

Ing. MARIJAN BREZINŠČAK

MJERE I SISTEMI JEDINICA

Tehnička knjiga
Zagreb 1961

P R E D G O V O R

Minulo desetljeće važan je medaš na polju metrološke znanosti: Međunarodni (Giorgijev) mjerni sistem koherentnih jedinica, a zajedno s njime i veličinske jednadžbe, započinju svoj pohod u sve grane fizikalne i tehničke znanosti! Kako fizika, tako i tehnika izrazito su eksperimentalne nauke. Dok eksperiment ne ovjeri teoriju, ona ostaje samo puka teorija. No ni teoretska ni praktična strana ne mogu mimoći konkretan rad s jedinicama, praktično računanje s jedinicama veličina koje nastupaju u jednadžbama. Pri tom ljudi neupućeni u metrologiju često nailaze na teškoće, pogotovo u starijoj literaturi; ponegdje su ove poteškoće upravo nepremostive i vode do grubih grešaka u konačnim rezultatima fizičara, a time i u konstrukcijama tehničara.

Namjera je Brezinščakova djela da pomogne pri svladavanju ovih teškoća. Valja naglasiti da ono u najvećoj mjeri postiže tu svoju namjeru. Zato ovo djelo predstavlja neprocjenjivu uslugu svim našim praktičarima, fizičarima, tehničarima, a isto tako i učiteljima raznih stručnih, srednjih, visokih i najviših škola. Ono izbjegava nepotrebne posve teoretske metrološke zahvate, ali zato problematiku obrađuje neposredno; tome izvanredno mnogo doprinosi niz probranih konkretnih računskih primjera u svim granama. Pri tom u nizu originalnih zamisli ponegdje postiže upravo pionirsku vrijednost, osobito u termodinamici (jedinice stefan, mold itd.).

Naročita je odlika djela da u njemu svako poglavlje predstavlja zaokruženu cjelinu. Tako će netko, koga na primjer zanima samo mehanika, moći mirno propustiti sve ostalo, čak i uvodni dio A, pa ipak će saznati sve što mu je potrebno.

Niz praktičnih tablica u svakoj od razmatranih grana pomoći će praktičaru da se snađe u metrološkom kaosu na koji se nailazi svagdje u naučnoj literaturi, osobito stranoj.

Ovim su djelom autor i izdavač poklonili dragocjeni prilog čitavoj našoj mladoj fizikalnoj i tehničkoj znanosti.

*Dr. ing. Francè Avčin,
sveuč. profesor, Ljubljana*

Maj 1960.

S A D R Ź A J

Stranica

A. Osnovi nauke o mjerama i sistemima jedinica

1. Značenje i neophodnost mjerenja i mjera	13
2. Iz povijesti mjera kulturnih naroda	14
3. Temelji moderne nauke o mjerama	19
3.1. Postanak metarskog sistema jedinica	19
3.1.1. Jedinica duljine metar	21
3.1.2. Jedinica mase kilogram	22
3.1.3. Jedinica vremena sekunda	23
3.2. Ustrojstvo međunarodne organizacije za mjere	24
3.3. Nacionalne metrološke ustanove	25
4. Prirodne pramjere	26
4.1. Prirodna pramjera duljine (valni metar)	27
4.2. Prirodna pramjera mase	28
4.3. Prirodna pramjera vremena	29
5. Veličine, jedinice, brožani iznosi i jednadžbe	29
5.1. Iskustvo i fizikalne veličine	29
5.2. Veličine, jedinice i brožani iznosi	31
5.3. Veličinske i brožane jednadžbe	35
5.4. Prijelaz od brožanih na veličinske jednadžbe	39
5.5. Prilagođene veličinske jednadžbe	43
6. Primjena veličinskog računa	44
6.1. Plinska konstanta nepoznatog plina	44
6.2. Veličine u logaritamskim odnosima	47
6.3. Prikazivanje veličina u dijagramima	51
6.4. Tabelačni prikazi vrijednosti veličina	55
6.5. Pisanje i tiskanje veličina, jedinica i brojeva	57
7. Sistemi jedinica, pramjere i pramjerila	58
7.1. Sistemi jedinica	58
7.2. Jedinice, pramjere i pramjerila	63
8. Dimenzije i sistemi dimenzija	65

B. Mjerni sistemi mehanike

1. Veličine geometrije i mehanike	68
1.1. Duljina	68
1.2. Kut	68
1.3. Vrijeme	69
1.4. Brzina i ubrzanje	69
1.5. Brzina vrtnje	70
1.6. Sila i masa	71
1.7. Težina i ubrzanje sile teže	75
1.8. Gustoća i specifična težina	76
1.9. Protoka	77
1.10. Pritisak ili tlak	78
1.11. Viskoznost	80
1.12. Ostale veličine mehanike	80

2. Građenje sistema jedinica	82
3. Međunarodni sistem jedinica mehanike	84
3.1. Osnovne jedinice	84
3.2. Izvedene jedinice	84
3.3. Decimalni dijelovi i višekratnici jedinica	87
4. Tehnički sistem jedinica mehanike	90
4.1. Osnovne jedinice Tehničkog sistema	91
4.2. Jedinica sile kilopond	92
4.3. Ostale jedinice Tehničkog sistema	94
5. Najjednostavniji način prijelaza od Tehničkog na Međunarodni sistem jedinica mehanike	94
5.1. Težina i masa	94
5.2. Specifična težina i gustoća	96
5.3. Ostale bitne promjene	96
6. Fizikalni ili CGS sistem jedinica mehanike	98
6.1. Osnovne i izvedene CGS jedinice	98
6.2. Nekoherentne jedinice kuta i vremena	99
7. Različite jedinice metarskih sistema jedinica mehanike	100
7.1. Jedinica volumena litra	100
7.2. Jedinica gustoće Baumé	101
7.3. Različite jedinice pritiska	103
7.4. Jedinica snage »konjska snaga«	106
7.5. Različite jedinice energije	106
7.6. Različite jedinice viskoznosti	107
8. Iz povijesti engleskih i američkih mjera	108
9. Razlika između engleskih i američkih jedinica	109
10. Koherentni angloamerički sistem jedinica mehanike	110
11. Različite angloameričke jedinice geometrije i mehanike	112
11.1. Jedinice duljine	112
11.2. Jedinice površine	112
11.3. Jedinice volumena	115
11.4. Jedinice protoke	117
11.5. Jedinice mase	117
11.6. Jedinice gustoće	120
11.7. Jedinice sile	121
11.8. Jedinice pritiska	121
11.9. Jedinice viskoznosti	123
11.10. Jedinice energije i rada	123
11.11. Jedinice snage	125
12. Sumrak nemetarskih sistema jedinica	126
13. Veličinske i brojčane jednadžbe u mehanici	128
13.1. Općenito o veličinskim i brojčanim jednadžbama	128
13.2. Jednoliko pravocrtno gibanje	129
13.3. Brzina vrtnje	131
13.4. Težina bakrene žice	133
13.5. Moment rotirajućih masa	135
13.6. Gubitak pritiska u cjevovodu	137
14. Sistemi dimenzija mehanike	139

C. Mjerni sistemi akustike

1. Objektivna akustika	143
2. Fonometrija	143
3. Jedinica razine glasnoće zvuka fon	145
4. Stari fon i Barkhausenov fon	147
5. Jedinica decibel	147
6. Jedinica neper	149
7. Apsolutna razina snage	149
8. Dijagram za određivanje razine	150

D. Mjerni sistemi nauke o toplini

1. Temperatura i jedinice temperature	153
1.1. Temperatura kao četvrta osnovna veličina	153
1.2. Jedinice temperature	158
1.3. Međunarodna ljestvica temperature	162
1.4. Termodinamička ljestvica temperature	164
2. Molekularne i molne veličine i jedinice	165
2.1. Količina tvari	165
2.2. Opća plinska konstanta	167
2.3. Molekularna masa	169
2.4. Molna masa	170
2.5. Molna toplina	172
2.6. Molni volumen i normni kubni metar	173
3. Ostale veličine nauke o toplini	173
3.1. Kilokalorija. Količina topline. Specifična toplina	173
3.2. Ekvivalenti topline	175
3.3. Preostale veličine nauke o toplini	177
4. Koherentni sistem jedinica nauke o toplini	178
5. Tehnički sistem jedinica termodinamike	182
6. Angloamerički tehnički sistem jedinica termodinamike	186
7. Primjena Međunarodnog sistema jedinica u termodinamici	187
7.1. Međunarodni sistem jedinica	187
7.2. Način uvođenja Međunarodnog sistema jedinica	189
7.3. Usporedbeni primjer upotrebe Međunarodnog sistema jedinica	191
8. Veličinske i brojčane jednadžbe nauke o toplini	193
8.1. Općenito o veličinskim i brojčanim jednadžbama	193
8.2. Brzina istjecanja plinova i para	193
8.3. Specifični potrošak pare i topline	195
9. Temperatura kao zavisna veličina i posljedice takvog shvaćanja	197
9.1. Kinetička predodžba topline	197
9.2. Kinetička teorija topline i nepovrativost	199
9.3. Temperatura kao zavisna veličina	200
9.4. Izvedena jedinica apsolutne temperature	202
9.5. Specifične topline i njihove jedinice	204
9.6. Entropija	207
9.7. Posljedice uvođenja $\Theta = T$ u fenomenološku termodinamiku	208

E. Mjerni sistemi elektromagnetizma

1. Veličine elektromagnetskog polja	212
1.1. Pregled elektromagnetskih veličina	212
1.2. Električna polarizacija i električna susceptibilnost	215
1.3. Magnetska polarizacija i magnetska susceptibilnost	220
1.4. Brzina elektromagnetskog polja. Poyntingov vektor	224
2. Međunarodni sistem jedinica	229
2.1. Značajke Međunarodnog sistema jedinica	229
2.2. Definicije jedinica Međunarodnog sistema jedinica	234
2.3. Pramjerilo ampera	235
2.4. Pramjerila ohma	242
2.5. Posljedice uvođenja Međunarodnog sistema jedinica	244
3. Fizikalni sistemi jedinica elektromagnetizma	248
3.1. Elektrostatski (CGSE) sistem jedinica	248
3.2. Magnetostatski (CGSM) sistem jedinica	258
3.3. Gaussov mješoviti sistem jedinica	263
3.4. Nepotpuni CGS sistemi jedinica elektromagnetizma	270
3.5. Postanak CGSM i CGSE sistema jedinica	273
4. Tehnički sistem jedinica elektromagnetizma	276
5. Iz povijesti mjernih sistema elektromagnetizma	279
6. Racionalizacija	286

7. Veličinske i brojčane jednadžbe elektromagnetizma	291
7.1. Otpor isijavanja antene	292
7.2. Magnetsko polje ravnog vodiča	294
7.3. Privlačna sila magneta	296
7.4. Jednadžba Zeemanova efekta	298
8. Sistemi dimenzija elektromagnetizma	301
Upotrebljena literatura	304

POPIS TABLICA

A. Osnovi nauke o mjerama i sistemima jedinica

Tablica A.1: Vrijednosti specifične topline c_p pri stalnom tlaku različitih tvari pri temperaturi 20 °C.	55
Tablica A.2: Vrijednost dinamičke viskoznosti V raznih kapljevinu pri temperaturi 0 °C.	56

B. Mjerni sistemi mehanike

Tablica B.1: Najvažnije veličine mehanike, njihove oznake, jednadžbe u kojima dolaze i Međunarodne jedinice kojima se mjere	81
Tablica B.2: Odnosi među nekim mehaničkim jedinicama Međunarodnog, Tehničkog i CGS sistema jedinica	86
Tablica B.3: Decimalni dijelovi i višekratnici (prefiksi)	88
Tablica B.4: Odnosi među jedinicama kuta	99
Tablica B.5: Odnosi među jedinicama vremena	100
Tablica B.6: Sistem koherentnih angloameričkih jedinica mehanike	111
Tablica B.7: Različite jedinice duljine i njihove vrijednosti u metrima	113
Tablica B.8: Jedinice površine i njihove vrijednosti u kvadratnim metrima	114
Tablica B.9: Jedinice volumena i njihove vrijednosti u kubnim metrima	116
Tablica B.10: Različite jedinice mase i njihove vrijednosti u kilogramima	118
Tablica B.11: Jedinice mase; 1 kg predstavlja ovaj iznos drugih jedinica mase	119
Tablica B.12: Različite jedinice gustoće i njihove vrijednosti u kg/m ³	120
Tablica B.13: Različite jedinice sile i njihove vrijednosti u newtonima	121
Tablica B.14: Vrijednosti kinematičke viskoznosti u različitim jedinicama pri temperaturi $\vartheta = 25$ °C.	124
Tablica B.15: Jedinice snage i njihove vrijednosti u wattima	126
Tablica B.16: Nekoliko sistema dimenzija mehanike	141

C. Mjerni sistemi akustike

Tablica C.1: Dodaci na L kad su omjeri I/I_0 , U/U_0 i P/P_0 veći od 1...10	51
--	----

D. Mjerni sistemi nauke o toplini

Tablica D.1: Kontrolne temperature po Međunarodnoj temperaturnoj ljestvici ..	163
Tablica D.2: Toplinske veličine, njihove oznake, jednadžbe u kojima dolaze te jedinice Međunarodnog sistema kojima se mjere	179
Tablica D.3: Dimenzije i jedinice mehaničkih i toplinskih veličina u koherentnom msKkcal i u Međunarodnom sistemu jedinica	181
Tablica D.4: Jedinice Tehničkog sistema nauke o toplini	183
Tablica D.5: Molne specifične topline triju vrsta plinova	206
Tablica D.6: Relativne temperature u staroj i predloženoj jedinici stefan	209
Tablica D.7: Specifične topline nekih plinova pri temperaturi $\vartheta = 20$ K i pritisku 1 kp/cm ²	210

E. Mjerni sistemi elektromagnetizma

Tablica E.1:	Elektromagnetske veličine, njihove oznake, veličinske jednadžbe u kojima se pojavljuju i jedinice Međunarodnog sistema kojima se mjere	213
Tablica E.2:	Faktor depolarizacije N rotacionog elipsoida	219
Tablica E.3:	Jedinice nekih veličina u elektrostatskom (CGSE) i magnetostatskom (CGSM) sistemu jedinica	257
Tablica E.4:	Usporedba nekih veličinskih jednadžbi s broječanim koje su prilagođene jedinicama Gaussova, CGSM ili CGSE sistema	269
Tablica E.5:	Jedinice nekih veličina u nepotpunom elektrostatskom i magnetostatskom sistemu jedinica	272
Tablica E.6:	Nekoliko sistema dimenzija elektromagnetizma	302

PRILOŽENE TABLICE

Tablica I:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama duljine	312
Tablica II:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama površine	312
Tablica III:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama volumena	313
Tablica IV:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama protoke	313
Tablica V:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama mase	314
Tablica VI:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama sile	314
Tablica VII:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama pritiska	315
Tablica VIII:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama snage	315
Tablica IX:	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama energije	316
Tablica X:	Češće upotrebljavane veličinske i brojčane jednadžbe, te odnosi između jedinica CGSE, CGSM i Međunarodnog sistema jedinica	317
Tablica XI:	Najvažnije prirodne konstante	319

A. OSNOVI NAUKE O MJERAMA I SISTEMIMA JEDINICA

1. ZNAČENJE I NEOPHODNOST MJERENJA I MJERA

»Izmjeriti sve što se može mjeriti i pokušati učiniti mjerljivim ono, što još nije izmjereno« bilo je geslo Galilejevo još u doba kad je optimalni oblik proizvodnje bio manufaktura, a putnički se promet obavljao dilažansama. Danas, u doba radara, atomskih podmornica i umjetnih planeta, ovo je geslo postalo suvišno, jer je stvarno već ušlo u svaku poru našeg dnevnog života. Ni najnevažniji odio neke tvornice ne može danas uspješno raditi a da ne mjeri, svaka radionica može prosperirati samo onda kada radnici znaju mjeriti. Čitav naš život odvija se u neprestanom mjerenju. Novac je jedna od mjera rada i vrijednosti proizvoda, ručni sat je mjerna sprava koja koordinira našu ubranu životnu trku, trgovačka vaga sudac je između potrošača i proizvođača, proporcije su mjerila ljepote, a omjeri frekvencija uvjetuju harmoniju glazbe.

Stoga je velik dio života svakog čovjeka posvećen mjerenju, samo on možda to tako ne naziva, jer kupovanje u trgovinama automatski u sebi uključuje mjerenje. Bez mjera i mjerenja ne može se zamisliti ni dosadašnji ni budući napredak čovječanstva.

Pojam mjerenja i mjera star je isto koliko i čovječanstvo. I najprimitivniji narodi poznaju te pojmove, a svi jezici svijeta imaju u svom rječniku nekoliko zajedničkih termina, na primjer udaljenost, vrijeme, volumen itd.

Tri su komponente djelatnosti čovjekove koje mu omogućuju život i napredak. Možemo ih izraziti u obliku simboličke jednadžbe:

$$\text{tehnika} = \text{znanost} + \text{gospodarstvo.}$$

Temelj svake od njih je mjerenje. Znanost mjeri prirodne i umjetno izazvane pojave, gospodarstvo mjeri vrijednost poduhvata novcem ili ljudskim radom, a tehnika mora mjeriti jedno i drugo.

Danas smo navikli da u trgovini, industriji i znanstvenim institutima upotrebljavamo propisane mjere, a posebni državni organi brinu se da se primjena mjera i mjernih metoda ispravno provodi, da su mjere ispravne, a mjerni uređaji precizni do zahtijevane tačnosti. Naglo se udaljujemo od vremena čiste empirije; to doba je prošlo. Razvoj sistema mjera i mjernih uređaja ide ukorak s napretkom tehnike i znanosti.

Tako je i nastala posebna grana znanosti, metrologija, koja se bavi mjerama, mjernim metodama, mjernim uređajima i primjenom sviju njih. Napretku metrologije služe i posebne međunarodne organizacije, laboratoriji i konferencije. Taj

međunarodni karakter metrologije uzrokuje današnja međunarodna povezanost industrijske proizvodnje, ekonomskih utjecaja i naučnih istraživanja. Sve ih međusobno povezuje brzina i kapacitet prometa i komunikacija.

Mjerenje omogućuje standardizaciju i unifikaciju proizvoda i alata te specijalizaciju ljudi. Posljedica je toga: više dobara uz manje uložena rada.

Danas mjerna znanost ima tri glavna pravca djelovanja. U jednom smjeru djeluje razvijanje mjerenja fizikalnih veličina i izrada prikladnih uređaja za provođenje takvih radova. Drugom smjeru služi mjerenje samo kao alat kojim prema mjernim rezultatima zaključuje o zakonitosti ili vjerojatnosti prirodnih i umjetno izazvanih procesa. Treći je pravac također primjena mjera i mjerenja i to u tehnici i gospodarstvu, gdje je mjerenje jedan od sinonima za pouzdanost i ekonomičnost proizvodnje.

2. IZ POVIJESTI MJERA KULTURNIH NARODA

Mjere današnjih primitivnih plemena pokazuju nam kakav je vjerojatno bio početak današnje nauke o mjerama i mjerenju. Oskudna zamjena dobara među najprimitivnijim plemenima centralne Afrike iziskivala je još do nedavno samo polovinu »srednje velike« ljuške kokosova oraha kao jedinicu volumena. Tom jedinicom, koja odgovara otprilike jednoj litri, mjere se i zamjenjuju mnoga dobra. U istočnoj Africi žita prodaju na »košare«, koje mogu biti veće ili manje. Za vrednija žita imaju manje košare, za krupnija zrna veće. Time su u mjerenje unijeli pojam vrijednosti robe.

Mnoga primitivna plemena mjere težine još »ramenom«, tj. koliko tereta može jedan čovjek ponijeti na jednom ramenu. Pod »dva ramena« razumijevaju dvostruku težinu, a još veće terete izražavaju većim brojem »ramena«.

Mnoga zabačena plemena i danas mjere udaljenosti posve osobitim »jedinicama«. Na Borneu je mjera udaljenosti »kokodakanje kokoši«, tj. kako se daleko čuje, a isto je u nekim dijelovima Indije »mukanje krave«. U prašumama Brazila primitivci označuju udaljenost dvaju naselja »brojem potoka koje treba preskočiti«. Najneobičnija je sigurno seljačka jedinica udaljenosti u Tibetu, naime »posuda čaja daleko«. Toliku udaljenost prođe čovjek koji ponese posudu kipući čaja, a na kraju je puta čaj prikladan za piće. Prema istraživanju neke ekspedicije na Mount Everest »posuda čaja daleko« nešto je kraća od tri kilometra.

Nekoliko spomenutih mjera primitivnih plemena, koja su i danas ostala na najnižem stupnju održavanja života, samo su primjeri kako je i u najprimitivnijoj organizaciji društva neophodno potrebno mjerenje, pa makar kako ono bilo podložno klimatskim, atmosferskim, subjektivnim ljudskim i mnogim drugim faktorima.

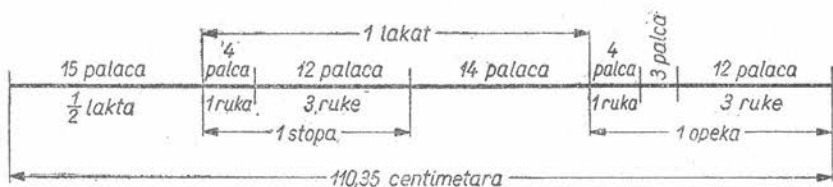
Prava znanstvena metrologija počinje u jakim kulturnim državama koje su postojale prije nekoliko tisuća godina. Potrebu za mjerenjem i standardizacijom zahtijevala je trgovina, zatim karavanska putovanja, moreplovstvo i normalno poslovanje države kao vlasti.

O Kini, kolijevci stare civilizacije, znamo u pogledu mjera vrlo malo, pa se stoga djelomične predaje i iskopine još ne mogu pouzdano ocijeniti. No za razliku od te zemlje postoji mnoštvo očuvanih dokaza o visokoj razini mjerenja u drugoj kolijevci ljudske civilizacije i kulture, u zemlji koja se prostire na plodnim obalama velikih rijeka Eufrata i Tigrisa. Najstariji tragovi vode čak 6000 godina unatrag. Iskapanja su naime pokazala da je tada na tom području djelovao sistem za na-

vodnjavanje kojega je duljina iznosila oko 160 kilometara. Danas je sve prekrpio pijesak, a sistem je bio uredno održavan oko dvije tisuće godina!

Posve je očigledno da se takav, za ondašnje doba beskrajno grandiozan pot-hvat, nije mogao ostvariti bez dobrog poznavanja načina premjeravanja zemljišta, zakona strujanja voda i rada tehničara koji su znali takve poslove. To nam je jasno kad spomenuti sistem navodnjavanja usporedimo s rimskim vodovodom koji je oko 4000 godina mladi. Naime, rimski vodni sistem od 19 akvadukata ukupne duljine oko 400 kilometara uzdržavala je stalna posada od 700 radnika i tehničara, koji su omogućavali da građani dnevno dobiju 600 do 1000 litara vode po stanovniku!

Babilonci su bili prvi u povijesti čovječanstva koji su imali jedinstveni sistem mjera što ga je propisao vladar. I ne samo to! Oni su čak imali posebne pramjere izrađene slično kao što to imamo danas (vidi odsječak 3)! Arheološka iskapanja su naime omogućila da se dođe do pramjera duljine koje potječu iz vremena oko 2000 godina prije naše ere. To je bakreni štap duljine 110,35 centimetara i mase 41,5 kg. Štap ima ucrtane zareze koje vidimo shematski prikazane na slici A1.



Sl. A 1. Skica babilonske pramjere duljine. Arheološka iskapanja dokazuju da je taj bakreni štap star oko 2000 godina.

Glavna jedinica bila je »lakat« = 51,72 cm, podijeljena na 30 »palaca«. »Stopa« je imala 16 palaca, dakle 27,58 cm, dok je »ruka« predstavljala 4 palca = 6,9 cm.

Vjerojatno su Babilonci imali i normirane utege, ali to prilikom iskapanja nije nađeno. Iz pismenih podataka se zna da je masa utega za mjerenje zlata »šiglu« iznosila 85,8 grama, dok je jedinica »mine« iznosila 0,513 kg.

Pronađeni su utezi koji su bili normirani oko 1300 godina kasnije, za vrijeme vladavine asirskog kralja Salmanasara V. »Teška mina« iznosila je u to vrijeme gotovo tačno 1 kg (1,0048 kg), dok je »laka mina« bila upola manja. Da se zaista radilo o strogoj državnoj kontroli mjera i utega možemo zaključiti i po tome, što su utezi »mine« bili potpuno jednaki, iako su ih arheolozi pronašli u posve različitim krajevima.

I za volumen su Babilonci imali normiranu mjeru. To je bila »srebrna vaza« na kojoj je bilo ugravirano »10 sila« (= 4,8 dm³). Ovu srebrnu vazu arheolozi su pronašli u dobro očuvanom stanju. Veća jedinica bila je 60 puta veća, a još veća 300 puta.

Ni Starobabilonci nisu sami razradili svoj jedinstveni sistem mjera, koji tako mnogo liči na kasniju međunarodnu organizaciju o mjerama (vidi odsječak 3.1). Njima su u svomu prodroru mjernu znanost donijeli Kaldejci, koji su opet usavršili vještinu mjerenja Šumerana, a ovi su je razvili u kulturnim centrima Mezopotamije oko 2500 godina prije naše ere.

Ne postoje arheološki nalazi o pramjerama (etalonima) Kaldejaca i Šumerana, no pisani dokumenti upućuju na mogućnost postojanja pramjera jedinice vremena. To je prema predaji bila posuda iz koje je vjerojatno tokom jedinice vremena

(dan) istekla jedinica težine (talent) vode. Zapremina te vode najvjerojatnije je bila jedinica volumena, a iz nje se onda izvela jedinica duljine.

I današnja jedinica vremena »minuta« starobabilonsko-šumeričkog je porijekla. Podjela dana na 24 sata, a ovoga na 60 minuta, potječe iz toga doba. To se odražava i u astronomiji, gdje svod prekriva 12 slika životinja.

Nije slučajno da je mjerna znanost postigla visoki stupanj razvoja baš u zemlji Šumerana i Kaldejaca. Život i kultura starih naroda na obalama Eufrata i Tigrisa mogli su postojati samo uz brižljivo održavanje i razvijanje sistema za navodnjavanje, a za tu svrhu tačne i jedinstvene mjere te precizna mjerenja bili su neophodni. Isto tako nije nimalo čudno da se propast velikih i moćnih državnih tvorevina vremenski podudara s propašću sistema za navodnjavanje (Babilon, Asirija, Egipat, Perzija, Sirija itd.). »Sve je proizašlo iz vode, sve će održati voda« (*Faust II*).

Trgovina je mjerne tekovine tih visokih kultura prenijela najprije Egipćanima i Fenićanima, a onda i Grcima. Odatle je to našlo put daljnjeg širenja uz galije i mačeve rimskog carstva. Posljednje tragove starobabilonske mjerne znanosti danas nalazimo još u starim ljekarničkim mjerama.

Egipćani su strogo kažnjavali trgovce koji su varali pri mjerenju robe, ali unatoč tomu nisu imali tako razrađen sistem jedinica kao Babilonci. No zato su imali razgranatu službu faraonskih baždarnica, a u skladu s razvijenom birokracijom i posebne titule za vodeće službenike tih ureda. Jedan od važnih instrumenata Egipćana bila je vaga, koja je čak bila isklesana u nekim hramovima. Izgleda da iz tog razdoblja potječe i rafinirano varanje pri vaganju na taj način što je u šupljaj prečki vage bila živa!

Egipćani su imali dva osnovna utega: »deben« je imao masu 91 gram, dok je »kita« bila 10 puta manja. Utezi su bili izrađeni od kamena. Od Babilonaca su izgleda dobili »mine« koja se zvala »menen« i imala je masu 0,6 kg. Za sve te jedinice služile su posebne hijeroglifske oznake, od kojih jedna prikazuje čak neku životinju nalik na mačku. Pa i sami utezi bili su izrađeni različitih oblika: kao stošci, kao kravlje glave, stereometrijskih oblika itd. Sve ove mjere prvenstveno su služile za mjerenje dragocjenih metala.

Za ostale mjere Egipćani nisu imali toliko smisla kao Babilonci. Za mjere volumena služile su »košara datulja«, »hrpa žita«, »snop«, »vreća«, »lonac«, dakle vrlo elastične i nejedinstvene mjere.

Jedino je premjeravanje zemljišta bilo na višem stupnju, služili su se mjernom trakom, a imali su i normiran lakat. »Kraljevski lakat« bio je dugačak oko 52 centimetra, a »mali lakat« oko 45 cm. Te dvije jedinice bile su razdijeljena na pedlje, ruke i palce. Za rimskih vremena Egipćani su imali i mjerni kotač, a kasnije i mjerne letve i lance. Veće su duljine mjerili pomoću mjernih užeta koja su bila obilježena posebnim hijeroglifima.

Budući da je zbog poplava Nila uvijek iznova trebalo razgraničavati zemljišta, Egipćani su imali za praktičnu mjeru površine »arura«, kvadrat sa stranicom 100 kraljevskih lakata. Upotrebljavali su se i $1/2$, $1/4$, $1/8$ i $1/16$ arure.

Stanovite uspjehe imali su i u zvjezdnoznanstvu, gdje su otkrili ponavljanje 365-dnevnog godišnjeg perioda, ali su unatoč tome svoju povijest dijelili na periode vladavina faraona pojedinih dinastija.

Iznenaduje da u svojoj 2500 godišnjoj povijesti stari Egipat nije u pogledu mjera učinio više, iako je izgradio velebne piramide i niz drugih čuda. Iako je u Egipat sigurno doprlo iskustvo Babilonaca, ipak robovsko uređenje nije poticalo razvoj znanosti, jer na raspolaganju je bila besplatna radna snaga i mnogo vremena.

O mjerenju i mjerama starih Perzijanaca znamo vrlo malo. Ipak mora da je mjerna tehnika bila na visokom stupnju, jer oni su gradili izvanredan sistem cesta, od kojih je jedna bila dugačka oko 2500 kilometara (!), a protezala se od Male Azije do Perzijskog zaljeva. Duž te ceste bilo je 111 odmarališta s konakom, koja nisu bila porazdijeljena jednakomjerno, već prema naporima što su ih iziskivali pojedini dijelovi ceste.

Iz nekih se dokumenata zaključuje da su Perzijanci imali ove jedinice duljine: »kraljevska stopa« (oko 31,5 cm), »lakat« (oko 54 cm), »stadion« (oko 264 m), »parasang« (oko 5300 m) i još nekoliko većih putnih jedinica. O drugim mjerama gotovo ništa nije poznato.

Hebrejci su imali visoko razvijen smisao za mjere i utege. Njihova su mjerenja i mjere bile tačne jer im je to nalagala i religija. No sistematičnosti nije bilo ni izdaleka toliko kao u mjera Babilonaca, iako su neke mjere preuzeli od njih. Utega su imali mnoštvo i to asirskog, egipatskog i domaćeg porijekla. Jedinica duljine bio je »lakat« i to vjerojatno babilonski, a uz to su upotrebljavali, kao i gotovo svi stari kulturni narodi, »pedalj«, »ruku«, »prst« itd.

Navodno su i Hebrejci imali svoj normirani štap kao pramjeru duljine, koji se kao svetinja čuvao u hramu. Kovani novac od zlata i srebra imao je svoje posebne nazive, a vrijednost mu se određivala vaganjem. Iz tog razdoblja potječe »zlatni talent« (oko 49 kg) koji se spominje i u Bibliji.

Arabljeni su imali razvijen smisao za mjere i utege, jer su oko 600. godine naše ere održavali veliki promet mnogih proizvoda. Čuvena je njihova najmanja mjera »debljina devine dlake« (oko 0,65 mm). Druga je bila širina šest usporedno postavljenih zrna ječma, a poznavali su »širinu prsta« i »širinu ruke«, »stopu« i nekoliko »lakata«. Osobito je postao čuven »crni lakat« (oko 0,52 m) kad je u 9. stoljeću kalif Al-Mamum naredio mjerenje zemaljskog stupnja, što znači da su zvjezdoznanstvo i geodezija bili na visokom nivou.

Arapaska država protezala se od Indijskog do Atlantskog oceana, pa stoga nije čudo što su se u pojedinim provincijama održale mnoge mjere njihovih prethodnika. Arabljeni su zapravo imali »babilon mjeru«, a ne Babilonci. Od njihovih utega i kod nas je poznat »kantar« (44,69 kg) koji su u naše južne krajeve donijeli Turci. Tekućine nisu mjerili samo jedinicom obujma, već i utezima koji su se razlikovali za ulje, vino i med, a služili su se i mnogim grčkim i rimskim mjerama, naročito ljekarnici. Arabljeni su bili vrlo vješti u vaganju dragocjenih metala i dragulja, a navodno su znali vagom uspoređivati specifične težine.

U staroj Grčkoj mjerenje i mjere spadali su u državnu službu, a varanje pri mjerenju kažnjavalo se možda strože nego u današnjoj Grčkoj. Mjerni inspektori nazivali su se *metronomousi*, što otprilike znači procjenitelji mjera. Grci su većinu jedinica preuzeli od Egipćana i kasnije ih predali Rimljanima. Istina je da su grčki filozofi i učenjaci bili učenici Egipćana, ali su kasnije daleko premašili svoje učitelje. I sam naziv današnjeg metra potječe od grčke riječi »metron«, što znači mjera.

O grčkim mjerama imamo pouzdane podatke. Tako je, na primjer, starogrčka stopa bila dugačka 30,83 centimetara, dakle samo otprilike 1 % veća od današnje angloameričke stope (vidi odsječak B. 8). Starogrčki stadion bio je 600 puta veći. Atička jedinica duljine stadion imala je 500 atičkih stopa koje su bile dugačke 32,8 cm. I Grci su imali »prst«, »pedalj«, »lakat« i »hvat«, te niz većih i manjih mjera. Površine zemljišta mjerili su jedinicom »plethron«, koja je sadržavala 10 000 »kvadratnih stopa«, dakle oko 950 m².

Budući da je vaganje u staroj Grčkoj bilo dobro razvijeno upotrebljavali su za utege razne talente (grčki »talanton« znači vaga). Najmanji je bio sirijski ili Ptol-

mejev talent (oko 7 kg), srednji atički (26,196 kg), a najveći novogrčki talent (150 kg). Uz ove dolazilo je niz manjih utega koji su međusobno stajali u odnosu $1/6 : 1 : 100 : 6000$ ili $1 : 60 : 6000 : 36\,000$. Nazivi za te utege ujedno su bili nazivi kovanog novca. Ljekarnice su imale svoj posebni sistem utega, među kojima je i »unča« koju danas prepoznajemo kod Anglo-Amerikanaca kao »ounce«. I »libra« je grčkog porijekla.

Grčki sistem mjera bio je toliko razvijen da su i veterinarima imali svoje utege za vaganje životinja. Tekućine su mjerili jednim jedinicama, poljoprivredne proizvode drugima, suhe tvari trećima itd. Vjerojatno im je obilje tih jedinica stvaralo i neprilike, kao što danas nama čine mnoge angloameričke jedinice za suhe tvari i slično (vidi odsječak B. 11. 3).

Rimljani su oko 300. godine naše ere mnogo upotrebljavali grčke mjere, ali su imali i vlastiti sistem mjera i utega koji su brižno njegovali. Normirane štapove čuvali su kao svetinju u Kapitolu, a njihove kopije uzidavali su u javne građevine tako da se njima mogu služiti građani. Rimski »stopa« bila je dugačka oko 29,6 centimetara, a 600 takvih stopa predstavljalo je grčko-rimski »stadion«. Rimljani su, isto kao Grci, imali mnoštvo jedinica za duljine, od »digitusa« (1,85 cm) do »iter pedestre« (28,725 km), što znači dan putovanja.

Obujam tekućina mjerili su najprije grčkim »amforama« (26,26 dm³), a kasnije kubnom stopom. Uz ove, bilo je još devet drugih mjera za tekućine. Suhe tvari mjerili su posebnim volumenskim jedinicama. Za mjerenje površine u poljoprivredi služili su se »jutrom« (iugerum), a to je bilo onoliko zemljište koliko je u jednom danu mogao preorati jedan par magaraca. Otprilike je to bio pravokutnik sa stranicama 240 i 120 stopa.

Utege su Rimljani imali svrstane u pravi sistem, ali s osnovom 12, tako da je »libra« (ili pondus) bila razdijeljena na $11/12$, $5/6$, $3/4$, $2/3$, $7/12$ itd. sve do $1/12$ libre koja se zvala »uncia«, a imala je masu 27,29 grama. Neznatno više ima današnja engleska ounce, koja sigurno podsjeća na rimski pohod na englesko otok. Osobito su precizni bili ljekarnički utezi koji su u Evropi ostali u upotrebi sve do francuske revolucije.

Stotinu pondusa predstavljalo je jedan centenarium, kojega se u malo drugačijem izgovoru sjećaju i naši ljudi. Kao i Grci, i Rimljani su svoje kovane novce nazivali istim mnogobrojnim imenima što su ih imali za utege.

Iz ovih letimičnih skica mjera i načina mjerenja kulturnih naroda vidimo da su u prošlosti postojale u pojedinim razdobljima i u nekim državnim tvorevinama dobro organizirane metrološke službe, koje su imale i svoje posebne pramjere (štapovi i utezi). Međutim zapadna i istočna Evropa trebale su da dočekaju istom francusku revoluciju pa da nauka o mjerama pređe nacionalne okvire.

Tako još godine 789. nalazimo u Evropi »stopu« Karla Velikoga, kao i njegov uteg »funtu« (oko 0,36 kg). Kasnije dolazi do jedinstva kraljevskih mjera na engleskom otoku (vidi odsječak B. 8), ali u Evropi to dugo nije uspjelo, jer ona je bila razdrobljena na niz kneževina, država i državica. Pa čak ni te društvene tvorevine nisu imale jedinstvene mjere. Svaki grad ili veći gradić imao je svoje mjere, koje je smatrao jedino »pravima«. Iz kronika se na primjer zna da je Badensko nadvodstvo imalo oko godine 1800., dakle prije 160. godina, 112 različitih »lakata«, 92 površinske mjere, 65 mjera za drvo, 163 mjere za žito, 123 akova i vjedra, 80 funti itd. Možemo zamisliti koliko je toga bilo na ogromnom prostoru od Urala do Atlantskog oceana!

I slavna Dubrovačka republika imala je svoje mjere. Kao i većina drugih trgovačkih gradova i Dubrovnik je imao javnosti pristupačne uzorke nekih mjera.

Obično je to bio kip kakvog zaslužnog čovjeka, a duljine pojedinih dijelova tog kipa bile su propisane mjere duljine. Na slici A 2 vidimo stup viteza Orlanda iz godine 1418. koji obnovljen još i danas stoji u Dubrovniku. Duljina njegova lakta do vrha prstiju iznosi 51 centimetar i to je bila normirana državna mjera duljine, čiji se etalon (metalni štap) čuvao u palači Sponza. Ista duljina lakta urezana je i u kamenu postamenta Orlandova spomenika.

Nakon mraka srednjeg vijeka počela je nicati znanost kojoj su trebala čvrsta uporišta, a ona nije mogla procvasti u gradskim, pa ni državnim okvirima. Moralo je doći do velikog društvenog potresa koji je, uz ostale reforme, raskinuo i feudalne lance metrologije.

3. TEMELJI MODERNE NAUKE O MJERAMA

3.1. Postanak metarskog sistema jedinica

U drugoj polovini sedamnaestog stoljeća trgovina, obrt i znanost već su toliko napredovali da se više nije moglo pospješivati proizvodnju i trgovačku razmjenu proizvoda na temelju mjera koje su polazile od »stope« Karla Velikoga ili čak od mnoštva istimenih, ali različitih mjera raznih gradova, kako smo vidjeli u prošlom odsječku. Tek je francuska revolucija godine 1789. smogla snage da među ostalim radikalnim potezima uredi i pitanje unifikacije mjera.

Ustavodavna skupština povjerila je godine 1790. francuskoj Akademiji izradu projekta jedinstvenog sistema mjera. Posebna komisija najviđenijih učenjaka predložila je sistem koji je trebao da ima ove značajke: osnovne jedinice morale su se osloniti na prirodne pramjere; sve izvedene jedinice valjalo je izvesti iz osnovnih jedinica za duljinu, vrijeme i težinu; podjela jedinica na veće i manje dijelove trebala je biti decimalna, kako bi preračunavanja bila što je moguće jednostavnija.

Ideja prirodnih pramjera bila je izvanredna za to doba. Njome je Revolucija obračunala s kojekakvim prolaznim kraljevskim »stopama« i »laktima«, a ujedno je htjela ostvariti takve pramjere koje će — baš zato jer su oslonjene na prirodu — vječno prkositi zubu vremena. Iz tog doba potječe krilatica:

A tous les temps, à tous les peuples!

tj. mjerni sistem za sva vremena i za sve narode.

Danas znamo da je zahtjev o vječnosti pramjera bio iluzoran. Isti se problem rješava još i danas, još uvijek se traži u prirodi ono nešto što je doista vječno, što



Sl. A 2. Stup viteza Orlanda u Dubrovniku. Duljina lakta (51 cm) bila je propisana dubrovačka mjera
(Foto: T. Dabac)

nije podložno zubu vremena (vidi odsječak 4). A od onih vremena do danas znanost je prošla divovski put: od motornog pogona brodova, do tačnog gađanja Mjeseca raketama!

Francuska Akademija odabrala je za osnovnu jedinicu duljine metar i definirala tu jedinicu kao 40-milijuntinku zemaljskog meridijana. Zakonima iz 1795. i 1799. godine metar je bio uveden državnom silom, a 1. januar 1840. bio je krajnji rok uvođenja (zakon iz 1837). Nakon tog roka nemetarske jedinice bile su zabranjene.

Zakon o metru uveo je četiri glavne jedinice:

1. Jedinicu duljine metar, kako je ranije definirana.
2. Jedinicu površine kvadratni metar. To je površina pravokutnika sa stranicama 1 metar. Za poljoprivredu uveden je ar, tj. kvadrat sa stranicama 10 metara.
3. Jedinicu volumena kubni metar. To je obujam kocke s bridovima 1 metar. Za mjerenje tekućina i zapremine zrnatih tvari preporučen je kubni decimetar.
4. Jedinica težine gram. To je bila težina jednog kubnog centimetra destilirane vode.

Kad danas razmatramo ove definicije uočavamo mnoge nedostatke. Pa ipak je to bila znanstvena revolucija, po rezultatima jednako velika onoj pravoj francuskoj revoluciji. Da je bila očekivana i da je zrno napretka palo na plodno tlo, dokazuje prihvatanje francuskog primjera u gotovo svim ostalim kulturnim zemljama.

Kolikogod se mjerenje 40 milijuntinke zemaljskog meridijana provelo tačno, ipak se već u ono vrijeme uvidjelo da nije postignuta onolika tačnost kolika se željela, a o postojanosti nije bilo ni govora. Naime, površina Zemlje, a time i njen opseg, neprestano su izloženi malim promjenama tako da je svako novo mjerenje meridijana dalo ponešto drugačije rezultate. Paralelno s time usavršavali su se geodetski instrumenti, pa je i to doprinosilo dobivanju uvijek novih rezultata prilikom novih mjerenja. Moralo se na žalost konstatirati da »stalna« pramjera nije nimalo konstantna! Teškoće pri mjerenju također su počele množiti glasove protiv tako definiranog metra.

Do početka promjene došlo je tek godine 1870., dakle gotovo jedno stoljeće nakon uvođenja metra. Te godine započeta je, a godine 1872. završena, rasprava u Commission internationale du Mètre (Međunarodna komisija za metar), gdje je zaključeno da se izrade pramjere (etaloni) međunarodnog metra i međunarodnog kilograma.

Tom prilikom osnovan je u Parizu međunarodni znanstveni institut, Bureau international des Poids et Mesures (Međunarodni biro za mjere i utege). Taj biro vodi međunarodni odbor sastavljen od 12 stručnjaka iz raznih zemalja.

Zaključkom Konvencije o metru (Conférence diplomatique du Mètre, Paris, 20. V 1875) metarski sistem postao je internacionalan, a rodila se i najviša stalna međunarodna ustanova za pitanja mjera: Conférence générale des Poids et Mesures (Generalna konferencija za mjere i utege) koja je stvarno konstituirana u Parizu septembra godine 1889. U sastavu Biroa započeo je 1. januara godine 1876. radom specijalni laboratorij u Pavillon de Breteuil u Sèvresu kraj Pariza.

Prilikom osnivanja Međunarodnog biroa za mjere i utege postavljeni su mu ovi permanentni zadaci:

1. Sveukupno uspoređivanje i verifikacija novih pramjera i njihovih kopija sada i u budućnosti.

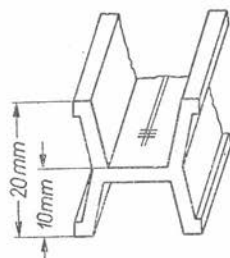
2. Udržavanje novih međunarodnih pramjera.
3. Uspoređivanje novih pramjera s nemetarskim etalonima različitih zemalja.
4. Uspoređivanje preciznih mjera na zahtjev svih zainteresiranih (država, društva, poglavarstava i pojedinaca).

Izloženom organizacionom shemom i utvrđenim zadacima postavljen je temelj suvremenoj metrologiji.

3. 1. 1. Jedinica duljine metar

Novi prametar prestao je biti krajnje mjerilo (étalon à bouts), čiji su uzdužni krajevi optočeni dragim kamenjem, već mjerilo s crticom (étalon à traits) na kojemu se duljina računa između paralelnih crtica na površini pramjera. Skicu jednog kraja prametra prikazuje slika A 3.

Presjek štapa izrađen je u obliku nesimetričnog slova X. Taj oblik ima nekoliko prednosti pred svim ostalim profilima. Zbog relativno velike površine štapa lako poprima temperaturu okoline, a utrošak skupocjenog materijala je malen. Osim toga ravnina u kojoj su crticama označeni krajevi duljine metar baš je neutralna ploha, koja teoretski ne doživljava nikakve promjene duljine prilikom eventualnog savijanja prametra. Debljina crtica iznosi oko 7 mikrona ($7 \cdot 10^{-6}$ m). Izgled kopije prametra vidimo na slici A4.



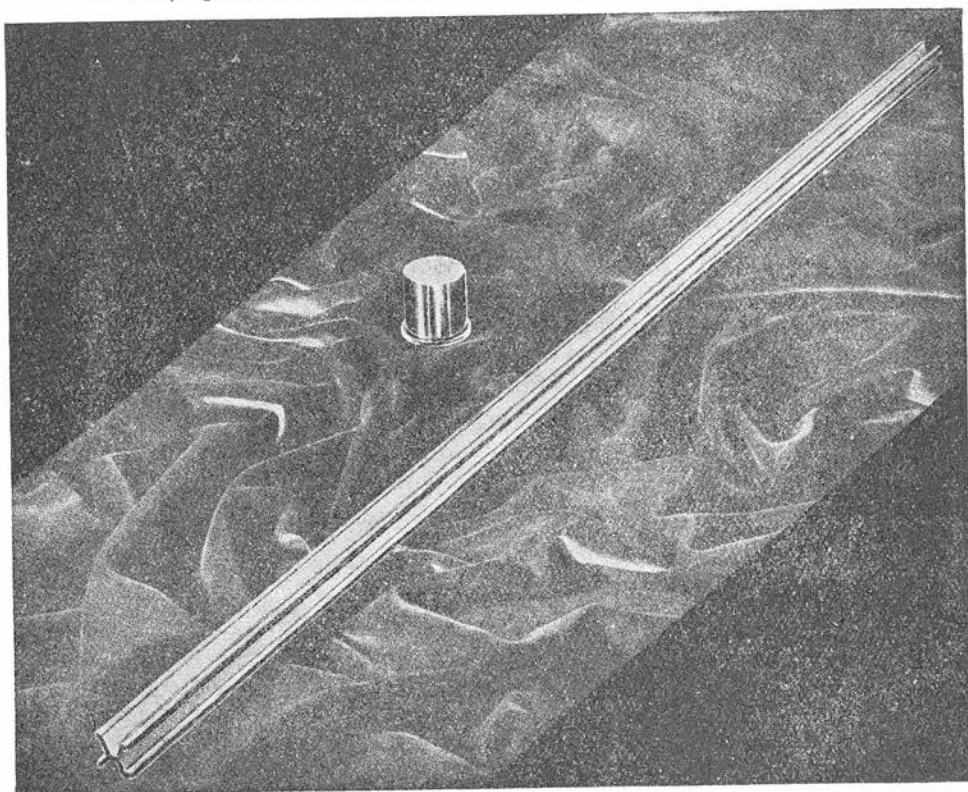
Sl. A 3. Jedan kraj prametra od platiniridija

Sve pramjere metra koje posjeduju države potpisnice Konvencije o metru izrađene su od kemijski i mehanički izvanredno postojane slitine od 90 % platine i 10 % iridija. Ipak je i ova platin-iridijska slitina podložna zubu vrenema, ako ne zbog drugog, a ono zbog toga jer je slitina podvrgnuta unutarnjim naprezanjima budući da su samo kod pravilno kristaliziranih tjelesa molekule grupirane u položaju ravnoteže.

Sedma Generalna konferencija za mjere i utege postavila je godine 1927. ovu definiciju metra: »Jedinica duljine je metar koji je pri temperaturi 0°C definiran razmakom između dvije srednje crtice na pramjeri metra, pohranjenoj u Međunarodnom birou za mjere i utege u Sèvresu. Pramjera ima tačno duljinu 1 metar kad je pri normalnom atmosferskom pritisku poduprta u vodoravnom položaju sa dva valjka promjera najmanje 1 cm koji su međusobno udaljeni 571 mm«.

Prametar međutim nije toliko tačno izrađen (debljina zarez!) koliko su današnja tačna mjerenja udaljenosti između zareza na etalonima. Stoga je 10. Generalna konferencija za mjere i utege, održana godine 1954., zaključila da se nacionalne kopije pramjere metra pojedinih države označe tanjim crticama. Međutim samu definiciju metra tada još nije promijenila. Tek na zasjedanju 1960. godine Generalna je konferencija prihvatila takozvani »valni metar«, doista prirodnu pramjeru koju zub vremena neće nagristi. Definicija tog novog metra glasi:

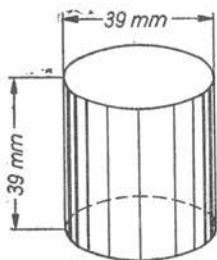
Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 valnih duljina zračenja atoma kriptona. Podrobnije podatke o pozadini ove definicije može se naći u odsječku 4.



Sl. A 4. Prakilogram i prametar.

3. 1. 2. Jedinica mase kilogram

Zajedno sa 40 primjeraka pramjera metra bile su izrađene 43 pramjere mase. Etalon mase je valjak visine 39 mm, promjera 39 mm, izrađen od već opisane slitine platine i iridija (Vidi slike A 4 i A 5). Taj materijal pogodan je za pramjeru



Sl. A 5. Dimenzije prakilograma od platiniridija

mase zato jer ima veliku gustoću, dakle prilikom uspoređivanja na vagi utjecaj uzgona je malen. Osim toga slabo upija plinove i dobar je električki vodič, tako da su utjecaji zbog upijanja plinova i elektrostatskih sila prilikom vaganja doista neznatni.

Od realizacije prvotnog prakilograma pomoću kocke napunjene vodom odstupilo se zato jer je utvrđeno da se volumen šuplje kocke s bridovima duljine 10 cm ne može izmjeriti potrebnom tačnošću. (Kasnije se otkrilo još i to da voda sadrži nekoliko izotopa.)

Međunarodno je kilogram definiran ovako:

Kilogram je jedinica mase. Njega predstavlja masa međunarodne pramjere kilograma.

Materijalni uzorak kilograma brižljivo se čuva u podzemnoj betonskoj ćeliji paviljona Breteuil u Sèvresu kraj Pariza. Njegova nazivna netačnost jednaka je nuli, tj. smatrano ga apsolutno tačnim jer u odnosu na njega kontroliramo sve druge etalone.

3. 1. 3. Jedinica vremena sekunda

Jedinica vremena sekunda bila je dugo definirana kao $1/86\,400$ -ti dio srednjeg sunčanog dana. Do brojke 86 400 došlo se na temelju stare podjele vremenskih mjera koje potječu još iz kaldejskog doba:

$$1 \text{ dan} = 24 \text{ sata} = 24.60 \text{ minuta} = 1440.60 \text{ sekunda} = 86\,400 \text{ s.}$$

Srednji sunčani dan razlikuje se od pravog sunčanog dana za ± 900 sekundi. Pravi sunčani dan definiran je trajanjem između dva uzastopna prolaza središta Sunca kroz meridijan promatračkog mjesta na Zemlji.

Sunčani dan međutim nije stalna veličina već ovisi o promjenljivosti brzine kojom Zemlja obilazi oko Sunca, te o nagibu osi rotacije prema plohi putanje. Zbog toga je i uveden srednji sunčani dan.

Osim sunčanog vremena postoji i zvjezdano vrijeme koje se odavno upotrebljava u astronomiji i nautici. Zvjezdani dan je vrijeme u kojem se prividno čitav nebeski svod jednom okrene oko stajališta promatrača.

Zvjezdani dan kraći je od srednjeg sunčanog dana, jer se tokom godine dana Zemlja u odnosu prema Suncu okrene jedanput manje nego li prema zvijezdu. Ova razlika iznosi za svaki srednji sunčani dan 235,9 sekunda, tako da je sekunda $1/86\,164,1$ -ti dio zvjezdanog dana.

Siderijska astronomska godina, tj. zvjezdana godina, je vrijeme između dva identična uzastopna položaja Sunca u odnosu na zvijezde stajačice. To je dakle trajanje ophodnje Zemlje oko Sunca, što iznosi 365,256 360 42 srednjih sunčanih dana, tj. 31 558 149,540 sekunda.

Sekunda se do nedavno, kako smo već naveli, definirala kao $1/86\,400$ -ti dio srednjeg sunčanog dana. No već se dugo znalo da vrtnja Zemlje nije posve jednolika, a na tu se vrtnju oslanja spomenuta definicija sekunde. Danas najpreciznije ure imaju jednoličniji hod od vrtnje Zemlje!

Stoga je Međunarodna astronomska unija predložila novu definiciju sekunde koja se izvodi iz zvjezdane godine. No i kod zvjezdanih godina postoje razlike. Prema *Newcombu* samo tropska godina ima stalnost, a od zvjezdane se razlikuje za iznos koji uzrokuje precesija.

Međunarodni odbor za mjere i utege predložio je definiciju sekunde u odnosu na tropsku godinu 1900., 1. januara u 12 h efemeridnog vremena. Budući da Međunarodna astronomska unija nije još službeno prihvatila zamjenu zvjezdane godine s tropskom, to Deseta generalna konferencija za mjere i utege 1954. godine nije izmjenu definitivno prihvatila u svoje zakonodavstvo, već za čitav predmet ovlastila Međunarodni odbor, koji je 1956. godine uveo novu definiciju jedinice vremena:

Sekunda je $1/31\,556\,925,974$ 7-ti dio trajanja tropske godine za 1900. u 12 sati efemeridnog vremena.

Ova je definicija već ušla u nacionalna zakonodavstva pojedinih država, pa tako i Jugoslavije (JUS A. Al. 040/57).

Iz svega navedenoga vidimo da je sekunda prava »prirodna pramjera«. Ona ima svoje pramjerilo u jednolikosti i pravilnosti nebeske mehanike.

No i naš sunčani sistem nije vječan i nepromjenljiv, gigatska su samo mjerila u kojima nastaju promjene u svemiru. Sunce stalno isijava energiju na račun svoje mase i tako s vremenom nastaju promjene koje na neki način utječu na pramjeru vremena, sekundu.

Budući da živimo u stoljeću kad je mjerna znanost doživjela neslućenu tačnost na svim područjima ljudi već ozbiljno pomišljaju na stalniju, doista vječnu pramjeru vremena i okreću se od makrokozmosa prema mikrokozmosu. O tom traženju govori se u odsječku 4. 3.

3.2. Ustrojstvo međunarodne organizacije za mjere

Vremenom se djelovanje Generalne konferencije proširilo i na ostala područja znanosti. Konvencija od 6. oktobra 1921. omogućila je da Generalna konferencija obuhvati u svoj djelokrug rada električke, fotometrijske, toplinske i temperaturne jedinice. Tako sada shema međunarodne organizacije za mjere izgleda ovako:

Generalna konferencija za mjere i utege (Conférence Général des Poids et Mesures) je skupština predstavnika zemalja potpisnica Konvencije o metru. Svaka država predstavljena je jednim predstavnikom i ima jedan odlučujući glas. Konferencija se mora sastati najmanje jedanput u šest godina, a predsjedava joj predsjednik pariške Akademije znanosti. Na svojim zasjedanjima konferencija, na temelju podnesenih referata i preporuka Međunarodnog odbora, donosi punovažne odluke.

Međunarodni odbor za mjere i utege (Comité International des Poids et Mesures) sastoji se od 18 predstavnika država potpisnica Konvencije. Odbor se mora sastati najmanje jednom u dvije godine, pod predsjedništvom direktora Međunarodnog biroa za mjere i utege.

Međunarodni biro za mjere i utege (Bureau International des Poids et Mesures) je znanstveni stožer Konvencije o metru. Taj biro isključivo vodi Međunarodni odbor za mjere i utege. Sjedište biroa je Pavillon de Breteuil u predgrađu Pariza Sèvresu. Biro se uzdržava od doprinosa država članica. Taj se doprinos određuje razmjerno broju stanovnika svake države. Tako, na primjer, Jugoslavija godišnje plaća nešto manje od 7 000 zlatnih franaka.

Savjetodavni odbor za elektriku (Comité Consultatif d'Electricité) osnovan je godine 1927. prilikom zasjedanja Sedme generalne konferencije. U njemu su predstavnici država potpisnica. Zaključci toga odbora dostavljaju se kao preporuke Međunarodnom odboru.

Savjetodavni odbor za fotometriju (Comité Consultatif de Photometrie) analognog je djelokruga rada na području fotometrije. Njegovi zaključci također dolaze pred Međunarodni odbor kao preporuke.

Savjetodavni odbor za termometriju i kalorimetriju (Comité Consultatif de Thermométrie et Calorimétrie) obrađuje pitanja temperaturne skale, te jedinica temperature i topline. Prava su mu ista kao i ostalih triju savjetodavnih odbora.

Savjetodavni odbor za etalone mjerenja ionizirajućih zračenja (Comité Consultatif pour les Étalons de Mesure des Radiations Ionisantes). Obavljeni su mnogi pripremni radovi za njegovo djelovanje, tj. angažirani su stručnjaci i nabavljen je dio potrebne

laboratorijske opreme. Osnivanje tog najnovijeg savjetodavnog odbora predložio je Međunarodni odbor za mjere i utege.

Uz navedene organe vrhunske svjetske metrološke organizacije od 7. oktobra 1958. djeluje još jedna međunarodna organizacija: *Organisation Internationale de Métrologie Légale*, dakle Međunarodna organizacija za zakonsku metrologiju. Njezin je zadatak da u međunarodnim relacijama obavi ono što prelazi zadatke visoke metrologije u okviru Generalne konferencije, a odnosi se na zakonitost provođenja odluka Generalne konferencije.

Novu organizaciju osnovalo je 29 država sa zadatkom da proučava i unapređuje međunarodne propise za proizvodnju, tačnost, primjenu i ispitivanje mjernih uređaja namijenjenih industrijskoj primjeni. Na svojoj osnivačkoj skupštini OIML već je izrazila suglasnost s rezolucijom Međunarodnog odbora za mjere i utege o osnivanju »Međunarodnog sistema jedinica« s polaznim jedinicama: metar, kilogram, sekunda, amper, stupanj Kelvina i candela.

3.3. Nacionalne metrološke ustanove

Navedenim međunarodnim organima pružaju efikasnu pomoć nacionalne metrološke ustanove pojedinih država. Te se ustanove prvenstveno brinu za provođenje međunarodnih zaključaka u svojim zemljama, vrše potrebna istraživanja i mjerenja, baždarenja i sve druge poslove u vezi s mjerenjem i jedinicama.

U Engleskoj je na vrhu metrološke organizacije Board of Trade, koji upravlja Standards Departementom i čuvenim National Physical Laboratory-jem u Teddingtonu. Ondje su pohranjene pramjere i normale kojima se vrše baždarenja podnormala za pojedine laboratorije i tvornice. Tamo se provode i sva istraživanja koja bi mogla unaprijediti nauku o mjerama i mjerenju.

Glavni zadatak tog instituta je nadziranje podređenih organa i povremeno preispitivanje kontrolnih i uporabnih normala Britanskog imperija. Sama baždarenja instrumenata i uporabnih normala vrše se u uredima za baždarenje.

U Engleskoj je pitanjima mjera i standarda posvećena izvanredna pažnja, a u skladu s time su i kontrole i kazne. Iako je engleski zakon o mjerama *Weights and Measures Act* na snazi još od 1878. godine metrologija im je na zavidnoj visini suvremene znanosti.

USA imaju analognu ustanovu pod nazivom *National Bureau of Standards* u Washingtonu u kojoj radi oko 3000 ljudi.

Sovjetski Savez je naslijedio rusku upravu za mjere i utege osnovanu carskim ukazom od 11. oktobra 1835. Godine 1893. slavni je Mendeljejev pridonio mnogo njenim usavršenjem i proširenjem u Glavnu upravu, iz koje je 1934. godine nastao Svesavezni naučno-istraživački metrološki institut imjeni Mendeljejeva u Lenjingradu.

Danas je na vrhu sovjetske metrološke organizacije Komitet za standarde, mjere i mjerne uređaje u Moskvi, koji je obuhvatio i Glavnu upravu za mjere i utege. Na tom polju radi i već spomenuti metrološki institut u Lenjingradu i još pet drugih instituta.

Zadaci sovjetske, kao i ranije spomenute američke organizacije, analogni su onima koje smo naveli za Englesku.

Još su tri velike metrološke organizacije u svijetu. U Japanu je to odgovarajuća metrološka organizacija u Tokiju, a u Francuskoj *Bureau National Scientifique et Permanent des Poids et Mesures* u Parizu. Zajedno sa *Service des Instru-*

ments de Mesure u Parizu potpada pod Ministarstvo industrije i trgovine. Pojedinih problemima mjerne nauke bave se još četiri druga laboratorija, odnosno instituta.

Budući da danas postoje dvije Njemačke, postoje i dvije metrološke organizacije. U zapadnoj Njemačkoj djeluje Physikalisch-Technische Bundesanstalt u Braunschweigu, a u Njemačkoj demokratskoj republici Deutsches Amt für Mass und Gewicht u Berlinu.

I ostale države imaju svoje nacionalne organizacije. Tako je u Italiji Laboratorio Centrale Metrico, u Švicarskoj Eidgenössisches Amt für Mass und Gewicht (zakon od 1875!), u Poljskoj Glavna uprava za mjere u Varšavi, u Norveškoj Biro za mjere i utege u Oslu, u Čehoslovačkoj Državna uprava za mjere, utege i rijetke metale u Pragu itd.

Vrhunska metrološka organizacija Jugoslavije je Uprava za mjere i dragocene metale u Beogradu. Kao i u drugim zemljama, i kod nas je ta Uprava pri Državnom sekretarijatu za poslove robnog prometa.

Budući da je dobro uređena i opremljena vrhunska nacionalna metrološka organizacija od neprocjenjive koristi za svaku državu (unapređenje industrije, privrede, izvoza, naučnog rada itd.), to će vjerovatno i u Jugoslaviji uskoro doći do stanovitog usavršenja nacionalne metrološke organizacije. Radi se naime na tome da se osnuje Državni metrološki zavod koji bi se u našoj zemlji bavio suvremenom metrologijom na najširoj bazi, dakle približno onako kako se to radi u industrijski snažno razvijenim zemljama.

Zamišljeno je da u Državnom metrološkom zavodu djeluju prvorazredni stručnjaci, a lokacija zavoda da ne bude tradicionalno vezana uz neki veći grad, već da se zavod smjesti tamo gdje su najpovoljniji klimatski i radni uvjeti. Na takve mjere upućuje strano iskustvo. Na primjer, američki će se National Bureau of Standards preseliti oko 50 milja daleko od Washingtona, iako i u samom gradu ima još dovoljno uvjeta za proširenje.

4. PRIRODNE PRAMJERE

U odsječku 3. 1. naveli smo da je početna ideja metarskog sistema jedinica bila da se iz same prirode iznesu stalne veličine i proglase pramjerama. U prvi su mah mislili da je to četrdeset milijunti dio opsega Zemlje (metar) i masa jednog kubnog centimetra vode pri 4 °C (gram). Vidjeli smo da se ova ideja nije mogla ostvariti, pa su za pramjere kasnije odabrani materijalni uzorci koji su bili proglašeni pramjerama metra i kilograma. Toj odluci išli su tada u prilog mjerni razlozi, jer svakako je bilo lakše i brže uspoređivati međusobno materijalne etalone nego li svaki put realizirati metar preko opsega Zemlje i vodene kocke.

No u međuvremeno se mnogo toga promijenilo. Metode mjerenja i njihovi uređaji izvanredno su napredovali, tako da danas na primjer smatramo crtice koje su na prametru udaljene jedan metar vrlo »debelim«. Debljina tih crtica reda je veličine netačnosti kojom se mjeri čitavu duljinu metar!

S nacionalnim kopijama prametra i prakilograma postoje i manipulativne teškoće. Svaka država naime koja kao članica Konvencije o metru posjeduje svoju kopiju pramjere, mora je u stanovitim vremenskim razmacima slati u Pariz na usporedbu s međunarodnom pramjerom metra i kilograma u Međunarodnom birou za mjere i utege.

Konačno se postavlja pitanje ne događaju li se s materijalnim pramjerama neke sitne promjene koje su danas još izvan našeg znanja, a njima su podložne i nacionalne pramjere i ona glavna, svjetska pramjera u Parizu?

U Parizu se usporedba nacionalnog prakilograma obavlja na najpreciznijoj vagi, ali i ona ima svoju osjetljivost, mjernu grešku i računske faktore korekcije. Danas se mjerna znanost uspjela već tako visoko da traži pouzdanija uporišta i za pramjeru mase.

Ni treća nam pramjera, sekunda, pa makar bila definirana na temelju tropske godine, za današnje pojmove izvanredno konstantno, ne pruža jamstvo da je stalna pramjera, iako je sekunda jedina »prava« prirodna pramjera budući da ima svoje pramjerilo u jednolikosti nebeskog mehanizma.

Vrtinja Zemlje mijenja se naime tokom tisućljeća, malo doduše, ali ipak toliko da je vrijedno razmišljati o novom pramjerilu vremena, tako da se sekunda oslobodi utjecaja nuklearnog zračenja, plime i oseke i tome slično.

4.1. Prirodna pramjera duljine (valni metar)

Još godine 1827. *Babinet* je predložio da se umjesto stare definicije metra preko zemaljskog meridijana usvoji za pramjeru duljine valna duljina stanovitog svjetla, koja ne bi ovisila o promjenama dimenzija Zemlje i ostalim faktorima. No živio je prerano, fizika još nije znala iskoristiti spektralne linije elektromagnetskog zračenja atoma!

Svaki atom u energetski uzbuđenom stanju emitira u »paketima« (Planck!) svjetlo niza diskretnih valnih duljina. Svaki atom ima karakteristična monokromatska zračenja koja možemo utvrditi u spektrometrima. Svako od ovih jednobojnih zračenja ima svoju konstantnu frekvenciju emitiranog svjetla, a ta frekvencija čini s pripadnom valnom duljinom konstantan umnožak.

Razni atomi imaju različite spektralne linije. Neke su izrazitije, a neke manje oštre. Naravno, što je linija izrazitija, to tačnije možemo u spektrometru odrediti kolika je valna duljina. Podrobna istraživanja pokazuju da se i te crte sastoje od još finijih crtica (fina i hiperfina struktura!) te da nedjeljive spektralne crte imaju kemijski elementi koji ne sadrže izotope niti imaju magnetski moment jezgre.

Svojom konstrukcijom interferometra francuski je učenjak *Michelson*, zajedno s *Benoitom*, godine 1893. obavio u Sèvresu seriju mjerenja valnih duljina zračenja kadmijevih atoma. Pritom su utvrdili da na duljinu jednog metra otpada ovaj broj valnih dužljina (λ) crvenog, žutog i plavog svjetla:

$$\text{metar} = 1\,553\,163,5 \lambda_c = 1\,966\,249,7 \lambda_z = 2\,083\,372,1 \lambda_p,$$

što npr. znači da je metar dugačak koliko i 1 553 163,5 valnih duljina crvene linije u kadmijevom emisionom spektru.

Ta su mjerenja ponovili *Fabry* i *Perot*, te za crvenu liniju dobili rezultat koji je bio za 0,63 λ_c veći od Michelsonovog rezultata. Oba spomenuta mjerenja obavljena su pri temperaturi 15°C i pritisku 1 normalne atmosfere.

Na taj način dobio je pariški prametar svog tačnog zamjenika, kojega se može izazvati na zračenje bilo gdje, a mjerenje se može izvanredno uspješno obaviti u interferentnim komparatorima.

Stoga je Sedma generalna konferencija za mjere i utege godine 1927. preporučila da se paralelno klasičnoj definiciji metra upotrebljava definicija metra putem

crvenog kadmijevog zračenja, ali je klasična pramjera metra od platiniridija ostala i dalje osnova metarskog sistema. Na toj konferenciji službeno je usvojena veza

$$1 \text{ metar} = 1\,553\,164,13 \lambda_c$$

pri vrlo strogim uvjetima stanja okoline, pomoćnih uređaja i pogona pripadnih aparatura.

No i na tom području fizike došlo je kasnije do znatnog napretka. Pokazalo se da je crvena crta kadmijevih para vrlo osjetljiva na temperaturu, a osim toga prosječno je ljudsko oko sedam puta osjetljivije na žuto-zeleno svjetlo nego li na crveno. Daljnji je studij pokazao da »valna normala« mora biti svakovremeno jednoznačno sposobna za reprodukciju, a to znači da linija mora biti jednostavnog i simetričnog oblika, male širine — dakle atom velike atomne mase i niske temperature emisije — i ne smije se dati pomicati raznim efektima. To znači da pritisak kadmijeva plina mora biti nizak, uzbudna električka polja slaba itd.

Svi ovi zahtjevi potakli su niz eksperimenata koji su kao najbolji element izbacili na površinu kripton i ksenon, a odmah zatim izotop žive Hg 198.

Prirodna je živa smjesa niza izotopa, pa je stoga trebalo živu Hg_{80}^{198} proizvesti neutronske bombardiranjem zlata. To je uspjelo 1940. godine, a odonda do danas proizvedeno je već dovoljno Hg 198, tako da se nastavlja proces nadovezivanja metra na zelenu spektralnu liniju zračenja žive.

Ipak, pri praktičnim usporedbama donose valna mjerenja greške reda veličine $4 \cdot 10^{-7}$. Budući da je u međuvremenu napredovala tehnika graviranja izvanredno finih crtica u klasični prametar, to se ni Generalna konferencija godine 1954. nije odlučila da pariski prametar zamijeni određenim brojem valnih duljina nekog zračenja. No za određivanje sekundarnih etalona, kao i industrijskih, »valni metar« gotovo je potpuno nadomjestio šipku sa zarezima.

U međuvremenu su iskustvo s praktičnom primjenom »valnog metra«, kao i daljnja laboratorijska istraživanja, pokazali da su sazreli svi uvjeti za međunarodno usvajanje valne duljine zračenja kao pramjere duljine. O tome se definitivno odlučilo na Jedanaestoj generalnoj konferenciji za mjere i utege održanoj u jesen 1960. godine u Parizu. Ta konferencija prihvatila je ovu definiciju metra:

Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 valnih duljina zračenja atoma kripton 86.

To je skraćena definicija. U punom tekstu ona precizira da se radi o zračenju u vakuumu, kao i o energetskim razinama $2 p_{10}$ i $5 d_5$. Smatra se da će se uz današnje stanje najpreciznijih mjerenja metar moći poznavati do 100 puta tačnije nego li dosada.

Prednost zamjene pariškog prametra valnom duljinom kripton 86 od izvanredne je praktične koristi. Među ostalim, neće više trebati slati nacionalne kopije prametra na usporedbu u Sèvres, već će svaki laboratorij u bilo kojem dijelu svijeta moći sam tačno realizirati metar.

4.2. Prirodna pramjera mase

Obradovani uspjehom mogućnosti zamjene pariškog prametra brojem valnih duljina svjetlosnog zračenja energetski uzbuđenih atoma možemo upitati: da li je uspjelo nešto slično učiniti za pramjeru jedinice mase?

U međunarodnim metrološkim ustanovama još se nije o tome javno raspravljalo. Možda bi se za novu definiciju pariškog kilograma mogao usvojiti stano-

viti višekratnik mase nekog atoma ako se njegova masa može smatrati stalnom. No u tom se slučaju postavlja pitanje »vage« koja bi mogla izvršiti usporedbu s kilogramom u Sèvresu onako, kao što je interferometar posredovao između crtica pariškog metra i žute spektralne linije žive! Takve vage još nema.

Da li je međutim potrebno da baš masa bude ona veličina za koju moramo naći prirodnu pramjeru i prikladno pramjerilo? Odgovor na to pitanje moći će nam dati samo daljnji razvoj prirodnih znanosti.

4.3. Prirodna pramjera vremena

Ni sekunda definirana putem tropske godine neće uskoro biti dovoljno tačna u nekim granama znanosti, iako je baš vrijeme najtačnije mjerena veličina. U metrologiji se već pomišlja na to, jer metrologija mora u danom trenutku misliti sa stajališta postignutih naučnih rezultata što je moguće dalje, za potrebe koje će se tek pojaviti u budućnosti.

S takvom perspektivom izradili su najprije u američkom National Bureau of Standards, najvišoj američkoj metrološkoj instituciji, tzv. atomski sat koji djeluje na principu zračenja molekula plina amonijaka ili atoma cezija. Postoji više metoda koje sve iskorišćuje pojavu rezonancije. Čitava ideja počiva na kvantnoj teoriji.

Rezonantna frekvencija reda je veličine nekoliko gigahertza ($\text{GHz} = 10^9 \text{ Hz}$), pa takav sat nije prikladan za neposrednu primjenu ni u znanstvenim mjerenjima. Stoga se rabe elektronski djelatnici frekvencije (obrnuto od multiplikatora). Snaga tih praiskonskih oscilatora pojačava se elektronskim pojačalima toliko da može tjerati sinhroni motorčić za pokretanje kazaljki sata.

Prvi takav atomski sat bio je tačan na $\pm 5 \cdot 10^{-8}$. Zatim su Švicarci i Japanci povećali tačnost na $2 \cdot 10^{-9}$, a Englezi u svom National Physical Laboratory na 10^{-9} . Utakmica se nastavila, pa su Amerikanci dotjerali čak do 10^{-10} , što znači da bi tek nakon 300 godina greška iznosila 1 sekundu. USA priređuju atomski sat koji će navodno raditi s tačnošću 10^{-13} !

Kako vidimo atomski nam satovi obećavaju izvanrednu preciznost, o kakvoj se još do nedavno nije moglo ni maštati. No primjena atomskih otkućaja, kao isključive prirodne pramjere vremena, neće se moći ostvariti jer atomskom satu manjka osnovno svojstvo pramjera, *t r a j n o s t*.

Iz gornjeg letimičnog opisa takvog sata razabiremo naime da je atomski sat vrlo kompliciran elektronski i mehanički uređaj koji se, kao i svaki drugi uređaj, može lako pokvariti, promijeniti svoje značajke itd. No uređaj će moći izvanredno dobro poslužiti za povremenu reprodukciju sekunde, te za tačno mjerenje vremenskih intervala.

5. VELIČINE, JEDINICE, BROJČANI IZNOSI I JEDNADŽBE

5.1. Iskustvo i fizikalne veličine

Temelj prirodnih znanosti su iskustva stečena opažanjem. Promatranja su pokazala da se stanovite pojave uvijek pojavljuju na isti način, ako su izazvane jednakim poticajima i pod jednakim uvjetima. Čovjek sve pojave promatra subjektivno, jer ih na jedan od mnogih načina doživljava, na primjer u obliku promjene

temperature, pritiska (kod ronjenja ili leta na velikoj visini), električkog udara, jakosti svjetla, starenja itd. Ljudski osjećaj doživljavanja spomenutih pojava ne razlikuje se samo od čovjeka do čovjeka, već u različitim raspoloženjima i prilikama isti čovjek različito reagira na iste poticaje. Zato se prirodne znanosti i njihova primjena u obliku tehnike ne mogu temeljiti na subjektivnom ljudskom osjećanju, već na objektivnom iskustvu.

Objektivno iskustvo stječe se jedino mjerenjem. Postoji mnoštvo različitih načina mjerenja. Najprimitivnije je mjerenje duljine korakanjem. Udaljenost između dva drveta možemo na taj način izmjeriti tako da hodajući od jednog drveta prema drugome brojimo korake. Stigavši do cilja kažemo na primjer ovako: »Udaljenost između ta dva drveta iznosi 20 koraka«. Takvo je mjerenje netačno, jer svaki čovjek nema jednako velik korak, a i u istog se čovjeka duljina koraka ponešto mijenja. Osim toga korak ovisi o zaprekama na koje se nailazi pri hodu.

Mnogo se tačnije razmak između dva spomenuta drveta može izmjeriti hodanjem pri kojem se cipela jedne noge stavlja tačno ispred cipele druge noge. Kod takvog mjerenja na kraju kažemo: »Udaljenost između ta dva drveta iznosi 60 cipela«. Naravno da taj rezultat vrijedi samo za vlasnika dotičnih cipela, jer neki drugi čovjek ima dulje ili kraće cipele, pa će ih na istoj udaljenosti između drveća nadovezati manje ili više puta od našeg mjernika.

Razumije se da izmjerenih 20 koraka i 60 cipela znači isto: udaljenost između dva drveta. Ta se udaljenost ne mijenja mjerili je mi koracima ili cipelama. Na oba načina mjerenja stekli smo objektivno iskustvo o udaljenosti između dva drveta. Rezultat mjerenja doduše nije naročito tačan, ali stečeno je objektivno iskustvo. Pri tom smo iskorištavali samo jedno od svojstava koraka i cipele, njihovu duljinu. Cipela ima nekoliko osobina, na primjer težinu, boju, obujam, savitljivost. To znači da smo udaljenost između dva drveta usporedili duljinom cipele. Razmak između drveta također je duljina, od duljine cipele razlikuje se samo u tome što je veća.

Nameće nam se pitanje: što je to duljina? Na ovo pitanje ne možemo odgovoriti nikakvom strogom definicijom. Duljina je osnovni pojam kojim obilježavamo svijet u kojem živimo. Taj pojam ne znamo objasniti nekim drugim, jednostavnijim pojmom. Svatko ima iskustvenu predodžbu o duljini i pod time razumijeva razmak između dva drveta, visinu kuće, širinu rijeke, dubinu rudnika, promjer osovine, opseg kruga i tako dalje.

Duljina je samo jedna od mnogobrojnih fizikalnih veličina ili kraće veličina. Ostale su veličine težina, površina, volumen, energija, brzina, temperatura, električki napon i niz drugih. Veličine nisu konkretne stvari, već osobine, svojstva, atributi, čovjekove predodžbe o samim prirodnim pojavama.

Neke veličine koje upotrebljavamo u svakodnevnom životu možemo objasniti već poznatima. Tako na primjer o veličini površina imamo predodžbu pravokutnika s dvije međusobno okomite stranice stanovitih duljina. Kažemo da je površina jednaka umnošku duljina obiju stranica. Prema tome površinu izvodimo iz duljine, pa govorimo da je površina izvedena veličina, dok je duljina osnovna veličina. I volumen je izvedena veličina, jer ga zamišljamo na primjer kao kocku kojoj su svi bridovi jednake duljine, a definiramo ga umnoškom površine baze i visine ili pak umnoškom triju međusobno okomitih duljina bridova.

Postoje i drugi nazivi za te dvije vrste veličina koji su u nekim prilikama i prikladniji od spomenutih. Tako na primjer osnovnu veličinu nazivamo i nezavisnom, aksiomatskom, ishodišnom ili polaznom. Posljednja dva izraza potječu otuda, što ishodišne veličine predstavljaju ishodište definiranja ostalih (izvedenih,

zavisnih) veličina; od osnovnih veličina polazi slijed definicija. To smo već vidjeli na primjeru površine i volumena koje su zavisne ili izvedene veličine definirane polaznom (nezavisnom, osnovnom, aksiomatskom) veličinom duljina.

Ta podjela veličina posve je subjektivne naravi. Objektivno, osnovne veličine nisu ništa vrijednije od izvedenih. Netko dapače može neku veličinu smatrati izvedenom, dok drugi tu istu veličinu smatra polaznom. To ovisi o načinu na koji pojedinac najlakše pomoću veličina objašnjava pojave oko sebe.

Vrijednost veličine može biti različita. U našem smo prvom mjerenju utvrdili da vrijednost veličine duljine (udaljenost između dva drveta) iznosi 20 koraka. Hodajući od Zagreba do Ljubljane ustanovili bismo da ta udaljenost iznosi 170 000 koraka. Navedene dvije vrijednosti razmaka između spomenuta dva drveta i udaljenosti dvaju gradova predstavljaju dvije različite vrijednosti iste veličine: duljine.

Vrijednost duljine označujemo slovom l (franc. longueur, njem. Länge). Ova je oznaka posve općenitog, još nedefiniranog značaja, tako dugo dok je ne primijenimo na konkretnu vrijednost duljine. Na primjer, za duljinu razmaka između dva drveta pisat ćemo konkretno $l_1 = 20$ koraka, a za udaljenost Ljubljane do Zagreba $l_2 = 170\,000$ koraka.

U primjeni ovih pojmova nismo toliko precizni pa ne govorimo da vrijednost veličine duljina iznosi 20 koraka, već govor skraćujemo u tom smislu da na primjer jednostavno kažemo »duljina iznosi 20 koraka«.

Što smo ovdje rekli za duljinu, vrijedi i za sve ostale veličine znanosti i tehnike: za masu, vrijeme, energiju, snagu, magnetski tok, dielektričnost, temperaturu itd.

5.2. Veličine, jedinice i brožani iznosi

U prošlom smo odsječku ustanovili da 20 koraka i 60 cipela predstavljaju istu vrijednost veličine, to jest $l = 20$ koraka posve je jednako $l = 60$ cipela. To možemo izraziti ovako:

$$20 \text{ koraka} = 60 \text{ cipela.}$$

Ova jednadžba ima smisla samo onda kad o koraku i cipeli nemamo neku materijalnu predodžbu o čovjeku-mjerniku i o cipelama, već samo o jednoj njihovoj osobini, duljini. Umjesto riječi korak možemo uvesti poseban simbol $[l]_1 =$ korak, jer stvarno pri upotrebi koraka mislimo na stanovitu vrijednost duljine. Ovu po volji odabranu vrijednost duljine nazivamo jedinicom duljine.

Umjesto riječi cipela možemo uvesti oznaku druge jedinice duljine $[l]_2 =$ cipela, jer pod cipelom smo od samog početka našeg razmatranja razumijevali vrijednost duljine cipele našeg mjernika. Isto tako i pod trećom jedinicom duljine $[l]_3 =$ metar ne razumijevamo materiju i njen oblik pariškog prametra (vidi odsječak 3.1), već jedno od svojstava te pramjere: udaljenost između dvije srednje crtice koje su u njemu urezane.

Da smo udaljenost dva drveta nakon mjerenja koracima i cipelama mjerili metarskom vrpcom dobili bismo $l = 15$ metara. Prema tome je u našem slučaju vrijednost duljine $l = 20$ koraka $= 60$ cipela $= 15$ metara, što s našim novim oznakama triju upotrebljenih jedinica možemo napisati u obliku

$$l = 20 [l]_1 = 60 [l]_2 = 15 [l]_3. \quad (5.2-1)$$

Brojke 20, 60 i 15 nazivamo mjernim brojevima, jer su dobivene mjerenjem. Vidimo da se postupak mjerenja duljine svodi na pronalaženje odgovora na pitanje: koliko jedinica duljine sadrži naša duljina između dva drveta? Koraćanjem, cipelama i mjernom vrpcom ustanovili smo da su mjerni brojevi $l_1 = l/[l]_1 = 20$, $l_2 = l/[l]_2 = 60$, $l_3 = l/[l]_3 = 15$, gdje se dakako u sva tri slučaja radi o istoj duljini l .

Mjerne brojeve l_1 , l_2 , l_3 itd. možemo općenito označiti istim slovom bez indeksa, ako umjesto upotrebljenih jedinica $[l]_1$, $[l]_2$ i $[l]_3$ upotrebimo opći simbol jedinice duljine $[l]$, dakle bez indeksa. U tom slučaju gornje tri jednadžbe $l_1 = l/[l]_1$ itd. dobivaju zajednički opći oblik

$$l = \frac{l}{[l]}, \quad (5.2-2)$$

koju možemo riječima izraziti kao jednadžbu

$$\text{mjerni broj duljine} = \frac{\text{duljina}}{\text{jedinica duljine}} \quad (5.2-3)$$

U jednadžbi (5.2-2) mjerni broj l tiskali smo uspravnim slovom, a veličinu l *kurzivnim* (*kosim*) slovom. Tako ćemo mjerne brojeve razlikovati od veličina u citavoj ovoj knjizi.

Umjesto izraza »mjerni broj« češće upotrebljavamo izraz »brojčani iznos«. Prema tome ove dvije riječi znače isto. Izraz »brojčani iznos« potječe otuda što pri upotrebi jedinica u složenijim primjerima najčešće brojčani iznos dobivamo računom, a tek manjim dijelom mjerenjem.

Jednadžbe (5.2-2,3) odražavaju očiglednu činjenicu da je jedinica duljine $[l]$ također duljina, ali tačno određene (odabrane) vrijednosti. Ona može biti veća ili manja, što smo vidjeli na primjeru upotrebe triju jedinica duljine $[l]_1$, $[l]_2$ i $[l]_3$. Zato u uglatu zagrađu stavljamo *kurzivni* znak koji — kako smo već rekli — predstavlja veličinu.

Što vrijedi za veličinu duljina l vrijedi i za svaku drugu veličinu. Na primjer za veličinu vrijeme t dobili bismo u skladu s jednadžbom (5.2-2) $t = t/[t]$, to jest »brojčani iznos vremena = veličina vrijeme: jedinica vremena«. Posve općenito možemo za neku veličinu G (franc. grandeur, njem. Grösse) u skladu sa (5.2-2) ili $t = t/[t]$ pisati

$$G = \frac{G}{[G]} \quad (5.2-4)$$

ili riječima u analogiji s (5.2-3)

$$\text{mjerni broj (brojčani iznos)} = \frac{\text{veličina}}{\text{jedinica}} \quad (5.2-5)$$

Ove dvije jednadžbe možemo izraziti i u obliku

$$\left. \begin{aligned} G &= G[G] \\ \text{veličina} &= \text{brojčani iznos} \times \text{jedinica} \end{aligned} \right\} \quad (5.2-6)$$

od kojega smo i pošli na početku ovog odsječka, gdje smo umjesto općeg simbola veličine G radili s veličinom duljina $l = 20 [l]_1 = 60 [l]_2 = 15 [l]_3$. Ova tri odnosa možemo u skladu sa (5.2—6) napisati u općem obliku $l = 1 [l]$, gdje je $[l]$ opća, još nedefinirana jedinica (još nije odlučeno koliko je velika ta jedinica), a 1 još neodređeni brojčani iznos. Za razliku od opće jedinice $[l]$, jedinice $[l]_1 = \text{korak}$, $[l]_2 = \text{cipela}$, $[l]_3 = \text{metar}$ nazivamo specijalnim jedinicama koje su potpuno određene.

Jednadžba (5.2—6) bit će osnova svim našim daljnjim razmatranjima, pa je stoga valja podrobno razmotriti. Ona nam kaže da se simbol opće veličine G (*kurziv!*) sastoji od umnoška brojčanog iznosa G (uspravni simbol!) i opće jedinice $[G]$. Drugim riječima, da vrijednost veličine iznosi stanoviti broj jedinica. To je posve prirodno i u skladu s načinom kako čovjek misli i računa. Za svakoga ima smisla samo izjava » $l = 15$ metara« koja označuje da je udaljenost između dva drвета 15 puta po jedan metar. Isto tako $m = 92 \text{ kg}$ (čitaj: masa iznosi 92 kilograma) znači da masa npr. nekog čovjeka iznosi isto toliko, koliko i ukupna masa 92 utega od po 1 kilogram, gdje je kilogram masa pariske pramjere (vidi odsječak 3.1.2).

Stoga bismo izraz (5.2—6) zapravo morali pisati sa znakom množenja, dakle $G = G \times [G]$ ili $G = G \cdot [G]$. No to ne činimo zbog jednostavnijeg pisanja i tiskanja jednadžbi, ali i bez znaka množenja uvijek smatramo da on stvarno postoji.

Kako smo već rekli u prošlom odsječku simbol veličine G stvarno označuje još neodređenu vrijednost veličine. Tamo smo razmatrali vrijednost veličine duljina l kojom smo označili razmak između dva drвета. Naravno da je l ostala nepromijenjena bez obzira da li smo je mjerili manjom ili većom jedinicom. To nam je pokazala i jednadžba (5.2—1), koja sadrži očiglednu istinu da je umnožak konkretnog brojčanog iznosa i upotrebljene specijalne jedinice konstantan.

Isto vrijedi i za bilo koju drugu veličinu, pa tako i za našu opću veličinu G koja može predstavljati bilo koju veličinu. Stoga će mjerenje stanovite i tačno određene vrijednosti veličine G (npr. razmak između dva drвета) sa specijalnom jedinicom $[G]_1$ dati brojčani iznos G_1 , a mjerenje jedinicom $[G]_2$ brojčani iznos G_2 . Produkti $G_1 [G]_1$ i $G_2 [G]_2$ bit će međusobno jednaki. Do toga lako dolazimo pomoću opće jednadžbe (5.2—6). Budući da je ona općeg značaja možemo je jednom primijeniti na jedinicu $[G]_1$, a drugi puta na jedinicu $[G]_2$ čime dobivamo

$$G = G_1 [G]_1 = G_2 [G]_2. \quad (5.2—7)$$

U našem primjeru razmaka drвета imali bismo prema tome $l = l_1 [l]_1 = l_2 [l]_2 = l_3 [l]_3$, što usporedbom s našim rezultatima mjerenja u izrazu (5.2—1) znači da su brojčani iznosi $l_1 = 20$, $l_2 = 60$, $l_3 = 15$. Budući da je jedinica $[l]_1 = \text{korak}$ veća od jedinice $[l]_2 = \text{cipela}$, to je brojčani iznos $l_1 = l/[l]_1$ manji od brojčanog iznosa $l_2 = l/[l]_2$. To sadrži i jednadžba (5.2—7) ako je napišemo u obliku

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{[G]_2}{[G]_1}, \quad (5.2—8)$$

koji znači: brojčani iznosi mjerenja jedne te iste veličine sa dvije različito velike jedinice odnose se obrnuto nego pripadne jedinice kojima je obavljeno mjerenje. U našem primjeru mjerenja duljina imamo $l_1/l_2 = [l]_2/[l]_1$, odnosno konkretno $20/60 = \text{cipela/korak}$.

Označimo li omjer G_1/G_2 sa $u = G_1/G_2$, od (5.2—8) dobivamo $[G]_2 = u [G]_1$ ili u našem primjeru $[l]_2 = u [l]_1$, gdje je $u = l_1/l_2 = 1/3$, što znači da je $[l]_2 = [l]_1/3$ ili $[l]_1 = 3 [l]_2$, odnosno konkretno $[l]_1 = \text{korak} = 3 \text{ cipele} = 3 [l]_2$.

Analogno možemo pisati i $l_1 [l]_1 = l_3 [l]_3$, gdje je $[l]_3 = \text{metar}$. U jednadžbi (5.2—1) napisali smo da je $l_3 = 15$, pa je stoga $20 [l]_1 = 15 [l]_3$, dakle $[l]_1 = [l]_3 \cdot 15/20 = [l]_3 \cdot 3/4$. Kako je $[l]_1 = \text{korak}$, a $[l]_3 = \text{metar}$, to je $[l]_1 = \text{korak} = 0,75 \text{ metra}$, jer je $0,75 = 3/4$. Budući da smo prije ustanovili odnos među jedinicama $[l]_2 = \text{cipela} = [l]_1/3 = \text{korak}/3$, to je dakle $[l]_2 = 0,75 \text{ m}/3 = 0,25 \text{ m}$ gdje je m kratica za metar.

Ovi su nam primjeri pokazali da jednadžba (5.2—8) može poslužiti za određivanje međusobnih odnosa različito velikih jedinica. Ona je proizašla iz naše osnovne jednadžbe (5.2—6) o kojoj zapravo diskutiramo. To naše ishodište dobiva trivijalan oblik

$$G = [G],$$

ako u (5.2—6) stavimo brojčani iznos $G = 1$. Što to znači? Gornja jednakost vrijednosti veličine G i njene jedinice $[G]$ znači da smo stanovitu vrijednost veličine G odabrali za jedinicu. Na primjer za pariški prametar vrijedi jednadžba $l_0 = [l]_0$, ako smatramo da je $[l]_0 = \text{pariski prametar}$. No za nacionalni prametar neke države to više neće vrijediti, već će brojčani iznos l_n u jednadžbi $l_n = l_n [l]_0$ biti za koju milijuntinku veći ili manji od broja jedan, jer se za toliko duljina l_n nacionalne pramjere razlikuje od duljine $l_0 = 1 [l]_0$ glavne, donedavno jedino mjerodavne pariške pramjere.

Time smo došli na pitanje mjerenja različitih vrijednosti veličina istom jedinicom. Zamislimo da dvije (vrijednosti) veličine, na primjer G_1 i G_2 , želimo izmjeriti istom jedinicom $[G]$. Odgovor nam opet daje temeljna jednadžba (5.2—6) koju jednom primjenjujemo na veličinu $G_1 = G_1 [G]$, a drugi puta na veličinu $G_2 = G_2 [G]$. Budući da je jedinica u obje ove jednadžbe ista, međusobna podjela tih izraza daje

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{G_1}{G_2}, \quad (5.2—9)$$

tj. veličine se odnose jednako kao i pripadni brojčani iznosi.

Jednadžba (5.2—9) ima međutim mnogo dalekosežnije značenje. Ona kaže da je omjer dviju istovrsnih veličina G_1 i G_2 uvijek čisti broj, jer omjer brojčanih iznosa G_1 i G_2 opet daje čisti broj. Neka se umjesto o dvije opće veličine G_1 i G_2 radi o dvije vrijednosti veličine duljine l_1 i l_2 . U tom je slučaju

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2} \text{ ili } \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2}{l_1},$$

gdje dakako kurzivni znakovi l_1 i l_2 označuju veličine, a uspravni simboli l_1 i l_2 brojčane iznose. U prošlom smo odsječku imali $l_1 = 20$ koraka udaljenost između dva drveta, a $l_2 = 170\,000$ koraka udaljenost između Zagreba i Ljubljane. Njihov omjer daje

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{170\,000 \text{ koraka}}{20 \text{ koraka}} = 8\,500,$$

jer smo jedinicu korak kratili.

Isti bismo rezultat dobili kad bismo obje veličine izrazili jedinicom metar = korak $\times 4/3$, što bi uz pomoć korak = metar $\times 3/4$ dalo $l_2 = 127\,500 \text{ m}$, $l_1 = 15 \text{ m}$:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{127\,500\text{ m}}{15\text{ m}} = 8\,500.$$

Jednaki bi rezultat nastao i kad bismo obje duljine izrazili jedinicom cipela ili bilo kojom drugom jedinicom duljine.

5.3. Veličinske i brojčane jednadžbe

Površinu pravokutnika definiramo umnoškom duljina dviju različito dugačkih stranica. Označimo li duljinu jedne stranice sa a , a duljinu druge stranice sa b , onda površinu A izračunavamo jednadžbom

$$A = a b, \quad (5.3-1)$$

gdje između slova a i b zamišljamo znak množenja. *Kurzivnim* slovima A , a i b istakli smo da ta slova označuju veličine: A površinu, a i b duljinu. Jednadžbe u kojima simboli označuju veličine nazivamo veličinskim jednadžbama. Katkada ih nazivamo i univerzalnim jednadžbama, jer one ne ovise o tome kakvim jedinicama u njih uvrstavamo vrijednosti veličina.

To ćemo vidjeti na nekoliko primjena jednostavne veličinske jednadžbe (5.3—1). Neka u ovom slučaju duljina jedne stranice pravokutnika iznosi $a = 2$ metra, dakle $a = 2\text{ m}$, a duljina druge stranice $b = 1,219\,2\text{ m}$. Vrijednost površine A našeg pravokutnika izračunat ćemo pomoću (5.3—1) tako da u nju umjesto općeg simbola duljine jedne stranice a uvrstimo konkretnu vrijednost $a = 2\text{ m}$, a umjesto općeg simbola druge stranice b uvrstimo njenu konkretnu vrijednost $b = 1,219\,2\text{ m}$. Tako dobivamo

$$A = a \cdot b = 2\text{ m} \cdot 1,219\,2\text{ m}.$$

Znak množenja postoji i između brojčanih iznosa i jedinica (dakle $2 \cdot \text{m}$ i $1,219\,2 \cdot \text{m}$), ali to ne naglašavamo posebno. Do konačnog rezultata dolazimo tako da međusobno pomnožimo sva četiri faktora, dakle $A = 2 \cdot 1,219\,2 \cdot \text{m} \cdot \text{m}$. Množenje brojčanih iznosa daje $2 \cdot 1,219\,2 = 2,4384$, a množenje dviju jednakih jedinica duljine $\text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2 =$ kvadratni metar. Prema tome površina pravokutnika iznosi

$$A = 2,438\,4\text{ m}^2.$$

U drugom slučaju moramo izračunati površinu pravokutnika sa stranicama ovih duljina: $a = 2\text{ m}$, $b = 4\text{ foot}$. Jedinicu duljine foot upotrebljavaju Amerikanci i Englezi. Na engleskom ona znači »stopa« (trag stopala koji u mekoj zemlji ostavlja noga) otprilike ono što smo mi u odsječku 5.1 zamišljali pod nazivom jedinice duljine »cipela«. Do ovih čudnih podataka $a = 2\text{ m}$, $b = 4\text{ foot}$ moglo je doći tako da je neki Evropljanin mjerio stranicu a mjernom trakom na kojoj su bili ubilježeni metri, a istovremeno je neki Englez mjerio stranicu b angloameričkom mjernom trakom koja je označena engleskim stopama (foot).

I u ovom slučaju možemo mirne duše u (5.3—1) uvrstiti na mjesto a i b izmjerene vrijednosti duljina stranica. Tako dobivamo

$$A = 2\text{ m} \cdot 4\text{ foot} = 8\text{ m} \cdot \text{foot}. \quad (5.3-2)$$

Tu nam je račun zapeo jer se u jednadžbi pojavio umnožak dviju različito velikih jedinica duljine. Nastaviti možemo na nekoliko načina. Evropljanin će foot izraziti metrom, Englez će, obrnuto, metar izraziti footom, a netko će treći možda možda i metar i foot izraziti nekom trećom jedinicom duljine. Mi ćemo se poslužiti prvim načinom. U poglavlju B imamo zabilježeno da je

$$\text{foot} = 0,3048 \text{ metara.}$$

Stavimo li dakle na mjesto foot u jednadžbi (5.3—2) 0,3048 m, dobivamo dalje

$$A = 8 \text{ m} \cdot 0,3048 \text{ m} = 2,4384 \text{ m}^2.$$

Vidimo da smo dobili isti rezultat kao i ranije, što znači da se u stvari radi o istom pravokutniku, samo je prilikom evropsko-engleskog mjerenja njegovih stranica duljina b izmjerena jedinicom foot. Vezu između jedinica $\text{foot} = 0,3048 \text{ m}$ mogli smo upotrebiti i ranije, pa bismo imali $b = 4 \text{ foot} = 4 \cdot 0,3048 \text{ m} = 1,2192 \text{ m}$, što bi pomoću $A = a \cdot b = 2 \text{ m} \cdot 1,2192 \text{ m} = 2,4384 \text{ m}^2$ direktno dalo vrijednost površine pravokutnika u metarskoj jedinici m^2 .

Iz pokazanog načina računanja veličinskom jednadžbom (5.3—1) vidimo da smo umjesto simbola veličina a i b u konkretnom računu stavljali umnožak brojčanog iznosa i jedinice, jer u izrazu $a = 2 \text{ m}$ slovo a označuje veličinu, 2 brojčani iznos, a m jedinicu. To je potpuno u skladu s našom osnovnom relacijom (5.2—6) koja sa $G = G[G]$ prikazuje u općem obliku da je veličina G jednaka umnošku brojčanog iznosa G (uspravno slovo) i jedinice $[G]$. Prema tome i našu veličinu »duljina stranica a « možemo izraziti u općem obliku $a = a[a]$, gdje je a opći simbol za duljinu prve stranice, a opći simbol brojčanog iznosa, te $[a]$ simbol opće jedinice duljine kojom mjerimo duljinu prve stranice. U našem je konkretnom slučaju $a = 2 \text{ m}$, dakle brojčani iznos $a = 2$, dok je jedinica duljine $[a] = \text{m}$.

Posve je analogno s veličinama b i A . Stoga u skladu s općom jednadžbom $G = G[G]$ možemo pisati u općem, još nedefiniranom obliku

$$A = A[A], \quad a = a[a], \quad b = b[b], \quad (5.3—3)$$

gdje *kurzivna* slova opet predstavljaju veličine, a uspravna brojčane iznose. Uvrstimo li ove tri jednadžbe u veličinsku jednadžbu površine (5.3—1) dobivamo

$$A[A] = a[a] b[b]. \quad (5.3—4)$$

Znamo da su $[a]$ i $[b]$ dvije različite jedinice duljine, dok je $[A]$ jedinica površine. Umnožak $[a][b]$ takođe predstavlja neku jedinicu površine (to može biti na primjer $\text{m} \cdot \text{foot}$, ako specijalno odaberemo $[a] = \text{m}$, $[b] = \text{foot}$), koja je različita od jedinice površine $[A]$. Stoga možemo uvesti količnik u , čisti broj, koji kaže koliko je puta jedinica $[A]$ veća od jedinice površine $[a][b]$, dakle

$$[A] = u[a][b]. \quad (5.3—5)$$

Uvrstimo li to u izraz (5.3—4), slijedi

$$A = \frac{1}{u} ab. \quad (5.3—6)$$

U ovoj jednadžbi svi su simboli uspravni, oni predstavljaju brojčane iznose. Zato se takva jednadžba naziva brojčanom jednadžbom. Izraz (5.3—6) još je nedefinirana brojčana jednažba, jer ne znamo koliko iznosi količnik u , koji možemo odrediti iz jednadžbe među jedinicama (5.3—5).

Izračunajmo koliko iznosi količnik u za primjer evropsko-engleskog mjerenja površine pravokutnika. Tamo smo stranicu a mjerili jedinicom duljine $[a] = m$, a stranicu b jedinicom $[b] = \text{foot}$. Površinu smo na kraju izrazili jedinicom površine $[A] = m^2$. Stavimo li ove tri konkretne jedinice u jednadžbu (5.3—5) dobivamo količnik u među jedinicama površine

$$u = \frac{[A]}{[a][b]} = \frac{m^2}{m \cdot \text{foot}} = \frac{m}{0,3048 \text{ m}} = \frac{1}{0,3048},$$

jer je $\text{foot} = 0,3048 \text{ m}$. Uvrstimo li izračunati koeficijent $1/u = 0,3048$ u opću brojčanu jednadžbu (5.3—6) slijedi

$$A = 0,3048 a b. \quad (5.3—7)$$

Uspravni simboli ove brojčane jednadžbe ističu da simboli u njoj označuju brojčane iznose i to redom: A broj kvadratnih metara, a broj metara, te b broj foota. Stoga pomoću ove brojčane jednadžbe dobivamo ispravan brojčani iznos površine pravokutnika samo u slučaju kad u nju uvrštavamo brojčane iznose veličina A , a i b izmjerene navedenim jedinicama, dakle

$$A = A/m^2, a = a/m, b = b/\text{foot} \quad (5.3—8)$$

što je u skladu s preinačenim općim jednadžbama (5.3—3), ako u njih stavimo specijalizirane jedinice $[A] = m^2$, $[a] = m$, $[b] = \text{foot}$.

Budući da duljine iznose $a = 2 \text{ m}$, $b = 4 \text{ foot}$, to su brojčani iznosi prema (5.3—8) $a = 2 \text{ m}/m = 2$, $b = 4 \text{ foot}/\text{foot} = 4$, što uvrštenjem u brojčanu jednadžbu (5.3—7) daje

$$A = 0,3048 \cdot 2 \cdot 4 = 2,4384.$$

O rezultatu, brojčanom iznosu površine 2,4384, nemamo nikakve predodžbe tako dugo dok se ne prisjetimo da je prema (5.3—8) $A = A/m^2 = 2,4384$, dakle $A = A m^2 = 2,4384 m^2$, gdje kurzivni simboli označuju veličine a uspravni brojčane iznose.

Punim opravdanjem možemo se upitati zašto se brojčane jednadžbe uopće upotrebljavaju kad one daju nepotpuni rezultat (bez jedinice), a osim toga dobivaju čudan oblik kao (5.3—7) koji vrijedi samo za brojčane iznose A , a , b kad oni predstavljaju broj jedinica m^2 , m i foot ? Zašto se uvijek ne primijenjuju univerzalne veličinske jednadžbe kao na primjer $A = a b$, koja ne ovisi o izboru jedinica i u kojoj se s jedinicama automatski računa posve jednako kao i s brojkama?

Razlozi su uglavnom već stvar historije. U prošlosti su naime ušenjaci smatrali da se pod simbolima u jednadžbama mogu razumijevati samo brojevi, te da jedinice nemaju pristupa u jednadžbe kao ravnopravni faktori. Stoga bi u prošlosti naša jednadžba 20 koraka = 60 cipela izazvala zgražanje, iako ju je s drugačijim jedinicama upotrebljavao i sam veliki matematičar *C. F. Gauss*, kako ćemo vidjeti u odsječku E.3.5. Jednadžba korak-cipela naime samo je specijalni oblik jed-

nadžbe (5.2—7) ili (5.2—8) koju moramo uvijek upotrebiti ako želimo napisati u kakvom su međusobnom odnosu dvije istorodne jedinice tj. dvije različito velike jedinice iste veličine. Po čistom »brojčanom nazoru« uopće ne bismo mogli napisati jednadžbu »metar = 100 · centimetar«, jer to je samo specijaliziran veličinska jednadžba $G = G$ budući da je $G = G_1 [G]_1$ i $G = G_2 [G]_2$, gdje dakako koso slovo G predstavlja veličinu, a i jedinice $[G]_1$ i $[G]_2$ su stanovite vrijednosti veličina.

Stoga strogi brojčani nazor nikada nije dosljedno proveden. On bi uzrokovao i niz drugih teškoća koje nisu u skladu sa željama da pomoću jednadžbi računamo pouzdano, jednostavno i zorno. Tako u dosljednom rječniku brojčanog nazora mjerenje neke duljine metrom ne znači »ustanoviti odnos mjerene duljine i metra«, već »duljini pridijeliti jedan broj uz pretpostavku da je duljini metarskog štapa pridijeljen broj 1«! Danas nemamo vremena za tako komplicirani način izražavanja kad bismo i htjeli misliti apstraktno matematički, a ne fizikalno-veličinski, kako stvarno misli svaki normalan čovjek.

Ostaci te historije nalaze se još i danas u nekim stručnim knjigama i udžbenicima. S tim rudimentima još ćemo se mnogo puta susresti u odsječcima B.13, D.8 i E.7. Tamo doduše nećemo naći brojčanu jednadžbu (5.3—7) geometrije koju smo izveli samo radi primjera, ali ćemo ih naći na mnogo kompliciranijim područjima gdje su one prouzrokovale, i još uvijek uzrokuju, niz nesporazuma i grešaka.

Pa i u najzornijoj grani nauke, u geometriji, nalazimo brojčane jednadžbe. Ovdje ćemo jednu takvu pokazati kao još živi primjer. Znamo da površina kruga promjera d iznosi

$$A = d^2 \pi / 4. \quad (5.3—9)$$

Umjesto omjera $\pi/4$ možemo uvesti kraticu $Z = \pi/4$, što je apsolutno tačan broj, ako π navedemo beskonačno daleko. Sa $Z = \pi/4$ gornja jednadžba glasi

$$A = Z d^2. \quad (5.3—10)$$

Obje su jednadžbe dakako univerzalne veličinske jednadžbe u kojima kurzivni simboli A i d predstavljaju veličine. Obje su jednadžbe dakle nezavisne o izboru jedinica kojima mjerimo veličine A i d .

Po načelu $G = G [G]$, tj. »veličina = brojčani iznos $\times$ jedinica«, veličinsku jednadžbu (5.3—10) možemo zbog $A = A [A]$ i $d = d [d]$ napisati u obliku

$$A [A] = Z d^2 [d]^2, \quad (5.3—11)$$

gdje uspravni simboli A , d označavaju brojčane iznose kad se veličine A i d mjere jedinicama površine i duljine $[A]$ i $[d]$.

Vezu između dviju jedinica površine možemo izraziti na način

$$[A] = u [d]^2, \quad (5.3—12)$$

koji smo u drukčijem obliku već imali u jednadžbi (5.3—5). Stavimo li (5.3—12) u (5.3—11) dobivamo brojčanu jednadžbu

$$A = n d^2, \quad (5.3—13)$$

gdje je $n = Z/u$, $Z = \pi/4$, a $A = A/[A]$, $d = d/[d]$.

Izračunajmo koliko iznosi brojka n u jednom stvarno upotrebljavanom primjeru. U Americi se promjeri okruglih žica često mjere jedinicom »mil«. Ta jedinica je 1000 puta manja od inča (inč = palac). Budući da je inch = 2,54 cm, to je mil = $2,54 \cdot 10^{-3}$ cm. Neka $[Z]$ iz gornjih jednadžbi bude jednak milu, dakle $[Z] = \text{mil} = 2,54 \cdot 10^{-3}$ cm. Površinu presjeka žica mjere katkada Amerikanci jedinicom »circular mil« (cml) koja je vrlo sitna, cml = $5,067 \cdot 10^{-6}$ cm². Neka jedinica $[A]$ iz jednadžbi (5.3—11, 12, 13) bude baš cml, dakle $[A] = \text{cml} = 5,067 \cdot 10^{-6}$ cm². U tom je slučaju prema jednadžbi (5.3—12) koeficijent u :

$$u = \frac{[A]}{[Z]^2} = \frac{\text{cml}}{\text{mil}^2} = \frac{5,067 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2}{2,54^2 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2} = 0,785 \dots = \pi/4.$$

Budući da je i $Z = \pi/4$, to je prema $n = Z/u = 1$, pa dakle brojčana jednadžba (5.3—13) prelazi zbog $n = 1$ u oblik

$$A = d^2. \quad (5.3—14)$$

Prema tome se brojčani iznos površine presjeka izražen u cml dobiva tako da se izračuna kvadrat brojčanog iznosa promjera žice izražen u milima! Kad ne bismo znali da je tome tako mislili bismo da (5.3—14) predstavlja jednadžbu za izračunavanje površine kvadrata sa stranicama duljine d , a ne brojčanu jednadžbu površine kruga koju u ispravnom i univerzalnom veličinskom obliku imamo zapisanu u izrazu (5.3—9).

5.4. Prijelaz od brojčanih na veličinske jednadžbe

Kad se upotrebljava literatura koja operira brojčanim jednadžbama, kruto vezanima samo na tačno fiksirane jedinice, često se javlja potreba za njihovom preinakom u univerzalne veličinske jednadžbe koje vrijede za bilo kakve jedinice, koje dakle ne ovise o izboru jedinica. Takve preinake ili »prijelazi« katkada su nepohodni, jer tek iz veličinskih jednadžbi čitatelj temeljito shvaća izloženo gradivo; u prirodi je čovjeka da misli u duhu veličina, a ne u duhu apstraktnih brojeva. Konačno veličinske su jednadžbe posve prirodne i u skladu sa zdravim razumom u dobrom smislu te riječi. Prirodni zakoni naime vrijede bez obzira na to što mi o njima mislili, pa je prema tome isto toliko neprirodno da njihov opis — jednadžbe ovisi o primjeni ove ili one jedinice.

Korisno je stoga znati kako se praktično obavlja prijelaz od nepotpunih brojčanih jednadžbi na univerzalne veličinske. To ćemo obraditi u ovom odsječku, gdje ćemo najprije utvrditi opće odnose između veličinskih i brojčanih jednadžbi.

U prirodnim zakonima pojedine veličine na najrazličitiji način ovise o ostalim veličinama. Tako je na primjer brzina $v = l/t$, sila $F = ma$ gdje je a ubrzanje, kinetička energija $W = mv^2/2$, gustoća energije magnetskog polja $w = B^2/2\mu$, volumen kugle $V = r^3 4\pi/3$, površina kruga $A = d^2\pi/4$ itd. Sve su to veličinske jednadžbe koje možemo općenito prikazati općom veličinskom jednadžbom

$$G = Z A^a B^b C^c \dots \quad (5.4—1)$$

Njome smo neku opću veličinu G definirali pomoću potencija poznatih veličina $A, B, C, \dots$. U njoj su eksponenti a, b, c , uvijek brojevi (vidi odsječak 6.2).

I faktor Z je broj, na primjer $1/2$ u izrazima za energiju, $4\pi/3$ u veličinskoj jednadžbi obujma, $\pi/4$ u izrazu za površinu. Ovi su brojevi uvijek apsolutno tačni brojevi koji nemaju mjerne greške, već su nastali kao plod infinitezimalnih definicija veličina.

Po načelu $G = G[G]$, tj. »veličina = brojčani iznos $\times$ jedinica«, svaku od veličina u (5.4—1) možemo razložiti u brojčani iznos i jedinicu. Pritom su G i $[G]$ općeg karaktera tako dugo dok jedinicu $[G]$ ne izjednačimo s nekom tačno dogovorenom specijalnom jedinicom, a brojčani iznos G utvrdimo mjerenjem tom jedinicom. Prema tome možemo općenito pisati

$$G = G[G], A = A[A], B = B[B], C = C[C], \quad (5.4-2)$$

gdje *kurzivni* znakovi predstavljaju veličine, a uspravni brojčane iznose. Uvrstimo li (5.4—2) u veličinsku jednadžbu (5.4—1) slijedi

$$G[G] = Z A^a [A]^a B^b [B]^b C^c [C]^c \dots \quad (5.4-3)$$

Iz ove jednadžbe možemo izdvojiti opću jednadžbu među jedinicama

$$[G] = u [A]^a [B]^b [C]^c \dots \quad (5.4-4)$$

kako smo već radili u odsječcima 5.2 i 5.3.

Sa (5.4—4) izraz (5.4—3) dobiva posve brojčani oblik

$$G = n A^a B^b C^c, \quad (5.4-5)$$

gdje n predstavlja kraticu

$$n = Z/u, \text{ odnosno } Z = n u. \quad (5.4-6)$$

Uspravni simboli u (5.4—5) naglašuju da se radi o brojčanoj jednadžbi posve općeg oblika budući da još nije definirano koliko iznosi broj n . Taj broj osim o Z ovisi i o količniku jedinica u . Usporedimo li tu brojčanu jednadžbu s univerzalnom veličinskom (5.4—1) vidimo da se ona po obliku razlikuje samo u broju n , jer i Z je čist, apsolutno tačan broj. U kasnijim ćemo razmatranjima (osobito u odsječku E.7) međutim vidjeti da brojčane jednadžbe oblika (5.4—5) znadu »prugutati« čitave prirodne konstante, koje otkrivamo tek pomnom analizom.

Ograničenu vrijednost brojčanih jednadžbi tipa (5.4—5) otkrivamo po količniku n koji se zbog $n = Z/u$ razlikuje od prirodnog faktora Z . Takve smo primjere već imali: u brojčanoj jednadžbi (5.3—7) stoji $n = 0,3048$, dok je u odgovarajućoj veličinskoj $A = ab$ faktor $Z = 1$. Obrnuta je situacija u brojčanoj jednadžbi (5.3—14), gdje je $n = 1$, dok u pripadnoj veličinskoj jednadžbi (5.3—9) prirodni količnik iznosi $Z = \pi/4$. Ove je razlike uzrokovala nejednakost $u \neq 1$, jer u brojčanim jednadžbama opći simboli predočuju brojke koje su brojčani iznosi veličina izraženih kruto određenim jedinicama. Ako u takve jednadžbe uvrstimo brojčane iznose veličina izražene nekim drugim jedinicama dobivamo posve kriva rješenja.

Tako na primjer brojčana jednadžba (uspravni simboli!)

$$A = 0,0314 r^2 \quad (5.4-7)$$

vrijedi samo onda kad na mjesto simbola r za polumjer kruga stavimo broj milimetara, pa onda na mjestu A dobijemo broj kvadratnih centimetara. Uvjerimo se na primjeru. Neka veličina polumjer kruga iznosi $r = 100 \text{ mm} = r \cdot \text{mm}$. To znači da je brojčani iznos (uspravno slovo) $r = 100$.

Uvrstimo li $r = 100$ u brojčanu jednadžbu (5.4—7) nastaje

$$A = 0,0314 \cdot 100^2 = 314.$$

Prije smo rekli da je brojčani iznos površine izražen sa cm^2 . To znači da je u skladu sa $G = G/[G]$ u ovom slučaju $A = A/\text{cm}^2$, dakle veličina površina kruga $A = A \text{ cm}^2$. Budući da je prema gornjemu $A = 314$, to je $A = A \text{ cm}^2 = 314 \text{ cm}^2$.

Račun ćemo za svaku sigurnost kontrolirati veličinskim računom. Za tu svrhu moramo najprije imati veličinsku jednadžbu površine kruga. Izvest ćemo je iz brojčane (5.4—7) pomoću

$$A = A/\text{cm}^2, \quad r = r/\text{mm},$$

jer smo rekli da je A brojčani iznos veličine A izražene u cm^2 , a r brojčani iznos veličine polumjer r izražene u milimetrima. Unesemo li gornje relacije u (5.4—7) slijedi

$$\frac{A}{\text{cm}^2} = 0,0314 \left(\frac{r}{\text{mm}} \right)^2, \quad (5.4—8)$$

gdje *kosi* simboli predstavljaju veličine. Gornji izraz možemo u našem primjeru preoblikovati u

$$A = r^2 \frac{0,0314 \text{ cm}^2}{\text{mm}^2} = r^2 \cdot 0,0314 \cdot 100,$$

jer znamo da je $\text{cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$. Umnožak $0,0314 \cdot 100 = 3,14$, a to je približno napisan faktor $\pi = 3,14159 \dots$. Prema tome gornja jednadžba konačno glasi

$$A = \pi r^2,$$

a to je univerzalna veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo koje jedinice veličina r i A .

Sada ćemo pomoću nje izračunati površinu našeg kruga polumjera $r = 100 \text{ mm}$. Uvrštenjem slijedi

$$A = \pi (100 \text{ mm})^2 = 31\,400 \text{ mm}^2 = 314 \text{ cm}^2,$$

jer je $\text{cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$. Tek sada smo sigurni da je prijašnji račun pomoću brojčane jednadžbe (5.4—7) zaista dao ispravan rezultat. U ovom je slučaju $Z = \pi$, a $n = 0,0314$, pa je dakle prema (5.4—6) $u = Z/n = \pi/0,0314 = 100$. Stvarno je u skladu s općom jednadžbom između jedinica (5.4—4) u našem primjeru $[A] = u[l]^2$, dakle $\text{cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$.

Tehniku prijelaza od brojčanih na veličinske jednadžbe još ćemo bolje upoznati na ovom primjeru. Brojčana jednadžba

$$P = 0,0037 F v, \quad (5.4-9)$$

u kojoj uspravni simboli P , F , v redom predstavljaju brojčane iznose veličina snaga P , sila F i brzina v vrijedi samo onda kada se u nju uvrstavaju brojčani iznosi izraženi redom jedinicama KS (konjska snaga), kp (kilopond) i km/h. Podrobnije informacije o tim heterogenim jedinicama čitatelj može naći u odsječcima B.7.4. i B.4.2.

U skladu s osnovnom jednadžbom $G = G/[G]$, tj. »brojčani iznos = veličina: jedinica«, brojčane iznose P , F , v možemo izraziti omjerima veličina i jedinica

$$P = \frac{P}{\text{KS}}, F = \frac{F}{\text{kp}}, v = \frac{v}{\text{km/h}} \quad (5.4-10)$$

Ovdje dakako *kurzivna* slova opet predstavljaju veličine, a uspravna brojčane iznose u navedenim jedinicama. Uvrstimo li (5.4-10) u brojčanu jednadžbu (5.4-9) dobivamo

$$\frac{P}{\text{KS}} = 0,0037 \frac{F}{\text{kp}} \frac{v}{\text{km/h}},$$

odnosno ako KS prebacimo na desnu stranu

$$P = 0,0037 \frac{F}{\text{kp}} \frac{v}{\text{km/h}} \text{KS}. \quad (5.4-11)$$

Za daljnji račun je prikladno da se simboli veličina odvoje od kombinacije jedinica. Tako dobivamo

$$P = Z F v, \text{ gdje je } Z = 0,0037 \frac{\text{KS} \cdot \text{h}}{\text{kp} \cdot \text{km}} \quad (5.4-12)$$

Preostaje nam da izračunamo koliko iznosi broj Z , koji smo ranije nazvali prirodnim faktorom i posebno ga istakli u općoj veličinskoj jednadžbi (5.4-1). Da bismo to učinili moramo raspetljati omjer jedinica u gornjem izrazu za Z .

Znamo da sat (h) sadrži 3600 sekundi (s), dakle je $h = 3600 \text{ s}$. Dalje znamo da je $\text{km} = 1000 \text{ m}$. Konjska snaga definirana je s $\text{KS} = 75 \text{ kpm/s}$ (vidi odsječak B.7.4). Uvrstimo li te odnose među jedinicama u izraz za Z dobivamo

$$Z = \frac{0,0037 \cdot 75 \text{ kpm}^{-1} \cdot 3600 \text{ s}}{\text{kp} \cdot 1000 \text{ m}} = 0,0037 \cdot 75 \cdot 3,6 = 1.$$

Stavimo li $Z = 1$ u lijevu, veličinsku jednadžbu (5.4-12) konačno imamo

$$P = F v, \quad (5.4-13)$$

a to je univerzalna veličinska jednadžba koja je u skladu s jednom od definicija snage, koja kaže da je snaga umnožak sile i brzine.

Poslužimo se gornjom jednadžbom u jednom stvarnom primjeru. Neka sila iznosi $F = 100 \text{ newtona} = 100 \text{ N}$, a brzina $v = 10 \text{ foot/s}$. Uvrstimo li ove vrijednosti u (5.4-13), dobivamo

$$P = 100 \text{ N} \cdot 10 \text{ foot/s} = 1000 \text{ N} \cdot \text{foot/s}.$$

Otprije znamo da je foot = 0,304 8 m, pa slijedi dalje

$$P = 1000 \text{ N} \cdot 0,304 8 \text{ m/s} = 304,8 \text{ W},$$

jer je W = watt = Nm/s (vidi odsječak B.3).

5.5. Prilagođene veličinske jednadžbe

Prilikom ponavljanja istovrsnih računa često je prikladno upotrebljavati takozvane prilagođene veličinske jednadžbe. U tim jednadžbama simboli predstavljaju veličine, ali su simboli veličina odmah podijeljeni s određenim jedinicama u kojima su priređene vrijednosti pojedinih veličina koje omogućuju proračun. Budući da se prilagođene veličinske jednadžbe mijenjaju od slučaja do slučaja najbolje je da ih objasnimo s nekoliko primjera.

U odsječku 5.3 imali smo slučaj brojčane jednadžbe površine kruga $A = d^2$, u kojoj uspravni simboli označuju brojčane iznose veličina površine kruga A i polumjer kruga r izražene jedinicama cml (circular mil) i mil. U skladu s osnovnom relacijom $G = G/[G]$ za ove brojčane iznose možemo pisati $A = A/\text{cml}$ i $d = d/\text{mil}$, gdje su A i d veličine. Stavimo li to u brojčanu jednadžbu $A = d^2$ dobivamo

$$\frac{A}{\text{cml}} = \left(\frac{d}{\text{mil}} \right)^2 \text{ ili } A = \left(\frac{d}{\text{mil}} \right)^2 \text{ cml} \quad (5.5-1)$$

Kosi simboli A i d upozoravaju na to da se radi o veličinama.

Neka promjer žice iznosi $d = 100 \text{ mil}$. Uvrštenje u desnu jednadžbu daje

$$A = \left(\frac{100 \text{ mil}}{\text{mil}} \right)^2 \text{ cml} = 100^2 \text{ cml} = 10\,000 \text{ cml}.$$

Prema tome smo dobili ispravan, veličinski izraženi rezultat kao produkt brojčanog iznosa i jedinice.

Dobiveni rezultat možemo kontrolirati veličinskim računom. Budući da je $\text{mil} = 2,54 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ (vidi odsječak 5.3), to veličinska jednadžba površine kruga sa $d = 100 \text{ mil} = 0,254 \text{ cm}$ daje $A = d^2 \pi/4 = 0,254^2 \text{ cm}^2 \pi/4 = 0,05067 \text{ cm}^2$. Prije smo pomoću (5.5-1) izračunali $A = 10\,000 \text{ cml}$. Budući da je $\text{cml} = 5,067 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2$, to je $A = 10^4 \text{ cml} = 10^4 \cdot 5,067 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 = 0,05067 \text{ cm}^2$. Dobili smo dakle isti rezultat.

Neke smo prilagođene veličinske jednadžbe usput već izveli u prošlim odsječcima. Tako na primjer u (5.4-8) simboli A i r predstavljaju veličine. One su podijeljene jedinicama cm^2 i mm kojima je ta jednadžba prilagođena.

Isto je s prilagođenom veličinskom jednadžbom (5.4-11) u kojoj su veličine F i v prilagođene jedinicama kp i km/h , a snaga se dobiva u KS. Neka je na primjer $F = 10\,000 \text{ kp}$ i $v = 40 \text{ km/h}$ što znade biti slučaj kod željezničke lokomotive. Uvrstimo li umjesto simbola veličina F i v ove vrijednosti u (5.4-11) dobivamo

$$P = 0,0037 \frac{10\,000 \text{ kp}}{\text{kp}} \cdot \frac{40 \text{ km/h}}{\text{km/h}} \text{ KS},$$

odakle dalje slijedi

$$P = 0,0037 \cdot 10\,000 \cdot 40 \text{ KS} = 1480 \text{ KS}.$$

Prilagođene veličinske jednadžbe možemo izvesti na dva načina. Ako imamo brojčanu jednadžbu onda u nju umjesto brojčanog iznosa G stavimo omjer veličine G i jedinice $[G]$, $G = G/[G]$. Tako smo učinili pri izvodu prilagođene veličinske jednadžbe (5.5—1).

Ako izvodimo prilagođenu jednadžbu iz veličinske onda opći recept na primjeru (5.4—1) glasi: »Veličinsku jednadžbu podijeli s jednadžbom među jedinicama«. To znači da treba (5.4—1) podijeliti sa (5.4—4) što konačno daje

$$G = n \left(\frac{A}{[A]} \right)^a \left(\frac{B}{[B]} \right)^b \left(\frac{C}{[C]} \right)^c \dots [G],$$

gdje je jedinica $[G]$ već prebačena na desnu stranu, a prema (5.4—6) je $n = Z/u$. Naravno da umjesto općih jedinica moramo primijeniti konkretne, izračunati u i pomoću njega broj n . Na primjer u prilagođenoj veličinskoj jednadžbi (5.4—11) taj broj je $n = 0,0037$, a on je ujedno zbog $Z = 1$ jednak $1/u = n$.

6. PRIMJENA VELIČINSKOG RAČUNA

6.1. Plinska konstanta nepoznatog plina

U nekoj engleskoj termodinamici pronašli smo ovu jednadžbu stanja za neki plin:

$$pV = 0,3701 mT, \quad (6.1-1)$$

gdje smo za masu napisali simbol m , dok je u originalu drugo slovo. Očito je to brojčana jednadžba jer sadrži koeficijent 0,3701, a taj se ne pojavljuje u veličinskoj jednadžbi stanja $pV = RmT$, gdje je R plinska konstanta plina. U knjizi međutim nije navedeno o kojem se plinu radi. Naš je zadatak da pronađemo za koji plin vrijedi jednadžba (6.1—1)!

Budući da je taj izraz brojčana jednadžba potražimo u knjizi podatke o tome u kojim jedinicama moraju biti izraženi brojčani iznosi pritiska, volumena, mase i temperature. Stvarno pronalazimo da pritisak p valja izraziti brojčanim iznosima p u jedinici pound per square inch (Lb/sq. in), volumen u cubic foot (cu. ft.), a masu u pound (lb).

U skladu s osnovima veličinskog pisanja brojčani iznos G (uspravno slovo) bilo koje veličine G u jedinici $[G]$ iznosi $G = G/[G]$, pa je prema tome za naš primjer

$$p = \frac{p}{\text{Lb/sq. in}}; \quad V = \frac{V}{\text{cu. ft}}; \quad m = \frac{m}{\text{lb}}. \quad (6.1-2)$$

Pomoću tablica VII, III i V na kraju knjige preračunat ćemo angloameričke jedinice u jedinice Međunarodnog sistema:

$$\text{Lb/sq. in.} = 6,895 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2; \quad \text{cu. ft.} = 2,832 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3; \quad \text{lb} = 0,4536 \text{ kg}$$

Prema tome su brojčani iznosi iz jednadžbe (6.1—2)

$$p = \frac{p}{6,895 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-2}}; \quad V = \frac{V}{2,832 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}; \quad m = \frac{m}{0,4536 \text{ kg}}. \quad (6.1-3)$$

Ostaje nam još da utvrdimo ovisnost brojčanog iznosa temperature T o veličini T i upotrebnoj jedinici $[T]$. O tome u knjizi nema govora jer autor je valjda pretpostavljao da čitatelj to znade. Jedno možemo pouzdano tvrditi: veličina T je apsolutna temperatura, jer kad se jednadžba stanja piše u obliku (6.1—1) onda temperatura može biti samo apsolutna, tj. mjerena od apsolutne nule. Kad bi to bila relativna temperatura onda bi umjesto znaka T morala stajati suma $\vartheta_0 + \vartheta$.

Apsolutnu temperaturu T Englezi obično mjere »stupnjem Rankina« ($^{\circ}\text{R}$), za razliku od Evropljana koji je mjere »stupnjem Kelvina« ($^{\circ}\text{K}$) (vidi odsječak D.1.2). Možemo biti posve sigurni da je to i ovdje slučaj. Prema tome je brojčani iznos apsolutne temperature u izrazu (6.1—1):

$$T = T/[T] = T/^{\circ}\text{R}.$$

Znamo da je po veličini stupanj Kelvina 1,8-puta veći od stupnja Rankina, dakle $^{\circ}\text{K} = 1,8^{\circ}\text{R}$, pa je prema tome $^{\circ}\text{R} = ^{\circ}\text{K}/1,8$. Stoga od gornjeg izraza dobivamo

$$T = 1,8 T/^{\circ}\text{K}. \quad (6.1—4)$$

Uspravni simboli na lijevim stranama jednadžbi (6.1—3,4) predstavljaju iste brojčane iznose kao i simboli u jednadžbi (6.1—1). Ako ih dakle uvrstimo u (6.1—1) dobivamo

$$\frac{p}{6,895 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-2}} \cdot \frac{V}{2,832 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} = 0,370 \cdot 1 \cdot \frac{m}{0,4536 \text{ kg}} \cdot \frac{1,8 T}{^{\circ}\text{K}},$$

gdje *kurzivni* simboli predstavljaju veličine.

Gornju jednadžbu preuredit ćemo tako da po uobičajenim pravilima računanja odvojimo znakove za veličine od brojeva i jedinica. Tako dobivamo

$$p V = m T \cdot C, \quad (6.1—5)$$

gdje je konstanta C :

$$C = \frac{0,370 \cdot 1 \cdot 1,8 \cdot 6,895 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-2} \cdot 2,832 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{0,4536 \text{ kg} \cdot ^{\circ}\text{K}}.$$

Računanjem dobivamo da je

$$C = 287 \frac{\text{Nm}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{K}}$$

Budući da je newton $\times$ metar = joule (J), to je dalje $C = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{K})$.

