M. Brezinščak

MJERENJE I RAČUNANJE U TEHNICI I ZNANOSTI



UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

MARIJAN BREZINŠĆAK

MJERENJE I RAČUNANJE U TEHNICI I ZNANOSTI

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

Odobreno zaključkom Komisije za udžbenike i skripta Savjeta Sveučilišta u Zagrebu broj 08-1834/1966 od 22. prosinca 1966. godine kao pomoćni sveučilišni udžbenik

SVA PRAVA PRIDRŽANA
Preštampavanje i umnožavanje zabranjeno i u cjelini i u dijelovima
COPYRIGHT BY
TEHNIČKA KNJIGA — ZAGREB

PREDGOVOR

»Kad bismo idole učenjakâ složili jedan povrh drugoga u indijanski totem, s njegova bi se vrha cerio fetiš koji se zove *mjerenje.*« To je u svojoj knjizi *Znanost je sveta krava* (Science is a sacred cow) napisao Even Stalden. I doista je tako, jer tek je mjerenje omogućilo da se homo sapiens uzdignuo tako visoko i da se još uvijek izdiže iz društva svoje mlađe braće u životinjskom svijetu. Sav čovjekov znanstveno-istraživački rad temelji se na mjerenju i na poznavanju mjernih pogrešaka, koje treba da su što manje, dakle mjerenje što preciznije i što tačnije.

Zbog toga danas svaka država koja svoju znanost shvaća ozbiljno i svoju industriju nastoji podići do najbolje kvalitete smatra svojim prvim i osnovnim zadatkom izgradnju široko koncipiranog državnog metrološkog zavoda, tj. institucije u kojoj se obavljaju fundamentalna i usporedbena mjerenja najveće potrebne joj preciznosti. Četvrt stoljeća nakon oslobođenja u SFRJ to još nismo shvatili unatoč svim naporima jugoslavenskih metrologa i unatoč svoj njihovoj spremnosti za najkvalitetniji metrološki rad. I tako smo u Evropi zaostali baš za svima.

Stoga je utoliko neobičnije što je baš iz te naše nepotrebne zaostalosti niklo ovo Brezinšćakovo djelo kojemu bez sumnje za sada nema ravna na svijetu. Ili je pak ova njegova knjiga *Mjerenje i računanje u tehnici i znanosti* baš reakcija na našu metrološku zaostalost, sa svrhom da pomogne tamo gdje se pomoći dade te da istodobno pridonese tome da i mi Jugoslaveni konačno dođemo do neophodnog nam državnog metrološkog zavoda potrebne kvalitete. Sadašnji Savezni zavod za mjere i dragocjene metale u Beogradu možemo, naime, unatoč važnosti njegova rada smatrati jedino zametkom budućeg Državnog metrološkog zavoda.

Brezinšćakovo metrološko djelo upravo je velebno jer obuhvaća i u pojedinostima temeljito obrađuje baš sve što je u nauci o mjerenju bitno za sve grane fizike i tehnike. Stoga će snažno odjeknuti među našim stručnjacima, kako inženjerima tako i fizičarima. No isto će tako odjeknuti i na pedagoškom polju, jer u njemu nije lako pronaći neki mjernotehnički problem na koji neće pružiti načelan odgovor. Djelo se ujedno brine za čistoću fizikalne riječi time što podučava strogo veličinsko pojmovanje jednadžbi, a to je daleko važnije od sveopćeg uvođenja međunarodnog sistema mjernih jedinica u živu praksu svjetske fizike. Osim toga, djelo u brojnim područjima iznosi originalne autorove zamisli i prijedloge, pa stoga ima i pionirsku vrijednost. Zbog svega toga Brezinšćak treba da bude *livre de chevet*, knjiga na noćnom ormariću svakog radnika na polju najpreciznijih mjerenja fizike i tehnike, temelja suvremene civilizacije, njegovo stručno sveto pismo.

Nema sumnje da će zbog svih tih odlika knjiga pronaći put preko uskih domaćih granica u široki svijet vrhunske znanstvene metrologije. Možda će tek tamo znati cijeniti Brezinšćakovo djelo onako kako ono zaslužuje. Poželimo mu sretan put, a za uspjeh ne treba da se brine.

Prof. dr *Francè Avčin,*
ordinarius za elektromagnetska mjerenja Fakultete za elektrotehniko Univerze u Ljubljani

ZAHVALA

U malih naroda izdavač mora premostiti velik financijski jaz između autorova rukopisa i tiskane knjige, pogotovo ako je riječ o djelu koje ne predstavlja tehničku ili znanstvenu modu. Zato se, prvenstveno, glavnom uredniku »Tehničke knjige — Zagreb« *Z. Vistrički* i direktoru *K. Ražnjeviću* moram zahvaliti što se izdavač odvažio da ovu podebelu, specijaliziranu knjigu objavi na jeziku malog naroda. U tome su izdavaču financijski i moralno pomogle dvije ustanove. Sveučilište u Zagrebu putem svoje Komisije za udžbenike i skripta, kojoj je godine 1966. stajao na čelu *H. Požar*, dodijelilo je izdavaču novčanu subvenciju i proglasilo knjigu pomoćnim udžbenikom, iako ni na jednom fakultetu Sveučilišta ne postoji poseban predmet »metrologija«. Tu odluku Komisija je donijela na prijedlog Geodetskog, Elektrotehničkog, Rudarsko-geološko-naftnog i Šumarskog fakulteta u Zagrebu. Predstavnicima tih fakulteta, profesorima dr *N. Čubraniću*, dr *H. Požaru*, dr *P. Sabioncellu* i pokojnom dr *J. Krpanu*, duboko sam zahvalan na uspješnoj podršci. Druga ustanova koja je subvencijom potpomogla izdavanje ove knjige jest Savezni zavod za mjere i dragocjene metale u Beogradu. Kolektivu Zavoda ide moja i izdavačeva zahvalnost.

U toku stvaranja rukopisa i knjige dva su me čovjeka naročito mnogo zadužila. Dr *F. Avčin*, profesor Univerze u Ljubljani, sukcesivno je u ulozi recenzenta proučavao rukopis, tjerao me da napišem još ovaj ili onaj odsječak, poticao me kad bih posustao, ispravio poneku pogrešku i radovao se zajedno sa mnom kad bih pronašao neki jednostavniji dokaz. Urednik »Tehničke knjige — Zagreb« *J. Živković* obavio je onaj posao koji se zapravo nigdje ne vidi: jezično je dotjerao dio rukopisa (ostali dio pregledao je pokojni *A. Rojnić*), beskrajno strpljivo ispravljao tiskarske pogreške u pokusnim otiscima i prisiljavao slagare da svladaju načela valjana sloga. Povrh toga *Živković* je kontrolirao mnoge brojčane primjere tjerajući iz njih moje pogreške, predložio mi niz poboljšanja u tekstu i neumorno usavršavao terminologiju. Obojici velika hvala.

Sa zahvalnošću se prisjećam pomoći ostalih: dr *V. Bego* sugerirao mi je poboljšanje tekstova poglavlja A.3 i glave E, *P. Bodlović* napisao je zajedno sa mnom odlomak A.8.7.2, *V. Cimerman* predložio mi je da obradim neke jedinice kuta, *V. Dabac* me je oslobodio nekoliko terminoloških dilema, a *I. Štern* upozorio na manjkavosti prvotnog rukopisa glave D. Izvrsne suradnike imao sam u *B. Kurtanjek*, koja je natipkala nekoliko verzija rukopisa, i u *Ž. Pavuniću*, koji je od skica umio izraditi krasne crteže. Svima njima hvala.

Pomogli su mi i pojedinci i ustanove iz inozemstva. Dr *J. Brožu*, bivšem glavnom uredniku izdavačkog poduzeća SNTL u Pragu, zahvajujem što je omogućio izdavanje češkog prijevoda većeg dijela ove knjige. Dr *J. Terrien*, direktor Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres, upozorio me je na niz metroloških noviteta, opskrbio me dokumentacijom i fotografijama, a dr *P. Vigoureux* iz National Physical Laboratory, Teddington, omogućio mi je da steknem predodžbu o vrhunskom djelovanju britanskog metrološkog zavoda. *W. K. Clothier* iz National Standards Laboratory, Sydney, mnogo me je zadužio dokumentacijom iz australskog metrološkog zavoda. Sa zadovoljstvom se prisjećam i analogne pomoći uprave američkog zavoda National Bureau of Standards.

M. Brezinščak

Ako želimo imati apsolutno postojane jedinice duljine, vremena i mase, onda ih nemojmo tražiti u izmjerama, u gibanju ili u masi našeg planeta, već u duljini vala, frekvenciji i masi neprolaznih, nepromjenljivih i potpuno istovrsnih atoma.

J. C. Maxwell (1870)

UVODNA RIJEČ

Stotinu godina pošto je *Maxwell* izrekao gornju misao, mjerna znanost naše civilizacije doista se znatnim dijelom oslanja na svojstva atoma: duljina se mjeri zračenjem atoma kriptona (1960), a vrijeme frekvencijom zračenja cezija (1967). Posljednjih su se desetljeća dogodile i druge bitne promjene u samim temeljima metrologije: uporištem mjerenja temperature postala je trojna tačka vode, fotometrija se oslanja na zračenje crnog tijela, a polazištem elektromagnetskih mjerenja postaje uz strujnu vagu protonski rezonator. Klasična metrologija održala se jedino u mjerenju mase: uteg pohranjen u podzemnom trezoru Međunarodnog ureda za mjere i utege još uvijek dobiva bitku u preciznosti s prebrojavanjem atoma.

O svemu tome, kao i o onome što odatle proizlazi, pedagozi i operativni stručnjaci znaju premalo. Možda je razlog tome taj što se metrologijom bavimo svi, ali gotovo nitko nije izričito »zadužen« da proučava i podučava samu bit temelja metrologije. Ta neodređenost položaja znanstvene metrologije u društvu, a ponešto i znatiželja da što bolje shvatim svijet u kojem živimo, ponukali su me prije četvrt stoljeća da uronim u tu čudesnu znanost na koju se oslanjaju sve ostale egzaktne nauke. Povremeno sam iz nje izranjao brojnim člancima i dvjema knjigama: »Mjerni sistemi elektrotehnike« (1951) i »Mjere i sistemi jedinica« (1961). Pri tom sam se uvijek nastojao pridržavati gesla: svaka tvrdnja, dokaz i izvod moraju se temeljiti na činjenici utvrđenoj egzaktnim znanstvenim eksperimentom; metrologija, naime, ne dopušta pretpostavke.

Ovom knjigom želio sam s jedne strane pokazati kako danas izgleda svijet u očima metrologa, a s druge strane mnogobrojnim korisnicima metrologije ponuditi praktičan priručnik i udžbenik. Zato sam rukopis napisao s namjerom da knjiga bude: 1) objašnjenje fundamentalnih i nekih prečesto nejasnih pojmova, 2) udžbenik o najpouzdanijem načinu računanja pomoću veličinskih jednadžbi, 3) opis najpreciznijih mjernih metoda i načina najpouzdanije reprodukcije mjernih jedinica, 4) izvor najnovijih i najsigurnijih mjernih podataka stečenih u Međunarodnom uredu za mjere i utege te u velikim nacionalnim metrološkim zavodima Australije, Japana, Kanade, S. R. Njemačke, SSSR-a, USA i V. Britanije, 5) zbirka najnovijih odluka međunarodne metrološke organizacije (uključivši posljednje zasjedanje godine 1967) i nacionalnih zakonodavstava, 6) priručnik za brzo pronalaženje odnosa među mjernim jedinicama.

Vjerujem da će zbog te široke osnove knjiga biti od koristi vrlo velikom krugu ljudi. Pišući je držao sam na umu da se mjerenjem, računanjem i primjenom mjernih jedinica bave mnoge grane privrede, znanosti i trgovine. Unutar tih grana rade ljudi vrlo raznovrsnih zanimanja: inženjeri, tehničari i laboranti svih struka; eksperimentalni i teoretski fizičari; pedagozi svih mogućih škola, studenti i đaci; ljekarnici i radiolozi; ekonomisti, prevodioci, pomorci, propagandisti, uvoznici i izvoznici, prijevoznici prekomorskih i avionskih tereta itd. Da bi ljudi toliko raznovrsnih djelatnosti mogli u knjizi što lakše naći traženu jedinicu, pojam, definiciju ili odgovarajući primjer, knjizi sam dodao dosta detaljan abecedni indeks i 40 tablica uvezanih u posebnu brošuricu.

U više od 230 tablica i u pripadnim tekstovima sažet je znatan dio povijesti razvoja novije metrologije. Da bi se taj razvoj mogao razumjeti i povijesno komparirati, morao sam se osloniti na stanoviti sistem jedinica. Posve je prirodno da sam u tu svrhu odabrao Međunarodni sistem jedinica (SI), tj. skup jedinica: metar, sekunda, kilogram, amper, newton, joule, kelvin, candela itd. Taj sistem, jedinstven za sve grane znanosti i tehnike, međunarodno je prihvaćen godine 1960, a odmah iza toga nacionalnim ga je zakonima favoriziralo preko 40 država, među njima i Jugoslavija.

Uvođenje SI i usavršeno poimanje oznaka u jednadžbama, automatski dovodi do dosljedne primjene veličinskih jednadžbi. Budući da su te jednadžbe nadasve pouzdane pri računanju, a zorne u smislu fizikalne predodžbe i u nastavi, objašnjenju njihove primjene posvetio sam dužnu pozornost. Primjenu veličinskih jednadžbi ilustrirao sam mnoštvom brojčanih primjera.

Pri kraju još nekoliko redaka o načinu pisanja naziva jedinica i prezimena autora koji se spominju u knjizi. Neki su mi recenzenti, naime, u povodu izlaženja prvih dviju knjiga prigovorili što nazive jedinica pišem etimološki, a ne fonetski. Dugo sam se, stoga, kolebao na što da se odlučim u ovoj knjizi. U korist etimološkog pisanja prevladali su oni isti razlozi koji su me vodili godine 1951. i 1961: čitatelju moram s jedne strane omogućiti što lakši priključak na svjetsku latiničnu literaturu, a s druge strane ne smijem ga dovesti u zabludu približnim opisom stvarnog izgovora (vidi str. 30). Kako da fonetski napišem »maxwell«? Ne valja ni »maksuel«, ni »maksvel«, ni »meksvel« ni »meksuel«, jer engleske glasove *a*, *w*, *ll* ne možemo izraziti ni jednim slavenskim glasom. Iz slijedećeg primjera možemo razabrati da katkada ni sami Englezi nisu posve sigurni kako se izgovara neko njihovo prezime. Prilikom uvođenja jedinice SI energije i rada »joule« željeli su saznati kako se zaista izgovara prezime *Joule*. U rodnom kraju *J. P. Joule*a, nedaleko od Manchestera, raspitivali su se kod mještana kako se zvala njegova rodbina; dobili su tri odgovora: Džaul, Džul, Džoul. Međunarodna unija fizičara *preporučila* je da se jedinica izgovara »džul«.

Nijedna stvar nije savršena, pa tako ni ova knjiga. Stoga će mi dobronamjerni čitatelj učiniti veliku uslugu ako svoje kritične primjedbe pošalje na adresu izdavača: *Tehnička knjiga*, Zagreb, Jurišićeva 10. Takve ću primjedbe sa zadovoljstvom uzeti u obzir ako se sluči drugo izdanje ove knjige.

U Zagrebu, svibnja 1970.

M. Brezinščak

SADRŽAJ

Glava A: **Osnovi nauke o mjerenju i sistemima jedinica**

1. Veličine, jedinice, brojčani iznosi i jednadžbe

1.1. Značenje i neophodnost mjerenja 31
1. Svakodnevni život i mjerenje, 2. Znanstvena metrologija, 3. Metrologija, standardizacija i privredna moć 35
1.2. Iskustvo i fizikalne veličine 36
1. Objektivno iskustvo, 2. Fizikalne veličine, 3. Vrijednost veličine 38
1.3. Veličine, jedinice i brojčani iznosi 38
1. Mjerne jedinice, 2. Brojčani iznosi, 3. Osnovna jednadžba metrologije, 4. Posljedice osnovne jednadžbe 40
1.4. Veličinske i brojčane jednadžbe 42
1. Veličinske jednadžbe, 2. Brojčane jednadžbe, 3. Prednosti veličinskih jednadžbi, 4. Brojčana jednadžba u geometriji, 5. Drugi oblici brojčanih jednadžbi 46
1.5. Prijelaz od brojčanih na veličinske jednadžbe 48
1. Načelo prijelaza, 2. Primjer prijelaza, 3. Tehnika prijelaza 50
1.6. Prilagođene veličinske jednadžbe i jednadžbe među jedinicama 51
1. Prilagođene veličinske jednadžbe, 2. Nastanak prilagođene veličinske jednadžbe, 3. Jednadžbe među jedinicama 54

[2. Primjena pouzdanog veličinskog računanja

2.1. Novčane i fizikalne jedinice u jednadžbama 55
1. Novčane jedinice u jednadžbama, 2. Plinska konstanta nepoznata plina 56
2.2. Veličine u logaritamskim odnosima 58
1. Izotermna ekspanzija plina, 2. Računanje potencijala, 3. Eksponencijalne funkcije 62
2.3. Decimalni dijelovi i dekadski višekratnici jedinica 63
1. Svrha višekratnika jedinica, 2. Pregled višekratnika jedinica, 3. Računanje s višekratnicima jedinica, 4. Iz povijesti višekratnika jedinica 67
2.4. Prikazivanje veličina u dijagramima i tablicama 68
1. Brojčani prikaz, 2. Veličinski prikaz, 3. Prilagođeni prikaz, 4. Prikaz vektorskih veličina, 5. Uloga mjerila, 6. Tabelarni prikazi vrijednosti veličina 72
2.5. Pisanje i štampanje veličina, jedinica, brojeva i jednadžbi 74
1. Primjena uspravnih i kurzivnih simbola, 2. Razmak između grupa brojeva, 3. Znak množenja, 4. Stavljanje zagrada, 5. Štampanje indeksa i eksponenata, 6. Označivanje atoma 83

3. Temeljni pojmovi mjerne tehnike. Obrada rezultata ponovljenih mjerenja

3.1. Neki temeljni pojmovi mjerne tehnike 84
1. Mjerna pogreška i relativna mjerna pogreška, 2. Pogreške mjera i pokaznih mjerila, 3. Netačnost, tačnost i preciznost, 4. Osjetljivost i neodređenost, 5. Terminološke poteškoće mjerne tehnike 90
3.2. Granice mjerne tehnike. Vrste mjernih pogrešaka 91
1. Prirodne granice mjerne tehnike, 2. Klasifikacija mjernih pogrešaka, 3. Sistematske mjerne pogreške, 4. Grube pogreške, 5. Slučajne mjerne pogreške 95
3.3. Srednja vrijednost, standardno odstupanje i nepouzdanost srednje vrijednosti.... 96
1. Srednja vrijednost (aritmetička sredina), 2. Aksiomi računa izjednačenja, 3. Standardno odstupanje (srednja kvadratna pogreška), 4. Izračunavanje standardnog odstupanja, 5. Nepouzdanost srednje vrijednosti 102
3.4. O postupcima za izračunavanje srednje vrijednosti, varijancije i standardnog odstupanja 104
1. Izračunavanje srednje vrijednosti, 2. Izračunavanje varijancije i standardnog odstupanja, 3. Primjer: mjerenje duljine metarskog štapa 106
3.5. Opća srednja vrijednost. Procjena standardnog odstupanja 108
1. Opća srednja vrijednost, 2. Opća srednja vrijednost kuta, 3. Nepouzdanost opće srednje vrijednosti, 4. Procjena standardnog odstupanja 113
3.6. Nepouzdanost srednje vrijednosti i statistička sigurnost pri normalnoj raspodjeli slučajnih pogrešaka 115
1. Frekvencija, relativna frekvencija i gustoća, 2. Gustoća vjerojatnosti, 3. Normalna (Gaussova) raspodjela izmjerenih vrijednosti, 4. Računanje pomoću normalne krivulje, 5. Statistička sigurnost, 6. Nepouzdanost i statistička sigurnost, 7. Srednja, vjerojatna i prosječna pogreška 128
3.7. Nepouzdanost srednje vrijednosti pri malom broju ponovljenih mjerenja..... 129
1. Način primjene Studentove raspodjele, 2. Primjer: nepouzdanost duljine motke, 3. Broj potrebnih mjerenja (primjer), 4. Statističko značenje granica pouzdanosti.. 134
3.8. Mjerna nesigurnost i granična pogreška 137
1. Mjerna nesigurnost srednje vrijednosti, 2. Relativna mjerna nesigurnost, 3. Granična pogreška mjernog uređaja, 4. Primjer: granična pogreška termometra 141

4. Proračun pogreške indirektno mjerene fizikalne veličine

4.1. Standardno odstupanje i nepouzdanost indirektno mjerene veličine 143
1. Standardno odstupanje indirektno mjerene veličine, 2. Nepouzdanost srednje vrijednosti, 3. Standardno odstupanje zbroja veličina, 4. Standardno odstupanje razlike dviju veličina, 5. Standardno odstupanje potencije, produkta i kvocijenta 147
4.2. Primjeri proračuna standardnog odstupanja i nepouzdanosti srednje vrijednosti indirektno mjerene veličine 148
1. Debljina, presjek i volumen prstena, 2. Mjerenje ubrzanja zemljine teže njihalom, 3. Utvrđivanje potrebne vrijednosti standardnog odstupanja 150
4.3. Zakoni prirasta sistematske pogreške indirektno mjerene veličine 151
1. Sistematska pogreška funkcije s jednom varijablom, 2. Proračunavanje sistematske pogreške, 3. Sistematska pogreška funkcije s više varijabli, 4. Primjer: nesigurnost fotometrijskog ekvivalenta 154
4.4. Proračunavanje mjerne nesigurnosti indirektno mjerene veličine 156
1. Opći izraz za mjernu nesigurnost, 2. Nesigurnost mjernog postupka, 3. Nesigurnost baždarenog uređaja 158
4.5. Proračunavanje granične pogreške indirektno mjerene veličine 159
1. Opći izrazi za računanje granične pogreške, 2. Granične pogreške konkretnih funkcija, 3. Primjer: granične pogreške pri mjerenju jalove snage 162

5. Sistemi jedinica i dimenzija. Jedinice, mjere, pramjere, etaloni, pramjerila i standardi

5.1. Građenje sistema jedinica ... 164
1. Sistem jedinica, 2. Građenje sistema jedinica, 3. Univerzalni sistem jedinica ... 168
5.2. Dimenzije i sistemi dimenzija ... 169
1. Što je dimenzija? 2. Sistemi dimenzija ... 170
5.3. Jedinice, mjere, pramjere, etaloni, pramjerila i standardi ... 171
1. Jedinica i mjera, 2. Pramjera ili etalon, 3. Prirodna pramjera ili pramjerilo, 4. Koncepcijski i održavajući standard ... 175

6. Iz povijesti mjera i sistema jedinica

6.1. Mjere kulturnih naroda ... 177
1. Počeci metrologije, 2. Grčke mjere, 3. Mjere Rimljana, 4. Feudalna metrologija .. 181
6.2. Postanak metričkog sistema jedinica ... 182
1. Ideja prirodnih pramjera, 2. Stvaranje decimalnog sistema jedinica, 3. Arhivski metar i kilogram ... 184
6.3. Konvencija o metru ... 186
1. Potreba unifikacije jedinica, 2. Konvencija o metru, 3. Sadržaj Konvencije o metru 187
6.4. Prametar i prakilogram od godine 1889. ... 188
1. Izbor kovine, 2. Najprikladniji oblik, 3. Međunarodni prametar, 4. Nepouzdanost pramjera ... 192
6.5. Sumrak nemetričkih sistema jedinica ... 193
1. Članovi Konvencije o metru, 2. Poteškoće s nemetričkim sistemima, 3. Metrički sistem u angloameričkim zemljama ... 197
6.6. Razlozi i način prijelaza na metrički sistem jedinica ... 197
1. Pripreme za prijelaz, 2. Utjecaj izvoza na prijelaz, 3. Teškoće s industrijskom standardizacijom ... 199

7. Ustrojstvo i djelovanje međunarodnih i nacionalnih metroloških institucija

7.1. Ustrojstvo međunarodne metrološke organizacije ... 201
1. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM), 2. Značenje Međunarodnog ureda BIPM, 3. Savjetodavni odbori, 4. Međunarodna organizacija za zakonodavnu metrologiju ... 204
7.2. Nacionalni metrološki zavodi ... 206
1. Državni metrološki zavodi, 2. Prvi metrološki zavod, 3. Jugoslavenski metrološki zavod, 4. Unapređivanje metrologije u razvijenim zemljama ... 210
7.3. Četiri perioda djelovanja Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM) ... 212
1. Lokacija BIPM, 2. Prvi period, 1875 ... 1889, 3. Drugi period, 1889 ... 1927, 4. Treći period, 1927 ... 1960, 5. Četvrti period, od 1960. do danas ... 214
7.4. Vrhunska metrološka djelatnost Međunarodnog komiteta za mjere i utege (CIPM) .. 215
1. Mjerenje mase, 2. Mjerenje vremena i frekvencije, 3. Mjerenje duljine, 4. Mjerenje temperature, 5. Elektromagnetska mjerenja, 6. Fotometrijska mjerenja, 7. Mjerenje ionizirajućih zračenja ... 220
7.5. Novije odluke Generalne konferencije i revizija jugoslavenskog zakona o mjernim jedinicama ... 221
1. Metar i ångström, 2. Jedinica vremena sekunda, 3. Jedinica kelvin (K), 4. Jedinica aktivnosti curie (Ci), 5. Litar, femto i atto, 6. Žiromagnetska konstanta, 7. Revizija jugoslavenskog zakona o jedinicama ... 223

8. Interferencijsko mjerenje duljine i realizacija valne definicije metra

8.1. Veličina duljina i definicija metra od godine 1960 225
1. Fizikalna veličina duljina, 2. Definicija jedinice duljine metar, 3. Razlozi prijelaza na »valni metar«, 4. Vrhunska metrologija duljine, 5. Priključak valnog metra na štapni .. 231

8.2. Osnovi interferencijskog mjerenja duljine 233
1. Interferencija svjetla, 2. Prelamanje svjetla, 3. Interferencija pri odrazu i prelamanju svjetla, 4. Interferencijski zračni klin 237

8.3. Uloga indeksa prelamanja u interferencijskoj metrologiji duljine 238
1. Potreba poznavanja indeksa prelamanja, 2. Usporedbeno mjerenje indeksa prelamanja, 3. Edlénova disperzijska formula 1966 241

8.4. Nekoliko industrijskih primjena interferencije svjetla..... 241
1. Mjerenje planarnosti, 2. Komparacijsko mjerenje duljine, 3. Komparacijsko utvrđivanje srednje duljine krajnjih mjera 244

8.5. Mjerenje i uspoređivanje duljina interferencijskim komparatorima..... 245
1. Načelo rada Michelsonova interferometra, 2. Uspoređivanje duljina dviju mjera sa crticama, 3. Neposredno mjerenje razmaka među crticama, 4. Neposredno mjerenje duljine krajnje mjere, 5. Postupak pri mjerenju duljina pomoću interferencijskog komparatora, 6. Mjerenje indeksa prelamanja zraka, 7. Interferencijsko baždarenje duljih mjera 259

8.6. Automatska laserska interferometrija 259
1. Usavršena laserska zračila, 2. Automatski laserski interferencijski komparator, 3. Mjerenje duljine vala zračenja lasera, 4. Primjena laserske interferometrije u strojnoj obradi 263

8.7. Monokromatsko zračenje kriptona 86 — temelj mjerenja duljine i definicije jedinice duljine metar 264
1. Emisijski spektar kriptona 86, 2. Označivanje terma i prijelaz $2\,p_{10}$—$5\,d_5$, 3. Monokromatičnost zračenja kriptona 86, 4. Sekundarni izvori monokromatskih zračenja 273

8.8. Realizacija valne definicije metra 274
1. Kriptonska izbojna žarulja, 2. Kriostat za kriptonsku žarulju, 3. Nesigurnost reprodukcije valnog metra 276

8.9. Iz povijesti ångströma i valnog metra 278
1. Postanak spektroskopske jedinice ångström, 2. Rowlandove tablice, 3. Definicija ångströma od godine 1907, 4. Valna definicija metra od 1927, 5. Odnos ångström/metar 281

9. Mjerenje mase, sile, težine i ubrzanja zemljine teže

9.1. Fizikalne veličine masa i sila 283
1. Fizikalna veličina masa, 2. Univerzalnost zakona o održanju impulsa, 3. Fizikalna veličina sila 287

9.2. Gravitacija, težina i ubrzanje zemljine teže..... 289
1. Newtonov zakon gravitacije, 2. Konstanta gravitacije, 3. Gravitacijsko polje, 4. Težina tijela, 5. Ubrzanje zemljine teže, 6. Stvarno ubrzanje zemljine teže, 7. Troma i gravitacijska masa 298

9.3. Mjerenje mase i sile. Pramjera i jedinica mase kilogram 298
1. Načelo mjerenja mase vaganjem, 2. Najpreciznije uspoređivanje masa, 3. Pramjera i jedinica mase kilogram, 4. Mjerenje velikih sila 310

9.4. Potsdamski gravimetrijski sistem 315
1. Potreba poznavanja mjesnog ubrzanja zemljine teže, 2. Načelo mjerenja g reverzibilnim njihalom, 3. Potsdamski gravimetrijski sistem, 4. Pogreška Potsdamskog sistema 318

9.5. Balističko mjerenje ubrzanja zemljine teže 320
1. Mjerenje g slobodnim padom, 2. Mjerenje g vertikalnim hicem 323

10. Mjerenje vremena i reprodukcija sekunde

10.1. Veličina vrijeme i definicije sekunde 325
1. Fizikalna veličina vrijeme, 2. Načelo definiranja jedinice vremena, 3. Definicija sekunde od godine 1967, 4. Prijelaz na novu definiciju sekunde, 5. Astronomska definicija sekunde 330

10.2. Efemeridno vrijeme i objašnjenje astronomske definicije sekunde 331
1. Efemeridno vrijeme, 2. Newcombova osnova efemeridnog vremena, 3. Objašnjenje definicije efemeridne sekunde, 4. Direktno utvrđivanje efemeridnog vremena, 5. Indirektno utvrđivanje efemeridnog vremena, 6. Pogreška poznavanja efemeridnog vremena 340

10.3. Zvjezdano, sunčevo i svjetsko vrijeme 342
1. Zvjezdano (siderijsko) vrijeme, 2. Pravo (istinito) sunčevo vrijeme, 3. Srednje sunčevo vrijeme, 4. Veza između sunčeva i zvjezdanog vremena, 5. Svjetsko vrijeme (Universal Time), 6. Vremenske skale UT0, UT1 i UT2 352

10.4. Pojasno vrijeme i dekretno vrijeme 354
1. Pojasno vrijeme, 2. Dekretno vrijeme, 3. Linija promjene datuma..... 357

10.5. Kalendarsko i astronomsko označivanje vremenskih intervala i trenutaka 358
1. Općenito o kalendaru, 2. Julijanski kalendar, 3. Gregorijanski kalendar, 4. Kalendar francuske revolucije, 5. Astronomsko označivanje trenutaka..... 362

10.6. Atomska pramjerila frekvencije i sekunde..... 364
1. Načelo djelovanja atomskog pramjerila frekvencije, 2. Kvantni mehanizam cezijeva pramjerila, 3. O djelovanju cezijeva rezonatora, 4. Detekcija rezonancije u rezonatoru, 5. Stabilnost, tačnost i reproducibilnost atomskih pramjerila 373

10.7. Atomske i koordinirane vremenske skale 376
1. Ustrojstvo atomske vremenske skale, 2. Pouzdanost atomske vremenske skale, 3. Koordinirano svjetsko vrijeme *UTC*, 4. Diskontinuirana atomska skala *SAT*, 5. Emitiranje vremenskih signala, 6. Buduća skala svjetskog vremena 393

10.8. Distribucija frekvencije i signala vremena 394
1. Potreba distribucije signala vremena, 2. Distribucija vremena HF i LF radio-signalima, 3. Distribucija signala vrlo niskom frekvencijom (VLF), 4. Sinhronizacija vremenskih skala putujućom urom, 5. Međunarodna distribucija signala televizijskom mrežom, 6. Služba vremena i distribucije u Jugoslaviji, 7. Prijedlog distribucije vremena u Jugoslaviji 407

Glava B: Mjerni sistemi mehanike i hidraulike

1. Veličine i jedinice prostora

1.1. Veličine prostora 416
1. Duljina, 2. Kut, 3. Prostorni kut..... 418

1.2. Metričke i pomorske jedinice duljine 418
1. Jedinica duljine metar, 2. Ostale metričke jedinice duljine, 3. Spektroskopske jedinice duljine, 4. Pomorske jedinice duljine 421

1.3. Astronomske jedinice duljine 422
1. Astronomska jedinica, 2. Siriometar, 3. Parsec, 4. Sirius, 5. Svjetlosna godina, 6. Međusobni odnosi astronomskih jedinica duljine 425

1.4. Mjerne jedinice kuta 426
1. Jedinica kuta radijan, 2. Puni kut i pravi kut, 3. Kutni stupanj, minuta i sekunda, 4. Metričke jedinice kuta, 5. Artiljerijske i pomorske jedinice kuta 430

1.5. Metričke jedinice površine ... 431
1. Jedinica površine kvadratni metar, 2. Ostale metričke jedinice površine, 3. Jedinice ar i hektar, 4. Nuklearne jedinice površine, 5. Neke starije jedinice površine ... 434
1.6. Jedinice prostornog kuta ... 434
1. Jedinica prostornog kuta steradijan, 2. Ostale jedinice prostornog kuta ... 435
1.7. Metričke, pomorske i drvne jedinice volumena ... 435
1. Jedinica volumena kubni metar, 2. Ostale metričke jedinice volumena, 3. Litar i litarske jedinice, 4. Pomorska jedinica volumena, 5. Jedinice za drvo ... 438

2. Vremenske i kinematičke veličine i jedinice

2.1. Vremenske veličine ... 439
1. Vrijeme, 2. Period, 3. Frekvencija ... 440
2.2. Neke kinematičke veličine ... 440
1. Brzina, 2. Ubrzanje, 3. Kutna brzina (rotancija), 4. Brzina vrtnje (frekvencija vrtnje), 5. Odnos veličina ω i n, 6. Tok proračuna vrtnje sa ω i sa n, 7. Kruženje satelita oko Zemlje 447
2.3. Jedinice vremena i frekvencije ... 448
1. Jedinica vremena sekunda, 2. Decimalni dijelovi sekunde, 3. Minuta, sat i dan, 4. Kalendarske jedinice vremena, 5. Jedinica frekvencije hertz ... 449
2.4. Metričke i angloameričke jedinice brzine i ubrzanja ... 450
1. Jedinica brzine m/s, 2. Ostale metričke jedinice brzine, 3. Pomorska jedinica brzine čvor (knot), 4. Angloameričke jedinice brzine, 5. Vansistemske jedinice brzine, 6. Beaufortova skala brzina, 7. Jedinice ubrzanja ... 455
2.5. Jedinice veličinâ vrtnje ... 456
1. Jedinice rotancije (kutne brzine), 2. Jedinica kutnog ubrzanja, 3. Jedinice frekvencije vrtnje, 4. Odnosi jedinica veličina ω i n ... 457

3. Masene veličine. Jedinice mase, gustoće i koncentracije

3.1. Veličine mase i gustoće ... 460
1. Fizikalna veličina masa, 2. Gustoća, 3. Specifični volumen, 4. Relativna gustoća, 5. Maseni protok, 6. Koncentracija, 7. Ostale masene veličine ... 464
3.2. Mjerenje gustoće tekućih, krutih i šupljikavih tvari ... 465
1. Definicije gustoćâ i poroznosti, 2. Mjerenje gustoće hidrostatskom vagom, 3. Mjerenje gustoće piknometrom, 4. Mjerenje gustoće tekućina areometrima ... 470
3.3. Mjerne jedinice mase ... 471
1. Jedinica mase kilogram, 2. Ostale metričke jedinice mase, 3. Dvostruko značenje riječi karat, 4. Jedinice mase hyl i slug, 5. Molne, standardne i angloameričke jedinice mase ... 476
3.4. Metričke i angloameričke jedinice gustoće ... 477
1. Jedinica gustoće kg/m³, 2. Ostale metričke jedinice gustoće, 3. Angloameričke jedinice gustoće ... 479
3.5. Areometarske skale gustoće tekućina ... 479
1. Proračun areometarske skale, 2. Bauméove areometarske skale, 3. Ostale areometarske skale, 4. Centezimalne alkoholometrijske skale ... 485
3.6. Metričke i angloameričke jedinice protoka i masenog protoka ... 485
1. Jedinica masenog protoka kg/s, 2. Ostale metričke jedinice protoka, 3. Angloameričke jedinice protoka ... 486

4. Tlak. Jedinice sile i tlaka

4.1. Veličina tlak i načelo mjerenja tlaka ... 490
1. Fizikalna veličina tlak, 2. Nadtlak i podtlak (vakuum), 3. Načelo hidrostatskog mjerenja tlakova ... 491

4.2. Jedinice sile i težine 493
1. Jedinica sile newton, 2. Višekratnici jedinice newton, 3. Jedinice sile sthène i dyn, 4. Jedinica sile kilopond, 5. Preračunavanje kilopond ⇄ newton, 6. Angloameričke jedinice sile 497
4.3. Metričke jedinice tlaka i naprezanja 501
1. Jedinica tlaka N/m^2, 2. Jedinica tlaka SI mendeljejev, 3. Jedinice tlaka izvedene iz N/m^2, 4. Jedinica tlaka bar, 5. Jedinice tlaka pièze i pascal, 6. Normalna (standardna) atmosfera, 7. Jedinica tlaka tehnička atmosfera, 8. Jedinice tlaka torr i mm Hg, 9. Jedinice tlaka m H_2O i mm H_2O 512
4.4. Angloameričke jedinice tlaka 512
1. Jedinice tlaka izvedene iz poundala, 2. Jedinice tlaka izvedene iz pound-force, 3. Jedinice tlaka psi, psia, psig itd., 4. Jedinice tlaka izvedene iz ton-force, 5. Primjer upotrebe angloameričkih jedinica, 6. Jedinica tlaka british atmosphere, 7. Angloameričke stupčane jedinice tlaka (ft H_2O, in H_2O, in Hg) 515

5. Rad, energija, snaga i njihove jedinice

5.1. Veličine rad, energija i snaga 517
1. Rad i energija, 2. Gustoća energije, 3. Snaga 521
5.2. Metričke jedinice energije 522
1. Jedinica energije joule, 2. Jedinica energije kilovatsat, 3. Jedinica energije kilopondmetar, 4. Jedinica energije erg, 5. Jedinice energije kalorija i kilokalorija, 6. Jedinica energije litar-atmosfera 525
5.3. Angloameričke jedinice energije 528
5.4. Jedinice energije u atomskoj i nuklearnoj fizici 531
1. Elektronvolt (eV), 2. Sekunda^{-1} ili hertz, 3. Metar^{-1} i centimetar^{-1}, 4. Metar i centimetar, 5. Kelvin (K), 6. Rydberg (Ry), 7. Masene jedinice energije, 8. Jedinstvena masena jedinica energije, 9. Usporedba jedinica energije atomske fizike 535
5.5. Metričke jedinice snage 536
1. Jedinica snage vat, 2. Jedinica kilopondmetar u sekundi, 3. Jedinica konjska snaga, 4. Ostale metričke jedinice snage 540
5.6. Angloameričke jedinice snage 540

6. Viskoznosti i njihove jedinice

6.1. Dinamička i kinematička viskoznost. Fluidnost 543
1. Veličina dinamička viskoznost, 2. Kinematička viskoznost, 3. Fluidnost 545
6.2. Direktno mjerenje dinamičke viskoznosti tekućina 545
1. Načelo direktnog mjerenja viskoznosti, 2. Mjerenje viskoznosti kapilarnim viskozimetrom, 3. Mjerenje viskoznosti rotacijskim viskozimetrom, 4. Ostale direktne metode mjerenja 549
6.3. Usporedbeno mjerenje viskoznosti tekućina 549
1. Načelo usporedbenog mjerenja viskoznosti, 2. Cannon-Fenskeovi i Ubbelohdeovi viskozimetri, 3. Precizni usporedbeni viskozimetri, 4. Korekcije usporedbenih viskozimetara 555
6.4. Jedinice dinamičke viskoznosti 556
1. Jedinica dinamičke viskoznosti Ns/m^2, 2. Jedinica dinamičke viskoznosti bernoulli, 3. Jedinica dinamičke viskoznosti poise, 4. Ostale metričke jedinice dinamičke viskoznosti, 5. Angloameričke jedinice dinamičke viskoznosti 561
6.5. Jedinice kinematičke viskoznosti 562
1. Jedinice m^2/s, cm^2/s i mm^2/s, 2. Jedinica kinematičke viskoznosti stokes, 3. Angloameričke jedinice kinematičke viskoznosti 564

6.6. Industrijske skale kinematičke viskoznosti 564
1. Načelo industrijskih skala, 2. Englerova skala, 3. Englerova sekundna skala, 4. Skala Saybolt Universal, 5. Skala Saybolt-Furol, 6. Redwoodove skale, 7. Pregled ostalih skala, 8. Baždarenje industrijskih viskozimetara 573

7. Međunarodni sistem jedinica (SI) u mehanici

7.1. Svrha uvođenja i prednosti Međunarodnog sistema jedinica (SI) 575
1. Zakonitost Međunarodnog sistema jedinica, 2. Svrha primjene SI, 3. Glavne prednosti SI, 4. Šire značenje naziva SI 577
7.2. Definicije jedinica Međunarodnog sistema jedinica 579
1. Građenje koherentnog sistema jedinica, 2. Osnovne jedinice SI, 3. Dopunske jedinice SI, 4. Izvedene jedinice SI 581
7.3. Primjena veličina težina i masa 587
1. Težina tijela, 2. Mjesna i normalna težina, 3. Masa i težina u svemiru, 4. Masa kupljene i prodane robe, 5. Cijena robe, 6. Nosivost i noseća sila 596
7.4. Primjeri upotrebe jedinica SI u mehanici 597
1. Napetost u niti prilikom vrtnje, 2. Vozilo u klizavu zavoju, 3. Odjeljivanje drugog stepena rakete, 4. Proračun sigurnosnog ventila, 5. Strojna obrada vratila 600
7.5. Primjena Međunarodnog sistema jedinica (SI) u hidraulici 601
1. Općenito o primjeni SI u hidraulici, 2. Jedinica SI otpora strujanju tekućina, 3. Brzohodnost turbina i pumpi 603
7.6. Primjena višekratnika jedinica SI 604
1. Višekratnici jedinica, 2. Višekratnici jedinice tlaka SI 605

8. Tehnički, CGS i MTS sistemi jedinica u mehanici

8.1. Tehnički sistem jedinica mehanike 607
1. Osnova Tehničkog sistema jedinica, 2. Jedinica sile TS kilopond, 3. Jedinica mase TS hyl, 4. Izbjegavanje jedinice mase u primjeni TS, 5. Neopravdan prigovor Tehničkom sistemu, 6. Veličina težina u TS, 7. Nedosljedna primjena jedinica TS 616
8.2. Fizikalni (CGS) sistem jedinica mehanike 616
1. Osnova fizikalnog sistema jedinica, 2. Imenovane jedinice sistema CGS, 3. Jedinica tlaka sistema CGS, 4. Današnja primjena jedinica sistema CGS 619
8.3. Sistem jedinica MTS mehanike 619
1. Osnova sistema jedinica MTS, 2. Izvedene jedinice sistema MTS 620

9. Prijelaz od Tehničkog sistema jedinica na Međunarodni sistem jedinica (SI)

9.1. Neki razlozi relativno sporog uvođenja Međunarodnog sistema jedinica 621
1. Industrijska tradicija, 2. Nedovoljna aktivnost školstva, 3. Površna izdavačka djelatnost, 4. Pogreške u novinama, 5. Namjena ovog poglavlja 624
9.2. Primjena masenih veličina umjesto težinskih 624
1. Primjena mase umjesto težine, 2. Primjena gustoće umjesto specifične težine, 3. Primjena masenog protoka umjesto težinskog 626
9.3. Računanje energija u duhu TS i SI 627
1. Računanje potencijalne energije, 2. Računanje kinetičke energije 627
9.4. Prijelaz od TS na SI u području sila 628
1. Preračunavanje sila, 2. Proračun kontinuiranog nosača, 3. Korisnost dekadskih višekratnika 631
9.5. Preračunavanje vrijednosti čvrstoće, tlaka i tvrdoće 631
1. Preračunavanje vrijednosti čvrstoće, 2. Preračunavanje vrijednosti tlaka, 3. Preračunavanje vrijednosti tvrdoće 633

10. Pouzdano računanje s veličinskim jednadžbama. Sistemi dimenzija

10.1. Jednoliko gibanje, frekvencija vrtnje i angloamerička jednadžba snage 635
1. Općenito o veličinskim i brojčanim jednadžbama, 2. Jednoliko pravocrtno gibanje, 3. Frekvencija vrtnje, 4. Angloamerička jednadžba snage 638
10.2. Težina žice, moment rotirajućih tijela i gubitak tlaka 639
1. Težina bakrene žice, 2. Moment rotirajućih tijela, 3. Gubitak tlaka u cjevovodu .. 643
10.3. Osvrt na nekoliko sistema dimenzija mehanike 644
1. Općenito o dimenzijama, 2. Sistem dimenzija LTM, 3. Sistem dimenzija LTF, 4. Ostali sistemi dimenzija..... 645

11. Angloamerički sistemi jedinica prostora i mase

11.1. Osnova jedinstvenog angloameričkog sistema jedinica 648
1. Potreba poznavanja angloameričkih jedinica, 2. Yard—osnovna jedinica duljine, 3. Pound—osnovna jedinica mase, 4. Razlika između engleskog i američkog gallona, 5. Engleski i američki bushel, 6. Neke osobitosti angloameričkih sistema jedinica .. 652
11.2. Iz povijesti engleskih i američkih osnovnih jedinica 654
1. Iz povijesti engleskog yarda, 2. Engleski Imperial Standard Yard, 3. Još dva engleska yarda, 4. Iz povijesti američkog yarda, 5. Usporedba triju yarda, 6. Iz povijesti engleskog pounda, 7. Bivši američki pound (US pound avoirdupois) 658
11.3. Angloameričke jedinice duljine i površine 658
1. Angloameričke jedinice duljine, 2. Pomorske jedinice duljine, 3. Ostale angloameričke jedinice duljine, 4. Angloameričke jedinice površine 661
11.4. Angloameričke jedinice volumena 663
1. Kubne jedinice volumena, 2. Engleske jedinice volumena osnovane na UK gallonu, 3. Američke jedinice volumena osnovane na US gallonu, 4. Američke jedinice volumena osnovane na US bushelu, 5. Preračunavanje engleskih jedinica volumena na američke i obrnuto, 6. Angloameričke pomorske jedinice volumena, 7. Angloameričke jedinice za drvo, 8. Ostale angloameričke jedinice volumena 670
11.5. Angloameričke jedinice mase 671
1. Jedinice mase za opću primjenu (system avoirdupois), 2. Jedinice mase za primjenu u farmaciji (apothecaries-system), 3. Jedinice mase u draguljarstvu (system troy), 4. Ostale angloameričke jedinice mase 675
11.6. Angloameričke jedinice ostalih veličina 676
11.7. Angloamerički koherentni sistemi jedinica mehanike 677
1. Koherentni maseni sistem jedinica, 2. Angloamerički Tehnički sistem jedinica .. 678

Glava C: Veličine i mjerne jedinice akustike

1. Veličine i jedinice fizikalne akustike

1.1. Brzina zvuka, zvučni tlak i njihove jedinice 683
1. Brzina zvuka, 2. Zvučni tlak, 3. Jedinice brzine zvuka i zvučnog tlaka 685
1.2. Akustička snaga, jakost zvuka i njihove jedinice 686
1. Akustička snaga, 2. Jedinice akustičke snage, 3. Jakost zvuka, 4. Gustoća akustičke energije, 5. Jedinice jakosti zvuka i gustoće energije 688
1.3. Akustički otpori i elektroakustička analogija 689
1. Akustička impedancija i valni otpor, 2. Jedinice impedancija i valnog otpora, 3. Elektromagnetska analogija akustičkih pojava 692

1.4. Razina jakosti zvuka i njena jedinica decibel 694
1. Razina jakosti zvuka, 2. Jedinica decibel, 3. Razina zvučnog tlaka 696

1.5. Pregled nekih akustičkih veličina, njihovih jedinica i akustičke terminologije 697
1. Pregled akustičkih veličina i jedinica, 2. Terminološke teškoće u akustici 697

2. Fonometrijske veličine i jedinice

2.1. Objektivna i subjektivna visina tona 700
1. Frekventni interval i jedinica oktava, 2. Milioktava i cent, 3. Subjektivna visina tona (mel-skala) 701

2.2. Razina glasnoće zvuka i njena jedinica phon 703
1. Razina glasnoće zvuka, 2. Referentni zvučni tlak i normalni zvuk, 3. Mjerenje razine glasnoće, 4. Jedinica razine glasnoće phon, 5. Krivulje ISO jednake razine glasnoće, 6. Stari phon 707

2.3. Veličina glasnoća i njena jedinica son 708

3. Jedinice neper i decibel u električkim telekomunikacijama

3.1. Jedinica neper i njen odnos prema decibelu 710
1. Jedinica neper, 2. Odnos nepera prema decibelu 710

3.2. Apsolutna i relativna razina u telekomunikacijama 711
1. Apsolutna razina, 2. Relativna razina 713

Glava D: Veličine i mjerne jedinice nauke o toplini i kemije

1. Temeljni pojmovi kemije i nauke o toplini

1.1. Neke osobitosti nauke o toplini i kemije 718
1. Temperatura kao četvrta osnovna veličina, 2. Mjerenje temperature, 3. Količina tvari i veličinske jednadžbe 719

1.2. Relativna atomska i molekularna masa 720
1. Relativna atomska masa, 2. Relativna molekularna masa, 3. Međunarodna ugljikova skala relativnih masa, 4. Kemijska i fizikalna skala relativnih masa..... 723

1.3. Količina tvari i njena jedinica mol 725
1. Fizikalna veličina »količina tvari«, 2. O jedinici količine tvari, 3. Definicija jedinice mol, 4. Odnos između količine tvari i mase, 5. Jedinice kilomol i milimol 730

1.4. Veličine s količinom tvari kao osnovom (molne veličine) 732
1. Molna masa, 2. Molni volumen, 3. Molna toplina, 4. Molna plinska konstanta .. 733

1.5. Normirana stanja i normirane veličine 734
1. Fizikalno normirano stanje, 2. Tehničko, industrijsko i akustičko normirano stanje, 3. Normirani molni volumen, 4. Normirani kubni metar 736

1.6. Kemijske formule. Mol kao jedinica mase 737
1. Zakon o održanju mase, 2. Primjer kemijske reakcije, 3. Značenje kemijske formule, 4. Mol i kilomol kao jedinice mase, 5. Jedinice grammolekula, gramatom itd. 742

1.7. Periodni sistem kemijskih elemenata 743
1. Periodni zakon, 2. Elektronska konfiguracija ljuski, 3. Energija veze, 4. Periodičnost osobina elemenata 746

2. Fizikalne veličine nauke o toplini

2.1. Jednadžba stanja i plinska konstanta idealnog plina 748
1. Jednadžba stanja idealnog plina, 2. Univerzalna plinska konstanta, 3. Boltzmannova konstanta 753

2.2. Kinetička predodžba topline, nepovratljivosti i entropije 754
1. Kinetička predodžba topline, 2. Kinetička teorija topline i nepovratljivost, 3. Entropija i vjerojatnost 757

2.3. Pregled ostalih veličina nauke o toplini 759
1. Unutarnja energija, 2. Entalpija, 3. Specifične topline, 4. Vođenje topline i temperature, 5. Mjerenje λ i električka analogija toplinskih krugova, 6. Prijelaz i prolaz topline, 7. Pregled fizikalnih veličina nauke o toplini 772

3. Temperatura i jedinice temperature

3.1. Definicije empiričke i termodinamičke temperature 773
1. Empirička temperatura, 2. Termodinamička temperatura 774

3.2. Termodinamička temperatura i njene jedinice 776
1. Osnova termodinamičke temperaturne skale, 2. Trojna tačka vode, 3. Ledište vode, 4. Jedinica termodinamičke temperature kelvin, 5. Ukinuće kratica °K i deg, 6. Jedinica stupanj Rankinea 784

3.3. Plinska termometrija kao osnova termodinamičke temperature 784
1. Načelo djelovanja plinske termometrije, 2. Plinski termometar na stalni volumen, 3. Plinski termometar na stalni tlak, 4. Plinski termometar na stalnu temperaturu, 5. Korekture plinskih termometara, 6. Nesigurnost najpreciznijih mjerenja temperature 790

3.4. Celzijeva i Fahrenheitova termodinamička temperaturna skala te pripadne jedinice 790
1. Celzijeva termodinamička temperatura, 2. Fahrenheitova termodinamička temperatura, 3. Veza između Celzijeve i Fahrenheitove skale 795

3.5. Iz povijesti empiričkih temperaturnih skala 798
1. Fahrenheitova temperaturna skala, 2. Réaumurova temperaturna skala, 3. Celzijeva temperaturna skala 800

3.6. Međunarodna empirička temperaturna skala 1968 800
1. Temelj Međunarodne temperaturne skale 1968, 2. Precizna interpolacija temperature, 3. Interpolacija temperature u ostala tri područja, 4. Ravnotežna stanja vodika, 5. Ravnotežna stanja neona, kisika i vode, 6. Mjerenje tlaka i njegov utjecaj na krutišta, 7. Standardni otpornički termometar i termopar, 8. Razlika između temperaturnih skala 1968 i 1948, 9. Iz povijesti Međunarodne temperaturne skale 815

3.7. Temperatura kao zavisna veličina i posljedice takvog shvaćanja 819
1. Temperatura kao zavisna veličina, 2. Izvedena jedinica temperature stefan, 3. Specifične topline i njihove jedinice, 4. Entropija, 5. Posljedice uvođenja $\theta = T$ u fenomenološku termodinamiku 826

4. Međunarodni sistem jedinica u nauci o toplini

4.1. Karakteristike Međunarodnog sistema jedinica (SI) 830
1. Svrha uvođenja i prednosti SI, 2. Definicije jedinica SI, 3. Građenje složenih jedinica SI 831

4.2. Neke značajke SI u nauci o toplini 834
1. Primjena mase umjesto težine, 2. Iščezavanje toplinskih i ostalih ekvivalenata, 3. Utjecaj SI na toplinske proračune, 4. Iščezavanje veličine g iz jednadžbi, 5. Promjena oblika zakona sličnosti 845

4.3. Prijelazni period uvođenja SI u nauku o toplini 849
1. Postojanje vansistemskih jedinica, 2. Dopuštene vansistemske jedinice 850

5. Sistemi jedinica nauke o toplini. Različite metričke i angloameričke jedinice topline

5.1. Koherentni i Tehnički sistem jedinica nauke o toplini 852
1. Koherentni sistem jedinica nauke o toplini, 2. Tehnički »sistem« jedinica nauke o toplini, 3. Angloamerički Tehnički »sistem« jedinica 857
5.2. Kalorija parnih tablica i kalorija petnaestog stupnja 857
1. Općenito o kalorijama, 2. Kalorija parnih tablica od godine 1956, 3. Kalorija petnaestog stupnja, 4. Jedinice thermie i frigorie 861
5.3. Ostale kalorije i usporedba različitih kalorija 861
1. Srednja kalorija, 2. Termokemijska kalorija, 3. Usporedba različitih kalorija 862
5.4. Angloameričke jedinice topline 863
1. Steam Table British thermal unit, 2. Mean British thermal unit, 3. Ostale angloameričke jedinice topline 864
5.5. Neke mjerne jedinice nuklearne energetike 865
1. Veličina specifični odgor (specific burnup), 2. Jedinica energije megavatdan (MWd), 3. Druge jedinice odgora nuklearnog goriva, 4. Suvišnost jedinice W_{el} 868

6. Preračunavanje nekih vansistemskih jedinica u jedinice SI. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi

6.1. Jedinice specifičnih veličina i jedinice toplinske snage 869
1. Specifične veličine i toplinska snaga, 2. Preračunavanje jedinice kcal/kg, 3. Preračunavanje jedinice Btu/lb, 4. Preračunavanje jedinica kcal/s, kcal/min i kcal/h, 5. Preračunavanje angloameričkih jedinica toplinske snage, 6. Usporedba različitih jedinica toplinske snage 871
6.2. Jedinice gustoće snage, toplinske vodljivosti te koeficijenata prolaza i prijelaza topline 871
1. Preračunavanje jedinice kcal/(m²h), 2. Preračunavanje jedinice Btu/(ft²h), 3. Preračunavanje jedinica specifične toplinske vodljivosti, 4. Preračunavanje jedinica koeficijenata prolaza i prijelaza topline 873
6.3. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi 873
1. Brzina istjecanja plinova i para, 2. Specifični potrošak pare i topline 875

Glava E: Mjerni sistemi elektromagnetizma

1. Fizikalne veličine elektromagnetskog polja

1.1. Pregled elektromagnetskih veličina 880
1. Četvrta osnovna veličina, 2. Pregled elektromagnetskih veličina 882
1.2. Fizikalne veličine elektrostatskog polja 882
1. Strujni udar i električka indukcija, 2. Električki kapacitet i dielektričnost, 3. Električka polarizacija, 4. Električka susceptibilnost 886
1.3. Neke veličine magnetskog polja 888
1. Induktivitet i magnetska indukcija, 2. Permeabilnost, 3. Magnetska polarizacija, 4. Magnetska susceptibilnost 891
1.4. Fizikalne veličine elektromagnetskog polja 892
1. Brzina širenja elektromagnetske pojave, 2. Valni otpor, 3. Poyntingov vektor, 4. Gustoća energije elektromagnetskog polja 896
1.5. Nuklearna rezonancija i njena indikacija 898
1. Impuls vrtnje i magnetski moment, 2. Žiromagnetska konstanta elektrona, 3. Nuklearna rezonancija, 4. Uvjet nuklearne rezonancije, 5. Vrijednost žiromagnetske konstante protona, 6. Indikacija nuklearne rezonancije 906

2. Međunarodni sistem jedinica (SI) u elektromagnetizmu

2.1. Nezavisna jedinica elektromagnetizma SI amper 909
1. Svrha uvođenja i prednosti SI, 2. Četvrta nezavisna jedinica SI u elektromagnetizmu, 3. Načelo djelovanja pramjerila jedinice amper, 4. Definicija nezavisne jedinice SI amper 914

2.2. Definicije imenovanih jedinica SI u elektromagnetizmu 915
1. Načelo definiranja izvedenih jedinica SI, 2. Sloboda definiranja izvedenih jedinica, 3. Elektromagnet kao pramjerilo polazne jedinice, 4. Definicije svih nezavisnih jedinica SI, 5. Definicije imenovanih jedinica SI u elektromagnetizmu, 6. Udobnost računanja pomoću jedinica SI 924

2.3. Veličine i jedinice u tehnici izmjeničnih struja 929
1. Temeljne veličine tehnike izmjeničnih struja, 2. Prividna i djelatna snaga, 3. Jalova snaga, 4. Jedinica jalove snage var 933

2.4. Primjeri upotrebe jedinica SI u elektromagnetizmu 934
1. Izolacijski otpor kabela, 2. Sila na ulje u kondenzatoru, 3. Izboj kondenzatorske baterije, 4. Polumjer elektromagneta ciklotrona, 5. Induktivitet toroida, 6. Regulacija napona za rasvjetu 938

2.5. Neke posljedice uvođenja Međunarodnog sistema jedinica u područje elektromagnetizma 940
1. Veličinske jednadžbe, 2. Primjena mase umjesto težine, 3. Prebaždarenje instrumenata i otporničkih normala, 4. Westonov zasićeni normalni element, 5. Zabrana javne primjene sistema jedinica CGS 946

3. Reproduciranje i pohranjivanje elektromagnetskih jedinica

3.1. Strujna vaga — pramjerilo jedinice amper 947
1. Načelo djelovanja strujne vage, 2. Pohranjivanje izmjerene vrijednosti struje, 3. O rukovanju strujnom vagom, 4. Različite izvedbe strujnih vaga, 5. Nesigurnost vrijednosti struje reproducirane vagom, 6. Poteškoće pri mjerenju strujnom vagom 961

3.2. Reproduciranje ampera pomoću indiciranja nuklearne rezonancije 963
1. Prikladnost nuklearnog pramjerila ampera, 2. Zamisao o nuklearnom pramjerilu, 3. Geometrijska konstanta solenoida, 4. Posljedice zamjene strujne vage nuklearnim pramjerilom, 5. Jugoslavensko nuklearno pramjerilo ampera 977

3.3. Reproduciranje električkog otpora pramjerilima. Računski standard međuinduktiviteta 979
1. Kapacitivno pramjerilo otpora, 2. Komutacijsko pramjerilo otpora, 3. Campbellovo pramjerilo otpora, 4. Lorenz-Smithovo pramjerilo otpora, 5. Računski standard međuinduktiviteta 994

3.4. Računski standard kapaciteta. Reproduciranje električkog napona pramjerilima 1000
1. Lampardov teorem o kapacitetu, 2. Računski standard kapaciteta, 3. Konstrukcija australskog kapacitivnog standarda, 4. Tekućinski elektrometar — pramjerilo napona, 5. Naponska vaga — pramjerilo napona, 6. Taylorovo supravodljivo pramjerilo napona 1017

3.5. Pohranjivanje vrijednosti napona pomoću naponskih normala..... 1020
1. Razlog upotrebe normala, 2. Osobine naponske normale — Westonova elementa, 3. Nacionalni volt i V(BIPM), 4. Načelo pohranjivanja grupnom normalom, 5. Pohranjivanje napona u NBS, 6. Interkomparacije naponskih normala u BIPM, 7. Stvarna vrijednost napona normale, 8. Jugoslavenska grupna normala napona, 9. Zenerova naponska normala 1040

3.6. Pohranjivanje vrijednosti otpora pomoću otporničkih normala 1041
1. Općenito o otporničkim normalama, 2. Pohranjivanje ohma u NBS, 3. Interkomparacije otporničkih normala u BIPM, 4. Prva jugoslavenska usporedba otporničkih normala, 5. Stvarna vrijednost otpora normale 1049

3.7. Preciznost vrhunske metrologije elektromagnetizma 1053
1. Nesigurnost reprodukcije struje, napona i otpora, 2. Nepouzdanost vrijednosti brzine svjetla, 3. Temelj mjerenja visokofrekventnih veličina, 4. O preciznosti mjerenja visokofrekventnih veličina 1059

4. Fizikalni ili CGS sistemi jedinica elektromagnetizma

4.1. Elektrostatski (CGSE) sistem jedinica 1063
1. Ishodište sistema CGSE, 2. Definicija CGSE jedinice elektrike, 3. CGSE jedinice ostalih »električkih« veličina, 4. CGSE jedinice magnetskog polja i indukcije, 5. CGSE jedinice ostalih »magnetskih« veličina, 6. Primjeri upotrebe CGSE jedinica 1070

4.2. Magnetostatski (CGSM) sistem jedinica 1073
1. Ishodište sistema CGSM, 2. CGSM jedinice struje i elektrike, 3. Jedinice gauss i oersted, 4. CGSM jedinice ostalih veličina, 5. CGSM jedinica magnetizacije 1078

4.3. Gaussov mješoviti sistem jedinica 1079
1. Porijeklo naziva sistema, 2. »Brzina« c u jednadžbama, 3. Primjer upotrebe jedinica Gaussova sistema, 4. Primjena jedinica različitih sistema 1084

4.4. Nepotpuni CGS sistemi jedinica elektromagnetizma 1086
1. Teškoće sa starijom literaturom, 2. Neke nepotpune CGSE i CGSM jedinice, 3. Nefizikalnost nepotpunih jedinica 1088

4.5. Postanak CGSM i CGSE sistema jedinica 1089
1. Gaussova koncepcija, 2. Razlog osnivanja magnetostatskog sistema, 3. Iskrivljenje Gaussove ideje 1091

5. Iz povijesti mjernih sistema elektromagnetizma

5.1. Razdoblje od godine 1832. do početka stoljeća 1092
1. Gaussov temelj metrologije elektromagnetizma, 2. Plodna metrološka djelatnost BAAS, 3. Radovi elektrotehničkih kongresa 1096

5.2. Proces nastajanja Međunarodnog sistema jedinica. O racionalizaciji 1098
1. Giorgijev prijedlog od godine 1901, 2. Ascolijevo pravilo o koherenciji jedinica, 3. Tehnički sistem jedinica od godine 1908, 4. Početak Međunarodnog sistema jedinica (SI), 5. Proces međunarodnog prihvaćanja SI, 6. O problemu racionalizacije 1106

5.3. Tehnički (internacionalni) sistem jedinica elektromagnetizma 1109
1. Reprodukcija ampera voltametrom, 2. Živina normala »internacionalnog ohma«, 3. Ostale jedinice Tehničkog sistema, 4. Promašenost Tehničkog sistema 1114

6. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi. Sistemi dimenzija

6.1. Brojčane i veličinske jednadžbe magnetskog polja 1115
1. Magnetsko polje ravnog vodiča, 2. Privlačna sila magneta 1117

6.2. Dvije radio-tehničke brojčane jednadžbe 1119
1. Otpor zračenja antene, 2. Thomsonova jednadžba titrajnog kruga 1120

6.3. Preobrazba brojčane jednadžbe Zeemanova efekta u veličinsku 1121
1. Brojčana jednadžba Zeemanova efekta, 2. Preobrazba u veličinsku jednadžbu, 3. Još jedna brojčana jednadžba 1123

6.4. Sistemi dimenzija elektromagnetizma 1125
1. Mie-Perryjev sistem, 2. Sistem dimenzija Kalantarova, 3. Ostali sistemi dimenzija elektromagnetizma 1127

Glava G: Veličine i mjerne jedinice teorije zračenja i fotometrije

1. Veličine i jedinice teorije zračenja. Zakoni zračenja

1.1. Temeljne veličine teorije zračenja 1131
1. Veličine ozračenost i jakost zračenja, 2. Lambertov zakon i gustoća snage zračenja, 3. Snaga zračenja u poluprostor 1135
1.2. Infinitezimalna interpretacija teorije zračenja 1136
1. Osnova teorije zračenja, 2. Jakost zračenja, ozračenost i emisijska moć, 3. Veza između jakosti zračenja, ozračenosti i udaljenosti 1140
1.3. Zakoni zračenja crnog tijela 1141
1. Kirchhoffov zakon, 2. Crno tijelo (savršeno zračilo), 3. Planckov zakon zračenja crnog tijela, 4. Rayleigh-Jeansov i Wienovi zakoni, 5. Stefan-Boltzmannov zakon zračenja 1145

2. Zapažanje svjetla. Zakoni fotometrije i rasvjetne tehnike

2.1. Načelo fotometrijskih usporedbi 1147
1. Svjetlo — vidljivo zračenje, 2. Temelj fotometrije, 3. Raznobojna (heterokromna) fotometrija 1149
2.2. Ovisnost zapažanja svjetla o duljini vala zračenja 1150
1. Spektralna osjetljivost oka, 2. Purkyněov efekt, 3. Načelo mjerenja gustoće snage zračenja, 4. Zakon zbrajanja monokromatskih zračenja, 5. Primjena zakona zbrajanja na kontinuirano zračenje 1157
2.3. Luminancija i njena jedinica nit 1158
1. Fotometrijska veličina luminancija, 2. Definicija jedinice luminancije nit, 3. Fotometrijski ekvivalent zračenja, 4. Reprodukcija jedinice luminancije, 5. Veličina luminancija u objektivnoj fotometriji, 6. Nesigurnost reprodukcije savršenim zračilom 1167
2.4. Pregled fotometrijskih veličina 1167
1. Svjetlosna korisnost (vidljivost svjetla), 2. Svjetlosni tok, 3. Rasvijetljenost (osvijetljenost), 4. Svjetlosna jakost, 5. Pregled fotometrijskih veličina 1175
2.5. Novije koncepcije fotometrijskih veličina. Temperatura boje 1178
1. Potreba revizije postojeće koncepcije, 2. Moonov sistem fotometrijskih veličina, 3. Temperatura boje 1181

3. Temeljna mjerenja u fotometriji i fotometrijske jedinice

3.1. Temeljna mjerenja u fotometriji 1183
1. Načelo vizuelne fotometrije, 2. Lummer-Brodhunov fotometar, 3. Ulbrichtova kugla 1186
3.2. Jedinice Međunarodnog sistema (SI) fotometrijskih veličina 1189
1. Priključak fotometrije na SI, 2. Jedinica luminancije nit, 3. Jedinica svjetlosnog toka lumen, 4. Jedinica rasvijetljenosti lux, 5. Jedinica svjetlosne jakosti candela, 6. Službeni slijed definicija jedinica SI 1193
3.3. Ostale jedinice luminancije 1195
1. Jedinica stilb, 2. Jedinica apostilb, 3. Jedinice lambert i mililambert, 4. Jedinica footlambert, 5. Jedinica candle/inch^2, 6. Jedinica »tamne luminancije« skot 1200
3.4. Mjerne jedinice rasvijetljenosti 1202
1. Jedinice lux i kilolux, 2. Jedinice phot i miliphot, 3. Jedinica footcandle, 4. Jedinica rasvijetljenosti lumen/inch^2, 5. Jedinica »tamne rasvijetljenosti« nox 1203
3.5. Mjerne jedinice veličine ekspozicija 1204
1. Veličina ekspozicija, 2. Jedinica SI luxsekunda, 3. Jedinica photsekunda, 4. Jedinice luxsat i photsat 1206
3.6. Iz povijesti svjetlosnih pramjerila 1206
1. Svjetlosna pramjerila prošlog stoljeća, 2. Hefnerova svijeća, 3. Violleova svijeća, 4. Međunarodna svijeća, 5. Usporedba Međunarodne i Hefnerove svijeće, 6. Nova svijeća (candela) 1210

Glava H: Veličine i mjerne jedinice ionizirajućih zračenja

1. Pregled i definicije veličina ionizirajućih zračenja

1.1. Osobitosti ionizirajućih zračenja 1215
1. Potreba zaštite od ionizirajućih zračenja, 2. Mehanizam djelovanja, 3. Standardizacija veličina i jedinica 1216
1.2. Aktivnost raspadanja atomskih jezgara 1219
1. Osnova teorije radioaktivnosti, 2. Zakoni radioaktivnih preobrazbi, 3. Radioaktivna ravnoteža, 4. Aktivnost i specifične aktivnosti 1220
1.3. Predana energija, doza zračenja i njena snaga 1223
1. Predana energija, 2. Doza zračenja, 3. Snaga doze zračenja 1226
1.4. Tok čestica i tok energije 1226
1. Tok čestica, 2. Gustoća toka čestica, 3. Tok energije čestica, 4. Gustoća toka energije 1227
1.5. Kerma i snaga kerme 1227
1. Kerma, 2. Snaga kerme 1228
1.6. Ekspozicija, snaga ekspozicije i specifična konstanta gama 1229
1. Ekspozicija, 2. Snaga ekspozicije, 3. Specifična konstanta gama 1229

2. Mjerne jedinice veličina ionizirajućih zračenja

2.1. Jedinice SI i CGS radioaktivnosti i ionizirajućih zračenja 1231
1. Načelo građenja jedinica sistema SI i CGS, 2. Međusobni odnosi jedinica SI i CGS, 3. Primjer mjerenja ekspozicije i snage ekspozicije 1233
2.2. Standardizacija jedinica na području aktivnosti i ionizirajućih zračenja 1234
1. Jedinica SI aktivnosti, 2. Jedinice SI gustoće toka čestica i gustoće toka energije, 3. Jedinice SI doze zračenja i snage doze zračenja, 4. Jedinice SI ekspozicije i snage ekspozicije 1236
2.3. Vansistemske jedinice aktivnosti i specifične aktivnosti 1237
1. Jedinica aktivnosti curie, 2. Višekratnici jedinice curie, 3. Jedinice rutherford i militstat, 4. Jedinice specifične aktivnosti eman i mache 1242
2.4. Vansistemske jedinice ekspozicije (ekspozicijske doze) i snage ekspozicije 1243
1. Jedinica ekspozicije röntgen, 2. Višekratnici jedinice röntgen, 3. Jedinice snage ekspozicije 1247
2.5. Fizikalni i biološki ekvivalenti röntgena 1248
1. Fizikalni ekvivalent röntgena (rep), 2. Relativna biološka djelotvornost RBE, 3. Jedinica rem 1249

Popis tablica

Glava A: Osnovi nauke o mjerenju i sistemima jedinica

Tab. A-1. Decimalni dijelovi i dekadski višekratnici jedinica 65
Tab. A-2. Vrijednosti specifične topline c_p pri stalnom tlaku različitih tvari pri temperaturi 20 °C 73
Tab. A-3. Vrijednosti dinamičke viskoznosti η raznih kapljevina pri temperaturi 0 °C .. 73
Tab. A-4. Primjena uspravnih i kurzivnih simbola prema DIN 1338—1961 75
Tab. A-5. Neke matematičke oznake prema ISO i DIN 78
Tab. A-6. Dvoznačnost uzrokovana nepostojanjem zagrade 82
Tab. A-7. Podaci o $n = 51$ ponovljeno mjerenje duljine metarskog štapa 107

Tab. A-8. Bitni podaci o normalnoj raspodjeli za nekoliko karakterističnih statističkih sigurnosti 127
Tab. A-9. Ovisnost približnih vrijednosti faktora t i f Studentove raspodjele o broju ponovljenih mjerenja n za različite statističke sigurnosti P 132
Tab. A-10. Prirast sistematske pogreške funkcija s jednom i više varijabli 153
Tab. A-11. Razdioba kopija međunarodnog prametra i međunarodnog prakilograma .. 191
Tab. A-12. Odstupanje duljine nacionalnih prametara od duljine međunarodnog prametra (u μm) 192
Tab. A-13. Odstupanje mase nacionalnih prakilograma od mase međunarodnog prakilograma (u μg) 192
Tab. A-14. Države koje su zakonima propisale primjenu metričkog sistema jedinica 194
Tab. A-15. Dosadašnja zasjedanja Generalne konferencije 204
Tab. A-16. Dopuštena odstupanja krajnjih mjera 229
Tab. A-17. Duljine vala zračenja sekundarnih izvora 274
Tab. A-18. Klasifikacija vaga prema relativnoj pogrešci..... 301
Tab. A-19. Vrijednost g Washingtona u Potsdamskom sistemu 318
Tab. A-20. Vrijednosti g utvrđene direktnim i relativnim mjerenjima na istim mjestima 320
Tab. A-21. Razlika $\Delta T = ET - UT$ u toku prošlih 60 godina 340
Tab. A-22. Nazivi dana u tjednu na četiri jezika 361
Tab. A-23. Objašnjenje najčešće upotrebljavanih kratica 380
Tab. A-24. Razlika $A3 - AT$(i) pojedinih atomskih vremenskih skala izražena milisekundama 382
Tab. A-25. Razlika frekvencije $\Delta f = f_{A3} - f_1$ izražena pikohertzima 382
Tab. A-26. Razlika između skala *A3* i *UT2* izražena sekundama 385
Tab. A-27. Relativno odstupanje frekvencije radio-stanica NBS od frekvencije američkog pramjerila u NBS 392
Tab. A-28. Značajke nekih radio-stanica koje emitiraju signale frekvencije i vremena 399
Tab. A-29. Usporedba frekvencije pojedinih pramjerila sa f_{NBS}. Razlika je izražena jedinicom pHz 401

Glava B: **Mjerni sistemi mehanike i hidraulike**

Tab. B-1. Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama duljine 419
Tab. B-2. Dvostrani odnosi među astronomskim jedinicama duljine 426
Tab. B-3. Dvostrani odnosi među temeljnim jedinicama kuta 429
Tab. B-4. Dvostrani odnosi među artiljerijskim, navigacijskim i nekim drugim jedinicama kuta 429
Tab. B-5. Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama površine 432
Tab. B-6. Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama volumena 436
Tab. B-7. Usporedba rotancije (kutne brzine) s frekvencijom vrtnje (brzinom vrtnje) 445
Tab. B-8. Usporedba toka proračuna pomoću rotancije i pomoću frekvencije vrtnje.. 446
Tab. B-9. Nekorektna usporedba jedinica različitih veličina 446
Tab. B-10. Dvostrani odnosi među jedinicama vremena 449
Tab. B-11. Dvostrani odnosi među nekim dekadskim jedinicama brzine 451
Tab. B-12. Dvostrani odnosi među nekim satnim i dekadskim jedinicama brzine 451
Tab. B-13. Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama brzine 454
Tab. B-14. Beaufortova skala jakosti vjetra u ovisnosti o brzini vjetra 455
Tab. B-15. Dvostrani odnosi među brojčanim iznosima rotancije (kutne brzine) i frekvencije vrtnje (brzine vrtnje) 458
Tab. B-16. Ovisnost gustoće vode o temperaturi pri tlaku 1,01325 bar (1 atm)..... 462
Tab. B-17. Masene veličine, njihove definicijske jednadžbe i jedinice SI kojima se mjere 464
Tab. B-18. Ovisnost gustoće zraka (u g/m^3) o temperaturi i tlaku 468
Tab. B-19. Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama mase 473

Tab. B-20. Dvostrani odnosi među metričkim i nekim kemijskim jedinicama mase 474
Tab. B-21. Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama gustoće 478
Tab. B-22. Usporedba vrijednosti areometarske racionalne Bauméove skale s vrijednostima gustoće tekućina u jedinici kg/dm³ pri temperaturi 15 °C 483
Tab. B-23. Veza areometarskih gustoća tekućina raznih skala s pravom gustoćom ρ 484
Tab. B-24. Odnosi između alkoholometrijskog stupnja, masenog stupnja i relativne gustoće alkoholne mješavine 485
Tab. B-25. Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama volumnog protoka..... 487
Tab. B-26. Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama masenog protoka..... 488
Tab. B-27. Dvostrani odnosi među jedinicama sile izvedenima iz newtona, sthènea i dyna 496
Tab. B-28. Dvostrani odnosi među jedinicama sile izvedenima iz newtona i jedinicama sile izvedenima iz ponda 498
Tab. B-29. Preračunavanje vrijednosti sila izraženih kilopondima na newtone..... 500
Tab. B-30. Preračunavanje vrijednosti sila izraženih newtonima na kiloponde..... 500
Tab. B-31. Dvostrani odnosi među jedinicama tlaka koje su pomoću višekratnika jedinica izvedene iz newtona i kvadratnog metra..... 505
Tab. B-32. Dvostrani odnosi među vrlo bliskim jedinicama tlaka: normalna (standardna) atmosfera (atm), bar i tehnička atmosfera (at = kp/cm²) 506
Tab. B-33. Decimalni dijelovi jedinice tlaka bar i njihov odnos prema jedinici N/m² 507
Tab. B-34. Odnosi među jedinicama tlaka bar, dyn/cm², pascal, pièze i njihovim izvedenicama 508
Tab. B-35. Dvostrani odnosi među nekim jedinicama tlaka 511
Tab. B-36. Dvostrani odnosi među angloameričkim stupčanim jedinicama tlaka 515
Tab. B-37. Dvostrani odnosi među jedinicama energije izvedenima iz jedinica joule i vatsat 524
Tab. B-38. Dvostrani odnosi među različitim metričkim jedinicama energije..... 526
Tab. B-39. Dvostrani odnosi među različitim metričkim jedinicama energije..... 528
Tab. B-40. Dvostrani odnosi među nekim angloameričkim jedinicama energije i jedinicama J, kJ i MJ 530
Tab. B-41. Odnosi među nekim jedinicama energije atomske fizike i elektronvolta..... 536
Tab. B-42. Dvostrani odnosi među nekim jedinicama snage izvedenima iz vata pomoću decimalnih i dekadskih višekratnika..... 537
Tab. B-43. Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama snage..... 538
Tab. B-44. Dvostrani odnosi među metričkim i angloameričkim jedinicama snage..... 540
Tab. B-45. Ovisnost dinamičke i kinematičke viskoznosti destilirane vode o temperaturi prema DIN 51550 554
Tab. B-46. Dvostrani odnosi među jedinicama dinamičke viskoznosti osnovanima na jedinicama Ns/m² i poise 557
Tab. B-47. Dvostrani odnosi među nekim metričkim i angloameričkim jedinicama dinamičke viskoznosti 558
Tab. B-48. Dvostrani odnosi među metričkim i angloameričkim jedinicama kinematičke viskoznosti 562
Tab. B-49. Ekvivalenti kinematičke viskoznosti u Englerovoj, Redwoodovoj i Sayboltovoj (Universal) viskozimetrijskoj skali 568
Tab. B-50. Ekvivalenti kinematičke viskoznosti u različitim industrijskim viskozimetrijskim skalama pri temperaturi 25 °C (77 °F) 572
Tab. B-51. Usporedba viskoznosti SAE s viskoznošću Saybolt Universal i s kinematičkom viskoznošću pri različitim temperaturama..... 574
Tab. B-52. Ovisnost kinematičke viskoznosti približno 60%-tne otopine trščanog šećera o gustoći otopine pri temperaturi 25 °C 574
Tab. B-53. Pregled jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina prostora i mehanike 582
Tab. B-54. Pregled jedinica Tehničkog sistema jedinica, CGS sistema jedinica i odnosi tih jedinica prema jedinicama SI..... 610
Tab. B-55 Čvrstoća čelika za noseće konstrukcije 631

Tab. B-56. Usporedba primjene različitih jedinica čvrstoće SI 632
Tab. B-57. Nekoliko sistema dimenzija mehanike 646
Tab. B-58. Rezultati uspoređivanja prayarda (PC 1) i prametra (Sèvres) 656
Tab. B-59. Usporedba triju yarda 657
Tab. B-60. Preračunavanje vrijednosti 0 do 10 incha u milimetre, u koracima 1/16 incha 659
Tab. B-61. Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama duljine 660
Tab. B-62. Dvostrani odnosi među pomorskim jedinicama duljine 660
Tab. B-63. Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama površine 662
Tab. B-64. Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama površine 662
Tab. B-65. Dvostrani odnosi među engleskim jedinicama volumena osnovanima na UK gallonu 664
Tab. B-66. Dvostrani odnosi među engleskim jedinicama volumena osnovanima na UK gallonu 665
Tab. B-67. Dvostrani odnosi među američkim jedinicama volumena osnovanima na US gallonu 665
Tab. B-68. Dvostrani odnosi među američkim jedinicama za suhe tvari osnovanima na US bushelu 667
Tab. B-69. Pretvorba engleskih (UK) jedinica volumena u američke (US) 668
Tab. B-70. Pretvorba američkih (US) jedinica volumena u engleske (UK) 668
Tab. B-71. Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama mase za opću primjenu (system avoirdupois) 671
Tab. B-72. Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama mase za opću primjenu (system avoirdupois) 672
Tab. B-73. Preračunavanje pounda u kilograme 673
Tab. B-74. Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama mase za primjenu u farmaciji (apothecaries-system) 674
Tab. B-75. Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama mase za mjerenje dragulja i dragocjenih metala (system troy) 675
Tab. B-76. Pregled mjesta u ovoj knjizi gdje se razmatraju angloameričke jedinice nekih veličina 676
Tab. B-77. Jedinice koherentnog angloameričkog masenog sistema jedinica mehanike 677
Tab. B-78. Jedinice koherentnog angloameričkog Tehničkog sistema jedinica mehanike 679

Glava C: **Veličine i mjerne jedinice akustike**

Tab. C-1. Dvostrani odnosi među nekim jedinicama jakosti zvuka 689
Tab. C-2. Elektromagnetska analogija akustičkih veličina 693
Tab. C-3. Odnosi između L i I/I_0 695
Tab. C-4. Pregled nekih akustičkih veličina i njihovih jedinica 698
Tab. C-5. Strani nazivi nekih akustičkih i fonometrijskih veličina 699
Tab. C-6. Dijatonske skale čistih tonova 702
Tab. C-7. Preračunavanje nepera (Np) u decibele (dB) 712

Glava D: **Veličine i mjerne jedinice nauke o toplini i kemije**

Tab. D-1. Relativne atomske mase mješavine izotopa kisika, dušika i srebra u kemijskoj i fizikalnoj skali 724
Tab. D-2. Vrijednosti nekih konstanti izraženih kilomolom 736
Tab. D-3. Elektronska konfiguracija atoma 745
Tab. D-4. Uzastopne energije ionizacije atoma laganih kemijskih elemenata 747
Tab. D-5. Relativna molekularna masa, plinska konstanta, specifična toplina i gustoća nekih plinova 751

Tab. D-6. Analogija električkih i toplinskih strujnih krugova 769
Tab. D-7. Pregled toplinskih veličina, njihovih oznaka, jednadžbi u kojima dolaze i jedinicâ Međunarodnog sistema kojima se mjere 770
Tab. D-8. Rezultati najpreciznijih mjerenja temperature ledišta vode 780
Tab. D-9. Brojčane jednadžbe koje povezuju različite termodinamičke temperaturne skale 796
Tab. D-10. Definicijski podaci o Celzijevoj, Fahrenheitovoj i Réaumurovoj empiričkoj temperaturnoj skali 799
Tab. D-11. Definirajuće fiksne tačke Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968 801
Tab. D-12. Sekundarne referentne tačke Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968 804
Tab. D-13. Vrijednost omjera $W_{CCT}=W_{CCT-68}(T_{68})$ pri cjelobrojnim vrijednostima temperature T_{68} 806
Tab. D-14. Vrijednosti funkcije W_{CCT} za neke definirajuće i sekundarne tačke Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968 808
Tab. D-15. Približna razlika $(t_{68}-t_{48})$/°C Međunarodnih temperaturnih skala 1968 i 1948 815
Tab. D-16. Molne specifične topline triju vrsta plinova 824
Tab. D-17. Celzijeva temperatura u jedinici °C i predloženoj jedinici stefan 827
Tab. D-18. Specifične topline nekih plinova pri temperaturi $\vartheta = 20\,°C$ i tlaku 1 kp/cm² .. 828
Tab. D-19. Tabelarni prikaz utjecaja primjene Međunarodnog sistema jedinica na oblik zakona sličnosti 846
Tab. D-20. Dopuštene vansistemske jedinice sile 850
Tab. D-21. Dopuštene vansistemske jedinice tlaka 851
Tab. D-22. Dopuštene vansistemske jedinice energije 851
Tab. D-23. Jedinice nekih toplinskih i mehaničkih veličina u koherentnom sistemu msKkcal i u Međunarodnom sistemu jedinica 854
Tab. D-24. Neke jedinice Tehničkog »sistema« nauke o toplini 856
Tab. D-25. Vrijednosti specifične topline vode pri tlaku 1 atm prema podacima CIPM .. 861
Tab. D-26. Dvostrani odnosi među različitim jedinicama količine topline 862
Tab. D-27. Mjerne jedinice odgora ekvivalentne jedinici g(f)/cm³ 867
Tab. D-28. Dvostrani odnosi među različitim jedinicama toplinske snage 871

Glava E: **Mjerni sistemi elektromagnetizma**

Tab. E-1. Elektromagnetske veličine, njihove oznake, veličinske jednadžbe u kojima se pojavljuju i jedinice Međunarodnog sistema (SI) kojima se mjere 881
Tab. E-2. Faktor depolarizacije N rotacijskog elipsoida 888
Tab. E-3. Vrijednost žiromagnetske konstante protona 905
Tab. E-4. Ovisnost jedinica SI o sedam četvorki polaznih jedinica 926
Tab. E-5. Ovisnost jedinica SI o drugih sedam četvorki polaznih jedinica 927
Tab. E-6. Neke veličine i njihove jedinice u tehnici izmjeničnih struja 932
Tab. E-7. Preračunavanje vrijednosti otpora sa jedinice Ω_0 u jedinicu Ω(SI) 943
Tab. E-8. Preračunavanje vrijednosti napona sa jedinice V_0 u jedinicu V(SI) 944
Tab. E-9. Mjerenje vrijednosti »srednjeg internacionalnog ampera« 956
Tab. E-10. Pregled relativnih pogrešaka pri upotrebi Campbellova pramjerila otpora u NPL 990
Tab. E-11. Mjerenje vrijednosti »srednjeg internacionalnog ohma« 993
Tab. E-12. Promjer primarnog namota standarda međuinduktiviteta NPL 997
Tab. E-13. Korekcije i utvrđene nepouzdanosti međuinduktiviteta M standarda NPL 997
Tab. E-14. Utvrđivanje optimalne duljine standarda kapaciteta u NSL 1004
Tab. E-15. Korekcije i utvrđene nepouzdanosti kapaciteta C standarda NSL 1004
Tab. E-16. Ovisnost napona zasićenog normalnog Westonova elementa o temperaturi .. 1023
Tab. E-17. Interkomparacijama utvrđena razlika V(N)−V(BIPM) 1035

Tab. E-18. Interkomparacijama utvrđena razlika Ω(N) − Ω(BIPM) 1048
Tab. E-19. Utvrđivanje stvarne vrijednosti Ω(NSL) australske otporničke normale 1051
Tab. E-20. Stvarna vrijednost Ω(BIPM) utvrđena pramjerilima i interkomparacijama 1052
Tab. E-21. Utvrđivanje razlike Ω(BIPM) − Ω(SI) u nekoliko metroloških zavoda 1054
Tab. E-22. Napredak poznavanja stvarne vrijednosti brzine svjetla u vakuumu 1055
Tab. E-23. Karakteristike uređaja za mjerenje visokofrekventne snage 1060
Tab. E-24. Jedinice nekih veličina u elektrostatskom (CGSE) i magnetostatskom (CGSM) sistemu jedinica 1072
Tab. E-25. Preračunavanje vrijednosti jakosti magnetskog polja sa jedinice CGSM oersted na jedinicu SI A/m 1077
Tab. E-26. Usporedba nekih veličinskih jednadžbi s brojčanima koje su prilagođene jedinicama Gaussova, CGSM i CGSE sistema 1085
Tab. E-27. Jedinice nekih veličina u nepotpunom elektrostatskom i magnetostatskom sistemu jedinica 1088
Tab. E-28. Nekoliko sistema dimenzija elektromagnetizma 1126

Glava G: **Veličine i mjerne jedinice teorije zračenja i fotometrije**

Tab. G-1. Usporedba naziva nekih veličina teorije zračenja na šest jezika 1133
Tab. G-2. Pregled veličina i jedinica teorije zračenja i zračenja crnog tijela 1138
Tab. G-3. Veza između boje, duljine vala i frekvencije svjetla 1148
Tab. G-4. Vrijednosti međunarodno standardizirane krivulje spektralne osjetljivosti oka (relativna svjetlosna korisnost) za svijetlu i tamnu adaptaciju oka 1151
Tab. G-5. Usporedba naziva nekih fotometrijskih veličina na šest jezika 1153
Tab. G-6. Vidljivi spektar zračenja visokotlačne živine sijalice 1155
Tab. G-7. Proračun primjera iz objektivne fotometrije 1166
Tab. G-8. Sistematika prijelaza od fizikalnih na fotometrijske veličine 1170
Tab. G-9. Usporedbeni prikaz nekih veličina i pripadnih jedinica teorije zračenja i fotometrije 1171
Tab. G-10. Stariji definicijski niz fotometrijskih veličina i njegova usporedba s definicijama veličina teorije zračenja 1171
Tab. G-11. Pregled fotometrijskih veličina i jedinica 1176
Tab. G-12. Usporedba stvarne i crne temperature s temperaturom boje volframa 1182
Tab. G-13. Dvostrani odnosi među jedinicama luminancije 1198
Tab. G-14. Dvostrani odnosi među jedinicama rasvijetljenosti 1202
Tab. G-15. Dvostrani odnosi među jedinicama ekspozicije 1205
Tab. G-16. Odnosi jedinica IC i HK pri različitim temperaturama boje prema CIE 1928 1209
Tab. G-17. Odnosi jedinica cd i HK pri različitim temperaturama boje 1211

Glava H: **Veličine i mjerne jedinice ionizirajućih zračenja**

Tab. H-1. Pregled veličina i jedinica s područja ionizirajućih zračenja 1226
Tab. H-2. Vrijednosti specifične konstante gama nekih radioizotopa u zraku 1230
Tab. H-3. Omjeri jedinica sistema SI i CGS koje se upotrebljavaju za mjerenje veličina ionizirajućih zračenja 1232
Tab. H-4. Dvostrani odnosi među jedinicama aktivnosti 1240
Tab. H-5. Dvostrani odnosi među jedinicama volumne specifične aktivnosti (koncentracije) 1242
Tab. H-6. Dvostrani odnosi među jedinicama ekspozicije (ekspozicijske doze zračenja) .. 1246
Tab. H-7. Dvostrani odnosi među jedinicama snage ekspozicije (snage ekspozicijske doze zračenja) 1247

Priložene tablice prirodnih konstanti i dvostranih odnosa među jedinicama

Tab. 1.	Periodni sistem kemijskih elemenata	P1
Tab. 2.	Vrijednosti prirodnih konstanti	P3
Tab. 3, 4.	Dvostrani odnosi među jedinicama duljine	P5
Tab. 5, 6.	Dvostrani odnosi među jedinicama kuta	P7
Tab. 7, 8, 9.	Dvostrani odnosi među jedinicama površine	P9
Tab. 10, 11, 12.	Dvostrani odnosi među jedinicama volumena	P12
Tab. 13.	Dvostrani odnosi među jedinicama brzine	P15
Tab. 14, 15, 16.	Dvostrani odnosi među jedinicama mase	P16
Tab. 17.	Dvostrani odnosi među jedinicama gustoće	P19
Tab. 18.	Dvostrani odnosi među jedinicama gustoće (koncentracije)	P20
Tab. 19.	Dvostrani odnosi među jedinicama plošne gustoće	P21
Tab. 20.	Dvostrani odnosi među jedinicama momenta tromosti	P22
Tab. 21.	Dvostrani odnosi među jedinicama specifičnog volumena	P23
Tab. 22.	Dvostrani odnosi među jedinicama protoka	P24
Tab. 23.	Dvostrani odnosi među jedinicama masenog protoka	P25
Tab. 24, 25.	Dvostrani odnosi među jedinicama sile	P26
Tab. 26, 27, 28.	Dvostrani odnosi među jedinicama tlaka i naprezanja	P28
Tab. 29.	Dvostrani odnosi među jedinicama naprezanja i tlaka	P31
Tab. 30.	Dvostrani odnosi među jedinicama dinamičke viskoznosti	P32
Tab. 31.	Dvostrani odnosi među jedinicama kinematičke viskoznosti	P33
Tab. 32, 33.	Dvostrani odnosi među jedinicama energije i rada	P34
Tab. 34.	Dvostrani odnosi među različitim jedinicama energije koje se upotrebljavaju u atomskoj i nuklearnoj fizici	P36
Tab. 35.	Dvostrani odnosi među jedinicama energije i rada	P38
Tab. 36.	Dvostrani odnosi među jedinicama specifične energije	P39
Tab. 37, 38.	Dvostrani odnosi među jedinicama snage	P40
Tab. 39.	Dvostrani odnosi među jedinicama gustoće snage	P42
Tab. 40.	Češće upotrebljavane veličinske i brojčane jednadžbe te odnosi među jedinicama CGSE, CGSM i Međunarodnog sistema jedinica [SI]	P43

Približan izgovor naziva nekih metričkih jedinica

ångström (Å)	ongstrem	newton (N)	njutn
baumé (Bé)	bome	oersted (Oe)	ersted
beaufort	bofor	ohm (Ω)	om
bernoulli (B)	bernuli	phon (ph)	fon
candela (cd)	kandela	phot (ph)	fot
coulomb (C)	kulon	pièze (pz)	pjez
curie (Ci)	kiri	poise (P)	poaz
dyn	din	réaumur (°R)	reomir
fahrenheit (°F)	farnhajt	röntgen (r)	rendgen
gauss (G)	gaus	siemens (S)	simens
henry (H)	henri	stefan	štefan
hertz (Hz)	herc	sthène (sn)	sten
hyl	hil	stokes (St)	stouk
joule (J)	džul	watt (W)	vat
lux (lx)	luks	weber (Wb)	veber
maxwell	meksuel	weisbach	vajsbah

Glava **A**

Osnovi nauke o mjerenju i sistemima jedinica

1. Veličine, jedinice, brojčani iznosi i jednadžbe

1.1. Značenje i neophodnost mjerenja

1.1.1. Svakodnevni život i mjerenje. Čovjek se susreće s egzaktnim mjerenjem znatno prije nego što je toga svjestan. U civiliziranim zemljama propisi zahtijevaju da se novorođenče izvaže te da se izmjeri i zabilježi njegova duljina i još neke antropološke karakteristike. Prije nego što dijete počinje samo da mjeri, još je neko vrijeme pasivan sudionik mjernog postupka: brižna majka termometrom mjeri »vrućinu« svog čeda, pažljivo motri na sat, očekujući trenutak ponovnog dojenja, u kasnijim mjesecima hranu dozira bočicama itd. Tko se od nas ne sjeća onog trenutka kad smo koračanjem možda prvi put *aktivno* mjerili udaljenost »jedanaesterac« na dječačkoj nogometnoj utakmici. Osjećaj za »tačno mjerenje« stekli smo vjerojatno onda kad smo prvi put postali vlasnici instrumenta za mjerenje vremena — sata, na koji smo s ponosom pogledavali.

Čitav daljnji čovjekov život praćen je mjerenjem, samo što on možda to tako ne naziva, jer npr. kupovanje u trgovinama automatski u sebi uključuje mjerenje. Naš je svakodnevni život u znaku mjerenja: novac je jedna od mjera rada i vrijednosti proizvoda, ručni sat je mjerni uređaj koji koordinira našu ubrzanu životnu

trku, trgovačka vaga sudac je između potrošača i proizvođača, proporcije su mjerila ljepote, a omjeri frekvencija uvjetuju harmoniju glazbe. Ni najmanje važan odjel neke tvornice ne može danas uspješno raditi a da ne mjeri, tvornica može prosperirati samo ako radnici znaju mjeriti. Bez mjerenja ne može se objasniti dosadašnji razvoj čovječanstva, a ni zamisliti njegov budući napredak, pojam mjerenja star je isto koliko i čovječanstvo (vidi letimičan osvrt na povijest mjerenja u poglavlju 6). Koliko je opsežna mjerna djelatnost suvremenog čovjeka može nam ilustrirati podatak iz USA: Amerikanci procjenjuju da je godine 1966. u USA *svakog dana* obavljeno oko 20 milijardi važnih mjerenja ($20 \cdot 10^9$ measurements of meaningful content)!

Mjerenje nije samo osnov proizvodnje, trgovine, prometa i svih drugih ljudskih djelatnosti, već i temelj odnosa među ljudima i među društvenim tvorevinama: juridička snaga mjerenja odlučujuća je pri rješavanju sporova. Terminologija mjerenja odrazuje se i u visokoj politici: izraz »ravnoteža sila« označuje delikatan položaj u toku mjernog postupka. Mjerenje fizikalnih veličina izborilo je u naše vrijeme svoje mjesto i u nauci o životu, biologiji. U najnovije vrijeme egzaktnim se mjerenjem služi čak i psihologija (psihotehnika).

Sve dosadašnje civilizacije visoko su cijenile mjernu vještinu, temeljile svoj prosperitet na mjerenju, a u spoznavanju prirode polazile od mjerenja. Tako, na primjer, u desetoj knjizi svog poznatog djela o državi, *Platon* bilježi ove misli koje je *Sokrat* iznosio svojim učenicima:

> Neki nam se predmet čini većim kad ga promatramo izbliza, nego kad ga gledamo izdaleka. Čini nam se da je ravan, ako ga gledamo izvan vode, a prelomljen, ako ga vidimo u vodi. Izloženi smo brojnim zabludama osjeta. Tome najuspješnije doskačemo mjerenjem, brojenjem i vaganjem . . . Na taj način pobjeđujemo vladavinu osjeta nad nama. Ne ravnamo se više prema utisku o veličini, broju ili težini predmeta, već ih računamo, mjerimo i važemo. To je stvar misaone moći u nama. *A onaj dio koji se pouzdaje u mjerenje i računanje najplemenitija je sila naše duše.*

1.1.2. Znanstvena metrologija. Egzaktnu znanost o prirodi mogli su za vrijeme prošlih stoljeća grubo podijeliti u tri velike grane: fiziku, kemiju, astronomiju. U toku prošlog i ovog stoljeća postignut je toliki napredak u prirodoslovnim istraživanjima i u primjeni njihovih rezultata — tehnici, da je posve prirodno i spontano došlo do vrlo podrobne specijalizacije prirodnih znanosti i tehnike. Osamostalile su se mnoge specijalne grane, na primjer: fizikalna kemija, tehnička fizika, elektroakustika, astrofizika, nuklearna tehnika, rasvjetna tehnika, automacija, raketna tehnika itd. Taj proces specijalizacije ubrzano se nastavlja, pa tako npr. u primjeni poluvodiča imamo posebnu »digitalnu tehniku«, »nanosekundnu tehniku«, u optici i strojarstvu »interferencijsku tehniku« i tako dalje u beskraj. Sužavanje i umnožavanje područja istraživanja, razvoja i proizvodnje u sve užu i dublju specijalizaciju donijelo je i loše posljedice: terminologija jednog područja postala je gotovo nerazumljiva za radnike na susjednom području, susjedi se, dakle, teško sporazumijevaju, iako polaze od istih fizikalnih principa i svojim radom služe istom cilju: više dobara uz manje uložena rada, dakle viši životni standard ljudi i ljepši život.

Ipak postoji crvena nit koja neumoljivom racionalnošću povezuje sav taj Babilon prirodnih i tehničkih znanosti: *mjerenje*. U svim tim specijaliziranim granama egzaktnost rada postiže se jedino i isključivo mjerenjem. Budući da se sve grane pretežno služe istim fizikalnim veličinama (npr. duljina, vrijeme, brzina, masa, sila, tlak, energija, jakost električne struje itd.), racionalno je da se iste fizikalne veličine u različitim granama služe jednakim mjernim metodama i istim, eventualno prilagođenim mjernim uređajima. Ove činjenice uvjetovale su da je

tokom ovog stoljeća sebi izborila samostalno mjesto među drugim granama prirodoslovnih i tehničkih znanosti posebna grana, koju nazivamo *metrologija* (od grčkog metron — mjera, logos — učenje, nauka).

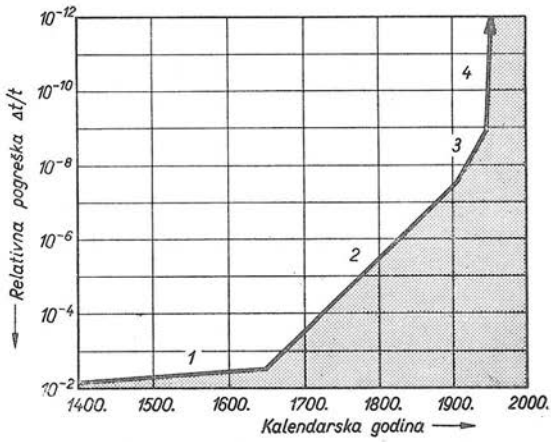
Pod »metrologijom« razumijevamo, dakle, onaj specijalizirani dio pojedinih prirodoslovnih i tehničkih znanosti koji se bavi metodama mjerenja fizikalnih veličina, razvojem i izradom mjernih uređaja, reprodukcijom i pohranjivanjem (utjelovljenjem) mjernih jedinica, te svim ostalim poslovima koji omogućuju preciznije mjerenje i usavršavanje mjernih postupaka. Možda se moto metrologije može izraziti rečenicom: »Izmjeriti sve što se mjeriti može i pokušati učiniti mjerljivim ono što još nije mjerljivo« (*G. Galilei*). Ulogu i djelokrug rada metrologije sažeto je godine 1958. na zasjedanju Međunarodne elektrotehničke komisije (IEC) u Stockholmu prikazao *R. Vieweg*, predsjednik njemačkog državnog metrološkog zavoda Physikalisch-Technische Bundesanstalt, prvog takvog zavoda u svijetu (vidi odlomak 7.2.2). On je pri tom između ostalog rekao ovo:

Davno je prošlo vrijeme kad je mjerne instrumente izrađivao majstor mehanike, i to pojedinačno; ručni je rad prerastao u industriju. Nastale su tvornice mjernih uređaja i one predstavljaju važnu privrednu granu. Ispitivanje i baždarenje mjernih uređaja zahtijevaju posebne laboratorije. Nagli tehnički razvoj uvijek iznova donosi nove zahtjeve: ono što je još jučer bilo osamljeno vrhunsko dostignuće u izradi uređaja, danas je već svakidašnji, od svih traženi uređaj. Vremenski interval između pojave nekog znanstvenog dostignuća i njegove praktične primjene sve se više i više skraćuje. Naravno da uz tako perspektivna zbivanja država ne može stajati po strani i skrštenih ruku. Ne samo pomoću uređenog mjernog zakonodavstva već i svojim ispitnim stanicama i istraživačkim zavodima država pruža svojoj industriji i svojoj privredi, pa čak i svakom svom državljaninu, mogućnost da sve što je fizikalno mjerljivo bude izmjereno pravilno, na suvremen način i s najvećom tačnošću. Pa i one zemlje koje su dosada bile daleko od tehničkog razvoja i industrijalizacije danas se trude da izgrade mjerne centre kao zametak vlastitih prirodoslovnih istraživanja i svog napretka.

Kao i sve druge grane prirodoslovnih i tehničkih znanosti, tako se i metrologija stupnjuje: pokazatelj stupnja je netačnost mjernog rezultata (odstupanje izmjerene vrijednosti od prave vrijednosti) i preciznost mjerenja, koja se očituje u ponovljivosti mjernog rezultata prilikom ponovljenih mjerenja iste vrijednosti fizikalne veličine. Na najnižem metrološkom stupnju su mjerenja svakodnevnog života: mjerenje vremena ručnim satom, krojačka mjerenja »centimetrom«, trgovačka mjerenja (vaganje) mase kupljene i prodane robe, mjerenje volumena na benzinskim pumpama itd. To je baza »metrološke piramide«, na čijem se vrhu nalaze posebni državni metrološki instituti (vidi poglavlje 7) u kojima se njeguje *znanstvena metrologija*, tj. metrologija najmanje netačnosti i najveće preciznosti.

Nepredočivo je velik napor potreban da se mjerna pogreška današnje vrhunske znanstvene metrologije smanji na deset puta manju vrijednost. I ne samo napor istraživača već i čitave ljudske zajednice, jer za to su potrebna ulaganja u školovanje budućih stručnjaka, u razvoj i nabavku mjerne opreme, u međunarodnu suradnju itd. U glavi E ove knjige vidjet ćemo da se čovječanstvo već pedesetak godina muči time da relativnu pogrešku najpreciznijih mjerenja istosmjernih elektromagnetskih veličina smanji od 10^{-5} na 10^{-6}, a u poglavlju A.8 koliko je truda uloženo da bi se granica relativne pogreške mjerenja duljine pomakla od 10^{-7} do 10^{-8}. Stanovitu predodžbu o tome može nam dati dijagram na slici A.1, koji prikazuje historijski razvoj metrologije vremena od godine 1400. do danas. Pri tom valja držati na umu da je netačnost mjerenja vremenskih intervala *najmanja*, tj. *sve* druge fizikalne veličine, na žalost, mjerimo bitno lošije, tj. sa bitno većom relativnom pogreškom.

Dijagram na slici A.1 može nas potaknuti i na razmišljanja o međusobnoj zavisnosti i međusobnoj reakciji stupnja razvoja prirodnih znanosti, tehnike i metrologije. Zar bi ljudi uspjeli izraditi satove (tzv. atomske i molekularne satove) tačne na $1:10^{12}$ (i bolje) da molekularna i atomska fizika, poluvodička tehnika, termometrija i niz drugih grana nisu u svom razvoju došle do takvog stupnja da najskladnijom kombinacijom omogućuju realizaciju baš takvog, fantastično stabilnog izvora jedinice vremena (astronomija se npr. ni uz najveće napore danas još ne može odlijepiti od relativne pogreške utvrđivanja sekunde u iznosu 10^{-9}; vidi poglavlje A.10). Takvi satovi, kvantni oscilatori, postali su upravo naših dana *alatom metrologije*; pomoću tog alata metrologija će pridonijeti tome da se sazna niz sadašnjih tajni npr. nuklearne fizike. Nova otkrića oplemenit će metrologiju (nedavni primjer je *Mössbauer*ov efekt) i tako se taj lanac interakcije u krugu znanost → tehnika → → metrologija → znanost neprestano ponavlja. Pri tom mjerna nesigurnost postaje sve manjom, teži i vječno će težiti k nuli.



Sl. A.1. Smanjenje relativne pogreške mjerenja vremena u toku povijesti egzaktnih znanosti današnje civilizacije. *1* — prvi mehanički satovi, *2* — satovi s vlastitim periodom njihanja, *3* — oscilacijski satovi s raspodijeljenim parametrima, *4* — satovi s kvantnim oscilatorima

Za ilustraciju navedene interakcije mogli smo odabrati i bilo koji drugi primjer iz nedavnih dostignuća naše civilizacije. Nije nimalo slučajno što je upravo ovih dana čovjeku uspjelo prenijeti čitav jedan laboratorij sa Zemlje na Mjesec i uspješno ga vratiti natrag na Zemlju. U toku međuplanetarnog gibanja letjelice to je bio problem dinamike, dakle problem poznavanja vrijednosti fizikalnih veličina vrijeme (tu su uključene i daljinske komande), masa i duljina, s najvećom mogućom pouzdanošću. A baš za te tri veličine znanstvena metrologija ima najpreciznije mjerne metode: relativna pogreška vrhunskih mjerenja ovih veličina redom izonsi oko 10^{-12}, 10^{-9} i 10^{-8}! Nema sumnje da je tom čudesnom svemirskom pothvatu pridonijela i vještina urezivanja što tanjih crtica na štapne mjere duljine pomoću dijamantnog šila (vidi odlomak 8.5.2), dakle preciznost laboratorijske finomehaničke radionice. A ispravan start rakete ovisi i o preciznosti mjerenja vrlo velikih sila (potisaka); iz odlomka 9.3.4 vidi se da američki metrološki zavod NBS direktno sudjeluje u ovom dijelu programa svemirskih letova USA. Itd.

Ima i mnogo manje atraktivnih, ali možda i važnijih međusobnih utjecaja prirodoslovnih istraživanja, metrologije i tehnike. Zar bi suvremena farmacija mogla postići takve fenomenalne rezultate da nije toliko unaprijeđena fizikalna kemija? Naravno da ne bi, ali i fizikalna kemija velikim dijelom zahvaljuje svoj uspon usavršenju elektrokemijske metrologije, termometrije itd. Taj kružni lanac neprekidnih i stimulirajućih poticaja stalno je zatvoren, a u sebe uvlači sve nove i nove partnere. Danas je npr. jedna od najnovijih tehnika tzv. *krionika*, tj. tehnika proizvodnje i

održavanja vrlo niskih temperatura, bliskih apsolutnoj nuli. A možda je zametak krionike bio u eksperimentalnoj fizici elementarnih čestica. Tu je, naime, tijek utjecajâ ovakav: da bi se otkrile nove čestice ekstremno kratke životne dobi, potrebni su gigantski akceleratori za ubrzavanje elektrona i protona, a oni sadrže, među ostalim, tisuće tona elektromagneta. Zbog tih magneta, čija se magnetska polja moraju mjeriti i upravljati vrhunskom preciznošću, cijena akceleratora postaje astronomska ako se čestice žele ubrzati što bliže brzini svjetla, a upravo to se želi. Ovih se godina traži ekonomski prihvatljiv izlaz u »supravodljivim magnetima«, tj. u magnetima izrađenim od niobijevih legura, koji pri temperaturi od nekoliko kelvina proizvode polja indukcije gotovo 10 tesla, jer njihov je volumen 50...100 puta manji od volumena klasičnih. Moderna elektroindustrija vidi u tome dio svoje budućnosti: istražuje se primjena krionike u transformaciji i prijenosu električke energije (»supravodljivi transformatori« i kabelski prijenos električke energije pri temperaturi supravodljivosti). S druge se strane istražuje proizvodnja električke energije u magnetohidrodinamičkim (MHD) generatorima, koji djeluju na principu mlaznice kroz koju struji »plazma« temperature oko 3000 K. Bilo bi ekonomično da je uzbudni magnet tog MHD generatora supravodljivi magnet; treba, dakle, pronaći keramički (ili neki drugi) materijal koji će trajno podnositi temperaturni gradijent 7000 K/m ili više . . . Nitko nije kadar sagledati kraj tom lancu međusobnih utjecaja.

Historičari umjetnosti tvrde da su nas prethodne generacije jako nadmašile u pogledu umjetnosti, filozofije i poezije. Engleski filozof *Oldham* također misli tako, ali dodaje da je naše vrijeme daleko premašilo prošlost u pogledu — preciznosti. U vezi s time kaže: »I preciznost je prava umjetnost, koja zahtijeva disciplinu i inspiraciju«. Braneći današnji progres prirodoslovno-tehničkih znanosti od optužbe da vode dehumanizaciji, *Oldham* nastavlja: »Jedino je tako moguće da stotine tisuća ljudi, koji se nikada nisu vidjeli, rade za isti cilj, rade na izradi zajedničkog djela sastavljanjem mnoštva pouzdano skladnih dijelova. Nema sumnje da i to pridonosi podlogama za kulturno uzdizanje, jer vodi ljude od svog znanstveno-tehničkog sadržaja prema zajedničkom, stvaralačkom razmišljanju . . .« A u temelju svega toga o čemu govori filozof stoji metrologija, oslonac svakog egzaktnog znanstvenog istraživanja i jedino uporište besprijekorne tehničke realizacije.

1.1.3. Metrologija, standardizacija i privredna moć. Rasuđivanja u prošlom odlomku nedvojbeno pokazuju upravo krvnu povezanost prirodoslovnih istraživanja, metrologije i tehnike. Uzroci i koristi od osnivanja njemačkog državnog metrološkog centra godine 1887. (vidi odlomak 7.2.2), a zatim analognih engleskih i američkih ustanova godine 1900. i 1901, jače od svega argumentiraju potrebu postojanja takvih ustanova, potrebu njihova širenja i permanentnog usavršavanja. Dobri primjeri malih država (Švicarska, Austrija) dokazuju da to ne vrijedi samo za velike industrijske zemlje, već i za male, čak i za one koje tek žele postati pretežno industrijske.

Od tehnike, koja ima u svom zaleđu solidnu metrologiju i prirodoslovna istraživanja prilagođena generalnom planu industrijskog razvoja zemlje, put do privredne moći zemlje vodi preko *standardizacije* (normiranja), a ona počinje i završava metrologijom. Uloga i korist standardizacije u strojogradnji, građevinarstvu, staklarstvu, automobilskoj industriji itd. dobro su poznati. No standardizacija ne postoji samo u navedenim i njima sličnim industrijama, već i na medicinsko-farmaceutskom području, tj. na području koje neposredno zahvaća u zdravlje i život ljudi. Umjesto individualne recepture i pojedinačne izrade lijekova, danas sve više dolazi do izražaja

standardna receptura i industrijska proizvodnja lijekova. Štoviše, ima lijekova koje ljekarnik uopće ne može proizvesti (prisjetimo se samo antibiotika!). Prema tome se liječnikova funkcija prilikom propisivanja standardnih lijekova bolesnicima može usporediti s ulogom konstruktora koji se služi ISO ili JUS standardima. Budući da odstupanje kvalitete proizvoda farmaceutske industrije od propisane može ugroziti zdravlje i živote milijuna ljudi, kontrola mora biti rigoroznija od kontrole u bilo kojoj drugoj industriji. A što znači kontrola? Znači *mjerenje* karakterističnih fizikalnih veličina, sastava mješavine, koncentracije pojedinih elemenata itd.

No standardizacija nije samo propisano ili preporučeno rješenje zadatka koji se ponavlja, već mnogo više. To nam može dobro ilustrirati dio teksta iz odlomka 6.6.3, koji su Englezi objavili godine 1966. u povodu namjere Velike Britanije da u cijelosti prijeđe na upotrebu metričkog sistema jedinica:

Shema britanske industrije u velikoj je mjeri oblikovana tisućama standarda prema zahtjevima British Standards Institution, BSI. Ti standardi nisu izraženi samo u inčevima (inch) i funtama (pound, lb) — oni su odraz generacija britanske prakse. Britanske izmjere ne mogu se jednostavno preračunati u metričke. Čitav standard mora se iznova zamisliti, ponovo oblikovati i ponovo napisati, da bi se dobila odgovarajuća baza za metričku proizvodnju. Veliki zadatak BSI sastojat će se u tome da hitno izradi nove standarde potrebne industriji. Ti će se standardi, gdje god to bude moguće, temeljiti na standardima Međunarodne organizacije za standarde (International Standards Organisation). Budući da su ti svjetski standardi nekompletni, Britanija će morati pomišljati na usvajanje nekih postojećih standarda svojih evropskih susjeda, a u nekim slučajevima ona će morati razviti svoje vlastite, potpuno nove metričke standarde — standarde koji bi mogli potaknuti nove tendencije u svjetskoj trgovini.

Primjeri iz odlomka 1.1.2 i gornji tekstovi mogu i laika uvjeriti u to da je dobra metrološka djelatnost, uključivši znanstvenu metrologiju, jedan od važnih temelja na kojem počiva *privredna moć* države. U Jugoslaviji je ta djelatnost nerazvijena (vidi odlomak 7.2.3), što uzrokuje manju i lošiju proizvodnju od moguće, uzrokuje, dakle, direktnu materijalnu štetu. Ostane li sadašnje metrološko stanje, šteta će s vremenom postajati sve veća, ne samo u apsolutnoj vrijednosti već i procentualno. U vezi s time Prvi jugoslavenski simpozij o električkim mjerenjima i mjernoj opremi, održan godine 1961. u Ljubljani, objavio je ovu *rezoluciju*:

Simpozij konstatira da treba hitno osnovati najvišu i centralnu jugoslavensku naučnu mjernotehničku ustanovu po uzoru na razvijene države. Ova ustanova mora obavljati i koordinirati mjerenja svih vrsta na najvišoj razini i s najvećom tačnošću koja je potrebna našem znanstvenom i industrijskom razvoju. U tu svrhu mora biti kadra slijediti i u okviru svojih zadataka aktivno sudjelovati u razvoju fizikalno-tehničkih znanosti u svijetu. Bez takve ustanove nije moguć racionalan i kvalitetan razvoj naše tehnike i fizike. Samo tako će se naša industrija moći osposobiti za konkurenciju u svjetskom mjerilu, samo tako ćemo u znanosti i tehnici moći dostići ostali svijet, što je jedna od osnovnih zadaća našeg socijalističkog društvenog uređenja. Naš budući Savezni metrološki zavod neka bude samostalna ustanova kako naučnog tako i operativnog karaktera i to pri najvišem državnom organu. Razvoj Zavoda neka teče u skladu s našim potrebama u pojedinim vremenskim razdobljima. Simpozij naglašava da je već sazrio trenutak za formiranje takve ustanove, te da svako odugovlačenje uzrokuje u privredi samo štetu.

1.2. Iskustvo i fizikalne veličine

1.2.1. Objektivno iskustvo. Temelj prirodnih znanosti su *iskustva* stečena *opažanjem*. Promatranja su pokazala da se stanovite pojave uvijek pojavljuju na isti način, ako su izazvane jednakim poticajima i pod jednakim uvjetima. Čovjek sve pojave promatra subjektivno, jer ih na jedan od mnogih načina *doživljava*, na primjer u obliku promjene temperature, tlaka (kod ronjenja ili leta na velikoj visini),

električkog udara, jakosti svjetla, starenja itd. Ljudski osjećaj doživljavanja spomenutih pojava ne razlikuje se samo od čovjeka do čovjeka, već u različitim raspoloženjima i prilikama isti čovjek različito reagira na iste poticaje. Zato se prirodne znanosti, i njihova primjena u obliku tehnike, ne smiju temeljiti na subjektivnom ljudskom osjećanju, već na *objektivnom iskustvu.*

Objektivno iskustvo stječe se jedino *mjerenjem.* Postoji mnoštvo različitih načina mjerenja. Najprimitivnije je mjerenje duljine koračanjem. Udaljenost između dva drveta možemo izmjeriti tako da, hodajući od jednog drveta prema drugome, brojimo korake. Stigavši do cilja kažemo na primjer: »Udaljenost između ta dva drveta iznosi 20 koraka«. Takvo je mjerenje neprecizno, jer svaki čovjek nema jednako velik korak, a i u istog se čovjeka duljina koraka ponešto mijenja. Osim toga korak ovisi o zaprekama na koje se nailazi pri hodu.

Mnogo se preciznije razmak između dva spomenuta drveta može izmjeriti hodanjem pri kojem se cipela jedne noge stavlja tačno ispred cipele druge noge. Na kraju takvog mjerenja kažemo: »Udaljenost između ta dva drveta iznosi 60 cipela«. Naravno da taj rezultat vrijedi samo za vlasnika dotičnih cipela, jer neki drugi čovjek ima dulje ili kraće cipele, pa će ih na istoj udaljenosti između drveća nadovezati manje ili više puta od našeg mjernika.

Razumije se da izmjerenih 20 koraka i 60 cipela znači isto: udaljenost između dva drveta. Ta se udaljenost ne mijenja mjerili je mi koracima ili cipelama. Na oba načina mjerenja stekli smo objektivno iskustvo o udaljenosti između dva drveta. Rezultat mjerenja doduše nije naročito tačan, ali stečeno je objektivno iskustvo. Pri tom smo iskorištavali samo jedno od svojstava koraka i cipele, njihovu *duljinu.* Cipela ima nekoliko osobina, na primjer masu, boju, obujam, savitljivost. To znači da smo udaljenost između dva drveta usporedili sa *duljinom cipele.* Razmak između drveta također je duljina, od duljine cipele razlikuje se samo u tome što je veća.

1.2.2. Fizikalne veličine. Nameće nam se pitanje: što je to duljina? Na to pitanje ne možemo odgovoriti nikakvom strogom definicijom. Duljina je osnovni *pojam* kojim obilježavamo svijet u kojem živimo. Taj pojam ne znamo objasniti nekim drugim, jednostavnijim pojmom. Svatko ima iskustvenu predodžbu o duljini i pod time razumijeva razmak između dva drveta, visinu kuće, širinu rijeke, dubinu rudnika, promjer osovine, opseg kruga i tako dalje.

Duljina je samo jedna od mnogobrojnih *fizikalnih veličina* ili kraće — *veličina.* Ostale su veličine površina, volumen, energija, brzina, temperatura, električki napon i niz drugih. Veličine nisu konkretne stvari, već osobine, svojstva, atributi, čovjekove predodžbe o samim prirodnim pojavama.

Neke veličine koje upotrebljavamo u svakodnevnom životu možemo objasniti već poznatima. Tako, na primjer, o veličini *površina* imamo predodžbu pravokutnika s dvije međusobno okomite stranice stanovitih *duljina.* Kažemo da je površina jednaka umnošku duljina obiju stranica. Prema tome površinu *izvodimo* iz duljine, pa govorimo da je površina *izvedena veličina,* dok je duljina *osnovna veličina.* I volumen je izvedena veličina, jer ga zamišljamo, na primjer, kao kocku kojoj su svi bridovi jednake duljine, a definiramo ga umnoškom triju međusobno okomitih duljina bridova.

Postoje i drugi nazivi za te dvije vrste veličina, koji su u nekim prilikama i prikladniji od spomenutih. Tako, na primjer, osnovnu veličinu nazivamo i nezavisnom, aksiomatskom, ishodišnom ili polaznom. Posljednja dva izraza potječu otuda što ishodišne veličine predstavljaju ishodište definiranja ostalih (izvedenih, zavisnih)

veličina; od osnovnih veličina polazi slijed definicija. To smo već vidjeli na primjeru površine i volumena koje su zavisne ili izvedene veličine definirane polaznom (nezavisnom, osnovnom, aksiomatskom) veličinom duljina.

Ta podjela veličina posve je subjektivne naravi. *Objektivno, osnovne veličine nisu ništa vrednije od izvedenih.* Netko dapače može neku veličinu smatrati izvedenom, dok drugi tu istu veličinu smatra polaznom. To ovisi o načinu na koji pojedinac najlakše pomoću veličina objašnjava pojave oko sebe.

1.2.3. Vrijednost veličine može biti različita. U našem smo prvom mjerenju utvrdili da vrijednost veličine duljina (udaljenost između dva drveta) iznosi 20 koraka. Hodajući od Zagreba do Ljubljane ustanovili bismo da ta udaljenost iznosi 170000 koraka. Navedene dvije vrijednosti razmaka između spomenuta dva drveta i udaljenosti dvaju gradova predstavljaju dvije različite vrijednosti *iste* fizikalne veličine: *duljine.*

Vrijednost duljine označujemo slovom l (franc. longueur, njem. Länge). Ova je oznaka posve općenitog, još nedefiniranog značaja tako dugo dok je ne primijenimo na konkretnu vrijednost duljine. Na primjer, za duljinu razmaka između dva drveta pisat ćemo konkretno $l_1 = 20$ koraka, a za udaljenost Ljubljane od Zagreba $l_2 = 170000$ koraka.

U primjeni ovih pojmova nismo toliko precizni. Stoga ne govorimo da *vrijednost* veličine duljina iznosi 20 koraka, već govor skraćujemo u tom smislu što, na primjer, jednostavno kažemo »duljina iznosi 20 koraka«. Što smo ovdje rekli za duljinu, vrijedi i za sve ostale veličine: za masu, vrijeme, energiju, snagu, magnetski tok, dielektričnost, temperaturu itd.

1.3. Veličine, jedinice i brojčani iznosi

1.3.1. Mjerne jedinice. U prošlom smo odsječku ustanovili da 20 koraka i 60 cipela predstavljaju istu vrijednost veličine, to jest $l = 20$ koraka posve je jednako $l = 60$ cipela. To možemo izraziti ovako:

$$20 \text{ koraka} = 60 \text{ cipela}.$$

Ova jednadžba ima smisla samo onda kad o koraku i cipeli nemamo neku materijalnu predodžbu (o čovjeku mjerniku i o cipelama), već samo o jednoj njihovoj osobini, *duljini.* Umjesto riječi korak možemo uvesti poseban simbol $[l]_1 = \text{korak}$, jer stvarno pri upotrebi koraka mislimo na stanovitu vrijednost duljine. Ovu po volji odabranu vrijednost duljine nazivamo *jedinicom* duljine.

Umjesto riječi cipela možemo uvesti oznaku druge jedinice duljine $[l]_2 = \text{cipela}$, jer pod cipelom smo od samog početka našeg razmatranja razumijevali vrijednost duljine cipele našeg mjernika. Isto tako i pod trećom jedinicom duljine $[l]_3 = \text{metar}$ ne razumijevamo materiju i oblik metarskog štapa, već jedno od njegovih svojstava: udaljenost između dvije krajnje crtice koje su u njemu urezane.

Da smo udaljenost dva drveta nakon mjerenja koracima i cipelama mjerili metarskim štapom, dobili bismo $l = 15$ metara. Prema tome je u našem slučaju vrijednost mjerene duljine $l = 20$ koraka $= 60$ cipela $= 15$ metara, što s našim novim oznakama triju upotrijebljenih jedinica možemo napisati u obliku

$$l = 20\,[l]_1 = 60\,[l]_2 = 15\,[l]_3. \qquad (1.3\text{-}1)$$

1.3.2. Brojčani iznosi. Brojeve 20, 60 i 15 nazivamo *mjernim brojevima*, jer su dobiveni mjerenjem. Vidimo da se postupak mjerenja duljine svodi na pronalaženje odgovora na pitanje: koliko jedinica duljine sadrži naša duljina između dva drveta? Koračanjem, cipelama i mjernim štapom ustanovili smo da su mjerni brojevi

$$\{l\}_1=\frac{l}{[l]_1}=20, \quad \{l\}_2=\frac{l}{[l]_2}=60, \quad \{l\}_3=\frac{l}{[l]_3}=15,$$

gdje je dakako u sva tri slučaja riječ o *istoj* duljini l.

Mjerne brojeve $\{l\}_1$, $\{l\}_2$, $\{l\}_3$ itd. možemo *općenito* označiti istim slovom bez indeksa, ako umjesto upotrijebljenih jedinica $[l]_1$, $[l]_2$, $[l]_3$ upotrijebimo *opći simbol* jedinice duljine $[l]$, dakle bez indeksa. U tom slučaju gornje tri jednadžbe $\{l\}_1 = l/[l]_1$ itd. dobivaju zajednički opći oblik

$$\{l\}=\frac{l}{[l]}, \tag{1.3-2}$$

što možemo riječima izraziti kao jednadžbu

$$\text{mjerni broj duljine} = \frac{\text{duljina}}{\text{jedinica duljine}}. \tag{1.3-3}$$

Umjesto izraza »mjerni broj« češće upotrebljavamo izraz *brojčani iznos*. Prema tome ove dvije riječi znače isto. Izraz »brojčani iznos« potječe otuda što pri upotrebi jedinica u složenijim primjerima najčešće brojčani iznos dobivamo *računanjem*, a tek manjim dijelom mjerenjem. Jednadžbe (1.3-2,3) odražavaju očiglednu činjenicu da je *jedinica* duljine $[l]$ također *duljina*, ali točno određene (odabrane) vrijednosti. Ona može biti veća ili manja, što smo vidjeli na primjeru upotrebe triju jedinica duljine $[l]_1$, $[l]_2$ i $[l]_3$.

1.3.3. Osnovna jednadžba metrologije. Što vrijedi za veličinu duljina l, vrijedi i za svaku drugu veličinu. Na primjer za veličinu *vrijeme* t dobili bismo u skladu s jednadžbom (1.3-2) $\{t\} = t/[t]$, to jest »brojčani iznos vremena = veličina vrijeme : jedinica vremena«. Posve općenito možemo za neku veličinu G (franc. grandeur, njem. Grösse) u skladu sa (1.3-2) ili $\{t\} = t/[t]$ pisati

$$\{G\}=\frac{G}{[G]} \tag{1.3-4}$$

ili riječima u analogiji s jednadžbom (1.3-3)

$$\text{mjerni broj (brojčani iznos)} = \frac{\text{veličina}}{\text{jedinica}}. \tag{1.3-5}$$

Ove dvije jednadžbe možemo izraziti i u obliku

$$\left.\begin{aligned} G &= \{G\}\,[G] \\ \text{veličina} &= \text{brojčani iznos} \times \text{jedinica} \end{aligned}\right\} \tag{1.3-6}$$

od kojega smo i pošli na početku ovog odsječka, gdje smo umjesto općeg simbola veličine G radili s veličinom duljina $l = 20\,[l]_1 = 60\,[l]_2 = 15\,[l]_3$. Ova tri odnosa

možemo u skladu sa (1.3-6) napisati u *općem* obliku $l = \{l\}[l]$, gdje je $[l]$ *opća*, još nedefinirana jedinica (još nije odlučeno koliko je velika ta jedinica), a $\{l\}$ još neodređeni brojčani iznos. Za razliku od opće jedinice $[l]$, jedinice $[l]_1 =$ korak, $[l]_2 =$ $=$ cipela, $[l]_3 =$ metar nazivamo *specijalnim mjernim jedinicama* (koje su potpuno određene), odnosno ukratko *jedinicama.*

1.3.4. Posljedice osnovne jednadžbe. Izraz (1.3-6) bit će osnova svim našim daljnjim razmatranjima, pa ga stoga valja podrobno razmotriti. On nam kaže da se simbol opće veličine G sastoji od umnoška brojčanog iznosa $\{G\}$ i opće jedinice $[G]$. Drugim riječima, da vrijednost veličine iznosi stanovit broj jedinica. To je posve prirodno i u skladu s načinom kako čovjek misli i računa. Za svakoga ima smisla samo izjava »$l = 15$ metara« koja označuje da je udaljenost između dva drveta 15 puta po jedan metar. Isto tako $m = 92$ kg (čitaj: masa iznosi 92 kilograma) znači da masa npr. nekog čovjeka iznosi isto toliko koliko i ukupna masa 92 utega od po 1 kilogram. Stoga bismo izraz (1.3-6) zapravo morali pisati sa znakom množenja, dakle $G = \{G\} \times [G]$ ili $G = \{G\} \cdot [G]$. No to ne činimo zbog jednostavnijeg pisanja i tiskanja jednadžbi, ali i bez znaka množenja uvijek smatramo da on stvarno postoji.

Kako smo već rekli u prošlom odlomku, simbol veličine G stvarno označuje još neodređenu vrijednost veličine. Tamo smo razmatrali vrijednost veličine duljina l kojom smo označili razmak između dva drveta. Naravno da je l ostala nepromijenjena bez obzira da li smo je mjerili manjom ili većom jedinicom. To nam je pokazala i jednadžba (1.3-1), koja sadrži očiglednu istinu da je umnožak konkretnog brojčanog iznosa i upotrijebljene specijalne jedinice konstantan.

Isto vrijedi i za bilo koju drugu veličinu, pa tako i za našu opću veličinu G koja može predstavljati bilo koju veličinu. Stoga će mjerenje stanovite i tačno određene vrijednosti veličine G (npr. razmak između dva drveta) specijalnom jedinicom $[G]_1$ dati brojčani iznos $\{G\}_1$, a mjerenje jedinicom $[G]_2$ brojčani iznos $\{G\}_2$. Produkti $\{G\}_1[G]_1$ i $\{G\}_2[G]_2$ bit će međusobno jednaki. Do toga lako dolazimo pomoću opće jednadžbe (1.3-6). Budući da je ona općeg značaja, možemo je jednom primijeniti na jedinicu $[G]_1$, a drugi put na jedinicu $[G]_2$, čime dobivamo

$$G = \{G\}_1[G]_1 = \{G\}_2[G]_2. \tag{1.3-7}$$

U našem primjeru razmaka drveta imali bismo prema tome $l = \{l\}_1[l]_1 = \{l\}_2[l]_2 =$ $= \{l\}_3[l]_3$, što usporedbom s našim rezultatima mjerenja u izrazu (1.3-1) znači da su brojčani iznosi $\{l\}_1 = 20$, $\{l\}_2 = 60$, $\{l\}_3 = 15$. Budući da je jedinica $[l]_1 =$ korak veća od jedinice $[l]_2 =$ cipela, to je brojčani iznos $\{l\}_1 = l/[l]_1$ manji od brojčanog iznosa $\{l\}_2 = l/[l]_2$. To sadrži i jednadžba (1.3-7) ako je napišemo u obliku

$$\frac{\{G\}_1}{\{G\}_2} = \frac{[G]_2}{[G]_1}, \tag{1.3-8}$$

što znači: *brojčani iznosi mjerenja jedne te iste veličine dvjema različito velikim jedinicama odnose se obrnuto nego pripadne jedinice kojima je obavljeno mjerenje.* U našem primjeru mjerenja duljine imamo $\{l\}_1/\{l\}_2 = [l]_2/[l]_1$, odnosno konkretno $20/60 =$ $=$ cipela/korak.

Uvedemo li simbol $u = \{G\}_1/\{G\}_2$, od jednadžbe (1.3-8) dobivamo $[G]_2 =$ $= u\,[G]_1$ ili u našem primjeru $[l]_2 = u\,[l]_1$, gdje je $u = \{l\}_1/\{l\}_2 = 1/3$, što znači da je $\{l\}_2 = \{l\}_1/3$ ili $[l]_1 = 3\,[l]_2$, odnosno konkretno $[l]_1 =$ korak $= 3$ cipele $= 3\,[l]_2$. Analogno možemo pisati i $\{l\}_1[l]_1 = \{l\}_3[l]_3$, gdje je $[l]_3 =$ metar. U jednadžbi

(1.3-1) napisali smo da je $\{l\}_3 = 15$, pa je stoga $20\,[l]_1 = 15\,[l]_3$, dakle $[l]_1 = [l]_3 \cdot 15/20 = [l]_3 \cdot 3/4$. Kako je $[l]_1 =$ korak, a $[l]_3 =$ metar, to je $[l]_1 =$ korak $=$ $= 0{,}75$ metra, jer je $0{,}75 = 3/4$. Budući da smo prije ustanovili odnos među jedinicama $[l]_2 =$ cipela $= [l]_1/3 =$ korak$/3$, to je dakle $[l]_2 = 0{,}75$ m$/3 = 0{,}25$ m, gdje je m kratica jedinice duljine metar.

Ovi su nam primjeri pokazali da jednadžba (1.3-8) može poslužiti za određivanje međusobnih odnosa različitih jedinica. Ona je proizašla iz naše osnovne jednadžbe (1.3-6) o kojoj zapravo diskutiramo. To naše ishodište dobiva trivijalan oblik

$$G = [G],$$

ako u (1.3-6) stavimo brojčani iznos $\{G\} = 1$. Što to znači? Gornja jednakost vrijednosti veličine G i njene jedinice $[G]$ znači da smo stanovitu vrijednost veličine G odabrali za mjernu *jedinicu*.

Time smo došli na pitanje mjerenja *različitih* vrijednosti veličina *istom* jedinicom. Zamislimo da dvije (vrijednosti) veličine, na primjer G_1 i G_2, želimo izmjeriti *istom* jedinicom $[G]$. Odgovor nam opet daje temeljna jednadžba (1.3-6) koju jednom primjenjujemo na veličinu $G_1 = \{G\}_1 [G]$, a drugi put na veličinu $G_2 = \{G\}_2 [G]$. Budući da je jedinica u obje ove jednadžbe ista, međusobno dijeljenje tih izraza daje

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\{G\}_1}{\{G\}_2}, \tag{1.3-9}$$

tj. veličine se odnose jednako kao i pripadni brojčani iznosi ako je $[G] = \text{const}$.

Jednadžba (1.3-9) ima međutim mnogo dalekosežnije značenje. Ona kaže da je omjer dviju istovrsnih veličina G_1 i G_2 uvijek *čisti broj*, jer omjer brojčanih iznosa $\{G\}_1$ i $\{G\}_2$ opet daje čisti broj. Neka umjesto o dvije opće veličine G_1 i G_2 bude riječ o dvije vrijednosti veličine duljine l_1 i l_2. U tom je slučaju

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\{l\}_1}{\{l\}_2} \quad \text{ili} \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{\{l\}_2}{\{l\}_1},$$

gdje dakako kurzivni znakovi l_1 i l_2 označuju veličine, a simboli $\{l\}_1$ i $\{l\}_2$ brojčane iznose. U prošlom smo odsječku imali $l_1 = 20$ koraka — udaljenost između dva drveta, a $l_2 = 170\,000$ koraka — udaljenost između Zagreba i Ljubljane. Njihov omjer daje

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{170\,000 \text{ koraka}}{20 \text{ koraka}} = 8\,500,$$

jer smo jedinicu korak kratili. Isti bismo rezultat dobili kad bismo obje veličine izrazili jedinicom metar $=$ korak $\times$ 4/3, što bi uz pomoć jednadžbe »korak $=$ metar $\times$ $\times$ 3/4« dalo $l_2 = 127\,500$ m, $l_1 = 15$ m:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{127\,500 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 8\,500.$$

Jednaki bi rezultat dakako nastao i kad bismo obje duljine izrazili jedinicom cipela ili bilo kojom drugom jedinicom duljine.

1.4. Veličinske i brojčane jednadžbe

1.4.1. Veličinske jednadžbe. Površinu pravokutnika definiramo umnoškom duljina dviju različito dugačkih stranica. Označimo li duljinu jedne stranice sa a, a duljinu druge stranice sa b, onda površinu A izračunavamo jednadžbom

$$A = ab, \tag{1.4-1}$$

gdje između slova a i b zamišljamo znak množenja. *Kurzivnim* slovima A, a i b istakli smo da ta slova označuju *veličine*: A površinu, a i b duljinu. Jednadžbe u kojima simboli označuju veličine nazivamo *veličinskim jednadžbama*. Katkada ih nazivamo i *univerzalnim jednadžbama*, jer one ne ovise o tome u kakvim jedinicama u njih uvrštavamo vrijednosti veličina.

To ćemo vidjeti na nekoliko primjena jednostavne veličinske jednadžbe (1.4-1). Neka u ovom slučaju duljina jedne stranice pravokutnika iznosi $a = 2$ metra, dakle $a = 2$ m, a duljina druge stranice $b = 1{,}2192$ m. Vrijednost površine A našeg pravokutnika izračunat ćemo pomoću (1.4-1) tako da u nju umjesto općeg simbola duljine jedne stranice a uvrstimo konkretnu vrijednost $a = 2$ m, a umjesto općeg simbola druge stranice b uvrstimo njenu konkretnu vrijednost $b = 1{,}2192$ m. Tako dobivamo

$$A = a \cdot b = 2\ \text{m} \cdot 1{,}2192\ \text{m}.$$

Znak množenja postoji i između brojčanih iznosa i jedinica (dakle $2 \cdot$ m i $1{,}2192 \cdot$ m), ali to ne naglašavamo posebno. Do konačnog rezultata dolazimo tako da međusobno pomnožimo sva četiri faktora, dakle $A = 2 \cdot 1{,}2192 \cdot \text{m} \cdot \text{m}$. Množenje brojčanih iznosa daje $2 \cdot 1{,}2192 = 2{,}4384$, a množenje dviju jednakih jedinica duljine $\text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2 =$ kvadratni metar. Prema tome površina pravokutnika iznosi

$$A = 2{,}4384\ \text{m}^2.$$

U nekom drugom slučaju moramo izračunati površinu pravokutnika sa stranicama ovih duljina: $a = 2$ m, $b = 4$ foot. Jedinicu duljine foot upotrebljavaju Amerikanci i Englezi. Na engleskom ona znači »stopa« (trag stopala koji u mekoj zemlji ostavlja noga), otprilike ono što smo u odsječku 1.3 zamišljali pod nazivom jedinice duljine »cipela«. Do ovih »čudnih« podataka $a = 2$ m, $b = 4$ foot moglo je doći tako što je neki Evropljanin mjerio stranicu a mjernom trakom na kojoj su bili ubilježeni metri, a istovremeno je neki Englez mjerio stranicu b angloameričkom mjernom trakom koja je označena engleskim stopama (foot).

I u ovom slučaju možemo mirne duše u (1.4-1) uvrstiti umjesto a i b izmjerene vrijednosti duljina stranica. Tako dobivamo

$$A = 2\ \text{m} \cdot 4\ \text{foot} = 8\ \text{m} \cdot \text{foot}. \tag{1.4-2}$$

Tu nam je račun zapeo jer se u jednadžbi pojavio umnožak dviju različito velikih jedinica duljine. Nastaviti možemo na nekoliko načina. Evropljanin će foot izraziti metrom, Englez će, obrnuto, metar izraziti footom, a netko će treći možda i metar i foot izraziti nekom trećom jedinicom duljine. Mi ćemo se poslužiti prvim načinom. U poglavlju B.11 imamo zabilježeno da je

$$\text{foot} = 0{,}3048\ \text{metara}.$$

Stavimo li, dakle, namjesto foot u jednadžbi (1.4-2) 0,3048 m, dobivamo dalje

$$A = 8\ \text{m} \cdot 0{,}3048\ \text{m} = 2{,}4384\ \text{m}^2.$$

Vidimo da smo dobili isti rezultat kao i ranije, što znači da je zapravo riječ o istom pravokutniku, samo je prilikom evropsko-engleskog mjerenja njegovih stranica duljina b izmjerena jedinicom foot. Vezu između jedinica foot = 0,3048 m mogli smo upotrijebiti i ranije, pa bismo imali $b = 4$ foot $= 4 \cdot 0{,}3048$ m $= 1{,}2192$ m, što bi pomoću $A = ab = 2\text{ m} \cdot 1{,}2192\text{ m} = 2{,}4384\text{ m}^2$ direktno dalo vrijednost površine pravokutnika u metričkoj jedinici m^2.

1.4.2. Brojčane jednadžbe. Iz pokazanog načina računanja veličinskom ednadžbom (1.4-1) vidimo da smo umjesto simbola veličina a i b u konkretnom računu stavljali umnožak brojčanog iznosa i jedinice, jer u izrazu $a = 2$ m slovo a označuje veličinu, 2 brojčani iznos, a m jedinicu. To je potpuno u skladu s našom osnovnom relacijom (1.3-6) koja sa $G = \{G\}[G]$ prikazuje u općem obliku da je veličina G jednaka umnošku brojčanog iznosa $\{G\}$ i jedinice $[G]$. Prema tome i našu veličinu »duljina stranica a« možemo izraziti u općem obliku $a = \{a\}[a]$, gdje je a opći simbol za duljinu prve stranice, $\{a\}$ opći simbol brojčanog iznosa, te $[a]$ simbol opće jedinice duljine kojom mjerimo duljinu prve stranice. U našem je *konkretnom* slučaju $a = 2$ m, dakle brojčani iznos $\{a\} = 2$, dok je jedinica duljine $[a] = \text{m}$.

Posve je analogno s veličinama b i A. Stoga u skladu s općom jednadžbom $G = \{G\}[G]$ možemo pisati u općem, još nedefiniranom obliku

$$A = \{A\}[A], \quad a = \{a\}[a], \quad b = \{b\}[b]. \tag{1.4-3}$$

Uvrstimo li ove tri jednadžbe u veličinsku jednadžbu površine (1.4-1), dobivamo

$$\{A\}[A] = \{a\}[a]\{b\}[b]. \tag{1.4-4}$$

Znamo da su $[a]$ i $[b]$ dvije različite jedinice duljine, dok je $[A]$ jedinica površine. Umnožak $[a] \cdot [b]$ također predstavlja neku jedinicu površine (to može biti na primjer m·foot, ako specijalno odaberemo $[a] = \text{m}$, $[b] = \text{foot}$), koja je različita od jedinice površine $[A]$. Stoga možemo uvesti količnik u, čist broj, koji kaže koliko je puta jedinica $[A]$ veća od jedinice površine $[a] \cdot [b]$, dakle

$$[A] = u\,[a]\,[b]. \tag{1.4-5}$$

Uvrstimo li to u izraz (1.4-4), slijedi *brojčana jednadžba*

$$\{A\} = \frac{1}{u}\{a\}\{b\}. \tag{1.4-6}$$

U ovoj jednadžbi svi simboli predstavljaju *brojčane iznose*. Zato se takva jednadžba naziva »*brojčanom jednadžbom*«. Izraz (1.4-6) još je nedefinirana jednadžba, jer ne znamo koliko iznosi količnik u, koji možemo odrediti iz jednadžbe među jedinicama (1.4-5).

Izračunajmo koliko iznosi količnik u za primjer evropsko-engleskog mjerenja površine pravokutnika. Tamo smo stranicu a mjerili jedinicom duljine $[a] = \text{m}$, a stranicu b jedinicom $[b] = \text{foot}$. Površinu smo na kraju izrazili jedinicom površine $[A] = \text{m}^2$. Stavimo li ove tri konkretne jedinice u jednadžbu (1.4-5), dobivamo količnik u među jedinicama površine

$$u = \frac{[A]}{[a][b]} = \frac{\text{m}^2}{\text{m}\cdot\text{foot}} = \frac{\text{m}}{0{,}3048\text{ m}} = \frac{1}{0{,}3048},$$

jer je foot = 0,3048 m. Uvrstimo li izračunati koeficijent $1/u = 0{,}3048$ u *opću brojčanu jednadžbu* (1.4-6), slijedi

$$\{A\} = 0{,}3048\ \{a\}\ \{b\}. \tag{1.4-7}$$

Simboli u vitičastim zagradama ove brojčane jednadžbe označuju *brojčane iznose*, i to redom: $\{A\}$ broj kvadratnih metara, $\{a\}$ broj metara te $\{b\}$ broj foota. Stoga pomoću ove brojčane jednadžbe dobivamo ispravan brojčani iznos površine pravokutnika *samo u slučaju kad u nju uvrštavamo brojčane iznose veličina A, a i b izmjerene navedenim jedicama*, dakle

$$\{A\} = A/\mathrm{m}^2,\quad \{a\} = a/\mathrm{m},\quad \{b\} = b/\mathrm{foot}, \tag{1.4-8}$$

što je u skladu s preinačenim općim jednadžbama (1.4-3), ako u njih stavimo specijalne jedinice $[A] = \mathrm{m}^2$, $[a] = \mathrm{m}$, $[b] = \mathrm{foot}$.

Budući da duljine iznose $a = 2$ m, $b = 4$ foot, to su brojčani iznosi prema (1.4-8): $\{a\} = 2\ \mathrm{m/m} = 2$, $\{b\} = 4\ \mathrm{foot/foot} = 4$, što uvrštenjem u brojčanu jednadžbu (1.4-7) daje

$$\{A\} = 0{,}3048 \cdot 2 \cdot 4 = 2{,}4384.$$

O rezultatu, brojčanom iznosu površine 2,4384, nemamo nikakve predodžbe tako dugo dok se ne prisjetimo da je prema (1.4-8) $\{A\} = A/\mathrm{m}^2 = 2{,}4384$, dakle $A = \{A\}\,\mathrm{m}^2 = 2{,}4384\ \mathrm{m}^2$.

1.4.3. Prednosti veličinskih jednadžbi. S punim opravdanjem možemo se upitati zašto se brojčane jednadžbe uopće upotrebljavaju kad one daju nepotpuni rezultat (bez jedinice), a osim toga dobivaju čudan oblik, kao (1.4-7), koji vrijedi samo za brojčane iznose $\{A\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ ako oni predstavljaju broj jedinica m^2, m i foot? Zašto se *uvijek* ne primjenjuju univerzalne veličinske jednadžbe kao, na primjer, $A = ab$ koja ne ovisi o izboru jedinica i u kojoj se s jedinicama automatski računa posve jednako kao i s brojevima?

Razlozi su uglavnom stvar historije. U prošlosti su, naime, učenjaci smatrali da se pod simbolima u jednadžbama mogu razumijevati samo brojevi, te da jedinice nemaju pristupa u jednadžbe kao ravnopravni faktori. Stoga bi u prošlosti naša jednadžba »20 koraka = 60 cipela« izazvala zgražanje, iako ju je s drugačijim jedinicama upotrebljavao i sam veliki matematičar *C. F. Gauss*, kako ćemo vidjeti u odsječku E.4.5. Jednadžba korak-cipela, naime, samo je specijalni oblik jednadžbe (1.3-7) ili (1.3-8) koju *moramo* uvijek upotrijebiti ako želimo napisati u kakvom su međusobnom odnosu dvije istorodne jedinice, tj. dvije različito velike jedinice iste veličine. Po čistom »brojčanom nazoru« uopće ne bismo mogli napisati jednadžbu »metar = 100·centimetar«, jer to je samo specijalna veličinska jednadžba $G = G$ budući da je $G = \{G\}_1[G]_1$ i $G = \{G\}_2[G]_2$, gdje dakako slovo G predstavlja *veličinu*, a i jedinice $[G]_1$ i $[G]_2$ su stanovite vrijednosti veličina.

Stoga strogi brojčani nazor nikada nije dosljedno proveden. On bi uzrokovao i niz drugih teškoća koje *nisu* u skladu sa željom da pomoću jednadžbi računamo *pouzdano, jednostavno i zorno*. Tako u dosljednom rječniku brojčanog nazora mjerenje neke duljine metrom ne znači »utvrditi odnos mjerene duljine i metra«, već »duljini pridijeliti jedan broj uz pretpostavku da je duljini metarskog štapa pridijeljen broj 1«! Danas nemamo vremena za tako kompliciran način izražavanja kad bismo i htjeli misliti apstraktno matematički, a ne fizikalno-veličinski, kako *stvarno* misli svaki čovjek.

Ostaci te historije nalaze se još i danas u nekim stručnim knjigama i udžbenicima. S tim rudimentima još ćemo se mnogo puta susresti u poglavljima B.10, D.6 i E.6. Tamo doduše nećemo naći brojčanu jednadžbu (1.4-7) geometrije koju smo izveli samo radi primjera, ali ćemo ih naći na mnogo kompliciranijim područjima gdje su one prouzrokovale, i još uvijek uzrokuju, niz nesporazuma i grešaka.

1.4.4. Brojčana jednadžba u geometriji. I u najzornijoj grani znanosti, u geometriji, nalazimo brojčane jednadžbe. Ovdje ćemo takvu jednu pokazati kao još živi *primjer*. Znamo da površina A kruga promjera d iznosi

$$A = \frac{\pi}{4} d^2. \tag{1.4-9}$$

Umjesto omjera $\pi/4$ možemo uvesti kraticu $Z = \pi/4$, što je apsolutno tačan broj ako π navedemo beskonačno daleko. Sa $Z = \pi/4$ gornja jednadžba glasi

$$A = Z d^2. \tag{1.4-10}$$

Obje su jednadžbe, dakako, univerzalne veličinske jednadžbe u kojima kurzivni simboli A i d predstavljaju veličine. Obje su jednadžbe, dakle, nezavisne o izboru jedinica kojima mjerimo veličine A i d.

Po načelu $G = \{G\}[G]$, tj. »veličina = brojčani iznos × jedinica«, veličinsku jednadžbu (1.4-10) možemo zbog $A = \{A\}[A]$ i $d = \{d\}[l]$ napisati u obliku

$$\{A\}[A] = Z\{d\}^2 [l]^2, \tag{1.4-11}$$

gdje simboli $\{A\}$, $\{d\}$ označavaju *brojčane iznose* kad se veličine A i d mjere jedinicama površine i duljine $[A]$ i $[l]$. Vezu između dviju jedinica površine možemo izraziti na način

$$[A] = u[l]^2, \tag{1.4-12}$$

koji smo u drukčijem obliku već imali u jednadžbi (1.4-5). Stavimo li (1.4-12) u (1.4-11), dobivamo *brojčanu jednadžbu*

$$\{A\} = n\{d\}^2, \tag{1.4-13}$$

gdje je $n = Z/u$, $Z = \pi/4$, $\{A\} = A/[A]$, $\{d\} = d/[l]$.

Izračunajmo koliko iznosi broj n u jednom stvarno upotrebljavanom primjeru. U Americi se promjeri okruglih žica često mjere jedinicom »mil«. Ta jedinica je 1000 puta manja od incha (inč = palac). Budući da je inch = 2,54 cm, to je mil = $2{,}54 \cdot 10^{-3}$ cm. Neka $[l]$ iz gornjih jednadžbi bude jednak milu, dakle $[l] = \text{mil} = 2{,}54 \cdot 10^{-3}$ cm. Površinu presjeka žica mjere katkada Amerikanci jedinicom »circular mil« (cml), koja je vrlo sitna, cml = $5{,}067 \cdot 10^{-6}$ cm^2. Neka jedinica $[A]$ iz jednadžbi (1.4-11, 12, 13) bude baš cml, dakle $[A] = \text{cml} = 5{,}067 \cdot 10^{-6}$ cm^2. U tom je slučaju prema jednadžbi (1.4-12) koeficijent u:

$$u = \frac{[A]}{[l]^2} = \frac{\text{cml}}{\text{mil}^2} = \frac{5{,}067 \cdot 10^{-6}\ \text{cm}^2}{2{,}54^2 \cdot 10^{-6}\ \text{cm}^2} = 0{,}785\ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Budući da je i $Z = \pi/4$, to je prema $n = Z/u = 1$, pa stoga brojčana jednadžba (1.4-13) prelazi zbog $n = 1$ u oblik

$$\{A\} = \{d\}^2. \tag{1.4-14}$$

Prema tome se brojčani iznos površine presjeka izražen u cml dobiva tako da se izračuna kvadrat brojčanog iznosa promjera žice izražen u milima! Kad ne bismo

znali da je tome tako, mislili bismo da (1.4-14) predstavlja jednadžbu za izračunavanje površine *kvadrata* sa stranicama duljine d, a ne brojčanu jednadžbu površine *kruga*, koju u ispravnom i univerzalnom veličinskom obliku imamo zapisanu u izrazu (1.4-9).

1.4.5. Drugi oblici brojčanih jednadžbi. Brojčane iznose fizikalnih veličina označivali smo u dosadašnjim tekstovima tako što smo simbol fizikalne veličine zatvarali u vitičastu zagradu, a u popratnom smo tekstu naveli o kojoj je jedinici riječ. Rekli smo, na primjer: »$\{A\}$ je brojčani iznos fizikalne veličine površina A u kvadratnim metrima (m^2)«. Čitavu tu rečenicu nadomjestili smo na drugom mjestu izrazom $\{A\} = A/m^2$ (odlomak 1.4.2), koji je u skladu s osnovnom jednadžbom metrologije $\{G\} = G/[G]$ (vidi odlomak 1.3.3). Prema tome je izraz A/m^2 drugi oblik označivanja spomenutog brojčanog iznosa $\{A\}$. Treći oblik je $\{A\}_{m^2}$; uz vitičastu smo zagradu dakle dodali indeks m^2, tj. jedinicu površine m^2 u kojoj je taj brojčani iznos izražen. Prema tome sve te oznake znače isto: $\{A\} = \{A\}_{m^2} = A/m^2$. Uz ove načine označivanja brojčanih iznosa upotrebljava se i četvrti: simbol fizikalne veličine ne štampa se kurzivom (*kosa* slova), već uspravno, ali bez vitičaste zagrade: A ili A_{m^2}. Sve te oblike prikazivanja brojčanih iznosa možemo prikazati jednakošću

$$\frac{A}{m^2} = \{A\}_{m^2} = \{A\} = A_{m^2} = A. \qquad (1.4\text{-}15)$$

Vidimo da je razlika između *kurzivnog* slova A i uspravnog slova A gotovo neprimjetna za onoga koji nije posebno na to upozoren. Radi toga posljednja dva oblika iz jednadžbe (1.4-15) izbjegavamo u ovoj knjizi. Protiv upotrebe uspravnih slova za označivanje brojčanih iznosa nuka nas i činjenica da jednadžbe ne pišemo samo u publikacijama koje se pripremaju u tiskarama (koje imaju i *kurzivna* i uspravna slova), već — mnogo češće — prilikom raznovrsnih računanja, rukom na papiru, a tu nemamo mogućnosti upotrebe kurziva.

U skladu s opisanim načinima označivanja brojčanih iznosa tiskaju se i pišu brojčane jednadžbe (Njemačka norma DIN 1313 Schreibweise physikalischer Gleichungen in Naturwissenschaft und Technik od godine 1962. čak navodi recepturu kako se pojedini oblici primjenjuju). Na primjeru veze između brojčanih iznosa snage, sile i brzine (univerzalna *veličinska* jednadžba glasi $P = Fv$; vidi odlomak 1.5.3) ilustrirat ćemo kako izgledaju različiti brojčani prikazi. Najkompliciraniji je u grafičkom (tiskarskom) pogledu oblik

$$\{P\}_{KS} = 0{,}0037\ \{F\}_{kp}\ \{v\}_{km/h}, \qquad (1.4\text{-}16)$$

gdje simboli brojčanih iznosa predstavljaju: $\{P\}_{KS} = P/KS$, $\{F\}_{kp} = F/kp$, $\{v\}_{km/h} = v/(km/h)$. Riječima to znači: brojčana jednadžba (1.4-16) vrijedi jedino u slučaju ako se u nju uvrštavaju brojčani iznosi fizikalnih veličina P, F i v izraženi jedinicama KS = konjska snaga, kp = kilopond, km/h = kilometar na sat.

Drugi upotrebljivi oblik brojčane jednadžbe dobivamo od (1.4-16) tako da odbacimo indekse koji u njoj predstavljaju jedinice za koje ona vrijedi. Da čitatelj ne bi ostao neinformiran o tome za koje jedinice takva brojčana jednadžba vrijedi, uz nju se to posebno po strani navodi, npr. ovako:

(1.4-17) $\{P\} = 0{,}0037\ \{F\}\ \{v\}$

$\{P\}$ u KS
$\{F\}$ u kp
$\{v\}$ u km/h

Većina autora korisnika brojčanih jednadžbi ne radi, međutim, tako precizno. Oni najčešće u pokrajnju okruglu ili uglatu zagradu stave sve jedinice u kojima se moraju uvrštavati brojčani iznosi fizikalnih veličina, a vitičaste zagrade propuštaju. Na taj način brojčana jednadžba (1.4-17) prelazi npr. u oblik

$$P = 0{,}0037\, F v. \qquad \text{[KS, kp, km/h]} \tag{1.4-18}$$

Umjesto takvog oblika brojčane jednadžbe neki autori upotrebljavaju ovaj

$$P_{\mathrm{KS}} = 0{,}0037\, F_{\mathrm{kp}}\, v_{\mathrm{km/h}}, \tag{1.4-19}$$

dakle oblik brojčane jednadžbe (1.4-16), ali bez vitičastih zagrada.

Sve te brojčane jednadžbe (1.4-16...19) opremljene su vitičastim zagradama, indeksima — jedinicama ili pokrajnjim jedinicama zato *da pri njihovoj upotrebi ne bismo pogriješili*. Lako uviđamo da je to znatno kompliciraniji i zamorniji način stjecanja sigurnosti pri računanju nego što je imamo automatski pri računanju pomoću veličinskih jednadžbi. Za naš slučaj veličinska jednadžba glasi $P = Fv$; posve je svejedno s kojim su jedinicama izražene *vrijednosti* veličina F i v kad ih uvrštavamo u tu veličinsku jednadžbu (vidi npr. primjer na kraju odlomka 1.5 3, primjere u odlomcima 1.4.1, 1.6.2 i odsječku 2 te u poglavljima B.10, D.6 i E.6), rezultat — u obliku umnoška brojčanog iznosa i jedinice — bit će uvijek pouzdan, a u slučaju pažljivog računanja i tačan (precizno izračunan brojčani iznos). Uz sigurnost računanja i primjenljivost za bilo koje jedinice, veličinske jednadžbe pružaju korisniku i ono što mu brojčane jednadžbe ne mogu pružiti ni u jednom svom obliku: potpunu fizikalnu sliku pojave koju opisuju.

Stoga je utoliko žalosnije da još uvijek mnogi autori upotrebljavaju brojčane jednadžbe. Pri tom nije mali broj onih koju te brojčane jednadžbe upotrebljavaju *pogrešno*, nepotpuno. Oni na primjer jednostavno napišu da obodna brzina v osovine promjera d ovako ovisi o brzini vrtnje n

$$v = \frac{1}{19100}\,\frac{d}{n}, \tag{1.4-20}$$

a da pri tom *nigdje* ne spomenu da ova *brojčana jednadžba* vrijedi jedino u slučaju ako se brojčani iznosi promjera uvrštavaju u mm, brzina vrtnje u okr/min, a obodna brzina u m/s. Neporočna brojčana jednadžba (1.4-20) morala bi naime s našim oznakama glasiti ovako

$$\{v\}_{\mathrm{m/s}} = \frac{1}{19100}\,\frac{\{d\}_{\mathrm{min}}}{\{n\}_{\mathrm{okr/mm}}}.$$

S brojčanim jednadžbama oblika (1.4-18) neki autori pretjeravaju, pa u pokrajnjoj zagradi navode jedinice (koje valja upotrebljavati) i onda kada je to *suvišno*. Tako na primjer u literaturi nalazimo jednadžbu *Ohm*ova zakona

$$U = IR, \qquad \text{[V, A, } \Omega\text{]} \tag{1.4-21}$$

gdje su V, A i Ω kratice jedinica volt, amper i ohm. Suvišno je to navođenje jedinica zbog toga što je jednadžba (1.4-21) i onako *veličinska jednadžba*, dakle upotrebljiva za bilo kakve jedinice (pripadnice nekog sistema jedinica ili vansistemske jedinice). Bilo bi mnogo korisnije da je autor umjesto pripisivanja jedinica uz jednadžbu (1.4-21) uvrstio *primjer računanja*, recimo ovako: $I = 2\,\mathrm{A}$, $U = 10\,\mathrm{V}$, $R = U/I = 10\,\mathrm{V}/2\,\mathrm{A} = 5\,\mathrm{V/A} = 5\,\Omega$.

1.5. Prijelaz od brojčanih na veličinske jednadžbe

1.5.1. Načelo prijelaza. Kad se upotrebljava literatura koja operira brojčanim jednadžbama, kruto vezanima samo na tačno fiksirane jedinice, često se javlja potreba za njihovom preinakom u univerzalne veličinske jednadžbe koje vrijede za bilo kakve jedinice, koje dakle ne ovise o izboru jedinica. Takve preinake ili »prijelazi« katkada su neophodni, jer tek iz veličinskih jednadžbi čitatelj temeljito shvaća izloženo gradivo; u prirodi je čovjeka da misli u duhu veličina, a ne u duhu apstraktnih brojeva. Konačno, veličinske su jednadžbe posve prirodne i u skladu sa zdravim razumom u dobrom smislu te riječi. Prirodni zakoni, naime, vrijede bez obzira na to što mi o njima mislili, pa je prema tome isto toliko neprirodno da njihov opis — jednadžbe — ovisi o primjeni ove ili one jedinice. Korisno je stoga znati kako se praktično obavlja prijelaz od nepotpunih brojčanih jednadžbi na univerzalne veličinske. To ćemo obraditi u ovom odlomku, gdje ćemo najprije utvrditi *opće odnose* između veličinskih i brojčanih jednadžbi.

U prirodnim zakonima pojedine veličine na najrazličitiji način ovise o ostalim veličinama. Tako je, na primjer, brzina $v = l/t$, sila $F = ma$, gdje je a ubrzanje, kinetička energija $W = \frac{1}{2}mv^2$, gustoća energije magnetskog polja $w = \frac{1}{2}\mu B^2$, volumen kugle $V = r^3 4\pi/3$, površina kruga $A = d^2\pi/4$ itd. Sve su to veličinske jednadžbe koje možemo općenito prikazati *općom* veličinskom jednadžbom

$$G = Z A^a B^b C^c \ldots \tag{1.5-1}$$

Njome smo neku opću veličinu G definirali pomoću potencija poznatih veličina $A, B, C \ldots$ U njoj su eksponenti a, b, c uvijek *brojevi* (vidi odsječak 2.3). I faktor Z je *broj*, na primjer $\frac{1}{2}$ u izrazima za energiju, $4\pi/3$ u veličinskoj jednadžbi obujma, $\pi/4$ u izrazu za površinu. Ovi su brojevi uvijek apsolutno tačni brojevi koji nemaju mjerne pogreške, već su nastali kao plod infinitezimalnih definicija veličina.

Po načelu $G = \{G\}[G]$, tj. »veličina = brojčani iznos × jedinica«, svaku od veličina u (1.5-1) možemo razložiti u brojčani iznos i jedinicu. Pri tom su $\{G\}$ i $[G]$ općeg karaktera tako dugo dok jedinicu $[G]$ ne izjednačimo s nekom tačno dogovorenom specijalnom jedinicom, a brojčani iznos $\{G\}$ utvrdimo mjerenjem tom jedinicom. Prema tome možemo općenito pisati

$$G = \{G\}[G],\quad A = \{A\}[A],\quad B = \{B\}[B],\quad C = \{C\}[C]. \tag{1.5-2}$$

Uvrstimo li (1.5-2) u veličinsku jednadžbu (1.5-1), slijedi

$$\{G\}[G] = Z\{A\}^a[A]^a\{B\}^b[B]^b\{C\}^c[C]^c \ldots \tag{1.5-3}$$

Iz ove jednadžbe možemo izdvojiti opću jednadžbu među jedinicama

$$[G] = u[A]^a[B]^b[C]^c \ldots \tag{1.5-4}$$

kako smo već radili u odsječcima 1.3 i 1.4. Sa (1.5-4) izraz (1.5-3) dobiva posve *brojčani* oblik

$$\{G\} = n\{A\}^a\{B\}^b\{C\}^c \ldots \tag{1.5-5}$$

gdje n predstavlja kraticu

$$n = \frac{Z}{u},\quad \text{odnosno}\quad Z = nu. \tag{1.5-6}$$

Vitičasti simboli u (1.5-5) naglašuju da je riječ o *brojčanoj jednadžbi* posve općeg oblika jer još nije definirano koliko iznosi broj n. Taj broj, osim o Z, ovisi i o

količniku jedinica u. Usporedimo li tu brojčanu jednadžbu s univerzalnom veličinskom (1.5-1), vidimo da se ona po obliku razlikuje samo u broju n, jer i Z je čist, apsolutno tačan broj. U kasnijim ćemo razmatranjima (osobito u poglavlju E.6) međutim vidjeti da brojčane jednadžbe oblika (1.5-5) znadu »progutati« čitave prirodne konstante, koje otkrivamo tek pomnom analizom.

Ograničenu vrijednost brojčanih jednadžbi tipa (1.5-5) otkrivamo po količniku n, koji se zbog $n = Z/u$ razlikuje od prirodnog faktora Z. Takve smo primjere već imali: u brojčanoj jednadžbi (1.4-7) stoji $n = 0{,}3048$, dok je u odgovarajućoj veličinskoj $A = ab$ faktor $Z = 1$. Obrnuta je situacija u brojčanoj jednadžbi (1.4-14), gdje je $n = 1$, dok u pripadnoj veličinskoj jednadžbi (1.4-9) prirodni količnik iznosi $Z = \pi/4$. Ove je razlike uzrokovala nejednakost $u \neq 1$, jer u brojčanim jednadžbama opći simboli predočuju brojeve koji su brojčani iznosi veličina izraženih kruto određenim jedinicama. Ako u takve jednadžbe uvrstimo brojčane iznose veličina izražene nekim drugim jedinicama, dobivamo posve *kriva* rješenja.

1.5.2. Primjer prijelaza. Izlaganja u prošlom odlomku ilustrirat ćemo brojčanom jednadžbom

$$\{A\} = 0{,}0314\,\{r\}^2, \tag{1.5-7}$$

koja vrijedi samo onda kad namjesto simbola $\{r\}$ za brojčanu vrijednost polumjera kruga stavimo broj milimetara, pa onda na mjestu $\{A\}$ dobijemo broj kvadratnih centimetara. Uvjerimo se na primjeru. Neka *veličina* »polumjer kruga« iznosi $r = 100\ \text{mm} = \{r\}\cdot\text{mm}$. To znači da je brojčani iznos $\{r\} = 100$. Uvrstimo li $\{r\} = 100$ u brojčanu jednadžbu (1.5-7), nastaje

$$\{A\} = 0{,}0314 \cdot 100^2 = 314.$$

Prije smo rekli da je brojčani iznos površine izražen sa cm^2. To znači da je u skladu sa $\{G\} = G/[G]$ u ovom slučaju $\{A\} = A/\text{cm}^2$, dakle *veličina* površina kruga $A = \{A\}\ \text{cm}^2$. Budući da je prema gornjemu $\{A\} = 314$, to je $A = \{A\}\ \text{cm}^2 = 314\ \text{cm}^2$.

Račun ćemo za svaku sigurnost kontrolirati veličinskim računom. Za tu svrhu moramo najprije imati *veličinsku jednadžbu* površine kruga. Izvest ćemo je iz brojčane (1.5-7) pomoću

$$\{A\} = A/\text{cm}^2, \quad \{r\} = r/\text{mm},$$

jer smo rekli da je $\{A\}$ brojčani iznos veličine A izražene u cm^2, a $\{r\}$ brojčani iznos veličine polumjer r izražene u milimetrima. Unesemo li gornje relacije u (1.5-7), slijedi

$$\frac{A}{\text{cm}^2} = 0{,}0314\left(\frac{r}{\text{mm}}\right)^2. \tag{1.5-8}$$

Gornji izraz možemo u našem primjeru preoblikovati u

$$A = r^2 \frac{0{,}0314\ \text{cm}^2}{\text{mm}^2} = r^2 \cdot 0{,}0314 \cdot 100,$$

jer znamo da je $\text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$. Umnožak $0{,}0314 \cdot 100 = 3{,}14$, to je približno napisan faktor $\pi = 3{,}141\,59\ldots$ Prema tome gornja jednadžba konačno glasi

$$A = \pi r^2,$$

a to je univerzalna veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo koje jedinice veličina r i A.

Sada ćemo pomoću nje izračunati površinu našeg kruga polumjera $r = 100$ mm. Uvrštenjem slijedi

$$A = \pi(100\ \text{mm})^2 = 31\,400\ \text{mm}^2 = 314\ \text{cm}^2,$$

jer je $\text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$. Tek sada smo sigurni da je prijašnji račun pomoću brojčane jednadžbe (1.5-7) zaista dao ispravan rezultat. U ovom je slučaju $Z = \pi$, a $n = 0{,}0314$, pa je dakle prema (1.5-6): $u = Z/n = \pi/0{,}0314 = 100$. Stvarno je, u skladu s općom jednadžbom među jedinicama (1.5-4), u našem primjeru $[A] = u\,[l]^2$, dakle $\text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$.

1.5.3. Tehnika prijelaza. Način prijelaza od brojčanih na veličinske jednadžbe još ćemo bolje upoznati na ovom primjeru: *brojčana jednadžba*

$$\{P\} = 0{,}0031\ \{F\}\ \{v\}, \tag{1.5-9}$$

u kojoj simboli $\{P\}$, $\{F\}$, $\{v\}$ redom predstavljaju brojčane iznose veličina snaga P, sila F i brzina v, vrijedi samo onda kada se u nju uvrštavaju brojčani iznosi izraženi redom jedinicama KS (konjska snaga), kp (kilopond) i km/h. (Podrobnije informacije o tim heterogenim jedinicama čitatelj može naći u odsječcima B.5.5, 4.2 i 2.4.) Brojčanu jednadžbu (1.5-9) često nalazimo u literaturi, ali bez vitičastih zagrada (koje označuju brojčane iznose), u obliku $P = 0{,}0037\ Fv$. Ako uz tako napisanu jednadžbu (u stvari brojčanu jednadžbu) autor nije naveo za koje jedinice ona vrijedi, jednadžbu ne možemo sa sigurnošću primijeniti!

U skladu s osnovnom jednadžbom $\{G\} = G/[G]$, tj. »brojčani iznos = = veličina: jedinica«, brojčane iznose $\{P\}$, $\{F\}$, $\{v\}$ možemo izraziti omjerima veličina i jedinica

$$\{P\} = \frac{P}{\text{KS}}, \quad \{F\} = \frac{F}{\text{kp}}, \quad \{v\} = \frac{v}{\text{km/h}}. \tag{1.5-10}$$

Ovdje dakako *kurzivna* slova opet predstavljaju veličine, a slova u vitičastim zagradama brojčane iznose u navedenim jedinicama. Uvrstimo li (1.5-10) u brojčanu jednadžbu (1.5-9), dobivamo

$$\frac{P}{\text{KS}} = 0{,}0037\,\frac{F}{\text{kp}}\,\frac{v}{\text{km/h}},$$

odnosno ako KS prebacimo na desnu stranu

$$P = 0{,}0037\,\frac{F}{\text{kp}}\,\frac{v}{\text{km/h}}\,\text{KS}. \tag{1.5-11}$$

Za daljnji račun je prikladno da se simboli veličina odvoje od kombinacije jedinica. Tako dobivamo

$$P = ZFv, \quad \text{gdje je} \quad Z = 0{,}0037\,\frac{\text{KS}\cdot\text{h}}{\text{kp}\cdot\text{km}}. \tag{1.5-12}$$

Preostaje nam da izračunamo koliko iznosi broj Z, koji smo ranije nazvali prirodnim faktorom i posebno ga istakli u općoj veličinskoj jednadžbi (1.5-1). Da bismo to učinili, moramo raspetljati omjer jedinica u gornjem izrazu za Z.

Znamo da sat (h) sadrži 3600 sekundi (s), dakle je h = 3600 s. Dalje znamo da je km = 1000 m. Konjska snaga definirana je sa KS = 75 kpm/s (vidi odsječak B.5.5). Uvrstimo li te odnose među jedinicama u izraz za Z, dobivamo

$$Z = \frac{0{,}0037 \cdot 75\,\mathrm{kp\,m\,s^{-1}} \cdot 3600\,\mathrm{s}}{\mathrm{kp} \cdot 1000\,\mathrm{m}} = 0{,}0037 \cdot 75 \cdot 3{,}6 = 1.$$

Stavimo li $Z = 1$ u lijevu, veličinsku jednadžbu (1.5-12), konačno imamo

$$P = Fv, \tag{1.5-13}$$

a to je *univerzalna veličinska jednadžba* koja je u skladu s jednom od definicija snage koja kaže da je snaga umnožak sile i brzine.

