S V E U Č I L I Š T E U Z A G R E B U

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET - ZAGREB

Izv. prof. dr VATROSLAV LOPAŠIĆ
dr VESNA KOS
doc. dr VIŠNJE HENČ-BARTOLIĆ

MJERE I MJERENJA U FIZICI



ZAGREB, 1986.

S V E U Č I L I Š T E U Z A G R E B U

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET - ZAGREB

Izv. prof. dr VATROSLAV LOPAŠIĆ
dr VESNA KOS
doc. dr VIŠNJE HENČ-BARTOLIĆ

MJERE I MJERENJA U FIZICI

ZAGREB, 1986.

Odluka Odbora za nastavu i izdavačku djelatnost Sveučilišta u Zagrebu
Broj 02-1239/1-1985.

Cijena za studente Sveučilišta u Zagrebu
Din 458.–

Tisak: Sveučilišna naklada Liber Zagreb, Trg maršala Tita 14
Broj 1525/SL

Ova skripta su namijenjena studentima Tehničkih fakulteta koji slušaju fiziku na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu, kao i studentima trećeg stupnja nastave za predmet "Mjere i mjerenja u tehničkoj fizici" i "Fizika lasera".

U I odsjeku obradjene su osnove teorije i principi stvaranja jedinica fizikalnih veličina. Dan je historijski pregled nastajanja sistema do konačnog, danas u gotovo cijelom Svijetu korištenog Medjunarodnog sustava mjernih jedinica SI . Obradjene su i izvedene mjere SI u svim područjima fizike. Budući da ima cijeli niz vrijednih knjiga iz tehničkih znanosti koje koriste stare mjere, detaljno su razradjene veze starih i novog sistema jedinica uz tabelarne prikaze.

Pokus i iskustvo osnove su na kojima se oblikuju fizikalni pojmovi. Mjerenja pri tome imaju bitnu važnost i omogućuju da se fizikalna opažanja prikažu kao fizikalne veličine, mjernim brojem i mjerom. Tek nakon toga moguća je primjena matematičkih metoda. Eksperiment i mjerenje izvor su pravilno stečenog iskustva, posebno kod tehničara. Time se kod studenata razvoja samostalnost i kritičnost tj. znanstveni način mišljenja i aktivna primjena stečenog znanja. To su bile misli vodilje u stvaranju ovih vježbi.

U II odsjeku uvodno su izložene općenite upute o korištenju sprava za mjerenje i računanju pogreški. Laboratorijske vježbe opisane u ovim skriptama izvode se u praktikumu Zavoda za fiziku i prikrivaju gotovo sva područja fizike. Napisana su tako, da svaku vježbu može izvesti student prve godine studija u toku dva školska sata.

Većina je aparatura izradjena u Zavodu za fiziku uz sudjelovanje mnogih članova Zavoda. Posebno treba istaći doc.dr V.Henč-Bartolić, za izradu optičkih vježbi s laserom i polarimetrom, te mjerenja elektrolita i dioda, te inž. Melitu Coffou za izradu vježbi odredjivanje indeksa loma i metodu kompenzacije. Svim ostalim suradnicima, koji ovdje nisu spomenuti, zahvaljujemo na pomoći i doprinosu u izradi laboratorijskih vježbi.

Zagreb, svibnja 1981.

Autori

NAPOMENA UZ PONOVLJENI OTISAK DRUGOG IZDANJA OVIH SKRIPATA

Nakon prvog tiskanja "Drugoga preradjenog i dopunjenog izdanja" ovih skripata 1981.god. prihvaćena je na 17.zasjedanju Generalne konferencije za utege i mjere (CGPM), održanom od 17. do 21.listopada 1983. u Parizu, za osnovnu mjernu jedinicu za duljinu "metar" nova definicija koja u hrvatskom prijevodu glasi:

"Metar je duljina puta što ga svjetlost prevali u praznini za vrijeme od jednog 299 792 458-og dijela sekunde".

Brojčani podatak pri kraju definicije treba čitati ovako: "... od jednog dvjesta devedeset devet milijuna sedamsko devedeset dvije tisuće četiristo pedeset osmog dijela sekunde". Tu novu definiciju metra treba dodati na kraju članka na str.28 s time da se prednodna definicija ukuda. Nova definicija metra ima značajne načelne konsekvencije. Prikazat ćemo neke od tih.

Brzina svjetlosti u praznini (vakuumu) uzeta je "per definitionem" da iznosi $c=299\ 792\ 458\ m.s.^{-1}$. Tu je brojčani podatak za c matematički t o č a n . Prema tome je poznavanje fizikalne stalnice (konstante) c to bolje, što su sigurnije ostvarene mjerne jedinice metar i sekunda. Netočnost u podatku za c samo je u nesigurnosti mjernih jedinica. Ovim uzimanjem brzine c kao osnove za definiciju metra uključen je u mjeriteljstvo (metrologiju) jedan od postulata "Specijalne teorije relativnosti" koji glasi: "U svim inercijalnim sustavima dobiva se mjerenjem brzine svjetlosti u praznini ista veličina, bez obzira na to da li izvor svjetlosti miruje ili se giba". Za ta su mjerenja uvjeti postulata na Zemlji - može se reći - ispunjeni, pa je prema tome c stalnica koja predočuje graničnu brzinu što ju postiže samo svjetlost u praznini. Tako je A.Einstein dobio još jedan spomenik "trajniji od mjedi", taj put u mjeriteljstvu.

Budući da je permeabilnost praznine μ_o stalnica s točnim brojčanim podatkom (vidi str.42 i str. 72)

$$\mu_o = 4\pi\cdot 10^{-7}\ m^{-1}\cdot s\cdot V^{-1}\cdot A \quad ,$$ to iz Maxwellove relacije $c^2\varepsilon_o\mu_o = 1$ slijedi za dielektričnost praznine ε_o da je odsada prikazana izrazom

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi\{c\}^2}\cdot 10^7\ m^{-1}\cdot s\cdot V^{-1}\cdot A$$ u kojem je brojčani iznos t o č a n . Tu je $c = 299\ 792\ 458$ prihvaćeni mjerni broj brzine svjetlosti izražene mjerom $m\cdot s^{-1}$. Time je uspostavljena potpuna simetrija izmedju "magnetskih" i "električnih" veličina i na području mjernih jedinica, napose izmedju jedinica "amper" i "volt", pa se definiranje izvedenih mjera u elektromagnetizmu može jednako dobro načiniti bilo da se uzme mjera za električnu struju "amper" kao osnovna, bilo da se uzme mjera za električni napon "volt" kao osnovna. Za polazište ostvarenja izvedenih mjernih jedinica može sada j e d n a k o p r a v n o poslužiti bilo "strujna vaga" (vidi str.43), bilo "naponska vaga" kojom se ostvaruje mjerna jedinica za napon "volt". Takva je naponska vaga vrhunske točnosti razvijena i konstruirana na ETF-u u Zagrebu kao rezultat višegodišnjeg rada grupe većeg broja suradnika koju vodi prof.dr.ing. V.Bego.

Obzirom na prihvaćenu točnu vrijednost $\{c\}$ sada treba kod izlaganja na str.98 i dalje, to uzeti u obzir. Naime, pretvorbeni faktor ξ, koji bi mogli nazvati Weber-Kohlrauschovim brojem, sada je t o č n o dan izrazom $\xi = \{c\}\cdot 10^2$. Faktor 10^2 dolazi odatle što je $c = \{c\}\cdot m\cdot s^{-1} = \{c\}\cdot 10^2\ cm\cdot s^{-1} = \xi\ cm\cdot s^{-1}$. Napose na str. 109 treba sada rečenicu koja u 3.redku odozgo glasi: "Ovo medjutim nije slučaj za dva CGS sustava ... pomoću empiričkog pretvorbenog faktora ξ." brisati jer ξ ima sada teoretski točnu vrijednost, pa su prema tome i dva CGS sustava u elektromagnetizmu komenzurabilna.

U Zagrebu, studenoga 1985.

(V.L.)

S A D R Ž A J

	Stranica
U V O D	1
I. ODSJEK: MJERE I SUSTAVI MJERA	3
1. Veličinske jednadžbe	3-5
2. Zavisne i nezavisne fizikalne veličine	5-6
3. Nezavisne veličine u mehanici	6-9
4. Nezavisne veličine u elektricitetu	9-10
5. Nezavisne veličine u termodinamici(i fotometriji)	10-12
6. Mjere za fizikalne veličine	12-17
7. Medjunarodni sustav mjernih jedinica SI	18-20
8. Metar	21-28
9. Kilogram	28-31
10. Sekunda	31-38
11. Amper	38-44
12. Kelvin i mol	44-58
13. Kandela	58-60
14. Uvodne napomene uz daljnju izgradnju Medjunarodnog sustava SI	60-65
15. Izvedene mjere SI u mehanici	65-68
16. Izvedene mjere SI u elektromagnetizmu	68-72
17. Izvedene mjere SI u termodinamici	73-76
18. Izvedene mjere SI u fotometriji	76-77
19. CGS sustav mjera u mehanici	77-80
20. Uvodne napomene uz definiranje CGS izvedenih mjera u elektromagnetizmu	80-81
21. Elektrostatski CGS sustav mjera	81-90
22. Elektromagnetski CGS sustav mjera	91-98
23. Veza izmedju elektrostatskog i elektromagnetskog CGS sustava	98-104
24. Pretvaranje elst CGS mjera u elmg CGS mjere i obratno	104-105
25. Veza izmedju električnih CGS sustava i SI sustava	105-111
26. Tabelarni prikaz mjera elmg CGS i SI ekvivalenta	111-113

Stranica

27. Tabelarni prikaz mjera elst CGS i SI ekvivalenta 113-115
28. Brojčane jednadžbe 115-118
29. Primjeri za brojčani oblik nekih jednadžbi 118-127
30. Elst CGS sustav na drugi način 128-130
31. Elmg CGS sustav na drugi način 130-132
32. Oblik još nekih brojčanih jednadžbi uz upotrebu elst CGS i elmg CGS 132-136
33. Elst CGS i elmg CGS starog stila 136-143
34. Decimalne mjerne jedinice - predmetci u SI 143

II. ODSJEK: LABORATORIJSKA MJERENJA

Uvodne napomene i upute 144

SPRAVE I INSTRUMENTI ZA MJERENJE

1. Mjerenje dužina 145
2. Mjerenje vremena 145
3. Mjerenje sile 146
   - Pravila vaganja na analitičkoj vagi 146
4. Mjerenje gustoće 147
   - Uputa za Mohr-Westphalovu vagu 148
5. Mjerenje električnih veličina 148-149
   - Uputa o shuntu 149-150
   - Uputa za rukovanje elektronskim voltmetrom 150

POGREŠKE MJERENJA 151-153
MJERENJE MJERILIMA 154-156
ZAKON SPIRALNE OPRUGE 157-158
AIRY-EVO NJIHALO 159-161
TORZIONO TITRANJE 162-164
FIZIČKO NJIHALO 165-166
TRENJE 167-168
GUSTOĆA KRUTOG TIJELA 169-170
GUSTOĆA ALKOHOLA 171-172
RASPORED TLAKA OKO MODELA AVIONSKOG KRILA 173-174
ELEKTRIČNE SKLOPKE 175-177
OHMOV ZAKON 178-179
OTPOR MREŽE OTPORNIKA 180-182
MJERENJE OTPORA METODOM WHEATSTONE-OVOG MOSTA. 183-185
METODA KOMPENZACIJE 186-189

JOULEOV ZAKON 190-193
SPECIFIČNA VODLJIVOST ELEKTROLITA 194-196
KAPACITIVNI MOST 197-200
SNAGA KOD IZMJENIČNE STRUJE 201-203
PARALELNO SPAJANJE IMPEDANCIJA 204-206
BAŽDARENJE RC GENERATORA 207-209
BAKRENI KULOMETAR 210-212
BAŽDARENJE TERMOČLANKA 213-215
SNIMANJE U-I KARAKTERSITIKA KRISTALNE DIODE 216-218
KARAKTERISTIKA TRIODE 219-222
TOPLINA ISPARAVANJE 223-225
SFERNO ZRCALO 226-228
BESSELOVA METODA ZA MJERENJE ŽARIŠNE DALJINE POZITIVNE LEĆE 229-231
SPEKTROMETAR S PRIZMOM 232-234
ZAKONI FOTOMETRIJE 235-238
ODREDJIVANJE NEKIH KARAKTERISTIKA IZVORA SVJETLOSTI 239-240
ODREDJIVANJE KONCENTRACIJE ŠEĆERA U OTOPINAMA POMOĆU POLARIMETRA 241-244
DJELOVANJE LASERSKOG ZRAČENJA 245
MODULACIJA STALNE SNAGE LASERSKOG SNOPA POMOĆU POLAROIDA 246-248
OGIB SVJETLOSTI NA PUKOTINI 249-251
SPECIFIČNA TOPLINA UZDUHA c_p 252-257
ADIJABATSKA KONSTANTA PLINOVA 258-251
UPUTA ZA RAD S BOCOM PUNJENOM S CO_2 262
BRZINA ZVUKA U UZDUHU I U CO_2 266-268
ODREDJIVANJE INDEKSA LOMA POMOĆU PRIVIDNE DUBINE 269-271
MJERENJE VERDETOVE KONSTANTE 272-273
LAMBERTOV ZAKON 274-275
LITERATURA 276-277

U v o d

Svrha je Laboratorijskih vježbi iz fizike u tehničkom studiju, da se studenti tehnike upoznaju s osnovnim radnjama fizikalnih mjerenja. Predmeti tih mjerenja jesu dužine, vremena, mase, sile, naponi, struje, temperature i slično. Samo se mjerenje sastoji u tome, da se odredi koliko se puta $\{X\}$ odabrana mjera $[X]$, tako zvana mjerna jedinica, nalazi u promatranom predmetu mjerenja X.

Kad se takovo mjerenje obavi, onda se predmet mjerenja X izjednačuje s dobivenim rezultatom mjerenja:

$$X = \{X\}[X] \ .$$

Tako je na pr. masa mirnog elektrona

$$m_o = 9{\cdot}108.10^{-31} \text{ kg} \ ,$$

a njegov naboj

$$e = 1{\cdot}602.10^{-19} \text{ A.s} \ .$$

U ovim su primjerima

$\{m_o\} = 9{\cdot}108.10^{-31}$, $\{e\} = 1{\cdot}602.10^{-19}$ mjerni brojevi, a

$[m_o] = \text{kg}$ (kilogram), $[e] = \text{A.s}$ (amper sekunda) mjere, ili mjerne jedinice, kojima su izmjerene fizikalne veličine m_o , odn. e.

Ako se neki predmet X fizikalnog promatranja može mjeriti, onda ga nazivamo fizikalnom veličinom. Značajno je dakle i bitno za fizikalnu veličinu, da se ona može prikazati kao umnožak mjernog broja i mjere. Prema tome su fizikalne veličine imenovani brojevi.

Time što su mjerenjem predmeti fizikalnog promatranja postali veličine, omogućena je u fizikalnim zaključivanjima primjena matematičkih metoda na obradu veza, koje postoje između pojedinih veličina. Tako se na pr. nalazi veza između tlaka p , gustoće ρ , te apsolutne temperature T nekog plina u obliku

$$p = k \rho T \ ,$$

gdje je k konstanta razmjernosti. Ta veza kaže, da se tlak p plina povećava razmjerno s gustoćom ρ i razmjerno s temperaturom T . U ovom je izrazu k konstanta razmjernosti. Navedimo još jedan primjer. Sila F kojom se privlače dvije kugle jednoliko ispunjene materijom, dana je Newtonovim zakonom opće gravitacije

$$F = \gamma \frac{m_1 \, m_2}{r^2} \ ,$$

gdje su m_1 , m_2 mase kugala, r razmak njihovih središta, a γ

konstanta opće gravitacije

$$\gamma = 6{\cdot}685.10^{-11}\ \frac{m^3}{kg.s^2}$$ (metar na treću kroz kilogram sekunda na kvadrat)

Navedene jednadžbe za tlak plina, odnosno za gravitacionu privlačnost, dva su od mnogih primjera fizikalnih zakonitosti, koje se mjerenjem iznalaze. Međutim skup fizikalnih zakonitosti, koji se osniva na mjerenjima, čini fizikalnu sliku o svijetu. Budući da je ta fizikalna slika svijeta matematička u svojem teoretskom dijelu, a po mjerenjima kvantitativna u svojem eksperimentalnom, to se onda s pravom fizika smatra primjerom egzaktne znanosti.

Mjerne metode fizike usavršuju se samim mjerenjima, te iznalaženjem novih fizikalnih zakonitosti. Podsjetimo se samo koliko se je usavršilo mjerenje vremena tijekom posljednja tri stoljeća: od primitivnih satova Galileievog vremena, pa do današnjih atomskih ura. Zato se kod svakog mjerenja pretpostavlja, da je već prevladan neki početni stadij, pa se primjenjuju već više ili manje zamršene metode. Tako se na pr. u mehaničkim mjerenjima primjenjuju sredstva, koja pruža moderna elektronika, optika i slično. Za ovo je kolosalan primjer lansiranje satelita i praćenje njihovog gibanja. Tu je u pogonu izvanredno velika i zamršena instrumentacija s golemim brojem opažača, koji te instrumente prate.

Naša su laboratorijska mjerenja na studentskim vježbama prilagođena zadatku, koji se želi postići: ona su osnovana na jednostavnim fizikalnim zakonima i odnosima, te uređena tako, da po dva opažača rade na jednoj aparaturi. Neka su mjerenja jednostavnija, neka zamršenija, no sva su takova, da ih student koji je svladao osnove fizike, može u predviđeno vrijeme uspješno završiti.

Mjerenjima treba pristupati mirno i staloženo. Upute za baratanje aparaturama treba pažljivo proučiti. Za vrijeme mjerenja sprave treba po mogućnosti točno očitavati i rezultate uredno bilježiti. Nikakav se rezultat ne smije unaprijed niti željeti niti očekivati. Ono što sprave pokazuju treba primiti bez ikakovog afekta. Posve je neumjesno komentiranje: "Ovdje u pokusu izlazi to i to, a mi bismo očekivali baš protivno". Ono što pokus daje jest svetinja i ne smije se nikako patvoriti. Opažač mora biti prema eksperimentu što ga izvodi, po mogućnosti objektivan i neutralan. Samo se tako može njegov osobni utjecaj na ishod mjerenja svesti na najmanju moguću mjeru.

U uvodnim poglavljima obrađena su ovdje neka općenita pitanja iz područja o mjerama i mjerenjima. Iza toga slijede opisi pojedi-

nih aparatura, te upute kako treba pojedina mjerenja izvoditi. Taj drugi dio zavisi u velikom dijelu o raspoloživom instrumentariju i načinu njegove upotrebe. Taj će se dio tijekom vremena jače mijenjati no prvi dio, koji obrađuje više načelna pitanja i čini teoretsku osnovu mjerenjima.

- - - - o - o - o - o - - - -

- - - - -

I. ODSJEK: MJERE I SUSTAVI MJERA

1. V e l i č i n s k e j e d n a d ž b e

Fizikalne su veličine međusobno zavisne. Tako toplina koja se razvija u žici kojom teče električna struja, zavisi o naponu koji vlada na krajevima žice i koji tu struju pokreće. Brzina koju kamen padajući postigne, zavisi o dubini do koje je pao. Veličina slike koju načini objektiv na fotografskoj ploči zavisi, među ostalim i o daljini u kojoj se predmet od objektiva nalazi. Snaga kojom se razvija toplina u atomskom reaktoru, zavisi o brzini kojom se gubi masa nuklearnog goriva. Potisak rakete zavisi o masi i brzini plinova, što ih raketa izbacuje. Svaka je od ovih zavisnosti prikazana matematskim izrazom, formulom, koja pokazuje u kakovoj su međusobnoj zavisnosti te fizikalne veličine. Tako je toplina razvijena u žici električnom strujom

$$Q = U\,I\,t \quad ,$$

gdje je Q toplina, U napon, I jakost električne struje, t vrijeme ili trajanje toka struje. - Brzina koju kamen postigne padom dana je izrazom

$$v = \sqrt{2\,g\,h} \quad ,$$

gdje je v brzina, g gravitacija, h dubina pada. I tako dalje.

To su primjeri za fizikalne zakone. Oni su prikazani veličinskim jednadžbama, t.j. formulama u kojima dolaze fizikalne veličine koje su, kako smo u Uvodu pokazali, imenovani brojevi.

Fizikalni su zakoni međutim jedan od načina, kako se povezuju fizikalne veličine. Drugi način tog povezivanja jesu definicione jednadžbe. Tako je na pr. brzina $\vec{v}$ kojom se giba neko sitno tijelo, materijalna točka, definirana izrazom

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad .$$

To je definiciona formula, koja povezuje brzinu $\vec{v}$, put $\vec{s}$ i vri-

jeme t . Ovom je formulom pretpostavljeno da je put $\vec{s}$ dan kao funkcija vremena, iz koje se onda deriviranjem po vremenu dobije brzina $\vec{v}$, opet funkcija vremena.- Iz brzine $\vec{v}$ možemo dalje izračunati ubrzanje $\vec{a}$ prema definicionoj formuli

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad .$$

Ovom je formulom određena akceleracija $\vec{a}$ sitnog tijela, ako nam je bila poznata njegova brzina $\vec{v}$ kao funkcija vremena.- Radnja sile $\vec{F}$ koja djeluje na neko sitno tijelo, na putu $d\vec{s}$ što ga to tijelo prevali, dana je definicionim izrazom

$$dW = \vec{F}\, d\vec{s} \quad .$$

Isto je tako definiciona jednadžba izraz koji daje kinetičku energiju sitnog tijela

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

Vidimo dakle da se međusobna zavisnost fizikalnih veličina izražava na dva načina:

1. Fizikalnim zakonima, te
2. Definicionim izrazima.

I jedan i drugi način ima matematički oblik jednadžbe, koja međusobno povezuje razne fizikalne veličine. Zato se te jednadžbe nazivaju veličinske jednadžbe. Prema tome neka veličinska jednadžba ili je fizikalni zakon, ili je definicija.

Svaka veličinska jednadžba izriče dvije stvari:

1. Ona navodi veličine koje su međusobno zavisne i kazuje kako su one međusobno zavisne, te
2. Ona nadalje pokazuje o kojima su veličinama u zakonu navedene veličine nezavisne. To su sve one veličine koje u jednadžbi nisu navedene.

Tako na pr. u zakonu za toplinu razvijenu električnom strujom u žici, ne dolazi masa žice, njezina duljina, gravitacija, brzina kojom se žica giba i t.d. O svima tima veličinama razvijena toplina ne zavisi. Ona je potpuno određena onim veličinama, koje su u zakonu navedene, a to su napon U između krajeva žice, jakost struje I koja žicom teče, pa vrijeme t koliko je tok struje trajao.- Isto tako zaključujemo da brzina sitnog tijela ne zavisi o njegovoj visini nad površinom Zemlje, specifičnoj težini i t.d. Za ovu je brzinu odlučan jedino oblik zakona kojim je put $\vec{s}$ prikazan u zavisnosti o vremenu. Ako taj zakon poznajemo, možemo izvesti brzinu tijela ne brinući se za bilo koju drugu fizikalnu veličinu.

Prigodom pisanja izraza za fizikalne zakone, odnosno za fizikalne definicije, mi nastojimo da ti izrazi imaju, kolikogod je to samo moguće, jednostavan oblik. Nastojimo da u njih ne dođu neki faktori, koji u stvari ništa nova ne kazuju. To je načelo jednostavnosti. Mi ćemo to načelo izložiti na jednom primjeru. Uzet ćemo definiciju brzine sitnog tijela

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad .$$

Ta definicija kaže da je brzina jednaka kvocijentu puta $d\vec{s}$ i vremena dt u kojem je taj put prevaljen; brzina je upravo razmjerna putu, a obrnuto razmjerna vremenu.

Međutim definiciju brzine bi mogli pisati i ovako

$$\vec{v} = k \frac{d\vec{s}}{dt} \quad ,$$

gdje je k neki faktor proporcionalnosti. I ovako napisana jednadžba za definiciju brzine ima sve značajke prvotne, jednostavnije, definicije. Opet je brzina upravno razmjerna prevaljenom putu, a obrnuto razmjerna vremenu, u kojem je taj put prevaljen. Iz te formule ne saznajemo ništa više nego iz prve, jednostavnije. Konstantni faktor k ne pridonosi ništa nova u definiciju brzine, jer on nema fizikalnog sadržaja. Zato je po načelu jednostavnosti najzgodnije za taj faktor staviti

$$k = 1 \quad .$$

Time izričemo, da je brzina $\vec{v}$ ne samo jednaka kvocijentu $\frac{d\vec{s}}{dt}$, nego i to da ona i jest taj kvocijent. Ili drukčije rečeno: kvocijent $\frac{d\vec{s}}{dt}$ jest brzina tijela, a ne neka veličina, koja se mijenja usporedo s brzinom tijela, a koja bi po svojoj biti bila nešto drugo, kvalitativno različito.

2. Zavisne i nezavisne fizikalne veličine

Fizikalnih veličina ima više no što ima jednadžbi koje ih povezuju. To je lako uvidjeti. Ako uzmemo bilo koji fizikalni zakon, u kojemu je neka veličina izražena pomoću kvalitetno drukčijih veličina, onda u svakom od tih zakona dolaze najmanje tri različite fizikalne veličine. Ne može međutim postojati neki drugi fizikalni zakon, o onom prvom nezavisan, u kojem bi dolazile te iste tri veličine. Prema tome u ostalim zakonima, u kojima se bilo

koja od promatranih veličina javlja, moraju dolaziti nove fizikalne veličine, pa se prema tome razlika između broja fizikalnih veličina i broja fizikalnih zakona ne može smanjivati. Ako tu razliku označimo s k, onda sigurno vrijedi

$$k \geq 2 .$$

Definicione jednadžbe, koje su također veličinske jednadžbe, ne mogu nam pomoći, da broj k smanjimo, jer se svakom novom definicionom jednadžbom uvodi nova veličina pomoću već poznatih.

Ovo stanje možemo i ovako formulirati: Budući da ima za broj k više fizikalnih veličina no što ima veličinskih jednadžbi, to onda možemo odabrati po nekom načelu prikladnosti k fizikalnih veličina i po dogovoru uzeti ih kao nezavisne veličine. Iz tih se onda k nezavisnih veličina izvode pomoću fizikalnih zakona i definicija, t.j. veličinskih jednadžbi, sve ostale veličine. To su onda izvedene veličine, ili zavisne veličine.

Kako god ovo zvuči jednostavno, što smo netom izložili, to je unatoč toga ostvarenje i oživotvorenje tih načela bilo spojeno s mnogim lutanjima. Razlog je jednostavan. Sam problem formuliran je vrlo općenito, a i tako, da ova formulacija dopušta razna rješenja, koja zadovoljavaju postavljenim načelima. Tako na primjer pitanje prikladnosti neke veličine da se smatra nezavisnom, dobiva razne odgovore, već prema tome o kojem se području fizike radi, a taj odgovor mnogo zavisi i o sklonostima onoga, koji taj odgovor daje. Mi ćemo to pokazati na primjerima, najprije u mehanici, a zatim u elektromagnetizmu, te ostalim područjima fizike.

3. Nezavisne veličine u mehanici

Naše ćemo razmatranje započeti mehanikom, jer je to povijesno najstariji dio fizike, a i prilike su, obzirom na naše pitanje, najprozirnije.

U kinematici promatra se gibanje tjelesa, a da se ne pita za uzroke tog gibanja. To je geometrija gibanja. Budući da se radi o gibanjima, očito je da ovdje igraju ulogu brzine, akceleracije, koordinate (položaj), vremena (trajanja). Najjednostavnije je promatrati gibanje jedne točke. Njezina staza gibanja, trajektorija, može biti pravac, kružnica, parabola, elipsa, Lissajousova krivulja, ... i tako dalje. U svakom se od tih slučajeva može napisati neki zakon. Na primjer za gibanje po pravcu brzinom stalne veličine

vrijedi jednadžba

$$\vec{s} = \vec{v}\, t \ ,$$

gdje je $\vec{s}$ put, $\vec{v}$ brzina, t vrijeme.

U ovom su primjeru povezane jednadžbom tri različite veličine. Jednadžbu međutim možemo čitati na razne načine:

a) Put $\vec{s}$ je produkt brzine $\vec{v}$ i vremena t.

b) Vrijeme t je kvocijent puta s i brzine v.

c) Brzina $\vec{v}$ je kvocijent puta $\vec{s}$ i vremena t.

U slučaju a) nezavisne bi veličine bile $\vec{v}$, t, a put $\vec{s}$ zavisna. U slučaju b) nezavisne bi veličine bile s, v, a vrijeme t zavisna. Konačno u slučaju c) nezavisne bi veličine bile $\vec{s}$, t, a brzina $\vec{v}$ zavisna.

Što je od ovoga najprikladnije? Budući da put, naime dužina, ima neposredno i zorno značenje, te budući da se on jednostavno mjeri nekim dužinskim mjerilom, to se je onda lako odlučiti, da put $\vec{s}$ bude nezavisna veličina.- Nemamo poteškoća ni s vremenom t. Za vrijeme osjećamo neposredno, u sebi, ili kako se je to poznati astronom Sir Arthur S. Eddington (1882.-1944.) izrazio "u srži svo jih kostiju", kako teče, kako prolazi. To je spoznanje toka vremena neposredno, pa zato lako prihvaćamo da je vrijeme nezavisna veličina. Ostaje dakle, da je brzina zavisna veličina, određena putem i vremenom.

Zgodno je ovdje u vezi određivanja zavisnih i nezavisnih veličina promotriti izraze koji daju Lissajousove krivulje. Ti izrazi glase za sastavljanje dvaju međusobno okomitih harmonijskih gibanja

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T_1} t$$

$$y = b \sin \left(\frac{2\pi}{T_2} t - \varphi\right) \ .$$

Ovdje je x elongacija po osi x, a amplituda, T_1 titrajno vrijeme. Analogno za y, b, T_2 u osi y.

Napisani izrazi za Lissajousove krivulje kao da protuslove tvrdnji da u fizikalnom zakonu dolaze u vezu najmanje tri različite veličine. Ovdje u svakoj od formula dolaze dužine x, y, a, b, te vremena t, T_1, T_2. To su samo dvije kvalitativno različite veličine. Međutim ove nam formule unatoč toga ne daju mogućnost, da elongaciju x izrazimo vremenom, da ju svedemo na vrijeme, kao što smo prije mogli brzinu izraziti pomoću puta i vremena. Ako naime bolje pogledamo te formule, onda vidimo što one zapravo izriču. Uzmimo na oko prvu. Funkcija $\sin \frac{2\pi}{T_1} t$ pravi je razlomak,

čiju vrijednost možemo odrediti, ako znamo koliki je kvocijent $\frac{t}{T_1}$, t.j. koliko se puta titrajno vrijeme T_1 harmonijskog gibanja po osi x nalazi u vremenu t. Tada prva formula za elongacije x daje, koliki je ona dio od amplitude a. Dakle u argumentu sinusa vrijeme t je izraženo vremenom T_1, a pomoću same funkcije sinus, elongacija x amplitudom a. Prema tome u ovom razmatranju o zavisnim i nezavisnim veličinama, ove se formule mogu smatrati identitetima, jer one izriču da je dužina x dio dužine a, te nadalje da je vrijeme t mnogokratnik vremena T_1, što se sa stajališta iz kojega stvar promatramo, može shvatiti kao izričaj: dužina je dužina, vrijeme je vrijeme. Dakle identitet. Takove formule ne omogućuju da se jedna fizikalna veličina svede na druge.

Iskustvo je pokazalo, da je za obradu čitave kinematike dovoljno uzeti da su nezavisne veličine:

1. dužina s
2. vrijeme t.

Sve se ostale kinematičke veličine mogu pomoću ovih izraziti. Tako na primjer: površina, obujam, frekvencija, kutna brzina, plošna brzina, volumni protok. Sve su dakle preostale veličine kinematike zavisne veličine.

U daljnjem razvoju mehanike stoji na početku dinamike osnovni zakon gibanja, drugi Newtonov aksiom. U matematičkoj formulaciji

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad ,$$

gdje je $\vec{F}$ sila, m masa sitnog tijela, konačno $\vec{a}$ ubrzanje. U ovom osnovnom zakonu dolaze uz kinematičku veličinu $\vec{a}$ još dvije nove veličine: sila $\vec{F}$, te masa m. Budući da je napisana jednadžba o s n o v n i z a k o n, to se je tom jednadžbom broj postojećih veličina povećao za dvije. Nužno dakle jednu od njih treba smatrati nezavisnom. Da li će to biti sila $\vec{F}$, ili masa m, pitanje je prikladnosti i dogovora. Oba su puta pokušana.

U tehnici, osobito onoj pred nekoliko desetaka godina, težina tjelesa, dakle jedna vrsta sile, toliko se je nametala u raznim problemima građevinarstva i strojarstva, da se je činilo naravnim silu smatrati za temeljnu veličinu, pa prema tome i za nezavisnu, a masu za zavisnu. Drukčije međutim u fizici. Fizičari su smatrali da je prikladnije masu uzeti za nezavisnu veličinu, jer je ona značajka samoga tijela, pa je prema tome sila izašla kao zavisna veličina. Tako su dosta dugo koegzistirala dva shvaćanja u mehanici: tehničko, koje je uzimalo dužinu, vrijeme i silu kao nezavisne

veličine, te fizikalno, koje je uzimalo dužinu, vrijeme i masu kao nezavisne veličine.

Razvojem i tehničkih i fizikalnih znanosti došlo je do sve jačeg ispreplitanja tih znanosti, a time i do potrebe da se obje znanosti odluče za jedno od tih shvaćanja. Danas se smatra, jednako u tehnici kao i u fizici, da su u mehanici ove tri veličine nezavisne:

1. dužina s
2. masa m
3. vrijeme t .

Time je nestalo jedne od značajnih razlika između t.zv. "Tehničke mehanike" i naprosto "Mehanike". Danas se tretiranje mehanike u tehnici i tretiranje mehanike u okviru fizike razlikuje samo po naglasku koji se stavlja na obradu raznih područja. Tako se na primjer čvrstoća, vibracije, elastooptika i slično detaljnije obrađuju na tehničkim fakultetima nego na prirodoslovnim.

4. Nezavisne veličine u elektricitetu

U daljnjem razvoju fizike, na početku elektromagnetizma stoji izraz za električnu silu

$$\vec{F}_{el} = q\,\vec{E} \quad .$$

Električna sila $\vec{F}_{el}$, koja djeluje na sitni električni naboj q zavisi o jakosti električnog polja $\vec{E}$ u točki u kojoj se naboj q nalazi. To je osnovna jednadžba i u njoj odjednom dolaze dvije električne veličine: naboj q , te jakost električnog polja $\vec{E}$. Očito je da iz istih razloga kao što smo pri prijelazu iz kinematike u dinamiku povisili broj nezavisnih veličina od dvije na tri, sada moramo taj broj dalje povisiti na četiri. Pitanje je samo koju od električnih veličina proglasiti temeljnom, pa zato nezavisnom. opet je to pitanje prikladnosti i dogovora.

U slučaju elektriciteta pokazalo se je prikladnim, da se kao nezavisna veličina ne uzme ni električni naboj q , ni jakost električnog polja $\vec{E}$, nego jakost električne struje I . Naime jakost električne struje I je veličina, koja ne samo da je tijesno povezana s električnim nabojem, struja predočuje naboje u gibanju, nego električnu struju također nerazdruživo prati magnetsko polje kao druga manifestacija iste fizikalne stvarnosti. Zato je opravdano, da je električna struja odabrana kao temeljna, dakle

nezavisna veličina elektromagnetizma.

Ideju da se pri prijelazu iz mehanike na elektromagnetizam broj nezavisnih veličina povisi na četiri uzimanjem jedne električne veličine kao četvrte nezavisne veličine uz već spomenute tri mehaničke, dao je G. Giorgi već u god. 1901. Dugo je međutim trebalo da se to mišljenje probije, kako u fizici, tako i u tehnici. Danas je to međunarodno dogovoreno i prihvaćeno, pa se uzima da ta četvrta nezavisna veličina ima biti električna struja I.

Jakost struje I jednostavno je povezana s električnim nabojem q. Ako kroz žicu teče stalna struja I, onda presjekom žice prođe u vremenu t, električni naboj

$$q = I\,t \quad .$$

Ovim izrazom uspostavili smo vezu između električne struje i električnog naboja, koji dolazi u izrazu za jakost električnog polja.

Možemo zaključiti: Područje fizike koje obuhvaća mehaniku i elektricitet, obrađuje se danas tako, da se uzima da je broj nezavisnih veličina četiri. K nezavisnim veličinama mehanike pridošla je još kao nezavisna, temeljna, veličina u elektricitetu električna struja I. Taj se dakle način obrade temelji na ovim nezavisnim veličinama:

1. dužina s
2. masa m
3. vrijeme t
4. električna struja I.

Povijesna bilješka. Giorgiev sustav originalno je predviđao, da se električni otpor R ima smatrati temeljnom električnom veličinom, pa prema tome nezavisnom u smislu ovoga izlaganja. Tek godine 1954. međunarodno je prihvaćeno, da je električna struja temeljna veličina, pa prema tome nezavisna. Na ovo ćemo se pitanje još vratiti, kad bude govora o mjernim jedinicama.

5. N e z a v i s n e v e l i č i n e u t e r m o d i n a m i c i

Pri prijelazu na područje nauke o toplini pokazuje se potreba za uvođenjem nove temeljne, dakle nezavisne veličine. Tvrdnja da je toplina jedan od oblika energije sadržana je u matematskoj formulaciji prvog principa termodinamike

$$dQ = dU + dW \quad .$$

To se može riječima iskazati ovako: Količina topline dQ, koja se

privede nekom termodinamičkom sustavu, potroši se jednim dijelom na povećanje unutarnje energije dU tog sustava, a preostalim dijelom na energiju koju taj sustav iz sebe izda u raznim netoplinskim oblicima (mehanički rad, elektromagnetska energija,..) dW.

Ova formulacija prvog principa termodinamike izjednačuje istovrsne veličine: svaki član tog izraza predočuje energiju. Prema tome je iz gledišta našeg razmatranja o zavisnim i nezavisnim veličinama ova jednadžba identitet. Ona naime izriče: energija je energija.

Razrada nauke o toplini ima u svojim osnovama plinsku jednadžbu. To je jednadžba koja bi točno vrijedila za idealni plin, a kojoj realni plinovi zadovoljavaju to bolje, što su im temperature više i tlakovi manji. Ta jednadžba glasi

$$p\,V = M\,R\,T \quad .$$

U ovoj je jednadžbi p tlak plina, V obujam plina. To su mehaničke veličine i one su već definirane. Međutim na desnoj strani jednadžbe dolaze tri nove termodinamske veličine, a to su količina tvari M, plinska konstanta R i temperatura plina T. Budući da u svakoj daljnjoj termodinamskoj jednadžbi dolazi uz već definirane po jedna nova termodinamska veličina, to slijedi da se prijelazom na termodinamiku broj nezavisnih veličina povećao za dva.

Kao nezavisne fizikalne veličine termodinamike odabiru se temperatura T i količina materije M. Ova temperatura naziva se i termodinamska temperatura.

Količina tvari ili količina materije je pojam, koji je vezan s brojem istovrsnih čestica koje se u nekom termodinamskom sustavu nalaze. Tako na pr. ako u nekoj količini vodika ima jednak broj molekula kao i u promatranoj količini kisika, onda u ta dva termodinamska sustava količine materije su jednake.

Budući da smo u plinskoj jednadžbi odabrali količinu tvari M i temperaturu T kao nezavisne veličine, to je onda tom jednadbom definirana treća termodinamska veličina, plinska konstanta R, kao zavisna veličina. Ukupni se je međutim broj nezavisnih veličina povisio na šest.

Time je pokriveno čitavo područje klasične fizike. Ovome se međutim priključuje još i fotometrija. Tu se smatra jakost izvora svjetlosti I_v kao temeljna veličina, pa se prema tome ona uzima za nezavisnu veličinu. To je dakle sedma nezavisna fizikalna veličina, koju treba uvesti. Kako je međutim fotometrija

periferno područje, to se glavnina fizikalnih problema može obraditi, a da se ne pokaže potreba za uvođenjem fotometrijskih veličina. Došli smo dakle do ovih nezavisnih fizikalnih veličina:

1. dužina s
2. masa m
3. vrijeme t
4. električna struja I
5. temperatura T
6. količina materije M
7. jakost svjetlosti I_v .

6. M j e r e z a f i z i k a l n e v e l i č i n e

Bitna je značajka fizikalne veličine, kako smo uvodno pokazali, da se ona dade mjeriti. To je očito za veličine kao što su masa, električni napon, temperatura i slično, dok je na primjer boja neke svjetlosti već zamršeniji slučaj. Ona se međutim ipak može kvantitativno prikazati, ako dademo energiju po valnoj dužini kao funkciju valne dužine za promatrani izvor svjetlosti. Dakle se i boja nekog izvora svjetlosti može izraziti na kvantitativni način. Nije međutim tako s nekim mirisom, na primjer miris jorgovana, pa prema tome to nije fizikalna veličina.

Očito je da je izbor mjere za neku fizikalnu veličinu stvar dogovora. Da bi međutim mjera, naime mjerna jedinica za mjerenje neke veličine, imala opću vrijednost, nužno je da je taj dogovor međunarodan i od svih prihvaćen. To se dogovaranje o mjerama i o svemu što je u vezi s njima, obavlja na međunarodnim sastancima, koji se povremeno održavaju. Službeni je naziv takovog sastanka: Conference Générale des Poids et Mesures - C G P M . Prvi je takov sastanak održan godine 1889. Na toj Prvoj Konferenciji (I. CGPM) definiran je metar kao mjera za dužinu i prihvaćena realizacija te mjere kao razmak dviju crta na mjerilu načinjenom od 90% platine i 10% iridija, uz propisanu temperaturu $0^{\circ}C$. To je mjerilo pohranjeno u Međunarodnom uredu za utege i mjere u Parizu (Bureau International des Poids et Mesures). Na istoj je konferenciji definiran i kilogram kao mjera za masu.

Međutim mjerna tehnika i metode mjerenja tijekom godina, koje su prošle nakon te Prve konferencije, znatno su napredovali. Zato je bilo potrebno, da se CGPM povremeno sastaje i donosi rezolucije (odluke), definicije i preporuke, te utvrđuje smjernice budućeg

rada na usavršavanju sustava mjera, koje se imaju upotrebljavati u međunarodnom saobraćaju.

Mjerni sustav koji je danas općenito prihvaćen i ozakonjen, dobio je svoje konačno ime "Međunarodni sustav jedinica" (Système International d'Unités) s međunarodnom skraćenicom SI, na 11. Konferenciji (11.CGPM), koja je održana godine 1960. Međutim prije no što izložimo taj sustav mjera SI, mi ćemo se pozabaviti nekim načelnim pitanjima u vezi izgradnje nekog sustava mjera.

Kako je u Uvodu spomenuto, ako neku fizikalnu veličinu X izmjerimo mjerom $[X]$ i nađemo, da se ta mjera nalazi u toj veličini $\{X\}$ puta, onda rezultat mjerenja prikazujemo ovako

$$X = \{X\}\,[X] \quad .$$

Mi smo nadalje vidjeli da veličinskih jednadžbi ima manje no što ima fizikalnih veličina. Ako je ta razlika k, onda ima k nezavisnih fizikalnih veličina, dok su sve ostale zavisne. Po našem je predhodnom razmatranju

$$k \geq 7 \quad ,$$

to jest prema dosadanjem stanju u fizici, barem sedam veličina treba smatrati kao nezavisne. Govoreći općenito, neka su nezavisne veličine

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \, .$$

Tada su sve ostale veličine zavisne. Broj zavisnih veličina nije ničime ograničen i on se razvojem nauke neprestano povećava. To neka budu veličine

$$X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_{k+i}, \ldots$$

Svaka od tih zavisnih veličina povezana je bilo fizikalnim zakonom, bilo definicijom, dakle nekom veličinskom jednadžbom, s nezavisnim veličinama. Ta veza ima oblik produkta potencija:

$$\begin{aligned}
X_{k+1} &= b_1 X_1^{\alpha_{11}} X_2^{\alpha_{12}} \ldots X_k^{\alpha_{1k}} \\
X_{k+2} &= b_2 X_1^{\alpha_{21}} X_2^{\alpha_{22}} \ldots X_k^{\alpha_{2k}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{k+i} &= b_i X_1^{\alpha_{i1}} X_2^{\alpha_{i2}} \ldots X_k^{\alpha_{ik}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ovdje su zavisne veličine prikazane kao eksplicitne funkcije nezavisnih veličina, upravo kao produkti potencija tih veličina. Faktori $b_1, b_2, \ldots b_i, \ldots$ jesu čisti brojčani faktori. Skup svih tih jednadžbi čini fizikalnu sliku svijeta.

U napisanim jednadžbama brojčani faktori b_i kakogod se oni odabrali, ne mijenjaju temeljne značajke odnosa između fizikalnih veličina. Ipak postojanje mogućnosti da se za pojedine od njih odabere ova ili ona vrijednost, unosi u formulaciju tih jednadžbi izvjesnu nesigurnost. Zato je trebalo za odabiranje tih faktora postaviti neka načela.

Jedno od načela za odabiranje vrijednosti brojčanog faktora b_i bilo je već izloženo, a to je načelo jednostavnosti. Vidjeli smo to na primjeru definiranja brzine sitnog tijela. Faktor koji se može pisati pred derivacijom puta po vremenu nema fizikalni sadržaj, a budući da mu je brojčana vrijednost po volji, bilo je najjednostavnije za taj faktor uzeti da je matematička jedinica.

Ako je međutim neka veličinska jednadžba nastala matematskim izvodom iz prije postavljenih i formuliranih veličinskih jednadžbi, onda se u toj jednadžbi mogu pojaviti neimenovani brojčani faktori različiti od matematičkog jedan. Ovi faktori imaju sasvim određenu vrijednost koja izlazi iz matematičke obrade i oni se ne mogu i ne smiju nečim drugim zamijeniti. I za ovo smo vidjeli primjer u izrazu za kinetičku energiju sitnog tijela.

Međutim kakogod ovo određivanje brojčanih faktora b_i izgleda prirodno i jednostavno, ipak ima slučajeva, gdje je ono stvar samo dogovora. To se može lijepo vidjeti u elektromagnetizmu. Tamo se može raspravljeti o tome, treba li ili ne treba u nekim izrazima pisati faktor 4π. Na ovo ćemo se pitanje još kasnije vratiti. Zasada je dosta da je samo natuknuto.

Iz ovoga što smo netom izložili slijedi, da je samo polazište naših razmatranja, a to je skup veličinskih jednadžbi koji daje zavisne fizikalne veličine izražene pomoću nezavisnih, u jednoj svojoj pojedinosti neodređeno. Ne postoji neka nužna osnova iz koje bi onda jednoznačno slijedile vrijednosti brojčanih faktora b_i. Postoji samo suglasnost između velikog broja fizičara i tehničara, koji se služe fizikalnim jednadžbama, koji oblik trebaju te jednadžbe imati. Zato ćemo za naše daljnje razmatranje pretpostaviti, da su u s v i m a jednadžbama za zavisne veličine brojčani faktori b_i j e d n o z n a č n o utvrđeni, te da prema tome ima samo j e d a n s k u p veličinskih jednadžbi koji predočuje fizikalnu sliku svijeta. Taj je pretpostavljeni skup veličinskih jednadžbi polazište i temelj svih daljnjih razmatranja. Razvojem znanosti pridolaze nove jednadžbe, a postoji i mogućnost da neke stare otpadnu ili da promijene oblik, no nikada za istu

veličinu ne mogu postojati dvije različne jednadžbe, koje bi si protuslovile. Skup veličinskih jednadžbi uvijek je u načelu jednoznačno određen.

Iza brojčanog faktora b_i slijedi u veličinskoj jednadžbi umnožak potencija nezavisnih veličina. Taj umnožak potencija je k a r a k t e r i s t i k a zavisne veličine X_{k+i}. Zavisna veličina X_{k+i} ne može biti na neki drugi način prikazana pomoću istih osnovnih veličina. To znači da je zavisnoj veličini X_{k+i} pridružen i jednoznačno određen skup eksponenata $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots \alpha_{ik})$. Ovaj se skup eksponenata naziva d i m e n z i j a zavisne veličine X_{k+i} obzirom na nezavisne veličine $X_1, X_2, \ldots X_k$. Isto se tako svaki pojedini eksponent α_{ir} naziva dimenzija zavisne veličine X_{k+i} obzirom na nezavisnu X_r.

Umnožak potencija koji predočuje zavisnu veličinu X_{k+i} treba shvatiti u općem smislu tako, da on obuhvaća i operacije deriviranja. Tako na pr. prva derivacija po vremenu u tom se umnošku prikazuje kao vrijeme na minus prvu, a operator nabla kao dužina na minus prvu, ili drukčije rečeno, ove operacije imaju dimenziju (-1) obzirom na vrijeme, odnosno dužinu. Iz ovog je očito, da pojedini X_r za $r = 1, 2, \ldots k$ koji predočuje nezavisnu veličinu, prikazuje u veličinskoj jednadžbi samo temeljnu značajku te veličine. Prema tome je karakteristika izvedene zavisne veličine X_{k+i} jednaka umnošku potencija karakteristika nezavisnih veličina.

Kod definiranja mjera za fizikalne veličine moglo bi se za svaku veličinu definirati posve nezavisna i samostalna mjera, bez obzira da li je ta veličina zavisna ili nezavisna. Takov bi međutim postupak vodio do nepotrebnih komplikacija pri računskoj obradi podataka. Pokazalo se je kao svrsishodno da mjerne jedinice, koje se upotrebljavaju, čine sustav. Što to znači, bit će jasno, kad izložimo uvjete, kojima moraju mjerne jedinice zadovoljavati, da bi činile sustav.

Ako svaku fizikalnu veličinu izrazimo njezinim mjernim brojem $\{X\}$ i mjerom $[X]$, onda općeniti izraz za i-tu zavisnu veličinu X_{k+i} glasi ovako:

$$\{X_{k+i}\}\,[X_{k+i}] = b_i \{X_1\}^{\alpha_{i1}} \{X_2\}^{\alpha_{i2}} \cdots \{X_k\}^{\alpha_{ik}} [X_1]^{\alpha_{i1}} [X_2]^{\alpha_{i2}} \cdots [X_k]^{\alpha_{ik}}.$$

Ovo možemo pisati i ovako:

$$\frac{[X_{k+i}]}{[X_1]^{\alpha_{i1}} [X_2]^{\alpha_{i2}} \cdots [X_k]^{\alpha_{ik}}} = \frac{b_i \{X_1\}^{\alpha_{i1}} \{X_2\}^{\alpha_{i2}} \cdots \{X_k\}^{\alpha_{ik}}}{\{X_{k+i}\}} = z_i .$$

Ova dvostruka jednadžba kaže, da je omjer mjere i-te zavisne veličine i potencija mjera nezavisnih veličina, pomoću kojih je ova zavisna mjerljiva veličina izražena, neki broj z_i, koji je našim izrazom eksplicitno prikazan i izražen omjerom mjernih brojeva. Koliki će taj broj z_i biti zavisi o odabranim mjerama, kako taj isti izraz pokazuje, jer vrijednosti mjernih brojeva zavise o izboru mjernih jedinica. Tako na primjer, ako mjerimo neku dužinu u metrima, dobijemo jedan mjerni broj, a ako pak tu istu dužinu mjerimo u yardima, dobijemo drugi mjerni broj. Slično je, ako neku masu mjerimo u kilogramima, ili pak u tonama i t.d.

Posljednji izraz, u kojem smo razdvojili mjerne brojeve od mjernih jedinica, omogućuje nam da sustav veličinskih jednadžbi rastavimo u dva sustava i to:

a) Sustav jednadžbi koje vežu mjerne brojeve pojedinih veličina, to su brojčane jednadžbe

$$\{X_{k+i}\} = \frac{b_i}{z_i} \{X_1\}^{\alpha_{i1}} \{X_2\}^{\alpha_{i2}} \dots \{X_k\}^{\alpha_{ik}} ,$$

b) Sustav jednadžbi koje vežu mjerne jedinice zavisnih veličina s mjerama nezavisnih veličina, to su jednadžbe mjernih jedinica

$$[X_{k+i}] = z_i [X_1]^{\alpha_{i1}} [X_2]^{\alpha_{i2}} \dots [X_k]^{\alpha_{ik}} .$$

Iz ovih jednadžbi zaključujemo, da možemo k mjernih jedinica odabrati po volji, jer toliko ima više mjernih jedinica no što ima jednadžbi koje ih vežu. Te mjerne jedinice koje se u načelu mogu po volji odabrati jesu o s n o v n e m j e r n e j e d i n i c e . Da li će to biti mjere nezavisnih veličina, ili nekih nezavisnih i nekih zavisnih, načelno je svejedno.

Ostale se mjere izvode iz osnovnih tako, da se u svakom pojedinom slučaju utvrđuje vrijednost brojčanog faktora z_i u odnosnoj jednadžbi, pa time i veza između novo uvedene mjerne jedinice i osnovnih mjernih jedinica. Mjerna jedinica definirana utvrđivanjem vrijednosti o d r e d b e n o g f a k t o r a z_i zove se i z v e d e n a m j e r n a j e d i n i c a .

Skup mjernih jedinica koji se sastoji iz osnovnih mjera i iz ovih izvedenih čini s u s t a v m j e r n i h j e d i n i c a . Prema tome u sustavu mjernih jedinica imamo najprije definirane osnovne mjere, a zatim utvrđivanjem odredbenih faktora z_i izvedene mjere.

Najjednostavniji sustav mjera i najjednostavnije brojčane jednadžbe i jednadžbe mjernih jedinica izađu, ako se stavi

$$z_i = 1 \quad , \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Tada se naime brojčane jednadžbe svojim oblikom ne razlikuju od veličinskih jednadžbi, a sve jednadžbe između mjernih jedinica poprime najjednostavniji oblik. Prednost ove postavke je očita. Nije međutim ovako uvijek bilo. Tek u najnovije vrijeme ostvaren je sustav mjera koji se na ovim postavkama osniva, a shvaćanja koja su s time u vezi, još uvijek nailaze na otpor koji dolazi od navika iz prošlosti.

Možemo na kraju ovo izlaganje sažeti. To ćemo učiniti zato, jer sve što slijedi, osniva se na ovim temeljima.

i) Veličinske jednadžbe koje opisuju fizikalnu sliku svijeta, imaju jednoznačno utvrđen oblik. Taj je oblik nezavisan o bilo kakovim mjerama, kojima se pojedine fizikalne veličine mjere. Za utvrđivanje tih jednadžbi dovoljno je znati da se pojedine promatrane veličine mogu mjeriti.

ii) Rasčlanjivanjem pojedinih fizikalnih veličina na mjerni broj i mjeru, iz skupa veličinskih jednadžbi nastaju dva skupa:

a) Skup jednadžbi koje vežu mjerne brojeve. To su brojčane jednadžbe.

b) Skup jednadžbi koje vežu mjerne jedinice. To su jednadžbe mjernih jedinica.

iii) Definiranjem osnovnih mjernih jedinica i utvrđivanjem odredbenih faktora u jednadžbama mjernih jedinica definira se sustav mjernih jedinica.

Očito je da može biti više sustava mjernih jedinica. Kakav će sustav mjernih jedinica biti, to zavisi o izboru osnovnih mjera i u odabiranju odredbenih faktora z_i . Ima međutim samo jedan skup veličinskih jednadžbi i prema tome samo jedan skup o p ć i h brojčanih jednadžbi i samo jedan skup o p ć i h jednadžbi mjernih jedinica. Za svaki odabrani sustav mjernih jedinica skup općih brojčanih jednadžbi prelazi u skup p o s e b n i h brojčanih jednadžbi koje vrijede uz pretpostavljenu upotrebu odabranih mjernih jedinica. Ove su pak definirane jednadžbama koje čine skup posebnih jednadžbi mjernih jedinica, u kojima su odredbeni faktori posebno za svaku jedinicu utvrđeni.

U onome što slijedi, mi ćemo postupiti po ovdje navedenim načelima.

7. M e đ u n a r o d n i s u s t a v m j e r n i h j e d i n i c a S I

Sustav mjera koji se danas upotrebljava u znanosti i u javnom saobraćaju dobio je svoje definitivno ime na Jedanaestoj CGPM (1960.). To je "Système International d'Unités" - SI . Taj je "Međunanodni sustav mjera" nadomjestio "Praktični sustav mjera" (Système Pratique d'Unités), koji je bio prihvaćen na Desetoj CGPM (1954.god.) i koji je imao osnovne mjerne jedinice (Unités de mesure de base) za ovih šest fizikalnih veličina: dužinu, masu, vrijeme, jakost električne struje, termodinamsku temperaturu, jakost izvora svjetlosti. Međunarodni sustav mjera SI, kako je bio prihvaćen na Jedanaestoj CGPM, imao je također šest osnovnih mjernih jedinica za iste fizikalne veličine, i te su mjerne jedinice nosile iste nazive kao i mjere Praktičnog sustava, razlike su međutim u definicijama tih osnovnih mjera. Sedma osnovna mjera Međunarodnog sustava mjera SI za količinu materije uvedena je na osnovu prijedloga rezolucije, što ga je izradio Međunarodni odbor za utege i mjere (Comité International des Poids et Mesures - CIPM) god. 1969. za Četrnaestu Generalnu konferenciju CGPM u god. 1971., koja je taj prijedlog i prihvatila u svojoj Rezoluciji 3. Tako je uveden mol kao mjera za količinu materije i ujedno utvrđen kao osnovna mjera. O svemu tome saznat ćemo više, kad budemo govorili o pojedinim mjerama napose; kako su one tijekom vremena definirane i kako su realizirane. Tada ćemo vidjeti da je izgradnja sustava mjera SI bio proces dugotrajan i koji je zahtijevao mnogo napora i truda. Taj je proces međutim još i danas u toku. Današnje stanje osnovnih i ostalih mjera Međunarodnog sustava SI dat ćemo u pregledu koji slijedi.

Sustav mjera SI ima sada (1974.) sedam osnovnih mjera:

O s n o v n e m j e r e

Fizikalna veličina	Mjera	Simbol mjere
1. dužina	metar	m
2. masa	kilogram	kg
3. vrijeme	sekunda	s
4. električna struja	amper	A
5. termodinamska temperatura	kelvin	K
6. količina materije	mol	mol
7. jakost svjetlosti	kandela	cd

Za dvije mjere Generalna konferencija još nije odlučila, da li se one imaju smatrati osnovnim mjerama ili izvedenima. To su mjera za kut u ravnini, radijan, te mjera za prostorni kut, steradijan. Budući da za ove dvije mjere još nije pala odluka, to one ulaze u SI kao "Dodatne mjerne jedinice" (Unités de mesure supplémentaires).

D o d a t n e m j e r e

Fizikalna veličina	Mjera	Simbol mjere
1. ravni kut	radijan	rad
2. prostorni kut	steradijan	sr

Ostale mjere SI su izvedene mjerne jedinice (Unités de mesure derivées). Dat ćemo nekoliko primjera za izvedene mjere.

I z v e d e n e m j e r e

Fizikalna veličina	Mjera	U osnovnim mjerama
1. površina	metar kvadratni	m^2
2. obujam	metar kubni	m^3
3. brzina	metar na sekundu	$m.s^{-1}$
4. gustoća	kilogram na metar kubni	$kg.m^{-3}$
5. momenat tromosti	kilogram metar kvadratni	$kg.m^2$
6. veličina gibanja	kilogram metar na sekundu	$kg.m.s^{-1}$
7. zamah (spin)	kilogram metar kvadratni na sekundu	$kg.m^2.s^{-1}$
8. jakost magnetskog polja	amper na metar	$A.m^{-1}$
9. gustoća električne struje	amper na metar kvadratni	$A.m^{-2}$

Neke izvedene mjere SI imaju posebna imena, koja su odobrena od CGPM, a isto tako i simbole. Navest ćemo te mjere i ujedno ih izraziti osnovnim mjerama SI.

I z v e d e n e m j e r e s p o s e b n i m i m e n o m

Fizikalna veličina	Mjera SI	Posebno ime	Simbol mjere
1. sila	$m.kg.s^{-2}$	njutn	N
2. radnja	$m^2.kg.s^{-2}$	džul	J
3. snaga	$m^2.kg.s^{-3}$	vat	W
4. frekvencija	s^{-1}	herc	Hz
5. tlak	$m^{-1}.kg.s^{-2}$	paskal	Pa
6. napon	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$	volt	V
7. magnetski tok	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$	veber	Wb
8. magnetska indukcija	$kg.s^{-2}.A^{-1}$	tesla	T
9. električni naboj	s.A	kulon	C

Fizikalna veličina	Mjera SI	Posebno ime	Simbol mjere
10. električni otpor	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$	om	Ω
11. električna vodljivost	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$	simens	S
12. kapacitet	$m^{-2}kg^{-1}.s^4.A^2$	farad	F
13. induktivitet	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$	henri	H
14. tok svjetlosti	cd.sr	lumen	lm
15. rasvjeta	m^{-2}.cd.sr	luks	lx

Gore navedena imena izvedenih mjera i simboli za njih,odobreni su od CGPM. Međutim je vjerojatno, da će se tijekom vremena ovaj skup mjera SI s posebnim imenom dalje povećavati dodavanjem novih imena za izvedene mjere.

Pomoću mjera s posebnim imenom mogu se izraziti druge mjerne jedinice SI. Tako imamo:

I z v e d e n e m j e r e S I i z r a ž e n e p o m o ć u m j e r a s p o s e b n i m i m e n o m

Fizikalna veličina	U osnovnim mjerama	U mjerama s posebnim imenom
1. tlak	$m^{-1}.kg.s^{-2}$	$Pa = N.m^{-2}$
2. radnja	$m^2.kg.s^{-2}$	$J = N.m = V.A.s$
3. snaga	$m^2.kg.s^{-3}$	$W = J.s^{-1} = V.A$
4. kapacitet	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$	$F = V^{-1}.A.s = V^{-1}.C = \Omega^{-1}.s$
5. električni otpor	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$	$\Omega = V.A^{-1}$
6. električno polje	$m.kg.s^{-3}.A^{-1}$	$V.m^{-1}$
7. induktivitet	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$	$H = V.s.A^{-1} = Wb.A^{-1} = \Omega.s$
8. dielektričnost	$m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2$	$V^{-1}.s.A.m^{-1} = F.m^{-1} = \Omega^{-1}.m^{-1}.s$
9. permeabilnost	$m.kg.s^{-2}.A^{-2}$	$V.s.A^{-1}.m^{-1} = H.m^{-1} = \Omega.m^{-1}.s$
10. entropija	$m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}$	$J.K^{-1} = N.m.K^{-1}$

Ovaj bi se popis mogao i dalje nastaviti. Na taj način izražene izvedene mjere, naime pomoću mjera s posebnim imenom, pokazuju veliku raznolikost. Taj se način rado primjenjuje, kad se želi mjernom jedinicom natuknuti ili sama metoda mjerenja dotične fizikalne veličine, ili istaknuti neki teoretski odnos između promatrane fizikalne veličine i veličina, koje ulaze u njezino ime.

Nakon ovog općeg pregleda mi ćemo se pozabaviti napose pojedinim osnovnim mjernim jedinicama, te definiranjem izvedenih mjernih jedinica.

8. M e t a r

Metar, osnovna mjera za dužinu, prviput je definiran god. 1791. Tada je Francuska akademija znanosti odlučila, da se ta mjera za dužinu ima izvesti iz dimenzije Zemlje tako, da meridijan koji prolazi kroz zvjezdarnicu u Parizu ima duljinu 4.10^7 tih mjernih jedinica, dakle metara. Provedena je izmjera meridijana od Dunkerquea do Barcelone i na osnovu tog mjerenja načinjen je od platine štap pravokutnog presjeka, koji bi od kraja do kraja trebao imati tako definiranu duljinu "jedan metar". To je bio prvi prototip metra, koji je bio realiziran kao mjerilo "na krajeve". Tako definirani i realizirani metar uveden je god. 1799. u Francuskoj kao zakonska mjerna jedinica za dužinu, koja se ima upotrebljavati u javnom saobraćaju i znanosti.

Točnije mjerenje meridijana, koje je kasnije načinio F.W.Bessel (1784. - 1846.), pokazalo je da štap kojim je realiziran metar, ide u zemaljski meridijan 40 003 423 puta, što znači da je on prema originalnoj definiciji bio prekratak. Ovo je dakle mjerenje od Bessela pokazalo nesklad između definicije metra i njegove realizacije. U toj su situaciji bila moguća dva puta; ili da se ostane kod prvotne definicije metra, pa da se načini novo mjerilo prema poboljšanoj izmjeri Zemlje, ili da se napusti prva definicija metra. Odluka je pala za ovu drugu alternativu. Napuštena je definicija metra kao 40-miliontog dijela zemaljskog meridijana, jer je bilo očito da bi svako novo i bolje mjerenje meridijana tražilo novu korekciju mjerila, koje realizira metar. Zato je nova definicija metra jednostavno glasila, da je metar duljina štapa koji je tu mjeru realizirao. Napuštena je veza s dimenzijama Zemlje.

Ovako načinjeno uzorno mjerilo, prototip metra, pokazivalo je nedostatke. Međutim razvojem znanosti i industrije rasla je potreba za m e đ u n a r o d n o priznatom mjerom za dužinu. Tako je konačno došlo do sklapanja Metarske konvencije god. 1875., a to je međunarodni sporazum, kojim su se države potpisnice obvezale, da će na svojem području zakonski uvesti sustav mjera, u kojem je i metar mjerna jedinica. Tada je naručeno kod tvrtke Johnson and Matthey u Londonu, da načini 30 jednakih štapova od slitine 90% platine i 10% iridija, presjeka u obliku slova H koje ima vertikalne poteze prema van ovako izvinute . Na horizontalnoj (srednjoj) plohi tog štapa ima pri svakom kraju urezana po tri usporedna poteza, okomito na dužinu štapa, tako da je razmak od srednjeg poteza pri

jednom kraju, do srednjeg poteza pri drugom kraju, jednak duljini metarskog prototipa od platine. Potezi su urezani na plohi koja sadrži neutralno vlakno štapa, a to je ono područje u osi štapa, koje pri savijanju štapa ne mijenja svoje duljine. Ovo je dakle mjerilo realizirano kao "crtovno mjerilo".

God. 1889. sastala se je Generalna konferencija za utege i mjere CGPM po prvi puta, to je Prva CGPM, i na svojem sastanku od 26. rujna 1889. jednoglasno je prihvatila Rezoluciju, kojom se za jedno od onih 30 mjerila, koje je prije toga već odabrao Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM, p o t v r đ u j e , da će "ovaj p r o t o t i p predstavljati od sada, na temperaturi leda koji se tali, metar kao jedinicu za dužinu". To je Međunarodni etalon (Etalon international) za dužinu, koji je zatim predan na čuvanje i upotrebu u Međunarodni ured za utege i mjere, koji ima sjedište u Pavillion de Breteuil u Sèvres kod Pariza (Bureau International des Poids et Mesures - BIPM). Priznata je ujedno jednakost duljine tog novog metra i prijašnjeg metra od platine, koji je zatim pohranjen u Narodnim arhivima u Parizu (Mètre des Archives).

Preostala metarska mjerila, njih 29 , uspoređena su s tako utvrđenim Međunarodnim etalonom metra, i za svako takovo mjerilo određena je razlika duljine prema prototipu. Ta su onda mjerila jednim dijelom žrijebom razdijeljena među države potpisnice Metarske konvencije, da bi služila kao Narodni etaloni za dužinu (Etalon national), a ostatak tih mjerila pripao je Međunarodnom uredu za utege i mjere BIPM, da se njima služi u mjerne svrhe, kao što su baždarenja i kontrole Narodnih etalona, kontrole industrijskih i laboratorijskih pranormala, i slično. To su referentni etaloni BIPM.

Sama definicija metra, kako je bila prihvaćena na Prvoj CGPM, pokazala se je nedovoljno preciznom. Zato je Sedma CGPM, koja je održana 1927.god.,ovu definiciju nadopunila tako, da je glasila: "Mjerna jedinica za dužinu je metar, određen razmakom osi dviju srednjih crta povučenih na štapu od platine i iridija, koji se čuva u Međunarodnom uredu za utege i mjere i koji je prva Generalna konferencija za utege i mjere odredila za Međunarodni prototip metra, i to kod $0^{o}C$ i normalnog atmosferskog tlaka, te uz uvjet da je štap stavljen vodoravno na dva prema njegovoj sredini simetrično raspoređena valjčića promjera najmanje 1 cm , i međusobno razmaknuta 571 mm i položena na istu horizontalnu ravninu".

Ovo proširenje definicije metra bilo je potrebno, jer prototip metra, postavljen vertikalno i poduprt na donjem kraju, skratio

bi se radi svoje težine za 6.10^{-7}m , a ako bi ga stavili u zrakoprazni prostor, postao bi duži za 2.10^{-7}m .

Međutim ni ovako popravljena definicija metra nije mogla za dugo zadovoljiti i to u jednu ruku zato, jer je ona sadržavala neke nesigurnosti, a u drugu ruku zato, jer je i sam etalon metra davao povoda za kritične primjedbe.

Razmotrimo najprije one nesigurnosti, koje su uvjetovane samom definicijom. Uvjete da tlak bude normalan (ili skoro normalan, što je za ovaj slučaj jednako vrijedno), te da je etalon valjano položen na valjčiće, nije teško ispuniti. Teža je stvar s temperaturom. Materijal od kojega je načinjen prototip metra, ima termički koeficijent rastezanja $8{,}621.10^{-6}\ {}^{\circ}C^{-1}$. Kod ovako velikog predmeta kao što je prototip metra, jedva da se može njegova teperatura držati na $0^{\circ}C$ s točnošću $\pm 0{,}001\ {}^{\circ}C$. a i samo mjerenje temperature s tom točnošću jedva da je provedivo. Zato uvjet temperature donosi nesigurnost od $\pm 10^{-8}$m u duljini prototipa. Budući da su prije spomenute nesigurnosti od tlaka i položaja, u kojem se prototip nalazi, za red veličine manje, to ih možemo prema ovoj temperaturnoj zanemariti. Naime ako bi se promjenom tlaka od normalnog (101 325 Pa) do vakuuma metarski prototip produžio za 2.10^{-7}m, onda je dovoljno tlak držati na toj vrijednosti s točnošću od ± 1000 Pa = 10 milibar , da to dade promjenu duljine metarskog prototipa od $\pm 2.10^{-9}$m , što se može zanemariti prema temperaturnoj nesigurnosti.

Međutim ni sama temperaturna netočnost prototipa ne bi zadavala brige, da nisu tu još dvije stvari, koje su činile metarski etalon nesigurnim. Prvo je sam oblik i stanje crta, koje svojim razmakom daju metar. Kod uspoređivanja mjerila te se crte motre mikroskopom, koji ima u okularu nitni križ ili nešto slično, što se ima namjestiti u os (sredinu) crte na mjerilu. Međutim sama crta na mjerilu, koja je bila načinjena dijamantnim šiljkom, gledana na mikroskopom, ima izgled brazde povučene plugom; rubovi crte ne samo da su svakojako neravni, nego su i uzdignuti, pa namještanje križa mikroskopa "u os crte na mjerilu" zavisi o rasvjeti crte, a mijenja se i od opažača do opažača. Ta se stvar ne popravlja ni upotrebom fotostanice namjesto oka opažača pri namještanju mikroskopa. K tome pridolazi i komplikacija, da se tijekom vremena u brazdu crte skuplja nečistoća, koja mijenja izgled crte. Kako je iskustvo pokazalo, ova nesigurnost u namještanju mikroskopa na

crte Međunarodnog prototipa iznosi $\pm$ 2.10^{-7}m , dakle nadmašuje za red veličine temperaturnu nesigurnost.

Druga stvar koja je zadavala brige u vezi s Međunarodnim etalonom, bila je sumnja, da se njegova duljina mijenja uslijed vrlo polaganih procesa, koji se odigravaju u slitini (leguri) od koje je prototip bio načinjen. Mogućnost takovih procesa postala je vjerojatna, kad su se u godinama 1921. i 1922. ponovno uspoređivali Narodni etaloni s Međunarodnim etalonom. Kod toga uspoređivanja dobile su se razlike u duljinama različite od onih iz godine 1889. Te su se drukčije razlike u duljinama tumačile kao pogreške mjerenja i kao posljedica nestručnog baratanja Narodnim etalonima. Međutim slične su se razlike pokazale i kod usporedbe Međunarodnog etalona s nekim Radnim etalonima Međunarodnog ureda za utege i mjere BIPM. Sva ta uspoređivanja učinila su vjerojatnom sumnju, da se Međunarodni etalon metra u vremenu od god. 1889. pa do god. 1956. skratio za 5.10^{-7}m.

Ova sumnja u stabilnost Međunarodnog etalona metra, kao i strahovanje, da bi se on mogao u nekoj nesreći oštetiti ili izgubiti, već su u prošlom vijeku navodili na pomisao, da se ovaj umjetni, rukom načinjeni etalon, nadomjesti nekim prirodnim, nerazorivim i - barem u načelu - svuda pristupačnim etalonom. Zato je već god. 1895. američki fizičar A.A.Michelson (1852. - 1931.) usporedio duljinu Međunarodnog etalona metra s valnom duljinom crvene svjetlosti, koju emitiraju atomi kadmija. Ovo mjerenje obavio je Michelson uz pomoć Morleya i Benoita u Međunarodnom uredu za utege u mjere BIPM u Sèvresu.

Ovdje je vrijedno spomenuti, da se s Međunarodnim etalonom metra smjelo mjeriti samo u BIPM i to uz izričitu dozvolu Međunarodnog odbora za utege i mjere CIPM. Tako je od god. 1889. pa do god. 1952. Međunarodni etalon samo pet puta upotrijebljen u svrhe mjerenja. Za sva druga mjerenja u BIPM upotrebljavali su drugotne (sekundarne) i niže normale.

Mjerenja Michelsona, koja su kasnije i drugi istraživači ponovili, dala su kao rezultat, da je prihvaćena vrijednost, da je 1 m = 1 553 164'13 valnih duljina crvene kadmijeve svjetlosti, u suhom uzduhu temperature 15 °C , normalnog tlaka i 0'03% volumnog sadržaja CO_2 , ako se ta svjetlost dobiva iz cijevi za izbijanje, kako ju je konstruirao Michelson, i uz specificirane pogonske uvjete za tu cijev.

Sedma Generalna konferencija za utege u mjere CGPM prihvatila je ovu vrijednost za valnu duljinu kadmijeve crvene svjetlosti kao točnu do zadnjeg mjesta, i ona je od tada bila osnova za spektroskopska mjerenja valnih duljina svjetlosti.

Ova su mjerenja Michelsona i drugih bila samo prvi korak na putu, da se Međunarodni etalon za metar nadomjesti valnom duljinom neke svjetlosti. Da bi takovo nešto moglo dogoditi, proročki je već predvidio god. 1870. J.C.Maxwell, kako će biti podrobnije izloženo u članku o mjernoj jedinici za vrijeme - sekundi. Međutim nedostatak Michelsonovog mjerenja bio je u tome, što u njegovoj cijevi za pobudu kadmijevih atomana svijetljenje, svjetlost emitira prirodna smjesa kadmijevih atomas masenim brojevima 106, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 116 od kojih su najbrojniji atomi s masenim brojem 114, a zatim redom 112, 110, 113, 111, ... Budući da u prirodnom kadmiju imamo smjesu od navedenih nuklida (vrsta jezgara), to crvena kadmijeva spektralna linija pokazuje hiperfinu strukturu iz dva razloga; prvo zato, jer razne jezgre imaju razne mase, pa to ima utjecaja na vrijednost terma, to je izotopni efekt, te drugo zato, što jezgre s neparnim masenim brojem nemaju zamah (spin) jezgre jednak nuli, pa se taj može na razne načine pribrojiti zamahu elektronske ovojnice, dajući tako višestruke energetske nivoe (terme) i time višestruke linije.To cijepanje linija, poznato pod imenom hiperfina struktura, može se otkriti samo najjačim spektralnim sredstvima.

Premda je kadmijeva crvena svjetlost vrlo fina linija u običnom spektroskopu, ona je ipak, kako je netom izloženo, smjesa svjetlosti kojima se valne duljine samo neznatno razlikuju. To međutim dovodi kod interferometrijskih izmjerivanja do smetnji, jer pri povećavanju razlike u hodu između svjetlosnih zraka koje interferiraju, dolazi do periodičnog slabljenja i jačanja kontrasta interferencionih pruga.

Točnost usporedbe metarskog etalona s kadmijevom crvenom svjetlosti bila je velika, no ipak nije bila dovoljna, da bi se na osnovu tih mjerenja moglo sa sigurnošću ustanoviti, da li se dužina etalona metra skraćuje ili ne. S druge strane Michelsonovo mjerenje ima osim gore spomenutog nedostatka, da se radi sa smjesom od osam kadmijevih izotopa, još i taj nedostatak, da uz navedeni broj valnih duljina kadmijeve crvene svjetlosti treba navesti i način dobivanja te svjetlosti, to jest pogonske uvjete Michelsonove svjetiljke, zatim uvjete kojima mora zadovoljavati uzduh,

kroz koji se ta svjetlost širi. Zato se je u jednu ruku nastojalo, da se nađe neki element, čije linije imaju povoljnija svojstva za definiranje mjere za dužinu, a u drugu ruku se je nastojalo da se sama definicija očisti od nepotrebnih ograničenja i podataka.

Nakon pomnih ispitivanja i međusobnog savjetovanja vodećih laboratorija, konačno je Jedanaesta CGPM god. 1960.u svojoj Rezoluciji 6 u t v r d i l a :

"1. Međunarodni prototip metra ne definira metar s preciznošću, koja bi bila dovoljna za suvremene potrebe metrologije,

2. Poželjno je da se usvoji prirodni i nerazorivi etalon za dužinu,

Zato o d l u č u j e :

1. Metar je dužina koja je jednaka 1 650 763°73 valnih duljina u vakuumu radijacije atoma kriptona 86 , a koja odgovara prijelazu iz energetskog stanja $5d_5$ u stanje $2p_{10}$;

2. Ukida se definicija metra, koja je vrijedila od god. 1889. i koja se je osnivala na Međunarodnom prototipu metra od platine i iridija,

3. Međunarodni prototip metra, koji je sankcionirala Prva CGPM čuvat će se i nadalje u Međunarodnom uredu za utege i mjere BIPM uz iste uvjete, kako su bili utvrđeni god. 1889."

Ta ista Jedanaesta CGPM donijela je i Rezoluciju 7, kojom se poziva Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM:

"1. da izradi upute za praktičnu primjenu nove definicije metra,

2. da izabere sekundarne etalone za valnu duljinu za mjerenje dužina metodom interferencije i izradi upute za njihovu upotrebu,

3. da i dalje nastavi istraživanja u smjeru poboljšanja etalona za dužinu."

Ovima rezolucijama Jedanaeste CGPM zadovoljeno je u jednu ruku težnji, da se poveća preciznost etalona dužine, a u drugu ruku, da se osigura njegova nerazorivost i trajnost. Prema Michelsovom izboru kadmijeve crvene svjetlosti, prednost je ovdje u tome, što je definicija metra osnovana samo na svjetlosti jedne vrste kriptonovih atoma, naime s masenim brojem 86 (prirodni je kripton smjesa koja sadrži šest različitih nuklida). Time je izbjegnuta izotopna hiperfina struktura upotrijebljene spektralne linije, a

budući da je u nuklidu Kr86 i broj protona i broj neutrona paran, to je i zamah (spin) jezgre jednak nuli, pa taj uzrok za cijepanje energetskih nivoa (terma) otpada.

Nadalje u novoj definiciji metra uzima se valna duljina svjetlosti u vakuumu. Zato otpadaju komplikacije uvjetovane stanjem atmosfere, kroz koju se ta radijacija širi.

Premda u novoj definiciji nije ništa neposredno rečeno o tome, kakova treba biti svjetiljka koja emitira radijaciju potrebnu da se realizira metar, to ipak iz te definicije slijedi, da ta svjetiljka mora biti takova, da njezina svjetlost bude što je moguće bliže svjetlosti, koju emitiraju n e s m e t a n i i prema opažaču m i r n i atomi kriptona 86. U definiciji metra govori se o radijaciji atoma kriptona 86. Da bi atomi koji svijetle bili po mogućnosti nesmetani, mora biti njihova koncentracija (gustoća) u svjetiljki malena. Da se pak izbjegne proširenje linija uslijed Dopplerovog efekta, treba toplinsko gibanje atoma koji svijetle, svesti na najmanju moguću mjeru. Provedena su mjerenja i načinjene su razne svjetiljke s kriptonom 86. Svrha je tih mjerenja bila, da se kvantitativno obuhvate oni utjecaji, koji u tim svjetiljkama mijenjaju valnu duljinu nesmetanih atoma, pa da se tako dobiju formule za korekcije stvarno emitirane valne duljine.

Da bi se umanjilo toplinsko gibanje kriptonovih atoma, svjetiljka se uroni u kapljeviti uzduh i tako joj se snizi temperatura na nekih 60 K . Kripton se skrućuje kod 116 K , pa prema tome tada je u svjetiljki (cijevi) sublimacioni tlak zasićenih kriptonovih para, koji odgovara toj temperaturi. Tako je kod 63 K taj tlak samo 0°03 tor , pa je prema tome svjetlost iz cijevi slaba.

Atomi kriptona mogu se pobuditi na svjetljenje na razne načine. Jedan je od tih sudarom s elektronima, koji struje iz užarene katode i ubrzani su umjerenim električnim poljem. Kako se elektroni u cijevi gibaju od katode prema anodi, to oni sudarom s atomima kriptona daju ovim atomima taj smjer gibanja. Zato ako se iz cijevi uzima svjetlost, koja se širi u istom smjeru, u kojem putuju i elektroni, dobije se kraća valna duljina, nego ako se gleda iz protivnog smjera. To se međutim skraćenje valne duljine uslijed Dopplerovog efekta kompenzira produženjem valne dužine (prema valnoj dužini λ_0 koju bi emitirali nesmetani atomi) uslijed međusobnog djelovanja atoma u cijevi. Za jedan i drugi utjecaj poznati su kvantitativni izrazi, pa se iz njih mogu izvesti optimalni uvjeti

pogona spektralne cijevi s kriptonom 86 , koja koristi užarenu katodu kao izvor uzbudnih elektrona.

Uz preporučene mjere opreza, po mišljenju Međunarodnog odbora za utege i mjere razmjerno je lako postići, da nesigurnost u valnoj duljini svjetlosti koja je etalon za dužinu, bude

$$\left|\frac{\Delta\lambda_o}{\lambda_o}\right| \leq 10^{-8} ,$$

a uz rigoroznije uvjete, ta bi se nesigurnost, po mišljenju CIPM, dala sniziti na 10^{-9} . Ovaj stupanj preciznosti u definiciji metra više nego da zadovoljava današnjem stanju mjerne tehnike.

Kao sekundarne valne duljine za ostvarenje mjerne jedinice dužine, razvijene su svjetiljke s neonom 20 , ksenonom 136 , kadmijem 114 , živom 198 . Nadalje usavršavaju se interferometri za uspoređivanje dužina. To je od važnosti za mjerne laboratorije raznih instituta u znanosti i industriji. Rad na usavršavanju etalona dužine i mogućnostima njegovog ostvarenja, te rad na ostaloj pomoćnoj aparaturi, ide dalje. Taj se rad uglavnom odvija u raznim nacionalnim institutima, koji se specijalno bave metrologijom. Tim se radom koriste i primijenjene i čiste znanosti. Međutim se smatra, da će nova definicija metra zadovoljavati još u daleku budućnost, i da neće biti potrebe, da se ona mijenja.

9. K i l o g r a m

Kilogram je mjerna jedinica za masu. Nastao je istodobno s metrom. Prvotna je definicija kilograma glasila, da je to masa čiste vode, obujma jednog kubnog decimetra i temperature, kad voda ima najveću gustoću. Prema toj definiciji načinjen je valjak od platine, kojim je kilogram trebao biti realiziran u smislu ove definicije.

Kasnija su mjerenja pokazala, da je prototip kilograma od platine za nekih 3.10^{-5}kg prevelik prema onome, što bi po definiciji trebao biti. U ovom se slučaju opet postupilo na isti način kao i u slučaju metra; odustalo se je od definiranja, kojim se kilogram svodi na masu kubnog decimetra vode. Tako je kilogram bio definiran kao masa određenog tijela od platine.

Kad se je sklapala Metarska konvencija, bio je i kilogram uključen kao osnovna mjera. Tada je načinjeno četrdeset valjaka, kružne osnovke i kvadratičnog vertikalnog presjeka, od slitine 90% platine i 10% iridija tako, da je svaki od tih valjaka imao

masu jednaku masi prototipa kilograma od platine. Prva CGPM potvrdila je jednakost tih masa i napose "da su određivanja masa međunarodnog prototipa kilograma i narodnih prototipova izvršena zadovoljavajući svim uvjetima preciznosti koju dopušta sadašnje stanje znanosti."

Prvotni prototip kilograma od platine pohranjen je u Narodnim Arhivima u Parizu (Kilogramme des Archives), a jedan od valjaka od 90% platine i 10% iridija jednoglasno je prihvaćen na Prvoj CGPM god. 1889. kao etalon za masu. Dio ostalih valjaka žrijebom je podijeljen među države potpisnice Metarske konvencije, da bi služili kao Narodni etaloni, a što je preostalo predano je u BIPM.

Na istoj konferenciji odobreni su uvjeti i propisi, kako se ima čuvati Međunarodni etalon za masu u BIPM u Sèvresu kod Pariza. Taj etalon još danas predstavlja uzor za mjernu jedinicu mase.

Naziv osnovne mjere za masu "kilogram" sastavljen je od osnove "gram" i predmetka (prefiksa) "kilo". To je jedina osnovna mjera, koja ima sastavljeno ime. Budući da se decimalni mnogokratnici, odnosno dijelovi, osnovnih mjera tvore dodavanjem predmetaka kao deka, hekto, kilo, mega, ... odnosno deci, centi, mili, mikro, ... to je bilo nedoumice, kako treba s imenom "kilogram" postupiti. Da ne bi bilo nikakove sumnje Međunarodni odbor CIPM o b j a v i o je god. 1967. "Propisi Rezolucije 12, donesene na Jedanaestoj CGPM (god. 1960.) primjenjuju se u slučaju kilograma na ovaj način: nazivi decimalnih mnogokratnika i dijelova mjerne jedinice za masu tvore se tako, da se predmeci dodavaju nazivu -gram-".

U vezi s kilogramom treba spomenuti još dvije mjere izvan Međunarodnog sustava SI. Prva je od tih mjera za obujam "litra". Uvodno smo spomenuli, kako je glasila prvotna definicija kilograma. Može se reći da je Treća CGPM god. 1901. stvar obrnula. Na toj je naime konferenciji prihvaćena definicija za litru: "Mjerna jedinica za obujam za vrlo precizna mjerenja jest obujam, što ga zauzima masa od jednog kilograma čiste vode, kad ona ima najveću gustoću i pri normalnom tlaku. Ovaj se obujam naziva "litra"."

Na početku smo spomenuli, da je kilogram izašao nešto prevelik prema svojoj prvotnoj definiciji. Odatle slijedi, da je netom definirana litra nešto veća od kubnog decimetra. Ta neznatnost razlike imala je za posljedicu, da su u praksi litra i kubni decimetar bili sinonimi, međutim kod vrlo finih mjerenja, za koja je litra bila predviđena, ta je razlika dovodila do zabuna. Kad je razlika

između litre i kubnog decimetra utvrđena s dovoljnom točnošću, onda je Jedanaesta CGPM (god. 1960.) u Rezoluciji 13

u t v r đ i l a :

"1. Kubni decimetar i litra nisu jednaki. Litra se razlikuje od kubnog decimetra za 28.10^{-6} dm^3,

2. Određivanje fizikalnih veličina u vezi s mjerenjem obujma ima sve veću i veću točnost, do koje se međutim otežano dolazi poradi nesporazuma koji nastaju radi kubnog decimetra i litre.

Zato p o z i v a Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM, da ovaj problem prouči i da svoje zaključke predloži Dvanaestoj CGPM."

Međunarodni odbor CIPM donio je god. 1961. ovu

P r e p o r u k u :

"Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM preporučuje da rezultati preciznih mjerenja budu izraženi mjernim jedinicama Međunarodnog sustava SI, a ne u litrama."

Na ovo je Dvanaesta CGPM (god. 1964.) donijela ovu Rezoluciju 6 :

"Dvanaesta konferencija za utege i mjere

1. U k i d a definiciju mjerne jedinice litra, kako je bila utvrđena na Trećoj CGPM iz god. 1901.

2. O b j a v l j u j e , da se riječ "litra" može koristiti kao specijalan naziv za kubni decimetar.

3. P r e p o r u č u j e da se naziv "litra" ne upotrebljava kod vrlo preciznih mjerenja obujma."

Tekst ove Rezolucije 6 toliko je jasan, da ga ne treba komentirati. Najvažnije je međutim to, da danas između litre i kubnog decimetra više nema razlike.

Druga mjera u vezi s kilogramom, a koja je izvan sustava SI, jest mjera za silu "kilopond".I ovdje je vrijedno stvari dovesti na čistac.

Budući da su dvije mase jednake,ako na istom mjestu Zemlje imaju jednake težine,to je često dolazilo do brkanja pojmova "masa tijela" i "težina tijela",a napose zato, jer su se obje ove veličine rado izražavale u "kilogramima". Zato je već Treća CGPM iz god. 1901. smatrala za potrebno i z j a v i t i :

"1. Kilogram je mjerna jedinica za masu. Ona je jednaka masi Međunarodnog prototipa kilograma.

2. Izraz t e ž i n a označuje veličinu iste prirode kao i sila. Težina tijela je umnožak mase tijela i ubrzanja koje nastaje uslijed djelovanja zemljine teže. Napose, normalna težina je umnožak mase tijela i normalnog ubrzanja uslijed zemljine teže.

3. Međunarodna služba za utege i mjere usvojila je za vrijednost normalnog ubrzanja zemljine teže 980°665 $cm.s^{-2}$, i ta je vrijednost sankcionirana u nekim zakonima."

Za težinu tijela mase jedan kilogram, kad na njega djeluje normalna teža, upotrebljavao se je najprije naziv "kilogram-sila", a kasnije "kilopond". Međutim danas po preporuci Međunarodnog odbora za utege i mjere CIPM treba izbjegavati upotrebu mjere kilopond. Taj naime odbor " n e p r e p o r u č u j e " mjernu jedinicu 1 kilopond = 9°80665 N .

10. S e k u n d a

Vrtnja Zemlje oko njezine osi određuje osnovni ritam našega života, trajanje dana. To je mjera vremena koja se neposredno nameće. Izmjena godišnjih doba, trajanje godine, druga je mjera vremena, koja igra temeljnu ulogu u pribavljanju hrane, ogrjeva, dakle temeljnih potreba našega života. Prema tome je sasvim naravno, da je za mjerenje toka vremena odlučno prividno gibanje Sunca. Astronomija je ona znanost koja za mjerenje vremena ima odlučnu riječ. Do nedavna astronomija je i jedina bila mjerodavna za mjerenje vremena i za ostvarenje mjerne jedinice za vrijeme. Tako je to bilo u doba antike, pa sve do prije par decenija. Međutim točnost i mogućnosti mjerenja vremena znatno su kroz ta duga stoljeća napredovali, a naročito u posljednje vrijeme, a astronomiji pridružile su se u mjerenju vremena i druge znanosti, kako će nam izlaganje koje slijedi pokazati.