Vidimo da je jedinica veličine C ona ista koju ima (individualna) plinska konstanta R plina. Usporedimo li još podatak s izrazom (6.1—5) uviđamo da veličina C baš predstavlja plinsku konstantu. Dakle je $C = R$, pa izraz (6.1—5) možemo napisati poznatim oblikom

$$p V = R m T. \quad (6.1—6)$$

Preostaje nam još da odgovorimo na pitanje: za koji je plin vrijedila brojčana jednadžba (6.1—1) prilagođena isključivo navedenim angloameričkim jedi-

nicama. Budući da smo utvrdili $R = 287 \text{ J/kg } ^\circ\text{K}$, lako ćemo u bilo kojem metar-skom priručniku termodinamike pronaći da je to plinska konstanta zraka pri relativnoj temperaturi $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ i pritisku $p = 1 \text{ atm}$ (normalna, fizikalna atmosfera).

Daljnji iscrpni primjeri uporabe veličinskih jednadžbi i njihova usporedba s brojevanima obrađeni su u odsječcima B.13, D.8 i E.7.

6.2. Veličine u logaritamskim odnosima

Iskustvo pokazuje da u primjeni univerzalnih veličinskih jednadžbi nikada ne dolazi do logaritma veličine, već jedino do logaritma omjera dviju istorodnih veličina. Nespretna primjena jednadžbi katkada dovodi do logaritma veličine, što nema nikakvog fizikalnog smisla. Mogućnost postojanja logaritma veličina osporila bi valjanost veličinskih jednadžbi, jer kako bismo u takvom slučaju logaritmirali na primjer vrijednost neke duljine $r = 10 \text{ metara}$

$$\log r = \log 10 \text{ m} = \log 10 \cdot \text{m} = \log 10 + \log \text{m}?$$

Kako smo rekli, i u praksi i u teoriji dolazi samo do logaritmiranja omjera veličina. Razmotrimo primjer izraza za rad W_{12} prilikom izotermne ($T = \text{const}$) ekspanzije nekog plina mase m , obujma V i plinske konstante R :

$$W_{12} = m R T \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Pri ovom razmatranju zanima nas samo dio jednadžbe koji sadrži prirodni logaritam omjera tlakova p_1 i p_2 .

Zamislamo da moramo izračunati logaritam $\ln p_1/p_2$ gdje je prvi tlak izmjeren jedinicom $[p]_1$, a drugi tlak jedinicom $[p]_2$. Budući da je »veličina = brojčani iznos $\times$ jedinica« ($G = G[G]$), u našem je primjeru $p_1 = p_1[p]_1$ i $p_2 = p_2[p]_2$, gdje uspravni simboli p_1 i p_2 označuju brojčane iznose, a *kursivna* slova veličine p_1 i p_2 . Tako možemo naš logaritam pisati dalje

$$\ln \frac{p_1}{p_2} = \ln \frac{p_1 [p]_1}{p_2 [p]_2} = \ln \frac{x \cdot p_1}{p_2} = \ln (x p_1) - \ln p_2, \quad (6.2-1)$$

gdje je x omjer dviju različitih jedinica pritiska

$$x = [p]_1/[p]_2. \quad (6.2-2)$$

Taj omjer uvijek je čist broj, jer pritisak možemo izraziti samo pomoću stanovite vrijednosti pritiska koju smo proglasili jedinicom. Kad se ne bi radilo o pritiscima već o duljinama, onda bi bilo na primjer $x = [l]_1/[l]_2 = \text{m/cm} = 100 \text{ cm/cm} = 100$ kad bi prva jedinica bila metar, a druga centimetar.

Vratimo se sada primjeru s logaritom. Kad su jedinice $[p]_1$ i $[p]_2$ međusobno jednake onda je $x = 1$, pa za izraz za logaritam glasi

$$\ln p_1/p_2 = \ln p_1/p_2 = \ln p_1 - \ln p_2.$$

tj. logaritama omjera dviju veličina jednak je razlici logaritama brojčanih iznosa. Ovdje se mora naročito naglasiti da te brojčane vrijednosti moraju da budu plod mjerenja istom jedinicom.

Pri tom može u računima doći do greške. Stoga je najprikladnije da se brojčani iznosi nadomjestite omjerom simbola za veličine i jedinice, dakle $p_1 = p_1/[p]$, $p_2 = p_2/[p]$ što daje

$$\ln p_1/p_2 = \ln p_1/[p] - \ln p_2/[p] \quad (6.2-3)$$

Primjer će nam objasniti primjenu ovih jednadžbi. Pri nekom mjerenju upotrebljavali smo dva instrumenta za mjerenje pritiska. Prvi je služio za mjerenje većih vrijednosti tlakova, a bio je baždaren u atmosferama, dok je drugi služio za mjerenje malih tlakova i bio je baždaren u jedinicama »mm Hg«. Mjerenjem su utvrđene ove vrijednosti: $p_1 = 4,0$ at; $p_2 = 589$ mm Hg. Prema tome je $[p]_1 = \text{at}$, $[p]_2 = \text{mm Hg}$ (o ovoj jedinici vidi odsječak B.7.3), a pripadni mjerni brojevi su $p_1 = 4,0$ i $p_2 = 589$.

Budući da se radi o različitim jedinicama morat ćemo se poslužiti jednadžbom (6.2—1), a prije toga pomoću (6.2—2) izračunati x . Iz tablice VII na kraju knjige saznajemo da je

$$x = [p]_1/[p]_2 = \text{at/mm Hg} = 735,6.$$

Stoga slijedom jednadžbe (6.2—1) možemo računati ovako:

$$\ln p_1/p_2 = \ln \frac{xp_1}{p_2} = \ln \frac{735,6 \cdot 4,0}{589} = \ln \frac{2942}{589} = 1,609 \ 4.$$

Isto smo tako mogli svesti rezultat mjerenja prvog tlaka na jedinicu $[p]_2$ (ili obratno), pa bismo dobili $p_1 = 4 \text{ at} = 2 \ 942 \text{ mmHg}$ i u tom slučaju računali pomoću (6.2—3) uz $p_1 = 2 \ 942$:

$$\ln p_1/p_2 = \ln (2 \ 942 \text{ mm Hg/mm Hg}) - \ln (589 \text{ mmHg/mmHg}),$$

što daje dalje

$$\ln p_1/p_2 = \ln 2 \ 942 - \ln 589 = 1,609 \ 4.$$

Na ovom primjeru, obrađenom na različite načine, upoznali smo različite opasnosti koje kriju često upotrebljavane jednadžbe oblika razlike logaritama (dvaju brojčanih iznosa). Stoga je najpouzdanije raditi s početnim dijelom jednadžbe 6.2—1), u našem primjeru ovako:

$$\ln \frac{p_1}{p_2} = \ln \frac{4 \text{ at}}{589 \text{ mmHg}} = \ln \frac{4 \cdot 735,6 \text{ mmHg}}{589 \text{ mmHg}} = \ln \frac{4 \cdot 735,6}{589},$$

pa ili najprije izračunati omjer pod znakom logaritma i onda rezultat logaritmirati ili pak zbrajati i oduzimati logaritme pojedinih brojeva.

Razliku između izloženih načina obrade jednadžbi u kojima se pojavljuju logaritmi omjera veličina još će nam osvijetliti jedan praktičan primjer: pomoću mehaničkog indikatora snimili smo politropsku krivulju (p — V) ekspanzije nekog

parnog stroja. Iz mjernih podataka želimo ustanoviti koliko iznosi politropski eksponent n u jednadžbi politrope $pV^n = \text{const}$.

Budući da za bilo koja dva stanja vrijedi netom spomenuta jednadžba možemo je pisati i u obliku

$$p V^n = p_2 V_2^n,$$

gdje je p bilo koji pritisak, a V njemu pripadni volumen.

Logaritmiramo li ovu jednadžbu i sredimo li je slijedi izraz za određivanje politropskog eksponenta

$$n = \frac{\log p/p_2}{\log V_2/V}, \quad (6.2-4)$$

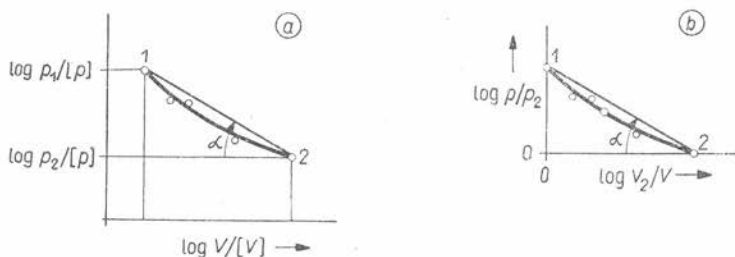
gdje *kurzivna* slova pokazuju da se radi o veličinama. Budući da sve tlakove mjerimo istom jedinicom $[p]$, a isto tako i sve volumene istom jedinicom $[V]$, izraz (6.2-4) možemo napisati i u obliku

$$n = \log \frac{p/[p]}{p_2/[p]} : \log \frac{V_2/[V]}{V/[V]}$$

odakle dobivamo

$$n = \frac{\log p/[p]}{\log V_2/[V]} - \frac{\log p_2/[p]}{\log V/[V]} \quad (6.2-5)$$

Odabirajući različite vrijednosti veličine p i njoj pripadne V dobivamo tačke $\log p/[p]$ i $\log V/[V]$ u dijagramu slike A6a. Niz tačaka daje ili krivulju (u tom se slučaju n mijenja tokom ekspanzije) ili pravac ($n = \text{const}$), a n je tangens kuta tog pravca u skladu sa slikom A6a.



Sl. A 6. Određivanje politropskog eksponenta

Pouzdaniji je način koji je prikazan na slici A6b. Tu se u dijagram nanose brojačni iznosi $\log p/p_2$ i $\log V_2/V$. Pri tom se jednostavno dobivaju brojevi koje treba logaritmirati, jer se pri konkretnim omjerima veličina p i p_2 odnosno V_2 i V pripadne jedinice krata. Prednost drugog načina je dakle ista kao i u prijašnjem primjeru. Svakokratne vrijednosti politropskog eksponenta jednostavno slijede iz najkraće jednadžbe (6.2-4).

Pri razmatranju potencijala V cilindričkih polja (polje strujanja tekućina, elektrostatsko polje, polje električnog strujanja itd.) također se može posumnjati da veličinske jednadžbe nisu univerzalne, jer navodno u takvim problemima dolazi

do logaritmiranja veličina, a ne brojčanih iznosa. Ovo ćemo pitanje razmotriti na primjeru elektrostatskog polja.

U udžbenicima katkada nalazimo veličinsku jednadžbu oblika

$$V = -C \ln r + C_0, \quad (6.2-6)$$

gdje V je elektrostatski potencijal vrlo dugačke niti jednoliko nabijene pozitivnom elektrikom, r najkraća (radijalna) udaljenost između tačke s potencijalom V i niti, a C i C_0 konstante. Budući da je r radius zamišljenog cilindra na kojemu leži promatrana tačka, dakle veličina duljina, nemoguće je zamisliti $\log r$, već se pomišlja na brojčani iznos udaljenosti. No u kojoj jedinici?

Stvari međutim stoje posve drukčije. Da bismo problem izveli na čistac moramo pogledati u osnove elektrostatike. Ako se na duljini l vrlo dugačke niti nalazi jednoliko raspoređena pozitivna elektrika Q onda je jakost elektrostatskog polja E u radijalnoj udaljenosti r od niti

$$E = \frac{Q}{\epsilon 2 \pi r l} = \frac{q}{\epsilon 2 \pi r}, \quad (6.2-7)$$

gdje je $q = Q/l$, a ϵ dielektričnost prostora u kojemu postoji polje. Zbog jednostavnijeg pisanja nismo se poslužili vektorskim pismom; nećemo nimalo pogriješiti jer ćemo sve vektorske veličine polja razmatrati u radijalnom smjeru u smislu od niti prema van.

Potencijal V i jakost polja E međusobno su vezani jednadžbom $E = -\nabla V = -\text{grad } V$, odakle odmah slijedi obrnuta veza

$$V = - \int_{r_0}^r E \, dr = \int_r^{r_0} E \, dr, \quad (6.2-8)$$

tj. potencijal neke tačke možemo definirati integralom jakosti električkog polja od te tačke do po volji odabrane druge tačke. Ta druga tačka može biti na nekom drugom cilindru (oko niti) polumjera r_0 . Potencijal V dakle ne možemo definirati drukčije nego u odnosu na slobodno odabrano uporište, u našem slučaju u odnosu na udaljenost r_0 od niti. Kad smo r_0 jednom odabrali onda moramo s njime računati u čitavom daljnjem razmatranju.

Izračunajmo sada pomoću izraza (6.2-8) potencijal u nekoj tački udaljenoj r od niti. Zbog toga u nj stavimo jednadžbu (6.2-7) pa računanjem dobivamo

$$V = \frac{q}{2 \pi \epsilon} \int_r^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2 \pi \epsilon} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (6.2-9)$$

Vidimo da se pri dosljednoj primjeni definicije potencijala pojavio pod znakom logaritma omjer dviju istovrsnih veličina pa za logaritmirati preostaje čisti broj.

Naravno da različito odabiranje referentne tačke (r_0) prema izrazu (6.2-9) iskazuje različite potencijale V . Stvarno u računima i onako ne izračunavamo potencijale u odnosu na neku tešku zamislivu, a svakako nedostupnu tačku, već se služimo razlikom potencijala, a to je već napon. Neki autori čak definiraju elektrostatski potencijal kao »napon u odnosu na po volji odabranu referentnu tačku«.

Usporedimo sada jednadžbe (6.2—6) i (6.2—9). U jednadžbi (6.2—6) ništa nije rečeno o vrijednosti konstante C_0 . Stoga možemo reći da je

$$C_0 = C \ln r_0,$$

pa time izraz (6.2—6) prelazi u oblik

$$V = C \ln r_0 / r.$$

Ni o konstanti C nije ništa pobliže rečeno. No ako netom napisanu jednadžbu usporedimo sa (6.2—9) vidimo da je

$$C = \frac{q}{2\pi\epsilon},$$

pa su dakle jednadžbe (6.2—6 i 9) stvarno međusobno jednake, samo što je (6.2—6) nespretno napisana.

Iz svih dosadašnjih razmatranja možemo zaključiti da stvarno pri opisivanju prirodnih pojava pomoću jednadžbi nikada ne dolazi do logaritmiranja veličina, već samo do logaritmiranja omjera dviju istorodnih veličina, dakle do logaritmiranja broja.

Pod znakom operacije logaritmiranja može se katkada naći i više veličina, ne samo dvije. I u tom slučaju vrijedi isto što smo utvrdili za omjer dviju veličina. To ćemo najbolje vidjeti na primjerima gdje se stanovita kombinacija veličina nađe u eksponentu neke baze koja je uvijek čisti broj, dakle kod eksponencijalnih funkcija. Takav se rezultat mora i očekivati jer je logaritam broja N eksponent (n) kojim treba potencirati bazu (napr. e ili 10) da bi se dobio broj $N = e^n$ ili $N = 10^n$.

U nauci o toplini na primjer adijabatsku promjenu stanja idealnog plina opisuje jednadžba $p V^\kappa = \text{const.}$ gdje je *Poissonov* koeficijent $\kappa = c_p/c_v$, dakle omjer dviju specifičnih toplina, tj. čisti broj.

U elektronici se gustoća električne struje isparivanja iz elektrode računa pomoću jednadžbe

$$j = C T^2 e^{-\frac{W}{kT}} \quad (6.2—10)$$

gdje je W rad, T apsolutna temperatura, a k univerzalna Boltzmannova konstanta $k = 1,39 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$. Razložimo li veličine W i T po načelu $G = G[G]$ u brojčane iznose i jedinice dobivamo $W = W[W]$ i $T = T[T]$, što uvrštenjem u eksponent gornje jednadžbe daje

$$\frac{W}{Tk} = \frac{W[W]}{T[T] 1,39 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}}$$

Za jedinice možemo odabrati $[W] = \text{joule} = \text{J}$, $[T] = ^\circ\text{K}$, pa u tom slučaju slijedi dalje

$$\frac{W}{Tk} = \frac{W}{T \cdot 1,39 \cdot 10^{-23}} = \text{čisti broj},$$

jer uspravni simboli W i T označuju brojčane iznose. Prema tome je eksponent u jednadžbi (6.2—10) čist broj.

Isto bismo pronašli na jednostavnijem primjeru u mehanici gdje se pomoću formule

$$F = F_0(1 - e^{-\mu \alpha})$$

izračunava sila naprezanja F_0 radnog dijela remena ako je F obodna sila, a μ i α su koeficijent trenja i obuhvatni kut.

Izbijanje električkog kondenzatora također se odvija po eksponencijalnom zakonu

$$U = U_0 e^{-t/T},$$

gdje je veličina t vrijeme računajući od početka izbijanja, a T vremenska konstanta kruga koja iznosi $T = 1/RC$. Ovdje su R i C otpor i kapacitet kruga. Na jednostavnom primjeru možemo se uvjeriti da je i u ovom slučaju eksponent čist broj.

Slične primjere mogli bismo nizati u nedogled. No i na temelju navedenih možemo zaključiti da su eksponenti pri potenciranju i argumenti pri logaritmiranju kod svih veličinskih jednadžbi uvijek čisti brojevi. Ova se činjenica čak odlično iskorišćuje: čim u nekom računu utvrdimo da nam argument logaritma ili eksponent kod potenciranja nije čist broj odmah možemo započeti tražiti grešku!

To svojstvo iskorišćuje se još dalekosežnije u takozvanoj teoriji sličnosti, gdje je osnova bezdimenzionalni produkt veličina, a odatle slijede vrlo korisne značajke *Reynoldsa* (Re), *Prandtla* (Pr) i niz drugih. U vrlo značajnoj »dimenzionalnoj analizi« može se na taj način kvalitativno utvrditi još neka nepoznata zakonitost!

6.3. Prikazivanje veličina u dijagramima

Gotovo je suvišno isticati kako je grafičko prikazivanje veličina korisno pri razmatranju nekog problema u tehnici ili znanosti, a pogotovo kako je instruktivno u školskoj nastavi i u udžbenicima. Istina, opseg mogućnosti grafičkih prikazivanja ograničen je, jer dijagrame crtamo u ravnini papira, pa jedino možemo prikazati ovisnost jedne veličine o drugoj s mogućnošću da još jednu neovisnu veličinu odaberemo za parametar.

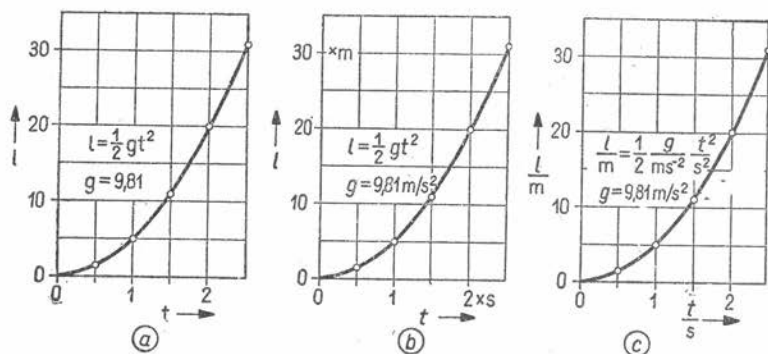
Postoje doduše perspektivne skice pravokutih prostornih koordinatnih sistema u kojima možemo prikazati međusobne odnose triju veličina, ali zbog crtanja u ravnini takvi su dijagrami samo od ilustrativne (kvalitativne) koristi.

Dijagrami s pravokutim koordinatama u većini slučajeva prikazuju stvarne, kvantitativne odnose među pojedinim veličinama. No i kod dijagrama imamo nekoliko načela prikazivanja u skladu s veličinskim i brojčanim naziranjem na simbole u jednadžbama (vidi odsječak 5.3).

U zastarjelom brojčanom naziranju moraju i u dijagramima simboli prikazivati brojeve. Takav slučaj vidimo na slici A7a gdje krivulja prikazuje brojčanu jednadžbu slobodnog pada.

Naravno da od brojaka uz vertikalnu i vodoravnu os dijagrama nemamo puno koristi ako ne znamo na koje se jedinice odnose brojčani iznosi l i t . Kao i kod brojčanih jednadžbi tako i kod brojčanih dijagrama nalik na sliku A7a moramo u tekstu navesti da se radi o brojčanim iznosima veličina duljina i vremena u metrima i sekundama, a pritom se radi o ubrzanju sile teže Zemlje $9,81$ izraženo u m/s^2 .

Slika A7b odgovara besprijeckornom veličinskom nazoru. Na svakoj koordinatnoj osi navedene su vrijednosti veličina; na primjer u vremenskom razdoblju $t = 1,5$ s tijelo će prema dijagramu slike A7b pasti oko $l = 11$ m. Pri ovakvom načinu crtanja veličinskih jednadžbi morali bismo uz svaku brojku napisati jedinicu, tj. umnožak brojčane vrijednosti i jedinice ($G = G [G]$), ali po prešutnom dogovoru to ne činimo jer smatramo da je i bilo koja druga brojka (napr. 20), a

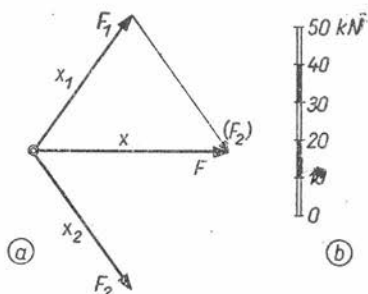


Sl. A 7. Tri vrste dijagramskih prikaza: a) brojčani, b) veličinski, c) prilagođeni veličinski.

ne samo 30, pomnožena jedinicom (napr. 20 m). Isto vrijedi i za veličinu vrijeme t na vodoravnoj osi. Usporedimo li slike A7 a i b vidimo da su one simbolima opisane isto onako kako smo tiskali jednadžbe: simboli za veličine *kurzivno*, a simboli za brojčane iznose *uspravno*.

Na slici A7c primijenjen je treći način upotrebe dijagrama: analogno prilagođenim veličinskim jednadžbama (vidi odsječak 5.5). Pojedine koordinate predstavljaju brojčane iznose, a i uz obje osi naznačeni su simboli brojčanih iznosa u obliku $G/[G]$, tj. u obliku omjera veličine i upotrebljene mjerne jedinice. Tako su na vertikalnoj osi dijagrama slike A7 c naznačene brojčane vrijednosti l/m , tj. brojčani iznosi veličine l u m, a na apscisnoj osi brojčani iznosi vremena, t/s .

U primjeni su oba načina (sl. A7b i c) jednako korisna ako se dosljedno primjenjuju.



Sl. A 8. Vektorski dijagram sila i mjerilo

Vektorske veličine često prikazujemo duljinama. Na slici A8 vidimo primjer vektorskog zbrajanja dvaju vektora sila F_1 i F_2 (propuštamo posebne vektorske oznake) u rezultantu F . Obje sile djeluju dakako na neko tijelo u istoj ravnini, jer inače ne bismo mogli crtati njihov prikaz u ravnini papira.

Pri tome se služimo posebnom simboličkom jer neka duljina na papiru nije sila, duljina samo prikazuje silu. Stoga je neophodno uvesti mjerilo M koje definira kolika duljina pripada stvarnoj veličini. Na primjer u slučaju na slici A8 mjerilo crtanja sila definirano je omjerom

$$M_F = F/x, \quad (6.3-1)$$

gdje je F stvarna sila, a x duljina koja na slici prikazuje tu silu. Mjerilo odabiremo po svojoj volji. Možemo ga napr. odabrati ovako: neka sili 10 kN ($\text{kN} = 1000 \text{ N}$; $\text{N} = \text{newton}$, vidi odsječak B.3) odgovara na crtežu slike A8a duljina 5 mm. To znači da mjerilo iznosi

$$M_F = F/x = 10 \text{ kN} / 5 \text{ mm} = 2 \text{ kN/mm},$$

tj. svakom milimetru crteža odgovaraju 2 kilonewtona.

Zadamo li sile $F_1 = F_2 = 46 \text{ kN}$ s naznačenim smjerovima i smislom morat ćemo ih na slici A8a prikazati duljinama

$$x_1 = x_2 = F_1/M_F = 46 \text{ kN} : 2 \text{ kN/mm} = 23 \text{ mm}.$$

Kad ove duljine zbrojimo po pravilu vektorskog zbrajanja sila dobivamo duljinu $x = 26 \text{ mm}$, što prema jednadžbi (6.3-1) prikazuje silu

$$F = x M_F = 26 \text{ mm} \cdot 2 \text{ kN/mm} = 52 \text{ kN}.$$

Pri opisanom načinu obrađivanja vektorskih veličina često se ne pazi pa neki autor u knjizi jednostavno piše na primjer: »Sila F_1 iznosi 23 mm, a jednaka je sili $F_2 = 23 \text{ mm}$ «. Naravno da je to besmislica, jer sila nije duljina. Neki autori upotrebljavaju simboličku oznaku za riječ »odgovara« npr.

$$10 \text{ kN} \triangleq 5 \text{ mm},$$

pa onda u tekstu pišu $F_1 \triangleq 23 \text{ mm}$. Takav je način obrade svakako bolji od netom spomenutog.

Treći je način (sl. A8b) sigurno najzorniji. Kod njega je mjerilo nacrtano. Takav je način u velikoj prednosti pred svim ostalima. Kad naime čitamo stručne knjige ili udžbenik često nailazimo na opise nekih crteža nalik na naš A8a za koje se kaže da je upotrebljeno mjerilo $M_F = 10 \text{ kN/cm}$. No kad stvarno na crtežu u knjizi izmjerimo pojedine dužine koje prikazuju vektore vidimo da autorov navod nije tačan. Do razlike je došlo zato što je prilikom priređivanja knjige za tisak crtež smanjen. Kad se radi s nacrtanim mjerilom kao na slici A8b, jednako se smanjuju i crtež i nacrtano mjerilo. U takvom slučaju pisac može jednostavno napisati napr. za naš slučaj na slici A8a i b: »Prema odabranom mjerilu M_F rezultantna sila iznosi $F = x M_F = 52 \text{ kN}$ «, a njegov postupak može čitatelj lako kontrolirati kad to mjerilo M_F sam izračuna iz odštampane slike.

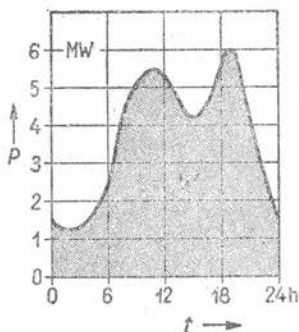
Uloga mjerila M vrlo je važna i pri obradi dijagramski zabilježenih odnosa među veličinama. Na slici A9 prikazan je mjerenjem snimljen dijagram opterećenja djelatnom električkom snagom P stanovitog grada tokom nekog dana. Uz ordinantnu os nanosi se snaga P , a uz apscisnu os vrijeme t . Na slici A10 prikazan je taj isti dijagram u smislu prilagođenih veličinskih jednadžbi (usporedi sa slikama A7 b i c).

Pomoću dijagrama slike A9 možemo ustanoviti energiju koja je utrošena promatranog dana

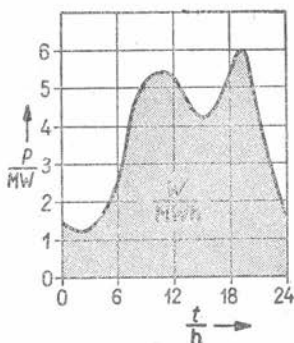
$$W = \int P dt. \quad (6.3-2)$$

Ova energija W prikazana je na slici A9 površinom A koju s vodoravnom osi zatvara krivulja snage (siva površina na slici). Površinu A lako je utvrditi bilo prebrojavanjem kvadratića ako se crta napr. na »milimetarskom papiru«, bilo pomoću posebne sprave — planimetra.

Zbog toga moramo poznavati dva mjerila: mjerilo M_P kojim je snaga P prikazana dužinom y , dakle $M_P = P/y$, te mjerilo vremena $M_t = t/x$ kojim je



Sl. A 9.
Dijagram snaga —
vrijeme u veličinskom
obliku



Sl. A 10.
Dijagram snaga —
vrijeme u prilagođenom
veličinskom obliku

vrijeme t prikazano vodoravnim dužinama x . Iz ovih definicija oba mjerila možemo izvući $P = y M_P$, $t = x M_t$, što uvrštenjem u izraz (6.3—2) daje pomoću $dt = dx M_t$:

$$W = M_P \cdot M_t \int y dx = M_W A, \quad (6.3—3)$$

gdje je A površina koju prikazuje netom napisani integral, a M_W mjerilo kojim je energija W prikazana kao površina A . To znači da je

$$M_W = W/A = M_P M_t. \quad (6.3—4)$$

Ovaj opis može nam ilustrirati primjer na slici A9. Na njoj je mjerilo snage $M_P = P/y = 2 \text{ MW}/1 \text{ cm} = 2 \text{ MW/cm}$, tj. svaki centimetar na vertikalnoj osi dijagrama predodžuje snagu 2 megawatta. Za vodoravno mjerilo vremena odabrali smo $M_t = 24 \text{ h}/3 \text{ cm} = 8 \text{ h/cm}$, tj. svaki centimetar u vodoravnom smjeru prikazuje 8 sati.

Mjerilo energije M_W prema jednadžbi (6.3—4) iznosi

$$M_W = M_P M_t = 2 \frac{\text{MW}}{\text{cm}} \cdot 8 \frac{\text{h}}{\text{cm}} = 16 \frac{\text{MWh}}{\text{cm}^2},$$

tj. svaki kvadratni centimetar površine ispod krivulje na slici A 9 prikazuje energiju 16 MWh. Ako smo napr. planimetrom izmjerili $A = 5,75 \text{ cm}^2$ onda je prema (6.3—3)

$$W = M_w A = 16 \frac{\text{MWh}}{\text{cm}^2} \cdot 5,75 \text{ cm}^2 = 92 \text{ MWh} = 331,2 \text{ TJ}.$$

Slovo J kratica je jedinice energije Međunarodnog sistema jedinica joule = J. Simol T je prefiks tera = $T = 10^{12}$.

6.4. Tabelarni prikazi vrijednosti veličina

Svrha je tablice (tabele) kako znamo da na jednom mjestu skupi vrijednosti niza ili jedne veličine što karakteriziraju neku tvar. Tablica mora da bude tako složena i označena, da ne smije biti nikakve nedoumice pri njenoj uporabi. Upotrebljava se nekoliko načina slaganja tablica, koje ćemo ovdje opisati primjerima.

Tablica A. 1 sadrži vrijednosti veličine »specifična toplina pri stalnom tlaku« c_p nekoliko tvari pri temperaturi 20 stupnjeva Celsiusa. Zbog lakšeg opisivanja tablicu smo razdijelili u pet stupaca koje smo označili brojkama 1 do 5. U manjim tablicama takvo se označivanje obično ne primjenjuje.

Kod tablica je svakako važan zaglavlak ili glava. Tako smo u stupcu 1 glave naznačili o kojoj se tvari radi (aluminij itd.). U drugom stupcu naveden je jedan način prikazivanja vrijednosti veličine c_p . Veličina specifična toplina svake tvari izražena je umnoškom brojčanog iznosa i jedinice. Npr. podatak u stupcu 2 znači da je $c_{pAl} = 895 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$. Takav način iziskuje najviše prostora, a njega u tablicama gotovo nikad nema mnogo na raspolaganju. Stoga se tablice obično sastavljaju tako da se pišu samo brojčani iznosi, dakle $G = G/[G]$ prema osnovnoj jednadžbi iz odsječka 5. 2. Takav prikaz vidimo u stupcu 3 tablice A. 1. U glavi je napisan omjer veličine i jedinice, a u stupcu 3 nižu se brojčani iznosi $c_p = c_p / (\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C})$.

U četvrtom i petom stupcu glavna razlomkova creta iz glave stupca 3 zamenjena je crtom tablice. U tom slučaju simbol predodređuje brojčane iznose c_p (tiskano uspravno), a ispod toga je navedeno na koje se jedinice odnose ti brojčani iznosi. U usporedbi sa stupcem 3 ovdje u stupcu 4 vidimo još jednu razliku: upotrebljena je $k = 1000$ — puta veća jedinica $1 \text{ kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C}) = 1000 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ pa su zato brojčani iznosi 1000 puta manji.

Vrijednosti specifične topline c_p pri stalnom tlaku
različitih tvari pri temperaturi 20 °C

Tablica A.1

1	2	3	4	5
Tvar	c_p	$\frac{c_p}{\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}}$	c_p	
			$\text{kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C})$	$\text{kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C})$
Aluminij	895 J/(kg °C)	895	0,895	0,214
Beton	878 J/(kg °C)	878	0,878	0,210
Staklo	777 J/(kg °C)	777	0,777	0,186

Stupac 5 donosi brojčane iznose c_p veličine c_p u staroj jedinici $\text{kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ koja je veća od one u stupcu 4; $\text{kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C}) = 4,1868 \text{ kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C})$. Zato su i brojčani iznosi c_p ovdje toliko puta manji. Ovakav dvostupačni (stupci 4 + 5) prikaz

baš se u sadašnje vrijeme mnogo upotrebljava, kad je i u nauku o toplini uveden Međunarodni sistem jedinica, a mnogi se još nisu odvikli od ranije upotrebljavanih jedinica. U tom je pogledu takav »dvojedinični« tabelarni prikaz pogodan, ali je nespretn jer zauzima mnogo prostora. Stoga je dovoljno navesti podatke npr. u $\text{kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C})$, a posebno naznačiti preračunski koeficijent 4,186 8 kako smo netom naveli.

Unatoč jednostavnosti s tablicama može doći do komplikacija kako ćemo vidjeti u tablici A. 2. Ova tablica prikazuje vrijednosti dinamičke viskoznosti. Standardna oznaka za tu veličinu je grčko slovo η , ali kako tiskara nema *kurzivnih* (oznaka veličina!) grčkih slova, to smo za ovo razmatranje uzeli slovo V koje nema taj nedostatak; dakle je $V = \eta$.

Viskoznost većine tvari vrlo je malog brojanog iznosa kad se upotrebljavaju jedinice uobičajenih sistema jedinica. Tako je npr. za amonijak

$$V = 0,000\ 240\ \text{Ns}/\text{m}^2 = 0,000\ 024\ 5\ \text{kps}/\text{m}^2,$$

gdje je N = newton, kp = kilopond (vidi odsječke B. 3 i B. 4).

Budući da su takve brojke glomazne pa zauzimaju mnogo prostora, u tablicama se u takvim slučajevima upotrebljava milijun puta manja jedinica » 10^{-6} Ns/m^2 «, ali se ne označuje posebnim imenom.

Vrijednosti dinamičke viskoznosti V raznih kapljevin
pri temperaturi 0°C

Tablica A.2

1	2	3	4	5
T var	$\frac{V}{\frac{10^{-6}\ \text{Ns}}{\text{m}^2}}$	$\frac{V}{\mu\ \text{Ns}/\text{m}^2}$	$\frac{V \cdot 10^6}{\text{kp s}/\text{m}^2}$	$\frac{V}{\text{poise}}$
Amonijak	240	240	24,5	0,002 40
Toluol	771	771	78,6	0,007 71
Živa	1 687	1 687	172,0	0,016 87

U tom je slučaju brojčani iznos manji jer je npr.

$$0,000\ 240\ \text{Ns}/\text{m}^2 = 240 \cdot 10^{-6}\ \text{Ns}/\text{m}^2.$$

To smo primijenili u stupcu 2 gdje je brojčani iznos

$$V = \frac{V}{10^{-6}\text{Ns}/\text{m}^2} \quad (6.4-1)$$

Praktičnije je međutim upotrebiti prefiks mikro (μ) jer je $\mu = 10^{-6}$ (o prefiksima vidi odsječak B. 3.3). Takav način prikazivanja primijenili smo u stupcu 3.

U literaturi se katkada primjenjuje način kao u stupcu 4. Tu je jednadžba (6.4-1) preoblikovana sa $1/10^{-6} = 10^6$ pa time (6.4-1) prelazi u oblik

$$V = \frac{10^6 \cdot V}{\text{Ns}/\text{m}^2} \text{ ili } V = \frac{M \cdot V}{\text{Ns}/\text{m}^2},$$

odnosno konkretno u onaj u stupcu 4, ako se umjesto jedinice sile newton upotrebi kp (= 9,81 N).

Ovakav se način prikazivanja ne preporučuje jer može dovesti do zabune pri upotrebi tablice. Čitatelj koji nije orijentiran o približnoj vrijednosti viskoznosti mogao bi shvatiti da **treba** brojčani iznos u tablici pomnožiti s milijun, a ne podijeliti. Kad bi primjenjivač takve tablice dosljedno razlikovao veličine i brojčane iznose onda bi i oblik stupca 4 bio praktički upotrebljiv. No to se ne može očekivati od svih čitatelja neke knjige pa se stoga preporučuju oblici navedeni u stupcima 3 i 2.

U stupcu 5 naveden je način tabeliranja nalik na stupce 4 i 5 u tablici A. 1. Pri tom je upotrebljena jedinica fizikalnog (CGS) sistema »poise« (čitaj poaz) = 0,1 Ns/m² (vidi odsječak B. 7.6)

6.4. Pisanje i tiskanje veličina, jedinica i brojeva

Ovaj odsječak posvećujemo formalnoj uporabi jedinica, oznaka veličina i načinu njihova pisanja. Na to nas nuka činjenica da se u različitim objavljenim radovima, tj. u knjigama i časopisima, iste veličine označuju različitim slovima, jednadžbe katkada štampaju nepregledno i komplicirano, ili pak rasipno (prostor!), brojevi označuju neispravno itd. A kako je istom u elaboratima i proračunima koji se ne objavljuju?!

U jednadžbama u kojima nastupa nekoliko veličina u produktu i kvocijentu prvenstveno se upotrebljava ravna razlomkova crta. U slučajevima gdje ne može doći do zabune može se upotrebiti kosa crta kao znak razlomka. Koji put je pri tom potrebno staviti i zgradu. Na primjer jednadžbu reakcije u mehanici možemo pisati u nekoliko oblika:

$$A = F \frac{l-a}{l} = F(l-a)/l = F \left(1 - \frac{a}{l} \right) = F(1 - a/l).$$

Prvi je način najinstruktivniji, posljednji najkraći i najlakši, ako se radi o tiskanim radovima. Prvi način nikada neće dovesti do krivog shvaćanja, ali zahtijeva mnogo prostora, dakle poskupljuje knjige. Stoga neki autori rade tako da stanovitu jednadžbu prvi put pišu s ravnom razlomkovom crtom, a kad se ta formula ponavlja pišu je s kosom crtom.

Između simbola veličina ne stavlja se gotovo nikada znak množenja, čak ni tačkica, dakle samo $P = Fv$, a ne $P = F \cdot v$ ili čak $P = F \times v$. No ako se jednadžba izražava riječima onda se upotrebljava kosi križ kao znak množenja:

$$\text{snaga} = \text{sila} \times \text{brzina}.$$

Korijen se obično izražava uobičajenim znakom $\sqrt{\quad}$, ali je za dugačke izraze pogodan i razlomljeni eksponent.

Simboli veličina štampaju se *kosim*, *kurzivnim* slovima. Simboli za brojčane iznose, brojke, jedinice i simboli kemijskih elemenata pišu se uspravnim (romanskim) slovima. Isto se tako pišu i naznake matematičkih operacija (logaritam, diferencijal itd), npr.

$$\text{H}_2\text{O} = \text{H}_2 + \text{O}, \log nx; v = \frac{dl}{dt}; i = I_m \sin \frac{2\pi t}{T} = I_m \sin \omega t.$$

Ovdje smo na posljednjem mjestu pokazali kako se piše veza između momentanih (i) i maksimalnih vrijednosti (I_m) veličina. Efektivna veličina nema indeksa, dakle I , a ne I_{ef} .

Ni pri množenju brojeva ne valja upotrebljavati križić: dakle $24 \cdot 60 \cdot 60$, a ne $24 \times 60 \times 60$. Kod velikih brojeva ne valja upotrebljavati tačku kao znak odjeljivanja triju brojaka, već razmak, dakle

$$3\ 241\ 265,017\ 65, \text{ a ne } 3 \cdot 241 \cdot 265,107 \cdot 65,$$

jer tačka je znak množenja. U tekstu jednako je vrijedan način pisanja $324/16,2 = 20$ i $324 : 16,2 = 20$. Neki upotrebljavaju umjesto decimalnog zareza tačku. Po jugoslavenskom standardu to nije ispravno. Anglo-Amerikanci obično rade baš obratno, tj. tačka im predstavlja naš decimalni zarez (npr. $30 \cdot 06 = 30,06$).

Jedinice se pišu uspravnom slovima, a ne *kurzivnim* kako ponegdje vidimo. Mogu se ispisivati punim nazivom, dakle $F = 120$ newtona, ili standardiziranom i međunarodno usvojenom kraticom; $F = 120$ N. Složene jedinice mogu se pisati kao razlomci s ravnom crtom, kosom crtom ili s pozitivnim i negativnim eksponentima:

$$\text{kg} = \frac{\text{VAs}^3}{\text{m}^2} = \text{VAs}^3/\text{m}^2 = \text{VAs}^3 \text{ m}^{-2}.$$

Navodimo ispravan, neispravan i popravljen način pisanja složene jedinice

$$\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{h}^\circ \text{C}} = \text{kcal}/\text{m}^2 \text{h}^\circ \text{C} = \text{kcal}/(\text{m}^2 \text{h}^\circ \text{C}),$$

jer u srednjem se slučaju ne zna da li je kcal podijeljena samo sa m^2 ili s čitavim produktom. Dvostruke razlomkove crte potpuno su pogrešne ($\text{m/s/s} = \text{m/s}^2 = \text{ms}^{-2}$).

Prefikse jedinica objasnili smo u odsječju B. 3. 3. Pri njihovoj šablonskoj primjeni može doći do grešaka. Na primjer jedinica km^2 označuje kvadratni kilometar, tj. površinu kvadrata sa stranicama kilometar. To znači da je $\text{km}^2 = \text{km} \cdot \text{km} = (\text{km})^2 = (1000 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2$, a ne kilokvadratni metar $= 1000 \text{ m}^2$!

Da ne bi došlo do zabune kratice za metar (m) stavlja se u složenoj jedinici uvijek na drugo ili posljednje mjesto kako ne bi došlo do kolizije s prefiksom mili (m), dakle Nm/kg , a ne mN/kg . Na osnovnu jedinicu mase kilogram (kg) ne primjenjuju se prefiksi, dakle za 10^6 kg ne piše se 1 Mkg. Manje jedinice mase izvode se na temelju grama, dakle $10^{-3} \text{ g} = 1 \text{ mg}$, a ne $1 \mu\text{kg}$.

Međunarodni simboli veličina i mjerne jedinice standardizirane su i u Jugoslaviji. Propisuju ih standardi JUS A. Al. 020 i JUS A. Al. 040 iz 1957. godine.

7. SISTEMI JEDINICA, PRAMJERE I PRAMJERILA

7.1. Sistemi jedinica

U prošlim smo odsječcima upotrebljavali niz jedinica u praktičnim primjerima. Služili smo se jedinicom duljine korak, jedinicom sile kilopond, drugom jedinicom sile newton i nizom drugih. Pri tom smo na primjer naišli i na jedinicu snage

«konjska snaga», $KS = 75 \text{ kpm/s}$. Možemo se zapitati da li je ta jedinica izvedena iz kiloponda, metra i sekunde po nekom ključu, postoji li neko pravilo kako se od stanovitog skupa jedinica izvodi na primjer KS?

Postoji pravilo kako se iz po volji odabranih polaznih (osnovnih, ishodišnih) jedinica sistematski grade izvedene jedinice. To pravilo već smo izveli u odsječku 5. 4., a sadrži ga jednadžba između jedinica

$$[G] = u [A]^a [B]^b [C]^c \dots \quad (7.1-1)$$

koja predstavlja opću vezu između općih jedinica $[G]$, $[A]$, $[B]$ Pri tom izraz »opća jedinica« znači da još nije definirana konkretna vrijednost veličine odabrane za jedinicu. Gornja jednadžba među jedinicama općenitog je značaja još i zato što nije precizirano koje veličine predstavljaju slova G , A , B , Isto tako još nije definiran količnik u koji posreduje između jedinica na desnoj strani jednadžbe i jedinice na lijevoj strani.

Do (7. 1—1) došli smo u odsječku 5. 4. tako da smo opću veličinsku jednadžbu razložili na brojčanu jednadžbu i na jednadžbu među jedinicama. Pri tom smo svaku veličinu u veličinskoj jednadžbi rastavili na umnožak brojčanog iznosa i jedinice. Ponovimo taj postupak na mnogo jednostavnijem primjeru koji već poznamo iz odsječka 5. 5. Veličinska jednadžba snage u ovisnosti o sili i brzini glasi

$$P = F v, \quad (7.1-2)$$

gdje *kurzivni* znakovi redom predstavljaju veličine snaga, sila i brzina.

Razložimo li svaku od tih veličina (*kosa* slova) na umnožak brojčanog iznosa (uspravna slova) i jedinice, dakle $P = P [P]$, $F = F [F]$, $v = v [v]$ od izraza (7.1—2) dobivamo

$$P [P] = F v [F] [v]. \quad (7.1-3)$$

Izdvojimo li odavde jednadžbu među jedinicama

$$[P] = u [F] [v], \quad (7.1-4)$$

čime smo uveli količnik jedinica u , izraz (7.1—3) prelazi u brojčanu jednadžbu

$$P = \frac{1}{u} F v. \quad (7.1-5)$$

Uspravni simboli predstavljaju dakako brojčane iznose $P = P/[P]$, $F = F/[F]$ i $v = v/[v]$, što je u skladu s našim temeljnim odnosom između brojčanog iznosa, veličine i jedinice $G = G/[G]$.

Ovdje nas prvenstveno zanima jednadžba među jedinicama (7.1—4). To je opća jednadžba tako dugo dok ne fiksiramo tri od četiri znaka u njoj. Odredimo li na primjer da je konkretna jedinica sile kilopond, dakle $[F] = \text{kp}$, a konkretna jedinica brzine metar u sekundi, dakle $[v] = \text{m/s}$, jednadžba (7.1—4) prelazi u oblik

$$[P] = u \cdot \text{kp} \cdot \text{m/s}. \quad (7.1-6)$$

Time jedinica snage još uvijek nije posve određena. Treba još fiksirati količnik jedinica u . Odaberemo li $u = u_1 = 75$ dobivamo

$$[P]_1 = 75 \text{ kpm/s} = \text{konjska snaga} = KS.$$

Mogli smo odabrati i $u = u_2 = 76,04$ pa bismo dobili drugu jedinicu snage

$$[P]_2 = 76,04 \text{ kpm/s} = \text{horse power} = \text{HP},$$

angloameričku konjsku snagu (vidi odsječak B. 11. 11 i tablicu VIII). Vidimo da smo posve samovoljno odabirali iznos količnika u , ali tako da smo dobili već poznate i upotrebljavane jedinice.

Naravno da možemo odabrati i bilo koji drugi iznos količnika jedinica osim nule. U tom bezbroju mogućnosti najprikladniji je izbor $u = u_3 = 1$. Time od jednadžbe (7.1—6) dobivamo

$$[P]_3 = \text{kp} \cdot \text{m/s} = \text{kpm/s}. \quad (7.1—7)$$

Rekli smo da je takav izbor količnika jedinica najprikladniji. Odmah možemo navesti dva razloga toj tvrdnji. Prvi je taj što je jedinica snage $[P]_3 = \text{kilopondmetar u sekundi}$ izvedena iz kp , m i s po načelu $1 \times 1 = 1$. Specijalnu jediničnu jednadžbu (7.1—7) možemo naime pomnožiti brojem 1, a da se jednadžba ne promijeni:

$$1 [P]_3 = 1 \text{ kp} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ kp} \cdot 1 \text{ m/1 s}.$$

To znači da se jedinice izvode iz (proizvoljno odabranih) osnovnih jedinica jednostavnim međusobnim množenjem ili dijeljenjem bez sudjelovanja bilo kakvog »parazitnog koeficijenta«, kakav je na primjer $u_1 = 75$ ili bilo koji drugi različit od 1. Simbolički dakle kažemo da su kod $u = 1$ jedinice u međusobnom odnosu $1 \times 1 = 1$.

Posljedice toga sasvim su očigledne. Čovjek koji primjenjuje jedinice uopće ne mora pamtit i kako su pojedine izvedene jedinice definirane (npr. KS!), već ih može usput u računu definirati ili pregrupirati kako mu je praktično i korisno za stanovitu svrhu, jer zbog odnosa $1 \times 1 = 1$ nigdje ne može pogriješiti. Pri tom mora znati samo to kako glase pripadne veličinske jednadžbe, a to sigurno zna kad se bavi nekim proračunom.

Rečeno vrijedi ne samo za slučaj jedinice $[P]_3$ već i općenito. Stavimo li naime $u = 1$ u jediničnu jednadžbu (7.1—4) dobivamo

$$[P] = [F] [v],$$

dakle opet skladan odnos, koji također možemo simbolički označiti sa $1 \times 1 = 1$. Pa i najopćenitiji odnos među jedinicama (7.1—1) sa $u = 1$ dobiva skladan oblik

$$[G] = [A]^a [B]^b [C]^c \dots \quad (7.1—8)$$

Iz $u = 1$ rezultira i druga posljedica skladnosti jedinica. Stavimo li naime u brojčanu jednadžbu (7.1—5) $u = 1$ dobivamo

$$P = F v.$$

Usporedimo li ovu brojčanu jednadžbu s veličinskom (7.1—2) vidimo da su one po obliku međusobno potpuno jednake. Prema tome pri upotrebi skladno odabranih jedinica uopće više ne moramo razlikovati brojčane jednadžbe od veličinskih!

Taj zaključak dakako vrijedi i posve općenito. Upotrebimo li naime skladne jedinice, zbog $u = 1$ postaje prema izrazu (5.4—6) $Z = n$, pa je opća brojčana jednadžba (5.4—5) u tom slučaju oblikom potpuno identična veličinskoj (5.4—1).

Jedinice koje se izvode po načelu $1 \times 1 = 1$; dakle sa $u = 1$, nazivamo skladnim ili koherentnim jedinicama. Budući da su te jedinice izvedene sistematično skup svih tako izvedenih jedinica naziva se sistemom jedinica.

Na primjer izvedena jedinica snage $[P]_3 = \text{kpm/s}$ je koherentna jedinica »Tehničkog sistema jedinice mehanike« koji razmatramo u odsječku B. 4. Za polazne (osnovne) jedinice tog sistema odabrane su baš navedene jedinice sile, duljine i vremena: kilopond, metar i sekunda.

Neki autori ne definiraju »sistem jedinica« tako kao što smo mi učinili, već jednostavno smatraju da čitav skup jedinica predstavlja sistem jedinica, pa im dakle i konjska snaga spada u njihov sistem. Zbog toga moraju skup jedinica izveden po načelu (7.1—8), dakle sa $u = 1$, nazivati »koherentnim sistemom jedinica«. Naravno da to nije ispravno jer sistem mora biti sistematičan, a on je potpuno sistematičan jedino kad je $u = 1$, kad možemo simbolički izraziti odnos među jedinicama sa 1×1 . Prema tome konjska snaga sa $u = 75$ ne može biti član sistematičnog društva ostalih poznatih koherentnih jedinica.

Pri osnivanju sistema jedinica neke se jedinice proizvoljno odabiru i proglašuju polaznim ili osnovnim. Kod već spomenutog Tehničkog sistema to su metar, sekunda i kilopond. Tri osnovne jedinice posve su dovoljne u mehanici jer tamo je dovoljno da se tri veličine proglase osnovnim i s njima definiraju sve ostale veličine. U elektromagnetizmu nisu dovoljne tri osnovne (polazne) jedinice već su neophodne četiri, jer u toj su grani neophodne i četiri osnovne, aksiomske veličine, s kojima definiramo sve ostale. Posve je prirodno da osnovnih jedinica mora biti isto toliko koliko i osnovnih veličina, jer iz odsječka 5. znamo da je jedinica samo fiksirana vrijednost veličine.

Postoje dakako i drugi sistemi jedinica, a ne samo Tehnički iz odsječka B. 4 koji smo ranije spomenuli. Na primjer za osnovne jedinice možemo odabrati jedinice duljine, vremena i mase metar (m), sekundu (s) i kilogram (kg), dakle $[l] = \text{m}$, $[t] = \text{s}$, $[m] = \text{kg}$. Ovdje moramo pripaziti da ne pomiješamo dva jednaka simbola različitog značenja: *kurzivno* slovo *m* (u uglatoj zagradi) označuje veličinu masa *m*, dok uspravno slovo *m* označuje kraticu specijalne jedinice duljine metar. Pokazat ćemo kako se na temelju tih triju odabranih (i proglašanih osnovnim) jedinica izvode ostale, izvedene jedinice.

Učinimo to putem veličinske jednadžbe za kinetičku energiju *W* tijela mase *m* koje se jednoliko giba brzinom *v*. Ta jednadžba glasi

$$W = \frac{1}{2} mv^2.$$

Pri jednolikom gibanju brzina je definirana jednadžbom $v = l/t$ pa time gornja jednadžba dobiva oblik

$$W = \frac{m l^2}{2 t^2}. \quad (7.1-9)$$

Kurzivnim smo pismom naglasili da simboli predočuju veličine. Na prijašnjim primjerima mogli smo opaziti da su jedinice koherentne onda kad se međusobno odnose isto onako kao veličine u veličinakoju jednadžbi, ali kao da je $Z = 1$ (usporedi jednadžbe (6.4—1, 4,5) kad je $u = 1$, a to je uvjet koherencije).

Prema tome iz (7.1—9) možemo jednostavno i brzo dobiti koherentan odnos među odgovarajućim jedinicama

$$[W] = [m] [l]^2 [t]^{-2},$$

gdje smo pritom ignorirali $Z = 1/2$.

Budući da smo odabrali osnovne jedinice $[m] = \text{kg}$, $[l] = \text{m}$, $[t] = \text{s}$, iz gornje jednadžbe odmah slijedi koherentna jedinica energije Međunarodnog (takožvanog $m - \text{kg} - \text{s}$; zvan i MKS) sistema jedinica

$$[W] = \text{kg m}^2/\text{s}^2.$$

Ovu jedinicu nazivamo joule (J), dakle je $J = \text{kg m}^2/\text{s}^2$.

Jedinicu sile F dobili bismo iz druge jednadžbe za rad i energiju $W = Fl$ pomoću

$$[W] = \text{joule} = [F][l] = [F] \cdot \text{m},$$

gdje uspravno slovo m označuje metar. Prema tome jedinica sile je u Međunarodnom sistemu jedinica

$$[F] = \text{joule/metar} = J/\text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2.$$

Ova se jedinica naziva newton (N).

Koherentnu jedinicu snage Međunarodnog sistema dobili bismo iz treće jednadžbe energije $W = Pt$, što bi po ključu (5. 4—4) sa $u = 1$ (uvjet koherencije!) dalo $[W] = [P][t]$, odnosno uz $[W] = J$, $[t] = \text{s}$ dalje $[P] = J/\text{s}$. Ovu koherentnu jedinicu nazivamo watt = $W = J/\text{s}$.

Dosada smo u stvari razmatrali samo dva sistema jedinica koji imaju za osnovu jedinice takozvanih mehaničkih veličina. Što se događa kad tako izvedene jedinice želimo upotrebiti u elektromagnetizmu? Ovo je pitanje naročito zanimljivo zbog toga jer znamo da u elektromagnetizmu moramo imati četiri osnovne jedinice, dok su mehanici neophodne samo tri.

Riješimo ovaj problem ponovo na jednadžbi energije W . U elektromagnetizmu je veličina energija jednaka umnošku veličina napon U , električna struja I i vrijeme t :

$$W = U I t.$$

Po već upotrebljenom ključu odavde slijedi jednadžba među koherentnim jedinicama.

$$[W] = [U][I][t].$$

Prvu i posljednju jedinicu već smo imali u netom raspravljenom Međunarodnom (MKS) sistemu jedinica: $[W] = J$, $[t] = \text{s}$. Stoga iz gornje jednadžbe slijedi

$$[U][I] = \text{watt}. \quad (7. 1—10)$$

Vidimo da moramo jednu od tih dviju jedinica u uglatoj zagradi najprije fiksirati da bismo poslije pomoću gornje jednadžbe mogli definirati i drugu, a onda preko te dvije i sve ostale jedinice koje se upotrebljavaju u elektromagnetizmu.

Odaberemo li $[I] = \text{amper (A)}$, iz (7. 1—10) odmah slijedi $[U] = W/A$, a to je volt (V), jer je $VA = W$. Prema tome je jedinična jednaždba (7. 1—10) most preko kojega se MKS sistem jedinica proširuje od odabrane tri osnovne jedinice mehanike u odabrane četiri polazne (osnovne) jedinice elektromagnetizma $m-s-A-V$.

Budući da su sve te jedinice m , s , J , W , kg , V , A međusobno koherentne, kako smo upravo vidjeli (stalno je količnik jedinica $u = 1$), sve one zajedno predstavljaju jedinstveni, univerzalni sistem jedinica mehanike i elektromagnetizma. Taj

se univerzalni sistem naziva *Međunarodnim sistemom jedinica*¹⁾, jer je međunarodno usvojen.

Iz ovih razmatranja proizlazi da je na primjer Tehnički sistem jedinica (vidi odsječak B. 4) samo parcijalni sistem jedinica koji vrijedi samo u mehanici. I MKS sistem samo je parcijalni sistem jedinica, a ujedno samo ogranak, dio univerzalnog Međunarodnog sistema jedinica. Kao takve ogranke razmatramo Međunarodni sistem jedinica u odsječcima B. 3, D. 7 i E. 2 gdje se govori o njegovim parcijalnim primjenama u mehanici, termodinamici i elektromagnetizmu.

Spomenimo još da je posve lako kontrolirati da li su dva parcijalna sistema jedinica međusobno koherentna. Ako se radi o dva parcijalna sistema s tri osnovne jedinice onda moraju po tri međusobno nezavisne jedinice istih veličina biti međusobno jednake. Na primjer $[l]_1 = [l]_2$, $[t]_1 = [t]_2$ i $[F]_1 = [F]_2$, gdje se indeks 1 odnosi na prvi sistem, a 2 na drugi parcijalni sistem jedinica. Usporedimo na taj način Tehnički sistem jedinica mehanike i parcijalni MKS Međunarodnog sistema. U prvome je $[l]_1 = m$, $[t]_1 = s$, $[F]_1 = kp$, a u drugome $[l]_2 = m$, $[t]_2 = s$, $[F]_2 = N$ (newton). Dvije su jedinice dakle jednake, ali treća nije jer je $kp = 9,806\,65\,N$. Prema tome ova dva sistema nisu međusobno koherentna. Nasuprot tome jesu koherentni parcijalni sistemi $m - s - kg$ i $m - s - J$ ($J = \text{joule}$), jer je $J = kg\,m^2/s^2$, dakle simbolički $1 = 1 \times 1^2/1^2$. Stvarno su ovi parcijalni sistemi samo dijelovi univerzalnog Međunarodnog sistema.

Ispitujemo li koherentnost dva parcijalna sistema s četiri osnovne jedinice analogni se postupak obavlja na četiri međusobno nezavisne jedinice.

7.2. Jedinice, pramjere i pramjerila

U prošlim smo odsječcima često upotrebljavali izraz jedinica. I u svim daljnjim tekstovima ove knjige neprestano ćemo se s njime susretati. Stoga je korisno da još jednom podsjetimo da je jedinica fiksirana konstantna vrijednost veličine. Na primjer jedinica sila newton tačno je fiksirana sila. Možda je pojmljivije ako za jedinicu kilogram kažemo da je to masa materijalnog uzorka kilograma koji se čuva u Sèvresu (vidi odsječak 3. 1. 2).

Iz odsjeka 3. znamo da svaka država potpisnica Konvencije o metru ima svoj materijalni uzorak kilograma. Taj materijalni uzorak nazivamo pramjerom ili etalonom; za masu imamo na taj način prakilogram. Državni su prakilogrami međutim samo kopije pariške pramjere, a kopija nikada nije posve jednaka originalu. Stoga se, kako smo objasnili u odsjeku 3, državne pramjere moraju povremeno slati na usporedbu u Sèvres, gdje se mjerenjem uvijek iznova utvrđuje koliko se nacionalna pramjera razlikuje od jedino mjerodavne, pariške primarne pramjere.

¹⁾ Prema punovažnim zaključcima Jedanaeste generalne konferencije za mjere i utege, koja je održana 1960. godine u Parizu, pod nazivom *Međunarodni sistem jedinica* (Système International d'Unités) razumijevamo skup koherentnih jedinica s ovim osnovnim jedinicama: metar, kilogram, sekunda, amper, stupanj kelvina i candela. Prema tome parcijalni sistemi jedinica poznati pod nazivima MKS, Giorgijev i VAmS sistemi predstavljaju organske dijelove univerzalnog Međunarodnog sistema, namijenjene pojedinim granama znanosti i tehnike (npr. mehanici, elektromagnetizmu itd.). U daljnjem tekstu knjige upotrebljavat ćemo dosljedno naziv *Međunarodni sistem jedinica* u spomenutom značenju. Napominjemo da Jugoslavija provodi zaključke Generalne konferencije, što se vidi iz teksta Jugoslavenskih standarda za jedinice i veličine koji su u skladu s predmetnom međunarodnom standardizacijom.

Od pramjere se zahtijeva zapravo samo jedna, ali važna osobina: trajnost. Teoretski, etaloni trebaju da budu vječni, no znamo da se to praktički ne može ostvariti. Zub vremena mijenja pramjere, jer sve što je stvarno podvrgnuto je vječnom kružnom procesu uništavanja i stvaranja, što se odvija u prirodi. U sitnim ljudskim vremenskim relacijama to se doduše ne opaža, ali zub vremena neosporno djeluje pa makar otkidao molekulu po molekulu. Stoga se neprekidno proučavaju mogućnosti upotrebe prirodnih pramjera, doista vječnih pramjera. O tome smo raspravljali u odsječku 4.

Prirodne pramjere nisu samo pitanje budućnosti. Stvarno već i sada upotrebljavamo uz materijalnu pramjeru (prakilogram) tri prirodne pramjere. Prva od njih je pramjera vremena, jer jedinica vremena sekunda nije arhivirana u obliku prasekunde u Sèvresu, već predstavlja određeni dio vremenskog intervala koji se periodički ponavlja u mehanizmu nebeskog hoda Zemlje i Sunca. Budući da ni taj mehanizam nije savršen, istražuje se kako bi se pronašlo tačnije pramjerilo jedinice vremena.

Rječju »pramjerilo« označili smo uređaj kojim se najpreciznije reproducira pramjera. Od pramjerila ne zahtijevamo apsolutnu postojanost već izvanrednu mjernu tačnost. U tom smislu i pariška pramjera ima svoje pramjerilo: za prakilogram to je izvanredno precizna vaga na kojoj se nacionalni etaloni uspoređuju s primarnom pramjerom mase. Pramjerila, dakle mjerni uređaji, vremenom će postati još tačniji, a pramjera (kg) će ostati i dalje, ako je ne zamijeni neka prirodna pramjera koju će opet reproducirati neko pramjerilo.

Druga prirodna pramjera je pramjera duljine (vidi odsječak 4. 1.).

Najpreciznije od svih pramjerila prirodnih pramjera mogli bismo odabrati za pramjeru. Taj bi se mjerni uređaj pohranio u Sèvresu i tamo bismo onda kontrolirali nacionalna (pramjerila, na primjer atomski sat i strujnu vagu (vidi odsječak E. 2. 2)). To opet nije moguće učiniti iz dva razloga. Prvo, jer su takva mjerila zbog svoje komplicirane konstrukcije (vaga, komparator, svici) jako podložna vremenskim promjenama, dakle nestabilna su, a drugo, što mjerna vještina i mjerni uređaji postaju sve precizniji pa bi u stanovitim vremenskim razmacima u Sèvresu trebalo uvijek iznova postavljati nov uređaj. Međutim ovako kako je danas svatko može s trenutnom dostignutom tačnošću sam reproducirati pramjeru, a pritom je propisan samo mjerni postupak, a ne mjerni uređaj.

Treća, danas stvarno upotrebljavana prirodna pramjera, je indukciona konstanta μ_0 . To je u stvari elektromagnetsko svojstvo prostora u kojem živimo. Ni za jedinicu indukcione konstante nemamo materijalne pramjere kao što je prakilogram. Ovu prirodnu pramjeru možemo reproducirati posebnim pramjerilom koje nazivamo »strujnom vagom«. O provedbi tog postupka reprodukcije govori se u odsječku E. 2. 2.

U budućnosti će se možda naći tačnije i manje komplicirano pramjerilo, ali samo zato da bi se najpreciznija elektromagnetska metrološka mjerenja mogla obavljati još preciznije. Sama prirodna pramjera, indukciona konstanta, vjerojatno će ostati, jer barem zasada nije opaženo da na nju djeluju umjetne nuklearne reakcije ili neki drugi fenomeni.

Tokom naših dosadašnjih izlaganja često smo upotrebljavali izraze »jedinica« i »mjera«. I u naslovu su knjige oba izraza. Većina ljudi smatra da oni znače isto, da su sinonimi. Neki čak smatraju da je »mjera« pučkog porijekla u pogrdnom smislu te riječi, jer da laici kažu kako su vjedro, aršin ili jutro »mjere«.

Ipak između značenja tih dviju riječi postoji sasvim fina razlika. U našim razlaganjima mogli smo zapaziti da mjeru upotrebljavamo tamo, gdje se radi o

stvarnom mjerenju i primjeni materijalnog uzorka jedinice. U tom je smislu trgovački metarski štap mjera kojom je trgovac izmjerio stanoviti broj jedinica duljine, na primjer tkanine i ispostavio račun. Stoga izraz jedinica obično upotrebljavamo tamo gdje računamo.

Analogno tome i »sistemi jedinica« služe za računanje. Pri proračunu više se ne misli kako je mjerenje obavljeno, ali je to bilo itekako važno prilikom stjecanja mjernih rezultata. Na primjer elektromagnetske jedinice Međunarodnog i Tehničkog (V_0, A_0) sistema po svojoj se vrijednosti razlikuju samo za nekoliko stotinki postotka, ali pripadaju različitim mjernim sistemima (vidi odsječke E. 2 i E. 4). Nasuprot tome sistem jedinica VAmS znatno je različit od sistema jedinica V A cm s, iako te jedinice spadaju u isti mjerni sistem.

Ove razlike iščekavaju u praksi koja na sreću gotovo uvijek stvari pojednostavljuje do moguće granice razumljivosti. Stoga ni u ovoj knjizi nismo željeli puritanskom terminologijom komplicirati i onako dijelom zamršene pojmove.

8. DIMENZIJE I SISTEMI DIMENZIJA

Nazive dimenzija i sistemi dimenzija često čujemo i to odmah u nekoliko različitih značenja. No gotovo nigdje ne nalazimo definiciju koja bi objasnila što je to dimenzija (zvana i »razmjernost«), a kad je u nekoj specijalnoj metrološkoj raspravi autor i formulira, odmah se javi niz stručnjaka koji misle drukčije. Razlog je tome historijske naravi: jedni autori dolaze na dimenzije od veličinskih jednadžbi prirodnih zakona, a drugi od brojčanih izraza. Na kraju ipak sve svršava dobro, jer u primjeni dimenzija (dimenzionalna kontrola i analiza) svi postupaju jednako pa su i rezultati jednoznačni, iako nema valjane univerzalne definicije.

Na pojam dimenzije dolazimo pomoću opće jednadžbe među jedinicama koje još nisu fiksirane. Pri tom se služimo našom osnovnom jednadžbom između jedinica (5.4—4) koju pišemo u koherentnom obliku, dakle s količnikom jedinica $u = 1$:

$$[G] = [A]^a [B]^b [C]^c \dots \quad (8-1)$$

U smislu dimenzija ovu jednadžbu čitamo ovako: »Dimenzija veličine G jednaka je dimenziji veličine A na potenciju a , puta dimenzija veličine B na potenciju b itd.« Stoga se gornja jednadžba naziva »dimenzionom jednadžbom«. Budući da nisu definirane specijalne vrijednosti jedinica $[A]$, $[B]$ itd. dimenzionu jednadžbu možemo shvatiti kao opću jednadžbu među općim jedinicama sa $u = 1$. Neki pri tom kažu da dimenziona jednadžba sadrži i međusobno povezuje »kvalitetu« fizikalnih veličina, pa po tom nazoru dimenziona jednadžba izražava »fizikalni sadržaj« veličina. Zbog toga mnogi odbacuju uglate zagrade u jednadžbi (8—1) i umjesto općih jedinica jednostavno pišu iste simbole bez zagrada:

$$G = A^a B^b C^c \dots \quad (8-2)$$

Pri tom upotrebljavaju uspravna slova da ne bi došlo do eventualne zamjene s veličinskim jednadžbama. Do zamjene s brojčanim jednadžbama koje tiskamo uspravnim slovima ne može naime doći budući da izloženi pojam dimenzije nema nikakve veze s brojčanim iznosima.

U tom se načinu obilježavanja dimenziona jednadžba energije u elektromagnetizmu izvodi iz opće jednadžbe među jedinicama $[W] = [U] [I] [t]$ i piše u obliku

$$W = U I T. \quad (8-3)$$

Vidimo da smo ovdje uveli oznaku $[t] = T$, dakle dimenziju veličine vrijeme označujemo sa T . Ovakva zamjena malih slova s velikima čini se još kod dimenzije dviju drugih veličina. To su duljina l i masa m za koje su već odavno uvriježene oznake $\dim l = [l] = L$, $\dim m = [m] = M$.

U skladu s time dimenziona jednadžba energije u mehanici obično se piše u obliku

$$W = L^2 T^{-2} M. \quad (8-4)$$

Dimenzione jednadžbe mogu se izraziti i riječima. Na primjer gornje dvije na taj način glase

$$\text{energija} = \text{napon} \times \text{struja} \times \text{vrijeme},$$

$$\text{energija} = \frac{\text{duljina}^2 \times \text{masa}}{\text{vrijeme}^2}$$

Isto kao i kod jedinica tako i kod dimenzija postoje sistemi dimenzija. Stanovite se dimenzije proglase osnovnim (polazne, ishodišne, glavne) pa u analogiji sa sistemima jedinica izvedenim dimenzijama smatramo one, koje se na primjer pomoću izraza (8-3) ili (8-4) izvode iz osnovnih. Broj osnovnih dimenzija jednak je broju osnovnih veličina i jedinica. U mehanici na primjer najpoznatiji je sistem dimenzija LTM, kod kojega su L , T i M proglašene osnovnim dimenzijama. Iz toga slijedi da je dimenzija energije W izvedena. To je dakako parcijalni sistem dimenzija ako upotrebimo terminologiju iz odsjeka 7. 1.

U elektromagnetizmu se najčešće upotrebljava sistem dimenzija LTUI, dakle sistem sa četiri osnovne dimenzije, što je u skladu sa zahtjevom da broj osnovnih dimenzija mora biti jednak broju osnovnih veličina.

Iz ove jednakosti broja polaznih veličina i dimenzija proistječe niz nesporednizuma. Mnogi misle da se odabrane osnovne veličine moraju odabrati kao osnovne i za gradnju sistema jedinica, te za formiranje sistema jedinica. Već smo nekoliko puta naglasili da tome nije tako, već da su svi ti sistemi privatna stvar svakog pojedinca i da to nema nikakve veze s međunarodnom i nacionalnom standardizacijom.

Promotrimo li dimenzione jednadžbe (8-1, 2, 3 4) vidimo da bismo do njih mogli doći i tako kad bismo u veličinskim jednadžbama odbacili prirodne brojčane faktore, tj. stavili $Z = 1$ (vidi jednadžbu 5. 4-1), a umjesto kurzivom, oznake veličina napisali uspravnim slovima. Formalno dimenzione jednadžbe dobivamo dakle tako da »izniveliramo« veličinske jednadžbe stavljanjem $Z = 1$. Međutim sve druge operacije (množenje, dijeljenje, potenciranje, korjenovanje, rot, div) ostaju i kod dimenzija, ali kao posljedica operacije, na primjer: L^2 , $M^{-1/2}$, $\dim \text{rot} = L^{-1}$ itd. Tako stvarno do izvedenih dimenzija dolazi većina ljudi koji se time bave.

Vezu između dva sistema dimenzija obično predstavljaju dimenzije onih veličina koje su im zajedničke, na primjer energija u mehanici i elektromagnetizmu. Tako na primjer jednadžbe (8-3) i (8-4) izražavaju dimenziju energije W u LTUI sistemu i u LTM sistemu dimenzija. Izjednačenjem tih jednadžbi dobivamo

$$UIT = L^2 T^{-2} M,$$

odakle računanjem kao da se radi o brojevima ili veličinama slijedi

$$L^2 T^{-3} M = UI.$$

To je most između dva sistema dimenzija od kojih se jedan temelji na tri osnovne dimenzije, a drugi na četiri. Posljedice ove veze možemo komentirati jednako kao i analognu vezu među jedinicama koju smo imali u odsječku 7. 1.

Podrobnije se o pojedinim sistemima dimenzija govori u odsječcima B. 14. i E. 8, te u tablicama B. 16, D. 3 i E. 5.

U ovoj smo knjizi dimenzijama posvetili relativno malu pažnju. To je i razumljivo kad se podsjetimo kako smo od veličinskih jednadžbi preko općih jedinica došli do pojma dimenzije. Stoga nam sistemi dimenzija nisu donijeli ništa nova, a svrha ove knjige nije da njeguje »metrološku mistiku«, već da pruži pomoć pri računanju s jedinicama i da na jednome mjestu skupi odnose među svim onim heterogenim mnoštvom jedinica koje su još uvijek u upotrebi.

B. MJERNI SISTEMI MEHANIKE

1. VELIČINE GEOMETRIJE I MEHANIKE

1.1. Duljina

Duljina je osnovna veličina trgovine, tehnike i znanosti, dakle osnovna veličina svakodnevnog života. Iz iskustva znamo što treba razumijevati pod pojmom »duljina«. To je osnovno obilježje pravca, krivulje, razmaknutosti. Značajke pravca imaju visine, širine, dubine, promjeri, udaljenosti, razmaci, a značajke krivulja lukovi, obodi, opsezi itd. Pomoću duljine l definiramo druge veličine: površinu, obujam, brzinu itd.

Osnovnu veličinu duljina ne možemo definirati jer fizikalna veličina nije sama konkretna stvar, već osobina, svojstvo, atribut, čovjekov zamišljeni fizikalno-matematički model same prirodne pojave. Kad u neku jednadžbu uvrstavamo simbol duljine l poslužujemo se baš tim spomenutim atributom ili modelom pojma duljine.

Duljina je jedna od onih osnovnih veličina koje se pomoću jednadžbi ne mogu definirati s već objašnjenim drugim veličinama. Stoga duljinu ubrajamo među nezavisne ili aksiomatske veličine. Takva je npr. još vrijeme na koju ćemo nadoći u odsječku 1. 3.

U prvi se mah može pomisliti da bismo duljinu mogli definirati pomoću jednadžbe

$$l = \sqrt{A},$$

gdje je A površina kvadrata. To ne možemo učiniti jer u tom bismo slučaju morali priznati površinu kao osnovnu veličinu, a o njoj imamo temeljno objašnjenje baš preko duljina stranica kvadrata. Osim toga pri kvadratu moramo najprije utvrditi pojam pravoga kuta.

1.2. Kut

Veličinu »kut« definiramo pomoću definicione jednadžbe. Pod kutom (ravinski kut) razumijevamo omjer duljine luka s koji na kružnici polumjera r omeđuje dvije zrake povučene iz središta, i duljine polumjera r . Prema slici B 1 kut je dakle

$$\alpha = \frac{s}{r}. \quad (1.2-1)$$

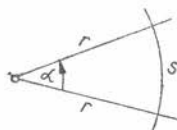
Kut je dva puta veći ako na istoj kružnici radijalne zraka odsijecaju dva puta dulji luk. To znači da je općenito

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{s_1}{s_2}$$

uz $r = \text{const.}$

Kod istog kuta, dakle kod $\alpha = \text{const.}$ zrake odsijecaju na kružnicama polumjera r_1 i r_2 lukove s_1 i s_2 koji se odnose kao polumjeri, dakle

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2}$$



Sl. B 1. Uz definiciju kuta

Kutovi se mogu zbrajati i oduzimati isto kao i duljine. Prema jednadžbi (1.2—1) kutu α_1 pripada na kružnici radijusa r luk $s_1 = \alpha_1 r$, a kutu α_2 na toj istoj kružnici luk $s_2 = \alpha_2 r$. Zbroj tih dvaju lukova iznosi $s = s_1 + s_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) r$, pa je ukupni kut

$$\alpha = s/r = \alpha_1 + \alpha_2$$

1.3. Vrijeme

Veličina »vrijeme« također je osnovna veličina, analogno duljini koju smo spomenuli u odsječku 1.1. Veličina vrijeme t samo je naš misaoni model prirodne pojave koja se u životu manifestira starenjem, događajima što se nižu jedan za drugim itd. Pojam vremena iskustvene je prirode i na taj je način ušao u čovjekove životne djelatnosti.

Predodžbu o vremenu stječemo usporedbom. Veličina vrijeme od vrijednosti je onda kad se može uspoređivati s trajanjem neke pojave.

Trajanja, tj. »vremenski razmaci« mogu se zbrajati i oduzimati. Vrijeme uvijek računamo u odnosu na neku zadanu vremensku tačku koju smatramo ishodištem. Kad kažemo da trajanje jednog titraja traje vrijeme T onda time vremensko ishodište postavljamo na početak titraja, tj. trajanje titraja označujemo kao razliku vremena $T = t_2 - t_1$ između vremenskih tačaka t_2 i t_1 unutar kojih je došlo do jednog potpunog titraja. Pritom se vremensko ishodište može postaviti u bilo kojem momentu prije t_1 .

1.4. Brzina i ubrzanje

Veličina brzina oslanja se na pojam koji nazivamo gibanjem. Brzina je jedna od opisnih značajki gibanja. O gibanju imamo iskustvene predodžbe, na primjer: dva tijela giblju se jednako brzo kad u jednakim vremenskim razmacima pređu jednake udaljenosti.

Za dva tijela kažemo da imaju različite brzine v_1 i v_2 kad u jednakim vremenima t pređu nejednake putove l_1 i l_2 . U tom se slučaju brzine odnose kao pređene udaljenosti, tj. $v_1 : v_2 = l_1 : l_2$.

Pređu li dva tijela isti put s tijekom različitih vremena t_1 i t_2 brzine se odnose obrnuto od trajanja, dakle $v_1 : v_2 = t_2 : t_1$.

Na temelju tih iskustava veličina brzina definirana je omjerom

$$v = \frac{l}{t}$$

i ovo je definiciona jednadžba prosječne (srednje) brzine.

Brzina u bilo kojem trenutku t definirana je jednadžbom

$$v = \frac{dl}{dt}.$$

Ubrzanje a u bilo kojem trenutku t definira se izrazom

$$a = \frac{dv}{dt},$$

tj. ubrzanje nastaje kad se mijenja brzina.

Veličine v i a posve su nove i drukčije veličine nego što su duljina l i vrijeme t . Stoga nisu ispravne one definicije koje kažu da je »brzina put pređen u jedinici vremena« ili da je »ubrzanje promjena brzine u jedinici vremena«.

1.5. Brzina vrtnje

Slika B2 prikazuje jednoliku vrtnju tačke u udaljenosti r od čvrstog središta vrtnje. Brzina kojom tačka jednoliko kruži je v te se naziva obodnom brzinom. Da bi tačka opisala puni krug potrebno je vrijeme T , nazvano (vremenskim) periodom vrtnje. Tijekom vremena T tačka pređe put $s = 2\pi r$. Stoga je obodna brzina

$$v = \frac{s}{T} = \frac{2\pi}{T} r.$$

Veličinu

$$n = f = 1/T$$

nazivamo »frekvencijom vrtnje« ili kraće frekvencijom. U mehanici se češće rabi naziv »brzina vrtnje« (stariji naziv je »broj okretaja u jedinici vremena«).

Niz imena za istu veličinu potječe otuda što se ponekad smatra da je pri definiciji ili mjerenju kružnih gibanja neophodno uvesti luk (dio kružnice) kao duljinsku veličinu po kvaliteti različitu od pravaca, a da s druge strane toga nema kod periodičkih pojava koje svodimo na titranja.

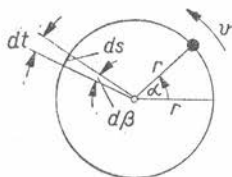
U krajnjoj liniji nije neophodno potrebno razlikovati kružnicu od pravca, barem ne kod definicija vrlo važnih temeljnih pojmova kakav je napr. brzina vrtnje. Za tu svrhu može nam poslužiti slika B3 koja prikazuje kružnicu polumjera r te dijelove kružnica nekoliko puta većih radiusa.

Za gibanje po kružnici r svakako vrijedi ono što smo rekli za sliku B2, jer obje su kružnice jednake. Nema razloga da ista načela kinematike i dinamike ne vrijede za kružnicu polumjera $2r$, a isto tako i za onu radijusa $4r$. Povećavamo li tako polumjer sve više, na kraju dolazimo do kružnice neizmjereno velikog radijusa, a to je već pravac.

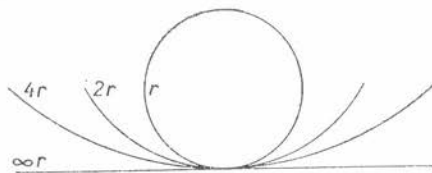
Ne moramo međutim ići do neizmjereno velikog polumjera. Primjer gibanja po »ravnim« dijelovima površine Zemlje pružaju automobil ili vlak, a oni se poko-

ravaju zakonima dinamike po pravcu, iako stvarno voze po još jačim zakrivljenjima nego što je oblost Zemlje ($R = 6400$ km).

Na stvarne primjere opisivanja vrtnje posebnim, opisnim jedinicama na- doći ćemo u odsječku 6.2.



Sl. B 2. Jednolička vrtnja tačke



Sl. B 3. Vrtnja po sve većim kružnicama

Sa stajališta koje smo netom izložili smatramo dakle frekvenciju f i brzinu vrtnje n istom veličinom, samo što se prva više upotrebljava kod pojava titranja, a druga u tehničkoj mehanici i elektrostrojarstvu (ovdje opet kao gošća iz mehanike).

Slijedom toga je i veličina »kružna brzina« (vidi sl. B2)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{r dt} = \frac{v}{r} = 2\pi n$$

samo skraćenica kojom se izbjegava ponavljanje pisanja matematskog faktora 2π . I za ω postoji nekoliko naziva: pulzacija, kružna frekvencija, kutna brzina. Izrazi »kutna brzina« i »brzina vrtnje« (n) sigurno nisu najbolji, jer niti ω niti n nisu brzina, budući da je veličina brzina definirana omjerom duljine i vremena (vidi odsječak 1.4).

Na prvi pogled moglo bi se učiniti da je ipak neophodno brzinu vrtnje n po nazivu izjednačiti s frekvencijom f . Na primjer turbina čiji rotor ima brzinu vrtnje n okreće p -polni električki generator koji proizvodi električki napon frekvencije f . Između tih veličina postoji odnos

$$f = \frac{pn}{2},$$

gdje je p ukupni broj magnetskih polova generatora.

Ipak nabačena sumnja nije opravdana jer f i n su u ovom slučaju dvije različite frekvencije; n je frekvencija mehaničkog privoda, a f električkog odvoda. Isto smo tako mogli frekvenciju turbine označiti sa f_t , a frekvenciju napona generatora sa f_g , pa bi gornja jednačba glasila

$$f_g = pf_t/2.$$

1.6. Sila i masa

Sila i masa toliko su važni pojmovi za nauku o mjerama da ih ovdje moramo opširnije razmotriti, pogotovo jer u svakodnevnom životu upotrebljavamo ove pojmove, katkada čak i neispravno.

Pri mjerenju duljina, kutova, površina, volumena, te kinematičkih veličina uspješno smo izlazili s dvije osnovne veličine, s duljinom i vremenom. U dinamici, tj. tamo gdje se radi o gibanju stvarnih tijela, a ne zamišljenih matematskih tačaka, ova dva pojma nisu dovoljna, s njima nismo kadri izraziti iskustvene činjenice da se tijela protive promjeni gibanja, da se međusobno privlače itd. Stoga u dinamiku treba uvesti novu, treću osnovnu veličinu.

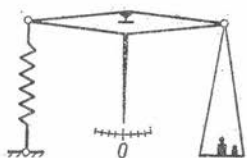
Tu novu osnovnu veličinu ne možemo definirati pomoću neke jednadžbe, dakle osloniti je na već poznate veličine. Isto tako nismo mogli matematički definirati duljinu i vrijeme, već smo ih uveli kao aksiomatske ili nezavisne veličine.

Da ponovimo! Fizikalne veličine nisu same prirodne pojave, već naš misaoni model pojave, dakle atribut pojava i stvari, svojstva koja iskustveno opažamo.

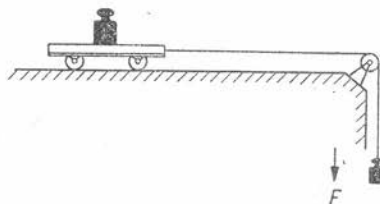
Jedan od takvih pojmova je sila. U svakodnevnom životu, odakle je na kraju krajeva proizašla nauka o mjerama, govorimo o sili naših mišića, o vučnoj sili lokomotive, o sili koju izvodi napeto čelično pero, o sili kojom čovjek pritišće na svoju podlogu, o sili kojom biljka probija zemlju prilikom nicanja, o sili između dva vodiča kroz koje teče električna struja, o sili između magneta i željezne kugle i o nizu drugih sila.

Uspoređivanje sila bilo je poznato već i pračovjeku. Da bi podigao dva jednako velika kamena morao je uložiti veći napor nego kad je podigao samo jedan. Danas kažemo da je težina dvaju jednakih kamena dva puta veća od jednoga, a usporedbu vršimo na običnim vagama ili na vagama s perom (dinamometar).

Iz iskustva znamo da je porijeklo sila različito. Na primjer, težina utega potječe od djelovanja sile teže, a sila čeličnog pera od elastičnih deformacija materijala. Unatoč različitom porijeklu takve sile možemo uspoređivati vagom na pero kao što simbolički prikazuje slika B4. Kad je vaga u ravnoteži kažemo da su težina utega i sila pera međusobno jednaki. Prema tome možemo težinu utega odabrati kao mjeru za silu.



Sl. B4. Vaga na pero



Sl. B5. Uz utvrđivanje odnosa između sile i ubrzanja

Posljedica djelovanja sila je gibanje. Sila kojom magnet privlači željeznu kuglu otkotrljat će kuglu, vučna sila lokomotive pokrenut će vlak, elektrodinamske sile okretat će elektromotor, gravitaciona sila Zemlje privući će meteorite itd.

Utjecaj sile na gibanje možemo istražiti jednostavnim pokusom kao na slici B5. Pod djelovanjem sile teže viseći uteg vuče pomoću konca kolica na koja je natovaren drugi uteg. Pod djelovanjem težine visećeg utega kolica će se gibati jednoliko ubrzano. Mjerenjem je lako utvrditi koliko je ubrzanje a .

Kad se na kolica stavi još jedan uteg, a viseći uteg (F) ostane nepromijenjen, ubrzanje kolica bit će manje.

Mnogobrojnim pokusima na takvim kolicima utvrđeno je da je ubrzanje uvijek isto kad je djelovala ista sila F , a na kolicima je bio stanovit uteg. Kad su na kolicima bila dva utega ubrzanje je bilo dva puta manje nego kad je bio jedan. Kod tri utega ubrzanje je bilo tri puta manje itd.

Na temelju toga slijedi osnovni zakon dinamike (*Newton*):

$$a = \frac{F}{m},$$

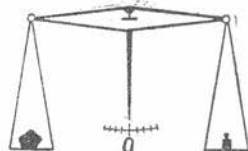
gdje je a ubrzanje, F sila, a m masa. Pokus je pokazao da je masa svojstvo materije, dakle prema

$$F = m a$$

neki koeficijent proporcionalnosti između ubrzanja a i sile F koja je proizvela to ubrzanje. Masa je za svako tijelo stalna veličina ako se tijelo giba brzinom znatno manjom od brzine svijetla (ona iznosi oko $3 \cdot 10^8$ m/s).

Podrobnije se takva masa naziva tromom masom (inertnom masom) jer to je svojstvo tijela da se protivi promjeni brzine gibanja (mirovanje možemo shvatiti kao gibanje brzinom nula).

Mase uspoređujemo na običnoj vagi kako to prikazuje sl. B6. Na desnoj zdjelici vage s polugom nalazi se uteg koji smo po volji odabrali za jedinicu (napr. pariski kilogram), a na desnoj zdjelici neko tijelo čiju masu želimo ustanoviti. Kad je vaga u ravnoteži lijeva i desna masa su jednake. Govorimo da su mase jednake kad one mogu na vagi s polugom zamijeniti jedna drugu.



Sl. B 6. Poluzna vaga

Težina nije svojstvo tijela kako se to ponekad neispravno govori i piše. Težina je sila koja djeluje na to tijelo. Na primjer težina čovjeka na Mjesecu bit će manja od težine tog istog čovjeka na Zemlji iako je njegova masa ostala nepromijenjena.

Masa igra bitnu ulogu kako u mikrokosmosu (atomistika, elektronika) tako i u makrokosmosu. Za drugi slučaj imamo primjer u Newtonovom zakonu gravitacije koji kaže da se dva svemirska tijela masa m i M međusobno privlače silom

$$F = \gamma \frac{m M}{r^2}, \quad (1.6-1)$$

gdje je r udaljenost između težišta masa.

Takve mase nazivaju »gravitacionim masama« sa željom da se one razlikuju od »tromih masa«. O problemima razlike ili identičnosti trome i gravitacione mase napisano je mnogo učenih rasprava koje još nažalost nisu dovele do konačnog rezultata.

Kod stvarnih računa, bilo u tehnici bilo u nauci, ne pravi se nikakva razlika između obje mase. I Sputnjici su pošli svojim trajektorijama na temelju pretpostavke o identičnosti obiju masa. To je i razumljivo kad se podsjetimo kako se uopće možemo poslužiti zakonom gravitacije (1.6—1).

U toj jednadžbi γ predstavlja konstantu gravitacije koju je trebalo odrediti mjerenjem. Iz astronomskih se opažanja γ ne može odrediti. Stoga je u nizu pokusa u laboratoriju izveden i slijedeći pokus prema *Cavendishu* (sl. B7).

Stvarna svemirska tijela nadomještene su u laboratoriju kuglama različitih masa. Dvije veće kugle od metala imale su mase M , dok su dvije manje imale znatnu masu m . Manje kuglice bile su smještene na prečki koja je visjela na metalnoj niti oko koje se prečka mogla okretati.

Kad se velike kugle M pomaknu centralno oko niti (slika B7 prikazuje pogled odozgo na eksperimentalni uređaj), zbog djelovanja »gravitacione sile« između M i m zakrenut će se i prečka koja nosi obje male kuglice m . Ovo kružno gibanje jednoliko je ubrzano. Mjerenjem je utvrđeno ubrzanje a , pa je dakle sila

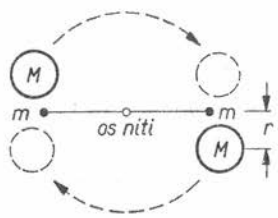
$$F = m a = \gamma m M / r^2,$$

odakle slijedi

$$\gamma = \frac{a r^2}{M}. \quad (1.6-2)$$

Takvim i sličnim metodama (mjerenje na vagi s polugom, Newtonovo mjerenje odklona njihala na brdu itd.) izmjerena je konstanta gravitacije

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$



Sl. B 7. Mjerenje konstante gravitacije prema Cawendishu

Dobivenom konstantom gravitacije »izvagana« je (ustvari izračunata) masa Zemlje. Polumjer Zemlje iznosi približno $r = 6,4 \cdot 10^6$ m, a ubrzanje sile teže na njenoj površini približno $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$, što je oboje utvrđeno mjerenjem. Pomoću jednadžbe (1.6-2) možemo izračunati masu Zemlje

$$M = \frac{g r^2}{\gamma} = \frac{9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 6,4^2 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} = 6,025 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Oдавде se zaključuje o prosječnoj gustoći Zemlje ($\rho = M/V = 5500 \text{ kg/m}^3$) i o nizu drugih podataka.

Da nema praktičnih razloga za razlikovanje tromе i gravitacione mase može nam potvrditi već primijenjeni primjer. Kruži li (sl. B2) tijelo mase m oko središta vrtnje brzinom v centrifugalna će sila iznositi

$$F = m v^2 / r = m 4 \pi^2 r / T^2,$$

gdje je $v = 2 \pi r / T$, a T trajanje jednog punog ophoda. Takvu silu izaziva i planet ako se kreće oko Sunca. Toj sili drži ravnotežu sila gravitacije

$$F = \gamma m M / r^2,$$

gdje je M masa Sunca. Jednakost tih sila daje

$$T^2 = \text{const} \cdot r^3,$$

gdje je $\text{const} = 4 \pi^2 : \gamma M$.

To je treći *Keplerov* zakon nebeske mehanike koji kaže da se kvadrati ophodnih vremena odnose kao treće potencije udaljenosti. Taj zakon nebrojeno je puta motrenjem dokazan, a ovdje smo ga izveli ne praveći razliku između »tromе« i »gravitacione« mase. Stoga ćemo u daljnjem tekstu govoriti samo o masi bez nekog pobližeg označivanja, a pod tim razumijevati svojstvo tvari koje se protivi promjeni načina gibanja.

1.7. Težina i ubrzanje sile teže

Težina tijela je sila kojom tijelo pritišće na podlogu. Podrobniju definiciju daje njemačka norma DIN 1305 iz 1938 godine: »Težina tijela, koje miruje na nekom mjestu Zemlje je sila kojom to tijelo u vakuumu djeluje na svoju podlogu. Težina se mijenja razmjerno s ubrzanjem sile teže«.

Prema Newtonovu zakonu $F = m a$, težina G iznosi

$$G = m g,$$

gdje je g ubrzanje sile teže na onom mjestu na kojem želimo utvrditi težinu tijela. Riječima: težina nekog tijela je umnožak mase tijela i ubrzanje sile teže na dotičnom mjestu Zemlje.

Ubrzanje na površini Zemlje mijenja se s geografskom širinom i sa visinom iznad Zemlje. To je opaženo mjerenjem, a daje se djelomično objasniti djelovanjem centrifugalne sile koja djeluje na površini Zemlje zbog njene vrtnje.

Zemlju možemo zamisliti kao kuglu polumjera $R = 6,4 \cdot 10^6$ m, iako je ona stvarno na polovima spljoštena za oko 1/300 polumjera. Budući da se tijekom jednog zvjezdanog dana Zemlja jedanput okrene oko svoje osi njena je kutna brzina

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/86\,164\text{ s} = 7,3 \cdot 10^{-5}\text{ s}^{-1},$$

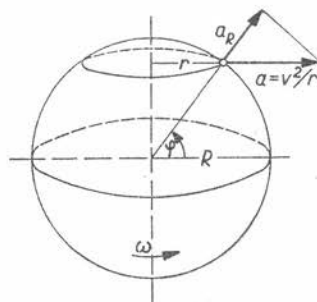
gdje je $T = 86\,164$ s trajanje jednog zvjezdanog dana.

Centrifugalno ubrzanje na površini Zemlje iznosi (sl. B8)

$$a = \omega^2 r = \omega^2 R \cos \varphi = 3,41 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \cdot \cos \varphi.$$

Ubrzanje slobodnog pada g_0 »mirujuće« Zemlje usmjereno je na svakom mjestu zemaljske površine prema središtu Zemlje. Stoga centrifugalno ubrzanje a ne djeluje u čitavom svom iznosu nasuprot g_0 , već samo dijelom

$$\begin{aligned} a_R &= a \cos \varphi = \omega^2 R \cos^2 \varphi = \\ &= 3,41 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \cdot \cos^2 \varphi, \end{aligned}$$



Sl. B 8. Ovisnost centrifugalnog ubrzanja o geografskoj širini

što je očigledno na slici B8. Rezultat je tog djelovanja stvarno ubrzanje sile teže koje ovisi o geografskoj širini:

$$g_\varphi = g_0 - \omega^2 R \cos^2 \varphi = g_0 - 3,41 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \cdot \cos^2 \varphi.$$

Oдавde se vidi da je na ekvatoru sa $\varphi = 0$ i $\cos \varphi = 1$ ubrzanje sile teže najmanje, a na polovima zbog $\varphi = 90^\circ$ i $\cos 90^\circ = 0$ najveće.

Na promjenljivost ubrzanja sile teže ne utječe samo centrifugalno ubrzanje na kruta tijela što se nalaze na površini Zemlje. Stvarno, zbog djelovanja centrifugalnih sila dolazi do elastične deformacije Zemlje i spljoštenosti, pa je utjecaj kuta φ još veći nego što pokazuje gornja jednadžba. K tome još dolazi plima i oseka, te pripadna prisiljena titranja, što dovodi do promjene ubrzanja sile teže u ovisnosti o širini

$$g_\varphi = 9,780\,490 \text{ m s}^{-2} (1 + 5,288\,4 \cdot 10^{-3} \sin^2 \varphi - 5,9 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2 2\varphi),$$

kako je prihvaćeno na Međunarodnom geodetskom udruženju u Stockholmu godine 1930.

Iz ove se formule vidi da g_φ može maksimalno varirati za oko 0,5%. U današnjim prilikama kad se ostala mjerenja vrše po tisuću pa i više puta tačnije ovo nam daje do znanja da ne valja tijela karakterizirati njihovom težinom, već masom koju se mjeri tačnošću do 10^{-9} .

Težina je osim toga pomoću navedenoga g vezana samo na Zemlju. Na drugim planetima ubrzanja sile teže iznose: Mjesec $1,5 \text{ m/s}^2$, Venera $8,8 \text{ m/s}^2$, Mars $3,9 \text{ m/s}^2$, Saturn $10,8 \text{ m/s}^2$ itd., dok je na Suncu 274 m/s^2 .

Prema tome prilikom eventualnog posjeta čovjeka Mjesecu ili Marsu naše zemaljske težine neće nam biti od koristi, ali će mase ostati nepromijenjene jer je masa svojstvo tijela, dok težina to nije.

Da ne bi dolazilo do neprilika još na Zemlji, Generalna konferencija za mjere i utege već je 1901. godine propisala normalno ubrzanje sile teže u iznosu

$$g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2.$$

Ova vrijednost dobivena je redukcijom izmjerene vrijednosti g u Pavillon de Breteuil kraj Pariza na geografsku širinu 45° i nadmorsku visinu 0. Stoga je »normalna« težina tijela mase m

$$G_N = m g_N.$$

Na nekom mjestu površine Zemlje geografske širine φ stvarna težina tog istog tijela iznositi će

$$G_\varphi = m g_\varphi,$$

pa je dakle

$$G_\varphi = G_N \cdot g_\varphi / g_N,$$

što slijedi iz dvije prethodne jednadžbe ako izjednačimo simbole za masu m .

Posljednja jednadžba objašnjava nam rečenicu da se »težina mijenja razmjerno s ubrzanjem sile teže« koju smo iz DIN 1305 citirali na početku ovog poglavlja.

U metrologiji se za g uvijek uzima normirana vrijednost ubrzanja sile teže $g = g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$ iako se to posebno ne navodi. S tolikom tačnošću valja računati kad se pomoću g definiraju druge jedinice, napr. sile (kilopond) ili pritiska (vidi poglavlje 4).

U praktičnim tehničkim računima, gdje se pretežno radi logaritamskim računalom, vrijednost se zaokružuje na $9,8 \text{ m/s}^2$ ili $9,81 \text{ m/s}^2$ ako priroda računa ne zahtijeva veću tačnost.

1.8. Gustoća i specifična težina

Gustoća ρ homogenog tijela omjer je njegove mase m i volumena V

$$\rho = m/V, \text{ odnosno } \rho = dm/dV,$$

gdje diferencijalna definicija upućuje na potrebu homogenosti tvari. Gustoću katkada nazivamo i »specifičnom masom«, iako taj naziv nije baš lijep niti je praktičan.

Budući da je gustoća definirana omjerom mase i volumena ρ ne ovisi o ubrzanju sile teže g , jer ne ovisi ni masa, a dakako ni volumen. No gustoća ovisi o stanju tijela, npr. o temperaturi i o atmosferskom pritisku. Stoga se pri navođenju vrijednosti gustoće navode ti podaci. Gustoća žive (Hg) na primjer iznosi pri temperaturi $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ i pritisku $p = 760$ torr

$$\rho_{\text{Hg}} = 13\,595,1 \text{ kg/m}^3.$$

Specifična težina γ homogenog tijela je omjer njegove težine G i volumena V , tj.

$$\gamma = G/V,$$

a budući da je $G = mg$, zbog $m = \rho V$ slijedi

$$\gamma = \rho g,$$

tj. specifična težina jednaka je umnošku gustoće ρ i ubrzanja sile teže g .

Budući da se g mijenja sa zemaljskom širinom i visinom iznad razine mora, specifična težina nije univerzalna veličina. Razlika između γ i ρ u pogledu primjene otprilike je onakva kao razlika između težine i mase. Stoga valja u računima i udžbenicima raditi s gustoćom ili pak prilikom utvrđivanja $\gamma = G/V$ pod težinom razumijevati normiranu težinu (vidi odsječak 1.7).

Specifični volumen nekog tijela ili plina je omjer njegova volumena i mase

$$v = \frac{V}{m},$$

dakle obrnuto od gustoće. Prema tome je

$$v = 1/\rho.$$

Pri navođenju podataka o specifičnom volumenu neke tvari opet treba označiti kakvo je pri tom stanje, npr. temperatura i pritisak, dakle jednako kao i kod gustoće.

Moramo primjetiti da se tzv. kvocijentne veličine kao što su gustoća ili specifična težina u nekim udžbenicima krivo definiraju. Kaže se npr. »da je gustoća masa jedinice volumena«. Ali gustoća nije masa već posve nova veličina definirana omjerom mase i volumena.

1.9. Protoka

Prilikom jednolikog strujanja tekućina ili plinova kroz cijevi ili kanale tijekom vremena t kroz bilo koji presjek cijevi prođe volumen V tekućine ili plina. Omjer $Q = V/t$ nazivamo prosječnom (srednjom) protokom. Protoka u bilo kojem trenutku t definirana je jednakžbom

$$Q = \frac{dV}{dt}.$$

Pri tome strujanju kroz cijev prođe tijekom vremena t masa m tekućine ili plina. Omjer

$$q = m/t \text{ odnosno } q = dm/dt$$

nazivamo masena protoka.

Q i q su takozvane kvocijentne veličine. Njih definiraju gornje jednadžbe. Stoga su one posve nove veličine, različite od V i t ili m i t , pa dakle nije ispravno kad se kaže da je Q volumen tekućine koja prođe u jedinici vremena.

Budući da je $m = \rho V$, to je $q = m/t = \rho V/t$, dakle

$$q = \rho Q,$$

što znači da je masena protoka umnožak protoke (volumenska protoka) i gustoće.

1.10. Pritisak ili tlak

Pritisak je omjer sile F i površine A na koju ta sila okomito djeluje, dakle

$$p = \frac{F}{A}, \text{ odnosno } p = \frac{dF}{dA}.$$

Pritisak (ili tlak) je nova veličina koja je jednadžbom definirana omjerom sile i površine. Stoga nije ispravno definirati pritisak kao »silu po jedinici površine«.

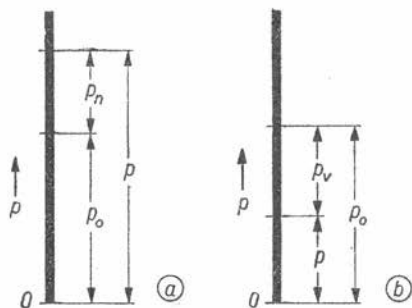
Kod tekućina i plinova razlikujemo nekoliko vrsti pritisa. Tlak okoline nazivamo atmosferskim pritiskom i označujemo sa p_0 . Višak pritiska iznad atmosferskoga nazivamo nadpritiskom (natlak) i označujemo sa p_n . Stvarni je pritisak, zvan apsolutnim pritiskom p ,

$$p = p_0 + p_n,$$

dakle zbroj atmosferskog tlaka i natlaka.

Kad je u nekom spremniku apsolutni pritisak p manji od atmosferskog pritiska p_0 kaže se da je u spremniku potlak ili vakuum p_v . Dakle potlak je negativni pretlak, $p_v = -p_n$. Uvrstimo li to u gornju jednadžbu dobivamo

$$p = p_0 - p_v,$$



Sl. B 9. Prikaz odnosa između atmosferskog pritiska, nadpritiska, apsolutnog pritiska i vakuuma

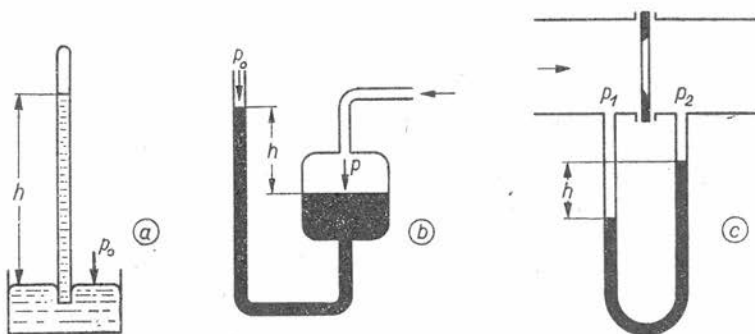
tj. apsolutni je tlak jednak razlici atmosferskog tlaka i potlaka.

U ovim pojmovi znadu manje upućeni pogriješiti pa računaju potlak od 0 do stvarnog tlaka, dakle računaju s apsolutnim tlakom. Stoga smo na slici B9 nacrtali skalu pritisa. Slika B9a prikazuje odnose u slučaju kad je u spremniku apsolutni pritisak p veći od atmosferskoga p_0 , a slika B9b kad je p manji od p_0 dakle kad je u spremniku staviti potlak ili vakuum.

U skladu s ovim definicijama je stvarno mjerenje pritisa. Najjednostavnije se

atmosferski pritisak p_0 mjeri pomoću vertikalno stojeće staklene cijevi u kojoj se nalazi tekućina gustoće ρ (npr. živa, voda, alkohol itd.) kako to prikazuje slika B10a. Presjek A cijevi je konstantan. Obujam tekućine u cijevi, računajući od razine u plitici, iznosi $V = h A$. Težina tekućine je dakle

$$G = m g = V \rho g = h A \rho g.$$



Sl. B 10. Mjerenje atmosferskog pritiska (a), nadpritiska (b), te mjerenje pritiska pomoću mjerne prirubnice (c)

Ovoj sili održaje ravnotežu sila atmosferskog pritiska $F = p_0 A$. Izjednačimo li $G = F$, što se stvarno zbiva u cijevi, dobivamo

$$p_0 = \rho g h.$$

Budući da su na mjernome mjestu gustoća ρ i ubrzanje sile teže g poznate konstante apsolutni je pritisak p_0 izravno razmjernan visini stupca h .

U praksi se katkada ne izračunava p_0 iz očitane visine h već se jednostavno navode podaci u jedinicama duljine (h). Čak su i neki instrumenti baždareni u jedinicama duljine. Takav način opisivanja apsolutnog pritiska p_0 dovodi do mnogih nepotrebnih gubitaka vremena pri kasnijoj primjeni mjernih rezultata.

Kod tačnih mjerenja ove vrsti treba uz normirane podatke za ρ i g utvrditi stvarnu gustoću ρ pri mjernoj temperaturi, stvarno ubrzanje sile teže g , te uvesti daljnje faktore korekcije zbog meniskusa površine tekućine, stvarne nadmorske visine, napetosti pare itd.

Natpritisak p_n se mjeri po istom načelu prema slici B10 b. Razlika sila $(p - p_0)A$ održaje ravnotežu težini stupca tekućine $h A \rho g$, pa je

$$p_n = p - p_0 = h \rho g.$$

Ako je dakle p_0 izmjeren u nekom stvarnom primjeru pomoću barometra (sl. B10a), a natpritisak p_n pomoću manometra (sl. B10b), onda se apsolutni pritisak p dobiva zbrojem

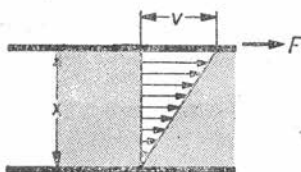
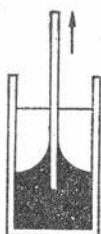
$$p = p_0 + p_n.$$

U tehničkim primjenama razlika pritisaka ispred i iza mjerne prirubnice (sl. B10c) služi za mjerilo protoke (Q ili q):

$$Q = \text{const.} \sqrt{p_1 - p_2} = \text{Const.} \sqrt{h}.$$

1.11. Viskoznost

Pojam viskoznosti (engl. viscosity = ljepljivost) osvježiti ćemo na opisu pokusa koji je lako učiniti. Na lijevoj slici B11 vidimo staklenu posudu gotovo do vrha napunjenu glicerinom. Donji sloj glicerina u posudi obojen je nekom tamnijom bojom (crno na slici). Prilikom izvlačenja ploče iz posude vidi se kako se je obojeni glicerini priljepio uz ploču. Uz samu ploču obojeni se glicerini giba brže, a u većoj udaljenosti od nje sve sporije. Naravno da to svojstvo ljepljivosti (viskoznosti) nema samo obojeni glicerini, već i svaki drugi, odnosno svaka tekućina i plin.



Sl. B 11. Uz definiciju dinamičke viskoznosti

Slika B11 desno prikazuje iste odnose kad se između bliskih ploča (crno), udaljenih x , nalazi neka tekućina. Donja ploča miruje, a gornju vučemo silom F . Strelice približno prikazuju brzinu gibanja tekućine koja slijedi pomicanje ploče. Mjerenja su pokazala da je

$$F = \eta A v / x,$$

ako je A površina jedne ploče. Veličina η koja ovisi o tome kakva je

tekućina između ploča i kakva je temperatura nazvana je viskoznost (apsolutna ili dinamička viskoznost).

U gornjoj jednadžbi pretpostavljeno je da je sloj vrlo tanak; stoga postoji linearnost između v i x . Stvarno se brzina ne mijenja linearno sa x kao na desnoj slici, već drukčije, što se vidi na profilu obojenog glicerina na lijevoj slici. Zato tačan izraz za silu glasi

$$F = \eta A dv/dx.$$

Oдавде dobivamo definicionu jednadžbu za dinamičku viskoznost

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dx} = \frac{\tau}{dv/dx},$$

gdje je $\tau = F/A$ takozvana tangencijalna napetost.

Za praktičnu primjenu prikladnija je druga veličina, tzv. kinematička viskoznost ν koju se dobiva iz apsolutne viskoznosti ako je podijelimo s gustoćom tekućine, tj. $\nu = \eta/\rho$.

1.12. Ostale veličine mehanike

Definicije ostalih veličina mehanike lako slijede iz dosada navedenih. Na primjer kinetičku energiju tijela mase m i brzine v definiramo kao $mv^2/2$, a kinetičku energiju tijela u vrtnji kao $\mathcal{J}\omega^2/2$, gdje je ω kutna brzina, a $\mathcal{J}$ moment tromosti.

Moment definiramo kao vektorski produkt sile F i kraka duljine r , gdje je r udaljenost između hvatišta sile i tačke u odnosu na koju računamo moment. I tako dalje.

U tablici B.1 skupljene su redom najvažnije veličine geometrije, vremena, mase, sile, te energetske veličine.

Osim naziva veličina navedene su i njihove međunarodne oznake koje su u skladu s Jugoslavenskim standardima. Uz pojedine veličine navedeno je nekoliko simbola. Prvi je znak onaj koji valja upotrebljavati, a slijedeći su oni koje se može upotrebiti, ako su prvi već iskorišteni. Pri uvođenju novih veličina valja upotrebljavati znakove iz romanske i grčke abecede.

**Najvažnije veličine mehanike, njihove oznake, jednadžbe u kojima dolaze
i Međunarodne jedinice kojima se mjere**

Tablica B.1

Red. br.	Naziv veličine	Oznaka veličine	Jedinica Međunarodnog sistema	Jednadžba
Geometrijske veličine				
1	Prva osnovna veličina: duljina	l	m	
2	Kut	α, β, γ	rad	$\alpha = l/r$
3	Površina	A, S	m ²	$dA = dx dy$
4	Prostorni kut	Ω, ω	str	$\Omega = A/r^2$
5	Geometrijski moment tromosti	I	m ⁴	$I = \int x^2 dA$
6	Volumen, obujam	V	m ³	$dV = dx dy dz$
Vremenske veličine				
7	Druga osnovna veličina: vrijeme	t	s	
8	Brzina	v, u, w	ms ⁻¹	$v = dl/dt$
9	Period, trajanje njihaja	T	s	$T = t_1 - t_2$
10	Frekvencija, brzina vrtnje	f, n	s ⁻¹	$f = 1/T$
11	Kružna frekvencija	ω	s ⁻¹	$\omega = 2\pi f$
12	Kutna brzina	ω	s ⁻¹	$\omega = d\alpha/dt$
13	Ubrzanje	a	ms ⁻²	$a = dv/dt$
14	Ubrzanje sile teže	g	ms ⁻²	Normirano: $g_N = 9,806\,65\text{ ms}^{-2}$
15	Kutno ubrzanje	β	s ⁻²	$\beta = d\omega/dt$
Veličine mase				
16	Treća osnovna veličina: masa	m	kg	
17	Gustoća, specifična masa	ρ	kg m ⁻³	$\rho = dm/dV$
18	Moment tromosti (inercije)	$\mathcal{J}$	kg m ²	$\mathcal{J} = \int x^2 dm$

Red. broj	Naziv veličine	Oznaka veličine	Jedinica Međunarodnog sistema	Jednadžba
Veličine sile				
19	Sila	F	N	$F = m a$
20	Težina	G	N	$G = m g$
21	Specifična težina	γ	N m^{-3}	$\gamma = \rho g$
22	Specifični volumen	v	$\text{m}^3 \text{N}^{-1}$	$v = 1/\gamma$
23	Pritisak, tlak	p	N m^{-2}	$p = d F / d A$
24	Vlačno ili tlačno naprezanje	σ	N m^{-2}	$\sigma = d F / d A$
25	Naprezanje na smik	τ	N m^{-2}	$\tau = d F / d A$
26	Modul torzije	G	N m^{-2}	$G = \tau l / \lambda$
27	(Modul) elastičnost(i)	E	N m^{-2}	$E = \sigma l / \Delta l$
28	Koeficijent linearnog rastezanja	α	$\text{m}^2 \text{N}^{-1}$	$\alpha = 1/E$
29	Moment, moment vrtnje	M	N m	$M = F r = \int d \omega / d t$
30	Dinamička viskoznost	η	N s m^{-2}	$\eta = \tau : dv_x / dy$
31	Kinematička viskoznost	ν	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	$\nu = \eta / \rho$
Energetske veličine				
32	Energija (kinetička)	W, E, U	J	$W = m v^2 / 2 = \int \omega^2 / 2$
33	Rad, radnja	W, A	J	$W = \int F d l$
34	Snaga	P	W	$P = d W / d t$
35	Korisnost	η	—	$\eta = P_2 / P_1$

U posljednjem stupcu tablice B.1 napisane su jednadžbe u kojima se pojavljuje definirana veličina. Većinom su to ujedno definicijske jednadžbe tih veličina.

Konačno su u četvrtom stupcu napisane jedinice Međunarodnog sistema jedinica (vidi odsječak 3.) kojima se te veličine mjere. Opisne jedinice kao radijan (rad), steradian (str), okretaj (okr) i % nisu upotrebljene (vidi odsječak 6.2).

2. GRAĐENJE SISTEMA JEDINICA

U odsječku A.7.1 razmotrili smo kako se od neophodnog broja osnovnih jedinica koje odabiremo po svojoj volji izvode takozvane izvedene jedinice. Ovdje ćemo u sažetom obliku ponoviti glavna načela građenja sistema jedinica, jer nam je to potrebno u daljnjem praktičnom izlaganju.

Pod nazivom skladan ili koherentan sistem jedinica razumijevamo takav sistematičan skup jedinica koje su u međusobnom odnosu » $1 \times 1 = 1$ «. Na primjer jedinica površine kvadratni metar (m^2) skladna je jedinica jer je $1 m \times 1 m = 1 m^2$. To je skladna jedinica metarskih sistema. Isto je tako skladna jedinica površine angloameričkog sistema jedinica square foot (sq. ft), jer je $sq. ft = ft \cdot ft$, gdje je ft kratica za foot (stopa). Ta jedinica skladna je samo u angloameričkom sistemu. Po tom se načelu grade sistemi jedinica.

Iz navedenog primjera vidimo da se do željenog odnosa $1 \times 1 = 1$ dolazi najjednostavnije tako da se izvedene jedinice grade iz osnovnih pomoću dimenzionih jednačbi. To smo mogli i očekivati jer smo u odsječku A.8. naznačili da dimenzija predočuje opću, još neimenovanu jedinicu.

Očigledno je dakle da će svaki sistem jedinica imati onoliki broj nezavisnih (osnovnih) jedinica koliki je broj osnovnih veličina onog sistema dimenzija iz kojeg od sistema dimenzija prelazimo na opći sistem jedinica tako, da umjesto simbola za veličinu u dimenzionoj jednačbi stavimo pripadnu opću jedinicu koju označujemo znakom veličine u uglastoj zagradi. Na primjer u sistemu dimenzija LTM, gdje dimenzije L, T i M redom predstavljaju osnovne dimenzije dužine, vremena i mase, sila ima dimenziju $F = LT^{-2}M$. Stoga je opća još nedefinirana jedinica sile u LTM sistemu jedinica

$$[F] = [L] [t]^{-2} [m].$$

Na konkretni sistem jedinica prelazi se tako da se opća jedinica (u uglastoj zagradi) izjednači sa stvarno odabranom jedinicom dotičnog sistema. Na primjer u Međunarodnom sistemu jedinica osnovne su jedinice $[L]_M = \text{metar}$, $[t]_M = \text{sekunda}$, $[m]_M = \text{kilogram}$. Budući da je prema gornjoj općoj jednačbi među jedinicama

$$[F]_M = [L]_M [t]_M^{-2} [m]_M,$$

to po spomenutom načelu uvrštenjem konkretnih jedinica Međunarodnog sistema dobivamo

$$[F]_M = \frac{\text{kilogram} \times \text{metar}}{\text{sekunda}^2}$$

Zbog jednostavnosti jedinice označujemo kraticama. Tako je

$$m = \text{metar}, s = \text{sekunda}, kg = \text{kilogram}.$$

Pomoću ovih kratica skladna se jedinica Međunarodnog sistema jedinica sile $[F]_M$ može napisati u obliku

$$[F]_M = \frac{kg \cdot m}{s^2} = \frac{kgm}{s^2} = kgm/s^2 = kgms^{-2}.$$

Ovdje smo odmah napisali kako se izvedena jedinica $[F]_M$ može izraziti pomoću osnovnih jedinica na nekoliko načina: tačkom kao znakom množenja, bez te tačke, a istog značenja, u obliku razlomka s ravnom ili kosom crtom, te konačno kao negativni eksponent ($1/s^2 = s^{-2}$).

Gore napisanoj jedinici Međunarodnog sistema $[F]_M = \text{kg m/s}^2$ dodijeljeno je posebno ime newton. Kratica ove jedinice sile je N. Dakle

$$\text{newton} = \text{N} = \text{kg m/s}^2.$$

Naziv »newton« potječe od imena slavnog engleskog učenjaka *Isaaca Newtona* koji je pridonio neprocjenjivo mnogo napretku znanosti i tehnike. Običaj je naime da se pojedine jedinice nazivaju prezimenima ljudi zaslužnih za nauku. U praktičnom pogledu to je vrlo korisno jer je kratica (npr. N u gornjem primjeru) zbog svoje kratkoće mnogo prikladnija pri računanju nego npr. kg m/s^2 .

3. MEĐUNARODNI SISTEM JEDINICA MEHANIKE

Nazivom *Međunarodni sistem jedinica* (Système International d'Unités, IS) označujemo sistem koherentnih jedinica koji se temelji na ove osnovne jedinice: metar, sekunda, kilogram, amper, stupanj kelvina i candela. Posljednje dvije jedinice odnose se dakako na nauku o toplini i na fotometriju. Taj sistem jedinica definitivno je prihvatila Jedanaesta generalna konferencija za mjere i utege koja je održana mjeseca oktobra 1960. u Parizu. Zaključci Generalne konferencije obavezni su i za Jugoslaviju, koja je supotpisnica Konvencije o metru.

U geometriji, mehanici i hidrodinamici potrebne su tri osnovne jedinice. Stoga se za ta područja u primjeni Međunarodnog sistema upotrebljavaju kao osnovne jedinice metar, sekunda i kilogram. Iz njih se mogu izvesti koherentne jedinice svih drugih veličina mehanike. Taj dio univerzalnog Međunarodnog sistema jedinica nazivamo katkada »MKS sistemom jedinica« (M-metar, K-kilogram, S-sekunda) ili »Mehaničkim dijelom Međunarodnog sistema jedinica«.

3.1. Osnovne jedinice

Osnovne jedinice Međunarodnog sistema jedinica za mehaniku su:

jedinica duljine: metar (m),
jedinica vremena: sekunda (s),
jedinica mase: kilogram (kg).

U odsječku A. 3. opširno smo obrazložili porijeklo ovih osnovnih jedinica. Ovdje ćemo ponoviti njihove definicije u skraćenom obliku.

Jedinica duljine: »Jedinica duljine je metar. Metar (m) je duljina jednaka 1 650 763,73 valnih duljina zračenja atoma kriptona«.

Jedinica vremena: »Jedinica vremena je sekunda. Sekunda (s) je 1/31 556 925,974 7 — ti dio trajanja tropske godine«.

Jedinica mase: »Jedinica mase je kilogram (kg). Njega predstavlja masa međunarodne pramjere kilograma«.

Sve su ostale jedinice mehanike u Međunarodnom sistemu jedinica izvedene. Način izvođenja tih jedinica opisali smo u odsječku 2.

3.2. Izvedene jedinice

Izvedene jedinice Međunarodnog sistema jedinica izradit ćemo samo za neke najčešće upotrebljavane veličine mehanike. Za ostale veličine može ih prema izloženom načelu izvesti čitatelj sam.

Jedinica površine A je kvadratni metar (m^2). 1 m^2 je površina kvadrata sa stranicama duljine 1 metar.

Jedinica volumena V je kubni metar (m^3). 1 m^3 je volumen kocke s bridovima duljine 1 metar.

Jedinica gustoće ρ je kilogram po kubnom metru (kg/m^3). Ovu izvedenu jedinicu definiramo ovako: Gustoća je određena omjerom mase m i volumena V homogene tvari: $\rho = m/V$.

Iz ove definicije jednadžbe gustoće ρ odmah dobivamo njenu koherentnu opću jedinicu $[\rho] = [m][l]^{-3}$. U skladu s načelom građenja koherentnih sistema jedinica (vidi odsječak 2) u Međunarodnom je sistemu jedinica $[m]_M = \text{kg}$, $[l]_M = \text{m}$ što daje za jedinicu gustoće $[\rho]_M = \text{kg}/\text{m}^3$. Prema tome jedinična je gustoće ($1 \text{ kg}/\text{m}^3$) ona tvar koje obujam 1 m^3 ima masu 1 kg.

Jedinica brzine v je metar u sekundi (m/s). Brzinu $1 \text{ m}/\text{s}$ ima tijelo koje u jednolikom gibanju svake sekunde pređe put od jednoga metra. Ovu jedinicu izvodimo pomoću definicije jednažbe brzine $v = l/t$, odakle slijedi opća jednadžba među jedinicama $[v] = [l][t]^{-1}$, što daje $[v]_M = \text{m}/\text{s}$.

Jedinica sile je newton (N). Newton je sila koja tijelu mase 1 kg daje ubrzanje $1 \text{ m}/\text{s}^2$. Podroban izvod jedinice sile $N = \text{kg m}/\text{s}^2$ izradili smo u poglavlju 2.

Jedinica rada je joule (J). Ona se tako naziva po engleskom učenjaku *G.P. Jouleu* (čitaj Džul), koji je stekao znatne zasluge za bolje poznavanje odnosa između mehaničke energije i topline, što je u njegovo vrijeme (1843) bilo još neriješeno pitanje.

»Jedinica joule (J) je rad koji izvrši sila 1 newton kad se njezino hvatište pomakne za 1 metar u smjeru sile«.

Ovu jedinicu lako izvodimo pomoću jednadžbe za rad W stalne sile F na putu l kad se smjer sile podudara s putanjom: $W = Fl$. Opća jedinična jednadžba je $[W] = [F][l]$ pa je dakle zbog $[F]_M = \text{newton}$ i $[l]_M = \text{metar}$:

$$[W]_M = \text{joule} = \text{newton} \times \text{metar}.$$

Budući da je $N = \text{kg ms}^{-2}$, to je

$$J = Nm = \text{kg m}^2\text{s}^{-2}.$$

Energiju mjerimo istom jedinicom kao i rad, dakle jouleom. Tom jedinicom mjerimo sve energije: mehaničku, toplinsku, električku, energiju mase mirovanja itd.

Jedinica snage je watt (W) koja se tako naziva po engleskom učenjaku *James Wattu* (čitaj »uot«; često se u nas izgovara »vat«). Budući da je snaga P definirana sa $P = dW/dt$, to je jedinica watt:

$$\text{watt} = \frac{\text{joule}}{\text{sekunda}},$$

odnosno

$$W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s} = \text{kg m}^2\text{s}^{-3}$$

Jedinica pritiska je »newton po kvadratnom metru« (N/m^2), koja slijedi iz definicije jednadžbe $p = F/A$. Ova jedinica još nema svog vlastitog imena. Pred-

Odnosi među nekim mehaničkim jedinicama Međunarodnog, Tehničkog i CGS sistema jedinica

Tablica B.2

Red. br.	Veličina	Oznaka	Jedinice Međunarodnog sistema		Jedinice Tehničkog sistema		Jedinice CGS sistema	
			MKS	Vams	Jedinica	Med. jedinica	Jedinica	Med. jedinica
1	Duljina	l	$m = \text{metar}$		$m = \text{metar}$	1	$cm = \text{centimetar}$	10^{-2}
2	Vrijeme	t	$s = \text{sekunda}$		$s = \text{sekunda}$	1	$s = \text{sekunda}$	1
3	Masa	m	$kg = \text{kilogram}$	$VA m^{-2} s^3$	$kp m^{-1} s^2$	9,807	$g = \text{gram}$	10^{-3}
4	Sila	F	$\text{newton} = N = kg m s^{-2}$	$VA m^{-1} s$	$kp = \text{kilopond}$	9,807	$\text{dyn} = cm g s^{-2}$	10^{-5}
5	Energija, rad	$\frac{W}{E}$	$\text{joule} = J = Nm = kg m^2 s^{-2}$	$VA s$	kpm	9,807	$\text{erg} = cm^2 g s^{-2}$	10^{-7}
6	Snaga	P	$\text{watt} = W = J s^{-1} = kg m^2 s^{-3}$	VA	$kpm s^{-1}$	9,807	$\text{erg s}^{-1} = cm^2 g s^{-3}$	10^{-7}
7	Moment tromosti	$\mathcal{J}$	$kg m^2 =$	$VA s^3$	$kp m s^2$	9,807	$g cm^2$	10^{-7}
8	Pritisak	p	$N m^{-2} = kg m^{-1} s^{-2} =$	$VA m^{-3} s$	$kp m^{-2}$	9,807	$\text{dyn cm}^{-2} = cm^{-1} g s^{-2}$	10^{-1}
9	Gustoća	ρ	$kg m^{-3} =$	$VA m^{-5} s^3$	$kp m^{-4} s^2$	9,807	$g cm^{-3}$	10^3
10	Specifična težina	γ	$N m^{-3} = kg m^{-2} s^{-2} =$	$VA m^{-4} s$	$kp m^{-3}$	9,807	$g cm^{-2} s^{-2}$	10^1
11	Dinamička viskoznost	η	$N m^{-2} s = kg m^{-1} s^{-1} =$	$VA m^{-3} s^2$	$kp m^{-2} s$	9,807	$P = \text{poise} = g cm^{-1} s^{-1}$	10^{-1}
12	Kinematička viskoznost	ν	$m^2 s^{-1}$		$m^2 s^{-1}$	1	$St = \text{stockes} = cm^2 s^{-1}$	10^{-4}

Primjeri: kilopond = 9,807 newton (tačno 9,80665); $kpm/s = 9,807 \text{ watt}$; poise = 0,1 Ns/m^2 ; stockes = 1 $P : g/cm^2$.

lažu da se nazove giorgi (G) po nedavno preminulom talijanskom metrologu *Giovanni Giorgiju* (čitaj Đordi). U slučaju prihvatanja tog prijedloga vrijedilo bi

$$\text{giorgi} = \frac{\text{newton}}{\text{kvadratni metar}},$$

odnosno

$$G = \frac{N}{m^2} = \frac{J}{m^3} = \frac{kg}{m \cdot s^2}.$$

Skladne jedinice Međunarodog sistema jedinica ostalih veličina mehanike možemo naći u tablicama B. 1 i B. 2.

3.3. Decimalni dijelovi i višekratnici jedinica

Pri osnivanju nekog sistema jedinica korisno je jedinice odabrati tako da su one prikladne za primjenu. Tu prikladnost za praksu vrlo je teško utvrditi, što ćemo odmah vidjeti.

Kovinotokar se uglavnome služi milimetrima u svojem poslu, te dijelovima milimetra kad se radi o finoj obradi. Stolaru takva preciznost nije potrebna, on mjeri centimetrima, a tolerancije su mu u milimetrima. Automobilistima ove jedinice ne znače ništa, njima su važni kilometri. Oni jure brzinom od stotinjak kilometara na sat, a bušači tunela smatraju uspjehom kad brzina bušenja kroz kamen iznosi 10 metara na dan.

U rudnicima vade mase od stotine hiljada tona rudače godišnje, a kroz ruke zlatarskog obrtnika prođe tek desetak grama dragulja. U trgovini potrošači kupuju desetke kilograma brašna ili šećera, a čaja ili bibera tek koji gram.

Već iz ovih nekoliko nabrojenih činjenica o upotrebi jedinica duljine, brzine i mase u svakodnevnom životu vidimo da je nemoguće utvrditi kako velika mora biti jedinica, a da bude praktična, kako to kažemo. Dok je u jednom poslu neka jedinica vrlo »praktična«, u nekom drugom će poslu ta ista jedinica izgledati vrlo nepraktična. Stoga sistem jedinica sa svojim pravilom građenja koherentnih jedinica ($1 \times 1 = 1$) ne može udovoljiti svima. Takav se sistem jedinica ne može ni zamisliti. Nitko još dugo vremena neće reći da je star 2 940 000 sekundi (ili 2,94 Ms) kad je navikao da izrazi svoju starost sa 34 godine. No isto tako ni jedan eksperimentator neće izjaviti da je prijelazna pojava trajala 0,000 000 1 godine kad je on izmjerio 8,64 milisekunde, a ipak i on svoju starost mjeri jedinicom godina.

Pa i unutar pojedinih struka susreću se ljudi s ogromnim rasponom vrijednosti pojedinih veličina. Fizičari na primjer s jedne strane proučavaju pojave brzina reda metara u sekundi, a u susjednom laboratoriju elementarne čestice materije ubrzavaju gotovo do brzine svjetla (oko $3 \cdot 10^8$ m/s)! Na strojevima za mehaničku obradu materijala obrađuju se predmeti mase nekoliko tisuća kilograma s tačnošću nekoliko tisućinki milimetara. I tako dalje.

Nabrajanjem ovih »ekstrema« mogli bismo ispuniti nekoliko stranica knjige, no to nam nije cilj. Željeli smo samo istaći da je danas ljudska djelatnost tako široka u kvalitativnom i kvantitativnom pogledu da ne može postojati jedan sistem jedinica koji bi bio jednako »praktičan« astronomu i istraživaču uz mikroskop.

Razvoj civilizacije ide sve dalje u smjeru povećanja tog raspona mjernih vrijednosti. Nekad je izgledalo da je tzv. cm-g-s sistem jedinica (vidi odsječak 6.) prikladan za fiziku. Isto tako da je tzv. Tehnički sistem jedinica (vidi odsječak 4.)

