesu mora biti jednaka nuli. Tako smo za Carnotov kružni proces pokazali da vrijedi:

$$1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (13.44)$$

odnosno

$$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1} \quad (13.45)$$

ili

$$\frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2} \quad (13.46)$$

Budući da je Q_1 pozitivno, a Q_2 negativno, to je

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (13.47)$$

Kada sistem obavi Carnotov kružni sistem, ukupna je promjena entropije:

$$\Delta S = \oint \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ_1}{T_1} + \int_3^4 \frac{dQ_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (13.48)$$

Budući da se svaki reverzibilni kružni proces može predočiti zbrojem niza Carnotovih procesa, to je za svaki reverzibilni kružni proces

$$\oint_{\text{rev}} \frac{dQ}{T} = 0 \quad (13.49)$$

Međutim, pri ireverzibilnim procesima dS nije jednaka $\frac{dQ}{T}$. Za ireverzibilni kružni proces koeficijent iskorištenja je manji nego za odgovarajući Carnotov, te je

$$\eta_{ir} < \eta_{rev}$$

$$1 - \frac{|Q_{2ir}|}{|Q_{1ir}|} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (13.50)$$

jer je $Q_{2ir} > Q_{2rev}$. Relaciju (13.50) možemo pisati i ovako:

$$\frac{Q_{2ir}}{Q_{1ir}} < -\frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_{1ir}}{T_1} + \frac{Q_{2ir}}{T_2} < 0 \quad (13.51)$$

Taj rezultat možemo napisati i općenitije, te reći da pri ireverzibilnom kružnom procesu vrijedi tzv. Clausiusova nejednakost:

$$\oint \frac{dQ_{ir}}{T} < 0 \quad (13.52)$$

Zamislamo, nadalje, da se taj ireverzibilni kružni proces sastoji od ireverzibilnog procesa od početnog stanja A do nekog međustanja B i reverzibilnog procesa koji sistem od B vraća ponovo u stanje A. Za drugi dio procesa BA promjena je entropije

$$S_A - S_B = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T} \quad (13.53)$$

jer je od B do A proces reverzibilan. Od A do B proces nije reverzibilan. Međutim, ako uzmemo da je sistem zatvoren, te da nema razmjene topline, tada je $\int_A^B \frac{dQ}{T} = 0$.

Odatle je

$$\oint_{ir} \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ_{ir}}{T} + \int_B^A \frac{dQ_{rev}}{T} < 0 \quad (13.54)$$

ili

$$\begin{aligned} S_A - S_B &< 0 \\ S_B &> S_A \\ \Delta S_{sistem} &> 0 \end{aligned} \quad (13.55)$$

U zatvorenom sistemu (tj. takvom iz kojega toplina ne može izići niti u nj ući) ireverzibilni procesi povećavaju entropiju. Ako je proces reverzibilan, tada entropija ostaje ista. Može se, dakle, zaključiti da se entropija zatvorenog (adijabatskog) sistema ne može smanjivati. Budući da su u prirodi svi procesi više ili manje ireverzibilni, entropija se stalno povećava. Ako sistem nije izoliran, tada se entropija može povećavati ili smanjivati ovisno o tome kakav je proces.

Ako sistem nije zatvoren potrebno je razmatrati ukupnu promjenu entropije sistema i okoline

$$\Delta S_{uk} = \Delta S_{sistem} + \Delta S_{okolina}$$

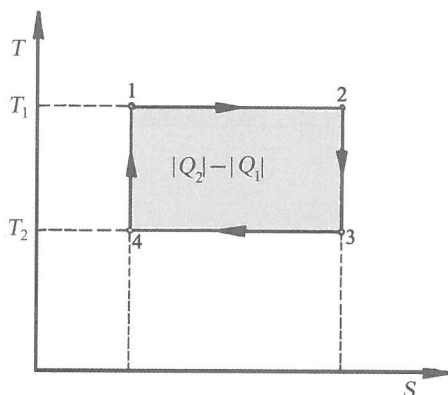
U tom slučaju vrijedi

$$\Delta S_{uk} \geq 0$$

U prirodi se procesi događaju u smjeru rastuće entropije.

Procesi pri kojima se ukupna entropija smanjuje nisu mogući. Tako će pri dodiru toplijeg i hladnijeg tijela toplina prelaziti iz toplijeg tijela u hladnije tijelo sve dok se temperatura ne izjednači. Promjena entropije pri tom je pozitivna i proces teče spontano. Obratno, prijelaz topline s hladnijeg tijela na toplije tijelo ne događa se spontano u prirodi jer bi se za takav prijelaz entropija smanjivala.

Često se za opisivanje promjene stanja neke radne tvari pri termodinamičkom procesu uz $p-V$ dijagram upotrebljava i $T-S$ dijagram. Na slici 13.8. prikazan je takav dijagram za Carnotov kružni proces.



Slika 13.8. $T-S$ dijagram za Carnotov kružni proces

paralelni apscisi, a adijabate dijelovi pravca paralelni ordinati, te je Carnotov proces u $T-S$ dijagramu predstavljen pravokutnikom.

Budući da je količina topline izmijenjena pri reverzibilnom procesu od jednog do drugog stanja

$$Q = \int_1^2 T dS \quad (13.56)$$

površina ispod krivulje u $T-S$ dijagramu proporcionalna je količini dovedene, odnosno odvedene topline. Tako je na slici 13.8. površina ispod krivulje 1-2 proporcionalna dovedenoj toplini Q_1 , površina ispod krivulje 3-4 odvedenoj toplini Q_2 , a površina pravokutnika toplini $|Q_2| - |Q_1|$, odnosno dobivenom radu.

Promjena entropije idealnog plina. Pri promjeni stanja idealnog plina iz prvog zakona termodinamike

$$dQ = dU + p dV \quad (13.57)$$

i definicijske formule za entropiju

$$dQ = T dS \quad (13.58)$$

dobivamo

$$T dS = dU + p dV \quad (13.59)$$

odnosno

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dU}{T} + \int_1^2 \frac{p dV}{T} = n \int_1^2 \frac{C_v dT}{T} + n \int_1^2 R \frac{dV}{V} \quad (13.60)$$

Za manje temperaturne intervale možemo pretpostaviti da je $C_v = \text{konst.}$, te je

$$\Delta S = n C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Tako za izotermnu ekspanziju idealnog plina iz (13.60) slijedi:

$$S_2 - S_1 = n R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (13.61)$$

Promjena entropije sistema je pozitivna. Ako se, međutim, uzme i okolina i sistem, tada se pri tom procesu entropija okoline smanjuje (uzima se iz okoline toplina $Q = n R \ln V_2/V_1$), te je ukupna promjena entropije jednaka nuli.

Uzmemo li u obzir relacije $dQ = dU + p dV$, $dH = dU + d(pV)$ i $dQ = TdS$, dobivamo

$$TdS = dH - Vdp = n C_p dT - n RT \frac{dp}{p}$$

odnosno uz $C_p = \text{konst.}$

$$\Delta S = n C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - n R \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Primjer

Kolika je promjena entropije pri miješanju 1 L hladne vode (20 °C) i 1 L tople vode (60 °C)?

Kada se uspostavi termička ravnoteža, temperatura smjese je 40 °C. Topla voda se ohladila od T_2 do T , a pri tom joj se entropija smanjila za

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^T \frac{m_2 c_p dT}{T} = m_2 c_p \ln \frac{T}{T_2} = -0,259 \text{ kJ/K}.$$

Hladna voda se zagrijala od T_1 do T , pri čemu se entropija povećala za

$$\Delta S_2 = m_1 c_p \ln \frac{T}{T_1} = 0,276 \text{ kJ/K}.$$

Ukupna promjena entropije je pozitivna i iznosi 16,7 J/K.

Statističko objašnjenje entropije. Osim makroskopski jednadžbom (13.42), entropiju možemo definirati i mikroskopski, tako da je povežemo s termodinamičkom vjerojatnošću.

Termodinamička vjerojatnost P nekog makroskopskog stanja sistema od mnogo čestica (npr. idealnog plina) definira se kao broj različitih mikrostanja s kojima se može ostvariti makrostanje. Svako mikrostanje određeno je koordinatama položaja i brzinom svih molekula, i u određenom makrostanju broj različitih mikrostanja vrlo je velik. Zamislimo da su u posudi dva različita plina (npr. kisik i dušik), odvojena pregradom. Uklonimo li pregradu, nastat će difuzija i plinovi će se pomiješati. Prije miješanja broj mogućih mikrostanja (termodinamička vjerojatnost) manji je nego nakon miješanja. Difuzijom plinova povećao se nered (kaotičnost) u sistemu, jer se više ne zna gdje su locirane molekule prvog a gdje drugog plina. Takav proces događa se spontano. Obratan proces, da se sve molekule kisika, gibajući se kaotično u posudi, nađu na jednoj strani, a molekule dušika na drugoj vrlo je malo (zanemarivo) vjerojatan. U posudi se spontano događaju samo procesi u kojima sistem iz manje vjerojatnih prelazi u vjerojatnija stanja, procesi pri kojima se povećava stanje nereda (kaotičnosti) sistema a samim tim i termodinamička vjerojatnost stanja. Već je Boltzmann utvrdio da priroda spontano teži prijelazu iz stanja manje u stanje veće kaotičnosti, jer se pri tom povećava termodinamička vjerojatnost.

Vežu između entropije S i termodinamičke vjerojatnosti P pronašao je Boltzmann i izrazio je jednadžbom:

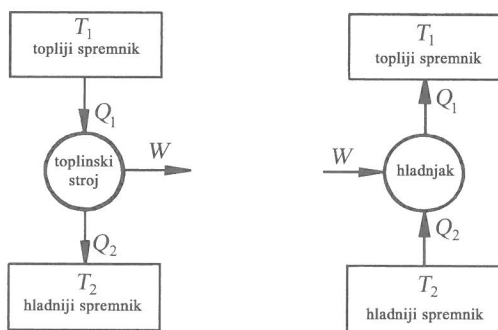
$$S = k \ln P \quad (13.62)$$

gdje je k Boltzmannova konstanta. Entropija sistema čestica proporcionalna je logaritmu vjerojatnosti njihova makroskopskog stanja. Pri prijelazu iz manje vjerojatnog stanja u više vjerojatno stanje, povećava se entropija jer se povećava i vjerojatnost. Kad je sistem u ravnoteži, vjerojatnost P je maksimalna, te je i entropija S maksimalna. Ravnotežno stanje sistema jest stanje najveće kaotičnosti među njegovim česticama. Pri miješanju toplijeg i hladnijeg plina izjednačuje se temperatura, povećava se kaotičnost i raste entropija. Slično je i pri prijelazu topline s toplijeg tijela na hladnije tijelo, difuziji i drugim spontanim procesima u prirodi. Entropija je mjera ireverzibilnosti procesa a ujedno i kaotičnosti čestica u promatranom sistemu. Ona pokazuje smjer odvijanja procesa. Entropija izoliranog sistema ne može se smanjivati. Ta statistička interpretacija entropije još nam bolje rasvjetljava drugi zakon termodinamike, koji smo makroskopski opisali u odjeljku 13.6. i koji sada možemo izraziti i ovako:

Izolirani sistem spontano će prelaziti iz središnjih stanja u nesredišnja (kaotičnija) stanja težeći pri tom da dođe u stanje maksimalnog nereda (kaotičnosti), tj. maksimalne entropije.

13.9. RASHLADNI STROJ I TOPLINSKA PUMPA

Rashladni strojevi rade na obrnutom principu od toplinskih strojeva: oni toplinu iz spremnika niže temperature prenose u spremnik više temperature. Takav se proces ne može spontano događati nego se mora uložiti određeni mehanički rad (u kompresijskim hladnjacima) ili dovesti određena količina topline iz nekog toplinskog izvora (apsorpcijski hladnjaci). Na slici 13.9. shematski je prikazana razlika između toplinskog i rashladnog stroja (toplinske pumpe).

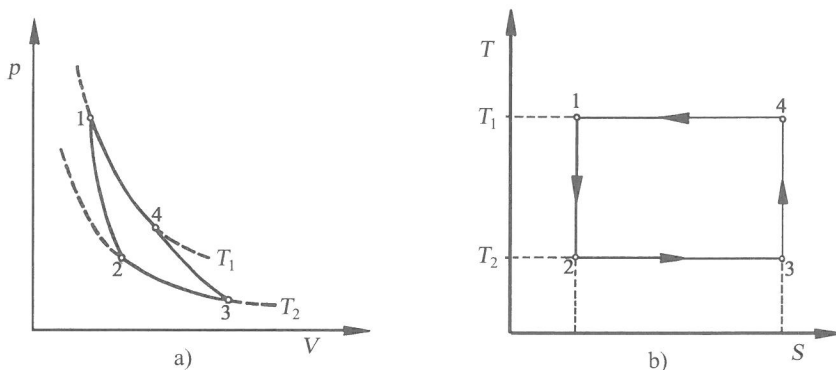


Slika 13.9. Toplinski stroj i rashladni stroj

Toplinska pumpa zapravo se ne razlikuje od hladnjaka, samo je njegova primjena drukčija: ona zimi crpi toplinu iz okoline (npr. zraka, podzemne vode ili vode u bunaru, jezeru i sl.) i ta se toplina iskorištava za zagrijavanje prostora.

Prevođenje topline iz spremnika niže temperature u spremnik više temperature moguće je samo uz ulaganje mehaničkog rada ili uz dovođenje topline iz trećeg spremnika još više temperature. Pri tom se može iskoristiti inverzni Carnotov proces (sl. 13.10) tako da se količina topline Q_2 uzima iz hladnijeg rezervoara i predaje radnom fluidu, da bi se uz uloženi mehanički rad W toplijem rezervoaru

predala količina topline $Q_1 = Q_2 + W$. Tako se postiže hlađenje (npr. unutrašnjosti hladnjaka, prostorije i sl.) ili grijanje neke prostorije upotrebom toplinske pumpe. Umjesto da se uloži mehanički rad (npr. upotrebom električne energije), toplina se može dovoditi iz nekog toplinskog izvora temperature više od T_1 (npr. plinskog plamenika u apsorpcijskim plinskim hladnjacima).