Odmah na početku treba upozoriti na razliku između dva pojma u vezi mjerenja vremena. Treba razlikovati pojam "vrijeme" od pojma "trajanje". Astronomija je prvenstveno interesirana u "vremenu", dok je za fiziku važno "trajanje". Astronomski su događaji jednokratni: položaji Mjeseca, gibanja planeta, pomrčine Sunca, pojava neke Nove, ... Za sve ove događaje daje se godina, mjesec, dan, sat, dakle "čas vremena" nekog astronomskog događaja. U fizici međutim susrećemo se s "trajanjima": titrajno vrijeme nekog periodičnog pojava, trajanje toka električne struje, srednje trajanje života

radioaktivnog elementa, trajanje proleta elektrona između dviju elektroda, ... Sve su to događaji, za koje nije važno navesti kada su se dogodili, to jest u koji čas vremena; za njih je važno znati, kako su dugo trajali, ili bez ikakovog obzira na vrijeme, naprosto se izriču bezvremenski, da se kaže, kako dugo traju. Navodi se samo razlika između časa, kad je događaj počeo i časa, kad je događaj prestao. Tu je iznos razlike važan i po uvjerenju fizičara u nepromjenljivost fizikalnih zakona, taj je iznos načelno nezavisan o času, kad se je događaj odigrao. To možemo i ovako izraziti: Za astronomiju je važna ura, koja po mogućnosti točno ide ne stajući nikada, i koja pokazuje tok vremena, dok je za fiziku važna zaporna ura, koja po mogućnosti točno ide, dok traje neki događaj. I za astronomiju i za fiziku je važno, da ura "ide točno", dakle da se istom dogovorenom mjerom vremena mjeri i "vrijeme" i "trajanje".

Prividno dnevno gibanje Sunca bila je prva osnova za mjerenje vremena, a time i trajanja. Vremenski razmak između dva uzastopna prolaza Sunca kroz meridijan nekog mjesta na Zemlji, jest jedan pravi sunčani dan. To je razmak između dva prava podneva. Radi toga što je staza Zemlje oko Sunca elipsa, te budući da je zemaljska os prema ravnini te elipse nagnuta, pravi su sunčani dani tijekom jedne godine različito dugi. Zato se uzima srednjak pravih sunčanih dana preko godine i tako se dobiva vremenski razmak s r e d n j i s u n č a n i d a n . Trajanje jednog srednjeg sunčanog dana je 24 sata ili 86 400 sekunda. Tako je glasila prva definicija mjere za vrijeme, sekundu.

Međutim već su astronomska opažanja navodila na pomisao, da ovako definirana sekunda, koja se osniva na vrtnji Zemlje, nije konstantna. Naime iz astronomskih opažanja, koja su u prošlosti zabilježena, moglo se je zaključiti, kao da se je vrtnja Zemlje tijekom stoljeća sad usporavala, sad ubrzavala. To se je zaključilo iz podataka, koji su zabilježeni o pomrčinama Mjeseca i Sunca, a koji sežu u prošlost od preko 2000 godina.

Nisu manjkali ni kritični glasovi fizičara u vezi s nestalnošću vrtnje Zemlje. Naime po zakonima fizike, plima i oseka, pa razne promjene na Zemlji, nužno vode do promjene brzine vrtnje Zemlje. Tako je na primjer 15.rujna 1870.god. u Liverpoolu u svojem govoru pred Mathematical and Physical Sections of the British Association slavni J.C.Maxwell među ostalim u svojem predavanju rekao i ovo:"...Ako ispitujemo kovni novac, ili utege i mjere, neke civilizirane zemlje, nailazimo na jednolikost, koja je

proizvedena pažljivim prilagođavanjem standardima, koje je načinila i dala na raspolaganje država. Stupanj jednoličnosti ovih nacionalnih standarda jest mjera za onaj duh pravednosti u narodu, koji je uveo zakone kojima se standardi određuju i imenovao službenike, da ih nadziru.

To je predmet u kojemu i mi kao znanstveno tijelo uzimamo živ interes; a vama je svima poznata ona ogromna količina znanstvenoga rada, koji se je uložio, i to korisno uložio, da se načine utezi i mjere za trgovačke i znanstvene svrhe.

Zemlju su izmjerili kao osnovu za jedan trajni standard dužine, i sva svojstva kovina su ispitivali, da bi se osigurali protiv bilo kakovih promjena u materijalnom standardu, kad je bio načinjen. Da se bilo koja stvar odvaže ili izmjeri modernom točnošću, to zahtijeva niz pokusa i računanja, u kojemu dolazi do potrebe za malne svakom granom fizike i matematike.

Pa ipak, nakon svega, dimenzije naše Zemlje i trajanje njezine vrtnje, premda relativno prema sadašnjim mogućnostima usporedbe vrlo stalni, nijesu takovi po bilo kakovoj fizikalnoj nuždi. Zemlja se može stisnuti uslijed hlađenja, ili se može povečati slojem meteorita koji na nju padnu, ili se njezina brzina vrtnje može polagano umanjivati, pa opet će ona i nadalje nastaviti da bude onakav planet, kakav je bila i prije.

No ako bi se nekoj molekuli, recimo vodikovoj, promijenila bilo masa, bilo vrijeme titranja, pa i za najmanje, onda ona ne bi više bila molekula vodika.

Ako dakle želimo dobiti standarde dužine, vremena i mase, koji treba da su apsolutno trajni, mi ih ne smijemo tražiti u dimenzijama, ili u gibanju, ili u masi našega planeta, nego u valnoj duljini, u trajanju titraja, i u apsolutnoj masi tih neuništivih i nepromjenljivih i savršeno sličnih molekula." ...

Ovo Maxwellovo obrazlaganje, izrečeno pred više od stotinu godina, zvuči moderno. Tu su već navedeni razlozi, koji su također bili odlučni, da se materijalni etalon duljine, metar od platine i iridija, nadomjesti metrom izraženim valnom duljinom određene svjetlosti kriptona 86 . Slično se je dogodilo i s etalonom za vrijeme, kako ćemo malo niže izložiti. U Maxwellovo doba međutim nije se još znalo načiniti uru, za koju bi sa sigurnošću mogli uzeti, da ima tako jednoličan hod, da ukoliko se pokaže razlika između hoda te ure i brzine vrtnje Zemlje, da možemo tvrditi, da

se je promjena dogodila u vrtnji Zemlje. Danas stvar stoji drukčije. Danas raspolažemo takovim urama.

Nejednolikost zemljine vrtnje ustanovila se je sasvim sigurno, kad se je u tridesetim godinama ovog stoljeća provela kontrola vrtnje Zemlje pomoću kvarc ura. Tada se je ustanovilo, da se brzina zemljine vrtnje tijekom godine sezonski mijenja: da se Zemlja vrti polaganije u ožujku, a brže u rujnu. Ustanovilo se je nadalje, da se veličina promjene brzine vrtnje mijenja od godine do godine, te da te promjene ne nastupaju u svakoj godini u isto vrijeme. Sve ovo ima za posljedicu, da sekunda, definirana pomoću srednjeg sunčanog dana, nije stalna.

Imajući to stanje stvari u vidu, povela se je rasprava o etalonu za vrijeme na Sedmom generalnom zasjedanju Međunarodne astronomske zajednice (Assemblée Générale de l'Union Astronomique Internationale) god. 1948. u Zürichu. Do te je rasprave došlo na poticaj Međunarodnog ureda za utege i mjere BIPM u Parizu. Budući da je pitanje etalona za vrijeme povezano s ostalim astronomskim konstantama i mjerama (na primjer "godina svjetlosti"), to je na tom zasijedanju stvar odgođena do Međunarodnog kolokvija astronoma održanog god. 1950. u Parizu. Na tom je kolokviju jednoglasno prihvaćena Rezolucija, kojom se p r e p o r u č u j e Međunarodnoj astronomskoj zajednici, da se u svim slučajevima, kad je srednja sunčeva sekunda nepogodna zbog promjenljivosti, upotrijebi kao temeljna prirodna pojava obilazak Zemlje oko Sunca i vremenski razmak, koji tome odgovara, i to napose zvjezdana godina, koja odgovara brzini gibanja Zemlje oko Sunca u čas 1900°o . Ovdje treba napomenuti, da je zvjezdana godina trajanje jednog obilaska Zemlje oko Sunca, dakle vrijeme potrebno da Sunce gledano sa Zemlje ponovno stigne na isto mjesto među zvijezdama stajačicama. Čas 1900°o podudara se s 12^h Greenwichkog srednjeg vremena 31. prosinca 1899.

O ovoj preporuci Međunarodne astronomske zajednice raspravljalo se je na Desetoj generalnoj konferenciji za utege i mjere CGPM (god. 1954.). Kako smo gore spomenuli, Međunarodna je astronomska zajednica preporučila trajanje zvjezdane (sideričke) godine u čas 1900°o kao osnovu za definiciju vremenskog etalona. Međutim budući da se trajanje sideričke godine određuje posredno tako, da se izmjeri tropska godina, pa da se onda ovoj doda vremenski interval, u kojem "srednje sunce" prijeđe godišnji precesioni pomak Proljetne točke, to je Deseta CGPM svojom Rezolucijom 5 ovlastila

Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM, da izradi prijedlog za definiciju mjerne jedinice za vrijeme, a na osnovu tropske godine. Proljetna točka ekliptike, ili Prva točka Ovna, jest ona točka na ekliptici, gdje ova siječe ekvator i prelazi s juga na sjever gledano u smjeru prividnog godišnjeg gibanja Sunca prema stajačicama. Ekliptika je krug, što ga svojim godišnjim gibanjem na nebeskom svodu opisuje Sunce gledano sa Zemlje. Proljetna točka polagano putuje po ekliptici ususret Suncu. To je precesija Proljetne točke, koja nastaje uslijed zakretnog momenta, kojim Sunce i Mjesec djeluju na Zemlju. Taj pak momenat nastaje zato, što Zemlja nije kugla, nego je sploštena tako, da je duž ekvatora izbočena. Budući dakle Proljetna točka putuje Suncu ususret, to Sunce ne proputuje čitavu ekliptiku, kad se ponovno vrati u Proljetnu točku. Ili drukčije rečeno, tropska godina je kraća za onoliko vremena, koliko Sunce treba da prevali po ekliptici pomak Proljetne točke.

Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM na svojem sastanku god. 1956. donio je ovu Rezoluciju 1:

"Na osnovu punomoći koju je dobio Rezolucijom 5 od Desete generalne konferencije za mjere i utege CGPM (god.1954.) Međunarodni odbor za utege i mjere u t v r đ u j e :

1.Deseta generalna skupština Međunarodne astronomske zajednice (Assemblée Générale de l'Union Astronomique Internationale, Dublin 1955.) izrazila je povoljno mišljenje o priključku sekunde na tropsku godinu,

2. Suglasno odluci Osme generalne skupštine međunarodne astronomske zajednice (Rim god.1952.) sekunda efemeridskog vremena (TE) jest razlomak

$$\frac{12\ 960\ 276\ 813}{408\ 986\ 496} \cdot 10^{-9}$$

tropske godine u 12^h efemeridskog vremena 0. siječnja 1900 godine.

Zato o d l u č u j e :

Sekunda jest

$$\frac{1}{31\ 556\ 925{,}974\ 7}$$

tropske godine u 12 sati efemeridskog vremena 0. siječnja 1900. godine."

Jedanaesta generalna konferencija za utege i mjere CGPM (god. 1960.) donijela je Rezoluciju 9, kojom je gore navedena definicija sekunde ratificirana.

Paralelno s nastojanjima astronoma, da se nađe pouzdanija osnova za definiciju etalona vremena, sekunde, tekao je rad fizičara, da se iznađu periodični pojavi velike preciznosti, to jest takovi pojavi, koji su vrlo točno jednakog trajanja i koji se mogu uzastopno kroz vrlo dugo vrijeme održavati. Titranje štapića izbrušenih iz kvarca i pobuđenih na titranje na osnovu piezoelektričnog pojava bio je prvi korak u tom smjeru. Pri tome treba držati na umu, kako je već bilo spomenuto, da se u fizici prvenstveno radi o točnom mjerenju trajanja, dakle vremenskog intervala, u astronomiji pak o mjerenju vremena, a to je ustanovljenje časa, kad se je nešto dogodilo. Astronomski je zadatak teži, jer on još pretpostavlja na r a z n i m mjestima Zemlje ure, koje s i n h r o n o idu. Prema tome u astronomiji k točnosti hoda ure dolazi još i težak problem sinhronizacije ura, koje se nalaze na raznim mjestima Zemlje. Ta razlika u problematici astronomije i fizike može se izreći i ovako: u astronomiji je od važnosti vrijeme, a u fizici frekvencija. Zato je rad fizičara bio usmjeren na izgradnju uređaja, koji titraju poznatom i vrlo stalnom frekvencijom.

Nakon ura upravljanih kvarcovim kristalima slijede "atomske ure", a to su ure, u kojima je hod reguliran titrajima iz područja atomskih dimenzija. Takova je na primjer ura, koja koristi jednu vlastitu frekveciju molekula amonijaka, te konačno ura, u kojoj se hod regulira elektromagnetskim titrajima, koji se dobivaju pri prijelazu cezijeva atoma između dva hiperfina energetska stanja (nivoa). Radi se naime o ovome. Cezijevi atomi, kako se nalaze u prirodi, imaju svi jezgre, koje sadrže 55 protona i 78 neutrona. Ta jezgra ima zamah (spin), kojemu pripada kvantni broj $I = \frac{7}{2}$. U osnovnom energetskom stanju neutralnog atoma cezija zamah elektronskog omotača od 55 elektrona ima kvantni broj $J = \frac{1}{2}$, koji dolazi od vlastitog zamaha jedinog vanjskog elektrona (cezij je alkalični element), koji se nalazi na svojoj najnižoj energetskoj stazi. Prema tome u osnovnom stanju elektronskog omotača atoma cezija, koje nosi spektroskopsku oznaku $^2S_{\frac{1}{2}}$, zamah vanjskog elektrona može biti ili paralelan sa zamahom jezgre, ili može biti s ovim antiparalelan. Prema tome kvantni broj F hiperfine strukture, koji se dobiva zbrajanjem brojeva $I + J = F$, može u ovom slučaju poprimiti dvije vrijednosti: 3 za antiparalelni položaj, i 4 za paralelni položaj. Ta dva osnovna stanja cezijevog atoma imaju različite sadržaje energije, pa pri prijelazu atoma iz jednoga

stanja u drugo dolazi do emisije radijacije, koja ima frekvenciju 9 192 MHz .

Vrlo pažljivima i savjesnima ispitivanjima, koja su se obavila u Narodnim laboratorijima specijaliziranima za metrologiju, kao što je na primjer engleski National Physical Laboratory u Teddingtonu, ustanovljeno je, da se ta cezijeva frekvencija dade vrlo precizno održavati. Ako tu frekvenciju označimo sa ν_0 , postignuta preciznost iznosi

$$\left|\frac{\Delta\nu_0}{\nu_0}\right| \leq 10^{-10} \quad .$$

Uspostavljena je i veza s astronomskom sekundom efemeridskog vremena.

Napredak na atomskim etalonima frekvencije doveo je konačno do toga, da je Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM god. 1964. donio ovu Deklaraciju:

"CIPM o v l a š ć e n Rezolucijom 5 Dvanaeste CGPM da označi atomske ili molekularne etalone frekvencije, koji bi se mogli privremeno upotrebljavati za fizikalna mjerenja vremena, o b j a v l j u j e da etalon, koji se može upotrebljavati jest prijelaz između hiperfinih nivoa $F = 4$, $M = 0$, i $F = 3$, $M = 0$ osnovnog stanja $^2S_{\frac{1}{2}}$ atoma cezija 133 ,

koji nije smetan vanjskim poljima, i da je vrijednost 9 192 631 770 Hz određena za frekvenciju radijacije, koja pripada tom prijelazu."

Nakon toga je Trinaesta CGPM (god. 1967.) donijela ovu Rezoluciju 1 :

"Trinaesta Generalna konferencija za utege i mjere u t v r đ u j e :

1. Definicija za sekundu, o kojoj je rješavao Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM god. 1956. (Rezolucija 1) i koju je ratificirala Jedanaesta CGPM god. 1960. Rezolucijom 9, ne zadovoljava više potrebama metrologije,

2. Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM na svojoj sjednici 1964. god. ovlašćen Rezolucijom 5 Dvanaeste CGPM iz god. 1964. izabrao je za ove potrebe privremeno atomski etalon frekvencije sa cezijem,

3. Ovaj je etalon sada dovoljno ispitan i dovoljno precizan, da može poslužiti za definiciju sekunde, koja odgovara

suvremenim potrebama,

4. Došao je čas, da se u Međunarodnom sustavu mjera SI dosada važeća definicija mjerne jedinice za vrijeme zamijeni atomskom definicijom zasnovanom na ovom etalonu.

Zato o d l u č u j e :

1. Mjerna jedinica za vrijeme u Međunarodnom sustavu mjera jest sekunda i ona se definira ovako:

Sekunda je trajanje od 9 192 631 770 perioda radijacije, koja odgovara prijelazu između dva hiperfina nivoa fundamentalnog stanja atoma cezija 133 .

2. Ukidaju se Rezolucija 1 , koju je usvojio Međunarodni odbor CIPM god. 1956. i Rezolucija 9 Jedanaeste CGPM iz god. 1960."

Tako je evo nakon skoro točno stotinu godina iza proročkih riječi J.C.Maxwella svedena i sekunda na atomske pojave. Za metar se je to nešto prije dogodilo, kako smo to već izložili. Tako su standardi za te mjere nađeni, kako se je Maxwell izrazio "...u valnoj duljini, trajanju titraja, i apsolutnoj masi tih neuništivih i nepromjenljivih i savršeno sličnih molekula..."

Treća osnovna mjera, kojoj je standard nađen u "apsolutnoj masi tih neuništivih i nepromjenljivih i savršeno sličnih molekula" jest osnovna mjera za količinu materije, mol, i koja je definirana i uvedena na Četrnaestoj generalnoj konferenciji CGPM iz god. 1971. Time su se Maxwellove riječi ispunile do kraja. O samoj mjeri mol bit će još govora.

11. A m p e r

I mjera za jakost električne struje ima svoju povijest. Ta je povezana s razvojem nauke o elektricitetu i magnetizmu.

Isprva su se elektricitet i magnetizam razvijali kao dvije međusobno nezavisne nauke. U svrhe mjerenja bio je proširen na elektricitet CGS sustav mjera iz mehanike i to tako, da se je po definiciji uzelo, da je dielektričnost vakuuma naprosto jednaka jedinici (matematičko jedan). Na taj se je način ostalo i pri prijelazu na elektricitet, na trima nezavisnim fizikalnim veličinama, pa i na trima osnovnim mjerama. Tako je razvijen sustav mjera, Elektrostatski CGS sustav. Polazište toga sustava bio je Coulombov zakon za međusobno djelovanje dvaju sitnih električnih naboja u vakuumu, napisan u neracionaliziranom obliku.

Slično se je postupilo i u magnetizmu, prvotno zasebnom području fizike. Mehanički CGS sustav proširen je na magnetizam tako, da je permeabilnost vakuuma po definiciji uzeta kao jedinica i jednaka matematičkom jedan. Polazište je bio Coulombov zakon za međusobno djelovanje dvaju sitnih magnetskih polova (magnetskih masa), napisan u neracionaliziranom obliku. Tako je nastao CGS sustav mjernih jedinica, koji se je kasnije prozvao Elektromagnetski CGS sustav.

Kad se je našla veza između elektriciteta i magnetizma, koja se manifestira u činjenicama, da je gibanje električnih naboja praćeno magnetskim poljem, a gibanje magnetskih polova električnim poljem, u zakonima koji te veze formuliraju, našle su se električne i magnetske veličine. Ovi zakoni koji vežu elektricitet i magnetizam, omogućavali su u jednu ruku da se Elektrostatski CGS sustav mjera proširi na magnetizam, a u drugu ruku, ti isti zakoni omogućavali su proširenje Elektromagnetskog CGS sustava mjera na elektricitet.

Tok povijesti nauke o elektromagnetizmu, koja se je nauka isprva povodila za Newtonovim zakonom opće gravitacije u formulacijama zakona za međusobna djelovanja električnih naboja, odnosno magnetskih polova, vrlo je zanimljiv. Tako formulirani Coulombovi zakoni imali su značajku osnovnih zakona. Oni su bili polazišta teorije električnih i magnetskih pojava. Vrhunac toga rada jesu zakon o djelovanju struje na magnetski pol, što su ga našli J.B.Biot (1774. - 1862.) i Savart (1791. - 1841.) i zakon o međusobnom djelovanju električnih struja, što ga je našao A.M.Ampère (1775. - 1836.).

Za izgradnju sustava CGS mjera u elektriciteti i magnetizmu zaslužni su K.F.Gauss (1777. - 1855.), W.E.Weber (1804. - 1891.), F.Kohlrausch (1840. - 1910.), W.Thomson (1824. - 1907.). Spomenuli smo samo nekoliko imena. CGS sustavi bili su u upotrebi u fizikalnim laboratorijima i dominirali su u teoriji elektromagnetizma. Međutim primjenom elektriciteta u raznim tehničkim pronalascima javlja se i potreba električnih i magnetskih mjerenja u elektroindustriji, koja se je počela razvijati. Tako su počele nicati mjerne"normale"za električni otpor i električni napon. Prvotno su to bile normale za neko poduzeće ili za neko usko područje. Međusobni saobraćaj tražio je opće normale, zajedničke međunarodne mjerne jedinice.

Značajnu ulogu u unapređenju mjernih normala u elektricitetu odigralo je Britansko udruženje za unapređenje znanosti (The British Association for the Advancement of Science - BAAS). To je udruženje konačno god. 1873. predložilo, da polazna osnova za mjere u elektricitetu bude elektromagnetski CGS sustav tako, da mjere za praksu "Praktične jedinice" budu dogovoreni dekadni mnogokratnici mjera elektromagnetskog CGS sustava. Te su praktične jedinice bile:

Za otpor 1 om = 10^9 jedinica za otpor el mg CGS
Za napon 1 volt = 10^8 jedinica za napon el mg CGS
Za struju 1 amper = 10^{-1} jedinica za struju el mg CGS

Prijedlog BAAS-a bio je prihvaćen na Međunarodnom elektrotehničkom kongresu u Parizu god. 1881. (Congrès International d'Electricité). Na Međunarodnom elektrotehničkom kongresu u Chicago-u predvidjelo se je, kako bi se "Praktične jedinice" mogle realizirati. Konačna odluka o tome pala je god. 1908. u Londonu na Međunarodnoj konferenciji o električnim jedinicama i standardima (International Conference on Electrical Units and Standards). Mjerne jedinice "Praktičnog sustava" za električne veličine izražene kao dekadni mnogokratnici el mg CGS jedinica, jesu "apsolutni om", "apsolutni volt", "apsolutni amper", i t.d. Za ostvarenje mjera "Praktičnog sustava" prihvaćene su definicije, kojima bi se te mjerne jedinice imale realizirati. Tako realizirane jedinice nazvane su "internacionalni om", "internacionalni amper", "internacionalni volt", i t.d. Taj se je "internacionalni" sustav bazirao na dvije "primarne" mjere: za otpor i za struju.

Definicija za primarnu mjeru "internacionalni om" glasila je ovako: "Internacionalni om je otpor što ga stupac žive duljine 106·300 cm i mase 14·4521 g kraj svugdje istog presjeka pruža stalnoj struji kod temperature leda koji se tali". Nadalje za "internacionalni amper" definicija je glasila: "Internacionalni amper je ona stalna struja, koja prolazeći kroz vodenu otopinu srebrnog nitrata izlučuje 1·11800 mg srebra na sekundu".

Kasnija su mjerenja pokazala razlike između "apsolutnih" i "internacionalnih" mjernih jedinica. Tako se je dobilo:

1 internac. amper = 0·9999 apsol. amper
1 internac. om = 1·0005 apsol. om ,

a iz ovoga preko zakona elektromagnetizma slijede veze između ostalih "internacionalnih" i "apsolutnih" mjera.

Već je na Osmoj generalnoj konferenciji za utege i mjere CGPM god. 1933. došlo do izražaja jednodušno uvjerenje, da treba "inter-

nacionalne" mjerne jedinice nadomjestiti "apsolutnima". Međutim konačnu odluku o tome donijela je Deveta generalna konferencija CGPM (god. 1948.), koja je prihvatila formulaciju definicija električnih mjernih jedinica u obliku, kako je to pripremio Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM (god. 1946.).

Među ovim definicijama na prvom je mjestu definicija za mjernu jedinicu električne struje, amper. Ona glasi: "Amper je stalna struja, koja održavana u dva paralelna pravčasta beskrajno duga vodiča zanemarljivog kružnog presjeka, koji su postavljeni u vakuumu u međusobnom razmaku od 1 metra, uzrokuje između tih vodiča silu od 2.10^{-7} njutn po metru dužine". To je dakle definicija četvrte osnovne mjerne jedinice, amper. Potreba za tom jedinicom nastaje, kako smo vidjeli, pri prijelazu na elektromagnetizam.

Ova definicija za mjernu jedinicu električne struje povratak je na prvu pomisao, da električne mjere "Praktičnog sustava" imaju biti točni dekadni mnogokratnici mjera elektromagnetskog CGS sustava. Prema tome je ovaj amper zapravo "apsolutni amper". To ćemo u ovome što slijedi, pokazati.

Definicija mjere za jakost struje, amper, određuje iznos permeabilnosti za vakuum. Ta se definicija može shvatiti i kao definicija te permeabilnosti. To je jednostavno pokazati.

Pravčasta struja I_1 stvara u homogenom izotropnom sredstvu magnetsko polje, čije su silnice kružnice sa središtima na pravcu struje. U daljini r od pravca struje jakost magnetskog polja iznosi

$$H = \frac{I_1}{2\pi r} \quad ,$$

a magnetska indukcija

$$B = \mu \frac{I_1}{2\pi r} \quad .$$

Na element struje $I_2 d\vec{s}$, uronjen u magnetsko polje struje I_1, djeluje elektromagnetska sila

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{s} \times \vec{B} \quad .$$

Ako je element struje $I_2 d\vec{s}$ dio pravčaste struje I_2 paralelne sa strujom I_1, onda je iznos te sile

$$dF = B\, I_2 ds \quad .$$

Ako uvrstimo za B indukciju, koju stvara struja I_1 i sredimo, dobivamo izraz

$$\frac{dF}{ds} = \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi r} \quad .$$

Za vakuum treba staviti $\mu = \mu_0$.

Uvrstimo sada u gornju formulu vrijednosti iz definicije za amper: $I_1 = I_2 = 1$ A , $r = 1$ m , te konačno za silu $\frac{dF}{ds} = 2.10^{-7} \frac{N}{m}$, to onda slijedi

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ N.A}^{-2} \quad .$$

Dakle permeabilnost vakuuma iznosi "per definitionem" $4\pi.10^{-7}$ $N.A^{-2}$. Da je ta vrijednost određena definicijom, očito je na prvi pogled. To naime odaje brojka π u mjernom broju te permeabilnosti. Taj se broj ne može nikakovim mjerenjem dobiti kao rezultat, a on je ovdje t o č a n iznos te permeabilnosti.

Ovako definirani amper sustava SI ujedno je i"apsolutni amper", koji je bio polazište za definiranje "internacionalnog ampera" pomoću elektrolize srebrnog nitrata. Naime "apsolutni amper" je desetina elektromagnetske CGS mjere za struju. Mi ćemo tu vezu pokazati.

Sitni magnetski pol p ima jakost $1\left[p\right]_{em}$ (jednu elmg CGS mjernu jedinicu za jakost pola), ako na isto takav u daljini 1 cm u vakuumu djeluje silom 1 din . Kružna strujna nit jakosti $1\left[I\right]_{em}$ i polumjera 1 cm djeluje na magnetski pol jakosti $1\left[p\right]_{em}$ u središtu kruga silom 2π din . To su definicije u elektromagnetskom CGS sustavu. Mi ćemo pokazati, da je $1\left[I\right]_{em}$ točno jednaka struji 10 A .

Za međusobno djelovanje točkastih magnetskih polova vrijedi Coulombov zakon

$$F = \frac{p_1 p_2}{4\pi\mu r^2} \quad ,$$

a za jakost magnetskog polja u središtu kružne struje

$$H = \frac{I}{2r} \quad .$$

Magnetska sila kojom polje H djeluje na pol p iznosi

$$F_{mg} = p H = \frac{p I}{2 r} \quad .$$

Uvrstimo u ove formule vrijednosti prema definicijama. Najprije za jakost magnetskoga pola

$$1 \text{ din} = \frac{\left[p\right]^2_{em}}{4\pi.4\pi.10^{-7} \text{ N.A}^{-2}.\text{cm}^2}$$

Odavle slijedi

$$\left[p\right]^2_{em} = 16\pi^2.10^{-7}\ N.A^{-2}.cm^2.din \quad .$$

Budući da je

$$1\ cm = 10^{-2}m \quad , \qquad 1\ din = 10^{-5}N \quad , \text{ to imamo}$$

$$\left[p\right]^2_{em} = 16\pi^2.10^{-7}.10^{-4}\ m^2.10^{-5}\ N^2.A^{-2}$$

$$= 16\pi^2.10^{-16}\ m^2.N^2.A^{-2} \quad .$$

$$\left[p\right]_{em} = 4\pi.10^{-8}\ m.N.A^{-1} \quad .$$

Predimo sada na drugu definiciju, koja daje silu koja djeluje na jedinični magnetski pol $1\left[p\right]_{em}$ u središtu kružne struje jakosti $1\left[I\right]_{em}$. Uvrstimo vrijednosti prema definiciji:

$$2\pi\ din = 2\pi.10^{-8}\ m.N.A^{-1}.\left[I\right]_{em}.cm^{-1} \quad .$$

Ako uvrstimo vrijednosti za din i cm, pa sredimo, onda dobijemo

$$2\pi.10^{-5}\ N = 2\pi.10^{-8}\ m.N.A^{-1}\left[I\right]_{em}.10^2\ m^{-1}$$

$$1\ A = 10^{-1}\left[I\right]_{em} \quad .$$

Vidimo dakle da je naš današnji amper točno jednak desetini elektromagnetske CGS mjerne jedinice za struju, a to je uostalom i bila prvotna definicija ampera.

Definicija ampera, kako je bila prihvaćena na Devetoj CGPM (god. 1948.), ne kazuje ništa konkretno, kako se može sama mjera amper ostvariti. Ta je definicija posve teoretskog značaja, što se vidi po tome, što je u njoj govora o pravčastim, beskrajno dugim i beskrajno tankim vodičima. Važno je međutim, da ta definicija određuje permeabilnost vakuuma. Time je dana osnova za računsko određivanje sila između vodiča protjecanih električnim strujama, kojigod oblik ovi vodiči imali. Dakako da za ostvarenje ampera treba odabrati takove oblike koji omogućuju točnu matematsku obradu. To su ponajprije zavojnice kružnog presjeka. Kad kroz namotaje takovih zavojnica teku električne struje, javljaju se elektromagnetske sile između tih zavojnica. Te su sile određene oblikom zavojnica, njihovim međusobnim položajem i jakošću struja u namotajima. Iz mjerenja elektromagnetskih sila slijedi jakost struje u zavojnicama. Na tom principu, to jest da se radi s preciznim zavojnicama u vrlo točno određenom međusobnom položaju, osniva se Rayleighova

vaga za električnu struju (Lord Rayleigh = J.W.Strutt, od 1842. do 1919.), kojom se može ostvariti mjera za električnu struju, amper, s nesigurnošću koja se može sniziti do 10^{-6}.

Strujne vage vrhunske preciznosti imaju samo neki narodni laboratoriji kao na primjer National Physical Laboratory, Teddington, Engleska, ili National Bureau of Standards, Washington D.C., USA . Za rad u znanosti i industriji ostvaruju se otporne i naponske normale, baždarene strujnom vagom. Te su onda normale osnova svih ostalih mjerenja u elektricitetu. Kakove se točnosti ovdje mogu postići, to treba u svakom pojedinom mjerenju napose odrediti. To u osnovi zavisi o točnosti i pouzdanosti polaznih normala.

Kao otporne normale služe otpornici načinjeni od specijalnih slitina, a kao naponska normala poznat je Westonov članak. Kod upotrebe bilo ove ili one normale, traži se oprez i pažnja, te da se s normalom postupa samo na dozvoljeni način, ako se želi pouzdati u nazivnu točnost normale.

12. K e l v i n i m o l

Temperatura je peta nezavisna fizikalna veličina. U Međunarodnom sustavu mjera SI za ovu petu nezavisnu veličinu definirana je peta osnovna mjera, stupanj termodinamske temperature, kelvin.

I sam pojam temperature i njezino mjerenje, postepeno su se bistrili i usavršavali usporedo s razvojem termodinamike. Zato ćemo i u ovom slučaju načiniti nekoliko povijesnih napomena.

Promjena obujma tjelesa s promjenom temperature bila je prva osnova za mjerenje temperature. Za manje točna mjerenja temperature i danas se upotrebljavaju termometri, u kojima se koristi rastezanje neke kapljevine u staklenoj posudi. Takovi termometri su sa živom, alkoholom, pentanom. Šveđanin A.Celsius (1701. - 1744.) označio je položaj žive u kapilari termometra, kad je ovaj bio uronjen u led koji se tali, brojem 100 , a vrelište vode brojem nula 0 . Njegov zemljak, botaničar C.Linné (1707. - 1778.) upotrebljavao je obrnute oznake: nula je za ledište vode, a sto za vrelište vode. Razmak između tih točaka na kapilari termometra podijelio se je na 100 jednakih dijelova.

Ovako načinjen termometar pokazuje neke nedostatke, te nadalje ovaj način mjerenja temperature nije bez načelnih prigovora. Termometri sa živom pokazuju nedostatke, od kojih se neki mogu u veli-

koj mjeri ublažiti. Ako se živin termometar izloži visokoj temperaturi, na primjer da se uroni u paru koja izlazi iz vode koja vrije, pa zatim odmah stavi u led koji se tali, onda takov termometar pokazuje temperaturu ispod nule. To je tako zvana depresija ledišta. Ta se međutim nakon nekog vremena izgubi i živin termometar opet dobro pokazuje. - Ima međutim i dugotrajnih promjena u staklu termometra, koje se mogu prekonizagodina protegnuti. Jedna je takova da se staklo lagano steže i uslijed toga termometar iz godine u godinu pomiče svoje ledište prema gore. To je tako zvano "sekularno" podizanje ledišta. Ta se mana živinog termometra danas izbjegava tako, da se novo načinjeni termometar umjetno ostari, izlažući ga izmjenično visokim pa niskim temperaturama, te tako da se odabiru specijalna stakla za termometarske posude. Poznata su Jenska stakla. Tako se na primjer živin termometar načinjen od "Jenaer Normalglas 16 III" pozna po tome, što po svojoj duljini nosi jednu tanku crvenu crtu. Kod takovih termometara gore spomenuta (privremena) depresija ledišta nije veća od 0°05 °C .

Živini termometri načinjeni od različitih vrsta stakala, ako se i slažu na 0 °C i na 100°C , u pravilu se ne slažu na temperaturama između ovih, ako su obje skale po duljini jednoliko podijeljene. Živa se naime u termometru diže zato, jer ona ima veći volumni koeficijent rastezanja nego staklo. Međutim razna stakla rastežu se s povišenjem temperature različito. Koji onda od promatranih termometara pokazuje "pravu" temperaturu? Vjerojatno niti jedan.

Ako se upotrijebe različite termometarske tvari za punjenje posuda jedne iste vrste stakla, na primjer živa i alkohol, pa ako i imamo slaganje takovih termometara na 0 °C i na 100 °C , uz jednoliku razdiobu skale termometra, oni se ne slažu na srednjim temperaturama. Koju dakle termometarsku substancu treba upotrijebiti za uspostavljanje temperaturne ljestvice, da li živu ili alkohol, ili možda neku treću ? Ima samo jedna termometarska tvar koja bi došla u obzir, a to je idealni plin. On za ovu svrhu nadmašuje sve realne substance. Međutim kako mu već ime kazuje, idealni plin ne postoji !

Navedeni nedostaci živinog, pa prema tome i njemu sličnih termometara, pokazuju, da je ovakovo mjerenje temperature relativno, to jest zavisno među ostalim i o materijalima, od kojih je termometar načinjen. Tu su na mjestu načelni prigovori, zašto da se ova ili ona tvar uzme kao termometarska substanca; zašto da se

uzme volumno rastezanje materijala kao osnova za uspostavu temperaturne ljestvice, a ne neko drugo svojstvo materijala, koje se s temperaturom mijenja. Tako na primjer električni otpor kovina zavisi o temperaturi.

Velika je zasluga Lorda Kelvina (Lord Kelvin = Sir William Thomson, od 1824. do 1907.), da je pokazao, kako se može definirati temperaturna skala, koja je načelno nezavisna o bilo kakovoj tvari, te o bilo kojem svojstvu neke tvari, koje se s temperaturom mijenja. To je Kelvinova apsolutna termodinamska temperaturna skala.

Teoretska osnova Kelvinove temperaturne ljestvice je Carnotov kružni proces (S.Carnot od 1796. do 1832.). Carnot je u svojoj radnji "... o pokretnoj snazi vatre ..." pokazao uz koje bi se uvjete toplinskim strojem, koji periodički radi, mogao dobiti maksimalan stupanj djelovanja. Ovu Carnotovu radnju izvukao je W. Thomson iz zaborava i upozorio na njezinu načelnu važnost. Ta je radnja osnova za formulaciju drugog principa termodinamike.

Toplinski stroj za trajni rad treba dva spremišta topline, jedno na višoj temperaturi i drugo na nižoj. Ako se strojem, koji periodički radi između ta dva spremišta topline, toplina pretvara u mehanički rad, onda stroj u jednom ciklusu svojega rada uzme iz spremišta na višoj temperaturi toplinu $|Q_1|$, obavi rad W , te hladnijem spremištu preda toplinu $|Q_2|$. Budući da je rad stroja ciklički, to se je stroj vratio u svoje početno stanje, pa prema tome ima isti sadržaj svoje unutarnje energije kao i na početku ciklusa svojega rada. Zato je obavljeni rad jednak razlici topline $|Q_1|$ koju je stroj primio i topline $|Q_2|$ koju je stroj predao

$$W = |Q_1| - |Q_2| \quad .$$

To slijedi iz prvog principa termodinamike.

Stupanj djelovanja toplinskog stroja je razlomak

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \quad .$$

Budući da je Carnotov kružni proces po pretpostavci reverzibilan, a to znači da se rad toga (zamišljenog) stroja može u s v a k o j pojedinosti obrnuti, to onda iz ovoga slijedi, da ne može postojati stroj, koji bi imao veći stupanj djelovanja od Carnotovog. Carnotov stroj ima maksimalni stupanj djelovanja. Taj je stupanj djelovanja

nužno nezavisan o tvari koja proces prolazi. Pretpostavka, da bi se mogao načiniti toplinski stroj većeg stupnja djelovanja no što ga ima Carnotov stroj, vodi u protuslovlje s iskustvom izraženim u drugom principu termodinamike. Kod ovog dokazivanja bitnu ulogu ima pretpostavljena reverzibilnost Carnotovog stroja. Prema tome je tvrdnja, da Carnotov stroj ima maksimalan stupanj djelovanja, jedan od načina, kako se može izreći drugi princip termodinamike. Taj se princip može izreći i na druge ekvivalentne načine. Na primjer i ovako: "Prijelaz topline s tijela više temperature na tijelo niže temperature može biti jedini proces, koji se događa u z a t v o r e n o m termodinamskom sustavu, dok obrnuti prijelaz to ne može biti".

Budući da stupanj djelovanja Carnotovog (reverzibilnog) stroja ne zavisi o tvari koja radi, to on može biti zavisan samo o temperaturama onih dvaju spremišta topline, između kojih stroj radi. To možemo izraziti ovako:

$$\frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - f(T_1,T_2) \quad .$$

Ovdje je T_1 temperatura toplijeg spremišta, a T_2 temperatura hladnijeg spremišta. Funkcija $f(T_1,T_2)$ može se pobliže odrediti na osnovu drugog principa termodinamike, to jest svojstava Carnotovog stroja.

Da nađemo jednadžbu, kojoj mora zadovoljavati funkcija $f(T_1,T_2)$, mi ćemo uz postojeći Carnotov kružni proces koji radi između spremišta toplina na temperaturama T_1 i T_2, konstruirati još jedan koji također radi između tih spremišta topline, ali u dva koraka. Taj novi Carnotov stroj neka se sastoji iz dva dijela, od kojih je svaki, Carnotov stroj. Taj stroj neka se sastoji od dva stroja koji su spojeni u seriju. Prvi od ovih djelomičnih strojeva neka uzima u jednom ciklusu svojega rada od toplijeg spremišta toplinu $|Q_1|$ (dakle jednaku kao i prvotni stroj), a preda toplinu $|Q_3|$ jednom pomoćnom spremištu topline na temperaturi T_3. Drugi dio novog Carnotovog stroja neka je stroj, koji radi između tog pomoćnog spremišta topline na temperaturi T_3 i drugog spremišta topline na temperaturi T_2 i to tako, da uzima iz pomoćnog spremišta topline u jednom ciklusu svojega rada toplinu $|Q_3|$, a predaje drugom spremištu topline toplinu $|Q_2'|$.

Budući da se radom novog združenog stroja ne mijenja sadržaj topline pomoćnog spremišta na temperaturi T_3, te budući da je stupanj djelovanja Carnotovih (reverzibilnih) strojeva maksimalan, to slijedi da i združeni stroj mora imati isti ukupni stupanj djelovanja kao i jednostavni, pa prema tome mora biti

$$|Q_2'| = |Q_2| \quad .$$

Napišimo sada izraze za stupanj djelovanja za svaki od promatranih strojeva:

Jednostavni stroj $$\frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - f(T_1,T_2)$$

Združeni stroj, prvi dio $$\frac{|Q_1| - |Q_3|}{|Q_1|} = 1 - f(T_1,T_3)$$

drugi dio $$\frac{|Q_3| - |Q_2|}{|Q_3|} = 1 - f(T_3,T_2)$$

Iz ovih jednadžbi slijedi:

$$f(T_1,T_2) = \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \quad ,$$

$$f(T_1,T_3) = \frac{|Q_3|}{|Q_1|} \quad ,$$

$$f(T_3,T_2) = \frac{|Q_2|}{|Q_3|} \quad .$$

Vidimo dakle da vrijedi

$$f(T_1,T_2) = f(T_1,T_3).f(T_3,T_2) \quad .$$

Ovoj se funkcionalnoj jednadžbi može zadovoljiti na razne načine. Jedan od tih jest da se stavi

$$f(T_1,T_2) = \frac{F(T_2)}{F(T_1)} \quad .$$

Ovdje je funkcija F neodređena i ona se može odabrati tako, da se njezinim izborom dobije prikladna temperaturna skala. Iz ovog izvoda slijedi, da je ta skala n e z a v i s n a o bilo kakovoj temperaturnoj substanci. To naime slijedi iz nezavisnosti stupnja

djelovanja Carnotovog procesa o tvari koja proces prolazi.

Ako se stavi

$$F(T) = T \quad ,$$

onda je to ne samo najjednostavnija postavka, nego se time dobije temperaturna ljestvica, koja se slaže sa skalom, za koju je pretpostavljeno da vrijedi za idealni plin. Naime ako uzmemo jednadžbu stanja za idealni plin

$$pV = MRT \quad ,$$

pa se s idealnim plinom načini proračun Carnotovog kružnog procesa, koji radi između spremišta topline s temperaturama T_1 i T_2, onda izlazi za stupanj djelovanja ova vrijednost

$$\frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad .$$

Ovo je načelna osnova za definiranje Kelvinove apsolutne termodinamske temperaturne skale. Ta skala jest apsolutna, jer je nezavisna o bilo kakovoj tvari; ona je termodinamska, jer je osnovana na principima termodinamike.

Iz predhodnog izlaganja slijedi, kako se može u načelu odrediti omjer apsolutnih temperatura dvaju spremišta topline; dakle omjer temperatura od dva tijela. Time međutim još nije određena i veličina stupnja u temperaturnoj ljestvici. Da bi se odredila veličina stupnja u toj termodinamskoj temperaturnoj skali, treba samo za jednu temperaturu d o g o v o r o m ustanoviti kolika hoćemo da ona bude.

Temperatura na kojoj se ima osnivati termodinamska temperaturna skala, treba biti po mogućnosti precizno ostvariva. Nakon mnogih pokusa za ovu je referentnu temperaturu odabrana temperatura trojne točke vode T_Δ . Iznos te temperature uzet je tako, da temperaturni interval između vrelišta i ledišta vode uz normalne uvjete, izađe 100 stupnjeva ove temperaturne ljestvice. O tome je donesena odluka na Desetoj generalnoj konferenciji CGPM god.1954. Tada je prihvaćena Rezolucija 3:

> "Deseta generalna konferencija za utege i mjere odlučila je definirati termodinamsku temperaturnu skalu pomoću trojne točke vode kao osnovne čvrste točke, dajući joj točnu temperaturu od 273°16 kelvina."

Na Trinaestoj generalnoj konferenciji CGPM god. 1967. prihvaćena je Rezolucija 3 u kojoj ima među ostalim i ovo:

"Trinaesta generalna konferencija za utege i mjere

. . . . . .

o d l u č u j e

1. Mjerna jedinica temperature dobiva naziv "kelvin", a njezin je simbol K .

2. Isti naziv i isti simbol upotrebljavaju se za označavanje temperaturnog intervala.

3. Temperaturni se interval može također izraziti u stupnjevima Celsiusa.

. . . . . "

Na istoj Trinaestoj generalnoj konferenciji CGPM god. 1967. donesena je i prihvaćena i ova Rezolucija 4:

"Trinaesta generalna konferencija za utege i mjere

U t v r đ u j e da je korisno formulirati u određenoj redakciji definiciju mjerne jedinice za termodinamsku temperaturu, koja je sadržana u Rezoluciji 3 Desete generalne konferencije iz god. 1954. , zato

O d l u č u j e da ovu definiciju izrazi na slijedeći način:

Kelvin, mjerna jedinica za termodinamsku temperaturu, jest $\frac{1}{273{\cdot}16}$ dio termodinamske temperature trojne točke vode."

Iz termodinamske Kelvinove temperature računa se Celsiusova termodinamska temperatura po formuli

$$\{T\}\,\mathrm{K} = \{t\}^{\circ}\mathrm{C} + 273{\cdot}15\ \mathrm{K} \quad .$$

Ove obje temperaturne skale imaju jednake stupnjeve, samo Celsiusova skala ima nulu pomaknutu za 273·15 K naviše. Time je postignuto, da se ova termodinamska Celsiusova skala podudara sa skalom, u kojoj je ledište vode $0^{\circ}C$, a vrelište $100^{\circ}C$ uz normalni tlak od 101 325 Pa .

Veličina temperaturnog stupnja u Kelvinovoj i u Celsiusovoj skali jednako je velika. Zato se temperaturne razlike mogu jednako dobro izraziti i u stupnjevima Kelvina kao i u stupnjevima Celsiusa.

Osnova za ostvarenje termodinamske temperaturne skale jesu mjerenja temperature pomoću plinskog termometra. Plinovi helij i vodik najbliži su po svojim svojstvima idealnom plinu. Zato su pomoću tih plinova načinjena u velikim nacionalnim laboratorijima

opsežna mjerenja sa svrhom, da se realiziraju plinski termometri velike preciznosti za određivanje termodinamskih temperatura. Ta su mjerenja mučna i dugotrajna, a aparature glomazne.

Da se u praksi realizira mjerenje temperature, koje se po mogućnosti dobro slaže s termodinamskom temperaturnom skalom, definirana je god.1927. Internacionalna temperaturna skala, koja se je osnivala na nekim fiksnim temperaturama, koje se mogu razmjerno lako realizirati, a to su tališta i vrelišta određenih tvari. Ta je skala popravljena 1948. godine i to je bila Internacionalna praktična temperaturna skala 1948 ili skraćeno IPTS-48. Ta je skala ponovno revidirana i proširena, pa njezin današnji oblik i propisi za njezino ostvarenje potječu iz god.1968. Zato ona ima u svojem službenom imenu tu godinu: "Internacionalna praktična temperaturna skala 1968" (Echelle Internationale Pratique de Température de 1968), ili skraćeno IPTS-68.

Ovu je temperaturnu skalu IPTS-68 odobrio Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM god.1968. i dao joj navedeno ime. Taj je odbor to načinio na osnovu ovlasti, koju je dobio u Rezoluciji 8 od Trinaeste generalne konferencije za utege i mjere CGPM god.1967. Time je ljestvica IPTS-68 nadomjestila Internacionalnu praktičnu temperaturnu skalu iz god.1948. IPTS-48, koja je dotada vrijedila.

Pripremne radove za prijelaz od IPTS-48 na IPTS-68 obavio je "Savjetodavni odbor za termometriju"(Comité Consultatif de Thermométrie - CCT). Kad su radovi tog odbora bili završeni, donio je CIPM god.1968. svoju gore spomenutu odluku.

Temperaturna ljestvica IPTS-68 definirana je i ostvarena tako, da je eventualna razlika između ove temperaturne ljestvice i termodinamske temperature unutar granica točnosti sadanjih mjerenja. U ovoj se "Internacionalnoj praktičnoj temperaturnoj skali 1968" nadalje razlikuje "Internacionalna praktična Kelvinova temperatura T_{68}" i "Internacionalna praktična Celsiusova temperatura t_{68}". Veza između tih dviju temperatura glasi

$$T_{68} = t_{68} + 273{,}15\ \mathrm{K} \quad .$$

Mjerna jedinica za temperaturni stupanj u obje ljestvice jest kelvin sa simbolom K , ili stupanj celzija sa simbolom $^{\circ}C$, dakle onako kao i u termodinamskoj ljestvici.

Temperaturna ljestvica IPTS-68 osniva se na izvjesnom broju temperatura, koje se daju dobro reproducirati. To su "Definicione fiksne točke IPTS-68". Zatim na standardnim instrumentima, kojima

se ima temperatura mjeriti. Te konačno na funkcionalnim vezama između temperature i o njoj zavisnog podatka, što ga daje standardni instrument.

Glede samog označavanja temperature postupa se ovako. Za temperature niže od 0 °C daju se podaci u stupnjevima kelvina, a za temperature više od 0 °C daju se podaci u stupnjevima celzija.

U svrhu ostvarenja IPTS-68 ljestvice razdijeljen je temperaturni opseg te ljestvice u četiri područja. Prvo područje obasiže temperature od 13·81 K do 273·15 K , drugo područje obasiže temperature od 0 °C do 630·74 °C , treće područje ide od 630·74 °C do 1064·43 °C , te konačno **četvrto** područje za temperature iznad 1064·43 °C .Za mjerenje temperature u svakom od ovih područja vrijede posebni propisi, koje ćemo sada u osnovnim crtama izložiti.

Područje temperatura od 13·81 K do 273·15 K ima propisan kao standardni instrument platinski otporni termometar, koji po svojoj kvaliteti mora zadovoljavati neke propisane uvjete. Veza između otpora R žice platinskog termometra i temperature T_{68} određena je tabeliranom funkcijom W_{CCT-68} koju je sankcionirao Savjetodavni odbor za termometriju CCT, te korekcionim formulama, u kojima treba koeficijente za svaki konkretni termometar napose odrediti.

Za platinski otporni termometar, kojim se ima mjeriti temperatura u ovom području, načini se izraz

$$W(T_{68}) = \frac{R(T_{68})}{R(273{\cdot}15\ \mathrm{K})} \quad .$$

Funkcija $W(T_{68})$ je neimenovan broj, dan kao omjer otpora $R(T_{68})$ upotrebljenog platinskog termometra pri temperaturi T_{68} i otpora tog termometra na temperaturi 273·15 K = 0 °C . Ta se funkcija $W(T_{68})$ mora za svaki platinski termometar napose odrediti tako, da se tabelirana funkcija $W_{CCT-68}(T_{68})$ korigira prema formuli

$$W(T_{68}) = W_{CCT-68}(T_{68}) + \Delta W(T_{68}) \quad .$$

U ovom je izrazu $\Delta W(T_{68})$ korekcija tabelirane funkcije W_{CCT-68}. Ta se korekciona funkcija mora za svaki termometar napose odrediti. Time se određivanje funkcije $W(T_{68})$ svodi na određivanje korekcione funkcije. Tako dobivena funkcija $W(T_{68})$, pošto je tabelirana, omogućuje da se iz izmjerenog $W(T_{68})$ očita (ili interpolacijom odredi) temperatura T_{68} .

Osnovna funkcija ovog mjerenja temperature je $W_{CCT-68}(T_{68})$. Ona je dobivena združivanjem i usklađivanjem mnogih temperaturnih mjerenja platinskim termometrima, te združivanjem četiriju "nacionalnih temperaturnih skala" za temperaturno područje od 13°81 K do 90°188 K (vrelište kisika). To su bile skale u National Bureau of Standards, USA, iz god. 1955, zatim skala u National Physical Laboratory, Engleska iz god. 1961, skala u Institut fiziko-tehničeskih i radiotehničeskih izmjerenij, SSSR, iz god. 1954, te konačno skala u Pennsylvania State University, USA, iz god. 1954.

Temperaturno područje od 13°81 K (trojna točka ravnotežnog vodika) do 90°188 K nije bilo obuhvaćeno IPTS-48 ljestvicom, pa su zato pojedini narodni instituti za ovo područje imali svoje "narodne" ljestvice, kojima su se služili pri mjerenjima temperature.

Funkcija W_{CCT-68} konstruirana je tako, da predočuje što je moguće bolje, vladanje platinskog termometra visoke kvalitete. Korekciona funkcija $\Delta W(T_{68})$ vodi računa o odstupanju nekog konkretnog platinskog termometra od funkcije W_{CCT-68}. Ta je korekciona funkcija dana za četiri dijela u koje je područje od 13°81 K do 273°15 K podijeljeno, o obliku polinoma, kojima se koeficijenti određuju mjerenjem devijacije vrijednosti $W(T_{68})$ od vrijednosti $W_{CCT-68}(T_{68})$ kod "Definicionih fiksnih točaka IPTS-68". Te su fiksne točke navedene u pregledu pri kraju ovoga članka.

Drugo temperaturno područje IPTS-68, koje seže od 0 °C do 630°74 °C, ima kao standardni mjerni instrument opet platinski termometar. Temperatura t_{68} dana je ovdje izrazom

$$t_{68} = t' + 0°045\,\frac{t'}{100°C}\left(\frac{t'}{100°C} - 1\right)\left(\frac{t'}{419°58°C} - 1\right)\left(\frac{t'}{630°74°C} - 1\right)$$

U ovoj se jednadžbi računska temperatura t' definira izrazom

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left[W(t') - 1\right] + \delta\frac{t'}{100\ °C}\left(\frac{t'}{100\ °C} - 1\right) \quad ,$$

u kojem je

$$W(t') = \frac{R(t')}{R(0°C)} \quad .$$

Iz ovih jednadžbi vidimo, da se vrijednosti t_{68} i t' podudaraju za ove vrijednosti: 0 °C, 100 °C, 419°58 °C, 630°74 °C. Koeficijenti α, δ, $R(0°C)$ određuju se mjerenjem otpora $R(t')$

kod trojne točke vode, vrelišta vode i tališta cinka.

Za neki konkretni platinski otporni termometar treba najprije odrediti koeficijente α, δ, $R(0^{\circ}C)$, a zatim načiniti računski tabelu koja povezuje $W(t')$ s računskom temperaturom t'. Kad smo odredili pomoću te tabele t', koje pripada izmjerenom $W(t')$, onda osnovni izraz daje temperaturu t_{68}.

Treće područje IPTS-68 ide od 630·74 °C do 1064·43 °C, a kao standardni mjerni instrumenat ima termočlanak platina - platinrodij. Slitina platinrodij sadrži 90 težinskih dijelova platine i 10 težinskih dijelova rodija. Temperatura toplijeg spojišta termočlanka t_{68} mjeri se tako, da se mjeri napon U što ga daje termočlanak, kad mu je drugo spojište na temperaturi 0 °C. Veza između napona U i temperature t_{68} dana je formulom

$$U(t_{68}) = a + b\,t_{68} + c\,t_{68}^2 \quad .$$

Koeficijenti a, b, c određuju se tako, da se izmjere naponi U, što ga daje termočlanak, kad je toplije spojište redom na temperaturama $(630{\cdot}74 \pm 0{\cdot}2)$ °C, 961·93 °C, 1064·43 °C. Prva od ovih temperatura, 630·74 °C, je talište antimona (jedna od sekundarnih referentnih točaka). Ta se temperatura mjeri u konkretnom slučaju platinskim otpornim termometrom i rezultat mjerenja treba da leži unutar gore navedenih granica, što zavisi o čistoći upotrebljenog antimona. Ostale dvije temperature su točka srebra i točka zlata.

Četvrto područje IPTS-68 koje obuhvaća temperature iznad 1064·43 °C, ima pirometar kao mjerni instrument, a služi se Planckovim zakonom radijacije crnog tijela za definiciju temperature. Taj se zakon u ovom slučaju daje u obliku

$$\frac{I(T_{68})}{I(T_{68Au})} = \frac{\exp(c_2/\lambda\,T_{68Au}) - 1}{\exp(c_2/\lambda\,T_{68}) - 1} \quad ,$$

gdje je uzeto za konstantu $c_2 = 0{\cdot}014\ 388$ m.K. U ovom izrazu $I(T_{68})$ odnosno $I(T_{68Au})$ predočuju energije radijacije crnog tijela po jedinici valne duljine, na jedinicu površine crnog tijela i na jedinicu vremena, pri odabranoj valnoj duljini.

Kako je spomenuto, standardni instrument za mjerenje temperature u ovom području je pirometar. Osim pirometara, koji se služe ljudskim okom, razvijeni su i fotoelektrični pirometri, kojima je preciznost za red veličine veća od onih prvih. Zavisnost mjerene

temperature T_{68} o valnoj duljini λ u formuli za žarenje crnog tijela, prema današnjem stanju mjerne tehnike, manja je od nesigurnosti kojom se može u tom području IPTS-68 realizirati.

Navest ćemo još "Definicione fiksne točke IPTS-68". To su temperature ravnotežnih stanja između dvije, odnosno tri faze određenih tvari uz dane uvjete. Temperature tih ravnotežnih stanja mjerene su u velikim narodnim institutima i navedene vrijednosti su prihvaćeni srednjaci tih rezultata. Ako se ova tabela usporedi s vrijednostima, koje su bile dane za ostvarenje IPTS-48, onda se vide ove razlike:

a) neke nove točke su navedene,
b) neke točke iz IPTS -48 su otpale,
c) neke temperature u IPTS-68 imaju novu vrijednost.

Sve su ove promjene posljedica napredovanja mjerne tehnike. Odatle slijedi, da će vjerojatno u budućnosti opet biti potrebna revizija IPTS-68, kako bi se ponovo uskladila Međunarodna temperaturna ljestvica s rezultatima mjerenja i teoretskom osnovom definicije temperature.

U tablici, uz prihvaćenu temperaturu ravnotežnog stanja, navedena je i vjerojatna nesigurnost te temperature. Ravnotežna stanja dviju faza vrijede uz normalni tlak 101 325 Pa , ukoliko nije izričito navedena neka druga vrijednost.

D e f i n i c i o n e f i k s n e t o č k e u I P T S - 68

Ravnotežno stanje	Prihvaćena temperatura K	Prihvaćena temperatura °C	Nesig. K
Ravnoteža krutog, kapljevitog i plinovitog ravnotežnog vodika (Trojna točka vodika)	13°81	-259°34	0°01
Ravnoteža kapljevitog i plinovitog ravnotežnog vodika kod tlaka 33 330°6 Pa	17°042	-256°108	0°01
Ravnoteža kapljevitog i plinovitog ravnotežnog vodika	20°28	-252°87	0°01
Ravnoteža kapljevitog i plinovitog neona	27°102	-246°048	0°01
Ravnoteža krutog,kapljevitog i plinovitog kisika (Trojna točka kisika)	54°361	-218°789	0°01
Ravnoteža kapljevitog i plinovitog kisika	90°188	-182°962	0°01

	K	°C	K
Ravnoteža leda, vode i vođene pare (Trojna točka vode)	273°16	0°01	točno
Ravnoteža vode i vodene pare	373°15	100°000	0°005
(Ravnoteža krutog i kapljevitog kositra)	505°1181	231°9681	0°015
Ravnoteža krutog i kapljevitog cinka	692°73	419°58	0°03
Ravnoteža krutog i kapljevitog srebra	1235°08	961°93	0°2
Ravnoteža krutog i kapljevitog zlata	1337°58	1064°43	0°2

Talište kositra, koje je u ovoj tablici navedeno u zagradi, može se upotrijebiti za baždarenje termometra namjesto vrelišta vode.

Voda koja se ima upotrijebiti za ostvarenje trojne točke vode, koja je temperatura fundamentalna za sve temperaturne ljestvice, treba da ima izotopni sastav oceanske vode. Takova voda sadrži 0°016 mol deuterija na 100 mol vodika, te 0°04 mol kisika 17 i 0°2 mol kisika 18 na 100 mol kisika 16. Povećanje sadržaja deuterija u iznosu od 0°001 mol na 100 mol vodika povisuje temperaturu trojne točke vode za 0°000 04 K . Prema izvještaju BIPM najveća nađena razlika u temperaturama trojne točke vode uzete iz prirode, a koja je razlika uzrokovana nekim drugim izotopnim sastavom, iznosila je 0°000 25 K .

Kod fiksnih točaka definiranih vodikom govori se o ravnotežnom vodiku. To treba objasniti. Molekula vodika H_2 ima dva atoma. Svaki od tih atoma ima nuklearni zamah (spin), jer je jezgra vodika jedan proton. U molekuli vodika ovi zamasi mogu biti ili paralelni, to je orto vodik, ili antiparalelni, a to je para vodik. Ravnotežni sadržaj orto i para molekula u nekoj količini vodika zavisi o temperaturi. Tako kod sobne temperature u ravnotežnom vodiku ima 75% orto i 25% para vodika. Taj se procentualni sastav naziva i "normalni vodik". Prema tome kod sobne temperature, normalni i ravnotežni vodik imaju jednake sastave. Prigodom ukapljivanja vodika procentualni se omjer orto i para vodika polagano mijenja, a time se mijenjaju i fizikalna svojstva kapljevitog vodika. Kod vrelišta vodika uz normalni tlak, ravnotežni sastav je 0°21% orto i 99°79% para vodika. Vrelište ovog ravnotežnog vodika je za 0°12 K niže od vrelišta normalnog vodika.

Osim ovih Definicionih fiksnih točaka u IPTS-68 navedene su u dokumentu CIPM god.1968 još i "Sekundarne referentne točke", koje se mogu upotrebljavati pri baždarenju i kontroli termometara. Zanimljivo je ovdje napomenuti, da se među ovim sekundarnim referentnim točkama nalazi sada ledište vode (ravnoteža leda i vode kod normalnog tlaka). Ta je točka bila u IPTS-48 jedna od dviju "fundamentalnih" točaka.

Precizna temperaturna mjerenja spadaju među najdugotrajnija i najteža mjerenja. To leži u naravi same stvari. Termometar pokazuje uvijek neku svoju temperaturu. Da bi pokazao temperaturu nekog drugog tijela, mora biti s tim tijelom u dodiru i s njim u toplinskoj ravnoteži. Međutim za postizavanje toplinske ravnoteže treba vremena, o čemo smo se mogli uvjeriti i kod jednostavnijih mjerenja temperature.

Temperatura je nadalje **statistička** veličina. Ima smisla govoriti samo o temperaturi vrlo velikog mnoštva čestica. U mikropodručjima materijala temperatura spontano koleba po zakonima slučaja. Prema tome je temperatura prostorni i vremenski srednjak veličina iz njegovih mikro područja. Kao srednjak, temperatura je načelno opterećena nekom nesigurnošću.

Kažimo još par riječi o drugoj osnovnoj mjeri, koja se u termodinamici uvodi, a to je mjera za količinu materije mol. Fizikalna veličina količina materije M dolazi na primjer u jednadžbi stanja idealnog plina. Ta veličina vodi računa o broju čestica na koju se ta jednadžba odnosi. Količina materije igra ulogu i u kemijskim formulama.

Ako promatramo dva sustava čestica, onda ukoliko su sustavi jednostavni, svaki od njih sadrži čestice jedne vrste. Za takove jednostavne sustave može se vrlo točno odrediti o m j e r mase čestice prvog sustava prema masi čestice drugog sustava, dok je sam broj čestica u sustavima odrediv s manjom točnošću. Važnost veličine količina materije u termodinamici i kemiji opravdava postupak, da se ta veličina smatra nezavisnom, te da se prema tome za nju definira osnovna mjerna jedinica. Ta je jedinica definirana na Četrnaestoj generalnoj konferenciji CGPM god. 1971 u Rezoluciji 3:

"Četrnaesta Generalna konferencija za utege i mjere

U v a ž i v š i mnijenje Međunarodne zajednice za čistu i primijenjenu fiziku, Međunarodne zajednice za čistu i primijenjenu kemiju, te Međunarodne organizacije za normaliza-

ciju, u vezi potrebe da se definira mjerna jedinica za količinu materije,

O d l u č u j e

1. Mol je količina materije nekog sustava koji sadržava toliko elementarnih čestica, koliko ima atoma u 0°012 kg ugljika 12; njegov je simbol mol .

2. Kad se upotrebljava mol, elementarne čestice moraju biti specificirane i mogu biti atomi, molekule, ioni, elektroni, te druge čestice ili specificirane grupacije takovih čestica.

3. Mol je mjerna jedinica Međunarodnog sustava mjera."

U 1 mol tvari ima $N_A = 6{,}022045(31) \cdot 10^{23}$ mol^{-1} elementarnih čestica (literatura 34.). Taj se broj zove Avogadrov broj.

Među fizikalnim mjernim metodama za određivanje omjera mase neke čestice prema masi atoma ugljika 12 važno mjesto zauzima maseni spektrograf, zatim energetski odnosi u nuklearnim reakcijama, plinska jednadžba itd.

13. K a n d e l a

U cijelom sklopu fizikalnih i tehničkih mjerenja fotometrija zauzima tek maleni i periferni dio. Velika područja fizike i tehnike obrađuju se, a da se fotometrija niti ne spomene. Ovo međutim nije jedini razlog, zašto se fotometrija razmjerno malo obrađuje. Ima još jedan, koji je možda i odlučniji, da se fizičari nevoljko laćaju fotometrijskih mjerenja i razmatranja, a to je, da su fotometrijske veličine uvjetovane i svojstvima ljudskog oka, pa time gube na onoj objektivnosti, koju imaju ostale fizikalne veličine.

Međutim razvoj fotografije, kinematografije, televizije, rasvjetne tehnike, traže da se fotometrijskim veličinama pristupi na znanstveni način, te da se te veličine po mogućnosti obrade običajnim fizikalnim metodama, a da se pri tome ne okrnji specifičnost fotometrije, svodeći je na neke već poznate fizikalne zakone i principe. Tome se zadovoljava priznavanjem statusa "nezavisna veličina" fotometrijskoj veličini j a k o s t (izvora) s v j e t l o s t i , te tome dosljedno, definiranjem osnovne mjerne jedinice za tu veličinu.

Za jakost svjetlosti bila je mjera "Hefnerova svijeća" (god. 1883.), koja se je upotrebljavala u Njemačkoj. U anglo-američkom području i u Francuskoj definirana je kasnije "Međunarodna svijeća". Te dvije mjere za jakost izvora svjetlosti stajale su u omjeru

1 Hefnerova svijeća = 0°90 međunarodna svijeća.

Godine 1937. pripremio je Međunarodni odbor za utege i mjere CIPM definiciju "nove svijeće". Konačno je Deveta generalna konferencija CGPM god. 1948. ovu odluku CIPM ratificirala i uvela novi međunarodni naziv "kandela" za mjernu jedinicu jakosti izvora svjetlosti. Trinaesta generalna konferencija CGPM god. 1967. u Rezoluciji 5 :

"O d l u č u j e da izrazi mjernu jedinicu kandela na slijedeći način :

Kandela je jakost svjetlosti površine 1/600 000 kvadratnog metra crnog tijela na temperaturi skrućivanja platine pod tlakom 101 325 njutn po metar kvadratni , ako se površina motri smjerom normale."

Prema toj odluci bila je definirana mjerna jedinica za svjetlosnu jakost u našem Zakonu o mjernim jedinicama i mjerilima od 1976. godine. Isti je zakon izmijenjen i dopunjen 26. prosinca 1980. god. Po njemu, važeća definicija za kandelu je takva, da se ta mjerna jedinica može reproducirati u svakom bolje opremljenom laboratoriju i glasi :

"Jedinica za svjetlosnu jakost jest kandela (candela) -(oznaka : cd). Kandela je osnovna jedinica SI. Kandela je svjetlosna jakost u danom pravcu izvora koji emitira monokromatsko zračenje frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ herca i čija je energetska jakost u tom pravcu 1/683 vata po steradijanu."

Ovime završavamo naš prikaz osnovnih mjernih jedinica u sustavu mjera SI. Taj prikaz, premda vrlo sumaran i bez ulaženja u pojedinosti, ipak pruža neki uvid u velike i ozbiljne napore, koji su trebali biti uloženi, da se Međunarodni sustav mjernih jedinica uspostavi, da se ozakoni, i onda da se doista uvede u život čitavog Svijeta, ne samo u znanstvenim zavodima i publikacijama, nego i u tehnici i u svakodnevnom životu. Da se taj cilj u potpunosti postigne, a on je u interesu sviju, od osnovne je važnosti, da se propisane mjerne jedinice pravilno upotrebljavaju i da se o njima ima jasne predodžbe.

Za Jugoslaviju uveden je Međunarodni sustav SI i zakonski, kad je u "Službenom listu FNRJ" br.45 od 15. studenoga 1961. objavljen "Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima". U njemu je bio ozakonjen SI onakav, kakav je bio god.1961. Kako smo vidjeli poslije te godine došlo je do promjena, npr. u definiciji sekunde, zatim je pridošao mol kao sedma osnovna mjera. Budući da je naša država načelno prihvatila i uvela Međunarodni sustav SI, to onda i ova dalj-

nja izgradnja Međunarodnog sustava automatski vrijedi i za naše područje. Naš novi "Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima" od 31. ožujka 1976. i njegova Dopuna od 26. prosinca 1980. ozakonjuju sve ovdje navedene jedinice SI počam od 1. siječnja 1981.

14. Uvodne napomene uz daljnju izgradnju Međunarodnog sustava SI

Kako je prije istaknuto, pretpostavljamo jednoznačno određeni skup veličinskih jednadžbi kao polazište definiranja bilo kojeg sustava mjernih jedinica. Prema tome ta pretpostavka vrijedi i za Međunarodni sustav SI. U tom smo sustavu upoznali definicije za sedam osnovnih mjera. Te su osnovne mjere definirane za sedam fizikalnih veličina, koje su konvencionalno odabrane kao nezavisne. Odavle slijedi, da se u Međunarodnom sustavu mjera za zavisne fizikalne veličine definiraju izvedene mjerne jedinice.

Sedam osnovnih mjera stvar je dogovora. To se vidi među ostalim i po tome, što za dodatne mjere, radijan i steradijan, još nije pala odluka, da li ih se ima smatrati osnovnim mjerama ili ne. Uvođenjem tih mjera kao osnovnih povisio bi se broj takovih mjera na pr. u mehanici na pet. Uz očite prednosti u nekim slučajevima, uvođenje kuteva kao osnovnih mjera vodi do teškoća kod definiranja veličina u vezi s vrtnjom krutog tijela, centralnog gibanja i sličnih problema. Te se komplikacije međutim ne ograničavaju samo na mehaniku, nego se šire i u područje elektromagnetizma. Zato je malena vjerojatnost, da će se radijan i steradijan uvesti kao osnovne mjerne jedinice ravnopravne s ostalima kao što su metar, kilogram i t.d. Kutevi se tretiraju kao omjeri dužina, odnosno ploha, dakle kao neimenovani brojevi. Mjere za kuteve mogu se u imenu neke izvedene mjerne jedinice pisati, no te mjere imaju vrijednost matematičkog jedan. Tako je na pr. mjera kutne brzine $\mathrm{rad.s^{-1}} = \mathrm{s^{-1}}$.

Definiranje izvedenih mjernih jedinica u SI sastoji se u tome da se u jednadžbama mjernih jedinica, koje slijede iz dogovorenih veličinski jednadžbi, stavi za sve odredbene faktore da imaju vrijednost matematičko jedan. Dakle

$$z_i = 1 , \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Ova postavka ima za posljedicu, da uz upotrebu SI mjernih jedinica sve brojčane jednadžbe imaju isti oblik i iste brojčane koeficijente b_i kao i dogovorene veličinske jednadžbe . Međutim da ovaj propis bude potpuno određen treba još

odrediti, koji se oblik veličinskih jednadžbi pretpostavlja.

Za područje mehanike oblik veličinskih jednadžbi i njihov izbor ne pruža nekih poteškoća. Svi su složni u tome, kako treba da izgledaju jednadžbe geometrije, kinematike i dinamike.

U elektromagnetizmu pod veličinskim jednadžbama danas se razumijevaju jednadžbe u Heavisideovom racionaliziranom obliku. To su Maxwellove jednadžbe bez ikakovih brojčanih faktora, zatim jednadžbe iz ovih izvedene.

Tako na pr. za elektrostatsko polje naboja Q_1 na sitnom tijelu uronjenom u homogeni izotropni izolator vrijede jednadžbe

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 ,$$
$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho ,$$
$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} ,$$

gdje je $\vec{E}$ jakost električnog polja, $\vec{D}$ električni pomak, ϱ gustoća električnog naboja, ε_r relativna dielektričnost izolatora, a ε_0 dielektričnost vakuuma. Iz ovih se jednadžbi izvodi, služeći se principom simetrije, jakost električnog polja $\vec{E}$ u daljini $\vec{r}$ od sitnog tijela, koje nosi električni naboj Q_1

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^2} .$$

Ova jednadžba skupa s izrazom koji daje električnu silu $\vec{F}_{el}$ kojom električno polje djeluje na točkasti naboj Q_2

$$\vec{F}_{el} = Q_2 \vec{E}$$

vodi na Coulombov zakon o međusobnom djelovanju dvaju sitnih električnih naboja

$$\vec{F}_{el} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^2} .$$

Vidimo da je faktor 4π došao u ovu jednadžbu kao posljedica matematičkih operacija i prostornih odnosa. Ovdje je Coulombov zakon izveden iz zakona koji su općenitiji.

Slično kao u slučaju Coulombovog zakona za međusobno djelovanje sitnih električnih naboja, može se zaključivati i za sile između sitnih magnetskih polova, što vodi do drugog Coulombovog zakona.

U racionaliziranom obliku pisane jednadžbe izjednačuju tok vektora $\vec{D}$ kroz zatvorenu plohu s nabojem Q koji je tom plohom obuhvaćen

$$\Psi = \oiint \vec{D} \, d\vec{S} .$$

Imamo dakle

$$\Psi = Q \quad .$$

U magnetizmu međutim tok vektora $\vec{B}$ kroz svaku zatvorenu plohu je nula, što je matematički izražena činjenica, da nema izoliranih magnetskih polova. Ako dakle obuhvatimo sitni magnetski pol p_1 koji je pri kraju vrlo dugog i tankog magneta, zatvorenom plohom, onda ta ploha ima elemenata $d\vec{S}_m$ kojima ona siječe magnetski štap. Kroz te elemente ulazi sav tok Φ vektora $\vec{B}$ u prostor obuhvaćen zatvorenom plohom, koji se onda iz pola p_1 simetrično razilazi na sve strane. Označimo li vektor $\vec{B}$ unutar magneta indeksom m, to je

$$\oiint \vec{B}\, d\vec{S} = \iint_{\text{uzduh}} \vec{B}\, d\vec{S} + \iint \vec{B}_m d\vec{S}_m = 0 \quad .$$

Magnetski tok u uzduhu

$$\Phi = \iint \vec{B}\, d\vec{S}$$

izjednačuje se s jakošću magnetskog pola

$$p_1 = \Phi \quad .$$

Za sitne magnetske polove p_1 i p_2 dolazimo pomoću jednadžbi

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad ,$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad ,$$

$$\vec{F}_{mg} = p_2 \vec{H}$$

na drugi Coulombov zakon, koji daje silu kojom dva magnetska pola djeluju jedan na drugi:

$$\vec{F}_{mg} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{p_1 p_2}{4\pi \mu_r \mu_0 r^2} \quad .$$

Budući da su magnetski polovi jednaki magnetskim tokovima koji iz njih u uzduh izlaze, to se onda Coulombov zakon može napisati i pomoću tokova Φ_1 i Φ_2. Tako se to i često čini.

Ovdje treba međutim napomenuti da su ove dvije veličine, magnetski pol i magnetski tok, samo jednake i da se mjere mjerama koje nužno imaju istu k a r a k t e r i s t i k u . U Međunarodnom sustavu svi su odredbeni faktori z_i jednaki jedan. Zato se u tom sustavu mjera magnetski tok Φ i magnetski pol p mjere i s t o mjernom jedinicom, naime V.s (volt sekunda). To međutim nije slučaj u CGS-sustavima, kako ćemo kasnije vidjeti.

Slično vrijedi za tok vektora električnog pomaka $\vec{D}$ i električni naboj Q. I ovdje jednadžba

$$\Psi = Q$$

zahtijeva jednakost karakteristika mjernih jedinica za s v e sustave mjera. U SI to vodi i na istu mjeru za obje veličine, naime A.s (amper sekunda), što međutim nije slučaj u CGS-sustavima.

Ova dva primjera koja smo razmotrili, pokazuju da jednakost fizikalnih veličina i eventualna jednakost mjernih jedinica kojima se te dvije fizikalne veličine mjere, ne dopuštaju zaključak, da su te dvije veličine također i iste naravi. Električni tok Ψ j e d n a k je naboju Q, ali n i j e i s t o što i naboj Q. Slično vrijedi za magnetski tok Φ i jakost pola p.

Takovih primjera, gdje su dvije veličine jednake, no nisu isto, ima više. Magnetski napon duž zatvorene linije jednak je električnoj struji obuhvaćenoj tom linijom, no nije isto što i ta struja (Prva glavna jednadžba). U SI sustavu obje se ove veličine mjere istom mjerom, amper.

Osnovni zakon mehanike izjednačuje impuls i prirast veličine gibanja

$$\vec{F}\,dt = d(m\vec{v}) \quad .$$

Obje se ove veličine, impuls i veličina gibanja, mjere u svim sustavima mjera istom mjerom. Unatoč ovih jednakosti impuls nije i s t o što i veličina gibanja. Nezgodno je veličinu gibanja $m\vec{v}$ nazivati impuls, jer se vrijednost veličine gibanja mijenja, ako prijeđemo u drugi inercijalni sustav, dok impuls ostane isti.

Ovi nam primjeri pokazuju, da jednake fizikalne veličine ne moraju biti i iste fizikalne kvalitete, unatoč toga, što se možda i mjere istom mjernom jedinicom (ili mjerama iste karakteristike). U drugu ruku, ako se dvije fizikalne veličine mjere mjerama r a z n i h k a r a k t e r i s t i k a , onda je sigurno, da se takove veličine ne mogu izjednačiti, pa je prema tome i sigurno da su te veličine i r a z l i č i t i h k v a l i t e t a . Prema tome karakteristike mjera kojima se fizikalne veličine mjere, daju izobličenu sliku kvalitete tih veličina tako, da možemo samo u slučaju različitih karakteristika mjera zaključiti i na različite kvalitete mjerenih veličina. Karakteristika mjerne jedinice neke veličine ne izriče narav te fizikalne veličine.

U slijedećim poglavljima mi ćemo definirati izvedene mjere Međunarodnog sustava SI služeći se jednadžbama geometrije, kinematike, dinamike, elektromagnetizma i t.d. Prema tome slijede najprije izvedene mjere u mehanici, zatim u elektricitetu, pa termodinamici i fotometriji. Izbor jednadžbi, koje će poslužiti kao osnova za definiranje izvedenih mjera, pa i njihov redoslijed, stvar

je dogovora. Budući da su jednadžbe u međusobnom matematskom skladu, to različiti izbori jednadžbi za definiranje izvedenih mjera ne mogu dovesti do razlika u imenima tih mjera. Za ovo ćemo navesti jedan primjer.

Načelno je svejedno, da li ćemo za definiciju mjerne jedinice za površinu poći od formule, koja daje površinu pravokutnika ili od formule, koja daje površinu elipse. Za pravokutnik površina je dana izrazom

$$S = a\,b \quad ,$$

gdje su a , b , stranice pravokutnika. Prikažimo u ovom izrazu sve veličine mjernim brojem i mjerom

$$\{S\}[S] = \{a\}[a]\{b\}[b] \quad .$$

Iz ovoga slijedi

$$\frac{[S]}{[a][b]} = \frac{\{a\}\{b\}}{\{S\}} = z \quad .$$

Ovo daje brojčanu jednadžbu

$$\{S\} = \frac{1}{z}\{a\}\{b\}$$

i jednadžbu mjernih jedinica

$$[S] = z\,[a][b] \quad .$$

U Međunarodnom sustavu stavljamo

$$z = 1 \quad .$$

Nadalje mjera za dužinu ne zavisi o orjentaciji te dužine, pa je

$$[a] = [b] = m \qquad (\text{metar}) \quad .$$

Slijedi

$$[S] = m^2 \qquad (\text{metar kvadratni}) \quad .$$

Do istog rezultata dolazimo, ako pođemo od formule, koja daje površinu elipse

$$S = \pi\, a\, b \quad ,$$

gdje su a , b , velika i mala os elipse. Opet rasčlanimo veličine na mjerni broj i mjeru.

$$\{S\}[S] = \pi\,\{a\}[a]\{b\}[b] \quad .$$

Odavle dobijemo

$$\frac{[S]}{[a][b]} = \frac{\pi\,\{a\}\{b\}}{\{S\}} = z \quad .$$

Dalje slijedi

$$\{S\} = \frac{\pi}{z}\{a\}\{b\} \quad ,$$

$$[S] = z\,[a][b] \quad .$$

Budući da je u SI sustavu

$$z = 1 \quad , \quad [a] = [b] = m \quad ,$$

to onda dobijemo

$$[S] = m^2 \quad .$$

Dakle kao i prije.

Ovaj nam primjer pokazuje, da je pri definiranju izvedenih mjera prikladno odabirati kao osnovu tih definicija čim jednostavnije izraze. Matematička povezanost formula garantira nezavisnost dobivenih izvedenih mjera o tome, da li je za definiciju neke izvedene mjere odabran ovaj ili onaj izraz.

15. I z v e d e n e m j e r e S I u m e h a n i c i

Iz veličinske jednadžbe za površinu pravokutnika

$$S = a\,b$$

slijedi mjera za površinu

$$[S] = m^2 \quad .$$

Obujam kvadra

$$V = a\,b\,c$$

vodi na mjeru za obujam

$$[V] = m^3 \quad .$$

Definicija frekvencije

$$f = \frac{1}{T}$$

vodi na mjeru za frekvenciju

$$[f] = s^{-1} = Hz \quad .$$

Ova mjera ima posebno ime, herc. Simbol je Hz.

Definicija brzine

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

vodi na mjeru za brzinu

$$[v] = m.s^{-1} \quad .$$

Kod centralnog gibanja tvarne točke plošna se brzina definira izrazom

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\,\vec{r} \times \vec{v} \quad ,$$

gdje je $\vec{v}$ brzina točke, a $\vec{r}$ radijvektor usmjeren od koordinatnog ishodišta (pola) do tvarne točke. Iz ove definicije slijedi mjera za plošnu brzinu

$$\left[\frac{dS}{dt}\right] = m^2.s^{-1} \quad .$$

Protok tekućine kroz cijev, može se mjeriti obujmom tekućine koja prođe na jedinicu vremena; dakle jakošću struje i

$$i = \frac{dV}{dt} \quad .$$

Odavle slijedi mjera za volumni protok

$$[i] = m^3.s^{-1} \quad .$$

Definicija akceleracije daje mjeru za ovu veličinu.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ,$$

$$[a] = m.s^{-2} \quad .$$

Definicija kutne brzine

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

daje mjeru za kutnu brzinu

$$[\omega] = rad.s^{-1} = s^{-1} \quad .$$

Definicija kutne akceleracije

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

daje mjeru za kutnu akceleraciju

$$[\alpha] = rad.s^{-2} = s^{-2} \quad .$$

Osnovni zakon mehanike

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

daje mjeru za silu

$$[F] = m.kg.s^{-2} = N \quad .$$

Isti zakon daje i mjeru za impuls i veličinu gibanja

$$[F.t] = [mv] = m.kg.s^{-1} = N.s \quad .$$

Izraz za rad

$$dW = \vec{F}.d\vec{s}$$

daje mjeru za rad, odnosno za potencijalnu, kinetičku, ili bilo kakovu drugu energiju

$$[W] = m^2.kg.s^{-2} = J \quad .$$

Snaga je brzina kojom se rad obavlja. Dakle je mjera za snagu

$$\left[\frac{dW}{dt}\right] = m^2.kg.s^{-3} = W \quad .$$

Definiciona jednadžba za momenat sile

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

vodi na mjeru

$$[M] = m^2.kg.s^{-2} \quad .$$

Momenat tromosti

$$I = \int r^2 dm$$

ima mjeru

$$[I] = m^2.kg \quad .$$

Tlak p definira se pomoću izraza za pritisak tekućine na djelić stijenke posude u kojoj se nalazi

$$d\vec{P} = -p\, d\vec{S} \quad ,$$

pa je mjera za tlak

$$[p] = m^{-1}.kg.s^{-2} = Pa \quad .$$

Koeficijent površinske napetosti k je energija sadržana u jedinici površine kapljevine

$$k = \frac{dW}{dS} \quad ,$$

pa je prema tome mjera za ovu veličinu

$$[k] = J.m^{-2} = kg.s^{-2} \quad .$$

Gustoća tijela je kvocijent mase tijela i njegovog obujma

$$\delta = \frac{dm}{dV} \quad ,$$

pa je mjera za gustoću

$$[\delta] = kg.m^{-3} \quad .$$

Specifična težina je omjer težine tijela i njegovog obujma

$$\gamma = \frac{dG}{dV} \quad ,$$

pa je mjera

$$[\gamma] = m^{-2}.kg.s^{-2} \quad .$$

Relativna gustoća (relativna specifična težina) nekog tijela je omjer gustoće (specifične težine) tog tijela prema gustoći (specifičnoj težini) vode, kad ova ima maksimalnu gustoću (specifičnu težinu). To je dakle neimenovani broj.

Koeficijent viskoznosti η definiran je izrazom koji daje silu trenja među slojevima tekućine, koji se gibaju različitim brzinama

$$dF = \eta \frac{dv}{dz} dS \quad ,$$

gdje je dv prirast brzine čestica tekućine, ako se pomaknemo za dz poprijeko na smjer brzine, a dS je površina u kojoj se slojevi dotiču. Prema tome je

$$[\eta] = m^{-1}.kg.s^{-1} \quad .$$

PREGLED IZVEDENIH MJERA SUSTAVA SI U MEHANICI

Veličina	Izvedena mjera
1. Površina S	m^2
2. Obujam V	m^3
3. Frekvencija f	s^{-1}
4. Brzina $\vec{v}$	$m.s^{-1}$
5. Plošna brzina $\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$	$m^2.s^{-1}$
6. Volumni protok i	$m^3.s^{-1}$
7. Akceleracija $\vec{a}$	$m.s^{-2}$
8. Kutna brzina $\vec{\omega}$	$rad.s^{-1} = s^{-1}$
9. Kutna akceleracija $\vec{\alpha}$	$rad.s^{-2} = s^{-2}$
10. Sila $\vec{F}$	$m.kg.s^{-2}$
11. Impuls, veličina gibanja $m\vec{v}$	$m.kg.s^{-1}$
12. Rad, energija W	$m^2.kg.s^{-2}$
13. Snaga dW/dt	$m^2.kg.s^{-3}$
14. Momenat sile $\vec{M}$	$m^2.kg.s^{-2}$
15. Momenat tromosti I	$m^2.kg$
16. Tlak p	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
17. Koeficijent površinske napetosti k	$kg.s^{-2}$
18. Gustoća δ	$kg.m^{-3}$
19. Specifična težina γ	$m^{-2}.kg.s^{-2}$
20. Koeficijent viskoznosti η	$m^{-1}.kg.s^{-1}$

Neke od ovih mjera imaju posebna imena, koja su međunarodno dogovorena i odobrena. Ta su imena navedena u jednom od predhodnih pregleda.

16. Izvedene mjere SI u elektromagnetizmu

Prijelazom iz mehanike na elektromagnetizam k trima osnovnim mjerama mehanike m, kg, s, pridolazi četvrta: amper, simbol A. To je mjera za električnu struju I (magnetski napon). Pomoću ove osnovne mjere i triju osnovnih mjera mehanike mogu se napisati sve izvedene mjere elktromagnetizma u SI sustavu.

Električni naboj dQ što ga prenese struja I u vremenu dt, dan je izrazom

$$dQ = I\,dt \quad .$$

Zato je mjera za električni naboj

$$[Q] = s.A \quad .$$

Iz izraza za električnu silu

$$d\vec{F} = \vec{E}\,dQ$$

izvodimo definiciju mjere za jakost električnog polja $\vec{E}$. Imamo

$$[E] = m.kg.s^{-3}.A^{-1} \quad .$$

Električni napon je definiran linijskim integralom

$$U = \int \vec{E}\, d\vec{s} \quad .$$

Prema tome je mjera za napon

$$[U] = m^2.kg.s^{-3}.A^{-1} = V \quad .$$

Električni napon U je veličina vrlo pristupna mjerenju. Zato upravo definirana mjera za napon ima i posebno ime, v o l t , simbol V . No ne samo to. Izvedene mjere elektromagnetizma u pravilu se pišu tako, kao da je volt osnovna mjera, a kilogram izvedena. To se nadomještanje mjere kg ekvivalentnim izrazom u kojem dolaze m, s, V, A načini na osnovu definicije mjere volt. Dobili smo

$$V = m^2.kg.s^{-3}.A^{-1} \quad .$$

Odavle slijedi razriješeno po mjeri kg

$$kg = m^{-2}.s^3.V.A \quad .$$

Ovim se izrazom može mjera kg eliminirati iz imena izvedene mjere, ukoliko tamo dolazi. Tako je netom definirana mjera za jakost električnog polja izražena pomoću mjere volt

$$[E] = m^{-1}.V \quad .$$

Mi ćemo u daljnjem definiranju izvedenih SI mjera u elektromagnetizmu upotrebljavati oba načina, na koja se mogu te mjere prikazati. Dakle pomoću m, s, kg , A odnosno pomoću m, s, V, A. Pri tome ćemo u karakteristici izvedene mjere uvijek održavati napisani redoslijed osnovnih mjera.

Plošna gustoća σ električnog naboja je izraz

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad ,$$

pa je mjera za ovu veličinu

$$[\sigma] = m^{-2}.s.A \quad .$$

Prostorna gustoća ϱ definira se formulom

$$\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad ,$$

zato je mjera za nju

$$[\varrho] = m^{-3}.s.A \quad .$$

Električni pomak $\vec{D}$ u polju što ga stvara točkasti naboj Q u homogenom izotropnom izolatoru u daljini $\vec{r}$ od naboja ima vrijednost

$$\vec{D} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{Q}{4\pi r^2} \quad .$$

Zato je mjera za električni pomak

$$[D] = m^{-2}.s.A \quad .$$

Kako vidimo, to je ista mjera kao i za plošnu gustoću naboja.

Budući da je električna polarizacija $\vec{P}$ izolatora definirana izrazom

$$\vec{D} = \vec{D}_o + \vec{P} \quad ,$$

gdje je $\vec{D}_o$ električni pomak u vakuumu, to slijedi da je mjera za električnu polarizaciju ista kao i za pomak.

$$[P] = m^{-2}.s.A \quad .$$

Tok električnog pomaka kroz plohu S definiran je izrazom

$$\Psi = \iint \vec{D}\, d\vec{S} \quad .$$

Zato je mjera za tok električnog pomaka

$$[\Psi] = s.A \quad .$$

Ovo je ista mjera kao i za naboj.

Veza između električnog pomaka $\vec{D}$ i jakosti električnog polja $\vec{E}$ u izolatoru uspostavlja se tenzorom dielektričnosti ε .