Primjer. Poslužimo se gornjom jednadžbom u jednom stvarnom primjeru. Neka sila iznosi $F = 100$ newtona (čitaj: njutn) = 100 N, a brzina $v = 100$ foot/s. Uvrstimo li ove vrijednosti u (1.5-13), dobivamo

$$P = 100\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{foot/s} = 1\,000\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{foot/s}.$$

Otprije znamo da je foot = 0,3048 m, pa slijedi dalje

$$P = 1\,000\,\mathrm{N} \cdot 0{,}3048\,\mathrm{m/s} = 304{,}8\,\mathrm{W},$$

jer je W = watt (čitaj: vat) = Nm/s (vidi odsječak B.5.5).

1.6. Prilagođene veličinske jednadžbe i jednadžbe među jedinicama

1.6.1. Prilagođene veličinske jednadžbe. Prilikom ponavljanja istovrsnih računa često je prikladno upotrebljavati takozvane *prilagođene veličinske jednadžbe*. U tim jednadžbama simboli predstavljaju *veličine*, ali su simboli veličina odmah podijeljeni s određenim jedinicama u kojima su prirađene vrijednosti pojedinih veličina koje omogućuju proračun. Budući da se prilagođene veličinske jednadžbe mijenjaju od slučaja do slučaja, najbolje je da ih objasnimo s nekoliko *primjera*.

U odsječku 1.4 imali smo slučaj *brojčane jednadžbe* površine kruga $\{A\} = \{d\}^2$, u kojoj simboli $\{A\}$ i $\{d\}$ označuju brojčane iznose *veličina* »površina kruga A« i »polumjer kruga r« izražene jedinicama cml (circular mil) i mil. U skladu s osnovnom relacijom $\{G\} = G/[G]$ za te brojčane iznose možemo pisati $\{A\} = A/\mathrm{cml}$ i $\{d\} = d/\mathrm{mil}$. Stavimo li to u brojčanu jednadžbu $\{A\} = \{d\}^2$, dobivamo

$$\frac{A}{\mathrm{cml}} = \left(\frac{d}{\mathrm{mil}}\right)^2 \quad \text{ili} \quad A = \left(\frac{d}{\mathrm{mil}}\right)^2 \mathrm{cml}. \tag{1.6-1}$$

Kosi simboli A i d upozoravaju na to da je riječ o veličinama. Neka promjer žice iznosi $d = 100$ mil. Uvrštenje u desnu jednadžbu daje

$$A = \left(\frac{100\,\mathrm{mil}}{\mathrm{mil}}\right)^2 \mathrm{cml} = 100^2\,\mathrm{cml} = 10\,000\,\mathrm{cml}.$$

Prema tome smo dobili ispravan, veličinski izražen rezultat kao produkt brojčanog iznosa i jedinice.

Dobiveni rezultat možemo kontrolirati veličinskim računom. Budući da je mil = $2{,}54 \cdot 10^{-3}$ cm (vidi odsječak 1.4), to veličinska jednadžba površine kruga sa $d = 100$ mil = 0,254 cm daje $A = d^2\pi/4 = 0{,}254^2\ \mathrm{cm}^2\ 5/4 = 0{,}050\,67\ \mathrm{cm}^2$.

Prije smo pomoću (1.6-1) izračunali $A = 10000$ cml. Budući da je cml $= 5{,}067 \cdot 10^{-6}$ cm^2, to je $A = 10^4$ cml $= 10^4 \cdot 5{,}067 \cdot 10^{-6}$ cm^2 $= 0{,}05067$ cm^2. Dobili smo, dakle, isti rezultat.

Neke smo prilagođene veličinske jednadžbe usput već izveli u prošlim odlomcima. Tako, na primjer, u (1.5-8) simboli A i r predstavljaju veličine. One su podijeljene s jedinicama cm^2 i mm, kojima je ta jednadžba prilagođena.

Isto je s prilagođenom veličinskom jednadžbom (1.5-11) u kojoj su veličine F i v prilagođene jedinicama kp i km/h, a snaga se dobiva u KS. Neka je na primjer $F = 10000$ kp i $v = 40$ km/h, što može vrijediti za željezničku lokomotivu. Uvrstimo li umjesto simbola veličina F i v te vrijednosti u (1.5-11), dobivamo

$$P = 0{,}0037 \cdot \frac{10000\,\text{kp}}{\text{kp}} \cdot \frac{40\,\text{km/h}}{\text{km/h}}\,\text{KS},$$

odakle dalje slijedi konačan rezultat

$$P = 0{,}0037 \cdot 10000 \cdot 40\,\text{KS} = 1480\,\text{KS}.$$

Prilagođene veličinske jednadžbe možemo izvesti na dva načina. Ako imamo *brojčanu jednadžbu*, onda u nju umjesto brojčanog iznosa $\{G\}$ stavimo omjer veličine G i jedinice $[G]$, $\{G\} = G/[G]$. Tako smo postupali pri izvodu prilagođene veličinske jednadžbe (1.6-1).

Ako izvodimo prilagođenu jednadžbu iz *veličinske*, onda opći recept na primjeru (1.5-1) glasi: »Veličinsku jednadžbu podijeli s jednadžbom među jedinicama«. To znači da treba (1.5-1) podijeliti sa (1.5-4), što konačno daje

$$G = n\left(\frac{A}{[A]}\right)^a \left(\frac{B}{[B]}\right)^b \left(\frac{[C]}{C}\right)^c \ldots [G],$$

gdje je jedinica $[G]$ već prebačena na desnu stranu, a prema (1.5-6) je $n = Z/u$. Naravno da umjesto općih jedinica moramo primijeniti konkretne, izračunati u i pomoću njega broj n. Na primjer, u prilagođenoj veličinskoj jednadžbi (1.5-11) taj broj je $n = 0{,}0037$, a on je ujedno zbog $Z = 1$ jednak $1/u = n$.

1.6.2. Nastanak prilagođene veličinske jednadžbe. Zakretni moment M osovine nekog stroja koji radi snagom P ovako je povezan s tom snagom: $M = P/\omega$. Pri tom je $\omega = 2\pi n$, gdje je ω »rotancija«, a n »frekvencija vrtnje« (o tim veličinama podrobnije se raspravlja u odsječcima B.2.2 i B.2.5). Jednadžbe $M = P/\omega$ i $\omega = 2\pi n$ jesu *veličinske jednadžbe*, tj. one vrijede za bilo koje mjerne jedinice, jer simboli u tim jednadžbama predstavljaju fizikalne veličine u smislu $G = \{G\}\,[G]$. Preobrazimo ove dvije veličinske jednadžbe u jednu, »prilagođenu veličinsku jednadžbu«, koja će biti prilagođena ovim jedinicama:

kpcm = kp·cm = kilopondcentimetar za veličinu M,
o/min = okretaj u minuti za veličinu n,
KS = konjska snaga za veličinu P.

Da bismo došli do »prilagođene veličinske jednadžbe«, najprije gornje dvije veličinske jednadžbe udružujemo u jednu

$$M = \frac{P}{2\pi n}. \qquad (1.6\text{-}2)$$

Ova veličinska jednadžba neće se promijeniti ako bilo koju veličinu u njoj pomnožimo s brojem 1. Budući da je kpcm/kpcm = 1, KS/KS = 1 itd., množenjem izraza (1.6-2) s takvim oblicima broja 1 slijedi

$$M \cdot \frac{\text{kpcm}}{\text{kpcm}} = \frac{1}{2\pi} P \cdot \frac{\text{KS}}{\text{KS}} \cdot \frac{1}{n \cdot \frac{\text{o/min}}{\text{o/min}}}.$$

U skladu s uobičajenim pravilima računanja odavde dobivamo

$$\frac{M}{\text{kpcm}} = \frac{\text{KS}}{2\pi \cdot \text{kpcm} \cdot \text{o/min}} \frac{P}{\text{KS}} \frac{1}{\frac{n}{\text{o/min}}}.$$

Nakon kraćeg preračunavanja i kraćenja jedinica ova prilagođena jednadžba dobiva konačan oblik

$$\frac{M}{\text{kpcm}} = 71\,620 \frac{P}{\text{KS}} \frac{1}{\frac{n}{\text{o/min}}}, \tag{1.6-3}$$

do čega smo došli uz pomoć odnosa među jedinicama KS = 75 kpm/s (vidi odlomak B.5.5.3), minuta = 60 s, cm = 0,01 m i o = okretaj ≡ 1 (odsječak B.2.5), tj. računanjem

$$\frac{\text{KS}}{2\pi \cdot \text{kpcm} \cdot \text{o/min}} = \frac{60\,\text{s} \cdot 75\,\text{kpm/s}}{2\pi \cdot \text{kpcm} \cdot 1} = \frac{60 \cdot 75}{2\pi \cdot 0{,}01} = 71\,620.$$

Od prilagođene veličinske jednadžbe (1.6-3) do brojčane jednadžbe samo je jedan korak: uvedemo li oznake

$$\{M\} = \frac{M}{\text{kpcm}}, \quad \{P\} = \frac{P}{\text{KS}}, \quad \{n\} = \frac{n}{\text{o/min}},$$

prilagođena veličinska jednadžba (1.6-3) prelazi u brojčanu

$$\{M\} = 71\,620 \frac{\{P\}}{\{n\}}, \tag{1.6-4}$$

koja daje ispravne rezultate jedino u slučaju ako se u nju uvrštavaju *brojčani iznosi* veličina M, P i n izraženi jedinicama kpcm, KS i o/min. Stoga bi potpuno neporočna brojčana jednadžba zapravo morala glasiti

$$\{M\}_{\text{kpcm}} = 71\,620 \frac{\{P\}_{\text{KS}}}{\{n\}_{\text{o/min}}}, \tag{1.6-5}$$

gdje indeksi uz vitičaste zagrade upozoravaju na to na koje se jedinice ti brojčani iznosi u stvari odnose.

U većini literature koja se služi brojčanim jednadžbama nema takvih preciznih uputa kao uz brojčanu jednadžbu (1.6-5). Autor umjesto toga jednostavno napiše jednadžbu $M = 71\,620\ P/n$, pa ako nije naveo za koje jedinice ona vrijedi

(a to ne navede uvijek), takva je jednadžba izvor pogrešaka i promašenih konstrukcija. A sve bi to bilo izbjegnuto da se autor poslužio veličinskom jednadžbom (1.6-2).

1.6.3. Jednadžbe među jedinicama. Susretali smo ih i služili se njima na bezbroj mjesta u ovoj knjizi. To su jednadžbe koje definiraju međusobne odnose jedinica (njem. Einheitengleichungen, franc. equations aux unités), pa se dakle u njima pojavljuju samo brojčani iznosi i mjerne jedinice. Tako su na primjer »jednadžbe među jedinicama«:

$$1\,\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{mm}, \qquad 1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kgm/s^2}, \qquad 1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V}\cdot 1\,\mathrm{A},$$

$$1\,\mathrm{kp} = 9{,}806\,65\,\mathrm{N}, \qquad 1\,\mathrm{kcal_{IT}} = 4186{,}8\,\mathrm{J} \text{ itd.}$$

Ove jednadžbe među jedinicama možemo pisati i bez broja 1; npr. jednadžba $1\,\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{mm}$ u stvari je kraći oblik pisanja izraza »$1\cdot\mathrm{m} = 1000\cdot\mathrm{mm}$« (vidi početak odlomka 1.4.2), pa stoga ovaj izraz možemo transformirati u

$$\mathrm{m} = \frac{1\,000\cdot\mathrm{mm}}{1} = \frac{1\,000}{1}\,\mathrm{mm} = 1\,000\,\mathrm{mm}.$$

Prema tome gornje jednadžbe među jedinicama možemo uvijek napisati i u obliku

$$\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{mm}, \qquad \mathrm{N} = \mathrm{kgm/s^2}, \qquad \mathrm{W} = \mathrm{VA},$$

$$\mathrm{kp} = 9{,}806\,65\,\mathrm{N}, \qquad \mathrm{kcal_{IT}} = 4186{,}8\,\mathrm{J} \text{ itd.}$$

Takav oblik redovito primjenjujemo u ovoj knjizi, jer je najkraći.

»Jednadžba među jedinicama« je i jednadžba $5\,\mathrm{m} = 5000\,\mathrm{mm}$ ili $5\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{cm}$. Budući da je takav (općenitiji) oblik jednadžbe nepregledan, redovito ga kraćenjem brojeva odmah pretvaramo u kraći oblik $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$ ili u najkraći $\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$.

2. Primjena pouzdanog veličinskog računanja

2.1. Novčane i fizikalne jedinice u jednadžbama

2.1.1. Novčane jedinice u jednadžbama. Pravila za računanje s veličinama, koja smo obradili u odsječcima 1.3 do 1.6, vrijede i za veličine koje ne bismo mogli ubrojiti među fizikalne veličine. To su npr. pojmovi iz ekonomije i financija. I u tim djelatnostima postoje pojmovi koji u obliku simbola ulaze u jednadžbe i s njima se računa jednako kao i s fizikalnim veličinama. Na primjer, rečenicu »kilogram kruha stoji dva dinara«, možemo napisati u obliku

$$c_k = 2 \text{ din/kg},$$

gdje slovo c označuje veličinu *cijena* (vidi odlomak B.7.3.5), a indeks k govori da je riječ o kruhu. Riječ din je kratica za jedinicu novca »dinar«, a kg je kratica jedinice mase »kilogram«.

Primjenu ekonomsko-financijskih veličina u jednadžbama pokazat ćemo na tehničko-ekonomskom primjeru koji je poznat u elektroprivredi. Želimo izračunati tzv. ekonomsku gustoću električne struje J dalekovoda. Ta veličina potrebna nam je zato da bismo odredili najpovoljniji presjek A dalekovodnog užeta pomoću jednadžbe $A = I/J$, gdje je I tzv. računska struja dalekovoda. Poznato je da se ekonomska gustoća struje, dakle i ekonomski presjek vodiča, dobiva pomoću tzv. *Kelvin*ova pravila, koje kaže da tzv. godišnji troškovi izgradnje dalekovoda T_d moraju biti jednaki zbroju godišnjih troškova snage i energije T_g, dakle $T_d = T_g$.

Podrobnije analize pokazuju da se godišnji troškovi T_d mogu prikazati jednadžbom $T_d = 3dLA/\varkappa$, gdje je L duljina dalekovoda, A presjek njegova vodiča, $\varkappa$ specifična električka vodljivost vodiča. Konstanta d sadrži gustoću vodiča, cijenu vodiča, godišnju stopu kapitala itd. Budući da je snaga gubitaka u dalekovodu $\Delta P = 3I^2R$, gdje je $R = L/(\varkappa A)$ omski otpor jednoga od triju faznih vodiča, izraz za T_d možemo prikazati u zavisnosti od ΔP ovako: $T_d = A^2 \Delta P d/I^2 = \Delta P d/J^2$, jer je $J = I/A$.

Godišnji troškovi gubitaka električke snage i energije u dalekovodu iznose $T_g = \Delta P(b+c)$, gdje veličina b označuje specifične godišnje troškove snage, a simbol c tzv. računsku cijenu električke energije. Izjednačimo li jednadžbe za T_g i T_d, tj. poslužimo li se *Kelvin*ovim pravilom $T_g = T_d$, dobivamo $\Delta P d/J^2 = \Delta P(b+c)$, odnosno nakon kraćenja sa ΔP

$$J = \sqrt{\frac{d}{b+c}}.$$

U nekom stvarnom slučaju postoje ovi podaci

$$d = 0{,}16 \frac{\text{din}}{\text{god}\,\Omega\,\text{mm}^4}\,; \quad b = 0{,}28 \frac{\text{din}}{\text{W god}}\,; \quad c = 0{,}08 \frac{\text{din}}{\text{W god}}\,,$$

gdje kratice pojedinih jedinica označuju: din = dinar, Ω = ohm (čitaj: om), W = watt (u nas se čita: vat), god = godina (= 8760 sati, tzv. privredna godina). Uvrštenjem navedenih vrijednosti za d, b i c u jednadžbu za J dobivamo

$$J = \sqrt{\frac{0{,}16 \dfrac{\text{din}}{\text{god}\,\Omega\,\text{mm}^4}}{(0{,}28 + 0{,}08) \dfrac{\text{din}}{\text{W god}}}} = \sqrt{\frac{0{,}16}{0{,}36} \frac{\text{W}}{\Omega\,\text{mm}^4}}\,.$$

Budući da je W = VA i Ω = V/A (vidi glavu E), skup jedinica pod desnim korijenom prelazi u oblik

$$\frac{\text{W}}{\Omega\,\text{mm}^4} = \frac{\text{VA}}{\text{mm}^4\,\text{V/A}} = \frac{\text{A}^2}{\text{mm}^4}\,,$$

pa za ekonomsku gustoću struje dobivamo vrijednost

$$J = \sqrt{0{,}445\,\text{A}^2/\text{mm}^4} = 0{,}667\,\text{A/mm}^2.$$

Ako jakost struje u jednom vodiču npr. iznosi $I = 163$ A (dalekovod 110 kV prijenosne snage oko 30 MW), ekonomski presjek vodiča će iznositi $A = I/J = 163\,\text{A} : 0{,}667\,\text{A/mm}^2 \approx 240$ mm².

2.1.2. Plinska konstanta nepoznata plina. U jednom engleskom udžbeniku tehničke termodinamike pronašli smo ovu jednadžbu stanja za neki plin

$$pV = 0{,}3701\,mT,$$

gdje smo za masu napisali simbol m, dok je u originalu drugo slovo. Očito je to *brojčana jednadžba* jer sadrži koeficijent 0,3701, a taj se ne pojavljuje u veličinskoj jednadžbi stanja $pV = mRT$, gdje je R plinska konstanta plina (vidi odsječak D.2.1). U engleskoj knjizi, međutim, nije navedeno o kojem je plinu riječ. Naš je zadatak da pronađemo *za koji plin* vrijedi gornja brojčana jednadžba.

Budući da je taj izraz *brojčana jednadžba*, koju s našim oznakama i u skladu s načelom $\{G\} = G/[G]$ možemo napisati u obliku

$$\{p\}\{V\} = 0{,}3701\,\{m\}\{T\}, \tag{2.1-1}$$

potražimo u knjizi podatke o tome u kojim jedinicama moraju biti izraženi brojčani iznosi tlaka, volumena, mase i temperature. Stvarno pronalazimo da tlak p valja izraziti brojčanim iznosima $\{p\}$ u jedinici pound-force per square inch (lbf/in²), volumen V u cubic foot (ft³), a masu m u pound (lb).

U skladu s osnovima veličinskog pisanja (vidi odlomak 1.3), brojčani iznos $\{G\}$ bilo koje *veličine* G u jedinici $[G]$ iznosi $\{G\} = G/[G]$, pa je prema tome za naš primjer

$$\{p\} = \frac{p}{\text{lbf/in}^2}\,; \quad \{V\} = \frac{V}{\text{ft}^3}\,; \quad \{m\} = \frac{m}{\text{lb}}\,. \tag{2.1-2}$$

Pomoću tablica **10, 14** i **26** u prilogu knjige preračunat ćemo angloameričke jedinice u jedinice Međunarodnog sistema (SI):

$$\mathrm{lbf/in^2} = 6{,}895 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m^2};\quad \mathrm{ft^3} = 2{,}832 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^3};\quad \mathrm{lb} = 0{,}4536\,\mathrm{kg}.$$

Prema tome su brojčani iznosi iz jednadžbe (2.1-2)

$$\{p\} = \frac{p}{6{,}895 \cdot 10^3\,\mathrm{Nm^{-2}}};\quad \{V\} = \frac{V}{2{,}832 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^3}};\quad \{m\} = \frac{m}{0{,}4536\,\mathrm{kg}}. \tag{2.1-3}$$

Ostaje nam još da utvrdimo ovisnost brojčanog iznosa temperature $\{T\}$ o veličini T i upotrijebljenoj jedinici $[T]$. O tome u knjizi nema govora, jer autor je valjda pretpostavljao da čitatelj to znade. Jedno možemo pouzdano tvrditi: veličina T je termodinamička temperatura, jer kad se jednadžba stanja piše u obliku (2.1-1), onda temperatura može biti samo termodinamička. Kad bi to bila relativna temperatura, onda bi umjesto znaka T morala stajati suma $\vartheta_0 + \vartheta$ (vidi poglavlje D.3).

Termodinamičku temperaturu T Englezi obično mjere »stupnjem Rankinea« (°R), za razliku od Evropljana koji je mjere »kelvinom« (K) (vidi odsječak D.3.2). Možemo biti sigurni da je tako i ovdje. Prema tome je brojčani iznos temperature u izrazu (2.1-1):

$$\{T\} = T/[T] = T/^\circ\mathrm{R}.$$

Znamo da je po veličini kelvin 1,8 puta veći od stupnja Rankinea, dakle $\mathrm{K} = 1{,}82\,^\circ\mathrm{R}$, pa je prema tome $^\circ\mathrm{R} = \mathrm{K}/1{,}8$. Stoga od gornjeg izraza dobivamo

$$\{T\} = 1{,}8\,T/\mathrm{K}. \tag{2.1-4}$$

Simboli u vitičastim zagradama na lijevim stranama jednadžbi (2.1-3, 4) predstavljaju iste brojčane iznose kao i simboli u jednadžbi (2.1-1). Ako ih, dakle, uvrstimo u (2.1-1), dobivamo

$$\frac{p}{6{,}895 \cdot 10^3\,\mathrm{Nm^{-2}}}\,\frac{V}{2{,}832 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^3}} = 0{,}3701\,\frac{m}{0{,}4536\,\mathrm{kg}}\,\frac{1{,}8\,T}{\mathrm{K}},$$

gdje *kurzivni* simboli predstavljaju veličine.

Gornju jednadžbu preuredit ćemo tako da po uobičajenim pravilima računanja odvojimo znakove za veličine od brojeva i jedinica. Tako dobivamo

$$pV = mT \cdot C, \tag{2.1-5}$$

gdje je konstanta C:

$$C = \frac{0{,}3701 \cdot 1{,}8 \cdot 6{,}895 \cdot 10^3\,\mathrm{Nm^{-2}} \cdot 2{,}832 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^3}}{0{,}4536\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}.$$

Računanjem dobivamo da je

$$C = 287\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg\,K}}.$$

Budući da je (vidi odsječak B.5.2) newton × metar = joule (J), to je dalje $C = 287$ J/(kgK).

Vidimo da je jedinica veličine C ona ista koju ima (individualna) plinska konstana R plina. Usporedimo li još podatak s izrazom (2.1-5), uviđamo da veličina

C predstavlja baš plinsku konstantu. Dakle je $C=R$, pa izraz (2.1-5) možemo napisati u poznatom obliku

$$pV=mRT. \tag{2.1-6}$$

Preostaje nam još da odgovorimo na pitanje: *za koji je plin* vrijedila brojčana jednadžba (2.1-1) prilagođena isključivo navedenim angloameričkim jedinicama? Budući da smo utvrdili $R=287\,\mathrm{J/(kgK)}$, lako ćemo u bilo kojem priručniku termodinamike ili u našoj tablici D-5 pronaći da je to plinska konstanta *zraka* pri Celzijevoj temperaturi $\vartheta=0\,^\circ\mathrm{C}$ i tlaku $p=1$ atm (normalna, standardna, fizikalna atmosfera). Daljnji iscrpni primjeri upotrebe veličinskih jednadžbi i njihova usporedba s brojčanima obrađeni su u poglavljima B.10, D.6 i E.6.

2.2. Veličine u logaritamskim odnosima

Iskustvo pokazuje da u primjeni univerzalnih veličinskih jednadžbi nikada ne dolazi do logaritma *veličine*, već jedino do logaritma *omjera* dviju istorodnih veličina. Nespretna primjena jednadžbi katkada dovodi do logaritma veličine, što nema nikakva fizikalnog smisla. Mogućnost postojanja logaritma veličina osporila bi valjanost veličinskih jednadžbi, jer kako bismo u takvom slučaju logaritmirali, na primjer, vrijednost neke *duljine* $r=10$ metara

$$\log r=\log 10\,\mathrm{m}=\log(10\cdot\mathrm{m})=\log 10+\log \mathrm{m}?$$

2.2.1. Izotermna ekspanzija plina. Kako smo rekli, i u praksi i u teoriji dolazi samo do logaritmiranja *omjera* veličina. Razmotrimo primjer izraza za rad W_{12} prilikom izotermne ($T=\mathrm{const}$) ekspanzije nekog plina mase m, obujma V i plinske konstante R:

$$W_{12}=mRT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Pri ovom razmatranju zanima nas samo dio jednadžbe koji sadrži prirodni logaritam omjera tlakova p_1 i p_2.

Zamislimo da moramo izračunati logaritam $\ln p_1/p_2$, gdje je prvi tlak izmjeren jedinicom $[p]_1$, a drugi tlak jedinicom $[p]_2$. Budući da je »veličina = brojčani iznos × jedinica« ($G=\{G\}[G]$), u našem je primjeru $p_1=\{p\}_1[p]_1$ i $p_2=\{p\}_2[p]_2$, gdje simboli $\{p\}_1$ i $\{p\}_2$ označuju brojčane iznose. Tako možemo naš logaritam pisati dalje

$$\ln\frac{p_1}{p_2}=\ln\frac{\{p\}_1[p]_1}{\{p\}_2[p]_2}=\ln\frac{x\cdot\{p\}_1}{\{p\}_2}=\ln(x\{p\}_1)-\ln\{p\}_2, \tag{2.2-1}$$

gdje je x omjer dviju različitih jedinica tlaka

$$x=[p]_1/[p]_2. \tag{2.2-2}$$

Taj je omjer uvijek *čist broj*, jer tlak možemo izraziti samo pomoću stanovite vrijednosti tlaka koju smo proglasili jedinicom. Kad ne bi bila riječ o tlakovima, već o *duljinama*, onda bi bilo na primjer $x=[l]_1/[l]_2=\mathrm{m/cm}=100\,\mathrm{cm/cm}=100$, kad bi prva jedinica bila metar, a druga centimetar.

Vratimo se sada primjeru s logaritmom. Kad su jedinice $[p]_1$ i $[p]_2$ međusobn *jednake*, onda je $x=1$, pa izraz za logaritam glasi

$$\ln p_1/p_2=\ln\{p\}_1/\{p\}_2=\ln\{p\}_1-\ln\{p\}_2,$$

tj. logaritam omjera dviju veličina jednak je razlici logaritama brojčanih iznosa. Ovdje se mora naročito naglasiti da te brojčane vrijednosti moraju da budu plod mjerenja *istom jedinicom.*

Pri tom može u računima doći do greške. Stoga je najprikladnije da se brojčani iznosi nadomjeste omjerom simbola za veličine i jedinice, dakle $\{p\}_1 = p_1/[p]$, $\{p\}_2 = p_2/[p]$, što daje

$$\ln p_1/p_2 = \ln p_1/[p] - \ln p_2/[p]. \tag{2.2-3}$$

Primjer. Pri nekom mjerenju upotrebljavali smo *dva* instrumenta za mjerenje tlaka. Prvi je služio za mjerenje većih vrijednosti tlakova, a bio je baždaren u atmosferama, dok je drugi služio za mjerenje malih tlakova i bio je baždaren u jedinici »mm Hg«. Mjerenjem su utvrđene ove vrijednosti: $p_1 = 4{,}0$ at; $p_2 = 589$ mm Hg. Prema tome je $[p]_1 =$ at, $[p]_2 =$ mm Hg (o ovoj jedinici vidi poglavlje B.4), a pripadni mjerni brojevi su $\{p\}_1 = 4{,}0$ i $\{p\}_2 = 589$.

Budući da je riječ o *različitim* jedinicama, morat ćemo se poslužiti jednadžbom (2.2-1), a prije toga pomoću (2.2-2) izračunati x. Iz tablice **27** u prilogu knjige saznajemo da je

$$x = [p]_1/[p]_2 = \text{at/mm Hg} = 735{,}6.$$

Stoga slijedom jednadžbe (2.2-1) možemo računati ovako:

$$\ln \frac{p_1}{p_2} = \ln \frac{x\{p\}_1}{\{p\}_2} = \ln \frac{735{,}6 \cdot 4{,}0}{589} = \ln \frac{2942}{589} = 1{,}6094.$$

Isto smo tako mogli svesti rezultat mjerenja prvog tlaka na jedinicu $[p]_2$ (ili obratno), pa bismo dobili $p_1 = 4$ at $= 2942$ mm Hg i u tom slučaju računali pomoću (2.2-3) uz $\{p\}_1 = 2942$:

$$\ln p_1/p_2 = \ln (2942 \text{ mm Hg/mm Hg}) - \ln (589 \text{ mm Hg/mm Hg}),$$

$$\ln p_1/p_2 = \ln 2942 - \ln 589 = 1{,}6094.$$

Na ovom primjeru, obrađenom na različite načine, upoznali smo različite opasnosti koje kriju često upotrebljavane jednadžbe oblika razlike logaritama dvaju brojčanih iznosa. Stoga je najpouzdanije raditi s početnim dijelom jednadžbe (2.2-1), u našem primjeru ovako:

$$\ln \frac{p_1}{p_2} = \ln \frac{4\,\text{at}}{589\,\text{mm Hg}} = \ln \frac{4 \cdot 735{,}6\,\text{mm Hg}}{589\,\text{mm Hg}} = \ln \frac{4 \cdot 735{,}6}{589},$$

pa ili najprije izračunati omjer pod znakom logaritma i onda rezultat logaritmirati ili pak zbrajat i oduzimati logaritme pojedinih brojeva.

Razliku između izloženih načina obrade jednadžbi u kojima se pojavljuju logaritmi omjera veličina još će nam osvijetliti jedan praktičan primjer: pomoću mehaničkog indikatora snimili smo politropsku krivulju (p— V) ekspanzije nekog parnog stroja. Iz mjernih podataka želimo ustanoviti koliko iznosi politropski eksponent n u jednadžbi politrope $pV^n = \text{const}$.

Budući da za bilo koja dva stanja vrijedi netom spomenuta jednadžba, možemo je pisati i u obliku

$$pV^n = p_2 V_2^n,$$

gdje je p bilo koji tlak, a V njemu pripadni volumen. Logaritmiramo li ovu jednadžbu i sredimo li je, slijedi izraz za određivanje politropskog eksponenta

$$n = \frac{\log p/p_2}{\log V_2/V}. \tag{2.2-4}$$

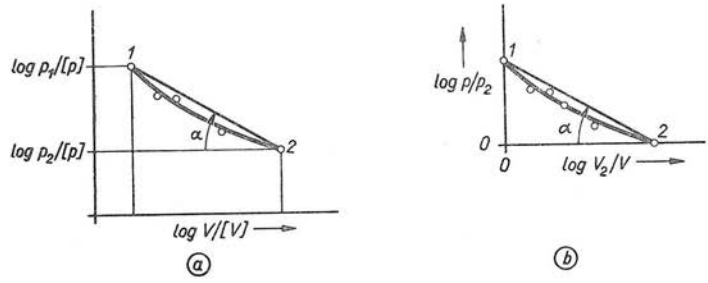
Budući da pri ovom mjerenju sve tlakove mjerimo *istom* jedinicom $[p]$, a isto tako i sve volumene *istom* jedinicom $[V]$, izraz (2.2-4) možemo napisati i u obliku

$$n = \log \frac{p/[p]}{p_2/[p]} : \log \frac{V_2/[V]}{V/[V]},$$

odakle dobivamo

$$n = \frac{\log p/[p] - \log p_2/[p]}{\log V_2/[V] - \log V/[V]}. \tag{2.2-5}$$

Odabirajući različite vrijednosti veličine p i njoj pripadne V, dobivamo tačke $\log p/[p]$ i $\log V/[V]$ u dijagramu slike A.2a. Niz tačaka daje ili krivulju (u tom se slučaju n mijenja tokom ekspanzije) ili pravac ($n = \text{const}$), a n je tangens kuta tog pravca u skladu sa slikom A.2a. Pri tom se mora uzeti u obzir mjerilo u kojem je dijagram crtan.



Sl. A.2. Određivanje politropskog eksponenta

Pouzdaniji je način koji je prikazan na slici A.2b. Tu se u dijagram nanose brojčani iznosi $\log p/p_2$ i $\log V_2/V$. Pri tom se jednostavno dobivaju *brojevi* koje treba logaritmirati, jer se pri konkretnim omjerima veličina p i p_2, odnosno V_2 i V, pripadne jedinice krate. Svakokratne vrijednosti politropskog eksponenta jednostavno slijede iz najkraće jednadžbe (2.2-4).

2.2.2. Računanje potencijala. Pri razmatranju *potencijala* V cilindričkih polja (polje strujanja tekućina, elektrostatsko polje, polje električnog strujanja itd.) također se može posumnjati da veličinske jednadžbe nisu univerzalne, jer navodno u takvim problemima dolazi do logaritmiranja veličina, a ne brojčanih iznosa. To ćemo pitanje razmotriti na primjeru elektrostatskog polja. U udžbenicima katkada nalazimo veličinsku jednadžbu oblika

$$V = -C \ln r + C_0, \tag{2.2-6}$$

gdje je V elektrostatski potencijal vrlo dugačke niti jednoliko nabijene pozitivnom elektrikom, r najkraća (radijalna) udaljenost između tačke s potencijalom V i niti, a C i C_0 konstante. Budući da je r radijus zamišljenog cilindra na kojemu leži promatrana tačka, dakle *veličina* duljina, nemoguće je zamisliti $\log r$, već se pomišlja na *brojčani iznos* udaljenosti. No u kojoj jedinici?

Stvari međutim stoje posve drukčije. Da bismo problem izveli načistac, moramo pogledati u osnove elektrostatike. Ako se na duljini l vrlo dugačke niti

nalazi jednoliko raspoređena pozitivna elektrika Q, onda je jakost elektrostatskog polja E u radijalnoj udaljenosti r od niti

$$E = \frac{Q}{\epsilon 2\pi r l} = \frac{q}{\epsilon 2\pi r}, \tag{2.2-7}$$

gdje je $q = Q/l$, a ϵ dielektričnost prostora u kojemu postoji polje. Zbog jednostavnijeg pisanja nismo se poslužili vektorskim pismom; nećemo nimalo pogriješiti jer ćemo sve vektorske veličine polja razmatrati u radijalnom smjeru od niti prema van.

Potencijal V i jakost polja E međusobno su vezani jednadžbom $E = -\nabla V = -\text{grad } V$, odakle odmah slijedi obrnuta veza

$$V = -\int_{r_0}^{r} E\,\mathrm{d}r = \int_{r}^{r_0} E\,\mathrm{d}r, \tag{2.2-8}$$

tj. potencijal neke tačke možemo definirati integralom jakosti električkog polja od te tačke do po volji odabrane druge tačke. Ta druga tačka može biti na nekom drugom cilindru (oko niti) polumjera r_0. Potencijal V dakle ne možemo definirati drukčije nego u odnosu na slobodno odabrano uporište, u našem slučaju u odnosu na udaljenost r_0 od niti. Kad smo r_0 jednom odabrali, onda moramo s njime računati u čitavom daljnjem razmatranju.

Izračunajmo sada pomoću izraza (2.2-8) potencijal u nekoj tački udaljenoj r od niti. Zbog toga u nj stavimo jednadžbu (2.2-7), pa računanjem dobivamo

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon}\int_{r}^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon}\ln\frac{r_0}{r}. \tag{2.2-9}$$

Vidimo da se pri dosljednoj primjeni definicije potencijala pojavio pod znakom logaritma *omjer* dviju istovrsnih veličina, pa za logaritmiranje preostaje čist *broj*.

Naravno da različito odabiranje referentne tačke (r_0) prema izrazu (2.2-9) iskazuje različite potencijale V. Stvarno u računima ionako ne izračunavamo potencijale u odnosu na neku teško zamislivu, a svakako nedostupnu tačku, već se služimo *razlikom* potencijala, a to je već fizikalna veličina »napon«. Neki autori čak definiraju elektrostatski potencijal kao »napon u odnosu na po volji odabranu referentnu tačku«.

Usporedimo sada jednadžbe (2.2-6) i (2.2-9). U jednadžbi (2.2-6) ništa nije rečeno o vrijednosti konstante C_0. Stoga možemo reći da je

$$C_0 = C\ln r_0,$$

pa time izraz (2.2-6) prelazi u oblik

$$V = C\ln r_0/r.$$

Ni o konstanti C nije ništa pobliže rečeno. No ako netom napisanu jednadžbu usporedimo sa (2.2-9), vidimo da je

$$C = \frac{q}{2\pi\epsilon},$$

pa su, dakle, jednadžbe (2.2-6 i 9) stvarno međusobno jednake, samo što je (2.2-6) nespretno napisana.

Iz svih dosadašnjih razmatranja možemo zaključiti da stvarno pri opisivanju prirodnih pojava pomoću jednadžbi nikada ne dolazi do logaritmiranja *veličina*, već samo do logaritmiranja *omjera* dviju istorodnih veličina, dakle do logaritmiranja *broja*.

2.2.3. Eksponencijalne funkcije. Pod znakom operacije logaritmiranja može se katkada naći i više veličina, ne samo dvije. I u tom slučaju vrijedi isto što smo utvrdili za omjer dviju veličina. To ćemo najbolje vidjeti na primjerima gdje se stanovita kombinacija veličina nađe u eksponentu neke baze koja je uvijek čist broj, dakle kod *eksponencijalnih funkcija*. Takav se rezultat mora i očekivati, jer je logaritam broja N eksponent (n) kojim treba potencirati bazu (npr. e ili 10) da bi se dobio broj $N = e^n$ ili $N = 10^n$.

U nauci o toplini, na primjer, adijabatsku promjenu stanja idealnog plina opisuje jednadžba $pV^\varkappa = \text{const}$, gdje je *Poisson*ov koeficijent $\varkappa = c_p/c_v$, dakle omjer dviju specifičnih toplina, tj. čist *broj*. U elektronici se gustoća električne struje isparivanja iz elektrode računa pomoću *Richardson*ove jednadžbe

$$J = CT^2 e^{-\frac{W}{kT}} = CT^2 \exp\left(-\frac{W}{kT}\right), \tag{2.2-10}$$

gdje je W rad, T termodinamička temperatura, a k univerzalna *Boltzmann*ova konstanta $k = 1{,}39 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$. Razložimo li veličine W i T po načelu $G = \{G\}[G]$ u brojčane iznose i jedinice, dobivamo $W = \{W\}[W]$ i $T = \{T\}[T]$, što uvrštenjem u eksponent jednadžbe (2.2-10) daje

$$\frac{W}{Tk} = \frac{\{W\}[W]}{\{T\}[T] \cdot 1{,}39 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}}.$$

Za jedinice možemo odabrati $[W] = \text{joule} = \text{J}$, $[T] = \text{kelvin} = \text{K}$, pa u tom slučaju kraćenjem jedinica slijedi dalje

$$\frac{W}{Tk} = \frac{\{W\}}{\{T\}\,1{,}39 \cdot 10^{-23}} = \text{čist broj},$$

jer simboli $\{W\}$ i $\{T\}$ označuju brojčane iznose. Prema tome je eksponent u jednadžbi (2.2-10) čist *broj*.

Isto bismo pronašli na jednostavnijem primjeru u mehanici gdje se pomoću formule

$$F = F_0(1 - e^{-\mu\alpha})$$

izračunava sila naprezanja F_0 radnog dijela remena ako je F obodna sila, a μ i α su koeficijent trenja i obuhvatni kut. Izbijanje električkog kondenzatora također se odvija po eksponencijalnom zakonu

$$U = U_0 e^{-t/T},$$

gdje je veličina t vrijeme, računajući od početka izbijanja, a T vremenska konstanta titrajnog kruga koja iznosi $T = 1/RC$. Ovdje su R i C otpor i kapacitet kruga. Na jednostavnom primjeru možemo se uvjeriti da je i u ovom slučaju eksponent čist broj.

Slične primjere mogli bismo nizati unedogled. No i na temelju navedenih možemo zaključiti da su eksponenti pri potenciranju i argumenti pri logaritmiranju

kod svih veličinskih jednadžbi uvijek čisti brojevi. Ova se činjenica čak odlično iskorišćuje: čim u nekom računu utvrdimo da nam argument logaritma ili eksponent kod potenciranja nije čist broj, odmah možemo tražiti grešku!

To svojstvo iskorišćuje se još dalekosežnije u takozvanoj teoriji sličnosti, gdje je osnova bezdimenzionalni produkt veličina, a odatle slijede vrlo korisne značajke *Reynoldsa* (Re), *Prandtla* (Pr) i niz drugih (vidi odlomak D.4.2.5). U vrlo značajnoj »dimenzionalnoj analizi« može se na taj način kvalitativno utvrditi još neka nepoznata zakonitost!

2.3. Decimalni dijelovi i dekadski višekratnici jedinica

2.3.1. Svrha višekratnika jedinica. Pri osnivanju nekog sistema jedinica korisno je jedinice odabrati tako da su one *prikladne za primjenu*. No tu prikladnost za praksu vrlo je teško utvrditi, što ćemo odmah vidjeti. Kovinotokar se uglavnom služi milimetrima u svojem poslu, te dijelovima milimetra kad je riječ o finoj obradi. Stolaru takva preciznost nije potrebna, on mjeri centrimetrima, a tolerancije su mu u milimetrima. Automobilistima ove jedinice ne znače ništa, njima su važni kilometri. Oni jure brzinom od stotinjak kilometara na sat, a bušači tunela smatraju uspjehom ako brzina bušenja kroz kamen iznosi 10 metara na *dan*. U rudnicima vade stotine tisuća tona rudače godišnje, a kroz ruke zlatarskog obrtnika prođe tek desetak grama dragulja. U trgovini potrošači kupuju desetke kilograma brašna ili šećera, a čaja ili papra tek koji gram.

Već iz ovih nekoliko primjera o upotrebi jedinica duljine, brzine i mase u svakodnevnom životu vidimo da je *nemoguće* utvrditi kako velika mora biti jedinica, a da — kako se kaže — bude praktična. Dok je u jednom poslu neka jedinica vrlo »praktična«, u nekom drugom poslu ta ista jedinica činit će se vrlo nepraktičnom. Stoga sistem jedinica sa svojim pravilom građenja koherentnih jedinica ($1 \times 1 = 1$) ne može udovoljiti svima. Takav se sistem jedinica ne može ni zamisliti. Nitko još dugo vremena neće reći da je star 2940000 sekundi kad je navikao da izrazi svoju starost sa 34 godine. No isto tako ni jedan eksperimentator neće izjaviti da je prijelazna pojava trajala 0,0000001 godine kad je on izmjerio 8,64 milisekunde, a ipak i on svoju starost mjeri jedinicom godina.

Pa i unutar pojedinih struka ljudi se susreću s ogromnim rasponom vrijednosti pojedinih veličina. Fizičari, na primjer, s jedne strane proučavaju pojave brzina reda jedan metar u sekundi, a u susjednom laboratoriju elementarne čestice materije ubrzavaju gotovo do brzine svjetla (oko $3 \cdot 10^8$ m/s)! Na strojevima za mehaničku obradu materijala obrađuju se predmeti mase nekoliko tisuća kilograma s preciznošću nekoliko tisućinki milimetara. I tako dalje.

Nabrajanjem ovih ekstrema mogli bismo ispuniti nekoliko stranica knjige, no to nam nije cilj. Željeli smo samo istaći da je danas ljudska djelatnost tako široka u kvalitativnom i kvantitativnom pogledu da ne može postojati jedan sistem jedinica koji bi bio jednako »praktičan« astronomu i istraživaču uz mikroskop. A razvoj civilizacije ide sve dalje u smjeru povećanja tog raspona mjernih vrijednosti. Nekad se činilo da je tzv. cm-g-s sistem jedinica (vidi odsječak B.8.2) prikladan za fiziku. Isto tako da je tzv. Tehnički sistem jedinica (vidi odsječak B.8.1) vrlo povoljan za tehničare itd. Danas znamo da je to stvar prošlosti. Kao što nema više oštre granice između elektronike i mehanike, tako je nema ni između nauke o toplini i strojogradnje. Stoga je jedinstveni Međunarodni sistem jedinica (SI) uz veličinske jednadžbe jedna od onih spona koje međusobno povezuju stručnjake na različitim područjima ljudske djelatnosti (o SI vidi poglavlja B.7, D.4 i E.2).

Da bi skladne jedinice nekog sistema jedinica ipak postale prikladne u različitim primjenama, upotrebljavaju se njihovi decimalni dijelovi i dekadski višekratnici. Nekoliko višekratnika jedinica primijenili smo gotovo automatski u tekstu od početka ovog odlomka 2.3.1 dovdje. Najprije smo spomenuli da se kovinotokar služi jedinicom milimetar (kratica: mm). Znamo da milimetar nije ništa drugo negoli tisući dio jedinice duljine metar, tj. mm = metar/1000 = 0,001 m, gdje je m kratica jedinice metar. Iz jednadžbe mm = 0,001 m proizlazi da prvo slovo m označuje 0,001, tj.

$$\text{m} = \text{mili} = 0{,}001 = 10^{-3}.$$

Možda dvostruko značenje slova m (jednom kao oznaka decimalnog višekratnika, a drugi put kao kratica jedinice metar) u ovom slučaju ponešto zbunjuje. Stoga ćemo taj isti višekratnik razmotriti na drugom primjeru koji smo imali u prošlom tekstu. Govorili smo o milisekundi. To je tisući dio jedinice vremena »sekunda«, dakle

$$\text{milisekunda} = 0{,}001 \cdot \text{sekunda} = \text{m} \cdot \text{sekunda} = \text{ms},$$

gdje je s kratica jedinice vremena sekunda. Porijeklo riječi »mili« je francusko, jer »millième« znači tisući dio.

Dalje smo rekli da se stolar služi jedinicom »centimetar«. Znamo da je centimetar (kratica: cm) stoti dio jedinice duljine metar, tj. cm = metar/100 = 0,01 m, pa je dakle

$$\text{c} = \text{centi} = 0{,}01 = 10^{-2}.$$

U tekstu smo spomenuli još i jedinice kilometar i kilogram. Ovdje »kilo« označuje 1000, dakle

$$\text{k} = \text{kilo} = 1000 = 10^{3},$$

pa je stoga kilometar = kilo · metar = k · m = km = 1000 m. Analogno je kilogram = = kilo · gram = k · g = kg = 1000 g.

Slova m, c, k te niz drugih (vidi odlomak 2.3.2) *simboli* su *višekratnika jedinica*. Neki ih nazivaju *prefiksima* ili *predmecima*, jer se meću ispred simbola jedinica. Ako je višekratnik manji od 1, on se naziva *decimalnim* višekratnikom, a ako je veći od 1, onda *dekadskim* višekratnikom. Na engleskom jeziku dekadski višekratnik se zove multiple, decimalni višekratnik submultiple, a njihovi simboli (m, c, k, . . .) prefix. Slično je i na francuskom jeziku.

Primjena prefiksa na jedinice proistječe iz psihologije čovjeka. Opis vrijednosti neke veličine očigledan je čovjeku kad ima neku intimnu predodžbu o tome. Nekad je to bio lakat ili pedalj, danas je to metar, kilometar. O količini naranči mase 5000 grama vjerojatno svi imamo dosta slabu predodžbu. No kad kažemo da je riječ o 5 kilograma naranči, što je isto (5 kg = 5 k · g = 5 · 1000 · g = 5000 g), odmah imamo »osjećaj« za tu količinu tvari.

2.3.2. Pregled višekratnika jedinica. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je na jedanaestom zasjedanju godine 1960. 12 naziva i kratica decimalnih i dekadskih višekratnika, koje ćemo ovdje navesti u francuskoj transkripciji:

pico = p = 10^{-12}	centi = c = 10^{-2}	kilo = k = 10^{3}
nano = n = 10^{-9}	déci = d = 10^{-1}	méga = M = 10^{6}
micro = μ = 10^{-6}	déca = da = 10^{1}	giga = G = 10^{9}
milli = m = 10^{-3}	hecto = h = 10^{2}	téra = T = 10^{12}.

Na prijedlog Generalne skupštine Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku (General Assembly of the International Union of Pure and Applied Physics) Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je na dvanaestom zasjedanju godine 1964. još dva imenovana decimalna višekratnika

$$\text{atto} = \text{a} = 10^{-18} \qquad \text{femto} = \text{f} = 10^{-15},$$

čija su imena skandinavskog porijekla. Na danskom se jeziku naime brojevi 18 i 15 zovu »atten« i »femten«. Čitav taj, danas međunarodno prihvaćeni sistem imenovanih višekratnika (prefiksa) pregledno smo prikazali u tablici A-1. Taj sistem ušao je gotovo i u sve nacionalne standardizacije i zakonske akte.

Tablica **A-1**

Decimalni dijelovi i dekadski višekratnici jedinica

Višekratnik jedinice			Primjer upotrebe	
Naziv	Kratica	Vrijednost	Primjer	Izgovor
atto	a	10^{-18}	aJ $= 10^{-18}$ J	atodžul
femto	f	10^{-15}	fm $= 10^{-15}$ m	femtometar
piko	p	10^{-12}	pF $= 10^{-12}$ F	pikofarad
nano	n	10^{-9}	nA $= 10^{-9}$ A	nanoamper
mikro	μ	10^{-6}	μW $= 10^{-6}$ W	mikrovat
mili	m	10^{-3}	mg $= 10^{-3}$ g	miligram
centi	c	10^{-2}	cm $= 10^{-2}$ m	centimetar
deci	d	10^{-1}	dl $= 10^{-1}$ l	decilitar
deka	da	10	dalm $= 10$ lm	dekalumen
hekto	h	10^{2}	hl $= 10^{2}$ l	hektolitar
kilo	k	10^{3}	kN $= 10^{3}$ N	kilonjutn
mega	M	10^{6}	MΩ $= 10^{6}$ Ω	megaom
giga	G	10^{9}	GJ $= 10^{9}$ J	gigadžul
tera	T	10^{12}	TWh $= 10^{12}$ Wh	teravatsat

Za današnji sistem višekratnika iz tablice A-1 karakteristična su dva područja. Prvo je ono između c = centi = 10^{-2} i h = hekto = 10^{2}, a drugo ostatak iznad i ispod njega. U prvom, tzv. *iznimnom* području, vrijednosti susjednih prefiksa su (osim iznimke da/d = $10/10^{-1} = 10^{2}$) u odnosu 10:1 (npr. h/da = 10), dok su u drugom području odnosi *dosljedno* $10^{3} = 1000$, npr. $\text{G/M} = 10^{9}/10^{6} = 10^{3}$ itd. U tome i jest jedna od velikih prednosti sistema iz tablice A-1.

Spomenuli smo da je prvo područje imenovanih višekratnika *iznimno*. To znači da se c, d, da i h dopuštaju samo za stanovite primjene; dopuštenja u tom smislu daju pojedine nacionalne standardizacije u svojim aktima. Tako je npr. svugdje uobičajena primjena: hektolitar (hl), decilitar (dl), centimetar (cm), dekagram (dag) i dekalumen (dalm).

Uz navedene prefikse u literaturi, naročito starijoj, naići ćemo i na imenovani dekadski višekratnik mirija = 10^4 (na primjer mirijagauss = tesla = T). On je svojedobno bio i međunarodno prihvaćen, što se vidi iz izlaganja u odlomku 2.3.4, gdje je letimično opisana povijest međunarodne standardizacije prefiksa.

2.3.3. Računanje s višekratnicima jedinica. Kratica naziva višekratnika (prefiks) stavlja se *ispred* jedinice, a u govoru se povezuje s nazivom te jedinice. Pri tom prefiks *množi* tu jedinicu s vrijednošću kojom je definiran. Tako na primjer kilo = k znači k = 1000 = 10^3, tj. slovo k znači isto što i broj 1000. Zbog toga kilometar = km u stvari znači

$$\text{km} = \text{kilometar} = \text{kilo} \times \text{metar} = \text{k} \times \text{m} = 10^3 \cdot \text{m} = 10^3 \text{ m},$$

što smo već imali u odlomku 2.3.1. Posve analogno je npr. (vat = watt = W)

$$\text{MW} = \text{megavat} = \text{mega} \times \text{vat} = \text{M} \times \text{W} = 10^6 \cdot \text{W} = 10^6 \text{ W}.$$

Pojedine nacionalne standardizacije propisuju dopunska pravila o primjeni prefiksa; prešutno ona su na snazi u svim zemljama, iako nisu uvijek izričito propisana. Tako je npr. jedno od pravila: jedna jedinica može imati samo *jedan* prefiks; ne smije se, na primjer, pisati μmm (mikromilimetar), već umjesto toga nm = nanometar = 10^{-9}m. Ovo pravilo primjenjuje se i na kilogram; ne smije se reći μkg = mikrokilogram = 10^{-3}g, već mg = miligram = 10^{-3}g, tj. prefiks se stavlja uz »gram«. Sovjetski standard GOST 7663-55 ne dopušta, na primjer, upotrebu prefiksa M = mega = 10^6 na jedinicu mase gram, dakle ne dopušta Mg = megagram = 10^6g, jer za tu jedinicu postoji posebno ime tona = t = = 10^3 kg = 10^6 g. Suprotno tome čehoslovački standard ČSN 01 1300-63 dopušta uz tonu i primjenu Mg!

Primjer 1. Udaljenost između okretišta poluge i hvatišta sile $F = 4$ kilonewtona = 4 kN [SI jedinica newton (čitaj: njutn) definirana je u odlomku B.4.2.1] iznosi $r = 20$ cm. Izračunajmo koliki je moment M te sile! Rezultat dobivamo pomoću jednadžbe $M = Fr$; uvrštenjem vrijednosti nastaje

$$M = Fr = 4\text{kN} \cdot 20\text{cm} = 80\text{kNcm}.$$

Budući da je k = 10^3, a c = 10^{-2}, daljnjim računanjem slijedi

$$M = 80\text{kNcm} = 80 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 10^{-2}\text{m} = 80 \cdot 10\text{Nm} = 800\text{Nm}.$$

Umjesto simbola višekratnika uvrstili smo dakle njihove brojčane vrijednosti.

Mogli smo računati i drugim slijedom, naime, da već prije uvrštavanja u jednadžbu $M = Fr$ vrijednosti za F i r izrazimo jedinicama N i m, dakle

$$F = 4\text{kN} = 4 \cdot 10^3\text{N}; \quad r = 20\text{cm} = 20 \cdot 10^{-2}\text{m} = 0{,}2\text{m}.$$

Uvrštenjem ovih vrijednosti u jednadžbu $M = Fr$, opet naravno slijedi

$$M = Fr = 4 \cdot 10^3\text{N} \cdot 0{,}2\text{m} = 800\text{Nm}.$$

Primjer 2. Pri nekom visokonaponskom mjerenju očitan je napon $U = 2{,}4$ kV na otporniku čiji je otpor, prethodno izmjeren, iznosio $R = 0{,}6$ MΩ. Kolika je jakost struje I u miliamperima (mA)? Odgovor dobivamo uz pomoć *Ohm*ova zakona

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2{,}4\text{kV}}{0{,}6\text{MΩ}} = 4\frac{\text{kV}}{\text{MΩ}} = 4\frac{\text{k}}{\text{M}}\text{A},$$

jer je A = amper = V/Ω. Budući da je k = 10^3, a M = 10^6, to je omjer k/M = $10^3/10^6 = 10^{-3}$. No kako je 10^{-3} = m = mili, to smo zapravo već dobili jakost struje u mA:

$$I = 4\frac{\text{k}}{\text{M}}\text{A} = 4\frac{10^3}{10^6}\text{A} = 4 \cdot 10^{-3}\text{A} = 4\text{mA}.$$

Neki autori, naročito francuski, prave *besmislene* kombinacije s imenovanim višekratnicima, tobože da ispune praznine između susjednih prefiksa u tablici A-1. Tako, na primjer, pišu

$$\text{hektokilo} = \text{hekto} \times \text{kilo} = \text{h} \times \text{k} = 10^2 \times 10^3 = 10^5,$$

$$\text{centimili} = \text{centi} \times \text{mili} = \text{c} \times \text{m} = 10^{-2} \times 10^{-3} = 10^{-5},$$

$$\text{decimili} = \text{deci} \times \text{mili} = \text{d} \times \text{m} = 10^{-1} \times 10^{-3} = 10^{-4}.$$

Na taj način gubi se osnovna prednost i svrha primjene *jednog* višekratnika uz stanovitu jedinicu: preglednost i pouzdanost računanja. Besmisleno je i predlaganje novog, dodatnog dekadskog višekratnika »penta« = pe = 10^5 (npr. pentagiorgi = = 10^5 N/m^2; vidi odlomak B.4.3.3), jer se time narušava logičan sistem prefiksa iz tablice A-1; osim toga kratica višekratnika penta morala bi sadržavati dva slova, jer je slovo p = piko već zauzeto.

2.3.4. Iz povijesti višekratnika jedinica. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM; o djelatnosti ovog organa Generalne konferencije za mjere i utege vidi poglavlje A.7) prihvatio je godine 1879. ove simbole za višekratnike jedinica duljine, površine, volumena i mase:

km	km^2	—	—	kg
—	—	—	hl	—
m	m^2	m^3	l	g
dm	dm^2	dm^3	dl	dg
cm	cm^2	cm^3	cl	cg
mm	mm^2	mm^3	—	mg

Uz ove simbole bile su usvojene još i ove skraćenice: $\mu = 10^{-3}$ mm, s = stère (vidi odlomak B.1.7.5), t = tona, q = metrički kvintal, a = ar = 100 m^2 te ha = hektar = = 100 a = 10^4 m^2 i dal = dekalitar = 10 litara.

Godine 1901. bile su prihvaćene oznake ml (mililitar) i λ (mikrolitar); prema tome u to vrijeme dva mala grčka slova označavala su jedinicu ($\mu = 10^{-3}$mm, $\lambda = 10^{-6}$l), pa to, dakle, nisu bili višekratnici jedinica, već same *jedinice*. Na sjednici CIPM godine 1901. raspravljalo se o tome da se simboli dekadskih višekratnika (prefiksi) — dakle većih od 1 — pišu velikim (verzalnim) slovima, a simboli decimalnih višekratnika malim (kurentnim) slovima; tako, na primjer, D = deka, a d = deci. Taj prijedlog nije bio prihvaćen, jer bi D došao u obzir samo za dekalitar i dekagram.

CIPM je godine 1905. raspravio i prihvatio prijedlog o uvođenju ovih simbola za jedinice: Mm = mirijametar (franc. myria mètre) = 10^4m, hm = hektometar = 10^2m, dam = dekametar = 10m, Mm^2 = 10^4m^2, ml, ha, dag = dekagram. Na taj način impilicitno su bili prihvaćeni ovi simboli dekadskih i decimalnih višekratnika, tj. prefiksi

10^4 = M = myria,	10^{-1} = d = déci,
10^3 = k = kilo,	10^{-2} = c = centi,
10^2 = h = hecto,	10^{-3} = m = milli,
10 = da = déca,	

koje smo napisali u skladu s francuskim jezikom, tada jedinim službenim jezikom Generalne konferencije. Pri ovom sistemu oznaka bilo je zamišljeno da kratice dekadskih višekratnika budu grčkog porijekla, a kratice decimalnih višekratnika latinskog.

Fizičari su uskoro kritizirali simbol μ ($=10^{-3}$mm), pogotovo kad su neki počeli upotrebljavati *jedinicu* duljine $\mu\mu$ koja je označivala 10^{-3} $\mu = 10^{-6}$mm ($=10^{-9}$ m). Stoga je godine 1900. na jednom međunarodnom sastanku fizičara predloženo da μ ne bude simbol jedinice 10^{-6} m, već kratica decimalnog višekratnika (prefiks) 10^{-6}, dakle μ = mikro = 10^{-6}. U skladu s time bilo je predloženo da se umjesto γ (= gama = 10^{-6}g; vidi odlomak B.3.3.2) upotrebljava μg = 10^{-6}g, a umjesto λ ($=10^{-6}$l) da se primjenjuje μl = mikrolitar = 10^{-6}l. To je bio vrlo koristan prijedlog, ali je nezgoda bila u tome što je riječ »mikro« (micro) grčkog, a ne latinskog porijekla!

Prefiks M = myria = 10^4 nije se održao, jer su elektrotehničari počeli slovo M upotrebljavati kao oznaku za dekadski višekratnik mega (ili »meg«) = 10^6, npr. MΩ = 10^6 Ω. Zbog toga je godine 1935. CIPM ukinuo M = myria = 10^4 i uz ostalih 5 prefiksa od 1905. uveo dva nova:

$$10^6 = \text{mega} = \text{M} \qquad 10^{-6} = \text{mikro} = \mu.$$

Na francuskom oni glase méga (ili meg) i micro.

Proširenje liste imenovanih višekratnika na obje strane potakla je Međunarodna federacija nacionalnih udruženja za standardizaciju (International Federation of National Standardizing Associations, ISA), preteča današnje Međunarodne organizacije za standardizaciju (International Standardizing Organization, ISO). Federacija je predložila godine 1940. ove dodatne prefikse (navodimo na francuskom):

$$10^{12} = \text{téra} = \text{T} \qquad 10^{-12} = \text{pico} = \text{p}$$

$$10^9 = \text{giga} = \text{G} \qquad 10^{-9} = \text{nano} = \text{n}.$$

Ove latinske ili grčke riječi predložene su zato što je njihovo značenje otprilike: gigantski (giga); izvanredan, neuobičajen (tera); vrlo malen (nano); ekstremno malen (piko).

Generalna skupština Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku prihvatila je nakon rata, godine 1948, seriju prefiksa: p, n, μ, m, k, M, G, T, a zatim je to prihvatila i Generalna konferencija za mjere i utege godine 1960, o čemu smo govorili u odlomku 2.3.2 (o primjeni višekratnika jedinica vidi i odsječak B.7.6).

2.4. Prikazivanje veličina u dijagramima i tablicama

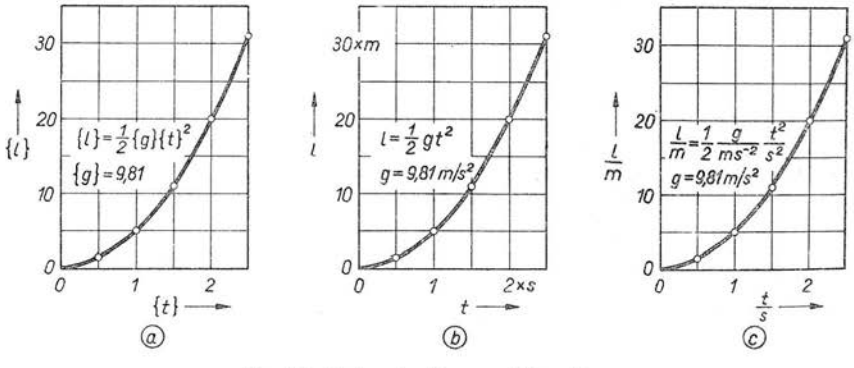
Gotovo je suvišno isticati kako je grafičko prikazivanje veličina korisno pri razmatranju nekog problema u tehnici ili znanosti, a pogotovo kako je instruktivno u školskoj nastavi i u udžbenicima. Istina, opseg mogućnosti grafičkih prikazivanja ograničen je, jer dijagrame crtamo u ravnini papira, pa jedino možemo prikazati ovisnost jedne veličine o drugoj s mogućnošću da još jednu neovisnu veličinu odaberemo za parametar. Postoje doduše perspektivne skice pravokutnih prostornih koordinatnih sistema u kojima možemo prikazati međusobne odnose triju veličina, ali zbog crtanja u ravnini takvi su dijagrami samo od ilustrativne (kvalitativne) koristi.

Dijagrami s pravokutnim koordinatama u većini slučajeva prikazuju stvarne, kvantitativne odnose među pojedinim veličinama. No i kod dijagrama imamo nekoliko načela prikazivanja u skladu s veličinskim i brojčanim naziranjem na simbole u jednadžbama (vidi odsječak 1.4).

2.4.1. Brojčani prikaz. U zastarjelom *brojčanom* naziranju moraju i u dijagramima simboli prikazivati brojeve. Takav slučaj vidimo na slici A.3a, gdje krivulja prikazuje brojčanu jednadžbu slobodnog pada.

Naravno da od brojeva uz vertikalnu i vodoravnu os dijagrama nemamo puno koristi ako ne znamo na koje se jedinice odnose brojčani iznosi $\{l\}$ i $\{t\}$. Kao i kod brojčanih jednadžbi, tako i kod brojčanih dijagrama nalik na sliku A.3a moramo u tekstu navesti da je riječ o *brojčanim iznosima* veličinâ »duljina« i »vrijeme« u metrima i sekundama, a pri tom se radi o ubrzanju zemljine teže 9,81 izraženom u m/s^2.

2.4.2. Veličinski prikaz. Slika A.3b odgovara besprijekornom *veličinskom* nazoru. Na svakoj koordinatnoj osi navedene su vrijednosti veličina; na primjer, u vremenskom razdoblju $t = 1{,}5$ s tijelo će prema dijagramu slike A.3b pasti oko $l = 11$ m duboko. Pri ovakvom načinu crtanja veličinskih jednadžbi morali bismo



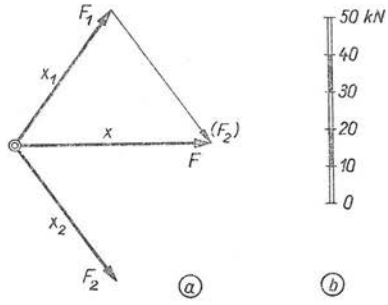
Sl. A.3. Tri vrste dijagramskih prikaza:
a) brojčani, b) veličinski, c) prilagođeni veličinski prikaz

uz svaki broj napisati jedinicu, tj. umnožak brojčane vrijednosti i jedinice ($G = \{G\}[G]$), ali po prešutnom dogovoru to ne činimo, jer smatramo da je i bilo koji drugi broj (npr. 20), a ne samo 30, pomnožen jedinicom (npr. 20 m). Isto vrijedi i za veličinu vrijeme t na vodoravnoj osi.

2.4.3. Prilagođeni prikaz. Na slici A.3c primijenjen je treći način upotrebe dijagrama: analogno *prilagođenim* veličinskim jednadžbama (vidi odsječak 1.6). Pojedine koordinate predstavljaju brojčane iznose, a i uz obje osi naznačeni su simboli brojčanih iznosa u obliku $G/[G]$, tj. u obliku omjera veličine i upotrijebljene mjerne jedinice. Tako su na vertikalnoj osi dijagrama slike A.3c naznačene brojčane vrijednosti l/m, tj. brojčani iznosi veličine l u m, a na apscisnoj osi brojčani iznosi vremena, t/s.

U primjeni su oba načina (sl. A.3b i c) jednako korisna ako se dosljedno primjenjuju.

2.4.4. Prikaz vektorskih veličina. Vektorske veličine često prikazujemo *dužinama*. Na slici A.4 vidimo primjer vektorskog zbrajanja dvaju vektora sila F_1 i F_2 (ovdje propuštamo posebne vektorske oznake) u rezultantu F. Obje sile djeluju dakako na neko tijelo u istoj ravnini, jer inače ne bismo mogli crtati njihov prikaz u ravnini papira.



Sl. A.4. Vektorski dijagram sila i mjerilo

Pri tome se služimo posebnom simbolikom jer neka dužina na papiru nije sila, dužina samo *prikazuje* silu. Stoga je neophodno uvesti *mjerilo* M koje definira kolika dužina pripada stvarnoj veličini. Na primjer, u slučaju na slici A.4 mjerilo crtanja sila definirano je omjerom

$$M_F = \frac{F}{x}, \qquad (2.4\text{-}1)$$

gdje je F stvarna sila, a x dužina koja na slici prikazuje tu silu. Mjerilo odabiremo po svojoj volji. Možemo ga npr. odabrati ovako: neka sili 10 kN (kN = 1000 N; N = newton) odgovara na crtežu slike A.4a dužina 5 mm. To znači da mjerilo iznosi

$$M_F = F/x = 10\,\text{kN}/5\,\text{mm} = 2\,\text{kN/mm},$$

tj. svakom milimetru crteža odgovaraju 2 kilonewtona.

Zadamo li sile $F_1 = F_2 = 46\,\text{kN}$ s naznačenim smjerovima i smislom, morat ćemo ih na slici A.4a prikazati dužinama

$$x_1 = x_2 = F_1/M_F = 46\,\text{kN} : 2\,\text{kN/mm} = 23\,\text{mm}.$$

Kad ove dužine zbrojimo po pravilu vektorskog zbrajanja sila, dobivamo dužinu $x = 26\,\text{mm}$, što prema jednadžbi (2.4-1) prikazuje silu

$$F = x M_F = 26\,\text{mm} \cdot 2\,\text{kN/mm} = 52\,\text{kN}.$$

Pri opisanom načinu obrađivanja vektorskih veličina često se ne pazi, pa neki autor u knjizi jednostavno piše, na primjer: »Sila F_1 iznosi 23 mm, a jednaka je sili F_2 = = 23 mm«. Naravno da je to besmislica, jer sila nije dužina. Neki autori upotrebljavaju simboličku oznaku za riječ »odgovara«, npr.

$$10\,\text{kN} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\text{mm},$$

pa onda u tekstu pišu $F_1 \mathrel{\widehat{=}} 23\,\text{mm}$. Takav je način obrade svakako bolji od netom spomenutog.

Treći je način (sl. A.4b) sigurno najzorniji. Kod njega je mjerilo *nacrtano*. Takav način ima veliku prednost pred svim ostalima. Kad, naime, čitamo stručne knjige ili udžbenik, često nailazimo na opise nekih crteža, nalik na naš A.4a, za koje se kaže da je upotrijebljeno mjerilo $M_F = 10$ kN/cm. No kad stvarno na crtežu u knjizi izmjerimo pojedine dužine koje prikazuju vektore, vidimo da autorov navod nije tačan. Do razlike je došlo zato što je prilikom priređivanja knjige za tisak crtež

smanjen. Kad se radi s nacrtanim mjerilom kao na slici A.4b, jednako se smanjuju i crtež i nacrtano mjerilo. U takvom slučaju pisac može za naš slučaj na slici A.4a i b jednostavno napisati: »Prema odabranom mjerilu M_F rezultantna sila iznosi $F = x M_F = 52\,\text{kN}$«, a njegov postupak može čitatelj lako kontrolirati kad to mjerilo M_F sam izračuna iz odštampane slike.

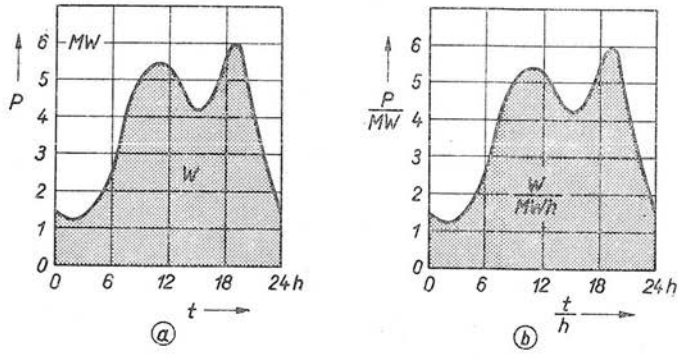
2.4.5. Uloga mjerila M vrlo je važna i pri obradi dijagramski zabilježenih odnosa među veličinama. Na slici A.5a prikazan je mjerenjem snimljen dijagram opterećenja djelatnom električkom snagom P stanovitoga grada u toku nekog dana. Uz ordinatnu os nanosi se snaga P, a uz apscisnu os vrijeme t. Na slici A.5b prikazan je taj isti dijagram u smislu prilagođenih veličinskih jednadžbi (usporedi sa slikama A.3b i c).

Pomoću dijagrama slike A.5a možemo ustanoviti vrijednost *energije* koja je utrošena promatranog dana

$$W = \int P\,\mathrm{d}t. \tag{2.4-2}$$

Ova energija W *prikazana* je na slici A.5a površinom A koju s vodoravnom osi zatvara krivulja snage (siva površina na slici). Površinu A lako je utvrditi bilo prebrojavanjem kvadratića, ako se crta npr. na »milimetarskom papiru«, bilo pomoću posebne sprave — planimetra.

Zbog toga moramo poznavati *dva mjerila*: mjerilo M_P kojim je snaga P prikazana dužinom y, dakle $M_P = P/y$, te mjerilo vremena $M_t = t/x$ kojim je vri-



Sl. A.5. Dijagram snaga—vrijeme:
a) u veličinskom obliku, b) u prilagođenom veličinskom obliku

jeme t prikazano vodoravnim dužinama x. Iz ovih definicija oba mjerila možemo izvući $P = y M_P$, $t = x M_t$, što uvrštenjem u izraz (2.4-2) daje pomoću $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x M_t$:

$$W = M_P \cdot M_t \int y\,\mathrm{d}x = M_W A, \tag{2.4-3}$$

gdje je A površina koju prikazuje netom napisani integral, a M_W mjerilo kojim je energija W prikazana kao površina A. To znači da je

$$M_W = W/A = M_P M_t. \tag{2.4-4}$$

Primjer. Ovaj opis može nam ilustrirati primjer na slici A.5a. Na njoj je mjerilo snage $M_P = P/y = 2\,\text{MW}/1\,\text{cm} = 2\,\text{MW/cm}$, tj. svaki centimetar na vertikalnoj osi dijagrama predočuje snagu 2 megavata. Za vodoravno mjerilo vremena odabrali smo $M_t = 24\,\text{h}/3\,\text{cm} = 8\,\text{h/cm}$,

tj. svaki centimetar u vodoravnom smjeru prikazuje 8 sati. Mjerilo energije M_W prema jednadžbi (2.4-4) iznosi

$$M_W = M_P M_t = 2\frac{\text{MW}}{\text{cm}} \cdot 8\frac{\text{h}}{\text{cm}} = 16\frac{\text{MWh}}{\text{cm}^2},$$

tj. svaki kvadratni centimetar površine ispod krivulje na slici A.5a prikazuje energiju 16 MWh. Ako smo npr. planimetrom izmjerili $A = 5{,}75\ \text{cm}^2$, onda je prema jednadžbi (2.4-3)

$$W = M_W A = 16\frac{\text{MWh}}{\text{cm}^2} \cdot 5{,}75\ \text{cm}^2 = 92\ \text{MWh} = 331{,}2\ \text{TJ}.$$

Slovo J kratica je jedinice energije Međunarodnog sistema jedinica džul (joule) = J. Simbol T je prefiks tera = T = 10^{12}.

Opisani način prikazivanja veličina površinom u dijagramu (npr. sl. A.5a) besprijekoran je za *crtane* dijagrame koji ostaju kako su nacrtani ili se umnažaju u mjerilu 1:1 (kopiraju). Ako se takvi dijagrami smanjuju ili povećavaju, npr. prilikom prireĎivanja za tisak, mijenjaju se i mjerila, pa nastaju neprilike i pogreške analogne onima u odlomku 2.4.4. Da bi se to izbjeglo, korisno je uz dijagram (npr. sl. A.5a) *nacrtati* mjerilo, slično kao što je učinjeno uz sliku A.4. U našem slučaju ($W \triangleq A$), to dakako nije pravac, već pravokutnik ili kvadrat uz koji piše koliko jedinica energije predstavlja taj kvadrat. Kako se smanjuje ili povećava crtež, tako se mijenja i to nacrtano plošno mjerilo.

2.4.6. Tabelarni prikazi vrijednosti veličina. Svrha je tablice (tabele), kako znamo, da na jednom mjestu skupi vrijednosti niza ili jedne veličine, što karakteriziraju neku tvar. Tablica mora da je tako složena i označena da ne bude nikakve nedoumice pri njenoj uporabi. Upotrebljava se nekoliko načina slaganja tablica, koje ćemo ovdje opisati primjerima.

Tablica A-2 sadrži vrijednosti veličine »specifična toplina pri stalnom tlaku« c_p nekoliko tvari pri temperaturi 20 stupnjeva Celzija. Radi lakšeg opisivanja tablicu smo razdijelili u pet stupaca koje smo označili brojevima 1 do 5. U manjim tablicama takvo se označivanje obično ne primjenjuje.

Kod tablica je svakako važan zaglavak ili glava. Tako smo u stupcu 1 glave naznačili o kojoj je tvari riječ (aluminij itd.). U drugom stupcu naveden je jedan način prikazivanja vrijednosti veličine c_p: veličina specifična toplina svake tvari izražena je umnoškom brojčanog iznosa i jedinice. Npr. podatak u stupcu 2 znači da je $c_{p\text{Al}} = 895\,\text{J/(kg°C)}$. Takav način iziskuje najviše prostora, a njega u tablicama gotovo nikad nema mnogo na raspolaganju. Stoga se tablice obično sastavljaju tako da se pišu samo *brojčani iznosi*, dakle $\{G\} = G/[G]$ prema osnovnoj jednadžbi iz odsječka 1.3. Takav prikaz vidimo u stupcu 3 tablice A-2. U glavi je napisan omjer veličine i jedinice, a u stupcu 3 nižu se brojčani iznosi $\{c_p\} = c_p/(\text{J/kg°C})$.

U četvrtom i petom stupcu glavna razlomkova crta iz glave stupca 3 zamijenjena je crtom tablice. U tom slučaju simbol predočuje *brojčane iznose* $\{c\}_p$, a ispod toga je navedeno na koje se jedinice odnose ti brojčani iznosi. U usporedbi sa stupcem 3 ovdje u stupcu 4 vidimo još jednu razliku: upotrijebljena je k = 1000 puta veća jedinica kJ/(kg°C) = 1000 J/(kg°C), pa su zato brojčani iznosi 1000 puta manji.

Stupac 5 donosi brojčane iznose $\{c_p\}$ veličine c_p u staroj jedinici kcal/(kg°C) koja je veća od one u stupcu 4; kcal/(kg°C) = 4,1868 kJ/(kg°C). Zato su i brojčani iznosi $\{c_p\}$ ovdje toliko puta manji. Ovakav dvostupačni (stupci 4 + 5) prikaz baš se u sadašnje vrijeme mnogo upotrebljava, kad je i u nauku o toplini uveden

Tablica A-2

Vrijednosti specifične topline c_p pri stalnom tlaku različitih tvari pri temperaturi 20 °C

1	2	3	4	5
Tvar	c_p	$\frac{c_p}{\text{J/(kg°C)}}$	$\{c_p\}$	
			kJ/(kg°C)	kcal/(kg°C)
Aluminij	895 J/(kg °C)	895	0,895	0,214
Beton	878 J/(kg °C)	878	0,878	0,210
Staklo	777 J/(kg °C)	777	0,777	0,186

Međunarodni sistem jedinica (SI), a mnogi se još nisu odvikli od ranije upotrebljavanih jedinica. U tom je pogledu takav »dvojedinični« tabelarni prikaz pogodan, ali je nespretan jer zauzima mnogo prostora. Stoga je dovoljno navesti podatke npr. u kJ/(kg°C), a posebno naznačiti preračunski koeficijent 4,1868, kako smo netom naveli.

Unatoč jednostavnosti s tablicama može doći do komplikacija, kako ćemo vidjeti u tablici A-3. Ova tablica prikazuje vrijednosti dinamičke viskoznosti η (vidi poglavlje B.6). Viskoznost većine tvari vrlo je malog brojčanog iznosa kad se upotrebljavaju jedinice uobičajenih sistema jedinica. Tako je npr. za amonijak

$$\eta = 0{,}000240\,\text{Ns/m}^2 = 0{,}0000245\,\text{kps/m}^2,$$

gdje je N = newton, a kp = kilopond (vidi poglavlje B.4).

Budući da su takvi brojevi glomazni pa zauzimaju mnogo prostora, u tablicama se u takvim slučajevima upotrebljava milijun puta manja jedinica »10^{-6} Ns/m²«, ali se ne označuje posebnim imenom.

Tablica A-3

Vrijednosti dinamičke viskoznosti η raznih kapljevina pri temperaturi 0 °C

1	2	3	4	5
Tvar	$\frac{\eta}{\frac{10^{-6}\ \text{Ns}}{\text{m}^2}}$	$\frac{\eta}{\mu\text{Ns/m}^2}$	$\frac{\eta \cdot 10^6}{\text{kps/m}^2}$	$\frac{\eta}{\text{poise}}$
Amonijak	240	240	24,5	0,00240
Toluol	771	771	78,6	0,00771
Živa	1687	1687	172,0	0,01687

U tom je slučaju brojčani iznos manji jer je npr.

$$0{,}000240\ \text{Ns/m}^2 = 240 \cdot 10^{-6}\ \text{Ns/m}^2.$$

To smo primijenili u stupcu 2, gdje je brojčani iznos

$$\{\eta\} = \frac{\eta}{10^{-6}\ \text{Ns/m}^2}. \qquad (2.4\text{-}5)$$

Praktičnije je međutim upotrijebiti *prefiks* mikro (μ) jer je $\mu = 10^{-6}$ (o višekratnicima jedinica vidi odsječak 2.4 i tablicu A-1). Takav način prikazivanja primijenili smo u stupcu 3.

U literaturi se katkada primjenjuje način kao u stupcu 4. Tu je jednadžba (2.4-5) preoblikovana sa $1/10^{-6} = 10^6$, pa time prelazi u oblik

$$\{\eta\} = \frac{10^6 \cdot \eta}{\mathrm{Ns/m^2}} \quad \text{ili} \quad \{\eta\} = \frac{\mathrm{M} \cdot \eta}{\mathrm{Ns/m^2}},$$

odnosno konkretno u onaj u stupcu 4, ako se umjesto jedinice sile newton upotrijebi kilopond = kp (= 9,80665 N).

Ovakav se način prikazivanja ne preporučuje jer može dovesti do *zabune* pri upotrebi tablice. Čitatelj koji nije orijentiran o približnoj vrijednosti viskoznosti mogao bi shvatiti da treba brojčani iznos u tablici *pomnožiti* s milijun, a ne podijeliti. Kad bi korisnik takve tablice dosljedno razlikovao veličine i brojčane iznose, onda bi i oblik stupca 4 bio praktički upotrebljiv. No to se ne može očekivati od *svih* čitatelja neke knjige, pa se stoga preporučuju oblici navedeni u stupcima 3 i 2.

U stupcu 5 naveden je način tabeliranja nalik na stupce 4 i 5 u tablici A-2. Pri tom je upotrijebljena jedinica fizikalnog (CGS) sistema »poise« (čitaj poaz) = = 0,1 Ns/m² (vidi odsječak B.6.4).

2.5. Pisanje i štampanje veličina, jedinica, brojeva i jednadžbi

Ovaj odsječak posvećujemo formalnoj uporabi jedinica, simbola fizikalnih veličina, brojeva i jednadžbi, te načinu njihova pisanja i štampanja. Na to nas nuka činjenica da se u različitim objavljenim radovima, tj. u knjigama i stručnim časopisima, iste veličine označuju različitim slovima, jednadžbe štampaju nepregledno i višeznačno, ili pak rasipno (prostor!), jedinice pišu krivo odabranim slovima itd. itd. A kako je istom u elaboratima i proračunima koji se ne objavljuju?! Svrha je narednih odlomaka da piscima, urednicima, lektorima, korektorima i slagarima pomognu pri stvaranju jednoznačnih, preglednih i lijepih jednadžbi koje međusobno povezuju fizikalne veličine ili mjerne jedinice.

JUS A.A1.040: »Veličine i jedinice (Nazivi, oznake i definicije — Opća grupa)« od godine 1957. sadrži dio uputa ove vrste. Budući da je opseg tog standarda preskroman za današnje potrebe, bitno ćemo ga nadopuniti karakterističnim uputama iz dvije druge publikacije. Prva je preporuka Međunarodne organizacije za standardizaciju (Organisation Internationale de Normalisation, ISO): Signes et symboles mathématiques à employer dans les sciences physiques et dans la technique (ISO/R31/XI—1961), a druga je njemačka norma DIN 1338: Buchstaben, Ziffern und Zeichen im Formelsatz od godine 1961.

2.5.1. Primjena uspravnih i kurzivnih simbola. Fizikalne veličine, mjerne jedinice, operatori, funkcije, kemijski elementi i njihovi spojevi označuju se u matematičko-prirodoslovnoj literaturi gotovo isključivo *slovima*. Budući da nekoliko desetaka slova jedne vrste nije dovoljno za više stotina kratica koje treba da se međusobno razlikuju, upotrebljavamo nekoliko različitih pisama i abeceda (npr. grčka slova). Najčešće rabimo obično uspravno pismo, te kurzivno (*koso*) pismo. Simboli fizikalnih veličina, funkcija i općih brojeva štampaju se *kurzivno*, a kratice jedinica, kemijske oznake, matematički operatori i brojevi uspravno. Pojedinosti mogu se razabrati iz tablice A-4, te djelomično iz tablice A-5.

Tablica A-4

Primjena uspravnih i kurzivnih simbola prema DIN 1338–1961

Red. br.	Predmet	Pismo	Primjeri
1	Simboli općih brojeva	Kurzivno	n-struko, $\sqrt[n]{3}$, $\sum_{i=1}^{m} k_{ih}$ za $h=1, 2, \ldots, n$; pri opisu detalja u crtežima, npr.: *1* — kapilara, *2* — spremnik itd.; iznimke su: Ludolfov broj π, baza prirodnog logaritma e, te imaginarna jedinica $\mathrm{i}=\mathrm{j}=\sqrt{-1}$
2	Brojevi	Uspravno	$1{,}16\cdot10^{-4}$, $\frac{1}{2}$, 3/4, $6r^2$, $e^{i\pi}=-1$
3	Simboli fizikalnih veličina	Kurzivno	m (masa), F (sila), μ (permeabilnost), C (kapacitet), M (zakretni moment), G (težina), $\kappa=c_p/c_v$ (omjer specifičnih toplina)
4	Kratice jedinica i višekratnika	Uspravno	m (metar), F (farad), μ (mikro $=10^{-6}$), C (coulomb), M (mega $=10^6$), G (giga $=10^9$), mol, kHz, din (dinar)
5	Kemijske oznake	Uspravno	Fe, H_2SO_4
6	Simboli funkcija	Kurzivno	$f(x)$, $L(y)=(y)''+f_1y'+f_0y$ vidi i tablicu A-5
7	Simboli operatora	Uspravno	d, ∂, Δ, $\int$, Σ, div, grad, Re (realni dio), sin, lg (vidi i tablicu A-5)

Prema odluci Tehničkog odbora 12 ISO uspravno se štampa i jedinica energije eV (elektronvolt), iako je eV umnožak veličine elementarni naboj e i jedinice volt. Prema tome valja npr. pisati MeV ($=10^6$ eV), a ne MeV.

Ovdje je prilika da nešto kažemo o primjeni riječi: »konstanta«, »koeficijent« i »faktor« (prema DIN 5485—1960). Riječju *konstanta* označujemo u prvom redu tzv. univerzalne konstante karakteristične za prirodne pojave. To su npr. *Avogadro-Loschmidt*ova konstanta $N_0=6{,}025\cdot10^{23}$/mol, magnetska konstanta $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ H/m itd. (vidi tablicu **2** u prilogu knjige). Riječju konstanta karakteriziramo i svojstva ili vladanje tvari i sistema, npr.: plinska konstanta stanovitog plina, vremenska konstanta nekog procesa itd. U jednadžbama se npr. pojavljuje *koeficijent k* onda kad se njime množi promjenljiva veličina x, pa se dobiva njoj proporcionalna drugorodna veličina $y=kx$. Tako npr. imamo jednadžbu: »relativno istezanje = koeficijent istezanja × napetost«. Riječ *faktor* označuje broj

kojim treba pomnožiti vrijednost neke fizikalne veličine da bi se uzelo u obzir njeno odstupanje od neke polazne vrijednosti, npr.: »reflektirana veličina = faktor refleksije × dolazeća veličina«, »djelatna snaga = faktor snage × prividna snaga«, »prava vrijednost = korekcijski faktor × pokazana vrijednost« itd.; faktor k može biti realan ili kompleksan.

2.5.2. Razmak između grupa brojeva. U dobru slogu dolazi do izražaja i matematička bit jednadžbe. Odabiranjem većeg ili manjeg razmaka (praznina) između pojedinih dijelova formule dobiva se, bez osjetnog gubitka prostora, zornija predodžba računske veze između tih dijelova. Tako je na primjer u izrazu

$$7 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 42 + 20$$

razmak između 6 i + veći negoli između 7 i 6, jer pri računanju valja najprije izračunati umnoške, a zatim ih zbrojiti. Pri tom, dakako, nema krutog pravila, već je bitan utisak koji takav izraz stvara u oku. To znači da će u takvim slučajevima slagarov dobar ukus biti presudan.

Kod velikih brojeva, tj. kod brojeva sa mnogo znamenki, preglednost se postiže grupiranjem po tri znamenke lijevo i desno od decimalnog zareza. Između takvih grupa ostavlja se *razmak*; za slučaj stupca pripremljenog za zbrajanje to izgleda ovako:

9 086,653 5

37 103,473 47

1 000,000 1

Neispravno je odjeljivanje grupa brojeva tačkom ili zarezom, ne valja dakle 37.103,473.47 ili čak 37,,103,473.47, kako ponegdje nalazimo. Napominjemo da u angloameričkom jezičnom području umjesto decimalnog zareza najčešće upotrebljavaju decimalnu tačku, na primjer naš broj 30,06 oni pišu 30.06, a brojeve manje od 1 katkada ovako .27 (to je naš broj 0,27); ova zamjena zareza i tačke često uzrokuje grube pogreške pri preračunavanju angloameričkih rezultata na metričke.

2.5.3. Znak množenja. Operacija množenja naznačuje se na tri načina: tačkom, križićem i malim razmakom (prazninom). Naznačivanje množenja malim *razmakom* je najčešće, tj. faktori postavljeni jedan uz drugi predstavljaju umnožak, npr.

$$P = Fv, \qquad W = \tfrac{1}{2} m v^2, \qquad \mathrm{d}\Phi = u\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{J} = \mathrm{N\,m} \qquad \text{itd.}$$

Takav način naznačivanja množenja ujedno je i najpregledniji i najpouzdaniji; u mnogim se slučajevima naime pokazalo, da nepažljiva primjena tačke kao znaka množenja dovodi do pogrešnih shvaćanja, naročito ako se ne upotrijebe zagrade (odlomak 2.5.4). I u didaktičkom pogledu naznaka množenja bez posebnih znakova, dakle samo malim razmakom, ima prednost: slika jednadžbe nije opterećena dodatnim znakovima, zornija je dakle. Autor obično nije svjestan da primjena posebnih znakova množenja (tačka, križić) može uzrokovati nejasnoće, jer on zna smisao formule koju je napisao, iako je možda nije napisao jednoznačno. Naznačivanje množenja bez posebnih znakova upotrebljava se i u kompleksnom računu, npr. $Z = (2 - \mathrm{j}\,3)\,\Omega$.

Tačku kao znak množenja upotrebljavamo uglavnom onda kad u jednadžbi želimo neke faktore grupirati i odijeliti ih od druge grupe faktora ili kad mislimo

da bi jednostavno nizanje faktora moglo dovesti do nesporazuma. Tako npr. možemo pisati

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n, \qquad 2 \cdot 16 a^2 b, \qquad x_1 y^2 \cdot y_1 x^2,$$

$$\mathrm{j}\omega \cdot 10{,}8\,\mathrm{mH}, \qquad 2\pi R \cdot \pi r^2, \qquad \mathrm{W} = \mathrm{kg\,m^2/s^3} = \mathrm{kg \cdot m\,s^{-2} \cdot m\,s^{-1}} \quad \text{itd.}$$

U petom primjeru tačkom smo naglasili da se radi o volumenu kružnog prstena, a u posljednjem primjeru da je jedinica snage nastala umnoškom jedinica mase, ubrzanja i brzine. Tačka kao znak množenja stavlja se u istu visinu kao i znak + ili —, dakle otprilike na pola visine slova. Ponekad se tačka upotrebljava posve nepotrebno, na primjer:

nepregledno, dugačko: $a \cdot b - a \cdot c(x + c) + c \cdot d$

pregledno, kratko: $ab - ac(x + c) + c\,d$

Tačku kao znak množenja možemo staviti i između dva razlomka kako bismo spriječili da se dvije razlomkove crte ne shvate kao jedna, npr.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C + D}{E + F}$$

Križić kao znak množenja uglavnom upotrebljavamo u dva slučaja: za naznaku površinskih formata i prostornih izmjera, te za izražavanje jednadžbe riječima. Tako na primjer:

format fotografske ploče 9 cm × 12 cm,

izmjere sanduka 2 m × 1 m × 0,5 m,

snaga = sila × brzina itd.

Križić upotrebljavamo i prilikom prekidanja većih umnožaka i prenošenja jednog njihovog dijela u niži redak.

2.5.4. Stavljanje zagrada potrebno je u jednadžbama koje sadrže nekoliko računskih operacija; zagrade naznačuju redoslijed kojim operacije treba obaviti. Od zagrada možemo u dvoznačnim slučajevima odustati samo onda ako postoji dogovor o tome kojim se redoslijedom izvode operacije ili ako vrijedi zakon asocijacije. Tako postoji dogovor da su članovi potencije čvršće međusobno povezani negoli članovi umnoška (ili kvocijenta), a članovi umnoška (kvocijenta) čvršće negoli članovi zbroja (razlike). Tako su npr. zagrade nepotrebne, jer je udovoljeno zakonu asocijacije, u ovakvim slučajevima

$$a(bc) = (ab)c = abc, \qquad a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

Nepotrebne su i zagrade u slučaju ovih dogovora (promjena redoslijeda):

$$(\ln x) + 1 = 1 + \ln x, \quad (3\mathrm{e}^x \cos x) + 1 = 1 + 3\mathrm{e}^x \cos x \text{ itd.}$$

Zagrade su neophodno potrebne u razlomcima te prilikom upotrebe funkcija i operatora. Do kakvih višeznačnosti može dovesti izostavljanje zagrada, zorno nam prikazuje tablica A-6. Sve to, dakako, vrijedi i za pisanje kratica mjernih jedinica. Navodimo najpregledniji, višeznačan i jednoznačan način pisanja složene jedinice

$$\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m^2\,h\,^\circ C}} = \mathrm{kcal/m^2\,h\,^\circ C} = \mathrm{kcal/(m^2\,h\,^\circ C)};$$

Tablica A-5

Neke matematičke oznake prema ISO i DIN

Red. br.	Znak	Riječima	Objašnjenje, primjer
		1. Jednakost i nejednakost	
1.01	$=$	jednako	$2\ \mathrm{N}\cdot 4\ \mathrm{m}=8\ \mathrm{Nm}$
1.02	$\equiv$	identično jednako	$f(x)\equiv 0$ znači da funkcija $f(x)$ ima vrijednost nula za svaku vrijednost x
1.03	$\neq$, $\not=$	nejednako, različito	$4\ \mathrm{m}\neq 7\ \mathrm{m}$
1.04	$\not\equiv$, $\not\equiv$	nije identično jednako	
1.05	$\sim$	proporcionalno	Opseg kruga l proporcionalan je njegovom polumjeru r, $l\sim r$
1.06	$\approx$	približno jednako	$\pi\approx 3{,}14$; $2{,}05\ \mathrm{kg}\approx 2\ \mathrm{kg}$
1.07	$\mathrel{\widehat{=}}$	odgovara	$1\ \mathrm{cm}\mathrel{\widehat{=}}5\ \mathrm{m/s}$ znači: 1 centimetar (na crtežu) odgovara brzini 5 m/s
1.08	$<$	manje od	$3<5$
1.09	$>$	veće od	$5>3$
1.10	$\leqq$, $\leq$	manje ili jednako	$x_1\leqq x_2$ znači da je vrijednost x_2 veća ili jednaka vrijednosti x_1
1.11	$\geqq$, $\geq$	veće ili jednako	
1.12	$\ll$	mnogo manje od	$0{,}02\ll 250$
1.13	$\gg$	mnogo veće od	$250\gg 0{,}02$
		2. Algebra i elementi analize	
2.01	$\operatorname{sgn} x$	signum x	$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{ako je } x>0\\ 0, & \text{ako je } x=0\\ -1, & \text{ako je } x<0\end{cases}$
2.02	$\lvert z\rvert$	vrijednost (apsolutna) veličine z	
2.03	$\operatorname{arc} z$	arkus z	Arkus (luk) kompleksnog broja z, $-\pi<\operatorname{arc} z\leqq\pi$
2.04	z^*	konjugirano veličini z	$zz^*=\lvert z\rvert^2$
2.05	$\operatorname{Re} z$	realni dio veličine z	$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+z^*)$
2.06	$\operatorname{Im} z$	imaginarni dio veličine z	$\operatorname{Im} z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-z^*)$

Red. br.	Znak	Riječima	Objašnjenje, primjer
2.07	$n!$	n faktorijela	$n! = 1 \cdot 2 \ldots n$ (n je prirodan broj)
2.08	$\binom{n}{p}$	n iznad p	$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p}$
2.09	Σ	suma, zbroj	$\sum_{k=1}^{n} x_k$ ili $\sum_{k} x_k$
2.10	Π	umnožak, produkt	Granice kao kod znaka sume
2.11	$\sqrt{\ }$	drugi (kvadratni) korijen iz	$\sqrt{z} = z^{1/2}$
2.12	$\sqrt[n]{\ }$	n-ti korijen iz	$\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$
2.13	i, j	imaginarna jedinica	$i^2 = j^2 = -1$
2.14	π	pi	Omjer opsega i promjera kruga, $\pi = 3{,}14159 \ldots$
2.15	$f(x)$	f od x	Funkcija varijable x; umjesto f i x upotrebljavaju se i druga slova, npr. $\varphi(t)$
2.16	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	f od $x_1, x_2, \ldots, x_n$	Funkcija n varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $f(x, y)$ je funkcija varijabli x i y
2.17	(a, b)	otvoreni interval $a\,b$	(a, b) znači: $a < x < b$
2.18	$[a, b]$, $\langle a, b \rangle$	zatvoreni interval $a\,b$, segment $a\,b$	$[a, b] \equiv \langle a, b \rangle$ znači: $a \leqq x \leqq b$
2.19	$\rightarrow$	teži k, približava se, konvergira	$x \rightarrow a$ znači: x se približava vrijednosti a, gdje je a konačan broj
2.20	lim	limes	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ znači: $f(x)$ teži graničnoj vrijednosti b kad se x približi k a
2.21	$\sim$	asimptotski jednako	$f(x) \sim g(x)$ znači: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
		3. Diferencijalni i integralni račun	
3.01	Δf	delta f	Razlika dviju vrijednosti funkcije
3.02	$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$	f crtica x, f dvije crtice $x, \ldots, f$ n crtica x	Derivacija prvog, drugog, ..., n-tog reda funkcije $f(x)$
3.03	$\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$	φ tačka t, φ dvije tačke t	Prva, druga derivacija funkcije $\varphi(t)$

Tablica **A-5** (nastavak)

Red. br.	Znak	Riječima	Objašnjenje, primjer
3.04	$y', y'', \ldots y^{(n)}$	y crtica, y dvije crtice, . . ., y n crtica	Prva, druga, . . . , n-ta derivacija y
3.05	d		Znak diferencijala
3.06	$\mathrm{d}f(x)$		Diferencijal funkcije $f(x)$, $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$
3.07	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$	$\mathrm{d}y$ po $\mathrm{d}x$, d dva y po $\mathrm{d}x$ na drugu, . . . , d n y po $\mathrm{d}x$ na n	Prvi, drugi, . . . , n-ti diferencijalni kvocijent od y
3.08	f_x, f_y	f po x, f po y	Parcijalne derivacije funkcije $f(x, y)$ po x, odnosno y; upotrebljava se i oznaka f'_x odnosno f'_y
3.09	$\frac{\partial f}{\partial x}$	∂f parcijalno po ∂x	$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y$
3.10	f_{xx}, f_{xy}	f po xx, f po xy	$f_{xx} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \; f_{xy} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$
	f_{yx}, f_{yy}	f po yx, f po yy	$f_{yx} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \; f_{yy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
			Upotrebljavaju se i oznake f''_{xx}, f''_{yy} itd.
3.11	$\mathrm{d}f(x, y)$		Potpuni ili totalni diferencijal funkcije $f(x, y)$, $\mathrm{d}f(x,y) = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$
3.12	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	integral $f(x)\,\mathrm{d}x$	Neodređeni integral
3.13	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	integral $f(x)\,\mathrm{d}x$ od a do b	Određeni integral; a i b su granice
3.14	$F(x)\|_a^b$	$F(x)$ između granica a i b	$F(x)\|_a^b = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b$
3.15	δf	delta f	Varijacija funkcije, virtualne promjene
		4. Eksponencijalne i logaritamske funkcije	
4.1	a^x	a na x	Opća eksponencijalna funkcija
4.2	$\exp x$	eksponencijalna funkcija od x	$\exp x \equiv \mathrm{e}^x$; $\mathrm{e} = 2{,}718\,28 \ldots$ je baza prirodnog logaritma
4.3	$\log_a$	logaritam za bazu a	$5 = \log 32$; $a = 2$
4.4	lg	dekadski logaritam	$\lg x = \log_{10} x$

Red. br.	Znak	Riječima	Objašnjenje, primjer
4.5	lb	binarni logaritam	$\mathrm{lb}\, x = \log_2 x$
4.6	ln	prirodni logaritam	$\ln x = \log_e x$
4.7	M_a		Modul logaritamskog sistema za bazu a; $M_a = 1/\ln a$, $M_{10} = 0{,}434\,29\ldots = \lg e = 1/\ln 10$
		5. Trigonometrijske i hiperbolne funkcije	
5.1	sin cos tan cot	sinus kosinus tangens kotangens	$\sin^n x = (\sin x)^n$ $\sec x = 1/\cos x$, $\mathrm{cosec}\, x = 1/\sin x$
5.2	arcsin arccos arctan arccot	arkussinus arkuskosinus arkustangens arkuskotangens	Arkus funkcije, inverzije trigonometrijskih funkcija
5.3	sinh cosh tanh coth	sinus hiperbolni kosinus hiperbolni tangens hiperbolni kotangens hiperbolni	$\sinh^n x = (\sinh x)^n$ Upotrebljavaju se i kraće oznake: sh, ch th, cth
5.4	arsinh arcosh artanh arcoth	areasinus areakosinus areatangens areakotangens	Inverzije hiperbolnih funkcija

u srednjem se slučaju ne zna da li je kcal podijeljena samo sa m^2 ili sa čitavim umnoškom. Dvostruke razlomkove crte pogrešne su (npr. $m/s/s = m/s^2 = ms^{-2}$). Radi toga se pri pisanju složenih jedinica upotrebljavaju kako ravne razlomkove crte, tako i kose crte, ali i pozitivni i negativni eksponenti (ovisi o raspoloživosti prostora i naobrazbi čitatelja kojim će se oblikom moći poslužiti). Tako su npr. ispravna sva tri oblika:

$$\mathrm{kg} = \frac{\mathrm{VAs^3}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{VAs^3/m^2} = \mathrm{VAs^3 m^{-2}}.$$

Pouzdan način primjene *višekratnika jedinica* (k, m, μ, c itd.) opisali smo u odsječcima A.2.3 i B.7.6.

Budući da je uobičajeno da izrazi oblika $1 + a/b + d$ ili $\cos b + 1$ uvijek znače $1 + (a/b) + d$ ili $(\cos b) + 1$, to se brojnici i nazivnici razlomaka s kosom razlomkovom crtom uvijek stavljaju u zagrade, ako su to zbrojevi ili razlike. Tako je na primjer

$$\frac{1+a}{b+d} = (1+a)/(b+d), \qquad \frac{k}{1-x^2} + x = k/(1-x^2) + x \quad \text{itd.}$$

Ukoliko u nazivniku razlomka ili u argumentu (pod argumentom ovdje razumijevamo npr. x u funkciji $f(x)$ ili $2\pi nt$ u izrazu $\sin 2\pi nt$) funkcije postoji *predznak*, također treba upotrijebiti zagradu, dakle

$$1+\tan(-b)=\tan(-b)+1 \quad [\text{ne: } \tan -b+1],$$

$$\frac{2n}{-3p}-n^2=2n/(-3p)-n^2=-2n/3p-n^2.$$

Tablica **A-6**

Dvoznačnost uzrokovana nepostojanjem zagrade

Red. br.	Dvoznačan izraz	Može se tumačiti ovako	Može se tumačiti ili ovako
1	$a/b\cdot c$	$a/(b\cdot c)=a/bc=\frac{a}{bc}$	$(a/b)c=\frac{a}{b}\,c$
2	$t/t_1(1-ht)$	$t/[t_1(1-ht)]$	$(t/t_1)(1-ht)$
3	$\pi/2\sin x$	$\pi/(2\sin x)$	$(\pi/2)\sin x$
4	$\tan p\cdot k$	$\tan(p\cdot k)=\tan pk$	$(\tan p)k=k\tan p$
5	$\sin\varphi\sqrt{1-n^2}$	$\sin(\varphi\sqrt{1-n^2})$	$(\sin\varphi)\sqrt{1-n^2}$
6	$\ln x/3$	$\ln(x/3)$	$(\ln x)/3$
7	$\ln x\frac{d_1}{d_2}$	$\ln\left(x\frac{d_1}{d_2}\right)$	$(\ln x)\frac{d_1}{d_2}$
8	$1/7\mathrm{s}$	$1/(7\mathrm{s})$	$(1/7)\mathrm{s}$

2.5.5. Štampanje indeksa i eksponenata. Indeksi služe prvenstveno zato da se pomoću njih razlikuju fizikalne veličine koje su označene istim slovnim simbolom. U većini slučajeva indeksi se štampaju uspravnim slovima, ali ako indeks predstavlja neku fizikalnu veličinu, onda se preporučuje primjena *kurzivnih* indeksa (preporuku je dala General Assembly of the International Union of Pure and Applied Physics godine 1957). Opću podjelu na simbole fizikalnih veličina sa uspravnim i sa kurzivnim indeksima vidimo u tablici A-4. Navodimo nekoliko primjera upotrebe uspravnih indeksa, koji obično predstavljaju kratice naziva tvari, svojstava i stanja:

α_{n} (kut prema normali), σ_{v} (vlačno naprezanje),

σ_{dop} (dopušteno vlačno ili tlačno naprezanje), $V_{\mathrm{H_2O}}$ (volumen vode),

p_{k} (kritični tlak), v_{max} (maksimalna brzina) itd.

U skladu s tačkom 1 u tablici A-4, niže navodimo nekoliko primjera *kurzivnih* indeksa:

k_n, gdje je $n=1, 2, 3, \ldots$; $f_{xx}=\frac{\partial f}{\partial x^2}$;

σ_z (naprezanje u smjeru z); ΔT_S (porast temperature ΔT pri stalnoj entropiji S), $\Delta\vartheta_{(p=0)} = 20\,°C$ (nadtemperatura $\Delta\vartheta$ pri tlaku $p = 0$) itd.

Ako simbol fizikalne veličine ima *više indeksa*, oni se postavljaju u istoj visini. Pri tom ih međusobno odvajamo zarezom, praznim prostorom ili zagradom, ako smatramo da bi moglo doći do nejasnoće ili višeznačnosti. Na primjer:

$a_{ik} = a_{21}$ (vrijednost veličine a_{ik} pri $i = 2,\ k = 1$),

$a_{n,m-1}$ (vrijednost veličine a_{ik} pri $i = n,\ k = m - 1$),

$(p_s)_{ad}$ (tlak p u spremniku pri adijabatskoj promjeni stanja), $(\sigma_v)_z$ (vlačno naprezanje u smjeru z), $(\sigma_v)_z = (\sigma_v)_{max}$ (vlačno naprezanje σ_v ima maksimalnu vrijednost u smjeru z), $A_{p,g}$ (potrebna grijaća površina) itd.

Ima slučajeva kada autor mora upotrijebiti indeks koji se sastoji od slova s vlastitim indeksom. U takvim slučajevima (koje valja izbjegavati) simboli su nepregledni, na primjer:

B_{t_1} (vrijednost magnetske indukcije u trenutku t_1),

V_{p_1, T_1} (volumen pri tlaku p_1 i termodinamičkoj temperaturi T_1) itd.

Simbol fizikalne veličine ponekad ima uz indeks (koji je spušten) istodobno i *eksponent*, koji je podignut. U takvim slučajevima eksponent treba postaviti iznad prvog slova indeksa. U protivnom slučaju čitav je simbol nepregledan, a katkada može uzrokovati nejasnoće. Navodimo nekoliko primjera korektnog i lošeg štampanja:

r_{ik}^2 ili $(r_{ik})^2$, ali ne $r_{ik}{}^2$; a_{m+n}^2 ili $(a_{m+n})^2$, ali ne $a_{m+n}{}^2$;

v_{max}^2 ili $(v_{max})^2$, ali ne $v_{max}{}^2$; Re_i^* ili $(Re_i)^*$, ali ne $Re_i{}^*$;

$H_2^{++}SO_4^{--}$, ali ne $H_2{}^{++}\,SO_4{}^{--}$; nipošto ne valja $p^k{}_i$ umjesto p_i^k itd.

Postavljanje i uspravnih i kurzivnih indeksa uzrokuje dodatni posao i utrošak vremena u tiskarama, dakle i povećanje troškova publikacije. Stoga se od opisanog principa odustaje ako je to ikako moguće, tj. ako upotreba *samo jednog* pisma (u pravilu uspravnog) ne uzrokuje pogrešno razumijevanje štampanog teksta. Za eksponente to pojednostavnjenje ne vrijedi: njih uvijek valja tiskati *kurzivnim* slovima, osim — dakako — ako su to brojevi, dakle npr. $e^{-t/T}$, ali I^2 itd.

2.5.6. Označivanje atoma. Razmještaj brojeva oko simbola kemijskog elementa treba da je jednoznačan. Prema DIN 1338 taj razmještaj je ovakav:

$$\begin{matrix} N & L \\ & E \\ P & S \end{matrix}$$

Ovdje slova označuju: E — kemijski element, L — naboj (npr. $^{++}$) ili uzbuđeno stanje (zvjezdica *), N — broj nukleona (maseni broj), S — stehiometrijski broj, P — broj protona (redni broj, nabojni broj jezgre).

Tako imamo na primjer: $^{63}_{30}Zn^{++}$, H_2, U^* itd.

Broj protona može se propustiti u mnogim slučajevima, jer je on jednoznačno povezan sa simbolom kemijskog elementa. U *tekstu* se broj nukleona može pisati i iza simbola kemijskog elementa, ali tada u istoj visini s njime i istom veličinom slova, npr. U 235.

3. Temeljni pojmovi mjerne tehnike. Obrada rezultata ponovljenih mjerenja

Mjerenjem se utvrđuje vrijednost fizikalne veličine u odnosu prema odabranoj mjernoj jedinici. Pri tom je mjerena veličina najčešće stalna, a uvijek se pretpostavlja da je jedinica konstantna. Pri najpreciznijim mjerenjima, tj. u vrhunskoj metrologiji, izlazi na vidjelo da toj pretpostavci nije udovoljeno u potpunosti. O tome se raspravlja u nizu odlomaka glava A, B, D, E i G ove knjige. I uz pretpostavku da je jedinica konstantna, svaki mjerni rezultat je pogrešan, sadrži manju ili veću pogrešku. Da bi se što pouzdanije procijenila stvarna vrijednost mjerene veličine, mjerenja se mnogostruko ponavljaju. U ovom je poglavlju opisan postupak kojim se od mnoštva pojedinih vrijednosti, rezultata ponovljenih mjerenja, zaključuje o najpouzdanijem konačnom rezultatu i ocjenjuje nepouzdanost tog rezultata. Taj postupak, *obrada* rezultata ponovljenih mjerenja, ovdje je opisan s namjerom da pruži jasnu fizikalnu sliku i omogući *praktičnu primjenu*. Dokazi i strogi izvodi mogu se naći u specijalnim knjigama o teoriji pogrešaka i matematičkoj statistici.

3.1. Neki temeljni pojmovi mjerne tehnike

Pri obradi rezultata ponovljenih mjerenja moramo imati jasno definirano značenje izraza koji tvore kostur terminologije mjerne tehnike. Postojeća terminologija nije jedinstvena, čak su i neki temeljni izrazi prilagođeni pojedinim znanstvenim i tehničkim granama. Jedan od uzroka tome svakako su historijski razvoj i starost pojedinih grana, a nije malen ni utjecaj nekoliko svjetskih jezika. Da bismo izbjegli moguće nesporazume, u idućih pet odlomaka opisat ćemo ili definirati značenje nekih izraza koji se ubrajaju među osnovne.

3.1.1. Mjerna pogreška i relativna mjerna pogreška. Razliku između *izmjerene* vrijednosti x_i fizikalne veličine i njene *stvarne* (istinite, prave) vrijednosti x zovemo *mjerna pogreška* ili kraće *pogreška* (slovenski pogreška, pogrešek, napaka, rus. ošibka, franc. erreur, engl. error, njem. Fehler). Umjesto tih naziva upotrebljavaju se i izrazi »apsolutna mjerna pogreška« i »apsolutna pogreška«. Označimo li stvarnu vrijednost mjerene fizikalne veličine sa x, a mjerenjem utvrđenu vrijednost sa x_i, onda je prema gornjoj definiciji mjerna pogreška a_i:

$$\text{pogreška } a_i = x_i - x. \tag{3.1-1}$$

U strogoj teoriji pogrešaka veličina a_i zove se *stvarna pogreška* (istinita, prava pogreška). Ako smo, na primjer, mjerenjem duljine neke štapne mjere utvrdili vrijed-

nost $x_i = 125{,}1$ mm, a *znamo* da je njena stvarna duljina $x = 125$ mm, onda prema jednadžbi (3.1-1) mjerna pogreška iznosi

$$a_i = x_i - x = 125{,}1 \text{ mm} - 125 \text{ mm} = 0{,}1 \text{ mm}.$$

Ovaj primjer mogao bi nas dovesti do *krivog* zaključka da se stvarna pogreška a_i može direktno izmjeriti. Ako bi to bila istina, mogli bismo zaključiti da je stvarna vrijednost $x = x_i - a_i$. Krivi zaključak nastao je zbog pogrešne pretpostavke o tome da *znamo* stvarnu vrijednost x. Iako nema sumnje o tome da postoji stvarna vrijednost x mjerene fizikalne veličine, tu istinsku vrijednost nikako i nikada ne ćemo saznati, jer je moramo ustanoviti mjernim eksperimentom, mjerenjem, a rezultat mjerenja uvijek sadrži pogrešku. Najviše što možemo učiniti jest to da saznamo *interval* za koji možemo reći: postoji velika *vjerojatnost* da se stvarna vrijednost mjerene veličine nalazi u tom intervalu. Zato se u duhu teorije vjerojatnosti jednadžba (3.1-1) može opisati ovako: vjerojatna vrijednost x mjerene fizikalne veličine jednaka je razlici između izmjerene vrijednosti x_i i *vjerojatne* mjerne pogreške a_i.

Budući da stvarnu vrijednost mjerene veličine nikako ne možemo ustanoviti, preostaje nam jedino to da je *procijenimo*. U odsječku 3.3 dokazuje se da njena *najbolja* procjena jest *srednja vrijednost* (aritmetička sredina). Ona se dobiva mnogobrojnim ponovljenim mjerenjima konstantne fizikalne veličine, izvedenima sa ciljem da se što više približimo stvarnoj vrijednosti ili, drugim riječima, da što više suzimo interval u kojem se nalazi nepoznata stvarna vrijednost. Zato se u mjernoj tehnici pogreška izražava u odnosu prema *srednjoj vrijednosti*, a ne prema stvarnoj vrijednosti. Strogo se tako definirana pogreška zove

$$\text{prividna pogreška } b_i = x_i - \bar{x}, \tag{3.1-2}$$

gdje slovo $\bar{x}$ (sa crticom povrh) označuje srednju vrijednost (odlomak 3.3.1). Razlika između prividne pogreške b_i i stvarne pogreške a_i u pravilu je neznatna u odnosu prema x_i. Stoga se pri praktičnom računanju jednadžbom (3.1-2) govori jednostavno o »pogrešci«, a ne o »prividnoj pogrešci«.

Izolirani podatak o mjernoj pogrešci ne daje dovoljnu informaciju o mjernom postupku. Što znači, na primjer, podatak da mjerna pogreška iznosi $b_i = 0{,}1$ mm? Kolika je pri tom bila duljina mjerene veličine, dva kilometra, pola metra? No ako navedemo da je srednja vrijednost iznosila 125,1 mm, onda nam usporedba podataka 0,1 mm i 125,1 mm pruža dobru informaciju o tom mjernom eksperimentu. Ove dvije vrste podataka udružuje posebna fizikalna veličina

$$\text{relativna pogreška } g = \frac{b_i}{\bar{x}} = \frac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}}. \tag{3.1-3}$$

U našem primjeru duljine štapne mjere relativna mjerna pogreška iznosi

$$g = \frac{0{,}1 \text{ mm}}{125{,}1 \text{ mm}} = 0{,}0008 = 8 \cdot 10^{-4}.$$

Napominjemo da većina autora definira relativnu pogrešku pomoću *stvarne* vrijednosti x, dakle izrazom

$$g = \frac{x_i - x}{x}, \tag{3.1-4}$$

a ne jednadžbom (3.1-3). Smatramo da to nema smisla, jer stvarnu vrijednost mjerene veličine nikada ne znamo, ali možemo saznati njenu najbolju procjenu, srednju vrijednost. Pri konkretnom računanju, međutim, svi *moramo računati* pomoću (3.1-3), pa ne vidimo razloga zašto se toj stvarnosti ne bi prilagodila i *definicija* relativne pogreške.

Relativna pogreška izražava se i kao omjer cijelih brojeva. Na primjer, u našem slučaju umjesto $g = 8 \cdot 10^{-4}$ možemo pisati $g = 8 : 10^4 = 8 : 10000$. Time stječemo zornu predodžbu, jer to znači da je riječ o takvom mjerenju kao da duljinu od 10000 mm = 10 metara mjerimo s pogreškom 8 mm. Prema tome relativnu pogrešku navodimo u nekoliko oblika, na primjer:

$$g = 8 \cdot 10^{-4} = 8 : 10^4 = 8 : 10000 = 8 \text{ mm} : 10 \text{ m}.$$

Katkada se relativna pogreška izražava i postocima (procentima, %) ili promilima (‰). Budući da je % samo drugi oblik prikazivanja stotinke, tj.

$$\text{postotak} = \% = 1/100 = 10^{-2},$$

to za naš slučaj vrijedi $g = 8 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-2}\ \% = 0{,}08\ \%$. Zbog toga veličinu g neki autori zovu »procentualnom pogreškom«. To nije ispravno, jer mjerna *jedinica*, a % je mjerna jedinica tzv. brojčane veličine, ne smije definirati fizikalnu *veličinu*. U tom duhu bismo, naime, $g = 0{,}8‰$ mogli nazvati »promilnom pogreškom«, jer je

$$\text{promil} = ‰ = 1/1000 = 10^{-3}.$$

Riječ je, u stvari, stalno o *istoj* vrijednosti iste fizikalne veličine g definirane jednadžbom (3.1-3), ali izraženoj s tri različite brojčane mjerne jedinice, tj. $g = 8 \cdot 10^{-4} = 0{,}08\ \% = 0{,}8‰$ (vidi odsječak 1.3).

Predznak vrijednosti pogreške nije uvijek poznat, tj. b_i može predstavljati bilo pozitivnu bilo negativnu vrijednost, na primjer $b_i = +0{,}1$ mm ili $b_i = -0{,}1$ mm. Tu dvoznačnost opisujemo pri *konkretnim* podacima znakom $\pm$, tj. $b_i = \pm 0{,}1$ mm. Budući da b_i predstavlja brojnik definicijske jednadžbe (3.1-3) relativne pogreške g, taj se znak često pojavljuje i pri navođenju njenih konkretnih vrijednosti, dakle $g = \pm 8 \cdot 10^{-4} = \pm 0{,}08\ \% = \pm 0{,}8‰$.

3.1.2. Pogreške mjera i pokaznih mjerila. Prije nego što prema njemačkoj normi od godine 1963. (DIN 1319: Grundbegriffe der Messtechnik) definiramo dva pojma navedena u naslovu, spomenut ćemo što znače nazivi »mjera« i »pokazno mjerilo«. *Mjera* je tako izrađeno tijelo da jedna od njegovih osobina utjelovljuje i pohranjuje stanovitu vrijednost neke fizikalne veličine (podrobnije o tome vidi u odlomku 5.3.1). Mjera je, na primjer, kilogramski *uteg* koji utjelovljuje vrijednost $m = 1$ kg fizikalne veličine »masa«. U mjernoj tehnici postoji bezbroj mjera, od normale električkog napona (odsječak E.3.5) do menzura kemičara. *Pokazno mjerilo* je takav mjerni uređaj u kojega je pokazivanje značke na skali proporcionalno vrijednosti mjerene fizikalne veličine. Pri tom »značka« može biti materijalna kazaljka, svjetlosna crta ili kružić, brid, meniskus stupca tekućine itd., a posve je svejedno da li se pomiče značka ili skala.

Pogreška mjere Δx je razlika između stvarne (istinite, prave) vrijednosti x_i koju mjera utjelovljuje (njem. Istmass) i naznačene vrijednosti x_0 (njem. Sollmass), tj. one vrijednosti koju bi mjera trebalo da utjelovljuje, dakle

$$\text{pogreška mjere } \Delta x = x_i - x_0. \qquad (3.1\text{-}5)$$

»Stvarna vrijednost« x_i mjere utvrđuje se usporedbom s pramjerilom, pramjerom, standardom, sekundarnim standardom itd. (odsječak 5.3). Na primjer, na utegu je naznačena njegova nazivna vrijednost $m_0 = 1$ kg, a mjerenjem je utvrđena stvarna vrijednost (»stvarna« u smislu procjene opisane u odlomku 3.1.1) $m_i = 0{,}98$ kg; pogreška mjere prema (3.1-5) iznosi $\Delta m = m_i - m_0 = -0{,}02$ kg $= -20$ g. Pri obradi mjernih rezultata »pogreška mjere« Δx uzima se u obzir kao sistematska pogreška (odlomak 3.2.3).

Relativna pogreška mjere g definirana je po načelu jednadžbe (3.1-3), ali s time što ulogu srednje vrijednosti preuzima *naznačena* vrijednost x_0, dakle

$$\text{relativna pogreška mjere } g = \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{x_i - x_0}{x_0}. \qquad (3.1\text{-}6)$$

Za spomenuti primjer utega možemo izračunati relativnu pogrešku $g = \Delta x/x_0 = -0{,}02$ kg/1 kg $= -0{,}02 = -2 \cdot 10^{-2} = -2\%$.

Jednadžbe (3.1-5,6) istodobno definiraju pogrešku *pokaznog mjerila* Δx i relativnu pogrešku pokaznog mjerila ako pod simbolima x_i i x_0 razumijevamo:

x_i — stvarno pokazivanje, x_0 — potrebno pokazivanje.

Pri tom se pod izrazom »potrebno pokazivanje« (njem. Sollanzeige) razumijeva ono pokazivanje koje bi dao »bespogrešan« mjerni uređaj, u stvarnosti to može biti pramjerilo ili pramjera. Ako je, na primjer, ampermetar pokazao vrijednost $I_i = 1{,}03$ A, a stvarna je vrijednost jakosti struje $I_0 = 1{,}025$ A (»potrebno pokazivanje« koje se može utvrditi, na primjer, nuklearnim pramjerilom; vidi odsječak E.3.2), pogreška mjerila (ampermetra) iznosi $\Delta I = I_i - I_0 = +0{,}005$ A. Njegova relativna pogreška prema jednadžbi (3.1-6) iznosi $g = \Delta I/I_0 = +0{,}005$ A/1,025 A $= 4{,}88 \cdot 10^{-3} \approx 5‰ = 0{,}5\%$.

3.1.3. Netačnost, tačnost i preciznost. Ove riječi, koje se bezbroj puta javljaju u mjernoj tehnici, prečesto se rabe u *pogrešnom* značenju. Zato treba da budemo načisto s time što one znače i kakav im je pravi smisao. To ćemo pokušati objasniti idućim razlaganjima pretpostavljajući da je pojam *pogreška* (mjerna pogreška) posve nedvoumno definiran u odlomku 3.1.1.

U nas je riječ *netačnost* (slov. i rus. netočnost, njem. Ungenauigkeit) u stanovitoj mjeri sinonim riječi pogreška. Njome se općenito želi reći da je pogreška mjernog rezultata (izmjerene vrijednosti) manja ili veća. U tom smislu »manja netačnost« znači manju pogrešku, a »netačniji rezultat« veću pogrešku. Izraz »netačnost«, prema tome, ne opisuje neku definiranu fizikalnu veličinu, kao što je — na primjer — relativna pogreška (3.1-3), već predstavlja *općenitu* naznaku stupnja slaganja izmjerene i stvarne vrijednosti (procijenjene srednjom vrijednošću) mjerene fizikalne veličine.

Opozicija izrazu netačnost jest riječ *tačnost* (slov. i rus. točnost, engl. accuracy, njem. Genauigkeit). Ona općenito označuje obrnutu proporcionalnost pogrešci, tj. što je pogreška manja, to je »tačnost« veća. Općenitost značenja riječi tačnost može pri kvantitativnim naznakama uzrokovati bitne nesporazume (vidi rezultat ankete u odlomku 3.1.5). Zato najnovija njemačka norma DIN 1319 od godine 1963. preporučuje da se pri navođenju kvantitativnih podataka izbjegava termin »mjerna tačnost« (Messgenauigkeit) i umjesto njega upotrebljavaju *definirani* pojmovi »mjerna nesigurnost« i »granična pogreška« (odsječak 3.8).

Amerikanci, za razliku od Nijemaca, državnim su standardom *definirali* što znači riječ tačnost (accuracy). The American Standards Association (Standard C.42.30 od godine 1957: Definitions of Electrical Terms, Group 30, Instruments, Meters and Meter Testing) definira *tačnost* ovom rečenicom: »Tačnost pokazane ili zabilježene vrijednosti izražava se omjerom pogreške pokazane vrijednosti i stvarne vrijednosti.« (The accuracy of an indicated or recorded value is expressed by the ratio of the error of the indicated value to the true value.) Prema tome američki izraz *accuracy* znači *relativnu pogrešku* definiranu jednadžbom (3.1-4). Kad ćemo u ovoj knjizi upotrijebiti riječ tačnost, razumijevat ćemo je u duhu citiranog američkog standarda.

Riječ *preciznost* (slov. natančnost, preciznost, franc. précision, engl. precision; u spomenutoj njemačkoj normi DIN 1319 termin Präzision uopće se ne spominje!) također ima općenito značenje, ne definira neku fizikalnu veličinu. Pod *preciznošću mjerenja* neke fizikalne veličine razumijevamo *ponovljivost* (engl. repeatability) mjernog rezultata ili stupanj međusobnog podudaranja niza pojedinih izmjerenih vrijednosti dobivenih ponovljenim mjerenjima konstantne fizikalne veličine. O preciznosti se prosuđuje na temelju *većeg broja* rezultata ponovljenih mjerenja. Što se bolje međusobno podudaraju (»manje rasipaju«) izmjerene vrijednosti, to je mjerenje preciznije. U američkih autora možemo naći, na primjer, ovakav opis pojma preciznosti: »Preciznost mjerenja je njegova ponovljivost izražena odstupanjem pojedinog mjernog rezultata ili grupe rezultata od srednje vrijednosti. Izrazom preciznost mjernog postupka smjera se na stupanj međusobnog podudaranja rezultata nezavisnih ponovljenih mjerenja konstantne fizikalne veličine pri specificiranim uvjetima.« Sve su to, dakako, *opisi* općeg pojma »preciznost«, a ne definicije. Egzaktno se preciznost izražava fizikalnom veličinom »standardno odstupanje«, definiranom kao ekvivalent stvarnih odstupanja svih pojedinih mjernih rezultata od srednje vrijednosti (vidi odlomak 3.3.1). I »nepouzdanost«, definirana u odlomku 3.3.5, strogo je definirana veličina kojom se procjenjuje preciznost.

Riječ *preciznost* pojavljuje se u novije vrijeme i kao *definiran* metrološki pojam. U najnovijoj kanadskoj, američkoj, australskoj i britanskoj metrološkoj periodici zapazili smo da se pod izrazom »preciznost« (engl. precision) razumijeva »relativno standardno odstupanje« r koje smo definirali u odlomku 3.3.3. U tom se smislu, na primjer, kaže: vrhunska preciznost interferencijskog mjerenja duljine iznosi $2 \cdot 10^{-8}$, preciznost najboljih vaga je $1 \cdot 10^{-8}$, preciznost mjerenja (usporedbe) istosmjernog otpora bliskog vrijednosti 1 Ω iznosi 0,03 ppm ($= \pm 3 \cdot 10^{-8}$, jer je ppm = part per million $= 1:10^6 = 1 \cdot 10^{-6}$) itd. U sva tri navedena primjera riječ je o »relativnom standardnom odstupanju« $r = s/\bar{x}$, tj. o omjeru standardnog odstupanja s i srednje vrijednosti $\bar{x}$. Čini se da će kratkoća naziva tako definiranog pojma »preciznost« uzrokovati da se on prihvati i u drugim jezicima, a ne samo u engleskom. Zato smatramo korisnim da naglašeno zabilježimo *definirana* značenja izraza »tačnost« (prema citiranom američkom standardu) i »preciznost«:

tačnost (accuracy) = relativna pogreška (odlomak 3.1.1),

preciznost (precision) = relativno standardno odstupanje (odlomak 6.3.3).

Budući da smo opsežniju primjenu determiniranog značenja riječi preciznost zapazili tek u toku godine 1968, nismo je mogli u znatnijoj mjeri upotrebljavati u ovoj knjizi, koja je u to vrijeme već bila složena u tiskari. Da bismo ipak upozorili na prikladnost obaju pojmova, spomenut ćemo kako se pomoću njih mogu nacrtati vrlo zorni *zajednički* dijagrami preciznosti mjerne metode i

najveće tačnosti pojedinog mjerenja. Ako apscisa predočuje vrijednosti fizikalne veličine o čijoj je metrologiji riječ (usporedi sa slikom A.75, koja predstavlja zametak takve interpretacije), a ordinata vrijednosti veličina »tačnost« i »preciznost«, možemo nacrtati dvije krivulje. Jedna će prikazivati najveću *tačnost* mjernih rezultata, dok će druga, smještena povrh prve, prikazivati *preciznost* mjernog postupka.

Čini nam se da bi pojmovno najprikladnija zamjena dugačkog izraza »relativno standardno odstupanje« bio termin *nepreciznost* ($=r=s/\bar{x}$). U najnovijoj angloameričkoj metrološkoj literaturi (1968) zapaža se, naime, i pojavljivanje izraza *netačnost* (unaccuracy) za veličinu »relativna pogreška« g definiranu jednadžbom (3.1-3). Usvajanjem izraza *netačnost* i *nepreciznost* dobili bismo uz već definirane pojmove *nepouzdanost* (odlomak 3.3.5) i *nesigurnost* (3.8.1) sistematsku cjelinu. Navedena četiri izraza (s predmetkom »ne«) imaju, naime, pojmovnu prednost pred sadašnjima. Tako, na primjer, *veća* vrijednost veličine g iz (3.1-3) znači *veću* relativnu pogrešku, *veću* netačnost, *manju* tačnost! U prvi mah to se može činiti kao igra riječi, ali pri analizi opisa mjernih rezultata ta igra znade uzrokovati nedoumice pa i greške. U to se čitatelj može uvjeriti sâm ako izračuna nekoliko konkretnih primjera i pokuša ih opisati riječima.

Izjava »da su rezultati precizni« još ne znači da je relativna pogreška tih rezultata malena, da su »tačni« u smislu američke definicije (accuracy). Ako, naime, srednja vrijednost stanovitog broja mjernih rezultata znatno odstupa od stvarne vrijednosti mjerene veličine, ona će imati znatnu pogrešku (malu tačnost). Pri tom se pojedini rezultati mogu međusobno samo neznatno razlikovati, tj. mjerni je postupak vrlo precizan. Uzrok tome su stalni utjecaji koji se u čitavom nizu mjernih rezultata pojavljuju kao »sistematske pogreške« (odsječak 3.2) ako su ponovljena mjerenja obavljena pri jednakim uvjetima. Prema tome preciznost nije garancija za malu pogrešku (veliku tačnost). Obrnuta situacija, tj. velika tačnost bez dobre preciznosti malo je vjerojatna.

U literaturi se pojmovi preciznost i tačnost često ilustriraju primjerom iz balistike koji ćemo ovdje navesti: gađanje puškom u metu na kojoj su nacrtani krugovi i centar kao sjecište vodoravne i vertikalne crte. Usporedba s mjerenjem utoliko je nepotpuna što pri mjerenju ne znamo stvarnu vrijednost (centar mete), dok je pri gađanju križ u sredini mete jasno definiran cilj. Može se desiti da i nepreciznom puškom otprve pogodimo u centar. No ako treba taj rezultat ponoviti idućim metkom, pa onda mnogim daljnjim mecima, to će rjeđe uspjeti lošom puškom negoli preciznim oružjem. Pogoci loše puške rasipat će se unutar širokog kruga, dok će se pogoci precizne gomilati tijesno oko centra. Ako puše jak i stalan poprečni vjetar ili ako je mušica puške malo zakrenuta, i pogoci precizne puške bit će odmaknuti od centra, ali će svi biti nagomilani na nekom dijelu mete. To je posljedica utjecaja sistematske pogreške, stalnog vjetra ili pomaknute mušice. Velika rasipanja pogodaka, dakle velika nepreciznost rezultata, nastala bi kod promjenljiva vjetra ili ako između pojedinih gađanja nasumce pomičemo mušicu. U tom slučaju cjelokupno gađanje nije izvedeno pod *jednakim uvjetima* bez obzira što je strijelac bio jednako pažljiv i odmoren.

3.1.4. Osjetljivost i neodređenost. U mjernoj operativi nerijetko se izraz preciznost pogrešno upotrebljava tamo gdje je riječ o *osjetljivosti* (slov. občutljivost, rus. čuvstviteljnost, franc. sensibilité, engl. sensitivity, njem. Empfindlichkeit). Osjetljivost S pokaznog mjerila (odlomak 3.1.2) jest *omjer* promjene njegova

pokazivanja Δy i promjene Δx mjerene fizikalne veličine koja je uzrokovala promjenu pokazivanja, dakle

$$S = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3.1-7}$$

Pri tom promjena Δx mora biti što manja, tek tolika da se njena vrijednost može sigurno utvrditi. Ako, na primjer, promjena jakosti struje galvanometra $\Delta I = \Delta x = 0{,}5$ nA (n = nano = 10^{-9}) uzrokuje promjenu pokazivanja na njegovoj skali $\Delta y = 1{,}5$ mm, onda je strujna osjetljivost tog galvanometra $S = 1{,}5$ mm/0,5 nA = 3 mm/nA.

Jednadžba (3.1-7) nije dostatna ako je konstrukcija pokaznog mjerila takva da pokazivanje y nije u čvrstom odnosu prema fizikalnoj veličini x koju mjerilo mjeri. To je, na primjer, slučaj kod takvog svjetlosnog galvanometra kojemu se može mijenjati udaljenost L između zrcala i skale. Zamislimo da je pri $L = 1$ m ustanovljeno $\Delta y = 1{,}5$ mm i $\Delta I = \Delta x = 0{,}5$ nA. U takvom slučaju treba indeksom ili drukčije upozoriti kolika je bila udaljenost, na primjer: $S_{L=1\text{m}} = 3$ mm/nA. Ako osjetljivost pokaznog mjerila nije jednaka na svakom mjestu skale, mora se izričito naglasiti za koju vrijednost veličine y ili x vrijedi navedeni podatak S ili S_L. Napominjemo da velika osjetljivost pokaznog mjerila nije nikakva garancija za malu pogrešku ili dobru preciznost. Vrlo osjetljivo pokazno mjerilo može biti vrlo neprecizno!

Dok se izraz osjetljivost odnosi na svakodnevnu mjernu tehniku, pojam *neodređenost* pojavljuje se u vrhunskoj metrologiji. Njime se općenito označuje nepouzdanost mjernog rezultata ili nesigurnost ponavljanja (reprodukcije) nekog fizikalnog stanja. Izraz »neodređenost« možemo u naše vrijeme smatrati ponešto zastarjelim, jer novija metrološka terminologija raspolaže *definiranim* pojmovima *nepouzdanost* (odlomak 3.3.5) i *nesigurnost* (odlomak 3.8.1). Razliku između ta tri pojma zorno opisuje analiza rezultatâ mjerenja jakosti električne struje pomoću tzv. strujne vage u odlomku E.3.1.5. Prema starijoj terminologiji u tom bismo slučaju govorili o »neodređenosti« $\pm\, 4 \cdot 10^{-6}$, bez obzira na statističku sigurnost (odlomak A.3.6.5) i utjecaj procijenjene preostale sistematske mjerne pogreške.

3.1.5. Terminološke poteškoće mjerne tehnike. Postoji mnoštvo termina kojima je zajedničko porijeklo u nazivu »mjerna pogreška«. Nabrojimo nekoliko izraza koji se u vezi s pogreškom upotrebljavaju u udžbenicima i priručnicima o mjerenju i statistici: standardno odstupanje, standardna pogreška, vjerojatna pogreška, srednja pogreška, prosječna pogreška, nepodudarnost, srednja kvadratna vrijednost nepodudarnosti, normalna pogreška, standardna normalna pogreška, sigma, dvostruka (trostruka) sigma, neodređenost, nesigurnost, područje nepouzdanosti, granice tolerancija, maksimalna pogreška, minimalno odstupanje itd. itd. U većini slučajeva ova šuma naziva ne uzrokuje štetne posljedice. No u pojedinim, i to kritičnim slučajevima, od presudne je važnosti znati što je autor *doista* mislio kad je primijenio neki od tih naziva.

Dva su, po mišljenju autora ove knjige, uzroka tom preobilju naziva: historijski razvoj pojedinih znanstvenih grana i specijaliziranost tih grana. Historijski je razvoj egzaktnih znanosti tekao tako da je teorija pogrešaka najprije temeljito razrađena u astronomiji i geodeziji. Pri tom je nastala jasno definirana terminologija, koja je dobro usklađena između mnogih, vjerojatno većine, jezika. Neovisno o astronomiji i geodeziji razvila se kasnije gigantska znanost o elektromagnetizmu. Možda

uslijed svoje autonomnosti, ona je svoju terminologiju u vezi s pogreškama, jedinicama, mjerama i pramjerilima razvila dosta osebujno, u svakom slučaju dosta različito od geodetske znanosti. Pri tom je ta terminologija bitno obilježena jezikom iz kojeg potječe (francuski, njemački, engleski). Ekstrem takvog nacionalnog utjecaja danas osjećamo u terminologiji nuklearne fizike i tehnike, u njoj prevladavaju engleski izrazi, čak se nekritički uvlače u druge jezike. Sve to, a u novije vrijeme i nazivlje matematičke statistike, odrazuje se u terminologiji mjerne tehnike u kojoj danas stvarno vlada kaos iako pojedine nacionalne norme to žele spriječiti.

Koliki je taj kaos možemo zaključiti iz rezultata ankete koju je početkom godine 1966. objavio švedski geodet *B. Hallert* iz programometrijskog odjela stockholmskog Tehnološkog instituta. On je 20 osoba zamolio da mu odgovore što za svakoga od njih znači rečenica »tačnost iznosi jedan mikron« (mikron je stari naziv za »mikrometar« = μm = 10^{-6} m), kojom se opisuje jedan instrument za mjerenje duljine. Anketirani su bili *vrhunski stručnjaci* u raznim granama tehnike, a neki od njih bili su i predavači na sveučilištu. Dobio je ove odgovore: *pet* osoba smatra da je to »standardno odstupanje pojedinog mjerenja«, *jedanaest* misli da je riječ o »maksimalnoj pogrešci«, *jednom* se čini da je to »vjerojatna pogreška«, a preostala *trojica* su izjavila da ne znaju!

Posve je prirodno da se nejedinstvenost terminologije mjerne tehnike mora odraziti i u ovoj knjizi. Iako je autor pokušao da je barem donekle unificira, upotrijebljena terminologija znatno odstupa od željenog ideala — usklađenosti. Budući da se ova knjiga odnosi na mjerenja i mjerne jedinice u gotovo svim granama, autor se nije usudio dosljedno provoditi stanoviti koncept terminologije i time staviti na kocku razumljivost, tj. svjesno riskirati da se čitatelji i autor u pojedinim granama neće razumjeti. Pretpostavlja, naime, da će stručnjake pojedinih grana ipak pretežno zanimati njihovo područje, a manje ostale grane koje knjiga također obrađuje. Zato su pojedine glave pa čak i poglavlja ponegdje obojeni specijaliziranom terminologijom mjerne tehnike, ograničenom samo na stanovito područje.

3.2. Granice mjerne tehnike. Vrste mjernih pogrešaka

Bezbrojni su uzroci mjernih pogrešaka, ali i u različitim granama one imaju neka zajednička obilježja. Stoga ih možemo klasificirati prema srodnosti. Opis karakterističnih pogrešaka, svrstanih u okvire takve klasifikacije, sadrže posljednja četiri odlomka ovog odsječka. Prije toga se u odlomku 3.2.1 upozorava na granicu, danas još gotovo posve načelnu, preko koje se mjerna pogreška ne može smanjiti.

3.2.1. Prirodne granice mjerne tehnike. U privredi, industriji i razvoju nastoji se tačnost i preciznost mjerenja poboljšati do one granice koja je ekonomski opravdana ili podnošljiva. U vrhunskoj metrologiji, na koju se oslanjaju eksperimentalna istraživanja svih grana znanosti i grandiozni znanstveno-tehnički pothvati (space program!), ta ekonomska granica praktički ne postoji. Zato bogate države, industrijski razvijene, životno zainteresirane za daljnje unapređenje svojih ionako fenomenalno uspješnih fundamentalnih i primijenjenih znanosti, izdašno podupiru vlastite i međunarodne metrološke zavode (vidi poglavlje 7). Jedan od rezultata djelovanja tih zavoda je daljnje smanjenje mjerne pogreške i nepouzdanosti mjernih rezultata.

To postepeno izoštravanje mjernih postupaka, metoda i uređaja ipak ima na svom kraju nesavladivu granicu koju je postavila sama priroda. Suvremena vrhun-

ska metrologija nije još, doduše, frontalno doprla do te granice, ali se u nekim specijalnim slučajevima sukobila s njom, što ćemo vidjeti na dva primjera. Prije nego što ih navedemo, spomenimo da tu prirodnu granicu opisuje *relacija neodređenosti*

$$\Delta x \, \Delta I = \Delta x \, \Delta(mv) \approx h, \tag{3.2-1}$$

koju je *Heisenberg* izveo iz osnovnih zakona kvantne teorije. U jednadžbi (3.2-1) simbol Δx predstavlja neodređenost položaja elektrona, $\Delta I = \Delta(mv)$ neodređenost (raspršenje) impulsa, a $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js jest Planckova konstanta. Relacija (3.2-1) izražava činjenicu da se ne može *istodobno* bespogrešno ustanoviti i brzina i položaj elektrona. Ako se pak zadovoljimo time da brzinu elektrona poznajemo s pogreškom Δv, njegov ćemo položaj prema (3.2-1) u najboljem slučaju moći znati s pogreškom $\Delta x \approx h/(m \, \Delta v)$.

Do relacije neodređenosti (3.2-1) možemo doći i relativno jednostavnim pokusima kakve su učinili *Heisenberg* i *Bohr*. Zamislimo da smo u trenutku t_1 vrlo tačno izmjerili brzinu v_1 elektrona. Time smo s malom pogreškom saznali i njegov impuls $I_1 = mv_1$. Da bismo izračunali trajektoriju elektrona, moramo u idućim trenucima $t_2, t_3, \ldots$ izmjeriti njegov položaj u prostoru. Ako se giba po pravcu, mjerenje položaja svodi se na utvrđivanje koordinata $x_2, x_3, \ldots$ duž pravca, što se može s malom pogreškom utvrditi mikroskopom. Motrenje elektrona mikroskopom znači bombardiranje elektrona svjetlosnim kvantima energije $hf = hc/\lambda$, gdje slova f, c i λ označuju frekvenciju, brzinu i duljinu vala svjetla. Da bismo precizno utvrdili položaj tako male čestice kao što je elektron, moramo upotrijebiti svjetlo vrlo male duljine vala λ, jer razlučivanje mikroskopa, tj. svojstvo optičkog sistema da učini dvije susjedne tačke vidljivima, iznosi samo oko λ ($d = \lambda/\sin \alpha$). Prema tome kvant svjetla ima zbog malog λ veliku energiju hc/λ! Takav kvant mora pogoditi elektron, jer inače u mikroskopu ništa nećemo vidjeti. Ako je kvant svjetla dohvatio elektron neposredno iza trenutka t_1, on u idućem trenutku t_2 više neće imati impuls mv_1, već različit za $\Delta I \approx hf/c = h/\lambda$, tj. $m \, \Delta v = \Delta(mv) = h/\lambda$. Budući da je $\lambda \approx \Delta x$, odavde slijedi $\Delta(mv) \approx h/\Delta x$, a to je relacija neodređenosti (3.2-1)!

Kao drugi primjer granice mjerne tehnike navodimo zrcalni galvanometar. Čovjek bi očekivao da će znatna minijaturizacija zrcala i torzijske niti bitno povećati osjetljivost glavanometra, ali bi se prevario. Detaljna istraživanja, naime, pokazuju da s minijaturizacijom zrcala svjetlosna zraka sve jače titra na skali, a to znači da titra zrcalo. »Plesanje« smanjenog zrcala posljedica je kaotičnog gibanja koje je *Brown* otkrio još godine 1828. Uslijed Brownova gibanja molekula zraka zrcalo uvijek titra, tj. uopće se ne smiruje, ali kod robustnijeg zrcala to ne dolazi toliko do izražaja. Prema tome Brownovo gibanje prirodna je granica mjerenja za sve one instrumente kod kojih su impulsi molekula poremećajne veličine.

Jednadžba neodređenosti (3.2-1) vrijedi, dakako, posve općenito: za katodne zrake, ulančenje električkog i magnetskog polja, valove materije itd. Do granice koju ona propisuje *vrhunska* je metrologija došla samo na malom broju mjesta nepregledno širokog polja cjelokupne metrologije. Granicu smo spomenuli samo zato da bismo pokazali kako smanjivanje mjerne pogreške ne može ići unedogled, već da postoji i »kvant pogreške«. Praktična metrologija, međutim, nastoji da savlada daleko veće pogreške, koje se neizbježivo pojavljuju pri svim mjerenjima. O njima će biti riječi u iduća četiri odlomka.

3.2.2. Klasifikacija mjernih pogrešaka. Pojam »mjerna pogreška« upotrebljava se u *svim* granama znanosti, tehnike i privrede, tj. u svoj ljudskoj djelatnosti.

Svaka od tih mnogobrojnih grana služi se mnogim mjernim postupcima i mjernim uređajima. Stoga je očito da možemo sastaviti nepredočivo velik opis uzroka koji dovode do mjernih pogrešaka. Unatoč tome pogreške se mogu donekle klasificirati. U literaturi o mjerenju, koja je stara koliko i egzaktna znanost, mogu se zapaziti različite klasifikacije. Jedne razvrstavaju pogreške prema njihovu porijeklu, druge prema načinu njihova utvrđivanja, treće prema mogućnosti smanjivanja pogrešaka itd. S takvim je klasifikacijama u skladu i pripadna terminologija. Budući da ova knjiga nije ni udžbenik ni priručnik o mjerenju u ovoj ili onoj grani, u idućim ćemo odlomcima primjerima opisati nekoliko *tipičnih* vrsta pogrešaka raznih grana, a pri tom ćemo upotrebljavati terminologiju koju najčešće susrećemo u pripadnoj literaturi.

Posve općenito mjerne se pogreške mogu razvrstati u dvije velike skupine. Prvu tvore *odredljive* (odredive, obuhvatljive) pogreške, tj. one koje možemo ili znamo (ponekad samo teoretski) utvrditi. Pogreške te skupine najčešće se zovu *sistematske pogreške*. U drugu skupinu ubrajaju se *neodredljive* (neobuhvatljive) pogreške, koje se najčešće zovu *slučajne pogreške*. Njih zapažamo prilikom ponovljenih mjerenja iste konstantne fizikalne veličine, jer se pojedini mjerni rezultati prividno bez razloga međusobno razlikuju. Analiza velikih mnoštava rezultata ponovljenih mjerenja pokazuje da se pojavljivanje tih neodredljivih pogrešaka, s obzirom na njihovu vrijednost i učestalost, pokorava zakonu slučaja, tj. teoriji vjerojatnosti (vidi odsječak 3.6).

Nije uvijek moguće klasificirati neku pogrešku u jednu ili drugu skupinu. Osim toga, granica među tim skupinama neprestano se pomiče u korist odredljivih pogrešaka, jer neprekidni razvoj vještine mjerne tehnike jučerašnju neodredljivu pogrešku danas pretvara u odredljivu. Govoreći posve objektivno, nema neodredljivih pogrešaka većih od prirodnih granica (odlomak 3.2.1). Sveznajući i svemoćan (u pogledu mjerne opreme) metrolog bio bi u stanju da utvrdi sve izvore pogrešaka i da procijeni njihovu vrijednost. Stvarni metrolog nije u stanju da to učini, jer on ne zna sve uzroke i izvore pogrešaka, nema potrebnu mjernu opremu, nema dovoljno vremena i znanja, a često ekstremna preciznost nije ni potrebna.

Klasifikacija pogrešaka na odredljive i neodredljive ovisi, dakle, o *subjektivnim* okolnostima. Ako, u okviru postojećih ekonomskih i vremenskih mogućnosti ili zahtjeva, metrolog može ustanoviti uzrok, izvor i vrijednost nekih pogrešaka, on će prethodne mjerne rezultate korigirati. Time su te pogreške prestale biti neodredljive, već su postale *određene*. Od preostalih neodredljivih pogrešaka neki će drugi metrolog koji ima bolju mjernu opremu te više znanja, iskustva i vremena jedan dio učiniti određenim. I tako taj proces profinjavanja teče do samog vrha metrološke piramide. Zato neki autori govore o »određenim« i »neodređenim« pogreškama, čime jasno drže pred očima potencijalnu mogućnost prepoznavanja privremeno neodređenih pogrešaka. U tom smislu u ovoj ćemo knjizi razumijevati značenje »sistematske« i »slučajne« pogreške. U skladu s time je terminologija kojom se opisuje konačan rezultat višestruko ponovljenog mjerenja. Kaže se da je zbog postojanja slučajnih pogrešaka rezultat *nepouzdan*, dok je zbog djelovanja sistematskih pogrešaka on *neispravan* (lažan, neistinit).

3.2.3. Sistematske mjerne pogreške najčešće nastaju zbog nesavršenosti mjernog postupka, mjera, mjernih uređaja, mjerene fizikalne veličine kao i zbog odredljivih utjecaja poremećajnih veličina okoline i osobnog utjecaja ispitivača. Većina tih sistematskih pogrešaka ima stalnu vrijednost, a time i određen predznak,

tj. sistematske pogreške djeluju jednostrano. Zbog njihove mnogobrojnosti, sistematske pogreške ponekad klasificiramo u tri glavne skupine.

Izvor *metodskih sistematskih pogrešaka* jest sam mjerni postupak, metoda. Tako, na primjer, kemičari moraju pri gravimetrijskoj analizi uzimati u obzir topljivost taloga, njegovo hlapljenje pri žarenju, taloženje nepoželjnih tvari, u titrimetrijskim analizama moraju računati sa sekundarnim reakcijama i tako dalje unedogled. Elektrotehničari moraju znatno korigirati mjerne rezultate ako male otpore mjere Wheatstoneovim mostom ili ako klizanje asinhronog motora utvrđuju direktnim mjerenjem frekvencije vrtnje, a ne stroboskopom. Itd.

Sistematske pogreške *mjernih uređaja* također su bezbrojne. Geodeti korigiraju pogrešne duljine svojih mjernih traka, nejednolike podjele limba, neslaganje glavnog mjerila s pomoćnim itd., tj. kompariraju, rektificiraju i runkorigiraju svoje mjere i uređaje sa ciljem da utvrde i smanje ili posve odstrane sistematske pogreške. S istim ciljem kemičari nastoje pri analitičkom vaganju utvrditi sistematske pogreške koje uzrokuju nekalibrirani utezi, neispravna graduacija vage, nejednakost duljine njenih krakova, pomak bridova ahatnih prizmi itd. Sistematska pogreška mjernih uređaja je *progresivna* ako raste proporcionalno s vrijednošću mjerene veličine ili s brojem podjela skale. Takva se pogreška gomila, na primjer, pri graviranju crtica na skalama instrumenata, u mikrometarskim vijcima itd. *Mjesna* ili neregularna sistematska pogreška je ona koja se pojavljuje u pojedinim intervalima mjernog područja, a *periodička* se javlja nakon jednakih vremenskih perioda itd.

Spomenute sistematske pogreške mjernih uređaja su tzv. *unutarnje* pogreške. Na njih se nadovezuju *vanjske* pogreške, a uzrokuju ih mnogobrojni vanjski uzroci i izvori, tzv. vanjske i okolišne utjecajne veličine. Tako, na primjer, elektrotehničari moraju pri preciznom mjerenju pokaznim mjerilima uzeti u obzir djelovanje niza fizikalnih veličina; to su: napon, oblik napona, termonaponi, frekvencija, viši harmonici, temperatura (vanjska i unutarnja), jakost okolnog magnetskog i električkog polja, kapacitet prema zemlji, tlak, vlažnost itd.

Metodske sistematske pogreške i sistematske pogreške mjernih uređaja mogu se uspješno korigirati jedino ako temeljito poznajemo karakteristike mjerne metode, mjernog uređaja i mjerenog objekta. Ako djelovanje pojedinih utjecajnih veličina nije poznato u dovoljnoj mjeri, treba ih utvrditi eksperimentalno: namjerno se mijenja jakost svake od njih i registrira njihov učinak na mjerni rezultat. Iz njega se može otkriti što valja učiniti da bi se pogreške smanjile. Sistematske se pogreške, dakle, pokoravaju poznatim fizikalnim zakonima i zato njihov utjecaj možemo uzeti u obzir naknadno. U vrhunskoj metrologiji nije rijedak slučaj da se sistematske pogreške korigiraju i desetak godina pošto su provedena mjerenja (strujna vaga, međuinduktivni svici), jer je tek nakon tolikog vremena otkriveno njihovo postojanje, njihovi uzroci i zakonitosti.

Za uspješno korigiranje sistematskih pogrešaka potrebno je golemo znanje i veliko iskustvo. O tome *N. Čubranić* u svojoj knjizi »Teorija pogrešaka« (1967) vrlo lijepo kaže: »Da bismo mogli ispitivati mjerenja, te ispitivati uzroke i veličine sistematskih pogrešaka, moramo dobro poznavati ne samo mjerne sprave, instrumente nego i određenu geodetsku materiju u koju spadaju odnosna mjerenja. To su poligoniometrija, triangulacija, fotogrametrija, astronomija itd. Često moramo poznavati cjelokupnu materiju geodezije s kartografijom, da bismo mogli dobiti pravilne veličine za izvršena mjerenja, da bismo mogli pravilno uočiti sve moguće uzroke, te izračunati sve korekcije, a mjerenja osloboditi takvih sistematskih pogrešaka.« Taj se citat, doduše, odnosi samo na jednu od mnogih specijalnih grana, geodeziju, ali on jednako vrijedi i za sve druge grane znanosti i tehnike.

Treću glavnu skupinu sistematskih pogrešaka tvore *lične pogreške* ispitivača uzrokovane njegovim psihičkim i fiziološkim nedostacima. Tako, na primjer, pri kemijskoj analizi neki ispitivač nema dovoljnu sposobnost uočavanja promjene boje indikatora u toku titracije, a neki geodet uvijek navizira malo udesno. Neki treći ispitivač prilikom procjenjivanja vrijednosti između susjednih crtica na skali nehotice izbjegava stanovite rezultate, pa, na primjer, umjesto 105,4 očita ili 105,5 ili 105,3. Četvrti je pak nesvjesno sklon takvim rezultatima ponovljenih mjerenja koje je već jednom utvrdio. Itd.

Smatra se da postoje dva bitna uzroka zašto ispitivač očitava rezultate s većom ili manjom sistematskom pogreškom. Jedan je nedovoljna prijemljivost ispitivača za mjerenje, a drugi pomanjkanje želje za tačnim očitavanjem. Prvo se očituje već time što razni ljudi različito očitavaju isto pokazivanje na skali. Taj nedostatak može se djelomično nadoknaditi primjenom posebnih optičkih sprava, ali stanovita granica ne može se savladati. To vrijedi kako za vid, tako i za sluh i osjet. Spomenute neprijemljivosti smatraju se primarnima, dok su pojave zamora i gubljenje refleksa zbog trajanja mjerenja sekundarne. Iskustvo pokazuje da ispitivač očitava rezultate na skali instrumenta to pogrešnije što je brži tempo rada. To je jedan od razloga zašto se u sve većoj mjeri primjenjuju digitalni instrumenti ili se mjerenja automatiziraju, čak i u astronomiji (vidi sl. A.96).

Pomanjkanje želje za preciznim mjerenjem postoji kod ispitivača onda ako nije uvjeren u opravdanost svog postupka, tj. kad smatra da je mjerenje besmisleno, bez svrhe ili pretjerano tačno. Uzroci takvih reakcija mogu biti mjerno-tehničkog ili ekonomskog porijekla. U drugom se slučaju misli samo na praktičnu korist od mjerenja, a ispitivač je uvjeren da od mjernih rezultata neće izbiti nikakvu korist. Iz ovih je primjera očito da smanjenju lične pogreške bitno pridonosi smirena atmosfera radne zajednice i dobra fizička kondicija ispitivača.

3.2.4. Grube pogreške nastaju zbog nepažnje i nemara ispitivača, njegovog manjkavog stručnog znanja i zbog izbora neprikladnog mjernog postupka. Mogućnost pojavljivanja grubih mjernih pogrešaka jedan je od razloga zašto se mjerenja ponavljaju. Ako se u mnoštvu tako dobivenih rezultata jedan bitno razlikuje, postoji snažna indikacija da je grubo pogriješeno. Općenito se smatra da je riječ o gruboj pogrešci onda kad njena vrijednost premaši trostruku vrijednost »srednje pogreške« (vidi odlomak 3.6.7), tj. trostruku vrijednost »standardnog odstupanja« (odlomak 3.3.3).

Budući da se grubo može pogriješiti pri svakom mjernom postupku u svakoj struci, postoji bezbroj mogućih izvora grubih pogrešaka. Navest ćemo nekoliko primjera iz geodezije i kemije. Pri očitavanju teodolita može se pogriješiti za 10 kutnih minuta, 10 stupnjeva ili čak 100 stupnjeva, a pri viziranju na crkvu s dva tornja može se grubo pogriješiti tako što se vizira na pogrešan toranj, ne na onaj koji je odabran za trigonometrijsku tačku. Ispitivač svake struke može pogriješiti grubo iako je dobro izmjerio, na primjer, pri prepisivanju rezultata. Analitički kemičar ima mnogo prilika da grubo pogriješi: nedovoljno hlađenje lončića prije vaganja, zanemarenje uzgona, nekorigiranje odmjernih naprava s obzirom na promjene temperature itd.

One mjerne rezultate koji sadrže grubu pogrešku treba odbaciti, tj. ne uzeti ih u obzir pri obradi rezultata ponovljenih mjerenja. Ali to ne valja učiniti naprečac, već prethodno treba takav rezultat ispitati, tj. pokušati ustanoviti zašto je nastao toliko pogrešan rezultat. Često se na taj način može brzo otkriti uzrok i iznos grube

pogreške, pa se nakon korekcije taj rezultat pri obradi može čak iskoristiti ravnopravno s ostalim rezultatima ponovljenih mjerenja.

3.2.5. Slučajne mjerne pogreške rezultat su neizbježnih promjena koje nastaju u mjerama, mjernim uređajima, mjernom objektu, okolini i ispitivaču, a koje on nije kadar ocijeniti i korekcijom uzeti u obzir. Te neodredljive pogreške (vidi odlomak 3.2.2) mogu se prepoznati ovako: ako isti ispitivač uzastopno više puta jednakom brižljivošću mjeri istu konstantnu fizikalnu veličinu, istim mjernim uređajem i pod istim vanjskim uvjetima (prema njegovoj ocjeni), ipak će dobivati rezultate koji međusobno odstupaju. Ti rezultati gomilaju se oko stanovite vrijednosti, ali metrolog ne zna objasniti zašto je jedan rezultat znatno manji od te vrijednosti, a drugi nije. Zato se takve neobjašnjive (neodredljive, neobuhvatljive, neizbježive) pogreške zovu *slučajne pogreške.*

Te su pogreške *za njega* slučajne, objektivno nema slučajnih pogrešaka, jer ništa se ne događa slučajno, pa ni mjerne pogreške. Svaki događaj ima svoj uzrok, a mjerna pogreška rezultat je mnogih uzroka. Događaji koji uzrokuju te slučajne pogreške zbivaju se prema fizikalnim zakonima, ali za metrologa su posljedice njihova djelovanja na njegove mjerne rezultate slučajni zato jer ne zna utvrditi koji poremećaji i promjene utječu, i u kolikoj mjeri. Zamislimo da netko važe vrlo osjetljivom vagom i da baš u tom trenutku ulicom pokraj laboratorija prolazi kamion. Vibracije vozila prenijet će se i na zgradu, utjecat će na upravo snimani mjerni rezultat, a da ispitivač nije ni znao da je prošlo vozilo. On nije u stanju predvidjeti kada će neko vozilo proći pokraj laboratorija i time izazvati pogrešku. Takva se slučajna pogreška može *smanjiti* stavljanjem vage na posebne temelje ili preseljenjem laboratorija u mirniji kraj. U potpunosti se, međutim, utjecaj vibracija na rasipanje rezultata ponovljenih mjerenja ne može izbjeći, jer svugdje postoje prirodne seizmičke smetnje.

I sam čovjek izvor je slučajnih pogrešaka. Čovjek vidi prostim okom dvije tačke koje se nalaze od oka pod kutom oko jedne minute kao *jednu* tačku. To znači da će se pri najpažljivijem viziranju na neki predmet pogreška nalaziti u rasponu između $+30''$ i $-30''$. Postanak jedne ili druge pogreške čista je igra slučaja. Nastala slučajna pogreška čini rezultat nepouzdanim, nesigurnim. Nepouzdanost se u ovom slučaju može smanjiti primjenom durbina, ali uvijek će postojati granica za koju ni najbolji durbin nije više osjetljiv. Daljnje smanjenje nepouzdanosti može se pokušati ostvariti primjenom fotoelektričkih metoda viziranja, ali je to od slabe koristi: nejednoliko zagrijavanje zraka, titranje likova, refrakcija i mnogi drugi uzroci praktički predstavljaju nesavladivu granicu pouzdanosti.

Općenito možemo izvore slučajnih pogrešaka svrstati u četiri glavne skupine: 1) nesavršenost mjera i mjernih uređaja; 2) nesavršenost ljudskih osjetila; 3) utjecaj i promjenljivost utjecaja okoline; 4) nedovoljno mjerno iskustvo i znanje ispitivača. Mnogo puta je, naime, utvrđeno da iskusniji ispitivači čine manje pogreške negoli početnici.

Iz letimičnog opisa grubih, sistematskih i slučajnih pogrešaka nedvojbeno proizlazi da će se rezultati ponovljenih mjerenja uvijek ponešto međusobno razlikovati, čak i onda ako smo eliminirali grube pogreške i korigirali slučajne. Prema tome konačan rezultat ponovljenih mjerenja (srednja vrijednost) uvijek će biti manje ili više nepouzdan. Ocjenjivanjem te nepouzdanosti prema zakonima slučajnih događaja bavi se tzv. teorija pogrešaka. O primjeni te teorije bit će riječi u idućih pet odsječaka.

3.3. Srednja vrijednost, standardno odstupanje i nepouzdanost srednje vrijednosti

U idućih pet odlomaka definirat ćemo najvažnije pojmove osnova mjerne tehnike. Ti pojmovi posljedica su postojanja slučajnih pogrešaka o kojima smo govorili u odlomku 3.2.5. Izvođenja ćemo osloniti na klasičnu teoriju pogrešaka, kojoj ćemo u odlomku 3.5.4 i odsječcima 3.6,7 u stanovitoj mjeri pridružiti nazore matematičke statistike. Cjelovitu statističku interpretaciju obrade mjernih rezultata mogu u odgovarajućem opsegu pružiti jedino mnogobrojni udžbenici statistike.

3.3.1. Srednja vrijednost (aritmetička sredina). Da bismo bili što sigurniji u mjerni rezultat, fizikalnu veličinu mjerimo više puta. To su *ponovljena* ili *prekobrojna* mjerenja, jer izvodimo veći broj mjerenja nego što je neophodno potrebno. Pri tom pretpostavljamo ili znamo da se u toku ponavljanja mjerenja vrijednost fizikalne veličine x nije promijenila, tj. njena je vrijednost ostala *konstantna*, $x = \text{const}$. Osim toga, ponovljena mjerenja izvodimo istim mjernim uređajem, pod istim vanjskim utjecajima i jednakom brižljivošću. Rezultat n takvih međusobno nezavisnih ponovljenih mjerenja jest niz izmjerenih vrijednosti

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n, \tag{3.3-1}$$

koje se međusobno razlikuju za veću ili manju vrijednost, a poneke su i međusobno jednake.

Zašto se međusobno razlikuju mjerenjem utvrđene vrijednosti x_i, gdje je $i = 1, 2, \ldots, n$ i kolika je *stvarna* vrijednost x mjerene fizikalne veličine? Uzrok postojanja niza vrijednosti (3.3-1) su *slučajne pogreške*; pretpostavljamo, naime, da su sistematske pogreške poznate i time vrijednosti (3.3-1) oslobođene od njih. U pogledu stvarne (istinite, prave) vrijednosti x mjerene fizikalne veličine može se sa *sigurnošću* reći jedino to da se ona nalazi negdje između najveće i najmanje vrijednosti x_i niza rezultata (3.3-1). To proizlazi iz prije spomenute pretpostavke da je svih n mjerenja izvedeno na jednaki način. Približim *procjenjivanjem* stvarne vrijednosti n-struko izmjerene fizikalne veličine x bavi se opsežna »teorija pogrešaka«, iz koje ćemo razmotriti samo ono što smatramo neophodnim u okviru ove knjige.

Označimo *stvarnu* (pravu, istinitu) vrijednost mjerene fizikalne veličine slovom x, jer primjena te *oznake* ne proturječi činjenici da praktički (ni uz vrlo velik broj n ponovljenih mjerenja) tu vrijednost nikada nećemo *sigurno* saznati. Poslužimo se, osim toga, pojmom *stvarna pogreška* (drugi nazivi su: istinita ili prava pogreška te stvarno, istinito ili pravo odstupanje) koji smo u odlomku 3.1.1 definirali kao razliku između izmjerene vrijednosti x_i i stvarne vrijednosti x, dakle

$$\text{stvarna pogreška } a_i = x_i - x.$$

Naglašavamo ponovno da će, kako ovdje, tako i u daljnjim izvođenjima, a_i uvijek predstavljati slučajne pogreške. Ako gornju definiciju primijenimo na niz od n izmjerenih vrijednosti (3.3-1), dobivamo pojedine (pojedinačne, individualne) stvarne slučajne pogreške

$$a_1 = x_1 - x, \quad a_2 = x_2 - x, \ldots, \quad a_i = x_i - x, \ldots, \quad a_n = x_n - x. \tag{3.3-2}$$

Vrijednost pogreške a_i može, dakako, biti pozitivna ili negativna, na primjer: $a_1 = 2\,\mu\text{m}$, $a_2 = -3\,\mu\text{m}$ itd. ($\mu\text{m} = \text{mikrometar} = 10^{-6}$ m). Zbrajanjem svih n jednadžbi (3.3-2), koje se zovu »jednadžbe stvarnih pogrešaka«, dobivamo

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots + a_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_n - nx. \tag{3.3-3}$$

Zbroj od n pogrešaka $a_1, a_2, \ldots$ i zbroj mjerenjem utvrđenih vrijednosti $x_1, x_2, \ldots$ označivat ćemo iz tiskarskih razloga u svim daljnjim tekstovima *pojednostavnjenim* simbolom zbroja, tj. bez naznaka granica

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum a_i \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} x = \sum x_i. \tag{3.3-4}$$

Pomoću ovih oznaka jednadžbu (3.3-3) možemo nakon dijeljenja s n napisati u obliku

$$x = \frac{1}{n}\sum x_i - \frac{1}{n}\sum a_i. \tag{3.3-5}$$

Prvi pribrojnik ove jednadžbe je očito aritmetička srednja vrijednost niza pojedinih izmjerenih vrijednosti (3.3-1). Budući da je taj pribrojnik izvanredno važna veličina teorije pogrešaka i mjerne tehnike, za nju se upotrebljava posebna oznaka (najčešće sa crticom povrh)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_n). \tag{3.3-6}$$

Ta se veličina zove *srednja vrijednost* ili *aritmetička sredina*. Pomoću netom uvedene »srednje vrijednosti« (3.3-6) jednadžbu (3.3-5) možemo napisati u obliku

$$x = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum a_i. \tag{3.3-7}$$

Taj izraz možemo čitati ovako: stvarna vrijednost fizikalne veličine x, izmjerene n puta, jednaka je razlici srednje vrijednosti i pogreške srednje vrijednosti (desni član u jednadžbi 3.3-7). Vrijednost te pogreške može, dakako, biti pozitivna ili negativna. Kolika je *stvarno* njena vrijednost praktički se nikada ne može utvrditi, ali se dade *procijeniti*. Zato je glavni zadatak teorije pogrešaka da pronalazi postupke za procjenjivanje vrijednosti te rezultirajuće slučajne pogreške.

Primjer. Sa pet uzastopnih mjerenja utvrđene su ove vrijednosti duljine metalne motke: 1173, 1170, 1173, 1174 i 1172 mm. Srednju vrijednost izračunat ćemo pomoću izraza (3.3-6):

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(1173 + 1170 + 1173 + 1174 + 1172)\,\text{mm} = \frac{5862\,\text{mm}}{5} = 1172{,}4\,\text{mm}.$$

Način procjenjivanja pogreške te srednje vrijednosti za takav je slučaj (malen broj n ponovljenih mjerenja) opisan u odsječku 3.7.

3.3.2. Aksiomi računa izjednačenja. Problemom načina procjenjivanja slučajne pogreške nalik na onu u jednadžbi (3.3-7) vjerojatno se prvi bavio naš učenjak *Ruđer Bošković*. Najviše je, međutim, rješenju tog problema pridonio genijalni *C. F. Gauss*, čije ćemo ime često susretati u gotovo svim glavama ove knjige. Njegovu teoriju slučajnih pogrešaka, osnovanu na teoriji vjerojatnosti i na dotadašnjem mjernom iskustvu (1809), kasnije su bezbroj puta potvrdili eksperimentalni rezultati. Zato Gaussove pretpostavke možemo smatrati aksiomima teorije slučajnih pogrešaka:

1) Pri velikom broju ponovljenih mjerenja jednako vjerojatno nastaju slučajne pogreške jednake vrijednosti (iznosa), ali suprotnih predznaka, tj. vjerojatnost pojavljivanja negativne pogreške (na primjer $a_1 = -2\mu\text{m}$) jednaka je vjerojatnosti pojavljivanja pozitivne pogreške ($a_2 = +2\mu\text{m}$).

2) Vjerojatnost nastanka malih pogrešaka veća je od vjerojatnosti nastanka većih pogrešaka. Prema tome se vrlo velike slučajne pogreške gotovo ni ne pojavljuju (vjerojatnost je praktički jednaka nuli), a vjerojatnost bespogrešnog rezultata je najveća u odnosu prema vjerojatnosti ostalih rezultata.

Iz prvog aksioma proizlazi da slučajna pogreška srednje vrijednosti u jednadžbi (3.3-7) pri neizmjerno velikom broju ponovljenih mjerenja teži nuli, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum a_i = 0 \quad \text{i} \quad x = \bar{x}, \tag{3.3-8}$$

tj. pri $n \to \infty$ srednja vrijednost teži stvarnoj vrijednosti mjerene veličine. Izrazi (3.3-8) vrlo su korisni za teoriju slučajnih pogrešaka, ali se iz njih ne mogu izvući praktični zaključci, jer nemoguće je obaviti beskonačno mnogo ponovljenih mjerenja. Od mjerne se tehnike, naime, uz malu pogrešku traži što manji utrošak vremena i novaca.

I drugi aksiom dade se zorno ilustrirati. Pri mjerenju letve dugačke 5 metara pomoću stolarskog »metra« gotovo je posve sigurno da ćemo pogriješiti za ± 1 mm. Manja je vjerojatnost da ćemo pogriješiti za ± 1 cm, još manje je vjerojatno da ćemo učiniti pogrešku ± 1 dm, a nezamisliva je pogreška ± 1 metar!

Mnogi autori ubrajaju među aksiome tvrdnju da se pri dovoljno velikom broju n ponovljenih mjerenja raspodjela učestalosti slučajnih pogrešaka pokorava tzv. normalnom zakonu (Gaussova krivulja; vidi odsječak 3.6). Ta pretpostavka verificirana je bezbroj puta u toku prošlih 150 godina pri mjerenju većine prirodnih pojava i industrijskih procesa. U skladu s njom je Gaussova hipoteza da se *najvjerojatnije* približenje stvarnoj vrijednosti x mjerene veličine može izračunati iz uvjeta

$$\Sigma (x_i - A)^2 = \text{minimum}, \tag{3.3-9}$$

gdje je A zasad nepoznato najvjerojatnije približenje *stvarnoj* vrijednosti x mjerene fizikalne veličine. Budući da je niz vrijednosti x_i (jednadžba 3.3-1) zadan, tj. izmjeren, minimalnu vrijednost izraza (3.3-9) možemo izračunati variranjem nepoznate veličine A. Izjednačenjem prve derivacije tog izraza s nulom slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} \Sigma (x_i - A)^2 = -\Sigma x_i + nA = 0,$$

dok druga derivacija daje $n > 0$ (minimum). Odavde dobivamo

$$A = \frac{1}{n} \Sigma x_i = \bar{x}, \tag{3.3-10}$$

tj. najvjerojatnija vrijednost n puta izmjerene fizikalne veličine baš je *srednja vrijednost* definirana jednadžbom (3.3-6). Od pretpostavke (3.3-10) Gauss je i pošao pri stvaranju svoje teorije pogrešaka smatrajući taj izraz aksiomom. Zbog strukture jednadžbe (3.3-9) njegova je metoda dobila naziv »metoda najmanjih kvadrata« (njem. Methode der kleinsten Quadrate), što je osnova čitavog »računa izjednačenja« (njem. Ausgleichungsrechnung).

3.3.3. Standardno odstupanje (srednja kvadratna pogreška). Što je postupak ponovljenih mjerenja *precizniji* (o preciznosti vidi odlomak 3.1.3), to se manje međusobno razlikuju pojedine vrijednosti x_i u jednadžbi (3.3-1). Da bi se dobila univerzalna osnova za procjenjivanje preciznosti (ponovljivosti) mjernog

postupka, Gauss je uveo neku vrst »ekvivalentne pogreške«. Pri tom se oslonio na *zbroj kvadrata* pogrešaka pojedinih mjerenja kakav smo imali u jednadžbi (3.3-9). Za razliku od te jednadžbe, Gauss se poslužio *stvarnim* (istinitim, pravim) pogreškama $a_i = x_i - x$ koje smo definirali izrazima (3.3-2). Ovdje je, kao i ranije, x nepoznata stvarna vrijednost n puta izmjerene fizikalne veličine. Trebalo je pronaći takvu *ekvivalentnu pogrešku* s koja udovoljava uvjetu

$$ns^2 = \Sigma a_i^2 = \Sigma (x_i - x)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_i^2 + \ldots + a_n^2. \qquad (3.3\text{-}11)$$

Taj izraz znači: kad bi svih n pojedinih mjerenja bilo učinjeno s pogreškom s, zbroj njenih kvadrata bio bi jednak zbroju kvadrata stvarnih sučajnih pogrešaka. Iz gornje jednadžbe slijedi izraz za izračunavanje ekvivalentne pogreške

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma a_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma (x_i - x)^2}\,. \qquad (3.3\text{-}12)$$

Prema terminologiji statističke teorije danas tu veličinu zovemo *standardno odstupanje* ili »standardna devijacija« (engl. standard deviation, njem. Standardabweichung). Preciznije bi zapravo valjalo reći »*procjena* (engl. estimate) standardnog odstupanja« (vidi odlomke 3.5.4 i 3.7.4). U Gaussovo vrijeme, a u geodeziji i astronomiji pretežno još i danas, veličinu s zvali su *srednja kvadratna pogreška* (ili »srednje kvadratno odstupanje«), odnosno preciznije »srednja kvadratna pogreška pojedinog mjerenja«. Napominjemo da neki autori i državne norme definiraju standardno odstupanje s kao *pozitivnu* vrijednost korijena u jednadžbi (3.3-12).