Slika 13.10. Inverzni Carnotov proces: a) u $p-V$ dijagramu i b) u $T-S$ dijagramu

Koeficijent hlađenja rashladnog stroja definira se kao omjer topline Q_2 , uzete iz prostora koji se hladi, i uloženog rada W , odnosno topline Q_3 , uzete iz spremnika više temperature.

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} \quad (13.63)$$

ili

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_3} \quad (13.64)$$

Ako stroj radi na principu inverznoga Carnotova procesa, jednadžba prelazi u:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (13.65)$$

Slično se koeficijent djelovanja toplinske pumpe definira omjerom

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W} \quad (13.66)$$

jer je za rad toplinske pumpe bitna količina toplina Q_1 koja se dovodi u prostor što se grije (za razliku od hladnjaka gdje se uzima odvedena količina toplina Q_2) i uložena energija W . Idealna toplinska pumpa koja bi radila na principu inverznoga Carnotova procesa imala bi Carnotovu efikasnost:

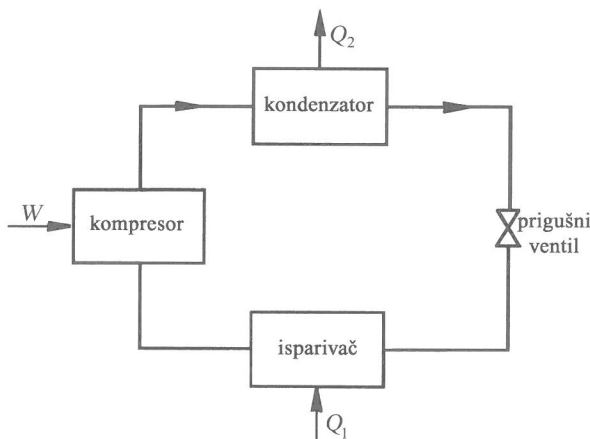
$$\varepsilon = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (13.67)$$

Koeficijent ε je to veći što je veća temperatura T_2 (odnosno T_1), a manja razlika temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$. On uvijek mora biti veći od jedinice (što je veći, to je uređaj efikasniji), a obično iznosi 2 do 4.

Uočite da se pomoću toplinske pumpe dobiva toplinska energija nekoliko puta veća od utrošene (npr. električne) energije, što takav uređaj čini pogodnim za grijanje prostorija. Glavni problem koji sprečava njihovu široku primjenu jest visoka cijena takvih sistema. Porast cijene goriva čini, međutim, upotrebu toplinskih pumpi sve perspektivnijom.

Razlikuju se uglavnom dva tipa rashladnih uređaja: apsorpcijski, koji se koristi toplinskom energijom, i kompresijski, koji se koristi mehaničkom i električnom energijom.

Shema kompresijskog hladnjaka prikazana je na slici 13.11. Kao radni fluid služe lako isparive tekućine: amonijak (NH_3), ugljik-dioksid (CO_2) i dr., a najčešće freon-12 (CCl_2F_2).



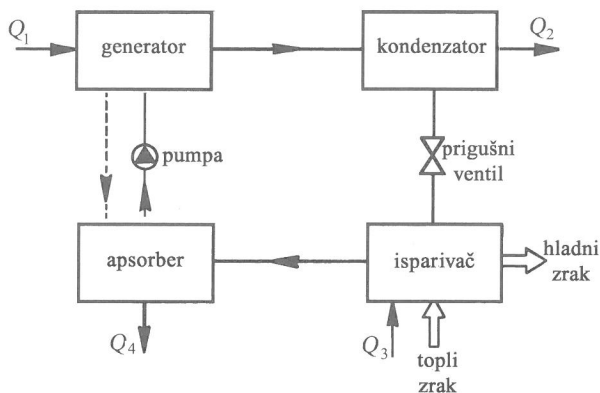
Slika 13.11. Shema kompresijskoga rashladnog stroja

Pomoću kompresora, ulaganjem mehaničkog rada W , adiјabatski se tlači zasićena para rashladnog sredstva (npr. freona) u kondenzator. Ondje se para pretvara u tekućinu, predajući toplinu Q_2 okolini, npr. vodi koja cirkulira oko kondenzatora. Iz kondenzatora tekućina dolazi u redukcion (prigušni) ventil, gdje joj se adiјabatskom ekspanzijom snižavaju tlak i temperatura. Tako nastala ohlađena mješavina tekućine i pare („vlažna para“) odlazi u isparivač, gdje se isparava pri stalnom tlaku i temperaturi, oduzimajući toplinu Q_1 prostoru oko isparivača. (Strujanjem zraka oko isparivača može se, npr., dobiti hladan zrak za klimatizaciju prostorija.) Iz isparivača pare odlaze u kompresor, gdje im se adiјabatskom kompresijom povećavaju tlak i temperatura, i s tako dobivenom suhom zasićenom parom ciklus se ponavlja.

Shema apsorpcijskog hladnjaka prikazana je na slici 13.12. Glavni su dijelovi sistema apsorber, generator, kondenzator i isparivač. Razlikuje se više vrsta takvih hladnjaka, ovisno o radnom fluidu, odnosno tvari u kojoj se fluid apsorbira.

U $\text{NH}_3/\text{H}_2\text{O}$ sistemu otopina amonijaka u vodi crpi se iz apsorbera u generator, gdje se grije primajući toplinu Q_1 . S porastom temperature i tlaka smanjuje se topivost amonijaka u vodi te se amonijak počinje isparavati. Tako dobivene pare prelaze u kondenzator, a razrijeđena otopina vraća se u apsorber.

U kondenzatoru (koji se hladi cirkulacijom vode ili zraka) pare se kondenziraju u tekući amonijak, predajući toplinu Q_2 fluidu koji kruži oko kondenzatora. Zatim tekući amonijak prolazi kroz redukcionni (prigušni) ventil, gdje mu se adijabatskom



Slika 13.12. Shema apsorpcijskog hladnjaka

ekspanzijom snize tlak i temperatura. Pri tom se nastala mješavina tekućeg i parovitog amonijaka vodi u isparivač. Ondje se amonijak potpuno isparava, oduzimajući toplinu Q_3 , tj. hladeći okolni prostor, odnosno fluid koji struji oko isparivača (npr. vodu, koja se zatim upotrebljava za klimatizaciju). Pare NH_3 iz isparivača odlaze u apsorber i otapaju se u vodi, uz oslobađanje topline Q_4 . Iz apsorbera se vodena otopina amonijaka crpi u generator, i proces se ponavlja.

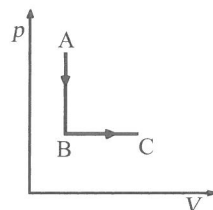
U novije vrijeme sve se više iskorištavaju apsorpcijski sistem $\text{H}_2\text{O}/\text{LiBr}$, gdje litij-bromid služi kao apsorber, a voda, odnosno vodena para kao radni fluid. Zagrijavanjem litij-bromida, u kojemu je apsorbirana voda, u generatoru se oslobađa vodena para, koja odlazi u kondenzator, gdje se kondenzira u vodu, predajući toplinu vodi koja hladi kondenzator. Voda nastala kondenzacijom pare preko redukcionnog ventila prelazi u isparivač, gdje se voda isparava i oduzima toplinu okolnom sredstvu (npr. fluidu koji struji kroz izmjenjivač topline u isparivaču), čime se postiže hlađenje. Nastala vodena para prelazi zatim u apsorber i apsorbera se u LiBr , a otopina $\text{LiBr} + \text{H}_2\text{O}$ odlazi u generator, i ciklus se ponavlja.

PITANJA I ZADACI

1. Kako se iz topline može dobiti mehanički rad?
2. Kako se računa rad idealnog plina?
3. Što je funkcija stanja? Koje su funkcije stanja u termodinamici? Jesu li rad i toplina funkcije stanja? Navedite nekoliko funkcija procesa u termodinamici.
4. Što kaže prvi zakon termodinamike?
5. Izračunajte rad pri: **a)** izobarnoj, **b)** izotermnoj i **c)** adijabatskoj promjeni stanja idealnog plina.
6. Što je adijabatski proces? Kako glasi jednačba adijabate? Usporedite adijabatu i izotermu u p — V dijagramu.
7. Plin pri temperaturi 300 K i tlaku 10^5 Pa komprimiramo: **a)** izotermno i **b)** adijabatski na $1/5$ početnog volumena. Koliki je konačni tlak i temperatura? Adijabatski koeficijent je 1,4.

8. Kako se definira entalpija?
9. Definirajte specifični toplinski kapacitet i latentnu toplinu pomoću entalpije.
10. Što su reverzibilni kružni procesi? Navedite nekoliko primjera.
11. Koji je princip rada toplinskog stroja?
12. Objasnite Carnotov kružni proces. Nacrtajte ga u p — V dijagramu i izračunajte rad za svaki od četiri dijela tog procesa.
13. Izračunajte korisnost Carnotova procesa.
14. Koje još kružne procese osim Carnotova poznajete?
15. Objasnite rad toplinske pumpe.
16. Objasnite drugi zakon termodinamike.
17. Što je entropija? Kako se drugi zakon termodinamike može definirati pomoću entropije?
18. Nacrtajte Carnotov kružni proces u T — S dijagramu.
19. Kolika je količina topline potrebna da bi se 10 kg vode zagrijalo od 20 °C do 80 °C? Koliko se pri tom promijeni unutrašnja energija?
20. Kolika je količina topline potrebna da bi se 1 molu razrijeđenog helija povećala temperatura za 50 K a) izovolumnim i b) izobarnim procesom?
21. 0,01 m³ uzduha pri tlaku 10⁶ Pa i temperaturi 25 °C širi se u cilindru s pomičnim klipom do tlaka 10⁵ Pa. Nadite konačni volumen i rad plina, ako je širenje plina bilo izotermno.
22. Kolika je količina topline potrebna da bi se izotermnom ekspanzijom na 27 °C jednom molu idealnog plina povećao volumen tri puta? Koliki je pri tom dobiveni rad?
23. Jedan mol jednoatomnog idealnog plina početne temperature 300 K polagano ekspandira na dvostruko veći volumen. Koliki je izvršeni rad i konačna temperatura ako je ekspanzija a) izobarna i b) izotermna? Kolika je promjena unutrašnje energije u oba slučaja?
24. Jednoatomni idealni plin na temperaturi 300 K pri tlaku $1,25 \cdot 10^6$ Pa ima volumen 4 L. Ako se plinu izobarno dovede količina topline od $2 \cdot 10^4$ J, izračunajte konačnu temperaturu i volumen plina. Koliko se pri tom povećala unutrašnja energija plina? Koliki je rad obavio plin?

25. Jedan mol idealnog jednoatomnog plina, čije je početno stanje određeno sa $T_A = 300$ K i $V_A = 5$ L, prelazi u konačno stanje $T_C = 400$ K i $V_C = 10$ L procesima prikazanim na sl. 13.13. Izračunajte a) obavljeni rad, b) promjenu unutrašnje energije plina i c) izmijenjenu količinu topline.



Slika 13.13. p — V dijagram uz 25. zadatak

26. Jedan mol dvoatomnog plina nalazi se na temperaturi 0 °C. Adijabatskom ekspanzijom volumen plina se udvostruči i zatim se izotermnom kompresijom dovede na svoju prvobitnu vrijednost. Koliku količinu topline plin nakon toga mora oduzeti okolini da bi poprimio svoje prvobitno stanje?
27. Carnotov stroj na temperaturi 300 K dobiva 4 200 J topline. Temperatura hladnijeg rezervoara je 220 K. Koliko je topline predano hladnijem rezervoaru? Koliki je dobiveni rad u kružnom procesu? Kolika je korisnost stroja? Ako stroj radi kao hladnjak koliki rad mora biti utrošen da bi se apsorbiralo 8 400 J iz hladnijeg rezervoara?

14. KINETIČKO-MOLEKULARNA TEORIJA TOPLINE

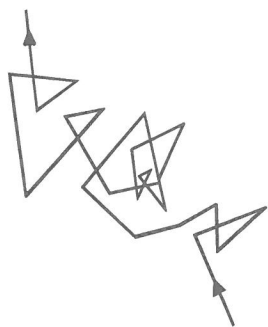
14.1. UVOD

U termodinamici smo promatrali makroskopska svojstva materijala, kao što su temperatura, tlak i volumen, specifični toplinski kapacitet i sl., i pomoću njih opisivali termodinamičke procese, npr. pretvaranje rada u toplinu i topline u rad. Pri tom nismo razmotrili mikroskopsku strukturu tvari niti to kako je gibanje atoma i molekula vezano uz te makroskopske veličine. Sada ćemo makroskopske veličine (tlak, temperaturu i sl.) povezati s makroskopskim svojstvima mnoštva molekula (brzinom, kinetičkom energijom molekula i sl.). Kinetičko-molekularna teorija topline, koja makroskopska svojstva tijela tumači pomoću gibanja molekula, omogućuje bolje razumijevanje pojmova koje smo uveli u fenomenološkoj kalorici (odjeljak 12) i termodinamici (odjeljak 13). Termodinamika, koja proučava makroskopska svojstva tvari, i kinetičko-molekularna teorija, koja ta svojstva objašnjava pomoću molekularne strukture tvari, čine cjelinu koju možemo nazvati naukom o toplini.

Tvar je sastavljena od atoma i molekula. Molekule se mogu sastojati od jednog, dvaju ili više atoma. Makroskopska svojstva tvari mogu se dublje i bolje razumjeti pomoću molekularne teorije tvari, tj. promatrajući što se događa u mikroskopskom svijetu atoma i molekula.

Radi jednostavnosti, smatrat ćemo da molekula nema strukture, da je kuglica koja privlači ili odbija susjedne molekule. Sile koje molekule drže zajedno u tekućinama i čvrstim tijelima uglavnom su električne prirode. Gravitacijske su sile malene, i njih zanemarujemo. U plinovima je razmak između molekula velik, privlačne sile vrlo su malene, to manje što je manji tlak i viša temperatura. U idealnom plinu nema međumolekularnih sila.