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad .$$

Zato je mjera za dielektričnost

$$[\varepsilon] = m^{-1}.s.V^{-1}.A = m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2 \quad .$$

Kapacitet C osamljenog kovnog tijela dolazi u izrazu

$$Q = C\, U \quad ,$$

gdje je Q naboj tijela, U potencijal (napon prema beskrajnoj daljini). Zato je mjera za kapacitet

$$[C] = s.V^{-1}.A = m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2 \quad .$$

Električni otpor R dolazi u Ohmovom zakonu

$$U = R\, I \quad .$$

Prema tome je mjera za otpor

$$[R] = V.A^{-1} = m^2.kg.s^{-3}.A^{-2} \quad .$$

Specifični otpor r javlja se u izrazu za otpor R žice duljine ℓ i jednolikog presjeka S

$$R = r \frac{\ell}{S} \quad .$$

Odavle slijedi, da je mjera za specifični otpor

$$[r] = m.V.A^{-1} = m^3.kg.s^{-3}.A^{-2} \quad .$$

Električna vodljivost (specifična) $\varkappa$ je recipročna vrijednost specifičnog otpora r . Zato je mjera za tu vodljivost

$$[\varkappa] = m^{-1}.V^{-1}.A = m^{-3}.kg^{-1}.s^3.A^2 \quad .$$

Jakost magnetskog polja H pravčaste struje I u homogenom izotropnom sredstvu iznosi u daljini r od pravca struje

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad .$$

Slijedi mjera za jakost magnetskog polja

$$[H] = m^{-1}.A \quad .$$

Na točkasti magnetski pol p djeluje magnetsko polje silom

$$\vec{F} = p\,\vec{H} \quad .$$

Zato je mjera za magnetski pol

$$[p] = s.V = m^2.kg.s^{-2}.A^{-1} \quad .$$

Točkasti magnetski pol p stvara oko sebe u homogenom izotropnom sredstvu polje magnetske indukcije $\vec{B}$, koja u daljini $\vec{r}$ od pola iznosi

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r}\,\frac{p}{4\pi r^2} \quad .$$

Zato je mjera za magnetsku indukciju

$$[B] = m^{-2}.s.V = kg.s^{-2}.A^{-1} \quad ..$$

Magnetičnost $\vec{P}_{mg}$ ili magnetska polarizacija sredstva, definirana je izrazom

$$\vec{B} = \vec{B}_o + \vec{P}_{mg} \quad ,$$

gdje je $\vec{B}_o$ magnetska indukcija u vakuumu. Zato je mjera za magnetičnost ista kao i za magnetsku indukciju.

$$[P_{mg}] = m^{-2}.s.V = kg.s^{-2}.A^{-1} \quad .$$

Veza između magnetske indukcije $\vec{B}$ i jakosti magnetskog polja $\vec{H}$ uspostavlja se tenzorom permeabilnosti μ.

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H} \quad .$$

Prema tome je mjera za permeabilnost

$$[\mu] = m^{-1}.s.V.A^{-1} = m.kg.s^{-2}.A^{-2} \quad .$$

Magnetski tok Φ kroz plohu S definira se integralom

$$\Phi = \iint \vec{B}\,d\vec{S} \quad .$$

Zato je mjera za magnetski tok

$$[\Phi] = s.V = m^2.kg.s^{-2}.A^{-1} \quad .$$

To je ista mjera kao i za jakost magnetskog pola.

Koeficijent samoindukcije L dolazi u izrazu koji daje magnetski tok Φ zavojnice.

$$\Phi = L\,I \quad .$$

Odatle slijedi, da je mjera za koeficijent samoindukcije

$$[L] = s.V.A^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.A^{-2} \quad .$$

Gustoća električne i magnetske energije na nekom mjestu polja dana je izrazom

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\,\vec{E}\,\vec{D} + \frac{1}{2}\,\vec{H}\,\vec{B} \quad .$$

Prema tome je mjera za gustoću električne i magnetske energije

$$\left[\frac{dW}{dV}\right] = m^{-3}.s.V.A = m^{-1}.kg.s^{-2} \quad .$$

Poyntingov vektor $\vec{S}$ daje gustoću toka elektromagnetske energije

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad ,$$

pa je mjera za taj vektor

$$[S] = m^{-2}.V.A = kg.s^{-3} = W.m^{-2} \quad .$$

PREGLED IZVEDENIH S I MJERA U ELEKTROMAGNETIZMU

Veličina	Izvedena mjera m, kg, s, A	Izvedena mjera m, s, V, A
1. Električni naboj Q	s.A	s.A
2. Jakost električnog polja $\vec{E}$	$m.kg.s^{-3}.A^{-1}$	$m^{-1}.V$
3. Električni napon U	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$	V
4. Plošna gustoća elek. naboja σ	$m^{-2}.s.A$	$m^{-2}.s.A$
5. Prostorna gustoća naboja ϱ	$m^{-3}.s.A$	$m^{-3}.s.A$
6. Električni pomak $\vec{D}$	$m^{-2}.s.A$	$m^{-2}.s.A$
7. Električna polarizacija $\vec{P}$	$m^{-2}.s.A$	$m^{-2}.s.A$
8. Tok električnog pomaka Ψ	s.A	s.A
9. Dielektričnost ε	$m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2$	$m^{-1}.s.V^{-1}.A$
10. Kapacitet C	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$	$s.V^{-1}.A$
11. Električni otpor R	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$	$V.A^{-1}$
12. Specifični otpor r	$m^3.kg.s^{-3}.A^{-2}$	$m.V.A^{-1}$
13. Specifična vodljivost $\varkappa$	$m^{-3}.kg^{-1}.s^3.A^2$	$m^{-1}.V^{-1}.A$
14. Jakost magnetskog polja $\vec{H}$	$m^{-1}.A$	$m^{-1}.A$
15. Magnetski pol p	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$	s.V
16. Magnetska indukcija $\vec{B}$	$kg.s^{-2}.A^{-1}$	$m^{-2}.s.V$
17. Magnetičnost $\vec{P}_{mg}$	$kg.s^{-2}A^{-1}$	$m^{-2}.s.V$
18. Permeabilnost μ	$m.kg.s^{-2}.A^{-2}$	$m^{-1}.s.V.A^{-1}$
19. Magnetski tok Φ	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$	s.V
20. Gustoća energije dW/dV	$m^{-1}.kg.s^{-2}$	$m^{-3}.s.V.A$
21. Poyntingov vektor $\vec{S}$	$kg.s^{-3}$	$m^{-2}.V.A$

Izvedene SI mjere u elektromagnetizmu, koje imaju posebno ime, navedene su u jednom predhodnom pregledu na stranicama 19 i 20, ukoliko je to ime međunarodno prihvaćeno.

17. Izvedene mjere SI u termodinamici

Jednadžba stanja za idealni plin jedna je od osnovnih jednadžbi termodinamike. Ona sadrži tri nove fizikalne veličine, kako smo u predhodnom izlaganju vidjeli, pa se prema tome dvije od njih mogu smatrati nezavisnima. To su temperatura T i količina tvari M. Za ove su veličine definirane osnovne mjerne jedinice, kelvin i mol. Prema tome je treća nova fizikalna veličina, naime plinska konstanta R, zavisna veličina, za koju se onda definira izvedena SI mjera.

Plinska jednadžba glasi

$$p\,V = M\,R\,T \quad .$$

Prema tome je mjera za plinsku konstantu R

$$[R] = J.mol^{-1}.K^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1} \quad .$$

Ako se plinska jednadžba podijeli s masom m plina za koji je ta jednadžba napisana, onda je kvocijent

$$v = \frac{V}{m}$$

specifični obujam (recipročna vrijednost gustoće), a izraz

$$r = \frac{M}{m} R$$

specifična plinska konstanta. Specifična plinska jednadžba glasi

$$p\,v = r\,T \quad .$$

Mjere za ovako definirane specifične veličine u sustavu SI jesu

$$[v] = m^3.kg^{-1}$$

$$[r] = J.kg^{-1}.K^{-1} = m^2.s^{-2}.K^{-1} \quad .$$

Ako se toplina dQ dovede nekom jednostavnom tijelu uz određene uvjete (na pr. stalni tlak, ...), pa podijeli s količinom tvari M i rezultujućim prirastom temperature dT, dobije se molarna toplina

$$C = \frac{1}{M} \frac{dQ}{dT} \quad .$$

Mjera za molarnu toplinu je

$$[C] = J.mol^{-1}.K^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1} \quad ,$$

dakle ista kao i za plinsku konstantu.

Specifična toplina c definira se izrazom

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad ,$$

pa je mjera za specifičnu toplinu

$$[c] = J.kg^{-1}.K^{-1} = m^2.s^{-2}.K^{-1} \quad .$$

Entropija je definirana izrazom

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad ,$$

pa je prema tome mjera za entropiju

$$[S] = J.K^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.K^{-1} \quad .$$

Molarna entropija σ definira se izrazom

$$d\sigma = \frac{1}{M} dS \quad ,$$

pa je prema tome mjera za ovu veličinu

$$[\sigma] = J.mol^{-1}.K^{-1} \quad m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1} \quad .$$

Specifična entropija s definira se izrazom

$$ds = \frac{1}{m} dS \quad ,$$

pa je prema tome mjera za ovu veličinu

$$[s] = J.kg^{-1}.K^{-1} = m^2.s^{-2}.K^{-1} \quad .$$

Toplina talenja je ona toplina, koju treba dovesti nekom tijelu da prijeđe iz čvrstog stanja u kapljevito. Možemo definirati molarnu toplinu talenja ovako

$$L = \frac{dQ}{dM} \quad ,$$

pa je mjera za molarnu toplinu talenja

$$[L] = J.mol^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.mol^{-1} \quad .$$

Specifična toplina talenja je

$$\ell = \frac{dQ}{dm} \quad ,$$

a mjera za specifičnu toplinu talenja

$$[\ell] = J.kg^{-1} = m^2.s^{-2} \quad .$$

Analogno se definiraju toplina isparavanja i toplina sublimacije. Mjere za ove veličine iste su kao i za molarnu, odnosno specifičnu toplinu talenja.

Fourierova formula za vođenje topline definira koeficijent toplinske vodljivosti λ .

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad .$$

Ovdje je dQ toplina, koja u vremenu dt prođe kroz presjek A , ako je u smjeru x , okomitom na A , na razmaku dx pad temperature dT . Znak "-" u ovoj formuli pokazuje, da toplina teče s mjesta više temperature prema mjestu niže temperature. Prema tome je mjera za koeficijent toplinske vodljivosti

$$[\lambda] = W.m^{-1}.K^{-1} = m.kg.s^{-3}.K^{-1} \quad .$$

Izraz dQ/dt je struja topline i za ovu veličinu je mjera

$$\left[\frac{dQ}{dt}\right] = W = m^2.kg.s^{-3} \quad .$$

Gustoća struje topline je definirana izrazom

$$g = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \quad ,$$

a mjera za gustoću struje topline

$$[g] = W.m^{-2} = kg.s^{-3} \quad .$$

Kad se nekom tijelu mijenja temperatura, onda se tom tijelu mijenja i obujam. Ako tijelo ima oblik štapa, onda je kod te promjene obujma najznačajnija promjena duljine štapa $d\ell$. Linearni koeficijent rastezanja definira se izrazom

$$d\ell = \alpha \, l_o \, dT \quad ,$$

pa je mjera za koeficijent rastezanja

$$[\alpha] = K^{-1} \quad .$$

Slično se definira i volumni koeficijent rastezanja

$$dV = \beta \, V_o \, dT \quad ,$$

pa je mjera za njega također

$$[\beta] = K^{-1} \quad .$$

U nauci o toplini rado se upotrebljava mjera za toplinu, k a l o r i j a . Ta je mjera prvotno definirana u vezi s toplinskim svojstvima vode kao toplina, koju treba dovesti kilogramu vode, da mu se povisi temperatura za jedan stupanj.

Kad se je spoznalo, da je specifična toplina vode zavisna o temperaturi, definirana je kalorija "petnaestog stupnja", simbol Cal_{15}, kao toplina koju treba dovesti kilogramu vode, da mu se povisi temperatura od 14°5 °C na 15°5 °C. Mjerenja su dala ovu vezu

$$Cal_{15} = 4\ 186\ J \quad .$$

Osim ove kalorije definirana je i srednja kalorija Cal_m kao stoti dio topline, koju treba dovesti kilogramu vode, da mu se povisi temperatura od 0 °C do 100 °C . Za ovu kaloriju mjerenja daju vrijednost

$$Cal_m = 4\ 190\ J \quad .$$

Postoji još i "kalorija tablica vodene pare", simbol za ovu kaloriju Cal_{ST} . Za ovu je kaloriju dogovoren t o č a n odnos prema džulu. Vrijedi

$$Cal_{ST} = 4\ 186{\cdot}8\ J \quad \text{(točno)} \quad .$$

Prema tome je "kalorija tablica vodene pare" točan mnogokratnik SI mjere za energiju.

Osim navedenih kalorija koje se odnose na kilogram vode, upotrebljava se i "mala kalorija", simbol cal , koja se odnosi na

gram vode. Zato je u svakom slučaju

$$1\ \text{cal} = 10^{-3}\ \text{Cal} \quad .$$

PREGLED IZVEDENIH S I MJERA U TERMODINAMICI

Veličina	Izvedena SI mjera
1. Plinska konstanta R	$J.mol^{-1}.K^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1}$
2. Specifična plinska konst. r	$J.kg^{-1}.K^{-1} = m^2.s^{-2}.K^{-1}$
3. Specifični obujam v	$m^3.kg^{-1}$
4. Molarna toplina C	$J.mol^{-1}.K^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1}$
5. Specifična toplina c	$J.kg^{-1}.K^{-1} = m^2.s^{-2}.K^{-1}$
6. Entropija S	$J.K^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}$
7. Molarna entropija σ	$J.mol^{-1}.K^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1}$
8. Specifična entropija s	$J.kg^{-1}.K^{-1} = m^2.s^{-2}.K^{-1}$
9. Molarna toplina talenja L	$J.mol^{-1} = m^2.kg.s^{-2}.mol^{-1}$
10. Specifična toplina talenja ℓ	$J.kg^{-1} = m^2.s^{-2}$
11. Koeficijent toplinske vodljivosti λ	$W.m^{-1}.K^{-1} = m.kg.s^{-3}.K^{-1}$
12. Struja topline dQ/dt	$W = m^2.kg.s^{-3}$
13. Gustoća struje topline g	$W.m^{-2} = kg.s^{-3}$
14. Koeficijent rastezanja α, β	K^{-1}

18. I z v e d e n e m j e r e S I u f o t o m e t r i j i

Osnovna mjera SI u fotometriji je kandela, simbol cd , mjera za jakost svjetlosti. U definicijama izvedenih mjera pretpostavljamo, da se svjetlost rasprostire kroz prozirno sredstvo tako, da se ne treba obazirati na apsorpciju svjetlosti. Taj je uvjet ispunjen za laboratorijska mjerenja, koja se izvode u čistom uzduhu, međutim kod astronomskih daljina apsorpcija svjetlosti i u međuzvjezdanom skoro praznom prostoru nije zanemariva.

Iz točkastog izvora svjetlosti jakosti I neka se svjetlost rasprostire na sve strane jednako. Tada je tok svjetlosti $d\Phi$, koji prolazi kroz prostorni kut $d\omega$

$$d\Phi = I\, d\omega \quad .$$

Iz ove jednadžbe slijedi, da je mjera za tok svjetlosti

$$[\Phi] = cd.sr \quad .$$

Ova mjera ima i posebno ime: l u m e n , simbol lm , pa je prema tome

$$cd.sr = lm \quad .$$

Ako na dio površine nekog tijela dS pada tok svjetlosti $d\Phi$, onda je rasvjeta te površine

$$R = \frac{d\Phi}{dS} \quad .$$

Odavle slijedi da je mjera za rasvjetu

$$[R] = lm.m^{-2} = m^{-2}cd.sr \quad .$$

Ako neko tijelo svijetli zato što je ono izvor svjetlosti, ili zato jer je rasvijetljeno, to je onda svjetloća L u nekoj točki tog tijela kvocijent jakosti svjetlosti dI i veličine svjetleće površine tijela dS , kako se ova vidi iz mjesta promatranja.

$$L = \frac{dI}{dS} \quad .$$

Prema tome je mjera za svjetloću

$$[L] = cd.m^{-2} \quad .$$

Time su definirane izvedene mjere SI u fotometriji.

PREGLED IZVEDENIH S I MJERA U FOTOMETRIJI

Veličina	Izvedena mjera
1. Tok svjetlosti Φ	$lm = cd.sr$
2. Rasvjeta $d\Phi/dS$	$lm.m^{-2} = m^{-2}.cd.sr$
3. Svjetloća L	$m^{-2}.cd$

19. C G S s u s t a v m j e r a u m e h a n i c i

Značajnu ulogu u razvoju znanstvene misli u fizici imao je CGS sustav mjera. Naziva se CGS zato, jer su mu osnovne mjere u mehanici

a) centimetar, $cm = 10^{-2}m$
b) gram, $g = 10^{-3}kg$
c) sekunda, s .

Fizičari su se služili tim sustavom mjera u prošlom i ovom stoljeću. To naročito vrijedi za teoretske fizičare tako, da se mnogi od njih nisu još ni danas riješili "cgs-mentaliteta", jednog shvaćanja koje u fizikalnim zakonima kao da premalo vodi računa o fizikalnom karakteru veličina koje se promatraju, a više gleda na brojčane odnose.

Spoznaja da veličinske jednadžbe vrijede bez obzira kakovim se mjerama mjere pojedine veličine koje u jednadžbi dolaze, konačno si je prokrčila put. Međunarodni sustav SI kako smo vidjeli, u potpunosti se osniva na toj pomisli. Čemu onda promatrati jedan sustav mjera kao što je CGS sustav, koji je već nadomješten novim dotjeranijim sustavom i koji prema tome spada u povijest nauke ? Navest ćemo dva razloga, zašto želimo u osnovnim crtama izložiti CGS sustav mjera.

Prvi je razlog u tome, što je vrlo velik dio fizikalne literature, naročito one starije, pisan u duhu tog sustava mjera. To su

udžbenici i znanstveni radovi. Za upotrebu te literature i njezino razumijevanje nužno je poznavati CGS sustav mjera, a i shvaćanje koje je uz njega išlo.

Drugi razlog zašto želimo izložiti CGS sustav je u tome, što su temeljne ideje Međunarodnog sustava SI nikle u CGS sustavu. Međunarodni sustav SI zapravo je usavršena verzija sustava mjernih jedinica, koja se je mogla razviti na području koje je bilo pripremljeno razvojem i upotrebom CGS sustava. Dobre ideje su se preuzele, nedostaci popravili i tako je nastao Međunarodni sustav SI.

U mehanici definiraju se izvedene mjere CGS sustav tako, da se u svima jednadžbama mjernih jedinica stave odredbeni faktori

$$z_i = 1 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Odmah treba istaknuti, da to vrijedi samo za područje mehanike. Prema tome ovu je postavku preuzeo SI sustav i proširio ju tako, da za SI to vrijedi u svim područjima fizike, a ne samo za mehaniku. Budući dakle da je u mehanici način definiranja izvedenih mjera u CGS sustavu jednak kao i u SI sustavu, a razlika je samo u veličini osnovnih mjera, to će biti dovoljno da istaknemo samo neke značajne momente u definiranju mehaničkih CGS mjera, a sve ostalo prikažemo u pregledu.

Mjera za silu definira se na temelju osnovnog zakona mehanike.

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad .$$

Zato je mjera za silu u CGS sustavu

$$[F]_{CGS} = cm.g.s^{-2} = din \quad .$$

Mjere i ovdje prikazujemo uglatim zagradama. Indeksom uz te zagrade označujemo, da je to mjera nekog sustava različnog od SI. Ako dakle nema indeksa uz uglate zagrade, onda se razumijeva mjera SI sustava.

Mjera za rad, odnosno energiju, definira se na osnovu formule

$$dW = \vec{F}\,d\vec{s} \quad ,$$

dakle slijedi

$$[W]_{CGS} = cm^2.g.s^{-2} = erg \quad .$$

Na ovom mjestu možemo izložiti, kako se mjera jednog sustava pretvara u mjeru drugog sustava. Da se takova pretvorba obavi, treba znati definicije mjera koje se želi pretvoriti, zatim vezu između osnovnih mjera prvog sustava s osnovnim mjerama drugog sustava, iz čega dakako slijedi i obrnuta veza.

Pretvorimo mjeru erg u mjeru džul . Napišimo najprije čemu je erg jednak

$$erg = cm^2.g.s^{-2} \quad .$$

Sada napišimo veze između osnovnih mjera u oba sustava.

$$cm = 10^{-2}\ m$$

$$g = 10^{-3}\ kg \quad .$$

Iz ovih relacija izvodimo p r e t v o r b e n e j e d i n i c e .

$$\frac{cm}{10^{-2}\ m} = 1 \quad , \text{ odnosno } \quad \frac{10^{-2}\ m}{cm} = 1 \quad ,$$

$$\frac{g}{10^{-3}\ kg} = 1 \quad , \text{ odnosno } \quad \frac{10^{-3} kg}{g} = 1 \quad .$$

Svaki od ovih omjera ima vrijednost m a t e m a t i č k e j e d i n i c e . Te jedinice poslužit će nam u našem primjeru, da izvršimo željenu pretvorbu mjera.

Da obavimo pretvorbu mjere erg u mjeru džul , pomnožimo desnu stranu izraza za erg prikladnim pretvorbenim jedinicama, ili njihovim potencijama tako, da se kraćenjem s mjerama u pretvorbenoj jedinici uklone iz izraza za erg,CGS mjere. Tada će se automatski pojaviti odgovarajuće SI mjere. Račun teče ovako

$$erg = cm^2.g.s^{-2}\ \frac{10^{-4}\ m^2}{cm^2}\ \frac{10^{-3}\ kg}{g} = 10^{-7}\ m^2.kg.s^{-2} = 10^{-7}\ J \quad .$$

Množidbom pretvorbenom jedinicom, odnosno njezinom potencijom, ne mijenja se vrijednost nekog izraza, dakle niti mjere, koju pretvaramo.

Pretvorimo sada erg u mjeru za rad u Tehničkom sustavu mjera, a to je kp.m (kilopond.metar). Opet imamo veze između osnovnih mjera

$$cm = 10^{-2}\ m \quad .$$

S mjerom za masu je malo zamršenije, jer je u Tehničkom sustavu mjerna jedinica za masu izvedena mjera, a mjera za silu kp (kilopond) osnovna. Ova se posljednja definira kao težina tijela, kojim je definiran i kilogram. Zato je

$$kp = 9{\cdot}80665\ m.kg.s^{-2} \quad .$$

Ovo pak daje množenjem prikladnim pretvorbenim jedinicama

$$kp = 9{\cdot}80665\ m.kg.s^{-2}\ \frac{cm}{10^{-2}\ m}\ \frac{g}{10^{-3} kg} = 9{\cdot}80665.10^5\ cm.g.s^{-2}$$

Iz ovoga izraza slijedi pretvorbena jedinica

$$\frac{kp}{9{\cdot}80665.10^5\ cm.g.s^{-2}} = 1 \quad .$$

Imamo dakle

$$erg = cm^2.g.s^{-2}\ \frac{10^{-2}m}{cm}\ \frac{kp}{9{\cdot}80665.10^5\ cm.g.s^{-2}}$$

$$= \frac{1}{9{\cdot}80665}\ 10^{-7}\ kp.m \quad .$$

Ova se preračunavanja jedne mjere u drugu mogu i drukčije izvesti, na pr. jednostavnim uvrštavanjem, što traži manje pisanja. Međutim izloženi je način množenja pretvorbenim jedinicama načelno korektan, a ujedno i siguran, da nećemo pogriješiti. Koji ćemo oblik pretvorbene jedinice primijeniti, zavisi o tome koju mjeru želimo iz imena mjere (karakteristike) ukloniti.

PREGLED NEKIH IZVEDENIH CGS MJERA I NJIHOV EKVIVALENT U SI

Veličina	CGS mjera	SI ekvivalent
1. Površina S	cm^2	$10^{-4}\ m^2$
2. Obujam V	cm^3	$10^{-6}\ m^3$
3. Brzina $\vec{v}$	$cm.s^{-1}$	$10^{-2}\ m.s^{-1}$
4. Akceleracija $\vec{a}$	$cm.s^{-2}$	$10^{-2}m.s^{-2}$
5. Sila $\vec{F}$	$cm.g.s^{-2}$	$10^{-5}m.kg.s^{-2}$
6. Rad, energija W	$cm^2.g.s^{-2}$	$10^{-7}m^2.kg.s^{-2}$
7. Tlak p	$cm^{-1}.g.s^{-2}$	$10^{-1}m^{-1}.kg.s^{-2}$
8. Koeficijent površ.napet. k	$g.s^{-2}$	$10^{-3}kg.s^{-2}$
9. Gustoća	$g.cm^{-3}$	$10^3kg.m^{-3}$
10. Specifična težina	$cm^{-2}g.s^{-2}$	$10\ m^{-2}.kg.s^{-2}$
11. Koeficijent viskoznosti	$cm^{-1}.g.s^{-1}$	$10^{-1}m.kg.s^{-1}$

20. U v o d n e n a p o m e n e u z d e f i n i r a n j e C G S i z v e d e n i h m j e r a u e l e k t r o m a g n e t i z m u

Elektricitet i magnetizam bile su još odvojene nauke, kad se je CGS sustav mjera počeo primjenjivati na tim područjima. Tako su nastale dvije grane ovog sustava, jedna za elektricitet, elektrostatski CGS sustav, i druga za magnetizam, elektromagnetski CGS sustav mjernih jedinica.

Otkriće Biota i Savarta (god. 1820.) da električna struja ima oko sebe magnetsko polje, omogućilo je da se elektrostatski CGS sustav mjera proširi na magnetizam, te isto tako, da se elektromagnetski CGS sustav proširi na elektricitet. Ova imena "elektrostatski CGS" i "elektromagnetski CGS" nastala su nakon tih proširenja. Tako je došlo do toga, da za svaku veličinu elektromagnetizma ima d v i j e CGS mjere, jedna "elektrostatska" i druga "elektromagnetska".

U izlaganju koje slijedi,mi ćemo najprije prikazati mjerne jedinice elektrostatskog CGS sustava mjera (elst CGS). Mjerne brojeve i mjere neke veličine X , ukoliko smo upotrijebili elst CGS, označit ćemo indeksom "e" ovako

$$X = \{X\}_e [X]_e \quad .$$

Nakon elst CGS mi ćemo prikazati definicije mjera u elektromagnetizmu za elektromagnetski CGS sustav mjera (elmg CGS). Mjerne brojeve i mjere neke veličine X , ukoliko smo upotrijebili elmg CGS, označit ćemo indeksom "m" ovako

$$X = \{X\}_m [X]_m \quad .$$

Nakon razvoja obih CGS sustava pokazat ćemo vezu između mjera elst CGS i mjera elmg CGS. Ta je veza, kako ćemo vidjeti, od središnje važnosti i igrala je značajnu ulogu u razvoju fizike devetnaestog stoljeća.

Zatim ćemo pokazati vezu mjera obih CGS sustava i mjera SI. Time i predhodnim izlaganjima pokazat će se idejna povezanost tih sustava mjera, kao i usavršavanje sustava tijekom razvoja.

Pošto smo se tako upoznali s oba CGS sustava u elektromagnetizmu, njihovom međusobnom vezom, te vezom sa sustavom SI, prikazat ćemo na kraju, kako izgledaju brojčane jednadžbe elektromagnetizma za svaki od tih sustava, te konačno za "miješani" Gaussov CGS sustav mjera.

Osnova na kojoj se svi sustavi mjera grade jesu veličinske jednadžbe, za koje smo pretpostavili, da imaju posve određen oblik tako, da ima samo jedan sustav tih jednadžbi. Postojanje i oblik tih jednadžbi ne zavisi o postojanju ili ne postojanju bilo kojeg i bilo kakovog sustava mjera. Te se jednadžbe, kako smo vidjeli, mogu pisati, čim za neke predmete fizikalnog opažanja ustanovimo, da su fizikalne veličine, to jest da se mogu mjeriti, te nadalje vrstu te veličine, to jest da li je skalar, ili vektor, ... Prema tome će polazište za izgradnju CGS sustava u elektromagnetizmu biti jedinstven sustav veličinskih jednadžbi, onaj isti koji smo koristili i u izgradnji SI sustava, te principi koje smo u uvodnom dijelu naveli.

21. E l e k t r o s t a t s k i C G S s u s t a v m j e r a

Ovaj prikaz elst CGS razlikuje se od starijih prikaza po tome, što se ovdje uz tri osnovne mjere mehanike: centimetar, gram, sekunda, uvodi još i č e t v r t a o s n o v n a m j e r a jedne električne veličine. To je u ovom slučaju mjera za e l e k t r i č -

n i n a b o j $[Q]_e$. Bilo je nekih prijedloga, da se toj mjeri dade i posebno ime, no budući da to ime nije međunarodno prihvaćeno, mi ćemo se zadovoljiti simbolom $[Q]_e$ za ovu osnovnu mjernu jedinicu.

Definicija četvrte osnovne mjere elst CGS za električni naboj osniva se na činjenici, da između tjelesa koja nose električne naboje, djeluju sile, t.zv. električne sile. Definicija $[Q]_e$ može se oblikovati ovako:

> "Točkasti mirni električni naboj jedna $[Q]_e$ djeluje na isto takovi, smješten u daljini jedan centimetar u vakuumu daleko od ostalih tjelesa, silom jedan din."

Za definiciju $[Q]_e$ dovoljno je samo postojanje električnih sila, a ne treba znati zakon, po kojemu te sile zavise o daljini jednog naboja od drugog. Definicija nadalje pretpostavlja, da naboji miruju relativno jedan prema drugome, a i prema opažaču koji mjeri silu, kojom naboji djeluju jedan na drugi. Skalarni se karakter fizikalne veličine električni naboj Q , također može ustanoviti, a da ne treba poznavati zavisnost električne sile o razmaku točkastih naboja. U načelu bi to moglo ići ovako. Dva su naboja Q_1 i Q_2 jednaka, ako u svojem djelovanju na referentni naboj q svaki za sebe, može uz iste uvjete, jedan nadomjestiti drugi, t.j. da pri tome nadomještanju djelovanje na q izađe jednako veliko. Tada združeni naboj $Q_1 + Q_2$, uz istu daljinu i sredstvo, daje dvostruku silu na q . Dodavanjem trećeg naboja $Q_3 = Q_2 = Q_1$, sila na referentni naboj q postane trostruka, i t.d. Time je utvrđen skalarni karakter električnog naboja Q .

Definicija elst CGS osnovne mjere $[Q]_e$ načelno se ne razlikuje od definicije SI osnovne mjere za jakost struje, amper. Osnovna se mjera amper definira pomoću elektromagnetskih sila, koje se javljaju između vodiča, kojima teku električne struje. Za samu definiciju mjere amper dovoljno je da pravčasti paralelni vodiči, kojima teku električne struje, djeluju silama jedan na drugi. Poznavanje zavisnosti tih sila o razmaku vodiča, za samu definiciju mjerne jedinice amper, nije potrebno.

Mjerna jedinica $[Q]_e$ može se ostvariti elektrostatskom vagom W. Thomsona. U toj vagi mjeri se sila, kojom se privlače ploče ravnog pločastog kondenzatora, kad te ploče nose električne naboje. Iz veličine te sile i geometrijskih prilika može se odrediti električni naboj na ploči, koja visi (namjesto zdjelice) na poluzi vage. Ovo ostvarenje $[Q]_e$ može se smatrati analognim ostvarenju mjerne jedinice za električnu struju, amper, pomoću strujne vage

W.Thomsona. Tamo se iz sila kojima se privlače zavojnice, kad njima teku električne struje, te geometrijskih prilika, može odrediti električna struja u zavojnici, koja visi (namjesto zdjelice) na poluzi vage.

Pošto smo definirali četvrtu osnovnu mjeru elst CGS, mjeru za električni naboj $[Q]_e$, možemo prijeći na definicije izvedenih mjera. U slučajevima, gdje je oblik i sadržaj definicije izvedene mjere evidentan već iz upotrijebljene veličinske jednadžbe, tamo nećemo tekst definicije niti izricati. U takovim je slučajevima odredbeni faktor u jednadžbi mjerne jedinice jednak jedan. Ako međutim definicija neke izvedene elst CGS mjere odstupa od tog pravila, mi ćemo tu definiciju izreći. Pri tome treba napomenuti, da ne postoji neki normirani tekst definicija izvedenih elst CGS mjera. Zato se te definicije razlikuju u pojedinim riječima i redoslijedu riječi u raznim publikacijama, a da ipak nema sumnje o tome, kolika je i kakova je dotična mjera.

Ima različitih načina razvijanja elst CGS (i dakako elmg CGS) sustava tako, da se karakteristike izvedenih mjera pišu na različite načine. To dolazi i odatle, što neki ne smatraju $[Q]_e$ osnovnom mjerom elst CGS. O tome ne postoji međunarodni dogovor. Zato nam je slobodno ići odabranim putem.

Ovdje treba barem spomenuti i stari način prikazivanja izvedenih mjera u elst CGS, koji je pretpostavljao i u elektromagnetizmu samo tri osnovne mjere, one iste kao i u mehanici. Dakle kod ovog starog načina u karakteristici neke mjere za elektromagnetsku veličinu dolaze samo cm, g, s. O tome načinu "starog sila" bit će još govora. Međutim smatramo, da će se svatko brzo snaći u toj raznolikosti, ako se je upoznao s načinom, koji se u ovom izlaganju primjenjuje.

Nakon ovih općenitih primjedbi evo pojedinih izvedenih mjera. Redoslijed definicija i izbor veličinskih jednadžbi, na osnovu kojih su pojedine mjere definirane, mogao bi biti i neki drugi, a uz isti konačni rezultat.

Plošna gustoća σ električnog naboja Q na plohi S definira se izrazom

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad ,$$

pa je prema tome mjera za plošnu gustoću naboja

$$[\sigma]_e = \mathrm{cm}^{-2} \cdot [Q]_e \quad .$$

Slično je prostorna gustoća ϱ naboja u obujmu V definirana formulom

$$\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad ,$$

pa je mjera za prostornu gustoću naboja

$$[\varrho]_e = cm^{-3} \cdot [Q]_e \quad .$$

Električni momenat $\vec{M}_{el}$ prikazan je izrazom

$$\vec{M}_{el} = Q\,\vec{l} \quad ,$$

pa je mjera za tu veličinu

$$[M_{el}]_e = cm \cdot [Q]_e \quad .$$

Polarizacija dielektrika P je električni momenat po jedinici obujma, dákle

$$\vec{P} = \frac{d\vec{M}_{el}}{dV} \quad ,$$

pa je mjera za polarizaciju dielektrika

$$[P]_e = cm^{-2} \cdot [Q]_e \quad .$$

Vidimo da se tom istom mjerom mjeri i plošna gustoća naboja, to pak ima svoj fizikalni razlog.

Točkasti električni naboj Q stvara oko sebe u homogenom izotropnom dielektriku polje električnog pomaka $\vec{D}$, za koje vrijedi zakon

$$\vec{D} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{Q}{4\pi r^2} \quad ,$$

gdje je $\vec{r}$ daljina od naboja Q one točke polja, u kojoj pomak ima vrijednost $\vec{D}$. Ovo je veličinska jednadžba koja vrijedi uz navedene uvjete. U elst CGS definira se mjerna jedinica za električni pomak ovako:

> "Električni pomak ima vrijednost jednu $[D]_e$ u daljini jedan centimetar od točkastog naboja jedna $[Q]_e$, smještenog u neograničenom homogenom izotropnom izolatoru daleko od ostalih tjelesa."

Ako ove vrijednosti prema navedenoj definiciji uvrstimo u izraz za električni pomak uzrokovan točkastim nabojem, dobivamo

$$[D]_e = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-2} \cdot [Q]_e \quad .$$

Prema tome jednadžba za mjernu jedinicu električnog pomaka u elst CGS ima odredbeni faktor različan od jedan, a karakteristika je ista kao i za plošnu gustoću naboja σ. Tu se elst CGS razlikuje od SI, u kojem se ove obje veličine mjere istom mjerom, jer su u SI svi odredbeni faktori stavljeni jednaki jedan.

Tok električnog pomaka Ψ kroz neku plohu S dan je integralom

$$\Psi = \iint \vec{D}\, d\vec{S} \quad .$$

Zato je mjera za tok električnog pomaka

$$[\Psi]_e = \frac{1}{4\pi}[Q]_e \quad .$$

Ako sitno tijelo nosi električni naboj dQ, onda u električnom polju na to tijelo djeluje električna sila

$$d\vec{F} = \vec{E}\, dQ \quad .$$

Ovom je jednadžbom definirana jakost električnog polja $\vec{E}$, a mjera za ovu veličinu je

$$[E]_e = \text{din}.[Q]_e^{-1} = \text{cm}.g.s^{-2}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

Električni napon U definiran je linijskim integralom

$$U = \int \vec{E}\, d\vec{s} \quad ,$$

pa je prema tome mjera za napon

$$[U]_e = \text{cm}^2.g.s^{-2}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

Električni kapacitet C dolazi u izrazu, koji daje naboj izoliranog tijela, ako nam je poznat njegov potencijal (napon prema zemlji).

$$Q = C\, U \quad .$$

Zato je mjera za kapacitet

$$[C]_e = [U]_e^{-1}.[Q]_e = \text{cm}^{-2}.g^{-1}.s^2.[Q]_e^2 \quad .$$

Veza između električnog pomaka $\vec{D}$ i jakosti električnog polja $\vec{E}$ u izolatoru, dana je tenzorom dielektričnosti ε.

$$\vec{D} = \varepsilon\, \vec{E} \quad .$$

Zato je mjera za dielektričnost

$$[\varepsilon]_e = [D]_e.[E]_e^{-1} = \frac{1}{4\pi}\,\text{cm}^{-2}.[Q]_e.\text{cm}^{-1}.g^{-1}.s^2.[Q]_e$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\text{cm}^{-3}.g^{-1}.s^2.[Q]_e^2 \quad .$$

Na ovom ćemo mjestu načas prekinuti nizanje definicija izvedenih mjera elst CGS, da bi proveli mali račun, koji će nam dati veličinu dielektričnosti vakuuma ε_o. Osnova za ovaj račun je Coulombov zakon, koji daje električnu silu $\vec{F}_{el}$ između dva točkasta električna naboja Q_1 i Q_2,

$$\vec{F}_{el} = \frac{\vec{r}}{r}\,\frac{Q_1\, Q_2}{4\pi\varepsilon\, r^2} \quad .$$

Zatim ćemo upotrijebiti definiciju elst CGS mjere za naboj $[Q]_e$, te konačno izraz za mjeru za dielektričnost $[\varepsilon]_e$.

U napisani Coulombov zakon uvrstimo vrijednosti iz definicije mjere za električni naboj $[Q]_e$. Za vakuum je $\varepsilon = \varepsilon_o$. Dobivamo

$$\text{din} \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \text{cm}^2 = [Q]_e^2 \quad .$$

Ako ovo sredimo, uzevši u obzir da je

$$\text{din} = \text{cm} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-2} \quad ,$$

onda izlazi

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \text{cm}^{-3} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot [Q]_e^2 \quad ,$$

$$= [\varepsilon]_e \quad .$$

Vidimo da je u elst CGS dielektričnost vakuuma t o č n o jednaka jednoj mjernoj jedinici toga sustava mjera za dielektričnost. To je situacija analogna onoj u SI, gdje je permeabilnost vakuuma t o č n o jednaka $4\pi \cdot 10^{-7}$ mjerna jedinica za permeabilnost.

Nastavimo s definiranjem izvedenih elst CGS mjera. Jakost električne struje definira se izrazom

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad ,$$

pa je zato mjera za jakost struje

$$[I]_e = \text{s}^{-1} \cdot [Q]_e \quad .$$

Vektor gustoće električne struje $\vec{g}$ daje struju dI koja teče kroz djelić plohe $d\vec{S}$

$$dI = \vec{g}\, d\vec{S} \quad .$$

Zato je mjera za gustoću struje

$$[g]_e = \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot [Q]_e \quad .$$

Električni otpor R dolazi u Ohmovom zakonu

$$U = R\, I \quad .$$

Zato je mjera za otpor

$$[R]_e = [U]_e \cdot [I]_e^{-1} = \text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1} \cdot [Q]_e^{-2} \quad .$$

Specifični otpor r dolazi u izrazu za otpor žice duljine ℓ i jednolikog presjeka S

$$R = r \frac{\ell}{S} \quad .$$

Zato je mjera za specifični otpor

$$[r]_e = \text{cm}^3 \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1} \cdot [Q]_e^{-2} \quad .$$

Specifična vodljivost $\varkappa$ je recipročna vrijednost specifičnog otpora. Zato je

$$[\varkappa]_e = \text{cm}^{-3} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s} \cdot [Q]_e^2 \quad .$$

Dosada nismo uzeli u obzir magnetsko polje električne struje,

pa su veličine, za koje smo definirali mjere, bile "električne" veličine. Sad ćemo uzeti u obzir otkriće Biota i Savarta, da električnu struju I nerazdružno prati magnetsko polje. Ako je tanka žica, kojom teče struja I , svinuta u kružnicu polumjera r , onda na magnetski pol p u središtu ove kružnice djeluje sila

$$F = \frac{p\,I}{2\,r} \quad .$$

"Ako beskonačno tanka kružna struja jakosti jedna $[I]_e$ i polumjera jedan centimetar, djeluje na točkasti magnetski pol p , smješten u središtu kružne struje, silom 2π din, onda taj pol ima jakost jedna $[p]_e$."

U ovoj se definiciji mjerne jedinice za jakost magnetskog pola uzima da svaki centimetar kružne struje djeluje silom jedan din. Budući da je struja duga 2π cm , to je onda sila na jedinični magnetski pol 2π din .

Uvrstimo vrijednosti iz ove definicije $[p]_e$ u veličinsku jednadžbu, koja daje magnetsku silu u središtu struje. Dobivamo

$$2\pi \text{ din} \cdot 2 \text{ cm} = [p]_e \cdot [I]_e \quad .$$

Kad ovo sredimo, onda izlazi mjera za magnetski pol

$$[p]_e = 4\pi\, \text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1} \cdot [Q]_e^{-1} \quad .$$

Magnetski momenat $\vec{M}_{mg}$ dan je izrazom

$$\vec{M}_{mg} = p\,\vec{l} \quad .$$

Slijedi mjera za magnetski momenat

$$[M_{mg}]_e = 4\pi\, \text{cm}^3 \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1} \cdot [Q]_e^{-1} \quad .$$

Magnetska polarizacija ili magnetičnost nekog sredstva je

$$\vec{P}_{mg} = \frac{d\vec{M}_{mg}}{dV} \quad .$$

Prema tome je mjera za ovu veličinu

$$[P_{mg}]_e = 4\pi\, \text{g} \cdot \text{s}^{-1} \cdot [Q]_e^{-1} \quad .$$

Točkasti magnetski pol p stvara u homogenom izotropnom sredstvu polje magnetske indukcije $\vec{B}$.

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{p}{4\pi\, r^2} \quad .$$

"Magnetska indukcija u homogenom izotropnom sredstvu (izvan tankog magnetskog štapa na čijem se kraju nalazi pol p) ima vrijednost jedna $[B]_e$ u daljini jedan centimetar od pola jedna $[p]_e$."

Prema ovoj definiciji i napisanoj formuli, izlazi mjera za magnetsku indukciju

$$[B]_e = g.s^{-1}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

Magnetski tok Φ definiran je izrazom

$$\Phi = \iint \vec{B}\, d\vec{S} \quad ,$$

pa je prema tome mjera za ovu veličinu

$$[\Phi]_e = cm^2.g.s^{-1}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

Koeficijent samoindukcije L dolazi u izrazu

$$\Phi = L\, I \quad ,$$

pa je zato elst CGS mjera za koeficijent samoindukcije

$$[L]_e = [\Phi]_e.[I]_e^{-1} = cm^2.g.[Q]_e^{-2} \quad .$$

U magnetskom polju jakosti $\vec{H}$ djeluje na magnetski pol p magnetska sila

$$\vec{F} = p\,\vec{H} \quad .$$

Ovo daje mjeru za jakost magnetskog polja $\vec{H}$

$$[H]_e = din.[p]_e^{-1} = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-1}.s^{-1}.[Q]_e \quad .$$

Magnetski napon V_{mg} definiran je linijskim integralom

$$V_{mg} = \int \vec{H}\, d\vec{s} \quad ,$$

zato je mjera za ovu veličinu

$$[V_{mg}]_e = \frac{1}{4\pi}\, s^{-1}.[Q]_e \quad .$$

Vektorska polja magnetske indukcije $\vec{B}$ i jakosti magnetskog polja $\vec{H}$ vezana su međusobno tenzorom permeabilnosti μ.

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H} \quad .$$

Zato je mjera za permeabilnost

$$[\mu]_e = [B]_e.[H]_e^{-1} = 4\pi\, cm.g.[Q]_e^{-2} \quad .$$

Za međusobno djelovanje mirnih točkastih magnetskih polova smještenih u homogenom izotropnom sredstvu permeabilnosti μ, vrijedi drugi Coulombov zakon

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r}\, \frac{p_1\, p_2}{4\pi\mu\, r^2} \quad .$$

Ako su polovi p_1 i p_2 jaki po jednu $[p]_e$, smješteni u vakuumu (permeabilnost je tada μ_o), na razmaku od jednog centimetra, onda je veličina sile F_1 kojom jedan pol djeluje na drugi, dana u izrazu

$$\{F_1\}_e \text{din}.\ 4\pi\{\mu_o\}_e\ 4\pi\,\text{cm}^3.\text{g}.[Q]_e^{-2} = 16\pi^2\text{cm}^4.\text{g}^2.\text{s}^{-2}.[Q]_e^{-2} \quad .$$

Uzmemo li u obzir, da je

$$\text{din} = \text{cm.g.s}^{-2} \quad ,$$

to se gornja relacija pojednostavnjuje na

$$\{F_1\}_e\ \{\mu_o\}_e = 1 \quad .$$

Ovaj nam posljednji izraz kaže, da je mjerni broj permeabilnosti vakuuma $\{\mu_o\}_e$ (ako ju mjerimo elst CGS mjerom, na što upućuje indeks "e") jednak recipročnoj vrijednosti mjernog broja sile $\{F_1\}_e$ kojom u vakuumu djeluju jedan na drugi točkasti magnetski polovi jakosti po jedna $[p]_e$ na razmaku jedan centimetar.

Prema tome je permeabilnost vakuuma

$$\mu_o = \{\mu_o\}_e.4\pi\,\text{cm.g.}[Q]_e^{-2} = \{F_1\}_e^{-1}\ 4\pi\,\text{cm.g.}[Q]_e^{-2} \quad .$$

Mi ovdje ne možemo naprosto"izračunati" permeabilnost vakuuma onako, kao što smo prije izračunali dielektričnost vakuuma iz prvog Coulombovog zakona. Pod riječi "izračunati" misli se ovdje, izvesti iz predhodnih relacija t o č a n mjerni broj. Razlog je jednostavan. Jednadžba u kojoj dolazi permeabilnost vakuuma sadrži dvije nepoznanice: permeabilnost μ_o koju želimo odrediti, i silu F_1, kojom jedinični polovi djeluju jedan na drugi. U slučaju dielektričnosti vakuuma, sila između naboja bila je "per definitionem" jedan din, pa je zato ε_o izašao točno jedna $[\varepsilon]_e$. Ovdje kod dielektričnosti, pogreške i nesigurnosti mjerenja prebačeni su na ostvarenje mjernih jedinica.

Slijedi dakle, ako želimo odrediti permeabilnost vakuuma, mi treba da i z m j e r i m o silu F_1 kojom točkasti magnetski polovi, jaki po jedna $[p]_e$ djeluju jedan na drugi u vakuumu. (Namjesto mjerenja sile F_1 može se obaviti nekakovo drugo ekvivalentno mjerenje). Ako tu silu izrazimo mjernom jedinicom din, onda je, kako smo gore vidjeli, mjerni broj te sile jednak recipročnoj vrijednosti mjernog broja permeabilnosti vakuuma, izraženoj mjerom $[\mu]_e$. Budući da mjerenje sile F_1 sadrži pogreške i nesigurnost mjerenja, to onda isto vrijedi i za permeabilnost vakuuma μ_o, mjerenom elst CGS mjerom. To znači da je mjerni broj permeabilnosti vakuuma $\{\mu_o\}_e$ onoliko n e t o č a n i nesiguran, kojiko su netočna i nesigurna mjerenja sile F_1 (ili neka ekvivalentna mjerenja).

Ovdje u elst CGS prilike su analogne onima, kad se služimo SI mjerama. U SI je mjerni broj permeabilnosti vakuuma t o č n o od-

reden, jer se taj broj dade izračunati iz vrijednosti, koje su dane "per definitionem". Nesigurnost poznavanja te veličine je u nesigurnosti mjera kojim se ona mjeri, dakle m, kg, s, A. Zato se međutim u SI mjerni broj dielektričnosti vakuuma dobiva mjerenjem, pa je prema tome opterećen netočnošću i nesigurnošću mjerenja.

PREGLED MJERA ELEKTROSTATSKOG CGS SUSTAVA

Veličina	Mjera elst CGS
1. Dužina s	cm
2. Masa m	g
3. Vrijeme t	s
4. Električni naboj Q	$[Q]_e$
5. Plošna gustoća naboja σ	$cm^{-2}.[Q]_e$
6. Prostorna gustoća naboja ϱ	$cm^{-3}.[Q]_e$
7. Električni momenat $\vec{M}_{el}$	$cm.[Q]_e$
8. Polarizacija dielektrika $\vec{P}$	$cm^{-2}.[Q]_e$
9. Električni pomak $\vec{D}$	$\frac{1}{4\pi}\, cm^{-2}.[Q]_e$
10. Tok električnog pomaka Ψ	$\frac{1}{4\pi}\,[Q]_e$
11. Jakost električnog polja $\vec{E}$	$cm.g.s^{-2}.[Q]_e^{-1}$
12. Električni napon U	$cm^2.g.s^{-2}.[Q]_e^{-1}$
13. Kapacitet C	$cm^{-2}.g^{-1}.s^2.[Q]_e^2$
14. Dielektričnost ε	$\frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.\, g^{-1}.s^2.[Q]_e^2$
15. Jakost električne struje I	$s^{-1}.[Q]_e$
16. Gustoća električne struje $\vec{g}$	$cm^{-2}.s^{-1}.[Q]_e$
17. Električni otpor R	$cm^2.g.s^{-1}.[Q]_e^{-2}$
18. Specifični otpor r	$cm^3.g.s^{-1}.[Q]_e^{-2}$
19. Specifična vodljivost $\varkappa$	$cm^{-3}.g^{-1}.s.[Q]_e^2$
20. Magnetski pol p	$4\pi.cm^2.g.s^{-1}.[Q]_e^{-1}$
21. Magnetski momenat $\vec{M}_{mg}$	$4\pi.cm^3.g.s^{-1}.[Q]_e^{-1}$
22. Magnetska polarizacija $\vec{P}_{mg}$	$4\pi.g.s^{-1}.[Q]_e^{-1}$
23. Magnetska indukcija $\vec{B}$	$g.s^{-1}.[Q]_e^{-1}$
24. Magnetski tok Φ	$cm^2.g.s^{-1}.[Q]_e^{-1}$
25. Koeficijent samoindukcije L	$cm^2.g.[Q]_e^{-2}$
26. Jakost magnetskog polja $\vec{H}$	$\frac{1}{4\pi}\, cm^{-1}.s^{-1}.[Q]_e$
27. Magnetski napon V_{mg}	$\frac{1}{4\pi}\, s^{-1}.[Q]_e$
28. Permeabilnost μ	$4\pi.cm.g.[Q]_e^{-2}$

22. E l e k t r o m a g n e t s k i C G S s u s t a v m j e r a

Ovaj sustav mjera nastaje tako, da se slično kao i u slučaju elst CGS k trima osnovnim mjerama mehanike: centimetar, gram, sekunda, doda č e t v r t a o s n o v n a m j e r a , no sada za jednu magnetsku veličinu. To je mjera za jakost magnetskog pola $[p]_m$. Ta mjera nema posebnog imena, pa ćemo se u ovom prikazu zadovoljiti simbolom $[p]_m$ za ovu osnovnu mjeru.

Definicija četvrte osnovne mjere elmg CGS osniva se na činjenici, da između krajeva magnetskih štapova djeluju magnetske sile. Ta se definicija može oblikovati ovako:

> "Točkasti mirni magnetski pol jedna $[p]_m$ djeluje na isto takovi, smješten u daljini jedan centimetar u vakuumu daleko od ostalih tjelesa, silom jedan din."

Za definiciju $[p]_m$ dovoljno je samo postojanje magnetskih sila, a ne treba znati zakon po kojemu te sile zavise o daljini jednog pola od drugoga. Definicija nadalje pretpostavlja, da polovi miruju relativno jedan prema drugome, a i prema opažaču koji mjeri silu kojom polovi djeluju. Jakost magnetskog pola je skalarna veličina. To se može pokusom potvrditi. Definicija elmg CGS osnovne mjere $[p]_m$ u svemu je analogna definiciji elst CGS osnovne mjere za električni naboj $[Q]_e$.

Definicije izvedenih mjera elmg CGS teku slično kao i definicije elst CGS mjera, dakako uz odgovarajuće izmjene. Ima i drukčijih prikaza elmg CGS no što je ovaj ovdje. Razlika može biti na pr. u tome, da se neka druga magnetska veličina odabere kao polazište za definiranje četvrte osnovne mjere. Stari način razvoja elmg CGS služio se je u pisanju izvedenih mjera samo trima osnovnim mjerama mehanike.

Budući da nema za definiranje izvedenih mjera elmg CGS međunarodnog dogovora, a niti jedinstvenog stava raznih pisaca, nama je slobodno, da idemo putem, koji nam se čini najzgodniji. Isto tako ne postoji dogovorena redakcija definicija elmg CGS mjera. Zato ih oblikujemo tako, da budu jasne i potpune, a tamo gdje je oblik definicije očit, tamo definiciju niti ne izričemo.

Pređimo sada na definiranje pojedinih izvedenih mjera elmg CGS sustava. Osnova su i polazište, razumije se, veličinske jednadžbe.

Magnetski momenat $\vec{M}_{mg}$ prikazan je izrazom

$$\vec{M}_{mg} = p\,\vec{l} \quad ,$$

pa je mjera za ovu veličinu

$$[M_{mg}]_m = cm.[p]_m \quad .$$

Magnetska polarizacija $\vec{P}_m$ ili magnetičnost je magnetski momenat po jedinici obujma, dakle

$$\vec{P}_{mg} = \frac{d\vec{M}_{mg}}{dV} \quad ,$$

pa je mjera za ovu veličinu

$$[P_{mg}]_m = cm^{-2}.[p]_m \quad .$$

Točkasti magnetski pol p stvara oko sebe o homogenom izotropnom sredstvu polje magnetske indukcije $\vec{B}$, za koje vrijedi zakon

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{p}{4\pi r^2} \quad ,$$

gdje je $\vec{r}$ daljina od pola p one točke, u kojoj indukcija ima vrijednost $\vec{B}$. U CGS sustavu definira se mjerna jedinica za magnetsku indukciju ovako:

"Magnetska indukcija ima vrijednost jedna $[B]_m$ u daljini jedan centimetar od točkastog magnetskog pola jakosti jedna $[p]_m$, smještenog u neograničenom homogenom izotropnom sredstvu daleko od ostalih tjelesa."

Ako vrijednosti prema navedenoj definiciji uvrstimo u izraz za magnetsku indukciju koju stvara točkasti magnetski pol, dobivamo

$$[B]_m = \frac{1}{4\pi} cm^{-2}.[p]_m \quad .$$

Prema tome u jednadžbi za mjernu jedinicu magnetske indukcije u elmg CGS dolazi odredbeni faktor različan od jedan. Ova mjera ima i posebno ime: g a u s .

Tok magnetske indukcije Φ kroz neku plohu S dan je integralom

$$\Phi = \iint \vec{B}\, d\vec{S} \quad .$$

Zato je mjera za tok magnetske indukcije

$$[\Phi]_m = \frac{1}{4\pi} [p]_m \quad .$$

Ova mjera ima i posebno ime: m a k s v e l .

Na točkasti pol p djeluje u magnetskom polju magnetska sila

$$\vec{F} = p\,\vec{H} \quad .$$

Ovom je jednadžbom definirana jakost magnetskog polja $\vec{H}$, a mjera za ovu veličinu je

$$[H]_m = din.[p]_m^{-1} = cm.g.s^{-2}.[p]_m^{-1} = ersted \quad .$$

Magnetski napon V_{mg} definiran je izrazom

$$V_{mg} = \int \vec{H}\, d\vec{s} \quad ,$$

pa je prema tome mjera za magnetski napon

$$[V_{mg}]_m = cm^2 . g . s^{-2} . [p]_m^{-1} = \text{gilbert} \quad .$$

Veza između magnetske indukcije $\vec{B}$ i jakosti magnetskog polja $\vec{H}$ dana je tenzorom permeabilnosti μ.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad .$$

Zato je mjera za permeabilnost

$$[\mu]_m = [B]_m . [H]_m^{-1} = \frac{1}{4\pi} cm^{-2} . [p]_m . cm^{-1} . g^{-1} . s^2 . [p]_m$$

$$= \frac{1}{4\pi} cm^{-3} . g^{-1} . s^2 . [p]_m^2 \quad .$$

Na ovom ćemo mjestu načas prekinuti nizanje definicija mjera u elmg CGS, da bi proveli mali račun, koji će nam dati veličinu permeabilnosti vakuuma μ_o. Osnova za ovaj račun je drugi Coulombov zakon, koji daje magnetsku silu $\vec{F}_{mg}$ između dvaju točkastih magnetskih polova p_1 i p_2 :

$$\vec{F}_{mg} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{p_1 p_2}{4\pi \mu r^2} \quad .$$

Zatim ćemo upotrijebiti definiciju elmg CGS mjere za jakost magnetskog pola $[p]_m$, te konačno izraz za mjeru za permeabilnost u elmg CGS $[\mu]_m$.

U napisani Coulombov zakon uvrstimo vrijednosti iz definicije mjere za jakost magnetskog pola, dakle za $[p]_m$. Za vakuum je $\mu = \mu_o$. Dobivamo

$$din . 4\pi . \mu_o . cm^2 = [p]_m^2 \quad .$$

Ako ovo sredimo, uzevši u obzir da je

$$din = cm . g . s^{-2} \quad ,$$

to izlazi

$$\mu_o = \frac{1}{4\pi} cm^{-3} . g^{-1} . s^2 . [p]_m^2$$

$$= [\mu]_m \quad .$$

Vidimo da je u elmg CGS permeabilnost vakuuma t o č n o jednaka mjernoj jedinici toga sustava za permeabilnost. To je situacija jednaka onoj u SI, gdje je permeabilnost vakuuma također t o č n o jednaka $4\pi . 10^{-7}$ mjerna jedinica SI za permeabilnost.

Permeabilnost vakuuma je prirodna konstanta, pa se s pravom možemo pitati, kako ona može biti t o č n o poznata. Ona je točno određena u tom smislu, da je dan točan odnos te konstante prema

osnovnim mjerama dotičnog sustava, a mjere su tome zahtjevu prilagođene i ostvarene. Prema tome je ovdje permeabilnost vakuuma p o z n a t a onom točnošću, kojom su mjere ostvarene. Nesigurnost podatka, koji daje permeabilnost vakuuma u elmg CGS i u SI nije u mjernom broju, koji je točan "per definitionem", nego u mjernim jedinicama. Prema tome kad kažemo, da je u elmg CGS i u SI permeabinost vakuuma točno određena, onda to znači, da je mjerni broj te veličine točan, a nesigurnost poznavanja te veličine dolazi od nesigurnosti ostvarenja osnovnih mjera.

Nastavimo sada s definiranjem izvedenih elmg CGS mjera tako, da definiramo mjeru za jakost električne struje. Kružna struja, jakosti I i polumjera r, djeluje na magnetski pol p u središtu struje silom

$$F = \frac{p\,I}{2r} \quad .$$

"Beskonačno tanka kružna struja, polumjera jedan centimetar, ima jakost jedna $[I]_m$, ako na magnetski pol jakosti jedna $[p]_m$ smješten u središtu te struje, djeluje silom 2π din."
Ova definicija daje mjeru za jakost električne struje

$$[I]_m = 2\pi\,.\,\text{din}.2\text{cm}.[p]_m^{-1} = 4\pi\,\text{cm}^2.\text{g}.\text{s}^{-2}.[p]_m^{-1} \quad .$$

Gustoća električne struje $\vec{g}$ daje struju dI, koja teče kroz djelić plohe $d\vec{S}$

$$dI = \vec{g}\,d\vec{S} \quad .$$

Zato je mjera za gustoću struje

$$[g]_m = 4\pi.\text{g}.\text{s}^{-2}.[p]_m^{-1} \quad .$$

Koeficijent samoindukcije L dolazi u izrazu

$$\Phi = L\,I \quad .$$

Zato je elmg CGS mjera za koeficijent samoindukcije

$$[L]_m = [\Phi]_m.[I]_m^{-1} = \frac{1}{4\pi}\,[p]_m.\frac{1}{4\pi}\,\text{cm}^{-2}.\text{g}^{-1}.\text{s}^2.[p]_m$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\,\text{cm}^{-2}.\text{g}^{-1}.\text{s}^2.[p]_m^2 \quad .$$

Ako električna struja ima jakost I, onda u vremenu dt ona prenese električni naboj dQ

$$dQ = I\,dt \quad ,$$

pa je mjera za električni naboj

$$[Q]_m = 4\pi.\text{cm}^2.\text{g}.\text{s}^{-1}.[p]_m^{-1} \quad .$$

Plošna gustoća električnog naboja σ definirana je izrazom

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad .$$

Slijedi mjera za plošnu gustoću naboja

$$[\sigma]_m = 4\pi \cdot g \cdot s^{-1} \cdot [p]_m^{-1} \quad .$$

Prostorna gustoća električnog naboja ϱ definirana je formulom

$$\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad ,$$

pa je mjera za ovu veličinu

$$[\varrho]_m = 4\pi \cdot cm^{-1} \cdot g \cdot s^{-1} \cdot [p]_m^{-1} \quad .$$

Električni momenat $\vec{M}_{el}$ definiran je kao

$$\vec{M}_{el} = Q\,\vec{l} \quad .$$

Zato je mjera za taj momenat

$$[M_{el}]_m = 4\pi \cdot cm^3 \cdot g \cdot s^{-1} \cdot [p]_m^{-1} \quad .$$

Polarizacija dielektrika $\vec{P}$ je električni momenat po jedinici obujma, dakle

$$\vec{P} = \frac{d\vec{M}_{el}}{dV} \quad ,$$

pa je mjera za polarizaciju dielektrika

$$[P]_m = 4\pi \cdot g \cdot s^{-1} \cdot [p]_m^{-1} \quad .$$

Točkasti električni naboj Q stvara oko sebe u homogenom izotropnom dielektriku polje električnog pomaka $\vec{D}$, za koje vrijedi zakon

$$\vec{D} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{Q}{4\pi r^2} \quad ,$$

gdje je $\vec{r}$ daljina od naboja Q one točke polja, u kojoj pomak ima vrijednost $\vec{D}$. U elmg CGS definira se mjerna jedinica za električni pomak ovako:

"Električni pomak ima vrijednost jedna $[D]_m$ u daljini jedan centimetar od točkastog naboja jedna $[Q]_m$, smještenog u neograničenom homogenom izotropnom izolatoru daleko od ostalih tjelesa."

Ako ove vrijednosti prema navedenoj definiciji uvrstimo u izraz za električni pomak uzrokovan točkastim nabojem, dobivamo

$$[D]_m = g \cdot s^{-1} \cdot [p]_m^{-1} \quad .$$

Tok električnog pomaka Ψ kroz neku plohu S dan je integralom

$$\Psi = \iint \vec{D}\, d\vec{S} \quad .$$

Zato je mjera za tok električnog pomaka

$$[\Psi]_m = cm^2 . g . s^{-1} . [p]_m^{-1} \quad .$$

Ako sitno tijelo nosi električni naboj dQ, onda u električnom polju na to tijelo djeluje električna sila

$$d\vec{F} = \vec{E}\, dQ \quad .$$

Ovom je jednadžbom definirana jakost električnog polja $\vec{E}$, a mjera za ovu veličinu je

$$[E]_m = din . [Q]_m^{-1} = cm . g . s^{-2} \frac{1}{4\pi} cm^{-2} . g^{-1} . s . [p]_m$$

$$= \frac{1}{4\pi} cm^{-1} . s^{-1} . [p]_m \quad .$$

Električni napon U definiran je linijskim integralom

$$U = \int \vec{E}\, d\vec{s} \quad ,$$

pa je prema tome mjera za napon

$$[U]_m = \frac{1}{4\pi} s^{-1} . [p]_m \quad .$$

Električni kapacitet C dolazi u izrazu, koji daje naboj Q izoliranog tijela, ako nam je poznat njegov potencijal (napon prema zemlji).

$$Q = C\, U \quad .$$

Zato je mjera za kapacitet

$$[C]_m = [Q]_m . [U]^{-1} = 4\pi . cm^2 . g . s^{-1} . [p]_m^{-1} . 4\pi . s . [p]_m^{-1}$$

$$= 16\pi^2 cm^2 . g . [p]_m^{-2} \quad .$$

Veza između električnog pomaka $\vec{D}$ i jakosti električnog polja $\vec{E}$ u izolatoru dana je tenzorom dielektričnosti ε.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad .$$

Zato je mjera za dielektričnost

$$[\varepsilon]_m = [D]_m . [E]_m^{-1} = g . s^{-1} . [p]_m^{-1} . 4\pi . cm . s . [p]_m^{-1}$$

$$= 4\pi . cm . g . [p]_m^{-2} \quad .$$

Za međusobno djelovanje mirnih električnih naboja, smještenih u homogenom izotropnom izolatoru, vrijedi Coulombov zakon

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{Q_1\, Q_2}{4\pi\, \varepsilon\, r^2} \quad .$$

Pomoću ovog zakona izračunajmo silu F_1' kojom točkasti naboj jedna $[Q]_m$ djeluje na isto takovi u daljini jedan centimetar u vakuumu. Uvrstimo te vrijednosti u napisani zakon. Pošto smo se riješili nazivnika i uzeli u obzir, da je dielektričnost vakuuma jednaka ε_0, dobivamo

$$\{F_1'\}_m \cdot \text{din} \cdot 4\pi \{\varepsilon_o\}_m \cdot 4\pi \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{g} \cdot [p]_m^{-2} = 16\pi^2 \text{cm}^4 \cdot \text{g}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot [p]_m^{-2} \quad .$$

Izrazimo din u osnovnim mjerama, pa zatim sredimo. Izlazi

$$\{F_1'\}_m \{\varepsilon_o\}_m = 1 \quad .$$

Ova nam relacija kaže, da je mjerni broj dielektričnosti vakuuma $\{\varepsilon_o\}_m$, mjerenom elmg CGS mjerom, jednak recipročnoj vrijednosti mjernog broja sile $\{F_1'\}_m$, kojom u vakuumu djeluju jedan na drugi točkasti električni naboji po jedna $[Q]_m$ na razmaku jedan centimetar. Prema tome je dielektričnost vakuuma

$$\varepsilon_o = \{\varepsilon_o\}_m \cdot 4\pi \cdot \text{cm} \cdot \text{g} \cdot [p]_m^{-2} = \{F_1'\}_m^{-1} \cdot 4\pi \cdot \text{cm} \cdot \text{g} \cdot [p]_m^{-2} \quad .$$

Mi ovdje ne možemo naprosto "izračunati" dielektričnost vakuuma onako, kao što smo prije izračunali permeabilnost vakuuma iz drugog Coulombovog zakona. Pod riječi "izračunati" misli se ovdje izvesti iz predhodnih relacija t o č a n mjerni broj. Razlog je jednostavan. Jednadžba u kojoj dolazi dielektričnost vakuuma sadrži dvije nepoznanice, dielektričnost ε_o koju želimo odrediti, i silu F_1' kojom naboji djeluju. U slučaju permeabilnosti vakuuma, sila između polova bila je "per definitionem" jedan din, pa je zato μ_o izašao točno jedna $[\mu]_m$. Slijedi, ako želimo odrediti dielektričnost vakuuma u elmg CGS mjeri, mi treba da izmjerimo silu F_1' kojom točkasti naboji po jedna $[Q]_m$ djeluju jedan na drugi. (Namjesto mjerenja sile F_1' može se obaviti nekakovo drugo ekvivalentno mjerenje). Ako tu silu izrazimo mjernom jedinicom din, onda je, kako smo vidjeli, mjerni broj te sile jednak recipročnoj vrijednosti mjernog broja dielektričnosti vakuuma izraženoj mjerom $[\varepsilon]_m$. Budući da mjerenje sile F_1' sadrži pogreške i nesigurnost mjerenja, to onda isto vrijedi i za dielektričnost vakuuma ε_o, mjerenom elmg CGS mjerom. To znači, da je mjerni broj dielektričnosti vakuuma $\{\varepsilon_o\}_m$ onoliko n e t o č a n i nesiguran, koliko su netočna i nesigurna mjerenja sile F_1' (ili spomenuta ekvivalentna mjerenja).

Ovdje su u elmg CGS prilike jednake onima, kad se služimo SI mjerama. U SI, isto kao i u elmg CGS, permeabilnost vakuuma ima točno određen mjerni broj, jer se taj broj može izračunati iz vrijednosti, koje su dane "per definitionem". Zato se međutim mjerni broj dielektričnosti vakuuma dobiva mjerenjem, pa je prema tome opterećen netočnošću i nesigurnošću mjerenja.

Kao što smo prije prikazali u jednom pregledu osnovne i izvedene mjere elst CGS sustava, tako ćemo i sada postupiti i u pregledu prikazati elmg CGS mjere, s kojima smo se upoznali.

PREGLED MJERA ELEKTROMAGNETSKOG CGS SUSTAVA

Fizikalna veličina	Mjera elmg CGS
1. Dužina s	cm
2. Masa m	g
3. Vrijeme t	s
4. Magnetski pol p	$[p]_m$
5. Magnetski momenat $\vec{M}_{mg}$	$cm.[p]_m$
6. Magnetska polarizacija $\vec{P}_{mg}$	$cm^{-2}.[p]_m$
7. Magnetska indukcija $\vec{B}$	$\frac{1}{4\pi}\, cm^{-2}.[p]_m$ = gaus
8. Tok magnetske indukcije Φ	$\frac{1}{4\pi}\,[p]_m$ = maksvel
9. Jakost magnetskog polja $\vec{H}$	$cm.g.s^{-2}.[p]_m^{-1}$ = ersted
10. Magnetski napon V_{mg}	$cm^2.g.s^{-2}.[p]_m^{-1}$ = gilbert
11. Permeabilnost μ	$\frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^2.[p]_m^2$
12. Jakost električne struje I	$4\pi.cm^2.g.s^{-2}.[p]_m^{-1}$
13. Gustoća električne struje $\vec{g}$	$4\pi.g.s^{-2}.[p]_m^{-1}$
14. Koeficijent samoindukcije L	$\frac{1}{16\pi^2}\, cm^{-2}.g^{-1}.s^2.[p]_m^2$
15. Električni naboj Q	$4\pi.cm^2.g.s^{-1}.[p]_m^{-1}$
16. Plošna gustoća naboja σ	$4\pi.g.s^{-1}.[p]_m^{-1}$
17. Prostorna gustoća naboja ρ	$4\pi.cm^{-1}.g.s^{-1}.[p]_m^{-1}$
18. Električni momenat $\vec{M}_{el}$	$4\pi.cm^3.g.s^{-1}.[p]_m^{-1}$
19. Polarizacija dielektrika $\vec{P}$	$4\pi.g.s^{-1}.[p]_m^{-1}$
20. Električni pomak $\vec{D}$	$g.s^{-1}.[p]_m^{-1}$
21. Tok električnog pomaka Ψ	$cm^2.g.s^{-1}.[p]_m^{-1}$
22. Jakost električnog polja $\vec{E}$	$\frac{1}{4\pi}\, cm^{-1}.s^{-1}.[p]_m$
23. Električni napon U	$\frac{1}{4\pi}\, s^{-1}.[p]_m$
24. Električni otpor R	$\frac{1}{16\pi^2}\, cm^{-2}.g^{-1}.s.[p]_m^2$
25. Specifični otpor r	$\frac{1}{16\pi^2}\, cm^{-1}.g^{-1}.s.[p]_m^2$
26. Specifična vodljivost $\varkappa$	$16\pi^2 cm.g.s^{-1}.[p]_m^{-2}$
27. Električni kapacitet C	$16\pi^2 cm^2.g.[p]_m^{-2}$
28. Dielektričnost ε	$4\pi.cm.g.[p]_m^{-2}$

23. V e z a i z m e đ u e l e k t r o s t a t s k o g i e l e k t r o m a g n e t s k o g C G S s u s t a v a

U području elektromagnetizma koegzistiraju dva CGS sustava mjera. Iz predhodnog prikaza može se zaključiti, da zapravo nema prednosti jedan sustav pred drugim. Ovi su sustavi međusobno analogni i ravnopravni. Razvijeni su nezavisno jedan od drugoga.

Među ovim se sustavima ipak može uspostaviti veza iz jednostavnog razloga, jer se primjenjuju na istom području; svaka veličina elektromagnetizma može se mjeriti bilo mjerom elst CGS bilo

mjerom elmg CGS. Opravdano je pitanje, kakov je odnos među tim mjerama. Poznavanje tog odnosa omogućuje, da se iz mjerenja mjerom jednog sustava zaključi, kakov bi rezultat dalo mjerenje te iste fizikalne veličine, ako bi upotrijebili mjeru drugog sustava, i obrnuto.

Uslijed međusobne povezanosti veličina elektromagnetizma, te budući da se elst CGS i elmg CGS razlikuju samo u j e d n o j osnovnoj mjeri, slijedi da je dovoljno naći jednu jednadžbu, koja te osnovne mjere veže. Tu jednadžbu međutim može dati samo mjerenje, koje jednu te istu električnu veličinu daje izraženu mjerom jednog i drugog sustava. Pomoću te jednadžbe može se onda svaka mjera jednog sustava izraziti ekvivalentnim mnogokratnikom mjere drugog sustava.

Na kraju prikaza elst CGS mi smo dobili za permeabilnost vakuuma izraz

$$\mu_o = \{\mu_o\}_e \cdot 4\pi \cdot cm.g.[Q]_e^{-2} \quad .$$

Ovdje je $\{\mu_o\}_e$ mjerni broj, koji treba mjerenjem odrediti.

Ista permeabilnost vakuuma u elmg CGS predočena je izrazom

$$\mu_o = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^2.[p]_m^2 \quad .$$

U ovom je slučaju mjerni broj t o č n o jednak jedan, kako smo prije izložili.

Budući da je tu izražena jedna te ista fizikalna veličina, samo jedanput elst CGS mjerom, a drugiput elmg CGS mjerom, to možemo desne strane od ova dva izraza izjednačiti. Dobivamo

$$\{\mu_o\}_e \cdot 4\pi \cdot cm.g.[Q]_e^{-2} = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^2.[p]_m^2 \quad .$$

Ako ovo sredimo, tada izlazi

$$\{\mu_o\}_e = \frac{1}{16\pi^2}\, cm^{-4}.g^{-2}.s^2.[p]_m^2.[Q]_e^2 \quad .$$

Ova nam jednadžba kaže, da bi veza između osnovnih mjera $[p]_m$ i $[Q]_e$ bila određena, ako bi se odredio mjerni broj permeabilnosti vakuuma $\{\mu_o\}_e$. Za ovo treba obaviti nekakovo mjerenje.

Mi smo vidjeli također, da je dielektričnost vakuuma u elmg CGS prikazana izrazom

$$\varepsilon_o = \{\varepsilon_o\}_m \cdot 4\pi \cdot cm.g.[p]_m^{-2} \quad .$$

Ovdje je $\{\varepsilon_o\}_m$ mjerni broj, koji treba mjerenjem naći.

Ista dielektričnost vakuuma u elst CGS predočena je izrazom

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^2.[Q]_e^2 \quad .$$

U ovom je slučaju mjerni broj t o č n o jednak jedan, kako smo prije izložili.

Budući da je tu izražena jedna te ista fizikalna veličina, samo jedanput elmg CGS mjerom, a drugiput elst CGS mjerom, to možemo desne strane od ova dva izraza izjednačiti. Dobivamo

$$\{\varepsilon_o\}_m \cdot 4\pi \cdot cm.g.[p]_m^{-2} = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^2.[Q]_e^2 \quad .$$

Ako ovo sredimo, tada izlazi

$$\{\varepsilon_o\}_m = \frac{1}{16\pi^2}\, cm^{-4}.g^{-2}.s^2.[p]_m^2.[Q]_e^2 \quad .$$

Ova nam jednadžba kaže, da bi veza između osnovnih mjera $[p]_m$ i $[Q]_e$ bila određena, ako bi se odredio mjerni broj dielektričnosti vakuuma $\{\varepsilon_o\}_m$. Za ovo treba obaviti nekakovo mjerenje.

Uspoređujući rezultat, koji smo dobili za $\{\varepsilon_o\}_m$ s rezultatom za $\{\mu_o\}_e$, to vidimo, da je

$$\{\varepsilon_o\}_m = \{\mu_o\}_e \quad .$$

To ima za posljedicu da je i

$$F_1' = F_1 \quad ,$$

gdje je F_1' sila kojom djeluju jedan na drugi električni naboji, svaki po jedna $[Q]_m$, a F_1 sila kojom djeluju jedan na drugi magnetski polovi, svaki po jedna $[p]_e$, u vakuumu na razmaku jedan centimetar.

Ako gledamo desnu stranu od $\{\mu_o\}_e$, odnosno od $\{\varepsilon_o\}_m$, to vidimo da je to savršeni kvadrat. Možemo dakle staviti

$$\{\mu_o\}_e^{-\frac{1}{2}} = \{\varepsilon_o\}_m^{-\frac{1}{2}} = \xi = 4\pi \cdot cm^2.g.s^{-1}.[p]_m^{-1}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

Ovdje je ξ čist (neimenovani) broj, koji treba mjerenjem naći To je p r e t v o r b e n i f a k t o r , koji omogućuje prijelaz iz jednog CGS sustava u drugi. Ako znamo taj broj, onda nam napisana relacija omogućuje, da bilo koju mjeru elst CGS sustava izrazimo pripadnom mjerom elmg CGS, i obrnuto.

Da se odredi pretvorbeni faktor ξ , koji omogućuje prijelaz iz elst CGS u elmg CGS i obrnuto, treba barem za jednu veličinu elektromagnetizma taj broj izmjeriti. Mi ćemo ovdje kratko spomenuti slavna mjerenja W.E.Webera i R.Kohlrauscha, koji su godine 1856. po prvi put broj ξ mjerenjem našli tako, da su jednu te istu količinu elektriciteta Q izmjerili i elst CGS mjerom $[Q]_e$ i elmg CGS mjerom $[Q]_m$. Dobili su dakle dva rezultata

$$Q = \{Q\}_e [Q]_e \quad ,$$

$$Q = \{Q\}_m [Q]_m \quad .$$

Kad izjednačimo desne strane, onda iz poznatih vrijednosti $\{Q\}_e$ i $\{Q\}_m$ slijedi

$$\frac{\{Q\}_e}{\{Q\}_m} = \frac{[Q]_m}{[Q]_e} = \xi \quad .$$

Ovu jednadžbu možemo lako izvesti iz osnova. Dva točkasta naboja, svaki po jedna $[Q]_m$, na razmaku jedan centimetar u vakuumu, djeluju jedan na drugi silom

$$\{F_1'\}_m din = \frac{[Q]_m^2}{4\pi\varepsilon_o cm^2} \quad .$$

Dva točkasta naboja, svaki po jedna $[Q]_e$, na razmaku jedan centimetar u vakuumu, djeluju jedan na drugi silom

$$din = \frac{[Q]_e^2}{4\pi\varepsilon_o cm^2} \quad .$$

Ako podijelimo gornju jednadžbu s donjom, slijedi

$$\{F_1'\}_m = \frac{[Q]_m^2}{[Q]_e^2} \quad .$$

Mi smo vidjeli, da je

$$\{F_1'\}_m \{\varepsilon_o\}_m = 1 \quad ,$$

a budući da smo uveli oznaku

$$\xi = \{\varepsilon_o\}_m^{-\frac{1}{2}} \quad ,$$

to onda formula, koja je osnova mjerenja Webera i Kohlrauscha slijedi neposredno.

Posve formalno možemo izraz za omjer elmg CGS mjere za naboj $[Q]_m$ i elst CGS mjere za naboj $[Q]_e$ izvesti i tako, da pođemo od relacije, koja veže dvije osnovne mjere obih sustava: $[Q]_e$ i $[p]_m$.

$$\xi = 4\pi \cdot cm^2 . g . s^{-1} . [p]_m^{-1} . [Q]_e^{-1} \quad .$$

Budući da je mjera za električni naboj u elmg CGS

$$[Q]_m = 4\pi \cdot cm^2 . g . s^{-1} . [p]_m^{-1} \quad ,$$

to vidimo neposredno, da ξ kaže koliko puta elmg CGS mjera za električni naboj $[Q]_m$ jest veća od elst CGS mjere za električni naboj $[Q]_e$.

U svojim prvim mjerenjima Weber i Kohlrausch su dobili kao rezultat za ξ vrijednost $3{\cdot}11.10^{10}$. Danas imamo za taj broj točniji podatak.

$$\xi = (299\,792{\cdot}5 \pm 0{\cdot}3).10^{5} \quad .$$

J.C.Maxwell (1831.-1879.) razvijao je u ono doba svoju teoriju elektromagnetskog polja. On je iz svoje teorije zaključio, da se električno i magnetsko djelovanje rasprostire konačnom brzinom. Ta brzina da zavisi o dielektričnosti i permeabilnosti izolatora u kojem se polje stvara. Za ovu je brzinu Maxwell dobio teoretski izraz (izraženo današnjom simbolikom)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad .$$

U vakuumu prema tome brzina širenja elektromagnetskog djelovanja iznosi

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \quad .$$

Uvrstimo li vrijednosti za dielektričnost i za permeabilnost vakuuma bilo iz elst CGS, ili iz elmg CGS, to izlazi

$$c = \{\mu_o\}_e^{-\frac{1}{2}} \mathrm{cm.s^{-1}} = \{\varepsilon_o\}_m^{-\frac{1}{2}} \mathrm{cm.s^{-1}} = \xi.\mathrm{cm.s^{-1}} \quad .$$

Tako je Maxwell našao za faktor ξ još jedno značenje. On je jednak mjernom broju brzine, kojom se elektromagnetsko djelovanje širi kroz vakuum, ako tu brzinu mjerimo CGS mjerom $\mathrm{cm.s^{-1}}$. To je dakle brzina elektromagnetskih valova, kako je to Maxwell već godine 1862. spoznao.

Tom prigodom nije Maxwellu izbjeglo još jedno otkriće, a to je činjenica, da se brzina ovih elektromagnetskih valova podudara s brzinom, kojom se kroz uzduh širi svjetlost. Poznat je Maxwellov zaključak. Međutim evo prijevoda njegovih riječi iz radnje objavljene u Philosophical Magazin, Jan. and Feb. 1862. :

"Iz ovog sam rezultata izveo vezu između statičke i dinamičke mjere za električni naboj, te pokazao, uspoređujući elektromagnetske eksperimente gospode Kohlrascha i Webera s brzinom svjetlosti, kako ju je našao gospodin Fizeau, da je elastičnost magnetskog medija u uzduhu ista kao i od svjetlosnog medija, ukoliko ta dva jednako elastična medija, koja su koegzistentna i ispunjaju isti prostor, nisu zapravo jedan te isti medij."

Malo dalje u istoj radnji čitamo:

"Brzina transverzalnih undulacija u našem hipotetskom mediju, izračunata iz elektromagnetskih pokusa gospode Kohlrauscha i Webera, tako se točno slaže s brzinom svjetlosti, izračunatom iz optičkih pokusa gospodina Fizeau-a, da jedva možemo izbjeći zaključak, da

se svjetlost sastoji u transverzalnim undulacijama istog medija, koji je i uzročnik električnih i magnetskih pojava."

Tako je nastajala najslavnija teorija devetnaestog stoljeća, Maxwellova teorija elektromagnetskog polja, nikla na pokusima i razmišljanjima M.Faradaya, a poticana i hranjena genijalnim eksperimentima Webera i Kohlrauscha, te Fizeau-a.

Vrijedno je na ovom mjestu, kad je govora o najznačajnijem otkriću fizike devetnaestog stoljeća, barem malo baciti pogled unatrag i pogledati, što je tome otkriću predhodilo i kako je do njega došlo.

Dobro je poznata činjenica, da je M.Faraday (1791.-1867.) skromno počeo svoj životni put kao knjigoveža, zatim da je bio pomoćnik kod profesora Sir Humphry Davy-a (1778.-1829.), kojeg je konačno i naslijedio na profesorskoj stolici godine 1827. Dakle Faraday je bio učenik Davy-a, a Davy je u svojem Dnevniku (Commonplace Book) napisao, da on svoje predodžbe o atomima i silama, koje između atoma djeluju, duguje R.Boškoviću (1711.-1787.), čije je djelo "Theoria Philosophiae Naturalis" izašlo u konačnoj redakciji godine 1763. u Veneciji. Prema tome "atomi točke" R.Boškovića, koji su središta iz kojih djeluju sile, inspirirali su H.Davy-a u njegovom izvođenju i tumačenju elektrokemijskih pokusa. To se može vidjeti iz Davy-evih rukopisa.

Davy-evi rukopisi čuvaju se u Royal Institution u Londonu. Tamo je i njegov Dnevnik. U knjizi toga Dnevnika za vremensko razdoblje od 1814. do 1829., dakle posljednja knjiga Dnevnika, ima i ova bilješka:

"Ako pretpostavimo da neke molekule imaju polove u točkama privlačenja i odbijanja, kako je to Bošković učinio, te pridajući im gravitaciju i formu, to jest težinu i mjeru, svi se kemijski pojavi mogu protumačiti ... ."

U svojoj posljednjoj publikaciji god.1829. Davy piše:

"Vi ste me krivo razumjeli, ako mislite da sam prihvatio sustav kao što je Homonoia od Anaksagore, te da ja pretpostavljam, da su elementi fizikalne molekule obdarene tjelesnim svojstvima, koja da su nedjeljiva. Naprotiv, ja za njih ne pretpostavljam ni oblika ni boje, oboje bi naime impliciralo sposobnost odbijanja svjetlosti; ja ih naprosto smatram s Boškovićem za točke, koje imaju težinu, te privlačnu i odbojnu moć, ... "

Vidimo dakle kako je Davy služeći se Boškovićevom idejom o atomima točkama, koji su izvor sila, stvarao tumačenja svojih električnih i kemijskih pokusa.

Te su ideje dalje zorile i tako su nastale Faraday-eve električne i magnetske silnice, koje raspredene po prostoru, čine električno i magnetsko polje. Ono što je Faraday u ovim svojim fizikalnim slikama i predodžbama stvorio, to je Maxwell preveo u matematski govor formulirajući jednadžbe elektromagnetskog polja. Tako je Maxwell požeo žetvu, koja je nikla iz sjemena posijanog skoro točno stotinu godina ranije djelom R.Boškovića.

24. P r e t v a r a n j e e l s t C G S m j e r a u e l m g C G S m j e r e i o b r a t n o

Budući da znamo vezu između osnovnih elst CGS mjera i elmg CGS mjera, to možemo svaku mjeru jednog sustava pretvoriti u pripadnu mjeru drugog sustava. To znači dvije stvari. Prvo dobivamo, koliko se puta mjera drugog sustava nalazi u mjeri prvog sustava, te drugo, kakova je karakteristika promatrane mjere, izražena osnovnim mjerama drugog sustava. Kako se ta pretvorba mjera obavlja, pokazat ćemo na primjerima.

Uzmimo da treba elst CGS mjeru za kapacitet $[C]_e$ pretvoriti u pripadnu elmg CGS mjeru.

U elst CGS imamo

$$[C]_e = cm^{-2}.g^{-1}.s^2.[Q]_e^2 \quad .$$

Iz relacije koja daje vezu među osnovnim mjerama dobivamo, razriješivši po $[Q]_e$

$$[Q]_e = \xi^{-1}.4\pi.cm^2.g.s^{-1}.[p]_m^{-1} \quad .$$

Ako ovu vrijednost za $[Q]_e$ uvrstimo u $[C]_e$, izlazi

$$[C]_e = \xi^{-2}.16\pi^2 cm^2.g.[p]_m^{-2} = \xi^{-2}[C]_m \quad .$$

Kako vidimo, iza pretvorbenog faktora ξ^{-2} slijedi elmg CGS mjera za kapacitet, dakle $[C]_m$.

Izradimo još jedan primjer. Pretvorimo elmg CGS mjeru za jakost električnog polja $[E]_m$ u odgovarajuću elst CGS mjeru. Imamo

$$[E]_m = \frac{1}{4\pi} cm^{-1}.s^{-1}.[p]_m \quad .$$

Iz relacije, koja veže osnovne mjere, imamo razriješivši po $[p]_m$

$$[p]_m = \xi^{-1}.4\pi.cm^2.g.s^{-1}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

Ako ovo uvrstimo, izlazi

$$[E]_m = \xi^{-1}.cm.g.s^{-2}.[Q]_e^{-1} = \xi^{-1}.[E]_e \quad .$$

Budući da se izraz, koji daje pretvorbeni faktor, može pisati, ako prelazimo iz elst CGS u elmg CGS, u dva koraka ovako:

$$[Q]_e = \xi^{-1} \cdot [Q]_m \quad ,$$
$$[Q]_m = 4\pi \cdot cm^2 \cdot g \cdot s^{-1} \cdot [p]_m^{-1} \quad ,$$

to vidimo, da omjer elst CGS mjere od koje polazimo, prema odgovarajućoj elmg CGS mjeri, možemo neposredno očitati iz elst CGS karakteristike te mjere. Naime ako ta karakteristika sadrži $[Q]_e$ na potenciju α, onda je omjer elst CGS mjere $[X]_e$ prema elmg CGS mjeri $[X]_m$ dan izrazom

$$[X]_e = \xi^{-\alpha} \cdot [X]_m \quad .$$

Ako pak želimo $[X]_m$ dobiti izražen pomoću osnovnih elmg CGS mjera, onda treba uvrstiti i izraz za $[Q]_m$.

Slično vrijedi za obrnuti prijelaz kod pretvorbe elmg CGS mjere u elst CGS mjeru. I u ovom slučaju može supstitucija ići u dva koraka

$$[p]_m = \xi^{-1} \cdot [p]_e \quad ,$$
$$[p]_e = 4\pi \cdot cm^2 \cdot g \cdot s^{-1} \cdot [Q]_e^{-1} \quad .$$

Vidimo, da omjer elmg CGS mjere (od koje polazimo) prema odgovarajućoj elst CGS mjeri, možemo odmah iz elmg CGS karakteristike te mjere očitati. Ako ta karakteristika sadrži $[p]_m$ na potenciju β, onda za mjere vrijedi

$$[X]_m = \xi^{-\beta} \cdot [X]_e \quad .$$

Ako želimo $[X]_e$ dobiti izražen pomoću osnovnih elst CGS mjera, onda treba uvrstiti još i izraz za $[p]_e$.

25. V e z a i z m e đ u e l e k t r i č n i h C G S s u s t a v a i S I s u s t a v a

Elektromagnetski CGS sustav mjera ima tri mehaničke osnovne mjere, koje su dekadski mnogokratnici osnovnih mjera SI sustava. Za mjeru za jakost električne struje $[I]_m$ vrijedi, kako je prije izloženo,.

$$[I]_m = 10 \text{ A} \quad .$$

Međutim $[I]_m$ nije osnovna mjera elmg CGS. Izražena pomoću osnovnih mjera tog sustava, ona ima oblik

$$[I]_m = 4\pi \cdot cm^2 \cdot g \cdot s^{-2} \cdot [p]_m^{-1} \quad .$$

Iz ovih dviju relacija treba izvesti izraz, koji daje $[p]_m$ pomoću osnovnih mjera SI. To će biti četvrta relacija.