Korisno je navesti definiciju srednje kvadratne pogreške (standardnog odstupanja) kakvu na temelju polazne jednadžbe (3.3-11) nalazimo u mnogih autora specijalne literature o računu izjednačenja: »Srednja kvadratna pogreška je ona pogreška koja bi dala, kad bi bila učinjena u svim mjerenjima, isti zbroj kvadrata pogrešaka koju daju stvarno učinjene pogreške.«

Mjerodavni dojam o preciznosti mjernog postupka dobiva se pomoću *relativnog standardnog odstupanja* r koje je definirano po istom načelu kao »relativna pogreška« (odlomak 3.1.1). Podijelimo li, dakle, standardno odstupanje (3.3-12) sa stvarnom vrijednošću x mjerene veličine, dobivamo

$$r = \frac{s}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma (x_i - x)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma \left(\frac{x_i}{x} - 1\right)^2}\,. \qquad (3.3\text{-}13)$$

Napominjemo da su iz statističke teorije ušla u klasičnu teoriju pogrešaka još dva izraza koji nam mogu biti od koristi u ovoj knjizi. Prvi je *varijancija* (varijanca, engl. variancy), definirana kao kvadrat standardnog odstupanja, dakle varijancija $v = s^2$. Upotrebljava se i termin *disperzija*, dakle: disperzija $= v = s^2$. Drugi izraz je *stupanj slobode* $= n - 1$, gdje je n sveukupni broj mjerenja fizikalne veličine x.

3.3.4. Izračunavanje standardnog odstupanja. Pomoću jednadžbe (3.3-12) ne možemo izračunati standardno odstupanje s, jer ne znamo kolike su *stvarne* pogreške $a_i = x_i - x$, odnosno koliko iznosi stvarna vrijednost x mnogostruko izmjerene fizikalne veličine. Da bismo ipak mogli izračunati s, moramo uspostaviti vezu između stvarnih pogrešaka a_i iz jednadžbi (3.3-2) i *prividnih pogrešaka* b_i koje definiramo razlikom između izmjerene vrijednosti i *srednje vrijednosti*, tj.

$$b_1 = x_1 - \bar{x},\quad b_2 = x_2 - \bar{x}, \ldots,\quad b_i = x_i - \bar{x}, \ldots,\quad b_n = x_n - \bar{x}, \qquad (3.3\text{-}14)$$

jer pomoću (3.3-6) možemo izračunati srednju vrijednost na temelju niza od n izmjerenih vrijednosti x_i iz (3.3-1). U tu svrhu najprije izračunajmo koliko iznosi kvadrat zbroja stvarnih pogrešaka. Računanjem slijedi

$$(\sum a_i)^2 = (a_1 + \ldots + a_i + \ldots + a_n)^2 = \sum a_i^2 + 2 \sum a_i a_{i+1}.$$

Ovdje se, dakako, znak zbroja proteže od $i = 1$ do $i = n$, što smo posebno naglasili jednadžbama (3.3-4). Zbroj umnožaka $a_i a_{i+1}$ iščezavajuće je malen ako je broj n ponovljenih mjerenja dovoljno velik. To proizlazi iz prvog aksioma (odlomak 3.3.2), jer stvarne slučajne pogreške a_i s istom vjerojatnošću imaju pozitivne i negativne predznake pri svim vrijednostima (iznosima). Prema tome se gornja jednadžba može zabilježiti u obliku

$$(\sum a_i)^2 = \sum a_i^2. \tag{3.3-15}$$

Pri tom je učinjena neznatna pogreška time što je upotrijebljen znak jednakosti, a ne znak $\approx$ (približno).

Da bismo uspostavili traženu vezu između zbroja kvadrata stvarnih pogrešaka a_i i zbroja kvadrata prividnih pogrešaka b_i, moramo izvesti još nekoliko operacija. Najprije dovedimo u vezu a_i i b_i, tj. oduzmimo (3.3-14) od (3.3-2). Tako dobivamo

$$a_i = b_i + (\bar{x} - x),$$

gdje je izraz u zagradi konstanta. Sada kvadrirajmo tako izraženu pogrešku a_i i zatim zbrojimo svih n kvadrata a_i^2:

$$a_i^2 = b_i^2 + 2(\bar{x} - x) b_i + (\bar{x} - x)^2$$

$$\sum a_i^2 = \sum b_i^2 + 2(\bar{x} - x) \sum b_i + n(\bar{x} - x)^2.$$

Zbroj prividnih pogrešaka b_i jednak je nuli, što je lako ustanoviti ako se zbroj jednadžbi (3.3-14) usporedi s definicijskom jednadžbom srednje vrijednosti (3.3-6). Prema tome gornja jednadžba uz pomoć (3.3-15) prelazi u oblik

$$(\sum a_i)^2 = \sum b_i^2 + n(\bar{x} - x)^2. \tag{3.3-16}$$

Konstantnu razliku srednje i stvarne vrijednosti možemo izraziti zbrojem stvarnih pogrešaka a_i ako upotrijebimo jednadžbe (3.3-5,6):

$$\bar{x} - x = \frac{1}{n} \sum a_i. \tag{3.3-17}$$

Uvrštenjem (3.3-17) u (3.3-16) dobivamo nadasve važnu vezu

$$\sum a_i^2 = (\sum a_i)^2 = \frac{n}{n-1} \sum b_i^2$$

pomoću koje od jednadžbe (3.3-12) nastaju upotrebljivi izrazi za izračunavanje varijancije s^2 i standardnog odstupanja s:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{i} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \tag{3.3-18}$$

Pri tom se, dakako, znak zbroja proteže od $i = 1$ do $i = n$ (jednadžba 3.3-4), a srednja vrijednost je definirana izrazom (3.3-6).

Relativno standardno odstupanje r definirali smo jednadžbom (3.3-13) u odnosu prema *stvarnoj* vrijednosti x mjerene veličine. Budući da stvarnu vrijednost ne znamo, i nikada je bez pogreške nećemo poznavati, uvodimo pretpostavku o vrlo dobroj procjeni stvarne vrijednosti, tj. $\bar{x} \approx x$. Na taj način od jednadžbi (3.3-13,18) nastaje upotrebljiv izraz:

$$r = \frac{s}{x} \approx \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - 1\right)^2} \,. \qquad (3.3\text{-}19)$$

Ova jednadžba bit će temelj svih izračunavanja relativnog standardnog odstupanja kako direktno tako i indirektno mjerenih fizikalnih veličina (poglavlje 4).

Primjer. Izračunajmo standardno odstupanje za primjer koji smo imali na kraju odlomka 3.3.1. Tamo smo izračunali srednju vrijednost 1172,4 mm. Po definiciji prividne pogreške (3.3-14) dobivamo redom ove prividne pogreške: $+0{,}6$; $-2{,}4$; $+0{,}6$; $+1{,}6$ i $-0{,}4$ mm. Kvadrati tih pogrešaka iznose 0,36; 5,76; 0,36; 2,56 i 0,16 mm², a njihov zbroj 9,2 mm². Budući da je $n = 5$, lijeva jednadžba (3.3-18) daje varijanciju $s^2 = 9{,}2$ mm²/4 = 2,3 mm². Korjenovanjem slijedi vrijednost standardnog odstupanja $s = 1{,}52$ mm. (To je, u stvari, *procjena* standardnog odstupanja; vidi odlomak 3.5.4.) Pripadno relativno standardno odstupanje (procjena) prema (3.3-19) iznosi $r = 1{,}52$ mm/1172,4 mm $= 1{,}3 \cdot 10^{-3}$.

3.3.5. Nepouzdanost srednje vrijednosti (srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine). Dvojaka je svrha izvođenja n ponovljenih mjerenja fizikalne veličine: 1) da se pronađe »srednja vrijednost« što bliža stvarnoj vrijednosti i 2) da se smanji pogreška utvrđene srednje vrijednosti. To je, uostalom, smisao jednadžbe (3.3-7) u odlomku 3.3.1 koju ćemo ovdje ponovno napisati

$$x = \bar{x} - \frac{1}{n} \sum a_i. \qquad (3.3\text{-}7)$$

Slovo x predstavlja stvarnu vrijednost mjerene fizikalne veličine, isto slovo sa crticom označuje srednju vrijednost definiranu izrazom (3.3-6), n je broj ponovljenih mjerenja, a znak zbroja obuhvaća sve *slučajne* pogreške $a_i = x_i - x$ u rasponu od $i = 1$ do $i = n$ (vidi jednadžbu 3.3-4). Desni pribrojnik u (3.3-7) predstavlja, dakle, pogrešku poznavanja srednje vrijednosti.

Koliko iznosi ta pogreška? Njenu tačnu vrijednost nikada nećemo saznati, ali možemo *procijeniti* njenu *vjerojatnu* vrijednost (o toj vjerojatnosti, statističkoj sigurnosti, raspravlja se za slučaj normalne raspodjele slučajnih pogrešaka u odsječcima 3.6 i 3.7). Procjenu možemo učiniti pomoću jednadžbi izvedenih u prošla dva odlomka. Uzmemo li, naime, u obzir jednadžbe (3.3-11,15), njihovim kombiniranjem nastaje

$$n s^2 = \sum a_i^2 = (\sum a_i)^2 \quad \text{ili} \quad \sum a_i = s \sqrt{n}.$$

Uvrštenjem desnog izraza u gore navedenu jednadžbu (3.3-7) slijedi

$$x = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}. \qquad (3.3\text{-}20)$$

Dobivena jednadžba izvanredno je važna, jer iz nje razabiremo: *pogreška srednje vrijednosti opada s drugim korijenom iz broja n ponovljenih mjerenja*, ako pretpostavimo da je standardno odstupanje s konstantno. Pogrešku srednje vrijednosti zvat ćemo *nepouzdanost srednje vrijednosti* ili kraće *nepouzdanost* (u literaturi se češće nalazi

naziv »srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine«). Budući da ćemo se s tom veličinom često susretati u ovoj knjizi, označit ćemo je vlastitim simbolom, slovom C (u pomanjkanju raspoloživih slova time se simbolički podsjećamo na pouzdanost, engl. confidence)

$$C = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum (x_i - \bar{x})^2}. \tag{3.3-21}$$

Na taj način jednadžba (3.3-20) dobiva oblik

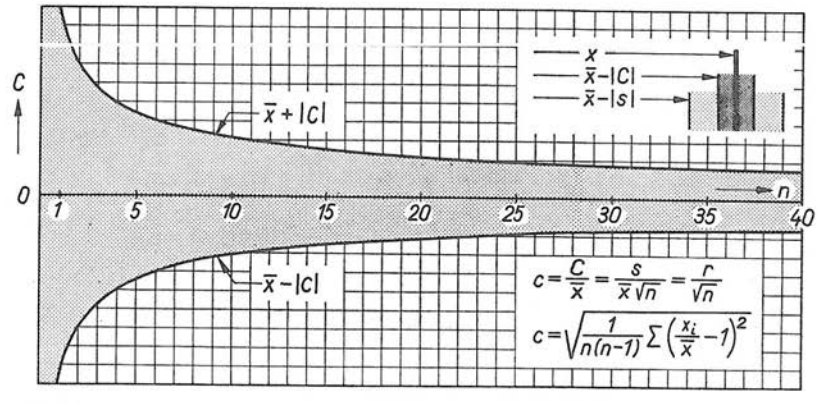
$$x = \bar{x} + C \quad \text{ili} \quad x = \bar{x} \pm |C|, \tag{3.3-22}$$

jer vrijednost nepouzdanosti C s jednakom vjerojatnošću ima pozitivan ili negativan predznak. To smo naglasili i slikom A.6, koja vrlo zorno ilustrira kako se pri $s =$ $=$ const s porastom broja n međusobno približuju *granice pouzdanosti* (engl. confidence limit, njem. Vertrauensgrenze)

$$\text{gornja granica pouzdanosti: } \bar{x} + |C|,$$

$$\text{donja granica pouzdanosti: } \bar{x} - |C|.$$

Unutar tog *područja pouzdanosti* (engl. confidence interval, njem. Vertrauensbereich) nalazi se stvarna vrijednost x mjerene fizikalne veličine. Budući da je riječ o *slučajnim* pogreškama, ne možemo biti posve sigurni da će x doista biti unutar naznačenih granica. Zato se moramo zadovoljiti s većom ili manjom vjerojatnošću (statističkom sigurnošću P) da razlika između stvarne i srednje vrijednosti ne premašuje vrijednost nepouzdanosti C. (O vezi između C i P raspravlja se u odlomcima 3.6.6 i 3.7.4.)



Sl. A.6. Ovisnost nepouzdanosti srednje vrijednosti (srednje kvadratne pogreške aritmetičke sredine) o broju ponovljenih mjerenja uz pretpostavku $s =$ const

Dijagram na slici A.6 pruža stanovitu indikaciju o tome koliko u praksi ima smisla povećavati broj ponovljenih mjerenja n. Ako pretpostavimo da je $s =$ const (to može, na primjer, biti karakteristično za neki prokušani mjerni postupak), računanje pomoću (3.3-21) pokazuje da povećanje n od $n = 1$ na $n = 10$ uzrokuje $C_1/C_{10} = 3{,}16$. Za isti faktor smanji se nepouzdanost i u slučaju ako n povećamo od 10 na 100, tj. $C_{10}/C_{100} = 3{,}16$. To je jedan od razloga zašto se u praksi rijetko izvodi

više od 10 mjerenja (iznimka su najpreciznija mjerenja vrhunske metrologije). Drugi razlog je taj što se povećanjem broja n preko stanovite granice ne može bitno smanjiti »mjerna nesigurnost« U (odlomak 3.8.1) srednje vrijednosti, jer se ne mogu izbjeći preostale sistematske pogreške.

Mjerodavnu predodžbu o nesigurnosti srednje vrijednosti n puta mjerene fizikalne veličine pruža nam *relativna nepouzdanost* c definirana omjerom nepouzdanosti C iz (3.3-21) i srednje vrijednosti, dakle

$$c = \frac{C}{\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}\sqrt{n}} = \frac{r}{\sqrt{n}}, \tag{3.3-23}$$

gdje je r relativno standardno odstupanje definirano jednadžbom (3.3-13) u odlomku 3.3.3. Pomoću gornjeg izraza možemo jednadžbu (3.3-22) prikazati u vrlo preglednom obliku

$$x = \bar{x}(1 + c) \quad \text{ili} \quad x = \bar{x}(1 \pm |c|), \tag{3.3-24}$$

jer c ima s jednakom vjerojatnošću pozitivan i negativan predznak.

Pri kraju ovih izlaganja napomenimo da jednadžbe (3.3-20, 21, 23) vrijede uz statističku sigurnost $P = 68\%$ (vjerojatnost da će se stvarna vrijednost x nalaziti unutar područja pouzdanosti iznosi $P = 0{,}68 = 68\%$; podrobnije vidi u odlomcima 3.6.5,6 i 3.7.4) i uz pretpostavke: 1) da se raspodjela slučajnih pogrešaka pokorava normalnoj raspodjeli (odsječak 3.6); 2) da je broj ponovljenih mjerenja n dovoljno velik ($n \approx 25...30$). Jednadžbe (3.3-21,23) zapravo su specijalan slučaj općeg izraza za nepouzdanost C i relativnu nepouzdanost c

$$C = \frac{st}{\sqrt{n}} \quad \text{i} \quad c = \frac{C}{\bar{x}} = \frac{rt}{\sqrt{n}}, \tag{3.3-25}$$

u kojem je faktor t Studentove raspodjele (za $n < 25...30$; odsječak 3.7) prešao u faktor z (odsječak 3.6) normalne raspodjele koji ovisi o odabranoj razini statističke sigurnosti P (npr. 50, 68, 95, 99% itd.).

Primjer. Duljina metarskog štapa izmjerena je 51 puta pri temperaturi 20 °C. Obradom mjernih rezultata utvrđena je srednja vrijednost duljine štapa 1,0000054 m i standardno odstupanje 2,19 μm (μm = mikrometar = 10^{-6} m). Izračunajmo koliko iznosi nepouzdanost srednje vrijednosti, pripadna relativna nepouzdanost i koje su granice pouzdanosti. Pomoću jednadžbe (3.3-21) izračunavamo nepouzdanost srednje vrijednosti duljine

$$C = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\pm 2{,}19\ \mu\text{m}}{\sqrt{51}} = \pm 0{,}306\ \mu\text{m}.$$

Prema tome gornja i donja granica pouzdanosti iznose 1,0000057 m i 1,0000051 m. Izraz (3.3-23) omogućuje nam da izračunamo relativnu nepouzdanost $c = C/x = \pm 0{,}306\ \mu\text{m}/1\ \text{m} = \pm 3 \cdot 10^{-7}$. Napominjemo da statistička sigurnost tog rezultata iznosi $P = 68\%$ (više o utjecaju P na vrijednost c vidi u odlomku 3.6.6).

3.4. O postupcima za izračunavanje srednje vrijednosti, varijancije i standardnog odstupanja

Formule za izračunavanje srednje vrijednosti, varijancije i standardnog odstupanja koje smo izveli u odlomcima 3.3.1,4 obično su neprikladne za praktično računanje, bilo ručno bilo pomoću računskih strojeva. Zato se one preinačuju u prikladniji oblik prilagođen načinu kako su sređene pojedine izmjerene vrijednosti x_i.

U iduća dva odlomka razmotrit ćemo nekoliko takvih preinaka, a na kraju ćemo u odlomku 3.4.3 izračunati jedan cjelovit primjer.

3.4.1. Izračunavanje srednje vrijednosti. Iz primjera na kraju odlomka 3.3.1 možemo razabrati da zbrajanje velikog broja n vrlo bliskih vrijednosti x_i predstavlja, doduše, rutinski ali dosadan posao. Uslijed toga analitičar redovito nije dovoljno koncentriran, pa trivijalna greška pogrešnog zbrajanja može uzrokovati potrebu za ponovnim računanjem. Zato se definicijska jednadžba srednje vrijednosti (3.3-6) preinačuje tako da joj se doda i oduzme *konstanta* x_0. Vrijednost x_0 odabire analitičar po svojoj volji: obično je to okrugla vrijednost u blizini *odoka procijenjene* srednje vrijednosti. Time jednadžba (3.3-6) prelazi u oblik

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n}\sum x_i - x_0 = x_0 + \frac{1}{n}\sum (x_i - x_0), \tag{3.4-1}$$

jer je $\Sigma x_0 = n x_0$. Ovdje je, dakako, n broj pojedinih međusobno nezavisnih mjerenja izvedenih pod jednakim uvjetima.

Tako bismo u primjeru na kraju odlomka 3.3.1 mogli odabrati $x_0 = 1170$ mm. U tom slučaju razlike $(x_i - x_0)$ redom iznose: 3, 0, 3, 4 i 2 mm ($n = 5$). Njihov je zbroj 12 mm, pa pomoću (3.4-1) dobivamo srednju vrijednost 1170 mm + 12 mm/5 = 1170 mm + 2,4 mm = 1172,4 mm.

Ako su rezultati ponovljenih mjerenja takvi da se pojedine vrijednosti x_i pojavljuju f_i puta (f_i se zove frekvencija ili učestalost izmjerene vrijednosti x_i; vidi odlomak 3.6.1), srednja se vrijednost dobiva pomoću jednadžbe

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_i f_i + \ldots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_i + \ldots + f_k} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}, \tag{3.4-2}$$

što je u skladu sa smislom srednje vrijednosti (odlomak 3.3.1 i jednadžba 3.3-6). Znak sume proteže se od $i = 1$ do $i = k$, gdje je k broj različitih frekvencija. I ovdje je prikladno uvođenje konstantne vrijednosti x_0, kao što smo učinili u jednadžbi (3.4-1). Dodamo li, dakle, i oduzmemo od (3.4-2) proizvoljno odabranu konstantu x_0, dobivamo obrazac

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{\Sigma f_i}\sum [f_i (x_i - x_0)]. \tag{3.4-3}$$

Primjer izračunavanja pomoću ovog izraza nalazi se u odlomku 3.4.3.

3.4.2. Izračunavanje varijancije i standardnog odstupanja. Te dvije veličine definirali smo jednadžbom (3.3-18) u odlomku 3.3.4. Budući da srednja vrijednost u pravilu nije okrugla vrijednost, s tom je jednadžbom zamorno računati. S druge strane, za računanje pomoću računskih strojeva prikladne su formule koje ne prikazuju varijanciju s^2 ili standardno odstupanje s u ovisnosti o srednjoj vrijednosti. Zato ćemo ovdje izvesti nekoliko formula za s^2 koje olakšavaju izračunavanje. Pri tom će x_0 opet biti proizvoljno odabrana okrugla vrijednost, a navodit ćemo samo izraze za s^2, tako da ne moramo zauzimati prostor znakom drugog korijena.

Sva izvođenja temeljit ćemo na definicijskoj jednadžbi varijancije (3.3-18). Ako postoji n mjernih rezultata x_i, vrijede relacije

$$\sum \bar{x}_i = n\bar{x}, \qquad \sum \bar{x} = n\bar{x} \quad \text{i} \quad \sum x_i = \sum \bar{x}, \tag{3.4-4}$$

što neposredno slijedi iz razmatranja u odlomku 3.3.1, gdje jednadžbe (3.3-4) opisuju granice znaka zbroja: $i=1$, $i=n$. Lako izračunamo da je

$$\sum \bar{x}^2 = \sum(\bar{x}\cdot\bar{x}) = \bar{x}\sum\bar{x} = \bar{x}n\bar{x} = n\bar{x}^2. \tag{3.4-5}$$

Pomoću (3.4-4,5) možemo dio definicijske jednadžbe (3.3-18) razviti u oblik koji nam je potreban

$$\sum(x_i-\bar{x})^2 = \sum(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + \sum\bar{x}^2,$$

$$\sum(x_i-\bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2.$$

Od ovih izraza možemo iz (3.3-18) izvesti niz oblika formule za proračunavanje varijancije i standardnog odstupanja. Ovdje navodimo samo nekoliko od njih

$$\left.\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \bar{x}\sum x_i\right], \\ s^2 &= \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2\right] = \frac{1}{n(n-1)}\left[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.4-6}$$

Ovisnost s^2 o pojedinim vrijednostima x_i i proizvoljno odabranoj konstanti x_0 dobivamo, na primjer, iz prve jednadžbe (3.4-6) uz pomoć izraza (3.4-4,5). Oduljim računanjem slijedi

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum(x_i-x_0)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum(x_i-x_0)\right]^2\right\}, \tag{3.4-7}$$

gdje se znak zbroja proteže od $i=1$ do n.

Pri kraju ovog pregleda korisno je još izvesti ovisnost varijancije s^2 o frekvenciji f_i (vidi odlomak 3.6.1) kojom se ponavljaju pojedini mjerni rezultati x_i (usporedi s krajem odlomka 3.4.1). Prema definiciji (3.3-18) varijancije u odlomku 3.3.4 možemo, naime, pisati

$$(n-1)s^2 = f_1(x_1-\bar{x})^2 + f_2(x_2-\bar{x})^2 + \ldots + f_i(x_i-\bar{x})^2 + \ldots,$$

odakle odmah slijedi jedno rješenje

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum[f_i(x_i-\bar{x})^2], \quad \text{gdje je} \quad n = \sum f_i. \tag{3.4-8}$$

Pomoću izraza (3.4-3) može se dobiti i ovisnost s^2 o f_i, x_i, x_0, dakle bez poznavanja srednje vrijednosti.

3.4.3. Primjer: mjerenje duljine metarskog štapa. Razlaganja u prethodnom i ovom odsječku ilustrirat ćemo izračunavanjem standardnog odstupanja s i relativne nepouzdanosti c (pri $P=68\%$) za slučaj mnogostruko izmjerene duljine štapne mjere nazivne duljine 1 metar. Pri tom ćemo pretpostaviti da su eliminirane sve sistematske pogreške, tj. istražit ćemo samo utjecaj slučajnih pogrešaka za koje vrijede jednadžbe u odsječcima 3.3,4. Pod jednakim uvjetima izvedeno je $n=51$ mjerenje i pri tom su dobivene vrijednosti x_i, koje smo već sređene svrstali u

tablicu A-7 (stupac 1). Neki su se rezultati pojavili više puta. Njihovu frekvenciju f_i zabilježili smo u stupcu 2.

Izračunajmo najprije srednju vrijednost 51 pojedinog mjerenja x_i. To ćemo učiniti pomoću jednadžbe (3.4-3), a pri tom za konstantnu vrijednost odabiremo

$$x_0 = 1 \text{ metar (tačno).}$$

Dobivene razlike $(x_i - x_0)$ svrstali smo u stupac 4 tablice (μm = mikrometar = $= 10^{-6}$ m). Budući da nam je u (3.4-3) potreban zbroj umnožaka $f_i\,(x_i - x_0)$, množimo vrijednosti stupaca 2 i 4, čime nastaju vrijednosti u stupcu 5. Zbrajanjem svih vrijednosti u tom stupcu dobivamo 275 μm. Budući da je zbroj svih frekvencija jednak broju ponovljenih mjerenja $n = 51$, pomoću (3.4-3) slijedi

$$\bar{x} = 1\text{ m} + 275\ \mu\text{m}/51 = 1\text{ m} + 5{,}4\ \mu\text{m} = 1{,}0000054\text{ m},$$

odnosno tačnije 1 m + 5,392157 μm.

Standardno odstupanje s izračunat ćemo pomoću jednadžbe (3.4-8). Za tu svrhu treba najprije izračunati razliku pojedine vrijednosti i srednje vrijednosti. Računanje te razlike olakšavamo sebi pomoću identiteta

$$x_i - \bar{x} = (x_i - x_0) - (\bar{x} - x_0) = (x_i - x_0) - 5{,}4\ \mu\text{m}.$$

Tablica A-7

Podaci o $n=51$ ponovljeno mjerenje duljine metarskog štapa

x_i m	f_i	$\frac{f_i}{n}$	$x_i - x_0$ μm	$f_i(x_i - x_0)$ μm	$x_i - \bar{x}$ μm	$f_i(x_i - \bar{x})$ μm	$(x_i - \bar{x})^2$ $(\mu\text{m})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$ $(\mu\text{m})^2$
1	2	3	4	5	8	7	8	9
1,000001	1	0,020	1	1	−4,4	− 4,4	19,40	19,40
1,000002	3	0,059	2	6	−3,4	−10,2	11,60	34,80
1,000003	6	0,118	3	18	−2,4	−14,4	5,76	34,56
1,000004	8	0,157	4	32	−1,4	−11,2	1,96	15,68
1,000005	10	0,196	5	50	−0,4	− 4,0	0,16	16,00
1,000006	7	0,137	6	42	+0,6	+ 4,2	0,36	2,52
1,000007	8	0,157	7	56	+1,6	+12,8	2,56	20,48
1,000008	4	0,078	8	32	+2,6	+10,4	6,76	27,04
1,000009	3	0,059	9	27	+3,6	+10,8	12,96	38,88
1,000010	0	0	10	0	+4,6	0	21,16	0
1,000011	1	0,020	11	11	+5,6	+ 5,6	31,36	31,36
Σ	51	1,001		275		−44,2 +43,8		240,72

$n = \Sigma f_i = 51$

$x_0 = 1$ m (tačno)

$\Sigma f_i\,(x_i - x_0) = 275\ \mu$m

srednja vrijednost $\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n}\Sigma\,[f_i(x_i - x_0)] = 1\text{ m} + \frac{275\ \mu\text{m}}{51} = 1{,}0000054\text{ m},$

varijancija $s^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma\,[f_i\,(x_i - \bar{x})^2] = \frac{1}{50}\,240{,}72\ (\mu\text{m})^2 = 4{,}8144\ (\mu\text{m})^2,$

standardno odstupanje $s = \sqrt{4{,}8144\ (\mu\text{m})^2} = 2{,}19\ \mu\text{m},$

nepouzdanost $C = \frac{s}{\sqrt{n}} = \pm\frac{2{,}19\ \mu\text{m}}{\sqrt{51}} = \pm 0{,}306\ \mu\text{m},$

relativna nepouzdanost $c = \frac{C}{\bar{x}} \approx \frac{C}{x_0} = \pm\frac{0{,}306\ \mu\text{m}}{1\text{ m}} = \pm 3\cdot 10^{-7}\ (P = 68\%).$

Tako od stupca 4 jednostavno dobivamo vrijednosti navedene u stupcu 6. Kvadriranjem nastaju podaci u stupcu 8, a njihovim množenjem s pripadnom frekvencijom f_i vrijednosti u stupcu 9 tablice A-7. Uvrštenjem zbroja stupca 9 u jednadžbu (3.4-8) i računanjem slijedi varijancija

$$s^2 = \frac{1}{51-1}\, 240{,}72\ (\mu\text{m}^2) = 4{,}8144\ (\mu\text{m})^2,$$

odakle korjenovanjem dobivamo traženo standardno odstupanje $s = 2{,}19\ \mu\text{m}$.

Vidimo da uopće nismo upotrijebili podatke navedene u stupcima 2 i 7. Tome su dva različita razloga. Podaci u stupcu 2 trebat će nam u odsječku 3.6, ali smo ih ovdje izračunali i naveli zato da ne moramo tamo ponovno pisati tablicu. Podaci u stupcu 7 služe za *kontrolu* računanja: zbroj svih podataka u tom stupcu treba da bude jednak nuli, jer to zahtijeva definicija srednje vrijednosti (odlomak 3.3.1). U našoj tablici taj zbroj iznosi $-0{,}4\ \mu\text{m} \neq 0$, što se može zanemariti, dakle izračunavanje smatrati valjanim. Do razlike je došlo zato jer smo računali sa *zaokruženom* vrijednošću srednje vrijednosti $1\ \text{m} + 5{,}4\ \mu\text{m}$, a ne sa $1\ \text{m} + 5{,}392\,157\ \mu\text{m}$.

Preostaje nam još da izračunamo nepouzdanost C i relativnu nepouzdanost c dobivene srednje vrijednosti pri statističkoj sigurnosti $P = 68\%$ (odlomak 3.3.5). Pomoću jednadžbe (3.3-21) slijedi

$$C = \pm 2{,}19\ \mu\text{m}/\sqrt{51} = \pm 0{,}306\ \mu\text{m} \approx \pm 0{,}3\ \mu\text{m}.$$

Relativna nepouzdanost c dobiva se prema izrazu (3.3-23) kao omjer nepouzdanosti C i srednje vrijednosti. Za ovu svrhu možemo srednju vrijednost bez daljnjeg zamijeniti sa $x_0 = 1\ \text{m}$ (razlika iznosi $5{,}4\ \mu\text{m}$), pa tako nastaje

$$\text{relativna nepouzdanost } c = \pm 0{,}3\ \mu\text{m}/1\ \text{m} = \pm 3 \cdot 10^{-7}.$$

Prema tome se konačan rezultat obrade mjernih podataka može prikazati u obliku jednadžbe (3.3-24):

$$\bar{x} = 1{,}0000054\ (1 \pm 3 \cdot 10^{-7})\ \text{m}.$$

Valja ponovno naglasiti da je taj rezultat definitivan jedino u slučaju ako nema nikakvih sistematskih pogrešaka, te da njegova statistička sigurnost iznosi 68%. Za druge sigurnosti treba računati pomoću jednadžbi koje su navedene u odlomku 3.6.6.

3.5. Opća srednja vrijednost. Procjena standardnog odstupanja

Pri definiranju srednje vrijednosti (3.3-6) u odlomku 3.3.1 pretpostavljali smo da pojedini mjerni rezultati podjednako utječu na njeno formiranje. U idućim ćemo odlomcima na primjerima razmotriti kako se izračunava srednja vrijednost ako su pogreške pojedinih rezultata različite. Osim toga, u odlomku 3.5.4 osvrnut ćemo se na poteškoće pri utvrđivanju vrijednosti standardnog odstupanja.

3.5.1. Opća srednja vrijednost. U prošlim smo odlomcima stalno pretpostavljali da se ponovljena mjerenja izvode »pod jednakim uvjetima«. Uz tu pretpostavku izveden je u odlomku 3.3.1 izraz (3.3-6) kojim se izračunava srednja vrijednost

višestruko mjerene konstantne veličine. Nameće se logično pitanje: kako se utvrđuje najvjerojatnija vrijednost višestruko izmjerene veličine x ako su pojedini nizovi mjerenja izvedeni s različitim pogreškama, tj. ako nije udovoljeno »jednakim uvjetima«?

Da bismo došli do odgovora, opišimo problem konkretnije. Neka *konstantna* fizikalna veličina x mjerena je u *nekoliko nizova*. Prvi niz od n_1 mjerenja dao je *srednju vrijednost* x_1 (ispuštamo crticu povrh) i pripadnu nepouzdanost C_1 (odlomak 3.3.5), drugi niz od n_2 ponovljenih mjerenja dao je srednju vrijednost x_2 s pripadnom nepouzdanošću C_2, općenito niz od n_j mjerenja dao je srednju vrijednost x_j s nepouzdanošću C_j. Pri tom je $j = 1,2, \ldots, k$. Dobivene srednje vrijednosti x_j međusobno se razlikuju. Ako mjerenja nisu izvedena »pod jednakim uvjetima« (različite mjerne metode, uređaji, mjerači itd.), međusobno se razlikuju i izračunate nepouzdanosti C_j. Kolika je srednja vrijednost od k srednjih vrijednosti x_j sa različitim nepouzdanostima C_j.

Očito je da tu *opću srednju vrijednost* $\bar{x}$ (»opća aritmetička sredina«, »utežna srednja vrijednost«, njem. gewogene Mittelwert) valja izračunavati tako da manje pogrešan rezultat (manja nepouzdanost C_j) *jače utječe*, ima veću *težinu* negoli onaj rezultat koji ima veću pogrešku. Zato se u definiciji srednje vrijednosti (odlomak 3.3.1) uvodi *faktor utjecaja* p_j (»težina«, njem. Gewicht) pojedine srednje vrijednosti x_j. Pri tom je p_j pozitivan *broj*, veći ili manji od 1.

U klasičnoj teoriji pogrešaka, koja se oslanja na račun izjednačenja metodom najmanjih kvadrata (vidi kraj odlomka 3.3.2), faktor utjecaja p_j uvodi se tako da se umjesto jednadžbe (3.3-9) zahtijeva udovoljenje uvjetu

$$\Sigma\,[p_j\,(x_j - \bar{x})^2] = \text{minimum}. \tag{3.5-1}$$

Ovdje slovo $\bar{x}$ predstavlja *opću* srednju vrijednost, slova x_j pojedine srednje vrijednosti, a znak zbroja proteže se od $j = 1$ do $j = k$, jer je $j = 1, 2, \ldots, k$. Deriviranjem (3.5-1) po općoj srednjoj vrijednosti te izjednačenjem dobivene derivacije s nulom nastaje izraz za *opću srednju vrijednost*

$$\bar{x} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_jx_j + \ldots + p_kx_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_j + \ldots + p_k} = \frac{\Sigma p_j x_j}{\Sigma p_j}. \tag{3.5-2}$$

Računanje se olakšava uvođenjem okrugle, proizvoljno odabrane vrijednosti x_0 (usporedi s odlomkom 3.4.1)

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\Sigma p_j (x_j - x_0)}{\Sigma p_j}. \tag{3.5-3}$$

Podrobna teoretska razmatranja u okviru računa izjednačenja pokazuju da se nepouzdanost C opće srednje vrijednosti (3.5-2,3) izračunava pomoću jednadžbe

$$C^2 = \frac{\Sigma [p_j (x_j - \bar{x})^2]}{(k-1)\,\Sigma p_j}. \tag{3.5-4}$$

Ovdje je k broj mjernih nizova, tj. ukupan broj srednjih vrijednosti x_j koje su uzete u obzir pri izračunavanju opće srednje vrijednosti. Prema tome najvjerojatniji

rezultat (uz statističku sigurnost $P = 68\%$; vidi odsječke 3.6.5,6) k nizova ponovljenih mjerenja (nizovi od n_1, n_2 itd. ponovljenih mjerenja) glasi

$$x = \bar{x} + C, \tag{3.5-5}$$

što je potpuno analogno jednadžbi (3.3-22).

Ista teorija dokazuje da je faktor utjecaja p_j pojedine srednje vrijednosti x_j obrnuto proporcionalan kvadratu pripadne nepouzdanosti C_j, tj.

$$\text{faktor utjecaja (težina)} \quad p_j = \left(\frac{K}{C_j}\right)^2 = n_j\left(\frac{K}{s_j}\right)^2. \tag{3.5-6}$$

Pri tom je K *proizvoljno* odabrana konstanta (istog roda veličina kao što je x), n_j je broj ponovljenih mjerenja j-tog niza, a s_j standardno odstupanje tog niza (vezu između C_j i s_j prikazuje lijevi dio jednadžbe 3.3-21 u odlomku 3.3.5). Nepouzdanost C opće srednje vrijednosti u jednadžbi (3.5-5) izračunava se pomoću jednadžbe

$$C = \frac{K}{\sqrt{\Sigma p_j}} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma 1/C_j^2}}. \tag{3.5-7}$$

Izrazi (3.5-7 i 4) moraju dati istu vrijednost nepouzdanosti C. Ako to nije slučaj, onda je to znak da prethodno nisu bile uzete u obzir neke sistematske pogreške ili da čak postoje grube pogreške.

3.5.2. Opća srednja vrijednost kuta. Razlaganja prethodnog odlomka ilustrirat ćemo primjerom iz geodezije. Neki stalni kut x mjeren je u četiri mjerna niza, u svakom nizu drugim teodolitom i drukčijom metodom. Za svaki niz dobivena je druga srednja vrijednost x_j, a i pripadna standardna odstupanja s_j pojedinih mjerenja (unutar svakog niza) bila su različita. Mjerne rezultate sadrže prva četiri stupca u tablici. Pripadne nepouzdanosti C_j izračunali smo pomoću izraza (3.3-21) u odlomku 3.3.5 i svrstali ih u peti stupac. Tako smo, na primjer, za nepouzdanost srednje vrijednosti trećeg mjernog niza dobili

$$C_3 = \frac{s_3}{\sqrt{6}} = \frac{20''}{\sqrt{6}} = \pm 8{,}2''.$$

Red. broj niza j	Broj mjerenja n_j	Srednja vrijednost x_j	Standardno odstupanje s_j	Nepouzdanost $C_j = s_j/\sqrt{n_j}$	Faktor utjecaja p_j
1	2	58°43′18″	10″	±7,1″	1,98
2	4	58°43′30″	15″	±7,5″	1,78
3	6	58°43′12″	20″	±8,2″	1,49
4	8	58°43′22″	12″	±4,2″	5,67

Vrijednosti faktora utjecaja (težine) p_j pojedinih nizova izračunat ćemo pomoću jednadžbe (3.5-6). Za konstantu K proizvoljno odabiremo vrijednost $K = 10''$. Tako, na primjer, za treći niz dobivamo

$$p_3 = \left(\frac{K}{C_3}\right)^2 = \left(\frac{10''}{8{,}2''}\right)^2 = 1{,}49.$$

Ostale izračunate vrijednosti faktora utjecaja svrstali smo u posljednji stupac tablice. Zbroj svih faktora p_j iznosi

$$\sum p_j = 10{,}92.$$

Opću srednju vrijednost izračunat ćemo pomoću jednadžbe (3.5-3). Budući da je faktor utjecaja $p_4 = 5{,}67$ najveći, odabiremo $x_0 = 58°43'20''$, jer će se u njegovoj blizini nalaziti opća srednja vrijednost. Razlike $(x_j - x_0)$ redom iznose: -2, $+10$, -8 i $+2''$, pa su zato umnošci $p_j(x_j - x_0)$ redom: $-3{,}96$; $+17{,}80$; $-11{,}92$ i $+11{,}34''$. Zbroj tih vrijednosti daje $+13{,}26''$. Prema tome pomoću (3.5-3) slijedi

$$\bar{x} = 58°43'20'' + \frac{13{,}26''}{10{,}92} = 58°43'21'',$$

gdje smo zanemarili $0{,}21''$. To možemo učiniti, jer nepouzdanost izračunate opće srednje vrijednosti prema (3.5-7) iznosi

$$C = 10''/\sqrt{10{,}92} = 3{,}03''.$$

Prema tome se konačan rezultat može napisati u obliku (uz $P = 68\%$)

$$x = 58°43'21'' \pm 3''.$$

Računanjem pomoću jednadžbe (3.5-4) možemo se uvjeriti da je nepouzdanost C nakon izjednačenja ($2{,}97''$) jednaka prije izračunatoj ($3{,}03''$).

3.5.3. Nepouzdanost opće srednje vrijednosti. U stručnoj literaturi dosta često nalazimo kapitalne pogreške pri izračunavanju opće srednje vrijednosti i njene nepouzdanosti. Zato ćemo ovdje na još jednom primjeru ilustrirati ispravnu primjenu jednadžbi odlomka 3.5.1, a ujedno navesti i pogrešan način primjene tih pojmova. Primjer smo uzeli iz poznatog udžbenika o kozmičkim zrakama u kojem se želi utvrditi opća srednja vrijednost relativne mase x mezona μ. Pri tom je $x = m_\mu/m_e$, gdje je m_μ masa mezona, a m_e masa elektrona.

Različitim metodama učinjeno je u nekoliko laboratorija 11 nizova mjerenja relativne mase x mezona. Utvrđene srednje vrijednosti x_j tih nizova i pripadne nepouzdanosti C_j svrstali smo u drugi i treći stupac tablice. Autor udžbenika izračunao je *običnu* (»jednakotežnu«, odlomak 3.3.1) srednju vrijednost

$$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum x_j = \frac{1}{11}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{11}) = 214{,}6, \qquad (3.5\text{-}8)$$

j	x_j	C_j	p_j	$x_j - x_0$	$p_j(x_j - x_0)$	$1/C_j^2$
1	215	2	4,000	+1	+ 4,000	0,2500
2	210	6	0,445	−4	− 1,780	0,0278
3	210	4	1,000	−4	− 4,000	0,0625
4	209,6	2,4	2,780	−4,4	−12,240	0,1736
5	217	4	1,000	+3	+ 3,000	0,0625
6	215,5	7,5	0,284	+1,5	+ 0,426	0,0177
7	215	5	0,640	+1	+ 0,640	0,0400
8	214	1,9	4,440	0	0	0,2770
9	209,3	2,2	2,310	−4,7	−15,560	0,2068
10	217	4	1,000	+3	+ 3,000	0,0625
11	228	15	0,071	+14	+ 0,995	0,0044

nije, dakle, uzeo u obzir faktore utjecaja (težine) p_j koje je lako mogao izračunati pomoću (3.5-6), jer su poznate nepouzdanosti C_j srednjih vrijednosti x_j pojedinih mjernih nizova. Uz to autor je računao standardno odstupanje opće srednje vrijednosti (3.5-8) ovako

$$s = \frac{1}{\sqrt{11}} \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_{11}^2} = 6{,}1, \tag{3.5-9}$$

pa rezultat svih 11 mjernih nizova navodi u obliku

$$x = 214{,}6 \pm 6{,}1. \tag{3.5-10}$$

To je, dakako, *pogrešno*: u rezultatu (3.3-10) ne zanima nas mjera odstupanja s_j pojedinih srednjih vrijednosti x_j od opće srednje vrijednosti (3.5-8), već *nepouzdanost* C te srednje vrijednosti. Prema tome autor je trebao ovako izračunati nepouzdanost opće srednje vrijednosti (3.5-8):

$$C = \frac{s}{\sqrt{k}} = \frac{6{,}1}{\sqrt{11}} = \pm 1{,}84, \quad \text{što daje} \quad x = 214{,}6 \pm 1{,}8. \tag{3.5-11}$$

I taj rezultat u znatnoj je mjeri pogrešan. Iz tabelarnog pregleda razabiremo da se rezultat posljednjeg mjernog niza $x_{11} = 228 \pm 15$ bitno razlikuje od ostalih deset. To znači da x_{11} *pogoršava* ocjenu opće srednje vrijednosti umjesto da je poboljšava, što je svrha ovovrsnih računa. Isključimo zato iz razmatranja x_{11}! Postupkom analognim izrazima (3.5-8, 10, 11) slijedi

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(x_1 + \ldots + x_{10}) = 213{,}2, \quad C = \pm 1{,}36, \quad x = 213{,}2 \pm 1{,}4.$$

Na kraju izračunajmo *ispravno* vrijednost opće srednje vrijednosti, tj. uzmimo u obzir faktore utjecaja p_j. Pri tom se možemo poslužiti i vrijednošću x_{11}, jer prema (3.5-6) njezin će utjecaj biti najmanji. Da bismo što manje računali, odabiremo $K = 4$. Tako, na primjer, za faktor utjecaja osmog mjernog niza (vidi tablicu) dobivamo

$$p_8 = \left(\frac{K}{C_8}\right)^2 = \left(\frac{4}{1{,}9}\right)^2 = 4{,}44.$$

Ostale izračunate vrijednosti svrstali smo u četvrti stupac tablice.

Opću srednju vrijednost izračunat ćemo pomoću izraza (3.5-3) odabravši $x_0 = 214$, jer je za tu vrijednost x_j faktor p_j najveći. Razlika $x_8 - x_0$ u tom je slučaju jednaka nuli. Za ostale x_j vrijednosti $x_j - x_0$ navedene su u petom stupcu. Izračunate umnoške $p_j(x_j - x_0)$ svrstali smo u šesti stupac tablice. Njihov zbroj iznosi

$$\sum p_j (x_j - x_0) = -21{,}419, \quad \sum p_j = 18{,}97.$$

Uvrštenjem tih vrijednosti i $x_0 = 214$ u jednadžbu (3.5-3) slijedi

$$\bar{x} = 214 - 21{,}419/18{,}97 = 214 - 1{,}13 = 212{,}9.$$

Nepouzdanost te srednje vrijednosti nećemo računati pomoću (3.5-4), već pomoću jednostavnijeg izraza (3.3-7). U tu svrhu moramo prethodno izračunati

pojedine vrijednosti $1/C_j^2$. Dobivene vrijednosti nanizali smo u posljednji stupac tablice. Budući da je

$$\sum 1/C_j^2 = 1{,}1848, \quad \text{dobivamo} \quad C = 1/\sqrt{1{,}1848} = \pm 0{,}92.$$

Prema tome korektan rezultat glasi ($P = 68\%$):

$$x = m_\mu/m_e = 212{,}9 \pm 0{,}9 \approx 213 \pm 1.$$

Napominjemo da su razmatrane vrijednosti relativne mase mezona μ ponešto zastarjele. Danas se smatra da ta veličina iznosi $206{,}85 \pm 0{,}12$. Znatna razlika prema staroj vrijednosti 213 vjerojatno je uzrokovana primjesama mezona π prilikom mjerenja.

3.5.4. Procjena standardnog odstupanja. U odlomku 3.3.3 uveli smo termin »standardno odstupanje (pojedinog mjerenja)« kao sinonim za »srednju kvadratnu pogrešku (pojedinog mjerenja)«. Iako formalno takva zamjena nije pogrešna, ona postaje bliska jedino u svjetlu matematičke statistike, odakle i potječe naziv »standardno odstupanje«. Zato ćemo ovdje letimično razmotriti nekoliko pojmova *statistike* koja se, na primjer, može definirati ovako: statistika je nauka koja primjenjuje teoriju vjerojatnosti za procjenjivanja i za stvaranje zaključaka o kvantitativnim karakteristikama populacije objekata. Riječ *populacija* označuje skup objekata koje razmatramo. *Objekti* mogu biti ljudi, predmeti ili mjerni rezultati. S obzirom na veličinu populacije razlikujemo »konačnu« i »beskonačnu populaciju«. Tako je, na primjer, broj stanovnika nekog grada konačna populacija, a broj uzoraka morske vode beskonačna populacija (broj uzoraka praktički je neograničen).

Temeljni pojam statistike je *uzorak*, definiran ovako: uzorak je cjelina populacije uzeta na takav način da je ona predstavnik te populacije (»reprezentativni uzorak«). Jedna kap vode, uzeta iz spremnika koji sadrži dobro promiješanu vodu, može biti uzorak. Prema tome uzorkom se smatra jedna kap, a ne samo dio kapi. Isto tako uzorak ne čine jedan ili dva mjerna rezultata, uzeta iz n rezultata mjerenja duljine, već skup od svih n mjerenja. Zadatak je statistike da matematičkim razmatranjem uzorka *procijeni* karakteristike *populacije* iz koje je uzet uzorak, tj. da prema poznatom uzorku procijeni vrijednost *nepoznatog* parametra populacije. U primjeni statistike za obradu mjernih rezultata njen se zadatak svodi na procjenjivanje vrijednosti karakteristika populacije (teoretski je to beskonačan broj rezultata ponovljenih mjerenja konstantne fizikalne veličine) prema n rezultata ponovljenih mjerenja (uzorka).

U matematičkoj statistici je uobičajeno da se karakteristike *uzorka* označuju slovima *latinice*, a karakteristike nepoznatog parametra *populacije* slovima *grčke* abecede. Tako se, na primjer, »standardno odstupanje *populacije*« σ definira jednadžbom

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2, \tag{3.5-12}$$

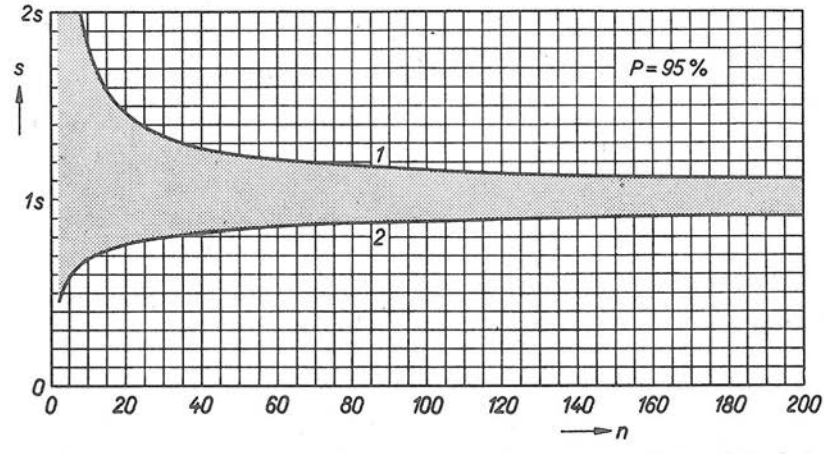
gdje je μ srednja vrijednost od N mjernih rezultata x_i (pri $N \to \infty$ srednja vrijednost μ jednaka je stvarnoj vrijednosti) koji tvore konačnu populaciju. Napominjemo da su mnoge konačne populacije (N) tako velike u odnosu prema uzorku (n) koji je uzet iz njih da se mogu smatrati beskonačnim populacijama (kao da $N \to \infty$).

»Standardno odstupanje *uzorka*« s izračunavamo pomoću jednadžbe (3.3-18) u odlomku 3.3.3:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \qquad (3.5\text{-}13)$$

Tu je n broj mjernih rezultatâ x_i koji svi zajedno predstavljaju uzorak, $n \ll N$. Prema tome slovo s označuje *procjenu* (engl. estimate) »standardnog odstupanja populacije« σ. S takvim *procijenjenim* standardnim odstupanjem s *stvarno računamo* u mjernoj tehnici, jer vrijednost σ u pravilu ne znamo. Nepouzdanost srednje vrijednosti ponovljenih mjerenja, nastalu zbog $s \neq \sigma$, uzimamo u obzir posebnim faktorima većim od broja 1 (faktor t, vidi odsječak 3.7).

Za dovoljno velik broj n ponovljenih mjerenja veličina s praktički se ne razlikuje od σ. No za tolike n koji se novčano i vremenski mogu opravdati u mjernoj praksi, a to je u najboljem slučaju nekoliko desetaka ponovljenih mjerenja, vrijednost s može se procijeniti samo sa stanovitom nepouzdanošću. Dojam o toj nepouzdanosti procjene može nam pružiti dijagram na slici A.7, koji prikazuje granice pouzdanosti (krivulje *1* i *2*) unutar kojih se nalazi vrijednost s pri različitim brojevima n ponovljenih mjerenja. Nacrtani dijagram vrijedi za slučaj statističke sigurnosti $P = 0{,}95 = 95\%$ (o P vidi u odlomcima 3.6.5,6 i 3.7.4). Iz njega se razabire da valja obaviti $n = 150$ do 200 ponovljenih mjerenja ako želimo da nepouzdanost procijenjene vrijednosti s (jednadžba 3.5-13) ne premaši $\pm 10\%$. Sa $n = 50$ mjerenja granice nepouzdanosti standardnog odstupanja s proširuju se na oko $\pm 20\%$ (krivulje su nesimetrične). Pri manjim statističkim sigurnostima (na primjer $P = 68{,}3\%$), nepouzdanost vrijednosti s je za iste n manja, a za veće P (npr. 99%) veća.



Sl. A.7. Granice pouzdanosti standardnog odstupanja s (procjena vrijednosti σ) u ovisnosti o broju ponovljenih mjerenja n za statističku sigurnost $P = 95\%$. Krivulje prikazuju: *1* — gornja granica pouzdanosti standardnog odstupanja, *2* — donja granica. Pri $n = 400$ granice iznose 0,93 s i 1,08 s (nije nacrtano)

Zbog skupoće i pomanjkanja vremena u mjernoj se tehnici najčešće ne može provesti znatan broj n ponovljenih mjerenja. Posljedica toga je, kako ilustrira i dijagram na slici A.7, povećana nepouzdanost procijenjene vrijednosti s standardnog

odstupanja. To se, kako smo već spomenuli, uzima u obzir faktorom t Studentove raspodjele slučajnih pogrešaka, o čemu se govori u odsječku 3.7. Ponekad, međutim, postoje podaci o nekoliko nizova ponovljenih mjerenja obavljenih u toku duljeg razdoblja. Ako se nizovi od $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ponovljenih mjerenja ne razlikuju bitno ili ako je preciznost mjerenja približno konstantna, standardno se odstupanje može dosta dobro procijeniti pomoću izraza

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \Sigma(x_{2i} - \bar{x})^2 + \ldots + \Sigma(x_{ki} - \bar{x}_k)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1)}. \qquad (3.5\text{-}14)$$

Ovdje indeksi 1, 2, ..., k označuju redne brojeve mjernih nizova, a slova sa crticom povrh sebe srednje vrijednosti pojedinih nizova. Znakovi zbroja protežu se redom od 1 do n_1, od 1 do n_2 itd.

Korisno je spomenuti vezu između »nepouzdanosti srednje vrijednosti *populacije*« γ (»standardno odstupanje srednje vrijednosti μ populacije«; procjena od γ jest »nepouzdanost« C, koju smo razmotrili u odlomku 3.3.5) za slučaj kada veličina populacije N nije jako velika u odnosu prema veličini uzorka n. Takav je slučaj, na primjer, pri tzv. statističkom ispitivanju velikoserijskih proizvoda. Teorija statistike dokazuje da vrijedi

$$\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}. \qquad (3.5\text{-}15)$$

Odavde slijedi $\gamma = \sigma/\sqrt{n}$ ako $n/N \to 0$. Baš uz tu pretpostavku definirana je u odlomku 3.5.5 nepouzdanost C, tj. procjena vrijednosti γ. Tako, na primjer, vrijednost korijena u jednadžbi (3.5-15), za $N = 100$, $n = 10$, iznosi $(90/99)^{1/2} = 0{,}953$.

3.6. Nepouzdanost srednje vrijednosti i statistička sigurnost pri normalnoj raspodjeli slučajnih pogrešaka

Iskustvo od preko 150 godina dokazuje da aksiomi o vjerojatnosti nastajanja slučajnih pogrešaka (odlomak 3.3.2) pri dovoljno velikom broju n ponovljenih mjerenja vrijede kao prirodni zakoni To su oko godine 1800. nezavisno otkrili *A. M. Legendre* i *C. F. Gauss*. Primjenjivost tih zakona u gotovo svim granama znanosti, tehnike, velikoserijske industrije i uopće pri razmatranju masovnih pojava nalaže nam da u idućim odlomcima barem letimično razmotrimo *primjenu* tzv. normalne (Gaussove) raspodjele u mjernoj tehnici. Pri tom ćemo morati izostaviti mnoge egzaktne dokaze. Čitalac ih može naći u specijalnoj literaturi o matematičkoj statistici i teoriji pogrešaka.

3.6.1. Frekvencija, relativna frekvencija i gustoća. Zamislimo da smo konstantnu fizikalnu veličinu x izmjerili pod jednakim uvjetima n puta (to je »uzorak« u smislu terminologije odlomka 3.5.4). Sređujući nakon eliminacije eventualnih sistematskih pogrešaka n dobivenih rezultata $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n$, konstatirat ćemo da se neki od rezultata x_i *ponavljaju*. Tako je vrijednost x_1 izmjerena f_1 puta, vrijednost x_2 f_2 puta, vrijednost x_i f_i puta itd. Budući da faktor f_i označuje ponavljanje istog rezultata, on se zove *frekvencija* ili *učestalost* izmjerene vrijednosti. Srednju vrijednost od n mjernih rezultata x_i možemo izračunati pomoću jednadžbe (3.4-2) u odlomku 3.4.1, koju možemo zabilježiti u obliku

$$\bar{x} = \Sigma\left(\frac{f_i}{n} x_i\right), \quad \text{jer je} \quad \Sigma f_i = n. \qquad (3.6\text{-}1)$$

Pri tom se znak zbroja proteže od $i = 1$ do $i = k$, gdje je $k \leqq n$. Omjer f_i/n zove se *relativna frekvencija* ili »relativna učestalost« mjernog rezultata x_i. Iz desne jednadžbe (3.6-1) proizlazi da je

$$\frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \ldots + \frac{f_i}{n} + \ldots + \frac{f_k}{n} = \sum \frac{f_i}{n} = 1. \qquad (3.6\text{-}2)$$

Grafički se n mjernih rezultata x_i može prikazati onako kako smo to učinili na slici A.8a: na apscisnu os nanesene su pojedine vrijednosti x_i mjerene veličine x, a na ordinatnu os frekvencije f_i ponavljanja pojedinih rezultata x_i. Broj tačaka povrh pojedinih vrijednosti x_i izražava vrijednost frekvencije f_i. Vidimo da se pojedine vrijednosti x_i *raspodjeljuju* (rasipaju, rasturaju) oko srednje vrijednosti izračunate pomoću lijeve jednadžbe (3.6-1). Što je vrijednost x_i udaljenija od srednje vrijednosti (lijevo i desno), frekvencija f_i je manja. Napominjemo da slika A.8a ilustrira primjer mjerenja metarskog štapa ($n = 51$) koji smo razmatrali u odlomku 3.4.3 (vidi i tablicu A-7). Tamo smo utvrdili da srednja vrijednost od $n = 51$ mjerenja duljine štapa iznosi 1,000 0054 m, tj. 1 m + 5,4 μm, jer je μm = mikrometar = 10^{-6} m.

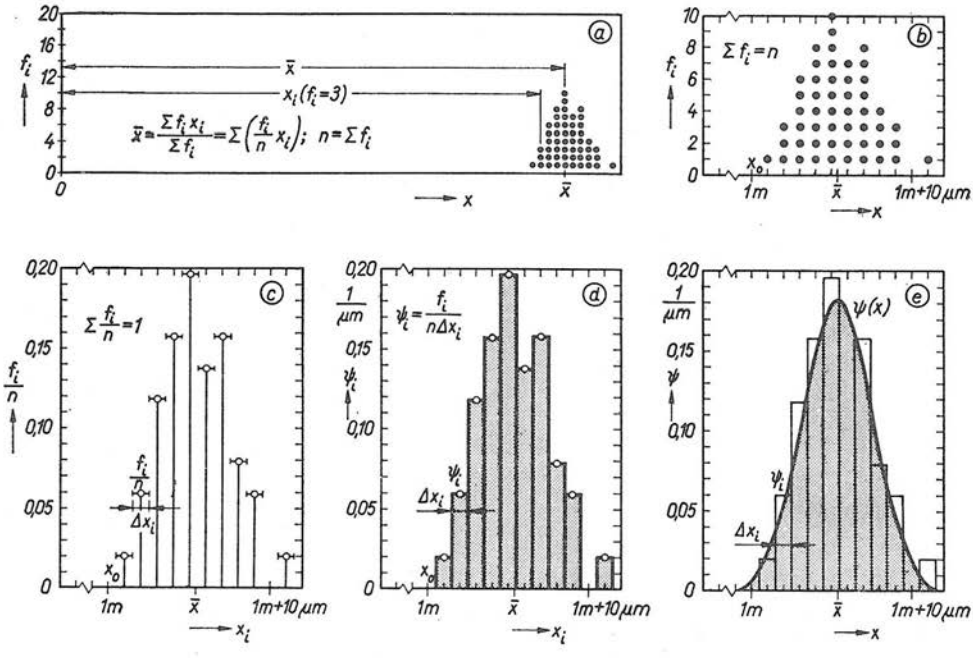
Slika A.8a nije crtana u mjerilu. Razmaci između susjednih rezultata x_i iznose, naime, 1 μm (vidi stupac 1 u tablici A-7), a srednja vrijednost, oko koje se gomilaju mjerenjem dobiveni pojedini rezultati x_i, približno 1 metar, dakle milijun puta više. Budući da uz takve ekstremne odnose nije moguće upotrijebiti grafički prikaz u mjerilu, ovovrsne rezultate crtamo na način prikazan slikom A.8b, tj. skraćujemo apscisnu os i time dovodimo rasipane mjerne rezultate x_i u centar crteža. Pri tom možemo crtež pojednostavniti: umjesto da frekvenciju f_i prikazujemo brojem tačaka (sl. A.8a, b), možemo je predočiti vertikalnom *dužinom* (od osi x_i do vrha stupca tačaka). Tako, na primjer (tablica A-7), vrijednost $x_1 = 1$ m + 4 μm ima frekvenciju $f_1 = 8$. Budući da je $n = 51$, relativna frekvencija iznosi $f_1/n = 0{,}157 = 15{,}7\%$ (stpuac 3 tablice A-7). Uvedemo li kao ordinatu *relativnu frekvenciju*, gomilanje pojedinih izmjerenih vrijednosti x_i oko srednje vrijednosti možemo prikazati dijagramom na slici A.8c. U njemu vertikalne dužine predočuju relativne frekvencije f_1/n pojedinih vrijednosti x_1.

Mjerni rezultati x_i u stupcu 1 tablice A-7 (odlomak 3.4.3) *diskretne* su vrijednosti. U skladu s time su i grafički prikazi na slikama A.8a,b,c. Da bismo omogućili primjenu matematičke analize, pretpostavljamo da sve vrijednosti veličine x u rasponu od $(x_i - \Delta x_i/2)$ do $(x_i + \Delta x_i/2)$ imaju istu frekvenciju f_i, odnosno relativnu frekvenciju f_i/n. Time, u stvari, pretpostavljamo da je daljnjim ponavljanjem mjerenja (preko vrijednosti uzorka $n = 51$) u rasponu Δx_i moguće nanizati mnoštvo novih mjernih rezultata. Skup od beskonačno mnogo mogućih mjerenja veličine x, kojih bi rezultati padali u sve intervale Δx_i, predstavlja populaciju u smislu terminologije odlomka 3.5.4. Pretpostavka o konstantnosti frekvencije f_i, a time i relativne frekvencije f_i/n unutar intervala Δx_i, omogućuje nam da povrh pojedinih dužina f_i/n (sl. A.8c) povučemo vodoravne crtice duge Δx_i. Tako, na primjer, relativna frekvencija $f_1/n = 5{,}9\%$ vrijedi za $\Delta x_i = 1$ μm od 1 m + 1,5 μm do 1 m + 2,5 μm.

S tim vodoravnim crticama dugima Δx_i doprli smo vrlo blizu *kontinuiranom* razmatranju niza od n mjernih rezultata x_i (za stvarno kontinuirani prikaz relativnih frekvencija teoretski bi bila potrebna beskonačno velika populacija izmjerenih vrijednosti x_i). Korisno je da s time budu u skladu formalistika njihove matematičke obrade i grafičko prikazivanje. Zato se upotrebljava fizikalna veličina

$$\text{gustoća relativne frekvencije } \psi_i = \frac{f_i}{n \Delta x_i}. \qquad (3.6\text{-}3)$$

Ako odaberemo $\Delta x_i = 1\ \mu m$, za $x_i = 1\ m + 2\ \mu m$ (u stvari za raspon od $1\ m + 1{,}5\ \mu m$ do $1\ m + 2{,}5\ \mu m$) uz $f_i/n = 0{,}059$ dobivamo pomoću (3.6-3) pripadnu vrijednost gustoće relativne frekvencije (kraće: »gustoća«) $\psi_i = 0{,}059/1\ \mu m = 0{,}059\ (\mu m)^{-1}$.



Sl. A.8. Grafički prikazi rezultatâ x_i ponovljenih mjerenja ($n = 51$) duljine x metarskog štapa (primjer u odlomku 3.4.3). Rezultati x_i rasipani su oko računanjem utvrđene srednje vrijednosti $1\ m + 5{,}4\ \mu m$. Simboli označuju ove veličine: f_i — frekvencija mjernih rezultata x_i, f_i/n — relativna frekvencija, ψ_i — gustoća relativne frekvencije

S veličinom gustoća ψ_i možemo rezultate x_i niza od n ponovljenih mjerenja prikazati u *novoj* vrsti dijagrama (sl. A.8d): duž ordinatne osi nanesena je vrijednost gustoće ψ_i, a duž apscisne osi vrijednost x_i mjerene konstantne veličine x. U tom novom dijagramu relativna frekvencija f_i/n prikazana je *površinom* pojedinih stupaca širokih Δx_i. To neposredno proizlazi iz jednadžbe (3.6-3) ako je napišemo u obliku $f_i/n = \psi_i\, \Delta x_i$. Dijagramima »gustoća ψ_i—mjerena veličina x_i« nalik na sliku A.8d (histogram) služit ćemo se u većini idućih razmatranja.

3.6.2. Gustoća vjerojatnosti. Zadržimo se još časak na primjeru prethodnog odlomka (sl. A.8) i pokušajmo odgovoriti na prirodno pitanje: koju ćemo srednju vrijednost veličine x dobiti ako učinimo daljnjih n_2 mjerenja, recimo novih $n_2 = 51$ mjerenje? Nemoguće je dati tačan odgovor, jedino možemo *predvidjeti* da će se nova srednja vrijednost nalaziti u blizini stare $1\ m + 5{,}4\ \mu m$. Iz dijagrama na slici A.8a...d, naime, razabire se da je frekvencija vrijednosti x_i u *učinjenom* prethodnom nizu od $n_1 = 51$ mjerenje najveća u okolišu vrijednosti $1\ m + 5{,}4\ \mu m$. Zbog toga postoji stanovita *vjerojatnost* da će i novi mjerni niz n_2 dati sličnu raspodjelu frekvencija f_i/n i gustoće ψ_i.

Daljnji mjerni nizovi n_3, n_4, ... potvrdili bi, a djelomično i korigirali, vjerojatnosti pojavljivanja frekvencija f_i koje smo predvidjeli na temelju uzorka n_1 ili n_1+n_2. Povećani uzorak $n_1+n_2+\ldots$, tj. povećani broj mjerenjem utvrđenih rezultata x_i, omogućuje nam da *prognoziramo* raspodjelu gustoća ψ_i za vrlo veliku (u odnosu prema uzorku) populaciju rezultatâ x_i. Ta prognoza može se matematički izraziti tako da relativnu frekvenciju f_i/n u jednadžbama za opisivanje *izvedenih* mjerenja (3.6-1,2,3) zamijenimo *vjerojatnošću* P_i, tj. $f_i/n=P_i$ (slovo P dolazi od latinskog naziva probabilitas za vjerojatnost). Tom zamjenom spomenuti izrazi prelaze u oblik

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}&=P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_ix_i+\ldots+P_kx_k=\sum P_ix_i \\ P_1&+P_2+\ldots+P_i+\ldots+P_k=\sum P_i=1,\ P_i=\psi_i\Delta x_i \end{aligned}\right\} \qquad (3.6\text{-}4)$$

Pretenzija tih izraza jest da vrijede za *prognozirane* raspodjele relativne frekvencije i gustoće relativne frekvencije pojedinih vrijednosti x_i koje će se dobiti povećanjem broja ponovljenih mjerenja. Naravno da se ispravnost prognoze može kontrolirati: iz povećanog broja ponovljenih mjerenja dobivena relativna frekvencija f_i/n (ili ψ_i) uspoređuje se sa prethodno pretpostavljenom vjerojatnošću P_i (ili sa $\psi_i/\Delta x_i$). Savršena kontrola postigla bi se izvođenjem beskonačnog broja ponovljenih mjerenja, što je, dakako, nemoguće učiniti. S uvođenjem pojma vjerojatnost P mora se uskladiti i terminologija. Fizikalna veličina ψ_i u trećoj jednadžbi (3.6-4) dobiva naziv *gustoća vjerojatnosti*. To je razumljivo, jer $\psi_i=P_i/\Delta x_i$ predstavlja *omjer* vjerojatnosti P_i i intervala Δx_i mjerene veličine x.

Kod povećanog broja n pojedinih mjernih rezultata x_i (teoretski $n\to\infty$) stupci na slici A.8d, kojih površina predstavlja relativnu frekvenciju, postajat će sve uži. Za nepredočivo velik broj n njihova će se tjemena (vodoravne crtice povrh stupaca) zbog $\Delta x_i\to 0$ reducirati u tačke *kontinuirane krivulje* gustoće $\psi(x)$ prikazane slikom A.8e. Baš na takve velike populacije mjernih rezultata dobro je primjenjiv pojam vjerojatnosti P_i, koji zbog kontinuiranosti $\psi(x)$ i sam postaje kontinuirana funkcija $P(x)$. Za takav slučaj treća jednadžba (3.6-4) prelazi pomoću $\Delta x_i\to 0$ u oblik

$$P_{12}=P(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\psi(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3.6\text{-}5)$$

Riječima možemo taj izraz opisati na nekoliko načina, koji su u biti identični: 1) Od sveukupnog (velikog) broja n mjernih rezultata, nalazit će se u intervalu od x_1 do x_2 nP_{12} rezultata. 2) Vjerojatnost da će se svi mjerni rezultati nalaziti u intervalu od x_1 do x_2 iznosi P_{12}. 3) Vjerojatnost da će se bilo koji od n mjernih rezultata nalaziti u intervalu od x_1 do x_2 iznosi P_{12}.

Posve je *izvjesno* ($P=1$) da će se svi mjerni rezultati nalaziti u intervalu od $x_1=-\infty$ do $x_2=+\infty$. Za taj ekstremni slučaj jednadžba (3.6-5) prelazi u specijalan oblik

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x=1=100\,\%, \qquad (3.6\text{-}6)$$

jer je $\%=0{,}01$. Izraz (3.6-6) samo je drukčiji oblik jednadžbe (3.6-4) primijenjen na kontinuiranu funkciju $\psi(x)$.

Pojmovni prijelaz gustoće frekvencije u gustoću vjerojatnosti ovdje smo razmatrali na primjeru rezultatâ mjerenja. No slučajnost nije osobina samo mjernih rezultata već karakteristika gotovo svih pojava koje se zbivaju u velikim mnoštvima. Ako su ta mnoštva tolika da se mogu prebrojavati, onda se frekvencija pojavljivanja stanovitog događaja može predvidjeti kombinatorikom koja izračunava matematičku vjerojatnost u obliku pravog razlomka. No ako populacija postaje neizbrojivo velika, kombinatorika prelazi u matematičku statistiku koja se temelji na *Bernoulli*-jevom zakonu o velikim brojevima. Primijenjen na rezultate ponovljenih mjerenja i na prognozu o rezultatima koji bi se dobili daljnjim mjerenjima, taj zakon možemo izraziti ovako: pri povećavanju broja ponovljenih mjerenja (uz iste uvjete) svaki mogući rezultat pojavljivat će se s relativnom frekvencijom koja to jače prelazi u matematičku vjerojatnost (statističku sigurnost) što je veći broj ponovljenih mjerenja.

3.6.3. Normalna (Gaussova) raspodjela izmjerenih vrijednosti. Temeljnom jednadžbom (3.6-5) možemo se koristiti jedino u slučaju ako znamo funkciju $\psi(x)$, tj. ovisnost gustoće vjerojatnosti $\psi(x)$ o vrijednosti mjerene veličine x i o nekim parametrima. Na temelju svojih aksioma o slučajnim pogreškama (odlomak 3.3.2), koje je iskustvo prekrasno potvrdilo, *C. F. Gauss* je godine 1809. izveo izraz za matematičku gustoću vjerojatnosti

$$\psi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \tag{3.6-7}$$

koji vrijedi za *populaciju*, teoretski za beskonačno velik skup mjernih rezultata ($n \to \infty$). U tom izrazu slovo σ predstavlja standardno odstupanje populacije, a slovo μ njenu srednju vrijednost. Primjena jednadžbe (3.6-7) pokazala je da ona vrijedi u gotovo svim granama mjerne tehnike (iznimka je područje ionizirajućih zračenja, gdje je prikladnija *Poisson*ova raspodjela), odnosno uopće pri analizi masovnih pojava (na primjer: statistička kontrola kvalitete proizvoda u velikoserijskoj proizvodnji, analiza prometnih nesreća itd.).

Iskustvo je pokazalo i to da izraz (3.6-7) vrlo dobro opisuje *stvarnu* raspodjelu izmjerenih vrijednosti i u slučaju ako broj ponovljenih mjerenja n nije naročito velik. Drugim riječima, u smislu terminologije odlomka 3.5.4, jednadžba (3.6-7) vrijedi i za *uzorak*. Pri tom se ona, dakako, mora prilagoditi karakterističnim parametrima uzorka: srednjoj vrijednosti uzorka $\bar{x}$ i standardnom odstupanju s uzorka, tj. vrijednosti s kojom *procjenjujemo* σ populacije. Time primjena Gaussova izraza (3.6-7) na uzorak (nevelik broj ponovljenih mjerenja) glasi

$$\psi(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2\right]. \tag{3.6-8}$$

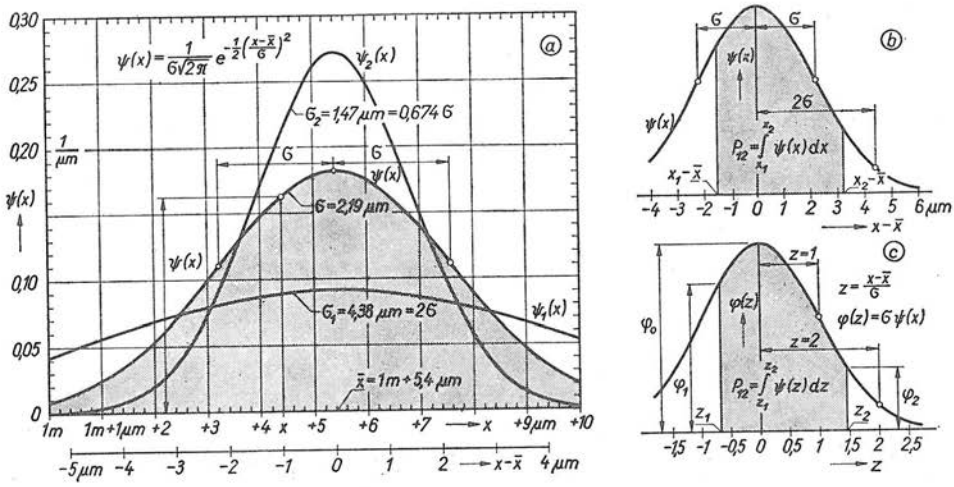
Unatoč tome u ovom ćemo odsječku zadržati oblik (3.6-7) Gaussova izraza (jedino ćemo umjesto znaka μ pisati x sa crticom). Dva su razloga tome. Prvi je neodređenost riječi »malen«, »nevelik«, »velik«. Ono što je za mjernu praksu »velik broj«, na primjer $n = 100$ ponovljenih mjerenja, za matematičku je statistiku malen broj. Drugi je razlog opasnost da se procjena s pobrka sa σ u odsječku 3.7, gdje će biti riječi o takvim ponovljenim mjerenjima kod kojih je n malen čak i za pojmove mjerne tehnike.

Krivulja koju opisuje jednadžba (3.6-7) često se zove *normalna krivulja raspodjele*. Porijeklo i smisao tog naziva objasnit će nam iduća razmatranja. Pri

tom ćemo se poslužiti slikom A.9a, koja prikazuje tri funkcije gustoće $\psi(x)$ nacrtane prema izrazu (3.6-7). Zaustavimo se najprije pri srednjoj krivulji $\psi(x)$ koja s gornje strane omeđuje tamniju površinu. Ta zvonolika krivulja, simetrična s obzirom na srednju vrijednost, karakterizirana je parametrima

$$\mu = \bar{x} = 1{,}0000054 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma = 2{,}19 \ \mu\text{m}.$$

Iz ovih podataka prepoznajemo primjer koji smo razmatrali u odlomku 3.4.3, gdje smo na temelju $n = 51$ ponovljeno mjerenje izračunali standardno odstupanje $s = 2{,}19$ μm. Prema tome smo pri računanju i crtanju krivulje $\psi(x)$ na slici A.9a



Sl. A.9. Normalna (Gaussova) krivulja raspodjele i grafički prikaz vjerojatnosti
a) Normalna raspodjela gustoće vjerojatnosti $\psi(x)$ za primjer u odlomku 3.4.3. Što je mjerni postupak precizniji, to je krivulja šiljatija. b) Grafički prikaz vjerojatnosti (tamnija površina). c) Prikaz vjerojatnosti P_{12} u dijagramu $\varphi(z)$—z, gdje je $\varphi(z)$ normalizirana krivulja Gaussove raspodjele

pretpostavili $\sigma \approx s$, tj. smatrali smo da je $s = 2{,}19$ μm dobra procjena vrijednosti odstupanja σ koje bismo u slučaju izvanredno vrlo velikog broja ponovljenih mjerenja N dobili pomoću (3.5-12). I srednju vrijednost μ populacije N zamijenili smo srednjom vrijednošću 1 m + 5,4 μm iz odlomka 3.4.3. Ordinatu tjemena krivulje $\psi(x)$ dobili smo računanjem

$$\psi(x = \bar{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2{,}19\,\mu\text{m}\sqrt{2\pi}} = 0{,}182\,\frac{1}{\mu\text{m}},$$

jer izraz (3.6-7) ima svoj maksimum pri srednjoj vrijednosti. Stupanj slaganja krivulje $\psi(x)$ sa stvarnim mjernim rezultatima ($n = 51$) prikazuje slika A.8e.

Zamislimo da je neki drugi mjerni postupak bio *manje precizan* nego što je onaj opisan podacima u tablici A-7. To znači da je različitost pojedinih izmjerenih vrijednosti x_i tog drugog postupka bila veća. Uzmimo da je i drugi postupak dao istu srednju vrijednost 1 m + 5,4 μm, ali da je iz njegovih mjernih podataka izračunato standardno odstupanje $\sigma_1 \approx s_1 = 2\sigma = 4{,}38$ μm. Za takav slučaj jednadžba

(3.6-7) daje krivulju $\psi_1(x)$ na slici A.9a, tj. razvučenu zvonoliku krivulju koja ilustrira posljedice manje preciznog mjernog postupka: rasipanje mnogih izmjerenih vrijednosti x dalje od srednje vrijednosti negoli kod prvog mjernog postupka. Obrnuto se događa kod *preciznijeg* mjerenja: krivulja $\psi_2(x)$ vrijedi za slučaj kada je $\sigma_2 = 0{,}674\sigma = 1{,}47\ \mu\text{m} < \sigma$. Usporedbom triju krivulja možemo steći opći zaključak: veća šiljatost krivulja u dijagramu $\psi(x)$—x ilustrira veću preciznost postupka ponavljanja mjerenja.

Dijagram »gustoća vjerojatnosti $\psi(x)$—mjerena veličina x« nimalo ne gubi na svojoj ilustrativnosti, a postaje praktičniji pri crtanju i računanju, ako za apscisnu os upotrijebimo razliku $x - \bar{x}$, jer je srednja vrijednost konstanta. Takvu novu koordinatnu os pridodali smo na dnu slike A.9a, a isključivo smo je primijenili na slici A.9b. Na njoj je tamnijom površinom prikazana jednadžba (3.6-5), tj. ta površina u nekom mjerilu predstavlja vjerojatnost P_{12}, što znači: od sveukupno n mjernih rezultata, u intervalu od $(x_1 - \bar{x})$ do $(x_2 - \bar{x})$ nalazit će se nP_{12} rezultata; broj nP_{12} proporcionalan je tamnijoj površini. U takvom smislu tamna površina ispod krivulje $\psi(x)$ na slici A.9a predstavlja jednadžbu (3.6-6), tj. tamna površina predstavlja izvjesnost (vjerojatnost $P = 1$) da će se svi mjerni rezultati nalaziti u rasponu između dvije beskonačnosti.

Za olakšanje računske obrade mnoštva mjernih rezultata, a u matematičkoj statistici napose, vrlo je korisno da se fizikalna veličina gustoća vjerojatnosti $\psi(x)$ preobrazi u jednu drugu veličinu, $\varphi(z)$, koja omogućuje uniformno razmatranje raspodjele mjernih rezultata, dakle bez obzira na vrijednosti σ u pojedinim slučajevima. Do te veličine doći ćemo uvođenjem »višekratnika standardnog odstupanja« z, koji definiramo ovako

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}. \tag{3.6-9}$$

Brojčanu veličinu z upotrijebit ćemo kao apscisnu os u novoj vrsti prikaza Gaussove krivulje (sl. A.9c). Zato treba utvrditi kakva je veza između nove ordinatne veličine $\varphi(z)$ na slici A.9c i stare $\psi(x)$ na slici A.9b. Pri tom treba zadržati korisnu osobinu dijagrama $\psi(x)$—x da površina ispod krivulje predstavlja vjerojatnost P.

Iz jednadžbe (3.6-9) dobivamo vezu između diferencijalâ, $\mathrm{d}x = \sigma\,\mathrm{d}z$. Primjenom tog odnosa i uvrštenjem izraza (3.6-7) u jednadžbu (3.6-5) slijedi

$$P_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} \exp\left(-\tfrac{1}{2}z^2\right)\sigma\,\mathrm{d}z.$$

Pri tom smo pretpostavili $\mu = \bar{x}$. Nakon kraćenja σ, od gornje jednadžbe dobivamo definiciju brojčane veličine $\varphi(z)$ i njenu vezu sa z i vjerojatnošću P:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}z^2\right) \quad \text{i} \quad P_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.6-10, 3.6-11}$$

Prema tome je nova veličina $\varphi(z)$ povezana sa gustoćom vjerojatnosti $\psi(x)$ jednadžbom $\varphi(z) = \sigma\psi(x)$.

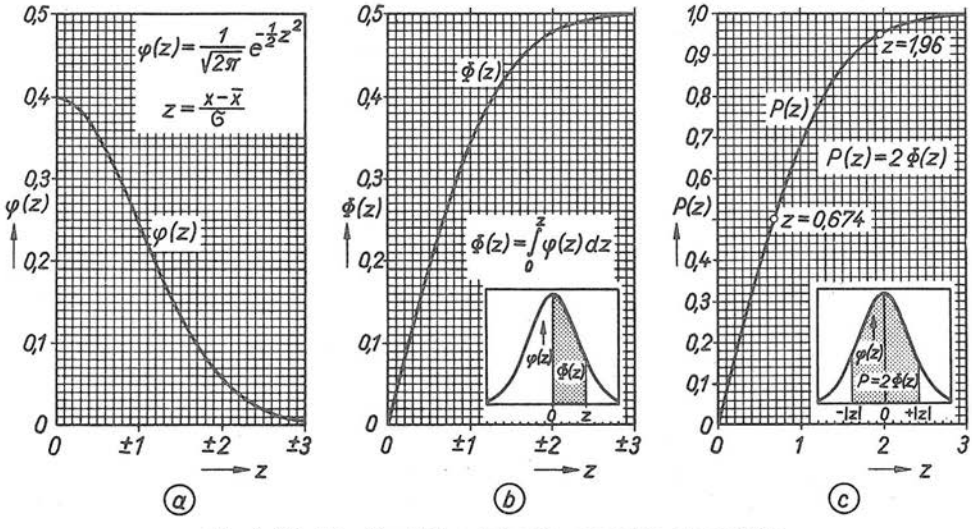
Rezultat preobrazbe $\psi(x) \to \varphi(z)$ i $x \to z$ prikazuje slika A.9c. Vidimo da je iz grafičkog prikaza iščezla individualnost mjernog postupka (σ), tj. funkcija $\varphi(z)$

iz jednadžbe (3.6-11) vrijedi posve općenito. Krivulja $\varphi(z)$ u sebi sintetizira sve tri krivulje $\psi(x)$ sa slike A.9a i bezbroj drugih u svim mogućim primjenama. Zato se krivulja $\varphi(z)$ zove *normalizirana* krivulja Gaussove raspodjele ili *normalna krivulja*. U idućem odlomku ilustrirat ćemo neke primjene krivulje $\varphi(z)$ na razmatranje slučajnih pogrešaka pri obradi mjernih rezultata.

3.6.4. Računanje pomoću normalne krivulje. Budući da normalna krivulja $\varphi(z)$ iz jednadžbe (3.6-10) vrijedi za sve slučajeve Gaussove raspodjele, korisno je jednom zasvagda izračunati niz diskretnih vrijednosti $\varphi(z)$ u ovisnosti o konkretnim vrijednostima višekratnika z. Izračunate vrijednosti $\varphi(z)$ sadrže u obliku tablica sve knjige o statistici. Prema takvim tablicama izrađen je dijagram na slici A.10a, koji se dade dovoljno precizno očitavati za potrebe mjerne tehnike. Maksimalna vrijednost funkcije $\varphi(z)$ iznosi

$$\varphi_0 = \varphi(z=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989 \approx 0{,}4.$$

Budući da je krivulja $\varphi(z)$ simetrična s obzirom na $z = 0$ (sl. A.9c), na dijagramu slike A.10a prikazali smo samo polovicu krivulje, ali smo na apscisi naznačili da se iste vrijednosti $\varphi(z)$ dobivaju pri jednakim apsolutnim iznosima višekratnika z ($\pm$).



Sl. A.10. Karakteristične krivulje normalne raspodjele
a) Vrijednosti funkcije $\varphi(z)$ u ovisnosti o z (polovica krivulje na slici A.9c). b) Vrijednost tzv. integrala pogreške $\Phi(z)$ prema jednadžbi (3.6-12). c) Vrijednost statističke sigurnosti $P(z)$ prema jednadžbi (3.6-18)

U spomenutim knjigama tabelirane su i vrijednosti tzv. integrala pogreške (engl. error integral) definiranog jednadžbom

$$\Phi(z) = \int_0^z \varphi(z)\, \mathrm{d}z. \qquad (3.6\text{-}12)$$

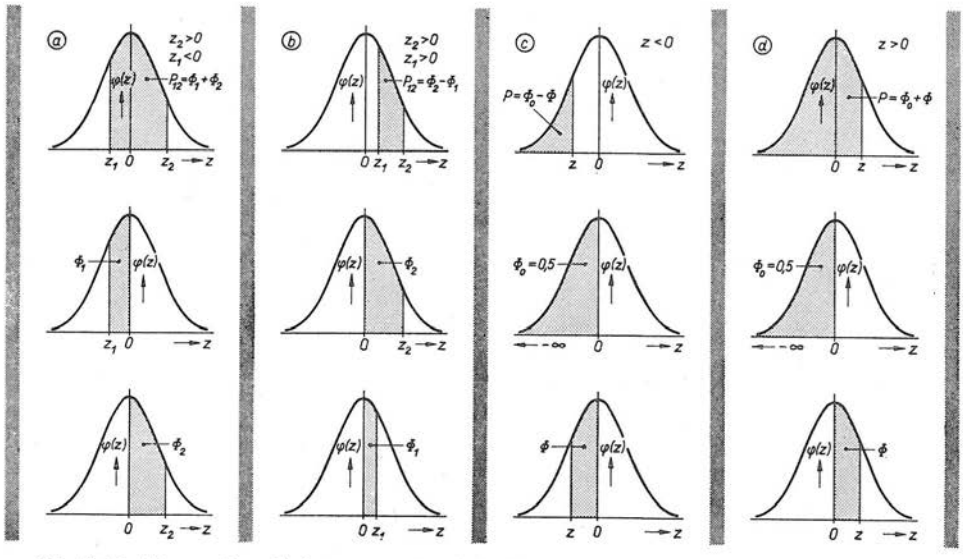
Vrijednosti tog integrala za različite z prikazuju ordinate dijagrama na slici A.10b. Vidimo da $\Phi(z)$ predstavlja vjerojatnost kojom očekujemo da će se sve izmjerene

vrijednosti n pojaviti u intervalu od $z=0$ do $z=z$, ili drugim riječima: od sveukupno n mjernih rezultata, $n\Phi(z)$ nalazit će se u rasponu od $z=0$ do z (vezu između x, σ i z opisuje jednadžba 3.6-9 u prošlom odlomku!). I ovdje se iste vrijednosti $\Phi(z)$ dobivaju s jednakim pozitivnim i negativnim vrijednostima višekratnika z.

Pomoću dijagrama na slici A.10b mogu se brzo riješiti mnogi konkretni zadaci. Nekoliko tipičnih primjera načelno smo prikazali slikom A.11. Tako, na primjer, slika A.11a ilustrira odgovor na pitanje: kolika je vjerojatnost P da će se svi mjerni rezultati nalaziti u intervalu od $z_1<0$ do $z_2>0$. Odgovor daju opća jednadžba (3.6-11) i slika A.9c, a uz pomoć sl. A.11a i jednadžbe (3.6-12) slijedi

$$P_{12}=\int_{z_1}^{z_2}\varphi(z)\,dz=\int_{z_1}^{0}\varphi(z)\,dz+\int_{0}^{z_2}\varphi(z)\,dz=\Phi(z_1)+\Phi(z_2)=\Phi_1+\Phi_2. \qquad (3.6\text{-}13)$$

Za konkretne z_1 i z_2 odgovarajuće vrijednosti Φ_1 i Φ_2 očitavamo iz dijagrama na sl. A.10b. Ako su i z_1 i z_2 pozitivni (ili oboje negativni), vjerojatnost P_{12} nalazi se na način koji je ilustriran slikom A.11b, tj. $P_{12}=\Phi_2-\Phi_1$.



Sl. A.11. Ilustracija primjene normalne krivulje $\varphi(z)$ za izračunavanje vjerojatnosti P pomoću integrala pogreške $\Phi(z)$ definiranog jednadžbom (3.6-12). Za intervale od $z=-\infty$ do $z=0$ i od $z=0$ do $z=+\infty$ integral pogreške iznosi $\Phi_0=0{,}5=50\%$

Drukčije valja računati ako se pita ovako: koliko će od ukupno n mjernih rezultata biti *manjih* od vrijednosti x kojoj odgovara $z<0$ (veza: jednadžba 3.6-9!). Skicu rješenja vidimo na slici A.11c. U tom području nalazit će se nP mjernih rezultata, gdje je

$$P=\Phi_0-\Phi,\quad \Phi_0=\int_{-\infty}^{0}\varphi(z)\,dz=0{,}5=50\,\%,\quad \Phi=\int_{0}^{z}\varphi(z)\,dz. \qquad (3.6\text{-}14)$$

Dokaz za ispravno rješenje ovog integrala sadrži jednadžba (3.6-6), jer je prema (3.6-11) $\psi(x)\,dx=\varphi(z)\,dz$.

Analogno pitanje ilustrira slika A.11d, samo je $z>0$. Broj rezultata *manjih* od vrijednosti koja odgovara $z>0$ iznosi nP, gdje je

$$P=\Phi_0+\Phi \qquad \text{i} \qquad \Phi_0=0{,}5=50\,\%. \tag{3.6-15}$$

Pomoću šablona na slici A.11 i dijagrama na slici A.10b s lakoćom se mogu rješavati gotovo svi slučajevi primjene Gaussove normalne raspodjele.

Primjer. Ovaj ćemo primjer izraditi zato da bismo ilustrirali dobru primjenjivost krivulje normalne raspodjele i u slučaju relativno malog broja (sa stanovišta statistike) ponovljenih mjerenja n. Duljina metarskog štapa izmjerena je $n=51$ puta. Pošto su rezultati korigirani (eliminacija sistematskih pogrešaka), izračunata je srednja vrijednost 1,0000054 m = 1 m + 5,4 μm i standardno odstupanje (procjena) $s=2{,}19$ μm. Kako vidimo, riječ je o primjeru koji smo razmatrali u odlomku 3.4.3, a rezultate skupili u tablici A-7 i ilustrirali slikom A.9a. Izračunajmo koliko bi pojedinih vrijednosti duljine x bilo manjih od $x_1=1{,}0000034$ m, a koliko manjih od $x_2=1{,}0000075$ m, u slučaju da se raspodjela 51 rezultata mjerenja doista pokorava normalnoj raspodjeli. Rješenja, koja ćemo dobiti računskim putem, treba zatim usporediti sa stvarnim (izmjerenim) podacima u tablici A-7 (odlomak 3.4.3).

Broj pojedinih mjerenja n_1 čiji su rezultati manji od x_1 iznosi $n_1=nP_1$, gdje je $n=51$ sveukupni broj mjernih rezultata. Slovo P_1 označuje vjerojatnost koja je ilustrirana slikom A.11c, a odnosi se na slučaj kada je prema jednadžbi (3.6-9)

$$z_1=\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma}=\frac{1\text{ m}+3{,}4\ \mu\text{m}-(1\text{ m}+5{,}4\ \mu\text{m})}{2{,}19\ \mu\text{m}}=-0{,}913.$$

Pretpostavili smo, dakle, da je s dobra procjena standardnog odstupanja σ (vidi odlomke 3.6.3 i 3.5.4). Pripadnu vjerojatnost P_1 izračunat ćemo pomoću jednadžbi (3.6-14) koje vrijede za $z_1<0$. Za naš slučaj lijeva jednadžba (3.6-14) glasi $P_1=\Phi_0-\Phi_1$, gdje je $\Phi_0=0{,}5=50\,\%$. Budući da vrijednosti $z_1=-0{,}913$ odgovara $\Phi_1=0{,}32$ (dijagram na slici A.10b), slijedi $P_1=\Phi_0-\Phi_1=0{,}50-0{,}32=0{,}18=18\,\%$. Prema tome broj mjernih rezultata manjih od $x_1=1$ m + 3,4 μm prema teoriji iznosi

$$n_1=nP_1=51\cdot 0{,}18=9{,}2\approx 9.$$

Broj n_2 mjernih rezultata manjih od $x_2=1$ m + 7,5 μm dobivamo na analogan način, ali pomoću jednadžbe (3.6-15). Računanjem slijedi $z_2=+0{,}958$, a iz dijagrama na sl. A.10b očitavamo $\Phi_2=0{,}335$. Prema skici na sl. A.11d dobivamo $P_2=\Phi_0+\Phi_2=0{,}50+0{,}335=0{,}835$. Prema tome je $n_2=nP_2=51\cdot 0{,}835=42{,}6\approx 43$.

Usporedimo sada te računske rezultate sa *stvarnim* podacima u tablici A-7. U njenom drugom stupcu nalazimo da je $n_1=10$ izmjerenih vrijednosti manjih od $x_1=1$ m + 3,4 μm i $n_2=43$ vrijednosti manje od $x_2=1$ m + 7,5 μm.

3.6.5. Statistička sigurnost. Taj ćemo izraz često susretati na stranicama ove knjige u vezi s mjernom pogreškom. Zato je korisno da jednoznačno definiramo što u mjernoj tehnici znači termin »statistička sigurnost«. Općenito objašnjenje već imamo: tri definicijske rečenice uz jednadžbu (3.6-5) u odlomku 3.6.3. Ilustraciju te jednadžbe u dvije vrste dijagrama prikazuju sl. A.9b,c, gdje tamnije plohe označuju vjerojatnost P_{12} izračunatu pomoću (3.6-5).

Spomenutim slikama slična je sl. A.12a, s tom razlikom što su na njoj granice x_1 i x_2 *simetrične* u odnosu prema srednjoj vrijednosti n-struko mjerene fizikalne veličine x. Tamnija ploha nalazi se između vrijednosti (granica)

$$x_1=\bar{x}-\sigma \qquad \text{i} \qquad x_2=\bar{x}+\sigma, \tag{3.6-16}$$

gdje je σ standardno odstupanje. Pitamo se: kolika je vjerojatnost P da će se bilo koji od budućih n mjernih rezultata nalaziti *unutar* navedenih granica? Ili drugim riječima: kolika je vjerojatnost P da ni jedan od n mjernih rezultata neće odstupat

od srednje vrijednosti za više od σ (bilo u pozitivnom bilo u negativnom smislu)? Ili: koliki će biti udio nP mjernih rezultata, od sveukupno n, čije će se vrijednosti nalaziti unutar intervala od x_1 do x_2?

Odgovor nam daje jednadžba (3.6-5) ako u nju uvrstimo granice (3.6-16). Lakše ćemo, međutim, doći do rješenja ako se poslužimo preobrazbenom jednadžbom (3.6-11), a granice x_1 i x_2 pomoću (3.6-9) izrazimo pripadnim granicama veličine z, tj. sa

$$z_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{\bar{x} - \sigma - \bar{x}}{\sigma} = -1 \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma} = 1.$$

S obzirom na simetričnost krivulje $\varphi(z)$, naznačenim postupkom slijedi (usporedi i slike A.12a,d)

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)\,dz = 2\int_0^{z=1} \varphi(z)\,dz = 2\,\Phi(z=1) = 0{,}6826 \approx 68{,}3\,\%,$$

jer je $\Phi(z=1) = 0{,}3413$ (tu vrijednost izvadili smo iz tablice priručnika o statistici, a približno se može očitati na dijagramu slike A.10b). Prema tome tražena vrijednost iznosi $P = 68{,}3\,\%$.

Dobiveni rezultat riječima opisujemo ovako: statistički je 68,3% sigurno da odstupanje pojedinog mjernog rezultata od srednje vrijednosti neće biti veće od σ. Umjesto riječi »odstupanje« upotrebljava se i termin »pogreška« (to je »prividna pogreška« pojedinog mjerenja definirana u odlomku 3.3.4 kao razlika između izmjerene vrijednosti i srednje vrijednosti), pa analogna rečenica glasi: statistički je 68,3% sigurno da pogreška pojedinog mjerenja neće premašiti vrijednost σ. Podatak $P = 68{,}3\,\% = 0{,}683$ možemo opisati i ovako: za σ će od srednje vrijednosti, izračunate iz n mjernih rezultata, odstupati najviše $0{,}683 \cdot n$ rezultata. To je smisao izraza *statistička sigurnost* umjesto kojeg se rabi i termin *vjerojatnost*.

Naravno da je razmatrana statistička sigurnost $P = 68{,}3\,\%$ samo jedan od bezbroj mogućih slučajeva. Tako, na primjer, možemo tražiti da se konkretno kaže koliko iznosi odstupanje (od srednje vrijednosti) pojedinog mjernog rezultata pri statističkoj sigurnosti $P = 99\,\%$ za primjer koji smo razmatrali u odlomku 3.4.3. Što znači to pitanje? Znači ovo: treba ustanoviti granice, donju x_1 i gornju x_2 (vidi sliku A.12a: upozoravamo da ona vrijedi za $P = 68{,}3\,\%$), unutar kojih se nalazi 99% svih mjernih rezultata ($n = 51$), dakle $0{,}99 \cdot 51 = 50{,}49 \approx 50 \ldots 51$ rezultat (u odabranom primjeru $n = 51$ je sa stanovišta statistike malen broj!).

Odgovor na postavljeno pitanje saznat ćemo ponovno pomoću jednadžbe (3.6-11) primijenjene na *simetrične* ali nepoznate granice $z_1 = -|z|$ i $z_2 = +|z|$. Budući da je $P = 99\,\%$, a krivulja $\varphi(z)$ simetrična, jednadžbu (3.6-11) možemo napisati u obliku

$$P = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)\,dz = 2\int_0^{z} \varphi(z)\,dz = 2\,\Phi(z) = 99\,\% = 0{,}99.$$

Pri tom smo se poslužili definicijskom jednadžbom (3.6-12) veličine $\Phi(z)$. U našem je primjeru, dakle, $\Phi(z) = P/2 = 0{,}99/2 = 0{,}495$. U dijagramu na slici A.10b možemo očitati da pripadna vrijednost z iznosi oko $z = 2{,}6$ (računanjem ili iz tablica

dobiva se $z = 2{,}576 \approx 2{,}58$). Prema tome donja i gornja granica veličine z iznose $z_1 = -2{,}58$, $z_2 = +2{,}58$ (slika A.12e). Pomoću jednadžbe (3.6-9) u obliku

$$x = \bar{x} + z\sigma \tag{3.6-17}$$

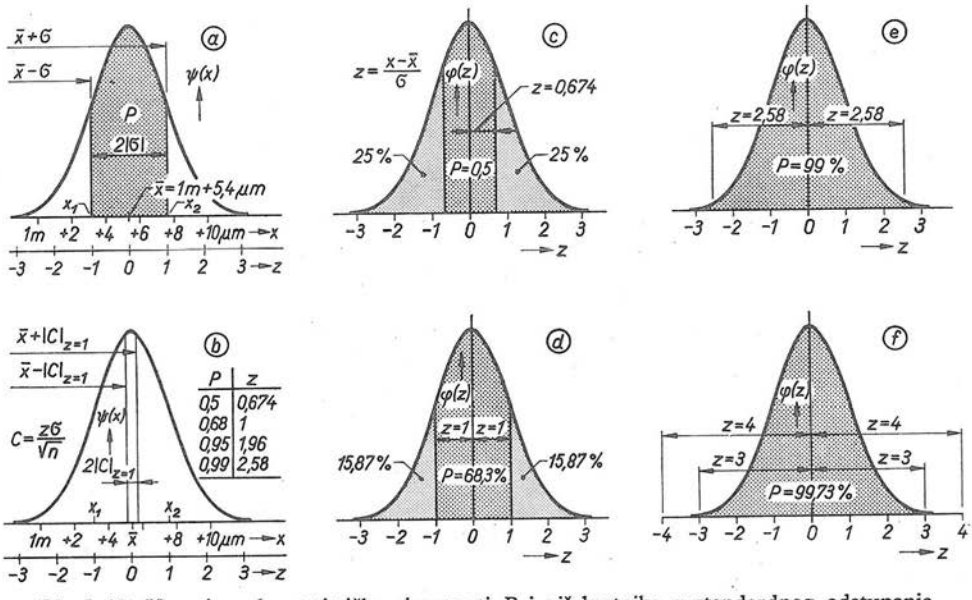
možemo izračunati *stvarne* granice unutar kojih će se nalaziti $nP = 0{,}99 \cdot n$ mjernih rezultata

$$x_1 = \bar{x} - 2{,}58\,\sigma \quad \text{i} \quad x_2 = \bar{x} + 2{,}58\,\sigma.$$

Budući da je $\sigma \approx s = 2{,}19\ \mu\text{m}$, a srednja vrijednost iznosi $1\ \text{m} + 5{,}4\ \mu\text{m}$ (odlomak 3.4.3), vrijednosti stvarnih granica jesu

$$x_1 = 1\ \text{m} + 5{,}4\ \mu\text{m} - 2{,}58 \cdot 2{,}19\ \mu\text{m} = 1\ \text{m} - 0{,}25\ \mu\text{m}, \quad x_2 = 1\ \text{m} + 11{,}05\ \mu\text{m}.$$

Pogledajmo stupac 1 u tablici A-7 (odlomak 3.4.3) ili dijagrame sl. A.9 b ... e. Vidimo da se *svi* mjerni rezultati ($n = 51$) nalaze unutar izračunatog intervala.



Sl. A.12. Veza između statističke sigurnosti P i višekratnika z standardnog odstupanja pri normalnoj raspodjeli. Površina tamnijih ploha proporcionalna je statističkoj sigurnosti P. Slike a) i d) ilustriraju »srednju pogrešku«, a slika c) »vjerojatnu pogrešku« (odlomak 3.6.7). Slika b) ilustrira položaj granica pouzdanosti (odlomak 3.6.6) pri statističkoj sigurnosti $P = 68{,}3\%$

U oba razmatrana primjera ($P = 68{,}3\%$ i $P = 99\%$) došli smo, zbog simetričnosti granica z_1 i z_2 u odnosu prema srednjoj vrijednosti, do veze $P = 2\,\Phi(z)$. To vrijedi posve *općenito*, dakle

$$\text{statistička sigurnost } P = 2\,\Phi(z) = 2\int_0^z \varphi(z)\,\mathrm{d}z, \tag{3.6-18}$$

gdje je $z = (x - \bar{x})/\sigma$, dok je funkcija »integral pogreške« $\Phi = \Phi(z)$ prikazana dijagramom na slici A.10b. Da bismo izbjegli množenje ili dijeljenje sa brojem 2, na slici A.10c donosimo dijagram $P = P(z)$ koji *direktno* povezuje statističku sigur-

nost P sa »višekratnikom standardnog odstupanja« z. Usput naglašavamo da sva ta razmatranja vrijede za *slučajne pogreške* i uz pretpostavku da se njihova raspodjela pokorava jednadžbi (3.6-10) te da je broj n ponovljenih mjerenja dovoljno velik. Za manji broj n valja računati na način koji je opisan u odsječku 3.7.

Razmatranja daljnjih konkretnih primjera dovela bi nas do zaključka da se od 1000 nezavisno izmjerenih rezultata pri normalnoj (Gaussovoj) raspodjeli

317 nalazi izvan granica $\bar{x} \pm 1\sigma$ (statistička sigurnost $P = 68{,}3\,\%$),

46 nalazi izvan granica $\bar{x} \pm 2\sigma$ (statistička sigurnost $P = 95{,}4\,\%$),

3 nalaze izvan granica $\bar{x} \pm 3\sigma$ (statistička sigurnost $P = 99{,}73\,\%$).

Podrobniji podaci za nekoliko karakterističnih vrijednosti P i z navedeni su u tablici A-8.

Tablica A-8

Bitni podaci o normalnoj raspodjeli za nekoliko karakterističnih statističkih sigurnosti

Statistička sigurnost P, %	Višekratnik standardnog odstupanja, z	Granice unutar kojih se nalazi nP mjernih rezultata	Udio rezultatâ izvan granica, $n(1-P)/n$, %	Nepouzdanost srednje vrijednosti, $C = z\sigma/\sqrt{n}$
50	0,674	$\bar{x} \pm 0{,}674\,\sigma$	50	$0{,}674\,\sigma/\sqrt{n}$
68,3	1	$\bar{x} \pm \sigma$	31,7	$\sigma/\sqrt{n}$
95	1,960	$\bar{x} \pm 1{,}960\,\sigma$	5	$1{,}960\,\sigma/\sqrt{n}$
95,44	2	$\bar{x} \pm 2\sigma$	4,56	$2\,\sigma/\sqrt{n}$
99	2,576	$\bar{x} \pm 2{,}576\,\sigma$	1	$2{,}576\,\sigma/\sqrt{n}$
99,73	3	$\bar{x} \pm 3\,\sigma$	0,27	$3\,\sigma/\sqrt{n}$
99,994	4	$\bar{x} \pm 4\,\sigma$	0,006	$4\,\sigma/\sqrt{n}$

3.6.6. Nepouzdanost i statistička sigurnost. U odlomku 3.3.5 smo ustanovili da se nepouzdanost C srednje vrijednosti (srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine) ravna prema jednadžbi (3.3-20), tj. da granice pouzdanosti iznose

$$x = \bar{x} + C = \bar{x} \pm |C|\,, \quad \text{gdje je} \quad C = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,. \tag{3.6-19}$$

Naglasili smo da vjerojatnost vrijednosti C iznosi 68%. Ovdašnjom terminologijom rekli bismo da *statistička sigurnost* izračunate vrijednosti C iznosi $P = 68\,\%$ (između s u odlomku 3.3.5 i ovdašnjeg σ praktički nema razlike, jer pretpostavljamo da s dobro procjenjuje σ pri dovoljnom broju n; vidi odlomak 3.5.4).

Podatak o statističkoj sigurnosti P nepouzdanosti C općenito znači to da se stvarna vrijednost n-struko mjerene fizikalne veličine x nalazi s vjerojatnošću P unutar intervala $\pm\,|C|$ oko srednje vrijednosti (podrobnije vidi u odlomku 3.7.4). Ilustraciju toga vidimo na slici A.12b; napominjemo da površina centralnog stupca širine $2\,|C|$ *nije* proporcionalna P. Budući da je σ u desnoj jednadžbi (3.6-19) sinonim za statističku sigurnost $P = 68\,\%$ ($z = 1$), to je očito da sigurnost u rezultat

te jednadžbe, tj. u vrijednost C, iznosi 68%, odnosno nevjerica 32%. Koliko će, međutim, iznositi nepouzdanost srednje vrijednosti ako je, na primjer, želimo znati *sigurnije*? Koliko će ona iznositi ako je želimo znati manje sigurno?

Označimo nepouzdanost srednje vrijednosti pri statističkoj sigurnosti $0<P<1$ simbolom $C(P)$. Tu opću nepouzdanost možemo izračunati pomoću jednadžbe

$$C(P)=\frac{z\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{3.6-20}$$

Pri tom su veličine P i z međusobno povezane jednadžbama (3.6-12 i 18), odnosno preglednije krivuljom $P=P(z)$ na slici A.10c. Vidimo da je C iz (3.6-19) samo specijalan slučaj $C(P)$ iz (3.6-20), i to za $z=1$ ($P=68\%$). Isto vrijedi i za *relativnu* nepouzdanost

$$c(P)=\frac{C(P)}{\bar{x}}=\frac{z\sigma}{\bar{x}\sqrt{n}}=\frac{zr}{\sqrt{n}}, \tag{3.6-21}$$

gdje je r relativno standardno odstupanje definirano jednadžbom (3.3-13) u odlomku 3.3.3. Napominjemo da se $C(P)$ podrobnije razmatra u odlomku 3.7.4.

Primjer. U odlomku 3.4.3 izračunali smo da nepouzdanost srednje vrijednosti 51 puta izmjerenog metarskog štapa iznosi $C=\pm 0{,}3$ μm. Budući da je C stvarno izračunato pomoću jednadžbe (3.6-19), statistička sigurnost navedene vrijednosti iznosi 68%, dakle $C(P=0{,}68)=\pm 0{,}3$ μm. Definitivan rezultat ponovljenih mjerenja valjalo bi, dakle, podrobno zabilježiti u obliku $x=1{,}0000054$ m $[1\pm 3\cdot 10^{-7}\ (P=0{,}68)]$.

Kako bi glasio odgovarajući rezultat ako želimo da on bude 99,73% statistički siguran? Moramo se poslužiti jednadžbom (3.6-20) u koju ćemo uvrstiti $z=3$, jer ta vrijednost odgovara statističkoj sigurnosti $P=99{,}73\%$ (tablica A-8, slika A.10c):

$$C(P=0{,}9973)=3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=3\,C(P=0{,}68)=\pm 0{,}9\ \mu\text{m}\approx\pm 1\ \mu\text{m}.$$

Prema tome za taj slučaj rezultat bi trebalo napisati u obliku

$$x=\bar{x}+C(P)=1{,}0000054\ \text{m}\pm 1\cdot 10^{-6}\ \text{m}\ (P=0{,}9973).$$

Izražen relativnom nepouzdanošću $c(P)$ taj bi rezultat glasio (usporedi s jednadžbom 3.3-24 u odlomku 3.3.5)

$$x=\bar{x}\,[1+c(P)]=(1\ \text{m}+5{,}4\ \mu\text{m})\,[1\pm 1\cdot 10^{-6}\ (P=0{,}9973)].$$

Pri tom smo $c(P)$ izračunali dijeljenjem $C(P)$ sa $1\ \text{m}=10^6$ μm, jer se srednja vrijednost $1\ \text{m}+5{,}4$ μm neznatno razlikuje od 1 m. Izvedeni rezultat praktički je gotovo potpuno siguran, nevjerica iznosi samo oko 3:1000 (27 : 10000).

3.6.7. Srednja, vjerojatna i prosječna pogreška. Budući da je mjerenje temelj svih grana egzaktne znanosti i vrhunske tehnike, rezultate ponovljenih mjerenja danas obrađuju stručnjaci gotovo svih struka. U prošlosti su se egzaktnom obradom slučajnih pogrešaka bavili gotovo isključivo geodeti i astronomi, koji su uveli pripadnu terminologiju baziranu na metodi najmanjih kvadrata. U novije se vrijeme pogreške temeljito obrađuju i u drugim granama tehnike, znanosti i velikoserijske industrije. Pri tom se pretežno upotrebljavaju metode statističke matematike i pripadna terminologija. Povijesni razvoj uzrokovao je heterogenost terminologije (vidi odsječak 3.1), pa se nerijetko događa da se stručnjaci za *mjerenja* različitih grana međusobno ne razumiju. Zato ćemo na nekoliko vrsti »pogrešaka« letimično osvijetliti s obje strane njihove definicije. Pri kraju ovog odlomka dodirnut ćemo još »pravilo sigma« i pojam »maksimalna pogreška«.

Srednja pogreška (m). To je ona pogreška koju smo u odlomku 3.3.3 definirali kao »standardno odstupanje« i označili slovom s (ili σ), dakle

$$\sigma^2 = m^2 = \frac{1}{n} \sum a_i^2,$$

gdje slovo a_i predstavlja pravu (stvarnu, istinitu) pogrešku pojedinog mjernog rezultata. Upotrebljavaju se i nazivi: srednja kvadratna pogreška, srednje kvadratno odstupanje, standardna pogreška, standardna devijacija. U smislu statistike, pogreška m ($=\sigma$) karakterizirana je statističkom sigurnošću $P = 68{,}3\,\%$ i višekratnikom $z = 1$. Ove podatke ilustrira slika A.12d.

Vjerojatna pogreška (ρ) definirana je tako da se polovica svih mjernih rezultata n ponovljenih mjerenja nalazi u intervalu

$$\text{od } \bar{x} - |\rho| \quad \text{do } \bar{x} + |\rho|, \quad \text{tj.} \quad \rho = 0{,}674\,\sigma.$$

Statistička sigurnost da pogreška bilo kojeg pojedinog mjerenja neće premašiti $\pm\,|\rho|$ iznosi $P = 50\,\%$. Tome odgovara $z = 0{,}674\,\sigma$, tj. $\rho = 0{,}674\,m = 0{,}674\,\sigma$, jer je $m = \sigma$. Pripadni grafički prikaz sadrži slika A.12c.

Prosječna pogreška (t) definirana je kao aritmetička sredina zbroja stvarnih pogrešaka uzetih u apsolutnim vrijednostima, tj.

$$t = \frac{1}{n} \sum |a_i|, \quad \text{odnosno} \quad t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m = 0{,}798\, m.$$

Zbog $m = \sigma$ možemo pisati $t = 0{,}798\,\sigma$. Prema tome je $z = 0{,}798$, a tome prema dijagramu na slici A.10c odgovara statistička sigurnost oko $P = 57\,\%$. Prosječna pogreška t malo se razlikuje od vjerojatne pogreške, $t = 1{,}185\,\rho$. Uopće je razlika između ρ, t i $m = \sigma$ malena:

$$\rho = 0{,}674\; m < t = 0{,}798\; m < m = \sigma.$$

U literaturi se ponekad može zapaziti izraz *pravilo sigma*, koji dolazi od grčkog slova σ, simbola standardnog odstupanja. Ako je autor, na primjer, naveo da rezultate navodi po »pravilu triju sigmi«, on time zapravo kaže $z = 3$. Budući da tome odgovara statistička sigurnost $P = 99{,}73\%$ (tablica A-8), onda to znači da je pri normalnoj raspodjeli obuhvatio praktički sve mjerne rezultate. Zato pogrešku $3\,\sigma$ neki autori zovu *maksimalna pogreška*. Nabrojenim pogreškama ocjenjuju se rezultati *pojedinih* mjernih rezultata. Pogrešku srednje vrijednosti, a to je konačan rezultat n ponovljenih mjerenja, valja ocjenjivati nepouzdanošću $C(P)$ iz jednadžbe (3.6-20). Primjer u tom smislu izradili smo na kraju odlomka 3.6.5.

3.7. Nepouzdanost srednje vrijednosti pri malom broju ponovljenih mjerenja

Nepouzdanost C srednje vrijednosti n-struko izmjerene fizikalne veličine x izračunavamo pomoću jednadžbe (3.6-20) u odlomku 3.6.6 jedino onda ako je poznata vrijednost standardnog odstupanja σ populacije. Za taj slučaj vrijede izrazi za C koji su navedeni u posljednjem stupcu tablice A-8. U većini slučajeva, međutim, vrijednost veličine σ nije poznata, jer se ona utvrđuje na temelju *velikog* (sa stanovišta mjerne tehnike) broja ponovljenih mjerenja (odlomci 3.5.4 i 3.7.4).

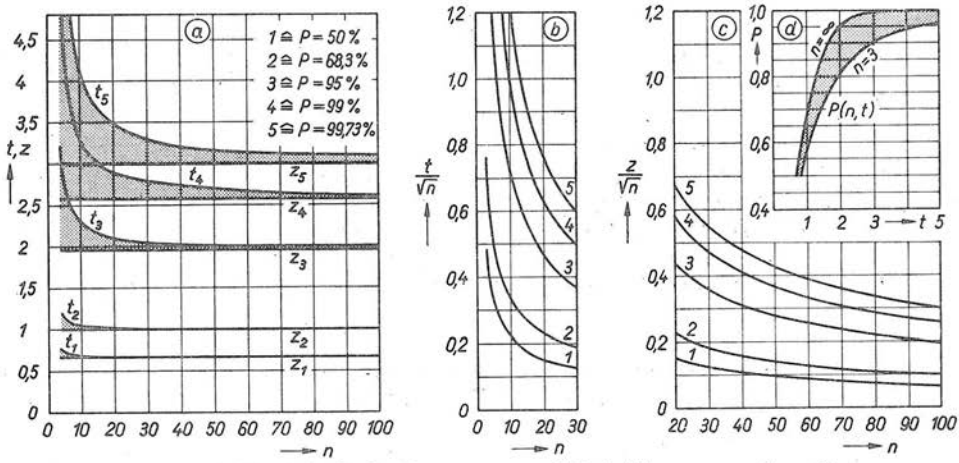
Ako n nije premalen, vrijednost veličine σ dade se *procijeniti* sa stanovitom pogreškom, pa umjesto sa σ računamo s njegovom procjenom s koju daje jednadžba (3.5-13) u odlomku 3.5.4. Tako smo učinili i u konkretnom primjeru na kraju odlomka 3.6.4, te pri $n=51$ utvrdili za praksu dostatno slaganje s normalnom raspodjelom koja teoretski vrijedi za vrlo velik broj n. No ako je broj n posve malen, procjena s vrlo je nepouzdana (odlomak 3.5 4). Zato se u slučaju *malog* broja ponovljenih mjerenja, $n<25...30$, upotrebljava tzv. Studentova t-raspodjela. O njenoj primjeni u mjernoj tehnici bit će riječi u idućim odlomcima.

3.7.1. Način primjene Studentove raspodjele. U okviru statistike provjeravanja (engl. test statistics) ovu je raspodjelu otkrio godine 1908. *W. S. Gosset* koji je svoje rasprave objavljivao pod pseudonimom »Student«. Na prvu opsežniju primjenu Studentova je raspodjela naišla u statističkoj kontroli masovne proizvodnje jednakih artikala. Tamo se ona primjenjuje za procjenjivanje ispravnosti *svih* proizvedenih primjeraka (na primjer kontrola izmjerâ pri automatskoj strojnoj obradi) na temelju mjerenja *malog* broja (uzorka) odabranih nasumce ili prema tablicama slučajnih brojeva iz čitavog mnoštva (konačna populacija). Budući da Studentova raspodjela uzrokuje manje troškove, jer je potreban manji broj n mjerenja, a i štedi vrijeme, ona je uskoro naišla i na druge primjene. Jedna od njih je obrada rezultata n ponovljenih mjerenja konstantne fizikalne veličine x.

U Gaussovoj raspodjeli (teoretski $n\to\infty$) izražavamo gustoću vjerojatnosti funkcijom $\varphi(z)$ koju definira jednadžba (3.6-10) u odlomku 3.6.3. U Studentovoj raspodjeli gustoću vjerojatnosti opisuje izraz

$$\varphi(n,t)=K\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \qquad (3.7\text{-}1)$$

gdje je $K=K(n)$ funkcija broja ponovljenih mjerenja n, a $t=t(n,P)$ se zove faktor Studentove raspodjele. Ovisnost faktora t o broju mjerenja n i statističkoj sigurnosti



Sl. A.13. Karakteristične krivulje Studentove t-raspodjele i njihova usporedba s Gaussovom normalnom raspodjelom (z)

a) Ovisnost faktora t i z o broju n ponovljenih mjerenja za pet statističkih sigurnosti P. b) Ovisnost faktora $f=t/n^{1/2}$ Studentove raspodjele za iste P. c) Ovisnost faktora $z/n^{1/2}$ Gaussove raspodjele. d) Ovisnost statističke sigurnosti P o faktoru t za vrijednosti n od 3 do ∞. Pri $n=\infty$ gornja se krivulja podudara sa $P(z)$ na slici A.10c, jer $t\to z$

P prikazuje dijagram na slici A.13a. Za usporedbu na istom je dijagramu prikazana neovisnost višekratnika z Gaussove raspodjele o broju n pri istim statističkim sigurnostima P. Vidimo da se pri $P=\text{const}$ faktor t posve približava vrijednosti z ako je n dovoljno velik. Što je statistička sigurnost P veća, to je veća i razlika između t i z (podrobnije o statističkoj sigurnosti vidi u odlomku 3.7.4). Zaokružene vrijednosti faktora t za nekoliko najčešće upotrebljavanih statističkih sigurnosti P sadrži tablica A-9.

Granice pouzdanosti srednje vrijednosti, unutar kojih se sa statističkom sigurnošću P nalazi stvarna vrijednost mjerene veličine, definirane su općim izrazom u odlomku 3.3.5, tj. jednadžbom

$$x=\bar{x}+C=\bar{x}\pm|C|. \tag{3.7-2}$$

Pri tom nepouzdanost C ovako ovisi o faktoru t Studentove raspodjele i broju n ponovljenih mjerenja

$$C=C(n,P)=\frac{t\,s}{\sqrt{n}}. \tag{3.7-3}$$

Ovdje je $t=t(n,P)$ iz tablice A-9 ili slike A.13a, dok je s procjena standardnog odstupanja dobivena iz n mjernih rezultata pomoću jednadžbe

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \tag{3.7-4}$$

koju smo u odlomku 3.5.4 numerirali sa (3.5-13), a u odlomku 3.3.4 sa (3.3-18). Prema tome će se stvarna vrijednost n puta izmjerene konstantne veličine x nalaziti unutar *granica pouzdanosti*

$$\bar{x}-\left|\frac{t\,s}{\sqrt{n}}\right|\leqq x\leqq\bar{x}+\left|\frac{t\,s}{\sqrt{n}}\right|. \tag{3.7-5}$$

Slovo $\bar{x}$ (sa crticom) predstavlja srednju vrijednost dobivenu iz n mjernih rezultata x_i pomoću odgovarajućih jednadžbi u odlomcima 3.3.1 i 3.5.1. *Relativna nepouzdanost* (odlomak 3.3.5) pri Studentovoj raspodjeli iznosi

$$c=c(n,P)=\frac{C(n,P)}{\bar{x}}=\frac{t\,s}{\bar{x}\sqrt{n}}=\frac{t\,r}{\sqrt{n}}, \tag{3.7-6}$$

gdje je $r=s/\bar{x}$ relativno standardno odstupanje. Sa (3.7-6) granice pouzdanosti prema jednadžbama (3.7-2,5) glase

$$x=\bar{x}(1+c)=\bar{x}(1\pm|c|) \qquad \text{ili} \qquad \bar{x}(1-|c|)\leqq x\leqq\bar{x}(1+|c|).$$

Vidimo da se omjer $t/\sqrt{n}$ pojavljuje u svim jednadžbama kojima se računaju granice pouzdanosti ili nepouzdanost C. Zato se za taj omjer u američkoj literaturi često rabi poseban simbol

$$f=f_{n,P}=\frac{t}{\sqrt{n}}, \quad \text{pa je} \quad C=s\,f. \tag{3.7-7}$$

Vrijednosti te funkcije $f=f(n,P)$ sadrže desni stupci tablice A-9, a njen grafički prikaz slika A.13b. Radi usporedbe smo na slici A.13c nacrtali odgovarajuće krivulje $z/n^{1/2}$ koje prema jednadžbi (3.6-20) u odlomku 3.6.6 pripadaju Gaussovoj normalnoj raspodjeli. Očito je da se krivulje Studentove raspodjele sa slike A.13b

Tablica A-9

Ovisnost približnih vrijednosti faktora t i f Studentove raspodjele o broju ponovljenih mjerenja n za različite statističke sigurnosti P

$P=$	50%		68,3%		90%		95%		99%		99,73%		$=P$
n	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	n
3	0,82	0,47	1,32	0,76	2,92	1,69	4,30	2,48	0,92	5,73	18,35	10,60	3
4	0,76	0,38	1,20	0,60	2,35	1,18	3,18	1,59	5,84	2,92	9,16	4,58	4
5	0,74	0,33	1,15	0,51	2,13	0,95	2,78	1,24	4,60	2,06	6,60	2,96	5
6	0,73	0,30	1,11	0,45	2,02	0,82	2,57	1,05	4,03	1,65	5,50	2,25	6
7	0,72	0,27	1,09	0,41	1,94	0,73	2,46	0,93	3,71	1,40	4,90	1,85	7
8	0,71	0,25	1,08	0,38	1,90	0,67	2,37	0,84	3,50	1,24	4,53	1,60	8
9	0,71	0,23	1,07	0,36	1,86	0,62	2,31	0,77	3,35	1,12	4,27	1,42	9
10	0,70	0,22	1,06	0,34	1,83	0,58	2,26	0,72	3,25	1,03	4,09	1,30	10
11		0,21		0,33	1,81	0,55	2,23	0,67	3,17	0,96	3,96	1,19	11
12		0,20		0,31	1,79	0,52	2,20	0,63	3,11	0,90	3,85	1,11	12
13		0,19		0,29	1,78	0,49	2,18	0,60	3,05	0,85	3,76	1,04	13
14		0,19		0,28	1,77	0,47	2,16	0,58	3,01	0,81	3,69	0,99	14
15		0,18	1,04	0,27	1,76	0,45	2,14	0,55	2,98	0,77	3,64	0,94	15
16				0,26	1,75	0,44	2,13	0,53	2,95	0,74	3,59	0,90	16
17				0,25		0,42	2,12	0,51	2,92	0,71	3,54	0,86	17
18				0,24		0,41	2,11	0,50	2,90	0,68	3,51	0,83	18
19				0,24		0,40	2,10	0,48	2,88	0,66	3,48	0,80	19
20		0,15		0,23	1,73	0,39	2,09	0,47	2,86	0,64	3,45	0,77	20
21				0,22		0,38		0,45	2,84	0,62	3,42	0,75	21
22				0,22		0,37		0,44	2,83	0,60	3,40	0,72	22
23				0,22		0,36		0,43	2,82	0,59	3,38	0,70	23
24				0,21		0,35		0,42	2,81	0,57	3,36	0,69	24
25	0,68	0,14	1,03	0,21	1,71	0,34	2,06	0,41	2,80	0,56	3,34	0,67	25
30				0,19		0,31		0,37	2,8	0,50	3,28	0,60	30
50				0,14		0,24		0,28	2,7	0,38	3,18	0,45	50
100				0,10		0,17		0,20	2,6	0,26	3,10	0,31	100
200				0,07		0,12		0,14	2,6	0,18	3,04	0,22	200
∞	0,674	0	1,000	0	1,645	0	1,960	0	2,576	0	3,000	0	∞

pri $n \approx 30$ praktički nastavljaju u krivulje Gaussove raspodjele na slici A.13c. To se, dakako, razabire i na slici A.13a. Zato pri $n > 25...30$ nema smisla upotrebljavati Studentovu raspodjelu, jer za Gaussovu postoje prikladne pomoćne tablice i pregledni dijagrami (sl. A.10) koji ubrzavaju i olakšavaju računanje.

Korisno je da pri kraju ovog razlaganja dodirnemo vezu između statističke sigurnosti P i faktora t. Za normalnu raspodjelu odgovarajuća veza između $\varphi(z)$ i P predstavljena je jednadžbama (3.6-18 i 12) u odlomcima 3.6.5 i 4 i dijagramom na slici A.10c. Pri Studentovoj raspodjeli integralu normalne raspodjele

$$P = 2\int_0^z \varphi(z)\,dz \qquad \text{odgovara} \qquad P = 2\int_0^t \varphi(n,t)\,dt,$$

što je prikazano ordinatama na slici A.13d. Budući da je t funkcija od n i P, na toj slici postoji familija krivulja od $n=3$ do ∞. Za $n \to \infty$ krivulja $P(n, t)$ prelazi u krivulju $P(z)$ na slici A.10c, jer pri $n \to \infty$ faktor t prelazi u z. Zbog toga Gaussovu raspodjelu možemo smatrati specijalnim slučajem Studentove.

3.7.2. Primjer: nepouzdanost duljine motke. U primjeru na kraju odlomka 3.3.1 izračunali smo srednju vrijednost 1172,4 mm duljine motke koja je izmjerena $n=5$ puta. Zatim smo u primjeru na kraju odlomka 3.3.4 izračunali procjenu standardnog odstupanja i relativnog standardnog odstupanja: $s=1{,}52$ mm, $r=1{,}3\cdot 10^{-3}$. Izračunajmo sada koje su granice pouzdanosti dobivenog rezultata, odnosno nepouzdanost C, pri različitim statističkim sigurnostima P.

Budući da je broj ponovljenih mjerenja malen, $n=5<25...30$, granice pouzdanosti dobivene srednje vrijednosti 1172,4 mm ne valja računati pomoću Gaussove normalne raspodjele iz odsječka 3.6, već pomoću Studentove, tj. pomoću jednadžbe (3.7-3). Za statističku sigurnost $P=95\,\%$ tablica A-9 daje pri $n=5$ vrijednost faktora $t=2{,}78$, pa nepouzdanost iznosi

$$C=C(P=0{,}95)=\frac{t\,s}{\sqrt{n}}=\pm\frac{2{,}78\cdot 1{,}52\ \text{mm}}{\sqrt{5}}=\pm 1{,}89\ \text{mm}.$$

Mogli smo računati i direktno pomoću jednadžbe (3.7-7) s vrijednošću $f=1{,}24$ u tablici A-9. Prema tome rezultat (granice pouzdanosti) glasi

$$x=x(P=0{,}95)=\bar{x}+C=1172{,}4\ \text{mm}\pm 1{,}9\ \text{mm}.$$

Taj rezultat možemo izraziti i relativnom nepouzdanošću:

$$x=x(P=0{,}95)=\bar{x}(1+c)=1172{,}4\ \text{mm}\,(1\pm 1{,}6\cdot 10^{-3}),$$

jer je prema (3.7-6) $c=\pm 1{,}89\ \text{mm}/1172{,}4\ \text{mm}=\pm 1{,}61\cdot 10^{-3}$.

$P=$	68,3%	95%	99%	99,73%
$t\,(n=5)$	1,15	2,78	4,60	6,60
C, mm	$\pm 0{,}78$	$\pm 1{,}89$	$\pm 3{,}13$	$\pm 4{,}5$
c	$\pm 6{,}7\cdot 10^{-4}$	$\pm 1{,}6\cdot 10^{-3}$	$\pm 2{,}7\cdot 10^{-3}$	$\pm 3{,}8\cdot 10^{-3}$

Za druge vrijednosti statističke sigurnosti P analognim bismo računanjem dobili pripadne vrijednosti C i c koje smo svrstali u priloženu tablicu. Iz nje razabiremo da se granice pouzdanosti srednje vrijednosti jako šire ako želimo da rezultat bude statistički vrlo siguran. Podrobno se značenje pojma »statistička sigurnost« razmatra u odlomku 3.7.4.

3.7.3. Broj potrebnih mjerenja (primjer). U najnovije vrijeme Studentova se raspodjela sve više upotrebljava u mjernoj tehnici, a time postaje sve važnija. Zato nije naodmet da primjenu te raspodjele opišemo na još jednom primjeru. Riječ je o ovakvom zadatku. Prstenasti kalibar nazivnog promjera d treba baždariti u odnosu prema standardnom prstenu (engl. standard ring gage) poznatog promjera

d_0. Budući da je razlika između d i d_0 vrlo malena, pogodno je rezultate d_i ponovljenih mjerenja prikazati u obliku razlike $x_i = d_i - d_0$. Indeks i upozorava da je riječ o pojedinim (individualnim) mjernim rezultatima. Pita se: koliko mjerenja n treba izvesti da nepouzdanost C srednje vrijednosti promjera d ne bude veća od $C = \pm 0{,}5$ μm pri statističkoj sigurnosti $P = 95\,\%$? Budući da d_0 smatramo tačnom vrijednošću, jer prema njoj baždarimo prsten nepoznatog promjera d, navedeni zadatak možemo matematički formulirati ovako

$$\bar{x} = \bar{d} - d_0 \quad \text{i} \quad x = \bar{x} + C = \bar{x} \pm |C|, \tag{3.7-8}$$

gdje slovo x označuje granice pouzdanosti unutar kojih se nalazi stvarna vrijednost.

Budući da ne znamo standardno odstupanje σ mjernog postupka (na primjer iz prethodnih mjerenja isto takvih ili sličnih prstena), poslužit ćemo se desnom jednadžbom (3.7-7). Ona nam u prvi mah ne može dati traženi odgovor (broj n), jer ne znamo ni s ni f. Zato *pretpostavimo* da će $n_1 = 5$ mjerenja udovoljiti zahtjevu $C = \pm 0{,}5$ μm. Pet uzastopnih mjerenja dalo je ove vrijednosti $x_i = 14{,}2$; 15,6; 15,7; 14,8 i 15,3 μm. Pomoću treće jednadžbe (3.4-6) u odlomku 3.4.2 računski stroj munjevito daje procjenu standardnog odstupanja $s_1 = 0{,}625$ μm (indeks 1 označuje naš prvi pokušaj pri utvrđivanju potrebnog broja ponovljenih mjerenja n). Dobiveni rezultat omogućuje da iz desne jednadžbe (3.7-7) izračunamo $f_1 = 0{,}5$ μm/0,625 μm = 0,80. U stupcu $P = 95\,\%$ nalazimo da faktoru $f_1 = 0{,}8$ odgovara *devet* mjerenja, a ne $n_1 = 5$, kako smo pretpostavili.

Zato obavimo istim uređajem još četiri mjerenja, dakle ukupno $n_2 = 5 + 4 = 9$. Dodatna 4 mjerenja dala su rezultate $x_i = 14{,}7$; 15,4; 15,8 i 14,4 μm. Na isti način kao i prije računanjem se dobiva procjena standardnog odstupanja na temelju devet mjernih rezultata: $s_2 = 0{,}59$ μm. Iz $C = s_2 f_2$ slijedi $f_2 = C/s_2 = 0{,}5/0{,}59 = 0{,}85$. U stupcu $P = 95\,\%$ tablice A-9 nalazimo najbližu vrijednost $f = 0{,}84$ pri $n = 8$ ponovljenih mjerenja. Prema tome sa $n_2 = 9$ učinili smo dovoljan broj mjerenja, pa možemo izračunati srednju vrijednost

$$\bar{x} = \frac{1}{n_2} \sum_{1}^{9} x_i = \frac{135{,}9\ \mu\text{m}}{9} = 15{,}1\ \mu\text{m}.$$

Budući da pri $n = 9$ faktor f iznosi $f = 0{,}84$, pripadna je nepouzdanost $C = s_2 f = \pm 0{,}59\ \mu\text{m} \cdot 0{,}84 = \pm 0{,}487\ \mu\text{m} \approx \pm 0{,}5\ \mu\text{m}$. Zato prema jednadžbi (3.7-8) možemo napisati rješenje zadatka

$$d = \bar{d} + C = d_0 + \bar{x} + C = d_0 + 15{,}1\ \mu\text{m} \pm 0{,}5\ \mu\text{m}.$$

Granice pouzdanosti baždarenog prstena pri statističkoj sigurnosti $P = 95\,\%$, dakle, iznose $d_0 + (15{,}1 - 0{,}5)\mu\text{m}$ i $d_0 + (15{,}1 + 0{,}5)\mu\text{m}$.

3.7.4. Statističko značenje granica pouzdanosti. Teoretski možemo konstantnu fizikalnu veličinu x izmjeriti beskonačan broj puta. Taj beskonačno velik skup mjernih rezultata zovemo u smislu terminologije matematičke statistike (odlomak 3.5.4) beskonačna populacija. Budući da se stvarno izvođenje beskonačnog broja ponovljenih mjerenja ne može ni zamisliti, u statistici se radije govori o *vrlo velikoj* populaciji koja se sastoji od N mjernih rezultata. Taj velik broj N podataka mogao bi, na primjer, nastati ovako: precizni automatski mjerni uređaj godinama neprekidno mjeri konstantnu veličinu x. Dobivši tako nekoliko milijuna mjernih rezultata, mogli bismo pomoću svih njih izračunati srednju vrijednost μ populacije

N, a pomoću jednadžbe (3.5-12) u odlomku 3.5.4 standardno odstupanje σ te populacije. Dobivena srednja vrijednost μ bila bi vrlo bliska *stvarnoj* vrijednosti x mjerene veličine, ali ipak neznatno nepouzdana, jer se nalazi unutar granica pouzdanosti

$$x = \mu + C = \mu \pm |C| = \mu \pm \left| \frac{z\sigma}{\sqrt{N}} \right|. \tag{3.7-9}$$

Zbog milijunske vrijednosti broja N, nepouzdanost C bila bi doduše neznatna, ali ipak prisutna. Prema tome taj velik broj N ponovljenih mjerenja možemo smatrati *uzorkom* beskrajne populacije, tj. beskonačno velikog skupa teoretski beskrajno mnogo mogućih mjerenja.

Pošto je u toku nekoliko godina automatski mjerni uređaj utvrdio N rezultata, možemo čitav postupak ponoviti; pri tom, dakako, pretpostavljamo da je mjerena veličina x i dalje konstantna. Nova serija od $N_1 = N$ mjerenja dala bi prema (3.7-9) novu srednju vrijednost μ_1 populacije neznatno različitu od prije utvrđene μ, a isto tako i novo standardno odstupanje σ_1 populacije. Različitosti $\mu \neq \mu_1$ i $\sigma \neq \sigma_1$ pri $N = N_1$ nastaju zbog postojanja *slučajnih* pogrešaka kojih vrijednost ne znamo prognozirati baš zato jer su slučajne. Možemo zamisliti da je automatski uređaj k puta ponovio N mjerenja. Rezultat toga je k srednjih vrijednosti μ populacije N i k standardnih odstupanja, tj.

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \quad \text{i} \quad \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k. \tag{3.7-10}$$

Budući da je $N_1 = N_2 = \ldots = N_k = N$, pomoću jednadžbe (3.7-9) može se izračunati pripadnih k granica pouzdanosti unutar kojih se nalazi stvarna (prava, istinita) vrijednost konstantne mjerene veličine x:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mu_1 + z\sigma_1/\sqrt{N}, & x &= \mu_2 + z\sigma_2/\sqrt{N} \\ x &= \mu_3 + z\sigma_3/\sqrt{N}, & x &= \mu_k + z\sigma_k/\sqrt{N}, \end{aligned}\right\} \tag{3.7-11}$$

Srednje vrijednosti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ populacijâ N raspodjeljuju se, naime, prema Gaussovu normalnom zakonu, bez obzira na to kojoj raspodjeli (normalnoj, binomnoj, Poissonovoj itd.) podliježu raspodjele pojedinih mjernih rezultata unutar svake populacije N.

U odlomku 3.6.5 utvrdili smo da svojevoljno odabrana vrijednost višekratnika standardnog odstupanja z definira statističku sigurnost $P = f(z)$ (dijagram na slici A.10c, jednadžba 3.6-18). Ta se sigurnost P odnosila na *pojedine* (individualne) mjerne rezultate, tj. označivala je vjerojatnost da će se pojedini mjerni rezultati nalaziti unutar stanovitog intervala. Što, međutim, znači ta ista statistička sigurnost P u smislu normalne raspodjele *srednjih vrijednosti* μ populacija N kojih ima k? U tom smislu statistička sigurnost P znači ovo: ako je obavljeno k velikih nizova po N mjerenja, a pri tom je za svaki niz procijenjeno standardno odstupanje σ beskrajne populacije, nepoznatu stvarnu vrijednost x obuhvatit će Pk granica pouzdanosti (3.7-11). Ako je riječ o $k = 100$ mjernih nizova po N ponovljenih mjerenja, pri statističkoj sigurnosti $P = 95\,\% = 0{,}95$, stvarnu vrijednost x obuhvatit će $Pk = 0{,}95 \cdot 100 = 95$ granica pouzdanosti opisanih jednadžbama (3.7-11). U tom smislu treba, dakako, razumijevati i pojam nepouzdanost C: od k nepouzdanosti

$$C_1 = z\sigma_1/\sqrt{N}, \quad C_2 = z\sigma_2/\sqrt{N}, \ldots, \quad C_k = z\sigma_k/\sqrt{N},$$

njih Pk obuhvatit će stvarnu vrijednost, a $(1-P)k$ neće. Pri $k=100$ i $P=0{,}95$ stvarnu vrijednost x neće obuhvatiti $(1-0{,}95)100=5$ srednjih vrijednosti μ i njima pripadnih nepouzdanosti C.

U stvarnosti ni vrhunska metrologija ne može izvoditi milijune (N) ponovljenih mjerenja. Nekoliko stotina, možda i nekoliko tisuća ponovljenih mjerenja, maksimalno je što iz vremenskih, ekonomskih i drugih (vidi odsječak 3.8) razloga sebi može priuštiti samo poneki nacionalni metrološki zavod, geodetska ustanova ili fizikalni laboratorij (na primjer mjerenje brzine svjetla, vidi odlomak E.3.7.2). Označimo tih nekoliko stotina ili nekoliko tisuća rezultata ponovljenih mjerenja slovom n. Zamislimo da smo učinili k takvih nizova od po n ponovljenih mjerenja. Pomoću jednadžbi (3.3-10) u odlomku 3.3.2 i (3.3-18) u odlomku 3.3.4 dobili bismo k srednjih vrijednosti i k *procjena* standardnih odstupanja:

$$\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_k \qquad \text{i} \qquad s_1, s_2, \ldots, s_k. \tag{3.7-12}$$

Budući da n predstavlja uzorak populacije N (konačne ili beskonačne), izrazima

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \bar{x}_1 + z s_1/\sqrt{n}, \quad \mu = \bar{x}_2 + z s_2/\sqrt{n}, \\ \mu &= \bar{x}_3 + z s_3/\sqrt{n}, \quad \mu_k = \bar{x}_k + z s_k/\sqrt{n} \end{aligned}\right\} \tag{3.7-13}$$

možemo procijeniti granice pouzdanosti unutar koji se nalazi srednja vrijednost μ populacije N (ili stvarna vrijednost ako je populacija beskonačna). Pri tom statistička sigurnost $P=f(z)$ ima isto značenje kao i uz jednadžbe (3.7-11): ako je obavljeno k mjernih nizova (uzoraka) od po n ponovljenih mjerenja, a pri tom je za svaki niz sa s procijenjeno standardno odstupanje σ populacije N, nepoznatu srednju vrijednost μ populacije obuhvatit će Pk granicâ pouzdanosti (3.7-13). Ako je riječ o $k=20$ mjernih nizova po, na primjer, $n=100$ ponovljenih mjerenja, pri statističkoj sigurnosti $P=0{,}95$, srednju vrijednost μ obuhvatit će $Pk=0{,}95\cdot 20=19$ granica pouzdanosti opisanih jednadžbama (3.7-13), a $(1-P)k=1$ neće.

Za vrlo malen broj ponovljenih mjerenja, $n<25...30$, jednadžbe (3.7-13) ne daju valjane rezultate. Umjesto normalne Gaussove raspodjele treba primijeniti Studentovu koju smo spomenuli u odlomku 3.7.1. Prema njoj pouzdanost srednje vrijednosti μ populacije N procjenjujemo granicama pouzdanosti

$$\mu = \bar{x} + \frac{t\,s}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm \left|\frac{t\,s}{\sqrt{n}}\right|, \quad \text{gdje je} \quad t=f(n,P), \tag{3.7-14}$$

tj. faktor t funkcija je kako broja n ponovljenih mjerenja tako i statističke sigurnosti P (slika A.13, tablica A-9). Pri Gaussovoj raspodjeli nije tako, tamo je P samo funkcija od z. To je razumljivo, jer Gaussova je raspodjela izvedena uz pretpostavku velikog broja n.

Smisao pojma statistička sigurnost P granica pouzdanosti (3.7-14) potpuno je analogan onome koji smo imali uz jednadžbe (3.7-11,13). Zamislimo da smo učinili k mjernih nizova od po $n=10$ ponovljenih mjerenja. Iz svakog niza izračunali smo pomoću jednadžbi (3.3-10,18) srednje vrijednosti i procjene standardnih odstupanja (3.7-12). Za svaki niz možemo prema (3.7-14) procijeniti granice pouzdanosti srednje vrijednosti. Tako, na primjer, za $n=10$ i $P=0{,}95=95\%$ dobivamo

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \bar{x}_1 \pm 2{,}26\, s_1/\sqrt{10}, \quad \mu = \bar{x}_2 \pm 2{,}26\, s_2/\sqrt{10}, \\ \mu &= \bar{x}_3 \pm 2{,}26\, s_3/\sqrt{10}, \quad \mu = \bar{x}_k \pm 2{,}26\, s_k/\sqrt{10}, \end{aligned}\right\} \tag{3.7-15}$$

jer je za taj slučaj $t = 2{,}26$ (tablica A-9). Pri tom statistička sigurnost P opet znači ovo: ako je obavljeno k nizova po n mjerenja, a pri tom je za svaki niz sa s procijenjeno standardno odstupanje σ populacije N, nepoznatu srednju vrijednost μ populacije obuhvatit će Pk granica pouzdanosti opisanih jednadžbama (3.7-15), dok je $(1-P)\,k$ granica neće obuhvatiti.

U vezi s odlomkom 3.5.4 možemo iz gornjih razmatranja izvući zaključak koji se u prvi mah čini paradoksalnim. Povećanje broja n ponovljenih mjerenja iznad $n = 10$ *blago* utječe na *granice pouzdanosti* srednje vrijednosti (3.7-14), jer suženje granica ovisi o drugom korijenu iz n ako pretpostavimo da je $s \approx \text{const}$. Uz tu pretpostavku, na primjer, povećanje n od 10 na 30 suzuje granice (3.7-14) svega za oko 70%, a treba učiniti za 200% više mjerenja. Zato pri utvrđivanju srednje vrijednosti i njene nepouzdanosti nije uvijek opravdano bitno povećavati broj n. Posve je, međutim, različita situacija sa procjenom s standardnog odstupanja. Slika A.7, na primjer, pokazuje da, pri $P = 95\%$, procjena s postaje bitno pouzdanija ako se n poveća na nekih 40...50. Zato pri ocjenjivanju *preciznosti* nekog novog mjernog postupka, tj. pri ocjenjivanju međusobnog sklada (ponovljivost!) pojedinih rezultata dobivenih tim postupkom, valja obaviti što veći broj ponovljenih mjerenja. Time se, naime, može pouzdanije izračunati procjena standardnog odstupanja s, a ona je dogovorena mjera preciznosti mjernog postupka.

3.8. Mjerna nesigurnost i granična pogreška

Slučajne pogreške koje smo razmatrali u odsječcima 3.3 do 3.7 samo su jedan od uzroka koji dovode do *nesigurnosti* konačnog mjernog rezultata. Budući da nije kadra u potpunosti eliminirati sistematske pogreške, mjerna tehnika ih uvodi u konačan rezultat pomoću pojma »mjerna nesigurnost«. Odraz te nesigurnosti na mjerne uređaje i mjere izražava se pojmom »granična mjerna pogreška« (garantirana i baždarna), koji omogućuje da se uređaji i mjere nedvosmisleno podijele na ispravne i neispravne. O tim važnim pojmovima praktične mjerne tehnike raspravlja se u iduća četiri odlomka.

3.8.1. Mjerna nesigurnost srednje vrijednosti. Konačan rezultat ponovljenih mjerenja neke fizikalne veličine x možemo izraziti pomoću »nepouzdanosti srednje vrijednosti« C (odsječak 3.3.5) jedino u onom slučaju ako smo *sigurni* da su pri obradi n mjernih rezultata uzete u obzir *sve* sistematske pogreške. Drugim riječima: primjena pojma »nepouzdanost« pretpostavlja da na rasipanje n izmjerenih vrijednosti x_i, gdje je $i = 1, 2, \ldots n$, oko srednje vrijednosti utječu isključivo *slučajne* pogreške koje se pokoravaju zakonu normalne raspodjele (odsječak 3.6). Jedino se uz tu pretpostavku konačan rezultat n ponovljenih mjerenja fizikalne veličine x može izraziti u obliku

$$x = \bar{x} + C, \quad \text{gdje je} \quad C = \frac{t\,s}{\sqrt{n}}. \tag{3.8-1}$$

Ovdje pribrojnik C predstavlja »nepouzdanost srednje vrijednosti« koja ovisi o standardnom odstupanju s, o broju ponovljenih mjerenja n (međusobno nezavisnih i obavljenih pod jednakim uvjetima) i o faktoru t Studentove raspodjele (odsječak 3.7).

Pretpostavci o *potpunom* uzimanju u obzir sistematskih pogrešaka (»korekcija obuhvaćanjem sistematskih pogrešaka«) rijetko je udovoljeno u mjernoj tehnici. Koliko god pažljivo i spretno otkrivali sistematske pogreške, gotovo uvijek *preostaju*

takve sistematske pogreške koje nismo kadri utvrditi. Te neobuhvaćene i neobuhvatljive sistematske pogreške, koje ćemo zvati *preostale sistematske pogreške*, uzrokuju da je konačan rezultat n ponovljenih mjerenja *nesigurniji* nego što to izražava jednadžba (3.8-1). Koliko iznose te preostale sistematske pogreške?

U nekim se slučajevima one mogu *procijeniti* povećanjem broja n pojedinih mjerenja. Iz većeg broja mjerenja iste veličine pod jednakim uvjetima katkada se analizom niza rezultata mogu utvrditi sistematske pogreške koje nije bilo moguće uočiti uz manji broj n. Povećanjem broja n postala je vrijednost preostale sistematske pogreške manja, time se smanjila nesigurnost konačnog rezultata, ali još uvijek preostaju neke sistematske pogreške koje treba *procijeniti*. U stanovitim slučajevima to može učiniti iskusan eksperimentator pomoću analogija s mjerenjima i analizama pogrešaka koje je obavio u prošlosti.

Ako je mjerena veličina takva da na njenu vrijednost ne utječe transport, nesigurnost se može smanjiti *usporedbenim mjerenjima*: niz laboratorija redom mjeri istu veličinu, po mogućnosti istovrsnim mjernim uređajem. Pri tom svaki laboratorij utvrdi »svoju« srednju vrijednost i pripadno standardno odstupanje pojedinih mjerenja. Skup tako dobivenih rezultata može se smatrati novim nizom pojedinih mjerenja koji ima svoju srednju vrijednost i svoje standardno odstupanje. Na taj način preostale sistematske pogreške pojedinih laboratorija ulaze u završni račun kao slučajne pogreške. Time se, doduše, povećava standardno odstupanje, ali se smanjuje udio preostalih sistematskih pogrešaka. Na kraju se, ipak, u svakom slučaju mora *procijeniti* kolika je otprilike preostala sistematska pogreška E. Korist od takvih skupih usporedbenih mjerenja je ta što je procjenu lakše učiniti i što je vrijednost E manja, dakle rezultat sigurniji.

Očito je, dakle, da postojanje preostale sistematske pogreške E čini rezultat ponovljenih mjerenja veličine x nesigurnijim nego što pomoću nepouzdanosti C iskazuje jednadžba (3.8-1). Prema njemačkoj normi DIN 1319: Grundbegriffe der Messtechnik od godine 1963, to proširenje granica pouzdanosti srednje vrijednosti procjenjuje se veličinom *mjerna nesigurnost srednje vrijednosti* U, koja je definirana ovako

$$U = \pm \{|C| + |E|\}. \tag{3.8-2}$$

Veličinu U zvat ćemo u daljnjem tekstu skraćeno *mjerna nesigurnost* ili još kraće *nesigurnost* (engl. uncertainty, njem. Messunsicherheit ili Unsicherheit). Iz jednadžbe (3.8-2) razabiremo da je nesigurnost U jednaka zbroju apsolutnih vrijednosti nepouzdanosti C (odlomak 3.3.5) i procijenjene *preostale* sistematske pogreške E. Prema tome nije dovoljno da se konačan rezultat n ponovljenih mjerenja izrazi jednadžbom (3.8-1), već umjesto nepouzdanosti C treba u nj uvesti nesigurnost U definiranu jednadžbom (3.8-2), tj.

$$x = \bar{x} + U = \bar{x} \pm \{|C| + |E|\}. \tag{3.8-3}$$

Ponovno naglašavamo da se pod E razumijeva samo vrijednost *procijenjene preostale* sistematske pogreške. One sistematske pogreške koje je bilo moguće utvrditi, već su uzete u obzir pri izračunavanju srednje vrijednosti mjerene veličine x. Zoran primjer procjenjivanja preostale sistematske pogreške E i utvrđivanja nesigurnosti U opisan je u odlomku E.3.1.5.

Jednadžbe (3.8-2,3) potkrepljuju stav praktične mjerne tehnike: nema svrhe pretjerano povećavati broj n ponovljenih mjerenja, jer se zbog preostalih sistematskih pogrešaka E (koje ne znamo, već ih procjenjujemo) mjerna nesigurnost U praktički može smanjiti samo do stanovite granice (korijen iz n!), a i teoretski samo

do $U = E(n \to \infty)$. Znatno većim brojem n postignuto smanjenje nesigurnosti U nimalo nije u skladu s povećanjem utroška vremena i novaca. Ako je unatoč tome neophodo (vrhunska metrologija!) da se nesigurnost U bitno smanji, onda treba da se usporedo s povećanjem n smanji E. U nekim se slučajevima, kako smo već spomenuli, to može postići usporedbenim mjerenjima u nizu laboratorija.

3.8.2. Relativna mjerna nesigurnost. U mnogim je slučajevima korisno upotrebljavati pojam *relativna mjerna nesigurnost* u, koji je definiran omjerom nesigurnosti U iz jednadžbe (3.8-2) i srednje vrijednosti mjerene veličine, dakle

$$u = \frac{U}{\bar{x}}. \tag{3.8-4}$$

Pomoću ovog pojma može se jednadžba (3.8-3) napisati u obliku vrlo prikladnom za ocjenjivanje nesigurnosti vrijednosti veličine x:

$$x = \bar{x}(1 + u) = \bar{x}\left(1 + \frac{U}{\bar{x}}\right). \tag{3.8-5}$$

Pri navođenju konkretnih vrijednosti nesigurnosti U ili relativne nesigurnosti u valja spomenuti kolika je statistička sigurnost P tih vrijednosti (engl. probability cutoff point ili confidence limit). Taj zahtjev je razumljiv, jer prema (3.8-1) vrijednost faktora t ovisi o razini statističke sigurnosti P (odsječak 3.7).

Iako je trivijalno, ovdje ćemo navesti jednostavan primjer upotrebe jednadžbi (3.8-4,5). Pri mjerenju Celzijeve temperature ϑ (vidi poglavlje D.3), s mjernom nesigurnošću $U = \pm 0{,}02\ °C$, utvrđena je srednja vrijednost 20,15 °C. Relativna mjerna nesigurnost iznosila je

$$u = \frac{\pm 0{,}02\ °C}{20{,}15\ °C} = \pm \frac{0{,}02}{20{,}15} = \pm 1 \cdot 10^{-3} = \pm 0{,}1\%.$$

Konačan rezultat možemo napisati u obliku jednadžbe (3.8-5) ovako:

$$\vartheta = 20{,}15\ °C\,(1 \pm 1 \cdot 10^{-3}) = 20{,}15\,(1 \pm 1 \cdot 10^{-3})\ °C.$$

Korisno je ovdje spomenuti da citirana njemačka norma zahtijeva da se pri navođenju vrijednosti nesigurnosti U ili u i riječima upozori na taj pojam, tj. da se dodaju riječi »mjerna nesigurnost«, »nesigurnost«, »nesiguran« itd. U tom smislu norma navodi i ove primjere: »Mjerna nesigurnost termometra s podjelom 0,1 °C iznosi $\pm 0{,}02$ °C«; »Relativna mjerna nesigurnost pri utvrđivanju toplinske vodljivosti iznosi $\pm 2\%$«; »Izmjerena frekvencija 10 MHz nesigurna je za ± 10 Hz« itd.

3.8.3. Granična pogreška mjernog uređaja. Za potrebe praktične mjerne tehnike njemačka norma DIN 1319 od godine 1963. definira *graničnu pogrešku* (njem. Fehlergrenze) mjernog uređaja ili mjere (o »mjerama« vidi odsječak 5.3) ovako: »Granična pogreška je ugovoreno ili garantirano najveće dopušteno odstupanje od stvarne vrijednosti ili od propisane vrijednosti mjerene veličine«. To odstupanje može biti jednostrano (predznak + ili predznak −) ili dvostrano ($\pm$) i ne smije biti premašeno, neovisno o tome kolika je mjerna nesigurnost U (odlomak 3.8.1) kojom se može utvrditi mjerni rezultat. Prema tome »granična pogreška« označuje granice unutar kojih mjerni rezultat smije biti *neispravan*, što omogućuje da se mjerni uređaji i mjere jednoznačno razvrstavaju na »ispravne« i »neispravne«.

Citirana norma dijeli graničnu pogrešku u *dvije* vrste. Pod »garantiranom graničnom pogreškom« mjernog uređaja (ili mjere) razumijeva se ovo: ako proizvođač

mjernog uređaja (mjere) garantira da vrijednost veličine, izmjerene tim uređajem (ili utjelovljene tom mjerom), ne odstupa od stvarne vrijednosti više nego što je propisano, onda se to odstupanje zove *garantirana granična pogreška* (njem. Garantiefehlergrenze). Pri tom se uređaj ili mjera moraju primjenjivati pri *utvrđenim uvjetima*, na primjer pri temperaturi 20 °C ili u temperaturnom intervalu 10 do 30 °C itd. Garantiranom graničnom pogreškom proizvođač mjernog uređaja (mjere), dakle, garantira da će pri ispravnoj upotrebi uređaja (mjere) pogreška biti manja od »garantirane granične pogreške«, a u najnepovoljnijem slučaju njoj jednaka.

Pod *baždarnom graničnom pogreškom* (njem. Eichfehlergrenze) norma DIN 1319 razumijeva najveće dopušteno odstupanje vrijednosti koju pokazuje mjerni uređaj ili utjelovljuje mjera od vrijednosti standarda (normale, pramjerila, etalona; podrobnije o tim pojmovima vidi u odsječku 5.3). To, na primjer, znači da će *mjera* (uteg, mjerna traka itd.) dobiti baždarni pečat jedino u slučaju ako se njena stvarna vrijednost nalazi unutar područja: potrebna (naznačena) vrijednost ± baždarna granična pogreška. Za mjerne *uređaje* analogan uvjet glasi: stvarno pokazivanje = =potrebno pokazivanje ± baždarna granična pogreška.

Ako nije drukčije ugovoreno, granične pogreške obuhvaćaju sistematske pogreške te odstupanja uzrokovana neujednačenošću proizvodnje i starenjem materijala. Da bi se granična pogreška G mjernog uređaja ili mjere sigurno mogla održati, mjerna nesigurnost U (odlomak 3.8.1) treba biti *znatno manja* od nje, dakle $U < G$. Tako, na primjer, citirana norma preporučuje da mjerna nesigurnost U ne premaši *jednu petinu* granične pogreške G, tj. $U < G/5$.

Granične se pogreške uglavnom označuju na dva načina. Prvim se načinom naznačuje *područje* unutar kojega se može nalaziti vrijednost veličine. Pri tom postoje dvije mogućnosti: navođenje vrijednosti G granične pogreške (na primjer: »baždarna granična pogreška termometra iznosi $G = \pm 0{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$«) ili navođenje vrijednosti *relativne* granične pogreške (na primjer: »relativna granična pogreška pokaznog instrumenta iznosi $e = 0{,}2\%$ od punog otklona«). Podrobnije se te dvije mogućnosti razabiru iz proračuna u odsječku 4.5. Drugim se načinom označuju *granične vrijednosti* veličine, na primjer za termometar koji je trebao pokazati 20,00 °C: najmanja dopuštena vrijednost temperature iznosi 19,85 °C, najveća dopuštena vrijednost iznosi 20,15 °C.

U skladu s navedenim možemo uvesti matematičku interpretaciju koja će nam biti potrebna u odsječku 4.5. Ako stvarnu vrijednost veličine x označimo sa x_0 (to je, u stvari, srednja vrijednost ako je riječ o ponovljenim mjerenjima), a njenu graničnu pogrešku (garantiranu ili baždarnu) sa G_x, pokazana (uređaj) ili pohranjena (mjera) vrijednost veličine smije se nalaziti u granicama

$$x = x_0 + G_x. \tag{3.8-6}$$

Pri tom vrijednost G_x može biti pozitivna ili negativna ili jedno i drugo, kako smo naveli na početku ovog odlomka. Prije spomenuti primjer možemo u skladu s (3.8-6) napisati ovako

$$\vartheta = 20{,}00\,^{\circ}\mathrm{C} \pm 0{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}, \tag{3.8-7}$$

tj. $\vartheta = x$, $\vartheta_0 = x_0 = 20{,}00\,^{\circ}\mathrm{C}$, $G_\vartheta = G_x = \pm 0{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Umjesto matematičke interpretacije nalik na jednadžbe (3.8-6,7), rezultat se može opisati rečenicama. Navodimo četiri primjera iz norme DIN 1319:1) Regulator temperature održava namještenu vrijednost 20,0 °C konstantnom unutar granične pogreške ±0,5 °C. 2) Granična pogreška voltmetra iznosi ±0,2% od krajnje

vrijednosti mjernog područja. 3) Masa ispitivanog komada mora se nalaziti unutar granične pogreške ± 1 mg. 4) Za namještanje propisane vrijednosti napona potreban je voltmetar klase 0,2. Itd.

Iz teksta četvrtog primjera stječe se dojam da u rečenici nije spomenuta granična pogreška. Ona, međutim, jest spomenuta, ali posredno — konvencijom koja vrijedi za električke mjerne instrumente (JUS L.G1.020, VDE 0410). Prema toj konvenciji oznaka *klase* (»indeks klase«) instrumenta jednaka je, u stvari, »relativnoj baždarnoj graničnoj pogrešci« e, definiranoj relacijom

$$e = \frac{G}{x}. \tag{3.8-8}$$

Ovdje je G garantirana granična pogreška instrumenta, a x njegov *puni* otkon Proizvođač instrumenata garantira da instrument neće imati pogrešku veću od G ako se primjenjuje uz *propisane uvjete* (tzv. referentni uvjeti). Tako, na primjer, za voltmetar klase 0,2 (tj. $e = \pm 0{,}2\% = \pm 2 \cdot 10^{-3}$) i mjernog opsega 0...150 V ($x = 150$ V) jednadžba (3.8-8) daje garantiranu graničnu pogrešku $G = ex = \pm 0{,}2\% \cdot 150\ \text{V} = \pm 2 \cdot 10^{-3} \cdot 150\ \text{V} = \pm 0{,}3$ V, ako se instrument primjenjuje uz propisane uvjete. Među te uvjete ubrajaju se: odstupanje temperature za ± 1 °C od vrijednosti naznačene na instrumentu, otklon $\pm 1°$ od naznačenog radnog položaja, otklon $\pm 5°$ od smjera N-S Zemljinog magnetskog polja, odstupanje frekvencije za $\pm 2\%$ od naznačene itd.

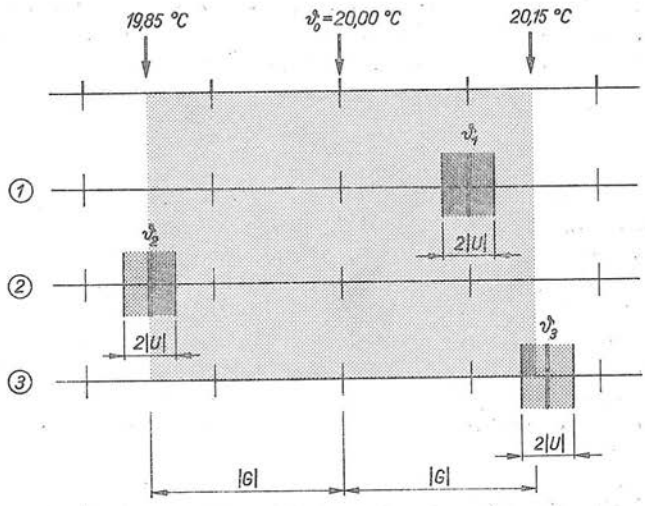
3.8.4. Primjer: granična pogreška termometra. Razlaganja o graničnoj pogrešci u prošlom odlomku mogu postati zornija ako ih potkrijepimo konkretnim i cjelovitim primjerom. U tu svrhu letimično ćemo razmotriti baždarenje triju nominalno jednakih živinih termometara mjernog opsega $\vartheta = 0...50$ °C, s podjelom skale na dijelove po 0,1 °C. Naručitelj ispitivanja zahtijevao je od baždarnog laboratorija da utvrdi ovo: da li granična pogreška termometra premašuje garantiranu vrijednost $G = \pm 0{,}15$ °C. Ispitivanje je obavljeno u vodenoj kupci, tj. temperatura vode istodobno je mjerena vrlo preciznim laboratorijskim termometrom (vidi, na primjer, poglavlje D.3) i ispitivanim termometrima. Tako su uspoređena pokazivanja laboratorijskog i baždarenih termometara pri nizu temperatura između 0 °C i 50 °C. Pri tom je pretpostavljeno da laboratorijski termometar u tom rasponu nema pogreške u svom pokazivanju, tj. da pokazuje *stvarne* (prave, istinite) vrijednosti ϑ_0.

Jedna od opisanih usporedbi učinjena je pri temperaturnom stanju vode za koje je laboratorijski termometar pokazao vrijednost $\vartheta_0 = 20{,}00$ °C. Istodobno su tri baždarena termometra na svojim skalama pokazali vrijednosti

$$\vartheta_1 = 20{,}10\,°\text{C}, \quad \vartheta_2 = 19{,}85\,°\text{C} \quad \text{i} \quad \vartheta_3 = 20{,}16\,°\text{C}.$$

Grafički smo te rezultate prikazali na slici A.14, na kojoj je područje spomenute granične pogreške $G = \pm 0{,}15$ °C omeđeno sivom površinom. Za prvi je termometar (broj *1* na slici), dakle, utvrđena sistematska pogreška $\vartheta_1 - \vartheta_0 = 20{,}10\ °\text{C} - 20{,}00\ °\text{C} = +0{,}10$ °C. Prema tome prvi se termometar pri 20 °C nalazi unutar baždarne granične pogreške $G = \pm 0{,}15$ °C. Ako je tako i pri ostalim temperaturama, te ako udovoljava ostalim propisanim uvjetima, termometar broj *1* dobit će baždarni pečat za graničnu pogrešku $G = \pm 0{,}15$ °C. Budući da mjerna nesigurnost termometara ove vrste iznosi oko $U = \pm 0{,}02$ °C (tamnija površina na slici A.14), to je $G/U = 0{,}15/0{,}02 = 7{,}5$. To znači da je $G/U > 5$, što se preporučuje (odlomak 3.8.3) radi sigurnog utvrđivanja možebitnog premašenja garantirane granične pogreške G.

Pretpostavimo da je sistematska pogreška $+0{,}10\,°C$ utvrđena u čitavom mjernom području prvog termometra. Njegov korisnik može se sada njime služiti na dva načina. Ili se zadovoljava time da se pogreška njegovog termometra nalazi unutar $G = \pm 0{,}15\,°C$ ili da pri svakom očitanju dodaje očitanoj vrijednosti korekturu.



Sl. A.14. Prikaz rezultata baždarenja triju termometara pri temperaturi 20,00 °C. Budući da proizvođač termometara garantira graničnu pogrešku $G = \pm 0{,}15\,°C$, termometri broj *1* i *2* dobili su baždarni pečat, a treći nije

Budući da je korektura jednaka sistematskoj pogrešci sa suprotnim predznakom, kod prvog će termometra dodavati »$-0{,}10\,°C$«, tj. oduzimati $0{,}10\,°C$. Pri tom će rezultati biti pogrešni unutar mjerne nesigurnosti U, tj. unutar $\pm 0{,}02\,°C$.

Drugi termometar (broj *2* na slici A.14) ima pri $\vartheta_0 = 20\,°C$ sistematsku pogrešku $\vartheta_2 - \vartheta_0 = -0{,}15\,°C$. Njegovo pokazivanje nalazi se, dakle, na samoj granici područja dopuštene granične pogreške $G = \pm 0{,}15\,°C$. I taj će termometar dobiti baždarni žig. Neće ga, međutim, dobiti treći (broj *3* na slici), jer pogreška iznosi $\vartheta_3 - \vartheta_0 = 20{,}16\,°C - 20{,}00\,°C = 0{,}16\,°C > G = \pm 0{,}15\,°C$.

4. Proračun pogreške indirektno mjerene fizikalne veličine

Posve je malen broj onih fizikalnih veličina koje možemo mjeriti *direktno* (izravno, neposredno), tj. izravno utvrditi koliko mjernih jedinica sadrži mjerena veličina. Direktno se, na primjer, mogu mjeriti fizikalne veličine duljina, frekvencija, masa i još neke. Sve ostale veličine mjere se *indirektno*. Bit indirektne mjerne metode možemo objasniti primjerom: površinu A pravokutnika saznajemo tako da *izmjerimo* duljine a, b njegovih stranica, a zatim *izračunamo* površinu $A = ab$. Utvrđivanje vrijednosti brzine v također je indirektno: pošto smo izmjerili Δs i Δt, izračunavamo vrijednost brzine $v = \Delta s/\Delta t$. Postoji bezbroj sličnih, a pogotovo kompliciranijih primjera.

Svaka od direktno mjerenih veličina poznata je sa stanovitom pogreškom. Zadatak je ovog poglavlja da pruži uvid kako se izračunava utjecaj tih pogrešaka na nesigurnost poznavanja indirektno »mjerene« (izračunate) veličine. Budući da postoji nekoliko vrsti pogrešaka, u idućim ćemo odsječcima raspraviti tzv. prirastanje standardnog odstupanja, nepouzdanosti, sistematske pogreške i mjerne nesigurnosti. Na kraju ćemo, u odsječku 4.5, dodirnuti izračunavanje tehnički vrlo važne granične pogreške indirektno mjerene fizikalne veličine.

4.1. Standardno odstupanje i nepouzdanost indirektno mjerene veličine

Ovaj odsječak posvećujemo proračunavanju standardnog odstupanja indirektno mjerene fizikalne veličine. Budući da pojmovi »standardno odstupanje« (»srednja kvadratna pogreška pojedinog mjerenja«; vidi odlomak 3.3.3) i »nepouzdanost« (»srednja pogreška aritmetičke sredine«; odlomak 3.3.5) služe za procjenjivanje slučajnih pogrešaka, izvedenim ćemo se jednadžbama moći služiti samo za utvrđivanje onog dijela mjerne pogreške indirektno mjerene veličine koju su uzrokovale *slučajne* pogreške. Udio sistematskih pogrešaka razmatra se u odsječku 4.3, a zajedničko djelovanje slučajnih i sistematskih pogrešaka na mjerni rezultat u odsječku 4.4.

4.1.1. Standardno odstupanje indirektno mjerene veličine. Posve općenito možemo zamisliti da je fizikalna veličina y funkcija niza međusobno *nezavisnih* fizikalnih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_v$. Tu funkciju zabilježit ćemo u obliku

$$y = F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_v). \tag{4.1-1}$$

Pod funkcijom y možemo, na primjer, razumijevati površinu pravokutnika $A = ab$ ($y = A$, $x_1 = a$, $x_2 = b$) ili brzinu $v = \Delta s/\Delta t$ ($y = v$, $x_1 = \Delta s$, $x_2 = \Delta t$) koje smo spomenuli u uvodu ovog poglavlja. Pošto direktnim *mjerenjem* utvrdimo vrijednost

veličinâ x_i, *računanjem* pomoću (4.1-1) saznajemo vrijednost funkcije y. Budući da je funkcija y »složena« od veličina x_i, veličinu y katkada nazivamo *složena veličina.*

Pretpostavljamo da su vrijednosti veličinâ x_i stečene dovoljnim brojem ponovljenih mjerenja i da za njih vrijedi normalna raspodjela slučajnih pogrešaka (odsječak 3.6). Na taj način direktno mjerene veličine x_i poznajemo u obliku njihovih *srednjih vrijednosti* $\bar{x}_i$, tj. kao najvjerojatnije vrijednosti veličinâ x_i (odlomci 3.3.1,2). Zato pod simbolima u jednadžbi (4.1-1) treba, u stvari, razumijevati srednje vrijednosti. Dalje pretpostavljamo da je pri ponovljenim mjerenjima svaka veličina x_i izmjerena jednaki broj puta n. Standardno odstupanje (odsječak 3.3) svake od fizikalnih veličina x_i označit ćemo slovom s_i.

Srednju vrijednost indirektno mjerene veličine y saznajemo računanjem, tj. tako da u (4.1-1) uvrstimo srednje vrijednosti direktno mjerenih veličina x_i. Koliko iznosi standardno odstupanje s_y tako »indirektno izmjerene« veličine y? Budući da je korektan izvod vrlo opsežan (vidi, na primjer, knjigu *N. Čubranić:* Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, drugo izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1967), ovdje bez dokaza navodimo opću jednadžbu kojom se proračunava standardno odstupanje s_y indirektne mjerene veličine

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_i} s_i \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_i} s_i \right)^2, \qquad (4.1\text{-}2)$$

koja vrijedi samo za slučaj kada je $s_i \ll x_i$. Iz jednadžbe se razabire da je kvadrat standardnog odstupanja (varijancija, odlomak 3.3.3) indirektno mjerene veličine y jednak sumi kvadrata umnožaka $s_i \partial F/\partial x_i$, gdje je $\partial F/\partial x_i$ parcijalna derivacija funkcije y po x_i. Napominjemo da smo u jednadžbi (4.1-2) prikazali i *pojednostavnjeni* prikaz znaka zbroja (bez naznaka granica), jer ćemo u svim daljnjim razmatranjima imati samo granice $i = 1$, $i = \nu$, tj. $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Iako jednadžba (4.1-2) vrijedi za *srednje vrijednosti*, tj. u (4.1-1) treba umjesto x_i i y razumijevati njihove srednje vrijednosti, ona se može upotrijebiti i onda ako stoje na raspolaganju samo podaci jednog niza mjerenja x_i. No u tom se slučaju vrijednosti s_i moraju poznavati iz prethodnih mjerenja. Ujedno ponovno naglašavamo da navedena jednadžba vrijedi samo za *slučajne* pogreške (za sistematske pogreške vrijede zakonitosti iz odsječka 4.3). U literaturi se računanje pogrešaka indirektno mjerenih veličina obilježava pojmom »prirast pogrešaka« (engl. error propagation, njem. Fehlerfortpflanzung), a sama jednadžba (4.1-2) izrazom »zakon prirasta slučajnih pogrešaka«.

U odsječku 3.3.4 mogli smo se uvjeriti da je »relativno standardno odstupanje« $r_x = s_x/x$ *direktno* mjerene fizikalne veličine x najzorniji izraz mjerne preciznosti. Nema nikakva razloga da r_y ne bude isto tako zornim prikazom mjerne preciznosti *indirektno* mjerene veličine y iz jednadžbe (4.1-1). Podijelimo li s_y iz (4.1-2) sa (4.1-1), dobivamo opći izraz za »relativno standardno odstupanje indirektno mjerene fizikalne veličine«

$$r_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{1}{\bar{y}} \sqrt{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_i} s_i \right)^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_i} \frac{s_i}{\bar{y}} \right)^2}, \qquad (4.1\text{-}3)$$

gdje se granice znaka zbroja protežu od $i = 1$ do $i = \nu$. Jednadžbom (4.1-3) često ćemo se koristiti u idućim odlomcima i u odsječku 4.2.