Tablica B.3

Decimalni dijelovi i višekratnici (prefiksi)

Prefiks		Brojčana vrijednost prefiksa		Drugi naziv	Primjer upotrebe	Izgovor
piko	p	10^{-12}	0,000 000 000 001	bilijunti dio	$\text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$	pikofarad
nano	n	10^{-9}	0,000 000 001	milijarditi dio	$\text{nA} = 10^{-9} \text{ A}$	nanoamper
mikro	μ	10^{-6}	0,000 001	milijunti dio	$\mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V}$	mikrovolt
centimili *	cm	10^{-5}	0,000 01			
dimi *	dm	10^{-4}	0,000 1			
mili	m	10^{-3}	0,001	hiljaditi dio	$\text{mW} = 10^{-3} \text{ W}$	milivat
centi	c	10^{-2}	0,01	stoti dio	$\text{cm} = 10^{-2} \text{ m}$	centimetar
deci	d	10^{-1}	0,1	deseti dio	$\text{dl} = 10^{-1} \text{ l}$	decilitar
		10^0	1			
deka	D	10^1	10	deset	$\text{Dlm} = 10 \text{ lm}$	dekalumen
hekto	h	10^2	100	stotina	$\text{hl} = 10^2 \text{ l}$	hektolitar
kilo	k	10^3	1000	hiljada	$\text{kg} = 10^3 \text{ g}$	kilogram
mirija *	ma	10^4	10 000			
penta	pe	10^5	100 000		$\text{pG} = 10^5 \text{ G}$	pentagiorgi
mega	M	10^6	1 000 000	milijun	$\text{M}\Omega = 10^6 \Omega$	megaohm
giga	G	10^9	1 000 000 000	miliarda	$\text{GJ} = 10^9 \text{ J}$	gigajoule
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000	bilijun	$\text{THz} = 10^{12} \text{ Hz}$	terahertz

Opaske: Preporučuje se upotreba prefiksa p, n, μ , m, k, M, G, T; zvjezdicom (*) označeni prefiksi rijetko se upotrebljavaju.

vrlo povoljan za tehničare itd. Danas znamo da je to stvar prošlosti. Kako nema više oštre granice između elektronike i mehanike tako nema ni između nauke o toplini i strojogradnje. Stoga je jedinstveni Međunarodni sistem jedinica uz veličinske jednadžbe jedna od onih spona koja međusobno povezuje radnike na raznim područjima ljudske djelatnosti.

Da skladne jedinice nekog sistema jedinica ipak postanu prikladne u različitim primjenama upotrebljavaju se njihovi decimalni dijelovi i dekadski višekratnici. Nazivamo ih prefiksima jedinica.

Najčešće se upotrebljavaju ovi prefiksi:

p = piko = 10^{-12}	T = tera = 10^{12}
n = nano = 10^{-9}	G = giga = 10^9
μ = mikro = 10^{-6}	M = mega = 10^6
m = mili = 10^{-3}	k = kilo = 10^3

Prefiks se stavlja ispred kratice jedinice, a u izgovoru se povezuje jedinicom koja stoji iza njega. Na primjer km = 10^3 m = kilometar. Potpuni popis prefiksa skupljen je u tablici B. 3.

Prefiksi su se uvriježili i u tehničkoj praksi, ne samo u znanosti. Uz već navedeni primjer kilometra spomenimo mikrometar = $\mu\text{m} = 10^{-6}$ m (i jedan mjerni uređaj zove se »mikrometarski vijak«), miliamper = mA = 10^{-3} A, megawat = MW = 10^6 W i pikofarad = pF = 10^{-12} F itd.

Vjerojatno će se u budućnosti decimalni prefiksi još više upotrebljavati, jer će se ljudska djelatnost dalje proširiti i tamo gdje danas tek istražujemo. Stoga je dosta vjerojatno da će tehnička praksa afirmirati i dekadsku jedinicu pritiska pentagiorgi (peG) koju je predložio rumunjski učenjak E. Bodea. Označimo li s giorgi = G = N/m², onda je zbog pe = 10^5 (vidi tablicu B. 3)

$$\text{pentagiorgi} = \text{peG} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ N/cm}^2.$$

Račun pokazuje da je po svojoj vrijednosti peG baš između fizikalne (atm) i tehničke atmosfere (at = kp/cm²):

$$\text{peG} = 0,9869 \text{ atm} = 1,020 \text{ at}.$$

Primjena prefiksa kod jedinica proistječe iz psihologije čovjeka. Opis vrijednosti neke veličine čovjeku je očigledan onda kad ima neku intimnu predodžbu o tome. Nekad je to bio lakat ili pedanj, danas je to metar, kilometar. O stroju snage 10 kilowatta čovjek nosi neku intimnu sliku u sebi; kad kažemo 10 000 W, što je isto, čovjek to na brzinu u sebi preračuna na kW. Isto je npr. s pikofaradima za kapacitet električkog kondenzatora. Uz sadašnje stanje tehnike stručnjak ili malo naobraženiji laik već ima neku predodžbu o veličini takvog kondenzatora.

S vremenom će se prefiksi priključiti i onim jedinicama koje se još i danas smatraju »novima« iako su službeno uvedene 1. 1. 1948. godine. Na primjer danas čovjek ima iskustveno stečeni osjećaj za jedinice silu kilopond. Za dvadesetak godina nove će generacije imati osjećaj za newton (oko 0,1 kp). Danas imaju ranije školovane generacije neku predodžbu o kilokaloriji (još starije generacije govore pogrešno kilogram-kalorija). Nove generacije imat će »prirodni« (u stvari naravno stečeni) osjećaj za kilojoule ili megajoule. U tom procesu privikavanja na kojejkakove joule (čitaj džul) mnogi će nastavnici i daci steći »žuljeve«.

4. TEHNIČKI SISTEM JEDINICA MEHANIKE

4.1. Osnovne jedinice Tehničkog sistema

Tehnički sistem jedinica mehanike osniva se na tri osnovne jedinice:

jedinica duljine: metar (m),
jedinica vremena: sekunda (s),
jedinica sile: kilopond (kp).

Prve dvije jedinice poznate su nam iz prijašnjeg odsječka te i iz odsječka A. 3. Kakva je to jedinica kilopond?

Da bismo je mogli objasniti moramo segnuti malo unatrag u povijest međunarodnih odluka o mjerama.

4.2. Jedinica sile kilopond

Generalna konferencija za mjere i utege definirala je godine 1898. pramjere za jedinice metar, sekundu i kilogram. Budući da su u to vrijeme postojale različita mišljenja o značenju riječi »kilogram«, 22. oktobra 1901. Generalna je konferencija ponovno naglasila da je kilogram jedinica mase, a ostvaren je u obliku svoje pramjere — pariskog prakilograma.

Ova je Generalna konferencija propisala da je normirana težina pariskog prakilograma umnožak njegove mase 1 kg i normiranog ubrzanja sile teže $g_N = 9,806\ 65\ \text{m/s}^2$. Normirana težina pariskog prakilograma iznosi dakle prema $G = mg$

$$G = 1\ \text{kg} \cdot 9,806\ 65\ \text{m/s}^2 = 9,806\ 65\ \text{kgm/s}^2.$$

Ta težina pariškog prakilograma mnogo je kasnije, 1934. godine, nazvana kilopond. Prema tome je

$$\text{kilopond} = \text{kp} = 9,806\ 65\ \text{kgm/s}^2 = 9,806\ 65\ \text{N}.$$

težina pramjere mase (koja se čuva u Međunarodnom birou za mjere i utege u Parizu) pri ubrzanju sile teže $g_N = 9,806\ 65\ \text{m/s}^2$.

Kako smo vidjeli naziv kilopond je novijeg datuma. U naše krajeve prodro je nakon drugog svjetskog rata. Danas se već u priličnoj mjeri upotrebljava u industriji.

U međuvremenu dok se još nije rodio naziv kilopond (*Hoffmann* i *Wallot*) pisci su u publikacijama imali dosta muke kad su morali naglašavati da se u nekom slučaju radi o kilogramu-mase, a u drugome o kilogramu-sile. Stoga ćemo još i danas u starim knjigama naći oznake težine npr. 92 kg*, što je označivalo 92 kilograma težine, tj. u današnjem govoru 92 kiloponda. A neki su autori označivali baš obratno, sa kg* jedinicu mase. Zbrka je bila potpuna. Našoj generaciji, pred drugi svjetski rat srednjoškolcima, pitanja ove vrste iz fizike bila su prava muka. Ne samo nama, već i profesorima!

Ipak je taj sistem jedinica, Tehnički sistem, osnovan na metru, sekundi i kilopondu, pustio duboko korijenje u tehnici. Možda je jedan razlog tome bilo pomanjkanje domaćih tehničkih udžbenika i priručnika, pa ni ljudi koji su znali suštinu problema, nisu imali mogućnosti da kažu kako stvari stoje. U nas se osim toga mnogo upotrebljavala njemačka literatura koja je u tom pogledu bila nazadna

(to je paradoksalno kad se sjetimo da je baš Njemačka rodila profesora *Wallota* koji je uveo veličinske jednadžbe i znatno pridonio uvođenju reda u njemačku i svjetsku metrologiju).

Bilo kako bilo, Tehnički sistem jedinica počeo je praktički odumirati uvođenjem Međunarodnog sistema.

Tehnički m—s—kp sistem jedinica mehanike razlikuje se od Međunarodnog sistema (vidi odsječak 3.) u tome što mu je treća osnovna jedinica sile (kilopond), dok je kod Međunarodnog sistema treća osnovna jedinica mase (kilogram). To znači da su sve geometrijske i kinematičke izvedene jedinice jednake (vidi tablicu B. 2) u oba sistema. Razlikuju se samo one jedinice u kojima se pojavljuju masa i sila.

Budući da je treća osnovna jedinica Tehničkog sistema jedinica sile možemo taj sistem okarakterizirati kao LTF sistem dimenzija. Dimenzije ostalih veličina možemo stoga izvoditi po poznatim pravilima (vidi odsječak A. 8) iz osnove LTF. Tako moramo postupiti jer svaki sistem jedinica, pa i Tehnički, mora biti sistematičan, dakle koherentan s jedinicama izvedenima po načelu $1 \times 1 = 1$.

Slijedom rečenoga iz jednadžbe težine $G = mg$ dobivamo $m = G/g$, odakle slijedi dimenzija mase u Tehničkom sistemu $M = FL^{-1}T^2$. Opća još nedefinirana koherentna jedinica mase je prema tome $[m] = [F][l]^{-1}[t]^2$. Budući da je u Tehničkom sistemu jedinica $[F]_T = \text{kilopond} = \text{kp}$, $[l]_T = \text{metar} = \text{m}$, $[t]_T = \text{sekunda} = \text{s}$, jedinica mase u tom je sistemu

$$[m]_T = \frac{\text{kp} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = \text{hyl}. \quad (4.2-1)$$

Navedeni naziv hyl za jedinicu mase u Tehničkom sistemu nikada se nije uvriježio, tako da ga možemo naći samo u specijalnim metrološkim raspravama. Jedinica mase $[m]_T = \text{kps}^2/\text{m}$ vrlo se rijetko upotrebljava, iako je to koherentna jedinica. Umjesto da masu izražavaju u jedinici kps^2/m tehničari su uvijek radije masu m izražavali kao omjer težine G i ubrzanja sile teže g , dakle $m = G/g$. Stoga stare knjige koje upotrebljavaju u računima Tehnički sistem jedinica pišu jednadžbu kinetičke energije $W_{\text{kin}} = mv^2/2$ u obliku:

$$W_{\text{kin}} = \frac{G}{2g} v^2.$$

Razmotrimo koliku masu predstavlja koherentna jedinica Tehničkog sistema $[m]_T = \text{kps}^2/\text{m}$! Ranije smo pokazali da je kilopond definiran pariskim prakilogramom kg i normiranim ubrzanjem g_N pomoću relacije $\text{kp} = \text{kg} \cdot g_N$. Uvrstimo li to u izraz (4. 2—1) dobivamo

$$[m]_T = \text{kg} \cdot 9,806\,65 \text{ m s}^{-2} \cdot \text{s}^2/\text{m} = 9,806\,65 \text{ kg}.$$

Jedinica mase Tehničkog sistema je dakle 9,806 65 — puta veća od mase pariske međunarodne pramjere!

Iz čitavog dosadašnjeg razmatranja vidimo da jedinica kilopond nije nezavisna jedinica iako je osnovna jedinica Tehničkog sistema. Kilopond je naime prema izloženom definiran kao sila (težina) koja djeluje na masu 1 kg ako je ubrzanje sile teže normirano vrijednošću $g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$. Ovisi dakle o dva međusobno nezavisna faktora. Stoga se danas kilopond definira ovako:

»Kilopond je sila koja tijelu mase 1 kg daje ubrzanje $9,806\,65 \text{ m/s}^2$ « (JUS, ISO) ili jednostavno »kilopond = 9,806 65 newtona« (zakon Istočne Njemačke z 1956. godine).

Tehničkom sistemu ponekad se u raspravama prigovara da je »nenačuan« zbog toga jer navodno ovisi o geografskoj širini, dakle o mjestu, pa njegovi rezultati nisu dovoljno tačni. Takvo mišljenje potpuno je neispravno i zato moramo u tom pogledu braniti Tehnički sistem jedinica. Neispravnost spomenutog mišljenja pokušat ćemo objasniti primjerom.

Slika B. 6 prikazuje shemu obične polužne vage (vaga na polugu). Zanimarimo li netačnost vage u mjerno-tehničkom smislu i smatramo li je savršeno osjetljivom ona će biti u ravnoteži onda, kad su momenti M_1 i M_2 lijevog i desnog utega međusobno jednaki, dakle

$$M_1 = M_2.$$

Ako se na lijevom tanjuriću nalazi masa m_1 , na desnom masa m_2 , a svaki je krak vage l , onda je moment na lijevoj strani $M_1 = G_1 l$, a moment desne strane $M_2 = G_2 l$. Slova G označuju težinu predmeta masa m_1 i m_2 . Djeluje li na mjestu utega m_1 ubrzanje sile teže g_1 , a na mjestu m_2 ubrzanje g_2 , onda su težine $G_1 = m_1 g_1$, te $G_2 = m_2 g_2$. Momenti su dakle $M_1 = G_1 l = m_1 g_1 l$, $M_2 = G_2 l = m_2 g_2 l$. Ravnoteža vage nastaje onda kad su momenti jednaki, dakle $M_1 = M_2$, što daje

$$G_1 = G_2 \quad \text{ili} \quad m_1 g_1 = m_2 g_2,$$

jer je krak vage l ispio iz računa.

Lijeva jednadžba nam kaže da su težine utega jednake. Pri tome nema ni spomena o ubrzanju sile teže. Desna jednadžba govori dakako drukčije. Ona izražava činjenicu da se mase m_1 i m_2 odnose obrnuto od pripadnih ubrzanja sile teže g_1 i g_2 . Desnu jednadžbu možemo naime preoblikovati u

$$m_1/m_2 = g_2/g_1.$$

Pretpostavimo sada da g_1 i g_2 nisu međusobno jednaka (s obzirom na malu duljinu krake vage to se može reći dakako samo teoretski). Netom izvedena jednadžba opisuje da mase m_1 i m_2 nisu jednake. Istodobno jednadžba $G_1 = G_2$ kaže da težine G_1 i G_2 jesu jednake!

Iz ovih činjenica izvode se krivi zaključci u odnosu na Tehnički sistem jedinica i njegovu jedinicu: kilopond. Međutim gornji rezultati moraju se pažljivo promotriti u odnosu na definiciju kiloponda. G_1 je težina na mjestu 1 ispod lijevog utega. G_2 je težina utega na mjestu 2. Ta dva mjesta imaju različito ubrzanje sile teže g_1 i g_2 . Stoga jednakost težina dvaju utega na različitim mjestima znači nejednakost masa m_1 i m_2 .

Prema tome ponovo smo došli na pojam težine koji smo opširno razmatrali u odsječku 1. 7. Težinu smo definirali kao silu, koja zbog gravitacije djeluje na tijelo mase m , dakle $G_\varphi = mg_\varphi$. Indeksom φ htjeli smo istaći ovisnost ubrzanja sile teže o mjestu. Prema tome je težina o mjestu ovisna veličina.

Kilopond nije ovisan o mjestu, tj. o geografskom položaju na Zemlji. On je definiran kao umnožak prakilograma kg i normirane vrijednosti ubrzanja $g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$. Zato smo u prošlom tekstu ovog odsječka u nekoliko navrata isticali riječ »normiran«. Kilopond dakle nema veze s mjesnim g_φ ! Zato je i neopravdana optužba koja preko kiloponda tobože pogađa čitav Tehnički sistem jedinica.

Sasvim je drugo pitanje tvrdnja koja se nameće iz gornjih rasuđivanja. Pitanje ćemo izvući iz ovog primjera: Neko tijelo ima masu $m = 100 \text{ kg}$. U govoru Tehničkog sistema jedinica reći ćemo da je njegova težina $G = 100$ kiloponda. Time smo na dva načina opisali taj isti predmet.

Do ovog dvoznačnog opisa dolazimo na ovaj način. Jednadžbu $m = 100$ kg možemo napisati i ovako

$$m/\text{kg} = 100,$$

a izraz $G = 100$ kp na ovaj način

$$G/\text{kp} = 100.$$

Zbog $100 = 100$ usporedba nam odmah daje

$$\frac{m}{\text{kg}} = \frac{G}{\text{kp}}, \quad (4.2-2)$$

tj. *brojčani iznosi mase u kilogramima jednaki su brojčanim iznosima težine u kilopondima*. Ova konstatacija bit će izvanredno važna za daljnja razmatranja o primjeni mehaničkog dijela Međunarodnog sistema jedinica umjesto Tehničkoga.

Ispravnost jednadžbe (4. 2—2) lako je dokazati. Budući da je prema definiciji $\text{kp} = g_N \cdot \text{kg}$, gdje je $g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$ normirano ubrzanje sile teže, to (4. 2—2) možemo pisati i kao $m \cdot \text{kp} = G \cdot \text{kg}$, što dalje daje $m \cdot \text{kg} \cdot g_N = G \cdot \text{kg}$, odakle dijeljenjem sa kg slijedi

$$G = g_N m, \quad (4.2-3)$$

a to je definiciona jednadžba normirane težine.

To sve skupa znači da G iz jednadžbe (4.2—2) ne predstavlja stvarnu težinu, već normiranu težinu! Kad dakle masa nekog tijela na bilo kojem mjestu Zemlje iznosi $m = 100$ kg, normirana težina tog tijela iznosi također na bilo kojem mjestu $G = 100$ kp. Stvarna težina razlikuje se od normirane u ovisnosti o g_φ , ona iznosi $G_\varphi = m g_\varphi$. Stvarna težina utega u Gornjoj Lendavi bit će veća od stvarne težine istog utega na Ohridu ako su oni bili postavljeni na istu nadmorsku visinu. To bi nam pokazala vaga na pero (sl. B 4). Normirane težine koje izražavamo kilopondima pomoću g_N bit će međutim iste u oba mjesta. A Tehnički sistem jedinica radi s normiranom jedinicom sile (kp)!

Unatoč tome što stvari stoje tako kako smo izložili ogorčeni protivnici Tehničkog sistema jedinica tvrde da je vrlo nezgodno što s težinom G , koju tehničari unose u svoje račune, ne računaju stvarnu već normiranu težinu koja nema veze s mjesnim g_φ . To je tačan, ali samo djelomično prihvatljiv argument.

Tehničari obično računaju sa zaokruženom vrijednošću normiranog ubrzanja sile teže $g_N = 9,81 \text{ m/s}^2$. Time čine grešku otprilike $+ 0,34$ promila. Ako žele tačno izračunati onda se služe jednadžbom

$$G_\varphi = G_N g_\varphi / g_N, \quad (4.2-4)$$

dakle uzimaju u obzir mjesno ubrzanje sile teže.

Istom netačnošću računaju i pristaše Međunarodnog ili CGS (vidi odsječak 6.) sistema jedinica. I oni uzimaju da je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, a ne g_N , čine dakle grešku $+ 0,34 \%$ iako dobivaju rezultat u newtonima. A kad žele znati tačnu vrijednost mjesne težine G_φ služe se jednadžbom

$$G_\varphi = g_\varphi m,$$

gdje je m ona ista masa G/g_N iz jednadžbe (4. 2—4), jer je G normirana težina, kako smo već rekli uz uzraz (4. 2—3).

Pitanju kiloponda morali smo posvetiti veću pažnju, iako on to kao jedinica odumirućeg sistema jedinica ne zavređuje. Zato ćemo u daljem tekstu samo ukratko spomenuti ostale koherentne jedinice Tehničkog sistema.

4.3. Ostale jedinice Tehničkog sistema

Budući da su dvije osnovne jedinice — metar i sekunda — Tehničkog sistema iste kao i u Međunarodnom sistemu, izvedene se jedinice razlikuju od Međunarodnih samo tamo gdje se u definicionoj jednadžbi izvedene jedinice pojavljuje kilopond. Stoga je jedinica energije i rada Tehničkog sistema

$$\text{kilopondmetar} = \text{kp} \times \text{m} = \text{kpm} = 9,80665 \text{ joule}.$$

Katkada se ovu jedinicu naziva metarkilopondom (najviše prema staroj njemačkoj literaturi: »Meterkilogram«) i označuje sa m_{kp}. To nije dobro jer može čitatelja zavesti na pomisao da se radi o milikilopondu.

Jedinica snage je $\text{kpm/s} = 9,80665 \text{ W}$. Ovdje moramo primijetiti da čuvena starinska konjska snaga (KS) nije koherentna jedinica Tehničkog sistema i zato je ona razmotrena u odsječku 7. 4. gdje su skupljene ostale »mješovite« jedinice. Isto tako ni tehnička atmosfera (at) nije jedinica Tehničkog sistema već je to kp/m^2 , dakle 10 000 puta manja jedinica.

Ostale jedinice Tehničkog sistema skupljene su za najčešće upotrebljavane veličine u tablici B. 2. Preračunski faktor, koji ih povezuje s jedinicama Međunarodnog sistema zaokružen je na brojku 9,807, što uzrokuje grešku oko $+3,5 \cdot 10^{-5}$ ili 0,0035 %.

5. NAJJEDNOSTAVNIJI NAČIN PRIJELAZA OD TEHNIČKOG NA MEĐUNARODNI SISTEM JEDINICA MEHANIKE

5.1. Težina i masa

U prvi mah izgleda da Međunarodni sistem jedinica donosi znatne teškoće u tehničku i svakodnevnu praksu. Čuju se ovakvi prigovori: »Zar opet promjene? Nedavno smo počeli uvoditi kilopond, a sad ga treba odstraniti i na njegovo mjesto uvoditi newton!«. Iz ovih rečenica, koje se u ovakvom ili sličnom obliku čuju od ljudi u industriji i školama, vidimo da je glavna teškoća u promjeni jedinice sile. Za »konjskom snagom« (KS) kao jedinicom snage gotovo nitko više ne žali¹⁾, jer je kW (kilowatt) prodro gotovo svuda.

¹⁾ U vezi s umirućom »konjskom snagom« zanimljiv je primjer iz Francuske. Tamo je prije nekoliko godina među tehničarima objavljeno geslo: »Smrt konjskoj snazi!«. No Francuzi su uz nehajnost skloni i tradicijama, pa ta KS nikako da umre.

Neki francuski profesor primijenjene mehanike predbacuje stoga inženjerima i tvorničarima da se ne drže gesla »Smrt konjskoj snazi!«, ne forsiraju primjenu Međunarodnog sistema jedinica u onolikoj mjeri koliko on to zavređuje. Osobito ga pogađa mimoilaženje Međunarodnog sistema jedinica u strojarstvu i hidraulici, te navodi primjere novo izrađenih strojeva koji na natpisnim pločicama imaju natpise za kgf (to je kp), tlakove mjere stupcima vode i žive, snage sa KS itd. Taj profesor kaže da je bilo dosta platonskog uvjeravanja u svrishodnost Međunarodnog sistema jedinica. Predlaže da se ukinu sve carinske olakšice za one mjerne uređaje koji nisu građivani u jedinicama Međunarodnog sistema! Razlika u cijeni, nastavlja on, prisilit će konstruktore i potrošače tih instrumenata da prouče taj sistem!

Piljarice i trgovci na tezgama i dalje međutim prodaju krumpire i brašno na kilograme. Oni niti su čuli za metrološke promjene koje se zbivaju u tehničkim i znanstvenim krugovima niti za njih mare. To je sretna okolnost, jer piljarice će i dalje prodavati krumpire na kilograme, trgovci će i dalje odmjerivati brašno na kilograme, skladištari će i dalje ispunjavati svoje kontrolne kartone naznakom npr. »16 kilograma uljene boje«. To je naime u skladu s Međunarodnim sistemom jedinica!

Razmislimo što radi piljarica prilikom prodaje krumpira na tržnici? Pretpostavimo da domaćica želi kupiti jedan kilogram krumpira. Na običnu vagu s polugom piljarica stavi na jednu zdjelicu uteg na kojem piše »1 kg«. Na drugu zdjelicu stavlja krumpir po krumpir tako dugo dok se vaga ne izravna, dok ne dođe do ravnoteže.

Prema izlaganju u odsječku 4. 2. na vagi su se izjednačili momenti $M_1 = M_2$; zato su uz jednake krakove vage jednake i težine utega G_1 i krumpira G_2 , tj. $G_1 = G_2$. Budući da je ubrzanje sile teže g_1 ispod utega jednako ubrzanju g_2 ispod zdjelice s krumpirom, dakle $g_1 = g_2$, to je zbog $m_1 = G_1/g$, $m_2 = G_2/g$:

$$m_1 = m_2$$

Na piljaričinoj polužnoj vagi usporedene su i izjednačene mase kopije pariskog prakilograma i mase odabranog krumpira.

Ni vage na pero ne treba mijenjati. Te vage badžarene su u kilopondima, a budući da kilopond težinom prikazuje istu količinu tvari kao i kilogram masom, to se i pomoću vaga na pero može roba kupovati na kilograme. Zato se na tržnici i u trgovini posve ispravno kupuje roba na kilograme.

Neispravno je samo nazivlje. Domaćica će reći da je kupila krumpir težine 1 kilogram. Prodavači u trgovini kažu da je težina brašna 10 kilograma. Radnik će obično reći da nosi vreću cementa od 80 kilograma, a tek u iznimnom slučaju da je »težina vreće 80 kilograma«. Ovo pučko nazivlje posve je prirodno. Čovjek osjeća u svojim mišićima težinu kad nosi ugljen u stan na katu ili kad prilikom planinarenja diže svoju vlastitu masu sve više prema vrhu brijega.

U privredi i školama djeluju ljudi koji znaju razlikovati težinu od mase. Oni znaju razlikovati kilogram od kiloponda. Stoga su neki za svoju vlastitu težinu govorili da teže 75 kiloponda ili da je neki odljevak težak 250 kiloponda. Oni, u vezi s Međunarodnim sistemom jedinica, pitaju: moraju li sada reći da su teški 736 newtona, a da je odljevak težak 2450 newtona? Ne, ovaj put je ispravno ono kako rade piljarice i domaćice, samo s tom razlikom da oni kao školovani ljudi trebaju reći kako je njihova masa 75 kilograma, a masa odljevka 250 kilograma.

Takav način izražavanja i fizikalno je ispravan. U odsječku 1.6. pokazali smo da je masa svojstvo tvari, a težina je sila koja na tvar djeluje ili kojom tvar djeluje na podlogu. Valja još jednom ponoviti da je pri normalnim (zemaljskim) brzinama masa stalna veličina, dok težina nije; npr. na Mjesecu je čovjek mnogo lakši nego na Zemlji. Ako mu se mišići ne promijene, svaki će svemirski putnik na Mjesecu moći obilno premašiti zemaljski rekord u skoku udalj!

Pa i sam veliki *Newton* koji je uveo pojam mase razumijevao je pod masom »množinu materije« (quantitas materiae), a baš to kupuje u obliku krumpira domaćica, kranom premješta kranovoda ili radnik istovaruje iz vagona.

Naglašavamo ponovo: *brojčani iznosi težine u kilopondima jednaki su brojčanim iznosima mase u kilogramima* ($G/\text{kp} = m/\text{kg}$). To znači da je čovjek mase 75 kilograma težak 75 kiloponda, masa krumpira 1 kg teška je 1 kp, automobil težine 850 kp ima masu 840 kg.

5.2. Specifična težina i gustoća

U primjeni Tehničkog sistema jedinica upotrebljava se specifična težina γ , a ne gustoća ρ . Ove veličine razmotrili smo u odsječku 1. 8. Da bi se Međunarodni sistem jedinica primijenio što manje bolno, vrlo je povoljno da se umjesto γ upotrebljava gustoća ρ . O koristi takvog naziranja uvjerit će nas jedan primjer.

U posudi obujma $V = 10$ kubnih decimetara $= 0,01 \text{ m}^3$ stala je masa aluminija $m = 27$ kilograma. Težina ove mase iznosi kako znamo $G = 27$ kiloponda. Primjenjivač Tehničkog sistema kaže da je specifična težina aluminija

$$\gamma = G/V = 27 \text{ kp} / 0,01 \text{ m}^3 = 2\,700 \text{ kp/m}^3$$

Primjenjivač Međunarodnog sistema reći će da je gustoća aluminija

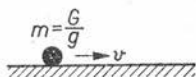
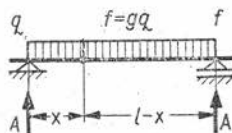
$$\rho = m/V = 27 \text{ kg} / 0,01 \text{ m}^3 = 2\,700 \text{ kg/m}^3.$$

Vidimo da su brojevi iznosi gustoće u kg/m^3 jednaki brojevnim iznosima specifične težine u kp/m^3 . To znači da treba umjesto o specifičnoj težini govoriti o gustoći. U novijim knjigama tako se i radi, pa tabele za γ u kp/m^3 nije trebalo preračunavati već ih jednostavno napisati¹⁾ za gustoću ρ u kg/m^3 .

Nažalost na mnoge druge veličine ova sretna okolnost ne može se primijeniti. Na primjer tablice pritiska treba preračunati s kp/m^2 na N/m^2 , odnosno njihove dekadске višekratnike (o tome vidi odsječak 3. 3), a isto tako i tablice dozvoljenih naprezanja. I tako dalje. Podrobnije se te promjene vide iz tablice B.2.

5.3. Ostale bitne promjene

Pogledajmo još ukratko kako se odrazuje zamjena Tehničkog sistema jedinica s Međunarodnim pri računima. U tu svrhu paralelno ćemo izračunati dva primjera.



Sl. B 12. Kontinuirano opterećen nosač (lijevo) i kugla u gibanju (desno)

Na slici B.12—lijevo skiciran je nosač opterećen kontinuiranim opterećenjem. Želimo znati koliki je maksimalni moment M ako je raspon $l = 10$ m. Ukupna masa kontinuiranog opterećenja iznosi $m = 10\,000$ kg. Za pristaše Tehničkog sistema jedinica to je težina $G = 10\,000$ kiloponda. Specifično opterećenje iznosi za pristašu Međunarodnog sistema $q = m/l = 10\,000 \text{ kg}/10 \text{ m} = 1\,000 \text{ kg/m}$. q je dakako masena veličina. Za pristašu Tehničkog sistema specifično je opterećenje $f = G/l = 10\,000 \text{ kp}/10 \text{ m} = 1\,000 \text{ kp/m}$. Pritom je f dakako omjer sile i duljine. Prvi će moment na bilo kojem mjestu x računati pomoću jednadžbe

$$M_x = \frac{1}{2} g q x (l-x),$$

¹⁾ Masu umjesto težine, te gustoću umjesto specifične težine uveli su u raznim strukama npr. pr. B. Kraut: Džepni strojarški priručnik, 1956; J. Dobeic: Elektrotehnički materijali, 1950; R. Poniž: Osnovi proračuna uređaja za električno otporno grijanje, 1952; B. Černe: Nauka o toplini, 1961; N. Šepelev, Tehnička mehanika, 1961. Ovi su autori ujedno primijenili Međunarodni sistem jedinica.

a drugi pomoću

$$M_x = \frac{1}{2} f x (l-x).$$

Naravno da su to stvarno iste jednačbe jer zbog $q = m/l$ i $f = G/l$ nastaje $f = g$, tj. prvi razumijeva pod specifičnim teretom masu po jedinici duljine, a drugi težinu po jedinici duljine nosača. I jedno i drugo, sa q ili f , označuje specifični teret ili opterećenje.

Maksimalni momenat nastaje kako znamo na sredini nosača, gdje je $x = l/2$. Račun će sada ići ovako:

Međunarodnim sistemom

$$q = 1000 \text{ kg/m}$$

$$M = \frac{1}{8} g q l^2$$

$$M = 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-1} \cdot 10^2 \text{ m}^2 / 8$$

$$M = 122\,600 \text{ Nm} = 122,6 \text{ kNm}.$$

Tehničkim sistemom

$$f = 1000 \text{ kp/m}$$

$$M = \frac{1}{8} f l^2$$

$$M = 10^3 \text{ kpm}^{-1} \cdot 10^2 \text{ m}^2 / 8 = 12\,500 \text{ kpm}.$$

Vidimo da je račun Međunarodnim sistemom duži jer smo morali obaviti jedno množenje više. Tome smo mogli izbjeći tako da smo ranije izračunali $f = 9\,807 \text{ N/m}$, ali to je opet posao na drugoj strani, a ujedno se kosi s ranije izloženim načelom da množinu tvari treba izražavati kao masu, dakle u ovom primjeru sa q .

Razmotrimo još primjer koji vidimo na slici B.12 desno. Kugla mase $m = 100 \text{ kg}$, dakle težine $G = 100 \text{ kp}$, jednoliko se giba brzinom $v = 10 \text{ m/s}$ po idealno glatkoj podlozi. Treba izračunati kolika je kinetička energija kugle u gibanju. Način računanja kao u prijašnjem primjeru daje nam:

Međunarodnim sistemom

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$W = \frac{1}{2} m v^2$$

$$W = 0,5 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s})^2 = 5000 \text{ J}$$

Tehničkim sistemom

$$G = 100 \text{ kp}$$

$$W = \frac{G}{2g} v^2$$

$$W = \frac{100 \text{ kp} \cdot 10^2 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}}{2 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}} = 510 \text{ kpm}$$

Ovdje je baš obrnut slučaj onoga u prvom primjeru. Tu je račun u Tehničkom sistemu dulji. Onaj isti g koji se u prvom slučaju pojavio na nosaču, sada se javio kod kinetičke energije pri uporabi Tehničkog sistema.

Ipak postoji stanovita razlika. U primjeni Međunarodnog sustava na nosaču se logično pojavilo ubrzanje sile teže g jer materija na nosaču (opterećenje) djeluje na nj pod djelovanjem sile teže.

Kad se g pojavljuje u izrazu za kinetičku energiju pri upotrebi Tehničkog sistema onda to nije logično, jer gibanje kugle u ravlini nema veze s ubrzanjem sile teže.

6. FIZIKALNI ILI CGS SISTEM JEDINICA MEHANIKE

6.1. Osnovne i izvedene CGS jedinice

Pod nazivom Fizikalni sistem jedinica danas razumijevamo skup koherentnih jedinica koje su izvedene iz ovih osnovnih jedinica:

za duljinu: centimetar (cm),
za vrijeme: sekunda (s),
za masu: gram (g).

Centimetar je stoti dio metra, dakle $\text{cm} = 0,01 \text{ m}$, a gram tisućinka pariskog prakilograma, $\text{g} = 0,001 \text{ kg}$. Prema ovim jedinicama ovaj je sistem dobio svoj drugi naziv »CGS sistem jedinica«.

Budući da su centimetar i gram decimalni dijelovi jedinica Međunarodnog sistema, a jedinica vremena ista, to su i izvedene jedinice CGS sistema decimalni dijelovi ili dekadski višekratnici Međunarodnih jedinica. Odnose između CGS i Međunarodnih jedinica sadrži tablica B. 2.

Samo nekoliko izvedenih jedinica CGS sistema ima svoje vlastite nazive. Jedinica sile nazvana je dyn. To je sila koja jedinici mase gramu (g) daje ubrzanje $1 \text{ cm/s}^2 (= \text{gal})$, dakle $\text{dyn} = \text{g cm/s}^2$. Budući da je $\text{g} = 10^{-3} \text{ kg}$, a $\text{cm} = 10^{-2} \text{ m}$, to je

$$\text{dyn} = 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2 = 10^{-5} \text{ newton},$$

dakle dyn je 100 000 puta manja jedinica od newtona, jedinice sile u Međunarodnom sistemu jedinica.

Druga imenovana izvedena CGS jedinica je erg, jedinica rada i energije. Rad jednog erga obavi sila jednog dyna kad joj se hvatište pomakne za jedan centimetar. Prema izrazu za rad $W = Fl$ to uz $[F] = \text{dyn}$, $[l] = \text{cm}$, $[W] = \text{erg}$ daje

$$\text{erg} = \text{dyn} \cdot \text{cm} = \text{g cm s}^{-2} \text{ cm} = \text{g cm}^2 \text{ s}^{-2}.$$

Budući da je $\text{dyn} = 10^{-5} \text{ N}$, a $\text{cm} = 10^{-2} \text{ m}$, to je

$$\text{erg} = 10^{-5} \text{ N } 10^{-2} \text{ m} = 10^{-7} \text{ joule (J)},$$

jer je $\text{J} = \text{Nm}$.

Posebna imena još imaju jedinice viskoznosti. Jedinica dinamičke viskoznosti u CGS sistemu je poise (P, čitaj poaz)

$$\text{poise} = P = \text{g cm}^{-1} \text{ s}^{-1} = 0,1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

a jedinica kinematičke viskoznosti

$$\text{stockes (St)} = \text{cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Ova jedinica čita se »stouks«, iako je neki izgovaraju »stok«.

Ovdje moramo naglasiti da tzv. »fizikalne« jedinice pritiska »normalna (ili fizikalna) atmosfera« = atm, energije »elektron-volt« (eV), »bar« itd. nisu članice koherentnog CGS sistema jedinica, već su jedinice — namjernice, posve analogno konjskim snagama i litar-atmosferama u Tehničkom sistemu jedinica. O svima njima će još biti govora u odsječku 7.

I u ovom sistemu jedinica, koji se u prošlosti smatrao jedinim naučnim sistemom, postoji nekoliko jedinica koje nisu koherentne, dakle nisu u odnosu $1 \times 1 = 1$, pa čak ni u dekadskom odnosu. Te se jedinice upotrebljavaju i u svim drugim sistemima.

6.2. Nekoherentne jedinice kuta i vremena

Jedna od njih je jedinica kuta. U odsječku 1. 2. definirali smo kut α kao omjer luka i radiusa (vidi sliku B1), dakle $\alpha = l/r$. Jedinice kuta odabrane su na posve osebujan način. Punom kutu, kad je $l = 2\pi r$, pa je $\alpha = 2\pi r/r = 2\pi$, pripisuje se jedinica radijan (rad) pa se stoga kaže da je puni kut $\alpha = 2\pi$ radijana. Prema tome radijan je tzv. opisna jedinica (vidi odsječak 13. 3.) jer upravo smo napisali da je vrijednost $\alpha = 2\pi$, a odmah zatim da je $\alpha = 2\pi$ rad, pa je dakle $\text{rad} = 1$, tj. opis brojke jedan (vidi i fon u odsječku C. 3.).

S druge je strane uvedena opisna jedinica (geometrijski) stupanj koji se označuje s $^\circ$. Punom kutu dana je vrijednost 360° , pa je dakle $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, odnosno

$$\text{radian} = 57,295\,778^\circ \text{ ili } ^\circ = 1,745\,329\,2 \cdot 10^{-4} \text{ radijana.}$$

Podjela kruga na 360 stupnjeva prastarog je porijekla. Kaldejci su imali visoko razvijenu kulturu dok je u Evropi još vladao mrak. Svojim astronomskim motrenjima oni su utvrdili da Sunce prođe tijekom jedne godine (365 dana) pun krug, a da bi mogli određivati razmake između zvijezda stajačica upotrebili su tu mnogo puta potvrđenu pravilnost vrtnje Sunca oko Zemlje za mjeru kuta. Budući da je brojka 365 nespretna za računanje zaokružili su je na 360. Razlika

$$1/360 - 1/365 \approx 4 \cdot 10^{-5}$$

vrlo je malena, tako da u primjeni sitnijih mjera kuta uz tadašnju mjernu tačnost greška nije dolazila do izražaja. Puni krug može se šestarom podijeliti na šest potpuno jednakih dijelova (odatle i naziv šestar) pa je tako nastalo brojenje kutova s ovim opisnim jedinicama:

Stupanj ($^\circ$) = 60 minuta ($'$), minuta ($'$) = 60 sekunda ($''$).

Dvostrane odnose među spomenutim opisnim jedinicama kuta sadrži tablica B.4.

Odnosi među jedinicama kuta

Tablica B.4

	Oznaka	rad	$^\circ$	$'$	$''$
radian	rad	1	$5,730 \cdot 10^1$	$3,438 \cdot 10^3$	$2,063 \cdot 10^5$
stupanj	$^\circ$	$1,745 \cdot 10^{-2}$	1	$6,000 \cdot 10^1$	$3,600 \cdot 10^3$
minuta	$'$	$2,909 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	$6,000 \cdot 10^1$
sekunda	$''$	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1

U doba kad se stvarao metarski sistem jedinica (vidi odsječak A.3.) uveli su decimalni oblik jedinica kuta. Punome kutu pripisali su 400 stupnjeva (grad, gr; degré), pa pravom kutu — koji je osnov svim računima — pripada novih 100 minuta, a svakoj od njih 100 novih sekunda. Ovakva podjela nikada nije došla

jače do izražaja u praksi, iako su čak i neki geometarski instrumenti za premjeravanje meridijana imali puni krug razdijeljen na 4000 dijelova.

Ni višekratnici jedinice vremena nisu koherentni. Na primjer 1 sat (h) = 60 minuta (min) = 3600 sekunda (s) ili dan = 24 h. I ove jedinice vuku po-

Odnosi među jedinicama vremena

Tablica B.5

Jedinica	Oznaka	s	min	h	d
sekunda	s	1	$1,667 \cdot 10^{-2}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,157 \cdot 10^{-5}$
minuta	min	$6 \cdot 10^1$	1	$1,667 \cdot 10^{-2}$	$6,944 \cdot 10^{-4}$
sat	h	$3,600 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^1$	1	$4,167 \cdot 10^{-2}$
dan	d	$8,640 \cdot 10^4$	$1,440 \cdot 10^3$	24	1

riječlo iz starih kultura oko 700 do 500 godina prije našeg brojanja. Podjela 1/60 očito potječe od zvjezdostanstva gdje su na toj bazi mjerili kutove, kako smo ranije vidjeli.

Podjela pak 1/24, tj. 1 dan = 24 sata potječe od Babilonaca koji su svoje jedinice gradili pomoću cijelih brojeva 12 ili 5 ili 2^1 .

Dvostrane odnose među danas upotrebljivanim jedinicama vremena sadrži tablica B.5.

7. RAZLIČITE JEDINICE METARSKIH SISTEMA JEDINICA MEHANIKE

U ovom ćemo poglavlju obraditi jedinice koje ne pripadaju ni jednom skladnom sistemu jedinica, ali se upotrebljavaju u raznim ljudskim djelatnostima na području primjene metarskih sistema jedinica. Tako ćemo kasnije učiniti i pri razmatranju angloameričkih sistema jedinica (poglavlje 8).

Ovdje nećemo razmatrati veze između pojedinih jedinica duljine i površine. Brojčane dvostrane odnose između metarskih i angloameričkih jedinica duljine sadrži tablica I na kraju knjige, a iste takve odnose između jedinica površine tablica II.

7.1. Jedinica volumena litra

U svakodnevnom životu računamo da je litra (l) jednaka kubnom decimetru (dm^3). To činimo posve s pravom jer razlika je posve neznatna i dolazi do izražaja samo pri najpreciznijim mjerenjima. Razlika između litre i kubnog decimetra vuče korijen iz vremena Francuske revolucije, kad se smatralo da su litra i dm^3 jednaki.

¹⁾ Babilonci su npr. imali jedinice duljine subban = 60 ammatu (a); gar = 12 a, kanu = 6 a, gdje je a = 0,495 m (korak), a za obujam jedinice gur = pi = 60 sila; sila = 10 ša; 10 sila je oko 4,8 dm^3 .

Danas je litra definirana kao volumen koji zauzima masa 1 kg čiste vode bez zraka pri najvećoj gustoći vode pod pritiskom 1 atm = 10,1325 N/cm². Međunarodni odbor za mjere i utege objavio je 1950. godine da vrijedi tačan odnos

$$\text{litra} = 1,000\,028 (\pm 0,000\,003) \text{ dm}^3,$$

dakle je litra za 0,003% veća od kubnog decimetra, odnosno

$$\text{kubni decimetar} = 0,999\,972 \text{ litara.}$$

Dvostrane brojčane odnose između najčešće upotrebljivanih metarskih i angloameričkih jedinica volumena sadrži tablica III na kraju knjige.

7.2. Jedinica gustoće Baumé

Za mjerenje gustoće tekućina (npr. za mjerenje gustoće kiselina akumulatora) katkada se upotrebljava posve osebujna mjera: stupanj Baumé. U literaturi se taj stupanj obično označuje sa °Bé. Ovdje ćemo upotrebljavati samo oznaku Bé.

Francuskom državnom uredbom iz 1919. godine priznata su dva različita stupnja Baumé (čitaj »bomé»). Jedan se odnosi na mjerenje gustoće tekućina gušćih od vode, a drugi na tekućine manje gustoće od vode.

Baumé gustoću označili smo slovom ρ_B . Između ρ_B i prave gustoće ρ koju mjerimo npr. sa kg/m³ vrijedi ovaj odnos

$$\rho_B = 144,32 \text{ Bé} - \frac{144,32 \cdot 10^3 \text{ Bé}}{\frac{\rho}{\text{kg/m}^3}},$$

gdje simbol Bé označuje »stupanj Baumé«. Graduiranje areometara koji pokazuju broj stupnjeva Bé izvršeno je tako, da čista voda ima 0 Bé, vodena otopina sa 15% morske soli i 85% vode 15 Bé, a sumporna kiselina H_2SO_4 gustoće 1842,7 kg/m³ 66 Bé.

Obrnuto se iz poznavanja gustoće ρ_B može izračunati prava gustoća ρ pomoću izraza

$$\rho = \frac{144,32 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}{144,32 - \rho_B/\text{Bé}}$$

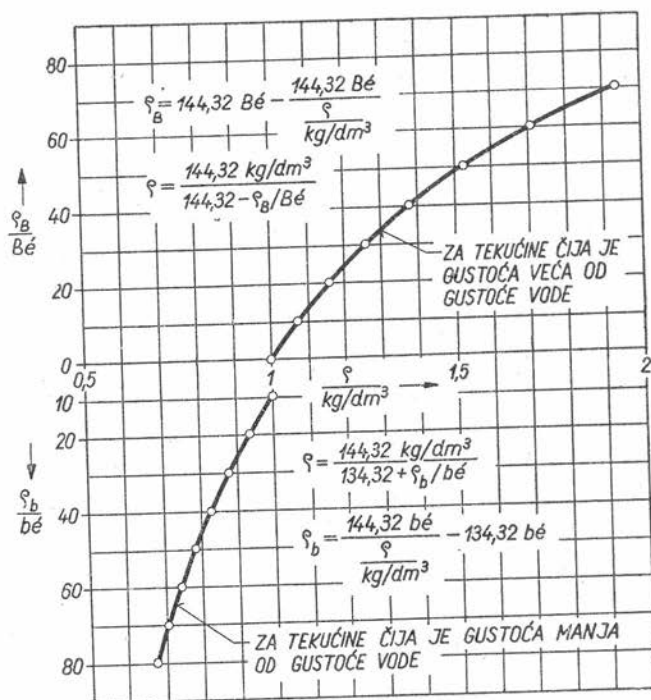
Ako puni automobilski akumulator ima kiselinu gustoće $\rho_B = 32 \text{ Bé}$ onda je prava gustoća

$$\rho = \frac{144,32 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}{144,32 - 32 \text{ Bé}} = 1284,9 \text{ kg/m}^3 = 1,2849 \text{ kg/dm}^3.$$

Brzo a manje tačno mogu se ovakvi odnosi izvaditi iz dijagrama na slici B13.

Za mjerenje gustoća manjih od gustoće vode (npr. za alkohol) primjenjuju se drukčiji stupnjevi Baumé! U ovoj skali pripisana je gustoći 1000 kg/m³

Baumé-gustoća $\rho_b = 10 \text{ bé}^s$! Pripadni areometri graduirani su tako da vodena otopina sa 10% morske soli pokazuje 0 bé, a čista voda 10 bé.



Sl. B 13. Međusobna zavisnost brojčanih iznosa (mjer-nih brojeva) gustoće tekućine izmjerene u kg/dm^3 i u stupnjevima Bauméa

Da bismo mogli razlikovati obje Bauméove skale označili smo jedinicu ove druge malim početnim slovom (bé) za razliku od prije opisane Bé. Jedinica bé (malo slovo) pripada Baumé-gustoći koju označujemo sa ρ_b .

Između ρ_b i prave gustoće ρ koju mjerimo npr. s kg/m^3 vrijede ove jednadžbe:

$$\rho_b = \frac{144,32 \cdot 10^3 \text{ bé}}{\frac{\rho}{\text{kg/m}^3}} - 134,22 \text{ bé}, \quad \rho = \frac{144,32 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}{134,32 + \rho_b / \text{bé}}$$

Ako neka tekućina ima manju gustoću od vode na primjer $\rho = 783 \text{ kg/m}^3$, onda je prema prvoj formuli

$$\rho_b = \frac{144,32 \cdot 10^3 \text{ bé}}{783 \text{ kg m}^{-3} / \text{kgm}^{-3}} - 134,32 \text{ bé} = 50 \text{ bé}.$$

Brže ali manje tačno mogu se odnosi između ρ_b i ρ naći u donjem dijelu dijagrama na slici B13.

7.3. Različite jedinice pritiska

Fizikalna atmosfera (atm), zvana i »normalnom atmosferom«, definirana je kao pritisak kojim na svoju podlogu pritišće stupac žive visine $h = 760$ mm i gustoće $\rho = 13\,595,1 \text{ kg/m}^3$ pri normiranom ubrzanju sile teže $g = g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$. Prema izvođenjima u odsječku 1.10 pritisak u takvom slučaju iznosi

$$p = h \rho g,$$

pa je

$$\text{atm} = h \rho g = 0,76 \text{ m} \cdot 13\,595,1 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,806\,65 \text{ ms}^{-2} = 1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Deseta Generalna konferencija za mjere i utege održana 1954. godine tako je i definirala normalnu (fizikalnu) atmosferu:

$$\text{atm} = 1,013\,250 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Nula na kraju označuje da brojka nije zaokružena na prethodnu peticu.

Budući da je $\text{m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$ fizikalnu atmosferu možemo izraziti pomoću newtona i manje jedinice površine cm^2 ovako:

$$\text{atm} = 10,132\,5 \text{ N/cm}^2 = 0,101\,325 \text{ N/mm}^2,$$

tj. normalna atmosfera približno je deset puta veća od N/cm^2 , odnosno oko 10 puta manja od jedinice N/mm^2 .

Budući da je newton = kp/9,806 65 to je veza između normalne atmosfere (atm) i tehničke atmosfere (at)

$$\text{atm} = 10,132\,5 \text{ cm}^{-2} \text{ kp} / 9,806\,65 = 1,0322 \text{ at},$$

jer je tehnička atmosfera $\text{at} = \text{kp/cm}^2$. Obrnuto vrijedi

$$\text{at} = \text{kp/cm}^2 = 0,967\,84 \text{ atm} = 9,806\,65 \text{ N/cm}^2,$$

tj. tehnička je atmosfera oko 10 puta veća od jedinice pritiska N/cm^2 .

760-puta manja jedinica pritiska od fizikalne atmosfere naziva se torr po talijanskom fizičaru *Torriceliju*. Prema tome je

$$\text{torr} = \text{atm} / 760 = 1,333\,2 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2 = 0,013\,332 \text{ N/cm}^2,$$

odnosno obratno

$$\text{N/cm}^2 = 75,008 \text{ torr}.$$

U tehnici se jedinica torr naziva »1 milimetar stupca žive« (mm Hg), dakle

$$\text{mm Hg} = \text{torr} = 0,013\,332 \text{ N/cm}^2.$$

Do jedinice pritiska mm Hg došlo se tako što je tim nazivom označen pritisak kojim pritišće stupac žive visine $h = 1$ milimetar na mjestu normiranog ubrzanja sile teže g_N pri 0°C . Jednadžba $p = h \rho g$ u tom slučaju daje

$$\text{mm Hg} = h \rho g = 1 \text{ mm} \cdot 13\,595,1 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,806\,65 \text{ ms}^{-2} = 133,32 \text{ N/m}^2.$$

Stvarno jedinice torr i mm Hg nisu potpuno jednake. Milimetar stupca žive veći je nešto preko jedne desetmilijuntinke tako da je

$$\text{mm Hg} = 1,000\,000\,14 \text{ torr},$$

a tačna vrijednost je $\rho \cdot g$ u N/m^2 :

$$\text{mm Hg} = 133,322\,387\,415 \text{ N/m}^2,$$

dok je

$$\text{torr} = \text{atm}/760 = 133,322\,4 \text{ N/m}^2.$$

U tehnici se upotrebljava još nekoliko »stupčanih« jedinica. Jedna od njih je »1 metar stupca vode« (m s.v. ili $\text{m H}_2\text{O}$). To je pritisak stupca vode visine $h = 1$ metar pri 0°C i $g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$. Budući je maksimalna gustoća vode oko $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, u tom slučaju vrijedi

$$\text{m s.v.} = h \rho g = 1 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,806\,65 \text{ m/s}^2 = 9\,806,65 \text{ N/m}^2.$$

Budući da je newton $= \text{N} = \text{kp}/9,806\,65$ slijedi dalje

$$\text{m s.v.} = 1000 \text{ kp/m}^2 = 0,1 \text{ kp/cm}^2 = 0,1 \text{ at},$$

odnosno

$$\text{at} = \text{kp/cm}^2 = 10 \text{ m s.v.},$$

tj. tehnička atmosfera jednaka je pritisku što ga na svoju podlogu izvodi stupac vode visine 10 metara.

Stvarno je maksimalna gustoća vode $\rho = 1 \text{ kg/litar} = 999,972 \text{ kg/m}^3$ pa je tačna vrijednost jedinice pritiska »1 metar vodenog stupca«.

$$\text{m s.v.} = 999,975 \text{ kp/m}^2 = 0,980\,638 \text{ N/cm}^2.$$

U anglo-američkim zemljama upotrebljavaju slične jedinice: inch of mercury i foot of water, tj. »palac žive« i »stopa vode«. O njima se raspravlja u odsjčku 11.7.

U meteorologiji često se rabi jedinica bar (meteorološki bar, hectopièze ili megbar) definiran jednakžbom $\text{bar} = 10^6 \text{ dyn/cm}^2$. Budući da je newton $= 10^5 \text{ dyn}$, a $\text{m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$, to je

$$\text{bar} = 10^6 \text{ dyn/cm}^2 = 10 \text{ N/cm}^2 = 10^5 \text{ N/m}^2 = \text{pentagiorgi (peG)}.$$

Posve rijetko upotrebljavaju se još ove metarske jedinice pritiska

$$\text{barye} = 0,1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ dyn/cm}^2,$$

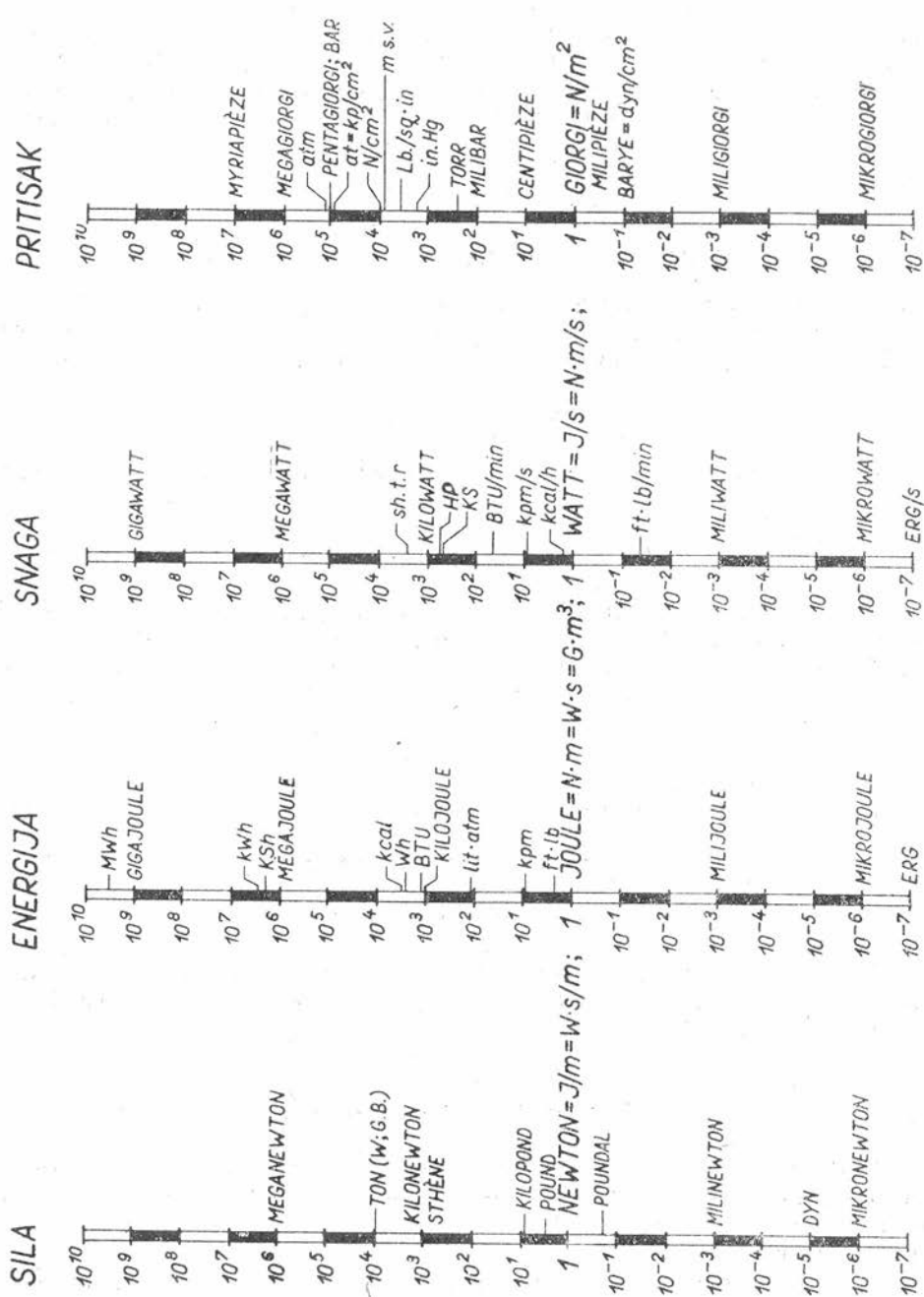
$$\text{milipièze} = 1 \text{ N/m}^2,$$

$$\text{centipièze} = 10 \text{ N/m}^2,$$

$$\text{millibar} = \text{decipièze} = 100 \text{ N/m}^2,$$

$$\text{tona-sila/m}^2 = 9\,806,65 \text{ N/m}^2,$$

$$\text{myriapièze} = 10^7 \text{ N/m}^2.$$



Sl. B 14. Grafički prikaz različitih metarskih i angloameričkih jedinica sile, energije, snage i pritiska u odnosu na jedinice Međunarodnog sistema jedinica

Dvostrane odnose među najvažnijim jedinicama pritiska, kako metarskim tako i angloameričkim, sadrži tablica VII na kraju knjige. Iz tablice vidimo da je npr. tehnička atmosfera $\text{at} = 7,356 \cdot 10^2 \text{ torr} = 735,6 \text{ torr}$ ili $\text{N/cm}^2 = 1,020 \cdot 10^{-1} \text{ at} = 0,1020 \text{ at}$. Svi odnosi zaokruženi su na četiri brojke što donosi stanovitu grešku. Tako je npr. tačna veza $\text{N/cm}^2 = 75,008 \text{ torr}$, dok u tablici VII nalazimo $\text{N/cm}^2 = 75,01 \text{ torr}$. Greška je

$$\frac{78,010 - 75,008}{75,008} = \frac{0,002}{75,008} = 0,000\,0266 = 0,0266 \text{ ‰},$$

dakle i u preciznijim praktičnim računima zanemariva. Maksimalna greška bila bi u slučaju kad bi neki omjer bio npr. 1000,5 a u tablici VII bismo napisali 1000. U tom je slučaju greška

$$-0,5/1000,5 = -0,05\% = -0,5 \text{ ‰}.$$

Grafički prikaz odnosa između različitih jedinica pritiska donosi slika B14.

7.4. Jedinica snage konjska snaga

U starijoj strojarскоj tehnici često se rabila jedinica »konjska snaga« (katkada se krivo naziva »konjska sila« prema njemačkom prijevodu *Pferdstärke*) koja se označuje sa KS^1). Ova jedinica definirana je kao snaga koja u jednoj sekundi može obaviti rad od 75 kilopondmetara, dakle

$$\text{konjska snaga} = \text{KS} = 75 \text{ kpm/s}.$$

Budući da je $\text{kpm} = 9,806\,65 \text{ ms}^{-2} \text{ kg m}$, a $\text{kgm}^2/\text{s}^2 = \text{J/s} = \text{watt}$ izlaze odnosi

$$\text{KS} = 735,499 \text{ W} = 0,735\,499 \text{ kW} \approx 736 \text{ W},$$

$$\text{kW} = 1,360 \text{ KS}.$$

Odnose među ostalim jedinicama snage, među njima i angloameričkim, sadrži tablica VIII na kraju knjige, dok se grafički odnos među različitim jedinicama snage vidi na slici B14.

7.5. Različite jedinice energije

Vrlo opširne dvostrane veze između niza upotrebljivanih jedinica energije sadrži tablica IX na kraju knjige, a grafički prikaz odnosa među različitim jedinicama energije vidi se na slici B14. Ovdje ćemo razmotriti samo dvije koje tamo nisu spomenute.

Litaratmosfera je prema definiciji rad koji tekućina pod pritiskom jedne normalne (fizikalne) atmosfere izvrši pri takvom pomicanju stapa da on prođe obujam od jedne litre.

¹⁾ Vidi opasku na strani 94.

Budući da je normalna atmosfera = $1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, a litra = $1,000\,028 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, to je

$$\text{litaratmosfera} = \text{atm} \times \text{litra} = 1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2} \cdot 1,000\,028 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3,$$

$$\text{litaratmosfera} = 101,328 \text{ joule} = 0,101\,328 \text{ kJ},$$

jer je $J = \text{Nm} = 10^{-3} \text{ kJ}$.

To je takozvana normalna ili fizikalna litaratmosfera. U tehnici se, da zbrka bude veća, katkada upotrebljava tehnička litaratmosfera

$$\text{lat} = \text{litra} \times \text{at} = 98,069\,2 \text{ joule},$$

koja je toliko puta manja od fizikalne atmosfere koliko je puta tehnička atmosfera manja od normalne atmosfere.

Jedinica energije elektronvolt (eV) je energija koju primi jedan elektron kad u vakuumu prođe razliku potencijala jedan volt. Ovu mikroskopsku jedinicu energije izračunavamo pomoću jednadžbe energije $W = QU$ gdje je Q električna (električni naboj), a U električni napon.

Budući da elektron posjeduje električnu količinu oko $Q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ ampersekunda (As) u ovom je primjeru

$$\text{elektronvolt (eV)} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

jer je $AV = W$ (watt), a $J = \text{Ws}$.

Ovu jedinicu, vezanu uz volt, najčešće upotrebljavaju fizičari. Budući da je u izvornom obliku obično presitna služe se milijunskim višekratnikom mega (M):

$$\text{megaelektronvolt} = \text{MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

Umjesto MeV već se upotrebljava i jedinica pikojoule ($\text{pJ} = 10^{-12} \text{ J}$), jer se mjerne vrijednosti ne razlikuju mnogo od onih u MeV, budući da je

$$1 \text{ MeV} = 0,160\,2 \text{ pJ}.$$

7.6. Različite jedinice kinematičke viskoznosti

U tehnologiji se kinematička viskoznost ν često mjeri jedinicama koje proizlaze iz konstrukcije uređaja za mjerenje karakterističnih osobina viskoznosti. U Evropi se dosta upotrebljava Englerov viskozimetar koji uspoređuje vrijeme istjecanja mjerene tekućine iz normirane posude s vremenom koje je potrebno da pod unaprijed utvrđenim okolnostima iz te iste posude izađe referentna tekućina (čista voda temperature 20°C). Stupanj Englera ($^\circ\text{E}$), koji ćemo kratko nazivati E, omjer je ta dva vremena pa se omjer s/s označuje slovom E.

Između prave kinematičke viskoznosti ν i viskoznosti ν_E po Engleru vrijedi približna veza

$$\nu = \left(7,31 \frac{\nu_E}{E} - \frac{6,31 E}{\nu_E} \right) \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

U angloameričkim zemljama upotrebljavaju se *Redwoodove* i *Sayboltove* aparature za mjerenje kinematičke viskoznosti. Njima su prilagođene i jedinice koje se razmatraju u odsječku 11.8.

8. IZ POVIJESTI ENGESKIH I AMERIČKIH MJERA

Godine 1101. naredio je engleski kralj Henry I da se izradi štap koji je upravo toliko dugačak, kolika je udaljenost između vrška njegova nosa i palca njegove ispružene lijeve ruke. Time je nastala kraljevska jedinica duljine

yard,

koja je bila ozakonjena. 223 godine kasnije Edward II izabrao je iz sredine ječmenog klasa tri zrna i njihovu ukupnu duljinu nazvao

inch.

Iz primjera yarda i inča (čitaj »jard« i »inč«) vidimo da je početak engleskog skupa jedinica ne samo prirodnog, već i kraljevskog porijekla! Možda je baš to, uz tradicionalni engleski konzervativizam, uzrok silnim neprilikama koje još i danas otočanima, a i nama, donose njihove osobite mjere.

Englezi su i prije dva opisana događaja imali razne istoimene, ali kao i u Evropi različito velike jedinice pretežno rimskog porijekla. Kraljevski ukazi samo su dokrajčili vječne prepirke oko toga tko je ispravno izmjerio robu, da li prodavač ili kupac. Svaki je od njih naime pokušao izmjeriti onom jedinicom koja mu je bila prikladnija u pogledu zarade!

Međutim između dva opisana »kraljevska« događaja Engleska je imala jedinstvene mjere i utege na čitavom području države. To je propisivala Magna Charta iz godine 1215.

Pramjere yarda bile su izrađene u obliku brončanog štapa kao standardna državna mjera i pohranjene u kraljevskoj riznici najprije u Winchesteru, a kasnije u Westminsteru. Od tih uzoraka preživjelo je burnu englesku povijest samo nekoliko primjeraka.

Između godina 1558. i 1824., punih 266 godina, bio je na snazi »yard kraljice Elisabeth« kao standardna mjera. U međuvremenu, godine 1758, jedna je kraljevska stručna komisija preispitala dotadašnje mjerne normale duljina i proglasila za takozvane »Imperial Standards« Elisabethine mjere. Kad je 1834. veliki požar engleskog parlamenta uništio dotadašnje djelo, moralo se mnogo toga započeti iznova, ali iskoristiti priliku da se učini i nešto bolje.

Englezi su propustili svoju veliku šansu da se pridruže evropskom pokretu metarskog sistema! Rogata politika dviju velesila nije pristala da jedna od njih popusti barem na tom sveobuhvatnom području ljudske djelatnosti!

Godine 1856. dva su primjerka standardnog yarda prevezena u Ameriku. Tada nisu ni slutili da će s druge strane Atlantika nastati takav industrijski div koji nas danas, stotinu godina kasnije, svojim proizvodima i prometom prisiljava da mi u Evropi upoznemo njihove jedinice.

Weights and Measures Act (Zakon o mjerama i utezima) definirao je yard pomoću materijalne pramjere, slično kao metar u Parizu. Pramjera yard izrađena je od takozvane Baily-bronze, dugačka je 38 inča, a presjek joj iznosi 1 square inch

(kvadratni palac). U udaljenosti 1 inch od svakog kraja brončanog štapa nalazi se udubljenje promjera $1/2$ inča i dubine $1/2$ inča. U visini neutralne linije štapa u svako od ovih udubljenja učvršćena je ispolirana zlatna pločica na kojoj su ugrađivane tri crtice. »Imperial Standard Yard« definiran je kao udaljenost između dvije srednje crtice, ako je temperatura 62 stupnja Fahrenheita, tj. $16\frac{2}{3}$ stupnja Celsiusa.

Ranije je jedinica mase engleskog sistema mjera bila propisana ovako: To je masa kubnog palca (cubic inch) destilirane vode pri temperaturi 62° F i pri barometarskom stanju 30 inča živina stupca.

Danas je engleska jedinica mase određena platinskom pramjerom Imperial Standard Pound pohranjenom u Trade Board, slično kao pariski prametar u Sèvresu. Oznaka jedinice mase (pound) glasi lb, što dolazi od libre. Da bude što manje zamjena između pound-mase i pound-težine, u posljednje vrijeme sami Englezi predlažu da se kratica jedinice mase piše malim prvim slovom, a jedinica sile velikim slovom, dakle za masu lb, a za silu Lb.

Engleski sistem jedinica nije decimalan već ima u svojoj osnovi tuce, tj. brojku 12 te njezine cjelobrojne izvedenice. Tako je na primjer za jedinice duljine:

$$\text{yard} = 3 \text{ foot} = 36 \text{ inch},$$

$$\text{foot} = 12 \text{ inch},$$

gdje foot znači stopa, a u engleskom se jeziku množina od foot piše feet.

No kod engleskih jedinica mase nema ni »tuce-sistema«. Tako je na primjer

$$\text{pound (lb)} = 16 \text{ ounce (oz)},$$

$$\text{quarter (qr)} = 28 \text{ pound (lb)}$$

9. RAZLIKA IZMEĐU ENGLSKIH I AMERIČKIH JEDINICA

Engleske i američke jedinice mase međusobno su gotovo posve jednake. Potpuno su jednake električke jedinice, dok su vremenske iste kao i u čitavom ostalom svijetu. No jedinice duljine se razlikuju, a budući da su jedinice površine i volumena i kod Anglo-Amerikanaca građene na temelju jedinica duljine, to se i jedinice površine, volumena i protoke također međusobno razlikuju.

Glavni uzrok toj razlici potječe otuda što one dvije kopije yarda, koje je Amerika dobila 1856. godine, nisu jednake engleskom originalu. Ta razlika dakako ne može biti velika jer je nastala samo zbog tadašnjeg manje savršenog stanja precizne mehanike i mjerne tehnike. Uostalom ni nacionalne kopije pariskog prametra nisu apsolutno jednake i jednako dugačke kao međunarodni prametar. No dok potpisnice Konvencije o metru priznaju da je jedino pariski uzorak ispravan (vrai et définitif), dotle ta složnost kod Engleza i Amerikanaca dugo nije bila postignuta.

Prema najnovijim mjerenjima, duljine engleskog i američkog yarda u metrima iznose:

$$\text{yard G.B.} = 0,914\,389\,4 \text{ metra},$$

$$\text{yard U.S.A.} = 0,914\,401\,8 \text{ metra},$$

tj. američki je yard veći za $3,4 \cdot 10^{-6}$ m, u relativnoj mjeri za $3,76 \cdot 10^{-6}$. Ovu razliku lakše ćemo predložiti ako izračunamo da je $3,4 \cdot 10^{-6}$ m jednako $3,4/1000$ milimetra.

Da bi barem u anglosaksonskom prostoru postigli nekakvu suglasnost, British Standard Organisation i American Standard Association složile su se da za precizna mjerenja upotrebljavaju ovaj odnos:

$$\text{yard (yd)} = 0,914\,400\,0 \text{ metara,}$$

to jest sredinu, ali malo bliže engleskom yardu.

Zanimljivo je da su američke jedinice ipak vezane uz metarski sistem preko određenih preračunskih koeficijenata. Tako američki Mendenhall Order od 5. 4. 1893. godine definira

$$\text{yard} = \text{metar} \cdot 3600/3937,$$

što daje već ranije spomenuti odnos $\text{yd/m} = 0,914\,401\,8$.

Jednako je s jedinicom mase. Amerikanci definiraju svoj pound (lb. av. U.S.A.) odnosom prema pariskom prakilogramu:

$$\text{lb. U.S.A.} = 0,453\,592\,427\,7 \text{ kilograma,}$$

dok prema posljednjim mjerenjima iz 1933. godine britanska pramjera ima masu

$$\text{lb. G.B.} = 0,453\,592\,338 \text{ kilograma.}$$

I ovdje je američka jedinica veća i to u iznosu $8,97 \cdot 10^{-8}$ kilograma, odnosno u relativnoj mjeri $8,97 \cdot 10^{-8} \text{ kg}/0,453\,592 \text{ kg} = 1,98 \cdot 10^{-7}$.

Ipak su se Englezi i Amerikanci složili u tome da za zajedničku osnovnu jedinicu mase upotrebljavaju

$$\text{pound (lb)} = 0,453\,592\,400 \text{ kilograma.}$$

10. KOHERENTNI ANGLO-AMERIČKI SISTEM JEDINICA MEHANIKE

I angloamerički svijet ima svoj koherentni sistem jedinica mehanike. Niz autora njime se dosljedno služi. Osnovne su veličine duljina, vrijeme i masa, pa su osnovne jedinice:

jedinica duljine: foot (ft)

jedinica vremena: second (s)

jedinica mase: pound (lb).

Izvedene jedinice definiraju se onako kao što smo to radili u metarskim sistemima. Tako jedinica sile ovog sistema slijedi iz Newtonova zakona $F = m a = m d^2 l / dt^2$:

$$\text{poundal (pdl)} = \frac{\text{pound (lb)} \times \text{foot (ft)}}{\text{second}^2},$$

Sistem koherentnih anglo-američkih jedinica mehanike

Tablica B.6

Redni broj	Veličina	Simbol	Koherentan anglo-američki sistem		Jednaka vrijednost u Međunarodnom sistemu jedinica
			Jedinica	Kratika	
1	Duljina	l	foot	ft =	$3,048 \cdot 10^{-1} \text{ m}$
2	Vrijeme	t	second	s =	1 s
3	Masa	m	pound	lb =	$4,536 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$
4	Sila	F	poundal = $\text{lb} \cdot \text{ft} / \text{s}^2$	pdl =	$1,383 \cdot 10^{-1} \text{ N}$
5	Energija, rad	W	foot-poundal	ft · pdl =	$4,214 \cdot 10^{-2} \text{ J}$
6	Snaga	P	foot-poundal per second	ft · pdl / s =	$4,214 \cdot 10^{-2} \text{ W}$
7	Moment tromosti	$\mathcal{J}$	pound-square foot	lb · sq · ft =	$4,214 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$
8	Pritisak	p	poundal per square foot	pdl / sq · ft =	$1,488 \text{ N} / \text{m}^2$
9	Gustoća	ρ	pound per cubic foot	lb / cu · ft =	$1,602 \cdot 10^1 \text{ kg} / \text{m}^3$
10	Specifična težina	γ	poundal per cubic foot	pdl / cu · ft =	$4,882 \text{ N} / \text{m}^3$
11	Dinamička viskoznost	η	poundal second per square foot	pdl · s / sq · ft =	$1,488 \text{ Ns} / \text{m}^2$
12	Kinematička viskoznost	ν	square foot per second	sq · ft / s =	$9,290 \text{ m}^2 / \text{s}$

jer je u tom sistemu koherentna jedinica ubrzanja ft/s^2 . Uvrstimo li u gornju jednadžbu vrijednosti pounda i foota u kilogramima, odnosno metrima

$$\text{pound (lb)} = 0,453\,592\,4\text{ kg}; \text{ foot} = 0,304\,8\text{ m},$$

dobivamo vrijednost izvedene jedinice sile koherentnog angloameričkog sistema jedinica u jedinicama Međunarodnog sistema

$$\text{poundal (pdl)} = 0,453\,592\,4\text{ kg} \cdot 0,304\,8\text{ m/s}^2,$$

što nakon računanja daje

$$\text{poundal (pdl)} = 0,138\,255\text{ newton (N)}.$$

Odnose ostalih izvedenih jedinica ovog koherentnog sistema prema skladnim jedinicama Međunarodnog sistema sadrži tablica B.6.

11. RAZLIČITE ANGLO-AMERIČKE JEDINICE GEOMETRIJE I MEHANIKE

11.1. Jedinice duljine

Osnovnu anglo-američku jedinicu duljine yard već smo raspravili u prijašnjem odsječku, a isto tako i odnose među različitim jedinicama duljine. Ostale jedinice dobiju se množenjem ili dijeljenjem yarda s određenim faktorima navedenim u četvrtoj koloni tablice B.7. U toj tablici svrstane su i metarske decimalne jedinice, dakle sve one koje se mogu pojaviti u praksi. U trećoj koloni tablice B.7. napisane su brojke koje pokazuju koliko je puta pojedina jedinica veća od metra. Tako je na primjer

$$\text{furlong} = 2,011\,68 \cdot 10^2\text{ m} = 201,168\text{ m}.$$

Najčešće upotrebljavane anglo-američke jedinice navedene su uz metarske mjere u tablici I na kraju knjige. U toj tablici može se dovoljno tačno pronaći bilo koji odnos između dvije od sedam jedinica navedenih u tablici. Na primjer, želimo znati koliko inča sadrži jedan kilometar. U tu svrhu na lijevoj strani tablice I u prvom stupcu potražimo metarsku jedinicu kilometar; to je u četvrtom retku odozgo. Sada u prvom retku odozgo potražimo jedinicu inch; to je u predzadnjem stupcu desno. Gdje se redak s kilometrom križa sa stupcem za inch nalazimo brojku $3,937 \cdot 10^4$, što znači da je $\text{km} = 39\,370\text{ inch}$.

Obrnuti odnos našli bismo ovako. Nademo sjecište retka za inch (predzadnji odozdo) sa stupcem za kilometar (peti zdesna), tj. $2,540 \cdot 10^{-5}$. Znači da je $\text{inch} = 2,540 \cdot 10^{-5}\text{ km} = 0,000\,0254\text{ km}$.

Budući da je $\text{km} = 10^6\text{ mm}$, to je $\text{inch} = 25,4\text{ mm}$, a to smo mogli i direktno naći jer je u tablici I naveden i odnos između inch i mm.

11.2. Jedinice površine

Jedinice površine Anglo-Amerikanci izvode posve isto kao i Evropljani, samo sa svojom jedinicom duljine. Square yard (sq. yd. ili yd^2), tj. kvadratni jard, pred-

Različite jedinice duljine i njihove vrijednosti u metrima

Tablica B. 7

Jedinica	Oznaka	Jednaka je broju metara:	Opaska
Metarske jedinice			
angstrom	Å	10^{-10}	
mikron	μ	10^{-6}	
milimetar	mm	10^{-3}	
centimetar	cm	10^{-2}	
decimetar	dm	10^{-1}	
metar	m	1	
dekametar	dam	10^1	
hektometar	hm	10^2	
kilometar	km	10^3	
Anglo-američke jedinice			
mil G. B.	mil	$2,539\,996 \cdot 10^{-5}$	mil = 0,001 inch
mil U. S. A.	mil	$2,540\,005 \cdot 10^{-5}$	
line	—	$2,116 \cdot 10^{-3}$	line = 1/12 inch
inch G. B.	in; "	$2,539\,996 \cdot 10^{-2}$	inch = 1000 mil = 12 line
inch U. S. A.	in; "	$2,540\,005 \cdot 10^{-2}$	
link	—	$2,011\,68 \cdot 10^{-1}$	link = 7,92 in
foot G. B.	ft; '	$3,047\,995 \cdot 10^{-1}$	foot = 12 inch
foot U. S. A.	ft; '	$3,048\,006 \cdot 10^{-1}$	
yard G. B.	yd	$9,143\,98 \cdot 10^{-1}$	yard = 3 foot = 36 inch
yard U. S. A.	yd	$9,144\,02 \cdot 10^{-1}$	
fathom	fm	1,828 8	fathom = 2 yd = 6 ft
rod G. B.	rod	5,029 19	rod = 5,5 yard
rod, pole, perch U. S. A.	rod	5,029 21	
chain	ch	$2,011\,68 \cdot 10^1$	chain = 4 rod = 100 link
furlong	fur	$2,011\,68 \cdot 10^2$	fur = 40 rod = 10 chain = 220 yard
mile (statute mile) G. B.	ml	$1,609\,341 \cdot 10^3$	mile = 5280 ft = 1760 yd = 8 fur
mile (statute mile) U. S. A.	ml	$1,609\,347 \cdot 10^3$	
nautical mile G. B.	knot; n. ml.	$1,853\,181 \cdot 10^3$	knot = 6080 ft.
nautical mile U. S. A.	n. ml.	$1,853\,249 \cdot 10^3$	U. S. n. mil. = 6 080,201 ft
nautical mile (international)	—	$1,852 \cdot 10^3$	
land league	—	$4,828\,032 \cdot 10^3$	land league = 3 ml = 5280 yd
Razne druge jedinice			
francuska milja	mille	$1,851\,851 \cdot 10^3$	sg = 63 000 astronomskih jedinica = 3,2597 sg = 206 225 a. j.
svjetlosna godina	sg	$9,460\,8 \cdot 10^{15}$	
astronomska jedinica	aj	$1,495\,042 \cdot 10^{11}$	
parsec	—	$3,083\,8 \cdot 10^{16}$	
stari ruski aršin	—	$7,112 \cdot 10^{-1}$	versta = 1500 aršina
stara ruska versta	—	$1,066\,8 \cdot 10^3$	
kineski tch'e	—	$3,2 \cdot 10^{-1}$	
stari japanski shaku	—	$3,030\,3 \cdot 10^{-1}$	
stari turski aršin	—	$7,570 \cdot 10^{-1}$	

stavljen je kvadratom stranica duljine 1 yard. Budući da američki i engleski yard nisu posve jednaki razlikovat će se i kvadratni yardovi. Za tačne naučne račune, osim metroloških, prema International Standard Organisation uzima se jedinstveni odnos

$$\text{square yard} = 0,836\,127\,\text{m}^2,$$

jer je $\text{sq. yd} = \text{yd} \cdot \text{yd} = \text{yd}^2 = 0,914\,4^2\,\text{m}^2$. Analogno se izvode ostale mnogobrojne angloameričke jedinice površine.

Jedina površinska jedinica koja se ne gradi na taj način je circular mil, tj. površina kruga promjera 0,001 inch, te circular inch.

Vrijednosti angloameričkih jedinica površine svrstali smo u tablicu B.8 koja

Jedinice površine i njihove vrijednosti u kvadratnim metrima

Tablica B. 8

Jedinica	Oznaka	Jednaka je broju m^2 :	Opaska
Metarske jedinice			
kvadratni milimetar	mm^2	10^{-6}	
kvadratni centimetar	cm^2	10^{-4}	
kvadratni decimetar	dm^2	10^{-2}	
kvadratni metar	m^2	1	
kvadratni dekametar	dam^2	10^2	$\text{dam}^2 = \text{ar}$
ar	a	10^2	
hektar	ha	10^4	ha = 100 ar
kvadratni kilometar	km^2	10^6	$\text{km}^2 = 100\,\text{ha} = 10\,000\,\text{ar}$
Anglo-američke jedinice			
circular mil	cml	$5,067 \cdot 10^{-10}$	Površina kruga promjera 0,001 in.
square mil	—	$6,452 \cdot 10^{-10}$	
square inch G. B.	sq. in.	$6,451\,58 \cdot 10^{-4}$	sq. in = 10^6 sq. mil
square inch U. S. A.	sq. in.	$6,451\,63 \cdot 10^{-4}$	
circular inch U. S. A.	c. in.	$5,067\,10 \cdot 10^{-4}$	c. in. = $\pi/4$ sq. in
square foot G. B.	sq. ft.	$9,290\,27 \cdot 10^{-2}$	sq. ft = 144 sq. in.
square foot U. S. A.	sq. ft.	$9,290\,34 \cdot 10^{-2}$	
square yard G. B.	sq. yd.	$8,361\,24 \cdot 10^{-1}$	sq. yd = 9 sq. ft
square yard U. S. A.	sq. yd.	$8,361\,13 \cdot 10^{-1}$	
square pol, sq. rod, sq. perch	sq. po.	$2,529\,285 \cdot 10^{-1}$	sq. pol = 30,25 sq. yd
rood G. B.	—	$1,011\,711 \cdot 10^3$	
rood U. S. A.	—	$1,011\,714\,1 \cdot 10^3$	
acre G. B.	ac; A	$4,046\,842 \cdot 10^3$	ac = 4 rood = 4 840 sq. yd.
acre U. S. A.	—	$4,146\,873 \cdot 10^3$	
square statute mile G.B.	sq. ml.	$2,589\,978 \cdot 10^6$	sq. ml. = 640 acre
square statute mile U. S. A.	sq. ml.	$2,589\,998 \cdot 10^7$	
township	—	$9,323\,99 \cdot 10^7$	township = 36 sq. ml U. S. A.

u trećoj koloni daje broj kvadratnih metara. Tako je na primjer

$$\text{square inch U.S.A.} = 6,451\ 63 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

tj. sq. in. U.S.A. = 6,451 63 cm², jer je m² = 10⁴ cm².

Obostrane veze između najčešće upotrebljivanih metarskih i anglo-američkih jedinica sadrži tablica II na kraju knjige. Po već objašnjenom ključu nalazimo da je na primjer:

$$\text{square foot} = 9,290 \cdot 10^2 \text{ cm}^2 = 929 \text{ cm}^2,$$

$$\text{kvadratni centimetar} = 0,155 \text{ square inch itd.}$$

11.3. Jedinice volumena

I jedinice volumena Anglo-Amerikanci većinom izvode jednako kao što se to radi u metarskom sistemu, tj. konstrukcijom kocke jedinične duljine. Stvarno su tako građeni:

$$\text{cubic yard (cu. yd.; yd}^3\text{)} = \text{yard}^3 = 0,764\ 555 \text{ m}^3,$$

$$\text{cubic foot (cu. ft.; ft}^3\text{)} = \text{foot}^3 = 28,316\ 8 \text{ dm}^3,$$

$$\text{cubic inch (cu. in.; in}^3\text{)} = \text{inch}^3 = 16,387\ 1 \text{ cm}^3.$$

Sva tri navedena odnosa već su internacionalni koji vrijede za USA i United Kingdom. Fine razlike među jednim i drugim donosi tablica B.9.

Neke su jedinice volumena međutim posve drukčije definirane. To je na primjer engleski gallon (gal. G.B.) koji je definiran obujmom što ga zauzima destilirana voda mase 10 pounda (lb) pri temperaturi 62°F i barometarskog pritiska 30 inča žive. Obujam takvog gallona je

$$\text{gallon G.B.} = 4,546\ 858 \text{ dm}^3 = 4,545\ 96 \text{ litara},$$

jer je (vidi odsječak 7.1.):

$$1 \text{ litra} = 1,000\ 028 \text{ dm}^3.$$

Englezi i Amerikanci razlikuju jedinice za mjerenje volumena tekućina od jedinica za mjerenje obujma suhih tvari i zrnja. Stoga smo u tablici B.9 odijelili jedne vrste njihovih jedinica od drugih.

Ovo razlikovanje može dovesti Evropljane u znatne neprilike: ne samo što postoji razlika istoimene engleske i američke jedinice, već ona ima različitu vrijednost, već prema tome da li se upotrebljava npr. za mjerenje obujma vode ili obujma povrća. Na primjer

$$\text{dry}^1) \text{ pint U.S.A.} = 0,550\ 61 \text{ dm}^3,$$

$$\text{pint liq.}^2) \text{ U.S.A.} = 0,473\ 179 \text{ dm}^3.$$

¹⁾ dry engleski znači suh; ²⁾ liquid = tekući.

Jedinice volumena i njihove vrijednosti u kubnim metrima

Tablica B. 9

Jedinica	Oznaka	Jednaka je broju m ³ :	Opaska
Metarske jedinice			
kubni milimetar	mm ³	10 ⁻⁹	cm ³ = mililitar (franc.)
kubni centimetar	cm ³	10 ⁻⁶	
kubni decimetar	dm ³	10 ⁻³	
litra	l	1,000 028 · 10 ⁻³	1 = 1,000 028 dm ³
hektolitar	hl	1,000 028 · 10 ⁻¹	m ³ = stère (franc.; za drvo) Kod 760 torr i 0°C
kubni metar	m ³	1	
normni kubni metar	Nm ³	1	
Opće anglo-američke jedinice			
cubic inch G. B.	cu. in.	1,638 702 5 · 10 ⁻⁶	cu. ft = 1728 cu. in
cubic inch U. S. A.	cu. in.	1,638 716 2 · 10 ⁻⁶	
cubic foot G. B.	cu. ft.	2,831 677 · 10 ⁻²	
cubic foot U. S. A.	cu. ft.	2,831 702 · 10 ⁻²	cu. yd. = 27 cu. ft shp. ton = 40 cu. ft.
cubic yard G. B.	cu. yd.	7,645 528 5 · 10 ⁻¹	
cubic yard U. S. A.	cu. yd.	7,645 594 5 · 10 ⁻¹	
shipping ton G. B.	shp. ton	1,132 674	rg. ton = 100 cu. ft
shipping ton U. S. A.	shp. ton	1,132 681	
registered ton G. B.	rg. ton	2,831 677	
registered ton U. S. A.	rg. ton	2,831 702	rood = 1000 cu. ft
rood G. B.	rd.	2,831 677 · 10 ¹	
rood U. S. A.	rd.	2,831 702 · 10 ¹	
Anglo-američke jedinice volumena za suhe tvari			
pint, dry, U. S. A.	pt.	5,506 1 · 10 ⁻⁴	qt. = 2 pt.
quart, dry, U. S. A.	qt.	1,101 23 · 10 ⁻³	
peck G. B.	pk.	9,092 2 · 10 ⁻³	
peck U. S. A.	pk.	8,809 8 · 10 ⁻³	pk. = 8 qt. bu = 8 gal. = 4 pk. bu = 2150,42 cu. in = 4 pk
bushel G. B.	bu.	3,636 868 · 10 ⁻²	
bushel U. S. A.	bu.	3,523 927 · 10 ⁻²	
kilderkin G. B.	—	8,182 9 · 10 ⁻²	bbl = 4,5 kilderkin bbl = 7056 cu. in za voće i povrće!
barrel G. B.	bbl.	1,636 56 · 10 ⁻¹	
barrel U. S. A.	bbl.	1,192 414 · 10 ⁻¹	
dry barrel U. S. A.	—	1,156 28 · 10 ⁻¹	
quarter G. B.	—	2,909 49 · 10 ⁻¹	
quarter U. S. A.	—	2,421 · 10 ⁻¹	
gallon	gal.	4,41 · 10 ⁻³	
Anglo-američke jedinice volumena za tekućine			
minim U. S. A.	min.	6,161 19 · 10 ⁻⁸	u farmaciji fl. oz. = 8 fl. dram gill = 5 fl. ounce
dram (fluid dram)	fl. dram	3,551 5 · 10 ⁻⁶	
ounce (fluid ounce)	fl. oz.	2,841 3 · 10 ⁻⁵	
gill G. B.	gi.	1,420 65 · 10 ⁻⁴	pt. = 4 gill
gill U. S. A.	gi.	1,182 95 · 10 ⁻⁴	
pint G. B.	pt.	5,682 607 · 10 ⁻⁴	
qint U. S. A.	pt.	4,731 79 · 10 ⁻⁴	qt = 2 pint
quart G. B.	qt.	1,136 521 5 · 10 ⁻³	
puart U. S. A.	qt.	9,463 58 · 10 ⁻⁴	
pottle G. B.	—	2,273 042 9 · 10 ⁻³	pottle = 1/2 gal. G. B. = 4 pt gal = 4 qt = 8 pt = 32 gi
gallon G. B.	gal.	4,546 085 8 · 10 ⁻³	
gallon U. S. A.	gal.	3,785 434 · 10 ⁻³	
barrel G. B.	—	1,635 · 10 ⁻¹	za petrolej hogshead = 63 gallon
barrel U. S. A.	—	1,589 88 · 10 ⁻¹	
hogshead U. S. A.	—	2,384 8 · 10 ⁻¹	

Vidimo da tako velike razlike mogu biti uzrokom znatnih neprilika osobito u trgovini, pa je zato s Englezima i Amerikancima najpametnije ugovarati isporuke u kubnim metrima i kilogramima.

U tablici B. 9 skupili smo gotovo sve engleske i američke jedinice volumena. U trećoj koloni naveli smo vrijednost svake njihove jedinice u kubnim metrima. Tako je npr. za tekućine quart G. B. = $1,136\,52 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 1,136\,52 \text{ dm}^3$, a za povrće u U. S. A. dry barrel = $1,156\,28 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3 = 115,628 \text{ dm}^3$.

Posebno su u tablici III na kraju knjige složeni obostrani odnosi među najčešće upotrebljavanim jedinicama volumena metarskog i anglo-američkog »sustava« jedinica. Primjena ove tablice jednaka je onima za duljinu i površinu. Tako je na primjer iz tablice

$$\text{cubic foot} = 2,832 \cdot 10^1 \text{ l} = 28,32 \text{ litara},$$

$$\text{litra} = 6,102 \cdot 10^1 \text{ cubic inch} = 61,02 \text{ cu. in. itd.}$$

11.4. Jedinice protoke

Budući da je protoka Q definirana sa $Q = dV/dt$, gdje su V volumen, a t vrijeme, opća jedinica protoke je $[Q] = [V]^3 [t]^{-1}$. U skladu s time Anglo-Amerikanci mjere protoke jedinicama cubic foot per second (kubna stopa u sekundi), imperial gallon per minute itd., tj. jedinicama koje slijede iz omjera jedinice volumena i jedinice vremena. Odnose do metarskih jedinica protoke (npr. m^3/s) lako je izračunati.

Želimo npr. tačno ustanoviti koliko m^3/s sadrži engleska jedinica Imperial gallon per minute. Račun daje

$$\frac{\text{Imp. gal}}{\text{minuta}} = \frac{4,546\,858 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}} = 7,578\,097 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Dvostrane veze između anglo-američkih i metarskih jedinica protoke sadrži tablica IV na kraju knjige. Tako iz te tablice za praktičnu primjenu na primjer dobivamo

$$\text{litra na sat} = 0,003\,666 \text{ Imp. gal. per minute},$$

$$\text{m}^3/\text{s} = 60\,000 \text{ l/min itd.}$$

11.5. Jedinice mase

U odsječku 8. naveli smo da je osnovna anglo-američka jedinica mase pound čija je kratica lb, što dolazi od riječi libre. Pound je vezan s jedinicom mase metarskog sistema na ovaj način:

$$\text{pound (lb)} = 0,453\,592\,4 \text{ kilograma},$$

$$\text{kilogram (kg)} = 2,204\,634 \text{ pound}.$$

Ovi odnose vrijede za jedinstveni anglo-američki sistem. Fine razlike naznačili smo u odsječku 9.

Anglo-Amerikanci imaju tri podsistema jedinica mase: prvi je tzv. sistem »avoirdupois«, drugi je sistem »troy« za drago kamenje i metale, a treći tzv. »apot-

Različite jedinice mase i njihove vrijednosti u kilogramima

Tablica B. 10

Jedinica	Oznaka	Jednaka je broju kg:	Opaska
Metarske jedinice			
gamma	G	10^{-9}	1 karat = 200 mg
miligram	mg	10^{-6}	
gram	g	10^{-3}	
karat (metarski)	—	$2 \cdot 10^{-4}$	
kilogram	kg	1	
kvintal	q	10^2	
tona	t	10^3	
Anglo-američke jedinice (sistem avoirdupois)			
grain	gr	$6,479\ 89 \cdot 10^{-5}$	gr = 1/7000 lb
dram ili drachm	dr	$1,771\ 84 \cdot 10^{-3}$	dr = 1/16 oz
ounce	oz	$2,834\ 95 \cdot 10^{-2}$	oz = 1/16 lb
pound	lb	$4,535\ 924 \cdot 10^{-1}$	lb = 16 oz = 7000 grain
stone	st	6,350 29	st = 14 lb
quarter	qr	$1,270\ 06 \cdot 10^1$	qr = 28 lb = 2 st
U. S. hundredweighth (quintal U. S.)	U.S. cwt	$4,535\ 92 \cdot 10^1$	UScwt = 100 lb
hundredweight (quintal GB)	cwt	$5,080\ 23 \cdot 10^1$	cwt = 112 lb = 4 qr
kip (U. S. A.)	kip	$4,535\ 92 \cdot 10^2$	kip = 1000 lb = 0,5 sh. ton
short — ton (U. S. A.)	sh. ton	$9,071\ 85 \cdot 10^2$	sh. ton = 2000 lb
ton (U. S. long ton, ton G. B.)	lg. ton	$1,016\ 05 \cdot 10^3$	lg. ton = 2240 lb = 20 cwt
Anglo-američke jedinice (sistem Troy za drago kamenje i metale)			
carat	—	$2,591\ 957 \cdot 10^{-4}$	= 4 gr
pennyweight	dwt	$1,555\ 174 \cdot 10^{-3}$	dwt = 24 gr
ounce troy	oz. troy	$3,110\ 348 \cdot 10^{-2}$	oz. troy = 20 dwt = 480 gr
pound troy	lb. troy	$3,732\ 418 \cdot 10^{-1}$	lb. troy = 12 oz. troy = 5760 gr
Farmaceutske anglo-američke jedinice			
scruple	℥	$1,295\ 978 \cdot 10^{-3}$	℥ = 20 gr
dram	℥	$3,888\ 134 \cdot 10^{-3}$	℥ = 60 gr = 3 ℥
Ostale jedinice (stare)			
stara ruska libra (funta)	—	$4,095\ 12 \cdot 10^{-1}$	z = 110 pfund leang = 10 ts'ien = 100 fen = = 1000 lii = 10000 hao
stara pruska funta (pfund)	—	$4,677\ 11 \cdot 10^{-1}$	
stari ruski pud	—	$1,638\ 02 \cdot 10^1$	
pruski zentner	z	$5,144\ 82 \cdot 10^1$	
stari španjolski kvintal	—	$4,600\ 93 \cdot 10^1$	
kineski leang	—	$3,730\ 1 \cdot 10^{-2}$	
kineski king	—	$3,968\ 16 \cdot 10^{-1}$	kin = 160 momme kan = 1000 momme, 1 momme = 10 fun = 100 rin
japanski kin	—	$6,000 \cdot 10^{-1}$	
japanski kan	—	3,750	
butelja, bottles, flacks, frascos (kod proizvod- nje žive)	—	$3,456 \cdot 10^1$	

hecary« sistem. Postoji mnoštvo tih jedinica mase čije smo veze s ostalim mjerama svrstali u tablicu B. 10, koja u trećem stupcu pokazuje broj kilograma što ih sadrži pripadna anglo-američka jedinica. Na primjer

$$\text{grain (gr)} = 6,479\,89 \cdot 10^{-5} \text{ kilograma,}$$

tj. gr = 64,798 9 miligrama. Analogno je

$$\text{ounce troy (oz. troy)} = 3,110\,348 \cdot 10^{-2} \text{ kg,}$$

tj. oz. troy = 31,103 48 grama. Obrnute odnose sadrži tablica B. 11.

Je dinice mase; 1 kg predstavlja ovaj iznos drugih jedinica mase:

Tablica B. 11

10^9 10^6	gamma miligram	$2,204\,6 \cdot 10^{-3}$ $1,968\,4 \cdot 10^{-2}$	U. S. hundredweight hundredweight G. B.
10^3 1	gram kilogram	$2,204\,6 \cdot 10^{-3}$ $1,102\,3 \cdot 10^{-3}$	kip U. S. short ton (U. S.)
10^{-2} 10^{-3}	kvintal tona	$9,842\,06 \cdot 10^{-4}$ $3,858\,088 \cdot 10^3$	long ton carat
$1,543\,235 \cdot 10^4$ $5,643\,83 \cdot 10^3$	grain dram (ili drachm)	$6,430\,15 \cdot 10^2$ $3,215\,073 \cdot 10^1$	pennyweight ounce troy
$3,527\,396 \cdot 10^2$ $2,204\,622 \cdot 10^1$ $1,574\,73 \cdot 10^{-1}$ $7,873\,6 \cdot 10^{-2}$	ounce pound stone quarter	$2,679\,228$ $7,716\,17 \cdot 10^2$ $2,572\,05 \cdot 10^3$	pound troy scruple (farmaceutski) dram (farmaceutski)

Obostrane odnose između najčešće upotrebljivanih metarskih i anglo-američkih jedinica mase sadrži tablica V na kraju knjige. Način primjene te tablice isti je kao i onaj ranijih tablica. Tako je npr. za praktični račun

$$\text{ounce (oz.)} = 28,35 \text{ grama,}$$

$$\text{kilogram} = 2,205 \text{ pound (lb)}$$

Ni u jednoj od spomenutih tablica ne nalazi se britanska tehnička jedinica mase koju nazivaju slug. Vrijednost te jedinice u poundima i kilogramima izračunat ćemo pomoću njene definicije koja glasi:

»Slug je ona masa koja dobiva ubrzanje 1 ft/s^2 kad na nju djeluje sila 1 pound - sila«.

Prema tome je u skladu s Newtonovim zakonom $m = F/a$

$$\text{slug} = \frac{\text{pound - sila}}{\text{ft/s}^2} = \frac{\text{Lb.}}{\text{ft/s}^2}.$$

Budući da je engleska jedinice sile pound-force (Lb) definirana kao sila kojom masa 1 pound (lb) pritišće na svoju podlogu pri ubrzanju sile teže $g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$, to je prema zakonu $F = m \cdot g$:

$$\text{Lb (sila)} = \text{lb (masa)} \cdot g_N,$$

što daje

$$\text{slug} = \frac{\text{lb} \cdot g_N}{\text{ft/s}^2} = \frac{\text{lb} \cdot 9,806\,65 \text{ m/s}^2}{\text{ft/s}^2}$$

Budući da su foot (ft) i metar (m) povezani relacijom

$$\text{ft} = 0,304\,8 \text{ m},$$

to dalje dobivamo

$$\text{slug} = \frac{\text{lb} \cdot 9,806\,65 \text{ m/s}^2}{0,304\,8 \text{ m/s}^2} = 32,174 \text{ pound (lb)}.$$

Kako je $\text{lb} = 0,453\,592\,4 \text{ kg}$, to konačno slijedi

$$\text{slug} = 32,174 \cdot 0,453\,592\,4 \text{ kg} = 14,593 \text{ kg}.$$

To znači da jedinicu slug možemo zamisliti materijom mase 14,593 kilograma.

11.6. Jedinice gustoće

Jedinice gustoće građene su kod Anglo-Amerikanaca isto kao u metarskom sistemu, samo što su upotrebljene njihove jedinice mase i volumena. Tako se npr. odnos anglo-američke jedinice gustoće (specifične mase) pound per cubic yard, tj. lb/yd^3 , prema kg/m^3 dobiva uvrštenjem vrijednosti $\text{lb} = 0,453\,6 \text{ kg}$ i $\text{yd}^3 = 0,764\,6 \text{ m}^3$ što nakon računa daje

$$\text{pound per cubic yard} = 0,593 \text{ kg/m}^3.$$

Ostale veze između anglo-američkih i metarske jedinice gustoće sadrži tablica B. 12.

Različite jedinice gustoće i njihove vrijednosti u kg/m^3

Tablica B. 12

Jedinica	Oznaka	Jednaka je broju kg/m^3	Opaska
Metarske jedinice			
kilogram po kubnom metru	kg/m^3	1	
gram po kubnom centimetru	g/cm^3	10^3	$\text{g/cm}^3 = \text{kg/dm}^3 = \text{t/m}^3$
kilogram po kubnom decimetru	kg/dm^3	10^3	$\text{kg/dm}^3 = \text{kg/l} = \text{g/cm}^3$
tona po kubnom metru	t/m^3	10^3	$\text{t/m}^3 = \text{kg/dm}^3 = \text{g/cm}^3$
Anglo-američke jedinice			
pound per cubic yard	lb. per cu. yd	$5,93 \cdot 10^{-1}$	
pound per cubic foot	lb. per cu. ft	$1,601\,85 \cdot 10^1$	
pound per cubic inch	lb. per cu. in.	$2,767\,99 \cdot 10^4$	

11.7. Jedinice sile

I u Anglo-američkim se zemljama izvode jedinice sile iz Newtonova zakona $F = m a$ gdje je F sila, m masa, a ubrzanje. Dvije su glavne jedinice sile: pound-force (sila) koju označuju sa Lb, definirana je kao ona sila koja masi 1 pound (1b) daje ubrzanje $g_N = 9,806\ 65\ \text{m/s}^2$, tj.

$$\text{Lb} = 1\text{b (masa)} \cdot g_N = 0,453\ 592\ 4\ \text{kg} \cdot 9,806\ 65\ \text{m/s}^2 = 4,448\ 22\ \text{newton}.$$

To je britanska tehnička jedinica sile, analogon evropskom kilopondu. Ponekad se upotrebljava istoimena jedinica koja se osniva na lokalnom ubrzanju sile teže. Takva jedinica sile naziva se onda pound-weight («pound-težina»).

Drugu često upotrebljavanu anglo-američku jedinicu sile, poundal (pdl), obradili smo u odsječku 10.

Vrijednosti anglo-američkih jedinica sile u newtonima sadrži tablica B. 13. Dvostrane veze metarskih i anglo-američkih jedinica sile izračunate su u tablici VI na kraju knjige. Iz te se tablice vidi, da za tehničke račune imamo odnose:

$$\text{newton (N)} = 0,224\ 8\ \text{Lb},$$

$$\text{poundal (pdl)} = 0,013\ 56\ \text{kiloponda itd.}$$

Različite jedinice sile i njihove vrijednosti u newtonima

Tablica B.13

Jedinica	Oznaka	Jednaka je broju newtona	Opaska
Metarske jedinice			
dyn	dyn	10^{-5}	$\text{dyn} = \text{g cm/s}^2$
newton	N	1	$\text{N} = \text{kg m/s}^2$
kilopond	kp	9,80665	$\text{kp} = \text{kgf} = \text{kg}^*$
sthène	sn	10^3	$\text{sn} = \text{tona} \cdot \text{m/s}^2$
tona — težina	t	9806,65	
Anglo-američke jedinice			
poundal (force)	pdl	0,138 255	
pound (force)	Lb	4,448 22	$\text{Lb} = 0,453\ 6\ \text{kp}$
short ton U.S.A. weight	sh. ton	8896,44	$\text{sh. ton} = 2000\ \text{Lb}$
ton G.B. (long ton), weight	lg. ton	9964,02	$\text{lg. ton} = 2240\ \text{Lb}$

Specifična težina mjeri se u anglo-američkom svijetu jedinica često s pound — force per cubic foot, tj.

$$\text{Lb/ft}^3 = 157,087\ \text{N/m}^3,$$

gdje slovo N označuje newton.

11.8. Jedinice pritiska

Anglo-američke jedinice pritiska dobivaju se dakako iz omjera anglo-američkih jedinica sila i jedinica površine. Najčešće se upotrebljavaju ove jedinice:

poundal per square foot (pdl/ft²)

$$\frac{\text{pdl}}{\text{ft}^2} = \frac{0,138\,255\text{ N}}{0,092\,903\text{ m}^2} = 1,488\,816\text{ N/m}^2;$$

pound — force per square foot

$$\frac{\text{Lb}}{\text{ft}^2} = \frac{4,448\,22\text{ N}}{0,092\,903\text{ m}^2} = 47,880\,3\text{ N/m}^2;$$

pound-force per square inch

$$\frac{\text{Lb}}{\text{in}^2} = \frac{4,448\,22\text{ N}}{6,451\,6\text{ cm}^2} = 6894,76\text{ N/m}^2 = 144\text{ Lb/ft}^2;$$

ton-force per square inch

$$\frac{\text{Ton}}{\text{in}^2} = 2240\text{ Lb/in}^2 = 1,574\,88\text{ kp/mm}^2.$$

Posve po uzoru na evropske »stupčane« jedinice pritiska i u anglo-američkim zemljama upotrebljavaju »stopu vode«, »palac vode« i »palac žive« koje redom nose engleske nazive foot of water, inch of water, inch of mercury.

Konstrukcija ovih osebnih jedinica pritiska ista je kao i kod odgovarajućih evropskih »stupaca žive« itd. Izvod takvih jedinica opisali smo u odsječku 7. 3. Ovdje ćemo izračunati spomenute anglo-američke »stupčane jedinice« pritiska.

Pritisku p drži ravnotežu stupac tekućine visine h . Pritom je tekućina gustoće ρ , a ubrzanje sile teže je međunarodno standardizirano vrijednošću $g = g_N = 9,806\,65\text{ m/s}^2$. Vrijedi jednadžba ravnoteže

$$p = h g \rho.$$

Radi li se vodenim stupcima valja uzeti gustoću vode u iznosu $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ (gustoća varira s temperaturom, pa se stoga ove stupčane jedinice ne upotrebljavaju za naročito precizna mjerenja; vidi i odnos između torr i mmHg u odsječku 7. 3.).

Jedinicu pritiska foot of water (ft. H₂O) dobivamo tako da u gornju jednadžbu uvrstimo za $h = 1\text{ foot} = 0,304\,8\text{ metara}$, a pripadni p izjednačimo sa ft. H₂O, dakle

$$\text{ft. H}_2\text{O} = \text{foot} \cdot g \rho = 0,304\,8\text{ m} \cdot 9,806\,65\text{ ms}^{-2} \cdot 10^3\text{ kg/m}^3 = 2989,2\text{ N/m}^2.$$

Jedinicu inch of water (in. H₂O) računamo isto tako, samo umjesto foot stavljamo $h = \text{inch} = 0,0254\text{ m}$, dakle

$$\text{in. H}_2\text{O} = \text{inch} \cdot g \rho = 0,025\,4\text{ m} \cdot 9,806\,65\text{ ms}^{-2} \cdot 10^3\text{ kg/m}^3 = 24,909\text{ N/m}^2.$$

Inch of mercury (in. Hg) računamo istom formulom, ali moramo za ρ uvrstiti gustoću žive $\rho = 13\,595,1\text{ kg/m}^3$, tj.

$$\text{in. Hg} = \text{inch} \cdot g \rho = 0,025\,4\text{ m} \cdot 9,806\,65\text{ ms}^{-2} \cdot 13\,595,1\text{ kg/m}^3 = 3386,5\text{ N/m}^2.$$

Budući da je $\text{inch} = 25,4\text{ mm}$, jedinica pritiska je $\text{in. Hg} = 25,4\text{ torr}$, jer je mmHg gotovo identički jednak torru (vidi odsječak 7. 3.).

Dvostrane brojčane odnose među anglo-američkim, metarskim i ostalim jedinicama pritiska sadrži tablica VII na kraju knjige. Tako je na primjer

$$\text{N/cm}^2 = 0,098\,69\text{ normalne atmosfere (atm),}$$

$$\text{kp/cm}^2 = 9,807\text{ N/cm}^2 = 14,22\text{ Lb/sq. in. itd.}$$

11.9. Jedinice viskoznosti

Anglo-američka jedinica dinamičke viskoznosti je poundal second per square foot, tj.

$$\frac{\text{pdl} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2} = 1,488\,16 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2},$$

gdje je N oznaka za jedinicu sile Međunarodnog sistema newton. Obrnuto vrijedi

$$\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = 671\,976 \frac{\text{pdl} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2}.$$

Prema tome je $\text{pdl} \cdot \text{s} / \text{ft}^2$ viskoznost tekućine u kojoj brzina pod tangencijalnom napetošću $1 \text{ pdl} / \text{ft}^2$ proizvodi gradijent $1 \text{ ft} / \text{s}$ po ft okomito na ravninu smicanja.

Kinematičku viskoznost mjere u anglo-američkim zemljama najčešće jedinicom square foot per second, tj.

$$\text{ft}^2 / \text{s} = 0,092\,903 \text{ m}^2 / \text{s}.$$

Dakle je ft^2 / s kinematička viskoznost tekućine čija je dinamička viskoznost $\text{pdl} \cdot \text{s} / \text{ft}^2$, a gustoća $1 \text{ lb} / \text{ft}^3$. Obrnuta je veza

$$\text{m}^2 / \text{s} = 10,763\,9 \text{ ft}^2 / \text{s}.$$

Kao što se u evropskoj industriji upotrebljava Englerov viskozimetar, tako se i u anglo-američkim zemljama upotrebljavaju aparature koje kroz normirane otvore propuštaju određeni obujam tekućine, a mjeri se vrijeme istjecanja tekućine.

U Americi se upotrebljava najviše Sayboltov, a u Engleskoj Redwoodov viskozimetar. Ipak postoji bitna razlika između izražavanja rezultata kad se kinematička viskoznost mjeri Englerovim ili pak anglo-američkim uređajem. Englerovim viskozimetrom mjeri se naime trajanje istjecanja dviju tekućina: najprije se izmjeri trajanje t_0 istjecanja 200 kubnih centimetara destilirane vode temperature $\vartheta = 20^\circ\text{C}$, a nakon toga trajanje t istjecanja isto tolikog obujma mjerene tekućine. Omjer $v_E = t/t_0$ naziva se »Englerovom viskoznošću«, a mjeri brojkom 1, jer zbog t/t_0 slijedi jedinica: sekunda/sekunda = 1.

Sayboltovim i Redwoodovim uređajem ne mjeri se dva puta, dakle nema referentne tekućine (voda), već se jednostavno mjeri trajanje t istjecanja mjerene tekućine iz normiranog uređaja (normirani su sadržaj i otvor za istjecanje).

Postoje samo približne formule za određivanje veze između prave kinematičke viskoznosti, te Englerove, Sayboltove i Redwoodove. Te veze međutim jako ovise o temperaturi, pa stoga takvi preračunski koeficijenti mogu samo dovesti do krivih preračuna ako se na temperaturu ne obrati dovoljna pozornost. Stoga donosimo samo tablicu B. 14 u kojoj su navedene vrijednosti pet vrsta viskoznosti pri temperaturi $\vartheta = 25^\circ\text{C}$. Čitatelj će moći, ako mu zatreba, iz tih brojčanih podataka nacrtati dijagram u željenom području i tako odrediti viskoznost koja mu dolazi u svakom stvarnom slučaju, ali sve pri temperaturi $\vartheta = 25^\circ\text{C}$, čemu odgovara 77°F .

11.10. Jedinice energije i rada

Amerikanci i stanovnici Ujedinjenog kraljevstva još uvijek se u velikoj mjeri služe svojim posebnim jedinicama energije i rada koje tek polako ustupaju mjesto univerzalnom Međunarodnom sistemu jedinica (vidi odsječak 12.).

Vrijednosti kinematičke viskoznosti u različitim jedinicama
pri temperaturi $\vartheta = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$

Tablica B.14

Kinematička viskoznost ν $10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$	Saybolt Universal Seconds, s	Saybolt Futrol Seconds, s	Redwood Seconds, s	Broj Englerovih stupanja, $\text{s/s} = E$
1	2	3	4	5
0,005 05	—	—	2	—
0,062 4	47	—	28	0,7
0,144	75	—	64	1,8
0,220	106	—	98	2,8
0,321	150	—	145	4,1
0,50	231	26	225	6,4
0,65	300	33	290	7,3
0,85	392	42	375	11
1,00	461	48	445	13
1,25	577	60	555	16
1,40	646	67	620	18
1,65	761	78	735	21
2,00	923	94	890	26
2,25	1 038	106	1 000	29
2,50	1 153	118	1 100	32
2,75	1 269	129	1 230	35
3,00	1 384	141	1 340	39
3,20	1 476	150	1 420	42
3,40	1 569	160	1 510	45
3,70	1 707	174	1 640	49
4,00	1 845	188	1 790	53
4,35	2 007	204	1 940	58
4,70	2 168	220	2 100	63
5,00	2 307	234	2 210	67
5,50	2 537	258	2 440	75
6,25	2 883	293	2 750	85
8,84	4 078	414	3 850	124
10,70	4 936	502	4 600	146
12,90	5 951	605	5 500	176
17,60	8 119	825	7 500	240
22,70	10 472	1 064	9 680	310
27,00	—	1 265	11 580	368
36,20	—	1 697	15 500	490
46,30	—	2 170	19 850	630
63,40	—	2 971	—	—
98,50	—	4 616	—	—

Najčešće se upotrebljava jedinica foot-pound, tj. energija koja je potrebna za svladavanje sile 1 pound (Lb) na putu od jedne stope (foot), dakle pound $\times$ foot. Budući da je pound (Lb) = 4,448 22 N, a foot = 0,304 8 m, to je

$$\text{foot} \cdot \text{pound} = 4,448\ 22\ \text{N} \cdot 0,304\ 8\ \text{m},$$

što množenjem daje

$$\text{Lb} \cdot \text{ft} = 1,355\,82 \text{ joule, odnosno } J = 0,737\,563 \text{ Lb} \cdot \text{ft},$$

jer je joule = J = Nm.

Uz ovu jedinicu energije upotrebljava se još već spomenuta foot-poundal, HP hour i slične koje čitatelj može sam izvesti.

Posebnu grupu anglo-američkih jedinica predstavlja niz »britanskih toplinskih jedinica«, British thermal units (BTU), koje se razmatraju u odsječku D. 6.

Dvostrane brožčane odnose među većinom glavnih metarskih i anglo-američkih jedinica energije sadrži tablica IX na kraju knjige. Način primjene te tablice posve je isti kao i onaj ostalih koje smo spominjali uz druge jedinice. Tako je npr.

$$\text{kcal} = 4,186 \cdot 10^3 J = 4186 J,$$

$$\text{kWh} = 2,654 \cdot 10^6 \text{ ft} \cdot \text{Lb} = 2\,654\,000 \text{ ft} \cdot \text{Lb itd.}$$

11.11. Jedinice snage

Jedna od anglo-američkih jedinica snage je foot-pound per second ($\text{Lb} \cdot \text{ft/s}$). Snaga $\text{Lb} \cdot \text{ft/s}$ razvija se na primjer onda kad se uteg mase jednog pounda (lb) podigne 1 foot visoko u jednoj sekundi, ako je ubrzanje sile teže $g = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$.

Budući da iz odsječka 11. 10 znamo da je $\text{Lb} \cdot \text{ft} = 1,355\,82 J$, to je

$$\frac{\text{Lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}} = 1,355\,82 \text{ watt (W)},$$

jer je $W = J/s$.

U strojarstvu Anglo-Amerikanci često upotrebljavaju jedinicu horse power (HP), tj. svoju konjsku snagu koja je definirana sa

$$\text{HP} = 550 \text{ Lb} \cdot \text{ft/s}.$$

To znači da snaga 1 HP može podići teret težine 550 Lb u 1 sekundi na visinu 1 foot. Budući da je $\text{Lb} \cdot \text{ft/s} = 1,355\,82 W$, to je prema $\text{HP} = 550 \text{ Lb} \cdot \text{ft/s}$

$$\text{HP} = 550 \cdot 1,355\,82 W = 745,7 W.$$

Evropska konjska snaga (KS) jednaka je 735,499 W, što znači da je $\text{HP/KS} = 745,7 W / 735,499 W$, dakle

$$\text{HP} = 1,013\,87 \text{ KS}.$$

Najvažnije anglo-američke jedinice snage sadrži tablica B. 15 koja daje vrijednosti tih jedinica u wattima. Uz anglo-američke jedinice navedene su i najvažnije evropske.

Kompletne dvostrane odnose između metarskih i anglo-američkih jedinica sadrži tablica VIII na kraju knjige.

Jedinice snage i njihove vrijednosti u wattima

Tablica B.15

Jedinica	Oznaka	Jednaka je broju watta:	Opaska
Evropske jedinice			
erg u sekundi	erg/s	10^{-7}	$W = J/s$
watt	W	1	
kilokalorija u satu ..	kcal/h	1,163	$KS = 75 \text{ kpm/s} = 0,986 \text{ 32 HP}$ $\text{poncelet} = 100 \text{ kpm/s}$
kilopondmetar u sekundi	kpm/s	9,807	
konjska snaga	KS	$7,355 \cdot 10^2$	
poncelet (franc.)	—	$9,80665 \cdot 10^2$	
kilowatt	kW	10^3	
Anglo-američke jedinice			
foot pound per minute	ft · Lb/min	$2,2597 \cdot 10^{-2}$	$\text{ft} \cdot \text{Lb/s} = 0,138 \text{ 254 kpm/s}$
foot pound per second	ft · Lb/s	1,35582	
british thermal unit per minute	BTU/min	$1,758 \cdot 10^1$	$HP = 550 \text{ Lb} \cdot \text{ft/s}$
horse power	HP	$7,457 \cdot 10^2$	
british thermal unit per second	BTU/s	$1,0548 \cdot 10^3$	
ton of refrigeration U.S	sh. t. r.	$3,516 \cdot 10^3$	
british commercial ton of refrigeration	lg. t. r.	$3,883 \cdot 10^3$	

12. SUMRAK NEMETARSKIH SISTEMA JEDINICA

Metarski sistem jedinica stvarno nije tako rasprostranjen po svijetu kako se to obično misli u Evropi. Amerika, Ujedinjeno britansko kraljevstvo (te bivše i sadašnje njene kolonije), Japan i Australija — da spomenemo samo najveće zemlje svijeta — silom inercije i dalje primjenjuju anglo-američke jedinice koje smo opisali u odsječcima 8 do 11. Nepotrebno je posebno naglašavati kako taj sistem uzrokuje suvišan posao, mišljenje, preračunavanje, učenje u školama, neprilike u industriji, trgovini, školstvu i nizu drugih djelatnosti. Na primjerima u spomenutim odsječcima mogli smo vidjeti koliko su komplicirane veze između samih anglo-američkih jedinica, a da ne govorimo o odnosima prema drugim sistemima. Kad se toga sjetimo uvidamo kako su jednostavne relacije $\text{newton} = J/m = Ws/m$, upotreba decimalnih prefiksa $\mu = 10^{-6}$, $k = 10^3$ itd. Prefiksi se u anglosaskim zemljama naime u mehanici ne upotrebljavaju.

Upravo u naše vrijeme nemetarski sistemi jedinica doživljaju sumrak. Niz država zakonom propisuje za obavezan metarski sistem. Tako je na primjer Indija zakonom od 25. decembra 1956. odredila za posljednji rok potpune primjene metarskog sistema jedinica početak 1967. godine, propisala je dakle prijelazni period od 10 godina. Njezinom primjerom pošao je 1960. godine i Pakistan.

Primjerom bivše britanske kolonije Indije sigurno će poći i slabo razvijene afričke zemlje koje će preskočiti metrološki feudalizam konjskih snaga, kilokalorija i oersteda, te se odmah prihvatiti decimalnog, univerzalnog i koherentnog Međunarodnog sistema jedinica.

Izvanredan se događaj zbio nedavno kad je Japan zakonom objavio prijelaz na metarski sistem jedinica. U današnje vrijeme to je veći događaj nego uvođenje toga sistema u Indiji, jer Japan je najveća industrijska velesila Azije, a treća sila na svijetu uopće. Taj prijelomni korak u japanskoj industriji, gospodarstvu i školstvu posebno je naglašen puštanjem u promet prigodne poštanske marke (sl. B.15) koja simbolizira uvođenje metarskog sistema vagom, mjernom trakom i menzurom.

Tvrđave anglo-američkog sistema jedinica su dakako USA i Britanija. No za razliku od Evrope gdje se anglo-američke jedinice uopće ne upotrebljavaju, Anglo-Amerikanci ne primjenjuju isključivo svoje palac-funta jedinice. Na primjer pravila računanja i računski strojevi kod njih su isto tako decimalni kao i u Evropi, tako da i Amerikanci preračunavaju svoje jedinice međusobno na temelju decimalnog računa.

U pogledu valute Amerikanci su bliži metarskom sistemu nego Englezi. Znamo da su oni svoj dolar razdijelili na 100 centi, dok Englezi imaju komplicirane odnose između funte, šilinga, penija itd.

U jednom području djelatnosti Amerikanci i Englezi potpuno su na pozicijama metarskog sistema. To je područje elektromagnetizma, gdje su — pogotovo Amerikanci — prihvatili Međunarodni sistem jedinica ne samo u praksi već i u najznanstvenijim raspravama i u visokoškolskoj nastavi. Možda je baš zato anglo-američka literatura (osobito elektronika) stekla nakon prošlog rata toliku popularnost u Evropi.

U kemijskoj industriji Amerikanci također pretežno upotrebljavaju metarski sistem, a u farmaceutskoj industriji jedinica mase gram snažno istiskuje njihove »apotekarske« mjerne.

Sve to, kao i niz drugih razloga, ponukalo je Amerikance i Engleze da ponovno razmotre način kompletnog prijelaza na metarski sistem jedinica. Dok se o tome razmišlja njihov najprecizniji državni metrološki veleinstitut National Bureau of Standards započeo je dvojakim baždarenjem mjerila i instrumenata: u metarskom i anglo-američkom sistemu istodobno! Time praktični Amerikanci uštedeju vrijeme koje će prilikom prijelaza morati ionako utrošiti tijekom tog prijelaznog prebaždarenja.

Danas se u Americi i Engleskoj ne mašta o prijelazu samo u krugu učenjaka, već se o tome raspravlja na mjerodavnom državnom mjestu i to na najvišem nivou. Američki ministar trgovine (kao i u većini zemalja, i u USA je Ministarstvo trgovine najviši operativni organ zakonske metrologije), potaknut možda anketom u kojoj su se američki aeronautički inženjeri izjasnili sa 7:1 za uvođenje metarskog sistema, obavezao je NBS da pronade najpovoljniji put prijelaza na metarski sistem jedinica.



Sl. B 15. Japanska marka od 10 yena, emitirana 1959. godine povodom službenog uvođenja Metarskog sistema jedinica u Japanu

Upoznat s potezima Japana, Indije i drugih zemalja američki je ministar 1959. godine pametno rekao ovo: »Metarski sistem je svuda oko nas. Problem stoga nije u tome da se izvrši revolucija mjerenja, već da se usmjeri i ubrza evolucija u primjeni metarskog sistema«.



Sl. B 16. Rasprostranjenost metarskog sistema jedinica. Tamne površine prikazuju ona područja zemlje gdje se upotrebljavaju nemetarski sistemi jedinica, pretežno anglo-američki sistem. Na tim područjima živi oko 400 milijuna ljudi. Bijele plohe prikazuju one teritorije na kojima se primjenjuje metarski sistem jedinica. Njih obitava oko 2500 milijuna ljudi (procjena iz 1960. godine)

Službeni američki krugovi smatraju da je za prijelaz na metarski sistem potrebno najmanje deset godina. Prijelaz mora biti planski i u tome će im mnogo pomoći studij kojim se bavi posebni odbor Američkog udruženja za unapređenje znanosti u zajednici s istoimenim britanskim udruženjem. Pri utvrđivanju tog plana ođ velike će koristi biti iskustvo Indije, a pogotovu Japana.

Kad jednom USA kompletno pređu na univerzalni Međunarodni sistem jedinica praktički će njime biti obuhvaćen čitav svijet, jer industrijski slabije anglo-saske zemlje nužno će morati poći stopama svog velikog brata.

13. VELIČINSKE I BROJČANE JEDNADŽBE U MEHANIČI

13.1. Općenito o veličinskim i brojčanim jednadžbama

U poglavlju A ove knjige objasnili smo da je za praktične svrhe računanja, za primjenu stručnih knjiga, za učenje u školama i za što veću zornost naučnog istraživanja od izvanredne koristi ako se jednadžbe pišu tako da simboli u njima predočuju veličine, a ne brojeve. Ta izlaganja potkrijepili smo s nekoliko raznorodnih primjera.

Ovdje ćemo ta razmatranja nadopuniti daljnjim specijaliziranim primjerima iz mehanike. Brojnost tih primjera neka bude potvrda o tome koliko je ta stvar važna. Iskustvo naime pokazuje da poznavanje veličinskih jednadžbi i poznavanje načina

računanja s njima stavlja pitanje sistema jedinica u pozadinu. Veličinske jednadžbe zaista su toliko univerzalne da one uopće ne zahtijevaju računanje sa sistemom jedinica, već to može biti i posve nesistematičan skup jedinica. Takvih jedinica mogli smo u prošlim odsječcima hrpimice upoznati, od elektonvolta do british commercial ton of refrigeration.

Prednosti veličinskih jednadžbi osjećaju i stručnjaci u svom svakodnevnom radu i profesori u školama. Prvi mogu pomoću njih intimno računati s onakvim jedinicama na kakve su navikli, a drugi mogu dacima najkraćim putem doista objasniti suštinu pojava, a ne da gube sate i sate na »paralelno« pretvaranje vrijednosti pojedinih veličina na vrijednosti u jedinicama upotrebljavanog sistema u kutu školske ploče.

Ovdje ćemo prije prelaza na najavljene primjere ponoviti osnove računanja veličinskim jednadžbama. Temelj tog računanja je da svaki simbol u formuli predstavlja umnožak brojčanog iznosa (brojka) i pripadne jedinice. Kad kažemo »promjer je drveta jedan i pol metar« onda to veličinskom jednadžbom izražavamo u obliku $d = 1,5 \text{ m}$. Pri tom je d simbol za veličinu »promjer«, brojka 1,5 je brojčani iznos, a m kratica za jedinicu duljine metar. U općenitom obliku to pišemo kao $G = G [G]$, tj.

$$\text{Veličina } G = \text{brojčani iznos } G \times \text{jedinica } [G].$$

Ova jednadžba slijedi neposredno iz samog načela mjerenja, $G = G/[G]$, tj. mjerni broj dobiva se tako da se stvarna veličina G izmjeri (usporedi) s upotrebjenom jedinicom $[G]$.

Oznake G odnose se na bilo koju veličinu, stoga je jednadžba $G = G [G]$ opća jednadžba. U našem posebnom primjeru je dakako veličina $G = d$, brojčani iznos (uspravna slova!) $G = 1,5$, a jedinica $[G] = m$. Kad pišemo $d = 1,5 \text{ m}$, time stvarno mislimo » $d = 1,5$ puta jedan metar«, dakle je stvarno $d = 1,5 \times m$ ili $d = 1,5 \cdot m$; ipak tačku obično ne pišemo, osim u slučajevima kad se bez te tačke ne bi vidjelo da se radi o umnošku mjernog broja (= brojčani iznos) i upotrebljene jedinice.

Suprotno od veličinskih, brojčane jednadžbe sa svojim simbolima predstavljaju brojke, tj. mjerne brojeve (brojčane iznose). U duhu brojčanih jednadžbi morali bismo naš primjer promjera drveta napisati u obliku

$$d = 1,5$$

a zapamtiti ili negdje posebno pribilježiti da je to promjer od jednog i pol metra. Ako se taj zapis izgubi onda čovjek koji nije prisustvovao premjeravanju drveta neće znati da li je promjer 1,5 decimetra ili možda 1,5 yarda!

13.2. Jednoliko pravocrtno gibanje

U nekoj smo knjizi našli jednadžbu za jednoliko gibanje tijela napisanu ovako

$$l = 0,278 \text{ } v \text{ } t, \quad (13.2-1)$$

koja kaže da neko tijelo u vremenskom razdoblju t prođe put l , ako se jednoliko giba brzinom v . Pokušajmo pomoću ove jednadžbe izračunati prevaljeni put l nakon vremena $t = 2$ sekunde = 2 s, ako je brzina $v = 1 \text{ m/s}$. Račun nam daje

$$l = 0,278 \cdot 1 \text{ ms}^{-1} \cdot 2 \text{ s} = 0,556 \text{ m}.$$

Naravno da to nije istina, jer u glavi možemo naprečac izračunati da npr. pješak brzinom od jedan metar u sekundi pređe u vremenu od dvije sekunde tačno 2 metra.

Ovaj neispravan rezultat dokazuje nam da izraz (13. 2—1) nije veličinska jednaždba koja vrijedi za bilo kakve jedinice, već da je to brojčana jednaždba koja vrijedi samo za brojčane iznose u strogo određenim jedinicama. Prema tome smo simbol u izrazu (13. 2-1) krivo tiskali *kurzivnim* znakovima koji su rezervirani za veličine.