Imamo

$$[p]_m = 4\pi\cdot 10^{-1}\ cm^2.g.s^{-2}.A^{-1}$$

Ovdje još treba cm, g, nadomjestiti mjerama m, kg, Slijedi

$$[p]_m = 4\pi\cdot 10^{-1}\ cm^2.g.s^{-2}.A^{-1}\ \frac{m^2}{10^4 cm^2}\ \frac{kg}{10^3 g}$$

$$= 4\pi\cdot 10^{-8}\ m^2.kg.s^{-2}.A^{-1} \quad .$$

Kod ove posljednje tranformacije upotrijebili smo prikladne pretvorbene jedinice. Tako smo dobili i četvrtu relaciju, potrebnu za prijelaz iz elmg CGS u Međunarodni sustav SI. Napišimo te pretvorbene relacije po redu.

$$cm = 10^{-2} m$$

$$g = 10^{-3} kg$$

$$s = s$$

$$[p]_m = 4\pi.10^{-8} m^2.kg.s^{-2}.A^{-1} \quad .$$

Ove nam relacije omogućuju, da bilo koju mjeru elmg CGS izrazimo pripadnom mjerom SI , prikazanom osnovnim mjerama m , kg , s , A . Za osnovne mjere elmg CGS to je već ovim jednadžbama učinjeno.

Ako je izvedena mjera $[X]_m$ elmg CGS općenito prikazana izrazom

$$[X]_m = z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[p]_m^{\delta} \quad ,$$

onda uvrštavanjem napisanih vrijednosti dobivamo

$$[X]_m = (4\pi)^{\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta-8\delta}.m^{\alpha+2\delta}.kg^{\beta+\delta}.s^{\gamma-2\delta}.A^{-\delta} \quad .$$

To je opća formula, koja pokazuje, kako se izvedena mjera elmg CGS može izraziti osnovnim mjerama SI. Izradimo koji primjer.

Mjera za napon u elmg CGS je ovako prikazana

$$[U]_m = \frac{1}{4\pi}\ s^{-1}.[p]_m \quad .$$

U ovom je izrazu

$$z = \frac{1}{4\pi} \quad , \quad \alpha = 0 \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad \gamma = -1 \quad , \quad \delta = 1 \quad .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u opću formulu, to onda dobivamo

$$[U]_m = 4\pi\ \frac{1}{4\pi}\ 10^{-8} m^2.kg.s^{-1-2}.A^{-1} \quad ,$$

$$= 10^{-8}\ m^2.kg.s^{-3}.A^{-1} \quad ,$$

$$= 10^{-8}\ V \quad .$$

Iza brojčanog faktora 10^{-8} je SI mjera za napon, volt, izražena osnovnim mjerama SI.

Drugi primjer. Elmg CGS mjera za električni otpor ovako je prikazana osnovnim elmg CGS mjerama

$$[R]_m = \frac{1}{16\pi^2}\, cm^{-2}.g^{-1}.s.[p]_m^2 \quad .$$

Ovdje je

$$z = \frac{1}{16\pi^2} \quad , \quad \alpha = -2 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad \delta = 2 \quad .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u opću formulu, onda dobivamo

$$[R]_m = (4\pi)^2 \frac{1}{16\pi^2}\, 10^{4+3-16}.m^{-2+4}.kg^{-1+2}.s^{1-4}.A^{-2}$$

$$= 10^{-9}\, m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$$

$$= 10^{-9}\Omega \quad .$$

Iza brojčanog faktora 10^{-9} slijedi izvedena SI mjera za otpor, om .

U Međunarodnom sustavu SI za područje elektromagnetizma radije se upotrebljavaju izvedene mjere, koje se osnivaju na m , s , V , A , kao osnovnim mjerama. Zato ćemo napisati formule, koje omogućuju neposredni prijelaz iz elmg CGS mjere u SI mjeru prikazanu pomoću m, s, V, A . Da dođemo do tih formula, treba iz predhodnih pretvorbenih formula eliminirati kg . To ćemo načiniti pomoću izraza, koji daje SI mjeru za snagu, vat .

Vat izražen osnovnim mjerama SI na oba načina, dan je ovako

$$m^2.kg.s^{-3} = V.A \quad .$$

Odavle slijedi

$$kg = m^{-2}.s^3.V.A \quad .$$

Ako ovu vrijednost uvrstimo u izraz za $[p]_m$, to dobivamo

$$[p]_m = 4\pi\cdot 10^{-8}\, m^2.m^{-2}.s^3.V.A.s^{-2}.A^{-1} \quad ,$$

$$= 4\pi\cdot 10^{-8}\, s.V \quad .$$

Prema tome jednadžbe za prijelaz iz elmg CGS u SI, koji se osniva na m, s, V, A, izgledaju ovako:

$$cm = 10^{-2}\, m$$

$$g = 10^{-3}\, m^{-2}.s^3.V.A$$

$$s = s$$

$$[p]_m = 4\pi\cdot 10^{-8}\, s.V \quad .$$

Ako je dakle $[X]_m$ neka izvedena mjera elmg CGS, koja je izražena osnovnim mjerama toga sustava ovako:

$$[X]_m = z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[p]_m^{\delta} \quad ,$$

to onda uvrštavanjem vrijednosti iz jednadžbi koje vežu osnovne mjere, dobivamo

$$[X]_m = (4\pi)^{\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta-8\delta}.m^{\alpha-2\beta}.s^{3\beta+\gamma+\delta}.V^{\beta+\delta}.A^{\beta} \quad .$$

Ovo je općenita formula, koja nam omogućuje, da bilo koju elmg CGS mjeru pretvorimo u odgovarajuću SI mjeru.

Izradit ćemo i ovdje par primjera, da pokažemo, kako ova općenita formula funkcionira.

U elmg CGS je mjera za permeabilnost

$$[\mu]_m = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^2.[p]_m^2 \quad .$$

Pretvorimo ovu mjernu jedinicu u SI mjeru, izraženu u mjerama m, s, V, A. U ovom je primjeru

$$z = \frac{1}{4\pi} \quad , \quad \alpha = -3 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \gamma = 2 \quad , \quad \delta = 2 \quad .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u općenitu formulu, to dobivamo

$$[\mu]_m = (4\pi)^2 \frac{1}{4\pi} 10^{6+3-16}\, m^{-3+2}.s^{-3+2+2}.V^{-1+2}.A^{-1}$$

$$= 4\pi.10^{-7}\, m^{-1}.s.V.A^{-1} \quad .$$

Ovaj je rezultat zanimljiv i zato, jer je također

$$[\mu]_m = \mu_o \quad ,$$

pa je ovo permeabilnost vakuuma izražena mjerama SI. Ta permeabilnost ima t o č a n mjerni broj kao i ona izražena elmg CGS mjerama.

Kao drugi primjer, pretvorimo elmg CGS mjeru za koeficijent samoindukcije $[L]_m$ u njezin SI ekvivalent.

Za ovu smo mjeru našli izraz

$$[L]_m = \frac{1}{16\pi^2}\, cm^{-2}.g^{-1}.s^{2}.[p]_m^2 \quad .$$

U ovom nam je primjeru

$$z = \frac{1}{16\pi^2} \quad , \quad \alpha = -2 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \gamma = 2 \quad , \quad \delta = 2 \quad .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u općenitu formulu, onda slijedi

$$[L]_m = (4\pi)^2 \frac{1}{16\pi^2} 10^{4+3-16}.m^{-2+2}.s^{-3+2+2}.V^{-1+2}.A^{-1}$$

$$= 10^{-9}\, s.V.A^{-1} = 10^{-9}\, H \quad .$$

Iz jednadžbi koje vežu osnovne mjere elmg CGS s osnovnim mjerama SI slijedi, da su mjere jednog sustava t o č n i višekratnici mjera drugog sustava. To znači, da brojčani faktori koji pre-

tvaraju neku mjeru elmg CGS sustava u pripadnu mjeru SI imaju t o č a n iznos. Ova su dva sustava mjera k o m e n z u r a b i l - n a . Ovo međutim nije slučaj za dva CGS sustava u elektricitetu, koji su međusobno povezani pomoću e m p i r i č k o g pretvorbenog faktora ξ . Omjer mjera u ovom je slučaju određen onom točnošću, kolikom je izmjeren faktor ξ ..

Pretvorbeni faktor ξ javlja se i u jednadžbama, koje vežu elst CGS osnovne mjere s osnovnim mjerama SI. Naime za elst CGS osnovnu mjeru $[Q]_e$ vrijedi

$$[Q]_e = \xi^{-1} . [Q]_m \quad .$$

Budući da je

$$[Q]_m = 10\ s.A \quad ,$$

to onda imamo ovu vezu

$$[Q]_e = 10\ \xi^{-1} . s.A \quad .$$

Napišimo sada jednadžbe, koje omogućuju neposredni prijelaz iz elst CGS u SI izražen mjerama m, kg, s, A.

$$cm = 10^{-2}\ m$$

$$g = 10^{-3}\ kg$$

$$s = s$$

$$[Q]_e = 10\ \xi^{-1} . s.A \quad .$$

Ako je neka izvedena mjera elst CGS prikazana ovako

$$[X]_e = z . cm^{\alpha} . g^{\beta} . s^{\gamma} . [Q]_e^{\delta} \quad ,$$

onda supstitucijom napisanih vrijednosti možemo ovu mjeru izraziti njezinim ekvivalentom u SI. Dobivamo

$$[X]_e = \xi^{-\delta} . z . 10^{-2\alpha-3\beta+\delta} . m^{\alpha} . kg^{\beta} . s^{\gamma+\delta} . A^{\delta} \quad .$$

Kao primjer za primjenu ove formule pretvorimo elst CGS mjeru za električni napon u pripadni SI ekvivalent.

$$[U]_e = cm^2 . g . s^{-2} . [Q]_e^{-1} \quad .$$

Ovdje je

$$z = 1 \quad , \quad \alpha = 2 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad \gamma = -2 \quad , \quad \delta = -1 \quad .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u opću formulu, onda dobivamo

$$[U]_e = \xi . 10^{-4-3-1} . m^2 . kg . s^{-2-1} . A^{-1} \quad ,$$

$$= \xi . 10^{-8} . m^2 . kg . s^{-3} . A^{-1} \quad ,$$

a to je približno 300 V .

Možemo napisati i jednadžbe, koje omogućuju prijelaz iz elst CGS u SI mjere m, s, V, A. Ovdje je promjena samo u drugoj jednadžbi. Imamo

$$\begin{aligned} cm &= 10^{-2}\ m \\ g &= 10^{-3}\ m^{-2}.s^{3}.V.A \\ s &= s \\ [Q]_e &= 10\,\xi^{-1}.s.A \end{aligned} \quad .$$

Ako je izvedena elst CGS mjera u općem obliku

$$[X]_e = z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[Q]_e^{\delta} \quad ,$$

onda supstitucijom izraza za pretvaranje osnovnih mjera, dobivamo

$$[X]_e = \xi^{-\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta+\delta}.m^{\alpha-2\beta}.s^{3\beta+\gamma+\delta}.V^{\beta}.A^{\beta+\delta} \quad .$$

Pomoću ove formule izradimo jedan primjer. Izrazimo elst CGS mjeru za dielektričnost mjerom SI.

$$[\varepsilon]_e = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^{2}.[Q]_e^{2} \quad .$$

Ovdje je

$$z = \frac{1}{4\pi} \quad , \quad \alpha = -3 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \gamma = 2 \quad , \quad \delta = 2 \quad .$$

Uvrštavanjem u opću formulu dobivamo

$$[\varepsilon]_e = \frac{1}{4\pi}\, \xi^{-2}.10^{6+3+2}\, m^{-3+2}.s^{-3+2+2}.V^{-1}.A^{-1+2}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\, \xi^{-2}.10^{11}\, m^{-1}.s.V^{-1}.A \quad .$$

Budući da je dielektričnost vakuuma

$$\varepsilon_o = [\varepsilon]_e \quad ,$$

to imamo ovdje brojčani iznos te dielektričnosti, kad je izražena SI mjerom, doveden u vezu s pretvorbenim faktorom ξ. Dobili smo

$$\{\varepsilon_o\} = \frac{1}{4\pi}\, \xi^{-2}.10^{11} \quad .$$

Do ovog rezultata možemo i drugim putem doći služeći se Maxwellovom formulom za brzinu svjetlosti u vakuumu.

$$c^2 = \varepsilon_o^{-1}\mu_o^{-1} \quad .$$

U ovu ćemo formulu uvrstiti

$$\begin{aligned} c &= \xi.cm.s^{-1} = 10^{-2}\,\xi.m.s^{-1} \\ \mu_o &= 4\pi.10^{-7}\ m^{-1}.s.V.A^{-1} \\ \varepsilon_o &= \{\varepsilon_o\}.m^{-1}.s.V^{-1}.A \end{aligned} \quad .$$

Dobivamo

$$10^{-4}\ \xi^{2}.m^{2}.s^{-2} = \{\varepsilon_o\}^{-1}\ \frac{1}{4\pi}\ 10^{7}\ m^{2}.s^{-2} \quad ,$$

$$\{\varepsilon_o\} = \frac{1}{4\pi}\ \xi^{-2}.10^{11} \quad .$$

Time smo ujedno i kontrolirali naše račune.

Pokažimo na još jednom primjeru, kako se primjenjuje naša formula. Pokazat ćemo, čemu je jednaka elst CGS mjera za kapacitet $[C]_e$, ako se izrazi SI mjerom. Imamo

$$[C]_e = cm^{-2}.g^{-1}.s^{2}.[Q]_e^{2} \quad .$$

Ovdje je

$$z = 1 \ , \quad \alpha = -2 \ , \quad \beta = -1 \ , \quad \gamma = 2 \ , \quad \delta = 2 \quad .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo, onda dobivamo

$$[C]_e = \xi^{-2}.10^{4+3+2}.m^{-2+2}.s^{-3+2+2}.V^{-1}.A^{-1+2}$$

$$= \xi^{-2}.10^{9}.s.V^{-1}.A \quad .$$

Ovo je rezultat poznat iz prakse.

26. T a b e l a r n i p r i k a z m j e r a e l m g C G S i S I - e k v i v a l e n a t a

Kako smo vidjeli, prijelaz iz elmg CGS u SI daju izrazi

$$[X]_m = z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[p]_m^{\delta}$$

$$= (4\pi)^{\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta-8\delta}.m^{\alpha+2\delta}.kg^{\beta+\delta}.s^{\gamma-2\delta}.A^{-\delta}$$

$$= (4\pi)^{\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta-8\delta}.m^{\alpha-2\beta}.s^{3\beta+\gamma+\delta}.V^{\beta+\delta}.A^{\beta} \quad .$$

Budući da su svi odredbeni faktori u SI sustavu jednaki jedan, to slijedi, da je **pretvorbeni** faktor ξ_m za pretvaranje elmg CGS mjere $[X]_m$ u pripadni SI ekvivalent prikazan ovako:

$$\xi_m = (4\pi)^{\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta-8\delta} \quad ,$$

a karakteristika SI, koja je ujedno i mjera SI, dana je izrazom

$$[X] = m^{\alpha+2\delta}.kg^{\beta+\delta}.s^{\gamma-2\delta}.A^{-\delta}$$

$$= m^{\alpha-2\beta}.s^{3\beta+\gamma+\delta}.V^{\beta+\delta}.A^{\beta} \quad .$$

Dakle je

$$[X]_m = \xi_m.[X] \quad .$$

Elmg CGS mjera i njezin SI ekvivalent potpuno su određeni elmg CGS odredbenim faktorom i dimenzijama, dakle brojčanom petorkom $(z; \alpha, \beta, \gamma, \delta)_m$. Vrijednosti tih brojeva navedeni su u tabeli

uz svaku fizikalnu veličinu. Od SI sustava navedene su samo one mjere, koje su izražene pomoću m, s, V, A .

Fizikalna veličina $(z; \alpha, \beta, \gamma, \delta)_m$	SI ekvivalent
1. Magnetski pol p (1; 0,0,0,1)	$4\pi .10^{-8}$ s.V
2. Magnetski momenat $\vec{M}_{mg}$ (1; 1,0,0,1)	$4\pi .10^{-10}$ m.s.V
3. Magnetska polarizacija $\vec{P}_{mg}$ (1; -2,0,0,1)	$4\pi .10^{-4}$ m^{-2}.s.V
4. Magnetska indukcija $\vec{B}$ ($\frac{1}{4\pi}$; -2,0,0,1)	10^{-4} m^{-2}.s.V
5. Tok magnetske indukcije Φ ($\frac{1}{4\pi}$; 0,0,0,1)	10^{-8} s.V
6. Jakost magnetskog polja $\vec{H}$ (1; 1,1,-2,-1)	$\frac{1}{4\pi}$ 10^{3} m^{-1}.A
7. Magnetski napon V_{mg} (1; 2,1,-2,-1)	$\frac{1}{4\pi}$ 10 A
8. Permeabilnost μ ($\frac{1}{4\pi}$; -3,-1,2,2)	$4\pi .10^{-7}$ m^{-1}.s.V.A^{-1}
9. Jakost električne struje I (4π ; 2,1,-2,-1)	10 A
10. Električni naboj Q (4π ; 2,1,-1,-1)	10 s.A
11. Plošna gustoća naboja σ (4π ; 0,1,-1,-1)	10^{5} m^{-2}.s.A
12. Prostorna gustoća naboja ρ (4π ; -1,1,-1,-1)	10^{7} m^{-3}.s.A
13. Električni momenat $\vec{M}_{el}$ (4π ; 3,1,-1,-1)	10^{-1} m.s.A
14. Polarizacija dielektrika $\vec{P}$ (4π; 0,1,-1,-1)	10^{5} m^{-2}.s.A
15. Električni pomak $\vec{D}$ (1; 0,1,-1,-1)	$\frac{1}{4\pi}$ 10^{5} m^{-2}.s.A
16. Tok električnog pomaka Ψ (1; 2,1,-1,-1)	$\frac{1}{4\pi}$ 10 s.A
17. Jakost električnog polja $\vec{E}$ ($\frac{1}{4\pi}$; -1,0,-1,1)	10^{-6} m^{-1}.V
18. Električni napon U ($\frac{1}{4\pi}$; 0,0,-1,1)	10^{-8} V

Fizikalna veličina $(z;\alpha,\beta,\gamma,\delta)_m$	SI ekvivalent
19. Električni kapacitet C $(16\pi^2;\ 2,1,0,-2)$	$10^{9}\ s.V^{-1}.A$
20. Dielektričnost ε $(4\pi;\ 1,1,0,-2)$	$\frac{1}{4\pi}\ 10^{11}\ m^{-1}.s.V^{-1}.A$
21. Gustoća električne struje $\vec{g}$ $(4\pi;\ 0,1,-2,-1)$	$10^{5}\ m^{-2}.s.A$
22. Električni otpor R $(\frac{1}{16\pi^2};\ -2,-1,1,2)$	$10^{-9}\ V.A^{-1}$
23. Specifični otpor r $(\frac{1}{16\pi^2};\ -1,-1,1,2)$	$10^{-11}\ m.V.A^{-1}$
24. Specifična vodljivost $\varkappa$ $(16\pi^2;\ 1,1,-1,-2)$	$10^{11}\ m^{-1}.V^{-1}.A$
25. Koeficijent samoindukcije L $(\frac{1}{16\pi^2};\ -2,-1,2,2)$	$10^{-9}\ s.V.A^{-1}$

27. Tabelarni prikaz mjera elst CGS i SI ekvivalenata

Prijelaz od neke mjere elst CGS sustava u pripadnu SI mjeru posreduju izrazi

$$\begin{aligned}[X]_e &= z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[Q]_e^{\delta}\\ &= \xi^{-\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta+\delta}.m^{\alpha}.kg^{\beta}.s^{\gamma+\delta}.A^{\delta}\\ &= \xi^{-\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta+\delta}.m^{\alpha-2\beta}.s^{3\beta+\gamma+\delta}.V^{\beta}.A^{\beta+\delta}\ .\end{aligned}$$

Budući da su svi odredbeni faktori u SI sustavu jednaki jedan, to slijedi, da je pretvorbeni faktor ξ_e za pretvaranje elst CGS mjere $[X]_e$ u pripadnu SI mjeru prikazan ovako

$$\xi_e = \xi^{-\delta}.z.10^{-2\alpha-3\beta+\delta}\ ,$$

a karakteristika SI, koja je ujedno i mjera SI, dana je izrazom

$$\begin{aligned}[X] &= m^{\alpha}.kg^{\beta}.s^{\gamma+\delta}.A^{\delta}\\ &= m^{\alpha-2\beta}.s^{3\beta+\gamma+\delta}.V^{\beta}.A^{\beta+\delta}\ .\end{aligned}$$

Dakle je

$$[X]_e = \xi_e.[X]\ .$$

Elst CGS mjera i njezin SI ekvivalent potpuno su određeni elst CGS odredbenim faktorom i dimenzijama, dakle brojčanom petor-

kom $(z;\alpha,\beta,\gamma,\delta)_e$. Ova se elst CGS petorka razlikuje od one u elmg CGS sustavu. Na ovu razliku upućuje indeks "e". Uz svaku fizikalnu veličinu u tabeli navedena je i spomenuta petorka. Od SI sustava napisane su mjere izražene pomoću m, s, V, A .

Fizikalna veličina $(z;\alpha,\beta,\gamma,\delta)_e$	SI ekvivalent
1. Električni naboj Q $(1;\ 0,0,0,1)$	$\xi^{-1}.10$ s.A
2. Plošna gustoća naboja σ $(1;\ -2,0,0,1)$	$\xi^{-1}.10^{5}$ m^{-2}.s.A
3. Prostorna gustoća naboja ρ $(1;\ -3,0,0,1)$	$\xi^{-1}.10^{7}$ m^{-3}.s.A
4. Električni momenat $\vec{M}_{el}$ $(1;\ 1,0,0,1)$	$\xi^{-1}.10^{-1}$ m.s.A
5. Polarizacije dielektrika $\vec{P}$ $(1;\ -2,0,0,1)$	$\xi^{-1}.10^{5}$ m^{-2}.s.A
6. Električni pomak $\vec{D}$ $(\frac{1}{4\pi};\ -2,0,0,1)$	$\xi^{-1}\ \frac{1}{4\pi}\ 10^{5}$ m^{-2}.s.A
7. Tok električnog pomaka Ψ $(\frac{1}{4\pi};\ 0,0,0,1)$	$\xi^{-1}\ \frac{1}{4\pi}\ 10$ s.A
8. Jakost električnog polja $\vec{E}$ $(1;\ 1,1,-2,-1)$	$\xi.10^{-6}$ m^{-1}.V
9. Električni napon U $(1;\ 2,1,-2,-1)$	$\xi.10^{-8}$ V
10. Kapacitet C $(1;\ -2,-1,2,2)$	$\xi^{-2}.10^{9}$ s.V^{-1}.A
11. Dielektričnost ε $(\frac{1}{4\pi};\ -3,-1,2,2)$	$\xi^{-2}\ \frac{1}{4\pi}\ 10^{11}$ m^{-1}.s.V^{-1}.A
12. Jakost električne struje I $(1;\ 0,0,-1,1)$	$\xi^{-1}.10$ A
13. Gustoća električne struje $\vec{g}$ $(1;\ -2,0,-1,1)$	$\xi^{-1}.10^{5}$ m^{-2}.A
14. Električni otpor R $(1;\ 2,1,-1,-2)$	$\xi^{2}.10^{-9}$ V.A^{-1}
15. Specifični otpor r $(1;\ 3,1,-1,-2)$	$\xi^{2}.10^{-11}$ m.V.A^{-1}
16. Specifična vodljivost $\varkappa$ $(1;\ -3,-1,1,2)$	$\xi^{-2}.10^{11}$ m^{-1}.V^{-1}.A
17. Magnetski pol p $(4\pi;\ 2,1,-1,-1)$	$\xi.4\pi.10^{-8}$ s.V

Fizikalna veličina $(z;\alpha,\beta,\gamma,\delta)_e$	SI ekvivalent
18. Magnetski momenat $\vec{M}_{mg}$ $(4\pi;\ 3,1,-1,-1)$	$\xi.4\pi.10^{-10}$ m.s.V
19. Magnetska polarizacija $\vec{P}_{mg}$ $(4\pi;\ 0,1,-1,-1)$	$\xi.4\pi.10^{-4}\ m^{-2}.s.V$
20. Magnetska indukcija $\vec{B}$ $(1;\ 0,1,-1,-1)$	$\xi.10^{-4}\ m^{-2}.s.V$
21. Magnetski tok Φ $(1;\ 2,1,-1,-1)$	$\xi.10^{-8}$ s.V
22. Koeficijent samoindukcije L $(1;\ 2,1,0,-2)$	$\xi^2.10^{-9}\ s.V.A^{-1}$
23. Jakost magnetskog polja $\vec{H}$ $(\frac{1}{4\pi};\ -1,0,-1,1)$	$\xi^{-1}\ \frac{1}{4\pi}\ 10^3\ m^{-1}.A$
24. Magnetski napon V_{mg} $(\frac{1}{4\pi};\ 0,0,-1,1)$	$\xi^{-1}\ \frac{1}{4\pi}\ 10$ A
25. Permeabilnost μ $(4\pi;\ 1,1,0,-2)$	$\xi^{-2}.4\pi.10^{-7}\ m^{-1}.s.V.A^{-1}$

28. B r o j č a n e j e d n a d ž b e

Opći član veličinske jednadžbe a A umnožak je računskog brojčanog faktora a i produkta potencija A fizikalnih veličina. Računski faktor ima t o č n u vrijednost, jer je on došao u jednadžbu kao posljedica računskih operacija. Primjeri za vrijednosti koje može takov faktor poprimiti, jesu

$$1,\ \frac{1}{2},\ 2\pi,\ \frac{1}{4\pi},\ \ln 2,\ \ldots \quad .$$

Fizikalne veličine koje čine produkt A, mogu biti nezavisne i zavisne.

Ako na sličan način prikažemo i ostale članove jednadžbe, onda ona ima oblik

$$a\,A + b\,B + \ldots = 0 \quad .$$

Ovdje su a, b, ... računski brojčani faktori, dok su A, B, ... umnošci potencija fizikalnih veličina.

Produkte A, B, ... možemo dalje razčlaniti tako, da svaku fizikalnu veličinu prikažemo kao umnožak mjernog broja i mjere. Dakle ovako

$$X = \{X\}[X] \quad .$$

Umnožak svih mjernih brojeva u produktu A označimo sa $\{A\}$,

a umnožak mjera (osnovnih i izvedenih) sa $[A]$. Jednako postupimo s B . Dakle je

$$A = \{A\}[A]$$
$$B = \{B\}[B]$$
$$\cdots\cdots\cdots \quad .$$

U umnošku mjera $[A]$, $[B]$, ... možemo dalje svaku izvedenu mjeru prikazati odgovarajućim produktom od k osnovnih mjera

$$[X_{k+i}] = z_i [X_1]^{\alpha_{i1}} \cdots [X_k]^{\alpha_{ik}}$$
$$= z_i K_i \quad .$$

Ovdje je z_i odredbeni faktor i-te izvedene mjere, dok je K_i karakteristika te mjere.

Umnožak svih odredbenih faktora u a-tom članu označimo sa z_a , te dalje umnožak svih karakteristika mjera u tom članu sa K_a . Slično postupimo i s b-tim članom i t.d. Dobivamo

$$[A] = z_a K_a$$
$$[B] = z_b K_b$$
$$\cdots\cdots\cdots \quad .$$

Odredbeni faktori mogu imati točne brojčane vrijednosti, no mogu biti i empirički . Sve zavisi o upotrijebljenim mjerama.

Ako ove oznake unesemo u opću fizikalnu veličinsku jednadžbu, onda ona poprimi ovaj oblik

$$a\{A\} z_a . K_a + b\{B\} z_b . K_b + \cdots = 0 \quad .$$

U svakom su članu jednadžbe prva tri faktora brojčani iznosi (točni i empirički), a četvrti faktor, karakteristika, sadrži umnožak potencija osnovnih mjera.

Podijelimo li ovu jednadžbu s bilo kojom karakteristikom, na pr. s K_a , to izlazi

$$b\{B\} z_b . K_b . K_a^{-1} + \cdots = - a\{A\} z_a \quad .$$

Izraz na desnoj strani je čist, neimenovani, broj, pa prema tome to mora biti i lijeva strana. Budući da su brojevi u $\{B\}$, $\{C\}$, ... varijabilni, to slijedi, da svaki član za sebe na lijevoj strani mora biti čist broj. To znači, da je kvocijent od bilo koje dvije karakteristike K_a , K_b , ... čist broj. Dakle se sve ove karakteristike mogu svesti na zajedničku mjeru K ovako

$$K_a = \xi_a \cdot K$$

$$K_b = \xi_b \cdot K$$

.....

Ovdje su ξ_a , ξ_b , ... pretvorbeni faktori, koji svode karakteristike pojedinih članova jednadžbe na zajedničku mjeru.

Konačno se jednadžba napisana uz odabrani izbor mjera koje čine karakteristiku K , prikazuje u obliku .

$$a\{A\} z_a \cdot \xi_a \cdot K + b\{B\} z_b \cdot \xi_b \cdot K + \ldots = 0 \quad .$$

Ova je jednadžba homogema obzirom na K . To jest svi su članovi svedeni na istu karakteristiku. To se može postići kod svake fizikalne jednadžbe. Tome p r i n c i p u h o m o g e n o s t i mora svaka fizikalna jednadžba zadovoljavati. On je n u ž d a n uvjet za valjanost fizikalne jednadžbe.

Budući da svaki član jednadžbe sadrži karakteristiku K kao faktor, to se onda može čitava jednadžba podijeliti tom karakteristikom. Ostane

$$a\{A\} z_a \cdot \xi_a + b\{B\} z_b \cdot \xi_b + \ldots = 0 \qquad (K)$$

Dobili smo b r o j č a n u j e d n a d ž b u , koja vrijedi uz odabrane mjere, koje čine karakteristiku K . To se bilježi tako, da se sa strane pripišu te mjere.

U svakom članu brojčane jednadžbe, izvedene iz neke veličinske, dolaze najprije dva faktora nezavisna o izboru mjera. To su $a\{A\}$, pa u drugom članu $b\{B\}$, ... Pod ovim se razumijeva, da su simboli u $\{A\}$, odnosno u $\{B\}$, nezavisni o izboru mjera. Dakako kad se uvrste brojčani iznosi, onda rezultat tog uvrštavanja zavisi o upotrijebljenim mjerama. Zatim slijede dva faktora, koji zavise o odabranim mjerama, to su koeficijenti $z_a \cdot \xi_a$, $z_b \cdot \xi_b$, ... Ovi se faktori, budući da su konstantni, združuju u konkretnoj brojčanoj jednadžbi s računskim faktorima a , b , ... i time modificiraju koeficijente u brojčanoj jednadžbi u usporedbi prema veličinskoj, od koje smo pošli.

Opravdano je pitati se, u kojem se slučaju brojčana jednadžba ne razlikuje po koeficijentima od veličinske iz koje je izvedena. To je onda ispunjeno, ako je

$$z_a \cdot \xi_a = z_b \cdot \xi_b = \ldots \quad .$$

Tada se naime ovi faktori mogu pokratiti, pa se brojčana jednadžba reducira na

$$a\{A\} + b\{B\} + \ldots = 0 \qquad (K) \; .$$

Uvjet kojemu moraju zadovoljavati odredbeni i pretvorbeni faktori, da brojčana jednadžba formalno izgleda kao i veličinska, iz koje je izvedena, može biti isvunjen uz neki prikladni izbor mjera, koje ne moraju biti iz istoga sustava mjera. Međutim ako se služimo mjerama SI sustava, onda je uvijek

$$z_a = z_b = \ldots = 1 \quad ,$$

$$\zeta_a = \zeta_b = \ldots = 1 \quad ,$$

pa prema tome uz upotrebu tih mjera, svaka brojčana jednadžba ima isti oblik i iste koeficijente, kao i veličinska, iz koje je izvedena. To je velika prednost SI sustava mjera.

Razmatranje koje smo ovdje proveli za fizikalne jednadžbe, jednako vrijedi i za fizikalne nejednadžbe. Opća je veličinska nejednadžba oblika

$$a\,A + b\,B + \ldots > 0 \quad ,$$

a značenje simbola je isto kao i prije.

Iz ove veličinske nejednadžbe slijedi brojčana nejednadžba

$$a\,\{A\}\,z_a \cdot \zeta_a + b\,\{B\}\,z_b \cdot \zeta_b + \ldots > 0 \qquad (K) \quad .$$

Ova nejednadžba vrijedi uz odabrane mjere, koje čine karakteristiku K , koja je sa strane pripisana.

29. Primjeri za brojčani oblik nekih jednadžbi

Da pokažemo, kako se iz veličinskih jednadžbi izvode brojčane, mi ćemo promotriti nekoliko primjera iz elektromagnetizma i atomske fizike.

Kao prvi primjer uzmimo Maxwellove jednadžbe elektromagnetskog polja u diferencijalnom obliku. Veličinski oblik tih jednadžbi glasi

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varkappa \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad .$$

Kako izgledaju brojčane jednadžbe, ako sve veličine mjerimo SI mjerama ? Odgovor već znamo. Te jednadžbe imaju isti oblik

kao i napisane veličinske. Međutim mi to možemo i neposredno pokazati.

Počnimo s prvom jednadžbom i promatrajmo član po član uvodeći mjerne brojeve i mjerne jedinice SI.

$$\text{rot}\,\vec{H} = \{\text{rot}\}.\{\vec{H}\}m^{-1}.m^{-1}.A = \{\text{rot}\,\vec{H}\}.m^{-2}.A \quad .$$

Operacija rot ima mjeru m^{-1} . Dakle

$$\text{rot} = \{\text{rot}\}m^{-1} \quad .$$

Da izbjegnemo pisanje mnogih vitičastih zagrada, poslužili smo se oznakom .

$$\{\text{rot}\}.\{\vec{H}\} = \{\text{rot}\,\vec{H}\} \quad ,$$

gdje se razumijeva, da su unutar tih zagrada samo mjerni brojevi. To jest simboli matematičkih operacija i fizikalnih veličina obuhvaćeni vitičastim zagradama, predočuju samo mjerne brojeve tih operacija odnosno veličina, mjerenih mjerama koje su posebno naznačene.

Promatrajmo sada drugi član prve jednadžbe.

$$\varkappa\vec{E} = \{\varkappa\vec{E}\}m^{-1}.V^{-1}.A.m^{-1}.V = \{\varkappa\vec{E}\}m^{-2}.A \quad .$$

Obradimo i treći član.

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right\}s^{-1}.m^{-2}.s.A = \left\{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right\}m^{-2}.A \quad .$$

Dobili smo ovaj rezultat

$$\{\text{rot}\,\vec{H}\}\,m^{-2}.A = \{\varkappa\vec{E}\}\,m^{-2}.A + \left\{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right\}m^{-2}.A \quad .$$

Svi članovi ove jednadžbe imaju istu karakteristiku. Možemo dakle njome pokratiti. Ostaje

$$\left\{\text{rot}\,\vec{H} = \varkappa\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right\} \quad , \quad \text{SI mjerne jedinice.}$$

Ovo čitamo ovako. Za mjerne brojeve napisanih fizikalnih veličina vrijedi brojčana jednadžba u vitičastoj zagradi, ako se sve veličine mjere u SI mjernim jedinicama.

Obrada druge jednadžbe teče analogno. Prvi član daje

$$\text{rot}\,\vec{E} = \{\text{rot}\,\vec{E}\}\,m^{-1},m^{-1}.V = \{\text{rot}\,\vec{E}\}\,m^{-2}.V \quad .$$

Drugi član te jednadžbe daje

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\}s^{-1}.m^{-2}.s.V = \left\{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\}m^{-2}.V \quad .$$

Dakle

$$\left\{\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\} \quad , \quad \text{SI mjerne jedinice.}$$

Treća jednadžba sadrži operaciju div , a ta ima u SI sustavu mjeru m^{-1} . Dakle

$$\operatorname{div} \vec{D} = \{\operatorname{div} \vec{D}\}\, m^{-1}.m^{-2}.s.A = \{\operatorname{div} \vec{D}\}\, m^{-3}.s.A \quad .$$

$$\rho = \{\rho\} m^{-3}.s.A \quad .$$

Konačno treća jednadžba

$$\{\operatorname{div} \vec{D} = \rho\} \quad , \quad \text{SI mjerne jedinice.}$$

Budući da četvrta jednadžba ima samo jedan član, to ona, za svaki sustav mjera, daje brojčanu jednadžbu istog oblika.

Možemo dobivene rezultate sabrati:

$$\{\operatorname{rot} \vec{H} = \varkappa \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\} \quad , \quad \text{za SI mjerne jedinice.}$$

$$\{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\}$$

$$\{\operatorname{div} \vec{D} = \rho\}$$

$$\{\operatorname{div} \vec{B} = 0\} \quad .$$

Potražimo sada, kako izgledaju Maxwellove jednadžbe u brojčanom obliku, ako se služimo elst CGS mjerama. Obradit ćemo kao i prije član po član svake jednadžbe.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \{\operatorname{rot} \vec{H}\}_e \, cm^{-1}.\frac{1}{4\pi} cm^{-1}.s^{-1}.[Q]_e \quad ,$$

$$= \frac{1}{4\pi} \{\operatorname{rot} \vec{H}\}_e \, cm^{-2}.s^{-1}.[Q]_e \quad .$$

$$\varkappa \vec{E} = \{\varkappa \vec{E}\}_e \, cm^{-3}.g^{-1}.s.[Q]_e^2.cm.g.s^{-2}.[Q]_e^{-1}$$

$$= \{\varkappa \vec{E}\}_e \, cm^{-2}.s^{-1}.[Q]_e \quad .$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right\}_e s^{-1} \frac{1}{4\pi} cm^{-2}.[Q]_e$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right\}_e cm^{-2}.s^{-1}.[Q]_e \quad .$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \{\operatorname{rot} \vec{E}\}_e \, cm^{-1}.cm.g.s^{-2}.[Q]_e^{-1}$$

$$= \{\operatorname{rot} \vec{E}\}_e \, g.s^{-2}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\}_e s^{-1}.g.s^{-1}.[Q]_e^{-1} = \left\{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\}_e g.s^{-2}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \{\operatorname{div} \vec{D}\}_e \, cm^{-1} \frac{1}{4\pi} cm^{-2}.[Q]_e = \frac{1}{4\pi} \{\operatorname{div} \vec{D}\}_e \, cm^{-3}.[Q]_e \quad .$$

$$\varrho = \{\varrho\}_e \ \mathrm{cm}^{-3} . [Q]_e \quad .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo, karakteristike skratimo, te množimo prvu i treću jednadžbu sa 4π , onda dobijemo

$$\left\{\mathrm{rot}\ \vec{H} = 4\pi \varkappa \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right\}_e \quad , \quad \text{elst CGS mjerne jedinice}$$

$$\left\{\mathrm{rot}\ \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\}_e$$

$$\left\{\mathrm{div}\ \vec{D} = 4\pi \varrho\right\}_e$$

$$\left\{\mathrm{div}\ \vec{B} = 0\right\}_e \quad .$$

Nađimo sada brojčani oblik Maxwellovih jednadžbi uz upotrebu elmg CGS mjera. Promatrajmo član po član tih jednadžbi.

$$\mathrm{rot}\ \vec{H} = \{\mathrm{rot}\ \vec{H}\}_m \ \mathrm{cm}^{-1} . \mathrm{cm} . \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-2} . [p]_m^{-1}$$

$$= \{\mathrm{rot}\ \vec{H}\}_m \ \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-2} . [p]_m^{-1} \quad .$$

$$\varkappa \vec{E} = \{\varkappa \vec{E}\}_m \ 16\pi^2 \ \mathrm{cm} . \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m^{-2} \ \frac{1}{4\pi} \ \mathrm{cm}^{-1} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m$$

$$= 4\pi \{\varkappa \vec{E}\}_m \ \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-2} . [p]_m^{-1} \quad .$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right\}_m \ \mathrm{s}^{-1} . \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m^{-1}$$

$$= \left\{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right\}_m \ \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-2} . [p]_m^{-1} \quad .$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = \{\mathrm{rot}\ \vec{E}\}_m \ \mathrm{cm}^{-1} \ \frac{1}{4\pi} \ \mathrm{cm}^{-1} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m$$

$$= \frac{1}{4\pi} \{\mathrm{rot}\ \vec{E}\}_m \ \mathrm{cm}^{-2} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m \quad .$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\}_m \ \mathrm{s}^{-1} \ \frac{1}{4\pi} \ \mathrm{cm}^{-2} . [p]_m$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\}_m \ \mathrm{cm}^{-2} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m \quad .$$

$$\mathrm{div}\ \vec{D} = \{\mathrm{div}\ \vec{D}\}_m \ \mathrm{cm}^{-1} . \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m^{-1} \quad .$$

$$\varrho = \{\varrho\}_m \ 4\pi . \mathrm{cm}^{-1} . \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m^{-1} \quad .$$

$$= 4\pi \{\varrho\}_m \ \mathrm{cm}^{-1} . \mathrm{g} . \mathrm{s}^{-1} . [p]_m^{-1} \quad .$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u veličinske jednadžbe, pokratimo karakteristike, onda dobivamo brojčane jednadžbe uz pretpostavku, da sve veličine mjerimo elmg CGS mjerama.

$$\left\{\text{rot } \vec{H} = 4\pi\varkappa\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right\}_m \quad , \quad \text{elmg CGS mjerne jedinice}$$

$$\left\{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\}_m$$

$$\left\{\text{div } \vec{D} = 4\pi\varrho\right\}_m$$

$$\left\{\text{div } \vec{B} = 0\right\}_m \quad .$$

Ove brojčane jednadžbe imaju isti oblik kao i one uz upotrebu elst CGS mjera.

Pokažimo sada, kako izgledaju Maxwellove jednadžbe u brojčanom obliku, ako se upotrijebe mjere iz Gaussovog Miješanog sustava mjera. To je sustav, u kojem se "električne veličine", kao što su Q, I, U, $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\varkappa$, ϱ, i t. d. mjere u elst CGS mjerama, a "magnetske veličine", kao što su p, $\vec{H}$, $\vec{B}$, i t. d. u elmg CGS mjerama. Obradimo opet Maxwellove jednadžbe, član po član. Budući da ćemo sada za pojedine članove iste jednadžbe upotrijebiti mjere iz dva sustava mjera, to će trebati karakteristike tih članova dovesti na zajedničku mjeru. Za taj postupak pruža nam se više mogućnosti. Mi ćemo raditi tako, da ćemo "električnim" veličinama ostaviti njihove elst CGS mjere, a "magnetskim" veličinama ćemo njihove elmg CGS mjere pretvarati u njihov elst CGS ekvivalent. Time omogućujemo neposrednu upotrebu gore dobivenih rezultata za one članove, koji se mjere u elst CGS mjerama. Treba samo transformirati "magnetske" članove jednadžbi. Radit ćemo direktno tako, da upravo dobivene karakteristike u elmg CGS mjerama preinačimo pomoću formule, koja daje za osnovnu elmgCGS mjeru $[p]_m$ njezin elst CGS ekvivalent.

$$[p]_m = 4\pi \cdot \xi^{-1}.cm^2.g.s^{-1}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

Tako imamo po redu

$$\text{rot}.\vec{H} = \left\{\text{rot } \vec{H}\right\}_m g.s^{-2}.[p]_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\xi\left\{\text{rot } \vec{H}\right\}_m cm^{-2}.s^{-1}.[Q]_e \quad .$$

$$\varkappa\vec{E} = \left\{\varkappa\vec{E}\right\}_e cm^{-2}.s^{-1}.[Q]_e \quad .$$

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right\}_e cm^{-2}.s^{-1}.[Q]_e \quad .$$

$$\text{rot } \vec{E} = \left\{\text{rot } \vec{E}\right\}_e g.s^{-2}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\}_m cm^{-2}.s^{-1}.[p]_m = \xi^{-1}\left\{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\}_m g.s^{-2}.[Q]_e^{-1} \quad .$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{4\pi} \left\{\operatorname{div} \vec{D}\right\}_e \text{ cm}^{-3}.[Q]_e \quad .$$

$$\varrho = \left\{\varrho\right\}_e \text{ cm}^{-3}.[Q]_e \quad .$$

Ako ove vrijednosti unesemo u veličinske jednadžbe i sredimo, onda dobivamo brojčane jednadžbe uz pretpostavku, da upotrebljavamo Gaussov Miješani sustav mjera.

$$\left\{\operatorname{rot} \vec{H}\right\}_m = \left\{4\pi.\xi^{-1}.\varkappa\vec{E} + \xi^{-1}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right\}_e \quad ,$$

$$\left\{\operatorname{rot} \vec{E}\right\}_e = \left\{-\xi^{-1}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\}_m$$

Miješani Gaussov sustav mjera CGS

$$\left\{\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\varrho\right\}_e$$

$$\left\{\operatorname{div} \vec{B} = 0\right\}_m \quad .$$

Uz upotrebu Gaussovog Miješanog sustava mjera javlja se u brojčanim Maxwellovim jednadžbama pretvorbeni faktor ξ . Jasno je, zašto i kako je ovaj faktor došao u te jednadžbe. Zato jer se upotrebljavaju mjere iz dva sustava. Prema tome u o v i m jednadžbama ovaj faktor n e p r e d o č u j e mjerni broj brzine elektromagnetskih valova u vakuumu iz jednostavnog razloga, jer se ta brzina n e pojavljuje u veličinskim jednadžbama. U veličinskim Maxwellovim jednadžbama brzine elektromagnetskih valova eksplicitno izražene nema, pa je ne može biti ni u brojčanim jednadžbama, koje se iz njih izvode.

Izraz za brzinu elektromagnetskih valova javlja se tek u v a l n o j jednadžbi, koja se iz Maxwellovih izvodi. Tada izlazi, da je ta brzina

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} \quad .$$

Ako se ovo preradi u brojčanu u bilo kojem CGS sustavu, dobiva se veza te brzine s pretvorbenim faktorom ξ .

U elst CGS imamo

$$v^2 = \left\{v\right\}_e^2 \text{ cm}^2.\text{s}^{-2} \quad .$$

$$\varepsilon^{-1}\mu^{-1} = \left\{\varepsilon^{-1}\mu^{-1}\right\}_e 4\pi.\text{cm}^3.\text{g}.\text{s}^{-2}.[Q]_e^{-2}\,\frac{1}{4\pi}\,\text{cm}^{-1}.\text{g}^{-1}.[Q]_e^2$$

$$= \left\{\varepsilon^{-1}\mu^{-1}\right\}_e \text{ cm}^2.\text{s}^{-2} \quad .$$

Slijedi

$$\left\{v\right\}_e = \left\{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{1}{2}}\right\}_e \quad , \text{ u mjeri } \text{cm}.\text{s}^{-1} \quad .$$

Za vakuum je

$$\left\{c\right\}_e = \left\{\varepsilon_o^{-\frac{1}{2}}\mu_o^{-\frac{1}{2}}\right\}_e \quad , \text{ u mjeri } \text{cm}.\text{s}^{-1} \quad .$$

Budući da je $\{\varepsilon_o\}_e = 1$, $\{\mu_o\}_e = \xi^{-2}$, to slijedi

$$\{c\}_e = \xi \quad .$$

Dakle mjerni broj brzine elektromagnetskih valova, ako se ta brzina mjeri u $cm.s^{-1}$, izlazi n a k o n obrade Maxwellovih jednadžbi, da ja j e d n a k pretvorbenom faktoru ξ zato, jer je recipročna vrijednost kvadrata toga faktora jednaka i elst CGS mjernom broju permeabilnosti vakuuma. To je upravo ono, što je Maxwell našao rekavši: "Iz ovog sam rezultata izveo vezu između statičke i dinamičke mjere za elektricitet, te pokazao, uspoređujući elektromagnetske eksperimente gospode Kohlrauscha i Webera s brzinom svjetlosti, kako ju je našao gospodin Fizeau, da je elastičnost magnetskog medija ista kao i od svjetlosnog medija, ... ".

Prema tome pisanje simbola c namjesto ξ u brojčanim Maxwellovim jednadžbama uz upotrebu Gaussovog Miješanog CGS sustava mjera nije zgodno, jer se time stvara krivi dojam, kao da brzina elektromagnetskih valova u vakuumu dolazi e k s p l i c i t n o već u temeljnim jednadžbama elektromagnetizma.

Kao daljnji primjer za dobivanje brojčane jednadžbe u elst CGS uzet ćemo izraz, koji daje kapacitet osamljene kovne kugle u vakuumu. Veličinski izraz za taj kapacitet glasi

$$C = 4\pi\varepsilon_o r \quad .$$

Ovdje je r polumjer kugle.

Uz upotrebu elst CGS mjera, ova jednadžba postaje

$$\{C\}_e \ cm^{-2}.g^{-1}.s^2.[Q]_e^2 = 4\pi\{\varepsilon_o\}_e \frac{1}{4\pi} cm^{-3}.g^{-1}.s^2[Q]_e^2 \{r\}_e \ cm \quad .$$

Budući da je $\{\varepsilon_o\}_e = 1$, to onda slijedi

$$\{C = r\}_e \quad , \quad \text{elst CGS mjerne jedinice.}$$

Elst CGS mjerni broj kapaciteta osamljene kovne kugle u vakuumu jednak je mjernom broju polumjera te kugle, ako se ovaj mjeri u cm . Ovo je poznati rezultat, koji se često i tako izricao, da se je bilo koji kapacitet (na pr. međusobni kapacitet obloga pločastog kondenzatora) davao tako, da se je reklo, koliki bi polumjer u cm imala osamljena kugla u vakuumu, uz jednaki kapacitet. Ovo se je onda skratilo tako, da se je reklo "kapacitet je toliko i toliko centimetara", što je moglo izazvati dojam, da je centimetar također i mjera za kapacitet.

Kao slijedeći primjer za nalaženje brojčane jednadžbe uz upotrebu elst CGS mjera neka bude izraz za polumjer najuže staze

elektrona u vodikovom atomu, kako je to dala već Bohrova teorija. Veličinski izraz za taj polumjer glasi

$$r = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \quad ,$$

Gdje je h Planckova konstanta, m masa elektrona, e naboj elektrona.

Uvrstimo li elst CGS mjere u desnu stranu ovog izraza, to onda dobivamo

$$\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = \left\{\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}\right\}_e \frac{1}{4\pi} \text{ cm}^{-3}.\text{g}^{-1}.\text{s}^2.[\text{Q}]_e^2.\text{cm}^4.\text{g}^2.\text{s}^{-2}.\text{g}^{-1}.[\text{Q}]_e^{-2}$$

$$= \left\{\frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}\right\}_e \text{ cm} \quad .$$

Slijedi

$$\left\{r = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}\right\}_e \quad , \quad \text{elst CGS mjerne jedinice.}$$

Ovo je rezultat koji se čita u starijim teoretskim fizikama.

Kao daljnji primjer uzmimo izraz za Rydbergovu konstantu. Ova je konstanta dana veličinskim izrazom

$$R_\infty = \frac{m e^4}{8 h^3 c \varepsilon_0^2} \quad .$$

Ovdje je c brzina svjetlosti u zrakopraznom prostoru, a ostali simboli imaju značenje kao i u predhodnom primjeru. Ako svaku veličinu na desnoj strani izrazimo mjernim brojem i mjerom u elst CGS sustavu, to onda dobivamo

$$\frac{m e^4}{8 h^3 c \varepsilon_0^2} = \left\{\frac{m e^4}{8 h^3 c \varepsilon_0^2}\right\}_e \text{g}.[\text{Q}]_e^4.\text{cm}^{-6}.\text{g}^{-3}.\text{s}^3.\text{cm}^{-1}.\text{s}.16\pi^2 \text{ cm}^6.\text{g}^2. .\text{s}^{-4}.[\text{Q}]_e^{-4}$$

$$= \left\{\frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c}\right\} \text{cm}^{-1} \quad .$$

Prema tome je

$$\left\{R_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c}\right\}_e \quad , \quad \text{elst CGS mjerne jedinice.}$$

Ovako izražena Rydbergova konstanta nalazi se u knjigama, koje se još ne služe veličinskim jednadžbama.

Iz ovih je primjera vidljivo, kako se svaka veličinska jednadžba može prekrojiti u brojčanu uz bilo koji izbor mjera za pojedine veličine, koje u promatranoj veličinskoj jednadžbi dolaze.

Kod toga izvođenja brojčane jednadžbe iz veličinske, preinačuju se brojčani računski faktori veličinske jednadžbe, jer se množe odredbenim odnosno pretvorbenim faktorima raznih mjera. Tako u brojčanoj jednadžbi koeficijenti u pravilu imaju nove vrijednosti, ako se upotrijebe mjere izvan SI.

Ovdje se s pravom može još pitati, da li se iz brojčane jednadžbe može zaključiti, kako izgleda veličinska iz koje je ova jednadžba izvedena. To se sa sigurnošću ne može zaključiti zato, jer se u brojčanoj jednadžbi gubi trag nekih fizikalnih veličina, koje u veličinskoj jednadžbi dolaze. Primjer je za ovo dielektričnost vakuumu, ako se služimo elst CGS mjerom. U drugu ruku mogu neki simboli, koji su upotrijebljeni u brojčanoj jednadžbi na način koji doduše nije pogrešan, sugerirati kao da neke fizikalne veličine dolaze u veličinskoj jednadžbi, a zapravo ih tamo nema. Za ovo je primjer, da se u brojčanoj jednadžbi Gaussovog Miješanog CGS sustava piše simbol brzine svjetlosti u zrakopraznom prostoru c, namjesto pretvorbenog faktora ξ. Vrijednost ovog faktora j e d n a k a je mjernom broju te brzine izražene u $cm.s^{-1}$, pa se zato može u brojčanoj jednadžbi, a da se ne načini računska pogreška, jedan simbol zamijeniti drugim. Ako smo dakle namjesto pretvorbenog faktora ξ napisali c, to odatle ne slijedi da brzina svjetlosti c dolazi kao fizikalna veličina u veličinskoj jednadžbi. Za ovo je primjer Poyntingov vektor, ako za njega napišemo brojčani izraz uz upotrebu Miješanog sustava mjera. Pred vektorskim produktom $\vec{E}\times\vec{H}$ javlja se tada, ako potpuno korektno pišemo, faktor $\xi/4\pi$. Taj se faktor međutim u pravilu piše $c/4\pi$, premda brzina svjetlosti u vakuumu nema što raditi u ovom izrazu, jer taj izraz vrijedi bez obzira na dielektričnost odnosno permeabilnost sredstva, kroz koje se elektromagnetska energija rasprostire. Uostalom sjajan primjer za ovo jesu same Maxwellove jednadžbe, kako smo gore vidjeli.

Vidimo dakle, posve mehanička pretvorba neke brojčane jednadžbe u veličinsku nije moguća. Da se nađe veličinska jednadžba, koja sadrži promatranu brojčanu, treba znati izvod brojčane jednadžbe. Dakle sve uvjete uz koje je ona dobivena. To pokazuje i onaj primjer s kapacitetom osamljene kugle u vakuumu. Brojčana jednadžba u elst CGS vrlo je jednostavna, no u njoj ne dolaze do izražaja one fizikalne veličine, koje taj kapacitet bitno određuju. Ta elst CGS brojčana jednadžba zamamna je radi svoje jednostavnosti, no ona briše svako dublje shvaćanje veličine, koja se tu određuje, naime kapaciteta.

Na kraju ćemo dodati još par riječi o "CGS mentalitetu". Činjenica da se u elektromagnetizmu mogu primijeniti tri CGS sustava mjera: elst, elmg i miješani, te da o tome ovisi oblik brojčanih jednadžbi, dovela je do toga, da se kod pisanja fizikalnih formula neprestano napominjalo "ova se veličina mjeri ovom mjerom, a ona onom, i t.d." sve dok se nisu nabrojile sve veličine, čiji simboli dolaze u jednadžbi. To je bilo nužno zato, jer su se u jednadžbu namjesto simbola uvrštavali samo bročani iznosi, naime mjerni brojevi fizikalnih veličina, mjerenih mjerama, koje su bile navedene. Međutim ako se pišu veličinske jednadžbe, to je nabrajanje posve suvišno, jer svaka veličinska jednadžba vrijedi uz svaki izbor mjera za fizikalne veličine koje u jednadžbi dolaze. Veličinska jednadžba izriče fizikalne odnose između fizikalnih veličina, a ti odnosi ne mogu zavisiti o mjerama za te fizikalne veličine. Međutim kod r a č u n s k e obrade veličinske jednadžbe nužno je sve fizikalne veličine tretirati kao imenovane brojeve, a to znači, ako se u takovu jednadžbu uvrštava rezultat nekog mjerenja, onda treba uvrstiti ne samo mjerni broj fizikalne veličine, nego i mjeru, koja tome broju pripada, dakle čitavu fizikalnu veličinu. Za računanje s mjerama nužno je poznavati definicije mjera koje se u jednadžbi javljaju. U tom se računu često griješi, ili se primjenjuju nepregledni, a često i neispravni postupci. Toga su puni udžbenici na svima nivoima.

Za matematičku obradu veličinske jednadžbe dovoljno je ustanoviti vrstu svake od veličina s kojima se operira. Treba ustanoviti da li je neka fizikalna veličina skalar, ili je vektor, ili tenzor, ... Zatim treba poznavati međusobnu zavisnost velina, koje u neku jednadžbu (ili nejednadžbu) ulaze. U načelu se i jedno i drugo može mjerenjem naći, a da se pri tome ne treba poslužiti nekim posebnim sustavom mjera. Fizikalne zakonitosti su o tome nezavisne, kakovim se mjerama služimo, pa prema tome je o tome nezavisna i matematička formulacije te zakonitosti. Ta formulacija reproducira naše iskustvo u najjednostavnijem i najsažetijem obliku. Očita je prednost veličinskih jednadžbi, naročito ako se radi o teoretskim razmatranjima, jer jedino veličinske jednadžbe sadrže ono, što je fizikalno relevantno, a ne sadrže ono što nije. Veličinske jednadžbe najbolje reproduciraju fizikalne odnose i zato bi te jednadžbe trebale biti osnova svakog teoretiziranja i zaključivanja. Vrijednost je brojčanih jednadžbi za mjernu praksu, u slučajevima gdje se upotrebljavaju različite mjerne jedinice.

30. E l s t C G S s u s t a v n a d r u g i n a č i n

Polazeći od dogovorenih veličinskih jednadžbi elektromagnetizma, pokazali smo kako se može razviti elst CGS koji uzima kao osnovne mjere: cm , g , s , $[Q]_e$. Za neku veličinu X , izvedena mjera dana je definicijom iz koje onda primjenom na veličinsku jednadžbu slijedi jednadžba mjerne jedinice ove veličine

$$[X]_e = z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[Q]_e^{\delta} \quad .$$

Uz upotrebu dogovorenih veličinskih jednadžbi, odredbeni se faktor z razlikuje od matematičkog jedan kod nekih mjera tog sustava. Ovako razvijeni elst CGS nazovimo elst CGS prve vrste.

Mi ćemo sada razviti elst CGS druge vrste. Ovaj se sustav također osniva na istim dogovorenim veličinskim jednadžbama elektromagnetizma, no uzima kao osnovne mjere: cm , g , s , $[\varepsilon]_e = \varepsilon_o$. K osnovnim mjerama mehanike u elst CGS druge vrste pridolazi kao četvrta osnovna mjerna jedinica - dielektričnost vakuuma:

$$[\varepsilon]_e = \varepsilon_o \quad .$$

Izraze za izvedene mjere elst CGS druge vrste mogli bi naći tako, da se poslužimo definicijama tih mjera i dogovorenim veličinskim jednadžbama. Tako bi elst CGS druge vrste razvili posve nezavisno o elst CGS prve vrste. Došli bi međutim do istih mjernih jedinica kao i prije zato, jer se osnovne mjere elst CGS druge vrste podudaraju s mjerama elst CGS prve vrste (gdje je također $[\varepsilon]_e = \varepsilon_o$, samo što se ne smatra osnovnom mjerom), te jer se služimo istim definicijama izvedenih mjera.

Ima međutim kraći put za razvoj elst CGS druge vrste, a to je da pođemo od već razrađenog elst CGS prve vrste, pa izraze za izvedene mjerne jedinice transformiramo tako, da u njihovim karakteristikama ne bude više iskazana $[Q]_e$ kao osnovna mjera, nego mjera za dielektričnost $[\varepsilon]_e$, za koju smo "per definitionem" stavili, da je jednaka dielektričnosti vakuuma. Osnova za ovu transformaciju je izraz koji daje $[\varepsilon]_e$ kao izvedenu mjeru u elst CGS prve vrste

$$[\varepsilon]_e = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^{2}.[Q]_e^{2} \quad .$$

Budući da u elst CGS druge vrste sve mjere imaju istu veličinu kao i u elst CGS prve vrste, a i definicije mjera su su ostale nepromijenjene, to ćemo sada dobiti i z v e d e n u mjeru za električni naboj tako, da napisani izraz razriješimo po $[Q]_e$:

$$[Q]_e = (4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Ako sada ovaj izraz za $[Q]_e$ uvrstimo u općeniti izraz koji daje izvedenu mjeru $[X]_e$ elst CGS prve vrste, to onda taj izraz nakon uvrštenja predočuje tu istu mjeru u elst CGS druge vrste. Dakle ovako:

$$[X]_e = z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[Q]_e^{\delta} \quad , \text{ elst CGS prve vrste}$$
$$= (4\pi)^{\frac{\delta}{2}} z.cm^{\alpha+\frac{3\delta}{2}}.g^{\beta+\frac{\delta}{2}}.s^{\gamma-\delta}.[\varepsilon]_e^{\frac{\delta}{2}} \quad .$$

Izraz u drugom retku predočuje izvedenu mjernu jedinicu u elst CGS druge vrste. Ova nam formula daje za svaku petorku $(z; \alpha, \beta, \gamma, \delta)_e$ kojom je određena mjera elst CGS prve vrste, pripadni izraz za tu istu mjeru u elst CGS druge vrste. Pomoću ovog izraza načinjen je Pregled mjera elstCGS druge vrste koji slijedi.

PREGLED MJERA elst CGS SUSTAVA DRUGE VRSTE

1.	Dužina s	cm
2.	Masa m	g
3.	Vrijeme t	s
4.	Dielektričnost ε	$[\varepsilon]_e = \varepsilon_o$
5.	Električni naboj Q	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$
6.	Plošna gustoća naboja σ	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$
7.	Prostorna gustoća naboja ϱ	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$
8.	Električni momenat $\vec{M}_{el}$	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{5}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$
9.	Polarizacija dielektrika $\vec{P}$	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$
10.	Jakost električnog polja $\vec{E}$	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$
11.	Električni napon U	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$
12.	Kapacitet C	$4\pi.cm.[\varepsilon]_e$
13.	Jakost električne struje I	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-2}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$
14.	Gustoća električne struje $\vec{g}$	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-2}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$
15.	Električni otpor R	$\frac{1}{4\pi}\, cm^{-1}.s.[\varepsilon]_e^{-1}$
16.	Specifični otpor r	$\frac{1}{4\pi}\, s.[\varepsilon]_e^{-1}$
17.	Specifična vodljivost $\varkappa$	$4\pi.s^{-1}.[\varepsilon]_e$
18.	Magnetska indukcija $\vec{B}$	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$
19.	Magnetski tok Φ	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$
20.	Induktivitet L	$\frac{1}{4\pi}\, cm^{-1}.s^2.[\varepsilon]_e^{-1}$
21.	Električni pomak $\vec{D}$	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$
22.	Tok električnog pomaka Ψ	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$

23. Magnetski pol p $\quad (4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$

24. Magnetski momenat $\vec{M}_{mg}$ $\quad (4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$

25. Magnetska polarizacija $\vec{P}_{mg}$ $\quad (4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$

26. Jakost magnetskog polja $\vec{H}$ $\quad (4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-2}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$

27. Magnetski napon V_{mg} $\quad (4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-2}.[\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$

28. Permeabilnost μ $\quad cm^{-2}.s^2.[\varepsilon]_e^{-1}$

31. E l m g C G S s u s t a v n a d r u g i n a č i n

Polazeći od dogovorenih veličinskih jednadžbi elektromagnetizma, pokazali smo kako se može razviti elmg CGS koji uzima kao osnovne mjere: cm , g , s , $[p]_m$. Za neku veličinu X , izvedena mjera dana je definicijom iz koje onda slijedi jednadžba ove mjerne jedinice

$$[X]_m = z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[p]_m^{\delta} \quad .$$

Uz upotrebu dogovorenih veličinskih jednadžbi, odredbeni se faktor z razlikuje od matematičkog jedan kod nekih mjera tog sustava. Ovako razvijeni elmg CGS nazovimo elmg CGS prve vrste.

Mi ćemo sada razviti elmg CGS druge vrste. Ovaj se sustav također osniva na istim dogovorenim veličinskim jednadžbama elektromagnetizma, no uzima kao osnovne mjere: cm , g , s , $[\mu]_m = \mu_o$. K osnovnim mjernim jedinicama mehanike u elmg CGS druge vrste pridolazi kao četvrta mjerna jedinica mjera za permeabilnost, za koju se "per definitionem" uzima da je jednaka permeabilnosti vakuuma:

$$[\mu]_m = \mu_o \quad .$$

Izraze za izvedene mjere elmg CGS druge vrste mogli bi naći tako, da se poslužimo definicijama tih mjera i dogovorenim veličinskim jednadžbama. Tako bi elmg CGS druge vrste razvili posve nezavisno o elmg CGS prve vrste. Došli bi međutim do istih mjernih jedinica kao i prije zato, jer se osnovne mjere elmg CGS druge vrste podudaraju s mjerama elmg CGS prve vrste (gdje je također $[\mu]_m = \mu_o$ samo što se ne smatra osnovnom mjerom), te jer se služimo istim definicijama izvedenih mjera.

Ima međutim kraći put za razvoj elmg CGS druge vrste, a to je da pođemo od već razrađenog elmg CGS prve vrste, pa izraze za izvedene mjerne jedinice transformiramo tako, da u njihovim karakteristikama ne bude više iskazan $[p]_m$ kao osnovna mjera, nego mjera za permeabilnost, za koju smo stavili da je jednaka permeabilnosti

vakuuma. Osnova je za ovu transformaciju izraz, koji daje $[\mu]_m$ kao izvedenu mjeru u elmg CGS prve vrste:

$$[\mu]_m = \frac{1}{4\pi}\, cm^{-3}.g^{-1}.s^2.[p]_m^2 \quad .$$

Budući da u elmg CGS druge vrste sve mjere imaju istu veličinu kao i u elmg CGS prve vrste, a i definicije mjera su ostale nepromijenjene, to ćemo sada dobiti i z v e d e n u mjeru za magnetski pol tako, da napisani izraz razriješimo po $[p]_m$.

$$[p]_m = (4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Ako sada ovaj izraz za $[p]_m$ uvrstimo u općeniti izraz koji daje izvedenu mjeru $[X]_m$ elmg CGS prve vrste, to onda taj izraz nakon uvrštenja predočuje tu istu mjeru u elmg CGS druge vrste. Dakle ovako:

$$[X]_m = z.cm^{\alpha}.g^{\beta}.s^{\gamma}.[p]_m^{\delta} \quad , \text{ elmg CGS prve vrste}$$

$$= (4\pi)^{\frac{\delta}{2}}.z.cm^{\alpha+\frac{3\delta}{2}}.g^{\beta+\frac{\delta}{2}}.s^{\gamma-\delta}.[\mu]_m^{\frac{\delta}{2}} \quad .$$

Izraz u drugom retku predočuje izvedenu elmg CGS mjernu jedinicu druge vrste. Ova nam formula daje za svaku petorku $(z;\alpha,\beta,\gamma,\delta)_m$ kojom je određena mjera elmg CGS prve vrste, pripadni izraz za tu istu mjeru u elmg CGS druge vrste. Pomoću ovog izraza načinjen je Pregled mjera elmg CGS druge vrste koji slijedi.

PREGLED MJERA elmg CGS SUSTAVA DRUGE VRSTE

1. Dužina s	cm
2. Masa m	g
3. Vrijeme t	s
4. Permeabilnost μ	$[\mu]_m = \mu_o$
5. Magnetski pol p	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{\frac{1}{2}}$
6. Magnetski momenat $\vec{M}_{mg}$	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{5}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{\frac{1}{2}}$
7. Magnetska polarizacija $\vec{P}_{mg}$	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{\frac{1}{2}}$
8. Jakost magnetskog polja $\vec{H}$	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
9. Magnetski napon V_{mg}	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
10. Električni pomak $\vec{D}$	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
11. Tok električnog pomaka Ψ	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
12. Magnetska indukcija $\vec{B}$	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{\frac{1}{2}}$
13. Tok magnetske indukcije Φ	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{\frac{1}{2}}$

14. Jakost električne struje I	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
15. Gustoća električne struje $\vec{g}$	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-1}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
16. Induktivitet L	$\frac{1}{4\pi}\ cm.[\mu]_m$
17. Električni naboj Q	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
18. Plošna gustoća naboja σ	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
19. Prostorna gustoća naboja ϱ	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{5}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
20. Električni momenat $\vec{M}_{el}$	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
21. Polarizacija dielektrika $\vec{P}$	$(4\pi)^{\frac{1}{2}}.cm^{-\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.[\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$
22. Jakost električnog polja $\vec{E}$	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-2}.[\mu]_m^{\frac{1}{2}}$
23. Električni napon U	$(4\pi)^{-\frac{1}{2}}.cm^{\frac{3}{2}}.g^{\frac{1}{2}}.s^{-2}.[\mu]_m^{\frac{1}{2}}$
24. Električni otpor R	$\frac{1}{4\pi}\ cm.s^{-1}.[\mu]_m$
25. Specifični otpor r	$\frac{1}{4\pi}\ cm^2.s^{-1}.[\mu]_m$
26. Specifična vodljivost $\varkappa$	$4\pi.cm^{-2}.s.[\mu]_m^{-1}$
27. Kapacitet C	$4\pi.cm^{-1}.s^2.[\mu]_m^{-1}$
28. Dielektričnost ε	$cm^{-2}.s^2.[\mu]_m^{-1}$

32. O b l i k j o š n e k i h b r o j č a n i h j e d n a d ž b i u z u p o t r e b u e l s t C G S i e l m g C G S

Budući da su mjere u CGS sustavima prve i druge vrste jednake po veličini, načelno je svejedno, da li tražimo brojčani oblik neke veličinske jednadžbe služeći se mjerama iz nekog CGS prve vrste ili CGS druge vrste. Izlazi jednak rezultat. Mi ćemo međutim u primjerima koji slijede, upotrijebiti CGS mjere druge vrste. Polazimo uvijek od neke veličinske jednadžbe.

1. Prvi Coulombov zakon za vakuum. Veličina električne sile

$$F = \frac{Q_1\ Q_2}{4\pi\ \varepsilon_o\ r^2}\ .$$

a) elst CGS druge vrste

$$\{F\}_e.cm.g.s^{-2}.4\pi.[\varepsilon]_e.\{r^2\}_e.cm^2 = \{Q_1\ Q_2\}_e.4\pi.cm^3.g.s^{-2}.[\varepsilon]_e$$

$$\{F\ r^2\}_e = \{Q_1\ Q_2\}_e$$

$$\left\{F = \frac{Q_1\ Q_2}{r^2}\right\}_e \qquad \text{elst CGS}$$

b) elmg CGS druge vrste

$$\{F\}_m . cm . g . s^{-2} . 4\pi . \{\varepsilon_o\}_m . cm^{-2} . s^2 . [\mu]_m^{-1} . \{r^2\}_m . cm^2 =$$

$$= \{Q_1\ Q_2\}_m . 4\pi . cm . g . [\mu]_m^{-1}$$

$$\{F\ \varepsilon_o\ r^2\}_m = \{Q_1\ Q_2\}_m$$

$$\left\{F = \frac{Q_1\ Q_2}{\varepsilon_o\ r^2}\right\}_m \quad , \text{ elmg CGS}$$

2. Drugi Coulombov zakon za vakuum. Veličinska jednadžba

$$F = \frac{p_1\ p_2}{4\pi\mu_o r^2} \quad .$$

Obrada kao i u predhodnom primjeru daje:

a) elst CGS druge vrste

$$\left\{F = \frac{p_1\ p_2}{\mu_o\ r^2}\right\}_e \quad , \text{ elst CGS}$$

b) elmg CGS druge vrste

$$\left\{F = \frac{p_1\ p_2}{r^2}\right\}_m \quad , \text{ elmg CGS}$$

3. Električni pomak u polju točkastog naboja.

$$\vec{D} = \frac{\vec{r}}{r}\ \frac{Q}{4\pi\ r^2} \quad .$$

a) elst CGS druge vrste

$$\{D\}_e . (4\pi)^{-\frac{1}{2}} . cm^{-\frac{1}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . s^{-1} . [\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}} . 4\pi . \{r^2\}_e . cm^2 = \{Q\}_e . (4\pi)^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{3}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . s^{-1} [\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$$

$$\{D\ r^2\}_e = \{Q\}_e$$

$$\left\{\vec{D} = \frac{\vec{r}}{r}\ \frac{Q}{r^2}\right\}_e \quad , \text{ elst CGS}$$

b) elmg CGS druge vrste

$$\{D\}_m . (4\pi)^{-\frac{1}{2}} . cm^{-\frac{3}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . 4\pi . [\mu]_m^{\frac{1}{2}} . \{r^2\}_m . cm^2 = \{Q\}_m . (4\pi)^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{1}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . [\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\vec{D} = \frac{\vec{r}}{r}\ \frac{Q}{r^2}\right\}_m \quad , \text{ elmg CGS}$$

4. Magnetska indukcija u nekom sredstvu.

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{P}_{mg} \quad .$$

a) elst CGS druge vrste

$$\{\vec{B}\}_e \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{-\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot [\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \{\mu_o\}_e \cdot cm^{-2} \cdot s^2 \cdot [\varepsilon]_e^{-1} \cdot \{\vec{H}\}_e \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-2} \cdot [\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \{P_{mg}\}_e \cdot (4\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{-\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot [\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\{\vec{B} = \mu_o \vec{H} + 4\pi \vec{P}_{mg}\}_e \quad , \text{ elst CGS}$$

b) elmg CGS druge vrste

$$\{\vec{B}\}_m \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\mu]_m^{\frac{1}{2}} = [\mu]_m \cdot \{\vec{H}\}_m \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\mu]_m^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \{\vec{P}_{mg}\}_m \cdot (4\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\mu]_m^{\frac{1}{2}}$$

$$\{\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{P}_{mg}\}_m \quad , \text{ elmg CGS}$$

5. Magnetsko polje u središtu kružne struje

$$H = \frac{I}{2r} \quad .$$

a) elst CGS druge vrste

$$\{H\}_e \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-2} \cdot [\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}} \cdot 2\{r\}_e \cdot cm = \{I\}_e \cdot (4\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-2} \cdot [\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$$

$$\{H\,r\}_e = 2\pi \cdot \{I\}_e$$

$$\{H = \frac{2\pi I}{r}\}_e \quad , \text{ elst CGS}$$

b) elmg CGS druge vrste

$$\{H\}_m \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\mu]_m^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\{r\}_m \cdot cm =$$

$$= \{I\}_m \cdot (4\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$$

$$\{H = \frac{2\pi I}{r}\}_m \quad , \text{ elmg CGS}$$

6. Ohmov zakon

$$U = R\,I \quad .$$

a) elst CGS druge vrste

$$\{U\}_e \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}} = \{R\}_e \frac{1}{4\pi} cm^{-1} \cdot s \cdot [\varepsilon]_e^{-1} \cdot$$

$$\cdot \{I\}_e \cdot (4\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-2} \cdot [\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}}$$

$$\{U = R\,I\}_e \quad , \text{ elst CGS}$$

b) elmg CGS druge vrste

$$\{U\}_m \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-2} \cdot [\mu]_m^{\frac{1}{2}} = \{R\}_m \frac{1}{4\pi}\, cm \cdot s^{-1} \cdot [\mu]_m \cdot \{I\}_m \cdot (4\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\mu]_m^{-\frac{1}{2}}$$

$$\{U = R\, I\}_m \quad , \text{ elmg CGS}$$

7. Naboj kondenzatora

$$Q = C\, U \quad .$$

a) elst CGS druge vrste

$$\{Q\}_e \cdot (4\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}} = \{C\}_e 4\pi \cdot cm \cdot [\varepsilon]_e \cdot \{U\}_e \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot [\varepsilon]_e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\{Q = C\, U\}_e \quad , \text{ elst CGS}$$

b) elmg CGS druge vrste

$$\{Q\}_m \cdot (4\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot [\mu]_m^{-\frac{1}{2}} = \{C\}_m 4\pi \cdot cm^{-1} \cdot s^2 \cdot [\mu]_m^{-1} \cdot \{U\}_m \cdot (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-2} \cdot [\mu]_m^{\frac{1}{2}}$$

$$\{Q = C\, U\}_m \quad , \text{ elmg CGS}$$

Tako smo transformirali najvažnije jednadžbe, koje su nam bile poslužile pri izgradnji raznih sustava mjernih jedinica u elektromagnetizmu. U dobivenim brojčanim jednadžbama združili su se brojčani faktori veličinskih jednadžbi s odredbenim faktorima mjernih jedinica, pa se zato koeficijenti u brojčanim jednadžbama u pravilu razlikuju od brojčanih faktora u veličinskim jednadžbama od kojih smo pošli.

Kakov međutim oblik imaju dobivene brojčane jednadžbe? Dobivene brojčane jednadžbe imaju oblik (koeficijente) n e r a c i o n a l i z i r a n i h (veličinskih) jednadžbi elektromagnetizma. To su jednadžbe, koje su nekoć bile polazište za definiranje mjera u CGS sustavima. Tada polazeći od tih neracionaliziranih jednadžbi, definirale su se mjere u CGS sustavima tako, da su o d r e d b e n i faktori izlazili jednaki matematičkom jedan. Tako su nastale izvedene CGS mjere i tako je određena njihova veličina. Kasnijim uvođenjem r a c i o n a l i z i r a n i h jednadžbi Heavisideovog tipa kao veličinskih, trebalo je već postojeće CGS mjere prilagoditi ovim jednadžbama i zato se u mnogim izrazima za izvedene mjere javljaju odredbeni faktori, kojima se to prilagođivanje obavlja.

Slučaj CGS mjera u elektromagnetizmu poučan je zato, jer on

pokazuje, da neka mjerna jedinica nije još određena svojom jednadžbom mjerne jedinice, t.j. odredbenim faktorom i dimenzijama obzirom na odabrane osnovne mjere, nego da treba znati još barem jednu veličinsku jednadžbu, u kojoj dolazi fizikalna veličina koja se tom izvedenom mjerom mjeri, a za sve ostale fizikalne veličine u toj jednadžbi, da su mjerne jedinice već definirane.

Prikažimo netom rečeno na jednom primjeru. Izvedena mjera za električni naboj u elst CGS druge vrste dana je izrazom

$$[Q]_e = (4\pi)^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{3}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . s^{-1} . [\varepsilon]_e^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Izraz na desnoj strani međutim predočuje elst CGS mjeru $[Q]_e$ samo uz ove pretpostavke:

1. da osnovne mjere imaju odabrane vrijednosti (napose da vrijedi $[\varepsilon]_e = \varepsilon_o$), i nadalje

2. da za međusobno djelovanje naboja u vakuumu vrijedi zakon pisan u veličinskom obliku ovako

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_o r^2} \quad .$$

Međutim kad bi se pretpostavio Coulombov zakon u neracionaliziranom obliku (bez 4π u nazivniku) kao polazište za izražavanje izvedene mjerne jedinice $[Q]_e$ pomoću i s t i h osnovnih mjera, tada uz istu definiciju i iste osnovne mjere, jednadžba ove iste mjerne jedinice ne bi sadržavala odredbeni faktor $(4\pi)^{\frac{1}{2}}$. Tako se je prije postupalo. Ovaj je odredbeni faktor došao u izraz, koji sada predočuje $[Q]_e$, da bi se već postojeća i p r i j e definirana mjerna jedinica $[Q]_e$ prilagodila n o v o **d o g o v o r e n i m** veličinskim jednadžbama.

Možemo dakle zaključiti ovako. Kad bi se vratili na (veličinske) jednadžbe elektromagnetizma u neracionaliziranom obliku, a takove su se prije upotrebljavale, onda bi iz svih izraza kojima su izvedene mjere elst CGS odnosno elmg CGS pomoću osnovnih mjera prikazane (bilo prve vrste, bilo druge vrste), nestali odredbeni faktori, t.j. svi bi ovi faktori poprimili vrijednost matematičko jedan.

33. E l s t C G S i e l m g C G S s t a r o g s t i l a

U predhodnom smo razmatranju vidjeli, da izrazi koji daju neku izvedenu mjernu jedinicu u osnovnim mjerama, t.zv. jednadžbe mjernih jedinica, zavise o obliku veličinskih jednadžbi i o koeficijentima u tim jednadžbama. Ovo samo podcrtava nužnost postojanja samo j e d n o g oblika veličinskih jednadžbi, od kojih se pri defini-

ranju mjernih jedinica polazi. Ako bi na pr. uz Coulombov zakon u racionaliziranom obliku smatrali također i Coulombov zakon u neracionaliziranom obliku za veličinsku jednadžbu, onda bi to nužno vodilo do zbrke i nesporazuma. U predhodnom smo članku nadalje istaknuli, da su se elst CGS i elmg CGS razvili na jednadžbama elektromagnetizma pisanih u neracionaliziranom obliku. Zato odredbeni faktori u jednadžbama izvedenih mjernih jedinica ovih sustava prikazanih na suvremeni način, prilagođuju te mjerne jedinice danas dogovorenim veličinskim jednadžbama.

Ako dakle odredbene faktore u jednadžbama izvedenih mjernih jedinica elst CGS i elmgCGS stavimo jednake matematičkom jedan, onda smo načinili prvi korak u prošlost. Ta je naime postavka ekvivalentna povratku na neracionalizirane veličinske jednadžbe. Međutim još uvijek imamo izvedene mjere prikazane pomoću četiriju osnovnih mjera.

Ako se poslužimo prikazom CGS mjera druge vrste, onda možemo načiniti još jedan korak prema natrag. To ćemo razmotriti posebno za elst CGS druge vrste i posebno za elmg CGS druge vrste.

Pošto smo dakle u prikazima s v i h izvedenih mjera elst CGS druge vrste uklonili odredbene faktore, a to znači da smo pretpostavili neracionalizirane veličinske jednadžbe (ta je pretpostavka bila prvi korak u prošlost), možemo sada načiniti i drugi korak u prošlost, a taj se sastoji u tome, da se kaže, da je dielektričnost vakuuma ne samo jedinica za tu veličinu, nego da ta dielektričnost i j e s t jedinica, t.j. da je jednaka matematičkom jedan. Dakle ovako:

$$\varepsilon_0 = 1 \quad .$$

Ova postavka ima za posljedicu, da iz svih jednadžbi mjernih jedinica nestaje faktor $[\varepsilon]_e$ bez obzira na koju je potenciju dignut. Time su izrazi svih izvedenih mjernih jedinica svedeni na umnožak potencija triju osnovnih mjera mehanike: cm , g , s . Takove izraze za izvedene mjere elst CGS nalazimo u starim knjigama. Dakle elst CGS starog stila ima u jednadžbi izvedene mjerne jedinice umnožak od samo triju faktora, a to su potencije od cm, g, s i to upravo onako, kako stoje na desnoj strani u prikazu te iste mjerne jedinice u elst CGS druge vrste. Nema odredbenog faktora i nema potencije mjere za dielektričnost $[\varepsilon]_e$. Na osnovu ovoga smatramo, da će iz Pregleda mjera elst CGS sustava druge vrste svatko moći lako zaključiti, kako izgleda prikaz neke izvedene mjere u elst CGS starog stila. Namjerno nećemo načiniti pregleda tih mjera starog stila, da ne bi iz toga nastala možebitna zbrka.

Na sličan način kako se dobivaju izrazi za izvedene mjere u elst CGS starog stila, dobivaju se i izrazi za izvedene mjere elmg CGS starog stila. Opet treba načiniti d v a koraka u prošlost.

Prvi korak u prošlost sastoji se u tome, da se od sadašnjih veličinskih jednadžbi elektromagnetizma vratimo na prijašnje jednadžbe u neracionaliziranom obliku. Uz upotrebu tih nekadašnjih jednadžbi s v i odredbeni faktori u Pregledu mjera elmg CGS postanu jednaki matematičkom jedan (dakako uz iste definicije tih mjera). To vrijedi jednako za mjere elmg CGS prve vrste kao i za one druge vrste. Još uvijek su međutim izvedene mjere prikazane pomoću č e t i r i j u osnovnih mjera.

Drugi korak u prošlost sastoji se u tome, da se uzme da je permeabilnost vakuuma ne samo mjerna jedinica za permeabilnost, nego da ona i j e s t jedinica, t.j. jednaka matematičkom jedan. Tada se nakon ovog drugog koraka, svi prikazi izvedenih mjera pomoću osnovnih mjernih jedinica, svedu na umnožak potencija triju osnovnih mjera mehanike: cm , g , s upravo onako, kako su te potencije napisane u Pregledu mjera elmg CGS druge vrste. Tako smo dobili nakon ovog drugog koraka, prikaz izvedenih mjera u elmg CGS starog stila. U tom prikazu odredbeni faktor jednak je matematičkom jedan za sve izvedene mjere, te nadalje nigdje nije iskazana mjerna jedinica permeabilnosti. Mi ne dajemo pregleda izraza za izvedene mjere u elmg CGS starog stila, da ne bi time načinili zbrku. Kako međutim neki izraz za izvedenu mjeru pisan u starom stilu izgleda, može se lako iz Pregleda mjera elmg CGS druge vrste zaključiti.

Ovdje je na mjestu da načinimo nekoliko primjedbi u vezi načina pisanja izvedenih mjera pomoću osnovnih u CGS sustavima starog stila. Najprije za elst CGS starog stila. Neki autori u svojim knjigama navode da se iz izvedene mjere elst CGS (druge vrste) dobije elst CGS mjera starog stila, ako se stavi $4\pi . [\varepsilon]_e = 1$. To doduše funkcionira za izraze u našem Pregledu mjera elst CGS druge vrste, koji su navedeni od rednog broja 5 pa do zaključno 20, no za preostale izraze to nije točno, kako se svatko može lako uvjeriti. Nemoguće je naime ovom j e d n o m postavkom nadomjestiti d v a koraka koji vode od elst CGS druge vrste do elst CGS starog stila, naime istodobno uklanjanje odredbenih faktora (a to je prijelaz na neracionalizirane jednadžbe), i ujedno stavljanje dielektričnosti vakuuma jednaku jedinici.

Slični neuspjeli pokušaj čini se kod elmg CGS. Tvrdi se, da se dobiju elmg CGS starog stila, ako se ovdje stavi $(4\pi)^{-1} . [\mu]_m = 1$.

To doduše funkcionira za neke izraze kojima su predočene izvedene mjerne jedinice u Pregledu mjera elmg CGS druge vrste, no ne za sve, kako se može svatko lako uvjeriti, ako pokuša ovu supstituciju u izrazima, koji su u Pregledu navedeni pod brojem 5 do zaključno 9, te konačno za mjeru tako važne veličine kao što je dielektričnost (br. 28). I ovo je neuspjeli pokušaj da se dva koraka koji vode od elmg CGS druge vrste do elmg CGS starog stila nadomjeste jednim.

Nije na mjestu ni neko zgražanje nad izrazima koji predočuju izvedene mjere u elst i elmg CGS starog stila. Kao da ti izrazi ništa ne znače ili čak da predočuju neku smiješnu besmislicu. Pitanje je samo, da li ti izrazi daju dovoljno informacija o mjerama koje prikazuju. Oni to daju, jer uz poznavanje jednadžbi od kojih se polazi (a to poznavanje je u svakom slučaju potrebno, pa i kod modernih sustava mjera), te uz poznavanje definicija mjera, ove su mjere potpuno određene i točno one iste, koje su navedene u današnjim moderniziranim prikazima CGS mjernih jedinica. U vezi tih prikaza starog stila može se samo raspravljati, da li je taj stari stil CGS mjera prikladan ili neprikladan, spretan ili nespretan. Da li se tim starinskim izrazima barata lakše i sigurnije, ili možda teže i uz opasnosti zabune, nego što je slučaj s moderniziranim izrazima za CGS mjere.

CGS sustavi starog stila neprikladni su za današnju upotrebu zato, jer se više ne upotrebljava onaj oblik jednadžbi kao veličinski, na osnovu kojih su jednadžbi ti izrazi definirani. Danas taj oblik jednadžbi treba smatrati brojčanim za ovaj sustav mjera. Međutim postavka da je dielektričnost vakuuma za elst CGS starog stila jednaka matematičkom jedan, te analogno u elmg CGS starog stila, da je permeabilnost vakuuma jednaka jedan, stvara između prikaza izvedenih mjera pomoću cm, g, s u jednom i u drugom sustavu jaz tako, da se prikazi mjera za jednu te istu veličinu ne mogu prilagoditi jedan drugome množenjem b r o j č a n i m pretvorbenim faktorom. To je zato, jer su postavke $\varepsilon_o = 1$, odnosno $\mu_o = 1$ protuslovne i one se ne mogu uzeti da istodobno vrijede; ili vrijedi jedna, ili vrijedi druga. Naime ako pretpostavimo (u elst CGS starog stila) $[\varepsilon]_e = \varepsilon_o = 1$, onda s l i j e d i da je $\mu_o = \{\mu_o\}_E \cdot cm^{-2} \cdot s^2$. Time je isključeno samovoljno raspolaganje sa μ_o. Naprotiv ako stavimo (u elmg CGS starog stila) $[\mu]_m = \mu_o = 1$, onda slijedi $\varepsilon_o = \{\varepsilon_o\}_M \cdot cm^{-2} \cdot s^2$. Istodobno uzimanje obih postavki (što krši osnovne zakone matematske logike) dovelo bi doista do apsurdnog rezultata. Ovdje smo mjerni broj veličine mjerene mjernom jedinicom u prikazu starog stila označili

indeksom E za elst CGS starog stila, te analogno indeksom M za elmg CGS starog stila. Jednako ćemo postupiti i s mjerama.

Kao primjer za stari stil navedimo p r i k a z e mjernih jedinica za električni naboj u oba sustava.

$$[Q]_E = cm^{\frac{3}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . s^{-1} \quad ,$$

$$[Q]_M = cm^{\frac{1}{2}} . g^{\frac{1}{2}} . s^{0} \quad .$$

Mjera za naboj $[Q]_M$ ima obzirom na s dimenziju nula. Ovdje smo $s^0 = 1$ pripisali radi kompletnosti.

Ovi izrazi za mjerne jedinice starog stila (dakle desne strane) izrasli su na jednadžbama u neracionaliziranoj obliku. Nadalje pretpostavke uz koje one vrijede nisu međusobno kompatibilne. Zato se s tim izrazima n e s m i j e ići u jednadžbe u racioniziranom obliku. Nadalje budući da gornji izrazi vrijede uz navedene pretpostavke, koje isključuju izjednačenje desnih strana uz upotrebu samo brojčanog pretvorbenog faktora, to slijedi da se treba ograničiti na upotrebu brojčanih jednadžbi.

Kako smo vidjeli, dimenzije (eksponenti) izvedene mjere elst CGS starog stila za neku veličinu elektromagnetizma razlikuju se od dimenzija izvedene mjere elmg CGS starog stila za i s t u veličinu, premda se upotrebljavaju iste tri osnovne mjere u oba sustava. Zato kod uspoređivanja mjernih rezultata dobivenih mjerom jednog sustava, a zatim mjerom drugog sustava, treba se ograničiti na uspoređivanje mjernih brojeva, a to znači, da za to uspoređivanje treba upotrijebiti b r o j č a n e jednadžbe u koje se unose samo mjerni brojevi. Pri tome treba držati na umu, da se nekoje brojčane jednadžbe u elst CGS razlikuju od onih u elmg CGS. Kako to uspoređivanje ide, pokazat ćemo na primjerima koji slijede.