Molekule se neprestano gibaju. U čvrstim tijelima one titraju oko manje-više fiksnih centara koji su pravilno raspoređeni i tvore kristalnu rešetku. Zbog toga većina tijela ima pravilnu i simetričnu strukturu. U tekućinama su udaljenosti među molekulama malo veće, i molekule s većom energijom titraju oko centara, koji se slobodno gibaju. U plinovima se molekule gibaju gotovo slobodno i imaju veliku kinetičku energiju.



Slika 14.1. Kaotično gibanje molekula

Hipoteza da se molekule u plinovima i tekućinama neprestano gibaju potvrđena je pojavom tzv. Brownova gibanja. Promatrajući zrnca peluda (promjera oko $1\ \mu\text{m}$), suspendirana u tekućini, engleski botaničar Robert Brown (1773—1858) opazio je da se čestice neprestano gibaju, da zrnca peluda neprestano mijenjaju smjer svoga gibanja zbog sudaranja s molekulama tekućine te im putanja nije pravocrtna, nego cikcak-linija. Na slici 14.1. prikazana je mikroskopska slika takvoga gibanja, uvećana oko tisuću puta. Takvo nepravilno gibanje zrnaca peluda uzrokuju neprestani sudari s molekulama, koje se također gibaju u svim smjerovima. Slično Brownovo gibanje može se opaziti promatrajući pomoću mikroskopa čestice dima u zraku.

Difuzija plinova ili tekućina, osmoza i druge pojave govore u prilog hipotezi o neprestanom gibanju molekula. Difuzija postoji i kod čvrstih tvari, ali je mnogo sporija nego kod tekućina i plinova. Razmjena čestica između dva metala može se opaziti samo ako su metali bili zajedno dugi niz godina.

Molekule su međusobno najjače vezane u čvrstom tijelu, slabije u tekućini, a najslabije u plinu. U idealnom plinu molekule se uopće ne privlače, nego se gibaju nezavisno jedna od druge, neprestano se međusobno sudaraju i zbog toga gibaju kaotično. Interakcije među molekulama idealnog plina možemo, dakle, zanemariti, osim kad se molekule dodirnu prilikom sudara. Kažemo da su sile među molekulama kratkog dosega i da se vrlo brzo smanjuju s udaljenošću.

Pomoću kinetičke teorije plinova, primjenom zakona gibanja na skup molekula, mogu se makroskopska svojstva kao što su tlak, temperatura, toplinski kapacitet i dr., povezati s mikroskopskim svojstvima molekula plina (brzinom, kinetičkom energijom, masom molekula i sl.).

Nemoguće je pratiti gibanje svake molekule jer ih ima vrlo mnogo. Zapravo, nas ne zanima gibanje pojedine molekule, već prosječno ponašanje skupa molekula, te zato pomoću zakona statističke mehanike nastojimo odrediti srednje ponašanje mnoštva molekula. Na taj se način može, npr., izraziti tlak (makroskopska veličina) pomoću mase i srednje brzine molekula (mikroskopske veličine).

Kinetička teorija plinova temelji se na ovim pretpostavkama:

- Plin se sastoji od velikog broja molekula koje se neprekidno gibaju. To je gibanje kaotično, molekule se gibaju u svim smjerovima, međusobno se sudaraju i udaraju u stijenke posude u kojoj se nalazi plin. Pri sudaru molekule mijenjaju brzinu po smjeru i iznosu. Budući da je gibanje kaotično, srednja je brzina (i količina gibanja) nula, i centar mase plina ostaje na miru, iako se pojedine molekule gibaju. Zbog kaotičnoga gibanja raspodjela molekula po brzinama jednaka je u svim smjerovima.

- Molekule u plinu su daleko jedna od druge, tj. prosječne su udaljenosti među molekulama mnogo veće nego njihovi promjeri, te interakciju među njima (osim za vrijeme sudara) možemo zanemariti. U idealnom plinu volumen svih molekula je zanemariv prema volumenu posude u kojoj je plin.

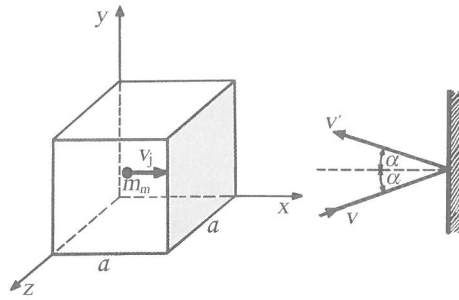
- Međusobni sudari molekula te sudari sa stijenka posude savršeno su elastični: nema gubitka energije za vrijeme sudara.

Tako je u jednoatomnom plinu promjer molekula oko 10^{-10} m, prosječne su brzine oko 10^3 m/s, a srednji put koji prevale između dva uzastopna sudara (tzv. srednji slobodni put) iznosi oko 10^{-7} m pri normalnom tlaku. Razmak je među molekulama u takvom plinu oko 10^{-9} m (desetak puta veći od promjera molekule), tako da se molekule u razrijeđenom plinu mogu smatrati materijalnim točkama u vakuumu.

14.2. TLAK IDEALNOG PLINA

Tlak idealnog plina (makroskopsku varijablu) izračunat ćemo pomoću mikroskopskih svojstava molekula (brzine, kinetičke energije i sl.). Tlak plina uzrokuje neprekidno udaranje molekula u stijenke posude, pri čemu molekule stijenka posude predaju određenu količinu gibanja, tj. djeluju na stijenke određenom silom. Tlak plina je omjer sile kojom molekule djeluju na stijenku posude u kojoj se nalaze i površine te stijenke.

Zamislamo da je plin u kutiji oblika kocke, brida a (sl. 14.2). Uočimo jednu od N molekula koliko ih ima u kocki (i -ta molekula). Njezina je masa m_m , a brzina $\vec{v}_i = \vec{v}_{ix} + \vec{v}_{iy} + \vec{v}_{iz}$. Prilikom sudara sa stijenkom posude (onom okomitom na os x na slici 14.2) promijeni se x komponenta količine gibanja molekule za iznos $\Delta p_{ix} = m_m v_{ix} - (-m_m v_{ix}) = 2 m_m v_{ix}$. Promjena količine gibanja molekule jednaka je impulsu sile koji je primila stijenka. Budući da je molekuli potrebno $\frac{a}{v_{ix}}$ vremena da stigne od jednog kraja posude do drugoga kraja, odnosno $\frac{2a}{v_{ix}}$ za oba smjera, vrijeme između dva sudara promatrane molekule s istom stijenkom posude iznosit će $\frac{2a}{v_{ix}}$. Broj



Slika 14.2. Uz mikroskopsko objašnjenje tlaka plina

sudara u jedinici vremena promatrane molekule i stijenke posude bit će $\frac{v_{ix}}{2a}$.

Ukupni impuls sile koji promatrana molekula prenese na stijenku posude u vremenu Δt jest $\left(\frac{v_{ix}}{2a}\right) (2 m_m v_{ix}) \Delta t$. Odatle slijedi da je srednja sila kojom molekula djeluje na stijenku posude:

$$\frac{\Delta p_{ix}}{\Delta t} = \left(\frac{v_{ix}}{2a}\right) (2 m_m v_{ix}) = \frac{m_m v_{ix}^2}{a} \quad (14.1)$$

U posudi se nalazi N molekula, te je ukupna sila:

$$F = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N \frac{m_m v_{ix}^2}{a} = \left(\frac{m_m}{a}\right) \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \quad (14.2)$$

Iz definicije tlaka $\left(p = \frac{F}{S} = \frac{F}{a^2}\right)$ slijedi da je tlak p na promatranu stijenku posude:

$$p = \left(\frac{m_m}{V}\right) \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \quad (14.3)$$

gdje smo uzeli u obzir da je volumen posude $V = a^3$.

Zbog velikog broja molekula (npr. u jednoj litri plina pri normalnim uvjetima ima $2,7 \cdot 10^{22}$ molekula) nemoguće je saznati brzinu svake molekule. Zato uzimamo prosječne (srednje) vrijednosti brzine i kvadrata brzine. Srednji kvadrat x komponente brzine molekula jest

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \right) \quad (14.4)$$

Uvrstimo li taj rezultat u izraz za tlak (14.3), dobivamo:

$$p = \frac{Nm_m \overline{v_x^2}}{V} \quad (14.5)$$

Molekule se gibaju u svim smjerovima, te možemo pretpostaviti da je

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3 \overline{v_x^2} \quad (14.6)$$

odnosno

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \quad (14.7)$$

Uzevši to u obzir, dobivamo relaciju između tlaka i volumena za idealni plin:

$$pV = \frac{1}{3} Nm_m \overline{v^2} \quad \text{ili} \quad pV = \frac{2}{3} N \overline{E_k} \quad (14.8)$$

gdje je $\overline{E_k} = m_m \overline{v^2}/2$.

Korisno je uvesti tzv. srednju kvadratičnu (efektivnu) brzinu:

$$v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}} \quad (14.9)$$

Tada jednadžba (14.8) poprima oblik:

$$pV = \frac{1}{3} Nm_m v_{ef}^2 \quad (14.10)$$

odnosno

$$pV = \frac{1}{3} m v_{ef}^2,$$

gdje je $m = Nm_m$ masa plina.

To je osnovna jednadžba kinetičke teorije plinova: tlak je izražen pomoću brzine molekula. Tlak kojim molekule plina djeluju na stijenku posude ovisi samo o broju molekula u jedinici volumena $\left(\frac{N}{V}\right)$ i o prosječnoj kinetičkoj energiji molekule $\left(\frac{m \overline{v^2}}{2}\right)$.

Primjer

Izračunajte srednju kvadratičnu brzinu translacije molekule kisika O_2 i vodika H_2 u normalnim uvjetima ($0^\circ C$ i 1,1 bar).

Prema relaciji (14.10), $p = \frac{1}{3} \rho v_{ef}^2$; gustoća kisika ρ može se naći iz činjenice da 1 mol kisika u normalnim uvjetima ima volumen $22,4 \cdot 10^{-3} m^3$. Dakle, $\rho = 32 \text{ kg}/22,4 m^3$, te je

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 461 \text{ m/s}.$$

Slično se dobije srednja kvadratična brzina molekule vodika $\sqrt{\overline{v^2}} = 1,84 \text{ km/s}$.

14.3. KINETIČKO OBJAŠNJENJE TEMPERATURE

Dobili smo da je tlak proporcionalan broju molekula u jedinici volumena i srednjoj kinetičkoj energiji translacije molekule, relaciju dosta sličnu eksperimentalno dobivenoj plinskoj jednadžbi $pV = NkT$. Usporedbom te plinske jednadžbe i relacije (14.8) dobivamo važan rezultat:

$$\bar{E}_k = \frac{m_m \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT \quad (14.11)$$

gdje je $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta.

Iz te relacije vidimo fizikalno značenje temperature. Srednja kinetička energija translacije po molekuli upravo je razmjerna termodinamičkoj temperaturi.

Srednja kinetička energija molekula u plinu ne ovisi o vrsti plina, nego samo o temperaturi. Za određenu temperaturu sve molekule, bez obzira na njihovu masu, imaju istu srednju kinetičku energiju translacije. U smjesi različitih plinova laganije molekule gibat će se brže, a one s većom masom sporije, ali će sve molekule imati istu srednju kinetičku energiju.

Do sada smo temperaturu iskorištavali kao makroskopski parametar, a sada vidimo da je ona u vezi s mikroskopskim svojstvima (prosječnom kinetičkom energijom) mnoštva čestica.

Postizanje toplinske ravnoteže možemo također objasniti pomoću kinetičke teorije. Na primjer, kada pomiješamo hladniji i topliji plin, molekule zbog međusobnih sudara predaju jedna drugoj energiju, pri tome „toplije” molekule (tj. veće kinetičke energije) gube dio energije, a „hladnije” dobivaju, te nastaje izjednačavanje srednje energije i toplinska ravnoteža.

Unutrašnja energija idealnog plina jest zbroj kinetičkih energija svih molekula (nema potencijalne energije, jer u idealnom plinu među molekulama nema privlačnih sila):

$$U = \sum_i E_{ki} = N \bar{E}_k \quad (14.12)$$

$$U = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} n R T \quad (14.13)$$

Unutrašnja energija idealnog plina ne ovisi o tlaku i volumenu, već samo o njegovoj temperaturi. Ona je proporcionalna apsolutnoj temperaturi plina.

U izvodu relacije (14.13) molekulu smo promatrali kao materijalnu točku koja se giba samo translatorno i čiji položaj određuju tri stupnja slobode, tri koordinate, x , y i z . Sve su tri koordinate ravnopravne, kinetička energija je ravnopravno raspoređena na sva tri stupnja slobode, te na svaki stupanj slobode molekule dolazi po $kT/2$ kinetičke energije. To je tzv. princip ekvipartacije (jednake raspodjele) energije na svaki stupanj slobode. Kad se molekula giba translatorno, ima tri stupnja slobode, te je njezina prosječna kinetička energija $3(kT/2)$.

Ako se molekula, osim translatorno, giba i drukčije (npr. rotira ili vibrira), ima više stupnjeva slobode, te će unutrašnja energija idealnog plina općenito biti:

$$U = \frac{i}{2} n R T \quad (14.14)$$

gdje je i broj stupnjeva slobode.

Ovome ćemo se još vratiti kada budemo razmatrali toplinske kapacitete plinova.

Primjer

Nadite srednju brzinu, srednju kinetičku energiju translacije atoma žive i unutrašnju energiju živinih para množine 1 kmol na 327 °C.

Kombinacijom plinske jednadžbe i relacije (14.10) dobivamo:

$$v_{ef} = \sqrt{3 \frac{RT}{M}} = \sqrt{3 \cdot 8314 \cdot 600 / 201} \text{ m/s} = 273 \text{ m/s.}$$

Iz relacije (14.11) dobivamo:

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} k T = 1,5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 600 \text{ J} = 12,4 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,08 \text{ eV.}$$

Iz relacije (14.13) slijedi:

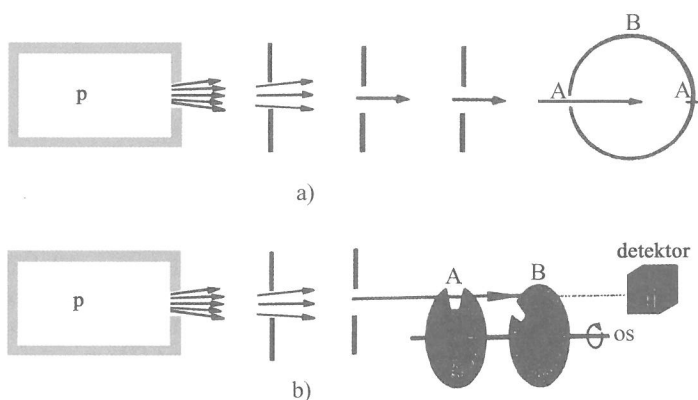
$$U = \frac{3}{2} n R T = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \cdot 10^3 \cdot 600 \text{ J} = 7,5 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

14.4. RASPODJELA MOLEKULARNIH BRZINA U PLINU

Sve molekule u plinu nemaju istu brzinu, nego ona može varirati od vrlo malene do neke maksimalne. Međutim, mnogo je zanimljivija od brzine pojedine molekule srednja brzina molekule u plinu te raspodjela molekula po brzinama.