4.1.2. Nepouzdanost srednje vrijednosti direktno mjerene veličine opširno smo razmotrili u odlomku 3.3.5. Ako je procjena standardnog odstupanja s

dovoljno bliska stvarnom standardnom odstupanju σ, čemu je praktički udovoljeno ako je broj ponovljenih mjerenja n dovoljno velik, nepouzdanost C srednje vrijednosti iznosi $C = s/n^{1/2}$ (odlomak 3.3.5). Budući da je svaka veličina x_i iz jednadžbe (4.1-1) izmjerena n puta uz spomenuti uvjet $s_i \approx \sigma_i$, to je i nepouzdanost srednje vrijednosti indirektno mjerene veličine y u skladu s parcijalnim nepouzdanostima $C_i = s_i/n^{1/2}$; pri tom mora biti $n_i = n_1 = n_2 = \ldots = n^v$. Zbog toga se nepouzdanost srednje vrijednosti veličine y računa tako da se s_y iz (4.1-2) podijeli s drugim korijenom iz n, a relativna nepouzdanost tako da se (4.1-3) podijeli sa $n^{1/2}$, dakle

$$\text{nepouzdanost} \qquad C_y = \frac{s_y}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_i} \frac{s_i}{\sqrt{n}} \right)^2}, \tag{4.1-4}$$

$$\text{relativna nepouzdanost} \qquad c_y = \frac{C_y}{\bar{y}} = \frac{r_y}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\bar{y}} \frac{s_y}{\sqrt{n}}. \tag{4.1-5}$$

Ovi izrazi ne daju posve valjane rezultate ako procjena s_i *nije* dovoljno bliska σ_i, tj. ako je broj ponovljenih mjerenja n premalen. U takvom slučaju upotrebljavamo Studentovu raspodjelu (odsječak 3.7) i pripadni faktor t za odabranu statističku sigurnost P (tablica A-9). Ako su sve veličine x_i izmjerene *jednaki* broj puta n, pripadne nepouzdanosti iznose $C_i = s_i\, t/n^{1/2}$, gdje se t odnosi na jednaku statističku sigurnost $P_i = \text{const}$ za sve mjerene veličine x_i. Nepouzdanost C_y i relativna nepouzdanost c_y srednje vrijednosti indirektno mjerene veličine (4.1-1) u takvom se slučaju računaju pomoću izraza

$$\text{nepouzdanost} \qquad C_y = \frac{t}{\sqrt{n}} s_y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{t}{\sqrt{n}} s_i \right)^2}, \tag{4.1-6}$$

$$\text{relativna nepouzdanost} \qquad c_y = \frac{C_y}{\bar{y}} = \frac{t}{\sqrt{n}} r_y = \frac{1}{\bar{y}} \frac{t}{\sqrt{n}} s_y. \tag{4.1-7}$$

Napominjemo da se vrijednosti veličina s_y i r_y u jednadžbama (4.1-4...7) proračunavaju pomoću izraza (4.1-2,3).

4.1.3. Standardno odstupanje zbroja veličina. U ovom i idućim odlomcima izvest ćemo formule za standardno odstupanje s_y nekih složenih funkcija y koje se najčešće pojavljuju u mjernoj praksi. Pri tom ćemo se, dakako, oslanjati na opće jednadžbe (4.1-1, 2, 3). Kao prvo razmotrimo slučaj kada je veličina y iz (4.1-1) funkcija *zbroja* niza istorodnih fizikalnih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_v$ koje su direktno izmjerene. Riječ je, dakle, o funkciji

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_v x_v = \sum (a_i \cdot x_i), \tag{4.1-8}$$

gdje su a_i tačno poznati brojčani koeficijenti. Parcijalnim deriviranjem izraza (4.1-8) dobivamo $\partial y/\partial x_1 = a_1$, $\partial y/\partial x_2 = a_2, \ldots,$ $\partial y/\partial x_v = a_v$. Uvrštenjem tih rezultata u (4.1-2) i primjenom jednadžbe (4.1-3) nastaju izrazi za standardno odstupanje s_y i relativno standardno odstupanje r_y indirektno mjerene veličine y iz jednadžbe (4.1-8):

$$s_y = \sqrt{a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + \ldots + a_v^2 s_v^2} = \sqrt{\sum (a_i\, s_i)^2} \tag{4.1-9}$$

$$r_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{\bar{y}^2} \sum (a_i\, s_i)^2}. \tag{4.1-10}$$

Ako su koeficijenti a_i međusobno jednaki i iznose 1, tj. $a_i = 1$, jednadžba (4.1-8) prelazi u oblik

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_v,$$

pa se u tom slučaju izraz (4.1-9) pojednostavnjuje u

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_v^2}. \tag{4.1-11}$$

Iz jednadžbi (4.1-11,10) dobivaju se posve jednostavni izrazi za standardno odstupanje s_y i relativno standardno odstupanje $r_y = s_y/y$ (u daljnjem ćemo tekstu propuštati poseban znak — crticu za srednju vrijednost) ako je indirektno mjerena veličina y jednaka zbroju *dviju* direktno mjerenih veličina:

$$\left.\begin{aligned} y &= x_1 + x_2, \qquad s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \\ r_y &= \frac{s_y}{y} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{x_1 + x_2} = \frac{\sqrt{r_1^2 x_1^2 + r_2^2 x_2^2}}{x_1 + x_2} \end{aligned}\right\} \tag{4.1-12}$$

U slučaju $x_1 = x_2$, uz $s_1 = s_2$, gornje jednadžbe prelaze u najjednostavniji mogući oblik: $y = 2x_1$, $s_y = \sqrt{2}\, s_1$, $r_y = r_1/\sqrt{2}$. Pri tom je $r_1 = r_2 = s_1/x_1$.

4.1.4. Standardno odstupanje razlike dviju veličina. Razmotrimo slučaj kada je indirektno mjerena veličina y jednaka *razlici* dviju direktno mjerenih veličina x_1 i x_2, dakle $y = x_1 - x_2$. Iako jednadžbe (4.1-12) vrijede i za taj slučaj (ako umjesto $+x_2$ uvrstimo $-x_2$), zbog važnosti pripadnih izraza za s_y i r_y izvest ćemo ih iz osnovne jednadžbe (4.1-2). Parcijalne derivacije funkcije $y = x_1 - x_2$ iznose $\partial y/\partial x_1 = 1$ i $\partial y/\partial x_2 = -1$. Ako standardna odstupanja veličina x_1 i x_2 iznose s_1 i s_2, a $r_1 = s_1/x_1$ i $r_2 = s_2/x_2$, pomoću jednadžbi (4.1-2,3) dobivamo

$$\left.\begin{aligned} y &= x_1 - x_2, \qquad s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \\ r_y &= \frac{s_y}{y} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{r_1^2 x_1^2 + r_2^2 x_2^2}}{x_1 - x_2} \end{aligned}\right\} \tag{4.1-13}$$

Usporedimo li međusobno jednadžbe (4.1-13,12), uviđamo da je standardno odstupanje s_y *jednako* u oba slučaja, ali je relativno standardno odstupanje $(x_1 + x_2)/(x_1 - x_2)$ puta *veće* ako je riječ o razlici $y = x_1 - x_2$.

Budući da je r_y mjerodavno mjerilo preciznosti mjernog procesa, to je očito da indirektno mjerenje veličine y razlikom $x_1 - x_2$ dovodi do *pogoršanja* mjerne preciznosti, pogotovo ako razlika apsolutnih vrijednosti veličina x_1 i x_2 nije velika. Tu činjenicu možemo zapaziti i iz jednadžbe (4.1-13) za r_y ako pretpostavimo da je $x_1 \approx x_2$, a $r_1 = r_2$. U tom slučaju dobivamo približno $r_y \approx \sqrt{2}\, r_1 x_1/(x_1 - x_2)$, što bi uz hipotetičan ekstrem $(x_1 - x_2) \to 0$ uzrokovalo $r_y \to \infty$!

Primjer. Gubici snage električkog transformatora ustanovljeni su tako što je izmjerena izlazna snaga $P_2 = 96$ kW i ulazna snaga $P_1 = 100$ kW, dakle $\Delta P = P_1 - P_2 = 4$ kW. Relativna standardna odstupanja tih dvaju mjerenja bila su međusobno jednaka, $r_1(P_1) = r_2(P_2) = \pm 10^{-3} = \pm 0{,}1\,\%$. Koliko puta je relativno standardno odstupanje gubitaka snage $r_y(\Delta P)$ veće od r_1? Iz jednadžbe (4.1-13) dobivamo ($x_1 = P_1$, $x_2 = P_2$)

$$\frac{r_y(\Delta P)}{r_1(P_1, P_2)} = \frac{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}{P_1 - P_2} = \frac{\sqrt{100^2 + 96^2}}{100 - 96} = 34{,}6.$$

Odavde je očito da se mjerenje gubitaka snage transformatora mora obaviti na drukčijem principu ako se želi postići potrebna preciznost.

4.1.5. Standardno odstupanje potencije, produkta i kvocijenta. Metoda indirektnog mjerenja zbroja i razlike nekoliko *istorodnih* fizikalnih veličina, što smo razmotrili u prošla dva odlomka, relativno se rijetko upotrebljava u mjernoj tehnici. Indirektno se mjerenje mnogo češće upotrebljava pri utvrđivanju vrijednosti takve složene veličine (4.1-1) u kojoj je funkcija F potencija, umnožak ili kvocijent, a fizikalne veličine $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_v$ su *raznorodne veličine*. Sve tri vrste funkcija općenito prikazuje opća jednadžba indirektno mjerene veličine

$$y = a\, x_1^m\, x_2^n \ldots x_v^z \tag{4.1-14}$$

u kojoj je koeficijent a tačno poznat broj.

Standardno odstupanje s_y srednje vrijednosti složene veličine y izračunat ćemo pomoću opće jednadžbe (4.1-2). U tu svrhu najprije izračunamo parcijalne derivacije funkcije (4.1-14)

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a\, m\, x_1^{m-1}\, x_2^n \ldots x_v^z = \frac{m\, y}{x_1}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_v} = a\, z\, x_1^m\, x_2^n \ldots x_v^{z-1} = \frac{z\, y}{x_v}.$$

Uvrštenjem tako dobivenih derivacija u izraz (4.1-2) slijedi varijancija indirektno mjerene veličine y

$$s_y^2 = y^2 \left[\left(m \frac{s_1}{x_1} \right)^2 + \left(n \frac{s_2}{x_2} \right)^2 + \ldots \left(z \frac{s_v}{y_v} \right)^2 \right], \tag{4.1-15}$$

gdje su $s_1, s_2, \ldots s_v$ standardna odstupanja direktno mjerenih veličina $x_1, x_2, \ldots x_v$ iz jednadžbe (4.1-14).

Omjeri $r_1 = s_1/x_1$, $r_2 = s_2/x_2$, $\ldots$, $r_v = s_v/x_v$ predstavljaju relativna standardna odstupanja direktno mjerenih veličina. Budući da je $r_y = s_y/y$ relativno odstupanje indirektno mjerene veličine y (jednadžba 4.1-3), od (4.1-15) dobivamo opći izraz

$$r_y = \frac{s_y}{y} = \sqrt{m^2 r_1^2 + n^2 r_2^2 + \ldots + z^2 r_v^2}\,. \tag{4.1-16}$$

Za jednostavan ali čest slučaj $y = a x_1 x_2$, dakle za *produkt* dviju raznorodnih ili istorodnih (na primjer $A = ab$) fizikalnih veličina iz (4.1-15,16) proizlazi ($m = 1$, $n = 1$)

$$\left.\begin{aligned} y = a x_1 x_2, \quad s_y^2 &= (a x_2 s_1)^2 + (a x_1 s_2)^2 \\ r_y = \frac{s_y}{y} &= \frac{s_y}{a x_1 x_2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.1-17}$$

Isto je tako čest slučaj *kvocijent* dviju veličina. Ako je kvocijentna funkcija oblika $y = a x_1/x_2$, iz (4.1-15,16) dobivamo ($m = 1$, $n = -1$)

$$\left.\begin{aligned} y = a x_1/x_2, \quad s_y^2 &= \left(a \frac{s_1}{x_2} \right)^2 + \left(a \frac{x_1}{x_2} \frac{s_2}{x_2} \right)^2 \\ r_y = \frac{s_y}{y} &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.1-18}$$

Vidimo da su izrazi za *relativna* standardna odstupanja r_y produkta $y = a x_1 x_2$ i kvocijenta $y = a x_1/x_2$ međusubno jednaki.

4.2. Primjeri proračuna standardnog odstupanja i nepouzdanosti srednje vrijednosti indirektno mjerene veličine

Svrha je idućih odlomaka da na nekoliko primjera pokažu kako se pomoću formula iz odsječka 4.1 proračunavaju standardno odstupanje s_y i pripadna relativna vrijednost tog odstupanja $r_y = s_y/y$ indirektno mjerene veličine y te nepouzdanost C izračunate srednje vrijednosti. Statistička sigurnost rezultata iznosit će 68%, osim u slučaju kada se treba poslužiti jednadžbama (4.1-6,7) koje se oslanjaju na faktor t Studentove raspodjele (odsječak 3.7). Naglašavamo da se u idućim odlomcima proračunavaju samo utjecaji *slučajnih* pogrešaka (za sistematske vidi odsječak 4.3) uz pretpostavku da se njihova raspodjela pokorava normalnoj krivulji (odsječak 3.6).

4.2.1. Debljina, presjek i volumen prstena. Željeznom prstenu izmjereni su vanjski promjer D, unutarnji promjer d i visina h. Dobivene su ove srednje vrijednosti:

$$D = 114 \text{ mm}, \quad d = 76 \text{ mm}, \quad h = 15 \text{ mm}.$$

Standardno odstupanje svih triju mjerenih veličina bilo je isto, tj. $s_D = s_d = s_h = 10\ \mu\text{m} = 0{,}01$ mm.

Treba izračunati standardno odstupanje i relativno standardno odstupanje triju veličina koje karakteriziraju prsten: debljine $b = \frac{1}{2}(D-d)$, presjeka $A = bh$ i volumena $V = \pi d' A = \frac{1}{2}(D+d)\pi A$. Veličine b, A i V su »indirektno mjerene« (»složene«) veličine koje smo općenito razmatrali u odsječku 4.1.

Srednja vrijednost debljine prstena iznosi $b = \frac{1}{2}(114-76)$ mm $= 19$ mm. Pripadno standardno odstupanje izračunat ćemo pomoću jednadžbe (4.1-9) u koju ćemo uvrstiti $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ i $s_D = s_d = 10\ \mu$m. Tako dobivamo

$$s_b = \sqrt{(\tfrac{1}{2} s_D)^2 + (\tfrac{1}{2} s_d)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} s_D^2} = \frac{s_D}{\sqrt{2}} = 7{,}1\ \mu\text{m}.$$

Relativno standardno odstupanje iznosi $r_b = s_b/b = 7{,}1\ \mu\text{m}/19 \text{ mm} = 7{,}1 \cdot 10^{-3}/19 = 3{,}7 \cdot 10^{-4}$.

Srednja vrijednost presjeka prstena je $A = bh = 19\,\text{mm} \cdot 15\,\text{mm} = 285\ \text{mm}^2$. Pripadno standardno odstupanje računamo pomoću jednadžbe (4.1-17) uzimajući u obzir da je u ovom slučaju $a = 1$:

$$s_A^2 = h^2 s_b^2 + b^2 s_h^2 = \tfrac{1}{2} h^2 s_D^2 + b^2 s_D^2 = (\tfrac{1}{2} h^2 + b^2)\, s_D^2,$$

jer je $s_b^2 = s_D^2/2$, a prema uvodnim podacima je $s_h = s_D$. Uvrštenjem vrijednosti u gornju jednadžbu dobivamo

$$s_A = s_D \sqrt{\tfrac{1}{2} h^2 + b^2} = 10\ \mu\text{m} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} 15^2 + 19^2}\ \text{mm} = 0{,}218\ \text{mm}^2.$$

Pripadno relativno odstupanje iznosi $r_A = s_A/A = 0{,}218\ \text{mm}^2/285\ \text{mm}^2 = 7{,}6 \cdot 10^{-4}$. Ispravnost tog rezultata možemo kontrolirati trećom jednadžbom (4.1-17) ako prethodno izračunamo $r_h = 10\ \mu\text{m}/15 \text{ mm} = 6{,}7 \cdot 10^{-4}$.

Volumen prstena izračunat ćemo pomoću formule $V = \pi d' A$, gdje je $d' = \frac{1}{2}(D+d)$ »srednji promjer«. Aritmetička sredina tog promjera iznosi $d' = \frac{1}{2}(114 + 76)$ mm $= 95$ mm. Standardno odstupanje za d' jednako je vrijednosti s_b (usporedi jednadžbe 4.1-9,12,13!), što smo već izračunali, dakle $s_{d'} = 7{,}1\ \mu$m. Pripadno

relativno odstupanje iznosi $r_{d'} = s_{d'}/d' = 7{,}1\ \mu m/95\ mm = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$. Relativno standardno odstupanje volumena $V = \pi d' A$ možemo izračunati pomoću jednadžbe (4.1-17):

$$r_V = \sqrt{r_{d'}^2 + r_A^2} = 10^{-4} \cdot \sqrt{0{,}75^2 + 7{,}6^2} \approx 7{,}6 \cdot 10^{-4}.$$

Vrijednost volumena je približno $V = \pi d' A = \pi\ 95\ mm \cdot 285\ mm^2 = 85000\ mm^3$. Standardno odstupanje prema tome iznosi $s_V = V r_V = 85000\ mm^3 \cdot 7{,}6 \cdot 10^{-4} = 64{,}6\ mm^3$.

4.2.2. Mjerenje ubrzanja zemljine teže njihalom. Prilikom mjerenja mjesnog ubrzanja zemljine teže g metodom reverzibilnog njihala (vidi odlomak 9.4.2) deset su puta izmjereni duljina njihala l i period T. Utvrđene su ove srednje vrijednosti i standardna odstupanja (sistematske pogreške su iskorigirane)

$$l = 500{,}2\ mm = 0{,}5002\ m,\ s_l = 10\ \mu m = 1 \cdot 10^{-5}\ m,$$
$$T = 1{,}4196\ s,\ s_T = 1 \cdot 10^{-4}\ s.$$

Treba izračunati koliko iznosi srednja vrijednost mjesnog ubrzanja zemljine teže g i kolika je relativna nepouzdanost te srednje vrijednosti uz statističku sigurnost $P = 99{,}73\%$.

Riječ je, dakle, o tipičnom indirektnom mjerenju veličine g na temelju direktnog mjerenja duljine l i perioda T. Pripadna jednadžba glasi (odlomak 9.4.2).

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \tag{4.2-1}$$

Relativno standardno odstupanje r_g veličine g izračunat ćemo pomoću opće jednadžbe (4.1-16) koja vrijedi za funkciju (4.1-14). Usporedbom te funkcije s (4.2-1) slijedi $x_1 = l$, $m = 1$, $x_2 = T$ i $n = -2$. Prema tome pomoću (4.1-16) za (4.2-1) dobivamo

$$r_g = \sqrt{r_l^2 + (-2 r_T)^2} = 10^{-5} \sqrt{2^2 + 4 \cdot 7^2} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-4},$$

jer su relativna standardna odstupanja $r_l = 1 \cdot 10^{-5}\ m/(0{,}5\ m) = 2 \cdot 10^{-5}$, $r_T = 1 \cdot 10^{-4}\ s/(1{,}4196\ s) = 7 \cdot 10^{-5}$.

Relativnu nepouzdanost c_g srednje vrijednosti g izračunat ćemo pomoću jednadžbe (4.1-7) u odlomku 4.1.2. Budući da su veličine l i T mjerene $n = 10$ puta, a zahtijeva se statistička sigurnost rezultata $P = 99{,}73\%$, iz tablice A-9 (odlomak 3.7) dobiva se vrijednost faktora $t = 4{,}1$. Prema tome relativna nepouzdanost ($P = 99{,}73\%$) srednje vrijednosti veličine g iznosi

$$c_g = r_g \frac{t}{\sqrt{n}} = \pm 1{,}4 \cdot 10^{-4} \frac{4{,}1}{\sqrt{10}} = \pm 1{,}8 \cdot 10^{-4}.$$

Zadatkom se traži i srednja vrijednost indirektno mjerenog mjesnog ubrzanja zemljine teže. Uvrštenjem srednjih vrijednosti za l i T u jednadžbu (4.2-1) računanjem slijedi

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{0{,}5002\ m}{(1{,}4196\ s)^2} = 9{,}7987 \frac{m}{s^2}. \tag{4.2-2}$$

Sa statističkom sigurnošću $P = 99{,}73\%$ (nevjerica oko 3:1000!) ta će se srednja vrijednost nalaziti u granicama

$$g = 9{,}7987 (1 \pm 1{,}8 \cdot 10^{-4}) \frac{m}{s^2}, \tag{4.2-3}$$

tj. *granice pouzdanosti* (o tim pojmovima vidi u odlomku 3.3.5) iznose

gornja granica pouzdanosti: 9,8004 m/s²,
donja granica pouzdanosti: 9,7970 m/s².

Iz ovih se podataka razabire da »precizno« navođenje rezultata 9,7987 m/s² u (4.2-2,3), dobivenog množenjem i dijeljenjem, nema svrhe jer je nepouzdanost $C_g = \pm 1{,}76 \cdot 10^{-3}$ m/s² znatno veća od vrijednosti koju u spomenutim jednadžbama predstavlja posljednja znamenka. Zato je bolje da se te vrijednosti zaokruže na treću znamenku, tj. da se piše $\bar{g} = 9{,}799$ m/s² i $g = 9{,}799 \cdot (1 \pm 2 \cdot 10^{-4})$ m/s², iako se pri tom granice pouzdanosti ponešto proširuju (9,801 i 9,797 m/s²).

4.2.3. Utvrđivanje potrebne vrijednosti standardnog odstupanja. U mjernoj se praksi mogu pojaviti i obrnuti zadaci od onih koje smo razmatrali u prošla dva odlomka, tj. može se tražiti odgovor na ovo pitanje: koliko smiju najviše iznositi standardna odstupanja direktno mjerenih veličina x_i (vidi odlomak 4.1.1), a da standardno odstupanje indirektno mjerene veličine y ne premaši vrijednost s_y? Odgovor se, dakako, može pronaći pomoću općih jednadžbi (4.1-2,3) ili pomoću specijaliziranih izraza u odsječku 4.1.

Ovdje ćemo proučiti jednostavan primjer: izračunavanje volumena valjka $V = hd^2\pi/4$, gdje direktno mjerimo visinu valjka h i promjer njegove baze d. Možemo postaviti zahtjev da relativno standardno odstupanje volumena r_V ne smije premašiti stanovitu vrijednost, na primjer $r_V = 0{,}01$. Računanjem želimo saznati koliko pri tom moraju iznositi r_h i r_d. Rješenje dobivamo pomoću izraza (4.1-16) ako ga uz $y = V$, $x_1 = h$, $m = 1$, $x_2 = d$ i $n = 2$ primijenimo na našu jednadžbu indirektno mjerenog volumena $V = hd^2\pi/4$:

$$r_V^2 = r_h^2 + 4\, r_d^2. \tag{4.2-4}$$

Ovu jednadžbu ne možemo riješiti ako ne znamo međusobni odnos veličina r_h i r_d. Ukoliko je valjak takav da je $h = d$ (tada je $V = d^3\pi/4$), onda se može pretpostaviti da je $r_h = r_d$, pa jednadžba (4.2-4) dobiva rješenje $r_d = r_V/5^{1/2}$. Za navedenu konkretnu vrijednost je $r_h = r_d = 0{,}01/5^{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Vjerojatno je ispravnija pretpostavka $s_d = s_h$ (prije smo pretpostavili $r_d = r_h$!), tj. jednakost standardnih odstupanja veličina d i h, jer ona dosta često vrijedi i za slučaj $d \neq h$, ako razlike između veličina d i h nisu bitne. Uz propisanu maksimalnu vrijednost r_V, dakle kao i u prethodnom slučaju, najveću dopuštenu vrijednost s_d opet ćemo računati pomoću jednadžbe (4.1-15) u odlomku 4.1.5. Tako dobivamo

$$s_V^2 = V^2\left[\left(\frac{s_h}{h}\right)^2 + 4\left(\frac{s_d}{d}\right)^2\right],$$

odakle uz pretpostavku $s_d = s_h$ sređivanjem slijedi

$$s_d = r_V \frac{d}{\sqrt{4 + (d/h)^2}} = r_V \frac{h}{\sqrt{1 + (2h/d)^2}} = s_h,$$

jer je $r_V = s_V/V$. Budući da je $r_d d = r_h h$, iz gornje jednadžbe dobivamo

$$r_d = \frac{s_d}{d} = \frac{r_V}{\sqrt{4 + (d/h)^2}}, \quad \text{jer je} \quad r_h = r_d \frac{d}{h}.$$

Relativno standardno odstupanje ovisi, dakle, o omjeru veličina d i h. Za specijalan slučaj $d = h$ nastaje $r_d = r_h = r_V/5^{1/2}$, što smo već ustanovili u prethodnom primjeru.

4.3. Zakoni prirasta sistematske pogreške indirektno mjerene veličine

Sistematske pogreške indirektno mjerenih veličina ne valja računati pomoću formula koje smo u odsječku 4.1 izveli za *slučajne* pogreške. Tome je razlog činjenica što sistematske pogreške (vidi odsječak 3.2) imaju *određeni* predznak pa se zbog toga na posve određeni način odrazuju u sistematskoj pogrešci indirektno mjerene veličine.

4.3.1. Sistematska pogreška funkcije s jednom varijablom. Najprije ćemo razmotriti slučaj kada je indirektno mjerena veličina y funkcija samo *jedne* direktno mjerene veličine, x. U općem obliku tu funkciju možemo zabilježiti ovako

$$y = F(x). \tag{4.3-1}$$

Ako je prilikom mjerenja veličine x učinjena sistematska pogreška Δx (njena vrijednost može biti, dakako, pozitivna ili negativna), ona će uzrokovati sistematsku pogrešku Δy indirektno »mjerene« veličine y. Za taj slučaj jednadžba (4.3-1) dobiva oblik $y + \Delta y = F(x + \Delta x)$. Ukoliko je sistematska pogreška Δx relativno mala u odnosu prema vrijednosti x, dakle $\Delta x \ll x$, možemo smatrati da Δx teži diferencijalu $\mathrm{d}x$ veličine x. Zbog $\Delta x \to \mathrm{d}x$ gornju jednadžbu možemo napisati u obliku

$$y + \mathrm{d}y = F(x + \mathrm{d}x) \tag{4.3-2}$$

i primijeniti pravila matematičke analize. Razvijemo li desnu stranu jednadžbe (4.3-2) u Taylorov red, dobivamo

$$y + \mathrm{d}y = F(x) + \mathrm{d}x \cdot F'(x) + \frac{1}{2}(\mathrm{d}x)^2 \cdot F''(x) + \frac{1}{2 \cdot 3}(\mathrm{d}x)^3 \cdot F'''(x) + \ldots \tag{4.3-3}$$

gdje je $F' = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$ itd. U skladu s općim pravilima približnog računanja odbacujemo članove drugog i viših redova, pa od jednadžbe (4.3-3) ostaje

$$y + \mathrm{d}y = F(x) + \mathrm{d}x \cdot F'(x).$$

Uvrstimo li ovamo jednakost (4.3-1), dobivamo izraz za izračunavanje sistematske pogreške indirektno mjerene veličine $y = F(x)$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \cdot F'(x), \quad \text{odnosno} \quad \Delta y = \Delta x \cdot F'(x), \tag{4.3-4}$$

jer smo pretpostavili da vrijedi $\Delta x \to \mathrm{d}x$. Vidimo da je sistematska pogreška »složene veličine« $y = F(x)$ jednaka umnošku sistematske pogreške Δx mjerene veličine x i derivacije funkcije $F(x)$.

Relativnu sistematsku pogrešku indirektno mjerene veličine dobivamo tako da Δy, odnosno $\mathrm{d}y$, iz (4.3-4) podijelimo sa y, gdje je y srednja vrijednost. Tako nastaje izraz

$$g_y = \frac{\Delta y}{y} \to \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y/\mathrm{d}x}{y} = \mathrm{d}(\ln y) = \mathrm{d}[\ln F(x)], \tag{4.3-5}$$

jer je $\mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$ jednak diferencijalu prirodnog logaritma funkcije $y = F(x)$, a $\Delta x \to \mathrm{d}x$.

4.3.2. Proračunavanje sistematske pogreške indirektno mjerenih veličina obavlja se u pojedinim konkretnim slučajevima pomoću primjene općih izraza (4.3-4,5). Jednostavnije je, dakako, da se pogreška Δx uzme u obzir već prilikom utvrđivanja srednje vrijednosti $\bar{x}$ (y je, naime, funkcija srednje vrijednosti veličine x ako je riječ o ponovljenim mjerenjima; vidi odlomak 4.4.1), jer se onda ne mora proračunavati utjecaj Δx na Δy. Često, međutim, sistematske pogreške Δx nisu do kraja poznate u trenutku obrade mjernih rezultata ili budu otkrivene tek naknadno. U takvim je slučajevima proračunavanje Δy neophodno da bi se korigirala srednja vrijednost veličine y i dobio rezultat koji je najbliži stvarnoj vrijednosti. Zato ćemo u nastavku razmotriti nekoliko konkretnih funkcija $y = F(x)$ *jedne* varijable (jednadžba 4.3-1), a u odlomku 4.3.3 razmotrit ćemo funkcije *dviju i više* varijabli.

Neka je riječ o eksponencijalnoj funkciji $y = F(x) = ax^n$, gdje su a i n tačno poznati koeficijent i eksponent. Derivacija ove funkcije glasi

$$y' = F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1} = n\frac{y}{x}.$$

Uvrštenjem ovog izraza u opću jednadžbu (4.3-4) dobivamo vrijednost sistematske pogreške Δy indirektno mjerene veličine y u ovisnosti o sistematskoj pogrešci Δx stvarno mjerene veličine x:

$$\Delta y = \Delta x \cdot y' = \Delta x\, n\frac{y}{x} = nyg_x. \qquad (4.3\text{-}6)$$

Ovdje simbol g_x označuje *relativnu* sistematsku pogrešku direktno mjerene veličine, tj. $g_x = \Delta x/x$.

Ako sistematsku pogrešku Δy indirektno mjerene veličine podijelimo sa srednjom vrijednošću te veličine y, iz (4.3-6) slijedi njena relativna sistematska pogreška

$$g_y = \frac{\Delta y}{y} = ng_x,$$

što znači da je g_y od g_x veća n puta. Ako je $n > 1$, bit će i $g_y > g_x$. Ako je riječ o korjenovanju, dakle $n < 1$, bit će $g_y < g_x$, tj. relativna sistematska pogreška indirektno mjerene veličine bit će manja od g_x.

Navedimo još jedan primjer funkcije s jednom varijablom iz kojeg će se vidjeti važnost utjecaja predznaka. Želimo izračunati Δy i g_y složene veličine $y = F(x) = a\cos x$, gdje je a tačno poznata konstanta. Deriviranjem slijedi $y' = -a\sin x$, pa na temelju (4.3-4) dobivamo $\Delta y = -\Delta x\, a \sin x$. Relativna pogreška veličine y prema (4.3-5) iznosi

$$g_y = \frac{\Delta y}{y} = -\frac{x\, a \sin x}{y} = -\frac{\Delta x\, a \sin x}{a\cos x} = -\Delta x \operatorname{tg} x.$$

Na analogan način možemo pomoću (4.3-4,5) proračunati prirast sistematskih pogrešaka bilo koje druge funkcije $y = F(x)$. Za neke od njih rezultate sadrži tablica A-10.

Primjer. Naknadnom analizom mjernog postupka konstantirano je ovo: pri mjerenju promjera kugle D učinjena je relativna sistematska pogreška $g_D = -0{,}1\%$ (predznak minus!). Izračunajmo u kojoj se mjeri i u kom smislu mora korigirati vrijednost volumena kugle koja je bila izračunata prije pronalaženja sistematske pogreške!

Tablica **A-10**

Prirast sistematske pogreške funkcija s jednom i više varijabli

Red. broj	Funkcija $y=F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_\nu)$	Sistematska pogreška Δy	Relativna pogreška $g_y=\Delta y/y$
	Funkcije s jednom varijablom		
1	$y=ax$	$\Delta y=a\,\Delta x$	$g_y=\Delta x/x=g_x$
2	$y=a^n$	$\Delta y=n\,y\,\Delta x/x$	$g_y=n\,\Delta x/x=n g_x$
3	$y=a^x$	$\Delta y=\Delta x\,y\ln a$	$g_y=\Delta x \ln a$
4	$y=a\sin x$	$\Delta y=\Delta x\,a\cos x$	$g_y=\Delta x \operatorname{ctg} x$
5	$y=a\cos x$	$\Delta y=-\Delta x\,a\sin x$	$g_y=-\Delta x \operatorname{tg} x$
6	$y=a\operatorname{tg} x$	$\Delta y=\Delta x\,a/\cos^2 x$	$g_y=\Delta x\,2/\sin 2x$
7	$y=a\operatorname{ctg} x$	$\Delta y=-\Delta x\,a/\sin^2 x$	$g_y=-\Delta x\,2/\sin 2x$
	Funkcije s više varijabli		
8	$y=F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_\nu)$	$\Delta y=\sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i\right)$	$g_y=\sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\Delta x_i}{y}\right)$
9	$y=a_1x_1+a_2x_2+\ldots$	$\Delta y=a_1\Delta x_1+a_2\Delta x_2+\ldots$	$g_y=a_1\Delta x_1/y+a_2\Delta x_2/y+\ldots$
10	$y=x_1+x_2$	$\Delta y=\Delta x_1+\Delta x_2$	$g_y=(\Delta x_1+\Delta x_2)/y$
11	$y=x_1-x_2$	$\Delta y=\Delta x_1-\Delta x_2$	$g_y=(\Delta x_1-\Delta x_2)/y$
12	$y=ax_1^m x_2^n\ldots$	$\Delta y=y\left(m\frac{\Delta x_1}{x_1}+n\frac{\Delta x_2}{x_2}+\ldots\right)$	$g_y=m g_1+n g_2+\ldots$
13	$y=ax_1x_2$	$\Delta y=a\,(x_2\Delta x_1+x_1\Delta x_2)$	$g_y=g_1+g_2$
14	$y=ax_1/x_2$	$\Delta y=a\,(\Delta x_1/x_2-x_1\Delta x_2/x_2^2)$	$g_y=g_1-g_2$

Volumen kugle računa se pomoću jednadžbe $V=r^3\,4\pi/3$, gdje je $r=D/2$ radijus kugle. U ovisnosti o D volumen, dakle, glasi $V=D^3\pi/6$. Da ne bismo morali računati, poslužimo se rješenjem u drugom retku tablice A-10 ($g_y=g_V$, $x=D$, $n=3$, $g_x=g_D$)

$$g_V=ng_D=3\cdot(-0{,}1\%)=-0{,}3\%.$$

Vrijednost volumena treba, dakle, *povećati* (usporedi s jednadžbom 4.3-2!) za minus 0,3%, tj. treba ga *smanjiti* za 0,3%).

4.3.3. Sistematska pogreška funkcije s više varijabli. Posve općenito možemo zamisliti da je indirektno mjerena fizikalna veličina y funkcija niza međusobno *nezavisnih* fizikalnih veličina $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_\nu$, što možemo zabilježiti u obliku

$$y=F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_\nu). \qquad (4.3\text{-}7)$$

Direktno mjerene veličine x_i mogu biti, dakako, istorodne ili raznorodne. Ako njihove sistematske pogreške iznose Δx_i, a relativne sistematske pogreške $g_i = \Delta x_i/x_i$, rasuđivanja analogna onima u odlomku 4.3.1 pokazuju da se sistematska pogreška Δy indirektno mjerene veličine y računa pomoću izraza

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{v} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right). \tag{4.3-8}$$

Vrijednost *relativne* sistematske pogreške g_y indirektno mjerene veličine y dobiva se iz $g_y = \Delta y/y$, gdje je y srednja vrijednost ako je riječ o ponovljenim mjerenjima. Podrobnijom se matematičkom analizom može utvrditi da izraz za neposredno računanje relativne sistematske pogreške glasi

$$g_y = \frac{\Delta y}{y} = \mathrm{d}\{\ln[F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_v)]\}, \tag{4.3-9}$$

tj. g_y je jednaka totalnom diferencijalu prirodnog logaritma indirektno mjerene veličine y opisane jednadžbom (4.3-7). Pri tom, dakako, vrijedi težnja $\Delta x \to \mathrm{d}x$.

Uporabu formule (4.3-8) ilustrirat ćemo na primjeru indirektno mjerene veličine $y = a x_1^m x_2^n x_3^p$, gdje je a tačno poznati koeficijent, dok slova x_1, x_2 i x_3 predstavljaju direktno mjerene veličine. Parcijalne derivacije funkcije y iznose

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a m x_1^{m-1} x_2^n x_3^p = \frac{my}{x_1}; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{ny}{x_2}; \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = \frac{py}{x_3}.$$

Uvrštenjem ovih izraza u jednadžbu (4.3-8) slijedi

$$\Delta y = y\left(m\frac{\Delta x_1}{x_1} + n\frac{\Delta x_2}{x_2} + p\frac{\Delta x_3}{x_3} \right),$$

gdje su Δx_1, Δx_2 i Δx_3 sistematske pogreške direktno mjerenih veličina x_1, x_2 i x_3. Iz gornje se jednadžbe dobiva relativna sistematska pogreška indirektno mjerene veličine y

$$g_y = \frac{\Delta y}{y} = m g_1 + n g_2 + p g_3,$$

jer su $g_1 = \Delta x_1/x_1$, $g_2 = \Delta x_2/x_2$ i $g_3 = \Delta x_3/x_3$ relativne sistematske pogreške direktno mjerenih veličina. Na analogan način možemo proračunati prirast sistematskih pogrešaka bilo koje druge funkcije (4.3-7). Za neke od njih rezultate sadrži tablica A-10.

4.3.4. Primjer: nesigurnost fotometrijskog ekvivalenta. Opća jednadžba (4.3-8) može se upotrijebiti i za izračunavanje utjecaja nesigurnog poznavanja vrijednosti direktno mjerenih veličina x_i na nepouzdanost (nesigurnost) vrijednosti indirektno mjerene veličine y. Pri tom se pod »fizikalnom veličinom« može razumijevati i prirodna konstanta, što će nam ilustrirati primjer koji je godine 1954. analizirao autor (vidi citiranu literaturu) želeći ustanoviti zašto vrijednost fotometrijskog ekvivalenta K ($= K_m$; vidi odlomak G.2.3.3) u različitim udžbenicima i priručnicima varira između 600 i 688 lm/W, dakle za oko 13%.

Analizu valja započeti od jednadžbe koja fotometrijski ekvivalent K povezuje s ostalim fotometrijskim veličinama. Ta jednadžba (vidi odsječak G.2.3 i tablicu G-11), prilagođena izokromatskom mjernom postupku, glasi

$$L = K \int V C \lambda^{-5} \exp\left(\frac{A}{\lambda T} + \frac{\lambda_0}{\lambda} \ln R \right) \mathrm{d}\lambda. \tag{4.3-10}$$

Ovdje simboli označuju: L luminanciju, V relativnu vidljivost svjetla (odlomak G.2.2.1), λ duljinu vala zračenja, $C = C_1 = 2hc^2$, $A = C_2 = hc/k$, $\lambda_0 = 0{,}6528\ \mu\text{m}$ referentnu duljinu vala, h Planckovu konstantu, c brzinu svjetla, k Boltzmannovu konstantu (vidi tablicu 2 u prilogu knjige), T temperaturu taljenja zlata, a R karakterističnu konstantu, koja za platinu iznosi 299,0.

Pomnim ispitivanjem mjernog postupka možemo doći do zaključka da veliku relativnu nesigurnost $g_K = \Delta K/K \approx 13\,\%$ mogu uzrokovati nesigurne vrijednosti konstanti C, A i T (talište zlata). Utjecaj tih triju veličina na K možemo istražiti pomoću jednadžbe (4.3-8) za izračunavanje prirasta pogreške indirektno mjerene veličine. Za naš primjer ($x_1 = C$, A, T; $y = K$) vrijedi

$$\Delta K = \frac{\partial K}{\partial C}\Delta C + \frac{\partial K}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial K}{\partial T}\Delta T. \tag{4.3-11}$$

Parcijalnim deriviranjem implicitnog izraza (4.3-10) dobivamo rješenja $\partial K/\partial C = K/C$, $\partial K/\partial A = KD/A$ i $\partial K/\partial T = -KD/T$, gdje su

$$D = \frac{A}{\lambda_C T} \quad \text{i} \quad \lambda_C = \frac{\int V M_\lambda(\lambda, T_p)\,\mathrm{d}\lambda}{\int \lambda^{-1} V M_\lambda(\lambda, T_p)\,\mathrm{d}\lambda} = 0{,}58\ \mu\text{m}.$$

Slovo λ_C označuje tzv. Crovinu duljinu vala (*A. P. Crova*, 1833—1907), koja pri talištu platine T_p ima navedenu vrijednost. Uvrštenjem izračunatih derivacija u (4.3-11) nastaje izraz za izračunavanje relativne nesigurnosti $g_K = \Delta K/K$ fotometrijskog ekvivalenta u ovisnosti o nesigurnostima veličina C, A i T:

$$g_K = \frac{\Delta K}{K} = g_C + Dg_A - Dg_T. \tag{4.3-12}$$

Ovdje su, dakako, relativne nesigurnosti definirane jednadžbama $g_C = \Delta C/C$, $g_A = \Delta A/A$ i $g_T = \Delta T/T$. Budući da je $T \approx 1336$ K, $A = 0{,}01438$ Km i $\lambda_c = 5{,}8 \cdot 10^{-7}$ m, vrijednost faktora D iznosi $D = 18{,}5$.

Primijenimo sada (4.3-12) na stvarne vrijednosti konstanti C, A i T. Od godine 1927. do 1948. »najbolje vrijednosti« konstante C varirale su za maksimalno 0,4 %. Taj utjecaj neznatan je prema navedenoj vrijednosti $g_K = 13\,\%$, pa ga možemo isključiti iz daljnjih razmatranja. Za konstantu $A\ (= C_2)$ fluktuacije su bile znatno veće: između godine 1939. i 1951. upotrebljavale su se vrijednosti te konstante koje su se međusobno razlikovale do $g_A = 0{,}21\,\%$. Prema drugom članu izraza (4.3-12) to se odrazuje na g_K u mnogo većem iznosu: $Dg_A = 18{,}5 \cdot 0{,}21\,\% = 3{,}9\,\%$, odnosno $\Delta K_A = Dg_A K = 3{,}9 \cdot 10^{-2} \cdot 680$ lm/W $= 26{,}5$ lm/W, ako smatramo da stvarna vrijednost iznosi $K = 680$ lm/W (odlomak G.2.3.3).

Utjecaj nesigurnosti poznavanja vrijednosti tališta zlata T (ili nepreciznosti reprodukcije te temperature) na g_K jednak je utjecaju g_A, ali je suprotnog predznaka. Lako je izračunati kako relativno male promjene T mogu uzrokovati velike promjene K. Tako, na primjer, iz (4.3-12) dobivamo

$$\Delta T = -\frac{T}{D}\frac{\Delta K_T}{K} = -\frac{1336\,\text{K}}{18{,}5}6{,}5\,\% = -4{,}7\,\text{K},$$

tj. dovoljno je da se pri vrijednosti tališta zlata pogriješi samo za 4,7 K (na razini 1336 K!) pa da relativna nesigurnost fotometrijskog ekvivalenta postigne 6,5%.

4.4. Proračunavanje mjerne nesigurnosti indirektno mjerene veličine

Pojam »mjerna nesigurnost« definirali smo u odlomku 3.8.1, a ovdje ćemo ga primijeniti na tzv. indirektno mjerenu veličinu. Iz primjera u odlomcima 4.4.2,3 moći ćemo razabrati da je nesigurnost mjernog postupka nemoguće utvrditi egzaktno, već da se treba osloniti na *procjene* preostalih sistematskih pogrešaka.

4.4.1. Opći izraz za mjernu nesigurnost. Uputu o načinu proračunavanja mjerne nesigurnosti srednje vrijednosti indirektno mjerene veličine prenosimo iz norme DIN 1319: Grundbegriffe der Messtechnik koja je u Saveznoj Republici Njemačkoj na snazi od mjeseca decembra godine 1963. Ta norma pretpostavlja da je indirektno mjerena veličina y funkcija niza međusobno *nezavisnih* fizikalnih veličina $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_\nu$ kojih srednje vrijednosti dobivamo direktnim mjerenjem. Općenito se indirektno mjerena veličina y može zabilježiti u obliku

$$y = F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_\nu), \tag{4.4-1}$$

što smo već imali u odlomku 4.1.1. Procjenjivanjem preostalih sistematskih pogrešaka (odlomak 3.8.1) određene su nesigurnosti U_i srednjih vrijednosti tih direktno mjerenih veličina. Nesigurnost U_y srednje vrijednosti indirektno mjerene veličine y iz (4.4-1) procjenjuje se prema citiranoj njemačkoj normi izrazom

$$U_y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} U_i\right)^2}, \tag{4.4-2}$$

koji vrijedi za slučaj ako udio procijenjenih nepoznatih sistematskih pogrešaka u U_i nije znatno veći od udjela slučajnih pogrešaka (granice zbroja protežu se od $i = 1$ do $i = \nu$).

Relativna nesigurnost (precizno: »relativna nesigurnost srednje vrijednosti indirektno mjerene veličine«) definira se kao omjer stvarne nesigurnosti U_y i srednje vrijednosti veličine y, tj.

$$u_y = \frac{U_y}{\bar{y}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{U_i}{y}\right)^2}. \tag{4.4-3}$$

Ovdje smo pod znakom korijena ispustili specijalnu oznaku za srednju vrijednost, jer u ovovrsnim računima (odlomak 4.1.1) pod y ionako uvijek razumijevamo srednje vrijednosti.

Ako jednadžbe (4.4-2,3) usporedimo sa (4.1-2,3) u odlomku 4.1.1, uviđamo da su one identično građene, jedino je umjesto o standardnom odstupanju s riječ o nesigurnosti U. Budući da su to opći izrazi, očito je da će identičan oblik imati i primjene na specijalne slučajeve. Tako, na primjer, za slučaj kada je indirektno mjerena veličina y produkt

$$y = a x_1^m x_2^n \ldots x_\nu^z, \tag{4.4-4}$$

jednadžba (4.4-3) daje izraz po obliku identičan s jednadžbom (4.1-16):

$$u_y^2 = m^2 u_1^2 + n^2 u_2^2 + \ldots + z^2 u_\nu^2. \tag{4.4-5}$$

Pri tom su relativne nesigurnosti definirane omjerima $u_1 = U_1/x_1$, $u_2 = U_2/x_2$ itd. Identičnost oblika jednadžbi za u_y i s_y vrijedi, dakako, i za sve druge funkcije y (vidi odlomke 4.1.3,4 i 5).

4.4.2. Nesigurnost mjernog postupka procjenjuje se pažljivim razmatranjem svih poznatih utjecajnih činilaca u *konkretnom* mjernom postupku. Zato ćemo ovdje izračunati koliku relativnu nesigurnost unosi postupak baždarenja tlakomjera (uređaja za mjerenje tlaka) u nekom laboratoriju. Taj laboratorij baždari tlakomjere tako što njihovom pokazivanju dodjeluje vrijednosti tlaka p proizvedenog utegom mase m koji svojom težinom $G=mg$ pritišće na vodoravnu plohu površine A (o tlaku i načelu njegova mjerenja vidi odsječak B.4.1, a o težini i mjesnom ubrzanju zemljine teže odsječke A.9.2 i B.7.3). Stvarnu vrijednost proizvedenog tlaka laboratorij saznaje pomoću jednadžbe

$$p=\frac{G}{A}=\frac{mg}{A}=\frac{m\varphi}{A}g_0, \tag{4.4-6}$$

gdje je $\varphi=g/g_0$ omjer ubrzanja zemljine teže g na mjestu gdje se nalazi laboratorij i odabrane referentne vrijednosti g_0 (obično je to $g_0=9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$). Izraz (4.4-6) vrijedi uz pretpostavku da je ploha A vodoravna, tj. savršeno okomita na usmjerenost g.

Laboratorij je svoje utege i površinu mjernog uređaja dao baždariti u nacionalnom metrološkom zavodu, američki laboratorij — na primjer — u National Bureau of Standards (o metrološkim zavodima vidi odsječak 7.2), koji je u certifikatu naznačio kolika je nesigurnost vrijednosti mase m utega i površine A mjernog uređaja. Pretpostavimo da u nekom slučaju laboratorij raspolaže certifikatima s ovim podacima o masi svojih utega, površini mjernog uređaja, ubrzanju zemljine teže i njihovim nesigurnostima:

$m=100\ \mathrm{kg}$	$U_\mathrm{m}=1\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg}$	$u_\mathrm{m}=1\cdot10^{-5}$
$A=1\ \mathrm{mm^2}$	$U_\mathrm{A}=1\cdot10^{-4}\ \mathrm{mm^2}$	$u_\mathrm{A}=1\cdot10^{-4}$
$\varphi\approx1$	$U_\varphi=1\cdot10^{-6}$	$u_\varphi=1\cdot10^{-6}$

Relativne nesigurnosti u desnom stupcu izračunali smo pomoću definicijskih jednadžbi $u_\mathrm{m}=U_\mathrm{m}/m$ i $u_\mathrm{A}=U_\mathrm{A}/A$ na temelju gore navedenih podataka za m, A, U_m i U_A dobivenih od nacionalnog metrološkog zavoda. Vrijednosti $\varphi=g/g_0$ i U_φ poznate su iz prethodnih mjerenja obavljenih jednom od uobičajenih metoda (odsječci 9.4 i 9.5).

Utjecaj u_m, u_A i u_φ na relativnu nesigurnost poznavanja vrijednosti tlaka p, proizvedenog na opisani način, možemo ocijeniti pomoću jednadžbe (4.4-3). Najprije izračunamo parcijalne derivacije veličine p $(=y)$ iz (4.4-6): $\partial p/\partial m=p/m$, $\partial p/\partial A=-p/A$, $\partial p/\partial\varphi=p/\varphi$. Uvrštenjem svih potrebnih veličina u izraz (4.4-3) slijedi

$$u_\mathrm{p}^2=\left(\frac{U_\mathrm{p}}{p}\right)^2=u_\mathrm{m}^2+u_\mathrm{A}^2+u_\varphi^2=(1\cdot10^{-5})^2+(1\cdot10^{-4})^2+(1\cdot10^{-6})^2\approx(1\cdot10^{-4})^2.$$

Prema tome u zadanom je primjeru $u_\mathrm{p}\approx u_\mathrm{A}=1\cdot10^{-4}$, tj. nesigurnosti poznavanja mase utega m i mjesnog ubrzanja zemljine teže g zanemarive su prema nesigurnosti kojom se zna vrijednost površine A mjernog uređaja. Napominjemo da smo do istog rezultata mogli doći kraćim putem, pomoću jednadžbe (4.4-5). Takav kraći postupak opisan je, na primjer, u odlomku 4.2.3.

Obavljeni proračun dopušta nam da izvedemo očekivani ali i važan zaključak: vrijednost tlaka p koji proizvodi laboratorijski uteg m u baždarnom uređaju presjeka

A neće iznositi tačno $m\varphi g_b/A$ (= srednja vrijednost), kako to opisuje jednadžba (4.4-6), nego će se nalaziti u *rasponu*

$$p = \frac{m\varphi g_0}{A}(1 + u_p) = \bar{p}(1 + u_p), \qquad (4.4\text{-}7)$$

gdje slovo p sa crticom označuje srednju vrijednost proizvedenog tlaka, a relativna nesigurnost (ili neodređenost) u našem slučaju iznosi $u_p = \pm 1 \cdot 10^{-4}$. To znači da eksperimentator ne zna stvarnu vrijednost proizvedenog tlaka, već jedino to da se ona nalazi među granicama sigurnosti

$$\bar{p}(1 + 1 \cdot 10^{-4}) \quad \text{i} \quad \bar{p}(1 - 1 \cdot 10^{-4}).$$

Ilustrirajmo to konkretnim podacima iz našeg primjera. Ako radi jednostavnosti ovdje pretpostavimo da je u laboratoriju $\varphi = 1$, naše vrijednosti $m = 100$ kg, $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s² i $A = 1$ mm² dovode nas do rezultata

$$\bar{p} = \frac{m\varphi g_0}{A} = \frac{100\,\text{kg} \cdot 1 \cdot 9{,}806\,65\,\text{m/s}^2}{1\,\text{mm}^2} = 9{,}806\,65 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

gdje je N = newton = kg m/s² (vidi odlomak B.4.2.1). Budući da je $u_p = \pm 1 \cdot 10^{-4}$, računanjem pomoću jednadžbe (4.4-7) dobivamo

$$p = 9{,}806\,65 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}(1 \pm 1 \cdot 10^{-4}) = (9{,}8076 \ldots 9{,}8057) \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

tj. nesigurnost poznavanja vrijednosti tlaka proizvedenog u baždarnom laboratoriju iznosi

$$U_p = \bar{p}\, u_p = \pm 9{,}81 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Budući da izračunatu nesigurnost U_p uzrokuje konkretan mjerni postupak, neki je autori i standardizacijske norme zovu *nesigurnost mjernog postupka* ili »nesigurnost mjernog uređaja«, dok je drugi zovu »pogreška mjernog sistema« (engl. system error). Bilo koji od tih naziva opravdan je jedino u slučaju ako nesigurnost U obuhvaća *sve* izvore nesigurnosti poznavanja stvarne vrijednosti koju želimo utvrditi mjerenjem. U našem razmatranju, na primjer, nismo uzeli u obzir nesigurnost same mjerne *metode* (»faktor pogreške metode«), jer je ona u tom slučaju zanemariva. Možda smo propustili i neki drugi izvor nesigurnosti, jer ne znamo za njega. Općenito se, dakle, valja pridržavati ove upute: pri onim mjerenjima gdje postoji više poznatih izvora nesigurnosti treba sve nesigurnosti zbrojiti po načelu jednadžbe (4.4-2), čime se dobiva stvarna »nesigurnost mjernog postupka« ili »sveukupna pogreška mjernog postupka« (engl. total system error).

4.4.3. Nesigurnost baždarenog uređaja. Zadržimo se još malo na primjeru baždarenja tlakomjera koji smo razmatrali u prošlom odlomku. Konstatirajmo najprije da će mjerna nesigurnost baždarnog (kalibracijskog) postupka U_p u *cijelosti* ući u rezultate koji se dobivaju tim postupkom. Očito je, naime, da broj n ponovljenih usporedbi pokazivanja p_b *baždarenog* (kalibriranog) tlakomjera sa vrijednošću p iz (4.4-7) nimalo ne utječe na tu vrijednost p prema kojoj se tlakomjer baždari. Niz od n mjerenja utječe, međutim, na nešto drugo: s drugim korijenom iz n (odlomak 3.3.5) smanjuje se nepouzdanost srednje vrijednosti p_b baždarenog tlakomjera.

Ako je broj ponovljenih mjerenja n takav da se mora primijeniti Studentova raspodjela (odsječak 3.7), a iz pojedinih su vrijednosti $p_{b,i}$ eliminirane poznate sistematske pogreške, onda je očito da se baždarenom tlakomjeru može pripisati vrijednost

$$p_p = \bar{p}\,(1 + u_p) + \frac{t}{\sqrt{n}}\,s = \bar{p} + \bar{p}\,u_p + \frac{t}{\sqrt{n}}\,s, \qquad (4.4\text{-}8)$$

gdje je s standardno odstupanje pokazivanja baždarenog tlakomjera. Zbroj desnih dvaju članova jednadžbe (4.4-8) predstavljaju mjernu nesigurnost *baždarenog* (kalibriranog) tlakomjera

$$U_b = \bar{p}\,u_p + \frac{t}{\sqrt{n}}\,s \qquad \text{ili} \qquad u_b = u_p + \frac{t}{\sqrt{n}}\,\frac{s}{\bar{p}}, \qquad (4.4\text{-}9)$$

gdje je u_b relativna mjerna nesigurnost baždarenog tlakomjera. Pri tom, dakako, faktor t u sebi uključuje razinu statističke sigurnosti P. Iz jednadžbi (4.4-8,9) proizlazi stav mjerne tehnike: nema svrhe pretjerano povećavati broj n ponovljenih mjerenja, jer se zbog preostalih sistematskih pogrešaka mjerna nesigurnost može smanjiti samo do stanovite granice. Taj smo stav, uostalom, već iznijeli u odlomku 3.8.1, gdje smo definirali pojam »mjerna nesigurnost«.

Pretpostavimo da drugi pribrojnik u desnoj jednadžbi (4.4-9) iznosi $\pm 1{,}5 \cdot 10^{-4} = \pm 0{,}015\,\%$. Budući da smo u odlomku 4.4.2 izračunali $u_p = \pm 1 \cdot 10^{-4}$, zbrajanjem dobivamo relativnu nesigurnost pokazivanja baždarenog tlakomjera $u_b = \pm 2{,}5 \cdot 10^{-4}$. Da li je to doista konačan rezultat? Odgovor se može dati jedino ako se znaju svi utjecaji koji mogu povećati nesigurnost, ocjena se može donijeti jedino analizom *konkretnog* postupka baždarenja. Možda treba sa $\pm 1 \cdot 10^{-4}$ (ili s nekom drugom vrijednošću) uzeti u obzir *nestabilnost* baždarenog uređaja, utjecaj *starenja* ili neki drugi. Takvi utjecaji u praksi redovito postoje, pa je zato vrlo vjerojatno da će relativna nesigurnost na kraju iznositi $\pm 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ ili čak $\pm 5 \cdot 10^{-4}$, tj. možda i pet puta više od nesigurnosti poznavanja mase utega m, površine A i ubrzanja zemljine teže (vidi početak odlomka 4.4.2).

4.5. Proračunavanje granične pogreške indirektno mjerene veličine

Značenje pojma »granična pogreška« objasnili smo u odsječku 3.8.3 na temelju definicije u njemačkoj normi DIN 1319: Grundbegriffe der Messtechnik od godine 1963. I u ovom ćemo se odsječku osloniti na citiranu normu, iako norma kod većine ljudi izaziva osjećaj sputanosti ili čak ukalupljivanja. Smatramo da u ovom slučaju oslanjanje na njemačku normu ima temeljito opravdanje iz barem tri razloga: 1) Jugoslavija a ni mnoge druge zemlje nemaju standardizirane pojmove i postupke računanja na tom području. 2) Citiranu normu upotrebljavaju mnoge evropske zemlje s kojima Jugoslavija održava stanovitu trgovačku, industrijsku i znanstvenu razmjenu. 3) Daleko manje nesporazuma, pa i šteta, može nastati ako se oslanjamo na bilo koju pozitivnu i priznatu normu negoli u slučaju da svaki autor na svoj način tumači ovovrsne pojmove i postupke koji se nalaze negdje između empirije i statističke teorije.

4.5.1. Opći izrazi za računanje granične pogreške. Zašto uopće proračunavamo »graničnu pogrešku« indirektno mjerene veličine $y = F(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_v)$? Zar nam nije dovoljna »mjerna nesigurnost« U_y koju smo proračunavali

u odsječku 4.4? Razlog upotrebe granične pogreške je taj što u mjernoj praksi često ne znamo koliko iznosi mjerna nesigurnost U_i veličinâ x_i kojih funkcija je indirektno mjerena veličina y. U takvim su slučajevima, međutim, redovito poznate pripadne *granične pogreške* G_i (za definiciju granične pogreške vidi odlomak 3.8.3).

Pretpostavimo, dakle, da su poznate granične pogreške G_i svih veličina x_i koje tvore funkciju $y = F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_v)$. Graničnu pogrešku G_y indirektno mjerene veličine y možemo izračunati na temelju istih onakvih rasuđivanja kakva smo imali u odsječcima 4.3.1 i 4.3.3 ako na mjesto Δx_i stavimo G_i. Dalje pretpostavljamo da ne znamo predznak vrijednosti granične pogreške G_i *nijedne* direktno mjerene veličine x_i. Drugim riječima: očekujemo da sve veličine x_i mogu istodobno poprimiti kako svoju maksimalnu vrijednost $\bar{x}_i + |G_i|$ tako i svoju minimalnu vrijednost $\bar{x}_i - |G_i|$. To je, dakako, *najnepovoljniji* i malo vjerojatan slučaj za koji se granična pogreška G_y izračunava pomoću jednadžbe (ispuštamo specijalnu oznaku za srednje vrijednosti)

$$G_y = \pm \sum_{i=1}^{v} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} G_i \right| = \pm \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} G_1 \right| + \ldots + \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} G_i \right| + \ldots + \left| \frac{\partial F}{\partial x_v} G_v \right| \right\} \quad (4.5\text{-}1)$$

Ovaj izraz građen je potpuno analogno kao i jednadžba (4.3-8) u odlomku 4.3.3, s tom razlikom što ignorira predznake pojedinih pribrojnika. Time se pri računanju dobiva *najveća* moguća vrijednost granične pogreške. Budući da je pri tom posve *sigurno* da se stvarna vrijednost veličine y nalazi u rasponu

$$y = \bar{y} \pm |G_y)|, \quad (4.5\text{-}2)$$

graničnu pogrešku G_y iz (4.5-1) neki autori zovu *sigurna pogreška* ili »maksimalna moguća pogreška« (engl. limit error i maximum possible error), a dvije moguće vrijednosti (4.5-2) *sigurne granice* vrijednosti veličine y.

Vrlo je mala vjerojatnost da će se stvarna vrijednost indirektno mjerene veličine y nalaziti baš na gornjoj ili donjoj granici propisanoj jednadžbom (4.5-2). Drugim riječima: mala je vjerojatnost da granična pogreška G_y veličine y bude tako velika kako to opisuje izraz (4.5-1). Ta je vjerojatnost to manja što je broj i direktno mjerenih veličina x_i veći. Zato se prema citiranoj normi DIN 1319 za izračunavanje granične pogreške indirektno mjerene veličine $y = F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_v)$ može upotrebljavati formula (granice zbroja su $i = 1$, $i = v$)

$$^*G_y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} G_i \right)^2} \,. \quad (4.5\text{-}3)$$

Usporedba jednadžbi (4.5-1 i 3) pokazuje da je *statistička granična pogreška* $^*G_y$ (označena ovdje zvjezdicom) uvijek manja od granične pogreške G_y, tj. $|^*G_y| < |G_y|$. Zato su *statističke granice* vrijednosti veličine y

$$y = \bar{y} + {}^*G_y = \bar{y} \pm |^*G_y| \quad (4.5\text{-}4)$$

uvijek uže od »sigurnih granica« iz (4.5-2). U vezi s jednadžbom (4.5-3) korisno je primijetiti da je ona građena potpuno jednako kao i izraz (4.1-2) za izračunavanje standardnog odstupanja indirektno mjerene veličine y (odlomak 4.1.1).

Stvarna vrijednost veličine y katkada će izaći iz okvira koji definira jednadžba (4.5-4). Zato vrijednost $^*G_y$ iz (4.5-3) nije posve sigurna (kao što je G_y prema jednadžbi 4.5-1), već se nalazi na stanovitoj razini sigurnosti (statističkoj vjerojatnosti).

Utvrđivanjem te razine bavi se matematička statistika primijenjena na mjernu tehniku (u domaćoj literaturi vidi, na primjer, *V. Bego*: Mjerna tehnika, pogreške električnih mjerenja, Sveučilište, Zagreb 1966). Radi orijentacije ipak je korisno navesti da sigurnost P praktički ne ovisi o broju i direktno mjerenih veličina x_i koje tvore funkciju y. Statistička sigurnost je najmanja onda kad je funkcija y umnožak ili zbroj dviju direktno mjerenih veličina. Uobičajeni mjerni uređaji suvremene tehnike omogućuju (pri ispravnoj primjeni uređaja) da statistička sigurnost iznosi oko 95% ako granične pogreške $^*G_y$ računamo pomoću izraza (4.5-3). Kvalitetnija mjerna oprema podiže sigurnost i do $P \approx 99\,\%$.

Kao i druge vrste pogrešaka, tako i granične pogreške možemo izraziti u *relativnom* obliku. Tako je »relativna sigurna granična pogreška« e_y složene veličine y definirana omjerom jednadžbe (4.5-1) i srednje vrijednosti veličine y; analogno se pomoću (4.5-3) dobiva »relativna statistička granična pogreška« f_y, tj.

$$e_y = \frac{G_y}{y} \quad \text{i} \quad f_y = \frac{{}^*G_y}{y}. \tag{4.5-5}$$

Slova e i f uveli smo zato da ne bi, makar i slučajno, došlo do zamjene sa oznakom g koju smo u odsječku 4.3 i tablici A-10 upotrijebili za relativnu sistematsku pogrešku. Konkretno ćemo sa e i f računati u odlomku 4.5.3.

4.5.2. Granične pogreške konkretnih funkcija. U prošlom smo odlomku spomenuli da je opća jednadžba (4.5-1) za proračunavanje sigurne granične pogreške G_y složene veličine $y = F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_v)$ građena gotovo identično kao i opća jednadžba (4.3-8) sistematske pogreške Δy u odlomku 4.3.3. Formalnu jednakost tih jednadžbi možemo postići ako stavimo $\Delta y \to G_y$ i $\Delta x_i \to G_i$, te ako zagradu pod znakom sume u (4.3-8) stavimo između uspravnih crta koje označuju apsolutnu vrijednost. Zbog toga ne moramo izračunavati G_y za pojedine karakteristične funkcije y, već se možemo poslužiti formulama koje smo skupili u desna dva stupca tablice A-10. Jedino pri tom moramo ignorirati predznake, jer je riječ o apsolutnim vrijednostima.

Tako, na primjer, za indirektno mjerenu veličinu $y = a x_1^m x_2^n \ldots$ (redni broj 12 u tablici A-10) uz zamjene

$$\Delta y \to G_y, \quad \Delta x_1 \to G_1, \quad \Delta x_2 \to G_2, \quad g_y \to e_y \text{ itd.}$$

dobivamo izraz za izračunavanje »relativne sigurne granične pogreške« veličine y

$$e_y = \pm \{ |m e_1| + |n e_2| + \ldots \}.$$

Za slučaj $m = 1$, $n = 1$ navedena funkcija prelazi u oblik $y = a x_1 x_2$, a pripadna relativna sigurna granična pogreška iznosi $e_y = \pm \{ |e_1| + |e_2| + \ldots \}$.

Izvođenje potrebnih jednadžbi možemo izbjeći i u slučaju »statističke granične pogreške«. Ako opću jednadžbu (4.5-3) kojom se proračunava statistička granična pogreška $^*G_y$ indirektno mjerene veličine $y = F(x_1, \ldots x_i, \ldots x_v)$ usporedimo s općim izrazom (4.1-2) u odlomku 4.1.1, uviđamo da se zamjenom $s_i \to G_i$ umjesto standardnog odstupanja s_y dobiva $^*G_y$. Uz $s_i \to G_i$ izrazom (4.1-3) dobivamo »relativnu statističku graničnu pogrešku« $f_y = {}^*G_y/y$ umjesto »relativnog standardnog odstupanja« r_y, dakle $r_y \to f_y$. Odgovarajuće konkretne funkcije y razmotrene su u odlomcima 4.1.3,4,5.

Ilustrirajmo to primjerom. Neka je funkcija $y = a x_1^m x_2^n \dots x_v^z$ (odlomak 4.1.5), za koju je s_y izraženo jednadžbom (4.1-15). Pomoću $s_i \to G_i$ i $s_y \to {}^*G_y$ od nje nastaje

$$ {}^*G_y^2 = y^2 \left[\left(m \frac{G_1}{x_1} \right)^2 + \left(n \frac{G_2}{x_2} \right)^2 + \dots + \left(z \frac{G_v}{x_v} \right)^2 \right]. $$

Analogno od (4.1-16) za istu funkciju dobivamo ($r_y \to f_y$, $r_i \to e_i$)

$$ f_y = \frac{{}^*G_y}{y} = \sqrt{m^2 e_1^2 + n^2 e_2^2 + \dots + z^2 e_v^2}. $$

4.5.3. Primjer: granične pogreške pri mjerenju jalove snage. Razlaganja u prethodna dva odlomka ilustrirat ćemo primjerom iz tehnike mjerenja izmjeničnih struja. Zamislimo da jalovu snagu Q jednofaznog potrošača izračunavamo na temelju rezultata istodobnog mjerenja napona U, struje I i djelatne snage P. Garantirane granične pogreške (klase; vidi odlomak 3.8.3) od sva tri instrumenta međusobno su jednake i iznose $e_U = e_I = e_P = 0{,}5\,\% = 5 \cdot 10^{-3}$. Treba izračunati koliko iznose relativna sigurna granična pogreška e_Q i relativna statistička granična pogreška f_Q indirektno mjerene veličine Q pri različitim kutovima φ između kazaljki napona U i struje I, tj. pri $\varphi = 90°$, $60°$, $45°$ i $30°$.

Do ovisnosti e_Q i f_Q o veličinama e_U, e_I, e_P i φ doći ćemo pomoću jednadžbi (4.5-1,3,5) u odlomku 4.5.1. Pri tom će ulogu opće indirektno mjerene veličine y preuzeti jalova snaga Q, tj. $y = Q$. Jaloga snaga vezana je s ostalim veličinama (vidi odlomak E.2.3.3 i tablicu E-6) jednadžbama $Q = UI \sin\varphi$ i $P = UI \cos\varphi$, odakle se dobiva funkcija $y = Q = F(U, I, P)$ koju treba razmotriti

$$ y = Q = \sqrt{U^2 I^2 - P^2} = (U^2 I^2 - P^2)^{1/2}. \tag{4.5-6} $$

Najprije ćemo izračunati parcijalne derivacije $\partial F / \partial x_i$ koje se pojavljuju u općim izrazima (4.5-1,3):

$$ \frac{\partial Q}{\partial U} = \frac{1}{2} \frac{1}{Q} 2UI^2 = \frac{UI^2}{Q} = \frac{I}{\sin\varphi}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial I} = \frac{1}{2} \frac{1}{Q} 2U^2 I = \frac{U^2 I}{Q} = \frac{U}{\sin\varphi}, $$

$$ \frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{1}{2} \frac{-1}{Q} 2P = -\frac{P}{Q} = -\operatorname{ctg}\varphi, $$

gdje smo uzeli u obzir da je $Q = UI \sin\varphi$ i $P = UI \cos\varphi$. Budući da su relativne sigurne granične pogreške direktno mjerenih veličina U, I, P definirane relacijama

$$ e_U = \frac{G_U}{U}, \quad e_I = \frac{G_I}{I} \quad \text{i} \quad e_P = \frac{G_P}{P}, $$

izračunate parcijalne derivacije omogućuju da se pomoću jednadžbe (4.5-1) i lijeve jednadžbe (4.5-5) izvede izraz

$$ e_Q = \pm \left\{ \left| \frac{1}{\sin^2\varphi} e_U \right| + \left| \frac{1}{\sin^2\varphi} e_I \right| + |e_P \operatorname{ctg}^2\varphi| \right\}. \tag{4.5-7} $$

Za slučaj $\varphi = 60°$ pripadne trigonometrijske funkcije iznose $\cos\varphi = 0{,}5$, $\sin\varphi = 0{,}866$, $\sin^2\varphi = 0{,}75$ i $\operatorname{ctg}^2\varphi = 0{,}334$. Uvrštenjem vrijednosti u (4.5-7) dobivamo

$e_Q = \pm(0{,}5\,\%/0{,}75 + 0{,}5\,\%/0{,}75 + 0{,}5\,\% \cdot 0{,}334) = 1{,}5\,\%$. Rješenja za druge vrijednosti φ navodimo u ovom pregledu:

φ	90°	60°	45°	30°	0°
$\cos\varphi$	0	0,5	0,707	0,866	1
e_Q	1%	1,5%	2,5%	5,5%	∞
f_Q	0,71%	0,96%	1,5%	3,2%	∞

Relativnu statističku graničnu pogrešku f_Q jalove snage Q izračunat ćemo kombiniranjem desne jednadžbe (4.5-5) i (4.5-3). Sa prije izračunatim parcijalnim derivacijama slijedi obrazac

$$f_Q^2 = \left(\frac{e_U}{\sin^2\varphi}\right)^2 + \left(\frac{e_I}{\sin^2\varphi}\right)^2 + (e_P \operatorname{ctg}^2\varphi)^2. \tag{4.5-8}$$

Budući da je $e_U = e_I = e_P = 0{,}5\,\% = 5 \cdot 10^{-3}$, uvrštenjem svih podataka u (4.5-8) za slučaj $\varphi = 60°$ dobivamo

$$f_Q^2 = 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{0{,}75}\right)^2 + (5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}334)^2 = 0{,}918 \cdot 10^{-4}.$$

Korjenovanjem nastaje konačan rezultat $f_Q = 0{,}96 \cdot 10^{-2} = 0{,}96\,\%$. Za ostale kutove φ pripadne vrijednosti f_Q svrstane su u gornji tabelarni pregled.

U taj smo pregled uvrstili i slučaj $\varphi = 0°$, iako je on besmislen jer u tom slučaju nema jalove snage, $Q = 0$. Dobivene vrijednosti $e_Q = f_Q = \infty$ ipak su poučne, jer one upozoravaju na to da je opisana mjerna metoda neprikladna ako kut φ poprima male vrijednosti.

5. Sistemi jedinica i dimenzija. Jedinice, mjere, pramjere, etaloni, pramjerila i standardi

5.1. Građenje sistema jedinica

U toku historijskog razvoja metrologije pojam »sistem jedinica« bitno je promijenio svoje značenje. Svojedobno se pod nazivom sistem jedinica razumijevao propisani ili uvriježeni *skup jedinica*. Odnos između osnovnih (polaznih, ishodišnih) i izvedenih jedinica bio je djelomično definiran propisanim koeficijentima koje danas nazivamo »parazitnim koeficijentima«. U takvom je odnosu, na primjer, jedinica snage »konjska snaga« KS = 75 kpm/s, gdje je kp = kilopond jedinica sile u Tehničkom sistemu jedinica mehanike (vidi poglavlje B.8).

Parazitni koeficijent za ovaj slučaj, dakle, iznosi 75, jer su osnovne jedinice Tehničkog sistema: metar, sekunda i kilopond. Slično je i s jedinicom brzine km/h = 0,278 m/s, gdje je taj koeficijent 0,278 itd. (vidi odsječak 1.5).

5.1.1. Sistem jedinica. Danas se pod pojmom »sistem jedinica« razumijeva nešto drugo, doista *sistematično*. Da bismo to objasnili, vratit ćemo se načas na izlaganja u odsječku 1.5, odakle prenosimo jednadžbe (1.5-1, 4, 5) i dajemo im novu numeraciju:

$$G = Z A^a B^b C^c \ldots \tag{5.1-1}$$

$$[G] = u[A]^a [B]^b [C]^c \ldots \tag{5.1-2}$$

$$\{G\} = n\{A\}^a \{B\}^b \{C\}^c \ldots ; \quad n = Z/u. \tag{5.1-3}$$

Jednadžba (5.1-1) je *opća veličinska jednadžba* koja opisuje neku prirodnu pojavu ili definira neku novu veličinu G. U njoj je Z *broj*, npr. $\frac{1}{2}$ u izrazu za kinetičku energiju ili $4\pi/3$ u jednadžbi za volumen kugle itd.

Jednadžba (5.1-2) je *opća jednadžba među jedinicama* (vidi odlomak 1.6.3), a u njoj je u »količnik jedinica«. Ako, na primjer, opću veličinsku jednadžbu (5.1-1) želimo primijeniti na jednadžbu koja opisuje jednoliko pravocrtno gibanje, tj. na veličinsku jednadžbu $v = l/t = lt^{-1}$ (v — brzina, l — duljina, t — vrijeme), bit će $Z = 1$, $A = l$, $a = 1$, $B = t$, $b = -1$, $C = 1$, $c = 0$. Zbog toga će opća jednadžba među jedinicama (5.1-2) dobiti oblik

$$[v] = u[l][t]^{-1}, \tag{5.1-4}$$

gdje je dakako stavljeno $[G] = [v]$. Jednadžba (5.1-4) ostaje tako dugo općom (još nedefiniranom) dok ne odaberemo konkretne jedinice za $[v]$, $[l]$ i $[t]$. Čim to uradimo, koeficijent u dobiva tačno određenu vrijednost. Stavimo li npr.

$$[v] = \text{km/h}, \quad [l] = \text{m}, \quad [t] = \text{s}, \tag{5.1-5}$$

iz jednadžbe (5.1-4), slijedi konkretna vrijednost količnika jedinica:

$$u = u_1 = \frac{[t]\,[v]}{[l]} = \frac{\mathrm{s \cdot km/h}}{\mathrm{m}} = \frac{1000}{3600} = 0{,}278.$$

Zbog desne jednadžbe (5.1-3) dobivamo $n_1 = Z/u_1 = 1/0{,}278 = 3{,}6$, pa opća *brojčana jednadžba* u ovom primjeru dobiva oblik $\{v\} = 3{,}6\,\{l\}/\{t\}$. Prema tome grupa jednadžbi (5.1-1,2,3), primijenjena na jednoliko pravocrtno gibanje uz izbor jedinica (5.1-5), prelazi u oblik:

$$v = \frac{l}{t},\quad \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 0{,}278\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\quad \{v\} = 3{,}6\,\frac{\{l\}}{\{t\}};\quad u_1 = 0{,}278;\quad n_1 = 3{,}6.$$

Vidimo da se veličinska jednadžba $v = l/t$ razlikuje od brojčane $\{v\} = 3{,}6\,\{l\}/\{t\}$; pri tom je dakako $Z \neq n$.

Analogna razmatranja primjene općih izraza (5.1-1,2,3) na veličinsku jednadžbu snage $P = Fv$ (F — sila, v — brzina) dovode nas do grupe jednadžbi

$$P = Fv,\ \mathrm{KS} = 75\,\mathrm{kp\,m/s},\ \{P\} = 0{,}0133\,\{F\}\{v\},\ u_2 = 75,\ n_2 = 0{,}0133,$$

ako odaberemo konkretne jedinice

$$[P] = \mathrm{KS},\ [F] = \mathrm{kp},\ [v] = \mathrm{m/s}.$$

Već na temelju ova dva primjera možemo uvidjeti da tu *nema sistematičnosti*: jednom je $u = u_1 = 0{,}278$, drugi put $u = u_2 = 75$, treći put ... Stoga skup jedinica koji je građen na takav način (faktore $u_1, u_2, \ldots$ treba ili pamtiti ili ih imati pribilježene, a brojčane jednadžbe vrijede samo za tačno propisane jedinice!) danas više ne smatramo sistemom.

Pod *sistemom jedinica* razumijevamo takav skup jedinica u kojem se izvedene jedinice grade iz osnovnih po načelu

$$u = 1 = \mathrm{const}.$$

Naznaka $u = \mathrm{const}$ naglašava da $u = 1$ vrijedi za odnose među *svim* jedinicama unutar jednog sistema. Tako građeni sistem nazivao se, i još se naziva, »koherentnim sistemom«, »skladnim sistemom«, odnosno »sistemom na principu $1 \times 1 = 1$« ili »sistemom $1 : 1 = 1$« (usporedi s odlomkom B.7.1.4).

Izbor količnika jedinica $u = 1 = \mathrm{const}$ je *najprikladniji*, jer se jedinice izvode iz (proizvoljno odabranih) osnovnih jedinica jednostavnim međusobnim množenjem ili dijeljenjem bez sudjelovanja bilo kakvog »parazitnog koeficijenta«, kakav je na primjer $u_1 = 0{,}278$ ili $u_2 = 75$ ili bilo koji drugi različit od 1. Simbolički, dakle, kažemo da su kod $u = 1$ jedinice u međusobnom odnosu »$1 \times 1 = 1$« ili »$1 : 1 = 1$«. Posljedice toga sasvim su očigledne. Čovjek koji primjenjuje jedinice uopće ne mora pamtiti kako su pojedine izvedene jedinice definirane (npr. KS!), već ih može usput u računu definirati ili pregrupirati kako mu je praktično i korisno za stanovitu svrhu, jer zbog odnosa »$1 \times 1 = 1$« nigdje ne može pogriješiti. Pri tom mora znati samo to kako glase pripadne veličinske jednadžbe, a to sigurno zna kad se bavi nekim proračunom.

Postoji i druga izvanredna korist koju donosi primjena *sistema* jedinica. Budući da je u tom slučaju $u = 1 = \mathrm{const}$, brojčana jednadžba (5.1-3) prelazi u oblik $\{G\} = Z\{A\}^a\{B\}^b\{C\}^c \ldots$, tj. veličinske i brojčane jednadžbe po *obliku su potpuno*

jednake. Prema tome, grupa jednadžbi (5.1-1, 2, 3) dobiva najjednostavniji mogući oblik

$$G = Z A^a B^b C^c \ldots, \quad [G] = [A]^a [B]^b [C]^c \ldots \tag{5.1-6}$$

Ovdje smo brojčanu jednadžbu ispustili, jer je ona istog oblika kao i veličinska (isto tako nismo posebno naglasili da zbog $u = 1$ postaje $n = Z$).

5.1.2. Građenje sistema jedinica. Razmotrimo sada *građenje sistema jedinica*, kako to stoji i u naslovu ovog odsječka 5.1. Pri građenju sistema jedinica ($u = 1$!) treba prethodno znati za koju granu znanosti ili tehnike (npr. mehaniku, nauku o toplini itd.) želimo načiniti sistem jedinica. To znači da moramo poznavati skup fizikalnih veličina i jednadžbi koje te veličine međusobno povezuju. Na temelju toga možemo neophodan broj veličina (razlika između broja veličina i broja nezavisnih jednadžbi među njima) *proglasiti osnovnima* (polaznima). To činimo zato da bismo jedinice tih veličina mogli smatrati »osnovnima«, te pomoću njih stvarati »izvedene jedinice«. (Na primjer, u mehanici odabiremo tri osnovne veličine, a u nauci o toplini i elektromagnetizmu četiri.)

S odabranim osnovnim jedinicama $[A]$, $[B]$, ... stvaramo izvedene jedinice $[G]$ tačno u skladu s desnom jednadžbom (5.1-6). No još je jednostavnije raditi samo s odgovarajućim veličinskim jednadžbama (lijevi izraz 5.1-6): umjesto veličina stavljaju se jedinice, brojčani faktor Z se ignorira, a eksponenti ostaju. Tu recepturu ilustrirat ćemo *primjerom* građenja jednog sistema jedinica mehanike. Za osnovne veličine odabiremo: duljinu l, vrijeme t i masu m, a za pripadne osnovne jedinice

$$[l]_{\mathrm{M}} = \mathrm{m} = \text{metar}, \quad [t]_{\mathrm{M}} = \mathrm{s} = \text{sekunda}, \quad [m]_{\mathrm{M}} = \mathrm{kg} = \text{kilogram}.$$

Indeks M označuje da je riječ o jednom posve konkretnom sistemu jedinica. Skup veličina za koje ćemo po načelu desne jednadžbe (5.1-6) izvesti izvedene jedinice grafički smo prikazali slikom A.15. Odabrane osnovne veličine duljinu, vrijeme i masu obrubili smo deblje.

Izvedimo najprije jedinicu brzine $[v]_{\mathrm{M}}$ u odabranom sistemu jedinica m-kg-s. Veličina brzina v definirana je veličinskom jednadžbom $v = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$, odnosno u slučaju jednolikog gibanja $v = l/t$. Prema tome $v = lt^{-1}$ predstavlja lijevu jednadžbu (5.1-6) s time što je $Z = 1$, $A = l$, $a = 1$, $B = t$, $b = -1$, $C = 1$, $c = 0$. Stoga desna jednadžba (5.1-6), jednadžba među jedinicama, za ovaj primjer glasi $[v] = [l]\,[t]^{-1}$. To je, međutim, još posve opća jednadžba među jedinicama. Da bismo odredili $[v]_{\mathrm{M}}$, moramo u nju uvrstiti jedinice $[l]_{\mathrm{M}}$ i $[t]_{\mathrm{M}}$ našeg sistema osnovnih jedinica m-kg-s, dakle

$$[v]_{\mathrm{M}} = \frac{[l]_{\mathrm{M}}}{[t]_{\mathrm{M}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\text{metar}}{\text{sekunda}}.$$

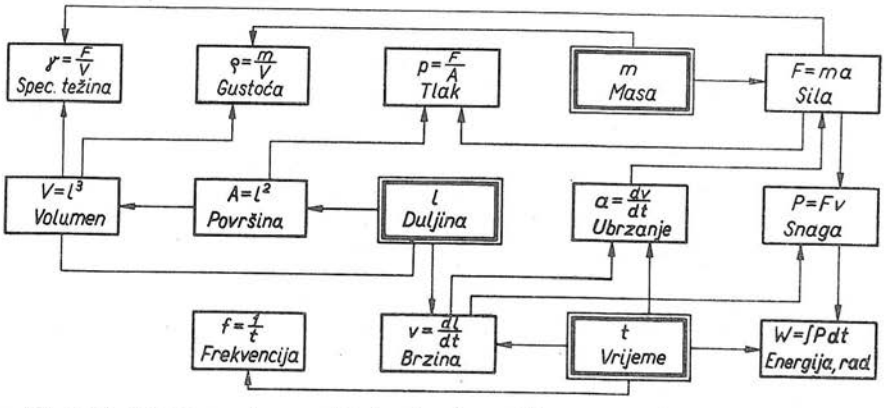
Jedinicu *ubrzanja* $[a]_{\mathrm{M}}$ dobivamo na posve isti način pomoću definicijske jednadžbe ubrzanja $a = \mathrm{d}^2l/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, odnosno $a = v/t$ za slučaj jednoliko ubrzanog gibanja:

$$[a]_{\mathrm{M}} = \frac{[v]_{\mathrm{M}}}{[t]_{\mathrm{M}}} = \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\text{metar}}{\text{sekunda}^2}.$$

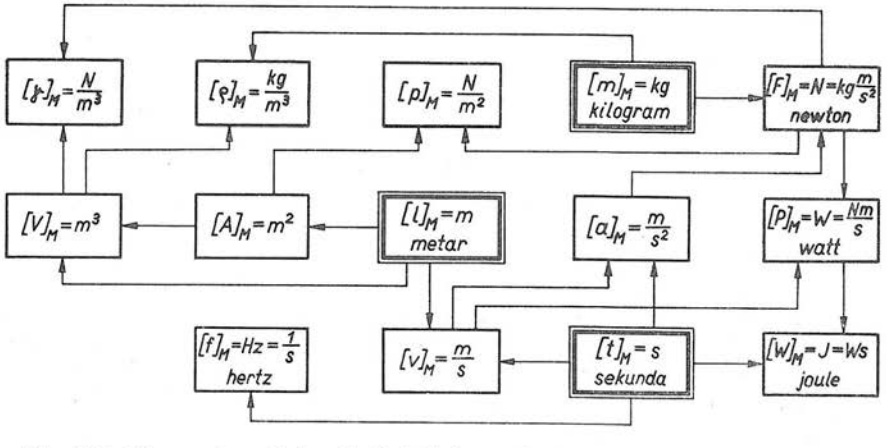
Jedinicu *sile* $[F]_{\mathrm{M}}$ izvest ćemo na temelju *Newton*ova zakona $F = ma = m\mathrm{d}^2l/\mathrm{d}t^2$, gdje je m simbol veličine »masa« (vidi odsječak 9.1). Usporedimo li

jednadžbu $F = ma$ s lijevom (5.1-6), vidimo da je u ovom slučaju $G = F$, $Z = 1$, $A = m$, $B = a$. U skladu s desnom jednadžbom (5.1-6) slijedi jedinica sile $[F]_M$ u sistemu s osnovnim jedinicama m, kg, s:

$$[F]_M = [m]_M [a]_M = \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{kg\,m/s^2} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}.$$



Sl. A.15. Shema uzastopnog definiranja niza veličina na temelju proglašenja duljine, vremena i mase osnovnim veličinama



Sl. A.16. Shema stvaranja izvedenih jedinica u sistemu jedinica mehanike m-kg-s

Ovdje smo odmah napisali kako se izvedena jedinica $[F]_M$ može izraziti pomoću osnovnih jedinica na nekoliko načina: tačkom kao znakom množenja, bez te tačke, a istog značenja, u obliku razlomka s ravnom ili kosom crtom, te konačno kao negativni eksponent ($1/\mathrm{s^2} = \mathrm{s^{-2}}$; više o tome vidi u odsječku 2.5).

Gore napisanoj jedinici $[F]_M = \mathrm{kg\,m/s^2}$ dodijeljeno je i posebno ime »newton« (čitaj: njutn). Kratica ove jedinice sile je N. Dakle

$$[F]_M = \mathrm{newton} = \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}.$$

Naziv »newton« potječe od imena slavnog engleskog učenjaka *Isaaca Newtona* koji je pridonio neprocjenjivo mnogo napretku znanosti i tehnike. Običaj je, naime, da se pojedine jedinice nazivaju prezimenima ljudi zaslužnih za nauku (vidi poglavlje B.7). U praktičnom pogledu to je vrlo korisno jer je kratica (npr. N u gornjem primjeru) zbog svoje kratkoće mnogo prikladnija pri računanju nego npr. kgm/s².

Posve je analogno pri utvrđivanju jedinice *snage* (vidi sliku A.15). U veličinsku jednadžbu $P = Fv$ stavljamo sada već poznate jedinice sile $[F]_M = \mathrm{N}$ i brzine $[v]_M = \mathrm{m/s}$ sistema jedinica m-kg-s:

$$[P]_M = [F]_M [v]_M = \mathrm{N}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\text{newton} \times \text{metar}}{\text{sekunda}},$$

Ova je jedinica dobila ime po čuvenom engleskom tehničaru *Jamesu Wattu*

$$[P]_M = \text{watt} = \mathrm{W} = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = \frac{(\mathrm{kg\,m/s^2})\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}.$$

Ovdje smo usput umjesto N napisali prije izvedeni odnos $\mathrm{N} = \mathrm{kgm/s^2}$ i računanjem dobili ovisnost jedinice snage $[P]_M = \text{watt} = \mathrm{W}$ o izabranim osnovnim jedinicama m, s, kg (u nas se jedinica watt približno čita »vat«).

Isti postupak ponavljamo i za (izvedene) jedinice ostalih veličina. Učinimo to skraćenim postupkom (vidi sl. A.15):

energija: $W = Pt$ $\qquad [W]_M = [P]_M [t]_M = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}}\mathrm{s} = \mathrm{Nm} = \mathrm{J},$

tlak: $p = F/A$ $\qquad [p]_M = [F]_M/[A]_M = \mathrm{N/m^2},$

gustoća: $\rho = m/V$ $\qquad [\rho]_M = [m]_M/[V]_M = \mathrm{kg/m^3}$ itd.

I jedinica energije J = joule (čitaj »džul«) nosi naziv po čuvenom engleskom učenjaku. Za jedinicu tlaka $[p]_M = \mathrm{N/m^2}$ predlažu se nazivi mendeljejev, giorgi i pascal, po istoimenom ruskom, talijanskom, odnosno francuskom učenjaku. No ti prijedlozi još su u fazi razmatranja (vidi odsječak B.4.3).

Rezultate izvođenja jedinica prikazali smo na slici A.16, koja se po obliku i putu definiranja izvedenih jedinica potpuno podudara sa slikom A.15. Lako se uvjeravamo da smo u stvari gradili *Međunarodni sistem jedinica* (Système International d'Unités, SI), odnosno njegov dio namijenjen upotrebi u mehanici. Taj parcijalni sistem jedinica neki nazivaju MKS sistemom (simbolički: M — metar, K — kilogram, S — sekunda).

5.1.3. Univerzalni sistem jedinica. Do sada smo razmatrali samo sistem jedinica koji ima za osnovu jedinice tzv. mehaničkih veličina. Što se događa kad tako izvedene jedinice želimo upotrijebiti u elektromagnetizmu? Ovo je pitanje naročito zanimljivo zato što znamo da u elektromagnetizmu moramo imati *četiri* osnovne jedinice, dok su u mehanici neophodne samo *tri*.

Riješimo ovaj problem na jednadžbi za energiju W. U elektromagnetizmu je veličina energija W jednaka umnošku veličina napon U, električna struja I i vrijeme t, naravno uz pretpostavku da su napon i struja konstantni:

$$W = UIt.$$

Po već upotrijebljenom ključu odavde slijedi jednadžba među jedinicama

$$[W]_M = [U]_M [I]_M [t]_M.$$

Prvu i posljednju jedinicu već smo imali u netom raspravljenom Međunarodnom sistemu jedinica. To su $[W]_M = \text{joule} = \text{J}$, $[t]_M = \text{sekunda} = \text{s}$. Stoga iz gornje jednadžbe slijedi

$$[U]_M [I]_M = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{N m}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}. \qquad (5.1\text{-}7)$$

Vidimo da se »mehanička« jedinica snage watt sastoji od umnoška *dviju* »elektromagnetskih« jedinica. To znači da jednu od njih, načelno je svejedno da li je to $[U]_M$ ili $[I]_M$, moramo odabrati za *novu, četvrtu osnovnu jedinicu.* Odaberemo li jedinicu jakosti električne struje za četvrtu osnovnu jedinicu, tj.

$$[I]_M = \text{amper} = \text{A},$$

iz jednadžbe (5.1-7) odmah slijedi jedinica električkog napona

$$[U]_M = \frac{\text{watt}}{\text{amper}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \text{V} = \text{volt}.$$

Prema tome je jednadžba među jedinicama (5.1-7) most preko kojega se parcijalni MKS sistem jedinica proširuje od odabrane tri osnovne jedinice mehanike u četiri polazne (osnovne) jedinice elektromagnetizma: m, s, V, A.

Budući da su sve te jedinice m, s, J, W, kg, V, A itd. međusobno koherentne (stalno je količnik jedinica $u = 1$), *sve one zajedno predstavljaju jedinstveni, univerzalni sistem jedinica mehanike i elektromagnetizma,* tj. pripadaju istom sistemu jedinica, Međunarodnom sistemu jedinica, SI. (Taj sistem jedinica podrobno smo razmotrili u poglavljima B.7, D.4 i E.2.) Iz ovih razmatranja proizlazi da je, na primjer, »pravi« Tehnički sistem jedinica (vidi odsječak B.8.1) samo *parcijalni sistem jedinica,* koji vrijedi samo u mehanici. I MKS sistem samo je parcijalni sistem jedinica, ali je ujedno i ogranak, dio univerzalnog Međunarodnog sistema jedinica.

Spomenimo još da je posve lako kontrolirati da li su dva parcijalna sistema jedinica *međusobno koherentna.* Ako je riječ o dva parcijalna sistema sa tri osnovne jedinice, onda moraju po tri međusobno nezavisne jedinice istih veličina biti međusobno jednake. Na primjer $[l]_1 = [l]_2$, $[t]_1 = [t]_2$ i $[F]_1 = [F]_2$, gdje se indeks 1 odnosi na prvi sistem, a 2 na drugi parcijalni sistem jedinica. Usporedimo na taj način Tehnički sistem jedinica mehanike i parcijalni MKS Međunarodnog sistema. U prvome je $[l]_1 = \text{m}$, $[t]_1 = \text{s}$, $[F]_1 = \text{kp}$, a u drugome $[l]_2 = \text{m}$, $[t]_2 = \text{s}$, $[F]_2 = \text{N}$ (newton). Dvije su jedinice, dakle, jednake, ali treća nije, jer je kp = 9,806 65 N (vidi odsječak B.8.1). Prema tome, ova dva sistema *nisu* međusobno koherentna. Nasuprot tome *jesu* koherentni parcijalni sistemi m–s–kg i m–s–J (J = = joule), jer je $\text{J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$, dakle simbolički $1 = 1 \times 1^2/1^2$. Stvarno su ovi parcijalni sistemi samo *dijelovi* univerzalnog Međunarodnog sistema SI.

5.2. Dimenzije i sistemi dimenzija

5.2.1. Što je dimenzija? Nazive dimenzija i sistemi dimenzija često čujemo, i to odmah u nekoliko različitih značenja. No gotovo nigdje ne nalazimo definiciju koja bi objasnila što je to dimenzija (zvana i »razmjernost«), a kad je u nekoj specijalnoj metrološkoj raspravi autor i formulira, odmah se javi niz stručnjaka koji misle

drukčije. Razlog je tome historijske naravi: neki autori dolaze na dimenzije od veličinskih jednadžbi prirodnih znakona, a drugi od brojčanih izraza. Na kraju ipak sve svršava dobro, jer u *primjeni* dimenzija (dimenzionalna kontrola i analiza) svi postupaju jednako, pa su i rezultati jednoznačni, iako nema valjane univerzalne definicije.

Na pojam dimenzije dolazimo pomoću opće jednadžbe među jedinicama koje još nisu fiksirane. Pri tom se služimo našom osnovnom jednadžbom među jedinicama (5.1-2), koju pišemo s količnikom jedinica $u = 1$:

$$[G] = [A]^a\,[B]^b\,[C]^c \ldots \tag{5.2-1}$$

U smislu dimenzija ovu jednadžbu čitamo ovako: »Dimenzija veličine G jednaka je dimenziji veličine A na potenciju a, puta dimenzija veličine B na potenciju b itd.« Stoga se gornja jednadžba naziva »dimenzionom jednadžbom«. Budući da nisu definirane specijalne vrijednosti jedinica $[A]$, $[B]$ itd., dimenzionu jednadžbu možemo shvatiti kao opću jednadžbu među općim jedinicama sa $u = 1$. Neki pri tom kažu da dimenziona jednadžba sadrži i međusobno povezuje »kvalitetu« fizikalnih veličina, pa po tom nazoru dimenziona jednadžba izražava »fizikalni sadržaj« veličina. Zbog toga mnogi odbacuju uglate zagrade u jednadžbi (5.2-1) i umjesto općih jedinica jednostavno pišu iste simbole bez zagrada:

$$\mathrm{G} = \mathrm{A}^a\,\mathrm{B}^b\,\mathrm{C}^c \ldots \tag{5.2-2}$$

Pri tome upotrebljavaju uspravna slova da ne bi došlo do eventualne zamjene s veličinskim jednadžbama.

U tom se načinu obilježavanja dimenziona jednadžba energije u elektromagnetizmu izvodi iz opće jednadžbe među jedinicama $[W] = [U]\,[I]\,[t]$ i piše u obliku

$$\mathrm{W} = \mathrm{UIT}. \tag{5.2-3}$$

Vidimo da smo ovdje uveli oznaku $[t] = \mathrm{T}$, dakle dimenziju veličine vrijeme označujemo sa T. Ovakva zamjena malih slova velikima čini se još kod dimenzije dviju drugih veličina. To su duljina l i masa m, za koje su već odavno uvriježene oznake $\dim l = [l] = \mathrm{L}$, $\dim m = [m] = \mathrm{M}$.

U skladu s time dimenziona jednadžba energije u mehanici obično se piše u obliku

$$\mathrm{W} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\mathrm{M}. \tag{5.2-4}$$

Dimenzione jednadžbe mogu se izraziti i riječima. Na primjer (5.2-3, 4) na taj način glase

$$\text{energija} = \text{napon} \times \text{struja} \times \text{vrijeme}, \qquad \text{energija} = \frac{\text{duljina}^2 \times \text{masa}}{\text{vrijeme}^2}.$$

5.2.2. Sistemi dimenzija. Kao i kod jedinica, tako i kod dimenzija postoje *sistemi dimenzija*. Stanovite se dimenzije proglase osnovnim (polazne, ishodišne, glavne), pa u analogiji sa sistemima jedinica izvedenim dimenzijama smatramo one koje se, na primjer, pomoću izraza (5.2-3) ili (5.2-4) izvode iz osnovnih. Broj osnovnih dimenzija jednak je broju osnovnih veličina i jedinica. U mehanici, na primjer, najpoznatiji je sistem dimenzija LTM, kod kojega su L, T i M proglašene osnovnim dimenzijama. Iz toga slijedi da je dimenzija energije W izvedena. To je, dakako, *parcijalni* sistem dimenzija, ako upotrijebimo terminologiju iz odsječka 5.1.

U elektromagnetizmu se najčešće upotrebljava sistem dimenzija LTUI, dakle sistem sa četiri osnovne dimenzije, što je u skladu sa zahtjevom da broj osnovnih dimenzija mora biti jednak broju osnovnih veličina.

Iz ove jednakosti *broja* polaznih veličina i dimenzija proistječe niz *nesporazuma*. Mnogi misle da se odabrane osnovne veličine moraju odabrati kao osnovne i za gradnju sistema jedinica, te za formiranje sistema jedinica. Već smo nekoliko puta naglasili da tome nije tako, već da su svi ti sistemi privatna stvar svakog pojedinca i da to nema nikakve veze s međunarodnom i nacionalnom standardizacijom jedinica.

Promotrimo li dimenzione jednadžbe (5.2-1, 2, 3, 4), vidimo da bismo do njih mogli doći i tako kad bismo u *veličinskim* jednadžbama odbacili prirodne brojčane faktore, tj. stavili $Z=1$ (vidi jednadžbu 1.5-1), a umjesto kurzivom oznake veličina napisali uspravnim slovima. Formalno dimenzione jednadžbe dobivamo dakle tako da »izniveliramo« veličinske jednadžbe stavljanjem $Z=1$. Međutim, sve druge operacije (množenje, dijeljenje, potenciranje, korjenovanje, rot, div) ostaju i kod dimenzija, ali kao *posljedica* operacije, na primjer: L^2, $\mathrm{M}^{-1/2}$, $\dim \mathrm{rot} = \mathrm{L}^{-1}$ itd. Tako stvarno do izvedenih dimenzija dolazi većina ljudi koji se time bave.

Vezu između dva sistema dimenzija obično predstavljaju dimenzije onih veličina koje su im zajedničke, na primjer energija u mehanici i elektromagnetizmu. Tako, na primjer, jednadžbe (5.2-3) i (5.2-4) izražavaju dimenziju energije W u LTUI sistemu i u LTM sistemu dimenzija. Izjednačenjem tih jednadžbi dobivamo

$$\mathrm{UIT} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\mathrm{M},$$

odakle računanjem kao da je riječ o brojevima ili veličinama slijedi

$$\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}\mathrm{M} = \mathrm{UI}.$$

To je most između dva sistema dimenzija, od kojih se jedan temelji na tri osnovne dimenzije, a drugi na četiri. Posljedice ove veze možemo komentirati jednako kao i analognu vezu među jedinicama koju smo imali u odsječku 5.1. (Neke podrobnosti o sistemima dimenzija vidi u odsječcima B.10.3. i E.6.4.)

U ovoj smo knjizi dimenzijama posvetili relativno malu pažnju. To je i razumljivo kad se podsjetimo kako smo od veličinskih jednadžbi preko općih jedinica došli do pojma dimenzije. Stoga nam sistemi dimenzija nisu donijeli ništa nova, a svrha ove knjige nije da njeguje »metrološku mistiku«, već da pruži pomoć pri radu s jedinicama i da na jednome mjestu skupi odnose među svim onim heterogenim mnoštvom jedinica koje su još uvijek u upotrebi.

5.3. Jedinice, mjere, pramjere, etaloni, pramjerila i standardi

Pojam mjerne jedinice i način njenog pohranjivanja ili reprodukcije u prvi mah izgledaju toliko jasni da na njih ne bi valjalo trošiti riječi. U stvarnoj primjeni tih pojmova nastaju, međutim, velike teškoće: pisci knjiga, rasprava, tehničkih uputa, oglasa i drugih dokumenata služe se vrlo različitom terminologijom, koja nije samo različita od jezika do jezika u pogledu porijekla i strukture već se i mijenja tokom relativno kratke povijesti egzaktnih znanosti. Osim toga, vrlo je malo pojmova s tog područja koji su bilo gdje u svijetu na neki način standardizirani, a da o unifikaciji i ne govorimo. Stoga smatramo potrebnim da u naredna četiri odlomka pokušamo opisati što pojedini termini znače te da upozorimo na eventualne dvoznačnosti izraza koje je čitatelj sigurno s negodovanjem osjetio kako u jugoslavenskim

publikacijama tako i u stranima. Stanovita klasifikacija (koja ne pretendira na potpunost) bitnih pojmova naročito je potrebna u ovoj knjizi već zato što se u njoj razmatraju vrlo različiti periodi povijesti znanosti te gotovo sva područja metrologije.

5.3.1. Jedinica i mjera. U prošlim smo tekstovima često upotrebljavali izraz »mjerna jedinica« ili kraće »jedinica«, koju smo u odsječku 1.3 definirali kao svojevoljno odabranu vrijednost fizikalne veličine. Na primjer, jedinica *duljine* je »metar« (m), jedinica *mase* je »kilogram« (kg), jedinica *volumena* je »litar« (l) itd.

Za mnoge fizikalne veličine mjerna jedinica se *utjelovljuje*, tj. izradi se stanovito tijelo i neka osobina tog tijela proglasi se mjernom jedinicom. Takvo utjelovljenje (engl. physical embodiment, njem. Verkörperung) mjerne jedinice zove se *mjera*; neki autori upotrebljavaju i naziv »mjerka«. Na primjer, kuhinjski lonac je volumenska mjera (tzv. šuplja mjera), mjera »litarski lonac« predstavlja jedinicu volumena koja se zove »litar« ($1 = \mathrm{dm}^3$).

U svakodnevnom životu služimo se mnoštvom mjera, tj. fizičkim (materijalnim) realizacijama raznovrsnih mjernih jedinica. Ovdje ćemo nabrojiti samo neke od njih. »Metarski štap« kojim se u trgovini tekstila mjeri duljina ili širina tkanine, jest mjera koja utjelovljuje jedinicu duljine »metar« (= razmak između krajnjih crtica na trgovačkom metarskom štapu). Geometarska mjerna traka također je mjera duljine (npr. 24 m), a isto tako i »krojački centimetar« koji katkada doista utjelovljuje 100 cm, ali mnogo puta 150 cm ili 200 cm. Kilogramski uteg piljarica na tržnici (na kojem piše »1 kg«) jest mjera koja utjelovljuje jedno od svojstava utega — njegovu masu; vrijednost mase tog utega treba da iznosi $m = 1$ kg. U radionicama za finu mehaničku obradu upotrebljavaju »kalibre«: to je mjera koja utjelovljuje stanovit razmak, dakle neku vrijednost fizikalne veličine »duljina«. Postoje i kutne mjere, tj. kose čelične prizme koje utjelovljuju mjernu jedinicu (ili njen višekratnik) fizikalne veličine »kut«. Itd.

Iz ovih stvarnih primjera razabiremo da nije neophodno da mjera utjelovljuje baš mjernu jedinicu (primjeri s »krojačkim centimetrom« ili »kalibrima«). Općenitije je kad kažemo da *mjera utjelovljuje stanovitu vrijednost fizikalne veličine*. U krajnjoj liniji to je ipak igra riječi, jer jedinica i nije ništa drugo nego stanovita vrijednost fizikalne veličine (vidi odlomak 1.3.1).

5.3.2. Pramjera ili etalon. Ako međusobno usporedimo mase nekoliko kilogramskih utega sa tržnice, mjerenjem ćemo ustanoviti da se možda razlikuju za 1 gram ili više. Za potrebe kojima su ove mjere jedinice mase 1 kg namijenjene to je posve dovoljno; ove se mjere, naime, ubrajaju u »grube mjere«, a kontroliraju se i baždare *kontrolnim mjerama* u ispostavama državne institucije koja je ovlaštena za obavljanje takvih poslova. Te »kontrolne« (i druge) mjere jedinice mase provjeravaju se na kraju u državnom metrološkom zavodu (vidi odsječak 7.2) time što se njihova masa uspoređuje s masom brižljivo pohranjenog utega mase 1 kg. Budući da se pomoću tog utega i precizne vage (vidi odsječak 9.3) utvrđuje vrijednost mase svih drugih kilogramskih utega u državi, on se naziva »državna mjera (mase)« ili »nacionalna mjera (mase)«.

Umjesto termina državna ili nacionalna mjera rabe se i nazivi *pramjera* (njem. Urmass) ili *nacionalna pramjera*, gdje »pra« upućuje na činjenicu da je ta državna mjera ishodište mjerenja (u razmatranom slučaju ishodište mjerenja veličine »masa«) za čitavu državu. Neki autori umjesto naziva »pramjera« ili »nacionalna pramjera« upotrebljavaju izraz *etalon* ili *nacionalni etalon*. Taj termin dolazi od francuske

riječi étalon; ona označuje tijelo koje (materijalno) utjelovljuje mjernu jedinicu (u ovom slučaju jedinicu mase kilogram; franc. étalon du kilogramme). Uz navedene izraze — pramjera, etalon — u literaturi ponekad možemo naći izraz *nacionalni prototip* (franc. prototype national), a u preciznoj elektromagnetskoj metrologiji izraz *normala* (npr. »naponska normala« — *Westonov* element, »otpornička normala«, »normala induktiviteta« itd.). Svi ti izrazi označuju isto: predmet koji utjelovljuje stanovitu mjernu jedinicu. Postoje i skraćeni nazivi: umjesto da se, na primjer, kaže »(nacionalna) pramjera jedinice mase kilogram«, upotrebljava se kratica *prakilogram* ili *nacionalni prakilogram* (vidi odsječke 6.2,3,4).

Nacionalni prakilogrami, koje posjeduje više od 40 država, kopije su *međunarodnog prakilograma* koji je pohranjen u podzemnoj ćeliji Međunarodnog ureda za mjere i utege u Sèvresu kraj Pariza (vidi odlomak 9.3.3). To je dakle *međunarodna pramjera* ili »svjetska pramjera«, koju neki autori nazivaju *međunarodni etalon* ili *međunarodni prototip* (npr. francuski: étalon international du kilogramme ili prototype international du kilogramme).

Opisano šarenilo naziva (to nije sve; vidi odlomak 5.3.4) ima korijen u različitosti terminologija pojedinih historijskih razdoblja znanosti, u jezicima pojedinih naroda i u tradiciji. Utjecaj tradicije možemo opaziti i u samom nazivu metrološkog centra svijeta: Međunarodni ured za mjere i utege (franc. Bureau international des poids et mesures, BIPM). U stvari to nije nikakav činovnički *ured*, već skup najmodernije opremljenih *laboratorija* u kojima se mogu obavljati najpreciznija mjerenja (vidi poglavlje 7).

Od pramjere se zahtijeva izvanredno važna osobina: *postojanost jedinice koju pramjera utjelovljuje*, tj. stalnost vrijednosti fizikalne veličine (npr. $m = 1$ kg) koju pramjera predstavlja. Želja je čovječanstva da ta postojanost bude vječna, ali to je samo ideal koji se ne može postići. Zub vremena mijenja vrijednost veličine koju pramjera utjelovljuje, jer sve što je tvarno podvrgnuto je vječnom kružnom procesu uništavanja i stvaranja što se odvija u prirodi. U sitnim ljudskim vremenskim relacijama to se doduše ne opaža uvijek, ali zub vremena neosporno djeluje pa makar otkidao molekulu po molekulu. Na primjer, masa prakilograma broj 31 (kopija broj 31 međunarodnog prakilograma) smanjila se od godine 1889. do 1953. za 75 mikrograma $= 7{,}5 \cdot 10^{-8}$ kg u odnosu prema masi međunarodnog prakilograma. Zatim je u razdoblju od godine 1953. do 1957. porasla za 30 mikrograma $= 3 \cdot 10^{-8}$ kg. Pri tom valja naglasiti da preciznost uspoređivanja jednokilogramskih utega u današnje vrijeme iznosi oko $\pm 1 \cdot 10^{-9}$ kg (vidi odlomak 9.3.2). Više o tome navedeno je u odlomku 6.4.4.

5.3.3. Prirodna pramjera ili pramjerilo. Nepostojanost prakilograma broj 31, tj. nepostojanost vrijednosti mase koju taj valjak utjelovljuje, nije izuzetak. Međunarodni prakilogram, pohranjen u BIPM, izrađen je na posve jednak način i od jednake kovine (usporedi s odsječkom 6.4 i vidi odlomak 9.3.3.) kao i njegove kopije, pa je dakle sigurno da se i njegova masa mijenja u toku vremena. Kolika je ta (apsolutna) promjena mase međunarodnog prakilograma ne može se ustanoviti čak ni načelno (vidi kraj odlomka 9.3.3), pramjere su dakle *nepouzdane*.

Zbog toga vrhunska metrologija još od samog početka znanosti (vidi odsječak 6.2) nastoji da mjernu jedinicu ne pohranjuje u obliku materijalne pramjere, već da jedinicu sa što većom pouzdanošću *proizvodi* (reproducira) u bilo kojem trenutku i na bilo kojem mjestu. Pri tom riječi »što veća pouzdanost« izražavaju želju metrologa da se vrijednost reproducirane veličine (ta vrijednost ili njen propisani višekratnik odabire se za mjernu jedinicu) što manje koleba; ideal je pot-

puna stalnost te vrijednosti, dakle apsolutna pouzdanost. Tom idealu vrhunska se metrologija približava, ali ga nikada neće dostići, jer »apsolutna pouzdanost je privilegij neodgojenih glava« kako u Mathematical Philosophy kaže *Keyser*, a to proizlazi i iz *Heisenberg*ove relacije neodređenosti (vidi odlomak 3.2.1).

Za vrlo pouzdanu reprodukciju mjernih jedinica danas se upotrebljavaju pomno istražene *prirodne pojave* za koje je utvrđeno da se pod jednakim okolnim uvjetima odigravaju (ponavljaju) na identičan način. To su, na primjer, *periodičke pojave* u svemiru ili u atomima: »astronomska sekunda« (vidi poglavlje 10) reproducira se pomoću zakonitosti gibanja Zemlje oko Sunca, jedinica duljine »metar« reproducira se propisanim brojem duljina vala zračenja atoma kriptona 86 (vidi odsječak 8.7), a »atomska sekunda« frekvencijom zračenja atoma cezija 133 (odsječak 10.6). Za metrologiju odabrana prirodna pojava može biti i precizno propisano *stanje tvari:* temelj termodinamičke temperaturne skale je trojna tačka vode (vidi odsječak D.3.2), a jedinica luminancije nit proizvodi se zračenjem crnog tijela (vidi odsječak G.2.3). Elektromagnetske jedinice reproduciraju se, na primjer, ravnotežom sila elektrodinamičkog i gravitacijskog porijekla (amper) te sila elektrostatskog i gravitacijskog porijekla (volt; vidi poglavlje E.3 itd.).

Za proizvodnju mjerne jedinice na temelju prirodne pojave koja se stalno ponavlja ili pod stanovitim uvjetima traje na jednaki način nije dovoljna sama *pojava*, već je potreban i uređaj pomoću kojega se prirodna pojava iskorištava u metrološke svrhe. Tu kombinaciju pojave i uređaja nazivamo *prirodna mjera*, što je analogon »mjere« (= utjelovljenje stanovite vrijednosti fizikalne veličine; odlomak 5.3.2). »Prirodna mjera«, dakle, *proizvodi* mjernu jedinicu posebnim uređajem na temelju iskorištavanja poznate prirodne pojave, a »mjera« *pohranjuje* jedinicu u obliku materijalne realizacije (utjelovljenje jedinice).

Budući da se »prirodne mjere«, tj. uređaji koji proizvode mjerne jedinice na temelju prirodnih pojava, u pravilu upotrebljavaju samo za najpouzdaniju reprodukciju mjernih jedinica (vrlo su skupi!), nazivamo ih *prirodnim pramjerama.* To su, dakle, analogoni »nacionalnih pramjera« i »međunarodnih pramjera« (vidi odlomak 5.3.2). Naravno da bi podjela prirodnih pramjera na »nacionalne« i »međunarodne« bila besmislena, jer jedna od prednosti prirodnih pramjera pred materijalnim pramjerama i jest u tome što se prirodnom pramjerom može jedinica reproducirati jednako pouzdano u bilo kojem jednako dobro opremljenom laboratoriju. Pri tom je važno samo to da se jedinica reproducira uz *propisano* (međunarodno dogovoreno) stanje okoline i uz propisani mjerni postupak.

I ovdje postoji šarenilo terminologije (usporedi s odlomkom 5.3.2). Umjesto termina »prirodna pramjera« redovito se, ponajviše zbog kratkoće, upotrebljava naziv *pramjerilo*, tj. »pramjerilo« je kombinacija (ako se tako može reći) prirodne pojave i uređaja kojim se uz propisano stanje okoline i uz propisani mjerni postupak najvećom postiživom pouzdanošću reproducira mjerna jedinica. U ovoj knjizi najčešće ćemo upotrebljavati baš izraz »pramjerilo«. Neki se pak autori služe terminom *etalon*, kojemu odmah pridjenu i naznaku vrste prirodne pojave koja je osnova reprodukcije jedinice, npr. »atomski etalon sekunde« (franc. étalon atomique de la seconde). Jedna velika grupacija stručnjaka upotrebljava riječ *standard*, o čemu će još biti riječi u odlomku 5.3.4.

Bitno su različiti zahtjevi koji se postavljaju na »pramjere« i na »pramjerila«. Od »pramjere« se zahtijeva da postojano zadržava (održava, pohranjuje) vrijednost fizikalne veličine koju utjelovljuje, da se, dakle, vrijednost utjelovljene veličine ne mijenja tokom vremena. Naravno da se pramjere čuvaju pri određenim stanjima

okoline, a prilikom mjerenja upotrebljavaju se uz najveći oprez (vidi odlomak 9.3.3). No sav trud i oprez metrologa postaju uzaludni, ako pramjere ošteti ili čak uništi ratni vihor ili neka prirodna katastrofa. Pri tom imamo pred očima nedavni slučaj iz prošlog svjetskog rata: prilikom bombardiranja Charlottenburga (Berlin) oštećeni su njemački nacionalni prametar (kopija broj 18) i prakilogram (broj 22)!

Na »pramjerilo« ne stavlja se zahtjev o neuništivosti ili vrlo dugačkoj životnoj dobi. Od pramjerila se traži *pouzdanost reprodukcije* mjerne jedinice, što znači: pri svakom stavljanju pramjerila u pogon, ono treba da proizvede istu (u granicama mogućeg) vrijednost veličine. Pošto se npr. ustanovi da su uporabom ili drugim uzrocima pojedini sastavni dijelovi pramjerila postali premalo sigurni, ili su materijali u njemu ostarjeli, pramjerilo se jednostavno zamijeni drugim, novim. Ako su u međuvremenu izumljene bolje vrste uređaja, postojeće pramjerilo zamijenit će se novim, sve u duhu svrhe pramjerila: što pouzdanija proizvodnja stanovite vrijednosti fizikalne veličine u skladu s trenutnim mogućnostima vrhunske tehnologije.

5.3.4. Koncepcijski i održavajući standard. Obilna terminologija koju smo nanizali u prošla tri odlomka pretežno je evropskog porijekla, tj. u skladu je s razvojem znanstvene metrologije u njenoj kolijevci (vidi npr. dio povijesti metrologije u poglavljima 6 i 7). Gigantski razvoj egzaktnih znanosti u angloameričkim zemljama (USA i Velika Britanija; u novije vrijeme Kanada i Australija), dakle i napredak njihove vrhunske metrologije, uvjetovao je prodor angloameričke terminologije u Evropu, a time i u Jugoslaviju. Smatramo stoga da ovdje moramo barem djelomično dodirnuti tu angloameričku terminologiju, kako bi čitatelj lakše pratio suvremenu stručnu literaturu.

Izvor angloameričke terminologije je riječ *standard* pod kojom mnogi američki metrolozi razumijevaju »fizičko utjelovljenje jedinice na temelju idealizirane koncepcije o definiciji jedinice« (Standard is a physical embodiment of the unit based on the idealized concept in the definition of the unit). Sa tri pridjeva, »standard« dobiva tri bitno različita značenja sa stanovišta primjene; to su: koncepcijski standard, prototipski standard i održavajući standard. U nastavku ćemo na primjerima opisati što se pod ova tri termina razumijeva, i to u skladu s tumačenjem koje je nedavno objavio *C. H. Page* iz Odjela za elektromagnetizam američkog metrološkog zavoda National Bureau of Standards.

Koncepcijski standard (engl. conceptual standard) uključuje u sebi, na primjer, imaginarne paralelne vodiče neizmjerno malog presjeka koji se navode u definiciji osnovne jedinice Međunarodnog sistema jedinica (SI) »amper« (vidi odsječak E.2.1). Budući da *Rayleigh*ova strujna vaga (poglavlje E.3) djeluje na istom teoretskom principu na koji se oslanja definicija ampera (sila između vodiča kroz koje teče električna struja), ta vaga je jedna od interpretacija koncepcijskog standarda; druga interpretacija je, na primjer, *Pellat*ov elektrodinamometar. Prema tome »koncepcijski standard« je stanovita nadgradnja našeg pojma »pramjerilo« (vidi odlomak 5.3.3).

Prototipski standard (engl. prototype standard) jest vrhunsko utjelovljenje mjerne jedinice. To je npr. međunarodni prakilogram pohranjen u Međunarodnom uredu za mjere i utege. Izraz je, dakle, ekvivalentan našoj »međunarodnoj pramjeri« (vidi odlomak 5.3.2).

Održavajući standard (engl. maintenance standard) ne ovisi o definiciji jedinice koju održava (pohranjuje). To je, na primjer, slog električkih otpornika

koji služe tome da održavaju (očuvaju, pohranjuju) stanovitu vrijednost električkog otpora. Isto tako se stanovita vrijednost električkog napona održava pomoću grupe *Weston*ovih elemenata. Kolike su vrijednosti fizikalnih veličina koje pohranjuju »održavajući standardi«, saznaje se njihovom mjernom usporedbom s vrijednošću dobivenom iz definicijskog pramjerila, npr. iz strujne vage. Održavajući standardi (koji se nazivaju i »konkretni standardi«, engl. concrete standards) dijele se na »reprodukcijske standarde« i »radne standarde«. Prvi zadržavaju vrijednost pohranjene veličine tokom duljeg vremena, a drugi je pohranjuju kraće vrijeme.

Među održavajuće standarde ide i nuklearno pramjerilo ampera (vidi poglavlje E.3), koje doduše izvanredno pouzdano reproducira jedinicu jakosti električne struje amper, ali se teorija djelovanja tog pramjerila ne oslanja na sadašnju definiciju ampera (teorija sila koje djeluju među strujnim elementima). Pouzdanost reprodukcije ampera pomoću nuklearnog pramjerila vjerojatno je bolja od pouzdanosti reprodukcije pri upotrebi *Rayleigh*ove vage (slično kao što se tzv. fizikalna ili atomska sekunda proizvodi mnogo pouzdanije od efemeridne sekunde; vidi odsječke 10.1, 2). No unatoč tome na vrhu metrološke piramide mjerodavno može biti jedino takvo pramjerilo ampera (ili neke druge elektromagnetske jedinice) koje proizvodi jedinicu amper oslanjajući se na ostale jedinice (tzv. mehaničke jedinice m, s, kg) i na *propisanu vezu* između mehanike i elektromagnetizma $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$ (N = newton = kgm/s², A = amper). Ta veza propisana je međunarodnim *dogovorom* fizičara i elektrotehničara (IUPAP, IEC), na temelju kojeg su izrađeni odgovarajući dokumenti i definicije te objavljeni sa tribine Generalne konferencije za mjere i utege (vidi odsječke E.2.2 i 3.1).

6. Iz povijesti mjera i sistema jedinica

6.1. Mjere kulturnih naroda

Mjere današnjih zaostalih plemena pokazuju nam kakav je vjerojatno bio početak današnje nauke o mjerama i mjerenju. Oskudna zamjena dobara među najprimitivnijim plemenima centralne Afrike iziskivala je još do nedavno samo polovinu »srednje velike« ljuske kokosova oraha kao jedinicu volumena. Tom jedinicom, koja odgovara otprilike jednom litru, mjere se i zamjenjuju mnoga dobra. U istočnoj Africi žita prodaju na »košare«, koje mogu biti veće ili manje. Za vrednija žita imaju manje košare, za krupnija zrna veće. Time su u mjerenje unijeli pojam vrijednosti robe.

Mnoga zaostala plemena mjere težine još »ramenom», tj. koliko tereta može čovjek ponijeti na jednom ramenu. Pod »dva ramena« razumijevaju dvostruku težinu, a još veće terete izražavaju većim brojem »ramena«.

Mnoga zabačena plemena i danas mjere udaljenosti posve osobitim »jedinicama«. Na Borneu je mjera udaljenosti »kokodakanje kokoši«, tj. kako se daleko čuje, a isto je u nekim dijelovima Indije »mukanje krave«. U prašumama Brazila primitivci označuju udaljenost dvaju naselja »brojem potoka koje treba preskočiti«. Najneobičnija je sigurno seljačka jedinica udaljenosti u Tibetu, naime »posuda čaja daleko«. Toliku udaljenost prođe čovjek koji ponese posudu kipućeg čaja, a na kraju je puta čaj prikladan za piće. Prema istraživanju neke ekspedicije na Mount Everest »posuda čaja daleko« nešto je kraća od tri kilometra.

Nekoliko spomenutih mjera zaostalih plemena, koja su i danas ostala na najnižem stupnju održavanja života, samo su primjeri kako je i u najprimitivnijoj organizaciji društva neophodno potrebno mjerenje, pa makar kako ono bilo podložno klimatskim, atmosferskim, subjektivnim ljudskim i mnogim drugim faktorima.

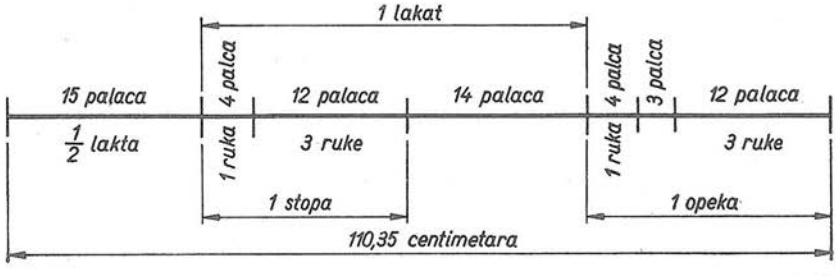
6.1.1. Počeci metrologije. Prava *znanstvena metrologija* počinje u jakim kulturnim državama koje su postojale prije nekoliko tisuća godina. Potrebu za mjerenjem i standardizacijom zahtijevali su trgovina, zatim karavanska putovanja, moreplovstvo i normalno poslovanje države kao vlasti.

O Kini, kolijevci stare civilizacije, znamo u pogledu mjera vrlo malo, pa se stoga djelomične predaje i iskopine još ne mogu pouzdano ocijeniti. No za razliku od te zemlje, postoji mnoštvo očuvanih dokaza o visokoj razini mjerenja u drugoj kolijevci ljudske civilizacije i kulture, u zemlji koja se prostire na plodnim obalama velikih rijeka Eufrata i Tigrisa. Najstariji tragovi vode čak 6000 godina unatrag. Iskapanja su, naime, pokazala da je tada na tom području djelovao sistem za

navodnjavanje kojega je duljina iznosila oko 160 kilometara. Danas je sve prekrio pijesak, a sistem je bio uredno održavan oko dvije tisuće godina!

Posve je očigledno da se takav, za ondašnje doba beskrajno grandiozan pothvat nije mogao ostvariti bez dobrog poznavanja načina premjeravanja zemljišta, zakona strujanja voda i rada tehničara koji su znali takve poslove. To nam je jasno kad spomenuti sistem navodnjavanja usporedimo s rimskim vodovodom koji je oko 4000 godina mlađi. Naime, rimski vodni sistem od 19 akvaduktâ ukupne duljine oko 400 kilometara uzdržavala je stalna posada od 700 radnika i tehničara, koji su omogućavali da građani dnevno dobiju 600 do 1000 litara vode po stanovniku!

Babilonci su bili prvi u povijesti čovječanstva koji su imali jedinstven sistem mjera što ga je propisao vladar. I ne samo to! Oni su čak imali posebne pramjere izrađene slično kao što to imamo danas! Arheološka su iskapanja, naime, omogućila da se dođe do pramjera duljine koje potječu iz vremena oko 2000 godina prije naše ere. To je *bakreni štap* duljine 110,35 centimetara i mase 41,5 kg. Štap ima ucrtane zareze koje vidimo shematski prikazane na slici A.17.



Sl. A.17. Skica babilonske pramjere duljine. Arheološka iskapanja dokazuju da je taj bakreni štap star oko 2000 godina

Glavna jedinica bila je »lakat« = 51,72 cm, podijeljena na 30 »palaca«. »Stopa« je imala 16 palaca, dakle 27,58 cm, dok je »ruka« predstavljala 4 palca = 6,9 cm. Vjerojatno su Babilonci imali i normirane utege, ali to prilikom iskapanja nije utvrđeno. Iz pismenih podataka se zna da je masa utega za mjerenje zlata »šiglu«, iznosila 85,8 grama, dok je jedinica »mine« iznosila 0,513 kg.

Pronađeni su utezi koji su bili normirani oko 1300 godina kasnije, za vrijeme vladavine asirskog kralja Salmanasara V. »Teška mina« iznosila je u to vrijeme gotovo tačno 1 kg (1,0048 kg), dok je »laka mina« bila upola manja. Da je zaista bila riječ o strogoj državnoj kontroli mjera i utega, možemo zaključiti i po tome što su utezi »mine« bili potpuno jednaki, iako su ih arheolozi pronašli u posve različitim krajevima.

I za volumen su Babilonci imali normiranu mjeru. To je bila »srebrna vaza« na kojoj je bilo ugravirano »10 sila« (= 4,8 dm^3). Tu srebrnu vazu arheolozi su pronašli u dobro očuvanom stanju. Veća jedinica bila je 60 puta veća, a još veća 300 puta.

No Starobabilonci nisu sami razradili svoj jedinstveni sistem mjera. Njima su u svome prodoru mjernu znanost donijeli Kaldejci, koji su opet usavršili vještinu mjerenja Sumerana, a ovi su je razvili u kulturnim centrima Mezopotamije oko 2500 godina prije naše ere.

Ne postoje arheološki nalazi o pramjerama Kaldejaca i Sumerana, no pisani dokumenti upućuju na mogućnost postojanja mjerila jedinice vremena. To je

prema predaji bila posuda iz koje je vjerojatno tokom jedinice vremena (dan) istekla jedinica težine (talent) vode. Zapremina te vode najvjerojatnije je bila jedinica volumena, a iz nje se onda izvela jedinica duljine.

I današnja jedinica vremena »minuta« starobabilonsko-sumeranskog je porijekla. Podjela dana na 24 sata, a ovoga na 60 minuta, potječe iz toga doba. Babilonci su npr. imali jedinice duljine subban = 60 ammatu (a); gar = 12 a, kanu = = 6 a, gdje je a = 0,495 m (korak), a za obujam jedinice gur = pi = 60 sila; sila = = 10 ša; 10 sila je oko 4,8 dm^3.

Nije slučajno da je mjerna znanost postigla visok stupanj razvoja baš u zemlji Sumerana i Kaldejaca. Život i kultura starih naroda na obalama Eufrata i Tigrisa mogli su postojati samo uz brižljivo održavanje i razvijanje sistema za navodnjavanje, a za tu svrhu tačne i jedinstvene mjere te precizna mjerenja bili su neophodni. Isto tako nije nimalo čudno da se propast velikih i moćnih državnih tvorevina vremenski podudara s propašću sistema za navodnjavanje (Babilon, Asirija, Egipat, Perzija, Sirija itd.). »*Sve je proizašlo iz vode, sve će održati voda*« (*Faust II*).

Trgovina je mjerne tekovine tih visokih kultura prenijela najprije Egipćanima i Feničanima, a onda i Grcima. Odande su one našle put daljnjeg širenja uz galije i mačeve rimskog carstva. Posljednje tragove starobabilonske mjerne znanosti danas nalazimo još u starim ljekarničkim mjerama.

Egipćani su strogo kažnjavali trgovce koji su varali pri mjerenju robe, ali unatoč tome nisu imali tako razrađen sistem jedinica kao Babilonci. No zato su imali razgranatu službu faraonskih baždarnica, a u skladu s razvijenom birokracijom i posebne titule za vodeće službenike tih ureda. Jedan od važnih instrumenata Egipćana bila je vaga, koja je čak bila isklesana u nekim hramovima. Čini se da iz tog razdoblja potječe i rafinirano varanje pri vaganju, na taj način što je u šupljoj prečki vage bila živa!

Egipćani su imali dva osnovna utega: »deben« je imao masu 91 gram, dok je »kita« bila 10 puta manja. Utezi su bili izrađeni od kamena. Od Babilonaca su čini se, dobili »minu«, koja se zvala »menen« i imala je masu 0,6 kg. Za sve te jedinice služile su posebne hijeroglifske oznake, od kojih jedna prikazuje čak neku životinju nalik na mačku. Pa i sami utezi bili su izrađeni u različitim oblicima: kao stošci, kao kravlje glave, stereometrijskih oblika itd. Sve ove mjere prvenstveno su služile za mjerenje dragocjenih metala.

Za ostale mjere Egipćani nisu imali toliko smisla kao Babilonci. Za mjere volumena služile su »košara datulja«, »hrpa žita«, »snop«, »vreća«, »lonac«, dakle vrlo elastične i nejedinstvene mjere. Jedino je premjeravanje zemljišta bilo na višem stupnju; služili su se mjernom trakom, a imali su i normiran lakat. »Kraljevski lakat« bio je dugačak oko 52 centimetra, a »mali lakat« oko 45 cm. Te dvije jedinice bile su razdijeljene na pedlje, ruke i palce. Za rimskih vremena Egipćani su imali i mjerni kotač, a kasnije i mjerne letve i lance. Veće su duljine mjerili pomoću mjernih užeta koja su bila obilježena posebnim hijeroglifima.

Budući da je zbog poplava Nila uvijek iznova trebalo razgraničavati zemljišta, Egipćani su imali praktičnu mjeru površine »arura«, kvadrat sa stranicom 100 kraljevskih lakata. Upotrebljavali su se i 1/2, 1/4, 1/8 i 1/16 arure.

Stanovite uspjehe imali su i u zvjezdoznanstvu, gdje su otkrili ponavljanje 365-dnevnog godišnjeg perioda, ali su unatoč tome svoju povijest dijelili na periode vladavina faraona pojedinih dinastija.

Iznenađuje da u svojoj 2500-godišnjoj povijesti stari Egipat nije u pogledu mjera učinio više, iako je izgradio velebne piramide i niz drugih čuda. Premda

je u Egipat sigurno doprlo iskustvo Babilonaca, ipak robovsko uređenje nije poticalo razvoj znanosti, jer je na raspolaganju bila besplatna radna snaga i mnogo vremena.

O mjerenju i mjerama starih *Perzijanaca* znamo vrlo malo. Ipak mora da je mjerna tehnika bila na visokom stupnju, jer oni su izgradili izvanredan sistem cesta, od kojih je jedna bila dugačka oko 2500 kilometara (!), a protezala se od Male Azije do Perzijskog zaljeva. Duž te ceste bilo je 111 odmarališta s konakom, koja nisu bila porazdijeljena jednakomjerno, već prema naporima što su ih iziskivali pojedini dijelovi ceste.

Iz nekih se dokumenata zaključuje da su Perzijanci imali ove jedinice duljine: »kraljevska stopa« (oko 31,5 cm), »lakat« (oko 54 cm), »stadion« (oko 264 m), »parasange« (oko 5300 m) i još nekoliko većih putnih jedinica. O drugim jedinicama gotovo ništa nije poznato.

Hebrejci su imali visoko razvijen smisao za mjere i utege. Njihova su mjerenja i mjere bile precizne jer im je to nalagala i religija. No sistematičnosti nije bilo ni izdaleka toliko kao u mjera Babilonaca, iako su neke mjere preuzeli od njih. Utega su imali mnoštvo, i to asirskog, egipatskog i domaćeg porijekla. Jedinica duljine bio je »lakat«, i to vjerojatno babilonski, a uz to su upotrebljavali, kao i gotovo svi stari kulturni narodi, »pedalj«, »ruku«, »prst« itd.

Navodno su i Hebrejci imali svoj normirani štap kao pramjeru duljine, koji se kao svetinja čuvao u hramu. Kovani novac od zlata i srebra imao je svoje posebne nazive, a vrijednost mu se određivala vaganjem. Iz tog razdoblja potječe »zlatni talent« (oko 49 kg) koji se spominje i u Bibliji.

Arapi su imali razvijen smisao za mjere i utege, jer su oko 600. godine naše ere održavali velik promet mnogih proizvoda. Čuvena je njihova najmanja mjera »debljina devine dlake« (oko 0,65 mm). Druga je bila širina šest usporedno postavljenih zrna ječma, a poznavali su »širinu prsta« i »širinu ruke«, »stopu« i nekoliko »lakata«. Osobito je postao čuven »crni lakat« (oko 0,52 m) kad je u 9. stoljeću kalif Al-Mamum naredio mjerenje zemaljskog stupnja, što znači da su zvjezdoznanstvo i geodezija bili na visokom nivou.

Arapska država protezala se od Indijskog do Atlantskog oceana, pa stoga nije čudo što su se u pojedinim provincijama održale mnoge mjere njihovih prethodnika. Arapi su zapravo imali »babilon mjera«, a ne Babilonci. Od njihovih utega u Jugoslaviji je poznat »kantar« (44,69 kg), koji su donijeli Turci. Tekućine nisu mjerili samo jedinicom obujma, već i utezima, koji su se razlikovali za ulje, vino i med, a služili su se i mnogim grčkim i rimskim mjerama, naročito ljekarnici. Arapi su bili vrlo vješti u vaganju dragocjenih metala i dragulja, a navodno su znali vagom uspoređivati specifične težine.

6.1.2. Grčke mjere. U staroj *Grčkoj* mjerenje i mjere spadali su u državnu službu, a varanje pri mjerenju kažnjavalo se možda strože nego u današnjoj Grčkoj. Mjerni inspektori nazivali su se *metronomousi*, što otprilike znači procjenitelji mjera. Grci su većinu jedinica preuzeli od Egipćana i kasnije ih predali Rimljanima. Istina je da su grčki filozofi i učenjaci bili učenici Egipćana, ali su kasnije daleko premašili svoje učitelje. I sam naziv današnjeg metra potječe od grčke riječi »metron«, što znači mjera.

O grčkim mjerama imamo pouzdane podatke. Tako je, na primjer, starogrčka stopa bila dugačka 30,83 centimetra, dakle samo otprilike 1 % veća od današnje angloameričke stope. Starogrčki stadion bio je 600 puta veći. Atička

jedinica duljine stadion imala je 500 atičkih stopa, koje su bile dugačke 32,8 cm. I Grci su imali »prst«, »pedalj«, »lakat« i »hvat«, te niz većih i manjih mjera. Površine zemljišta mjerili su jedinicom »plethron«, koja je sadržavala 10000 »kvadratnih stopa«, dakle oko 950 m^2.

Budući da je vaganje u staroj Grčkoj bilo dobro razvijeno, upotrebljavali su za utege razne talente (grčki »talanton« znači vaga). Najmanji je bio sirijski ili Ptolomejev talent (oko 7 kg), srednji atički (26,196 kg), a najveći novogrčki talent (150 kg). Uz ove dolazio je niz manjih utega koji su međusobno stajali u odnosu 1/6:1:100:6000 ili 1:60:6000:36000. Nazivi za te utege ujedno su bili nazivi kovanog novca. Ljekarnice su imale svoj posebni sistem utega, među kojima je i »unča«, koju danas prepoznajemo kod Angloamerikanaca kao »ounce«. I »libra« je grčkog porijekla.

Grčki sistem mjera bio je toliko razvijen da su i veterinari imali svoje utege za vaganje životinja. Tekućine su mjerili jednim jedinicama, poljoprivredne proizvode drugima, suhe tvari trećima itd. Vjerojatno im je obilje tih jedinica stvaralo i neprilike, kao što danas nama čine mnoge angloameričke jedinice za suhe tvari i slično (vidi poglavlje B.11).

6.1.3. Mjere Rimljana. Rimljani su oko 300. godine naše ere mnogo upotrebljavali grčke mjere, ali su imali i vlastiti sistem mjera i utega koji su brižno njegovali. Normirane štapove čuvali su kao svetinju u Kapitolu, a njihove kopije uzidavali su u javne građevine tako da se njima mogu služiti građani. Rimska »stopa« bila je dugačka oko 29,6 centimetara, a 600 takvih stopa predstavljalo je grčko-rimski »stadion«. Rimljani su, isto kao Grci, imali mnoštvo jedinica za duljine, od »digitusa« (1,85 cm) do »iter pedestre« (28,725 km), što znači dan putovanja.

Obujam tekućina mjerili su najprije grčkim »amforama« (26,26 dm^3), a kasnije kubnom stopom. Uz ove, bilo je još devet drugih mjera za tekućine. Suhe tvari mjerili su posebnim volumenskim jedinicama. Za mjerenje površine u poljoprivredi služili su se »jutrom« (iugerum), a to je bilo onoliko zemljište koliko je u jednom danu mogao preorati par magaraca. Otprilike je to bio pravokutnik sa stranicama 240 i 120 stopa.

Utege su Rimljani imali svrstane u pravi sistem, ali s osnovom 12, tako da je »libra« (ili pondus) bila razdijeljena na 11/12, 5/6, 3/4, 2/3, 7/12 itd. sve do 1/12 libre koja se zvala »uncia«, a imala je masu 27,29 grama. Neznatno više ima današnja engleska ounce, koja sigurno podsjeća na rimski pohod na engleski otok. Osobito su precizni bili ljekarnički utezi, koji su u Evropi ostali u upotrebi sve do francuske revolucije.

Stotinu pondusa predstavljalo je jedan centenarium, kojega se u malo drugačijem izgovoru sjećaju i naši ljudi. Kao i Grci, i Rimljani su svoje kovane novce nazivali istim mnogobrojnim imenima što su ih imali za utege.

Iz ovih letimičnih skica mjera i načina mjerenja kulturnih naroda vidimo da su u prošlosti postojale u pojedinim razdobljima i u nekim državnim tvorevinama dobro organizirane metrološke službe, koje su imale i svoje posebne pramjere (štapovi i utezi). Međutim zapadna i istočna Evropa trebalo je da dočekaju istom francusku revoluciju pa da nauka o mjerama prijeđe nacionalne okvire.

6.1.4. Feudalna metrologija. Tako još godine 789. nalazimo u Evropi »stopu« Karla Velikoga, kao i njegov uteg »funtu« (oko 0,36 kg). Kasnije dolazi do jedinstva kraljevskih mjera na engleskom otoku, ali u Evropi to dugo nije uspjelo.

U njoj je svaki grad ili veći gradić imao svoje mjere, koje je smatrao jedino »pravima«. Iz kronika se, na primjer, zna da je Badensko nadvojvodstvo imalo oko godine 1800, dakle prije 170 godina, 112 različitih »lakata«, 92 površinske mjere, 65 mjera za drvo, 163 mjere za žito, 123 akova i vjedra, 80 funti itd. Možemo zamisliti koliko je toga bilo na ogromnom prostoru od Urala do Atlantskog oceana!



Sl. A.18. Stup viteza Orlanda u Dubrovniku. Duljina lakta (51 cm) bila je propisana dubrovačka mjera. (Foto: *T. Dabac*)

I slavna *Dubrovačka Republika* imala je svoje mjere. Kao i većina drugih trgovačkih gradova i Dubrovnik je imao javnosti pristupačne uzorke nekih mjera. Obično je to bio kip kakvog zaslužnog čovjeka, a duljine pojedinih dijelova tog kipa bile su propisane mjere duljine. Na slici A.18 vidimo stup viteza Orlanda iz godine 1418. koji, obnovljen, još i danas stoji u Dubrovniku. Duljina njegova lakta do vrha prstiju iznosi 51 centimetar, i to je bila normirana državna mjera duljine, čiji se etalon (metalni štap) čuvao u palači Sponza. Ista duljina lakta urezana je i u kamenu postamenta Orlandova spomenika.

Nakon mraka srednjeg vijeka počela je nicati znanost kojoj su trebala čvrsta uporišta, a ona nije mogla procvasti u gradskim, pa ni državnim okvirima. Moralo je doći do velikog društvenog potresa, koji je, uz ostale reforme, raskinuo i feudalne lance metrologije.

6.2. Postanak metričkog sistema jedinica

U drugoj polovini sedamnaestog stoljeća trgovina, obrt i znanost već su toliko napredovali da se proizvodnja i trgovačka razmjena proizvoda više nije mogla pospješivati na temelju mjera koje su polazile od »stope« Karla Velikoga ili čak od mnoštva istoimenih, ali različitih mjera raznih gradova, kako smo vidjeli u prošlom odsječku. Tek je francuska revolucija godine 1789. smogla snage da među ostalim radikalnim potezima uredi i pitanje unifikacije mjera.

6.2.1. Ideja prirodnih pramjera. Ustavotvorna skupština povjerila je godine 1790. francuskoj Akademiji izradu projekta *jedinstvenog sistema mjera*. Posebna komisija najuglednijih učenjaka predložila je sistem koji je trebalo da ima ove značajke: osnovne jedinice morale su se osloniti na *prirodne pramjere*; sve izvedene jedinice valjalo je izvesti iz osnovnih jedinica za *duljinu*, *vrijeme* i *težinu*; podjela jedinica na veće i manje dijelove treba da bude *decimalna*, kako bi preračunavanja bila što je moguće jednostavnija.

Ideja prirodnih pramjera bila je izvanredna za to doba. Njome je revolucija obračunala s kojekakvim prolaznim kraljevskim »stopama« i »laktima«, a ujedno

je htjela ostvariti takve pramjere koje će — baš zato jer su oslonjene na prirodu — vječno prkositi zubu vremena. Iz tog doba potječe krilatica:

A tous les temps, à tous les peuples!

tj. mjerni sistem za sva vremena i za sve narode.

Ideju jedinstvenog metričkog sistema jedinica, oslonjena na prirodne pramjere, obrazložio je Ustavotvornoj skupštini (l'Assemblée Constituante Française) biskup i državnik *Talleyrand* u martu 1790, a nazvao ga je *decimalnim metričkim sistemom* (Système Métrique Décimal). Osnovom reforme mjernih jedinica bila je želja da se za temelj svih mjerenja odaberu one veličine same prirode za koje se pouzdano zna da se u toku vremena ne mijenjaju i koje se dadu lako reproducirati. U *Talleyrand*ovu projektu dalekosežno se mislilo na to da nov sistem jedinica bude prihvatljiv za sve zemlje i ljude (unité naturelle universelle). U pogledu pramjere duljine postojala su tri prijedloga: dio duljine nekog zemaljskog meridijana, dio duljine ekvatora ili duljina sekundnog njihala. Istodobno je bila pozvana Engleska, koja je također u to vrijeme željela reformirati svoje jedinice, da se priključi novom, decimalnom i prirodnom sistemu jedinica. Na žalost, taj poziv nije urodio plodom; posljedice osjećamo i danas (vidi odsječke 6.5 i 6.6).

Korisno je spomenuti da su se već znatno prije spomenutih akcija mnogi učenjaci zalagali za reprodukciju jedinice duljine pomoću *prirodne pramjere* (o terminologiji mjera i jedinica vidi odsječak 5.3). Podloga tom zalaganju bili su rezultati mjerenja duljine luka na površini Zemlje koji odgovara jednom kutnom stupnju; takva mjerenja bila su obavljena u Francuskoj, Nizozemskoj i Engleskoj potkraj 17. stoljeća. Tako je npr. *Mouton* predložio decimalni sistem jedinica duljine u kojem bi osnova bila »Milliare« — duljina zemaljskog meridijana koji pripada kutu 1 minuta. U vezi s time francuska je Akademija organizirala dvije znanstvene ekspedicije: prva je od godine 1735. do 1746. u Peruu premjeravala meridijan, a druga je to učinila godine 1736. u Laponiji. Za mjerenje geodetske baze upotrijebljeni su tadašnji normalni štapovi »Toise du Châtelet«, koje je izradio *Langlois*. Budući da su ti mjerni štapovi upotrijebljeni kao pramjere duljine, dobili su nazive »Toise du Pérou« i »Toise du Nord«.

6.2.2. Stvaranje decimalnog sistema jedinica. Godine 1664. predložio je *Huygens* da se za prirodnu pramjeru duljine odabere duljina sekundnog njihala. Taj prijedlog obnovio je *Talleyrand* u svom obrazloženju Ustavotvornoj skupštini godine 1790. i pri tom precizirao da bi se duljina njihala definirala na 45° sjeverne širine. Posebna Akademijina komisija odbacila je prijedlog o sekundnom njihalu, odnosno preporučila je njihalo za *sekundarnu* metodu reprodukcije jedinice duljine. Razlog je tome bio taj što se pri upotrebi njihala moralo znati vrlo precizno reproducirati sekundu, a s druge strane period titranja istog njihala mijenja se s geografskim položajem na Zemlji, jer se s njime mijenja ubrzanje zemljine teže g (vidi odsječak 9.4). Stoga je odlučeno da se za jedinicu duljine metričkog sistema odabere 40-milijunti dio zemaljskog meridijana. Tako definirana jedinica duljine trebalo je da posluži i za osnovu definiranja jedinica i mjera volumena i mase.

Mjerenje luka pariskog meridijana između Dunkerquea i Barcelone započeli su godine 1791. *Delambre* i *Méchain*, a sedam godina kasnije taj su posao završili *Arago* i *Biot*. Mjerenje pomoću repeticijskog kruga, koji je izradio *Lenoir*, sa »Toise du Pérou« kao osnovom, dalo je rezultat 9,40°. Geodetskom bazom poslužila je udaljenost između Lieusainta i Meluna, koja je prema mjerenjima *Mongea* i *Meunier*a iznosila 6075,98 toise (oko 11,836 km). *Delambre*, *Méchain* i njihovi suradnici vršili su svoja dugogodišnja premjeravanja uz životnu opasnost, jer su političke

i životne prilike u to vrijeme bile vrlo nestabilne. Nije stoga čudno da se u njihove račune prilikom redukcije mjernog rezultata na 40-milijunti dio duljine meridijana uvukla sitna pogreška.

U obradi mjernih rezultata sudjelovalo je 26 evropskih učenjaka koji su na tome radili dvije godine. Posebna komisija, u kojoj su bili Francuzi *Laplace*, *Legendre* i *Méchain*, Nizozemac *Van Swinden*, Švicarac *Tralles* i Španjolac *Ciscar*, ustanovila je da duljina jedne četvrtine pariskog meridijana (10^7 m) iznosi 5130740 toise. Jedinica duljine *metar* (taj naziv predložio je *Borda* prema grčkoj riječi »metron«, što znači mjera) bila je time utvrđena relacijom

$$\text{metar} = 3 \text{ stope} + 11{,}269 \text{ linija},$$

gdje su se jedinice »stopa« i »linija« (tzv. pariska linija) oslanjale na »Toise du Pérou«. Veće i manje jedinice duljine izvodile su se iz tako definiranog metra na *decimalnom principu*.

Ove radove naložila je Francuska skupština Akademiji 8. maja 1790. u sklopu ostvarenja decimalnog metričkog sistema »za sva vremena, za sve ljude«. U okviru tog ogromnog posla (podsjetimo se da je do tada postojalo mnoštvo različitih mjera, kraljevskih »lakata«, »palaca« itd.) *Lavoisier* i *Hauy* su predložili da se za mjeru mase odabere stanovit volumen vode. Paralelno s radovima na definiranju metra kao 40-milijuntinke duljine pariskog meridijana, *Lefevre-Geneau* i *Fabroni* istraživali su taj prijedlog i na temelju postignutih rezultata predložili da jedinicom mase bude kubni decimetar destilirane vode pri njenoj maksimalnoj gustoći (pri temperaturi 4° C). Oni su, dakle, pri definiciji jedinice mase uzeli u obzir višekratnik nove jedinice duljine (decimetar = 0,1 m).

Francuski zakon od 7. aprila 1795. (dakle prije više od 170 godina!) ozakonio je decimalni metrički sistem i utvrdio nazive jedinica tog sistema: *metar* (mètre) za duljinu, *ar* (are) za površinu, *litar* (litre) za volumen i *gram* (gramme) za masu (poid). Pri tom je ar = 100 m^2, tj. površina pravokutnika sa stranicama 10 metara, a litar = 1 dm^3 = 0,001 m^3. Vidimo da je decimalnost metričkog sistema bila uvedena već pri definiranju polaznih jedinica. Izraz »kilogram« za masu jednog litra vode bio je uveden kasnije (vidi odlomak 9.3.3.).

6.2.3. Arhivski metar i kilogram. Utvrđenu duljinu metra i masu kilograma materijalno je utjelovio (o utjelovljivanju mjernih jedinica vidi odsječak 5.3) *Fortin* tako što je izradio odgovarajuće mjere od platine iskovane u vatri. *Fortin* je izradio dvije platinske mjere metra i dvije platinske mjere kilograma. Jedan par ovih mjera bio je pohranjen u francuskom Arhivu (Louvre), a drugi u opservatoriju francuskog Nacionalnog instituta (Bureau des Longitudes). Platinski prametar bio je štap presjeka 25 × 4,05 mm čiji su krajevi (krajnja mjera; étalon à bouts) udaljeni tačno 1 metar pri temperaturi taljenja leda, a platinski prakilogram valjak čija su visina i promjer međusobno jednaki (39 mm). Pogreška mjerenja duljine pri uspoređivanju krajnjih metarskih mjera iznosila je tada oko 1/100 milimetra, dakle relativna pogreška oko 10^{-5}.

Obje materijalne pramjere pohranjene su 22. juna 1799. u arhivu Francuske Republike. Zbog toga su dobile nazive koje kasnije susrećemo u mnogim publikacijama: mètre des archives i kilogramme des archives, tj. »arhivski metar« i »arhivski kilogram«. Zakon od 10. decembra 1799. legalizirao je tim dvjema platinskim pramjerama jedinice metar i kilogram. Iz tog doba potječu i nazivi »mètre et kilogramme vrai et définitif«, tj. »pravi i konačni metar i kilogram«.

No uvođenje metričkog sistema išlo je u Francuskoj teško, velikim dijelom zbog ljudske tromosti. Zbog toga je 38 godina kasnije zakonom od 4. jula 1837. uveden državnom silom: zakonom je propisano da je od 1. januara 1840. metrički sistem jedinica *jedini* zakoniti (légale) sistem jedinica u Francuskoj (sl. A.19). Taj zakon ujedno je potvrdio zakon od 1799. o vrijednosti duljine arhiviranog prametra i mase prakilograma, te definirao pet glavnih jedinica (unités principales): jedinicu duljine *metar*; jedinicu površine *kvadratni metar*. To je površina pravokutnika sa stranicama 1 metar. Za poljoprivredu uveden je »ar«, tj. kvadrat sa stranicama 10 metara; za jedinicu volumena *kubni metar*. To je volumen kocke s bridovima 1 metar. Za mjerenje volumena tekućina i zapremine zrnatih tvari preporučen je »kubni decimetar«; za jedinicu mase *gram*; za jedinicu novca *franak*. To je kovanac mase 5 grama, izrađen od srebra i bakra. Od ovih jedinica mogle su se izvoditi sekundarne jedinice (unités secondaires) kao dekadski i decimalni višekratnici glavnih jedinica.



Médaille commémorative de la fondation du Système Métrique.



Sl. A.19. Medalja izdana u povodu obavezne upotrebe metričkog sistema u Francuskoj od 1. januara 1840. Na medalji sitnim slovima piše da je metrički sistem obavezan prema zakonu od 4. jula 1837.

Kad danas razmatramo ove definicije, s *današnjim* iskustvom i s današnjim poznavanjem nauke, opažamo nedostatke. No za vrijeme u kojem je metrički sistem nastao, a to znači prije gotovo 200 godina, uvođenje metričkog sistema bila je znanstvena i privredna revolucija, po rezultatima jednako velika kao i sama francuska revolucija. Da je bila potrebna i da je zrno napretka palo na plodno tlo, dokazuje prihvaćanje francuskog primjera u gotovo svim ostalim kulturnim zemljama (vidi odsječak 6.5).

Arhiviranje metra i kilograma te njihovo proglašenje »definitivnim mjerama« oborilo je prvotnu ideju o *prirodnim* pramjerama. S vremenom, naime, mjerni uređaji i mjerne metode napreduju, pa bi svako novo mjerenje duljine zemaljskog meridijana ili mase kubnog decimetra vode dovodilo do novih vrijednosti materijalnih pramjera duljine i mase! Neprestano zamjenjivanje arhivskog metra i kilograma (te svih njihovih kopija) novima uzrokovalo bi pri preciznim mjerenjima velik kaos. Zbog toga je arhiviranje pramjera u stvari sahranilo izvanrednu ideju o prirodnim pramjerama. Podržavana fikcija o »univerzalnoj prirodnoj jedinici« stvarala je ujedno otpor prema prihvaćanju metričkog sistema u drugim zemljama.

Mnogo snažniji izvor otpora bilo je, međutim, vjerojatno nešto drugo: nacionalna osjetljivost. Ako bi se arhivski metar (i kilogram) prihvatio u drugim zemljama, onda bi zakonodavstva tih suverenih zemalja ovisila o arhivskom prametru koji je

osnova *francuskog* zakona, tj. vlade suverenih zemalja morale bi se obratiti vladi Francuske za dobivanje kopija prametra i prakilograma. S druge strane, ako bi se obnovila prvotna ideja o dijelu duljine meridijana, taj meridijan prolazi kroz neku zemlju ili nekoliko zemalja, a geodetska baza mora biti u nekoj zemlji, najvjerojatnije opet u Francuskoj! Politička konstelacija u Evropi prijetila je, dakle, da se kompromitira ideja o unifikaciji jedinica u čitavom svijetu, tj. ideja o univerzalnom uvođenju metričkog sistema.

6.3. Konvencija o metru

6.3.1. Potreba unifikacije jedinica. Posve praktični razlozi nametali su potrebu za uvođenjem jedinstvenog evropskog sistema jedinica: industrija, trgovina i znanost mnogih zemalja uvidjele su prednosti tog jednostavnog i logičnog (decimalnost!) sistema za svaku državu. To se naročito zapazilo na međunarodnim izložbama 1851. u Londonu i 1867. u Parizu, gdje je prvi put manifestirana potreba za svjetskom unifikacijom mjernih jedinica. Na pariskoj je izložbi Odbor za utege, mjere i novac (Comité des Poids et Mesures et Monnaies) čak preporučio državama uvođenje decimalnog metričkog sistema umjesto dotadašnjih raznovrsnih »palac-lakat-funta sistema jedinica«.

Drugi snažan poticaj svjetskom uvođenju metričkog sistema došao je iz Berlina, također godine 1867. Tamo je, naime, održana Međunarodna geodetska konferencija (Conférence Géodésique Internationale), prvenstveno u vezi s utvrđivanjem sistematskih razlika koje su se pojavile pri velikoj triangulaciji Evrope koja je bila u toku. Konferencija je u tri tačke svoje rezolucije »u interesu znanosti općenito, a geodezije napose«, preporučila primjenu metričkog sistema jedinica uz ove propozicije:

»7. U svrhu definiranja mjerne jedinice, zajedničke svim zemljama Evrope za sva vremena, Konferencija preporučuje izradu novog evropskog prametra. Duljina tog evropskog metra neka se što manje razlikuje od pariskog arhivskog metra... 8. Izradu novog prametra i usporedbu s njegovim kopijama, namijenjenima raznim zemljama, neka vodi jedna međunarodna komisija u kojoj će sve zainteresirane države imati svoje predstavnike... 9. Konferencija se zalaže za stvaranje evropskog međunarodnog ureda za mjere i utege.«

6.3.2. Konvencija o metru. Navedeni prijedlozi, iako se odnose samo na pramjeru i jedinicu duljine, te samo na Evropu, predstavljaju okosnicu suvremene svjetske metrološke organizacije (vidi odsječak 7.1). Ti prijedlozi su potakli Francusku akademiju znanosti da vladi Francuske predloži poduzimanje mjera za izradu novih pramjera i za precizno utvrđivanje njihovih vrijednosti usporedbom s arhivskim metrom i kilogramom. Na temelju prethodnih diplomatskih razgovora francuska je vlada sazvala u tu svrhu za august 1870. konferenciju predstavnika niza zemalja. Francusko-njemački rat bio je uzrokom da su prvom zasjedanju Međunarodne komisije za metar (Commission Internationale du Mètre) 8. augusta 1870. prisustvovali samo predstavnici 15 stranih država umjesto 24, koliko ih je pristalo da sudjeluje. Delegati su tom prilikom konstituirali spomenutu komisiju, a ujedno i svoj znanstveni organ — Comité des Recherches Preparatoires — kojem su stavili u zadatak da prouči i riješi tehnička pitanja.

Novo zasjedanje Međunarodne komisije za metar održano je 24. septembra 1872. u prisutnosti predstavnika 30 država, od toga 11 s američkog kontinenta. Komisija je prihvatila četrdesetak rezolucija koje među ostalim objašnjavaju način

izrade *novih* metričkih pramjera (etalona), način njihove usporedbe s pariskim arhivskim pramjerama, a preporučila je i osnivanje međunarodnog ureda za mjere i utege. Zadatak tog ureda bio bi čuvanje metričkih pramjera i širenje metričkog sistema jedinica u svijetu. Stoga 24. septembra 1872. možemo smatrati *stvarnim* rođendanom univerzalnog, međunarodnog metričkog sistema jedinica, iako se općenito smatra da je to 20. maja 1875, dakle tri godine kasnije.

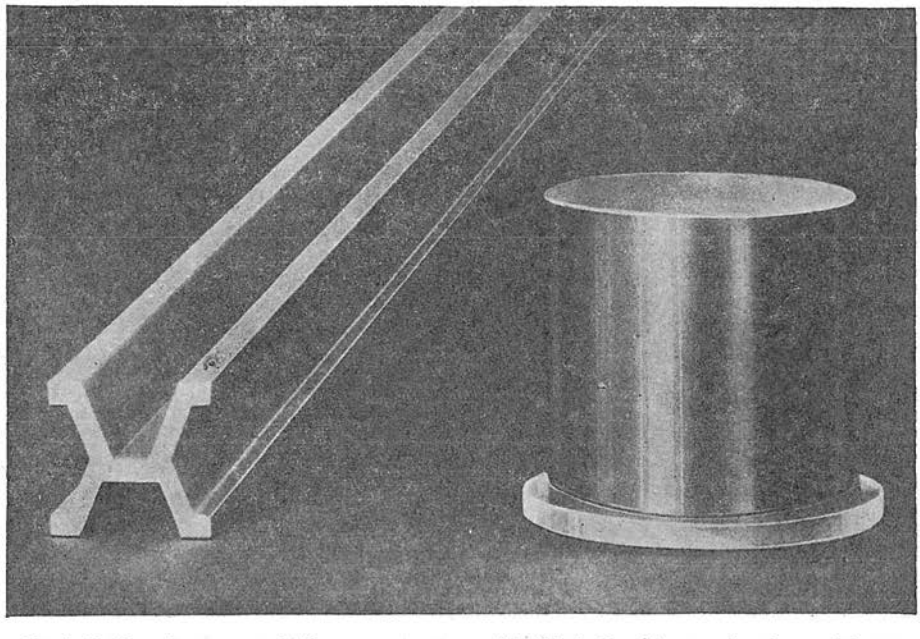
Razlog je tome to što su članovi Međunarodne komisije za metar bili uglavnom ljudi od znanosti, bez ovlaštenja svojih vlada da osnuju i garantiraju financiranje Međunarodnog ureda za mjere i utege. Stoga su 20. maja 1875. ovlašteni predstavnici 18 država održali u Parizu Diplomatsku konferenciju o metru (Conférence diplomatique du Mètre) i potpisali *Konvenciju o metru* (Convention du Mètre) sa svrhom »da se osigura međunarodno jedinstvo mjera i usavršava metrički sistem« (Konvencija je revidirana godine 1921).

6.3.3. Sadržaj Konvencije o metru. Diplomatska konferencija o metru od godine 1875. ostvarila je između ostalog ovo:

1. Definirane su jedinica duljine metar i jedinica mase kilogram u obliku materijalnih pramjera (sl. A.20).

2. Osnovan je Međunarodni ured za mjere i utege (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM) kao stalni znanstveni zavod Konvencije o metru (vidi odsječak 7.3).

3. Osnovan je Međunarodni komitet za mjere i utege (Comité International des Poids et Mesures, CIPM) sa zadatkom da upravlja znanstvenim i tehničkim radom Međunarodnog ureda u duhu Konvencije o metru (odsječak 7.1).



Sl. A.20. Pramjere metra i kilograma u naravnoj veličini. Pramjere su izrađene od legure platine i iridija. Prikazani prametar bio je osnovom mjerenja duljine u čitavom svijetu od 1889. do 1960. (Foto: Bureau International des Poids et Mesures)

4. Određeno je da se najmanje jednom svakih 6 godina u Parizu sazove Generalna konferencija za mjere i utege (Conférence Générale des Poids et Mesures), tj. skupština ovlaštenih predstavnika zemalja članica Konvencije o metru. Generalna konferencija vrhovna je operativna ustanova Konvencije o metru. Svoje odluke ona objavljuje u obliku preporuka koje se odnose na temeljne jedinice i konstante metričkog sistema i na metode reproduciranja jedinica pomoću pramjerila, objavljuje znanstvene rezolucije od međunarodne važnosti, utvrđuje program rada Međunarodnog komiteta (CIPM) i smjer razvoja BIPM, rješava financijske probleme itd.

Do 1965. Konvenciju o metru potpisalo je 40 država (njihov popis vidi u odlomku 6.5.1). Prednost članstva u Konvenciji o metru nije, naime, samo u tome što članica može preko svojih predstavnika na Generalnoj konferenciji i u CIPM (i u okviru ostalih odnosa između CIPM, Savjetodavnih odbora, BIPM i odgovarajućih specijalističkih organa) utjecati na preporuke Generalne konferencije i što je suvlasnik uređaja i pramjera koje se nalaze u BIPM već i u tome što može dobiti na upotrebu pramjere prvog reda (vjerne kopije međunarodnih pramjera) i besplatno zatražiti rješavanje specijalnih metroloških zadataka.

Na postanak metričkog sistema osvrnuli smo se u ovom i prethodnom odsječku dosta opširno. Dva su razloga tome. Prvi, što je postanak metričkog sistema u stručnoj i školskoj literaturi obrađen često nedovoljno ili čak netačno. Drugi razlog, koji nam se čini mnogo značajniji, jest činjenica da se iz povijesti razvoja znanstvene metrologije može razabrati povijest cjelokupne ljudske znanosti i tehnologije; to će nam u odlomku 7.3 te poglavljima 8, 9 i 10 pokazati i najnoviji radovi udružene svjetske metrološke znanosti. To je i razumljivo, jer »La mesure est le guide sûr de toute action humaine réfléchie«, tj. mjerenje je pouzdan vodič svakom promišljenom ljudskom činu, kako je u motu svoje knjige istakao *F. Avčin*.

6.4. Prametar i prakilogram od godine 1889.

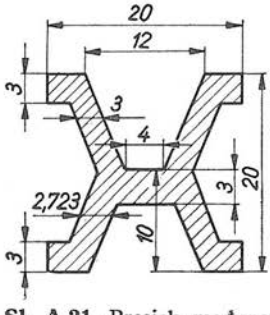
Na temelju zaključaka Diplomatske konferencije o metru i propozicija Konvencije o metru godine 1875. započeo je opsežan znanstveni i eksperimentalni rad na izradi pramjera metra i kilograma, a trajao je punih 14 godina, sve do 1889. U prvom redu valjalo je utvrditi od koje kovine treba izraditi prametar i prakilogram, a istodobno ustanoviti kakav oblik treba da imaju.

6.4.1. Izbor kovine izvanredno je važan, jer od pramjere se zahtijeva da postojano pohranjuje vrijednost veličine koju utjelovljuje (vidi odlomak 5.3.2). Da bi se udovoljilo traženim zahtjevima, trebalo je odabrati kovinu koja ne stari; međutim većina kovina i njihovih legura podvrgnuta je starenju i sitnim promjenama svojih izmjera tokom vremena. Udarci, vibracije, zagrijavanje i ohlađivanje ubrzavaju promjene rasporeda atoma u kristalnim rešetkama kovina i time dovode u pitanje stabilnost izmjera. Osim toga, kovina od koje je izrađena pramjera ne smije oksidirati, ne smije se kemijski mijenjati, mora biti dovoljno tvrda i mora imati što manji temperaturni koeficijent širenja itd. Francuski kemičar *H. Sainte Claire Deville* dugotrajnim je pokusima ustanovio da tim zahtjevima najbolje odgovara kemijski izvanredno postojana legura koja se sastoji od 90% platine i 10% iridija (maseni udjeli). Za tadašnje vrijeme bilo je dobivanje tih metala u ekstremnoj čistoći i njihovo legiranje znatan tehnološki pothvat. Sigurno je, međutim, da je i ta platinsko-iridijeva legura podložna zubu vremena (ovdje treba vrijeme shvatiti u vrlo širokom smislu; ne zaboravimo naime moto: A tous les temps . . . iz

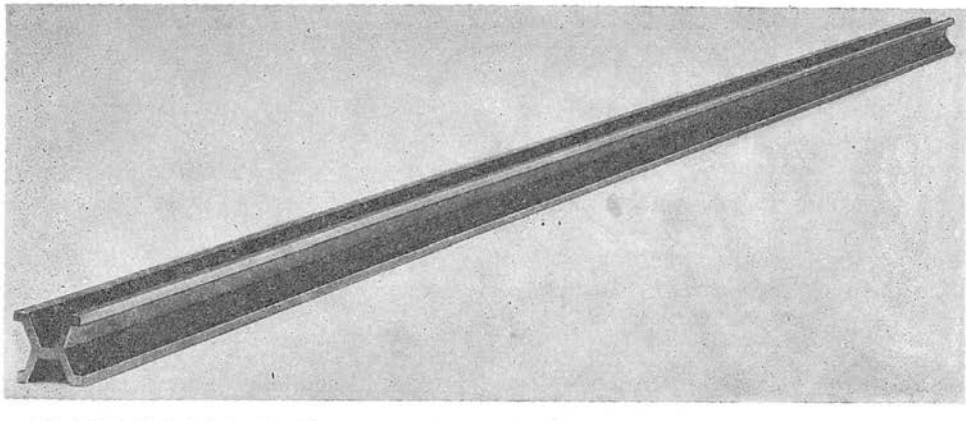
odlomka 6.2.1), ako ne zbog drugog, a ono zato što je legura podvrgnuta unutarnjim naprezanjima; samo kod pravilno kristaliziranih tjelesa molekule su grupirane u položaju ravnoteže.

Od spomenute legure platine i iridija izrađene su pramjere kilograma i metra (sl. A.20). Međunarodni prakilogram čak je zadržao i isti oblik kakav je imao arhivski prakilogram (podrobnije o pramjeri kilograma vidi u odsječku 9.3), ali oblik i profil međunarodnog metričkog štapa postali su bitno različiti od arhivskog prametra. Ustanovljeno je, naime, da se krajnjom mjerom (étalon à bouts), a takva je mjera bio arhivski metar, prilikom uspoređivanja duljina postižu netačniji rezultati negoli pomoću mjere s crticama (étalon à traits). Stoga je zaključeno da međunarodni prametar i njegove kopije budu mjere s crticama ugraviranim u platinsko-iridijev štap, a između njih će biti udaljenost 1 metar.

6.4.2. Najprikladniji oblik metričkog štapa pronašao je francuski akademik *H. Tresca*. On je utvrdio da je najpovoljniji profil štapa sličan slovu H, jer ima niz prednosti pred svim ostalim profilima: njegov moment otpora 39 puta je veći nego što ga ima arhivski prametar (masa samo oko 50 % veća), a ravnina koja veže oba uspravna kraka profila H (sl. A.21) jest *neutralna ravnina*. Stoga se duljina metarske crte, koju možemo zamisliti duž štapne pramjere u neutralnoj ravnini, ne mijenja ako se vodoravno poduprti štap savije pod djelovanjem vlastite težine. Ne smijemo naime smetnuti s uma da je ovdje riječ o najpreciznijim mjerenjima duljine koja se u svijetu uopće mogu izvesti. Štapni se metar pohranjuje i upotrebljava u vodoravnom položaju; ako bi bio ovješen vertikalno, produljio bi se za oko 0,65 mikrometara ($0{,}65 \cdot 10^{-6}$ m), a ako bi bio poduprt u vertikalnom položaju, skratio bi se za isto toliko. I tlak okolnog zraka je od utjecaja: u vakuumu je štap za oko 0,48 mikrometara dulji negoli pri tlaku od 1 normalne



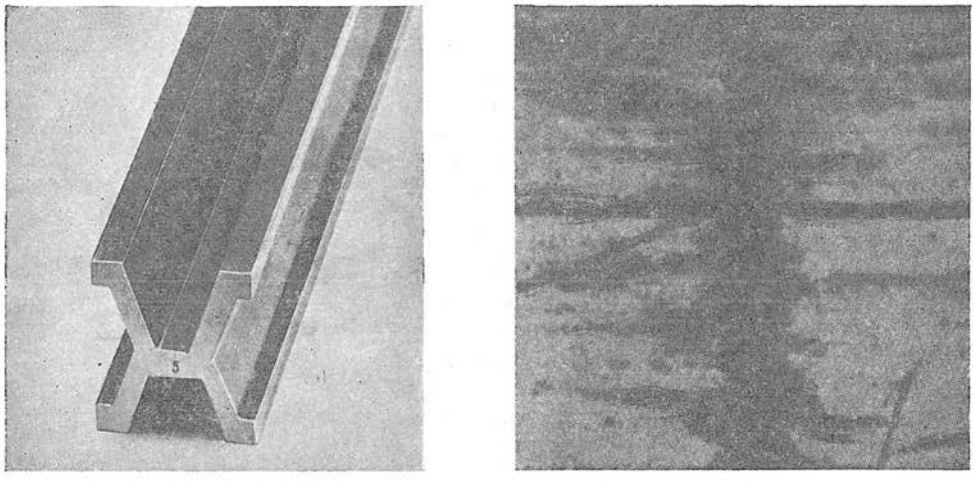
Sl. A.21. Presjek međunarodnog prametra sa crticama ugraviranim u neutralnu ravninu. Izmjere su u milimetrima



Sl. A.22. Izgled jedne kopije prametra koji je 1889 ... 1960. bio osnovom mjerenja duljine za sve zemlje koje primjenjuju metrički sistem jedinica. (Foto: Bureau International des Poids et Mesures)

atmosfere. Odabrani oblik H štapne mjere ima i druge prednosti: utrošak skupocjenog materijala relativno je malen, zbog velike površine štap brzo poprima temperaturu okoline itd.

Na svakom kraju prametra ugravirane su u neutralnoj ravnini tri crtice (sl. A.23 lijevo) koje su međusobno udaljene 0,5 mm. Pod jedinicom duljine »1 metar« razumijeva se udaljenost između srednjih crtica. Crtice su dijamantnim šilom ugravirane u ispoliranu neutralnu ravninu prametra. Na slici A.23 — desno vidimo (vertikalno) oko 650 puta povećanu crticu. Ona je nejednolika, širina joj iznosi oko 9 mikrometara ($9 \cdot 10^{-6}$ m), pa se stoga mjerni mikroskopi s vizuelnim očitanjem mogu namjestiti povrh njene osi s maksimalnom pouzdanošću oko $\pm 0{,}2$ mikrometra ($0{,}2 \cdot 10^{-6}$ m; više o tome vidi u odsječku 8.5). Ukupna duljina štapa iznosi oko 102 centimetra, tj. od srednjih crtica do kraja štapa udaljenost je oko 1 cm.



Sl. A.23. Jedan kraj kopije međunarodnog prametra (lijevo). Retuširanjem fotografije tri su crtice u neutralnoj ravnini postale uočljive. Desna fotografija prikazuje (vertikalno) neravnomjeran trag — crticu koju je dijamantno šilo urezalo u neutralnoj ravnini prametra (povećanje približno 650 puta)

6.4.3. Međunarodni prametar. Na opisanim principima izrađeno je između 1882. i 1889. četrdesetak primjeraka prametra. Rezultate tog izvanredno opsežnog rada sankcionirala je Generalna konferencija za mjere i utege na svom *prvom* zasjedanju 26. septembra 1889. Konferencija je jedan od prametara, obilježen oznakom A6, proglasila međunarodnim prametrom (prototype international du mètre), a jedinicu duljine »metar« definirala ovako:

»Jedinica duljine je metar koji je pri temperaturi 0 °C definiran razmakom između dvije srednje crtice na pramjeri metra, pohranjenoj u Međunarodnom uredu za mjere i utege u Sèvresu. Pramjera ima tačno duljinu 1 metar kad je pri normalnom atmosferskom tlaku poduprta u vodoravnom položaju sa dva valjka promjera najmanje 1 centimetar, koji su međusobno udaljeni 571 milimetar.« (To je u stvari usavršena definicija koju je Generalna konferencija objavila 1927.)