Uzmimo da smo neki električni naboj Q izmjerili ne samo elst CGS mjerom $[Q]_E$ nego i elmg CGS mjerom $[Q]_M$. Možemo dakle naše rezultate mjerenja prikazati ovako

$$Q = \{Q\}_E . [Q]_E$$

$$Q = \{Q\}_M . [Q]_M \quad .$$

Budući da se razlikuju upotrijebljene mjerne jedinice, to se onda razlikuju i mjerenjem dobiveni mjerni brojevi. Taj rezultat mjerenja možemo izraziti ovako

$$\{Q\}_E = \xi . \{Q\}_M \quad ,$$

$$[Q]_E = \xi^{-1} . [Q]_M \quad .$$

U drugu jednadžbu n e s m i j e m o uvrstiti izraze za mjerne jedinice naboja, kojima su te mjere svedene na cm, g, s u elst CGS odnosno u elmg CGS starog stila, jer su ti izrazi dobiveni uz r a z l i č i t e pretpostavke, koje nisu kompatibilne. Uz upotrebu CGS starog stila, dalje od napisane jednadžbe za mjerne jedinice ne možemo ići.

Drukčije međutim stoji stvar za jednadžbu koja veže mjerne brojeve i kojom je određen pretvorbeni faktor ξ . Mi ćemo pokazati kako se iz ovog jednog mjerenja može zaključiti, koliki će biti pretvorbeni faktor, ako se mjeri bilo koja druga veličina u elektricitetu i magnetizmu mjerama iz oba sustava. Ako smo dakle mjerenjem neke količine električnog naboja "statičkom" metodom, pa zatim mjerenjem te iste količine elektriciteta "dinamičkom" metodom, našli pretvorbeni faktor ξ , kojim treba množiti $\{Q\}_M$, da bi dobili mjerni broj $\{Q\}_E$, onda iz ovog mjerenja možemo izvesti odgovarajuću vrijednost pretvorbenog faktora pri mjerenju bilo koje druge električne i magnetske veličine mjerama iz oba sustava.

Mi ćemo sada pokazati, kako se iz predhodnog mjerenja može zaključiti, koliki je mjerni broj dielektričnosti vakuuma $\{\varepsilon_o\}_M$. U elst CGS starog stila vrijedi $\varepsilon_o = 1$, pa je prema tome i $\{\varepsilon_o\}_E = 1$. Poslužimo se Coulombovim zakonom za međusobno djelovanje točkastih električnih naboja. U brojčanom obliku za elst CGS starog stila imamo

$$\left\{F = \frac{Q_1\, Q_2}{r^2}\right\}_E \qquad \text{elst CGS s.s.} \ ,$$

a za iste naboje sila u elmg CGS starog stila dana je brojčanom jednadžbom

$$\left\{F = \frac{Q_1\, Q_2}{\varepsilon_o\, r^2}\right\}_M \qquad \text{elmg CGS s.s.} \ .$$

Budući da je u oba sustava mjera za silu din , a mjera za dužinu cm , to slijedi

$$\left\{F\, r^2\right\}_E = \left\{F\, r^2\right\}_M \ .$$

Prema tome vrijedi (radi se o mjernim brojevima!)

$$\left\{Q_1\, Q_2\right\}_E = \left\{\frac{Q_1\, Q_2}{\varepsilon_o}\right\}_M \ .$$

Budući da po pretpostavci poznajemo pretvorbeni faktor ξ , koji veže mjerne brojeve za naboj mjeren mjerama iz oba sustava, naime

$$\{Q_1\}_E = \xi\, \{Q_1\}_M$$

$$\{Q_2\}_E = \xi\, \{Q_2\}_M \ ,$$

to slijedi

$$\{\varepsilon_o\}_M = \xi^{-2} \quad .$$

Vidimo dakle, da je određivanjem pretvorbenog faktora ξ za električne naboje (mjerenje Webera i Kohlrauscha) izmjerena i dielektričnost vakuuma mjerom elmg CGS starog stila.

Iz Maxwellove formule

$$c = (\varepsilon_o \mu_o)^{-\frac{1}{2}}$$

slijedi veza faktora ξ s brzinom elektromagnetskih valova u vakuumu. Za elmg CGS starog stila imamo

$$\{c\}_M = \{\varepsilon_o\}_M^{-\frac{1}{2}} = \xi \quad ,$$

što znači

$$c = \xi \cdot \mathrm{cm.s}^{-1} \quad .$$

Povezivanje mjera u sustavima CGS starog stila možemo nastaviti. Kapacitet C kugle polumjera r , smještene u vakuumu, dan je brojčanim jednadžbama

$$\{C = r\}_E$$

$$\{C = \varepsilon_o \cdot r\}_M \quad .$$

Budući da se radi o istoj kugli , to je

$$\{r\}_E = \{r\}_M$$

Odavle slijedi

$$\{C\}_E = \{\varepsilon_o\}_M^{-1} \cdot \{C\}_M = \xi^2 \cdot \{C\}_M \quad ,$$

odnosno za mjere

$$[C]_E = \xi^{-2} \cdot [C]_M \quad .$$

Dakako da se u ovoj posljednjoj jednadžbi n e s m i j u mjere za kapacitet izraziti osnovnim mjerama starog stila.

Za naboj na kondenzatoru vrijede brojčane jednadžbe

$$\{Q = C\,U\}_E$$

$$\{Q = C\,U\}_M \quad .$$

Budući da je

$$\{Q\}_E = \xi \{Q\}_M$$

$$\{C\}_E = \xi^2 \{C\}_M \quad ,$$

to onda slijedi

$$\{U\}_E = \xi^{-1} \cdot \{U\}_M$$

$$[U]_E = \xi \cdot [U]_M \quad .$$

Iz Ohmovog zakona izvodimo

$$\{U = R\,I\}_E$$

$$\{U = R\,I\}_M \quad ,$$

da je za električni otpor

$$\{R\}_E = \xi^{-2} \cdot \{R\}_M \quad ,$$

$$[R]_E = \xi^2 [R]_M \quad .$$

Tako bi to mogli nastaviti.

Došli smo do već poznatih rezultata služeći se mjernim jedinicama starog stila. Vidimo da je tu način zaključivanja i postupak drukčiji, zapravo nespretniji, nego kad se služimo mjerama prikazanim na moderni način. Kod upotrebe mjera starog stila ima dodatnih mogućnosti, da se načini pogreška. To je zato, jer prikazi izvedenih mjera starog stila vrijede svaki samo unutar svojega sustava, a ne mogu se miješati. Zato je razumljivo, da su ovi prikazi izvedenih mjera starog stila, koji se osnivaju samo na trima osnovnim mjerama cm, g, s , napušteni i nadomješteni prikazima, koji nemaju tih nedostataka. Ujedno smo mogli uvidjeti iz razmotrenih primjera, zašto se je prije toliko moralo isticati, da se ova veličina mjeri ovom mjerom, a ona onom. To je zato, jer su se upotrebljavale brojčane jednadžbe, a u brojčanim jednadžbama koeficijenti zavise o tome, kojim se mjernim jedinicama služimo.

34. Decimalne mjerne jedinice - predmetci u SI

Decimalna mjerna jedinica-predmetak, stavlja se ispred oznake mjerne jedinice. Nazivi i vrijednosti predmetaka dani su u tabeli.

Naziv	Oznaka	Vrijednost
eksa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hekto	h	10^{2}
deka	da	10^{1}

Naziv	Oznaka	Vrijednost
ato	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
piko	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
mikro	μ	10^{-6}
mili	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
deci	d	10^{-1}

II. ODSJEK : LABORATORIJSKA MJERENJA

U v o d n e n a p o m e n e i u p u t e

U ovom je odsjeku opisan niz aparatura za mjerenje raznih fizikalnih veličina kao što su: dužina, titrajno vrijeme, gustoća, momenat tromosti, napon, otpor, frekvencija, temperatura, toplina isparavanja, žarišna daljina, valna dužina svjetlosti i slično. Sve opisane aparature ostvarene su u studentskom laboratoriju i uređene tako, da uz svaku aparaturu rade po dva opažača. Aparatura sadrži sve što je potrebno za izvođenje mjerenja.

Prije samog početka mjerenja i baratanja spravama, treba pažljivo proučiti uputu, koja je uz aparaturu priložena. To je nužno zato, da bi se sa spravama baratalo na propisani i dozvoljeni način, te tako postigao najbolji mogući rezultat mjerenja. Pravilno i pažljivo barątanje spravama isključuje i nepotrebne štete i kvarove na spravama. Mnoge su sprave nježne i imaju osjetljive dijelove, kao što su ležajevi u mjernim spravama s kazaljkom, ili u analitičkoj vagi, zatim staklene površine optičkih instrumenata, koje se ne smiju taknuti prstom, razne električne sprave, koje mogu pregoriti, ako se preterete, i slično.

Kod rukovanja mjernim spravama nikada se ne smije primjenjivati velika sila ruke. Ako se nešto neda maknuti uz umjerenu silu, onda vjerojatno da se to i ne treba i ne smije micati. Ako pak nešto nije jasno, kako treba postupiti na osnovu priložene upute, onda treba tražiti razjašnjenje i pomoć od asistenata, koji su u laboratoriju. Oni će rado svakome pomoći i nejasno rastumačiti.

O mjerenju se prave bilješke. Najprije se na pomoćni papir ili u bilježnicu, koja u tu svrhu služi, pišu očitanja sa instrumenata, izvode računi, sređuju rezultati. Kad je mjerenje završeno i u konceptu sve priređeno, onda se o čitavom mjerenju napiše referat na papiru, na koji je stavljen otisak zavodskog pečata. Rubrike u pečatu točno se ispune, a zatim ispod pečata slijedi referat. Svaki opažač piše svoj referat. Dakako da su referati one dvojice, koji su zajedno radili, po sadržaju i rezultatima mjerenja jednaki.

Svaki pojedini eksperiment u studentskom laboratoriju uređen je tako, da se može uz normalan rad završiti unutar jednoga posjeta laboratoriju. Taj posjet traje najdulje tri sata, na primjer od 10 do 13. Unutar ta tri sata, student treba da upozna aparaturu, obavi sva mjerenja, koja se u uputi traže, i napiše referat u čistopisu. Taj se referat predaje na izlazu iz laboratorija, da bi ga asistent pregledao i ocijenio. O ocjenama referata zavisi konačna ocjena na kraju semestra.

SPRAVE I INSTRUMENTI ZA MJERENJE

Izneseno će biti nekoliko praktičnih uputa za korištenje mjernih naprava koje se koriste kod izvođenja vježbi iz fizike.

1. M j e r e n j e d u ž i n a

Za mjerenje dužina s točnošću do 1/100 metra koristi se drveni metar. On nosi žig baždarskog ureda. Nema milimetarsku podjelu **i zato se dijelovi centimetra, tj. milimetri, procjenjuju. Kao mjerila za veće dužine služe mjerila u obliku čelične vrpce, koja ima i milimetarsku podjelu. Ima i sklopivih drvenih mjerila.**

Mnogo veća točnost u mjerenju dužina postiže se radioničkim mjerilima. Jedno od njih je pomično mjerilo. Baždareno je, odnosno podjela mu vrijedi kod temperature označene na mjerilu 20°C. Točnost razmaka kljunova može biti 1/10, 1/20 ili 1/50 mm, zavisno o podjeli noniusa.

Drugo radioničko mjerilo je mikrometarski vijak. Njime se mogu mjeriti dužine s točnošću 1/100 mm. Zbog ovako velike točnosti na savinutom dijelu ima zaštitne pločice od toplinski izolacionog materijala, da se ne zagrije od ruke kojom se drži i zbog toga produži.

Napomena: S mjerilima treba postupati pažljivo,! Zapamtite: Ne bacajte ih. Kod mjerenja ne stežite jako. Ne hvatajte ih uprljanim ili vlažnim rukama. To je skup alat i treba se što duže ispravan i neoštećen koristiti kao i sve ostale mjerne naprave. Kovna mjerila treba nakon upotrebe obrisati, da se uklone otisci prstiju i slično.

2. M j e r e n j e v r e m e n a

Za određivanje trajanja nekog zbivanja (fizikalne pojave) koristimo se zapornim urama. O volji eksperimentatora (pritisku na gumb na uri) ovisi početak i završetak mjerenja. To unosi pogrešku ovisno o brzini reagiranja pojedinaca do 1/10 sekunde. Obične, evropske ure titraju s 5 udaraca u sekundi, pa im je točnost 1/5 s, dok američke imaju 3 udarca u sekundi i točnost 1/3 s.Brojčanik ure je obično podijeljen na 60 dijelova=60 sekundi=1 minuta, s finijim međuoznakama do 1/5 s. U tom slučaju se očitavaju direktno sa skale trajanja mjerenog pojava na 2/10 s. Ako trajanje iznosi više od 1 minute, to pokazuje mala kazaljka na brojčaniku unutar velikog. Označena je u dijelovima od 0 do 30, sve po minutu.

Ako je brojčanik zaporne ure podijeljen na 100 dijelova, označava stotinke minute. Ako se na uri očita npr. 2'84 minuta, onda se to preračuna u sekunde ovako:

$2{\cdot}84$ minuta = 2 x 60 s + 84 $\frac{60}{100}$ s = 120 s + 50·4 s = 170·4 s.

Iz očitanja u stotinkama minute dobiju se sekunde množenjem s faktorom $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.

Vraćanje na nulu vrši se istim start-stop gumbom ili drugim, ovisno o izvedbi.

3. M j e r e n j e s i l e

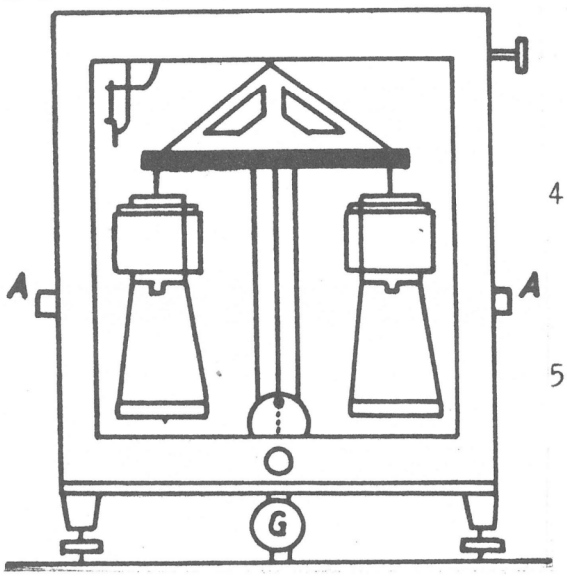
Vage i dinamometri, kojima se mjeri sila, npr. težina, obično su baždareni u jedinicama N (njutn) ili kp (kilopond). Za preračunavanje vrijedi 1 kp = 1 kg·9·81 m·s^{-2} = 9·81 N.

Na vagama su utezi s oznakama kg (kilogram) ili po dekadskom sistemu manjim mjerama g (gram). Budući da kod nas vlada normalna teža (akceleracija slobodnog pada je 9·81 m/s^2) oznake odgovaraju jedinicama za silu u kp , odnosno dekadski manjim mjerama. Nakon 31. prosinca 1980.ne smije se više iskazati veličina sile u kilopondima. Ovdje navedena veza služi da se podatak očitan sa dinamometra starije izvedbe može preračunati.

Vaga na kojoj se težina tereta uspoređuje s težinom utega, jest sprava na kojoj se mjeri masa tereta. Rezultat takovog mjerenja je nezavisan o akceleraciji teže.

P r a v i l a v a g a n j a n a a n a l i t i č k o j v a g i

1. Na analitičku vagu ne smije se ništa metati niti s nje skidati dok je otvorena (otkočena).
2. Vaga se otkoči okretanjem gumba G ulijevo, a zakoči okretanjem istog udesno.
3. Sjednite točno pred sredinu vage i baratajte s vagom mirno i strpljivo. Za sve vama nepoznato obraćajte se demonstratorima i asistentima, a nikako nemojte ništa dotjerivati ili popravljati na vagi.



4. Ormarić se otvara okretanjem gumbi A s lijeve i desne strane vage. Na desnu se stranu stavljaju utezi, a na lijevu mjereni predmet.
5. Kutija s utezima mora biti uz desnu stranu vage, a utezi se vade samo pincetom, koja je u kutiji. Zabranjeno je primati utege rukom. Utezi u obliku pločica poredani su u kutiji ovim redom: 500 mg, 200 mg, 100 mg, 100 mg, 50 mg, 20 mg, 10 mg i tako ih treba uvijek vraćati u kutiju.

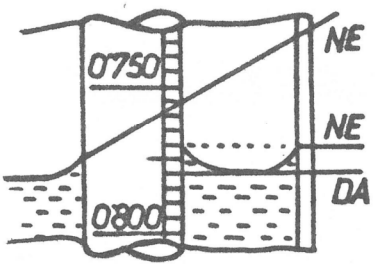
6. Na posebnoj polugi na gornjem dijelu vage nalazi se na maloj kukici tzv. jahač koji se stavlja samo na desni krak gornje crne poluge i služi za mjerenje tisućinke i desetisućinke grama. Ako je jahač npr. na drugoj crti poslije brojke 3 onda je to 0·0034g. Dakle bijele brojke na crnoj gornjoj poluzi znače tisućinke grama, a zarezi između brojaka dvije desetisućinke grama. Pazite : Jahač se ne smije stavljati na lijevi krak poluge !

R e d v a g a n j a

1. Kazaljka prazne i otkočene vage ne mora pokazivati nulu skale, ali kod vaganja treba se držati nul točke tako, da ako gledamo jednim okom, onda se moraju poklapati tj. biti u istom pravcu kazaljka vage, nula na skali i točka na leći načinjena tintom.
2. Zakočite vagu i na lijevu stranu stavite nepoznatu masu.
3. Uvijek na zakočenu vagu stavljajte redom po jedan uteg počevši od najvećeg .Dok god prevaguje desna strana zamjenjujte utege narednim manjim. Kad prvi put prevagne lijeva strana, ostavite uteg na vagi, pa dodajte redom na isti način utege, koji su po veličini jednaki posljednjem, odnosno manji od njega.
4. Kad je uspostavljena ravnoteža, zakočite vagu i zatim skinite nepoznatu masu.
5. Skidajte utege s desne zdjelice i stavljajući ih na njihovo mjesto u kutiju za utege bilježite točno njihovu masu. Zbroj masa utega treba izraziti u decimalnom broju u gramima.
6. Vagu treba ostaviti čistu, zatvorenu i zakočenu.
7. Na kukicu zdjelice vage vješa se bakrena elektroda (s vježbe bakreni kulometar).

4. M j e r e n j e g u s t o ć e

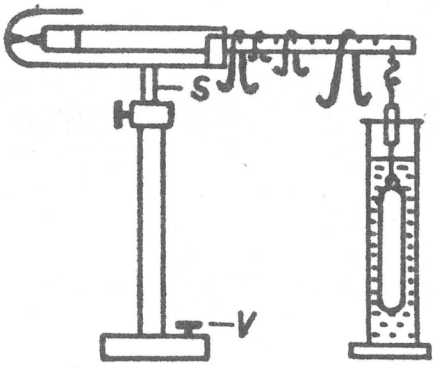
Za mjerenje gustoće kapljevina služimo se areometrima i Mohr-Westphalovom vagom.



A r e o m e t a r

Razdioba skale na areometru može biti npr. od 1·000 do 0·700 g/cm^3. Areometar ulažite pažljivo u nagnutu menzuru do 3/4 napunjenu tekućinom. Kada se očitava (u vertikalnom položaju) mora se gledati horizontalno ravni dio tekućine, da uslijed paralakse ne nastanu pogreške kod očitanja. Prema slici gustoća tekućine je 0·780 g/cm^3.

U p u t a z a M o h r-W e s t p h a l o v u v a g u



Stup vage S treba podići toliko da ronilac obješen na kraj vage slobodno visi u praznoj i suhoj čaši, koja je podmetnuta. Tada se namjesti ravnoteža vage, dok je ronilac još suh, vijcima V u nozi vage, dok na poluzi nema nijednog jahača.

Kapljevina kojoj se želi izmjeriti gustoća ulije se u čašu do tolike visine da ronilac bude sasvim potopljen, kad poluga vage dođe u vodoravni položaj.

Uz potopljeni ronilac treba uspostaviti ravnotežu vješanjem utega (jahača) u zareze na poluzi vage.

Jahače treba hvatati samo pincetom !

Započne se s najtežim jahačem (masa 5g) i on se premješta po zarezima na poluzi dotle, dok ne dođe u onaj zarez gdje je njegov **momenat** još premalen da uravnoteži uzgon. To znači ako se ovaj jahač premjesti na zarez sa slijedećim većim brojem, njegov **momenat** je veći od momenta uzgona i poluga s roniocem ode prenisko. Sada se isti postupak ponovi s drugim po veličini jahačem (masa 0·5g). Ukoliko bi taj jahač trebalo objesiti u isti zarez na poluzi, u kojem već visi prvi jahač, onda se taj drugi jahač objesi na nožicu prvog. (Da se takovo vješanje omogući, nožice jahača su zavinute prema gore). Nakon toga vješa se treći jahač po veličini (mase 0·05 g), a konačna ravnoteža uspostavi se sa četvrtim jahačem mase 0·005 g.

Gustoća kapljevine u g/cm^3 očita se iz položaja jahača na poluzi. Započne se s najtežim jahačem, pa onda dolazi drugi itd. Gustoća je 0·....g/cm^3. Iza nule redom dolaze brojke koje označavaju položaje jahača. Npr: najteži jahač je na 7, slijedeći na 1, treći na 4, a četvrti na 2 i gustoća je 0·7142 g/cm^3.

5. M j e r e n j e e l e k t r i č n i h v e l i č i n a

Kod mjerenja se koriste instrumenti za ugradnju u razne mjerne i kontrolne naprave u pogonima i laboratorijima. To su ampermetri, voltmetri, frekvencmetri i vatmetri.

Na instrumentima se mogu vidjeti slijedeće oznake s pripadnim značenjima:

— Instrument mjeri istosmjerne struje i napone.

~ Mjeri izmjenične struje normalnih tehničkih frekvencija

od 15 do 65 Hz.

Instrument ima sistem za pokazivanje s pomičnim željezom.

Instrument ima sistem za pokazivanje sa zakretnim svitkom.

1·5 Klasa ili razred točnosti, koji označava najveću pogrešku ± 1·5 % mjernog dometa.

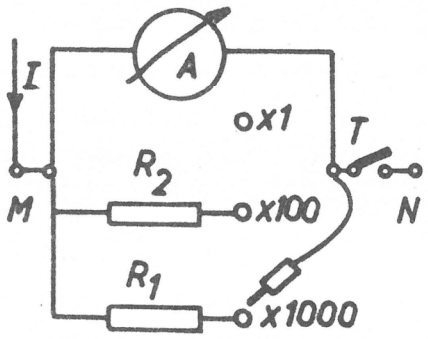
ili Kućište i priključnice imaju najveći ispitni napon 2 kV, a to odgovara pogonskom naponu do 650 V.

Mjerni sistem instrumenta je vibracioni (npr. frekvencmetar)

Elektrodinamički mjerni sistem instrumenta (npr. vatmetar).

Da bi se s istim instrumentom mogle mjeriti i veće struje od označene na skali, ugrađeni su u kutiju instrumenta otpornici kojima se, uz prikladno spajanje, proširuje mjerno područje.

Otpornici se spajaju paralelno instrumentu A, tako da kroz instrument teče samo dio ukupne struje, dok preostali dio teče kroz paralelno priključeni otpornik. Omjer struje koja teče kroz instrument (miliampermetar ili mikroampermetar) i ukupne struje ovisi , kao što se vidi, o iznosu paralelno priključenog otpora. Ako se bananski utikač uključi u utičnicu označenu s "x 1000" onda kroz instrument teče 1/1000 ukupne struje I, koja ulazi u stezaljku M, dok



kroz otpornik R_1 teče preostalih 999/1000 dijelova struje I. Prema tome je struja I, koja ulazi u priključnicu M i teče kroz potrošač, tisuću puta veća od struje koju pokazuje instrument. To znači da se očitanje na instrumentu treba množiti s 1000 da bi se u tom slučaju dobio pravi iznos struje.

Ako je bananski utikač utisnut u utičnicu označenu s "x 100" onda se uključi druga vrijednost paralelno priključenog otpornika R_2 i očitana vrijednost struje na instrumentu množi sa 100. Priključivanjem na utičnicu "x 1" **cijela** struja potrošača prolazi kroz instrument i on tada direktno pokazuje pravu vrijednost struje. U ovakovom priključku ampermetar ima najveću osjetljivost i upotrebljava se za mjerenje najmanjih struja (mjerenje struje kroz reverzno polariziranu diodu ili kroz triodu s velikim negativnim prednaponom).

Kada se mjerni opseg instrumenta poveća za faktor 5 onda kroz paralelni otpornik teče 4/5 struje I, dok samo 1/5 teče kroz ampermetar. Prema tome je jakost struje I, koja teče kroz potrošač pet

puta jača od struje koju pokazuje ampermetar. Ako se utikač stavi u položaj "x3", onda se uključi druga vrijednost otpornika i očitanja na ampermetru množe s faktorom 3 da bi se dobila prava vrijednost struje kroz potrošač.

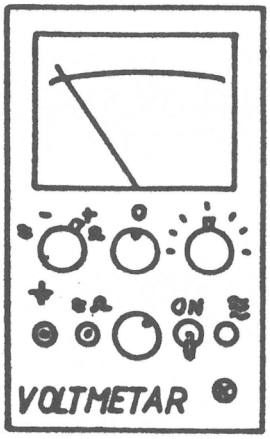
Za ovako priključene otpornike kažemo da "shuntiraju" instrument, a čitav slog otpora upotrebljenih u tu svrhu naziva se shunt.

Da bi se mjerenje moglo izvršiti ispravno, treba se pridržavati slijedećeg:

1. Prije svakog mjerenja priključiti bananski utikač na najveće mjerno područje (x1000 ili x5) ovisno o upotrebljenom shuntu.
2. Ukoliko je otklon premalen tek tada treba prebaciti utikač na niže područje (x100 , odnosno x3).
3. Bananski utikač **ne smije** nikada ostati neuključen.
4. Pritiskom na tipku T na kutiji shunta uključuje se strujni krug i tek tada se može očitati iznos struje.
5. Nakon izvršenog očitanja treba otpustiti tipku T.
6. Pri radu se u svemu treba pridržavati uputa.

Uputa za rukovanje elektronskim voltmetrom

Prije upotrebe treba elektronski voltmetar priključiti na gradsku mrežu (220 V). Prekidač na prednjoj ploči se prebaci u položaj ON i upali se crvena žaruljica. Treba pričekati oko 10 minuta da se instrument ugrije. Korekcija nule izvodi se gornjim srednjim gumbom tako, da se kazaljka dovede u nulti položaj. Pri tome moraju priključnice biti kratko spojene tj. napon na ulazu mora biti nula, a preklopnik područja (gornji desni gumb) u položaju 1°5V. Iza toga se taj preklopnik prebaci na potrebno više područje. Kod mjerenja istosmjernih napona preklopnik za biranje vrste rada (gornji lijevi gumb) mora biti u položaju označenom s + ili -. Izmjenični naponi se mogu mjeriti kada je taj gumb u položaju $\approx$. Zajednička priključnica za sve vrste mjerenja ima oznaku $\doteq$. Kod mjerenja izmjeničnih napona druga priključnica je označena s $\approx$, a istosmjerne napone mjerimo preko crne sonde spojene na konektorsku priključnicu s oznakom $\approx$. Nakon korigiranja nule može se započeti s mjerenjem. Naponsko područje bira se gornjim desnim preklopnikom, a dobiveni rezultati očitaju na odgovarajućoj skali. Npr. u položaju 1°5 V puni otklon kazaljke odgovara naponu na priključnicama voltmetra od 1°5 V. Po završetku mjerenja prekidač prebacite prema dolje, a preklopnik naponskog područja na 500 V i isključite instrument iz gradske mreže.



POGREŠKE MJERENJA

Kad se neka fizikalna veličina mjeri, onda je rezultat mjerenja opterećen pogreškama. Time hoćemo reći da se rezultat mjerenja razlikuje od prave vrijednosti veličine koju mjerimo. Da prava vrijednost postoji, to međutim pretpostavljamo.

Pogreške mogu biti grube, sistematske i slučajne. Gruba pogreška može nastati nepažnjom opažača; npr. ako sprava ima više skala, pa opažač pročita vrijednost sa krive skale, ili npr. krivo pročita neku znamenku, recimo 6 namjesto 8 i sl. Mjerenje opterećeno grubom pogreškom opaža se kod višekratnog ponavljanja mjerenja tako, da mu rezultat leži posvema izvan područja vrijednosti u kojem su sadržana ostala mjerenja. Kad smo spoznali, da je kod nekog mjerenja načinjena gruba pogreška, onda se rezultat takvog mjerenja odbacuje i ne uzima u obzir kod daljnje obrade.

Sistematske pogreške uzrokovane su nekim nama nepoznatim stalnim utjecajem na rezultat mjerenja, koji djeluje tako da je rezultat ili trajno prevelik ili trajno premalen. Tako npr. ako mjerimo neku dužinu mjerilom koje se je tijekom vremena skratilo, (npr. drveni lineal koji se je osušio), onda će rezultat mjerenja dužine biti sistematski prevelik. Ako se je nekom termometru sa živom staklena posuda stegnula uslijed "sekularnih" promjena u staklu, čitat ćemo sistematski previsoku temperaturu.

Slučajne pogreške su one koje nastaju od nepredvidivih smetnji i promjena u aparaturi, te nekontroliranih vanjskih utjecaja. Ove pogreške,u najviše slučajeva, podjednako mogu načiniti rezultat mjerenja većim, odnosno manjim od prave vrijednosti. Tako npr. trenje u ležajevima sprave s kazaljkom uzrokuje, da se kazaljka može namjestiti ili na nešto veću ili nešto manju vrijednost. Očitanje položaja kazaljke nije također sigurno. Tu se može dati i veća i manja vrijednost. Mala kolebanja temperature, trešnja stola na kojem je aparatura i slično, mogu utjecati na rezultat mjerenja.

Ako pretpostavimo, da ne činimo grube pogreške kod mjerenja te da smo sve nama poznate sistematske pogreška uklonili, onda svakom mjerenju ostaju još slučajne pogreške. One su kod nekih mjerenja veće, a kod nekih manje. Što su slučajne pogreške manje to je mjerenje preciznije, a to znači da se uzastopna mjerenja iste veličine međusobno slažu na više prvih mjesta mjernog broja u rezultatu mjerenja. Ako je neko mjerenje precizno, ono još ne

mora biti i točno u tom smislu da daje u mjernom broju valjane vrijednosti pravog rezultata onako daleko, kako se znamenke u mjernim rezultatima slažu. Razlog tome može biti neka nama nepoznata sistematska pogreška, ili naše aparature, ili načina mjerenja. Prema tome je preciznost mjerenja tek nuždan uvjet za točnost mjerenja.

Ako dakle promatramo samo slučajne pogreške, onda smatramo da ćemo se pravoj vrijednosti najbolje približiti, ako od pojedinačnih mjerenja načinimo aritmetičku sredinu. Ako su mjerenja dala pojedinačne vrijednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, onda je srednja vrijednost

$$\overline{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n) .$$

Pojedine se vrijednosti x_i , razlikuju od srednjaka. To su devijacije tih vrijednosti

$$s_i = x_i - \overline{x} .$$

Dakako da je zbroj svih devijacija nula; to slijedi iz definicije srednje vrijednosti. Međutim kao neka mjera za preciznost našeg mjerenja može poslužiti apsolutna vrijednost najveće devijacije

$$\left| s_{maks} \right| = \left| x_i - \overline{x} \right|_{maks} .$$

Budući da su devijacije i pozitivne i negativne, to se onda definira i srednja apsolutna devijacija

$$d = \frac{1}{n} (|s_1| + |s_2| + \ldots + |s_n|) .$$

Međutim za obradu rezultata najviše se upotrebljava standardna devijacija definirana Besselovom formulom

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} (s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2)} .$$

Kad bi srednja vrijednost $\overline{x}$ bila točno jednaka pravoj vrijednosti x_o mjerene veličine, onda bi devijacije koje su gore definirane bile ujedno i pogreške mjerenja. Kako mi pravu vrijednost ne poznajemo, to onda za ocjenu pogrešaka mjerenja služe devijacije. Pa je tako maksimalna devijacija približno i maksimalna pogreška mjerenja. Srednja apsolutna devijacija približno srednja apsolutna pogreška. Slično i standardna devijacija je srednja kvadratna pogreška.

Srednjak $\overline{x}$ se približuje pravoj vrijednosti i za njega se uzima da je određen sa srednjom kvadratnom pogreškom

$$\overline{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

Tada je vjerojatnost 68 % da se prava vrijednost nalazi u intervalu

$$(\bar{x} \pm \bar{s}) \quad .$$

Prema tome ako je srednja kvadratna pogreška pojedinačnih mjerenja $s = 0{\cdot}18$, a obavili smo 10 mjerenja, onda je srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine svih mjerenja

$$\bar{s} = \frac{0{\cdot}18}{\sqrt{10}} \doteq 0{\cdot}06 \quad .$$

Relativnu pogrešku nekog mjerenja računamo tako, da devijaciju tog mjerenja dijelimo sa srednjom vrijednosti $\bar{x}$. Dakle ovako

$$e = \frac{s}{\bar{x}}$$

Relativna pogreška može se dati i u postotcima

$$p = 100\ e\ \% \quad .$$

Ako je npr. mjerenjem dobiven mjerni broj

$$x_i = 31{\cdot}4$$

pa neka je

$$s_i = 31{\cdot}4 - 31{\cdot}1 = 0{\cdot}3$$

onda je

$$e_i = \frac{0{\cdot}3}{31{\cdot}1} \approx 0{\cdot}01$$

$$p_i = 1\ \% \quad .$$

Mi dakle računamo s devijacijama kao da su pogreške mjerenja, tj. mi pretpostavljamo, da srednja vrijednost dovoljno dobro predočuje pravu vrijednost mjerene veličine.

Budući da u našem laboratoriju nisu postavljene aparature velike preciznosti, to ćemo rezultate mjerenja predočavati (ako smo obavili najmanje tri mjerenja iste veličine uz jednake uvjete) ovako

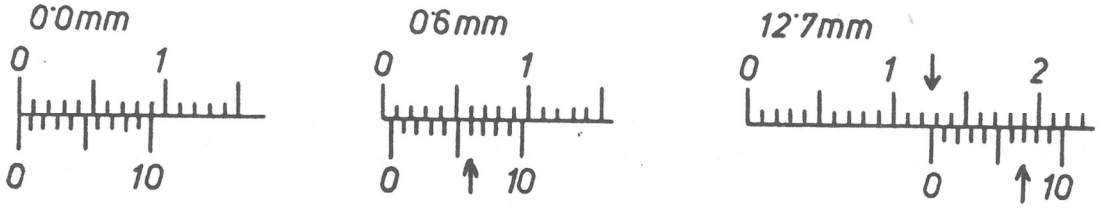
$$x_o = \bar{x} \pm \left| s_{maks} \right| \quad ,$$

tj. kao područje u kojem smatramo da se nalazi prava vrijednost. To je područje interval širine $2\left|s_{maks}\right|$ koji ima srednju vrijednost $\bar{x}$ na svojoj sredini.

O obradi mjernih rezultata i definiranju raznih veličina u vezi s time, te o teoriji pogrešaka, postoji opširna literatura.

MJERENJE MJERILIMA

Za razna radionička mjerenja upotrebljava se pomično mjerilo. Pomično mjerilo sastoji se iz štapa po kojemu se može klizati okvir, koji nosi nonius. Princip noniusa jest da dužinu od 9 milimetara glavne skale na štapu podijelimo na 10 dijelova, tako da svaki dio noniusa iznosi 9/10 mm, a razlika između jednog dijela osnovne skale na štapu (1 mm) i dijela skale noniusa iznosi točno 1/10 mm (vidi sl.1.a). Podudaraju li se npr. šesta crtica

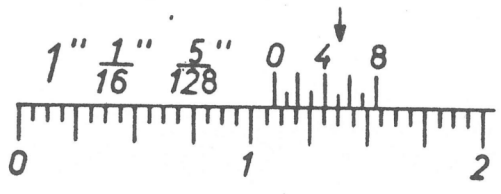


Sl. 1. a) b) c)

noniusa sa šestom crticom štapa, onda je razlika između nul-crtica štapa i noniusa 0·6 mm, kao na sl.1.b). Slika 1.c) prikazuje nam položaj noniusa, kada mjerena veličina iznosi 12·7 mm.

Podjela noniusa može biti i na 20 dijelova, tako da mjerimo na 1/20 mm, ili na 50 dijelova, kada dobivamo 1/50 mm, te s njim možemo mjeriti na 2/100 mm.

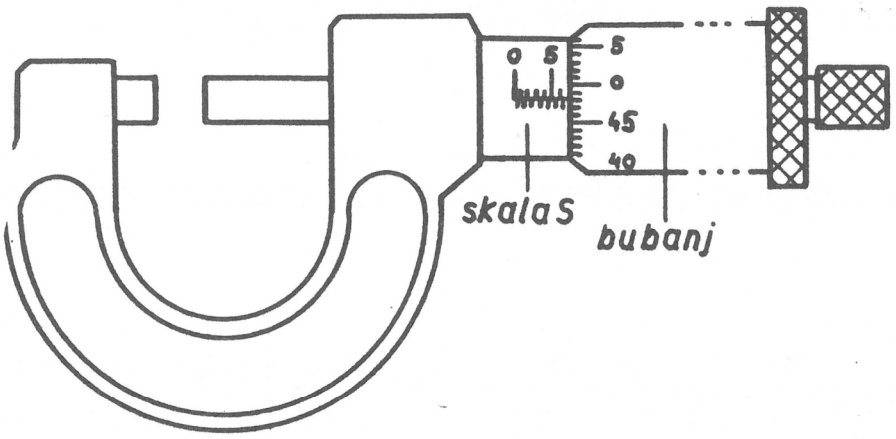
Gornja razdioba na pomičnom mjerilu su palci ili coli (na mjerilu je oznaka "inch"). Jedan palac ima 25·40 mm. Svaki palac ili col razdijeljen je na 16 dijelova; znači svaki dio je jednak šesnaestini palca. Princip noniusa je da dužinu od 7 dijelova glavne skale podijelimo na 8 dijelova, tako da je svaki dio noniusa kraći za 1/128 palca od 1/16 palca. To je zato jer 7/16 podijeljeno sa 8 daje 7/128, a 7/128 više 1/128 daje 8/128, a to je 1/16. Npr. ako na mjerilu 0 noniusa leži između prve i druge crte poslije brojke 1 na glavnoj skali, a poklapa se prva crtica poslije brojke 4 noniusa (sl.2.) sa crtom glavne skale, onda se to očitava: 1 palac 1/16 palca i 5/128 palca.



Sl. 2.

Mikrometarski vijak sastoji se iz preciznog vijka i matice sa skalom. Pri jednom punom okretaju pomakne se vijak za 1/2 mm.

Ta se milimetarska razdioba može pročitati na matici (vidi sl.3.), dok se dijelovi okretaja očitaju na bubnju. Bubanj treba dva puta okrenuti da se pomakne za 1 mm. Bubanj je razdijeljen na 50 dijelova, tako da se na taj način omogućuje točno očitavanje od 1/loo milimetra, jer 1/2 mm podijeljeno sa 50 daje 1/100 mm. Mjeri se ovako: bubanj se drži za krajnji desni (nareckani) dio i vrti toliko dok vrh vijka ne dotakne mjereni predmet. Pri daljnjem okretanju vrtjet će se samo taj dio, a ne i dio bubnja sa skalom. Tako se sprečava prejako stezanje predmeta. Očita se cijele milimetre na gornjem dijelu skale S , a zatim polovine milimetra na donjem dijelu skale i tome se dodaju stotinke milimetra očitane na bubnju.



Sl.3.

Prema slici je to: 6 + 0·5 + 0·48 = 6·98 mm .

1. MJERENJE: Odredite volumen danog kvadra. Načinite pet mjerenja i dobivene vrijednosti unesite u tablicu. Izračunajte **pogrešku svakog mjerenja volumena. Odredite područje** pouzdanosti rezultata mjerenja. Mjerenje izvedite pomičnim mjerilom.

a(cm)	b(cm)	c(cm)	V_i(cm^3)	$V_i - \overline{V}$(cm^3)

$\overline{V}$ = ... cm^3

$V_o = \overline{V} \pm |s_{maks}|$

2. MJERENJE: Pomičnim mjerilom izmjerite u palcima slijedeće veličine: unutarnji i vanjski promjer danog šupljeg valjka, zatim visinu i debljinu, kao i debljinu žice.

3. MJERENJE: Nađite volumen dane kugle. Mjerite mikrometarskim vijkom. Načinite pet mjerenja i unesite rezultate u tablicu. Izračunajte pogrešku svakog mjerenja volumena. Odredite područje pouzdanosti dobivenih rezultata mjerenja.

d(mm)	$V_i(mm^3)$	$V_i - \overline{V}(mm^3)$

$$\overline{V} = \ldots \; mm^3$$

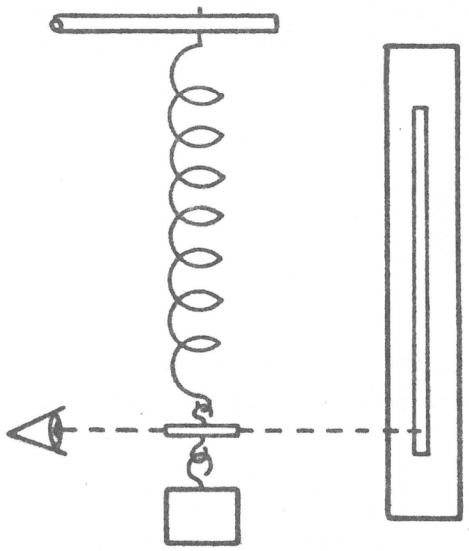
$$V_o = \overline{V} \pm |s_{maks}|$$

Opaska: Rezultate navodite s onoliko decimalnih mjesta, na koliko ste izmjerili fizikalnu veličinu.

Pribor:
1. Pomično mjerilo u kutiji
2. Mikrometarski vijak
3. PVC kutija
4. Kvadar
5. Šupli valjak
6. Žica
7. Kugla

ZAKON SPIRALNE OPRUGE

Svrha je ovog mjerenja da se nađe veza između duljine l elastične spirale opruge, i sile P koja tu oprugu rasteže. Da to nađemo, mjerit ćemo duljine l_1, l_2, l_3, .. koje opruga poprimi, kad je redom napregnemo najprije silom P_1, zatim P_2, pa P_3 itd. Tražimo, dakle, vezu između dviju fizikalnih veličina koje zavise jedna o drugoj. Pri tome treba za ovo mjerenje odabrati prikladne mjere i mjerila.



Duljinu l opruge očitavamo sa mjerila koje je priljepljeno na zrcalo. Kao kraj spirale uzima se okrugla ploča što visi na njenom kraju. Položaj te ploče očita se tako da se gleda jednim okom smjerom okomitim na mjerilo. Tada se ploča prekriva sa svojom slikom u zrcalu i sa slikom zjenice oka kojim se vizira. Spirala treba tako visjeti da se slike oka i ploče vide u uskom dijelu zrcala. Mjerenje se započne s neopterećenom spiralom. Tome odgovara položaj ploče l_0.

Sila P koja će pri ovom mjerenju naprezati oprugu, bit će težina G utega što ćemo ga objesiti na donju kvačicu na ploči. U tu svrhu nam služe utezi s masama 50 gram, 100 gram i 200 gram. Težina utega G dobije se tako da se njegova masa m množi s gravitacijom g mjesta gdje se uteg nalazi. Prema tome će u našem mjerenju biti

$$P = G = m\,g\,.$$

Budući da je težina G razmjerna masi m, to je težina utega od 100 gram dvaput veća od težine utega od 50 gram. Onaj od 200 gram ima četverostruku težinu. Označimo li težinu utega od 50gram sa G_1, onda utezi koje ćemo vješati na kraj opruge imaju težine G_1, $2G_1$, $3G_1$. Pomoću tih utega možemo ostvariti sile

$$P = G_1\,,\ 2\,G_1\,,\ 2\,G_1 + G_1 = 3\,G_1\,,\ \text{itd.}$$

Prije početka mjerenja priredimo si tablicu u koju ćemo unesti mjerene vrijednosti. U prvom retku neka su vrijednosti za silu P, u drugom za duljinu l izraženu mjernim brojem $\{l\}$ u centimetrima. U treći redak doći će prirasti tog broja uz jednoličnо povećanje sile P. Dakle ovako :

P	0	G_1	$2G_1$	$3G_1$	$4G_1$	$5G_1$	$6G_1$	$7G_1$	$8G_1$	$9G_1$
$\{l\}$										
$\Delta\{l\}$										

Jednako mjerenje izvedite s drugom oprugom. I za to drugo mjerenje načinite tablicu kao i za prvo.

Rezultate obaju mjerenja prikažite grafički na milimetarskom papiru. Iz tablica i grafičkog prikaza odredite područje linearnosti za prvu i za drugu oprugu :

Prva opruga se rasteže linearno za

$$9\,G_1 \geq P \geq x_1\,G_1\,, \qquad x_1 = \ldots$$

Druga se opruga rasteže linearno za

$$9\ G_1 \geq P \geq x_2 G_1 \quad , \qquad x_2 = \ldots$$

Ovdje $x_1 G_1$, odnosno $x_2 G_1$, znači najmanju težinu od koje započne linearno rastezanje.

Za svaku oprugu možemo izračunati konstantu elastičnosti c služeći se podacima za područje linearnosti. Računamo po formuli

$$c = \frac{(9 - x)\ G_1}{l_9 - l_x} \quad .$$

U našem primjeru je

$$G_1 = 50 \text{ gram} \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} \quad ,$$

pa je

$$c = \frac{(9 - x) \cdot 50 \cdot 981}{\{l_9\} - \{l_x\}} \quad \frac{\text{gram}}{\text{sek}^2} \quad .$$

Mjerna jedinica kojom je ovdje c izražen može se lako pretvoriti u jedinicu SI sustava,

$$\frac{\text{gram}}{\text{sek}^2} = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{sek}^2} = 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{met}} \quad .$$

Ako to uvrstimo u formulu za c , dobit ćemo

$$c = 49{\cdot}05 \frac{9 - x}{\{l_9\} - \{l_x\}} \quad \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad .$$

Pomoću posljednjeg izraza izračunamo konstante za obje opruge :

$$c_1 = \ldots \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad , \quad c_2 = \ldots \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad .$$

Ta mjerenja možemo kontrolirati dinamički ako se poslužimo formulom za jednostavno titranje :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad .$$

Na prvu oprugu objesimo uteg mase

$$m = 300 \text{ gram} = 0{\cdot}300 \text{ kg} \quad ,$$

pa izmjerimo titrajno vrijeme T_1. (Mjeri se trajanje od najmanje deset titraja, pa odatle odredi T).

Jednako postupimo i s drugom oprugom. Tako dobijemo mjerenjem

$$T_1 = \ldots \text{ sek} \quad , \quad T_2 = \ldots \text{ sek} \quad .$$

Ako se upotrijebe izmjerene vrijednosti za c_1 , odnosno c_2, možemo ta vremena izračunati

$$T_1' = 2\pi \sqrt{\frac{0{\cdot}3}{\{c_1\}}} \text{ sek}, \quad T_2' = 2\pi \sqrt{\frac{0{\cdot}3}{\{c_2\}}} \text{ sek}$$

$$T_1' = \ldots \text{ sek} \quad , \quad T_2' = \ldots \text{ sek} \quad .$$

Ovdje su u vitičastim zagradama mjerni brojevi konstanta elestičnosti izraženih jedinicom N/m. Prije uvrštavanja izrazili smo i masu jedinicom SI , naime u kg .

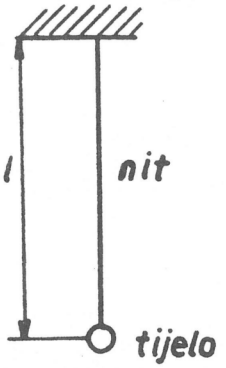
Napomena : Pokušajte ocijeniti pogreške kojom su izmjerene konstante c_1 odnosno c_2 .

AIRY-EVO NJIHALO

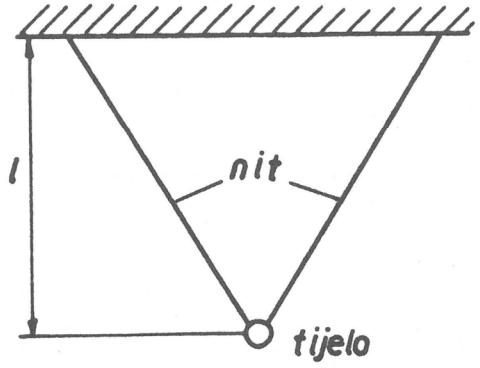
Jednostavno njihalo je sitno tijelo obješeno na niti stalne duljine. Titrajno vrijeme T ovog njihala određeno je duljinom l njihala. Teorija daje za titrajno vrijeme ovaj rezultat :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdje g znači akceleraciju pri slobodnom padu. Ako načinimo njihalo prema sl.1. onda to njihalo može njihati u bilo kojoj ravnini,



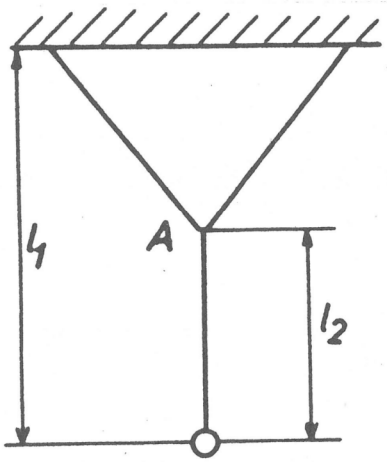
sl.1. Jednostavno njihalo



sl.2. Jednostavno njihalo obješeno bifilarno

npr. lijevo-desno ili naprijed-natrag. Ako se želimo osigurati da njihalo njiše samo u jednoj unaprijed određenoj ravnini, onda ga treba objesiti bifilarno. Njihalo na sl.2. može njihati samo naprijed-natrag. U slučaju bifilarnog obješenja nije duljina njihala l jednaka duljini niti. U ovom slučaju l je jednako visini istokračnog trokuta, kojemu su niti stranice.

Ako u točki u kojoj se sastaju niti bifilarnog njihala, ne stavimo tijelo koje će njihati, nego tamo objesimo jednostavno njihalo s jednom niti, dobili smo AIRY-evo njihalo. Značajno je za Airy-evo njihalo, da ono može titrati na dva načina: 1) naprijed-natrag i 2) lijevo-desno. Kad njihalo njiše naprijed-natrag, onda je duljina njihala jednaka udaljenosti od tijela do letve na kojoj visi njihalo, dakle duljini l_1 . U tom je slučaju titrajno vrijeme dano izrazom :



sl.3. Airy-evo njihalo

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \qquad (1)$$

Međutim kad njihalo njiše lijevo-desno, onda je točka A nepomična, jer se

ona radi bifilarnog obješenja može gibati samo naprijed-natrag. Prema tome u ovom je slučaju duljina njihala jednaka daljini od tijela do točke A, tj. l_2. Za njihanje lijevo-desno vrijedi formula:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \quad . \qquad (2)$$

Budući da je l_2 manje od l_1, to su njihaji lijevo-desno brži od njihaja naprijed-natrag, tj. T_2 je manje od T_1.

Ako se Airy-evo njihalo izvede <u>ukoso</u> iz položaja ravnoteže, to onda ono izvodi <u>istodobno</u> i njihanje naprijed-natrag i njihanje lijevo-desno. Put što ga pri tome opisuje tijelo, jest neka zamršena Lissajous-ova krivulja. Ta će krivulja biti jednostavna, ako se <u>titrajna vremena</u> T_1 i T_2 odnose kao maleni cijeli brojevi, npr. 5:4, 5:3, 3:2, 2:1, 4:3. U tom slučaju moraju duljine njihala l_1 i l_2 biti prilagođene jedna prema drugoj. Ako stavimo u omjer izraz (1) i izraz (2) to dobivamo:

$$T_1 : T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} : 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2} \quad .$$

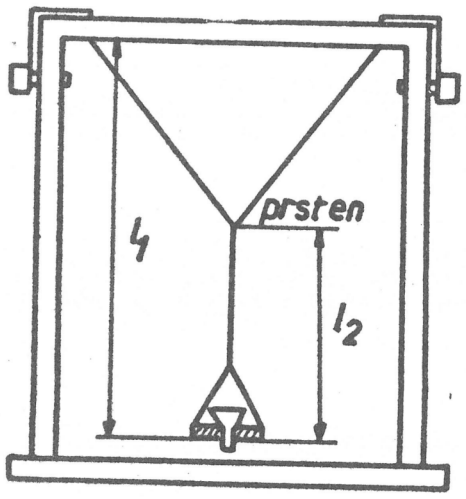
Ako dakle želimo da se titrajna vremena T_1 i T_2 odnose npr. kao 3:2, onda se tako moraju odnositi <u>drugi korijeni</u> iz duljina l_1 i l_2. Dakle iz $T_1 : T_2 = 3 : 2$ slijedi:

$$\sqrt{l_1} : \sqrt{l_2} = 3 : 2 \quad .$$

Kvadriranjem razmjera izlazi :

$$l_1 : l_2 = 3^2 : 2^2 = 9 : 4 \quad .$$

Prema tome, ako je duljina l_1 = ...cm, onda je $l_2 = \frac{4}{9} l_1$ = ... cm.



sl.4. Praktična izvedba Airy-evog njihala

U praktičnoj izvedbi Airy-evog njihala tijelo koje njiše je teška kovna ploča. Ta je ploča u sredini probušena i kroz rupu je provučen lijevak. Kada se njihalo izvede koso iz položaja ravnoteže drži se rukom kovna ploča i jednim prstom se lijevak začepi. U lijevak se nasipa pijeska. Kad se njihalo pusti da njiše, ujedno se pusti i pijesak iz lijevka da teče. Tako pijesak riše stazu kojom se tijelo giba. <u>Njihalo treba da ima duljinu l_1 toliku, da vrh lijevka putuje u malenoj visini iznad podloge.</u> Ako smo odlučili namjestiti omjer 3:2, onda za l_2 izlazi $\frac{4}{9} l_1$. Ovako izra-

čunata duljina l_2 se najprije namjesti micanjem prstena (točka A) koji skuplja niti. Pošto je l_2 udešena, namješta se l_1 pomoću vijaka na stalku.

Načini Lissajousove krivulje za ove omjere titrajnih vremena:

1. $T_1 : T_2 = 3 : 2$,
2. $T_1 : T_2 = 4 : 3$,
3. $T_1 : T_2 = 5 : 4$ i
4. $T_1 : T_2 = 2 : 1$.

Napiši namještene vrijednosti za l_2 i l_1 za svaki omjer zadanih titrajnih vremena.

Nacrtaj dobivene krivulje.

Krivulje pravi onim redom, kako je ovdje naznačeno.

Pribor : 1. Metar
2. Kantica s pijeskom
3. Drvena aparatura
4. PVC taca
5. Sito
6. Četka

TORZIONO TITRANJE

Ako na ploču obješenu na žicu djelujemo momentom, ploča se **zakrene** za neki kut u novi položaj ravnoteže. Taj novi položaj određen je time, što se u žici pojavi momenat elastičnih sila takvog smjera da vraća ploču u prvobitni položaj.

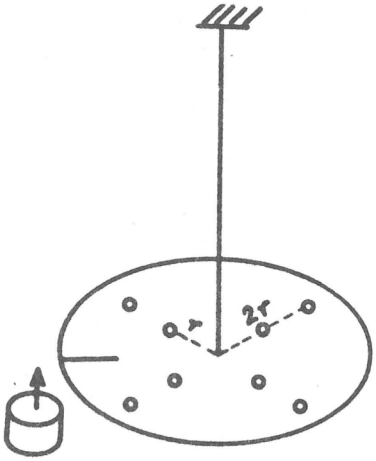
Ako se vanjski momenat naglo ukloni ostaje samo momenat elastičnih sila i nastaje vrtnja ploče. Približavanjem ravnotežnom položaju pada momenat elastičnih sila, ali raste kutna brzina i žica se tordira u drugom smjeru pa dolazi do ponavljanja pojave.

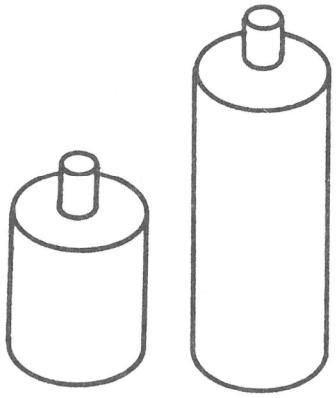
Budući da se pojav periodički ponavlja, a uzrok mu leži u torziji žice, taj pojav nazivamo torzionim titranjem.

Vrijeme potrebno da se tijelo vrati u isti položaj na isti način nazivamo titrajnim vremenom.

Titrajno vrijeme T ovisi samo o momentu tromosti tijela koje titra s obzirom na os titranja i upotrebljenoj žici, odnosno direkcionoj sili D.

Titrajno vrijeme dobivamo pomoću relacije: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$.





Eksperimentalno ćemo provjeriti utjecaj momenta tromosti I. Tijelo (okrugla ploča) imade rupice na radiusima r i 2r. U njih se mogu učvrstiti valjčići, a time je očito promijenjen momenat tromosti tijela. Imademo 4 velika valjka i 4 mala valjčića. Veliki valjak ima masu dva puta veću od maloga (ispitaj vaganjem).

1. MJERENJE Izmjeri titrajno vrijeme T_o prazne ploče tj. za momenat tromosti I_o.

2. MJERENJE Izmjeri titrajno vrijeme T_1 ploče s 2 velika valjka na udaljenosti r tj. za momenat tromosti I_1 .

3. MJERENJE Izmjeri titrajno vrijeme T_2 ploče sa 4 velika valjka na udaljenosti r tj. za momenat tromosti I_2 .

4. MJERENJE Izmjeri titrajno vrijeme T_3 ploče s dva mala valjčića na udaljenosti r tj. za momenat tromosti I_3.

5. MJERENJE Izmjeri titrajno vrijeme T_4 ploče sa 4 mala valjčića na udaljenosti r tj. za momenat tromosti I_4.

6. MJERENJE Izmjeri titrajno vrijeme T_5 ploče sa 2 mala valjčića na udaljenosti 2r tj. za momenat tromosti I_5.

Mjerenje se vrši zapornom urom. Mjeri se po 10 titraja i vrijeme se izražava u sekundama.

Titrajno vrijeme jednog titraja je vrijeme između dva prolaza u istom smjeru mjerne oznake na ploči nad postavljenom oznakom na stolu. Svako se mjerenje ponavlja tri puta. Rezultate unesi u tablicu.

	I rezultat	II rezultat	III rezultat	srednja vrijednost
T_o				
T_1				
T_2				
T_3				
T_4				
T_5				

Kontrola mjerenja: Ako je mjerenje dobro provedeno onda mora biti:

1) $T_2 = T_5$

Teoretski se mogu izvesti slijedeće veze između titrajnih vremena.

Prema Steinerovom stavku jesu momenti tromosti:

$$I_2 = I_o + 4 \cdot 2m \cdot (r)^2$$

$$I_5 = I_o + 2 \cdot m \cdot (2r)^2$$

$$I_2 = I_5$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{D}} \qquad T_5 = 2\pi\sqrt{\frac{I_5}{D}}$$

$$T_2 = T_5$$

2) $$\frac{T_2^2 - T_o^2}{T_1^2 - T_o^2} = 2$$

3) $$\frac{T_4^2 - T_o^2}{T_3^2 - T_o^2} = 2$$

Izračunaj vrijednosti omjera pomoću izmjerenih vremena i prikaži ih u tablici:

Kontrola	1)	2)	3)
vrijednost omjera			

Pribor:

1. Ploča sa žicom
2. Držač ploče
3. Četiri mala valjčića
4. Četiri velika valjka
5. Mjerni znak
6. Vaga
7. Zaporna ura

FIZIČKO NJIHALO

Fizičko njihalo je svako **kruto** tijelo, koje se može okretati oko horizontalne osi, koja ne prolazi kroz njegovo težište, a momenat koji kreće tijelo dolazi uslijed težine tijela.

Teorija daje za titrajno vrijeme fizičkog njihala ovu formulu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{G \cdot b}}$$

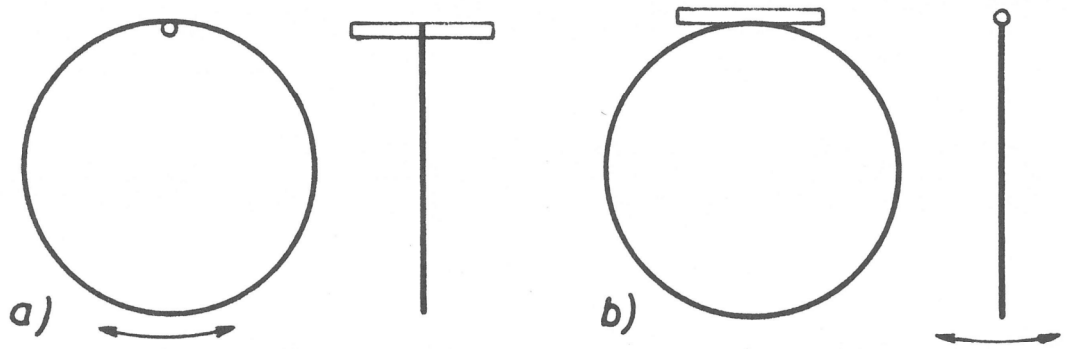
gdje je I momenat tromosti obzirom na os njihanja, G težina tijela, dok b znači udaljenost težišta od osi njihanja.

Važan pojam kod fizičkog njihala je reducirana duljina tog njihala. Ako načinimo takvo matematsko njihalo, da ima jednako titrajno vrijeme kao promatrano fizičko, onda se duljina matematskog njihala zove reducirana duljina fizičkog njihala.

Titrajna vremena fizičkog i matematskog njihala dana su izrazima: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{G \cdot b}}$ i $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ uz uvjet da je $T = T'$.

Reducirana duljina njihala dobije se iz relacije: $l = \frac{I \cdot g}{G \cdot b}$.

Promatrat ćemo fizičko njihalo u obliku prstena. Prsten može njihati oko osi okomite na ravninu prstena i oko osi u ravnini prstena kao na slici a) i b) .



Momenat inercije obzirom na os njihanja u oba slucaja se razlikuje, pa će se i titrajna vremena međusobno razlikovati. Momenat inercije obzirom na os okomitu na ravninu prstena iznosi $I_a = 2mr^2$, a na os u ravnini prstena $I_b = \frac{3}{2} mr^2$, gdje je m masa prstena, a r radius prstena. Omjer titrajnih vremena iznosi:

$$\frac{T_a}{T_b} = \sqrt{\frac{\frac{I_a}{G_a \cdot b_a}}{\frac{I_b}{G_b \cdot b_b}}}$$

Budući da su $G_a = G_b$ i $b_a = b_b$ to je

$$\frac{T_a}{T_b} = \sqrt{\frac{I_a}{I_b}} = \sqrt{\frac{2\ mr^2}{\frac{3}{2}\ mr^2}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Svako njihanje prstena ima svoju reduciranu duljinu, koju možemo odrediti pomoću formule, koju smo dali ranije.

Treba eksperimentalno naći omjer titrajnih vremena T_a i T_b te reducirane duljine njihala l_a i l_b.

Titrajna vremena mjere se pomoću zaporne ure. Mjeri se po 10 titrajnih vremena, a mjerenje ponavlja tri puta. Rezultati se unose u tabelu :

mjerenje	I	II	III	srednja vrijednost
T_a (sek)				
T_b (sek)				
vrijednost omjera $\frac{T_a}{T_b}$				

Reducirana duljina određuje se po formuli : $l = \frac{I \cdot g}{G \cdot b} = \frac{I}{m \cdot b}$.

Uvrštenjem izraza za momente tromosti u svakom pojedinom slučaju dobivamo :

$$l_a = \frac{2\ mr^2}{m \cdot r} = 2\ r \qquad \text{i} \qquad l_b = \frac{\frac{3}{2}\ mr^2}{m \cdot r} = \frac{3}{2}\ r \ .$$

Treba dakle samo metrom izmjeriti radius prstena

$$r = \ldots\ldots \text{cm}$$

i izračunati vrijednosti:

$$l_a = \ldots\ldots \text{cm}$$
$$l_b = \ldots\ldots \text{cm}$$

Pomoću matematičkog njihala koje ima promjenljivu dužinu konca odrede se eksperimentalno reducirane duljine.

Reducirana duljina matematskog njihala mjeri se od središta kugle do objesišta.

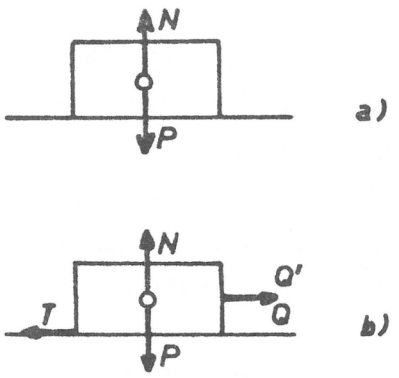
Treba izmjeriti slijedeće vrijednosti:

$$l_a = \ldots\ldots \text{cm}$$
$$l_b = \ldots\ldots \text{cm}$$

matematskog njihala.

T R E N J E

Kad tijelo miruje na horizontalnoj podlozi, onda težini tijela P drži ravnotežu pritisak podloge N, koji je jednake veličine, no točno protivnog smjera (vidi sliku 1.a). Ako međutim želimo tijelo vući po horizontalnoj podlozi, mora se trajno djelovati na njega silom. Prilike su jednostavne, ako tijelo vučemo silom Q, koja je paralelna s podlogom. Ta sila mora djelovati na tijelo da bi svladala trenje T između podloge i tijela (slika 1.b). Tijelo kliže po podlozi stalnom brzinom (približno), ako je Q jednako kao i T. Prema tome obzirom na veličine: Q = T.



Sl. 1.

Silu Q možemo mjeriti. To je u našoj aparaturi težina zdjelice i utega, koji su na nju stavljeni.

1. vježba. Ustanovimo mjerenjem, kolika je sila Q' potrebna da tijelo (iz drva, mesinga i aluminija) samo krene po odgovarajućoj podlozi, odnosno da svlada statičko trenje. U tu svrhu dodavajmo oprezno utege na zdjelicu i pazimo, da ne potresemo podlogu. Zatim izmjerimo silu Q, koja je potrebna da se tijelo održi u jednolikom klizanju po podlozi, tj. da svladava kinematičko trenje ili trenje klizanja. Da to ustanovimo, svaki put kad smo dodali uteg, kucnimo malo po podlozi. Koja je sila veća: Q ili Q' ? Rezultate mjerenja prikaži prema tabeli 1.

2. vježba. Ustanovimo silu Q (prema vježbi 1.) potrebnu, da tijelo jednoliko kliže. Tijelo treba uvijek započeti svoje gibanje s istog mjesta ! Potražimo u kojem omjeru stoje sila Q prema težini tijela P, dakle omjer Q/P. Zatim opteretimo tijelo utegom od 100 g i opet izmjerimo silu Q, kad tijelo jednoliko kliže po podlozi. Nadalje opteretimo tijelo (od drva, aluminija i mesinga) s utezima masa 200 g, 300 g, 400 g -i uvijek potražimo pripadni Q. Mi dakle umjetno mijenjamo težinu tijela, a time i pritisak podloge na tijelo i tražimo kako se pri tome mijenja Q tj. trenje u gibanju između tijela i podloge. Rezultate mjerenja predoči u tabeli 2.

Napomena:Težina G utega koji ima masu m zavisi o gravitaciji g na mjestu gdje se on nalazi, a dana je izrazom

$$G = m\,g\,.$$

Ista ta formula vrijedi i za bilo koje tijelo, pa prema tome i za ono kojim obavljamo mjerenja u vezi trenja. Vidimo da je na određenom mjestu težina G razmjerna masi m, jer je tada gravitacija g konstanta. Označimo li s G_1 težinu utega mase 1 gram, onda uteg mase 100 gram ima težinu 100 G_1. Općenito, ako tijelo ima masu

$$m = \{m\} \text{ gram},$$

onda mu je težina

$$G = \{m\} \; G_1 \; .$$

U našem je primjeru

$$G_1 = 1 \text{ gram} \cdot 9{\cdot}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 9{\cdot}81 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 9{\cdot}81 \cdot 10^{-3} \text{ N(njutn)}.$$

Budući da je G_1 u svim ovdje promatranim primjerima isto, dovoljno je u tablice na kraju ovog mjerenja unositi na pripadna mjesta **s a m o m j e r n e b r o j e v e** za mase, bilo utega bilo tjelesa, ako se te mase mjere u gramima.

3. vježba. Skinimo uže, kojim smo vukli tijelo po podlozi i podlogu lagano naginjemo kuckajući po njoj. To naginjanje neka ide dotle, dok tijelo ne počne klizati po podlozi. Kut kod kojega se to dogodi izračunamo iz mjerila na kosini. Kosina je načinjena tako, da je d = 50 cm. Kad tijelo jednoliko klizi niz kosinu, onda težini tijela P drže ravnotežu pritisak kosine N, okomit na površinu kosine i trenje T paralelno s ravninom kosine. U ovom je slučaju dakle omjer trenja T i pritiska kosine N, dakle T/N upravo $\text{tg}\,\alpha$. Prema tome, ako je α kut kod kojega tijelo jednoliko niz kosinu kliže, onda je $\text{tg}\,\alpha$ koeficijent trenja. Ovako dobiveni koeficijent trenja usporedi s onim što je dobiven u vježbi 2.

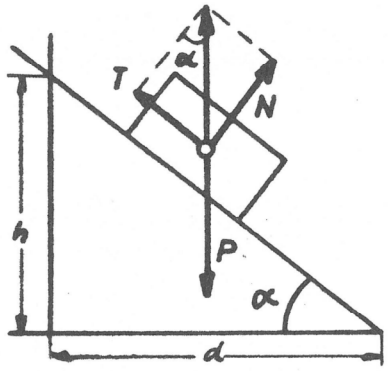


Tabela 1.

	Drvo	Aluminij	Mesing
{Q}			
{Q'}			

Tabela 3.

	Drvo	Aluminij	Mesing
α			
$\text{tg}\,\alpha$			

Tabela 2.

	Drvo				Aluminij				Mesing			
{P}	neopterećeno	+100	+200	+300	neopterećeno	+100	+200	+300	neopterećeno	+100	+200	+300
{Q}												
$\mu = Q/P$												

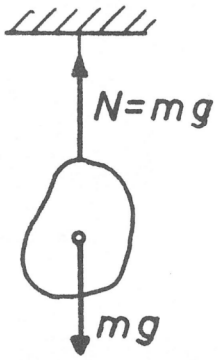
Pitanja:

1. Da li je trenje T ovisno o veličini površine na kojoj se dva tijela dotiču ?
2. Što se u praksi poduzima, da se smanji trenje između dviju površina ?
3. Da li trenje ima praktične važnosti ? Navedi primjere !

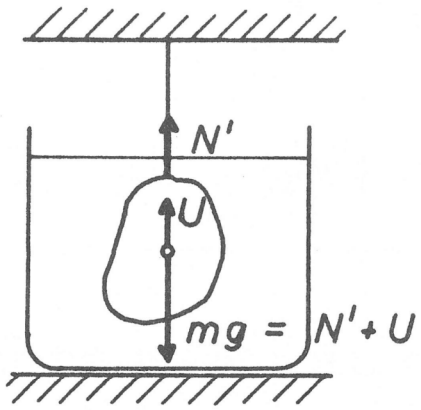
Bilješka: Trenje je potanje istraživao A. Coulomb (1736.-1806.).
Više o trenju vidi u literaturi pod br.33. na strani 141.

GUSTOĆA KRUTOG TIJELA

Kad se čvrsto tijelo uroni u kapljevinu, onda na to tijelo djeluje uzgon, koji ima smjer prema gore i veličinu jednaku težini istisnute kapljevine. Ako tijelo držimo privezano na koncu, onda napetost konca postaje manja, kad tijelo uronimo u kapljevinu, jer sada uzgon pomaže držati tijelo. To se kraće kaže, da tijelo uronjeno u kapljevinu izgubi toliko na težini, koliko važe istisnuta kapljevina (Arhimedov zakon).



Sl. 1.



Sl. 2.

Mi ćemo odrediti, koliko je puta veća gustoća aluminijskog valjka od gustoće vode, služeći se Arhimedovim zakonom. U tu svrhu ćemo valjak od aluminija objesiti na tanku žicu i izmjeriti silu N, kojom mora biti žica napeta, kad je valjak u uzduhu, kao na sl. 1. Zatim ćemo izmjeriti silu N', kojom mora biti žica napeta kad valjak miruje uronjen u vodi kao na sl. 2. Težina istisnute vode je razlika tih dviju sila, tj. uzgon U dobijemo ovako :

$$U = N - N'$$

Budući da istisnuta voda, tj. voda koja ima težinu U, ima jednak obujam kao i valjak, koji ima težinu N, to se onda gustoća valjka odnosi prema gustoći vode kao težina valjka prema težini istisnute vode :

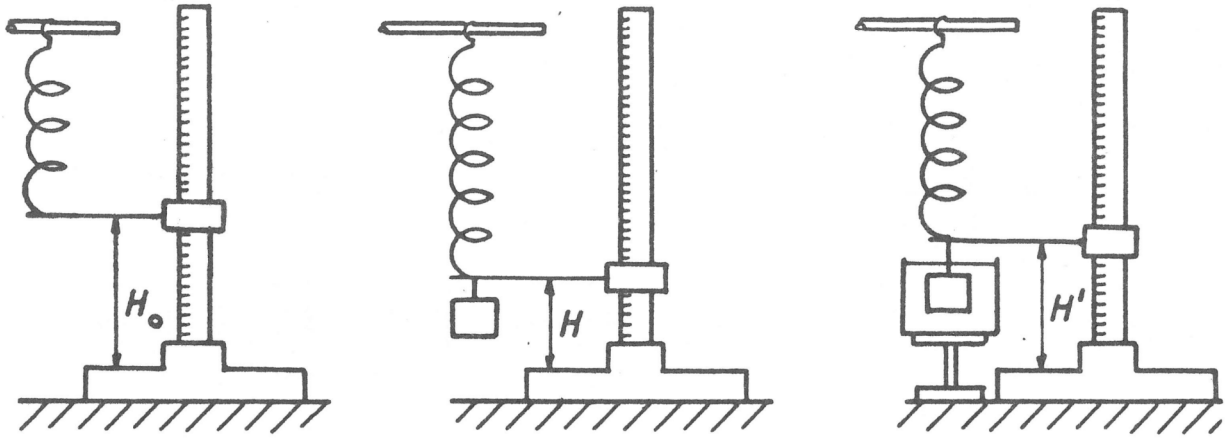
$$\frac{\text{gustoća valjka}}{\text{gustoća vode}} = \frac{N}{U} = \frac{N}{N - N'}$$

Budući da je gustoća vode : $1{\cdot}00 \cdot 10^3$ kg/m^3, ako temperatura vode nije viša od 40°C, to onda naše mjerenje daje gustoću materijala valjka.

Osnov za naše mjerenje je gornji izraz. Vidimo da mi zapravo ne moramo izmjeriti silu N odnosno U, nego samo njihov omjer, tj. N/U. Time se naš zadatak jako pojednostavnjuje. Da odredimo omjer dviju sila možemo se poslužiti nebaždarenim dinamometrom

(elastičnom spiralom). Evo postupka :

1. Pomoću vertikalnog mjerila, po kojemu se može micati kazalo, izmjerit ćemo visinu H_0 do kraja spirale, kad valjak od aluminija nije obješen, prema sl. 3.a). Kazalo treba uvijek namještati prema istom dobro određenom mjestu na kraju spirale. Kao kraj



Sl. 3. a) b) c)

spirale uzima se okrugla ploča obješena na spirali. Namještanje kazala izvesti pet puta i svaki put pročitati H_0 na skali cijeneći desetinke centimetra. Kao rezultat za H_0 uzima se srednja vrijednost tih mjerenja.

2. Na kraj spirale objesi valjak od aluminija i pošto se je valjak smirio, izmjeri visinu H na kojoj se sada nalazi kraj spirale, kao na sl. 3.b). Mjerenje treba opet izvesti pet puta i izračunati srednju vrijednost kao i pod 1. Težina valjka i produženje spirale su razmjerni. Dakle :

$$N = k (H_0 - H) .$$

3. Uronimo valjak u čašu vode (iz vodovoda). Sada se kraj spirale nalazi u visini H' , prema sl. 3.c). Prema tome je :

$$N' = k (H_0 - H')$$

Ako ove izraze uvrstimo u formulu, koja pokazuje omjer gustoće valjka i vode, dobivamo :

$$\frac{\text{gustoća valjka}}{\text{gustoća vode}} = \frac{k(H_0 - H)}{k(H_0 - H) - k(H_0 - H')} = \frac{H_0 - H}{H' - H}$$

Odredi prema gornjim uputama još i gustoću valjka od mesinga. Kolika je maksimalna apsolutna i maksimalna relativna pogreška mjerenja ?

GUSTOĆA ALKOHOLA

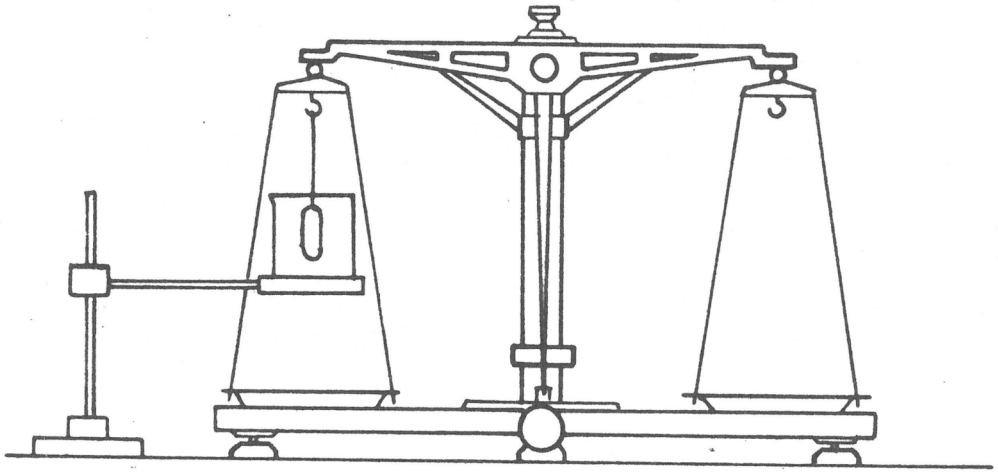
Ako se **kruto** tijelo uroni u vodu, na njega djeluje uzgon U jednak težini istisnute vode. Ako to tijelo zatim uronimo u alkohol, na njega djeluje uzgon U' jednak težini istisnutog alkohola.

Budući da smo uronili u oba slučaja isto tijelo, to su volumeni istisnute kapljevine jednaki. Prema tome se ta dva uzgona odnose kao specifične težine, odnosno gustoće tih tekućina tj.

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{U'}{U} \qquad \text{odnosno} \qquad \delta' = \frac{U'}{U}\,\delta$$

gdje je δ' gustoća alkohola, a δ gustoća vode. Vrijednost za gustoću vode δ, izvadimo iz tablice. (Vidi na kraju upute).

MJERENJE. Uzgon U odnosno U' mjerit ćemo vagom. Ta vaga ima kukice na koje možemo objesiti tijelo, koje ćemo uroniti, t.zv. ronilac. Pošto smo objesili ronilac o tanku žicu na kukicu zdjelice, oslobodimo vagu tako, da lagano okrećemo dugme u sredini drvene osnovke. Okretanjem tog dugmeta digne se ležaj vage.



Budući da na lijevoj kukici visi ronilac, to onda nema ravnoteže. Ravnotežu uspostavimo tako, da na desnu zdjelicu stavimo taru (to je teret, kojemu ne treba znati težinu). To su u našem slučaju olovne pločice i nešto sačme. Zadnje udešavanje izvedi komadićem papira. Pošto si ovako uspostavio ravnotežu, podmetni pod ronilac stalak sa čašicom i u čašicu ulij toliko vode, da je ronilac potpuno potopljen. Da se sada uspostavi ravnoteža treba na lijevu zdjelicu staviti utege, kojima je težina jednaka U tj. uzgonu ronioca u vodi.

Pošto se tako izmjerilo U treba ronilac dobro osušiti i na jednak način izmjeriti U'. Da je ronilac suh pozna se po ravnoteži vage. P a z i da utezi ne padnu u vodu ili alkohol, te da se

ne pogube.

Izračunaj gustoću obiju vrsti alkohola. Rezultate provjeri areometrom i Mohr-Westphalovom vagom.

Napomena: Mjerenje, izračunavanje i provjeravanje areometrom i Mohr-Westphalovom vagom treba učiniti za alkohol u obje boce, crveno obojen (1) i žuto obojen (2). Nakon svakog mjerenja isperi i osuši čašu, ronioc i menzure.

GUSTOĆA VODE U ZAVISNOSTI O TEMPERATURI

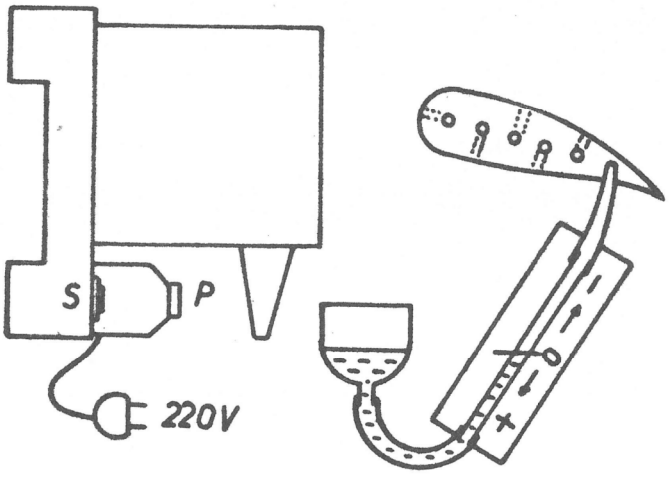
Temperatura ($^{\circ}C$)	16	18	20	22	24	26
Gustoća $\frac{g}{cm^3}$	0·99894	0·99860	0·99821	0·99777	0·99730	0·99683

Temperatura ($^{\circ}C$)	28	30	32	34
Gustoća $\frac{g}{cm^3}$	0·99626	0·99567	0·99505	0·99440

Pribor:
1. Vaga
2. Kutija utega
3. Boca s vodom (2 komada)
4. Boca s alkoholom (2 komada)
5. Lijevak
6. Držač čaše
7. Ronilac
8. Tara (olovo i papir)
9. Staklena čaša
10. Krpa
11. Menzura (velika)
12. Areometar s termometrom
13. Mohr-Westphalova vaga
14. Ronilac za M.W. vagu s jahačima
15. Menzura za M.W. vagu

RASPORED TLAKA OKO MODELA AVIONSKOG KRILA

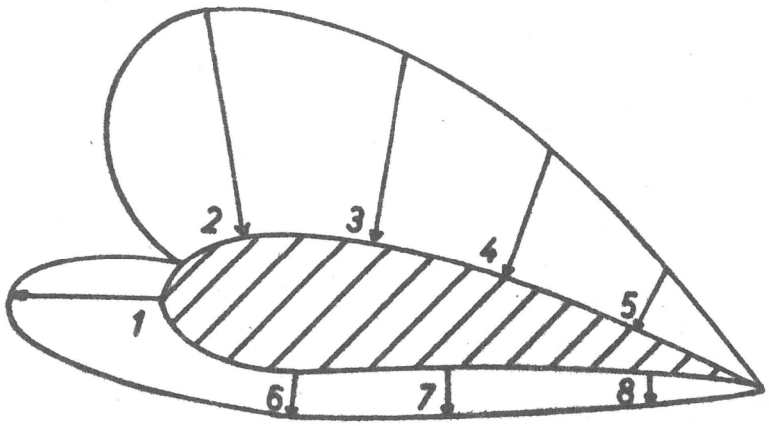
Poslužit ćemo se modelom koji je načinjen iz masivnog drveta. Na pojedinim mjestima na površini krila nabušene su rupe, koje se dalje nastavljaju u krilo i sa strane izlaze na otvore, na koje se može priključiti manometar za mjerenje tlaka. Sam manometar se sastoji iz jedne uske cijevi, koja je postavljena koso i koja je gumenom cijevi spojena s jednom širokom posudom, koja je otvorena prema mirnom uzduhu. Na otvorenu površinu vode u široko posudi djeluje statički tlak uzduha u miru, koji je jednako velik kao i statički tlak u homogenoj struji uzduha daleko od modela avionskog krila. Na površini vode u kosoj cijevi djeluje statički tlak uzduna, koji vlada na onom mjestu avionskog krila, gdje je nabušen otvor na krilu, s kojim je ta cijev spojena. Ispred modela nalazi se kanal za vjetar, kome se motor ventilatora preko promjenljivog otpora P priključuje sklopkom S na gradsku mrežu napona 220 V. Tako se model krila nalazi u struji uzduha primjerene jačine, koja izlazi iz kanala za vjetar. Pomicanjem kontakta kliznog potenciometra P odaberemo izvjesnu brzinu struje. Zakretanjem modela namjestimo nagib krila prema toj struji. Pomoću opisanog manometra mjerimo sada redom statički tlak na raznim mjestima na krilu. Narišimo profil krila i na tom profilu označimo položaj tih mjesta, na kojima je tlak izmjeren. Ta ćemo mjesta numerirati. U našem slučaju ima 8 mjesta na kojima se može mjeriti statički tlak. Uz brojku koja znači mjesto na krilu, unesimo u tablicu pomak vode u kosoj cijevi manometra mjeren u milimetrima. Tako dobivamo npr. ovakav rezultat :



Mjesto	1	2	3	4	5	6	7	8
Tlak	+21	-32	-26	-18	-9	+6	+6	+4

Iz ove se tablice vidi,da na čelu krila vlada znatno povišeni tlak. To je zapravo mjesto, gdje svršava strujnica zastoja. Nedaleko od tog mjesta, s gornje strane krila, tlak je jako snižen i on je manji od statičkog tlaka u struji daleko od krila. To je

značenje onih minusa ispred mjerenih vrijednosti. Prema tome na čitavoj gornjoj strani krila tlak je smanjen. Naglo smanjenje tlaka od čela krila prema gornjoj strani pokreće cirkulaciju oko krila, koja s gornje strane ide prema natrag. Ispod krila je tlak neznatno povišen prema tlaku daleko od krila. Ovaj raspored tlaka oko krila možemo i grafički prikazati na taj način, da na svakom mjerenom mjestu podignemo okomicu na površinu krila i na toj okomici odmjerimo vrijednost (u mjerilu) koju smo na tom mjestu dobili za tlak. Iznad krila je područje "negativnog tlaka", na kojem krilo u zraku "visi", dok ga područje "pozitivnog tlaka" ispod krila podržava.



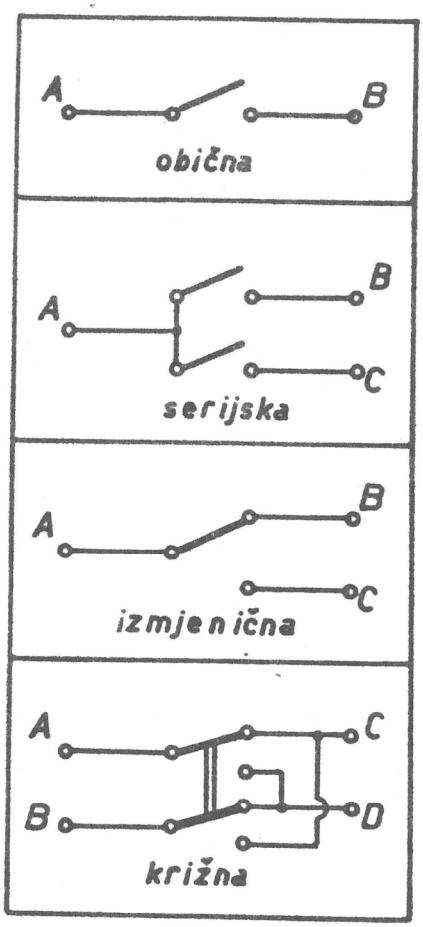
Zadatak: Izmjerite tlakoye za dani model avionskog krila. Dobivene rezultate prikažite tabelarno i grafički. Crtajte u mjerilu!

Pribor :

1. Model avionskog krila na stalku
2. Kanal za vjetar s prekidačem i kliznim otpornikom
3. Manometar sa skalom, gumenim cjevčicama i priključkom za krilo
4. Čaša s obojenim alkoholom
5. Krpa

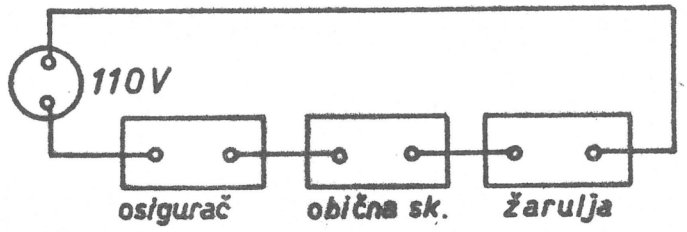
ELEKTRIČNE SKLOPKE

Električne sklopke, koje se upotrebljavaju kod instalacije rasvjete, mogu biti već prema namjeni ili svrsi: obična, serijska, izmjenična i križna. Običnom sklopkom može se između dviju točaka A i B uspostaviti odnosno prekinuti električni kontakt. Serijska sklopka u osnovi je dvostruka obična. Njom se može između točke A i bilo koje od točaka B i C uspostaviti odnosno prekinuti električni kontakt, tj. ili A nema spoja ni sa B ni sa C, ili ima spoj samo sa B odnosno samo s C, ili konačno ima spoj i sa B i sa C. Prema tome dok kod obične sklopke imamo dva moguća položaja, kod serijske imamo četiri. Izmjenična sklopka može točku A spojiti ili sa B ili sa C, Kad je uspostavljen (prekinut) spoj od A sa B, onda nema (ima) spoja sa C. Izmjenična sklopka ima dva položaja: spoj (prekid) između A i B, a istodobno prekid (spoj) između A i C. Križna sklopka u osnovi je dvostruka izmenična, kojoj su poluge kruto međusobno spojene tako, da kad se prebaci jedna da se prebaci i druga. Prema tome križna sklopka ima dva položaja. U jednom od njih točka A je spojena sa C, a točka B sa D. U drugom položaju točka A spojena je sa D, a B sa C.

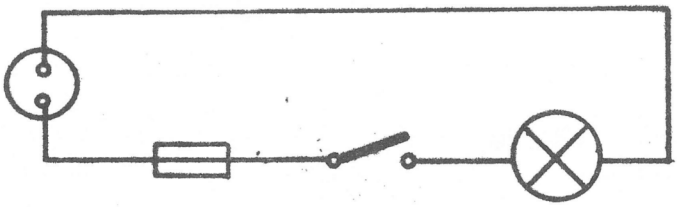


V j e ž b a : Priključivanje potrošača između faznog vodiča i nule gradske mreže vrši se tako, da se u vod od faznog vodiča najprije stavi osigurač, zatim sklopka odnosno sklopke, a onda potrošač, kojemu se drugi pol spaja direktno s nulom. Time se postizava da je u slučaju prekida struje bilo u osiguraču bilo u sklopki, potrošač na potencijalu nula. Mi ćemo eksperimentirati s naponom od 110 V izmjenično iz zavodskog transformatora. Kod tog transformatora nije sekundarna strana uzemljena, pa je prema tome manja opasnost od električnog udarca. U ovom je slučaju svejedno u koji vod stavim osigurač. Međutim ostaje isti redosljed priključivanja: osigurač, sklopke, potrošač.