I stvarno, na stranici ispred one na kojoj je tiskana jednaždba (13. 2—1) nalazimo u jednoj rečenici da je autor mjerio brzinu u kilometrima na sat, a vrijeme u sekundama i pri tom izračunao put u metrima. To znači da su stvarno upotrebijene jedinice $[l] = \text{m}$, $[v] = \text{km/h}$, $[t] = \text{s}$, a jednaždbu (13. 2—1) treba napisati u skladu s našim oznakama kao brojčanu jednaždbu

$$1 = 0,278 \text{ vt}, \quad (13.2-2)$$

gdje simboli predstavljaju brojčane iznose (uspravna slova!).

U skladu s općim oblikom $G = G/[G]$ možemo i simbole l , v , t za brojčane iznose izraziti kao omjere veličina l (put), v (brzina) i t (vrijeme) s upotrebljenim jedinicama, dakle

$$1 = \frac{l}{[l]} = \frac{l}{\text{m}}; \quad v = \frac{v}{[v]} = \frac{v}{\text{km/h}}; \quad t = \frac{t}{[t]} = \frac{t}{\text{s}}.$$

Uvrstimo li to u izraz (13. 2—2) dobivamo

$$\frac{l}{\text{m}} = 0,278 \frac{v}{\text{km/h}} \frac{t}{\text{s}}. \quad (13.2-3)$$

ili u obliku

$$l = 0,278 \frac{v}{\text{km/h}} \frac{t}{\text{s}} \text{ m}, \quad (13.2-4)$$

ako kraticu za metar (m) prebacimo na desnu stranu jednaždbe.

Izraz (13. 2—4) možemo srediti ako se prisjetimo da je $\text{km} = 1000 \text{ m}$, a sat $\text{h} = 3600 \text{ s}$:

$$l = vt \cdot 0,278 \frac{\text{m}}{\frac{1000 \text{ m s}}{3600 \text{ s}}} = vt \cdot 0,278 \cdot 3,6,$$

jer su se jedinice metar i sekunda pokratile. Umnožak $0,278 \cdot 3,6 = 1$, pa dakle gornja jednaždba dobiva najjednostavniji oblik

$$l = vt, \quad (13.2-5)$$

koji poznamo već iz definicije brzine (vidi odsječak 1. 4). Izraz (13. 2—5) je dakako prava veličinska jednaždba, dakle univerzalna.

Primijenimo li na nju naše podatke $v = 1 \text{ m/s} = 1 \text{ ms}^{-1}$ i $t = 2 \text{ s}$ odmah dobivamo očekivani rezultat

$$l = 1 \text{ ms}^{-1} \cdot 2 \text{ s} = 2 \text{ m}.$$

I jednaždba (13. 2—4) je veličinska. Ali ona je specijalni oblik veličinske jednaždbe prilagođen upotrebi: za brzinu jedinici km/h , a za vrijeme sekundi.

Ako je npr. $v = 3,6 \text{ km/h}$, a $t = 2 \text{ s}$, onda ona daje:

$$l = 0,278 \frac{3,6 \text{ km/h}}{\text{km/h}} \cdot \frac{2 \text{ s}}{\text{s}} \text{ m} = 2 \text{ m},$$

dakle isti rezultat koji smo dobili pomoću veličinske jednadžbe (13. 2—5). To je očito jer je $v = 3,6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$.

Jednadžbe oblika (13. 2—4) nazivamo »prilagođenim veličinskim jednadžbama«. (Vidi odsječak A.5.5).

13.3. Brzina vrtnje

U nekim udžbenicima i priručnicima mehanike nalazimo ovakve izraze za obodnu brzinu v i kutnu brzinu ω_n remenica, zupčanika ili osovine

$$(13.3-1) \quad v = \frac{\pi D n}{60}; \quad \omega_n = \frac{\pi n}{30}. \quad (13.3-2)$$

Već samim načinom štampanja tih formula (uspravni znakovi¹⁾, a ne *kosi* — *kurzivni*) označili smo da se radi o brojčanim jednadžbama, a ne o univerzalnim veličinskim.

U istim tim knjigama u većini slučajeva nalazimo u tekstu naputak »da jednadžba (13. 3—1) daje brzinu v u m/s , ako se promjer D uvrsti u metrima, a brzina vrtnje u $1/\text{min}$ «.

Budući da je izraz (13. 3—1) brojčana jednažba, simboli v , D , n predstavljaju brojčane iznose. Kako je općenito $G = G/[G]$ (vidi odsječak 13. 1.) možemo svaki simbol iz (13. 3—1) nadomjestiti omjerom veličine i pripadne jedinice. Za naš slučaj dobivamo, analogno izvođenju u prošlom odsjeku

$$v = \frac{v}{\text{m/s}}; D = \frac{D}{\text{m}}; n = \frac{n}{\text{min}^{-1}} = n \cdot \text{min}$$

Uvrstimo li ovako izražene brojčane vrijednosti v , D , n u jednadžbu (13.3—1) dobivamo

$$\frac{v}{\text{m/s}} = \frac{\pi}{60} \frac{D}{\text{m}} n \cdot \text{min},$$

što sređenjem daje

$$v = \pi D n \frac{\text{m} \cdot \text{min}}{60 \text{ m s}}.$$

Stavimo li u krajnji desni izraz jednakost minuta = 60 s, slijedi

$$\frac{\text{m} \cdot 60 \text{ s}}{60 \text{ m s}} = 1,$$

¹⁾ Budući da tiskara nema *kurzivnih* znakova za grčka slova, prisiljeni smo grčki označene veličine tiskati uspravnim znakovima. Kako bismo te veličine razlikovali od pripadnih brojčanih iznosa, potonjima dodajemo indeks n (n -numerus). U našem je slučaju ω_n brojčani iznos veličine kutna brzina ω .

pa je dakle

$$v = \pi D n = 2 \pi r n,$$

jer je $D = 2r$.

Posve jednakim postupkom dobili bismo od brojčane jednadžbe (13.3—2) pravu veličinsku jednadžbu

$$\omega = 2 \pi n,$$

koju smo već imali u odsječku 1. 5.

Već smo nekoliko puta naglasili da ispravno možemo jednadžbe prilagoditi stanovitim jedinicama pomoću »prilagođenih veličinskih jednadžbi«. U takvom obliku glasile bi jednadžbe (13. 3—1) i (13. 3—2).:

$$v = \frac{\pi}{60} \cdot \frac{D}{\text{m}} \cdot \frac{n}{\text{min}^{-1}} \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \omega = \frac{\pi}{30} \frac{n}{\text{min}^{-1}} \cdot \text{s}^{-1},$$

gdje *kurzivna* slova označuju da se radi o veličinama, dakle o produktu mjernog broja i jedinice. To smo dobili na taj način što smo u (13. 3—1) i (13. 3—2) uvrstili $D = D/\text{m}$, $\omega_n = \omega \cdot \text{min}$ itd.

Gornje prilagođene veličinske jednadžbe možemo iskušati na primjeru gdje je $D = 0,4 \text{ m}$, $n = 300/\text{min}$. Uvrštenjem slijedi

$$v = \frac{\pi}{60} \cdot \frac{0,4 \text{ m}}{\text{m}} \cdot \frac{300/\text{min}}{1/\text{min}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\pi \cdot 0,4 \cdot 300}{60} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 62,8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\omega = \frac{\pi}{30} \cdot \frac{300/\text{min}}{1/\text{min}} \text{s}^{-1} = \frac{\pi \cdot 300 \text{ s}^{-1}}{30} = 31,4/\text{s}.$$

Pri tom smo dakako upotrebljavali jednakost $\text{min}^{-1} = 1/\text{min}$.

U većini slučajeva takav je put računanja dulji ali je ispravan i pouzdan pa ne može doći do greške, jer na kraju mora izaći jedinica kojom izražavamo računatu veličinu. U protivnom odmah znamo da smo negdje zaboravili neku veličinu. Takve greške događaju se obično onda kad jednadžba sadrži mnogo različitih veličina.

Veličinski račun s pravom veličinskom jednadžbom mnogo je kraći i pregledniji. Ponovimo isti primjer ali s veličinskim jednadžbama $v = \pi D n$ i $\omega = 2 \pi n$:

$$v = \pi D n = \pi \cdot 0,4 \text{ m} \frac{300}{\text{min}} = \pi \cdot 0,4 \text{ m} \frac{300}{60 \text{ s}} = 62,8 \text{ m/s},$$

$$\omega = 2 \pi n = 2 \pi \frac{300}{\text{min}} = 2 \pi \frac{300}{60 \text{ s}} = 31,4/\text{s}.$$

U starijoj literaturi često se brzina vrtnje n izražava ovako: »Brzina vrtnje iznosi $n = 300$ okretaja/min«, odnosno skraćeno $n = 300$ okr/min ili čak $n = 300$ o/min. Uvrstimo li $n = 300$ okr/min u veličinsku jednadžbu $v = \pi D n$, dobivamo

$$v = \pi \cdot 0,4 \text{ m} \cdot 300 \text{ okr/min} = 62,8 \text{ okr} \cdot \text{m/s}.$$

Naravno da je ispravan raniji rezultat $v = 62,8 \text{ m/s}$ jer brzinu mjerimo jedinicom m/s, a ne »okr. m/s«. Očito je dakle da je »okretaj« samo opis brojke 1. S navodom $n = 300$ okr/min želi se naglasiti da se radi o 300 okretaja u minuti! Iz usporedbe gornja dva rezultata slijedi da je »okr. = 1«. Pa kad je tako, povoljnije je da

se račun ne komplicira navođenjem $n = 300$ okr/min, već valja jednostavno i ispravno pisati $n = 300$ /min, odnosno još bolje $n = 5$ /s, jer je min = 60 s. Nekome je, da bi izbjegao sekunde u nazivniku, prikladne zbog Hz (hertz) = s⁻¹ pisati čak $n = 5$ Hz.

Slično se i za mjerenje kutne brzine ω katkada upotrebljava jedinica »rad/s«, tj. radijan u sekundi. Radijan je mjera kuta. Za kut kažemo da iznosi jedan radijan onda, kad dvije zrake što polaze iz centra kruga na kružnici odsijecaju luk koji je jednak duljini radijusa. Do jedinice kutne brzine ω dolazimo preko njene definicije $\omega = d\alpha/dt$; ako kut α mjerimo u radijanima, a vrijeme u sekundama, onda je jedinica kutne brzine »rad/s«. No ako bismo jedinicu kutne brzine definirali pomoću obodne brzine $v = \omega r$, dobili bismo za jedinicu »1/s«. Isto tako ako bismo je definirali pomoću jednadžbe okretnog momenta $M = J d\omega/dt$, gdje je J moment tromosti.

Radijan je kako vidimo u analitičkom smislu jednak broju jedan, dakle »rad = 1«.

Oznake »okr« i »rad« nazivamo »opisnim jedinicama« jer one označuju brojku 1. No one nisu jedine. U anglo-američkim zemljama na primjer frekvenciju označuju ovako: $f = 10\,000$ Per/sec ili $f = 10\,000$ c/s. Per je skraćenica od period, dakle per = 1. Slovo c u drugom primjeru označuje ciklus (cycle), dakle je i to opis za brojku 1, $c = 1$.

13.4. Težina bakrene žice

U nekom smo priručniku našli formulu za brzo izračunavanje težine okrugle bakrene žice:

$$G = 71 d^2. \quad (13. 4-1)$$

U tekstu iza formule napisano je da se težina dobiva u kilopondima, ako se duljina žice uvrsti u kilometrima, a promjer u milimetrima. To znači da su G , l i d simboli za brojčane iznose, a jednadžba (13. 4-1) je brojčana jednadžba.

A što se zbiva ako želimo znati npr. težinu željezne žice? U tom slučaju moramo ili izvesti pravu veličinsku jednadžbu koja vrijedi za bilo koji homogeni materijal ili pak od gornje brojčane jednadžbe napraviti prilagođenu veličinsku jednadžbu.

Budući da su uspravni simboli u izrazu (13. 4-1) oznake brojčanih iznosa u navedenim jedinicama možemo napisati, ako *kosa* slova prikazuju veličine:

$$G = G/kp; l = l/km; d = d/mm.$$

Uvrstimo li ove odnose u (13. 4-1) slijedi

$$\frac{G}{kp} = 7 \frac{l}{km} \left(\frac{d}{mm} \right)^2,$$

odakle nastaje ograničeno prilagođena veličinska jednadžba jer vrijedi samo za okrugle bakrene žice

$$G = 7 \frac{l}{km} \left(\frac{d}{mm} \right)^2 kp. \quad (13. 4-2)$$

Ako je na primjer duljina bakrene žice $l = 2$ km, a promjer $d = 2,25$ mm, gornja jednadžba omogućuje račun

$$G = 7 \cdot 2 \cdot 2,25^2 \text{ kp} = 70,9 \text{ kp}.$$

Pretvorimo izraz (13. 4—2) u potpunu veličinsku jednadžbu! Veličine G , l i d odvajamo od jedinica i sređujemo jedinice:

$$G = l d^2 7 \frac{\text{kp}}{\text{km mm}^2} = l d^2 7000 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}, \quad (13.4—3)$$

jer je $\text{km} = 1000 \text{ m}$, $\text{mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$.

Vidimo da na desnoj strani nismo dobili čist broj kao u prijašnja dva primjera, već vrijednost neke veličine koja se mjeri jedinicom kp/m^3 . Takva veličina je specifična težina γ . Budući da je u uvodu izričito naglašeno kako (13. 4—1) vrijedi samo za bakrene žice, to u (13. 4—3) moramo vrijednost 7000 kp/m^3 izraziti specifičnom težinom bakra $\gamma = 8900 \text{ kp/m}^3$. Za bakar je dakle $\text{kp/m}^3 = \gamma/8900$. Uvrstimo li tako izraženu jedinicu kp/m^3 u izraz (13. 4—3) koji još uvijek vrijedi samo za bakar dobivamo

$$G = l d^2 7000 \gamma / 8900 = l d^2 \gamma \cdot 0,787.$$

Pokušavanjem odgonetavamo da je $0,787$ približno jednako $\pi/4$, pa gornja veličinska jednadžba dobiva konačni oblik

$$G = \gamma l d^2 \pi / 4. \quad (13.4—4)$$

Tačna vrijednost omjera $\pi/4$ je $0,785$, ali je prilikom stvaranja brojčane jednadžbe (13. 4—1) brojka povišena na $0,787$ kako bi brojčani faktor bio tačno 7 .

Jednadžba (13. 4—4) potpuna je veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo koji materijal. Porijeklo omjera $\pi/4$ posve je prirodno, jer se težina žice određuje umnoškom specifične težine materijala i volumena V žice, $G = \gamma V$. Budući da volumen valjka $V = l A$, gdje je $A = d^2 \pi / 4$ presjek, na taj način odmah slijedi univerzalna veličinska jednadžba (13. 4—4).

Moramo napomenuti da ni veličinska jednadžba (13.4—4) nije baš najprikladnija za primjenu, jer ona omogućuje izračunavanje težine G žice. Kako znamo iz odsječaka 1.6. i 4.2., težina nije primarno svojstvo materije. Univerzalna karakteristika je masa m , koja ne ovisi o ubrzanju sile teže, dok težina $G = mg$ ovisi o gravitaciji. Primjena mase umjesto težine pogodna je i u vezi s obaveznom primjenom Međunarodnog sistema jedinica (vidi odsječak 5.1. o nadomještavanju kiloponda kilogramom).

Našu žicu okarakterizirat ćemo masom m tako da veličinsku jednadžbu (13.4—4) podijelimo ubrzanjem sile teže Zemlje g , dakle $m = G/g$. Na taj način dobivamo masu žice

$$m = \rho l d^2 \pi / 4, \quad (13.4—5)$$

gdje je $\rho = \gamma/g$ gustoća materijala žice. Za naš konkretan primjer kada je duljina bakrene žice $l = 2$ km, a promjer $d = 2,25$ mm pomoću (13.4—5) dobivamo

$$m = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2 \text{ km} \cdot (2,25 \text{ mm})^2 \pi / 4 = 70,6 \text{ kg}$$

gdje smo uvrstili gustoću bakra $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$.

13.5. Moment rotirajućih masa

U nekim priručnicima i udžbenicima nalazimo ovu jednadžbu za određivanje momenta ubrzavanja ili usporavanja rotirajućih masa

$$M = \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} \quad (13.5-1)$$

Jednadžbu smo tiskali uspravnim, a ne *kurzivnim* slovima. Time smo odmah naglasili da oznake predočuju brojčane iznose, a ne veličine.

Stvarno je u tekstovnom opisu ove jednadžbe napisano da se moment dobiva u kilopondmetrima (kpm), ako se težina rotirajućeg predmeta računa s kilopondima, reducirani promjer s metrima, brzina vrtnje s $1/\text{min} = \text{min}^{-1}$, a vrijeme sa sekundama. To znači da opće oznake brojčanih iznosa u jednadžbi (13.5-1) valja shvatiti kao omjere veličina i nabrojanih jedinica, dakle u skladu s općim načelom $G = G/[G]$:

$$M = M/\text{kpm}, G = G/\text{kp}, n = n/\text{min}^{-1}, t = t/\text{s}.$$

Ovdje dakako *kurzivna* slova označuju veličine, a uspravna brojčane iznose u navedenim jedinicama, jer je $M = M \cdot \text{kpm}$, $G = G \cdot \text{kp}$ itd.

Prema tome prilagođena veličinska jednadžba za naš slučaj nastaje tako da se navedeni odnosi stave u izraz (13.5-1), dakle

$$\frac{M}{\text{kpm}} = \frac{1}{375} \frac{G}{\text{kp}} \frac{D^2}{\text{m}^2} \frac{dn/\text{min}^{-1}}{dt/\text{s}} \quad (13.5-2)$$

Pregrupiranjem jedinica na desnu stranu gornje jednadžbe slijedi:

$$M = GD^2 \frac{dn}{dt} Z \quad (13.5-3)$$

gdje je

$$Z = \frac{\text{kpm} \cdot \text{min} \cdot \text{s}}{375 \text{ kp} \cdot \text{m}^2},$$

što nakon kraćenja kp u brojniku i nazivniku, uvođenja $\text{min} = 60 \text{ s}$ daje

$$Z = \frac{60}{375 \text{ m/s}^2} = \frac{1}{6,25 \text{ m/s}^2}.$$

Kako je normirano ubrzanje sile teže $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$, to je $6,25 \text{ m/s}^2 = g \cdot 0,637$ pa je dakle

$$Z = \frac{1}{g \cdot 0,637} = \frac{1,57}{g}.$$

Brojka 1,57 približno je jednaka omjeru $\pi/2$, dakle $\pi/2 = 1,57$, što konačno daje u izrazu za Z :

$$Z = \frac{\pi}{2g}.$$

Uvrstimo li ovako dobiveni Z u jednadžbu (13.5-3) slijedi

$$M = \frac{\pi}{2g} GD^2 \frac{dn}{dt} \quad (13.5-4)$$

što je prava univerzalna veličinska jednadžba u kojoj svako (*koso!*) slovo označuje veličinu, tj. umnožak brojčanog iznosa i jedinice.

Budući da je masa rotirajućeg tijela $m = G/g$, izraz (13. 5—4) može se dalje napisati u obliku

$$M = \frac{\pi}{2} m D^2 \frac{dn}{dt}, \quad (13.5-5)$$

odnosno zbog definicije kutne brzine $\omega = 2\pi n$ i $D = 2r$, gdje je r reducirani polumjer na koji zamišljamo svedenu ukupnu masu:

$$M = m r^2 \frac{d\omega}{dt}. \quad (13.5-6)$$

Netom napisana jednadžba već je sasvim blizu posve općenitoj vezi između zakretnog momenta M i (dinamičkog) momenta tromosti (inercije) $\mathcal{J}$

$$M = \mathcal{J} \frac{d\omega}{dt}.$$

Stvarno je prema definiciji momenta tromosti

$$\mathcal{J} = \int r^2 dm$$

u našem slučaju $\mathcal{J} = m r^2 = m D^2/4$ pa zbog $\omega = 2\pi n$ nastaje jednadžba (13. 5—5), a od nje preko $m = G/g$ izraz (13. 5—4).

Za praktičan je rad izraz (13. 5—5) prikladniji od (13. 5—6) zbog ovih razloga: Prilikom mjerenja promjene brzine vrtnje dn/dt obično se lakše izmjeri brzina vrtnje n u pojedinim momentima nego li kutna brzina ω . Osim toga lakše je tačno izmjeriti D nego r , ako se radi s reduciranom masom, a ne s reduciranim polumjerom ili promjerom.

Još će stanovito vrijeme biti važan i »moment inercije tehničara«. Naime GD^2 iz jednadžbe (13. 5—4) za iskusne ispitivače strojeva daje predodžbu o momentu tromosti dotičnog stroja, dok za stvarnu tromost $\mathcal{J} = m r^2 = m D^2/4$ smatraju »da previše naginje fizici«. Naravno da je to samo stvar, navike, a »osjećaj za mjeru« prečesto je doveo u tehnici do zabluda!

Ipak, ako ne želimo zanemariti taj subjektivni moment možemo spomenuti »osjećaj za mjeru« zadržati i u primjeni Međunarodnog sistema jedinica pri upotrebi jednadžbe (13. 5—4). To će nam pokazati slijedeći stvarni primjer.

Neka je reducirana masa rotora nekog stroja $m = 2000$ kg, a promjer $D = 1,2$ m. Prema tome je u jednadžbi (13.5—5)

$$m D^2 = 2000 \text{ kg} \cdot 1,2^2 \text{ m}^2 = 2880 \text{ kgm}^2.$$

Istodobno je na površini Zemlje težina istog rotora $G = 2000$ kiloponda, pa ćemo u izraz (13.5—4) uvrstiti

$$G D^2 = 2000 \text{ kp} \cdot 1,44 \text{ m}^2 = 2880 \text{ kpm}^2.$$

To znači da su brojčane vrijednosti $m D^2$ kad semjeris kgm^2 i GD^2 kad se mjeri s kpm^2 međusobno jednake (vidi odsječak 5), ali samo brojčane vrijednosti, jer je $m/\text{kg} = G/\text{kp}$. Fizikalno su veličine $m D^2$ i $G D^2$ međusobno potpuno različite.

Prava značajka dinamičke tromosti rotora jedino je

$$J = m r^2 = m D^2 / 4 = 720 \text{ kgm}^2,$$

tj. moment tromosti. Ova veličina ne ovisi o tome, kakvo je ubrzanje sile teže g , da li se stroj nalazi na Zemlji, Mjesecu ili u rudničkoj dizalici. Sa $G D^2$ to nije slučaj, jer prema $G = m g$ vrijedi $G D^2 = m g D^2$ pa dakle zbog različitih vrijednosti g veličina $G D^2$ nije invarijantna prema ubrzanju sile teže g . Na kraju krajeva možemo se upitati kakvog posla uopće ima g u izrazima za vrtnju strojnih dijelova? Odgovor na to pitanje sadrži raspravljanje u odsječcima 4 i 5.

13.6. Gubitak pritiska u cjevovodu

U dobrom udžbeniku tehničke hidraulike našli smo ovu formulu za proračunavanje »gubitka visine« h prilikom strujanja konstantne protoke Q kroz horizontalno položenu cijev unutarnjeg promjera D i duljine L :

$$h = 0,0826 \lambda L Q^2 / D^5. \quad (13.6-1)$$

Pri tom je slovo λ objašnjeno kao koeficijent trenja koji ovako ovisi o promjeru cijevi i o koeficijentu hrapavosti n :

$$\lambda = 124,6 \cdot n^2 / \sqrt[3]{D}. \quad (13.6-2)$$

Uz jednadžbu (13.6—1) dužni smo objasniti da se u hidraulici pritisak ili gubitak pritiska često izražavaju pomoću visine stupca tekućine, što smo obradili u odsječcima 1.10 i 7.3. Prema tome gubitku visine h stvarno pripada gubitak pritiska

$$p = \rho g h$$

gdje je g ubrzanje sile teže, a ρ gustoća tekućine koja struji.

Koeficijent trenja λ je čist broj, a isto tako i koeficijent hrapavosti n koji se određuje eksperimentalno (*Manning*).

Izraz (13.6—1) očito nije veličinska jednadžba. Kontroliramo li ga npr. pomoću općih, još nedefiniranih jedinica

$$[h] = [l], [\lambda] = [1], [Q] = [l]^3 [t]^{-1}, [D] = [l],$$

od izraza (13.6—1) dobivamo

$$[l] = [l] [l]^6 [t]^{-2} [l]^{-5},$$

a ta jednakost ne postoji jer

$$[l] \neq [l]^2 [t]^{-2}.$$

Stoga smo jednadžbu (13.6—1) odmah napisali kao brojčanu (uspravni znakovi, ne *kosi*!)

Od brojčane jednadžbe (13.6—1) napraviti ćemo pravu, tj. univerzalnu veličinsku jednadžbu. Pri tom moramo pronaći na koje su jedinice vezani mjerni

brojevi h , L , Q i D . Nakon duljeg traganja u udžbeniku pronalazimo pripadne jedinice m , m , m/s^2 i m . Stoga možemo pisati

$$h = h/m; L = L/m; Q = Q/m^3 s^{-1}; D = D/m.$$

Ovdje *kosi* simboli označuju veličine, a uspravni brojčane iznose. Uvrstimo li ove odnose u izraz (13.6—1) slijedi

$$h = \lambda L Q^2 D^{-5} Z, \quad (13.6—3)$$

gdje je

$$Z = 0,0826 \frac{m \cdot s^2 m^5}{m \cdot m^6} = 0,0826 \frac{s^2}{m}.$$

Izračunajmo recipročni omjer. Dobivamo

$$Z = \frac{1}{12,11 m/s^2}.$$

Očito je dakle da je u nazivniku sakriveno ubrzanje sile teže $g = 9,81 m/s^2$. Stavimo li to u gornju jednadžbu, nakon računanja slijedi

$$Z = 0,81/g.$$

Sada je još potrebno odgonetnuti porijeklo brojke 0,81. To moramo učiniti pokušavanjem. Budući da se radi o cijevima valjkasta oblika možemo pomisliti da mora biti umiješan faktor $\pi = 3,14...$ Stvarno pokušavanje daje nam odgovor

$$0,81 = 8/\pi^2,$$

pa je dakle

$$Z = \frac{8}{\pi^2 g}.$$

Uvrstimo li Z u izraz (13.6—3) nastaje konačno prava veličinska jednadžba za izračunavanje »gubitka visine«

$$h = \frac{8 \lambda}{\pi^2 g} \frac{Q^2 L}{D^5}. \quad (13.6—4)$$

Stvarni gubitak pritiska je prema $p = \rho g h$:

$$p = \frac{8 \rho \lambda}{\pi^2} \frac{Q^2 L}{D^5} \quad (13.6—5)$$

Usporedimo li (13.6—4) sa (13.6—1) vidimo da je izraz (13.6—1) posve blizu prave veličinske jednadžbe. Budući da je

$$\frac{8}{\pi^2 g} = \frac{8}{\pi^2 \cdot 9,81 m/s^2} = 0,0826 s^2/m,$$

može se (13.6—1) napisati u obliku

$$h = K \lambda L Q^2 / D^5. \quad (13.6—6)$$

Prigodom obrazloženja konstante $K = 0,0826 \text{ s}^2/\text{m}$ valja naglasiti da je u njoj sadržano ubrzanje sile teže, što se i vidi iz dimenzije $[K] = \text{L}^{-1} \text{T}^2$. Zbog toga izraz (13.6—6) nije univerzalna veličinska jednačba.

Ni izraz (13.6—2) nije veličinska jednačba: λ i n su bezdimenzionalni koeficijenti, dakle brojevi, a desno vidimo pod trećim korijenom promjer. Ako shvatimo znak D u (13.6—2) kao brojčani iznos a tako smo i napisali (uspravni D), onda je dovoljno samo uvrstiti $D = D/\text{m}$ (u udžbeniku se uz opis naše jednačbe može pronaći da treba D uvrštavati u metrima!), pa je veličinski oblik izraza (13.6—2):

$$\lambda = 124,6 \lambda n^2 / \sqrt[3]{D/\text{m}}.$$

To je dakako prilagođena veličinska jednačba.

Na kraju se možemo upitati odakle potječe komplicirana jednačba (13.6—5), odnosno (13.6—1)?

Ukratko se na ovo pitanje može odgovoriti ovako: Teoretska su i eksperimentalna istraživanja utvrdila da gubitak pritiska u horizontalnim cjevovodima iznosi

$$p = \frac{\lambda L}{2 D} \rho v^2.$$

Budući da su protoka $Q = dV/dt$ i brzina vezani jednačbom $Q = A v$, gdje je $A = D^2 \pi/4$ presjek cijevi, iz gornje jednačbe slijedi

$$p = \frac{8 \rho \lambda}{\pi^2} \frac{Q^2 L}{D^5}; \quad h = \frac{8 \lambda}{\pi^2 g} \frac{Q^2 L}{D^5}.$$

To su dakako univerzalne veličinske jednačbe koje vrijede za bilo koji sistem jedinica ili nesistematičan skup jedinica.

14. SISTEMI DIMENZIJA MEHANIKE

Osnovne pojmove o dimenzijama veličina i o sistemima dimenzija raspravili smo u poglavlju A.8. Pojam dimenzije vrlo je koristan u teoriji sličnosti i u dimenzionalnoj analizi. Budući da se zbog ograničenosti prostora u ovoj knjizi ne možemo baviti s te dvije grane primijenjene formalističke metrologije, spomenut ćemo samo ukratko nekoliko sistema dimenzija mehanike koji mogu biti od koristi pri brznoj kontroli nekih računskih ili teoretskih rezultata. Time zapravo dimenzijama veličina i sistemima dimenzija dajemo znatno manju ulogu nego što su je imali u prošlosti. To je razumljivo, jer sva naša razmatranja u ovoj knjizi počinju i vraćaju se na veličinske jednačbe. Budući da se prema izlaganjima u poglavlju A od veličinskih jednačbi dolazi na jednačbe dimenzija jednostavnim odbacivanjem svih brojčanih faktora, za praktične je svrhe zaista mnogo jednostavnije raditi s takvim »izniveleranim« veličinskim jednačbama nego li stvarati posebne sisteme dimenzija.

Kako je poznato iz poglavlja A sistem dimenzija počiva na nekoliko nezavisnih dimenzija koje nazivamo i »osnovnim dimenzijama«. Broj tih osnovnih dimenzija ovisi o tome o kojoj se grani radi. U dinamici su potrebne 3 osnovne dimenzije, u elektromagnetizmu četiri.

Koje će dimenzije pojedinac odabrati za osnovne ovisi posve o njegovoj volji. Ta njegova volja potječe od koristi koje on ima od nekog sistema dimenzija, a korist je obično veća onda kad se dimenzije svode na slijed definicija veličina na koji je dotični naučen. Posebno valja naglasiti da sistemi dimenzija nemaju nikakve veze sa slijedom definicija takozvanih osnovnih jedinica. Budući da definicije jedinica moraju nekako slijediti jedna iza druge nastao je međunarodni niz definicija jedinica, ali to nema nikakva utjecaja na sisteme dimenzija.

U mnogim knjigama označuju se dimenzije neke veličine tako da se simbol veličine zatvori u uglatu zagradu. Tako je na primjer $[V]$ oznaka za dimenziju volumena V . U našim ranijim razmatranjima tako smo označivali opću, još nedefiniranu jedinicu. Da ne bi dolazilo do zamjena, a da ujedno uštedimo prostor prigodom tiskanja knjige, oznaku za dimenziju pisat ćemo bez uglate zagrade. Da je ipak razlučimo od veličine tiskat ćemo znak za dimenziju uspravnim slovima, za razliku od veličina koje tiskamo *kurzivnim* slovima. Tako se radi u mnogim modernim djelima. To znači da je $\dim V = V$. Ranije smo uspravnim slovima označivali brojčane iznose veličina npr. $G = G[G]$ (veličina = brojčani iznos $\times$ jedinica). Ipak do pomutnje ne može doći jer brojčani iznosi nikada ne dolaze u dodir s dimenzijama, pa možemo mirne duše primijeniti uspravna slova.

Oznake dimenzija triju veličina predstavljaju iznimku. To su dimenzije za duljinu l , vrijeme t i masu m . Za njih se odvajkada upotrebljavaju oznake dimenzija L , T i M . Tu praktičnu tradiciju zadržat ćemo i ovdje. Prema tome je $\dim l = L$, $\dim t = T$, $\dim m = M$.

Najstariji i najčešće upotrebljavani sistem dimenzija mehanike je takozvani LTM sistem. Kod njega su kao osnovne dimenzije odabrane one za duljinu, vrijeme i masu. Veliku je popularnost taj sistem stekao zato jer je potpuno u skladu s uobičajenim slijedom definicija jedinica tih triju veličina, jer se kako znamo jedinice mehanike obično definiraju ovim redoslijedom.

Brzina $v = l/t$ ima u tom sistemu dimenziju $v = LT^{-1}$. Budući da je ubrzanje $a = dv/dt$, to je dimenzija ubrzanja $a = LT^{-2}$. Kako je sila $F = ma$, dimenzija sile izvodi se kao $F = \dim F = \dim a \times \dim V$, što uvrštenjem daje $\dim F = F = LT^{-2}M$. Lako je izvesti dimenzije ostalih veličina. Budući da je energija $W = Fl$, to je $\dim W = W = LT^{-2}ML = L^2T^{-2}M$; snaga P ima zbog $P = W/t$ dimenziju $P = WT^{-1} = L^2T^{-3}M$. Dimenzije nekih drugih veličina mehanike u LTM sistemu jedinica vidimo u tablici B.16 (stupac 4).

Nekima je od veće koristi sistem dimenzija LTF koji se od LTM razlikuje u tome, što su za treću osnovnu dimenziju umjesto mase odabrali silu. Znači da u ovom sistemu masa ima izvedenu dimenziju, dok je u LTM bilo obratno. Dimenzije svih ostalih veličina ne moramo računati korak po korak ako već imamo napisane dimenzije u LTM sistemu. Dovoljno je da izračunamo koju dimenziju (sada izvedenu) ima u LTF sistemu masa m , pa onda tu dimenziju uvrštavati na mjesto M . Budući da je $F = LT^{-2}M$, to je očito $M = L^{-1}T^2F$. Stavimo li to u dimenziju na primjer snage P u LTM sistemu, dobivamo dimenziju snage u LTF sistemu, dakle $\dim P = P = L^2T^{-3}M = L^2T^{-3} \cdot L^{-1}T^2F = LT^{-1}F$. Dimenzije ostalih veličina u LTF sistemu vidimo u tablici B.16 (stupac 5).

Nekima se čini najpraktičnijim »energetski« sistem dimenzija LTW kojemu su osnovne dimenzije duljine, vremena i energije. Ako imamo poznate dimenzije

Nekoliko sistema dimenzija mehanike

Tablica B.16

Veličina	Ozna- ka	Jednadžba	LTM	LTF	LTW	LTP	LTUI
1	2	3	4	5	6	7	8
Masa	m	$m = F/a$	M	$L^{-1}T^2F$	$L^{-2}T^2W$	$L^{-2}T^3P$	$L^{-2}T^3UI$
Sila	F	$F = m \frac{d^2 l}{dt^2}$	$L T^{-2} M$	F	$L^{-1} W$	$L^{-1} T P$	$L^{-1} T UI$
Energija, zakretni moment	W M	$W = \frac{1}{2} m v^2; M = \int r^2 \frac{d\omega}{dt}$	$L^2 T^{-2} M$	LF	W	TP	TUI
Impuls, veličina gibanja	G	$G = \int F dt = m v$	$L T^{-1} M$	TF	$L^{-1} T W$	$L^{-1} T^2 P$	$L^{-1} T^2 UI$
Snaga	P	$P = d W / dt = F v$	$L^2 T^{-3} M$	$L T^{-1} F$	$T^{-1} W$	P	UI
Moment tromosti	$\mathcal{J}$	$\mathcal{J} = \int r^2 dm$	$L^2 M$	$L T^2 F$	$T^2 W$	$T^3 P$	$T^3 UI$
Pritisak	p	$p = F/A$	$L^{-1} T^{-2} M$	$L^{-2} F$	$L^{-3} W$	$L^{-3} T P$	$L^{-3} T UI$
Gustoća	ρ	$\rho = m/V$	$L^{-3} M$	$L^{-4} T^2 F$	$L^{-5} T^2 W$	$L^{-5} T^3 P$	$L^{-5} T^3 UI$
Specifična težina	γ	$\gamma = F/V = g \rho$	$L^{-2} T^{-2} M$	$L^{-3} F$	$L^{-4} W$	$L^{-4} T P$	$L^{-4} T UI$
Dinamička viskoznost	η	$\eta = \frac{F/A}{dv/dx} = \rho \nu$	$L^{-1} T^{-1} M$	$L^{-2} T F$	$L^{-3} T W$	$L^{-3} T^2 P$	$L^{-3} T^2 UI$

veličina u LTM sistemu (kao u tablici B.16) onda se od LTM prelazi na LTW najjednostavnije tako da se potraži kakva je dimenzija energije W u LTM sistemu. To je $W = L^2 T^{-2} M$, što se vidi iz stupca 4 tablice B.16. Oдавde potražimo obrnutu zavisnost ako u energetskom sistemu dim W shvaćamo kao osnovnu dimenziju: $M = L^{-2} T^2 W$. Stavimo li ovako izraženi M na sva mjesta izvedenih dimenzija u LTM sistemu dobivamo stupac 6 u tablici B.16. Tako je na primjer dimenzija snage P u LTW sistemu: $P = L^2 T^{-3} M = L^2 T^{-3} \cdot L^{-2} T^2 W = T^{-1} W$ što je očito jer je $P = W/t$.

Stupac 7 tablice B.16 sadrži dimenzije u LTP sistemu. Vezu između LTM i LTP sistema ostvarujemo preko $P = L^2 T^{-3} M$, dakle $M = L^{-2} T^3 P$.

U stupcu 8 prikazali smo »električki« sistem dimenzija koji se razlikuje od LTP samo po tome, što je snaga P izražena električki pomoću napona U i struje I , $P = UI$. Tu vidimo kako se mehanički sistem dimenzija LTP zbog $P = UI$ odmah transformira u »četvorni« sistem, čime se iz mehanike prelazi u elektromagnetizam. Nekad se to smatralo osebujnošću dimenzionalne analize. Danas kad se služimo veličinskim jednadžbama to je posve normalno.

Postoji još niz sistema dimenzija. Na primjer glasovit je LTH sistem gdje je H dimenzija Planckove konstante h , (veličina djelovanja), sistem LTG gdje je G dimenzija impulsa itd.

Ispravan je svaki od tih sistema koji se u mehanici temelji na tri međusobno nezavisne dimenzije. Kome je potreban sistem dimenzija odabrat će onaj koji mu je općenito ili za neki specijalni problem najprikladniji.

C. MJERNI SISTEMI AKUSTIKE

1. OBJEKTIVNA AKUSTIKA

Zvučne pojave mogu se razmatrati na dva načina. Prvi od ta dva osnovna načina je objektivna ili fizikalna akustika. Ona se temelji na fizikalnom mjerenju mehaničkih veličina koje su uzrok zvučnim pojavama ili njihovim posljedicama.

Pri takvom proučavanju akustike jedna je od osnovnih veličina gustoća snage zvuka I , zvana još i jakost zvuka

$$I = \frac{dP}{dA} = \frac{p^2}{c \rho} \quad (1-1)$$

Ovdje je p efektivna vrijednost pritiska zvučnih valova (amplituda je $\sqrt{2}$ — puta veća, $p_m = \sqrt{2} p$), c brzina širenja zvučne pojave, a ρ gustoća sredstva u kojemu se zvuk širi. Veličina $z = c \rho$ u akustici katkada se naziva »zvučnim otporom« u analogiji sa sličnošću u elektrotehnici $P = U^2/R$, što prema jednadžbi (1—1) daje $I = p^2/z$.

Brzina zvuka u nekom sredstvu izračunava se pomoću

$$c = \frac{1}{\sqrt{\alpha \rho}} = \sqrt{\kappa R T},$$

gdje su: α linearni koeficijent rastezanja sredstva, ρ njegova gustoća, κ omjer specifičnih toplina pri konstantnom tlaku i konstantnom volumenu (*Poissonov* koeficijent), R plinska konstanta, a T apsolutna temperatura.

Kako vidimo sve te veličine objektivne akustike poznate su iz mehanike ili termodinamike. Njih mjerimo pripadnim jedinicama, pa tako npr. i jakost zvuka I izražavamo u W/m^2 itd.

2. FONOMETRIJA

Drugi osnovni način proučavanja zvučnih pojava je subjektivan. Grana akustike koja se time bavi zove se fonometrijom, analogno kao što je fotometrija subjektivni dio optike.

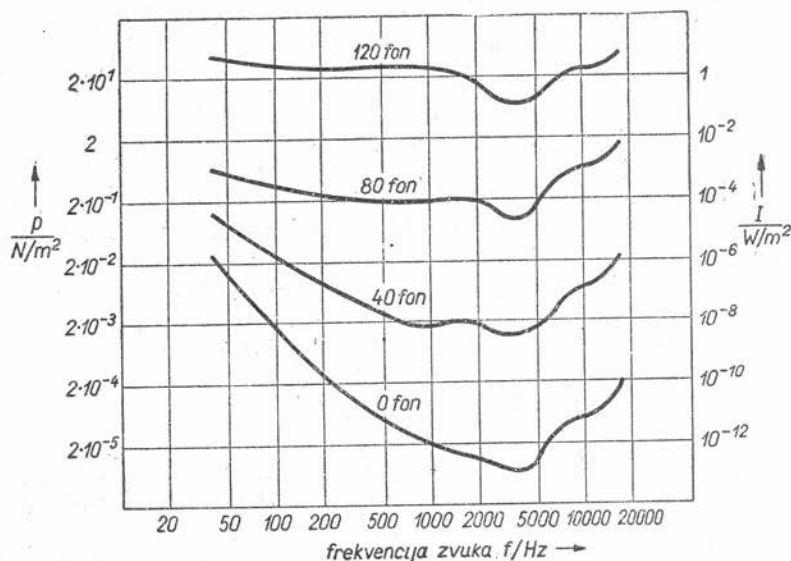
Osnova fonometrije je ljudsko uho koje na poseban način doživljava zvučne pojave. Proučavanja su već davna pokazala da prosječno ljudsko uho, tj. uho zdrava mlađa čovjeka, čuje zvučne titraje ograničena pojasa frekvencija od otprilike

20 Hz do 17 000 Hz. Osim toga granice čujnosti ljudskog uha ovise o gustoći snage I zvuka u čujnom području i o pritisku p zvučnih valova.

Uho je najosjetljivije na zvukove frekvencije oko $f = 3000$ Hz. Pri tom je zvučni pritisak manji od 10^{-5} N/m², a gustoća oko 10^{-13} W/m². Ove granične vrijednosti karakteristične su za donji prag čujnosti ljudskog uha.

Pri istoj frekvenciji gornja se granica čujnosti nalazi kod otprilike 100 N/m², odnosno 10 W/m². Pri tom zvučni osjećaj već prelazi u bol. Usporedimo li navedene vrijednosti vidimo da prosječno ljudsko uho obuhvaća ogroman raspon zvučnih pritisaka, a posebno gustoća snaga: $10 \text{ Wm}^{-2} / 10^{-13} \text{ Wm}^{-2} = 10^{14}$

Zbog ovako velikih raspona reagiranja uho nije kadro da osjeti male promjene jakosti zvuka I . Istraživanja su pokazala da ljudsko uho reagira približno logaritamski na jakost zvuka. Stoga iskustvo skupljeno u *Weber-Fecherovu* zakonu kaže: »Glasnoća zvuka razmjerna je logaritmu jakosti zvuka, odnosno logaritmu zvučnog pritiska«. Taj zakon vrijedi dosta tačno za frekvencije zvuka oko 1000 Hz. Za niže čujne frekvencije zakon se znatno odalečuje od stvarnosti. Pri frekvencijama višim od 1000 Hz odstupanje od tog zakona nije tako jako. Odnose između p , f i I prikazuje dijagram na slici C1.



Sl. C1. Ovisnost zvučnog pritiska i jakosti zvuka o frekvenciji

Weber-Fecherov zakon pruža mogućnost da se subjektivni osjećaj glasnoće zvuka kako ga čovjek doživljava putem uha poveže s apsolutnom jakošću zvuka $I = p^2 / c \rho$. Za tu svrhu uveden je pojam razine glasnoće zvuka L kao logaritam omjera dviju apsolutnih jakosti zvuka

$$L = C \cdot \log I / I_0, \quad (2-1)$$

gdje je C konstanta. Pri tom se dakako referentna fizikalna jakost zvuka I_0 mora utvrditi dogovorom.

3. JEDINICA RAZINE GLASNOĆE ZVUKA FON

Budući da je prema jednadžbi (1—1) $I = p^2/c\rho$ i $I_0 = p_0^2/c\rho$, izraz (2—1) može se napisati i u ovom obliku:

$$L = C \cdot \log p^2/p_0^2,$$

odnosno

$$L = K \cdot \log p/p_0, \quad (3—1)$$

gdje je K druga konstanta, $K = 2C$.

Na međunarodnoj konferenciji o akustici godine 1937. u Parizu utvrđena je fonometrijska ljestvica razine glasnoće zvuka. Kao donja granica čujnosti prosječnog ljudskog uha pri frekvenciji $f = 1000$ Hz usvojen je zvučni pritisak

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2 = 2 \text{ dyn/cm}^2.$$

Time je na »logaritmičku prijemnu značajku« ljudskoga uha priključena apsolutna nul-razina jakosti zvuka I_0 . Pri tlaku od jedne normalne (fizikalne) atmosfere i temperature 20°C gustoća zraka naime iznosi $\rho = 1,2046 \text{ kg/m}^3$, a brzina zvuka $c = 343,6 \text{ m/s}$, pa je uz usvojeni $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$ pripadna gustoća zvučne snage ili minimalna jakost zvuka

$$I_0 = \frac{p_0^2}{c\rho} = \frac{4 \cdot 10^{-10} \text{ N}^2/\text{m}^4}{343,6 \text{ ms}^{-1} \cdot 1,2046 \text{ kgm}^{-3}} = 0,968 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2.$$

Zbog jednostavnosti uzima se da je $I_0 \approx 10^{-12} \text{ W/m}^2$, dakle se čini greška od nekoliko postotaka.

Na spomenutoj međunarodnoj konferenciji dogovoreno je i to da se per definitionem razini glasnoće dade vrijednost $L = 80$ ako je zvučni pritisak $p_{80} = 0,2 \text{ N/m}^2$ pri frekvenciji zvuka 1000 Hz . To znači da je time određena vrijednost konstante K iz jednadžbe (3—1) u iznosu $K = 20$. Prema tome je osnova fonometrijske ljestvice

$$L = 20 \log p/p_0 = 10 \log I/I_0. \quad (3—2)$$

Budući da je omjer $p_{80}/p_0 = 0,2 \text{ Nm}^{-2} : 2 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^{-2} = 10^4$, u tom je slučaju prema gornjem izrazu doista

$$L = 20 \cdot \log 10^4 = 20 \cdot 4 = 80.$$

U slučaju kada je npr. jakost zvuka $I = 10^{-2} \text{ W/m}^2$, razina glasnoće prema izrazu (3—2) iznosi

$$L = 10 \log I/I_0 = 10 \log 10^{-2}/10^{-12} = 10 \cdot 5 = 50.$$

Drugim riječima to znači: gustoća snage (jakost zvuka) I veća je 10^{10} puta od I_0 , koju prosječno (normirano) ljudsko uho još čuje pri frekvenciji 1000 Hz . No uho zvuk jakosti $I = 10^{-2} \text{ W/m}^2$ osjeća samo 50 puta jače nego zvuk jakosti I_0 .

Ljudsko uho dobro zamjećuje razliku jakosti zvuka ako se ona poveća otprilike u iznosu od 25%. To znači: ako uho još registrira zvuk jakosti $I_0 =$

$= 10^{-12} \text{ W/m}^2$ onda će osjetiti povećanje glasnoće kad bude $I = 1,25 I_0$. Prema tome u tom slučaju izraz (3—2) daje

$$L = 10 \log 1,25/1 = 10 \cdot 0,09691 = 0,9691 \approx 1.$$

Vidimo da uho može razlučivati jakosti zvuka u iznosu jedne jedinice fonometrijske ljestvice. Stoga je brojni 1 fonometrijske ljestvice pripisana jedinica koja se naziva fon.

To nije jedinica u smislu metra, volta ili kilograma, već takozvana »opisna jedinica« kakva je na primjer »okretaj« u mehanici. Jedinica »fon« samo opisuje brojku 1 fonometrijske ljestvice.

Jedinicu jedan fon ima razina glasnoće onda kad je prema jednadžbi (3—2)

$$L = 1 = 1 \text{ fon} = 10 \log I/I_0 \quad \text{ili} \quad 1 \text{ fon} = 20 \log p/p_0,$$

odakle slijedi

$$I/I_0 = 1,2589; \quad p/p_0 = 1,122.$$

To znači da su jakost zvuka i zvučni pritisak u tom slučaju

$$I \approx 1,26 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2; \quad p = 2,244 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2.$$

Manje razlike od $(2,244 - 2) \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2 = 0,244 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$ odnosno $0,26 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ prosječno uho ne razaznaje.

Naravno da se iz jednadžbe

$$L = 10 \log I/I_0 \tag{3—3}$$

može naći odgovor i na obrnuto pitanje, npr.: kolika mora biti jakost zvuka I da bi razina glasnoće zvuka iznosila $L = 50$ fona? Budući da je »jedinica« fon samo opis brojke 1, za ovaj primjer možemo zbog $L = 50$ izraz (3—3) napisati u obliku

$$50 = 10 \log I/I_0, \text{ što daje } 5 = \log I/I_0.$$

To znači da je

$$10^5 = I/I_0, \text{ odnosno } I = 10^5 \cdot I_0,$$

dakle $I = 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$, tj. jakost zvuka I mora biti 100 000 puta veća od I_0 da bi prosječno uho osjetilo 50 puta veću glasnoću zvuka.

Da se postigne gornja granica čujnosti prosječnog ljudskog uha u iznosu oko $L = 130$ fona, gdje zvuk izaziva već fizičku bol, potreban je omjer $I/I_0 = 10^{13}$, dakle $I = 20 \text{ W/m}^2 = 0,002 \text{ W/cm}^2$, što uz približnu površinu uha 10 cm^2 daje snagu 20 mW koja pada na uho.

Drugi primjer može nam pokazati kako na razinu glasnoće zvuka L djeluje više izvora zvuka. Tiktakanje jednog sata na primjer proizvodi razinu glasnoće oko $L_1 = 10$ fona. Deset takvih satova zajedno proizvest će razinu glasnoće $L_{10} = 20$ fona, dakle dva puta više.

Ako jedan automobil gibajući se na ulici proizvodi buku razine glasnoće $L_1 = 70$ fona, deset takvih automobila odjednom proizvest će $L_{10} = 80$ fona.

To nam može potvrditi jednostavan račun. Da se stvori razina glasnoće $L_1 = 70$ fona mora prema jednadžbi (3—3) biti

$$L_1 = 70 = 70 \text{ fona} = 10 \log I/I_0.$$

To znači da je $\log I_1/I_0 = 7$.

Ako istodobno prolazi 10 jednako bučnih automobila oni na istom prostoru i u isto vrijeme proizvode 10 puta veću zvučnu energiju, pa je jakost zvuka 10 puta veća, tj. $I_{10} = 10 \cdot I_1$. Stoga u tom slučaju od (3—3) dobivamo

$$L_{10} = 10 \log (10 I_1/I_0) = 10 (\log 10 + \log I_1/I_0).$$

Prema tome je

$$L_{10} = 10 (1 + 7) = 80 = 80 \text{ fona}.$$

Kad bi prolazilo 100 automobila razina glasnoće podigla bi se na $L_{100} = 90$ fona.

4. STARI FON I BARKHAUSENOV FON

U starijoj literaturi, napisanoj prije 1937. godine, upotrebljavao se drukčiji fon, koji ćemo nazvati starim fonom. Do tog vremena bila je fonometrijska ljestvica definirana tako da je razini glasnoće 70 starih fona odgovarao zvučni pritisak $p = 10^{-1} \text{ N/m}^2$, a pragu čujnosti od 0 fona pritisak $p_0 = 3,16 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$ čemu je pripadala fizikalna jakost zvuka $I_0 = 2,6 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Još prije starog fona upotrebljavao se *Barkhausenov* fon (B-fon).

Između brojčanih iznosa razine glasnoće zvuka izražene s ove tri nabrojene »jedinice« vrijedi veza:

$$L \text{ fona} = (L - 4) \text{ starih fona} = \frac{L - 4}{6,02} \text{ B-fona}$$

Ako npr. L iznosi 20 fona onda je prema staroj fonometrijskoj ljestvici razina glasnoće iznosila

$$L = 20 - 4 = 16 \text{ starih fona, ili}$$

$$L = \frac{20 - 4}{6,02} = 2,657 \text{ Barkhausenovih fona}$$

5. JEDINICA DECIBEL

Jedinica decibel (kratica je db) u početku se upotrebljavala samo u Americi i Engleskoj, ali se prodorom anglosaske elektroakustičke literature uvriježila i u Evropi. Pri frekvenciji zvuka $f = 1000 \text{ Hz}$ jedinica decibel jednaka je fonu.

Decibel je došao u akustiku iz telekomunikacija gdje se najprije upotrebljavao kao mjera pojačanja i prigušenja u toj tehnici. Razvojem elektronike i elektroakustike decibel je postao mjerilo pojačanja kod pojačala i u nizu drugih grana tzv. tehnike slabe struje.

Do definicije decibela dolazimo uvođenjem ulaznih i izlaznih veličina električkog četvoropola. Neka su na ulazu četvoropola snaga, struja i napon P_1 , I_1 , U_1 ,

a na izlazu P_2 , I_2 , U_2 . Kao razina (engleski Level, njemački Pegel) definira se logaritam omjera

$$L = \log P_2/P_1. \quad (5-1)$$

Iznosu razine L pripisuje se jedinica bel. To je također opisna jedinica kao i fon.

Ako četvoropol ima jednake prilagodne otpore na ulazu i na izlazu onda razina iz jednadžbe (5-1) vrijedi i za napone i struje na ovaj način

$$L = 2 \log U_2/U_1 = 2 \log I_2/I_1, \quad (5-2)$$

jer je $P_2 = U_2^2/R = I_2^2 R$, odnosno $P_1 = U_1^2/R = I_1^2 R$.

Navedeno će nam najbolje ilustrirati primjer. Neka je pojačanje napona 100-struko, tj. $U_2/U_1 = 100$. Prema (5-2) je:

$$L = 2 \log 100 = 2 \cdot 2 = 4 = 4 \text{ bel.}$$

U tom je slučaju pojačanje snage $P_2/P_1 = (U_2/U_1)^2 = 10^4$, pa je prema (5-1)

$$L = \log 10^4 = 4 = 4 \text{ bel.}$$

Decibel (db) uveli su zato jer se u praksi pokazalo da je jedinica bel prevelika. Budući da deci znači 10^{-1} , tj. $d = 0,1$, u gornjem primjeru L iznosi $L = 40 \text{ db}$. Da bismo razinu dobili izravno u decibelima moramo promijeniti definicione jednadžbe (5-1) i (5-2) koje prelaze u oblik

$$L = 10 \log P_2/P_1 = 20 \log U_2/U_1 = 20 \log I_2/I_1.$$

Decibel = $0,1$ bel opširnija je opisna jedinica od fona jer se fon odnosi na razinu glasnoće pri frekvenciji 1000 Hz, dok decibel nije vezan uz frekvenciju ako se radi o razini snage, napona ili struje u telekomunikacijama. Pri $f = 1000 \text{ Hz}$, $\text{db} = \text{fon} = 0,1 \text{ bel}$.

Razina u telekomunikacijama može biti relativna ili apsolutna. Relativna razina ima za bazu određene vrijednosti izmjeničnih veličina (snaga, napon, struja) na ulazu u četvoropol. U odnosu na ove veličine P_1 , U_1 i I_1 računa se relativna azina pomoću

$$L_r = 10 \log P/P_1 = 20 \log U/U_1 = 20 \log I/I_1,$$

gdje su veličine bez indeksa na izlazu iz četvoropola ili na bilo kojem mjestu npr. telefonske linije.

Kad je razina negativna govorimo o prigušenju. Ako je npr. $P/P_1 = 0,01 = 10^{-2}$, relativna je razina

$$L_r = 10 \log 10^{-2} = -20 = -20 \text{ decibela.}$$

Predznak minus upućuje na to da se radi o prigušenju, a ne o pojačanju.

Apsolutna razina (apsolutni pegel) definirana je posve analognom relativnoj razini, ali za bazu nije odabrana veličina na ulazu u četvoropol ili na početku telefonskog voda, već stanovita vrijednost $P_1 = P_0$, $I_1 = I_0$, $U_1 = U_0$, dakle posve isto kao kod fonometrijske skale gdje su nam p_0 i I_0 označavali fizikalne veličine zvuka na pragu čujnosti pri frekvenciji zvuka 1000 Hz.

6. JEDINICA NEPER

U svim dosadašnjim izlaganjima upotrebljavali smo dekadске logaritme kojima je osnova 10. U dojavnoj tehnici upotrebljava se i drukčiji način logaritamskog označivanja pojačanja ili prigušenja: pomoću prirodnog logaritma.

Osnova prirodnog logaritma je broj $e = 2,718 \dots$. To znači da je $\ln e = 1$, gdje $\ln$ označuje prirodni ili *Briggs*ov logaritam za razliku od $\log$ koji označuje dekadski logaritam.

Apsolutna razina snage L_p definirana je pomoću prirodnog logaritma na ovaj način

$$L_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0} \quad (6-1)$$

a razina napona

$$L_u = \ln U/U_0 \quad (6-2)$$

Ako je na primjer omjer $P/P_0 = 10^4$ onda prema (6-1) razina snage iznosi

$$L_p = 0,5 \ln 10^4 = 0,5 \cdot 2,302\,585 \cdot \log 10^4 = 4,605.$$

Brojci 4,605 pripisujemo »jedinicu« neper (N_p) posve isto kao što smo ranije pripisivali jedinice decibel ili fon. To znači da je u gornjem primjeru apsolutna razina snage

$$L_p = 4,605 N_p.$$

Pomoću jednadžbe (5-1) dobili bismo u istom primjeru

$$L = \log 10^4 = 4 \text{ bel},$$

što znači da je 4 bel = 4,605 N_p , odnosno:

$$\begin{aligned} \text{bel} &= 1,151\,4 \text{ nepera} = 10 \text{ db}, \\ N_p &= 0,868\,59 \text{ bel} = 8,6859 \text{ db}, \\ \text{db} &= 0,1 \text{ bel} = 0,115\,14 \text{ nepera}. \end{aligned}$$

7. APSOLUTNA RAZINA SNAGE

Međunarodno je usvojeno da usporedbene veličine u telekomunikacijama iznose

$$P_0 = 0,001 \text{ W}, R_0 = 600 \text{ ohma}, U_0 = 0,775 \text{ V}.$$

To su vrijednosti veličina pri tzv. nul-razini.

Budući da je $P_0 = U_0^2/R_0$, odnosno općenito $P = U^2/R$, prema jednadžbi (6-1) apsolutna je razina snage

$$L_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U^2 R_0}{U_0^2 R} \right),$$

što uređenjem daje

$$L_p = \ln U/U_0 - 0,5 \ln R/R_0. \quad (7-1)$$

Prvi desni član je razina napona $L_u = \ln U/U_0$ kako smo je već definirali jednadžbom (6-2). Stoga je dalje

$$L_p = L_u - 0,5 \ln R/R_0, \quad (7-2)$$

tj. razina snage jednaka je razini napona umanjenoj za razinu otpora.

Naravno da brojkama koje dobivamo iz jednadžbi (7-1) i (7-2) dodajemo opisnu jedinicu neper.

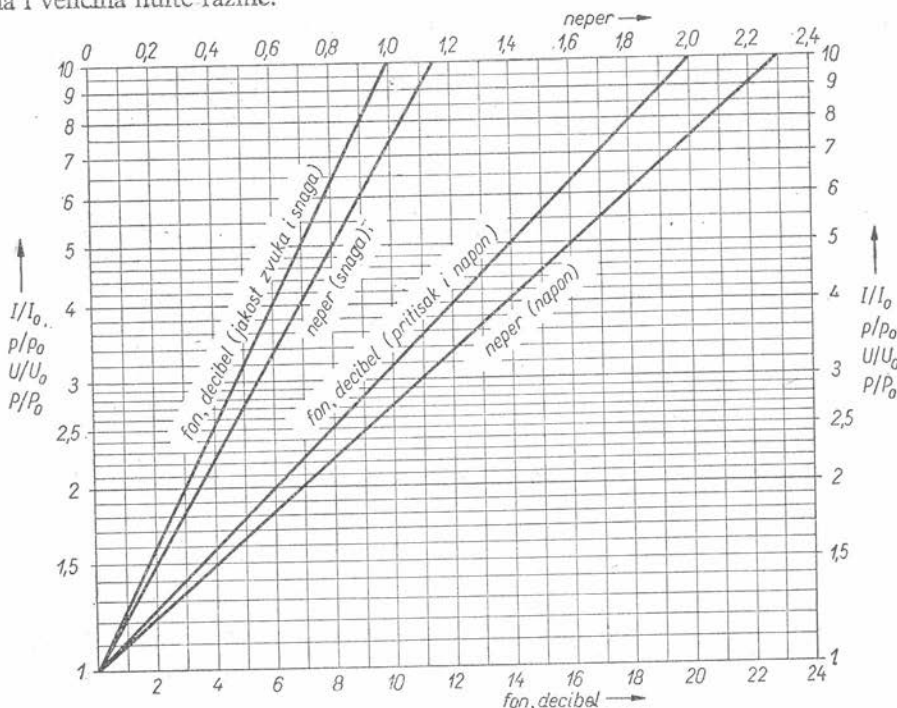
U nekom je slučaju uz $R \approx R_0 = 600 \Omega$ izmjereno $U = 0,42 \text{ V}$. Budući da je bilo $U_0 = 0,775 \text{ V}$, to je omjer $U/U_0 = 0,542$. Kako je $\ln 0,542 = -0,6125$, to je zbog $R = R_0$ razina snage jednaka razini napona

$$L_p = L_u = -0,6125 = -0,6125 \text{ Np},$$

tj. prigušenje iznosi 0,6125 nepera.

8. DIJAGRAM ZA ODREĐIVANJE RAZINE

Polulogaritamski dijagram na slici C2 omogućuje dosta tačno očitavanje razina a da se ne računaju logaritmi. Jedino mora biti poznat omjer stvarnih veličina i veličina nulte razine.



Sl. C 2. Dijagram za izravno određivanje pojačanja

Primjenu dijagrama objasniti će nam nekoliko primjera. 1). Neka je omjer jakosti zvuka $I/I_0 = 5$. Na ordinati potražimo brojku 5, povučemo paralelu do krivulje opisane sa »fon, decibel (jakost zvuka i snaga)« i na donjoj apscisnoj osi očitamo vrijednost $L = 7$ fona. 2). Neka je u stanovitom slučaju omjer zvučnih pritisaka $p/p_0 = 8$. Na ordinati potražimo brojku 8, povučemo paralelu do krivulje opisane sa »fon, decibel (pritisak i napon)« i na donjoj apscisi dijagrama očitamo vrijednosti 18,1 fona. 3). Mjerenja na nekom pojačalu dala su omjer $U/U_0 = 10$. Na vrhu dijagrama potražimo sjecište horizontale 10 s krivuljom »fon, decibel (pritisak i napon)« te na donjoj apscisi nađemo pojačanje 20 decibela. Pojačanje u neperima dobili bismo pomoću krivulje »neper (napon)«, a na gornjoj apscisi očitati bismo 2,3 nepera. Analogno bismo radili za omjere P/P_0 .

Kako vidimo dijagram na slici C2 ima vrijednosti ordinate samo od omjera 1 do 10. Stvarni su omjeri kako smo vidjeli iz ranijih tekstova mnogo veći ili pak manji od ovog raspona. Ovakav smo dijagram konstruirali zato da očitavanja budu što tačnija. Za omjere I/I_0 itd. koji na slici C2 prekoračuju navedene iznose treba dodati stanovite konstantne vrijednosti pojačanja, što ćemo niže navesti.

Neka je u stanovitom slučaju omjer snaga na ulazu i izlazu pojačala $P_1/P_2 = 360$. Pojačanje ćemo izraziti u decibelima pomoću izraza

$$L = 10 \log 360 = 10 (\log 3,6 + \log 100),$$

jer je $\log 360 = \log (3,6 \cdot 100)$. Stoga se gornji izraz nastavlja u

$$L = 10 (0,55 + 2) = 5,5 + 20 = 25,5 \text{ db.}$$

Prvu brojku (5,5) mogli smo očitati iz našeg dijagrama. Drugu (20 db) bismo morali pripisati jer znamo da omjeru 100 pripada logaritam 2.

Dodaci na L kad su omjeri I/I_0 , U/U_0 ili P/P_0 veći od 1 ... 10

Tablica C.1

Omjeri veličina I/I_0 , U/U_0 , P/P_0 iznose:	Treba dodati na L omjera			
	I/I_0 i U/U_0		P/P_0	
	db	Np	db	Np
$10^1 \dots 10^2$	20	4,606	10	2,303
$10^2 \dots 10^3$	40	9,21	20	4,606
$10^3 \dots 10^4$	60	13,815	30	6,909
$10^4 \dots 10^5$	80	18,421	40	9,212
$10^5 \dots 10^6$	100	23,03	50	11,501

U tablici C.1 skupljeni su pribrojnici koje moramo dodati u pojedinim slučajevima. Pri tom postupamo na ovaj način. U ranijem primjeru bio je omjer $P_1/P_2 = 360$. Budući da znamo da s dijagramom možemo raditi od 1 do 10, naš ćemo omjer 360 napisati ovako: $3,6 \times 100$. U dijagramu očitamo za omjer 3,6 vrijednost 5,5 db, a u tablici C.1 omjeru 100 pripada dodatak 20 db. Razina je pojačanja dakle 25,5 db, što smo ranije izračunali.

Kad bismo to isto htjeli izraziti u neperima dobili bismo za 3,6 u dijagramu slike C2 0,65 Np, a u tablici C.1 vrijednost 2,303 Np. Ukupno pojačanje snage je dakle 2,953 Np.

Pomoću dijagrama i tablice možemo ustanoviti i koliko je prigušenje u decibelima ili neperima. Za tu svrhu treba npr. omjer $P_1/P_2 = 0,002$ napisati u obliku $P_1/P_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ te pod omjerom 2 u dijagramu naći vrijednost 3 db. Od tog iznosa treba oduzeti 30 db koji pripadaju omjeru u rasponu $10^3 \dots 10^4$. Dobivamo pojačanje 3 db — 30 db = — 27 db što je u stvari prigušenje od 27 decibela. Analogno se računa i za nepere.

D. MJERNI SISTEMI NAUKE O TOPLINI

1. TEMPERATURA I JEDINICE TEMPERATURE

U geometriji je dovoljna jedna osnovna veličina, duljina, l . Njome možemo izraziti i površinu i volumen, a isto tako i kut, te prostorni kut. U kinematici sama duljina nije više dovoljna. Zato se tamo uvodi i druga osnovna veličina, vrijeme. Pomoću duljine i vremena izgradili smo pojmove brzine, ubrzanja i kutnog ubrzanja. Dinamici nisu dovoljne ni dvije osnovne veličine, pa joj se zato pridružuje treća. Obično se za treću osnovnu veličinu odabire ili masa m ili sila F . S tri osnovne veličine može se potpuno obraditi čitava mehanika, klasična i relativistička.

Iskustvena termodinamika zahtijeva da se trima osnovnim veličinama pridruži još i četvrta, temperatura. Sam naziv kaže (latinski »temperatura« znači otprilike »ugodno osjećano«) da pojam temperature potječe od posebnog osjećaja čovjeka koji u nekim svojim organima ima mogućnost osjećanja i reagiranja na »toplinu« i »hladnoću«.

1.1. Temperatura kao četvrta osnovna veličina

Pri uvođenju osnovnih veličina (npr. duljine, vidi odsječke B.1.1 i B.1.3) polazili smo od iskustvene predodžbe o osnovnim veličinama. Veličinu »duljina« nismo mogli definirati već poznatim veličinama pa smo stoga ovakve vrste veličina nazvali aksiomatskima. Takva je veličina i temperatura koju u nauci u toplini smatramo osnovnom veličinom i prema tome ne definiramo. Pomoću osnovne veličine temperatura definiramo niz drugih izvedenih veličina.

Temperatura se ne očituje samo kao poticaj na jednu vrst nadražaja čovjekovih osjetila, već i na niz drugih načina od kojih ćemo spomenuti samo neke.

Povišenje temperature uzrokuje promjenu dimenzija tjelesa; neka se tijela povećavaju, druga smanjuju. Porastom temperature produljuje se npr. metalni štap, skraćuje kaučukova nit, plinovi povećavaju svoj obujam itd.

Promjena temperature uzrokuje promjenu električkog otpora vodiča; pri višim temperaturama otpor bakrene žice je veći, a ugljenog štapa manji.

Promjena temperature uzrokuje promjenu agregatnog stanja tvari. Pri niskim temperaturama voda se na primjer skružuje, pri višim ona je u tekućem stanju, a pri još višim prelazi u paru.

Razlike temperature uzrokuju nastanak električkog napona između dva zavarena metala (termoelement). Fizikalnih i kemijskih reakcija koje uzrokuje promjena temperatura ima neobično mnogo i njima se katkada koristimo, a ponekad se u svakodnevnom životu i borimo protiv njih.

Svaku od navedenih reakcija na temperaturu možemo upotrebiti kao osnovu za mjerenje temperature. Tako se stvarno i radi: živin termometar promjenom visine živinog stupca mjeri temperaturu bolesnika, plinski termometar (s vodikom ili helijem umjesto živom) služi za najpreciznija baždarenja ostalih termometara, a termoelemenata ima na stotine u svakoj modernoj tvornici.

Prema tome za termometričko tijelo možemo upotrebiti gotovo svaku tvar koja se može reproducirati svagdje u dovoljnom broju primjeraka. Stoga je značajka temperature bilo koja fizikalna veličina x za koju se jednoznačno dogovorimo o načinu njena mjerenja. Jedino je s mjernog stajališta povoljno pritom odabrati takvo termometričko tijelo koje se mijenja razmjerno s temperaturom. Vrlo vještīm i duhovitim eksperimentima uspjelo je ustanoviti da se pri dovoljno niskim tlakovima neki plinovi šire izvanredno linearno s temperaturom. Zato se helij i vodik upotrebljavaju za najpreciznije termometre.

Ranije smo rekli da se za mjerenje temperature može upotrebiti bilo koje svojstvo x neke tvari koja reagira na promjenu temperature. Označimo li proizvoljno odabranu relativnu temperaturu sa ϑ , veza između termometričkog svojstva x i temperature ϑ propisuje se linearnom jednadžbom

$$\vartheta = ax + b, \quad (1.1-1)$$

gdje su a i b zasada još neodređene konstante. Na mnogo se načina može eksperimentalno ustanoviti da li je za neku upotrebljenu termometričku tvar zahtijevana veza (1.1—1) ispunjena, u kolikoj mjeri i u kojem području temperatura. Za veličinu x može poslužiti električki otpor, napon, volumen ili pritisak plina itd.

Jednadžba (1.1—1) nije tako dugo definitivno određena dok nisu svojevoljno odabrane vrijednosti konstanta a i b . Njima se pripisuju stanovite vrijednosti u vezi s karakterističnim obilježjima nauke o toplini, i to s onima koji se dadu lako reproducirati. To su na primjer vrelište kisika pri određenom tlaku i niz drugih fiksnih ili kontrolnih tačaka (vidi odsječak 1.3). Izvanredno su značajne dvije tačke: temperatura tališta čistoga vodenog leda i temperatura vrelišta vode, oboje pri određenom pritisku. Ta dva stanja proizvoljno označujemo ovim vrijednostima relativnih temperatura:

$$\vartheta_{ov} = 0 \text{ deg}; \quad \vartheta_{vv} = 100 \text{ deg}.$$

Pri tom »deg« predstavlja jedinicu temperature »stupanj« (engl. degree, franc degré, njem. Grad). S gornjim vrijednostima temperatura tališta vodenog leda je $\vartheta_{ov} = 0$ deg, a vrelište vode $\vartheta_{vv} = 100$ deg.

Budući da prema izrazu (1.1—1) temperaturi ϑ_{ov} odgovara vrijednost termometričke veličine x_0 , a temperaturi $\vartheta_{vv} = 100$ deg vrijednost x_{100} , na temelju (1.1—1) mogu se izračunati konstante a i b :

$$a = \frac{100 \text{ deg}}{x_{100} - x_0}, \quad b = \frac{-x_0 100 \text{ deg}}{x_{100} - x_0}, \quad (1.1-2)$$

odakle slijedi jednoznačna veza između ϑ i x :

$$\vartheta = \frac{x - x_0}{x_{100} - x_0}, \quad (1.1-3)$$

gdje vrijednost x pripada temperaturi ϑ .

Radi li se o živinom termometru, termometrička veličina x je visina živina stupca, pa su stoga x_{100} i x_0 visine živina stupca pri temperaturi $\vartheta_{vv} = 100$ deg i $\vartheta_{ov} = 0$ deg, a x visina pri mjerenoj temperaturi ϑ .

Pokusi pokazuju da vrlo malo tvari udovoljava zahtijevanoj linearnoj vezi ϑ i x jednadžbe (1.1—1). Različita termometrička sredstva naime samo manje ili više udovoljavaju tom zahtjevu, a samo idealni plin pokorno slijedi zakon (1.1—1). Pod idealnim plinom razumijevamo takav kojemu je svojstvo pri nekoj stalnoj temperaturi izraženo jednadžbom $pV = \text{const.}$, gdje je V volumen plina konstantne mase m . Pokusi pokazuju da umnožak pV svakog plina ovisi o pritisku p , što znači da idealnih plinova nema. No pV svih plinova kod niskih se tlakova malo mijenja, a naročito neznatno kod plinova helija i vodika. Kod njih su potrebne ogromne promjene tlakova p da bi se primjetno promijenila vrijednost pV . Stoga se ovi plinovi, ako su dovoljno razrijeđeni, mogu smatrati gotovo idealnima pa zato u termometriji obično govorimo o idealnim plinovima.

Budući da je za stalnu masu m idealnog plina umnožak $pV = \text{const.}$, pV se može smatrati termometričkom veličinom x , dakle $x = pV$. Stoga ćemo u daljnjem tekstu pod x razumijevati umnožak pV .

Mjerenja na idealnim plinovima pokazala su da se $x = pV$ pri temperaturi taljenja leda, dakle $x_0 = (pV)_0$, i pri vrelištu vode, dakle $x_{100} = (pV)_{100}$, odnose kao

$$x_{100}/x_0 = 1,366 \text{ l,}$$

odakle možemo izračunati

$$\frac{x_{100} - x_0}{x_0} = 0,366 \text{ l} = \frac{100}{273,15}$$

Uvedemo li oznaku $\gamma = -1/b$

$$\gamma = \frac{x_{100} - x_0}{x_0 \cdot 100 \text{ deg}} = 0,003 \text{ 661 /deg,} \quad (1.1-4)$$

možemo izraz (1.1—1) napisati u ovom obliku

$$x = x_0(1 + \gamma \vartheta),$$

odnosno zbog $x = pV$ i $x_0 = (pV)_0$

$$pV = (pV)_0(1 + \gamma \vartheta). \quad (1.1-5)$$

Ovdje je pV pri relativnoj temperaturi ϑ , a $(pV)_0$ pri temperaturi $\vartheta_{ov} = 0$ deg. Vrijednost koeficijenta γ naznačili smo u jednadžbi (1.1—4).

Izraz (1.1—5) izvanredno je važan za termometriju. Iz njega se naime vidi da se pomoću po volji odabrane mase plina može odrediti temperatura ϑ ako se izmjeri umnožak pV pri mjerenoj temperaturi ϑ , a prije toga ustanovi koliki je umnožak $(pV)_0$ pri temperaturi taljenja leda $\vartheta_{ov} = 0$ deg.

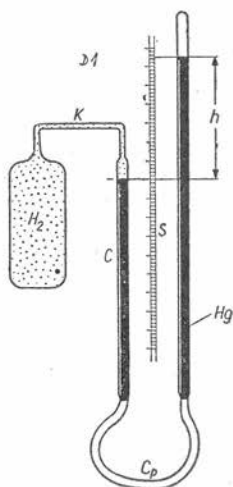
Jednadžba (1.1—5) međutim omogućuje još lakši postupak koji se stvarno vrlo korisno upotrebljava. Mjerenje se može naime provesti tako da volumen plina ostane isti i pri temperaturi ϑ_{ov} i pri mjerenoj temperaturi ϑ . U tom je slučaju

i na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe (1.1—5) $V = V_0$, pa se izraz pojednostavljuje u

$$p = p_0(1 + \gamma \vartheta), \quad (1.1—6)$$

gdje je p_0 pritisak pri temperaturi taljenja leda $\vartheta_{ov} = 0$ deg.

Na taj način radi vodikov termometar koji vidimo na slici D1. To je samo pojednostavnjena idejna skica vodikova termometra. Najprecizniji plinski termometri mnogo su kompliciraniji i imaju posebne spremnike za živu, brižljivo i od posebnog stakla izrađene kapilare, nonius na skali i niz drugih rafiniranih pomagala.



Termometar na slici D1 radi na principu jednadžbe (1.1—6). U posebnom spremniku H_2 nalazi se masa m plina koji preko kapilare K dolazi u dodir sa staklenom cijevi C u kojoj se nalazi živa Hg. Živa ispunjuje i drugu, pomičnu cijev C_p koja se zbog gibljive veze između obje cijevi može podizati i spuštati tako da plin H_2 u lijevoj cijevi C stalno dopire do nacrtane oznake (crtice) i time pri bilo kojoj temperaturi spremnika zadržava stalni volumen V_0 . Kad je temperatura plina ϑ_{ov} razlika razina žive iznositi će h_0 , a pri mjerenoj temperaturi ϑ razlika će iznositi h . Budući da je prema izvođenjima u odsječku B.1.10 pritisak p proporcionalan visini stupca žive, u tom slučaju zbog $h/h_0 = p/p_0$ jednadžba (1.1—6) glasi $h/h_0 = 1 + \gamma \vartheta$, odakle je

$$\vartheta = (h/h_0 - 1)/\gamma = (p/p_0 - 1)/\gamma.$$

Veličinu γ nazivamo temperaturnim koeficijentom toplinskog širenja pri stalnom volumenu. Pokusi pokazuju da γ jako ovisi o pritisku p i to različito za razne plinove. Za male tlakove vrijednost γ svih plinova približava se zajedničkoj granici $\gamma = 0,003\,661/\text{deg}$.

Mjerenje temperature može se idealnim plinom obavljati i tako da se pritisak drži konstantnim. U tom je slučaju prema izrazu (1.1—5) $p = p_0$, a temperatura ϑ mjeri se promjenom volumena posve nalik na opisano mjerenje kod $V = V_0 = \text{const}$. I takvi se plinski termometri upotrebljavaju za precizna mjerenja ϑ .

Univerzalnost temperaturnog koeficijenta širenja γ idealnih plinova dovodi do dalekosežnih zaključaka u termometriji. U to se možemo uvjeriti ako ponovo razmotrimo jednadžbu (1.1—5) koju možemo napisati u obliku

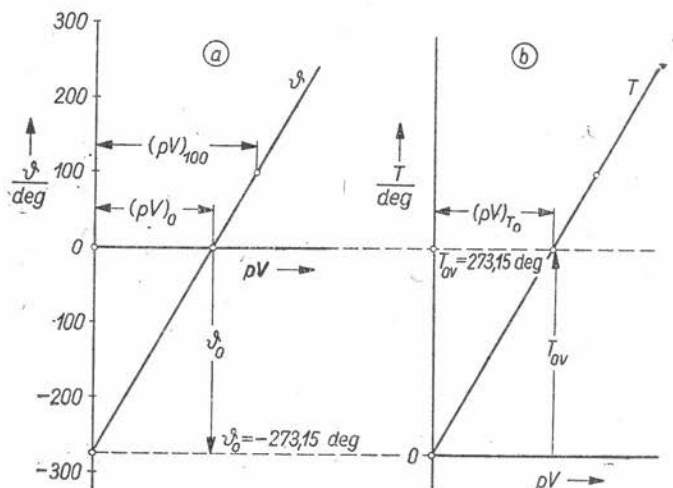
$$\vartheta = \frac{p V / (p V)_0 - 1}{\gamma}, \quad (1.1—7)$$

dakle s relativnom temperaturom ϑ kao zavisnom veličinom. Grafički prikaz jednadžbe (1.1—7) vidimo na slici D2a. Očito je da je temperaturni pravac ϑ položen kroz ključne tačke $(p V)_0$ i $(p V)_{100}$ pri temperaturama $\vartheta_{ov} = 0$ deg i $\vartheta_{vv} = 100$ deg.

Pravac siječe ordinatu duboko ispod $\vartheta = 0$ deg = ϑ_0 . Presjecište možemo lako izračunati kod $(p V) = 0$ iz jednadžbe (1.1—7) koja u tom primjeru daje

$$\vartheta_0 = -1/\gamma = -1/0,003\,661 \text{ deg}^{-1} = -273,15 \text{ deg}.$$

Relativnu temperaturu ϑ proizvoljno smo počeli mjeriti na temelju jednadžbe (1.1—1). Eksperimentiranja, naročito s plinovima, pokazala su nam da idealni plinovi imaju jednu zajedničku i univerzalnu tačku ϑ_0 koja je duboko ispod nultacke empirički odabrane skale relativne temperature ϑ . Tu najnižu tačku temperature nazivamo »apsolutnom ničicom temperature«.



Sl. D 2. Veza između relativne i apsolutne temperature

Iz dijagrama na slici D2a vidimo da umjesto relativne temperature ϑ možemo uvesti drukčiju temperaturnu ljestvicu koja započinje kod apsolutne nule za koju smo ustanovili da iznosi $\vartheta_0 = -1/\gamma = -273,15$ deg.

Termometrički definiramo »apsolutnu temperaturu T « pomoću značajke x termometričkog tijela jednadžbom

$$T = a x, \quad (1.1—8)$$

gdje x može dakako biti $x = pV$ ili h ili p itd. Usporedimo li izraz (1.1—8) s jednadžbom (1.1—1) $\vartheta = a x + b$ vidimo da su relativna temperatura ϑ i apsolutna temperatura T međusobno povezane jednadžbom $T = \vartheta - b$. Budući da je $b = -1/\gamma = -273,15$ deg, to je $T = \vartheta + 273,15$ deg. Označimo li

$$T_0 = 273,15 \text{ deg},$$

dobivamo konačni izraz

$$T = T_0 + \vartheta. \quad (1.1—9)$$

Na potrebu za apsolutnom temperaturom T ne upućuje samo udobnost termometričkog izraza (1.1—8) već i niz drugih eksperimentalnih istraživanja koja dovode do $T = 0$ deg kao fundamentalne temperaturne tačke dogovorne ljestvice temperature, jednostavniji način pisanja termodinamičkih zakona, a na kraju i sama kinetička teorija topline (vidi odsječak 9).

Jednadžbe (1.1—8), odnosno (1.1—9), prikazuje grafički slika D2b, gdje pravac apsolutne temperature T polazi iz vrijednosti $T = 0$ deg. Apsolutna temperatura T naziva se katkada i »temperaturom idealnog plina« što je razumljivo s obzirom na način kako smo ovdje do nje doprli od empirijski dogovorene relativne temperature ϑ . Iz usporedbe dijagrama na slikama D2a i b, te uz pomoć izraza (1.1—9), vidimo da će neke karakteristične tačke imati ove vrijednosti u obje temperaturne ljestvice:

apsolutna nula	$T = 0,$	$\vartheta = -273,15$ deg,
talište leda	$T = T_0 = 273,15$ deg,	$\vartheta = \vartheta_0 = 0,$
trojna tačka vode	$T = T_t = 273,16$ deg,	$\vartheta = \vartheta_t = 0,01$ deg,
vrelište vode	$T = T_{vv} = 373,15$ deg,	$\vartheta = \vartheta_{vv} = 100$ deg.

Ovdje valja ponovo naglasiti da ni uvođenjem ϑ ni uvođenjem T nismo temperaturu kao fizikalnu veličinu definirali, jer osnovnu veličinu ne možemo definirati. Da li je temperatura zaista nezavisna veličina pokazat će nam razmatranja u odsječku D.9.

1.2. Jedinice temperature

U prethodnom smo odsječku mjerili empiričku relativnu temperaturu ϑ i apsolutnu temperaturu T istom jedinicom temperature »deg«. Objasnili smo da je deg skraćenica za »stupanj« koji se engleski naziva degree, a francuski degré. Vrijednost te jedinice odredili smo tako da smo talištu vodenog leda pripisali relativnu temperaturu $\vartheta_{ov} = 0$ deg, a vrelištu vode $\vartheta_{vv} = 100$ deg. Kasnije smo ustanovili da ovim značajkama vode pripadaju apsolutne temperature $T_{ov} = T_0 = 273,15$ deg i $T_{vv} = 373,15$ deg. Vidimo da je $\vartheta_{vv} - \vartheta_{ov} = T_{vv} - T_0 = 100$ deg. Jednadžba (1.1—9) $T = T_0 + \vartheta$ i dijagrami na slici D2 pokazali su nam da se empirička ϑ i apsolutna temperatura T razlikuju samo za vrijednost $T_0 = 273,15$ deg.

U praksi je međutim velika šarolikost u pogledu primjene jedinica temperatura, u terminologiji i u oznakama jedinica. Tako se na primjer naša relativna temperatura naziva »Celzijevom temperaturom« po švedskom matematičaru i geodetu *Celsiusu* koji je 1742. godine prvi pripisao talištu leda 100 deg, a vrelištu vode 0 deg, dakle obrnuto nego što je uobičajeno danas. Tek je njegov zemljak *Strömer* obavio zamjenu kakvu imamo sada.

Kasnije je ϑ u praksi nazvana »Celzijeva temperatura ϑ «, a jedinica »stupanj Celzija« = deg_C. Naravno da je naš deg potpuno jednak deg_C, dakle deg = deg_C. Jedinica »stupanj Celzija« = deg_C u praksi se počela označavati sa »°C«, što se izgovara »stupanj Celzija«. U najnovije vrijeme kod oznaka se ispušta znak kružića, te se jednostavno piše »C«, a izgovara »celzij«. Prema tom je načinu dakle $\vartheta = 100$ C, što se čita: »relativna temperatura iznosi sto celzija«. Prema svemu izloženom je

$$\text{deg} = \text{deg}_C = \text{stupanj Celzija} = ^\circ\text{C} = \text{C}.$$

S druge je strane *Lord Kelvin* uveo pojam termodinamičke temperature (vidi odsječak 1.4) koja je identična našoj apsolutnoj temperaturi T . Kako ljudi nisu znali razlikovati veličine ϑ i T , oni su i za jedinicu apsolutne temperature uveli nekoliko naziva: »apsolutni stupanj« (°abs), »kelvinov stupanj« (°K), a u novije vrijeme jednostavno »kelvin« (K). Naravno da su sve te jedinice međusobno jed-

nake, različiti su samo nazivi. Osim toga sve su te jedinice (»kelvinove«) jednake našem ranije upotrebljavanom deg, dakle:

$$\text{deg} = \text{deg}_C = \text{deg}_K = \text{stupanj Kelvina} = {}^\circ\text{K} = \text{K}.$$

Ovo šarenilo jedinica prikazali smo grafički na slici D3 koja prikazuje dio skale nekog živinog termometra. Lijevo od živinog stupca nacrtana je skala relativne (Celzijeve) temperature ϑ , a desno skala apsolutne temperature T . Kotama smo željeli naznačiti da su jedinice lijeve i desne skale međusobno jednake.

Naravno da toliko obilje naziva zbunjuje početnika, a svakako je nepotrebno. Vidjeli smo da smo u čitavom prijašnjem odsječku prošli s jednom jedinicom (deg), ali smo načinili strogu razliku između veličine apsolutna temperatura T i veličine relativna (Celzijeve) temperatura ϑ , te pri tom držali na pameti veličinsku jednadžbu $T = T_0 + \vartheta$, gdje je $T_0 = 273,15 \text{ deg}$.

Metrološki vrlo dobro potkovani autori danas se dosljedno drže jednoga od dva slijedeća načina upotrebe jedinica temperature:

Jedni dosljedno upotrebljavaju oznaku deg (u njemačkoj literaturi grd, od Grad) pa na primjer za vrelište vode kažu $\vartheta = 100 \text{ deg}$ ili $T = 373,15 \text{ deg}$. Za specifičnu toplinu zraka u skladu s tim navode

$$c_p = 1007 \frac{\text{J}}{\text{kg deg}}.$$

Ni do kakve kolizije pri tom ne može doći jer vrijede kako jednadžba $\Delta Q = m c_p \Delta T$ tako i $\Delta Q = m c_p \Delta \vartheta$, budući da se radi o razlikama temperatura, a znamo da je $\Delta T = T_2 - T_1 = \Delta \vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$.

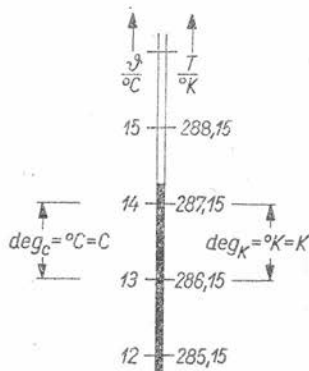
Drugi metrološki napredni autori drže se načela koje potječe iz principa jednostavnosti. Oni za jedinicu ϑ i T upotrebljavaju »kelvin« koji označuju s K. Prema tome kažu da relativna temperatura vrelišta vode iznosi $\vartheta = 100 \text{ K}$, a apsolutna temperatura $T = 373,15 \text{ K}$. Specifičnu toplinu zraka pišu u obliku $c = 1007 \text{ J/(kg K)}$.

Oba navedena načina su dobra. Prednost drugoga je ta što je simbol jedinice kraći, K umjesto deg. Stoga bismo preporučili bilo prvi bilo drugi, ali nikako onaj treći koji se danas najčešće upotrebljava, a najnezgodniji je u udžbenicima. Na primjer, u istoj tablici gotovo svih udžbenika nalazimo da su plinska konstanta i specifična toplina zraka pri relativnoj temperaturi $\vartheta = 0 \text{ deg}$ i pritisku $p = 1 \text{ atm}$

$$R = 287 \frac{\text{J}}{{}^\circ\text{K kg}}; \quad c_p = 1007 \frac{\text{J}}{{}^\circ\text{C kg}}.$$

Znamo da vrijedi relacija $R = c_p - c_v$, gdje je c_v specifična toplina pri konstantnom volumenu. Pokušamo li je izračunati iz navedene dvije vrijednosti dobivamo

$$c_v = c_p - R = 1007 \frac{\text{J}}{{}^\circ\text{C kg}} - 287 \frac{\text{J}}{{}^\circ\text{K kg}} = ?$$

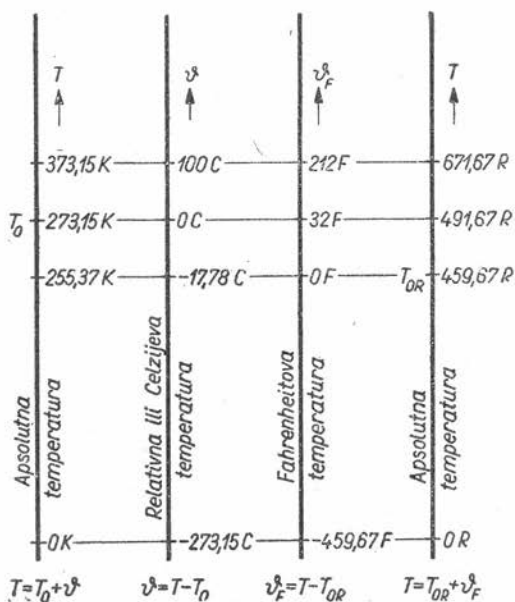


Sl. D3. Dio skale relativne i apsolutne temperature na istom termometru

Oduzimanje možemo obaviti tek onda kad umjesto °C napišemo °K ili pak umjesto °K oznaku jedinice °C.

Prvo spomenuti autori upotrebljavaju $\text{deg} = ^\circ\text{K} = \text{K} = ^\circ\text{C} = \text{C}$ pa im je onda $c_v = 720 \text{ J}/(\text{kg deg})$, a drugi upotrebljavaju $\text{K} = \text{deg} = ^\circ\text{K} = ^\circ\text{C}$ pa stoga pišu $c_v = 720 \text{ J}/(\text{kg K})$.

Uočivši te neprilike neki su autori već ranije pokušali mjesto svih tih oznaka pisati samo znak za stupanj »°«, dakle $\text{deg} = ^\circ$. Kod njih je u navedenom primjeru $c_v = 720 \text{ J}/\text{kg}^\circ$. Smatramo da taj način, iako ispravan, nije pogodan, jer pri računima i čitanju štampanih djela lako se previdi ta sitna oznaka koja predstavlja vrlo važnu jedinicu nauke o toplini.



Sl. D 4. Usporedba apsolutne, Celzijeve i Fahrenheitove temperature

metarske jedinice $\text{deg} = \text{kelvin} = \text{K} = \text{celsius} = \text{C}$.

Grafički prikaz T , Θ i Θ_F vidimo na slici D4, gdje su ubilježene neke karakteristične temperaturne tačke. Celzijevu temperaturu Θ i Fahrenheitovu Θ_F povezuje veličinska jednadžba.

$$\Theta_F = 32 F + \Theta. \quad (1.2-1)$$

Primjenu ove jednadžbe možemo vidjeti na primjeru. Neka je evropska relativna (Celzijeva) temperatura u stanovitom slučaju $\Theta = 100 \text{ K} = 100 \text{ deg}$. Želimo znati kako će tu temperaturu izraziti Amerikanac. Prema izrazu (1.2-1) Fahreheitova će temperatura iznositi

$$\Theta_F = 32 F + 100 \text{ K}.$$

Šarenilo jedinica temperature naročito oživi kad se paralelno s metarskim jedinicama temperature upotrebljavaju anglo-američke jedinice temperature. Englezi i Amerikanci također imaju dvije temperature, jednu relativnu Θ_F i drugu apsolutnu T . Svoju relativnu temperaturu nazivaju Fahrenheitovom temperaturom. Tu veličinu označavat ćemo simbolom Θ_F .

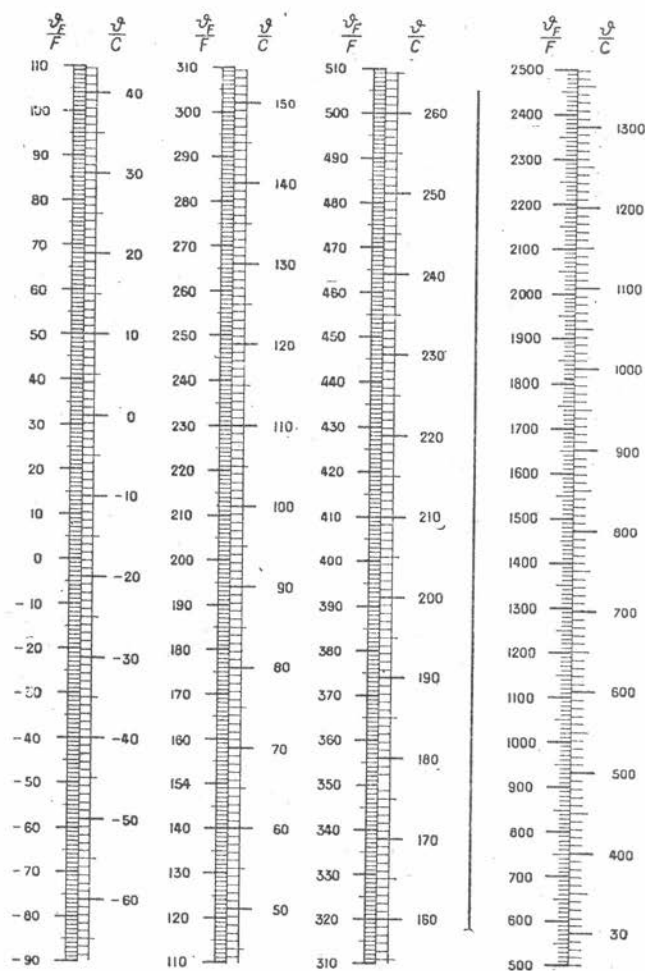
Jedinica temperature Θ_F ima niz oznaka: »stupanj Fahrenheita« (deg_F), $^\circ\text{F}$ ili najjednostavnije F , što se čita »farnhajt«. Ova temperaturna ljestvica određena je isto tako samovoljno kao i Celzijeva. Talištu vodenog leda pripisali su vrijednost $\Theta_{F0} = 32 \text{ deg}_F$, a vrelištu vode $\Theta_{Fv} = 212 \text{ deg}_F$. Prema tome raspon temperature od tališta leda do vrelišta vode iznosi 180 deg_F . Budući da u Celzijevoj skali tom intervalu pripada 100 deg to je $180 \text{ deg}_F = 100 \text{ deg}$ ili $\text{deg} = 1,8 \text{ deg}_F$. Jedinica $\text{deg}_F = \text{fahrenheit} = F$ je dakle $1,8$ puta manja od

Budući da je $K = \text{deg} = 1,8 \text{ deg}_F = 1,8 F$, to je $100 K = 180 F$, pa uvrštenjem u gornju jednadžbu slijedi

$$\vartheta_F = 32 F + 180 F = 212 F.$$

Posve analogno izrazu (1.2—1) Celzijeva temperatura ϑ računa se iz Fahrenheitove pomoću $\vartheta = \vartheta_F - 32 F$. Računajmo isti primjer tim putem. Sada je $\vartheta_F = 212 F$. Prema tome je $\vartheta = 212 F - 32 F = 180 F$. Kako je $F = K/1,8$, to je $\vartheta = 180 K/1,8 = 100 K$.

I Anglo-Amerikancima je, kao i Evropljanima, potrebna apsolutna temperatura T zbog istog razloga. Njihova veličina T ista je kao i metarska, samo što pri



Sl. D 5. Odnos brojčanih iznosa Celzijeve i Fahrenheitove temperature za ista temperaturna stanja

tom upotrebljavaju jedinicu »stupanj Rankina« $= \text{deg}_R = {}^\circ R = R$. Po vrijednosti to je ista jedinica kao i F, dakle je

$$\text{deg}_R = {}^\circ R = R = \text{deg}_F = {}^\circ F = F.$$

Na slici D4 vidimo da su apsolutna temperatura T i Fahrenheitova ϑ_F međusobno vezane veličinskom jednakšbom

$$T = T_{\text{OR}} + \vartheta_F,$$

gdje je $T_{\text{OR}} = 459,67 \text{ F} = 459,67 \text{ K} / 1,8 = 255,37 \text{ K}$. Prema tome je T_{OR} ona apsolutna temperatura kod koje je vrijednost Fahrenheitove temperature $\vartheta_F = 0$.

U praksi je često potrebno brzo preračunati Fahrenheitovu temperaturu na Celzijevu. Da ne bismo morali računati prema izrazu (1.2—1) u dijagramu na slici D5 donosimo približan prikaz odnosa brojčanih iznosa evropske relativne (Celzijeve) temperature ϑ/K i angloameričke relativne (Fahrenheitove) temperature ϑ_F/F . Tako na primjer vidimo da $\vartheta_F/\text{F} = 50$, tj. $\vartheta_F = 50 \text{ F}$ predstavlja isto temperaturno stanje kao i $\vartheta/\text{K} = 10$ tj. $\vartheta = 10 \text{ K}$.

Ponovo moramo naglasiti da veličine ϑ_F i ϑ nisu međusobno jednake, što nam izričito kaže jednakšba (1.2—1). Razlika je otprilike takva kao kada se kaže da je promjer drveta $d = 1 \text{ m}$, a radijus $r = 0,5 \text{ m}$. Ovdje su d i r vezane jednakšbom $d = 2r$, a kod temperatura je na snazi (1.2—1). No kako ϑ i ϑ_F opisuju isto temperaturno stanje tako i d i r opisuju isto drvo.

Kako smo već rekli, apsolutne temperature su jednake. U primjeru $\vartheta_F = 50 \text{ F}$ apsolutna će temperatura iznositi kod Amerikanaca $T = T_{\text{OR}} + \vartheta_F = 459,67 \text{ F} + 50 \text{ F} = 509,67 \text{ F}$, dok će Evropljanin za svoju primjenu račun samo nastaviti pomoću $F = K/1,8$, dakle $T = 509,67 \text{ F} = 509,67 \text{ K} / 1,8 = 283,15 \text{ K}$.

Spomenimo još da se na nekim starim termometrima može naći jedinica relativne temperature reamur (Re) po francuskom zoologu Reamuru. Ova jedinica veća je od kelvina, a iznosi $\text{Re} = 1,250 \text{ deg} = 1,250 \text{ K}$.

1.3. Međunarodna ljestvica temperature

Kako bi se temperatura mogla u čitavom svijetu jedinstveno i tačno mjeriti, posebni Savjetodavni odbor za termometriju i kalorimetriju Generalne konferencije za mjere i utege propisao je uporišne temperaturne tačke u odnosu na koje se računaju mjerene temperature. S obzirom na široki raspon apsolutnih temperatura T od apsolutne nule do nekoliko tisuća kelvina upotrebljene su razne karakteristične tačke različitih tvari (tačka taljenja ili krutište, vrelište i tačka isparavanja) kao i razne metode mjerenja pomoću određivanja električkog otpora, električkog napona termočlanka i zračenja topline. U daljnjem ćemo tekstu navesti nekoliko spomenutih uporišta u širokom temperaturnom intervalu.

Generalna konferencija za mjere i utege označila je 1954. godine trojnu tačku vode apsolutnom temperaturom

$$T_t = 273,16 \text{ K}$$

pri apsolutnom tlaku od $10,1325 \text{ N/cm}^2 = 1 \text{ atm}$ (normalna atmosfera). Talište leda ima $0,01 \text{ K}$ nižu temperaturu dakle je $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Budući da je relativna temperatura (Celzijeva) $\vartheta = T - T_0$, to je relativna temperatura trojne tačke vode $\vartheta_t = T_t - T_0 = 0,01 \text{ K}$.

Vrelištu vode (ravnotežna temperatura vrele vode s njezinom parom) pripisana je temperatura

$$T_{vv} = 373,15 \text{ K ili } \vartheta_{vv} = 100 \text{ K.}$$

U tablici D.1 donosimo nekoliko kontrolnih vrijednosti temperature prema međunarodnoj temperaturnoj skali iz godine 1948. koje služe za baždarenje preciznih instrumenata za mjerenje temperature.

Kontrolne temperature prema Međunarodnoj temperaturnoj ljestvici

Tablica D.1

Tvar		Brojčani iznos relativne (Celsijeve) temperature; ϑ / K
Vrelište kisika.....	ϑ_{-1}	$-182,970 + 12,6 \delta - 6,5 \delta^2$
Krutište žive.....		$-38,87$
Talište leda.....	ϑ_0	$0,00$
Vrelište vode.....	ϑ_1	$100,00 + 36,857 \delta - 20,159 \delta^2 + 16,21 \delta^3$
Vrelište naftalina.....		$217,96 + 58,4 \delta - 33 \delta^2$
Talište kadmija.....		$320,9$
Talište olova.....		$327,3$
Talište cinka.....		$419,5$
Vrelište sumpora.....	ϑ_2	$444,60 - 90,802 \delta - 47,573 \delta^2 + 43,61 \delta^3$
Talište antimona.....	ϑ_3	$630,50$
Talište srebra.....	ϑ_4	$960,8$
Talište zlata.....	ϑ_5	$1063,0$
Talište nikla.....		1453
Talište paladija.....		1552
Talište rodija.....		1960
Talište iridija.....		2443
Talište volframa.....		3380

Opaska: Pod vrelištem, krutištem i talištem razumijevaju se ravnotežne temperature između tekućeg i plinovitog, odnosno krutog i tekućeg agregatnog stanja tvari. Koefficient δ je $\delta = p / \text{ktor} - 0,760$ gdje je p apsolutni pritisak, a $k = \text{kilo} = 1000$.

Na desnom dijelu tablice navedeni su korekturni podaci koje treba primijeniti kad je pritisak p različit od 1 normalne atmosfere = 760 torr u rasponu od 660 do 860 torr. Pri tom je korekturni faktor

$$\delta = \frac{p / \text{torr} - 760}{1000},$$

a p stvarni pritisak kod kojega je obavljeno mjerenje. Na primjer kod $p = 790$ torr faktor će iznositi $\delta = 0,03$.

Temperaturna ljestvica razdijeljena je u četiri dijela koja smo u tablici D.1 istakli vodoravnim odvajanjem pomoću tri crte. U drugom stupcu označene su temperature ϑ_{-1} do ϑ_5 na koje se vrijednosti oslanjaju interpolacije za električko mjerenje temperatura u svakom od označena četiri područja.

Prvo je područje od vrelišta kisika ϑ_{-1} do tališta leda ϑ_0 . Mjerenje se vrši pomoću platinskog otpornog termometra. Mjerenje ϑ provodi se izračunavanjem ϑ iz električkog otpora platinske žice R pri mjerenoj temperaturi ϑ pomoću jednadžbe

$$R = R_0 [1 + A \vartheta + B \vartheta^2 + C \vartheta^3 (\vartheta - 100 \text{ K})].$$

Pri tom je R_0 otpor pri $\vartheta = 0$. Konstante A i B odrede se mjerenjem između ϑ_0 i ϑ_3 , dok se konstanta C odredi mjerenjem R pri temperaturi ϑ_{-1} .

Drugo je područje od tališta leda ϑ_0 do tališta antimona ϑ_3 . Za platinski termometar u tom području vrijedi jednadžba

$$R = R_0 (1 + A \vartheta + B \vartheta^2),$$

gdje se R_0 , A i B odrede mjerenjem R pri ϑ_0 , ϑ_1 i ϑ_2 .

Treće područje je od ϑ_3 do tališta zlata ϑ_5 . Mjerenje se obavlja pomoću platina — platinrodij termočlanka. Napon članka U pri mjerenoj temperaturi ϑ iznosi

$$U = a + b \vartheta + c \vartheta^2,$$

gdje se konstante a , b i c odrede mjerenjem električkog napona pri temperaturama ϑ_3 , ϑ_4 i ϑ_5 . Prilikom mjerenja jedno spojno mjesto mora biti na ϑ_0 , dok je drugo na mjerenoj temperaturi ϑ . Žica od platine mora biti toliko čista da je $R_{\vartheta_1}/R_{\vartheta_0} > 1,391$, a druga žica mora sadržavati 90% masenih udjela platine i 10% rodija. Takav termočlan mora kod ϑ_5 , ϑ_4 i ϑ_3 dati ove napone:

$$\begin{aligned} U_{\vartheta_5} &= (10\,300 \pm 50) \mu\text{V} \\ U_{\vartheta_5} - U_{\vartheta_4} &= [1\,185 \pm 0,158 (U_{\vartheta_5}/\mu\text{V} - 10\,310) \pm 3] \mu\text{V} \\ U_{\vartheta_5} - U_{\vartheta_3} &= [4776 \pm 0,631 (U_{\vartheta_5}/\mu\text{V} - 10\,310) \pm 5] \mu\text{V}. \end{aligned}$$

Četvrto je područje iznad $\vartheta_5 = 1063,0 \text{ K}$. Temperatura se mjeri preko energije zračenja koje određuje Planckova jednadžba primijenjena jednom na energiju zračenja W_{ϑ_5} pri temperaturi tališta zlata $T_5 = \vartheta_5 + 273,15 \text{ K} = 1336,15 \text{ K}$, a drugi puta na W_{ϑ} pri mjerenoj temperaturi $T = T_0 + \vartheta = 273,15 + \vartheta$:

$$\frac{W_{\vartheta}}{W_{\vartheta_5}} = \frac{e^{c_2/\lambda T_5} - 1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}$$

U jednadžbi je $c_2 = 0,01438 \text{ K} \cdot \text{m}$, a λ je valna duljina zračenja.

1.4. Termodinamička ljestvica temperature

Prilikom odabiranja temperaturnih ljestvica u odsjeku 1.1. služili smo se kao termometričkom veličinom x jednadžbe (1.1—1) visinom stupca žive h , tlakom plina p ili čak umnoškom pV . Linearost temperaturne skale bila je to bolje za- jamčena što je ponašanje plina bilo idealnije, to jest bliže jednadžbi stanja idealnih plinova $pV = mRT$.

Lord Kelvin u želji za materijalno nezavisnom reprodukcijom temperaturne skale upotrebio je godine 1852. za termometričku veličinu samu toplinu Q , dakle $x = Q$, čime izraz (1.1—8) dobiva oblik

$$T = a Q. \quad (1.4—1)$$

Za neku vrijednost temperature $T = T_0$ prema tome vrijedi

$$T_0 = a Q_0. \quad (1.4-2)$$

Temperaturna ljestvica na toj osnovi dobila je naziv »termodinamička ili Kelvinova ljestvica temperature« jer ne ovisi o konstrukciji instrumenata ni o termometričkom sredstvu.

Vrijednost takve skale možemo uočiti na primjeru povratnog Carnotovog procesa koji je u p - V dijagramu prikazan na slici D 6. Stanovita količina bilo kojeg plina izotermički se ekspankira iz stanja 1 u stanje 2 tako da mu se izotermički pri temperaturi ϑ dovede toplina Q . U svojevrijem odabranom stanju 2 prikladnom se izolacijom cilindra prekida dovodenje topline, pa onda od 2 do 3 ekspanzija teče adijabatski i pri tom se plin ohladi na temperaturu ϑ_0 . Od stanja 3 do 4 odvija se izotermička kompresija, prigodom čega se odvodi toplina Q_0 . U stanju 4 hlađenje cilindra prekidamo, pa se kompresija od 4 do 1 nastavlja adijabatski.

Ovaj povratni kružni proces vođen je na primjer između temperatura ϑ — $\vartheta_0 = 100 \text{ K} = T - T_0$; dakle je

$$T - T_0 = 100 \text{ K} = 100 \text{ deg.}$$

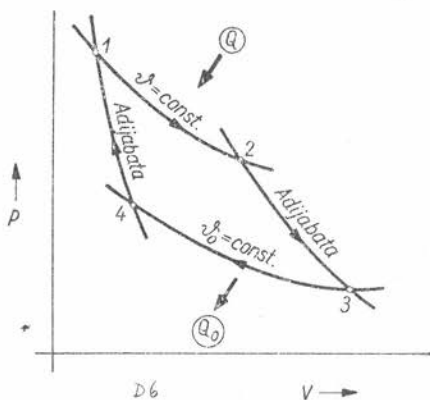
Podjela jednadžbe (1. 4—1) sa (1. 4—2) daje $T/T_0 = Q/Q_0$. Ako to uvrstimo u gornju jednadžbu dobivamo

$$T_0 = \frac{100 \text{ K}}{Q/Q_0 - 1}. \quad (1.4-3)$$

Prema tome Kelvinova (apsolutna) temperatura T_0 proizlazi iz omjera izmjerenih toplina Q i Q_0 povratnog Carnotovog procesa. Pri tom upotrebjeno sredstvo (npr. zrak) ne mora slijediti jednadžbu stanja idealnih plinova.

Iz jednadžbe (1. 4—3) mjerenjem slijedi $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Viša temperatura T slijedi iz $T = T_0 Q/Q_0$.

Praktički se Kelvinova termodinamička ljestvica podudara sa skalom dobrog plinskog termometra.



Sl. D 6. Prikaz Carnotova procesa u p - V dijagramu

2. MOLEKULARNE I MOLNE VELIČINE I JEDINICE

2.1. Količina tvari

U dosadašnjim smo razmatranjima karakterizirali tvari njihovim svojstvima na primjer masom, volumenom, normiranom težinom itd. Kad kažemo da masa kupljenog ugljena iznosi 1000 kg, time stvarno razumijevamo količinu (množinu) tvari, u ovom slučaju ugljena. Čak ni promjena agregatnog stanja ne zamućuje našu predodžbu u tom smislu: grumen leda predstavlja količinu tvari i pošto se otopio u vodi.

Takvo opisivanje tvari dovodi do primjene pojma molekule kao konkretnog obilježja tvari. Masa m određene količine tvari opisuje nam samo jedno od svojstava tvari, ustrajnost koja se protivi promjeni postojećeg načina gibanja. Ali masa nije sama tvar već njeno svojstvo. Isto tako ni obujam nije konkretno sama tvar. Karakteriziranje tvari masom ne ulazi u pitanje kakva je tvar, da li živo biće ili mrtva materija, a isto tako da li je ove ili one boje, te kakav joj je miris.

O tome ne vodi računa ni opisivanje pomoću broja molekula. Kad kažemo da je broj molekula neke tvari Z , time smo samo izjavili da stanovita količina tvari sadrži Z jednakih molekula. Time još nismo ništa rekli o tome kakve su te molekule, da li velikih masa jer su sastavljene od nekoliko atoma, ili su sitne, čak sami atomi.

Kao što stanovitu količinu tvari karakterizira veličina »masa« m tako je na drukčiji način može karakterizirati i veličina »količina tvari« Z , tj. broj molekula Z . Da bismo utvrdili brojčani iznos stanovite mase m moramo se poslužiti jedinicom, na primjer kilogramom, tj. $m = m[m]$ gdje uspravni simbol označuje brojčani iznos. Posve analogno možemo učiniti i kod primjene veličine »količina tvari« Z . Najbliža nam je jedinica sama brojka 1.

Možda ovako rezoniranje izgleda ponešto čudnovato, pogotovu s obzirom na to da dosada nismo imali prilike raditi s takvim »brojčanim veličinama«. No do pojma veličine Z možemo doći i zaobilaznim putem. Zamislimo neku količinu homogene tvari mase m koja je sastavljena od jednakih molekula mase m_m . U tom je slučaj omjer dviju veličina

$$Z = m / m_m \quad (2.1-1)$$

također veličina, baš naša veličina »količina tvari« Z koju ubrajamo među takozvane brojčane veličine.

U skladu s osnovnom relacijom veličinskog računa $G = G[G]$ možemo i veličinu Z pisati kao

$$Z = Z[Z], \quad (2.1-2).$$

gdje uspravni Z označuje brojčani iznos, a *kurzivni* Z veličinu »količina tvari«. Naravno da i za (2. 1—2) vrijedi pravilo da se brojčani iznosi odnose obrnuto od upotrebljenih jedinica, dakle

$$Z_1 / Z_2 = [Z]_2 / [Z]_1.$$

Neka je jednom upotrebljena jedinica $[Z]_1 = 1$, dakle jedna molekula, a drugi puta $[Z]_2 = k = 1000$. U tom je slučaju $Z_1 / Z_2 = k / 1 = 1000$.

Jedinicu $[Z]$ možemo odabrati po svojoj volji, to može biti bilo koji pozitivni broj. Kako smo vidjeli to može biti i brojka 1, no iz praktičnih i historijskih razloga odabrana je mnogo veća jedinica. Za jedinicu odabran je onoliki broj molekula koliko ih sadrže 32 grama kisika O_2 . To je bilo u mladim danima znanosti, kasnije je mjerenjem utvrđeno da je ta jedinica

$$[Z] = N = 6,025 \cdot 10^{23}.$$

Ova jedinica brojčane veličine količine tvari Z nazvana je mol. To znači da je mol ona količina tvari koja sadrži N molekula:

$$N = [Z] = \text{mol}.$$

Broj N , koji se naziva *Avogadro — Loschmidtovim brojem*, utvrđuje se (zbog citirane historijske definicije) mjerenjem. Novija mjerenja pokazuju da je

$$N = (6,025\,3 \pm 1 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{23},$$

tj. mol predstavlja $6,025\,3 \cdot 10^{23}$ molekula s netačnošću $\pm 1 \cdot 10^{20}$ molekula.

U novije se vrijeme prema *Ulichu* primjenjuje i dekadski mol koji ćemo opisati s indeksom D , dakle

$$[Z]_D = N_D = 10^{24} = \text{dekadski mol.}$$

Ovaj mol nije vezan uz neku materijalnu definiciju kao Avogadro-Loschmidtov klasični mol, već je definiran gornjom jednačicom

Da bismo mogli lakše razlikovati oznake brojčanih iznosa veličine Z od simbola same veličine Z u daljnjem ćemo tekstu izraz (2. 1—2) pisati u obliku

$$Z = n[Z] \text{ ili } Z = nN,$$

gdje je n brojčani iznos veličine Z u jedinici $[Z] = N = \text{mol}$.

2.2. Opća plinska konstanta

Jednačica (2. 1—1) može se dakako napisati i u obliku $m = Z m_m$, koja kaže da je masa m neke količine tvari Z puta veća od mase m_m svake od jednakih molekula. Ovako izraženu masu m možemo uvrstiti u jednačicu stanja $pV = mRT$ pa dobivamo

$$pV = m_m RT. \quad (2.2-1)$$

Naravno da se masa m_m molekule jednog plina razlikuje od mase molekule drugog plina. Isto se tako od plina do plina mijenja i plinska konstanta R koja se zato katkada naziva »individualnom plinskom konstantom.«

Niz eksperimenata pokazuje međutim da je produkt $m_m R$ konstantan i jednak za sve idealne plinove, tj. one koji se pokoravaju jednačici stanja. Taj umnožak jednak je poznatoj *Boltzmannovoj* konstanti k

$$k = R m_m,$$

koja prema novijim mjerenjima iznosi

$$k = (1,380\,3 \pm 5 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-23} \text{ J/deg.}$$

Prema tome jednačicu (2. 2—1) možemo napisati u obliku

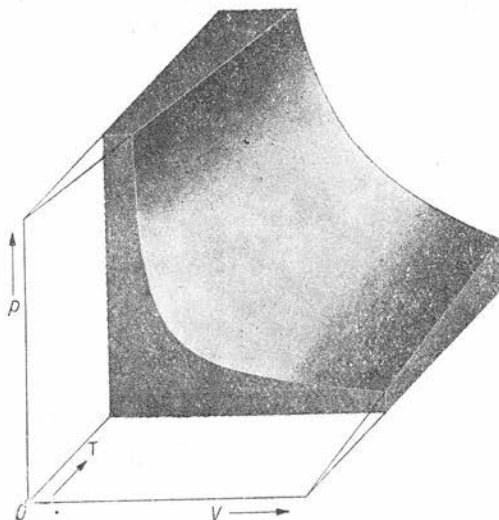
$$pV = kZT, \quad (2.2-2)$$

gdje više nema nikakvog obilježja individualnosti plina. Gornji izraz naime ništa ne govori o tome o kojemu se plinu radi, on samo međusobno povezuje pritisak i volumen s brojem molekula (veličina Z) i apsolutnom temperaturom. Najopćenitiji oblik jednačice stanja plinova (2. 2—2) uopće ne vodi računa o tome da li su molekule složene i velike ili se radi o jednoatomnom plinu!

Jednačica (2. 2—2) jedna je od temeljnih za nauku o toplini, iako ona tačno vrijedi samo za idealne plinove. Na slici D7 prikazali smo tu jednačicu skicom prostornog dijagrama s osima p , V , T . Na slici se vidi kako nastaju karakteristične krivulje termodinamike. Kod $T = \text{const.}$ dobiva se izoterma, kod $p = \text{const.}$ izo-

bara, a kod $V = \text{const.}$ izohora. Ove krivulje nastaju na ravninama kojima kroz te konstantne tačke presječemo tijelo na slici D7.

Usporedimo li izraz (2. 2—2) s uobičajenom jednađbom stanja $p V = R m T$ vidimo da je $Z k = m R$, pa stoga možemo Boltzmannovu konstantnu k smatrati



Sl. D 7. Prostorni prikaz jednađbe stanja plina

nekom novom plinskom konstantom. To je očigledno jer razmatranu količinu tvari jednom opisujemo brojem molekula Z , a drugi puta masom m svih tih molekula, pa kako je $Z/m = k/R$, to je k plinska konstanta koja se odnosi na Z molekula bilo kojeg idealnog plina.

Izraz (2. 2—2) seže još mnogo dublje. U to se možemo uvjeriti ako ga napišemo u nešto izmijenjenom obliku

$$\frac{pV}{kT} = Z, \quad (2.2-3)$$

koji opisuje izvanredno važnu činjenicu: Pod istim pritiskom p u istom volumenu V nalazi se pri istoj temperaturi T jednaki broj molekula Z bilo kojeg plina. Jednađba (2. 2—3) je dakle matematički izraz čuvenog Avogadrova zakona koji govori samo o broju molekula, a individualnost plina uopće ne dolazi do izražaja.

Ta je činjenica uvjetovala da se jednađba stanja plinova primjenjuje u najopćenitijem obliku (2. 2—2), što se naročito upotrebljava u kemiji i donekle u tehničkoj termodinamici.

Ipak se opća jednađba stanja obično ne piše sa Boltzmannovom konstantom k , već se uvodi pojam mola koji smo ranije u odsjeku 2. 1 definirali s $\text{mol} = N = 6,025 \cdot 10^{23}$. Konstanta k se naime ne mijenja ako je pomnožimo i podijelimo s N , dakle

$$k = N k / N.$$

No ako N u brojniku izrazimo sa $N = 6,025 \cdot 10^{23}$, a N u nazivniku sa $N = \text{mol}$, gornja nam jednadžba daje

$$R_o = k = \frac{Nk}{\text{mol}} = \frac{6,025 \cdot 10^{23} \cdot 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/deg}}{\text{mol}},$$

$$R_o = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{deg}},$$

pa sada jednadžba stanja glasi

$$p V = R_o Z T. \quad (2.2-4)$$

Veličinu $R_o = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{deg})$ nazivamo općom plinskom konstantom jer ona vrijedi za sve plinove. U izrazu (2. 2—4) je dakako Z količina tvari, tj. broj molekula.

Budući da je mol katkada premala jedinica za praktične račune upotrebljava se 1000 puta veća jedinica:

$$\text{kilomol} = 10^3 \text{ N} = 6,025 \cdot 10^{26},$$

tj. kilomol je ona količina tvari koja sadrži $6,025 \cdot 10^{26}$ molekula. Budući da je $\text{mol} = 10^{-3} \text{ kmol}$, u tom slučaju vrijednost plinske konstante iznosi

$$R_o = 8314 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{deg}).$$

Izloženo možda izgleda trivijalno jer spada u osnove fizikalne kemije. U primjeni međutim prečesto dolazi do nesporazuma, pa smo stoga pokušali ove pojmove svesti na njihovo ishodište. Do nepravilnosti obično dolazi zato što se ponekad brkaju pojmovi molnih veličina koje smo ovdje razmatrali i »molnih masa« koje ćemo obraditi u odsječku 2. 4.

2.3. Molekularna masa

Uz ranije spomenute molne veličine redovito dolazi pojam molekularne i atomske mase. Stvarno se pod time razumijeva relativna molekularna (atomska) masa, tj. omjer mase m_m jedne molekule neke tvari i jedne šestinaestine mase atoma kisika, dakle

$$\frac{\text{relativna molekularna}}{\text{(atomska) masa } M(A)} = \frac{\text{masa molekule (atoma) } m_m}{\frac{1}{16} \text{ mase atoma kisika } m_o}$$

ili u jednadžbi sa simbolima

$$M = \frac{m_m}{m_o/16} = \frac{16 m_m}{m_o}. \quad (2.3-1)$$

Prema tome je relativna molekularna masa M čisti broj, čak i onda kad se u govoru ili u tekstu propušta pobliža oznaka »relativna«. Isto vrijedi i za pojam »molekularne težine«, gdje se umjesto mase u definiciju (2. 3—1) uvode normirane težine (sa $g_N = 9,806 65 \text{ m/s}^2$; vidi odsječak B. 5. 1).

Relativna atomska masa također je definirana jednadžbom (2. 3—1), samo pod m_m treba staviti masu atoma tvari, a ne masu molekule.

Postoje dvije relativne molekularne mase. Fizikalna je ona kod koje se za m_o uzima $1/16$ mase atoma kisikova izotopa ^{16}O u iznosu $m_o/16 = (1,659\,7 \pm 1 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-27}$ kg. Ova masa naziva se »jedinicom atomske mase«. Kemijska relativna molekularna masa definira se pomoću izraza (2. 3—1) tako, da se umjesto $m_o/16$ atoma kisika ^{16}O uzima $1/32$ dio mase kisikove molekule prosječne prirodne mješavine stabilnih kisikovih izotopa ^{16}O , ^{17}O i ^{18}O .

Kemijska relativna masa je starija, još iz vremena kad se nije znalo za izotope. Ova referentna masa $m_{o2}/32$ iznosi $(1,660\,2 \pm 1 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-27}$ kg i također se naziva jedinicom atomske mase. Omjer kemijske i fizikalne jedinice atomske mase prema najnovijim mjerenjima iznosi $1,000\,279 \pm 3 \cdot 10^{-6}$ (Smythov faktor). Relativne molekularne mase odnose se obrnuto.

Relativnu molekularnu masu nekog kemijskog spoja lako je odrediti. Na primjer za utvrđivanje relativne mase M amonijaka (NH_3) moramo znati relativne molekularne mase dušika $M_N = 14,008$ i vodika $M_H = 1,008$. Stvarna masa dušikova atoma iznosi $m_N = M_N \cdot m_o/16$, a masa vodikova atoma $m_H = M_H \cdot m_o/16$. Budući da su u jednoj molekuli amonijaka jedan atom dušika i tri atoma vodika, to je masa jedne molekule dušika $m_{NH_3} = m_N + 3 m_H$. Relativna molekularna masa amonijaka prema (2. 3—1) dakle iznosi $M_{NH_3} = 16 m_{NH_3}/m_o$, što dalje daje

$$M_{NH_3} = M_N + 3 M_H = 14,008 + 3 \cdot 1,008 = 17,032.$$

Prema tome relativnu molekularnu masu nekog kemijskog spoja dobivamo jednostavnim zbrajanjem atomskih masa svih atoma koji čine molekulu.

2.4. Molna masa

U prošlom smo odsječku naznačili da $1/16$ mase atoma kisikova izotopa ^{16}O iznosi

$$m_o/16 = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g},$$

gdje je g kratica za jedinicu mase gram. Prema izrazu (2. 3—1) masa je m_m molekule bilo koje druge tvari

$$m_m = M m_o/16 = M \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g}, \quad (2.4-1)$$

gdje je M relativna molekularna masa.

Jedan mol definirali smo onom količinom tvari koja sadrži molekula u iznosu $N = 6,025 \cdot 10^{23}$ komada, tj. $\text{mol} = N$. Ako je masa jedne molekule m_m , onda je masa jednog mola $m_{\text{mol}} = N m_m$. U izrazu (2. 4—1) utvrdili smo da je masa jedne molekule $m_m = M \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}$ g, pa je dakle molna masa $m_{\text{mol}} = N m_m = 6,025 \cdot 10^{23} \cdot M \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}$ g, što računom daje dalje

$$m_{\text{mol}} = N m_m = M \cdot g, \quad (2.4-2)$$

gdje je g i dalje kratica za jedinicu mase gram, a simbol M relativna molekularna masa (čisti broj).

Ova masa m_{mol} naziva se »molnom masom«, a u stvari je to masa jednog mola tvari. Tako je na primjer masa jednog mola amonijaka zbog $M = 17,032$:

$$m_{\text{mol}} NH_3 = M \cdot g = 17,032 \text{ grama}.$$

Masa $m_{\text{mol}} = M \cdot g$ naziva se katkada »gram-molekulom«, a hiljadu puta veća masa

$m_{\text{kmol}} = M \cdot \text{kg} = \text{«kilogram — molekulom»}$, koja je jednaka masi jednog kilomola $= 1000$ mola. Neki autori skraćuju ove nazive u gram-mol ili čak jednostavno u »mol« iako je, kako smo ranije vidjeli, mol jedinica za izražavanje broja molekula, dok je m_{mol} molna masa, tj. masa jednoga mola.

Sastoji li se stanovita količina tvari od Z molekula mase m_m svaka, ukupna će masa biti $m = Z m_m$. Budući da je prema (2.3—2) $N \cdot m_m = M \cdot g$, to zbog $m_m = M \cdot g / N$ slijedi

$$m = \frac{Z}{N} M \cdot g. \quad (2.4—3)$$

Omjer $Z/N = n$ je broj molova, što je u skladu s izvođenjem u odsječku 2.1. Prema tome izraz (2. 4—3) možemo pisati i u obliku

$$m = n M \cdot g \quad \text{ili} \quad n = \frac{m}{M \cdot g}. \quad (2.4—4)$$

Ove jednadžbe omogućuju nam da iz poznatog broja molova n izračunamo pomoću relativne molekularne mase M pravu masu m , odnosno obratno. Ove jednadžbe mogu se napisati i ovako:

$$n = \frac{Z}{\text{mol}} = \frac{m}{M \cdot g}, \quad (2.4—5)$$

jer je N iz (2. 4—3) jednako molu, to jest $N = \text{mol} = 6,025 \cdot 10^{23}$.

Brojčanu vrijednost količine tvari Z u kilomolima ($\text{kmol} = 10^3 \text{ mol}$) dobili bismo jednostavno iz

$$x = \frac{Z}{\text{kmol}} = \frac{m}{M \cdot \text{kg}}, \quad (2.4—6)$$

gdje je zbog $\text{kg} = 1000 \text{ g}$ dakako $n = 1000 x$.

Veza između veličina masa m neke tvari i veličine količina tvari Z istog objekta dakle glasi

$$Z = \frac{m}{M \cdot \text{kg}} \text{ kmol}; \quad m = \frac{Z}{\text{kmol}} M \cdot \text{kg}. \quad (2.4—7)$$

Ovo su prave veličinske jednadžbe i zato s njima treba računati po poznatim načelima da svaki *kurzivni* simbol za veličinu predstavlja umnožak brojčanog iznosa i jedinice.

Na primjer amonijak mase $m = 120 \text{ kg}$ bit će predstavljen sa (lijeva jednadžba 2. 4—7) količinom tvari

$$Z = \frac{120 \text{ kg}}{17,032 \cdot \text{kg}} \text{ kmol} = 7,05 \text{ kmol},$$

dok će na primjer $Z = 1 \text{ kmol}$ imati masu

$$m = \frac{1 \text{ kmol}}{\text{kmol}} 17,032 \text{ kg} = 17,032 \text{ kg}.$$

2.5. Molna toplotina

Vežu između topline Q i specifične topline c neke tvari predstavlja jednačba $Q = c m \Delta T$, gdje je m masa tvari, a ΔT razlika temperature. Budući da je $m = Z m_m$ (vidi odsječak 2. 1) gdje je m_m masa jedne molekule, možemo dalje pisati $Q/\Delta T = c m = c Z m_m$. Iz jednačbe (2. 4—2) znamo da je $m_m = M \cdot g/N$, što uvrštenjem u gornji izraz daje

$$Q/\Delta T = C Z M \cdot g/N = Z c M \cdot g/mol \quad (2.5-1)$$

jer je $N = \text{mol}$. Veličinu

$$C = c \frac{M \cdot g}{\text{mol}} = c \frac{M \cdot \text{kg}}{\text{kmol}} \quad (2.5-2)$$

nazivamo »molnom specifičnom toplotinom« i obično označujemo velikim slovom C za razliku od specifične topline c koju opisujemo malim slovom.

Usporedbom (2. 5—1) s (2. 5—2) slijedi da je molni oblik jednačbe $Q = c m \cdot \Delta T$:

$$Q = C Z \Delta T.$$

Specifična toplotina amonijaka uz konstantni pritisak iznosi $c_p = 2\,055 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{deg})$. Prema izrazu (2. 5—2) molna toplotina iznosi

$$C_p = 2\,055 \frac{\text{J}}{\text{kg deg}} \cdot \frac{17,032 \cdot \text{kg}}{\text{kmol}} = 34,92 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol deg}}.$$

Analogno se izvode i ostale molne veličine. Na primjer vežu između opće plinske konstante R_0 i individualne R lako utvrđujemo usporedbom pripadnih jednačbi stanja $p V = R m T$ i $p V = R_0 Z T$. Očito je $R_0 Z = R m$, a kako je $m/Z = m_m$, tj. masa jedne molekule, slijedi $R_0 = R m_m$. Budući da izraz (2. 4—2) određuje odnos $m_m = M \cdot g/N = M \cdot g/\text{mol} = M \cdot \text{kg}/\text{kmol}$, dobivamo konačno

$$R = \frac{\text{kmol}}{M \cdot \text{kg}} R_0.$$

Kako je opća plinska konstanta $R_0 = 8314 \text{ J}/(\text{kmol deg})$, individualna je plinska konstanta amonijaka

$$R = \frac{\text{kmol}}{17,032 \text{ kg}} 8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol deg}} = 488,2 \frac{\text{J}}{\text{kg deg}}.$$

Općeniti ključ veze između neke veličine G i molekularne (zване još i molne) veličine G_m možemo utvrditi na ovom primjeru. Specifična toplotina c može se prema definiciji pisati kao $c = Q/m \Delta T$, gdje je m masa tvari. Molna (molekularna) specifična toplotina je $C_m = Q/Z \Delta T$, gdje je Z količina tvari (broj molekula). Budući da je $Q = Q$, to je

$$\frac{C_m}{c} = \frac{m}{Z}. \quad (2.5-3)$$

Ranije smo utvrdili da je $m/Z = M \cdot \text{kg}/\text{kmol}$, pa je dakle na snazi jednačba (2. 5—2). Općenito vrijedi za svaku kvocijentu veličinu (c , u , i , s , r itd.):

$$\text{Molna veličina } (G_m) = \frac{M \cdot \text{kg}}{\text{kmol}} \times \text{veličina } (G), \quad (2.5-4)$$

gdje je M dakako relativna molekularna masa.