Tablica **A-11**

Razdioba kopija međunarodnog prametra i međunarodnog prakilograma

Država	Prametar broj	Prakilogram broj
Argentina	—	45
Australija	—	44
Austrija	15, 19	14, 33
Belgija	12	28, 37
BIPM, Sèvres	13, 26	1, 9, 31
Čehoslovačka	—	41
Danska	—	27
Finska	5	23
Francuska	4, 8, 20	13, 17, 25, 34, 35
Italija	1, 9	5, 19
Japan	22	6
Jugoslavija	30	11
Južnoafrička Republika	—	56
Madžarska	14	16
Meksiko	25	—
Njemačka (SR)	23	15, 18, 52
Njemačka (DR)	7, 18	22, 55
Nizozemska	—	53
Norveška	3	36
Portugal	10	10
Rumunjska	—	2
Sovjetski Savez	11, 28	12, 26
Švedska	29	40
Švicarska	2	38
Španjolska	17, 24	3, 24
Turska	—	54
Velika Britanija	16	—
USA	21, 27	4, 20

Države članice Konvencije o metru dobile su ostale primjerke prametra, koji su tako postali nacionalni prametri (prototypes nationaux du mètre). Tako je, na primjer, Belgija dobila primjerak broj 12, Norveška broj 3, Švicarska broj 2 itd. (vidi tablicu A-11). Nacionalni laboratoriji tih država dobili su uz to sve ostale metrološke upute i propise kako se i pod kojim uvjetima nacionalni prametar primjenjuje. Jedan od tih podataka je npr. jednadžba

$$L = L_0 (1 + a\vartheta + b\vartheta^2),$$

koja prikazuje ovisnost razmaka L među crticama o Celzijevoj temperaturi ϑ. Slovo L_0 predstavlja udaljenost među crticama prametra pri $\vartheta = 0\,°C$ (npr. za nacionalni prametar USA je $L_0 = 0{,}9999986$ m), dok su a i b konstante karakteristične za leguru od koje su izrađene pramjere metra (npr. $a = 8{,}621 \cdot 10^{-6}/°C$, $b = 1{,}8 \cdot 10^{-9}/°C^2$). Iz gornje jednadžbe, koja vrijedi za ϑ u rasponu od 0 do 35 °C (a da nepouzdanost pri tom ne bude veća od 0,1 μm), proizlazi da bi pri kolebanju temperature za 0,1 °C prametar bio oko 0,86 mikrometara dulji ili kraći od

vrijednosti L_0. Stoga se pri mjerenju pomoću međunarodnog ili nacionalnog prametra temperatura održava katkada čak na $\pm 0{,}001\,^{\circ}C$ pouzdano (i bolje!), tako da se u skladu sa gornjom jednadžbom s nepouzdanošću $\pm 0{,}01\ \mu m$ zna koliki je pri stanovitoj temperaturi ϑ razmak L među crticama na njemu.

6.4.4. Nepouzdanost pramjera. U odlomku 5.3.2 naveli smo podatke o tome kako se s vremenom pojavila razlika između mase međunarodnog prakilograma i mase jedne nacionalne pramjere mase. To nije osamljena pojava, već *pravilo* utvrđeno iskustvom za proteklih sedamdesetak godina. Uskoro nakon godine 1889. utvrđeno je naime da se u toku nekoliko desetljeća *povećala* razlika između duljine međunarodnog prametra i nacionalnih prametara (te radnih kopija pohranjenih u Međunarodnom uredu za mjere i utege, BIPM). Metrološke organizacije

Tablica **A-12**

Odstupanje duljine nacionalnih prametara od duljine međunarodnog prametra (u μm)

Broj	1901.	1920.	1932.	1933.	1934.	1949.	1956.
16	—	−0,07	−0,20	−0,11	−0,05	+0,03	−0,08
17	—	−0,23	—	—	—	—	—
18	−0,29	−0,41	—	—	−0,33	—	−0,55

Tablica **A-13**

Odstupanje mase nacionalnih prakilograma od mase međunarodnog prakilograma (u μg)

Broj	1913.	1939.	1946.	1948.	1949.	1953.	1957.
4	+ 6	—	—	0	—	—	—
9	− 5	+51	+18	+24	−4	—	+ 5
31	−21	− 3	−47	—	—	−75	−45
32	—	+63	+41	—	—	—	—

pojedinih država povremeno, naime, šalju svoje nacionalne prametre i prakilograme na kontrolu-usporedbu s međunarodnim prametrom u BIPM. To se lijepo vidi iz tablice A-12 koja prikazuje za koliko se mikrometara ($\mu m = 10^{-6}$ m) promijenila duljina kopija broj 16, 17 i 18 međunarodnog prametra od godine 1889. do 1956. Analogno tablica A-13 sadrži podatke o tome kako se s vremenom mijenja masa nacionalnih prakilograma (kopije broj 4, 9, 31 i 32 međunarodnog prakilograma) u odnosu prema masi međunarodnog prakilograma.

Međunarodna pramjera i njene kopije (nacionalne pramjere) izrađene su od jednake legure platine i iridija. Prema tome je očito da se *svima* njima s vremenom mijenja vrijednost veličina (duljina, masa) koje utjelovljuju, dakle pramjere

nemaju onu osnovnu značajku koja treba da resi vrhunsku pramjeru: stalnost utjelovljene fizikalne veličine. To je razumljivo: u tvari metarskih štapova i kilogramskih utega, čija je struktura polikristalinična, očito nastaju ireverzibilne promjene zbog brojnih nepravilnosti u građi rešetke. Stoga se npr. danas smatra da nepouzdanost bivšeg međunarodnog prametra iznosi 10^{-7} do 10^{-6} metara, tj. 0,1 ... 1 mikrometar.

Rekli smo bivšeg prametra. Od godine 1960. i službeno je, naime, na snazi tzv. valni metar, kojemu je osnova izvanredno postojana duljina vala narančastog zračenja izotopa kriptona 86, dakle prava prirodna pramjera. Od 1889. do 1960, dakle 71 godinu, štapni su prametri, međunarodni i mnoštvo nacionalnih, korisno služili čovječanstvu kao osnova najpreciznijih mjerenja duljine. U međuvremenu je u Međunarodnom uredu za mjere i utege, kao i u nekoliko velikih dobro opremljenih nacionalnih metroloških zavoda, obavljen dugotrajan i mukotrpan znanstveni i tehnološki razvojni rad na pronalaženju pouzdanijeg pramjerila jedinice duljine »1 metar«. O tom »valnom metru«, koji se bilo gdje u svijetu dade reproducirati s pouzdanošću oko $\pm 10^{-8}$ m $= \pm 0{,}01$ μm, opširno se govori u poglavlju 8.

Iako pramjere jedinicâ mase i duljine imaju opisane nedostatke, znanstvenoj metrologiji one su i dalje neophodne ili korisne. U pogledu prakilograma to je posve jasno: čovječanstvo ne zna utjeloviti stanovitu vrijednost fizikalne veličine »masa« (ili njoj jednakovrijedne veličine) na bolji način nego kako to čini danas (vidi odlomak 9.3.3). U pogledu štapne mjere fizikalne veličine »duljina« situacija je drukčija: primjena kriptonskog pramjerila (vidi poglavlje 8) može doduše isključiti upotrebu štapnih mjera u znanstvenoj metrologiji, ali to nije najpovoljnije za metrologiju duljine. U svim metrološkim zavodima postoje naime interferencijski komparatori (odsječak 8.5) i štapne mjere, a to je dragocjen, skup i precizan instrumentarij. Stoga je za vrhunsku metrologiju duljine racionalno da pomoću zračenja kriptona 86 povremeno baždari razmake među crticama na štapnim mjerama i te mjere upotrebljava za komparacijska mjerenja duljina drugih štapnih mjera. Budući da je pri tom za ostvarivanje što veće pouzdanosti mjerenja odlučujuća finoća crtica na štapnim mjerama i pouzdanost namještanja mikroskopa, usavršavanje štapnih mjera danas je orijentirano u smislu tanjih crtica i boljih mikroskopa (vidi odlomak 8.5.2).

6.5. Sumrak nemetričkih sistema jedinica

6.5.1. Članovi Konvencije o metru. Do godine 1965. Konvenciju o metru potpisalo je 40 država. To su: Argentina (1875), Australija (1947), Austrija (1875), Belgija (1875), Brazil (1875, 1954), Bugarska (1911), Čehoslovačka (1922), Čile (1908), Danska (1875), Dominikanska Republika (1954), Finska (1921), Francuska (1875), Indija (1956), Indonezija (1960), Irska (1926), Italija (1875), Japan (1885), Jugoslavija (1879), Južnoafrička Republika, Kanada (1907), Koreja (1955), Mađarska (1875), Meksiko (1890), Nizozemska (1929), Njemačka (1875), Norveška (1875), Poljska (1925), Portugal (1875), Rumunjska (1881), Sovjetski Savez (1875), Španjolska (1875), Švedska (1875), Švicarska (1875), Tajland (1912), Turska (1875, 1933), Ujedinjena Arapska Republika, USA (1875), Velika Britanija (1884), Urugvaj (1908) i Venezuela (1875). U zagradi je navedena godina pristupanja Konvenciji. Metrički sistem jedinica uveden je, međutim, nacionalnim zakonima i u nekim državama koje nisu potpisnice Konvencije o metru. To se vidi iz tablice A-14 koja pokazuje koje godine su pojedine države propisale obaveznu primjenu metričkog sistema.

S druge strane Sjedinjene Američke Države, Ujedinjeno Britansko Kraljevstvo, neke njene bivše i sadašnje kolonije, Kanada i Australija silom inercije i dalje primjenjuju tzv. angloameričke jedinice (vidi poglavlje A.11), premda su gotovo sve one potpisnice Konvencije o metru i premda su fakultativno propisale metrički sistem jedinica (tablica A-14). Zbog toga privrede i stanovnici tih zemalja doživljuju niz teškoća, koje ćemo spomenuti u naredna dva odlomka. Te tehnički visoko razvijene zemlje (USA, Englesku, Kanadu) očekuju u toku nekoliko desetljeća veliki napor i veliki *troškovi* ako se odreknu svog, stvarno upotrebljavanog skupa jedinica, i u cijelosti prihvate metrički. Takav »prijelaz« predstavlja pravi industrijski, trgovački, školski i pojmovni potres za gotovo sve ljude dotične zemlje. Zato se takvi prijelazi pažljivo pripremaju; o tome se govori u odsječku 6.6.

Tablica A-14

Države koje su zakonima propisale primjenu metričkog sistema jedinica

Afganistan	1926	Kuba	1882
Albanija	1951	Libanon	1935
Alžir	1842	Libija	1927
Argentina	1887	Luksemburg	1816
Austrija	1876	Madžarska	1874
Belgija	1816	Malta	1921
Bolivija	1871	Maroko	1923
Brazil	1862	Meksiko	1895
Bugarska	1892	Monako	1854
Burma (fakultativno)	1920	Mongolija	1935
Čehoslovačka	1871	Nepal	1963
Čile	1864	Nikaragva	1910
Danska	1912	Nizozemska	1816
Dominikanska Republika	1942	Njemačka	1871
Egipat (UAR)	1951	Norveška	1882
Ekvador (1865)	1871	Nova Kaledonija	1862
Finska	1886	Pakistan	1967
Francuska (1795)	1840	Panama	1916
Grčka (fakultativno)	1836	Paragvaj	1889
Gvatemala	1912	Peru	1869
Haiti	1922	Poljska	1919
Honduras	1910	Portugal	1852
Indija (fak. 1920)	1965	Rumunjska	1864
Indonezija	1938	San Salvador	1910
Irak (fakultativno)	1931	Saudijska Arabija	1964
Iran	1933	Sirija	1935
Irska (fakultativno)	1897	Sovjetski Savez (fak. 1899)	1918
Island	1907	Švedska	1889
Italija	1863	Švicarska	1875
Izrael	1947	Španjolska (1849)	1860
Japan (fak. 1893)	1966	Sudan	1955
Jordan	1953	Tajland	1923
Jugoslavija	1873	Tunis	1895
Kambodža	1914	Turska	1931
Kanada (fakultativno)	1871	Urugvaj	1894
Kina (fak. 1929)	1959	USA (fakultativno)	1866
Kolumbija	1853	Velika Britanija (fak.)	1897
Kongo (Kinšasa)	1910	Venecuela	1912
Koreja (Južna)	1949	Vijetnam (Sjeverni)	1950
Kostarika	1910		

Upravo u naše vrijeme nemetrički sistemi jedinica doživljuju sumrak. Niz država zakonom propisuje metrički sistem kao obavezan. Tako je, na primjer, *Indija* zakonom od 25. decembra 1956. odredila za posljednji rok potpune i obavezne primjene metričkog sistema jedinica početak 1967; propisala je, dakle, prijelazni period od 10 godina. Prije toga, zakonom od godine 1920, metrički je sistem bio dopušten fakultativno. Obavezna primjena metričkog sistema uvođena je u Indiji postupno: godine 1962. uvedene su jedinice mase i duljine, 1963. jedinice volumena, a godine 1965. metričke jedinice površine. Primjerom Indije pošao je i *Pakistan*, koji je godine 1967. objavio zakon o obaveznoj primjeni metričkog sistema. Izvanredan se događaj zbio godine 1951. kad je *Japan* zakonom propisao obaveznu primjenu metričkog sistema jedinica s time da reforma mora završti do godine 1966. U današnje vrijeme to je veći događaj nego uvođenje tog sistema u Indiji, jer Japan je najveća industrijska velesila Azije, treća sila na svijetu uopće.

Za uvođenje metričkih jedinica umjesto angloameričkih izjasnile su se i mnoge države zapadne i ekvatorske *Afrike* koje su nedavno stekle nezavisnost: Gvineja, Gornja Volta, Nigerija, Senegal, Kongo (Brazavil), Gabon i druge. Iako manjkaju pouzdani podaci, saznaje se da su i istočnoafričke države: Kenija, Tanzanija i Uganda 1. marta 1967. odlučile da napuste angloameričke jedinice i da propišu obaveznu primjenu metričkih.

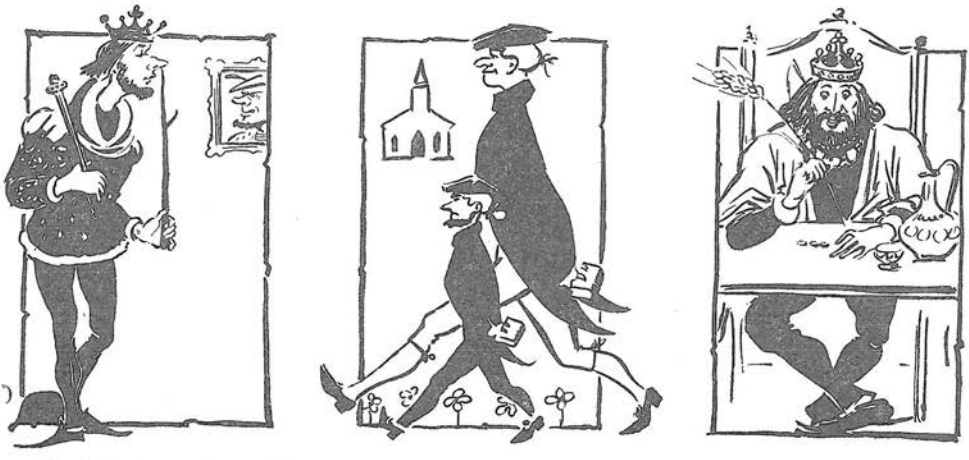
Valja naglasiti da je metrički sistem jedinica odavno uveden *fakultativno* i u onim državama koje su kolijevka angloameričkih jedinica: USA 1866, Kanada 1871, Velika Britanija 1897, Australija 1947. U toku je pripremanje prijelaza na *obaveznu* primjenu metričkog sistema i u tim zemljama (podrobnosti vidi u odsječku 6.6): godine 1965. vlada Velike Britanije objavila je saopćenje o prijelazu na metrički sistem do godine 1975, australski Senat je 1967. imenovao posebnu komisiju za proučavanje mjera koje valja poduzeti prilikom napuštanja angloameričkih jedinica, a u USA se priprema (1968) zakon o trogodišnjem prijelazu na metrički sistem!

6.5.2. Poteškoće s nemetričkim sistemima. Tvrđave angloameričkog sistema jedinica su dakako USA i Britanija. No za razliku od Evrope, gdje se angloameričke jedinice gotovo uopće ne upotrebljavaju, Angloamerikanci *ne primjenjuju isključivo* svoje palac-funta jedinice. Na primjer, pravila računanja i računski strojevi kod njih su isto tako decimalni kao i u Evropi, tako da i Amerikanci preračunavaju svoje jedinice međusobno na temelju decimalnog računa. Ali kako mukotrpno teče takav račun pokazuje nam primjer koji je u »The Edmonton Journal Week-end Magazine« objavio *L. E. Howlett*, direktor kanadskog metrološkog zavoda National Research Council, predsjednik (1960...1967) Međunarodnog komiteta za mjere i utege (CIPM) i glavni urednik časopisa »Metrologia«. On pripovijeda kako je neki Francuz zamolio svog prijatelja Kanađanina da izračuna koliko gallona zaprema 9,5 pounda (lb) vode (o jedinicama koje se ovdje spominju vidi poglavlje B.11). Da bi dobio volumen u gallonima, Kanađanin je morao obaviti ovaj proračun

$$\frac{9{,}5}{62{,}5} \cdot \frac{1728}{277{,}42},$$

jer je znao da je masa jedne kubne stope (cubic foot, ft^3) vode 62,5 lb, a odnose 1728 cubic inch = ft^3 i 277,42 in^3 = gallon potražio je u tablicama. Kad je proračun bio dovršen, Francuz je sa simpatijom klimnuo Kanađaninu i rekao: »U mojoj

zemlji masa vode u kilogramima jednaka je njenom volumenu u litrima, dakle 9,5 kg vode zaprema volumen 9,5 litara«. Možda je to samo anegdota, ali nastaju i pojave koje su vrlo ozbiljne (priča se da jedna američka poslovica kaže: »Kod Amerikanaca je lisnica najosjetljiviji dio tijela«). Poslije drugog svjetskog rata američka i kanadska poduzeća nisu ponekad dobila ponuđene poslove, naročito u Južnoj Americi i Evropi, iako su bila najbolji nudioci kako u financijskom pogledu, tako i u pogledu rokova. Razlog je bio taj što nacrti, a prema tome i buduća postrojenja, nisu bili izrađeni s jedinicama metričkog sistema. Navodno je neki brazilski poduzetnik prilikom pregovora u Kanadi rekao: »Radije ću evropskom proizvođaču platiti više, ali nisam više sposoban da razbijam glavu s tim vašim jedinicama, nikako ne mogu stvoriti predodžbu o postrojenju«. Sigurno vrijedi i obratno: metrički industrijski proizvodi teško se prodaju u angloameričkom jezičnom području.



Sl. A.24. Za angloamerički sistem jedinica možemo reći da je kraljevskog i slučajnog porijekla: *yard* je bio definiran udaljenošću između nosa i ispružene lijeve ruke kralja Henryja I, *rod* je bila ukupna duljina stopala 16 slučajno odabranih ljudi koji su pošli u crkvu, a *inch* ukupna duljina tri zrna koje je Edward II odabrao iz sredine ječmenog klasa. O angloameričkom sistemu jedinica opširno se govori u poglavlju B.11 ove knjige

Još nekoliko primjera, pa čak i zloupotreba angloameričkog sistema jedinica navodi *Howlett*. Evo na kakve teškoće nailaze djeca u školi USA, Australije ili Kanade kad im učiteljica zada ovakav zadatak: »Duljina ceste iznosi 5 miles, 90 rods, 3 yards, 1 foot i 9 inches; izrazite duljinu ceste u inches«. Đaci moraju obaviti ovaj račun

$$5 \cdot 1760 \cdot 36 + 90 \cdot 5{,}5 \cdot 36 + 3 \cdot 36 + 1 \cdot 12 + 9$$

da bi na kraju dobili rezultat 334 749 inches! Pri tom moraju ili pamtiti ili pogledati u svoje udžbenike da je mile = 1760 yard, yard = 3 foot = 3·12 in = 36 in, te rod = 5,5 yd. A primjer zloupotrebe otkrio je jednog dana američki učenjak *G. Bell*: neki rudnik ugljena plaćao je svoje rudare na temelju iskopanog ugljena izraženog u »dugačkim tonama« (long ton = 2240 lb), a ugljen je prodavao na bazi »kratke tone« (short ton = 2000 lb). Tko zna kakve se sve prijevare čine sa tri vrste ounce (fluid, avoirdupoids, troy), sa dvije vrste milja (nautical, statute) itd.?

U pogledu valute Amerikanci su nešto bliže decimalnoj razdiobi od Engleza. To nam prikazuje ovaj pregled

Engleski novac		Američki novac	
guinea	= 21/20 pound	dime	= 1/10 dollar
crown	= 1/4 pound	nickel	= 1/20 dollar
schilling	= 1/20 pound	quarter	= 1/25 dollar
penny	= 1/240 pound	cent	= 1/100 dollar
farthing	= 1/960 pound	mil	= 1/1000 dollar

6.5.3. Metrički sistem u angloameričkim zemljama. U jednom području djelatnosti Kanađani, Australci, Amerikanci i Englezi potpuno su na pozicijama metričkog sistema. To je područje *elektromagnetizma*, gdje su — pogotovo Amerikanci — umjesto CGSE, CGSM i Gaussova sistema (vidi glavu E) prihvatili Međunarodni sistem jedinica (SI) ne samo u praksi već i u strogo znanstvenim raspravama i u visokoškolskoj nastavi. Možda je baš zato angloamerička literatura (osobito elektronička) stekla nakon drugog svjetskog rata toliku popularnost u Evropi. U *kemijskoj* industriji Amerikanci također opsežno upotrebljavaju metrički sistem.

U Engleskoj su neke industrije u cijelosti prihvatile metrički sistem jedinica. Izraziti primjer je *farmaceutska* industrija. Od godine 1914. Englezi su u farmaceutskim kôdima upotrebljavali oba sistema, metrički i imperijski, a 1952. Britansko udruženje farmaceutske industrije odlučilo je da se od 1953. farmaceutski proizvodi opisuju metričkim jedinicama. U suradnji s Federacijom proizvođača stakla odlučili su da svoje proizvode šalju u bocama sadržaja 25 ml do 2,5 litra. Doista, liječnici i ljekarnici upotrebljavaju sada jedino metrički sistem jedinica.

U Engleskoj se nalazi sjedište Tehničkog odbora 17 za čelik i njegova ispitivanja Međunarodne organizacije za standarde, ISO — International Standards Organisation. Taj odbor, jednako kao i ostali odbori ISO, izdaje svoju dokumentaciju, neku vrstu »svjetskih standarda« (ISO), a za TO 17 tu dokumentaciju priprema službena ustanova engleske standardizacije — British Standards Institution (BSI). Unatoč tome Tehnički odbor 17 izdao je već godine 1953. publikacije o ispitivanju tvrdoće po Rockwellu, Vickersu i Brinellu, u kojima su pojedine veličine izražene samo milimetrima, kilopondima, kp/mm², kpm, cm², m/s, dakle isključivo jedinicama *metričkog* sistema.

I neki britanski standardi (BS) isključivo upotrebljavaju metričke jedinice. Na primjer BS-558 i BS-564 (1953) za anode od nikla upotrebljavaju isključivo jedinice gram, mililitar i °C. Isto tako BS-2039 (1953) za emajlirane okrugle bakrene žice navodi izmjere samo u metričkim jedinicama, a temperaturne intervale u °C. Itd. Itd.

6.6. Razlozi i način prijelaza na metrički sistem jedinica

6.6.1. Pripreme za prijelaz. Možemo sebi zamisliti koliko teškoća ljudima engleskog jezičnog područja uzrokuje dvojakost sistema jedinica; vidjeli smo, naime, već na nekoliko primjera u odsječku 6.5 da metrički sistem jedinica nezadrživo prodire u njihov svakodnevni život. Nije stoga čudno da ugledni ljudi tih zemalja traže da se angloamerički sistem jedinica u *potpunosti* što prije zamijeni metričkim. Oni to čine i u ime čitavih stručnih i industrijskih organizacija. Na primjer, *C. F. Kayan*,

predsjednik Američkog udruženja za instrumentaciju, u referatu »Chaos in the unit system« na 15. godišnjoj skupštini tog udruženja čak predlaže kakav treba konkretno da bude program prijelaza na metrički sistem. Itd.

Sve to, kao i niz drugih razloga, ponukalo je Amerikance i Engleze da ponovno razmotre način kompletnog prijelaza na metrički sistem jedinica. Dok se o tome razmišlja, njihov državni metrološki zavod National Bureau of Standards (NBS) započeo je dvojakim baždarenjem mjerila i instrumenata: u metričkom i angloameričkom sistemu istodobno (osim toga NBS preporučuje primjenu Međunarodnog sistema jedinica u svim svojim publikacijama). Time Amerikanci ušteđuju vrijeme koje će ionako morati utrošiti prilikom prijelaza na metrički sistem. O prijelazu se raspravlja i na najmjerodavnijem državnom mjestu. Američki ministar trgovine (kao i u većini zemalja, i u USA je Ministarstvo trgovine najviši operativni organ zakonske metrologije), potaknut možda anketom u kojoj su se američki aeronautički inženjeri izjasnili sa 7 : 1 za uvođenje metričkog sistema, obavezao je NBS da pronađe najpovoljniji put prijelaza na metrički sistem jedinica. Upoznat s potezima Japana, Indije i drugih zemalja, američki je ministar 1959. razborito izjavio: »Metrički sistem je svuda oko nas. Problem stoga nije u tome da se izvrši revolucija mjerenja, već da se usmjeri i ubrza evolucija u primjeni metričkog sistema«.

Službeni američki krugovi smatraju da je za prijelaz na metrički sistem potrebno najmanje deset godina. Prijelaz mora biti planski i u tome će im mnogo pomoći studij kojim se bavi posebni odbor Američkog udruženja za unapređenje znanosti u zajednici s istoimenim britanskim udruženjem. Pri utvrđivanju tog plana od velike će koristi biti iskustvo Indije, a pogotovo Japana. Kad jednom USA kompletno prijeđu na univerzalni Međunarodni sistem jedinica (SI), praktički će njime biti obuhvaćen čitav svijet, jer industrijski slabije nemetričke zemlje nužno će morati poći stopama tog industrijskog kolosa.

6.6.2. Utjecaj izvoza na prijelaz. Možda su prijelazu na metrički sistem jedinica još bliži Englezi, koji 50% svog izvoza šalju u zemlje s metričkim sistemom jedinica. Zanimljivo je i poučno s koliko smisla za realnost Englezi ocjenjuju položaj svoje privrede i izvoza, dakle i svog životnog standarda, u odnosu na metrički sistem. U to nas uvjerava članak »Britanija pred svojom decimalnom budućnošću«, koji je potkraj mjeseca marta 1966. Britanska ambasada u Beogradu objavila u svom »Pregledu«:

»Saopćenje da Britanija namjerava uvesti decimalni sistem došlo je i prošlo sasvim mirno. Iz industrije su se čuli neki glasovi odobravanja i mišljenje da će se decimalni sistem, iako će to u početku izazvati izvjesnu pomutnju, u krajnjoj liniji ipak isplatiti. Jedva da se čuo neki glas neodobravanja — čak ni u rubrici pisama čitalaca The Times.

Kada je došlo, saopćenje je bilo iznenadno. U stvari, odluka o uvođenju postepene promjene je kulminacija stogodišnje debate i kraj rasprave koja je naročito vatreno plamsala posljednjih godina. Tokom nedavnog perioda mišljenje industrije i trgovine, koje su podsticale glavne poslovne organizacije — Federacija britanske industrije i Udruženje britanskih trgovinskih komora — nesumljivo se pripremalo za ovu promjenu. Prije dvije godine Ustanova britanskih standarda (British Standards Institution — BSI), koja drži svoj prst na pulsu mnogih industrija, podnijela je izvještaj da je većina smatrala promjenu neizbježnom.

Odluka o promjeni mogla je biti donesena baš u ovom trenutku kada Britanija, kao nikad ranije, tako usko surađuje s drugim zemljama. To je korak koji nesumnjivo

izgleda veoma poželjan mnogim industrijama. Na mnogim područjima strojogradnje, u kemijskoj industriji i u proizvodnji električke opreme, poduzeća već imaju dugogodišnje iskustvo, jer rade u dva proizvođačka smjera: jedan radi zadovoljavanja potražnje evropskih kupaca koji su, razumljivo, tražili proizvode u metričkim izmjerama i prema metričkim standardima. Neke industrije su krenule još i dalje te potpuno prešle na decimalni sistem, bez obzira šta su druge radile; među njih se ubrajaju i proizvođači znanstvenih aparata i fotografske opreme.

Nema sumnje da je u današnjoj shemi trgovine prijelaz na decimalni sistem mogao biti samo pitanje vremena. Za posljednjih deset godina opseg britanskog izvoza u zemlje s decimalnim sistemom povećao se od 40% na 50%; daljnji veliki udio britanskog izvoza odnosi se na zemlje koje su i same u fazi prijelaza na decimalni sistem. Bitan razlog za prelaženje Britanije nesumnjivo je želja da se olakša izvoz u zemlje koje već imaju ili koje namjeravaju da pređu na decimalni sistem. Sporedan razlog je taj, da će promjena za duži period omogućiti britanskim industrijama da uvedu daleko veći stupanj standardizacije osnovnih inženjerskih postupaka i proizvoda no što je ikad ranije bilo moguće.

Ali sada je kocka bačena i počinje duga operacija: zamjenjivanje vijekovima poštovanih jedinica koje su dovodile do bijesa strance, tj. zamjenjivanje jardi, stopa, inčeva, kvintala, libri i unča centimetrima i metrima, gramima i kilogramima. Naravno, taj prijalaz će dugo trajati. Ministar trgovine *Douglas Jay* dao je ovo objašnjenje: »Vlada smatra da bi bilo poželjno da britanske industrije na širem frontu usvoje decimalne jedinice, sektor po sektor, sve dok taj sistem s vremenom ne postane primarni sistem mjera i utega čitave naše zemlje.«

Prije dvije godine stručnjaci u BSI su smatrali da bi 20 godina bio realan vremenski period za prijelaz. Danas se smatra da bi se u mnogim granama industrije prijelaz mogao izvršiti mnogo brže. Tako će se npr. mnogo lakše provesti promjena u elektrotehničkim i kemijskim poduzećima negoli u građevinarstvu. Industrije, koje su usko vezane s američkom praksom, kao što su proizvodnja automobila i aviona, morat će se suočiti s nekim posebnim teškoćama, iako je i tu već predviđeno unošenje nekih komponenata u decimalnim jedinicama. Naravno, čitava će operacija biti pažljivo planirana i provedena etapno. Prvi korak je uspostavljanje jednog malog stalnog odbora čiji će članovi biti predstavnici vlade i industrije; on će pomoći da se uklone prepreke koje stoje na putu prijelazu i pratit će napredak prelaženja. U vezi s čitavom operacijom britanska vlada će održavati kontakte s vladama komonveltskih zemalja.

Za nove generacije školske djece promjena će doći kao blagoslov. Ne samo zato što je aritmetika lakša u decimalnom sistemu nego i zbog toga što djeca već uče metrički sistem i s vremenom će, iako ne odmah, iz svog programa učenja moći izbaciti tablice s librama i stopama. U sadašnjem trenutku cilj je da se utvrdi najbolji način za poticanje školske nastave u tom smislu da budućim generacijama rad s metričkim jedinicama postane posve normalan«.

6.6.3. Teškoće s industrijskom standardizacijom. U citiranom »Pregledu« autor piše dalje: »Za veliku većinu proizvođačkih industrija promjena neće značiti samo upoznavanje s novim sistemom jedinica nego će one morati da usvoje potpuno nove tehničke specifikacije. Shema britanske industrije u velikoj je mjeri oblikovana tisućama standarda prema zahtjevima BSI. Ti standardi nisu izraženi samo u inčevima i funtama — oni su odraz generacija britanske prakse. Britanske izmjere ne mogu se jednostavno preračunati u metričke. Čitav standard mora se

iznova zamisliti, ponovo oblikovati i ponovo napisati, da bi se dobila odgovarajuća baza za metričku proizvodnju.

Veliki zadatak British Standard Institution sastojat će se u tome da hitno izradi nove standarde potrebne industriji. Ti će se standardi, gdje god to bude moguće, temeljiti na standardima Međunarodne organizacije za standarde (International Standards Organisation). Budući da su ti svjetski standardi nekompletni, Britanija će morati pomišljati na usvajanje nekih postojećih standarda svojih evropskih susjeda, a u nekim slučajevima ona će morati razviti svoje vlastite, potpuno nove metričke standarde — standarde koji bi mogli potaknuti nove tendencije u svjetskoj trgovini«.

Tako o neophodnosti prijelaza na metrički sistem jedinica govore u Engleskoj, kolijevci angloameričkih jedinica! Slično, ali možda u manjoj mjeri, misle i drugi: jedna parlamentarna komisija New Zealanda preporučila je da se decimalizira valuta te zemlje, što bi bio prvi korak u pokretu opće primjene metričkog sistema; u Južnoafričkoj Republici proglašen je 14. februara 1961. »danom decimalizacije« (decimalisation day), itd. Prema tome, potpuno zamiranje nemetričkih sistema jedinica možemo očekivati za 20 do 30 godina, jer proces iščezavanja angloameričkog sistema naročito je nagao u posljednja dva desetljeća. Prema procjeni već citiranog *Howletta*, danas, naime, samo oko 10% čovječanstva ne upotrebljava metrički sistem jedinica, ali taj dio svijeta industrijski je vrlo jak. U našim se danima, dakle, ostvaruje geslo znanstvenih lučonoša revolucionarne Francuske: A tous les temps, à tous les peuples!

7. Ustrojstvo i djelovanje međunarodnih i nacionalnih metroloških institucija

7.1. Ustrojstvo međunarodne metrološke organizacije

7.1.1. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM). U odlomku 6.3.2 opisali smo kako je godine 1875. na Diplomatskoj konferenciji o metru u Parizu nastala Konvencija o metru. Naveli smo da je tom prilikom osnovan Međunarodni ured za mjere i utege (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM), a konstituirane su i ustanove Međunarodni komitet za mjere i utege (Comité International des Poids et Mesures, CIPM) te Generalna konferencija za mjere i utege (Conférence Générale des Poids et Mesures). Na temelju smjernica Generalne konferencije, Međunarodni komitet za mjere i utege upravlja Međunarodnim uredom (BIPM) i savjetodavnim odborima između dvaju zasjedanja Generalne konferencije.

Međunarodni komitet sastoji se od 18 članova — eksperata različitih nacionalnosti; imenuje ih Generalna konferencija. CIPM se mora sastati najmanje jednom svake dvije godine. Predsjednik CIPM, sekretar CIPM i direktor BIPM moraju biti različitih nacionalnosti. Međunarodni komitet ima velike obaveze i prava: on proučava prijedloge i rezultate rada savjetodavnih odbora (vidi odlomak 7.1.3) i BIPM, priprema prijedloge preporuka koje će u slučaju prihvaćanja objaviti Generalna konferencija kao svoje rezolucije, imenuje direktora BIPM i ostalo vodeće znanstveno osoblje BIPM, ocjenjuje njihov rad, određuje koji će se laboratoriji i individualni eksperti angažirati u savjetodavnim odborima ili na pojedinim zadacima itd. Međunarodni komitet podnosi Generalnoj konferenciji i prijedlog budžeta BIPM, koji se stvara od doprinosa članica Konvencije o metru; doprinos je proporcionalan broju stanovnika države članice.

Dokumenti Generalne konferencije nazivaju se *rezolucijama* (sl. A.25), a dokumenti Međunarodnog komiteta *preporukama* zato što Konferencija ne može zadirati u suverena prava država članica Konvencije o metru. U većini slučajeva, međutim, države članice smatraju te rezolucije i preporuke *obaveznima* (za sada su značajne iznimke jedino USA, Ujedinjeno Kraljevstvo, Kanada i Australija, pa čak ni one u potpunosti; o tome vidi odsječke 6.5 i 6.6), jer bi inače Konvencija o metru u velikoj mjeri izgubila svoj smisao.

7.1.2. Značenje međunarodnog ureda BIPM. Konvencija o metru bila je revidirana godine 1921. prilikom 6. zasjedanja Generalne konferencije; bila je u stvari prilagođena političkoj situaciji i stanju metrologije nakon prvog svjetskog rata. Na slici A.26 vidimo shematski prikaz današnje strukture pojedinih organa Konvencije; u biti struktura je ostala onakva kako je oblikovana 1875. Bilo bi, međutim,

pogrešno iz toga zaključiti da su BIPM, CIPM i Generalna konferencija začahurene akademske organizacije. Naprotiv, to su vitalne, najmodernije tribine za međunarodno sporazumijevanje na polju cjelokupne svjetske metrologije, a BIPM je posljednjih desetljeća prerastao u moderan znanstveni centar svjetske metrologije,

RÉSOLUTION 6

La Douzième Conférence Générale des Poids et Mesures,

CONSIDÉRANT *la Résolution* 13 *adoptée par la Onzième Conférence Générale en* 1960 *et la Recommandation adoptée par le Comité International des Poids et Mesures à sa session de* 1961,

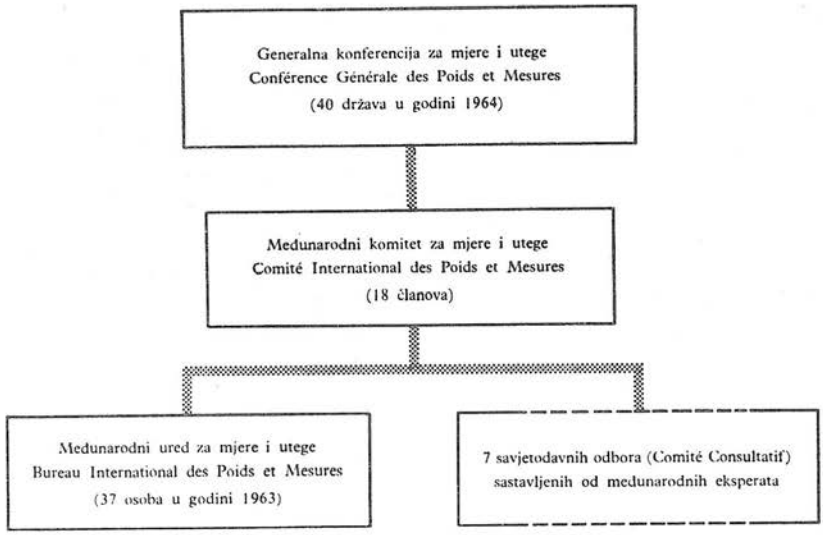
1° ABROGE *la définition du litre donnée en* 1901 *par la Troisième Conférence Générale des Poids et Mesures,*

2° DÉCLARE *que le mot « litre » peut être utilisé comme un nom spécial donné au décimètre cube,*

3° RECOMMANDE *que le nom de litre ne soit pas utilisé pour exprimer les résultats des mesures de volume de haute précision.*

Sl. A.25. Tekst rezolucije o novoj definiciji jedinice volumena litar (= dm^3) koju je prihvatila Generalna konferencija za mjere i utege na svom 12. zasjedanju godine 1964. (Prefotografirano iz Comptes Rendus de la Douzième Conférence Générale des Poids et Mesures)

koji ima permanentne i prisne odnose s nacionalnim metrološkim organizacijama država koje su članice Konvencije o metru. O tome svjedoči npr. i činjenica da je budžet BIPM za godinu 1966. iznosio pola milijuna dolara, a pogotovu svjedoči kratak pregled glavnih, posve originalnih radova koje je Ured obavio u toku svoje povijesti; rezultati gotovo svih tih radova nalaze se i u nacionalnim zakonodavstvima i metrološkim centrima pojedinih država:



Sl. A.26. Struktura izvršnih organa Konvencije o metru; stanje godine 1964.

• barometarska i termometrijska istraživanja (plinski termometri, svojstva termometrijskih tekućina pri niskim temperaturama, stakleni i kremeni živini termometri, itd.);

• utvrđivanje temperaturnog širenja krutih tvari i tekućina, mjerenje gustoće vode (npr. gustoća čiste vode je 999,972 kg/m³ pri 4 °C), krutih tvari i plinova;

• istraživanje mjera (standarda) duljine s ravnim i kuglastim krajevima, istraživanje baždarenja složivih mjera, te istraživanje elastičnosti i deformacija krutih tijela;

• istraživanje niklenih čelika (invar, elinvar, anibal, platinite, nichrome) za primjenu u znanstvenoj metrologiji i industriji;

• ispitivanje *Jädérin*ove metode za mjerenje geodetske baze pomoću geodetskih žica od invara i njihovo baždarenje;

• interferencijska istraživanja (indeks prelamanja zraka, krajnje mjere od kristaličnog kremena, istraživanje spektralnih linija i mjerenje duljina vala, mjerenje *Johansson*ovih kalibara itd.);

• direktno utvrđivanje apsolutne vrijednosti ubrzanja zemljine teže g novim metodama itd. itd. (podrobnije vidi u odsječcima 7.3, 4).

7.1.3. Savjetodavni odbori. Spomenuli smo da Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM) upravlja radom Međunarodnog ureda (BIPM) između dva zasjedanja Generalne konferencije, a sastoji se od 18 stručnjaka iz čitava svijeta. Međunarodnom komitetu pomažu u radu njegovi savjetodavni odbori (Comité Consultatifs) kojih prema slici A.26 danas ima sedam. To su (u zagradi je navedena godina osnivanja svakog od njih):

Savjetodavni odbor za elektromagnetizam (Comité Consultatif d'Electricité, 1927),

Savjetodavni odbor za fotometriju (Comité Consultatif de Photométrie, 1933),

Savjetodavni odbor za termometriju (Comité Consultatif de Thermométrie, 1937),

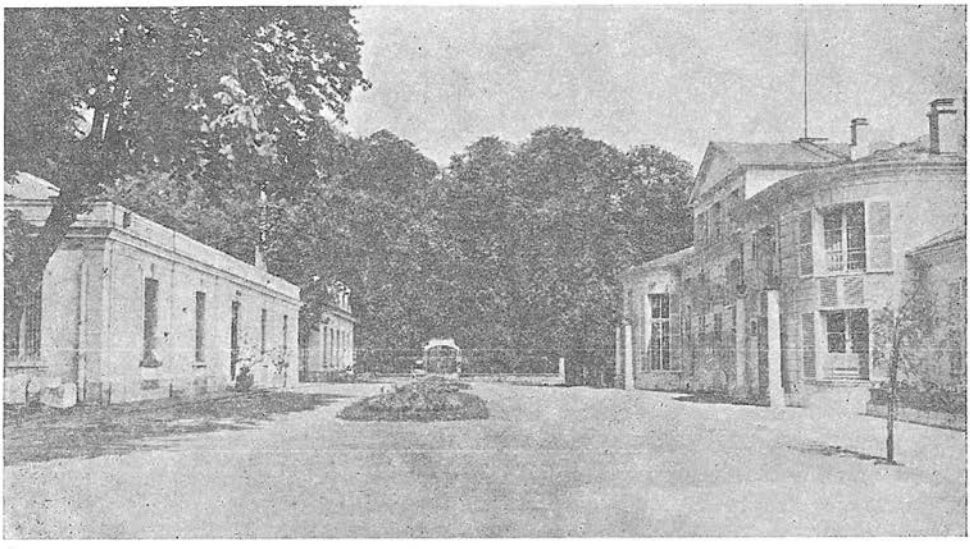
Savjetodavni odbor za definiciju metra (Comité Consultatif pour la Définition du Mètre, 1952),

Savjetodavni odbor za definiciju sekunde (Comité Consultatif pour la Définition de la Seconde, 1956),

Savjetodavni odbor za standarde mjerenja ionizirajućih zračenja (Comité Consultatif pour les Etalons de Mesure des Radiations Ionisantes, 1958),

Savjetodavni odbor za jedinice (Comité Consultatif des Unités, 1964).

Savjetodavni odbori sastavljeni su od predstavnika velikih državnih metroloških zavoda (vidi odsječak 7.2), i važnih međunarodnih organizacija (npr. Association Internationale de Géodésie, Union Astronomique Internationale, Union Internationale de Physique Pure et Appliquée itd.), a rješavaju specijalističke stručne probleme u okviru svoje djelatnosti. Predsjednici savjetodavnih odbora imenuju se iz redova članova CIPM. Savjetodavni odbori podnose prijedloge svojih zaključaka Međunarodnom komitetu za mjere i utege, koji ih, zatim, ako ih prihvati, predlaže kao projekte rezolucija Generalnoj konferenciji, koja je do sada održala 13 zasjedanja (vidi tablicu A-15). O djelatnosti savjetodavnih odbora informirat ćemo indirektno, preko opisa rada Međunarodnog ureda za mjere i utege (odsječci 7.3, 4).



Sl. A.27. Dvorac Pavillon de Breteuil u Sèvresu, znanstveni centar metrologije svijeta i sjedište Međunarodnog ureda za mjere i utege. Lijevo se vidi jedan od niza laboratorija, a desno su uredi i stanovi; vidi i sliku H.1. (Foto: BIPM)

Tablica **A-15**

Dosadašnja zasjedanja Generalne konferencije

1. — 1889	6. — 1921	9. — 1948
2. — 1895	7. — 1927	10. — 1954
3. — 1901	8. — 1933	11. — 1960
4. — 1907		12. — 1964
5. — 1913		13. — 1967

Na čelu Međunarodnog komiteta (CIPM) i Međunarodnog ureda za mjere i utege bili su najglasovitiji učenjaci pojedinih razdoblja, čija dostignuća predstavljaju danas temelje znanosti: *D. I. Mendeljejev, A. A. Michelson, V. Voltera* itd. Neki su pak dobitnici Nobelove nagrade: *Ch. Ed. Guillaume, P. Zeeman, Louis de Broglie, Manne Siegbahn.*

7.1.4. Međunarodna organizacija za zakonodavnu metrologiju. Uz prije navedene organe vrhunske svjetske metrološke organizacije, od 7. oktobra 1956. djeluje još jedna: *Organisation Internationale de Métrologie Légale* (OIML), tj. Međunarodna organizacija za zakonodavnu metrologiju, sa sjedištem u Parizu. OIML je osnovalo 26 država koje su potpisale osnivačku konvenciju, a do godine 1968. broj članica porastao je na 36 (uz to je 7 država imalo status dopisnih članica). Organizacija je stvorena sa ciljem da u međunarodnim relacijama obavi ono što prelazi zadatke znanstvene metrologije u okviru Konvencije o metru i njenih organa, a odnosi se na nacionalna *zakonodavstva.* Među osnovne zadatke OIML ubrajaju se: osiguranje jedinstva i ispravnosti mjerenja u međunarodnom mjerilu, što je neophodno za valjano uspoređivanje rezultata

znanstvenih istraživanja provedenih u različitim zemljama, unifikacija metroloških pojmova, karakteristika i svojstava materijala itd. U tom smislu OIML objavljuje međunarodne preporuke o: ocjenjivanju preciznosti mjernih uređaja, mjernim metodama, metodama provjeravanja mjernih uređaja, jedinstvenosti termina, definicija, simbola itd.

Najviši organ OIML jest Međunarodna konferencija za zakonodavnu metrologiju koja se sastaje jednom u šest godina. Konferenciji prisustvuju službeni predstavnici država članica. Rukovodeći organ OIML jest Comité International de Métrologie Légale, CIML (Međunarodni komitet za zakonodavnu metrologiju) koji se sastoji od po jednog predstavnika svake učlanjene države. Iz svojih redova CIML bira predsjednika i dva potpredsjednika na rok od 6 godina. Zasjedanja CIML održavaju se najmanje jednom u dvije godine. Izvršni organ organizacije OIML jest Bureau International de Métrologie Légale, BIML (Međunarodni ured za zakonodavnu metrologiju), koji djeluje pod vodstvom i nadzorom CIML. Glavni su zadaci BIML: stvaranje dokumentacijskog centra, koordinacija radova stručnih sekretarijata, pripremanje zasjedanja Komiteta i Konferencije itd.

Djelatnost organizacije OIML temelji se na radu *stručnih sekretarijata* osnovanih sa svrhom da se obradi stanovita tema i izradi odgovarajuća međunarodna preporuka. Godine 1968. proučavano je 68 tema, a neke države članice držale su ovaj broj sekretarijata: Austrija 7, Belgija 6, Engleska 4, Francuska 8, Njemačka DR 11, SSSR 5, Švicarska 5 itd. U pravilu na svakoj temi surađuje nekoliko država, pa se stvaran rad obavlja u okviru *radne skupine* koju vodi stručni sekretarijat. U spomenutih 68 tema surađuju stručnjaci iz 90 država. Rad na preporuci počinje tako da sekretarijat izradi prethodni projekt međunarodne preporuke; pri tom se oslanja na nacionalnu normativnu dokumentaciju i na poznavanje odgovarajuće dokumentacije u drugim zemljama. Tako izrađeni projekt sekretarijat pošalje na razmatranje suradničkim državama koje tvore radnu skupinu. Pošto od njih dobije primjedbe, prijedloge, dopune ili suglasnost, sekretarijat izrađuje nov projekt. Nakon niza takvih usklađivanja, projekt preporuke udovoljava svim članovima radne skupine pa ga stručni sekretarijat šalje u BIML, koji ga umnoži i daje na mišljenje svim članovima OIML. Ako je za dokument glasalo 4/5 država članica, on postaje »Projekt međunarodne preporuke«. U slučaju kada pojedini dijelovi dokumenta izazivaju načelne prigovore, stručni sekretarijat izrađuje novu redakciju za koju smatra da je prihvatljiva za većinu zemalja i dokument šalje na ponovno glasanje. Zatim taj projekt razmatra CIML i predlaže ga na odobrenje idućoj Konferenciji. U pojedinim slučajevima CIML objavljuje projekt kao *privremenu* preporuku (do iduće Konferencije). Ako Konferencija većinom glasova prihvati projekt, on postaje »Međunarodna preporuka«.

U razdoblju od godine 1956. do 1962. razrađeno je u okviru OIML deset projekata preporuka. Drugo zasjedanje Konferencije (Wien, juni 1962) prihvatilo je 8 projekata kao privremene preporuke. Navest ćemo neke od njih: »Cilindrički utezi od 1 g do 10 kg (srednji razred tačnosti)«, sekretarijat: Belgija; »Manometri, vakuummetri, manovakuummetri s elastičnim detektorima i direktnim očitanjem pomoću skale i kazaljke (kategorija radnih instrumenata)«, sekretarijat: Sovjetski Savez; »Manometri u mjernim uređajima za mjerenje tlaka arterija«, sekretarijat: Austrija itd. Godine 1968. nalazile su se u različitim stadijima razrade 32 preporuke, od toga: 24 prethodna projekta, 7 projekata međunarodnih preporuka i jedna preporuka CIML. Među njima su, na

primjer, ovakve preporuke: »Različite klase tačnosti mjernih uređaja« (SSSR), »Kućanska električka brojila« (Francuska—SSSR) itd.

Godine 1968. održano je u Parizu treće zasjedanje Konferencije. Tom prilikom delegati su konstatirali dva ozbiljna nedostatka organizacije OIML: 1) Od definiranja zadatka do prihvaćanja preporuke u pravilu prolazi 5 do 8 godina, što je previše, jer u tom vremenu neki podaci zastarijevaju; 2) Većina se preporuka OIML odnosi na pojedine metrološke zahtjeve koji ulaze u djelatnost ISO (Međunarodna organizacija za standarde) umjesto da se bavi nizom važnijih poslova od univerzalne važnosti, na primjer: metodama provjeravanja mjernih instrumenata, metodom obrade mjernih rezultata, metodom procjenjivanja pogrešaka itd.

7.2. Nacionalni metrološki zavodi

7.2.1. Državni metrološki zavodi. Međunarodna metrološka organizacija, koju smo letimično opisali u odlomcima 7.1.1,2,3 (niz pojedinosti o njoj čitalac će saznati implicitno na mnogim mjestima ove knjige, a stanoviti zaokruženi pregled sadrži odsječak 7.4), predstavlja vrh metrološke »piramide«, dakle znanstveni i koordinacijski centar svjetske metrologije. Djelovanje tog svjetskog centra oslanja se na razvojne metrološke radove u *nacionalnim metrološkim zavodima*, koji postoje u mnogim državama. Zadatak je tih nacionalnih zavoda da s potrebnim istraživanjima unapređuju mjerne uređaje i mjerne metode, da obavljaju baždarenja najpreciznijih laboratorijskih mjernih uređaja, da surađuju u priređivanju prijedloga zakonodavnih akata s područja cjelokupne metrologije, da s državnim ovlaštenjem kontroliraju provođenje zakona i uredaba koji se odnose na metrologiju, te da u ime države sudjeluju u radu međunarodnih metroloških organizacija.

Uvjerenost državâ da su velika novčana i kadrovska ulaganja u metrologiju temelj privrednog potencijala zemlje, postojanje dugoročnog plana znanstvenog i industrijskog razvoja, materijalne mogućnosti, korisnost unapređenja metrologije za nacionalnu sigurnost i industrijska tradicija uvjetovali su da u nekim zemljama djeluju metrološki zavodi čiji je *znanstveni* domet ono maksimalno što se danas uopće može postići na području prirodnih, tehničkih i tehnoloških znanosti. U *Engleskoj* je to National Physical Laboratory (NPL) sa sjedištem u Teddingtonu, u *Sovjetskom Savezu* Svesavezni naučnoistraživački metrološki institut imena Mendeljejeva (VNIIM) sa sjedištem u Lenjingradu, u USA National Bureau of Standards (NBS) sa sjedištem u Washingtonu (zapravo oko 50 km izvan grada), a u Saveznoj Republici *Njemačkoj* Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) u Braunschweigu (10 km izvan grada). Ovim renomiranim i gigantskim zavodima (npr. u NBS zaposleno je više od 3000 znanstvenih i tehničkih suradnika) stoje uz bok nacionalni metrološki zavodi *Japana*, gdje se Central Inspection Institute of Weights and Measures nalazi na čelu koordinirane grupe metroloških zavoda: National Research Laboratory of Metrology (masa, sila, duljina, temperatura), Tokyo Astronomical Laboratory (vrijeme) i Electrotechnical Laboratory (elektromagnetizam, svjetlo, boja, zvuk, radioaktivnost i zračenje). U najnovije vrijeme strelovito su se razvile u vrhunske nacionalne centre znanstvene metrologije odgovarajuće organizacije u *Australiji* (National Standards Laboratory, Sydney) i *Kanadi* (National Research Council, Ottawa).

Gotovo sve države danas imaju vlastite metrološke zavode. Ti zavodi nisu, doduše, tako bogato opremljeni kao oni što smo ih nabrojali, ali ipak ostvaruju neke

od zadataka što smo ih naveli na početku ovog odlomka 7.2.1. U nastavku ćemo spomenuti nazive i sjedišta nekih nacionalnih metroloških zavoda. U *Austriji* se na vrhu metrološke piramide odavno nalazi Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (Wien), u *Belgiji* Service de la Métrologie (Bruxelles), a u *Indiji* je godine 1950. Council of Scientific and Industrial Research osnovao u New Delhiju metrološki zavod National Physical Laboratory. U *Njemačkoj DR* vrhunskom se metrologijom bavi Deutsches Amt für Messwesen und Warenprüfung (Berlin), u *Norveškoj* Det Norske Justervesen (Oslo; standarde frekvencije i elektroničke standarde održava ratno zrakoplovstvo), u *Rumunjskoj* Glavna direkcija za metrologiju (Bukurešt), u *Švicarskoj* Bureau Fédéral des Poids et Mesures (Bern) itd.

Moderni metrološki zavodi locirani su danas tamo gdje su najpovoljniji uvjeti kako u mjerno-tehničkom smislu, tako i u pogledu ekonomičnosti investiranja, transporta, komunikacija, životnih uvjeta osoblja itd. Osim toga, mnogi od njih su *decentralizirani*. Na primjer, američki National Bureau of Standards sastoji se od četiri velike metrološke organizacije: Institut za osnovne standarde, Institut za istraživanje materijala, Institut za primijenjenu tehnologiju i Laboratorij za proučavanje širenja radio-valova. Potonji se nalazi u Boulderu (Colorado), tisuće kilometara od Washingtona. Unatoč prostornoj rascjepkanosti, NBS jedinstveno i koordinirano unapređuje metrologiju, materijale i tehnologiju te baždari vrhunske mjerne uređaje za 30 (trideset!) fizikalnih veličina. Nije tako samo u USA; u Francuskoj kostur nacionalne metrologije predstavlja pet ustanova i laboratorija, sovjetski zavod sastoji se od niza prostorno razmaknutih laboratorija (neki su i u Sibiru) itd.

7.2.2. Prvi metrološki zavod (PTR). Prvi moderni državni metrološki zavod, tj. znanstveni nacionalni centar za mjere i mjerenja, osnovala je godine 1887. Njemačka: Physikalisch Technische Reichsanstalt (PTR) kraj Berlina (Charlottenburg). To je pridonijelo naglom porastu premoći njemačke industrije u svijetu; osnivanje PTR omogućilo je Njemačkoj opći uspon eksperimentalnog istraživanja prirode, izvanredno unapređenje precizne mehanike, odnosno precizne tehnologije uopće, te provođenje onih fizikalno-tehničkih istraživanja koja se ne mogu obaviti ni u najvećem mnoštvu prosječno opremljenih laboratorija. Prodor njemačke tehnike snažno se odrazio na njemačkom izvozu, odnosno u međunarodnoj trgovini uopće.

To su osjetile druge industrijski razvijene zemlje, a Engleska je, poslije Njemačke, bila prva koja je spoznala da su prirodoslovna istraživanja najpouzdanija osnova industrijskog napretka. Englezima je bilo jasno da se ni jedna od njihovih industrija ne može probiti na vodeći međunarodni položaj i biti konkurentnom, ako se država kao cjelina ne nalazi pri samom vrhu primijenjene metrološke znanosti. Stoga su godine 1900. osnovali svoj državni metrološki zavod, National Physical Laboratory u Teddingtonu kraj Londona. Čini se da se historija u stanovitom smislu ponavlja: u odsječku 6.6 mogli smo vidjeti s koliko se promišljenosti, plana i nada Englezi pripremaju da napuste angloamerički sistem jedinica i prihvate metrički. Njihova rasuđivanja o industrijskim standardima, o primjeni standarda ISO, pa čak i standarda drugih zemalja (vidi odlomak 6.6.3) toliko su razborita i prožeta iskustvom da se ne može sumnjati u konačan uspjeh tog pothvata.

Za Englezima su se odmah poveli Amerikanci. Godine 1901. USA su osnovale National Bureau of Standards (NBS), a zatim su vlastite metrološke zavode osnovale mnoge druge zemlje. I mlada sovjetska država je nakon konsolidacije svoje privrede i učvršćenja međunarodnog položaja posvetila punu pažnju unapređenju

metrologije. SSSR je, naime, naslijedio Upravu za mjere i utege osnovanu carskim ukazom od 11. oktobra 1835. Godine 1893. slavni je Mendeljejev pridonio mnogo njenom usavršenju i proširenju u Glavnu upravu, iz koje je 1934. u Lenjingradu nastao Svesavezni naučnoistraživački metrološki institut imena Mendeljejeva. Danas je na vrhu sovjetske metrološke organizacije poseban *državni komitet*, tj. Komitet za standarde, mjere i mjerne uređaje pri vladi SSSR, koji je obuhvatio i Glavnu upravu za mjere i utege. Na tom polju radi i već spomenuti gigantski metrološki institut u Lenjingradu i niz drugih instituta.

Svaka zemlja, pa i mala, koja želi povećati svoj industrijski i privredni utjecaj u svijetu, težila je da osnuje, odnosno usavrši svoj metrološki zavod (vidi odsječak 1.1). Primjer malih država s dobrim metrološkim zavodima su npr. *Švicarska* i poslijeratna *Austrija*. Sve države, male i velike, imaju od toga neprocjenjive koristi, jer metrološki zavodi su, uz ostalo, savjetodavni i kontrolni organi vlasti, privrede, industrije, istraživačko-razvojnih centara i privatnika. Njihova intervencija dolazi do izražaja kad god neki problem valja riješiti posve konkretno, tj. u obliku brojčanog iznosa, jedinice i potrebne tolerancije. Englesko iskustvo, opisano u odsječku 6.6, naročito u pogledu industrijskih standarda, uvjerljiv je dokaz tome.

Metrologija je crvena nit koja se provlači od samog početka do posljednje tačke svakog istraživanja u prirodnim znanostima. A koliko je presudan utjecaj tih znanosti na današnje ljudsko društvo nedvojbeno proizlazi iz članka »Znanost u Sloveniji i u svijetu tokom posljednjih trideset godina«, koji je potkraj godine 1967. objavio glasoviti slovenski fizičar *A. Peterlin*, sada profesor u USA. Između ostaloga on piše: »... Ni u jednoj tehničkoj struci nema napretka bez znanstvenog istraživanja, bez njega ne može se više slijediti upravo vrtoglav razvoj tehnike u svijetu. Prirodoslovne znanosti sve više su uvjet za uspješnu izobrazbu, a još više za pravovremeno osvježenje tehničkih stručnjaka. Današnji elektroinženjer mora biti prilikom diplomiranja znatno potkovaniji u matematici, fizici i kemiji negoli njegov 25 godina stariji kolega, čije je znanje — koje je donio sa sveučilišta — već toliko beskrajno zastarjelo da se jedva još može upotrijebiti za nešto što danas spada u elektrotehniku . . . « (*Proteus*, Ljubljana, godište 30, 1967/68, br. 1, str. 8.)

7.2.3. Jugoslavenski metrološki zavod. Socijalistička Jugoslavija naslijedila je od predratne Jugoslavije »Upravu za mjere i dragocjene metale« sa sjedištem u Beogradu. Djelatnost te Uprave pretežno se svodila na kontrolu uskog asortimana uporabnih mjera i mjernih uređaja; istraživački i razvojni rad na unapređenju metrologije nije ulazio u redoviti program rada te ustanove. Stanje nije bitno drukčije ni danas, iako je sadašnji »Savezni zavod za mjere i dragocjene metale« (Beograd, Banatska ulica 14) izgradio novu zgradu i opremio se nizom novih mjernih uređaja. Unatoč naporima radnog kolektiva (koji je sudotiranjem omogućio izdavanje ove knjige), Zavod svojim djelovanjem *ne utječe bitno na unapređenje metrologije* u Jugoslaviji, nema, dakle, onakav utjecaj na nacionalnu privredu kakav imaju moderno koncipirani državni metrološki zavodi (vidi njihove zadatke nabrojane na početku odlomka 7.2.1).

Ionako malobrojno, osoblje Zavoda pretežno se bavi rutinskim poslovima, ne eksploatira se ni sva skromna mjerna oprema koja postoji, stručnjaci su loše plaćeni, ne postoji — koliko nam je poznato — ni dugoročni plan istraživanja, ni plan prerastanja Zavoda u pravi metrološki zavod, rad Zavoda u međunarodnim organizacijama nimalo nije u skladu s aktivnošću Jugoslavije na međunarodnoj političkoj sceni itd. Takva (ne)aktivnost možda bi bila dovoljna za predratnu Jugoslaviju, u kojoj industrija praktički nije postojala, ali za današnju jugoslavensku industriju —

odnosno za privredni potencijal Jugoslavije uopće — nepostojanje modernog (decentraliziranog, koordiniranog) metrološkog zavoda predstavlja jednu od *kočnica* daljnjeg razvoja.

U posljednjih dvadesetak godina u Jugoslaviji je nastao niz industrija (elektrotehnička, strojna, brodograđevna, zrakoplovna itd.), koje *moraju* imati na raspolaganju mjerne uređaje dovoljne preciznosti i iskusno osoblje, ako žele svoje proizvode plasirati na domaće i strano tržište. Budući da Savezni zavod za mjere i dragocjene metale može takvu pomoć pružiti samo u neznatnoj mjeri, pojedine industrije, posebni instituti i neki fakulteti *sami* unapređuju metrologiju, u većini slučajeva bez ikakvih dodira sa Zavodom. Na primjer, preciznom elektromagnetskom metrologijom bave se *Iskra* u Kranju, *Rade Končar* u Zagrebu, institut *Nikola Tesla* u Beogradu i nekoliko *elektrotehničkih fakulteta*. To se vidi npr. iz opisa djelatnosti jednog dijela instituta *N. Tesla*, o čemu *V. Knežević* na jednom mjestu piše: »... Takva djelatnost zahtijeva raspolaganje najraznovrsnijim mjernim instrumentima, često i vrlo preciznim, i iziskuje potrebu kontrole njihove tačnosti. Stoga se još ranije



Sl. A.28. Zgrada Saveznog zavoda za mjere i dragocjene metale, Beograd, Banatska ulica 14. Do godine 1967. naziv ove ustanove je glasio: Uprava za mjere i dragocjene metale. (Foto: Savezni zavod)

prišlo postepenom razrađivanju sistema provjeravanja institutskih instrumenata, a od prije godinu dana (pisano godine 1963, op. M. B.) nalazi se u razvoju i posebna grupa za standarde. Njen isključivi zadatak jest razrada metoda za najpreciznija mjerenja električkih veličina, kao i čuvanje standarda (pramjera, etalona) tih veličina. Treba odmah napomenuti da taj zadatak nije ni malo jednostavan i lak, i da do svog punog ostvarenja zahtijeva dugačak vremenski period i znatna materijalna sredstva.« (Vidi i odlomke E.3.2.5, 3.5.8, 3.6.4.)

Neminovno je da se pri takvoj nekoordiniranosti metrološke djelatnosti u Jugoslaviji mnogi mjerni uređaji i materijalni standardi dupliciraju, tripliciraju ... *n*-ticiraju, ponegdje su neiskorišteni, a *nigdje nisu kompletni.* U National Bureau of Standards (Institute for Basic Standards) — dopustimo sebi na trenutak tu usporedbu! — sve je to kompletirano u *jednom institutu.* Institut za osnovne standarde (dio NBS) posjeduje i dalje razvija pramjerila i osnovne standarde za sve potrebne fizikalne veličine, a osim toga programirano se bavi istraživanjem nuklearnih, atomskih i molekularnih pojava za primjenu u cjelokupnoj metrologiji. Amerikanci smatraju da ni sve to nije dovoljno: »Analize pokazuju da mogućnosti NBS u pogledu preciznosti mjerenja u mnogim područjima zaostaju za potrebama« (*R. D. Huntoon* u 19th Annual ISA Conf. Proc. 1964, Part 1). A što misle Jugoslaveni, odnosno jugoslavenski stručnjaci koji su kompetentni da Vladi SFRJ (njenim organima za znanstvena, tehnička i tehnološka istraživanja) sugeriraju poduzimanje odgovarajućih zahvata?

Nakon bezuspješnih usmenih i pismenih prijedloga niza stručnjaka, profesor ljubljanske Univerze Dr *F. Avčin* objavio je »Predlog za ustanovitev Zveznega metrološkega zavoda FLRJ« (Elektrotehnički vjesnik 1960, str. 159), tj. prijedlog o potrebi i načinu formiranja jugoslavenskog metrološkog zavoda. Tu je razmotreno gotovo sve što je potrebno da se ideja pretvori u stvarnost. Predložen je način financiranja, način izgradnje, opisane su buduće radionice, sugerirana je lokacija (uzgred navodimo da Čehoslovačka gradi svoj novi metrološki zavod na prikladnom mjestu vrlo daleko od Praga, gdje se sada nalazi njihov metrološki centar), predložen je način izbora osoblja itd. *Avčin* je čak razradio strukturu zavoda i podrobno opisao poslove budućih 6 odjela: za mehaniku, elektromagnetizam, toplinu, optiku i fotometriju, akustiku, atomsku fiziku.

Taj javni apel naišao je na oduševljenu podršku — metrologa i privrednika. Prvi Jugoslavenski simpozij o električkim mjerenjima i mjernoj opremi, održan godine 1961. objavio je u vezi s time *rezoluciju* koju smo citirali u odlomku 1.1.3. S tom rezolucijom elektrotehničara sigurno su se složili i stručnjaci drugih egzaktnih grana, ali djelatnost Saveznog zavoda za mjere i dragocjene metale do sada (godina 1968) nije se primjetno promijenila, on — kao embrio budućeg metrološkog centra Jugoslavije — još nije počeo prerastati u znanstveni metrološki zavod. To se neće dogoditi ni uz najveće napore radnog kolektiva Saveznog zavoda, jer radikalna promjena može nastati tek onda kad se promijeni *klima* u kojoj živi jugoslavenska metrologija, a to ovisi i o *programu* cjelokupnih znanstvenih i primijenjenih istraživanja, dakle o *politici* privrednog razvoja uopće.

7.2.4. Unapređivanje metrologije u razvijenim zemljama. Usporedimo opisano stanje i tendencije razvoja jugoslavenske vrhunske metrologije (vidi i odlomke E.3.2.5, 3.5.8, 3.6.4) s jednim od oblika unapređivanja metrologije u industrijski razvijenim zemljama. Od bezbroja mogućih načina unapređivanja za ilustraciju smo odabrali onaj koji je najlakše provesti: razmjena iskustava i znanja putem stručnih savjetovanja o metrološkim problemima. Pri tom ćemo letimično dodirnuti samo dva primjera, jedan iz Sovjetskog Saveza i jedan iz USA.

U Sverdlovsku (Ural) održana je od 17. do 20. septembra 1968. »Prva svesavezna znanstveno-tehnička konferencija o metrologiji i tehnici tačnih mjerenja«, kojoj je prisustvovalo oko *tisuću* stručnjaka iz 353 radne organizacije i institucije 80 gradova SSSR. Konferenciju su organizirali: Državni komitet za standarde, mjere i mjerne uređaje pri Savjetu ministara SSSR, Državni komitet za znanost i tehniku, Ministarstvo za industriju instrumenata, sredstva automa-

tizacije i upravljačke sisteme, Sverdlovska podružnica Svesaveznog metrološkog instituta i drugi. Organizatori su, dakle, bili *najviši državni organi* koji od mjerne tehnike mnogo traže ali joj mnogo i pružaju. To se može razabrati iz uvodnog referata pretežno posvećenog poboljšavanju kvalitete industrijske proizvodnje i njenom objektivnom ocjenjivanju. U tom je referatu, među ostalim, rečeno: postoji još mnogo neriješenih problema mjerne tehnike, što koči daljnji napredak visokokvalitetne proizvodnje, sporo se osvajaju najsuvremeniji mjerni uređaji, nije dovoljno dobro organiziran popravak instrumenata, treba osnovati specijalne visoke škole i tehnikume za metrologiju i standardizaciju itd.

Na plenarnom zasjedanju Konferencije bilo je izloženo još sedam referata, koji su također kritizirali postojeće stanje sovjetske metrologije i predložili mjere za njeno unapređenje. Konferencija je tu kritiku prihvatila i potencirala, pogotovo kad se prešlo na rad u šest sekcija (opća metrologija, mjerenje duljine, mehanička mjerenja, elektromagnetska mjerenja, toplinska mjerenja, mjerenje kemijskog sastava i fizikalno-kemijskih svojstava tvari i materijala). Svaka je sekcija izradila odgovarajuće preporuke na temelju kojih je Konferencija objavila jedinstven zaključak o načinu poboljšanja metrologije u SSSR. Odlučeno je, među ostalim, da se takva konferencija održava svake druge godine.

Pri ocjenjivanju samokritike sovjetskih metrologa i zainteresiranih organa Vlade SSSR ne smijemo smetnuti s uma da je razina sovjetske metrologije ravna američkoj ili engleskoj, tj. riječ je o vrhu metrološke piramide svijeta! Sovjetska metrologija pridonijela je tome da je SSSR u ciglih 50 godina uspio neslućeno razviti svoju industriju, znanost, školstvo itd. Prisjetimo se samo uspješnih sovjetskih programa na polju svemirskih istraživanja, raketne tehnike, nukleonike, elektroenergetike itd. Spomenuta sovjetska samokritika, prema tome, ne negira vrijednost postignutih rezultata, već zahtijeva daljnje ubrzano unapređenje metrologije, jer je to u interesu cjelokupne privrede SSSR.

Na sličan način unapređuju svoju nacionalnu metrologiju i Amerikanci. Oni su godine 1962. osnovali organizaciju National Conference of Standards Laboratories (NCSL), koja svake druge godine održava konferenciju metroloških ustanova USA. Godine 1967. u toj je organizaciji bilo učlanjeno preko 170 *laboratorija* (uključivši i vojsku). Ti laboratoriji održavaju 42 nacionalna standarda (od kilograma i candele pa sve do snage lasera) i bave se baždarenjem i razvojem mjernih uređaja. Glavna preokupacija te gigantske metrološke organizacije jest ispravno koncipiranje i provođenje *metrološke politike* USA, tj. onoga što Amerikanci nazivaju U.S. National Measurement System (Nacionalni mjerni sistem USA). Krajnji cilj provođenja tog sistema jest unapređivanje nacionalne privrede: »Pri prerastanju znanosti i tehnologije iz djetinstva preko mladosti u plodonosnu zrelost, svaki je stupanj porasta bio potpomognut, vođen i potvrđen mjerenjima, posebno preciznim mjerenjima.«

Navedenim citatom opisao je godine 1964. *E. W. Houghton* važnost još jednog načina unapređivanja jednog dijela nacionalne metrologije USA: putem konferencije vrhunskih metrologa Amerikanci održavaju svake druge godine Conference on Precision Electromagnetic Measurements, CPEM (Konferencija o preciznim elektromagnetskim mjerenjima), na kojoj se raspravljaju problemi *vrhunske* metrologije elektromagnetizma. To je *međunarodna* konferencija osnovana sa svrhom da se na njoj raspravlja postojeće stanje znanstvene elektromagnetske metrologije, potakne međunarodna razmjena informacija i ubrzaju kontakti između industrijskih laboratorija i nacionalnih metroloških zavoda.

Godine 1964. na Konferenciji su uz Amerikance (NBS, sveučilišta, nuklearni instituti, industrija, vojska, zrakoplovstvo, mornarica) referirali stručnjaci iz Australije, Engleske (NPL i Ministarstvo zrakoplovstva), Francuske, Japana, Jugoslavije (*P. Miljanić* sa Univerziteta u Beogradu) i Kanade. Godine 1966. na Konferenciji su podnijeli referate metrolozi iz deset stranih zemalja.

7.3. Četiri perioda djelovanja Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM)

7.3.1. Lokacija BIPM. Nakon potpisivanja Konvencije o metru (vidi odlomak 6.3.2), francuska je vlada za potrebe Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM) stavila na raspolaganje historijski dvorac Pavillon de Breteuil (vidi sliku A.27), smješten unutar Parc de Saint-Cloud u Sèvresu, oko 10 km jugozapadno od središta Pariza. Površina zemljišta bila je prvotno oko 25 000 m², a kad to više nije bilo dovoljno, vlada Francuske poklonila je za izgradnju novih laboratorijskih građevina 1929. godine 300 m², a 1963. daljnjih 18 000 m². Vibracije zemljišta zbog djelovanja industrije i prometa nisu izrazite, jer ga štiti nacionalni park koji okružuje Pavillon de Breteuil. U početku je BIPM imao samo 5 znanstvenih i tehničkih suradnika. Taj broj je do godine 1964. porastao na 25, odnosno zajedno s ostalim osobljem na 37.

Pavillon de Breteuil bio je teško oštećen za njemačko-francuskog rata 1870. Obnovljeni dvorac ima velike konferencijske sale, urede i rezidenciju direktora BIPM. Specijalno projektirana građevina, namijenjena vrhunskoj metrološkoj djelatnosti svijeta, obuhvaća šest glavnih prostorija okruženih debelim dvostrukim zidovima i odijeljenih od okolice pobočnim prostorijama. U tim glavnim prostorijama temperatura se može održavati gotovo konstantnom ili mijenjati vrlo polagano, što je bitan i neophodan uvjet za osiguranje stabilnosti izmjera mjernih uređaja i za pouzdano poznavanje temperature kovinskih mjera bez kondicioniranja. Sunčano svjetlo ulazi u prostorije na poseban način tako da se dobiva difuzno dnevno svjetlo, a posebni uređaji apsorbiraju infracrveno svjetlo. U tim prostorijama smješteni su interferencijski komparatori (vidi odsječak 8.5), vage, barometri i ostali mjerni uređaji. Tri isto takve glavne prostorije sagrađene su godine 1929. te dvije podzemne: za interferometrijska, električka i fotometrijska mjerenja. Tokom godina 1963 ... 1964 izgrađene su dvije specijalno projektirane zgrade, jedna za neutronska mjerenja i jedna veća za standarde radionuklida, *X*- i gama-zraka (vidi sliku H.1 u odlomku H.1.1.3).

Djelatnost Međunarodnog ureda može se podijeliti u četiri velika vremenska perioda. Budući da rezultati rada BIPM imaju izvanredan utjecaj na svaku nacionalnu metrologiju, ukratko ćemo spomenuti glavne radove BIPM od godine 1875. do 1965, dakle u 90 godina njegova postojanja.

7.3.2. Prvi period, 1875 ... 1889. U tom razdoblju međusobno je uspoređeno više od 30 nacionalnih pramjera metra i 40 pramjera kilograma, koji su svojedobno bili podijeljeni članicama Konvencije o metru. BIPM se u tom periodu uglavnom bavio načinom pohranjivanja prametara i prakilograma odabranih za međunarodne pramjere na kojima su se temeljile definicije jedinica duljine i mase. U tih 14 godina preciznost mjerenja i reprodukcije jedinica duljine, mase i temperature povećana je oko 100 puta!

U tom periodu obavljena su izvanredno važna eksperimentalna istraživanja u vezi s održavanjem pramjera i njihovim uspoređivanjem s nacionalnim pramjerama: plinska termometrija (vidi odsječak D.3.3) omogućila je da se živini termometri baždare s pogreškom od nekoliko 1/1000 °C (umjesto prijašnjih 1/10), utvrđen je koeficijent toplinskog širenja platinsko-iridijeve legure te koeficijenti drugih materijala, *Young*ovi moduli, razvijeni su najpreciznji živini barometri i manometri, osvojene su metode za baždarenje mjera s crticama u svrhu pronalaženja što pouzdanijih vrijednosti decimetra, centimetra, milimetra i drugih mjera duljine u ovisnosti o metru, usavršeni su geodetski mjerni uređaji i mjere itd.

7.3.3. Drugi period, 1889... 1927, bio je uglavnom posvećen poboljšanjima, kompletiranju i primjeni novih metoda u vezi s mjerenjem duljine, mase i temperature. Pri tom su učinjena mnoga otkrića važna za praktičnu i znanstvenu metrologiju. Na primjer, utvrđena su svojstva mnogih materijala koji se upotrebljavaju u metrologiji (platin-iridij, čelici, voda, živa itd.). Koliko su to skupi i dugotrajni poslovi, ilustrira ovaj podatak: volumen 1 kg vode pri temperaturi njene maksimalne gustoće (4 °C) pri normalnom atmosferskom tlaku utvrđen je u iznosu 1,000028 dm^3 nakon pet godina rada petorice eksperimentatora koji su primjenjivali tri različite metode!

U tom razdoblju bile su izmjerene termodinamičke temperature uporišnih temperaturnih tačaka (vidi odsječak D.3.6) sve do vrelišta sumpora. Pouzdanije je bilo utvrđeno toplinsko širenje platinsko-iridijevih pramjera metra, svi primjerci nacionalnih prametara bili su preispitani, a isto tako i nacionalni prakilogrami.

Kraj stoljeća karakteriziran je značajnim otkrićima na polju povezivanja duljine međunarodnog prametra s valnim duljinama zračenja upotrebljavanima u spektroskopiji (više o tome u odsječku 8.9). Profesor *A. A. Michelson* iz Chicaga i tadašnji direktor BIPM *R. Benoit* izmjerili su 1892 . . . 1893. na temelju *Michelson*ove metode i njegova interferometra (vidi odsječak 8.5) duljinu vala crvene linije kadmija. Rezultati su bili oko 100 puta pouzdaniji od podataka u *Rowland*ovim tablicama. Slična mjerenja, ali još preciznija, obavili su kasnije *Benoit*, *Fabry* i *Perot* te dobili vrijednost $6438{,}4696 \cdot 10^{-10}$ m u suhom zraku temperature 15 °C i normalnog atmosferskog tlaka (sadržaj CO_2 u zraku 0,03 %). Tu vrijednost prihvatila je 1927. i Generalna konferencija za mjere i utege. Duljina vala crvene kadmijeve linije mogla se poslije tih mjera odabrati za osnovu interferencijskih mjerenja duljine, za verifikaciju skala štapnih mjera podijeljenih na 1 mm i 1 cm, te za vvrificiranje krajnjih mjera koje su ušle u industrijsku primjenu oko godine 1910. Duljina vala crvene kadmijeve linije bila je i osnovom spektroskopske jedinice ångström (Å) za koju danas vrijedi odnos $Å = 10^{-10}$ m (vidi odsječak 8.9).

Opsežna istraživanja svojstava invara omogućila su mnoga poboljšanja u geodetskim mjerenjima duljina, gdje je kontroliranje mjere s obzirom na temperaturu pri radu na otvorenom bio glavni problem. Primjena geodetskih žica normalne duljine 24 m, koje je uveo BIPM, 30 puta smanjuje trajanje i troškove mjerenja duljine geodetske baze. Pri tom je mjerna netačnost ista ili čak manja od starih metoda, tj. $1 : 10^6$. Ispitivanje i testiranje geodetskih žica postali su rutinskim poslom u BIPM.

U razdoblju od godine 1889. do 1927. ispitan je niz nacionalnih i radnih mjera duljine i mase, među njima i britanski yard i pound. Oni su tom prilikom mnogo preciznije uspoređeni s metričkom pramjerom negoli prilikom prethodnih usporedbi. Sveukupni rad BIPM opisan je u 17 knjiga Travaux et Mémoires, koje je BIPM objavio između 1881. i 1927.

7.3.4. Treći period, 1927... 1960. Obilježje ovog perioda rada BIPM je dvojako: proširenje djelatnosti BIPM s mjernim standardima na polju elektromagnetizma, fotometrije i ionizirajućih zračenja, te proširenje djelatnosti BIPM u međunarodnoj suradnji koja se više ne odnosi samo na duljinu, masu, temperaturu, elektromagnetizam, fotometriju i ionizirajuća zračenja već i na *vrijeme* i frekvenciju. U toj djelatnosti velik su posao obavili savjetodavni odbori čiju organizaciju sastanaka, priređivanja dokumentacije, prevođenja itd. obavlja BIPM. Eksperimentalni rad BIPM bio je u tom trećem periodu posvećen stalnom usavršavanju na starim područjima, stvaranju novih sekcija za elektromagnetizam i fotometriju, te nekim specijalnim istraživačkim zadacima.

U starim područjima BIPM se bavio istraživanjima metalnih legura za standarde duljine i mase, metodama uspoređivanja mjera sa crticama i krajnjih mjera, unapređenjem geodetskih mjera u obliku žica i traka, živinom termometrijom itd. U sekciji za elektromagnetizam radovi su se odnosili na usporedbu manganinskih standarda (normala) električkog otpora i normale napona, *Weston*ova elementa, sa normalama čije su vrijednosti definirane pomoću strujne vage i drugih pramjerila (vidi poglavlje E.3). U vezi s time, kao i u vezi s najpreciznijim mjerenjima sila, nadasve su važni eksperimentalni radovi na osvajanju nove metode preciznog direktnog mjerenja ubrzanja zemljine teže na bilo kojem mjestu Zemlje. Neki radovi još su u toku, a o metodama direktnog mjerenja g podrobnije se govori u odsječku 9.5. Ovdje navodimo samo to kako najnoviji rezultati pokazuju da je stvarno ubrzanje zemljine teže oko 13 milijuntinki manje od vrijednosti koju daje tzv. Potsdamski sistem (odsječak 9.4).

Fotometrijska sekcija BIPM uspoređuje »standardne žarulje« većih nacionalnih laboratorija i utvrđuje odstupanja njihovih standarda svjetlosne jakosti i svjetlosnog toka pri različitim temperaturama boje (engl. colour temperature; vidi odlomak G.2.5.3) itd. BIPM sudjeluje s Commission Internationale d'Éclairage u području mjernih jedinica, heterokromatskih usporedbi, standarda temperature boje, poboljšanja konstrukcije standardnih žarulja svjetiljki i fotoćelija s linearnom karakteristikom.

U BIPM su nastavljeni i *Michelson*ovi pionirski radovi iz godina 1892... 93. na spektralnim linijama kadmija i drugih elemenata. (Radovi *A. Pérard*a i drugih opisani su u odsječku 8.9.) Postojanje niza mononuklida nakon 1945. omogućilo je da se u razdoblju 1954... 1957. u BIPM obavi niz eksperimentalnih radova na tom polju. Rezultat je poznat: godine 1960. Generalna konferencija za mjere i utege definirala je metar kao duljinu jednaku 1650763,73 duljine vala zračenja koje odgovara prijelazu između razina $2\ p_{10}$ i $5\ d_5$ kriptona 86 (vidi odsječak 8.7). Budući da emitirajući atomi ne smiju biti poremećeni od vanjskih utjecaja, valna duljina je ekstrapolirana na tlak $p = 0$ plina kriptona u kriptonskoj svjetiljci, a *Doppler*ovi pomaci, uzrokovani gibanjem plina, eliminirani su. Upute za praktičnu realizaciju izvora zračenja CIPM je prihvatio godine 1960. na temelju saznanja stečenih u BIPM i drugim velikim nacionalnim metrološkim zavodima.

7.3.5. Četvrti period, od 1960. do danas. Djelovanje BIPM u prve četiri godine ovog perioda pokazuje da je definitivno prihvaćen posve nov smjer znanstvene metrologije: povezivanje atomske fizike i elektronike s mehanikom i optikom u svrhu definiranja i reprodukcije temeljnih mjernih jedinica (usporedi s odsječkom 5.3). Nove djelatnosti, npr. visokofrekventne elektromagnetske veličine, ulaze u okvir djelatnosti BIPM, i to u zajedničkom radu s ostalim nacionalnim metrološkim zavodima i organizacijama. Ta tendencija postaje sve očitijom, a

BIPM prerašćuje u velik svjetski znanstveno-koordinacijski centar sveukupnih metroloških istraživanja.

Budući da je od godine 1960. jedinica duljine metar definirana brojem duljina vala zračenja atoma kriptona 86, BIPM se uz rutinske poslove primjene atomskih zračenja za mjerenje duljina bavi i daljnjim usavršavanjima izvorâ zračenja. Na primjer, monokromatsko zračenje plinskog *lasera* (vidi odsječak 8.6) upotrebljava se u BIPM kao eksperimentalno pomagalo, iako duljina njegova vala nije posve stabilna u toku duljeg vremenskog perioda. Primjenjuje se, međutim, zbog nenadmašne koherencije laserskog zračenja. Znatni istraživački radovi bili su posvećeni pripremi nove definicije jedinice vremena na temelju izvanredno stabilne *frekvencije* prijelaza atoma iz jednog stanja u drugo (vidi odsječke 10.1 i 10.6). Isto tako se žiromagnetska svojstva protona primjenjuju kao osnova mjerenja magnetskih veličina pomoću frekvencije (odsječak E.3.2).

Već ovih nekoliko primjera pokazuje da je atomska fizika stvarno ušla u visoku znanstvenu metrologiju (pa čak i u praktičnu; vidi opis industrijske primjene interferometra, lasera i digitalnih brojača u odsječku 8.6), dok je vrhunska poluvodička tehnika primijenjena u novom interferencijskom komparatoru i pri radovima u sekciji za standarde mjerenja ionizirajućih zračenja BIPM. Od godine 1960. dva su glavna smjera eksperimentalnih istraživanja u BIPM: 1. usavršavanje mjerenja duljine valnim metrom uz potrebna poboljšanja u pogledu održavanja konstantne temperature; 2. organiziranje i efikasan rad novih sekcija BIPM koje se bave standardima radioaktivnosti, izvorima neutrona, *X*- i gama-zraka.

7.4. Vrhunska metrološka djelatnost Međunarodnog komiteta za mjere i utege (CIPM)

Sa sedam svojih savjetodavnih odbora, s Međunarodnim uredom za mjere i utege (shemu organizacije vidi u odsječku 7.1), u uskoj suradnji s nacionalnim metrološkim zavodima, Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM) predstavlja mozak i koordinacijski centar znanstvene metrologije čitava svijeta. Posljednjih desetljeća djelatnost CIPM opsežnija je i uspješnija negoli ikada prije. Stoga su posljednjih decenija i rezultati unapređenja vrhunske metrologije izvanredno plodni i, što je još važnije, izvanredno korisni za sve nacionalne metrološke institucije, dakle i za sve nacionalne privrede i industrije. Da bismo u okviru ove knjige čitatelju pružili pregled najnovijih radova i rezultata udružene svjetske fundamentalne metrologije, sažeto smo sastavili ovaj odsječak koji prikazuje stanje potkraj godine 1967.

7.4.1. Mjerenje mase. Međunarodni prakilogram, tj. kilogramski uteg koji je odabran za svjetsku pramjeru mase, uspoređuje se u Međunarodnom uredu sa svojim kopijama na tzv. 1-kilogramskoj vagi *Gauss*ovom metodom dvostrukog vaganja (zamjena utega eliminira pogrešku koja nastaje zbog posve male nejednakosti duljine krakova vage; vidi odsječak 9.3). Osjetljivost najbolje vage u BIPM iznosi $1:10^8$, tj. 0,01 miligrama na jedan kilogram (još osjetljivije vage imaju engleski National Physical Laboratory i drugi nacionalni metrološki zavodi), što je vjerojatno dovoljno za današnje potrebe vrhunske metrologije.

Sekundarni utezi mase 1 kg izrađeni su od iste platinsko-iridijeve legure kao i međunarodna pramjera i nacionalne kopije ili od drugih neoksidirajućih legura male magnetske susceptibilnosti. Prikladni su i neki nerđajući čelici.

Čišćenje tih utega zahtijeva znatnu pažnju: u BIPM se npr. obavlja pomoću mlaza zraka. Pri mjerenju masa mora se kao glavna korekcija uzeti u obzir uzgon koji se izračuna na temelju gustoće zraka i volumena utega. Gustoća zraka dobiva se u ovisnosti o tlaku, temperaturi i vlažnosti, a volumen utega proizlazi iz njegova uzgona u vodi i može se utvrditi s pouzdanošću oko $1:10^5$. Niz pojedinosti o pramjerama mase, o drugim utezima i o načinu najpreciznijeg vaganja čitatelj može naći u odsječku 9.3 ove knjige.

7.4.2. Mjerenje vremena i frekvencije. Stara definicija jedinice vremena (točno definirani dio srednjeg sunčanog dana; više o tome u odsječku A.10.3) garantirala je sigurnost njene reprodukcije $1:10^7$. Nova definicija sekunde, a time i definicija veličine »vrijeme« (efemeridno vrijeme), koja je zaključkom jedanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege bila na snazi od godine 1960. do 1967, omogućila je reprodukciju jedinice vremena na temelju višegodišnjih opažanja astronoma s pouzdanošću $1:10^9$.

Precizni satovi neophodno su pomagalo astronoma pri radu na realizaciji definicije jedinica vremena. Vrijeme tih satova teče paralelno s dugotrajnim astronomskim opažanjima. Pošto završe opažanja i pripadne proračune, astronomi mogu *definirati* koliko su vrijeme ti satovi stvarno pokazali. Tako ti satovi postaju u pogledu reprodukcije jedinice vremena vjerna kopija svemirskog satnog mehanizma. Budući da za harmonijske pojave vrijedi $f = 1/T$ (f — frekvencija, T — period zračenja), kvantni uređaji za mjerenje vremena ujedno su osnova za mjerenje frekvencije i obratno. Svojedobno su najbolji satovi bila sekundna njihala; zatim su se mehanizmi i uređaji za mjerenje vremena usavršavali (sl. A.1), pojavili su se kremeni satovi, a u najnovije vrijeme atomski i molekularni satovi (podrobnije u odsječcima 10.1 i 10.6), tzv. kvantni oscilatori. Pomoću njih jedinica vremena može se proizvoditi s pouzdanošću $1:10^{12}$ do $1:10^{14}$ ($1:10^{12}$ znači da bi se pogreška od 1 sekunde nakupila tokom 30 tisuća godina rada takvog sata, ako bi on imao toliku trajnost).

Takve pouzdanosti reprodukcije vremenskih intervala i frekvencija danas su doista potrebne ne samo u znanstvenoj metrologiji već i u važnim tehničkim primjenama. Prisjetimo se samo svemirskih letjelica, gdje ogromne daljine zahtijevaju izvanredno pouzdano utvrđivanje vremenskih trenutaka i intervala ako se žele postići određeni ciljevi! Zato je 1956. osnovan »Savjetodavni odbor za definiciju sekunde« Međunarodnog komiteta za mjere i utege sa svrhom da se pronađe nov, što precizniji i pouzdaniji način reproduciranja jedinice vremena, koji će zadovoljiti i astronome i fizičare. Astronomi, naime, mjere vrijeme na godine i tisuće godina; njima je potrebna kontinuirana vremenska skala koja se prostire u budućnost i prošlost (vidi poglavlje 10). Fizičari, naprotiv, mjere relativno kratke vremenske intervale; no i jednima i drugima potrebni su što precizniji satovi za mjerenje *vremenskih intervala.*

Stoga je Međunarodni komitet za mjere i utege na temelju rada svog Savjetodavnog odbora za definiciju sekunde preporučio Generalnoj konferenciji na 12. zasjedanju godine 1964. provizorno rješenje koje je ona i prihvatila: neka se zadrži postojeća astronomska definicija sekunde, a za neposredna mjerenja vremenskih intervala može se primjenjivati cezijev sat (Cs 133) koji radi na frekvenciji 9 192 631 770 Hz, tj. nešto preko 9 GHz (vidi odsječak 10.6). Privremena atomska definicija sekunde prerasla je na 13. zasjedanju Generalne konferencije godine 1967. u novu definiciju sekunde, osnovnu jedinicu vremena Međunarodnog sistema jedinica (SI): »Sekunda je trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgo-

vara prijelazu između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma cezija 133.« Podrobno se i opširno o jedinici vremena raspravlja u poglavlju A.10 ove knjige.

7.4.3. Mjerenje duljine. O najpreciznijim mjerenjima duljine govori se na nekoliko mjesta u ovoj knjizi, jer je na tom polju u toku povijesti znanstvene metrologije uloženo najviše napora. Stoga ćemo ovdje o mjerenju duljine iznijeti samo neke suvremene činjenice. Godine 1960. stavljena je van snage definicija metra pomoću štapnog prametra od 1889, te uvedena definicija i realizacija jedinice duljine »metar« s izjavom da je to duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala narančastog zračenja kriptona 86.

Savjetodavni odbor za definiciju metra (odbor se sastoji od predstavnika 8 nacionalnih metroloških zavoda, predstavnika Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku, predstavnika Međunarodne astronomske unije, direktora BIPM i nekoliko specijalista za spektroskopiju i metrologiju) utvrdio je na svojoj trećoj sjednici u oktobru 1962, da ni jedna od novih tehnika kojom bi se mogao reproducirati metar (atomske zrake, *Zeeman*ov ili interferencijski filtar, apsorpcija, laser) nije bolja od kriptonske žarulje. Iskustvo s kriptonskim valnim metrom je pokazalo da ne treba nadopunjavati ni upute o načinu reprodukcije metra pomoću kriptona 86 koje je godine 1960. objavio Međunarodni komitet. Jedino je za *sekundarna* pramjerila metra CIPM godine 1963. preporučio tri daljnje spektralne linije kriptona 86, četiri linije žive 198 i četiri linije kadmija 114 (vidi odlomak 8.7.4). Generalna konferencija je godine 1964. prihvatila te preporuke, prema kojima se duljine vala sekundarnih pramjerila mogu u vakuumu reproducirati s ovom pouzdanošću: Kr 86 sa $2:10^8$, Hg 198 sa $5:10^8$, Cd 114 sa $7:10^8$. Definiranje tih duljina vala naročito je korisno za vrlo precizna mjerenja duljina u industriji.

Krajnje štapne mjere, naročito čelični mjerni blokovi s ravnim stranicama, već se godinama mjere brojem duljina vala pomoću interferometra. (Broj valova može se npr. prebrojiti kontinuiranim pomicanjem zrcala; vidi poglavlje 8.) Danas se i štapne mjere s crticama, kao što je npr. prijašnji prametar, direktno mjere brojem duljina vala, a ne uspoređivanjem s drugom štapnom mjerom. U tu svrhu razvijeni su posebni interferencijski komparatori čiji se mikroskopi vizuelno mogu namjestiti sa sigurnošću oko 0,1 μm ($=10^{-7}$ m), a fotoelektrički 10 puta bolje, dakle sa sigurnošću oko 0,01 μm $=10^{-8}$ m, iako je debljina crtice na najnovijim štapnim mjerama oko 5 μm (vidi odsječak 8.5).

7.4.4. Mjerenje temperature. Savjetodavni odbor za termometriju vodi i koordinira od godine 1937, kada je osnovan, istraživačke radove na području utvrđivanja i načina mjerenja temperature. Taj rad sastoji se u biti od neprekidnog poboljšavanja poznavanja i reprodukcije karakterističnih temperaturnih tačaka, a želi se postići ovo: veća pouzdanost poznavanja termodinamičke temperature odabranih fiksnih tačaka (opsežno o tome vidi u odsječku D.3.6), bolja reproducibilnost temperature fiksnih tačaka, proširenje tih tačaka ispod današnje donje granice itd.

U tu svrhu nacionalni metrološki zavodi Njemačke, Velike Britanije, USA i laboratorij u Leidenu predložili su »međunarodnu empiričku temperaturnu skalu« koju je Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila na svom zasjedanju godine 1927, a usavršenu godine 1948. (vidi odlomak D.3.6.9). Neke tačke te skale dadu se reproducirati s pouzdanošću od nekoliko 10^{-4} °C. Za područja termodinamičke temperature 0,25 ... 2,245 K i 0,5 ... 5,22 K preporučene su helijeve tablice ^{3}He i ^{4}He. Empirička temperaturna skala upotrebljava se, unatoč

tome što je veličina »temperatura« definirana termodinamički, zato što se termodinamička temperaturna skala (uglavnom na temelju plinske termometrije) ne može reproducirati brzo i jeftino uz potrebnu pouzdanost. Stoga se i primjenjuju dvije temperaturne skale. Termodinamičku je Generalna konferencija za mjere i utege definirala godine 1954, pripisavši trojnoj tački vode vrijednost tačno 273,16 K. Godine 1968. CIPM je, na temelju ovlaštenja Generalne konferencije, uveo novu skalu: »Međunarodnu empiričku temperaturnu skalu 1968« (odsječak D.3.6).

U okviru BIPM i CIPM učinjen je izvanredan napredak na području termometrije sa živinim termometrima od stakla. Pomoću njih se u srednjem području temperatura može mjeriti s preciznošću od nekoliko tisućinki kelvina, a upute za upotrebu i korekcije su jednostavne. Baždarenje takvih termometara danas je rutinski posao u BIPM, koji ih i sâm upotrebljava u mnoge svrhe. Zamjena stakla kremenom dovela je do dobrih rezultata; izrada je doduše vrlo teška, ali stabilnost je tako dobra da se trojna tačka mora reproducirati vrlo rijetko, korekture su pojednostavnjene, a sigurnost $\pm 10^{-4}$ °C može se postići konvencionalnim uređajem.

Vrelišta pojedinih tvari (vidi odsječak D.3.6) odabranih za fiksne temperaturne tačke definirana su pri normiranom atmosferskom tlaku koji prema odluci Generalne konferencije iznosi 101 325 N/m² = 1,013 25 bar. Promjena tlaka za 4 N/m² (0,03 mm Hg), tj. za $4 : 10^5$, mijenja temperaturu trojne tačke vode za 0,001 K. Tlak se obično mjeri stupcem žive (vidi odsječak B.4.1), a jednak je umnošku visine tog stupca, gustoće žive i ubrzanja zemljine teže. U BIPM je izrađena nova vrsta takvog manometra kod kojeg se visina živinog stupca (srednjeg dijela meniskusa) mjeri interferencijskim prugama bijelog svjetla. Pri tom se, radi postizanja što veće preciznosti mjerenja visine stupca, uzima u obzir korekcija u vezi s indeksom loma zraka u kojem se kreće upotrijebljeno svjetlo (usporedi s odsječkom 8.3).

7.4.5. Elektromagnetska mjerenja. Pripremanje prijelaza na svjetsku primjenu jedinica današnjeg Međunarodnog sistema jedinica (SI) u elektromagnetizmu bio je prvi veliki posao Savjetodavnog odbora za elektromagnetizam nakon njegova osnutka godine 1927. Tada su se, naime, u elektromagnetizmu upotrebljavale jedinice tzv. Tehničkog sistema koje su se temeljile na izlučivanju srebra iz srebrnog nitrata (»materijalni amper«, A_0; vidi poglavlje E.5 u kojem tako definirane jedinice nazivamo »tehničkim« ili »materijalnim« jedinicama) i električkom otporu živina stupca (»materijalni ohm«, Ω_0). U tom poglavlju detaljno je opisano kako je taj veliki eksperimentalni posao okrunjen time što je Generalna konferencija godine 1948. propisala da je $\Omega_0 = 1{,}000\,49\ \Omega$ te $V_0 = 1{,}000\,34$ V, gdje Ω i V predstavljaju jedinice SI. Bilo je doduše predviđeno i sve pripremljeno da se te odluke prihvate na devetom zasjedanju Generalne konferencije godine 1939, ali je ono zbog rata održano tek 1948.

Iako je amper po definiciji osnovna jedinica SI, a reproducira se na strujnoj vagi, odnosno uskoro će se opsežnije reproducirati pomoću jeftinijeg i za rad prikladnijeg protonskog rezonatora (odsječak E.3.2), i veliki nacionalni metrološki zavodi obavljaju svoja najpreciznija mjerenja pomoću tzv. održavajućih standarda (vidi odlomak 5.3.4). Za održavajuće standarde električkog otpora 1 ohm upotrebljavaju manganinske otpornike, a za standarde napona *Weston*ove normalne zasićene elemente. Pomoću njih mogu preko relacije $I = U/R$, odnosno $A = V/\Omega$, s odgovarajućim shemama postići i osnovnu jedinicu jakosti struje. Naravno da se ti održavajući standardi pohranjuju i upotrebljavaju pri vrlo stabilnim i pouzdano

poznatim temperaturama i uz druge propozicije električke mjerne tehnike (odsječci E.3.5, 3.6). I BIPM ima takve slogove otpornika i *Weston*ovih elemenata.

Vrijednosti otpora i napona održavajućih standarda izmjerene su u nacionalnim metrološkim zavodima npr. pomoću *Campbell*ova pramjerila i strujne vage (poglavlje E.3). To znači da su te vrijednosti izražene jedinicama SI s tolikom nepouzdanošću s kolikom nesigurnošću se jedinice SI ohm i amper mogu reproducirati na spomenutim pramjerilima. Svake treće godine nacionalni metrološki zavodi šalju istodobno svoje manganinske otpornike i *Weston*ove elemente u BIPM, gdje se oni međusobno uspoređuju. Opisana praksa uspoređivanja koju provode CIPM i BIPM zajedno s nacionalnim metrološkim zavodima izvanredno je korisna i uz dobru koordinaciju radova doista dovodi do ujednačavanja najpreciznijih elektromagnetskih mjerenja u čitavu svijetu (pojedinosti i rezultate vidi u poglavlju E.3).

Međunarodni ured za mjere i utege intenzivno radi na usavršavanju održavajućih standarda fizikalne veličine »električki otpor«. U tu svrhu BIPM istražuje upotrebu otpornika od čistog metala (npr. od platine) koji će biti otporniji prema starenju i koroziji. Pri tom je jedna od poteškoća u tome što temperaturni koeficijent otpora čistih metala iznosi oko 0,004/°C, a to znači da prilikom prolaženja električne struje kroz takve otpornike temperatura ne bi smjela varirati za više od nekoliko 10^{-4} °C.

U okvir djelatnosti Savjetodavnog odbora za elektromagnetizam ulazi i istraživanje mogućnosti ostvarenja novih pramjerila osnovne elektromagnetske jedinice SI. Jedno od njih je protonski rezonator o kojem se opširno raspravlja u odsječku E.3.2. Budući da pri tom treba što pouzdanije poznavati žiromagnetsku konstantu protona, vrijednosti te konstante uspoređene su na temelju rezultata koji su do godine 1963. mjerenjem dobiveni u zapadnonjemačkom PTB, američkom NBS, engleskom NPL, te lenjingradskom i harkovskom metrološkom institutu. Te vrijednosti kreću se oko $\omega/B = (2{,}675\,04 \ldots 2{,}675\,21) \cdot 10^8$ C/kg (C = = As, kg = VAs^3/m^2, C/kg = $T^{-1}s^{-1}$), pa je stoga na zasjedanju Generalne konferencije godine 1964. preporučena primjena srednje vrijednosti $\omega/B = 2{,}675\,13 \cdot 10^8$ C/kg (bez dijamagnetske korekcije) uz nepouzdanost vrijednosti oko $5 : 10^6$. Godine 1968. najpouzdanijom vrijednošću smatrala se $\omega/B = 2{,}675\,12 \cdot 10^8$ C/kg (vidi odlomak E.1.5.5).

Otkako su godine 1955. *Lampard* i *Thompson* iz australskog metrološkog instituta objavili nov elektrostatski teorem prema kojem se može izraditi kondenzator čiji kapacitet ovisi samo o duljini i dielektričnosti (vidi odsječak E.3.3), naglo je u svijetu poraslo zanimanje za reprodukciju jedinice kapaciteta ili njenog višekratnika pomoću takvog uređaja. Budući da duljinu mjere interferometrijski, Australci vjeruju da svojim održavajućim standardom kapaciteta postižu relativnu nesigurnost vrijednosti kapaciteta oko $\pm 6 \cdot 10^{-7}$. Nedostatak takvog standarda je relativno malen kapacitet reda veličine pikofarada i osjetljivost na transport, a prednost mu je neovisnost o nepouzdanosti vrijednosti ubrzanja zemljine teže g (kao što je to npr. potrebno kod strujne vage). Umjesto toga mora se poznavati brzina elektromagnetskih valova u vakuumu, ako se ovaj standard želi povezati s ostalim elektromagnetskim jedinicama (relacija $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$; vidi odsječak E.1.4).

Postoji još niz djelatnosti Savjetodavnog odbora za elektromagnetizam, koje ovdje možemo samo spomenuti. To su, na primjer, međunarodne usporedbe standardnih tinjčevih kondenzatora kapaciteta 0,1 μF; prva serija usporedbi učinjena je od godine 1959. do 1964. Vrlo važan je posao na poboljšanju jedinstvenosti i preciznosti elektromagnetskih mjerenja u području visokih frekvencija, npr. us-

poredbena mjerenja elektromagnetske snage pri 3 GHz i 10 GHz (odsječak E.3.7), dalje proučavanje *Zener*ovih dioda (odlomak E.3.5.9) za održavajuće standarde napona umjesto *Weston*ovih elemenata itd. itd.

7.4.6. Fotometrijska mjerenja. Prema odluci Generalne konferencije od godine 1948, »međunarodna svijeća« i njemačka »Hefnerova svijeća« (koje su se međusobno razlikovale za oko 10%; vidi odsječak G.3.6) nadomještene su jedinicom »nova svijeća«, koja je uskoro zatim dobila isti, latinski naziv u svim jezicima: »candela« (izgovori: kandéla). Kratica joj je cd. Candela je jedinica svjetlosne jakosti, a definirana je posredno: luminancija savršenog zračila (crno tijelo) pri temperaturi skrućivanja platine i tlaku $1{,}013\,25 \cdot 10^5$ N/m² iznosi $6 \cdot 10^5$ cd/m² (vidi odsječak G.2.3). Spektralna razdioba zračenja takvog crnog tijela vrlo je slična razdiobi volframove žarulje, koja se upotrebljava kao sekundarni standard (normala) pri temperaturi boje 2042 K (odlomak G.2.5.3). Zračenja drukčijih spektralnih razdiobi uspoređuju se s ovim sekundarnim standardom tako da se uzimaju u obzir vrijednosti iz tablice spektralne osjetljivosti oka na monokromatska zračenja koju je godine 1924. objavila Međunarodna komisija za rasvjetu (International Commission on Illumination), a godine 1933. prihvatio Međunarodni komitet, CIPM. Prvo baždarenje žarulja prema crnom zračilu obavljeno je godine 1931. u NBS.

Godine 1962. Savjetodavni odbor za fotometriju formirao je radnu grupu sa zadatkom da otkrije zašto se rezultati mjerenja različitih laboratorija razlikuju za $\pm 1\%$, kako je to ustanovljeno uspoređivanjem sekundarnih fotometrijskih standardnih žarulja različitih država u BIPM. Do sada se nije došlo do čvrstih zaključaka pa je potreban daljnji eksperimentalni rad. Pomišlja se i na realizaciju prijedloga engleskog NPL, prema kojem bi se fotometrijske jedinice definirale zadavanjem fotometrijskih vrijednosti specificiranim vidljivim zračenjima u ovisnosti o njihovoj energiji zračenja. Dosadašnji engleski pokusi ohrabruju, a proširit će se u međunarodnom mjerilu budu li se mjerenja zračene energije mogla obaviti s preciznošću oko 1% ili bolje.

Počevši od žarulja upotrebljavanih za sekundarne standarde svjetlosne jakosti pri temperaturi boje 2042 K, nacionalni metrološki zavodi baždare žarulje pri višim temperaturama boje, 2353 K i 2854 K. Te žarulje baždarene su primjenom različitih postupaka heterogene fotometrije (odsječak G.2.1), a jedinstvenost rezultata utvrđena je međunarodnom usporedbom u BIPM. Ostale standardne žarulje slično se primjenjuju za jedinicu svjetlosnog toka lumen pri temperaturi boje 2353 K i 2788 K.

Takve žarulje, ispravno projektirane i probrane, mogu biti toliko stabilne da fotometrijske veličine reproduciraju s pouzdanošću 0,1 ... 0,2% i nakon transportiranja na velike udaljenosti. Na prijedlog nacionalnih metroloških zavoda u BIPM se završava međunarodna usporedba standardnih žarulja za različite temperature boje. Prethodni rezultati pokazuju da razlika između žarulja sedam laboratorija vjerojatno nije veća od ± 3 K pri 2042 K do ± 20 K pri 3000 K.

7.4.7. Mjerenje ionizirajućih zračenja. Izvanredan porast primjene *X*- i gama-zraka u medicini, biologiji, poljoprivredi, industriji, te razvoj nuklearnih istraživanja i nuklearne industrije zahtijevaju da se odaberu pripadne jedinice i mjerne metode. Prvi korak u međunarodnoj suradnji na tom polju učinila je Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja (International Commission on Radiological Units and Measurements, ICRU), osnovana godine 1925. Ta komisija,

koja nema vlastitih laboratorija, konstatirala je godine 1958. da će postupiti najbolje ako onaj dio svoje djelatnosti koji se odnosi na unifikaciju i realizaciju mjernih standarda prepusti BIPM-u. Jedan od razloga toj odluci je činjenica da su nacionalni metrološki zavodi koji se bave ovim problemima ionako u stalnoj vezi s BIPM u pogledu ostalih pramjerila, pramjera, održavajućih standarda i mjernih metoda. I vlade nekih zemalja su zatražile da treba na polju mjerenja ionizirajućih zračenja BIPM opremiti slično kao što je to učinjeno s laboratorijima za mjerenje mase, duljine itd. Na temelju izvještaja Savjetodavnog odbora za standarde mjerenja ionizirajućih zračenja (Comité Consultatif pour les Etalons de Mesure des Radiations Ionisantes) Međunarodni komitet CIPM predložio je Generalnoj konferenciji da se u BIPM formira takva sekcija s novom zgradom, specijaliziranim stručnjacima i novom opremom. Generalna konferencija je godine 1960. taj prijedlog prihvatila i krajem godine 1964. taj najmlađi dio BIPM započeo je s radom (vidi sl. H.1).

Izbor i definicija standarda za mjerenje na području ionizirajućih zračenja mnogo su teži negoli u klasičnom području, gdje se npr. standard (mjera) duljine može upotrebljavati za mjerenje svih istorodnih veličina. Kod zračenjâ je drukčije: elektromagnetska zračenja imaju različite frekvencije, radioaktivno zračenje se može sastojati od alfa-, beta- ili gama-zraka, od neutrona ili od mješavine sviju njih, s vrlo različitim energijama. Osim toga postoji vrlo velik interes za mjerenje ionizacije koju u ljudskom tijelu proizvode *X*-zrake. Stoga BIPM intenzivno proučava mogućnost ostvarenja jednostavnog standarda koji bi udovoljio takvim zahtjevima prakse.

X- i gama-zrake mjere se ionizacijom koju te zrake proizvode u zraku (vidi glavu H). Pri tom je uvjet za preciznost mjerenja stabilnost izvora zračenja i preciznost mjerenja struje ionizacije; stanovit uspjeh u tom smislu već je postignut u BIPM. Aktivnost radioaktivnih uzoraka mjeri se brojem raspada u jedinici vremena (1/s; vansistemska jedinica je curie, $Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ raspada u sekundi) pomoću elektronskih brojačkih uređaja. U BIPM se obavljaju komparativna mjerenja aktivnosti jedinice mase radionuklida; taj rad već je doveo do toga da tridesetak laboratorija iz čitava svijeta sada mjeri jedinstveno s pogreškom unutar 1 do 3%.

Budući da sama neutronska zračenja proizvode neznatnu ionizaciju, ona se moraju mjeriti indirektno putem mjerenja aktivnosti koju oni potiču transmutacijom jezgri, na primjer berilija. U suradnji s nacionalnim metrološkim zavodima pojedinih država, BIPM je u tom smislu već postigao stanovite uspjehe, tj. poboljšanje preciznosti mjerenja.

7.5. Novije odluke Generalne konferencije i revizija jugoslavenskog zakona o mjernim jedinicama

Tekstovi ove knjige sadrže na svim potrebnim mjestima odgovarajuće rezolucije, preporuke i najvažnije upute Generalne konferencije za mjere i utege te njenih organa (CIPM, BIPM i sedam savjetodavnih odbora). Pri tom su u te tekstove uključene i rezolucije najnovijih zasjedanja Generalne konferencije godine 1960, 1964. i 1967. Budući da je »Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima« objavljen godine 1961, on ne sadrži promjene koje su prihvaćene na 12. i 13. zasjedanju Generalne konferencije za mjere i utege godine 1964. i 1967. Stoga zakonodavac treba da što prije pažljivo *revidira* Zakon (Jugoslavija je član Konvencije o metru; vidi odsječak 6.3), i to ne samo u pogledu novih definicija i simbola jedinica već

i u smislu kompletiranja teksta Zakona, napuštanja nekih jedinica ili njihovih naziva itd. Pri tom zakonodavac treba da se posavjetuje s metrološkim stručnjacima, jer će jedino tako izbjeći stručne i terminološke pogreške koje su mu se potkrale u Zakonu od godine 1961. Načelan prijedlog revizije zakona iznosimo u odlomku 7.5.7.

7.5.1. Metar i ångström. Generalna konferencija proglasila je na 11. zasjedanju godine 1960. ovu definiciju metra: »Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala u vakuumu zračenja koje odgovara prijelazu između razina 2 p_{10} i 5 d_5 atoma kriptona 86« (podrobnosti vidi u odsječku 8.7). Istodobno je stavljena van snage definicija metra od godine 1889. koja se bazirala na štapnom prametru (odsječak 6.4). Na svom 12. zasjedanju godine 1964. Generalna konferencija je preporučila da se za reprodukciju jedinice duljine i za mjerenja duljina uz navedeno zračenje kriptona 86 upotrebljavaju još tri spektralne linije kriptona 86, četiri linije žive 198 i četiri linije kadmija 114. Nepouzdanost reprodukcije redom iznosi $2:10^8$, $5:10^8$ i $7:10^8$ (vidi odlomak 8.7.4).

Jedinica duljine ångström ne ulazi u Međunarodni sistem jedinica (SI), ali se gotovo isključivo upotrebljava u spektroskopiji. U skladu s definicijom i reprodukcijom metra putem zračenja kriptona 86, danas vrijedi odnos

$$\text{Å} = \text{ångström} = 10^{-10} \text{ metara.}$$

O biti i historijskom razvoju ove spektroskopske jedinice vidi odsječak 8.9.

7.5.2. Jedinica vremena sekunda. Generalna konferencija je na 11. zasjedanju godine 1960. ratificirala novu definiciju osnovne jedinice SI vremena, tzv. efemeridnu sekundu: »Sekunda je 31 556 925,9747-i dio tropske godine u trenutku 1900, januar 0, 12 sati efemeridnog vremena.« Istodobno je stavljena van snage definicija sekunde kao 1/86 400 srednjeg sunčevog dana.

Na dvanaestom zasjedanju, održanom godine 1964, Generalna konferencija za mjere i utege odlučila je da se za fizikalna mjerenja, uz astronomsku realizaciju sekunde, može upotrebljavati tzv. atomska reprodukcija sekunde. Ona proizlazi iz frekvencije zračenja koje nastaje prilikom prijelaza između hiperfinih razina $F=4$, $M=0$ i $F=3$, $M=0$ osnovnog stanja $^2S_{1/2}$ neporemećenog (vanjskim poljima) atoma cezija 133. Frekvencija prijelaza $f=1/T$ iznosi 9 129 631 770 Hz.

Na 13. zasjedanju, održanom godine 1967, Generalna konferencija je ukinula definiciju efemeridne sekunde od 1960. i objavila novu definiciju koja se oslanja na gore spomenuto zračenje: »Sekunda je trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma cezija 133.« (Pojedinosti o fizikalnoj i astronomskoj reprodukciji sekunde vidi u poglavlju 10.)

7.5.3. Jedinica kelvin (K). Na 13. zasjedanju, održanom mjeseca oktobra 1967, Generalna konferencija za mjere i utege objavila je u rezoluciji broj 3 da je naziv jedinice termodinamičke temperature »kelvin«, a simbol te jedinice veliko slovo »K« (bez kružića). U rezoluciji je posebno naglašeno da jedinicu »kelvin« treba upotrebljavati kako za izražavanje termodinamičke temperature (npr. $T=$ $=303{,}16$ K), tako i za izražavanje temperaturnog intervala (npr. $\Delta T = T - T_t =$ $=30$ K). To je posve prirodno, a metrološki jedino ispravno; tako radimo i u svim drugim granama, npr. za frekventni interval: $\Delta f = f - f_0 = 550$ Hz $- 500$ Hz $=$ $=50$ Hz. Spomenutom rezolucijom ukida se dosadašnji naziv jedinice termodinamičke temperature »stupanj Kelvina« i njen simbol »°K« (s kružićem).

Na zasjedanju godine 1967. Generalna konferencija za mjere i utege objavila je i revidirani tekst definicije jedinice kelvin. Ona glasi: »Jedinica termodinamičke temperature kelvin je 273,16-i dio termodinamičke temperature trojne tačke vode.« (Podrobnosti o jedinicama temperature i načinu njihove reprodukcije vidi u poglavlju D.3.)

7.5.4. Jedinica aktivnosti curie (Ci). Budući da se u mnogim zemljama već niz godina za mjerenje aktivnosti radionuklida upotrebljava jedinica »curie«, a jedinica takve aktivnosti u SI je sekunda^{-1} (1/s), Generalna konferencija je godine 1964. prihvatila za jedinicu radioaktivnosti *izvan* SI (tzv. vansistemska jedinica)

$$\text{curie} = \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{s}^{-1},$$

tj. $3{,}7 \cdot 10^{10}$ raspada u sekundi. Naglašavamo da je kratica »Ci«, dakle s velikim slovom C (donedavna je bilo uobičajeno samo malo slovo c). Podrobniji podaci o toj jedinici mogu se naći u glavi H (vidi i odlomak 7.4.7).

7.5.5. Litar, femto i atto. Generalna konferencija je godine 1964. stavila van tečaja odnos litar = 1,000028 dm^3 i definiciju litra koju je postavila Generalna konferencija na 3. zasjedanju godine 1901. Umjesto toga objavljeno je da vrijedi

$$\text{litar} = \text{kubni decimetar},$$

tj. da je riječ »litar« samo poseban naziv za kubni decimetar (vidi sliku A.25). Generalna konferencija preporučuje da se naziv litar ne upotrebljava za izražavanje rezultata vrlo preciznih mjerenja volumena, već da se u takvim slučajevima upotrebljavaju uobičajene jedinice Međunarodnog sistema jedinica (vidi odsječak B.1.7).

Generalna konferencija je godine 1964. uvela nove prefikse jedinica

$$\text{femto} = \text{f} = 10^{-15}, \quad \text{atto} = \text{a} = 10^{-18}.$$

Pojedinosti o decimalnim dijelovima i dekadskim višekratnicima mjernih jedinica navedene su u odsječku 2.3.

7.5.6. Žiromagnetska konstanta. Na temelju rezultata preciznih mjerenja u pet velikih nacionalnih metroloških zavoda, Međunarodni komitet za mjere i utege objavio je godine 1968. da za primjenu u metrologiji preporučuje vrijednost žiromagnetske konstante protona u vodi (bez dijamagnetske korekcije)

$$\frac{\omega}{B} = 2{,}675\,12\,(1 \pm 5 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^8\ \frac{1}{\text{Ts}}.$$

Pri tom je relativna nepouzdanost uglavnom uzrokovana pogreškom pri reprodukciji jedinice jakosti struje na strujnoj vagi. Simboli označuju: B — magnetsku indukciju, $\omega = 2\pi f$, gdje je f frekvencija (podrobnije vidi u odsječku E.1.5).

7.5.7. Revizija jugoslavenskog zakona o jedinicama. Budući da je Jugoslavija supotpisnica Konvencije o metru (vidi odsječke 6.3,5), zakonodavac treba da u jugoslavenski zakon o mjernim jedinicama unese smisao rezolucija koje je Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila na 12. i 13. zasjedanju (1964. i 1967). Sadržaj tih rezolucija letimično smo spomenuli u prethodnim odlomcima 7.5.2, 3, 4 i 5. Prema tome zakonodavac treba da stavi van tečaja »Zakon o mjernim

jedinicama i mjerilima« od godine 1961. i da proglasi nov zakon koji će uzeti u obzir sve nabrojene i neke druge promjene. To znači da treba ozakoniti:

novu definiciju sekunde,
revidiranu definiciju jedinice termodinamičke temperature,
naziv jedinice kelvin i njen simbol K,
usavršenu definiciju jedinice svjetlosne jakosti (candela),
jedinicu aktivnosti curie,
definiciju litar = kubni decimetar,
decimalne višekratnike femto i atto.

Prilikom pripremanja novog zakona valjalo bi učiniti i druge promjene od kojih ćemo ovdje spomenuti samo neke: 1. Umjesto dosadašnjeg jednog zakona valjalo bi izraditi dva. Jedan treba da se odnosi na mjerne jedinice, a drugi na baždarnu službu, jer npr. naplata žigovine nije u nikakvom odnosu sa definicijom sekunde pomoću cezijeva pramjerila. 2. Eliminirati javnu primjenu sada dopuštenih (1967) naziva i simbola jedinica mikron (μ) i milimikron (mμ), a eventualno i jedinice mase kvintal (metrički cent = q = 100 kg), jer su jedinice kilogram i tona (t = 1 000 kg) dovoljne za sve djelatnosti, uključivši poljoprivredu. 3. Slijed definicija fotometrijskih jedinica započeti s jedinicom luminancije, a ne s jedinicom svjetlosne jakosti (vidi naš prijedlog u odsječku G.2.3). 4. Unijeti radiološke jedinice (vidi glavu H). 5. Propisati primjenu međunarodne ugljikove skale relativne atomske mase (vidi odsječak D.1.2) itd.

Na taj način novi jugoslavenski zakon o mjernim jedinicama doći će u sklad sa suvremenim stanjem metrologije. No pri tom se zakonodavac svakako treba posavjetovati s onim jugoslavenskim metrolozima koji doista temeljito poznaju bit i današnje stanje znanstvene metrologije te suvremenu metrološku terminologiju.

8. Interferencijsko mjerenje duljine i realizacija valne definicije metra

8.1. Veličina duljina i definicija metra od godine 1960.

8.1.1. Fizikalna veličina duljina. Riječju »duljina« označujemo fizikalnu veličinu koju neprestano upotrebljavamo u svim granama ljudske djelatnosti: u privredi, trgovini i znanosti. Kažemo da je veličina »duljina« jedna od osnovnih (polaznih, temeljnih; vidi odsječak 1.2) fizikalnih veličina čovječanstva. Iz *iskustva* znamo što treba razumijevati pod pojmom »duljina«. To je osnovno obilježje pravca, krivulje, razmaknutosti. Značajku pravca imaju visine, širine, dubine, promjeri, udaljenosti, razmaci, a značajku krivulje lukovi, obodi, opsezi itd. Pomoću duljine l definiramo druge veličine: površinu A, volumen V, brzinu v (zajedno s veličinom »vrijeme« t) itd.

Osnovnu (polaznu) veličinu ne možemo definirati, jer fizikalna veličina nije sama konkretna stvar, već osobina, svojstvo, atribut, čovjekov zamišljeni fizikalno-matematički model same prirodne pojave. Kad u neku jednadžbu uvrštavamo simbol duljine l poslužujemo se baš tim atributom ili misaonim modelom pojma »duljina«. Pomoću veličine duljina l definiramo druge, tzv. izvedene veličine, npr. veličinu »površina« $A = l^2$, gdje pod A razumijevamo površinu kvadrata koji je nastao omeđivanjem ravnine pomoću četiri pravca dugačka l.

Stoga je veličina »duljina« jedna od onih veličina koju praktički ne možemo definirati uz pomoć jednadžbi (kao što je npr. definicijska jednadžba brzine $v = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$) i drugih, već objašnjenih veličina. U prvi se mah može pomisliti da bismo duljinu mogli definirati pomoću jednadžbe $A = l^2$, gdje je A površina kvadrata. No to ne možemo učiniti, jer u tom bismo slučaju morali priznati površinu kao osnovnu veličinu, a o njoj imamo temeljno objašnjenje baš preko duljina stranica kvadrata. Osim toga pri kvadratu moramo najprije definirati pojam pravoga kuta. Zbog toga veličinu »duljina« ubrajamo među *aksiomske* fizikalne veličine. Takve su npr. još vrijeme, temperatura itd.

Rekli smo da je duljinu l, kao jednu od aksiomskih veličina, *praktički* nemoguće definirati uz pomoć neke jednadžbe i drugih, već objašnjenih veličina. *Teoretski* bismo to mogli učiniti, ali od toga ne bismo imali nikakve koristi za stvarnu životnu djelatnost, a krajnji zadatak metrologije nije da komplicira čovjekov rad, već, naprotiv, da mu život učini ugodnijim. Ta težnja, da se olakša primjena metroloških pojmova »veličina«, »jedinica«, »mjera« itd. (vidi odsječak 5.3) pri mjerenju i računanju, dovela je u toku vremena do toga da se jedinica aksiomske veličine smatra temeljnom, polaznom, *osnovnom jedinicom*. Iako *teoretski*, kako smo već spomenuli u odsječku 1.2, osnovna veličina nije ništa vrednija od ostalih, a to

vrijedi i za pripadne jedinice, *praktički* tome nije tako. U primijenjenoj metrologiji, dakle pri stvarnom mjerenju i računanju, izvanredno je korisno da postoji potreban broj osnovnih jedinica i njihovih pramjera ili pramjerila pomoću kojih se odgovarajuća veličina može mjeriti s najvećom mogućom preciznošću (vidi odlomak 8.1.3). Jedna od takvih jedinica je *jedinica duljine* metar.

Izvanredno precizno mjerenje duljine prešlo je potkraj stoljeća iz laboratorija vrhunskih metroloških zavoda u laboratorije fizičara i kemičara te u djelatnost geodeta. Posljednjih pak desetljeća kojima smo svjedoci, ulazi i u suvremenu tehnologiju, strojogradnju i u niz drugih grana tehnike. Prvenstveno je to *interferencijsko* mjerenje duljina, koje je nedavno postiglo izvanredan napredak zahvaljujući usavršenju *monokromatskih izvora* svjetlosnih zračenja potrebnih svojstava. Zbog svega toga moramo suvremenoj reprodukciji jedinice duljine metar i načinu najpreciznijeg mjerenja duljine posvetiti pažnju i prostor koji odgovara današnjem stanju vrhunske metrologije duljine.

8.1.2. Definicija jedinice duljine metar. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je na svom jedanaestom zasjedanju 14. oktobra 1960. ovu definiciju jedinice duljine metar:

> Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala u vakuumu zračenja koje odgovara prijelazu između razina $2\,p_{10}$ i $5\,d_5$ atoma kriptona 86.

Ta definicija na francuskom, službenom jeziku Generalne konferencije za mjere i utege, glasi:

> Le mètre est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2\,p_{10}$ et $5\,d_5$ de l'atome de krypton 86.

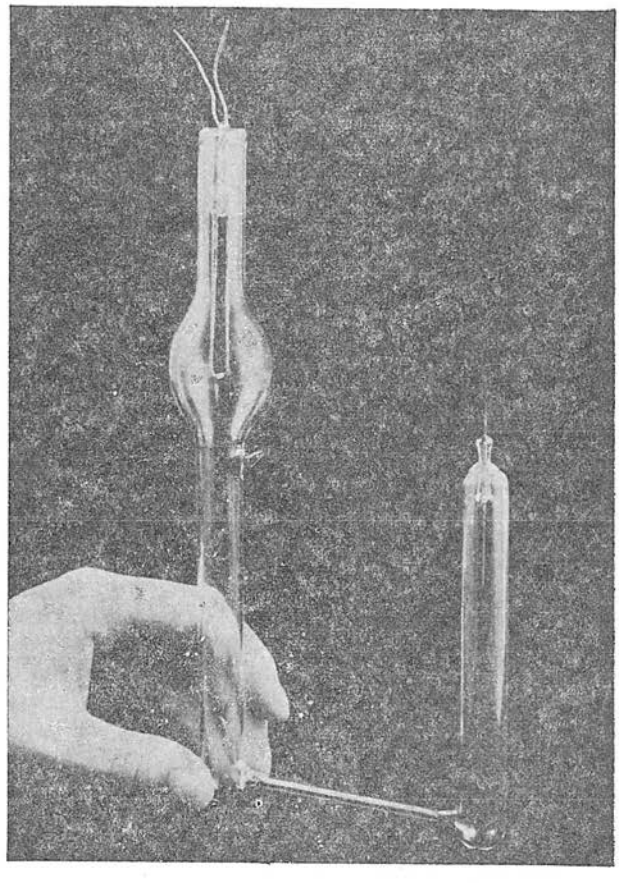
Zajedno s navedenom definicijom metra spomenuta Generalna konferencija je u svojoj rezoluciji broj 6 stavila *van snage* definiciju metra pomoću štapne pramjere od godine 1889. (o štapnom prametru vidi odsječak 6.4). Odmah nakon toga nova definicija jedinice duljine metar ušla je u zakonodavstva gotovo svih država svijeta, npr. u Jugoslaviji godine 1961, u ČSSR godine 1962. itd.

Navedena definicija metra, koji neki nazivaju »valnim metrom« ili »optičkim metrom« (za razliku od štapnog), teško je razumljiva čovjeku kojemu suvremena fizika nije profesija ili barem pasija. U jednoj jedinoj rečenici definicije skupljeno je nekoliko posve specijaliziranih pojmova: »zračenje«, »duljina vala u vakuumu«, »prijelaz«, »razine $2\,p_{10}$ i $5\,d_5$«, »kripton 86«! Stoga u publikacijama koje nisu specijalno metrološkog značaja, neki autori upotrebljavaju *skraćenu* definiciju: »Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala narančastog zračenja kriptona.« Ni ovakva definicija, doduše, nije razumljivija, ali je barem jednostavnija.

Neki žale za starom definicijom metra pomoću štapne mjere, koja se mogla izvanredno zorno predočiti (vidi slike A.20 i 22), gotovo jednako zorno kao i yard kralja Henryja I (sl. A.24). Kažu: »što nam može reći fotografija kriptonske žarulje (sl. A.29) iz koje, pod određenim uvjetima, izlazi svjetlo takve duljine vala da 1 milijun i 650 763,73 vala poredana jedan za drugim predstavljaju baš jedan metar«? Prigovor je opravdan, ali samo za one koji još nisu odgonetnuli značenje specijaliziranih pojmova što ih sadrži definicija metra od godine 1960. No ako se jednom spozna njihovo značenje, definicija postaje posve »normalna«. Da bismo je učinili pristupačnom, u nizu daljnjih odlomaka postepeno ćemo objasniti *bit*

pojava koje omogućuju da pomoću svjetla možemo nadasve precizno mjeriti duljine, te letimično opisati uređaje kojima se to čini. Pri tom ćemo na pojedinim mjestima dospjeti do opisa vrhunskih otkrića suvremene znanosti, što još jednom dokazuje da je vrhunska metrologija u stvari primijenjen skup pouzdanih najnovijih znanstvenih i tehnoloških otkrića (usporedi s odlomkom 1.1.2).

Definicija metra od godine 1960. i upute za način stvarne reprodukcije valnog metra pažljivo su pripremani u okviru svjetske metrološke organizacije. (O tome se govori u odlomku 7.4.3.) Daljnja izlaganja u ovom poglavlju 8 pokazat će nam da uvođenje »valnog metra« nije uzrokovalo promjene u svakodnevnom industrijskom i trgovačkom mjerenju duljine. Novim metrom ostvareno je nešto drugo: dobiveno je pramjerilo duljine kojim se u znanstvenim i industrijskim laboratorijima može mnogo preciznije



Sl. A.29. Uz definiciju jedinice duljine metar od godine 1960. Fotografija prikazuje kriptonsku izbojnu žarulju iz koje pri precizno utvrđenim pogonskim uvjetima izlazi svjetlo takve duljine vala da u vakuumu 1 650 763,63 duljine vala tog svjetla predstavljaju jedan metar s pouzdanošću najmanje $1:10^8$. (Foto: BIPM)

nego prije reproducirati željena duljina; to pramjerilo ne podliježe zubu vremena kao npr. štapna mjera, a uništiti je može samo takva katastrofa koja bi zdrobila čitav naš planet.

Zamjena štapnog prametra zračenjem konstantne frekvencije djelomično je ispunila proročanstvo koje je godine 1870. objavio jedan od najvećih umova egzaktnih znanosti, *J. C. Maxwell*: »Ako želimo imati apsolutno postojane jedinice duljine, vremena i mase, onda ih nemojmo tražiti u izmjerama, u gibanju ili u masi našeg planeta, već u duljini vala, frekvenciji i masi neprolaznih, nepromjenljivih i potpuno istovrsnih atoma.«

8.1.3. Razlozi prijelaza na »valni metar«. Preciznost s kojom treba mjeriti duljinu ovisi o tome što se i u koju svrhu mjeri. Na primjer, u trgovačkim radnjama metarski štapovi ne moraju biti sigurniji od ± 1 milimetar, tj. relativna pogreška

štapne mjere pri mjerenju duljine 1 metar može iznositi ± 1 mm/1 000 mm = $= \pm 10^{-3}$. Nasuprot tome, izmjenljivi strojni dijelovi moraju prema ISO (International Standards Organisation) biti izrađeni tako da njihovo relativno odstupanje ne bude veće od $\pm 10^{-4} \ldots \pm 10^{-5}$, tj. moraju biti izrađeni na 0,1 do 0,01 mm precizno. Takva i još veća preciznost strojne obrade potrebna je u finoj mehaničkoj industriji; npr. neki dijelovi svemirskih raketa i umjetnih satelita moraju biti izrađeni s relativnom pogreškom između 10^{-5} i 10^{-6}, tj. odstupanje od tražene izmjere mora biti reda veličine tisućinke do desettisućinke milimetra!

Mjerenje izmjera strojnih dijelova, dakle mjerenje duljine, provodi se na više načina. Do sada najrašireniji način je pomoću štapnih *mjera*. Pri tom se upotrebljavaju dvije vrste metalnih ili kremenih štapnih mjera: *mjere sa crticama* i *krajnje mjere*. Kod prvih je na metalnom štapu urezano (ugravirano) nekoliko crtica ili tačkica. Udaljenost između tih crtica ili tačkica poznata je sa stanovitom pogreškom, već prema razredu tačnosti same mjere. Duljina nekog strojnog dijela utvrđuje se njenom usporedbom s razmakom između crtica na mjeri sa crticama, što se obavlja pomoću tzv. komparatora.

Druga vrsta štapnih mjera su tzv. *krajnje mjere*, čija se primjena preporučuje naročito onda ako je mjerena duljina veća od 1 cm. To su obično četverostrane *prizme* izrađene od specijalnog čelika; dvije nasuprotne paralelne stranice sjajno su ispolirane. Te prizme mogu se upotrebljavati pojedinačno kao krajnje mjere ili se mogu stavljati jedna uz drugu, čime nastaje *mjerni blok*. Na primjer, normalni mjerni blok tražene duljine 96,985 mm može se sastaviti od pet krajnjih mjera ovako: $(1{,}005 + 1{,}08 + 1{,}9 + 3 + 90)$ mm $= 96{,}985$ mm. Ako se blok sastavlja kliznim prianjanjem dviju krajnjih mjera, duljina bloka veća je od sume duljina obiju mjera za manje od 10^{-8} m $= 0{,}01$ μm (μm = mikrometar $= 10^{-6}$ m).

Prizmatične krajnje mjere karakteriziraju se u pogledu tačnosti na nekoliko načina. Jedan od njih je razdioba na klase prema najvećem odstupanju srednje duljine mjerne prizme od nazivne vrijednosti. Pod »srednjom duljinom« mjere razumijeva se duljina okomice spuštene iz sredine slobodne ispolirane plohe mjerne prizme na planparalelnu površinu na kojoj leži druga glatka strana prizme. Kvaliteta mjere određena je i »odstupanjem od planparalelnosti«, tj. najvećim apsolutnim odstupanjem duljine mjere na bilo kojem mjestu (osim zone široke 0,5 mm oko rubova mjerne plohe prizme) od srednje duljine. U tablici A-16 donosimo izvadak iz sovjetskih standarda za krajnje mjere, i to samo za prve dvije najtačnije klase od ukupno pet koliko ih ima. Njemački standardi definiraju dopušteno odstupanje srednje duljine i pomoću ovih jednadžbi (L je nazivna duljina mjerne prizme)

$$\text{stupanj } 00: \quad \delta L = \pm (0{,}05\ \mu\text{m} + 10^{-6} \cdot L)$$

$$\text{stupanj } 0: \quad \delta L = \pm (0{,}1\ \mu\text{m} + 2 \cdot 10^{-6} \cdot L)$$

$$\text{stupanj } 1: \quad \delta L = \pm (0{,}2\ \mu\text{m} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot L)$$

i još tri jednadžbe za grublje krajnje mjerne prizme. Svi ti podaci vrijede, dakako, pri precizno propisanoj i strogo održavanoj temperaturi.

Saznajmo pomoću ovih podataka kolika je maksimalna nesigurnost poznavanja stvarne duljine mjerne prizme nazivne duljine $L = 10$ mm. Iz tablice A-16 dobivamo za nultu klasu $\delta L = \pm 0{,}10\ \mu\text{m} = \pm 1 \cdot 10^{-7}$ m, a prema njemačkoj

Tablica **A-16**

Dopuštena odstupanja krajnjih mjera

Nazivna duljina krajnje mjere, mm	Nulta klasa		Prva klasa	
	Srednja duljina, ± μm	Planparalelnost, ± μm	Srednja duljina, ± μm	Planparalelnost, ± μm
do 10	0,10	0,10	0,20	0,20
10 do 18	0,15	0,10	0,25	0,20
18 do 30	0,15	0,10	0,30	0,20
30 do 50	0,20	0,12	0,35	0,25
50 do 80	0,25	0,12	0,45	0,25
80 do 120	0,30	0,15	0,60	0,3
120 do 180	0,40	0,15	0,75	0,3
180 do 250	0,5	0,20	1,0	0,4
300	0,7	0,20	1,2	0,4
500	1,0	0,25	1,8	0,5
1000	2,0	0,30	4,0	0,6

formuli gotovo isti rezultat, tj. $\delta L = \pm(0{,}05\ \mu\text{m} + 10^{-6} \cdot 10\ \text{mm}) = \pm 0{,}06\ \mu\text{m} = \pm 6 \cdot 10^{-8}$ m. Prema tome najbolja mjerna prizma nazivne duljine $L = 10$ mm $= 0{,}01$ m stvarno je dugačka oko 0,01 m $\pm (0{,}6 \ldots 1) \cdot 10^{-7}$ m. Za blok mjernih prizmi ukupne duljine $L = 1$ m na isti bismo način dobili stvarnu vrijednost 1 m $+ (1{,}05 \ldots 2) \cdot 10^{-6}$ m. Možemo izračunati da se prema standardima pojedinih država pogreška mjernih prizmi kreće u rasponu između $0{,}5 \cdot 10^{-7}$ m i $2 \cdot 10^{-6}$ m, ako je riječ o duljinama između 0 i 1 m.

Usporedimo sada ove podatke s onima u odlomku 6.4.4, gdje smo naveli da se nepouzdanost poznavanja razmaka između dviju glavnih crtica međunarodnog štapnog prametra ocjenjuje na vrijednost između 10^{-6} i 10^{-7} m, najvjerojatnije $5 \cdot 10^{-7}$ m. Iz te usporedbe proizlazi da je poznavanje duljine mjernih prizmi jednako ili čak bolje od poznavanja duljine međunarodnog prametra pohranjena u Sèvresu! To se čini nemoguće, jer znamo da se manje tačna mjera baždari tačnijom, a slijed baždarenja metričkih štapova je ovaj: međunarodni prametar u BIPM → radni prametri u BIPM → nacionalni prametri → itd. Prema tome ni jedna mjera, sa crticama ili krajnja, ne može u pogledu tačnosti biti bolja od međunarodnog prametra, ako se ide tim slijedom (napominjemo da se međunarodni prametar u pravilu upotrebljava samo prilikom uspoređivanja s radnim kopijama prametra u BIPM). Pa ipak je istinita činjenica da su mjerne prizme i čitavi mjerni blokovi u pogledu poznavanja njihove duljine pouzdaniji od međunarodnog prametra! Objašnjenje te pojave naći ćemo u odlomku 8.1.5.

Ovaj opis državnih standarda o mjernim prizmama naveli smo zato da bismo pokazali da je industrijama i znanosti takva preciznost *potrebna*. Očito je, naime,

da standardi (norme) predstavljaju ozakonjena iskustva određenog vremenskog perioda u kojem se propisanim zahtjevima mora udovoljiti, ako želimo da cjelokupna privreda dobro funkcionira. Prema tome možemo konstatirati da štapni prametar posljednjih tridesetak godina nije više udovoljavao zahtjevima za preciznošću mjerenja duljine kakva je potrebna u suvremenoj industriji. To je *prvi* razlog napuštanja štapne pramjere duljine.

U okvir ovog razloga ulazi i činjenica da su suvremena fizika, spektroskopija, geodezija i astronomija imperativno zahtijevale poboljšanje preciznosti mjerenja duljine. To je tražila i sama metrologija, jer precizno mjerenje duljine izravno utječe na sigurnost poznavanja i mjerenja mnogih fizikalnih veličina i prirodnih konstanti: površina, volumen, induktivitet, električki kapacitet, brzina svjetla, ubrzanje zemljine teže, gravitacijska konstanta itd.

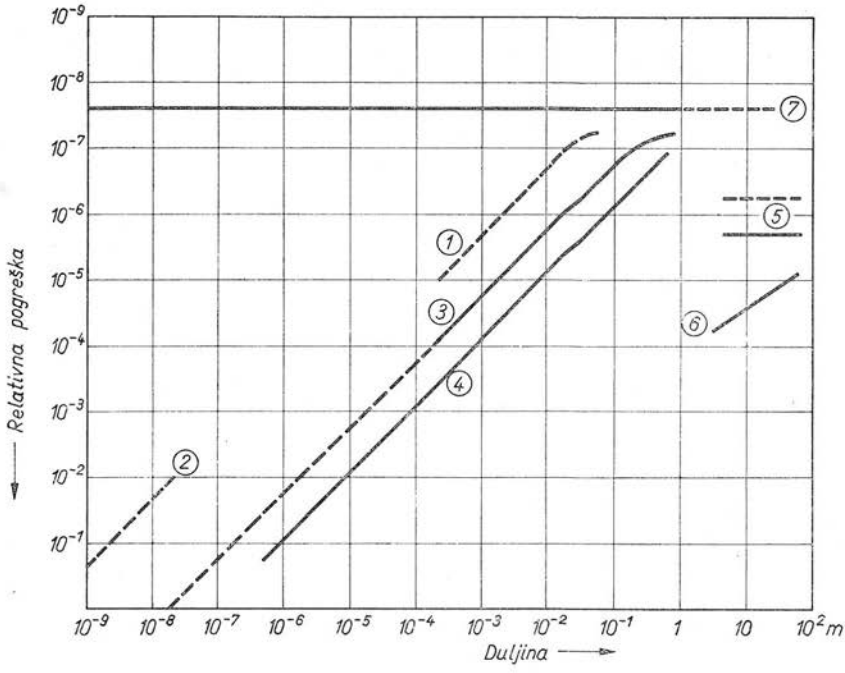
Drugi razlog napuštanja štapnog prametra je *nepostojanost* izmjera metarskog štapa, dakle i udaljenosti između crtica na njemu. O tome smo govorili u odlomku 6.4.4. Istina, današnja tehnologija omogućuje da se izradi pramjera duljine u obliku jediničnog kristala koji je imun prema ireverzibilnim promjenama spomenutim u navedenom odlomku. Ali ni takva pramjera ne bi zadovoljila suvremenu metrologiju, jer može biti *oštećena* ili čak *uništena*. Tako je npr. u toku prošlog rata bio oštećen njemački prametar (kopija broj 18 međunarodnog prametra), koji je ponovno osposobljen za vrhunsku metrologiju godine 1956. Tom prilikom u njega su ugravirane nove, finije crtice (vidi sliku A.46 u odlomku 8.5.2).

Treći razlog napuštanja štapnog prametra nije najmanje važan: pramjerilo »valnog metra« (o pramjerama i pramjerilima vidi odsječak 5.3) može pod propisanim uvjetima s najvećom dostižívom pouzdanošću reproducirati jedinicu duljine u svakom dobro opremljenom metrološkom zavodu, dakle *bilo gdje* u svijetu. Na taj način napuštanje štapne pramjere duljine oslobađa nacionalne metrološke zavode od pomalo rizičnog transportiranja prametra u Sèvres i natrag.

8.1.4. Vrhunska metrologija duljine. U odlomku 8.8.3 vidjet ćemo da se relativna nesigurnost reprodukcije konstantne vrijednosti duljine vala λ zračenja kriptona 86 približava fantastičnoj vrijednosti $\Delta\lambda/\lambda = \pm 1 \cdot 10^{-9}$, a posve je sigurno da se danas može postići vrijednost $\pm 3 \cdot 10^{-9}$. No to još ne znači da je tolika i relativna pogreška *mjerenja duljine*; utjecaj nesigurnosti poznavanja indeksa prelamanja zraka (vidi odsječak 8.3 i odlomak 8.5.4), nemogućnost posve pouzdanog namještanja mjernih mikroskopa povrh crtice (odlomak 8.5.2), nesavršenost ploha krajnjih mjera i niz drugih uzroka uvjetuju da se duljina mjere (štapovi, prizme) može u najboljem slučaju pouzdano izmjeriti s relativnom pogreškom oko $\pm 1 \cdot 10^{-8}$. Pri tom moraju postojati optimalni metrološki uvjeti o kojima se govori u nizu odlomaka ovog poglavlja 8.

Relativna mjerna pogreška oko $\pm 1 \cdot 10^{-8}$, koju sebi bolje možemo predočiti u obliku ± 1 mm/100 km, dade se postići samo pri mjerenju *interferencijskim* metodama, sve druge metode uzrokuju veće pogreške. No interferencijske se metode još ne mogu primijeniti za sve vrijednosti duljine: danas je gornja granica oko 1 metar (u toku su istraživanja da se ta granica pomakne do oko 200 m; vidi odlomak 8.5.7 i odsječak 8.6). Od opisane mjerne pogreške valja razlikovati *pogrešku mjera* (štapovi, prizme, trake itd.) koje utjelovljuju stanovitu vrijednost fizikalne veličine »duljina« (općenito o utjelovljivanju fizikalnih veličina vidi u odsječku 5.3). Što se nazivna duljina mjere više razlikuje od udaljenosti 1 metar, to je njena relativna pogreška veća.

To nam lijepo ilustrira slika A.30 koja svojim pravcima i krivuljama prikazuje mogućnosti američkog metrološkog zavoda National Bureau of Standards (NBS) na polju metrologije duljine godine 1962. (podaci su objavljeni 1964). Slika se istodobno odnosi i na mjerne metode i na mjere (standarde, etalone),



Sl. A.30. Relativna pogreška metrologije duljine u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards godine 1962. u ovisnosti o vrijednosti mjerene duljine ili mjere

1 — kontrola kalibara, *2* — izobličena refleksija (autokolimacijska metoda), *3* — krajnje mjere, *4* — mjere sa crticama, *5* — geodetske trake, *6* — čelične mjerne trake, *7* — interferencijska mjerenja u ambijentnoj atmosferi, — postojeće mogućnosti u NBS godine 1962, — — — mogućnosti koje se razvijaju i istražuju

pa stoga pod izrazom »relativna pogreška« na ordinati valja u prvom slučaju razumijevati relativno standardno odstupanje, a u drugom relativnu pogrešku mjerâ (odlomak 3.1.2). Takve dijagrame, izrađene u logaritamskom mjerilu, posjeduju metrološki zavodi za svaku od fizikalnih veličina čijom se metrologijom bave. Naglašavamo da slika A.30 prikazuje *vrhunske* mogućnosti američkog metrološkog zavoda u pogledu metrologije duljine. Slična je situacija i u drugim velikim, dobro opremljenim metrološkim centrima, pa je stoga možemo smatrati karakterističnom za današnje stanje znanstvene metrologije duljine.

8.1.5. Priključak valnog metra na štapni. Francuski fizičar *J. Babinet* bio je prvi koji je godine 1827. predložio da se umjesto štapne pramjere duljine upotrijebi *duljina vala* stanovitog monokromatskog svjetla. U razdoblju između 1892. i 1895. Amerikanac *A. A. Michelson* prvi je put u historiji duljinu vala nekog zračenja usporedio s duljinom međunarodnog prametra pohranjena u Međunarodnom uredu za mjere i utege (BIPM) u Sèvresu (vidi odsječak 6.4). Radeći i

eksperimentirajući u BIPM, izumio je i primijenio *interferencijsko mjerenje* duljine, što je danas nezamjenljiva metoda i temelj definicije metra od godine 1960. Njegove radove nastavili su mnogi učenjaci u BIPM i u nizu metroloških zavoda čitava svijeta. Većina njih upotrebljavali su kao izvor monokromatskog zračenja kadmij (Cd), a naročito njegovu crvenu spektralnu liniju.

International Union for Cooperation in Solar Research prihvatila je na svojoj trećoj konferenciji godine 1907. u Meudonu crvenu kadmijevu spektralnu liniju kao osnovu spektroskopskih mjerenja. Na temelju eksperimentalnih radova *Benoita*, *Fabryja* i *Perota* utvrđena je duljina vala λ crvene (c) kadmijeve linije

$$\lambda_c(\mathrm{Cd}) = 6438{,}4696 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 0{,}643\,846\,96\ \mu\mathrm{m}$$

u normalnom spektroskopskom zraku. Tome odgovara obrnuti odnos

$$\text{metar} = 1\,553\,164{,}13\,\lambda_c(\mathrm{Cd}),$$

tj. jedinica duljine metar dugačka je nešto više od 1,5 milijuna duljina vala crvene kadmijeve linije.

Ovi brojčani odnosi između metra i λ_c(Cd) u stvari su već početkom stoljeća nadomjestili štapni prametar prilikom najpreciznijih mjerenja. Spektrometrija je, naime, sva svoja mjerenja izvodila u odnosu prema λ_c(Cd), a rezultate je pomoću gornjih jednadžbi preračunavala, ako je to bilo potrebno, na metre. Na taj način spektroskopija je skupila mjerne podatke za oko 300 tisuća spektralnih linija, a to je neprocjenljivo bogatstvo čitava čovječanstva stečeno ogromnim naporima niza generacija fizičara i bajoslovnim financijskim ulaganjima.

Pouzdanost reprodukcije λ_c(Cd) je najmanje $1:10^7$, a to je oko deset puta bolje od pouzdanosti razmaka na metričkom štapu. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je na svom sedmom zasjedanju godine 1927. crvenu kadmijevu liniju kao »podmjeru« (Substandard, Subnormal) međunarodnog prametra i propisala uvjete pod kojima je valja ostvarivati. Od tada se interferencijsko mjerenje u izradi mjernih uređaja, dakle i mjernih prizmi, provodi sve intenzivnije. (To je ujedno i objašnjenje zašto su mjerne prizme bile tačnije od pouzdanosti razmaka na metričkom štapu; vidi odlomak 8.1.3.) Na taj način je »podmjera«, u stvari pramjerilo (vidi odsječak 5.3), postala pouzdanija od pramjere! U vrhunskoj metrološkoj praksi mjerenja duljine izvodila su se nakon godine 1930. isključivo pomoću interferometara i kadmijeve crvene linije.

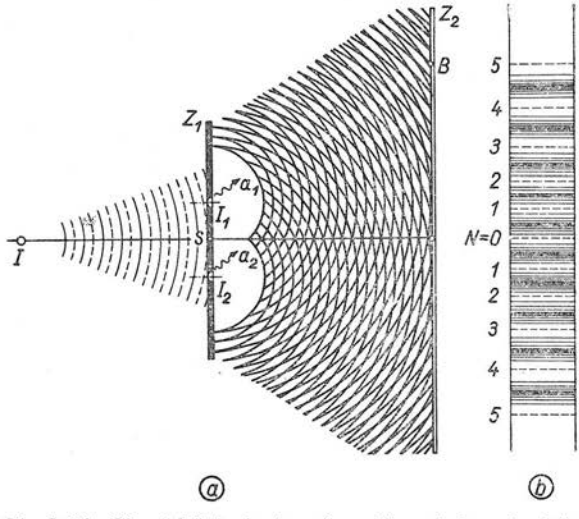
Definiciju metra od godine 1889. Generalna konferencija ipak nije mijenjala, jer se pokušavao pronaći još bolji izvor monokromatskog zračenja nego što je kadmij. Savjetodavni odbor za definiciju metra utvrdio je godine 1953. uvjete kojima treba da udovolji definicija novog, »valnog« metra: 1. To mora biti duljina vala zračenja u vakuumu, a zračilo mora mirovati u odnosu prema promatraču. 2. Zračenje treba da bude definirano sa dva spektralna terma (vidi odsječak 8.7) nekog atoma čije spektralne linije nemaju hiperfine strukture i ne podliježu poremećajnim utjecajima. 3. Vrijednost duljine vala crvene kadmijeve linije, izražena u metrima, neka ostane onakva kako ju je definirala Generalna konferencija godine 1927, tj. $\lambda_c(\mathrm{Cd}) = 6438{,}4696 \cdot 10^{-10}$ m, čime će ostati nepromijenjeni bezbrojni spektroskopski podaci. 4. Duljine vala zračenja različitih zračila treba mjeriti i preračunavati u odnosu na tu kadmijevu liniju. 5. Duljina vala u vakuumu treba da se dobije iz vrijednosti u zraku pomoću *Edlén*ove disperzijske formule (odsječak 8.3).

Intenzivna istraživanja u BIPM i u nekoliko velikih nacionalnih metroloških instituta dovela su do zaključka da je najprikladniji izvor zračenja narančasta linija izotopa kriptona 86, pa je Savjetodavni odbor godine 1958. preporučio Međunarodnom komitetu za mjere i utege (CIPM) novu definiciju metra, koju je on iste godine i prihvatio. Na preporuku CIPM, novu definiciju metra (vidi odlomak 8.1.2) prihvatila je i objavila Generalna konferencija za mjere i utege godine 1960.

8.2. Osnovi interferencijskog mjerenja duljine

Poznavanje mehanizma nastanka interferencije svjetla i načela interferencijske metrologije duljine danas je izvanredno važno kako za praktičnu metrologiju tako i za vrhunsku. Razlozi su: interferencijskim metodama najpreciznije se mogu mjeriti duljine; u tehnici se danas ta metoda mjerenja sve više primjenjuje zato što to zahtijevaju sve oštriji uvjeti kvalitetne proizvodnje; na primjeni interferencije temelje se definicija i reprodukcija fundamentalne mjerne jedinice metar. Iako je interferencija svjetla objašnjena gotovo u svakom udžbeniku fizike, navedeni razlozi zahtijevaju da ovdje s jedne strane rekapituliramo naše znanje s tog područja, a s druge strane da upoznamo neke suptilne specifičnosti koje su karakteristične za tu granu metrologije.

8.2.1. Interferencija svjetla. Zamislimo da iz tačkastog izvora svjetla I (sl. A.31a) kontinuirano izvire svjetlo *stalne* frekvencije f. Svjetlo se širi na sve strane u obliku valova duljine $\lambda = v/f$, gdje je v brzina širenja svjetla pravocrtno od izvora I. Promjer tačkastog izvora malen je prema duljini vala svjetla. Na svom putu udesno svjetlo nailazi na zapreku — nepropusni zaslon Z_1 koji ima dva sitna otvora, I_1 i I_2. Svjetlo se probija kroz ta dva otvora i oni za prostor desno od zaslona Z_1 predstavljaju dva nova »izvora« svjetla. Iz njih se svjetlo širi udesno u obliku koncentričnih kugala prema drugom zaslonu, Z_2. Na tom zaslonu vidi se niz svijetlih i tamnih *pruga* čiji je isječak prikazan na slici A.31b. Te pruge nazivamo »interferencijskim prugama«.



Sl. A.31. Uz objašnjenje interferencije svjetla: a) plošni prikaz kuglastih valova; pune linije prikazuju amplitude istog predznaka, b) svijetle i tamne interferencijske pruge koje nastaju na zaslonu Z_2

Pojavu svijetlih i tamnih pruga možemo objasniti pomoću sl. A.31a, ako pogledamo kako valovi svjetla dopiru u tačku B iz izvorâ I_1 i I_2. Zamislimo da jakost svjetla izvora I_1 ima amplitudu A_1 čija se vrijednost ne prigušuje s udaljenošću, a u ishodištu I_1 ima fazu ωt; ovdje je $\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$. Na mjestu B, udaljenom r_1 od izvora I_1, trenutna vrijednost jakosti svjetla iznosit će $a_1 = A_1 \sin \omega \cdot (t - r_1/v)$, gdje je

$v = f\lambda$. Posve analogno će svjetlosni val koji dolazi iz izvora I_2 imati u tački B u istom trenutku t vrijednost $a_2 = A_2 \sin \omega(t - r_2/v)$, gdje je A_2 amplituda tog vala, a r_2 udaljenost I_1B (vidi sliku A.31a).

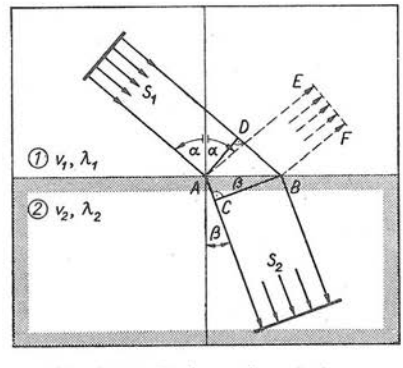
Rezultantna jakost svjetla na mjestu B u trenutku t iznosit će $a = a_1 + a_2 = A \sin(\omega t + \varphi)$, gdje je A rezultantna amplituda koja ovako ovisi o pojedinim veličinama: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$; $\varphi_1 = -r_1\omega/v$, $\varphi_2 = -r_2\omega/v$. Veličine φ_1 i φ_2 su tzv. početne faze titranja, tj. oni dijelovi faza koji ne ovise o vremenu.

Maksimalnu amplitudu jakosti svjetla $A_1 + A_2$ imat će one tačke za koje je $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = +1$, dakle $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi N$, gdje je N bilo koji pozitivan ili negativan *cijeli* broj. To znači da *maksimalnu* jakost svjetla imaju tačke koje leže na krivuljama $(r_2 - r_1)\,\omega/v = 2\pi N$, što zbog $\omega = 2\pi f$, $v = f\lambda$ možemo napisati u obliku $r_2 - r_1 = N\lambda$. Geometrijsko mjesto tačaka ovog izraza je familija hiperbola s fokusima u tačkama I_1 i I_2. Tim tačkama odgovaraju na slici A.31b *svijetle interferencijske pruge*. Za $N = 0$ dobiva se svijetla pruga koja leži na vodoravnoj crti povučenoj iz tačke S (raspolovište dužine I_1I_2), a za $N = \pm 1, 2, \ldots$ svijetle pruge iznad i ispod $N = 0$.

Potpuno analognim računom možemo utvrditi da *tamne* interferencijske pruge leže na krivuljama $(r_2 - r_1) = (2N + 1)\,\lambda/2$, tj. na tim mjestima amplituda jakosti svjetla je minimalna, $(A_1 - A_2)$. Na slici A.31b ta smo mjesta prikazali gustim crnim linijama. Napominjemo da su na toj slici prikazani samo isječci interferencijskih pruga, koje su stvarno (za ovaj slučaj) krugovi sa centrom u vodoravnoj projekciji tačke S na zaslonu Z_2.

8.2.2. Prelamanje svjetla. Na slici A.32 prikazan je snop svjetla S_1 koji iz tvari označene brojem *1* pada na vodoravnu razdjelnicu AB, ispod koje se nalazi tvar *2*. Svjetlo S_1 pada na razdjelnicu pod kutom α prema normali na AB. Jedan dio snopa S_1 odrazuje se od plohe AB pod jednakim kutom α; da sliku A.32 ne učinimo nepreglednom, reflektirane zrake DE i BF označili smo crtkano, jer nas one u ovom trenutku neće zanimati.

Preostalo svjetlo, u obliku snopa S_2 prolazi kroz tvar *2*, ali pod kutom β prema normali na AB. Brzina širenja svjetla S_2 u tvari *2* iznosi v_2, a njegova duljina vala λ_2 (u tvari *1* brzina je iznosila v_1, a duljina vala λ_1). Prema tome svjetlo prilikom prelamanja mijenja brzinu i duljinu vala, dok njegova frekvencija f ostaje *konstantna*, jer je diktira izvor svjetla. Budući da općenito vrijedi relacija $v = f\lambda$, tj. brzina vala jednaka je umnošku frekvencije f i duljine vala λ, za snopove svjetla S_1 i S_2 na slici A.32 možemo pisati



Sl. A.32. Prelamanje svjetla

$$v_1 = f\lambda_1, \quad v_2 = f\lambda_2, \quad v_1/v_2 = \lambda_1/\lambda_2. \tag{8.2-1}$$

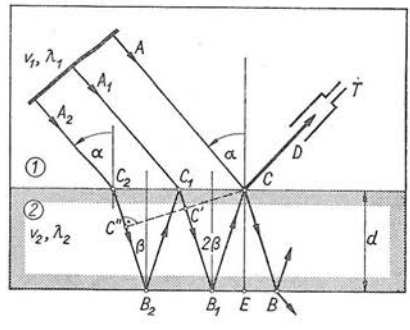
Razmotrimo pobliže pojave na samoj razdjelnici AB. Uvedimo pri tom oznake $AC = s_2$, $DB = s_1$, $AB = x$. Svjetlo je dužinu s_2 u tvari *2* prošlo brzinom v_2 tokom vremena Δt_2, dakle vrijedi $s_2 = v_2\,\Delta t_2$. Put s_1 svjetlo je prošlo brzinom v_1 u vremenu Δt_1; stoga je $s_1 = v_1\,\Delta t_1$. Budući da je prema *Fermat*ovu principu $\Delta t_1 = \Delta t_2$

vrijedi odnos $s_1/s_2 = v_1/v_2$. U ovisnosti o $x = AB$, dužine s_1 i s_2 možemo izraziti ovako: $s_1 = DB = x \cdot \sin\alpha$, $s_2 = AC = x \cdot \sin\beta$. Omjer

$$n = n_{12} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{const} \qquad (8.2\text{-}2)$$

nazivamo »indeksom prelamanja« i označujemo slovom n. Za većinu kombinacija tvari (*1*, *2* na slici A.32) vrijednost indeksa prelamanja kreće se između 1 i 2. Za prijelaz vakuum—zrak njegova je vrijednost oko 1,00027 (podrobnije vidi odsječak 8.3).

8.2.3. Interferencija pri odrazu i prelamanju svjetla. Pomoću pojmova izloženih u odlomku 8.2.2 možemo razmotriti interferenciju svjetla koja nastaje pri višestrukom odrazu i prelamanju svjetla, jer je ta pojava od temeljnog značenja u primjeni interferencijskih metoda mjerenja duljina. U tu svrhu poslužujemo se slikom A.33.



Sl. A.33. Uz interferenciju nastalu odrazom i prelamanjem svjetla

Ravni svjetlosni val dolazi brzinom v_1 iz homogene tvari *1* na planparalelnu prozirnu pločicu *2* debljine d (sl. A.33). Odaberimo na površini pločice bilo koju tačku C i razmotrimo najprije koje svjetlosne zrake prolaze kroz tu tačku. Prva je, dakako, zraka A koja se direktno odrazuje u tački C. Druga je zraka A_1 koja se u tački B_1 jednom odrazila u pločici. Treća je zraka A_2 koja se dvaput odrazila unutar pločice, itd. (Zrake koje se odrazuju u tačkama C_1 i C_2 nismo nacrtali da ne kompliciramo crtež.) Prema tome se u svjetlu koje se giba u smjeru CD nalazi mnogo svjetlosnih zraka koje se međusobno razlikuju u fazi. Jednako se događa i u tački B kroz koju zraka A prolazi nakon jednog prelamanja, zraka A_1 nakon prelamanja i dvostruke refleksije unutar pločice, zraka A_2 nakon četvorostrukog prelamanja itd.

Izračunajmo najprije razliku faza prvih dviju zraka koje prolaze kroz tačku C. U računu ćemo uzeti u obzir da je indeks prelamanja $n = n_{12} > 1$, tj. da je pločica od tvari koja je optički »gušća«. Neka crta $CC'C''$ predstavlja površinu prelomljenog svjetlosnog vala u pločici; do te crte zrake A i A_1 dolaze istovremeno. Zraka A_1 mora zatim proći put $C'B_1 + B_1C$ da bi stigla u tačku C. Stoga ona kasni u odnosu prema zraci A za vrijeme

$$\Delta t_1 = (C'B_1 + B_1C) : v_2,$$

gdje je v_2 brzina svjetla u homogenoj pločici *2*. Iz trokuta $C'CB_1$ razabiremo da je $C'B_1 = B_1C \cdot \cos 2\beta$. Uvrstimo li taj odnos u gornju jednadžbu, dobivamo

$$\Delta t_1 = B_1C(1 + \cos 2\beta) : v_2 = B_1C \cdot 2\cos^2\beta : v_2.$$

Iz trokuta B_1CE proizlazi $B_1C = d/\cos\beta$, što uvrštenjem u gornju jednadžbu daje

$$\Delta t_1 = \frac{2d\cos\beta}{v_2}.$$

Toliko kasni zraka C_1B_1CD zbog toga jer mora kroz istu tvar proći dulji put negoli zraka ACD.

Postoji, međutim, još jedan uzrok kašnjenju. Obje zrake, A i A_1, reflektiraju se doduše po jedanput, ali su ti odrazi različiti. Zraka A (tj. onaj njezin dio koji ne prodire u tvar *2*) odrazuje se od gušće tvari, a zraka A_1 (tj. onaj njezin dio koji je prodro u tvar *2*) od optički rjeđe tvari. Zbog toga nastaje dodatna razlika faza između obje zrake. Eksperimenti pokazuju da ta dodatna razlika iznosi pola periode, dakle $T/2$. Teorija dokazuje da se pri tom faza vala koji se reflektira od gušće tvari *povećava* za π, odnosno $T/2$. To znači da se *stvarno* kašnjenje Δt zrake A_1 u odnosu prema zraci A dobiva tako da se od prije izračunatog vremena Δt_1 oduzme $T/2$, dakle

$$\Delta t = \Delta t_1 - T/2 = 2\,d\cos\beta : v_2 - T/2. \tag{8.2-3}$$

Za promatrača T (teleskop), koji se nalazi na produžetku pravca CD (sl. A.33), kašnjenje zrake A_1 prema zraci A, tj. njihova fazna razlika, očitovat će se ovako: ako je Δt iz jednadžbe (8.2-3) upravo jednako periodi $T = 1/f$ svjetla, on će vidjeti *pojačano* svjetlo, odnosno *svijetlu interferencijsku prugu* koja prolazi kroz tačku C okomito na ravninu crtanja na našoj slici A.33. To je razumljivo, jer se u slučaju $\Delta t = T$ oba ravna svjetlosna vala ACD i $A_1C_1B_1CD$ potpomažu. Promatrač T će na mjestu C vidjeti svijetlu prugu i onda ako je $\Delta t = 2\,T$, $\Delta t = 3\,T$, odnosno općenito pri $\Delta t = N\,T$, gdje je N cijeli broj, tj. $N = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Ako relaciju $\Delta t = N\,T$ uvrstimo u izraz (8.2-3), dobivamo $\Delta t = 2\,d\cos\beta : v_2 - T/2 = N\,T$, odnosno $2\,d\cos\beta = (2\,N+1)\cdot T v_2/2$. Budući da je $v_2 = f\lambda_2 = \lambda_2/T$, od gornjeg izraza nastaje jednadžba

$$2d\cos\beta = (2N+1)\frac{\lambda_2}{2}, \tag{8.2-4}$$

koju možemo izraziti i u ovisnosti o indeksu prelamanja n i upadnom kutu α zraka na slici A.33. U tu svrhu primjenjujemo desnu jednadžbu (8.2-1), odnos $n\sin\beta = \sin\alpha$ iz jednadžbe (8.2-2) te poznatu relaciju $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$. Na taj način izraz (8.2-4) prelazi u oblik koji je prikladan za naša razmatranja

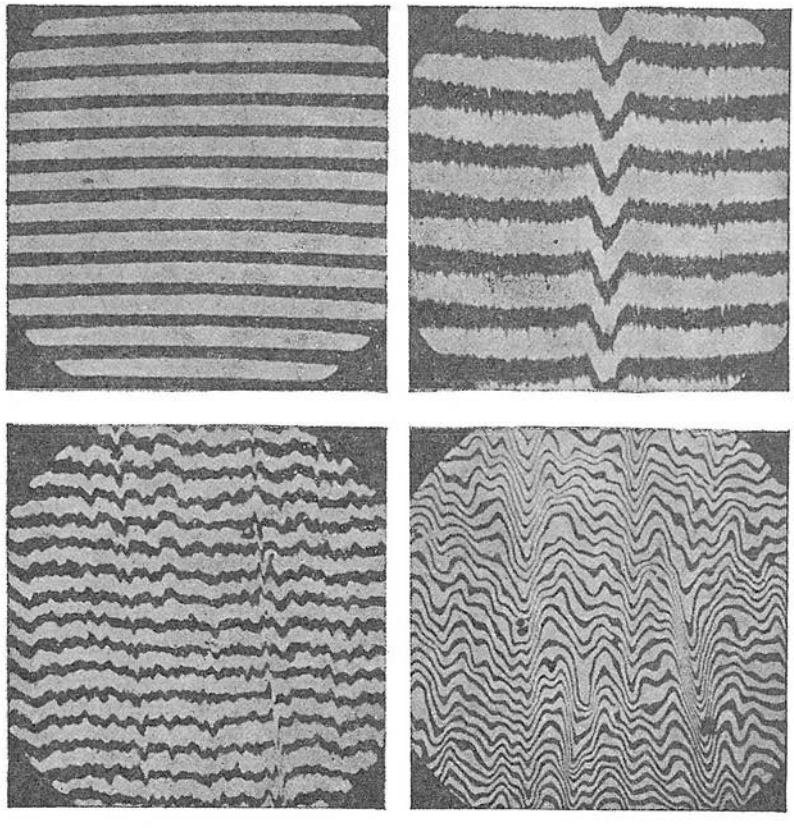
$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = (2N+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{8.2-5}$$

Ovdje smo umjesto λ_1 jednostavno napisali λ, dakle $\lambda_1 = \lambda$, jer nam razlikovanje među duljinama valova u sredstvima *1* i *2* više nije potrebno. Naglasimo ponovo da gornje jednadžbe (8.2-4, 5) opisuju *svijetle* interferencijske pruge u smjeru za koji je gornjim jednadžbama udovoljeno, a pri tom je N bilo koji pozitivan *cijeli* broj.

Posve suprotnu situaciju doživljava promatrač T (teleskop) ako je Δt iz jednadžbe (8.2-3) jednako *polovini* periode, dakle $\Delta t = T/2$. U tom slučaju valovi ACD i $A_1C_1B_1CD$ djeluju *suprotno*, a u slučaju jednakih amplituda međusobno se *poništavaju*. Stoga se teleskopom T zapaža *tamna* interferencijska pruga. Promatrač će na mjestu C (sl. A.33) vidjeti tamnu interferencijsku prugu i onda ako je $\Delta t = 3\,T/2$, $5\,T/2$, $7\,T/2$ itd. Jednadžbe (8.2-4, 5) vrijede i za *tamne* pruge, ali uz uvjet da je $N = 1/2$, $3/2$, $5/2$, $7/2$ itd., tj. polucijeli broj.

Stvaran izgled svijetlih i tamnih interferencijskih pruga za slučaj koji smo razmatrali uz sliku A.33 vidimo na lijevoj, gornjoj fotografiji slike A.34. U tom slučaju smo pretpostavili da su plohe CC_1C_2 i BEB_1B_2 fino ispolirane i međusobno potpuno paralelne (sl. A.33). To znači da je debljina d sredstva *2* konstantna, pa dakle interferencijske pruge povezuju mjesta jednakih upadnih kutova α svjetla; stoga se u ovom slučaju nazivaju »interferencijskim prugama jednakog nagiba«.

Ovdje valja naglasiti da smo u čitavom dosadašnjem razmatranju šutke pretpostavljali da je riječ o *monokromatskom svjetlu*, tj. o svjetlu posve određene duljine vala. I sva naša daljnja razmatranja odnosit će se na monokromatska svjetla, jer se jedino u tom slučaju dobivaju svijetlo-tamne pruge. Ako se upotrebljava obično bijelo svjetlo, dakle miešavina zračenja različitih duljina vala, nastaju interferencijske pruge u boji, a one su za metrološke svrhe teško upotrebljive.



Sl. A.34. Fotografije interferencijskih pruga na glatkoj površini (lijevo gore) i na neravnim površinama

8.2.4. Interferencijski zračni klin. S konstatacijama iz odlomka 8.2.3 možemo razmotriti načelo jedne vrsti interferencijskog mjerenja duljine kakvo se u metrologiji i industriji mnogo primjenjuje. To je tzv. mjerenje pomoću »zračnog klina« (sl. A.35a). Na dobro ispoliranu pločicu *P1* prislonjena je pod vrlo malim kutom φ (na slici je kut nacrtan pretjerano velik) ravna, homogena prozirna pločica *P2* konstantne debljine. Između obiju pločica postoji, kako vidimo, *zračni klin*.