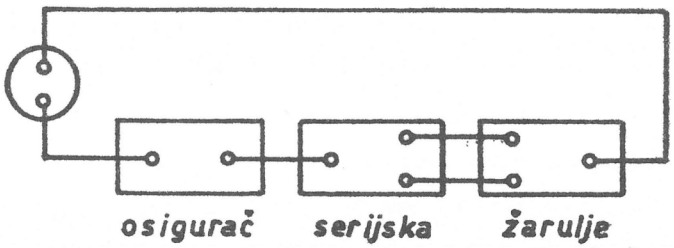
1. Obična sklopka. Zadatak: Načini spojeve prema slici! Što se ovim spojem postiza-va ?



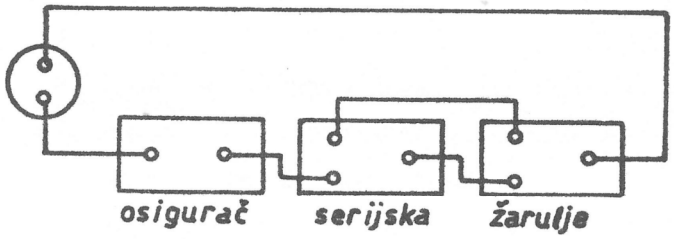
Rješenje: Shema ovog spoja nacrtana je na desnoj slici. Običnom sklopkom možemo struju kroz žarulju uključiti ili izključiti.



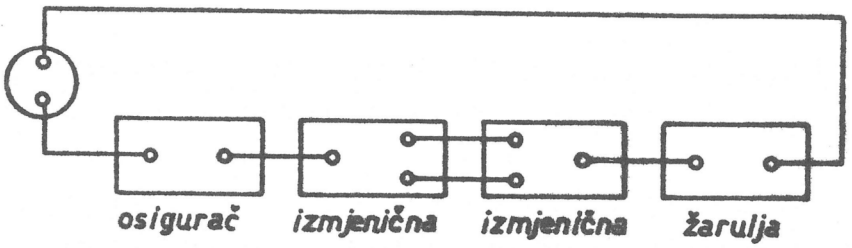
2. Serijska sklopka.(prvi spoj) Načini shemu ovog spoja za slučaj da jedna žarulja gori, a druga je ugašena. Što se ovim spojem postizava ? Koliko ima raznih mogućnosti paljenja i gašenja žarulja ?



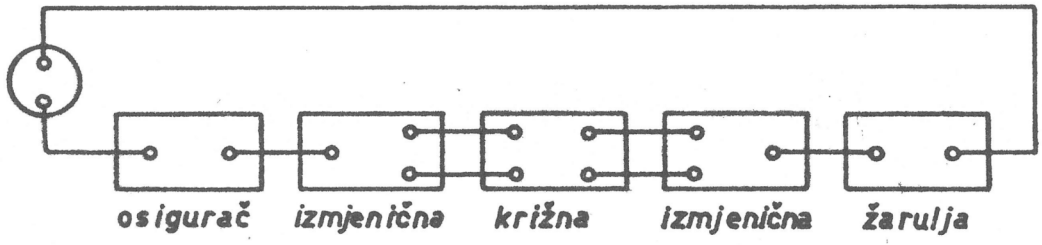
3. Serijska sklopka.(drugi spoj) Što se ovim spojem postizava? Da li se može kod ovog spoja postići da svaka od žarulja sama gori? Načini shemu ovog spoja kad obje žarulje gore! Načini i nacrtaj shemu za jedan položaj ove sklopke i napiši što se u tom položaju postizava!



4. Izmjenične sklopke. Što se postizava spojem prema donjoj slici? Koliko raznih položaja mogu sklopke imati? U kojima od njih žarulja gori? Načini i nacrtaj shemu ovog spoja !



5. Izmjenične sklopke i križna. Što se s ovim spojem postizava ?



Koliko mogućih kombinacija položaja sklopki ima u ovom primjeru? Za koje kombinacije žarulja gori, a za koje ne gori?

Načini shemu spoja, za jedan slučaj kad žarulja gori i označi put električne struje, stavljajući strelice u žice kojima teče struja.

Pravilo za izmjenične i križne sklopke.

Ako se crvena boja označi sa (+), a modra boja sa (-), onda niz koji počinje s izmjeničnom sklopkom, a nastavlja se u bilo kojem broju križnih i završava izmjeničnom sklopkom, koja je s prvom u paru, propušta struju, ukoliko umnožak svih oznaka daje (-), a ne propušta struju, ako je taj umnožak (+). Pod bojom sklopke razumijeva se ona boja koja je na preklopcu sklopke izvirila.

Pribor: 1. Običan osigurač
2. Automatski osigurač
3. Tri žarulje od po 100 W
4. Sklopka na daščici obična 1 komad
5. -"- serijska 1 komad
6. -"- izmjenična 2 komada
7. -"- križna 2 komada
8. Žice za spajanje 12 komada

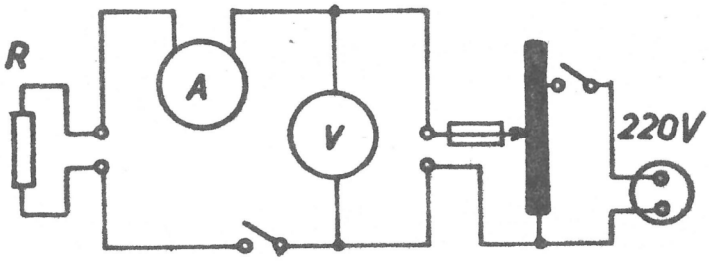
O H M O V Z A K O N

Jakost struje kroz kovni vodič dana je Ohmovom formulom : $I = \frac{U}{R}$, gdje je U napon između krajeva vodiča, a R otpor vodiča.

Ukoliko se prolazom struje temperatura vodiča ne mijenja, to onda između struje i napona vlada stroga proporcionalnost, tj. otpor R je konstantan. Taj uvjet je ispunjen kod kliznog otpornika, dočim nije kod žarulje sa žarnom niti od volframa, odnosno ugljena. Kod tih žarulja prolaženjem struje temperatura vodiča se povisi pa se zato otpor tih vodiča promijeni. Prema tome kod žarulja za razne temperature, odnosno jakosti struje imamo razne otpore. To znači da kod žarulja struja i napon nisu proporcionalni, jer otpor žarulje ovisi o jakosti struje koja kroz žarulju teče.

U ovoj vježbi mjerit ćemo zavisnost jakosti struje (u mA = 10^{-3}A) o naponu koji se narine na krajeve vodiča. Kao potrošače upotrijebit ćemo : 1. KLIZNI OTPORNIK, 2. ŽARULJU S NITI OD VOLFRAMA i 3. ŽARULJU S NITI OD UGLJENA.

Aparatura za mjerenje spojena je prema ovoj shemi:



Kao izvor napona služi promjenljivi transformator (variak). Njegova primarna strana uključuje se na izmjenični napon od 220V (gradska mreža). Napon na izlaznim stezaljkama variaka mijenja se okretanjem crnog gumba na gornjoj osnovki variaka. Bijela brojka na gumbu uz znak na oklopu daje približno napon na izlaznim stezaljkama variaka.

1. MJERENJE. Aparatura se spoji prema shemi s voltmetrom za područje do 50 V i ampermetrom do 100 mA, a kao potrošač upotrijebi se klizni otpornik (ne diraj klizač na otporniku !).

Gumb na variaku stavi na nulu, prekidač na variaku na položaj isključeno (gdje nema crvene točke), prekidač na daski u položaj poprijeko (isključeno).

Sada se može priljučiti primarna strana variaka na gradsku mrežu, tako da se njegov utikač stavi u odgovarajuću utičnicu na rasklopnoj ploči. Pri tome se crvena točka na utikaču mora slagati s crvenom točkom na utičnici. Prebaci prekidač na variaku na crvenu točku. Ako se sada gumb variaka postepeno zakreće voltmetar će pokazati napon na izlaznim stezaljkama variaka. Ampermetar ne pokazu-

je ništa, jer je prekidačem na daski krug struje prekinut.

Vrati variak na nulu (voltmetar pokazuje nulu). Okreni prekidač na daski u uzdužni položaj (uklopljeno). Postepeno povisuj napon variaka. Sada ampermetar pokazuje jakost struje koja teče kroz otpornik.

Mjerenje se sastoji u tome da se napon pomoću variaka namješta redom na vrijednosti: 0,10,20 do 50V i za svaki od tih napona očita pripadna struja. Sada treba sve isključiti i voltmetar do 50 V zamijeniti s voltmetrom do 250 V. Nakon toga se mjere struje za napone 50,60,70 do 220 V. Dobivene parove vrijednosti unosi se u tablicu.

Kad mjerene vrijednosti premaše područje instrumenta, aparatura se isključi i umjesto prethodnog spoji se instrument većeg mjernog dosega. Mjerenje počinje od nula napona na variaku.

2. MJERENJE. Prekidači na variaku i daski stave se na isključeno. Namjesto otpornika priključi se žarulja s niti od volframa (25W 220 V). Variak treba vratiti na nulu.

Sada se započne mjeriti kao i u prethodnom mjerenju, tj. napon se namješta variakom na vrijednosti 0,10,20 do 50 V i mjere struje za te napone. Koristi se voltmetar mjernog područja do 50 V i ampermetar do 100 mA. Po završenom mjerenju aparatura se isključi i voltmetar do 50 V zamijeni s drugim do 250 V. Mjere se struje za napone 50,60,70 do 220 V. Dobivene parove vrijednosti unosi se u tablicu.

3. MJERENJE. Oba prekidača stave se na isključeno, variak na nulu. Prema shemi spoje se voltmetar do 50 V, ampermetar do 100 mA, a kao potrošač priključi se žarulja s ugljenom niti (35 W 230 V Philips). Mjere se struje za napone 0,10,20 do 50 V. Te parove vrijednosti unesi u tablicu.

Sve prekidače postavi na isključeno. Mjeri struje za napone 50, 60,70 do 220 V. Kada vrijednosti struja premaše 100 mA zamijeni se instrument s ampermetrom do 400 mA, kao i u prijašnjim mjerenjima.

Sve tri tablice prikaži grafički na milimetarskom papiru. Napon apscise u mjerilu: 1 mm = 2 V, a struja ordinate 1 mm = 1 mA.

U grafičkom prikazu zavisnosti struje o naponu nema skokova, već su to kontinuirane krivulje. Klasa upotrebljenih instrumenata je 1·5, pa je moguće odstupanje $\pm$ 1·5 % od označenih vrijednosti. Da se postigne slaganje vrijednosti kod mjerenja s različitim intrumentima, treba vrijednostima napona dodati ili oduzeti najviše 3 % (zaokruženo na cijele vrijednosti).

OTPOR MREŽE OTPORNIKA

Prvi Kirchhoffov zakon kaže, da je algebarski zbroj jakosti električnih struja, koje teku prema nekom razgraništu ili čvorištu, u svaki čas jednak nuli. Taj zakon vrijedi za istosmjernu struju, kao i za izmjeničnu. U posljednjem slučaju misli se na momentane jakosti električnih struja. U formuli izraženo to glasi :

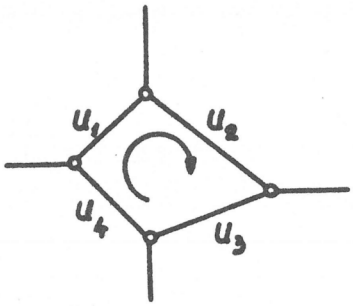
$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots = 0 \ ,$$



gdje se zbrajanje odnosi na sve žice, koje se sastaju u čvorištu. Struja koja teče prema čvorištu uzima se pozitivno, a u protivnom smjeru negativno.

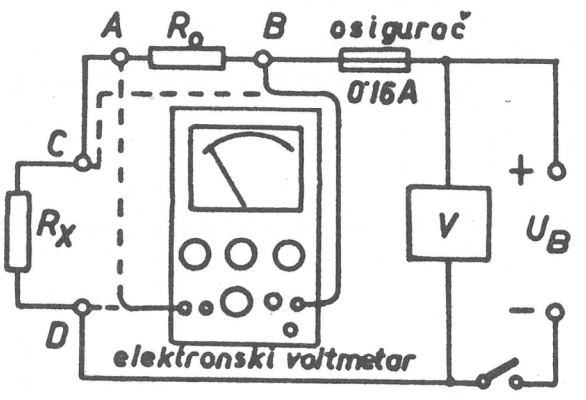
Drugi Kirchhoffov zakon kaže, da je zbroj svih električnih napetosti duž jedne zatvorene petlje električnog sklopa jednak nuli. Taj zakon vrijedi za istosmjerne i za izmjenične napetosti. U posljednjem slučaju misli se na momentane vrijednosti električne napetosti. Izraženo formulom to glasi :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = 0 \ ,$$



gdje se zbrajanje odnosi na sve vodiče koji čine jednu petlju. Napetost između dviju točaka petlje koja bi tjerala pozitivni naboj kroz voltmetar u smjeru obilaženja petljom uzima se pozitivno, a u protivnom smjeru negativno.

U ovoj vježbi primjenit ćemo Kirchhoffove zakone, da nađemo napone u mrežama načinjenim od otpornika priključenih na istosmjerni izvor, u našem slučaju akumulatorsku bateriju, te rezultujuće otpore tih sklopova. Zato od sada pišemo struje i napone velikim slovima.



1. MJERENJE. Primjenjujući Ohmov zakon izmjerite otpor svakog pojedinog otpornika. Aparatura se spoji po zadanoj shemi. Između točaka A i B spojen je precizni otpornik R_o od 100Ω, a između točaka C i D spaja se otpornik R_x čiji se otpor želi izmjeriti. Elektronski voltmetar se priključi na napon gradske mreže od 220V

i čeka se dok se ne ugrije. Prekidačem na daski uključi se napon 30 V iz akumulatorske baterije. Taj se napon može očitati na kontrolnom voltmetru V. Struja I kroz otpornik R_x jednaka je struji kroz otpornik R_o. Elektronskim voltmetrom izmjerite pad napona U_o na krajevima otpornika R_o. Uz poznatu vrijednost $R_o = 100\,\Omega$ određuje se veličina otpornika R_x prema Ohmovom zakonu.

$$U_o = R_o\, I$$

$$U_x = R_x\, I$$

$$R_x = R_o \frac{U_x}{U_o} = 100 \frac{U_x}{U_o}\ \Omega$$

MJERENJE POČINJE NA PODRUČJU ELEKTRONSKOG VOLTMETRA OD 50 V!

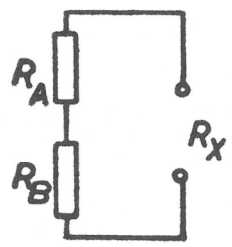
Ukoliko je otklon kazaljke voltmetra premalen, smanjuje se mjerno područje voltmetra (elektronskog) okretanjem odgovarajućeg preklopnika na instrumentu u lijevo, sve dok otklon ne bude pogodan za očitanje.

Zatim se pipaljke voltmetra odspoje s točaka A i B i VRATI PREKLOPNIK U POLOŽAJ 50 V. Nakon toga se pipaljkama dodirnu krajevi otpornika R_x čiji otpor mjerimo i očita vrijednost napona. Dobiveni podaci unesu se u tablicu i izračuna vrijednost otpora R_x prema Ohmovom zakonu :

$$R_x = R_o \frac{U_x}{U_o}$$

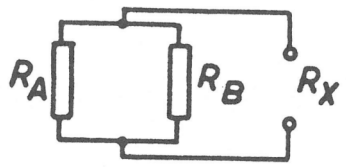
Otpornik	A	B	C	D	E
Napon U_x					
Napon U_o					
Otpor R_x					

2. MJERENJE. Napravite nekoliko serijskih spojeva od dva otpornika i izmjerite prije opisanom metodom otpor takove serije . Koliko se kombinacija dade načiniti od pet otpornika : A, B, C, D i E ? Rezultate mjerenja i računa unesite u tablicu.



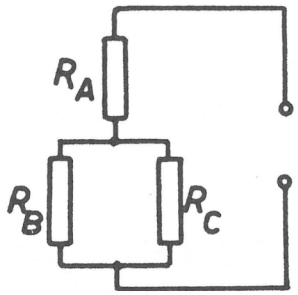
Otpornici	AB	CB	BD
Napon U_x			
Napon U_o			
Otpor R_x			
Račun	R_A+R_B	R_C+R_B	R_B+R_D

3. MJERENJE. Načinite nekoliko paralelnih spojeva od po dva otpornika i izmjerite otpor kombinacija.



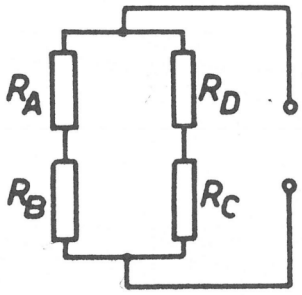
Otpornici	AB	AC	BD
Napon U_x			
Napon U_o			
Otpor R_x			
Račun	$\frac{R_A \cdot R_B}{R_A+R_B}$	$\frac{R_A \cdot R_C}{R_A+R_C}$	$\frac{R_B \cdot R_D}{R_B+R_D}$

4. MJERENJE. Od tri otpornika načinite spoj prema shemi. Koliko se takovih kombinacija dade složiti iz pet otpornika? Izmjerite i izračunajte nekoliko kombinacija. Izmjerite napone na pojedinim otpornicima. Izračunajte struju kroz pojedine otpornike. Sve prikažite tabelarno.



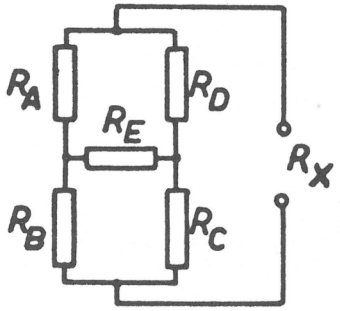
$$R_x = R_A + \frac{R_B R_C}{R_B+R_C}$$

5. MJERENJE. Od četiri otpornika načinite spoj prema shemi. Izmjerite i izračunajte otpor kombinacije. Izmjerite napone na pojedinim otpornicima i izračunajte struje u pojedinim granama. Koliko se ovakovih kombinacija dade učiniti od pet otpornika ?



$$R_x = \frac{(R_A+R_B)(R_C+R_D)}{R_A+R_B+R_C+R_D}$$

6. MJERENJE. Od svih pet otpornika načinite spoj prema nacrtanoj shemi. Izmjerite i izračunajte otpor kombinacije. Izmjerite napone na pojedinim otpornicima. Izračunajte struju u pojedinim granama. Rezultujući otpor mreže R_x računa se ovdje po formuli :

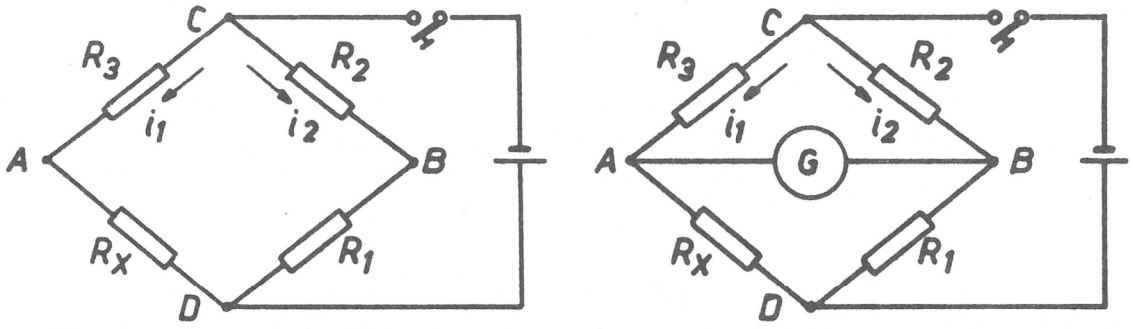


$$R_x = \frac{R_A R_B (R_C+R_D) + R_C R_D (R_A+R_B) + (R_A+R_B)(R_C+R_D)R_E}{(R_A+R_D)(R_B+R_C) + (R_A+R_B+R_C+R_D)R_E}$$

UPUTA : Kod međusobnog spajanja otpornika koristite " mostove " od aluminija !

MJERENJE OTPORA METODOM WHEATSTONE-OVOG MOSTA

Ovom metodom mjeri se otpor tako, da ga se usporedi s tri poznata otpora. Evo postupka. Nepoznati otpor R_x i tri poznata otpora: R_1 , R_2 i R_3 spoje se prema slici. U shematskom prikazu otpori leže



u stranicama jednog četverokuta. Ako sada priključimo na točke C--D bateriju, onda nastali napon uspostavi struju kroz taj sistem. Struja I teče od točke C prema točki D kroz dvije grane: 1. kroz otpor R_3 i R_x , te 2. kroz otpor R_2 i R_1. Struja se grana u točki C. Jakost električne struje u prvoj grani je i_1, a u drugoj i_2 . Najviši potencijal je u točki C, a najniži u D. Prema tome u točkama A i B potencijal ima vrijednost koja leži između tih dviju krajnjih. Ako su vrijednosti otpora R_x, R_1, R_2 i R_3 - prikladne, postizava se izjednačenje potencijala točaka A i B. Priključeni galvanometar između tih točaka neće pokazati otklona.

Odnosi uključenih otpora da se postigne jednakost potencijala točaka A i B, tj. da se ne dobije otklon galvanometra kad se pritisne tipka, izvodi se ovako: Potencijali točaka A,B,C i D jesu V_A, V_B, V_C i V_D. Otporom R_x teče struja i_1, a između njegovih krajeva vlada razlika potencijala $V_A - V_D$. Zato je po Ohmovom zakonu:

$$R_x = \frac{V_A - V_D}{i_1} \quad , \text{ a odatle } R_x \cdot i_1 = V_A - V_D \ .$$

Analogni odnosi vrijede za druge otpore. Ako kroz galvanometar ne teče struja, onda je $R_3 \cdot i_1 = V_C - V_A$, $R_2 \cdot i_2 = V_C - V_B$, $R_1 \cdot i_2 = V_B - V_D$.

Budući da smo pretpostavili $V_A = V_B$, a to se i ustanovilo nul otklonom galvanometra, to slijedi :

$$R_x \cdot i_1 = R_1 \cdot i_2 \quad \text{i} \quad R_3 \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2 \ .$$

Dijeljenjem gornjih jednadžbi slijedi: $R_x/R_1 = R_3/R_2$ ili konačno :

$$R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2} \ .$$

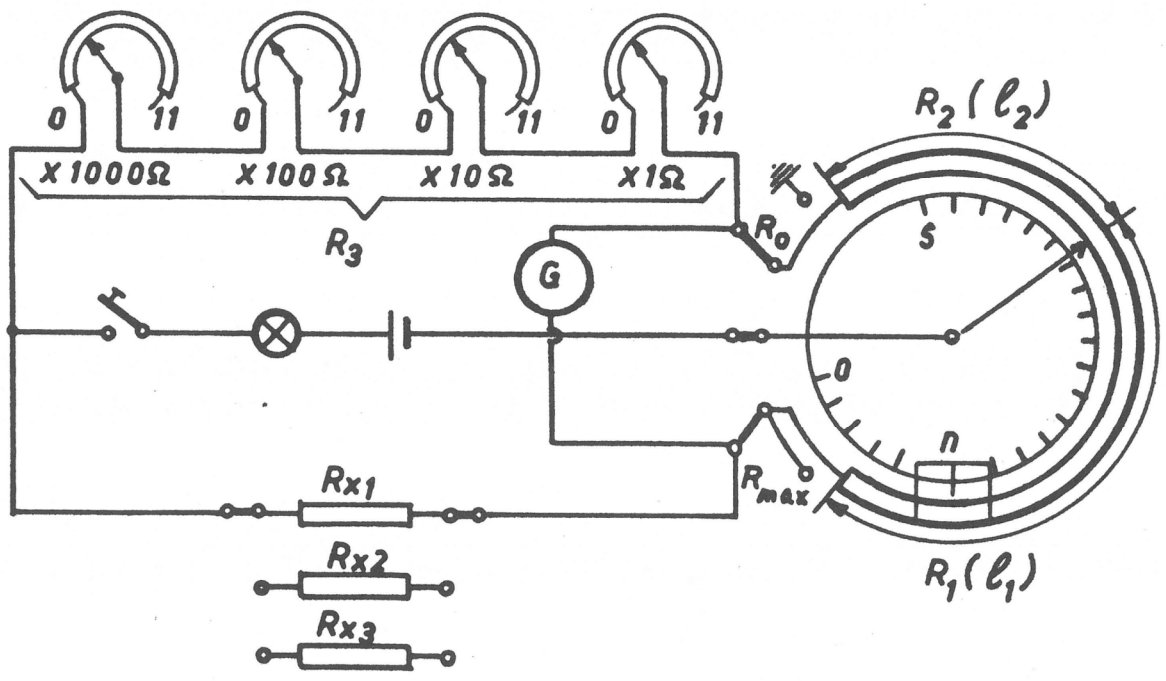
Poznavanjem dakle otpora R_3 i omjera otpora R_1 i R_2 određuje se po gornjoj relaciji nepoznati otpor R_x. Uvjet za valjanost ovog omjera, kako iz uvodne pretpostavke proizlazi - jest, da spojnim vodičem (galvanometrom) točaka A i B ne teče struja. Tim spojnim vodičem je dakle put za struju "premošten". Ta spojna veza je dakle "most", a njime ne smije teči struja.

U ovoj vježbi otpor R_3 Wheatstoneovog mosta predstavlja otporna dekada sa četiri promjenljive otporne grupe: do 11 kΩ , do 1·1 kΩ, do 110 Ω i do 11Ω , dok su otpori R_1 i R_2 dijelovi otpora kružnog potenciometra (do 100Ω). Budući da je otporna žica potenciometra svuda jednakog presjeka, (a prema poznatoj relaciji za otpor $R = \varsigma \frac{\ell}{S}$) kvocijent R_1/R_2 može biti zamjenjen kvocijentom duljina (ℓ_1 / ℓ_2), tako da sada prilagođena relacija za nepoznati otpor može biti :

$$R_x = R_3 \cdot \frac{\ell_1}{\ell_2} = R_3 \cdot \frac{5 - n}{n} \quad .$$

Načelno je dakle svejedno (uvijek uz pretpostavku stalnosti presjeka duž otporne žice) da li se kvocijent u gornjoj relaciji smatra kvocijentom otpora ili pripadnih duljina. Radi toga se kod nekih izvedbi Wheatstoneovog mosta primjenjuje umjesto potenciometra ravna klizna žica.

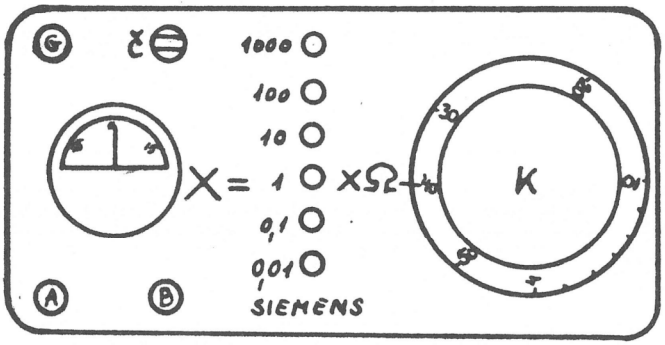
MJERENJE. Priključite spomenute otpornike i jedan od raspoloživih triju nepoznatih otpora prema priloženoj shemi. Uključite



jedan ili više stupnjeva neke grupe otporne dekade. Namještajte klizač na potenciometru dotle dok višekratnim zatvaranjem tipke ne uslijedi više nikakav otklon na galvanometru. Uvrstite očitane vrijednosti na potenciometru i dekadi u prethodnu relaciju. Ovo ponovite s različitim vrijednostima dekade - tri puta sa svakim od tri nepoznata otpora.

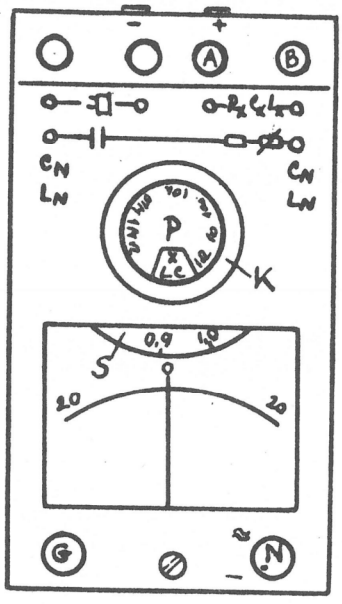
Opaska: Galvanometar i baterija s tipkom mogu zamijeniti svoja mjesta u shemi spoja Wheatstoneovog mosta; time se na pricipijelnom funkcioniranju mosta ništa ne mijenja.

Izmjerite vrijednosti otpora i industrijskim Wheatstoneovim mostom. Prije početka mjerenja pročitajte upute!



Za most na lijevoj slici postupak je slijedeći: Priključite otpor na stezaljke AB. Utaknite čep Č u jedno od gnijezda s oznakama 1000,100,..do 0,1, a okrugli klizač K namjestite tako, da produkt broja uz čep i broja na klizaču nasuprot crte iza oznake Ω bude približno jednak već izmjerenoj vrijednosti otpora. Okrećući klizač i pritiskujući gumb G dovedite kazaljku galvanometra na nulu. Vrijednost otpora u omima dobije se tako, da se broj uz čep pomnoži s brojem na klizaču nasuprot crtice.

Postupak mjerenja mostom prema desnoj slici: Nepoznati otpor priključi se na stezaljke $R_x C_x L_x$ (AB na slici). Opseg se bira preklopnikom mjernih opsega P. Okretanjem klizača K uz pritisnut gumb G, galvanometar treba dovesti na nulu. Gumb G se pri mjerenju može i zaokrenuti tako da trajno ostaje u uključenom položaju. Kad je mjerenje završeno gumb se okrene u isključeno. Vrijednost mjerenog otpora dobije se množenjem očitanja na okretnoj skali S s faktorom mjernog opsega. Most se napaja istosmjernom strujom iz uložene baterije, koja se uključuje gumbom N u položaj kao na slici.

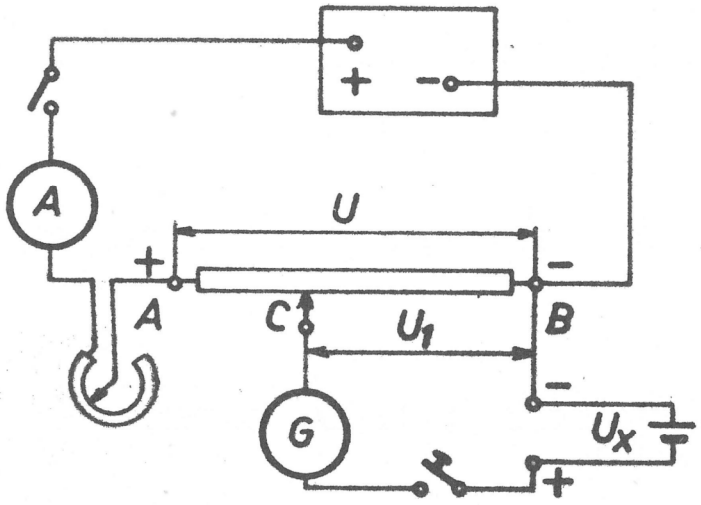


METODA KOMPENZACIJE

Ako se na krajeve A i B otpornika priključi napon iz baterije, onda taj napon tjera kroz otpornik struju I prema Ohmovom zakonu :

$$I = \frac{U}{R}$$

gdje je R otpor čitavog otpornika između krajeva A i B.



Između odvojka C i točke B na otporniku vlada napon:

$$U_1 = R_1 . I \quad ,$$

gdje je R_1 otpor dijela otpornika između točaka C i B.

Uvrsti li se u izraz za napon U_1 vrijednost za jakost struje I, to onda izlazi :

$$U_1 : U = R_1 : R \quad ,$$

tj. napon U_1 između točaka B i C odnosi se prema naponu U kao otpor R_1 između točaka B i C prema čitavom otporu R između krajeva A i B.

Ako se na točke B i C priključi sporedna grana, koja sadrži bateriju napona U_x, onda će općenito u sporednoj grani teći struja koju pokaže galvanometar G. Ova struja u sporednoj grani bit će nula samo u onom slučaju, ako je $U_x = U_1$, te ako je plus pol baterije u pomoćnoj grani spojen na točku C. Time je omogućeno uspoređivanje dvaju napona, jer se napon U_x u pomoćnoj grani kompenzira (poništi) padom napona na otporniku R_1.

Za mjerenje otpornik je izveden tako, da se vrijednost otpora R_1 između točaka C i B može mijenjati, a da pri tome ukupni otpor R između točaka A i B ostaje stalan. Time se može postići struja nula u sporednoj grani uz bilo koji napon U_x koji je niži od napona U između krajeva A i B.

Provede li se kompenzacija za napon U_x, onda vrijedi :

$$U_x : U = R_1 : R$$

Provede li se zatim kompenzacija za napon U_y u sporednoj grani, onda uz jednaku jakost struje I kroz otpornik R vrijedi izraz :

$$U_y : U = R_2 : R$$

gdje je R_2 otpor između točaka B i C u ovom drugom slučaju.

Iz ovih dvaju izraza slijedi omjer napona U_x i U_y :

$$U_x : U_y = R_1 : R_2 \qquad (1)$$

Prema tome je metodom kompenzacije omjer napona izražen omjerom otpora.

Aparatura i mjerenje. Mjerni otpornik u našoj aparaturi sastoji se iz dva jednaka dekadna otpornika spojena u seriju. Početni položaj mjernog otpornika prikazan je u shemi na slici na kraju. Gornji otpornik je namješten redom na 5, 10, 10, 10; a donji otpornik redom na 5, 0, 0, 0 dijelova skale. Prema tome je u početnom položaju vrijednost čitavog otpora između krajnjih točaka A i B :

$$R = (5 \cdot 1000 + 10 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 1)\,\Omega +$$
$$+ (5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1)\,\Omega = 11\,110\,\Omega$$

Između točaka C i B u početnom položaju otpor R_1 iznosi 5000Ω.

Ovako se namješten otpornik priključi preko sklopke, miliampermetra (mA) i okruglog kliznog otpornika na plus pol baterije od tri akumulatorska članka, dok se točka B spoji direktno na minus pol baterije. Sklopkom se uključi struja kroz otpornik. Tu struju pokaže miliampermetar. Okruglim se otpornikom namjesti jakost te struje na 0·5 mA. Ta jakost treba ostati uvijek ista u toku mjerenja.

U sporednu granu spaja se od točke C galvanometar s nulom u sredini skale, zatim tipka, pa plus pol četvrtaste baterije (element od 1·5 V). Minus pol te baterije spaja se neposredno na točku B.

Važno upozorenje: Kod prvih probanja da li su naponi U_x i U_1 kompenzirani ne smije se pritisnuti dugme na galvanometru.

Ako se sada pritisne tipka, galvanometar će pokazati otklon, što znači da naponi nisu kompenzirani. Tipka se otpusti, na donjoj dekadi se prvi gumb od lijeva prebaci npr. na 6, a istovremeno prvi gumb na gornjoj dekadi na 4 (time se zbroj tih otpora tj. ukupni otpor R drži stalnim). Sad se ponovno proba tipkom. Ukoliko se je otklon na galvanometru smanjio, onda treba nastaviti uključivanjem otpora na donjoj dekadi i isključivanjem na gornjoj. **Pri tome treba paziti, da se uvijek onoliko otpora u gornjoj dekadi isključi, koliko se u donjoj uključilo, i obrnuto. Tako to treba s prvim gumbom nastaviti dok otklon na galvanometru ne postane najmanji. Ukoliko otklon promijeni smjer, treba gumb vratiti na prethodni položaj.**

Nakon toga se na isti način namješta drugi i treći par gumbi, te

konačno četvrti. Kod konačnog namještanja nule može se osjetljivost galvanometra (mikroampermetra) povećati pritiskom na gumb u lijevom donjem uglu instrumenta. Za ravnotežu (postignutu kompenzaciju) očita se vrijednost otpora R_1 sa donje dekade.

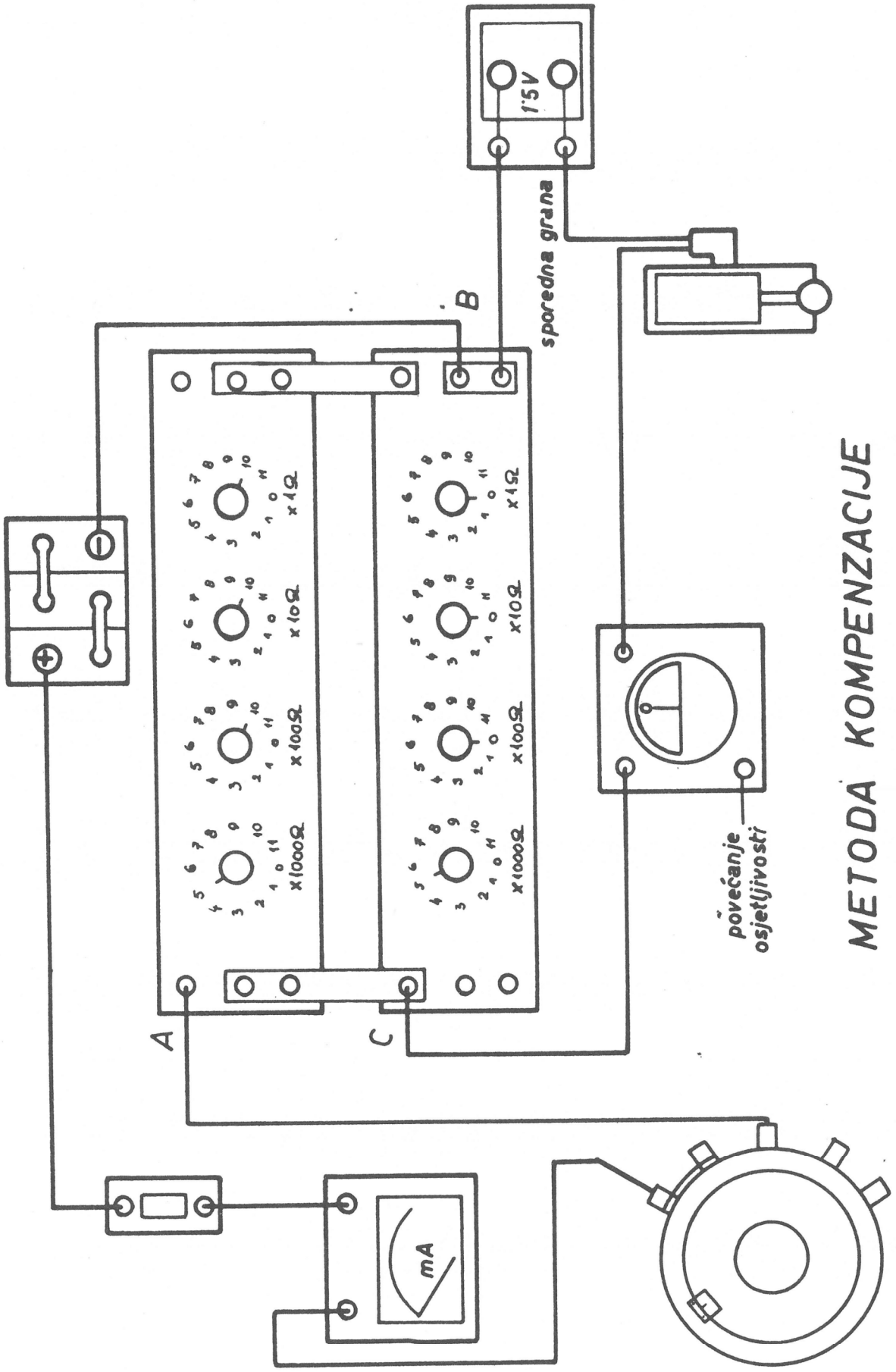
Sada se iz sporedne grane izključi četvrtasta baterija i namjesto nje uključi plosnata baterija (pazi gdje je plus pol te baterije). Dekadni se otpornici stave u početni položaj i po istom načinu i redosljedu kao i prije odredi otpor R_2 za nulu na galvanometru. Omjer $U_x : U_y$ izračuna se pomoću omjera $R_1 : R_2$, prema izrazu (1). Budući da je $U_x = 1{,}5$ V, to onda izlazi napon plosnate baterije :

$$U_y = 1{,}5 \frac{R_2}{R_1} \text{ volt} .$$

Metodom kompenzacije izmjeri napone plosnatih baterija broj 1 i broj 2.

Pribor:

1. Akumulator 6 V
2. Dekadski otpornik 2 komada
3. Baterija 1,5 V
4. Tipka
5. Nulinstrument
6. Okrugli klizni otpornik 50 kΩ
7. Žice za spajanje 9 komada
8. Krokodilska štipaljka 2 komada
9. Miliampermetar do 1 mA
10. Sklopka obična 1 komad


1'5V
sporedna grana
B
A
C
povećanje osjetljivosti
mA
METODA KOMPENZACIJE

JOULEOV ZAKON

Kad električna struja prolazi nekim vodičem, onda se u tom vodiču stvara toplina, tzv. Jouleova toplina. Potrošena električna energija jednaka je razvijenoj toplini. Radi se dakle o pretvaranju jednog oblika energije u drugi: električnog u toplinski. Ta se činjenica izriče Jouleovim zakonom

$$Q = U \cdot I \cdot t \quad .$$

Ovdje je U napon između krajeva vodiča, I jakost električne struje, t vrijeme kroz koje je struja tekla, te konačno Q toplina koja se je u vodiču razvila.

U ovom mjerenju mi ćemo toplinu razvijenu tokom električne struje upotrijebiti za grijanje određene količine vode i pri tome se pobrinuti, da se čim manje topline izgubi na okolinu. Ako se sva razvijena toplina preda vodi koju grijemo, onda se ta toplina može ovako prikazati

$$Q = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad ,$$

gdje je $(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ povišenje temperature nastalo uslijed dovođenja topline Q , zatim m je masa vode, te konačno c specifična toplina vode.

Ako je ispunjena pretpostavka, da je toplina razvijena električnom strujom jednaka toplini koju je voda primila, onda možemo pisati

$$U \cdot I \cdot t = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad .$$

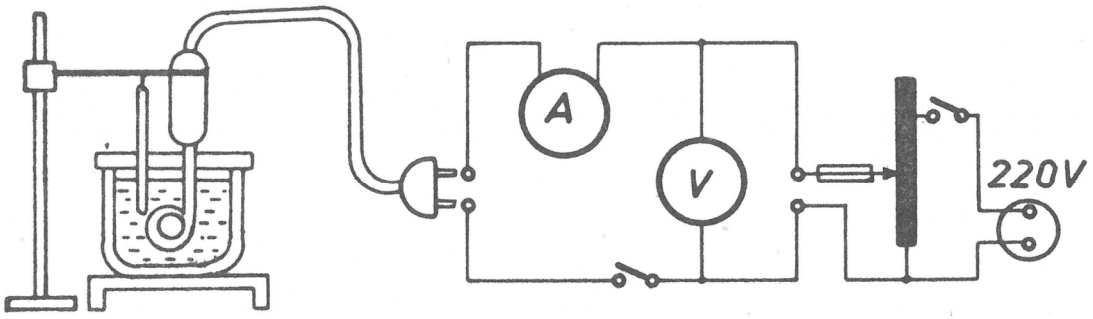
Za mjerenje potrošene električne energije služimo se voltmetrom koji mjeri napon U , ampermetrom koji mjeri struju I , te zapornom urom koja mjeri vrijeme t. Vagom izmjerimo masu vode m, a termometrom početnu temperaturu ϑ_1 i temperaturu na kraju ϑ_2, iz kojih izračunamo povišenje temperature $(\vartheta_2 - \vartheta_1)$. Možemo dakle iz ovog mjerenja odrediti specifičnu toplinu vode

$$c = \frac{U \cdot I \cdot t}{m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)} \quad .$$

Ako sve veličine u ovoj jednadžbi mjerimo jedinicama SI sustava, onda je specifična toplina dana u mjeri

$$\frac{\text{džul}}{\text{kilogram} \cdot \text{stupanj}} = \frac{J}{kg \cdot {}^{o}C} \quad .$$

Naša je aparatura za mjerenje načinjene prema ovoj shemi:



Električna se energija crpe iz gradske mreže pomoću promjenljivog autotransformatora (varijak). Napon na izlaznim stezaljkama varijaka približno je pokazan na skali pokretnog gumba na gornjoj osnovki varijaka. Taj se napon U mjeri voltmetrom V (mjerno područje do 250 V). Struju I koja teče kroz grijalicu uronjenu u vodu u termos-čaši, mjerimo ampermetrom A. Pazi: grijalica se ne smije priključiti, ako nije uronjena u vodu. U protivnom pregori, jer joj se ne odvodi dovoljno brzo toplina.

Postupak kod mjerenja. Najprije odvaži praznu termos-čašu. To je masa

$$m_1 = \{m_1\} \text{ kg} .$$

Zatim iz boce na stolu ulij u termos-čašu destilirane vode toliko, da do gornjeg ruba čaše fali približno 4 cm.

Odvaži čašu s vodom. To je masa

$$m_2 = \{m_2\} \text{ kg} .$$

Prema tome je u čaši masa vode

$$m = m_2 - m_1 = \left(\{m_2\} - \{m_1\}\right) \text{ kg} .$$

Čašu s vodom podmetni pod grijalicu (koja je učvršćena na stalku), čašu podigni i pod nju stavi klupicu. Grijalica uronjena u vodu ne smije dirati staklo čaše.

Termometar objesi na hvataljku grijalice tako, da roni u vodu, a da ne dira ni grijalice ni čaše. Sad se čaša poklopi s dva poklopca u obliku slova D, a zatim se aparatura spoji kako je u shemi prikazano.

Prije priključivanja varijaka na gradsku mrežu treba staviti prekidač varijaka na isključeno (gdje nema crvene točke), gumb varijaka na nulu, prekidač na daski u poprečni položaj (isključeno).

Pošto si provjerio da je sve u redu na aparaturi, utakni uti-

kač u gradsku mrežu tako, da se crvena točka na utikaču podudara sa crvenom točkom utičnice (fazni vodič). Prebaci prekidač na varijaku na uključeno i okretanjem gumba na varijaku podigni napon toliko, da voltmetar pokaže 200 V. Ampermetar ne smije pri tome ništa pokazivati, jer je prekidačem na daski krug struje još prekinut.

Sad se očita temperatura vode u termos-čaši (ocijeni desetinke stupnja). To je temperatura

$$\vartheta_1 = \{\vartheta_1\}\ ^{\circ}C \quad .$$

Pri tom čitanju trebat će otklopiti čašu i termometar malo podignuti. Termometar se ne smije kod toga izvaditi iz vode.

Nakon toga se istodobno uključi struja kroz grijalicu zakretom prekidača na daski, i pokrene zaporna ura.

Odmah nakon uključenja struje treba gumbom na varijaku namjestiti ponovo napon U na voltmetru na 200 V, jer je radi opterećenja grijalicom nešto pao. Za vrijeme čitavog mjeranja treba napon održavati na toj vrijednosti i prema potrebi gumbom na varijaku korigirati.

Jakost struje I koja sada teče kroz grijalicu očita se s ampermetra

$$I = \{I\}\ A \quad .$$

Grijanje vode u čaši traje dotle, dok se ne postigne temperatura od približno $80^{\circ}C$. Kad se to dobije, istodobno se prekine struja kroz grijalicu i zaustavi zaporna ura, koja sada pokazuje vrijeme

$$t = \{t\}\ s \quad .$$

Motri se termometar i miješalicom promiješa voda u čaši. Očita se najviša temperatura (cijeneći desetinke stupnja) koju termometar pokaže. To je temperatura

$$\vartheta_2 = \{\vartheta_2\}\ ^{\circ}C \quad .$$

Zgodno je vrijednosti dobivene mjerenjem unositi u tablicu, koju si unaprijed priredimo.

	$\frac{m_1}{kg}$	$\frac{m_2}{kg}$	$\frac{m_2 - m_1}{kg}$	$\frac{\vartheta_1}{^{\circ}C}$	$\frac{\vartheta_2}{^{\circ}C}$	$\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{^{\circ}C}$	$\frac{U}{V}$	$\frac{I}{A}$	$\frac{t}{s}$	$\frac{c}{J \cdot kg^{-1} \cdot (^{\circ}C)^{-1}}$
I										
II										

Specifičnu toplinu vode c možemo sada izračunati, ako uvrstimo mjerene vrijednosti u posljednju formulu. Međutim u toj formuli je pretpostavljeno da je sva nastala toplina prešla na vodu, te da se za vrijeme mjerenja nije ništa topline izgubilo. Obje su ove pretpostavke samo približno ispunjene. Osim vode kod ovog pokusa ugrijala se i termos-čaša. Posebnim mjerenjem može se odrediti, koliki je toplinski kapacitet čaše i grijalice. U našem primjeru on iznosi toliko, kao da je masa vode m koja se grije povećana za 0·030 kg. Prema tome taj gubitak topline na čašu možemo uzeti u obzir, ako masu m povećamo za 0·030 kg (za "vodenu vrijednost" naše aparature). Ostale gubitke topline ćemo zanemariti. Prema tome konačna formula za računanje specifične topline vode glasi

$$c = \frac{U \cdot I \cdot t}{(m + 0{\cdot}030\ \mathrm{kg})(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \ .$$

Pošto smo prvo mjerenje obavili, vratimo vruću vodu iz termos-čaše u njezinu bocu. Čaša se osuši i zatim se načini drugo mjerenje upotrijebivši hladnu destiliranu vodu iz druge boce. Rezultati tog drugog mjerenja i konačnog računa unesu se u tablicu.

Napomena.

Do 31. prosinca 1980. smjela se je upotrebljavati u javnom saobraćaju mjerna jedinica za energiju kalorija (Cal). Njezina je primjena bila najčešća u nauci o toplini. Ima, međutim, tri takve jedinice koje se međusobno malo razlikuju. Na strani 75 je izloženo kako su se one definirale. Za mjerenje specifične topline vode kako smo ga ovdje izveli, dolazi u obzir usporedba sa srednjom kalorijom (Cal_m). Specifična toplina vode izražena tom starom jedinicom iznosi

$$1\ \frac{Cal_m}{kg \cdot {}^{o}C} = \{c\}\ \frac{J}{kg \cdot {}^{o}C} \ .$$

To je, dakako, jednako nađenoj specifičnoj toplini izraženoj SI jedinicom. Iz toga slijedi

$$1\ Cal_m = \{c\}\ J \ ,$$

a to je veza između stare mjere Cal_m za energiju i J (džul).

SPECIFIČNA VODLJIVOST ELEKTROLITA

Elektrolitima se nazivaju kapljevine, koje imaju sposobnost vođenja električne struje posredstvom iona. Dobivamo ih rastapanjem soli, kiselina i baza u vodi ili nekim drugim otapalima. Molekule soli, kiseline odnosno baze raspadaju se na ione: pozitivne katione i negativne anione. Prolasku struje elektrolit pruža otpor. Povrh toga u njemu se odvijaju kemijski i elektrokemijski procesi, koji izazivaju polarizaciju elektroda uronjenih u elektrolit, kad je izvor napajanja istosmjerna struja. Ova polarizacija stvara t.zv. protuelektromotornu silu, a ta dolazi od razlike potencijala između elektroda i elektrolita. Budući da ta elektromotorna sila radi protiv istosmjernog napona, koji tjera struju kroz elektrolit, to onda direktna primjena Ohmovog zakona daje prevelik otpor za elektrolit. Da se ta smetnja od protuelektromotorne sile izbjegne, upotrebljavaju se za mjerenje otpora elektrolita izmjenični izvori napona frekvencije oko 1000 Hz.

Kad se radi o stupcu elektrolita stalnog presjeka i određene duljine, vrijedi isti zakon otpora kao kod metalnih vodiča:

$$R = \varsigma \frac{l}{S} \qquad (1)$$

Ovdje je l duljina stupca mjerena u metrima, S površina presjeka mjerena u kvadratnim metrima, a ς je <u>specifični otpor</u> mjeren u om·metar $= \Omega \cdot m$.

Recipročnu vrijednost specifičnog otpora $\varkappa$ nazivamo <u>specifična vodljivost</u> . Ona se mijenja s temperaturom.

$$\varkappa = \frac{1}{\varsigma} \qquad (2)$$

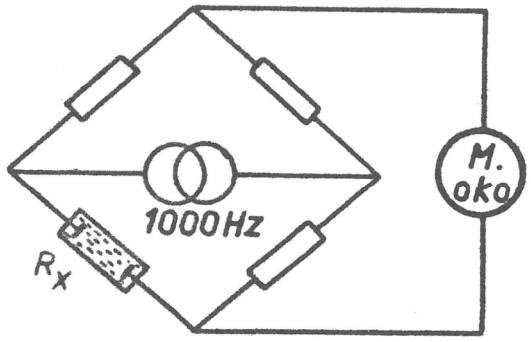
Ako je elektrolit sadržan u posudi (ćeliji) bilokakvog oblika, onda je otpor elektrolita između dviju elektroda uronjenih u elektrolit:

$$R = K\varsigma \qquad (3)$$

gdje je K konstanta, koja zavisi samo o geometrijskim prilikama (oblik posude, visina elektrolita u posudi, položaj elektroda u posudi i slično). Uz uvijek istu posudu, isti nivo elektrolita i jednak namještaj elektroda, konstanta K je t.zv. <u>konstanta ćelije</u>.

APARATURA I MJERENJE. Mjerenje izvodimo konduktometrom, koji je zapravo Wheatstoneov most napajan izmjeničnom strujom. U jednoj grani mosta kao otpor nalazi se elektrolit. Izvor napona, ukopčan u jednu dijagonalu, napaja most izmjeničnom strujom frekvencije

oko 1000 Hz. U drugoj dijagonali je kao nul-instrument magično oko.



Instrument treba priključiti na gradsku mrežu (220 V) i uzemljiti ga spajanjem za to određene stezaljke sa zemljom. Gumb za osjetljivost (sensitivity) okrenuti u desno do približno polovine. Sada treba pričekati koju minutu da zasvijetli magično oko i da se instrument ugrije. Elektrolit kojeg mjerimo spajamo na stezaljke R_x .

Kod mjerenja najprije odaberemo otporno područje na skali donjeg lijevog gumba. Zatim gornji gumb sa baždarenom skalom polagano okrećemo dok se magično oko potpuno ne zatvori tj. dok je na njemu tamno polje najšire. Zatim se gumb za osjetljivost okrene potpuno u desno (time se poveća osjetljivost) pa se namještanjem gumba sa skalom podesi još jednom nula mosta, tako da magično oko bude po mogućnosti zatvoreno.

Primjer. Otporno područje 100Ω -1kΩ. Magično oko se zatvori kod oznake baždarenog gumba 5·8. Otpor elektrolita je R = 580Ω. Ako se ne postiže ni u jednom položaju baždarenog gumba zatvaranje magičnog oka, treba odabrati drugo otporno područje.

Mjerenje ćemo vršiti s platinastim elektrodama, koje se nalaze u dvije staklene cijevi pričvršćene paralelno na stalku. Staklenu posudu postavljamo pod elektrode na klupicu i napunimo je elektrolitom do određene visine. Treba pri tome paziti da nema mjehurića zraka na elektrodama.

Nakon mjerenja elektrolit vratimo u bocu, a posudu isperemo destiliranom vodom i ostavimo da se voda ocijedi. U posudu s oznakom "H_2O" više puta uronimo elektrode, da ih isperemo.

ODREĐIVANJE KONSTANTE ĆELIJE. Poslužit ćemo se otopinom 0·01 n KCl (0·01 normalna otopina kalijevog klorida). Jedna litra normalne otopine sadrži jedan mol soli KCl, a to je toliko grama KCl, kolika mu je **molna masa** . U ovom slučaju je to 74·56g, jer 1 mol KCl = 74·56 gram . Otopina 0·01 n KCl sadrži 0·01 mol KCl na litru otopine.

Treba izmjeriti otpor R što ga pruža otopina 0·01nKCl. Pomoću formula (2) i (3), uz poznatu specifičnu vodljivost koja se mijenja s temperaturom, nađemo konstantu ćelije K. U tablici je

dana spesifična vodljivost. Ako u tablici nema potrebnog podatka, treba ga izračunati interpolacijom za temperaturu elektrolita očitanu sa termometra.

Vodljivost $\varkappa$ 0·01 n KCl za razne temperature

t (°C)	0	8	12	16	20	24
$\varkappa\ (\Omega^{-1}\cdot m^{-1})$	0·078	0·097	0·107	0·1173	0·1278	0·1386

MJERENJE SPECIFIČNE VODLJIVOSTI OTOPINA NATRIJEVOG KLORIDA -NaCl.

Za niz otopina treba izmjeriti otpore R i pomoću gore određene konstante ćelije K izračunati pripadne specifične vodljivosti $\varkappa$ i specifične otpore ϱ . Navesti i temperaturu svake pojedine otopine.

Koncentracija otopine NaCl	t (°C)	R (Ω)	$\varrho\ (\Omega\cdot m)$	$\varkappa\ (\Omega^{-1}\cdot m^{-1})$
$\frac{2}{100}$ n				
$\frac{4}{100}$ n				
$\frac{6}{100}$ n				
$\frac{8}{100}$ n				
$\frac{1}{10}$ n				

Iz tablice treba grafički prikazati:

1. Zavisnost otpora R o koncentraciji otopine NaCl u mjerilu: na apscisi 1 cm = $\frac{1}{100}$ n , a na ordinati 1 cm = 100Ω.
2. Zavisnost specifične vodljivosti $\varkappa$ o koncentraciji otopine NaCl u mjerilu : na apscisi ponovno 1 cm = $\frac{1}{100}$ n, a na ordinati 1 cm = 0·1 $\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$.

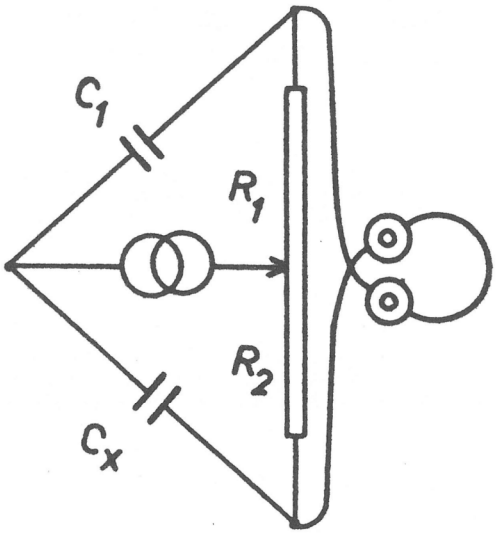
Pribor:

1. Konduktometar
2. Boca s otopinom $\frac{1}{10}$ n KCl
3. 5 boca s otopinama NaCl različitih koncentracija
4. Elektrode u staklu na stalku
5. Staklena čaša
6. Boca s destiliranom vodom
7. Termometar
8. Tava
9. Krpa

KAPACITIVNI MOST

Kapacitivni most spojen je poput Wheatstoneovog mosta, samo s ovim razlikama: u dvije susjedne grane nalaze se kondenzatori namjesto otpornika, nadalje most se napaja iz audiofrekventnog generatora a ne iz baterije, te konačno kao nul-instrument služe slušalice.

Most je spojen prema shemi:



Kad se kliznim kontaktom na potenciometru postigne najslabiji zvuk u slušalicama, onda je most u ravnoteži i vrijedi razmjer:

$$C_x : C_1 = R_1 : R_2 \quad .$$

Odavle možemo izračunati nepoznati kapacitet C_x. Otpori R_1 i R_2 ne trebaju biti poznati po apsolutnoj vrijednosti, nego treba znati samo njihov omjer. Prema tome se za ove otpore može upotrijebiti klizna žica, odnosno precizni potenciometar.

U našem primjeru klizni kontakt potenciometra nosi skalu, koja je razdijeljena u 100 dijelova, od kojih je svaki razdijeljen još na pola manjom crticom. Brojke na skali idu od 0 do 5. Sa 5 je označen 100-ti razdio. Ako se sa n označi razdio ispod znaka, onda vrijedi omjer:

$$R_1 : R_2 = (5 - n) : n \quad .$$

MJERENJE : Načini spojeve mosta prema shemi i rasporedu na posebnoj slici. Utikač oscilatora priključi se na gradsku mrežu (220V) i ne vadi se do završetka svih mjerenja. Oscilator je RC generator. Uključuje se okretanjem donjeg lijevog gumba u desno. Kada je uključen, zasvijetli signalna crvena žaruljica. Na oscilatoru se namjesti bilo koja frekvencija između 500 i 1000 Hz, za koju je uho najosjetljivije. Frekvencija se odabire donjim gumbom u sredini instrumenta (oznaka x10) i gornjim gumbom s bađdarenom skalom.

Kao poznati kondenzator kapaciteta C_1 uzet ćemo kondenzator označen brojkom 1 kapaciteta 4 μF. To je naš referentni kondenzator. Kao nepoznate kapacitete uključivat ćemo redom kondenzato-

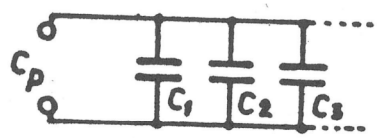
re označene brojkama 2, 3, 4 te konačno 5.

Prema tome mjerenjem dobivamo vrijednosti, koje unosimo u tablicu:

Kondenzator	2	3	4	5	2 i 3		2 i 5	
					paralelno	serijski	paralelno	serijski
n								
5 - n								
C_x								
Razlika %								

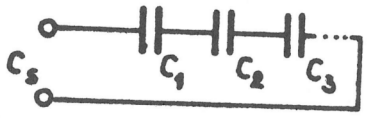
Brojku n treba čitati na četiri mjesta. Da to očitanje bude valjano, treba se dobro upoznati sa skalom na potenciometru. Ako npr. ispod znaka stoji upravo dio označen sa 2·5 onda je očitanje 2·500. Slijedeći mali znak skale prema većim vrijednostima znači 2·525. Iza toga dolazi opet veći znak 2·550, pa opet manji znak koji je 2·575. Zatim dolazi opet veći znak koji označava 2·600. Ako se skala nalazi na nekom srednjem položaju, npr. na $\frac{4}{10}$ razmaka izmedu znaka 2·575 i znaka 2·600, onda je očitanje 2·585. Kad bi položaj kazaljke ocijenili na $\frac{3}{10}$ razmaka izmedu istih znakova, onda bi taj položaj bio 2·583 tj. očitanje 2·5825 zaokruženo na 4 mjesta.

Pošto smo izmjerili kapacitete pojedinih kondenzatora, izmjerit ćemo kapacitet serijskog spoja kondenzatora br. 2 i br. 3 , zatim ta ista dva kondenzatora u paralelnom spoju. Slijedeći zadatak je mjerenje kapaciteta serijskog i paralelnog spoja kondenzatora s brojevima 2 i 5 .



Kapacitet C_p paralelnog spoja kondenzatora jednak je sumi pojedinih kapaciteta:

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$



Kapacitet C_s serijskog spoja kondenzatora izračuna se iz formule:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$

Načini paralelnog i serijskog spajanja kondenzatora prikazani su na slici.

Spajanje kondenzatora vrši se pomoću krokodil štipaljki, kojima se hvata kovna pločica pričvršćena na izvodu kondenzatora, ili bananskim utikačima i običnim priključnicama, ovisno o izvedbi kondenzatora.

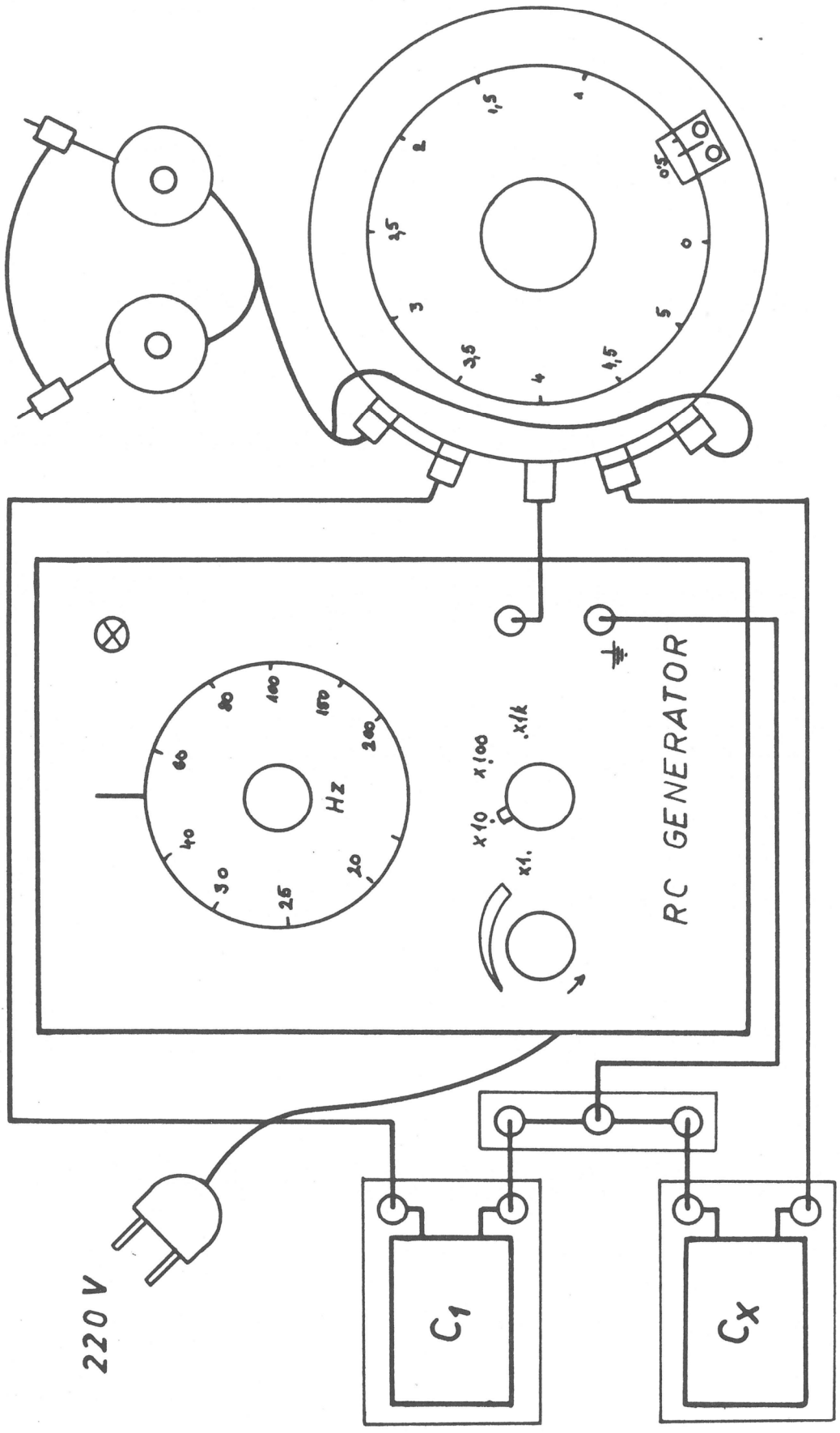
Vrijednosti posljednjeg redka dane tablice dobiju se računanjem. Ako npr. na kondenzatoru piše $4\,\mu F$ to je njegova nazivna vrijednost C_n . Izmjerena je C_x . Razlika u postotcima se dobije iz izraza :

$$\frac{C_x - C_n}{C_n} \cdot 100 \ .$$

Na taj način treba izračunati eventualne razlike između kapaciteta kondenzatora 2, 3 i 4 prema referentnom kondenzatoru C_1 , koji ima kapacitet $4\,\mu F$. Za izmjerene kapacitete paralelnih i serijskih spojeva treba također provesti računsku kontrolu. U zadnji redak posljednja četiri stupca tablice unose se razlike u postotcima između izmjerenih paralelnih i serijskih kombinacija i računom dobivenih vrijednosti.

Pribor :

1. RC generator
2. Okrugli klizni otpornik 5 $k\Omega$
3. Slušalice
4. Kondenzatori 5 komada
5. Priključna letvica
6. Žice za spajanje 7 komada


220 V
C_1
C_x
RC GENERATOR
Hz
x10
x100
x1k
x1
KAPACITIVNI MOST

SNAGA KOD IZMJENIČNE STRUJE

Gradska mreža ima između stezaljki dvopolne priključne kutije (utičnice) izmjenični napon u, koji se mijenja po zakonu sinusa:

$$u = U_{max} \sin \omega t \ .$$

Ako se na tu utičnicu priključi potrošač, onda napon tjera kroz potrošač električnu struju. Pri tome gradska mreža vrši rad. Budući da je napon promjenljiv, a uslijed toga i jakost struje, koju potrošač iz mreže uzima, to onda u raznim djelićima vremena i rad gradske mreže izlazi različit. U djeliću vremena dt izvršeni rad dA prikazan je izrazom:

$$dA = u \cdot i \cdot dt \ .$$

Taj je rad pozitivan (gradska mreža vrši rad) ako struja i teče u onom smjeru u kojem napon u želi tjerati pozitivne električne naboje.

Ako je struja i sinusoidalnog oblika, onda u titrajnom vremenu T gradske mreže izvršeni rad prikazan je izrazom:

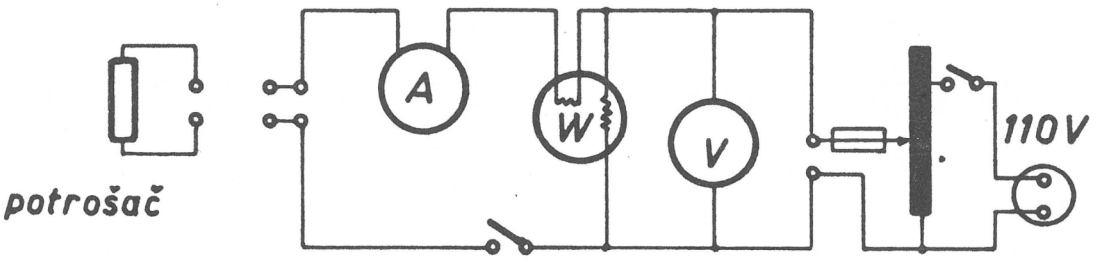
$$A = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot T \cdot \cos \varphi \ ,$$

gdje je φ razlika u fazi između narinutog napona i sinusoidalne struje, koju potrošač uzima.

Snaga je kvocijent između izvršenog rada A i vremena T, u kojem je taj rad izvršen. Prema tome kod sinusnog napona i struje snaga je prikazana izrazom:

$$W = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \varphi \ .$$

Aparatura. U ovoj vježbi mjerit ćemo snagu koju uzimaju razni potrošači iz utičnice 110 V izmjenično. Snagu W u vatima pokazuje vatmetar. Istodobno voltmetrom mjerimo U_{ef}, a ampermetrom I_{ef}. Priključci su izvedeni po shemi:



Struju iz utičnice 110 V izmjenično uzimamo preko varijaka tako, da utikač varijaka utaknemo u tu utičnicu. Voltmetar pokazuje napon na izlazu iz varijaka. Jedan mjerni svitak vatmetra spojen je paralelno sa voltmetrom, a drugi mjerni svitak vatmetra (strujni svitak) spojen je u seriju s ampermetrom. Prvi razdio na skali ampermetra označen točkom je početak baždarenog dijela i znači onoliko ampera koliko izlazi iz daljnje razdiobe.

Potrošači u našem primjeru bit će žarulje, prigušnice i kondenzatori. Kod žarulje struja i napon su u fazi, pa je razlika u fazi $\varphi = 0$. Prema tome u ovom slučaju je $\cos\varphi = 1$. Kod kondenzatora struja ide ispred napona za četvrt titraja, zato je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a $\cos\varphi = 0$. Prema tome je snaga koju kondenzatori iz mreže uzimaju u vremenskom prosjeku jednaka nuli. Kod prigušnice struja zaostaje za naponom skoro za četvrt titraja, pa je i u ovom slučaju snaga skoro jednaka nuli.

Mjerenje. Varijakom se namjesti da voltmetar pokazuje 100 V. Taj napon treba kod svih mjerenja namjestiti, pošto se je uključio potrošač. Prema donjoj tabeli unesi rezultate mjerenja u odgovarajuće stupce, a vrijednosti za posljednji izračunaj.

potrošač	struja I(A)	snaga W(W)	$\cos\varphi = \frac{W}{U \cdot I}$
1 žarulja			
2 žarulje			
3 žarulje			
4 žarulje			
4 prigušnice			
kondenzator 30 μF			
" 40 μF			
" 50 μF			
" 60 μF			
" 70 μF			
" 80 μF			
" 90 μF			
" 100 μF			
paralelni spojevi			
1 žarulja i 4 prigušnice			
2 žarulje i 4 "			
3 " i 4 "			
4 " i 4 "			

potrošač paralelni spojevi	struja I(A)	snaga W(W)	$\cos\varphi = \frac{W}{U \cdot I}$
1 žarulja i 30 μF			
1 -"- i 50 μF			
1 -"- i 100 μF			
2 žarulje i 30 μF			
2 -"- i 50 μF			
2 -"- i 100 μF			
3 -"- i 30 μF			
3 -"- i 50 μF			
3 -"- i 100 μF			
4 -"- i 30 μF			
4 -"- i 50 μF			

Napomena: Prilikom ukapčanja odnosno iskapčanja potrošača (žarulja·prigušnica ili kondenzatora) prekini strujni krug prekidačem.

Vatmetar se uključuje na strujni svitak za područje do 5 A (stezaljke 1-4), a naponski za 125 V. Puni otklon skale označen je 60 W, a mjeri 600 W, jer je jedan dio skale 10 W.

Pribor :

1. Varijak za I_{max} = 4 A
2. Voltmetar do 150 V
3. Ampermetar do 4 A
4. Ampermetar do 1·5 A
5. Vatmetar
6. Daska s priključnicama
7. Žice za spajanje 12 komada
8. Daska s 4 žarulje
9. Daska s 4 prigušnice
10. Daska s 10 kondenzatora

PARALELNO SPAJANJE IMPEDANCIJA

Ako se izmjenični napon $u = U \sin \omega t$ narine na potrošač u kojem se razvija samo Jouleova toplina, a magnetsko odnosno električno polje tog potrošača je neznatno, onda je struja i , koja teče kroz taj potrošač u fazi s naponom i prikazana je izrazom:

$$i_{ž} = \frac{U}{R} \sin \omega t \quad .$$

Takav slučaj imamo kod žarulje.

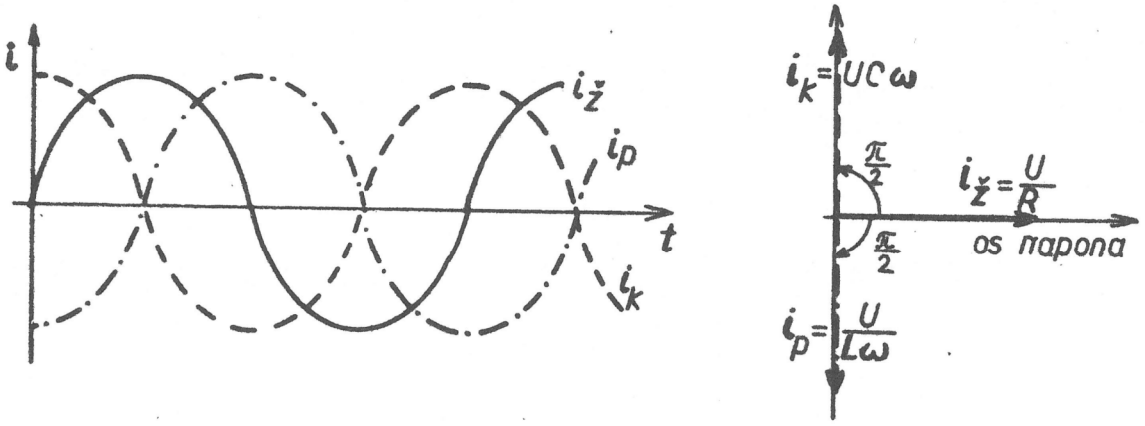
Ako se napon $u = U \sin \omega t$ narine na prigušnicu sa željezom, kod koje se stvaranje Jouleove topline u žici prigušnice te gubitci u željezu mogu zanemariti, onda je struja i kroz tu prigušnicu u zaostatku u fazi za $\pi/2$ iza napona i predočena je izrazom:

$$i_p = \frac{U}{L\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{U}{L\omega} \cos \omega t \quad .$$

Ako se napon $u = U \sin \omega t$ narine na kondenzator sa zanemarljivim gubitcima u dielektriku, onda struja i kroz taj kondenzator ide za $\pi/2$ ispred napona, a predočena je izrazom:

$$i_k = C\omega U \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = C\omega U \cos \omega t \quad .$$

Struje kroz spomenute potrošače (žarulju, prigušnicu i kondenzator) zgodno je prikazati grafički (vremenska zavisnost) i vektorskim prikazom (maksimalne ili efektivne vrijednosti), kao na slici:

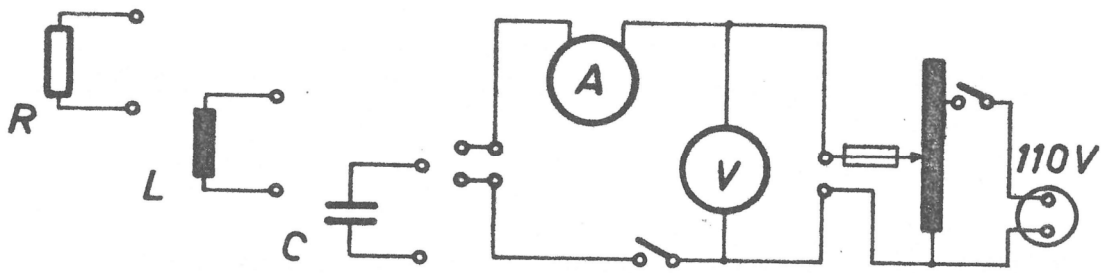


Napon narinut na potrošače je u fazi sa strujom kroz žarulju i ima istu vremensku zavisnost.

U ovoj vježbi mi ćemo mjeriti efektivnu vrijednost struje koja teče kroz žarulje, odnosno prigušnice, odnosno kondenzatore. Zatim ćemo spojiti u paralelu žarulje s prigušnicama, odnosno žarulje s kondenzatorima, odnosno prigušnice s kondenzatorima i u svakom od tih slučajeva izmjeriti efektivnu jakost struje. Mjerene jakosti struja za ove paralelne kombinacije izvest ćemo i računski

iz izmjerenih struja kroz pojedine impedancije.

Aparatura je spojena prema ovoj shemi:



1. MJERENJE. Na izlazne stezaljke na daski priključi žarulje. Prekidač na daski isključi (poprečni položaj), prekidač na promjenljivom transformatoru (varijaku) također (gdje nema crvene točke). Gumb na gornjoj osnovki varijaka stavi na nulu. Ako je sve u redu spojeno, priključi primarnu stranu varijaka na 110 V izmjenično. Ako se sada prekidač na varijaku prebaci na crvenu točku, a gumb varijaka zakreće na desno, voltmetar (mjerno područje do 150 V) pokazivat će napone do maksimalno nekih 140 V. Ampermetar (mjerno područje do 1A) ne pokazuje ništa, jer je prekidačem na daski krug struje prekinut.

Namjesti napon na 120 V. To je efektivna vrijednost napona, za koje vrijednosti je instrument i baždaren. Taj napon treba namjestiti kod svakog mjerenja u ovoj vježbi. Uključi prekidačem na daski struju kroz žarulje. Ampermetar pokazuje efektivnu vrijednost te struje.

Izmjeri struju kroz prvu žarulju : $I_{1ž}$ = ...
struju kroz drugu žarulju : $I_{2ž}$ = ...
struju kroz obje žarulje paralelno : $I_{ž}$ = ...

Prije svakog očitanja treba varijakom namjestiti napon na 120 V.

2. MJERENJE. Napon namjesti na 120 V.

Izmjeri struju kroz prvu prigušnicu : I_{1p} = ...
struju kroz drugu prigušnicu : I_{2p} = ...
struju kroz prigušnice spojene paralelno : I_{p} = ...

3. MJERENJE. Napon 120 V.

Struja kroz paralelni spoj kondenzatora 1,2: I_{12k} = ...
Struja kroz paralelni spoj kondenzatora 3,4: I_{34k} = ...
Struja kroz paralelni spoj kondenzatora1234: I_{1234k} = ...

4. MJERENJE. Napon 120 V.

Struja kroz paralelni spoj žarulje 1 i prigušnice 1: $I_{1ž1p}$ = ...

Struja kroz paralelni spoj žarulje 2 i prigušnice 2: $I_{2ž2p} = \ldots$

Struja kroz paralelni spoj žarulja i prigušnica : $I_{žp} = \ldots$

Izračunaj vrijednosti:

$\sqrt{I_{1ž}^2 + I_{1p}^2} = \ldots$ $\sqrt{I_{2ž}^2 + I_{2p}^2} = \ldots$ $\sqrt{I_{ž}^2 + I_{p}^2} = \ldots$

5. MJERENJE. Napon 120 V.

Struja kroz paralelni spoj žarulje 1 i kondenzatore 1,2: $I_{1ž12k} = \ldots$

nadalje $I_{2ž34k} = \ldots$ te $I_{ž1234k} = \ldots$

Izračunaj vrijednosti:

$\sqrt{I_{1ž}^2 + I_{12k}^2} = \ldots$ $\sqrt{I_{2ž}^2 + I_{34k}^2} = \ldots$ $\sqrt{I_{ž}^2 + I_{1234k}^2} = \ldots$

6. MJERENJE. Napon 120 V.

Izmjeri struje kroz paralelni spoj obih prigušnica i kondenzatora kako slijedi :

$I_p = \ldots$

$I_{p1k} = \ldots$

$I_{p12k} = \ldots$

$I_{p123k} = \ldots$

$I_{p1234k} = \ldots$

Izračunaj vrijednosti:

$I_p - I_{12k} = \ldots$ $I_p - I_{1234k} = \ldots$

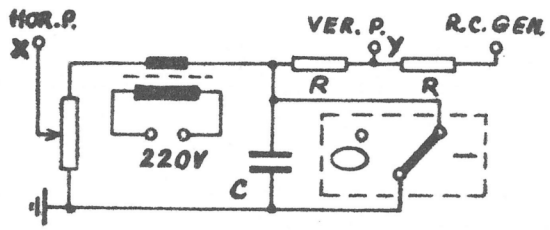
Pribor :

1. Varijak za $I_{max} = 2$ A
2. Voltmetar do 100 V
3. Voltmetar do 150 V
4. Ampermetar do 400 mA
5. Ampermetar do 1 A
6. Daska s priključnicama i sklopkom
7. Žice za spajanje 4 komada
8. Daska s 2 žarulje
9. Daska s 2 prigušnice
10. Daska s 4 kondenzatora

BAŽDARENJE RC GENERATORA

Baždarenje u ovoj vježbi će se izvesti pomoću Lissajous-ovih krivulja. Kao referentno titranje u smjeru osi x upotrijebit ćemo napon iz sekundarne zavojnice transformatora priključenog na gradsku mrežu. Taj napon privodimo x pločicama katodnog osciloskopa. Frekvenciju gradske mreže mjerimo frekvencmetrom s jezičcima. Izmjenični napon iz RC generatora privodimo na y pločice katodnog osciloskopa. Ukoliko su te dvije frekvencije u omjeru cijelih brojeva, koji nisu preveliki, na zastoru osciloskopske cijevi vidi se mirna Lissajousova krivulja. Ako se krivulja lagano mijenja, onda je omjer frekvencija samo približno jednak omjeru cijelih brojeva.

Radi lakšeg određivanja omjera u slučaju da je broj, koji odgovara titranju u smjeru osi y velik, upotrebljava se t.zv. eliptična baza (sklopka na ⬭). To znači da se u smjer y (VER.P.) ubacuje napon jednake frekvencije kao i u smjeru osi x (HOR.P.) samo s razlikom u fazi od $\pi/2$. K tome se onda naponu dodaje napon iz RC generatora. Tako se dobije Lissajousova krivulja u obliku krune.



MJERENJE. Načini spojeve između instrumenata prema shemi, koja je na posebnoj slici. Po dovršenom spajanju, pozovi asistenta da pregleda aparaturu.

Odmah zatim treba uklopiti RC generator, osciloskop, frekvencmetar i transformator, priključivanjem šuko utičnice u gradsku mrežu (crveno 220 V), kako bi se instrumenti ugrijali do stacionarnog stanja. To zagrijavanje traje najmanje 15 minuta. Pošto je vrijeme zagrijavanja prošlo, namjesti se na osciloskopu intentitet svjetlosti (gornji lijevi gumb) na toliku vrijednost, da se slika još dobro vidi.

Na RC generatoru srednjim gumbom dolje, uključi se prva skala (xl) za frekvencije od 20 do 200 Hz. Na daščici sklopka se pritisne za linearnu bazu (-). Okretanjem srednjeg gornjeg gumba na RC generatoru namjesti se omjer frekvencija $n_x : n_y = 3 : 1$ tako, da se na zastoru pojavi odgovarajuća Lissajousova krivulja. U tablicu se unese frekvencija gradske mreže (određuje ju jezičac na frekvencmetru, koji titra s najvećom amplitudom) i položaj skale na RC generatoru. Sada se taj isti postupak nastavi za omjere 2 : 1, 1 :1, 3 : 4 itd. redom prema tablici I.

Tablica I : 20 - 200 Hz (linearna baza)

omjer frekvencija $n_x : n_y$	2:1	1:1	3:4	2:3	1:2	1:3	1:4
frekvencija mreže n_x							
položaj kazaljke							
$n_y = n_x \frac{n_y}{n_x}$							

Taj se postupak sada nastavi za drugu skalu, koja se uključi prebacivanjem srednjeg gumba na RC generatoru na područje (x10) 0·2 - 2 kHz. Rezultati se unose u tablicu II.

Tablica II : 0·2 - 2 kHz (eliptična baza)

omjer frekvencija $n_x : n_y$	1:5	1:6	1:7	1:8	1:9	1:10	1:11	1:12
frekvencija mreže n_x								
položaj kazaljke								
$n_y = n_x \frac{n_y}{n_x}$								

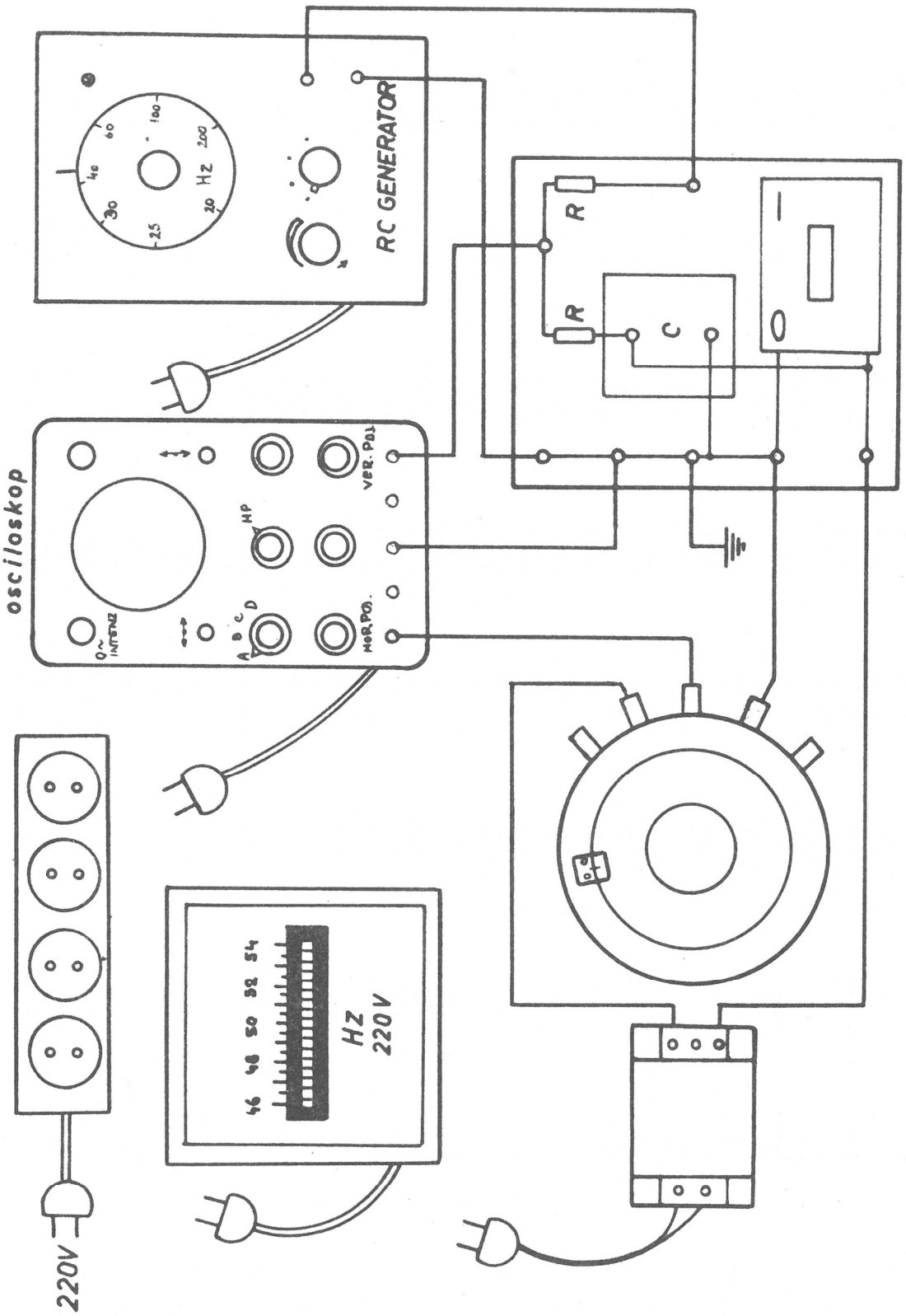
Kod omjera 1:5 i 1:6 može se upotrijebiti i eliptična baza, koja se dobije prebacivanjem sklopke na daščici. U daljnjim mjerenjima tj. za veće omjere frekvencija, preglednije je raditi s eliptičnom bazom. Rezultati se unose u tablicu III.

Tablica III : 0·2 - 2 kHz (eliptična baza)

omjer frekvencija $n_x : n_y$	1:13	1:14	1:15	1:16	1:17	1:18	1:19	1:20
frekvencija mreže n_x								
položaj kazaljke								
$n_y = n_x \frac{n_y}{n_x}$								

Podatak za četvrti redak tablice dobije se tako, da se frekvencija mreže n_x iz drugog redka množi recipročnom vrijednošću omjera $n_x : n_y$ unesenog u prvi redak.

Pribor : 1. RC generator
2. Osciloskop
3. Spoj za eliptičnu bazu na dasci
4. Okrugli klizni otpornik 500 Ω
5. Trafo za zvonce
6. Frekvencmetar
7. Žice za spajanje 9 komada
8. Letvica s utičnicama za 220 V



BAŽDARENJE RC GENERATORA

BAKRENI KULOMETAR

Pri prolazu struje kroz elektrolit izlučuje se na katodi u pravilu vodik odnosno kovine. Količina izlučene kovine razmjerna je količini elektriciteta (električnom naboju), koja je prošla kroz elektrolit (I Faradayev zakon). Formulom je to izraženo :

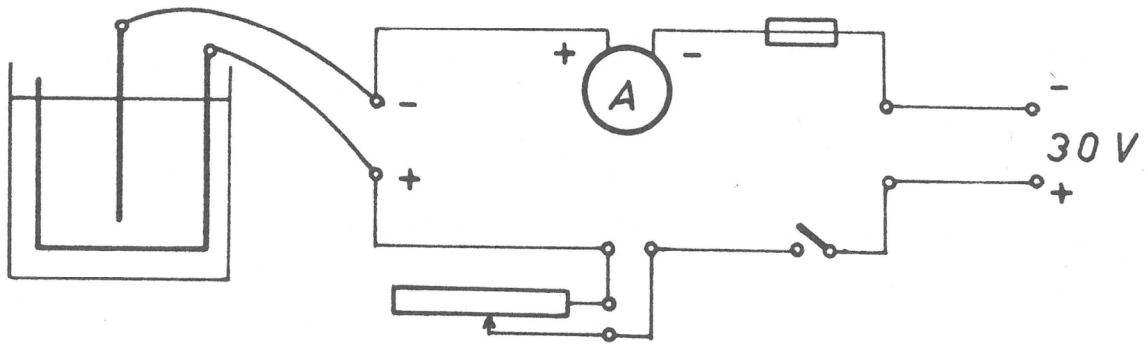
$$m = z \cdot I \cdot t$$

gdje je m količina izlučene kovine (gram), I jakost stalne istosmjerne struje (amper), t vrijeme (sekunda) kroz koje je struja tekla. Konstanta z karakteristična je za pojedinu kovinu koja se izlučuje i elektrolit iz kojeg se izlučuje.