Raspodjele molekularnih brzina u plinu u toplinskoj ravnoteži mogu se odrediti eksperimentalno i teoretski.

Otto Stern je prvi (1920) eksperimentalno odredio raspodjelu molekula po brzinama, mjereći relativan broj molekula različitih brzina koje u obliku molekularnog snopa izlaze iz neke peći. Princip dvaju takvih uređaja prikazan je na slici 14.3.



Slika 14.3. Sternov pokus

Iz peći čestice plina (npr. atomi žive, srebra i sl.) izlaze u obliku snopa, prolaze kroz niz kolimatora i zatim ulaze kroz otvor A u šuplji cilindrični bubanj B koji rotira. Svi atomi nemaju jednaku brzinu: neki su sporiji, neki brži. Atomi raz-

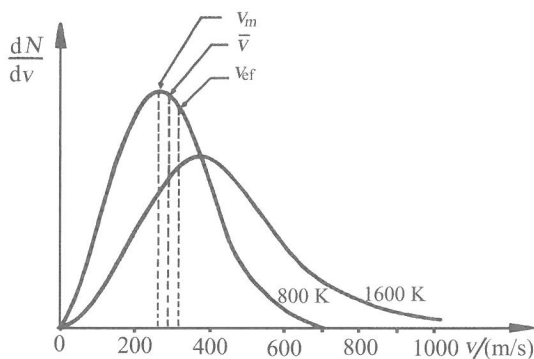
ličitih brzina trebaju različito vrijeme da prevale put AA' te će zbog toga udariti i nataložiti se na raznim mjestima na unutrašnjoj stijenci bubnja (sl. 14.3a). Čitav uređaj je u vakuumu, tako da se atomi mogu nesmetano pravocrtno gibati od peći do detektora. Uređaj za mjerenje raspodjela molekula po brzinama pokazan je i na sl. 14.3b.

Mjerenjem debljine ili mase sloja može se odrediti broj atoma koji imaju određenu brzinu i tako dobiti raspodjela molekula po brzinama, tj. broj molekula N_v na jedinicu brzine u intervalu v i $v + dv$.

Selektor brzina pokazan je na slici 14.3b. Snop molekula nailazi na dva diska na zajedničkoj osi, koji mogu rotirati poznatom kutnom brzinom ω . Oba diska imaju na svom obodu prorez kroz koji mogu proći molekule. Takav uređaj radi kao selektor brzina, jer odabire molekule koje imaju točno određenu brzinu. Kada diskovi ne rotiraju, sve molekule mogu doći u detektor, a kada diskovi rotiraju, u detektor mogu doći samo one molekule čija je brzina takva da prevale put AB dok disk napravi potpuni okret. Tako, mijenjajući kutnu brzinu rotacije, izabiremo molekule različitih brzina i mjerimo njihov relativni broj kao funkciju brzine.

Tako su, i na slične načine, mjerene raspodjele molekularnih brzina za razne elemente u stanju pare (Ag, Hg itd.) i nađena je njihova ovisnost o temperaturi, masi molekula i sl.

Na slici 14.4. prikazana je eksperimentalno dobivena raspodjela atoma žive u živinim parama na temperaturi 800 K i 1600 K. Raspodjela molekula može se i teoretski izvesti, a tako dobivena krivulja izvrsno se slaže s eksperimentalnom.



Slika 14.4. Maxwellova raspodjela molekula živinih para po brzinama

Ordinata na slici 14.4. označava relativan broj molekula po jedinici brzine ($N_v = \frac{dN}{dv}$), dok su na osi apscisa molekularne brzine. ($N_v dv$ je broj molekula koje imaju brzinu u intervalu između v i $v + dv$.) Neke molekule imaju malu brzinu, neke veliku, dok se brzina većine molekula grupira oko najvjerojatnije brzine v_m . Takva raspodjela zove se Maxwellova raspodjela brzina i napisana eksplicitno glasi:

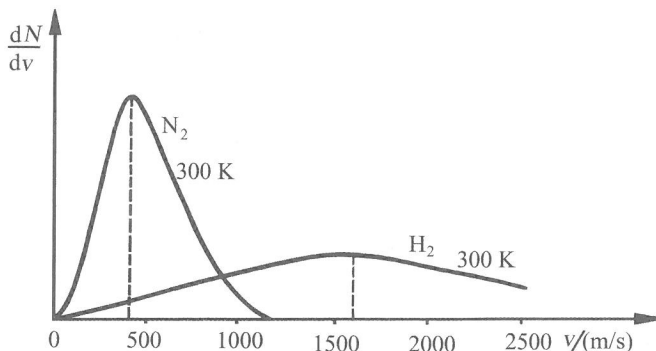
$$N_v = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-m_m v^2 / 2kT}, \quad (14.15)$$

gdje je m_m masa molekule, v njezina brzina, N ukupan broj molekula, T apsolutna temperatura plina, a $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta.

Uočite da za istu vrstu molekula raspodjela bitno ovisi o temperaturi. Površina ispod krivulje $N_v = \frac{dN}{dv}$ proporcionalna je ukupnom broju molekula:

$$N = \int_0^{\infty} \frac{dN}{dv} dv \quad (14.16)$$

Osim o temperaturi raspodjela ovisi i o masi molekule (sl. 14.5).



Slika 14.5. Maxwellova raspodjela brzina molekula za dva različita plina

Iz Maxwellove raspodjele mogu se izračunati tri vrste karakterističnih brzina molekula.

Najvjerojatnija brzina v_m jest ona koju ima najveći broj molekula (N_v). Za v_m Maxwellova raspodjela ima maksimum:

$$\begin{aligned} \frac{dN_v}{dv} = 0 &\Rightarrow 2 v_m - \frac{m_m v_m^3}{kT} = 0 \\ v_m &= \sqrt{\frac{2 k T}{m_m}} \end{aligned} \quad (14.17)$$

Tako je najvjerojatnija brzina za molekule vodika na 0°C 1510 m/s, a za molekule kisika 378 m/s.

Srednja kvadratična brzina (efektivna brzina), o kojoj ovisi temperatura plina, dana je sa

$$v_{ef}^2 = \overline{v^2} = \frac{\int_0^{\infty} N_v v^2 dv}{\int_0^{\infty} N_v dv} \quad (14.18)$$

Lako se pokazuje da je

$$\overline{v^2} = \frac{3 k T}{m_m} \Rightarrow v_{ef} = \sqrt{3 \frac{k T}{m_m}} = \sqrt{3 \frac{R T}{M}} \quad (14.19)$$

Tako je na temperaturi 273 K srednja kvadratična brzina molekula vodika 1 845 m/s, a dušika 493 m/s.

Srednja je brzina $\bar{v}$ (aritmetička sredina):

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} N_v v dv}{\int_0^{\infty} N_v dv} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k T}{m_m}} \quad (14.20)$$

Iz (14.17), (14.19) i (14.20) dobiva se da je $\bar{v} = 1,12 v_m$ i $v_{ef} = 1,22 v_m$. Srednja brzina je veća od najvjerovatnije v_m , što je posljedica „visokoenergetskog repa” raspodjele (sl. 14.4).

Primjer

Nadite omjer broja molekula u plinu kojima je brzina v_{ef} prema broju molekula koje su tri puta brže.

Maxwellova raspodjela brzina dana je relacijom (14.15):

$$N_v = C \cdot v^2 \cdot e^{-m v^2 / 2 k T}.$$

Odatle slijedi:

$$\frac{N_v(v_{ef})}{N_v(3 v_{ef})} = \frac{1}{9} e^{1^2} = 18\,000.$$

14.5. MAXWELL—BOLTZMANNOVA ENERGETSKA RASPODJELA MOLEKULA

Iz raspodjele molekularnih brzina (14.15) može se dobiti energetska raspodjela molekula plina, koja se često zove i Maxwell—Boltzmannova energetska raspodjela.

Uzevši u obzir da je $E_k = \frac{1}{2} m_m v^2 = E$ i $\frac{dN}{dv} = \frac{dN}{dE} \cdot \frac{dE}{dv} = m_m v \frac{dN}{dE}$, iz (14.15) dobivamo:

$$N_E = \frac{dN}{dE} = \frac{2 N}{\sqrt{\pi k^3 T^3}} \sqrt{E} e^{-E/kT} \quad (14.21)$$

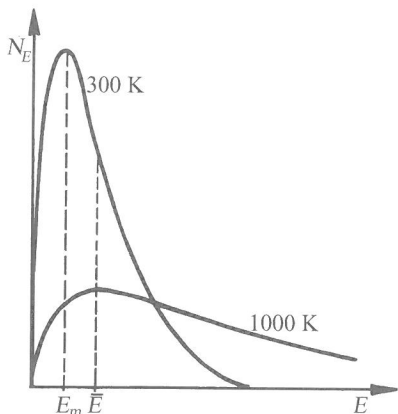
Maxwell—Boltzmannova raspodjela molekula po energijama (14.21) kaže koliki je broj molekula dN kojima je energija u infinitezimalnom energetskom intervalu između E i $E + dE$. Važno je uočiti da energetska raspodjela ne ovisi o masi molekule, da je ista za bilo koji idealni plin na određenoj temperaturi i da je funkcija samo temperature. Funkcija (14.21) je produkt dvaju faktora, od kojih je jedan parabola ($\sqrt{E}$), tj. rastuća funkcija energije, a drugi eksponencijalna funkcija koja pada s energijom. Maksimum energetske raspodjele je na energiji E_m , koju možemo odrediti tako da prvu derivaciju izjednačimo s nulom. Iz $\frac{dN_E}{dE} = 0$ dobivamo:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{E_m}} - \frac{\sqrt{E_m}}{k T} \right) e^{-E_m/kT} = 0$$

odnosno

$$E_m = \frac{k T}{2} \quad (14.22)$$

Energetska raspodjela molekula idealnog plina na dvije temperature prikazana je na slici 14.6. Kako temperatura raste, maksimum raspodjele pomiče se udesno. Krivulja nije simetrična, već ima „visokoenergetski rep“, koji je to duži što je viša temperatura. Zbog toga je srednja energija $\bar{E}$ veća od najvjerojatnije E_m . Površina ispod krivulje odgovara broju molekula:



$$N = \int_0^{\infty} N_E dE \quad (14.23)$$

Srednja kinetička energija $\bar{E}$ translatornoga gibanja molekula idealnog plina veća je od najvjerojatnije energije E_m i iznosi:

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} \frac{E N_E dE}{N} = \frac{3}{2} k T \quad (14.24)$$

Slika 14.6. Energetska raspodjela molekula

noatomnog plina), raspodjela molekula po energijama pri temperaturi T dana je jednoznačno izrazom (14.21), dok je srednja kinetička energija $\bar{E}_k = \frac{3}{2} k T$. Budu-

ći da su za prostornu translaciju, za definiranje gibanja čestice potrebne tri koordinate, tj. čestica ima tri stupnja slobode, srednja kinetička energija pojedinoga stupnja slobode je tri puta manja, tj.

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2} k T \quad (14.25)$$

Izraz (14.25) definicijska je formula za termodinamičku (ili apsolutnu) temperaturu. Budući da je kinetička energija uvijek pozitivna, i apsolutna je temperatura uvijek pozitivna veličina. Na apsolutnoj nuli ($T = 0 \text{ K}$), prema formuli (14.24), nema toplinskoga gibanja molekula, a to vrijedi samo u okviru klasične fizike, što je razumljivo jer je ta raspodjela i izvedena iz zakona klasične fizike.

Iz ovih razmatranja vidimo da se može govoriti samo o temperaturi velikog skupa, mnoštva molekula, a ne jedne molekule ili nekoliko molekula. Temperatura je, dakle, makroskopsko svojstvo velikog broja molekula u stanju toplinske ravnoteže.

14.6. KINETIČKA TEORIJA MOLARNIH TOPLINSKIH KAPACITETA

Dovodimo li plinu određenu količinu topline Q , unutrašnja energija povećat će se za ΔU i plin će obaviti rad W . Pri tom je, prema prvom zakonu termodinamike,

$$Q = \Delta U + W \quad (14.26)$$

Povećanje unutrašnje energije očituje se povećanjem temperature. Toplinski kapacitet nekog tijela definira se kao količina topline potrebna da se tijelu povisi temperatura za jedan kelvin. Toplinski kapacitet ovisi o načinu kako tijelu dovodimo toplinu. To se osobito opaža kod plinova. Ako plin zagrijavamo izovolumno, sva dovedena količina topline upotrijebi se za povećanje unutrašnje energije. Pri izobarnom procesu dio topline upotrijebi se za rad koji izvrši plin, pa je toplinski kapacitet zbog toga veći nego pri izovolumnom procesu. Obično definiramo dva toplinska kapaciteta: pri stalnom tlaku i pri stalnom volumenu.

Umjesto toplinskog kapaciteta češće se iskorištava specifični, odnosno molarni toplinski kapacitet (v. odjeljak 12.4).

Molarni toplinski kapacitet pri stalnom volumenu definira se izrazom:

$$C_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad (14.27)$$

jer je pri izovolumnom procesu $dW = 0$, te je $dQ = dU$.