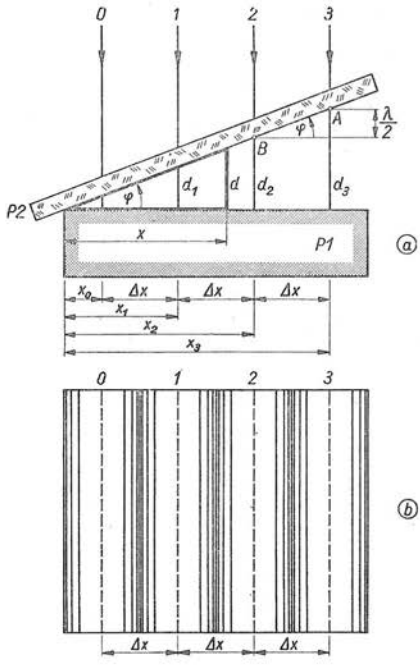
Ako monokromatsko svjetlo, označeno na slici A.35a brojevima *0*, *1*, *2* i *3*, pada okomito na površinu pločice *P1*, na njoj ćemo zapaziti svijetle i tamne interferencijske pruge, paralelne s rebrom klina. Uvjete interferencije propisuje jednadžba (8.2-5), prilagođena opisanim prilikama, a to je $\alpha = 0$ (usporedi sa slikom A.33), te

odnos $d = x \operatorname{tg} \varphi$, gdje je x udaljenost od rebra klina (sl. A.35a). Na taj način jednadžba (8.2-5) prelazi u pojednostavnjeni oblik

$$x = \frac{2N+1}{2n\operatorname{tg}\varphi}\,\frac{\lambda}{2} = (2N+1)\,K\frac{\lambda}{2}, \quad K = 1/(2n\operatorname{tg}\varphi). \tag{8.2-6}$$

Prema izvođenju u odlomku 8.2.3 svijetle interferencijske pruge nastaju na onim mjestima x za koja vrijedi gornja jednadžba ako je $N = 0, 1, 2, \ldots$ Tako za $N = 0$ dobivamo $x = x_0 = K\lambda/2$, za $N = 1$ $x = x_1 = 3K\lambda/2$, za $N = 2$ $x = x_2 = 5K\lambda/2$ itd. Pruge su međusobno udaljene $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = 2K\lambda/2$, odnosno

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\operatorname{tg}\varphi}. \tag{8.2-7}$$



Sl. A.35. Odnosi u interferencijskom zračnom klinu: a) presjek dviju pločica međusobno nagnutih za kut φ, b) crtež svijetlih i tamnih interferencijskih pruga koje povezuju mjesta jednake debljine zračnog klina $d(x)$

Kut φ mora biti vrlo malen, što će nam pokazati ovaj *primjer*. Pri nekom mjerenju upotrijebljeno je narančasto svjetlo kriptona 86, čija je duljina vala $\lambda = 0{,}61$ μm (precizno je $\lambda = 6057{,}8021 \cdot 10^{-10}$ m u vakuumu). Kut nagiba φ pločice *P2* iznosio je 20 lučnih minuta. Izračunajmo koliki je bio razmak između dvije istovrsne interferencijske pruge. Kutu $\varphi = 20'$ odgovara $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}0058$. Ako uzmemo da je indeks prelamanja približno 1, onda pomoću izraza (8.2-7) dobivamo $\Delta x = 0{,}61$ μm$/0{,}0116 = 53$ μm $= 0{,}053$ mm. Dakle pet stotinki milimetra je bio razmak između svijetlih pruga *0*, *1*, *2*, *3*, ... (sl. A.35b).

Opisani zračni klin upotrebljava se, između ostalog, za mjerenje razlike duljina dviju krajnjih mjera — mjernih prizmi. Takva je primjena očigledna, jer iz dosadašnjih razmatranja proizlazi da se npr. tačka *A* (sl. A.35a) nalazi za $\lambda/2$ iznad tačke *B*, dok je njihov horizontalni razmak definiran razmakom Δx između susjednih svijetlih pruga *2* i *3*. Prebrojavanjem svijetlih (ili tamnih) pruga možemo npr. iz slike A.35 ustanoviti da se tačka *A* nalazi $3{,}5 \cdot \lambda/2$ iznad površine pločice *P1*. Takvih i sličnih primjena ima u metrologiji i preciznoj industriji bezbroj (podrobnije o tome vidi u odsječku 8.4).

8.3. Uloga indeksa prelamanja u interferencijskoj metrologiji duljine

8.3.1. Potreba poznavanja indeksa prelamanja. Sva naša izvođenja u odsječku 8.2 pratio je indeks prelamanja svjetla n. On je stvarno prisutan i u definiciji valnog metra (odlomak 8.1.2), iako se izričito ne spominje. Naime, u definiciji metra od godine 1960. stoji da je riječ o broju duljina vala kriptonova narančastog svjetla u

vakuumu. Pri stvarnim najpreciznijim interferencijskim mjerenjima, kada se krajnje mjere ili štapne mjere sa crticama uspoređuju s brojem duljina vala poznatog zračenja, materijalne štapne mjere ne stavljaju se u vakuum, pogotovo ako se želi postići relativna nepouzdanost rezultata reda $\pm 10^{-8}$. Razlog je u tome što bi se materijalna mjera prilikom ulaska iz prostora s atmosferskim tlakom u vakuumu proširila za neku vrijednost, a ta promjena izmjera štapa poznata je s manjom sigurnošću negoli duljina vala svjetla kojim se mjerenje obavlja. Stoga se mjerenje provodi u zraku, uz temperaturu konstantnu na 1/1000 °C, a onda se dobiveni rezultati *preračunaju* na vakuum pomoću indeksa prelamanja zrak—vakuum.

Zračenje (svjetlo) stalne frekvencije f imat će u *vakuumu* duljinu vala λ_0, a širit će se brzinom v_0. Ove tri veličine međusobno povezuje jednadžba $v_0 = f\lambda_0$. U *zraku* će frekvencija f, dakako, ostati ista, pa će duljina vala λ i brzina širenja zračenja v biti povezani relacijom $v = f\lambda$. Iz usporedbe ovih dviju jednadžbi proizlazi $n = v_0/v = \lambda_0/\lambda$, tj. *indeks prelamanja zraka* jednak je omjeru duljine vala svjetla iste frekvencije u vakuumu i u zraku, odnosno obrnuto: duljina vala u vakuumu λ_0 dobiva se množenjem duljine vala u zraku λ s indeksom prelamanja n, dakle $\lambda_0 = n\lambda$ (vidi i odlomak 8.2.2).

Niz učenjaka istraživao je u prošlosti, a to čine i danas, formulu kojom se rezultati interferencijskih mjerenja u tzv. standardnom zraku mogu preračunati na vakuum. Tako se od 1918. upotrebljavala *Meggers-Peters*ova formula (National Bureau of Standards, NBS, USA), od 1934. *Kösters-Lampe*ova formula (Physikalisch-technische Reichsanstalt, PTR) te *Pérard*ova (BIPM), od 1939. *Barrell-Sears*ova (National Physical Laboratory, Engleska), a od 1950. *Meggers-Kessler*ova iz NBS. Godine 1954. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je *Edlénovu disperzijsku formulu* (po švedskom učenjaku iz Lundsa *B. Edlén*u), koja vrijedi za čitavo vidljivo i ultravioletno područje:

$$(n-1)_s \cdot 10^8 = 6\,432{,}8 + \frac{2\,949\,810}{146-\sigma^2} + \frac{25\,540}{41-\sigma^2}.$$

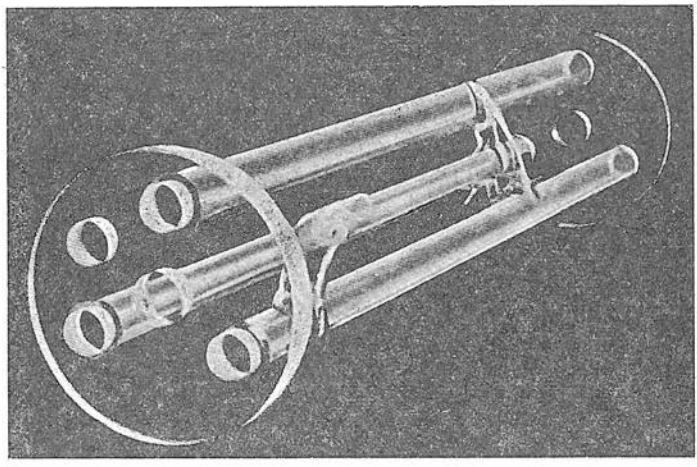
Ovdje je σ brojčani iznos vakuumskog »specifičnog broja valova« $\sigma = 1/\lambda_0$, izraženog u $\mu m^{-1} = 10^{-6}\ m^{-1}$. Prije toga formulu je prihvatila Joint Commission for Spectroscopy (JCS), International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) te International Astronomical Union (IAU). Formula je izvedena i ispitana na spektroskopskim termima živinog izotopa Hg 198. Vjeruje se da nepouzdanost indeksa prelamanja iz gornje formule ne iznosi više od $\pm 5 \cdot 10^{-8}$.

Pod »standardnim zrakom« obično se razumijeva *spektroskopski zrak*, tj. nekontaminirani suhi zrak definiran ovim parametrima: temperatura 15 °C, tlak 1,01325 bar (760 mm Hg), volumenski sadržaj CO_2 0,03%, $g = 9{,}806\,65\ m/s^2$. Pri tom se duljina vala i indeks prelamanja obično označuju indeksom s, dakle λ_s i n_s. U *tehničkoj metrologiji* ti su nazivni parametri: 20 °C, 1,01325 bar, 0,03% CO_2 i tolika vlažnost kod koje je parcijalni tlak vode 10 mm Hg. Pripadne oznake su λ_N i n_N.

Duljine vala izmjerene pri *stvarnim uvjetima*, različitim od navedenih standardnih, reduciraju se u tehničkoj metrologiji na vakuum ili spektroskopsko normirano stanje pomoću posebnih redukcijskih formula za tlak, temperaturu, vlažnost itd. No u *vrhunskoj metrologiji* to je nedovoljno pouzdano, pa se mjerenja moraju obavljati pri strogo održavanim temperaturama, tlakovima itd. Razloge tome ilustrirat će nam podaci u idućem odlomku.

8.3.2. Usporedbeno mjerenje indeksa prelamanja. *Edlén*ova formula od godine 1954. nepouzdana je oko $\pm 5 \cdot 10^{-8}$. Na nepouzdanost vrijednosti indeksa prelamanja n bitno utječu tlak, temperatura, sadržaj vodene pare, sadržaj CO_2, sadržaj C_6H_6 ili CCl_4. Da utjecaj promjene svake od tih pet veličina ne bi pridonio nepouzdanosti indeksa prelamanja n više od $\pm 1 \cdot 10^{-8}$, one se moraju održavati u ovim granicama: tlak $\pm$ 3 N/m² (= 0,025 mm Hg), temperatura $\pm$ 0,001 K, vlažnost $\pm$ 1% od relativne vlažnosti pri 20 °C, sadržaj CO_2 $\pm 6 \cdot 10^{-5}$, sadržaj C_6H_6 $\pm 7 \cdot 10^{-6}$ (ovaj podatak pokazuje koliki je utjecaj organskih para na indeks prelamanja). Impresionira potrebna stabilnost temperature: $\pm$ 0,001 K. Zbog toga se i štapna mjera i čitav mjerni uređaj nalaze u velikom termostatu, tako da su svi dijelovi mjernog postrojenja na stalnoj temperaturi uz navedeno dopušteno odstupanje. Izotermna posuda donosi, međutim, i loše utjecaje: u posudi je zrak zatvoren i polako se zagađuje adsorpcijom plinova s površine interferometra, parama ulja, maziva, lakova itd. U rangu nepouzdanosti vrijednosti indeksa prelamanja, koja se za *Edlén*ovu formulu ocjenjuje na $\pm 5:10^8$, utjecaji para tih nečistoća su znatni.

Zbog toga je jedna od mogućnosti pouzdanijeg utvrđivanja vrijednosti indeksa prelamanja zraka *direktna usporedba* dvaju snopova svjetla, od kojih jedan prolazi kroz vakuum, a drugi kroz zrak interferometra, što znači da se interferencijsko mjerenje veličine n mora obaviti u samom interferometru. Rezultate razvoja novog *refraktometra*, tj. uređaja za mjerenje indeksa prelamanja n, objavio je potkraj godine 1965. *J. Terrien* iz BIPM. Poslužio se interferometrom sa dva snopa svjetla. Dok je jedan snop prolazio kroz normalan zrak interferometra, drugi snop je morao istu udaljenost savladati u vakuumu, tj. u evakuiranoj staklenoj (pyrex) cijevi koja se nalazi unutar najnovijeg interferencijskog fotoelektričkog komparatora što ga posjeduje BIPM u Sèvresu (sl. A.43). Podrobnije se o načinu mjerenja n govori u odlomku 8.5.6.



Sl. A.36. Izgled staklene konstrukcije *Terrien*ova refraktometra. Desno dolje na jednoj se cijevi vidi priključak pomoću kojeg se iz cijevi može isisati zrak, pa onda svjetlo prolazi kroz vakuum

Stručnjaci eksperimentatori nisu jednodušni u tome da li se takvim mjerenjima pouzdanost poznavanja indeksa prelamanja zraka može približiti vrijednosti $\pm 1:10^8$. Zbog toga su u nekoliko spektroskopskih i metroloških instituta u toku opsežna istraživanja, osobito u pogledu pogrešaka koje unose tlak, vlažnost, sastav zraka itd.

8.3.3. Edlénova disperzijska formula 1966. Sredinom godine 1966. *B. Edlén* objavio je *novu*, poboljšanu disperzijsku formulu za proračunavanje indeksa prelamanja standardnog zraka. Ona glasi

$$(n-1)_s \cdot 10^8 = 8342{,}13 + \frac{2406030}{130-\sigma^2} + \frac{15997}{38{,}9-\sigma^2},$$

gdje je σ brojčani iznos vakuumskog specifičnog broja valova, $\sigma = 1/\lambda_0$, izražen recipročnim mikrometrima ($\mu m^{-1} = 10^{-6}$ m). Izvođenje poboljšane formule omogućila su nova istraživanja koja su u svijetu izvršena između godine 1953. i 1965.

Zajedno s novom disperzijskom formulom *Edlén* je objavio i jednadžbu pomoću koje se može pouzdanije negoli do sada izračunati ovisnost stvarnog indeksa prelamanja n o temperaturi i tlaku. Za normalne atmosferske prilike u laboratoriju ta jednadžba glasi

$$(n-1) = (n-1)_s \cdot \frac{0{,}00138825\ p/\text{torr}}{1+0{,}003671\ \vartheta/°\text{C}},$$

gdje $(n-1)_s$ predstavlja rezultat dobiven disperzijskom formulom za standardni zrak, a p/torr i ϑ/°C predstavljaju brojčane iznose tlaka i temperature u torrima i celzijima. Jednadžba vrijedi za raspon temperatura 15...30 °C i područje tlaka 700...800 torr.

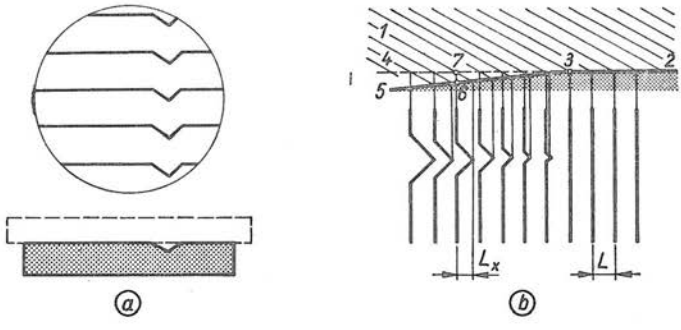
8.4. Nekoliko industrijskih primjena interferencije svjetla

U odlomku 8.1.3 smo naveli da i potrebe kvalitetne proizvodnje u privredi zahtijevaju što je moguće preciznije mjerenje duljine, a u skladu s time i posjedovanje odgovarajućih mjernih uređaja i krajnjih mjera — prizmi. Tamo smo u svrhu orijentacije naznačili nekoliko podataka iz državnih standarda. Na temelju razmatranja u odsječcima 8.2 i 8.3 možemo rasuđivanja iz odlomka 8.1.3 nastaviti na primjeru krajnje mjere nazivne duljine $L = 10$ mm. Izračunajmo pomoću jednadžbe iz odlomka 8.1.3 koliko smije iznositi odstupanje stvarne duljine te krajnje mjere ako želimo da ona udovoljava zahtjevima klase *0*, tj. ne najstrože zahtjeve prema njemačkim propisima. Jednadžba nam daje $\delta L = \pm (0{,}1\ \mu m + 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4\ \mu m) = \pm 0{,}12\ \mu m$. Za slučaj klase *00* dopušteno odstupanje iznosilo bi $\pm 0{,}06\ \mu m$, tj. upola manje.

Pri interferencijskim mjerenjima obično se upotrebljavaju takva monokromatska svjetla (monokromatska zračenja kriptona, kadmija, žive, helija) čija duljina vala iznosi oko $\lambda = 0{,}6\ \mu m$. Usporedimo li tu duljinu vala sa gore izračunatim dopuštenim odstupanjem, vidimo da za naš slučaj omjer $\lambda/\delta L$ iznosi 5 do 10. To znači da je dopušteno odstupanje pet do 10 puta manje od duljine vala svjetla kojim se obavlja interferencijsko mjerenje! Takve su prilike u finoj mehaničkoj industriji. U optičkoj industriji, tj. u proizvodnji zrcala, leća i prizmi, omjer $\lambda/\delta L$ još je veći, penje se čak do 200; to znači da su u pitanju razmaci 200 puta manji od duljine vala svjetla! Takva mjerenja mogu se obaviti samo interferencijskim metodama. Budući da one, dakle, jednako zaokupljaju kako vrhunsku metrologiju tako i suvremenu kvalitetnu industrijsku proizvodnju, potrebno je da toj vrsti mjerenja posvetimo odgovarajuću pažnju. Ipak u nastavku ćemo se morati ograničiti samo na nekoliko mjerno-industrijskih primjena interferencije svjetla. Opseg primjene interferencijskih mjernih metoda je, naime, izvanredno širok: u znanosti se one upotrebljavaju

za najpreciznije utvrđivanje duljine vala svjetla, indeksa prelamanja, istraživanje strukture i oblika spektralnih linija itd., a u tehnici za precizno mjerenje duljina, za kontrolu ispravnosti ispoliranih optičkih površina, za kontrolu alata i u niz drugih svrha.

8.4.1. Mjerenje planarnosti. Interferometrija omogućuje pouzdano istraživanje kvalitete površine poliranih metala i drugih tvari. Pri tom se u sklopu mjernog uređaja upotrebljavaju posebne staklene mjerne pločice (etaloni) čija planarnost i paralelnost ispoliranih ploha mogu biti gotovo savršeni (da su dvije mjerne pločice planparalelne, možemo utvrditi tako da ih stavimo jednu na drugu i ispitamo interferenciju prema slici A.35a; ako su to pločice *P1* i *P2*, onda je kut $\varphi = 0$, pa nema nikakvih interferencijskih pruga; stoga se kaže da su pločice u »optičkom kontaktu«). Ako se mjerna pločica stavi na ispitivanu površinu, izvođenjem interferencijskih pokusa prema slici A.35a (u tom slučaju *P1* predstavlja ispitivanu tvar, a *P2* mjernu pločicu) dobivaju se interferencijske pruge koje povezuju jednake debljine zračnih klinova (o njima vidi odlomak 8.2.4).



Sl. A.37. Interferometrijsko ispitivanje planarnosti polirane površine

Takvu interferencijsku sliku vidimo na crtežu A.37a. U krugu su interferencijske pruge, kako ih vidi promatrač u teleskopu, a ispod njih profil ispitivane površine, koja ima jednolik ris (prikazano karikirano). Tačkasto je označena staklena mjerna pločica. Iz oblika interferencijskih pruga i njihove širine mogu se, dakle, uočiti nedostaci ispolirane površine, zapaziti odstupanje površine od zadanog oblika i ocijeniti veličina odstupanja. Ako je neravnost ispitivane površine malena, pruge će biti široke, a ako je površina potpuno ravna, onda će ona biti jednoliko osvijetljena, ali bez pruga.

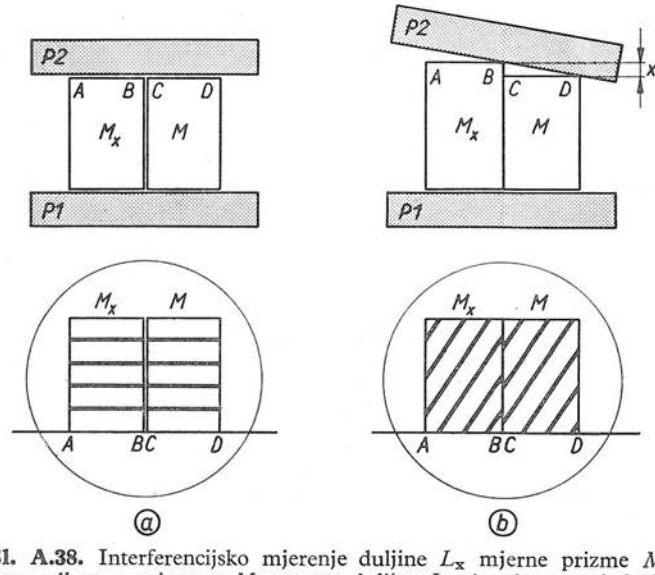
Nekoliko rezultata interferencijskog ispitivanja planarnosti površine vidimo na slici A.34 (odlomak 8.2.3). Na gornjoj desnoj fotografiji pruge pokazuju da površina ima ris, dok donje dvije pokazuju znatno neravnije površine. Gornja lijeva fotografija interferencijskih pruga dokazuje da je površina planarna. Pri ispitivanju pruge su nastale (iako je površina ravna) zbog toga što je ispitivač na jednom rubu neznatno pritisnuo mjernu pločicu o ispitivanu plohu i na taj način stvorio neznatan zračni klin (vidi odlomak 8.2.4). Ako ispitivač pritisne pločicu na drugom mjestu, on time premjesti položaj klina i prema novonastalim prugama može ocijeniti kvalitetu površine u novom smjeru. U interferencijskim uređajima ti se klinovi, dakako, stvaraju posebnim mehanizmom za fino zakretanje mjerne pločice.

Naš opis interferometarskog ispitivanja planarnosti je, dakako, samo opis *principa*. U preciznim industrijama upotrebljava se mnoštvo različitih izvedbi interferencijskih mjernih uređaja čija različitost ovisi o namjeni uređaja i o njihovoj skupoći. No kod većine njih mjerenje odstupanja stvarne površine od planarne svodi se na usporedbu deformacije interferencijske pruge s razmakom između dviju susjednih ravnih istovrsnih (npr. tamnih) pruga. To nam može ilustrirati slika A.37b koja prikazuje kako paralelni snop svjetla *1* pada na ispoliranu plohu koja bi trebalo da bude planarna (*2374*). Ona to stvarno nije, već se u tački *3* prelama u krivulju *2365*, tj. ima udubinu. Zbog toga nastaju interferencijske pruge koje od tačke *3* prema *5* imaju sve jače izraženu udubinu. U skladu s izvođenjem u odlomku 8.2.4, udubinu $x = 67$ možemo izračunati pomoću relacije

$$x = \frac{L_x}{L} \frac{\lambda}{2},$$

jer je $L_x = Kx$, $L = K\lambda/2$, gdje je K konstanta. Ako je, na primjer, pri mjerenju očitano $L_x/L = 0{,}8$, a upotrijebljeno je crveno kadmijevo svjetlo sa λ približno 0,64 μm, udubina na mjestu tačaka *7* i *6* iznosi $x = 0{,}8 \cdot 0{,}64\ \mu\text{m} = 0{,}51\ \mu\text{m}$.

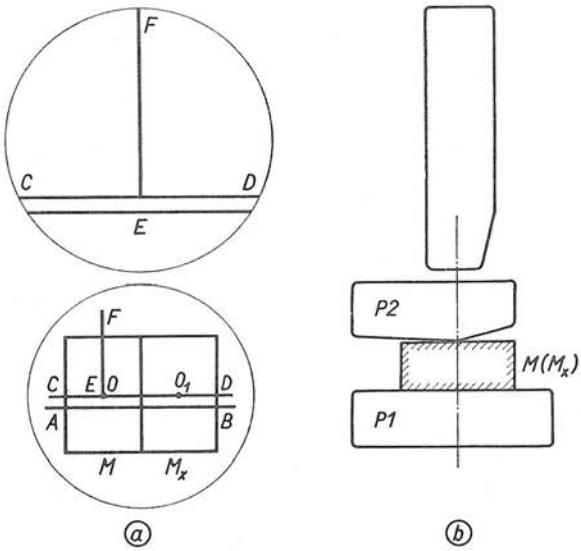
8.4.2. Komparacijsko mjerenje duljine. Interferometrija omogućuje nadasve precizno mjerenje vrlo malenih *razlika* duljina pa se zato upotrebljava pri uspoređivanju duljina preciznih mjernih prizmi. Način mjerenja možemo objasniti uz pomoć slike A.38. Posjedujemo krajnju mjeru M čiju duljinu L znamo, pa pomoću nje želimo interferencijskim mjerenjem ustanoviti duljinu L_x druge mjere, M_x. U tu svrhu obje mjere stavimo na mjernu pločicu *P1*, a povrh njih drugu mjernu pločicu, *P2*. Interferometrijskim postupkom, opisanim u odlomcima 8.2.4 i 8.4.1, na pločici *P2* nastanu interferencijske pruge pomoću kojih možemo ustanoviti razliku duljina L i L_x.



Sl. A.38. Interferencijsko mjerenje duljine L_x mjerne prizme M_x usporedbom s prizmom M poznate duljine L: a) prizme su jednako dugačke, b) prizme su nejednake

Ako su planparalelne mjerne prizme M i M_x jednako visoke ($L_x = L$), interferencijske pruge bit će onakve kako ih u krugu teleskopa prikazuje na donjem crtežu slika A.38a (pritiskom na *P2* ili posve neznatnim zakretom mjerne pločice *P2* prethodno je stvoren potrebni zračni klin), tj. pruge na obje prizme međusobno se nastavljaju i paralelne su rebru *ABCD* zračnog klina. Ako planparalelne mjerne prizme M_x i M nisu jednako visoke, npr. krajnja mjera M_x je dulja od M, pločica *P2* dodirivat će mjere u tačkama *B* i *D* (da nema zračnog klina, dodirivala bi duž izvodnica kroz te tačke). Zbog toga će interferencijske pruge ležati ukoso prema rebru *ABCD* klina. U našem slučaju (sl. A.38b) prva pruga mjerne prizme M_x leži između četvrte i pete pruge prizme M poznate duljine, odnosno preciznije: pomak pruga iznosi 4,3 razmaka između susjednih istovrsnih pruga. To znači da je u datoj tački zračni klin iznad M_x za 3,3 pružnih razmaka veći negoli iznad M. Prema tome je mjera M_x dulja za $x = 3{,}3 \cdot \lambda/2$. Ako je riječ o $\lambda = 0{,}64$ μm, ta razlika iznosi $x = 1{,}06$ μm.

8.4.3. Komparacijsko utvrđivanje srednje duljine krajnjih mjera. U prošlom smo odlomku pretpostavljali da su površine uspoređivanih mjernih prizmi idealno planarne i paralelne. U stvarnosti one to nisu, pa je za nazivnu duljinu prizmi mjerodavna njihova srednja duljina. Način interferencijskog utvrđivanja srednje duljine mjerne prizme M_x interferencijskom komparacijom objasnit ćemo uz pomoć slike A.39.

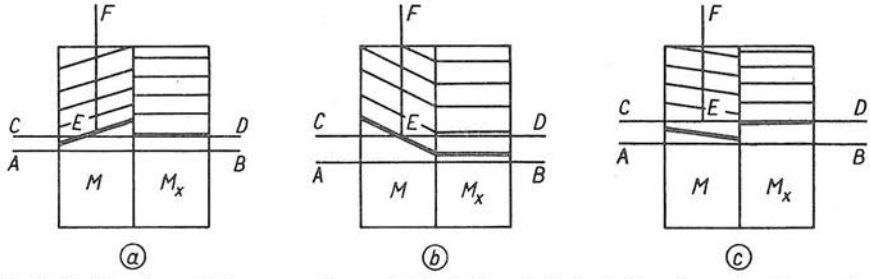


Sl. A.39. Tehnička metoda interferencijskog mjerenja srednje duljine krajnje mjere komparacijom: a) pogled na razmještaj (u gornjem krugu je pogled u okular dok uspoređivane mjere još nisu postavljene), b) pogled sa strane

Mjerni razmještaj je u biti isti kao na slici A.38, ali je gornja pločica *P2* *skošena* (sl. A.39b; iza mjerne prizme M nalazi se M_x). Linije na slici A.39a prikazuju: *AB* — rebro skošenja, *CD* — liniju paralelnu rebru skošenja, *EF* — liniju okomitu na *CD* (skošenje se obično izvodi pod kutom od nekoliko stupnjeva, a rebro skošenja dolazi na udaljenosti 10...15 mm od ruba mjerne pločice promjera oko 60 mm i debljine 12...20 mm). Na mjerne površine obiju krajnjih mjera skošena pločica *P2* stavlja se tako da bi linija *CD* prolazila kroz centre O i O_1 mjernih površina prizmi, a linija *EF* kroz centar mjerne površine mjere poznate duljine (M). Time se postiže podudaranje presjecišta linija *CD* i *EF* sa centrom O mjerne površine mjere M. Mijenjanjem nagiba pločice *P2* može se dobiti takav položaj da su na ispitivanoj mjeri M_x interferencijske pruge paralelne liniji *CD*.

Prema različitosti pruga između linije *CD* i rebra skošenja *AB* (ili njegove projekcije) može se ustanoviti razlika srednjih duljina uspoređivanih mjernih prizmi. U tehničkoj praksi susrećemo se tri slučaja: a) komparirane mjere su jednakih srednjih

duljina; b) ispitivana mjera M_x dulja je od poznate mjere M; c) obrnuti slučaj od b). Ovim slučajevima odgovara ovaj raspored interferencijskih pruga: a) prva interferencijska pruga ispitivane mjere M_x (sl. A.40a) podudara se s linijom CD, a prva linija poznate mjere M prolazi kroz presjecište linija CD i EF; b) prva pruga poznate mjere M prolazi kroz presjecište linija CD i EF (sl. A.40b), a prva pruga (ili prva vidljiva pruga) ispitivane mjere M_x nalazi se između linije CD i rebra AB; c) prva pruga ispitivane mjere podudara se s linijom CD (sl. A.40c), a prva pruga poznate mjere M nalazi se između linije CD i rebra AB.



Sl. A.40. Interferencijska usporedba srednjih duljina dviju krajnjih mjera: a) mjere su jednake, b) ispitivana mjera M_x dulja je od poznate M, c) ispitivana mjera kraća je od poznate

Mjerenje se izvodi *dva* puta. Nakon već opisanog mjerenja i očitanja razlike N_1 (to je razlika broja razmaka među prugama), obje mjere se okrenu za 180° oko osi koja prolazi kroz centre njihovih radnih površina i zatim iznova mjeri. Pri tom se dobije razlika od N_2 pružnih razmaka. Srednja duljina L_x ispitivane mjere M_x dobiva se pomoću izraza

$$L_x = L + \frac{N_1 + N_2}{2} \frac{\lambda}{2},$$

gdje je L srednja duljina poznate mjere M, a λ duljina vala svjetla upotrijebljenog pri ovom interferencijskom mjerenju.

Zbog svoje jednostavnosti ova se mjerna metoda katkada naziva »tehničkom«. Njoj nisu potrebni specijalni optički uređaji, već jedino optička stakla čija neplanarnost nije veća od $\pm$ 0,1 μm. Upotrebljava se za utvrđivanje razlika duljina od najviše 1,5...1,8 μm, a mjerna pogreška iznosi 0,1...0,2 μm. Posljednjih desetljeća sve se više primjenjuje u alatnicama i strojogradevnoj industriji.

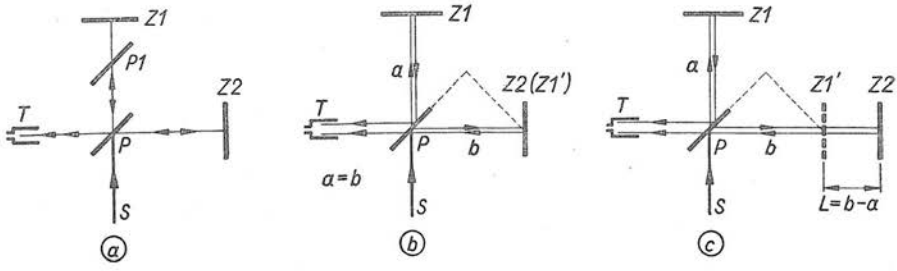
8.5. Mjerenje i uspoređivanje duljina interferencijskim komparatorima

U vrhunskoj metrologiji duljine interferencijom svjetla koristi se za dvije vrste mjerenja: jednom se mjere razmaci između crtica na dugačkim mjernim štapovima, a drugi put udaljenosti između sjajno ispoliranih planparalelnih površina krajnjih mjera (o tehničkoj primjeni potonjeg bilo je govora u odsječku 8.4) ili optičkih stakala. U oba se slučaja nepoznata mjerena duljina uspoređuje s poznatom duljinom vala λ stanovitog svjetla, npr. monokromatskog zračenja kriptona, kadmija, žive itd., tj. interferencijskim mjerenjem se utvrđuje omjer l/λ.

Postoji više vrsta uređaja za najpreciznija mjerenja duljine u navedenom smislu. Budući da je osnova njihova djelovanja s jedne strane *interferencija* svjetla, a s druge strane *komparacija* l sa λ, nazivaju se *interferencijskim komparatorima* ili *interferometrima*. Posljednjih godina ti su uređaji opremljeni *fotoelektričkim mikrosko-*

pima, koji omogućuju da se crtica na štapnoj mjeri vizira sa sigurnošću 7...8 nanometara (7...8·10^{-9} m), tj. oko 10 puta pouzdanije negoli s običnim mikroskopima. Stoga se nazivaju *fotoelektrički interferencijski komparatori* (comparateur photoélectrique et interférentiel). U metrologiji je najpoznatiji *Michelsonov interferencijski komparator*, koji je to ime dobio po glasovitom američkom učenjaku *A. A. Michelsonu*, profesoru iz Chicaga. On je rezultatima svojih interferencijskih istraživanja, koja je na prijelazu iz prošlog stoljeća vršio u Međunarodnom uredu za mjere i utege, radikalno unaprijedio znanost i metode mjerenja duljine u tehnici.

8.5.1. Načelo rada Michelsonova interferometra možemo pratiti na slici A.41a. Izvor monokromatskog svjetla S odašilje paralelan snop svjetlosnih zraka prema staklenoj pločici P, koja je s jedne strane posrebrena. Zbog toga je pločica polupropusna za svjetlo, tj. polovina svjetlosnog toka prolazi kroz pločicu P prema fiksnom zrcalu Z_1, a druga polovina se odrazuje prema pomičnom zrcalu Z_2. Na svom daljnjem putu prvi polusnop se odrazuje od fiksnog zrcala Z_1, pada na pločicu P i odavde se djelomično reflektira u vidno polje teleskopa T namještena na neizmjernost (vidi sliku A.41b). Drugi polusnop svjetla, reflektiran od P, pada na pomično zrcalo Z_2, od njega se odrazuje, djelomično prolazi kroz pločicu P i također dospijeva u teleskop T.



Sl. A.41. Gruba skica djelovanja *Michelsonova* interferometra

Budući da oba polusnopa potječu iz istog izvora svjetla S, oni su međusobno *koherentni* i mogu interferirati (kompenzacijska staklena pločica P_1 na slici A.41a izrezana je od istog komada stakla kao i P, ali nije posrebrena; ona služi samo tome da bi oba polusnopa jednaki broj puta prolazili kroz pločicu; na slikama A.41b, c kompenzacijsku pločicu radi jednostavnosti ne crtamo). Promatrač će, dakle, u teleskopu T moći vidjeti *interferencijske pruge*, ako je udovoljeno uvjetima postanka interferencije svjetla (vidi odsječak 8.2).

Nastala interferencijska slika ovisit će o interferenciji u »zračnoj pločici« (usporedi s odlomcima 8.2.3, 4) koju tvore pomično zrcalo Z_2 i virtuelna slika Z_1' fiksnog zrcala Z_1 u posrebrenom sloju pločice P. Ako su razmaci a i b (sl. A.41b) međusobno jednaki, $a = b$, »zračne pločice« Z_2Z_1' nema, pa nema ni interferencijskih pruga. Ako je, međutim, duljina a različita od b (sl. A.41c), »zračna pločica« je debela $L = b - a$, čemu odgovara stanovit broj interferencijskih pruga. U fokalnoj ravnini teleskopa dobiva se takva slika kao da je posrijedi odraz svjetla od granica planparalelnog sloja zraka ograničenog plohama Z_1' i Z_2.

Zrcalo Z_2 može se pomicati duž osi Z_2PT paralelno samome sebi pomoću brižljivo izvedenih mikrometarskih vijaka. Budući da u velikim interferencijskim komparatorima put gibanja zrcala Z_2 dostiže čak više od jednog metra, preciznost mehanizama na kojima se i pomoću kojih zrcalo pomiče mora biti ono maksimalno

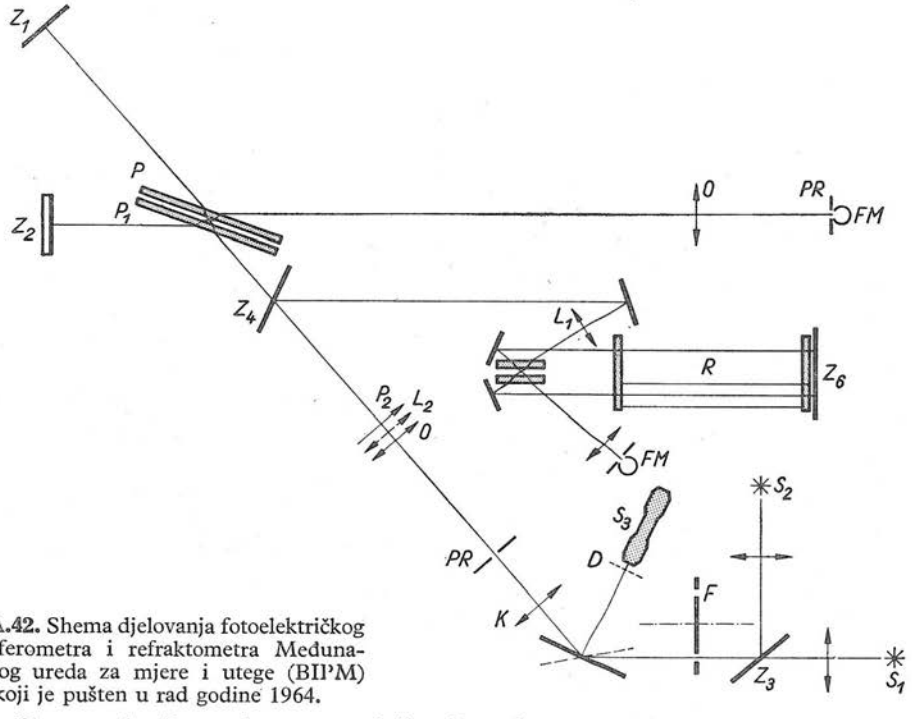
što u trenutku gradnje komparatora može pružiti precizna mehanika (vidi npr. odlomak 8.5.2).

Upotrebljavaju se dva položaja pomičnog zrcala Z_2. Prvi položaj, strogo okomit na fiksno zrcalo Z_1, daje pri pomicanju Z_2 interferencijske pruge u obliku koncentričnih krugova (pruge jednakog nagiba). U drugom položaju zrcalo Z_2 nagnuto je prema Z_1 za kut koji je neznatno različit od pravog kuta. U tom slučaju interferencijska slika se sastoji od sistema paralelnih pruga (usporedi s odlomkom 8.2.4). I u jednom i u drugom slučaju zrcalo Z_2 mora se pomicati strogo okomito na svoju površinu, tj. paralelno samome sebi.

U skladu s navedenim, pomak zrcala Z_2 za polovicu duljine vala ($\lambda/2$) upotrijebljenog monokromatskog svjetla uzrokuje pomak svih interferencijskih pruga u vidnom polju teleskopa za širinu jedne pruge (vidi odlomak 8.2.3). Ako se zrcalo Z_2 pomaklo za L, preko vizirne linije u teleskopu pomaklo se N interferencijskih pruga. Prema tome vrijedi jednadžba

$$L = N\frac{\lambda}{2}, \tag{8.5-1}$$

koja je osnovom direktnog (tzv. apsolutnog) mjerenja duljine L pomoću interferencijskog komparatora i svjetla duljine vala λ.



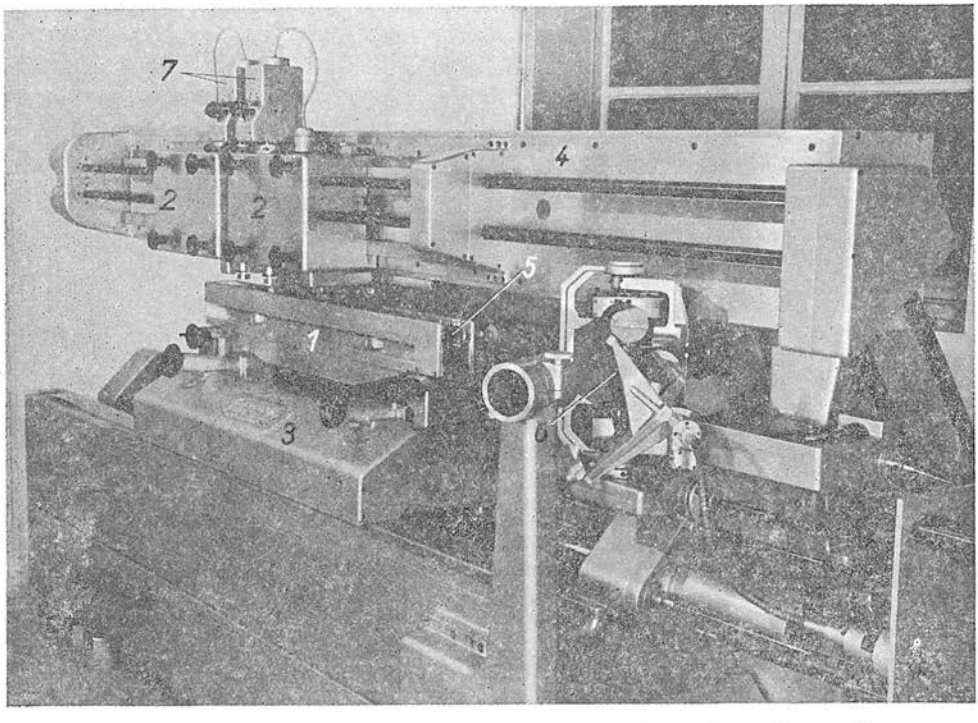
Sl. A.42. Shema djelovanja fotoelektričkog interferometra i refraktometra Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM) koji je pušten u rad godine 1964.

Z_1 — fiksno zrcalo, P — polupropusna pločica, P_1 — kompenzacijska pločica, Z_2 — pomično zrcalo, Z_3, Z_4 — zrcala za skretanje svjetla, Z_5 — zrcalo za namještanje, Z_6 — stražnje zrcalo refraktometra, S_1 — izbojna žarulja na kripton (Kr 86), S_2 — izbojna žarulja na živu (Hg 198), S_3 — laserski izvor (helij-neon), R — refraktometar, FM — fotomultiplikator, D — difuzor, F — filtarski sistem, P_2 — polarizator, L_1 — fiksna leća, L_2 — dodatna leća, O — objektiv, K — kondenzor, PR — prorez

Jednostavni crteži na slici A.41 poslužili su nam samo za to da bismo upoznali načelo djelovanja *Michelson*ova interferencijskog interferometra. U stvarnoj izvedbi optička shema njegova djelovanja izgleda kao na slici A.42 koja se odnosi na interferometar u BIPM dovršen godine 1964. Podrobnosti o načinu njegova djelovanja saznat ćemo u narednim odlomcima.

8.5.2. Uspoređivanje duljina dviju mjera sa crticama. Danas se u vrhunskoj metrologiji interferencijski komparatori redovito izgrađuju kao *univerzalni* mjerni uređaji, tj. kao takvi uređaji koji su namijenjeni za više vrsta mjerenja pomoću interferencije svjetla. Tako se, na primjer, univerzalni interferencijski komparator Međunarodnog ureda za mjere i utege u Sèvresu, koji je pušten u rad godine 1964, upotrebljava za ove radove: direktno mjerenje krajnjih mjera i štapnih mjera brojem valova monokromatskog svjetla poznate duljine vala λ; mjerenje razlika duljina dviju krajnjih mjera; uspoređivanje krajnje mjere s mjerom sa crticama; uspoređivanje dviju mjera sa crticama; mjerenje indeksa prelamanja (ima ugrađeni refraktometar); urezivanje crtica na štapne mjere pomoću posebnog prigrađenog uređaja. Izgled tog komparatora u BIPM prikazuju fotografije na slikama A.43 i A.44.

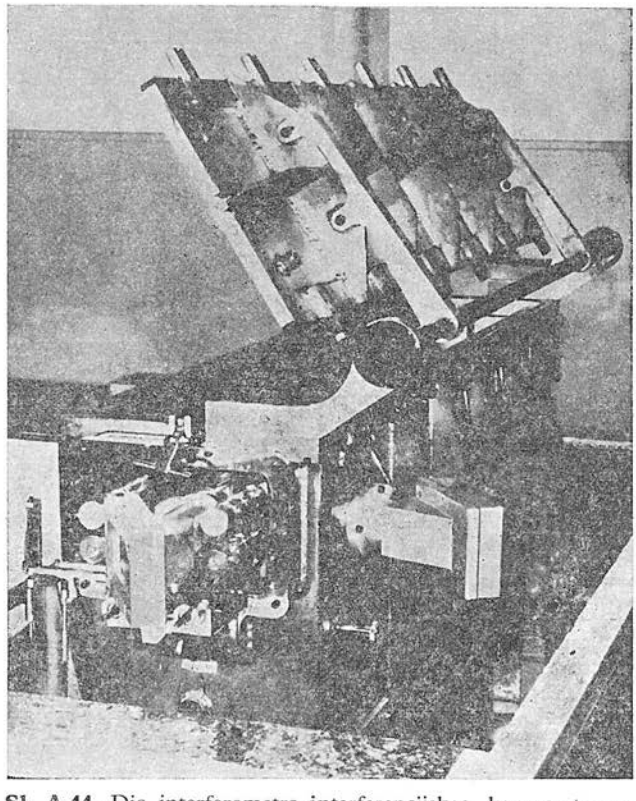
Studijski rad na tom interferencijskom komparatoru započeo je godine 1952, a izrada je bila povjerena glasovitoj švicarskoj firmi Société Génévoise d'Instruments



Sl. A.43. Interferencijski komparator s fotoelektričkim mikroskopima u Bureau International des Poids et Mesures koji je pušten u rad godine 1964. (Foto: BIPM)

Oznake predočuju: *1* — pomični stol, *2* — uređaj za pomicanje mikroskopa, *3* — kolica, *4* — kućište, *5* — pomično zrcalo, *6* — polupropusna i kompenzacijska pločica, *7* — fotoelektrički mikroskopi

de Physique (SIP), koja i inače proizvodi najpreciznije optičke instrumente. O njegovim svojstvima mnogo govore i ovi podaci: razmak među crticama štapnih mjera sa crticama može se pomoću ovog komparatora namjestiti na oko $\pm 1 \cdot 10^{-8}$ pouzdano, a direktno (apsolutno) mjerenje duljine štapne mjere (sa crticama) valovima svjetla može se provoditi do duljine od preko jednog metra. Izgradnja i održavanje takvog postrojenja pravi je tehnički pothvat: dok je s jedne strane prilikom mjerenja temperatura stabilna na $\pm$ 1/1000 °C, s druge je strane u njegove temelje ugrađeno više od 30 tona antiseizmičke suspenzije! Primijenjeni su najmoderniji elektronski uređaji, daljinsko upravljanje, savršeno kondicioniranje i, dakako, najbolja optička pomagala i instrumenti (sl. A.52).



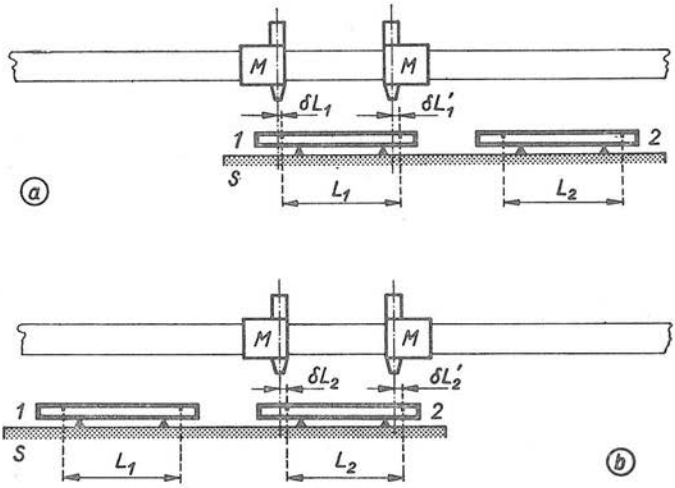
Sl. A.44. Dio interferometra interferencijskog komparatora u Međunarodnom uredu za mjere i utege. (Foto: BIPM)

Uspoređivanje duljina dviju štapnih mjera sa crticama na tom komparatoru prikazuje skica na slici A.45. Štapne mjere *1* i *2* učvršćene su na pomičnom stolu *S* jedna iza druge. Sa δL_1 označen je izmjereni razmak između *osi* lijevog mikroskopa *M* i *osi crtice* štapne mjere *1*, a sa $\delta L_1'$ razmak između osi desnog mikroskopa *M* i desne crtice štapne mjere *1* (sl. A.45a). Pošto su ta dva razmaka izmjerena, stol *S* pomakne se ulijevo (sl. A.45b) i analogno se očitaju δL_2 i $\delta L_2'$ na drugoj štapnoj mjeri sa crticama *2*. Pri tom je razmak između oba mikroskopa, tj. između njegovih osi, ostao nepromijenjen. Razlika duljina uspoređivanih dviju štapnih mjera iznosi

$$L_2 - L_1 = (\delta L_2' - \delta L_2) - (\delta L_1' - \delta L). \qquad (8.5\text{-}2)$$

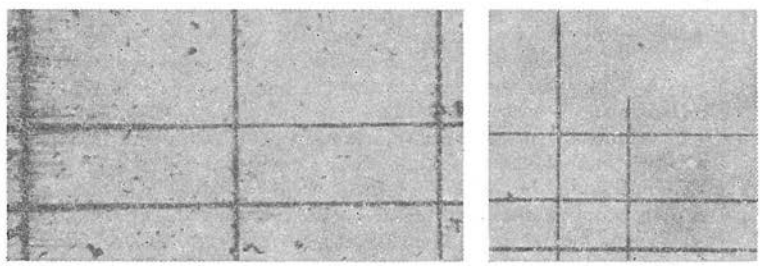
Pouzdanost dobivenog mjernog rezultata ovisi, među ostalim, o jednolikosti širine crtica koje su urezane na štapnim mjerama i o pouzdanosti namještanja mikroskopa povrh crtica. Teškoće pri namještanju mikroskopa povrh crtica mogla nam je donekle dočarati slika A.23, koja prikazuje oko 650 puta povećanu crticu na jednom od starijih primjeraka nacionalnog prametra prema staroj definiciji metra od godine 1889. (vidi odsječak 6.4). Crtica je urezana dijamantnim šilom, a njena širina iznosi oko 9 μm $= 9 \cdot 10^{-6}$ m. Starim mikroskopima mogla se os crtice definirati s pouzdanošću oko $\pm$ 0,2 μm $= \pm 2 \cdot 10^{-7}$ m.

U novije se vrijeme primjenjuju bolji postupci graviranja crtica u ispolirane površine štapnih mjera, ali se širina crtice vjerojatno ne može suziti na manje od 4...5 mikrometara. Usavršena tehnika graviranja crtica omogućila je, međutim,



Sl. A.45. Načelo mjerenja razlike duljina dviju štapnih mjera sa crticama približno jednakih duljina pomoću interferencijskog komparatora. Oznake predočuju: *1, 2* — uspoređivane štapne mjere sa crticama, *S* — pomični stol, *M* — mikroskopi

da se dobije bolja kvaliteta crtica (sl. A.46), povrh kojih se mikroskopi mogu vizuelno namjestiti s pouzdanošću oko $\pm$ 0,1 μm $= \pm 1 \cdot 10^{-7}$ m. Na tako veliko poboljšanje pouzdanosti namještanja mikroskopa utjecalo je i pronalaženje žlijeba crtice koji je bliz idealnom profilu V, a pri tom je ravan i gladak. Stoga je pri namještanju mikroskopa smanjen utjecaj promjena smjera rasvjete i ostalih specifičnosti upotrijebljenih mjernih uređaja i instrumenata.



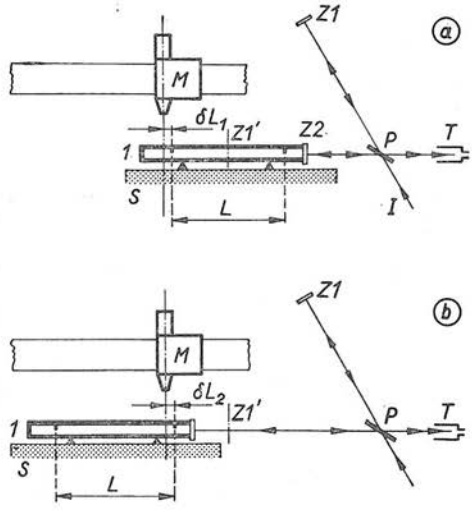
Sl. A.46. Crtice na prametrima Njemačke Demokratske Republike. *Lijevo*: crtice ugravirane starom tehnikom na kopiji broj 7 međunarodnog prametra široke su 8...9 μm. *Desno*: crtice ubilježene novom tehnikom na kopiji broj 18 međunarodnog prametra široke su oko 5 μm. Fotografsko povećanje isto je u oba slučaja. Prilikom ubilježavanja crtica u kopiju broj 18 označena je duljina 1 metar pri temperaturi 0°C i pri 20°C

Posljednjih godina upotrebljava se u vrhunskoj metrologiji još jedna novost, tzv. *fotoelektrički mikroskopi*. Oni se mogu namjestiti povrh crtica oko 10 puta si-

gurnije od dosadašnjih vizuelnih mikroskopa, tj. nepouzdanost njihova namještanja iznosi oko $\pm$ 10 nanometara (nm = 10^{-9} m = 10^{-3} μm). Fotoelektrički mikroskopi razvijeni su i uvedeni zato da bi se isključila subjektivnost motritelja do koje neminovno dolazi pri vizuelnom namještanju okulara običnog mikroskopa povrh sredine nejednoliko ozubljene crtice na štapnoj mjeri (vidi sl. A.23). Ti novi mikroskopi fotoelektrički otipkavaju crticu štapne mjere, a prigrađeni elektronički uređaji proizvode odgovarajuće pravokutne strujne impulse čiji se oblik i položaj može pratiti na zaslonu katodne cijevi. Pomoću prikladnih elektroničkih pojačala i servomotora ovi se mikroskopi mogu i *automatski*, dakle sami, namjestiti povrh »sredine« crtice; pri tom se pod »sredinom« razumijeva sredina dobivena integralom fotoelektričkog otipkavanja.

Sva ta usavršenja potakla su Međunarodni ured za mjere i utege da je dao ugravirati nove crtice u svojih pet radnih metričkih štapnih mjera (kopije bivšeg međunarodnog prametra), a to su učinili i neki nacionalni metrološki zavodi sa svojim metričkim štapnim mjerama (bivši nacionalni prametri; vidi sl. A.46). Pozicije crtica definirane su, dakako, interferencijski pomoću poznate duljine vala monokromatskog zračenja. Ispitivanja na spomenutom novom interferencijskom fotoelektričkom komparatoru (sl. A.43, 44) pokazala su da je poznavanje razmaka između dvije crtice iznova gravirane štapne mjere uz primjenu svih tih usavršenja postalo pouzdano na $\pm$ 10 nm = $\pm\, 1 \cdot 10^{-8}$ m! To je 50 do 100 puta bolje nego što se moglo postići starim prametrom i starim interferencijskim komparatorom s vizuelnim očitanjem!

8.5.3. Neposredno mjerenje razmaka među crticama dviju štapnih mjera brojem valova svjetla duljine vala λ obavlja se na interferencijskom komparatoru u BIPM u skladu sa slikom A.47. Pomično zrcalo Z_2 priljubljeno je uz jedan kraj



Sl. A.47. Neposredno (apsolutno) mjerenje razmaka između dviju crtica štapne mjere brojem valova svjetla duljine vala λ

Oznake predočuju: *1* — štapna mjera sa crticama, *S* — stol na kojem je učvršćena mjera *1*, *I* — izvor svjetla, *P* — polupropusna pločica, *T* — teleskop namješten na neizmjernost, *Z1* — fiksno zrcalo, *Z1'* — virtuelna slika fiksnog zrcala, *Z2* — pomično zrcalo koje se giba zajedno s mjerenim štapom *1* na kolicima, *M* — fotoelektrički mikroskop (jedan od dvaju) komparatora sa slike A.43, δL_1 — razmak između osi mikroskopa i osi lijeve crtice, δL_2 — razmak između osi istog mikroskopa i osi desne crtice, *L* — mjerena duljina između crtica. Međusobni odnos *M*, *Z1*, *P* i *S* ostaje u toku mjerenja fiksan

mjerenog štapa *1* koji se nalazi na stolu *S*. Na štapu su u prikazanom slučaju ugravirane početna i krajnja crtica; njihov razmak *L* valja utvrditi neposrednom interferencijskom usporedbom s duljinom vala λ svjetla.

Interferencijske metode već se odavno primjenjuju na krajnje mjere, a za štapne *mjere sa crticama* upotrebljavaju se tek u novije vrijeme. Razlog je u tome što je

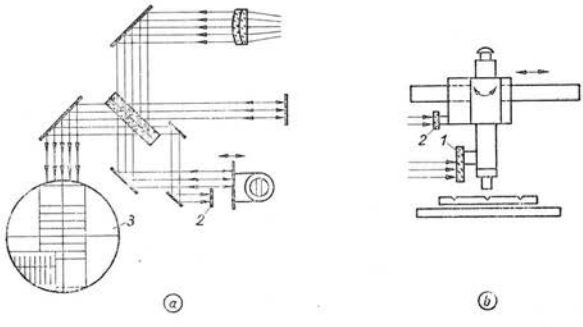
primjena interferencije svjetla na mjerenje velikih razmaka među crticama znatno složeniji problem negoli primjena na krajnje mjere kada u toku mjerenja ostaju zrcala interferometra nepomična. U interferometru za mjere sa crticama mora se jedno od zrcala pomicati prilikom prijelaza od jedne crtice na drugu. Da bi interferencijska slika ostala nepromijenjena, površina zrcala mora ostati strogo paralelna svom polaznom položaju.

Mjerenje se obavlja tako da se najprije pomični stol komparatora namjesti (zaustavi i fiksira) u takvom položaju da lijeva crtica štapne mjere bude ispod fotoelektričkog mikroskopa M (sl. A.47a). Zatim se stol sa štapnom mjerom pomakne ulijevo tako da se desna crtica mjere nalazi ispod istog mikroskopa M. U skladu s jednadžbama (8.5-1, 2) izmjerena duljina između dviju crtica štapne mjere proporcionalna je razlici broja interferencijskih pruga

$$L = (N_2 - N_1)\frac{\lambda}{2} + \delta L_2 - \delta L_1, \qquad (8.5\text{-}3)$$

gdje je λ duljina vala upotrijebljenog monokromatskog svjetla.

Da bi površina pomičnog zrcala Z_2 ostala paralelna samoj sebi u toku pomicanja ispitivane štapne mjere *1*, univerzalni interferencijski komparator (također opremljen fotoelektričkim mikroskopima) sovjetskog metrološkog instituta ima ugrađen poseban interferencijski uređaj za korigiranje položaja pomičnog zrcala. Njegovu funkciju možemo razabrati sa slike A.48. Iz osnovnog pramena svjetla, koje pada na polupropusnu pločicu (to je *3* na slici A.50 koja prikazuje optičku shemu sovjetskog univerzalnog interferencijskog komparatora), izdvaja se posebna zraka. Ona je pomoćnim zrcalima usmjerena na dopunsko zrcalo *2* (sl. A.48b), učvršćeno na kolica mikroskopa malo iznad osnovnog pomičnog zrcala *1*. Ta zraka svjetla interferirat će s osnovnim pramenom svjetla kada je kašnjenje jedne zrake prema drugoj blisko nuli.



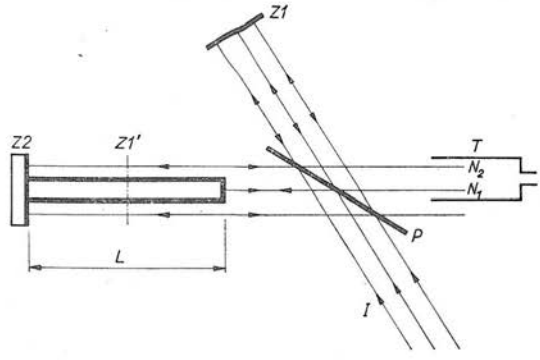
Sl. A.48. Shema uređaja za interferencijsku korekciju položaja pomičnog zrcala

1 — osnovno pomično zrcalo učvršćeno na kolica mikroskopa, *2* — dopunsko zrcalo, *3* — polje teleskopa

Dopunska interferencijska slika ne poremećuje zapažanje osnovne, jer se nalazi u jednom od kvadranata teleskopa *3* (sl. A.48a). Interferencijska slika može se pomoću upravljačkih poluga lako namjestiti i fiksirati u odnosu prema nepomičnoj oznaci. Ako se zbog nesavršenog gibanja stola promijeni položaj zrcala u odnosu prema polaznom položaju, pomoću istih poluga može se uspostaviti interferencijska slika, a time se korigira položaj zrcala i mikroskopa. Pogreška korekcije u tom slučaju ne ovisi samo o osjetljivosti interferencijske metode, već i o razmaku među centrima svjetlosnih zraka koje interferiraju. Varijacije pri ponovnim namještanjima mikroskopa na crticu štapne mjere pomoću interferencijske korekcije istog su reda veličine kao i pri namještanju mikroskopa pomoću osnovne interferencijske slike, a iznose oko 7...8 nanometara, odnosno u dosta nepovoljnom slučaju oko ± 10 nm $= \pm 1 \cdot 10^{-8}$ m.

8.5.4. Neposredno mjerenje duljine krajnje mjere interferencijskim komparatorom obavlja se u načelu prema slici A.49. U teleskopu T vidimo rezultat interferencije dvaju snopova svjetla: jednoga koji se odrazio od zrcala Z_2 i drugoga koji se odrazio od bliže ispolirane površine krajnje mjere. U analogiji s prethodnim razmatranjima duljina krajnje mjere iznosi

$$L = (N_2 - N_1)\frac{\lambda}{2}.$$



Sl. A.49. Neposredno (apsolutno) mjerenje duljine krajnje mjere

U vezi s neposrednim (apsolutnim) mjerenjem duljine L valja *općenito* reći ovo: ako je L veće od približno 200 mm, većina postojećih interferencijskih komparatora, pogotovo jednostavnijih industrijskih, nije kadra obaviti neposredno mjerenje. Razlog tome su bilo teško razlučivanje interferencijskih pruga, bilo teškoće od same interferencije ako upotrijebljeno svjetlo nije dovoljno monokromatično. U takvim se slučajevima mjerenja duljina iznad oko 200 mm provodi ovako: uzastopno se mjeri sa tri ili više različitih svjetala čije su duljine vala λ_1, λ_2, λ_3, ... Kao rezultat dobiva se ista stvarna duljina L izražena u skladu s jednadžbom (8.5-1):

$$L = (N_1 + \Delta N_1)\frac{\lambda_1}{2} = (N_2 + \Delta N_2)\frac{\lambda_2}{2} = (N_3 + \Delta N_3)\frac{\lambda_3}{2} = \ldots$$

Ovdje N_1, N_2, N_3 ... predstavljaju *cijeli* broj pruga za pojedine duljine vala, a ΔN_1, ΔN_2, ΔN_3 ... decimalne dijelove razmaka između dvije susjedne pruge. Iz očitanih rezultata može se prikladnim računskim postupkom izračunati L, a da se ne mora znati cijeli broj pruga N_1, N_2, N_3 ... Za takva računanja postoje posebna računala slična logaritamskom računalu. Sigurnost konačnog rezultata ovisi o pouzdanosti očitanja decimalnih dijelova interferencijskih pruga, ako se pretpostavi da su vrijednosti duljina vala upotrijebljenih zračenja apsolutno pouzdane. U najboljih komparatora se ΔN može poznavati najmanje na 1/100-ti dio razmaka između dvije pruge sigurno. Prema podacima *J. Terriena* iz BIPM to očitanje može biti još bolje, nekoliko 1/1000, ako se interferencijska pojava promatra *Haidenger*ovim interferencijskim krugovima. U svakom slučaju, dakle, može se L saznati s pouzdanošću $\lambda/200$. Ako je riječ o svjetlu duljine vala oko 0,6 μm, to iznosi oko 3 nanometra = $0{,}3 \cdot 10^{-8}$ m, što je oko 3 puta bolje od pouzdanosti današnjeg namještanja mikroskopa povrh crtica štapne mjere.

8.5.5. Postupak pri mjerenju duljina pomoću interferencijskog komparatora. Da bismo čitatelju barem donekle prikazali kako se interferencijski komparatori primjenjuju za mjerenje duljine, ovdje ćemo dati kratak i nepotpun *osvrt* na postupak upotrebe tog uređaja. Taj opis odnosit će se na rad tzv. univerzalnog interferencijskog komparatora koji je projektirao *M. L. Brževinski*, a izgrađen je i djeluje u Vsesojuznom naučno-isledovateljskom institutu metrologij imena *D. I. Mendeljejeva* u Lenjingradu. Taj mjerni uređaj omogućuje:

— uspoređivanje ukupne duljine štapne mjere sa crticama i pojedinih njenih intervala s krajnjom mjerom ili cijevnom mjerom (standardom);

— utvrđivanje duljine vala svjetla u dijelovima duljine štapne mjere sa crticama; pri tom se duljina krajnje mjere prethodno na temelju mjerenja izrazi brojem duljina valova λ;

— mjerenje razlike duljina dviju štapnih mjera sa crticama.

Način djelovanja tog uređaja objasnit ćemo uz pomoć njegove optičke sheme koja je prikazana na slici A.50. Kolimator *1—1'* daje paralelan snop svjetla koji odrazom od zrcala *2* pada na polupropusnu pločicu *3*. Onaj dio svjetla koji je prošao kroz *3* i odrazio se od pomoćnog zrcala *4*, dolazi na zrcalo *5*. To zrcalo je zajedno s mikroskopom *6* učvršćeno na nosač koji se može pomicati duž kućišta komparatora u smjeru *45*. Svjetlo koje se odrazilo od zrcala *5* vraća se preko *4* na pločicu *3*, gdje se djelomično odrazuje te preko zrcala *7* i *8* ulazi u teleskop *9*.

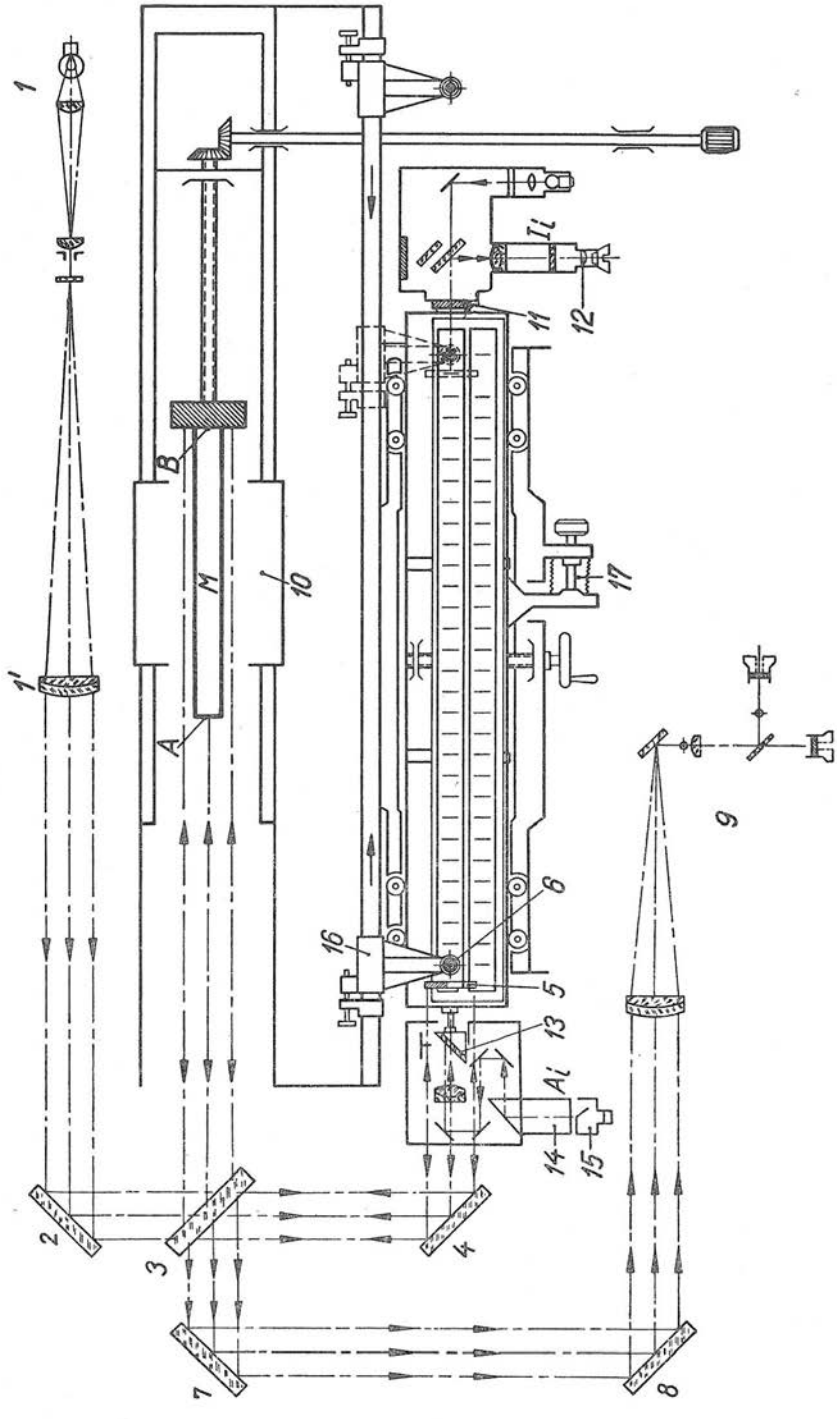
Drugi dio paralelnog snopa, odaslanog iz kolimatora *1—1'*, odrazuje se od pločice *3*, dolazi na slobodnu površinu *A* krajnje mjere *M* i na plohu *B* pločice uz koju je krajnja mjera *M* priljubljena. Zatim se svjetla, odrazivši se od sjajnih ploha *A* i *B*, vraćaju natrag: prošavši djelomično kroz poluprozirnu pločicu *3* i odrazivši se od zrcala *7* i *8* također ulaze u teleskop *9*. Pločica uz koju je priljubljena krajnja mjera *M* učvršćena je na stol *10* koji se pomoću mikrometarskog vijka može pomicati u smjeru širenja svjetlosnih zraka.

Ako se razmak između crtica mjeri na štapnoj mjeri sa *crticama*, mjera se stavi na kolica koja se mogu kontinuirano pomicati u smjeru širenja svjetlosnih zraka. Položaj mjere sa crticama utvrđuje se precizno s desne strane pomoću interferencijskog indikatora I_1, a s lijeve strane autokolimacijskim indikatorom A_1.

U sklopu interferencijskog indikatora I_1 pomično zrcalo *11* kruto je vezano sa čelom kolica, čiji se položaj može fiksirati u okularu *12* pomoću srednje (tamne) interferencijske pruge. Prilikom odmicanja kolica od tako fiksiranog početnog položaja, ta srednja pruga se pomiče, a time se utvrđuje pomak kolica na kojima se nalazi štapna mjera sa crticama. U sklopu autokolimacijskog indikatora A_1 drugo čelo pritišće na povratno zrcalo *13*. Postepeno pomicanje kolica fiksira se u okularu *14* na skali koja je nanesena na pločici *15*. Interferencijski indikator obično se upotrebljava za najpreciznija mjerenja, a autokolimacijski za manje precizna. Oba indikatora mogu se upotrebljavati i istovremeno, što je korisno u pogledu njihove međusobne kontrole.

Pri uspoređivanju štapne mjere sa crticama s krajnjom mjerom, kolica se pomiču duž vodilica nosača *16* na kojem su učvršćeni zrcalo *5* i mikroskop *6*. Pomoću vijka *17* i indikatorâ I_1 i A_1 precizno se ispod mikroskopa fiksira položaj nulte crtice mjere sa crticama. Zatim se pomiče stol *10* na kojem se nalazi krajnja mjera *M* (sl. A.50). Uz neznatan kut među zrcalima nastaju interferencijske pruge »jednake debljine« (vidi odlomak 8.2.4).

U prvom položaju, kada je mikroskop *6* namješten na nultu crticu štapne mjere, postoji interferencijska slika nastala od svjetlosnih pramenova reflektiranih od zrcala *5* i od slobodne površine *A* krajnje mjere. Ako se nosač *16*, sa kruto učvršćenim zrcalom *5* i mikroskopom *6*, pomiče uzduž osi štapne mjere sa crticama, zateći će se jednom i u takvom položaju u kojem će interferirati svjetlosne zrake reflektirane od zrcala *5* i od površine *B* pločice o koju prianja krajnja mjera *M*. Duljina pomaka zrcala s mikroskopom bit će jednaka duljini krajnje mjere *M*. Ako se u tom položaju nit okularne rešetke mikroskopa *6* ne podudara s odgovarajućom crticom štapne



Sl. A.50. Optička shema univerzalnog interferencijskog komparatora s fotoelektričkim mikroskopima koji upotrebljava sovjetski metrološki zavod u Lenjingradu. Oznake su objašnjene u tekstu

mjere, onda se vijkom *17* kolica pomiču tako dugo dok se nit rešetke ne poklopi sa crticom štapne mjere. Pomak kolica u odnosu na prvobitan položaj očita se ili na I_i ili na A_i. Na taj način utvrđuje se u duljinama vala interferirajućeg svjetla razlika između krajnje mjere M i odgovarajućeg intervala štapne mjere sa crticama.

Pri utvrđivanju ukupne duljine *mjere sa crticama* u odnosu na krajnju mjeru M, intervali na štapnoj mjeri uzastopno se uspoređuju sa M. Ako je, na primjer, duljina krajnje mjere M 100 mm, a štapne mjere sa crticama 1000 mm (uz diobene intervale po 100 mm), slijed komparacije je ovaj (sl. A.50): mikroskop *6* namjesti se na nultu crticu štapne mjere; zatim se krajnja mjera M premješta sve do pojave interferencijske slike i taj položaj fiksira indikatorom. Poslije toga pomiče se mikroskop sa zrcalom uzduž štapne mjere sve dok se ne pojavi nova interferencijska slika nastala kao posljedica interferencije svjetlosnih zraka reflektiranih od zrcala *5* i površine B. Zatim se na već opisani način izmjeri razlika između 100-milimetarske crtice i duljine krajnje mjere M. Sada se iznova kolica *10* s krajnjom mjerom M pomiču dok se ne pojavi interferencijska slika koju čine zrake reflektirane od zrcala *5* i slobodne površine A krajnje mjere. Potom se iznova mikroskop *6* sa zrcalom *5* pomiče dok se ne pojavi interferencijska slika nastala od istih zraka, ali reflektiranih od zrcala *5* i površine B, itd.

Ako se umjesto obične krajnje mjere upotrijebi *cijevna mjera*, opisani interferencijski komparator omogućuje da se iskoristi interferencija svjetlosnih zraka nastalih mnogostrukom refleksijom od poluprozirnih zrcala cijevne mjere. Stoga pri utvrđivanju ukupne duljine štapne mjere sa crticama otpada potreba za mnogostrukim fiksiranjem zrcala *5* (u svakom kompariranom intervalu), već je dovoljno to učiniti 2 ili 3 puta, na početnoj, krajnjoj i srednjoj crtici. Ako se duljina cijevne mjere izrazi brojem duljina valova monokromatskog svjetla, na sličan se način može odrediti broj valova koji otpada na razmak između crtica štapne mjere sa crticama. Time se duljina vala tog svjetla može izraziti u dijelovima mjere, a da se ne izvode međumjerenja.

Na kolica se, dakako, istodobno mogu staviti dvije štapne mjere sa crticama, kada se žele usporediti njihove duljine (vidi odlomak 8.5.2). Sposobnost razlučivanja mikroskopa povećana je time što je upotrijebljen optički sistem koji daje dvostruku sliku crtice na mjeri. Pomicanjem kolica postiže se interferencijskim indikatorom pouzdanost podudaranja između $\lambda/100$, a vjerojatno i $\lambda/500$ do $\lambda/1000$.

8.5.6. Mjerenje indeksa prelamanja zraka. U odsječku 8.3 naznačili smo važnost poznavanja indeksa prelamanja zraka u odnosu prema vakuumu (definiciju vidi u 8.2.2) za interferencijska mjerenja duljine te naveli staru i novu *Edlénovu* disperzijsku formulu za izračunavanje n u ovisnosti o duljini vala svjetla. Ponovimo da se vrijednosti duljine vala primarnih i sekundarnih standardnih izvora monokromatskih zračenja, namijenjenih vrhunskoj metrologiji, odnose na *vakuum*, tj. $\lambda_0 = v_0/f$. S druge strane se mjerenja i baždarenja metalnih mjera (krajnjih i sa crticama) obavljaju u *zraku* (vidi odsječak 8.3) za koji vrijedi relacija $\lambda = v/f$. Budući da je, u skladu s jednadžbom (8.2-2), indeks prelamanja zraka u odnosu prema vakuumu definiran sa $n = v_0/v = \lambda_0/\lambda$, to između duljine vala u zraku i duljine vala istog svjetla ($f = \text{const}$) u vakuumu λ_0 postoji veza $\lambda_0 = n\lambda$. Budući da se, dakle, rezultat mjerenja duljine L izražava u odnosu prema λ_0, a stvarno se mjerenje obavlja sa λ, to u načelu očigledno (vidi odlomak 8.5.1 i dalje) vrijedi

$$L = N\frac{\lambda}{2} = \frac{N}{n}\frac{\lambda_0}{2}.$$

Prema tome, u vrhunskoj metrologiji indeks prelamanja zraka n treba poznavati s maksimalnom mogućom pouzdanošću. Zbog toga se npr. svako mjerenje duljine interferencijskim komparatorom u BIPM izvodi tako da se gotovo istodobno s mjerenjem duljine mjeri i indeks prelamanja zraka u unutrašnjosti interferometra (sl. A.44) pri stvarnoj temperaturi, tlaku i sastavu zraka.

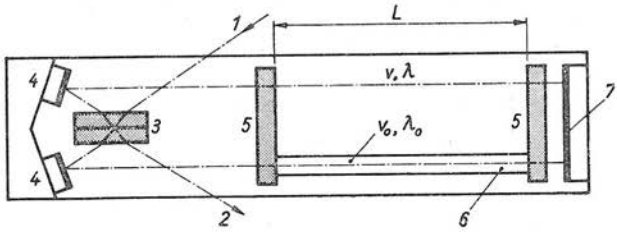
Mjerenje se može obaviti pomoću *Michelson*ova interferometra (sl. A.41) tako da se jedna svjetlosna zraka vodi kroz vakuum, a druga kroz zrak. To se čini u posebnom uređaju, interferencijskom *refraktometru*, koji je na shemi slike A.42 označen sa R, a smješten je zajedno s glavnim interferometrom u isti kotao (sl. A.52) u kojem se održava stalna temperatura ($\pm 0{,}001\,^{\circ}\mathrm{C}$). Podrobnije se put obiju svjetlosnih zraka vidi na slici A.51. Da bi se izbjegle sistematske pogreške, i »vakuumska« i »zračna« zraka svjetla vode se kroz kostur refraktometra: jedna kroz evakuiranu cijev *6*, a druga paralelno s njom, ali kroz cijev u kojoj je zrak isti kao i u ostalim dijelovima interferometra. Izgled dijela refraktometra, ugrađenog u interferencijski komparator BIPM, imali smo već priliku vidjeti na slici A.36 (odsječak 8.3). Tamo se vidi da desna donja cijev, izrađena od pyrex-stakla kao i ostale dvije, ima stakleni priključak pomoću kojeg se iz nje može isisati zrak. Otvori svih cijevi zatvoreni su pločicama od silikatnog stakla. Sve tri cijevi zajedno sa staklenim prirubnicama čine čvrstu mehaničku konstrukciju, kako ne bi nastale deformacije izmjera kad se u jednoj od cijevi stvori vakuum. Čitav taj sistem cijevi povremeno se u toku serije mjerenja zakrene daljinski upravljanim elektromotorom.

Dok se u »vakuumskoj« cijevi *6* (sl. A.51) nalazi zrak, obje su zrake u jednakoj situaciji; za njihov prolaz kroz refraktometar potrebno je vrijeme $t = 2\,L/v$, gdje je v brzina svjetla u zraku. No kad se iz »vakuumske« cijevi *6* zrak stane isisavati, brzina svjetla u njoj počinje se povećavati, a time i duljina vala. U skladu s time pomiču se i interferencijske pruge u teleskopu. Do uspostavljanja potpunog vakuuma prošlo je mimo vizirne niti N pruga, a na kraju evakuiranja brzina i duljina vala iznose v_0 i λ_0. Budući da je $v_0 > v$, svjetlosna zraka kroz »vakuumsku« cijev *6* prije prođe dvostruku udaljenost $2\,L$, tj. za nju je $t_0 = 2\,L/v_0$. Zraka koja i dalje prolazi kroz zrak kasni za vrijeme $\Delta t = t - t_0 = 2\,L\,(1/v - 1/v_0) = (n-1)\,2\,L/v_0$ prema zraci koja prolazi kroz evakuiranu cijev *6*.

U skladu s izlaganjima u odlomku 8.2.3 proizlazi da pomaku N interferencijskih pruga odgovara vrijeme $\Delta t = NT = N\lambda_0/v_0$, gdje je T period svjetla frekvencije $f = 1/T = v_0/\lambda_0 = v/\lambda$. Izjednačenjem ovih dviju jednadžbi za Δt dobivamo $(n-1)\,2\,L/v_0 = N\lambda_0/v_0$, odakle proizlazi jednadžba za izračunavanje indeksa prelamanja zraka u odnosu prema vakuumu

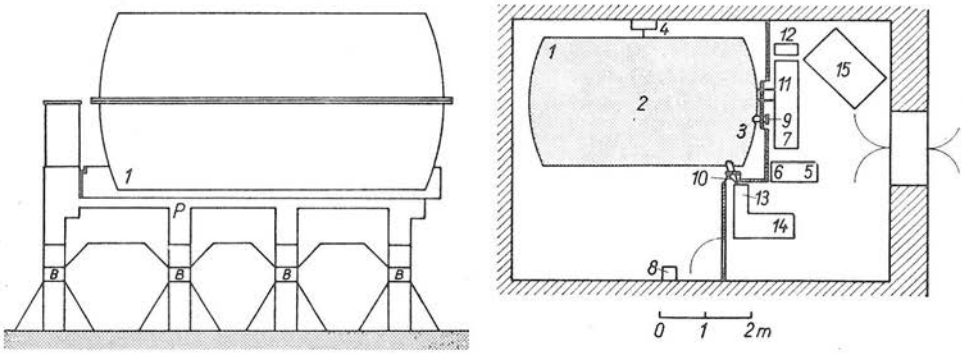
$$n = 1 + \frac{N\lambda_0}{2L},$$

uz poznatu duljinu vala λ_0, izmjerenu duljinu L refraktometra (sl. A.51) i očitani broj N pomaknutih interferencijskih pruga.



Sl. A.51. Optička shema interferencijskog refraktometra prema *Köster*su i *Lampe*u. Oznake predočuju: *1* — ulazno monokromatsko svjetlo, *2* — izlazno svjetlo koje interferira, *3* — polupropusna pločica, *4* — pomoćna zrcala, *5* — staklene prirubnice (vidi sliku A.36), *6* — staklena cijev koja se može evakuirati, *7* — stražnje zrcalo (na slici A.42 ima oznaku Z_6)

Vjeruje se da se pomoću *Terrien*ova refraktometra indeks prelamanja zraka može utvrditi s pouzdanošću $\pm 1 \cdot 10^{-8}$. Da bi se to postiglo, treba mjerenje izvoditi nadasve pažljivo, te brižljivo održavati sve parametre koji mogu utjecati na rezultat (to su, među ostalim, tlak, temperatura, vlažnost, sadržaj CO_2, C_6H_6, CCl_4 itd., vidi odsječak 8.3). Pa i sama ideja zakretanja refraktometra potječe otuda da se u vrijednosti N iz gornje jednadžbe uzme u obzir korekcijski faktor koji postoji zbog nesavršene paralelnosti staklenih pločica u prirubnicama (sl. A.51 i A.36), njihove nejednake debljine itd. Općenito se može reći da mjerenje indeksa prelamanja zraka predstavlja i danas još znatan problem interferencijskog mjerenja duljine na čijem rješavanju rade i teoretičari i niz eksperimentatorskih ekipa.



Sl. A.52. Kotao interferencijskog komparatora i njegov smještaj u laboratorijskoj prostoriji za interferencijska mjerenja Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM)

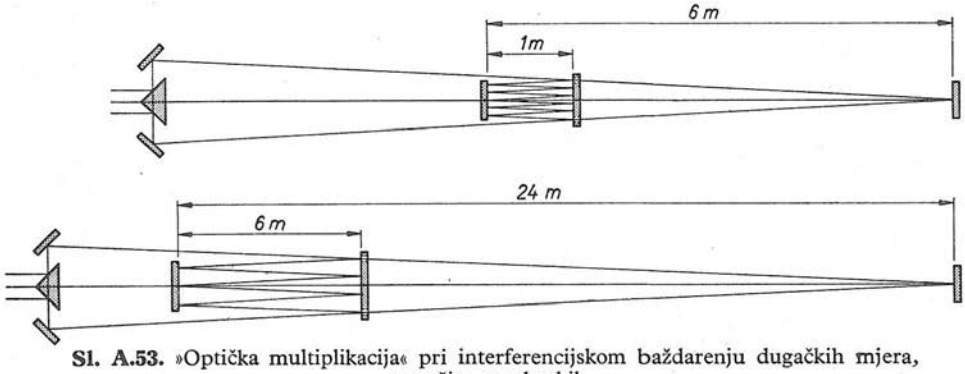
Lijevo: Antiseizmički, nepropusno i toplinski izolirano izveden kotao *1* u kojem se nalaze komparator *2* i refraktometar *3*. Pod *P* laboratorija poduprt je sa 12 betonskih stupova *B* (prikazana četiri stupa pokrivaju na slici ostalih 8) koji su izrađeni tako da prigušuju vibracije i predstavljaju toplinsku izolaciju. *Desno:* Opći raspored prostorije za interferencijska mjerenja. Oznake predstavljaju: *4* — pretpojačalo, *5* — registrator, *6* — galvanometar, *7* i *8* — primarni i sekundarni galvanometar termoparova, *9* i *10* — brtvljeni otvori, *11* — nosač motora, *12* — vakuumska pumpa refraktometra, *13* — kolimator, *14* — izvor svjetla, *15* — upravljački i mjerni stol

Spomenuli smo da se u kotlu (sl. A.52) temperatura održava unutar odstupanja $\pm 0{,}001\,°C$. Ilustrirajmo taj podatak letimičnim opisom pokusa koje su obavili u BIPM prilikom prvih mjerenja pomoću novog interferencijskog komparatora godine 1964. Željelo se ustanoviti da li valjano funkcionira uređaj za mjerenje temperature štapne mjere u komparatoru. U tu svrhu štapnu su mjeru nadomjestili bakrenom cijevi u čiju su stijenku ugradili otpornički termometar (vidi odsječak D.3.6) za mjerenje i dojavu njene temperature ϑ_0. U šupljinu cijevi ugradili su električku grijalicu koja se, dakako, može daljinski uključivati i isključivati. U šupljini se nalazio i poseban termometar koji je mjerio temperaturu ϑ zraka u šupljini, a tri diferencijska termočlanka *direktno* su mjerila razliku temperature $\Delta\vartheta$ između stijenke i šupljine bakrene cijevi. Mjerenja su dala ove rezultate:

$(\vartheta - \vartheta_0)/°C$	0,0133	0,0253	0,0344	0,0456	0,0573
$\Delta\vartheta/°C$	0,0132	0,0245	0,0329	0,0430	0,0537

Prvo mjerenje obavljeno je bez uključivanja grijalice (razlika 0,0001 °C). Tako se, bez grijalice, u pravilu radi i pri baždarenju štapnih mjera.

8.5.7. Interferencijsko baždarenje duljih mjera. Sva dosadašnja razmatranja u ovom odsječku 8.5 bila su posvećena interferencijskom mjerenju duljine štapnih mjera i prizmi koje su dugačke do oko 1 metar. Što veća pouzdanost poznavanja duljine potrebna je međutim i kod duljih mjera, npr. kod geodetskih traka i žica, jer one služe kao osnova za niz daljnjih mjerenja. Geodetskim mjerama utvrđuje se duljina uglavnom na dva načina. Jedan je taj da se oznake na njima sukcesivno uspoređuju sa štapnim mjerama dugačkima 4 metra. Pri tom se upotrebljava specijalni mikroskopski komparator pomoću kojega se mjera duljine 4 m može direktno uspoređivati s pramjerom dugačkom 1 metar. Sva ta mjerenja obavljaju se u klimatiziranom (temperatura, tlak, vlažnost, vibracije itd.!) tunelu dugačkom do 50 metara. Relativna nepouzdanost tako baždarenih mjera je u najboljem slučaju oko $\pm 1 \cdot 10^{-6}$ (usporedi sa slikom A.30).



Sl. A.53. »Optička multiplikacija« pri interferencijskom baždarenju dugačkih mjera, naročito geodetskih

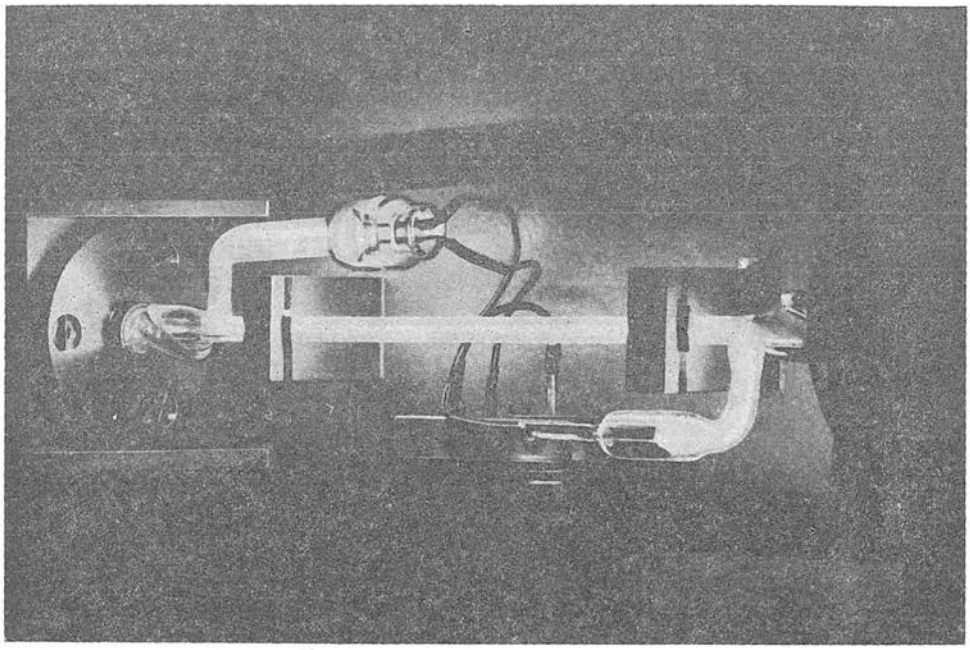
Drugi način preciznog utvrđivanja duljine geodetskih mjera, npr. mjernih traka dugačkih 24 metra, jest direktno interferencijsko mjerenje duljine trake pomoću štapne mjere dugačke 1 metar (npr. nacionalni prametar). Pri tom se mjeri na principu tzv. optičke multiplikacije (sl. A.53), koja se temelji na osnovama interferencijske metrologije duljine (odsječak 8.2 i početak 8.5). Interferencijske pruge posljedica su zrake koja se reflektira od zrcala na kraju udaljenosti 6 m i zrake koja se šest puta reflektira na udaljenosti 1 metar (gornja slika A.53). Zatim se na analogan način udaljenost 24 metra uspoređuje sa 6 metara. U toku su pokusi da se precizna interferencijska metrologija duljine primijeni do 200 metara (laseri, vidi odsječak 8.6), ali su pri tom teškoće zbog vibracija zemljišta izvanredno velike.

8.6. Automatska laserska interferometrija

8.6.1. Usavršena laserska zračila. U predavanju održanom prilikom primanja *Nobel*ove nagrade za godinu 1964. američki fizičar *C. H. Townes* je između ostalog rekao: »Pogledamo li malo u budućnost, čini se očitim da će tehnika kvantne elektronike radije mjeriti frekvencijom svjetla negoli njegovom duljinom vala. Tako ćemo i brzinu svjetla moći poznavati isto tako tačno kao i vrijeme i duljinu . . . Moć spektroskopije znatno će se povećati primjenom masera. Ti vrlo monokromatski izvori zračenja mogu znatno poboljšati spektroskopsko razlučivanje, što će poboljšati naše poznavanje sastava atoma, molekula i krutih tvari . . . «

Dio te *Townes*ove »budućnosti« već je sada, godine 1966, *sadašnjost*! Zračenje kontinuiranog plinskog lasera (kratica od: *L*ight *A*mplification by *S*timulated

*E*mission of *R*adiation) već se primjenjuje u interferencijskoj metrologiji duljine, što ćemo letimično opisati u naredna tri odlomka. Spektralna linija laserskog zračenja neusporedivo je oštrija od svakog drugog do sada upotrebljavanog svjetla: dok oštrina $\lambda/\Delta\lambda$ (vidi odlomak 8.7.3) spektralne linije kriptona 86 iznosi oko $1{,}2 \cdot 10^6$, lasersko svjetlo ima gotovo 10 milijuna puta veću, oko 10^{13}! Monokromatičnost lasera premašuje samo bezodbojna emisija prema *Mössbauer*ovu efektu (koji je također već naišao na niz primjena: u mjerenju životne dobi uzbuđenih stanja atomske jezgre, magnetske hiperfine strukture, *Doppler*ova efekta drugog reda, spina jezgre, *Zeeman*ova efekta, kvadrupolnih momenata jezgre, izomernih pomaka, precipitacije i sl., te u nizu razvojnih istraživanja željeznih legura itd.). Snaga jedinice površine laserskog zračenja neusporedivo je veća od snage svih dosadašnjih monokromatskih izvora, što je naišlo na primjenu i u interferometriji: japanski eksperimentatori tvrde da se laseri mogu upotrebljavati za mjerenje duljina do oko 200 metara (sa svjetlom Hg 198 nekoliko decimetara)! Mnoštvo mogućih primjena na Zemlji i u kozmosu toliko je ubrzalo razvoj lasera da se on danas već može nabaviti kao i svaki drugi proizvod (sl. A.54).



Sl. A.54. Mali prenosivi plinski (helij-neon) laser projektiran i izrađen u laboratorijima australskog metrološkog zavoda National Standards Laboratory. Namijenjen je za interferencijsko mjerenje velikih duljina, a emitira svjetlo duljine vala oko 632,8 nanometara. (Foto: NSL, Sydney)

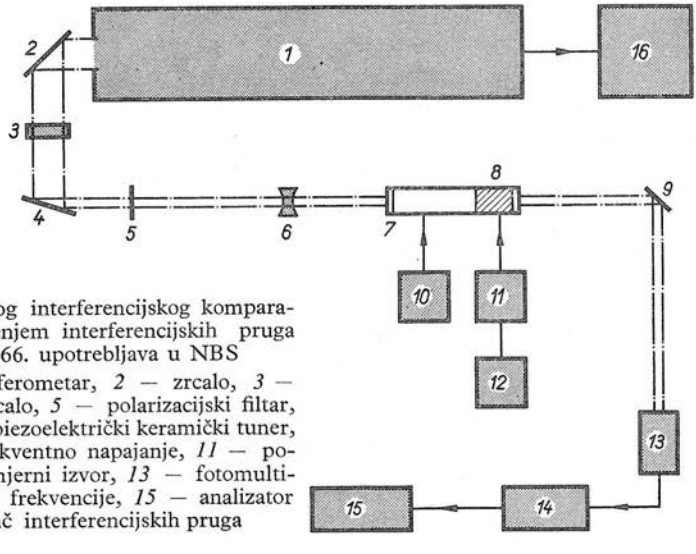
Usavršeni *kontinuirani* plinski laseri pojavili su se godine 1961, i to helij-neonski. U njima umjesto rubinskog štapića, kakve su imali prvi laseri, zračenje emitira razrijeđena smjesa helija i neona (parcijalni tlak helija iznosi oko 1 mm Hg, a neona oko 0,1 mm Hg) koja se nalazi u dugoj i širokoj cijevi za električki izboj (sl. A.54). Cijev je na obje strane zatvorena zrcalima koja donekle propuštaju zra-

čenja. Električki izboj u cijevi podržava se djelovanjem visokofrekventnog električkog polja koje stvara jak oscilator frekvencije oko 30 kHz. Energijom izboja unutar helij-neonske cijevi helijevi se atomi uzbuđuju na povišene energije, a neonski atomi — dobivši energiju od preuzbuđenih helijevih atoma — stimulirani su da sami odašilju kontinuirano zračenje. To zračenje uzastopno pada na krajnja zrcala, pri tom se pojačava i konačno probija aksijalno iz oba kraja cijevi u obliku uskih snažnih pramenova.

Danas laseri još nisu savršeni za vrhunsku metrologiju. Nedostatak im je *nedovoljna postojanost* duljine vala emitiranog zračenja. Čini se da se posebnim uređajima taj nedostatak dade ukloniti (vidi odlomak 8.6.2). Vrlo intenzivni radovi na usavršenju lasera u toku su širom svijeta, jer od njega se očekuju bezbrojne primjene u mnogim granama tehnike i znanosti, dakle i u metrologiji.

8.6.2. Automatski laserski interferencijski komparator. Sredinom godine 1966. američki National Bureau of Standards (NBS) objavio je opsežan službeni izvještaj o tome da u NBS sada već i za rutinska baždarenja štapnih mjera sa crticama upotrebljavaju novu vrstu interferencijskog komparatora koji rese dvije odlike: broj interferencijskih pruga broji se *automatski* i registrira na elektronskom brojaču, a kao izvor svjetla služi *laser* He-Ne. Završna ispitivanja novog uređaja pokazala su u pogledu preciznosti mjerenja duljine da je razlika između poznate duljine metričkog štapa i duljine izmjerene ovim uređajem iznosila 70 nanometara, tj. relativna pogreška iznosila je $7 \cdot 10^{-8}$. Duljina štapa bila je, dakako, poznata na temelju klasičnih interferencijskih mjerenja. Analogne usporedbe decimetarskih intervala pokazale su maksimalnu razliku 0,4 μm. Budući da obje novosti, laserski izvor (njega doduše, kao izvor svjetla koji se istražuje, ima i BIPM; vidi odlomak 8.5.2 i shemu na slici A.42) i automatsko brojenje interferencijskih pruga, otvaraju niz novih mogućnosti interferencijskoj metrologiji duljine, ovdje ćemo letimično prikazati način djelovanja (sl. A.55) ovog uređaja i neke njegove značajke.

Izbojna žarulja napunjena je mješavinom helija i neona u omjeru 7:1, a pri optimalnom ukupnom tlaku 310 N/m² (2,3 mm Hg) laser emitira iz centra ili



Sl. A.55. Shema laserskog interferencijskog komparatora s automatskim brojenjem interferencijskih pruga koji se od godine 1966. upotrebljava u NBS

1 — Michelsonov interferometar, *2* — zrcalo, *3* — kolimacijske leće, *4* — zrcalo, *5* — polarizacijski filtar, *6* — leće, *7* — laser, *8* — piezoelektrički keramički tuner, *9* — zrcalo, *10* — radiofrekventno napajanje, *11* — potenciometar, *12* — istosmjerni izvor, *13* — fotomultiplikator, *14* — pretvarač frekvencije, *15* — analizator spektra, *16* — brojač interferencijskih pruga

blizine centra crvene neonske spektralne linije svjetla duljine vala $\lambda_0 = 632{,}991\,46$ nanometara (u vakuumu). Iako se duljina vala laserskog svjetla polagano mijenja, to nema utjecaja na brojenje interferencijskih pruga, jer se λ automatski namjesti na ispravnu vrijednost prije nego je pruga zabilježena.

Zraka koja izlazi iz lijevog dijela lasera (sl. A.55) lećama se divergira, smanji na upotrebljivu jakost pomoću rotirajućeg polarizacijskog filtra i rekolimatira tako da koherentan pramen svjetla prikladne jakosti i presjeka ulazi u *Michelsonov* interferometar. Pomično zrcalo interferometra (to se ne vidi na shemi slike A.55, jer se nalazi unutar bloka *1*), analogno zrcalu Z_2 na slici A.42, učvršćeno je na kolica na kojima se nalazi štapna mjera sa crticama koju želimo izmjeriti u odnosu prema duljini vala laserskog zračenja. Povrh crtica štapne mjere nalazi se fotoelektrički mikroskop. Pošto operator, koji poslužuje čitav mjerni uređaj, tipkom dade signal, kolica se pomaknu tako da prva crtica štapne mjere dođe u optičku os mikroskopa. Od ovog položaja kolica se pomiču uzduž štapne mjere s time da se svaka crtica centrira ispod mikroskopa.

Gibanje štapne mjere od crtice do crtice automatski se mjeri brojenjem interferencijskih pruga što prolaze ispred izlaza iz interferometra. Uz svaku crticu pruge se interpoliraju s pogreškom 1/100 razmaka između dvije pruge. Elektronski sklopovi projektirani su tako da omogućuju povratno brojenje, a automatski upravljački mehanizam održava mehaničke, optičke i elektronske odnose u traženim stanjima tokom cijele radne operacije interferometra. Razmak između bilo koje dvije crtice na štapnoj mjeri utvrđuje se zatim računanjem, uzimajući u obzir razlike nabrojenih pruga, poznatu duljinu vala izvora te standardne korekcije u pogledu temperature, atmosferskog tlaka, vlažnosti itd.

U NBS su u toku opsežni istraživački radovi u svrhu razvoja još savršenijeg automatskog laserskog interferencijskog komparatora.

8.6.3. Mjerenje duljine vala zračenja lasera. Mjerenja opisana u prošlom odlomku, koja se, dakako, temelje na principu interferencijskog mjerenja duljine $L = N\lambda/2$, mogu biti od koristi samo ako se pouzdano zna vrijednost duljine vala λ(La) zračenja lasera. Štoviše, ta vrijednost mora se poznavati s vrhunskom metrološkom pouzdanošću, ako želimo da lasersko svjetlo upotrijebimo za najpreciznija interferencijska mjerenja duljine.

Vrijednost λ(La) utvrdili su u NBS tako da su štapnu mjeru sa crticama, udaljenima za nazivnu duljinu 91 mm, mjerili jednom laserskim svjetlom, a drugi put standardnim plavim svjetlom žive Hg 198, čija duljina vala pri standardnim metrološkim uvjetima (20 °C, 101 325 N/m², tlak vodene pare 1 333,22 N/m² i sadržaj CO_2 0,03 %), prema podacima Savjetodavnog odbora za definiciju metra (vidi odsječke 7.1,4), iznosi λ(Hg 198) = 435,836 075 nm uz relativnu nepouzdanost $\pm 5 \cdot 10^{-8}$. Na brojaču interferometra iz slike A.55 očitan je broj interferencijskih pruga N(La) = 287 596,876 ± 0,011 kad su mjerili laserskim zrakama, a N(Hg) = = 417 581,325 ± 0,037 pruga kad su mjerili zračenjem žive Hg 198. Budući da je $N(\mathrm{La}) \cdot \lambda(\mathrm{La}) = N(\mathrm{Hg}) \cdot \lambda(\mathrm{Hg})$, računanjem je dobiveno

$$\lambda(\mathrm{La}) = \lambda(\mathrm{Hg}) \cdot N(\mathrm{Hg})/N(\mathrm{La}) = 632{,}819\,83 \text{ nm}$$

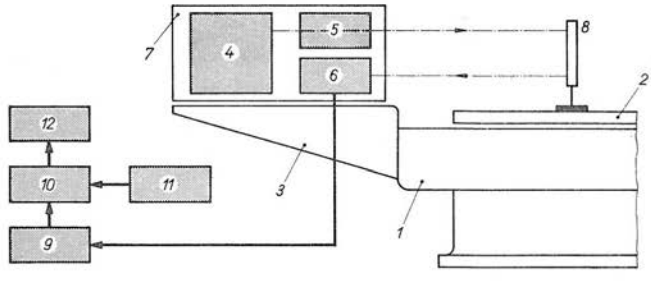
za standardne metrološke uvjete, te λ_0(La) = 632,991 56 nm za vrijednost reduciranu na vakuum. Isti laser bio je kasnije uspoređen i s pramjerilom duljine, standardnim zračenjem kriptona 86. Dobiven je rezultat λ_0(La) = (632,991 45 ± ± 0,000 02) nm.

Interesantno je spomenuti kako su obavljena mjerenja. To su u stvari bila ponovljena mjerenja: 11 puta je upotrijebljeno živino svjetlo, a 10 puta lasersko. Interferencijske pruge bile su brojene dvostruko; kolica sa štapnom mjerom (vidi odlomak 8.6.2) pomicala su se najprije u jednom smjeru, a zatim u suprotnom. Prosjek dobivenih dvaju rezultata uzeo se kao jedan mjerni podatak. Atmosferski tlak bio je mjeren nekoliko puta u toku svakog od 21 mjerenja pomoću preciznog živinog barometra, a u redukcijske formule uzimale su se prosječne vrijednosti izmjerenih podataka.

Opisano provjeravanje laserske interferometrije pokazalo je sve prednosti izvanredne monokromatičnosti laserskih zraka. Kontrast njegovih interferencijskih pruga konstantan je duž čitava metarskog štapa, jer je omjer signal/šum znatno bolji negoli kod drugih monokromatskih zračenja. Tako je npr. razina šumova zračenja Hg 198 znatno viša ako se primjenjuje za mjerenje duljina iznad 1 decimetra. To se može razabrati i iz citiranih mjernih podataka: broj interferencijskih pruga pri mjerenju laserom utvrđen je, kako smo naveli, s pouzdanošću $\pm 0{,}011$ pruge, a broj pruga pri mjerenju živinim zrakama s pouzdanošću $\pm 0{,}037$, dakle tri puta lošije.

8.6.4. Primjena laserske interferometrije u strojnoj obradi. Klasični interferometri preglomazni su i preosjetljivi za primjenu u finoj mehaničkoj industriji, iako su pri nekim strojnim obradama potrebne preciznosti bliske preciznostima laboratorijskih interferencijskih komparatora. Otkriće lasera omogućilo je da se štapne mjere, krajnje mjere, i čitavi mjerni blokovi (vidi odlomak 8.1.3) zamijene laserskim interferometrima za direktno (apsolutno) mjerenje izmjera najpreciznijih strojnih dijelova, i to izravno prilikom njihove obrade. Takav uređaj, razvijen u američkom National Bureau of Standards, načelno prikazuje crtež na slici A.56. Skraćeno ga nazivaju AILC (*A*bsolute *I*nterferometric *L*aser *C*alibrator), a može mjeriti duljine do 2,5 metra (100 incha) s relativnom nepouzdanošću $2{,}5 \cdot 10^{-6}$. Razmake od 0 do 25 mm (1 inch) može mjeriti oko 3 puta pouzdanije, dakle sa oko $8 \cdot 10^{-7}$. Laser ima ista optička svojstva kao i onaj iz odlomka 8.6.3. Dopuštena maksimalna brzina gibanja reflektora iznosi 25,4 mm/s.

Laserski izvor *4*, optika *5* i fotoelektrički detektor *6* predstavljaju kompaktnu jedinicu (*7* na slici A.56). Ta jedinica *7* učvršćena je na produžetak *3* stroja za mehaničku obradu *1* (npr. bušilica). Reflektor *8* montiran je na pomični dio *2*



Sl. A.56. Mjerenje duljina laserskom interferometrijom prilikom precizne strojne obrade. Oznake predočuju: *1* — stroj za mehaničku obradu, *2* — pomični dio stroja, *3* — produžetak kućišta stroja, *4* — laser, *5* — optički sistem, *6* — fotoelektrički detektor, *7* — predajno-prijemna jedinica, *8* — reflektor, *9* — brzi digitalni brojač, *10* — digitalno računalo, *11* — digitalni barometar, *12* — digitalni pokazni instrument koji svojim znamenkama pokazuje izmjereni pomak pomičnog dijela stroja

stroja *1*. Interferencijske pruge, koje nastaju pomicanjem reflektora *8*, detektiraju se fotoosjetljivim uređajem *6* i broje pruge brojačem *9*. Malo digitalno računalo (računski stroj) *10* preračunava broj pruga u duljinu (broj metara ili incha). Računalo automatski uzima u obzir utjecaj atmosferskog tlaka na temelju podataka iz posebnog detektora atmosferskog tlaka *11*, koji je sastavni dio čitavog mjernog uređaja.

Automatska korekcija pomoću digitalnog barometra i računala primijenjena je zato što se duljina vala svjetla lasera mijenja s promjenom tlaka (vidi odsječak 8.3). Digitalni barometar mjeri tlak, preračunava njegovu vrijednost u odgovarajuće informacije i dostavlja ih u računalo. Kompenzirane su i promjene temperature, a čitav je uređaj baždaren pri temperaturi 20 °C (68 °F), tj. pri standardnoj metrološkoj temperaturi. Uređaj zadržava navedenu mjernu preciznost, ako se u toku mjerenja temperatura ne mijenja više od $\pm 0{,}8$ °C (1 °F). Uređaj se, dakako, može baždariti i pri nekoj drugoj temperaturi. Elementi ovog laserskog interferometra izrađeni su u suvremenoj tehnici, tj. tranzistorizirani su, a gdje je bilo moguće, izrađeni su u modulnoj izvedbi.

8.7. Monokromatsko zračenje kriptona 86 — temelj mjerenja duljine i definicije jedinice duljine metar

Opsežna razmatranja o načinu najpreciznijeg mjerenja duljine, interferencijskog, pokazala su nam nedvojbeno da pouzdanost mjernog rezultata izravno ovisi o tome koliko je duljina vala upotrijebljenog svjetla *postojana* ($L = N\lambda/2$). Postojanost vrijednosti λ bezuvjetno je *neophodna* kod onog izvora monokromatskog svjetla koje je odabrano za temelj definicije i reprodukcije jedinice duljine metar. To je, kako znamo, svjetlo što ga emitiraju atomi *kriptona 86* prilikom pojava koje se u njima zbivaju pri strogo propisanim uvjetima. Na toj stalnosti duljine vala svjetla kriptona 86, kao i na mogućnosti njegove reprodukcije bilo kada i na bilo kojem mjestu, osnivaju se najpreciznija mjerenja duljine i ostalih veličina koje su s duljinom usko vezane, a to su gotovo sve fizikalne veličine. Prema tome svojstva kriptona 86 jedan su od stupova današnje metrologije, pa je stoga neophodno da se ona podrobno razmotre.

8.7.1. Emisijski spektar kriptona 86. Iz kvantne teorije je poznato da atom zrači elektromagnetske valove onda kada neki od elektrona njegove vanjske ljuske prijeđe iz stanja više energije W_2 u stabilno stanje s manjom energijom W_1. U nenormalno, nestabilno stanje s energijom W_2 elektron dospijeva ako izvana dobije stanovitu energiju i time postane energetski »uzbuđen«. No u tom stanju zadržava se neznatno vrijeme, reda nanosekunde; to znači: odmah pošto je od nekog stabilnog stanja uzbuđen u nestabilno, energetski više stanje W_2, on se »spušta« u energetski niže stanje W_1. Pri tom iz takvog atoma zrače elektromagnetski valovi frekvencije

$$f = \frac{W_2 - W_1}{h}, \tag{8.7-1}$$

gdje je h *Planck*ova konstanta.

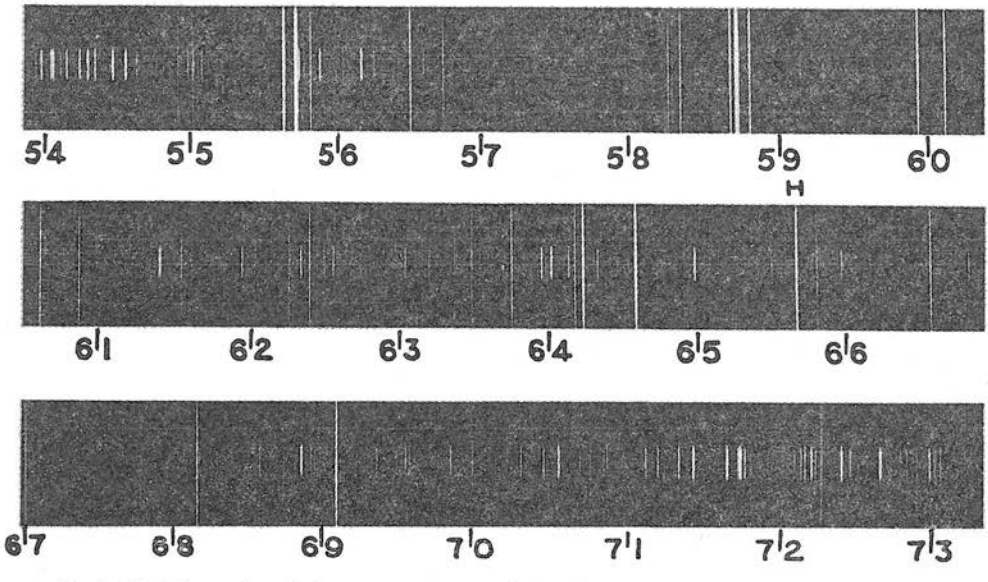
Spektar frekvencija emitiranih valova (u tzv. vidljivom području je to *svjetlo*, a ono će nas ovdje zanimati) vrlo je širok, što ovisi o mogućim kombinacijama vrijednosti energija W_2 i W_1. Frekvenciju zračenja f teško je vrlo precizno mjeriti, ali se zato duljina vala λ zračenog svjetla dade vrlo tačno *neposredno* mjeriti. Takva spektroskopska metoda mjerenja λ upotrebljava jednadžbu (8.7-1) u drukčijem

obliku. Budući da su, naime, veličine frekvencija f, duljina vala λ i brzina širenja v emitiranog svjetla (za $\lambda > 200$ nm obično se mjeri u zraku, a za $\lambda < 200$ nm u vakuumu; nm = nanometar = 10^{-9} m) međusobno povezane relacijom $f\lambda = v$, izraz (8.7-1) može se napisati u obliku

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{W_2}{hv} - \frac{W_1}{hv}, \qquad (8.7\text{-}2)$$

gdje je $\sigma = 1/\lambda$ tzv. *specifični broj valova* (ili valni broj). Članovi $W_2/(hv)$ i $W_1/(hv)$ u gornjoj jednadžbi nazivaju se *spektroskopski termi*. Vidimo da oni nisu ništa drugo negoli energija stanja elektrona podijeljena umnoškom dviju prirodnih konstanti, *Planck*ove konstante h i brzine svjetla v.

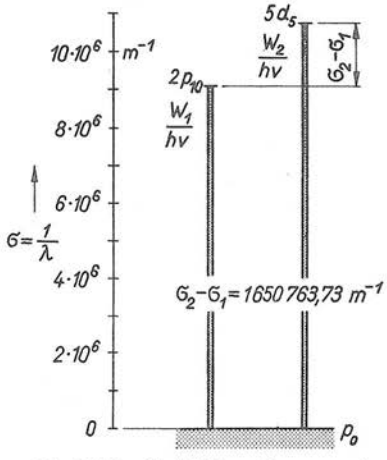
Spektroskopija dobiva rezultate mjerenja u obliku spektralnih linija; svaka od tih linija prikazuje duljinu vala λ jednog od zračenja prema jednadžbi (8.7-2). Tako, na primjer, fotografija na slici A.57 prikazuje spektralne linije kriptona u ovisnosti o duljini vala emitiranog svjetla λ, koja je nanesena na apscisi. Prikazan je u stvari samo jedan *dio* kriptonova spektra (u vidljivom području on sadrži preko 200 linija).



Sl. A.57. Dio spektra kriptona u rasponu od 540 do 730 nanometara prikazan u usporedbi sa spektrom željeza. Mjerenja je izvršio *W. F. Meggers* iz National Bureau of Standards

U skladu s jednadžbom (8.7-2) rezultati spektroskopskih mjerenja mogu se prikazati i pomoću niza spektroskopskih terma $W/(hv)$ poredanih prema vrijednostima veličine σ jedan povrh drugoga u nekoliko stupaca (ili serija; podrobnije o tome vidi u odlomku 8.7.2). Vrijednost veličine $\sigma = 1/\lambda$ računa se od neuzbuđenog (normalnog) stanja atoma; tom stanju pripisana je vrijednost $\sigma = 0$. Nasuprot tome, maksimalna vrijednost σ u svakoj seriji pripada ioniziranom stanju atoma, tj. stanju kada je on izvana primio toliku količinu energije da se oslobodio perifernog elektrona (vidi odsječak D.1.7).

Načelni prikaz spektralnih terma kriptona vidimo na slici A.58; nacrtan je slučaj koji sadrži definicija metra od godine 1960: »prijelaz između razina $2\,p_{10}$ i $5\,d_5$« (vidi odlomak 8.1.2). Prema tome, oznaka $5\,d_5$ predstavlja energetski bogatiji term $W_2/(hv)$, a oznaka $2\,p_{10}$ siromašniji term $W_1/(hv)$. (Napominjemo da neki autori čine upravo obrnuto: tzv. prvoj razini ionizacije pripisuju vrijednost nula.) Narančasto svjetlo, koje kripton 86 emitira prilikom prijelaza elektrona njegovih vanjskih atomskih ljusaka između stanja $2\,p_{10}$ i $5\,d_5$, ima u vakuumu duljinu vala $\lambda = v/f = 1/(\sigma_2 - \sigma_1) = 605{,}78021$ nanometara, tj. oko 0,6 μm.



Sl. A.58. Načelni prikaz »prijelaza između razina $2p_{10}$ i $5d_5$« u dijagramu spektralnih terma kriptona. Oznaka p_0 predstavlja normalno, neuzbuđeno stanje

Označivanje spektralnih terma u spektroskopiji nije, međutim, tako jednostavno kako smo to skicirali na slici A.58. Historijski razlozi (neprekidno poboljšavanje ljudskog znanja o vezi između spektroskopskih zapažanja i teorije koja objašnjava postanak spektralnih linija) i stotine tisuća skupljenih pouzdanih mjernih rezultata spektroskopije uzrokovali su da se s razvojem znanosti označivanje (notacija) terma mijenjalo i usavršavalo. Stoga je svakako korisno da u narednom odlomku 8.7.2 to označivanje podrobnije obradimo, specijalno u odnosu prema stabilnom izotopu plemenitog plina kriptona 86, čiji se svaki atom sastoji od 36 protona, 36 elektrona i 50 neutrona, a sastav mu je $(1\,s^2)\,(2\,s^2p^6)\,(3\,s^2p^6d^{10})\,(4\,s^2p^6)$ (vidi odsječak D.1.7), tj. u vanjskoj ljusci ima 8 elektrona.

8.7.2. Označivanje terma i prijelaz $2\,p_{10}$—$5\,d_5$. Atom je kvantni sistem koji se sastoji od više tijela (elektroni i jezgra) između kojih djeluju coulombovske sile. Teška atomska jezgra gotovo je nepokretna u usporedbi s elektronima. Stoga se može očekivati da će pod utjecajem jezgre raspored elektronskog naboja u atomu biti takav da je ukupno polje, koje djeluje na pojedine elektrone, centralno simetrično. Time se problem mnogotijela svodi na problem jednog tijela u centralnom dijelu tzv. konzistentnog polja. Takav sistem ima dobro poznate diskretne vrijednosti energije, koje ovise o momentu impulsa čestice. Za označivanje takvih stanja upotrebljavaju se vrijednosti momenta impulsa, odnosno češće kvantni brojevi. Vrijednost energije za pojedini moment ovisi o radijalnom obliku potencijala koji u ovom modelu atoma ovisi o rasporedu orbita pojedinih elektrona. Energija atoma ovisit će, dakle, o momentu impulsa cijelog atoma, koji bi — bez djelovanja spina — bio konstanta gibanja bez obzira na oblik interakcije dijelova atoma. Budući da stvarni potencijal, koji djeluje na pojedini elektron, nije centralno simetričan (takav je samo srednji konzistentni dio), momenti impulsa pojedinih elektrona nisu, strogo uzevši, konstante gibanja.

U atomu ni ukupni orbitalni moment nije uvijek konstanta gibanja, jer postoji spinski moment. Taj moment, zajedno sa spomenutim orbitalnim momentom, čini ukupan moment impulsa. U relativističkom području postoji djelovanje koje ovisi o međusobnoj orijentaciji orbitalnog i spinskog momenta (spin-orbitalno međudjelovanje). Posljedica je toga da će i energija atoma ovisiti o međusobnom

odnosu ovih dvaju momenata i da posebno orbitalni i posebno spinski moment atoma, strogo uzevši, više nisu konstante gibanja. Samo je ukupni moment impulsa atoma konstanta gibanja. O tome da li su orbitalni i spinski moment elektrona i atoma ili ukupni moment pojedinih elektrona bliže konstantama gibanja, ovisi koji će način vezanja momenata impulsa dati *bolji model atoma.*

Za polazni sistem centralno-simetričnog polja i elektrona, energija svakog elektrona određena je sa dva kvantna broja, orbitalnim kvantnim brojem l i glavnim kvantnim brojem n kojim se numeriraju energetski nivoi za isti l, polazeći od $n = l + 1$ (slično kao za energetske nivoe vodikova atoma, samo što centralno polje nije više coulombovsko, tako da energija ovisi i o kvantnom broju l). Orbitalni kvantni broj l označuje se malim latinskim slovima: za $l = 0$ sa s, za $l = 1$ sa p, za $l = 2$ sa d, za $l = 3$ sa f i dalje po abecedi. U ovoj aproksimaciji energija atoma uglavnom je određena popisom kvantnih brojeva n i l svih elektrona, koji se zove konfiguracija atoma, i ukupnim spinom atoma. Znatna ovisnost energije stanja (terma) o spinu nije neposredna, već je posljedica *Pauli*jeva principa zabrane. O spinu ovisi simetrija prostorne valne funkcije, a tako i konzistentno polje.

U konfiguraciji se glavni kvantni broj n stavlja ispred odgovarajućeg znaka za orbitalni moment impulsa, a s gornje desne strane dolazi broj elektrona s danim l i n. Tako je konfiguracija atoma *kriptona* sa 36 elektrona $(1\,s^2)\ (2\,s^2)\ (2\,p^6)\ (3\,s^2)\ (3\,p^6)\ (3\,d^{10})\ (4\,s^2)\ (4\,p^6)$. Stanja elektrona karakteriziraju se još i kvantnim brojevima projekcije pojedinih momenata, ali o njima ne ovisi energija, pa ne ulaze u konfiguraciju.

Ukupni orbitalni i spinski moment impulsa svih elektrona u popunjenim ljuskama atoma jednak je nuli, tako da moment atoma potječe samo od elektrona iz nepopunjenih ljusaka. Kvantni broj ukupnog orbitalnog momenta atoma L može imati vrijednosti 0, 1, 2, 3, 4 ... Za označivanje se upotrebljavaju velika slova abecede S, P, D, F, ... Kvantni broj spina svih elektrona S može imati vrijednosti 0, 1/2, 1, 3/2, ... Broj $2S + 1$ zove se multipletnost stanja ili multipletnost terma i piše se u lijevom vrhu oznake za orbitalni moment. Kvantni broj ukupnog momenta J, koji se slaže od orbitalnog i spinskog, može imati vrijednosti 0, 1/2, 3/2, ..., a piše se desno dolje od slova za oznaku orbitalnog momenta. Tako su, na primjer, $^2P_{1/2}$ i $^2P_{3/2}$ oznake za dva terma ioniziranog kriptona s ukupnim orbitalnim momentom 1, ukupnim spinom 1/2 i ukupnim momentom 1/2 odnosno 3/2 (vidi sl. A.59).

Uzimanjem u obzir necentralnog dijela konzistentnog polja i spin-orbitalnog međudjelovanja, energija terma će ovisiti o kvantnim brojevima stanja cijelog atoma. Pri tom, što je upravo bitno za razumijevanje energetskih nivoa kriptona, postoje dva granična slučaja. U prvom, *Russell-Saunders*ovu slučaju, koji približno vrijedi za većinu atoma (uglavnom lakih i u normalnom stanju), necentralni dio konzistentnog polja znatno je jači od spin-orbitalnog djelovanja, tako da se u prvoj aproksimaciji relativistički efekti mogu zanemariti. U takvom sistemu se održavaju ne samo ukupni moment sistema (fizikalni zakon za zatvoreni sistem koji je posljedica izotropije prostora) već i ukupni orbitalni moment impulsa elektrona i ukupni spin atoma (jer prema pretpostavci među njima nema djelovanja). U ovoj aproksimaciji energija terma ovisi o kvantnim brojevima L i S apsolutne vrijednosti orbitalnog i spinskog momenta atoma, ali ne ovisi o njihovim projekcijama koje se i uz dosadašnju aproksimaciju održavaju.

U *Russell-Saunders*ovu slučaju se, dakle, slažu posebno orbitalni momenti elektrona u ukupni orbitalni moment i posebno spinovi u ukupan spin (LS tip

veze). Zbog relativističkog efekta spin-orbitalnog međudjelovanja orbitalni moment i spin neće više biti konstante gibanja (to je sada samo ukupni moment). Prema tome, energetski nivoi mogli bi se karakterizirati samo kvantnim brojem J. Ako su, međutim, relativistički efekti relativno mali (slučaj koji upravo razmatramo), oni se mogu razmatrati kao mali poremećaj zbog kojeg se energetski nivoi sa zadanim L i S cijepaju na bliske nivoe. Ti nivoi se međusobno razlikuju ukupnim momentom J ovisnom o međusobnom položaju orbitalnog i spinskog momenta. Cijepanje je u prvoj aproksimaciji određeno stanjima sa stanovitom vrijednošću L i S, dok su vrijednosti projekcija orbitalnog i spinskog momenta u tim stanjima neodređene. Stoga se u ovom slučaju može uzeti da su apsolutne vrijednosti orbitalnog momenta približno konstante gibanja, pa time L i S i dalje karakteriziraju nivoe. U takvoj situaciji kažemo da su L i S dobri kvantni brojevi. Cijepanje uz stanovite L i S za razne J ($2S+1$ ili $2L+1$ nivo) naziva se multipletno cijepanje ili fina struktura terma.

I u slučajevima kad je odnos dvaju poremećaja takav da nije ispravno služiti se *Russell-Saunders*ovim tipom vezanja, njime se često može koristiti za karakterizaciju energetskih nivoa. Za uzbuđeni atom kriptona opažana multipletnost termova *ne slaže* se s ovim modelom atoma. Stoga treba razmotriti i drugi granični slučaj, jer je atom kriptona u stanovitom smislu njihova kombinacija.

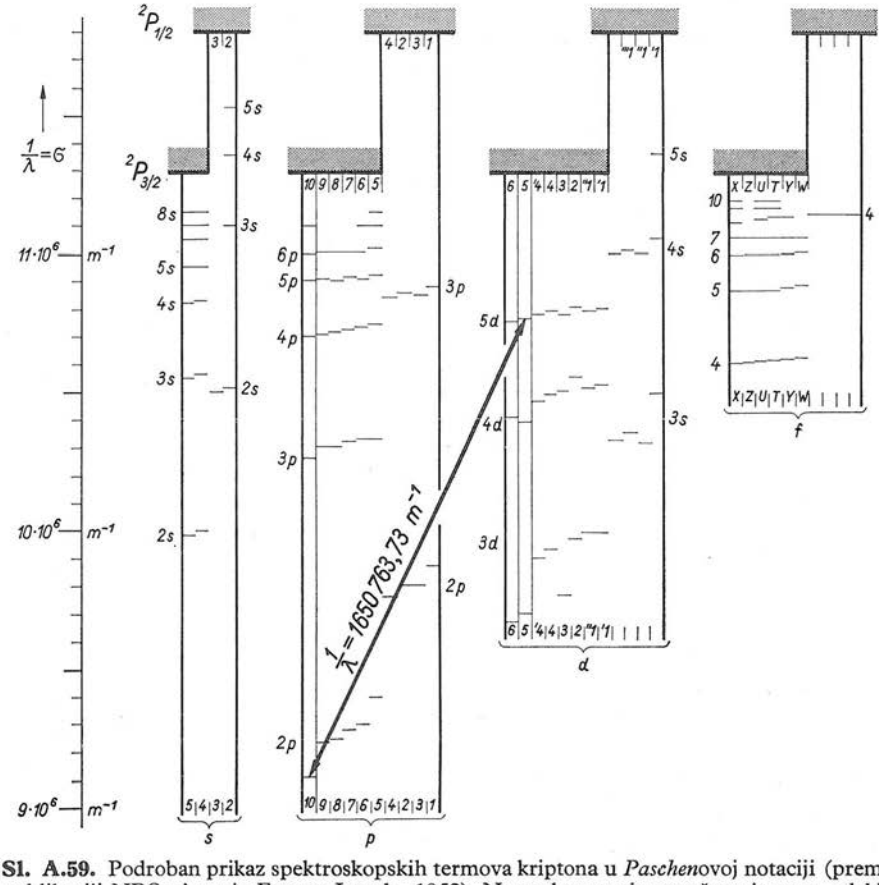
Drugi granični slučaj nastaje kad je rezidualni necentralni dio polja znatno slabiji od relativističkog efekta spin-orbitalnog međudjelovanja. Zanemarivši necentralni dio polja, elektroni se sada karakteriziraju glavnim kvantnim brojem n, ukupnim momentom j i njegovom projekcijom m (jer je ukupni moment konstantan po vrijednosti i projekciji u centralno-simetričnom polju), te kvantnim brojem apsolutne vrijednosti orbitalnog momenta l. Spinski i orbitalni moment elektrona i atoma nisu ni približno konstante gibanja, pa se ukupni moment atoma dobiva slaganjem ukupnih momenata pojedinih elektrona (jj tip veze), što je daleko kompliciranije. Stanja iste konfiguracije, a raznih kvantnih brojeva J i projekcija ukupnog momenta M, imaju istu energiju. Uzimajući sada necentralni dio konzistentnog polja kao smetnju, dolazi do cijepanja i tih nivoa.

Ovaj slučaj ne ostvaruje se u čistom obliku. Kod teških atoma postoje razni međuslučajevi LS i jj tipa veze. Za jako uzbuđene atome vrijedi specifični tip veze. »Atomski ostatak« se može karakterizirati vrijednostima L i S (LS tip veze), a veza s jako uzbuđenim elektronom može se razmatrati kao jj tip veze. Odmah se vidi da je to logično, jer relativistički efekt ne opada s udaljenjem elektrona, dok elektrostatsko djelovanje, pa tako i njegov necentralni dio, slabi s udaljenošću elektrona, tj. s uzbuđenošću atoma. Termi uzbuđenog atoma ni po svojoj multipletnosti ne odgovaraju onoj koja bi se dobila LS vezom. To se vidi iz daljnjeg razlaganja.

Kao što je spomenuto, ionizirani atom kriptona — u ovom slučaju promatran kao »atomski ostatak« — može se naći u dva stanja: $^2P_{1/2}$ i $^2P_{3/2}$. LS vezom s elektronom u stanju s dobila bi se stanja sa $L=1$ i $S=0$ te $L=1$ i $S=1$, tj. $^1P_1$ te $^3P_0$, $^3P_1$ i $^3P_2$, dakle jedan singulet i jedan triplet (stanja s različitim J i istim L i S čine multipletni term). No termi s jednim uzbuđenim elektronom u stanju s su dva dubleta. Za uzbuđeni elektron u stanju s orbitalnim momentom neslaganje je još veće.

Stoga je razumljivo da je u spektroskopiji prihvaćeno *Paschen*ovo označivanje (notacija) plemenitih plinova prema kojemu se za svaki kvantni broj orbitalnog momenta uzbuđenog elektrona izvrši *prosta numeracija serija i termova, ne vežući uz njih kvantne brojeve atomskog sistema. Paschen*ovo označivanje sastoji se u ovome:

Normalno stanje obilježava se sa p_0, a dva ionizirana stanja sa $^2P_{1/2}$ i $^2P_{3/2}$. Termovi s uzbuđenim atomom u stanju l svrstani su u četiri stupca koji svi imaju zajedničku oznaku s, a to je u skladu sa $l = 0$. Termovi u pojedinim stupcima numeriraju se, počevši od 1, odozdo prema gore. Taj broj je do na aditivnu konstantu glavni kvantni broj i piše se ispred slova s. Stupci su također numerirani; njihov broj se nalazi u indeksu slova s (na primjer, term $3\,s_4$ znači treći term u stupcu s oznakom s i brojem 4). Pojava četiri stupca sa $l = 0$ slijedi iz dva stanja »atomskog



Sl. A.59. Podroban prikaz spektroskopskih termova kriptona u *Paschen*ovoj notaciji (prema publikaciji NBS: Atomic Energy Levels, 1952). Normalno stanje označeno je sa p_0 odakle se broji vrijednost veličine $\sigma = 1/\lambda$. (Upotrebljava se i obrnuta skala u kojoj se normalno stanje nalazi na razini prve ionizacije, ovdje označene sa $^2P_{3/2}$.) Prijelazom elektrona iz stanja $5d_5$ u stanje $2p_{10}$ nastaje narančasto svjetlo kojim se definira jedinica duljine metar kao duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala tog svjetla

ostatka« i dvije moguće orijentacije spina uzbuđenog atoma, odnosno četiri vrijednosti ukupnog momenta atoma. Porastom glavnog kvantnog broja termi se približuju energiji dvaju ionskih stanja kao što je to i kod ostalih vrijednosti orbitalnog momenta.

Kad je orbitalni moment vanjskog elektrona jednak jedan (stanje p), odgovarajuće serije čine deset numeriranih stupaca s oznakom p. Termi u svakom stupcu

numeriraju se počevši od 2. Šest od deset serija potječe od mogućih načina vezanja momenta ostatka $J = 3/2$ s momentima uzbuđenog elektrona, a četiri od vezanja s momentom $J = 1/2$ atomskog ostatka.

Serija za $l = 2$ sastoji se od stupaca s oznakom d, a numeracija termova u svakom stupcu počinje od 3. Ima ih dvanaest, osam za »atomski ostatak« u stanju $^2P_{3/2}$ i četiri u stanju $^2P_{1/2}$. Posljednje zbog pogrešne *Paschen*ove interpretacije nose oznake S. Serije s elektronom f ($l = 3$) nose oznake 4 Y, 5 Y, ... 4 Z, 5 Z, ... itd. s istom multipletnošću kao i za elektrone d, premda je opažen mali broj termova.

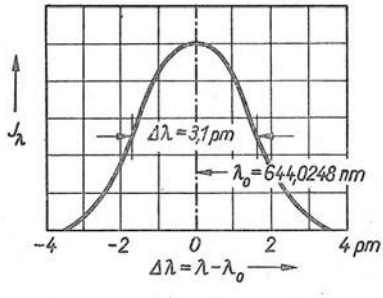
Za plemenite plinove postoji, doduše, prikladno označivanje koje je godine 1942. predložio *G. Racah*. No zbog raširenog *Paschen*ova označivanja, jedinica duljine metar definirana je godine 1960. pomoću termova kriptona simbolima $2\,p_{10}$ i $5\,d_5$ koji, prema izloženom, *nemaju fizikalno značenje, već su jednostavno prikaz tabelarnih vrijednosti*. Time je Generalna konferencija za mjere i utege poštovala prešutni dogovor spektroskopista koji su se u pogledu plemenitih plinova pomirili s *Paschen*ovim označivanjem.

8.7.3. Monokromatičnost zračenja kriptona 86. Apsolutno monokromatskog svjetla u stvarnosti nema. Spektralna linija ni u najboljem slučaju nije idealna crta, već crta stvarne širine koju u ovisnosti o duljini vala λ (ili o veličini $\sigma = 1/\lambda$) možemo prikazati krivuljom kao na slici A.60. Na ordinatu se obično nanosi veličina J_λ, tj. omjer jakosti zračenja J (jedinica npr. watt/steradijan) i intervala duljine vala λ. Slika A.60 prikazuje profil crvene spektralne linije kadmija 114 nastale prijelazom $5\,^1P_1 - 6\,^1D_2$. Pri maksimalnoj vrijednosti J_λ, duljina vala emitiranog svjetla u vakuumu iznosi $\lambda = 644{,}0248$ nanometara. *Polušir*ina spektralne linije, tj. širina profila na slici A.60 pri $\frac{1}{2}J_\lambda$ iznosi $\Delta\lambda = 0{,}0031$ nm (tako precizna mjerenja obavljaju se pomoću *Fabry-Perot*ova inteferometra). Mjera *monokromatičnosti* svjetla je *oštrina* koja je definirana omjerima (sl. A.60, 61)

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{f}{\Delta f} = \frac{\sigma}{\Delta\sigma}, \tag{8.7-3}$$

a u navedenom primjeru iznosi $\lambda/\Delta\lambda = 644/0{,}0031 = 2{,}08 \cdot 10^5$.

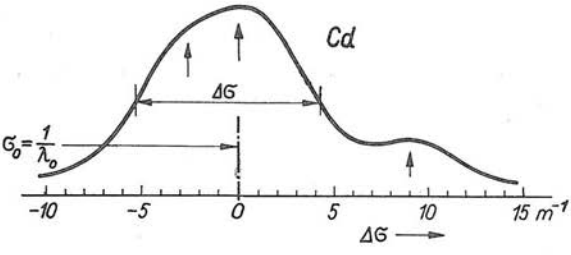
Prirodnu širinu linija, tj. prirodni pojas emitiranih frekvencija, dodatno proširuju uvjeti pod kojima se atomi uzbuđuju da bi emitirali svjetlo. Električka



Sl. A.60. Profil crvene spektralne linije kadmija. Apscisa $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 0$ odgovara maksimumu krivulje J_λ koji se nalazi pri duljini vala zračenja $\lambda = \lambda_0 = 644{,}0248$ nm (u vakuumu). Oštrina linije približno iznosi $\lambda/\Delta\lambda = 2{,}08 \cdot 10^5$ (nanometar = nm = 10^{-9} m, pikometar = pm = $= 10^{-12}$ m)

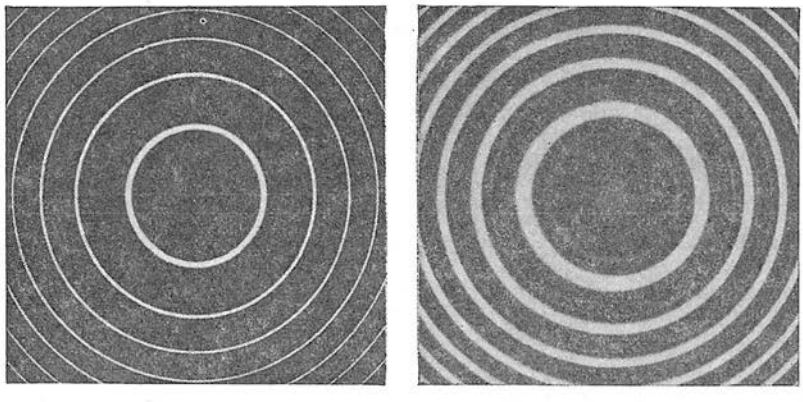
i magnetska polja, koja postoje u električkom izboju plinova prilikom uzbuđivanja, *Doppler*ov efekt, sudari emitirajućih atoma s drugim atomima itd. uzroci su *poremećaja* energetskih razina, a time i dodatnog širenja spektralne linije u odnosu prema njenoj prirodnoj širini.

Metrologija duljine i pouzdana reprodukcija jedinice duljine svjetlom *stalne* frekvencije, odnosno duljine vala, imperativno zahtijevaju da oštrina spektralne linije u smislu jednadžbe (8.7-3) bude što je moguće veća. Ne smijemo, naime, zaboraviti da je zapravo riječ o izboru *pramjerila* duljine, koje pod precizno definiranim uvjetima mora *uvijek* proizvoditi svjetlo *iste* duljine vala. Ako oštrina odabrane spektralne linije po uzoru na sliku A.60 nije naročito izrazita, tj. ako je krivulja razvučena, postoji opasnost od *nedovoljne određenosti* reprodukcije tako definirane jedinice duljine. Velika oštrina spektralne linije, naprotiv, omogućuje interferencijsko mjerenje i većih duljina.



Sl. A.61. Profil zelene spektralne linije prirodnog kamija. Jako proširena i nesimetrična krivulja posljedica je hiperfine strukture. Strelice označuju položaj glavnih komponenata. Na apscisi je označeno odstupanje veličine $\sigma = 1/\lambda$ od vrijednosti koju σ ima pri maksimumu krivulje. Poluširina iznosi $\Delta\sigma = \Delta\lambda/\lambda^2 = \Delta\lambda\sigma/\lambda = 1/(\Delta\sigma\lambda)$

Zbog toga se za pramjerilo duljine, tj. za izvor zračenja, ne može odabrati plin koji se sastoji od mješavine nekoliko *izotopa* istog elementa. Razlog nam objašnjava slika A.61 na kojoj vidimo zelenu liniju prirodnog kadmija (ovisnost J_λ o $\Delta\sigma$ za $\sigma_0 = 1/\lambda_0$, gdje je $\lambda = \lambda_0$ duljina vala zračenja pri kojem je J_λ maksimalno), koji je mješavina šest različitih nuklida. Posljedica efekata izotopije i jezgrinih momenata je cijepanje spektralnih linija na hiperfinu strukturu i nesimetrična razdioba J_λ. Vrlo uvjerljivu ilustraciju te tvrdnje sadrži slika A.62, koja prikazuje



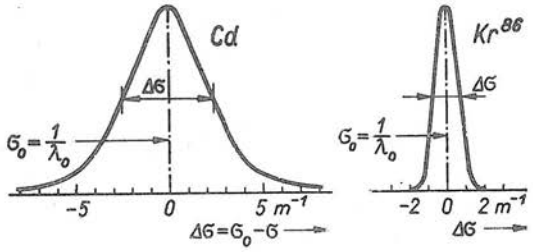
Sl. A.62. Usporedba oštrine interferencijskih krugova izotopa žive 198 (lijeva slika) i prirodne žive (desno). (Foto: NSL, Sydney)

interferencijske pruge (krugove) žive. Lijeva fotografija prikazuje interferencijske krugove *izotopa* žive Hg 198, a desna odgovarajuće krugove *prirodne* žive. Iz usporedbe ovih dviju fotografija nedvojbeno proizlazi da su interferencijska mjerenja duljine pomoću zračenja izotopskih izvora bitno preciznija negoli pomoću zračenja prirodnih elemenata koji su mješavina niza izotopa. O tome smo već govorili u odlomku 8.6.1, gdje smo naveli da se zračenje lasera, tj. izuzetno monokromatično zračenje, može upotrebljavati za interferencijska mjerenja do oko 200 metara!

Na monokromatičnost, tj. na oštrinu spektralne linije, ne utječu samo vlastita svojstva tvari koja zrači, već i *vanjski uvjeti* pod kojima dolazi do zračenja. Pri tom je od najbitnijeg utjecaja *Dopplerov* efekt koji nastaje zbog temperaturnog gibanja atoma (kinetička teorija plinova; vidi odsječak D.2.2). Taj efekt pridonosi poluširini $\Delta\lambda$ (vidi slike A.60, 61) približno $\Delta\lambda_D = 2\lambda u/v$, gdje je u brzina gibanja atoma, a v brzina širenja elektromagnetskog zračenja. Budući da je brzina atoma u proporcionalna drugom korijenu iz termodinamičke temperature T plina na koji se odnosi razmatrana monokromatičnost, *Dopplerov* efekt širenja spektralnih linija ovisi ovako o T

$$\Delta\lambda_D = 2\lambda u/v = \text{const} \cdot \sqrt{T}.$$

To znači da će širina spektralne linije biti to manja što je temperatura T niža. Zbog toga se, na primjer, kriptonska izbojna žarulja hladi na temperaturu $T = 64$ K (−209 °C; podrobnosti vidi u odlomku 8.8.2).



Sl. A.63. Usporedba profila spektralnih linija kadmija i kriptona. Lijeva slika prikazuje profil crvene linije prirodnog kadmija (Cd; $\lambda/\Delta\lambda = \sigma/\Delta\sigma = 2 \cdot 10^5$), a desna profil narančaste linije kriptona (Kr 86; $\lambda/\Delta\lambda = 1{,}2 \cdot 10^6$)

Dugotrajna i opsežna istraživanja spektralnih linija žive, kadmija i kriptona pokazala su da je izotop kriptona ^{86}Kr najprikladniji za proizvodnju elektromagnetskog zračenja kojim će se definirati i reproducirati jedinica duljine metar. Pri tom mislimo na narančasto zračenje koje nastaje prijelazom $2\,p_{10}$—$5\,d_5$ (vidi odlomak 8.7.2). Profil spektralne linije kriptona ^{86}Kr vidimo na slici A.63 (desno): pri temperaturi $T = 64$ K poluširina njegove linije iznosi $\Delta\sigma = 1{,}34\ \text{m}^{-1}$, a duljina vala zračenja u vakuumu je $\lambda = 6{,}057\,8021 \cdot 10^{-7}$ m. Stoga oštrina prema jednadžbi (8.7-3) iznosi

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{1}{\Delta\sigma \cdot \lambda} = \frac{1}{1{,}34\,\text{m}^{-1} \cdot 6{,}058 \cdot 10^{-7}\,\text{m}} = 1{,}23 \cdot 10^6,$$

tj. oštrina je oko 6 puta veća od oštrine spektralne linije kadmija. U vezi s jednadžbom (8.7-3) i gornjim računanjem napominjemo da diferenciranje izraza $f\lambda = v = \text{const}$ daje tačan izraz (predznaci!) $\lambda/\text{d}\lambda = -f/\text{d}f = -\sigma/\text{d}\sigma$, gdje je $\sigma = 1/\lambda$.

Neposredno prije održavanja jedanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege godine 1960. ponovno su najbrižljivije ispitana svojstva zračenja ^{86}Kr, naročito na širinu spektralne linije prijelaza $2\,p_{10}$—$5\,d_5$, na njenu poluširinu i podložnost poremećajima. Utvrđeno je ono što smo u dosadašnjem tekstu iznijeli: spektralna linija plina $^{86}_{36}$Kr nema hiperfine strukture, potpuno je simetrična i ne sadrži unutrašnje periodičke greške! Ako se upotrebljava u skladu s propisanim postupkom (vidi odlomak 8.8.3), omjer poluširine i emitirane energije kvanta je povoljan, a to je uvjet dobre vidljivosti interferencijskih pruga (vidi sliku A.62). Tom uvjetu u znatno manjoj mjeri udovoljava, na primjer, crvena linija prirodnog kadmija (sl. A.60 i lijeva slika A.63), jer ona sadrži hiperfinu strukturu, iako je simetrična. To se tumači time što se u tom slučaju hiperfine komponente tačno

pokrivaju, pa ne dolazi do razvlačenja kao kod zelene linije prirodnog kadmija (sl. A.61), gdje nema te slučajne podudarnosti.

8.7.4. Sekundarni izvori monokromatskih zračenja. Generalna konferencija za mjere i utege definirala je na svom jedanaestom zasjedanju godine 1960. jedinicu duljine 1 metar relacijom

$$\text{metar} = 1\,650\,763{,}73\,\lambda,$$

gdje je λ duljina vala zračenja koje nastaje pri neporemećenom prijelazu $2\,p_{10} - 5\,d_5$ u vakuumu. Iz gornje jednadžbe proizlazi da duljina vala λ tog zračenja, izražena metrima, iznosi

$$\lambda = \frac{\text{metar}}{1\,650\,763{,}73} = 6{,}057\,8021 \cdot 10^{-7}\,\text{m}.$$

Tekst definicije metra od godine 1960. (»valni metar«, »optički metar«) naveli smo u odlomku 8.1.2: »Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala u vakuumu zračenja koje odgovara prijelazu između razina $2\,p_{10}$ i $5\,d_5$ atoma kriptona 86.« Nepouzdanost reprodukcije tako definiranog metra ni u kojem slučaju nije veća od $1:10^8$, a vjerojatno se kreće između $1:10^9$ i $1:10^8$. Predodžbu o toj fantastičnoj pouzdanosti možemo steći usporedbom: ako bismo na takav način mogli mjeriti duljinu 100 kilometara, pogreška bi se kretala između 0,1 i 1 milimetar!

Tolike pouzdanosti potrebne su samo u vrhunskoj znanstvenoj metrologiji, npr. u nacionalnim metrološkim zavodima i u Međunarodnom uredu za mjere i utege (BIPM; vidi odsječke 7.3, 4). Za najpreciznija laboratorijska mjerenja, kao i za najfinija industrijska mjerenja, upotrebljavaju se *sekundarni izvori zračenja*. Ti izvori jeftiniji su od izvora ^{86}Kr, a pouzdanost reprodukcije nešto je lošija negoli u kriptona 86.

Generalna konferencija za mjere i utege zadužila je godine 1960. Međunarodni komitet za mjere i utege da na temelju obavljenih istraživanja preporuči sekundarne izvore zračenja za potrebe interferencijskog mjerenja duljine. Komitet je tri godine upravljao istraživanjima i na temelju prijedloga svog Savjetodavnog odbora za definiciju metra (Comité Consultatif pour la Définition du Mètre) u oktobru godine 1963. objavio odgovarajuću preporuku, koja je objavljena u Comptes Rendus Generalne konferencije (1964). Bit tih preporuka sadrži naša tablica A-17 (nanometar = nm = 10^{-9} m).

Iz tablice razabiremo da su za sekundarne izvore preporučena po četiri zračenja kriptona 86, žive 198 i kadmija 114. Pouzdanost navedenih duljina vala λ kriptonskih zračenja iznosi najmanje $2:10^8$, ako ^{86}Kr zrači pri propisanim uvjetima (vidi odlomak 8.8.3).

Pouzdanost vrijednosti duljina vala λ navedenih u tablici A-17 za *živu* (Hg 198) iznosi najmanje $5:10^8$. Pri tom mora biti udovoljeno nekim osnovnim uvjetima: 1) Zračenje nastaje u sredini izbojne žarulje bez elektroda, koja sadrži živu 198 čistoće najmanje 98 % te argon pod tlakom između 67 i 133 N/m² (0,5...1 mm Hg; o jedinicama tlaka vidi odsječak B.4.3). 2) Unutrašnji promjer kapilare izbojne žarulje iznosi oko 5 mm, a zračenje se promatra poprečno na kapilaru. 3) Žarulja se uzbuđuje visokofrekventnim poljem umjerene snage, a temperatura žarulje je ispod 10 °C. 4) Preporučuje se da volumen žarulje bude veći od 20 kubnih centimetara.

Pouzdanost duljina vala λ navedenih u tablici A-17 za *kadmij* (Cd 114) iznosi najmanje $7:10^8$. Pri tom se na odgovarajuću izbojnu žarulju stavljaju ovi

Tablica **A-17**

Duljine vala zračenja sekundarnih izvora

Prijelaz između terma	Duljina vala λ zračenja u vakuumu	
	metara (m)	nanometara (nm)
Zračenje kriptona (Kr 86)		
$2p_9 - 5d_4'$	$6458{,}0720 \cdot 10^{-10}$	645,807 20
$2p_8 - 5d_4$	$6422{,}8006 \cdot 10^{-10}$	642,280 06
$1s_3 - 3p_{10}$	$5651{,}1286 \cdot 10^{-10}$	565,112 86
$1s_4 - 3p_8$	$4503{,}6162 \cdot 10^{-10}$	450,361 62
Zračenje žive (Hg 198)		
$6^1P_1 - 5^1D_2$	$5792{,}2683 \cdot 10^{-10}$	579,226 83
$6^1P_1 - 6^3D_2$	$5771{,}1983 \cdot 10^{-10}$	577,119 83
$6^3P_2 - 7^3S_1$	$5462{,}2705 \cdot 10^{-10}$	546,227 05
$6^3P_1 - 7^3S_1$	$4359{,}5624 \cdot 10^{-10}$	435,956 24
Zračenje kadmija (Cd 114)		
$5^1P_1 - 6^1D_2$	$6440{,}2480 \cdot 10^{-10}$	644,024 80
$5^3P_2 - 6^3S_1$	$5087{,}2379 \cdot 10^{-10}$	508,723 79
$5^3P_1 - 6^3S_1$	$4801{,}2521 \cdot 10^{-10}$	480,125 21
$5^3P_0 - 6^3S_1$	$4679{,}4581 \cdot 10^{-10}$	467,945 81

zahtjevi: 1) Zračenje nastaje u sredini bezelektrodne izbojne žarulje koja sadrži kadmij 114 čistoće najmanje 95 % i argon pod tlakom 133 N/m² (1 mm Hg) pri okolnoj temperaturi. 2) Unutrašnji promjer kapilare iznosi oko 5 mm, a zračenje se promatra poprečno na kapilaru. 3) Žarulja se uzbuđuje visokofrekventnim poljem umjerene snage, a održavati se mora pri temperaturi koja neće poremetiti zračenje.

8.8. Realizacija valne definicije metra

Definiciju metra od godine 1960. naveli smo u odlomku 8.1.2, a način interferencijskog mjerenja duljine (usporedbom s duljinom vala zračenja λ kriptona 86 ili nekog drugog, sekundarnog zračenja) opisali smo u odsječcima 8.2...8.6. Preostalo nam je još da letimično opišemo kako mora biti *realiziran izvor zračenja* da bi pouzdanost interferencijskog mjerenja duljine bila $1:10^8$ ili bolja, ako je riječ o zračenju ^{86}Kr, odnosno nešto lošija, ako se pri mjerenju upotrebljavaju sekundarni izvori zračenja (tablica A-17).

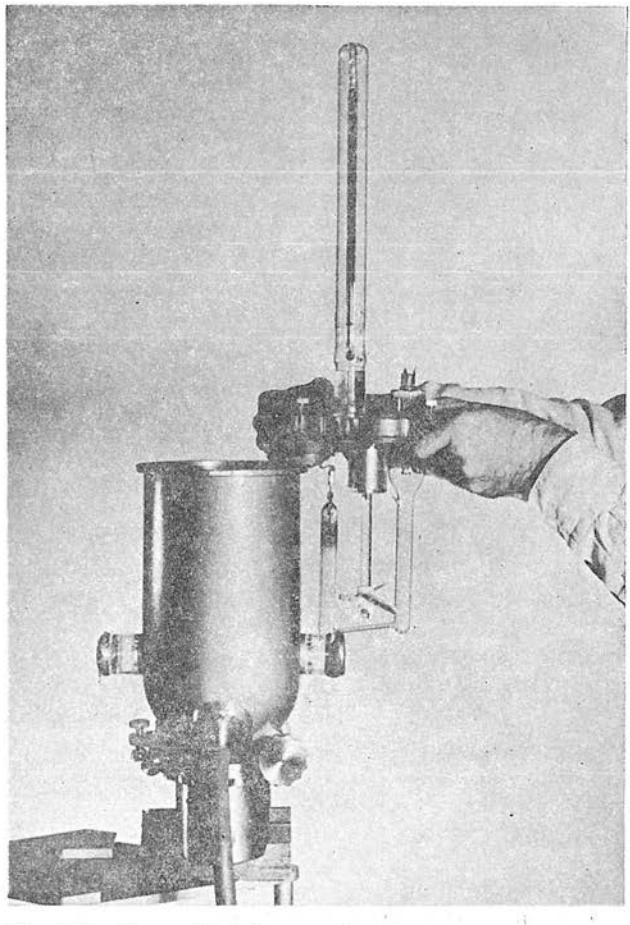
8.8.1. Kriptonska izbojna žarulja je staklena posuda izvedena o obliku oštrog slova U (vidi sliku A.29 u odlomku 8.1.2). U krakove posude utaljene su dvije elektrode. Takozvana hladna katoda nalazi se u duljem, napuhnutom kraku. Zra-

čenje nastaje u kapilari koja spaja oba staklena kraka, tj. u kapilari unutrašnjeg promjera 2...4 milimetra i debljine oko 1 mm prilikom djelovanja žarulje svijetli zgusnuti pozitivan električki izboj. Volframova katoda emitira elektrone pod djelovanjem napona nekoliko stotina volti, čime se uspostavlja trajan izboj između katode i anode. Duljina kapilare iznosi oko 100 milimetara, a između anode i katode doveden je istosmjerni napon oko 1500 V.

Staklena posuda oblika U ispunjena je kriptonom 86 (oko 1 kubni centimetar) čistoće najmanje 99 %. Pri normalnom radu žarulje pod tlakom oko 0,03 mm Hg gustoća električne struje u kapilari iznosi 0,3 A/cm². Ovim stanjima mora biti udovoljeno ako se u vakuumu želi proizvesti neporemećeno zračenje sa sigurnošću proizvodnje λ 1 : 10^8 ili bolje. Pri tom se kriptonska žarulja mora stalno hladiti tako da se nalazi na temperaturi trojne tačke dušika (64 K ili minus 209 °C).

U kapilari žarulje istodobno nastaje mnoštvo monokromatskih zračenja kriptona ^{86}Kr (vidi sliku A.57). Da bi se iz tog mnoštva izdvojilo samo ono (narančasto) zračenje koje odgovara prijelazu $2p_{10}-5d_5$, između žarulje i promatrača (ili interferometra) ugrađen je interferentni polarizacijski filtar velike propusnosti i uskog pojasa propuštanja ili monokromator. Zračenje se promatra u smjeru od katode prema anodi (podrobnije vidi odlomak 8.8.3).

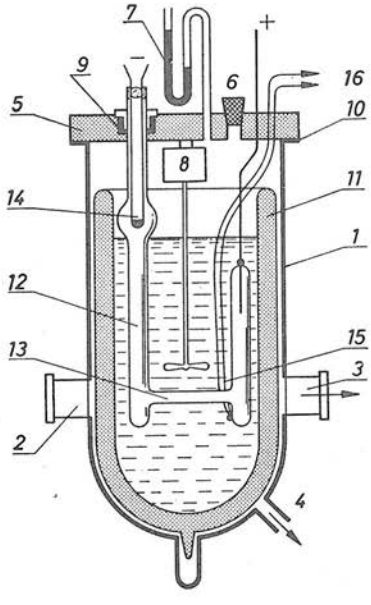
Zanimljivo je spomenuti s koliko se muke postupkom termodifuzije dobiva kripton 86. Plin kripton najprije se separira frakcijskom destilacijom tekućeg zraka. Tako nastali plin sastoji se od mješavine 6 izotopa masenih brojeva 78 (0,34 %), 80 (2,23 %), 82 (11,5 %), 83 (11,48 %), 84 (57,02 %) i 86 (17,43 %). Da bi se iz te mješavine izotopa izdvojio kripton 86,



Sl. A.64. Fotografija kriostata s izvađenom kriptonskom izbojnom žaruljom (usporedi sa slikom A.65). Prilikom djelovanja žarulje u kriostatu vlada temperatura (64±1) K, a gustoća struje u kapilari iznosi (0,3 ± 0,1) A/cm². (Foto: Bureau International des Poids et Mesures)

plin se stavlja u vertikalnu cijev koja se izvana hladi, a iznutra grije otporničkom žicom nategnutom duž osi cijevi. U toku tog procesa termodifuzije laganiji izotopi se koncentriraju pri vrhu cijevi, a teži pri dnu. Sam proces je u načelu jednostavan, ali da bi se separirao kripton 86 čistoće najmanje 99 %, proces mora teći šest mjeseci. U tih 6 mjeseci postrojenje mora djelovati kontinuirano, bez i najmanjeg prekida!

8.8.2. Kriostat za kriptonsku žarulju. U prošlom smo odlomku naveli da kriptonska izbojna žarulja zrači pri propisanoj λ ako je temperatura $T = (64 \pm 1)$ K, dakle 211...209 °C ispod nule Celzijeve skale. Radi toga se staklena kriptonska žarulja (sl. A.29) stavlja u poseban kriostat koji vidimo zajedno s izvađenom žaruljom na slici A.64. Presjek sklopljenog kriostata prikazuje crtež na slici A.65.



Sl. A.65. Presjek kriostata s kriptonskom (^{86}Kr) izbojnom žaruljom za proizvodnju elektromagnetskog zračenja $2p_{10} - 5d_5$ kojim se u vakuumu reproducira zračenje duljine vala $\lambda = 6{,}057\,8021 \cdot 10^{-7}$ m

1 — zaštitno kućište, *2* i *3* — prozori za promatranje zračenja, *4* — priključak na vakuumsku pumpu, *5* — poklopac od plexy-stakla, *6* — otvor sa čepom, *7* — manometar, *8* — motor miješalice, *9* i *10* — brtve, *11* — staklena Dewarova posuda koja nije metalizirana, *12* — staklena cijev u obliku slova U napunjena kriptonom 86, *13* — kapilara u kojoj nastaje zračenje (narančasto kriptonsko svjetlo), *14* — katoda, *15* — termopar za mjerenje temperature u kriostatu, *16* — priključak termopara na mjerni instrument; znak + predstavlja električki priključak na anodu, a znak — priključak na katodu žarulje

Iz opisa slike A.65 razabiremo da se kriostat sastoji od spremnika koji se dade hermetički zatvoriti, a zračenje žarulje može se promatrati ili voditi u interferometar kroz dva prozora. Sama žarulja učvršćena je na poklopac kriostata, pa u stvari visi u Dewarovoj posudi (usporedi sa slikom A.64).

Unutrašnjost kriostata obično se hladi tekućim dušikom. Isisavanjem dušikovih para u kriostatu se postiže trojna tačka dušika ($T = 64$ K), a pri tom se kripton 86 u donjem dijelu anodnog kraka žarulje skruti. Tu temperaturu mjeri termopar označen na slici A.65 sa *15*. Pri toj temperaturi gotovo je sav kripton kondenziran u krutinu na dnu žarulje. Tlak preostalog kriptonskog plina može se regulirati neznatnim mijenjanjem temperature. Tako, na primjer, pri minus 210 °C tlak iznosi 0,03 mm Hg, a pri minus 215 °C oko 0,003 mm Hg. Suvišak kriptona u žarulji ima pozitivan utjecaj na njeno trajanje.

8.8.3. Nesigurnost reprodukcije valnog metra. Nesavršenost spektralne linije kriptona 86 pri prijelazu $2p_{10} - 5d_5$ i drugi uzroci (npr. *Stark*ov i drugi efekti) ne dopuštaju da kriptonsko zračenje ima prilikom svake reprodukcije istu duljinu

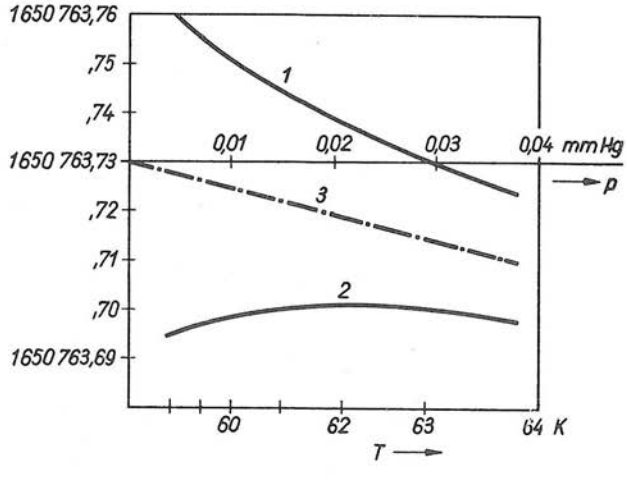
vala λ. U stvarnosti kriptonska izbojna žarulja emitira narančasto svjetlo u rasponu duljina vala $\lambda \pm \Delta\lambda$, gdje je $\lambda = 6{,}0578021 \cdot 10^{-7}$ m, odnosno $m = 1650763{,}73\,\lambda$. Ovdje je λ duljina vala zračenja kriptona 86 u vakuumu. Prema podacima Međunarodnog komiteta za mjere i utege (CIPM) relativna nesigurnost reprodukcije λ prilikom *neporemećenog* prijelaza u najnepovoljnijem slučaju ne premašuje vrijednost $1:10^8$, dakle

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \leqq \pm\, 1 \cdot 10^{-8}.$$

Ta se vrijednost može postići, ako se metrolozi pridržavaju ovih glavnih preporuka Komiteta: 1. Kripton 86 mora biti čistoće najmanje 99 % i u tolikoj količini da je osigurano postojanje krutog kriptona pri temperaturi 64 K. 2. Unutarnji promjer kapilare žarulje mora biti između 2 i 4 milimetra, a njena debljina oko 1 mm. 3. Zračenje u kapilari treba promatrati od katodnog kraja prema anodi. 4. Donji dio žarulje, uključivši kapilaru, mora biti uronjen u rashladno sredstvo koje održava temperaturu trojne tačne dušika unutar ± 1 K. 5. Gustoća električne struje u kapilari ne smije izaći izvan opsega vrijednosti $(0{,}3 \pm 0{,}1)$ A/cm^2.

U tački 3 smo naveli da zračenje treba promatrati u smjeru od katode prema anodi. Ako se promatra sa suprotnog kraja, dobiju se neznatno drukčiji rezultati, što nam u prvoj aproksimaciji prikazuje dijagram na slici A.66. Na apscisu su nanesene dvije skale: gornja prikazuje tlak p plinovitog kriptona u izbojnoj žarulji, a druga temperaturu T koja odgovara naznačenom tlaku. Na ordinatu je nanesen broj valova (σ) kriptonskog zračenja u vakuumu koji predstavlja 1 metar. Pri tom je jakost struje u kapilari tolika da njena gustoća iznosi 0,3 A/cm^2.

Gornja krivulja *1* na slici A.66 vrijedi za slučaj motrenja u smjeru katoda—anoda, a donja krivulja *2* za obrnuti smjer. Razlika između obiju krivulja, koja se kreće od oko 0,025 λ (pri 64 K) do oko 0,055 λ (pri 60 K), uzrokovana je gibanjem atoma u plinu i drugim poremećajima, a posljedica toga je promjena duljine vala zračenja zbog *Dopplerova* i drugih efekata. Prirodno je zamisliti da će *mirujućim* atomima odgovarati crtkani pravac *3* koji prolazi kroz sredinu između gornje i donje krivulje. Pri tlaku $p = 0$ pravac *3* bi dodirnuo ordinatu; njemu odgovara teoretska definicija $m = 1\,650\,763{,}73\,\lambda$ (u vakuumu), koja i pretpostavlja *neporemećene* atome kriptona. No potpuni vakuum ne može se stvoriti, pa se, dakle,



Sl. A.66. Ovisnost specifičnog broja valova σ izbojne žarulje kriptona 86 o temperaturi žarulje, odnosno o tlaku kriptona

1 — smjer motrenja je od katode prema anodi, *2* — smjer motrenja je od anode prema katodi, *3* — pravac koji prolazi sredinom između krivulja *2* i *1*

broj valova ne podudara savršeno s definicijom, osim u jednom slučaju: kada je kripton 86 ohlađen na $T = 63$ K, a motri se u smjeru katoda—anoda. U tom slučaju nacrtani vodoravni pravac p (sl. A.66) siječe krivulju *1* u tački koja odgovara teoretskoj definiciji metra.

Opisana kriptonska izbojna žarulja, tzv. *Engelhardt*ova žarulja (Physikalisch-Technische Bundesanstalt, PTB), samo je jedna od mogućih izvedbi izvora zračenja kriptona 86. U posljednjem desetljeću istražen je niz novih oblika žarulja od kojih je najzapaženija *Bird*ova žarulja (National Research Council, Kanada). Zračenje u toj žarulji promatra se okomito na kapilaru, tj. okomito na smjer električne struje u kapilari. Smatra se da nesigurnost reprodukcije λ tom žaruljom iznosi oko $\Delta\lambda/\lambda = \pm 5 \cdot 10^{-9}$. Ekstrapolacija nalik na onu u slici A.66 vrlo je jednostavna, jer ne zahtijeva dopunske hipoteze. Za razliku od nje, *Engelhardt*ova žarulja ima kompliciraniju ekstrapolaciju: korekture se izračunavaju na temelju hipoteze o odnosu tlakova u različitim dijelovima kapilare. Ta hipoteza provjerena je mjerenjem tlakova na krajevima kapilare; postignuta je skladnost u granicama $(2...3) \cdot 10^{-9}$.

Vodeći stručnjaci u Međunarodnom uredu za mjere i utege te u velikim nacionalnim metrološkim zavodima, koji neprekidno usavršavaju reprodukciju duljine vala kriptona 86 i drugih zračenja, smatraju da su smanjenjem poremećaja atoma nesigurnost reprodukcije λ uspjeli sniziti na fantastičnu vrijednost

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm 3 \cdot 10^{-9},$$

a u skoroj budućnosti očekuju postizanje vrijednosti $\pm 1 \cdot 10^{-9}$!

Ovi podaci o nesigurnosti *reprodukcije duljine vala* λ ne smiju nas zavarati u pogledu interferencijskog *mjerenja duljine*, npr. mjera sa crticama. U odsječku 8.5 smo, naime, utvrdili da se najbolji današnji fotoelektrički komparatori mogu namjestiti s relativnom nepouzdanošću $\pm 1 \cdot 10^{-8}$, a utjecaj nepoznavanja indeksa prelamanja vjerojatno je još veći (vidi odsječak 8.3). Prema tome granica vrhunske metrologije duljine danas je u blizini višekratnika $1:10^8$; smanjenje nesigurnosti reprodukcije samo je jedan od uvjeta koji omogućuju da se *mjerenje* duljine približi vrijednosti $1:10^8$.

8.9. Iz povijesti ångströma i valnog metra

8.9.1. Postanak spektroskopske jedinice ångström. Uvođenjem kriptonskog valnog metra godine 1960. (vidi odlomke 8.1.2 i 8.1.4) ujedno je završen gotovo stogodišnji razvojni put jedinice ångström (kratica: Å) koja se pretežno upotrebljava u spektroskopiji atomskih i molekularnih zračenja, te u rendgenskoj spektroskopiji. U toku tog razvoja u više su navrata nastajali nesporazumi o tome kako je ta jedinica duljine vala definirana i u kakvom je odnosu prema metru. Danas vrijedi odnos

$$\text{ångström} = 10^{-10}\ \text{m} = 0{,}1\ \text{nanometar} = 0{,}1\ \text{nm}, \qquad (8.9\text{-}1)$$

gdje je nanometar = nm = 10^{-9} m (obrazloženje vidi u odlomku 8.9.5).

Šveđanin A. J. Ångstrøm osnovao je godine 1868. za potrebe spektroskopije posebnu skalu za mjerenje duljina vala zračenja. On je duljine vala niza zračenja iz sunčeva spektra (pri tlaku 760 torr i temperaturi 20 °C) odabrao za standardne (referentne) vrijednosti. U odnosu prema njima valjalo je usporedbom utvrđivati

duljine vala drugih mjerenih zračenja. U tu svrhu oznake duljina vala bile su štampane u obliku takva grafičkog prikaza u kojem je jedan milimetar na papiru odgovarao razlici duljina vala 10^{-10} metara ($= 10^{-8}$ cm). Tu jedinicu kasnije su prozvali Ångstrømovom jedinicom i umjesto relacije Å $\triangleq 10^{-10}$ m (odgovara!) jednostavno napisali jednakost (8.9-1).

Svoja mjerenja duljina vala standardnih zračenja švedski je učenjak obavljao u odnosu prema pramjeri duljine u Uppsali. Budući da ta pramjera nije bila besprijekorno u skladu s međunarodnim prametrom u Sèvresu, uskoro su izašle na vidjelo pogreške. Osim toga, poslije godine 1880. znatno je poboljšana preciznost mjerenja pri istraživanju spektra sunčevih zračenja i pri istraživanju spektra para rijetkih kovina. Zbog toga je godine 1884. *R. Thalén* na temelju opsežnih usporedbenih mjerenja i preračunavanja bitno korigirao Ångstrømove tablice.

8.9.2. Rowlandove tablice. Daljnja su eksperimentalna istraživanja pokazala da su Ångstrømove vrijednosti duljina vala zračenja normalnog sunčeva spekra, izražena u odnosu na jedinicu duljine metar (osnovane na štapnom prametru u Sèvresu), premale za oko 1 Å (pri tom se smatralo da je Å $= 10^{-10}$ m). Stoga je godine 1887. Amerikanac *H. A. Rowland* započeo s uvođenjem nove skale duljina vala, koja se osniva na nizu standardnih linija *Frauenhofer*ova sunčeva spektra. Za primarni standard svoje skale *Rowland* je upotrijebio vrijednost $\lambda_{D1} = 589{,}6156$ nm, gdje je λ_{D1} duljina vala natrijeve linije *D1* u zraku normalnog sastava pri tlaku 760 torr i temperaturi 20 °C. Godine 1893. *Rowland* je objavio New Table of Standard Wave-Lengths, a pet godina kasnije Preliminary Table of Solar Spectrum Wave-Lengths. Tim djelima bile su obuhvaćene linije zračenja koje emitiraju Sunce i pare rijetkih kovina.

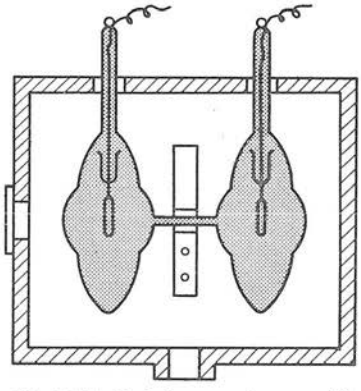
*Rowland*ove tablice doživjele su kritiku tek što su objavljene: *L. E. Jewell* saopćio je godine 1896. da je pri uspoređivanju linija sunčeva spektra s odgovarajućim linijama metalnih para ustanovio neispravnosti u pogledu *apsolutnih* vrijednosti *Rowland*ovih tablica. Pokazalo se, naime, da su linije sunčeva spektra općenito pomaknute prema crvenom području u odnosu prema linijama para rijetkih kovina, a osim toga da pojedine linije jednog elementa iskazuju različite pomake. Stoga je *Jewell* predložio da se napusti sunčev spektar kao referencija spektroskopije. Godine 1900. *H. Kayser* je u linijama željeza otkrio da tablica od godine 1893. nije pouzdana ni u pogledu *relativnih* vrijednosti.

8.9.3. Definicija ångströma od godine 1907. U odlomku 8.1.4 opisali smo kako je godine 1892. *A. A. Michelson* u Međunarodnom uredu za mjere i utege (BIPM) započeo s interferencijskim mjerenjem metarskih štapova. Za tu svrhu on je izumio posebnu kadmijevu izbojnu žarulju (usporedi s odsječkom 8.8) koju u načelu prikazuje crtež na slici A.67. Ta izbojna žarulja ima dvije hladne katode koje sadrže malu količinu metalnog kadmija, a djeluje pri temperaturi između 300 i 320 °C. Između elektroda vlada istosmjerni napon ili izmjenični napon industrijske frekvencije. Unutarnji promjer staklene kapilare, koja spaja oba kraka U cijevi, iznosio je 2 milimetra, a gustoća električne struje na najužem mjestu kapilare nije smjela biti veća od 0,7 A/cm^2.

Benoit, Fabry i Pérot nastavili su u BIPM *Michelson*ova istraživanja i ustanovili da između duljine vala λ_c(Cd) crvene kadmijeve linije i duljine međunarodnog prametra u Sèvresu postoje odnosi

$$\lambda_c(\mathrm{Cd}) = 6438{,}4696 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m},$$
$$\mathrm{m} = 1\,553\,164{,}13 \cdot \lambda_c(\mathrm{Cd}). \qquad (8.9\text{-}2)$$

Ti odnosi prihvaćeni su godine 1907. na trećoj konferenciji udruženja International Union for Cooperation in Solar Research, koje je bilo osnovano godine 1904. u St. Louisu u svrhu revizije postojećih spektroskopskih podataka, odnosno općenito radi postizanja međunarodnog jedinstva na tom polju znanosti. Već na drugoj konferenciji godine 1905. u Oxfordu bilo je, naime, zaključeno da se usvoji spektroskopski sistem duljina valova koji se temelji na *jednoj* referentnoj duljini vala interferometrijski priključenoj na međunarodni štapni prametar.