U ovoj vježbi radit ćemo s elektrodama od bakra uronjenim u rastopinu modre galice (bakreni sulfat $CuSO_4$). U vodenoj rastopini, molekula modre galice raspada se u pozitivni bakreni ion Cu^{++} i ostatak SO_4^{--}. Pri prolazu istosmjerne struje bakreni ioni putuju prema katodi i tamo prime svaki po dva elektrona, pa se nadopune na čitave atome bakra. Pri tome ovi novo nastali atomi bakra prionu uz bakrenu katodu. Prema tome za vrijeme prolaza struje masa bakrene katode raste. Budući da je količina izlučenog bakra razmjerna količini elektriciteta (A·s = kulon) to se ova sprava zove bakreni kulometar.

Svrha je ove vježbe da se izmjeri konstanta z , koja se zove e l e k t r o k e m i j s k i e k v i v a l e n t. Ona kaže u ovom primjeru koliko grama bakra izluči jedan kulon elektriciteta iz rastopine modre galice.

Aparatura se spoji prema shemi:



Kao katoda upotrijebi se manja elektroda (srednja) kulometra. Ampermetar je tipa s pokretnom zavojnicom, pa ga stoga valja spojiti s valjanim polaritetom.

Klizni otpornik, kojim se regulira struja, treba na početku imati klizaljku približno u sredini.

Prekidač mora biti u poprečnom položaju (isključen). Kao izvor struje služi stacionarna akumulatorska baterija i to priključci "+" i -30 V na razvodnoj ploči. Pazi, stezaljke na ploči su trajno pod naponom !

MJERENJE : 1. Pripremni dio

Pošto je čitava aparatura spojena, uklopi struju i kliznim otpornikom namjesti jakost struje na 0·50 A. Pusti da struja teče odprilike kroz jednu minutu. Pritom treba gledati da li je kazaljka ampermetra na miru. Sada prekini struju, pa izvadi oprezno katodu iz kulometra. Pazi da pri tome vađenju ne smočiš nosač katode. Izvađenu i odspojenu katodu treba uroniti u čašu destilirane vode i počekati nekoliko minuta da se ukloni galica. Nakon toga se katoda izvadi iz vode, otrese od većih kapi i iznad staklene kade prelije čitava (s jedne i druge strane) špiritom. Pri tome se preljevanju katoda drži rukom za zastavicu s rupicom. Držeći tako katodu počekamo dok se špirit ne osuši.

Suhu katodu položi na čist papir na podložnu daščicu tako, da ona čitavom površinom leži na papiru. Držeći katodu za zastavicu treba slobodnu površinu katode dobro ostrugati šmirkovim papirom. To se isto napravi s drugom stranom katode. Od sada se ostrugana površina ne smije više taknuti prstima. Papir s daščice zamijeni za čisti i katoda se osvjetla običnim papirom tako da se s katode skinu mrvice bakra odnosno šmirka. Ovako očišćena katoda oplahne se špiritom nad kadom. Špirit iz kade treba vratiti u bocu.

2. Pošto se je katoda osušila pristupa se samom mjerenju.

SADA PROUČI PRAVILA VAGANJA NA ANALITIČKOJ VAGI !

Katoda se objesi na kvačicu lijeve zdjelice zakočene analitičke vage. Zatim se odvaže tako, da se na desnu zdjelicu stavljaju utezi dok se ne postigne ravnoteža. Masa tih utega je m_1 = ...

Odvagana katoda uroni se u kulometar, spoji i zatim se istodobno uključi struja i pokrene zaporna ura. Elektroliza se provodi kroz približno deset minuta. Pri tome ampermetar mora pokazivati čitavo vrijeme struju I = 0·50 A. Struja se prekine i istodobno ura zaustavi. Sa ure se očita vrijeme t = ...

Sad se katoda odspoji i vrlo oprezno podigne iz kulometra da ne bi taknula pri podizanju nosač. Zatim se stavi u čašu destilirane vode da se moči kroz jednu do dvije minute, izvadi van drže-

ći za zastavicu, prelije špiritom s jedne i druge strane da bi se uklonila voda i čeka da se osuši. Suha katoda stavlja se ponovno na analitičku vagu.Sada je ravnoteža za $m_2 = \ldots$

Razlika

$$m = m_2 - m_1$$

je masa izlučenog bakra.

Elektrokemijski ekvivalent bakra računa se po formuli:

$$z = \frac{m}{I \cdot t}$$

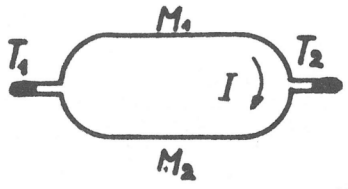
Mjerenje ponovi sa strujom I = 1·00 A i s drugom katodom.

Pribor:

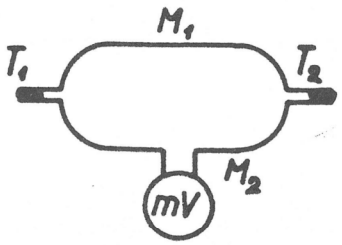
1. Aparatura na daski
2. Ampermetar do 1 A
3. Klizni otpornik
4. Posuda s elektrolitom i anodom
5. Dvije katode
6. Osam žica
7. Dvije štipaljke
8. Boca s alkoholom
9. Čaša s vodom
10. Lijevak
11. Krpa
12. Kada
13. Zaporna ura

BAŽDARENJE TERMOČLANKA

Ako se dvije žice od raznih kovina spoje na oba svoja kraja, onda u tako nastaloj petlji teče električna struja I , ukoliko su spojišta na različitim temperaturama (Seebeckov pojav). Ovu struju pokreće termoelektrična napetost koja zavisi o vrsti upotrijebljenih kovina M_1 i M_2, te o temperaturama T_1 i T_2 na spojnim mjestima. Ako se jedna od tih temperatura npr. T_1 drži stalnom (referentna temperatura), to je onda razvijena termoelektrična napetost funkcija temperature T_2 drugog spojišta.

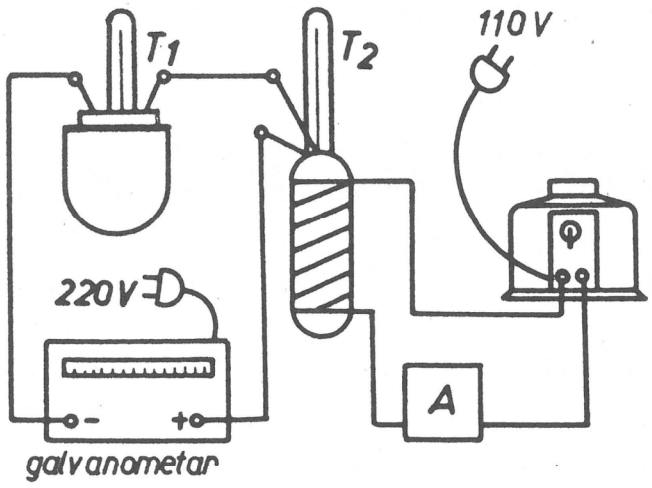


Termoelektrična napetost mjeri se tako, da se krug struje unutar jedne kovine prekine i između tako nastalih krajeva istovrsne žice uključi voltmetar (skala je u mV, jer su termoelektrične napetosti malene). Priključne točke voltmetra, kao i priključni vodovi trebaju biti na istoj temperaturi.



MJERENJE. Kao kovine u termočlanku uzeli smo bakar i konstantan. Referentno spojište tih kovina nalazi se u epruveti zalivenoj parafinom zajedno s termometrom, koji pokazuje temperaturu T_1 tog spojišta. Ova je epruveta stavljena u Dewarovu posudu (termos-bocu) u kojoj su komadići leda. Čep na termos-boci koji nosi epruvetu s termometrom ne smije se u nikojem slučaju izvaditi iz boce. Ako treba dodati leda to se napravi kroz otvor na čepu, koji se pokaže kad se podigne komad čepa s ručkom.

Drugo spojište, kojemu se temperatura T_2 može mijenjati, nalazi se u električnoj pećici zajedno s drugim termometrom, kojemu skala ide do 420°C. Temperatura električne pećice diže se tako da u nju šaljemo električnu struju iz regulacionog transformatora. Jakost te struje ne smije premašiti 2A. Primarna strana regulacionog transformatora priključi se na 110 V izmjenično. Prije priključivanja tog tranformatora i uklapanja sklopke na njemu,



uvjeri se da je gumb baždarene skale transformatora na nuli.

Prekid struje u termočlanku načinjen je u bakrenoj žici i na tom mjestu priključen je galvanometar. Prije i nakon završenog mjerenja gumb na galvanometru nalazi se u položaju 0, što znači da je instrument zakočen. Žica priključena na stezaljku "+" galvanometra veže se s bakrenom žicom s toplog spojišta, a ona sa stezaljke "-" na žicu sa hladnog spojišta.

Kad započnemo mjerenje, gumb na galvanometru stavimo u položaj 1:10. Skala je podijeljena na 200 dijelova. Otklonu od 10 dijelova skale (crtica) odgovara 1 mV razlike potencijala, a označen je tamnom uspravnom crtom u svijetlom kvadratičnom polju. (Npr. broj 10 na skali znači 2 mV).

Prije početka mjerenja galvanometar je zakočen, a crta u svijetlom polju na skali je u položaju 0.(Ako nije, dovedi je u taj položaj laganim zakretanjem malog gumba na gornjoj ploči galvanometra ili pozovi demonstratora da to uredi).

Mjerenje se sastoji u tome, da se uz neku stalnu referentnu temperaturu T_1 (negdje ispod 4^oC) traži zavisnost napona U u mV o temperaturi toplijeg spojišta T_2. U tablicu koja izgleda kako je niže nacrtano, unose se temperature T_2 koje se očitavaju sa termometra u pećici, kad galvanometar pokazuje cijeli broj milivolta do zaključno 15 mV.

U(mV)	1°0	2°0	3°0	4°0	5°0	. . . .	15°0
$T_2(^oC)$							
$T_2(^oC)$							

Grijanje pećice vrši se tako, da se struja postepeno pojačava do maksimalno 2 A. Zagrijavanje treba biti polagano, tako da se temperature otporne žice pećice i termometra s termoparom mogu izjednačiti. Zato treba napon transformatora povećavati za 5 V svake dvije minute. Kod vraćanja treba također smanjivati napon svake dvije minute. Početni napon neka bude 0 V. Kad je ovako izmjeren niz pripadnih temperatura idući prema višima, onda se grijanje smanjuje i ponovo očitavaju temperature za cjelobrojne milivolte, ali sada idući od viših temperatura prema nižima. Te se vrijednosti unesu u treći redak gornje tablice.

Ako se temperatura referentnog spojišta dosta razlikuje od 0^oC onda treba napone, koji pripadaju pojedinim temperaturama T_2 korigirati tako, da se svakome od njih pribroji jedan konstantan iznos.

Taj se iznos napona za korekciju nađe po formuli: $\delta = \frac{3\ mV \cdot T_1}{T_{2,3} - T_1}$

gdje je $T_{2,3}$ temperatura toplijeg spojišta, kad galvanometar pokazuje 3 mV, a T_1 je temperatura hladnijeg spojišta. Za ovaj račun korekcije može se upotrijebiti i temperatura $T_{2,2}$ toplijeg spojišta (kad galvanometar pokazuje 2 mV), samo u tom slučaju brojnik treba biti 2 mV. T_1.

Korekciju treba računati samo onda, ako ona iznosi barem $0{\cdot}1$mV. Ako se naime ta korekcija pribroji milivoltima u prvom redku tablice onda tablica daje pripadne vrijednosti napona i temperature uz referentnu temperaturu 0^oC.

Korigiranu tablicu prikaži grafički na milimetarskom papiru. Kao apscisu uzmi srednju vrijednost očitanih temperatura toplijeg spojišta u mjerilu 1 mm = 5^oC, a kao ordinatu napon u mjerilu 5 mm = 1 mV.

Izračunaj termoelektričnu snagu termočlanka bakar-konstantan za razna područja temperatura po formulama:

$$Q_o = \frac{1\ mV}{T_{2,1} - T_{1,0}}, \quad Q_1 = \frac{1\ mV}{T_{2,2} - T_{2,1}}, \quad \cdots\cdots \quad Q_{14} = \frac{1\ mV}{T_{2,15} - T_{2,14}}$$

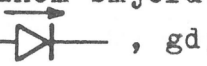
Dobivene vrijednosti za termoelektričnu snagu unesi u tabelu:

T_2	$T_{2,1}$	$T_{2,2}$	$T_{2,3}$	. . . . .	$T_{2,14}$	$T_{2,15}$
Q	Q_o	Q_1	Q_2	. . . . .	Q_{13}	Q_{14}

Pribor :

1. Termos boca s čepom, termometrom i termoparom
2. Grijač s termometrom i termoparom
3. Ampermetar do 6 A
4. Varijak za I_{max} = 4 A
5. Galvanometar
6. Trafo za zvonce
7. Predotpori galvanometra za osjetljivost x1 i x2
8. Žice za spajanje 6 komada

SNIMANJE U-I KARAKTERISTIKA KRISTALNE DIODE

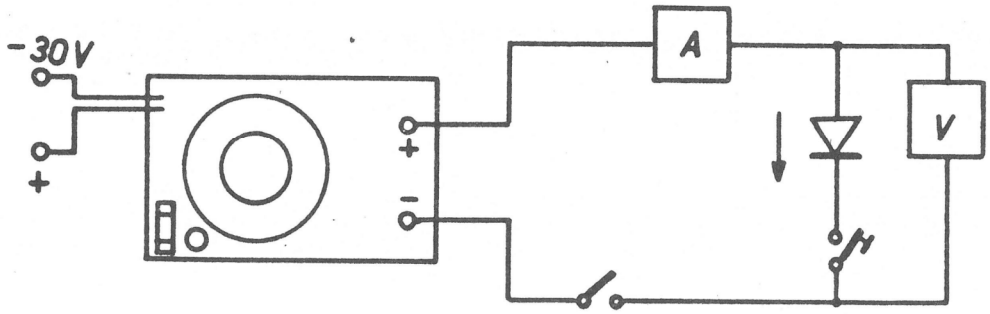
Kristalna dioda je električni ventil, a to znači da ona propušta struju praktički samo u jednom smjeru. Shematski prikaz za kristalnu diodu izgleda ovako:  , gdje je strjelicom označen smjer u kojem dioda propušta struju. Struja u ovom smjeru je razmjerno jaka, ako napon želi tjerati struju u tom smjeru. To je propusni smjer diode.

Ako naprotiv napon želi kroz diodu tjerati struju smjerom protivnim od propusnog, struja je neznatne jakosti. Idealni električni ventil ne bi u tom smjeru propuštao nikakve struje. Kristalna dioda međutim propušta i u ovom nepropusnom smjeru slabašnu struju, čija jakost zavisi o naponu koji želi tjerati struju u tom nepropusnom smjeru.

U ovoj se vježbi mjeri zavisnost struje kroz kristalnu diodu o naponu koji se na nju narine.

1. Ako taj napon tjera struju u propusnom smjeru.
2. Ako taj napon tjera struju u nepropusnom smjeru.

1. Mjerenje u propusnom smjeru. Aparatura se spoji prema shemi :



Prije priključivanja čitave aparature na izvor napona za propusni smjer diode, treba prekidač na velikoj daski staviti na isključeno. Diodu postavite u položaj 1- propusni smjer. Ampermetar mora biti shuntiran (područje x1000), a voltmetar priključen paralelno s diodom, jer je otpor diode u propusnom smjeru relativno malen prema nepropusnom. Na izvoru za napajanje treba gumb potenciometra staviti na 0 (nula). S aparaturom ga spojite tako da crvena priključnica bude spojena u (+) granu ampermetra. Prekidač na izvoru napona se uključi i upali se signalna žaruljica. Okretanjem gumba u desno povećava se napon.

Mjerenje treba izvršiti na diodi A i zatim na diodi B, sve u propusnom smjeru. Treba ispuniti slijedeću tabelu za svaku diodu.

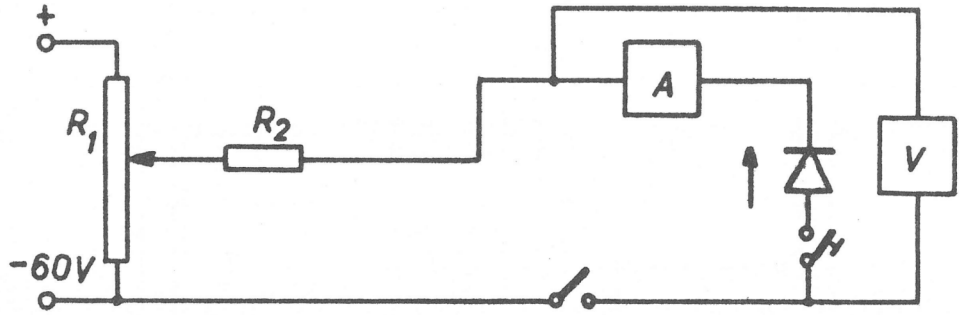
I/mA	2	4	6	10	20	30	40	50	60
U/ V									
R/Ω									
Shunt	x 100			x 1000					
Voltmetar	1·5 V			1·5 V ili 5 V					

$$R = U : I$$

$$\frac{R}{\Omega} = 10^3 \frac{U}{V} : \frac{I}{mA}$$

Napon očitajte kad je tipka pritisnuta. Nakon mjerenja prekidačem prekinite krug struje.

2. Mjerenje u nepropusnom smjeru. Aparatura se spoji prema shemi:



Diodu treba zakrenuti i postaviti u položaj 2-za nepropusni smjer. Crnu pipaljku voltmetra priključite na stezaljku lijevo od ampermetra do oznake (+). Tako je voltmetar ispred ampermetra, pa ampermetar mjeri struju samo kroz diodu. Ovo je potrebno načiniti, jer su struje vrlo male. Na izvor napona 60 V istosmjerno priključite potenciometar R_1= 5 kΩ. Gumb na njemu okrenite u krajnji lijevi položaj. Namještanje viših napona vrši se okretanjem gumba u desno. Otpor R_2= 100 kΩ je zaštitni za ampermetar (u slučaju proboja diode) i diodu (kod krivog spajanja). Treba ispuniti slijedeću tabelu za svaku diodu.

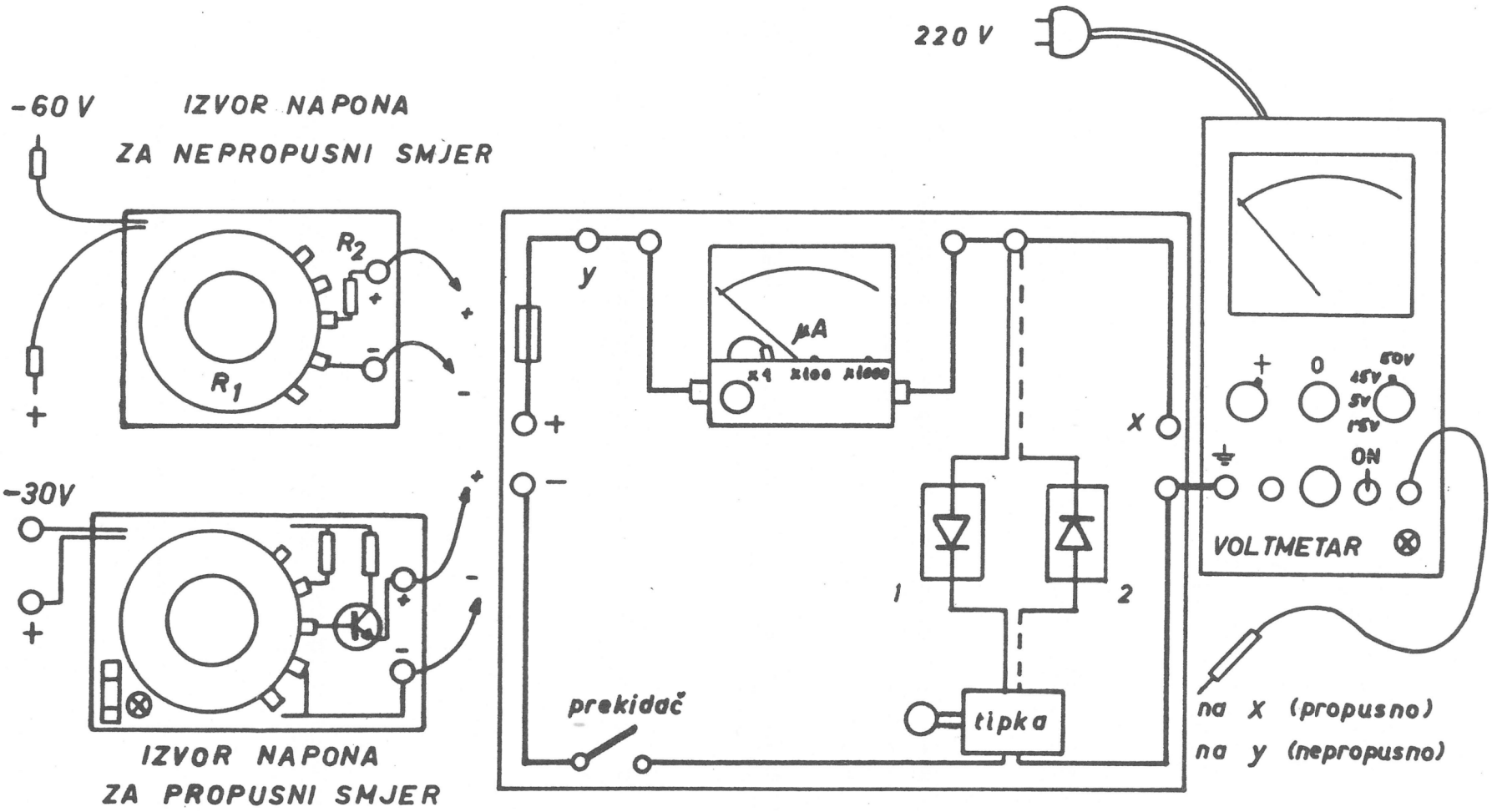
U/ V	-10	-20	-30	-40	-50
I/μA					
R/MΩ					
Shunt x 1 , voltmetar do 50 V					

$$R = U : I$$

$$\frac{R}{\Omega} = 10^6 \frac{U}{V} : \frac{I}{\mu A}$$

Ne prelazite vrijednost napona od 50 V. Napon očitajte kad je tipka pritisnuta. Nakon mjerenja prekidačem prekinite strujni krug. Izvučite priključke potenciometra R_1 s napona na rasklopnoj ploči.

Rezultate mjerenja treba prikazati grafički na milimetarskom papiru u mjerilu : za propusni smjer 1 cm = 10 mA na ordinati i 1 cm = 0·5 V na apscisi, a za nepropusni je 1 cm = 5 μA za ordinatu i 1 cm = 10 V za apscisu.



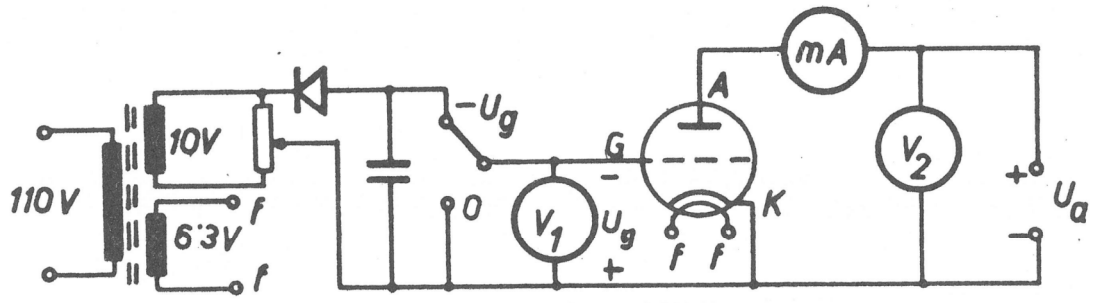
SNIMANJE U-I KARAKTERISTIKA KRISTALNE DIODE

KARAKTERISTIKA TRIODE

Trioda je elektronka, koja ima tri elektrode: katodu K, koja ispušta elektrone kad je užarena, anodu A, koja se drži na pozitivnom naponu prema katodi, pa prema tome privlači i sabire elektrone i konačno rešetku G, koja je smještena u prostoru između katode i anode tako, da elektroni na putu prema anodi lete kroz otvore na rešetki. Katoda se užari, ako kroz žarnu nit ff puštamo struju žarenja. U našem primjeru to je izmjenična struja iz transformatora, koji se primarno priključi na 110 V izmjenično.

Ako je rešetka G jako negativna, onda ona toliko odbija elektrone, da ih tjera natrag prema katodi, pa oni ne mogu proći kroz otvore na rešetki i tako dosegnuti anodu. U tom slučaju triodom ne prolazi anodna struja, a to je struja, koja može teći smjerom od anode prema katodi. Pazi: dogovoreni smjer struje u cijevi točno je protivan od smjera, u kojem putuju negativni elektroni. Ako se negativni naboj rešetke smanji tako, da se smanji negativni napon rešetke prema katodi, onda nešto elektrona prolazi kroz otvore na rešetki i anoda ih sabire. Tada kroz cijev teče anodna struja I_a. Uz neki odabrani anodni napon U_a mjeren prema katodi, anodna je struja I_a funkcija (negativnog) napona U_g između rešetke i katode. Taj se napon U_g zove i prednapon rešetke. Prema tome se pomoću prednapona U_g može upravljati anodna struja I_a, jer svakoj promjeni napona na rešetki odgovara promjena anodne struje.

Aparatura. Svrha je ove vježbe, da se nađe zavisnost anodne struje I_a, mjerene u miliamperima (mA), o negativnom prednaponu rešetke U_g, a uz stalni anodni napon U_a. Mjerenje se vrši pomoću aparature, koja je spojena prema shemi:



Negativni prednapon rešetke dobije se iz ispravljača, kojemu se taj napon može regulirati pomoću potenciometra. Transformator ispravljača priključuje se primarno na 110 V izmjenično. Preklopnik na ispravljaču služi za spajanje rešetke na katodu tako, da se

može prednapon na rešetki dovesti na 0 volt. Anodni napon može biti redom 30, 60, 90 i 120 V.

1. Mjerenje. Priključi transformator ispravljača na 110 V izmjenično. Time je ujedno uspostavljeno i žarenje cijevi. Namjesti prednapon na 10 V (očita se na voltmetru V_1). Preklopnik na ispravljaču treba biti u položaju $-U_g$. Pročitaj sada pozorno uputu o shuntu, spojenom uz miliampermetar za mjerenje anodne struje. Za vrijeme ovog čitanja temperatura katode ima vremena da postigne konačnu vrijednost. Preklopnik na shuntu neka bude u položaju x5. Priključi sada anodni napon na utičnicu na stolu, koja je označena s 0 i 30 V. Točnu vrijednost tog napona pokaže voltmetar V_2. U pravilu će to biti malo više od 30 V. (To je napetost od 15 akumulatorskih članaka, koji se trajno dopunjavaju.) Sada uz ovu stalnu vrijednost napona U_a pročitaj jakosti anodne struje za razne vrijednosti prednapona rešetke U_g i očitane vrijednosti unesi u tablicu, koja izgleda ovako:

$-U_g$/V	10·0	9·5	9·0	8·5	8·0	.....	3·0	2·5	2·0	1·5	1·0	0·5	0
I_a/mA													

Prednapon rešetke se smanjuje po pola volta i za svaku od tih vrijednosti očita se pripadna anodna struja i unese u tablicu. Ako u položaju x5 miliampermetar malo ili ništa ne pokazuje, prebaci se na položaj x3, a ako je još i to premalo osjetljivo, pritisne se tipka x1. Ukoliko je otklon i sada ništa, unese se u tablicu za anodnu struju I_a vrijednost 0·00. Taj se postupak ponovi za prednapon 9·5 V, zatim 9·0 V i tako redom do prednapona 0·0 V, koji se dobije na rešetki, ako se preklopnik na ispravljaču prebaci u položaj "0".

2. Mjerenje. Vrati prednapon na 10·0 V i zatim priključi anodni napon iz utičnice označena s 0 i 60 V. Sada je U_a = ... (očita se na voltmetru V_2). Izvrši očitavanje anodne struje I_a kao kod prvog mjerenja i vrijednosti unesi u novu tablicu, koja je načinjena kao i prethodna.

3. Mjerenje. Vrati prednapon na 10·0 V i izvedi mjerenje s anodnim naponom "90 V". Sada uz U_a = ... treba izmjeriti anodne struje za različite prednapone rešetke kao u 1. mjerenju.

4. Mjerenje. Vrati prednapon na 10·0 V i ponovi mjerenja pod točkom 1. s anodnim naponom "120 V".

Četiri tablice koje se dobiju u prethodnim mjerenjima treba predočiti grafički na milimetarskom papiru. Na apscisu nanosi se

prednapon rešetke u mjerilu 1 V = 1 cm, a na ordinatu anodna struja I_a u mjerilu 10 mA = 5 cm. Koordinatno se izhodište smjesti u donjem desnom uglu papira, jer se krivulje (karakteristike) nalaze u drugom kvadrantu.

Iz nacrtanih karakteristika za ravno područje krivulja za U_a = (vrijednost iz trećeg mjerenja) i U_a = (vrijednost iz četvrtog mjerenja) izračunaj ove omjere:

$$s = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g} \quad , \quad \text{uz } U_a = \text{konstantno}$$

$$R = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \quad , \quad \text{uz } U_g = \text{konstantno}$$

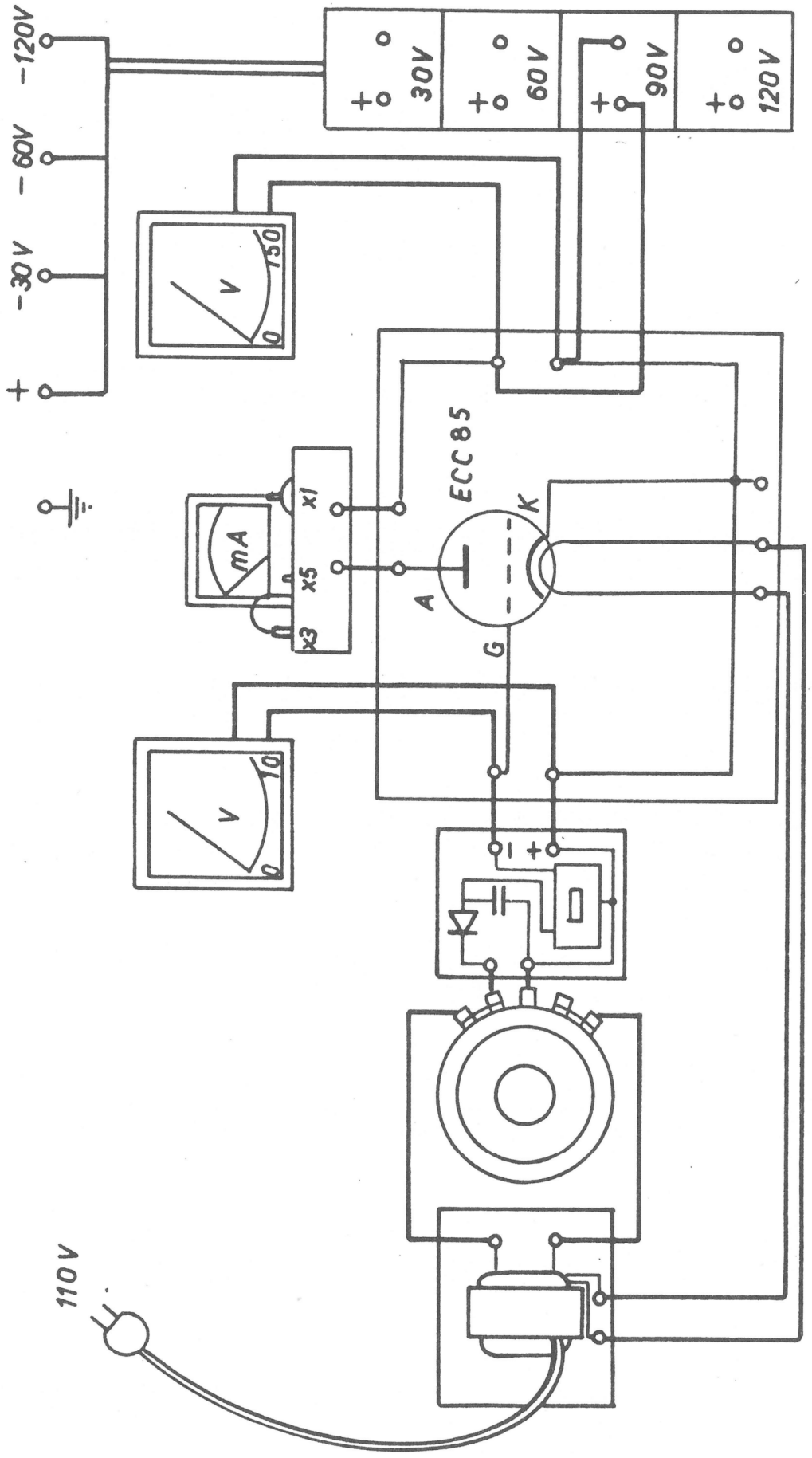
$$D = \frac{\Delta U_g}{\Delta U_a} \quad , \quad \text{uz } I_a = \text{konstantno} \; .$$

Ove se veličine redom nazivaju: s strmina, R unutarnji otpor, D prohvat. U rezultatu navedi i mjere, u kojima se ove veličine mjere. Ove veličine moraju zadovoljavati relaciju Barkhausena, koja glasi:

$$s \cdot R \cdot D = -1 \; .$$

Pribor:

1. Triода na ploči s priključnicama
2. Letvica s utičnicama za anodne napone
3. Voltmetar do 150 V
4. Voltmetar do 10 V
5. Miliampermetar do 6 mA
6. Shunt za miliampermetar x1, x3, x5
7. Daska s ispravljačem i sklopkom za prednapone
8. Okrugli klizni otpornik 50 k Ω
9. Trafo za grijanje triode
10. Žice za spajanje 16 komada



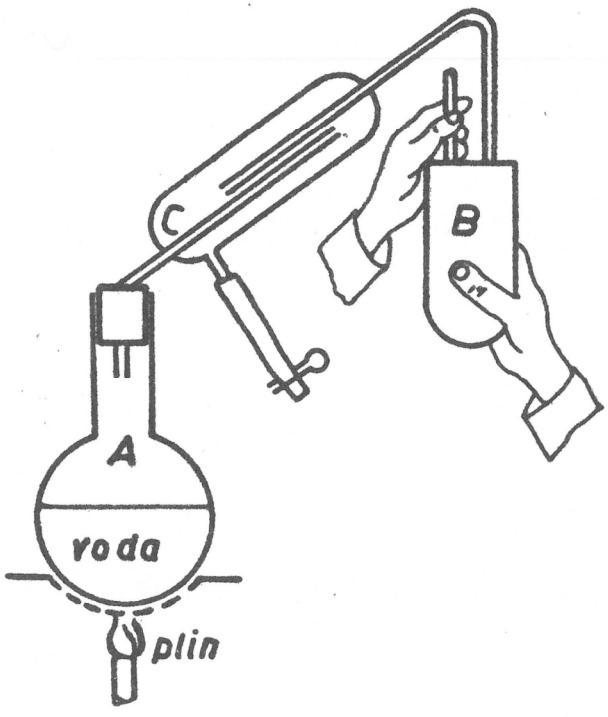
KARAKTERISTIKA TRIODE

TOPLINA ISPARAVANJA VODE

Za pretvaranje vode iz kapljevitog u plinovito stanje treba trošiti toplinu. Količina potrošene topline razmjerna je količini vode koja se pretvori u paru. Obrnuti proces se događa, kad se vodena para kondenzira, tj. pretvara u vodu. Tada se toplina, potrošena na isparavanje, oslobađa. Budući da se kod ovog trošenja topline odnosno dobivanja topline temperatura ne mijenja, jer vodena para koja nastaje iz vode ima istu temperaturu kao i voda koja hlapi odnosno vrije, to se onda ta toplina zove latentna, toplina, što znači skrivena toplina.

Mi ćemo mjeriti specifičnu toplinu isparavanja vode. To je toplina koju treba potrošiti, da se jedan kilogram vode na temperaturi 100°C pretvori u vodenu paru temperature 100°C. Isto tolika toplina se oslobodi, ako se kilogram vodene pare od 100°C kondenzira u vodu od 100°C. Naše mjerenje određuje ovu oslobođenu toplinu.

Opis aparata i postupka pri mjerenju. Okruglu staklenu bocu A napunimo vodom iz vodovoda do ispod polovine. Zatim ju oprezno priključimo na aparaturu i počnemo grijati plinskim plamenikom.



Praznu termos-bocu B zajedno s termometrom stavimo na vagu i odvažemo. To je masa

$$m_1 = \{m_1\}\ \text{kg} .$$

Zatim u nju ulijemo destilirane vode toliko, da je nešto preko polovine puna. Sada opet odvažemo termos-bocu s vodom i termometrom. To je masa

$$m_2 = \{m_2\}\ \text{kg} .$$

U boci je dakle masa vode

$$m = \left(\{m_2\} - \{m_1\}\right)\ \text{kg} .$$

Termometar u termos-boci pokazuje temperaturu te vode

$$\vartheta_1 = \{\vartheta_1\}\ ^\circ\text{C} .$$

Desetinke stupnja ocijenimo.

Kad voda u boci A zavrije, onda iz nje izlazi vodena para, koja prolazi kroz sušilo C, koje ima zadatak, da paru oslobodi sitnih vodenih kapljica. Tako odvojena voda skuplja se u donjem

dijelu sušila i može se, ako se je dosta skupilo, ispustiti iz sušila. Osušena vodena para izlazi na slobodnu staklenu cijev iz sušila u uzduh sobe.

Kad smo postigli, da vodena para izlazi iz sušila, počnemo hvatati tu paru tako, da podmetnuvši termos-bocu, kraj slobodne cijevi sušila uronimo u vodu u termos boci. Sad vodena para iz sušila ulazi neposredno u vodu i tu se kondenzira. Pri tome se čuje pucketanje, jer mjehurići vodene pare u hladnoj vodi implodiraju, tj. naglo se stisnu, pa se odijeljena voda sudara.

Dok se tako sabire vodena para u vodi termos-boce, koju pridržavamo lijevom rukom, dotle desnom držimo termometar i vrlo oprezno miješamo vodu u termos-boci. Na termometru opažamo porast temperature.

Sabiranje pare nastavimo dotle, dok termometar ne prijeđe $60^{\circ}C$. Sad termos-bocu odmaknemo, nastavimo lagano miješati i očitamo najvišu temperaturu koju termometar pokaže, cijeneći pri tome desetinke stupnja. To je temperatura

$$\vartheta_2 = \{\vartheta_2\}\ ^{\circ}C\ .$$

Za vrijeme čitavog ovog postupka ne smije se termometar izvaditi iz vode u termos-boci.

Sada se ponovno termos boca s ugrijanom vodom i termometrom metne na vagu i odvaže. To je masa

$$m_3 = \{m_3\}\ kg\ .$$

Budući da se je u termos-boci kondenzirala vodena para, to je masa te kondenzirane pare

$$\mu = m_3 - m_2\ .$$

Ako zanemarimo gubitke topline na okolinu, to onda možemo ovako zaključivati. Masa vode m ugrijala se je od ϑ_1 na ϑ_2, pa je prema tome primila toplinu

$$Q = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)\ ,$$

gdje je c specifična toplina vode. Ova toplina je jednaka toplini, koju je donijela dovedena vodena para mase μ. Ta se sastoji iz oslobođene latentne topline, te od topline koju je izgubila hlađenjem od $100^{\circ}C$ na temperaturu ϑ_2. Dakle

$$Q = l \cdot \mu + c \cdot \mu \cdot (100^{\circ}C - \vartheta_2)\ .$$

Ako dakle izjednačimo ove topline, to slijedi

$$\ell = c \frac{m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) - \mu \cdot (100^\circ C - \vartheta_2)}{\mu} .$$

Vidimo da iz ove formule možemo odrediti omjer specifične topline isparavanja ℓ prema specifičnoj toplini c vode. Specifična toplina vode c iznosi

$$c = 4186 \frac{J}{kg \cdot {}^\circ C} .$$

Prema tome naše mjerenje nam kaže koliko puta više treba topline da se ispari neka količina vode, od topline potrebne da bi se jednaka količina vode zagrijala za jedan stupanj.

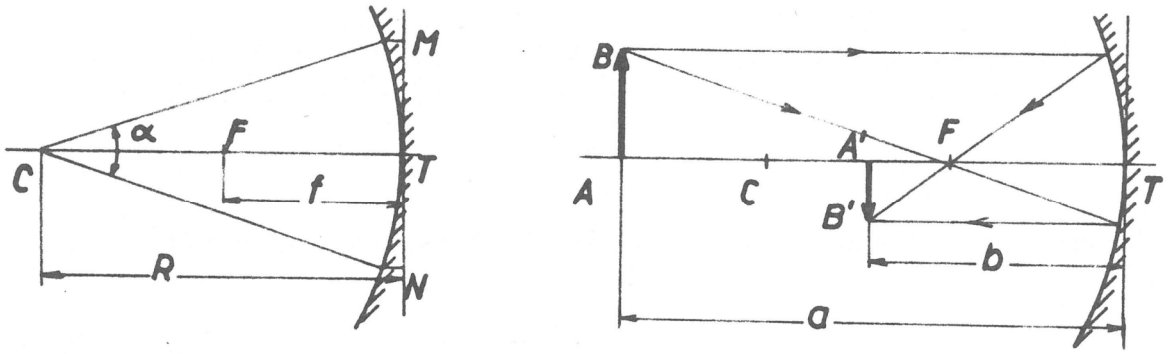
Mjerenje treba načiniti tri puta. Rezultate mjerenja unosimo u tablicu.

Mjerenje	$\frac{m_1}{kg}$	$\frac{m_2}{kg}$	$\frac{m_3}{kg}$	$\frac{m_2 - m_1}{kg}$	$\frac{m_3 - m_2}{kg}$	$\frac{\vartheta_1}{{}^\circ C}$	$\frac{\vartheta_2}{{}^\circ C}$	$\frac{\ell}{c \cdot {}^\circ C = J/kg}$
1								
2								
3								

Pribor: 1. Aparat po Weinholdu
2. Termos-boca
3. Termometar
4. Vaga s utezima
5. Plinski plamenik
6. Upaljač za plin
7. Dvije boce od 1 litre
8. Čaša
9. PVC lijevak
10. Krpa

SFERNO ZRCALO

Sferno zrcalo stvara dobru sliku A'B' ravnog i malenog predmeta AB onda, kad je otvor MN sfernog zrcala malen spram njegovog polumjera zakrivljenosti R, te se iz središta zakrivljenosti C zrcala otvor (promjer kalote zrcala) vidi pod malenim kutem α, i kad upadne zrake na zrcalo čine mali kut s glavnom osi zrcala.



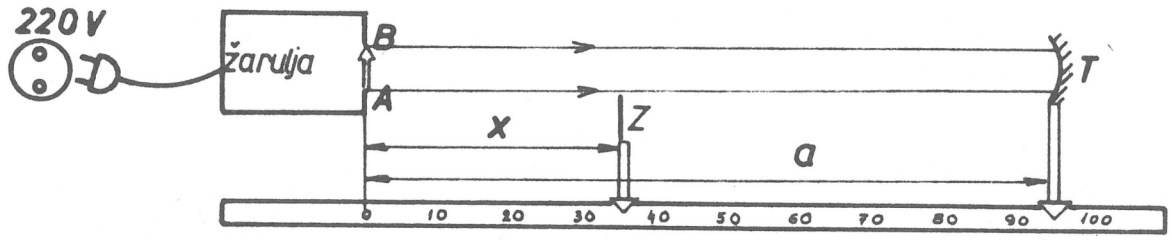
Ako se udaljenost TA od tjemena T zrcala do predmeta označi sa a i udaljenost TA' od tjemena do slike predmeta sa b, a sa f žarišna daljina TF, tada vrijedi jednadžba zrcala:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \qquad (1)$$

ODREĐIVANJE ŽARIŠNE DALJINE SFERNOG ZRCALA

1. Primjena jednadžbe zrcala. Mjereći veličine a i b može se iz jednadžbe (1) izračunati f i R.

Aparatura: Na optičkoj klupi nalazi se na jednom kraju svjetli predmet, desno od njega zastor, a na drugom kraju klupe konkavno (udubljeno) zrcalo. Zastor se podigne toliko visoko, da zrake svjetla iz predmeta nesmetano padaju na zrcalo.



Zadatak: Zastor se učvrsti na nekom mjestu na optičkoj klupi između predmeta i zrcala, a položaj zrcala se mijenja dok se na zastoru ne dobije oštra slika predmeta. Očitaju se veličine a i x, koje daju položaje predmeta i zastora (slike). Veličine a i (a-x)=b uvrste se u jednadžbu (1) i izračuna se f.

Treba načiniti pet različitih mjerenja i rezultate unijeti u tablicu, izračunati srednju vrijednost žarišne daljine, devijacije Δf_i i maksimalnu relativnu pogrešku Δf_m.

	a(cm)	b(cm)	x(cm)	f(cm)	Δf(cm)
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					

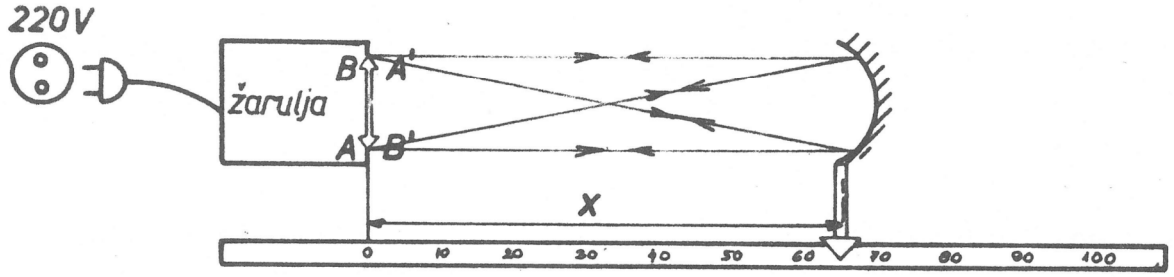
$$\Delta f_i = f_i - f_{srednje}$$

$$f_{srednje} = \dots \text{ cm}$$

$$\frac{\Delta f_m}{f_s} 100 = \dots \%$$

$$f_0 = f_s \pm \Delta f_m$$

2. Primjena autokolimacije. Ako se predmet AB nalazi u ravnini koja prolazi središtem zakrivljenosti C zrcala, slika A'B' pada mu u istu ravninu, jer zraka iz središta C upada okomito na plohu zrcala pa se reflektira sama u sebe. Tada je, znači, udaljenost predmeta od zrcala jednaka polumjeru R zrcala.



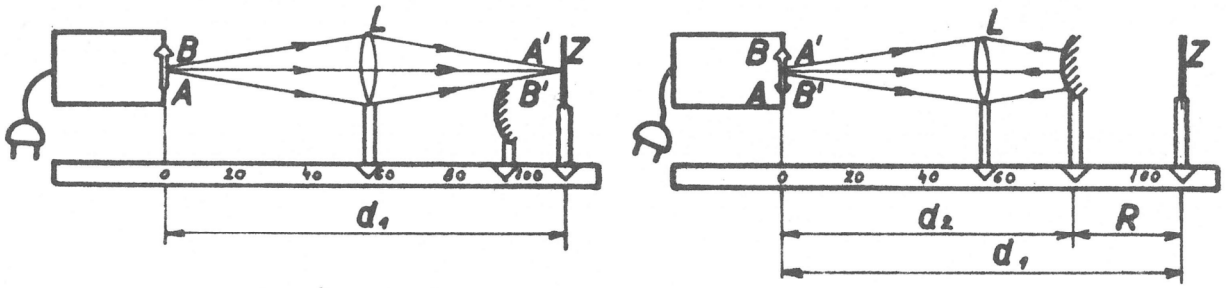
Zadatak: Treba odstraniti zastor da ne smeta i tada naći položaj zrcala, kod kojeg se vidi oštra slika predmeta u ravnini predmeta (na metalnom zastoru koji pokriva žarulju), ispod ili pokraj njega, jednako velika i obrnuta. Provjeriti mjerenjem dobivenu vrijednost za f prema relaciji:

$$x = R = 2f \qquad (2)$$

3. Određivanje žarišne daljine konveksnog zrcala autokolimacijom. Samo konveksno zrcalo (izbočeno) ne daje realne slike predmeta, ali se postavljanjem konvergentne leće između njega i predmeta mogu takove slike dobiti.

Aparatura: Na lijevoj strani optičke klupe je svjetli predmet, desno od njega konvergentna leća, a na desnoj strani optičke klupe je zastor.

Zadatak: Zastor se učvrsti na udaljenosti d_1 od predmeta. Zrcalo se spuštanjem ukloni i tada se leća pomiče duž klupe dok se ne dobije oštra realna slika predmeta na zastoru. Tada se leća učvrsti na tom mjestu. Ako se sada zrcalo digne i postavi na put zraka svjetlosti tako, da one upadaju okomito na njegovu plohu,



reflektirat će se zrake same u sebe, pa će tako zrcalo i konvergentna leća dati obrnutu, veliku kao i predmet, sliku koja je realna. No to će biti u slučaju, kad je zrcalo u položaju d_2 tako, da mu je središte zakrivljenosti C u ravnini zastora Z. Dakle vrijedi :

$$d_1 - d_2 = R = 2f \qquad (3)$$

Treba naći položaje d_2 zrcala, kada se oštra slika nalazi u ravnini predmeta, za zadane vrijednosti d_1, (slika se opet hvata na metalnom zastoru, na kojem je i predmet), unijeti te vrijednosti u tablicu, izračunati pripadnu žarišnu daljinu te odrediti njezinu srednju vrijednost, devijacije Δf_i i maksimalnu relativnu pogrešku Δf_m :

d_1(cm)	d_2(cm)	R(cm)	f(cm)	Δf(cm)
95				
96				
97				
98				
99				

$\Delta f_i = f_i - f_{srednje}$

$f_{srednje} = \ldots$ cm

$\frac{\Delta f_m}{f_s} 100 = \ldots$ %

$f_o = f_s \pm \Delta f_m$

Pribor :

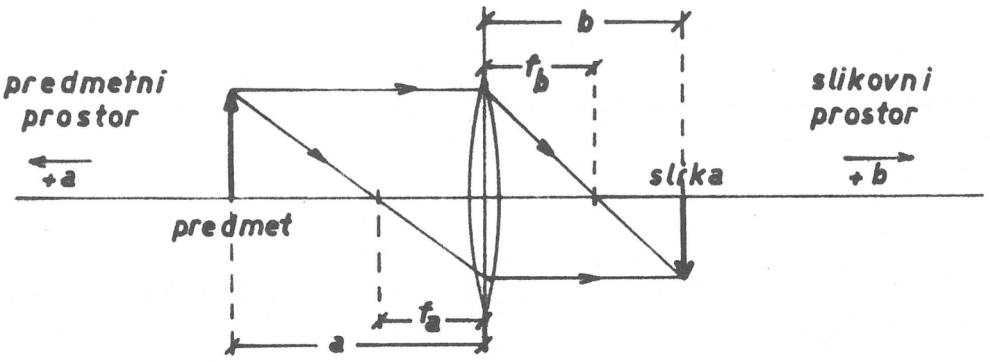
1. Optička klupa s izvorom svjetlosti, tipkom, mjerilom i nosačima
2. Udubljeno zrcalo
3. Izbočeno zrcalo
4. Zastor

BESSELOVA METODA ZA MJERENJE ŽARIŠNE DALJINE POZITIVNE LEĆE

Tanka leća ima slikovnu žarišnu daljinu f_b jednaku predmetnoj žarišnoj daljini f_a, ako se s obje strane leće nalazi isto sredstvo, npr. uzduh. Tada se veličina

$$\frac{1}{f_a} = \frac{1}{f_b} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (1)'$$

f zove naprosto žarišna daljina leće. Polumjeri zakrivljenosti sfernih ploha te leće jesu r_1 i r_2, dok je n indeks loma stakla leće.



Ako je a daljina predmeta od leće, onda leća načini sliku tog predmeta, koja se nalazi u daljini b od leće. Daljina a uzima se pozitivna, ako je predmet na lijevo od leće, dok je daljina b pozitivna, ako je slika na desno od leće. Polumjer r sferne plohe leće je pozitivan, ako je središte zakrivljenosti te plohe na desno od leće. Uz ovaj dogovor o predznaku veličina a, b, r vrijedi formula

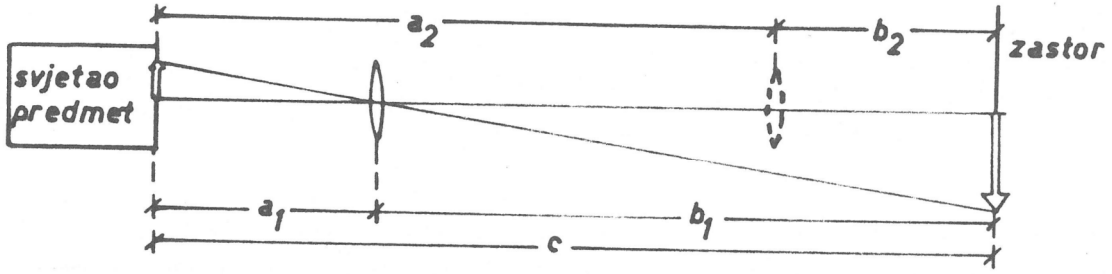
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad . \qquad (2)'$$

Vidimo dakle, da bi mjereći veličine a, b mogli pomoću (2)' odrediti f. Tako se često i radi. Međutim Besselova metoda je nešto drukčija.

1. Aparatura za mjerenje Besselovom metodom. Na optičkoj klupi nalazi se na jednom kraju svjetao predmet, a na drugom kraju zastor, na kojem leća načini sliku tog predmeta. Leća, koja je između predmeta i zastora, pomiče se po optičkoj klupi dotle, dok se na zastoru ne dobije oštra slika predmeta.

Ako je razmak c (udaljenost između svjetlog predmeta i zastora) dovoljno velik, postoje dva položaja leće na optičkoj klupi, za koje se dobije na zastoru oštra slika, uz isti razmak c između predmeta i zastora. U prvom položaju, za daljine a_1 i b_1, slika

je veća od predmeta, povećana, a u drugom položaju, za daljine a_2



i b_2 , slika je umanjena. U oba je slučaja zbroj daljine predmeta od leće i daljine slike od leće isti, naime jednak stalnom razmaku c . Dakle vrijede ove jednadžbe

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f} \qquad (2)$$

$$a_1 + b_1 = c \qquad (3)$$

$$a_2 + b_2 = c \qquad (4)$$

Načinimo li razliku

$$a_2 - a_1 = b_1 - b_2 = d \qquad (5)$$

to onda iz (1) (2) (3) (4) možemo izvesti

$$f = \frac{c^2 - d^2}{4\,c} \quad ,$$

$$f = \frac{c}{4} - \frac{d^2}{4\,c} \qquad (6)$$

Posljednji izraz je prikladniji za račun. Ta je formula osnov Besselove metode. Žarišna se daljina određuje mjerenjem daljina c i d .

2. Mjerenja.

a) Izračunaj prema formuli (6) žarišnu daljinu f dane konveksne leće. Načini 5 mjerenja i unesi rezultate u ovakovu tablicu.

c (cm)	a_1 (cm)	a_2 (cm)	d (cm)	$\frac{d^2}{4\,c}$ (cm)	f (cm)	Δf (cm)
64						
72						
80						
88						
96						

$\Delta f_i = f_i - f_s$

$f_s = \ldots$ cm

$\frac{\Delta f_m}{f_s}\,100\% = \ldots$

$f_o = f_s \pm \Delta f_m$

Treba izračunati srednju vrijednost f_s mjerenih žarišnih daljina, pogreške

$$\Delta f_i = f_i - f_s \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

pojedinih mjerenja, te maksimalnu procentualnu pogrešku.

b) Provjeri konstruktivno podatke u dobivenoj tablici za položaje predmeta i slike za leću s kojom je mjerenje izvedeno.

c) Pomoću leće i optičke klupe provjeri ove odnose između položaja predmeta i položaja odnosno veličine slike:

Daljina predmeta	Daljina slike	Vrsta slike
$\infty > a > 2f$	$f < b < 2f$	realna, umanjena, obrnuta
$a = 2f$	$b = 2f$	realna, jednake veličine kao predmet, obrnuta
$2f > a > f$	$2f < b < \infty$	realna, povećana, obrnuta
$a = f$	$b = \infty$	
$f > a > 0$	$-\infty < b < 0$	virtualna, povećana, uspravna

Dodatak.

Izvod formule za Besselovu metodu.

Iz (1) i (3) slijedi

$$a_1 = \frac{cf}{b_1} \quad . \tag{7}$$

Iz (2) i (4) slijedi

$$a_2 = \frac{cf}{b_2} \quad . \tag{8}$$

Iz (7) i (8) dobivamo

$$a_2 - a_1 = \frac{cf}{b_1 b_2} (b_1 - b_2) \quad ,$$

što sa (5) daje

$$b_2 = \frac{cf}{b_1} \quad . \tag{9}$$

Uspoređivanjem (7) i (8) sa (9) dobivamo

$$b_2 = a_1 \quad , \quad b_1 = a_2 \quad . \tag{10}$$

Preme tome možemo (3) odnosno (4), (5) i (7) pisati

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= c \quad , \\ a_2 - a_1 &= d \quad , \\ a_1 a_2 &= cf \quad . \end{aligned} \tag{11}$$

Kvadriranjem prvih dvaju izraza u (11) dobijemo

$$\begin{aligned} a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 &= c^2 \quad , \\ a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 &= d^2 \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

Odbijanjem izlazi

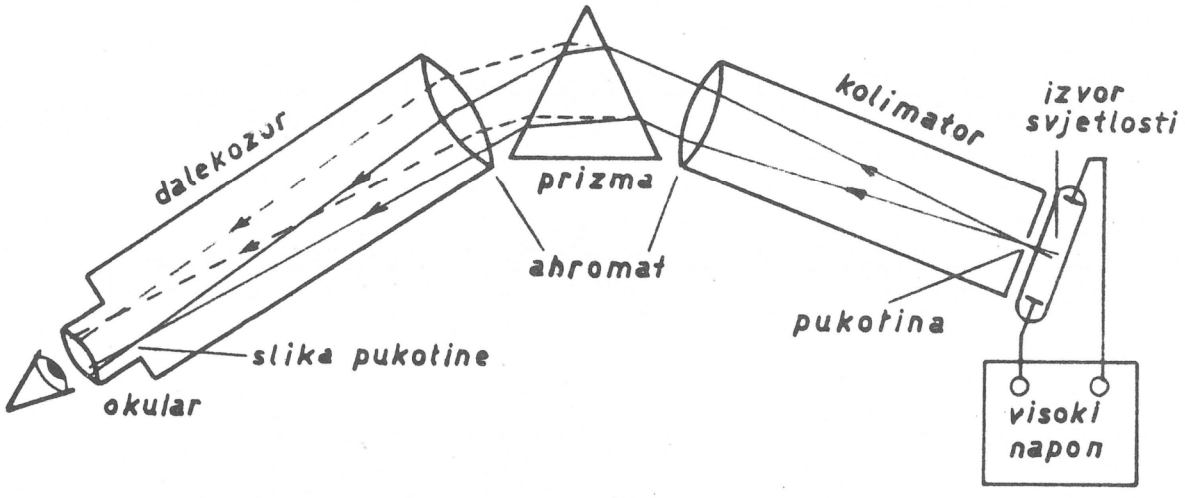
$$4\, a_1 a_2 = c^2 - d^2 \quad ,$$

što s trećim izrazom u (11) daje Besselovu formulu (6).

SPEKTROMETAR S PRIZMOM

Kad svjetlost prelazi iz uzduha u staklo, onda se smjer zrake svjetlosti lomi. Ta je promjena smjera zrake (devijacija) uz isti kut upadanja različita za razne valne duljine (boje) svjetlosti. Za crvenu je najmanja, a za ljubičastu najveća. Na toj činjenici, tzv. rasapu ili disperziji svjetlosti osniva se funkcioniranje spektrometra s prizmom. Pomoću njega se mogu mjeriti valne duljine svjetlosti.

Spektrometar s prizmom (Kirchhoff i Bunsen) ima ova tri glavna dijela: kolimator, prizmu i dalekozor. Kolimator je cijev, koja ima na svom početku pukotinu kroz koju svjetlost ulazi u spektroskop. Na drugom kraju kolimatora je ahromatska sabirna leća, koja ima toliku žarišnu daljinu kolika je duljina kolimatora tako, da zrake izlaze iz leće u paralelnim snopovima. (Na slici je nacrtan snop svjetlosti, koja je prošla kroz sredinu pukotine). Ovi paralelni snopovi padaju na prizmu, kojoj je glavni presjek istostranični trokut. U prizmi se svjetlost dva puta lomi: na ulazu i na



izlazu. Pri tome se svaki snop rastavi u boje iz kojih je sastavljen, jer se različite boje lome različito. Crvena svjetlost je najmanje otklonjena od prvotnog smjera (os kolimatora), a ljubičasta najjače. Svjetlost koja je izašla iz prizme motri se dalekozorom (Kepler). U žarišnoj ravnini nalazi se toliko slika pukotine, koliko ima boja u svjetlosti, kojom je pukotina rasvijetljena. Te se slike motre kroz okular i vide se kao svijetle vertikalne linije (spektralne crte). U okularu se nalazi križ od dvije niti koje se sijeku u središtu vidnog polja. Taj se križ vidi oštro skupa sa slikama pukotine.

1. Baždarenje spektrometra. Dalekozor je učvršćen na nosaču tako, da se os dalekozora može zakretati oko središta aparata i time se može svaka spektralna crta dovesti u sredinu vidnog polja, tj. da prolazi sjecištem nitnog križa. Dalekozor se zakreće okretanjem vijka, koji ulazi u nosač dalekozora. Položaj dalekozora očita se na indikatoru u obliku ure. Mjerni čep indikatora tiče nosač dalekozora i zato je položaj kazaljke indikatora neovisan o mrtvom hodu vijka, kojim se zakreće dalekozor.

Za baždarenje upotrijebit ćemo spektar helija (He). Spektralnu cijev s helijem stavi se na kutiju u kojoj je izvor visokog napona za pogon cijevi i spoji se s tim izvorom. Izvor visokog napona priključen je primarno na varijak. Prije spajanja varijaka na mrežu 220 V treba se uvjeriti da je ovaj namješten na nulu i njegov prekidač na isključeno. Pošto se varijak uključi, diže se napon postepeno dotle, dok spektralna cijev ne zasvijetli i instrument na izvoru visokog napona pokaže 0°9 (krajnji otklon je 1°0). Preko ove vrijednosti jakost struje kroz spektralnu cijev ne smije ići, jer bi se cijev odviše grijala.

Za vrijeme rada treba više puta kontrolirati jakost struje i pomoću varijaka vratiti na propisanu vrijednost. Kad se ne motre spektralne linije, treba cijev ugasiti prekidačem na varijaku. Kad signalna žarulja na izvoru visokog napona svijetli opasno je dirati žice kojima je spektralna cijev priključena na visoki napon.

Početak kolimatora stavi se sasvim uz okrugli otvor na kutiji u kojoj je spektralna cijev. Kad cijev svijetli, onda se laganim pomicanjem kutije sa cijevi i istodobnim gledanjem u dalekozor namjesti najjači intenzitet spektralnih linija u dalekozoru. Nakon toga se okreće vijak za pomicanje dalekozora dotle, dok indikator ne dođe na nulu (i velika i mala kazaljka). Ako se sada vijak za pomicanje dalekozora lagano okreće tako, da indikator ide prema većim brojevima, onda će redom doći nitni križ na ove linije :

	ljubičasta		modra		zelena		žuta	crvena	
valna duljina	slaba	jaka	tamna	svij.	jaka	slaba		jaka	slaba
nm	438°8	447°1	471°3	492°2	501°5	504°8	587°6	667°8	706°5
1. očitanje									
2. očitanje									
3. očitanje									
srednjak									

U ovoj tablici je za svaku liniju napisana i pripadna valna duljina u nanometrima ($1nm = 10^{-9}$ m).

Baždarenje se sastoji u tome, da se za svaku helijevu liniju zabilježi položaj dalekozora, kako se očita na indikatoru i taj položaj unese u tablicu. Desetinke na velikoj skali indikatora treba ocijeniti. Jedan dio na maloj skali znači 100 dijelova na velikoj. Tako npr. ako na maloj skali kazaljka stoji između 5 i 6 , a na velikoj očitamo 47'3, onda je položaj dalekozora 547'3. Svaku liniju treba tri puta namještati u nitni križ i očitati. U tablicu se unosi srednjak ovih triju očitanja.

Dobivenu tablicu treba prikazati grafički na milimetarskom papiru tako, da se kao apscise uzmu položaji dalekozora (pri tome je 1 cm = 40 dijelova skale), a kao ordinate valne duljine u nm (tako da je 1cm = 100nm). Dobivene točke treba spojiti tankom glatkom linijom. To je krivulja baždarenja.

2. Mjerenje spektra neona. Neon ima vrlo mnogo crvenih linija zatim žutih i slabih zelenih. Izmjeri valne duljine kao pod 1. za pet crvenih linija po volji i navedi koje su to linije po redu, ako se broji počam od crvenog dijela spektra.

broj linije					
1. očitanje					
2. očitanje					
3. očitanje					
srednjak					
valna duljina nm					

Napomena. Ne diraj prizmu !
Ne namještaj i ne korigiraj položaje dijelova spektrometra !

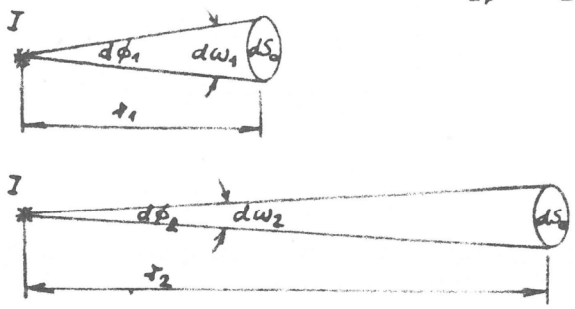
Pribor :

1. Spektrometar s dalekozorom, prizmom i kolimatorom
2. Varijak za $I_{max} = 2$ A
3. Visokonaponski transformator s miliampermetrom
4. Spektralna cijev s helijem u kućištu
5. Spektralna cijev s neonom u kućištu

ZAKONI FOTOMETRIJE

Točkasti izvor svjetlosti I zrači u prostor tok svjetlosti Φ . U receptor, npr. naše oko površine dS_o, udaljeno r od izvora, stiže samo dio svjetlosnog toka $d\Phi$. Širina tog snopa ili dijela toka svjetlosti određena je prostornim kutom $d\omega$ i vrijedi

$$d\Phi = I\, d\omega \ .$$



Iz geometrijskih odnosa prema slici slijedi

$$dS_o = r_1^2 \cdot d\omega_1$$

$$\frac{dS_o = r_2^2 \cdot d\omega_2}{}$$

$$r_1^2 : r_2^2 = d\omega_2 : d\omega_1$$

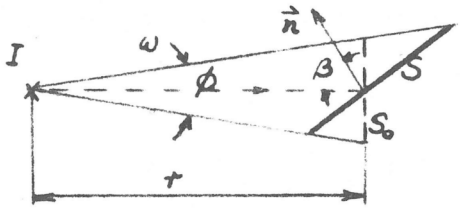
ili tok svjetlosti koji pada na plohu dS_o obrnuto je razmjeran kvadratu udaljenosti te plohe od točkastog izvora, jer vrijedi

$$d\Phi_2 = I\, d\omega_2 = I\, d\omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = I \frac{dS_o}{r_1^2} \frac{r_1^2}{r_2^2} = I\, dS_o \frac{1}{r_2^2} \ .$$

Za npr. određenu jakost izvora I, kojim je osvjetljena površina dS_o kao stalne vrijednosti, može se tok svjetlosti na bilo kojoj udaljenosti r izračunati iz relacije

$$d\Phi_2 = k \frac{1}{r_2^2} \qquad (1) \ .$$

Kada točkasti izvor svjetlosti I osvjetljava plohu površine S, omeđenu prostornim kutom ω kao na slici, onda je rasvjetljenost E te plohe određena kutom β između normale i upadne zrake prema izrazu



$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{S_o} \cos\beta = \frac{I\omega}{S_o} \cos\beta = \frac{I\, S_o}{S_o r^2} \cos\beta = \frac{I}{r^2} \cos\beta \ .$$

Za stalnu jakost izvora na udaljenosti r rasvjeta će biti

$$E = E_o \cos\beta \qquad (2)$$

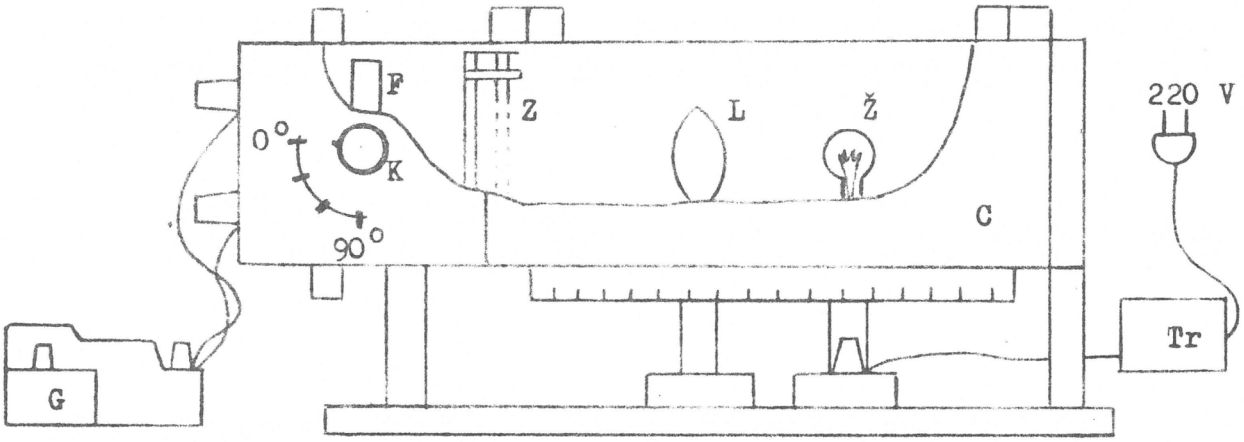
ili razmjerna kosinusu kuta upadanja prema prvom "kosinus zakonu" od Lambert'a.

Ako su veličine: udaljenost r izvora jakosti I i nagib osvjetljene plohe β stalni, onda će tok svjetlosti biti

$$d\Phi = I d\omega = I \frac{dS}{r^2} = \frac{I\, dS_o}{r^2 \cos\beta} = k \cdot dS_o \qquad (3) \ .$$

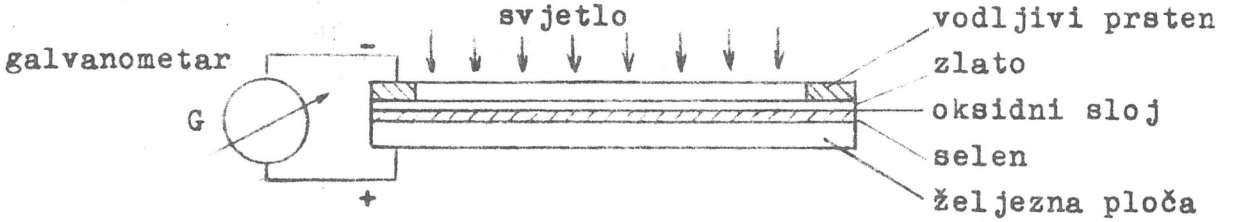
To znači da je uz dane uvjete (I, r, β = stalno) tok svjetlosti razmjeran veličini osvjetljene površine.

Aparatura u ovoj vježbi služi za eksperimentalno utvrđivanje zakona fotometrije. Prikazana je na slici i sastoji se iz slije-



dećih dijelova:galvanometra G sugrađenim gumbom za promjenu osjetljivosti, transformatora Tr za napajanje žaruljice Ž iz gradske mreže, fotoosjetljivog elementa F koji se gumbom K može zakretati (da površina fotoelementa s vertikalom zatvara kutove od 0^{o} do 90^{o}), zaslona Z s mlječnim staklom i otvorom površine 9 cm^2 i dva dodatna zaslona s otvorima 6 cm^2 i 3 cm^2, te stalka sa sabirnom lećom L. Dijelovi su smješteni u cilindrično kućište C s uzdužnim oznakama i nosačima na postolju kao na slici. Kućište se može otvoriti i u njemu namještati potrebni dijelovi. Za vrijeme mjerenja je zatvoreno i tako konstruirano da ne propušta vanjsko svjetlo do fotometra. Stoga je moguć rad kod danjeg svjetla.

Kao fotoosjetljiv element ili receptor svjetlosti koristi se selenska ćelija prikazana na donjoj slici. Na željeznu ploču nane-



sen je tanki sloj selena, a na njega providni sloj vodljivog elementa npr. zlato. Na gornji sloj postavlja se prsten za spoj galvanometra. Između zlata i selena nastaje tanki oksidni - zaporni sloj, koji ima svojstvo propusnosti elektrona iz selena prema zlatu, a nepropustan je za suprotno gibanje elektrona. Kad gornju stranu fotoćelije osvjetlimo, fotoni kroz zlatni i oksidni sloj dođu do selena. Elektroni u atomima selena dobiju dodatnu energiju i prelaze u zlato i gornju elektrodu. Selen i željezna ploča postaju pozitivno nabijeni. Ako izvode ćelije spojimo na osjet-

ljiv galvanometar, kroz njega će poteći struja. Otklon instrumenta razmjeran je upadnom toku svjetlosti.

1. Mjerenje zavisnosti toka svjetlosti o udaljenosti izvora svjetlosti

Gumb za osjetljivost galvanometra zaokrenite ulijevo (na minimalnu osjetljivost). Fotoćeliju postavite okomito na horizontalnu os, tako da je gumb K na oznaci 0^{o}. Zaslone i leću maknite i u kućištu ostavite samo žaruljicu na stalku spojenu na transformator i gradsku mrežu napona 220 V. Sredina stalka označava položaj žarne niti. Izvor svjetlosti može se smatrati točkastim i stalne jakosti. Kod udaljenosti izvora na oznaci 10 (r = 10 cm), podesite gumbom uz galvanometar maksimalni otklon instrumenta, pri zatvorenom kućištu C. Treba odrediti otklone instrumenta za udaljenosti izvora dane u tablici.

udaljenost izvora svjetlosti (r/cm)	10	15	20	25	30
izmjereni otklon instrumenta (dio skale)					
izračunati otklon instrumenta (dio skale)					

Tok svjetlosti razmjeran je otklonu galvanometra. Prema relaciji (1) izračunajte vrijednosti za treći redak tablice. Kao referentnu vrijednost uzmite otklon instrumenta za r = 10 cm.

2. Mjerenje zavisnosti rasvjete o kutu upadanja svjetlosti

Gumb galvanometra okrenite na minimalnu osjetljivost. Fotoćeliju postavite kao u prethodnom mjerenju. Leću postavite na oznaku 15 (tako da se sredina stalka podudara s tom oznakom), a izvor svjetlosti Ž oko 7 cm dalje. Kod otvorenog kućišta podesite ove udaljenosti tako da snop zraka svjetlosti izlazi paralelan iz leće i da cijela površina fotoćelije bude osvjetljena. Ovako podešeni položaji leće i žaruljice ostaju isti u toku mjerenja. Kod kuta upadanja zraka svjetlosti na fotoćeliju 0^{o} i zatvorenog kućišta, podesite otklon galvanometra na maksimum. Treba izmjeriti veličinu otklona instrumenta za dane kutove upadanja svjetlosti na fotoosjetljivu površinu prema tablici :

kut upadanja svjetlosti	0^{o}	30^{o}	45^{o}	60^{o}	90^{o}
izmjereni otklon instrumenta (dio skale)					
izračunati otklon instrumenta (dio skale)					

Izračunajte vrijednosti za treći redak tablice prema izrazu (2). Rasvjeti E_0 odgovara otklon instrumenta kod kuta upadanja svjetlosti na fotoćeliju od 0^{o}.

3. Mjerenje zavisnosti svjetlosnog toka o veličini osvjetljene površine

Gumb galvanometra okrenite na minimalnu osjetljivost. Fotoćeliju postavite tako da je kut upadanja svjetlosti 0^{o} (gumb K na toj oznaci). Pred fotoelement se umetne zastor od mliječnog stakla i to tako, da je izdanak na vrhu. U njega se utiču ostali zasloni. Leća se postavi na 15 - ti dio skale, a žaruljica oko 7 cm dalje i podesi se tako da snop svjetlosti iza leće bude paralelan i osvjetljava sredinu mliječnog stakla. Kada se zatvori poklopac podesi se otklon instrumenta na maksimalni mogući broj, koji je djeljiv sa tri (npr. 18). Ovako namješteni, leća, izvor svjetlosti i osjetljivost galvanometra, moraju ostati isti u toku cijelog mjerenja. Treba izvršiti mjerenje toka svjetlosti na određenu površinu određivanjem otklona instrumenta. Pri tome su stalne slijedeće veličine: jakost izvora svjetlosti, upadni kut i udaljenost izvora svjetlosti. Načinite 3 mjerenja za svaki zaslon i dobivene rezultate unesite u donju tablicu.

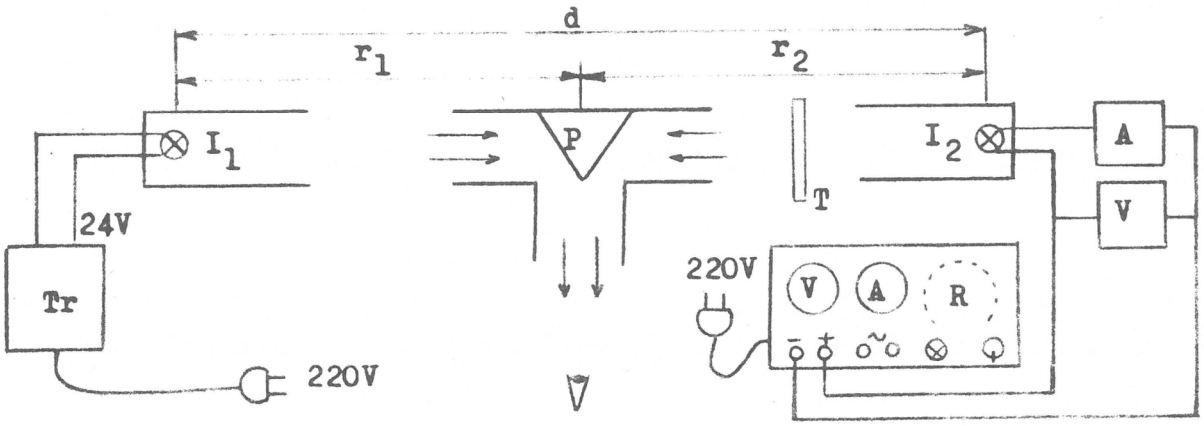
zaslon	$\varnothing$ = otklon instrumenta dio skale			omjer
mliječno staklo+otvor 9 cm^2				$\varnothing_9/\varnothing_3$ . . .
mliječno staklo+otvor 6 cm^2				$\varnothing_6/\varnothing_3$ . . .
mliječno staklo+otvor 3 cm^2				$\varnothing_3/\varnothing_3$ . . .

Osvjetljene površine se odnose kao $S_9 : S_6 : S_3 = 3 : 2 : 1$. Provjerite iz izračunatih omjera u zadnjem stupcu, da li se tako odnose i izmjereni tokovi svjetlosti prema relaciji (3).

Po završenom mjerenju namjestite sve dijelove kako su prikazani na slici aparature, gumb osjetljivosti galvanometra okrenite na minimum, a transformator isključite iz gradske mreže.

ODREĐIVANJE NEKIH KARAKTERISTIKA IZVORA SVJETLOSTI

Jakost izvora svjetlosti u ovoj vježbi određuje se neposrednom metodom, pomoću oka. Ona se osniva na svojstvu oka da veoma dobro ustanovljuje razlike rasvjetljenosti dviju susjednih površina, ako su one osvjetljene svjetlošću istih spektralnih karakteristika. Međutim, okom ne možemo razlučiti koliko puta je jedna površina svjetlija od druge. Aparatura s kojom se mogu izmjeriti neke karakteristike izvora svjetlosti prikazana je na slici. Na lijevoj



strani optičke klupe postavljen je izvor svjetlosti I_1 poznate jakosti (etalon), koji se preko transformatora Tr napaja iz gradske mreže. U sredini, r_1 udaljen od izvora I_1 nalazi se fotometar. To je bijela prizma P na kojoj se difuzno reflektira svjetlo s lijeve plohe prizme prema opažaču i vidi kao lijeva polukružnica ili pravokutna ploha (ovisno o obliku kućišta prizme). Na desnom kraju optičke klupe, r_2 udaljen od prizme smješten je drugi izvor I_2, kojemu želimo izmjeriti karakteristike. Ispred tog izvora može se postaviti providna ploča T , kojoj se određuje koeficijent propusnosti (transmisije). Izvor I_2 napaja se iz ispravljača preko promjenljivog otpornika kojemu vrijednost namještamo gumbom R . Struja i napon napajanja očitaju se ampermetrom A i voltmetrom V .

Svjetlost izvora I_2 pada na desnu stranu prizme fotometra, te se reflektirana vidi kao desna polukružna ploha. Mijenjanjem razmaka r_2 postiže se na prizmi P jednaka rasvjeta lijeve i desne plohe prizme. Budući da su površine stranica međusobno jednake, kao i kutovi (β) upadanja i odbijanja svjetlosnih snopova, a znamo jakost I_1 (etalon), lako se izračuna jakost izvora I_2 . Pri tome oba izvora svjetlosti možemo smatrati točkastim. Za ravnotežu na fotometru, tj. ujednačenost rasvjete E vrijede izrazi:

$$E_1 = I_1 \cos\beta / r_1^2 \ , \quad E_2 = I_2 \cos\beta / r_2^2 \ , \quad E_1 = E_2 \ , \text{ pa je } I_2 = I_1 \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (1).$$

Često se izvori svjetlosti ugrađuju u ukrasna ili zaštitna kućišta, koja propuštaju dio svjetlosti. Koeficijent propusnosti ili transmisije svjetlosti t , određuje se nakon postignute ravnoteže na fotometru iz relacije :

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{t\, I_2}{r_2^2} \quad , \text{ pa je} \qquad t = \frac{I_1}{I_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \qquad (2) \ .$$

1. Mjerenje jakosti izvora svjetlosti u zavisnosti o utrošenom učinu

Svjetlosni izvori uključe se na odgovarajuće napone kao na slici. Ispred izvora I_2 makne se propusna ploča T. Zadane vrijednosti napajanja žarulje I_2 namještaju se otpornikom R i na instrumentima očitavaju vrijednosti napona i struje i upisuju u tabelu. Za određene vrijednosti napajanja treba odrediti jakost izvora svjetlosti I_2 iz izraza (1). Kod namještene ravnoteže fotometra izračuna se vrijednost $r_2 = d - r_1$. Pri tome je udaljenost $r_1 = 0{\cdot}45m$ stalna. Jakost izvora I_1-etalona, je 10 cd. Treba ispuniti slijedeću tabelu i grafički prikazati zavisnost jakosti svjetlosti I_2 o naponu žarenja i utrošenom električnom učinu N. Mjerilo za ordinatu je 1cm = 1cd, a za apscisu 2cm = 1V i 2cm =1W. U ishodištu koordinatnog sustava neka budu vrijednosti za snagu i jakost svjetlosti dobivene kod nazivnog napona žarulje U = 24V. Što se može zaključiti iz grafičkog prikaza ?

U/V	28	26	24	22	20
J/A					
N/W					
r_2/m					
I_2/cd					

2. Mjerenje koeficijenta propusnosti prozirnih ploča

Na optičkoj klupi treba biti sve namješteno kao i u prethodnom mjerenju. Ispred izvora I_2 postavi se propusna ploča T. Za napon na I_2 U = 26V namjesti se jednaka rasvjeta ploha prizme i izračuna $r_2 = d - r_1$. Jakost svjetlosti izvora I_2 očita se iz prethodne tabele. Treba izračunati koeficijent transmisije pomoću relacije (2). Rezultate mjerenja unesite u tabelu.

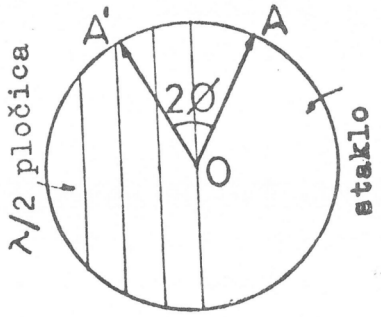
prozirna ploča	r_2/m	t
mliječno staklo		
paus papir		
masni papir		

Po završenom mjerenju isključite izvore napajanja za I_1 (transformator iz gradske mreže) i I_2 (sklopku na kutiji ispravljača i utičnicu iz gradske mreže).

ODREĐIVANJE KONCENTRACIJE ŠEĆERA U OTOPINAMA POMOĆU POLARIMETRA

Prolaskom prirodnog svjetla kroz polarizator, od svjetla nekog smjera titranja kojeg on određuje, bit će propuštena kroz analizator samo jedna komponenta. Ona je određena analizatorom. Kako su u zraci polariziranog svjetla , koja se pojavljuje iza polarizatora, vektori jakosti električnog i magnetskog polja međusobno okomiti, pod ravninom titranja polariziranog svjetla misli se na ravninu u kojoj titra vektor magnetskog polja. Optički aktivne tvari, neke krute tvari, čiste kapljevine ili otopine, smještene između polarizatora i analizatora, zakreću ravninu titranja polariziranog svjetla iz polarizatora. Zakret te ravnine određen je kao kut za koji se mora zakrenuti analizator, pa da vidno polje polarimetra, uređaja kojim vršimo mjerenje, bude istog izgleda kao i prije umetanja tvari.

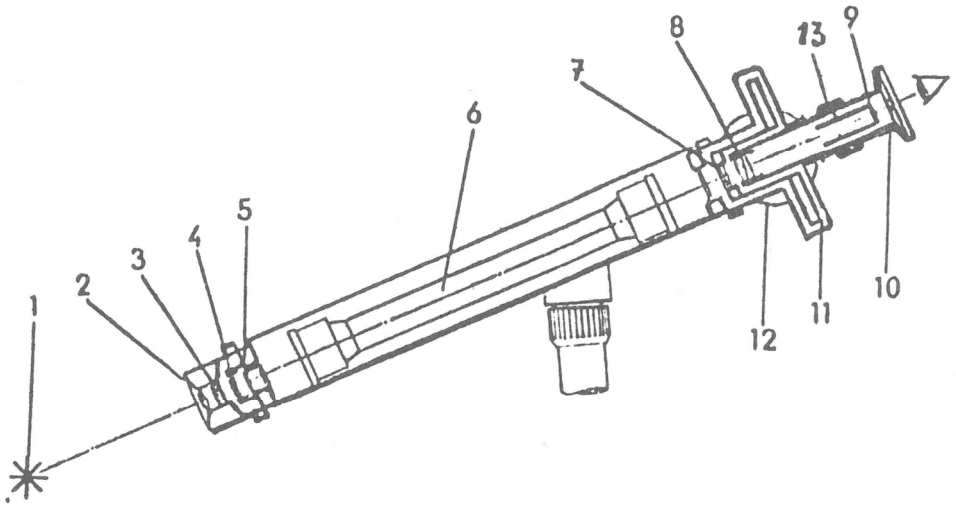
Da bi se što sigurnije odredio zakret, vidno polje je u načelu podijeljeno u dvije polovine razdjelnom linijom. Obje polovine vidnog polja vode svjetlo, a smjerovi titranja zatvaraju mali kut, kut polusjene 2φ. Smjer titranja analizatora kod jednake svjetline vidnog polja leži približno simetrično u obje polovine polja. Ova se svojstva postizavaju upotrebom Laurentove pločice. Ona se sastoji iz dva dijela. Jedan njezin dio čini $\lambda/2$ pločica, koja prekriva jednu polovinu polarizatora, dok je njezin drugi dio staklena pločica čija je optička debljina jednaka debljini $\lambda/2$ pločice i prekriva drugu polovinu polarizatora. $\lambda/2$ pločica je od kvarca čiji je rez paralelan s optičkom osi, pa je dvolom u kvarcu najveće vrijednosti. Uslijed dvoloma,debljina kvarcne pločice je takva, da za upotrijebljenu valnu duljinu, svjetlost koja iz nje izlazi, ima ne samo međusobno okomite ravnine titranja, nego i razliku u hodu od $\lambda/2$ ili neparni višekratnik od toga. Zato izlazno svjetlo nije eliptički, već linearno polarizirano.



Djelovanje Laurentove pločice može se objasniti pomoću priložene slike, gdje je optička os $\lambda/2$ pločice prikazana poprečnim prugama. Vektor OA predstavlja amplitudu titranja zrake polovine svjetlosnog snopa koji izlazi iz polarizatora i prolazi kroz staklo, a vektor OA' je amplituda titranja zrake druge polovine nakon prolaza kroz $\lambda/2$ pločicu. Naravno,ta dva vektora zatvaraju kut polusjene 2φ. Pri radu moguće je upotrijebiti samo svjetlo valne duljine koja odgovara $\lambda/2$ pločici. Intenzitet svjetlosti na izlazu polarimetra zavisi o veličini projekcija tih vektora na pravac titranja analizatora. Ako su one jednake, vidno polje polarimetra jednake je svjetline.

Kružni polarimetar

U mjerenju se koristi kružni polarimetar prikazan na slici.



Svjetlo iz natrijeve spektralne svjetiljke (1) pada na kondenzor (2) i prolazi kroz filter od obojenog stakla (3) kao monokromatsko svjetlo. Ono se polarizira u polarizatoru (4) i prolazi Laurentovom pločicom (5). Tako, svjetlo koje prolazi kroz kvarcni dio pločice i svjetlo koje se širi smjerom polarizacije, jer prolazi kroz stakleni dio pločice, čine kut polusjene od oko 12^{o}. Optički sistem je odijeljen zaštitnim prozorom od optički aktivne tvari u polarimetrijskoj cijevi (6) koja se ispituje. Analizatorski filter (7) čvrsto je povezan s graduiranom pločicom s noniusom (11) i može se gumbom (12) zakretati. Zakretni kut se očita kroz lupu (10) bez pomicanja glave, na lijevoj i desnoj skali na vrijednost točnosti $0,05^{o}$. Promatranje vidnog polja vrši se dalekozorom, čiji objektiv (8) i okular (9) daju povećanje od oko dva puta. Zakretanjem okularnog prstena (13) postiže se oštra slika razdjelnih linija u vidnom polju, koje je trodjelno. Gledanjem u okular vidi se svjetli krug podijeljen u tri dijela. Kod okretanja analizatora dva će vanjska dijela biti uvijek jednako zatamnjena ili osvijetljena, dok će središnji dio biti obrnuto osvijetljen od vanjskih. Zakretanjem analizatora postiže se položaj u kojem je središnji dio jednako svjetao kao i vanjski dijelovi. To je namještaj polusjene, kada se vrši očitavanje kuta.