U vezi s jednadžbama tipa $Q = c m \Delta T$ ili $Q = C Z \Delta T$ valja primjetiti da bismo umjesto slova Q strogo uzevši morali pisati ΔQ , jer se stvarno radi o privedenoj ili odvedenoj toplinskoj energiji ΔQ koja pripada promjeni temperature ΔT . Kako međutim pod slovom Q uvijek razumijevamo izmijenjenu količinu topline do nesporazuma ne dolazi, pa se upotrebljava jednostavnije opisivanje samo pomoću slova Q .

2.6. Molni volumen i normni kubni metar

Molni volumen je volumen jednog mola u normalnim prilikama, tj. uz tlak $p = 1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ i pri temperaturi $\vartheta = 0 \text{ deg}$, tj. $T = 273,15 \text{ deg}$. Iz opće jednadžbe stanja plina $pV = Z R_o T$ u tom slučaju za $Z = 1 \text{ mol}$ dobivamo

$$V_n = \frac{Z R_o T}{p} = \frac{1 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J} \cdot 273,15 \text{ deg}}{\text{mol} \cdot \text{deg} \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2} = 22,414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

To znači da jedan mol bilo kojeg plina zauzima pod normalnim okolnostima obujam $22,414 \text{ dm}^3$. Jedan kilomol zauzima 1000 puta veći volumen, dakle $22,414 \text{ m}^3$.

Specifični molni volumen je omjer $v_{\text{mol}} = V/Z = R_o T/p$ te uz normalne prilike iznosi $22,414 \text{ m}^3/\text{kmol}$. Između pravog volumena V i specifičnog molnog volumena v_{mol} postoji veza $V = Z v_{\text{mol}}$. Na primjer količina plina $Z = 2 \text{ kmol}$ zaprema pod normalnim okolnostima obujam $V = 2 \text{ kmol} \cdot 22,414 \text{ m}^3/\text{kmol} = 44,828 \text{ m}^3$.

»Normni kubni metar« (Nm^3) je količina plina koja se pod normalnim prilikama ($p = 1 \text{ atm}$, $T = 273,15 \text{ deg}$) nalazi u obujmu $V = 1 \text{ m}^3$. Budući da 1 kmol pod isto takvim okolnostima zauzima $22,414 \text{ m}^3$, to je

$$\text{Nm}^3 = \frac{\text{kmol}}{22,414} \quad \text{ili} \quad \text{kmol} = 22,414 \text{ Nm}^3,$$

odnosno zbog $\text{kmol} = 6,025 \cdot 10^{26}$ normi kubni metar sadrži ovaj broj molekula:

$$\text{Nm}^3 = \frac{6,025 \cdot 10^{26}}{22,414} = 2,69 \cdot 10^{25}.$$

Normni kubni metar je dakle samo nedekadski dio kilomola, a njegova je masa

$$m_{\text{Nm}^3} = \frac{M \cdot \text{kg}}{22,414},$$

gdje je M relativna molekularna masa tvari.

3. OSTALE VELIČINE I JEDINICE NAUKE O TOPLINI

3.1. Kilokalorija. Količina topline. Specifična toplina

Prenesimo se načas u mislima oko 200 godina unatrag i zamislimo da moramo vršiti neka toplinska mjerenja. U to vrijeme imamo o toplini posebnu predodžbu

kao o nekom »fluidu«, a na raspolaganju nam je termometar kojim možemo mjeriti relativne temperature, a dakako i vaga kojom možemo izmjeriti mase ili težine. Najprikladnije je eksperimentirati sa vodom, pogotovo jer je i naš termometar baždaren pomoću vode: 100 deg predstavlja vrelište, a 0 deg ledište vode.

U termostatu T (sl. D8) koji savršeno izolira prema okolini nalazi se masa m_2 vode temperature ϑ_2 . Negdje izvan termostata ugrijali smo masu m_1 vode na temperaturu ϑ_1 . Tu vruću vodu izlili smo u termostat i pomiješali je s onom koja je ranije bila u njemu (m_2). Termometar u termostatu T pokazao je nakon miješanja temperaturu koja je bila različita od ϑ_1 i ϑ_2 , negdje između prvotne dvije temperature.

Izmjerene vrijednosti masa m_1 i m_2 vode i temperatura ϑ_1 i ϑ_2 su takve da udovoljavaju jednadžbi

$$m_1 \vartheta_1 + m_2 \vartheta_2 = (m_1 + m_2) \vartheta, \quad (3.1-1)$$

koju možemo preoblikovati u

$$m_1 (\vartheta_1 - \vartheta) = m_2 (\vartheta - \vartheta_2).$$

Na lijevoj je strani $\Delta\vartheta_1 = \vartheta_1 - \vartheta$ sniženje temperature tople vode (m_1), a na desnoj strani $\Delta\vartheta_2 = \vartheta - \vartheta_2$ povišenje temperature hladnije vode koja je prvotno bila u termostatu (m_2). S novim oznakama $\Delta\vartheta_1 = \vartheta_1 - \vartheta$ i $\Delta\vartheta_2 = \vartheta - \vartheta_2$ možemo napisati $m_1 \Delta\vartheta_1 = m_2 \Delta\vartheta_2$.

Veličine $Q_1 = m_1 \Delta\vartheta_1$ i $Q_2 = m_2 \Delta\vartheta_2$ nazvali su količinom (množinom) topline.

Iz navedenog shvaćanja topline potječe jedinica topline kilokalorija. Budući da je prema izloženom $Q = m \Delta\vartheta$, kilokaloriju su definirali kao onu količinu topline koja je potrebna da se jedan kilogram vode zagrije za jedan stupanj (1 deg).

Sl. D 8. Uz definiciju kilokalorije

Takvim postupkom posve nezavisno je uvedena posebna jedinica topline (kcal), a stoga je i toplina bila posebna, samostalna veličina, što je bilo u skladu s tadašnjim nazorima o suštini topline.

Do teškoća je došlo kad se nije radilo samo s vodom. Spustimo li u termostat kao na slici D8 na primjer željezni predmet mase m_1 i temperature ϑ_1 , opet će se na kraju u termostatu stabilizirati neka temperatura ϑ , ali mjerne vrijednosti masa i temperatura neće udovoljavati jednadžbi (3.1-1), već izrazu

$$c_1 m_1 \vartheta_1 + c_2 m_2 \vartheta_2 = (c_1 m_1 + c_2 m_2) \vartheta,$$

gdje su c_1 i c_2 konstante koje su značajne za željezo i vodu. Ovu jednadžbu možemo preoblikovati u

$$c_1 m_1 \Delta\vartheta_1 = c_2 m_2 \Delta\vartheta_2,$$

gdje je, kao i u prvom primjeru, $\Delta\vartheta_1 = \vartheta_1 - \vartheta$ sniženje temperature željeza, a $\Delta\vartheta_2 = \vartheta - \vartheta_2$ povišenje temperature vode u termostatu.

Stoga je količinu topline Q valjalo pisati u obliku

$$Q = c m \Delta\vartheta \quad (3.1-2)$$

a veličinu c nazvali su specifičnom toplotinom. Prema gornjoj jednadžbi i u skladu s ranije navedenom jedinicom topline kcal voda ima specifičnu toplotinu $c = c_2 = 1 \text{ kcal}/(\text{kgdeg})$.

Kasnije je utvrđeno da ne samo što različite tvari imaju različite vrijednosti specifične topline, već i sama voda nema istu vrijednost pri različitim temperaturama. Stoga su mnogo kasnije kilokaloriju preciznije definirali pri temperaturi $\vartheta = 15 \text{ deg}$. Tako je nastala »kalorija petnaestoga stupnja«, a to je ona količina topline koju treba dovesti jednom kilogramu čiste vode da bi se ugrijala od $\vartheta = 14,5 \text{ deg}$ na $\vartheta = 15,5 \text{ deg}$.

Uz ovu kcal_{15} postojalo je tijekom historije još nekoliko njih koje nije vrijedno ni spominjati jer se već odavno ne upotrebljavaju.

3.2. Ekvivalenti topline

Tijekom prošlih 200 godina nauka o toploti izvanredno je napredovala u mjernotekničkom i u spoznajnom pogledu. Tako je veličina topline izgubila svoju samostalnost i postala samo jedan oblik energije, dakle član obitelji potencijalne, kinetičke itd. energije, a prvi glavni stavak termodinamike sveo se na iskustvom iznuto načelo o održanju energije.

Iz literature međutim još nisu iščezli tragovi shvaćanja topline Q kao samostalne veličine. Ti se tragovi očituju u takozvanim ekvivalentima topline koje ćemo razmotriti u daljnjem tekstu.

Na slici D9 vidimo skicu termostata T u kojem se nalazi tekućina mase m i specifične topline c . U tekućinu je uronjena električna grijalica G koja ugrijava tekućinu pomoću istosmjerne električne struje, te termometar ϑ . Tokom vremena t konstantna električna struja, pod djelovanjem napona U baterije B , u grijalici pretvori u toplotu električku energiju

$$W = U I t.$$

Za vrijeme t termometar je pokazao porast temperature $\Delta\vartheta$. Prema izrazu (3.1—2) tekućina je time preuzela toplotu

$$Q = c m \Delta\vartheta.$$

Omjer toplinske energije Q i električke energije W naziva se »toplinskim ekvivalentom električke energije«

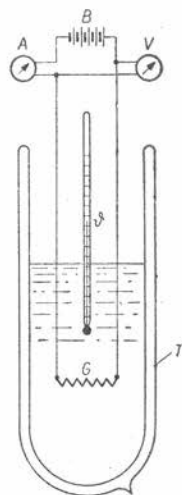
$$A = Q/W, \quad (3.2-1)$$

dok se obrnuti omjer

$$\mathcal{J} = W/Q$$

naziva »električkim ekvivalentom topline«.

Mi znamo da se je sva električka energija W pretvorila u toplinsku energiju Q , da je dakle $Q = W$. Prema tome je $A = 1$, a isto tako i $\mathcal{J} = 1$.



Sl. D 9. Određivanje električnog ekvivalenta topline

Izrazi $A = \mathcal{F} = 1$ su dakako u redu. To je zato jer radimo s univerzalnim veličinskim jednadžbama koje vrijede za bilo koji sistem ili čak nesistematičan skup upotrebljenih jedinica. Potreba za A i $\mathcal{F}$ javlja se međutim tamo gdje se upotrebljavaju ograničene brojčane jednadžbe u kojima simboli predstavljaju brojčane iznose pojedinih veličina u tačno određenim jedinicama (vidi odsječak A. 5. 3). Znamo da se svaka veličina G sastoji od brojčanog iznosa G i mjerne jedinice $[G]$, dakle $G = G [G]$. Simbol G upotrebljavamo za bilo koju veličinu pa se dakle taj način može primijeniti i na bilo koju drugu veličinu.

Razmotrimo primjer korisnosti η nekog toplinskog procesa kojemu se dovodi toplina Q i pri tom proizvodi rad W . Znamo da je u tom slučaju korisnost

$$\eta = W/Q. \quad (3.2-2)$$

To je dakako veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo kakve jedinice. Od ove jednadžbe možemo načiniti brojčanu jednadžbu tako da u skladu sa $G = G [G]$ pišemo

$$W = W [W]; \quad Q = Q [Q], \quad (3.3-3)$$

gdje *kurzivni* simboli označuju veličine, a uspravni simboli brojčane iznose u jedinici koja je navedena u uglatoj zagradi. Odaberemo li $[W] = \text{joule}$ i $[Q] = \text{kcal}$, naše jednadžbe (3. 3—3) glase

$$W = W \cdot \text{joule} \quad \text{i} \quad Q = Q \cdot \text{kcal},$$

što uvrštenjem u (3. 2—2) daje

$$\eta = \frac{W \cdot \text{joule}}{Q \cdot \text{kcal}} = A \frac{W}{Q}, \quad (3.2-4)$$

gdje je

$$A = \text{joule/kcal},$$

Prema tome je »toplinski ekvivalent električne energije« samo omjer dviju različito velikih jedinica energije, jedne »električke« (joule) i druge »toplinske« (kcal). Obrnuto je $\mathcal{F} = 1/A = \text{kcal/joule}$. Budući da je

$$\text{kcal}_{\text{IT}} = 4186,8 \text{ joule},$$

to je dakle $\mathcal{F} = 4186,8$, a $A = 1/\mathcal{F} = 1/4186,8$ pa prema tome brojčana jednadžba (3. 2—4) konačno glasi

$$\eta = \frac{W}{4186,8 Q},$$

gdje W predstavlja broj joulea, a Q broj internacionalnih kilokalorija (kcal_{IT}).

Vidimo da A i $\mathcal{F}$ predstavljaju samo omjer dviju istorodnih jedinica koji se može pojaviti kao parazitni koeficijent samo u brojčanim jednadžbama, dok toga u veličinskim jednadžbama kao što su $\eta = W/Q$, $W = U I t$ ili $Q = c m \Delta \vartheta$ ne može biti. Naglasimo ponovo da veličine štampano *kurzivnim*, a simbole brojčanih iznosa uspravnim slovima.

Tih nepotrebnih ekvivalenata može se proizvesti vrlo velik broj. Pogledajmo samo tablicu IX na kraju knjige. Samo »električkih ekvivalenata topline« $\mathcal{F}$ možemo odmah sastaviti niz:

$$\mathcal{F}_1 = \text{kcal/kWh}; \quad \mathcal{F}_2 = \text{kcal/erg}; \quad \mathcal{F}_3 = \text{BTU/joule}; \quad \mathcal{F}_4 = \text{BTU/kWh} \text{ itd.}$$

Da šarenilo bude veće upotrebljavaju se i drukčiji »ekvivalenti«. Najodličnije mjesto među njima zauzima »mehanički ekvivalent topline« koji u pomanjkanju slova također označujemo sa $\mathcal{J}$. Posve jednakim rasuđivanjem kao za $\mathcal{J} = \text{kcal/joule}$ može se lako dokazati da je to

$$\mathcal{J} = \text{kcal}_{\text{IT}}/\text{kpm},$$

gdje je kpm skraćenica za jedinicu rada u Tehničkom sistemuje dinica »kilopondmetar«. Budući da je

$$\text{kcal}_{\text{IT}} = 426,927\,5 \text{ kilopondmetara} = \mathcal{J} \cdot \text{kpm} = \text{kpm}/A,$$

brojčana se jednadžba naše korisnosti η piše

$$\eta = \frac{A W}{Q} = \frac{W}{\mathcal{J} Q} = \frac{W}{427 Q},$$

koja vrijedi samo onda kad se u računima za W uvrsti broj kilopondmetara, a za Q broj kcal_{IT} .

Posve pouzdano možemo tvrditi da za koju godinu nijedna nova knjiga iz nauke o toplini neće više sadržavati A i $\mathcal{J}$. Dvoja su vrata kroz koja se tjeraju parazitni koeficijenti A i $\mathcal{J}$ iz literature: prvo su veličinske jednadžbe koje u sebi ne mogu sadržavati omjere dviju jedinica, a drugo Međunarodni sistem jedinica koji sve vrste energije, dakle i toplinsku, mjeri koherentnom i univerzalnom jedinicom joule.

Spomenimo usput da i profesor *Bošnjaković* u najnovijem izdanju svoje čuvene »Nauke o toplini«, koja se nalazi u tisku, u jednadžbama nema ni A ni $\mathcal{J}$.

Također valja spomenuti da je Deseta generalna konferencija za mjere i utege 1954. godine definitivno uvela jedinicu joule na mjesto kalorije i kilokalorije koje se još jedino upotrebljavaju u vezi s vodom.

3.3. Preostale veličine nauke o toplini

U dosadašnjim razmatranjima veličina i jedinica nauke o toplini prodiskutirali smo većinu onih pojmova koji u metrološkom smislu mogu biti nejasni ili sporni. Ostale veličine nije potrebno potanko proučavati, pa smo ih zato svrstali u tablicu D. 2. Tamo su redom nabrojene 22 veličine kojima smo uz naziv dopisali međunarodno usvojene simbole, jedinice Međunarodnog sistema jedinica kojima se te veličine mjere i veličinske jednadžbe u kojima nabrojene veličine dolaze. Neke od tih jednadžbi ujedno su i definicione jednadžbe izvedenih veličina.

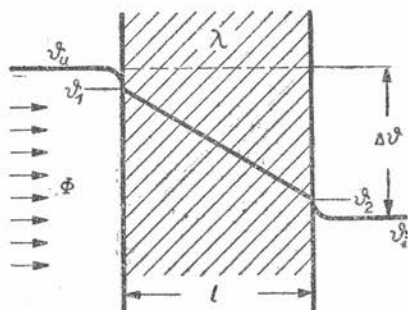
Ipak bismo posebno skicirali slijed jednadžbi s kojima se proračunava prijelaz i prolaz topline. To je učinjeno zato jer prema novijoj međunarodnoj terminologiji kod ovih pojmova valja upotrebljavati veličinu »toplinski tok« (toplinska snaga) kojemu je simbol Φ ili P (sa P se označuju snage i u svim drugim granama znanosti i tehnike).

Toplinska snaga Φ definirana je vremenskom derivacijom toplinske energije Q koja prolazi kroz neku zamišljenu ili stvarnu plohu, dakle

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}.$$

U slučaju jednolikog strujanja topline ova definiciona jednadžba glasi $\Phi = Q/t$.

Primjenu veličine toplinska snaga Φ možemo vidjeti na primjeru na slici D10, gdje je shematski prikazana stijena debljine l , toplinske vodljivosti λ . Želimo postaviti veličinsku jednadžbu prolaza topline kroz tu stijenu, uzevši u obzir i prijelaz topline s obje strane stijene.



Sl. D 10. Temperaturni odnosi prilikom prijelaza i prolaza topline

Zamišljamo da toplinska snaga duž čitava puta topline iznosi Φ . U neposrednoj blizini lijeve strane stijene ulazna temperatura iznosi ϑ_u , dok je neposredno uz desnu vanjsku stranu stijene izlazna temperatura ϑ_i .

Za prijelaz topline od lijeve okoline na stijenju vrijedi jednadžba

$$\Phi = \alpha_1 (\vartheta_u - \vartheta_1) A,$$

gdje je α_1 koeficijent prijelaza topline, A površina plohe kroz koju energija prolazi, a ϑ_1 temperatura lijeve strane stijene. Prolaz topline kroz sredstvo toplinske vodljivosti λ i debljine l računa se pomoću jednadžbe

$$\Phi = \lambda (\vartheta_1 - \vartheta_2) A / l,$$

gdje je ϑ_2 temperatura desne strane stijene. Konačno, za prijelaz topline od desne strane stijene na desnu okolinu vrijedi jednadžba analogna prvoj od dvije gornje

$$\Phi = \alpha_2 (\vartheta_2 - \vartheta_i) A.$$

S nekoliko računa ove tri jednadžbe možemo udružiti u

$$\Phi = k (\vartheta_u - \vartheta_i) A, \quad (3.3-1)$$

gdje je k koeficijent prolaza topline koji izračunavamo pomoću

$$1/k = 1/\alpha_1 + l/\lambda + 1/\alpha_2.$$

Ukoliko ima više izolacionih slojeva, umjesto l/λ dolazi suma parcijalnih omjera l/λ kako je naznačeno pod rednim brojem 22 u tablici D. 2. U jednadžbi (3. 3-1) razlika temperature $\Delta \vartheta = \vartheta_u - \vartheta_i$ je ukupna razlika temperature između lijeve i desne okoline stijene.

Sve su ove jednadžbe dakako veličinske, tj. umjesto svakog simbola veličine uvrštava se u konkretnom računu umnožak brojčanog iznosa i pripadne jedinice.

4. KOHERENTNI SISTEM JEDINICA NAUKE O TOPLINI

U odsječku 3. 1 vidjeli smo da je uvođenje kilokalorije dovelo do shvaćanja kako je to osnovna jedinica. Budući da je jedinica temperature kelvin ($\text{deg} = \text{K} = {}^\circ\text{K} = {}^\circ\text{C}$; vidi odsječak 1. 2), a nauči o toplini dovoljne su četiri osnovne veličine, dakle i četiri osnovne jedinice, na taj način nastaje sistem jedinica nauke o toplini s ovim osnovnim jedinicama:

jedinica duljine l : metar (m),
 jedinica vremena t : sekunda (s),
 jedinica temperature ϑ : kelvin (K = deg),
 jedinica topline Q : kilokalorija (kcal).

U A dijelu knjige utvrdili smo da skup jedinica može imati naziv sistem jedinica samo onda ako su izvedene jedinice skladne ili koherentne, tj. građene po načelu $1 \times 1 = 1$. Iz navedene četiri osnovne jedinice može se izgraditi koherentan sistem jedinica kako ćemo vidjeti u daljnjem tekstu.

Prije nego započnemo izvođenjem izvedenih jedinica moramo reći nešto o vezi između termodinamike i mehanike. Očito je da nauku o toplini, kao posve izoliranu granu znanosti i tehnike, uopće ne možemo zamisliti. Svoj razvoj ona zahvaljuje tome što čovjek želi zgodnim redoslijedom toplinskih procesa iz goriva dobiti mehanički rad ili pak prikladnim ulaganjem mehaničke ili električke snage postići posebno toplinsko stanje (na primjer rashlađivanje). Stoga se uopće ne može zamisliti toplinske procese a da se njihovo djelovanje ne odražuje mehanički, električki, kemijski ili nekako drukčije.

Prema tome će se i uvođenje koherentnog sistema jedinica nauke o toplini metar-sekunda-kelvin-kilokalorija ili kraće »msKkcal« morati odraziti na izvedenim jedinicama mehanike u onolikoj mjeri, koliko mehaniku trebamo u termodinamici.

**Toplinske veličine, njihove oznake, jednadžbe u kojima dolaze
 te jedinice Međunarodnog sistema kojima se mjere**

Tablica D.2

Red. br.	Naziv veličine	Oznaka	Jedinica Međunarodnog sistema	Jednadžba
1	Apsolutna temperatura.....	T, Θ	K	
2	Temperatura	ϑ, t	K	$\vartheta = T - 273,15 \text{ K}$
3	Nadtemperatura, razlike temperature	$\Delta\vartheta, \vartheta_p$	K	$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = T_2 - T_1$
4	Koeficijent rastezanja	α	K ⁻¹	$l = l_0(1 + \alpha \Delta\vartheta)$
5	Koeficijent širenja	γ, β	K ⁻¹	$V = V_0(1 + \gamma \Delta\vartheta)$
6	Individualna plinska konstanta ..	R	J/kgK	$p v = R T$
7	Opća plinska konstanta	R_0	J/mol K	$p V = R_0 Z T$
8	Specifična toplota	c	J/kg K	$dW = m c d\vartheta; d\vartheta = dT$
9	Molna toplota	C	J/mol K	$C = c M \cdot \text{kg/mol}$
10	Toplina	Q	J	$dQ = m c dT; dT = d\vartheta$
11	Toplinski tok, toplinska snaga ..	Φ, P	W	$dQ = \Phi dt$
12	Unutarnja energija	U	J	$dQ = dU + p dV$
13	Specifična unutarnja energija....	u	J/kg	$dU = u dm$
14	Entropija.....	S	J/K	$S = \int \frac{dU + p dV}{T}$
15	Specifična entropija	s	J/kg K	$dS = s dm$
16	Slobodna energija	F	J	$F = U - T S$
17	Entalpija	I	J	$I = U + p V$
18	Specifična entalpija	i	J/kg	$dI = i dm$
19	Slobodna entalpija	G	J	$G = I - T S$
20	Toplinska vodljivost	λ	W/Km	$\Phi = \lambda A \Delta\vartheta / l$
21	Koeficijent prijelaza topline	α	W/Km ²	$\Phi = \alpha A \Delta\vartheta$
22	Koeficijent prolaza topline	k	W/Km ²	$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \Sigma \frac{l}{\lambda}$

Prihvatimo li naime veličine l , t , ϑ i Q kao osnovne veličine, očito je da u mehanici više neće uz l i t biti treća osnovna veličina masa ili sila, već će m ili F biti izvedene veličine. Pogledajmo ukratko kakav će pri tom biti slijed definicija izvedenih jedinica u mehanici.

Sila F vezana je s energijom W i duljinom l jednadžbom $F = W/l$. Budući da je toplina Q samo vrst energije to je $W = Q$, pa je $F = Q/l$. Kako su u razmatranom sistemu jedinica kcal i metar osnovne jedinice veličina Q i l , koherentna izvedena jedinica sile je $[F] = \text{kcal}/\text{metar}$. Budući da je prema zaključku Generalne konferencije za mjere i utege 1954. kcal_T (internacionalna kilokalorija) = 4186,8 joule (J) to je dakle koherentna jedinica sile »msKkcal« sistema jednaka

$$[F] = \text{kcal}/\text{m} = 4186,8 \text{ newton},$$

jer je $N = J/\text{m}$.

Koherentnu jedinicu mase $[m]$ lako dobivamo iz jednadžbe $m = F/a$ gdje je a ubrzanje. Kako je i u ovom sistemu jedinica ubrzanja $[a] = \text{m}/\text{s}^2$ to je

$$[m] = \frac{[F]}{[a]} = \frac{\text{kcal}/\text{m}}{\text{m}/\text{s}^2} = \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2/\text{s}^2} = 4186,8 \text{ kg},$$

gdje je kg jedinica mase u Međunarodnom sistemu jedinica, a u ovom je računu nastala zbog $\text{kg} = \text{J s}^2/\text{m}^2 = \text{N m}^{-1} \text{s}^2 = \text{kg m s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^2 = \text{kg}$.

Jedinica pritiska slijedi iz jednadžbe $p = F/A$, gdje je A površina na koju okomito djeluje sila F . Budući da je jedinica sile $[F] = \text{kcal}/\text{m}$, a $[A] = \text{m}^2$, koherentna jedinica pritiska je $[p] = [F]/[A] = \text{kcal m}^{-1}/\text{m}^2 = \text{kcal}/\text{m}^3 = 4186,8 \text{ N}/\text{m}^2$.

Posve analogno izvest ćemo koherentne jedinice specifičnih veličina, kako mehaničkih, tako i toplinskih. Pri tom ćemo raditi s masenim specifičnim veličinama, tj. neke od veličina definirati u odnosu na masu m , a ne u odnosu na težinu G .

Specifični volumen v definiran je omjerom volumena V i mase m , dakle $v = V/m$. Prema tome je koherentna jedinica specifičnog volumena

$$[v] = \frac{[V]}{[m]} = \frac{\text{m}^3}{\text{kcal s}^2/\text{m}^2} = \frac{\text{m}^5}{\text{kcal s}^2} = \frac{1}{4186,8} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

Jedinicu specifične topline izvest ćemo iz jednadžbe $Q = c m \Delta\vartheta$, dakle

$$[c] = \frac{[Q]}{[m] [\vartheta]} = \frac{\text{kcal}}{\text{kcal s}^2/\text{m}^2 \text{K}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Vidimo da je ova jedinica ista kao i jedinica Međunarodnog sistema jedinica jer je $\text{J} = \text{N m} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$, pa je dakle $\text{J}/\text{kg K} = \text{m}^2/\text{s}^2 \text{K}$.

Jednakost jedinica našli bismo još i kod specifične entropije s , specifične entalpije i , specifične unutarnje energije u te kod individualne plinske konstante R . Dosta opširan pregled koherentnih jedinica msKkcal sistema sadrži tablica D. 3.

Pogledajmo na jednostavnom primjeru kako se računa s takvim sistemom jedinica. Neka je u nekom spremniku zatvoren zrak temperature $\vartheta = 27 \text{ K}$. Na neki se način saznalo da je $p V = 2060 \text{ kcal}$. Treba ustanoviti kolika je masa m zraka u spremniku.

Poslužit ćemo se jednadžbom stanja $p V = m R T$. Iz tablica znamo da je za zrak $R = 287 \text{ J}/\text{kg K} = 287 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{K}$. Budući da je $\vartheta = 27 \text{ K}$ apsolutna je tem-

Dimenzije i jedinice mehaničkih i toplinskih veličina u koherentnom mskKcal i u Međunarodnom sistemu jedinica

Tablica D.3.

Red. broj	Naziv veličine	Simbol	Koherentni m-s-K-kcal sistem			Međunarodni sistem jedinica	
			Dimenzija	Jedinica	= Međunarodnih jedinica	Dimenzija LTM ³	Jedinica Međunarodnog sistema
1	Temperatura	ϑ	ϑ	K = deg	1	ϑ	K = deg
2	Toplina, energija	Q, W	Q	kcal	z	$L^2 T^{-2} M$	$J = \text{kgm}^2 \text{s}^{-2} = Ws = VAs = \text{Nm}$
3	Masa	m	$L^{-3} T^3 Q$	$\text{kcal m}^{-2} \text{s}^2$	z	M	$\text{kg} = J \text{s}^2 \text{m}^{-2} = VAm^{-2} \text{s}^3 = \text{Ns}^2 \text{m}^{-1}$
4	Sila	F	$L^{-1} Q$	kcal m^{-1}	z	$L T^{-2} M$	$N = \text{kgms}^{-2} = VAm^{-1} \text{s} = \text{Jm}^{-1}$
5	Toplinski tok, snaga	Φ, P	$T^{-1} Q$	kcal s^{-1}	z	$L^2 T^{-3} M$	$W = \text{kgm}^2 \text{s}^{-3} = VA = \text{Js}^{-1}$
6	Pritisak, tlak	p	$L^{-3} Q$	kcal m^{-3}	z	$L^{-1} T^{-2} M$	$\text{Nm}^{-2} = \text{kgm}^{-1} \text{s}^{-2} = VAm^{-3} \text{s} = \text{Jm}^{-3}$
7	Specifični volumen	v	$L^5 T^{-2} Q^{-1}$	$\text{m}^5 \text{s}^{-2} \text{kcal}^{-1}$	1/z	$L^3 M^{-1}$	$\text{m}^3/\text{kg} = \text{m}^5 \text{s}^{-2} \text{J}^{-1} = \text{Jm}^{-3}$
8	Specifična entropija	s	$L^2 T^{-2} \vartheta^{-1}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{K s}^2}$	1	$L^2 T^{-2} \vartheta^{-1}$	$\frac{J}{\text{Kkg}} = \frac{VAs}{\text{K kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{K s}^2}$
9	Specifična entalpija	i	$L^2 T^{-2}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	1	$L^2 T^{-2}$	$J/\text{kg} = VAs/\text{kg} = \text{m}^2 \text{s}^{-2}$
10	Toplinska vodljivost	λ	$L^{-1} T^{-1} Q \vartheta^{-1}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{Ksm}}$	z	$L T^{-3} M \vartheta^{-1}$	$\frac{W}{\text{Km}} = \frac{\text{kgm}}{\text{K s}^3} = \frac{VA}{\text{Km}}$
11	Koeficijent prijelaza topline	α	$L^{-2} T^{-1} Q \vartheta^{-1}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{Ksm}^2}$	z	$T^{-3} M \vartheta^{-1}$	$\frac{W}{\text{Km}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{K s}^3} = \frac{VA}{\text{Km}^2}$

Opaska: Faktor z iznosi $z = 4186,8$ jer je $\text{kcal}_{IT} = 4186,8 \text{ J}$. Primjer: Jedinica sile $\text{kcal/m} = z \cdot N = 4186,8 \text{ newtona}$.

peratura približno $T = \vartheta + 273 \text{ K} = 27 \text{ K} + 273 \text{ K} = 300 \text{ K}$. S ovim vrijednostima jednadžba stanja daje

$$m = \frac{pV}{RT} = \frac{2060 \text{ kcal}}{287 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}} = 0,0239 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2/\text{s}^2}.$$

Tolika je dakle masa plina! Kcal s^2/m^2 je naime jedinica mase u ovom koherentnom sistemu jedinica (vidi tablicu D. 3).

Naravno da o vrijednosti mase $0,0239 \text{ kcal s}^2/\text{m}^2$ nemamo nikakvu predodžbu jer smo navikli mase mjeriti kilogramima. Budući da je, kako smo ranije vidjeli, $\text{kcal s}^2/\text{m}^2 = 4186,8 \text{ kg}$, to gornji rezultat izražen u Međunarodnim jedinicama iznosi

$$m = 0,0239 \cdot 4186,8 \text{ kg} = 100 \text{ kg!}$$

Ovim m-s-K-kcal sistemom jedinica nitko se ne služi iako je to pravi »toplinski« sistem jedinica, a usto i koherentan. Njime se nitko ne će ni služiti jer sve postojeće sisteme i nesistematične skupove jedinica polako, uporno i sigurno istiskuje univerzalni Međunarodni sistem jedinica.

Unatoč tomu ovdje smo razmotrili msKkcal sistem kako bismo mogli jasno shvatiti stvarno upotrebljavani nekoherentni skup jedinica koji se u termodinamici naziva Tehničkim sistemom jedinica.

5. TEHNIČKI SISTEM JEDINICA TERMODINAMIKE

Tehnički sistem jedinica termodinamike nesretna je kombinacija mehaničkog Tehničkog sistema (vidi poglavlje B. 4) i dviju osnovnih jedinica nauke o toplini, kilokalorije i kelvina (o jedinici temperature $\text{K} = \text{kelvin} = {}^\circ\text{K} = \text{celsius} = {}^\circ\text{C} = \text{deg}$ vidi odsječak D. 1. 2). Stoga je taj sistem »predimenzioniran« s osnovnim jedinicama, jer ih ima čak pet. To su osnovne jedinice ovih veličina:

1. duljina l : metar (m),
2. vrijeme t : sekunda (s),
3. sila F : kilopond (kp),
4. temperatura ϑ : kelvin (K),
5. toplina Q : kilokalorija (kcal).

Budući da sustav jednadžbi nauke o toplini (vidi tablicu D. 2) zahtijeva samo četiri veličine, dakle i četiri osnovne jedinice, primjena sistema s pet osnovnih jedinica morala je biti nekako razgraničena na takav način da se za tzv. mehaničke veličine upotrebljava mehanički Tehnički sistem jedinica, a za tzv. toplinske veličine jedinice koje su nabrojene pod 4. i 5.

Naravno da u skladu s osnovima formiranja sistema jedinica, što smo obradili u poglavlju A, takav nesistematičan, predimenzioniran i nekoherentan skup jedinica nema pravo na naziv »sistem jedinica«. U pomanjkanju prave terminologije ovdje ga ipak nazivamo sistemom, iako pri tom mislimo »sistem«.

Taj »petorni sistem« upotrebljavao se do prihvatanja univerzalnog Međunarodnog sistema jedinica u tehničkoj termodinamici. Ni fizičari međutim nisu imali bolji sistem, samo su umjesto velike kilokalorije upotrebljavali kaloriju ($\text{cal} = \text{kcal}/1000$).

Jedinice tehničkog sistema nauke o toplini

Tablica D.4

Redni broj	Naziv veličine	Simbol	Jednadžba	Jedinica Tehničkog sistema		Jedinica Tehničkog sistema iznosi Međunarodnih jedinica
				Naziv	Kratica	
1	Temperatura	T, ϑ	$T = 273,15 \text{ K} + \vartheta$	kelvin	K	$= 1 \text{ K}$
2	Toplina	Q	$Q = c' G \Delta \vartheta$	kilokalorija	kcal	$= 4\,186,8 \text{ J}$
3	Rad, energija	W	$W = p V$	kilopondmetar	kpm	$= 9,806\,65 \text{ J}$
4	Težina	G	$W = G h$	kilopond	kp	$= 9,806\,65 \text{ N}$
5	Toplinska snaga	Φ	$Q = \Phi t$	—	kcal/h	$= 1,163 \text{ W}$
6	Pritisak	p	$G = p A$	—	kp/m ²	$= 9,806\,65 \text{ N/m}^2$
7	Specifični volumen	v'	$V = v' G$	—	m ³ /kp	$= 0,102 \text{ m}^3/\text{N}$
8	Specifična toplina	c'	$Q = c' G \Delta \vartheta$	—	$\frac{\text{kcal}}{\text{kp K}}$	$= 427 \text{ J/NK}$
9	Specifična entalpija	i'	$I = G i'$	—	kcal/kp	$= 427 \text{ J/N}$
10	Plinska konstanta	R'	$pV = R' G T$	—	$\frac{\text{kpm}}{\text{kp K}} = \frac{\text{m}}{\text{K}}$	$= 1 \text{ J/NK}$
11	Toplinska vodljivost	λ	$\Phi = \lambda A \Delta \vartheta / l$	—	$\frac{\text{kcal}}{\text{s Km}}$	$= 4186,8 \text{ W/Km}$
12	Koeficijent prijelaza topline	α	$\Phi = \alpha A \Delta \vartheta$	—	$\frac{\text{kcal}}{\text{s Km}^2}$	$= 4186,8 \text{ W/Km}^2$

Primjer: kcal/kp = 427 J/N = 427 m, jer je J = N m = newton × metar.

Uz ostale loše posljedice, takav »petorni sistem« osnovnih jedinica uzrokuje pojavljivanje »ekvivalenata« koje smo razmotrili u odsječku 3. 2.

Vještina primjene ovog sistema jedinica je u tome da se one veličine, koje se mjere termometrom i klasičnim kalorimetrom, izražavaju kelvinom i kilokalorijom, a sve ostale metrom, sekundom i kilopondom. Pregled upotrebe tih jedinica vidimo u tablici D. 4 gdje je u zadnjem stupcu rečeno koliko Međunarodnih jedinica sadrži jedna Tehnička jedinica.

Ni sekunda nije dosljedno primjenjivana. Za toplinsku vodljivost λ i koeficijent prijelaza topline α tehničari su se uglavnom služili jedinicom vremena $\text{sat} = \text{h}$, jer su na taj način dobivali prikladnije brojčane iznose ($\text{kcal/h} = 1,163 \text{ W}$).

Pod rednim brojevima 7 do 10 u tablici D.4 simboli veličina označeni su crticom, npr. specifični volumen v' . To je zato, jer su zbog primjene Tehničkog sistema jedinica specifične veličine definirane u odnosu na težinu G , a ne u odnosu na masu m , kako smo mi stalno dosada radili. Tako je specifični volumen v' definiran sa

$$v' = V/G,$$

gdje je G normirana težina (o tome vidi odsječak B.5.2) koja je vezana s masom m pomoću jednadžbe

$$G = m g_N$$

u kojoj je $g_N = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$ normirana vrijednost ubrzanja sile teže. Ove smo pojmove objasnili u odsječku B.4.2 koji se odnosi na jedinicu sile kilopond.

Budući da je maseni specifični obujam (vidi tablicu B.1) definiran omjerom obujma V i mase m neke tvari, dakle

$$v = V/m,$$

iz usporedbe gornje tri jednadžbe slijedi

$$v' = \frac{V}{G} = \frac{V}{m g_N} = \frac{v}{g_N}. \quad (5-1)$$

Posve analogno dobivamo i za ostale specifične veličine odnose između težinskih (s crticom) i masenih veličina

$$\begin{aligned} c' &= c/g_N; & c &= c' g_N \\ i' &= i/g_N; & i &= i' g_N \\ R' &= R/g_N; & R &= R' g_N. \end{aligned}$$

Fizikalno su veličine s crticom i bez nje potpuno različite, tačno onako kako su različite težina i masa koje veže relacija $g = G/m$.

Primjenu gornjih jednadžbi možemo vidjeti na primjeru plinske konstante. »Masena« plinska konstanta R upotrebljava se u jednadžbi stanja $pV = RmT$, a »težinska« R' u jednadžbi $pV = R'GT$, gdje je G težina (normirana) plina. Iz ova dva izraza odmah slijedi $R'G = Rm$, odnosno $R' = R/g_N$.

Plinska konstanta zraka iznosi $R = 287 \text{ J/kg K}$, gdje je $J = \text{Nm}$ Međunarodna jedinica energije joule. Budući da je približno $g_N = 9,81 \text{ m/s}^2$, težinska plinska konstanta iznosi

$$R' = \frac{R}{g_N} = \frac{287 \text{ J}}{9,81 \text{ ms}^{-2} \text{ kgK}} = 29,27 \frac{\text{Nm}}{\text{kgms}^{-2}\text{K}} = 29,27 \frac{\text{m}}{\text{K}},$$

jer je $N = \text{kgm/s}^2$, što je zabilježeno i u tablici D.3.

Obično se u tehničkoj termodinamici za plinsku konstantu R' (isto tako i za specifične topline) ne upotrebljava jedinica m/K već kpm/kpK što je isto, pa se onda naš rezultat piše $R' = 29,27 \text{ kpm/kpK}$.

Treća vrsta specifičnih veličina su molne veličine. U odsječku 2.5 ustanovili smo da je $R_m Z = R m$, gdje indeks m znači da se radi o molnim veličinama. Pripadne jednadžbe stanja glase $p V = Z R_m T$ i $p V = m R T$. Izraz (2.5—4) predstavlja vezu između molne veličine i masene, dakle u našem slučaju

$$R_m = \frac{M \cdot \text{kg}}{\text{kmol}} R.$$

Budući da je $R = g_N R'$ to uvrštenjem slijedi

$$R_m = \frac{M \cdot g_N \cdot \text{kg}}{\text{kmol}} R'$$

što pomoću $g_N \cdot \text{kg} = 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot \text{kg} = \text{kilopond} = \text{kp}$ konačno daje

$$R_m = \frac{M \cdot \text{kp}}{\text{kmol}} R'.$$

Općenito možemo u analogiji s jednadžbom (2.5—4) za međusobne odnose specifičnih veličina napisati

$$\text{Molna veličina } (G_m) = \frac{M \cdot \text{kp}}{\text{kmol}} \times \text{težinska veličina } (G').$$

Primjenu ovog izraza možemo iskušati na našem primjeru plinske konstante zraka. Za zrak je relativna molekularna masa M (u tehnici se katkada naziva »relativna molekularna masa«, a definira izrazom (2.3—1) tako da se umjesto masa stave normirane težine; brojka M ostaje dakako nepromijenjena jer je to omjer) $M = 28,95$. Prema gornjoj jednadžbi je dakle

$$R_m = \frac{28,95 \text{ kp}}{\text{kmol}} \cdot 29,27 \frac{\text{kpm}}{\text{kp K}} = 847 \frac{\text{kpm}}{\text{kmol K}}.$$

Na završetku možemo ovdje još nešto primijetiti u pogledu jedinice topline kilokalorija. U dosadašnjem tekstu dosljedno smo upotrebljavali međunarodnu kilokaloriju kojoj nismo posebno stavljali indeks $_{IT}$ (internacionalna). Njezina je vrijednost

$$\text{kcal}_{IT} = 4186,8 \text{ joule},$$

a propisala ju je Generalna konferencija za mjere i utege 1954. godine.

Dvadeset godina prije odredila je Međunarodna unija za čistu i primijenjenu fiziku odnos »kilokalorije petnaestog stupnja« i joulea:

$$\text{kcal}_{15} = 4185,5 \text{ joule},$$

dakle je međunarodna kalorija veća za 0,31 promila. Ove razlike nisu važne za tehničku praksu, ali znadu biti presudne pri tačnim laboratorijskim mjerenjima.

6. ANGLO-AMERIČKI TEHNIČKI SISTEM JEDINICA TERMODINAMIKE

Anglo-američki sistem tehničkih jedinica termodinamike prilagođena je kopija metarskog Tehničkog sistema koji smo opisali u prošlom odsječku. Prema tome je to »petorni« sistem s pet osnovnih jedinica ovih veličina:

duljina l : foot (ft) = 0,304 8 m,

vrijeme t : second (s),

sila F : pound (Lb) = 4,448 22 N,

temperatura ϑ : fahrenheit (F) = kelvin/1,8,

toplina Q : british thermal unit (BTU) = 1055,056 J.

Posve desno odmah smo pripisali odgovarajuću vrijednost tih jedinica u Međunarodnom sistemu.

Grada izvedenih jedinica tog sistema izvodi se potpuno analogno kao kod metarskog Tehničkog sistema pa ih stoga nećemo izvoditi, jer to može čitatelj učiniti sam. U tom slučaju potrebno je da se posluži podacima skupljenim u odsječcima B.8 do B.11.

Jedino još treba opisati britansku jedinicu topline. Prema International Standard Organisation iz 1953. godine vrijedi

$$\text{BTU} = \text{British Thermal Unit} = 1055,056 \text{ joule.}$$

Uz ovu postoji još nekoliko BTU jedinica. Najčešće se upotrebljava »srednja BTU«:

$$\text{mean BTU} = 1055,8 \text{ joule,}$$

koja je definirana ovako: to je 1/180 dio energije potrebne da se ugrije 1 pound vode o 1 32 do 212 F (Fahrenheita).

»BTU parnih tablica« (The Steam Table British Thermal Unit) neznatno je manja:

$$\text{BTU}_{\text{ST}} = 1055,07 \text{ joule,}$$

a još je manja »BTU pri temperaturi $\vartheta_F = 60 \text{ F}$ « ($\vartheta = 15,5 \text{ K}$):

$$\text{BTU}_{60} = 1054,5 \text{ joule.}$$

Ova jedinica topline definirana je slično kao kilokalorija pri petnaestom stupnju: to je energija potrebna da se ugrije 1 pound vode od temperature 60 F na 61 F.

Zbog pet osnovnih jedinica i Anglo-Amerikanci imaju svoje »ekvivalente« (vidi odsječak 3.2). Tako na primjer njihov mehanički ekvivalent topline iznosi

$$\mathcal{J} = 778 \text{ ft} \cdot \text{Lb} / \text{BTU},$$

a u brojčanim se jednadžbama dakako pojavljuje i recipročni toplinski ekvivalent $A = 1/\mathcal{J}$. Naravno da je u primjeni univerzalnih veličinskih jednadžbi $A = \mathcal{J} = 1$, pa oni ispadaju iz formula.

7. PRIMJENA MEĐUNARODNOG SISTEMA JEDINICA U TERMODINAMICI

7.1. Međunarodni sistem jedinica

U odsječku B.3 opisali smo ideju koherentnog Međunarodnog sistema jedinica koji se primjenjuje u svim granama znanosti i tehnike. Sistemi jedinica koji su postojali prije Međunarodnog bili su parcijalni sistemi, od kojih se jedan upotrebljavao u mehanici, drugi u elektromagnetizmu, kombinirani skup jedinica u nauci o toplini i tako dalje. Već se jednom prije pokušalo ostvariti sličan univerzalan sistem (CGS) ali on nije doživio punu afirmaciju, naročito zbog fizikalne nepotpunosti u nauci o elektromagnetizmu (vidi poglavlje E).

Jedna od prednosti Međunarodnog sistema je u tome, da se u svim granama znanosti i tehnike istorodne veličine mjere istim jedinicama. Tako se na primjer jedinicom energije joule (J) mjere sve vrste energije: toplinska, kinetička, potencijalna, energija magnetskog polja, energija električkog polja, unutarnja energija tvari itd. Posve jednako newton (N) služi za jedinicu sile kako u mehanici, tako u nuklearnoj tehnici ili u termodinamici. Isto je i sa svim ostalim jedinicama. Budući da se kod jedinica Međunarodnog sistema lako upotrebljavaju decimalni višekratnici i dijelovi jedinica (vidi odsječak B.3.3) pomoću njih se taj sistem lako prilagođuje svim bročanim iznosima neke veličine. Ako nam je vrijednost specifične entalpije $i'' = 2\,500\,000 \text{ J/kg}$ zbog velikog bročanog iznosa neprikladna, lako napišemo $i'' = 2500 \text{ kJ/kg}$ ili čak $i'' = 2,5 \text{ MJ/kg}$. Kod jedinica Tehničkog sistema to nije bilo uvijek moguće.

Budući da se za istorodne veličine u primjeni Međunarodnog sistema primjenjuju iste jedinice u svim granama (mekanika, akustika, nauka o toplini, elektromagnetizam, optika, nuklearna tehnika) nema kompliciranih parazitnih preračunskih koeficijenata (npr. 427) jer su jedinice Međunarodnog sistema međusobno koherentne, tj. građene po načelu $1 \times 1 = 1$. Tako je na primjer joule = newton $\times$ metar, watt = joule/sekunda = volt $\times$ amper itd. Stoga pri uporabi Međunarodnog sistema nema nikakvih »ekvivalenata« (o njima vidi odsječak 3.2).

U dinamici je Međunarodni sistem imao ove tri osnovne jedinice: za duljinu metar (m), za vrijeme sekundu (s), a za masu kilogram (kg). Te tri jedinice bile su dovoljne za izgradnju svih ostalih izvedenih jedinica (vidi odsječak B.3.2). Znamo da u termodinamici nisu dovoljne tri osnovne jedinice već da su u praksi potrebne četiri. Stoga bi bilo najjednostavnije da se spomenutim trima jedinicama pridruži četvrta: jedinica temperature kelvin (vidi odsječak 1.2). Na taj bi način nastao dio Međunarodnog sistema jedinica koji je potreban za nauku o toplini, a osnivao bi se na ove četiri jedinice: m, s, kg, K.

U nauci o toplini vrlo se često mora upotrebljavati jedinica topline. Ona je u Međunarodnom sistemu dakako jednaka jedinici energije, a to je zbog $W = m v^2/2$ jedinica $[Q]_M = [W]_M = \text{kgm}^2/\text{s}^2$. Budući da je ova jedinica kao složenica od tri osnovne dosta nespretna za pisanje usvojeno je posebno ime za tu jedinicu: J = joule = kgm^2/s^2 (čitaj džul). Prirodno je stoga da se za osnovnu jedinicu topline u termodinamici usvoji joule. Budući da su četiri osnovne jedinice posve dovoljne, mora otpasti jedna od trojke m, s, kg. Ako odstranimo kilogram, osnovne bi jedinice nauke o toplini bile: m, s, J, K.

U tom bi slučaju koherentna jedinica mase bila izvedena jedinica. Iz jednadžbe kinetičke energije $W = m v^2/2$ ili iz jednadžbe energije mirovanja $W_0 = m v_0^2$ odmah dobivamo jedinicu mase izraženu u ovisnosti o metru, sekundi

i jouleu $[m]_M = J s^2/m^2$. Pogledajmo kako se to odrazuje na jedinicu specifične entalpije i koju definiramo sa $i = I/m$.

Budući da je Međunarodna jedinica $[I]_M = J$, zbog $[m]_M = J s^2/m^2$ jedinica je specifične entalpije $[i]_M = [I]_M / [m]_M = m^2/s^2$. To je ispravno ali komplicirano, pogotovo kad znamo da za jedinicu $[m]_M = J s^2/m^2$ imamo kraći naziv: kilogram (kg). Osim toga povoljno je da se iz strukture jedinice barem djelomično vidi fizikalna struktura pripadne veličine. Stoga i u parcijalnom sistemu jedinica m, s, J, K, na primjer za specifičnu entalpiju ipak upotrebljavamo jedinicu $[i]_M = J/kg$ premda znamo da je $J/kg = m^2/s^2$.

Iz ovoga bismo mogli zaključiti da u nauci o toplini i u primjeni Međunarodnog sistema upotrebljavamo pet osnovnih jedinica, no takav zaključak ne bi bio ispravan. Stvarno pri njegovoj uporabi uopće ne mislimo na to koja je jedinica osnovna, već upotrebljavamo kombinaciju jedinica koja nam se čini najpreglednijom, najpraktičnijom. Sa stanovišta metrologije posve je svedeno da li ćemo specifičnu entalpiju izražavati sa m^2/s^2 ili sa J/kg . Istom sa stanovišta fizikalne predočivosti većini je ljudi očitije kada se upotrebljava jedinica J/kg , jer to nam odmah dočara predodžbu o energiji po jedinici mase. Posve jednake zaključke stekli bismo i pri proučavanju jedinice specifične topline, jedinice plinske konstante itd.

Ovaj nam je primjer otkrio izvanrednu spoznaju o daljnjoj prednostima koherentnih univerzalnih sistema jedinica kakav je Međunarodni sistem jedinica, a to je: pojam osnovnih jedinica uopće nije potreban. Za jednog će čovjeka Međunarodni sistem jedinica u termodinamici slijediti iz polaznih jedinica m, s, J, K, a za drugoga iz m, s, kg, K. Treći će možda poći od s, kg, J, K, ali će ipak u svojim računima upotrebljavati jedinicu metar, a ne $s(J/kg)^{1/2}$, što je isto.

Sve ove navode lijepo ilustrira tablica D.3, gdje je u prvom od dva desna stupca navedena dimenzija izvedenih veličina ako se za osnovne dimenzije shvate duljina, vrijeme, masa i temperatura. Posve desno napisane su veze među Međunarodnim jedinicama. Vidimo (redni broj 4) da je posve svedeno da li ćemo jedinicu sile u Međunarodnom sistemu pisati kao J/m ili kao $V As/m$ ili kao kgm/s^2 jer sve one predstavljaju newton. Stvar je praktičnosti da i u nauci o toplini primjenjujemo N, a ne J/m , jer kod ove druge jedinice moramo tek preko izraza $F = W/l$ dovesti u vezu jedinicu energije i duljine.

Posve je jednako i s jedinicom pritiska (redni broj 6 u tablici D.3). Smatrajući da su »osnovne« jedinice toplinskog dijela Međunarodnog sistema m, s, J, K došli bismo do toga da je jedinica pritiska J/m^2 . Analogno bismo u mehanici s »osnovnim« jedinicama m, s, kg morali za jedinicu pritiska upotrebljavati kg/ms^2 , a u elektrotehnici $V As/m^2$. Izvanredna prednost univerzalnog i koherentnog Međunarodnog sistema baš je u tome da mu nisu potrebne takve prisile, pa u ovom primjeru u sve tri navedene discipline mjerimo jedinicom N/m^2 ili češće 10^5 puta većom jedinicom peG (pentagiorgi) = $10^5 N/m^2$ (vidi odsječak B.3.2).

Pojam »osnovne jedinice« nastao je iz više razloga. Jedan od njih je taj, da je slijed definicija jedinica shvaćen kao propisani recept primjene jedinice koje su građene iz prije definiranih jedinica. Drugi je razlog u nekoherentnosti starijih sistema jedinica. Budući da su se na primjer u nauci o toplini za neke veličine upotrebljavale jedinice Tehničkog sistema, a za druge veličine jedinice kcal i kelvin, postalo je gotovo nužno da se ta »osnovnost« jedinica posebno naglasi. Posljedice znamo: pojavljivanje »ekvivalenata«, upotreba »petornog« sistema m, s, kp, K, kcal, te ovim jedinicama pripadne brojčane jednadžbe.

Primjenom Međunarodnog sistema jedinica sve te neprilike iščezavaju. Ekvivalenti nestaju, a jednadžbe nužno postaju prave veličinske jednadžbe koje su univerzalne (vrijede i za nekoherentne jedinice), a ujedno su najkraće i fizikalno toliko razumljive koliko se to uopće može postići.

7.2. Način uvođenja Međunarodnog sistema jedinica

Uvođenje Međunarodnog sistema jedinica u nauku o toplini donosi u prvi mah znatne poteškoće koje ćemo u ovom odsječku ukratko spomenuti, a ujedno naznačiti kako treba srediti metrološke prilike u toj grani znanosti i tehnike.

Prvo je dakako samo uvođenje jedinica. Na mjesto kalorija, kilokalorija, kilopondmetara, litar-atmosfera itd. dolazi univerzalna jedinica energije i rada joule (J). Tačne odnose među tim jedinicama dali smo u odsječku 5, zatim u poglavlju B, a praktički dovoljno tačne odnose među svim najčešće upotrebljavanim jedinicama sadrži tablica IX na kraju knjige.

Osim joulea velika je promjena u jedinici sile. Na mjesto kiloponda, pounda (Lb), dyna i ostalih jedinica dolazi newton (čitaj njutn). Odnosi među tim jedinicama sile navedeni su u poglavlju B, a dvostrane praktičke odnose sadrži tablica VI na kraju knjige.

Direktna izvedena jedinica pritiska je newton po kvadratnom metru ($N/m^2 = \text{giorgi} = G$). Budući da je njena vrijednost vrlo malena vjerojatno će se odmah udomačiti 10^5 -puta veća jedinica pentagiorgi ($\text{peG} = 10^5 G$), koja leži između tehničke i fizikalne atmosfere. To možemo vidjeti na slici B12; praktični odnosi među tim jedinicama pritiska dani su u tablici VII na kraju knjige.

Druga bitna promjena odnosi se na tehničku termodinamiku glede specifičnih veličina kao što su specifična toplina c , specifična entalpija i , individualna plinska konstanta R itd. Pri tom mislimo na primjenu mase m umjesto težine G . O tom pitanju naširoko smo raspravljali u odsječku B.5.1. Tamo smo ustanovili da se zbog toga valja služiti veličinom gustoća ρ umjesto specifičnom težinom γ . Utvrdili smo također da su brojevi iznosi gustoće u kg/m^3 jednaki brojevanim iznosima specifične težine u kp/m^3 , jer je $G/\text{kp} = m/\text{kg}$.

Na taj problem nadošli smo i u odsječku D.5 gdje smo razmatrali »masene« i »težinske« specifične veličine. Ta izlaganja možemo sažeti u ovom pregledu:

$$c = g_N c'; c = \frac{Q}{m \Delta \vartheta}; c' = \frac{Q}{G \Delta \vartheta},$$

$$i = g_N i'; i = I/m; i' = I/G,$$

$$R = g_N R'; pV = mRT; pV = GR'T,$$

gdje je $g_N = 9,806\,650 \text{ m/s}^2$ normirano ubrzanje sile teže.

Kako vidimo »težinske« specifične veličine ovdje smo u svrhu razlikovanja označili crticom.

»Maseni« niz jednadžbi sadrži posve desni stupac tablice D.2. Fizičari nemaju ovih teškoća kod prijelaza jer oni stalno rade s masom, pa većinom nisu ni upotrebljavali težinu.

Treća, ujedno i najveća promjena pogađa tabelarne i dijagramske podatke, a nastaje kao posljedica prve i druge promjene. U tablicama tehničkih termodinamika skupljene su vrijednosti takozvanih »težinskih« specifičnih veličina. Tako

na primjer specifična toplina zraka pri konstantnom pritisku iznosi $c'_p = 0,241$ kcal/kp K (pri relativnoj temperaturi $\vartheta = 20$ K i pritisku $p = 1$ at = $0,980\,665$ peG = $0,980\,665 \cdot 10^5$ N/m²).

Izračunajmo koliko iznosi pripadna masena specifična toplina c_p u Međunarodnom sistemu jedinica. Maloprije smo naveli da je $c_p = g_N c'_p$, gdje je $g_N = 9,806\,65$ m/s². Korisno je prije toga pogledati u odsječak B.4.2 odakle prenosimo da je

$$g_N = \text{kilopond/kilogram} = \text{kp/kg},$$

jer je $\text{kp} = 9,80665$ kg m/s². Prema tome možemo odmah napisati da je

$$c_p = c'_p \cdot \text{kp/kg}.$$

Prisjetimo li se da vrijedi odnos

$$\text{kcal}_{\text{IT}} = 4186,8 \text{ J},$$

naš račun možemo nastaviti sa

$$c_p = c'_p \cdot \frac{\text{kp}}{\text{kg}} = 0,241 \frac{\text{kcal}}{\text{kp K}} \cdot \frac{\text{kp}}{\text{kg}} = 1,007 \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}.$$

Odavde konačno slijedi

$$c_p = 0,241 \cdot 4186,8 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 1007 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 1,007 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}.$$

Općenito možemo napisati

$$\text{kcal/kp} \triangleq 4186,8 \text{ J/kg},$$

gdje znak jednakosti s krovčićem označuje »odgovara«, tj. brojčanom iznosu težišne specifične veličine (s crticom) pripada 4186,8 puta veći brojčani iznos u J/kg masene veličine (bez crtice).

U našem je primjeru $c'_p = 0,241$ kcal/kpK. Pomoću gornjeg izraza odmah dobivamo $c_p = 0,241 \cdot 4186,8$ J/kg K = 1007 J/kg K. Dalje je na primjer specifična entropija vode pri $\vartheta = 100$ K $s' = 0,3121$ kcal/kpK. Masena specifična entropija s u jedinicama Međunarodnog sistema iznositi će $s = s' \text{ kp/kg} = 0,3121 \cdot 4186,8$ J/kgK = 1306 J/kgK. Pri tom je entalpija iznosila $100,04$ kcal/kp, dok je (masena) entalpija u Međunarodnom sistemu $i = 100,04 \cdot 4186,8$ J/kg = $418,8$ kJ/kg. Posve se jednako radi i s ostalim specifičnim veličinama.

Koliko je piscu poznato na primjenu Međunarodnog sistema prešlo je i u Jugoslaviji djelomično ili gotovo potpuno¹⁾ nekoliko autora priručnika i udžbenika.

Četvrta promjena posljedica je triju dosada nabrojanih promjena. Zbog primjene koherentnih jedinica Međunarodnog sistema jednažbe nauke o toplini nužno postaju veličinske. Time automatski ispadaju i »ekvivalenti« (vidi odsječak 3.2), a jednažbe prelaze u najjednostavniji mogući oblik. Niz tih jednažbi sadrži tablica D.2, u kojoj A predstavlja standardiziranu oznaku površine, a ne »toplinski ekvivalent«.

¹⁾ B. Kraut: Džepni strojarski priručnik, Đuro Đaković, Sl. Brod-Ljubljana, 1956.

R. Poniž: Osnovi proračuna uređaja za električno otporno grijanje, Elektrotehnički vjesnik, Ljubljana 1952.

7.3. Usporedbeni primjer upotrebe Međunarodnog sistema jedinica

Ovdje ćemo na dva načina izračunati povišenje temperature plina koji prigušujemo u nekoj cijevi. Neka taj plin bude zrak sa $c'_p = 0,241 \text{ kcal/kpK}$ (podsjetimo se da c' dolazi u »težinskoj« jednadžbi $Q = c' G \Delta \vartheta$, a c u »masenom« izrazu $Q = c m \Delta \vartheta$), a njegova je brzina $u = 100 \text{ m/s}$.

U udžbenicima termodinamike nalazimo formulu za povišenje apsolutne temperature plina od T na $T + \Delta T$:

$$\Delta T = \frac{A u^2}{2 g c'_p} \quad (7.3-1)$$

Ovdje je dakako $A = \text{kcal}/427 \text{ kpm}$ »toplinski ekvivalent mehaničkog rada«. Budući da je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ gornja nam jednadžba s našim podacima daje

$$\Delta T = \frac{\text{kcal}}{427 \text{ kpm}} \cdot \frac{100^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,241 \frac{\text{kcal}}{\text{kp K}}}$$

odakle dalje dobivamo

$$\Delta T = \frac{10\,000 \text{ K}}{427 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot 0,241} = 5 \text{ K}.$$

Vidimo da je izraz (7.3—1) veličinska jednadžba unatoč tomu što je u njoj ekvivalent A . To je u ovom slučaju i razumljivo jer je $\text{kcal} = 427 \text{ kpm}$, pa je dakle $A = \text{kcal}/427 \text{ kpm} = 427 \text{ kpm}/427 \text{ kpm} = 1$. Prema tome kao veličinsku jednadžbu izraz (7.3—1) možemo bez daljnjega pisati i u jednostavnijem obliku

$$\Delta T = \frac{u^2}{2 g c'_p} \quad (7.3-2)$$

Ipak se možemo upitati za razlog zbog kojega u toj formuli postoji ubrzanje sile teže, kad razmatrano prigušivanje nema nikakvog dodira s gravitacionim poljem Zemlje?

Odgovor na to pitanje nalazimo u prošlom odsječku gdje smo govorili o c' i c . Budući da je $c = g c'$ to je i $c_p = g c'_p$, pa dakle jednadžbu (7.3—2) možemo pisati kao

$$\Delta T = \frac{u^2}{2 c_p} \quad (7.3-3)$$

Specifična toplina c_p je dakako »masena« veličina koja slijedi iz temeljne relacije $Q = c m \Delta T$. U priručnicima s Međunarodnim sistemom jedinica nalazimo njenu vrijednost za zrak $c_p = 1007 \text{ J/kgK}$. Tu smo vrijednost i mi izračunali u odsječku 7.2.

Račun povišenja temperature pomoću izraza (7.3—3) posve je jednostavan.

Budući da je $u = 100 \text{ m/s}$, a $c_p = 1007 \text{ J/kgK}$, to je

$$\Delta T = \frac{u^2}{2 c_p} = \frac{10\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 1007 \text{ J/kgK}} = 5 \text{ K},$$

jer je $\text{J/kg} = \text{m}^2/\text{s}^2$ što možemo provjeriti u tablici D.3.

Već nam je ovaj jednostavni primjer, gdje je polazna jednačba (7.3—1) bila veličinska, pokazao izvanrednu jednostavnost jednačbe (7.3—3) sa c_p kao masenom veličinom i ujedno predočio koliko se u tom slučaju pojednostavnjuje račun. A kolike su tek prednosti kad se radi o prijelazu s brojčanih jednačbi na veličinske pokazat će nam odsječak 8.

Možda će se netko upitati kako je došlo do izraza (7.3—3). Odgovor slijedi iz osnova strujanja. Struji li plin mase m brzinom u njegova kinetička energija iznosi

$$W = m u^2 / 2.$$

Ako to strujanje prigušimo adijabatski, kinetička energija strujećeg plina utrošit će se na povećanje entalpije $\Delta I = m c_p \Delta T$. Budući da je u idealnom slučaju $W = \Delta I$, slijedi

$$m c_p \Delta T = m u^2 / 2,$$

odakle odmah nastaje izraz (7.3—3).

Primjera kao što je ovaj ima u termodinamici mnogo. Spomenimo samo izraz za širenje brzine zvuka u idealnim plinovima

$$u = \sqrt{g \kappa p v'} = \sqrt{g \kappa R' T}.$$

Ovdje smo težinske specifične veličine opet označili crticom. Budući da su masene veličine $v = g v'$ i $R = g R'$, kod ranije izloženog načina primjene Međunarodnog sistema najljepše će veličinske jednačbe glasisi

$$u = \sqrt{\kappa p v} = \sqrt{\kappa R T},$$

dakle bez g koji nema nikakvog posla sa širenjem brzine zvuka u plinovima.

U zaključku želimo upozoriti, bez dokaznog postupka, da primjenom masenih specifičnih veličina postaju i bezdimenzionalne značajke fizikalno ispravnije i jednostavnije. Tako je na primjer

$$\text{Reynoldsova značajka} = Re = \frac{u l \rho}{\eta} = \frac{u l \gamma}{g \eta},$$

$$\text{Prandtllova značajka} = Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda} = \frac{g c'_p \eta}{\lambda},$$

$$\text{Hookova značajka} = Ho = \frac{\rho u^2}{E} = \frac{\gamma u^2}{g E},$$

gdje su na desnom kraju navedene definicije u skladu s »težinskim« specifičnim veličinama. Ostale mnogobrojne značajke čitatelj može sam preračunati na jednostavni i fizikalno ispravni »maseni« oblik pomoću relacija tipa $c = c' g_N$, $g_N = \text{kp/kg}$ i $\gamma = g_N \rho$.

8. VELIČINSKE I BROJČANE JEDNADŽBE NAUKE O TOPLINI

8.1. Općenito o veličinskim i brojčanim jednadžbama

Odsjecci 5. i 6. poglavlja A ove knjige objasnili su koje su prednosti univerzalnih veličinskih jednadžbi, a koje su mane brojčanih. Niz primjera konkretno je pokazao pouzdanost, veću razumljivost i mnogostruku jednostavnost računanja na veličinski način. Dalje smo u odsječku B.13 na jednostavnim primjerima ponovo objasnili sve razlike između veličinskih i brojčanih jednadžbi.

Budući da su veličinske jednadžbe univerzalne, izložena pravila vrijede dakako i za one izraze koji obrađuju termodinamiku. Stoga ne bismo ponavljali načela rada s veličinama. Čitatelja, koji je preskočio poglavlje o mehanici — jer ga zanima samo nauka o toplini — upućujemo da prije daljnjeg čitanja ovog odsječka uz uvodne odsječke A.5 i 6 pročita i odsječke 13.1 do 13.6 u B dijelu knjige jer će tako lakše uočiti i slijediti daljnje primjere. Oni će pokazati kako od brojčanih jednadžbi pravimo veličinske, a odnosit će se uglavnom na tehničku termodinamiku, gdje se na žalost još uvijek u mnogim knjigama upotrebljavaju ograničene i nepregledne brojčane jednadžbe.

8.2. Brzina istjecanja plinova i para

Gotovo u svim i -s dijagramima za vodenu paru nalazimo nacrtano dvostrano mjerilo kojim se može odrediti teoretska brzina u istjecanja pare iz sapnice ili nekog otvora u ovisnosti o smanjenju specifične entalpije $\Delta i = i_1 - i_2$. Iz tog se mjerila može izračunati, a u nekim i -s dijagramima i piše, jednadžba za određivanje idealne brzine istjecanja

$$u = 91,5 \sqrt{\Delta i'}. \quad (8.2-1)$$

To je dakako brojčana jednadžba i zato su ovdje simboli za brzinu i specifičnu entalpiju tiskani uspravnim slovima, a ne *kurzivnim* koja su predviđena za simbole veličina. U i -s dijagramu redovito je naznačeno da se brojčani iznosi u odnose na brzinu u metrima u sekundi, a $\Delta i'$ na kcal/kp. Stoga smo na $\Delta i'$ stavili crticu, jer se radi o »težinskoj veličini« (vidi odsječke 5 i 7.2). Prema tome možemo u skladu s osnovnom relacijom »brojčani iznos = veličina/jedinica«, dakle s $G = G/[G]$ — gdje je G brojčani iznos, G veličina, a $[G]$ jedinica, pisati

$$u = \frac{u}{\text{m/s}}, \quad \Delta i' = \frac{\Delta i'}{\text{kcal/kp}} = \frac{\Delta i}{\text{kcal/kg}},$$

jer su masena i težinska entropija međusobno povezane relacijom $\Delta i = g_N \cdot \Delta i' = \Delta i' \cdot \text{kp/kg}$, budući da je $\text{kp/kg} = 9,80665 \text{ m/s}^2 = g_N \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

Uvrstimo li gornja dva izraza u jednadžbu (8.2-1) dobivamo prilagođenu veličinsku jednadžbu

$$\frac{u}{\text{m/s}} = 91,5 \sqrt{\frac{\Delta i}{\text{kcal/kg}}} \quad (8.2-2)$$

u kojoj kurzivni simboli označuju veličine. Ovu jednadžbu lako preoblikujemo u

$$u = \sqrt{\Delta i} \cdot 91,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\text{kg/kcal}}. \quad (8.2-3)$$

Razmotrimo što nam predstavlja omjer jedinice mase Međunarodnog sistema kg i jedinice topline Tehničkog sistema jedinica kcal. U odsječku 3.2 naznačili smo odnos između međunarodne kilokalorije i joulea

$$\text{kcal} = 4186,8 \text{ joule (J)},$$

a budući da je $J = \text{Nm} = \text{kgm}^2/\text{s}^2$ (vidi tablicu D.3) to je

$$\text{kcal/kg} = 4186,8 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Uvrstimo li ovaj odnos jedinica u izraz (8.2-3) dobivamo

$$u = \sqrt{\Delta i} \cdot 91,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{\text{kg}}{4186,8 \text{ kgm}^2/\text{s}^2}}.$$

Jednostavnim računom i kraćenjem jedinica lako dobivamo da je čitav dio jednadžbe desno od $\sqrt{\Delta i}$ jednak čistom broju $\sqrt{2}$, dakle

$$u = \sqrt{\Delta i} \cdot \sqrt{2},$$

što možemo napisati i ovako:

$$u = \sqrt{2 \Delta i}, \quad \text{odnosno } \Delta i = u^2/2. \quad (8.2-4)$$

To su sada univerzalne veličinske jednadžbe koje vrijede za bilo koji sistem jedinica ili čak nesistematičan skup jedinica.

Razmotrimo još kako bi glasila lijeva jednadžba (8.2-4) u brojčanom obliku koja će biti ograničena na stanovite angloameričke jedinice. Pri tom ćemo upotrebiti ove jedinice: $[u] = \text{foot per second} = \text{ft/s}$, $[i] = \text{British thermal unit per pound} = \text{BTU/lb}$, gdje pod lb razumijevamo jedinicu mase (vidi odsječak B.11.5).

Budući da je veličina jednaka umnošku brojčana iznosa i jedinice, tj. općenito $G = G[G]$, u našem primjeru imat ćemo $u = u[u]$, $\Delta i = \Delta i[i]$, gdje će uspravni simboli predstavljati brojčane iznose *kurzivnih veličina* u spomenutim anglo-američkim jedinicama. Uvrštenje u lijevu jednadžbu (8.2-4) daje

$$u[u] = \sqrt{2 \Delta i[i]},$$

odakle dalje slijedi

$$u = \sqrt{\Delta i} \cdot \sqrt{\frac{2[i]}{[u]^2}} = \sqrt{\Delta i} \cdot \sqrt{\frac{2 \text{ BTU/lb}}{(\text{ft/s})^2}}$$

Izraz pod opsežnijim desnim korijenom možemo posebno izračunati jer je $\text{BTU/lb} = 1055,8 \text{ J}/0,453 \text{ 59 kg}$, a $\text{ft/s} = 0,3048 \text{ m/s}$, što daje

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 1055,8 \text{ J}}{0,453 \text{ 59 kg} \cdot 0,3048^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}} = 223,85.$$

Prema tome je brojčana jednadžba

$$u = 223,85 \sqrt{\Delta i},$$

pomoću koje se brojčani iznos (u) teoretske brzine istjecanja u jedinici ft/s dobiva samo onda, kad se za brojčani simbol Δi uvrsti brojčani iznos pada entalpije izražen u BTU/lb.

Prilagođena anglo-američka veličinska jednadžba (vidi odsječak A.5.5) glasi

$$u = 223,85 \sqrt{\frac{\Delta i}{\text{BTU/lb}}} \text{ ft/s},$$

gdje sada simboli u i Δi označuju veličine (usporedi s prilagođenom veličinskom jednadžbom (8.2—2) u evropskim termodinamikama).

8.3. Specifični potrošak pare i topline

U većini udžbenika tehničke termodinamike i parnih strojeva najčešće nalazimo ove brojčane jednadžbe za energetski opis djelovanja parnih strojeva

$$(8.3—1) \quad A L_0 D = 632 \quad W = \frac{632 q}{L_0 A} \quad (8.3—2)$$

Lijeva jednadžba međusobno povezuje brojčane iznose mehaničkog ekvivalenta topline A , specifičnog mehaničkog rada pare L_0 i specifičnog potroška pare D . Desna jednadžba povezuje brojčani iznos specifičnog potroška topline W s brojčanim iznosima specifične utrošene topline q , te sa L_0 i A .

U udžbenicima s gornjim jednadžbama piše da brojčane vrijednosti za L_0 moraju biti izražene u kpm/kp, a D u kp/KSh. Budući da je veličina $A = 1 = A \cdot \text{kcal/kpm}$ brojčani je iznos mehaničkog ekvivalenta $A = 1/427$, jer je $\text{kcal} = 427 \text{ kpm}$. U skladu s osnovnim načelom $G = G [G]$ možemo pisati

$$A = \frac{1}{427}, \quad L_0 = \frac{L_0}{\text{kpm/kp}}; \quad D = \frac{D}{\text{kp/KSh}}.$$

Srednji izraz možemo pisati kao $L_0 = L_0/m$ jer smo kratili kp. I u trećem izrazu možemo pojednostavniti, jer je $\text{KS} = 75 \text{ kpm/s}$, pa je dakle $\text{KSh} = 75 \text{ kpm} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s} = 270 \text{ 000 kpm}$, odnosno $\text{KSh/kp} = 270 \text{ 000 m}$. Prema tome je

$$A = \frac{1}{427}, \quad L_0 = \frac{L_0}{m}, \quad D = D \cdot 270 \text{ 000 m}.$$

Uvrstimo li to u jednadžbu (8.3—1) dobivamo

$$\frac{1}{427} \frac{L_0}{m} D 270 \text{ 000 m} = 632,$$

odakle odmah slijedi lijepa veličinska jednadžba

$$L_o D = 1 \text{ ili } D = 1/L_o \text{ ili } L_o = 1/D \quad (8.3-3)$$

Prema tome je specifični potrošak pare D recipročna veličina specifičnog mehaničkog rada L_o . To je razumljivo jer D i L_o stvarno su ovako definirani: Tijekom nekog po volji odabranog trajanja kroz stroj prođe količina pare mase m . Za to vrijeme jednolikog rada stroja dobivena je korisna radnja L . Specifični potrošak pare D određuje se omjerom mase pare m i obavljena rada L , dakle

$$D = m/L.$$

Pod specifičnim mehaničkim radom L_o razumijeva se omjer korisna rada L i protekle mase pare

$$L_o = L/m.$$

Pomnožimo li ove dvije veličinske jednadžbe dobivamo (8. 3—3), dakle $L_o D = 1$. Vidimo da je jedna od tih veličina suvišna. Ono što nam kaže na primjer L_o na drukčiji nam način izražava D .

Analizirajmo još brojčanu jednadžbu (8. 3—2). U opisu takvih jednadžbi nalazimo da q treba uvrštavati u kcal/kp, L_o u kp/KSh kako bi se specifični potrošak topline W dobio u kcal/KSh. Prema tome je

$$W = \frac{W}{\text{kcal/KSh}}; \quad q = \frac{q}{\text{kcal/kp}}; \quad L_o = \frac{L_o}{\text{kpm/kp}}; \quad A = \frac{1}{427},$$

gdje *kurzivni* simboli predstavljaju veličine, a uspravni znakovi brojčane iznose u navedenim jedinicama. Uvrstimo li gornje odnose u izraz (8. 3—2) dobivamo

$$\frac{W}{\text{kcal/KSh}} = \frac{632 \frac{q}{\text{kcal/kp}}}{\frac{L_o}{\text{kpm/kp}} \frac{1}{427}}$$

Sređenjem ove jednadžbe slijedi

$$W = \frac{q}{L_o} \frac{632 \cdot 427 \text{ kpm}}{\text{KSh}} = \frac{q}{L_o}.$$

Vidimo da je specifični potrošak topline omjer utrošene specifične topline q i dobivenog specifičnog rada L_o . To nije ništa drugo nego recipročna veličina od toplinske korisnosti η koja je definirana omjerom korisna rada $L = m L_o$ i uložene topline $Q = m q$, dakle

$$\eta = \frac{L}{Q} = \frac{m L_o}{m q} = \frac{L_o}{q} = \frac{1}{W}.$$

Toplinsku korisnost η i onako većinom upotrebljavamo pri toplinskim proračunima pa nam je W posve nepotrebna veličina, jer samo na recipročni način prikazuje isto što i η . O tome se možemo uvjeriti na stvarnom računskom primjeru.

Izračunajmo veličine L_o , D , W i η (termički) Rankinova kružnog procesa (vidi sliku D11) koji radi s pretlakovima $p_1 = 10$ at, $\vartheta_1 = 350$ K i $p_2 = 0,1$ at.

Najprije odredimo specifične entalpije i tačaka bitnih za ciklus. Iz bilo kojeg i - s dijagrama izvadit ćemo pripadne vrijednosti i odmah ih »pretvoriti« u Međunarodne jedinice da čitatelj usput vidi način primjene tih jedinica u termodinamici:

$$i_2 = 753,3 \text{ kcal/kg} = 3160 \text{ kJ/kg},$$

$$i_3 = 552 \text{ kcal/kg} = 2310 \text{ kJ/kg},$$

$$i_4 = 45,4 \text{ kcal/kg} = 190 \text{ kJ/kg}.$$

Korisni rad po jedinici mase pare iznosi $L_o = i_2 - i_3 = 850 \text{ kJ/kg}$, dok je specifična utrošena toplina $q = i_2 - i_4 = 2970 \text{ kJ/kg}$. Stoga je toplinska korisnost procesa

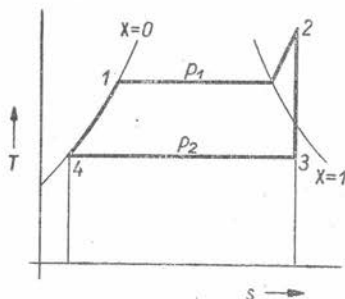
$$\eta = \frac{L_o}{q} = \frac{850 \text{ kJ/kg}}{2970 \text{ kJ/kg}} = \frac{850}{2970} = 0,284.$$

Sada još odredimo vrijednosti ostalih dviju suvišnih veličina:

$$W = q/L_o = 1/\eta = 3,62;$$

$$D = 1/L_o = 0,001177 \text{ kg/kJ}.$$

Kako vidimo ovdje smo računali sa tzv. »masenim« specifičnim entalpijama. U nekim starijim tablicama nalazimo na primjer $i'_3 = 552 \text{ kcal/kg}$, gdje je u skladu s našim izvođenjima u odsječku 5. i 7. 2 crticom označena »težinska« veličina. Budući da je $i = g_N i'$ gdje je $g_N = 9,806650 \text{ m/s}^2$, a $\text{kp} = g_N \text{ kg}$, to je u našem primjeru $i_3 = g_N i'_3 = g_N \cdot 552 \text{ kcal/kg} = 552 \text{ kcal/kg} = 2310 \text{ kJ/kg}$.



Sl. D 11. Rankinov kružni proces u T - s dijagramu

9. TEMPERATURA KAO ZAVISNA VELIČINA I POSLJEDICE TAKVOG SHVAĆANJA

9.1. Kinetička predodžba topline

Klasična termodinamika izvela je svoje zakonitosti iz opažanja ponašanja plinova i krutih tvari, a da pri tom nije pokušala dati neku atomističku predodžbu toplinskih pojava. To je razumljivo jer s jedne je strane bila poznata mehanika velikih tijela, a s druge je strane uveden pojam temperature kao osnovne veličine o kojoj se moglo steći stanovitu predodžbu samo po njenim efektima »fiziološkog stupnja topline«, širenja plinova, produljenja metalnih štapova i nizom drugih efekata (vidi odsječak 1).

Kasnije je znanost obogatila svoje spoznaje o toplinskim pojavama pomoću takozvane kinetičke teorije topline koja je uspjela toplinu svesti na kaotično gibanje molekula i atoma. Ta je teorija utvrdila da je temperatura proporcionalna kinetičkoj energiji molekula. Pri tom zakoni mehanike nisu bili dovoljni, već je čitava zgrada kinetičke teorije topline sagrađena na osnovi statistike ogromnog broja molekula. Ta kombinacija mehanike molekula i statističkih zakona velikog mnoštva molekula (reda 10^{27} do 10^{30} molekula) dala je teoriju koja je bila u skladu s ranijim iskustvom klasične termodinamike, objasnila je suštinu toplinskih pojava, čak je i nepovratnost toplinskih procesa svela na statističke vjerojatnosti. Kad se je zapravo

nedavno (1926) teoriji pridružila kvantna statistika, ova je teorija uspjela objasniti i proračunati gotovo sve toplinske pojave ne samo u području životnih temperatura, već i u blizini apsolutne ničice temperature, a i u drugom ekstremu: kod vrlo visokih temperatura.

Opseg ove knjige ne dopušta da ulazimo u stroge izvode kinetičke teorije topline i ako je to izvanredno zanimljivo. Za naše potrebe poslužiti ćemo se primitivnim modelom kinetičke teorije, a neupućeni čitatelj neka se posluži bilo kojim boljim visokoškolskim udžbenikom fizike gdje će pomoću kanonske raspodjele molekula na energetske nivoe, odnosno pomoću *Fermi-Diracove* kvantne statistike, dobiti iscrpne odgovore na sva pitanja na koja klasična termodinamika ne može da odgovori, a niti joj je to cilj.

Naš primitivni model dat će nam isti rezultat kao i strogi i dugački izvodi pomoću statistike. Zamislimo da se u šupljij kocki stranica duljine a nalazi Z molekula idealnog plina, tj. takvog koji se pokorava jednadžbi stanja plinova. Pretpostavimo dalje da je masa svake molekule m_m , a njena brzina u . Iako je gibanje svake molekule kao jedinke potpuno kaotično, zbog njihova velikog broja one će prema vjerojatnosti koja uvijek vrijedi za velike množine djelovati na stijene kocke tako, kao da se po jedna trećina molekula, dakle $Z/3$, giba između dvije nasuprotne stijene kocke. Svaka od tih molekula udara o stijenu kocke, elastično se odbije i juri natrag prema suprotnoj stijeni. Pri tom smo dakako pretpostavili da su molekule idealno tvrde i elastični grumeni koji udaraju na isto tako tvrde stijene kocke.

Razmotrimo u tom primitivnom modelu putovanje jedne molekule od jednog zida do njemu suprotnog i odande natrag, dakle putovanje na duljini $2a$. Budući da je brzina molekule u , za prelaženje tog puta bit će potrebno vrijeme $t = 2a/u$. Za to vrijeme t na svaku od šest stijena kocke jedanput udara $Z/3$ molekula. Svaka molekula ima impuls sile $m_m u$, no kad leti prema stijeni ona ima impuls $+m_m u$, a nakon što se odbila od stijene impuls $-m_m u$. Dakle je promjena impulsa molekula $2m_m u$, a ta je promjena predana stijeni. Budući da se radi o udaru $Z/3$ molekula čitava će stijena dobiti impuls

$$I = 2 m_m u Z/3.$$

Sve se to zbilo za vrijeme $t = 2a/u$. Budući da je vremenska promjena impulsa jednaka sili, sila će na stijenu iznositi

$$F = \frac{I}{t} = \frac{Z}{3} 2 m_m u \cdot \frac{u}{2a} = \frac{2 Z m_m u^2}{3 \cdot 2a}.$$

Pritisak p na stijenu dobit ćemo dijeljenjem ukupne sile F s površinom $A = a^2$ stijene:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2}{3} Z \frac{m_m u^2}{2a^3}.$$

Nadomjestimo li a^3 sa V , jer je obujam kocke $V = a^3$, dobivamo konačno

$$pV = \frac{2}{3} Z \frac{m_m u^2}{2}. \quad (9.1-1)$$

Ovaj fundamentalni rezultat kinetičke teorije topline dobiva se i pomoću stroge teorije koja se služi na primjer poznatom *Maxwellovom* razdiobom brzina molekula.

Jednadžba (9. 1—1) ne znači da svaka molekula ima kinetičku energiju $m_m u^2/2$, već jedino to da je $3 p V/2$ jednako ukupnoj kinetičkoj energiji $Z m_m u^2/2$. Uvedemo li gustoću plina $\rho = Z m_m / V$ izraz (9. 1—1) prelazi u oblik

$$p = \frac{2}{3} \frac{\rho u^2}{2} = \frac{2}{3} w,$$

gdje je w prostorna gustoća kinetičke energije molekula plina. To znači da je pritisak p jednak dvjema trećinama prostorne gustoće kinetičke energije plina.

Klasična termodinamika upotrebljava svoj osnovni zakon idealnih plinova

$$p V = R_0 Z T, \quad (2.2—4)$$

koji možemo napisati i u obliku

$$p V = k Z T, \quad (2.2—2)$$

jer je prema izvođenjima u odsječku 2. 2 Boltzmannova konstanta k identički jednaka općoj plinskoj konstanti R_0 .

Usporedimo li kinetičku jednadžbu stanja (9. 1—1) s klasičnom (2. 2—2) dobivamo

$$k T = \frac{2}{3} \frac{m_m u^2}{2} = \frac{1}{3} m_m u^2. \quad (9.1—2)$$

Ova jednadžba, posredno bezbroj puta eksperimentalno potvrđena, bit će osnov našem kasnijem razmatranju.

9.2. Kinetička teorija topline i nepovrativost

Podudaranje statističko-kinetičke teorije topline s iskustvom fenomenološke termodinamike nije slučajno. To možemo ocijeniti kad se sjetimo da termodinamika radi s ogromnim brojevima molekula (npr. jedinica kmol sadrži $6,025 \cdot 10^{26}$ molekula), pa su njene zakonitosti ustvari statističke vjerojatnosti, dakle prosječni rezultat ponašanja mnoštva sićušnih čestica u prostoru i vremenu. Te statističke vjerojatnosti toliko su vjerojatne da se u termodinamici javljaju kao strogi zakoni i ako su oni u stvari posljedica kaotičkog gibanja teško predočivog ogromnog mnoštva molekula i atoma.

Fenomenološka termodinamika ima jednu temeljnu i bitnu značajku: jednosmjernost procesa, nepovrativost. Dodir dviju tvari različitih temperatura uvijek dovodi do toga da se hladnija tvar ugrije na onu temperaturu na koju se toplija tvar ohladi. Miješanje plinova ide također samo u jednom smjeru. Razmješavanja dvaju ili više plinova nikad ne dolazi samo od sebe. Posljedica je svega toga ta da se mehanički rad ne može dobiti drukčije nego prilikom premetanja topline iz toplijeg u hladniji spremnik topline. Iako za toplinu, kao oblik energije, vrijedi stavak o održanju energije ipak još nikada nije opaženo da bi se metalna kugla i podloga ohladile i kugla ponovno poletjela uvis, i ako je ona prilikom prethodnog pada na podlogu pretvorila svoju kinetičku energiju u toplinu!

Ova jednosmjernost toplinskih procesa u prvi mah izgleda nespojiva s mehaničkim modelom topline koji smo nabacili u odsječku 9. 1. Mehanika, a ona je u osnovama kinetičke teorije topline, jednako računa promatramo li pojavu vremenski unaprijed ili unatrag!

Prividnu nespojivost mehanike i fenomenološke termodinamike premošćuje statistička vjerojatnost. Ako zakone termodinamike shvatimo kao statističke vjerojatnosti onda se jednosmjernost toplinskih procesa može objasniti »prijelazom od manje vjerojatnih na vjerojatnija stanja«. Kako smo vidjeli, plinovi imaju različitu temperaturu onda kad njihove molekule posjeduju različite kinetičke energije. Dovedemo li ta dva plina u dodir molekule će srazovima izmjenjivati svoje impulse, dakle i energije. Molekule čestica s većom energijom ubrzat će sporije, a pri tom će se same usporavati. Na kraju će se ustaliti najvjerojatnije stanje: molekule oba plina imat će istu prosječnu kinetičku energiju. Posve je nevjerovatno da bi se dva pomiješana plina jednake temperature sami od sebe počeli razdvajati i jedan hladiti, a drugi ugrijavati.

Komprimiramo li plin u jedan dio veće posude, a onda maknemo pregradu u posudi, plin će se jednoliko raširiti na čitav obujam. Vjerojatnost da će se nakon nekog vremena plin sam od sebe stisnuti na prvotni volumen posve je nevjerovatna. U termodinamici kažemo da je proces nepovrativ.

Statistička vjerojatnost oduzela je mehanici osnovni temelj kojim se inače mehanika služi u makroskopskom mjerilu: u nepreglednom mnoštvu molekula nemoguće je odrediti neko početno stanje svake molekule, tj. njenu brzinu i položaj. Bez toga klasična mehanika ne može proračunati gibanja, pa je tako i po principu neodređenosti čak i načelno nemoguće rekonstruirati toplinsku prošlost. Prema tome ono što u fenomenološkoj termodinamici nazivamo jednosmjernošću procesa (nepovrativost), to u kinetičkoj teoriji topline obilježavamo s vjerojatnošću, tj. procesi teku od manje vjerojatnih na vjerojatnija stanja.

9.3. Temperatura kao zavisna veličina

U odsječku 1 započeli smo slijed definicija veličina nauke o toplini (fenomenološke) tako da smo trima osnovnim veličinama mehanike dodali četvrtu osnovnu veličinu, apsolutnu temperaturu T . Osnovnu veličinu uopće ne možemo definirati pomoću neke jednadžbe, dakle nekim već definiranim veličinama. U tome i jest razlika između izvedenih i osnovnih (nezavisnih, aksiomatskih) veličina. S druge smo pak strane jednadžbom (9. 1—2) pokazali da je prema kinetičko-statističkoj teoriji plinova temperatura T proporcionalna već ranije u mehanici definiranim veličinama m_m i u , a između T i $m_m u^2$ posreduje faktor $1/3$ i univerzalna Boltzmannova konstanta k .

Vidimo da se temperatura T na temelju kinetičko-statističke teorije pojavljuje kao izvedena veličina. Prema tome možemo jednadžbom (9. 1—2) definirati temperaturu. Budući da u klasičnoj termodinamici temperatura kao osnovna veličina uopće nije definirana sada je možemo definirati po svojoj volji.

Pretpostavimo u prvi mah da je nova veličina »kinetička temperatura« Θ drugačija veličina nego što je klasična apsolutna temperatura T . Definirajmo kinetičku temperaturu jednadžbom

$$\Theta = \frac{1}{3} m_m u^2, \quad (9.3-1)$$

tj. dijelom kinetičke energije što je ima u statističkom prosjeku jedna molekula ili jedan atom plina. Riječ atom smjera na slučaj kad se radi o jednoatomim plinovima (plemeniti plinovi, pare žive itd.), a riječ molekula na dvoatomne i višeatomne plinove čije se molekule sastoje od više atoma.

Ovakva definicija temperature nije nova. Vjerojatno je čuveni američki profesor matematske fizike *I. W. Gibbs* (1839—1903) prvi izrazio temperaturu na taj najprirodniji način.

Još davno prije Gibbsa, 1703. godine, francuski je akademik *Amontons* izložio svoju teoriju prema kojoj je toplina jedna vrsta gibanja. On je smatrao da je prirodna nul-tačka temperature postignuta onda kad se to gibanje posve smiri. Amontons je također prvi izradio plinski tetmometar stalnog volumena i prvi je pokušao proračunati koliko se stupnjeva ispod tališta leda nalazi nul-tačka temperature.

Budući da je u prosjeku kinetička energija jedne molekule jednaka $m_m u^2/2$, prema (9.3—1) kinetička je temperatura

$$\Theta = \frac{2}{3} m_m u^2 \quad (9.3—2)$$

jednaka dvjem trećinama prosječne kinetičke energije jedne molekule kaotičnog gibanja čestica plina.

Pomoću jednadžbi (9.1—2) i (9.3—1) možemo izračunati da je kinetička temperatura

$$\Theta = k T, \quad (9.3—3)$$

tj. jednaka je produktu *Boltzmannove* konstante k i klasične apsolutne temperature T .

Prema kinetičko-statističkoj teoriji topline veličina $\Theta = k T$, izraženo rječnikom teoretske fizike, prosječna je energija linearnog harmoničkog oscilatora kojim se temperatura krutog tijela očituje kao titranje atoma oko njegovog položaja ravnoteže. Takav jedinični oscilator ima, kao i svaki drugi oscilator, potencijalnu i kinetičku energiju koje su vremenski pomaknute, a njihova suma u svakom trenutku iznosi $\Theta = k T$.

U našem pojednostavnjenom modelu kinetičke temperature možemo svako kruto tijelo predočiti trodimenzionalnim nizom atoma koji u sva tri smjera prostornih koordinata titraju kao harmonički oscilatori. Na svaki od ova tri smjera u prosjeku otpada energija $\Theta = k T = m_m u^2/3$, dakle onoliko koliko smo u odsjeku 9.1 izračunali da kod plinova otpada od jedne iz kaotičnog mnoštva čestica na dvije nasuprotne stijene šuplje kocke.

Sada možemo poći s našom definicijom kinetičke temperature još korak dalje. Iako smo definicijom (9.3—1) stvarno uspostavili odnos (9.3—3) još uvijek možemo slobodno ustvrditi da kinetička temperatura Θ nije neka drukčija veličina od klasične apsolutne temperature T , već da su to identički jednake veličine, dakle

$$T \equiv \Theta. \quad (9.3—4)$$

Drugim riječima da je $k T = T$, odakle slijedi prvi rezultat definiranja apsolutne temperature

$$k = 1,$$

tj. *Boltzmannova* konstanta k jednaka je čistom broju 1.

Ovaj je rezultat posve normalan: budući da je prema klasičnom nazoru fenomenološke termodinamike apsolutna temperatura osnovna veličina, a prema kinetičko-statističkoj teoriji izvedena veličina, to smo temperaturu T (sada više ne trebamo razlikovati T i Θ jer smo sa (9.3—4) uspostavili identičku jednakost) stvarno definirali tako da smo stavili $k = 1$.

Opravdanje takvom postupku posve je jednostavno. Ako je T bila suvišna osnovna veličina onda je ona imala i suvišnu osnovnu jedinicu, $\text{deg} = \text{kelvin} = = \text{K}$ (zbog jednostavnosti ne pišemo »stupanj kelvina«, $^{\circ}\text{K}$, već jednostavno $\text{K} = = \text{kelvin} = ^{\circ}\text{K}$; vidi odsječak 1.2) pa je k samo faktor pretvorbe između »osnovne« jedinice fenomenološke termodinamike i izvedene jedinice temperature kinetičko-mehanički definirane temperature.

9.4. Izvedena jedinica apsolutne temperature

Da bismo lakše pratili daljnja izlaganja zadržimo još neko vrijeme oznaku Θ za apsolutnu temperaturu i ako smo sa (9.3—4) nametnuli identičnost $\Theta \equiv T$.

Da izvedemo jedinicu temperature $[\Theta]$ formulirajmo najprije opću jednadžbu stanja plinova pomoću veličine Θ . Uvrstimo li $\Theta = k T$ u jednadžbu (2.2—2) dobivamo jednadžbu stanja u novom obliku

$$p V = Z \Theta, \quad (9.4-1)$$

gdje je Z dakako broj molekula plina u obujmu V pod pritiskom p . U odsječku 2.1 nazvali smo Z veličinom količina tvari. Tamo smo naznačili da se — kao i svaka druga veličina — Z može rastaviti na brojčani iznos $Z = n$ i jedinicu $[Z]$, dakle $Z = Z[Z] = n[Z]$. Isto se tako i ostale veličine rastavljaju u $p = p[p]$, $V = V[V]$, $\Theta = \Theta_n[\Theta]$, gdje uspravni simboli¹⁾ predočuju brojčane iznose *kurzivno* štampanih veličina mjerenih jedinicom u uglastoj zagradi (vidi odsječak A.5.2). U skladu sa (9.4—1) možemo pisati:

$$p[p] V[V] = n[Z] \Theta_n[\Theta]. \quad (9.4-2)$$

U A poglavlju utvrdili smo da sistem jedinica ima pravo na naziv »sistem« onda kad su jedinice u odnosu $1 \times 1 = 1$ (skladne, koherentne). U tom su slučaju brojčane jednadžbe potpuno jednako građene kao i veličinske. Izraz (9.4—1) je veličinska jednadžba, dok se od (9.4—2) može izraditi brojčana jednadžba (uspravni simboli!)

$$p V = n \Theta_n$$

onda kad je jednadžba među jedinicama skladna:

$$[p][V] = [Z][\Theta]. \quad (9.4-3)$$

Oдавде dobivamo opću (još nedefiniranu) jedinicu temperature koja nas zanima

$$[\Theta] = \frac{[p][V]}{[Z]}.$$

¹⁾ Iznimka su grčka slova. Budući da tiskara nema *kurzivnih* znakova za grčka slova, prisiljeni smo grčki označene veličine tiskati uspravnim znakovima. Kako bismo te veličine razlikovali od pripadnih brojčanih iznosa, potonjima dodajemo indeks n (n -numerus). Za slučaj temperature slovo ϑ_n označuje brojčani iznos veličine relativna temperatura ϑ .

Budući da je $p = F/A$, to je $[p] = [F][L]^{-2}$, a kako je $[V] = [L]^3$, vidimo da je $[p][V] = [F][L] = [W]$, to jest opća jedinica energije, pa je

$$[\Theta] = [W]/[Z]. \quad (9.4-4)$$

Prema tome je izvedena jedinica temperature energije podijeljena s jedinicom količine tvari Z . Budući da je Z u stvari broj molekula najprirodnije je da se za jedinicu $[Z]$ upotrebi brojka 1, tj. jedna molekula (vidi odsječak 2.1), dakle $[Z] = 1$. No ova jedinica suviše je premalena za uobičajene račune, pa ćemo stoga odabrati mnogo veću jedinicu, na primjer *Ulichov* dekadski mol

$$[Z]_M = 10^{24} = \text{mold},$$

gdje smo indeksom M istakli da tu jedinicu predlažemo za Međunarodni sistem jedinica.

Takav izbor sličan je onome u kojem u Međunarodnom sistemu jedinica upotrebljavamo kilogram, dakle osnovnu jedinicu koja iz historijskih razloga nosi prefiks kilo. Budući da nemamo prefiksa za 10^{24} upotrebili smo staru riječ mol i dodali joj na kraju d kao oznaku da se radi o dekadskom molu. Kad bismo d stavili ispred riječi mol dolazilo bi možda do smutnji jer bi mnogi mogli pomišljati na »dekamol«, dakle na $10 \times 6,025 \cdot 10^{23}$. Jedinicu mold treba jednostavno čitati »mold«.

U Međunarodnom sistemu jedinica energiju mjerimo jedinicom joule, dakle je $[W]_M = J$. Prema jednadžbi (9.4-4) jedinica je temperature Θ

$$[\Theta]_M = \frac{[W]_M}{[Z]_M} = \frac{\text{joule}}{\text{mold}} = \frac{J}{\text{mold}} = \frac{J}{10^{24}}.$$

Ovu jedinicu nazvat ćemo imenom

$$\text{stefan} = S = J/\text{mold}$$

po čuvenom slovenskom fizičaru, pjesniku i piscu¹⁾.

Jedinicu temperature stefan ima neki plin onda kad njegovih 10^{24} molekula posjeduje kinetičku energiju od jednog joulea. Drugim riječima: kad u prosjeku svaka molekula ima kinetičku energiju u iznosu 10^{24} -tog dijela jedinice energije joule. Praktičnost primjene jedinice J/mold , a ne $J/1$ je u tome, što u skaldu s veličinskom jednadžbom (9.4-1) prema uvriježenoj praksi lakše računamo ako količinu tvari Z opisujemo moldima nego stvarnim brojem molekula, na primjer $Z = 14 \text{ mold}$, a ne $Z = 14 \cdot 10^{24}$.

Preostaje nam još da izračunamo odnos između izvedene jedinice apsolutne temperature stefan i stare »osnovne« jedinice $\text{deg} = \text{kelvin}$, K ($K = ^\circ K = ^\circ C = \text{deg}$; vidi odsječak 1.2).

U odsjeku 9.3 vidjeli smo da definicija temperature $\Theta = T$ iziskuje izjednačenje Boltzmannove konstante k s brojem 1, dakle zbog $k = 1,38 \cdot 10^{-23} J/\text{deg}$ slijedi

$$1,38 \cdot 10^{-23} J/\text{deg} = 1,$$

¹⁾ Jožef Stefan (1835—1892) bio je koroški Slovenac, a djelovao je kao sveučilišni profesor fizike u Beču. Ime mu je ostalo zabilježeno u tzv. Stefan-Boltzmannovu zakonu. Njegov život i djelo prikazuje niz radova Šubica, Adlešića i Čermelja, koji su citirani u iscrpnom članku o djelovanju Stefanovom na polju elektrotehnike: J. Boncelj, Jožef Stefan i njegovo djelovanje na području elektrotehnike, Elektrotehnički vjesnik 26 (1958), br. 1—2, str. 41. Članak ima niz nastavaka.

odakle je odmah

$$\text{deg} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}.$$

Ovaj se izraz ne mijenja ako mu desnu stranu pomnožimo brojkom 1 koja se zbog $\text{mold} = 10^{24}$ može pisati kao $1 = 10^{24}/\text{mold}$, dakle

$$\text{deg} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot 10^{24}/\text{mold}.$$

Prema tome je

$$\text{deg} = \text{K} = ^\circ\text{K} = ^\circ\text{C} = 13,8 \text{ stefan} = 13,8 \text{ S},$$

jer smo izvedenu jedinicu temperature definirali sa stefan (S) = J/mold . Obrnuto vrijedi

$$\text{stefan} = \text{S} = \text{deg}/13,8 = 0,0725 \text{ deg}.$$

Naravno da možemo odmah uvesti i 1000 puta veću jedinicu kilostefan (kS), dakle

$$\begin{aligned} \text{kilostefan} &= \text{kS} = 72,5 \text{ deg}, \\ \text{deg} &= 0,0138 \text{ kilostefan}. \end{aligned}$$

Ovdje moramo spomenuti da su pojedini autori već ranije predložili definiranje temperature kao izvedene veličine. Već smo spomenuli *Gibbsa*. U novije vrijeme *Bodea* je predložio definiciju temperature sa $\Theta_B = m_m u^2/2$, koja je 1,5 puta manja od naše $\Theta = 1,5 \Theta_B$. Ovaj je prijedlog usavršio sveučilišni profesor dr. ing. *F. Avčin*, jugoslavenski predstavnik na nekoliko zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege. Na temelju dekadskog mola i klasičnog mola $= 6,025 \cdot 10^{23}$ oni su izveli jedinice temperature $\Theta_B \text{ clausius} = \text{J}/\text{mold} = 0,048 \text{ K}$ i $\text{carnot} = \text{J}/\text{mol} = 0,08 \text{ K}$. Svi ovi prijedlozi još su u stadiju proučavanja.

9.5. Specifične topline i njihove jedinice

Definiranje temperature $T = \Theta$ kao zavisne (izvedene) veličine i s time vezano rađanje izvedene jedinice temperature stefan $= \text{J}/\text{mold}$ znatno pojednostavnjuje čitavu formalističku zgradu jednadžbi fenomenološke termodinamike. Budući da je prema ranijem izlaganju *Boltzmannova* konstanta izjednačena s brojkom 1, dakle

$$k = R_0 = 1,$$

klasične veličinske jednadžbe termodinamike postaju bitno preglednije i fizikalno razumljivije.

Poučno je pri tom razmotriti specifične topline koje možemo izvesti kao parcijalne derivacije unutarnje energije U po temperaturi T pri konstantnom pritisku ili konstantnom volumenu.

Einsteinova kvantna teorija toplinskog kapaciteta krutog tijela daje za molnu specifičnu toplinu krutog tijela pri konstantnom volumenu izraz

$$C_v = \frac{dU}{dT} = 3 R_0 H^2 e^H (e^H - 1)^2 \quad (9.5-1)$$

gdje je $H = hf/T$ (ovdje smo već uzeli u obzir da je $k = 1$ zbog $T = \Theta$; klasično je $H = hf/kT$). Pri dovoljno visokim temperaturama je $hf \ll T$, pa gornji izraz za C_v uz $R_0 = k = 1$ prelazi u približni oblik

$$C_v = 3,$$

tj. molna specifična toplina jednaka je čistom broju 3! Snižanjem temperature C_v pada; kod $T \rightarrow 0$ i C_v teži k nuli.

Velikim slovom označujemo tzv. molne veličine koje se upotrebljavaju u jednadžbama oblika $Q = C Z \Delta T$ (vidi odsječak 2.5), dok malo slovo označuje (masenu) specifičnu veličinu u jednadžbi oblika $Q = c m \Delta T$ (vidi i tablicu D.2).

Jedinice molne specifične topline odredit ćemo iz veličinske jednadžbe $Q = C Z \Delta T$, odakle je $C = Q : (Z \Delta T)$, pa koherentna opća jedinica glasi

$$[C] = \frac{[W]}{[Z][W][Z]^{-1}} = 1,$$

dakle čist broj.

Jedinicu masene specifične topline c izračunat ćemo iz jednadžbe $Q = c m \Delta T$ odakle slijedi opća jedinica

$$[c] = \frac{[W]}{[m][W][Z]^{-1}} = \frac{[Z]}{[m]},$$

jer je opća jedinica temperature $[T] = [W]/[Z]$. Budući da je u Međunarodnom sistemu jedinica mase $[m]_M = \text{kg}$, a jedinica količine tvari $[Z]_M = \text{mold}$, to je prema gornjoj jednadžbi

$$[c]_M = \text{mold/kg},$$

dakle 10^{24} molekula po jedinici mase kilogram.

Za jednoatomne plinove kvantna teorija daje $C_v = R_0 3/2$. Budući da je $R_0 = 1$, to je

$$C_v = 3/2 = 1,5.$$

C_p i C_v međusobno su vezane relacijom $C_p = R_0 + C_v$, pa zbog $R_0 = 1$ ona prelazi u oblik

$$C_p = 1 + C_v, \text{ odnosno } C_p - C_v = 1, \quad (9.5-2)$$

što za jednoatomne idealne plinove daje

$$C_p = 5/2 = 2,5.$$

Dvoatomnim plinovima određuje unutarnju energiju izraz

$$U = 1,5 R_0 T + R_0 T + Z hf(e^H - 1)^{-1},$$

što uz $R_0 = 1$ i $C_v = dU/dT$ uz $hf/T \ll 1$ daje molne specifične topline

$$C_v = 5/2 = 2,5; \quad C_p = 7/2 = 3,5.$$

Analogno bismo mogli izvesti i za troatomne plinove što se vidi iz tablice D.5.

Vrsta molekule	Primjer plina	Molna specifična toplina		$\alpha = C_p/C_v$
		C_p	C_v	
Jednoatomna	Plemeniti plinovi	2,50	1,50	1,667
Dvoatomna	H ₂ , O ₂ , N ₂ , CO, HCl	3,50	2,50	1,400
Troatomna	CO ₂ , SO ₂ , H ₂ S	4,00	3,00	1,333

Stvarni plinovi dakako nisu idealni. Njihove vrijednosti manje ili više odstupaju od idealnih vrijednosti koje su navedene u tablici D.5. No svrha tablice nije ovdje da ona daje upotrebljive podatke za neki toplinski proračun, već da pokaže kako se kreću vrijednosti za C_p i C_v kad se temperatura T definira kao što smo učinili, te da Boltzmannovu konstantu prikaže kao preračunski faktor jedinica, jednako kao što je to npr. i mehanički ekvivalent topline (vidi odsječak 3.2).

Veza između masenih specifičnih toplina c_p i c_v ostaje ista kao i u klasičnoj termodinamici i ako je apsolutna temperatura T definirana kao izvedena veličina. Znamo da prema definiciji (vidi tablicu D.2) vrijedi

$$\text{entalpija } I = \text{unutarnja energija } U + \text{rad } pV.$$

Budući da je

$$U = m c_v T + U_0; \quad I = m c_p + I_0$$

to je

$$pV = I - U = m T (c_p - c_v),$$

gdje smo svojevrijedno odabrali $U_0 = 0$ i $I_0 = 0$ kod $T = 0^1$. S druge je strane $pV = R m T$ gdje je R (individualna) plinska konstanta, a m masa plina. Usporedba daje

$$c_p - c_v = R, \quad (9.5-3)$$

prema tome: Za svaki idealni plin razlika $c_p - c_v$ jednaka je plinskoj konstanti R razmatranog plina.

Budući da je općenito (vidi odsječak 2.5) $c = CZ/m$, gdje je Z količina tvari, a veliko slovo C označuje molnu specifičnu toplinu, izraz (9.5-3) prelazi u oblik

$$(C_p - C_v) Z = R m.$$

Masa plina jednaka je umnošku broja molekula Z i mase m_m svake molekule, dakle $m = Z m_m$. Uvrstimo li to u gornju jednadžbu, kratimo sa Z i uzmemo li u obzir da je $R m_m = k = 1$ dobivamo izraz

¹) Stvarno je unutarnja energija plina U_0 kod $T = 0$ jednaka umnošku mase i kvadrata brzine svjetla, dakle energiji mase mirovanja. Budući da su U i I energetske veličine to se nul-razina može odabrati po volji, ali se onda moramo pridržavati tako usvojene skale. Situacija je posve ista kao i pri izboru referentnog nivoa potencijalne energije $W = Gh$. U tehničkoj termodinamici redovito se za nul-razinu odabire temperatura $\vartheta = 0$ K ($T = T_0 = 273,15$ K), pa stoga i' i s' mogu biti i negativnih vrijednosti.

$$C_p - C_v = 1,$$

koji smo već primijenili na temelju jednadžbe (9.5—2).

9.6. Entropija

U tehničkoj termodinamici od velike je koristi pojam entropije S koji je fenomenološki definiran u tablici D.2. I ako se u proračunima svakodnevno susrećemo s tom veličinom ipak je entropija obavijena velom misterioznosti, pa zbog toga ulijeva naročito poštovanje. Pokušajmo sa stajališta kinetičko-statističke teorije prema *R. W. Pohlu* razmotriti pojam entropije na jednostavnom modelu.

Slika D12 jednodimenzionalno prikazuje prostor obujma V_2 . U tom prostoru možemo zamisliti manji prostor V_1 , a omjer volumena označit ćemo sa $x = V_2/V_1$. Prema tome je broj x uvijek veći ili jednak 1. Pretpostavimo najprije da se u prostoru V_2 nalazi jedna jedina molekula plina. Vjerojatnost w_2 da se ta molekula nalazi u volumenu V_2 očito je $w_2 = 1/1$. No vjerojatnost da se istodobno ta ista molekula nalazi u volumenu V_1 iznosi $w_1 = 1/x$, što će reći da se u statističkom prosjeku može ta molekula naći u obujmu V_1 jednom u x opažanja.

U slučaju kad se u volumenu V_2 nalaze dvije molekule plina vjerojatnosti da se obje molekule istodobno nađu u V_2 ili V_1 iznose

$$w_2 = 1/1; w_1 = (1/x)^2.$$

Radi li se o tri molekule vjerojatnosti iznose

$$w_2 = 1/1; w_1 = (1/x)^3.$$

Analogno za Z molekula vrijedi

$$w_2 = 1/1; w_1 = (1/x)^Z.$$

Broju molekula Z odgovara dakako masa m plina.

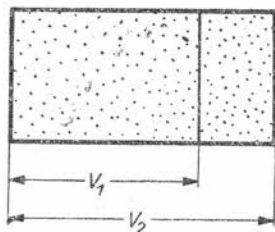
Pomoću omjera $W = w_2/w_1$ možemo označiti koliko je puta vjerojatnije naći u istom trenutku svih Z molekula u volumenu V_2 , a ne u V_1 . Budući da je $w_2 = 1$ očito je

$$W = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{(1/x)^Z} = x^Z = (V_2/V_1)^Z.$$

Logaritmiramo li ovu jednadžbu dobivamo

$$\ln W = Z \ln V_2/V_1, \quad (9.6—1)$$

dakle logaritam vjerojatnosti W .



Sl. D 12. Uz entropiju kao vjerojatnost stanja

U svakom udžbeniku termodinamike nalazimo izraz za porast entropije idealnog plina mase m pri konstantnoj temperaturi

$$\Delta S = m R \ln V_2/V_1. \quad (9.6-2)$$

Budući da je $m = Z m_m$, to je $m R = Z m_m R = Z$, jer je prema izvođenjima u odsječku 2.2 $m_m R = k$ ili prema odsječku 2.5 $m R = Z R_0$, a kako je $R_0 = k = 1$, to je $m R = Z$. Uvrstimo li to u jednadžbu (9.6-2) slijedi

$$\Delta S = Z \ln V_2/V_1. \quad (9.6-3)$$

Vidimo da su desne strane jednadžbi (9.6-1) i (9.6-3) međusobno jednake, pa porast entropije

$$\Delta S = \ln W \quad (9.6-4)$$

označuje prijelaz plina iz stanja manje vjerojatnosti u stanje veće vjerojatnosti. Prema tome je pojam entropije sveden na vjerojatnost, a to je u skladu s tumačenjem nepovrativosti toplinskih procesa sa statističkom vjerojatnošću (odsječak 9.2).

Jedandžba (9.6-4) pokazuje da je entropija »brojčana veličina«. Iz (9.6-3) vidimo da je u našem primjeru možemo odrediti umnoškom broja molekula (količina tvari) Z i logaritma omjera V_2/V_1 (u drugim slučajevima još i T_2/T_1 ili p_2/p_1). Budući da smo za Z odabrali jedinicu $\text{mold} = 10^{24}$ to će i jedinica entropije S biti

$$[S]_M = \text{mold} = \text{joule/stefan},$$

jer smo izvedenu jedinicu temperature stefan definirali kao stefan = joule/mold.

Jedinicu (masene) specifične entropije s odredit ćemo pomoću jednadžbe

$$s = S/m,$$

gdje m označuje masu tvari koja ima entropiju S . Poznato je da iz gornje jednadžbe slijedi opća jedinica specifične entropije

$$[s] = [S]/[m],$$

što u našem primjeru uz $[S]_M = \text{mold}$, $[m]_M = \text{kg}$ daje

$$[s]_M = \text{mold/kg}.$$

Ovaj izbor jedinica u skladu je s osnovnim jednadžbama $Q = S \Delta T$ i $Q = m s \Delta T$. Specifičnu entropiju možemo upotrebiti i kao molnu veličinu s_m u izrazu $Q = Z s_m \Delta T$. U tom je slučaju $s_m = S/Z$ što znači da je jedinica $[s_m]_M = \text{mold/mold} = 1$.

9.7. Posljedice uvođenja $\Theta = T$ u fenomenološku termodinamiku

Dosada smo vidjeli nekoliko posljedica definiranja apsolutne temperature $T \equiv \Theta$ kao izvedene veličine. Boltzmannova konstanta k i opća plinska konstanta R_0 idealnih plinova izjednačile su se i postale jednake broju 1. To znači da iščekavaju iz svih onih jednadžbi termodinamike koje smo dosada smatrali veličinskim.

Dalje iščezavaju jedinice temperature kelvin, celsius, fahrenheit itd. Uvedena je jedinica količine tvari »dekadski mol« = mold = 10^{24} , a to povlači za sobom izvedenu jedinicu temperature $[T]_M = \text{stefan} = \text{J/mold}$. Nadalje molne specifične topline postaju čiste brojčane značajke, a entropija se svodi na vjerojatnost.

Svakako je zanimljivo pogledati kako izgleda termodinamika i vrijednosti njenih veličina s temperaturom kao definiranom i izvedenom veličinom uz ovdje predložene jedinice. Razmotrit ćemo samo nekoliko primjera koji izgledaju najinteresantniji i ako nisu najbitniji.

Najprije ćemo razmotriti temperature. Pretpostavit ćemo da će se dalje upotrebljavati relativna temperatura $\vartheta = T - T_0$ gdje je $T_0 = 273,15 \text{ K}$ temperatura leđišta vode. Pri tom ćemo odmah utvrditi temperaturu T_0 u jedinici stefan (S). Ustanovili smo da je

$$\text{deg} = \text{K} = \text{C} = 13,8 \text{ S},$$

gdje je $S = \text{stefan} = \text{J/mold}$. Prema tome je temperatura leđišta vode

$$T_0 = 273,15 \text{ deg} = 273,15 \cdot 13,8 \text{ S} = 3\,769,61 \text{ S}; \vartheta = 0.$$

Vrelište vode ima za $100 \text{ deg} = 1380 \text{ S}$ višu temperaturu, dakle $T_{vv} = 5\,149,61 \text{ S}$; $\vartheta_{vv} = T_{vv} - T_0 = 1380 \text{ S}$. Nekoliko drugih temperatura međunarodne temperaturne ljestvice dobivaju ove vrijednosti: vrelište kisika $T = 90,19 \text{ deg} = 1\,244,62 \text{ S}$, odnosno $\vartheta = T - T_0 = 1\,244,62 \text{ S} - 3\,769,61 \text{ S} = -2\,525 \text{ S}$; talište antimona $\vartheta = 630,5 \text{ deg} = 8\,701 \text{ S}$.

Raspon relativnih temperatura u starim i novim jedinicama vidimo u tablici D.6, gdje je dakako $\vartheta = T - T_0$.

Relativne temperature u staroj i predloženoj jedinici stefan

Tablica D.6

ϑ / deg	— 100	—10	0	10	100	1000
ϑ / S	—1380	—138	0	138	1380	13 800
ϑ / kS	—1,38	—0,138	0	0,138	1,38	13,8

Vidimo da je za visoke temperature prikladna 1000 puta veća nova jedinica kilostefan (kS) = 1000 S.

Liječnički termometri koji danas rade u području $\vartheta = 35^\circ \text{C}$ do 42°C imali bi u stefanima približno ove vrijednosti:

$\vartheta / ^\circ \text{C}$	35	37	39	41
ϑ / S	482	510	538	566

Uvođenjem izvedene temperature i njezine jedinice stefan mijenjaju se i sve konstante u kojima dolazi dosadašnja jedinica temperature. Tako na primjer Stefan-Boltzmannova konstanta u zakonu isijavanja $p = \sigma T^4$ više ne glasi

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{v_0^2 h^3} = 5,66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}, \text{ već } \sigma = \frac{2\pi^5}{15 v_0^2 h^3} = 1,56 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{S}^4 \text{m}^2},$$

Specifične topline neklih plinova pri temperaturi $\vartheta = 20\text{ K}$ i pritisku 1 kp/cm^2

Tablica D.7

Tvar	Znak	M	Specifična toplina			Molna specifična toplina				$\alpha = \frac{C_p}{C_v}$
			$\frac{c_p}{\text{kcal}/(\text{kg deg})}$	$\frac{c_p}{\text{J}/(\text{kg deg})}$	$\frac{c_p}{\text{kmold}/\text{kg}}$	$\frac{C_p}{\text{kcal}/(\text{kmol deg})}$	$\frac{C_p}{\text{kJ}/(\text{kmol deg})}$	$\frac{C_p}{1}$		
Helij	He	4,003	1,260	5275	0,3821	5,04	21,12	2,54	1,66	
Argon	Ar	39,94	0,127	532	0,0385	5,07	21,24	2,56	1,66	
Vodik	H ₂	2,016	3,408	14269	1,0326	6,86	28,77	3,46	1,41	
Kisik	O ₂	32,00	0,218	913	0,0662	6,97	29,21	3,51	1,40	
Zrak	—	28,95	0,241	1007	0,0730	6,97	29,21	3,51	1,40	
Amonijak	NH ₃	17,03	0,530	2219	0,1607	9,03	37,79	4,55	1,31	
Metan	CH ₄	16,03	0,531	2223	0,1613	8,52	35,64	4,28	1,31	
Etan	C ₂ H ₆	30,06	0,413	1729	0,1252	12,43	51,98	6,26	1,20	

jer je $k = 1$, a $K = 13,8$ S. Isto tako i druga Planckova konstanta zračenja ne iznosi više

$$c_2 = h v_0 / k = 0,014\,38 \text{ K m}, \text{ već } c_2 = h v_0 = 0,198 \text{ S m}.$$

Pogledajmo još koliko bi iznosile vrijednosti pojedinih značajki termodinamike prema svim dosadašnjim izlaganjima. Za tu svrhu moramo najprije utvrditi preračunske koeficijente između dosada upotrebljivanih jedinica i ovdje predloženih.

Izračunajmo odnos između $J/(kg \text{ deg})$ i jedinice $kmold/kg$. To vrijedi za veličine R , c_p , c_v , s :

$$\frac{J}{kg \cdot \text{deg}} = \frac{J}{kg \cdot 13,8 \text{ S}} = \frac{J}{kg \cdot 13,8 \text{ J/mol}} = 0,0725 \frac{\text{mold}}{kg}.$$

Prema tome je

$$J/(kg \text{ deg}) = 7,25 \cdot 10^{-5} \text{ kmold/kg}.$$

Na primjer za vodik (H_2) je $c_p = 14\,269 \text{ J/(kg deg)} = 1,426\,9 \cdot 10^4 \cdot 7,25 \cdot 10^{-5} \text{ kmold/kg} = 1,0326 \text{ kmold/kg} = 1032,6 \text{ mold/kg}$. Plinska konstanta vodika je $R = 4122 \text{ J/(kg deg)} = 4122 \cdot 0,0725 \text{ mold/kg} = 299 \text{ mold/kg} = 0,299 \text{ kmold/kg}$. Naravno da u svim tim vrijednostima možemo umjesto mold pisati J/S, jer je $\text{mold} = \text{joule/stefan (J/S)}$. Možemo dakle reći $R = 299 \text{ J/(kg S)} = 0,299 \text{ kJ/(kgS)}$.

Pregled vrijednosti specifične topline u raznim jedinicama sadrži tablica D.7.

Za veličinu molna specifična toplina C treba izračunati odnos između jedinice $J/(mol \text{ deg})$ i nove jedinice 1 (čista brojka). Taj odnos je:

$$\frac{J}{\text{mol} \cdot \text{deg}} = \frac{\xi J}{\text{mold} \cdot 13,8 \text{ J/mol}} = \xi/13,8 = 0,1204.$$

Ovdje je $\xi = \text{mold/mol} = 10^{24} : 6,025 \cdot 10^{23} = 1,659\,7$. Ovu vrijednost možemo zaokružiti na $\xi = 1,66$ jer time činimo grešku od samo 0,18 promila.

Za vodik je na primjer vrijednost molne specifične topline $C_p = 28,77 \text{ J/(mol deg)} = 28,77 \cdot 0,1204 = 3,46$. Za amonijak je $C_p = 4,55$ itd.

Preostaje nam još samo da nađemo preračunski koeficijent između sadašnje jedinice J/deg za entropiju S (prije smo u prvoj grupi pretvorbe izračunali koeficijent za specifičnu entropiju s) i nove jedinice $[S]_M = \text{mold} = J/S$:

$$\frac{J}{\text{deg}} = \frac{J}{13,8/\text{mold}} = 0,072\,5 \text{ mold} = 0,072\,5 \text{ J/S}.$$

Ostale specifične veličine ne doživljavaju u svojim vrijednostima nikakve promjene (u , i), ali zato valja vrijednosti koeficijenata rastezanja α i γ pretvarati na ovaj način:

$$\frac{1}{^\circ\text{C}} = \frac{1}{\text{deg}} = \frac{1}{13,8 \text{ S}} = \frac{0,0725}{\text{S}} = \frac{0,0725}{\text{J/mol}},$$

$$1/^\circ\text{C} = 0,0725/\text{stefan}.$$

Ako je na primjer za aluminij $\alpha = 2,38 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C} = 2,38 \cdot 10^{-5}/\text{deg}$, u novoj će jedinici iznositi $\alpha = 2,38 \cdot 10^{-5} \cdot 0,0725/\text{stefan} = 1,73 \cdot 10^{-5}/\text{S}$.

E. MJERNI SISTEMI ELEKTROMAGNETIZMA

1. VELIČINE ELEKTROMAGNETSKOG POLJA

1.1. Pregled elektromagnetskih veličina

Čitavom mehanikom ovladali smo u poglavlju B s tri veličine koje smo svojevoljno proglasili osnovnim. Bile su to duljina, vrijeme i masa. Kasnije smo pokazali da umjesto mase možemo odabrati energiju ili neku drugu veličinu koja ne ovisi o duljini i vremenu. Tri veličine nismo mogli definirati nekim drugima, već poznatima i stoga smo ih nazvali nezavisnim, aksiomatskim, polaznim ili osnovnim veličinama.

U termodinamičkom poglavlju D morali smo im prema klasičnom nazoru pridružiti još četvrtu nezavisnu veličinu, temperaturu, jer pomoću nje možemo zgodno povezati toplinske pojave koje smo najprije zamijetili fiziološki. U odsječku B.9 pokazali smo doduše da se temperatura može svesti na energiju gibanja molekula, ali budućnost će pokazati da li je takvo tretiranje termodinamike najpraktičnije.

Elektromagnetska su polja posve novi fenomen koji se ne može objasniti neposrednim ljudskim iskustvom kakovog čovjek ima s duljinom ili težinom. Stoga se ni elektromagnetske pojave ne mogu opisivati s tri osnovne veličine koje smo tijekom povijesti znanosti najprije razvili u mehanici, najbližoj svakodnevnom iskustvu i eksperimentalnoj verifikaciji.

Niz veličina koje opisuju elektromagnetske pojave čine prirodnu i logičnu cjelinu tek onda, kad se i u opisu tih pojava pomoću veličina primjenjuje četvrta nezavisna veličina elektromagnetske prirode. Samorodnost elektromagnetizma priznavali su već od samih početaka istraživanja na tom golemom području znanosti prvi pioniri, ti najblistaviji umovi čovječanstva koji su skromnim alatom, snagom svog intelekta i marljivošću prodrli tamo gdje se ništa nije vidjelo, a u početku ni osjetilo. Svi oni, od *Faradaya* i *Gausa* do *Maxwella* i *Emdeea*, shvaćaju elektromagnetska polja u praznini i u tvarima kao posebne pojave koje se ne mogu objasniti veličinama poznatim iz mehanike ili termodinamike.

Zato u elektromagnetizmu moramo usvojiti četiri nezavisne ili osnovne veličine. Koje su to četiri međusobno nezavisne veličine teoretski je posve svejedno, jer u suštini ni jedna veličina sama po sebi nije osnovna. Veličine su ljudi izmislili da bi im služile kao odličan alat za iskorištavanje prirodnih pojava, pa stoga po svojoj volji mogu nekima od njih pridodati posebno obilježje osnovnosti. Bitno je samo to da broj tih polaznih veličina — kojima se pomoću jednadžbi definiraju ostale, izvedene — u elektromagnetizmu bude četiri.

**Elektromagnetske veličine, njihove oznake, veličinske jednadžbe
u kojima se pojavljuju i jedinice Međunarodnog sistema
s kojima se mjere**

Tablica E.1

Redni broj	Naziv veličine	Simbol	Jedinica Međunarodnog sistema	Jednadžba
1	2	3	4	5
1	Jakost električne struje	I	A	$Q = I t$
2	Električni napon	U	V	$U = E l$
3	Gustoća električne struje	j	A m ⁻²	$I = j A$
4	Jakost električkog polja	E	V m ⁻¹	$F = Q E$
5	Električna indukcija	D	C m ⁻²	$Q = D A$
6	Dielektričnost	ϵ	F m ⁻¹	$D = \epsilon E$
7	Relativna dielektričnost	ϵ_r	1	$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$
8	Influenciona konstanta	ϵ_0	F m ⁻¹	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 v_0^2)$
9	Električni tok	ψ	C	$\psi = D A = Q$
10	Električna polarizacija	P	C m ⁻²	$D = \epsilon_0 E + P$
11	Električna susceptibilnost	ξ	1	$P = \xi \epsilon_0 E$
12	Električni moment	m_e	C m	$m_e = P V$
13	Elektrika	Q	C	$Q = I t$
14	Kapacitet	C	F	$I dt = C dU$
15	Električni otpor	R	Ω	$U = I R$
16	Specifični otpor	ρ	Ω m	$E = \rho j$
18	Magnetska indukcija	B	T	$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$
19	Jakost magnetskog polja	H	A m ⁻¹	$\text{rot } H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$
20	Sila na vodič	F	N	$dF = I dl \times B$
21	Magnetski vektorski potencijal ..	A	T m	$\text{rot } A = B$
22	Permeabilnost	μ	H m ⁻¹	$B = \mu H$
23	Relativna permeabilnost	μ_r	1	$\mu = \mu_r \mu_0$
24	Indukciona konstanta	μ_0	H m ⁻¹	$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ H/m
25	Magnetski tok	Φ	V s	$\Phi = B A$
26	Magnetska uzbuda	Θ	A	$\Theta = \sum I = \oint H dl$
27	Magnetska polarizacija	$\mathcal{J}$	T	$B = \mu_0 H + \mathcal{J}$
28	Magnetska susceptibilnost	κ	1	$\mathcal{J} = \kappa \mu_0 H$
29	Magnetski moment (V = volumen) ..	m_m	T m	$m_m = \mathcal{J} V$
30	Magnetska vodljivost (V = magnetski napon)	Λ	H	$\Lambda = \mu A/l = \Phi/V$
31	Magnetski napon	V	A	$dV = H dl$
32	Induktivitet	L	H	$U dt = L dI$
33	Poyntingov vektor	S	W m ⁻²	$S = E \times H$
34	Gustoća energije el. polja	w_e	J m ⁻³	$w_e = E D/2$
35	Gustoća energije mag. polja	w_m	J m ⁻³	$w_m = B H/2$
36	Gubici histerize	ΔW	W	$d\Delta W = H dB$
37	Valni otpor vakuumu	Z_0	Ω	$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$
38	Brzina elektromagnetske pojave ..	v	m s ⁻¹	$v = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$
39	Lorentzova sila	F	N	$F = Q(E + v \times B)$
40	Biot-Savartovo (Ampèreovo) pravilo	—	—	$dH = I dl: (4 \pi r^2)$

Odraz takve naučne slobode vidimo i u modernoj literaturi. Teoretsku mehaniku možemo započeti utegom a isto tako i »principom najmanjeg djelovanja«. U nauci o elektromagnetskim poljima različitih putova ima još više. Većina autora počinje razlagati elektrofiziku pomoću *Priestley-Coulombova* zakona sile između dvije množine elektrike, iako matematske tačkice nagomilane elektrike možemo samo zamisliti. *Stratton* započinje od *Maxwellovih* jednačbi, a *Pohl* mjerenjem električne struje i napona¹⁾. Svaki autor odabire po svojoj pedagoškoj sklonosti skup od četiri međusobno nezavisne veličine i pomoću njih definira sve ostale koje nazivamo izvedenim. Tako na primjer *Sommerfeld* počinje »Optiku« Poyntingovim vektorom (vidi odsječak 1.4) koji je uveo u »Elektrici«.