Sl. A.67. Pojednostavnjen presjek *Michelson*ove izbojne žarulje za kadmij

Na spomenutoj konferenciji godine 1907. bila je u stvari definirana i vrijednost spektroskopske jedinice ångström. Prijevod predmetne definicije glasi: »Duljina vala crvenog svjetla kadmija, proizvedena u žarulji s elektrodama, iznosi 6438,4696 ångströma u suhom zraku temperature 15 stupnjeva vodikova termometra pri tlaku 760 mm žive i vrijednosti ubrzanja zemljine teže 980,67 cm/s² (45°).« Tako definirana spektroskopska jedinica ångström ima dva bitna obilježja: 1. Definirana je crvenom kadmijevom linijom prijelaza $6\,^1D_2 - 6\,^1P_1$ pri propisanom stanju zraka (usporedimo li stanje zraka u definiciji s današnjim »standardnim zrakom«, opisanim u odsječku 8.3, vidimo da današnja spektroskopija potpunije propisuje stanje zraka). 2. U momentu donošenja definicije bio je poznat odnos $\lambda_c(\mathrm{Cd}) = \doteq 6438{,}4696 \cdot 10^{-10}$ m, a tražilo se da bude $\text{Å} = 10^{-10}$ m. Prema tome ångström je bio definiran relacijom

$$\text{Å} = \text{ångström} = \frac{\lambda_c(\mathrm{Cd})}{6438{,}4696}\,. \qquad (8.9\text{-}3)$$

Time je bila isključena direktna veza između metra i ångströma, bez obzira na mogućnost da naknadna mjerenja pokažu drukčiji odnos između $\lambda_c(\mathrm{Cd})$ i metra, iako je relacija (8.9-3) — kako smo vidjeli — nastala interferencijskom usporedbom duljine vala $\lambda_c(\mathrm{Cd})$ crvenog kadmijeva zračenja s međunarodnim prametrom u Sèvresu. Loše posljedice toga očitovale su se četrdesetak godina kasnije kada je izmjeren drukčiji odnos između metra i $\lambda_c(\mathrm{Cd})$. Zbog toga više nije vrijedio prvotno zamišljeni odnos $\text{Å} = 10^{-10}$ m (vidi odlomak 8.9.5).

Međunarodna astronomska unija (International Astronomical Union, IAU, koja se razvila iz International Union for Cooperation in Solar Research) uvela je na generalnoj konferenciji godine 1938. u Stockholmu za jedinicu $\lambda_c(\mathrm{Cd})/6438{,}4696$ naziv »angstrom«, dakle bez skandinavskih slova, a za kraticu veliko slovo A. Konferencija je tu jedinicu nazvala »međunarodna jedinica duljine vala« (unité internationale de longueur d'onde). Protiv kratice A izjasnili su se naknadno mnogi, jer je kolidirala s kraticom jedinice jakosti struje amper = A. Stoga je godine 1954. Joint Commission for Spectroscopy (zajednički organ IAU i International Union of Pure and Applied Physics, IUPAP) preporučila da se u budućnosti upotrebljavaju naziv i simbol

$$\text{ångström} = \text{Å}.$$

Taj naziv i kraticu mi smo dosljedno upotrebljavali u čitavu dosadašnjem tekstu.

8.9.4. Valna definicija metra od 1927. Generalna konferencija za mjere i utege razmatrala je na svom sedmom zasjedanju godine 1927. mogućnost da se odustane od štapnog metra (vidi odsječak 6.4) i da se prijeđe na definiciju i reprodukciju metra pomoću duljine vala λ_c(Cd) crvenog kadmijeva zračenja prilikom prijelaza između termova $6\,^1D_2$ i $6\,^1P_1$. Zaključak je bio kompromisan (razlog vidi u odlomku 8.1.4): ostaje na snazi definicija štapnog prametra, ali se duljina vala crvene kadmijeve linije λ_c(Cd) uvodi kao »podmjera« (Substandard, Subnormal). Pri tom je Konferencija propisala niz zahtjeva kojima prilikom reprodukcije λ_c(Cd) treba da udovolji kadmijeva žarulja: mora imati unutarnje elektrode, volumen žarulje treba da je veći od 25 kubnih centimetara, unutarnji promjer staklene kapilare mora biti veći od 2 mm, treba da se upotrijebi istosmjerni napon ili izmjenični napon industrijske frekvencije pri temperaturi oko $+320\,^\circ$C, a jakost struje mora biti manja od 20 miliampera.

Uz te i druge manje važne podatke dolazila je važna preporuka Generalne konferencije s istog zasjedanja, 1927: »Provizorna vrijednost metra, izražena brojem duljina vala crvene kadmijeve linije, iznosi pod navedenim okolnostima 1 553 164,13 (na posljednju znamenku tačno).« Vidimo da je to onaj isti broj koji smo susreli u odlomku 8.9.3. S naznakom »provizorna« bila je izražena nada da će se otkriti i istražiti atomska zračila s oštrijom spektralnom linijom nego što je ima crveno kadmijevo zračenje. Kako smo vidjeli u odlomku 8.7.3, takvo je zračenje doista otkriveno, istraženo i primijenjeno. To je narančasto zračenje kriptona 86 koje nastaje prilikom prijelaza $2p_{10} - 5d_5$ (vidi odlomak 8.1.2).

8.9.5. Odnos ångström/metar. Međunarodni ured za mjere i utege (BIPM), britanski, njemački, sovjetski, francuski, japanski i drugi dobro opremljeni nacionalni metrološki zavodi nastavili su istraživati odnos λ_c(Cd)/m i nakon zasjedanja Generalne konferencije godine 1927. Mjerne metode i uređaji su usavršavani, istražen je utjecaj indeksa prelamanja (vidi npr. odsječak 8.3), čvršće je definiran »spektroskopski zrak« itd. Do drugog svjetskog rata skupljeno je mnoštvo pouzdanih mjernih rezultata na temelju kojih je procijenjeno da vrijedi ova veza između λ_c(Cd) i metra:

$$\lambda_c(\mathrm{Cd}) = (6{,}438\,4696 \pm 3\cdot 10^{-6})\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m},$$
$$\mathrm{m} = (1\,553\,164{,}12 \pm 0{,}7)\cdot \lambda_c(\mathrm{Cd}), \qquad (8.9\text{-}4)$$

a ne relacije (8.9-2). Pri tom se pod λ_c(Cd) iz jednadžbe (8.9-4) razumijeva duljina vala crvenog kadmijeva zračenja u standardnom spektroskopskom zraku (vidi odsječak 8.3).

Definiciju jedinice duljine vala ångström opisuje jednadžba (8.9-3). Ako je uvrstimo u netom napisani izraz (8.9-4), dobivamo

$$\text{Å} = \frac{(6{,}438\,4696 \pm 3\cdot 10^{-3})\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}{6438{,}4696} = (1 \pm 5\cdot 10^{-7})\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}. \qquad (8.9\text{-}5)$$

Godine 1952. osnovan je u okviru Međunarodnog komiteta za mjere i utege (BIPM) Savjetodavni odbor za definiciju metra (vidi odsječak 7.1) sa zadatkom da eksperimentalno istraži najprikladniji izvor monokromatskog zračenja koje će zamijeniti štapni prametar sa crticama. Pet smjernica o djelovanju tog odbora navedeno je pri kraju odlomka 8.1.5. Jedna od tih smjernica predviđala je da prilikom utvrđivanja odnosa λ odabranog zračenja (godine 1960. odabran je ^{86}Kr; vidi odlomak

8.1.2) prema jedinici duljine metar — koji se tim odnosom baš definira — bude poštovana jednadžba (8.9-2) od godine 1907. Prema izjavi direktora BIPM *J. Terriena* (članak u časopisu »Metrologia«, 1965, broj 1, str. 17), koji je i sam specijalist u spektroskopiji i stručno je mnogo pridonio ostvarenju nove definicije i reprodukcije valnog metra od godine 1960, jednadžba (8.9-2) je ostala na snazi pri novoj definiciji metra (definiciju vidi u odlomku 8.1.2). Na taj način promjena definicije metra nije utjecala na vrijednosti oko 300000 spektroskopskih podataka. Time je ponovno uspostavljen odnos (8.9-1), tj. $Å = 10^{-10}$ m, kako je prvotno bilo i zamišljeno (vidi odlomak 8.9.1, 3), a prestale su vrijediti jednadžbe (8.9-4, 5). Odraz toga vidimo i u najnovijoj međunarodnoj standardizaciji. Tako, na primjer, ISO (Organisation Internationale de Normalisation) navodi

$$\text{ångström} = Å = 10^{-10}\,\text{m} \text{ (tačno).}$$

(Recommandation R 31, première partie: Grandeurs et unités de base du SI, 1965.)

9. Mjerenje mase, sile, težine i ubrzanja zemljine teže

Većina ljudi misli da posve jasno zna što se razumijeva pod pojmovima »masa«, »sila« i »težina«, jer o tim su fizikalnim veličinama učili u pučkoj školi, zatim u srednjoj školi, a studenti o tome ponovno uče na visokim školama. Mnogi od njih se upravo zaprepaste kad prigodom rješavanja nekog složenijeg problema gibanja, statike, preciznog mjerenja tlaka itd. iznenada ustanove da im navedeni pojmovi zapravo nisu bili do kraja razjašnjeni. Zbog toga posegnu za odloženim udžbenicima fizike, mehanike, astronomije itd. i ustanove da su u nekima od njih ti pojmovi objašnjeni ili nepotpuno, ili dvosmisleno, ili čak pogrešno.

Namjena je ovog poglavlja da na jednom mjestu skupi egzaktno tumačenje što se razumijeva pod nazivima fizikalnih veličina masa, sila i težina, te da opiše kako se u načelu obavljaju najpreciznija mjerenja tih veličina u izvanredno opremljenim metrološkim zavodima. Iz razlaganja u ovom poglavlju vidjet će se i to da je od izuzetne važnosti što preciznije poznavanje *ubrzanja zemljine teže g* na mjestu gdje se u laboratoriju nalaze mjerni uređaji. O sigurnosti poznavanja vrijednosti *g* ovisi, na primjer, preciznost živina barometra, pouzdanost reprodukcije trojne tačke vode, pouzdanost reprodukcije polazne elektromagnetske jedinice amper strujnom vagom itd. Sigurnost poznavanja *g* utječe i na preciznost utvrđivanja dinamičkih konstanti našeg Sunčeva sistema, dakle na poznavanje svijeta u kojem živimo. Svi ti razlozi potakli su nas da bit pojmova masa, sila, težina i ubrzanje zemljine teže razmotrimo gotovo u svim podrobnostima, a to znači i dosta opširno. Unatoč tome nismo se mogli upuštati u finese samih mjerenja, koja vrve duhovitostima mjernih metoda i rafiniranostima suvremene tehnologije.

9.1. Fizikalne veličine masa i sila

9.1.1. Fizikalna veličina masa. Pri mjerenju i proračunavanju duljina, kutova, površina, brzina i ubrzanja oslanjamo se na dva polazna (osnovna) pojma: na fizikalne veličine *duljina* i *vrijeme* (o duljini vidi poglavlje 8, a o vremenu poglavlje 10). Pri razmatranju *dinamičkih* pojava, tj. pri razmatranju gibanja stvarnih tijela (krutih, tekućih i plinovitih), a ne zamišljenih matematičkih tačaka (kinematika), ishodišni pojmovi »duljina« i »vrijeme« nisu dovoljni, jer njima *nismo kadri* egzaktno izraziti neke iskustvene činjenice, npr. protivljenje tjelesa promjeni gibanja, privlačno djelovanje dvaju ili više tijela itd.

Stoga se uz duljinu i vrijeme u dinamici mora upotrebljavati *još jedna* polazna (ishodišna, nezavisna, osnovna) veličina. Tu *treću* polaznu veličinu ne možemo definirati pomoću neke jednadžbe, dakle osloniti je na već poznate veličine; isto tako nismo mogli matematički definirati »duljinu« (ili »vrijeme«; vidi poglavlje 10),

već smo je uveli kao aksiomsku veličinu. Korisno je možda pri tom ponoviti da »fizikalne veličine« nisu same prirodne pojave, već naš misaoni model tih pojava, dakle atribut pojava i stvari, svojstva koja zapažamo iskustvom (vidi odsječak 1.2).

Historijska je činjenica da je za treću nezavisnu veličinu u znanost uvedena *masa* (*I. Newton*, 1642...1727). Tako je ostalo sve do današnjih dana. Nameće nam se pitanje: što je to masa? Na to pitanje ne možemo odgovoriti nikakvom strogom definicijom. Masa je naš temeljni pojam kojim obilježavamo svijet u kojem živimo. Taj pojam ne znamo objasniti nekim drugim, zornijim pojmom. O masi ljudi imaju *iskustvenu predodžbu*, netko bolju drugi lošiju.

Budući da masu ne možemo definirati drugim veličinama, načelno je, dakle, posve svejedno na koji je način uvodimo u odnose s ostalim fizikalnim veličinama. S metrološkog je stanovišta, međutim, povoljno da uvođenje mase (odnosno bilo koje nezavisne veličine) udovoljava ovim uvjetima: 1. mora postojati mogućnost što preciznijeg mjerenja mase; 2. korisno je da je to mjerenje brzo i jeftino; 3. zakonitost na kojoj se osniva mjerenje mase treba da je što univerzalnija. Tim uvjetima udovoljava *zakon o održanju impulsa*; do sada ni u jednom slučaju nije pronađeno da bi se prirodne pojave odigravale u suprotnosti s tim zakonom. A taj zakon podvrgnut je neprekidnoj kontroli u širokom rasponu djelatnosti prirodnih znanosti: od akceleratora nuklearnih čestica, u kojima se čestice ubrzavaju vrlo blizu brzini svjetla, do svemirskih brodova koji su izašli iz domašaja zemljine teže i ušli u područje gravitacije drugih planeta.

Veličina *impuls* definirana je umnoškom mase m tijela i vektora brzine $\boldsymbol{v}$ tog tijela, dakle $\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}$ (u ovom trenutku pretpostavljamo da nam je savršeno poznato što je to masa, tj. kako se manifestira njeno djelovanje, kako se mjeri itd.). Prema tome je i sam impuls $\boldsymbol{I}$ vektorska veličina, što smo istakli poludebelim slovima. Zakon o održanju impulsa (zakon o održanju težišta sistema) izražava eksperimentalnu činjenicu potvrđenu bezbroj puta: *suma impulsa svih tijela u zatvorenom sistemu je konstantna.* Matematički to možemo izraziti jednadžbom

$$\boldsymbol{I} = \sum_i \boldsymbol{I}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \text{const.} \tag{9.1-1}$$

Pod zatvorenim (izoliranim) sistemom razumijeva se skup tijela koja nisu u međusobnom djelovanju sa svojom okolinom (izvan sistema), iako tijela djeluju međusobno. Zbog toga stavak o održanju impulsa katkada glasi i ovako: *suma impulsa svih tijela je konstantna ako na njih ne djeluju vanjske sile.* Dodatni uvjet valjanosti jednadžbe (9.1-1) jest zahtjev da se brzine svih tijela mjere u odnosu prema istom referencijskom sistemu (po *Newton*u je to »inercijski sistem referencije«; definirao ga je kao bilo koji sistem što miruje ili se jednoliko giba u odnosu prema mirujućim zvijezdama).

Zatvoreni sistem tijela može se, dakako, sastojati i od *dva* tijela. Zamislimo da su se sudarila dva tijela: prvo, mase m, gibalo se prije sudara brzinom $\boldsymbol{v}$, a drugo (mase m_1) brzinom $\boldsymbol{v}_1$. Prije sudara taj sistem imao je prema jednadžbi (9.1-1) ukupan impuls $\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v} + m_1\boldsymbol{v}_1$. Nakon sudara, koji idealiziramo (nema gubitaka energije, ni otpora zraka, ni deformacija itd.), tijela su se gibala brzinama $\boldsymbol{v}'$ i $\boldsymbol{v}_1'$. Ako se prilikom sudara masa ni jednom od tijela nije promijenila, suma njihovih impulsa nakon sudara iznosi $\boldsymbol{I}' = m\boldsymbol{v}' + m_1\boldsymbol{v}_1'$. Zbog zakona (9.1-1) je $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'$, odakle dobivamo

$$m\boldsymbol{v} + m_1\boldsymbol{v}_1 = m\boldsymbol{v}' + m_1\boldsymbol{v}_1'.$$

Odavde slijedi relacija izvanredno važna za naša daljnja razmatranja sa stanovišta metrologije

$$m = m_1 \frac{v_1 - v_1'}{v' - v} . \tag{9.1-2}$$

Iz ove relacije, naime, slijedi *uputa za mjerenje mase:* 1. Odaberimo neko tijelo za *pramjeru* mase i proglasimo njegovu masu mjernom jedinicom, dakle $m_1 = [m]$. 2. Nepoznatu masu m drugog tijela možemo izračunati pomoću (9.1-2) ako smo izmjerili brzine v, v', v_1 i v_1' prije i nakon sudara tijela mase m i tijela mase m_1 odabrane za mjernu jedinicu.

Mjerenje prema opisanom načelu možemo učiniti još zornijim, ako zamislimo da je tijelo mjerene mase m prije sudara *mirovalo.* U tom slučaju (9.1-2) prelazi u oblik

$$m = [m] \frac{v_1 - v_1'}{v'} , \tag{9.1-3}$$

jer je $v = 0$, a $[m] = m_1$ jedinična masa (na primjer, masa međunarodnog prakilograma pohranjenog u Međunarodnom uredu za mjere i utege; vidi odsječak 9.3).

Veličina »masa«, koju smo ovdje uveli u mjerni postupak uspoređivanja masa, naziva se i »troma masa« ili »inertna masa«. (O »gravitacijskoj masi« vidi odlomak 9.2.7.) Izraz »trom« tačno odgovara onom svojstvu tijela koje proizlazi iz zakona (9.1-1) i njegove primjene (vidi jednadžbu 9.1-8): to je svojstvo tijelâ da se zadrže u postojećem stanju gibanja. Na primjer, automobil se giba i nakon što isključimo motor, pločica poleti tek pošto ju je palicom udario hokejaš, ali onda dugo klizi ledom, itd.

Primjer. Iz puške mase $m_p = 3\,\mathrm{kg}$ izletjelo je brzinom $v = 600\,\mathrm{m/s}$ tane mase $m = 10$ grama. Kolikom je brzinom poletjela natrag puška? Prije ispucavanja suma impulsa sistema (puška i tane) bila je jednaka nuli, jer je sistem mirovao u odnosu prema promatraču. U skladu sa zakonom o održanju impulsa (9.1-1) suma mora biti jednaka nuli i nakon ispucavanja taneta, dakle $m_p v_p + mv = 0$ (vektorske oznake možemo propustiti, jer su gibanja taneta i puške tačno suprotno usmjerena). U jednadžbi je v_p brzina puške odmah nakon ispaljivanja. Računanjem dobivamo

$$v_p = -v \frac{m}{m_p} = -600 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \frac{10\,\mathrm{g}}{3\,\mathrm{kg}} = -2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} .$$

Pri računanju smo uzeli u obzir da je kg = kilogram = 1000 g. Predznak minus upućuje na to da je puška odskočila suprotno letu taneta.

9.1.2. Univerzalnost zakona o održanju impulsa ilustrirat ćemo sa dva primjera u kojima masa m nije konstantna, već se u toku vremena t *mijenja*, dakle $m = m(t)$. Takav primjer pruža *raketna letjelica* kojoj se zbog izgaranja tekućeg goriva masa u toku leta smanjuje od početne vrijednosti m_0 do najmanje vrijednosti m_r (masa same rakete, bez goriva). Zamislimo da se u nekom trenutku t raketa giba brzinom v; u tom trenutku njena masa iznosi $m = m(t)$, pa je dakle njen impuls $I(t) = mv$. U toku diferencijala vremena dt u raketnom motoru izgori gorivo mase dm, koje napušta njen stražnji kraj brzinom u (u odnosu prema raketi); stvarna brzina izgarnih plinova je $v_1 = v - u$, tj. za u manja od brzine rakete. Zbog toga je brzina rakete povećana za dv; u trenutku $t + dt$ masa rakete iznosi, dakle, $m - dm$, a njena brzina $v + dv$.

Raketa i njeni produkti izgaranja čine zatvoren sistem za koji ćemo pretpostaviti da nije pod djelovanjem gravitacijskog polja, sila trenja itd. Ukupni impuls tog sistema u trenutku $t + \mathrm{d}t$ iznosi

$$\boldsymbol{I}(t+\mathrm{d}t) = (m - \mathrm{d}m)(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}_1 \mathrm{d}m.$$

Prema zakonu (9.1-1) vrijedi $\boldsymbol{I}(t) = \boldsymbol{I}(t+\mathrm{d}t) = \text{const}$, pa je dakle

$$m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m + m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} - \mathrm{d}m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m - \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}m.$$

Ovdje smo već uzeli u obzir relaciju $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$. Sređenjem gornje jednadžbe dobivamo

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{m}, \tag{9.1-4}$$

jer smo član drugog reda $\mathrm{d}m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}$ odbacili. Budući da je ubrzanje definirano relacijom $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ (vidi odsječak B.2.2), iz jednadžbe (9.1-4) slijedi izraz

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\frac{\boldsymbol{u}}{m}.$$

To znači da je ubrzanje rakete proporcionalno protoku goriva $m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ i brzini $\boldsymbol{u}$ (u odnosu prema raketi) kojom izgarni plinovi napuštaju raketu. Osim toga ubrzanje je obrnuto razmjerno masi m rakete; budući da se u toku vremena smanjuje masa rakete, smanjenje m također uzrokuje porast ubrzanja rakete.

Ako se raketa giba *pravcem*, vektorska jednadžba (9.1-4) može se napisati u skalarnom obliku $\mathrm{d}v = -u\,\mathrm{d}m/m$, jer je brzina u usmjerena suprotno od v. Integriramo li taj skalarni izraz, računanjem dobivamo

$$v = u \ln \frac{m_0}{m},$$

a to je poznata jednadžba reakcijske letjelice koju je godine 1903. objavio *K. E. Ciolkovskij*. Pri integriranju smo pretpostavili da je raketni motor u konstantnom režimu rada ($u = \text{const}$), te da u trenutku $t = 0$ (start) masa rakete iznosi $m_0 = m_g + m_r$; ovdje je m_g masa goriva prije starta, a m_r masa same rakete. Maksimalnu brzinu postići će raketa uz $u = \text{const}$ u trenutku kad se utroši sve gorivo. Tada je, naime, $m = m_r$, pa gornji izraz dobiva oblik $v = v_m = u \ln m_0/m_r$.

Drugi primjer univerzalnosti zakona o očuvanju impulsa (7.1-1) navodimo s područja *Einstein*ove *specijalne teorije relativnosti*. Kako znamo, prema toj teoriji masa tijela m (tzv. relativistička masa) raste s porastom brzine v njegova gibanja prema jednadžbi

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{9.1-5}$$

gdje je m_0 masa tijela u mirovanju (granični slučaj gibanja kada $v \to 0$), a c brzina svjetla. Egzaktnim eksperimentima u akceleratorima čestica uspjelo je dokazati (vidi odlomak 9.1.3) da zakon o održanju impulsa (9.1-1) vrijedi i za takva relativistička gibanja kod kojih je v vrlo blizu brzine svjetla, npr. $v = 0{,}9\,c$ i više. U takvim slučajevima treba u (9.1-1) uvrštavati relativističke mase, dakle

$$\boldsymbol{I} = \sum_i \boldsymbol{I}_i = \sum_i m\boldsymbol{v} = \sum_i \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{const}. \tag{9.1-6}$$

Ovdje je m_0 masa mirovanja ($m = m_0$ pri $v = 0$), kako smo već naglasili.

9.1.3. Fizikalna veličina sila. Ljudi imaju vrlo dobru predodžbu o fizikalnoj veličini koju nazivaju »sila«. Kad se čovjek u trku želi naglo zaustaviti, on mora uložiti znatan napor da bi savladao »silu tromosti«. Isto tako uređaji za kočenje automobila ili lokomotive moraju proizvesti znatnu »silu kočenja« da bi savladali »silu tromosti« automobila ili vlaka u gibanju. Za pokretanje tih vozila također je potrebna »sila«. Sve nabrojene sile su tzv. *dinamičke* sile; posljedica njihova djelovanja je ubrzavanje ili usporavanje tijela na koje sila djeluje, tj. promjena njegove brzine gibanja. Ako je tijelo u trenutku t imalo masu $m(t)$ i brzinu $v(t)$, ono će pod djelovanjem sile u toku vremena dt imati u trenutku $t+dt$ masu $m(t+dt)=$ $=m(t)+dm$ i brzinu $v(t+dt)=v(t)+dv$. Prema tome impuls tijela u gibanju porastao je zbog djelovanja sile u toku vremena dt za

$$dI=I(t+dt)-I(t)=(m+dm)(v+dv)-mv.$$

Ovdje smo zbog kratkoće uvrstili $m(t)=m$. Sređenjem gornjeg izraza dobivamo

$$dI=v\,dm+m\,dv=d(mv).$$

Ovu promjenu impulsa *tijela* izazvala je u toku vremena dt vanjska *sila* F, koju baš i *definiramo* uz pomoć gornjeg izraza ovako:

$$F=\frac{dI}{dt}=\frac{d}{dt}(mv). \tag{9.1-7}$$

To znači da je sila F, koja djeluje na tijelo u gibanju, jednaka derivaciji impulsa tijela po vremenu. Jednadžbu (9.1-7), koja je prvobitni oblik *Newton*ova drugog zakona, možemo napisati u obliku

$$F=\frac{d}{dt}(mv)=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}.$$

Ako je gibanje takvo da se masa tijela ne mijenja, dakle $m=\text{const}$, u gornjoj jednadžbi drugi član otpada, pa ona prelazi u najjednostavniji mogući oblik

$$F=m\frac{dv}{dt}=ma, \tag{9.1-8}$$

gdje je $a=dv/dt$ ubrzanje tijela. U tom obliku drugi *Newton*ov zakon riječima glasi: »Sila koja djeluje na tijelo u gibanju jednaka je umnošku mase tijela i ubrzanja što ga je ta sila proizvela.«

Jednadžba (9.1-8) vrijedi uz pretpostavku da je $m=\text{const}$, a to je onda kada je $v\ll c$. U tom je slučaju, naime, prema jednadžbi (9.1-5) masa tijela u gibanju m praktički jednaka njegovoj masi mirovanja m_0, jer $v^2/c^2\to 0$.

U gigantskim akceleratorima (SSSR, USA, međunarodna organizacija CERN itd.) elementarne čestice se ubrzavaju gotovo do same brzine svjetla c. Stoga se sila koja djeluje na njih mora računati pomoću univerzalne jednadžbe (9.1-7) u koju se za m stavlja relativistička masa iz (9.1-5). Na taj način se dobiva

$$F=\frac{dI}{dt}=\frac{d}{dt}(mv)=\frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{9.1-9}$$

gdje silu $F=e(E+v\times B)$ proizvodi elektromagnetsko polje. Pri tom je e elementarni naboj, E jakost električkog polja, B magnetska indukcija, a znak $\times$ predstavlja vektorski produkt.

Izračunajmo koliku kinetičku energiju W_k dobiva čestica mase mirovanja m_0, ako se u akceleratoru ubrza od početne brzine $v=0$ na brzinu v nešto manju od c. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da se čestica ubrzava u linearnom akceleratoru, da se, dakle, giba pravcem; u tom slučaju možemo odbaciti vektorske oznake. Poslužit ćemo se klasičnom definicijom prirasta energije tijela kad na njega djeluje sila (vidi odsječak B.5.1) $\mathrm{d}W_k = F\,\mathrm{d}x$; ovdje je $\mathrm{d}x$ diferencijal duljine duž koje djeluje sila F iz jednadžbe (9.1-9). Jednostavnom promjenom varijabli slijedi

$$\mathrm{d}W_k = F\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}I = v\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}v,$$

$$W_k = \int \mathrm{d}W_k = \int v\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\mathrm{d}v,$$

odakle rješavanjem integrala u granicama $v=0$, $v=v$, slijedi konačan rezultat

$$W_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 = (m-m_0)c^2 = W - W_0. \qquad (9.1\text{-}10)$$

Član W u ovoj jednadžbi nazivamo *energijom čestice*, a član $W_0 = m_0 c^2$ *energijom mirovanja* čestice. Budući da je

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots,$$

iz jednadžbe (9.1-10) slijedi izraz za *kinetičku energiju* ubrzane čestice

$$W_k = \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^4} + \ldots \qquad (9.1\text{-}11)$$

Vidimo da je prvi desni član ove jednadžbe jednak našem klasičnom izrazu za kinetičku energiju. U slučaju $v \ll c$ viši članovi doista se mogu zanemariti.

Valjanost jednadžbe (9.1-10) direktno je eksperimentalno provjerena pomoću akceleratora koji su kadri ubrzati elektrone na brzinu preko $v = 0{,}9\,c$. Brzina elektrona v može se, naime, mjeriti direktno time što se mjeri vrijeme koje je potrebno da čestica prođe poznati razmak između dva brojila. Prosječna kinetička energija čitavog roja elektrona pri toj brzini v mjeri se tako da se oni zaustave u nekom apsorberu, kojem se zatim izmjeri porast temperature. Takvim eksperimentima direktno su potvrđene jednadžbe (9.1-10, 11), a time i sve pretpostavke na temelju kojih su one izvedene.

Pri kraju ovih letimičnih razmatranja o dubokim vezama između mase, impulsa i energije vratimo se za trenutak na zakon o održanju impulsa (9.1-1). Ako na nj primijenimo izraz (9.1-7) proširen i na sile

$$\sum_i F_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i v_i,$$

za *zatvoreni sistem* tijelâ dobivamo nov zakon

$$\sum_i F_i = F_1 + F_2 + \ldots + F_i = 0,$$

jer je derivacija konstante u jednadžbi jednaka nuli. To je u stvari opći oblik *trećeg Newtonova zakona* koji za dvije sile poznajemo u obliku »akcija je jednaka reakciji«.

I *drugi Newtonov* zakon (»Tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja ako na njega ne djeluje nikakva sila«) slijedi iz naših razmatranja: ako u (9.1-8) stavimo $F=0$, slijedi $a=0$, što znači da je zbog $a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ brzina tijela konstantna, $v=\text{const}$.

Još je jedna opaska potrebna — u pogledu *terminologije*. Veličinu mv neki autori nazivaju »impuls«, a veličinu Ft također impuls (ili »impuls sile«). Druga skupina autora naziva veličinu mv »količina gibanja« (engleski: momentum), a veličinu Ft »impuls« (engl. impuls, impuls of force). Druge grupe naziva ti se autori vjerojatno drže zbog izreke »Sila je promjena impulsa u jedinici vremena«, što je analogno izreci »Ubrzanje je promjena brzine u jedinici vremena«. Budući da su obje gornje izreke pogrešne (sila je *omjer* veličine impuls i veličine vrijeme, ubrzanje je *omjer* brzine i vremena), u našim smo razmatranjima za veličine mv i Ft dosljedno upotrebljavali naziv »impuls«.

9.2. Gravitacija, težina i ubrzanje zemljine teže

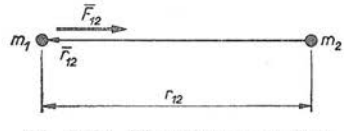
9.2.1. Newtonov zakon gravitacije. U nastojanju da pravilno periodičko gibanje planeta oko Sunca i Mjeseca oko Zemlje uklopi u svoju dinamiku, *I. Newton* je godine 1687. formulirao zakon gravitacije (zakon privlačenja svemirskih tijela): »Između svake dvije materijalne tačke djeluje privlačna sila koja je proporcionalna masama m_1 i m_2 tih tačaka, a indirektno proporcionalna kvadratu udaljenosti r među njima.« Matematički je zakon formulirao u obliku

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}, \tag{9.2-1}$$

koji u vektorskom obliku (vidi sliku A.68) možemo zabilježiti ovako

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\gamma\frac{m_1m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}. \tag{9.2-2}$$

Pri tom je $\boldsymbol{F}_{12}$ sila kojom druga materijalna tačka djeluje na prvu, $\boldsymbol{r}_{12}$ radijus-vektor koji drugu tačku povezuje s prvom, a r_{12} razmak među tačkama. Predznak minus upućuje na to da je sila $\boldsymbol{F}_{12}$ usmjerena suprotno vektoru $\boldsymbol{r}_{12}$.



Sl. A.68. Uz *Newtonov* zakon gravitacije

Newton je upotrebljavao izraz »materijalna tačka«, čime je stvarne izmjere tijela sveo na tačke u kojima se može zamisliti da je koncentrirana čitava masa tijela. Danas znamo da zakon (9.2-1) vrijedi i za tijela u obliku kugle (ili šuplje kugle), ali se pod udaljenošću r_{12} razumijeva razmak između njihovih *središta*.

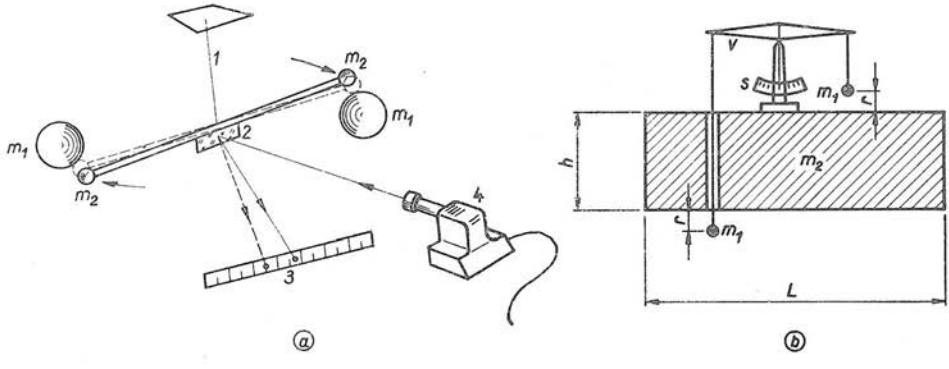
Svoj zakon (9.2-1) *Newton* je odmah verificirao na primjerima gibanja planeta oko Sunca ili Mjeseca oko Zemlje, jer je imao na raspolaganju rezultate astronomskih motrenja (periode ophoda T i udaljenosti r). Ako zamislimo da Mjesec mase m_1 kruži oko Zemlje mase m_2 s periodom ophoda T, možemo izračunati da je centrifugalna sila $F_c=m_1v^2/r$, gdje je brzina kruženja $v=2\pi r/T$, a r polumjer kružnice koju opisuje Mjesec. Prema tome je $F_c=m_1 4\pi^2 r/T^2$, a toj sili drži di-

namičku ravnotežu sila gravitacije (9.2-1). Izjednačenjem tih dviju sila slijedi $m_1 4\pi^2 r/T^2 = \gamma m_1 m_2/r^2$, odakle je

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m_2} r^3 = \text{const} \cdot r^3.$$

Time smo dobili treći zakon nebeske mehanike koji je *Kepler* otkrio davno prije *Newton*ove mehanike na temelju rezultata astronomskih motrenja.

9.2.2. Konstanta gravitacije. Iz rezultata astronomskih motrenja *Newton* nije bio kadar utvrditi vrijednost konstante gravitacije γ koja se pojavljuje u jednadžbi (9.2-1). To je prvi učinio *Cavendish* godine 1798. pomoću mjernog uređaja koji danas nazivamo *Cavendish*ovom vagom, a u jednoj je izvedbi prikazan na slici A.69a. Stvarna svemirska tijela nadomještena su u laboratoriju olovnim kuglama različitih masa. Dvije veće kugle imaju masu m_1 svaka, a svaka od dvije manje kugle ima neznatnu masu m_2. Manje kugle bile su učvršćene na prečki koja je u svojoj sredini bila ovješena o nit oko koje se prečka s kuglicama mogla zakretati. Radi preglednosti nije prikazano da se i velike kugle (m_1) nalaze na krajevima druge prečke, koja se također može zakretati oko iste osi, tj. osi koja prolazi kroz sredinu niti.



Sl. A.69. Mjerenje konstante gravitacije γ
a) Prema *Cavendish*u: *1* — žica, *2* — zrcalo, *3* — skala, *4* — izvor svjetla. b) Prema *Richards*u: *V* — vaga, *s* — skala, *h* — visina olovnog bloka, *L* — duljina bloka

Kad se sistem velikih kugala pažljivo zakrene u neposrednu blizinu sistema malih kugala, svjetlosna zraka na skali se odjednom trgne i pokaže neki otklon. Iz gibanja zrake može se izračunati ubrzanje $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ kuglica (m_1), a time i sila $F_1 = m_1 a$ koja je svaku od kuglica ubrzala (sila se može izračunati i iz torzije bažđarene niti). Sila F_1 reakcija je na silu F privlačenja između kugala m_1 i m_2 izraženu jednadžbom (9.2-1). Prema tome je $F_1 = F$, odnosno $m_1 a = \gamma m_1 m_2/r^2$, odakle slijedi

$$\gamma = \frac{a r^2}{m_2}.$$

Ovdje je r udaljenost između središta kugala m_1 i m_2 u trenutku kad je ubrzanje kuglica m_1 iznosilo a. Budući da su poznate vrijednosti svih triju veličina na desnoj strani gornje jednadžbe, lako je izračunati konstantu gravitacije.

Mjerenja konstante gravitacije zatim su ponavljana i na druge načine. Godine 1898, dakle 100 godina nakon *Cavendisha*, mjerenja prema slici A.69b (grubi prikaz) obavio je *Richards*. Dvije jednake male metalne kugle mase m_1 svaka bile su ovješene o krajeve ravnokrake polužne vage, ali na osobit način: jedna kugla m_1 visila je iznad olovnog bloka mase m_2 oko 100 tona, a druga ispod njega. Ako je duljina bloka L veća od duljine poluge vage, te ako je udaljenost r središta kugala od olovnog bloka mnogo manja od visine h, računanjem pomoću (9.2-1) dolazi se do toga da sila privlačenja (gravitacijska sila) bloka i kugala ne ovisi o r i da iznosi $F = 2\pi\gamma m_1 m_2/A$. Ovdje je A površina bloka, a m_2 njegova masa. Na lijevu kuglu sila gravitacije (privlačenje m_1 i m_2) djeluje prema gore, a na desnu prema dolje. Vaga je u takvom stanju uravnotežena, a zatim je eksperimentator narušio ravnotežu. Iz otklona kazaljke vage utvrđene su sile koje djeluju između kugala i olovnog bloka, a odavde preko navedene jednadžbe konstanta gravitacije γ.

Na temelju mnogobrojnih pokusa dobivane su sve pouzdanije vrijednosti. Danas se smatra da konstanta gravitacije iznosi

$$\gamma = 6{,}670\,(1 \pm 2{,}2 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}. \tag{9.2-3}$$

Sigurnost njena poznavanja iznosi, dakle, oko 2:1000, što je jako skromno u usporedbi s drugim prirodnim konstantama (vidi tablicu **2** u prilogu knjige).

9.2.3. Gravitacijsko polje. Privlačenja među tijelima prema jednadžbama (9.2-1 i 2) često se proučavaju i računaju pomoću *polja sila*. Smisao tog pojma ilustrira slika A.70a koja posve općenito prikazuje neko tijelo mase m_0. Ako u okolinu tijela m_0 unesemo *ispitnu česticu* posve male mase Δm, između nje i velikog tijela m_0 djelovat će gravitacijska sila

$$\Delta F = -\gamma \frac{\Delta m \cdot m_0}{r^3} r, \tag{9.2-4}$$

što je u skladu s jednadžbom (9.2-2). Do gornjeg izraza može se za tijelo m_0 bilo kojeg oblika doći tako da se ono u mislima razdijeli na sitne elemente i za svaki takav element izračuna privlačna sila prema ispitnoj čestici Δm. Vektorski zbroj tih elementarnih sila daje ΔF iz jednadžbe (9.2-4).

Premještanjem čestice Δm (sl. A.70a) od tačke do tačke prostora uokolo tijela m_0 utvrđujemo vrijednost i smjer vektora privlačne sile ΔF. Sveukupnost tih vektora ΔF nazivamo *polje sila*. Budući da je gravitacijska sila na ispitnu česticu proporcionalna njenoj masi Δm, proučavanja privlačenja tijela mogu se pojednostavniti uvođenjem pojma *gravitacijsko polje*. To polje predočeno je sveukupnošću vektora $\Delta F/\Delta m$. Ako u tom smislu jednadžbu (9.2-4) podijelimo sa Δm, dobivamo vektor

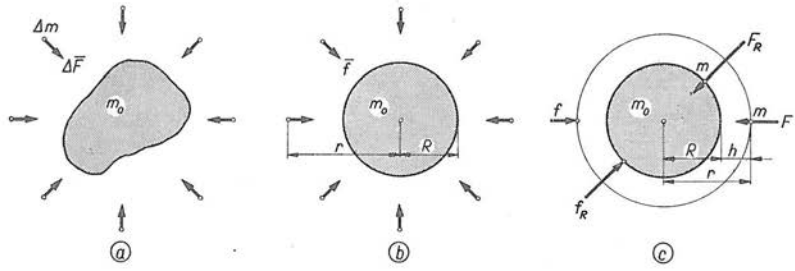
$$\mathbf{f} = \frac{\Delta F}{\Delta m}, \tag{9.2-5}$$

gdje je $\mathbf{f} = -\gamma m_0 r/r^3$. Veličinu $\mathbf{f}$ nazivamo *jakost gravitacijskog polja*, a neki je autori jednostavno zovu *gravitacija*. Korisnost pojma »gravitacijsko polje« je u tome što se na temelju poznavanja rasporeda vektora $\mathbf{f}$ uokolo tijela m_0 (sl. A.70a) može u skladu s jednadžbom (9.2-5) izračunati gravitacijska sila

$$F = m\mathbf{f}, \tag{9.2-6}$$

koja djeluje na *svako* tijelo mase m što se zatekne na mjestu gdje je gravitacija $\mathbf{f}$.

U ovom razmatranju šutke smo pretpostavili da unošenje ispitne čestice Δm nije nimalo utjecalo na razdiobu elemenata tvari velikog tijela m_0. Drugim riječima: da je masa Δm ispitnog tijela beskrajno mala u odnosu prema m_0. Isto vrijedi i za slučaj jednadžbe (9.2-6) u kojoj m predstavlja masu tijela koje je dovedeno u gravitacijsko polje f. U razmatranju smo pretpostavili još jedno: da jedino tijelo m_0 stvara gravitacijsko polje f. U stvarnosti, npr. u svemiru, postoji mnoštvo tijela (suncâ i planetâ) koja sva međusobno djeluju prema jednadžbi (9.2-1). Zbog ogrom-



Sl. A.70. Gravitacijsko polje uokolo tijela mase m_0

nih međusobnih udaljenosti ti su utjecaji doduše nezapaženi, ali teoretski oni postoje (svako sunce ima svoje gravitacijsko polje, a isto tako i svaki planet). Teorija gravitacije proučila je takav slučaj i ustanovila da vrijedi *princip superpozicije*, tj. rezultantna gravitacija jednaka je vektorskom zbroju gravitacija suncâ, planetâ i njihovih mjeseca.

Za metrologiju je od neposredne koristi i interesa gravitacijsko polje Zemlje. *Idealizirano* je taj planet prikazan na slici A.70b, tj. kao kugla mase m_0 od tvari jednake gustoće. Usporedba slika a i b pokazuje da prilikom prijelaza od tijela bilo kakvog oblika na kuglu, gravitacijsko polje prelazi u *sferno simetrično centralno polje*. Ono djeluje tako kao da je čitava masa m_0 kugle koncentrirana u jednoj tački, u *središtu* kugle. Pri tom je vektor gravitacije (jakosti gravitacijskog polja) $\mathbf{f}$ svud uokolo kugle usmjeren prema njenom centru, kako je prikazano na slici A.70b. Stoga umjesto vektorske jednadžbe (9.2-4) možemo upotrebljavati njen skalarni oblik $\Delta F = \gamma \Delta m m_0/r^2$, gdje je r udaljenost između središta kugle i bilo koje tačke prostora *izvan* kugle. Vrijednost gravitacije na udaljenosti r od središta, prema tome, iznosi

$$f = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \gamma \frac{m_0}{r^2} = \frac{\text{const}}{r^2} = \frac{C}{r^2}, \tag{9.2-7}$$

tj. pada s kvadratom udaljenosti od središta kugle.

Korisno je izračunati kako se f idealizirane zemaljske kugle mijenja u ovisnosti o udaljenosti r promatrane tačke gravitacijskog polja od *središta* Zemlje. Derivacija f iz jednadžbe (9.2-7) po r daje $\mathrm{d}f/\mathrm{d}r = -2\,C/r^3$. Označimo li gravitaciju na samoj površini Zemlje ($r = R = 6371$ km) sa $f = f_R$, iz (9.2-7) dobivamo $C = R^2 f_R$, što uvrštenjem u izraz $\mathrm{d}f/\mathrm{d}r = -2\,C/r^3$ daje

$$\frac{\mathrm{d}f}{f_R} = -\frac{R^2}{r^2}\,\frac{2\,\mathrm{d}r}{r}.$$

Budući da je polumjer Zemlje $R = 6{,}371 \cdot 10^6$ m vrlo velik u odnosu prema visini $h = r - R$ iznad Zemlje u kojoj živimo i letimo, diferencijal $\mathrm{d}r$ u gornjoj jednadžbi

možemo zamijeniti sa h (sl. A.70c). Istodobno možemo uvrstiti $r = R + h$, pa za $h \ll R$ slijedi

$$\frac{\Delta f}{f_R} = \frac{2}{(1 + h/R)^2 (1 + R/h)} \approx -\frac{2h}{R}. \tag{9.2-8}$$

Na primjer, za $h = 1000$ m računanjem dobivamo $\Delta f/f_R = -3{,}1 \cdot 10^{-4} = -0{,}03\,\%$, tj. gravitacija u visini 1 kilometar za 0,03 % je manja negoli na površini Zemlje.

9.2.4. Težina tijela. U nastavku naših razmatranja o privlačenju tijela mase m i Zemlje mase m_0 zadržat ćemo i nadalje *idealiziranu* sliku Zemlje: to je ogromna pravilna *kugla* ispunjena tvari konstantne gustoće pa su gravitacija f i gravitacijska sila $F = mf = Cm/r^2$ (vidi odlomak 9.2.3) na svakom mjestu na zemaljskoj površini i povrh nje usmjereni prema središtu Zemlje (sl. A.70b, c). Toj slici dodat ćemo činjenicu da se Zemlja *vrti oko svoje osi*. Iako je rotancija (kutna brzina; vidi odsječke B.2.2. i 2.5) ω Zemlje malena, jer ona iznosi samo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{86164\,\mathrm{s}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

($T = 1$ dan; za to vrijeme Zemlja se jedanput okrene oko svoje osi), posljedice te vrtnje ipak su znatne. Taj utjecaj razjasnit ćemo uz pomoć slike A.71a, na kojoj je nacrtana idealizirana kugla zemaljska. Na površini Zemlje, dakle na udaljenosti $R = 6371$ km od njena središta, zamišljamo da se nalazi tijelo mase m. To tijelo miruje u odnosu na Zemlju, a to znači da se jednoliko giba kružnicom polumjera ρ zajedno sa Zemljom (zajedno sa Zemljom giba se i njena atmosfera).

Kružna vrtnja tijela mase m izaziva centrifugalnu silu $F_{c\varphi}$ koja djeluje u ravnini vrtnje, a usmjerena je tako da nastoji odalečiti tijelo m od Zemlje (sl. A.71a). Vrijednost te sile iznosi

$$F_{c\varphi} = m\omega^2\rho = m\omega^2 R\cos\varphi = F_{c0}\cos\varphi, \tag{9.2-9}$$

gdje je $F_{c0} = m\omega^2 R$. Indeks φ uz $F_{c\varphi}$ upućuje, dakle, na to da je to vrijednost centrifugalne sile na onom mjestu (krugu) zemaljske površine čija spojnica sa središtem zatvara kut φ prema ekvatoru e. Prema tome na tijelo m djeluju dvije sile: gravitacijska sila $\boldsymbol{F}_R$ iz jednadžbi (9.2-2, 6), i centrifugalna sila $\boldsymbol{F}_{c\varphi}$ iz jednadžbe (9.2-9). Rezultantu tih dviju sila

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}_R + \boldsymbol{F}_{c\varphi}, \tag{9.2-10}$$

nazivamo *težina tijela* (upotrebljava se i naziv »sila teže«). Iz paralelograma na slici A.71 vidi se da rezultanta silâ $\boldsymbol{F}_R$ i $\boldsymbol{F}_{c\varphi}$, dakle težina $\boldsymbol{G}$ pritišće na površinu Zemlje, odnosno na neku podlogu (toranj, most, pod stana, stol itd.) koja je kruto vezana sa Zemljom. Zbog toga se težina $\boldsymbol{G}$ definira rečenicom:

> Težina tijela koje miruje na nekom mjestu Zemlje jest sila kojom to tijelo u zrakopraznom prostoru pritišće na svoju podlogu.

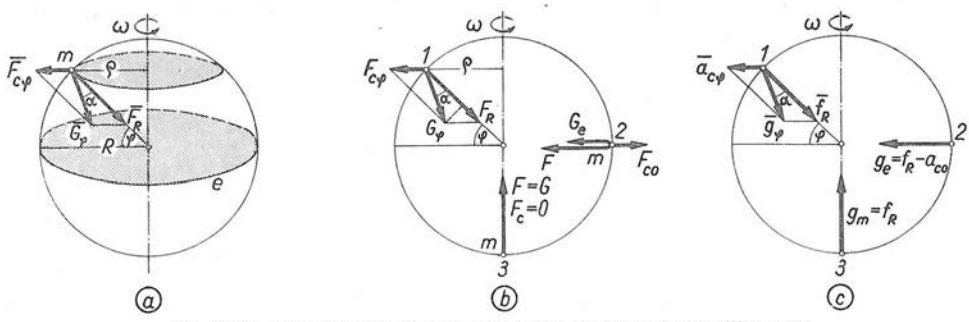
Uvođenje »zrakopraznog prostora« u ovu definiciju uzrokovano je načinom najpreciznijeg mjerenja težine putem mjerenja ubrzanja zemljine teže (vidi odsječke 9.4, 5).

Vektorske oznake iz jednadžbe (9.2-10) napustit ćemo u daljnjem razmatranju u kojem ćemo najprije utvrditi kako ovisi (skalarna) vrijednost težine G tijela mase m o položaju na zemaljskoj kugli. U tu svrhu dovest ćemo težinu u ovisnost

o kutu φ što ga spojnica tijela m i središta Zemlje čini s ravninom okomitom na os vrtnje (sl. A.71a). Pri tom su nam potrebne dodatne, preciznije oznake: sa G_φ označujemo *mjesnu težinu*, a sa α kut koji zatvaraju vektor gravitacijske sile F_R, koja je na udaljenosti R od središta konstantna za svaki φ, i vektor mjesne težine G_φ. Iz trokuta sila na slikama A.71a, b proizlazi

$$G_\varphi \sin\alpha = F_{c\varphi} \sin\varphi = F_{c0} \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$G_\varphi \cos\alpha = F_R - F_{c\varphi} \cos\varphi = F_R - F_{c0} \cos^2\varphi.$$



Sl. A.71. Uz objašnjenje pojmova težina i ubrzanje zemljine teže

Već smo prije izračunali da je $F_{c0} = m\omega^2 R$, gdje je približno $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m. Ako podijelimo gornje dvije jednadžbe, dobivamo

$$G_\varphi = \frac{1}{\cos\alpha}(F_R - F_{c0}\cos^2\varphi) = F_R - F_{c0}\cos^2\varphi. \qquad (9.2\text{-}11)$$

Ovdje smo u nastavku u stvari napisali $\cos\alpha = 1$. Da to smijemo, dokazat će nam ovaj proračun. Podjelom gornjih dviju jednadžbi možemo dobiti

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{K - \cos^2\varphi},$$

gdje je $K = F_R/F_{c0} = \text{const}$. Mjerenjem se može ustanoviti da je približno $K = 288$. Budući da $\cos^2\varphi$ može postići maksimalnu vrijednost 1, to je očito da $\operatorname{tg}\alpha$ postiže najveću vrijednost približno kod onog kuta φ kod kojeg je umnožak $\sin\varphi \cdot \cos\varphi$ maksimalan, a to je $\varphi = \pi/4\,\text{rad} = 45°$. Pri tom kutu je α maksimalan, tj.

$$\alpha = \alpha_m = \frac{1}{2(288 - 0{,}5)} = 1{,}74 \cdot 10^{-3}\,\text{rad} \approx 6',$$

tj. maksimalni kut između F_R i G_φ iznosi oko 6 kutnih minuta. Budući da razvoj funkcije cosinus u red glasi $\cos\alpha = 1 - \alpha^2/2 + \alpha^4/24 - \ldots$, to je očito da cosinus maksimalnog kuta α_m iznosi najmanje

$$\cos\alpha_m = 1 - 0{,}5\,(1{,}74 \cdot 10^{-3})^2 = 1 - 1{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}9999985.$$

Za sve druge kutove φ, različite od 45° i njegovih cjelobrojnih višekratnika, jest $\alpha < \alpha_m$, pa je $\cos\alpha_m < \cos\alpha < 1$, dakle $\cos\alpha$ još bliži jedinici.

Beznačajna vrijednost kuta α dokazuje da se vektor sile gravitacije F_R i vektor težine G_φ *praktički podudaraju* u svom smjeru djelovanja (sl. A.71a). Drukčije je s vrijednošću (apsolutnim iznosom) mjesne težine G_φ; tu je razlika $F_R - G_\varphi$ zamjetna u metrološkom smislu, što ćemo istražiti uz pomoć jednadžbe (9.2-11) i slike A.71b. U njoj tačka *1* prikazuje *općeniti* ($0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$) položaj tijela mase m na površini Zemlje. Budući da je $K = F_R/F_{co} = \text{const}$ ($= 288$), za taj općeniti slučaj izraz (9.2-11) možemo napisati u obliku

$$G_\varphi = F_R\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{K}\right). \qquad (9.2\text{-}12)$$

Zamislimo sada da se tijelo m nalazi u bilo kojoj tački *2* na *ekvatoru* (sl. A.71b). U tom slučaju je $\varphi = 0$ ili π, pa je stoga $\cos\varphi = 1$ ili -1, a $\cos^2\varphi = 1$. U tom položaju težina tijela mase m ima *najmanju* moguću vrijednost

$$G_e = F_R\,(1 - 1/K). \qquad (\text{za } \varphi = 0;\ \pi)$$

Maksimalnu vrijednost težina G_φ tijela mase m postiže na *polovima* Zemlje

$$G_m = F_R = m f_R, \qquad (\text{za } \varphi = \pi/2;\ 3\pi/2)$$

gdje je f_R gravitacija izražena jednadžbom (9.2-7) u koju je uvršteno $r = R =$ = polumjer Zemlje.

Relativna razlika između maksimalne (na polu) i minimalne (na ekvatoru) težine istog tijela iznosi približno

$$\frac{G_m - G_e}{G_e} = \frac{1}{K-1} = \frac{1}{287} = 3{,}48 \cdot 10^{-3} \approx 3{,}5\,‰,$$

tj. oko 3,5 promila. Napominjemo da čitavo to razmatranje i dobiveni rezultati vrijede uz pretpostavku da je Zemlja *idealna kugla*. U stvarnosti nije tako, već je Zemlja nalik na rotacijski elipsoid spljošten na polovima. Zbog toga se rezultati stvarnih mjerenja G_φ u stanovitoj mjeri razlikuju od ovdje izračunatih (vidi kraj odlomka 9.2.6). Unatoč tome opširno raspravljanje idealizirane slike je potrebno, jer se samo pomoću nje može steći nedvosmisleno razumijevanje što zapravo znače pojmovi »težina« i neke druge veličine koje nisu važne samo za metrologiju već i za uobičajene djelatnosti u trgovini, tehnici i znanosti.

9.2.5. Ubrzanje zemljine teže. Za sve životne djelatnosti ljudi korisno je uvođenje *omjera* mjesne težine G_φ i mase m tijela. U tu svrhu jednadžbu (9.2-12) pišemo u obliku

$$g_\varphi = \frac{G_\varphi}{m} = f_R\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{K}\right). \qquad (9.2\text{-}13)$$

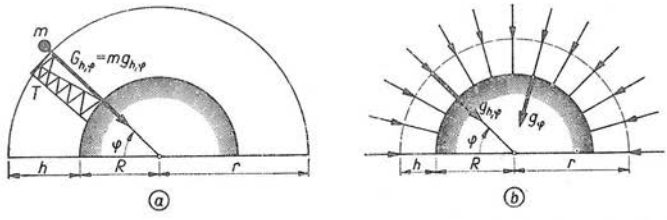
Veličinu g_φ nazivamo *ubrzanje zemljine teže* ili preciznije »mjesno ubrzanje zemljine teže«. To je u stvari *vektorska* veličina $\boldsymbol{g}_\varphi = \boldsymbol{G}_\varphi/m$, gdje je $\boldsymbol{G}_\varphi$ vektor težine definiran jednadžbom (9.2-10). Vektor $\boldsymbol{g}_\varphi$ zatvara s vektorom gravitacije $\boldsymbol{f}_R$ (vidi sliku A.71c) onaj isti kut α za koji smo u odlomku 9.2.4 utvrdili da je toliko malen da se vektori $\boldsymbol{G}_\varphi$ i $\boldsymbol{F}_R$ praktički podudaraju u svom smjeru djelovanja. Isto, dakako, vrijedi i za vektore gravitacije i ubrzanja zemljine teže, jer je $m = G_\varphi/g_\varphi = F_R/f_R$. Stoga ćemo u nastavku smatrati da je i vektor ubrzanja zemljine teže $\boldsymbol{g}_\varphi$ praktički usmjeren prema središtu Zemlje, dakle jednako kao i vektor gravitacije $\boldsymbol{f}$.

Jednadžbu (9.2-13) možemo bez daljnjega napisati i u obliku

$$G_\varphi = m\, g_\varphi \tag{9.2-14}$$

koja se dade opisati rečenicom: *Težina tijela jednaka je umnošku mase tijela m i ubrzanja zemljine teže* g_φ. Jednadžba (9.2-14) identična je s jednadžbom (9.1-8) kojom smo u odlomku 9.1.3 definirali fizikalnu veličinu »sila« u slučaju kada je $m = \text{const}$. Prema tome je doista $a = g_\varphi$, tj. ubrzanje kojim težina (sila) G_φ ubrzava tijelo mase m u smjeru prema središtu Zemlje. Verifikaciju toga doživljavamo svakodnevno: ako iz ruku ispustimo ili nam ispadne neki predmet, on poleti prema tlu! Veličinu g_φ lako mjerimo, u načelu mjerenjem dubine pada i trajanja tog (slobodnog) pada. Stvarne metode mjerenja g_φ opisane su u odsječcima 9.4, 5. Iz jednadžbe (9.2-14) slijedi i temeljni princip mjerenja težine G_φ, tj. sile kojom tijelo mase m pritišće na Zemlju: posebno se izmjeri masa m (vidi odsječak 9.3), a posebno ubrzanje zemljine teže g_φ; njihov umnožak daje težinu G_φ tog tijela na mjestu gdje je mjerenje obavljeno.

U definiciji fizikalne veličine »težina« (vidi odlomak 9.2.4) stoji da je to ona sila kojom tijelo pritišće na svoju *podlogu*. Ta podloga može biti zemlja u doslovnom smislu te riječi, a može biti i konzola nekog čeličnog tornja T što smo ga nacrtali na slici A.72a: tijelo mase m miruje u odnosu prema tornju, a zajedno s njim i samom Zemljom okreće se oko zemljine osi. Prema tome sva dosadašnja izlaganja o težini i o ubrzanju zemljine teže vrijede i za tijela koja se nalaze iznad površine Zemlje, ali su s njom kruto povezana. Budući da toranj može biti viši ili niži, korisno je veličinu g_φ znati u raznim visinama h iznad površine Zemlje ($g_{h,\varphi}$). Pri tom se pod »površinom« stvarne Zemlje razumijeva *razina mora*. Veličina »ubrzanje sile teže« $g_{h,\varphi}$ dobiva smisao »ubrzanja« $g_{h,\varphi} = \mathrm{d}v_\varphi/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2h_\varphi/\mathrm{d}t^2$ u duhu *Newton*ove dinamike, ako zamislimo da se konzola tornja na slici A.72a slomila (ili smo je izmakli ispod tijela mase m), pa tijelo slobodno pada duž visine h rastućom brzinom $v_{h,\varphi} = g_{h,\varphi}\, t$ (vrijede zakoni jednoliko ubrzanog gibanja ako nema nikakvih otpora).



Sl. A.72. Ubrzanje teže iznad površine Zemlje (razine mora)

Za visinu h iznad Zemlje umjesto izraza (9.2-13) pišemo $g_{h,\varphi} = f\,(1 - \cos^2\varphi/K)$, gdje je prema jednadžbi (9.2-7) $f = C/r^2$, a $r = R + h$. Uz pomoć tih jednadžbi i ovisnosti $\mathrm{d}f/\mathrm{d}r = -2\,C/r^3$ (vidi kraj odlomka 9.2.3) dobivamo približnu ovisnost

$$g_{h,\varphi} = g_\varphi - 2\,h/R. \tag{9.2-15}$$

Ovdje $g_{h,\varphi}$ označuje ubrzanje teže na visini h iznad Zemlje, g_φ ubrzanje na površini Zemlje (razini mora), h visinu iznad te razine, a $R = 6371$ kilometar srednji polumjer Zemlje (sl. A.72). Skup vektora $g_{h,\varphi}$ nazivamo *polje ubrzanja zemljine teže*. Ono je, naravno, potpuno nalik na polje gravitacije (usporedi sliku A.72b sa slikom A.70c).

Smatramo korisnim da se u vezi s veličinom g osvrnemo na terminologiju na hrvatskosrpskom jeziku. Naziv veličine g nije ujednačen, pa tako u raznih autora uglavnom nalazimo ova tri termina: »ubrzanje sile teže«, »ubrzanje zemljine teže« i »ubrzanje pri slobodnom padu«. Neujednačenost terminologije osjeća se i u nekim drugim jezicima, što nam pokazuje ovaj pregled:

slovenski: zemeljski pospešek, češki: tíhové zrychlení,
poljski: przyspieszenie ziemskie,
ruski: uskorenije sili tjažesti (uskorenije svobodnova padanja),
francuski: l'accélération de la pesanteur,
engleski: acceleration of gravity (acceleration of free fall),
njemački: Fallbeschleunigung.

Fizikalni sadržaj navedenih triju hrvatskosrpskih termina i usporedba s nazivima na stranim jezicima (naročito slavenskima) uvjerila nas je da je najprikladniji termin »ubrzanje zemljine teže«. Taj izraz skraćujemo u »ubrzanje teže« ako se g učestalo pojavljuje u susjednim rečenicama, jer je u takvim slučajevima posve jasno da se radi o g Zemlje.

9.2.6. Stvarno ubrzanje zemljine teže. U svim dosadašnjim razmatranjima pretpostavljali smo da je Zemlja idealna *kugla*. Istraživanja su tokom stoljeća pokazala da je Zemlja u stvari *rotacijski elipsoid* (sferoid), tj. kugla (blago) spljoštena na polovima. Prema *A. Berroth*u duljina veće osi iznosi oko $a = 6378{,}38$ km, a duljina manje $b = 6356{,}9$ km, dok je dinamička spljoštenost $3{,}2794 \cdot 10^{-3}$.

Mnogi su autori na temelju brojnih izmjerenih podataka o Zemlji izvodili formule za izračunavanje ubrzanja zemljine teže u ovisnosti o geografskoj širini φ (kut između ekvatorske ravnine i spojnice promatrane tačke sa središtem Zemlje) i geografskoj duljini λ (kut što ga promatrana tačka na svojoj meridijanskoj plohi zatvara s plohom meridijana koji prolazi kroz mjesto Greenwich u Engleskoj). Na primjer, International Union of Geodesy and Geophysics prihvatila je godine 1930. formulu za proračunavanje »teoretskog ubrzanja zemljine teže« na *razini mora*:

$$\frac{g}{\mathrm{m/s^2}} = 9{,}806\,322\,72 - 2{,}586\,145 \cdot 10^{-2} \cos 2\varphi + 2{,}878 \cdot 10^{-5} \cos 4\varphi - 4 \cdot 10^{-8} \cos 6\varphi .$$

Iz ove formule slijede vrijednosti za ekvator, $\varphi = 45°$ i za polove:

$$g_e = 9{,}780\,49 \ \mathrm{m/s^2}, \quad g_{45°} = 9{,}806\,293\,94 \ \mathrm{m/s^2}, \quad g_p = 9{,}832\,212\,99 \ \mathrm{m/s^2}.$$

Godine 1943. *Berroth* je izveo formulu koja je uzela u obzir i geografsku duljinu

$$\frac{g}{\mathrm{m/s^2}} = 9{,}780\,507 [1 + 5{,}292 \cdot 10^{-3} \sin^2 \varphi + 2{,}3 \cdot 10^{-5} \cos 2(\lambda + 21°) \cos^2 \varphi].$$

Pet godina kasnije *H. Jeffreys* predložio je na temelju svojih opažanja novu formulu:

$$\frac{g}{\mathrm{m/s^2}} = (9{,}780\,373 \pm 2{,}3 \cdot 10^{-3}) [1 + (5{,}2891 \pm 4{,}1 \cdot 10^{-6}) \cdot \sin^2 \varphi - 5{,}9 \cdot 10^{-6} \sin^2 2\varphi].$$

Sve ove i niz drugih formula baziraju se na tzv. »potsdamskoj vrijednosti« ubrzanja zemljine teže (vidi odsječak 9.4) i tzv. *Bouguer*ovoj redukciji ubrzanja teže na razinu mora. U novije vrijeme utvrđeno je, međutim, da je potsdamska vrijednost *pogrešna* za oko $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ m/s² (vidi kraj odlomka 9.4.4).

Takva pogreška u ishodištu proračuna lako se popravi, no za *vrhunsku* metrologiju navedene »teoretske formule« uopće nisu od koristi, jer ona mora poznavati mjesno $g_{h,\varphi}$ sa znatno većom pouzdanošću nego što je mogu pružiti takve formule. Osim toga, $g_{h,\varphi}$ ne ovisi samo o h, φ, λ, razmještaju zemaljske tvari i njenoj gustoći, spljoštenosti, elastičnim deformacijama, prisiljenim titranjima, plimi i oseki itd., već i o uzrocima za koje danas još ne znamo ili koji će se u budućnosti tek pojaviti. Zbog toga je za vrhunsku metrologiju jedini izlaz što preciznije *direktno mjerenje* mjesnog ubrzanja zemljine teže. Jedino se tako može ustanoviti i to da li se, i kako se, u toku vremena mijenja g na istom mjestu, dakle ovisnost $g = g(h, \varphi, \lambda, t)$. U tom smislu danas se ulažu ogromni napori koji su letimično opisani u odsječku 9.5.

9.2.7. Troma i gravitacijska masa. Neki autori smatraju da je »gravitacijska masa« (ona koja ulazi u zakon gravitacije; vidi odlomak 9.2.1) različita veličina od »trome mase« m, koju smo uveli u odlomku 9.1.1 i s njom računali sve do sada. Iz *Newton*ovih zakona dinamike, naime, ne proizlazi da sva tijela treba da padaju na Zemlju s jednakim ubrzanjem, kako su to pokazali glasoviti *Galile*jevi pokusi.

Stoga se svojedobno nije postavljalo samo pitanje da li su troma (m) i gravitacijska masa (m') proporcionalne ili jednake, već i pitanje: ne postoji li neproporcionalnost između ovih dviju vrsta masa (svojstava tijela!). Stoga je godine 1890. *Eötvös* izvršio pokuse kojima bi s preciznošću $1:10^8$ mogao utvrditi odstupanje od proporcionalnosti $m/m' = \text{const}$ za različite tvari. Kasnije su pokusi ponovljeni s još većom preciznošću, ali je uvijek utvrđena proporcionalnost.

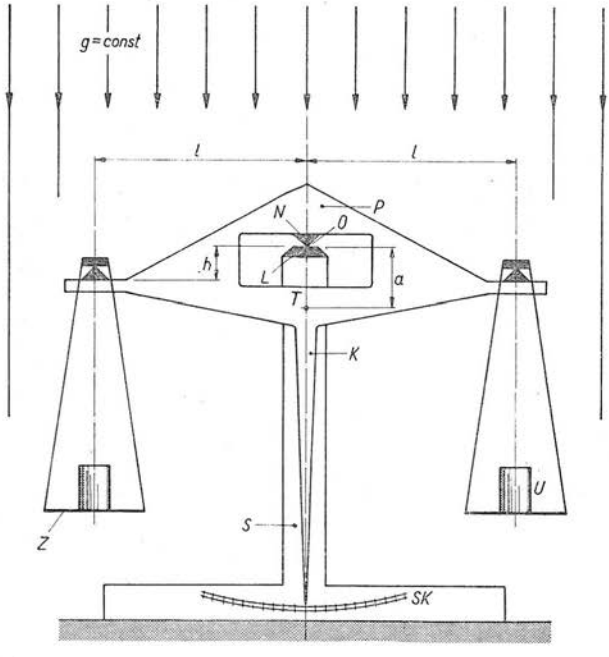
Za primjenu zakona gravitacije i zakona dinamike posve je svejedno da li su m i m' jednake ili samo proporcionalne veličine, jer u oba slučaja vrijede sve zakonitosti koje smo u odsječku 9.2 izveli uz pretpostavku $m = m'$. Prema tome pitanje proporcionalnosti ili jednakosti tih masa uopće ne utječe na metrologiju. Uzgred spomenimo da je postulat o jednakosti trome i gravitacijske mase polazište *Einstein*ove opće teorije relativnosti.

9.3. Mjerenje mase i sile. Pramjera i jedinica mase kilogram

9.3.1. Načelo mjerenja mase vaganjem. Posve opće načelo uspoređivanja masa opisali smo u odlomku 9.1.1 i zabilježili ga jednadžbama (9.1-2, 3) koje odražuju zakon o održanju impulsa. U polju ubrzanja zemljine teže g_φ (odlomci 9.2.5, 6) taj se zakon može svesti na *zakon momenata sila* čija je primjena u *homogenom* polju sa $g_\varphi = g = \text{const}$ izvanredno jednostavna. Uređaj za najpreciznija uspoređivanja masa (vaga) reda vrijednosti 1 kg zauzima, naime, tlocrtnu površinu maksimalnih izmjera 1 m × 0,2 m. Ako dulju stranicu (1 m) uređaja usmjerimo tako da leži duž zemaljske paralele, razlike u g_φ teoretski uopće neće biti. Ako ga pak montiramo tako da leži duž meridijana, maksimalna promjena omjera $\Delta g/g_\varphi$ po jedinici duljine meridijana iznosit će oko 10^{-9}/m (od ekvatora do pola omjer $\Delta g/g$ iznosi oko $5 \cdot 10^{-3}$; budući da je taj omjer nastao na duljini $\pi R/4 \approx 5 \cdot 10^6$ m, to je prosječna promjena omjera $\Delta g/g$ po jedinici duljine meridijana oko $5 \cdot 10^{-3}/5 \cdot 10^6$ m $= 10^{-9}$/m). Prema tome za ispravno orijentiran mjerni uređaj smijemo pretpostaviti da se nalazi u *posve homogenom* polju ubrzanja zemljine teže $g = \text{const}$.

Konstrukcija najpreciznijih vaga svodi se u načelu na sliku A.73. U homogenom polju ubrzanja zemljine teže g nalazi se čvrsta poluga P koja je tako konstruirana da se teoretski uopće ne savija pod djelovanjem težine utega U, zdjelice

Z i njena pribora. Poluga se može njihati oko okretišta O koje se sastoji od prizmatičnog noža N i ležaja L. Nož je izrađen od dragog kamena (ahata) tako da ima oštar brid, a ležaj je ravna ispolirana ploha od čelika ili dragog kamena. Na isto takve kombinacije noža i ležaja ovješene su i zdjelice Z na kojima se nalaze utezi U. Na slici A.73 vaga je nacrtana u stanju kada su mase predmeta ovješenih o lijevi i desni krak vage međusobno jednake, pa se položaj kazaljke (igle) K podudara sa smjerom ubrzanja zemljine teže g. Budući da se okretište poluge O nalazi za udaljenost $a > 0$ iznad njena težišta T, poluga će se nalaziti u stabilnoj ravnoteži i u slučaju kad je



Sl. A.73. Načelo konstrukcije precizne ravnokrake vage. S — stalak, Z — zdjelice, U — utezi, P — poluga, O — okretište poluge, K — kazaljka kruto učvršćena na polugu, T — težište poluge, N — prizmatični nož od dragog kamena, L — ležaj od ispoliranog čelika ili dragog kamena, SK — skala kruto učvršćena na stalak

kazaljka K otklonjena od vertikale, tj. ako je težina predmeta ovješenih o jedan krak vage veća od težine predmeta ovješenih o drugi krak.

Kvalitetu vage obilježava nekoliko karakterističnih veličina, npr. osjetljivost, stabilnost, stalnost itd. Ovdje ćemo podrobnije razmotriti *osjetljivost* ω vage, koju je već godine 1747. definirao *Euler*. Polugu P vage iz slike A.73 možemo zamisliti u obliku savršeno krutog tijela P (sl. A.74a) visine h na čijim donjim krajevima djeluju jednake težine $G = mg$. Pri tom je m ukupna masa utega, zdjelice i njena pribora, dakle ukupna masa svih predmeta koji opterećuju svaki od krakova vage. I poluga ima svoju masu m_0, a težište T poluge nalazi se tačno ispod okretišta O, ako se poluga nalazi u vodoravnom položaju (okomitom na smjer djelovanja g). Pretpostavljamo da je vaga *ravnokraka*, što znači da su lijevi i desni krak vage, lijevo i desno računajući od O, jednako dugački. Za slučaj slike A.74a su momenti težina lijevog i desnog kraka $M = Gl = mgl$ međusobno jednaki i suprotno usmjereni, a težina poluge $G_0 = m_0 g$ ne proizvodi nikakav moment u odnosu prema O.

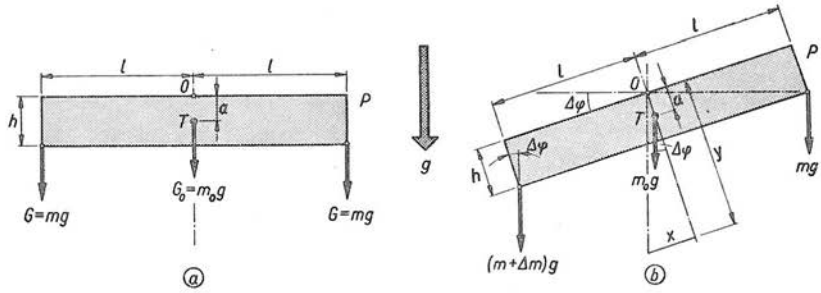
Sada zamislimo da smo na lijevu zdjelicu stavili sasvim malen uteg poznate mase Δm. Uteg ima toliko malenu masu da jedva primjetno izvodi polugu iz vodoravnog položaja, što se može očitati na skali SK (sl. A.73). Budući da je poluga vage u stvari njihalo, ona će se niz puta zanjihati prije nego što se smiri u položaju

koji je za kut $\Delta\varphi$ odmaknut od horizontale (sl. A.74b). U tom položaju s lijeve strane okretišta na polugu djeluje moment sile $G = mg$ (težine)

$$M_1 = (m + \Delta m)\, g\, (l \cos \Delta\varphi - h \sin \Delta\varphi),$$

a s desne strane zbroj momenata težine $G = mg$ desne zdjelice (uključivši uteg, zdjelicu i pribor) i težine $G_0 = m_0 g$ same poluge

$$M_2 = mg\, (l \cos \Delta\varphi + h \sin \Delta\varphi) + m_0 g\, a \sin \Delta\varphi.$$



Sl. A.74. Uz definiranje osjetljivosti ravnokrake polužne vage

U položaju kose ravnoteže (sl. A.74b) vrijedi $M_1 = M_2$, odakle uvrštenjem izvedenih jednadžbi dobivamo

$$\Delta m\, l = (2\, mh + m_0 a) \operatorname{tg} \Delta\varphi.$$

Uz pomoć ove jednadžbe možemo izračunati *osjetljivost vage*

$$\omega = \frac{\operatorname{tg} \Delta\varphi}{\Delta m} = \frac{l}{2mh + m_0 a}, \tag{9.3-1}$$

koja je za stanovitu vagu *konstanta*, ako se njome uspoređuju mase bliske vrijednosti m (sa m smo na početku ovog izvođenja definirali ukupnu masu jednog utega, zdjelice i njena pribora).

Iz gornjih izlaganja se vidi da takvim vagama utvrđujemo *razliku masa* dvaju utega. Ako na jednu zdjelicu stavimo uteg poznate mase m_1 (npr. prakilogram; vidi odlomak 9.3.3), a na drugu zdjelicu uteg nepoznate mase m_2, kazaljka vage će se otkloniti za kut $\Delta\varphi_1$. Budući da je $\omega = \text{const}$ (m_1 i m_2 vrlo su bliske vrijednosti m kojom smo utvrdili ω), masa m_2 mjerenog tijela iznosi

$$m_2 = m_1 + \Delta m_1 = m_1 + \frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \Delta\varphi_1, \tag{9.3-2}$$

jer je prema definiciji osjetljivosti vage $\omega = \operatorname{tg} \Delta\varphi / \Delta m = \operatorname{tg} \Delta\varphi_1 / \Delta m_1$. Tangens kuta otklona $\Delta\varphi_1$ može se očitati mjerenjem pravca (luka) x i duljine kazaljke y (usporedi slike A.74b i A.73).

Budući da je član $2\,mh$ u jednadžbi (9.3-1) znatno manji od umnoška $m_0 a$ (uglavnom zbog neznatne duljine h; vidi sl. A.73), možemo ga u grubom približenju zanemariti. U tom slučaju izraz (9.3-1) dobiva oblik $\omega \approx l/(m_0 a)$, odakle se vidi da je osjetljivost vage to veća što je poluga vage dulja. No masa poluge m_0

također ovisi o duljini poluge l, pa se stoga precizne vage konstruiraju tako da omjer m_0/l i udaljenost a (razmak između okretišta O i težišta T poluge) budu što manji. Pri tom se mora održati velika krutost poluge kako pri vaganju ne bi nastale zamjetne pogreške zbog savijanja poluge, a to je suprotno zahtjevu što manje vrijednosti m_0/l. Pronalaženjem najpovoljnijih rješenja, dakle usavršavanjem konstrukcije i tehnologije izrade vaga, bave se zbog toga već stoljećima vodeći fizičari i inženjeri. Oni su pri tom postigli zavidne uspjehe, tj. izvanredne preciznosti pri uspoređivanju masa (vidi odlomak 9.3.2).

Druga karakteristična veličina ravnokrakih polužnih vaga je *stabilnost*. To je svojstvo vage da se njena poluga automatski vraća u prvobitni stabilni položaj ako smo je iz njega izveli. Stabilnost ovisi o momentu sila koji stvarno izvodi zakretanje poluge, a to je približno $\Delta M = M_2 - M_1 = (m_0 g a + 2mgh) \sin \Delta\varphi$, jer smo ostatak $\Delta m\, g(h \sin \Delta\varphi - l \cos \Delta\varphi)$ zanemarili. Što je ΔM veće, to je stabilnost veća, ali se time smanjuje osjetljivost, jer se $\Delta M/g$ nalazi u nazivniku jednadžbe (9.3-1). U vage sa $h = 0$ stabilnost ovisi samo o masi poluge m_0 i razmaku a, dok će pri $h < 0$ vaga biti stabilna ako je razlika $m_0 a - 2\, mh$ pozitivna. U protivnom slučaju vaga će se nalaziti u nestabilnoj ravnoteži; stanje $m_0 a = 2\, mh$ nedopustivo je za vage.

Treća važna karakteristična veličina je *stalnost* vage. Pod time se razumijeva podudaranje položaja ravnoteže pri ponovljenom mjerenju istih utega uz jednake vanjske uvjete. Glavni uzrok nestalnosti vaga je promjena momenta sila koji djeluje na polugu vage. Pri svakom novom dodiru prizmatičnog noža N s ležajem L (vidi sliku A.73), tj. nakon svakog ukočenja (aretiranja) vage, brid noža i ležaj naliježu na *novim* dodirnim mjestima, jer se ne mogu potpuno izbjeći zračni raspori u mehanizmu za ukočenje vage. Osim toga, pri njihanju poluge dodirna mjesta brida noža i ležaja pomiču se to više što je veći nagib poluge, tj. što je veći kut otklona kazaljke $\Delta\varphi$. Zbog toga se povećava razlika duljina lijevog i desnog kraka vage, a time i moment zakretanja poluge ΔM.

9.3.2. Najpreciznije uspoređivanje masa. Polužna vaga je mjerni uređaj star gotovo isto toliko kao i čovječanstvo. Stoga nije čudo da je danas razvijen gotovo do savršenstva, a same vage detaljno su klasificirane. Tako su, na primjer, u Sovjetskom Savezu sve vrste vaga klasificirane u 17 razreda prema dopuštenoj pogrešci pri vaganju (GOST 798-53; vidi tablicu A-18). Pri tom su uvedene oznake razreda koje se sastoje od brojeva (1 do 5) i slova (a, б, b ruske abecede). Broj označuje broj znamenaka iza decimalnog zareza vrijednosti relativne pogreške vaganja $\Delta m/m$ izražene u postocima, a slova a, б, b jedan od brojeva 1, 2 ili 5 koji dolazi iza spomenutih znamenaka. Tako, na primjer, 3b znači relativnu mjernu pogrešku vage (pri najvećem dopuštenom opterećenju vage) $\Delta m/m = \pm 5 \cdot 10^{-3}\,\% = \pm 5 \cdot 10^{-5}$ ($\% = 0{,}01$). To znači da npr. pri uspoređivanju utega nazivne mase $m = 1$ kg mjerna pogreška vage razreda 3b ne smije iznositi više

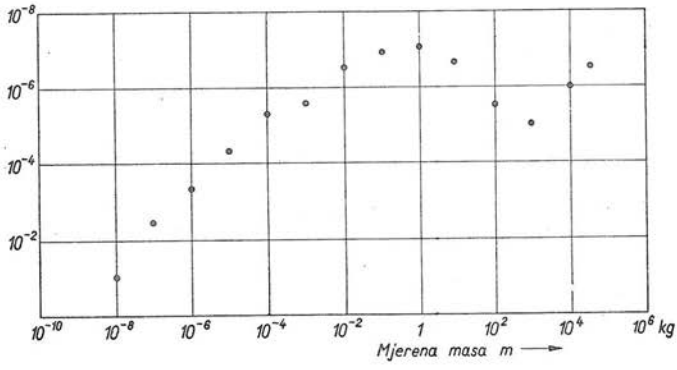
Tablica **A-18**

Klasifikacija vaga prema relativnoj pogrešci

	0	1	2	3	4	5
a	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$
б	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$
b	—	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$

od $\Delta m = \pm 5 \cdot 10^{-5} \cdot 1\ \text{kg} = \pm 50 \cdot 10^{-6}\ \text{kg} = \pm 50$ miligrama. U tablici A-18 relativne pogreške su navedene u obliku omjera $\Delta m/m$, a ne u postocima.

Postižljiva preciznost vaga silno ovisi o redu vrijednosti mase kojoj je vaga namijenjena. Što je manja mjerena masa m, veća je relativna pogreška vagâ. To se lijepo vidi iz dijagrama na slici A.75 koji je godine 1964. objavio američki metrološki zavod National Bureau of Standards za svoje vage. Najpreciznije su prema tom prikazu 1-kilogramske vage, njihovo relativno standardno odstupanje manje je od $\Delta m/m = \pm 10^{-7}$. To znači da preciznost iznosi oko jednu desetmilijuntinku uspoređivane mase, tj. $\Delta m = \pm 10^{-7} \cdot 1\ \text{kg} = \pm 0{,}1$ miligram pri uspoređivanju utega mase $m = 1$ kg. Iz dijagrama razabiremo da se izvanredna preciznost postiže i pri uspoređivanju masa oko $m = 10$ tona $= 10^4$ kg. Tu je približno $\Delta m/m = \pm 10^{-6}$, što znači da je $\Delta m = \pm 10^{-6} \cdot 10^4\ \text{kg} = \pm 10^{-2}$ kg, dakle $\Delta m = \pm 10$ grama, odnosno $\Delta m/m = \pm 1$ gram/1 tona!



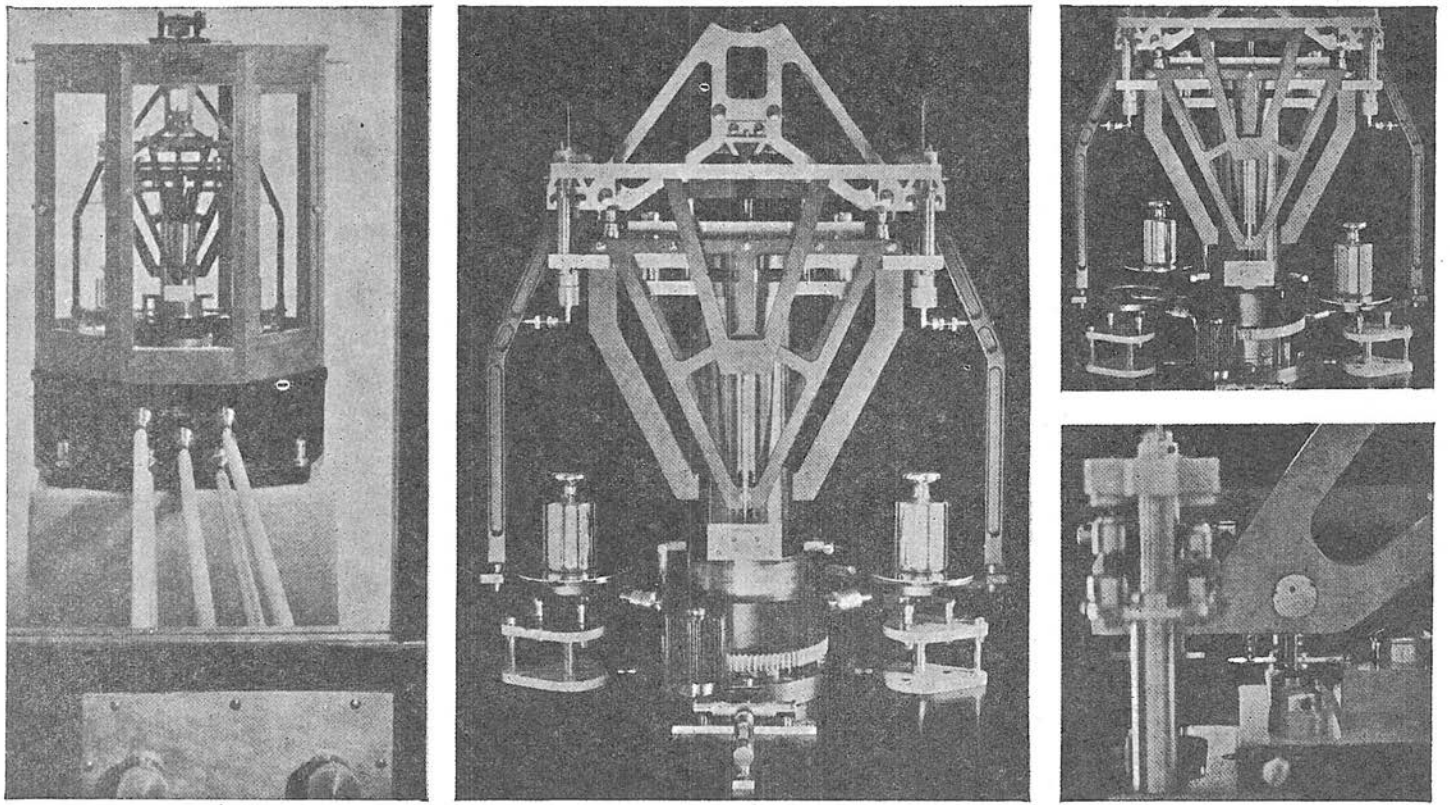
Sl. A.75. Ovisnost preciznosti vaganja (relativno standardno odstupanje) o uspoređivanim masama za vage koje ima američki National Bureau of Standards

Najbolje jednokilogramske vage u nacionalnim metrološkim zavodima i u Međunarodnom uredu za mjere i utege u Sèvresu još su preciznije nego što navodi tablica A-18. Na njima se 1-kilogramski utezi mogu uspoređivati s relativnim standardnim odstupanjem najviše

$$\frac{\Delta m}{m} = \pm 10^{-8},$$

a direktor kanadskog metrološkog zavoda National Research Council, *L. E. Howlett*, u jednom referatu tvrdi da se nekima od njih može postići fantastična preciznost $\pm (1 \ldots 2) \cdot 10^{-9}$! Provjereno relativno standardno odstupanje $\pm 10^{-8}$ znači da takva vaga pouzdano pokazuje još razliku $\Delta m = 10^{-8} \cdot 1\ \text{kg} = 10$ mikrograma pri uspoređivanju dvaju utega nominalne mase $m = 1$ kg, dakle $\Delta m/m = 10\ \mu\text{g}/1$ kg. Takvu izvanrednu preciznost lakše ćemo sebi predočiti ako zamislimo da smo s relativnom pogreškom 10^{-8} mogli uspoređivati utege mase $m = 1$ tona (masa kubnog metra vode). Mjerna pogreška iznosila bi u tom slučaju $\Delta m = \pm 10$ miligrama (masa 10 kubnih milimetara vode)!

Jednu od takvih najpreciznijih 1-kilogramskih vaga prikazuje slika A.76. To je najbolja ravnokraka poluzna vaga (1 kg) što je ima australski metrološki zavod National Standards Laboratory, a dovršena je godine 1959. Njena relativna pogreška pri $m = 1$ kg iznosi $\Delta m/m < \pm 10^{-8}$, dakle manje od $\pm 10\ \mu\text{g}/1$ kg. Na lijevoj



Sl. A.76. Izgled najpreciznije jednokilogramske vage australskog metrološkog zavoda National Standards Laboratory kod koje utezi zamjenjuju svoja mjesta (Gaussovo dvojno vaganje), a da se ne prekida dodir između bridova noževa i ležajeva. Relativno standardno odstupanje manje je od $\pm$ 10 μg/1kg $= \pm 1 \cdot 10^{-8}$. Lijevo je prikazana daljinski posluživana vaga u posebnom zatvorenom prostoru, u sredini kompliciranо polužje vage, desno gore položaj zdjelica vage u toku zamjene utega, a desno dolje uređaj za ukočenje vage

slici se vidi kako se vagom upravlja iz daljine pomoću upravljačkih štapova, tako da vaga i utezi u toku mjerenja ne dolaze u direktan dodir s eksperimentatorom i laboratorijskom atmosferom. Time je garantirana i stalnost temperature i vlažnosti zraka. Na srednjoj slici vidi se komplicirana poluga i polužje same vage.

Najpreciznije vaganje obavlja se metodom takozvanog *dvojnog vaganja* (uspoređivani utezi zamijene svoja mjesta na zdjelicama), ili metodom *supstitucije* (vaganje na istom kraku vage), jer se time eliminira utjecaj nejednakosti duljina krakova poluge. Prvi način primijenjen je kod prikazane australske vage. Uz to je ta vaga izvedena tako da se *prilikom zamjene utega ne prekida dodir između bridova noževa i ležajeva*. Prema današnjem stanju tehnologije izrade vaga to je jedina mogućnost kako se još može smanjiti pogreška pri uspoređivanju masa na polužnim vagama. (Takav mehanizam za besprekidnu zamjenu utega ima i britanski metrološki institut National Physical Laboratory u Teddingtonu.) Na desnoj slici gore (sl. A.76) vidimo jedan od položaja zdjelica vage u toku besprekidne zamjene utega, a desno dolje izgled uređaja za ukočenje poluge vage.

Rad s takvom vagom silno je dugotrajan i zamoran iako je u načelu jednostavan. Zamislimo da su izrađena dva polukilogramska utega kojima na ravnokrakoj polužnoj vagi treba ustanoviti masu. Proizvođači su, dakako, željeli izraditi dva *posve jednaka* utega po 0,5 kg, ali je to nemoguće. Utvrđivanje mase svakog od tih utega obavlja se u dva niza mjerenja: u prvom se polukilogramski utezi uspoređuju međusobno, a u drugom nizu se oba utega od $\frac{1}{2}$ kg usporede s utegom od 1 kg.

Označimo masu utega 1 kg sa m_1 i smatrajmo je apsolutno tačnom (to može u načelu biti jedino međunarodni prakilogram u Sèvresu; vidi odlomak 9.3.3). Masu prvog polukilogramskog utega označit ćemo sa m_{21}, a drugoga sa m_{22}. U prvom nizu vaganja oba utega uspoređena su međusobno; pri tom je dobiveno

$$m_{21} + \Delta m = m_{22},$$

gdje je $\Delta m = \operatorname{tg} \Delta\varphi/\omega$ razlika masa koju je pokazala kazaljka vage (jednadžba 9.3-2 u odlomku 9.3.1). U drugom nizu mjerenja uspoređena je masa m_1 sa zbrojem m_{21} i m_{22}. Mjerenjem je dobiveno

$$m_{21} + m_{22} + \Delta m' = m_1,$$

gdje je $\Delta m' = \operatorname{tg} \Delta\varphi'/\omega$. Iz ovih dviju jednadžbi računanjem slijedi

$$m_{21} = \tfrac{1}{2} m_1 + \tfrac{1}{2}(\Delta m + \Delta m'); \quad m_{22} = \tfrac{1}{2} m_1 + \tfrac{1}{2}(\Delta m - \Delta m').$$

Na analogan način se dolazi do vrijednosti mase drugih utega, većih i manjih od $m_1 = 1$ kg. Pri tom se, dakako, vaganje izvodi najprije na grubljim vagama, pa onda na preciznijim, sve dok se ne stigne do najpreciznijih vaga metroloških zavoda kao što je ona na slici A.76.

Iako nije namjena ove knjige da navodi konkretne upute za vaganje, ipak smatramo neophodnim da barem letimično opišemo koje mjere opreza i koje glavne korekcije valja uzeti u obzir pri uspoređivanju masa na ravnokrakim polužnim vagama, ako se želi postići relativna sigurnost mjerenja oko $1:10^6$. To su: 1. eliminacija nejednakosti duljina krakova vage; 2. mjerenje u suhim prostorijama; 3. izboj električnih naboja prije vaganja; 4. uzimanje u obzir sila uzgona zraka u kojem se prilikom mjerenja nalaze utezi i vaga.

U pogledu utjecaja *nejednakosti duljine* krakova poluge vage spomenuli smo već da se oni eliminiraju ili *Gauss*ovim dvojnim vaganjem (uspoređivani utezi

zamijene svoja mjesta na zdjelicama vage) ili metodom supstitucije koju je godine 1788. prvi put primijenio *Borda* (mjeri se u stvari na istom kraku vage, a pri tom se treći uteg upotrijebi kao tzv. tara). Potreba za vaganjem u *suhoj* atmosferi potječe od bojazni da se na utezima ne nataloži vlaga. Da je ta bojazan opravdana, svjedoči primjer kilogramskog utega čija je površina oko 70 cm^2. U vrlo vlažnom zraku na njega se može nataložiti oko 1 miligram vlage, a u vrlo suhom zraku oko milijun puta manje! *Elektrostatski naboji* utega i vaganog tijela negativno utječu na preciznost vaganja, pa ih stoga valja izbiti prije vaganja. Izbijanje se može npr. izvesti tako da se u zdjelice stavi sićušna količina radioaktivne tvari. U pogledu lošeg utjecaja elektrostatskih naboja naročito su djelotvorne izolacijske tvari (npr. kremen) koje mogu zadržati relativno velike naboje u toku nekoliko sati.

Korekcija mjernih rezultata zbog djelovanja *uzgona* okolnog zraka prilikom vaganja ovisi o tome od kakve su tvari izrađeni uspoređivani utezi. Ako je uspoređivani uteg nepoznate mase m_x izrađen od jednake tvari kao i uteg poznate mase m_1, uzgon ne unosi pogrešku, pa korekcija nije potrebna. No ako gustoća mjerenog utega ρ_x nije jednaka gustoći ρ_1 tvari od koje je izrađen uteg poznate mase m_1 (npr. pramjera; vidi odlomak 9.3.3), uzgoni ovih dvaju utega bit će različiti. To znači da su sile koje zbog pojave uzgona djeluju na lijevi i desni krak vage međusobno različite, što pri preciznom vaganju treba uzeti u obzir.

Uteg nepoznate mase m_x ima volumen $V_x = m_x/\rho_x$, gdje je ρ_x gustoća tvari od koje je izrađen taj uteg. Sila uzrokovana pojavom uzgona u zraku iznosi $V_x \rho_z g = m_x g \rho_z/\rho_x$, gdje je ρ_z gustoća zraka, a g ubrzanje zemljine teže. Ta sila djeluje suprotno ubrzanju teže, pa na krak vage o koji je ovješena zdjelica s utegom m_x ne djeluje sila (težina) $m_x g$, već sila

$$m_x g - m_x g \rho_z/\rho_x = m_x g (1 - \rho_z/\rho_x).$$

Analognim računanjem možemo saznati kolika sila djeluje na drugi krak vage, gdje je ovješen uteg poznate mase m_1:

$$m_1 g (1 - \rho_z/\rho_1).$$

Za ravnokraku vagu ove dvije sile moraju biti jednake ako je vaga u horizontalnoj ravnoteži, dakle

$$m_x g(1 - \rho_z/\rho_x) = m_1 g(1 - \rho_z/\rho_1).$$

Odavde dobivamo vezu između masa m_x i m_1 obaju utega s gustoćama ρ_z, ρ_x i ρ_1:

$$m_x = m_1 \left(1 - \frac{\rho_z}{\rho_1}\right)\left(1 + \frac{\rho_z}{\rho_x} + \frac{\rho_z^2}{\rho_x^2} + \ldots\right). \tag{9.3-3}$$

Ako je gustoća ρ_x utega m_x barem 1000 puta veća od gustoće zraka (koja pri normiranim uvjetima iznosi $\rho_z = 1{,}293$ kg/m^3), onda je član $(\rho_z/\rho_x)^2$ manji od 10^{-6}, pa se gornji izraz može pojednostavniti u oblik

$$m_x = m_1(1 + \rho_z/\rho_x - \rho_z/\rho_1). \tag{9.3-4}$$

Pojednostavnjenje jednadžbe unijelo je relativnu pogrešku manju od $\pm 1 \cdot 10^{-6}$, ako je $\rho_x/\rho_z > 1000$.

Pri najpreciznijim uspoređivanjima masa međunarodnog prakilograma i sekundarnih pramjera ili sekundarnih i radnih pramjera (o njima vidi odlomak 9.3.3) uzgon zraka izračuna se iz gustoće zraka i volumena pramjera. Gustoća zraka utvrđuje se u ovisnosti o tlaku, temperaturi i vlažnosti koji se moraju poznavati s

najvećom dostiživom pouzdanošću. Volumen kilogramskih pramjera utvrđuje se mjerenjem njihova uzgona u vodi i može se saznati s pogreškom oko $\pm 1 \cdot 10^{-5}$, kako je to učinjeno prilikom nedavne međunarodne usporedbe nacionalnih prakilograma u Međunarodnom uredu za mjere i utege.

Primjer. Izračunajmo koliki je korekcijski faktor m_x/m_1 iz jednadžbe (9.3-4), ako se silikatno staklo gustoće $\rho_x = 2200$ kg/m³ važe platinskim utezima gustoće $\rho_1 = 21400$ kg/m³! Budući da je gustoća zraka $\rho_z = 1{,}293$ kg/m³, računanjem dobivamo potrebne omjere

$$\rho_z/\rho_x = 1{,}293/2200 = 5{,}88 \cdot 10^{-4},$$

$$\rho_z/\rho_1 = 1{,}293/21400 = 6{,}05 \cdot 10^{-5}.$$

Uvrštenjem podataka u jednadžbu (9.3-4) dobivamo korekcijski faktor

$$m_x/m_1 = 1 + 5{,}88 \cdot 10^{-4} - 6{,}05 \cdot 10^{-5} = 1 + 5{,}27 \cdot 10^{-4} = 1{,}000527.$$

Iz ovog primjera vidimo da uteg manje gustoće jače utječe na korekcijski faktor negoli uteg veće gustoće, a to znači: manju gustoću moramo poznavati s većom pouzdanošću negoli veliku, ako želimo da korekcijske jednadžbe (9.3-4) ili (9.3-3) ne unesu u rezultat veću pogrešku nego što je nazivna preciznost vaganja, odnosno »tačnost vage«.

9.3.3. Pramjera i jedinica mase kilogram. S poviješću pramjere mase djelomično smo se upoznali u odsječcima 6.2, 3. Generalna konferencija za mjere i utege odabrala je na svom prvom zasjedanju 26.9.1889. od 43 jednaka utega jedan (broj 6) i njega proglasila *međunarodnom pramjerom mase* (franc. prototype international). Međunarodnu pramjeru mase prikazuje naša slika A.77 (vidi i sl. A.20). Jedinicu mase, koju predstavlja pramjera sa slike, Konferencija je na istom zasjedanju prozvala *kilogram* (kratica: kg). Međunarodna pramjera mase prikazana na slici A.77 nije samo realizacija jedinice mase $[m] = 1$ kg već i definicija te jedinice.

Definiciju jedinice mase kilogram, koja je i danas na snazi, objavila je Generalna konferencija za mjere i utege godine 1901:

> Le kilogramme est l'unité de masse; il est représenté par la masse du prototype international du kilogramme.

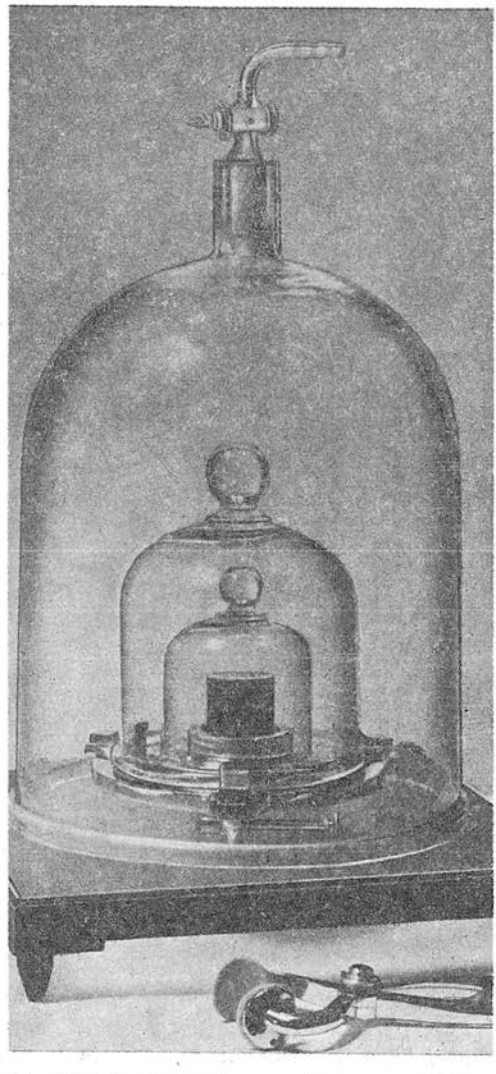
Ovu definiciju zakonodavstva različitih država i pojedini autori prevode dosta slobodno, tako da se u literaturi različitih jezika zapažaju stanovite razlike u opsegu definicije, ali nipošto u njenu smislu. Smatramo da je najprikladniji ovakav slobodan prijevod definicije (opravdanje takvog teksta proizlazi iz daljnjeg izlaganja):

> Kilogram je masa međunarodne pramjere koja je pohranjena u Međunarodnom uredu za mjere i utege.

Međunarodnoj pramjeri mase, koju često nazivamo *međunarodni prakilogram* (vidi odsječak 5.3), pripisana je, dakle, masa $m = 1$ kg (tačno). U odnosu prema njoj izmjerene su nakon odluke Generalne konferencije mase ostalih 42 1-kilogramskih utega i mnogih drugih koji su izrađeni naknadno. Te utege razdijelile su, naime, među sobom države članice Konvencije o metru (vidi odsječak 6.3) i oni su postali *nacionalni prakilogrami* pojedinih država (vidi tablicu A-11).

Međunarodna pramjera kilograma, prikazana na slici A.77, danas je još *jedina preostala pramjera* neke polazne jedinice suvremene metrologije stanovnika Zemlje. Sve druge polazne jedinice reproduciraju se na temelju prirodnih zakonitosti:

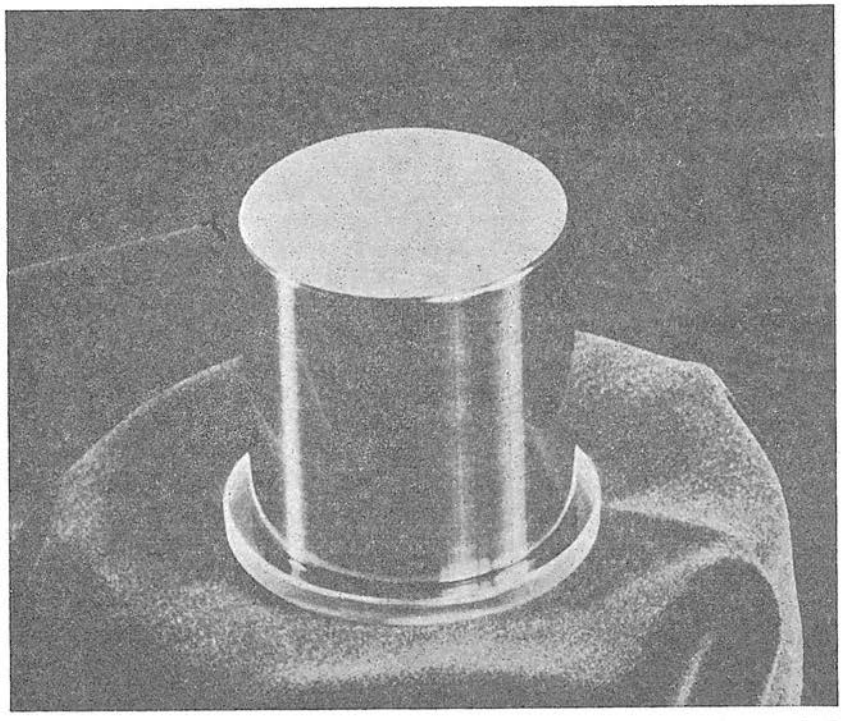
jedinica duljine metar zračenjem kriptona 86 (vidi odsječak 8.8), jedinica vremena sekunda zakonitostima kvantnih pojava u atomima (vidi poglavlje A.10), jedinica jakosti električne struje amper strujnom vagom ili nuklearnim pramjerilom (poglavlje E.3), jedinica termodinamičke temperature kelvin trojnom tačkom vode (odsječak D.3.2), a jedinica luminancije nit zračenjem savršenog zračila pri pouzdano poznatoj temperaturi (odsječak G.2.3). Iako je međunarodni prakilogram izrađen od izvanredno postojane slitine platine i iridija (odsječak A.6.4), on je ipak podložan razornom djelovanju vremena. Metrolozi zbog toga već od samog početka, tj. od odabiranja jednog platinsko-iridijeva valjka za pramjeru mase godine 1889, strahuju da bi međunarodna pramjera kilograma mogla biti nezgodnim slučajem oštećena prilikom vaganja, nagrižena zubom vremena ili bi čak mogla propasti u nekoj ratnoj ili prirodnoj katastrofi. Zbog toga u skloništu Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM) u Sèvresu, osam metara ispod razine zemlje, nije pohranjen samo međunarodni prakilogram sa slike A.77, već i šest njegovih vjernih kopija. Tih šest kopija naziva se *sekundarnim pramjerama kilograma* ili »svjedocima međunarodnog prakilograma« (franc. témoins; i pojedine države imaju »svjedoke« svojih nacionalnih prakilograma, npr. državni prakilogram SSSR je uteg broj 12, a njegov svjedok je uteg broj 26; vidi tablicu A-11). Tih sedam utega pohranjeno je u podzemnom betonskom spremištu BIPM, zatvorenom dvojim željeznim vratima koja otvaraju tri ključa. Jedan ključ ima direktor BIPM, drugi predsjednik Međunarodnog komiteta za mjere i utege, a treći predstavnik francuskog Državnog arhiva.



Sl. A.77. Međunarodna pramjera mase zaštićena sa tri staklena zvona iz kojih je isisan zrak. (Foto: Bureau International des Poids et Mesures)

Ni međunarodnim prakilogramom ni sa šest njegovih »svjedoka« ne obavljaju se operativna mjerenja (npr. kontrola mase nacionalnih prakilograma), već se to čini *radnim pramjerama*, tj. utezima čija je masa utvrđena usporedbom s pramjerama svjedocima; jedino masa utega svjedokâ utvrđena je usporedbom s me-

đunarodnim prakilogramom (sl. A.77). Radne pramjere (radne kopije) kilograma ne izrađuju se samo od platinsko-iridijeve slitine, već i od drugih neoksidirajućih slitina male magnetske susceptibilnosti, neke i od nerđajućeg čelika. Primjenom sekundarnih i radnih pramjera kilograma postignuto je, dakle, to da se međunarodni prakilogram vrlo rijetko upotrebljava, čime je bojazan od promjene njegove mase zbog habanja i oštećenja svedena na najmanju moguću mjeru.



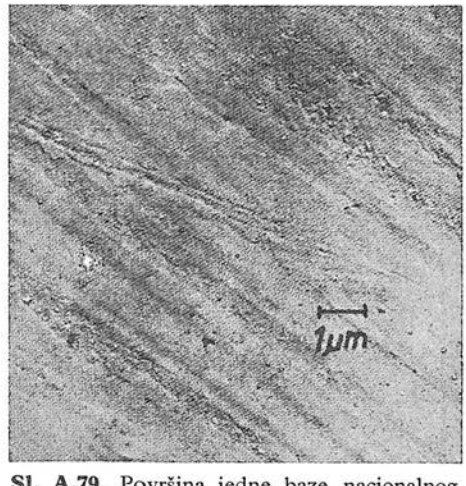
Sl. A.78. Nacionalni prakilogram Sjedinjenih Američkih Država (kopija br. 4). Njegova masa iznosi $m = 1\,\text{kg} - 40\ \mu\text{g} = (1 - 4 \cdot 10^{-8})\ \text{kg}$, tj. manja je od mase međunarodnog prakilograma. Napominjemo da je angloamerička jedinica mase pound (lb) *definirana* ovim odnosom prema kilogramu: $1\text{b} = 0{,}453\,592\,37\,\text{kg}$ (tačno), a od godine 1963. taj odnos vrijedi i za čitav Commonwealth (vidi odsječak B.11.1). To znači da je međunarodni prakilogram na slici A.77 osnova za mjerenje mase na čitavoj kugli zemaljskoj! (Foto: National Bureau of Standards)

Međunarodni prakilogram i njegovih šest »svjedoka« pohranjeni su pri vrlo ujednačenim atmosferskim prilikama. Tako su, na primjer, prilikom dvanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege spremište otvorila tri vlasnika ključeva 7. oktobra 1964. u $16^{h}\ 30^{m}$ i pri tom konstatirali da se međunarodna pramjera mase nalazi na svom mjestu zajedno sa »svjedocima«. Tom prigodom očitani su instrumenti koji se nalaze u spremištu; trenutna temperatura 19,1 °C, relativna vlažnost 74 %, maksimalna temperatura koja je vladala u spremištu 20 °C (stalno je bilježi registrirajući instrument), minimalna temperatura 18 °C. Prilikom tog otvaranja spremišta za pramjere (franc. dépôt des prototypes) iz spremišta su izvađene sekundarne pramjere kilograma — svjedoci broj 8 i broj 43, pomoću kojih će BIPM iznova utvrditi masu svojih »radnih pramjera« broj 9, 25 i 31. Prenošenje

dvaju utega svjedoka iz spremišta u laboratorije BIPM odobrio je na svojoj sjednici 2. oktobra 1964. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM; o ovom Komitetu vidi odsječak A.7.1). O čitavoj operaciji otvaranja spremišta, konstatiranja stanja u njemu i vađenja dviju sekundarnih međunarodnih pramjera kilograma (svjedoka) podnesen je Generalnoj konferenciji 7. oktobra 1964. izvještaj (Procès — verbal de la visite du Dépôt des Prototypes) koji su potpisali predsjednik CIPM *R. Vieweg*, direktor BIPM *J. Terrien* i predstavnik Francuskog arhiva *P. Durye*. Konačno je taj izvještaj objavljen i u Comptes Rendus sjednica Generalne konferencije 1964.

Iz ovog letimičnog opisa otvaranja spremišta pramjera u BIPM možemo zaključiti s koliko pažnje i strepnje čovječanstvo čuva svoju — danas jedinu preostalu — pramjeru, međunarodni prakilogram, sve u želji da se njegova masa ne promijeni u toku vremena. Čini se, međutim, da ni sve te mjere nisu dovoljne: drugo uspoređivanje nacionalnih prakilograma s međunarodnim, koje je, dakako, obavljeno u BIPM, pokazalo je da su se mase nekih od njih u toku 40 ... 50 godina promijenile i za 50 mikrograma, što znači oko $\Delta m/m = 50\ \mu g/1\ kg = 5 \cdot 10^{-8}$ (relativna pogreška pri mjerenju ne premašuje $\pm 1 \cdot 10^{-8}$). Dokaze vidimo i u tablici A-13. Gotovo je nemoguće utvrditi koji je tome uzrok: da li njihov transport u Sèvres, da li dosta česta izloženost promjenama temperature, da li habanje prilikom vaganja (sl. A.79), da li njihovo čišćenje mlazom pare ili nešto drugo.

Međunarodnom prakilogramu sa slike A.77 pripisana je godine 1889. vrijednost mase $m = 1$ kg (tačno) u nadi i želji da njegova masa ostane konstantna vjekovima, a možda i tisućljećima. Promjenu njegove mase s vremenom in principio ne možemo konstatirati. Jedino možemo na temelju analize rezultata povremenih usporedbi njegove mase s masom svjedoka i sekundarnih pramjera konstatirati da li je došlo do *međusobne razlike* u masama svih tih utega. No da li se u toku razmatranog perioda promijenila masa *svih* utega, i za koliko, to nam ne može pokazati nikakvo vaganje.



Sl. A.79. Površina jedne baze nacionalnog prakilograma (kopija broj 22 međunarodnog prakilograma sa slike A.77) snimljena elektronskim mikroskopom (povećanje oko 6000)

Stoga je posve naravna težnja da se pramjera kilograma *zamijeni* nekim *prirodnim pramjerilom*, kao što je na primjer zračenje kriptona nadomjestilo štapni prametar. Postoji li nešto slično za jedinicu mase? Zar se za jedinicu mase ne bi moglo odabrati stanovito mnoštvo neutrona ili nekih drugih čestica, ako smatramo da su njihove mase međusobno jednake i stalne? U načelu je to dobra ideja, ali još daleko od stvarnosti: takve čestice danas još ne znamo brojiti, separirati, pohranjivati i usporediti s masom međunarodnog prakilograma ni izdaleka toliko precizno koliko precizno, na primjer, vagama uspoređujemo mase utega. Prema tome s pramjerom mase do daljnjega sve ostaje kako jest. A možda bi za metrologiju bilo perspektivnije da se pronađe odgovor na jedno drugo pitanje: da li je doista neophodno da baš masa bude ona veličina za koju čovječanstvo mora

posjedovati pramjeru (ili prirodnu pramjeru)? Zar se umjesto nje ne bi mogla odabrati neka *druga veličina* koja će imati prirodnu pramjeru nalik na kriptonski metar ili cezijev sat, dakle pramjerilo?

9.3.4. Mjerenje velikih sila. Najpreciznije se nepoznata sila F može mjeriti uspoređivanjem te sile s težinom G utega poznate mase m. Pri tom se mora poznavati i mjesna vrijednost ubrzanja zemljine teže g. U odlomcima 9.2.4, 5 definirali smo, naime, težinu tijela mase m jednadžbom $G_{h,\varphi} = m g_{h,\varphi}$; ovdje slovo $G_{h,\varphi}$ označuje težinu tijela mase m na onom mjestu Zemlje gdje vrijednost ubrzanja zemljine teže iznosi $g_{h,\varphi}$. Za naš slučaj to je ono mjesto gdje se uspoređuju F i $G_{h,\varphi}$ (u daljnjem tekstu napustit ćemo indekse h i φ te pod G i g razumijevati mjesne vrijednosti). Prema tome pogreška pri mjerenju sila u najvećoj mjeri ovisi o pogreškama s kojima mjerimo veličine m i g (o tome vidi odlomak 9.3.2 i odsječke 9.4, 5).

Da bi mogli što preciznije proizvesti *velike* težine, dakle velike sile, neki metrološki zavodi imaju čitave slogove čeličnih utega velikih masa. Takav slog velikih utega, koje u angloameričkom jezičnom području nazivaju »mrtvi teret« (engl. deadweight), vidimo na slici A.80 koja prikazuje dio Instituta za osnovne standarde NBS. (Američki National Bureau of Standards, NBS, sastoji se od godine 1964. od 4 instituta: Institute for Basic Standards, Institute for Material Research, Central Radio Propagation Laboratory, Institute for Applied Technology; pojedini dijelovi tih instituta locirani su u raznim mjestima Sjedinjenih Američkih



Sl. A.80. Slogovi različitih utega velikih masa. Njihove nazivne mase iznose 454, 1362, 4536, 9172, 13620 i 22680 kg (1000, 3000, 10000, 20000, 30000 i 50000 lb). (Foto: National Bureau of Standards)

Država.) Utezi na slici imaju nazivnu masu od 1000 lb do 50000 lb svaki (lb = = pound = 0,453 592 37 kg, tačno; vidi odlomak B.11.1.3), dakle od oko 454 kg do oko 22680 kg (= 22,68 tona). Promjer najvećih utega iznosi oko 3 metra, a najmanjih oko 1 metar.

Što preciznije mjerenje sila, imperativ je suvremene industrije, npr. pri automatskom upravljanju strojeva, ispitivanju materijala, odnosno svugdje gdje treba što pouzdanije poznavati sile. U najnovije vrijeme izvanredno su porasle potrebe za što preciznijim mjerenjem sila, naročito *velikih sila*. To je dijelom i posljedica ubrzanog i opsežnog programa svemirskih letova (raketni motori na potisak!), jer u raznovrsnim letjelicama postoji mnoštvo sprava koje djeluju na principu uspoređivanja sila. Na primjer, prije svakog polijetanja američkih raketa NBS u svojim laboratorijima baždari niz sprava za mjerenje sila. Pri tom je riječ i o silama čak do oko 4,5 MN (MN = 10^6 N, N = kgm/s^2; vidi odlomak B.4.2.1).

S učestalim potrebama porasli su i troškovi za baždarenje onih sprava za mjerenje sila koje se ugrađuju u pojedina industrijska postrojenja, rampe za lansiranje raketa itd. Isto tako su porasli troškovi i gubitak vremena potrebni za kontroliranje mase velikih utega (nalik onima na slici A.80) koje posjeduju pojedini industrijski laboratoriji. Ti utezi moraju se, naime, povremeno slati na usporedbu s najkvalitetnijim velikim utezima u nacionalnim metrološkim zavodima. Da bi se smanjili svi ti troškovi (baždarenja, transporta, odsutnost utega iz industrijskih laboratorija, veliki investicijski troškovi za vlastite utege itd.), stručnjaci u NBS razvili su u posljednjem desetljeću usavršene *mjerne prstene* kojima se i velike sile mogu uspoređivati tako precizno da relativno standardno odstupanje ne premašuje oko $5:10^6$. Mjerni prsten (engl. proving ring, elastic device) jest veći ili manji prsten izrađen od najboljeg čelika (sl. A.81). Ako ga izložimo djelovanju sile F, on će se u području elastičnih naprezanja čelika elastično deformirati (spljoštiti ili izdužiti, već prema tome da li ga silom tlačimo ili razvlačimo). Nakon prestanka djelovanja sile prsten će se vratiti u prvobitan okrugli prstenast oblik.

Opsežnim i dugotrajnim eksperimentalnim istraživanjima uspjelo je ustanoviti koji su materijali najprikladniji za izradu prstena i koji su najpovoljniji omjeri njihovih izmjera. Tako usavršeni elastični mjerni prsteni nemaju gotovo nikakvu histerezu, tj. na ovisnost elastične deformacije ϵ prstena o sili F ne utječe smjer promjene sile (da li se ϵ snima pri porastu ili smanjenju sile). Deformacije ϵ prstena mjere se ili mehanički ili električki (npr. mjernim trakama u mosnom spoju i poluvodičkim pojačalima), a karakteristika mjernog prstena

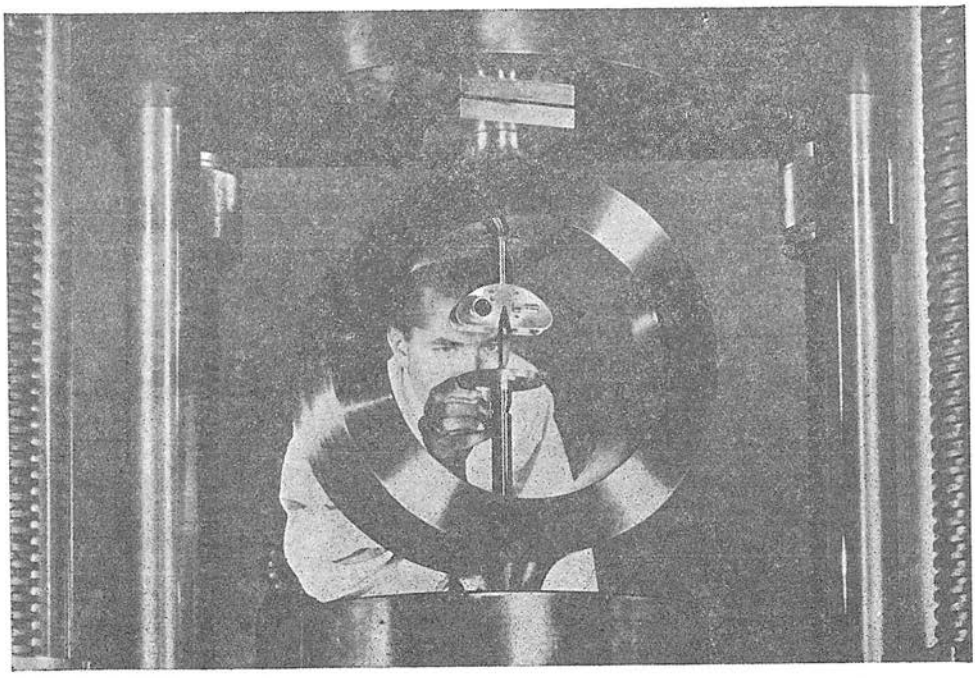
$$\epsilon = \epsilon(F) \quad \text{ili} \quad F = F(\epsilon)$$

dobiva se tako da se snimi niz parova vrijednosti ϵ, F. To znači da se baždarenje prstena, tj. utvrđivanje gornje funkcije, mora provesti u metrološkom zavodu koji raspolaže s nizom poznatih sila, npr. težinom različitih utega sa slike A.80.

Tako baždareni mjerni prsten s poznatom funkcijom $\epsilon = \epsilon(F)$ upotrebljava se zatim za vrlo precizno *mjerenje sila* tamo gdje je to potrebno, čak i u nekim nacionalnim metrološkim zavodima. Na primjer, odlično opremljeni australski National Standards Laboratory tek se godine 1967. opremio utezima za dobivanje sila oko 550000 N. Dotle je imao samo takve utege pomoću kojih je mogao proizvoditi sile do vrijednosti oko 4800 N. Za mjerenje većih sila upotrebljavao je elastične mjerne prstene baždarene u američkom NBS (sl. A.82). O preciznosti mjerenja sila mjernim prstenima mogu nas informirati rezultati dobiveni u NBS. Nizom mjerenja prstenom su uspoređivali težine triju utega nazivne mase 10000 lb (oko 4536

kg) svaki. Pri tom je za jedan od njih pretpostavljeno da mu je masa savršeno poznata. Konstatirano je standardno odstupanje (vidi odsječak A.3.3) $g \cdot (0{,}04 \ldots 0{,}06)$ lb, što znači da relativno standardno odstupanje iznosi

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{g \cdot (0{,}04 \ldots 0{,}06)\,\mathrm{lb}}{mg} = \frac{(0{,}04 \ldots 0{,}06)\,\mathrm{lb}}{10\,000\ \mathrm{lb}} = (4 \ldots 6) \cdot 10^{-6}.$$



Sl. A.81. Baždarenje mjernog prstena silom oko 4,5 milijuna newtona. (Foto: National Bureau of Standards)

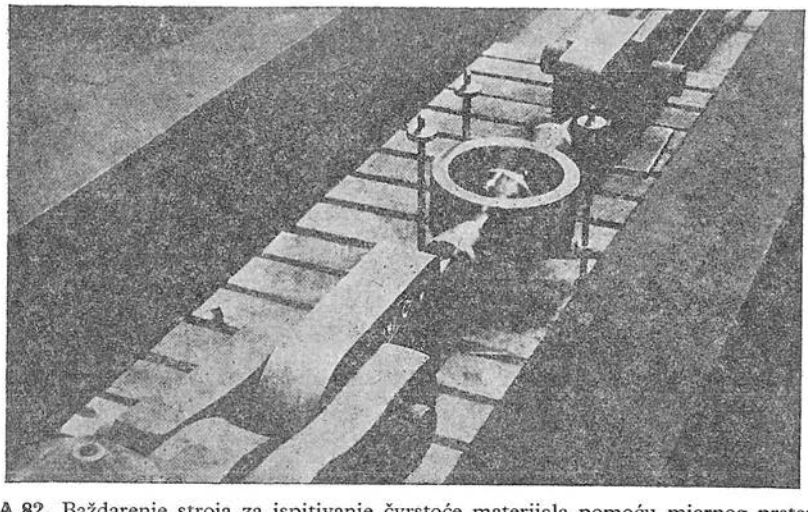
Još bolji rezultati postignuti su u NBS ovom usporedbom: uteg mase 200 lb (oko 90 kg) uspoređen je najprije na vagi sa 4 zavodska utega od po 50 lb; pri tom je utvrđena njegova masa s pogreškom (standardno odstupanje) $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ lb. Zatim je težina utega mase 200 lb izmjerena odgovarajućim mjernim prstenom. Uzimajući u obzir poznato ubrzanje zemljine teže g, dobivena je ista vrijednost s mjernom pogreškom $2{,}2 \cdot 10^{-4}$ lb, što je praktički jednako rezultatu dobivenom vagom. Relativno standardno odstupanje, dakle, iznosi oko $2 \cdot 10^{-4}/200 = 2 \cdot 10^{-6}$.

Primjena elastičnih mjernih prstena (upotrebljavaju se i drukčiji oblici savijenih čeličnih traka) zahtijeva, dakle, samo to da se oni povremeno pošalju na kontroliranje funkcije $\epsilon = \epsilon(F)$ u neki metrološki zavod gdje postoje uređaji za njihovo baždarenje. Takve baždarne uređaje ne može sebi priuštiti svaka država, jer su oni jako skupi, što ćemo vidjeti iz narednog opisa najnovijeg (1965) i najvećeg *postrojenja za baždarenje mjernih prstena* (engl. deadweight machine) u američkom National Bureau of Standards. Postrojenje raspolaže s utezima ukupne mase 1 milijun lb, čime može proizvesti silu oko 4,5 MN.

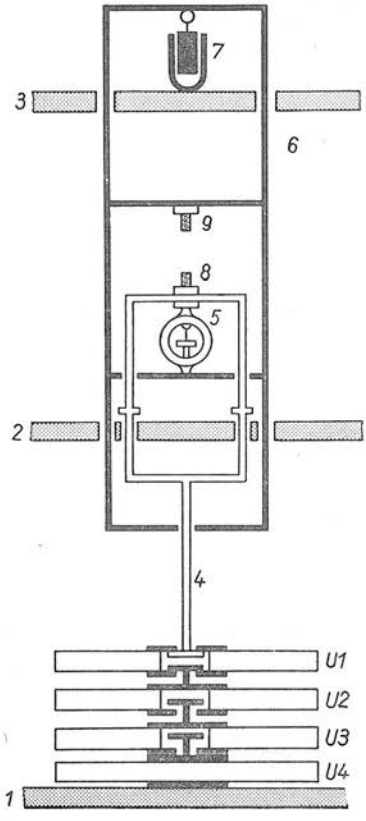
Načelo djelovanja postrojenja možemo razabrati sa sheme na slici A.83, a neke dijelove postrojenja prikazuje slika A.84. (I slike A.80, 81 prikazuju dijelove tog istog postrojenja, utege i jedan mjerni prsten.) Na najnižoj etaži (*1*) zgrade (to može biti i podrum) naslažu se jedan povrh drugog veliki utezi (sl. A.80), koji su u sredini međusobno zakvačeni na poseban način. Na najviši uteg (*U1* na slici A.83) zakvačen je čelični okvir *4* koji se preko elastičnog mjernog prstena *5* oslanja na okvir *6*. Baždarenje prstena *5* počinje tako da hidraulička dizalica *7* polako podiže okvir, a zajedno s njim i uteg *U1* (ostali utezi i nadalje naliježu na najnižu etažu *1* zgrade). Zatim se dizalica zaustavi — prsten je pri tom napregnut težinom utega *U1* — i očita deformacija mjernog prstena (sl. A.81). Zatim se ponovno pokrene dizalica *7*, koja nakon stanovitog mrtvog hoda zahvati i uteg *U2* (takvo stanje prikazano je na slici A.83), očita deformacija itd. Na takav način prsten se postepeno može napregnuti silom koja je jednaka zbroju težina svih utega, okvira *4* i spojnog pribora. Pošto se uzmu u obzir sve korekcije i mjesno ubrzanje zemljine teže g, iz dobivenih parova vrijednosti dobiva se tražena krivulja $\epsilon = \epsilon(F)$ pri tlačenju prstena. Deformacije pri rastezanju prstena mjere se onda kad su posebnom maticom spojeni vijci *8* i *9* pa okvir *4* visi na okviru *6* i pri tom rasteže elastični mjerni prsten.

Čitavo postrojenje u NBS visoko je oko 30 metara, a njemu pripada 20 utega mase 50000 lb svaki. U svim prostorijama postrojenja temperatura se može namjestiti na jednu od vrijednosti između 10 i 38 °C. U toku mjerenja temperatura se ne koleba za više od 0,3 °C. U donjem dijelu postrojenja vlažnost se održava na potrebnoj vrijednosti da ne bi došlo do promjene mase utega zbog korozije utega koji su izrađeni od nerđajućeg čelika. Uz opisano postrojenje u NBS postoje još dva manja: jedno ima utega ukupne mase 300000 lb (visina 19 metara), a drugo 112000 lb (17 m).

Provjeravanje opisane metode baždarenja elastičnih mjernih prstena su pokazala da je između zaustavljanja hidrauličke dizalice i očitavanja deformacije prstena dovoljno pričekati oko 3 minute, jer se u toku tog vremena deformacija stabilizira. Iako relativno standardno odstupanje elastičnog prstena ne iznosi više od

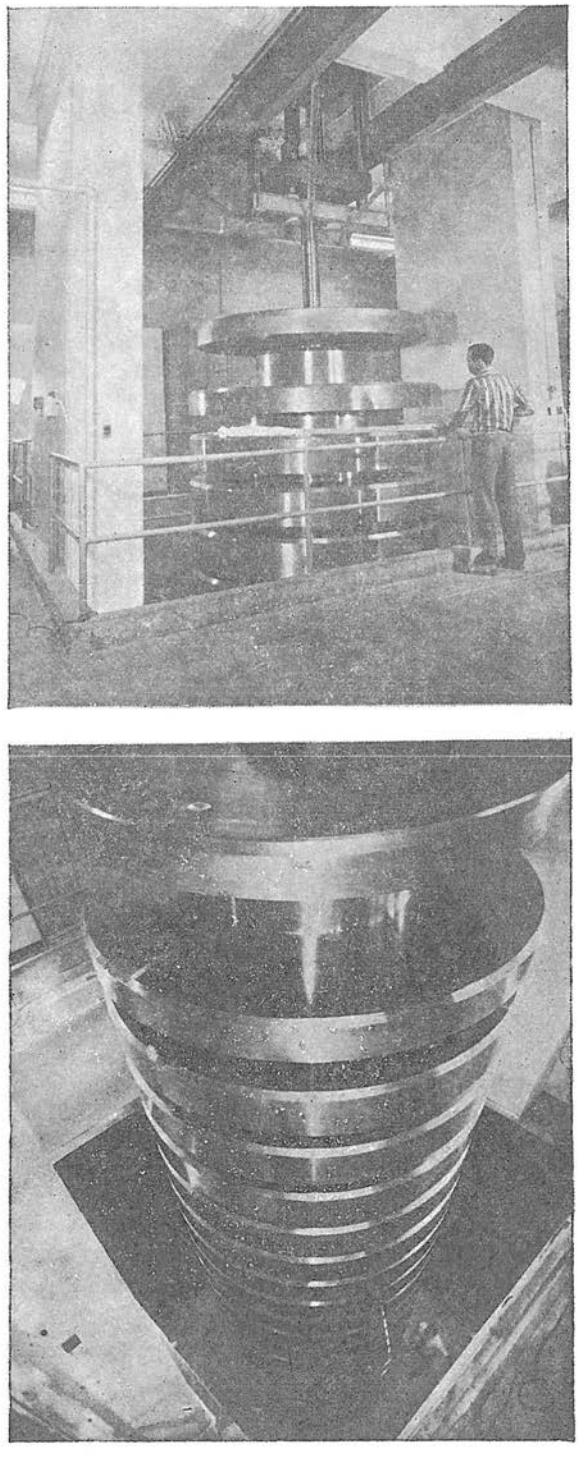


Sl. A.82. Baždarenje stroja za ispitivanje čvrstoće materijala pomoću mjernog prstena u australskom metrološkom zavodu National Standards Laboratory



Sl. A.83. Načelo djelovanja postrojenja za baždarenje elastičnih mjernih prstena u američkom National Bureau of Standards

U — utezi velikih masa; *1*, *2*, *3* — etaže zgrade; *4* — okvir o koji su ovješeni utezi; *5* — baždareni mjerni prsten; *6* — okvir za podizanje i spuštanje okvira *4*; *7* — hidraulička dizalica; *8*, *9* — vijci



Sl. A.84. Postrojenje za baždarenje elastičnih mjernih prstena koje omogućuje primjenu utega ukupne mase 1 milijun lb (približno 454 tone), čime se prsten opterećuje silom oko 4,5 MN. Gornja slika: pogled na visini prizemlja (jedan dio utega visi u podrum); donja slika: pogled s prvog kata na prizemlje i podrum. (Foto: National Bureau of Standards)

$5 \cdot 10^{-6}$, ipak sigurnost poznavanja izmjerene sile iznosi nešto manje, oko $2 \cdot 10^{-5}$. To je zato što sigurnost poznavanja težine utegâ ovješenih u postrojenju ne premašuje $\pm 2 \cdot 10^{-5}$. Unatoč tome je primjena opisanih prstena smanjila relativnu pogrešku pri mjerenju sila 10 do 50 puta, trajanje mjerenja smanjila na polovinu, a troškove mjerenja još više.

9.4. Potsdamski gravimetrijski sistem

9.4.1. Potreba poznavanja mjesnog ubrzanja zemljine teže. Niz prirodoslovnih i tehničkih znanosti (fizika, geofizika, geodezija, gravimetrija, astronomija, metrologija itd.) imperativno zahtijeva što je moguće pouzdanije poznavanje ubrzanja teže g na pojedinim mjestima zemaljske površine. Tri su glavna razloga tom zahtjevu: 1. O sigurnosti poznavanja g ovisi s kolikom se preciznošću mogu proizvoditi sile, tlakovi i reproducirati neke temeljne mjerne jedinice. 2. Prosječna vrijednost veličine g uokolo zemljine površine važan je element pri utvrđivanju dinamičkih konstanti Sunčeva sistema. 3. Jedino rezultati direktnog (apsolutnog) mjerenja mjesnog ubrzanja zemljine teže omogućuju potvrđivanje ili demantiranje tvrdnje da se mjesno g mijenja u toku vremena (analogno je vrlo precizno mjerenje vremena omogućilo da se ustanove nejednolikosti u vrtnji Zemlje; vidi odlomak 10.7.2).

Zahtjev za što pouzdanijim poznavanjem g pri mjerenju sila i tlakova posve je očit: o vrijednosti g ovisi sila kojom djeluje uteg ($G = mg$; vidi odlomak 9.3.4), preciznost živina barometra (odsječak B.4.1), pouzdanost reprodukcije polazne elektromagnetske jedinice na strujnoj vagi (poglavlje E.3) itd. Koliko je važno što preciznije poznavanje tlaka, može nam ilustrirati postojeća uputa o reprodukciji trojne tačke vode ($T_t = 273{,}16$ K): tlak se ne smije kolebati za više od $\pm 3 : 10^6$, ako želimo da temperatura trojne tačke bude u granicama $\Delta T = \pm 10^{-4}$ K!

9.4.2. Načelo mjerenja g reverzibilnim njihalom. Podsjetimo se najprije na osnovne teoretske zakonitosti njihanja fizikalnog njihala, pod čime razumijevamo tijelo učvršćeno na mirujuću horizontalnu osovinu čija os O ne prolazi kroz težište T tijela (sl. A.85a), a može se njihati u odnosu na tu os O. Ako sa m označimo masu fizikalnog njihala, onda je njegova težina $G = mg$. Vremenski promjenljiva komponenta $G_1 = G \sin \alpha = mg \sin \alpha$ težine nastoji njihalo dovesti u takav položaj ravnoteže u kojem je spojnica OT vertikalna, tj. u smjeru ubrzanja zemljine teže. Ta sila G_1 izaziva, s obzirom na okretište, moment $M = G_1 l$, kojemu drži dinamičku ravnotežu moment $J\epsilon$, gdje je J moment tromosti (inercije) njihala s obzirom na os O, a $\epsilon = \mathrm{d}^2\alpha/\mathrm{d}t^2$ je kutno ubrzanje njihala. Prilikom njihanja vrijedi jednakost $J\epsilon = -G_1 l$, gdje je l udaljenost ovjesišta O od težišta T. Prema tome je diferencijalna jednadžba njihala $J\,\mathrm{d}^2\alpha/\mathrm{d}t^2 + mgl \sin \alpha = 0$, odakle se dobiva rješenje

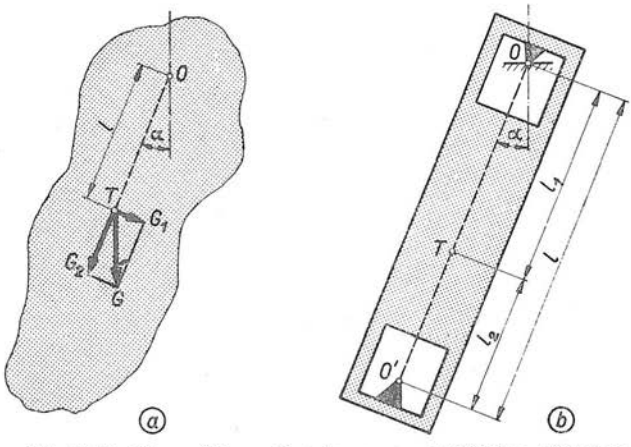
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots \right].$$

Ovdje je T period njihanja fizikalnog njihala, a α maksimalna amplituda kuta otklona. Budući da se pri vrlo preciznim mjerenjima njihalo otklanja za vrlo malene kutove, $\sin \alpha$ gotovo se tačno podudara s vrijednošću samog kuta α, dakle $\sin \alpha = \alpha$. U tom slučaju u izvedenoj jednadžbi za T možemo odbaciti članove iza 1 u uglatoj zagradi, čime dobivamo

$$\omega^2 = mgl/J; \qquad \omega = 2\pi/T. \tag{9.4-1}$$

Ova pojednostavnjena jednadžba njihala ishodište je naših daljnjih razmatranja.

Godine 1818. *H. Kater* je izumio tzv. reverzibilno njihalo koje je omogućilo vrlo precizno mjerenje ubrzanja zemljine teže g mjerenjem perioda T njihala (T je trajanje jednog ciklusa njihala, tj. vrijeme tokom kojega se njihalo — teoretski — vrati u polaznu tačku). Skicu reverzibilnog njihala vidimo na slici A.85b: njihalo ima *dvije* prizme (na slici je gornja označena sa O, a donja sa O') na čijim se bridovima može njihati (posve analogno kao kod polužnih vaga; vidi odlomak 9.3.2). Najprije se njihalo pusti da se njiše na bridu prizme O te se obave potrebna mjerenja, a zatim se *reverzira*, tj. preokrene se tako da se njiše na bridu suprotne prizme O'.



Sl. A.85. Uz načelo mjerenja g reverzibilnim njihalom
a) Fizikalno njihalo, b) *Kater*ovo reverzibilno njihalo

Da bismo lijevu jednadžbu (9.4-1) mogli primijeniti na takvo reverzibilno njihalo, izrazit ćemo moment tromosti J pomoću *Hughens-Steiner*ova poučka o paralelnom prijenosu osi vrtnje. Taj poučak u općem obliku glasi $J = J_0 + ml^2$, gdje je J moment tromosti s obzirom na os koja prolazi kroz okretište njihala O, a J_0 moment tromosti s obzirom na os koja prolazi kroz težište T. Za slučaj ovješenja njihala o brid prizme O, jednadžbe (9.4-1) dobivaju oblik (sl. A.85b)

$$\omega_1^2 = \frac{mgl_1}{J_0 + ml_1^2}; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}. \tag{9.4-2}$$

Za reverzirano stanje njihala vrijedit će jednadžbe (ovješenje o brid suprotne prizme O')

$$\omega_2^2 = \frac{mgl_2}{J_0 + ml_2^2}; \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}. \tag{9.4-3}$$

Reverzibilno njihalo konstruira se i izrađuje tako da je

$$l_1 \neq l_2, \quad T_1 = T_2 = T, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega,$$

tj. periodi njihanja moraju biti jednaki u prvobitnom i reverziranom stanju ovješenja. U tom slučaju lijeve jednadžbe (9.4-2,3) glase

$$\omega^2 (J_0 + ml_1^2) = mgl_1,$$
$$\omega^2 (J_0 + ml_2^2) = mgl_2,$$

gdje je $\omega = 2\pi/T$. Oduzmemo li drugu jednadžbu od prve i kratimo sa m, računanjem dobivamo

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}; \quad l = l_1 + l_2, \tag{9.4-4}$$

Prema tome vrijednost ubrzanja zemljine teže g dobiva se mjerenjem razmaka između prizmi O i O' reverzibilnog njihala (sl. A.85b) i mjerenjem perioda T njihala. Za razliku od fizikalnog njihala, kod kojeg težište nije geometrijski izraženo (usporedi slike A.85a i b), razmak l između bridova prizmi O i O' može se vrlo precizno izmjeriti i u tome je izvanrednost *Kater*ova izuma.

Pri mjerenju mjesne vrijednosti ubrzanja zemljine teže g reverzibilnim njihalima u lijevu jednadžbu (9.4-4) uvodi se niz *korekcija* da bi se sigurnost poznavanja g povećala na najveću moguću mjeru. Postoji, naime, niz uzroka koji uzrokuju pojavljivanje pogrešaka u izrazu (9.4-4): produljenje njihala kad se ono pri mjerenju stavlja u vakuum, vibriranje ležaja (oslonca) njihala, utjecaj amplitude njihaja, utjecaj otpora preostalog zraka u vakuumskoj komori u kojoj se njiše reverzibilno njihalo, kolebanje temperature u toku mjerenja, utjecaj zakrivljenosti brida prizme, utjecaj deformacija prizmi i ležajeva, savijanje njihala, produljenje njihala pod djelovanjem vlastite težine i dinamičkih sila, netačnost očitavanja vremenskih intervala, utjecaj magnetskog polja Zemlje ako je njihalo izrađeno od feromagnetskog materijala, a nije u tom pogledu zaštićeno, itd.

9.4.3. Potsdamski gravimetrijski sistem. Rezultati *Kater*ovih mjerenja g nisu bili naročito pouzdani (s današnjeg stanovišta), jer je njegovo njihalo djelovalo u zraku pri normalnom atmosferskom tlaku, a nije znao tačno uzeti u obzir utjecaj zraka i nije uzeo u obzir savijanje njihala. Uzgon zraka i inercijske efekte zraka utvrdili su *F. W. Bessel* godine 1826. te *G. G. Stokes* i *Repsold* godine 1856. Na temelju tadašnjeg znanja o njihalima *F. R. Helmert* je godine 1898. detaljno obradio teoriju reverzibilnog njihala. Ona je poslužila za osnovu glasovitih mjerenja g koja su pod *Helmert*ovim vodstvom obavili između godine 1898. i 1904. *F. Kühnen* i *Ph. Furtwängler* u Geodetskom institutu u Potsdamu.

Pripreme mjerenja te sama mjerenja g, koja su *Kühnen* i *Furtwängler* obavili pomoću pet reverzibilnih njihala, bila su toliko brižljivo izvedena da se s njima ne može usporediti ni jedno drugo mjerenje g u devetnaestom stoljeću. Četiri od tih pet njihala bila su sekundna njihala, a jedno polusekundno. Upotrebljavali su pet pari noževa na čijim su se bridovima klatila njihala, jedan par izrađen od čelika, a ostali od ahata. U prvom razdoblju mjerenja, koje je trajalo ukupno 6 godina, noževi su bili učvršćeni na njihalo, a njihalo se gibalo u zraku pri atmosferskom tlaku. Kasnije su noževi bili učvršćeni na stalak, a ležajne pločice na njihalo, dakle obrnuto negoli prije. Osim toga, atmosferski tlak je bio smanjen na 20 milibara ili manje. Udaljenost l između bridova noževa u prvom nizu mjerenja, a između ležajnih pločica u drugom nizu, izmjerena je usporedbom sa prametrom pomoću mikrometarskog mikroskopa. Period T njihala mjeren je metodom koincidencijske usporedbe (*Borda* 1810) u odnosu na astronomske podatke o vremenu. Rezultati su svedeni na tlak zraka nula pomoću *Stokes*ove formule. Konačan rezultat potsdamskog mjerenja vrijednosti $g_{h,\varphi}$ u sali s njihalom Geodetskog instituta u Potsdamu objavili su *Kühnen* i *Furtwängler* godine 1906:

$$g\,(\text{Potsdam}) = (9{,}81274 \pm 3 \cdot 10^{-5})\ \text{m/s}^2,$$

što znači da su smatrali da nepouzdanost njihova rezultata iznosi oko $\Delta g/g = \pm 3 \cdot 10^{-5}/9{,}8 \approx \pm 3 \cdot 10^{-6}$. Redukcijom navedenog rezultata na razinu mora (vidi odlomak 9.2.6) dobiva se *reducirana* vrijednost ubrzanja zemljine teže

$$g_0''\,(\text{Potsdam}) = 9{,}81294\ \text{m/s}^2.$$

Budući da su potsdamski eksperimenti bili najprecizniji za tadašnje vrijeme, gornja je vrijednost ubrzanja zemljine teže poslužila za *ishodište svih drugih relativnih mjerenja g na bilo kojem mjestu Zemlje*. Pod »relativnim mjerenjem« razumijevamo takvo mjerenje u kojemu se *istim njihalom* izmjeri period T_P njihanja u Potsdamu ($\varphi = 52°22',86$; $\lambda = 13°\,04',06$; $h = 87$ m) i period njihanja T_x na onom mjestu gdje želimo ustanoviti mjesno ubrzanje zemljine teže g_x. Budući da je za *isto* njihalo umnožak $gT^2 = \text{const}$ (vidi odlomak 9.4.2), to je $g_P T_P^2 = g_x T_x^2$, odnosno

$$g_x = g_P \frac{T_P^2}{T_x^2}.$$

Jednadžba pretpostavlja da je duljina njihala ostala nepromijenjena prilikom oba mjerenja, te da su svi drugi uvjeti isti (temperatura, tlak zraka, amplituda vibracija itd.). Naravno da se uzimaju u obzir potrebni korekcijski faktori, ako jednakost uvjeta mjerenja nije savršena.

Budući da je u odnosu na potsdamsku vrijednost ubrzanja zemljine teže g_P izmjeren g_x u nizu drugih tačaka zemaljske kugle, skup tako dobivenih (relativnim mjerenjem) vrijednosti g_x naziva se »potsdamska mreža«, a čitav sistem geodetskih tačaka s poznatim $g_x = g_P T_P^2/T_x^2$ *Potsdamski gravimetrijski sistem*. Tako su, na

Tablica **A-19**
Vrijednost g Washingtona u Potsdamskom sistemu

Istraživač	Godina	Vrijednost, cm/s²
Putnam	1900.	980,113
Meinesz	1926.	980,122
Miller	1929.	980,119
Brown	1933.	980,118

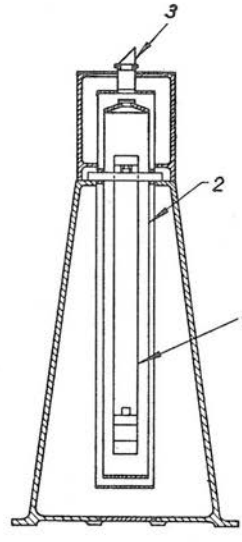
primjer, transportiranjem njihala iz Potsdama u Washington (Coast and Geodetic Pier Washington) unutar 33 godine izmjerene vrijednosti g_x(Washington) koje se međusobno razlikuju za maksimalno $9 \cdot 10^{-3}$ cm/s², odnosno u relativnoj mjeri $9 \cdot 10^{-3}/980 \approx 10^{-5}$ (tablica A-19).

9.4.4. Pogreška Potsdamskog sistema. U toku posljednjih 60 godina obavljeno je nekoliko direktnih (apsolutnih) mjerenja ubrzanja zemljine teže g usavršenim reverzibilnim njihalima, a i na druge načine (vidi odsječak 9.5). Usavršenje njihala postignuto je djelomično i time što je u međuvremenu napredovala fina mehanika, mjerenje duljine i vremena postalo je preciznije, osvojeni su novi materijali za izradu njihala (npr. kremen), a i teorija korigiranja pogrešaka istražena je podrobnije.

U američkom metrološkom institutu National Bureau of Standards *P. R. Heyl* i *G. S. Cook* izmjerili su godine 1936. vrijednost g pomoću reverzibilnog njihala izrađenog u obliku cijevi od lijevana kremena. Period njihanja utvrđen je koincidencijom *Short*tova sata i njihala. Taj sat upravljao je neonskom bljeskalicom (flash), a refleksija njena svjetla od zrcala na njihalu promatrala se teleskopom. Duljina njihala utvrđena je usporedbom sa štapnom mjerom (sa crticama) pomoću mikrometarskog mikroskopa. Upotrijebljen je čitav niz kombinacija noževa i ležajeva od različitih materijala (kromni čelik, stelit, ahat itd.), jer je utvrđeno da

izmjerena vrijednost g ovisi o radijusu zakrivljenosti oštrice noža i izboru materijala (veći radijus uzrokuje odstupanje od teoretskog zakona ovisnosti perioda T o amplitudi njihala). Njihalo se gibalo u zatvorenoj posudi u kojoj je tlak zraka iznosio 0,15 milibara. Zrak je bio osušen i ioniziran da bi se odveli električni naboji. *H. Jeffreys* analizirao je rezultate koje su dobili *Heyl* i *Cook*, ispravio neke njihove korekcije i uveo dodatne — koje oni nisu uzeli u obzir — i na kraju dobio rezultat 9,800 821 m/s². Pri tom je standardno odstupanje iznosilo 13 μm/s², što znači da je preciznost (relativno standardno odstupanje; vidi odlomak 1.3.3) mjernog postupka iznosila oko $1{,}3 \cdot 10^{-6}$. Godine 1963. isti autori dobili su vrijednost 9,800 823 m/s², što smo uvrstili i u tablicu A-20.

U britanskom metrološkom zavodu National Physical Laboratory obavio je godine 1939. *J. S. Clark* direktno mjerenje veličine g pomoću reverzibilnog njihala presjeka u obliku slova I, izrađena od specijalnog nemagnetskog materijala. Duljina njihala izmjerena je interferometrijski (vidi odsječak 8.4). Mjerilo se u prostoriji čija je temperatura održavana na 20 °C, a grijalice uokolo mjernih uređaja održavale su gradijent temperature na neznatnoj vrijednosti. Tlak u vakuumskom kotlu (sl. A.86), u kojem se njihalo gibalo, bio je izvanredno nizak: 7 mikrobara! Trajanje perioda njihanja mjereno je kremenim oscilatorom, ali preko laganog mehaničkog kontakta koji je pokretao električku sklopku. Time uzrokovana relativna sistematska pogreška nije bila veća od $\pm 1 \cdot 10^{-7}$. Na temelju 18 *Clark*ovih mjerenja naknadno je ustanovljeno da njegov rezultat glasi 9,811 831 m/s². Relativno standardno odstupanje mjernog postupka iznosilo je $7 \cdot 10^{-7}$, što je gotovo dva puta bolje negoli kod prije opisanih mjerenja u NBS.



Sl. A.86. Skica Clarkova reverzibilnog njihala u National Physical Laboratory (Teddington)
1 — njihalo, *2* — vakuumski kotao, *3* — otvor s prizmom kroz koji je promatrana amplituda njihanja

U sovjetskom Svesaveznom metrološkom institutu u Lenjingradu direktno mjerenje veličine g obavili su godine 1956. *P. N. Agaleckij* i *K. N. Jegorov*. Oni su upotrijebili tri njihala izrađena od kremena s profilom u obliku slova I. Sva tri njihala imala su jednaku masu (4,6 kg), a ekvivalentne duljine bile su oko 40, 60 i 75 centimetara (*Cook* i *Clark* upotrebljavali su njihala duljine 1 metar). Ležajne pločice bile su izrađene od poliranog pyrexa, a bridovi čeličnih noževa bili su zakaljeni. Tlak zraka u vakuumskoj komori iznosio je 0,15 do 0,55 milibara. Period njihanja T mjeren je usporedbom sa satom napajanim najstabilnijim izvorom frekvencije; komparacijski signal dobiven je fotoelektrički, svjetlosnom zrakom reflektiranom od zrcala na njihalu (relativna pogreška mjerenja vremena iznosila je oko $1:10^7$). Udaljenost među ležajnim pločicama mjerena je interferometrijski. Na temelju mjerenja sa sva tri njihala utvrđen je rezultat 9,819 187 m/s², a preciznost mjernog postupka (relativno standardno odstupanje) iznosila je oko $1 \cdot 10^{-6}$.

U toku su još daljnja mjerenja g pomoću reverzibilnog njihala: na Tehničkom fakultetu u Buenos Airesu na tome radi *A. A. Cerrato*, u američkom Air Force Geophysics s parom reverzibilnih njihala eksperimentira *L. G. D. Thompson*, a u finskom Geodetskom institutu *T. J. Kukkamäki* proučava izgradnju njihala duljine 200 (!) metara.

Tablica A-20

Vrijednosti g utvrđene direktnim i relativnim mjerenjima na istim mjestima

Ustanova i mjesto	Direktno mjerenje, g_d (m/s²)	Relativno mjerenje (Potsdam), g_r (m/s²)	Razlika $g_d - g_r$ (m/s²)
NPL, Teddington	9,811832	9,8119547	$-1{,}23 \cdot 10^{-4}$
BIPM, Sèvres	9,809280	9,8093976	$-1{,}18 \cdot 10^{-4}$
VNIIM, Lenjingrad	9,819187	9,819308	$-1{,}21 \cdot 10^{-4}$
NBS, Washington	9,800823	9,8009823	$-1{,}59 \cdot 10^{-4}$
NRC, Ottava	9,806132	9,8062634	$-1{,}31 \cdot 10^{-4}$
Palmer, Princeton	9,801592	9,801741	$-1{,}49 \cdot 10^{-4}$

Naravno da su na opisanim mjestima vrijednosti g izmjerene i *relativnom* metodom, tj. u Potsdamskom sistemu (vidi odlomak 9.4.3). Neke rezultate direktnog (apsolutnog) i relativnog (prema Potsdamu) mjerenja g na istim mjestima svrstali smo u tablicu A-20. Kratice u prvom stupcu tablice označuju: NPL — National Physical Laboratory, BIPM — Bureau International des Poids et Mesures, VNIIM — Vsesojuznij naučno-isljedovateljskij institut metrologij, NBS — National Bureau of Standards, NRC — National Research Council, Palmer — Palmer Physics Laboratory, Princeton, New Jersey.

Posljednji stupac tablice A-20 sadrži razliku između vrijednosti g_d utvrđene direktnim mjerenjem i vrijednosti g_r dobivene relativnim mjerenjem u okviru Potsdamskog sistema. Vidimo da u prosjeku ta razlika iznosi oko $g_d - g_r = -1{,}3 \cdot 10^{-4}$ m/s², tj. *stvarna* vrijednost ubrzanja zemljine teže je oko $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ m/s² *manja* od vrijednosti koju daje Potsdamski sistem. Ako tu razliku shvatimo kao pogrešku, onda je relativna pogreška Potsdamskog sistema oko $1{,}3 \cdot 10^{-4}/9{,}81 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$. To je jako velika pogreška, pogotovo ako uzmemo u obzir kako je velik utjecaj nesigurnosti poznavanja g na sveukupnu metrologiju (vidi odlomak 9.4.1). Zbog toga je ovaj problem razmatran i na zasjedanjima Generalne konferencije za mjere i utege 1964. i 1967, ali zaključci o promjeni su izostali. Jedino je u oktobru 1968. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM) donio rezoluciju kojom se za *metrološke svrhe* prihvaća *nova osnova*

$$g(\text{Potsdam}) = 9{,}812\,60 \text{ m/s}^2$$

i time napušta dotadašnja vrijednost 9,812 74 m/s². Ta rezolucija podudara se sa sličnom rezolucijom Međunarodnog udruženja za geodeziju od godine 1967.

9.5. Balističko mjerenje ubrzanja zemljine teže

Uz mjerenje g reverzibilnim njihalom danas još samo jedna metoda dolazi u obzir za precizna mjerenja: balistička metoda. Pri njenoj primjeni najrafiniranijim pomagalima suvremene znanosti mjere se prostorno-vremenske koordinate tijela koje se u vakuumu giba pod djelovanjem ubrzanja zemljine teže. Postoji nekoliko varijanti balističke metode koje ćemo letimično spomenuti u daljnjem tekstu. Budući da je njena primjena započela tek godine 1946, dakle prije dvadesetak godina, prirodno je da će se ona u toku vremena još usavršavati, analogno kao što se reverzibilno njihalo dotjeruje više od 140 godina.

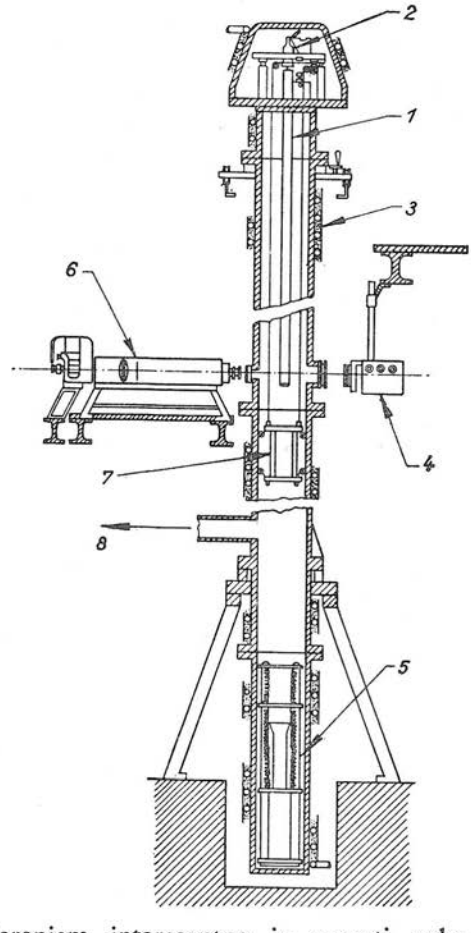
9.5.1. Mjerenje *g* slobodnim padom. Osnova ove varijante mjerenja *g* balističkom metodom je zakon slobodnog pada

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad (9.5\text{-}1)$$

gdje je *h* visina s koje je ispušteno tijelo vertikalno padalo u toku vremena *t*. Mjerenjem pripadnih parova vrijednosti *h,t* dobiva se pomoću jednadžbe (9.5-1) vrijednost mjesnog ubrzanja zemljine teže *g*.

Ovu metodu predložio je godine 1917. i 1930. Francuz *A. Guillet*, a prijedlog je obnovio godine 1946. *C. Volet* iz BIPM; on je započeo i s realizacijom ideje, a posao je završio *A. Thulin* godine 1961. Načelo mjerenja je ovo: u vakuumskoj komori slobodno pada štapna mjera sa crticama koju kino-kamera u toku padanja snima u odnosu prema referentnoj nepomičnoj crti. Štap, crtu i film osvjetljuje u precizno poznatim intervalima vremena impulsna žarulja. Na razvijenom filmu ili fotografiji izmjere se udaljenosti koje je prošao štap, a budući da su vremenski intervali osvjetljavanja poznati, može se prema (9.5-1) izračunati *g*.

Godine 1951. u kanadskom NRC mjerni uređaj je ponešto dotjeran (sl. A.87). Dva metra dugačak štap od invara imao je na sebi sedam skala sa crticama (poluprozirne staklene trake učvršćene na štap) koje su duž štapa bile prikladno raspoređene. Prilikom padanja štapa skale su prolazile pokraj referentne crte u jednakim vremenskim intervalima nakon kojih je zasvijetlila električna iskra. Pri tom su dobivene fotografije crtica štapa u odnosu prema nepomičnoj (referentnoj) crti. Iz poznatih vremenskih intervala pojavljivanja impulsa svjetla i prethodno izmjerenih razmaka među crticama skala, može se izračunati vrijednost *g*. Sa pet umjesto sa sedam skala radove je nastavio *H. Preston-Thomas* sa suradnicima i u razdoblju od godine 1957. do 1959. relativno standardno odstupanje smanjio od 1,7 na oko $(0{,}7...1)\cdot 10^{-5}$ m/s², što znači da je preciznost iznosila oko $(0{,}7...1)\cdot 10^{-6}$.

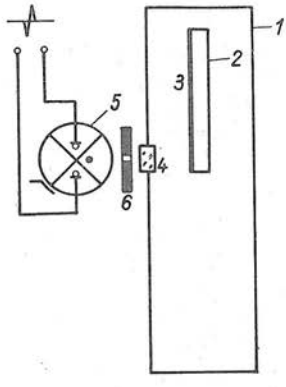


Sl. A.87. Presjek uređaja za mjerenje *g* slobodnim padom u kanadskom National Research Council
1 — štap, *2* — uređaj za otpuštanje štapa, *3* — vodni sistem za održavanje konstantne temperature, *4* — izvor svjetla, *5* — prigušivač, *6* — kino-kamera, *7* — kolica za podizanje štapa, *8* — priključak na vakuumsku pumpu

U vezi s *Preston-Thomas*ovim mjerenjem interesantno je navesti neke pojedinosti iz kojih se može naslutiti kako su kompliciranl radovi pri takvom mjerenju *g*. Tlak u vakuumskoj komori (sl. A.87) iznosio je oko 0,1 mikrobar, a bljeskalica je osvjetljavala 10 puta u jednoj sekundi. Tri skale bile su upotrijebljene

za utvrđivanje parova vrijednosti h, t, dok su četvrta i peta upotrijebljene za uspoređivanje sa štapnim prametrom i za održavanje fokusa optike. Temperatura je bila izmjerena sa sigurnošću 0,004 °C, što je neophodno pri upotrebi štapova od nerđajućeg čelika ($\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}/°C$), kakve sada upotrebljavaju u NRC. Iako su štap i vakuumski kotao bili izrađeni od nemagnetskog materijala, ipak su bili ugrađeni posebni namoti za smanjenje utjecaja vertikalnog magnetskog polja. Tri ugrađena seizmometra nisu registrirala veći pomak od 0,1 mikrometar u toku padanja štapa. Svjetlosni impulsi proizvedeni su ili električnom iskrom u zraku ili ksenonskom bljeskalicom. Pri proračunavanju vrijednosti g iz dobivenih mjernih rezultata uzeta je u obzir promjena vrijednosti g s obzirom na vertikalnu udaljenost krajnjih položaja štapa u odnosu prema optičkoj osi kamera ($dg/dh = 3 \cdot 10^{-6}$ $1/s^2$; o zavisnosti g od h vidi odlomak 9.2.5).

Na Tehnološkom institutu u glavnom gradu Japana, *A. Sakuma* primijenio je za mjerenje g indiciranje promjene jakosti svjetla kad crtice razmaknute po 1 cm na kremenom štapu padaju zajedno s njime. U trenutku maksimalnog oslabljenja svjetlosne zrake, a to je onda kad crtica stiže u definiranu tačku u prostoru, automatski se uključuje elektronsko brojilo koje s pogreškom $\pm 10^{-7}$ s mjeri vremenski interval između prolaza dviju uzastopnih crtica. U američkom Palmer Laboratory (Princeton) upotrijebljen je interferencijski sistem koji je izveden tako da se interferencijske pruge (vidi poglavlje 8) bijelog svjetla mogu detektirati u toku padanja na tri mjesta. Pri tom je tijelo, sastavljeno od zrcala i leća, slobodno padalo. Visina pada iznosila je kod ovih *Faller*ovih pokusa svega 5,2 centimetra, padanje je trajalo oko 55 ms, a u komori je vladao tlak $4 \cdot 10^{-3}$ mikrobara! Smatra se da standardno odstupanje rezultata ovih mjerenja iznosi oko $7 \cdot 10^{-6}$ m/s^2, čemu odgovara preciznost $7 \cdot 10^{-6}/9{,}81 \approx 7 \cdot 10^{-7}$.



Sl. A.88. Načelo mjerenja g slobodnim padom u sovjetskom metrološkom zavodu
1 — vakuumska komora, *2* — štap, *3* — fotografska emulzija, *4* — prozor, *5* — impulsna žarulja, *6* — prorez

Godine 1951. *A. I. Marcinjak* je predložio, a godine 1956. i 1959. u lenjingradskom metrološkom institutu ostvario metodu mjerenja g koja je shematski prikazana na slici A.88. U vakuumskoj komori slobodno pada štap *2* pokriven fotografskom emulzijom *3*. Na štap se kroz prozor *4* projicira slika nepomičnog proreza, ali samo nakon jednakih vremenskih intervala, jer žarulja *5* djeluje impulsno. Nakon razvijanja emulzije, na štapu se vidi niz poprečnih crta; iz njihovih razmaka i poznatih vremenskih intervala može se odrediti g. Kremenim štapom duljine 1 metar *Marcinjak* je tako na svakoj strani štapa zabilježio 90 do 100 crtica.

U istom metrološkom institutu predložio je godine 1947. *P. N. Agaleckij* »metodu zajedničkog padanja«. U normalnom atmosferskom zraku pada kratka cilindrična komora. Položaj padajuće komore registrira se nakon jednakih vremenskih intervala. Unutar komore i zajedno s njom slobodno pada mala pločica s emulzijom (film), koja pada brže od komore, jer ne nailazi na otpor zraka. Vrlo sporo gibanje pločice u odnosu prema komori fotografski se registrira u istim trenucima kada se mjeri i položaj komore u odnosu prema nepomičnim dijelovima uređaja. Odgovarajućim zbrajanjem obaju prijeđenih putova dobiva

se vrijednost g. Komora je dugačka 80 cm, pad iznosi 10,2 metra, a registriranih mjesta ima 70 do 80.

Opisanu metodu zajedničkog padanja primjenjuje i američki metrološki zavod NBS, ali se umjesto kratke pločice upotrebljava 103 cm dugačak šuplji kremeni štap promjera 13 mm. U štapu su izbušena tri poprečna otvora: jedan uz donji kraj štapa, drugi oko 30 cm povrh prvoga, a treći oko 70 cm iznad drugog. Otvori su okruženi brižljivo obrađenim metalnim bridovima. Kad štap pada, on prekida svjetlosnu zraku, tj. sprečava svjetlo da dopre na fotoćeliju. U trenutku kad brid najnižeg otvora dospije do zrake, njoj je otvoren prolaz do ćelije. Signal fotoćelije pokrene dva elektronska uređaja za mjerenje vremenskih intervala (usporedi sa slikama A.122c i A.125 u odsječku 10.8). Dodir zrake s bridom drugoga otvora zaustavlja prvi mjerni uređaj, a dodir s trećim otvorom zaustavlja drugi uređaj. Pomoću tako utvrđenih vremenskih intervala i poznatih udaljenosti između otvora lako se izračuna g. Ovom metodom *D. R. Tate* je godine 1967. u NBS izmjerio $g = 9{,}801\,018$ m/s² s relativnim standardnim odstupanjem $3 \cdot 10^{-7}$.

9.5.2. Mjerenje g vertikalnim hicem u stvari je općenitiji oblik mjerenja g metodom slobodnog pada, koju smo opisali u prošlom odlomku. Ako tijelo bacimo vertikalno uvis početnom brzinom v, položaj tijela z iznad bacališta određen je jednadžbom

$$z = vt - \tfrac{1}{2} g t^2, \tag{9.5-2}$$

kako je poznato iz osnova kinematike. Ovaj oblik zakona slobodnog pada i njemu prilagođeni mjerni uređaj upotrebljava se u najnovije vrijeme u Bureau International des Poids et Mesures i u britanskom National Physical Laboratory za balističko mjerenje veličine g.

Pri ovoj metodi definirane su dvije horizontalne ravnine koje smo na slici A.89 označili sa $z = 0$ i $z = h$; udaljenost h među njima utvrđena je interferencijskim mjerenjem. Ako sa t_1 označimo vrijeme koje je potrebno da se bačeno tijelo iz ravnine $z = 0$ podigne uvis i padne natrag na istu razinu, primjena jednadžbe (9.5-2) na ovaj slučaj glasit će

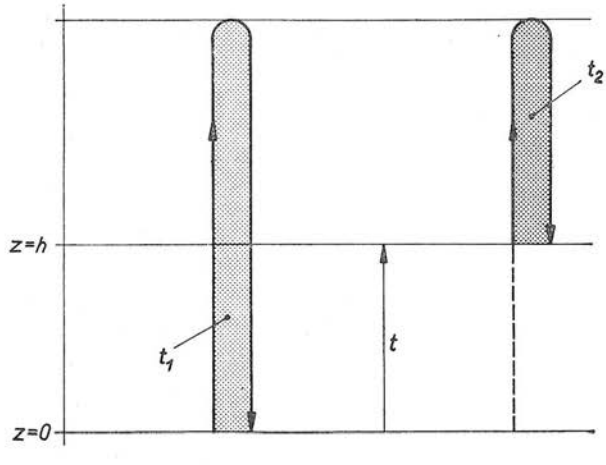
$$z = 0 = v t_1 - \tfrac{1}{2} g t_1^2.$$

Do visine $z = h$ tijelo će stići nakon vremena t. U tom slučaju primjena jednadžbe (9.5-2) daje

$$z = h = vt - \tfrac{1}{2} g t_2^2.$$

No tijelo se diže dalje, konačno se zaustavi i počne padati. Ako sa t_2 označimo vrijeme koje je prošlo od izbačaja do prolaženja kroz razinu $z = h$ prilikom pada (sl. A.89), primjena jednadžbe (9.5-2) glasi

$$z = h = v t_2 - \tfrac{1}{2} g t_2^2.$$



Sl. A.89. Uz mjerenje g vertikalnim hicem

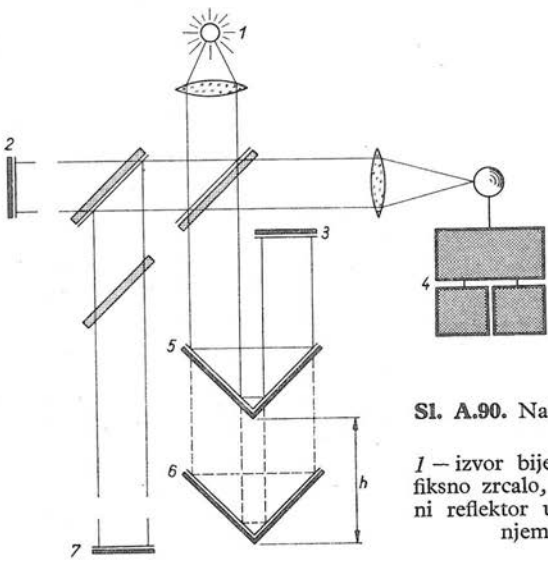
Iz ove tri jednadžbe možemo računanjem saznati ovisnost mjerenog ubrzanja zemljine teže g o h, t_1 i t_2 (mjerenje t uopće nije potrebno)

$$g = \frac{8h}{t_1^2 - t_2^2}. \qquad (9.5\text{-}3)$$

To je, naravno, idealizirana jednadžba; detaljna *Thulin*ova i *Cook*ova teoretska istraživanja uvode u izraz (9.5-3) promjenu dg/dz i druge utjecaje.

U Međunarodnom uredu za mjere i utege (BIPM) očekuju da će se pogreška pri mjerenju g smanjiti 10 ili više puta pomoću uređaja koji radi na *interferencijskom* principu (sl. A.90). Tijelo koje je bačeno uvis jest tzv. kutni reflektor, tj. dva kuta kocke stavljena zajedno. Položaj reflektora detektira se pomoću interferencijskih pruga bijelog svjetla u *Michelson*ovu interferometru (vidi poglavlje 8), namještenom tako da se pruge mogu pojaviti u dva položaja reflektora. Kad se prema slici A.90 reflektor nalazi u gornjem položaju (*5*), pruge nastaju od svjetla reflektiranog od gornjeg referentnog zrcala (*2*); u donjem položaju reflektora (*6*), pruge stvara svjetlo reflektirano od donjeg referentnog zrcala.

Interferencijske pruge detektira fotomultiplikator, čiji signali pokreću ili zaustavljaju elektronsko brojilo koje broji impulse iz najpreciznijeg izvora frekvencije. Istovremeno se signal vodi na katodni osciloskop, gdje se slika snima da bi se znalo odakle treba brojiti pruge. Na principu interferencije djeluje i uređaj koji prema jednadžbi (9.5-3) mjeri g pomoću vertikalnog hica u britanskom National Physical Laboratory. Umjesto kutnog reflektora upotrijebljena je staklena lopta, a na visinama $z = 0$ i $z = h$ postoje izvanredno uski



Sl. A.90. Načelo interferencijskog mjerenja g metodom vertikalnog hica u BIPM

1 — izvor bijelog svjetla, *2* — referentno zrcalo, *3* — fiksno zrcalo, *4* — selektor impulsa i brojila, *5* — kutni reflektor u gornjem položaju, *6* — reflektor u donjem položaju, *7* — referentno zrcalo

horizontalni prorezi dobiveni bušenjem aluminijskog filma, koji se nalazi na staklenom bloku, dijamantnom iglom. Mjerenja se izvode pri tlaku 0,03 mikrobara, a vremenski intervali mjere se s pogreškom oko 10^{-7} s. U BIPM se radi i na tome da se za tijelo vertikalnog hica upotrijebi grupa međusobno učvršćenih zrcala. Godine 1968. BIPM je objavio da se spomenutom metodom mjerenja g postiže preciznost (relativno standardno odstupanje) neznatno lošija od $1 \cdot 10^{-8}$.

10. Mjerenje vremena i reprodukcija sekunde

10.1. Veličina vrijeme i definicije sekunde

10.1.1. Fizikalna veličina vrijeme manifestira se biološkim starenjem i nizanjem događaja. O veličini »vrijeme« imamo stanovitu iskustvenu predodžbu, tj. spoznaju stečenu vlastitim iskustvom ili čak zabilježenim iskustvom naših predaka. Veličinu »vrijeme«, koju obično označujemo slovom t, ne znamo objasniti nekim drugim, zornijim pojmom, pa je stoga u zakonitosti opisivanja prirodnih pojava uvodimo kao aksiomsku veličinu, analogno kao što smo uveli veličine »duljina« i »masa« (vidi odlomke 8.1.1 i 9.1.1). Korisno je da i ovdje ponovimo: »fizikalne veličine« nisu same prirodne pojave, već naši misaoni modeli tih pojava, dakle zapaženi i mjerljivi atributi pojava i stvari.