Ako se plin zagrijava izobarno, tada je $dQ = dU + p dV = d(U + pV) = dH$, pa je molarni toplinski kapacitet pri stalnom tlaku:

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT} \quad (14.28)$$

U odjeljku 13.4. pokazali smo da je veza između ta dva toplinska kapaciteta za idealne plinove dana Mayerovom relacijom:

$$C_p - C_v = R \quad (14.29)$$

Za razliku od plinova, razlika između C_p i C_v za čvrsta tijela i tekućine praktički je zanemariva jer je promjena volumena s promjenom temperature vrlo malena.

Kinetičko-molekularnom teorijom topline može se dobro objasniti i predvidjeti koliki je toplinski kapacitet. Potpuno objašnjenje moguće je samo pomoću kvantne teorije.

Pogledajmo najprije koliki bi toplinski kapaciteti trebali imati plinovi prema klasičnoj (kinetičkoj) teoriji. Prema principu jednake raspodjele energije, svakom stupnju slobode gibanja molekule pripada energija $\frac{1}{2} kT$, odnosno za N molekula $\frac{1}{2} N kT = \frac{1}{2} n R T$. Ako molekularno gibanje ima i stupnjeva slobode, tada bi unutrašnja energija plina trebala biti:

$$U = \frac{i}{2} n R T \quad (14.30)$$

Jednoatomni plinovi (He, Ne, Ar i sl.), čije se molekule mogu gibati samo translatorno, imaju samo tri stupnja slobode gibanja i srednju kinetičku energiju po molekuli $3 kT/2$. Unutrašnja je energija takvih plinova:

$$U = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} n R T \quad (14.31)$$

Primjenom relacija (14.27) i (14.29) dobivamo molarne toplinske kapacitete jednoatomnih plinova:

$$C_v = \frac{3}{2} R = 12,5 \text{ J/(mol K)}; \quad C_p = \frac{5}{2} R = 20,8 \text{ J/(mol K)}.$$

Omjer molarnih toplota, tzv. adijabatski koeficijent, za jednoatomne plinove jest

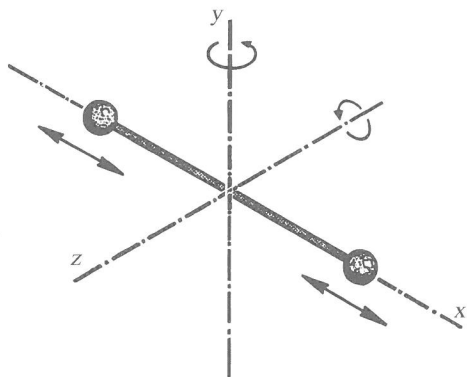
$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1,67.$$

U tablici 14.1. dane su eksperimentalne vrijednosti toplinskih kapaciteta za neke jednoatomne plinove. (Koeficijent κ određuje se mjerenjem brzine zvuka u plinu.) Slaganje je s kinetičkom teorijom izvrsno.

Tablica 14.1. Molarni toplinski kapaciteti nekih jednoatomnih plinova

Plin	C_v J/(mol K)	C_p J/(mol K)	$C_p - C_v$ J/(mol K)	$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$
He	12,56	20,85	8,29	1,66
Ne	12,7	20,8	8,1	1,64
Ar	12,56	20,94	8,37	1,67
Kr	12,5	21,01	8,5	1,68

Opaženo je, također, da molarni toplinski kapaciteti jednoatomnih plinova ne ovise o temperaturi u velikom temperaturnom intervalu (1 K do 2 000 K), što je također u skladu s kinetičkom teorijom prema kojoj toplinski kapaciteti ne ovise o temperaturi.



Slika 14.7. Stupnjevi slobode dvoatomne molekule

Dvoatomna molekula (sl. 14.7), osim translatornoga gibanja, može rotirati (oko tri međusobno okomite osi) i titrati uzduž spojnice svojih atoma. Rotaciona energija dvoatomne molekule iznosi:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (14.32)$$

Rotacija oko osi na kojoj leže atomi (os 1 na sl. 14.7) ne pridonosi ukupnoj energiji jer je moment tromosti za tu os vrlo malen, pa rotaciju oko te osi možemo zanemariti. To je u skladu s pretpostavkom da su atomi materijalne točke i da jednoatomna molekula ne može rotirati.

Zbog toga možemo pretpostaviti da dvoatomna molekula zbog rotacionoga gibanja ima dva stupnja slobode. Svaki rotacioni stupanj slobode, prema principu ekvipartije energije, pridonosi isti iznos energije kao i translatorni, te je ukupna unutrašnja energija dvoatomnog plina, koja nastaje zbog translacije i rotacije:

$$U = 3 \cdot \frac{1}{2} n R T + 2 \cdot \frac{1}{2} n R T = \frac{5}{2} n R T \quad (14.33)$$

Dvoatomne molekule mogu i titrati, jer su atomi u njima vezani silama koje možemo aproksimirati elastičnim silama sličnima sili opruge. Molekula titra kao jednodimenzionalni harmonički oscilator, te je prosječna ukupna energija takvog titranja:

$$\bar{E} = \bar{E}_k + \bar{E}_p = \frac{\overline{k A^2}}{2} \cos^2 \omega t + \frac{\overline{k A^2}}{2} \sin^2 \omega t = 2 \bar{E}_k \quad (14.34)$$

Vibracije atoma u molekuli povećavaju broj stupnjeva slobode za dva, jedan zbog kinetičke, a drugi zbog potencijalne energije oscilatora. Po zakonu ekvipartije energije, svakom stupnju slobode odgovara $\frac{1}{2} k T$ kinetičke energije. Jednodimenzionalni harmonički oscilator ima, dakle, $k T/2$ zbog kinetičke i $k T/2$ zbog potencijalne energije, ukupno $\bar{E} = k T$.

Prema ovim razmatranjima, ukupna unutrašnja energija dvoatomnog plina trebala bi biti:

$$U = 3 \cdot \frac{1}{2} n R T + 2 \cdot \frac{1}{2} n R T + 2 \cdot \frac{1}{2} n R T = \frac{7}{2} n R T,$$

a molarni toplinski kapaciteti:

$$C_V = \frac{7}{2} R \approx 29 \text{ J/(mol K)}$$

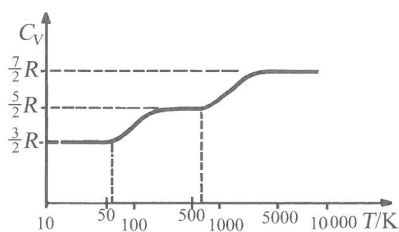
$$C_P = \frac{9}{2} R \approx 37 \text{ J/(mol K)}$$

$$\kappa = \frac{C_P}{C_V} = \frac{9}{7} = 1,28.$$

Tablica 14.2. Molarni toplinski kapaciteti za neke dvoatomne plinove određeni mjerenjem

Plin	C_V J/(mol K)	C_P J/(mol K)	$C_P - C_V$ J/(mol K)	$\frac{C_P}{C_V}$
H ₂ (20 K)	12,5	20,85	8,33	1,67
H ₂ (300 K)	20,3	28,6	8,30	1,41
H ₂ (600 K)	21,02	29,3	8,29	1,4
H ₂ (4000 K)	29,31	37,7	8,37	1,28
O ₂ (300 K)	21,2	29,5	8,33	1,4
N ₂ (300 K)	20,8	29,1	8,33	1,4

Situacija nije tako jasna kao kod jednoatomnih plinova. Na običnim temperaturama (tj. bliskima sobnoj temperaturi) $C_V = 5 R/2$, a ne $7 R/2$, kako zahtijeva kinetička teorija. Vibracijski stupnjevi slobode na nižim temperaturama ne pridonose unutrašnjoj energiji. Također se opaža ovisnost molarnih toplinskih kapaciteta o temperaturi. To se očito vidi i na slici 14.8. gdje je prikazana promjena C_V vodika s porastom temperature.



Slika 14.8. Ovisnost C_V vodika o temperaturi

Sliku 14.8. možemo objasniti ovako: na vrlo niskim temperaturama (do oko 100 K) većina molekula vodika ima samo tri stupnja slobode, giba se samo translatorno i $C_V = 12,5 \text{ J/(mol K)}$. Kako temperatura raste, sve više molekula počinje rotirati i imaju srednju energiju $\frac{5}{2} k T$. Zato u temperatur-

nom području od oko 250 do 750 K vodik ima $C_V = 21 \text{ J/(mol K)}$. Na višim temperaturama C_V počinje ponovo rasti jer sve više molekula počinje titrati pa njihova srednja

energija zbog toga naraste na $\frac{7}{2} k T$. Kad je temperatura dovoljno visoka, sve molekule titraju, i molarni toplinski kapacitet poraste na $C_V = 29 \text{ J/(mol K)}$.

Molekula vodika, ovisno o temperaturi, može imati energiju ili $3/2 k T$, ili $5/2 k T$, ili $7/2 k T$, ali nikad između tih vrijednosti. Dok je temperatura niska, molekule se mogu gibati samo translatorno. Kako se temperatura povećava, molekula sudarima dobiva dovoljno energije i kad je njezina energija veća od određenog minimuma, molekula počne rotirati. Molekule koje imaju manju energiju od tog minimuma ne mogu rotirati. To je suprotno klasičnoj teoriji po kojoj bi molekula mogla rotirati bez obzira na to koliko je malena njezina energija. Klasična fizika ne može objasniti tu pojavu, pa za potpuno objašnjenje toplinskih kapaciteta treba poznavati zakone kvantne mehanike.

Slično razmatranje vrijedi i za titranje molekula. Po zakonima klasične fizike, molekula bi mogla titrati bez obzira na to koliko je malena njezina energija. Ali molekula se vlada po zakonima kvantne fizike i počinje titrati tek kad je njezina energija dovoljno velika, tj. kad je temperatura dovoljno visoka.

Višeatomni plinovi, za razliku od dvoatomnih plinova mogu imati tri stupnja slobode rotacije. Teorija predviđa da su specifični toplinski kapaciteti višeatomnih plinova (svi stupnjevi slobode uzbuđeni):

$$C_V = \frac{8}{2} R \approx 33 \text{ J/(mol K)},$$

$$C_P = \frac{10}{2} R \approx 42 \text{ J/(mol K)}.$$

Pogledajmo može li klasična teorija objasniti toplinske kapacitete čvrstih tijela. U odjeljku 12.5. razmotrili smo eksperimentalne rezultate i uočili da za više temperature molarni toplinski kapaciteti, bez obzira na to o kakvoj je tvari riječ, iznose oko $3 R$ (Dulong—Petitov zakon). Također smo istakli da su molarni toplinski kapaciteti maleni blizu apsolutne nule i da u tom području rastu sa T^3 .

Pokušat ćemo te rezultate shvatiti gledajući što se događa u kristalnoj strukturi kada čvrsta tijela zagrijavamo. U kristalima su atomi pravilno poredani u tzv. kristalne rešetke. Atomi u takvoj rešetki, iako se ne mogu slobodno gibati, mogu titrati oko položaja ravnoteže. Te oscilacije su to veće što je viša temperatura, i toplinska energija kristala nastaje baš zbog takvoga gibanja atoma.

Kristal možemo predložiti kao skup harmoničkih oscilatora. Da bismo izračunali toplinsku energiju kristalne rešetke, moramo srednju energiju takvoga trodimenzionalnoga harmoničkog oscilatora pomnožiti brojem atoma u kristalu.

Prosječna energija titranja atoma jednoliko je raspoređena na kinetičku i potencijalnu energiju te je

$$\overline{E} = \overline{E_k} + \overline{E_p} = 2 \overline{E_k} = 2 \cdot \frac{3}{2} k T = 3 k T,$$

jer svaki atom, zato što može titrati u prostoru, ima tri stupnja slobode. Ako se kristal sastoji od N atoma, unutrašnja je energija kristala

$$U = 3 N k T = 3 n R T.$$

Molarni je toplinski kapacitet

$$C_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = 3 R.$$

Kinetičko-molekularna teorija daje isti rezultat kao i mjerenja pri višim temperaturama i tako objašnjava Dulong–Petitov zakon. Smanjenje toplinskih kapaciteta na niskim temperaturama (sl. 12.6) može objasniti samo kvantna teorija. Na temperaturama blizu apsolutne nule toplinska energija nije dovoljna da pobudi atome u kristalu na titranje, te su specifične topline manje, to manje što je niža temperatura. P. Debye i A. Einstein uspjeli su početkom ovog stoljeća pomoću kvantne teorije riješiti taj problem.

14.7. JEDNADŽBA STANJA REALNOG PLINA

Pri razmatranju modela idealnog plina zanemarili smo međumolekularne sile i smatrali da se plin sastoji od materijalnih točaka (čiji je volumen, dakle, zanemariv) koje jedna na drugu ne djeluju osim za vrijeme sudara. Jednadžba stanja takvog plina $p V = n R T$ može se primijeniti na realne plinove samo onda kad im je gustoća plina malena, tako da su molekule daleko jedna od druge, međumolekularne sile zanemarive a volumen molekula prema volumenu posude tako malen da ga možemo zanemariti. Odstupanja od idealnog plina pri običnim tlakovima i temperaturama (npr. do 20 bara i iznad par stotina kelvina) za većinu su plinova neznatna, pa se jednadžba stanja idealnog plina može uspješno iskoristiti u mnogim slučajevima.

Postoji nekoliko jednadžbi stanja realnog plina, a najpoznatija je van der Waalsova jednadžba:

$$\left(p + n^2 \frac{a}{V^2}\right) (V - n b) = n R T \quad (14.35)$$

gdje su a i b konstante karakteristične za određeni plin. (Nedostatak je jednadžbe da konstante a i b ovise o temperaturi.) Konstanta b uzima u obzir da i molekule imaju određeni volumen. Volumen $V - nb$ zapravo je volumen posude umanjen za volumen nb koji zauzimaju molekule; to je volumen praznog prostora oko molekula. Dodatni tlak $n^2 \frac{a}{V^2}$ nastaje zbog međumolekularnih sila, i taj član to bitniji što je veća gustoća plina.