Većina autora odabire za osnovne veličine elektromagnetizma ove četiri veličine: duljinu, vrijeme, napon i struju ($l t U I$). Takva osnovna četvorka vjerovatno je najjednostavnija za nastavu, jer preko *Ohmova* zakona $R = U/I$ definira električki otpor i tako redom dalje. Samo rijetki autori upotrebljavaju za osnovnu četvorku $l t m I$. Razlog tome je taj što su daljnja izlaganja otežana zbog prisustva mase m koja u elektromagnetizmu igra manje upadljivu, iako ne podređenu ulogu (elektronika!). Podrobno smo izbor »osnovnih« veličina ukratko obradili u odsječku 7 gdje se govori o dimenzijama i sistemima dimenzija.

Nije zadatak metrologije, pa zato ni ove knjige, da favorizira ovaj ili onaj skup osnovnih četvorki elektromagnetizma. Kako smo već rekli autor udžbenika osnova elektrofizike ili elektrotehnike započet će slijed definicija izvedenih elektromagnetskih veličina onako, kako smatra da je najprikladnije za što bolji uspjeh svojih đaka kojima je knjiga namijenjena.

Stoga smo u tablici E.1 skupili niz elektromagnetskih veličina i jednačbi u kojima one dolaze, a da nam nije bila namjera da se jednačbe shvate kao definicione, iako mnoge od njih to mogu biti. Simboli u tablici predstavljaju veličine pa su zato i jednačbe veličinske, dakle primjenljive za bilo koji sistem jedinica ili čak jedinice raznih sistema ili nesistematičnih skupova jedinica.

Mnoge od tih jednačbi morali bismo pisati u vektorskom obliku. To nismo učinili uglavnom iz tiskarskih razloga, jer bi dosljedna primjena vektorskog računa znatno povisila troškove tiskanja, a nismo uvjereni da bi s time u skladu bila veća korist od knjige. Ni jednačbe većinom nisu pisane u najstrožim diferencijalnim ili integralnim oblicima, jer smo držali na umu da će knjigu većinom čitati oni kojima je doduše potrebno znanje o jedinicama, ali ne i viša matematika. Matematski visoko školovani čitatelj sam će se znati od makroskopskih i izotropnih jednačbi podsjetiti na precizne diferencijalne definicione jednačbe.

U tablici E.1 naveli smo u stupcu 3 jedinice Međunarodnog (Giorgijeva) sistema jedinica. To je učinjeno zbog toga da ne moramo kasnije pri opisu tog sistema jedinica ponovo sastavljati sličnu tablicu.

Iza ovog odsjeka slijede još tri koji dodiruju najvažnije elektromagnetske pojave u praznini i u tvarima. Smatrali smo to potrebnim zato jer su analogni prikazi u udžbenicima obično šturo sastavljeni, iako se baš na pojavama polarizacije i širenju elektromagnetskih pojava sastaju gotovo sve elektromagnetske veličine. Pri tome smo se služili najprimitivnijim modelima i eksperimentima, iako oni zato nisu neispravni.

¹⁾ Izvanredna *Pohlova* trilogija fizike doživjela je od 1927. do 1949. godine 14 izdanja i nekoliko prijevoda.

1.2. Električka polarizacija i električka susceptibilnost

Na slici E 1a vidimo u presjeku pločast kondenzator ispunjen nekim dielektrikom, što je istaknuto šrafitiranjem. Jedna metalna ploča kondenzatora izrađena je u komadu, dok je druga izvedena tako da srednja četvorina ima površinu A . Rubni dio desne ploče kondenzatora postoji zato da bi vektor jakosti električkog polja E u svakom dijelu prostora ispod površine A bio jednak i na čitavom putu do lijeve ploče okomit na ravninu ploče, da bi dakle polje bilo homogeno.

U nacrtanom položaju preklopke P kondenzator je električki potpuno neaktivan jer je preko kontakta 1 kratko spojen. To se vidi na elektrostatskom voltmetru V koji ne iskazuje nikakav otklon.

Prebacimo li preklopku P u položaj 2 voltmetar će pokazivati napon U , a balistički će galvanometar G svojim otklonom zabilježiti da je kroz njega protekla električna Q . Vratimo li sada preklopku natrag u položaj 1 balistički će galvanometar ponovo dati otklon Q , dok će napon spasti na nulu.

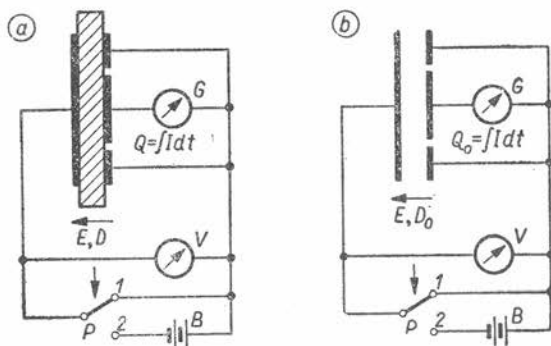
Galvanometar G izmjerio je onu električku Q koja se kod nabijena kondenzatora nalazi na srednjoj desnoj ploči površine A . Tačno nasuprot površini A nalazi se na lijevoj ploči, također na površini A , električna Q . Ove se električke, pozitivna na desnoj ploči, a negativna na lijevoj, nalaze u ravnoteži tj. po apsolutnoj su vrijednosti jednake. One su jednoliko razdijeljene po površini ploča.

Dielektrik između nasuprotnih površina A nalazi se u posebnom napetom stanju, njega prožima električko polje koje karakteriziramo s dva vektora. Jedan od njih je jakost električkog polja E koje u našem primjeru iznosi $E = U/l$, gdje je U napon ploča, a l razmak paralelnih ploča.

Prema priznatom *Faraday-Maxwellovom* shvaćanju električkog polja, između obloga kondenzatora prolazi kroz dielektrik električki tok ψ , analogno magnetskom toku Φ kroz feromagnetike. Električki tok ψ počinje od pozitivne električke $+Q$ i završava u negativnoj $-Q$, a na samoj oblozi jednak je toj električki, dakle $\psi = Q$.

Gustoću toga toka nazivamo električkom indukcijom D (ponekad i gustoćom dielektričkog pomaka) koju definiramo relacijom $\psi = D A$, gdje su indukcija D i površina A vektori, a njihov umnožak skalarni produkt vektora. Ovdje vektorske oznake ispuštamo jer promatramo samo homogena polja i izotropne dielektrike.

Prema tome možemo reći da je balistički galvanometar, izmjerivši strujni udar Q (vidi sliku E 1a), ujedno izmjerio ψ pa je dakle $Q = \psi = D A$. Opis polja sa ψ i Q samo su dva nazora na električke pojave; prvi je pomoću polja, a drugi (stariji) pomoću »djelovanje električke na daljinu«. U primjeni se koristimo s oba gledanja, pa čak i zajedno kao što je i ovdje slučaj, jer je to od koristi pri računu. Prednosti predodžbe sa ψ i s vektorima E i D opažaju se naročito jako onda kada



Sl. E 1. Kondenzator s dielektrikom među pločama i bez njega

se radi o elektromagnetskim poljima u kojima se vektori D i E ne moraju završavati u električnim Q , već se bez izvora i ponora ($\pm Q$) ulančuju s magnetskim poljima (elektromagnetska indukcija).

Iz $Q = \psi = D A$ vidimo da je apsolutna vrijednost vektora D jednaka površinskoj gustoći elektrike $\sigma = Q/A$ koja je jednoliko razmještena na svakoj od ploča površine A .

Omjer izmjerene elektrike Q i izmjerenog napona U nazivamo kapacitetom kondenzatora

$$C = Q/U,$$

što se zbog $\psi = Q = D A$ te $U = E l$ može napisati i u obliku

$$C = \frac{DA}{El}. \quad (1.2-1)$$

Sada naš misaoni pokus izvedimo prema slici E 1 b, tj. iz prostora među pločama izvukli smo dielektrik. Ostao je samo zrak (strogo govoreći morali bismo međuprostor iscrpiti tako da bi u nutrima vladao potpuni vakuum). Prebacimo li preklopku P u položaj 2, voltmetar na ovom, sada zračnom kondenzatoru, pokazat će opet napon U , ali će otklon balističkog galvanometra biti manji i iznositi Q_0 . Zato će prema $\psi_0 = Q_0 = D_0 A$ i električna indukcija D_0 u zraku biti manja nego kad je u kondenzatoru bio dielektrik, jer je površina A ostala nepromijenjena. Isto je tako ostala nepromijenjena i jakost električnog polja $E = U/l$ jer su isti i U i l . Stoga će kapacitet zračnog kondenzatora

$$C_0 = \frac{D_0 A}{El} \quad (1.2-2)$$

biti manji od ranije izračunatog C .

Omjer između Q i Q_0 , ψ i ψ_0 , D i D_0 iz ova dva pokusa nazivamo relativnom dielektričnošću ϵ_r ; prema tome je

$$\epsilon_r = \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{D}{D_0} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{C}{C_0} \quad (1.2-3)$$

čisti broj, jer se radi o omjeru istosmjernih veličina različitih vrijednosti. Odavde vidimo da je $D = \epsilon_r D_0$, $\psi = \epsilon_r \psi_0$ itd.

U izrazu (1. 2—2) dolazi omjer dvaju istosmjernih vektora D_0 i E . Pokusi su pokazali da je omjer D_0/E prirodna konstanta koja prema najnovijim mjerenjima iznosi

$$\epsilon_0 = (8,854\,2 \pm 0,000\,2) \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$$

gdje je F kratica za jedinicu farad = $V s/A$. Univerzalnu konstantu ϵ_0 nazivamo influencionom konstantom ili dielektričnošću vakuuma. Ovaj drugi, stariji naziv, potječe iz slijedećeg rasuđivanja.

Budući da je $\epsilon_0 = D_0/E$, izraz (1. 2—2) za kapacitet vakuumskeg kondenzatora glasi $C_0 = \epsilon_0 A/l$. Zato što je prema (1. 2—3) $D = \epsilon_r D_0$, analogno građeni izraz (1. 2—1) za kapacitet kondenzatora s dielektrikom možemo pisati u obliku

$$C = \frac{\epsilon_r D_0 A}{El} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{l} = \frac{\epsilon A}{l}, \quad (1.2-4)$$

gdje je veličina $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ nazvana dielektričnošću, a jednaka je umnošku relativne dielektričnosti ϵ_r i influencione konstante ϵ_0 . Budući da je za vakuum $\epsilon_r = 1$, za nj je dakle $\epsilon = \epsilon_0$, pa se stoga ϵ_0 naziva i dielektričnost vakuuma.

Opisana dva mjerenja na slikama E 1 a i b stvarno se primjenjuju za mjerenje relativne dielektričnosti. Budući da prvo mjerenje daje C , a drugo C_0 , zbog $C = \epsilon A/l$ i $C_0 = \epsilon_0 A/l$ slijedi $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = C/C_0$ što smo već napisali u jednadžbi (1. 2-3).

Prvo mjerenje s dielektrikom dielektričnosti ϵ dalo je električku indukciju D , a drugo mjerenje s vakuumom između ploča kondenzatora manju indukciju D_0 . Očito je razliku indukcije

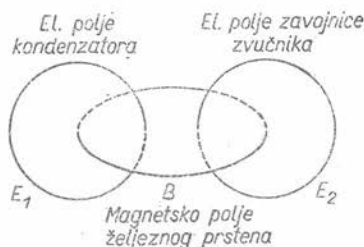
$$P = D - D_0 \quad (1.2-5)$$

pridonio umetnuti dielektrik. Veličinu P nazivamo električkom polarizacijom koju tumačimo atomističkom strukturom materije. Ako zamislimo u primitivnom modelu atome kao električki pozitivno nabijene teške jezgre oko kojih kruže lagani električki negativni elektroni, onda je u normalnom stanju atom električki uravnotežen, jer na primjer dielektrik koji je također sastavljen od atoma prema vani ne pokazuje nikakvo električko djelovanje. Kad atome stavimo u električko polje jakosti E na jezgre s elektrikom $+q$ djeluje sila $F = qE$, a na elektrone suprotno usmjerena sila $-F = -qE$. Time se poremeti prvotna električka ravnoteža pa se putanje elektrona razvuku suprotno smjeru polja E , a jezga pomakne u smjeru polja. Tako svaki atom postane električki dipol koji više nije električki neutralan prema vani, a sav je elastično napregnut. Pod djelovanjem vanjskog polja E atomi su se polarizirali i sa svojim električkim poljima drže ravnotežu vanjskom polju E na primjer našeg kondenzatora. Zbog toga veličinu $D = Q/A$ možemo shvatiti kao gustoću pomaka elektrike Q preko presjeka A . Iako u vakuumu nema atoma ipak i u njemu vrijedi $D_0 = Q_0/A$, što nam može pokazati pokus koji je prvi puta izveo 1905. godine *Whitehead* da bi dokazao ispravnost *Maxwellove* teze o pomaćnim strujama $I = d\psi/dt = dQ/dt$ kroz dielektrik i kroz vakuum.

Na slici E 2 vidimo kako je izvor visokofrekventnog napona 1 priključen na ploče kondenzatora među čijim se pločama nalazi dielektrik 2 izveden u obliku



Sl. E 2. Whiteheadov pokus s pomaćnim strujama



Sl. E 3. Ulančenje magnetskog polja sa dva električka polja

valjka. Dielektrički valjak obuhvaća željezni prsten 3 oko kojega je namotana zavojnica 4 na čije je krajeve priključen mikrofonski 5. Pokus je pokazao da zvučnik

daje glasove ako se pusti u pogon generator 1. To znači da se u svitku 4 inducirao električki napon, a odatle slijedi da se je u željeznom prstenu 3 morao mijenjati magnetski tok, jer je $-U_1 = d\Phi/dt$. Ovo magnetsko polje mogla je stvoriti samo električna struja I što teče okomito na ravninu u kojoj leži željezni prsten 3. To znači da je ta struja usmjerena baš od jedne ploče kondenzatora prema drugoj. Budući da je prema definiciji $I = dQ/dt$, a $Q = \psi$, to je $I = d\psi/dt = A dD/dt$ struja kroz dielektrik, a kako zbog savršenosti dielektrika to nije galvanska struja kao na primjer kod strujanja kroz otporničke vodiče, ona se naziva pomačnom strujom.

Pogledamo li sliku E 2 vidimo da su prilikom pokusa međusobno ulančena tri polja. Najprije je izmjenično električko polje kondenzatora $E_1 = U/l$ stvorilo u željeznom prstenu 3 magnetsko polje indukcije B , a ovo je u zavojnici zvučnika proizvelo novo električko polje E_2 . Takvu dvostruku ulančenost triju polja simbolički prikazuje slika E 3. Smisao prve *Maxwellove* jednadžbe za dielektrik

$$\oint H dl = A \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{ili} \quad \text{rot } H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.2-6)$$

baš i jeste u tome što opisuje prvo ulančenje $E_1 - B$ na slici E 3. Pri tom znak $\oint$ predstavlja kružni integral.

Pokusi su pokazali da zvučnik 5 na slici E 2 zuji i onda kad između ploča kondenzatora nema dielektrika, premda to još fizikalno ne znamo objasniti jer u vakuumu primitivni modeli atoma zakazuju. To što je u ovim pokusima primijenjena izmjenična struja ne protivi se našem razmatranju uz sliku E 1, jer priključivanje kondenzatora na istosmjerni napon predstavlja također vremenski promjenljivu pojavu, u suštini istu kao što su izmjenične struje.

Vratimo se sada veličini električka polarizacija P koju smo uveli jednadžbom (1. 2—5). Budući da je $D = \epsilon_r D_0$, a $D_0 = \epsilon_0 E$, izraz (1. 2—5) možemo napisati i u obliku

$$P = D - D_0 = (\epsilon_r - 1) D_0 = \epsilon_0 E (\epsilon_r - 1). \quad (1.2-7)$$

Razliku između relativne dielektričnosti ϵ_r i 1 nazivamo električkom susceptibilnošću

$$\xi = \epsilon_r - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{P}{D_0} \quad (1.2-8)$$

Zapravo je to relativna susceptibilnost, jer bi apsolutna susceptibilnost bila $\xi \epsilon_0$ zato što bi u analogiji sa $\epsilon = D/E$ onda bilo $\xi \epsilon_0 = P/E$, a to je dio dielektričnosti koji prema $\epsilon = \epsilon_0 + \xi \epsilon_0 = \epsilon_0 (1 + \xi) = \epsilon_0 \epsilon_r$ manjka do pune apsolutne dielektričnosti ϵ . Ovdje možemo spomenuti da električka polarizacija P , odnosno električka susceptibilnost ξ , nije konstantna veličina već ona znatno ovisi o jakosti električkog polja E , o temperaturi kao $\xi = \text{const}/T$, a napose o tome kakva je elektriziranja i razelektriziranja doživio dielektrik ranije (dielektrička histereza!).

Pod specifičnom električkom susceptibilnošću razumijeva se veličina

$$\chi = \frac{\xi}{\rho} = \frac{\epsilon_r - 1}{\rho} = \frac{P}{\rho \epsilon_0 E}, \quad (1.2-9)$$

gdje je ρ gustoća dielektrika $\rho = m/V$.

Dosadašnja razmatranja vrijedila su za slučaj kad je prostor između obloga kondenzatora potpuno ispunjen dielektrikom. Ako tome nije tako prilike se potpuno

mijenjaju. U tu svrhu izvidimo slučaj kad se u prvotno homogeno električno polje u zraku $E = U/l$ stavi dielektrik dielektričnosti ϵ . Neka je to šuplji valjak kao na slici E 4. Već na skici silnica električkog polja vidimo da će polje u unutrašnjosti valjka E_u biti slabije od prvotnoga E , jer su se na čeonim stranama dielektričkog valjka influencirale pozitivne i negativne množine elektrike.

Električka indukcija u unutrašnjosti valjka iznositi će $D_u = D_0 - NP$, gdje je $D_0 = \epsilon_0 E$ prvotna indukcija, a N faktor depolarizacije. Jakost polja također će biti smanjena i iznositi će

$$E_u = E - NP/\epsilon_0,$$

a polarizacija P više neće slijediti jednadžbu (1.2—8) već $P = \xi \epsilon_0 E_u$. Stavimo li ovaj P u gornju jednadžbu dobivamo polje u šupljini dielektričkog valjka

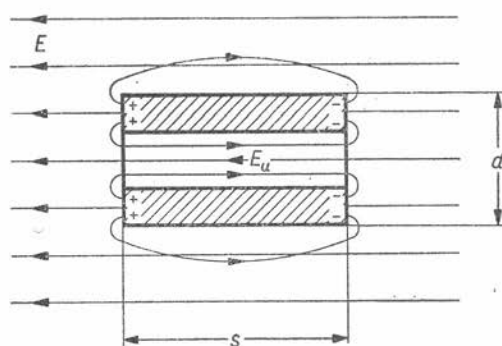
$$E_u = \frac{E}{1 + N\xi} \quad (1.2-10)$$

Obrnuta je situacija kad se u prostoru između ploča kondenzatora nalazi dielektrik sa ϵ , a u njemu je na primjer zračni mjehurić u obliku rotacionog elipsoida s većom osi u smjeru polja. Jakost električkog polja E_u u takvom mjehuriću iznosi

$$E_u = \frac{E}{1 - N\xi/\epsilon_r} \quad (1.2-11)$$

dakle je $E_u > E$ za razliku od prijašnjeg primjera gdje je bilo $E_u < E$.

Ukoliko mjehurić ili dielektrik sa slike E 4 nemaju oblik rotacionog elipsoida polje u njima neće biti samo pojačano ili oslabljeno već će postati i nehomogeno. Jedino elipsoid ne uzrokuje nehomogenost polja. Ako je veća os rotacionog elipsoida s , a manja d , onda su vrijednosti faktora depolarizacije N sakupljene u tablici E. 2.



Sl. E 4. Šuplji dielektrik u električkom polju

Faktor depolarizacije N rotacionog elipsoida

Tablica E.2

s/d	1	2	5	10	20	50	100
N	1/3	0,174	$5,58 \cdot 10^{-2}$	$2,03 \cdot 10^{-2}$	$6,75 \cdot 10^{-3}$	$1,44 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-4}$

Kugla ima $s/d = 1$ pa je $N = 1/3$ što uzrokuje polje u kuglici dielektrika koja je umetnuta u polje $E_u = 3E : (2 + \epsilon_r)$, dok je polje u okruglom zračnom mjehuriću $E_u = 3\epsilon_r E : (2\epsilon_r + 1)$.

Prilikom stvarnih mjerenja izduženi rotacioni elipsoidi nadomještavaju se valjcima kojima je $s \gg d$ (vidi sliku E 4).

U starijoj literaturi, osobito onoj koja upotrebljava brojčane jednadžbe prilagođene *Gaussovom* sistemu jedinica (vidi odsječak 3. 3), električka susceptibilnost povezana je s relativnom dielektričnošću jednadžbom

$$\xi' = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \quad (1.2-12)$$

Za razliku od naše susceptibilnosti ξ iz jednadžbe (1. 2—8) ovu stariju nazivamo »neracionalnom susceptibilnošću« i označujemo crticom. Usporedimo li izraz (1. 2—8) sa (1. 2—12) vidimo da je

$$\xi = 4\pi \xi'.$$

U skladu s jednadžbom (1.2—9) analogno se odnose i specifične susceptibilnosti, $x = 4\pi x'$.

Obratno je za stari faktor depolarizacije N' koji je s racionalnim N u odnosu

$$N' = 4\pi N,$$

pa na primjer za kuglu iznosi $N' = 4\pi/3$, dok je prema tablici E. 2 sadašnji racionalni faktor depolarizacije $N = 1/3$.

1.3. Magnetska polarizacija i magnetska susceptibilnost

Na slici E 5 nacrtali smo magnetski analogon električkog uređaja slike E 1. Da bismo u unutrašnjosti prerezanog metalnog valjka izrađenog od električki odličnog vodljivog lima dobili homogeno magnetsko polje, razdijelili smo valjak na tri dijela dužina l_1 , l i l_2 . Za naša mjerenja služiti ćemo se samo srednjim dijelom valjka dužine l , a oba rubna služiti će samo zato da održe homogenost magnetskog polja u srednjem valjku. Za tu svrhu treba otpornike R_1 , R i R_2 namjestiti tako da kroz dovodne žice teku iz baterije B baš takve struje I_1 , I i I_2 koje udovoljavaju tom zahtjevu. Pri naročito preciznim magnetskim mjerenjima možemo zamisliti da su lijevi i desni rubni valjak produženi i savijeni tako da se sastaju, dakle predstavljaju jedan kružni valjak.

Kad preklopom P uključimo bateriju B strujomjer srednjeg valjka pokazivat će struju I , balistički voltmetar G pokazat će naponski udar (naponski impuls) Φ_0 , a to je magnetski tok u zraku unutar srednjeg valjka. Mnogobrojni pokusi pokazuju da je taj magnetski tok Φ_0 razmjernan struji I , dakle $\Phi_0 = L_0 I$ gdje je L_0 konstanta svojstvena geometrijskim dimenzijama uređaja sa slike E 5. Omjer magnetskog toka i struje

$$L_0 = \Phi_0 / I \quad (1.3-1)$$

nazivamo induktivitetom (samoinduktivitet) našeg svitka koji se sastoji od jednog zavoja — prerezanog valjka duljine l .

Veličinu $B_0 = \Phi_0 / A$ nazivamo magnetskom indukcijom. Ovdje je $A = r^2 \pi$ presjek šupljine valjka, ako je r njegov polumjer. Budući da je B_0 omjer toka Φ_0 i površine A kroz koju taj tok prolazi, magnetska se indukcija katkada naziva i gustoćom magnetskog toka.

Budući da je magnetski tok Φ_0 uzbudila električna struja I u magnetskim se poljima uvodi pomoćna veličina: jakost magnetskog polja $H = I/l$ odnosno op-

ćenitije $H = \Theta/l$, gdje je veličina $\Theta = NI$ magnetska uzbuda jednaka umnošku broja zavoja N i jakosti struje I što teče tim zavojima. U našem je slučaju $\Theta = I$, jer je $N = 1$. Uzbuda Θ i tok Φ_0 odnose se kao kao uzrok i posljedica.

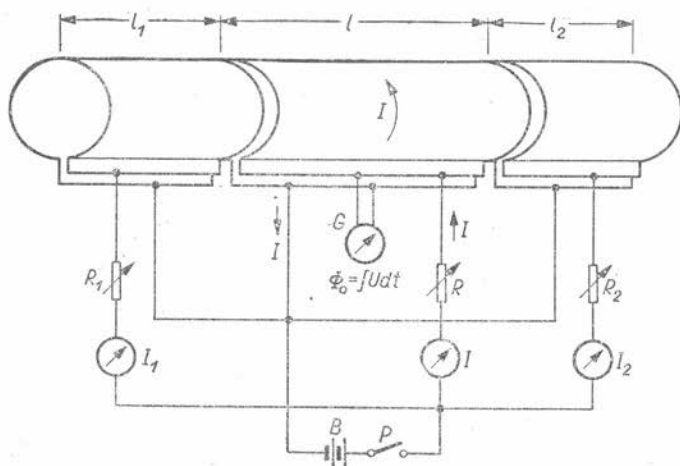
Uvrstimo li izraze $\Phi_0 = B_0 A$ i $I = Hl$ u jednadžbu (1. 3—1) dobivamo induktivitet srednjeg valjka na slici E 5:

$$L_0 = \frac{B_0 A}{H l} \quad (1.3—2)$$

Pokusi pokazuju da je omjer B_0/H u zraku univerzalna konstanta. Vrijednost je te konstante

$$\mu_0 = B_0/H = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m},$$

gdje je H kratica za jedinicu induktiviteta $H = \text{henry} = \text{Vs/A}$. Veličinu μ_0 nazivamo indukcionom konstantom ili permeabilnošću vakuuma.



Sl. E 5. Magnetsko polje u prerezanom valjku

Sada naš pokus promijenimo samo utoliko da u šupljinu valjaka stavimo neki feromagnetik, na primjer željezo. Uključenje preklopke dat će sada na balističkom voltmetru G neki drugi otklon, pokazat će da je unutrini srednjeg valjka magnetski tok Φ koji je veći od prvotnoga Φ_0 , iako smo struju I zadržali na istoj vrijednosti. Budući da je presjek valjka $A = r^2 \pi$ ostao nepromijenjen veća je i magnetska indukcija koja sada zbog većeg magnetskog toka iznosi $B = \Phi/A$. U analogiji s jednadžbom (1. 3—2) induktivitet srednjeg valjka sada iznosi

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{BA}{H l}, \quad (1.3—3)$$

jer se jakost magnetskog polja H nije promijenila zato što struja i u ovom pokusu iznosi I , a ostale su iste i dimenzije valjka.

Omjer veličina Φ i Φ_0 , B i B_0 te L i L_0 nazivamo relativnom permeabilnošću μ_r ; prema tome je

$$\mu_r = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{L}{L_0}, \quad (1.3-4)$$

čisti broj jer se radi o omjeru različitih vrijednosti istorodnih veličina. Iz gornje jednadžbe vidimo da je $\Phi = \mu_r \Phi_0$, $B = \mu_r B_0$ i $L = \mu_r L_0$. Stoga izraz (1. 3—3) možemo napisati u obliku $L = \mu_r B_0 A : (H l)$, a kako je $B_0/H = \mu_0$, induktivitet L valjka ispunjenog feromagnetikom je

$$L = \mu_r \mu_0 A / l = \mu A / l,$$

gdje je $\mu = \mu_r \mu_0$ permeabilnost, a jednaka je umnošku relativne permeabilnosti μ_r i indukcione konstante μ_0 . Za zrak je $\mu_r = 1$; stoga je i formalno za nj $\mu = \mu_0$, pa se zato μ_0 naziva i permeabilnošću vakuuma.

Usporedimo li ova izlaganja s onima u odsječku 1. 2 vidimo da formalno postoji potpuna analogija jednadžbi. Električkom toku ψ odgovara magnetski tok Φ , električkoj indukciji D magnetska B , električkom polju E magnetsko H , a dielektričnosti ϵ permeabilnost μ . Iako su za pamćenje jednadžbi i procesa takve analogije vrlo korisne one katkada mogu stvoriti kriv utisak, jer stvarno se lako dadu mjeriti veličine E i B , dok D i H smatramo u novije vrijeme pomoćnim veličinama.

Analogije se produžuju još i dalje. Već sam zakon induciranja napona $-U_i = -d\Phi/dt$ koji u strogoj nauci o elektromagnetizmu pišemo u integralnom i diferencijalnom obliku druge *Maxwellove* glavne jednadžbe kao

$$\oint E dl = -A \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{ ili } \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.3-5)$$

potpuno je nalik prvom *Maxwellovom* zakonu koji smo napisali u jednadžbi (1. 2—6) prošlog odsječka. Spomenimo usput da izraz (1. 3—5) opisuje drugo elektromagnetsko ulančenje ($B-E_2$) na slici E 3.

Spomenute analogije jednadžbi idu još dalje. Prilikom mjerenja na našem uređaju iz slike E 5 ustanovili smo da je uz istu uzbudu Θ kroz valjak s feromagnetikom permeabilnosti μ prolazio magnetski tok Φ , a kad njega nije bilo tok Φ_0 . Pripadne magnetske indukcije bile su $B = \Phi/A$ i $B_0 = \Phi_0/A$. Očito je razliku magnetskih indukcija

$$\mathcal{F} = B - B_0$$

uzrokovao umetnuti feromagnetik. Veličinu $\mathcal{F}$ nazivamo magnetskom polarizacijom, analogno kao električku polarizaciju P . Magnetsku polarizaciju $\mathcal{F}$ također tumačimo atomističkom strukturom materije. Za izvor dodatnog magnetskog toka smatramo tokove što ih stvaraju vrtnje elektrona oko vlastite osi (spin). Kad feromagnetska tvar nije u vanjskom magnetskom polju, kakvo je na primjer u šupljini našeg valjka, elektronska magnetska polja orijentirana su kojekako, pa je njihov magnetski efekt prema vani jednak približno nuli. Kad feromagnetik dođe u vanjsko magnetsko polje ova se kaotična ravnoteža narušava, a suma sada jednako orijentiranih elektronskih magnetskih tokova makroskopski se iskazuje kao magnetska polarizacija $\mathcal{F}$.

Razliku između relativne permeabilnosti μ_r i broja 1 nazivamo (relativnom) magnetskom susceptibilnošću

$$\kappa = \mu_r - 1 = \frac{\mathcal{J}}{B_0} = \frac{B - B_0}{B_0}, \quad (1.3-6)$$

dok je apsolutna susceptibilnost umnožak $\kappa \mu_0$, pa dakle vrijedi $\mu = \mu_0 + \kappa \mu_0$, odnosno $B = \mu H = (\mu_0 + \kappa \mu_0) H = \mu_0 H + \mathcal{J} = B_0 + B_i$, jer je prema jednačbi (1. 3—6) $\mathcal{J} = \kappa B_0 = \kappa \mu_0 H = B_i$.

Specifična magnetska susceptibilnost definirana je analogno električkoj kao omjer susceptibilnosti κ i gustoće ρ :

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho} = \frac{\mu_r - 1}{\rho} = \frac{\mathcal{J}}{\rho \mu_0 H}. \quad (1.3-7)$$

Na primjer relativna susceptibilnost vode pri temperaturi $\vartheta = 0$ deg iznosi $\chi = -9,07 \cdot 10^{-9}$ m³/kg što znači da je $\kappa = -9,07 \cdot 10^{-6}$. Vidimo da je voda dijamagnetična, tj. ima manju permeabilnost od vakuuma. Kisik je naprotiv paramagnetičan, jer je $\kappa = +1,86 \cdot 10^{-6}$.

Kao ni električka susceptibilnost ξ , tako ni magnetska susceptibilnost κ nije stalna veličina, već znatno ovisi o jakosti magnetskog polja H u kojem se nalazi tvar, o prošlosti (histereza) i pada s temperaturom. Isto vrijedi i za $\mathcal{J}$.

Pojave depolarizacije (demagnetizacije) nastaju kod magnetskih polja posve analogno kao kod električkih. U slučaju šupljeg grumena feromagnetika (nalik na sliku E 4), odnosno zračnog mjehurića u feromagnetiku, vrijede jednačbe (1. 2—10) i (1. 2—12) prošlog odsječka, samo treba umjesto simbola E_u , E , ξ i ϵ_r staviti H_u , H , κ i μ_r . Faktor magnetske depolarizacije N za rotacioni elipsoid (odnosno praktički za izduženi valjak) istih je vrijednosti kao i N u tablici E. 2.

Magnetska susceptibilnost κ' u starijoj literaturi u vezi je s relativnom permeabilnošću na ovaj način

$$\kappa' = \frac{\mu_r - 1}{4\pi}$$

pa je dakle odnos sadašnje i stare (neracionalne) magnetske susceptibilnosti isti kao kod električke

$$\kappa = 4\pi \kappa'.$$

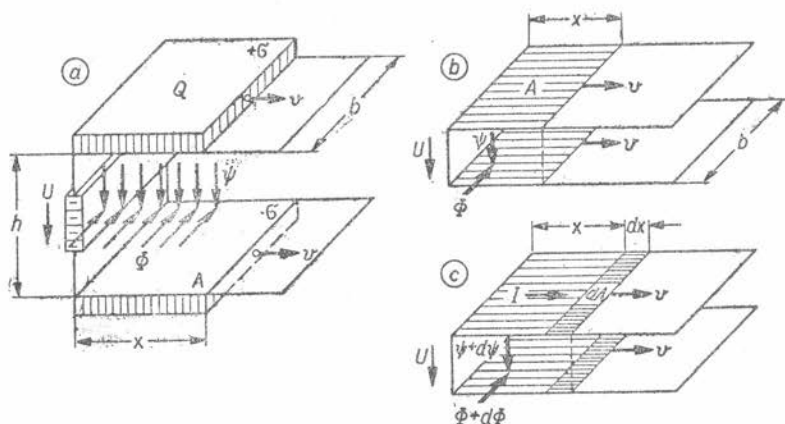
Isto je tako i $\chi = 4\pi \chi'$. Za faktor depolarizacije već smo u prošlom odsječku naveli da je $N' = 4\pi N$.

1.4. Brzina elektromagnetskog polja. Poyntingov vektor

Brzina širenja elektromagnetske pojave v u ovisnosti o dielektričnosti ϵ i permeabilnosti μ obično se izvodi pomoću dvije Maxwelllove jednačbe navedene pod rednim brojevima 18 i 19 u tablici E. 1. Pri tom je potrebno znanje više matematike, pa takve izvođe nalazimo samo u visokoškolskim udžbenicima. Da omogućimo uvid u ove pojave bitne i za kasnije razmatranje mjernih sistema elektromagnetizma i onima koji ne vladaju diferencijalnim jednačbama, priredili smo pojednostavnjeni izvod na primitivnom modelu. Pri tom je potrebno znati samo

pojam diferencijala koji smo već u niz navrata primjenjivali u ovoj knjizi. Tko nije naviknut na računanje diferencijalima neka npr. pod znakom dA (čitaj diferencijal površine A) zamišlja izvanredno malu površinu. Jednako je i s ostalim veličinama (dx , $d\Phi$ itd.).

Na slici E 6a nacrtan je dio naročitog dalekovoda koji se sastoji od dvije paralelne metalne trake. Svaka traka široka je b , a međusobno su razmaknute h . Duljina trake x vrlo je velika, u prvim mah možemo zamisliti da se prostire u nedogled daleko. Nacrane trake smještene su tako da je $b \gg h$, pa stoga u daljnjem razmišljanju možemo pretpostaviti da su polja homogena, a rubni efekti zanemarivi. Osim toga ćemo u računu pretpostaviti da nema gubitaka snage i energije (Jouleova toplina, vrtložne struje, polarizacija dielektrika itd.).



Sl. E 6. Određivanje brzine elektromagnetskog polja

Na lijevoj strani našeg dalekovoda na slici E 6a ugrađena je baterija koja nakon uključanja stalno drži metalne trake pod istosmjernim naponom U . Prostor između traka ispunjen je sa tvari dielektričnosti ϵ i permeabilnosti μ .

Kao i svaka pojava u prirodi tako će se i elektromagnetsko polje širiti nekom konačnom brzinom v . Naš je zadatak da utvrdimo kako svojstva tvari ϵ i μ utječu na tu brzinu.

Kad uključimo bateriju, između lijevog kraja dalekovoda pojavit će se napon U , a jakost električkog polja u prostoru između traka iznositi će $E = U/h$. Ovo posebno stanje prostora širit će se duž dalekovoda brzinom v . Budući da u dielektriku djeluje polje E električka će indukcija D u dielektriku iznositi $D = \epsilon E$. Vektor indukcije D bit će usmjeren od gornje ploče gdje je površinska gustoća pozitivne elektrike $\sigma = Q/A$, prema donjoj traci, gdje je gustoća negativne elektrike $\sigma = -Q/A$. Ovdje je $A = bx$ površina trake koju je do promatranog trenutka t zaposjela elektrika Q i $-Q$.

Kroz dielektrik u prostoru između nasuprotnih površina A prolazit će električki tok ψ koji iznosi

$$\psi = D A = \epsilon E A = \epsilon E b x = \epsilon U b x / h, \quad (1.4-1)$$

jer je $E = U/h$.

Stanje u prostoru na slici E 6a u promatranom trenutku t možemo opisati i drukčije. Znamo da je $Q = C U$, gdje je C kapacitet kondenzatora koji predstavlja dio našeg dalekovoda koji je obložen električkom Q . Budući da je (vidi tablicu E. 1) $\psi = Q$, iz usporedbe jednadžbe $Q = \psi = C U$ sa (1. 4—1) slijedi kapacitet električkom prožetog dalekovoda

$$C = \varepsilon b x / h. \quad (1.4-2)$$

Kapacitet po jedinici duljine dalekovoda iznosi

$$C_0 = C/x = \varepsilon b / h. \quad (1.4-3)$$

Slika E 6b prikazuje isto stanje kao na slici a, samo pojednostavnjeno. Sada pogledajmo kakvo je stanje na našem dalekovodu u trenutku $t + dt$, to jest dt nakon razmatranoga stanja. Tokom vremena dt polje će se proširiti duž dalekovoda za

$$dx = v dt, \quad \text{gdje je } v = dx/dt \quad (1.4-4)$$

brzina polja. Time će se površina na koju je doprla nova električna povećati za $dA = b dx$. Novo stanje prikazuje slika E 6c.

Budući da opet pretpostavljamo puni napon U između nasuprotnih površina dA , tokom diferencijala vremena dt nastao je novi električki tok $d\psi = D dA = \varepsilon E dA = \varepsilon U b dx / h$. Kako je prema izrazu (1. 4—3) jedinični kapacitet $C_0 = \varepsilon b / h$, to je dalje $d\psi = U C_0 dx$, što je očito jer je $dC = C_0 dx$ povećanje kapaciteta do kojeg je došlo tijekom vremena dt . Zbog $\psi = Q$ vrijedi i $d\psi = dQ$, pa je dakle $dQ = d\psi = U C_0 dx$. Podijelimo li ovu jednadžbu sa dt dobivamo

$$I = \frac{dQ}{dt} = U C_0 \frac{dx}{dt} \quad \text{ili} \quad I = U C_0 v, \quad (1.4-5)$$

jer smo brzinu v definirali desnom jednadžbom (1. 4—4).

Simbol I predstavlja dakako jakost električne struje koja mora neprekidno dotjecati u vrijednosti $I = U C_0 v$ da bi se između novo »zaposjednutih« površina dA u vremenu dt uspostavio napon baterije U . Ova struja polazi iz baterije kako je nacrtano na slici E 6c, teče duž duljine x gornje trake, prelazi u obliku pomačne struje $I = D dA/dt$ kroz dielektrik na donju traku i vraća se po njoj natrag u bateriju. Prema tome struja I teče u zatvorenom strujnom krugu, zatvara dakle zamku.

U trenutku t površina te zamke je hx (sl. E 6a i b), pa kroz nju prolazi magnetski tok $\Phi = B hx = \mu H hx$. Jakost magnetskog polja H iznosi $H = I/b$, jer smo već na početku našeg izlaganja pretpostavili da je $b \gg h$. Prema tome je induktivitet L prostora, koji je u momentu t zaposjelo polje

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{I}{b} \frac{hx}{I} = \mu \frac{hx}{b}.$$

Induktivitet po jedinici duljine dalekovoda iznosi

$$L_0 = L/x = \mu h / b. \quad (1.4-6)$$

U momentu $t + dt$ (sl. E 6c) povećana je i površina $h x$ kroz koju prolazi tok Φ za iznos $h dx$. Budući da je struja I ostala nepromijenjena povećanje magnetskog toka je

$$d\Phi = B h dx = I L_0 dx.$$

Znamo da promjena magnetskog toka uzrokuje induciranje napona u zamci koja obuhvaća tok. U našem slučaju vodljiva zamka je onaj dio dalekovoda kroz koji prolazi magnetski tok $\Phi + d\Phi$. Prema tome je inducirani napon

$$U_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - I L_0 \frac{dx}{dt} = - I L_0 v. \quad (1.4-7)$$

Pretpostavili smo da nema gubitaka snage pa smo time ujedno pretpostavili neizmjenjivo vodljivu kovinu od koje je izrađena traka našeg dalekovoda. Prema tome nema omskih padova napona, pa naponu baterije U drži naponsku ravnotežu samo inducirani napon U_i . Budući da zbroj napona u zatvorenom strujnom krugu mora biti jednak nuli, to jest $U + U_i = 0$, uz pomoć izraza (1. 4-7) dobivamo

$$U = I L_0 v. \quad (1.4-8)$$

Izrazi (1. 4-5) i (1. 4-8) doveli su nas posve blizu traženom rješenju. Uvrstimo li (1. 4-8) u (1. 4-5) slijedi $I = I L_0 v C_0 v$, odakle ispada I , pa je dalje

$$L_0 C_0 v^2 = 1. \quad (1.4-9)$$

Stavimo li u netom dobivenu jednadžbu vrijednosti za L_0 i C_0 iz (1.4-3) i (1. 4-6) dobivamo

$$\frac{\mu h}{b} \frac{\epsilon b}{h} v^2 = 1,$$

odakle odmah slijedi

$$\epsilon \mu v^2 = 1 \quad \text{odnosno} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (1.4-10)$$

Vidimo dakle da brzina elektromagnetskog polja ovisi samo o dielektričnosti ϵ i permeabilnosti μ tvari, koja se nalazi između traka našeg dalekovoda. Stroga izvođenja pokazuju da to vrijedi za bilo kakvu konfiguraciju vodiča, a ne samo za kutiji sličan dalekovod sa slike E 6a.

U vakuumu je relativna dielektričnost $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ jednaka jedinici, a isto tako i relativna permeabilnost $\mu_r = \mu / \mu_0$. U tom slučaju izraz (1. 4-10) dobiva oblik

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (1.4-11)$$

gdje su ϵ_0 i μ_0 influenciona i indukciona konstanta.

Budući da je prema dogovoru

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 1,256 \, 637 \cdot 10^{-6} \text{ H/m},$$

a mjerenje daje za influencionu konstantu

$$\epsilon_0 = (8,854 \, 2 \pm 0,000 \, 2) \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$$

s ovim vrijednostima pomoću izraza (1. 4—11) dobivamo vrijednost brzine v_0

$$v_0 = (2,997\,92 \pm 0,000\,03) \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Prema tome je v_0 brzina širenja svjetla do čije se vrijednosti došlo posve drukčijim mjerenjima nego prilikom određivanja ϵ_0 mjerenjem.

Budući da je $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ i $\mu = \mu_r \mu_0$, to se v iz jednadžbe (1. 4—10) može izraziti pomoću brzine svjetla

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (1.4-12)$$

Oдавде vidimo da će brzina elektromagnetskog polja u zraku biti približno jednaka brzini svjetla, jer je za zrak približno $\epsilon_r = 1$ i $\mu_r = 1$, dakle kao za vakuum. U ostalim tvarima gdje je ili ϵ_r (dielektrici) ili μ_r (feromagnetici) mnogo veće od 1 brzina će polja biti manja od brzine svjetla.

Pogledajmo još letimično neke druge veličine elektromagnetskog polja u koje nam daje uvid naš primitivni model dalekovoda sa slike E 6. Budući da znamo napon U i struju I možemo pomoću Ohmova zakona odrediti otpor našeg dalekovoda

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{h}{b} Z_v,$$

gdje veličinu Z_v nazivamo valnim otporom

$$Z_v = \sqrt{\mu/\epsilon}. \quad (1.4-13)$$

U vakuumu je dakako valni otpor

$$Z_{v0} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376,73 \, \Omega,$$

što smo dobili pomoću prije navedenih vrijednosti indukcione i influencione konstante. Valni otpor Z_v vrlo je važna veličina ne samo u teoriji već i u primjeni elektromagnetskih valova, a pogodan je u računima zbog toga jer ovisi samo o značajkama tvari ϵ i μ .

Valni otpor možemo izraziti i pomoću brzine v elektromagnetskog polja. Uvrstimo li naime u (1. 4—13) jednadžbu (1. 4—10) dobivamo

$$Z_v = \sqrt{\mu/\epsilon} = \mu v = 1/\epsilon v. \quad (1.4-14)$$

U energetskim razmatranjima elektromagnetskog polja važna je veličina Poyntingov vektor S koji je definiran jednadžbom

$$S = EH, \quad (1.4-15)$$

gdje smo propustili označiti da su sve tri veličine vektori i da se radi o vektorskom produktu. Budući da je prema ranijem izlaganju $E = U/h$ i $H = I/b$, to je

$$S = EH = \frac{U}{h} \frac{I}{b} = \frac{P}{A_0},$$

gdje je P snaga elektromagnetskog polja, a $A_0 = hb$ površina kroz koju brzinom v napreduje elektromagnetski val (slika E 6).

Poyntingov vektor možemo izraziti i drukčije. Stavimo li u (1. 4—8) $I = b H$ dobivamo $U = b H L_0 v$, što pomoću $E = U/h$ uvrštenjem u (1. 4—15) daje $S = v L_0 H^2 b / h$. S ranije izvedenim jednadžbama odavde je lako izvesti

$$S = H^2 Z_v = E^2 / Z_v,$$

odakle se pomoću jednadžbe (1. 4—14) odmah dobiva

$$S = \mu v H^2 = \varepsilon v E^2.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi jedan od najvažnijih izraza za proučavanje elektromagnetskog polja

$$\mu H^2 = \varepsilon E^2 \quad \text{ili} \quad \sqrt{\mu/\varepsilon} = E/H = Z_v, \quad (1.4-16)$$

što se može napisati i u obliku $\mu B H = \varepsilon E D$.

Ukupnu energiju elektromagnetskog polja izračunat ćemo tako da ćemo zbrojiti energije električkog i magnetskog polja za koje znamo da iznose $C U^2/2$ i $L I^2/2$. Budući da je $C = C_0 x$, $L = L_0 x$ ukupna je energija elektromagnetskog polja

$$W = (C_0 U^2 + L_0 I^2) x / 2.$$

Budući da je $U = E h$, prvi član u zagradi iznosi $C_0 U^2 = C_0 E^2 h^2$. Kako je prema (1. 4—3) $C_0 = \varepsilon b / h$ dobivamo dalje $C_0 U^2 = \varepsilon E^2 b h$. Analogno pomoću $I = H b$ i $L_0 = \mu h / b$ nastaje $L_0 I^2 = \mu H^2 b h$. Prema tome ukupna energija elektromagnetskog polja iznosi

$$W = (\varepsilon E^2 + \mu H^2) b h x / 2.$$

U našem modelu širenja elektromagnetskog polja (sl. E 6) polje nakon vremena t proдре do $x = v t$ od početka. Pri tom zauzima prostor $V = b h x$. Stoga gustoću energije elektromagnetskog polja w dobivamo tako da gornji izraz za ukupnu energiju W podijelimo s volumenom V . Odmah slijedi

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = w_e + w_m, \quad (1.4-17)$$

gdje je w_e gustoća energije električkog polja, a w_m gustoća energije magnetskog polja.

Iz ovog razmatranja uočavamo zanimljivu činjenicu da je gustoća energije polja konstantna, iako se polje širi brzinom v . Isto je tako konstantan Poyntingov vektor S , što nam pokazuje jednadžba (1. 4—15).

Jednadžba (1. 4—17) pojednostavnjuje se kad u nju uvrstimo (1. 4—16):

$$w = \varepsilon E^2 = \mu H^2. \quad (1.4-18)$$

Budući da je Poyntingov vektor $S = \mu v H^2 = \varepsilon v E^2$, gornjim se izrazom lako uspostavlja veza između w i S :

$$S = v w. \quad (1.4-19)$$

U svom gibanju elektromagnetski val ne nosi samo energiju W već i mehanički impuls koji je usmjeren isto kao Poyntingov vektor, dakle u smjeru gibanja polja v . Kad elektromagnetsko polje dopre do neke zapreke ono prenese taj impuls na zapreku, a to se očituje kao sila koja djeluje između polja i zapreke. Izračunajmo najkraćim putem koliko iznosi taj pritisak polja na zapreku kad elektromagnetsko polje potpuno prožme zapreku, dakle kad nema refleksije.

Ranije smo izračunali da je energija elektromagnetskog polja $W = w V$ gdje je volumen polja $V = A_0 x$, a $A_0 = b h$ površina kroz koju se širi polje (vidi sliku E 6). Ako to polje mora da savlada silu F onda mora izvršiti rad dW koji zbog $W = w A_0 x$ iznosi $dW = w A_0 dx$, pa vrijedi da je rad sile $F dx = dW$, što daje $F = w A_0$. Budući da sila djeluje na površinu A_0 , to je pritisak elektromagnetskog polja na zapreku

$$p = F/A_0 = w A_0/A_0 = w, \quad (1.4-20)$$

dakle jednak je gustoći energije polja.

Gornji izraz vrijedi kako smo rekli kad zapreka potpuno upije polje. Drugi je ekstremni slučaj kad zapreka potpuno odbije (reflektira) polje. Tada polje na zapreci promijeni smjer impulsa pa je pritisak dva puta veći, dakle $p = 2w$. U stvarnosti se događaju kompromisi: zapreka jednim dijelom upije polje, a preostalim ga dijelom reflektira pa je zato $p = w(1 + r)$ gdje je r faktor refleksije, $r \leq 1$.

Dalekosežnost i univerzalnost ovdje skiciranih odnosa među veličinama elektromagnetskog polja može nam ilustrirati primjer. *J. C. Maxwell* prvi je proračunao da za suncana dana pritisak svjetla na crnu površinu iznosi oko $p = 4 \cdot 10^{-6}$ N/m². Kasniji su pokusi to potvrdili. Budući da je svjetlo elektromagnetsko polje, to je prema (1. 4—20) gustoća energije svjetlosna polja $w = p = 4 \cdot 10^{-6}$ J/m³. Kako zrak praktički ima iste osobine kao i vakuum, to je $v = v_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s što prema (1. 4—19) daje Poyntingov vektor $S = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ Jm}^{-3} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 = 1,2 \text{ kW/m}^2$. Znači da na svaki kvadratni metar površine Zemlje okomito pada suncana snaga od 1,2 kW! Polumjer Zemlje je $r = 6400 \text{ km} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ što znači da je okomitom udaru svjetla izložena površina $A = r^2 \pi = (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \pi = 1,29 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$, pa je ukupna snaga svjetlosnog polja što dopire na Zemljinu polutku $P = A S = 1,29 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 \cdot 1,2 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 = 1,54 \cdot 10^{17} \text{ W}$. To je izvanredna snaga od preko sto tisuća terawatta!

Izračunajmo još koliki su H i E svjetlosnog polja. Iz jednadžbe (1. 4—18) slijedi $H^2 = w/\mu_0 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Jm}^{-3} : 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Hm}^{-1} = 3,19 \text{ A}^2/\text{m}^2$, odakle je $H = 1,79 \text{ A/m}$. Drugu komponentu svjetlosnog polja najlakše izračunamo pomoću desne jednadžbe (1. 4—16) $E = Z_v H$, gdje je u našem slučaju $Z_v = Z_{v0} = 377 \Omega$. Prema tome je $E = 377 \Omega \cdot 1,79 \text{ A/m} = 675 \text{ V/m}$.

2. MEĐUNARODNI SISTEM JEDINICA

2.1. Značajke Međunarodnog sistema jedinica

S nazivom Međunarodni sistem jedinica prvi smo se puta u ovoj knjizi susreli u odsječku B. 3 koji se odnosi na mehaniku. Tamo smo pod tim imenom razmatrali parcijalni sistem jedinica koji je naročito prikladan za mehaniku, a jedinice mu se izvode iz promjera duljine metra, promjera mase kilograma i sekunde. Stoga smo Međunarodni sistem jedinica shvaćali kao sistem s polaznom (osnovnom) trojkom $m - kg - s$. Neki ga autori stoga nazivaju kraticom MKS, gdje ova slova označuju prva slova tih triju jedinica.

Drugi smo puta raspravljali o Međunarodnom sistemu u odsječku D. 7 gdje je bilo govora o njegovoj primjeni u termodinamici. Pokazalo se da ga možemo shvatiti kao sistem s polaznim jedinicama metar, sekunda, joule i kelvin (odnosno jedinica stefan kao izvedena jedinica, ali to su još prijedlozi, a ne međunarodni dogovor; vidi odsječak D. 9). Takav izbor osnovnih jedinica prikladan je u termo-

dinamici jer se jedinica energije (topline) u toj grani vrlo često upotrebljava. No odmah smo uvidjeli da je masa u nauci o toplini također jako često upotrebljavana jedinica pa smo mirne duše uz joule upotrebljavali kilogram, a da o »osnovnosti« jedinica nismo ni mislili. Pri tom smo pod nazivom Međunarodni sistem razumijevali zajednicu međusobno koherentnih jedinica sekunda, metar, m/s, kg, newton = kg m/s^2 , joule = $\text{N m} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ itd.

Došavši u odsječku E. 1. 1 do veličina elektromagnetizma ustanovili smo da u toj grani nauke i tehnike nisu dovoljne tri polazne (osnovne) veličine, već da ih mora biti četiri. Budući da svaka veličina mora imati svoju jedinicu, u elektromagnetizmu moramo imati i četiri polazne jedinice. Postavlja se pitanje koje su to jedinice, kakve one moraju biti i kako su velike?

Odgovor nam daje sama koncepcija Međunarodnog sistema jedinica. Taj sistem zamišljen je i realiziran kao univerzalan sistem jedinica svih grana znanosti i tehnike. Budući da sistem može biti samo sistematičan, sve jedinice Međunarodnog sistema jedinica moraju biti koherentne, to jest u međusobnom odnosu $1 \times 1 = 1$. U mehanici i termodinamici jedinice Međunarodnog sistema međusobno su koherentne, na primjer $\text{N} = \text{kg m/s}^2$, $\text{J} = \text{N m}$ itd. Takva koherencija mora se produžiti i u elektromagnetizmu ako želimo da taj sveobuhvatni Međunarodni sistem bude koherentan kako u svakoj grani, tako i između pojedinih grana znanosti i tehnike.

Takvoj potpunoj koherenciji može poslužiti kao most jedna od onih veličina koje su zajedničke mehanici i termodinamici s jedne strane, a elektromagnetizmu s druge strane. Takva je na primjer veličina sila F koja se u mehanici svodi na masu, duljinu i vrijeme u *Newtonovoj* jednadžbi $F = m a$, a u elektromagnetizmu odgovara sili elektromagnetskog polja na površinu A (vidi odsječak 1. 4) $F = A B H/2$. Još je zornija veličina energija W koja je na primjer u mehanici određena izrazom $W = F l$, a u elektromagnetizmu jednadžbom $W = U I t$. Energija je zajednička veličina obiju grana i najprikladnija je da posluži kao veza između elektromagnetskih i mehaničkih veličina, dakle i između jedinica.

Iz gornjih navoda slijedi da princip održanja energije možemo napisati u obliku

$$F l = U I t. \quad (2.1-1)$$

To je dakako veličinska jednadžba. Iz razlaganja u poglavlju A znamo da se od veličinskih jednadžbi dolazi do pripadnih koherentnih jedinica sudjelujućih veličina tako da se simboli veličina zamijene jedinicama, a eventualni matematski faktori (npr. $1/2$ u izrazu $W = m v^2/2$ ili $w = B H/2$) propuste. U jednadžbi (2. 1—1) takvih faktora nema pa možemo veličine direktno nadomjestiti jedinicama Međunarodnog sistema:

$$[F]_M [l]_M = [U]_M [I]_M [t]_M.$$

Jedinice Međunarodnog sistema za silu, duljinu i vrijeme su newton, metar i sekunda, pa gornja jednadžba prelazi u oblik

$$\text{N m/s} = [U]_M [I]_M.$$

Iz B poglavlja znamo da je $\text{N m} = \text{joule}$, a $\text{joule/s} = \text{watt}$, pa je prema tome

$$\text{W} = \text{watt} = [U]_M [I]_M.$$

U elektromagnetizmu watt je jednak umnošku volta i ampera, tj. $[U]_M = \text{volt} = = \text{V}$, $[I]_M = \text{amper} = \text{A}$. Prema tome je najuži koherentan spoj između mehanike i termodinamike s jedne strane i elektromagnetizma s druge strane zajednička jedinica

$$\text{watt} = \text{volt} \times \text{amper} \quad \text{ili} \quad W = V A. \quad (2.1-2)$$

Budući da je $W = J/s = N m/s = \text{kg ms}^{-2} m/s = \text{kgm}^2 s^{-3}$ iz desne jednadžbe (2.1-2) slijedi

$$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} = V A,$$

odakle vidimo da kilogram možemo izraziti metrom, sekundom, voltom i amperom ovako

$$\text{kg} = \text{m}^2 \text{s}^{-3} V A. \quad (2.1-3)$$

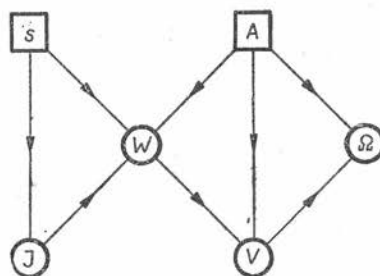
Obrnuto možemo na primjer volt izraziti s ostale četiri jedinice

$$V = \text{m}^2 \text{s}^{-3} \text{kg A}^{-1}. \quad (2.1-4)$$

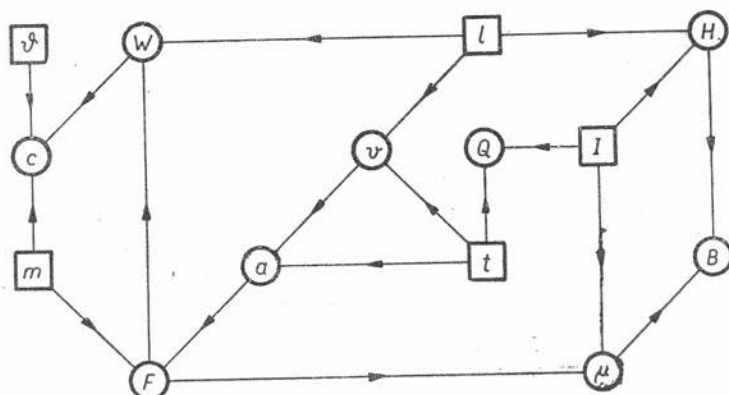
Grafički smo vezu između $W = J/s$ i $W = V A$ prikazali shemom na slici E 7. U nju smo ucrkali i simbol Ω za jedinicu električkog otpora Međunarodnog sistema jedinica ohm. Budući da je ohm omjer volta i ampera iz (2.1-4) slijedi koherentna jedinica otpora

$$\Omega = V A^{-1} = \text{m}^2 \text{s}^{-3} \text{kg A}^{-2}. \quad (2.1-5)$$

Na takav način možemo međusobno povezati i sve druge jedinice mehanike, termodinamike i elektromagnetizma. To smo učinili na slici E 8, ali ne navodeći



Sl. E 7. Veza između polaznih i izvedenih jedinica



Sl. E 8. Međusobne veze polaznih i izvedenih veličina

kratice za nazive jedinica Međunarodnog sistema, već za simbole veličina. Iz sheme na primjer vidimo da je jedinica brzine $[v] = [l] [t]^{-1} = \text{m/s}$, jedinica ubrzanja

$[a] = [v] [t]^{-1} = \text{m/s}^2$, jedinica specifične topline $[c] = [W] [m]^{-1} [\vartheta]^{-1} = \text{J}/(\text{kg K})$ itd. Na uglate zgrade nismo stavljali indeks M kojim bismo izričito naglasili da se radi o jedinicama Međunarodnog sistema, jer se to vidi iz nastavaka, kad opći simbol jedinice nadomještavamo jedinicom Međunarodnog sistema.

Iz poglavlja A znamo da opće (još nedefinirane) jedinice, na primjer $[B] = [\Phi] [I]^{-2}$, predstavljaju isto što i dimenzione jednadžbe, pa ostale koherentne jedinice Međunarodnog sistema možemo izvesti iz dimenzija veličina. U odsječku 7 imamo već izradenu tablicu E. 5 koja sadrži sedam sistema dimenzija. Usporedimo li u toj tablici dimenzije mase $M = L^{-2} T^3 U I$ u sistemu osnovnih dimenzija LTUI s našom jednadžbom (2. 1—3) vidimo da se do izvedenih Međunarodnih jedinica dolazi tako da umjesto simbola osnovnih dimenzija stavimo pripadne jedinice, dakle umjesto M, L, T, U i I jedinice kg, m, s, V i A. Na taj način lako dobivamo i izvedene jedinice iz ostalih sistema dimenzija. Na primjer prema tablici E. 5 dimenzija napona u LTMI sistemu je $U = L^2 T^{-2} M I^{-2}$ pa je $V = \text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$, a to nam govori i naša jednadžba (2. 1—4).

Na slikama E 7 i 8 stavili smo pet jedinica (odnosno veličina) u kvadratiće, dok su sve ostale u kružićima. Time smo istakli polazne jedinice kojima definiramo sve ostale, izvedene jedinice. Polazne (ishodišne) jedinice Međunarodnog sistema jesu: metar, kilogram, sekunda i amper. Slijedom toga na desnoj strani jedinične jednadžbe (2. 1—4) nalaze se polazne jedinice, a lijevo je izvedena (volt).

Nekada su polazne ili ishodišne jedinice nazivali osnovnim. I mi taj izraz upotrebljavamo na mnogim mjestima u ovoj knjizi i to ondje gdje nema opasnosti da bi došlo do nesporazuma. Izraz »osnovan« naime nehotice upućuje na to da sva tri sistema, tj. sistem jedinica, sistem dimenzija i skup pramjera, moraju biti osnovani na jedinicama, polaznim dimenzijama i pramjerama istih veličina. U poglavlju A smo međutim vidjeli da tome nije tako već da su to samostalne tvorevine međusobno povezane koherentnim odnosima $1 \times 1 = 1$.

Budući da su pramjere Međunarodnog sistema jedinice metar, kilogram, sekunda i amper, mnogi smatraju da je to zapravo sistem »osnovnih« jedinica MKSA gdje ta četiri slova označuju kratice navedenih četiriju pramjera. Stvarno, od ove četiri jedinice samo polazi, počinje standardni slijed teoretskih definicija svih ostalih jedinica. Mišljenje o »osnovnosti« podupire još i jednadžba (2. 1—4), no ona nije ništa drugo nego veza, i to koherentna, između pet jedinica Međunarodnog sistema. Posve je jednako vrijedna i veza (2. 1—5) koju možemo napisati u obliku $A = \text{m s}^{-3/2} \text{kg}^{1/2} \Omega^{-1/2}$, pa onda odmah dobivamo sistem polaznih jedinica mskgΩ.

Istina je doduše da se baš za m, s, kg i A služimo pramjerilima (vidi odsječak 2. 3), ali je isto tako istina da u svrhu što bolje mjerne tačnosti imamo pramjerilo ohma (odsječak 2. 4) iako ga teoretski u standardnom međunarodnom nizu definicija Međunarodnih jedinica definiramo kao omjer volta i ampera (vidi slijedeći odsječak).

Vidimo da teoretski možemo bilo koje četiri međusobno nezavisne jedinice elektromagnetizma proglasiti polaznima ili osnovnima. Na taj način možemo izvesti mnoštvo »sistema« jedinica, na primjer mskgA, mskgC (C = coulomb), msVA itd. Sedam takvih »sistema« možemo izvesti iz sistema dimenzija u tablici E. 5. Svaki od njih teoretski je potpuno ispravan, pitanje je samo koji je najpraktičniji. U elektromagnetizmu je to sigurno četvorka msVA, jer se od veličina hUI izvode mnoge druge veličine, mnogi zakoni elektromagnetizma povezuju baš ove

veličine, a i električka mjerenja imaju u osnovi mjerenja struje i napona. U mehanici je također uvriježen izbor polazne (osnovne) trojke mskg ili msN, dok je u termodinamici četvorka mskgK ili mskNK (K = kelvin).

To su »sistemi« u smislu redoslijeda definicija ostalih jedinica, a korisni su za pamćenje strukture jedinica (npr. $J = Nm$, $N = kgm/s^2$, pa je zbog toga $J = kgm^2/s^2$ ili $[\mu]_M = H/m$, gdje je $H = Vs/A$ itd.), a u školama za što veći uspjeh đaka. Nasuprot svemu tome Međunarodni je sistem jedinica zajednica međusobno koherentnih jedinica metar, watt, kilogram, sekunda, farad, coulomb itd. Od tog velikog skupa jedinica svatko može u elektromagnetizmu odabrati četiri međusobno nezavisne jedinice (»četvorku«) i pomoću njih definirati sve ostale. To je lako učiniti jer su sve one u koherentnom odnosu $1 \times 1 = 1$. Budući da za zakonske definicije mora postojati neki redoslijed, Generalna konferencija za mjere i utege odabrala je za polazne jedinice m, kg, s, A, koje su kao takve kasnije ušle u nacionalna zakonodavstva pojedinih država, ali zbog toga te jedinice nisu ništa »osnovnije« od svih ostalih iako ih ponegdje nazivamo »osnovnima«.

Opisani Međunarodni sistem jedinica ima sve odlike koje rese svestrano koherentni sistem jedinica. Jedna je od posljedica primjene koherentna sistema izjednačavanje oblika veličinskih i brojčanih jednadžbi. One po izgledu postaju međusobno potpuno jednake, jer odnos jedinica $1 \times 1 = 1$ uklanja iz brojčanih jednadžbi sve parazitne brojčane faktore te razne ekvivalente (vidi odsječak D.3.2). Ova činjenica bit će zanimljiva za one koji još nisu uvidjeli prednosti univerzalnih veličinskih jednadžbi u praktičnom računu.

Izvanrednu udobnost pri računima koju omogućuje koherentni sistem jedinica, pa dakle i Međunarodni možemo ilustrirati primjerom. Veličinskim jednadžbama možemo ovako opisati lanac idealne transformacije energije iz jednog oblika u nekoliko drugih

$$W = Gh = mv^2/2 = Fl = pV = m\Delta i = mc\Delta\vartheta = UIt = CU^2/2 = \\ = QU/2 = LI^2/2 = \Phi I/2 = I^2Rt.$$

Ovdje izrazi za energiju predstavljaju redom: potencijalnu energiju, kinetičku, dva oblika mehaničke energije (ili rada), zatim dva oblika toplinske energije, energiju električkog uređaja, četiri izraza za energiju električkog i magnetskog polja, te naposljetku električku energiju koja se pretvorila u toplinu. Taj bismo teoretski niz jednadžbi mogli nastaviti još dalje, ali smatramo da to nije potrebno; želimo samo pokazati da se zbog obavezne primjene Međunarodnog sistema jedinica sve te energije mjere jednom te istom jedinicom joule. Kako je joule sastavljen od ostalih jedinica Međunarodnog sistema, možemo vidjeti ako u gornju jednadžbu umjesto veličina redom uvrstimo jedinice Međunarodnog sistema:

$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2/s^2 = N \cdot m = Nm^2 \cdot m^3 = kg \cdot J/kg = \\ = kg \cdot J kg^{-1} K^{-1} \cdot K = V \cdot A \cdot s = F \cdot V^2 = C \cdot V = H \cdot A^2 = \\ = V \cdot s \cdot A = A^2 \cdot \Omega \cdot s. \quad (2.1-6)$$

Analogne su prilike i kod snage, sile, pritiska i još kod nekih veličina koje su zajedničke svim granama znanosti i tehnike.

Zbog toga je računanje pomoću jedinica Međunarodnog sistema veoma jednostavno, osobito ako se upotrebljavaju veličinske jednadžbe. Pogledajmo u primjeru kako jednostavno možemo povezati dvije vrlo različite energije. Na visini $h = 10$ m iznad odabrane referentne razine nalazi se $V = 1$ litar $= 10^{-3} m^3$ vode. Koliki

će biti napon kondenzatora kapaciteta $C = 16 \mu\text{F} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ F}$ ako se potencijalna energija vode pretvori u električnu energiju kondenzatora s korisnošću pretvorbe $\eta = 0,1 = 10\%$?

Potencijalna energija iznosi $W = G h$, gdje je G težina vode. Budući da je $G = m g$, gdje je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ubrzanje sile teže, izraz za W glasi $W = m g h$. Masa vode iznosi $m = \rho V$, gdje je gustoća vode $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$. Prema tome je

$$W = \rho g V h.$$

No samo jedan dio te energije pretvorio se u energiju W_e električkog polja kondenzatora $W_e = C U^2/2$ i to tako da je $W_e = \eta W$, pa je stoga

$$C U^2/2 = \eta \rho g V h.$$

Odavde je kvadrat napona

$$U^2 = 2 \eta \rho g V h / C.$$

Računanjem slijedi

$$U^2 = 2 \cdot 0,1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 10 \text{ m} : (1,6 \cdot 10^{-5} \text{ F})$$

$$U^2 = 1,227 \cdot 10^6 \text{ J/F}.$$

Iz jednadžbe (2.1—6) možemo ustanoviti da je $\text{J/F} = \text{V}^2$, dakle $U^2 = 1,227 \cdot 10^6 \text{ V}^2$. Korjenovanjem dobivamo napon kondenzatora $U = 1110 \text{ V}$.

2.2 Definicije jedinica Međunarodnog sistema jedinica

Niz definicija Međunarodnih jedinica koje imaju vlastito ime glasi:

1. Jedinica duljine: Metar (m) je duljina jednaka 1 650 763,73 valnih duljina zračenja atoma kriptona.
2. Jedinica vremena: Sekunda (s) je 1/31 556 925,747 7-ti dio trajanja tropske godine.
3. Jedinica mase: Kilogram (kg) predstavlja pramjera kilograma, pohranjena u Međunarodnom birou za mjere i utege.
4. Jedinica sile: Newton (N) je sila koja tijelu mase jedan kilogram daje ubrzanje 1 m/s^2 ($\text{N} = \text{kgm/s}^2$).
5. Jedinica energije i rada: Joule (J) je rad koji izvrši sila jedan newton kad se njeno hvatište pomakne za jedan metar u smjeru sile ($\text{J} = \text{Nm}$).
6. Jedinica snage: Watt (W) je ona snaga, koja za jednu sekundu obavi rad jedan joule ($\text{W} = \text{J/s} = \text{kgm}^2/\text{s}^3$).
7. Jedinica jakosti električne struje: Amper (A) je jakost one stalne električne struje koja tekući kroz dva ravna, paralelna i neizmjereno dugačka vodiča zanemarljivo malog kružnog presjeka, u vakuumu međusobno udaljena jedan metar, uzrokuje između njih silu $2 \cdot 10^{-7}$ newtona po metru.
8. Jedinica električkog napona i potencijala: Volt (V) je razlika potencijala između dvije tačke žičnog vodiča kojim teče stalna struja jedan amper, ako se u žici između tih tačaka troši snaga jedan watt ($\text{V} = \text{W/A}$).

9. Jedinica električkog otpora: Ohm (Ω) je električki otpor između dvije tačke vodiča, kad napon jedan volt između njih tjera struju jedan amper, uz uvjet da u samom vodiču nema izvora napona (npr. termoelektrički naponi, kontaktne potencijali), $\Omega = V/A$.

10. Jedinica električke vodljivosti: Siemens (S) je vodljivost vodiča otpora jedan ohm ($S = 1/\Omega$).

11. Jedinica elektrike: Coulomb (C) je množina elektrike koja proteče za jednu sekundu kad je struja jedan amper ($C = As$).

12. Jedinica električkog kapaciteta: Farad (F) je kapacitet električkog kondenzatora kod kojeg se između njegovih elektroda pojavi napon jedan volt, ako ga nabijemo elektrikom jedan coulomb ($F = C/V = As/V$).

13. Jedinica induktiviteta: Henry (H) je induktivitet zatvorenog strujnog kruga u kojemu se inducira napon jedan volt, ako se struja u njemu linearno promijeni za jedan amper za vrijeme jedne sekunde ($H = Vs/A$).

14. Jedinica magnetskog toka: Weber (Wb) je onaj magnetski tok, koji u strujnom krugu sa jednim zavojem inducira napon jedan volt, ako taj tok u jednoj sekundi linearno snizimo na nulu ($Wb = Vs$).

15. Jedinica magnetske indukcije: Tesla (T) je magnetska indukcija homogenog magnetskog polja u kojem magnetski tok jedan weber okomito prolazi kroz površinu jedan kvadratni metar ($T = Wb/m^2 = Vs/m^2$).

Ostale jedinice Međunarodnog sistema nemaju vlastitog imena (za jedinicu pritiska predložen je naziv giorgi = $G = N/m^2$). One se izvode po pravilu koherencije među jedinicama. Tako je na primjer jedinica jakosti električkog polja $[E]_M = V/m$, jedinica električke indukcije $[D]_M = C/m^2 = As/m^2$, jedinica jakosti magnetskog polja $[H]_M = A/m$ itd.

2.3. Pramjerilo ampera

U prošlom smo odsječku definirali kao prvu u nizu definicija elektromagnetskih jedinica Međunarodnog sistema jedinicu jakosti električne struje amper (A). Ponovimo tu definiciju koja glasi: »Amper je jakost one stalne električne struje, koja tekući kroz dva ravna, paralelna i neizmjerljivo dugačka vodiča zanemarivo malog kružnog presjeka, u vakuumu međusobno udaljena jedan metar, uzrokuje između njih silu $2 \cdot 10^{-7}$ newtona po metru«.

Ovu definiciju opisuje jednadžba sile između dva paralelna vodiča kojima prolazi konstantna struja I (vidi izvod u odsječku 3.2):

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2 \pi d} \quad \text{ili} \quad f = \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2 \pi d} \quad (2.3-1)$$

Ovdje oznake predložuju ove veličine: F sila na ukupnu duljinu l vodiča, $f = F/l$ sila po jedinici duljine vodiča, μ_0 indukciona konstanta, d razmak između paralelnih vodiča. Prema definiciji jednadžba (2.3-1) propisuje jedinicu jakosti električne struje Međunarodnog sistema $I = 1 A$ onda kad je $f = 2 \cdot 10^{-7} N/m$, a $d = 1 m$. U tom slučaju uvrštenjem u $f 2 \pi d = \mu_0 I^2$ dobivamo

$$2 \cdot 10^{-7} Nm^{-1} \cdot 2 \pi \cdot 1 m = \mu_0 \cdot 1^2 A^2,$$

odakle je dalje

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} N/A^2. \quad (2.3-2)$$

Znamo da su jedinice Međunarodnog sistema međusobno koherentne, tj. u odnosu $1 \times 1 = 1$, pa bilo da se radi o jedinicama »mehaničkih« veličina (sila, duljina itd.) ili o jedinicama elektromagnetskih veličina (struja, indukciona konstanta itd.). Stoga su jedinice sile i energije iste i u mehanici i u elektromagnetizmu. To su newton (N) i joule (J). S jedne je strane joule definiran u mehanici $J = \text{Nm}$, a s druge strane u elektromagnetizmu izraz za energiju $W = U I t$ propisuje odnos između joulea, volta, ampera i sekunde, $J = \text{VAs}$. Prema tome je $J = \text{Nm} = \text{VAs}$, odakle slijedi $\text{N} = \text{m}^{-1} \text{s V A}$, što uvrštenjem u (2.3—2) daje

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \text{s V A} / \text{A}^2.$$

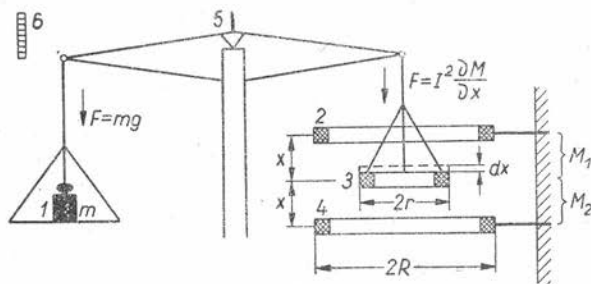
Odavde dobivamo

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m},$$

jer je $\text{H} = \text{henry} = \text{Vs/A}$. Umjesto H/m možemo pisati i Vs/A m ili N/A^2 , što neposredno proizlazi iz jednadžbe (2.3—2) ili pak T m/A , gdje je $\text{T} = \text{tesla} = \text{Vs/m}^2$. Sve ove izvedene jedinice međusobno su jednake jer one pripadaju skupu koherentnih Međunarodnih jedinica. Jedinicu permeabilnosti H/m upotreбили smo zato što je najkraća.

U praksi se amper ne može tačno realizirati uređajem koji bismo izradili prema navedenoj definiciji. Beskrajno dugačak vodič možemo samo zamisliti. Isto tako ne postoji ni vodič zanemarivo malog presjeka.

Stvarno se amper određuje pomoću strujne vage koju nazivamo *Rayleighovom vagom*. Shematski prikaz te vage vidimo na slici E9. To je izvanredno precizna vaga koja na jednom kraku ima uteg I mase m , a na drugom kraju svitka. Dva svitka (2 i 4), namotana dobro vodljivom žicom, kruto su učvršćena



Sl. E9. Shematski prikaz Rayleighove strujne vage

na podlogu, dok je svitak 3 pomičan. Taj svitak ovješeno je o desni krak vage. Sva tri svitka međusobno su električki spojena u seriju tako da prilikom prolaza struje I donji svitak (4) privlači pomični 3, a gornji (2) ga odbija. Prije nego li se kroz svitke pusti električna struja vaga se tačno uravnoteži, što se precizno očita na skali 6 na koju zrcalo 5 baca zraku svjetla. Prema tome se na strujnoj vagi s jednako dugačkim krakovima izjednačuju sila (težina) dodatnog utega $F = mg$ i elektrodinamska sila među svicima koja nastaje kad kroz njih prolazi električna struja.

Energija magnetskog polja sva tri svitka iznosi

$$W = \frac{1}{2} L_1 I^2 + (M_1 + M_2) I + \frac{1}{2} L_2 I^2, \quad (2.3—3)$$

i ona je konstantna ako kroz svitke teče konstantna struja, a vaga se nalazi u ravnoteži. Simboli u gornjoj jednadžbi predstavljaju ove veličine: L_1 i L_2 induktiviteti (samoinduktiviteti) svitaka 2 i 4, M_1 međuinduktivitet svitaka 2 i 3, te M_2 međuinduktivitet svitaka 3 i 4. Veličine L_1 i L_2 su konstantne jer poremećajem ravnoteže vage, dakle pomakom pomičnog svitka 3, one ne mijenjaju svoje geometrijske dimenzije. Ukupni međuinduktivitet

$$M = M_1 + M_2$$

nije stalna veličina već ovisi o međusobnom položaju svih triju svitaka. Ako je svitak 3 bliže 2 onda je M_1 veći od M_2 , ako je 3 bliže 4 onda je M_2 veći.

Zamislimo najprije da je vaga u ravnoteži kako je nacrtano na slici E9. U tom slučaju izraz (2.3—3) navodi koliku magnetsku energiju W sadrže sva tri svitka. Sada zamislimo da je ravnoteža vage poremećena tako da se pomoćni svitak 3 pomakao prema gore (crtkano na slici) za neizmjereno malen diferencijal duljine dx . Takav se pomak mogao izvršiti samo uz utrošak rada $F dx$, gdje je F sila. No diferencijalni pomak svitka 3 promijenio je i energiju polja W koju opisuje jednadžba (2.3—3). Promjena energije magnetskog polja dW iznosi

$$dW = I^2 \frac{\partial M}{\partial x} dx,$$

što smo dobili derivacijom izraza (2.3—3) po x uz pretpostavku da su I , L_1 i L_2 konstantni, a to je istina jer oni se nisu promijenili tijekom beskonačno malog pomaka srednjeg svitka.

Načelo održanja energije zahtijeva da su rad $F dx$ i promjena energija dW međusobno jednaki, odakle dobivamo nakon kraćenja sa dx

$$F = I^2 \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (2.3—4)$$

Sila F je dakako težina utega mase m , dakle $F = mg$ koja je jednaka elektromagnetskoj sili u gornjem izrazu. Odavde možemo jednadžbu ravnoteže napisati u obliku

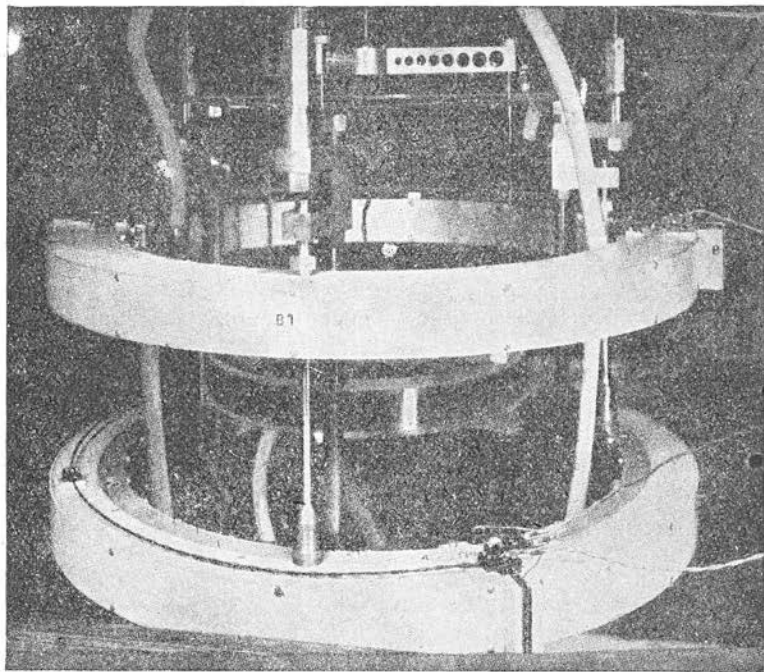
$$I = \sqrt{mg : \frac{\partial M}{\partial x}}. \quad (2.3—5)$$

Pomoću ove jednadžbe stvarno se izračunava jakost električne struje čija je elektrodinamska sila u vakuumu uravnotežena s utegom težine $F = mg$.

Iz jednadžbe (2.3—5) jasno vidimo da je prilikom «vaganja struje» potrebno znati tri stvari. Prvo je masa utega m , drugo je ubrzanje sile teže g na mjestu gdje se nalazi vaga, a treće ovisnost ukupnog međuinduktiviteta M o vertikalnom razmaku x između svitaka. Tačnost poznavanja tih triju veličina jednako je potrebna jer se sve tri nalaze u direktnim odnosima pod znakom korijena. Budući da je strujna vaga na slici E9 u stvari pramjerilo prve u nizu elektromagnetskih veličina preciznost poznavanja m , g i M mora biti maksimalna; najviše što se uopće može postići. Stoga se utezi mase m provjeravaju usporedbom s pramjerama mase, a ubrzanje sile teže g određuje pomoću nekoliko najtačnijih metoda.

S međuinduktivitetom M nije tako. Njega valja izvanredno tačno proračunati. Iz teorije elektromagnetizma znamo da međuinduktivitet M dva strujna

kruga u zraku ovisi o indukcionalnoj konstanti μ_0 te o geometrijskim dimenzijama i udaljenosti svitaka. Budući da je, kako smo ranije vidjeli, vrijednost indukcione konstante apsolutno tačno poznata, za izraz (2.3—5) potrebno je znati tačno proračunati M i njegovu derivaciju te najpreciznije odrediti geometriju svitaka na slici E9.



Sl. E10. Dva pomična i u sredini između njih nepomičan svitak strujne vage u američkom National Bureau of Standards

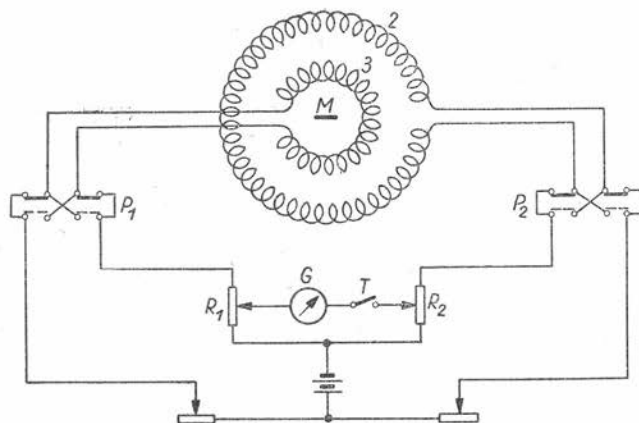
Obično se prilikom konstrukcije vage udaljenost $2 \times$ fiksnih svitaka 2 i 4 odabire tako da je elektrodinamska sila maksimalna. Već je *Maxwell* izračunao da u tom slučaju vrijedi

$$x = \frac{R}{2} \left[1 - \frac{9}{10} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \dots \right],$$

gdje oznake predaju iste veličine kao i na slici E9. Obično se svici odabiru takvih dimenzija da je približno $R = 2r$. Takve proporcije vidimo i na slici E10 koja prikazuje dva fiksna svitka (bijelo), a u sredini između njih manji pomični svitak vrhunske američke metrološke ustanove National Bureau of Standards. Na toj slici može se vidjeti kako pomoćni svitak visi na tri tanka štapa učvršćena na desnom kraku vage na slici E9 (podrobniji prikaz sadrži slika E12).

U tom maksimalnom položaju međuinduktivitet M i njegova derivacija ovise o omjeru efektivnih radijusa pokretnog i fiksnih svitaka r/R pa nije potrebno izvanredno tačno izmjeriti geometrijske dimenzije svitaka (kao npr. kod pramjerila

otpora; vidi slijedeći odsječak) već samo jako tačno postaviti pomični svitak u zahtijevani položaj. To je vrlo velika prednost strujne vage. Omjer radijusa r/R može se pomoću teorije izračunati iz tačno izmjerenih geometrijskih dimenzija. Još se tačnije taj omjer može izmjeriti električkom metodom koja je isto toliko jednostavna koliko je duhovit.



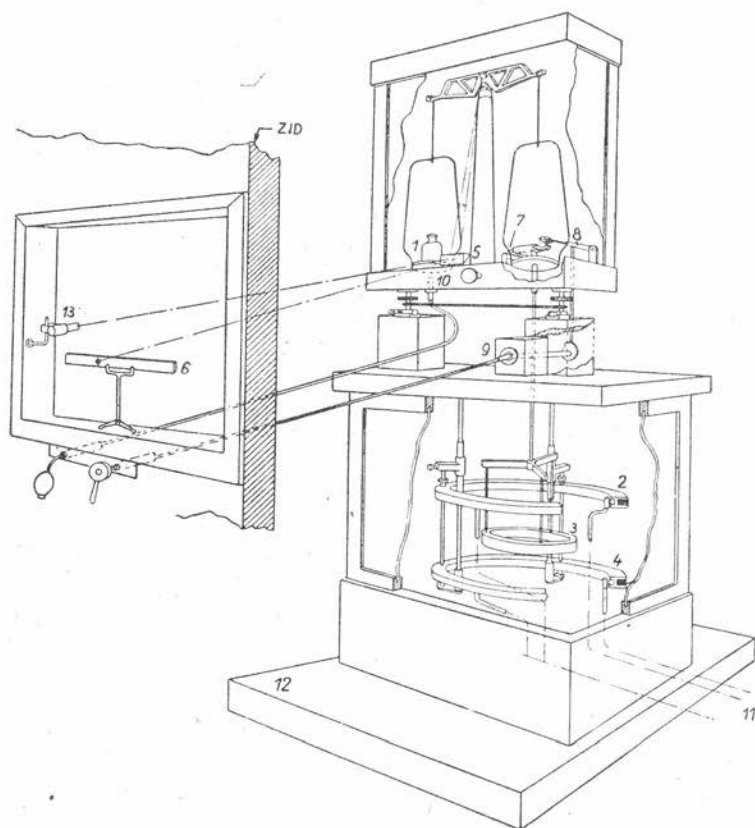
Sl. E 11. Shema električkog određivanja omjera radijusa r/R

Na slici E11 vidimo shemu takvog mjerenja. Fiksni svitak 2 i pomični svitak 3 smješteni su koncentrično, a u njihovoj osi nalazi se mala magnetska igla M . Jakosti struja kroz svaki od svitaka udešavaju se tako dugo dok magnetska igla ne pokazuje više nikakav odklon. To se utvrđuje promjenom smjera struja u oba svitka. U tom je slučaju jakost magnetskog polja u centru jednaka nuli, pa je odnos polumjera r/R jednak omjeru struja, a ovaj je jednak omjeru otpora R_1 i R_2 koji možemo utvrditi tako da pritiskom na tipku T galvanometar G ne daje nikakav odklon. Da upoznamo omjer R_1/R_2 nije potrebno prethodno imati te otpornike kalibrirane u Međunarodnim jedinicama već u bilo kojima, jer je bitan samo omjer vrijednosti R_1 i R_2 .

Ova strujna vaga zahtijeva izvanredno precizan fino-mehanički rad pri izradi svih elemenata, od mehaničke vage do svih svitaka i električkih priključaka pomičnog svitka, a prilikom mjerenja savršenu centričnost svitaka, uzimanje u obzir temperature, promjenljive osjetljivosti vage, zatim na to utječu *Jouleovi* gubici i niz drugih bitnih faktora. Neke od mjera predostrožnosti mogu se razabrati na slici E12.

Na svijetu ima nekoliko najpreciznijih strujnih vaga koje se međusobno ponešto razlikuju. Na primjer svici američke vage na slici E10 imaju četvrtasti presjek, a njihova je žica pravokutna profila. Engleski National Physical Laboratory ima okrugle svitke u obliku dugačkih cilindara i *Kelvinovu* vagu, koja za razliku od opisane *Rayleighove* ima sa svake strane poluge po jedan fiksni i jedan pomični svitak.

Očito je da bi se najpreciznija od svih takvih vaga mogla pohraniti kao međunarodni etalon ampera u Sèvresu, onako kao prakilogram. To ipak nije učinjeno jer mehanički izvanredno komplicirana strujna vaga nema onih odličnih svojstava



Sl. E 12. Perspektivna skica strujne vage Rayleighova tipa koju upotrebljava američki National Bureau of Standards

1 — uteg, 2 i 4 — fiksni svici, 3 — pokretni svitak, 5 — skala za očitavanje ravnoteže vage, 7 — fleksibilne dovodne žice za privođenje struje u pomičan svitak 3, 8 — uređaj za dodavanje utega, 9 — sklopka za mijenjanje smjera struje, čime se suprotno usmjeri elektrodinamska sila pa zbog toga treba sa 8 dodati uteg, 10 — zračna puhaljka, 11 — dovodi temperaturno regulirane rashladne vode, 12 — temelji izolirani protiv vibracija, 13 — izvor svjetlosnog snopa.

Na slici se vidi da je prostorija, u kojoj se nalazi mjerni uređaj, zidom potpuno odijeljena od prostorije iz koje se upravlja. Mjerenje se stvarno izvodi tako da se vaga najprije uravnoteži kad elektrodinamske sile vuku desni krak vage prema dolje. Zatim se pomoću sklopke 9 okrene smjer struje pa elektrodinamske sile djeluju prema gore. Ravnoteža se opet uspostavlja tako da se dodavačem 8 doda kompenzacioni uteg, čija je težina približno jednaka nastaloj promjeni elektrodinamske sile.

postojanosti kakve ima materijal od kojega je izrađen pariski kilogram. Vremenom bi preciznost vage popustila a to bi bilo daleko od zahtjeva »za vječnost« što se traži od pramjera. Stoga se strujne vage izrađuju prema potrebi, a vremenom će postajati sve preciznije uporedo s napredovanjem fine mehanike i metoda mjerenja. Pomoću $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m i preciznog proračuna međuinduktiviteta može na taj način svatko sebi izraditi pramjerilo ampera Međunarodnog sistema jedinica.

Opisano mjerenje kojim se na strujnoj vagi reproducira amper naziva se apsolutnim, pa se tako određeni amper naziva »apsolutnim amperom«. Budući da se i pramjera jedinice kilogram smatra apsolutnom (ona je apsolutno tačna jer u odnosu na nju mjerimo sve druge, a smatramo da zub vremena ne najeda materijal uzorka prakilograma), stoga zbog »apsolutnosti« jedinica kg, A katkada nazivamo i čitav Međunarodni sistem jedinica apsolutnim.

U ovoj knjizi izbjegavamo pridjev »apsolutan« jer svi su važniji sistemi jedinica u tom smislu apsolutni (iznimka su Tehnički sistemi termodinamike i elektromagnetizma, vidi odsječke D.5 i E.4). Riječ je u stvari historijskog porijekla (*C. F. Gauss*). Danas ona vjerojatno više nema razloga postojanju, iako se često upotrebljava. Naime, uz odmjerenje ampera na strujnoj vagi upotrebili smo doduše apsolutno tačnu vrijednost indukcione konstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (*Gauss* je kod osnivanja CGSM sistema također odabrao apsolutno tačnu jedinicu permeabilnosti stavivši $[\mu]_m = \mu_0$; vidi odsječak 3.2), ali smo međuinduktivitet M izračunali što je istina izvanredno tačno, ali nije apsolutno tačno.

Isto smo tako upotrebili mjesnu vrijednost ubrzanja sile teže g , a to nije apsolutno tačna vrijednost već samo jako tačno izmjerena. Pa ni sekunda i metar nemaju svoju pramjeru u Sèvresu već se izvođe mjerenjem. Stoga riječ »apsolutan« stvarno ne označuje ono što se time zapravo htjelo reći pa će vremenom vjerojatno i nestati iz opisa sistema jedinica.

U vezi s pramjerilom jedinice jakosti električne struje korisno je pružiti nekoliko podataka o najpreciznijim metrološkim mjerenjima i o novim idejama u električkoj metrologiji. Potrebu za ostvarenjem tačnijih električnih pramjerila uočavamo kad usporedimo tačnost tako zvanih mehaničkih mjerenja s električkim. U čuvenim svjetskim metrološkim institutima (Međunarodni biro za mjere i utege u Parizu, National Bureau of Standards u USA, Vsesojuznij naučno-istraživački institut metrologij u Sovjetskom Savezu, National Physical Laboratory u Engleskoj, Physikalisch — technische Bundesanstalt u Z. Njemačkoj itd.) mase se mjere s relativnom netačnošću oko $\pm 1 \cdot 10^{-9}$, duljine s oko $\pm 1 \cdot 10^{-8}$, a vrijeme čak tačnije od $\pm 10^{-10}$. Na primjer tačnost mjerenja duljine $\pm 1 \cdot 10^{-8}$ znači da bi greška pri mjerenju duljine 100 kilometara iznosila ± 1 milimetar!

Utvrđivanje ampera na strujnoj vagi prilično je skromno u poređenju s ovim fantastičnim tačnostima, jer na vagi je amper realiziran relativnom tačnošću oko $\pm 2 \cdot 10^{-5}$, a u najboljem slučaju oko $\pm 1 \cdot 10^{-5}$. To znači da je $\Delta I/I = \pm 1 \cdot 10^{-5} = \pm 1/100\,000 = \pm 10 \mu A/1A$, što je preko tisuću puta manje tačno nego kod jedinice duljine. Stoga će u skoroj budućnosti pramjerilo jedinice jakosti električne struje vjerojatno biti drukčije nego što je strujna vaga. U tu svrhu autor ove knjige predložio je takozvani protonski rezonator, a prijedlog opisao u raspravi *Protonski rezonator kao pramjerilo jedinice jakosti električne struje* objavljenj u časopisu *Automacija*, 1960, br. 2. S ovim uređajem tačnost realizacije ampera iznositi će oko $\pm 1 \cdot 10^{-6} = \pm 1:1\,000\,000 = \pm 1 \mu A/A$, što je oko 20 puta tačnije nego li pomoću strujne vage.

Ideja protonskog rezonatora kao pramjerila temelji se na činjenici da je tzv. žiromagnetska konstanta protona fundamentalna konstanta prirode, te da protonska rezonancija nastaje onda kad se protoni nalaze u konstantnom magnetskom polju indukcije B obasjanom elektromagnetskim poljem frekvencije f . Izraz $B = Kf$ uvjet je protonske rezonacije, gdje je K jedan oblik žiromagnetske konstante. Rezonator bi se sastojao od izvanredno precizno izrađenog i izmjenjenog svitka te od nekoliko elektronskih i mjernih uređaja (stabilizirani oscilator, tačno mjerilo frekvencije, oscilograf itd.), a jakost struje bi se reproducirala u skladu s osnovnom jednadžbom rezonatora $I = Cf$, gdje je C tzv. strujna konstanta.

Time se mjerenje struje svodi na mjerenje frekvencije, koju bismo mjerili s relativnom netačnošću oko $\Delta f/f = \pm 5 \cdot 10^{-8}$, što danas više ne predstavlja izrazito težak problem. Da bi se jedinicu jakosti struje moglo realizirati s relativnom netačnošću $\Delta I/I = \pm 1 \cdot 10^{-6} = \pm 1 \mu A/A$, dakle oko 20 puta tačnije nego li pomoću strujne vage, potrebno je strujnu konstantu rezonatora C definirati barem na $\Delta C/C = \pm 5 \cdot 10^{-7}$ tačno. To povlači za sobom mjerenje dužine svitka L s tačnošću $\Delta L/L = \pm 1,5 \cdot 10^{-8}$ i propisivanje žiromagnetske konstante protona $K = 2 \pi \mu_0 / \gamma$ u vrijednosti $K = (2,348\,580\,0 \pm 0,000\,000\,1) \cdot 10^{-8}$ Ts, tj. s relativnom netačnošću $\Delta K/K = \pm 5 \cdot 10^{-8}$. Slovo γ označuje klasičnu žiromagnetsku konstantu $\gamma = 2 \pi f/H$, gdje je $H = B/\mu_0$ jakost magnetskog polja.

2.4. Pramjerila ohma

U prošlom smo odsječku opisali način kako možemo na Rayleighovoj vagi odrediti jedinicu jakosti električne struje amper. Budući da se prema jednadžbi $W = I^2 R t$ sva električka energija pretvara u toplinu, izgleda da bi za određivanje svih elektromagnetskih jedinica Međunarodnog sistema bila dovoljna strujna vaga, jer ohm bismo zbog odnosa jedinica joule $= A^2 \times \Omega \times s$ mogli odrediti mjerenjem struje, vremena i topline. U teoriji to jeste tako, ali u praksi nije. Dok na vagi mjerimo amper vjerojatnom netačnošću reda 10^{-5} (tj. 1 amper je danas utvrđen na oko 20 μA netačno), energiju ili snagu mjerimo znatno manje tačno. Stoga je mnogo preciznije ako i za ohm izradimo posebno pramjerilo koje se također temelji na »apso-lutnom« mjeranju.

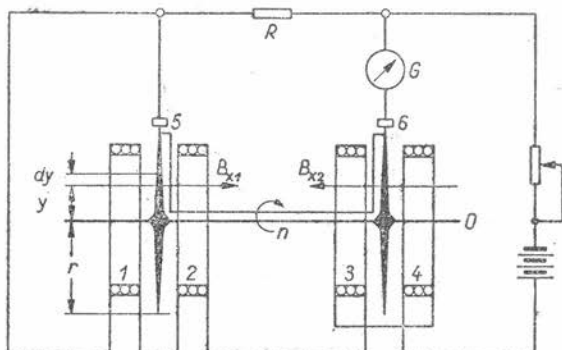
Postoji nekoliko desetaka načina takvog mjerenja od kojih ćemo ovdje spomenuti samo nekoliko njih. Najatraktivniji je način određivanja ohma Lorenzovom metodom iz godine 1873, koju aparaturu u savršenoj izvedbi ima engleski National Physical Laboratory. Lorenzovu aparaturu shematski prikazuje slika E13. Duž nekoliko metara dugačke osovine O raspoređena su četiri zračna svitka označena brojevima 1 do 4. Stvaran raspored je takav da svici 1 i 2 predstavljaju gotovo dvije polovine jednog svitka, a isto tako i 3 i 4. Razmak između te dvije skupine svitaka relativno je velik.

U zračnim rasporima između svitaka 1 i 2, te između 3 i 4, rotiraju naročito oblikovane metalne ploče učvršćene na osovinu. Pustimo li da kroz sve svitke teče iz baterije ista struja I ona će u prostoru svitaka 1 i 2 stvoriti magnetski tok čija će horizontalna gustoća na mjestu udaljenom y od osovine biti B_{x1} . Drugi par svitaka 3 i 4 spojen je tako da na analognome mjestu postoji indukcija B_{x2} , ali usmjerena suprotno od prve skupine 1 i 2. Polja su usmjerena suprotno zato da bi se što više eliminirao utjecaj zemaljskog magnetskog polja koji može umanjiti tačnost mjerenja.

Na diferencijalu radijusa dy prve ploče inducira se diferencijal napona $dU_1 = B v dy$, gdje je $B = B_{x1}$ indukcija na mjestu y , $v = \omega y$ brzina ploče na tom mjestu, a $\omega = 2\pi n$ kutna brzina, ako osovina ima brzinu vrtnje n . Stoga možemo dalje pisati $dU_1 = \omega B y dy = n B 2\pi y dy = n d\Phi_1$. Naime $2\pi y dy$ je površina diferencijalnog kružnog prstena kroz koji prolazi magnetski tok $d\Phi_1$ indukcije B . Zbrojimo li sve diferencijale napona dU_1 od centra osovine do ruba ploče polumjera r dobit ćemo ukupni napon $U_1 = n \Phi_1$, gdje je Φ_1 ukupni magnetski tok koji prolazi kroz ploču.

Taj tok stvaraju sva četiri svitka. Ako je M_1 međui nduktivitet između lijeve ploče i prvog para svitaka onda svići 1 i 2 doprinose toku Φ_1 magnetski tok $M_1 I$.

Drugi par svitaka 3 i 4 proizvodi u prostoru lijeve ploče suprotno polje pa desni svici oduzimaju tok $M'_1 I$, gdje je M'_1 međuinduktivitet između lijeve ploče i desnog para svitaka. Prema tome je resultantni magnetski tok Φ_1 u prostoru prve ploče $\Phi_1 = (M_1 - M'_1) I$. Uvrstimo li to u izraz $U_1 = n \Phi_1$ dobivamo



Sl. E 13. Shema Lorenzove aparature za realizaciju ohma

$$U_1 = n(M_1 - M'_1)I.$$

Posve analogno možemo izračunati da se između osovine i ruba desne ploče inducira napon

$$U_2 = n(M_2 - M'_2)I,$$

gdje su M_2 i M'_2 međui nduktiviteti definirani analogno ranijima ali u odnosu na desnu ploču. Prema tome između četaka 5 i 6 djeluje ukupni inducirani napon

$$U = U_1 + U_2 = n M I, \quad (2.4-1)$$

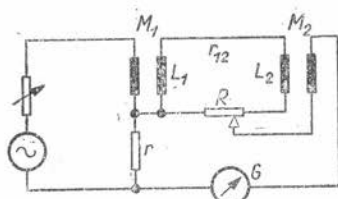
gdje je $M = M_1 - M'_1 + M_2 - M'_2$. Ova četiri međuinaktiviteta mogu se vrlo tačno izračunati iz geometrijskih dimenzija i $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

Na slici E13 vidimo da kroz otpornik R , čiju vrijednost želimo odrediti, teče istosmjerna struja I iz baterije. Mijenjamo li brzinu vrtnje n tako dugo dok pad napona u otporniku $U = RI$ postane jednak induciranom naponu prema izrazu (2.4—1) galvanometar G pokazat će nulu onda kada je $nMI = RI$. Oдавде slijedi

$$R = n M = M/T. \quad (2.4-2)$$

Prema tome se određivanje vrijednosti otpora svodi na proračun M i mjerenje brzine vrtnje $n = 1/T$, gdje je T period trajanja jednog okreta. Trajanje T određuje se pomoću najpreciznijih vremenskih signala iz astronomske opservatorije ili pomoću »atomskog sata« (vidi odsječak A.4.3).

Pomoću *Lorenzove* aparature i jednadžbe (2.4—2) može se odrediti i vrijednost $R = 1 \Omega$, dakle jedinicu otpora Međunarodnog sistema. Za tu svrhu unaprijed se izračuna koliko mora biti n (uz poznati M), a onda se R regulira tako dugo dok galvanometar G ne pokazuje više nikakav otklon.



Sl. E 14. Određivanje ohma pomoću Campbellova mosta

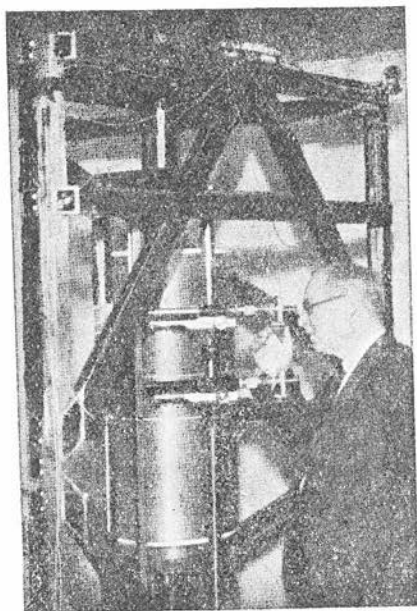
Engleski laboratorij upotrebljava i *Campbellovu* metodu čija je shema nacrtana na slici E14. Uređaj radi na izmjeničnu struju frekvencije oko $f = 100 \text{ Hz}$. U stanju ravnoteže ovog mosta vrijede jednadžbe

$$\omega^2 M_1 M_2 = r r_{12}, \quad M_1 R = (L_1 + L_2) r,$$

gdje je $\omega = 2 \pi f$ kružna frekvencija, a r_{12} otpor zatvorenog kruga zajedno sa R . Apsolutni iznos otpora r i r_{12} nije potrebno poznavati već samo njihov omjer $k = r/r_{12}$. Na taj način gornje dvije jednadžbe nakon uređenja daju

$$R = \omega (L_1 + L_2) \sqrt{k M_2 / M_1}.$$

Vidimo da ovdje za utvrđivanje R ili $R = 1 \Omega$ moramo uz frekvenciju $f = \omega / 2 \pi$ poznavati induktivitete i međuinaktivitete sva četiri svitka na slici E14. Obično se induktiviteti određuju usporedbom u nekom vrlo preciznom mostu sa standardnim svitkom kojemu je induktivitet izračunat izvanrednom tačnošću, kao što je na primjer međuinaktivitet kod *Lorenzove* aparature.



Sl. E 15. Campbellov standardni svitak u američkom NBS.

Takav standardni svitak usavršene *Campbellove* konstrukcije vidimo na slici E15. Izrada tog svitka nepojmljivo je teška jer tačnost poznavanja L ovisi samo o ispravnom proračunu i nadasve preciznom mjerenju dimenzija pojedinih dijelova svitka. Tako na primjer u National Bureau of Standards dvije grupe mjerača bezbroj puta premjeravaju promjer i duljine pojedinih dijelova standardnog svitka. Na slici E 15 vidimo zahtjeve visoke preciznosti: dr. *Wenner* (izumitelj druge metode određivanja R) mjeri kroz okular prosječni korak

namota jednog dijela *Campbellova* standardnog svitka.

2.5. Posljedice uvođenja Međunarodnog sistema jedinica

Uvođenje Međunarodnog sistema jedinica nije unijelo u nauku o elektromagnetizmu samo nove definicije jedinica i novo pramjerilo u obliku strujne vage, već i nekoliko drugih promjena koje možemo razmotriti u dva pravca.

Prvi se tiče načina primjene jedinica. Znamo da je Međunarodni sistem skup međusobno koherentnih jedinica svih grana znanosti i tehnike. Stoga primjenom Međunarodnog sistema nestaju razlike koje su ranije postojale zbog primjene »znanstvenih« i »praktičnih« ili »tehničkih« jedinica (vidi odsječak 5). Mjerni ili računski rezultati izražavaju se danas bilo u nuklearnim laboratorijima bilo u priručnim radionicama Međunarodnim jedinicama. To je izvanredan uspjeh međunarodne suradnje jer tako će nestati vječiti jaz koji je razdvajao teoretsku literaturu od praktične i popularne.

Budući da su jedinice Međunarodnog sistema koherentne, brojčane jednadžbe dobivaju isti oblik kao i veličinske jednadžbe. To je druga izvanredna posljedica uvođenja Međunarodnog sistema jedinica. Posljedice toga možemo lako zamisliti. Konkretni proračuni nekog procesa ili elementa ne mogu se stisnuti samo u okvir jedne od grane znanosti ili tehnike. Proračun električkog stroja na primjer nije samo stvar elektromagnetizma već i mehanike, nauke o čvrstoći, termodinamike i nauke o strujanju rashladnog zraka. Prije međunarodnog prihvaćanja Međunarodnog univerzalnog koherentnog sistema jedinica za ove grane konstruktor takvog stroja imao je znatne poteškoće kad je nakon posve električkog proračuna morao preći na mehanički, gdje su mu stajale na raspolaganju brojčane jednadžbe prilagođene na primjer jedinicama Tehničkog sistema. Pri tom je morao često upotrebljavati preračunske koeficijente između kW i kpm/s i niz drugih. Posao mu se još otežao kad je vršio toplinsku kontrolu pri čemu je morao najprije preračunati npr. kW u kcal/h ili kcal/s, a tek onda nastaviti u specifičnom duhu brojčanih jednadžbi termodinamike.

Sav taj suvišni i zamorni posao, nakon kojega čovjek nikada nije posve siguran da li je negdje pogriješio, otpada uvođenjem Međunarodnog sistema. Već ranije navedena jednadžba idealne transformacije energije $W = G h = m v^2 / 2 = F l = = p V = m \Delta i = U I t = L I^2 / 2 = C U^2 / 2$ koju bismo mogli nastaviti pisati dalje i u hidrodinamiku, zračenje i kemiju, mogla nam je dočarati izvanrednu zbližavajuću ulogu Međunarodnog sistema jedinica.

Ovdje ćemo ukratko pogledati kakve promjene donosi Međunarodni sistem, specijalno u nauci o elektromagnetizmu i u elektrotehnici. Elektrotehničari su upotrebljavali sistem jedinica s polaznim jedinicama m, s, V₀, A₀ (indeksi 0 označuju jedinice Tehničkog sistema, vidi odsječak 4) ili cm, s, V₀, A₀, ali samo u okviru elektrotehnike u užem smislu. Kad je trebalo proračunati nešto »mehaničko« odmah su segnuli za kilopondom, tehničkom atmosferom itd. Tjelesa su karakterizirali težinama a samo u manjoj mjeri masama.

U odsječku B.5 pokazali smo da je pri upotrebi Međunarodnog sistema jedinica ispravnije i mnogo jednostavnije s obzirom na postojeće tabelarne i dijagramske podatke upotrebljavati veličinu masu i njenu jedinicu kilogram nego li uvoditi Međunarodnu jedinicu sile newton na sva ona mjesta gdje se prije toga upotrebljavao kilopond. Elektrotehničari su dakle u tom pogledu doživjeli iste promjene kao i strojari, pa stoga možemo samo uputiti na čitanje odsječaka B.5 i D.7. Prema tome ih najpraktičnija primjena Međunarodnog sistema jedinica upućuje na to da kažu kako masa nekog čovjeka iznosi 75 kilograma, a gustoća vode 1000 kg/m³, a ne da specifična težina vode ima vrijednost 9807 N/m³!

Kod sila i tlakova ne može se izbjeći radikalna izmjena. Vremenom će newton i pentagiorgi (= 10⁵ N/m²) — ili neka druga Međunarodna jedinica s prefiksom — istisnuti kilopond i obje atmosfere.

Katkada se od praktičara u tvornicama i u privredi čuje »da je Međunarodni sistem jedinica već 10 ili 12 godina službeno na snazi, a da ga tek sada polako uvode

u škole i visokostručne publikacije, premda postoji i državni standard koji ga favorizira». Time se želi reći da prihvaćanje tog sistema ide nekako sporo.

Takva je izjava samo relativne vrijednosti. Metrološke promjene nisu financijske uredbe koje se strogošću zakona primjenjuju od dana potpisa zakonodavca. Iza jedinica i njihovih sistema stoje milijuni ljudi koji su navikli čak i misliti u određenim jedinicama i ti ljudi moraju najprije u sebi slomiti stare navike da bi mogli prihvatiti nove. Stoga promjena sistema jedinica nije dekretirana nova primjena uredbe, već duboki intimni prijelom u samim ljudima, a takvi procesi nisu podložni mjerenju malim vremenskim jedinicama! Pročitajmo samo dva odsječka o povijesti mjera (A.2 i E.5) pa ćemo vidjeti koliko su dugo u prošlosti trajale metrološke promjene. Stoga možemo smatrati da je proces uvođenja Međunarodnog sistema jedinica zapravo izvanredno brz. Tome nije toliko pridonio to što su ljudi danas pametniji negd prije, već znatno pojačana komunikativnost među pojedincima i državama, brzo prenošenje iskustava putem literature i sve veća međusobna povezanost raznih grana tehnike i znanosti odnosno iščezavanje nekada toliko razvikane razlike između znanosti i tehnike.

Pretjerane razlike danas postoje samo tamo gdje se nauka njeguje kao akademska fraza. Danas su posve rijetki fizičari kao oni koji su prije 10 godina govorili da Međunarodni sistem »tehnizira« fiziku, a i tehničari koji su istodobno uzvikivali da taj sistem znači »fizikalizaciju« tehnike. Od nekih strojara međutim još i danas možemo čuti da Međunarodni sistem »elektrofificira« strojarstvo!

Sva takva mišljenja pokazuju neshvaćanje suštine promjene, a s druge strane uskoć horizonsata; ne vide dalekosežnost Međunarodnog sistema: sve jednakžbe, bilo u fizici bilo u tehnici, postaju primjenom tog sistema međusobno jednake; svi mjere ili izražavaju rezultate mjerenja i računanja istim jedinicama u svim granama nauke i tehnike, nestaje barem u tom pogledu umjetna ograda između tzv. čiste nauke i primijenjenih znanosti!

Tijekom drugog svjetskog rata pokazalo se kako te razlike nema kad su sve snage angažirane za isti cilj. To pokazuje i upravo fantastičan razvoj tehnike i znanosti nakon posljednjeg rata i postojanje izvanrednih laboratorija velikih tvornica iz kojih gotovo svaki dan dolaze »najnaučniji« rezultati. Umjetno stvorene ograde između znanosti i tehnike srušene su pod zahtjevom suvremena života, a postoje još samo u onim konzervativnim akademskim tradicijama koje nemaju veze sa stvarnim životom, a vrijeme ih je ostavilo daleko iza sebe. Utoliko je žalostnije kad profesor u školi pokazuje đacima uteg i uči ih da je to jedinica težine kilopond, a na utegu čitko i ispravno piše »1 kg«!

Uvođenjem Međunarodnog sistema jedinica samo su neznatno u svojoj navici pogođeni oni fizičari koji su dosljedno upotrebljavali CGS sistem u mehanici, a CGSM ili Gaussov sistem jedinica (vidi odsječak 3) u elektromagnetizmu. Oni su i prije 1948. godine baratali pojmom mase i gustoće, a ne težinom i specifičnom težinom. Stoga promjene od grama na kilogram i od dyna na newton za njih ne predstavljaju gotovo nikakve teškoće. Ni svi fizičari međutim nisu bili dosljedni u primjeni svojih sistema. I oni su se služili atmosferama umjesto dyn/cm², kalorijama umjesto ergima, a pri elektromagnetskim mjerenjima upotrebljavali su ampermetre i voltmetre baždarene u A₀ i V₀. Takvi posve praktički razlozi natjerali su američke fizičare, mahom oslobođene bilo kakvih respekata prema tradicionalnim CGS sistemima, da objeručke prihvate Međunarodni sistem jedinica, a preko njega izravno ili neizravno veličinske jednakžbe.

Stvarno, ako se čovjek samo jednom upusti i uživi u probleme mjera i njihovih sistema, ali korjenito i do dna, ubrzo dolazi do uvjerenja da je sve to na

kraju krajeva vrlo jednostavno i da te stvari nismo razumjeli s razloga što u njih nisu prošli naši učitelji. Ujedno se dolazi do nepokolebljivog uvjerenja da je Međunarodni sistem jedinica sa svojim posljedicama — u prvom redu s univerzalnim veličanskim jednadžbama — doista jezik kojim se možemo izvršno međusobno sporazumijevati.

Drugi odraz uvođenja Međunarodnog sistema u elektrotehniku je mjerno-tehničke prirode. Usporedbena mjerenja u nacionalnim metrološkim laboratorijima, na čelu s Međunarodnim birooom za mjere i utege, engleskim National Physical Laboratory, američkim National Bureau of Standards i sovjetskim Svesaveznim naučno-istraživačkim institutom, pokazala su da između starijih »tehničkih« (materijalnih; indeks $\circ$) i Međunarodnih (apsolutnih) jedinica postoje odnosi čije su srednje vrijednosti

$$p = \Omega_0 / \Omega = 1,000\ 49,$$

$$q = A_0 / A = 0,999\ 85,$$

tj. stari ohm veći je od Međunarodnog (Giorgijevog) Ω , dok je »srebrni amper« A_0 (vidi odsječak 4) manji od Međunarodnog (A).

Budući da je $V_0 = \Omega_0 A_0 = p q V$, a $W_0 = A_0 V_0 = p q^2 W$, jer je $W = AV$, računanjem dobivamo i sve druge odnose između jedinica Tehničkog i Međunarodnog sistema:

$$A_0 = q A, \Omega_0 = p \Omega, V_0 = p q V, W_0 = p q^2 W, J_0 = p q^2 J, \\ C_0 = C/q, F_0 = p F, H_0 = H/p,$$

gdje simboli A, Ω , V, W, J, C, F i H redom predložuju jedinice Međunarodnog sistema amper, ohm, volt, watt, joule, coulomb, farad i henry.

Vrijednosti su preračunskih koeficijenata

$$p = 1,000\ 49, q = 0,999\ 85, p q = 1,000\ 34, p q^2 = 1,000\ 19.$$

Pogledajmo još ukratko kako se uvođenje Međunarodnog sistema jedinica reflektira na tačne elektromagnetske instrumente i normale baždarene u jedinicama Tehničkog sistema jedinica.

Iz vrijednosti faktora p i q te njihovih kombinacija vidimo da je A_0 manji za 0,015% od apsolutnog ampera Međunarodnog sistema, a Ω_0 veći je za 0,049% od Ω . To znači da na instrumente, uključivši razred 0,1, prijelaz na Međunarodne jedinice uopće nema utjecaja. Međutim kod još tačnijih instrumenata mora se uzeti u obzir korektura i pri tom naročito paziti u kojem je smjeru (+ ili —) bila greška tih instrumenata u jedinicama A_0 , Ω_0 , V_0 i W_0 . U nekim će slučajevima instrumenti zbog djelomične kompenzacije ranije greške i faktora p i q postati tačniji u Međunarodnim jedinicama nego što su bili u Tehničkim. Kod drugih je baš obratno, tamo se povećavaju konačni korekcionni faktori u odnosu na Međunarodne jedinice.

Otporničke normale vrlo velike tačnosti, koje se može udesiti na 10^{-5} , to jest na 0,001% tačno, svakako treba prebaždari na ohme Međunarodnog sistema jer zbog $p = \Omega_0 / \Omega = 1,000\ 49$ ovdje postoji razlika 0,049% ili $4,9 \cdot 10^{-4}$ što mnogo premašuje njihovu nazivnu netačnost. Takvih najpreciznijih i skupocjenih normala ima malo, pa je najbolje da se dadu prebaždari u apsolutnu Međunarodnu jedinicu otpora u jednom od najpreciznijih svjetskih državnih metroloških laboratorija, iako je to vrlo skupa usluga. Takav je postupak međutim neophodan ako se želi imati osnovu za sve sekundarne i tercijarne industrijske normale.

Otporničke normale u elektrotehničkim laboratorijama obično se mogu udesiti na oko 10^{-4} ili 0,01% od nazivne vrijednosti. To znači da se i one moraju smanjiti za oko 0,05%. Nove vrijednosti mogu se doduše uzeti u obzir i kod faktora korekcije tih normala, ali ih je pouzdanije prebaždari u Međunarodne ohme pomoću normala s mogućnošću adjustiranja 0,001%, koje smo ranije spomenuli.

Mjerni mostovi ne mijenjaju se uvođenjem Međunarodnog sistema jer mostovima ionako samo određujemo omjere između otpora. Normale tih mostova moraju međutim biti prebaždarene u Međunarodne (Giorgijeve) jedinice (otpor- ničke, induktivne i kapacitativne normale), ako je razred mosta takav da bi se u njemu osjetila minimalna razlika između Tehničkih i Međunarodnih jedinica.

Westonov zasićeni normalni element ima u Međunarodnom sistemu jedinica pri temperaturi $\vartheta = 20$ deg napon $U_{20} = 1,018\,65$ V, dok je zbog $V_0 = p\,q\,V$ vrijednost tog napona u jedinici Tehničkog sistema $U_{20} = 1,018\,300\,V_0$. Prema tome se i jednadžba napona Westonova elementa pri temperaturi ϑ

$$U_{\vartheta} = 1,018\,300\,V_0 - 4,06 \cdot 10^{-5} (\vartheta / \text{deg} - 20) V_0 - 9,5 \cdot 10^{-7} \cdot (\vartheta / \text{deg} - 20)^2 V_0 + 10^{-8} (\vartheta / \text{deg} - 20)^3 V_0$$

mora pomoću $V_0 = 1,000\,34$ V prilagoditi Međunarodnom apsolutnom voltu (V).

Ostale promjene koje su nastale kod najpreciznijih mjernih uređaja (kompensatori i slično) proizlaze iz promjena što su zadesile mjerne normale i Westonov element.

3. FIZIKALNI SISTEMI JEDINICA ELEKTROMAGNETIZMA

3.1. Elektrostatski (CGSE) sistem jedinica

U vremenu kad je nastao fizikalni elektrostatski sistem jedinica, tj. prije 120 godina (o povijesti vidi odsječak 5), elektromagnetska znanost bila je tek na početku svog divovskog uspona. Zajedničke elektromagnetske nauke još nije bilo, odvojeno su razmatrali elektrostatske pojave od magnetskih. Tada se još nije znalo da magnetska polja potječu od električnih struja pa su se učenjaci služili na primjer pojmom »magnetske tekućine«, sličnom pojmu »toplinskog fluida« u nauci o toplini.

Pojam polja u današnjem smislu (vidi odsječak 1.4) bio je u to doba nepoznat, njega je kasnije na temelju Faradayeva shvaćanja uveo J. C. Maxwell u svom glasovitom djelu *A Treatise on Electricity and Magnetism* godine 1873. Pojave privlačenja i odbijanja dviju množina elektrike u zraku bile su smatrane osnovnim ishodištem čitava znanja o elektrici. Umjesto pojma polja kojim danas jednostavno i elegantno rješavamo mnoge zadatke, osobito ako držimo na pameti genijalnu i jednostavnu Faradayevu sliku silnica polja, tadašnja je znanost o elektrici silu F između dvije množine elektrike Q_1 i Q_2 tumačila zakonima koji su u obliku jednadžbi bili građeni analogno Newtonovu zakonu privlačenja nebeskih masa. Danas govorimo da je to bilo razdoblje u kojem su sve električke pojave svedene na »djelovanje na daljinu«.

U naše vrijeme Priestley-Coulombov zakon o međusobnom mehaničkom djelovanju dviju elektrika znade na temelju drukčijih predodžbi izvesti skoro svaki maturant, ako ga profesor fizike nije počeo podučavati poglavlje o elektrici lisičjim repovima i amalgamiranom kožom. Nalazi li se u dielektriku s dielektričnošću ϵ množina elektrike Q_1 ona će biti izvor električkog toka ψ_1 . Na površini

zamišljene kugle radijusa r sa središtem u Q_1 električka će indukcija iznositi $D_1 = \psi_1/A$, gdje je A površina te zamišljene kugle, $A = 4\pi r^2$. Budući da je jakost električkog polja $E_1 = D_1/\varepsilon$ u udaljenosti r od Q_1 djelovat će polje jakosti

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon} = \frac{\psi_1}{\varepsilon A} = \frac{Q_1}{\varepsilon 4\pi r^2}. \quad (3.1-1)$$

Stavi li se u to polje neka druga množina elektrike Q_2 , polje E_1 djelovat će na Q_2 silom $F = E_1 Q_2$, dakle u skladu s jednadžbom (3. 1—1)

$$F = E_1 Q_2 = \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon 4\pi r^2}. \quad (3.1-2)$$

Umjesto da kažemo kako polje E_1 djeluje silom F na Q_2 , možemo reći da se Q_1 i Q_2 odbijaju silom F koju propisuje jednadžba (3. 1—2).

Ukoliko se ne radi o nekom tvarnom dielektriku već o vakuumu (praktički zraku), umjesto ε napisat ćemo u (3. 1—2) influencionu konstantu ε_0 . Ako su još osim toga obje elektrike po vrijednosti međusobno jednake, $Q = Q_1 = Q_2$, onda uz dovoljno veliki razmak r jednadžba (3. 1—2) prelazi u oblik koji vrijedi za vakuum

$$F = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \quad \text{ili} \quad F \cdot \varepsilon_0 4\pi r^2 = Q^2. \quad (3.1-3)$$

Sve jednadžbe koje smo ovdje napisali univerzalne su veličinske jednadžbe koje vrijede za bilo koji sustav jedinica ili čak za nesistematičan skup jedinica. U poglavlju A i u onima iza njega opširno smo objasnili i na primjerima pokazali kako se simbol veličine G u veličinskim jednadžbama uvijek može razložiti na umnožak brojčanog iznosa G i upotrebljene jedinice $[G]$. Razliku između simbola za veličinu G i simbola brojčana iznosa ističemo time što veličine štampamo *kurzivnim* slovima, a brojčane iznose uspravnima¹⁾. Tako na primjer neku vrijednost sile F možemo pisati kao $F = F_1 [F]_1 = F_2 [F]_2$. Ako je na primjer $F = 1$ N, tj. jedan newton, onda je brojčani iznos $F_1 = 1$ uz jedinicu sile $[F]_1 = \text{newton}$. Ako tu istu silu mjerimo nekom drugom jedinicom $[F]_2 = \text{dyn}$ onda je drugi brojčani iznos $F_2 = 10^5$, jer je $\text{dyn} = 10^{-5}$ N, pa u tom slučaju vrijedi $F = F_1 [F]_1 = F_2 [F]_2$. Tako mora i biti jer se sila F nije promijenila ako smo je mi u mislima jednom mjerili newtonom, a drugi puta dynom.

Veličinske jednadžbe gotovo su potpuno osvojile najmoderniju fizikalnu i tehničku literaturu. Time su konačno dovedeni u sklad najprirodniji način mišljenja i računanja s jedne strane, te način objavljivanja eksperimentalnih i teoretskih rezultata s druge strane. To nam daje pravo da takozvane fizikalne sisteme jedinica elektromagnetizma razmotrimo s jedinog ispravnog stajališta priznavanja samorodnosti elektromagnetskim pojavama.

Posljedica je toga da će naš odulji prikaz besprijekornih fizikalnih sistema odstupati od uobičajenih pogleda. Pri tom imamo oslonac u identičnim nazorima *ž. Wallota*, nedavno preminulog najvećeg metrologa svijeta, a potvrdu takvim nazorima u genialnim idejama osnivača tzv. fizikalnih sistema jedinica *C. F. Gaussa* (vidi odsječak 3.5).

¹⁾ Od ovog pravila odstupamo kod grčkih slova. Budući da tiskara nema *kurzivnih* znakova za grčka slova, prisiljeni smo grčki označene veličine tiskati uspravnim znakovima. Kako bismo te veličine razlikovali od pripadnih brojčanih iznosa, potonjima dodajemo indeks n (n -numerus). Na primjer ε_n je brojčani iznos veličine dielektričnosti ε , dakle $\varepsilon = \varepsilon_n [\varepsilon]$.

Prije 120 godina u znanosti o elektrici nisu upotrebljavali veličinske jednadžbe. Simboli u jednadžbama predstavljali su brojčane iznose. Prema tome su to bile brojčane jednadžbe kako to danas kažemo. U skladu s načinom pisanja u ovoj knjizi morat ćemo simbole tih starih jednadžbi pisati uspravnim simbolima i pritom uvijek držati na umu da uspravno slovo ne predstavlja veličinu, već brojčani iznos veličine prilagođen stanovitj jedinici koju ćemo morati posebno spomenuti.

Takvim brojčanim jednadžbama pioniri nauke o elektrici opisivali su *Priestley-Coulombov zakon* za silu odbijanja dviju elektrika u vakuumu brojčanim izrazom

$$F = Q^2/r^2 \quad \text{ili} \quad F r^2 = Q^2, \quad (3.1-4)$$

gdje uspravni simboli dakako označuju da se radi o brojčanim iznosima.

Budući da je ovaj izraz bio temelj čitavoj jednoj grani znanosti on je predstavljao i polazište definiranja jedinica. Tako je jedinica elektrike bila definirana ovako: »Jedinica elektrike je ona množina elektrike koja na isto takvu množinu elektrike djeluje silom jedan dyn, ako su elektrike međusobno udaljene 1 centimetar«. Ovakva definicija pomalo je čudna za današnje nazore, no ona je potpuno u skladu s brojčanom jednadžbom (3. 1—4): ako su brojčani iznosi $F = 1$, $r = 1$, $Q = 1$, onda je zaista u desnoj jednadžbi (3. 1—4): $1 \cdot 1^2 = 1^2$.

Izračunajmo koliko iznosi tako definirana jedinica elektrike! Budući da danas mjerimo množine elektrike balističkim galvanometrima, a struje ampermetrima, izrazit ćemo tu jedinicu jedinicom Međunarodnog sistema jedinica u kojemu se elektrika mjeri jedinicom coulomb = $C = \text{amper} \times \text{sekunda} = A \cdot s$.