Polarimetarske su cijevi duge 200 mm, ispunjene otopinama saharoze i glukoze, a u jednoj je destilirana voda. Pri mjerenju postavljaju se redom u polarimetar i poklopcem zaštićuju od okolnog svjetla.

Definicije mjernih veličina

Kut zakreta ravnine titranja polariziranog svjetla α zavisi o debljini sloja tvari kroz koju prolazi svjetlost, o temperaturi i valnoj duljini svjetlosti. Kod otopina pokazuje se i zavisnost o koncentraciji. Vrijedi zakon

$$\alpha = |\alpha|_t^{\lambda} \cdot L \cdot c \quad , \qquad (1)$$

gdje je L duljina cijevi u dm, a c je koncentracija optički aktivne tvari u g (gram) koja je sadržana u 100 ml otopine. Oznaka $|\alpha|_t^{\lambda}$ je specifični zakret kod $t^{\circ}C$ i valne duljine λ nm određen za otopinu koncentracije 1 g/ml u debljini sloja 1 dm.

Pored specifičnog zakreta definira se molna moć zakreta

$$|m| = |\alpha|_t^{\lambda} \cdot \text{molna masa.} \qquad (2)$$

Ako je poznata koncentracija neke otopine c_1 uz pripadni zakretni kut α_1, onda se može odrediti nepoznata koncentracija c_2 jednakovrsne otopine uz njen poznati kut zakreta α_2 prema izrazu

$$c_1 : c_2 = \alpha_1 : \alpha_2 \quad . \qquad (3)$$

Mjerenja

1. Namještanje polarimetra na početni položaj

Cijev ispunjenu destiliranom vodom položite na njezino mjesto u polarimetru. Izoštrite sliku u vidnom polju. Zakretanjem gumba (12) u blizini 0° nađite jednaku svjetlinu vidnog polja. Ponovite to tri puta i svaki put lupom pročitajte kut na lijevoj i desnoj skali. Upišite vrijednosti u tablicu i nađite srednju vrijednost.

Destilirana voda

broj mjerenja	α_l	α_d
1		
2		
3		

Srednja vrijednost

$\alpha_{H_2O} = \ldots {}^{o}$

2. Određivanje specifičnog zakreta saharoze

U polarimetar stavite cijev ispunjenu otopinom saharoze koncentracije 0,10 g/ml i molne mase 342,30 g/mol. Načinite tablicu kao gore i izvršite jednaka mjerenja kao u prethodnom slučaju. Iz dobivenih rezultata izračunajte srednju vrijednost koncentracije otopine saharoze

$$\alpha_{1S} = \ldots {}^{o}$$

Razlika $\alpha_{1S} - \alpha_{H_2O} = \alpha_{0,10S}$ je kut zakreta ravnine titranja polariziranog svjetla u otopini saharoze za odabranu koncentraciju c . Pomoću izraza (1) nađite specifični zakret saharoze, a pomoću izraza (2) nađite molnu zakretnu moć. Na termometru očitajte temperaturu. Valna duljina korištene natrijeve svjetlosti je 589,3 nm.

3. Određivanje koncentracije otopine saharoze

U polarimetar položite cijev ispunjenu otopinom saharoze nepoznate koncentracije. Izvršite mjerenja na način kao i ranije. Vrijednosti unesite u novu tablicu i odredite srednju vrijednost kuta α_{2S}. Mjerenja destiliranom vodom ne morate ponavljati, već koristite ranija. Odredite kut zakreta otopine saharoze tj.:

$$\alpha_{cS} = \alpha_{2S} - \alpha_{H_2O} \quad .$$

Pomoću izraza (1) nađite koncentraciju otopine c .

4. Određivanje koncentracije otopine glukoze

Odredite nepoznatu koncentraciju otopine glukoze c_2 prema izrazu (3) uz pomoć otopine glukoze poznate koncentracije c_1. Sve vrijednosti unesite u tablicu.

Otopina glukoze koncentracije $c_1 = 0,1$ g/ml

broj mjerenja	α_ℓ	α_d
1		
2		
3		

Srednja vrijednost $\alpha_{1G} = \ldots {}^{o}$

Otopina glukoze nepoznate koncentracije c_2

broj mjerenja	α_ℓ	α_d
1		
2		
3		

Srednja vrijednost $\alpha_{2G} = \ldots {}^{o}$

Prema izrazu (3) može se odrediti koncentracija c_2 iz izraza :

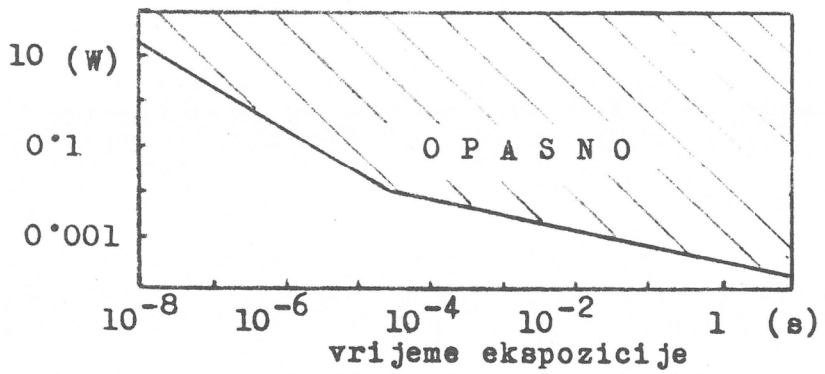
$$(\alpha_{1G} - \alpha_{H_2O}) : (\alpha_{2G} - \alpha_{H_2O}) = c_1 : c_2 \quad .$$

DJELOVANJE LASERSKOG ZRAČENJA

U laboratorijskim mjerenjima koristit će se laser male snage, no unatoč toga može štetno djelovati.

Djelovanje zračenja lasera najjače je na oku, a mnogo manje na koži. Lokalizacija oštećenja u oku ovisi o valnoj duljini laserske zrake: one iz ultraljubičastog i infracrvenog dijela spektra apsorbiraju se u rožnici, odnosno leći, te uzrokuju zamućenja, dok zrake iz vidljivog dijela spektra (kao kod He-Ne lasera) prolaze kroz prozirne dijelove, te se fokusiraju na mrežnici. Gustoća laserskih zraka u fokusu ovisi o refrakciji oka i prozirnosti rožnice, leće i staklovine. Ako je prozirnost potpuna, a refrakcija normalna, bit će kolimacija zraka u mrežnici velika, pa tako i efekt zračenja. Ova energija se najvećim dijelom pretvara u toplinu i tako ometa djelovanje enzima, dovodi do ionizacije tkiva i propadanja specifičnih stanica elemenata mrežnice. Već je porast temperature od $10^{\circ}C$ dovoljan da ošteti metabolizam stanica. To se može desiti kod ekspozicije od nekoliko stotinki sekunde zračenja He-Ne lasera snage 1 mW. Stupanj oštećenja vidne funkcije ovisi o mjestu oštećenja na mrežnici, pa je ono najteže ako laserska zraka ošteti centralni dio, makulu, gdje je najveća gustoća osjetnih stanica. Periferna oštećenja mogu ostati i neopažena, ako im je površina malena, pa ne smanjuju vidno polje.

Mjerenjem snage snopa na ulazu u rožnicu promatran je efekt laserskog zračenja. Rezultat takvog mjerenja je granična krivulja retinalnih oštećenja za raspon spektra od 0·4 do 1·4 μm prikazana na slici. Slika je precrtana iz članka : H.Weichel, N.A.Danne, L.S.Pedrotti : Laser Safety in the Laboratory, AJP 42,1006/1974.



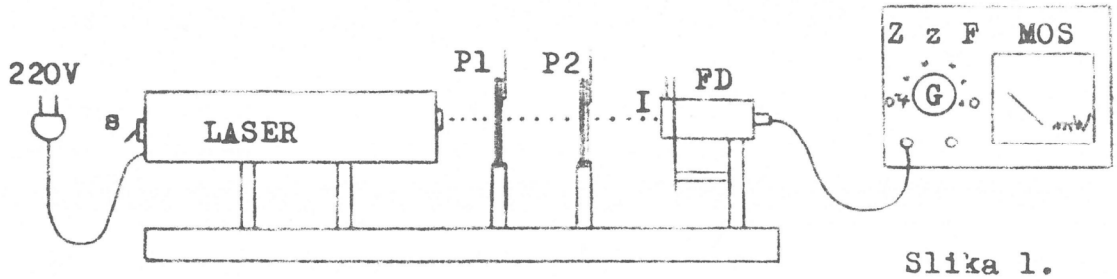
UPOZORENJE: NE IZLAŽITE O Č I DIREKTNOM ZRAČENJU IZ LASERA S KOJIM MJERITE !

MODULACIJA STALNE SNAGE LASERSKOG SNOPA POMOĆU POLAROIDA

Prije početka mjerenja pročitajte: DJELOVANJE LASERSKOG ZRAČENJA !

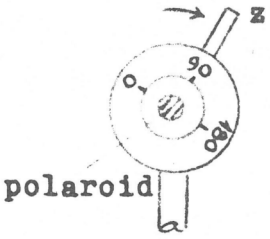
Kao izvor uskog, paralelnog snopa linearno polarizirane svjetlosti u ovim mjerenjima koristiti će se laser snage 0°5 mW i valne duljine 632°8 nm.

Uski snop svjetlosti iz lasera podudara se s optičkom osi

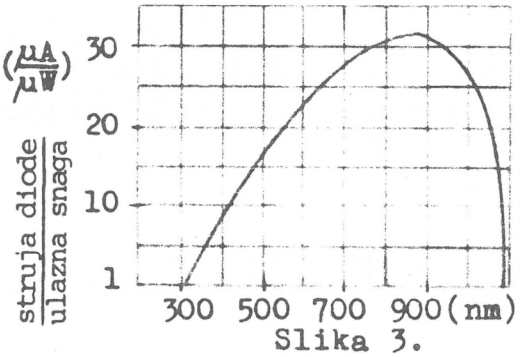


Slika 1.

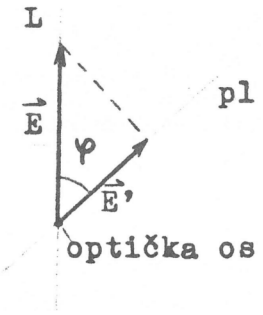
mjernog uređaja prikazanog na gornjoj slici. Svjetlost prolazi kroz polaroide P1 i P2 i pada na fotodetektor (fotodiodu) FD tipa PIN 10 D, čija se spektralna karakteristika vidi na slici 3. Električni signal sa diode vodi se u "Mjerač optičke snage"-MOS, baždaren na valnu duljinu izvora svjetlosti. Snaga se očita na instrumentu MOS-a baždarenom u milivatima. Gumbom G odabire se puni otklon skale instrumenta.



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

1. mjerenje

Elektromagnetsko zračenje iz lasera je linearno polarizirano, tj. titranje električnog (odnosno magnetskog) vektora odvija se samo u jednoj ravnini. Polaroid, sačinjen od dihroitičnih kristala herapatita, propušta upadno zračenje tako da električni vektor titra u ravnini koja će zatvarati kut φ s ravninom titranja upadnog zračenja. Na slici 4. nacrtana je projekcija amplitude $\vec{E}$ upadnog električnog vektora iz lasera koji titra u ravnini L , u pravac propuštanja polaroida P1 i ta amplituda iznosi: $E' = E \cos\varphi$. Snaga zračenja proporcionalna je kvadratu amplitude, pa je snaga koja pada na fotodiodu

$$S_{D1} = S \cos^2\varphi \ . \qquad (1)$$

Može se reći da je snaga na fotodiodi modulirana po zakonu kvadrata kosinusa kuta φ, što ga zatvaraju ravnine titranja laserskog snopa i polaroida P1. Mjerenjem se taj zakon provjerava.

Polaroid P2 skinite s optičke klupe (zajedno s držačem), jer se mjerenje izvodi samo s polaroidom P1. Preklopnik G na MOS-u mora biti u položaju 0 (krajnji desni položaj). Priključite laser na gradsku mrežu i uključite na njemu sklopku s (slika 1.). Pojavit će se snop svjetlosti koji prolazi kroz središnji dio polaroida P1 okomitog svojom površinom na optičku os. Taj snop prolazi kroz uski iris zaslon I i pada na fotodiodu FD. Električni se signal sa fotodiode koaksijalnim kabelom vodi na ulaz MOS-a na priključak FOTODIODA. Preklopnik G zakrenite u krajnji lijevi položaj, koji odgovara punom otklonu na skali od 0'4 mW. Laganim zakretanjem poluge z na polaroidu (slika 2.) treba postići maksimalni otklon instrumenta. On iznosi oko 0'3 mW. UPOZORENJE ! Ukoliko se to ne može postići, pozovite asistenta ili demonstratora. Za vrijeme mjerenja koristite indirektnu rasvjetu s okolnih stolova.

Zakretanjem poluge z od položaja 0 do položaja 180, uvijek u istom smjeru, vrijednosti dobijene na instrumentu, unesite u slijedeću tablicu.

položaj polaroida P1	0	10	20	. . . .	170	180
snaga na diodi / mW						

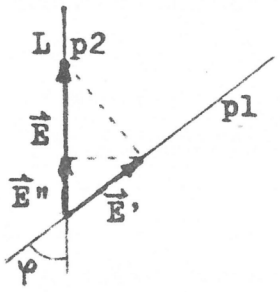
Na milimetarskom papiru prikažite grafički dobivene vrijednosti. Na apscisu nanosite položaje polaroida, tako da između dva susjedna položaja razmak iznosi 5 mm. Na ordinatu ucrtajte pripadne snage u mjerilu 5 mm $\Rightarrow$ 0'01 mW. Iz grafičkog prikaza odredite kut $\varphi = 0^{o}$ i ubilježite pripadnu snagu. Na isti način odredite snage za kutove 30^{o} i 60^{o}. Srednja vrijednost maksimalne snage za kut $\varphi = 0^{o}$ je poznata iz grafa, dok se snage kod 30^{o} i 60^{o} odrede računski. Dobivene vrijednosti unesite u tablicu. Nađite pogrešku uz točnost određivanja kuta $\Delta\varphi = \pm 5^{o}$.

kut	snaga / mW	
	mjerenje	račun
30^{o}		
60^{o}		

2. mjerenje

Postavite preklopnik G na položaj 1'2. Učvrstite polaroid P2 ispred polaroida P1 i zatim skinite s optičke klupe polaroid P1. Zakretanjem poluge z na P2 nađite maksimalni otklon instrumenta. Za točnije određivanje može se preklopnik G dati u položaj 0'4. Time

je postignuto da su pravac propuštanja p2 polaroida P2 i ravnina upadnog električnog vektora paralelni. Pravac p2 leži u ravnini L . Postavite polaroid P1 na optičku klupu između lasera i P2 . Zakretanjem poluge z na P1 prolazite položaje od 0, 10, ... do 180 i upišite rezultate izmjerene snage u novu tablicu. U ovom slučaju prema slici 5. konačna amplituda električnog vektora mijenja se u iznosu po zakonu $E'' = E \cos^2 \varphi$, pa za snagu vrijedi izraz:



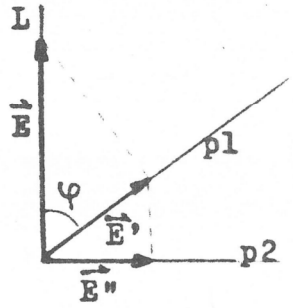
Slika 5.

$$S_{D2} = S \cos^4 \varphi \ . \quad (2)$$

To provjeravamo mjerenjem. Dobivene rezultate unesite u graf prethodnog mjerenja.

3. mjerenje

Skinite polaroid P1 s optičke klupe. Zakretanjem P2 treba postići približno otklon nula na instrumentu. Time su pravac propuštanja polaroida P2 i ravnina u kojoj titra vektor $\vec{E}$ u međusobno okomitom položaju. Postavite ponovno polaroid P1 na optičku klupu i očitajte snagu na diodi za njegove položaje od 0, 10, ... do 100. Slika 6. pokazuje konačnu amplitudu električnog vektora nakon prolaza svjetlosti kroz polaroide P1 i P2 . Pri tome vrijede izrazi: $E' = E \cos\varphi$, $E'' = E' \sin\varphi$ i konačno



Slika 6.

$$E'' = \frac{1}{2} E \sin 2\varphi \ ,$$

pa snagu na diodi dobijemo iz relacije:

$$S_{D3} = \frac{1}{4} S \sin^2 2\varphi = S_{\perp} \sin^2 2\varphi \ . \quad (3)$$

Izmjerene rezultate unesite u novu tablicu i ucrtajte u isti graf kao prijašnje prikaze.

Kolika je frekvencija modulacije u posljednjem slučaju prema ranijim primjerima?

Snage S u mjerenjima manje su od snage izlaznog laserskog snopa zbog gubitaka koji nastaju na putu svjetlosti od izvora do fotodiode.

NAPOMENA: Laser ima određeni vijek trajanja (sate rada). Odmah, po završenom mjerenju isključite sklopku s i izvučite utikač iz mrežne utičnice. Preklopnik na MOS-u okrenite u krajnji desni položaj s oznakom 0.

OGIB SVJETLOSTI NA PUKOTINI

Prolazeći kroz uske otvore, svjetlo se ogiba (difraktira), a to znači da se u području "geometrijske sjene" mjestimično pojavljuje svjetlost. U slučaju da su izvor svjetlosti i mjesto na kojem se promatra ogibna pojava, u konačnoj udaljenosti od predmeta na kojem dolazi do ogiba, to je tzv. Fresnelov ogib. Ako su te udaljenosti beskonačne, ogib se zove Frauenhoferov. Upravo ćemo taj ogib promatrati, jer je matematički lakše objašnjiv.

Frauenhoferov ogib na pukotini

Na pukotinu širine a pada ravni val svjetlosti u smjeru normale (vidi sliku 1.a). Širinu pukotine (dužina $\overline{BC}$) podijelimo u jednake dijeliće, a svaki dijelić, osvjetljen upadnom svjetlošću, izvor je sekundarnog vala jednake amplitude prema Huygensovom principu. Za smjer određen kutom θ prema upadnom



slika 1. a) b) c)

smjeru određuje se rezultantna amplituda difraktiranog vala. Ona je suma amplituda s pojedinih dijelića pukotine i može biti određena vektorskom metodom kao na slici 1.b). Vektorski dijagram (slika 1.b) je dio pravilnog poligona. Kut 2α je kut što ga zatvaraju prvi i zadnji vektor i odgovara faznoj razlici između sekundarnih valova s prvog i zadnjeg dijelića pukotine

$$2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\,\overline{BD} = \frac{2\pi}{\lambda}\,a \sin\theta\,,$$

gdje je $\overline{BD}$ razlika hoda rubnih zraka koje prolaze kroz pukotinu. Dijelići, na koje smo podijelili dužinu $\overline{BC}$, vrlo su mali, pa nacrtani dio poligona prelazi u kružni luk $\overset{\frown}{E}$ (slika 1. c). Stoga je rezultantna amplituda jednaka veličini tetive $\overline{FG}$ kružnog luka. Pretpostavlja se da radimo samo s malim kutovima θ, pa su amplitude sekundarnih valova jedake onoj koja se dobije od valova koji su prošli u direktnom smjeru ($\theta = 0$). Za to svjetlo, koje prolazi bez ogiba, vektorski dijagram odre-

duje rezultantnu amplitudu koja je jednaka duljini kružnog luka $\widehat{E}$. Iz toga možemo odrediti omjer rezultantne amplitude u smjeru θ , A_θ i rezultantne amplitude za smjer $\theta = 0$, A_0 tj.

$$\frac{A_\theta}{A_0} = \frac{\overline{FG}}{\widehat{E}} \quad .$$

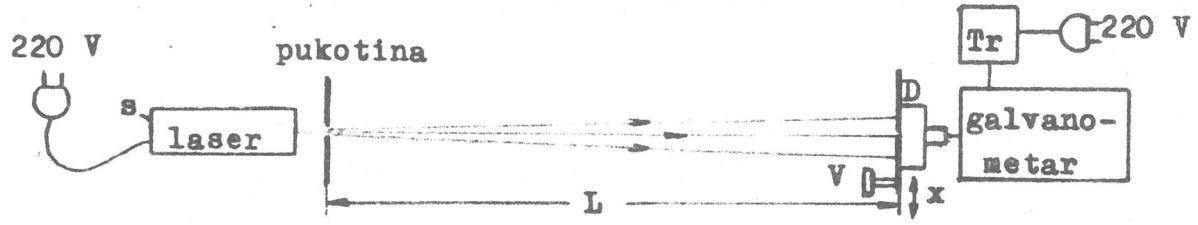
Uz oznaku r za polumjere $\overline{OF}$ i $\overline{OG}$ izlazi da je

$$\frac{A_\theta}{A_0} = \frac{2\, r \sin\alpha}{2\, r\, \alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \,,$$

pa je omjer intenziteta svjetla za odabrana dva smjera

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{A_\theta}{A_0}\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \quad .$$

Za kut $\alpha = 0$ funkcija I_θ / I_0 ima maksimalnu vrijednost. Kut ogiba θ je također nula. Pri tome je postignut uvjet za glavni ili nulti maksimum. Simetrično, lijevo i desno, slijede maksimumi 1., 2., 3., ... ako je $\alpha = \pm \frac{3\pi}{2}$, $\pm \frac{5\pi}{2}$, $\pm \frac{7\pi}{2}$ rad. Između maksimuma javljaju se minimumi, kada u području ogiba intenzitet svjetla pada na nulu. U tim slučajevima razlika u hodu između krajnjih zraka koje difraktiraju na pukotini je λ, 2λ , 3λ , .. za odgovarajuće kutove ogiba θ_1, θ_2, θ_3,.. mjereni lijevo i desno od smjera $\theta = 0$.



Uređaj za mjerenje prikazan je na gornjoj slici. Kao izvor svjetlosti koristimo uski, paralelni, koherentni snop iz He-Ne lasera valne duljine 632,8 nm. Snop svjetlosti pada na pukotinu širine a . Na udaljenosti $L = 236$ cm nalazi se detektor D kojim se analizira ogibna slika. Detektor nosi na sebi masku s otvorom u obliku pukotine i može se pomicati u smjeru x vijkom V kroz ogibno polje, poprijeko na smjer zraka svjetlosti. Svjetlosni tok koji prođe kroz otvor na maski pada na silicijsku fotodiodu. Ona je priključena na galvanometar, na kojem čitamo vrijednost pokrenute fotostruje. Galvanometar koristimo u području 1:10, pa otklon od 1 mm na skali odgovara jakosti struje

od $2{,}2 \cdot 10^{-9}$A. Jer je za mjerenje važan samo omjer intenziteta svjetla I_θ/I_0, dovoljno je čitati otklone na galvanometru (varijabla y) u proizvoljnim mjernim jedinicama (pj). Taj otklon zavisi o položaju x otvora na maski i čita se na točnost 1/10 mm.

Prije početka mjerenja pročitajte: DJELOVANJE LASERSKOG ZRAČENJA !

Izvedite slijedeća promatranja:

1. Analizirajte funkciju I_θ/I_0 u okolišu nultog (glavnog) maksimuma sa jedanaest parova vrijednosti x-y i unesite ih u tablicu. Zatim nađite položaje i vrijednosti za prva dva maksimuma i prva tri minimuma lijevo i desno od nultog maksimuma funkcije I_θ/I_0: 1ML, 2ML, 1MD, 2MD, 1mL, 2mL, 3mL, 1mD, 2mD, 3mD. U treći redak unesite izračunate vrijednosti omjera I_θ/I_0.

oznaka mjerenja	0_M	1L	2L	··	5L	0_M	1D	2D	··	5D	1ML	2ML	1MD	2MD	1mL	···	3mD
x/mm																	
y/pj																	
I_θ/I_0																	

2. Na milimetarskom papiru prikažite $I_\theta/I_0 = f(x)$. Ordinata i apscisa neka su ukupne dužine oko 10 cm.

3. Ogibni kutovi θ jako su maleni. Ako položaj nultog maksimuma označimo s x_{0M}, položaj minimuma označit ćemo s $x_{imL(D)}$, gdje je i = 1, 2, 3, . Ogibne kutove odredit ćemo omjerom

$$\theta_{iL(D)} \doteq \operatorname{tg}\theta = \frac{x_{imL(D)} - x_{0M}}{L} \quad .$$

Prikažite rezultate u tablici. Iz nađenih vrijednosti odredite širinu pukotine a na kojoj dolazi do ogiba. Nađite srednju vrijednost i relativnu pogrešku.

Na grafu funkcije I_θ/I_0 paralelno nacrtajte pomoćnu apscisu i na njoj označite kutove $\alpha = \pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ radijana.

Napomena: Mjerenja se vrše He-Ne laserom koji se napaja iz gradske mreže i uključuje sklopkom s. Prije početka mjerenja laser mora biti u pogonu 10 minuta. Skala galvanometra osvjetljena je žaruljicom koja se priključuje preko transformatora Tr također na gradsku mrežu. Po završetku mjerenja isključite laser i napajanje žaruljice galvanometra !

SPECIFIČNA TOPLINA UZDUHA c_p

Opis metode i aparature

Kod plinova su značajne dvije specifične topline: specifična toplina c_v (uz stalni obujam), ako se pri dovođenju topline plinu drži obujam stalnim, i specifična toplina c_p (uz stalni tlak), ako se pri dovođenju topline drži tlak stalnim.

U ovom mjerenju određuje se ova druga specifična toplina, toplina c_p za uzduh sobe. Prema tome će rezultat našeg mjerenja dati, koliko džula topline treba dovesti kilogramu uzduha, da mu se povisi temperatura za jedan stupanj celzijusa uz pretpostavku, da se pri dovođenju topline tlak ne mijenja. Ova je pretpostavka ispunjena kod običnog zagrijavanja uzduha, jer se tlak u sobi ne razlikuje od tlaka vanjskog uzduha.

Mjerit ćemo metodom stalnog protoka plina. Kod ove metode plin struji jednolično kroz grijač u kojemu se plinu povisuje temperatura od ϑ_u na ϑ_i. Ovdje je ϑ_u temperatura uzduha na ulazu u grijač, a ϑ_i temperatura uzduha na izlazu iz grijača. Ako u vremenu t prođe kroz grijač masa plina m, onda je ta masa uz stalni tlak primila od grijača toplinu

$$Q = c_p \, m \, (\vartheta_i - \vartheta_u) ,$$

što znači da je uzduh primao od grijača toplinu brzinom

$$\frac{Q}{t} = c_p \, \frac{m}{t} \, (\vartheta_i - \vartheta_u) .$$

Ako se u grijaču stvara toplina trošenjem električne energije, onda uz stalni napon U na grijaču i stalnu struju I kroz grijač, električna se energija troši snagom

$$W_E = U \cdot I .$$

Kad se postigne ustaljeno (stacionarno) stanje, tada se uz stalnu ulaznu temperaturu ϑ_u, temperatura na izlazu ne mijenja. To je znak, da struja uzduha odnosi toplinu iz grijača onom brzinom, kojom se toplina u grijaču stvara.

Dakle je

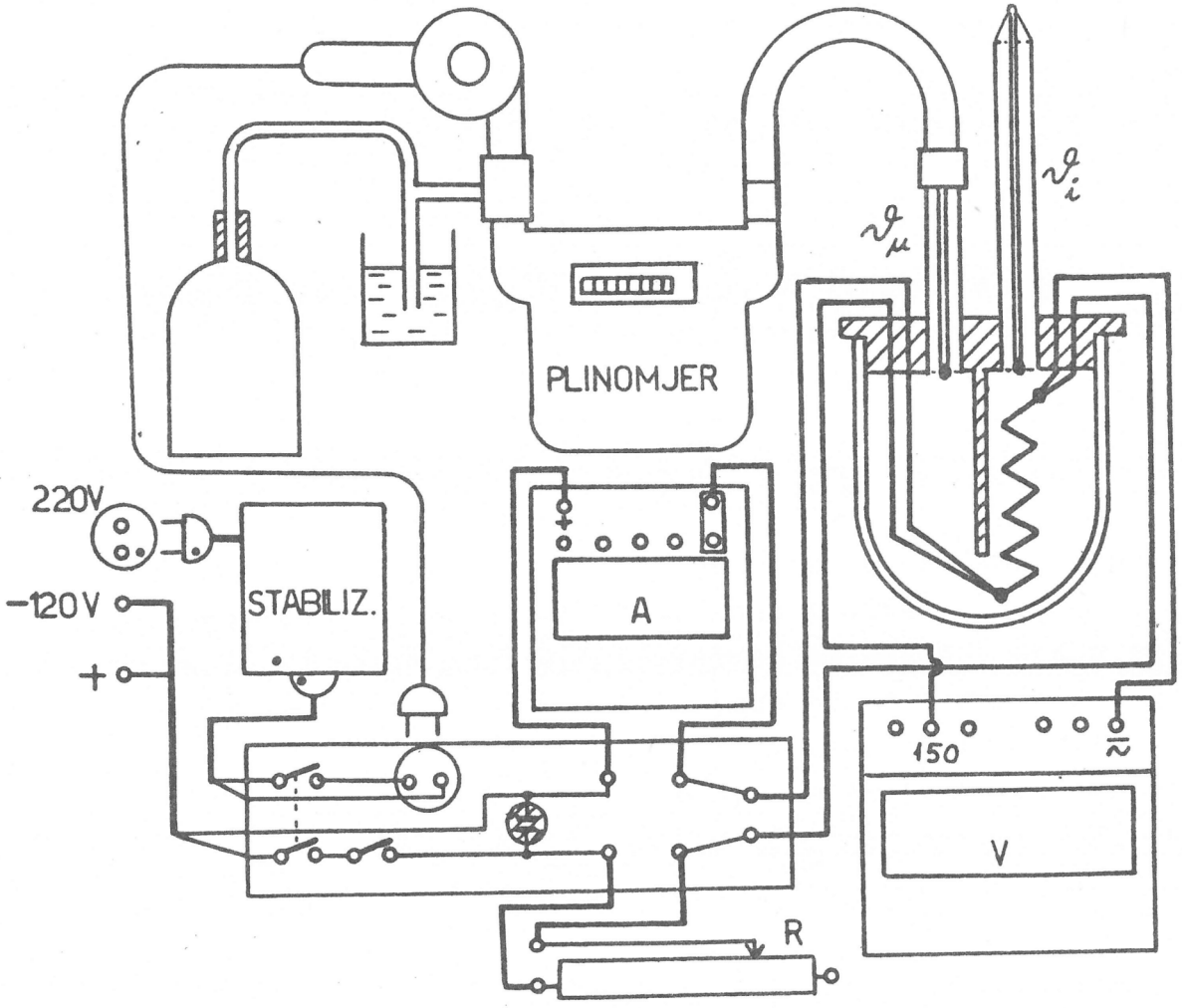
$$\frac{Q}{t} = W_E \quad , \quad \text{ili}$$

$$c_p \frac{m}{t} (\vartheta_i - \vartheta_u) = U \cdot I \ .$$

Ovu formulu razriješimo po c_p i tako dobijemo izraz koji je osnov našeg mjerenja

$$c_p = \frac{U \cdot I \cdot t}{m (\vartheta_i - \vartheta_u)} \ . \qquad (1)$$

Kod naše aparature električni grijač je zatvoren u termosboci (crvena kutija). Uzduh se uvodi kroz kraću staklenu cijev, a izvodi kroz dužu. Svaka cijev sadrži termometar. Na prvom ćemo pročitati ϑ_u , a na drugom (koji je duži) ϑ_i . To su kalorimetrički termometri i imaju stupnjeve podijeljene na deset dijelova.



Kroz poklopac termos-boce ulaze žice za dovod električne struje grijaču i priključak voltmetra na krajeve grijača.

Jakost električne struje I može se namjestiti otpornikom R. Time se ujedno namješta i napon U, koji se čita na voltmetru V.

Struju uzduha kroz grijač tjera maleni ventilator, koji je montiran na ulazni otvor plinomjera. Plinomjer će nam poslužiti, da izmjerimo o b u j a m V uzduha koji prođe kroz grijač u vremenu t. Iz tog obujma i gustoće uzduha δ, koju treba naći, računamo masu uzduha m

$$m = \delta \cdot V .$$

To je masa uzduha koju treba uvrstiti u formulu (1). Volumen V se nađe tako da se zapornom urom mjeri vrijeme t potrebno da brojčanik plinomjera dođe od stanja V_1 do stanja V_2. Tada je

$$V = V_2 - V_1 .$$

Ako to sve uzmemo u obzir i uvrstimo u formulu (1), tad ona glasi

$$c_p = \frac{U(I_A - I_V)\, t}{\delta (V_2 - V_1)(\vartheta_i - \vartheta_u)} . \qquad (2)$$

U ovoj je formuli proveden još jedan popravak. Struja kroz grijač I je razlika struje I_A koju pokazuje ampermetar i struje I_V koju troši voltmetar, paralelno spojen s grijačem. U našoj je aparaturi

$$I = I_A - I_V = I_A - \frac{U}{3000\,\Omega} .$$

Naš voltmetar ima na području do 150 V unutarnji otpor 3000 Ω. Manometar s vodom i staklena boca koji su priključeni na dovod uzduha u plinomjer, služe za održavanje stalnog tlaka na ulazu u plinomjer. Manometar treba namjestiti tako, da za vrijeme rada ventilatora trajno ispušta mjehuriće uzduha. To je onda, ako je cijev manometra uronjena u vodu do dubine 2 do 3 cm.

Postupak kod mjerenja. Šuko utikač stabilizatora napona na koji je priključen ventilator, utakne se u utičnicu gradske mreže tako, da se crvena točka na utikaču podudara sa crvenom

točkom utičnice. Bananski utikači za dovod akumulatorske struje za grijač priključuče se crveni na + , a modri na -120 V .

Sad se na priključnoj daščici pritisne dvostruki prekidač na uključeno. Ventilator krene, a voltmetar i ampermetar dalje pokazuju nulu. Manometar s vodom treba početi izbacivati mjehuriće uzduha.

Zaporna ura se pokrene, kad plinomjer pokazuje stanje koje završava ili sa 50 ili sa 00 . To se stanje V_1 zapiše u tablicu mjerenja. Zatim se uključi grijanje tako da se pritisne jednostruki prekidač na daščici. Signalna tinjalica se upali, ampermetar i voltmetar pokazuju otklon. Ako signalna tinjalica gori, mora ventilator raditi. Otpornikom se namjesti napon U na vrijednost U = 90 V i ta se vrijednost zapiše. Sa ampermetra se pročita pripadna jakost struje I_A i to se zapiše u tablicu. Napon U = 90 V treba za cijelo vrijeme mjerenja održavati tako, da se - ako je potrebno - malo pomakne klizač otpornika.

Sad se sa stolnog barometra (aneroida) pročita tlak uzduha p izražen u milibarima (m bar). Brojevi na aneroidu su centimetri stupca žive, dakle ih treba množiti sa 13°328. Položaj kazaljke aneroida se ocjeni na jedan tor (milimetar stupca žive). To se preračunato u m bar zapiše u tablicu II u rubriku p/mbar.

Uz barometar na desno je higrometar koji pokazuje relativnu vlagu uzduha u postocima. To je podatak r% koji se također unese u tablicu.

Sad se sa kraćeg termometra na grijaču pročita ulazna temperatura ϑ_u i unese u tablicu.

Iz podataka p , r , ϑ_u odredi se gustoća uzduha pomoću tabele I .

I Tabela. Gustoća uzduha δ (kg·m^{-3}) u zavisnosti o tlaku p , temperaturi ϑ (°C) i relativnoj vlagi r%

ϑ	986			1013			1040			p/mbar
(°C)	50	60	70	50	60	70	50	60	70	r%
18	1°176	1°175	1°174	1°208	1°207	1°206	1°240	1°239	1°238	
20	1°168	1°167	1°166	1°200	1°199	1°198	1°231	1°230	1°229	
22	1°159	1°158	1°157	1°190	1°189	1°188	1°222	1°221	1°220	
24	1°150	1°149	1°148	1°181	1°180	1°179	1°213	1°212	1°211	
26	1°142	1°140	1°139	1°173	1°171	1°170	1°204	1°202	1°201	
28	1°134	1°132	1°130	1°165	1°163	1°161	1°195	1°193	1°191	

Tabela je izračunata na osnovu podataka uzetih iz G.W.C. Kaye and T.H. Laby: Tables of Physical and Chemical Constants, 12. izdanje, Longmans, London 1962, str. 126, 132, 133.

U ovoj su tabeli navedene gustoće uzduha tako da u istom redku stoje vrijednosti koje pripadaju istoj temperaturi, a u istom stupcu vrijednosti za tlak i istu vlagu. Tako npr. uz $\vartheta_u = 22^\circ C, p = 1013 mbar$, r=70% nalazimo $\delta = 1{\cdot}188$.

U stvarnom mjerenju rijetko ćemo kada očitati okrugle vrijednosti temperature, tlaka i vlage. Zato će trebati vrijednost gustoće uzduha δ naći interpolacijom. Uzmimo npr. da su podaci ovakovi $\vartheta_u = 23{\cdot}4^\circ C, p = 1008 mbar$, r=64% . Budući da se s vlagom gustoća δ vrlo malo mijenja, upotrijebit ćemo za račun vrijednosti kao da je r=60% . (Ove bi vrijednosti upotrijebili, ako vlagomjer pokazuje nešto između 55% i 64%) . Dakle tražena vrijednost za δ leži između vrijednosti, koje pripadaju tlakovima 986 mbar odn. 1013mbar i temperaturama $22^\circ C$ i $24^\circ C$. Najprije ćemo interpolirati obzirom na tlak; tj. mi ćemo naći kolika gustoća pripada tlaku 1008mbar kod temperature $22^\circ C$, te zatim kod temperature $24^\circ C$. Za temperaturu $22^\circ C$ nalazimo

	986mbar	1008mbar	1013mbar
22 °C	1·158	1·18	1·189
23·4°C		1·177	
24 °C	1·149	1·17	1·180

$$\delta(1008mbar, 22^\circ C) = (1{\cdot}158 + \frac{1{\cdot}189 - 1{\cdot}158}{27}\ 22)\ kg \cdot m^{-3} = 1{\cdot}1833$$

Na jednak način nalazimo

$$\delta(1008mbar, 24^\circ C) = (1{\cdot}149 + \frac{1{\cdot}180 - 1{\cdot}149}{27}\ 22)\ kg \cdot m^{-3} = 1{\cdot}1742\ kg \cdot m^{-3}$$

Pošto smo našli ove dvije vrijednosti, interpoliramo između njih obzirom na temperaturu

$$\delta(1008mbar, 23{\cdot}4^\circ C) = (1{\cdot}1833 - \frac{1{\cdot}1833 - 1{\cdot}1742}{2}\ 1{\cdot}4)\ kg \cdot m^{-3}$$

$$= 1{\cdot}1769\ kg \cdot m^{-3} \doteq 1{\cdot}177\ kg \cdot m^{-3}$$

Posljednji se rezultat zaokruži na broj mjesta u polaznim podacima. Kod interpolacije obzirom na temperaturu treba korekciju odbiti, jer gustoća s temperaturom opada. Upotrijebili smo linearnu interpolaciju.

Pošto smo dakle interpolacijom našli δ, zapišimo tu vrijednost u tablicu mjerenja.

Sada pročitajmo izlaznu temperaturu ϑ_i i unesimo ju u tablicu mjerenja.

Gledajmo plinomjer i kad se pokaže okrugla brojka koja za-

vršava na 50 ili 00, zaustavimo zapornu uru i stanje plinomjera V_2 upišimo u tablicu. Razlika $V_2 - V_1$ neka ne bude manja od 0·500 m^3 .

Sa zaporne ure pročitamo vrijeme t (sek) i to također zapišemo.

Sad imamo sve podatke i po formuli (2) izračunamo c_p .

Na ovo mjerenje možemo odmah nadovezati drugo ne isključujući aparaturu. Zapornu uru vratimo na nulu, počekamo na plinomjeru okruglu vrijednost za V_1 i pokrenemo uru. Održavamo U=90 V, čitamo I_A, p, r% (vjerojatno kao i prije) zatim ϑ_u. Odredimo δ i čekamo da proteče kroz plinomjer barem 0·500 m^3. Sve unosimo u tablicu kao i prije i računamo c_p prema (2).

II Tablica mjerenja

Mjerenje	U	I_A	$I_V = \frac{U}{3000\,\Omega}$	$I_A - I_V$	V_1	V_2	$V_2 - V_1$	ϑ_u	ϑ_i	$\vartheta_u - \vartheta_i$	p	r	δ	c_p
	(V)	(A)	(A)	(A)	m^3	m^3	m^3	°C	°C	°C	mbar	%	kg m^{-3}	J(kg°C)$^{-1}$
1														
2														
3														

Ocjena točnosti mjerenja.

Na osnovu formule (2) možemo ocijeniti točnost dobivenog rezultata za c_p . U tu svrhu ćemo ocijeniti točnost, odnosno pogrešku svakog podatka,koji se u ovu formulu uvrsti.

Pogrešku izmjerenog napona U cijenimo na	0·5%
Pogrešku izmjerene struje I cijenimo na	0·5%
Pogrešku izmjerene brzine protoka $\frac{V_2 - V_1}{t}$ cijenimo na	1·0%
Pogrešku izmjerene razlike temperatura ($\vartheta_i - \vartheta_u$) cijenimo na	1·0%
Pogrešku računate gustoće δ cijenimo na	0·2%
	3·2%

U rezultatu se ove pogreške zbrajaju u najnepovoljnijem slučaju. Prema tome je

$$c_p = \text{izmjerena vrijednost} \pm 3{\cdot}2\% \ .$$

ADIJABATSKA KONSTANTA PLINOVA

Adijabatska konstanta $\varkappa$ je omjer specifične topline c_p i specifične topline c_v za neki plin :

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} \quad .$$

Ako se nekom plinu dovodi toplina tako, da se pri tome dovođenju drži tlak plina stalnim (pri takovom dovođenju topline raste obujam plina), onda je količina topline, koju treba dovesti po jedinici mase plina i stupnju povišenja temperature, dana specifičnom toplinom c_p (uz stalan tlak). Ako se međutim pri dovođenju topline nekom plinu drži obujam plina stalnim (pri takovom dovođenju topline raste tlak plina), onda je količina topline, koju treba dovesti po jedinici mase plina i stupnju povišenja temperature, dana specifičnom toplinom c_v (uz stalni obujam).

Omjer ovih dviju specifičnih toplina, tzv. adijabatička konstanta $\varkappa$, ima važno teoretsko značenje, jer već jednostavna kinetička teorija plinova daje, da konstanta $\varkappa$ može poprimiti vrijednosti

$$\varkappa = \frac{5}{3}\ ,\ \frac{7}{5}\ ,\ \frac{8}{6}\ ,\ldots$$

$$= 1{\cdot}67, 1{\cdot}40, 1{\cdot}33, \ldots$$

već prema tome, da li su molekule plina jednoatomne, dvoatomne, troatomne,...

Mi ćemo mjeriti $\varkappa$ za uzduh i za ugljični dioksid (ugljična kiselina) CO_2 služeći se metodom Clementa i Desormesa.

Kod ove se metode najprije izvjesna količina plina, koja ima obujam V_o, tlak p_o i temperaturu T_o, naglo rastegne (ekspandira) na obujam V_1. Budući da je ova ekspanzija bila nagla, to plin nije imao vremena, da za vrijeme rastezanja prima iz okoliša toplinu. Ta je ekspanzija prema tome bila adijabatička, i plinu se je snizila temperatura na T_1, a tlak na vrijednost p_1. Za adijabatičku ekspanziju vrijedi zakon

$$p.V^{\varkappa} = \text{stalno} \quad .$$

Prema tome vrijednosti tlaka i obujma na početku i na kraju adijabatičke ekspanzije vezani su jednadžbom

$$p_o.V_o^{\varkappa} = p_1.V_1^{\varkappa} \qquad (1)$$

Ako sada držimo obujam V_1 stalnim (nakon adijabatičke ekspanzije brzo zatvorimo pipac na boci u kojoj je plin), onda ohlađeni plin prima toplinu iz okoliša, dok se ova ne vrati na vrijednost T_o, a pri tome i tlak plina raste i postigne vrijednost p_2. Sad dakle promatrana količina plina ima ove vrijednosti obujma, tlaka i temperature : V_1 , p_2 , T_o .

Ovu količinu plina mogli bi dovesti u stanje karakterizirano vrijednostima V_1 , p_2 , T_2 i tako, da smo taj plin iz početnog stanja V_o , p_o , T_o polagano rastezali do obujma V_1 držeći pri tome temperaturu T_o stalnom. Tako bi opet tlak plina postigao vrijednost p_2 . Ova zamišljena izotermička promjena dovela bi nas do istog stanja, kao i ona izvedena u dva koraka: prvo adijabatička ekspanzija, zatim zagrijavanje uz stalni obujam (izohorna promjena).

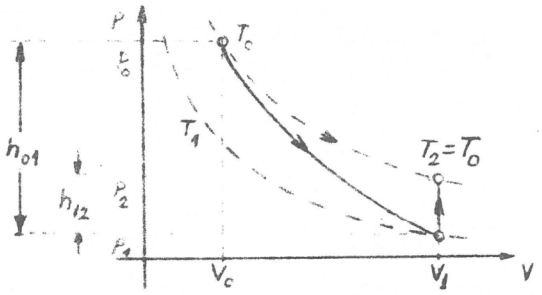
Ako se plinu mijenja obujam uz stalnu temperaturu, onda vrijedi Boyle-Mariotte-ov zakon

$$p.V = \text{konst.}$$

Prema tome u našem slučaju vrijedi

$$p_o.V_o = p_2.V_1 \quad . \qquad (2)$$

Ove promjene možemo prikazati u pV dijagramu. Najprije adijabatička, koja vodi iz stanja p_o,V_o,T_o u stanje p_1,V_1,T_1. Zatim izohorna iz stanja p_1,V_1,T_1 u stanje p_2,V_1,T_o. Crtkana krivulja izohorna iz stanja p_1,V_1,T_1 u stanje p_2,V_1,T_o. Crtkana krivulja prikazuje (neizvedenu)termičku promjenu.



Iz jednadžbi (1) i (2) možemo mjerenjem tlakova p_o,p_1,p_2 odrediti adijabatsku konstantu .

Ako obje jednadžbe logaritmiramo dobijemo

$$\ln p_o + \varkappa \ln V_o = \ln p_1 + \varkappa \ln V_1 \qquad (3)$$

$$\ln p_o + \ln V_o = \ln p_2 + \ln V_1 \qquad (4)$$

Odavle slijedi

$$\varkappa(\ln V_o - \ln V_1) = \ln p_1 - \ln p_o \qquad (5)$$

$$\ln V_o - \ln V_1 = \ln p_2 - \ln p_o \qquad (6)$$

Ako podijelimo ove jednadžbe dobijemo

$$\varkappa = \ln \frac{p_1}{p_o} : \ln \frac{p_2}{p_o} = \ln\left(1 + \frac{p_1-p_o}{p_o}\right) : \ln\left(1 + \frac{p_2-p_o}{p_o}\right) .$$

Ako su promjene tlaka malene, kao što je to slučaj kod našeg mje-

renja, onda vrijedi

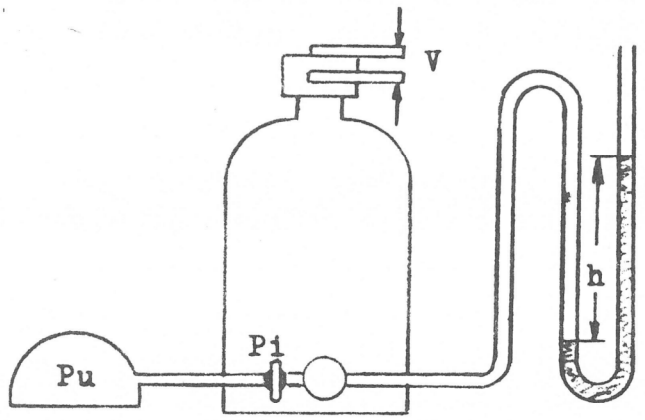
$$\ln\left(1 + \frac{p_1 - p_o}{p_o}\right) = \frac{p_1 - p_o}{p_o}$$

$$\ln\left(1 + \frac{p_2 - p_o}{p_o}\right) = \frac{p_2 - p_o}{p_o}$$

pa je

$$\varkappa = \frac{p_1 - p_o}{p_2 - p_o} = \frac{p_o - p_1}{p_o - p_2} \quad . \qquad (7)$$

Opis aparature. Oveća staklena boca može se ventilom V na njezinom vrhu otvoriti prema okolnom uzduhu, stiskanjem krakova prema slici. Razliku tlaka u boci i vanjskom uzduhu pokazuje manometar s vodom. Pumpom Pu stlačimo (oprezno) nešto uzduha tako, da manometar pokazuje razliku visina oko 20 cm. Pošto smo zatvorili pipac Pi prema pumpi, počekamo koju minutu, da se visina vode u manometru smiri. (Prigodom tlačenja uzduha u bocu, porasla je uzduhu u boci temperatura, pa treba čekati da se ova izjednači s okolišem). Sad pročitamo na manometru razliku nivoa h_{o1}. Ona je razmjerna razlici tlakova u boci i u sobi



$$p_o - p_a = \gamma h_{o1} \quad .$$

Ovdje je p_o tlak u boci, p_a tlak u sobi, a γ specifična težina vode.

Ako sada na vrlo kratko vrijeme otvorimo ventil V na vrhu boce i opet ga zatvorimo, izjednači se tlak u boci s tlakom u sobi, tj. postignemo da je

$$p_1 = p_a \quad .$$

To je bila adijabatska promjena i mi smo dobili

$$p_o - p_1 = \gamma h_{o1} \quad .$$

Ako počekamo koju minutu, uzduh u boci postigne opet temperaturu sobe, a tlak naraste na vrijednost p_2 (izohorna promjena). Sad manometar pokazuje svojom razlikom u visinama nivoa h_{12} razliku tlaka u boci p_2 i tlaka u sobi $p_a = p_1$.

Dakle

$$p_2 - p_1 = \gamma h_{12} \quad .$$

U formuli (7) mi trebamo razliku

$$p_o - p_2 = (p_o - p_1) - (p_2 - p_1) = \gamma(h_{o1} - h_{12}) \quad .$$

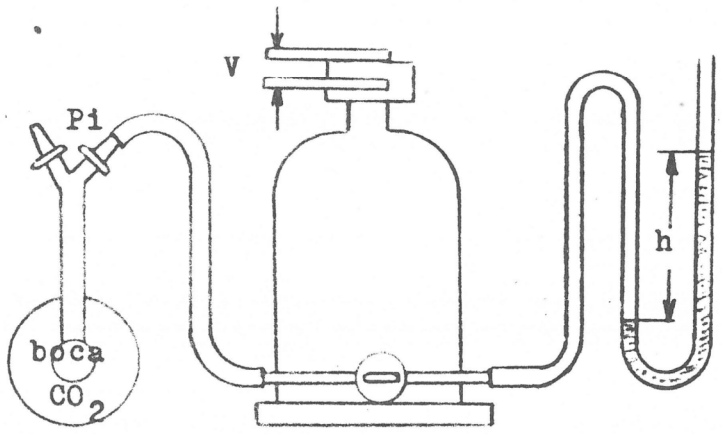
Ako ovo uvrstimo u izraz (7), dobijemo

$$\varkappa = \frac{h_{01}}{h_{01} - h_{12}} \quad .$$

Odavle izračunamo $\varkappa$!

Ovo mjerenje s uzduhom ponovimo pet puta i izračunamo srednjak tih mjerenja. To je onda rezultat za adijabatsku konstantu za uzduh.

S drugom bocom načinimo isto takvo mjerenje, ali s plinom CO_2. Taj je plin stlačen u crvenoj kovnoj "bombi". Preko redukcionog ventila (vidi uputu za rad s bocom punjenom s CO_2), puni se druga staklena boca sa CO_2, kada je pipac Pi otvoren (uzdužni položaj). Držite pipac otvoren dok manometar ne dostigne razliku nivoa oko 20 cm, pa ga onda zatvorite. Adijabatsku promjenu plina izvedite kratkotrajnim otvaranjem ventila V na vrhu boce. Ostali postupak je isti kao za uzduh. Međutim da ne bi došlo do neke nezgode, prije mjerenja sa CO_2 pozovite asistenta odnosno demonstratora da provjere da li plin izlazi kako treba. <u>Pazite : u "bombi" je CO_2 pod tlakom od 60 bar !</u> Opet načinite pet mjerenja za $\varkappa$. Zatim izračunajte srednjak tih mjerenja. To je rezultat za $\varkappa$ za plin CO_2.



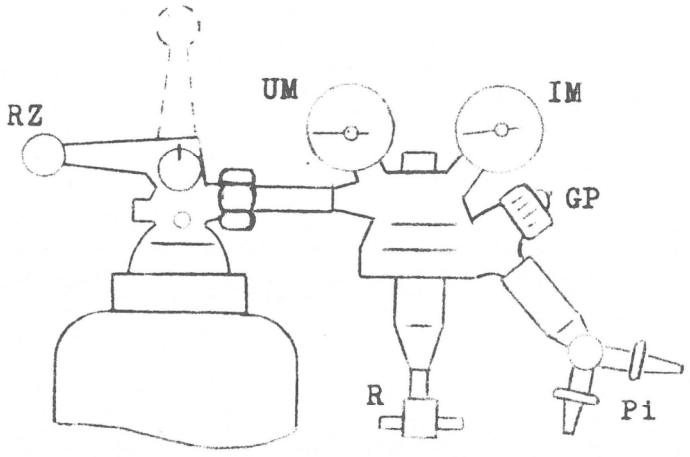
Rezultate mjerenja unesite u ovakvu tablicu :

	$\frac{h_{01}}{cm}$	$\frac{h_{12}}{cm}$	$\frac{h_{01} - h_{12}}{cm}$	$\varkappa$	s
uzduh					
CO_2					

$$\overline{\varkappa} = \ldots .$$

$$s_m = \varkappa_i - \overline{\varkappa}$$

UPUTA ZA RAD S BOCOM PUNJENOM S CO_2



Početak rada :

1. Prije otvaranja boce provjeriti da li su svi ventili zatvoreni (GP uvrnut, a Pi u poprečnom položaju), a regulator R potpuno odvrnut.
2. Ručicu zatvarača boce RZ zaokrenuti u horizontalni položaj (vidi sliku i pazi na osigurač).
3. Regulator tlaka R polagano uvijati dok izlazni manometar IM ne pokaže tlak 1 bar (na skali 1 kp/cm^2). Ulazni manometar UM uvijek pokazuje tlak plina u boci.
4. Glavni pipac GP se otvori za jedan okret.
5. V E O M A P O L A G A N I M okretanjem odgovarajućeg izlaznog pipca Pi u uzdužni položaj, može se uzimati plin CO_2 iz boce. Kad se izvodi vježba "Adijabatska konstanta plinova" , treba pri tome stalno gledati stakleni manometar, da tlak ne raste prebrzo. Kod razlike nivoa oko 20 cm, pipac Pi zatvoriti.

Po završenom mjerenju :

6. Regulator tlaka R se odvrne do kraja. Tako je zatvoren izlaz plina.
7. Otvori se jedan izlazni pipac Pi i ispusti CO_2 u sobu, a nakon toga zatvori.
8. Zatvori se glavni pipac GP (uvrne do kraja). Izlazni manometar IM mora pokazivati nula tlaka, što je znak da plin iz boce ne izlazi.

BRZINA ZVUKA U UZDUHU I U CO_2

Ako se u nekom elastičnom sredstvu dva vala rasprostiru u jednom pravcu, a suprotnim smjerovima, mogu nastati stojni valovi uz uvjet da je frekvencija valova ista, a amplitude da su im približno jednake. U našem primjeru ta dva vala jesu polazni, kojeg daje izvor na početku cijevi i reflektirani koji nastaje odbijanjem na kraju cijevi.

Valovi se prenose sredstvom (uzduhom, odnosno CO_2) brzinom v . To je brzina rasprostiranja određene faze titranja. Početna faza će se u vremenu jednakom periodu titranja $T = \frac{1}{f}$ pomaknuti za razmak jednak duljini vala λ , pa vrijedi

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad . \qquad (1)$$

Ako je sredstvo na kojem se val reflektira gušće od onog kojim se rasprostire, nastat će refleksijom pomak u fazi za 180^0, a amplituda se neće praktički umanjiti. Tako se upadni i reflektirani val superponiraju u titranje dvostruke amplitude u trbuhu titranja i nula amplitude u čvoru titranja. Ako je sredstvo npr. stupac uzduha zatvoren na krajevima tvrdim materijalima, onda će za osnovni način titranja u sredini biti trbuh titranja (minimalna promjena tlaka), a na krajevima čvorovi titranja (najveće promjene tlaka). Dužina stupca ℓ_1 jednaka je tada polovini valne duljine $\ell_1 = \frac{\lambda}{2}$. Titranje je snažno, jer se valovi nastali višestrukim refleksijama na početku i kraju cijevi međusobno podupiru. Ako duljinu stupca uzduha povećamo na dvostruko, tada je $\ell_2 = 2\,\frac{\lambda}{2}$ a titranje opet snažno, jer se valovi nastali refleksijama na krajevima opet međusobno podupiru. Jednako se događa, ako je $\ell_3 = 3\,\frac{\lambda}{2}$ itd. Svaki puta, kad je razmak između izvora zvuka i reflektora cjelobrojni mnogokratnik $\frac{1}{2}$ valne duljine zvuka razvije se u cijevi stojni val maksimalne amplitude.

Činjenica, da je titranje u stojnom valu maksimalno, kad je ispunjen uvjet

$$\ell = k\,\frac{\lambda}{2} \quad , \; k = 1,2,3,.... \qquad (2)$$

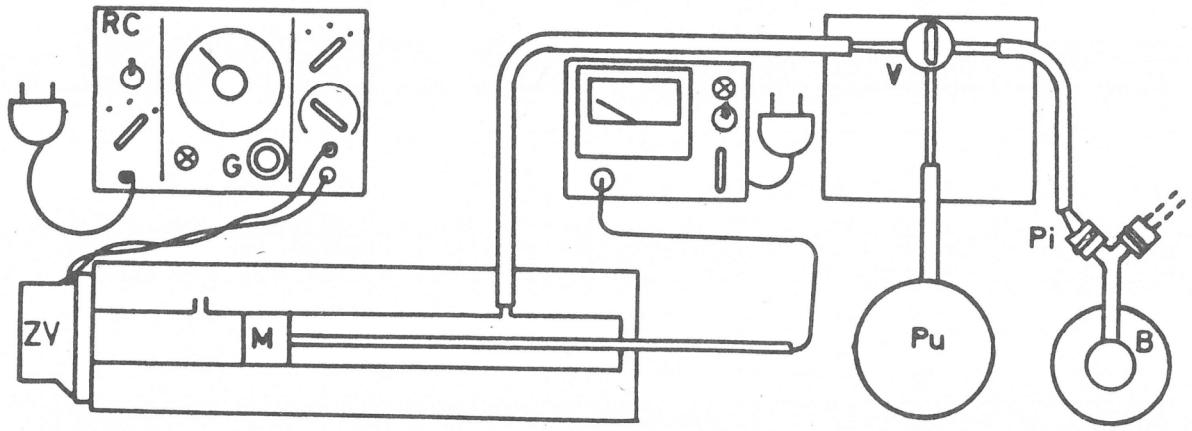
omogućuje nam da izmjerimo valnu duljinu zvuka koji se rasprostire plinom, kojim je punjena cijev.

Znajući pak frekvenciju i mjereći valnu duljinu stojnog vala pomoću (1) i (2) možemo izračunati brzinu rasprostiranja vala u danom plinu.

Titranje materijalnog sredstva kojim se šire longitudinalni valovi zapravo je promjena gustoće i tlaka odnosno brzine titranja čestica. Ako u sredstvu nastane longitudinalni stojni val, onda će čvorovi titranja biti tamo gdje je najveća promjena gustoće sredstva (najmanja brzina titranja, a najveća promjena tlaka), a trbusi titranja na mjestima gdje se tlak i gustoća ne mijenjaju. Ako je to val u uzduhu, onda će intenzitet promjene tlaka biti najveći u čvorovima titranja, dakle i na kraju cijevi, pa se zato u našoj aparaturi na tom mjestu nalazi mikrofon, koji je osjetljiv na promjenu tlaka.

Zadatak je ove vježbe da se mjereći duljine stojnih valova koji nastaju u stupcu plina u cijevi, odredi brzina zvuka u uzduhu i ugljičnom dioksidu CO_2.

Aparatura je prikazana na slici.



Na jednom kraju staklene cijevi je izvor zvuka zvučnik ZV, kojeg pobuđuje RC generator, a na drugom mikrofon M, koji služi i kao reflektor i kojega možemo aluminijskim štapom pomicati uzduž cijevi. Mikrofon je spojen na pojačalo s instrumentom kao indikatorom intenziteta zvuka. Cijev se može napuniti uzduhom pumpom Pu ili plinom CO_2 iz boce B. Izvor plina biramo okretanjem staklenog ventila V.

MJERENJE. Priključite RC generator i pojačalo na gradsku mrežu napona 220 V i uključite ih sklopkama na kutijama. Na generatoru namjestite frekvenciju f gumbom G i postavite desne gumbe na maksimalni izlazni napon. Gumb za osjetljivost pojačala stavite u srednji položaj. Ventil V okrenite tako, da pumpom Pu možete ispumpati iz cijevi zaostao plin i napuniti ju uzduhom. Mikrofon pomičite polagano uzduž cijevi i na mjerilu ispod stakla očitavajte mjesta maksimalnog intenziteta od 0 cm do 60 cm stupca cijevi.

Da čim točnije izmjerimo valnu duljinu λ uz određenu frekvenciju f, približimo mikrofon M sasvim uz zvučnik. Instrument na pojačalu tada pokazuje maksimalni otklon. Sad polagano mikrofon odmičemo, otklon prvo pada, a zatim raste. Kad je ponovo maksimalan, tada je $\ell_1 = \frac{\lambda}{2}$. Kad bi iz ovog podatka odredili λ, načinili bi veliku pogrešku, jer je ℓ_1 određen s dosta velikom netočnošću. Zato dalje odmičemo mikrofon, da dođe na daljinu ℓ_2, kad instrument pojačala daje ponovo maksimalan otklon. Nastavimo dalje tako odmicati mikrofon, dok se njime ne približimo kraju cijevi i tako ustanovim po mogućnosti točno položaj ℓ_k reflektora za k-ti maksimum otklona. Iz tog položaja računamo valnu duljinu

$$\lambda = \frac{2\,\ell_k}{k} \quad ,$$

koju onda unesemo u tablicu. Ovaj postupak načinimo za sve navedene frekvencije. Treba ispuniti slijedeću tablicu

frekvencija f (Hz)	položaji trbuha titranja (cm)	valna duljina (m)	brzina v (m/s)
2000			
3000			
4000			

Po završetku mjerenja okrenemo ventil V tako da se staklena cijev puni ugljičnim dioksidom. Pipac Pi na boci punjenoj s CO_2 držimo otvoren oko 10 sekundi, a onda ga opet zatvorimo. Kroz to vrijeme cijev se napunila plinom. Sada ponovite mjerenja kao s uzduhom i rezultate unesite u novu tablicu.

U plinovima brzina zvuka zavisi o temperaturi prema relaciji

$$v = v_0 \sqrt{1 + \alpha t} \quad .$$

Ovdje je v_0 brzina zvuka kod $0(^oC)$, dok je v brzina kod $t(^oC)$, a koeficijent ekspanzije plina je $\alpha = \frac{1}{273{,}20(^oC)} = 0{,}00366\ (^oC^{-1})$.

Iz rezultata mjerenja izračunajte srednju vrijednost brzine zvuka. Tako dobijete v kod temperature $t(^oC)$ kod koje ste mjerenja vršili. Izračunajte brzine rasprostiranja zvuka u uzduhu i CO_2 kod temperature $0\ (^oC)$.

Poslije završenih mjerenja isključite pojačalo i RC generator iz gradske mreže i provjerite da su ventil i pipac okrenuti u položaj u kome plin iz boce ne izlazi.

STOJNI VALOVI NA UŽETU

U nategnutom užetu učvršćenom na oba kraja, kada se pobudi na transverzalno titranje, nastaju stojni valovi.

Stojni valovi jesu rezultat superpozicije dvaju valova jednake amplitude i frekvencije. Prvi, u našoj aparaturi polazni val, daje vibrator, a drugi reflektirani, nastaje na učvršćenom kraju niti. Ovi valovi prolaze istovremeno po istom dijelu užeta i međusobno ne djeluju jedan na drugog. Svaki od njih ne mijenja ni smjer niti frekvenciju titranja, kao ni brzinu i dužinu vala. U svakoj točki užeta gibanje je rezultat slaganja titranja obiju valova, a zavisi o njihovoj razlici faza, koja je stalna. Samo uz taj uvjet se dobije vremenski nepromjenljiv raspored amplituda duž užeta. Razlika faza titranja dviju točaka na užetu razmaknutih Δd je $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta d}{\lambda}$. Ovdje je λ valna dužina. Ako promatramo točku koja je za d udaljena od kraja na kom se val reflektira, onda je vremensko kašnjenje polaznog i reflektiranog vala u toj točki $\Delta t = \frac{2d}{v}$. Pri tome je v brzina vala. Kašnjenju odgovara stalni pomak u fazi $\varphi = \omega \cdot \Delta t = \frac{4\pi d}{\lambda}$. Važno je još uočiti što se dogodi na učvršćenom kraju užeta. Polazni val preda svoju veličinu gibanja (impuls) uporištu, a učvršćeni dio užeta (točka B na slici), po zakonu akcije i reakcije dobije veličinu gibanja jednaku prvoj, ali suprotnog smjera. Tako se refleksijom na čvrstom sredstvu stvori reflektirani val, pomaknut u fazi prema polaznom za π.

Uzevši to u obzir, razlika faza titranja polaznog i reflektiranog vala u točki udaljenoj za d od uporišta biti će

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi d}{\lambda} + \pi = \left(\frac{4d}{\lambda} + 1\right)\pi \qquad (1) .$$

Ako je ta razlika faza $2k\pi$ (k su cijeli brojevi) nastupa titranje s dvostrukom amplitudom, dok se amplituda guši za razliku faza $(2k + 1)\pi$ tj. kod slaganja protufaznih titranja. Tako nastaju čvorovi i trbusi koji uzduž užeta ne mijenjaju svoj položaj. Čvorovi nastaju kad je ispunjen uvjet

$$(2k + 1)\pi = \left(\frac{4d}{\lambda} + 1\right)\pi \quad \text{ili za } d = 2k\frac{\lambda}{4} \qquad (2).$$

Prvi je za $k=0$ tj. u polaznoj točki, drugi za $k=1$ na $d_1 = \frac{\lambda}{2}$ itd. Za dobivanje trbuha mora biti ispunjen uvjet

$$2k\pi = \left(\frac{4d}{\lambda} + 1\right) \quad \text{ili za } d = (2k - 1)\frac{\lambda}{4} \qquad (3).$$

Prvi trbuh udaljen je za $d_1 = \frac{\lambda}{4}$ od početne točke ili učvršće-

nja, drugi za k = 2 na $d_2 = 3\frac{\lambda}{4}$ itd.

Za uže učvršćeno na oba kraja čvorovi su na krajevima, a trbusi duž užeta.

Prema tome će zamjetnu amplitudu ili trbuh titranja imati samo takav način titranja kojemu je cjelobrojni mnogokratnik pola valne duljine jednak dužini užeta:

$$d = k\frac{\lambda}{2} \qquad \text{ili} \qquad \lambda_k = \frac{2d}{k} \quad (k = 1,2,3,..) \qquad (4).$$

Brzina vala na užetu ili u bilo kakovom sredstvu je prema osnovnoj formuli nauke o valovima $v = \lambda \cdot \nu$ ili jednaka produktu valne duljine i frekvencije. Za stojni val na užetu ta se brzina može izraziti i ovako

$$v = \frac{2d}{k} \cdot \nu \qquad (5).$$

Na užetu brzinu vala određuje sila napinjanja užeta F i masa μ jednog metra užeta . Ta se brzina određuje iz formule

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (6).$$

i ona je stalna veličina za određenu dužinu užeta napetog silom F.

Ako izjednačimo oba izraza za brzinu rasprostiranja vala /(5) i (6)/, dobiti ćemo

$$\frac{F}{\mu} = \left(\frac{2d}{k} \cdot \nu\right)^2 .$$

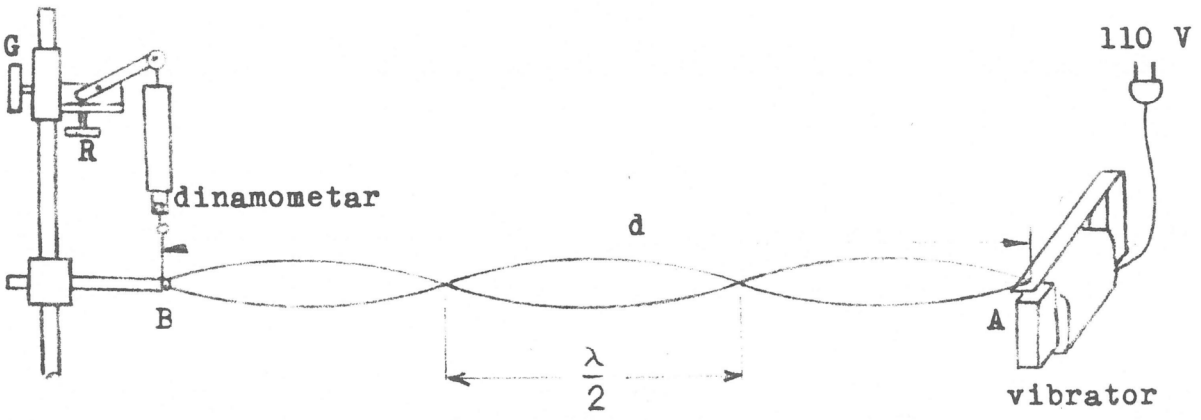
Iz gornjeg dobijemo relaciju

$$F \cdot k^2 = 4 \cdot d^2 \cdot \nu^2 \cdot \mu = \text{stalno} \qquad (7).$$

Ovdje su μ, d, ν stalne veličine za jedno uže i jedan način pobuđivanja užeta.

Ovu posljednju formulu treba verificirati mjerenjem !

Uređaj za mjerenje stojnih valova na užetu prikazan je na slici. Točka A vibratora miče se gore dolje s frekvencijom ν .



Duž užeta putuju na lijevo valovi koji se u točki B odbiju u protivan smjer (reflektiraju). Ako je dužina AB = d baš mnogokratnik polovine dužine vala dakle ako je

$$d = k \frac{\lambda}{2} \quad ,$$

razvije se k trbuha titranja. Da budu trbusi lijepo razvijeni treba polagano mijenjati napetost užeta F , dok se to ne postigne. Načinite slijedeću tabelu.

k	3	4	5	6	7	8	9
F(N)							
$\overline{F}$(N)							
$F \cdot k^2$							

Postupak : Vibrator priključite na napon 110 V izmjenično. Uvrnite vijak R do kraja. Otpuštanjem vijka G napnite uže preko dinamometra tako da postignete devet trbuha titranja. U tom položaju učvrstite vijak G . Za finu regulaciju napetosti služi vijak R. Njegovim izvijanjem namjestite napetost užeta za ostale načine titranja. Očitajte na dinamometru pripadne sile F i unesite u tabelu. Svaki niz mjerenja ponovite tri puta. Izračunajte srednjak sile za svaki k i s tako dobivenom vrijednosti za silu F šesti redak tablice.

Po završenom mjerenju otpustite vijak G i malo spustite dinamometar, da s njega možete skinuti uže. Vijak R izvinite do kraja. Isključite vibrator s izvora za napajanje. Uže skupite i postavite na desnu stranu stola.

NE SKIDAJTE UŽE SA VIBRATORA !

ODREDJIVANJE INDEKSA LOMA POMOĆU PRIVIDNE DUBINE

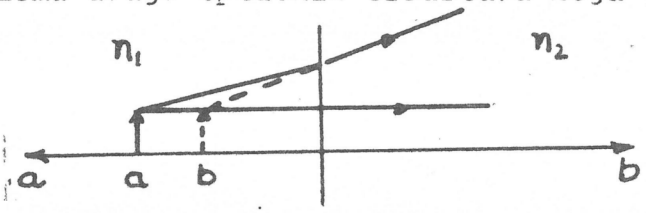
Ova metoda koristi poznatu pojavu da se dubina mirne vode pričinja manjom od stvarne. Općenito umjesto vode, može se koristiti bilo koje optičko sredstvo indeksa loma n, kojega odredjujemo iz omjera stvarne dubine d i prividne dubine d´:

$$n = \frac{d}{d'} \qquad (1)$$

Teoretsku podlogu ove formule nalazimo u stigmatizmu ravnog dioptra u okvirima Gaussovih aproksimacija. Za ravni dioptar vrijedi jednadžba konjugacije:

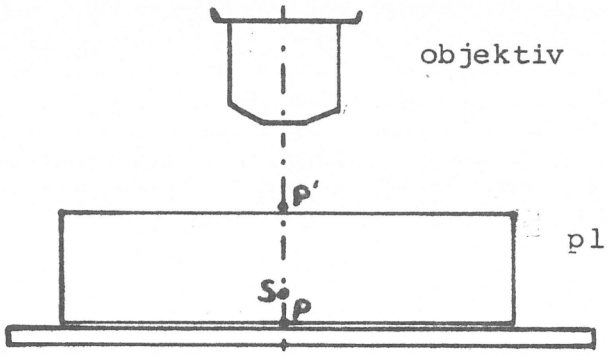
$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = 0 \qquad (2)$$

gdje je a koordinata predmeta, b koordinata slike te n_1 i n_2 indeksi loma dvaju optičkih sredstava koja graniće ravninom:



Vidi se da realni predmet na mjestu a>o daje virtuelnu sliku na mjestu $b=-n_2/n_1 a > o$. Ako stavimo d=a, $d'=b$, $n_2 = 1$ (zrak) i $n_1=n$, iz formule (2) slijedi formula (1).

METODA MJERENJA. Plan-paralelnu ploču nepoznatog indeksa loma koristimo kao optičko sredstvo koje od predmeta na donjoj plohi ploče stvara prividno podignutu sliku kada se taj predmet promatra odozgo kroz ploču. Promatranje se vrši uz pomoć mikroskopa na kojem se precizno očitava njegov vertikalni položaj.



P - predmet (zrnce praška)

S - slika

P´- predmet na gornjoj površini

Ako smo fokusirali mikroskop na predmet P i zatim ga prekrili planparalelnom pločom, morat ćemo podići mikroskop za dužinu PS da bismo doveli sliku predmeta ponovno u fokus. Treće fokusiranje na predmet P´ omogućava da se nadje prava dubina d=P´P, i prividna dubina d´=P´S. Ako označimo očitanja spomenutih triju položaja mikroskopa sa p_1, p_2 p_3 tada je:

$$n = \frac{d}{d'} = \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_3} \qquad (3)$$

POSTUPAK PRI MJERENJU.

1. korak: Na podložnu staklenu pločicu posuti manju količinu raspoloživog praška. Otpuhnuti prašak s pločice tako da ostanu tek najsitnija zrnca u fino raspršenom sloju. Postaviti i učvrstiti pločicu na platformu mikroskopa. Fokusirati mikroskop na zrnca praška. Uočiti neko sitno zrnce oko sredine vidnog polja te

izvesti što točnije fokusiranje. Očitati položaj mikroskopa p_1 na mikrometru kako je to opisamo u točki 4. Upamtiti zrnce na kojemu je izvršeno fokusiranje i više ne pomicati podložnu pločicu niti mikroskop.

2. korak: Očistiti planparalelnu ploču, posuti na gornju površinu prašak i otpuhnuti ga. Oprezno položiti ploču na podložnu pločicu ispod objektiva tako da se pločica ne pomakne i raspored zrnaca praška ne poremeti. Polaganim podizanjem mikroskopa postići oštrinu slike koju smo promatrali u koraku 1. Uočiti zapamćeno sitno zrnce praška i na njemu izvršiti fino fokusiranje. Očitati na mikrometru položaj p_2.

3. korak: Polagano podizati mikroskop dok se ne dobije oštra slika praška na gornjoj površini planparalelne ploče. Na nekom sitnom zrncu u blizini središta polja izvršiti fino fokusiranje. Očitati na mikrometru položaj p_3.

FOKUSIRANJE MIKROSKOPA I OČITAVANJE POLOŽAJA.

Na mikroskopu postoje dva stupnja fokusiranja: grubo i fino. Polaganim zakretanjem vijka za grubo fokusiranje moguće je dobiti već sasvim oštru sliku. Zakretanjem vijska za fino fokusiranje lako se postiže najfinije fokusiranje po dubini predmeta. Kako je nama potrebno što točnije očitavanje vertikalnog položaja mikroskopa to ćemo predmet odabrati što sitniji - najsitnije zrnce praška. Uz pomoć vijska za fino fokusiranje ustanovit ćemo, da je osštrinu slike sitnog predmeta moguće postići u jednom cijelom području zakretanja vijka za fino fokusiranje (radi dubine polja mikroskopa). Neka je p' očitanje na mikrometru na donjoj granici oštrine slike a p'' očitanje na gornjoj granici oštrine slike. Tada kao najpovoljniju vrijednost očitanja položaja mikroskopa uzimamo srednju vrijednost:

$$p = \frac{p' + p''}{2} \qquad (4)$$

ZADATAK. Odrediti indeks loma raspoloživih pločica. Izvršiti najmanje tri mjerenja za svaku pločicu. Rezultate mjerenja i proračuna prikazati prema priloženoj tablici:

i	p_{1i}	p_{2i}	p_{3i}	n_i	Δn_i
1					
2					
3					
4					
5					
	oznaka za pločicu			$\bar{n}$	Δn

$$n_i = \frac{p_{1i} - p_{3i}}{p_{2i} - p_{3i}} \qquad \bar{n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i$$

$$\Delta n_i = n_i - \bar{n} \qquad \Delta n = \left| \frac{\Sigma (\Delta n_i)^2}{N} \right|^{\frac{1}{2}}$$

N = broj mjerenja

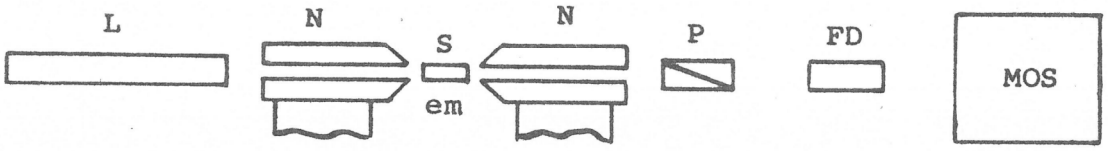
MJERENJE VERDETOVE KONSTANTE

U smjeru jakog magnetskog polja dolazi do zakretanja ravnine titranja linearno polariziranog svjetla kada ono prolazi kroz izotropno sredstvo smješteno u tom polju. Ova je pojava poznata kao Faradayev efekt. Pri tome vrijedi zakon za kut zakreta ravnine titranja polariziranog svjetla

$$\alpha = V \ell H , \qquad (1)$$

gdje je V Verdetova konstanta, ℓ duljina puta polariziranog svjetla kroz sredstvo i H je jakost magnetskog polja.

MJERNI UREDJAJ. Na slici je prikazan mjerni uredjaj. Izvor svjetlosti je svjetlost valne duljine 632,8 nm iz He-Ne lasera L koja je linearno polarizirana u omjeru 1 : 1000. Svjetlo prolazi kroz šupljine NN u nastavcima elektromagneta EM. Izmedju nastavaka, u polju je smješten uzorak S kojem se odredjuje Verdetova konstanta. Zatim svjetlo pada na Nicolovu prizmu P, analizator. Zračenje koje propusti prizma dolazi na fotodiodu FD mjerača optičke snage MOS. Snaga se čita na μW-metru do maksimalne točnosti 0,02 μW.



Općenito ravnina titranja polariziranog svjetla iz izvora i ravnina titranja iz prizme P zatvaraju kut ϕ, pa snaga zavisi o tom kutu prema zakonu

$$W = W_o \cos^2\phi , \qquad (2)$$

gdje je W_o maksimalna snaga.

Pri jakosti magnetskog polja nula odredjuje se iz očitane snage kut ϕ_1, a pri jakosti različitoj od nule odredjuje se kut ϕ_2. Iz razlike kutova nalazi se kut zakreta ravnine titranja polariziranog svjetla nastalog zbog prolaska svjetla kroz uzorak, tj.

$$\alpha = |\phi_1 - \phi_2| . \qquad (3)$$

Nastavci elektromagneta postavljaju se u optičku os uredjaja tako da snop laserske svjetlosti nesmetano pada na fotodiodu. Postavljanjem uzorka na njegovo mjesto, bez prisutnosti magnetskog

polja, namještanjem Nicolove prizme odredjuje se maksimalna snaga W_o . (Zakretanjem prizme P postizava se maksimalna optička snaga pri čemu je $\phi = 0^o$.) Kod mjerenja malih zakreta $\alpha < 1^o$, zgodno namjestiti prizmu u položaj za koji je $\phi_1 \neq 0^o$. Tako će se odrediti $|\phi_1 - \phi_2|$ pri većoj očitanoj razlici u snazi, izračunatoj prema izrazu (2).

Prema izrazu (1) iz poznatih veličina odredjuje se Verdetova konstanta, koja zavisi o indeksu loma uzorka i valnoj duljini kojom je uzorak prosvijetljen.

Indeks loma odredjen je pomoću Abbeovog refraktometra za žutu natrijevu liniju n_D (λ = 589,3 nm). Jakost magnetskog polja odredjena je u ranijim mjerenjima Hallovom sondom.

MJERENJE. Zakretanjem Nicolove prizme odredite W_o . Zatim oprezним zakretanjem Nicolove prizme odredite snagu u području od oko 50 μW. To je snaga oznake W_1 kojom nalazite kut ϕ_1 , tj.:

$$W_1 = W_o \cos^2 \phi_1 .$$

Sklopkom na ispravljaču uspostavite magnetsko polje pri jakosti struje od 10 A i očitajte snagu W_2 , te odredite kut ϕ_2 . Nadjite kut zakreta α . Ponovite mjerenje s jakosti struje 12 A i nadjite ponovno odgovarajući kut zakreta.

Veza izmedju jakosti struje u zavojnici elektromagneta i magnetske indukcije prikazana je na tablici.

I/A	B/mT	I/A	B/mT
0	0	9	155
5	90	10	170
6	103	11	185
7	120	12	195
8	140	13	205

Indeks loma uzorka n_D = 1,6202, a duljina uzorka je ℓ = 2 cm. U izračunavanju Verdetove konstante koristite :

$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs $A^{-1}m^{-1}$, a kut izrazite u rad. (Mjera za Verdetovu konstantu je rad A^{-1}). Nadjite srednju vrijednost konstante. Ona se odnosi na valnu duljinu svjetlosti od 632,8 nm .

LAMBERTOV ZAKON

Ispitivat će se slabljenje snage laserskog snopa zbog njegovog raspršenja u monodisperznim lateksima uz zanemarenje apsorpcije. Teorijski se ta pojava obradjuje kao raspršenje svjetlosti na sferama. Prosječni promjeri dispergiranih čestica (polimera) u vodi usporedljivi su sa valnom duljinom zračenja, pa se govori o Mie-vom raspršenju.

Mjerit će se snaga transmitiranog svjetla centralnog dijela snopa. Na djeliću puta dx kojim prolazi elektromagnetski val, snaga vala P promijeni se za

$$dP = - a P dx .$$

Na konačnom putu duljine x vrijedi Lambertov zakon:

$$\ln \frac{P_o}{P} = a x \quad ,$$

gdje je u napisanim izrazima a koeficijent slabljenja ili zamućenja.

Pomoću Mieve jednadžbe moguće je izračunati specifično zamućenje ispitivanog sustava, a/c , gdje je c ukupna masa sfera u 100 g sustava koji raspršuje. Iz literature (W.Heller, W.J.Pangonis, J.Ch.Ph., 26,3,498,1957.) je poznat račun specifičnog zamućenja $(a/c)_1$ (Tablica 1) na sfernim česticama za svjetlo valne duljine 409,357 nm uz $\rho_2 = \rho_{12} = 1 \text{ kg m}^{-3}$, gdje je ρ_2 gustoća sfera, a ρ_{12} ukupna gustoća sustava. Specifično zamućenje pod drugim uvjetima (ρ_2 , ρ_{12}) odredjeno je sa

$$a/c = (a/c)_1 \, (\rho_{12}/\rho_2) \, (\lambda_o/\lambda_{o2}) \quad ,$$

gdje je λ_o primarna valna duljina, a $\lambda_{o2} = 546{,}073$ nm, tj. zelena Hg linija u vakuumu. Parametri u Tablici 1 su relativni promjer čestica $\alpha = \pi \bar{D}/\lambda$, gdje je $\bar{D}$ srednji promjer čestice, a λ valna duljina svjetlosti u sredstvu koje česticu okružuje, tj. $\lambda = \lambda_o/n_1$ ($n_{1(25^oC)} = 1{,}334$) i $m = n_2/n_1$, gdje je n_2 indeks loma lateksa i iznosi: $n_2 = 1{,}59$.

MJERNI UREDJAJ. Izvor svjetlosti je He-Ne laser HNA 50(C.Zeiss-Jena) snage 4 mW monokromatskog zračenja duljine $\lambda_o = 632{,}8$ nm. Uzorak je smješten u kivetu sa stjenkama od tankog optičkog stakla. Debljina sloja lateksa je 2,5 cm, 6 cm i 8 cm. Svjetlo iz izvora prolazi kroz uzorak. U smjeru upadne svjetlosti na udaljenosti 10 cm od izvora mjeri se snaga centralnog dijela snopa na izlazu iz kivete

TABLICA 1. Specifično zamućenje $(a/c)_1$ u cm^{-1} (računato za λ = 409,357 nm)

a/m	1,15	1,20
0,8	12,468	22,197
1,0	21,853	39,203
3,4	161,81	289,64
3,6	173,30	308,39
4,8	233,07	395,49
5,0	241,74	407,89

pomoću mjerača optičke snage LM 1 (C.Zeiss-Jena). Električki signal sa fotoelementa čita se na skali galvanometra u mW na točnost od 0,01 mW. Uredjaj je baždaren na valnu duljinu upotrebljene monokromatske svjetlosti.

PRIPREMA UZORKA. Uzorak 1. U kivetu se ulije pomoću pipete 100 ml destilirane vode. U vodu se dodaje malom pipetom po dvije kapi uzorka do ukupno 20 kapi i svaki puta dobro izmješa staklenim štapićem. Pri tome se uzorak dodaje u porcijama od 0,1 mg, pa se mijenja koncentracija.

Uzorak 2. unaprijed je priredjen u odredjenoj koncentraciji.

MJERENJE. Uzorak 1. Odredite snagu P_o kada je u kiveti čista voda, a zatim povećanjem koncentracije c (c = mg uzorka 1/100 ml H_2O) naći pripadne snage P za debljine sloja x=2,5 cm i x=6 cm.

Rezultate grafički prikažite na lin-log papiru i provjerite zakon $P = P_o e^{-kc}$.

Parametar u grafičkom prikazu je debljina sloja. Sa slike naći vrijednost koeficijenta k. Odredite omjer d = k/x i provjerite zakon: $P = P_o e^{-dc\,x}$, gdje je dc koeficijent slabljenja a.

Upotrebom svjetlosnog mikroskopa pogledajte razrijedjeni uzorak 1. Opišite sliku.

Uzorak 2. je lateks sa česticama poznatog srednjeg promjera i koncentracije. Uz sve tri debljine sloja uzorka odredite koeficijent slabljenja i specifično zamućenje. Izračunajte iz Mieve jednadžbe pomoću Tablice 1 i formule za a/c specifično zamućenje i usporedite ga sa izmjerenom vrijednosti.

LITERATURA

1. The International Practical Temperature Scale of 1968, Prijevod francuskog originalnog teksta iz Comptes rendus de la Trezième CGPM 1967, Metrologia 5, 35-44, 1969.
2. R.E.Bedford and H.Preston-Thomas, Derivation of the CCT-68 Reference Function of the International Practical Temperature Scale of 1968, Metrologia 5, 45-47, 1969.
3. V.Bego, Mjerenja u elektrotehnici, Drugo izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1971.
4. T.Bosanac, Teoretska elektrotehnika I, Tehnička knjiga, Zagreb 1973.
5. R.J.Bošković, Theoria Philosophiae Naturalis, Teorija Prirodne Filozofije, Venetiis 1763, Faksimile reprint s prijevodom na hrvatski, Liber, Zagreb 1974.
6. F.Bošnjaković, Technische Thermodynamik I, Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1967.
7. F.Bošnjaković, Technische Thermodynamik II, Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1965.
8. M.Brezinšćak, Mjerenje i računanje u tehnici i znanosti, Tehnička knjiga, Zagreb 1971.
9. E.Buckingham, On physically similar systems: illustrations of the use of dimensional equations, Phys. Rev.,4, 345, 1914.
10. S.Carnot, Réflexions sur la Puissance Motrice dy Feu, Paris 1824. Prijevod na engleski, Reflections on the Motive Power of Fire, Dover Publications, New York 1960.
11. E.Engelhard und R.Vieweg, Über die neue Definition des Meters auf Grund einer Lichtwellenlänge, ZS.f.angew.Phys. 13, 580-596, 1961.
12. J.D.Fast, Entropy, Mc Graw-Hill, New York 1962.
13. S.Hondl, Fizika, Treće izdanje, Naklada školskih knjiga, Zagreb 1940.
14. F. Kohlrausch, Praktische Physik, Bd.I und Bd. II, B.G.Teubner, Leipzig 1955.
15. J.Lončar, Uvod u električna mjerenja, Četvrto izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1965.
16. V.Lopašić, Međunarodna temperaturna skala, Automatizacija 199-203, Tehnička knjiga, Zagreb 1965.

17. V.Lopašić, Predavanja iz fizike I, Skripta, Sveučilište u Zagrebu 1966.
18. V.Lopašić, Predavanja iz fizike II, Skripta, Sveučilište u Zagrebu 1959.
19. V.Lopašić, Predavanja iz fizike III, Skripta, Sveučilište u Zagrebu 1968.
20. B.Marković, Mjerenja i mjere, Almanah Bošković, 239-258 , Zagreb 1950.
21. J.C.Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Third Edition 1891, Reprint Dover Publications, New York 1954.
22. W.D.Niven (Editor), The Scientific Papers of James Clark Maxwell, Dover Publications, New York 1965.
23. R.C.Pankhurst, Dimensional Analysis and Scale Factors, Chapman and Hall, London 1964.
24. L.Randić, Definicija sekunde, Astronomski zavod AGG fakulteta Sveučilišta, Zagreb 1958.
25. J.Terrien, News from the Bureau International des Poids et Mesures, Metrologia 8, 32-36, 1972.
26. J.Topping, Errors of Observation and Their Treatment, Third Edition, Chapman and Hall, London 1965.
27. J.Wallot, Zur Theorie der Dimensionen, ZS.f. Phys, Bd. 10, 329-348, 1922.
28. J.Wallot, Dimensionen, Einheiten, Mass-systeme, Handbuch der Physik,(Red.K.Scheel), Julius Springer, Berlin 1926.
29. L.P.Williams, Michael Faraday, Chapman and Hall, London 1965.
30. B.Jemrić, Priručnik električne rasvjete, Školska knjiga, Zagreb 1970.
31. Handbuch für Beleuchtung, Verlag W.Girardet, Essen, 1975.
32. V.Lopašić, V.Henč-Bartolić, Predavanja iz fizike IV, Skripta Sveučilište u Zagrebu, 1976.
33. V.Lopašić, V.Henč-Bartolić, V.Kos, Predavanja iz fizike I dio, Skripta, Sveučilište u Zagrebu, 1981.
34. Handbook of Chemistry and Physics,58th Edition (1977-1978) CRC-Press, F-242.