Tablica 14.3. Van der Waalsove konstante a i b

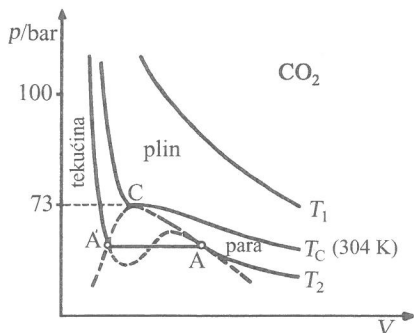
Plin	$a/(\text{N m}^4/\text{mol}^2)$	$b/(\text{m}^3/\text{mol})$
vodik H_2	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$2,65 \cdot 10^{-5}$
helij He	$3,44 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
kisik O_2	$1,37 \cdot 10^{-1}$	$3,18 \cdot 10^{-5}$
dušik N_2	$1,41 \cdot 10^{-1}$	$3,19 \cdot 10^{-5}$
ugljik-dioksid CO_2	$3,64 \cdot 10^{-1}$	$4,28 \cdot 10^{-5}$
vodena para H_2O	$5,5 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$
zrak	$1,36 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$

Van der Waalsova jednadžba zapravo je jednadžba trećeg stupnja:

$$p V^3 - n(p b + R T) V^2 + a n^2 V - n^3 a b = 0 \quad (14.36)$$

za određeni p i T ima tri rješenja.

Na slici 14.9. prikazan je p - V dijagram (projekcija p - V - T plohe) za van der Waalsov plin (ugljik-dioksid CO_2) na tri različite temperature. Na višim temperaturama krivulja je slična izotermi idealnog plina, to sličnija što je viša temperatura.



Slika 14.9. Izoterme za realni plin

Nadležbe (14.36) i dana je horizontalnim dijelom izoterme, kao što smo detaljnije vidjeli u odjeljku 12.6.

U tom području za svaku vrijednost p i T ima samo jedna vrijednost $V_m = \frac{V}{n}$, dana

jednadžbom (14.36). Za temperaturu T_c , koja je, u stvari, kritična temperatura za taj plin, van der Waalsova izoterma ima točku infleksije u $p = p_c$ i $V_m = V_{mc}$. Za niže temperature, npr. $T_2 < T_c$, jednadžba (14.36) ima za isti tlak i temperaturu tri realna rješenja, tj. tri vrijednosti V_m . Budući da na toj temperaturi nastaje promjena faze, u području AA' veza između volumena i tlaka odstupa od jed-

Kritična točka C zapravo je i točka infleksije van der Waalsove izoterme za kritičnu temperaturu. Na osnovi uvjeta da je prva i druga derivacija u točki infleksije jednaka nuli možemo povezati konstante a i b s kritičnim konstantama promatranog plina. Iz $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{T_c} = 0$ i $\left(\frac{d^2p}{dV^2}\right)_{T_c} = 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{n R T_c}{(V_c - n b)^2} + \frac{2 n^2 a}{V_c^3} &= 0, \\ \frac{2 n R T_c}{(V_c - n b)^3} - \frac{6 n^2 a}{V_c^4} &= 0.\end{aligned}\quad (14.37)$$

Jednadžbe (14.37) i van der Waalsova jednadžba daju vezu između a i b i kritičnih konstanti (p_c , T_c , V_c) određenog plina. Budući da imamo tri jednadžbe, a dvije nepoznanice, ta se veza može napisati na više načina:

$$\begin{aligned}V_c &= 3b; \quad a = \frac{27}{8} R T_c b = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_c^2}{p_c}; \quad b = \frac{1}{8} \frac{R T_c}{p_c} \\ p_c &= \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}; \quad \frac{p_c V_c}{R T_c} = \frac{3}{8}.\end{aligned}\quad (14.38)$$

Obično se konstante a i b izražavaju pomoću kritičnog tlaka p_c i kritične temperature T_c :

$$a = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_c^2}{p_c}; \quad b = \frac{1}{8} \frac{R T_c}{p_c}.\quad (14.39)$$

Na primjer uzевši kritične podatke za vodenu paru $T_c = 647,3$ K, $p_c = 221$ bar, dobivamo $a = 0,55$ N m⁴/mol², $b = 3,04 \cdot 10^{-5}$ m³/mol, što se slaže s vrijednostima u tablici 14.3.

PITANJA I ZADACI

1. Što je kinetička teorija topline? Na kojim se pretpostavkama temelji?
2. Kakva je razlika između idealnog i realnog plina?
3. Izračunajte tlak idealnog plina promatrajući gibanje molekula.
4. Kako glasi plinska jednadžba u mikroskopskom obliku?
5. Kako se definira srednja, a kako srednja kvadratična brzina?
6. Kako se može izmjeriti raspodjela molekula po brzinama?
7. Objasnite Maxwellovu raspodjelu molekula po brzinama za dvije različite temperature i dva različita plina.
8. Izračunajte najvjerojatniju, srednju kvadratičnu i srednju brzinu za živine pare pri temperaturi 600 K.
9. Koliko iznosi srednja kvadratična brzina molekula H₂ i N₂ u normiranim uvjetima (0 °C i 101 325 Pa)?
10. Koliko je puta veća srednja kvadratična brzina molekula helija ⁴He nego molekula dušika ¹⁴N₂ pri istoj temperaturi?
11. Iz raspodjele molekula po brzinama izvedite Maxwell–Boltzmannovu energetska raspodjelu.
12. Služeći se izrazom $N_E(E)$ nacrtajte kvantitativni crtež za raspodjelu molekula na temperaturi 300 K i 1 000 K.
13. Iz Maxwellove energetske raspodjele izračunajte srednju kinetičku energiju translatornoga gibanja molekula plina na 300 K.

14. Kakva je veza između temperature i srednje kinetičke energije molekula?
15. Kolika je srednja kinetička energija translacije molekula H_2 i N_2 pri 273 K?
16. Kako se toplinska ravnoteža može objasniti pomoću kinetičke teorije plinova?
17. Kako se definira unutrašnja energija idealnog plina?
18. Što kaže princip ekvipartitije energije?
19. Odredite unutrašnju energiju 1 mola jednoatomnog idealnog plina pri temperaturi 273 K.
20. U posudi volumena 10^{-2} m^3 nalazi se 4 g plina ^4He na temperaturi 360 K. Izračunajte prosječnu kinetičku energiju molekule, ukupnu kinetičku energiju molekula i srednju kvadratičnu brzinu molekule.
21. Kakva je veza između izobarnoga i izohornoga specifičnog toplinskog kapaciteta?
22. Objasnite specifične toplinske kapacitete plinova pomoću kinetičko-molekularne teorije toplina. Kako stupnjevi slobode gibanja molekule utječu na specifične toplinske kapacitete?
23. Kako se Dulong–Petitov zakon može objasniti pomoću kinetičke teorije plinova?
24. Kako se može izračunati izovolumni specifični toplinski kapacitet jednoatomnih plinova?
25. Objasnite van der Waalovu jednadžbu stanja realnog plina. Koje je fizikalno značenje parametara a i b u toj jednadžbi?
26. Kako se mogu odrediti koeficijenti a i b u van der Waalsovoj jednadžbi? Izračunajte ih za CO_2 i vodu paru.
27. Nacrtajte $p(V)$ za CO_2 za $T = 400 \text{ K}$, $T = 304 \text{ K}$ i $T = 273 \text{ K}$, uzevši u obzir da je $a = 3,64 \cdot 10^{-1} \text{ N m}^4/\text{mol}^2$ i $b = 4,28 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}^{-1}$. Objasnite dobivene rezultate.

FIZIKALNE VELIČINE I JEDINICE

Znak	Naziv	Jedinica
l	duljina	m
$S(A)$	površina	m ²
V	volumen	m ³
v	specifični volumen	m ³ /kg
V_m	molarni volumen	m ³ /mol
m	masa	kg
ρ	gustoća	kg/m ³
t	vrijeme	s
s	put	m
v, u, c	brzina	m/s
a	akceleracija (ubrzanje)	m/s ²
g	akceleracija sile teže (slobodnog pada)	m/s ²
f, ν	frekvencija	Hz
ω	kružna frekvencija, pulzacija	s ⁻¹
T	period	s
n	broj okretaja	s ⁻¹
ω	kutna brzina	rad/s, s ⁻¹
α	kutna akceleracija	rad/s ² , s ⁻²
λ	valna duljina	m
k	valni broj	m ⁻¹
F	sila	N
I	impuls sile	Ns
G	težina	N
F_G	sila teža	N
F_u	uzgon	N
p	količina gibanja	kg m/s
G	gravitacijska konstanta	m ³ s ⁻² kg ⁻²
γ	jakost gravitacijskog polja	N/kg
M	moment sile	Nm
I	moment tromosti (inercije)	kg m ²
L	moment količine gibanja	kg m ² /s
W	rad	J
E	energija	J
E_p	potencijalna energija	J
E_k	kinetička energija	J
P	snaga	W
w	gustoća energije	J/m ³
η	korisnost, stupanj korisnog djelovanja	l
E	modul elastičnosti	N/m ²
κ	stlačivost	Pa ⁻¹
k	konstanta opruge	N/m
μ	faktor trenja	l
η	koeficijent dinamičke viskoznosti	Ns/m ²
ν	koeficijent kinematičke viskoznosti	m ² /s
σ	površinska napetost	N/m

q_m	maseni protok	kg/s
q_v	volumni protok	m ³ /s
T	termodinamička temperatura	K
t	Celzijeva temperatura	°C
α	koeficijent linearnog rastezanja	K ⁻¹
γ	koeficijent toplinskog širenja	K ⁻¹
β	koeficijent promjene tlaka	K ⁻¹
Q	toplina	J
R	plinska konstanta	J/(mol K)
k	Boltzmannova konstanta	J/K
L	specifična toplina transformacije faze	J/kg
Φ	toplinski tok	W
q	gustoća toplinskog toka	W/m ²
R	toplinski otpor	K/W
λ	koeficijent toplinske vodljivosti	W/(Km)
h_c	koeficijent konvekcije	W/(m ² K)
h_r	koeficijent prijenosa topline zračenjem	W/(m ² K)
k	koeficijent prijenosa topline (toplinskih gubitaka)	W/(m ² K)
C_t	toplinski kapacitet	J/K
c	specifični toplinski kapacitet	J/(kg K)
C	molarni toplinski kapacitet	J/(mol K)
κ	adijabatski koeficijent (c_p/c_v)	1
U	unutrašnja energija	J
H	entalpija	J
S	entropija	J/K
σ	Stefan-Boltzmannova konstanta	W/(K ⁴ m ²)
α	faktor apsorpcije	1
ϱ	faktor refleksije	1
ε	faktor emisije	1
M	energetska (radijacijska) egzitancija	W/m ²
M_λ	spektralna egzitancija	W/m ³
n	količina tvari (množina)	mol
N_A	Avogadrova konstanta	mol ⁻¹
M	molarna masa	kg/mol

VAŽNJE KONSTANTE

brzina svjetlosti u vakuumu
 elementarni električni naboj
 dielektrična konstanta (permitivnost) vakuuma
 permeabilnost vakuuma
 gravitacijska konstanta
 Planckova konstanta
 Boltzmannova konstanta
 plinska konstanta
 Avogadrova konstanta
 normirani molarni volumen plina
 Stefan-Boltzmannova konstanta
 Rydbergova konstanta
 Faradayeva konstanta
 atomska masena konstanta
 akceleracija slobodnog pada
 srednji polumjer Zemlje
 masa Zemlje
 polumjer Sunca
 masa Sunca
 polumjer Mjeseca
 masa Mjeseca
 srednja udaljenost središta Zemlje i Sunca
 srednja udaljenost središta Zemlje i Mjeseca
 ophodno vrijeme Mjeseca oko Zemlje
 ophodno vrijeme Zemlje oko Sunca
 kutna brzina vrtnje Zemlje oko svoje osi

numeričke konstante:

Ludolfov broj
 baza prirodnih logaritama

$c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
 $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
 $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
 $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
 $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
 $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
 $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
 $V_{\text{mo}} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$
 $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
 $R_\infty = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
 $F = 9,648 \cdot 10^4 \text{ C mol}^{-1}$
 $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1 \text{ u}$
 $g = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$
 $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
 $5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
 $6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$
 $1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
 $1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$
 $7,33 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
 $1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$
 $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$
 $27,32 \text{ dana} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ s}$
 $365,25 \text{ dana}$
 $7,272 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$

$\pi = 3,14159$
 $e = 2,7183$

LITERATURA

- M. M. Abbot and H. C. Van Ness, *Thermodynamics*, Schaum's Outline Series, New York, 1972.
- M. Alonso and E. J. Finn, *Fundamental University Physics*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1969.
- A. Beiser, *Modern Tehnical Physics*, Cummings Publ. Co., 1966.
- J. E. Betts, *Physics for technology*, Reston Publ. Comp., Reston, 1976.
- A. Böge, *Physik*, Vieweg, Braunschweig, 1974.
- A. I. Braun and S. M. Marco, *Introduction to Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1958.
- G. Bruhat, *Thermodynamique*, Masson et C^{ie}, Paris, 1968.
- F. Bueche, *Introduction to Physics for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.
- D. M. Burns and S. G. G. MacDonald, *Physics for Biology and Pre-Medical Students*, Addison-Wesley Publ., London, 1975.
- N. Cindro, *Opća fizika I*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.
- P. Dobrinski, G. Krakau und A. Vogel, *Physik für Ingenieure*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1970.
- K. Dransfeld et al., *Physik I*, Oldenbourg, München, 1974.
- G. D. Freier, *University Physics*, Meredith Publ. Comp., New York, 1965.
- S. Gartenhaus, *Physics, Basic principles*, Holt, Rinehart and Wiston, New York, 1977.
- D. Halliday and R. Resnick, *Fundamentals of Physics*, J. Wiley and Sons, New York, 1970.
- Z. Kaminski and R. A. Giles, *Physics*, London Iliffe Books Ltd., 1968.
- C. Kittel, W. D. Knight i M. A. Ruderman, *Mehanika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1982.
- F. Kreith, J. F. Kreider, *Principles of Solar Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- W. Körner et al., *Physik-Fundament der Technik*, VEB Fachbuch Verlag, Leipzig, 1973.
- H. Kuchling, *Physik*, Buch und Zeit Verlags, Köln, 1972.
- H. Lindner, *Physik für Ingenieure*, Vieweg, Braunschweig, 1973.
- V. Lopašić, *Predavanja iz fizike*, Sveučilište u Zagrebu, 1966.
- A. C. Melissinos and F. Lobkowicz, *Physics for Scientists and Engineers*, Saunders Comp., Philadelphia, 1975.
- W. C. Michels et al., *Foundations of Physics*, D. Van Nostrand Comp. Inc., Princeton, 1968.
- J. Morgan, *Introduction to University Physics*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1969.
- M. Paić, *Toplina i termodinamika*, Školska knjiga, Zagreb, 1994.
- D. R. Pitts and L. E. Sissom, *Heat Transfer*, Schaum's Outline Series, New York, 1977.
- I. V. Savelyev, *Physics, A general course*, Mir Publisher, Moscow, 1977.
- F. W. Sears, *Uvod u termodinamiku, kinetičku teoriju i statističku mehaniku*, Vuk Karadžić, Beograd, 1969.
- F. W. Sears and M. W. Zemansky, *University Physics*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1967.
- H. A. Stuart, G. Klages, *Kurzes Lehrbuch der Physik*, Springer Verlag, Berlin, 1979.
- Z. Šporer, *Toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.
- Tehnička enciklopedija*, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, 8, 1982.
- K. Wark, *Thermodynamics*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokio, 1977.
- R. T. Weidner and R. L. Sells, *Elementary Classical Physics*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1967.
- D. Halliday, R. Resnick, K. Krane, *Physics*, 5. izdanje, John Wiley and Sons, Inc., 2005.
- H. Benson, *University Physics*, Revised Edition, John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- R. A. Serway, J. S. Faughn, *College Physics*, Sounders College Publishing, 1999.