U tu svrhu moramo najprije izraz (3. 1—4) pretvoriti u veličinsku jednadžbu. U tome već imamo bogato iskustvo jer smo to u nizu navrata činili u poglavljima A, B i D. U skladu s osnovnom metrološkom relacijom »brojčani iznos $G = \text{veličina } G : \text{jedinica } [G]$ «, dakle $G = G/[G]$, sva tri brojčana iznosa F , r i Q prikazat ćemo kao omjere veličina F , r i Q s jedinicama koje pripadaju navedenim brojčanim iznosima. Tako je

$$F = F/[F], \quad r = r/[r], \quad Q = Q/[Q],$$

gdje uglate zagrade simboliziraju jedinice sile, duljine i elektrike elektrostatskog sistema (CGSE). Uvrstimo li ova tri odnosa u desnu jednadžbu (3. 1—4) dobivamo

$$\frac{F}{[F]} \frac{r^2}{[r]^2} = \frac{Q^2}{[Q]^2}.$$

Ovdje dakako *kosi* simboli predstavljaju veličine. Preuredimo li ovu jednadžbu ovako

$$F r^2 = Q^2 [F] [r]^2 [Q]^{-2},$$

možemo je usporediti s desnom veličinskom jednadžbom (3. 1—3). Podijelimo li te dvije jednadžbe slijedi

$$\frac{F \varepsilon_0 4 \pi r^2}{F r^2} = \frac{Q^2}{Q^2 [F] [r]^2 [Q]^{-2}},$$

odakle kraćenjem istih veličina u brojniku i nazivniku dobivamo

$$[Q]^2 = \varepsilon_0 4 \pi [F] [r]^2. \quad (3.1-5)$$

Oдавде sad možemo izračunati kolika je jedinica električnosti Q u CGSE sistemu jedinica ako znamo $[F]$ i $[L]$. Te dvije jedinice (sile i duljine) preuzete su u mjerni sistem nauke o elektrici iz mehanike gdje se upotrebljava $[F] = \text{dyn} = \text{gram} \times \text{centimetar} / \text{sekunda}^2 = \text{gcm} / \text{s}^2$. Budući da je $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, kvadrat elektrostatske jedinice možemo pisati dalje

$$[Q]^2 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \cdot 4 \pi \text{ dyn cm}^2.$$

Budući da je $\text{dyn} = 10^{-5} \text{ N}$ te $\text{cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ dobivamo

$$[Q]^2 = 1,127 \cdot 10^{-10} \text{ F m}^{-1} \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,127 \cdot 10^{-19} \text{ F N m},$$

odakle zbog $F = C/V$, $\text{Nm} = \text{J} = \text{CV}$ slijedi jedinica $\text{FNm} = \text{CV}^{-1} \text{CV} = \text{C}^2$, pa korjenovanje gornjeg izraza daje konačno vrijednost elektrostatske jedinice električnosti u Međunarodnoj jedinici coulomb:

$$[Q] = 3,3356 \cdot 10^{-10} \text{ C}.$$

To je vrlo sitna jedinica. Struja od jednog ampera nagomila u jednoj sekundi na svakoj oblozi kondenzatora $1 : 3,3356 \cdot 10^{-10} = 2997,9$ milijuna takvih jedinica!

Vratimo se još načas na jednadžbu (3. 1—5) pomoću koje smo izračunali kvadrat jedinice električnosti u elektrostatskom sistemu jedinica. Izračunamo li drugi korijen iz (3. 1—5) dobivamo

$$[Q] = [L] \sqrt{\epsilon_0 4 \pi [F]} = [L]^2 \sqrt{\epsilon_0 4 \pi [w]} = [L] [t]^{-1} \sqrt{\epsilon_0 4 \pi [m] [L]}. \quad (3.1-6)$$

Ovdje smo uveli još nekoliko jedinica: $[w]$ je jedinica gustoće energije, dakle $[w] = [W]/[V]$ gdje je $[V]$ jedinica volumena. Jedinica sile $[F]$ izvedena je jedinica koja polazi od jedinica mase $[m]$, duljine $[L]$ i vremena $[t]$ CGSE sistema. Znamo da je u fizikalnom sistemu jedinica mehanike CGS $[L] = \text{cm}$, $[t] = \text{s}$, $[m] = \text{g}$, odakle slijede ostale dvije koherentne jedinice tog sistema:

$$[F] = \text{dyn} = [m] [L] [t]^{-2} = \text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} = \text{gcm s}^{-2},$$

$$[w] = \text{erg/cm}^3 = [W]/[V] = [F] [L] / [L]^3 = [F] [L]^{-2} = \text{gcm}^{-1} \text{s}^{-2}.$$

Prema tome iz jednadžbe (3. 1—6) dobivamo

$$[Q] = [Q]_e = \text{cm s}^{-1} \sqrt{\epsilon_0 4 \pi \text{ g cm}} = (4\pi)^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \epsilon_0^{1/2}. \quad (3.1-7)$$

Iz ovog izraza možemo zaključiti dvoje. Prvo, jedinica električnosti u elektrostatskom CGSE sistemu jedinica nije polazna (osnovna) jedinica već izvedena. Iako to uopće nije važno kako znamo iz odsjeka 2. I ipak valja naglasiti, jer se ponekad čuju suprotna mišljenja. Drugo, izvedena jedinica $[Q]_e$ polazi od četiri osnovne jedinice. Prve tri su cm , g i s iz mehanike, a četvrta je influenciona konstanta ϵ_0 .

U izrazu (3. 1—7) upotrebili smo za jedinicu električnosti u CGSE sistemu oznaku $[Q]_e$. Indeks e stavili smo zato da izričito naglasimo da se radi o jedinici tog sistema, jer kasnije ćemo imati analogno građene jedinice CGSM sistema (vidi slijedeći odsjek). Isto tako treba opravdati primjenu jedinice $[w] = \text{erg/cm}^3$. Primjenjujemo je samo zbog kraćeg pisanja jednadžbi, što vidimo ako uporedimo izraze (3. 1—6) i (3. 1—7). Stoga ćemo i u daljnjem izlaganju upotrebljavati $[w]$, a pritom držati na pameti da je ta jedinica sastavljena od tri osnovne mehaničke jedinice CGS sistema, jer je $[w] = \text{g cm}^{-1} \text{s}^{-2}$ kako smo ranije izveli.

Izračunajmo sada vrijednosti ostalih jedinica CGSE sistema u Međunarodnim jedinicama. Pri tom ćemo ići istim putem kojim smo izveli $[Q]_e$, tj. uspoređivat ćemo brojčane jednadžbe prilagođene CGSE jedinicama s veličinskim jednadžbama.

Jakost električkog polja E u ta dva oblika glasi jednako

$$(3.1-8) \quad F = QE \quad F = Q E, \quad (3.1-9)$$

gdje je lijevo brojčana jednadžba (uspravna slova), a desno veličinska (*kurzivni simboli*). Budući da je u lijevoj jednadžbi $F = F/[F]$, $Q = Q/[Q]$, gdje je $[Q] = [Q]_e$, te $E = E/[E]$, uvrštenjem tih izraza u (3. 1—8) dobivamo

$$\frac{F}{[F]} = \frac{Q E}{[Q][E]}, \text{ što daje } F = Q E \frac{[F]}{[Q][E]}.$$

Usporedimo li ovu desnu jednadžbu sa (3. 1—9) slijedi $[E] = [F][Q]$, što uz pomoć (3. 1—6) ili (3. 1—7) daje

$$[E] = [E]_e = \sqrt{(\epsilon_0 4 \pi)^{-1} [w]}. \quad (3.1-10)$$

Budući da je $[w] = \text{erg}/\text{cm}^3 = 10^{-7} \text{ J} : 10^{-6} \text{ m}^3 = 10^{-1} \text{ J}/\text{m}^3$, a $\epsilon_0 4 \pi = 1,1127 \cdot 10^{-10} \text{ F}/\text{m}$, to je konačno

$$[E] = [E]_e = (10^{-1} \text{ Jm}^{-3} : 1,1127 \cdot 10^{-10} \text{ Fm}^{-1})^{1/2} = 2,9979 \cdot 10^4 \text{ V}/\text{m},$$

jer je $\text{Jm}^{-3} \text{ F}^{-1} \text{ m} = \text{V}^2/\text{m}^2$.

Jedinicu električke indukcije $[D] = [D]_e$ možemo izračunati iz usporedbe jednadžbi za gustoće energije električkog polja

$$w_e = E D / 8 \pi \quad i \quad w_e = E D / 2$$

od kojih brojčana (lijeva) vrijedi samo za jedinice CGSE sistema, a desna je univerzalna veličinska jednadžba u kojoj smo veličine odštampali *kurzivom*. Po već uvriježenoj praksi pišemo

$$w_e = w_e/[w], \quad E = E/[E], \quad D = D/[D],$$

što uvrštenjem u lijevu jednadžbu daje

$$w_e = \frac{1}{2} E D \frac{[w]}{4 \pi [E][D]} \quad \text{ili} \quad [D] = \frac{[w]}{4 \pi [E]},$$

što smo dobili uz pomoć veličinske jednadžbe $w_e = E D / 2$. Uvrštenjem jednadžbe (3. 1—10) u izraz za jedinicu $[D]$ nastaje

$$[D] = \sqrt{(4 \pi)^{-1} \epsilon_0 [w]} = (4 \pi)^{-1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \epsilon_0^{1/2}. \quad (3.1-11)$$

Stavimo li u ovu jednadžbu vrijednost za ϵ_0 računanjem dobivamo

$$[D] = [D]_e = 2,6544 \cdot 10^{-7} \text{ C}/\text{m}^2.$$

Do istog bismo rezultata mogli doći da smo uspoređivali brojčanu jednadžbu $D = \epsilon_n E$ koja vrijedi uz primjenu CGSE jedinica s univerzalnom veličinskom jednadžbom $D = \epsilon E$ ili pak usporedbom brojčane jednadžbe $D A = 4 \pi Q$ s veličinskom jednadžbom $D A = Q$. Sve spomenute kao i ostale brojčane jednadžbe prilagođene jedinicama elektrostatskog sistema jedinica što ga ovdje razmatramo navedene su u stupcu 6 tablice X, koja je priložena ovoj knjizi. U toj su tablici u stupcima 7, 8 i 9 naznačeni odnosi među jedinicama elektrostatskog CGSE i Međunarodnog sistema jedinica. Tamo na primjer piše da je $[I]_e = 3,3356 \cdot 10^{-10} \text{ A}$,

a to se podudara s netom izvedenom relacijom $[Q]_e = 3,335\,6 \cdot 10^{-10}$ C, jer je $C = As$, a $[I]_e = [Q]_e/[t] = [Q]_e/s$. Najčešće upotrebljavane veličinske jednadžbe elektromagnetskog polja svrstane su u stupcu 5 tablice E. 1. (str. 213)

Za kasnija razmatranja bit će nam od koristi da izvedemo još nekoliko odnosa između jedinica CGSE i Međunarodnog sistema. Učinimo to najprije s jedinicom električke polarizacije $[P]_e = [P]$. Brojčana i veličinska jednadžba u kojima dolazi polarizacija glase

$$D = E + 4\pi P \qquad D = \epsilon_0 E + P,$$

gdje je, kao i ranije, lijevo brojčana jednadžba, a desno veličinska. Stavimo li u lijevu jednadžbu $D = D/[D]$, $E = E/[E]$, $P = P/[P]$, dobivamo

$$\frac{D}{[D]} = \frac{E}{[E]} + 4\pi \frac{P}{[P]} \quad \text{ili} \quad D = \epsilon_0 E + P \frac{4\pi [D]}{[P]},$$

jer je $[D]/[E] = \epsilon_0$, što smo implicate već izveli, a ostalo je zabilježeno u stupcu 3 tablice E. 3. Usporedimo li desnu stranu gornje jednadžbe s desnom stranom veličinske jednadžbe dobivamo da je $[P] = 4\pi [D]$ odakle računanjem slijedi

$$[P] = [P]_e = \sqrt{4\pi [zw] \epsilon_0} = 3,335\,6 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2.$$

Ostale jedinice takozvanih električkih veličina lako je izvesti pomoću brojčanih jednadžbi u stupcu 6 tablice X, veličinskih jednadžbi iz stupca 4 ili 7 tabl. E. 1, te iz dosada uspostavljenih odnosa između jedinica Međunarodnog i CGSE sistema jedinica. Predimo stoga na razmatranje CGSE jedinica takozvanih magnetskih veličina.

Izračunajmo odnos između jedinice jakosti magnetskog polja $[H]_e = [H]$ i Međunarodne jedinice A/m. Za tu svrhu poslužiti ćemo se kao mostom brojčanom i veličinskom jednadžbom za Poyntingov vektor

$$S = EH / 4\pi \qquad S = EH,$$

gdje smo vektorske oznake propustili jer one u ovim razmatranjima nisu potrebne, kao uostalom ni u čitavoj ovoj knjizi, budući da se pretpostavlja poznavanje egzakt-nog vektorskog oblika jednadžbi.

Stavimo li u lijevu, brojčanu jednadžbu, omjer veličina i pripadnih CGS jedinica $S = S/[S]$, $E = E/[E]$, $H = H/[H]$, dobivamo prilagođenu veličinsku jednadžbu

$$\frac{S}{[S]} = \frac{E}{[E]} \frac{H}{[H]} \frac{1}{4\pi} \quad \text{odnosno} \quad S = EH \frac{[S]}{4\pi [E][H]}.$$

Usporedimo li ovaj izraz, u kojemu *kosa* slova kao i ranije predstavljaju veličine, s veličinskom jednadžbom $S = EH$, odmah slijedi CGSE jedinica jakosti magnetskog polja

$$[H] = \frac{[S]}{4\pi [E]}.$$

Upoznajmo se najprije sa CGS jedinicom $[S]$ Poyntingova vektora. Kako znamo iz odsječka 1. 4 veličina S predstavlja površinsku gustoću snage, dakle $S = P/A =$

$= W : (At)$, gdje su P i W snaga i energija. Budući da je gustoća energije polja $w = W/V$, to je CGS jedinica veličine S :

$$[S] = \frac{[W]}{[A][t]} = \frac{[W][l]}{[V][t]} = [w] \frac{[l]}{[t]},$$

jer su jedinica volumena i površine povezane relacijom $[V] = [A][l]$. Budući da je $[w] = \text{erg}/\text{cm}^3$, $[l] = \text{cm}$, $[t] = \text{s}$, to je $[S] = [S]_e = \text{erg} : (\text{cm}^2 \cdot \text{s}) = 10^{-3} \text{ W}/\text{m}^2$, gdje simbol W predstavlja Međunarodnu jedinicu watt.

Prema tome je CGSE jedinica jakosti magnetskog polja

$$[H] = [H]_e = \frac{[l]}{[t]} \sqrt{(4\pi)^{-1} [w] \epsilon_0}.$$

Uvrštenje vrijednosti za ϵ_0 daje $[H]_e = 2,6544 \cdot 10^{-9} \text{ A}/\text{m}$.

Elektrostatiku jedinicu magnetske indukcije izvest ćemo iz izraza za gustoću energije magnetskog polja, analogno kao što smo ranije učinili kod izvoda $[D]$ iz jednadžbi za gustoću energije električkog polja. Za tu svrhu zabilježimo naprije brojčanu i veličinsku jednadžbu

$$w_m = BH/8\pi \qquad w_m = BH/2.$$

Lijeva jednadžba (brojčana) prilagođena je dakako jedinicama CGSE sistema jedinica. I ovdje ćemo umjesto simbola za brojčane iznose uvrstiti omjere veličina i jedinica $w_m = w_m/[w]$, $B = B/[B]$, $H = H/[H]$, što uvrštenjem u brojčanu jednadžbu rezultira sa

$$\frac{w_m}{[w]} = \frac{B}{[B]} \frac{H}{[H]} \frac{1}{8\pi} \quad \text{odnosno} \quad w_m = \frac{1}{2} BH \frac{[w]}{4\pi [B][H]}.$$

Usporedimo li dobiveni desni izraz s veličinskom jednadžbom $w_m = BH/2$ dobivamo izraz za jedinicu magnetske indukcije u CGSE sistemu

$$[B] = [B]_e = \frac{[t]}{[l]} \sqrt{(4\pi)^{-1} [w] \epsilon_0^{-1}}.$$

Nakon što uvrstimo vrijednost za $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}/\text{m}$ računanjem nastaje

$$[B]_e = 2,9979 \cdot 10^6 \text{ T},$$

gdje je jedinica Međunarodnog sistema tesla $= \text{T} = \text{Vs}/\text{m}^2$.

Budući da je veličinska jednadžba $\Phi = BA$ jednako građena kao i brojčana (vidi tablicu X), to je CGSE jedinica magnetskog toka

$$[\Phi]_e = [B]_e [l]^2 = 2,9979 \cdot 10^2 \text{ Wb},$$

gdje je weber $= \text{Vs} = \text{Tm}^2$.

I jednadžba za magnetski napon V jednako izgleda u veličinskom i u brojčanom obliku (vidi tablice E. 1 i X). Stoga je CGSE jedinica magnetskog napona

$$[V]_e = [H]_e [l] = 2,6544 \cdot 10^{-9} \text{ Am}^{-1} \cdot \text{cm} = 2,6544 \cdot 10^{-11} \text{ A}.$$

I brojčana jednadžba $B = \mu_n H$ posve je analogno građena kao veličinska $B = \mu H$. Budući da je $\mu = \mu_n [\mu]$, gdje je $[\mu]$ jedinica permeabilnosti CGSE sistema, usporedbom odmah slijedi

$$[\mu] = [\mu]_e = \frac{[B]}{[H]} = \frac{[I]^2}{[I]^2} \frac{1}{\epsilon_0} = 1,129 \cdot 4 \cdot 10^{15} \text{ H/m},$$

gdje je H kratica za henry, jedinicu induktiviteta Međunarodnog sistema jedinica. Gornju jedinicu $[\mu]_e$ sistema CGSE možemo napisati i u drukčijem obliku. U odsječku 1. 4 utvrdili smo da je u vakuumu brzina elektromagnetskog polja vezana s influencionom i indukcijom konstantnom pomoću jednadžbe $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$. Stavimo li $1/\epsilon_0 = \mu_0 v_0^2$ te $[I] = \text{cm}$ i $[t] = \text{s}$ u gornju jednadžbu dobivamo

$$[\mu]_e = \mu_0 v_0^2 \cdot \text{s}^2/\text{cm}^2 = c^2 \mu_0, \quad (3.1-12)$$

jer je novo uvedeni brojčani iznos c u gornjoj jednadžbi

$$c = \frac{v_0}{\text{cm/s}},$$

a to je brojčani iznos brzine elektromagnetskog polja izražen u centimetrima po sekundi, dakle $c = 2,9979 \cdot 10^{10}$. Naznačena indukciona konstanta dakako iznosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

CGSE jedinicu magnetske polarizacije odredit ćemo usporedbom brojčane jednadžbe (vidi tablicu X) i veličinske (tablica E. 1) koje međusobno povezuju brojčane iznose odnosno veličine B , H i $\mathcal{J}$:

$$(1.3-13) \quad B = H/c^2 + 4\pi J \quad B = \mu_0 H + \mathcal{J}. \quad (1.3-14)$$

Lijevo je brojčana jednadžba, a desno prava veličinska jednadžba. Budući da su brojčani iznosi omjeri veličina i pripadnih jedinica za brojčanu jednadžbu (1. 3—13) možemo napisati $B = B/[B]$, $H = H/[H]$, $J = \mathcal{J}/[\mathcal{J}]$, gdje su u uglatim zagradama CGSE jedinice. Uvrštenje u brojčani izraz (1. 3—13) daje

$$\frac{B}{[B]} = \frac{H}{c^2 [H]} + 4\pi \frac{\mathcal{J}}{[\mathcal{J}]} \quad \text{ili} \quad B = H \frac{[B]}{c^2 [H]} + \mathcal{J} \frac{4\pi [B]}{[\mathcal{J}]}.$$

Netom smo u (3. 1—12) izveli da je $[B]/[H] = [\mu] = c^2 \mu_0$. Pomoću ovog odnosa gornja jednadžba prelazi u oblik

$$B = \mu_0 H + \mathcal{J} \frac{4\pi [B]}{[\mathcal{J}]},$$

što usporedbom s veličinskom jednadžbom rezultira sa

$$[\mathcal{J}] = [\mathcal{J}]_e = 4\pi [B]_e = [I]^{-1} [t] \sqrt{4\pi [w] \epsilon_0^{-1}} = 3,7673 \cdot 10^7 \text{ T}.$$

Odavde vidimo da jedinice $[B]$ i $[\mathcal{J}]$ nisu međusobno jednake kao u Međunarodnom sistemu jedinica već je $[\mathcal{J}] = 4\pi [B]$.

Ovdje bismo još morali objasniti kako je u brojčanu jednadžbu (1. 3—13) ušao faktor c^2 . Znamo da je relativna permeabilnost $\mu_r = \mu/\mu_0$, gdje je μ apsolutna permeabilnost, a μ_0 indukciona konstanta (vidi odsječak 1. 4). Za vakuum je $\mu_r = 1$ pa je dakle $\mu = \mu_0$. S druge je strane veličina $\mu = \mu_n [\mu]_e$, gdje simbol μ_n predstavlja brojčani iznos permeabilnosti u CGSE sistemu. Prema tome je

$\mu_n [\mu]_e = \mu_o$, odnosno $\mu_n c^2 \mu_o = \mu_o$, jer je na snazi izraz (3. 1—12). Prema tome je $\mu_n = \mu_{en} = 1/c^2$, pa brojčanu jednadžbu (3. 1—13) možemo pisati i u obliku $B = \mu_{en} H + 4\pi J$, gdje je $\mu_{en} = 1/c^2$ brojčani iznos permeabilnosti u vakuumu izražen sa CGSE jedinicom $[\mu]_e$.

Ovakvim računima mogli bismo nastaviti dalje dok ne bismo izračunali sve odnose između CGSE i Međunarodnih jedinica. Umjesto toga preskočit ćemo račun, a rezultate dijelom navesti u stupcu 3 tablice E. 3, odnosno mnogo potpunije u tablici X na kraju knjige.

S izvedenim CGSE jedinicama možemo dakako računati i u veličinskim jednadžbama, što je razumljivo budući da smo veličinske jednadžbe uzeli za osnovu pri izračunavanju odnosa između CGSE i Međunarodnih jedinica. O tome ćemo se uvjeriti na nekoliko primjera u kojima ćemo paralelno računati s veličinskim jednadžbama i s brojčanim koje su prilagođene CGSE sistemu jedinica.

Neka se u magnetskom polju jakosti $H = 100 \text{ A/m}$ nalazi feromagnetik relativne permeabilnosti $\mu_r = 100$. Treba ustanoviti kolika je magnetska indukcija B . Računat ćemo pomoću veličinske jednadžbe $B = \mu H$. U našem primjeru permeabilnost iznosi $\mu = \mu_r \cdot \mu_o = 1,256 \cdot 10^{-4} \text{ H/m}$. Stoga je magnetska indukcija $B = 1,256 \cdot 10^{-4} \text{ Hm}^{-1} \cdot 100 \text{ Am}^{-1} = 1,256 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

Veličinski račun s CGSE jedinicama tekao bi ovako. Budući da je prema tablici X jedinica permeabilnosti u CGSE sistemu $[\mu]_e = 1,1294 \cdot 10^{15} \text{ H/m}$, to je obrnuto $\text{H/m} = 8,85 \cdot 10^{-16} [\mu]_e$, pa je dakle veličina $\mu = 1,256 \cdot 10^{-4} \cdot 8,85 \cdot 10^{-16} [\mu]_e = 1,1127 \cdot 10^{-19} [\mu]_e$. Zato što je $[H]_e = 2,654 \cdot 10^{-9} \text{ A/m}$, obrnuti je odnos $\text{A/m} = 3,767 \cdot 10^8 [H]_e$, pa je jakost magnetskog polja izražena u CGSE jedinici $H = 100 \cdot 3,767 \cdot 10^8 [H]_e = 3,767 \cdot 10^{10} [H]_e$. Prema tome magnetska indukcija iznosi

$$B = \mu H = 1,1127 \cdot 10^{-19} [\mu]_e \cdot 3,767 \cdot 10^{10} [H]_e$$

$$B = 4,195 \cdot 10^{-9} [B]_e,$$

jer je kako smo prije utvrdili $[B]_e = [\mu]_e [H]_e$.

Budući da o takvoj vrijednosti magnetske indukcije nemamo nikakve predodžbe potražimo u tablici X odnos između CGSE i Međunarodne jedinice indukcije. Nalazimo $[B]_e = 2,9979 \cdot 10^6 \text{ T}$, pa je konačno

$$B = 4,195 \cdot 10^{-9} \cdot 2,9979 \cdot 10^6 \text{ T} = 1,256 \cdot 10^{-2} \text{ T},$$

dakle isti rezultat koji smo dobili kratkim postupkom pomoću jedinica Međunarodnog sistema.

Sad još proračunajmo isti primjer pomoću brojčane jednadžbe $B = \mu_n H$ u kojoj uspravni simboli označuju brojčane iznose u CGSE jedinicama. Već smo prije izračunali da je veličina $\mu = 1,1127 \cdot 10^{-19} [\mu]_e$. Prema tome je brojčani iznos indukcije u CGSE jedinici $\mu_n = \mu / [\mu]_e = 1,1127 \cdot 10^{-19}$. Isto smo tako izračunali i veličinu $H = 3,767 \cdot 10^{10} [H]_e$, dakle u CGSE jedinici, pa je dakle $H = H/[H]_e = 3,767 \cdot 10^{10}$. Prema tome pravilni brojčani račun glasi

$$B = \mu_n H = 1,1127 \cdot 10^{-19} \cdot 3,767 \cdot 10^{10} = 4,195 \cdot 10^{-9}.$$

U skladu s brojčanim računom sada još moramo reći da je $B = 4,195 \cdot 10^{-9}$ brojčani iznos magnetske indukcije u jedinici CGSE sistema $[B]_e$.

U duhu univerzalnih veličinskih jednadžbi to je $B = B/[B]_e$ gdje *kosi* simbol predstavlja veličinu, dakle $B = B \cdot [B]_e = 4,195 \cdot 10^{-9} [B]_e = 1,256 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

**Jedinice nekih veličina u elektrostatskom (CGSE) i
magnetostatskom (CGSM) sistemu jedinica**

Tablica E.3

R. br.	Naziv veličine	Jedinica CGSE sistema	Jedinica CGSM sistema
1	2	3	4
1	Elektrika	$[Q]_e = [I]^2 \sqrt{4\pi [w]} \epsilon_0$	$[Q]_m = [I] [t] \sqrt{4\pi [w]} \mu_0^{-1}$
2	Jakost električnog polja ..	$[E]_e = \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \epsilon_0^{-1}$	$[E]_m = [I] [t]^{-1} \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \mu_0$
3	Električna indukcija	$[D]_e = \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \epsilon_0$	$[D]_m = [I]^{-1} [t] \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \mu_0^{-1}$
4	Dielektričnost	$[\epsilon]_e = \epsilon_0$	$[\epsilon]_m = [I]^{-2} [t]^2 \mu_0^{-1}$
5	Električna polarizacija	$[P]_e = \sqrt{4\pi [w]} \epsilon_0$	$[P]_m = [I]^{-1} [t] \sqrt{4\pi [w]} \mu_0$
6	Magnetski tok	$[\Phi]_e = [I] [t] \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \epsilon_0^{-1}$	$[\Phi]_m = [I]^2 \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \mu_0$
7	Magnetska indukcija	$[B]_e = [I]^{-1} [t] \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \epsilon_0^{-1}$	$[B]_m = \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \mu_0$
8	Jakost magnetskog polja ..	$[H]_e = [I] [t]^{-1} \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \epsilon_0$	$[H]_m = \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \mu_0^{-1}$
9	Permeabilnost	$[\mu]_e = [I]^{-2} [t]^2 \epsilon_0^{-1}$	$[\mu]_m = \mu_0$
10	Magnetska polarizacija	$[J]_e = [I]^{-1} [t] \sqrt{4\pi [w]} \epsilon_0^{-1}$	$[J]_m = \sqrt{4\pi [w]} \mu_0$
11	Električni napon	$[U]_e = [I] \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \epsilon_0^{-1}$	$[U]_m = [I]^2 [t]^{-1} \sqrt{(4\pi)^{-1} [w]} \mu_0$
12	Električna struja	$[I]_e = [I]^2 [t]^{-1} \sqrt{4\pi [w]} \epsilon_0$	$[I]_m = [I] \sqrt{4\pi [w]} \mu_0^{-1}$
13	Električni otpor	$[R]_e = [I]^{-1} [t] (4\pi)^{-1} \epsilon_0^{-1}$	$[R]_m = [I] [t]^{-1} (4\pi)^{-1} \mu_0$
14	Kapacitet	$[C]_e = [I] 4\pi \epsilon_0$	$[C]_m = [I]^{-1} [t]^2 4\pi \mu_0^{-1}$
15	Induktivitet	$[L]_e = [I]^{-1} [t]^2 (4\pi)^{-1} \epsilon_0^{-1}$	$[L]_m = [I] (4\pi)^{-1} \mu_0$

Pogledajmo još kako će glasiti brojčana jednadžba prvog *Maxwellovog* zakona koji u veličinskom ruhu glasi

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (3.1-15)$$

gdje kurzivni simboli predstavljaju dakako veličine. Pri tom ćemo raditi po načelu »veličina = brojčani iznos $\times$ jedinica«, dakle $G = G [G]$, gdje uspravni znak prikazuje brojčani iznos. Prema tome za naše tri veličine možemo pisati $E = E [E]$, $B = B [B]$, $t = t [t]$ gdje izrazi u zagradama predstavljaju jedinice CGSE sistema. Sada još treba s time dovesti u vezu operaciju rot. Da ne pišemo čitav izraz poslužimo se samo s $\text{rot}_x E$ po osi x . U veličinskom obliku on glasi

$$\text{rot}_x E = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z},$$

pa ako u nj uvrstimo $E = E [E]$ slijedi

$$\text{rot}_x E = \frac{\partial E_z [E]}{\partial y [l]} - \frac{\partial E_y [E]}{\partial z [l]} = \frac{[E]}{[l]} \text{rot}_x E,$$

jer jedinice ne podliježu naznačenoj matematskoj operaciji. Općenito možemo pisati

$$\text{rot } E = [l]^{-1} [E] \text{rot } E, \quad (3.1-16)$$

gdje su $[l] = \text{cm}$, a $[E] = [E]_e$.

Desni dio veličinske jednadžbe (3.1—15) lako razložimo na brojčani iznos i jedinicu CGSE $[B] = [B]_e$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B [B]}{\partial t [t]} = \frac{[B]}{[t]} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Složimo li ovu jednadžbu zajedno sa (3. 1—16) u izraz (3. 1—15) dobivamo brojčanu jednadžbu

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t} \frac{[I]}{[t]} \frac{[B]}{[E]}. \quad (3.1—17)$$

Izračunajmo odnos četiri jedinice na desnoj strani ove brojčane jednadžbe. Izvadimo li izraze za ove jedinice iz tablice E. 3 dobivamo

$$\frac{[I]}{[t]} \frac{[I]^{-1} [t] \sqrt{(4\pi)^{-1} [w] \epsilon_0^{-1}}}{\sqrt{(4\pi)^{-1} [w] \epsilon_0^{-1}}} = 1.$$

Prema tome brojčana jednadžba ima oblik

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t},$$

dakle posve isti kao i veličinska jednadžba (3. 1—15) od koje smo počeli naše razmatranje.

3.2. Magnetostatski (CGSM) sistem jedinica

Na početku prošlog odsječka naglasili smo da su fizikalni sistemi jedinica elektromagnetizma nastali u doba kad je nauka o električkim pojavama bila još odvojena od magnetike, kad univerzalne teorije elektromagnetizma još nije bilo. U skladu s time nastali su i odvojeni sistemi jedinica. U odsječku 3. 1 obradili smo takozvani elektrostatski sistem jedinica (CGSE) koji je nikao na temelju predodžbe o međusobnom djelovanju dviju množine elektrike bez uvođenja pojma polja (elektrostatskog) kako se to danas radi. Taj sistem jedinica pretežno se upotrebljavao za mjerenje takozvanih električkih veličina, tj. onih koje se lako mogu jednadžbama definirati iz veličine Q . Na takozvane magnetske veličine taj se sistem gotovo uopće nije primjenjivao, iako smo u prošlom odsječku razmotrili i njegovu upotrebu za takozvane magnetske veličine.

Paralelno sa CGSE sistemom jedinica osnovan je i magnetostatski (CGSM) sistem jedinica (vidi odsječak 3. 5 i 5) koji je imao svoje ishodište u zakonu o mehaničkom djelovanju između dviju »magnetskih masa« ili »magnetskih polova«. Taj zakon potpuno je analogan izrazu (3. 1—4) u prošlom odsječku, ako se znak za elektriku zamijeni simbolom za »magnetsku masu«. Pri tom je pojam polja u današnjem smislu bio nepoznat, pa se sila svodila na »djelovanje na daljinu« kao i kod privlačenja nebeskih masa. U daljnjim razmatranjima mimoći ćemo stare pojmove magnetskih masa i polova, jer danas je to historija. Znamo naime da magnetizam nije samorodna pojava već da se svodi na posebno stanje prostora ili tvari u kojemu postoji električna struja, pa bilo da se radi o magnetima makroskopskih dimenzija ili o sićušnim magnetskim listićima prema *Ampèreu* odnosno o *Weissovima* poljima magnetika.

Ovdje smo upotrebili naziv »magnetostatski« sistem jedinica (CGSM) iako se većinom upotrebljava naziv »elektromagnetski« sistem jedinica. To smo učinili s predumišljajem u analogiji s »elektrostatskim« sistemom, jer oznakom »elektromagnetski« obuhvaćamo u duhu suvremene terminologije mnogo šire, čitavo područje elektromagnetizma. Tako nije mišljeno ni pri osnivanju ni pri primjeni CGSM sistema. »Elektromagnetski« je na primjer Tehnički sistem jedinica (vidi odsječak 4), ako baš želimo imati naročito precizna obilježavanja.

Budući da u naša razmatranja ne želimo uvlačiti preživjeli i nerealan pojam magnetskih masa razvit ćemo CGSM sistem jedinica na primjeru kad kroz dva vrlo dugačka paralelna vodiča teku struje I_1 i I_2 . Zbog jednostavnosti smatrajmo da se u magnetskom polju prvog vodiča

$$H = \frac{I_1}{2\pi r}$$

nalazi drugi vodič sa strujom I_2 . Ako su oba vodiča u vakuumu magnetska indukcija u udaljenosti r od prvog vodiča iznositi će

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

Prema općem izrazu $F = B I_2 l$ za silu između magnetskog polja indukcije B i vodiča duljine l , kojim teče struja I_2 , u našem slučaju možemo pisati

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r},$$

gdje je r udaljenost između osi oba vodiča. Ako su te dvije struje međusobno jednake, dakle $I_1 = I_2 = I$, gornji izraz možemo napisati u pojednostavnjenom obliku

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} \quad \text{ili} \quad F 2\pi r = \mu_0 I^2 l. \quad (3.2-1)$$

Sve navedene jednadžbe su veličinske, simboli dakle predstavljaju veličine, a vrijede za beskrajno dugačke i neizmjereno tanke vodiče.

Brojčana jednadžba prilagođena jedinicama CGSM sistema glasi

$$F = 2 I^2 l / r \quad \text{ili} \quad F r = 2 I^2 l, \quad (3.2-2)$$

gdje uspravni simboli predstavljaju dakako brojčane iznose prilagođene CGSM jedinicama koje možemo po principu »brojčani iznos = veličina : jedinica« ($G = G/[G]$) izraziti sa

$$F = F/[F], \quad I = I/[I], \quad l = l/[l], \quad r = r/[r]. \quad (3.3-3)$$

U uglatim zagradama zatvorene su jedinice CGSM sistema na koje ćemo zbog jednostavnijeg tiskanja samo u pojedinim slučajevima stavljati indeks m , kao što smo u prošlom odsječku samo na neke jedinice CGSE sistema stavljali indeks e čime je precizno označeno da se radi o jedinici CGSE sistema.

Uvrstimo li navedene brojčane iznose jednadžbi (3. 2—3) u desnu brojčanu jednadžbu (3. 2—2) dobivamo

$$\frac{F}{[F]} \frac{r}{[l]} = 2 \frac{I^2}{[I]^2} \frac{l}{[l]}$$

odakle sredenjem slijedi

$$F r = 2 I^2 l [F] / [I]^2.$$

Uvrstimo li ovamo veličinsku jednadžbu (3. 2—1) računanjem odmah nastaje odnos između CGSM jedinica

$$[I]^2 = 4 \pi [F] / \mu_0.$$

U prošlom smo odsječku ispred jednadžbe (3. 1—7) izveli odnos među CGS jedinicama sile $[F] = \text{dyn}$, gustoće energije $[w]$ i duljine $[l] = \text{cm}$. Taj odnos glasi $[F] = [w] [l]^2$, pa time uvrštenjem u gornju jednadžbu za CGSM jedinicu jakosti električne struje $[I] = [I]_m$ dobivamo

$$[I]_m = [l] \sqrt{4 \pi [w] \mu_0^{-1}}. \quad (3.2-4)$$

Izračunajmo koliko Međunarodnih jedinica sadrži $[I]_m$. Za tu svrhu u gornji izraz uvrštavamo $[l] = \text{cm} = 10^{-2} \text{ m}$, $[w] = \text{erg/cm}^3 = 10^{-1} \text{ J/m}^3$ i $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$. Podsjetimo se još da je $H = V_s / A$, čime dobivamo

$$[I]_m = 10^{-2} \text{ m} \sqrt{4 \pi \cdot 10^{-1} \text{ Jm}^{-3} : 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}} = 10 \text{ A}.$$

Prema tome je CGSM jedinica jakosti električne struje 10 puta veća od jedinice Međunarodnog sistema. Budući da je (vidi odsječak 3. 1) $[w] = \text{g cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$, izraz (3. 2—4) može se napisati i u obliku

$$[I]_m = (4 \pi)^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \mu_0^{-1/2}. \quad (3.2-5)$$

Iz formula (3. 2—4) i (3. 2—5) vidimo da se besprijekoran CGSM sistem temelji na četiri osnovne jedinice kao što je u elektromagnetizmu i potrebno. Centimetru, gramu i sekundi ovdje se pridružila i indukcionalna konstanta μ_0 , dok je kod CGSE sistema umjesto μ_0 bila influencionalna konstanta ϵ_0 .

Ostale jedinice CGSM sistema možemo izvoditi analogno kao što smo to činili u prošlom odsječku. Jedinica elektrike na primjer iznositi će zbog $Q = I t$

$$[Q]_m = [I]_m [t] = [l] [t] \sqrt{4 \pi [w] \mu_0^{-1}}, \quad (3.2-6)$$

$$[Q]_m = (4 \pi)^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \mu_0^{-1/2}.$$

Takav put je međutim dugotrajan. Jednostavnije se do jedinice CGSM sistema dolazi pomoću odnosa između μ_0 i ϵ_0 . U to ćemo se uvjeriti na jednostavnom primjeru. Podijelimo li $[I]_m$ sa $[I]_e$ (vidi odsječak 3. 1) dobivamo

$$\frac{[I]_m}{[I]_e} = \frac{[l] \sqrt{4 \pi [w] \mu_0^{-1}}}{[l]^2 [t]^{-1} \sqrt{4 \pi [w] \epsilon_0}} = \frac{v_0}{\text{cm/s}} = c, \quad (3.2-7)$$

dakle $[I]_m = c [I]_e$, gdje je $c = 2,9979 \cdot 10^{10}$ brojčani iznos brzine elektromagnetskog polja u vakuumu. Do gornjeg smo izraza došli uz pomoć relacije $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$ (vidi odsječak 1. 4).

Analiziramo li omjer gornjih dviju jedinica jakosti struje u CGSM i CGSE sistemu dolazimo do zaključka da se od elektrostatskih jedinica koje smo izveli u prijašnjem odsječku dolazi na magnetostatske tako, da se u prve umjesto ϵ_0 stavi izraz $[l]^{-2} [t]^2 \mu_0^{-1}$, to jest s^2 : ($\mu_0 \text{ cm}^2$).

Primijenimo to pravilo na proračun jedinice magnetske indukcije u CGSM sistemu, $[B]_m$. U stupcu 3 tablice E. 3 nalazimo izraz za jedinicu $[B]_e$. Prema navedenom pravilu bit će magnetostatska jedinica magnetske indukcije

$$[B]_m = [l]^{-1} [t] \sqrt{(4\pi)^{-1} [w] [l]^2 [t]^{-2} \mu_0},$$

odakle dalje slijedi

$$[B]_m = \sqrt{(4\pi)^{-1} [w] \mu_0} = \text{gauss} = G.$$

U produžetku smo odmah napisali ime i kraticu kako se tu jedinicu naziva prema čuvenom učenjaku *C. F. Gaussu*.

Uvrstimo li u gornji izraz $[w] = 10^{-1} \text{ J/m}^3$ te $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ nastaje vrijednost jedinice $[B]_m = G$ u jedinici tesla ($T = \text{Vs/m}^2$)

$$[B]_m = \sqrt{10^{-1} \text{ J m}^{-3} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1} : 4\pi} = 10^{-4} \text{ T}.$$

Po istom ključu dobili bismo od CGSE jedinice jakosti magnetskog polja $[H]_e$ jedinicu $[H]_m$ sistema CGSM tako, da u jednadžbu za $[H]_e$ u stupcu 3 tablice E. 3 umjesto ϵ_0 stavimo $[l]^{-2} [t]^2 \mu_0^{-1}$:

$$[H]_m = [l] [t]^{-1} \sqrt{(4\pi)^{-1} [w] [l]^{-2} [t]^2 \mu_0^{-1}}.$$

Oдавде slijedi dalje

$$[H]_m = \sqrt{(4\pi)^{-1} [w] \mu_0^{-1}} = \text{oersted} = \text{Oe}$$

Ovdje smo u produžetku odmah napisali naziv i kraticu kako se tu jedinicu naziva prema danskom učenjaku *C. H. Oerstedu*.

Iz gornje jednadžbe lako izračunamo da je

$$[H]_m = \text{Oe} = \text{oersted} = \frac{1000 \text{ A}}{4\pi \text{ m}} = 79,577 \text{ A/m}.$$

Jedinice CGSM sistema nekih drugih veličina izražene su sa $[l]$, $[t]$, $[w]$ i μ_0 u stupcu 4 tablice E. 3, a gotovo potpuni niz odnosa između jedinica magnetostatskog i Međunarodnog sistema jedinica naveden je u stupcima 9, 10 i 11 tablice X na kraju knjige. Tako je na primjer CGSM jedinica magnetskog toka $[\Phi]_m = \text{maxwell} = M = 10^{-8} \text{ Vs}$, a jedinica magnetskog napona $[V]_m = \text{gilbert} = Gb = 0,79577 \text{ A}$.

U stupcu 12 tablice X nanizali smo brojčane jednadžbe koje su prilagođene jedinicama magnetostatskog CGSM sistema. Usporedimo li ih s brojčanim jednadžbama koje su prilagođene elektrostatskom sistemu jedinica CGSE vidimo da između njih nema znatne razlike. Do razlika dolazi samo tamo gdje se pojavljuju brojevi iznosi za dielektričnost i permeabilnost. To je i razumljivo kad se podsjetimo računa u prošlom odsječku, gdje smo utvrdili da je brojčani iznos permeabilnosti vakuuma kad ga izražavamo CGSE jedinicom $\mu_{\text{en}} = 1/c^2$. Posve je analogno za brojčanu vrijednost dielektričnosti u CGSM sistemu što ćemo odmah vidjeti.

Iz odsječka 1. 2 znamo da se relativna permeabilnost može utvrditi omjerom veličina permeabilnost μ i indukciona konstanta μ_0 , dakle $\mu_r = \mu/\mu_0$. U CGSM sistemu jedinica brojčani iznos permeabilnosti je $\mu_n = \mu_{mn} = \mu/\mu_0$, jer je μ_0 jedinica permeabilnosti u sistemu CGSM. Prema tome je $\mu_r = \mu_{mn}$ kao što je u CGSE sistemu bilo $\epsilon_r = \epsilon_{en}$.

Brojčanu vrijednost dielektričnosti vakuuma ϵ_{mn} u CGSM sistemu izračunat ćemo na slijedeći način. Brojčana jednadžba glasi $D_m = \epsilon_{mn} E_m$, gdje indeksi m upućuju da se radi o primjeni magnetostatskih jedinica, a indeks n da se radi o brojčanom iznosu. Očito je $\epsilon_{mn} = \epsilon_0/[\epsilon]_m$, tj. omjer influencione konstante ϵ_0 i CGSM jedinice dielektričnosti. U tablici E.3 nalazimo da je $[\epsilon]_m = [l]^{-2} [t]^2 \cdot \mu_0^{-1}$, što znači da je brojčani iznos relativne dielektričnosti vakuuma u CGSM sistemu

$$\epsilon_{mn} = \frac{\epsilon_0}{[\epsilon]_m} = \frac{\epsilon_0 [l]^2 \mu_0}{[t]^2}.$$

S druge je strane, kako znamo iz odsječka 1. 3 $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$, a budući da je $v_0 = c [l] [t]^{-1}$, gdje je $[l] = \text{cm}$, $[t] = \text{s}$, gornja jednadžba dobiva oblik

$$\epsilon_{mn} = [l]^2 [t]^{-2} c^{-2} [l]^{-2} [t]^2 = c^{-2} = 1/c^2.$$

Stoga je konačno brojčani iznos dielektričnosti vakuuma u CGSM jedinicama $\epsilon_{mn} = 1/c^2$, pa umjesto pripadne brojčane jednadžbe $D_m = \epsilon_{mn} E_m$ možemo pisati

$$D = E/c^2,$$

gdje smo napustili indekse m jer znamo da se radi o brojčanoj jednadžbi prilagođenoj CGSM sistemu jedinica.

Kad pregledavamo odnose između jedinica CGSM i Međunarodnog sistema u tablici X svakako pada u oči da je jedinica magnetske polarizacije

$$[\mathcal{J}]_m = 1,256\,6 \cdot 10^{-3} \text{ T},$$

a ne $[B]_m = \text{gauss} = 10^{-4} \text{ T}$. To je upadljivo zbog toga jer iz prakse znamo da se brojčana jednadžba $B = H + 4\pi J$ često upotrebljava tako da je $B = B/[B]_m = B/G$, $H = H/\text{Oe}$ i $J = \mathcal{J}/G$, tj. da se indukcija i magnetska polarizacija mjere u gaussima, a jakost polja u oerstedima.

Pokušajmo tu kontradikciju razjasniti ovim razmatranjem. Pretpostavimo da se ne radi o brojčanoj jednadžbi $B = H + 4\pi J$, već o brojčanoj jednadžbi $B = H + 4\pi M$ gdje je M brojčani iznos neke veličine M izražene jedinicom $G = \text{gauss}$ kako se to, kako smo rekli, ponekad radi. U tom su slučaju brojčani iznosi izraženi omjerom veličina i navedenih jedinica po načelu $G = G/[G]$ na ovaj način

$$B = B/G, H = H/\text{Oe}, M = M/G.$$

Stavimo li ove odnose u brojčanu jednadžbu $B = H + 4\pi M$ dobivamo

$$\frac{B}{G} = \frac{H}{\text{Oe}} + 4\pi \frac{M}{G},$$

odakle dalje slijedi veličinska jednadžba

$$B = \mu_0 H + 4\pi M, \text{ jer je } G/\text{Oe} = [B]_m/[H]_m = \mu_0. \quad (3.2-8)$$

U tablici E. 1 imamo napisanu veličinsku jednadžbu $B = \mu_0 H + \mathcal{J}$, što znači da veličine M i $\mathcal{J}$ nisu međusobno jednake već je $\mathcal{J} = 4\pi M$. Prema tome mjerenje polarizacionog člana jedinicom gauss u stvari znači mjerenje veličine »magnetizacije« M , a ne polarizacije $\mathcal{J}$.

Ovdje nećemo navoditi primjer upotrebe jedinica magnetostatskog sistema kao što smo to učinili u prošlom odsječku za jedinice CGSE sistema. Posve je naravno da su ovdje prilike iste kao i kod CGSE sistema: s jedinicama magnetostatskog sistema može se računati u veličinskim jednadžbama po istim načelima po kojima se to radi s Međunarodnim jedinicama. Jedino računanje traje dulje vremena ako se ide veličinskim putem, a predodžbe o vrijednostima, npr. $U = 10^{10} [U]_m$, nisu zorne jer se svugdje upotrebljavaju instrumenti baždareni u jedinicama Međunarodnog sistema s kojima gornja relacija glasi jednostavno $U = 100 \text{ V}$.

3.3. Gaussov mješoviti sistem jedinica

Primjena ili elektrostatskog CGSE ili magnetostatskog CGSM sistema na čitavo područje elektromagnetizma pokazala je da su brojevi iznosi nekih veličina, uz dosljednu primjenu bilo kojeg od ta dva sistema, djelomično neprikladni, bilo da su izvanredno veliki ili pak jako mali. Induktivitet svitka od 10 milihenrija na primjer često se javlja u fizici i elektrotehnici. U CGSM sistemu izrazit ćemo (vidi tablicu X) $L = 10 \text{ mH}$ sa $L = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^9 [L]_m = 10^7 [L]_m$, jer je $[L]_m = 10^{-9} \text{ H}$, a u CGSE sistemu sa $L = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-11} [L]_e / 8,987 = 1,11 \cdot 10^{-4} [L]_e$, jer je $[L]_e = 8,987 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ H}$. Isto je tako u modernim električkim strojevima normalna magnetska indukcija $B = 1,8 \text{ T}$, što znači da je sa CGSM jedinicom $B = 1,8 \cdot 10^4 \text{ G} = 18\,000 \text{ G}$, a sa CGSE jedinicom $B = 1,8 \cdot 10^{-6} [B]_e / 2,997 \cdot 9 = 6 \cdot 10^{-7} [B]_e$. Takvih bismo primjera mogli nanizati bezbroj.

Osim toga fizičari — koji su pretežno upotrebljavali oba sistema jedinica — nerado su mjerili »električke« veličine s »magnetskim« (CGSM) jedinicama, jer je sve do pred kraj prošlog stoljeća elektromagnetizam bio razdvojen na nauku o elektrici i na nauku o magnetizmu, budući da se sve do tada nije pojavila univerzalna *Maxwellova* teorija elektromagnetskog polja. Stoga su od CGSE i CGSM sistema jedinica složili novi »sistem« uz ovaj dogovor: Električke veličine mjerit ćemo jedinicama CGSE sistema, a magnetske veličine jedinicama CGSM sistema. Tako nastali mješoviti sistem jedinica prozvao je *Helmholtz* 1882. godine »Gaussovim sistemom jedinica«.

Danas smo u neprilici kad moramo odgovoriti na pitanje koje su veličine »električke«, a koje »magnetske«, jer takva podjela u današnje vrijeme konstruktivne i nadasve uspješne primjene teorije elektromagnetskog polja (radar, radioastronomija!) nema nikakvog smisla ni opravdanja. U »električke« veličine ubrajale su se one koje se izvedu iz elektrike Q , a u »magnetske« one koje prema definicionim jednadžbama izviru iz magnetskog toka Φ . Stoga se i električna struja I ubrajala među »električke« veličine pa je pitanje u koju skupinu moramo da uvrstimo induktivitet koji je prema $\Phi = L I$ vezan s jednom i drugom skupinom.

Takvi su problemi i s nizom drugih veličina koje danas drukčije definiramo nego u prošlosti. Na primjer jakost magnetskog polja H mogli bismo mirno smatrati električkom veličinom, a jakost električkog polja magnetskom ako bismo polazili od dvije osnovne *Maxwellove* jednadžbe (vidi pod rednim brojevima 18 i 19 u tablici E. 1) ili pak ako bismo pridavali neko značenje pozitivnosti ili negativnosti eksponenata omjera c u stupcu 13 tablice X.

Budući da se CGSE i CGSM razlikuju u četvrtoj osnovnoj jedinici Gaussov »sistem« jedinica nužno je nekoherentan, tj. jedinice nisu u međusobnom odnosu $1 \times 1 = 1$ u čitavom području elektromagnetizma, već samo u nauci o elektrici s jedne strane, a u nauci o magnetizmu s druge strane. Stoga su se u nekim brojčanim jednadžbama, a takve su se ranije gotovo isključivo upotrebljavale, pojavili parazitni koeficijenti kao plod omjera jedinica CGSM i CGSE sistema. Znamo da su ti omjeri ili $c = 2,997\,9 \cdot 10^{10}$ ili potencije tog broja.

Ovi koeficijenti javljaju se u onim brojčanim jednadžbama u kojima se sa- staju simboli za brojčane iznose dijelom izraženi u CGSE, a dijelom u CGSM jedinicama. To su u prvom redu *Maxwellove* jednadžbe koje vidimo u Gaussovu brojčanom obliku ukrašene sa c u stupcu 14 pod rednim brojevima 3 i 10 tablice X.

Pogledajmo kako je došlo do pojave parazitnog faktora c . Univerzalna veličinska *Maxwellova* jednadžba indukcije napisana je u stupcu 4 pod rednim brojem 10 tablice X. U odsječku 3.1 već smo izveli brojčanu jednadžbu (3.1—17) (uspravni simboli u njoj označuju brojčane iznose!) koje sada prilagodimo ovim jedinicama: jakost električkog polja E mjerimo CGSE jedinicom $[E] = [E]_e$, a magnetsku indukciju B CGSM jedinicom $[B] = [B]_m = \text{gauss} = G$. U tom slučaju brojčana jednadžba (3.1—17) prelazi u oblik

$$\text{rot } E_e = - \frac{\partial B_m}{\partial t} \frac{[l]}{[t]} \frac{[B]_m}{[E]_e}, \quad (3.3—1)$$

gdje smo uz simbole brojčanih iznosa E_e , B_m dodali indekse e i m kako bismo naglasili da je u (3.3—1) $E_e = E/[E]_e$, a $B_m = B/[B]_m$.

Izračunajmo što predstavlja kombinacija od četiri jedinice u gornjoj jednadžbi. Budući da se radi o fizikalnim sistemima i jedinicama znamo da je $[l] = \text{cm}$, a $[t] = \text{s}$. U tablici X nalazimo da je $[B]_m = 10^{-4} \text{ T}$, a $[E]_e = 2,997\,9 \cdot 10^4 \text{ V/m}$. Prema tome je

$$\frac{[l]}{[t]} \frac{[B]_m}{[E]_e} = \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{10^{-4} \text{ T}}{2,9979 \cdot 10^4 \text{ V/m}} = \frac{1}{c},$$

gdje je $c = 2,997\,9 \cdot 10^{10}$. Gornji rezultat uslijedio je zbog toga jer je $\text{cm} = 10^{-2} \text{ m}$, a $\text{T} = \text{Vs/m}^2$. Prema tome izraz (3.3—1) doista prelazi u oblik

$$\text{rot } E_e = - \frac{1}{c} \frac{\partial B_m}{\partial t},$$

koji smo napisali u tablici X. Simboli dakako predstavljaju brojčane iznose, s lijeve strane prilagođene CGSE jedinici, a s desne CGSM jedinici.

Iako je dakle brojka c samo faktor izjednačenja među jedinicama pa se zato pojavljuje i u brojčanim jednadžbama mnogi su u prošlosti toj pojavi c u *Maxwellovim* jednadžbama pridavali gotovo mistično značenje. Vidjeli smo međutim da c slijedi neposredno kao $c = v_0/(\text{cm/s})$ iz veličinske jednadžbe $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$ koju smo u odsječku 1.4 izveli na primjeru nadasve primitivnog modela dalekovoda u obliku produžene kutije.

I danas još neki smatraju da je brojka c , koju nažalost ponekad tretiraju kao veličinu »brzina svjetla«, neminovna za izgradnju bilo kakvog sistema jedinica elektromagnetizma, iako znaju da se c može izmjeriti na posve mehanički način pomoću *Fizeauova* pokusa s dugačkom cijevi i zupčanikom ili *Michelsonovim* rotirajućim ogledalom!

Drugi pak govore o c kao o nekoj »kritičnoj brzini«. Budući da nam ta kritičnost nije jasna, pokušajmo je dokučiti na jednostavnom misaonom primjeru. Zamislimo da je množina elektrike Q u prostoru jednoliko porazdijeljena tako da čini kružni prsten presjeka A i opsega l . Prostorna gustoća prstenastog električnog oblaka iznosi dakle $\rho = Q/V = Q/Al$. Rotira li sveukupna elektrika Q u šupljini zamišljenog prstena brzinom v , u vremenskom će intervalu dt kroz bilo koji presjek A proći množina elektrike $dQ = \rho dV = \rho A dl = \rho A v dt$, što znači da će postojati kružna struja

$$I = \frac{dQ}{dt} = \rho A v = \frac{Q}{l} v,$$

jer je $Q = \rho Al$.

Pretpostavimo da množina elektrike u prstenu iznosi $Q = [Q]_e$, dakle jednu elektrostatsku jedinicu. U tom slučaju gornja jednadžba glasi

$$I = \frac{v}{l} [Q]_e = \frac{v}{l} \frac{[Q]_m}{c} = \frac{v}{v_0} \frac{[I]_m}{l/\text{cm}},$$

jer je $[Q]_m = c [Q]_e$, $[I]_m = [Q]_m/s$, a $v_0 = c \cdot \text{cm/s}$, gdje je v_0 brzina elektromagnetskog polja u vakuumu. Poveća li se brzina v toliko da se dosegne »kritičnu brzinu« v_0 , dakle $v = v_0$, a opseg prstena iznosi $l = 1 \text{ cm}$, dakle $l/\text{cm} = 1$, gornji izraz dobiva vrlo jednostavan oblik

$$[I] = [I]_m.$$

To znači: kad bismo prsten sa $1 [Q]_e$ mogli zavrtjeti kritičnom brzinom v_0 onda bi $[Q]_e$ bila ekvivalentna kružnoj struji $[I]_m$. Uz opseg prstena $l = 10 \text{ cm}$ struja bi iznosila $[I]_m/10 = 1$ amper.

Naravno da je takvo povezivanje navedenih jedinica sa c najblaže rečeno igrarija, iako je to nekad bio argument u prilog veličanja »kritične brzine c «. Zar nije neozbiljno iz gornjeg rezultata misaonog pokusa zaključiti da se elektrika prstena u mirovanju mora mjeriti elektrostatski, a kad se prsten zavrti brzinom v_0 elektrokinetički jedinicom $[I]_m$? Iz toga su naime neki zaključili da elektrika u gibanju ima drukčiju dimenziju nego u mirovanju i tako pokušali obraniti nemoguću konstrukciju nepotpunih CGS jedinica koje spominjemo u odsječku 3.4.

Čitav taj pokus jednostavno nam objašnjavaju veličinske jednadžbe u kojima dakako nema nikakvih jedinica. U udaljenosti r od rotirajućeg prstena električka indukcija iznosi

$$D = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{I}{2\pi r v},$$

jer je Q porazdijeljena po čitavom opsegu prstena. Budući da je prsten u zraku, to je prema $E = D/\epsilon_0$ jakost električkog polja u udaljenosti r

$$E = \frac{I}{\epsilon_0 2\pi r v},$$

dok jakost magnetskog polja na istoj udaljenosti iznosi

$$H = \frac{I}{2\pi r} = v D = v \epsilon_0 E.$$

Kako je magnetska indukcija $B = \mu_0 H$, to slijedi jednačba

$$B = \mu_0 v D = \varepsilon_0 \mu_0 v E = E v / v_0^2,$$

jer je $\varepsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$ (vidi odsječak 1.4). Kad bi prsten stigao i brzinu svjetla $v = v_0$ (ako ne gledamo na relativistiku pri takvim brzinama), pa bi magnetska indukcija iznosila $B = E/v_0$, to još ne bi bio nikakav znak o »kritičnoj brzini«, jer taj izraz na kraju krajeva znači samo to da su gustoće energije električkog i magnetskog polja međusobno jednake.

U to se možemo odmah uvjeriti. Budući da izraz $B = E/v_0$ možemo pisati i kao $v_0^2 B^2 = E^2$, uz pomoć $\varepsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$ dobivamo $\varepsilon_0 \mu_0 E^2 = B^2$, odakle odmah nastaje

$$\varepsilon_0 / \mu_0 = H^2 / E^2 \quad \text{ili} \quad E D / 2 = B H / 2,$$

jer je $B = \mu_0 H$ i $D = \varepsilon_0 E$. Gornje dvije jednačbe izveli smo međutim usput u odsječku 1.4 gdje nismo ni pomišljali na prstenast električki oblak u vrtnji.

U stupcu 14 tablice X nanizali smo brojčane jednačbe koje su prilagođene Gaussovu mješovitom skupu jedinica. Pri tom smo pojedine simbole opremili simbolima c i m koji označuju da li se znakovi za brojčane iznose veličina moraju izražavati u jedinicama CGSE ili CGSM sistema. Naravno da u starim knjigama, gdje se još upotrebljava Gaussov sistem i njemu prilagođene brojčane jednačbe, tih indeksa nema, pa mnogo puta čitatelj ne zna mora li misliti na jedinicu CGSE ili CGSM sistema. Stoga će niz brojčanih jednačbi u stupcu 14 tablice X svakako pomoći čitatelju da se orijentira ako upotrebljava staru literaturu.

Ima mnogo slučajeva gdje taj niz jednačbi nije dovoljan. U heterogenoj elektrotehničkoj literaturi naime često nalazimo u poglavljlama o magnetskim poljima zračnih svitaka (solenoida) najrazličitije brojčane jednačbe prilagođene CGSM ili Gaussovu sistemu, a začinjene su amperom kao jedinicom jakosti struje.

Na slici E 16 shematski je nacrtan uzak solenoid koji se sastoji od metalne trake savijene polumjerom r u kratak valjak. Naravno da umjesto te jedne trake možemo zamisliti svitak sa N zavoja. Uzbuda tog solenoida neka

Ss. E 16. Magnetsko polje u osi solenoida

je Θ , tj. $\Theta = N I$, u našem primjeru zbog $N = 1$, $\Theta = I$. Ova magnetska uzbuda stvori u bilo kojoj tački O na uzdužnoj osi solenoida magnetsko polje indukcije

$$B = \frac{\mu_0 \Theta}{2} \frac{r^2}{z^3},$$

gdje su geometrijske dimenzije pokazane na slici E 16, a μ_0 je indukciona konstanta. Ako je promjer solenoida znatno veći od njegove širine, dakle u slučaju uskog svitka, gornji izraz uz $\Theta = N I$ prelazi u približni oblik

$$B = \frac{\mu_0 \Theta}{2 r} = \frac{\mu_0 N I}{2 r}. \quad (3.3-2)$$

To je dakako veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo kakve jedinice.

Izračunajmo kolika mora biti uzbuda Θ da bi u sredini solenoida polumjera $r = 0,5$ m magnetska indukcija iznosila $B = 0,5$ militesla (mT). Najprije preinačimo jednadžbu (3.3—2) u oblik $\Theta = 2 r B / \mu_0$, a onda uvrstimo vrijednosti $B = 0,5$ mT $= 5 \cdot 10^{-4}$ T, $2 r = 1$ m i μ_0 :

$$\Theta = \frac{1 \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ T}}{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}} = 398 \text{ A}.$$

Prema tome $B = 0,5$ mT možemo uzбудiti sa $N = 100$ i $I = 3,98$ A ili bilo kojom drugom kombinacijom koja udovoljava $\Theta = N I$. U našem limenom solenoidu morala bi zbog $N = 1$ teći struja $I = 398$ A.

Pogledajmo kako bi glasila brojčana jednadžba koja bi bila prilagođena Gaussovu skupu jedinica. Struju u tom »sistemu« moramo mjeriti elektrostatskom jedinicom $[I]_e$, magnetsku indukciju B magnetostatskom jedinicom $[B]_m = \text{gauss} = \text{G}$, a polumjer centimetrima. Po obrascu $G = G[G]$, tj. »veličina = brojčani iznos $\times$ jedinica«, veličine iz desne jednadžbe (3.3—2) možemo izraziti sa $B = B_m [B]_m$, $I = I_e [I]_e$, $r = r [I] = r \text{ cm}$, gdje uspravni simboli predstavljaju brojčane iznose u navedenim jedinicama. Uvrštenje u spomenutu jednadžbu daje

$$B_m [B]_m = \frac{\mu_0 N I_e [I]_e}{2 r \text{ cm}} \quad \text{ili} \quad B_m = \frac{N I_e}{2 r \text{ cm}} \frac{\mu_0 [I]_e}{[B]_m}.$$

Iz tablice X izvadimo vrijednosti za obje jedinice izražene jedinicama Međunarodnog sistema. S njima računanjem slijedi

$$\frac{\mu_0 [I]_e}{\text{cm} [B]_m} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \cdot 3,3356 \cdot 10^{-10} \text{ A}}{10^{-2} \text{ m} \cdot 10^{-4} \text{ T}} = \frac{4 \pi}{c}.$$

Prema tome brojčana jednadžba prilagođena Gaussovu sistemu jedinica glasi

$$B_m = \frac{N I_e}{2 r} \frac{4 \pi}{c} = \frac{2 \pi N I_e}{r c}. \quad (3.3—3)$$

Želimo li pomoću brojčanog izraza riješiti naš zadatak moramo i pitanje prilagoditi brojčanim simbolima i jedinicama Gaussova sistema. Budući da je $B = 0,5$ mT, to je zbog $T = 10^4 [B]_m = 10^4 \text{ G}$ (vidi tablicu X) $B = 5 \text{ G}$, pa je prema tome brojčani iznos indukcije za jednadžbu (3.3—3) $B_m = B / [B]_m = B / \text{G} = 5$. Analogno je brojčani iznos polumjera solenoida $r = r [I] = r / \text{cm} = 50 \text{ cm} / \text{cm} = 50$, jer je $r = 0,5$ m. S ovim brojčanim podacima iz prekinute jednadžbe (3.3—3) dobivamo brojčani iznos uzbude u jedinici CGSE:

$$N I_e = B_m r c / 2 \pi = 5 \cdot 50 \cdot 2,9979 \cdot 10^{10} / 2 \pi = 1,19 \cdot 10^{12}.$$

Naravno da o vrijednosti te uzbude nemamo nikakovu predodžbu pa makar je napisali u veličinskom obliku $N I = N I_e [I]_e = 1,198 \cdot 10^{12} [I]_e$. Pomognimo sebi stoga tablicom X gdje nalazimo da je $[I]_e = 3,3356 \cdot 10^{10} \text{ A}$. Prema tome uzbuda iznosi

$$\Theta = N I = 1,19 \cdot 10^{12} \cdot 3,3356 \cdot 10^{10} \text{ A} = 398 \text{ A}.$$

Vidimo koliko pažljivosti treba kad se računa pomoću brojčanih jednadžbi. Mogućnosti da pogriješimo ima bezbroj, a na kraju se ipak vraćamo na jedino pouzdani veličinski račun.

Jednadžba (3.3—3) prilagođena Gaussovu skupu jedinica nije baš praktična kako smo vidjeli u ovom računskom primjeru. Zato se obično u magnetizmu čak ni stari fizičari ne drže te formule već je upotrebljavaju prilagođenu CGSM sistemu jedinica. Pogledamo li brojčanu jednadžbu (3.3—3) vidimo da se samo brojčani iznos struje odnosi na CGSE sistem. Prema tome samo njega treba preinačiti na CGSM brojčani simbol. To ćemo učiniti na ovaj način. Znamo da se veličina ne mijenja ako je mjerimo ovom ili onom jedinicom, pa stoga možemo pisati $I_e [I]_e = I_m [I]_m$ odakle je $I_e = I_m \cdot [I]_m / [I]_e$. U tablici X nalazimo omjer $[I]_m / [I]_e = c$, pa pomoću $I_e = c I_m$ izraz (3.3—3) dobiva novi brojčani oblik

$$B_m = 2 \pi N I_m / r \quad \text{ili} \quad N I_m = r B_m / 2 \pi. \quad (3.3—4)$$

Budući da je u zadatku zadano $r = 50$, $B_m = 5$, što smo obrazložili u prethodnom primjeru, brojčani račun daje

$$N I_m = 50 \cdot 5 / 2 \pi = 39,8.$$

Uzbuda je dakle 39,8 magnetostatskih jedinica struje, odnosno $N I = N I_m [I]_m = 39,8 [I]_m = 398 \text{ A}$ jer je $[I]_m = 10 \text{ A}$.

Koliki je pri tom brojčani iznos jakosti magnetskog polja? Budući da se radi o zraku relativna je permeabilnost $\mu_r = 1$. Pod rednim brojem 12, stupca 14, u tablici X za taj slučaj nalazimo

$$H_m = B_m,$$

tj. brojčani iznosi jakosti magnetskog polja i magnetske indukcije međusobno su jednaki pa je $H_m = 5$. Kako je $H = H_m [H]_m = H_m \cdot 0_e$, jakost je magnetskog polja $H = 5$ oersteda.

Uz sve navedene oblike postoji još jedna brojčana jednadžba za naš primjer, a upotrebljava se u nekim elektrotehničkim knjigama. Struja se naime ne izražava brojčanim iznosom I_m već sa I_M , što znači da se mjeri amperom, jedinicom Međunarodnog sistema! Iz $I_m [I]_m = I_M \cdot A$ zbog $[I]_m = 10 \text{ A}$ slijedi $I_m = I_M / 10$ čime izrazi (3.3—4) glase

$$B_m = \frac{2 \pi N I_M}{10 r} \quad \text{ili} \quad N I_M = \frac{10 r B_m}{2 \pi}. \quad (3.3—5)$$

Time što je uveden simbol za brojčani iznos struje u amperima (M) gornje jednadžbe nisu dakako postale veličinske. I dalje simboli označuju brojčani iznose

$$I_M = I / A, \quad r = r / \text{cm}, \quad B_m = B / G, \quad (3.3—6)$$

gdje je G kratica za gauss = $[B]_m$.

Desna jednadžba (3.3—5) daje rješenje našeg zadatka ovako:

$$N I_M = \frac{10 \cdot 50 \cdot 5}{2 \pi} = 398.$$

Usporedba nekih veličinskih jednadžbi s broječnicima koje su prilagođene jedinicama Gaussova, CGSM i CGSE sistema

Tablica E.4

Red. broj	Veličina	Veličinska jednadžba	Brojčana jednadžba, prilagođena :	
			Gaussovu sistemu jedinica	CGSM ili CGSE sistemu jedinica
1	Jakost magnetskog polja u solenoidu	$H = \frac{NI}{2r}$	$H_m = \frac{2\pi NI_e}{cr}$	$H_m = \frac{2\pi NI_m}{r}$
2	Jakost magnetskog polja ravnog vodiča	$H = \frac{I}{2\pi r}$	$H_m = \frac{2I_e}{cr}$	$H_m = \frac{2I_m}{r}$
3	Induktivitet dva paralelna vodiča duljine l , razmaknutih d	$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right)$	$L_m = 4l \left(\ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right)$	$L_e = \frac{4l}{c^2} \left(\ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right)$
4	Lorentzova sila u vakuumu	$F = Q(E + v \times \mu_0 H)$	$F = Q_e(E_e + v \times H_m/c)$	$F = Q_e(E_e + v \times H_e/c^2)$
5	Brzina elektromagnetskog polja	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$	$v = \frac{c}{\epsilon_r \mu_r}$	
6	Energija magnetskog polja	$W = \frac{1}{2} L I^2$	$W = \frac{1}{2c^2} L_m I_e^2$	$W = \frac{1}{2} L_m I_m^2$
7	Kapacitet pločastog kondenzatora	$C = \frac{\epsilon A}{d}$	$C_e = \frac{\epsilon_r A}{4\pi d}$	$C_m = \frac{\epsilon_r A}{c^2 4\pi d}$
8	Kapacitet kuglastog kondenzatora	$C = \epsilon 4\pi r$	$C_e = \epsilon_r r$	$C_m = \epsilon_r r/c^2$

Opaske: Indeksi m u brojčanim jednadžbama znače da se simboli odnose na jedinice CGSM sistema, a indeksi e na jedinice CGSE sistema jedinica; uspravni simboli r, l, d, predstavljaju brojčane iznose u centimetrima, v u cm/s; $c = 2,9979 \cdot 10^{10}$, $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, $\mu_r = \mu/\mu_0$.

To je naravno brojčani iznos izražen amperima pa je zbog $NI = NI_M A = 398 \text{ A}$.

Na žalost još ni danas ne upotrebljavaju svi autori veličinske jednadžbe pa se moraju mučiti ovako, ili još više nego što smo se mučili mi obrađujući ove primjere. Najneugodnije je to što se kod takvih brojčanih računa izgubi sigurnost pa čovjek na kraju ne zna da li je dobro izračunao ili nije.

U tablici E.4 navodimo nekoliko oblika brojčanih jednadžbi koje su prilagođene ili Gaussovu ili CGSM ili CGSE sistemu jedinica. Indeksi uz simbole brojčanih iznosa jasno označuju kakve jedinice treba primijeniti. Proradi li čitatelj brojčane jednadžbe tablice u duhu ovih izvođenja steći će dovoljnu rutinu da može računati i s raznim drugim brojčanim jednadžbama. Kao pouzdano uporište ipak smo u prvoj koloni tablice E.4 naveli univerzalne veličinske jednadžbe koje su za razliku od ostalih brojčanih tiskane *kurzivnim* znakovima. I čitatelj će vjerojatno nakon muke s brojčanim računom staviti na stranu sve brojčane jednadžbe i poslužiti se literaturom koja radi s veličinskim jednadžbama, koja dakle omogućuje pouzdan račun.

Preinačimo još u zaključku brojčanu jednadžbu (3.3—5) na pravu veličinsku jednadžbu. To ćemo izvesti lako ako u nju stavimo izraze (3.3—6) koji predstavljaju omjere veličina i jedinica

$$\frac{B}{G} = \frac{2\pi NI/A}{10 r/\text{cm}} \quad \text{ili} \quad B = \frac{2\pi NI}{r} \frac{\text{cm} \cdot G}{10 A}$$

Budući da je prema jednadžbi (3.2—8) i prema podacima iz tablice $X G = \mu_0 0_e = \mu_0 79,577 \text{ A/m}$, omjer jedinica u gornjoj jednadžbi glasi $10^{-2} \text{ m} \cdot \mu_0 \cdot 79,577 \text{ Am}^{-1}/10 A = \mu_0/4\pi$, što uvrštenjem daje veličinsku jednadžbu

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r}$$

a to je izraz (3.3—2) kojim smo i počeli naša razmatranja o primjeni Gaussova skupa jedinica u ovom primjeru.

3.4. Nepotpuni CGS sistemi jedinica elektromagnetizma

U prošla tri odsječka opširno smo razmatrali tri fizikalna sistema jedinica elektromagnetizma. Nismo to učinili zato da pokažemo kako su ti sistemi praktični za primjenu, što ne bismo ni mogli već zbog toga jer smo se na primjerima uvjerali kako s jedinicama tih sistema treba biti pažljiv u računu i kako su dugotrajni računi ako s tim jedinicama želimo računati jedino pouzdanim veličinskim načinom računanja. Pa i kasniji *Lorentzov* i *Heavisideovi* sistemi jedinica (njih u ovoj knjizi uopće ne razmatramo, jer se nisu uvriježili u praksi) dokazuju da nešto s tim sistemima jedinica nije bilo u redu.

Dosta smo prostora posvetili CGSE, CGSM i Gaussovu sistemu jedinica iz dva razloga. Prvi je činjenica da su još prije 60 godina ova tri sistema jedinica apsolutno dominirala u elektromagnetskoj znanosti. Ne zbog toga što su nosili pridjev »apsolutni« već jednostavno zato jer drugog, boljeg sistema jedinica nije bilo. Drugi je razlog činjenica da u starijoj znanstvenoj i elektrotehničkoj literaturi iz vremena između dva rata ovi sistemi jedinica nisu posve iščezli. Stoga čitanje te literature predstavlja danas znatne poteškoće, jer mladi fizičari i svi

elektrotehničari upotrebljavaju Međunarodni sistem jedinica koji je prihvatila Generalna konferencija za mjere i utege, a u pojedinim je državama propisan standardima. Na primjer u Jugoslaviji je od 1957. godine Međunarodni sistem jedinica propisan državnim standardom JUS A.A 1.040: Veličine i jedinice.

Vidjeli smo da su sistemi CGSE i CGSM posve ispravni iako nisu obuhvaćeni standardom. U našem prikazu oni imaju četiri osnovne jedinice kao što je to u elektromagnetskoj znanosti potrebno. Jedino mješoviti Gaussov sistem zato nije u redu što je zbog usvajanja pet osnovnih jedinica »predimenzioniran«. No ako ga shvaćamo kao skup jedinica u tom smislu da se za takozvane električke pojave primjenjuju jedinice CGSE sistema, a za takozvane magnetske pojave jedinice CGSM sistema, onda se s njime ipak može računati. Pri tom doduše nastaju neprilike tamo gdje dolazi do susreta veličina koje su umjetno razdvojene podjelom na »električke« i na »magnetske« veličine, ali to je danak koji zahtijeva ustrajanje u tradiciji.

Međutim većina njih koji upotrebljavaju CGSE i CGSM sistem jedinica ne shvaćaju ih onako kako smo ih mi u ovoj knjizi izveli. Mi smo na primjer u odsječku 3.1 izveli CGSE jedinicu jakosti električne struje

$$[I]_e = (4\pi)^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2} \epsilon_0^{1/2}. \quad (3.4-1)$$

U odsječku 3.2 utvrdili smo da je jedinica jakosti struje u magnetostatskom sistemu jedinica (CGSM)

$$[I]_m = (4\pi)^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \mu_0^{-1/2}. \quad (3.4-2)$$

Budući da je $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$ gdje je

$$v_0 = c \cdot \text{cm/s} = 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}, \quad (3.4-3)$$

što smo utvrdili u odsječku 1.4, podjela izraza (3.4-2) sa (3.4-1) daje

$$[I]_m/[I]_e = c.$$

To je posve normalno jer omjer dviju različito velikih jedinica iste veličine uvijek daje čist broj.

Na to se možemo podsjetiti jednostavnim primjerom. Netko će za metar reći da je dugačak $l = 1$ m. Drugi može isto tako reći da je njegova duljina $l = 100$ cm. Naravno da se štap nije promijenio mjerili ga mi u mislima jedinicom duljine metar ili jedinicom centimetar. Uvijek ostaje $l = l$, pa je dakle $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ ili $\text{m/cm} = 100$. Ovo je trivijalan primjer, ali unatoč tomu tipična osnova svakom znanstvenom mjerenju.

Izgleda da se jedino pri interpretaciji CGSE i CGSM jedinica pisci u prošlosti nisu držali tog osnovnog načela. Oni su naime smatrali da elektromagnetsko polje nije nešto posebno što se nikako ne može objasniti aksiomatskim veličinama mehanike duljina, vrijeme i masa, već su smatrali da se elektromagnetske veličine mogu izraziti s tri mehaničke, isto onako kao na primjer moment ustrajnosti. Stoga su zanjekali pravo postojanja četirima međusobno nezavisnim veličinama u elektromagnetizmu. Time se to automatski prenijelo i na jedinice, jer znamo da svakoj veličini pripada jedinica budući da je drukčije ne možemo ni mjeriti ni izraziti umnoškom mjernog broja (brojčanog iznosa) i jedinice.

Rezultat takvog nazora vidjet ćemo na našim jednadžbama (3.4—1) i (3.4—2). Odreknemo li samorodnost električkim veličinama zaniijekali smo je i njihovim jedinicama. Stoga ni μ_0 ni ε_0 ne mogu u tom slučaju biti osnovne jedinice jer po tome ih nazoru uopće ne priznajemo! Stavimo li osim toga $4\pi\varepsilon_0 = 1$, a $\mu_0/4\pi = 1$ spomenuti izrazi prelaze u oblik

$$[I]_m = \text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}, [I]_e = \text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-2}. \quad (3.4—4)$$

Što ovi izrazi fizikalno predstavljaju nitko ne zna.

Da ne trošimo prostor na izračunavanje ostalih nepotpunih elektrostatskih i magnetostatskih jedinica neke od njih svrstali smo u tablicu E.5. Pri tom smo odabrali samo one veličine čije su jedinice navedne i u tablici E.3 što omogućuje neposrednu usporedbu.

Jedinice nekih veličina u nepotpunom elektrostatskom i magnetostatskom sistemu jedinica

Tablica E.5

Red. br.	Naziv veličine	Simbol veličine	Elektrostatska jedinica	Magnetostatska jedinica
1	2	3	4	5
1	Elektrika	Q	$\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$	$\text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2}$
2	Jakost električkog polja	E	$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$	$\text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-2}$
3	Električna indukcija	D	$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$	$\text{cm}^{-3/2} \text{g}^{1/2}$
4	Dielektričnost	ε		
5	Električna polarizacija	P	$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$	$\text{cm}^{-3/2} \text{g}^{1/2}$
6	Magnetski tok	Φ	$\text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2}$	$\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$
7	Magnetska indukcija	B	$\text{cm}^{-3/2} \text{g}^{1/2}$	$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$
8	Jakost magnetskog polja	H	$\text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-2}$	$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$
9	Permeabilnost	μ		
10	Magnetska polarizacija	$\mathcal{J}$	$\text{cm}^{-3/2} \text{g}^{1/2}$	$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$
11	Električni napon	U	$\text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$	$\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-2}$
12	Električna struja	I	$\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-2}$	$\text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$
13	Električni otpor	R	$\text{cm}^{-1} \text{s}$	$\text{cm} \text{s}^{-1}$
14	Kapacitet	C	cm	$\text{cm}^{-1} \text{s}^2$
15	Induktivitet	L	$\text{cm}^{-1} \text{s}^2$	cm

I upotrebljavači ovakvih »jedinica« primjenjuju odnos $[I]_m/[I]_e = c$, tj. da je magnetostatska jedinica jakosti struje c puta veća od elektrostatske. Podijelimo li međusobno izraze (3.4—4) dobivamo

$$c = \frac{[I]_m}{[I]_e} = \frac{\text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}}{\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-2}} = \frac{\text{s}}{\text{cm}},$$

što možemo zbog $c = v_0/(\text{cm/s})$ napisati u obliku

$$v_0 = c \cdot \text{cm/s} = 2,9997 \text{ 9 cm/s} = 1. \quad (3.4—5)$$

Dobili smo katastrofalan rezultat da je veličina »brzina elektromagnetskog polja u vakuumu« jednaka čistom broju i to broju 1! Drugim riječima to znači da brzina svjetla uopće ne postoji. A znamo da je v_0 jedan od najčvršćih fundamenata suvremene nauke!

Na temelju jednadžbi (3.4—4) možemo izvesti još dug niz apsurdna koji su analogni jednadžbi (3.4—5). Spomenimo samo da na takav način dobivamo elektrostatsku »jedinicu« električkog kapaciteta $[C]_e = \text{centimetar}$, a u magnetostatskom sistemu jedinica induktiviteta $[L]_m = \text{centimetar}$, odakle se može zaključiti da su kapacitet i induktivitet istorodne veličine i to duljina! Očito je da danas nema smisla raspravljati o takvim »jedinicama« i o takvim »sistemima jedinica«.

Upitajmo se radije da li je genijalni učenjak *C. F. Gauss* prilikom osnivanja CGSM sistema jedinica zaista smatrao da je induktivitet duljina, a jedinica jakosti struje ona na lijevoj strani formule (3.4—4)?

3.5. Postanak CGSM i CGSE sistema jedinica

Uživimo se malo u vrijeme od nešto preko stotinu godina unatrag, kad se još nije znalo da je sila između dvije elektrike manja kada se između njih nalazi dielektrik (kako to danas nazivamo), nego kad je to zrak. Pokušajmo s tadašnjim jednadžbama elektrostatičke, koje se dakako odnose samo na zrak, izračunati koliko iznosi sila između dvije jednake množine elektrike koje su međusobno udaljene za r .

Budući da je sveopća primjena veličinskih jednadžbi počela tek godine 1922., kad ih je ponovo oživio *Ĵ. Wallot*, jasno je da ćemo se u računu morati poslužiti brojčanom jednadžbom koja vrijedi za zrak

$$F = Q^2/r^2. \quad (3.5-1)$$

Zamislimo dalje da smo silu kod nepromijenjenih množina elektrika i geometrijskog rasporeda mjerili u dva navrata: jednom jedinicama $[F]_1$, $[Q]_1$ i $[r]_1$, a drugi puta jedinicama $[F]_2$, $[Q]_2$ i $[r]_2$. Vezu između ovih jedinica neka predstavljaju ove jednadžbe

$$[F]_1 = A [F]_2, [Q]_1 = B [Q]_2, [r]_1 = L [r]_2, \quad (3.5-2)$$

gdje su A , B i L čisti brojevi — omjeri među jedinicama.

Rezultati tog dvojakog mjerenja iznositi će u skladu s brojčanom jednadžbom (3.5—1)

$$F_1 = Q_1^2/r_1^2, \quad F_2 = Q_2^2/r_2^2, \quad (3.5-3)$$

gdje simboli dakako predstavljaju brojčane iznose, a to stalno ističemo uspravnim slovima.

Zamislimo još da su sile (3.5—3) uravnotežene silom

$$F = m a, \quad (3.5-4)$$

gdje su m i a brojčani iznosi mase i ubrzanja. U tom vremenu u koje smo se za trenutak prenijeli duhom mi vrlo dobro poznajemo jednadžbu ubrzanja

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 l}{dt^2}, \quad (3.5-5)$$

gdje simboli v , t i l predočuju brojčane iznose brzine, vremena i duljine.

Ravnoteža mehaničke sile (3.5—4) s elektrostatskom F_1 ili F_2 nije poremećena time što elektrostatsku silu mjerimo s dvije različite jedinice sile iz (3.5—2), a ostale veličine čiji su brojevi iznosi predloženi u (3.5—4) i (3.5—5) s jedinicama

$$[m]_1 = M [m]_2, [l]_1 = L [l]_2, [t]_1 = T [t]_2, \quad (3.5—6)$$

gdje su M , L i T opet apsolutni brojevi, omjeri istorodnih jedinica.

Slijedom rečenoga dobit ćemo u ta dva mjerenja ove iznose

$$F_1 = m_1 a_1 \quad F_2 = m_2 a_2, \quad (3.5—7)$$

gdje simboli dakako predstavljaju brojčane iznose u jedinicama koje smo naveli u izrazima (3.5—6).

Sada izračunajmo jakost elektrostatskog polja koja je definirana s $E = F/Q$. Dobit ćemo naravno dvije brojčane vrijednosti, $E_1 = F_1/Q_1$ i $E_2 = F_2/Q_2$, ali u svakom slučaju vrijedi

$$E_1 [E]_1 = E_2 [E]_2, \quad (3.5—8)$$

gdje su $[E]_1$ i $[E]_2$ dvije različito velike jedinice jakosti elektrostatskog polja, a E_1 i E_2 pripadni brojčani iznosi.

Primijenimo li načelo da se brojčani iznosi odnose obrnuto od upotrebljenih jedinica (u poglavlju A to smo označivali sa $G_1/G_2 = [G]_2/[G]_1$), tj. princip koji sadrži izraz (3.5—8), od jednadžbi (3.5—2) do (3.5—7) dobit ćemo brojčane odnose

$$F_2 = A F_1, Q_2 = B Q_1, r_2 = L r_1 \text{ itd.}$$

Kombiniramo li tako spomenute izraze na kraju dobivamo

$$E_2/E_1 = L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}, \quad (3.5—9)$$

gdje su L , M i T redom omjeri različito velikih jedinica mase, duljine i vremena, kako nam to pokazuje jednadžba (3.5—6).

Ovaj izvod prepričan je iz njemačkog prijevoda rasprave *Intensitas vis magneticae terrestis ad mensuram absolutam revocata*. Napisao ga je veliki *Carl Friedrich Gauss* prema predavanju koje je 15. decembra 1832. godine održao na sjednici Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, a tiskano je u 8. svesku *Abhandlungen*-a tog društva. Njemački prijevod izišao je tek 1894. godine kao 53. svezak *Ostwald's Klassiker*-a.

Jednadžbe (3.5—2, 6, 8 i 9) prepisane su od *Gausa* doslovno. Jedinu izmjenu učinili smo time što smo primijenili današnje oznake i što smo primjer razmatrali na dvjema množinama elektrike, dok *Gauss* razmatra magnetsko polje Zemlje pa stoga uvodi pojam »slobodnog magnetizma«, a mi smo željeli izbjeći uvođenje »magnetskih masa« koje su danas iščezle iz nauke i tehnike jer znamo da je električna struja uzrok magnetskim pojavama.

Daleko bi nas odvelo kad bismo još dalje istraživali ovdje po citiranom fundamentalnom djelu. Spomenimo samo da *Gauss* ni u jednom trenutku nije posumnjao u samostalnost magnetizma. On govori o »magnetskoj tekućini«, o »slobodnom magnetizmu«, čak o »sjeveromagnetskoj« i »južnomagnetskoj tekućini«!

Možemo odgovoriti i na pitanje: što je *Gausa* navelo da osnuje svoj sistem apsolutnih jedinica mm — mg — s (ne cm, g, s)? To je bila težnja da se u magnetizmu stvori neprolazna pramjera, kao što je pariski prametar za duljinu ili

prakilogram za masu. *Gauss* je dobro znao da se komad magneta ne može pohraniti u Sèvresu kao etalon »magnetske tekućine« jer magnet nije vremenski stalan. Stoga je uveo propisani mjerni postupak u zraku kojim se može uvijek lako reproducirati osnovna magnetska jedinica (vidi str. 230 citirane *Avčinove* knjige).

Tako zapravo radimo i danas s reprodukcijom ampera a posve jednako radimo i s jedinicama vremena i duljine. Ni sekunda nije pohranjena u ćeliji laboratorija u Sèvresu pa ipak nitko ne odriče samorodnost veličini vrijeme. Jedinica sekunda odabrana je kao dio konstantnog vremenskog intervala u kojemu planetni mehanizam obavi svoj periodički ciklus. To svojstvo izvanredno tačne periodičnosti prirode omogućilo nam je da imamo gotovo nepromjenljivu pramjeru vremena. Drugo univerzalno svojstvo prirode, permeabilnost μ_0 , omogućilo nam je da u prirodi imamo pohranjeno konstantno elektromagnetsko svojstvo polja pomoću kojega *Rayleighovom* vagom (vidi odsječak 2.3) možemo bilo gdje tačno reproducirati polaznu elektromagnetsku jedinicu amper.

Iz *Gaussove* rasprave možemo sažeti ove zaključke o tome kakve je nazore imao prilikom osnivanja CGSM sistema jedinica:

1. Smatrao je da je magnetizam nešto posve samostalno, što se ne objašnjava poznatim veličinama mehanike.

2. Upotrebljavao je brojčane jednadžbe. U raspravi na mnogim mjestima naglašava »brojčanu vrijednost« (*Zahlenwert*) kad spominje simbole u jednadžbama.

3. Njemu je umnožak brojčanog iznosa i jedinice invarijantan. To vidimo u njegovoj jednadžbi (3.5—8). Ova invarijantnost osnova je njegova računa. Vidimo dakle da je jedinice stavio u jednadžbe, a tako radimo i danas kad računamo s veličinama jer naša je veličina $G = G [G]$.

4. Pri gradnji svog sistema jedinica *Gauss* poznaje samo koherentne jedinice jer na primjer $[F] = [m] [a]$ uz invarijantnost produkta $m [m]$ (vidi jednadžbu 3.5—8) omogućuje da se iz (3.5—5) izvedu (3.5—7) itd.

5. Izrazi tipa (3.5—9) kod *Gausse* označuju brojčanu vezu između različitih jedinica. Tako na primjer na strani 48 svoje rasprave *Gauss* kaže: »... uzmemo li umjesto milimetra i miligrama metar i gram za jedinice onda je $L = 1/1000$, $M = 1/1000$, dakle će biti $E_1 = E_2$; ako pak uzmemo Parisku liniju i Berlinski funt onda ćemo imati $L = 1/2,555\ 829$, $M = 1/467\ 711,4$, dakle $E_2 = = 0,002\ 196\ 161\ E_1$ «.

Kasnije su od izraza tipa (3.5—9) načinili dimenziju koja je predstavljala »stvarno značenje«, »suštinu« veličine. Kako smo vidjeli *Gauss* nije dao tome baš nikakva povoda. Sam *Gauss* je ukazao na to da nema nikakvih teškoća da se i »galvanska mjerenja« (tadašnji izraz za struje) svedu na spsolutna, dakako apsolutna u smislu koji smo naznačili ranije. Slijedom toga njegov je prijatelj *Wilhelm Weber* tako osnovao CGSE sistem jedinica.

Povijest CGSE sistema istraživao je *J. Fischer* i ustanovio da *Weber* i *Kohlrausch* nisu izjednačivali djelovanje ($F = \text{const. } I^2$) fizikalne veličine sa samom veličinom, te da električke i magnetske veličine nisu smatrali takovima koje se mogu samo mehanički definirati. To je isto što smo mi utvrdili kod *Gausse*.

Prema tome osnivači apsolutnih sistema jedinica elektromagnetizma nisu stvorili jedinice tipa $[I]_m = \text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$ već se to dogodilo kasnije prilikom krive interpretacije njihovih genijalnih ideja. Zato smo se u odsječcima 3. 1 do 3. 3 držali ideja osnivača, a one se bitno razlikuju od onoga što smo nalazili u nedavnoj fizikalnoj literaturi.

Rekli smo u nedavnoj literaturi jer i to je danas prošlost. Prije nekoliko godina naime Međunarodna unija za čistu i primijenjenu fiziku (International Union

for Pure and Applied Physics) prihvatila je uz metar, sekundu, kilogram i amper kao četvrtu osnovnu jedinicu. Isto je učinila i Međunarodna organizacija za standarde (International Standard Organisation).

Konačno je 1954. godine i Deseta generalna konferencija za mjere i utege usvojila amper za četvrtu jedinicu, pa je dakle sada Međunarodni sistem jedinica obavezan za sve države potpisnice Konvencije o metru. Praktički je time obuhvaćena čitava kugla zemaljska.

4. TEHNIČKI SISTEM JEDINICA ELEKTROMAGNETIZMA

Tehnički sistem jedinica elektrotehnike ima i nekoliko drugih imena. Nazivaju ga »praktičnim sistemom jedinica«, »internacionalnim sistemom jedinica« i »materijalnim sistemom jedinica«. Sva tri naziva historijskog su porijekla što smo objasnili u odsječku 5. Mi smo upotrebili naziv Tehnički sistem zato da njegov opis logično nadovežemo na Tehničke sisteme jedinica mehanike i termodinamike.

Iako se pretežno misli da su taj sistem upotrebljavali samo elektrotehničari to nije istina. Budući da su do 1. 1. 1948., kada je sve postojeće sisteme jedinica elektromagnetizma zamijenio univerzalni Međunarodni (Giorgijev) sistem, električki instrumenti bili baždareni u jedinicama Tehničkog sistema, njegove su jedinice prilikom mjerenja upotrebljavali i u fizikalnim laboratorijima, jer tvornice nisu serijski proizvodile instrumente baždarene u CGSM ili CGSE jedinicama.

Tehnički sistem jedinica ima četiri ishodišne (osnovne) jedinice: metar, sekunda, amper i ohm, za koje postoje posebni etaloni. Za metar i sekundu su oni koje smo spominjali već u poglavlju A, a za amper i ohm izrađeni su posebni materijalni uzorci zbog kojih je taj sistem jedinica dobio naziv »materijalni sistem jedinica«. Definicije dviju polaznih elektromagnetskih jedinica Tehničkog sistema glase:

»Amper (A_0) je jakost one stalne električne struje koja iz vodene otopine srebrnog nitrata za jednu sekundu izluči 1,118 miligrama srebra.«

»Ohm (Ω_0) je električki otpor koji prolazu električne struje pruža živa masa 14,4521 grama izvedena u obliku stupca jednolikog presjeka i duljine 106,3 centimetra pri temperaturi tališta leda.«

Ostale jedinice ovog sistema izvedene su iz dviju gornjih. Tako je na primjer volt (V_0) definiran kao onaj napon koji kroz otpornik otpora Ω_0 protiskuje struju jakosti 1 A_0 .

Definicije prvih dviju jedinica izgledaju vrlo jednostavne, ali je zato komplicirana, dugotrajna i mučna njihova praktična realizacija. Navedimo samo nekoliko teškoća koje se javljaju pri utvrđivanju ampera A_0 pomoću električkog izlučivanja srebra. Definicija zahtijeva da se svake sekunde izluči 1,11800 miligrama srebra. Potrebno je dakle precizno mjerenje vremena, jakost struje mora biti izvanredno konstantna barem jedan sat, dakle izvor besprijekorno stalan. A na kraju treba i masu izlučena srebra najtačnije izmjeriti na vagi osjetljivosti $5 \cdot 10^{-7}$, tj. osjetljivosti 0,5 miligrama na 1 kilogram! Pri tom se dakako uzima u obzir uzgon utega i srebra u zraku. Iz dobivena srebra mora se odstraniti sva vlaga. Osim toga i papir za filtriranje koji sprečava padanje djelića katode na anodu zadrži neke tragove srebra. Unatoč svim tim teškoćama ukupna netačnost utvrđivanja A_0 ne premešaju $4 \cdot 10^{-5}$?

Slične su teškoće i kod živina ohma Ω_0 . Posebne specifikacije uz navedenu teoretsku formulaciju Ω_0 navode zahtjeve u pogledu kalibracije staklenih cjevčica sa živom, korekciju temperature, uračunavanje prijelaznih otpora, izvedbu dovodnih žica itd.

Osim toga živa ima sedam izotopa od kojih se pet nalazi u prirodnoj živi u znatnom iznosu. Oni se u masi razlikuju do 2%. Slično je i sa srebrom koje se pojavljuje s dva izotopa.

Pri navođenju definicija u zagradu smo stavili simbole za ohm, amper i volt kojima smo dodali indekse o. Time smo htjeli istaći da se radi na primjer o takozvanom »praktičnom« amperu koji ne samo da je drukčije definiran od apsolutnog ampera (A) Međunarodnog sistema jedinica već se i po vrijednosti od njega razlikuje. Isto vrijedi i za ostale jedinice Tehničkog sistema.

U starijoj literaturi se, u skladu sa starijim internacionalnim odredbama, jedinice Ω_o , A_o , V_o itd. nazivaju »internationalnim« jedinicama. Mi ovaj pridjev izbjegavamo da čitatelji ne bi pomislili kako se radi o jedinicama Međunarodnog (Giorgijeva) sistema jer on je danas međunarodni sistem jedinica, koji je naziv »Međunarodni sistem jedinica« dobio na Jedanaestoj generalnoj konferenciji za mjere i utege oktobra 1960. u Parizu. Osim toga time postaje nepotrebno posebno označivanje da su Međunarodne jedinice apsolutne, što zbog jednostavnosti pisanja i mišljenja također propuštamo.

Korisno je analizirati na čemu sve temelje definicije i praktične mjerne realizacije A_o i Ω_o . Jedinica A_o oslanja se na Faradayev zakon elektrolize koji možemo napisati u obliku

$$Q = m n F / M, \quad (4-1)$$

gdje simboli pojedinih veličina označuju ovo: Q je množina elektrike koja je izlučila iz otopine masu m metala valencije n i relativne atomske mase M . Oznaka F predstavlja Faradayevu konstantu $F = 9,649 \cdot 10^7$ As/kg.

Budući da se kod definicije A_o radi o srebru valencije $n = 1$ može se za konstantnu istosmjernu struju I umjesto Q pisati $Q = I t$, gdje je t vrijeme tokom kojega se izluči masa m srebra. Na taj način izraz (4-1) prelazi u oblik

$$I = \frac{m}{t} \frac{F}{M}.$$

Definicija kaže da je $I = 1 A_o$ onda kad je $m/t = 1,118$ mg/s pa na taj način od gornje jednadžbe dobivamo

$$A_o = 1,118 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \frac{F}{M}. \quad (4-2)$$

Vidimo dakle da praktični amper A_o ovisi, osim o jedinicama za masu i vrijeme, još i o dvije konstante dobivene mjerenjem, F i M (za srebro je prema najnovijim mjerenjima $M = 107,88$).

Posve analogno utvrdit ćemo odnose kod Ω_o . Izraz za omski otpor vodiča u obliku prizme glasi

$$R = \frac{l}{\kappa A}, \quad (4-3)$$

gdje simboli označuju ove veličine: R električki otpor, l duljinu, κ specifični električki otpor i A presjek prizme. Ovaj ćemo izraz primijeniti za živin stupac kako ga propisuje definicija.

Presjek A možemo izraziti volumenom žive $V = Al$, a volumen masom m i gustoćom ρ žive jer je $V = m/\rho$. Uvrstimo li to u jednadžbu (4—3) dobivamo

$$R = \frac{l^2 \rho}{m \kappa}.$$

Od ovog izraza dobivamo $R = 1 \Omega_0$ u slučaju kad je prema definiciji $l = 1,063$ m i masa $m = 14,452$ l grama, dakle

$$\Omega_0 = \frac{1,063^2 \text{ m}^2}{1,445 \, 21 \cdot 10^{-2} \text{ kg}} \frac{\rho}{\kappa}. \quad (4-4)$$

Vidimo da i ovdje kao i kod A_0 praktični ohm ovisi o m i kg te o dvije materijalne konstante ρ i κ čije se vrijednosti dobivaju mjerenjem.

Prema definiciji V_0 se dobiva umnoškom A_0 i Ω_0 . Pomnožimo li jednadžbu (4—2) sa (4—4) slijedi

$$V_0 = A_0 \Omega_0 = \frac{1,118.1,063^2 \cdot 10^{-4}}{1,445 \, 21} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \frac{F \rho}{M \kappa},$$

pa dakle V_0 nije vezan samo na pariske pramjere već i na četiri druge materijalne konstante.

Po pravilu koherencije ($1 \times 1 = 1$) o građenju sistema jedinica oдавde se dalje izvode ostale jedinice Tehničkog sistema. Tako je na primjer watt (W_0) Tehničkog sistema

$$W_0 = A_0^2 \Omega_0.$$

Budući da se A_0 i Ω_0 razlikuju od jedinica A i Ω Međunarodnog sistema očito je da ni W_0 nije jednak $W = VA = \text{m}^2 \text{ kg} / \text{s}^3$ već je

$$W_0 = pq^2 W = 1,000 \, 19 W,$$

gdje je $p = \Omega_0 / \Omega = 1,000 \, 49$, $q = A_0 / A = 0,999 \, 85$, dakle $pq^2 = 1,000 \, 19$ kako smo opisali u odsječku 2. 5.

I brojčani iznos indukcione konstante μ_0 drukčiji je u jedinicama Tehničkog sistema nego u jedinicama Međunarodnog sistema. To je prirodno jer veličina μ_0 ne ovisi o izboru jedinica. U to se možemo uvjeriti kratkim računom. Znamo da je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VA}^{-1} \text{ s m}^{-1}$. Budući da je $A = A_0/q$ te $V = V_0/pq$, uvrštenjem dobivamo

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V_0 \text{ s } q}{p q A_0 \text{ m}} = \frac{4\pi}{p} \cdot 10^{-7} \frac{H_0}{\text{m}},$$

gdje je »praktični«
henry $H_0 = V_0 \text{ s} / A_0$. Računanje daje vrijednost $\mu_0 = 1,2560 \cdot 10^{-6} V_0 \text{ s } A_0^{-1} \text{ m}^{-1}$. Posve analogno dobivamo drukčiji brojčani iznos i za ϵ_0 u jedinicama A_0 i V_0 .

Faktori p i q koji posreduju između jedinica Tehničkog i Međunarodnog sistema ne mogu se izračunati već jedino odrediti dvojakim mjerenjem iste veličine jednom Tehničkim, a drugi puta Međunarodnim jedinicama. Međunarodno propisane vrijednosti tih faktora dobivene su kao srednja vrijednost mnoštva usporedbenih mjerenja u različitim najtačnijim laboratorijima.

Kompletni odnosi između jedinica Tehničkog i Međunarodnog sistema navedeni su u odsječku 2. 5 gdje su letimično obrađene i ostale posljedice koje je u nauci o elektromagnetizmu uzokovalo nadomještanje Tehničkih jedinica Međunarodnim sistemom jedinica.

5. IZ POVIJESTI MJERNIH SISTEMA ELEKTROMAGNETIZMA

U prošlim odsječcima proučili smo tri sistema jedinica elektromagnetizma. Najprije smo razmatrali Međunarodni (Giorgijev) sistem jedinica koji je danas na snazi u svim granama znanosti i tehnike. Kao drugi sistem obradili smo skupinu fizikalnih sistema jedinica elektromagnetizma (CGSE, CGSM, Gaussov) a na kraju, kao treći, Tehnički sistem jedinica. Ovi sistemi nisu nastali u isto vrijeme već su u raznim razdobljima prerastali iz jednoga u drugi, usavršavali se i konačno se danas praktički reducirali na jedan jedini, Međunarodni. Taj složeni put razvoja ne razabire se međutim iz poglavlja u kojima smo ih razmatrali. Stoga smatramo korisnim da na kraju tih razmatranja dodamo kratak povijesni pregled koji će premostiti mnoge praznine prethodnih potpuno stručnih opisa. To će nam biti olakšano jer smo glavne predstavnike pojedinih razdoblja detaljno proučili pa nam preostaje samo to da kronološkim povezivanjem parcijalnih napredaka i lutanja u međunarodnom mjerilu stvorimo približnu sliku razvoja mjernih sistema elektromagnetizma. Takav povijesni pregled čini nam se čak potrebnim jer ćemo pomoću njega shvatiti zašto je Međunarodni sistem međunarodno usvojen tek relativno kasno.

U odsječku 3. 5 naveli smo da je *C. F. Gauss* godine 1832. udario temelje apsolutnom mjerenju magnetskih veličina iz čega je kasnije nastao CGSM sistem jedinica što smo ga opisali u odsječku 3. 1. *Gauss* je iz mehanike preuzeo osnovne jedinice milimetar, miligram i sekundu kojima je na temelju nepromjenljive indukcione konstante (u današnjoj terminologiji) zraka definirao jedinice svog sistema.

Osam godina kasnije predložio je *W. Weber* analogan sistem jedinica za apsolutna mjerenja električkih veličina iz kojega je poslije nastao CGSE sistem jedinica. Ova dva datuma prvi su koje možemo označiti kao početke znanstvene metrologije u elektromagnetizmu.

Između 1840. i 1843. godine *Wheatstone* je izradio prvi etalon električkog otpora. To je bio živin stupac duljine 1 foot i mase 100 graina (oko 6,5 g). Već 1848. godine u Njemačkoj su upotrebljavali otporničke normale, izrađene tako da odgovaraju određenoj duljini (1 km) telegrafskih žica. To su preteče kasnijih »praktičnih jedinica«. Izbor telegrafske žice u to je vrijeme prirodan jer praktična elektrotehnika tog vremena svodi se uglavnom na telegrafiju.

Godine 1860. uveo je u Evropi *W. Siemens* živinu jedinicu električkog otpora. Ona je bila realizirana stupcem žive duljine 1 metar, presjeka 1 mm². Živa se nalazila u staklenoj cijevčici uronjenoj u mješavinu leda i vode, temperatura je dakle iznosila $\vartheta = 0$ deg.

Bright i *Clark* predložili su 1861. godine Britanskom udruženju za unapređenje znanosti (The British Association for the Advancement of Science; BA) da se odabere koherentan sistem jedinica koji bi bio od velike koristi i telegrafiji i znanosti. Oni su imali veliko praktično iskustvo s podmorskim kabelima, a pri tom su se služili *Daniellovom* ćelijom kao jedinicom napona, dok je jedinica kapaciteta bio kapacitet pločastog kondenzatora površine 1 m², razmaka ploča 1 mm. Električka kojom se taj kondenzator napunio pod djelovanjem napona *Daniellova* ele-

menta služila je kao jedinica, a strujanje ove jedinice elektrike u sekundi smatrala se jedinicom jakosti struje. Otpor kroz koji je element proveo jediničnu struju bio je jedinica električkog otpora. Taj njihov sistem jedinica bio je vrlo jednostavan, praktičan, a zahtijevao je uređaje koji su se tada upotrebljavali u telegrafiji.

BA je odmah 1861. godine osnovalo poseban odbor za normale otpora. Dje latnost toga odbora postala je čuvena jer on je obavio pionirski posao na tom području. Odbor je sve do godine 1867. izdavao i godišnje izvještaje koji su postali osnovom električke metrologije. Tako je *W. Thomson* 1862. godine uveo energiju kao sponu između mehanike i elektromagnetizma. Bila su pri tom predložena dva sistema jedinica: »materijalni« za telegrafske tehničare i »apstraktni« za teoretičare. »Materijalni« sistem bio je onaj koji su predložili *Bright* i *Clark*, a »apstraktni« je bio *Gaussov*.

Godine 1867. BA je donijelo »konačne« prijedloge kojima se preporučuje za apsolutna mjerenja sistem s osnovnim mehaničkim jedinicama metar, gram, sekunda. Istodobno su predložene »praktične« normale, osobito za električki otpor. *Clark* je tu jedinicu nazvao ohm. Odbor BA stajao je na stajalištu da »praktične jedinice« moraju biti dekadski višekratnici ili dekadski dijelovi apsolutnih (»apstraktnih«) jedinica koje su tada bile izvedene na temelju mehaničkih jedinica m, g, s (i indukcione konstante kako bismo danas rekli). Višekratnik 10^7 takvih »apstraktnih« jedinica otpora predstavljao je jedan ohm. Jedinica ohm smatrana je vrlo praktičnom jedinicom zato jer je 1 milja telegrafske žice tada uobičajenog presjeka imala otpor približno 10 ohma. Praktični etalon otpora 1 ohm bio je u to vrijeme poznat pod nazivom »British Association Unit«. To je bio stupac žive duljine 1,048 m, presjeka 1 mm^2 , pri temperaturi tališta leda.

Voltom je nazvana jedinica koja je bila 10^5 puta veća od »apstraktne« jedinice napona. Tako je volt bio približno onaj napon koji ima *Daniellov* elemenat. Iako su faktori 10^7 i 10^5 bili odabrani samovoljno, ostale »praktične jedinice« pokorile su se pravilu koherencije, tj. odnosu jedinica $1 \times 1 = 1$. Zbog toga se morala promijeniti prvotna praktična jedinica kapaciteta farad koja je odgovarala današnjem mikrofaradu.

Vidimo da je posebni odbor BA obavio veliki pionirski posao: za naučne svrhe usvojio je »apstraktni« sistem s osnovnim jedinicama m, g, s, a za praktične svrhe »praktički« sistem čije su jedinice bile dekadski višekratnici »apstraktnih« jedinica. Sve jedinice svakog sistema bile su međusobno koherentne, a »praktične« su osim toga dobile nazive po glasovitim učenjacima.

Godine 1868. bio je imenovan novi odbor BA »za izbor i nazive dinamičkih i električkih jedinica«. Taj odbor proučavao je i uspoređivao relativne prednosti m-g-s, foot-grain-second, mm-mg-s (po *Gaussu*) i cm-g-s sistema u svrhu usvajanja fundamentalnog sistema čitave znanosti. Prvi javni dokument tog odbora bio je objavljen pet godina kasnije. Odluka je donesena u korist CGS sistema. Danas nam se glavni argument tog izbora čini egzotičnim: u tom sistemu brojčani iznos gustoće vode iznosi 1! Tu vidimo odraz tadašnje jakosti brojčanog nazora koji je u fundamente budućeg znanstvenog sistema svih oblasti nauke uveo tako nepouzdan elemenat kao što je gustoća destilirane vode pri normalnoj temperaturi i pritisku.

Praktične jedinice elektromagnetizma ohm, volt i farad, bile su ovim novim izborom (CGS) vezane na »apstraktne« (CGSM) faktore 10^9 , 10^8 i 10^{-9} , dakle onako kao što je i danas. Spomenuti izvještaj predložio je i nazive triju jedinica teoretskog sistema: $\text{dyn} = \text{cmgs}^{-2}$ za silu, $\text{erg} = \text{dyn cm}$ za energiju i erg/s za snagu.

Tim radovima BA bila je uspješno završena velika i plodna epoha električke metrologije. U primjenu su ušli paralelno teoretsko-apstraktni sistem magnetostatskih jedinica (prema tadašnjoj terminologiji) i sistem praktičnih jedinica ohm, volt, farad. Iako nije bilo međunarodnog dogovora o njihovoj upotrebi nagli razvoj primjene elektrike i magnetizma omogućio je da se oba sistema jedinica podjednako uvriježu: prvi u znanstvenim radovima, drugi u praktičnim.

Zbog toga je prvi Međunarodni elektrotehnički kongres (CEI, Congrès International d'Electricité) 1881. godine u Parizu u cijelosti prihvatio prijedloge BA i još ih dijelom nadopunio. Na tom kongresu međunarodno je zaključeno da vrijede odnosi $\text{amper} = 10^{-1} [I]_m$, $\text{volt} = 10^8 [U]_m$, $\text{ohm} = 10^9 [R]_m$, $\text{farad} = 10^{-9} [C]_m$ i $\text{coulomb} = 10^{-1} [Q]_m$. Ove i ostale odnose sadrži naša tablica X. Isto je tako usvojen i materijalni standard za ohm u obliku živina stupca. Čitav kongres protekao je u znaku diskusije između lorda *Kelvina* i *Helmholtza*, od kojih je prvi ustrajao uz »apsolutni ohm«, dakle $\text{ohm} = 10^9 [R]_m$, a drugi uz »praktičnu« jedinicu živin ohm (Ω_0).

Dvojadi način definiranja praktičnih jedinica uzrokovao je kasnije mnoge glavobolje. Kongres naime nije vidio da je postavio znak jednakosti između apsolutnog ohma koji se oslanja na nepromjenljivo svojstvo vakuuma (μ_0) i praktičnog ohma (Ω_0 , vidi odsječak 4) koji u sebi sadrži mjerne greške i niz drugih mjerenjem određenih konstanata, što smo vidjeli u odsječku 4. Poboljšanje mjernih metoda i tačnosti instrumenata pokazali su u kasnijim razdobljima razvoja elektromagnetizma osjetne razlike izmjeđu »apsolutnih« i »praktičnih« jedinica, a istom je Međunarodni sistem jedinica definitivno otklonio taj nesklad (vidi odsječak 2. 5).

Ostali elektrotehnički kongresi do godine 1900. nisu donijeli bitnih metroloških promjena. Na drugom kongresu 1889. u Parizu usvojeni su nazivi za praktične jedinice $\text{joule} = 10^7 \text{ erg}$, $\text{watt} = 10^7 \text{ erg/s}$ i $\text{henry} = 10^9 [L]_m$. Na trećem kongresu 1891. godine u Frankfurtu predloženi su nazivi za praktične jedinice magnetskih veličina, ali zbog nesloge do zaključaka nije došlo. Četvrti kongres 1893. godine u Chicagu ponovo je raspravljao o nazivima magnetskih jedinica, ali je zaključio samo to da se apsolutnim jedinicama ne dodjeljuju posebni nazivi, već samo jedinicama Tehničkog sistema. Time je bio potvrđen zaključak kongresa iz 1881. god.

Na četvrtom kongresu bili su definirani i etaloni za praktične jedinice ohm, amper i volt. Jedinicu otpora praktičnog sistema imao je stupac žive presjeka 1 mm^2 i duljine 106,3 cm pri temperaturi tališta leda. Ovakva se definicija samo neznatno razlikovala od »ohm légal« koji je još godine 1884. u Parizu stvorila posebna konferencija za utvrđivanje električkih jedinica. Taj legalni ohm bio je inače već spomenuti stupac žive ali duljine 106 cm, tako da se razlikovao za 1,4 % od ohma BA.

Standard praktične jedinice jakosti električne struje bio je amper definiran kao ona struja, koja iz vodene otopine srebrnog nitrata za jednu sekundu izluči 1,118 miligrama srebra. Osim toga je postojao i praktični volt propisan naponom *Clarčkova* elementa (pridjev »praktičan« znači da se radi o jedinicama Tehničkog sistema razmotrenog u odsječku 4).

Navodimo skraćene definicije triju najvažnijih jedinica iz kojih su se pomoću pravila koherencije izvodile ostale. Iz definicija se vidi kako je uz skromnu mjernu tačnost i nerazvijene mjerne metode, ali jakim smislom za teoretske definicije, uspostavljen rastući jaz između CGSM i praktičnih jedinica.

»Jedinica električkog otpora ohm osniva se na teoretskom ohmu koji je jednak 10^9 jedinica otpora magnetostatskog sistema; predstavljen je stupcem žive temperature tališta leda, masa mu iznosi 14,4521 grama, a duljina stupca konstantnog presjeka je 106,3 centimetara«.

»Jedinica jakosti električne struje amper, teoretski jednak 1/10 jedinice struje sistema CGSM, predstavljen je stalnom strujom koja za jednu sekundu izluči 1,118 miligrama metala iz voltametra sa srebrnim nitratom«.

»Jedinica električkog napona volt, umnožak ohma i ampera, praktički je predstavljen 1/1,431 dijelom napona Clarkova elementa«.

Analogno su bili definirani međunarodni watt i henry kao J/s i Vs/A.

U međuvremenu su se pojavila u metrologiji dva velika imena. Godine 1891. John Perry predložio je kompletan VAscm sistem jedinica elektromagnetizma, koji je danas obično poznat pod imenom Mijejeva sistema, prema njemačkom učenjaku Gustavu Mieju. Te godine Perry je u članku objavljenom u časopisu The Electrician pod naslovom *Praktične elektromagnetske jedinice* napisao i ovo: »Želim predložiti da praktična jedinica magnetskog toka (ili indukcije ili sile) bude 10^8 CGSM jedinica i da dobije svoje ime. Tako se magnetska permeabilnost zraka neće više moći uzimati kao jedinica već će se u praktičnom sistemu mjerenja iskazivati jednako kao i permeabilnost bilo koje druge tvari; permeabilnost zraka iznositi će $4\pi \times 10^{-9}$ i u budućnosti ni jedna tvar neće imati permeabilnost 1. Jedinica ukupne magnetomotorne sile u magnetskom krugu je amperzavoj, a jedinica gradijenta magnetomotorne sile treba da bude amperzavoj po centimetru...«

Vidimo da s iznimkom centimetra umjesto metra Perry predlaže Međunarodni sistem jedinica kakav imamo danas. On je pri tom prihvatio prijedlog o racionalizaciji jednadžbi elektromagnetizma koju je 1882. godine predložio drugi veliki čovjek tog razdoblja, Oliver Heaviside. S koherentnim sistemom jedinica elektromagnetizma i racionalnim oblikom brojeva jednadžbi on je ujedno bio preteča racionalnih veličinskih jednadžbi koje imamo danas.

Godine 1900. F. J. Rogers je predložio u Physical Review sistem jedinica mehanike metar, kilogram, sekunda s koherentnim jedinicama watt, joule i »Large Dyne« (veliki dyn), tj. današnji newton. Taj izbor opravdao je »harmonijom« jedinica, što bismo danas rekli koherencijom jedinica.

Te godine održan je u Parizu četvrti elektrotehnički kongres koji je svojim odlukama oborio zaključke kongresa 1881. i 1889. godine o nazivima jedinica. Odlučeno je naime da se imenom maxwell = $M = [\Phi]_m$ nazove magnetostatska jedinica magnetskog toka, a imenom gauss CGSM jedinica jakosti magnetskog polja. Iz tog vremena potječu nesporazumi koji su trajali sve do uvođenja Međunarodnog sistema 1. 1. 1948.

Neki su naime smatrali da je gauss jedinica magnetske indukcije B , a drugi da je to jedinica jakosti magnetskog polja H , koju danas nazivamo oersted ($Oe = [H]_m$). Zbog toga je većina B i H mjerila gaussom.

Uvođenje imena maxwell i gauss uzrokovalo je i druge nesporazume. Budući da su ove jedinice imale nazive smatralo se da su to jedinice praktičnog sistema, a ne teoretskog (apsolutnog CGSM). Posljedica toga bila je na primjer brojčana jednadžba jakosti magnetskog polja u centru solenoida $B = H = 2I : (10r)$, prilagođena jedinicama gauss, amper i centimetar (vidi odsječak 3. 3). Miješanje apsolutnih CGSM i praktičnih jedinica dovelo je i do jednadžbe elektromagnetske indukcije $U_i = Bv_l \cdot 10^{-8}$ koja je dakako brojčana jednadžba prilagođena redom jedinicama volt, $[B]_m$, cm/s, cm.

Početak dvadesetog stoljeća bio je vrlo značajan za električku metrologiju. Godine 1901. predložio je *Giovanni Giorgi* svoj sistem jedinica. I danas je zanimljivo čitati što je *Giorgi* napisao u referatu *Electrical and Physical Units* za šesti elektrotehnički kongres 1904. u St. Louisu: »Da bi se iz mehaničkih jedinica izvele električke i magnetske jedinice potrebna je četvrta osnovna ili nezavisna jedinica. U CGSE i CGSM sistemima za četvrtu jedinicu uzeta je elektrostatska ili magnetska konstanta slobodnog etera, što ima mnogo loših strana«. Svakako valja naglasiti da je *Giorgi* predložio racionalni oblik jednadžbi, pa se poziva i na *Heavisidea*. Za »magnetsku konstantu slobodnog etera« navodi $\lambda = 0,000\,001\,256$ henry /metar, što danas nazivamo indukcijom konstantom $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ V_o s /A_om, odnosno u današnjim (apsolutnim) Međunarodnim jedinicama $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs /Am (o A_o, V_o vidi odsječak 4). Isto tako za influencijonu konstantu vakuma navodi vrijednost $\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12}$ F_o /m. U obrazloženju svog prijedloga *Giorgi* piše: »Ovaj sistem niti je elektrostatski niti magnetostatski, jer za osnovnu jedinicu ne uzima ni ϵ_0 ni μ_0 . Ovaj sistem potpuno je dualistički, sve jedinice imaju istovremeno električko i magnetsko obilježje; sve su električke i magnetske formule identične«.

Na tom kongresu predložio je važan referat *Giorgijev* zemljak *Ascoli* koji je utvrdio da postoji beskonačno mnogo koherentnih sistema jedinica mehanike što se mogu koherentno prilagoditi koherentnom skupu jedinica amper, ohm itd. On je izveo i posebno pravilo koje međusobno povezuje takve sisteme elektromagnetizma s jedinicama mehanike.

Označimo li jedinice cm, g, s, sistema CGS indeksom o, izraz za erg = [W]_o možemo pisati u obliku

$$[l]_o^2 [m]_o [t]_o^{-2} = [W]_o. \quad (5-1)$$

S druge strane već postoji skup jedinica ohm, volt, amper, watt, joule itd. koje su međusobno koherentne, ali nisu koherentne s CGS jedinicama (VAs = 10⁷ [W]_o). Da bi se postigla koherentnost skupa jedinica volt, amper itd. s mehaničkim jedinicama valja odabrati nove osnovne jedinice mehanike. U analogiji s (5-1) to su

$$[l]^2 [m] [t]^{-2} = [W]. \quad (5-2)$$

Podijelimo li izraz (5-2) sa (5-1) dobivamo uz oznake

$$\frac{[l]}{[l]_o} = 10^a, \quad \frac{[m]}{[m]_o} = 10^b, \quad \frac{[t]}{[t]_o} = 10^c, \quad \frac{[W]}{[W]_o} = 10^d \quad (5-3)$$

ovu vezu između eksponenata

$$2a + b - 2c = d. \quad (5-4)$$

Usvajimo li u novom sistemu jedinica, koji koherentno obuhvaća elektromagnetizam i mehaniku, istu jedinicu vremena, dakle $[t] = [t]_o = s$, te budući da je $[W] = 10^7 [W]_o$, slijedi $c = 0$, $d = 7$. Prema tome se izraz (5-4) reducira u

$$2a + b = 7. \quad (5-5)$$

Ako se odabere kao nova jedinica duljine $[l] = \text{metar} = 100 \text{ cm} = 10^2 [l]_o$ onda je $a = 2$, pa iz (5-5) dobivamo $b = 3$, što s (5-3) daje $[m] = 10^3 [m]_o = 1000 \text{ g} =$

= 1 kilogram, dakle Međunarodni sistem jedinica današnjice. Perry-Mieov sistem zahtijevao bi zbog $[l] = [l]_0 = \text{cm}$, $a = 0$, dakle $b = 7$ i prema tome $[m] = 10^7 [m]_0 = 10$ tona (mase).

Morala su proći dva svjetska rata od kongresa u St. Louisu da od *Giorgijeva* prijedloga nastane svjetski sistem jedinica usvojen međunarodnim dogovorom. Razloga tome bilo je mnogo. Stanje mjerne tehnike danas i ono od prije 60 godina teško se uopće može usporediti. Paralelno s razvojem umijeća mjerenja razvijala se i teorija metrologije koja je u nekim razdobljima prestizala mjernu tehniku, a u drugima postajala metrološka mistika. I terminologija se prilagođivala sve savršenijem stanju praktičke i teoretske metrologije. Pri proučavanju starih članaka iz električke metrologije nužno se nameće zaključak da do rješenja mnogih pitanja nije ranije dolazilo jednostavno zato jer diskutanti nisu razumjeli jedan drugoga. Pa i danas kada Međunarodni sistem jedinica koherentno vlada svim granama znanosti i tehnike, neka se pitanja odugovlače možda samo zato jer se vrhunski metrolozi ne razumiju ili ne žele da razumiju (racionalizacija, vidi odsječak 6).

Giorgijev je prijedlog naišao na sveopću pozornost u čitavom svijetu, iako je bio samo jedan od mnogih prijedloga. Naišao je na mnoge pristalice i na još više protivnika. Najžešći protivnik bila je inercija kojoj smo podložni svi. Drugi jači protivnik bila je voda, iako je ona u Međunarodnom sistemu jedinica dobila okruglu vrijednost gustoće $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. No taj »argument« (»brojčani iznos gustoće u CGS sistemu ima brojčanu vrijednost 1«, BA 1868.—1873) otpao je otkrićem deuterija i teške vode.

Razdvajanje između apsolutnih CGSM jedinica i praktičnih jedinica teklo je međutim dalje. Nakon preliminarne konferencije 1905. godine u Berlinu održana je 1908. godine u Londonu Međunarodna konferencija za električke jedinice i etalone. Tamo je službeno zaključeno da treba razlikovati niz »teoretskih« jedinica izvedenih iz CGSM jedinica od praktičkih jedinica koje se izvode iz materijalnih etalona i nazivaju »međunarodnim (elektrotehničkim) jedinicama« (to su jedinice Tehničkog sistema; vidi odsječak 4).

Definicije »materijalnih« ohma i ampera izmijenjene su utoliko što je za ohm rečeno da je stupac dugačak 1,06 300 m, umjesto 1,063 m, a za amper da se radi o 1,11800 miligrama srebra, umjesto 1,118 mg. Time se htjelo reći da mjerenja treba poduzimati na petu decimalu tačno. Volt je ostao definiran kao umnožak ohma i ampera, ali kao sekundarni etalon prihvaćen je *Westonov* temperaturno postojani element koji sa zasićenim elektrolitom daje napon 1,01830 volti (V_0) pri temperaturi 20 deg.

Na taj su se način praktičke elektromagnetske jedinice posve udaljile od prvotno postavljenog cilja da materijalni etaloni služe kao osnova praktičnom reproduciranju CGSM jedinica, odnosno njihovih višekratnika. Ove praktične ili međunarodne jedinice nisu se iskazale čak ni u pogledu mjerne praktičnosti pri reprodukciji jedinica. Na primjer određivanje jedinice jakosti struje amper pomoću srebrovog voltametra iziskuje preko 60 tačnih i dugotrajnih pokusa i mjerenja, uz najpažljivije uzimanje u obzir svih propisanih mjerno-tehničkih uvjeta (vidi odsječak 4).

Slično je i sa nespretnim stupcem žive pri etalonu ohma. Stoga su i najprecizniji laboratoriji umjesto srebnog ohma upotrebljavali manganske standardne otpornike, a umjesto srebnog ampera *Westonov* element kao preciznu normalu napona.

U to je vrijeme mjerna tehnika već na zavidnoj visini, pa je Londonska konferencija 1908. godine bila izvanredna prilika da se uvedu »apsolutne praktične jedinice«, tj. one koje smo 40 godina kasnije prihvatili kao Međunarodni sistem jedinica. Konferenciji je naime predsjedavao *Lord Rayleigh*, genijalni učenjak koji je

zastupao ideju apsolutne definicije ampera kakvu imamo danas (vidi odsječak 2.3), a realiziramo je baš pomoću vage njegove konstrukcije. U svojoj besjedi on je između ostaloga izjavio za žiyn ohm:» . . . Neću reći da je definicija ohma kao stupca žive nelogična, no teško da je u skladu s današnjom preciznošću apsolutnih mjerenja . . . « Većina delegata nije ga poslušala ili razumjela, trebalo je proći daljnjih 40 godina da se usvoji ono što je on dalekovidno predlagao 1908. godine.

U toku prvog svjetskog rata u Americi su 1916. godine *Dellinger* i *Bennet* ponovo predložili sistem VAScm koji smo već spomenuli uz *Perryja* iz godine 1891. *Ascolijevo* nam je pravilo pokazalo da taj sistem može biti mehaničko-elektromagnetski koherentan samo ako je jedinica mase 10 tona. Zato je taj sistem ostao parcijalan samo za elektrotehniku premda ga je u svom glasovitom udžbeniku kasnije propagirao *Mie*, u Francuskoj *Blondel*, a u Jugoslaviji *Lončar*.

Međunarodna metrološka djelatnost na području elektromagnetizma nastavljena je nakon prvog ratnog prekida tek 1927. godine plenarnim zasjedanjem Međunarodne elektrotehničke komisije CEI u Bellagiu. 1904. osnovana je naime CEI koja je u pogledu jedinica i etalona elektromagnetizma preuzela funkcije elektrotehničkih kongresa. U pogledu magnetskih jedinica nije postignuto ništa konkretno, osim što je osnovan poseban odbor CEI za električke i magnetske veličine i jedinice.

Slijedeće godine zasjedao je u Parizu savjetodavni odbor za elektriku Generalne konferencije za mjere i utege. Raspravljalo se o tome da li da se i dalje zadrže »materijalne« električke jedinice ili da se sve vrati na multiple Gaussovih jedinica. Rezultat je bio kompromisan: sa zamjenom valja pričekati tako dugo dok veliki i specijalno opremljeni državni laboratoriji u čitavom svijetu utvrde odnose između praktičnih (međunarodnih) i CGSM jedinica. Zahtijevana je bila tačnost 10^{-5} što je tada mjerna tehnika već postigla.

Naredno, plenarno zasjedanje CEI održano je 1930. godine u Stockholmu i Oslu. Odlučeno je da indukcija B i jakost polja H u vakuumu ne budu iste već različite veličine, pa je stoga indukciona konstanta $\mu_0 = B/H$ posebna veličina, dok je samo relativna permeabilnost $\mu_r = \mu/\mu_0$ čista brojka. Istodobno su usvojene četiri »nove« jedinice: $\text{maxwell} = [\Phi]_m$, $\text{gauss} = [B]_m$, $\text{oersted} = [H]_m$ i $\text{gilbert} = [V]_m$ (vidi tablicu X).

Osebjuni su daljnji zaključci tog zasjedanja koji su propisivali da se u praktičnom sistemu upotrebljavaju iste jedinice ali s prefiksom »pra«, što je trebalo označivati da se radi o »praktičnim« jedinicama! Ovi zaključci nikada nisu realizirani u praksi, ali su ipak doveli do daljnjih nesporazuma.

1931. godine Međunarodna unija za čistu i primijenjenu fiziku osnovala je na svom zasjedanju u Bruxellesu poseban odbor za simbole, jedinice i nomenklaturu (SUN) koji je zaključke CEI 1930. podvrgao organiziranoj međunarodnoj anketi. Ona je potvrdila samo one zaključke koji su se odnosili na razliku između B i H te na nazive CGSM jedinica.

Osmi elektrotehnički kongres održan je 1932. u Parizu. Budući da se tom prilikom našlo tamo mnogo uglednih fizičara odbor SUN sazvao je informativni skup na kojemu se većina suglasila s time »da su B i H dvije različite veličine«. Zaključeno je da se preporučuje osnivanje takvog mjernog sistema koji će sadržavati praktične jedinice J , W , C , A , Ω , V , F i H .

Slijedeće godine zasjedao je u Parizu Studijski odbor za električke i magnetske jedinice i veličine CEI koji je potvrdio zaključke u pogledu veličina μ i μ_0 na IEC 1930. Predloženi su nazivi jedinica $\text{weber (Wb)} = 10^8 [\Phi]_m$, $\text{siemens (S)} = 1/\Omega$ i $\text{hertz (Hz)} = \text{per/s} = \text{s}^{-1}$. U zaključku su raspisali anketu nacionalnim

odborima CEI koji su trebali odgovoriti na pitanje da li su suglasni s koherentnim proširenjem postojećih elektromagnetskih jedinica na jedinice mehanike (m, kg, s), drugim riječima da li se slažu s uvođenjem koherentnog i univerzalnog Međunarodnog sistema jedinica.

Na temelju odgovora nakon ankete odlučeno je na plenarnom zasjedanju IEC u Scheveningenu 1935. godine da se međunarodno uvede apsolutni Giorgijev sistem jedinica s tri osnovne jedinice: metar, kilogram i sekunda, dok je pitanje četvrte nezavisne (elektromagnetske) jedinice ostalo otvoreno. Time su »praktične« (međunarodne) jedinice (vidi odsječak 4) bile osuđene na zaborav.