KAZALO POJMOVA

A

adijabata 212, 214
adijabatska konstanta 213
— promjena 212
adijabatski koeficijent 213
— proces 212
aerodinamički faktor 175
— oblik 175
— uzgon 176
agregatno stanje 192
akceleracija 22
— centrifugalna 115
— centripetalna 28
— Coriolisova 115
— konstantna 23
— kutna 29
— radijalna 27
— sile teže 25, 125
— srednja (prosječna) 22
— tangencijalna 28
— trenutna (prava) 22
akcija i reakcija 44
amper 7
anomalija (anomalno rastezanje) vode 184
apsolutna nula 180
apsorpcijski rashladni stroj 228
areometar 153
Arhimedov princip 153
aritmetička sredina 4
atmosferski tlak 151
atomska sat 7
Atwoodov padostroj 41
Avogadrov broj 187
— zakon 187
Avogadrova konstanta 187

B

balistička krivulja 35
balističko njihalo 76
bar 146
barometar 150
barometarska formula 151
benzinski (Ottov) motor 221
Bernoullijeva jednadžba 163
bijelo tijelo 202
Boltzmannova konstanta 235
— raspodjela 239
— relacija 225
Boyle-Mariotteov zakon 185
Brownovo gibanje 231
brzina 18
— kozmička 51
— kritična 169
— kutna 27
— molekula 233, 236
— najvjerojatnija 238
— obodna 26

— pri kružnom gibanju 27
— srednja (prosječna) 20, 238
— srednja kvadratična (efektivna) 238
— trenutna (prava) 20

C

Cardanovo učvršćenje zvrka 101
Carnotov kružni proces 218, 220
— inverzni kružni proces 227
Cavendishov eksperiment 120
Celzijeva skala 179
Celsiusov stupanj 8, 180
centar mase 53, 89
centrifugalna akceleracija 115, 124
— sila 115, 124
centripetalna akceleracija 28, 58
— sila 58
cezijev sat 7
Charlesov zakon 186
CGPM 6
CIPM 6
Coriolisova sila 116
crno tijelo 202

D

deceleracija 23
decimalni predmeci 9
definicija ampera 7
— kande 7
— kelvina 7
— kilograma 7
— metra 6
— mola 7
— sekunde 6
deformacija 38
depresija, kapilarna 159
devijacija 4
Dieselov proces 221
dilatacija vremena 138
dinamička sličnost 171
— viskoznost 169
dinamičko mjerenje mase 129
dinamika 16, 38
— fluida 161
dinamometar 38
disipativna sila 68
domet hica 34
drugi zakon, Newtonov 40
— termodinamike 217
Dulong-Petitov zakon 191
dužina, kontrakcija 137
— vlastita 137

Dž

džul 62, 188

E

- efektivna brzina 234, 238
- egzitantcija 203
 - spektralna 203
- Einsteinova teorija relativnosti 132
- Einsteinov princip relativnosti 134
- eksperiment 2
- eksperimentalna metoda 2
- elastična sila 63
- elektronvolt 62
- energija 64, 142
 - elastična 68
 - kinetička 65, 142
 - mehanička 64
 - mirovanja 142, 144
 - molekula, srednja 240
 - nemehanička 64
 - potencijalna 66
 - rotacije 103
 - ukupna 70
 - unutrašnja 209, 211
 - gravitacijska, potencijalna 66, 126
 - zakon očuvanja 70
- entalpija 215
 - molarna 215
 - specifična 215
 - vode 217
 - zasićene pare 217
- entropija 221
 - idealnog plina 224
 - i termodinamička vjerojatnost 225
- eter 132
- etalon metra 6
 - kilograma 6

F

- Fahrenheitova ljestvica 180
 - ov stupanj 180
- faktor apsorpcije 202
 - emisije 204
 - refleksije 202
 - trenja 56
- faza 192
- fiksne točke 179
- fizičko polje 1, 123
- fizika klasična 2
 - metode istraživanja 2
 - moderna 2
- fizikalna veličina 5
 - brojčana vrijednost 5
 - mjerna jedinica 5
 - znak 5
- fluid 146
 - idealan 161
 - realan 169
- Foucaultovo njihalo 117
- Fourierov zakon 198
- frekvencija 28

- F-s dijagram 62
- funkcija stanja 211
 - procesa 211

G

- Galilejeve transformacije 108, 134
- Galilejev princip relativnosti 108, 110
- Gay-Lussacov zakon 185
- Generalna konferencija za utege i mjere (CGPM) 6
- gibanje 16
 - centra mase 54
 - jednoliko 20
 - jednoliko ubrzano 24
 - krivocrtno 30
 - kružno 26
 - nejednoliko 20
 - pravocrtno 18, 20
 - s konstantnom akceleracijom 23
 - s konstantnom kutnom akceleracijom 29
- gradijent brzine 169
 - temperature 198
- granični sloj 172
- gravitacija 119
- gravitacijska konstanta 120
 - potencijalna energija 66, 126
 - (teška) masa 129
 - sila 119
- gravitacijski potencijal 128
- gravitacijsko polje 123
 - — Zemlje 124
- Guerickeov pokus 150
- gustoća 44
 - toplinskog toka 198

H

- hidraulička preša 146
- hidraulički tlak 146
- hidrostatika 146
- hidrostatski tlak 148
 - paradoks 149
- hitac horizontalni 34
 - kosi 33
 - prema dolje 34
 - vertikalni (u vis) 34
- Hookeov zakon 63, 182

I

- idealni fluid 161
 - plin 184, 232
- impuls sile 46
- impulsne sile 47
- indiferentna ravnoteža 86
- inercija 39, 40
- inercijalna sila 110
- inertna (troma) masa 39, 129
- infracrveno zračenje 202

intenzitet gravitacijskog polja 123
 internacionalni sustav (SI) 6
 inverzni Carnotov proces 227
 ISO 5
 isparavanje 194
 istjecanje tekućine 166
 IUPAP 5
 izobara 186
 izobarna promjena 186, 212
 izobarni proces 186, 212
 izohora 185
 izohorna promjena 186, 212
 izoterma 185
 izotermni proces 185, 212
 izovolumna promjena 186, 212

J

jakost svjetlosti 8
 jedinica 6, 9
 — dopunska 9
 — dužine 7
 — izvedena 9
 — jakosti struje 7
 — jakosti svjetlosti 8
 — količine tvari (množine) 8
 — mase 7
 — osnovna 6
 — temperature 8
 — vremena 7
 jedinični vektor 12
 jednadžba adijabate 213
 — Bernoullijeva 163
 — idealnog plina 186
 — kontinuiteta 163
 — plina 186, 245
 — realnog plina 245
 — rotacije krutog tijela 90
 — Van der Waalsova 245
 jednoliko gibanje po pravcu 18
 jednoliko kružno gibanje 26
 jednoliko ubrzano gibanje 23

K

kalorija 188
 kalorimetar 191
 kalorimetrija 191
 kandela 8
 kaotičnost sistema 225
 kapilara 159
 kapilarna depresija 159
 — elevacija 159
 kelvin 8, 180
 Kelvinova skala 180
 Keplerovi zakoni 121
 kilogram 7
 kilovatsat 63
 kinematika 16
 kinematička viskoznost 169

kinetička energija 65
 — — pri rotaciji 103
 — — relativistička 142
 kinetička teorija plinova 232
 kinetički faktor trenja 56
 kinetičko objašnjenje temperature 235
 kinetičko objašnjenje tlaka 233
 Kirchhoffov zakon 205
 klasična fizika 2
 koeficijent, adijabatski 213
 — djelovanja toplinske pumpe 227
 — hlađenja 227
 — konvekcije 200
 — korisnog djelovanja 220
 — linearnog rastezanja 181
 — površinske napetosti 156
 — prijenosa topline 201, 206
 — toplinske vodljivosti 199
 — toplinskog širenja 183
 — trenja 56
 — — dinamički (kinetički) 56
 — — statički 56
 — — klizanja 57
 — — kotrljanja 57
 — viskoznosti 169
 kohezivne sile 157, 158
 količina gibanja 39, 45, 141, 142
 — — i impuls sile 47
 — — relativistička 142
 — — ukupna 49
 — — zakon očuvanja 49
 količina topline 188
 — — reducirana 221
 količina tvari (množina) 8
 kolinearni vektori 10
 kompresibilnost 146
 kompresijski rashladni stroj 228
 konkurentne sile 79, 80
 konstanta, Boltzmannova 188, 225, 237
 — gravitacijska 119, 120
 — Planckova 203
 — plinska 187
 — Stefan-Boltzmannova 204
 konzervativne sile 67, 71
 kontrakcija dužine 137
 — mlaza 167
 konvekcija 200
 — prisilna 200
 — slobodna 200
 konjska snaga 72
 koordinatni sustav 12
 kosi hitac 33
 — — domet 34
 — — jednadžba putanje 34
 — — maksimalna visina 34
 — — vrijeme uspinjanja 34
 kosina 43
 kotrljanje 104
 kozmička brzina, prva 51, 128
 — —, druga 52, 128
 krak sile 81

kritična brzina 170
 — temperatura 196, 247
 — točka 195, 196, 247
 kritične konstante plinova 196, 247
 kritični tlak 196, 247
 — volumen 196, 247
 kruto tijelo 72, 88
 kružni proces 208, 218
 kružno gibanje 26
 — — jednoliko 26
 — — nejednoliko 28
 kut elevacije 33
 kutna akceleracija 29
 kutna brzina 27

L

labilna ravnoteža 86
 laboratorijski sustav 16
 laminarno strujanje 169
 Laplaceova formula 157
 latentna toplota 194
 — — isparavanja 194
 — — taljenja 194
 Lorentzove transformacije 134

M

Magnusov efekt 177
 maksimalna visina hica 34
 maksimalni stupanj iskorištenja topline 220
 manometar, otvoreni 150
 — zatvoreni 150
 — živin 150
 masa 38, 41
 — centar 52, 54
 — gravitacijska 129
 — inertna 129
 — ovisnost o brzini 39
 — relativistička 39
 — teška 129
 — troma 41, 129
 materija 1
 materijalna točka 16
 Maxwellova raspodjela 237
 međumolekularne sile 155, 158
 Međunarodni komitet za utege i mjere 6
 Međunarodni sustav jedinica 6
 mehanika, klasična 2
 — kvantna 2
 — relativistička 2
 mehanička energija 64
 metar 6
 metoda najmanjih kvadrata (linearne regresije) 3
 metrologija 6
 mezoni 139
 Michelson-Morleyev eksperiment 133
 μ mezon 139
 mjerenje 2

mjerna jedinica 5
 moderna fizika 2
 modul elastičnosti (Youngov) 182
 mol 8
 molarna entalpija 215
 molekularne sile 155, 158
 molarni volumen plina 195
 molarni toplinski kapacitet 189, 241
 molekulska brzina 236
 molarna masa 188
 moment količine gibanja 96
 — — — krutog tijela 97
 — — — zakon očuvanja 98
 moment inercije 90
 — sile 81, 89
 — para sila 84
 — tromosti 90

N

najvjerojatnija brzina 238
 napetost površine 115
 — — koeficijent 156
 neelastičan sudar 75
 nejednoliko gibanje po pravcu 20
 — kružno gibanje 28
 nekonkurentne sile 82
 nepovratni proces 209
 Nernst-Lindemannova relacija 190
 Newtonova mehanika 38
 Newtonov zakon, prvi 40
 — —, drugi 40, 42, 142
 — —, treći 44
 — — gravitacije 119
 — — hlađenja 200
 nula, apsolutna 180
 njujn 41

O

okrajni kut 158
 ophodno vrijeme 28
 opruga 2, 3, 38, 63, 68
 — produljenje 3, 38
 — zakon 4
 osnovne mjerne jedinice 6
 — fizikalne veličine 6
 os rotacije 89
 otpor sredstva 174
 — zraka 24, 35
 otporni broj 175
 — termometar 180
 Ottov motor 221