Posljednje zasjedanje IEC-a prije drugog svjetskog rata održano je 1938. godine u Torquayu, gdje je zaključeno da se jedinici sile u Međunarodnom sistemu dade ime: newton (N) = 10^5 dyn. Pitanje izbora četvrte osnovne jedinice, kao i problemi racionalizacije, ostali su neriješeni. Rat je prekinuo taj plodan rad.

Nakon drugog svjetskog rata Međunarodni odbor za mjere i utege Generalne konferencije za mjere i utege prvi se puta sastao 1946. godine. Potvrđen je zaključak iz 1935. godine kojim se kao datum uvođenja Međunarodnog apsolutnog sistema jedinica odredio 1. 1. 1940, ali se to zbog početka rata nije moglo ostvariti. Novi datum međunarodnog uvođenja novih jedinica određen je sa 1. 1. 1948. Utvrđeni su faktori pretvorbe $\Omega_0 = 1,000\,49\,\Omega$ i $V_0 = 1,000\,34\,V$ (vidi odsječak 2.5) koji su srednja vrijednost najtačnijih usporedbenih mjerenja u velikim državnim metrološkim laboratorijima.

Deveta generalna konferencija raspravljala je 1948. godine o četvrtoj polaznoj jedinici Međunarodnog sistema, ali zaključak nije donijela, već je to na temelju mišljenja svojih država-članica učinila Deseta generalna konferencija godine 1954. Tada su usvojene ove četiri polazne jedinice Međunarodnog sistema:

metar, kilogram, sekunda i amper,

zatim Kelvinov stupanj u termodinamici i candela u fotometriji.

Time bismo mogli zaključiti naš prikaz historijskog razvoja. Međunarodni sistem jedinica zauzeo je mjesto svojih prethodnika CGSM, CGSE i »praktičnih« sistema jedinica koji su pravno nestali s međunarodne pozornice, a sada polako iščezavaju i iz prakse, gdje se odupiru još jedino silom inercije.

Za Jugoslaviju su u tom pogledu važne dvije odluke nastale u najnovijem razdoblju. Prva je međunarodnog karaktera. Godine 1954. Studijski odbor 24 IEC preporučio je da se Međunarodna jedinica magnetske indukcije nazove tesla po jugoslavenskom učenjaku *Nikoli Tesli*. Međunarodni odbor za mjere i utege preuzeo je ove preporuke u svoje preporuke te uveo kraticu T = tesla. To je međunarodno obavezan zaključak jer je Odbor imao za tu svrhu punomoć Generalne konferencije za mjere i utege. Naknadno je tu odluku potvrdila Jedanaesta generalna konferencija za mjere i utege održana oktobra 1960. godine u Parizu.

Druga važna odluka odnosi se na primjenu Međunarodnog sistema jedinica u Jugoslaviji. Godine 1957. izašli su standardi JUS A.A1.020 i JUS A.A1.040 koji propisuju nazive, oznake i definicije veličina, te primjenu Međunarodnog sistema jedinica.

6. RACIONALIZACIJA

Izvore li iz nekog tačkastog izvora nestlačiva tekućina konstantne protoke $Q = \text{const.}$ (sl. E17a) tekućina će se jednoliko širiti na sve strane ako pretpostavimo da se svuda oko izvora ali daleko od njega, nalazi ponor kuda tekućina uvire. Osim

toga pretpostavljamo da je isključeno gravitaciono polje pa se tekućina širi iz tačkastog izvora na sve strane kao da osvaja kuglast prostor. Postavljamo pitanje: Kolika je brzina tekućine v u udaljenosti r od centra izvora?

U diferencijalu vremena dt tekućina se pomakne za $dr = v dt$ od izvora. Pri tom tekućina zapremi volumen $dV = A dr = 4\pi r^2 dr$ gdje je $A = 4\pi r^2$ površina zamišljene koncentrične kugle ocrtane oko izvora (sl. E17a). Prema tome je $dV = 4\pi r^2 v dt$. Budući da je protoka Q definirana vremenskom promjenom volumena, dakle $Q = dV/dt$, to je $Q = 4\pi r^2 v$, odakle slijedi izraz za brzinu tekućine na udaljenosti r od izvora

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (6-1)$$

Ista jednadžba ali s negativnim predznakom vrijedi za analogno uviranje tekućine u ponor protoke $-Q$ (sl. E17b). Kad se izvor $+Q$ nalazi u blizini ponora protoke $-Q$ nastaje polje strujanja tekućine koje je strujnicama približno nacrtano na slici E17c. Strujnice predstavljaju konstantne brzine tekućine.

Sve tri slike vrijede i za elektrostatsko polje ako umjesto protoka $+Q$ i $-Q$ shvatimo množine elektrike, a umjesto brzine tekućine električku indukciju

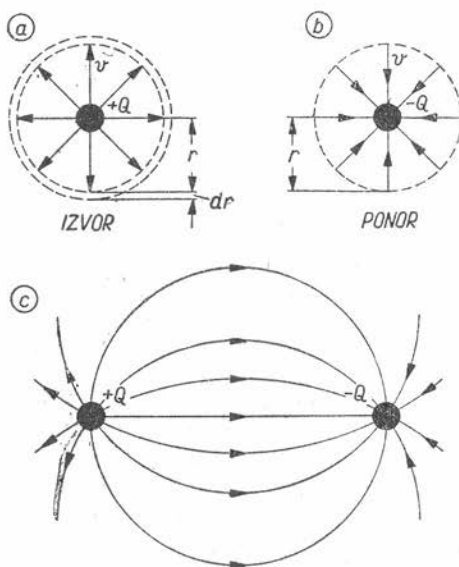
$$D = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (6-2)$$

Ta dva polja pokazuju formalnu sličnost i u drugim jednadžbama, pa je tako istog oblika Laplaceova jednadžba, a potom i sve druge koje iz nje slijede. I jednadžbe strujanja električne struje formalno su identične s hidrodinamičkim i elektrostatskim.

Zamislimo li da je na slici E17a prikazano elektrostatsko polje u tvari s dielektričnošću ϵ , jakost električkog polja u udaljenosti r od tačkaste elektrike Q iznosit će $E = D/\epsilon$. Stavimo li u to polje neku drugu množinu elektrike q one će se međusobno od-
bijati silom $F = qE$, dakle

$$F = qE = \frac{qD}{\epsilon} = \frac{Qq}{\epsilon 4\pi r^2} \quad (6-3)$$

To je Priestley-Coulombov zakon koji smo već imali u odsječku 3.1. Sve tri ovdje napisane jednadžbe su dakako veličinske, što smo istakli *kurzivnim* slovima. Ostale veličinske jednadžbe električkog polja, kao i elektromagnetskog polja uopće, napisali smo u stupcu 4 tablice X, zatim u tablici E.1, u tablici E.4, a dijelom i u odsječku 1.4.



Sl. E17. Polja između izvora i ponora

Iz tih izlaganja slijedi da na primjer izrazi za kapacitet pločastog i kuglastog kondenzatora glase

$$C = \varepsilon A/d, \quad C = \varepsilon 4\pi r, \quad (6-4)$$

gdje je A površina jedne od obloga pločastog kondenzatora, a d razmak među paralelnim metalnim pločama.

U tablicama X (stupci 6, 12, 14), E.4 (desna dva stupca) i u odsječku 3.1 naveli smo i drukčije oblike jednačbi koje se upotrebljavaju u starijoj literaturi nauke o elektromagnetizmu. Tako se na primjer u toj literaturi za električnu indukciju umjesto jednačbe (6-2) upotrebljava

$$D = Q/r^2, \quad (6-5)$$

a umjesto izraza (6-3) piše

$$F = \frac{Qq}{\varepsilon r^2}, \quad (6-6)$$

dok formule za kapacitet pločastog i kuglastog kondenzatora redom glase

$$C = \frac{\varepsilon A}{4\pi d} \quad C = \varepsilon r. \quad (6-7)$$

Usporedimo li međusobno izraze (6-2) sa (6-5), (6-3) sa (6-6), te (6-4) sa (6-7) vidimo da u starijim formulama manjka matematički faktor 4π baš ondje gdje je razumno da se pojavi. Zbog toga su te jednačbe prozване »neracionalnim«. Smatra se nerazumnim da se 4π pojavljuje u lijevoj jednačbi (6-7) gdje se radi o kapacitetu pločastog, dakle ravnog kondenzatora površine $A = ab$, a manjka u desnoj jednačbi gdje se radi o kugli koju karakterizira površina $A = 4\pi r^2$ i obujam $V = 4\pi r^3/3$.

Suprotno neracionalnim jednačbama izrazi (6-1, 2, 3 i 4) smatraju se »razumnima« ili »racionalnima«, jer se faktor 4π pojavljuje tamo gdje je to prirodno očekivati obzirom na karakter elektrostatskog, elektrostrujnog i hidrodinamičkog polja (mogli bismo reći i magnetostatskog, ali budući da je magnetsko polje posljedica električne struje, ne služimo se pojmom »magnetskih masa« što je činila stara nauka o magnetizmu).

Činjenicu da se faktor 4π nalazi na krivim mjestima uočio je još 1882. godine čuveni engleski matematičar i elektrofizičar *Oliver Heaviside*, a kasnije su se, sve do današnjih dana, tim pitanjem bavili mnogi učenjaci i međunarodne organizacije. Problem je naime u tome: šta treba učiniti da se od neracionalnih jednačbi načine racionalne?

Predloženo je mnogo rješenja od kojih danas u međunarodnom smislu nije definitivno prihvaćeno ni jedno. Budući da ovdje nije mjesto za raspravljanje o tom 80-godišnjem problemu zainteresiranog čitatelja upućujemo na literaturu navedenu na kraju knjige. Odgovarajući članci mogu se prepoznati po naslovima kojima je zajednička riječ »racionalizacija«, što označuje postupak prijelaza od neracionalnog na racionalni oblik jednačbi elektromagnetskog polja. Posebno upućujemo na članak profesora *Avčina* (Elektrotehnički vjesnik 1957, br. 1-2, str. 2-7) u kojemu je naznačeno osam načina racionalizacije!

Ovdje ćemo ocrtati jedno rješenje pitanja racionalizacije koje mi zastupamo. Pri tom moramo naglasiti bitnu činjenicu koja slijedi iz dosadašnje usporedbe jednadžbi (6—1) do (6—7). Ta nam usporedba pokazuje da su racionalne jednadžbe veličinske, a neracionalne brojčane. Odavde odmah slijedi naputak kako se može izvršiti racionalizacija brojčanih jednadžbi.

Poslužimo se primjerom iz elektrostatičke. Jednadžbe koje međusobno povezuju električku indukciju i električku polarizaciju glase

$$(6-8) \quad D = \epsilon_0 E + P \qquad D = E + 4 \pi P \qquad (6-9)$$

gdje je lijevo veličinska jednaždba, a desno brojčana, prilagođena jedinicama CGSE sistema jedinica. Prema tome od desne jednadžbe možemo napraviti veličinsku tako da u (6—9) umjesto brojčanih iznosa D , E i P u skladu sa $G = G/[G]$ uvrstimo omjere veličina i pripadnih jedinica $D = D/[D]$, $E = E/[E]$, $P = P/[P]$, gdje jedinice u uglatim zagradama predstavljaju jedinice CGSE sistema. Uvrstimo li ove odnose u (6—9) dobivamo

$$\frac{D}{[D]} = \frac{E}{[E]} + 4 \pi \frac{P}{[P]} \quad \text{ili} \quad D = E \frac{[D]}{[E]} + P \frac{4 \pi [D]}{[P]}. \qquad (6-10)$$

Iz stupaca 7, 8 i 9 tablice X saznajemo da je $[D] = 2,6544 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$, $[E] = 2,9979 \cdot 10^4 \text{ V/m}$, $[P] = 3,3356 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$. Izračunamo li omjere jedinica u desnoj jednadžbi (6—10) dobivamo

$$[D]/[E] = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = \epsilon_0; \quad 4 \pi [D]/[P] = 1.$$

Uvrstimo li to u izraz (6—10) slijedi

$$D = \epsilon_0 E + P, \qquad (6-8)$$

a to je naša racionalna veličinska jednadžba. Vidimo da je racionalizacija izvršena tako da smo od brojčane jednadžbe (6—9) prilagođene CGSE jedinicama prešli na univerzalnu veličinsku jednadžbu!

Takav rezultat bio je zapravo već sadržan u odsječcima 3.1 i 3.2. Tamo smo prilikom određivanja odnosa između jedinica elektrostatskog i magnetostatskog sistema jedinica s jedne strane, a Međunarodnog sistema s druge, pretpostavljali da se radi o istim veličinama, samo što su njihovi brojčani iznosi u brojčanim jednadžbama prilagođeni CGSE ili CGSM jedinicama. Prema tome takva zaista »razumna racionalizacija« dobiva definiciju: *Racionalizacija je prijelaz od brojčanih jednadžbi, prilagođenih CGSE i CGSM jedinicama, na univerzalne racionalne veličinske jednadžbe.*

Takva je racionalizacija u stvari potpuno u skladu sa suvremenom razvojnom linijom metrologije. Svi znamo da jednadžbe elektromagnetizma postoje zato da bismo pomoću njih mogli proračunati ono što želimo materijalno realizirati, ili da s njima otkrijemo nešto što još nije poznato. Prema tome jednadžbe služe za praktične svrhe. Pri tom je želja svakoga da računa pouzdano, tačno, da su mu računski pregledni. Ista je želja i u nastavi, gdje čak treba naučiti osnovama na kojima će oni raditi u radionicama ili znanstvenim institutima. Svim tim zahtjevima savršeno udovoljavaju jedino veličinske jednadžbe, koje su čak

toliko univerzalne da se u njih mogu uvrštavati vrijednosti veličina izražene jedinicama različitih sistema jedinica, pa čak i nesistematičnih skupova jedinica koji ne udovoljavaju načelu koherencije $1 \times 1 = 1$. O tome smo se u ovoj knjizi mogli uvjeriti na mnoštvu stvarnih primjera. Stoga je posve sigurno da će se izloženo rješenje prihvatiti onda kad se svi uvjere u goleme prednosti veličinskih jednadžbi.

Predložena racionalizacija bazira na činjenici da su racionalne jednadžbe veličinske, a neracionalne brojčane. No ima u svijetu stanovit broj ljudi, neznatan doduše, koji primjenjuje veličinske jednadžbe elektromagnetskog polja u neracionalnom obliku. Oni stoga predlažu primjenu veličinskih jednadžbi neracionalnog tipa

$$B = \mu_0' H' + 4 \pi \mathcal{J}',$$

gdje slova s crticom označuju neracionalne veličine. Budući da je racionalna veličinska jednadžba, koja se normalno upotrebljava, $B = \mu_0 H + \mathcal{J}$, usporedbom dobivamo odnos veličina

$$H' = 4 \pi H, \quad \mu_0 = 4 \pi \mu_0', \quad \mathcal{J} = 4 \pi \mathcal{J}',$$

što znači da su neracionalne veličine različite od racionalnih otprilike onako kao što se promjer d zbog $d = 2 r$ razlikuje od radijusa r .

Takav postupak »deracionalizacije veličina« osuđen je na propast već u samom zametku, jer bi novim definicijama veličina unio beskrajnu zbrku, a ujedno izbacio racionalni oblik veličinskih jednadžbi. Danas se, kao i u prošlosti, teži baš suprotnome: stavljanju faktora 4π tamo gdje on spada po logičnoj geometrijskoj interpretaciji polja, dakle onako kao na primjer u hidrodinamici, što nam pokazuje jednadžba (6—1) i gdje nitko ne dolazi na pomisao da uvede recimo »neracionalnu brzinu tekućine« $v' = Q/r^2$.

Baš obrnuti postupak, dakle racionalizacija veličina, bit će vjerojatno potreban u teoriji gravitacionog polja. U odsječku B.16 napisali smo *Newtonov* »zakon djelovanja na daljinu« između nebeskih tjelesa masa M i m , udaljenih r , u obliku

$$F = \gamma \frac{m M}{r^2} \quad (6—11)$$

te utvrdili da je konstanta gravitacije

$$\gamma = g r^2 / M = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (6—12)$$

gdje je g ubrzanje sile teže Zemlje, a M masa Sunca. Obje su jednadžbe dakako veličinske.

Pomoću (6—12) možemo izraz (6—11) pisati u obliku

$$F = g m,$$

gdje u analogiji s elektrostatskim poljem $F = E Q$ možemo g shvatiti kao jakost gravitacionog polja mase M u kojem se polju nalazi planet mase m (sl. E18).

U analogiji s jednadžbom (6—3) i *Newtonov* bi se zakon mogao pisati u obliku

$$F = \frac{M m}{\Gamma 4 \pi r^2},$$

što usporedbom sa (6—11) daje odnos između »racionalne gravitacione konstante« Γ i »neracionalne« γ :

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi\gamma} = 1,195 \cdot 10^9 \text{ kg s}^2/\text{m}^3.$$

Danas još možda nije potrebno »racionalizirati« gravitacionu konstantu γ . No ako se jednom uspije izgraditi jedinstvena teorija polja koja će udružiti gravitaciono i elektromagnetsko polje, takav će postupak biti potreban. Takva se univerzalna teorija već dugo najavljuje.

Do stanovitih promjena u jednadžbama elektromagnetskog polja dolazi i kod predložene naše racionalizacije, čije smo načelo ovako definirali: *Racionalizacija je prijelaz od brojčanih jednadžbi, prilagođenih CGSE i CGSM jedinicama, na univerzalne racionalne veličinske jednadžbe.* Te promjene već smo obradili u odsječcima 1.2 i 1.3, no one su posve neznatne i odnose se samo na vrlo specijalizirana područja.

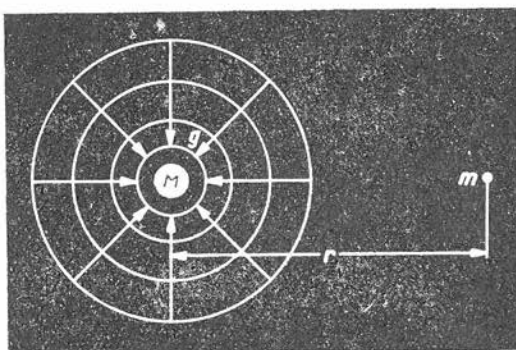
U spomenutim odsječcima imali smo relativnu električnu susceptibilnost $\xi = \epsilon_r - 1$, specifičnu susceptibilnost $\chi = \xi/\rho$, faktor depolarizacije N , te relativnu i specifičnu magnetsku susceptibilnost $\kappa = \mu_r - 1$ i $\chi = \kappa/\rho$. Budući da ove veličine proizlaze iz definicija s racionalnim veličinskim jednadžbama možemo ih nazvati »racionalnim«. Starije istoimene veličine označili smo u odsječcima 1.2 i 1.3 crticama i izveli veze

$$\xi = 4\pi\xi', \chi = 4\pi\chi', N' = 4\pi N, \kappa = 4\pi\kappa'.$$

Budući da ove veličine slijede iz neracionalnih brojčanih jednadžbi, možemo ih nazvati »neracionalnim« veličinama. Vidimo da su, osim specifičnih susceptibilnosti, to samo brojčane veličine.

7. VELIČINSKE I BROJČANE JEDNADŽBE ELEKTROMAGNETIZMA

U ovoj smo knjizi veliku pažnju posvetili veličinskim jednadžbama. Razlog tome posve je razumljiv: veličinske jednadžbe jedine su primjenljive za bilo koji sistem jedinica, pa čak i za jedinice različitih sistema; one ne ovise o izboru jedinica. Računanje s njima jedino je posve pouzdano, one omogućuju kontrolu na svakom koraku računa. Suštinu veličinskih jednadžbi, te usporedbu s brojčanim jednadžbama koje vrijede samo za odabrane jedinice, opisali smo u odsječku A.5.



Sl. E 18. Zemlja u gravitacionom polju Sunca

Osim toga smo u odsječku B.13 analizirali upotrebljavane brojčane jednadžbe na konkretnim primjerima. Analogno smo u odsječku D.8 upoznali prednosti veličinskih jednadžbi u termodinamici.

Nažalost ni u šarenoj elektrofizikalnoj literaturi nisu dosljedno primijenjene veličinske jednadžbe, već se u pojedinim dijelovima te znanosti primjenjuju najčudnovatije brojčane jednadžbe kakve se uopće mogu zamisliti. One su prilagođene vrlo šarenom društvu jedinica, što đacima i studentima već za studija uzrokuje mnoge nepotrebne teškoće kojih se ne mogu otresti ni kasnije u praksi, kad se moraju poslužiti priručnikom ili udžbenikom napisanim s brojčanim jednadžbama. Zbog obilja sistema jedinica i historijskog razvoja metrologije (vidi odsječak 5) na elektromagnetskom području možda najveće neprilike čine brojčane jednadžbe. Ima ljudi koji se profesionalno bave elektromagnetizmom a da još uvijek nisu shvatili suštinu prenatrpanosti elektromagnetizma najrazličitijim jedinicama. Takovima svaka knjiga ili članak napisani s drugačijim jednadžbama od onih na koje su oni navikli predstavlja pravu muku pri čitanju. Iskustvo pokazuje da sve postaje mnogo lakše kad se ti ljudi pomoću veličinskih jednadžbi oslobode »mističnosti« jedinica.

Ovdje ćemo ukratko ponovo naglasiti da simboli u veličinskim jednadžbama predstavljaju veličine koje su uvijek sastavljene od umnoška brojčanog iznosa i jedinice. Općenito pišemo da je veličina $G =$ brojčani iznos $G \times$ jedinica $[G]$, dakle $G = G [G]$. Veličine pri tom tiskamo *kurzivnim* slovima, brojčane iznose uspravnima, a jedinice u općem obliku stavljamo u uglastu zagradu.

Brojčane su jednadžbe one u kojima simboli predstavljaju brojčane iznose. Stoga se uz njih mora u tekstu uvijek naglasiti kojim jedinicama moraju biti izraženi brojčani iznosi.

Unatoč ovim napomenama preporučujemo da se prije daljnjih razmatranja o primjeni veličinskih i brojčanih jednadžbi u elektromagnetizmu pročita već spomenute odsječke koji se istim problemom bave u mehanici, hidrodinamici i termodinamici.

7.1. Otpor isijavanja antene

Ukupni otpor antene satoji se od djelatnog otpora koji je karakteriziran Jouleovim gubicima i od otpora R koji slijedi iz snage zračenja antene $P = R I^2$, gdje je I struja koju u antenu šalje generator. Otpor isijavanja R određuje veličinska jednadžba

$$R = \frac{2\pi}{3} Z_{v0} \frac{l^2}{\lambda^2}; \quad Z_{v0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (7.1-1)$$

koja slijedi iz teorije antenskog isijavanja elektromagnetskog polja (po *H. Hertzu*). U gornjoj jednadžbi Z_{v0} je valni otpor zraka koji smo u odsječku 1.4 izveli kao korijen iz omjera indukcione i influencione konstante. Dalje su l i λ ukupna duljina antene i valna duljina isijavanih elektromagnetskih valova. Radi li se o anteni visine l koja se ne napaja u sredini, već na svom podnožju, u izrazu (7.1-1) nije faktor 2π , već samo π , dakle je otpor isijavanja R upola manji, jer se uz iste jakosti polja snaga isijava samo u polovinu prostora. Gornja jednadžba vrijedi kad je l malo u odnosu na λ .

U većini knjiga rijetko nalazimo veličinsku jednadžbu (7.1-1). Mnogo je češća brojčana jednadžba prilagođena stanovitim jedinicama na takav način, da

iz nje posve iščezava valni otpor zraka, koji je kod emisije elektromagnetskog polja stvarno od bitnog značenja (usporedi s izvođenjem u odsječku 1.4). Pogledat ćemo kako se dolazi do takvih krnjih brojčanih jednadžbi. Da bismo to učinili moramo najprije simbole veličina u (7.1—1) prikazati kao umnoške brojčanih iznosa i upotrebljenih jedinica po načelu $G = G [G]$. Obično se otpor isijavanja mjeri u ohmima, duljina antene u metrima, valna duljina u kilometrima, dok je $Z_{v0} = 377 \Omega$ (odsjek 1.4). Prema tome možemo pisati

$$R = R \cdot \Omega, \quad l = l \cdot m, \quad \lambda = \lambda_n \cdot km, \quad (7.1—2)$$

gdje *kurzivna* slova označuju veličine, a uspravna brojčane iznose¹⁾ u m i km. Uvrstimo li ove produkte u izraz (7.1—1) dobivamo

$$R \Omega = \frac{2 \pi}{3} 377 \Omega \frac{l^2 m^2}{\lambda_n^2 (km)^2},$$

odakle preuređenjem slijedi

$$R = 0,79 \cdot 10^{-3} \cdot l^2 / \lambda_n^2. \quad (7.1—3)$$

Želimo li da se s ovom brojčanom jednadžbom ispravno računa, moramo uz nju objasniti da se broj ohma R dobiva ako se u (7.1—3) na mjesto l uvrsti broj metara, a na mjesto λ_n broj kilometara.

Još je neprikladnija brojčana jednadžba koju nalazimo za otpor isijavanja antene u nekim starijim udžbenicima fizike

$$R = \frac{8 \pi^2}{3 c} \frac{l_n^2}{\lambda^2}, \quad (7.1—4)$$

gdje je $c = 2,9979 \cdot 10^{10}$ (vidi odsječak 1.4). Čitatelj može s malo muke sam zaključiti da u ovoj brojčanoj jednadžbi simboli predočuju

$$R = R/[R]_e, \quad l = l/cm, \quad \lambda_e = \lambda/cm,$$

gdje je $[R]_e = 8,9872 \cdot 10^{11} \Omega$, tj. jedinica CGSE sistema (kontroliraj pomoću odnosa jedinica u tablici X), dakle je (7.1—4) prilagođena Gaussovu sistemu jedinica koji smo opisali u odsječku 3.3.

Iako u stvarnosti nitko živ ne računa antenu pomoću formule (7.1—4) ipak neki od ono malo gorljivih pristaša CGS sistema jedinica likuju »da je ovdje brzina svjetla c ipak na pravom mjestu«. Međutim ni to nije tačno. Iz odsjeka 3.3 znamo naime da c nije brzina svjetla, već brojčani iznos brzine svjetla mjerene jedinicom cm/s, a ovamo dolazi kao omjer CGSM i CGSE jedinica. Stvarno je u izraz za

¹⁾ Od ovog pravila odstupamo kod grčkih slova. Budući da tiskara nema *kurzivnih* znakova za grčka slova, prisiljeni smo grčki označene veličine tiskati uspravnim znakovima. Kako bismo te veličine razlikovali od pripadnih brojčanih iznosa, potonjima dodajemo indeks n (n-numerus). Na primjer λ_n je brojčani iznos veličine valna duljina λ , dakle u razmatranom primjeru $\lambda_n = \lambda/\text{kilometar}$.

otpor isijavanja antene vrlo lako uvesti brzinu svjetla, ali pravu veličinu brzina v_0 . U odsječku 1.4 ustanovili smo da je $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$. Uvrstimo li to u veličinsku jednadžbu (7.1—1) odmah slijedi

$$R = \frac{2\pi}{3} \mu_0 v_0 \frac{l^2}{\lambda^2} = \frac{2\pi}{3} \frac{l^2 f^2}{\epsilon_0 v_0^3}.$$

S temeljnom relacijom $v_0 = f\lambda$ dobili smo dakle ne samo v_0 u izrazu za R , nego čak i treću potenciju veličine brzine svjetla! Ipak gornje dvije jednadžbe ne upotrebljavamo jer je (7.1—1) najjednostavnija.

Netom smo spomenuli relaciju $v_0 = f\lambda$ gdje je f frekvencija. U vezi s time korisno je upozoriti na *Thomsonovu* brojčanu jednadžbu titrajna kruga

$$\lambda_n = 2\pi \sqrt{LC}, \quad (7.1—5)$$

kojom se dobiva broj centimetara »vlastite valne duljine« titrajnog kruga, ako se na mjesto simbola L uvrsti broj CGSM jedinica induktiviteta, a na mjesto C broj CGSE jedinica kapaciteta kruga. Da neprilika bude veća, sva tri simbola λ_n , C , L označuju »centimetre«, ako se upotrebe krivo interpretirane jedinice Gaussova sistema (vidi odsječak 3.4)!

Od brojčana izraza (7.1—5) odmah ćemo napraviti veličinsku jednadžbu. Stavimo u nju

$$\lambda_n = \lambda/\text{cm}, \quad L = L/[L]_m, \quad C = C/[C]_e$$

čime odmah pomoću tablice X dobivamo *Thomsonovu* jednadžbu u pravom veličinskom obliku.

$$\lambda = 2\pi v_0 \sqrt{LC} \quad \text{ili} \quad 1/f = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Fizikalno je ispravna desna jednadžba (lijeva je zbog $v_0 = \lambda f$ samo kompliciraniji oblik desne), jer osnovna je značajka titrajnog kruga njegova vlastita frekvencija f , a ne valna duljina λ . Valna duljina naime dobiva smisao tek onda kad titrajni kruga isijava u prostor elektromagnetske valove.

7.2. Magnetsko polje ravnog vodiča

U nekim udžbenicima i elektrotehničkim priručnicima vrlo često nailazimo na ovaj izraz za jakost magnetskog polja ravne, vrlo dugačke tanke žice kojom teče električna struja I

$$H = \frac{2I}{10r}. \quad (7.2—1)$$

Ovdje r predstavlja udaljenost od osi žice i na toj udaljenosti jakost polja iznosi H .

Da li je to brojčana ili veličinska jednadžba? Mi smo doduše (7.2—1) tiskali uspravnim znakovima, a ne *kurzivima* koje upotrebljavamo za veličine, ali to

još nije dokaz da je jednadžba brojčana. Shvatimo li gornji izraz kao veličinsku jednadžbu dobit ćemo u slučaju da struja iznosi $I = 10 \text{ A}$, a jakost polja želimo znati u udaljenosti $r = 1 \text{ m}$

$$H = \frac{2 \cdot 10 \text{ A}}{10 \cdot 1 \text{ m}} = 2 \text{ A/m}.$$

Da li je taj rezultat ispravan? U (7.2—1) naime vidimo brojku 10 koju uopće ne poznajemo iz veličinskih jednadžbi, jer u njima katkada dolaze brojke $1/2$, π , 4π , $1/2\pi$, ali broj 10 nikada.

Najbolje je da sami izvedemo veličinsku jednadžbu, pa ćemo vidjeti da li je (7.2—1) veličinska ili brojčana jednadžba. Račun ćemo izvesti pomoću zakona uzbude koji je u tablici X naveden pod brojem 11 u stupcu 4. Taj integralni izraz kaže da je kružni integral jakosti magnetskog polja H po zatvorenom krugu oko vodiča sa strujom jednak uzbudi koja je u udaljenosti r od vodiča stvorila magnetsko polje. Budući da je kod ravnoga vodiča uzbuda jednaka samoj struji, to je $\Theta = I$. Stoga primjena spomenutog općeg izraza iz tablice X za naš slučaj daje

$$H \cdot 2\pi r = I, \quad (7.2—2)$$

jer se magnetsko polje oko vodiča zatvara u koncentrične krugove. Na udaljenosti r od osi vodiča djeluje dakle ista jakost polja H na bilo kojem mjestu zamišljenog koncentričnog valjka polumjera r .

Preoblikujemo li (7.2—2) u eksplicitni oblik

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (7.2—3)$$

što je prava veličinska jednadžba (*kurzivni* simboli), usporedbom uviđamo da (7.2—1) nije veličinska, već brojčana jednadžba.

Pitanje je sada kojima je jedinicama prilagođena brojčana jednadžba (7.2—1). U priručniku odakle smo izvadili (7.2—1) o tome nije ništa spomenuto. Orijentirati se ipak možemo ako pogledamo koje jedinice autor priručnika inače upotrebljava. Nalazimo da se služi Međunarodnom jedinicom amper = A, ali da udaljenosti obično mjeri centimetrima. Sada smo od 3 nepoznanice odgonetnuli dvije. Preostaje nam još da ustanovimo jedinicu jakosti magnetskog polja čiji mjerni broj H sadrži izraz (7.2—1).

Tu jedinicu otkrit ćemo ako (7.2—1) postupno pretvorimo u veličinsku jednadžbu (7.2—3). Za tu svrhu po načelu »brojčani iznos = veličina / jedinica«, dakle $G = G/[G]$, najprije izrazimo brojčane iznose H , I , r iz (7.2—1) kao omjere veličina i jedinica koje pripadaju veličinama H , I , r :

$$H = H/[H], \quad I = I/A, \quad r = r/\text{cm} \quad (7.2—4)$$

Jedinicu jakosti magnetskog polja $[H]$ u kojoj je izražen brojčani iznos H u (7.2—1) nismo mogli detaljno naznačiti jer ne znamo koja je to jedinica. Stoga smo je kao nepoznanicu stavili u uglatu zagradu.

Uvrstimo li odnose (7.2—4) u (7.2—1) dobivamo

$$\frac{H}{[H]} = \frac{2 I/A}{10 r/\text{cm}} \quad \text{ili} \quad H = \frac{2 I}{10 r} \frac{[H] \text{ cm}}{A}. \quad (7.2—5)$$

Ovdje *kurzivni* znakovi prikazuju dakako veličine. Budući da je i jednadžba (7.2—3) veličinska, možemo je uvrstiti na lijevu stranu desnog izraza (7.2—5). Tako dobivamo

$$\frac{I}{2 \pi r} = \frac{2 I}{10 r} \frac{[H] \text{ cm}}{A},$$

odakle nakon kraćenja sa I i r slijedi nepoznata jedinica jakosti magnetskog polja:

$$[H] = \frac{10 A}{4 \pi \text{ cm}} = \frac{1000}{4 \pi} \frac{A}{\text{m}} = 79,577 A / \text{m}.$$

Iz ranijih razmatranja i iz tablice X znamo da je to oersted (Oe), jedinica jakosti Gaussova i CGSM sistema jedinica. Prema tome je brojčana jednadžba (7.2—1) prilagođena šarenom društvu jedinica: H i r predstavljaju brojčane iznose u CGSM jedinicama, a I brojčani iznos struje u jedinici Međunarodnog sistema!

Prilagođena veličinska jednadžba glasila bi dakle

$$\frac{H}{\text{Oe}} = \frac{2 I / A}{10 r / \text{cm}},$$

što smo dobili uvrštenjem $[H] = \text{Oe}$ u lijevu jednadžbu (7.2—5). U našem primjeru $I = 10 A$, $r = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ s prilagođenom bismo veličinskom jednadžbom dobili

$$\frac{H}{\text{Oe}} = \frac{2 \cdot 10 A / A}{10 \cdot 100 \text{ cm} / \text{cm}} = 0,02 \quad \text{ili} \quad H = 0,02 \text{ Oe}.$$

Budući da je $\text{Oe} = 79,577 A / \text{m}$, slijedi dalje $H = 1,59 A / \text{m}$, a ne $2 A / \text{m}$ kako smo izračunali na početku ovog odsjeka, uz pretpostavku da je (7.2—1) veličinska jednadžba!

Nismo li negdje pogriješili? Kontrolirajmo rezultat pomoću najpouzdanije veličinske jednadžbe (7.2—3) u koju uvrstimo $I = 10 A$, $r = 1 \text{ m}$:

$$H = \frac{10 A}{2 \pi \cdot 1 \text{ m}} = 1,59 A.$$

Kontrola je pozitivna. No ona je pokazala i to da je veličinski račun najpregledniji, najpouzdaniji, a u ovom slučaju i najkraći.

7.3. Privlačna sila magneta

Gotovo u svim elektrotehničkim priručnicima nalazimo ovaj izraz za silu magneta u zraku

$$F = A (B / 5000)^2. \quad (7.3—1)$$

To je brojčana jednadžba u kojoj uspravni simboli F , A , B , predstavljaju broj kiloponda, broj kvadratnih centimetara presjeka polja magneta, a B broj gaussa.

Prema tome je gornja jednadžba prilagođena jedinicama dva sistema: kilopond spada u Tehnički sistem mehanike koji smo opisali u odsječku B.4, a gauss = $G = [B]_m$ je jedinica magnetske indukcije CGSM sistema kako smo objasnili u odsječku E.3.2.

Iz gornje jednadžbe ne razabiremo da se radi o sili u zraku. To će nam tek pokazati veličinska jednadžba do koje ćemo doći iz brojčane (7.3—1) kad u nju umjesto simbola za brojčane iznose uvrstimo omjere veličina i onih jedinica kojima je gornji izraz prilagođen:

$$F = F/kp, \quad A = A/cm^2, \quad B = B/G.$$

Kosi simboli F , A i B predstavljaju dakako veličine sila, presjek i magnetska indukcija, a uspravni simboli brojčane iznose u naznačenim jedinicama. Uvrstimo li ova tri odnosa u brojčanu jednadžbu (7.3—1) dobivamo

$$\frac{F}{kp} = \frac{A}{cm^2} \left(\frac{B}{5000 G} \right)^2. \quad (7.3—2)$$

Sve tri jedinice »prevest« ćemo u Međunarodni sistem. Znamo da je $kp = 9,80665 N$, $cm^2 = 10^{-4} m^2$, $G = 10^{-4} T$, gdje je T kratica za Međunarodnu jedinicu magnetske indukcije tesla. Uvrstimo li ove odnose u gornju jednadžbu, njenim preuređenjem dobivamo

$$F = A B^2 \frac{9,806\ 65\ N}{10^{-4}\ m^2\ T^2/4} = A B^2 \frac{392\ 266\ N}{m^2\ T^2}. \quad (7.3—3)$$

Vidimo da se u skupu jedinica na desnoj strani jednadžbe sakriva neka veličina. Koja je to veličina utvrdit ćemo analizom kombinacije jedinica $m^2 T^2/N$ u nazivniku. Znamo da je $T = V s/m^2$, pa je dakle $T^2 = V^2 s^2/m^4$. S druge je strane jedinica sile newton $N = joule/metar$, a kako je $J = V A s$, to je $N = V A s/m$. S ovim odnosima konačno dobivamo $m^2 T^2/N = V s/Am = H/m$, gdje je H kratica za jedinicu induktiviteta henry. Poznato je da s jedinicom H/m izražavamo vrijednost veličine indukciona konstanta $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} H/m$, pa je dakle $H/m = \mu_0 \cdot 10^6/1,2566$. Uvrstimo li na mjesto skupa jedinica $m^2 T^2/N$ u nazivniku jednadžbe (7.3—3) ovako izraženi H/m , slijedi

$$F = A B^2 \frac{392\ 266}{\mu_0 10^6/1,2566} = \frac{A B^2}{\mu_0} 0,493. \quad (7.3—4)$$

Faktor 0,493 ne poznamo u veličinskim jednadžbama. Stoga možemo ispravno pretpostaviti da je to zapravo $0,5 = \frac{1}{2}$, a do razlike od 14 promila došlo je prilikom prilagođenja brojčane jednadžbe (7.3—1) okrugloj broji 5000. Na taj način gornja veličinska jednadžba ispravno glasi $F = 0,5 A B^2/\mu_0$. Kako se radi o zraku, to je $H = B/\mu_0$, gdje je H jakost magnetskog polja u polju magneta, pa na taj način od (7.3—4) dalje dobivamo

$$F = A B H/2 = A \mu_0 H^2/2 = A B^2/2 \mu_0. \quad (7.3—5)$$

Ove izraze poznajemo već iz odsječka 1.4. Tamo smo naime izračunali da je pritisak elektromagnetskog polja $p = F/A = w = \mu_0 H^2/2$, a to je u našem primjeru magneta u zraku specifična (po jedinici površine) sila magneta $p = F/A$, gdje je ukupna sila F određena jednadžbom (7.3—5).

7.4. Jednadžba Zeemanova efekta

U nekim visokoškolskim udžbenicima fizike nalazimo ovu jednadžbu koja opisuje Zeemanov efekt

$$\Delta f = \pm \frac{QH}{4\pi c M}, \quad (7.4-1)$$

tj. pojavljivanje više spektralnih linija emisija atoma koji se nalazi u magnetskom polju. U gornjoj jednadžbi simboli redom predajuju: Δf promjenu frekvencije emisije, Q elektriku elektrona, H jakost magnetskog polja, M masu elektrona, a c brzinu svjetla — barem tako piše u udžbeniku.

Budući da se u jednadžbi pojavljuje c koji poznajemo kao brojčani faktor između jedinica CGSM i CGSE sistema, opravdano se pojavljuje sumnja da li je (7.4—1) veličinska jednadžba, a c stvarna brzina svjetla koju smo označivali sa v_0 kad se radilo o vakuumu.

Da li je gornja jednadžba veličinska možemo ustanoviti pomoću dimenzija, a isto tako i pomoću jedinica. Poslužimo se kontrolom pomoću jedinica. Uz pretpostavku da je jednadžba veličinska, uvrstimo u desni dio jednadžbe jedinice kojima bismo mjerili veličine Q , H , $c = v_0$ i M . Dobivamo

$$\frac{A \text{ s} \cdot A/\text{m}}{\text{m s}^{-1} \text{ kg}} = \frac{A^2 \text{ s}}{\text{m}^2 \text{ V A s}^3/\text{m}^2} = \frac{A}{\text{V s}^2},$$

jer je $\text{kg} = \text{V A s}^3/\text{m}^2$ (vidi odsječak 2.1). Na lijevoj strani jednadžbe (7.4—1) stoji znak za promjenu frekvencije, a frekvencija se mjeri sa $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$. Budući da nikako ne vrijedi $\text{s}^{-1} = A \text{ V}^{-1} \text{s}^{-2}$, pokušajmo shvatiti da c nije brzina svjetla, već brojčani faktor $c = 2,9979 \cdot 10^{10}$ kako smo ga tretirali u odsječcima 3.

U tom slučaju kombinacija jedinica desne strane jednadžbe (7.4—1) daje

$$\frac{A \text{ s} \cdot A/\text{m}}{\text{kg}} = \frac{A^2 \text{ s}/\text{m}}{\text{V A s}^3/\text{m}^2} = \frac{A \text{ m}}{\text{V s}},$$

dakle opet nije jednaka jedinici lijeve strane s^{-1} kao što bi bilo potrebno kad bi se radilo o veličinskoj jednadžbi.

Prema tome je očito da izraz (7.4—1) nije veličinska, već brojčana jednadžba prilagođena nekim jedinicama, a c faktor pretvorbe među CGSM i CGSE jedinicama. No kojim je jedinicama prilagođena? Na to nam udžbenici ne daju odgovor, ali iz drugih jednadžbi koje poznajemo i u veličinskom i u brojčanom obliku zaključujemo iz knjige da autori upotrebljavaju Gaussov sistem jedinica (vidi odsječak 3.3). Stoga izraz (7.4—1) možemo napisati u obliku

$$\Delta f = \pm \frac{Q_e H_m}{4\pi c M}, \quad (7.4-2)$$

gdje Q_e znači da je to simbol brojčanog iznosa veličine Q u jedinici $[Q]_e$ sistema CGSE, H_m simbol brojčanog iznosa veličine jakost magnetskog polja H u jedinici $[H]_m = \text{oersted} = \text{Oe}$ sistema CGSM, a M brojčani iznos mase elektrona M u jedinici mase CGS sistema gram = g. U ovom smo navođenju veličine pisali *kurzivnim* znakovima, a brojčane iznose uspravnicima.

U skladu s načelom da je »brojčani iznos = veličina / jedinica«, dakle $G = G/[G]$, za navedena tri brojčana iznosa možemo pisati

$$Q_e = Q/[Q]_e, H_m = H/\text{Oe}, M = M/g.$$

Isto možemo učiniti s frekvencijom, jer uspravno slovo f u (7. 4—2) također predstavlja brojčani iznos. Budući da se u CGS sistemu frekvencija mjeri jedinicom s^{-1} , to je dakle $f = f/s^{-1} = f \cdot s$, gdje kurzivno slovo f označuje veličinu frekvencija, a s je kratica za sekundu.

Uvrstimo li sva četiri brojčana iznosa, izražena omjerom simbola veličina i upotrebljenih jedinica, u jednadžbu (7. 4—2) dobivamo

$$\Delta f s = \pm \frac{Q [Q]_e^{-1} H / \text{Oe}}{s 4 \pi c M / g},$$

odnosno

$$\Delta f = \pm \frac{QH}{4 \pi M} Z, \quad (7.4-3)$$

gdje je

$$Z = \frac{g}{s c [Q]_e \text{Oe}} = \frac{10^{-3} \text{VA s}^3/\text{m}^2}{s c [Q]_e \text{Oe}},$$

jer je $g = 10^{-3} \text{ kg}$, a $\text{kg} = \text{VA s}^3/\text{m}^2$.

Ostaje nam da raspjetljamo izraz Z koji sadrži samo jedinice, ali zato dobro ispremiješane. Pojednostavnjujmo taj izraz korak po korak. U tablici X nalazimo da je $[Q]_m = c [Q]_e$, a $\text{Oe} = G/\mu_0$, jer je $[H]_m = \text{Oe} = [B]_m/\mu_0 = G/\mu_0$. S ova dva odnosa formula za Z prelazi u

$$Z = \frac{10^{-3} \text{VA s}^3 \text{m}^{-2} \mu_0}{s 10 \text{As} 10^{-4} \text{Vs m}^{-2}} = \mu_0.$$

Uvrstimo li $Z = \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ u izraz (7. 4—3) dobivamo veličinsku jednadžbu

$$\Delta f = \pm \frac{Q \mu_0 H}{4 \pi M} = \pm \frac{Q B}{4 \pi M}, \quad (7.4-4)$$

jer je u vakuumu $B = \mu_0 H$. Izraz (7. 4—4) je dakako univerzalna veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo koji sistem jedinica, te za nesistematičan skup heterogenih jedinica. U to se možemo uvjeriti s nekoliko redaka.

Neka se atomi nalaze u magnetskom polju indukcije $B = 10^4 \text{ G}$. U tablici prirodnih konstanta XI nalazimo da je za elektron $Q/M = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ As/kg}$. Uvrštenje u (7. 4—4) daje

$$\Delta f = \pm \frac{1}{4 \pi} 10^4 \text{ G} \cdot 1,759 \cdot 10^{11} \text{ As/kg} = \pm 1,4 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1},$$

jer je $G = 10^{-4} \text{ T}$, $\text{T} = \text{Vs/m}^2$, $\text{kg} = \text{VA s}^3/\text{m}^2$.

Time naše razmatranje o brojčanoj jednadžbi Zeemanova efekta nije završeno. Iz formule (7. 4—4) naime vidimo da su za elektron konstantne sve veličine, osim jakosti magnetskog polja H . Budući da je $Q/M = 1,759 \cdot 10^{11}$ As/kg, to se formula može napisati u veličinskom obliku prilagođenom elektronu

$$\Delta f = \pm K H, \quad (7.4-5)$$

gdje je konstanta $K = Q \mu_0 / (4 \pi M) = 1,759 \cdot 10^4$ m/A = $1,4 \cdot 10^6$ /(Oes); Oe je kratica za jedinicu oersted = 1000 A/(4 π m), a s za sekundu. Pomoću brojčanog iznosa konstante $K = K \cdot \text{Oes} = 1,4 \cdot 10^6$ brojčana jednadžba (7. 4—2) glasi

$$\Delta f = \pm 1,4 \cdot 10^6 H_m, \quad (7.4-6)$$

gdje uspravni simboli označuju: Δf broj s⁻¹, a H_m broj oersteda.

U nekim udžbenicima umjesto (7. 4—6) nalazimo brojčanu formulu

$$\Delta f = \mp 4,7 \cdot 10^{-5} H, \quad (7.4-7)$$

koja je štaviše znakom jednakosti produžena jednadžba (7. 4—1).

Ovdje ne pomažu nikakve kombinacije sa c kao omjerom jedinica magnetostatskog i elektrostatskog CGS sistema, jer je omjer $4,7 \cdot 10^{-5} / 1,4 \cdot 10^6 = 3,36 \cdot 10^{-11}$, dakle različit od $c = 2,998 \cdot 10^{10}$. Pada u oči da je u (7. 4—7) okrenut poredak predznaka; umjesto $\pm$ kao u (7. 4—1) ovdje imamo $\mp$, kao da je došlo do dijeljenja sa Δf pa su predznaci zamijenili mjesta. Nema druge nego čitav problem razmotriti iz osnova. Pri tom ćemo se poslužiti veličinskim jednadžbama da se ne bismo morali boriti i s jedinicama Gaussova sistema koje nas lako mogu odvesti u metrološku mistiku.

Veličine frekvencija f i valna duljina λ u vakuumu međusobno su povezane veličinskom jednadžbom $f\lambda = v_0$, gdje je $v_0 = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s brzina elektromagnetskog polja u vakuumu. Promijeni li se frekvencija za df , jednostavnim diferencijalnim računom utvrđujemo da se uz $v_0 = \text{const}$ ova promjena odražava kao promjena valne duljine $d\lambda = -\lambda df/f$ jer na primjer povećanje frekvencije znači isto što i smanjenje valne duljine. Radi li se o diskretnoj promjeni frekvencije Δf , kako je po kvantnoj mehanici jedino i moguće, navedeni će izraz glasiti $\Delta\lambda/\lambda = -\Delta f/f$. To je dakle relativna promjena valne duljine koja je jednaka negativnoj relativnoj promjeni frekvencije, što je u skladu s uvjetom $v_0 = \text{const}$.

Želimo li znati koliko iznosi relativna promjena valne duljine $\Delta\lambda/\lambda$ po valnoj duljini λ moramo taj izraz podijeliti s λ , dakle

$$\frac{\Delta\lambda/\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta f}{\lambda f} = -\frac{\Delta f}{v_0},$$

jer je $v_0 = \lambda f$. Uvrstimo li u gornji izraz jednadžbu (7. 4—4) dobivamo

$$\frac{\Delta\lambda/\lambda}{\lambda} = \mp \frac{QB}{4\pi v_0 M} = \mp K_1 H, \quad (7.4-8)$$

gdje je $K_1 = K/v_0 = 5,86 \cdot 10^{-5}$ s/A = $4,68 \cdot 10^{-5}$ s/Oe cm. Prema tome je brojčani iznos konstante K_1 u Gaussovu sistemu jedinica $K_1 = K_1/(\text{sOecm}) = 4,68 \cdot 10^{-5}$, pa brojčana jednadžba (indeks n kod λ)¹⁾ prilagođena Gaussovu sistemu jedinica glasi

¹⁾ Vidi opasku pod crtom na stranici 292.

$$\frac{\Delta \lambda_n / \lambda_n}{\lambda_n} = \mp 4,68 \cdot 10^{-5} H_m,$$

a to je u skladu s citiranom brojčanom jednačbom (7. 4—7).

Vidimo dakle da na lijevoj strani brojčane jednačbe (7. 4—7) ne smije stajati brojčani iznos promjene frekvencije, već je to relativna promjena valne duljine podijeljena s valnom duljinom! Veličinski račun kojim smo pouzdano doprli do veličinske jednačbe (7. 4—8) pokazuje da je na lijevoj strani tog izraza veličina $\Delta \lambda / \lambda^2$, koja se kao značajka upotrebljava u spektrometriji i mjeri s m^{-1} , a to je nešto posve drugo nego li pripadna promjena frekvencije Δf koja se mjeri u s^{-1} .

Na ovom posljednjem primjeru u nizu usporedbi brojčanih jednačbi, koje vrijede za tačno određene jedinice, s univerzalnim veličinskim jednačbama, koje vrijede za bilo kakav skup jedinica, mogli smo uvidjeti da brojčane jednačbe ne uzrokuju samo povećani napor računanja i mišljenja, već uz nezornost i nesigurnost računanja mogu dovesti čak i do načelnih grešaka. Zato Međunarodni svjetski sistem jedinica, jedinstven za tehniku i znanost, doživljava tako brzu i punu afirmaciju, budući da njegova primjena automatski gotovo svuda uzrokuje primjenu veličinskih jednačbi, a one znače: univerzalnost, preglednost, fizikalnu zornost i pouzdanost računanja.

8. SISTEMI DIMENZIJA ELEKTROMAGNETIZMA

Temeljne pojmove o dimenzijama veličina i o sistemima dimenzija stekli smo u poglavlju A.8. U odsječku B.14. raspravili smo nekoliko sistema dimenzija mehanike. Da ne ponavljamo načela stvaranja sistema dimenzija upućujemo na prethodno čitanje spomenutih odsječaka, a pri tom mogu biti od koristi i razmatranja u odsječku E. 2. 1.

Prirodno je da u elektromagnetizmu imamo četiri polazne ili osnovne dimenzije od kojih gradimo izvedene dimenzije svih ostalih veličina. Znamo da je teoretski posve svejedno koje četiri dimenzije odaberemo za polazne, jedini je uvjet da su one međusobno nezavisne. Izbor u nastavi ovisi o pedagoškom nazoru nastavnika, a u dimenzionalnoj analizi o vrsti problema koji se rješava.

Sedam sistema dimenzija elektromagnetizma svrstali smo za 14 veličina u tablicu E. 6. Dimenzije ostalih veličina svatko može izvesti sam iz veličinskih jednačbi (tablice E. 1 i stupac 4 tablice X) ako iz njih izbaci matematske faktore, a sve dimenzije svede na odabranu četvorku »polaznih«.

U stupcu 3 navedene su dimenzije veličina iz stupca 2 u sistemu LTUI koji ima polazne ili osnovne dimenzije duljine, vremena, napona i električne struje. Taj sistem upotrebljava najviše autora, a i u teoriji modeliranja iskazuje se kao vrlo praktičan. Najčešće ga nazivaju Mijejevim ili Oberdorferovim sistemom, iako ga je već davno prije njih predložio Perry (vidi odsječak 5). Tim sistemom već smo se praktički služili kad smo u odsječku 2. 1 raspravljali o koherentnim jedinicama Međunarodnog sistema jedinica.

U stupcu 4 naveden je sistem dimenzija Kalantarova koji ima polaznu četvorku dimenzija duljine, vremena, elektrike i magnetskog toka, dakle LTQΦ. Do njega dolazimo od sistema LTUI jednostavno tako da u stupac 3 tablice E. 6 umjesto simbola U stavimo ΦT^{-1} , a umjesto I dimenziju QT^{-1} , jer je $\Phi = TU$ i $Q = TI$.

Iako se taj sistem upotrebljava manje od LTUI on je za teoretska razmatranja izvanredno pogodan. Rad s njime nadasve je brz kod primjene dimenzione analize

Nekoliko sistema dimenzija elektromagnetizma

Tablica E.6

Veličina	Symbol	LTUI	LTQΦ	LTMI	LTMQ	LTMR	LTM _μ	FLIT
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Masa	m	$L^{-2} T^3 UI$	$L^{-2} TQ\Phi$	M	M	M	M	$L^{-1} T^3 F$
Sila	F	$L^{-1} TUI$	$L^{-1} T^{-1} Q\Phi$	$LT^{-2} M$	$LT^{-2} M$	$LT^{-2} M$	$LT^{-2} M$	F
Energija	W	TUI	$T^{-1} Q\Phi$	$L^2 T^{-2} M$	$L^2 T^{-2} M$	$L^2 T^{-2} M$	$L^2 T^{-2} M$	LF
Elektrika	Q	TI	Q	TI	Q	$LT^{-1/2} M^{1/2} R^{-1/2}$	$L^{1/2} M^{1/2} \mu^{-1/2}$	TI
Električna struja	I	I	$T^{-1} Q$	I	$T^{-1} Q$	$LT^{-3/2} M^{1/2} R^{-1/2}$	$L^{1/2} T^{-1} M^{1/2} \mu^{-1/2}$	I
Jakost magnetskog polja	H	$L^{-1} I$	$L^{-1} T^{-1} Q$	$L^{-1} I$	$L^{-1} T^{-1} Q$	$T^{-3/2} M^{1/2} R^{-1/2}$	$L^{-1/2} T^{-1} M^{1/2} \mu^{-1/2}$	$L^{-1} I$
Kapacitet	C	$TU^{-1} I$	$TQ\Phi^{-1}$	$L^{-2} T^4 M^{-1} I^2$	$L^{-2} T^2 M^{-1} Q^2$	TR^{-1}	$L^{-1} T^3 \mu^{-1}$	$L^{-1} T^3 F I^2$
Dielektričnost	ϵ	$L^{-1} TU^{-1} I$	$L^{-1} TQ\Phi^{-1}$	$L^{-3} T^4 M^{-1} I^2$	$L^{-3} T^2 M^{-1} Q^2$	$L^{-1} TR^{-1}$	$L^{-2} T^3 \mu^{-1}$	$L^{-2} T^3 F I^2$
Magnetski tok	Φ	TU	Φ	$L^2 T^{-2} MI^{-1}$	$L^2 T^{-1} MQ^{-1}$	$LT^{-1/2} M^{1/2} R^{1/2}$	$L^{3/2} T^{-1} M^{1/2} \mu^{1/2}$	$L^{-1} F^{-1} I^{-1}$
Magnetska indukcija	B	$L^{-2} TU$	$L^{-2} \Phi$	$T^{-2} MI^{-1}$	$T^{-1} MQ^{-1}$	$L^{-1} T^{-1/2} M^{1/2} R^{1/2}$	$L^{-1/2} T^{-1} M^{1/2} \mu^{1/2}$	$L^{-1} F^{-1} I^{-1}$
Električni napon	U	U	$T^{-1} \Phi$	$L^2 T^{-3} MI^{-1}$	$L^2 T^{-2} MQ^{-1}$	$LT^{-3/2} M^{1/2} R^{1/2}$	$L^{3/2} T^{-2} M^{1/2} \mu^{1/2}$	$LT^{-1} F^{-1} I^{-1}$
Permeabilnost	μ	$L^{-1} TUI^{-1}$	$L^{-1} TQ^{-1} \Phi$	$LT^{-2} MI^{-2}$	LMQ^{-2}	$L^{-1} TR$	μ	FI^{-2}
Induktivitet	L	TUI^{-1}	$TQ^{-1} \Phi$	$L^2 T^{-2} MI^{-2}$	$L^2 MQ^{-2}$	TR	L_{μ}	LFI^{-2}
Električni otpor	R	UI^{-1}	$Q^{-1} \Phi$	$L^2 T^{-3} MI^{-2}$	$L^2 T^{-1} MQ^{-2}$	R	$LT^{-1} \mu$	$LT^{-1} FI^{-2}$

u istraživanju međusobne povezanosti gravitacionih i elektromagnetskih polja, jer dovodi do mnogih zanimljivih i dalekosežnih zaključaka u pogledu najsuptilnijih odnosa između materije i polja. O primjeni tog sistema citirano je na kraju knjige nekoliko podataka literature, a napose se može i u domaćoj literaturi (vidi *Avčinovu* knjigu) naći lijepih, vrlo korisnih primjena tog sistema dimenzija.

Ostali sistemi dimenzija u tablici sadrže za osnovnu dimenziju masu M . Tako su u stupcu 5 navedene izvedene dimenzije veličina u LTMI sistemu. Do njega se od LTUI dolazi preko dimenzionalne jednačbe snage koja izjednačuje $ML^2 T^{-3} = UI$. Prema tome do dimenzija veličina u LTMI sistemu dolazimo tako da u stupcu 3 na mjesto U stavimo $U = ML^2 T^{-3} I^{-1}$. U praksi se taj sistem najčešće upotrebljava u tabelarnom obliku za brzo utvrđivanje odnosa među koherentnim jedinicama.

Slično je i sa sistemom LTMQ (*Brylinski*) koji je svrstan u stupcu 6 tablice E. 6. Do pojedinih dimenzija veličina dolazi se od LTMI stavljanjem $T^{-1} Q$ na mjesto I .

Kennellyjev sistem dimenzija s polaznom četvorkom LTMR (nekada ga krivo nazivaju *Giorgijevim*) posve je nepraktičan za one primjene u kojima sistemi dimenzija mogu biti od koristi. To vidimo po tome što sadrži razlomljene eksponente koji onemogućuju bilo kakav uvid u fizikalnu strukturu izvedenih dimenzija. Do toga dolazi zbog toga jer je $U^2 R^{-1} = M L^2 T^{-3}$, a slijedom toga preko $U = R I$ dobivamo $I = L T^{-3/2} M^{1/2} R^{-1/2}$. Uvrštavamo li dakle taj I i $U = M^{1/2} L T^{-3/2} R$ na mjestu U i I u izvedene dimenzije stupca 3 dobivamo one u stupcu 7.

U stupcu 8 tablice E. 6 naveli smo dimenzije veličina u sistemu s polaznim dimenzijama duljine, vremena, mase i permeabilnosti. Taj je sistem također nepraktičan jer ima razlomljene eksponente. Naveli smo ga samo zato jer može biti od koristi prilikom proučavanja CGSM sistema jedinica (odsječak 3. 2).

Konačno je u stupcu 9 naveden sistem FLIT gdje je kao treća polazna dimenzija usvojena ona sile F . U nekim primjenama on može biti od jednake koristi kao i LTMI. Od potonjega dolazi se na FLIT tako da se u izvedenim dimenzijama stupca 5 na mjesto M stavi $L^{-1} T^2 F$.

Upotrebljena literatura

- Albert von H. J.: *Mass und Gewicht*, Akademie Verlag, Berlin 1957.
- Aleksandrov V. L.: *Tehničkaja gidromehanika*, 3. izdanje, Ogiz, Moskva 1946.
- Aleksijeve A. E., *O novoj sisteme jedinica izmjerenja elektromagnitnih veličina*, Električstvo 1949., No 2, str. 84.
- Avčin F., *Ob uvedbi novih enot v elektrotehniku*, Elektrotehniški vestnik 16 (1948), str. 1, 73, 169.
- Avčin F., *Deveta generalna konferenca za mere in uteži*, Elektrotehniški vestnik 16 (1948), str. 243.
- Avčin F., *Važni zaključki na zasjedanju Medunarodne elektrotehničke komisije (CEI) u mjesecu srpnju 1950. u Parizu*, Elektrotehnički vjesnik 19 (1951), str. 191, 257.
- Avčin F., *Zasedanje mednarodne elektrotehničke komisije 3. do 13. septembra 1952 v Scheveningenu pri Haagu, Nizozemska*, Elektrotehniški vestnik 20 (1952), str. 318.
- Avčin F., *L'Unité à cohérence dimensionnelle de la température*, Revue scientifique 90 (1952), str. 235.
- Avčin F.: *Osnove metrologije*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1952.
- Avčin F., *O vpeljavi Giorgijevega merskega sistema*, Obzornik za matematiko in fiziko 2 (1952), str. 50.
- Avčin F., *Ali je Giorgijev sistem enot tro- ali štiridimenzionalen?*, Elektrotehniški vestnik 22 (1954), str. 209.
- Avčin F., *Note concernant la définition de l'Ampère absolu*, 1954.
- Avčin F., *Deseta generalna konferenca za mere in uteži*, Elektrotehniški vestnik 23 (1955), str. 65.
- Avčin F., *Veličina, oersted in načini racionalizacije jakosti magnetskega polja*, Elektrotehniški vestnik 25 (1957), str. 2.
- Avčin F., *Najpreciznejša ura*, Elektrotehniški vestnik 25 (1957), str. 294.
- Avčin F., *Some Multi-horned Dilemmas in the Magnetic Field*, AIEE, Paper No. 59-1187, 1959.
- Avčin F., *Predlog za ustanovitev Zveznega metrološkega zavoda FLRŽ*, Elektrotehniški vestnik 28 (1960), str. 159.
- Becker R.: *Theorie der Elektrizität I*, 12-13 izdanje, Teubner, Leipzig 1944.
- Bedjanič V., *Iz zgodovine merilnih sistemov elektrotehnike*, Elektrotehniški vestnik 10 (1942), str. 1, 33.
- Bodea E., *Cohérence dimensionnelle entre unités théoriques et pratiques*, Bull. Schweiz. elektr. Ver. 38 (1947), str. 217.
- Bodea E.: *Giorgis rationales MKS — Masssystem*, 2. izdanje, Birkhäuser, Basel 1949.
- Boncelj J., *Jožef Stefan i njegovo djelovanje na području elektrotehnike*, Elektrotehnički vjesnik 26 (1958), str. 41.
- Bošnjaković F.: *Nauka o toplini I, II*, Tehnička knjiga, Zagreb 1950.
- Bradshaw E., *Rationalized M. K. S. Units in Electrical Engineering Education*, Proc. I. E. E. 97 (1950), Part I, str. 252, 272.
- Brezinščak M., *Racionalni i neracionalni oblik jednadžbi elektromagnetskog polja*, Elektrotehničar 3 (1949), str. 186, 214.
- Brezinščak M., *Iz povijesti mjernih sistema elektrotehnike*, Elektrotehničar 3 (1949), str. 288.
- Brezinščak M., *Diskusija u vezi članaka V. Polhovskog po pitanju mjernih sistema elektrotehnike*, Elektroprivreda 2 (1949), str. 512.
- Brezinščak M., *Povodom jedne dvogodišnjice (Iz problematike mjernih sistema elektrotehnike)*, Elektrotehničar 4 (1950), str. 2, 63.
- Brezinščak M., *Borba oko jedinica*, Elektrotehničar 4 (1950), str. 94.
- Brezinščak M., Uremović I., *O predlogu termina i oznaka za fizikalne veličine*, Elektrotehničar 4 (1950), str. 105.

- Brežinščak M., *Još nešto iz problematike mjernih sistema elektrotehnike*, Elektrotehničar 4 (1950), str. 134.
- Brežinščak M., *Jedan izvod pravila koherencije razmjernosti*, Elektrotehničar 4 (1950), str. 181.
- Brežinščak M., *Problematika mjernih sistema nauke o toplini obzirom na novouvedeni Giorgijev sistem jedinica*, Elektrotehnički vjesnik 13 (1950), str. 177.
- Brežinščak M., *Veličinske i količinske jednadžbe*, Elektrotehničar 5 (1951), str. 7.
- Brežinščak M.: *Mjerni sistemi elektrotehnike*, Tehnička knjiga, Beograd 1951.
- Brežinščak M., *Nekoliko riječi u vezi s mehaničkim dijelom Giorgijeva sistema jedinica*, Elektrotehnički vjesnik 19 (1951), str. 137.
- Brežinščak M., *Dva kilograma*, Strojarsko-tehnički vjesnik 6 (1951), str. 269.
- Brežinščak M., *Pegel i dijagrami za određivanje pojačanja u neperima i decibelima*, Radio-amater 6 (1952), str. 32, 66, 92.
- Brežinščak M., *Nesporazum u pojmu*, Obzornik za matematiku in fiziku 2 (1952), str. 137.
- Brežinščak M., *Racionalizacija u svjetlu veličinskih jednadžbi*, Elektrotehnički vjesnik 21 (1953), str. 81.
- Brežinščak M., *Rationalization in the Light of Quantity Equations*, Physica 19 (1953), str. 599.
- Brežinščak M., *Definicija i realizacija ampera*, Elektrotehničar 14 (1960), str. 33.
- Brežinščak M., *Brzina elektromagnetskog polja*, Elektrotehničar 14 (1960), str. 97.
- Brežinščak M., *Najprecizniji standardi električkog otpora*, Elektrotehničar 14 (1960), str. 129.
- Brežinščak M., *Pouzdanost računanje pomoću veličinskih jednadžbi*, Elektrotehnički vjesnik 29 (1961), (u tisku).
- Brežinščak M., *Temperatura kao zavisna veličina i posljedice takvog shvaćanja*, Mašinstvo (Tehnika) 9 (1960), str. 263.
- Brežinščak M., *Protonski rezonator kao pramjerilo jedinice jakosti električne struje*, Automacija 1 (1960), str. 56.
- Brežinščak M., *Veličine, enote in enačbe*, Strojniški vestnik 7 (1961), u (tisku).
- Bridgman P. W.: *Theorie der physikalischen Dimensionen*, Teubner, Berlin 1932.
- Brylinski E., *Sur le systèmes d'unités électriques*, Revue Générale de l'Electricité 57 (1948), str. 200.
- Campbell G. A., *A System of «Definitive Units» Proposed for Universal Use*, Science 61 (1925), str. 353.
- Campbell G. A., *Three Superfluous Systems of Electromagnetic Units*, Physics 3 (1932), str. 230.
- Campbell G. A., *Shop Units for Universal Use*, Transactions AIEE 1933., June (Reprint).
- Campbell G. A., *A Definitive System of Units*, Bulletin of the National Research Council 1933., No 93, str. 48.
- Carić D. M.: *Tehnička hidraulika*, Građevinska knjiga, Beograd 1952.
- Carr L. H. A., *The M. K. S. or Giorgi System of Units*, Proceedings IEE 97 (1950), Part I, str. 235, 270.
- Chwolson O. D.: *Lehrbuch der Physik I*, Vieweg und Sohn, Braunschweig 1902.
- Cornelius P., *Das Rationalisierte Giorgi-System mit absolutem Volt und Ampere in der Elektrotechnik*, Philips' technische Rundschau 10 (1948), str. 79.
- Cornelius P.: *Korte Samenvatting der Electriciteitsleer*, Muelenhof, Amsterdam 1948.
- Cornelius P., *Proposals and Recommendations Concerning the Definitions and Units of Electromagnetic Quantities*, Philips Research Reports 4 (1949), str. 232.
- Cornelius P., *The Rationalized Giorgi System and its Consequences*, Philips Res. Rep. 4 (1949), str. 123.
- Cornelius P., *Can H and D be Measured Directly*, Wireless Engineer 27 (1950), str. 216.
- Commission electrotechnique internationale: *Symboles littéraires internationaux utilisés en électricité*, 3. izdanje, Bureau Central de la CEI, Geneve 1953.
- Coulson C. A.: *Electricity*, Oliver and Boyd, Edinburgh 1948.
- Čabrian M.: *Željeznička vozila i vozna dinamika*, Tehnička knjiga, Zagreb 1950.
- Čudakov E. A. (redaktor): *Mašinostrojenje*, enciklopedičeskij spravočnik, 1-1, 2, Gosudarstvennoje naučno-tehničkoje izdateljstvo, Moskva 1947.
- Danjon A., Cassinis G., *Convocation la Onzième Conférence Générale des Poids et Mesures 11.—20. Oct. 1960.*, CIPM, Sèvres, febr. 1960.

- Danloux — Dumesnils M., *Système métrique. Les unités de la mécanique*, Mesures 1956, No 232.
- Dayre J., Cassan M.: *Guide graphique pour la conversion des unités*, Eyrolles, Paris 1954.
- Denis-Papin M., Vallot J.: *Métrologie générale (grandeurs et unités)*, Dunod, Paris 1948.
- Denis-Papin M., Vallot J.: *Métrologie appliquée*, Dunod, Paris 1948.
- Denis-Papin M., Kaufmann A.: *Memento des Unités Giorgi (M. K. S. A.)*, Desforges, Paris 1949.
- Döring H., *Anschluss eines 100-t-Normals bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt*, Archiv für technisches Messen Lg. 286 (1959), str. 221.
- Eksel B.: *Mjerenje protjecajnih količina pomoću prigušnica*, Tehnička knjiga, Zagreb 1955.
- Emschermann H. H., *Die Darstellung von Messwerten in Zahlenform*, ATM 1956., Lg. 246, str. 161.
- Essen L., *Atomic Clocks*, Journal IEE 4 (1958), str. 647.
- Ferrari F., *Geordnete Zusammenfassung von Messergebnissen*, ATM 1955, Lg. 234, str. 149.
- Ferry A., *Expression des grandeurs, formules aux dimensions, equations physiques*, Mesures 24 (1959), str. 769.
- Fischer J., *Neuere Fragen und Anschauungen über Dimensionen, Einheiten und Masssysteme der elektromagnetischen Grössen*, Zeitschrift für Physik 100 (1936), str. 360.
- Fischer J.: *Einführung in die klassische Elektrodynamik*, Springer, Berlin 1936.
- Fischer J., ϵ_0 und μ_0 , Archiv für Elektrotechnik 39 (1950), str. 711.
- Fischer J., *Grössen und Einheiten in der Elektrizitätslehre*, Archiv für Elektrotechnik 40 (1951), str. 257.
- Fischer J., *Masssysteme und Einheiten der Elektrizitätslehre und Elektrotechnik*, ATM Lg. 208 (1953), str. 99.
- Fischer J., *Einheiten elektrischer und magnetischer Grössen*, ETZ-A 77 (1956), str. 280.
- Fischer J., *Über die Anzahl der voneinander unabhängigen Grössen in der Elektrizitätslehre*, Archiv für Elektrotechnik 45 (1960), str. 77.
- Fleischmann R., *Die Struktur des physikalischen Begriffssystems*, Zeitschrift für Physik 129 (1951), str. 377.
- Fleger E., *Beispiele für zugeschnittene Grössengleichungen*, ZVDI 94 (1952), str. 1009.
- Franke O., *Die Masssysteme und Masseinheiten der elektrischen und magnetischen Grössen*, E u M 68 (1951) str. 280.
- Fuchs J., *Der Sinn des Wirkungsquantums*, E u M 70 (1953), str. 77.
- Fuchs J., *Wirkungsquantum und physikalisches Begriffssystem*, E u M 71 (1954), str. 345.
- Gauss C. F.: *Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt*, Ostwald's Klassiker No 53, Engelmann, Leipzig 1894.
- Giorgi G., *Electrical and Physical Units* (Reprint from papers read before the International Electrical Congress at St. Louis), September 1904.
- Giorgi G., *Memorandum sur le système M. K. S. d'unités pratiques*, Commission Electrotechnique Internationale, London 1934.
- Giorgi G., *Klasična električna metrologija i sistemi jedinica, koji iz nje proizlaze. Kritična razmatranja* (preveo Petrović V. V.), Tehnički list 20 (1938), str. 227, 249.
- Giorgi G., *Nova električna metrologija i konstrukcija apsolutnog električnog sistema MKS* (preveo Petrović V. V.), Tehnički list 20 (1938), str. 268, 299.
- Giorgi G.: *La nozione e la misura del tempo dall'antichità fino ad oggi*, Società editrice riviste industrie elettriche, Milano 1940.
- Giorgi G., *Unità naturali o unità campionate*, Tecnica e Didattica 3 (1942), No 21.
- Giorgi G., *Ancora sui sistemi di unità elettriche*, L'energia elettrica 25 (1948), str. 443.
- Giorgi G., *L'Origine del sistema metrico-decimale*, Archimede 1949, fasc. 4, str. 133.
- Giorgi G., *I prototipi del sistema metrico*, Archimede 1949., fasc. 6, str. 199.
- Giorgi G., *Verso l'Elettrotecnica moderna*, Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano 1949.
- Giorgi G.: *Dati e valori per la fisica e l'elettrotecnica*, Società editrice internazionale, Milano 1949.
- Giorgi G., *Systèmes d'unités et nomenclature*, Revue Générale de l'Electricité 59 (1950), str. 278.
- Golding E. W.: *Electrical Measurements and Measuring Instruments*, Pitman & Sons, London, 4. izdanje, 1955.
- Gregora O., *Apsolutni soustava jednotek MKS zavedena*, Elektrotechnicky Obzor 36 (1947), str. 329.
- Gresky A. T., *New Physical Constants from Dimensional Analysis*, Journal of the Franklin Institute 265 (1958), str. 85.

- Grigorov K. V., Šipkov S. N., *Diskusija o članku Kalantarova i Nejmana*, Električstvo 1949., No 11, str. 88.
- Grigull U., *Sollen wir beim technischen Mass-System bleiben?*, BWK 9 (1957), str. 219.
- Grivet P., *Le système d'unités Giorgi dans ses rapports avec la tradition, la pratique et l'enseignement*, Bulletin de la Société française des Electriciens 7 (1947), str. 75.
- Grivet P., *Champs et particules dans le système Giorgi rationalisé*, Bulletin de la Société française des Electriciens 9 (1949), No 98.
- Groot W. de, *The Origin of the Giorgi System of Electrical Units*, Philips Technical Review 10 (1948), str. 55.
- Gundlach F. W.: *Grundlagen der Höchstfrequenztechnik*, Springer, Berlin 1950.
- Häberli F., *Physikalische Grössen. Eine Klarstellung der Begriffe*, Schweiz. Arch. angew. Wiss. u. Technik 13 (1947), str. 65, 113, 136.
- Haeder W., *Zoll, Pfund und Grad Fahrenheit*, Haustechnische Rundschau 59 (1960), str. 248, 268, 60 (1961), str. 8, 32.
- Hahnemann H. W.: *Die Umstellung auf das Internationale Einheitensystem*, VDI Verlag, Düsseldorf 1959.
- Haikin S. E.: *Mehanika*, Ogiz — Gostehizdat, Moskva — Leningrad 1947.
- Hallen E., *Some Units in the Giorgi System and the C. G. S. System*, Trans. Roy. Inst. Technology Stockholm 1947, No 6.
- Harnwell G. P.: *Principles of Electricity and Electromagnetism*, Mc Graw-Hill Co, New York 1938.
- Hartshorn L., *Units and Standards of Electrical Measurement*, Proceedings IEE 99 (1952), Part I, str. 271.
- Henning F.: *Temperaturmessung*, 2. izdanje, Barth Verlag, Leipzig 1955.
- Hochrainer A., *Grössen und Grössengleichungen*, Elektrotechnik und Maschinenbau 62 (1944), str. 350.
- Hochrainer A., *Die Problematik der Formelzeichen*, ETZ-A 78 (1957), str. 280.
- Hoffmann F., *Die optische Temperaturskala und die Strahlungskonstanten*, Zeitschrift für angewandte Physik 2 (1950), str. 88.
- Horák Z.: *Praktická fyzika*, Statní nakladatelství technické literatury, Praha 1958.
- ISO, Organisation internationale de normalisation: različite publikacije.
- Janko — Trinickij A. A., Artmejev A. I., Abramovič G. P., Gurerevič E. Ja, *Diskusija o članku Kalantarova i Nejmana*, Električstvo 1949, No 9, str. 82.
- Jovanović V. Đ.: *Osnovni zakoni elektriciteta*, 2. izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1947.
- Jovanović V., *Treće plenarno zasedanje tehničkog komiteta (ISO/TC 12) za veličine i jedinice, simbole i preobratne činioce i tablice međunarodne organizacije za standardizaciju*, Tehnika 11 (1956), str. 561.
- Kalantarov P. L., *O sistemah jedinica električkih i magnitnih veličina*, Električstvo 1948., No 1, str. 17.
- Kalantarov P. L., Nejman L. P., *Opredjeljenja panjatij, odnosjaščihsja k oblasti elektromagnitnih javljenij*, Električstvo 1949., No 1, str. 16.
- Kartaschoff P., *Die Messung der Frequenzen von NH_3 — Maser — Oszilatoren und Cs — Strahl — Resonatoren*, Bulletin SEV 51 (1960), str. 1080.
- Kennelly A. E., *Die Annahme des Giorgischen Masssystems durch die Internationale elektrotechnische Kommission* (preveo Landolt M.), Bulletin SEV 28 (1937), str. 17.
- King R. W. P.: *Electromagnetic Engineering I (Fundamentals)*, Mc Graw-Hill Co, New York 1945.
- Kohlrausch F.: *Leitfaden der praktischen Physik (mit einem Anhang: Das absolute Mass-System)*, 6. izdanje, Teubner, Leipzig 1887.
- Kohlrausch F.: *Praktische Physik I, II*, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1956.
- König K., Kronld M., Landolt M., *Zur Einführung des Giorgi — Systems*, Bulletin SEV 40 (1949), str. 462.
- König H., *Über die Mehrdeutigkeit des Grössenbegriffs*, Bull. Schweiz. elektr. Vereins 41 (1950), str. 625.
- Koželj V., *Merski sistemi elektrotehnike*, Elektrotehniški vestnik 14 (1946), str. 2.
- Koželj V., Avčin F., *Predlog termina i oznaka za fizikalne veličine*, Elektrotehničar 4 (1950), str. 110.
- Koželj V. A., *Preprosta razlaga širenja elektromagnetnega polja*, Elektrotehniški vestnik 20 (1952), str. 224.
- Kraut B.: *Džepni strojarski priručnik*, Đuro Đaković, Ljubljana-Slavonski Brod 1956.
- Kraut B., *O enotah za temperaturo*, Strojniški vestnik 5 (1959), str. 2.

- Küpfmüller K.: *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, 2. izdanje, Springer, Berlin 1939.
- Lampard D. G., *A New Theorem in Electrostatics with Application to Calculable Standards of Capacitance*, Proceedings IEE 104 C (1957), str. 271.
- Landau L., Lifšic E.: *Teorija polja (Teoretičeskaja fizika IV)*, Ogiz, Moskva — Lenjingrad 1948.
- Landolt M.: *Grösse, Masszahl und Einheit*, Rascher Verlag, Zürich 1943.
- Landolt M., *Zur Theorie der Dimension der physikalischen Grössen*, Bull. Schweiz. elektr. Vereins 41 (1950), str. 473, 541.
- Landolt M., de Boer J., *Quelle est la signification de la rationalisation totale?*, Rev. Gén. de l'Electricité 60 (1951), str. 449.
- Langdon — Davies J.: *Jubilee Book of the National Physical Laboratory*, H. M. Stationery Office, London 1951.
- List V.: *Zaklady elektrotechnicky I*, ČMT, Praha 1946.
- Löbl O., *Memorandum über elektrische und magnetische Einheiten*, Elektrotechnische Zeitschrift 72 (1951), str. 455.
- Löbl O., *Randbemerkungen zu einigen AEF-Aufgaben*, ETZ-A 78 (1957), str. 275.
- Lodge A., *The Multiplication and Division of Concrete Quantities*, Nature 1888, July, str. 281.
- Lončar J.: *Osnovi elektrotehnike I*, Hrvatska državna tiskara, Zagreb 1942.
- Malikov M. F., *O vvedenij v SSSR absoljutnih električeskikh i magnitnih jedinica*, Električstvo 1948, No 1, str. 10.
- Marburger W. G., Hoffman Ch. W.: *Physics for Our Times*, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1958.
- Marković B., *Mjerenje i mjere*, Almanah Bošković Hrv. prirod. društva, Zagreb 1950., str. 239.
- Marriott H., Cullen A. L., *The Rationalization of Electrical Theory and Units*, Proceedings IEE 97 (1950), Part I, str. 245, 271.
- Meldahl A., *Über homogen geschriebene Gleichungen, Masssysteme und Dimensionsanalyse*, BBC-Nachrichten 43 (1961), str. 319.
- Mie G.: *Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus*, F. Enke, Stuttgart 1941.
- Mitkevič V. F.: *Magnitnij patok i ivo preobrazovanija*, Akademija nauk SSSR, Moskva — Lenjingrad 1946.
- Mlodzejevski A. B.: *Termodinamika*, Moskva 1948.
- Monn P., Spencer D. E., *Language for Science*, Journal of the Franklin Institute 246 (1948), No 1.
- Moon P., Spencer D. E., *Internationality in the Names of Scientific Concepts: A Method of Naming Concepts*, American Journal of Physics 14 (1946), str. 285.
- Moon P., Spencer D. E., *Modern Terminology for Physics*, American Journal of Physics 16 (1948), str. 100.
- National Bureau of Standards, *Announcement of Changes in Electrical and Photometric Units*, NBS Circular C 459, Washington 1948.
- Najman L. P., Kalantarov P. L.: *Teoretičeskiji osnovi elektrotehniki I*, Gosenergoizdat, Lenjingrad — Moskva 1948.
- Nejman L. P., *O sootnošenijah meždu jedinicama veličin pri racionalizovannih i neracionalizovannih sistemah uravnenij elektromagnitnogo polja*, Električstvo 1959., No 6, str. 13.
- Nichols L. W., *Conversion of Inch and Metric Sizes on Engineering Drawings*, Engineering 179 (1955), No. 4653, str. 409.
- Oatley C. W., Yates J. G., *Bridges with Coupled Inductive Ratio Arms as Precision Instruments for the Comparison of Laboratory Standards of Resistance or Capacitance*, Proceedings IEE 101 (1954), Part III, str. 91.
- Oberdorfer G.: *Lehrbuch der Elektrotechnik I*, Oldenbourg, München — Berlin 1939.
- Oberdorfer G.: *Das natürliche Masssystem*, Springer, Wien 1949.
- Oberdorfer G., *Die natürlichen Grundlagen einer befriedigenden Masssystembildung*, ATM 1954, Lg. 225, str. 221.
- Oberdorfer G., *Zum Oerstedt und den anderen magnetischen Dreieereinheiten*, EuM 77 (1960), str. 288.
- Obradović N. M.: *Osnovi mehanike fluida*, Naučna knjiga, Beograd 1952.
- Ouziaux R., *L'emploi du système M. K. S. A. dans l'enseignement de la mécanique*, Mesures 24 (1959), str. 772.
- Papaleksi N. D.: *Kurs fiziki I, II*, Gostehizdat, Moskva — Lenjingrad 1947.
- Pérard A., *La neuvième Conférence générale des Poids et Mesures*, Revue Générale de l'Electricité 1949., str. 44.

- Petrović V. V., *O građenju koherentnih sistema jedinica*, Tehnički list 20 (1938), str. 165, 198.
- Planck M.: *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*, 4. izdanje, Barth, Leipzig 1921.
- Pohl R. W.: *Einführung in die Elektrizitätslehre*, 13-14 izdanje, Springer, Göttingen 1949.
- Pohl R. W.: *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, 13. izdanje, Springer, Göttingen 1955.
- Polhovski V., *Četvrti osnovna jedinica u apsolutnom sistemu MKS električnih i magnetskih jedinica za merenje*, Elektropriroda 2 (1949), str. 175.
- Polhovski V., *Nove električne i magnetske jedinice*, Elektropriroda 2 (1949), str. 221.
- Quade W., *Mathematische Fragen aus der Arbeit des AEF*, ETZ-A 78 (1957), str. 285.
- Ranojević M. N.: *Sistemi jedinica i rešeni zadaci iz osnova elektrotehnike*, Centralno udruženje studenata tehnike, Beograd 1947.
- Ranojević M., *Racionalizacija uravnenij elektromagnitnoga polja*, Električstvo 1959., No 6, str. 18.
- Rawcliffe G. H., *The Rationalization of Electrical Units and Its Effect on the M. K. S. System*, Proceedings IEE 97 (1950), Part I, str. 241, 270.
- Remnjević V. F., *Ješće k voprosu ob elektromagnitnih jedinicah*, Električstvo 1949, No 12, str. 76.
- Rodenwald H. J., *Die Planck'schen Masseinheiten*, Zeitschr. f. Naturforschung 5a (1950), str. 173.
- Salisbury J. K.: *Steam Turbines and their Cycles*, Wiley and Sons, New York 1950.
- Sarbacher R. I., Edson W. A.: *Hyper and Ultrahigh Frequency Engineering*, Wiley and Sons, New York 1948.
- Scheibe A., *Die Quartzuhr als Frequenz- und Zeitnormal*, ETZ — A 76 (1955), str. 153.
- Schekunoff S. A.: *Electromagnetic Waves*, 4. izdanje, Nostrand, New York 1945.
- Schouten J. P., *Grootheden, Eenheden, Rationalisatie*, De Ingenieur 64 (1952), str. 103.
- Silsbee F. B., *Establishment and Maintenance of the Electrical Units*, National Bureau of Standards Circular 475, Washington 1949.
- Sjedov L. I.: *Metody padobija i razmjernosti v mehanike*, Gostehizdat, Moskva 1957.
- Sjena L. A., *O klasifikacij razmernostej*, Žurnal tehn. fiziki 19 (1949), str. 279.
- Sjena L. A., *O sravnitel'nyh preimučestvah različnyh sistem jedinic*, Električstvo 1959, No 6, str. 23.
- Skalicky M., *Die neuen elektrischen absoluten Masseinheiten*, Siemens (Austria) Zeitschrift 1 (1949), str. 25.
- Smythe W. R.: *Static and Dynamic Electricity*, Mc Graw-Hill Co, New York 1950.
- Solovjev V. E., Zemskij V. A., Jahinson B. I., Polivanov K. M., Kalantarov P. L., Malikov V. F., *Diskusija o članima Malikova i Kalantarova*, Električstvo 1949, No 1, str. 59.
- Solovjev V. E., *Sistemi mehaničeskih jedinic*, Električstvo 1949, No 7, str. 77.
- Sommerfeld A.: *Vorlesungen über theoretische Physik*, I—IV, Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1950.
- Starling S. G.: *Electricity and Magnetism*, Longmans, Green and Co, London 1948.
- Steele J. McA., *The Standard Frequency Monitor at the National Physical Laboratory*, Proceedings IEE 102 (1955), Part B, str. 155.
- Stille U., *Umrechnungstafel für die Zahlenwerte elektrischer und Magnetischer Größen*, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1943.
- Stille U., *Rationale und nicht-rationale Behandlung des elektromagnetischen Feldes*, Abh. Braunsch. Wiss. Gess. 1 (1949), str. 38.
- Stille U., *Drei- Vier- und Fünf- Grundgrößen-Gleichungen in der Elektrodynamik*, Abh. Braunsch. Wiss. Gess. 1 (1949), str. 56.
- Stille U., *Grössendefinition und Einheitenverknüpfung in der Elektrodynamik*, Archiv für Elektrotechnik 40 (1952), str. 249.
- Stille U., *Mass und Messen im Spiegel physikalisch-technischer Entwicklung*, EuM 74 (1957), str. 25, 57.
- Stille U., *Technisches Komitee TC 24 Elektrische und magnetische Größen und Einheiten der IEC. Sitzung 6. bis 8. Juli 1959 in Madrid*, Elektronorm 13 (1959), str. 267.
- Stratton J. A.: *Electromagnetic Theory*, Mc Graw-Hill Co, New York 1941.
- Stubbings G. W.: *Dimensions in Engineering Theory*, Crosby Lockwood and Son, London 1948.
- Stula-Götz J., *Das geplante internationale Einheitensystem*, Elektrotechnik und Maschinenbau 68 (1951), str. 215.
- Stulla-Götz J., *Die Tagung des ISO-Technischen Komitees 12. in Kopenhagen*, EuM 70 (1953), str. 418.

- Stulla-Götz, *Die 10. Generalkonferenz für Mass und Gewicht (CGPM)*, EuM 72 (1955), str. 322.
- Supek I.: *Teorijska fizika i struktura materije*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1949.
- Suškov V. V.: *Tehničkaja termodinamika*, 4. izdanje, Gosenergoizdat, Moskva 1946.
- Svensson A., *New Electronic Time Meter*, Ericsson Review 32 (1955), str. 16.
- Škreb S., *Kritika osnovnih pojmova Newtonove mehanike*, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, knjiga 267 (83), Zagreb 1940.
- Štandelj A. E., *Ob utvojenij simboliki v teorij razmjernosti*, Žurnalj tehničkoj fiziki, 1948, sept., str. 1221.
- Tamm I. E.: *Osnovi teorij električestva*, Gostehizdat, Moskva—Lenjingrad 1949.
- Thompson A. M., *The Cylindrical Cross-Capacitor as a Calculable Standard*, Proceedings IEE 106 B (1959), str. 307.
- Terrien J., *Le rattachement du mètre à une longueur d'onde lumineuse*, Mesures & Controle Industriel 25 (1960), str. 1131.
- Tomaschek R.: *Grimsehl's Lehrbuch der Physik II*, 10. izdanje, Teubner Leipzig—Berlin 1942.
- Tripalo A., *O sistemima jedinica u elektrotehnici*, Nauka i tehnika 7 (1951), str. 340.
- Tripalo A., *Za jedinstveni sistem jedinica za mere u nauci i tehnici*, Nauka i tehnika 8 (1952), str. 82.
- Trnka Z.: *Uvod do theoretické elektrotechniky*, ESČ, Praha 1946.
- Ulich H.: *Kratak udžbenik fizikalne kemije* (preveo Podhorsky R.), Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1947.
- Vermeulen R., *Dimensional Analysis, Units and Rationalization*, Philips Research Reports 7 (1952), str. 432.
- Vigoureux P., *Electrical Units and Standards*, Proceedings IEE 107 B (1960), str. 235.
- Vieweg R., *Merjenje — normiranje — produciranje* (preveo Avčin F.), Elektrotehniški vestnik 27 (1959), str. 128, 187, 277.
- Vivié J., *Change Over to Metric System*, Mesures 24 (1959), str. 853.
- Vonsovski S. V., Šur Ja. S.: *Ferromagnetism*, Ogiz, Moskva—Lenjingrad 1948.
- Wallot J., *Zur Theorie der Dimensionen*, Zeitschrift für Physik 10 (1922), str. 329.
- Wallot J., *Die physikalischen und technischen Einheiten*, Elektrotechnische Zeitschrift 43 (1922), str. 1329, 1381.
- Wallot J., *Über den Wert der „Grössengleichungen“ und über die Definition der magnetischen Polstärke*, Elektrotechnische Zeitschrift 48 (1927), str. 430.
- Wallot J., *Remarques sur le système d'unités Giorgi*, Proc. Verb. CIPM 1935, str. 352.
- Wallot J., *Grundeinheiten und Masssysteme*, Die Physik 10 (1942), H.1.
- Wallot J., *Zur Definition der Grössen des elektromagnetischen Feldes und zur Theorie der Masssysteme*, Physikalische Zeitschrift 44 (1943), str. 17.
- Wallot J., *Grössengleichungen und Zahlenwertgleichungen*, Elektrotechnische Zeitschrift 64 (1943), str. 13.
- Wallot J., *Elektrische Masssysteme*, Elektrotechnische Zeitschrift 64 (1943), str. 299.
- Wallot J., *Massenkilogram und Kraftkilogram*, Zeitschrift VDI 90 (1948), str. 213.
- Wallot J. (u ime AEF), *Neufassung der Normblatts DIN 1301*, Elektrotechnische Zeitschrift 73 (1952), str. 275.
- Wallot J., *Grössendefinition und Einheitenverknüpfung in der Elektrodynamik*, Archiv für Elektrotechnik 40 (1952), str. 256.
- Wallot J., *Rationalisierung und Kohärenz*, Archiv für Elektrotechnik 40 (1952), str. 325.
- Wallot J.: *Grössengleichungen, Einheiten und Dimensionen*, Barth Verlag, Leipzig 1953.
- Weber E.: *Electromagnetic Fields (Theory and Applications)*, Wiley and Sons, New York 1950.
- Weyl H.: *Raum, Zeit, Materie*, 2. izdanje, Springer, Berlin 1919.
- Whitrow G. J., *An Elementary Derivation of Eddington's Number 10^{78}* , Nature 169 (1952), str. 611.
- Young L., *Electrical Units and Dimensions* (sa diskusijom), Transactions AIEE 75 (1956), Part I, str. 767.
- Zaveljskij F. S.: *Vremja i ivo izmjerenije*, Gos. izd. tehn. teoret. literaturi, Moskva 1955.
- Zimmerman O. T., Lavine I.: *Conversion Factors and Tables*, Industrial Research Service Inc., New Hampshire 1955.

PRILOŽENE TABLICE

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA DULJINE

TABLICA I

Jedinica	Kratica	m	mm	km	yd	ft	in	ml
metar	m	1	10^3	10^{-3}	1,094	3,281	$3,937 \cdot 10^{-1}$	$6,214 \cdot 10^{-4}$
milimetar	mm	10^{-3}	1	10^{-6}	$1,094 \cdot 10^{-3}$	$3,281 \cdot 10^{-3}$	$3,937 \cdot 10^{-2}$	$6,214 \cdot 10^{-7}$
kilometar	km	10^3	10^6	1	$1,094 \cdot 10^3$	$3,281 \cdot 10^3$	$3,937 \cdot 10^4$	$6,214 \cdot 10^{-1}$
yard	yd	$9,144 \cdot 10^{-1}$	$9,144 \cdot 10^2$	$9,144 \cdot 10^{-4}$	1	3,000	$3,600 \cdot 10^{-1}$	$5,682 \cdot 10^{-4}$
foot (')	ft	$3,048 \cdot 10^{-1}$	$3,048 \cdot 10^2$	$3,048 \cdot 10^{-4}$	$3,333 \cdot 10^{-1}$	1	$1,200 \cdot 10^{-1}$	$1,894 \cdot 10^{-4}$
inch (")	in	$2,540 \cdot 10^{-2}$	$2,540 \cdot 10^1$	$2,540 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-2}$	$8,333 \cdot 10^{-2}$	1	$1,578 \cdot 10^{-5}$
milja (Statute Mile)	mi	$1,609 \cdot 10^3$	$1,609 \cdot 10^6$	1,609	$1,760 \cdot 10^3$	$5,280 \cdot 10^3$	$6,336 \cdot 10^4$	1

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA POVRŠINE

TABLICA II

Jedinica	Kratica	m ²	cm ²	mm ²	sq. yd	sq. ft	sq. in	cm ²
kvadratni metar	m ²	1	10^4	10^6	1,196	$1,076 \cdot 10^1$	$1,550 \cdot 10^3$	$1,974 \cdot 10^9$
kvadratni centimetar	cm ²	10^{-4}	1	10^2	$1,196 \cdot 10^{-4}$	$1,076 \cdot 10^{-3}$	$1,550 \cdot 10^{-1}$	$1,974 \cdot 10^5$
kvadratni milimetar	mm ²	10^{-6}	10^{-2}	1	$1,196 \cdot 10^{-6}$	$1,076 \cdot 10^{-5}$	$1,550 \cdot 10^{-3}$	$1,974 \cdot 10^3$
square yard	sq. yd	$8,361 \cdot 10^{-1}$	$8,361 \cdot 10^3$	$8,361 \cdot 10^5$	1	9,000	$1,296 \cdot 10^3$	$1,650 \cdot 10^9$
square foot	sq. ft	$9,290 \cdot 10^{-2}$	$9,290 \cdot 10^2$	$9,290 \cdot 10^4$	$1,111 \cdot 10^{-1}$	1	$1,440 \cdot 10^2$	$1,833 \cdot 10^8$
square inch	sq. in	$6,452 \cdot 10^{-4}$	6,452	$6,452 \cdot 10^2$	$7,716 \cdot 10^{-4}$	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1	$1,272 \cdot 10^5$
circular mil	cml	$5,067 \cdot 10^{-10}$	$5,067 \cdot 10^{-6}$	$5,067 \cdot 10^{-4}$	$6,060 \cdot 10^{-10}$	$5,454 \cdot 10^{-9}$	$7,854 \cdot 10^{-6}$	1

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA VOLUMENA

TABLICA III

Jedinica	Kratica	m ³	litra	cubic inch	cubic foot	cubic yard	gallon fluid USA	barrel fluid USA
kubni metar	m ³	1	10 ³	6,102 · 10 ⁻⁴	3,532 · 10 ⁻¹	1,308	2,642 · 10 ⁻²	6,298
litra	l	10 ⁻³	1	6,102 · 10 ⁻¹	3,532 · 10 ⁻²	1,308 · 10 ⁻³	2,642 · 10 ⁻¹	6,298 · 10 ⁻³
cubic inch	cu. in	1,639 · 10 ⁻⁵	1,639 · 10 ⁻²	1	5,787 · 10 ⁻⁴	2,144 · 10 ⁻⁵	4,329 · 10 ⁻³	1,032 · 10 ⁻⁴
cubic foot	cu. ft	2,832 · 10 ⁻²	2,832 · 10 ⁻¹	1,728 · 10 ⁻³	1	3,704 · 10 ⁻²	7,480	1,783 · 10 ⁻¹
cubic yard	cu. yd	7,646 · 10 ⁻¹	7,646 · 10 ²	4,685 · 10 ⁻⁴	2,700 · 10 ⁻¹	1	2,020 · 10 ⁻²	4,815
gallon fluid USA	gal	3,785 · 10 ⁻³	3,785	2,310 · 10 ⁻²	1,337 · 10 ⁻¹	4,951 · 10 ⁻³	1	2,384 · 10 ⁻²
barrel fluid USA	bbl	1,588 · 10 ⁻¹	1,588 · 10 ²	9,688 · 10 ⁻³	5,607	2,077 · 10 ⁻¹	4,194 · 10 ⁻¹	1

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA PROTOKE

TABLICA IV

Jedinica	$\frac{m^3}{s}$	$\frac{l}{s}$	$\frac{m^3}{h}$	$\frac{l}{h}$	$\frac{l}{min}$	cu. ft. p. min	cu. ft. p. s	imp. g. p. min	USA g. p. s
1 m ³ /s	1	10 ³	3,600 · 10 ⁻³	3,600 · 10 ⁶	6,000 · 10 ⁻⁴	2,119 · 10 ³	3,532 · 10 ¹	1,320 · 10 ⁴	2,642 · 10 ²
2 l/s	10 ⁻³	1	3,600	3,600 · 10 ⁻³	6,000 · 10 ⁻¹	2,119	3,532 · 10 ⁻²	1,320 · 10 ⁻¹	2,642 · 10 ⁻¹
3 m ³ /h	2,780 · 10 ⁻⁴	2,780 · 10 ⁻¹	1	10 ³	1,667 · 10 ⁻¹	5,886 · 10 ⁻¹	9,810 · 10 ⁻³	3,666	7,338 · 10 ⁻²
4 l/h	2,780 · 10 ⁻⁷	2,780 · 10 ⁻⁴	10 ⁻³	1	1,667 · 10 ⁻²	5,886 · 10 ⁻⁴	9,810 · 10 ⁻⁶	3,666 · 10 ⁻³	7,338 · 10 ⁻⁵
5 l/min	1,667 · 10 ⁻⁵	1,667 · 10 ⁻²	6,000 · 10 ⁻²	6,000 · 10 ⁻¹	1	3,532 · 10 ⁻²	5,886 · 10 ⁻⁴	2,199 · 10 ⁻¹	4,403 · 10 ⁻³
6 cu. ft. p. min	4,719 · 10 ⁻⁴	4,719 · 10 ⁻¹	1,699	1,699 · 10 ³	2,832 · 10 ⁻¹	1	1,667 · 10 ⁻²	6,228	1,247 · 10 ⁻¹
7 cu. ft. p. s	2,832 · 10 ⁻²	2,832 · 10 ⁻¹	1,019 · 10 ⁻²	1,019 · 10 ⁻⁵	1,699 · 10 ⁻³	6,000 · 10 ⁻¹	1	3,737 · 10 ⁴	7,480
8 imp. g. p. min	7,578 · 10 ⁻⁵	7,578 · 10 ⁻²	2,728 · 10 ⁻¹	2,728 · 10 ²	4,546	1,606 · 10 ⁻¹	2,676 · 10 ⁻⁵	1	2,002 · 10 ⁻²
9 USA g. p. s	3,785 · 10 ⁻³	3,785	1,363 · 10 ⁻¹	1,363 · 10 ⁻⁴	2,271 · 10 ⁻²	8,021	1,337 · 10 ⁻¹	4,995 · 10 ⁻¹	1

Opaske: 1) kubni metar u sekundi, 2) litra u sekundi, 3) kubni metar u satu, 4) litra u satu, 5) litra u minuti, 6) cubic foot per minute, 7) cubic foot per second, 8) Imperial gallon per minute (GB), 9) USA gallon per second.

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA MASE

TABLICA V

Jedinica	Kratika	kg	g	t	lb	oz	cwt	ton	sh. ton
kilogram	kg	1	10^3	10^{-3}	2,205	$3,527 \cdot 10^1$	$1,963 \cdot 10^{-2}$	$9,842 \cdot 10^{-4}$	$1,102 \cdot 10^{-3}$
gram	g	10^{-3}	1	10^{-6}	$2,205 \cdot 10^{-3}$	$3,527 \cdot 10^{-2}$	$1,963 \cdot 10^{-5}$	$9,842 \cdot 10^{-7}$	$1,102 \cdot 10^{-6}$
tona (metrička)	t	10^3	10^6	1	$2,205 \cdot 10^3$	$3,527 \cdot 10^4$	$1,963 \cdot 10^1$	$9,842 \cdot 10^{-1}$	1,102
pound	lb	$4,536 \cdot 10^{-1}$	$4,536 \cdot 10^2$	$4,536 \cdot 10^{-4}$	1	$1,600 \cdot 10^1$	$8,928 \cdot 10^{-3}$	$4,464 \cdot 10^{-4}$	$5,000 \cdot 10^{-4}$
ounce	oz	$2,835 \cdot 10^{-2}$	$2,835 \cdot 10^1$	$2,835 \cdot 10^{-5}$	$6,250 \cdot 10^{-2}$	1	$5,580 \cdot 10^{-4}$	$2,790 \cdot 10^{-5}$	$3,125 \cdot 10^{-5}$
hundredweight	cwt	$5,080 \cdot 10^1$	$5,080 \cdot 10^4$	$5,080 \cdot 10^{-2}$	$1,120 \cdot 10^2$	$1,792 \cdot 10^3$	1	$5,000 \cdot 10^{-2}$	$5,600 \cdot 10^{-2}$
ton (GB)	ton	$1,016 \cdot 10^3$	$1,016 \cdot 10^6$	1,016	$2,240 \cdot 10^3$	$3,584 \cdot 10^4$	$2,000 \cdot 10^1$	1	1,120
short-ton USA	sh. ton	$9,072 \cdot 10^2$	$9,072 \cdot 10^5$	$9,072 \cdot 10^{-1}$	$2,000 \cdot 10^3$	$3,200 \cdot 10^4$	$1,786 \cdot 10^1$	$8,929 \cdot 10^{-1}$	1

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA SILE

TABLICA VI

Jedinica	Kratika	N	kN	dyn	kp	t	Lb	pdl	ton	sh. ton
newton	N	1	10^{-3}	10^5	$1,020 \cdot 10^{-1}$	$1,020 \cdot 10^{-4}$	$2,248 \cdot 10^{-1}$	7,233	$1,004 \cdot 10^{-4}$	$1,124 \cdot 10^{-4}$
kilonewton	kN	10^3	1	10^8	$1,020 \cdot 10^2$	$1,020 \cdot 10^{-1}$	$2,248 \cdot 10^2$	$7,233 \cdot 10^3$	$1,004 \cdot 10^{-1}$	$1,124 \cdot 10^{-1}$
dyn	dyn	10^{-5}	10^{-8}	1	$1,020 \cdot 10^{-6}$	$1,020 \cdot 10^{-9}$	$2,248 \cdot 10^{-6}$	$7,233 \cdot 10^{-5}$	$1,004 \cdot 10^{-9}$	$1,124 \cdot 10^{-9}$
kilopond	kp	9,807	$9,807 \cdot 10^{-3}$	$9,807 \cdot 10^5$	1	10^{-3}	2,205	$7,376 \cdot 10^1$	$9,838 \cdot 10^{-4}$	$1,102 \cdot 10^{-3}$
tona-težina (metrička)	t	$9,807 \cdot 10^3$	9,807	$9,807 \cdot 10^8$	10^3	1	$2,205 \cdot 10^3$	$7,376 \cdot 10^4$	$9,838 \cdot 10^{-1}$	1,102
pond (weight)	Lb	4,448	$4,448 \cdot 10^{-3}$	$4,448 \cdot 10^5$	$4,536 \cdot 10^{-1}$	$4,536 \cdot 10^{-4}$	1	$3,218 \cdot 10^1$	$4,464 \cdot 10^{-4}$	$5,000 \cdot 10^{-4}$
poundal	pdl	$1,383 \cdot 10^{-1}$	$1,383 \cdot 10^{-4}$	$1,383 \cdot 10^4$	$1,356 \cdot 10^{-2}$	$1,356 \cdot 10^{-5}$	$3,108 \cdot 10^{-2}$	1	$1,387 \cdot 10^{-5}$	$1,554 \cdot 10^{-5}$
ton (weight) GB	ton	$9,964 \cdot 10^3$	9,964	$9,964 \cdot 10^8$	$1,016 \cdot 10^3$	1,016	$2,240 \cdot 10^3$	$7,208 \cdot 10^4$	1	1,120
short-ton USA	sh. ton	$8,896 \cdot 10^3$	8,896	$8,896 \cdot 10^8$	$9,072 \cdot 10^2$	$9,072 \cdot 10^{-1}$	$2,000 \cdot 10^3$	$6,436 \cdot 10^4$	$8,929 \cdot 10^{-1}$	1

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA PRITISKA

TABLICA VII

Jedinica	$\frac{N}{m^2}$	$\frac{N}{cm^2}$	at	torr	bar	atm	m. s. v.	$\frac{Lb}{sq. in.}$	in. Hg
1 N/m^2	1	10^{-4}	$1,020 \cdot 10^{-5}$	$7,501 \cdot 10^{-3}$	10^{-5}	$9,869 \cdot 10^{-6}$	$1,020 \cdot 10^{-4}$	$1,450 \cdot 10^{-4}$	$2,953 \cdot 10^{-4}$
2 N/cm^2	10^4	1	$1,020 \cdot 10^{-1}$	$7,501 \cdot 10^1$	10^{-1}	$9,869 \cdot 10^{-2}$	1,020	1,450	2,953
3 at	$9,807 \cdot 10^4$	9,807	1	$7,356 \cdot 10^2$	$9,807 \cdot 10^{-1}$	$9,678 \cdot 10^{-1}$	10^1	$1,422 \cdot 10^1$	$2,896 \cdot 10^1$
4 torr	$1,333 \cdot 10^2$	$1,333 \cdot 10^{-2}$	$1,359 \cdot 10^{-3}$	1	$1,333 \cdot 10^{-3}$	$1,346 \cdot 10^{-3}$	$1,359 \cdot 10^{-2}$	$1,934 \cdot 10^{-2}$	$3,937 \cdot 10^{-2}$
5 bar	10^5	10^1	1,020	$7,501 \cdot 10^2$	1	$9,869 \cdot 10^{-1}$	$1,020 \cdot 10^1$	$1,450 \cdot 10^1$	$2,953 \cdot 10^1$
6 atm	$1,013 \cdot 10^5$	$1,013 \cdot 10^1$	1,033	$7,600 \cdot 10^2$	1,013	1	$1,033 \cdot 10^1$	$1,470 \cdot 10^1$	$2,992 \cdot 10^1$
7 m. s. v.	$9,806 \cdot 10^3$	$9,806 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	$7,356 \cdot 10^1$	$9,806 \cdot 10^{-2}$	$9,678 \cdot 10^{-2}$	1	1,422	2,896
8 $Lb/sq. in.$	$6,895 \cdot 10^3$	$6,895 \cdot 10^{-1}$	$7,031 \cdot 10^{-2}$	$5,171 \cdot 10^1$	$6,895 \cdot 10^{-2}$	$6,805 \cdot 10^{-2}$	$7,031 \cdot 10^{-1}$	1	2,036
9 in. Hg	$3,386 \cdot 10^3$	$3,386 \cdot 10^{-1}$	$3,453 \cdot 10^{-2}$	$2,540 \cdot 10^1$	$3,386 \cdot 10^{-2}$	$3,342 \cdot 10^{-2}$	$3,453 \cdot 10^{-1}$	$4,912 \cdot 10^{-1}$	1

Opaske: 1) newton po kvadratnom metru, 2) newton po cm^2 , 3) at = tehnička atmosfera = kp/cm^2 , 4) torr = 1mm stupca žive pri $\vartheta = 0^\circ C$, 5) bar = 10^6 dyn/ cm^2 , 6) atm = fizikalna (normalna) atmosfera, 7) m. s. v. = metar stupca vode, 8) pound per square inch, 9) inch of mercury.

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA SNAGE

TABLICA VIII

Jedinica	Kratika	W	kW	$\frac{kpm}{s}$	$\frac{kcal}{h}$	KS	HP	$\frac{BTU}{min}$	$\frac{ft \cdot Lb}{min}$	sh. t. r.
watt	W	1	10^{-3}	$1,020 \cdot 10^{-1}$	$8,600 \cdot 10^{-1}$	$1,360 \cdot 10^{-3}$	$1,341 \cdot 10^{-3}$	$5,688 \cdot 10^{-2}$	$4,425 \cdot 10^1$	$2,844 \cdot 10^{-4}$
kilowatt	kW	10^3	1	$1,020 \cdot 10^2$	$8,600 \cdot 10^2$	1,360	1,341	$5,688 \cdot 10^1$	$4,425 \cdot 10^4$	$2,844 \cdot 10^{-1}$
kilopondmetar u sekundi	kpm/s	9,807	$9,807 \cdot 10^{-3}$	1	8,432	$1,333 \cdot 10^{-2}$	$1,315 \cdot 10^{-2}$	$5,578 \cdot 10^{-1}$	$4,340 \cdot 10^2$	$2,789 \cdot 10^{-3}$
kilokalorija u satu	kcal/h	1,136	$1,163 \cdot 10^{-3}$	$1,186 \cdot 10^{-1}$	1	$1,581 \cdot 10^{-3}$	$1,559 \cdot 10^{-3}$	$6,614 \cdot 10^{-2}$	$5,146 \cdot 10^1$	$3,306 \cdot 10^{-4}$
konjska snaga	KS	$7,355 \cdot 10^2$	$7,355 \cdot 10^{-1}$	$7,500 \cdot 10^1$	$6,325 \cdot 10^2$	1	$9,863 \cdot 10^{-1}$	$4,184 \cdot 10^1$	$3,255 \cdot 10^4$	$2,092 \cdot 10^{-1}$
horse power	HP	$7,457 \cdot 10^2$	$7,457 \cdot 10^{-1}$	$7,604 \cdot 10^1$	$6,413 \cdot 10^2$	1,014	1	$4,242 \cdot 10^1$	$3,300 \cdot 10^4$	$2,121 \cdot 10^{-1}$
british thermal unit per minute	BTU/min	$1,758 \cdot 10^1$	$1,758 \cdot 10^{-2}$	1,793	$1,512 \cdot 10^1$	$2,900 \cdot 10^{-2}$	$2,358 \cdot 10^{-2}$	1	$7,776 \cdot 10^2$	$5,000 \cdot 10^{-3}$
foot pound per minute	ft. Lb/min	$2,260 \cdot 10^{-2}$	$2,260 \cdot 10^{-5}$	$2,304 \cdot 10^{-3}$	$1,943 \cdot 10^{-2}$	$3,072 \cdot 10^{-5}$	$3,030 \cdot 10^{-5}$	$1,287 \cdot 10^{-3}$	1	$6,427 \cdot 10^{-6}$
short ton of refrigeration USA	sh. t. r.	$3,516 \cdot 10^3$	3,516	$3,585 \cdot 10^2$	$3,024 \cdot 10^3$	4,780	4,715	$2,000 \cdot 10^2$	$1,556 \cdot 10^5$	1

DVOSTRANI ODNOSI MEĐU RAZLIČITIM JEDINICAMA ENERGIJE

TABLICA IX

Jedinica	J	KJ	cal	kcal	kpm	Wh	kWh	KS·s	KS·h	BTU	ft·Lb	erg	eV
J	1	10^{-3}	$2,389 \cdot 10^{-1}$	$2,389 \cdot 10^{-4}$	$1020 \cdot 10^{-1}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$1,360 \cdot 10^{-3}$	$3,777 \cdot 10^{-7}$	$9,479 \cdot 10^{-4}$	$7,371 \cdot 10^{-1}$	10^7	$6,242 \cdot 10^{18}$
KJ	10^3	1	$2,389 \cdot 10^2$	$2,389 \cdot 10^{-1}$	$1020 \cdot 10^2$	$2,778 \cdot 10^{-1}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	1,360	$3,777 \cdot 10^{-4}$	$9,479 \cdot 10^{-1}$	$7,371 \cdot 10^2$	10^{10}	$6,242 \cdot 10^{21}$
cal	4,186	$4,186 \cdot 10^{-3}$	1	10^{-3}	$4,269 \cdot 10^{-1}$	$1,163 \cdot 10^{-3}$	$1,163 \cdot 10^{-6}$	$5,692 \cdot 10^{-3}$	$1,581 \cdot 10^{-6}$	$3,970 \cdot 10^{-3}$	3,086	$4,186 \cdot 10^7$	$2,613 \cdot 10^{19}$
kcal	$4,186 \cdot 10^3$	4,186	10^3	1	$4,269 \cdot 10^2$	1,163	$1,163 \cdot 10^{-3}$	5,692	$1,581 \cdot 10^{-3}$	3,970	$3,086 \cdot 10^3$	$4,186 \cdot 10^{10}$	$2,613 \cdot 10^{22}$
kpm	9,807	$9,807 \cdot 10^{-3}$	$2,343 \cdot 10^{-3}$	$2,343 \cdot 10^{-3}$	1	$2,739 \cdot 10^{-3}$	$2,739 \cdot 10^{-6}$	$1,333 \cdot 10^{-2}$	$3,704 \cdot 10^{-6}$	$9,295 \cdot 10^{-3}$	7228	$9,807 \cdot 10^7$	$6,121 \cdot 10^{19}$
Wh	$3,600 \cdot 10^3$	3,600	$8,600 \cdot 10^2$	$8,600 \cdot 10^{-1}$	$3,671 \cdot 10^2$	1	10^3	4,895	$1,360 \cdot 10^{-3}$	3,412	$2,654 \cdot 10^3$	$3,600 \cdot 10^{10}$	$2,247 \cdot 10^{22}$
kWh	$3,600 \cdot 10^6$	$3,600 \cdot 10^3$	$8,600 \cdot 10^5$	$8,600 \cdot 10^2$	$3,671 \cdot 10^5$	10^3	1	$4,895 \cdot 10^3$	1,360	$3,412 \cdot 10^3$	$2,654 \cdot 10^6$	$3,600 \cdot 10^{13}$	$2,247 \cdot 10^{25}$
KS·s	$7,355 \cdot 10^2$	$7,355 \cdot 10^{-1}$	$1,757 \cdot 10^2$	$1,757 \cdot 10^{-1}$	$7,500 \cdot 10^1$	$2,043 \cdot 10^{-1}$	$2,043 \cdot 10^{-4}$	1	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$6,971 \cdot 10^{-1}$	$5,421 \cdot 10^2$	$7,355 \cdot 10^9$	$4,591 \cdot 10^{21}$
KS·h	$2,648 \cdot 10^6$	$2,648 \cdot 10^3$	$6,325 \cdot 10^5$	$6,325 \cdot 10^2$	$2,700 \cdot 10^5$	$7,355 \cdot 10^2$	$7,355 \cdot 10^{-1}$	$3,600 \cdot 10^3$	1	$2,510 \cdot 10^3$	$1,963 \cdot 10^6$	$2,648 \cdot 10^{13}$	$1,653 \cdot 10^{25}$
BTU	$1,055 \cdot 10^3$	1,055	$2,520 \cdot 10^2$	$2,520 \cdot 10^{-1}$	$1,076 \cdot 10^2$	$2,931 \cdot 10^{-1}$	$2,931 \cdot 10^{-4}$	1,435	$3,985 \cdot 10^{-4}$	1	$7,776 \cdot 10^2$	$1,055 \cdot 10^{10}$	$6,586 \cdot 10^{21}$
ft·Lb	1,356	$1,356 \cdot 10^{-3}$	$3,240 \cdot 10^{-1}$	$3,240 \cdot 10^{-4}$	$1,385 \cdot 10^{-1}$	$3,767 \cdot 10^{-4}$	$3,767 \cdot 10^{-7}$	$1,844 \cdot 10^{-3}$	$5,122 \cdot 10^{-7}$	$1,287 \cdot 10^{-3}$	1	$1,356 \cdot 10^7$	$8,465 \cdot 10^{18}$
erg	10^{-7}	10^{-10}	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$2,389 \cdot 10^{-11}$	$1020 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-11}$	$2,778 \cdot 10^{-14}$	$1,360 \cdot 10^{-10}$	$3,777 \cdot 10^{-14}$	$9,479 \cdot 10^{-11}$	$7,371 \cdot 10^{-8}$	1	$6,242 \cdot 10^{11}$
eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$1,602 \cdot 10^{-22}$	$3,827 \cdot 10^{-20}$	$3,827 \cdot 10^{-23}$	$1,634 \cdot 10^{-20}$	$4,450 \cdot 10^{-23}$	$4,450 \cdot 10^{-26}$	$2,178 \cdot 10^{-22}$	$6,051 \cdot 10^{-26}$	$1,519 \cdot 10^{-22}$	$1,181 \cdot 10^{-19}$	$1,602 \cdot 10^{12}$	1

ČEŠKE UPOTREBLJAVANE VELIČINSKE I BROJČANE JEDNADŽBE I TE ODNOSI IZMEĐU JEDINICA CGSE, CGSM I MEĐUNARODNOG SISTEMA JEDINICA

TABLICA X

Redni broj	Naziv veličine	Oznaka veličine	Veličina jednadžba	Jedinica Međunarodnog sistema	Brojčana jednadžba prilagođena jedinicama CGSE sistema	Jedinica CGSE sistema	Omjer: Jedinica CGSE Međ. jedinica	Jedinica Međunarodnog sistema	Omjer: Jedinica CGSM Međ. jedinica	Jedinica CGSM sistema	Brojčana jednadžba prilagođena jedinicama CGSM sistema	Jedinica CGSM sistema	Brojčana jednadžba prilagođena Gaussovom sistemu jedinica
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Elektrika	Q	$dQ = I dt$	C	$dQ = I dt$	$[Q]_e = 3,3356 \cdot 10^{-10}$	coulomb		$10 =$	$[Q]_m$	$dQ = I dt$	$① c$	$dQ_e = I_e dt$
2	Električki tok	ψ	$Q = \psi$	C	$\psi = 4\pi Q$	$[\psi]_e = 2,6544 \cdot 10^{-11}$	C		$\cdot 7,9577 \cdot 10^{-1} =$	$[\psi]_m$	$\psi = 4\pi Q$	c	$\psi_e = 4\pi Q_e$
3	Električka indukcija	D	$\psi = DA$	C/m ²	$\psi = DA$	$[D]_e = 2,6544 \cdot 10^{-7}$	C/m ²		$\cdot 7,9577 \cdot 10^3 =$	$[D]_m$	$\text{rot } H = \frac{\partial D}{\partial t}$	c	$\text{rot } H_m = \frac{1}{c} \frac{\partial D_e}{\partial t}$
4	Jakost električkog polja	E	$F = EQ$	V/m	$F = EQ$	$[E]_e = 2,9979 \cdot 10^4$	V/m		$\cdot 10^{-6} =$	$[E]_m$	$E = c^2 Q / \epsilon_r r^2$	c ⁻¹	$E_e = Q_e / \epsilon_r r^2$
5	Dielektričnost	ϵ	$D = \epsilon E$	F/m	$D = \epsilon E = \epsilon_r E$	$[\epsilon]_e = 8,8542 \cdot 10^{-12}$	F/m		$\cdot 7,9577 \cdot 10^9 =$	$[\epsilon]_m$	$D = \epsilon E = \epsilon_r E / c^2$	c ²	$D_e = \epsilon_r E_e$
6	Električka polarizacija	P	$D = \epsilon_0 E + P$	C/m ²	$D = E + 4\pi P$	$[P]_e = 3,3356 \cdot 10^{-6}$	C/m ²		$\cdot 10^5 =$	$[P]_m$	$D = E / c^2 + 4\pi P$	c	$D_e = E_e + 4\pi P_e$
7	Kapacitet	C	$\psi = CU$	F	$Q = CU$	$[C]_e = 1,1127 \cdot 10^{-12}$	farad		$\cdot 10^9 =$	$[C]_m$	$Q = CU$	c ²	$Q_e = C_e U_e$
8	Gustoća energije el. polja	w_e	$w_e = \frac{1}{2} ED$	J/m ³	$w_e = \frac{1}{8\pi} ED$	$[w]_e = 10^{-1}$	J/m ³		$\cdot 10^{-1} =$	$[w]_m$	$w_e = \frac{1}{8\pi} ED$	1	$w_{ee} = \frac{1}{8\pi} E_e D_e$
9	Magnetski tok	Φ	$\Phi = BA$	Wb	$\Phi = BA$	$[\Phi]_e = 2,9979 \cdot 10^2$	weber		$\cdot 10^{-8} =$	$② [\Phi]_m$	$\Phi = BA$	c ⁻¹	$\Phi_m = B_m A$
10	Magnetska indukcija	B	$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	T	$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$[B]_e = 2,9979 \cdot 10^6$	tesla		$\cdot 10^{-4} =$	$③ [B]_m$	$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	c ⁻¹	$\text{rot } E_e = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_m}{\partial t}$
11	Jakost magnetskog polja	H	$\oint H dl = \theta = \Sigma I$	A/m	$\oint H dl = 4\pi \Sigma I$	$[H]_e = 2,6544 \cdot 10^{-9}$	A/m		$\cdot 7,9577 \cdot 10^1 =$	$④ [H]_m$	$\oint H dl = 4\pi \Sigma I$	c	$\oint H_m dl = 4\pi \Sigma I_e / c$
12	Permeabilnost	μ	$B = \mu H$	H/m	$B = \mu H = \mu_r H / c^2$	$[\mu]_e = 1,2566 \cdot 10^{-15}$	H/m		$\cdot 1,2566 \cdot 10^{-6} =$	$[\mu]_m$	$B = \mu H = \mu_r H$	c ⁻²	$B_m = \mu_r H_m$
13	Magnetska polarizacija	J	$B = \mu_0 H + J$	T	$B = H / c^2 + 4\pi J$	$[J]_e = 3,7673 \cdot 10^7$	T		$\cdot 1,2566 \cdot 10^{-3} =$	$[J]_m$	$B = H + 4\pi J$	c ⁻¹	$B_m = H_m + 4\pi J_m$
14	Induktivitet	L	$\Phi = LI$	H	$\Phi = LI$	$[L]_e = 8,9872 \cdot 10^{11}$	henry		$\cdot 10^{-9} =$	$[L]_m$	$\Phi = LI$	c ⁻²	$c \Phi_m = L_m I_e$
15	Gustoća energije mag. polja	w_m	$w_m = \frac{1}{2} BH$	J/m ³	$w_m = \frac{1}{8\pi} BH$	$[w]_e = 10^{-1}$	J/m ³		$\cdot 10^{-1} =$	$[w]_m$	$w_m = \frac{1}{8\pi} BH$	1	$w_{mm} = \frac{1}{8\pi} B_m H_m$
16	Jakost električne struje	I	$dQ = I dt$	A	$dQ = I dt$	$[I]_e = 3,3356 \cdot 10^{-10}$	amper		$\cdot 10 =$	$⑥ [I]_m$	$dQ = I dt$	c	$dQ_e = I_e dt$
17	Gustoća električne struje	j	$I = jA$	A/m ²	$I = jA$	$[j]_e = 3,3356 \cdot 10^{-6}$	A/m ²		$\cdot 10^5 =$	$[j]_m$	$I = jA$	c	$I_e = j_e A$
18	Električki napon	U	$dU = E dl$	V	$dU = E dl$	$[U]_e = 2,9979 \cdot 10^2$	volt		$\cdot 10^{-8} =$	$[U]_m$	$dU = E dl$	c ⁻¹	$dU_e = E_e dl$
19	Električki otpor	R	$U = RI$	Ω	$U = RI$	$[R]_e = 8,9872 \cdot 10^{11}$	ohm		$\cdot 10^{-9} =$	$[R]_m$	$U = RI$	c ⁻²	$U_e = R_e I_e$
20	Specifični elektr. otpor	ρ	$E = \rho j$	Ωm	$E = \rho j$	$[\rho]_e = 8,9872 \cdot 10^9$	Ωm		$\cdot 10^{-11} =$	$[\rho]_m$	$E = \rho j$	c ⁻²	$E_e = \rho_e j_e$
21	Magnetski napon	V	$dV = H dl$	A	$dV = H dl$	$[V]_e = 2,6544 \cdot 10^{-11}$	A		$\cdot 7,9577 \cdot 10^{-1} =$	$⑤ [V]_m$	$dV = H dl$	c	$dV_m = H_m dl$
22	Magnetska vodljivost	Λ	$\Phi = \Lambda V$	H	$\Phi = \Lambda V$	$[\Lambda]_e = 1,1294 \cdot 10^{13}$	H		$\cdot 1,2566 \cdot 10^{-8} =$	$[\Lambda]_m$	$\Phi = \Lambda V$	c ⁻²	$\Phi_m = \Lambda_m V_m$
23	Poyntingov vektor	S	$S = E \times H$	W/m ²	$S = \frac{1}{4\pi} E \times H$	$[S]_e = 10^{-3}$	W/m ²		$\cdot 10^{-3} =$	$[S]_m$	$S = \frac{1}{4\pi} E \times H$	1	$S = \frac{c}{4\pi} E_e \times H_m$

Opaske. Primjer upotrebe ove tablice: 1 elektrostatska jedinica kapaciteta $[C]_e = 1,1127 \cdot 10^{-12}$ farada; 1 magnetostatska jedinica kapaciteta $[C]_m = 10^9$ F; ① Prema najnovijim mjerenjima je $c = (2,9979 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{10}$; ② $[\Phi]_m = 10^{-8}$ Vs = maxwell = M; ③ $[B]_m = 10^{-4}$ T = gauss = G; ④ $[H]_m = 79,577$ A/m = oersted = Oe; ⑤ $[V]_m = 0,79577$ A = gilbert = Gb; ⑥ Međunarodna Unija za čistu i primijenjenu fiziku prihvatila je ove nazive osnovnih jedinica CGSE i CGSM sistema: $[Q]_e$ = franklin = Fr = $3,3356 \cdot 10^{-10}$ coulomba, $[I]_m$ = biot = Bi = 10 ampera.

Najvažnije prirodne konstante

Tablica XI

Konstanta gravitacije	$\gamma = (6,670 \pm 7 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Brzina svjetla u vakuumu	$v_0 = (2,997\,92 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Influenciona konstanta	$\epsilon_0 = (8,854\,2 \pm 2 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Permabilnost vakuuma	$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} = 1,256\,637 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$
Normni pritisak (fizikalna atmosfera)	$p_0 = 1,013\,250 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$
Talište leda kod p_0	$T_0 = 273,15 \pm 0,01 \text{ K}$
Normni volumen idealnog plina po kemijskoj skali	$V_0 = (2,241\,45 \pm 1 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^1 \text{ m}^3$
po fizikalnoj skali	$V_0 = (2,242\,08 \pm 1 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^1 \text{ m}^3$
Opća plinska konstanta po kemijskoj skali	$R_0 = (8,314\,7 \pm 7 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$
po fizikalnoj skali	$R_0 = (8,317\,0 \pm 8 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$
Specifični broj molekula po kemijskoj skali	$N_L = (6,023\,7 \pm 1 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$
po fizikalnoj skali	$N_L = (6,025\,3 \pm 1 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$
Faradayeva konstanta po kemijskoj skali	$F = (9,649\,7 \pm 7 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^7 \text{ C kg}^{-1}$
po fizikalnoj skali	$F = (9,652\,4 \pm 7 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^7 \text{ C kg}^{-1}$
Boltzmannova konstanta	$k = (1,380\,3 \pm 5 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-23} \text{ J deg}^{-1}$
Elektrika elektrona	$e = (1,602\,0 \pm 5 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Planckov kvant djelovanja	$h = (6,625 \pm 2 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Specifična elektrika elektrona ..	$e/m_e = (1,758\,9 \pm 2 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$
Specifična elektrika protona	$e/m_p = (9,579\,7 \pm 6 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^7 \text{ C kg}^{-1}$
Masa protona/masa elektrona ..	$m_p/m_e = 1\,836,05 \pm 0,1$
Masa mirovanja elektrona	$m_e = (9,108 \pm 4 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masa mirovanja neutrona	$m_n = (1,674\,6 \pm 4 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa mirovanja protona	$m_p = (1,672\,3 \pm 4 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Prva konstanta Planckova zakona zračenja	$c_1 = (5,954 \pm 2 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{-17} \text{ W m}^2$
Druga konstanta Planckova za- kona zračenja	$c_2 = (1,4389 \pm 9 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-2} \text{ m deg}$
Stefan-Boltzmannova konstanta zračenja	$\sigma = (5,667 \pm 0,01) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ deg}^{-4}$
Comptonova valna duljina elek- trona	$\lambda_{ce} = (2,426\,2 \pm 7 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Sommerfeldova konstanta fine strukture	$\alpha = 1/(137,04 \pm 0,02)$
Rydbergova konstanta za neiz- mjernu masu jezgre	$R_\infty = (1,097\,373\,1 \pm 5 \cdot 10^{-7}) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Znak: 280 P

Izdanje:

Ing. MARIJAN BREZINŠČAK
MJERE I SISTEMI JEDINICA

Stručna recenzija:

Prof. dr techn. ing. FRANCE AVČIN

Izdavač:

TEHNIČKA KNJIGA
Zagreb — Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara:

Ing. KUZMAN RAŽNJEVIĆ

Uredništvo monografija

Glavni urednik:

ZVONIMIR VISTRČKA

Jezička recenzija:

ZVONIMIR VELJAČIĆ

Tehnički urednik:

ŽARKO PAVUNIĆ

Crteže izradio:

SREČKO ŠOŠTARIĆ

Tisak:

Izdavačko-štamarsko preduzeće JŽ — Subotica

Tisak dovršen:

LISTOPAD 1961.