P

pad, slobodni 24
 paralelne sile 82
 par sila 84
 Pascalov zakon 146

paskal 146
 perpetuum mobile, prve vrste 211
 — —, druge vrste 218
 pirometar 181
 Pitot-Prandtlova cijev 168
 Planckov zakon zračenja 203
 plin idealni 184
 — realni 185, 197
 plinska jednadžba 188
 — konstanta 187
 plinski zakoni 184
 plivanje tijela 154
 pogreška mjerenja 5
 — — srednja kvadratična 5
 Poiseuilleova formula 173
 — zakon 173
 Poissonove jednadžbe 214
 poluga 85
 polje gravitacijsko 124
 pomak 17, 18
 postulati specijalne teorije relativnosti 134
 potencijal gravitacijski 128
 potencijalna energija 66
 — — gravitacijska 66, 126
 — — međumolekularna 193
 — — opruge (elastične sile) 68
 potisak 50
 poučak o radu i kinetičkoj energiji 65
 — o radu i potencijalnoj energiji 68
 — o radu i ukupnoj energiji 69
 pramjera 6
 pravilo desne ruke (desnog vijka) 14, 82
 pravocrtno gibanje 17
 — — jednoliko 17, 18
 — — jednoliko ubrzano 23
 — — s konstantnom akceleracijom 23
 — — nejednoliko 20
 precesija zvrka 101
 prijenos topline 197
 princip ekvipartitije energije 235
 — ekvivalencije 130
 — konstantnosti brzine svjetlosti 134
 — nezavisnosti gibanja 32
 — relativnosti Einsteinov 134
 — — Galilejev 108
 — ustrajnosti 40
 proporcionalnost mase i energije 143
 proces ireverzibilni 209
 — reverzibilni 208
 prostorno-vremenski dijagram 19
 protok 162, 173
 prvi Newtonov zakon 40
 — zakon termodinamike 211
 p - T dijagram 195
 put 17, 18
 putanja 17
 p - V dijagram 185, 195, 197
 p - V - T dijagram 195

R

rad 61
 — dizanja 63, 126
 — elastične sile 64
 — idealnog plina 210
 — po zatvorenom putu 67
 — pri rastezanju opruge 63
 — pri rotaciji 104
 — sile trenja 64
 — u termodinamici 209
 radijan 9, 26
 radijalna akceleracija 27
 — sila 57
 radijusvektor 13, 17
 raketa 59
 rashladni stroj 226, 228
 raspodjela molekula plina po brzinama 236
 — — po energijama 239
 — Maxwellova 236
 — Maxwell-Boltzmannova 239
 ravnoteža 79
 — indiferentna 86
 — krutog tijela 84
 — labilna 86
 — materijalne točke 79
 — na kosini 80
 — stabilna 86
 — termička 179
 reakcija 44
 realni plin 197, 245
 reducirana topline 221
 referentni sustav 16, 40, 108
 relativistička energija 142
 — jednadžba gibanja 142
 — količina gibanja 142
 — masa 141
 — mehanika 132
 relativističko slaganje brzina 140
 reverzibilni proces 208
 Reynoldsov broj 170
 Richmannovo pravilo 192
 rotacija 79
 — krutog tijela 88
 — prstena 91

S

SAE 170
 sekunda 7
 sila 38
 — adhezije 155
 — centrifugalna 115
 — centripetalna 57
 — Coriolisova 116
 — disipativna 68
 — elastična 63
 — hvatište 81
 — impulsna 47
 — inercijalna 111
 — konzervativna 67

- međumolekularna 155, 158
- mjerenje 38
- nekonzervativna 68
- pritiska 146
- radijalna 57
- tangencijalna 90
- teža, 25, 43, 124
- trenja 56
- unutrašnjeg trenja 169
- viskoznosti 169
- sile konkurentne 80
 - nekonkurentne 82
 - paralelne 82
 - unutrašnje 48
 - vanjske 48
- sistem, inercijalni 108
 - izolirani 48, 98
 - jedinica 6
 - materijalnih točaka (čestica) 52
 - neinercijalni 108
 - referencije 16
 - rotirajući 114
 - ubrzani 110, 111
 - zatvoreni 48, 98
- sitno tijelo 16
- sivo tijelo 203
- skalar 10
- skalarni produkt 13, 62
- slaganje relativističkih brzina 140
- slobodni pad 23, 24
 - — akceleracija 24
- smjer vektora 10
- snaga 72
 - pri rotaciji 104
- specifična toplota 189
 - transformacije 194, 216
 - entalpija 215
- specifični toplinski kapacitet 189
 - — — čvrstih tijela 244
 - — — plinova 190
 - — — pri stalnom tlaku 190, 216
 - — — pri stalnom volumenu 190, 216
- specifični volumen 195
- specijalna teorija relativnosti 132
- spektralna egzitancija 203
- spojene posude 149
- srednja akceleracija 22
 - brzina 20
 - kvadratična brzina 234, 238
 - kvadratična pogreška 5
- stabilna ravnoteža 86
- statika 79
- statički faktor trenja 56
- statički tlak 163
- statičko trenje 56
- $s(t)$ dijagram 19
- Stefan-Boltzmannov zakon 204
- Steinerov poučak 95
- steradian 9
- Sternov pokus 234
- stlačivost 146
- strujanje (konvekcija) 197

- strujanje idealnog fluida 162
- strujanje laminarno 169
 - stacionarno 161
 - turbulentno 169
- strujna cijev 161
- strujnica 161
- Stokesov zakon 174
- stupanj, Celzijev 179
 - , Fahrenheitov 180
 - korisnog djelovanja 220
 - slobode 235
- sublimacija 195
- sudar 73
 - centralan 73
 - elastičan 74
 - neelastičan 75
 - Q vrijednost 76

T

- taljenje 194
- tangencijalna akceleracija 28
- temperatura 8, 179
 - apsolutna 8, 180
 - kritična 196, 247
 - termodinamička 8, 180
- temperaturno rastezanje 181
- termička ravnoteža 179
- termodinamika 206
 - prvi zakon 211
 - drugi zakon 217
- termodinamička temperatura 8, 240
 - temperaturna skala 180
 - vjerojatnost 225
- termodinamički proces 206
 - sistem 206
- termometar 179
 - otporni 180
 - plinski 181
 - živin 180
- termometrija 179
- termosifonski sistem 200
- težina 43, 124
- težište 55, 84
- tlak 146
 - atmosferski 151
 - dinamički 164
 - hidraulički 146
 - hidrostatski 148
 - idealnog plina 232
 - ispod zakrivljene površine tekućine 157
 - na dno 149
 - statički 163
 - u mjehuriću 157
 - zasićene pare 197
- tlakomjer 150
- tok toplinski 198
- toplina 188
 - latentna 194
 - reducirana 221
 - specifična 189

toplinska pumpa 226
 toplinski kapacitet 188, 241
 — — specifični 189
 — otpor 199
 — stroj 220, 226
 — tok 198
 toplinsko gibanje 179
 — rastezanje 181, 183
 — zračenje 201
 Torricellijev pokus 150
 — teorem 167
 torziona vaga 120
 trajektorija (putanja) 17
 transformacija faze 194
 — Galilejeva 109
 — Lorentzova 135
 translacija 79
 trenutna akceleracija 22
 — brzina 20
 trenje 55
 — dinamičko 56
 — faktor 56
 — kinetičko 56
 — klizanja 56
 — koeficijent 56
 — kotrljanja 57
 — statičko 56
 trojna točka 8, 180, 195
 — — vode 8
 trojno stanje 180
 tromost 39
 T—S dijagram 224
 turbulentno strujanje 169

U

ubrzanje 22
 univerzalna plinska konstanta 187
 unutrašnja energija 209, 235
 — — idealnog plina 235
 unutrašnje trenje (viskoznost) 169
 usporenje 23
 ustrajnost 39
 uvjet plivanja 154
 uvjet ravnoteže krutog tijela 85
 — — materijalne točke 79
 uzgon 152

V

Van der Waalsova jednadžba 197, 245
 Van der Waalsove konstante 246
 — — — sile 193
 vat 73
 vatsat 63
 vektor 10
 — aksijalni 82
 — iznos 10
 — jedinični 12
 — klizni 81
 — komponente 12

— položaja 13
 — pomaka 17
 — pravac nosilac 10
 — radijus 13
 vektori, kolinearni 10
 — množenje 13, 14
 — oduzimanje 11
 — zbrajanje 11
 vektorski produkt 14, 82
 veličina, izvedena 9
 — osnovna 6
 — skalarna 10
 — vektorska 10

Venturijeva cijev 167
 vertikalni hitac 34
 veza između mase i energije 142
 viskoznost 169
 — dinamička 169
 — kinematička 169
 — koeficijent 169
 vlastita dužina 137
 — masa 141
 vlastiti sustav 139
 vlastito vrijeme 139
 vodena vrijednost kalorimetra 192
 vođenje (kondukcija) topline 197
 $v(t)$ dijagram 19

W

Wienov zakon 204

Y

Youngov modul elastičnosti 182

Z

zakon, Arhimedov 153
 — Avogadrov 187
 — Boyle-Mariotteov 185
 — Dulong-Petitov 191
 — Gay-Lussacov 185
 — Newtonov gibanja 40, 42, 44
 — Newtonov gravitacije 119
 — Newtonov hlađenja 200
 — o mjernim jedinicama i mjerilima 6
 — opruge 4
 — Pascalov 146
 — Poiseuillov 173
 — Stefan-Boltzmannov 204
 — Stokesov 174
 — termodinamike, prvi 211
 — —, drugi 217
 zakon očuvanja energije 70
 — — količine gibanja 49
 — — momenta količine gibanja 98

zasićena para 197
— tekućina 197
zračenje (radijacija) 195
— infracrveno 202
zvrk 100
— Cardanovo učvršćenje 101
— precesija 101
— slobodni 100

Ž

žirokompas 102
žirohorizont 102
žirovertikala 102
živin barometar 150
— manometar 150
— termometar 180

KAZALO IMENA

- Arhimed (287—212), grčki matematičar 153
Atwood, George (1746—1807), britanski matematičar 41
Avogadro, Amadeo (1776—1856), talijanski fizičar 187
Bernoulli, Daniel (1700—1782), švicarski matematičar i fizičar 163
Boltzmann, Ludwig (1844—1906), austrijski fizičar 204
Boyle, Robert (1627—1691), britanski kemičar i fizičar 184
Brown, Robert (1773—1858), engleski botaničar 231
Cardano, Geronimo (1501—1576), talijanski liječnik i matematičar 101
Carnot, Sadi N. L. (1796—1832), francuski fizičar 218
Cavendish, Henry (1731—1810), engleski fizičar i kemičar 120
Celsius, Anders (1701—1744), švedski astronom 179
Charles, Jaques A. C. (1746—1823), francuski fizičar 183
Clausius, Rudolf (1822—1888), njemački fizičar 218
Coriolis, Gaspard de (1792—1843), francuski fizičar 116
Debye, Peter J. W. (1884—1966), nizozemski fizičar 245
Descartes René (Renatus Cartesius, 1596—1650), francuski filozof, matematičar i fizičar 17
Diesel, Rudolf (1858—1913), njemački izumitelj 221
Dulong, Pierre L. (1785—1838), francuski kemičar 191
Einstein, Albert (1879—1955), 132, 245
Fahrenheit, Gabriel D. (1686—1736), njemački fizičar 180
Fitzgerald, George F. (1851—1901), irski fizičar 138
Foucault, Jean B. L. (1819—1868), francuski fizičar 117
Fourier, Jean B. J. (1768—1830), francuski matematičar i fizičar 198
Galileo Galilei (1564—1642), talijanski matematičar, fizičar i astronom 16
Gay-Lussac, Joseph L. (1778—1850), francuski kemičar i fizičar 185
Guericke, Otto von (1602—1686), njemački fizičar 150
Hooke, Robert (1635—1703), engleski fizičar 63, 182
Joule, James P. (1818—1889), engleski fizičar 62
Kelvin, Lord, William Thomson (1824—1907), britanski fizičar 180
Kepler, John (1571—1630), njemački astronom 121
Kirchhoff, Gustav R. (1824—1887), njemački fizičar 204
Kopernik, Nikola (1473—1543), poljski astronom 121
Laplace, Pierre S. (1749—1827), francuski astronom i matematičar 157
Lindemann, Frederick A. (1868—1937), engleski fizičar 190
Lorentz Hendrik A. (1853—1928), nizozemski fizičar 135
Magnus, H. G. (1802—1870), njemački fizičar i kemičar 177
Mariotte Edmé (1620—1684), francuski fizičar 184
Michelson, Albert A. (1852—1931), američki fizičar 132
Morley, Edwards W. (1838—1923), američki kemičar 132
Nernst, Walter (1864—1941), njemački fizikalni kemičar 190
Newton, Sir Isaac (1642—1727), engleski fizičar 16, 200
Otto, Nikolaus A. (1832—1891), njemački izumitelj 221

- Pascal, Blaise (1623—1662), francuski matematičar, filozof i fizičar 146
Petit, Alexis T. (1791—1820), francuski fizičar 191
Pitot, Henri (1695—1771), francuski fizičar i inženjer 167
Planck, Max K. E. L. (1858—1947), njemački fizičar 203
Poiseuille, Jean L. M. (1799—1869), francuski fiziolog i fizičar 173
Poisson, Simeon D. (1781—1840), francuski matematičar 214
Prandtl, Ludwig (1875—1953), njemački fizičar 99, 168
Reynolds, Osborne (1842—1912), britanski fizičar i inženjer 170
Richmann, Georg W. (1711—1753), ruski fizičar 192
Stefan, Jožef (1835—1893), slovenski fizičar, profesor na Sveučilištu u Beču 204
Steiner Jakob (1796—1863), njemački matematičar 95
Stern, Otto (1888—1969), njemački fizičar 234
Stokes, Sir George G. (1819—1903), britanski matematičar i fizičar 174
Thomson, Sir William (Lord Kelvin, 1824—1907), britanski fizičar 180
Torricelli, Evangelista (1608—1647), talijanski fizičar 150
Van der Waals, Johannes D. (1837—1923), nizozemski fizičar 197, 245
Venturi, Giovanni B. (1746—1822), talijanski znanstvenik 167
Watt, James (1736—1819), škotski inženjer 73
Wien, Wilhelm (1864—1928), njemački fizičar 204
Young, Thomas (1773—1829), engleski liječnik i fizičar 182

p-orbitale
(osim He)

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															
7	(223) Fr 87	(226) Ra 88															

s-orbitale

1

d-orbitale

5

f-orbitale

7

		p-orbitale (osim He)															
		17 18															
		13 14 15 16															
		1,008 H 1															
		relativna atomska masa → simbol → atomski broj →															
		2															
		1															
1																	
2	6,941 Li 3	9,012 Be 4															
3	22,99 Na 11	24,31 Mg 12															
4	39,10 K 19	40,08 Ca 20															
5	85,47 Rb 37	87,62 Sr 38															
6	132,9 Cs 55	137,3 Ba 56															