Pojam vremena t dobiva egzaktni smisao isključivo *mjerenjem*, a mjerenje je pronalaženje odgovora na pitanje »koliko mjernih jedinica sadrži mjerena veličina« (vidi odsječak 1.3). Mjerenje vremena bitno se razlikuje od mjerenja drugih veličina. Na primjer, mjerenje stanovite *udaljenosti* možemo mnogo puta ponoviti odabranom jedinicom duljine; stalno, naime, stoje na raspolaganju i mjerena udaljenost i mjerna jedinica. S mjerenjem *vremena* nije tako: mjereno vrijeme (vremenski interval, vremenski razmak) koje je prošlo između dva promatrana događaja nikada se više neće vratiti. To znači da *isti* vremenski interval ne možemo mjeriti više puta i na taj način pokušati smanjiti mjernu pogrešku. I jedinica vremena bitno se razlikuje od mjernih jedinica nekih drugih veličina, npr. od jedinice mase kilogram. Dok je, na primjer, međunarodni prakilogram (vidi odsječak 9.3) na raspolaganju za niz mjerenja, jedinica vremena mora se realizirati onog trenutka kada je trebamo pri mjerenju. Budući da je jedinica vremena $[t]$ stanovita vrijednost veličine vrijeme t, prolaznost vremena znači da vrijeme svaki put mjerimo *drugom* jedinicom. Zadatak je metrologije da odabere, definira i upotrebljava takve jedinice vremena koje su *međusobno jednake*, tj. da danas i nakon tisuću godina proizvodi jednako velike jedinice vremena.

Iz gornjeg razmatranja proizlazi da za jedinicu vremena valja odabrati trajanje (ili propisani višekratnik tog trajanja) neke periodičke pojave za koju smo sigurni da se godinama (a po mogućnosti stoljećima i tisućljećima) ponavlja na identičan način. Tom idealu približavaju se neke periodičke pojave u svemiru (npr. kruženje planeta oko Sunca, vrtnja Zemlje oko svoje osi itd.) i unutar atoma (kvantne pojave u atomima i molekulama).

10.1.2. Načelo definiranja jedinice vremena. Da bi se veličina vrijeme t mogla mjeriti uspoređivanjem s trajanjem periodičke pojave, mora postojati: 1) stalan i stabilan materijalni sistem koji mora biti karakteriziran barem jednim

parametrom čija vrijednost P raste tokom vremena; 2) teorija koja prikazuje vrijednost $P=P(t)$ tog parametra u ovisnosti o nezavisnoj varijabli t koju nazivamo *vrijeme* t; na taj način vrijeme $t=t(P)$ dade se izraziti u ovisnosti o izmjerenim vrijednostima parametra P.

Kombinacija spomenutog sistema i teorije obično se zove *vremenska skala*, analogno »temperaturnoj skali« koja je kombinacija materijalnog termometrijskog sistema i teorije rastezanja tvari (vidi poglavlje D.3). Vremenska skala omogućuje nam da događaje svrstamo jedan u odnosu prema drugom, tj. da utvrdimo kojim su se redom zbivali ili da konstatiramo njihovu istodobnost. Nezavisnu varijablu vrijeme t odabiremo tako da nejednakost $t_1 > t_2$ znači ovo: događaj P_2 kojem odgovara vrijeme t_2 zbio se *prije* događaja P_1 kojem odgovara (pripada) vrijeme t_1. Prema tome je $P_1 > P_2$ ekvivalentno $t_1 > t_2$, a $P_1 = P_2$ ekvivalentno $t_1 = t_2$ (istodobnost).

Mjerna jedinica vremena $[t]$ jest vremenski interval kojemu je pripisana jedinična vrijednost veličine vrijeme t. Jedinicu vremena možemo definirati na dva načina: 1) vremenskim intervalom između dva događaja *u prošlosti*. Ta dva događaja utvrđena su izmjerenim vrijednostima parametra P ili njegove derivacije $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ uz poznatu zakonitost $t=t(P)$. U tom slučaju je dakle

$$[t] = |t(P_2) - t(P_1)|, \tag{10.1-1}$$

jer u skladu sa $t=t(P)$ pišemo $[t]=t_2-t_1$; 2) trajanjem $[t]$ pojave za koju smo sigurni da se stalno ponavlja na identičan način. Ako su P_i i P_{i+1} dvije identične uzastopne vrijednosti parametra P koji se periodički ponavlja, onda je

$$[t] = |t(P_{i+1}) - t(P_i)| = \text{const}, \tag{10.1-2}$$

tj. tako definirana jedinica vremena $[t]$ stalna je za sve i.

Ako vremenski interval $[t]$ iz jednadžbe (10.1-1) pri *ponavljanju* pojave $P=P(t)$ ne traje jednako dugo, ili ako nije udovoljeno jednadžbi (10.1-2), onda tome mogu biti dva uzroka: ili zakonitost $t=t(P)$ nije poznata dovoljno pouzdano ili vremenska skala nije jednolična (uniformna). Pod *jednoličnim vremenom* razumijevamo vrijeme t klasične *Newton*ove inercijske mehanike (temelje te mehanike razmotrili smo u odsječku A.9.1); zato se veličina »jednolično vrijeme« naziva i *newtonovskim vremenom*.

Između opisana dva načina definiranja i reproduciranja jedinice vremena (jednadžbe 10.1-1, 2) prividno nema razlike, jer obje definicije polaze od pretpostavke da su ispunjena oba uvjeta koja smo naveli na početku ovog odlomka (stabilan sistem, valjana teorija!). No u stvarnosti razlika postoji: prvim načinom jedinica vremena $[t]$ definira se intervalom (10.1-1) koji je postojao u *prošlosti*; drugim načinom jedinica vremena (10.1-2) proizvodi se neposredno prilikom mjerenja, dakle *sada*. Razliku između tih dviju definicija jedinica vremena konkretno ćemo upoznati pri opisivanju porijekla »efemeridne sekunde« (odsječak 10.2) i »atomske sekunde« (odlomak 10.1.3 i odsječak 10.6).

10.1.3. Definicija sekunde od godine 1967. Relativna nepouzdanost astronomske reprodukcije jedinice vremena efemeridne *vremenske skale* iznosi u najpovoljnijem slučaju oko $\pm 2:10^9$, a uzrokovana je astrometrijskim pogreškama (odlomak 10.2.6). U prirodoslovnim istraživanjima (naročito u fizici atoma i jezgre), a pogotovo u suvremenim službama vremena kojih se djelovanje temelji na tzv. *atomskim vremenskim skalama* (o takvim vremenskim skalama te o distribuciji frekvencije i signala vremena riječ je u odsječcima 10.7 i 10.8), neophodna je veća pouzdanost. To znači da vremenska mjerna jedinica mora biti što stalnija. Izvanredno stabilne jedinice vremena danas se proizvode po-

moću tzv. kvantnih (molekularnih i atomskih) oscilatora. Frekvencija tih oscilatora (cezij, rubidij, vodik itd.) upravo je fantastično stabilna u toku kraćeg razdoblja; danas se njima dobivaju frekvencije u gotovo nepredočivo uskom rasponu (odsječci 10.6 i 10.7)

$$f = f_0[1 \pm (10^{-13} \ldots 10^{-14})], \qquad (10.1\text{-}3)$$

gdje je f_0 neka srednja vrijednost unutar naznačenog frekventnog intervala. Budući da su fizikalne veličine »frekvencija« f i »period titraja« T (vidi odsječak B.2.1) međusobno povezane relacijom $f = 1/T$, posve je očigledno da stabilnost frekvencije istovremeno znači stabilnost jedinice vremena.

Da bi prirodoslovne znanosti mogle *jedinstveno* što preciznije mjeriti vremenske intervale, te da bi astronomi mogli što bolje »pohranjivati vrijeme« (vidi kraj odlomka 10.1.5), Savjetodavni odbor za definiciju sekunde Međunarodnog komiteta za mjere i utege (odsječak 7.1) koordinirao je u tom smislu niz godina radove na razvoju što stabilnijih izvora frekvencije. Pri tom su sudjelovali vrhunski stručnjaci (fizičari, elektroničari, astronomi i drugi) iz različitih metroloških zavoda i specijaliziranih laboratorija. Pošto su analizirani svi vredniji rezultati eksperimentalnih istraživanja, spomenuti Odbor je svoje mišljenje o definiciji jedinice vremena SI sekunde, proizvođene atomskim oscilatorima (popularno zvana »fizikalna sekunda« ili »atomska sekunda«), dostavio Međunarodnom komitetu za mjere i utege. CIPM je 13. zasjedanju Generalne konferencije za mjere i utege, održanom mjeseca oktobra 1967, predložio ovaj tekst rezolucije, koji je ona i prihvatila:

Résolution 1

La Treizième Conférence Générale des Poids et Mesures,

considérant

que la définition de la seconde décidée par le Comité International des Poids et Mesures à sa session de 1956 (Résolution 1) et ratifiée par la Résolution 9 de la Onzième Conférence Générale (1960), puis maintenue par la Résolution 5 de la Douzième Conférence Générale (1964) ne suffit pas aux besoins actuels de la métrologie;

qu'à sa session de 1964 le Comité International des Poids et Mesures, habilité par la Résolution 5 de la Douzième Conférence Générale (1964), a désigné pour répondre à ces besoins un étalon atomique de fréquence à césium à employer temporairement;

que cet étalon de fréquence est maintenant suffisamment éprouvé et suffisamment précis pour servir à une définition de la seconde répondant aux besoins actuels;

que le moment est venu de remplacer la définition actuellement en vigueur de l'unité de temps du Système International d'Unités par une définition atomique fondée sur cet étalon;

décide

1° L'unité de temps du Système International d'Unités est la seconde définie dans les termes suivants:

»La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.«

2° La Résolution 1 adoptée par le Comité International des Poids et Mesures à sa session de 1956 et la Résolution 9 de la Onzième Conférence Générale des Poids et Mesures sont abrogées.

Prema tome Generalna konferencija za mjere i utege uvela je godine 1967. ovu definiciju sekunde — osnovne jedinice Međunarodnog sistema jedinica (SI):

> Sekunda je trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma cezija 133.

Ovu definiciju možemo zabilježiti i u matematičkom obliku ako se poslužimo oznakom T za period harmoničkog elektromagnetskog polja koje emitiraju ili apsorbiraju atomi cezija 133:

$$\text{sekunda} = \text{s} = 9\,192\,631\,770\,T. \qquad (10.1\text{-}4)$$

To znači da jedna sekunda traje isto toliko koliko i nešto više od devet milijardi titraja zračenja Cs 133, odnosno da je frekvencija f elektromagnetskog polja cezija 133:

$$f = \frac{1}{T} = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz},$$

jer je hertz = Hz = 1/s. Način reprodukcije sekunde iz jednadžbe (10.1-4) podrobno je opisan u odsječku 10.6.

10.1.4. Prijelaz na novu definiciju sekunde. Osnovna jedinica vremena Međunarodnog sistema jedinica (SI) bila je od godine 1960. do 1967. definirana i reproducirana astronomskim motrenjima; bila je to tzv. efemeridna sekunda (vidi odsječak 10.2). Vidimo da se »efemeridna sekunda« zadržala u zakonodavstvu država članica Konvencije o metru (odsječak 6.3) samo sedam godina, što je neuobičajeno kratak period za tako važne odluke u samim temeljima metrologije. Razlog tome sažeto je objašnjen u rezoluciji 1 trinaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege održanog godine 1967. koju smo naveli u odlomku 10.1.3. U citiranom francuskom tekstu rezolucije na dva se mjesta spominje rezolucija 5 dvanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege održanog godine 1964. Ta rezolucija u prijevodu glasi:

Rezolucija 5 (1964)

Generalna konferencija za mjere i utege na svom dvanaestom zasjedanju, *uzimajući u obzir* da je Generalna konferencija za mjere i utege na svom jedanaestom zasjedanju u rezoluciji 10 konstatirala hitnost uvođenja atomskog ili molekularnog standarda vremenskog intervala za potrebe vrhunske metrologije,

da, unatoč rezultatima postignutim u primjeni cezija za atomski standard, još nije došlo vrijeme da bi Generalna konferencija prihvatila novu definiciju sekunde, osnovne jedinice Međunarodnog sistema jedinica, jer se očekuju nova i važna unapređenja u nastavku tekućih istraživanja,

uzimajući također u obzir da se više ne može odugovlačiti s fizikalnim mjerenjem vremena oslonjenim na atomske ili molekularne standarde frekvencije,

ovlašćuje Međunarodni komitet za mjere i utege da odredi atomski ili molekularni standard frekvencije za privremenu upotrebu,

poziva organizacije i laboratorije, specijalizirane na tom području, da nastave istraživanja korisna za novu definiciju sekunde.

Prema tome se Generalna konferencija na svom dvanaestom zasjedanju (1964) još nije mogla odlučiti da definira sekundu Međunarodnog sistema jedinica (SI) za potrebe preciznih mjerenja vremenskih intervala na osnovu propisivanja vrijednosti frekvencije stanovitog kvantnog oscilatora. Konferencija je međutim pružila mogućnost Međunarodnom komitetu za mjere i utege da objavi *privremenu* vrijednost takve frekvencije, dakle vrijednost (i vrstu oscilatora) koja će se promijeniti ako daljnja istraživanja pokažu da je to potrebno. Tu mogućnost Komitet je iskoristio i na istoj sjednici delegate Generalne konferencije upoznao s ovom svojom *deklaracijom* koja se nadovezuje na citiranu rezoluciju 5 od godine 1964:

Međunarodni komitet za mjere i utege,

ovlašten rezolucijom 5 s dvanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege da odredi atomski ili molekularni standard frekvencije za privremenu upotrebu pri fizikalnim mjerenjima vremena,

izjavljuje da je standard, koji valja upotrebljavati, prijelaz između hiperfinih razina $F=4$, $M=0$ i $F=3$, $M=0$ osnovnog stanja $^2S_{1/2}$ atoma cezija 133 neporemećenog vanjskim poljima, i da je frekvenciji tog prijelaza pripisana vrijednost 9 192 631 770 hertza.

Ovu deklaraciju BIPM možemo zabilježiti i u matematičkom obliku, ako sa T označimo period harmoničkog elektromagnetskog polja koje emitiraju ili apsorbiraju atomi cezija 133 (podrobnosti vidi u odlomku 10.2.6 i odsječku 10.6). Budući da je $f=1/T$, a $\mathrm{Hz}=1/\mathrm{s}$, iz jednadžbe $f=9192631770\ 1/\mathrm{s}=1/T$ slijedi jednadžba (10.1-4) koja znači da jedna sekunda traje isto toliko koliko i nešto više od devet milijardi titraja zračenja Cs 133.

Želimo posebno naglasiti da se s »fizikalnom (atomskom) sekundom« (10.1-4) ne mora staviti van astronomske upotrebe »efemeridna sekunda« (10.1-5) iz odlomka 10.1.5. Fizikalna sekunda je u pogledu svog trajanja u stvari samo usavršena efemeridna sekunda, posve analogno efemeridnoj (astronomskoj) sekundi koja je usavršenje tzv. srednje sunčeve sekunde (vidi kraj odlomka 10.2.3). Dok je relativna nepouzdanost efemeridne sekunde u najboljem slučaju oko $\pm 2\cdot 10^{-9}$, dotle je stalnost trajanja fizikalne sekunde $2\cdot 10^{4}\ldots 2\cdot 10^{5}$ puta pouzdanija (vidi jednadžbu 10.1-3). Prema tome *unutar* trajanja efemeridne sekunde, fizikalna je mnogo sigurnije determinirana. (Nešto slično je s »valnim metrom« koji se dade determinirati pouzdanije negoli razmak među crticama štapnog prametra; vidi poglavlje 8.) Time ni načelno nije isključena mogućnost postojanja efemeridne sekunde kao jedinice kontinuirane *vremenske skale* oslonjene na zakonitost nebeske mehanike koja opisuje tisućljetna gibanja u svemiru. Da bi se ove naše izjave mogle bolje razumjeti, u odsječcima 10.2, 3 i 10.7 podrobnije su razmotrene te zakonitosti i metode kojima čovječanstvo precizno mjeri i utvrđuje vremenske trenutke, tj. prošle, sadašnje i buduće »tačke« na kontinuiranim vremenskim *skalama.*

Prihvaćanje cezijeva pramjerila (o jedinicama i pramjerilima vidi odsječak 5.3) za reprodukciju osnovne jedinice SI predstavlja bitnu, načelnu promjenu u temeljima metrologije vremena. Ta promjena analogna je prijelazu od »štapnog« na »valni« metar (odsječak 8.1). No možda će uskoro doći do promjene najnovije definicije sekunde od godine 1967. (odlomak 10.1.3), ali to više neće biti *načelna* promjena, već zamjena cezijeva pramjerila nekim drugim, boljim. Takvu promjenu pramjerila jedinice vremena SI, a time i promjenu definicije sekunde, predviđa i sama Generalna konferencija. Na zasjedanju u oktobru 1967. Generalna konferencija je, naime, uporedo sa citiranom rezolucijom 1 objavila još jednu, koja glasi:

Résolution 2 (1967)

La Treizième Conférence Générale des Poids et Mesures,

considérant que l'étalon de fréquence à césium est encore perfectible et que des expériences en cours autorisent l'espoir de réaliser d'autres étalons ayant des qualités encore meilleures pour servir à définir la seconde,

invite les organisations et laboratoires experts dans le domaine des étalons atomiques de fréquence à poursuivre activement leurs études.

Ovom rezolucijom, kako vidimo, Generalna konferencija poziva laboratorije i stručnjake da nastave istraživanja na području pramjerila frekvencije ($T=1/f$, $\mathrm{s}=\mathrm{const}\cdot T$), jer cezijevo pramjerilo još nije usavršeno do kraja. Osim toga, eksperimenti koji su u toku možda će dovesti vrhunsku metrologiju do još pouzdanijih pramjerila frekvencije, dakle i pouzdanije reprodukcije jedinice za mjerenje vremenskih intervala (vidi odlomak 10.6.5).

10.1.5. Astronomska definicija sekunde. U razdoblju od godine 1960. do 1967. sekunda — osnovna jedinica vremena Međunarodnog sistema jedinica (SI) — bila je definirana ovom rečenicom (rezolucija 9 jedanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege koja je ukinuta rezolucijom 1 od godine 1967; vidi odlomak 10.1.3):

> Sekunda je 31 556 925,9747-i dio tropske godine u trenutku 1900, januar 0, 12 sati efemeridnog vremena.

Pojmove »tropska godina«, »efemeridno vrijeme«, »januar 0« objasnit ćemo u odsječcima 10.2 i 10.5.

Označimo li sa a(0) trajanje tropske godine o kojoj se govori u gornjoj definiciji (slovo a dolazi od latinskog annus, što znači godina), onda se astronomska definicija sekunde od 1960. može izraziti u obliku jednadžbe

$$s = \frac{a(0)}{31\,556\,925{,}9747} = \frac{a(0)}{3{,}155\,692\,597\,47 \cdot 10^7}, \qquad (10.1\text{-}5)$$

gdje je s kratica jedinice vremena »sekunda« (latinski: secunda).

Kalendarska godina 1900. (o kalendaru vidi odsječak 10.5) spominje se u definiciji zato što se od godine 1900. računa tzv. efemeridno vrijeme, o čemu se govori u odsječku 2.2. Taj način kontinuiranog bilježenja efemeridnog vremena prihvatila je godine 1958. Generalna skupština Međunarodne astronomske unije (General Assembly of the International Astronomical Union):

> Efemeridno vrijeme računa se od onog trenutka na početku kalendarske godine 1900. kada je geometrijska srednja duljina Sunca iznosila 279°41′48,04″. U tom trenutku vrijednost efemeridnog vremena bila je tačno: godina 1900, januar 0, 12^h.

Originalni tekst ove rezolucije na engleskom jeziku glasi:

> Ephemeris Time is reconed from the instant, near the beginning of the calendar year A.D. 1900, when the geometric mean longitude of the Sun was 279°41′48″,04, at which instant the measure of Ephemeris Time was 1900 January 0^d 12^h precisely.

Ovu uputu o načinu bilježenja efemeridnog vremena naveli smo ovdje zato što ona predstavlja uporište jednolične (uniformne) *vremenske skale* koja se kontinuirano proteže u prošlost i budućnost (odsječak 10.2). Slično je vrijednost temperature trojne tačke vode $T_t = 273{,}16$ K uporište termodinamičke temperaturne skale (vidi poglavlje D.3).

Astronomsku definiciju sekunde, iako ona danas više nije na snazi u okviru Međunarodnog sistema jedinica (SI), citirali smo ovdje zato što je baš astronomija omogućila da se dođe do današnje definicije »fizikalne sekunde« iz odlomka 10.1.3. Primjena kvantnih oscilatora u astronomiji ne predstavlja, naime, nikakvu novost u smislu *mjerne metode*, jer astrometrija se sastoji od dvije nerazdvojne mjerne djelatnosti: u trenutku prvog očitanja položaja motrenog nebeskog tijela uključi se uređaj (ura, sat) koji kontinuirano odbrojava jednake vremenske intervale sve do očitanja drugog položaja motrenog tijela, kada se isključi. Ako se vremenski interval između ta dva očitanja označi sa Δt (to je npr. trajanje tropske godine, vidi odlomak 2.3), a mjerni uređaj (npr. cezijevo pramjerilo) je kroz taj interval

odbrojio Z svojih intervala $[t]$, onda je trajanje intervala uređaja (»otkucaja«) $[t] = \Delta t/Z$ i on se može upotrijebiti za jedinicu vremena. Pri tom su za pouzdanost mjerenja važne dvije stvari: 1) uređaj mora biti takav da se njegovi intervali $[t]$ što manje međusobno razlikuju, bez obzira koliki su; 2) pogreška δt, koja nastaje zbog nepodudaranja trenutka očitanja položaja nebeskog tijela i trenutka uključenja ili isključenja uređaja, mora biti što manja. Svojedobno su se u opisanu svrhu upotrebljavale obične ure s njihalom, zatim su one usavršene, pa su došli kremeni oscilatori, a danas imamo kvantne oscilatore koji proizvode $[t]$ ($= T$ npr. cezijeva oscilatora iz odlomka 10.1.3) čija je vrijednost nepredočivo stabilna (jednadžba 10.1-3). Astrometrijsku primjenu navedenih uređaja astronomi nazivaju »interpolacijom vremena« ili »pohranjivanjem vremena« (engl. timekeeping).

Pomoću takvih uređaja (najstabilnije od njih nazivamo pramjerilima) u naše se doba već oblikuje *atomska vremenska skala.* Ta skala nekoliko je tisuća puta jednoličnija od *astronomske* vremenske skale (odlomak 10.7.2), a njena neuništivost zajamčena je time što širom svijeta istodobno djeluje mnoštvo vrhunskih atomskih pramjerila frekvencije i vremena. Ispravnost tih pramjerila provjerava se njihovim međusobnim uspoređivanjem pomoću radio-signala i putujućih ura. Koordinacijom rada niza tzv. lokalnih atomskih skala neprekidno se stvara njihov prosjek, svjetska atomska skala (odsječak 10.7). U odnosu prema njoj utvrđuje se nejednoličnost astronomske vremenske skale.

U tekstu zaključka Međunarodne astronomske unije, koji smo prije citirali, *trenutak* (»tačka« na vremenskoj skali) je označen sa $0^d\ 12^h$, dakle povišenim pisanjem jedinica vremena (d — dan, h — sat). Takav način bilježenja trenutaka uobičajen je i u svakodnevnom životu; na primjer naznaka da se nešto dogodilo u 23 sata 45 minuta i 30 sekundi bilježi se ovako: $23^h\ 45^m\ 30^s$. U astronomiji je, štoviše, uobičajeno da se kratice jedinica vremena godina, dan, sat, minuta i sekunda pišu povišeno i onda kada je riječ o *vremenskim intervalima*; na primjer: trajanje tropske godine 1900 iznosi $365^d\ 5^h\ 48^m\ 45^s{,}9747$. Ovdje smo ujedno upotrijebili i način stavljanja mjerne jedinice (sekunda) iznad decimalnog zareza, kako se obično radi u astronomiji (vidi odlomak 10.5.5).

10.2. Efemeridno vrijeme i objašnjenje astronomske definicije sekunde

10.2.1. Efemeridno vrijeme je nezavisna varijabla (argument) diferencijalnih jednadžbi kojima se u gravitacijskim teorijama opisuju gibanja tijela Sunčeva sistema. U astronomskom pogledu, efemeridno vrijeme t je danas najbolje približenje jednoličnom (uniformnom) vremenu *Newton*ove inercijske mehanike. Pomoću spomenutih diferencijalnih jednadžbi nebeske mehanike *pretkazuju* se budući položaji nebeskih tijela (Sunca, Mjeseca, planeta i zvijezda) u ovisnosti o tom vremenu uz pretpostavku da je to jednolično vrijeme. Ta pretkazivanja objavljuju se unaprijed u astronomskim godišnjacima i kalendarima ili u specijalnim *astronomskim efemeridama.* Riječ efemerida grčkog je porijekla, koja u biti znači »svaki dan«; time se želi reći da se položaj Sunca, Mjeseca, planeta i zvijezda na nebeskoj sferi predviđa za svaki budući dan. Niz astronomskih godišnjaka odavno objavljuje efemeride: Connaissance de Temps (izlazi u Parizu od godine 1679), Nautical Almanac (London, 1767), Berliner astronomisches Jahrbuch (1776), Astronomičeskij ježegodnik SSSR (Moskva, 1921) itd.

Naziv »efemeridno vrijeme« prihvatila je godine 1952. Međunarodna astronomska unija (International Astronomical Union, IAU) i preporučila da se u

astronomskim godišnjacima za argument efemerida upotrebljava »efemeridno vrijeme«, umjesto do tada upotrebljavanog »svjetskog vremena« (svemirsko vrijeme, engl. universal time; vidi odlomak 10.3.5). Za astronome je ta zamjena bila formalne prirode, jer su oni i do tada koordinate Sunca i planeta objavljivali na temelju gravitacijskih teorija *Newton*ove inercijske mehanike. No bitna je bila promjena u definiciji *jedinice vremena*; to se može lijepo razabrati iz sažetih odluka triju zasjedanja Generalne skupštine IAU (Rim 1952, Dublin 1955, Moskva 1958), koje citiramo u nastavku:

U svim onim slučajevima kada srednja sunčeva sekunda zbog svoje promjenljivosti nije pogodna za jedinicu vremena, preporučuje se primjena sekunde definirane kao 31 556 925,9747-i dio tropske godine u trenutku osnovne epohe *Newcomb*ovih tablica gibanja Sunca. Preporučuje se da se vrijeme izraženo tom jedinicom naziva »efemeridno vrijeme«. To vrijeme računa se od onog trenutka u blizini početka kalendarske godine 1900. kada je geometrijska srednja duljina Sunca iznosila 279°41′48,04″, tj. od trenutka kada je po efemeridnom vremenu bilo točno: 1900, januar 0, 12^h (fundamentalna epoha tablica o gibanju Sunca). Preporučuje se da se srednje sunčevo vrijeme zamijeni efemeridnim pomoću korekcije $\Delta T/\mathrm{s} = +24{,}349 + 72{,}318\,\tau + 29{,}950\,\tau^2 + 1{,}821\,44\,B$, gdje je τ broj julijanskih stoljeća, računajući od griničkog podneva 1900, januar 0, a B je broj lučnih sekundi; značenje veličine B objašnjeno je u raspravi *Spencer Jones*a, objavljenoj u Monthly Notices *99* (1939), 541. Ne predviđaju se i ne preporučuju nikakve promjene pri mjerenju i utvrđivanju svjetskog vremena (Transactions of the IAU 1952, 1955, 1958).

Te preporuke uveli su godine 1960. gotovo svi astronomski godišnjaci (izuzev francuskog), a pri tom je londonski promijenio svoj naziv u Astronomical Ephemeris. (Pod nazivom American Ephemeris u Washingtonu i dalje izlazi astronomski godišnjak USA.) Uvođenjem efemeridne sekunde (odlomak 10.1.5) ujedno je stavljena van tečaja tzv. »srednja sunčeva sekunda« koja je bila definirana kao 86 400-ti dio trajanja jednog dana »srednje sunčeve vremenske skale« (vidi odlomak 10.3.3).

10.2.2. Newcombova osnova efemeridnog vremena. Astronomi smatraju da su rezultati astronomskih motrenja gibanja nebeskih tijela na nebeskoj sferi egzaktni (u današnjem smislu te riječi) negdje od godine 1750. Za proučavanje razvoja sistema Zemlja—Mjesec od koristi su, međutim, bili i stariji astronomski podaci stečeni manje precizno u toku prethodne tri tisuće godina. Na temelju mnoštva do tada skupljenih astronomskih podataka američki astronom *S. Newcomb* izveo je godine 1895. teoriju vidljivog gibanja Sunca, a rezultate objavio u čuvenim Tables of the Motion of the Sun. Prema tim tablicama i danas se računaju sunčeve efemeride i predviđaju u astronomskim godišnjacima (iznimka je pariski godišnjak Connaissance de Temps, u kojem se efemeride računaju prema tablicama koje je godine 1858. objavio *Le Verrier*).

Nebeska mehanika, koja među ostalim proučava i gibanje Zemlje pod djelovanjem newtonovske privlačne sile između Sunca i planeta, omogućila je pronalaženje općeg izraza za nebesku duljinu L_S Sunca u ovisnosti o vremenu t *Newton*ove mehanike (jednolično, uniformno vrijeme)

$$L_S = L_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \Sigma(Per). \qquad (10.2\text{-}1)$$

Pri tom se pod duljinom Sunca $L_S(t)$ razumijeva kut što ga je meridijan Sunca opisao u toku vremena t, računajući od položaja koji je meridijan proljetnog ekvinocija zauzimao *stanovitog trenutka u prošlosti.*

Geometrijsku interpretaciju gornjih izjava čitatelj može naći u odlomku 10.2.4, gdje se govori o direktnom utvrđivanju trenutaka efemeridnog vremena, te u odlomku 10.3.1, u kojem je opisana zvjezdana (siderijska) vremenska skala.

Unatoč tome smatramo korisnim da ovdje podsjetimo na neke poznate astronomske pojmove. Pod ekvinocijskim tačkama razumijevamo dva presjecišta ekliptike i nebeskog ekvatora. Proljetni ekvinocij nastaje u mjesecu martu, prilikom prijelaza Sunca iz južne polusfere u sjevernu, a jesenski u septembru. Ekvinocijska tačka ne miruje u prostoru, već se giba u ravnini ekliptike s periodom od 25725 godina. Tom osnovnom gibanju superponirana su periodička kolebanja (nutacije), pa je *prava* (istinita) ekvinocijska tačka rezultat kompleksnog precesijskog i oscilacijskog gibanja. Stoga se umjesto prave često primjenjuje *srednja* ekvinocijska tačka za koju su periodička kolebanja ignorirana.

U jednadžbi (10.2-1) L_0, C_1 i C_2 su *konstante*. Vrijednost konstante L_0 ovisi o tome kako definiramo ishodište brojenja efemeridnog vremena t. Pribrojnik na kraju jednadžbe predstavlja sumu periodičkih članova vrlo različitih perioda. Amplitude tih članova ili su konstante ili se vrlo polako mijenjaju kao linearne funkcije vremena. Suma na kraju jednadžbe (10.2-1) vrlo je važna za astrometriju, jer ta suma odražava kolebanje položaja osi vrtnje Zemlje, a ta os definira položaj Zemlje u svemiru. Za promatrača na Zemlji kolebanja njene osi manifestiraju se kao gibanje svemirskih polova koje se obično razlaže na dvije komponente: na stoljetno gibanje polova (precesija) i na periodička gibanja polova. Potonja se nazivaju nutacijskim gibanjima polova u odnosu prema nekom srednjem položaju, odnosno kraće nutacija. Današnje mjerne metode astrometrije, uključivši kvantne oscilatore (vidi odlomke 10.2.6 i 10.3.6 te odsječak 10.6), omogućuju da se suma periodičkih članova u jednadžbi (10.2-1) te niz nepravilnosti vrtnje Zemlje sazna sa zavidnom preciznošću za *protekli* period (odlomak 10.7.2).

Konstante L_0, C_1 i C_2 toliko su pouzdano poznate da teorija izražena jednadžbom (10.2-1) može zadovoljavati astronome za nekoliko tisućljeća unaprijed i unazad. Štoviše, konstanta C_1 uopće se ne namjerava revidirati, jer je ona u stvari omogućila definiranje današnje jedinice vremena (vidi odlomak 10.2.6). Prema tome C_1 ima danas status konstante per definitionem, iako je svojevremeno dobivena eksperimentalno. Vrijednosti konstanti L_0, C_1 i C_2 slijede iz citirane *Newcomb*ove rasprave i iz vrijednosti osnovnih koeficijenata precesije, nutacije, aberacije i paralakse koje je godine 1896. prihvatila Conférence internationale des étoiles fondamentales, a potvrdila godine 1962. Međunarodna astronomska unija na svojoj osmoj generalnoj skupštini:

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= 279^\circ 41' 48{,}04'', \\ C_1 &= 1{,}296027\,6813 \cdot 10^8\ ''/\mathrm{D}, \\ C_2 &= 1{,}089\ ''/\mathrm{D}^2. \end{aligned}\right\} \qquad (10.2\text{-}2)$$

Kut L_0 odgovara ishodištu *Newcomb*ovih tablica koje je stavljeno u trenutak 1899, decembar 31, 12^h efemeridnog vremena; taj isti trenutak možemo označiti i sa 1900, januar 0, 12^h *ET* (vidi odlomak 10.5.5), kako je učinjeno pri definiranju efemeridne sekunde (odlomak 10.1.5). Napominjemo da je svjetsko vrijeme (*UT*) u tom trenutku imalo vrijednost za 4,5 sekunde manju od *ET* (odlomci 10.2.5 i 10.3.6). Prema tome ishodište mjerenja kuta $L_S(t)$ iz jednadžbe (10.2-1) je položaj meridijana proljetnog ekvinocija kalendarske godine 1889.

Slovo D u konstantama C_1 i C_2 predstavlja jedinicu vremena julijansko stoljeće (engl. Julian century, JC), odnosno preciznije »efemeridno julijansko stoljeće«. Ta jedinica vremena definirana je relacijom (vidi odlomak 10.5.2)

$$\mathrm{D} = \mathrm{JC} = 36\,525\ \mathrm{d},$$

gdje slovo d označuje jedinicu vremena »efemeridni dan« (lat. dies znači: dan). Jedinica vremena dan (d) razdijeljena je na sate, minute i sekunde poznatim odnosima

$$\text{dan} = \text{d} = 24\,\text{h}, \qquad \text{sat} = \text{h} = 60\,\text{m},$$
$$\text{minuta} = \text{m} = 60\,\text{s}, \qquad \text{d} = 24\,\text{h} = 1440\,\text{m} = 86400\,\text{s}.$$

Prema tome jedinicu vremena D = julijansko stoljeće možemo izraziti efemeridnim sekundama (s) ovako:

$$\text{D} = 36525 \cdot 86400\,\text{s} = 3{,}15576 \cdot 10^9\,\text{s}, \tag{10.2-3}$$

tj. julijansko stoljeće sadrži nešto preko 3 milijarde efemeridnih sekundi (sekundi definiranih rečenicom na početku odlomka 10.1.5).

10.2.3. Objašnjenje definicije efemeridne sekunde. Podaci koje sadrže jednadžbe (10.2-1,2) imaju sve potrebne elemente za definiranje *jednolične vremenske skale* (vidi odlomak 10.1.2): 1) Postoji materijalni (Sunčev) sistem za koji se vjeruje da je stalan i stabilan. Taj sistem karakteriziran je mjerljivim parametrom, sunčevom duljinom (kutom) L_s. 2) Postoji teorija gibanja Sunca koja veličinu L_s izražava kao funkciju efemeridnog vremena t čije je ishodište definirano konstantom L_0, a ona kalendarskim podatkom. 3) Konstante C_1 i C_2 izražene su jedinicom vremena D = efemeridno julijansko stoljeće = $3{,}15576 \cdot 10^9$ efemeridnih sekundi (tačno).

Za metrološke je svrhe korisno da se jednadžba (10.2-1) napiše u takvu obliku u kojem ne dolazi do izražaja ovisnost periodičkog člana Σ o vremenu. To znači da se definicija efemeridne sekunde treba osloniti na gibanje Sunca u *prošlosti*, jer se jedino za protekli period zna koliko je *stvarno* iznosila suma tzv. mješovitih periodičkih članova. Zbog toga ćemo daljnja razmatranja temeljiti na tzv. srednjoj sunčevoj duljini

$$L = L_s - \Sigma(Per) = L_0 + C_1 t + C_2 t^2, \tag{10.2-4}$$

čime smo iz razmatranja eliminirali periodičke članove. Deriviramo li jednadžbu (10.2-4) po efemeridnom vremenu t, dobivamo izraz za kutnu brzinu Sunca

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = C_1 + 2C_2 t = C_1(1 + C_3 t), \tag{10.2-5}$$

gdje je $C_3 = 2C_2/C_1 \approx 1{,}68 \cdot 10^{-8}/\text{D}$. Prema tome kutna brzina Sunca $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ linearno *raste* s vremenom t (sl. A.91). U trenutku $t = 0$, tj. u trenutku koji predstavlja ishodište *Newcomb*ovih tablica (1900, januar 0, 12^{h} *ET*), kutna brzina Sunca iznosila je

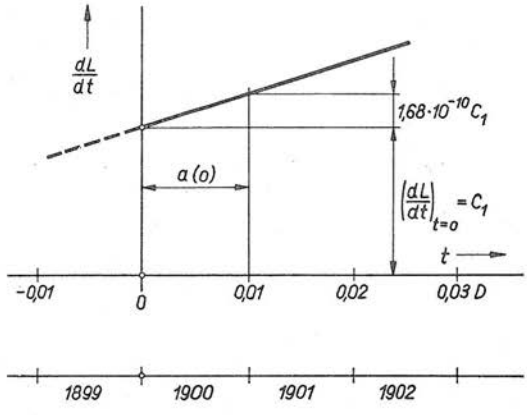
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)_0 = C_1,$$

što neposredno slijedi iz (10.2-5), ako uvrstimo $t = 0$. Za svaki drugi trenutak t kutna brzina Sunca ovako ovisi o vremenu t i o kutnoj brzini $(\mathrm{d}L/\mathrm{d}t)_0$:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)_0 (1 + C_3 t) = C_1(1 + C_3 t).$$

Lako je npr. izračunati da će na početku kalendarske godine 2000. ($t = 1$ D) kutna brzina Sunca biti $(1 + 1{,}68 \cdot 10^{-8})$ puta veća od kutne brzine $(\mathrm{d}L/\mathrm{d}t)_0 = C_1$

koju je Sunce imalo na samom početku kalendarske godine 1900, odnosno u trenutku 1900, januar 0, 12^h *ET*. U vremenskom rasponu od početka do kraja prve godine *Newcomb*ova brojenja, dakle u vremenskom intervalu od *jedne* godine, porast kutne brzine bit će 100 puta manji (D = 100 a), iznosit će dakle samo $1{,}68 \cdot 10^{-10}\ C_1$ (sl. A.91).



Sl. A.91. Karikirani prikaz porasta kutne brzine Sunca u ovisnosti o efemeridnom vremenu

Pri tom se pod godinom razumijeva *tropska godina*. To je vremenski interval između dva uzastopna proljetna ekvinocija, a ekvinocij je onaj događaj kad putanja Sunca siječe nebeski ekvator, pa je deklinacija Sunca jednaka nuli. U toku jedne tropske godine porast srednje duljine L Sunca, dakle bez periodičkih poremećaja, iznosi točno $\Delta L = 360°$. Neki autori poistovjećuju tropsku godinu s *Bessel*ovom fiktivnom godinom (lat. annus fictus). U načelu to nije ispravno, ali praktički je jednakost na mjestu, jer *Bessel*ova godina traje $(1 - 4{,}442 \cdot 10^{-13})$-i dio tropske godine a(0), dakle razlika je nepredočivo malena (10^{-13}!). Korisno je ovdje napomenuti i to da prema *Bessel*ovu prijedlogu tropska godina uvijek počinje istodobno (fizički istodobno) na čitavoj Zemlji, i to u neposrednoj blizini početka kalendarske godine (između 0. januara i 2. januara). Na primjer, tropska godina 1969. započet će u trenutku 1969, januar 0,5251 (o astronomskom bilježenju vremenskih trenutaka vidi odlomak 10.5.5). Trenutak početka tropske godine označuje se dodatnom nulom na kraju, npr. 1969,0 (ili 1969.0).

Sa svim navedenim podacima možemo sada izračunati trajanje bilo koje tropske godine a(t). Ovdje je a kratica tropske godine (a — annus), dok slovo t označuje trenutak efemeridne vremenske skale, koji se obično mjeri julijanskim stoljećima $D = JC = 3{,}15576 \cdot 10^9$ s. Ako pretpostavimo da je kutna brzina Sunca dL/dt *konstantna* u toku čitave tropske godine a(t), te ako pretpostavimo da je ta konstantna vrijednost ona koju je tropska godina a(t) *stvarno* imala na svom početku, onda trajanje tropske godine iznosi

$$a(t) = \frac{\Delta L}{dL/dt} = \frac{\Delta L}{(dL/dt)_0 (1 + C_3 t)} \approx \frac{\Delta L}{(dL/dt)_0}(1 - C_3 t). \qquad (10.2\text{-}6)$$

Ovdje smo primijenili pravilo $1/(1+x) \approx 1 - x$, koje vrijedi za $x \ll 1$. Za ishodište *Newcomb*ovih tablica, tj. za trenutak 1900, januar 0, 12^h *ET* jest $t = 0$. Stoga trajanje tropske godine 1900, prema jednadžbi (10.2-6), iznosi

$$a(t = 0) = a(0) = \frac{\Delta L}{(dL/dt)_0} = \frac{\Delta L}{C_1}. \qquad (10.2\text{-}7)$$

Uvrštenjem ovog izraza u jednadžbu (10.2-6) dobivamo vezu između trajanja bilo koje tropske godine a(t) s trajanjem a(0) tropske godine 1900:

$$a(t) \approx a(0)\,(1 - C_3 t) \qquad (10.2\text{-}8)$$

Vidimo da s vremenom t tropska godina postaje sve *kraća*, što je posljedica povećanja kutne brzine Sunca prema jednadžbi (10.2-5).

U ovom razmatranju posebno nas zanima tropska godina 1900, čije je trajanje a(0). Ako u izraz (10.2-7) uvrstimo vrijednost $\Delta L = 360° = 360 \cdot 3600'' = 1{,}296 \cdot 10^{6}''$ (tačno), te vrijednost C_1 iz jednadžbe (10.2-2), slijedi

$$a(0) = \frac{\Delta L}{C_1} = \frac{1{,}296 \cdot 10^{6}''}{1{,}296\,027\,6813 \cdot 10^{8}''/D}.$$

Ovaj izraz možemo srediti dalje tako da umjesto jedinice vremena »julijansko stoljeće« D uvrstimo njenu vrijednost u sekundama, kako je zabilježeno jednadžbom (10.2-3). Na taj način, nakon kraćenja kutnih sekundi (''), dobivamo:

$$a(0) = \frac{1{,}296 \cdot 10^{6} \cdot 3{,}155\,76 \cdot 10^{9}\,s}{1{,}296\,027\,6813 \cdot 10^{8}}.$$

Množenjem i dijeljenjem brojeva u gornjoj jednadžbi nastaje veza između trajanja a(0) tropske godine 1900. (koja počinje u trenutku 1900, januar 0, 12^h *ET*) i trajanja efemeridne sekunde (s):

$$a(0) = 3{,}155\,692\,597\,47\ldots \cdot 10^{7}\ s.$$

Iz ovih razmatranja mogli bismo, na primjer, izvesti ovakav tekst definicije efemeridne sekunde: »Sekunda je 31 556 925,9747-i dio tropske godine 1900. uz pretpostavku da se u toku nje Sunce stalno gibalo kutnom brzinom koju je stvarno imalo u trenutku 1900, januar 0, 12^h efemeridnog vremena.« Za čovjeka koji nije dovoljno upućen u pojmove o kojima smo raspravljali, ovaj tekst nije razumljiv. Za specijalista je taj tekst preopširan, njemu skraćena definicija »Sekunda je 31 556 925,9747-i dio tropske godine u trenutku 1900, januar 0, 12 sati efemeridnog vremena« govori isto. Za nespecijalista ovaj drugi tekst je jednako nerazumljiv, ali je barem kraći. Stoga je on bio prihvaćen od Generalne konferencije za mjere i utege godine 1960, a odmah zatim ušao je i u nacionalna zakonodavstva gotovo svih država, gdje se zadržao do godine 1967. (vidi odlomak 10.1.3).

Primjer. Izračunajmo koliko će kraća biti tropska godina 1969. od tropske godine 1900! Računat ćemo pomoću jednadžbe (10.2-8) u obliku $\Delta t = a(0) - a(t) = a(0)\, t C_3$. Budući da je $t = 0{,}69$ D, računanjem slijedi (približno)

$$\Delta t = 3{,}16 \cdot 10^{7}\,s \cdot 0{,}69\,D \cdot 1{,}68 \cdot 10^{-8}/D = 0{,}366\ s.$$

Vrijednost konstante C_3 imamo zabilježenu neposredno iza jednadžbe (10.2-5), a vrijednost a(0) u sekundama sadrži definicija efemeridne sekunde (odlomak 10.1.5).

Iz gornjeg razlaganja možemo utvrditi da je definiranje efemeridne jedinice vremena u stvarnosti provedeno ponešto drukčije nego što propisuje opće načelo (10.1-1) opisano u odlomku 10.1.2. Razlog je tome taj što je teorija nebeskog gibanja Sunca toliko kompliciranа da ne dopušta izdvajanje čiste periodičke pojave, kako to traži navedena jednadžba. Zbog toga smo vezu između sekunde i trajanja a(0) tropske godine 1900. izveli na opisani način, tj. uz pretpostavku da je kutna brzina dL/dt konstantna u toku tog razdoblja. Pri tom zapravo nije učinjena nikakva pogreška, jer se *tačno zna* kakvu smo pretpostavku unijeli u definiciju sekunde. Stoga neki autori govore da efemeridna sekunda u stvari nije definirana *razdobljem* a(0), već *trenutkom* $t = 0$ kada je $dL/dt = C_1$ (tačno).

Pri kraju ovog izlaganja treba naglasiti da se efemeridna sekunda u pogledu svoje vrijednosti (trajanja) gotovo nimalo ne razlikuje od »srednje sunčeve sekunde«, koja je bila osnov najpreciznijeg (zakonodavnog) mjerenja vremena do godine 1960. Razlika je međutim u ovome: efemeridna sekunda je po svojoj vrijednosti konstantna, jer je pomoću provjerenih zakona nebeske mehanike definirana u odnosu prema precizno utvrđenom trenutku u prošlosti. Pomoću tih istih zakona ona se može reproducirati i u svakom drugom trenutku (poslije ili prije ishodišta *Newcomb*ovih tablica). Sa »srednjom sunčevom sekundom« nije tako; njena vrijednost (trajanje) se mijenja, posve neznatno doduše, jer vremenska skala na koju se ona oslanja nije jednolična (vidi odlomke 10.3.6 i 10.3.3), iako je pri njenoj definiciji pretpostavljeno da proizlazi iz jednolične vremenske skale. Za sve ljudske djelatnosti, osim za najpreciznijU metrologiju i astronomiju, zamjena srednje sunčeve sekunde efemeridnom ne predstavlja nikakvu promjenu. Taj događaj od godine 1960. može se shvatiti jednostavno kao smanjenje nepouzdanosti reprodukcije dotadašnje sekunde.

10.2.4. Direktno utvrđivanje efemeridnog vremena. *H. Spencer Jones* je godine 1939. potvrdio ispravnost *Newcomb*ova mišljenja da se gibanje svakog tijela Sunčeva sistema može upotrijebiti za definiranje efemeridne vremenske skale. Za astronome je najprikladnije tijelo Mjesec, jer njega mogu najlakše motriti (u odlomku 10.2.5 vidjet ćemo da Mjesec doista posredno služi u tu svrhu). No gibanjem Mjeseca ne možemo se poslužiti kao *osnovnom* periodičkom pojavom, jer teorija njegova gibanja nije čista gravitacijska teorija. Razlog tome je postojanje ubrzanjâ gibanja Mjeseca, uzrokovanih plimom i osekom, a ona se ne daju kvantitativno opisati teorijom. Gubitak impulsa, uzrokovan trenjem oceanskih voda o Zemljinu koru, može se proračunati samo grubo, približno, pa se stoga ubrzanje Mjeseca ne može izraziti s tolikom pouzdanošću kolika je potrebna za *definicijske* svrhe. Budući da je vidljivo gibanje svih ostalih tijela Sunčeva sistema kombinacija gibanja Zemlje i ostalih tijela koja se gibaju oko Sunca, upotreba bilo kojeg od tih tijela dovest će do primjene teorije vidljivog gibanja Sunca. Stoga je najjednostavnije da se u tu svrhu iskoristi prividno gibanje samog Sunca oko Zemlje.

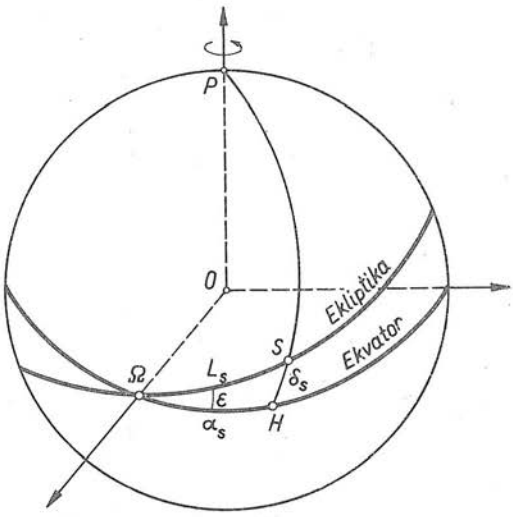
Pošto je utvrđen početak brojenja efemeridnog vremena ($t = 0$, tj. 1900, januar 0, 12^h *ET*) i definirana jedinica tog vremena sekunda (odlomak 10.2.3), bilo koji drugi *trenutak* t (vremenska tačka) efemeridnog vremena *direktno* se utvrđuje ovim mjerenjima i korekcijama: 1) mjerenje nebeske duljine Sunca u odnosu prema srednjoj proljetnoj ekvinocijskoj tački (sl. A.92); 2) uzimanje u obzir aberacije, čime se dobiva geometrijska duljina L_S (odlomak 10.2.2); 3) računanje geometrijske srednje duljine oduzimanjem svih periodičkih i mješovitih članova dobivenih iz teorije vidljivog gibanja Sunca prema *Newcomb*u; 4) pomoću jednadžbe (10.2-4) izračuna se t; pri tom je julijansko stoljeće $D = 3{,}155\,76 \cdot 10^9$ s (vidi kraj odlomka 10.2.2). U stvari, iz objavljenih astronomskih efemerida inverznom se interpolacijom dobiva efemeridno vrijeme.

Poteškoće nastaju pri stvarnom utvrđivanju nebeske duljine Sunca, koja se u stvari mjeri deklinacijom δ Sunca prilikom njegova prolaza kroz meridijanski krug (kulminacija). Iz jednadžbe $\sin\delta = \sin L \sin\epsilon$, koja vrijedi za osnovni sferni trokut na slici A.92, može se izračunati duljina Sunca. Pri tom je ϵ kut nagiba ravnine ekliptike prema ravnini ekvatora (na primjer, početkom godine 1967. taj je kut iznosio $\epsilon = 23°26'36{,}87''$, bez periodičkih članova), a mijenja se prema jednadžbi koja slijedi iz teorije precesije

$$\epsilon = 23°27'08{,}26'' - 46{,}845''\, t/D - 0{,}0059''\, (t/D)^2 + 0{,}001\,81\, (t/D)^3.$$

Ovdje slovo t predstavlja efemeridno vrijeme sa $t=0$ u trenutku 1900, januar 0, 12^h ET, a slovo D efemeridno julijansko stoljeće (u toku čitava dvadesetog stoljeća je $t/D<1$).

Pogreška pri takvom mjerenju deklinacije δ iznosi u povoljnom slučaju oko $\pm 0{,}1''$ (tome odgovara relativna pogreška oko $1:10^7$ u odnosu prema punom kutu od 360°!). Budući da kutna brzina Sunca dL/dt iznosi oko 0,04''/s (ovu vrijednost dobivamo npr. iz jednadžbe (10.2-5) ako u konstantu C_1 uvrstimo $D=3{,}15576\cdot 10^9$ s), to je očito da mjerenje kuta s pogreškom $\pm 0{,}1''$ uzrokuje pogrešku utvrđivanja trenutka (vremenske tačke) oko $\pm 2{,}5$ sekunde. Radi usporedbe navodimo da je pogreška pri utvrđivanju trenutka svjetskog vremena (engl. Universal Time, UT), odnosno srednjeg sunčeva vremena uopće, oko ± 4 ms; prema tome *direktna* metoda utvrđivanja trenutka efemeridne vremenske skale je $2{,}5/0{,}004 \approx 600$ puta lošija.



Sl. A.92. Direktno mjerenje trenutka efemeridnog vremena

P — sjeverni nebeski pol, O — središte Zemlje, S — trenutni (mjereni) položaj Sunca, Ω — proljetna ekvinocijska tačka (ravnodnevnica), L_s — duljina Sunca, δ_s — deklinacija Sunca, α_s — rektascenzija Sunca

Ova razlika dade se objasniti i posve načelno. Pretpostavimo, posve grubo, da je preciznost mjerenja kutova ista u oba slučaja. Kutna brzina pri mjerenju efemeridnog vremena ET (gibanje Zemlje oko Sunca) je međutim oko 365 puta manja od kutne brzine pri mjerenju sunčeva vremena UT (vrtnja Zemlje oko vlastite osi). Zbog toga je i pogreška utvrđivanja UT oko 365 puta manja negoli pogreška direktnog utvrđivanja trenutka ET! To je glavni razlog zašto astronomi ne mjere efemeridno vrijeme opisanom (ili sličnom) direktnom metodom, već *indirektnom* metodom koju ćemo letimično opisati u narednom odlomku.

10.2.5. Indirektno utvrđivanje efemeridnog vremena. Na početku prošlog odlomka smo naveli da se za stvaranje efemeridne vremenske skale može upotrijebiti gibanje bilo kojeg nebeskog tijela, a pri njegovu kraju smo konstatirali da se mjerna pogreška smanjuje ako je kutna brzina veća. Na žalost, svi planeti imaju kutnu brzinu geocentričkog gibanja istog reda veličine kao i Sunce ili čak manju. Jedina iznimka je Mjesec, koji se giba oko Zemlje 13,37 puta većom kutnom brzinom negoli Zemlja oko Sunca. Osim toga, Mjesec se može motriti i u odnosu prema zvijezdama, a ne samo u odnosu prema meridijanu, pa se tako serija motrenja može obaviti noću i tako smanjiti mjerna pogreška.

Ova dobra osobina Mjeseca mogla bi se iskoristiti za indirektno utvrđivanje efemeridnog vremena u slučaju kad bi bila vrlo precizno poznata teorija gibanja Mjeseca. Stoga su astronomi u toku ovog stoljeća istraživanjima ove vrste posvetili veliku pažnju, a naročito utvrđivanju negravitacijskih utjecaja na gibanje Mjeseca.

U tom nizu eksperimentalnih i analitičkih istraživanja naročito se odlikuje teorija koju je godine 1919. postavio *E. W. Brown* i tom prilikom objavio tablice gibanja Mjeseca. Svoju teoriju *Brown* je izradio nezavisno od *Newcomb*ove teorije gibanja Sunca i pri tom upotrijebio nezavisnu varijablu koja nije bila linearna funkcija efemeridnog vremena. Dvadeset godina kasnije, *H. Spencer Jones* je u fundamentalnoj raspravi »Vrtnja Zemlje i stoljetno ubrzanje Sunca, Mjeseca i planeta« preporučio da se upotrebljavaju *Brown*ove tablice (osim tzv. empirijskog člana) s time da se pri računanju srednje duljine Mjeseca L_L unese korekcijski član

$$\Delta L_L = -8{,}72'' - 26{,}75''\ t/\mathrm{D} - 11{,}22''\ t^2/\mathrm{D}^2 - 10{,}71''\ \sin(240{,}7^\circ + 140^\circ\ t/\mathrm{D}),$$

koji rezultate opažanja svodi na efemeridno vrijeme i u sklad s efemeridama Sunca. U gornjoj jednadžbi omjer t/D predstavlja broj julijanskih stoljeća, računajući od početka brojenja efemeridnog vremena. Navedeni korekcijski član može se napisati i u obliku

$$\Delta t_L = -15{,}883\ \mathrm{s} - 48{,}723\ \mathrm{s}\cdot t/\mathrm{D} - 20{,}436\ \mathrm{s}\ (t/\mathrm{D})^2 - \\ - 19{,}508\ \mathrm{s}\cdot\sin(240{,}7^\circ + 140^\circ\ t/\mathrm{D}),$$

koji daje vremenski interval za koji treba interpolirati *Brown*ovu efemeridu Mjeseca da bi se ona svela na efemeridno vrijeme. Gornja jednadžba daje približnu predodžbu o razlici između svjetskog (UT) i efemeridnog vremena ($\Delta t_L \approx -\Delta T$; o razlici ΔT vidi kraj ovog odlomka).

Godine 1954. prvi su put efemeride Mjeseca objavljene s opisanom korekcijom (Improved Lunar Ephemerides 1952...1959, supplement to the American Ephemeris and the British Nautical Almanac, Washington 1954). U tim tablicama argument je efemeridno vrijeme, a rektascenzija i deklinacija Mjeseca navedene su za svaki sat ili svaka tri sata. Mjerenje položaja Mjeseca daje inverznom interpolacijom vrijednost efemeridnog vremena. Tako dobiveno efemeridno vrijeme (motrenjem Mjeseca) označuje se prema zaključku Međunarodne astronomske unije godine 1962. kraticom *ET0* (*0* znači nula). Razlika $ET - ET0$ (ET je efemeridno vrijeme) vjerojatno iznosi oko 1 sekundu, ali njena vrijednost još nije pouzdano poznata i zato se dalje pomno istražuje gibanje Mjeseca. Od godine 1960. svi astronomski godišnjaci navode efemeride Mjeseca sa ET kao argumentom.

Svako motrenje Mjeseca omogućuje nam da ustanovimo razliku između efemeridnog vremena (ET) i svjetskog vremena (UT, Universal Time; vidi odlomak 10.3.5). Pri tom se mjeri položaj Mjeseca u trenutku kad on zakloni zvijezdu. Inverznom interpolacijom zapaženog trenutka po efemeridnom vremenu dobiva se korekcija ΔT, tj. razlika između utvrđenog trenutka po efemeridnom vremenu i tog istog trenutka utvrđenog po svjetskom vremenu. Ta razlika računa se prema zaključcima Međunarodne astronomske unije (vidi odlomak 10.2.1) pomoću jednadžbe

$$\Delta T = +24{,}349\ \mathrm{s} + 72{,}318\ \mathrm{s}\cdot t/\mathrm{D} + 29{,}950\ \mathrm{s}\cdot(t/\mathrm{D})^2 + 1{,}821\,44\ \mathrm{s}\cdot B/1'',$$

gdje veličina B (fluktuacija duljine Mjeseca) proizlazi iz razlike mjerenjem utvrđene duljine Mjeseca L_L i odgovarajuće vrijednosti L_B u Brownovim tablicama

$$B = L_L - [L_B - 10{,}71''\ \sin(240{,}7^\circ + 140^\circ\ t/\mathrm{D}) + 4{,}65'' + \\ + 12{,}96''\ t/\mathrm{D} + 5{,}22''\ (t/\mathrm{D})^2].$$

Ovdje je t/D broj julijanskih stoljeća proteklih do trenutka mjerenja, računajući od početka brojenja efemeridnog vremena (1900, januar 0, 12^h ET).

Poznajući ΔT iz gornje jednadžbe može se za svaki trenutak t ustanoviti efemeridno vrijeme kao zbroj svjetskog vremena i korekcije ΔT, tj.

efemeridno vrijeme ET = svjetsko vrijeme $UT + \Delta T$.

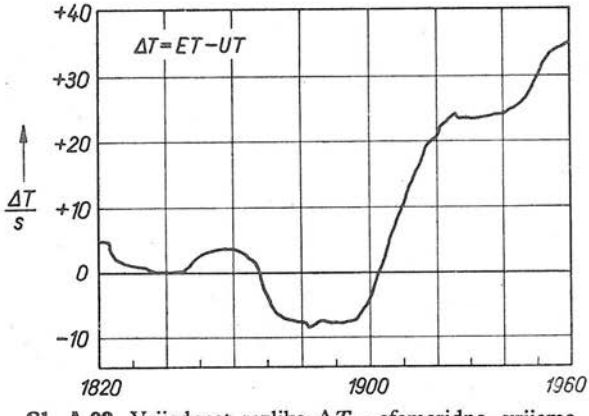
Ova jednadžba vrijedi dakako i za mjesna vremena, ako se umjesto ET stavi mjesno efemeridno vrijeme, a umjesto UT mjesno srednje sunčevo vrijeme + 12 h (vidi odlomak 10.3.5).

Tablica **A-21**

Razlika $\Delta T = ET - UT$ u toku prošlih 60 godina

Godina	ΔT/s	Godina	ΔT/s
1900,5	− 3,79	1940,5	+24,30
1910,5	+10,28	1950,5	+29,42
1920,5	+20,48	1960,5	+34
1930,5	+23,18		

Stvarne vrijednosti razlike $\Delta T = ET - UT$ za neke godine svrstali smo u tablicu A-21 (vrijednosti ΔT u stvari vrijede za sredinu godine 1901, 1911. itd.; o označivanju vremenskih trenutaka vidi odlomak 10.5.5). Tok promjene razlike $\Delta T = ET - UT$ od godine 1820. do 1965. preglednije se razabire sa slike A.93 (prema *M. Bahrami*).



Sl. A.93. Vrijednost razlike ΔT = efemeridno vrijeme ET − svjetsko vrijeme UT, u toku prošlih 140 godina

Iz opisa uspostavljanja čvrstog odnosa između efemeridnog vremena ET i svjetskog vremena UT putem motrenja Mjeseca proizlazi da se ΔT može najpreciznije utvrditi za *prošle* vremenske intervale. Budući da je za matematičku obradu rezultata motrenja Mjeseca potrebno stanovito vrijeme, to se najpreciznije vrijednosti ΔT dobivaju sa znatnim zakašnjenjem. Ukoliko pak treba znati ΔT za *budući* vremenski period, *približna* vrijednost dobiva se pomoću jednadžbe

$$\Delta T = 1{,}821\,44\ \text{s}\ [8{,}72 + 26{,}74\ t/\text{D} + 11{,}22\ (t/\text{D})^2 + 10{,}71 \cdot \sin(240{,}7^\circ + 140^\circ\ t/\text{D})].$$

Ovdje je t/D broj julijanskih stoljeća koji će proći od početka *Newcomb*ovih tablica do razmatranog trenutka.

10.2.6. Pogreška poznavanja efemeridnog vremena. Svako pojedinačno utvrđivanje trenutka kada Mjesec zakloni zvijezdu pogrešno je za oko 0,2 sekunde. Toj pogrešci treba dodati pogrešku uzrokovanu nesavršenim poznavanjem oblika Mjeseca (koji odstupa od idealne kružnice), naročito nedovoljnim poznavanjem

mjesnih nepravilnosti Mjesečeva diska (brda, doline). Ta se pogreška danas već može donekle smanjiti pomoću karata Mjesečeva diska koje je godine 1963. objavio *C. B. Watts*. Letovi svemirskih brodova oko Mjeseca također će ponešto smanjiti tu pogrešku.

Od godine 1954. upotrebljava se za utvrđivanje položaja Mjeseca u odnosu prema okolnim zvijezdama nov instrument koji je izumio *W. M. Markowitz* (dual-rate Moon position camera). Taj instrument omogućuje da se na *istoj* fotografiji vide Mjesec i polje zvijezda bez obzira na mnogo jaču svjetloću Mjeseca i njegovo gibanje u odnosu prema zvijezdama. Fotografski aparat je ugrađen u fokus ekvatorskog refraktora i slijedi zvijezde u toku njihova noćnog gibanja, a ekspozicija iznosi 20 sekundi. Mjesečevo svjetlo prolazi kroz apsorpcijski filtar koji rotira i propušta samo vrlo mali postotak dolazećeg svjetla. Istodobno se vrtnja filtra kompenzira za gibanje Mjeseca, tako da njegova slika stoji na istom mjestu fotografske ploče. Trenutak očitavanja definiran je paralelnošću filtra i ploče, što se registrira kronografom.

Ova metoda, koja u primjeni ima niz mjernih finesa (npr. dvostruko snimanje), za sada je jedina koja omogućuje da se stanoviti interval Δt u efemeridnoj vremenskoj skali precizno izrazi brojem titraja Z koje je između dva astronomska očitanja (dakle u toku Δt) proizveo frekventno nadasve stabilni kvantni oscilator (npr. cezijeva ura; vidi odsječak 10.6). Omjer $f = Z/\Delta t$ na taj način utvrđuje vrijednost frekvencije oscilatora u recipročnim efemeridnim sekundama (Hz = 1/s; vidi odsječak B.2.3). Grupa američkih i engleskih učenjaka (*W. Markowitz, R. G. Hall, L. Essen* i *J. V. L. Parry*) učinila je, na primjer, takvu usporedbu u razdoblju 1954...1957. i ustanovila da frekvencija f prijelaza između odgovarajućih hiperfinih razina neporemećenog atoma cezija 133 iznosi 9 192 631 770 $\pm$ 20 Hz. Tako je godine 1967. nastala definicija sekunde koju smo naveli u odlomku 10.1.3.

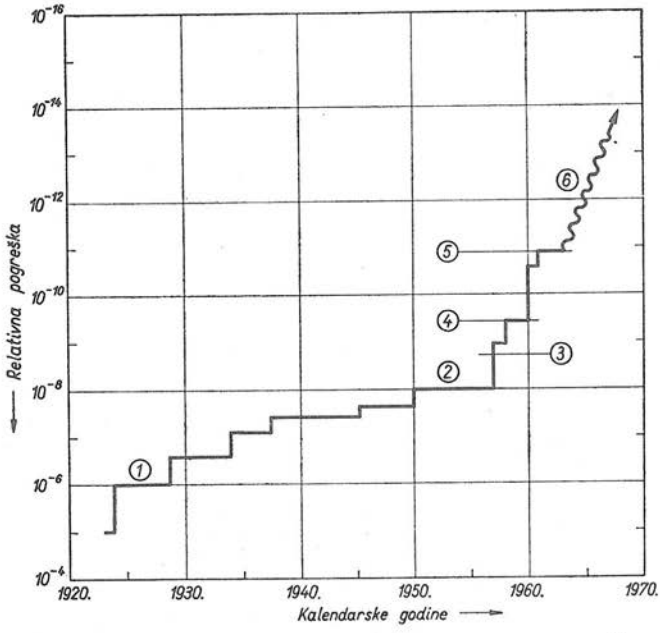
Nepouzdanost ± 20 Hz predstavlja relativnu nepouzdanost oko $\pm 20\,\text{Hz}/9{,}1 \cdot 10^9\,\text{Hz} \approx \pm 2 \cdot 10^{-9}$, a uzrokovana je pogreškom astronomskog utvrđivanja trenutaka efemeridne vremenske skale. Trenutak (vremenska tačka) efemeridnog vremena može se, naime, astronomski očitati s pogreškom od nekoliko desetinki sekunde, a u najboljem slučaju možda s pogreškom $\pm 0{,}1$ s. Ako razmatrani vremenski interval Δt iznosi oko 3 godine, grubi nam račun pokazuje da će u tom slučaju relativna pogreška poznavanja tog intervala iznositi

$$\frac{\pm 0{,}1\,\text{s} \cdot 2}{3 \cdot 3{,}15 \cdot 10^7\,\text{s}} \approx \pm 2 \cdot 10^{-9},$$

gdje je sa $3{,}15 \cdot 10^7$ s približno izraženo trajanje jedne godine. Prema tome nepouzdanost ± 20 Hz frekvencije kvantnog oscilatora direktno je ovisila o najmanjoj pogrešci s kojom se astronomskim metodama mogao očitati uspoređivani vremenski interval $\Delta t \approx 3$ godine. U prvi bismo se mah mogli ponadati da će povećanje uspoređivanog vremenskog intervala Δt dovesti do pouzdanijeg utvrđivanja frekvencije f kvantnog oscilatora (načelo uspoređivanja »pohranjivanjem vremena« letimično je dodirnuto pri kraju odlomka 10.1.5). Ta je nada, međutim, jalova, jer frekvencija vrtnje Zemlje f_z *nije prirodna konstanta* pa, dakle, nije udovoljeno temeljnoj astrometrijskoj pretpostavci da je $f_z = \text{const}$. Grubi proračun u odlomku 10.7.2 pokazuje da relativna promjena $(\Delta f/f_z)$ iznosi oko $4 \cdot 10^{-8}$. To je eksperimentalno utvrđeno pomoću atomskih pramjerila frekvencije kojih je frekvencija najmanje *deset tisuća* puta stabilnija od f_z.

Očito da se zbog toga vrhunska metrologija vremena našla u neodrživoj situaciji: s jedne je strane bila propisana astronomski definirana jedinica vremena,

a s druge su strane postojala provjerena atomska pramjerila koja na bilo kojem mjestu Zemlje mogu jedinicu vremena proizvoditi barem 10 000 puta stabilnije. Ponovio se, dakle, metrološki paradoks koji je svojedobno postojao u vrhunskoj metrologiji duljine (vidi odlomke 8.1.3,5), gdje je sekundarna mjera bila pouzdanija od prima ne. Paradoks je uklonjen godine 1967. time što je napuštena astronomska jedinica vremena i uvedena atomska sekunda (odsječak 10.1). Razlaganja u odsječcima 10.6, 7 i 8 dokazuju da su atomska pramjerila frekvencije i vremena toliko uznapredovala da se njima mogu ostvariti i pouzdane *vremenske skale*.



Sl. A.94. Razvoj vrhunske metrologije vremena u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards

1 — *Shortt*ove ure (relativna pogreška poznavanja *UT0*), *2* — kremene ure, *3* — jedinica efemeridnog vremena (*ET*), *4* — cezijev oscilator *A 106*, *5* — cezijev oscilator *NBS-II*, *6* — najnoviji kvantni oscilatori (vodikov maser, cezijev i talijev oscilator itd.) koji se neprestano usavršavaju (vidi odsječke 10.6,7)

Kako smo već naveli na samom početku ove knjige (slika A.1), metrologija vremena je ono vrhunsko što metrologija uopće može postići. No pri tom postoji ogromna razlika između relativne pogreške utvrđivanja trenutaka u kontinuiranoj vremenskoj *skali* (npr. efemeridnoj) i relativne pouzdanosti reprodukcije i mjerenja vremenskih *intervala*. To nam zorno ilustrira slika A.94 koja u polulogaritamskom mjerilu prikazuje razvoj vrhunske metrologije vremena od godine 1920. do danas u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards. Slična je situacija i u drugim znanstvenim metrološkim zavodima. Slika se istodobno odnosi i na mjerne metode i na pramjerila, pa stoga pod izrazom »relativna pogreška« na ordinati valja u prvom slučaju razumijevati relativnu mjernu pogrešku, a u drugom slučaju relativnu nepouzdanost reprodukcije perioda T (ili frekvencije, $f = 1/T$) kvantnog oscilatora. (Dijagram na slici A.94 sastavljen je, dakle, posve analogno slici A.30, koja se odnosi na metrologiju duljine.) Vremenska skala *UT0* na slici A.94 objašnjena je u odlomku 10.3.6, a cezijevi i neki drugi kvantni oscilatori razmotreni su u odsječku 10.6.

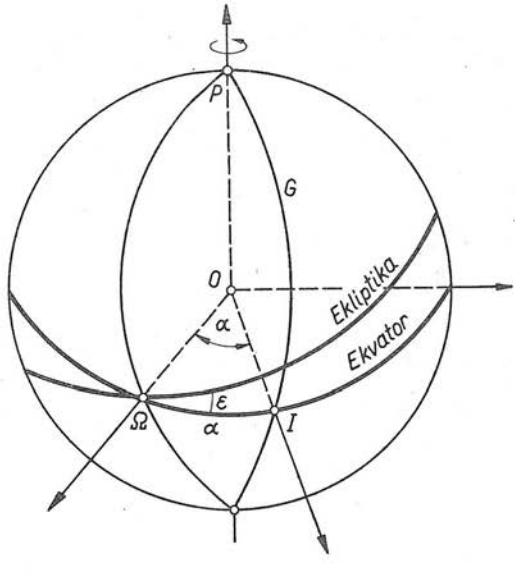
10.3. Zvjezdano, sunčevo i svjetsko vrijeme

Efemeridna vremenska skala, opisana u prošlom odsječku 10.2, najnovija je vremenska skala, a službeno se upotrebljava od godine 1960. Prije nje nastale su, upotrebljavale se — a i danas se upotrebljavaju zajedno s efemeridnom — druge vremenske skale, koje su bogatstvom prikupljenih rezultata astronomskih motrenja

i izvedenih teorija gibanja tijela u svemiru omogućile stvaranje danas najsavršenije astronomske vremenske skale — efemeridne. Međusobna zavisnost tih skala zahtijeva da ih razmotrimo barem u onolikom opsegu koliko je potrebno za valjano upoznavanje temelja na kojima se osniva mjerenje vremena kako u prirodoslovne i astronomske svrhe, tako i za potrebe svakodnevnog građanskog života.

10.3.1. Zvjezdano (siderijsko) vrijeme temelji se na vrtnji (rotaciji) Zemlje u odnosu prema fiksiranom pravcu u svemiru. Taj pravac određen je položajem zvijezda, pa otuda potječe naziv zvjezdane vremenske skale (latinski sidereus znači: zvjezdan). Pri definiranju i mjerenju zvjezdanog vremena, koje ćemo označiti slovom S, mjerljivi parametar vremena je kut α između jedne zamišljene ravnine učvršćene na Zemlju i jedne referentne ravnine definirane u prostoru. Te dvije ravnine odabrane su tako da se njihovo presjecište nalazi u osi vrtnje Zemlje, koja prema tome predstavlja jedno od dvaju uporišta zvjezdane vremenske skale.

Za referentnu ravninu u prostoru odabrana je ona ravnina u kojoj leže os vrtnje Zemlje i pravac koji spaja tačku proljetnog ekvinocija (presjecište ekvatora s ekliptikom u smjeru položaja gdje se Sunce nalazi u mjesecu martu) sa Zemljom. Na slici A.95 vidimo da u toj ravnini leže tačke O, P i Ω; ta ravnina siječe nebesku sferu meridijanskim krugom koji prolazi kroz tačku Ω. Referentna ravnina na Zemlji je tzv. međunarodni meridijan koji prolazi kroz zvjezdarnicu u engleskom mjestu Greenwich (izgovori: Grinič) nedaleko od Londona. Budući da je pravac proljetnog ekvinocija $O\Omega$ okomit na os vrtnje Zemlje, to je α kut između pravca proljetnog ekvinocija $O\Omega$ i sjecišta međunarodnog meridijana G s nebeskim ekvatorom (tačka I na slici A.95; u primjeni topocentričke ili geocentričke nebeske sfere ravnina nebeskog meridijana podudara se s ravninom zemaljskog meridijana).



Sl. A.95. Zvjezdano vrijeme S proporcionalno je kutu α koji zatvaraju nebeski meridijan proljetnog ekvinocija $OP\Omega$ i međunarodni meridijan $OPGI$

O — položaj Zemlje u centru nebeske sfere, OP — os vrtnje Zemlje (strelica naznačuje njenu vrtnju), Ω — tačka proljetnog ekvinocija, G — međunarodni meridijan (Greenwich)

Relacija kojom se pomoću opisanog materijalnog sistema definira zvjezdana vremenska skala nadasve je jednostavna:

$$S = \frac{\alpha}{K_z}, \qquad (10.3\text{-}1)$$

tj. zvjezdano vrijeme S *proporcionalno* je kutu α, jer je $K_z = 15°/h_z = \text{const}$. Ovdje simboli označuju ove veličine i jedinice: S — zvjezdano vrijeme po Greenwichu, h_z — sat zvjezdane vremenske skale (zvjezdani sat), 1° — kutni stupanj (puni krug sadrži

360°), α — rektascenzija zvijezde (lat. ascensio recta; rektascenzija zvijezde je kut između nebeskog meridijana zvijezde i meridijana proljetnog ekvinocija). Iz jednadžbe (10.3-1) je očigledan *način mjerenja* zvjezdanog vremena: kad se motrena zvijezda nalazi na meridijanu Greenwicha, njezina rektascenzija α proporcionalna je zvjezdanom vremenu S; prema tome mjerenjem kuta α u Greenwichu saznajemo zvjezdano vrijeme S.

Konstantu $K_z = 15°/h_z$ astronomi nazivaju »satni kut« (engl. hour angle, ruski časovoj ugol), jer je zvjezdani sat (h_z) definiran kao onaj vremenski interval u toku kojega kut α poraste za 15°. Budući da su jedinice zvjezdanog vremena d_z, m_z, s_z (zvjezdani dan, zvjezdana minuta, zvjezdana sekunda) međusobno povezane uobičajenim relacijama $d_z = 24\,h_z$ (zvjezdani dan d_z traje toliko vremena koliko je potrebno da se α poveća za 360°), $h_z = 60\,m_z$, $m_z = 60\,s_z$, to se konstanta K_z može izraziti i ovako

$$K_z = 15\frac{1^\circ}{h_z} = \frac{1}{4}\frac{1^\circ}{m_z} = \frac{1}{4}\frac{1'}{s_z}.$$

To znači da 4 zvjezdane minute odgovaraju jednom seksagezimalnom stupnju (1°; vidi odlomak B.1.4.3), a 4 zvjezdane sekunde jednoj kutnoj minuti (1′).

Rektascenzije α i niz drugih podataka o zvijezdama sadrže »katalozi zvijezda«, a djelomično i astronomski godišnjaci. Prema zaključku Međunarodne astronomske unije godine 1961, danas se astronomima preporučuje da upotrebljavaju Vierter Fundamentalkatalog (kratica naziva tog kataloga je FK 4; engleski mu je naziv Fourth Fundamental Catalogue), koji je godine 1963. objavio Astronomsko-računski institut u Heidelbergu. Katalog FK 4 sadrži položaje i vlastito gibanje zvijezda za epohe 1950,0 i 1975,0.

Pod nazivom »zvjezdano vrijeme po Greenwichu« ili »griničko zvjezdano vrijeme« obično se razumijeva *srednje* zvjezdano vrijeme (engl. Mean Greenwich Sidereal Time), tj. kut α se mjeri u odnosu prema srednjoj ekvinocijskoj tački. Ako se pak α računa u odnosu prema *pravoj* (istinitoj) ekvinocijskoj tački (vidi odlomak 10.3.2), onda se pripadno vrijeme zove »pravo zvjezdano vrijeme po Greenwichu« (engl. True Greenwich Sidereal Time).

Prividna gibanja zvijezda mogu se, dakako, motriti sa bilo kojeg mjesta na Zemlji. Stoga svako motrilište (zvjezdarnica) ima svoje vlastito *mjesno* (lokalno) vrijeme s. Ako je λ zapadna geografska duljina motrilišta (računajući od Greenwicha), onda između mjesnog zvjezdanog vremena $s(\lambda) = s$ i zvjezdanog vremena po Greenwichu $S = s\,(\lambda = 0)$ postoje čvrste veze

$$S = s + \lambda/K_z \quad \text{ili} \quad s = S - \lambda/K_z, \qquad (10.3\text{-}2)$$

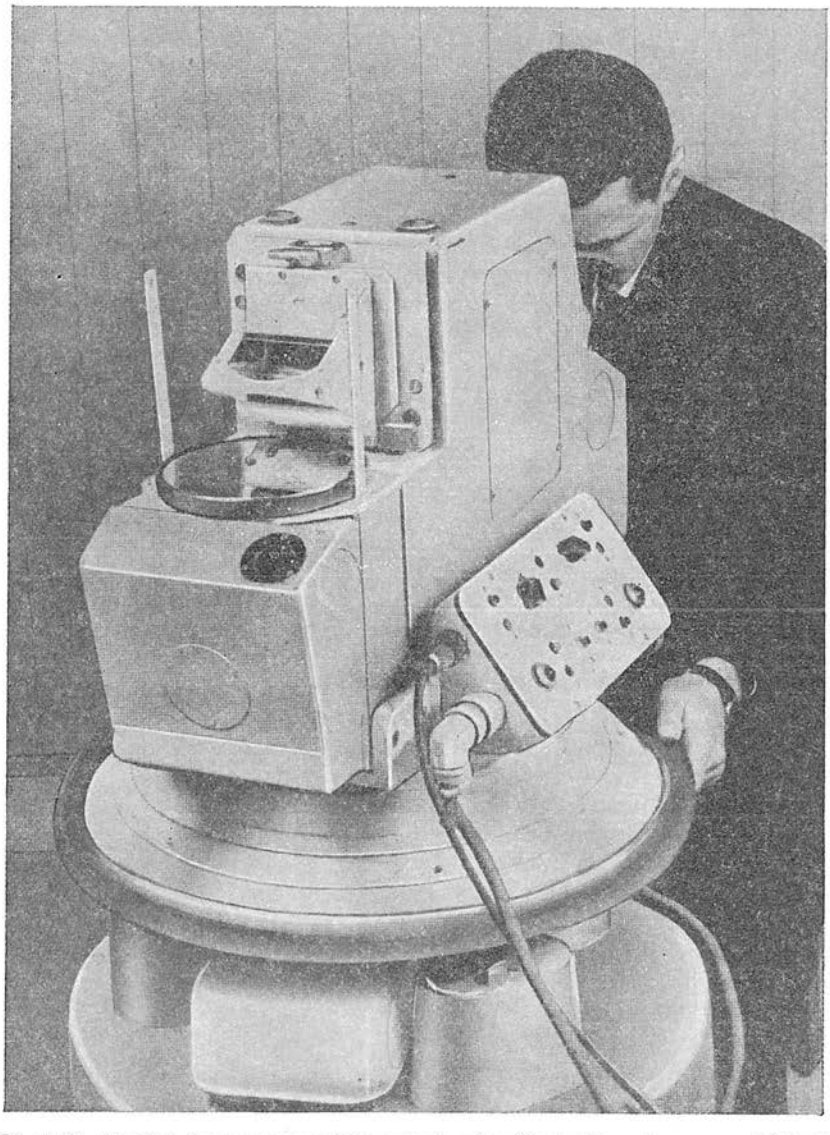
gdje je vrijednost konstante $K_z = 15°/h_z$.

Početak zvjezdanog dana računa se od trenutka gornje kulminacije tačke proljetnog ekvinocija, tj. u tom je trenutku na odgovarajućem meridijanu vrijednost zvjezdanog vremena $s = 0\,h_z\,0\,m_z\,0\,s_z$. Ako se pasažnim instrumentom (sl. A.96; franc. passage znači prolaženje; instrument za mjerenje položaja zvijezda ugrađen je u zvjezdarnici tako da leži u ravnini mjesnog meridijana) konstatira gornja kulminacija neke zvijezde za koju je poznata njena rektascenzija α, onda se uz pomoć jednadžbi (10.3-1,2) lako dobiva vrijednost mjesnog vremena u tom trenutku

$$s = (\alpha - \lambda)/K_z.$$

Naravno da geografska duljina λ mora biti poznata što pouzdanije.

Zvjezdana vremenska skala nije jednolična (uniformna), jer se temelji na kvaziperiodičkoj vrtnji Zemlje oko vlastite osi (nepravilnosti u vrtnji Zemlje opisane su u odlomku 10.3.6, gdje je naveden i utjecaj tih nepravilnosti na vremenske skale). Budući da je ta kvaziperiodičnost poznata s velikom preciznošću, a motrenje



Sl. A.96. Pasažni instrument pariske zvjezdarnice (l'astrolabe »impersonnel«) koji je izumio glasoviti suvremeni astronom *A. Danjon*

zvijezda je znatno preciznije od motrenja Sunca, zvjezdano vrijeme je mjerna osnova i drugih vremenskih skala (o odnosu zvjezdanog i srednjeg sunčeva vremena vidi odlomak 10.3.4). No zvjezdano vrijeme nikada nije bilo prihvaćeno u *građanskom*

životu (vidi odsječak 10.4), jer je svakodnevni život ljudi oduvijek bio usko vezan s podjelom na dan i noć, dakle s prividnim nebeskim gibanjem *Sunca* (na primjer trajanje zvjezdanog dana d_z približno iznosi 23 h 56 m 4,1 s jedinica efemeridnog vremena). Djelomično i zbog toga razvijene su i primjenjivane *sunčeve vremenske skale*, koje ćemo letimično razmotriti u odlomcima 10.3.3, 5 i 6.

Primjer. Izračunajmo koliki je kut između nebeskog meridijana proljetnog ekvinocija i međunarodnog meridijana, ako u Greenwichu zvjezdano vrijeme iznosi $S = 7\,h_z\ 27\,m_z\ 35{,}5\,s_z$. Odgovor dobivamo računanjem

$$\alpha = 7\,h_z \cdot 15\frac{1^\circ}{h_z} + 27\,m_z \cdot \frac{1^\circ}{4\,m_z} + 35{,}5\,s_z \cdot \frac{1'}{4\,s_z} = 111^\circ 53' 52{,}5'',$$

što smo učinili uz pomoć jednadžbe (10.3-1) i navedenih oblika konstante K_z.

10.3.2. Pravo (istinito) sunčevo vrijeme. Ova vremenska skala razlikuje se od zvjezdane u tome što je ravnina nebeskog meridijana proljetnog ekvinocija zamijenjena ravninom koja tačno slijedi gibanje *Sunca* (tu ravninu definiraju trenutni položaj Sunca i os vrtnje Zemlje). Pri tom je fizikalna veličina *pravo sunčevo vrijeme* (ili »istinito sunčevo vrijeme«; u literaturi na engleskom jeziku upotrebljava se i naziv »vidljivo vrijeme«, engl. apparent time) proporcionalna kutu što ga motrilište zatvara s trenutnim položajem meridijana Sunca (vidi i odlomak 10.3.3). Za bilo koje motrilište dobiva se na taj način »mjesno (lokalno) pravo sunčevo vrijeme« $V(\lambda) = V$, a za meridijan na kojem se nalazi zvjezdarnica u Greenwichu tako dobiveno vrijeme naziva se »pravo sunčevo vrijeme po Greenwichu«, $V(\lambda = 0) = V_G$. Veza između V i V_G analogna je jednadžbi (10.3-2), tj. za isti trenutak vrijedi

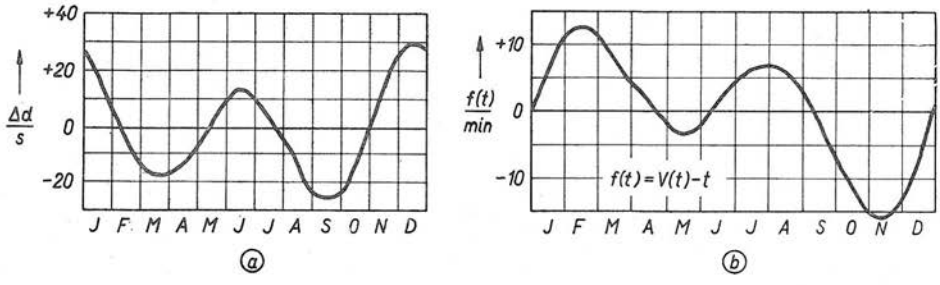
$$V_G = V + \lambda/K_v,$$

gdje konstanta K_v (»satni kut«) ima vrijednost $K_v = 15^\circ/h_v$.

Pri tom simbol h_v označuje jedinicu vremena »sat (lat. hora) pravog sunčeva vremena«, koja je definirana kao 24-ti dio »dana pravog sunčeva vremena« ($h_v = d_v/24$; lat. dies znači dan). Takav dan naziva se i »pravi« ili »istiniti sunčev dan«, a definiran je vremenskim intervalom između dvije uzastopne gornje kulminacije centra Sunca, tj. između dva uzastopna prolaza Sunca kroz isti meridijan. Početak pravog sunčeva dana računa se od trenutka gornje kulminacije Sunca, tj. od trenutka koji nazivamo »podne«. Pri takvom početku sunčevih dana astronomi su sve do godine 1925. promjenu datuma računali od podneva, a ne od ponoći, kako to čine danas (vidi kraj ovog odlomka i odlomak 10.5.5), a to je bilo suprotno tzv. građanskoj promjeni datuma (u ponoć). Astronomima je to odgovaralo, jer oni većinu motrenja obavljaju poslije ponoći.

Zbog nejednoličnosti gibanja Sunca ekliptikom i zbog nepodudaranja ravnine ekliptike s ravninom ekvatora, trajanja pravih sunčevih dana nisu međusobno jednaka. Mjerenja pokazuju da dan pravog sunčeva vremena traje $d_p = 86378...$ 86430 efemeridnih sekundi (s). Razlika prema trajanju efemeridnog dana ($d = 86400$ s) iznosi, dakle, $\Delta d_p = d_p - d = (-22...+30)$ s, što je grafički prikazano na slici A.97a. Integral te razlike postiže u pojedinim trenucima vrijednosti do oko 16 minuta. Tu razliku izražava tzv. *jednadžba vremena* $f(t) = V(t) - t$ prikazana na slici A.97b. U toj jednadžbi t predstavlja jednoličnu efemeridno vrijeme, a $V(t)$ ovisnost pravog sunčeva vremena V o efemeridnom vremenu t. Prema tome je pravo sunčevo vrijeme upravo karakteristična *nejednolična* vremenska skala, dakle neupotrebljiva za metrologiju prirodoslovnih i tehničkih znanosti.

Ovdje je prilika da spomenemo promjenu ishodišta brojenja dana u astronomskim godišnjacima i ostalim astronomskim publikacijama. Naime do 1. januara 1925. astronomi su početkom dana smatrali gornju kulminaciju Sunca (preciznije: gornju kulminaciju srednjeg ekvatorskog Sunca; vidi odlomak 10.3.3), tj. *podne* građanskog života. Da bi se postiglo jedinstvo, astronomi su se 1. januara 1925. prilagodili



Sl. A.97. Nejednoličnost pravog sunčeva vremena: a) kolebanje trajanja pravog dana $\Delta d = d_p - d$ u toku jedne godine ($d = 86400$ s; slova J, F, ... predstavljaju kratice za nazive mjeseci januar, februar ...); b) vrijednosti »jednadžbe vremena« $f(t) = V(t) - t$ u toku godine

građanskom životu i početak brojenja dana prenijeli na prethodnu ponoć, što znači da su dotadašnjem načinu bilježenja vremena *dodali* 12 sati. Prema tome vrijednost sunčeva vremena dobiva se nakon početka godine 1925. tako da se izmjerenoj vrijednosti α/K_v doda 12 sati. Pri tom je α kut koji je u trenutku mjerenja postojao između meridijana motrilišta i meridijana Sunca. Posljedice koje je ova promjena uzrokovala u astronomskom označivanju vremenskih trenutaka opisane su u odlomku 10.5.5.

10.3.3. Srednje sunčevo vrijeme. Najednakost trajanja pravih sunčevih dana potakla je u 18. stoljeću astronome da odustanu od *pravog* Sunca, jer motrenjem njegova gibanja nisu mogli reproducirati konstantnu jedinicu vremena (dan pravog sunčeva vremena). Da bi ipak zadržali sunčevu vremensku skalu, koju zahtijeva građanski život (odlomak 10.3.1), oni su u svoje teorije uveli pojam *fiktivnog srednjeg Sunca*, koji ćemo pokušati objasniti uz pomoć poznatih temeljnih pojmova astronomije. Sunce se u međuzvjezdanom prostoru giba tako da centar vidljive sunčeve plohe u toku godine opiše po obodu geocentričke nebeske sfere krug (ekliptiku), koji je prema ekvatoru nagnut za kut $\epsilon = 23°27'$ (vidi odlomak 10.2.4). U stvari gibanje Sunca na nebeskoj sferi samo je odraz stvarnog gibanja Zemlje oko Sunca, u skladu s poznatim *Kepler*ovim zakonima ophođenja planeta oko Sunca. Ravnina ekliptike je, dakle, u biti ravnina Zemljine orbite, a njen nagib uzrokovan je time što os dnevne vrtnje Zemlje nije okomita na ravninu njene godišnje orbite. Brzina gibanja Zemlje po toj orbiti *nije konstantna*, u toku jednogodišnjeg perioda ona se mijenja u skladu s drugim *Kepler*ovim zakonom.

Sunce se nalazi u fokusu elipse koju prilikom svog gibanja opisuje Zemlja. U skladu s *Kepler*ovim zakonom, koji proizlazi iz zakona o održanju impulsa (vidi odlomak 9.1.2), Zemlja se na svojoj eliptičkoj putanji giba najbrže onda kad je najbliže Suncu (taj položaj zove se perihel; lat. perihelium), a najsporije onda kad je najudaljenija (afel; lat. aphelium). Perihel nastaje oko 2. januara, a afel oko 4. jula. Budući da astronomi motre nebeski svod sa Zemlje, opisana slika stvarnog gibanja

Zemlje oko Sunca nadomještava se prividnom slikom (relativnog) gibanja Sunca oko Zemlje. To je ponovno elipsa u kojoj perihelu i afelu odgovaraju perigej i apogej (lat. perigeum i apogeum) sunčeve orbite.

Iz svega navedenoga proizlazi da se *jednolična* (uniformna) sunčeva vremenska skala može stvoriti tako da se na nebeskoj sferi odabere tačka koja udovoljava ovim zahtjevima: 1) da se jednolično giba oko Zemlje; 2) da se u tačku proljetnog ekvinocija vraća kroz isti vremenski interval (tropska godina) kao i pravo Sunce koje se — kako smo istakli — giba nejednolično. Pretpostavimo, dakle, da se uz pravo Sunce ekliptikom (krug nebeske sfere!) giba *stalnom brzinom* neka zamišljena tačka. Neka se u trenutku prolaza pravog Sunca kroz perigej ta zamišljena tačka podudara sa središtem sunčeve plohe. Pri izlazu iz perigeja tačka će zaostajati za Suncem, ali će zatim brzina Sunca opadati, pa će u apogeju tačka dostići Sunce. Na drugoj polovici puta — od apogeja do perigeja — zamišljena tačka gibat će se ispred pravog Sunca sve do perigeja, gdje će se centar Sunca i zamišljena tačka poklopiti u skladu s drugim zahtjevom. U narednim kruženjima pravog Sunca i zamišljene tačke sve će se ponoviti. Takva zamišljena tačka zove se *srednje ekliptičko Sunce* ili »prvo srednje Sunce«.

U prvi se mah čini da bi se za jedinicu vremena »dan« mogao odabrati vremenski interval između dvije uzastopne kulminacije srednjeg ekliptičkog Sunca. Jednostavan račun, međutim, pokazuje nam da to nije moguće, jer nagib ϵ ekliptike prema ekvatoru uzrokuje nejednoličnu promjenu (porast) rektascenzije α srednjeg ekliptičkog Sunca s porastom jednoličnog (newtonovskog) vremena t. Iz sfernog trokuta na slici A.92, naime, slijedi da su nebeska duljina L, rektascenzija α i kut ϵ povezani relacijom

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \epsilon \operatorname{tg} L.$$

Budući da ϵ možemo smatrati konstantom (ovisnost ϵ o t vidi u odlomku 10.2.4), deriviranjem ove jednadžbe po vremenu dobivamo

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\cos^2 \epsilon}{\cos^2 L} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}.$$

Uz pomoć jednadžbe pravokutnog sfernog trokuta (sl. A.92) $\cos L = \cos \alpha \cos \delta$ iz gornjeg izraza slijedi

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\cos^2 \epsilon}{\cos^2 \delta} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}. \qquad (10.3\text{-}3)$$

Derivacija $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ predstavlja brzinu promjene duljine srednjeg ekliptičkog Sunca, tj. opisane zamišljene tačke koja je prema pretpostavci 1) konstantna. Brzina promjene rektascenzije ekliptičkog Sunca $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ ovisi — kako se vidi iz jednadžbe (10.3-3) — o deklinaciji δ, čija se vrijednost u toku godine koleba u granicama $\epsilon - \leqq \delta \leqq + \epsilon$.

Prema tome uzastopne kulminacije srednjeg ekliptičkog Sunca neće se pojavljivati nakon jednakih vremenskih intervala, pa se, dakle, na temelju toga ne može definirati konstantna jedinica vremena. Pogled na jednadžbu (10.3-3) i sliku A.92 pokazuje nam, međutim, da tom uvjetu udovoljava jedna druga fiktivna tačka koja se jednolično giba *ekvatorom*, jer za nju vrijedi izraz $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ ($\epsilon = 0$, $\delta = 0$). Fiktivna tačka koja udovoljava tom uvjetu zove se *srednje ekvatorsko Sunce* ili »drugo srednje Sunce«. Vremenski intervali između uzastopnih kulminacija srednjeg *ekvatorskog* Sunca su konstantni (uz pretpostavku da se Zemlja okreće

jednolično) pa se stoga oni mogu odabrati za jedinicu vremena »dan srednjeg ekvatorskog Sunca« ili »srednji dan«. Putem tog dana bila je sve do godine 1960. (kada je uvedena efemeridna sekunda; vidi odlomak 10.1.5) definirana »sekunda srednjeg ekvatorskog Sunca« ili kraće

$$\text{srednja sekunda} = \frac{\text{srednji dan}}{86\,400}.$$

Broj 86400 potječe iz podjele dan = 24 sata (h), h = 60 minuta (m), m = 60 sekundi (s), dakle dan $= 24 \cdot 60 \cdot 60$ s = 86400 s.

Srednje ekliptičko i srednje ekvatorsko Sunce, tj. prvo i drugo srednje Sunce međusobno su povezani određenim početnim uvjetima: 1) duljina srednjeg ekliptičkog Sunca L_1 i rektascenzija srednjeg ekvatorskog Sunca α_2 imaju vrijednost nula u istom trenutku, tj. te dvije zamišljene tačke istodobno prolaze kroz tačku proljetnog ekvinocija; 2) u toku daljnjeg gibanja oba fiktivna Sunca udovoljavaju zahtjevu $d\alpha_2/dt = dL_1/dt$. Iz ova dva uvjeta za bilo koji trenutak proizlazi $\alpha_2 = L_1$, tj. duljina srednjeg ekliptičkog Sunca jednaka je rektascenziji srednjeg ekvatorskog Sunca. Prema tome astronomska mjerenja pri utvrđivanju srednjeg sunčeva vremena oslanjaju se na kulminacije srednjeg ekvatorskog Sunca.

10.3.4. Veza između sunčeva i zvjezdanog vremena. Ovisnost nebeske duljine L_S Sunca o jednoličnom (uniformnom, newtonovskom) vremenu t mehanike opisali smo *Newcomb*ovom jednadžbom (10.2-1), koju ovdje ponavljamo u neznatno izmijenjenom obliku

$$L_S = L_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \Sigma(Per)_1. \qquad (10.3\text{-}4)$$

Ta jednadžba i njene konstante opisane su u odlomku 10.2.2. Uz pomoć slike A.92 i jednadžbe $\operatorname{tg} \alpha_S = \cos \epsilon \operatorname{tg} L_S$, koja vrijedi za pravokutni sferni trokut, od (10.3-4) dobivamo izraz za ovisnost rektascenzije α_S o vremenu mehanike t:

$$\alpha_S = A_0 + B_1 t + B_2 t_2 + \Sigma(Per)_2, \qquad (10.3\text{-}5)$$

gdje je krajnji član (suma mješovitih i periodičkih članova) različit od analognog člana u jednadžbi (10.3-4). Budući da je rektascenzija α zvijezda proporcionalna zvjezdanom vremenu S (vidi odlomak 10.3.1), to se vrijeme može izraziti jednadžbom koja je slična izrazima (10.3-4, 5)

$$S = S_0 + E_1 t + E_2 t^2 + \Sigma(Per)_3, \qquad (10.3\text{-}6)$$

a odnosi se na međunarodni meridijan u Greenwichu. Do ove jednadžbe može se doći pomoću opće teorije precesije uz pretpostavku da je vrtnja Zemlje oko vlastite osi *jednolična.*

Sada se podsjetimo kako su definirane pojedine vremenske skale i veličina α_S. Zvjezdano vrijeme po Greenwichu S proporcionalno je kutu što ga zatvara meridijan proljetnog ekvinocija s meridijanom Greenwicha, rektascenzija α_S je kut što ga meridijan Sunca zatvara s meridijanom proljetnog ekvinocija, a pravo sunčevo vrijeme V proporcionalno je kutu što ga zatvara meridijan Sunca s meridijanom Greenwicha. Grafički prikaz ovih definicija vidimo na slici A.98, na kojoj je $\alpha = SK_z$ (vidi odlomak 10.3.1), dok je pravo sunčevo vrijeme po Greenwichu

$$V = S - \alpha_S / K,$$

gdje slovo $K = 15\,°/\mathrm{h}$ označuje »satni kut« (odlomak 10.3.1). Uvrstimo li u gornji izraz jednadžbe (10.3-5, 6), dobivamo

$$V = V_0 + W_1\, t + W_2\, t^2 + \Sigma(Per)_4, \qquad (10.3\text{-}7)$$

gdje pojedine konstante ovako ovise o prije upotrebljavanim konstantama

$$V_0 = S_0 - A_0/K, \quad W_1 = E_1 - B_1/K, \quad W_2 = E_2 - B_2/K,$$

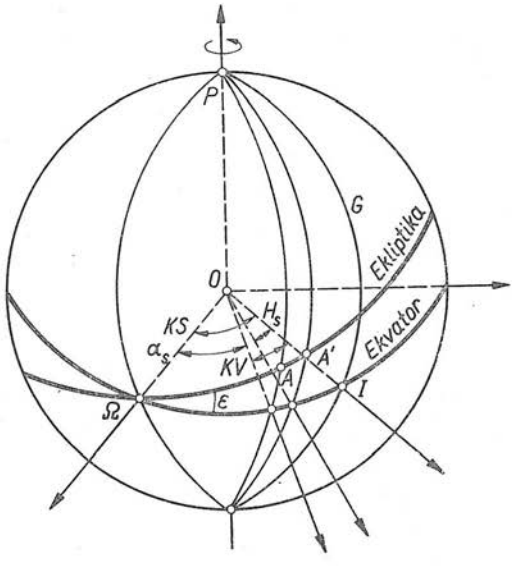
$$\Sigma\,(Per)_4 = \Sigma\,(Per)_3 - \Sigma\,(Per)_2/K.$$

U prošlom odlomku 10.3.3 definirali smo srednje sunčevo vrijeme uz pretpostavku jednolična gibanja zamišljene tačke (»srednje Sunce«) ekliptikom, odnosno nebeskim ekvatorom. Iz jednadžbe (10.3-7) se razabire da toj pretpostavci odgovara matematičko formuliranje srednjeg sunčeva vremena

$$T = V_0 + W_1 t = (S_0 - A_0/K) + (E_1 - B_1/K)t. \qquad (10.3\text{-}8)$$

Budući da se sve konstante odnose na meridijan u Greenwichu, to je veličina T u stvari *srednje sunčevo vrijeme po Greenwichu* (engl. Greenwich Mean Solar Time, *GMT*). Na slici A.98 tom vremenu odgovara kut

$$H_0 = KT = (KS_0 - A_0) + (KE_1 - B_1)t.$$



Razliku između srednjeg (T) i pravog (V; vidi odlomak 10.3.2) sunčeva vremena lako dobivamo ako jednadžbu (10.3-8) uvrstimo u (10.3-7)

$$T = V - W_2 t^2 - \Sigma(Per)_4.$$

Sl. A.98. Grafički prikaz odnosa među različitim vremenskim skalama

O — položaj Zemlje u centru nebeske sfere, OP — os vrtnje Zemlje, Ω — tačka proljetnog ekvinocija, G — međunarodni meridijan (Greenwich), A — Sunce, A' — srednje Sunce, α_S — rektascenzija Sunca, S — zvjezdano vrijeme po Greenwichu, V — pravo sunčevo vrijeme po Greenwichu, $T = H_0/K$ — srednje sunčevo vrijeme po Greenwichu

Za astrometriju, a time i za metrologiju uopće, važan je odnos između srednjeg sunčeva vremena T i zvjezdanog vremena po Greenwichu S. Taj odnos saznat ćemo iz prethodnih jednadžbi; pri tom ćemo i dalje pretpostavljati da je T jednolična vremenska skala, tj. da se Zemlja vrti oko svoje osi *jednolično*, što znači da je T proporcionalno vremenu t mehanike. Tu pretpostavku moramo zadržati jer je ona temelj vremenske skale T. Napišemo li jednadžbu (10.3-8) u obliku $t = (T - V_0)/W_1$, pa tako izraženo jednolično vrijeme mehanike uvrstimo u (10.3-6), slijedi

$$S = S_0 + \frac{E_1}{W_1}(T - V_0) + \frac{E_2}{W_1^2}(T - V_0)^2 + \Sigma(Per)_3.$$

Ako treći član desne strane ove jednadžbe kvadriramo, a zatim sredimo konstante uz T i T^2, dobivamo

$$S = S_0' + FT + GT^2 + \Sigma (Per)_3. \qquad (10.3\text{-}9)$$

Pri tom možemo zamisliti da je i posljednji član izražen u ovisnosti o srednjem sunčevu vremenu T.

Ova jednadžba dokazuje da *astronomska motrenja zvjezdanog vremena S omogućuju utvrđivanje srednjeg sunčeva vremena T*, što smo tvrdili u odlomku 10.3.1. Stvarno su odnosi između S i T prema jednadžbi (10.3-9) u astronomskim publikacijama izračunati za svaki dan, a pripadne efemeride objavljene u tabelarnom obliku u svakom astronomskom godišnjaku. Neprocjenjiva je praktična vrijednost tog poznatog odnosa: svaka zvjezdarnica može svake noći motriti i mjeriti pomake stotinjak zvijezda. Pretpostavimo li da je u toku jedne noći praćeno 100 zvijezda, lako zaključujemo da je pogreška tako utvrđenih trenutaka $\sqrt{100} = 10$ puta manja negoli u slučaju kada se motri samo (jedno) Sunce. Praktički ta prednost nije deseterostruka, jer postoje sistematske pogreške pri motrenju, a i u katalozima zvijezda. No unatoč tome moderni astronomski instrumenti (zenitna fotografska cijev PZT, *Danjon*ov astrolabe; sl. A.96) omogućuju da vjerojatna pogreška pri utvrđivanju trenutka opažanja karakteristične pojave na nebeskom svodu ne iznosi više od 4...5 milisekundi ako se motri grupa od tridesetak zvijezda, što predstavlja posao od dva sata. To znači da relativna nepouzdanost poznavanja mjerenog vremenskog intervala između dva trenutka opažanja iznosi $\pm$ (8...10) ms/86400 s $\approx$ $\approx \pm 1 \cdot 10^{-7}$ ako je taj interval jedan dan. Za jednogodišnji interval pouzdanost je oko 365 puta veća, dakle relativna nepouzdanost iznosi oko $\pm 3 \cdot 10^{-10}$. Ovi podaci vrijede uz dvije pretpostavke: 1) da je relativna pogreška ure, koja u zvjezdarnici »pohranjuje vrijeme« (vidi odlomak 10.1.5), manja od pogreške pri astronomskom utvrđivanju trenutaka; 2) da je vrtnja Zemlje oko vlastite osi jednolična. Prvoj pretpostavci dobro udovoljavaju suvremene kvantne (molekularne i atomske) ure, pa čak i usavršene ure s njihalom. Drugoj pretpostavci, međutim, Zemlja ne udovoljava, njena vrtnja *nije* strogo periodična (vidi odlomak 10.3.6).

10.3.5. Svjetsko vrijeme (Universal Time). Do 1. januara 1925. astronomi su početkom dana smatrali gornju kulminaciju srednjeg ekvatorskog Sunca, dakle trenutak koji nazivamo »podne«. Pri tom su upotrebljavali skalu srednjeg sunčeva vremena T. Na samom početku godine 1925. pomakli su ishodište brojenja vremena 12 sati unatrag, dakle na ponoć (podrobnije o tome vidi u odlomcima 10.3.2 i 10.5.5). Pri tom su počeli upotrebljavati uvako modificiranu skalu srednjeg sunčeva vremena

$$M = T + 12\text{h}. \qquad (10.3\text{-}10)$$

Slovom M označena je veličina *svjetsko vrijeme* ili *svemirsko vrijeme* koje na stranim jezicima ima ove nazive: engleski Universal Time (kratica UT; zbog toga se umjesto oznake M upotrebljava i oznaka UT, dakle $M = UT$), ruski mirovo vremja ili vsemirnoje vremja, francuski Temps Universel (TU), njemački Weltzeit (WZ). Svjetsko vrijeme M bilo je osnova svih astronomskih publikacija od godine 1925. do 1960, kada je zamijenjeno efemeridnim vremenom.

Napominjemo da kratica sata (h) u jednadžbi (10.3-10) predstavlja 3600 srednjih sunčevih sekundi, odnosno 24. dio srednjeg sunčeva dana koji je definiran kao vremenski interval između dvije uzastopne kulminacije srednjeg ekvatorskog Sunca (vidi odlomak 10.3.3). Uz to valja naglasiti da se svjetsko vrijeme

M uvijek računa od ponoći na *meridijanu Greenwicha*. Tako utvrđeno vremensko ishodište osnova je *mjesnog vremena* m definiranog jednadžbom

$$m = M - \lambda/K,$$

gdje je $K = 15°/\mathrm{h}$, $\mathrm{h} = 3600$ srednjih sunčevih sekundi, a λ geografska duljina mjesta koja se računa od Greenwicha (pozitivno prema zapadu; vidi odlomak 10.4.1).

Načelnu vezu između zvjezdanog vremena S i srednjeg sunčeva vremena T uspostavili smo u odlomku 10.3.4. Budući da za meridijan Greenwicha vrijedi $M = T + 12\,\mathrm{h}$, to je očito da opisana veza u neznatno preinačenom obliku vrijedi i za odnos zvjezdanog vremena S (prema Greenwichu) prema svjetskom vremenu. U astronomskim godišnjacima taj se odnos obično navodi u obliku

$$S = 12\mathrm{h} + M + \alpha(M)/K + \text{nutacija}. \qquad (10.3\text{-}11)$$

U ovoj jednadžbi treći je član proporcionalan rektascenziji srednjeg Sunca (aberacija je uključena)

$$\alpha(M)/K = 18\mathrm{h}\ 38\mathrm{m}\ 45{,}836\mathrm{s} + 236{,}555\,360\,49\mathrm{s}\ (N + M/\mathrm{h}) + 0{,}0929\ (t/\mathrm{D})^2$$

Jedinice vremena s, m i h su jedinice srednjeg sunčeva vremena, N je broj punih dana ($\mathrm{d} = 86\,400\mathrm{s}$) koji su prošli od trenutka 1900, januar 0, 12^{h} do ponoći (po Greenwichu) razmatranog datuma; slovo t predstavlja vremenski interval $N \cdot \mathrm{d} + M$, a D jedinicu vremena julijansko stoljeće (vidi odlomak 10.2.2).

Pri konkretnim preračunavanjima zvjezdanog vremena S u svjetsko vrijeme M (i obrnuto) upotrebljavaju se dvije brojčane konstante čije su vrijednosti

$$\mu = 0{,}002\,737\,909\,3, \qquad \nu = 0{,}002\,730\,433\,6.$$

One su međusobno povezane relacijom $1 - \nu = 1/(1 + \mu)$. Konstanta ν proizlazi iz omjera jedinice zvjezdanog vremena (npr. $\mathrm{h_z}$) i jedinice srednjeg sunčeva vremena (npr. h)

$$1 - \nu = \frac{\text{jedinica zvjezdanog vremena}}{\text{jedinica sred. sunč. vremena}} = \frac{1\,\mathrm{a}(t)}{1\,\mathrm{a}(t) + 1\,\mathrm{d_0}}.$$

Ovdje $\mathrm{a}(t)$ predstavlja trajanje tropske godine, odnosno preciznije rečeno trajanje tropske godine 1900,0, što smo u odlomku 10.2.3 označili sa $\mathrm{a}(0)$. Tropska godina postaje sve kraća u skladu s jednadžbom $\mathrm{a}(t) = 365{,}242\,198\,79\ \mathrm{d_0} - 6{,}14 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{d_0} \cdot t/D$, gdje je $\mathrm{d_0}$ trajanje srednjeg sunčeva dana.

10.3.6. Vremenske skale *UT0*, *UT1* i *UT2*. Bez obzira na vrlo stroge teorije gibanja Sunca i nekih planeta, *eksperimentalno* je u toku posljednjih tridesetak godina utvrđen *raskorak* između predviđanih (efemeridnih) i stvarnih položaja tih nebeskih tijela. Podrobno proučavanje niza takvih raskoraka pokazuje da je uzrok tome *nejednoličnost vrtnje Zemlje* oko vlastite osi. Ovovrsna istraživanja posebno su uspješna otkako se (1953) za mjerenje vremenskih intervala (za »pohranjivanje vremena«; vidi odlomak 10.1.5) upotrebljavaju molekularni i atomski oscilatori (»atomske ure«). Pomoću tih mjernih uređaja koji su razmotreni u odsječku 10.6, danas se mogu egzaktno zapažati i mjeriti nepravilnosti u vrtnji Zemlje. Zanimljivo je napomenuti da je *Newcomb* prilikom stvaranja svoje teorije (vidi odlomak 10.2.2) gibanja Sunca i planeta očekivao nejednoličnost Zemljine vrtnje, ali u ono vrijeme (kraj devetnaestog stoljeća) to još nije bilo egzaktno dokazano.

Eksperimentalne činjenice pokazuju da se brzina vrtnje Zemlje mijenja na vrlo kompliciran način. Danas se smatra da su četiri različita uzroka koji dovode do toga: 1) Nepravilno mijenjanje položaja osi vrtnje Zemlje, koje se obično naziva »njihanje polova Zemlje«. Ove promjene mogu se mjeriti, one su reda veličine 0,2...0,3″. Iako su ta kolebanja osi neznatna, ona se odrazuju promjenom položaja meridijana motrilišta i uzrokuju kolebanja geografskih duljina i širina na površini Zemlje. Time ona utječu i na utvrđivanje trenutaka zvjezdanog i sunčevog vremena. 2) Sezonsko kolebanje kutne brzine Zemlje, koje je vjerojatno uzrokovano meteorološkim pojavama. To se kolebanje na sličan način ponavlja od godine do godine. 3) Smanjivanje kutne brzine Zemlje u toku stoljetnog perioda, uzrokovano uglavnom rasipanjem energije plime i oseke. 4) Nepravilna kolebanja brzine vrtnje Zemlje, koja vjerojatno ovise o pojavama u vezi sa Sunčevom aktivnošću.

U odlomku 10.3.3 pretpostavili smo da se fiktivno srednje Sunce jednolično vrti oko Zemlje, a to drugim riječima znači da smo pretpostavili okretanje Zemlje oko vlastite osi s konstantnom kutnom brzinom. Istu pretpostavku imali smo i pri osnivanju zvjezdane vremenske skale (jednadžbe u odlomku 10.3.5 pokazuju da su skale M i S međusobno proporcionalne!). Opisana otkrića ovog stoljeća dokazuju, međutim, da je pretpostavka o jednoličnosti vrtnje Zemlje *pogrešna*, pa prema tome zvjezdana i srednja sunčeva vremenska skala *nisu jednolične*.

Nejednoličnost tih vremenskih skala može se ublažiti ako se uzmu u obzir neke izmjerene ili predviđene promjene kutne brzine Zemlje koje smo naveli u prethodne četiri tačke, naročito prve dvije. Koordinaciju radova mnogih zvjezdarnica i drugih znanstvenih centara u tom smislu obavlja Bureau International de l'Heure (mogli bismo prevesti sa: Međunarodna služba vremena, BIH) u Parizu, koji djeluje pod pokroviteljstvom Međunarodne astronomske unije. Analizom rezultata motrenja niza zvjezdarnica ta služba utvrđuje kako treba u narednom periodu korigirati svjetsko vrijeme, koje je još uvijek osnova najpreciznijeg poznavanja efemeridnog vremena (vidi odlomak 10.2.5).

Svjetsko vrijeme (Universal Time, *UT*) koje se dobiva astronomskim motrenjem u nekoj zvjezdarnici naziva se vremenska skala *UT0* (*0* na kraju označuje nulu). Pri tom se interpolira niz uzastopnih rezultata motrenja zvjezdanog vremena (zenitni prolazi zvijezda), a trenuci se preračunavaju u srednje sunčevo vrijeme pomoću relacije (10.3-11). Interpolacija se izvodi preciznim urama koje se upravljaju kremenim, molekularnim ili atomskim oscilatorima. Kolebanje polova Zemlje, tj. njihanje njene osi vrtnje (prvi od četiri navedena uzroka nejednoličnosti vrtnje), može se utvrditi mjerenjem kolebanja geografske duljine $\Delta\lambda$ nekoliko zvjezdarnica. Izmjereni podaci o pomaku polova reduciraju se na »srednji pol«, a pripadna vremenska korekcija $\Delta T_1\,(\Delta\lambda)$ doda se svjetskom vremenu *UT0* i time dobiva vremenska skala

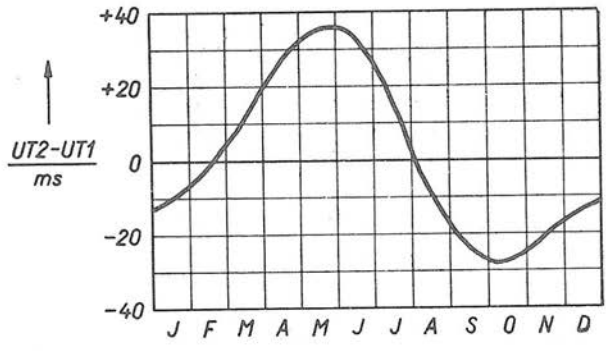
$$UT1 = UT0 + \Delta T_1(\Delta\lambda).$$

Prema tome vremenska skala svjetskog vremena *UT1* jednoličnija je od skale *UT0* dobivene direktno iz astronomskih motrenja praćenih klasičnim astronomskim korekcijama.

Još jedna korekcija svjetskog vremena *UT* može se uzeti u obzir. To je korekcija za sezonska godišnja i polugodišnja kolebanja kutne brzine Zemlje (drugi od četiri navedena uzroka nejednoličnosti) čija amplituda iznosi maksimalno oko 0,03 sekunde. Označimo li tako dobivenu korekciju sa ΔT_2 i dodamo je skali *UT1*, nastaje još jednoličnija vremenska skala

$$UT2 = UT1 + \Delta T_2 = UT0 + \Delta T_1(\Delta\lambda) + \Delta T_2.$$

Predodžbu o razlici između *UT2* i *UT1* može nam dati slika A.99. Vremenska skala *UT2* je najjednoličnija skala svjetskog vremena koja se može postići motrenjem zvijezda. Permanentnim utvrđivanjem ΔT_1 i ΔT_2 eliminirane su iz *UT0* samo posljedice prvih dvaju od nabrojenih uzroka nejednoličnosti vrtnje Zemlje. Posljedice ostalih dvaju uzroka ne mogu se zapaziti motrenjem prolaza zvijezda, već jedino usporedbom s pokazivanjem kremenih i atomskih ura koje jednolično odmjeravaju vrijeme.



Sl. A.99. Krivulja srednjeg sezonskog kolebanja svjetskog vremena (ms = milisekunda; slova J, F, ... označuju mjesece januar, februar...)

Suvremeno opremljene zvjezdarnice se prilikom astronomskih motrenja oslanjaju na vremenske intervala izmjerene vlastitim kremenim ili atomskim urama. Mnoge zvjezdarnice emitiraju, u unaprijed najavljenim trenucima, standardizirane radio-signale kojima objavljuju pokazivanje svojih ura, tj. trenutke na vremenskoj skali što je tvori glavna ura zvjezdarnice. Na temelju emisija tih zvjezdarnica, protokola o trenucima prijema emisija u ostalim zvjezdarnicama i rezultata drugih usporedbi, oblikuje se međunarodna vremenska skala svjetskog vremena. Taj koordinacijski posao obavlja spomenuti Bureau International de l'Heure (BIH) koji pod pokroviteljstvom Međunarodne astronomske unije djeluje pri zvjezdarnici u Parizu.

Iz svih dobivenih podataka BIH računanjem oblikuje skalu tzv. definitivnog vremena *UT2* (heures définitives). Razlike između tako stvorenog *UT2* i vlastitog vremena pojedinih zvjezdarnica BIH redovito objavljuje u svom »Bulletin horaire«. Vjeruje se da pri tom konačna pogreška ne premašuje 2 milisekunde. Na taj način, dakle, stotinjak kremenih i atomskih ura iz oko 40 zvjezdarnica širom svijeta predstavlja jedinstveno, pouzdano i vrlo tačno »pohranjivalo vremena« (timekeeper). U najnovije doba BIH uz *UT* koordinira i atomsku vremensku skalu (odsječak 10.7).

10.4. Pojasno vrijeme i dekretno vrijeme

Fizikalna veličina »vrijeme« izvanredno duboko prožima svakodnevni život ljudi, njihove transportne djelatnosti, proizvodna poduzeća — ukratko: cjelokupnu aktivnost civiliziranog čovječanstva. Stoga je mjerenje vremenskih intervala i utvrđivanje trenutaka (vremenskih tačaka) pomoću ručnih, džepnih, sobnih i drugih ura mjerna djelatnost gotovo svakog građanina. Ispravnost svojih ura građani kontroliraju pomoću »podataka o tačnom vremenu« koje preko radio-odašiljača emitiraju specijalizirane ustanove. One pak svoje najpreciznije ure baždare pomoću sređenih rezultata astronomskih motrenja (vidi odlomak 10.3.6). Prema tome se

tzv. *građansko vrijeme* u krajnjoj liniji, s manjom ili većom pogreškom, oslanja na svjetsku vremensku skalu (vidi i odsječak 10.8).

Ovdje će biti od koristi jedna terminološka napomena. U čitavom ovom poglavlju A.10 služimo se riječju »ura« za *instrument* kojim se mjere vremenski intervali i očitavaju trenuci, iako se riječ »sat« češće upotrebljava. Razlog tome je želja da nam tekstovi budu jednoznačni, jer riječ »sat« ima dvojako značenje: jednom znači mjernu jedinicu vremena »sat« (lat. hora, engl. hour; kratica: h), a drugi put mjerni instrument »sat« (ura, engl. clock).

10.4.1. Pojasno vrijeme. Godine 1884. u Washingtonu je potpisan međunarodni sporazum prema kojem se geografska duljina λ bilo kojeg mjesta na Zemlji računa od meridijana na kojem leži zvjezdarnica u Greenwichu blizu Londona, tj. za Greenwich je $\lambda = 0$. Zaključkom Međunarodne astronomske unije godine 1928, srednje sunčevo vrijeme griničkog meridijana, računajući od *ponoći*, naziva se *svjetsko vrijeme* ili *svemirsko vrijeme* M (engl. Universal Time; vidi odlomak 10.3.5). Mjesno vrijeme m tačke na bilo kojem meridijanu geografske duljine λ (vrijednost duljine λ računa se s pozitivnim predznakom prema zapadu od Greenwicha, a s negativnim predznakom prema istoku) iznosi (usporedi s odlomkom 10.3.1)

$$m = M - \lambda/K,$$

gdje je konstanta $K = 15°/\mathrm{h}$ tzv. satni kut, a $\mathrm{h} = \mathrm{sat} = 3600$ srednjih sunčevih sekundi.

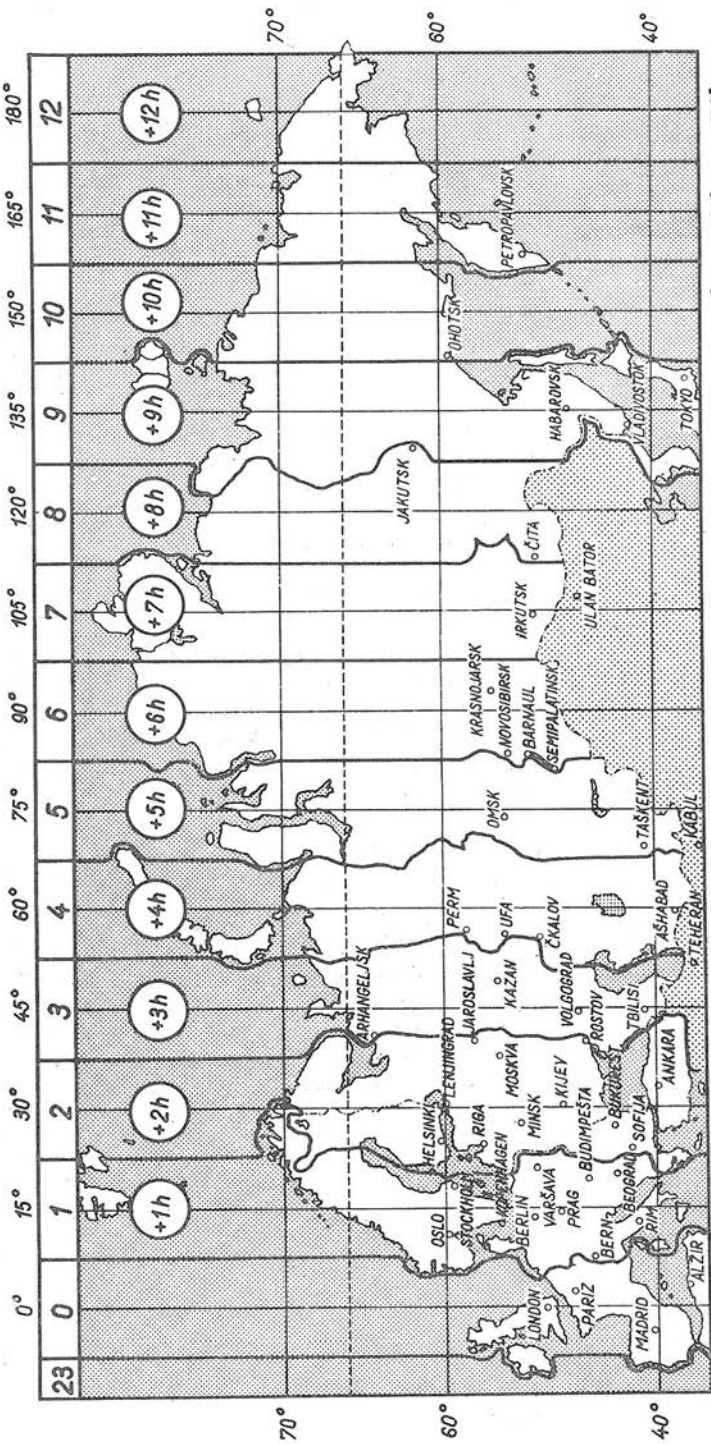
Mjesno vrijeme m u smislu gornje jednadžbe (ovisno o λ) korisno je u astronomiji i navigaciji, ali je savršeno neprikladno za *svakodnevni život* ljudi, za tzv. građanski život. Gotovo isto toliko neprikladno bilo bi uvođenje jedinstvenog svjetskog vremena $M(UT)$ na čitavoj Zemlji (na nekim dijelovima globusa Sunce bi izlazilo npr. u 6^{h}, na drugima u 10^{h}, 16^{h}, 23^{h} itd.!). Između ove dvije krajnosti čovječanstvo je prihvatilo kompromis koji je godine 1879. predložio *S. Flemming*, inženjer kanadskih željeznica. On je za građanski život predložio *pojasno vrijeme*, koje se na tačno definirani način razlikuje od svjetskog vremena M za *cijeli broj sati*.

Diskontinuirana pojasna vremenska skala građanskog života nastaje tako da se zemaljska kugla razdijeli na 24 vremenska pojasa (»kriške«). Svaki pojas obuhvaća površinu Zemlje između dva meridijana razmaknuta za $360°/24 = 15°$ geografske duljine. Unutar svakog vremenskog pojasa upotrebljava se *mjesno vrijeme* meridijana koji prolazi kroz *sredinu* pojasa. Brojenje tih središnjih meridijana počinje u Greenwichu, kojemu je pripisana uloga središta nultog pojasa ($p = 0$) i pojasno vrijeme m_p jednako svjetskom vremenu ($m_{p=0} = m_0 = M$), a zatim se brojenje nastavlja na istok od Greenwicha. Ako redne brojeve pojaseva označimo sa $p = 0, 1, \ldots, 23$, pripadno pojasno (zonsko) vrijeme izražava se jednadžbom

$$m_p = M + p \cdot h,$$

gdje je h (= 3600 s) jedinica vremena sat. Predodžbu o pojasnom vremenu može nam pružiti slika A.100, koja se odnosi na Evropu i sjeverni dio Azije.

Budući da pojasno vrijeme stupa na snagu tek pošto ga za svoje stanovnike propiše država, pojasno vrijeme unutar države naziva se i *zakonsko vrijeme* ili *državno vrijeme*. (Neke velike države uopće nisu uvele pojasno vrijeme; tako je npr. u Indiji propisano jedinstveno indijsko vrijeme $M + 5\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$.) Pojedina pojasna vremena imaju i svoja vlastita imena od kojih ćemo neka nabrojiti. *Evropa*: zapadnoevropsko vrijeme ($m_p = M$), srednjoevropsko vrijeme ($m_p - M = 1\,\mathrm{h}$),



Sl. A.100. Pojasna (zonska) vremena Evrope i sjeverne Azije. Vrijednosti u krugovima treba dodati svjetskom vremenu ($M = UT$) da bi se dobilo pojasno vrijeme m_p

istočnoevropsko vrijeme (+2 h). *Afrika*: vrijeme Kanarskih otoka ($m_p - M = -1$ h) te tri vremena navedena za Evropu. *Azija*: vrijeme Adena (+3 h), indijsko vrijeme (+5 h 30 min), vrijeme Indokine (+8 h). *Australija i Oceanija*: južnoaustralsko vrijeme (+9 h 30 min), novozelandsko vrijeme (+12 h), vrijeme otoka Fidži (+12 h) i vrijeme otoka Samoa (−11 h). *Sjeverna Amerika*: Alaska Standard Time (−10 h), Pacific Standard Time (−5 h), Atlantic (Intercolonial) Standard Time (−4 h) i Saint-John Time (−3 h 30 min). *Južna Amerika*: venecuelsko vrijeme (−4 h 30 min), vrijeme Paramariba (−3 h 30 min), istočnobrazilsko vrijeme (−3 h) i južnoatlantsko vrijeme (−2 h).

Stvarne granice između susjednih vremenskih pojasa razlikuju se od teoretskih granica koje propisuju meridijani (sl. A.100; odstupanje graničnih linija od pravca!). Osim toga povremeno se u velikim državama te granice ponešto mijenjaju. To se radi u interesu boljeg privređivanja, jer je u međuvremenu npr. došlo do proširenja nekih industrijskih oblasti koje čine privredne cjeline, nastali su veliki gradovi na samim granicama teoretskih vremenskih pojasa itd. Na primjer, u Sovjetskom Savezu je godine 1956. propisano novo razgraničenje pojasnih vremena koje se osnivalo na ovim načelima: 1) kao i dotada, čitav teritorij SSSR ostaje razdijeljen na 11 vremenskih pojasa; 2) na vodenim površinama granice vremenskih pojasa prolaze i dalje po teoretskim granicama, a na istoku i zapadu zemlje po državnim granicama; 3) granice vremenskih pojasa u pravilu prolaze po obližnjim republičkim, oblasnim i drugim administrativnim granicama; 4) kada se zbog velike geografske duljine teritorij ne može razdijeliti prema tački 3, kao što je to u slabo napučenim područjima, granice se postavljaju na vododjelnice ili na teoretske granice.

10.4.2. Dekretno vrijeme. Neke države propisuju u toku stanovitog razdoblja kalendarske godine vremensku skalu građanskog života koja se razlikuje od pojasnog vremena m_p. Na primjer, vladinim *dekretom* u Sovjetskom Savezu je godine 1930. propisano da se od 20. aprila do 30. septembra mora upotrebljavati vremenska skala građanskog života

$$m_d = m_p + 1\,\mathrm{h} = M + (p+1)\cdot \mathrm{h},$$

tj. u toku tog razdoblja ure treba pomaknuti za jedan sat naprijed. To znači da je u tom periodu npr. »moskovsko vrijeme« pomaknuto 3 sata ispred svjetskog vremena, jer je $p = 2$ (vidi sl. A.100). Isti trenutak označuje se npr. u Greenwichu sa $m_0 = M = 13^h$, a u Moskvi sa $m_d = 13\,\mathrm{h} + (2+1)\,\mathrm{h} = 16\,\mathrm{h}$.

U toku ljetnjeg perioda dekretno vrijeme upotrebljava se i u Engleskoj, a u novije doba i u Italiji. Razlog uvođenja dekretnog vremena je ekonomske i zdravstvene prirode: postiže se ušteda na energiji, naročito električkoj, povećava se turistički utržak, a proizvodnost rada je veća jer se ljudi bolje ispavaju.

10.4.3. Linija promjene datuma. Zamislimo da avion leti od Greenwicha prema *istoku* s namjerom da obiđe kuglu zemaljsku. Prilikom prelijetanja granice između nultog i prvog vremenskog pojasa (vidi odlomak 10.4.1 i sliku A.100) putnici će svoje ure pomaknuti za jedan sat *naprijed*. Na granici između 2. i 3. pojasa oni će opet svoje ure pomaknuti za 1 sat naprijed, itd. Konačno će prilikom prijelaza iz 23. vremenskog pojasa u nulti uru pomaknuti naprijed posljednji, 24. put. Ukupni pomak iznosit će, dakle, 24 sata = 1 dan, što znači da će — stigavši natrag u Greenwich — putnici aviona smatrati da je datum dolaska za 1 dan veći nego što smatraju stanovnici Greenwicha koji se nisu micali iz svog

mjesta. Obrnuto bi se desilo da su putnici letjeli suprotnim smjerom, prema zapadu od Greenwicha: u tom slučaju putnici bi prilikom prelijetanja granica između vremenskih pojasa svoje ure pomicali *unazad* i prilikom povratka konstatirali da je njihov datum za 1 dan manji od stanovnika nultog pojasa. Isto, dakako, vrijedi i za bilo koje drugo mjesto iz kojeg se putnici upute da obiđu Zemlju duž zemaljske paralele (to se — na njihovo veliko čuđenje — dogodilo godine 1520. članovima *Magellan*ove ekspedicije koja je prva oplovila svijet u smjeru prema zapadu).

Ovu pojavu vrlo je lako objasniti: ako putnik obilazi Zemlju u smjeru zapad → istok, on se giba u istom smjeru u kojem se vrti Zemlja u odnosu prema Suncu. Ako se u toku putnikova potpunog obilaska Zemlja okrenula N puta (stanovnici polazne tačke doživjeli su N izlazaka Sunca), putnik je učinio oko Sunca $N+1$ okretaj. Pri gibanju u smjeru istok → zapad putnik se kreće suprotno vrtnji Zemlje, pa nakon punog ophoda učini $N-1$ okretaj u odnosu prema Suncu.

Da bi se izbjegli takvi nesporazumi, koji bi mogli uzrokovati znatne poteškoće u planiranju i ugovaranju plovidbe i letova, međunarodnim je sporazumom utvrđena tzv. *linija promjene datuma* ili *demarkacijska linija* (engl. International Date Line). Prilikom prelaska te linije u smjeru zapad → istok, putnik mora vratiti svoj datum za jedan dan unazad, dakle dva puta uzastopce bilježiti isti datum. Ako liniju prelazi u smjeru istok → zapad, putnik mora jedan dan u kalendaru preskočiti (npr. nakon 3. oktobra bilježi datum 5. oktobra). Ovim zahvatima osigurava se jedinstvo datuma na čitavoj Zemlji.

Linija promjene datuma izlazi iz zemaljskih polova po meridijanu $\lambda = 180°$, a od njega se otklanja samo tamo gdje bi mogla presjeći otoke ili skupinu otoka. Markantne tačke linije su:

Širina	Duljina	Širina	Duljina
+70° 00′	180° 00′	− 5° 00′	180° 00′
+65° 00′	+169° 00′	−15° 30′	+172° 30′
+52° 30′	+170° 00′	−45° 30′	+172° 30′
+48° 00′	180° 00′	−51° 30′	180° 00′

Pri tom su predznakom plus označene sjeverne širine i zapadne duljine. To znači da linija promjene datuma najprije istočno obilazi Vrangelovu zemlju, zatim se otklanja na zapad kraj Aleuta i nastavlja meridijanom 180° kroz Tihi ocean. U nastavku linija prolazi istočno od Marijanskih, Karolinskih i Fidži (Fiji) otoka, istočno od Nove Zelandije i Nove Kaledonije, pa se zatim vraća na meridijan 180° i završava u Južnom polu.

10.5. Kalendarsko i astronomsko označivanje vremenskih intervala i trenutaka

10.5.1. Općenito o kalendaru. Za vrijeme kažemo da »teče« od nekog trenutka koji smo odabrali za ishodište. Računanje i označivanje tog »toka vremena« možemo donekle usporediti s »kilometarskim stupovima« ugrađenima uz rub ceste koji označuju udaljenost stupova od nekog odabranog ishodišta. U slučaju *datiranja vremena*, za »vremenske stupove« (vremenske tačke, trenutke) odabrani su markantni prirodni ili mitološki događaji. Sistem datiranja događaja, odnosno datiranja vremena uopće, naziva se *kalendar*. Porijeklo riječi »kalendar« je starorimsko: stari Rimljani nazivali su prvi dan svakog mjeseca *calendae*.

Kalendarsko označivanje toka vremena kojim se danas služimo (gregorijanski kalendar; vidi odlomak 10.5.3) samo je jedan od oko 200 kalendarskih sistema što su se do sada upotrebljavali u ljudskoj povijesti. Osnova većine tih kalendara su dva nebeska gibanja: puni ophod Mjeseca oko Zemlje i puni ophod Zemlje oko Sunca; trajanje prvog gibanja naziva se »mjesec«, a trajanje drugoga »godina«. Na temelju motrenja ophoda Mjeseca nastaje *mjesečev kalendar*; promatranje prividnog gibanja Sunca na nebeskom svodu dovodi do primjene *sunčeva kalendara*. Većina civilizacija na početku je upotrebljavala mjesečev kalendar, a zatim s napretkom astronomije prešla na sunčev kalendar.

U našem razmatranju kalendara morat ćemo pustiti po strani silno zanimljivu povijest mnogobrojnih kalendara. Pozabavit ćemo se samo sa tri kalendara: julijanskim, gregorijanskim i metričkim (kalendar francuske revolucije; vidi odlomak 10.5.4). Umjesno je da prije toga spomenemo dvije riječi koje se pojavljuju u vezi s kalendarima i uopće s označivanjem toka vremena. Prva je *epoha*, koja označuje ishodište od kojeg se računa vrijeme. U drevnim kronikama nalazimo najrazličitije epohe: osnivanje Rima, pad Troje, Augustova pobjeda nad Antonijem, rođenje Kristovo itd. Druga riječ je *era*, koja označuje trajanje nekog stanja ili vladavine. Na primjer, *muslimansku eru* uveo je kalif Omar 634. godine naše ere (tzv. kršćanske ere), a njena epoha je Muhamedov bijeg iz Meke u Medinu (godina 622.n.e.).

10.5.2. Julijanski kalendar. Da bi svakodnevna djelatnost ljudi bila uspješna u pogledu datiranja (označivanja vremenskih trenutaka), iz davnine se upotrebljava *kalendarska godina*, koja se sastoji od *cijelog broja* kalendarskih dana. Trajanje *kalendarskog dana* treba odabrati tako da trajanje kalendarske godine što manje odstupa od trajanja tropske godine (o tropskoj godini vidi odlomak 10.2.3). Budući da tropska godina ne sadrži cijeli broj dana, to pri stvaranju svakog kalendarskog sistema valja propisati način uvrštavanja *dopunskih* dana čime se u toku duljeg razdoblja kompenzira razlika trajanja između tropske i kalendarske godine, koja se nakupi nakon stanovitog broja godina. Način uvrštavanja tih dodatnih dana u kalendarske godine propisan je tzv. *prijestupnim sistemom*.

Budući da su loše strane starorimskog kalendara počele remetiti normalan tok svakodnevnog života i moreplovstva (dogodilo se npr. da je stvarni 15. oktobra prema kalendaru pao na 1. januara), imperator *Julije Cezar* uveo je godine 46. prije naše ere (p.n.e.) nov kalendar, koji je prema njemu kasnije dobio naziv *julijanski kalendar* ili »kalendar starog stila«. Tvorac tog sunčeva kalendarskog sistema bio je aleksandrijski astronom *Sozigen*.

Julijanski kalendar osniva se na ovome: 1) kalendarska godina sastoji se od 365 dana, a prijestupna godina od 366 dana; 2) godina se dijeli na 12 mjeseci; 3) mjesec ima 30 ili 31 dan, osim mjeseca februara koji u običnoj godini ima 28 dana, a u prijestupnoj 29; 4) one godine koje su djeljive sa 4 nazivaju se prijestupnima; to su npr. godine 1964, 1968. itd. Prema tome srednje trajanje godine prema julijanskom kalendaru iznosi

$$\frac{365\,\mathrm{d}\times 3+366\,\mathrm{d}}{4}=365{,}25\,\mathrm{d}.$$

Pri tom se pod danom (d, lat. dies) razumijeva srednji sunčev dan (vidi odlomak 10.3.3). Budući da tropska godina traje oko 365,2422 srednjih sunčevih dana (u odlomku 10.2.3 smo vidjeli da tropska godina $a(t)$ postaje sve kraća; u toku jednog stoljeća trajanje tropske godine smanji se za oko 0,53 sekunde), to je julijanska

kalendarska godina u prosjeku za 0,0078 d veća od tropske. Posljedica je toga da se početak stanovitog godišnjeg doba, npr. proljeća, u toku vremena pomiče unutar julijanskog kalendara. Tako je, na primjer, godine 325. Sunce prolazilo kroz tačku proljetnog ekvinocija 21. marta, a godine 1582. taj događaj zbio se 11. marta.

U prvobitnom obliku početak julijanskog kalendara (epohe) računao se od trenutka koji odgovara godini 4714. prije naše ere. Na Nikejskom crkvenom saboru (koncilu) koji je održan godine 325. naše ere (n.e.), načelo julijanskog kalendara prihvaćeno je za kalendar kršćanstva, ali je početak brojenja godina premješten: pripisan je trenutku rođenja Isusa Krista. Rimski svećenik *Dionizij Mali* izračunao je, oslanjajući se na nekoliko pretpostavki, da je Krist bio rođen godine 253. prije Dioklecijanove ere i tom trenutku pripisana je epoha kršćanske ere. Sa širenjem kršćanstva prodirao je i julijansko-crkveni kalendar: godine 532. n.e. prihvaćen je u Rimu, u osmom stoljeću u Francuskoj itd.

10.5.3. Gregorijanski kalendar. Na crkvenom saboru godine 1582. prihvaćen je reformirani julijanski kalendar, koji je bulom od 24. 2. 1582. uveo papa *Grgur XIII* na temelju radova talijanskog liječnika i astronoma *Luigija Lilioa*. Novi kalendar, koji su u doba njegova prihvaćanja nazivali »novi stil«, danas po predlagaču nosi pridjev gregorijanski. Svrha je reforme bila izraditi takav kalendar u kojem će se ispravnim odabiranjem sistema prijestupnosti uskladiti stvarno trajanje godine s kalendarskom godinom (to znači: što manje odstupanje trajanja gregorijanske kalendarske godine od trajanja tropske). Uz to je valjalo anulirati razliku koja se nakupila u toku minulih 1200 godina (npr. 21/11. mart, kako smo naveli pri kraju prošlog odlomka).

Gregorijanski kalendar uveden je danom koji slijedi poslije 4. 10. 1532. julijanskog kalendara: taj naredni dan nije datiran sa 5. 10. 1532, već sa 15. 10. 1532. Na taj način proljetni ekvinocij godine 1532. »vraćen« je sa 11. 3. na 21. 3. 1532. Uz navedenu mjeru usavršen je sistem prijestupnosti: na julijansku prijestupnost (odlomak 10.5.2) dodali su *stoljetnu prijestupnost*, koja se sastoji u tome da se u rasponu od 400 godina izbrišu 3 dana. To se izvodi tako da se propuste tri prijestupne godine u intervalu 400 godina. Za takve godine odaberu se one na početku svakog stoljeća kod kojih broj stoljeća nije djeljiv sa četiri, npr. godine 1700, 1800. i 1900. u 400-godišnjem periodu od godine 1600. do 2000. Prema tome godine 1600. i 2000. prijestupne su i u julijanskom i u gregorijanskom kalendaru. Na taj način srednje trajanje gregorijanske kalendarske godine iznosi

$$\frac{365\,\mathrm{d} \times 3 + 366\,\mathrm{d}}{4} - \frac{3\,\mathrm{d}}{400} = 365{,}2425\,\mathrm{d},$$

gdje slovo d predstavlja trajanje srednjeg sunčeva dana. Prema tome gregorijanska je godina u prosjeku za $3{,}01 \cdot 10^{-4}$ dana dulja od tropske, pa će se razlika od 1 dana u korist prve nakupiti tek nakon 3320 godina.

Većina evropskih država prihvatila je gregorijanski kalendar godine 1532, prešavši od datuma 4. 10. na 15. 10. 1532. Iz crkveno-vjerskih razloga iznimka je bila carska Rusija, pa je prihvaćanje gregorijanskog kalendara bila jedna od prvih mjera koje je poduzela sovjetska vlast nakon oktobarske revolucije. Dan koji je prema dotadašnjem (julijanskom) kalendaru trebao biti označen sa 1. februara 1918, zakonom je datiran sa 14. februara 1918. Tolika je već, naime, u tom trenutku bila razlika između opisana dva kalendarska sistema.

Tablica A-22

Nazivi dana u tjednu na četiri jezika

Hrvatskosrpski	Latinski	Talijanski	Engleski
Nedjelja	Dies Soli	Doménica	Sunday
Ponedjeljak	Dies Lunae	Lunedì	Monday
Utorak	Dies Martis	Martedì	Tuesday
Srijeda	Dies Mercurii	Mercoledì	Wednesday
Četvrtak	Dies Jovis	Giovedì	Thursday
Petak	Dies Veneris	Venerdì	Friday
Subota	Dies Saturni	Sàbato	Saturday

Od pamtivijeka kalendarska se godina dijeli na 12 mjeseci, a mjesec na tjedne. I današnja podjela tjedna na sedam dana drevnog je porijekla. To pokazuju, među ostalim, i *nazivi dana* u tjednu (tablica A-22). Ti nazivi potječu iz stare predodžbe o svijetu u kojem je centar Zemlja oko koje kruži sedam planeta, uključivši Sunce i Mjesec. Prema njima dani su dobili svoje nazive (npr. lat. Dies Soli znači »dan Sunca«; u tablici A-22 navedeni su i nazivi ostalih dana prema Mjesecu i planetima Marsu, Merkuru, Jupiteru, Veneri i Saturnu).

10.5.4. Kalendar francuske revolucije bio je na snazi svega 14 godina, od 1792. do 1806. Nastao je u želji da se metrički sistem jedinica (vidi poglavlje 6) uvede i u kalendarsko bilježenje vremena; radi toga neki ga autori nazivaju »dekadskim kalendarom«, iako dekadnost nije bila dosljedno provedena. U tom kalendaru godina se sastojala od 12 mjeseci po tačno 30 dana plus 5 ili 6 dodatnih dana (franc. jours complementaires). Nazivi mjeseci bili su odabrani prema prirodnim ili poljoprivrednim pojavama:

Od 22. septembra do 20. decembra:

Vandemiare — mjesec vinograda
Brumaire — mjesec magle
Frumaire — mjesec mrazova

Od 21. decembra do 20. marta:

Nivose — mjesec snijega
Pluviose — mjesec kiše
Ventose — mjesec vjetra

Od 21. marta do 18. juna:

Germinal — mjesec klijanja
Florial — mjesec cvjetanja
Prairial — mjesec livada

Od 19. juna do 17. septembra:

Messidor — mjesec žetve
Thermidor — mjesec vrućine
Fructidor — mjesec plodova

Mjesec republičkog kalendara dijelio se na tri *dekade*, a dekada je imala 10 dana. Nazivi tih dana bili su odabrani prema njihovom slijedu na latinskom jeziku: Premidi (prvi), Duodi, Tridi, Quartidi, Quintidi, Sextidi, Septidi, Octidi, Nonidi, Decadi (deseti).

Godina u republičkom kalendaru započinjala je u ponoć onog dana unutar kojeg je po srednjem pariskom vremenu nastao trenutak *jesenskog* ekvinocija, npr. 22. septembra 1792. Prema tome republička kalendarska godina u biti se oslanjala na tropsku godinu. Pripadni prijestupni sistem bio je vrlo kompliciran; prijestupni period trajao je 33 godine unutar kojih je bilo 8 prijestupa, a pogreška od 1 dan mogla se nakupiti tek nakon 4500 godina. U vrijeme republičkog kalendara

željeli su se i dani razdijeliti na 10 (dekadskih) sati, te sati na po 100 minuta, a minute na 100 (metričkih) sekundi. Bile su konstruirane i ure s decimalnim brojčanicima, ali čitava ta reforma nije uspjela. Godine 1806. Napoleon je ukinuo dekadski kalendar Republike i Francusku vratio u okvir gregorijanskog kalendara.

10.5.5. Astronomsko označivanje trenutaka. U vezi s definicijom efemeridne sekunde (vidi odlomak 10.1.5) na mnogo smo mjesta napisali oznaku »1900, januar 0, 12^h *ET*« (*ET* — efemeridno vrijeme; o njemu vidi odsječak 10.2). Što ta oznaka trenutka (vremenske tačke) predstavlja u okviru gregorijanskog kalendara? Ona znači ovo: 0 (nula) dana mjeseca januara i 12 sati efemeridnog vremena *prošlo je* od početka godine 1900. (tisuću devetstote). Prema tome broj dana i broj sati upućuju na vremenski interval koji je *prošao*, dok oznaka godine (1900) upućuje na redni broj kalendarske godine koja je *u toku*. U građanskoj primjeni kalendara taj isti trenutak opisali bismo ovako: »12^h efemeridnog vremena 1. (prvog dana) januara godine 1900. (tisuću devetstote)«. Analogno tome astronomska oznaka »1900, januar 1, 12^h *ET*« znači: »12^h efemeridnog vremena 2. (drugog dana) januara godine 1900.«. Vidimo da pri građanskoj upotrebi kalendara tačku stavljamo na kraju brojčane oznake one kalendarske godine i onog dana *koji su u toku.*

Iz gornjeg izlaganja vidi se da *astronomska* oznaka trenutka »1900, januar 0, 12^h *ET*« u stvari označuje onaj trenutak prije kojeg je prošla čitava kalendarska godina 1899. i još 12 sati efemeridnog vremena. Stoga se taj isti vremenski trenutak označuje i ovako: »1899, decembar 31, 12^h *ET*«. Prema tome je

$$1900, \text{januar } 0, 12^h\ ET = 1899, \text{decembar } 31, 12^h\ ET.$$

Ovdje smo stavili znak jednakosti (=) zato što tako rade astronomi. Pri tom oni znakom jednakosti žele izraziti samo to da gornje dvije oznake opisuju isti trenutak (vremensku tačku). Iz posve praktičnih razloga astronomi upotrebljavaju i datiranje dana kojih nema u kalendaru (oznake »januar 0«, na primjer, nema u građanskom kalendaru). Pri tom na uobičajene vrijednosti dodaju ili od njih oduzimaju jedan ili više dana, pa tako uz »januar 0« pišu »decembar 32« ili čak »januar −1«. Značenje takvih oznaka je:

januar 0 = decembar 31 prethodne godine,
januar −1 = decembar 30 prethodne godine,
decembar 32 = januar 1 slijedeće godine.

Grafičku predodžbu o tim pojmovima daje nam slika A.101, koja prikazuje astronomsko označivanje trenutaka prilikom prijelaza iz kalendarske godine 1959. u godinu 1960.

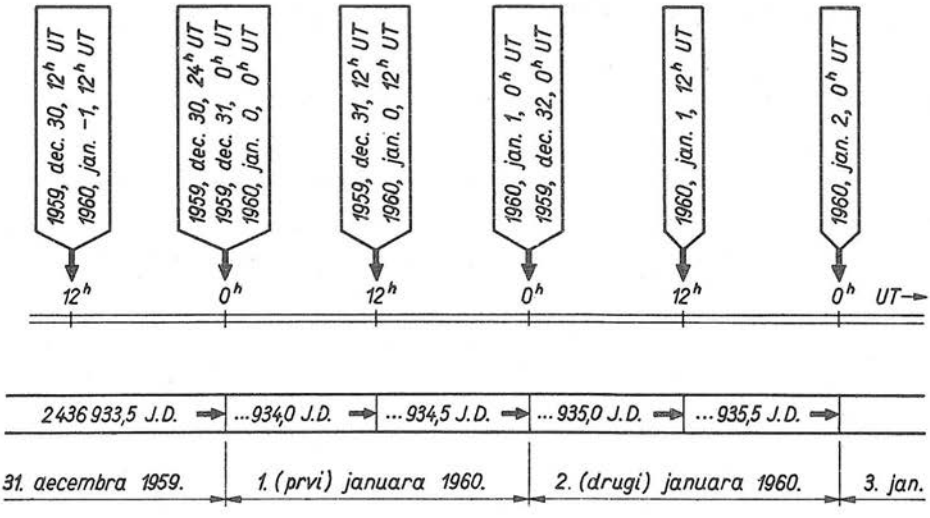
Uz opisani način bilježenja trenutaka astronomi upotrebljavaju i poseban sistem *kontinuiranog* brojenja dana od stanovitog trenutka u prošlosti. Takav sistem, u kojem se nizanje dana u toku mjeseci, godina, stoljeća i tisućljeća obilježava rastućim rednim brojevima, predložio je godine 1629. *Scalinger*. On je taj sistem nazvao julijanskim sistemom, prema imenu svog oca Julija. Za ishodište brojenja odabrana je godina 4713. prije n. e., do koje se došlo uzimajući u obzir 19-godišnji ciklus (tzv. *Meton*ov ciklus), 15-godišnji ciklus i 28-godišnji ciklus (»julijanski period« = $= 28 \cdot 15 \cdot 19\,\text{a} = 7980$ a). Prema tome u julijanskom sistemu brojenja dana ishodište je 1. januara 4713. p.n.e. Tom trenutku odgovara 1. januara −4712. godine (— označuje minus!) *astronomskog* brojenja godina. U astronomiji se, naime, od

godine 1740. (*J. Cassini*) primjenjuje kontinuirano brojenje godina, ali takvo u kojem sve godine prije naše ere imaju negativan predznak. Pri tom prva godina prije n.e. ima oznaku 0 (nula). Zbog toga je broj godina u astronomskom sistemu brojenja za 1 manji od broja koji, na primjer, upotrebljavaju u svojim raspravama historičari.

Početak julijanskog perioda i početak svakog dana u julijanskom sistemu uvijek se računa od *podneva* u Greenwichu. Tako, na primjer, u astronomskim godišnjacima nalazimo oznaku

$$1960,\ \text{januar}\ 0,\ 12^h\ UT = 2436934{,}0\ \text{J.D.},$$

koja znači da je do *podneva* 1. (prvog) januara godine 1960. prošlo 2436934 dana u julijanskom sistemu (J. D. je kratica od engleskog Julian Date). Simbol *UT* u gornjoj simboličkoj jednadžbi kratica je za »svjetsko vrijeme« (*UT* — Universal Time; vidi odlomak 10.3.5). Vezu između brojenja dana u julijanskom sistemu i astronomskog označivanja trenutaka prikazuje slika A.101.



Sl. A.101. Astronomsko označivanje trenutaka (vremenskih tačaka) i veza tog označivanja s julijanskim sistemom brojenja dana

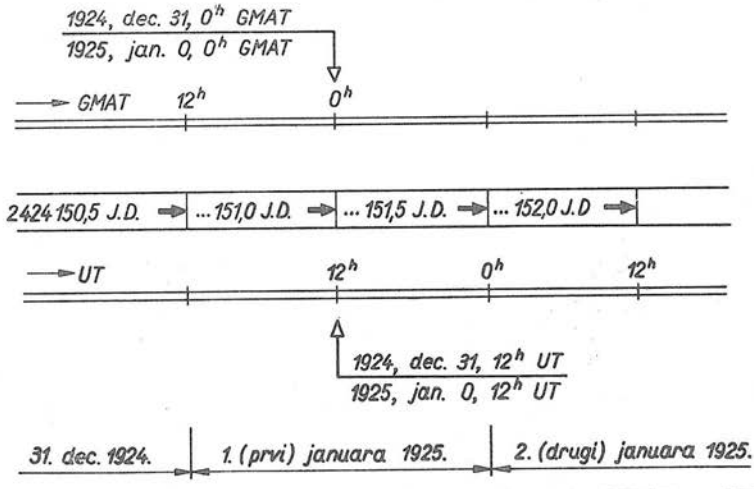
Kako smo već spomenuli u odlomku 10.3.2, astronomi su sve do kraja kalendarske godine 1924. početak dana računali od građanskog *podneva*, a ne od ponoći. Na prijelazu iz 1924. u 1925. godinu oni su prihvatili građanski početak dana, tj. dan su počeli računati od *ponoći*. Istodobno su se počeli služiti »svjetskim vremenom« umjesto do tada upotrebljavanog »srednjeg astronomskog vremena po Greenwichu« (Greenwich Mean Astronomical Time — *GMAT*). Prijelaz su izveli tako da su isti trenutak označili sa

$$1924,\ \text{decembar}\ 31,\ 0^h\ GMAT = 1924,\ \text{decembar}\ 31,\ 12^h\ UT,$$

što je grafički prikazano na slici A.102. U skladu s razlaganjem na početku ovog odlomka, gornji opis trenutka prijelaza može se zabilježiti i ovako

$$1925,\ \text{januar}\ 0,\ 0^h\ GMAT = 1925,\ \text{januar}\ 0,\ 12^h\ UT.$$

Julijanski sistem brojenja dana koji su u cijelosti minuli morao je prilikom opisane reforme ostati *nepromijenjen*, jer bi inače izgubio smisao svog postojanja. Posljedica je toga da se u astronomskim godišnjacima nakon godine 1924. cijeli broj minulih dana (Julian Date, J. D.) navodi za trenutak 12^h svjetskog vremena *UT*, a od godine 1960. za trenutak 12^h efemeridnog vremena *ET* (tako, na primjer, u astronomskim godišnjacima izdanim nakon godine 1960, piše: 1900, januar 0, 12^h $ET =$ $=$ J. D. 2415020,0). Uzgred napomenimo da su reformom 1924/1925. astronomi u stvari prihvatili vremensku skalu građanskog života koja se do tada zvala »griničko građansko vrijeme« (engl. Greenwich Civil Time, *GCT*).



Sl. A.102. Grafički prikaz prijelaza od vremenske skale *GMAT* na *UT*

Na kraju ovog izlaganja umjesno je, u vezi s kraticom srednjeg sunčeva vremena po Greenwichu i netom opisanom reformom godine 1925, napomenuti ovo. U svim astronomskim godišnjacima objavljenim prije godne 1925. osnovni argument je bilo srednje sunčevo vrijeme po Greenwichu (s početkom dana u podne). Engleski naziv te vremenske skale glasio je Greenwich Mean Time, a pripadna kratica gotovo u svim jezicima *GMT* (ili *G.M.T.*). Povodom prijelaza na »svjetsko vrijeme« *UT*, Međunarodna astronomska unija je na svojim kongresima godine 1925. i 1928. preporučila da se iz astronomskih publikacija potpuno uklone naziv i kratica *GMT*. Za slučaj pak kada je iz nekih razloga korisno zadržati računanje vremena od podneva u Greenwichu, Unija je za prijašnje *GMT* preporučila naziv Greenwich Mean Astronomical Time (*GMAT*), tj. srednje astronomsko vrijeme po Greenwichu. Tu smo oznaku u našem razmatranju prenijeli i na razdoblje prije godine 1925. (sl. A.102) da bismo izbjegli eventualni nesporazum u vezi s *GMT*. U stvarnosti je, naime, dolazilo do nesporazuma nekoliko godina poslije 1925, jer su neki nautički i aeronautički almanasi (USA, Engleska) umjesto oznake *UT* upotrebljavali oznaku *GMT*.

10.6. Atomska pramjerila frekvencije i sekunde

Nemoguće je na desetak stranica knjige prikazati, pa čak ni letimično, neshvatljivo strelovit razvoj atomskih generatora frekvencije. Relativna stabilnost tih frekvencija približava se nepredočivosti: 10^{-14}! Obimnost svakodnevno objavljenih rezultata na tom području dopušta nam jedino to da u iduća četiri

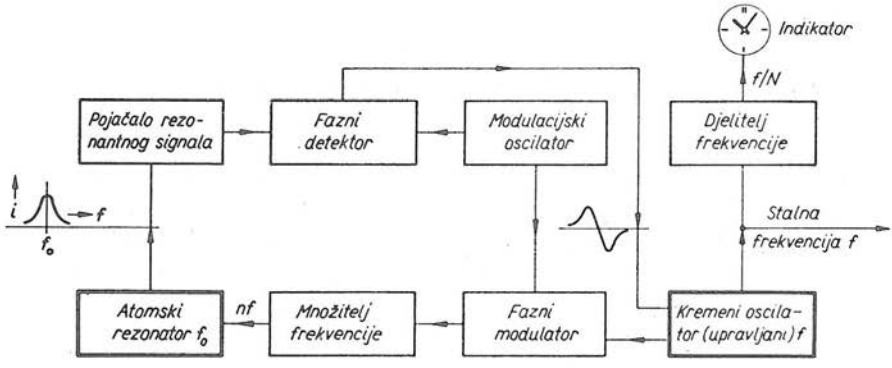
odlomka opišemo načela proizvodnje tako stalnih frekvencija te da u odlomku 10.6.5 navedemo nekoliko rezultata novijih usporedbi. Stanovite odraze čudesno visokog stanja metrologije frekvencije i vremenskih intervala čitalac će zapaziti u odsječcima 10.7 i 10.8.

10.6.1. Načelo djelovanja atomskog pramjerila frekvencije. Metrologija vremena temelji se na pretpostavci da postoji *stalan vremenski interval* $[t]_0$ odabran za mjernu jedinicu. Riječju »stalan« smjeramo na to da je vrijednost tog intervala $[t]_0$ ista bez obzira na to da li se on proizvodi danas ili, na primjer, nakon nekoliko godina. U odlomku 10.1.2 konstatirali smo da se stalan interval $[t]_0$ proizvodi prirodnom periodičnom pojavom stalne frekvencije f. Ako za stalan interval $[t]_0$ odaberemo baš sâm period T pojave, dakle $[t]_0=T$, uviđamo da zbog $T=1/f$ (odlomak B.2.1.2) veličinama T i f na dva načina opisujemo istu periodičku pojavu. Želimo li, međutim, drukčiju jedinicu vremena, na primjer $[t]=Z[t]_0=Z/f$, gdje je Z pozitivan broj različit od 1, očito moramo imati dva uređaja: jedan koji *proizvodi* pojavu frekvencije f i drugi koji Z pripadnih perioda $[t]_0$ *zbraja* u željenu jedinicu $[t]$. Prvi se uređaj zove *pramjerilo frekvencije* (standard, etalon frekvencije), a prvi i drugi uređaj zajedno tvore *pramjerilo jedinice vremena.* U ovom ćemo odsječku letimično razmotriti pramjerila frekvencije. Zbrajanje recipročnih frekvencija u veće intervale, odnosno u čitave vremenske skale, spomenuto je u odlomku 10.7.1.

Koja pojava da se odabere za temelj pramjerila frekvencije Svojedobno je to bila periodičnost vrtnje Zemlje, ali već su *kremene ure* (to su nekad bila najbolja pramjerila vremena) pokazale da frekvencija vrtnje Zemlje znatno odstupa od ideala, stalnosti. Treba li, dakle, odabrati kremene (kvarcne) oscilatore za pramjerila frekvencije? Nipošto, iako kremeni oscilatori imaju relativno dugu životnu dob i pouzdani su u neprekidnom pogonu. Razlog tome je taj što se djelovanje kremenog oscilatora svodi na titranje *kristala* kremena, tj. *makrosistema* (sa stanovišta fizike atoma) oblikovanog ljudskim znanjem i iskustvom. Rezonantna frekvencija f kremenog oscilatora mijenja se u toku vremena, i to dvojako: nastaju kratkotrajne promjene frekvencije nedovoljno poznatog uzroka i dugotrajne, gotovo linearne promjene, koje vjerojatno ovise o postepenom raspadanju površine kristala. Takve promjene prikazuje, na primjer, slika A.112 u odlomku 10.7.1. Nestalnost frekvencije kremenih oscilatora, koji obično proizvode frekvencije u rasponu 100 kHz ...5 MHz, ne bi nas trebalo da čudi: frekvencija kremenog oscilatora *nije temeljna konstanta prirode*, već ovisi o načinu izrade kristala, o njegovim izmjerama, starenju, temperaturi, načinu montaže itd.

Za pramjerila frekvencije treba odabrati drukčije oscilatore, takve kojih je frekvencija doista stalna *prirodna pojava* neovisna o starenju i nesavršenosti tehnologije. Pramjerilo mora pri tom biti tako zamišljeno i izvedeno da se uvijek može eksperimentalno utvrditi ovo: ili je dobivena frekvencija baš ona koja odgovara definiranoj pojavi ili je *bitno različita* od nje, tj. mora postojati oštra i pouzdano utvrdljiva granica. Takvi oscilatori postoje u mikrosvijetu, a spomenutu granicu predstavljaju zakoni kvantne mehanike. Ni atom ni molekula ne mogu, na primjer, promijeniti svoju unutrašnju energiju kontinuirano, već jedino u obliku *kvantnih skokova.* Ti energetski skokovi ΔW praćeni su emisijom ili apsorpcijom elektromagnetskog polja frekvencije f, a pri tom vrijedi fundamentalna jednadžba prirode $f=\Delta W/h$, gdje je h Planckova konstanta. O tome smo već govorili u odsječku 8.7, a podrobnije ćemo se time pozabaviti u odlomku 10.6.2.

Atomska pramjerila frekvencije (drugi nazivi jesu: kvantna pramjerila, kvantni oscilatori, atomski oscilatori, atomski etaloni, molekulski standardi itd., te sve moguće kombinacije tih riječi) predstavljaju u naše doba one izvore frekvencije kojima se može najpouzdanije uvijek iznova proizvoditi (reproducirati) ista frekvencija f_0. Riječ »ista« ponešto idealizira stvarno stanje: ni jednu prirodnu pojavu čovjek ne može reproducirati idealno jednako, jer je to čak i u načelu nemoguće, tj. idealnu ponovljivost čovjek nije kadar mjerenjem dokazati (odlomak 3.2.1). U naše doba postoje dvije glavne skupine atomskih pramjerila frekvencije: 1) *Pasivna pramjerila* kod kojih posljedice *rezonancije* atomskog oscilatora automatski upravljaju frekvencijom kremenog oscilatora, tj. frekvencija kremenog oscilatora održava se stalnom pomoću rezonantne struje atomskog snopa i niza elektronskih sklopova u povratnim vezama. Najpoznatiji predstavnici pasivnih pramjerila frekvencije jesu cezijevo, talijevo i rubidijevo pramjerilo. 2) *Aktivna pramjerila* djeluju drukčije: *frekvencija* tih oscilatora služi kao pramjera (etalon, standard). Pri tom se proizvedeni koherentan signal pojačalima podiže na veću razinu snage, a frekvencija se elektronskim djeliteljima snizuje na potrebnu vrijednost. Predstavnik te skupine pramjerila jest maser (kratica od engleskog microwave amplification by stimulated emission of radiation) koji se izrađuje u mnogim izvedbama (vodik, plin rubidija, amonijak itd.).



Sl. A.103. Načelna blokovska shema pasivnog atomskog pramjerila frekvencije (cezij, talij, rubidij). Unatoč starenju i drugim lošim utjecajima, kremeni oscilator automatski održava stalnu frekvenciju u odnosu prema atomskom rezonatoru

Pasivno pramjerilo frekvencije u načelu djeluje prema posve gruboj blokovskoj shemi na slici A.103. Frekvencija izlaznog signala kremenog oscilatora (obično $f=5$ MHz) mnogostruko se povećava posebnim množiteljem (tzv. sintezorom, tj. množiteljem i mikserom) i automatski namješta na vrijednost f_0 pri kojoj nastaje rezonancija u atomskom rezonatoru ako na pripadne atome (npr. cezija 133) djeluje elektromagnetsko polje te frekvencije (usporedi s odsječkom E.1.5). Tako za cezij 133 pri tačno definiranim uvjetima iznosi frekvencija $f_0(\mathrm{Cs})=9\,192\,631\,770$ Hz. Budući da je s = sekunda $=1/\mathrm{Hz}$, to se gornja jednadžba može napisati u obliku

$$\mathrm{s}=\frac{9\,192\,631\,770}{f_0(\mathrm{Cs})}=\frac{9\,192\,631\,770}{n\cdot f},$$

što smo na drukčiji način već zabilježili jednadžbom (10.1-4) u odlomku 10.1.4, gdje smo citirali definiciju tzv. atomske sekunde od godine 1967. Budući da je

vrijednost višekratnika $n=f_0/f$, gdje je f frekvencija kremenog oscilatora, nadasve pouzdano poznata, to je očito da uređaj prema slici A.103 nije isključivo pramjerilo frekvencije, već predstavlja i pramjerilo jedinice vremena, sekunde. Pomoću djelitelja frekvencije (ako je $f=5$ MHz, potreban je djelitelj sa $n=5\cdot10^6$) mogu se tako na indikatoru dobiti signali frekvencije 1 Hz, tj. period tih signala traje baš 1 sekundu.

Množitelj frekvencije nacrtali smo na slici A.103 u obliku jednog jedinog bloka. U stvarnosti je to komplicirani pretvarač frekvencije koji djeluje u nekoliko stupnjeva. Najprije se modulirani signal $f=5$ MHz množi sa 18, a zatim sa 102. Time se dobiva frekvencija $f_1=9180$ MHz, tj. f_1 je za $f_2=12{,}631\,770$ MHz niža od f_0. Kombiniranjem harmonika i subharmonika dobiva se posebnim mikserom od f još i ta razlika f_2, a zatim u drugom mikseru konačno rezonantna frekvencija cezija 133 $f_0=f_1+f_2=nf$. Postoji, dakako, još mnogo sklopova i drugih uređaja koji tvore stvarnu shemu pasivnog pramjerila frekvencije; njihovo djelovanje osniva se na najnovijoj poluvodičkoj i mikrovalnoj tehnici. Zbog ograničenog prostora ne možemo se na tome zadržavati, a želja nam je da u idućim odlomcima ilustriramo i druge osobine tih pramjerila, posebno cezijevog, jer se na nj oslanja sadašnja definicija sekunde.

10.6.2. Kvantni mehanizam cezijeva pramjerila. Kvantni mehanizam zračenja i apsorpcije elektromagnetskih valova ukratko smo spomenuli u odsječku 8.7, gdje su se razmatranja odnosila na atome kriptona 86. Budući da se o nuklearnoj rezonanciji govori u odsječku E.1.5, navedene ćemo pojmove u nastavku smatrati poznatima. Kako atomi mogu zaposjesti samo diskretne energetske razine W, svaki je prijelaz između dviju razina W_1 i W_2 povezan sa zračenjem ili apsorpcijom elektromagnetskih valova frekvencije f pomoću jednadžbe

$$\Delta W=W_2-W_1=hf,$$

gdje je h Planckova konstanta. Atomi cezija 133 mogu se razvrstati u pojedina diskretna energetska stanja pomoću separacijskog magnetskog polja otklonskih magneta (odlomak 10.6.3). Hiperfino cijepanje nastaje zbog međusobnog djelovanja magnetskog momenta jezgre i magnetskog polja stvorenog valentnim elektronom na mjestu gdje se nalazi jezgra. Valentni elektron proizvodi to magnetsko polje svojim orbitalnim gibanjem oko jezgre i djelovanjem vlastitog magnetskog momenta. Budući da je za alkalijske atome, dakle i za cezij, osnovno elektronsko stanje $^2S_{1/2}$, to je orbitalni impuls vrtnje jednak nuli, pa spinski moment elektrona pridonosi interakciji glavninu. Taj spin ima dvije moguće, međusobno suprotne orijentacije, a njima odgovaraju pripadne energetske razine cijelog atoma. Ako nema vanjskog magnetskog polja ($B=0$), osnovno je stanje razdvojeno u dvije razine koje nazivamo hiperfina struktura. Energetska razina W tih stanja približno se izračunava pomoću *Kopfermann*ove formule od 1948.

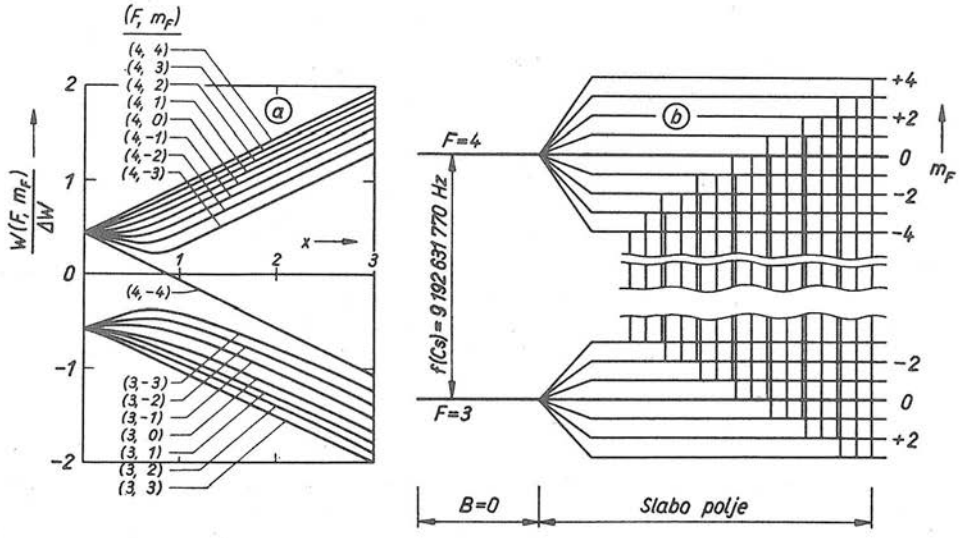
Djeluje li na atome cezija *vanjsko* magnetsko polje B, dolazi do cijepanja hiperfine strukture u još finije *Zeeman*ove razine, koje su grafički prikazane na slici A.104a. Taj dijagram energetskih razina vrijedi za osnovno stanje cezija, tj. za $I=7/2$ i $J=1/2$. Pri tom je I kvantni broj impulsa vrtnje jezgre, a J kvantni broj ukupnog elektronskog impulsa vrtnje, tj. $J=\pm1/2$. Budući da je kvantni broj ukupnog impulsa vrtnje $F=I+J$, u našem slučaju postoje dvije tzv. F-razine: $F=7/2\pm1/2$, dakle $F=4$ i $F=3$. Njihovo cijepanje u *Zeeman*ove hiperfine razine energetski opisuje *Breit-Rabi*jeva jednadžba

$$W(F,m_F)=\frac{-\Delta W}{2(2I+1)}+m_F g_I M_0 B\pm\frac{\Delta W}{2}\left(1+\frac{4xm_F}{2I+1}+x^2\right)^{1/2},$$

u kojoj se predznak plus odnosi na razinu $F=4$, a predznak minus na $F=3$. Dalje oznake predočuju: ΔW — energetski razmak u hiperfinoj strukturi pri $B=0$ (sl. A.104b), g_I — *Landéov* faktor za jezgru, M_0 — Bohrov magneton (odsječak E.1.5), a x je kratica brojčane veličine (*Fermi-Segréova* formula za $F=I\pm 1/2$)

$$x=\frac{1}{\Delta W}(g_J-g_I)M_0B.$$

Ovdje slovo g_0 označuje *Landéov* elektronski faktor g. U obje jednadžbe slovo m_F označuje magnetski kvantni broj koji dobivamo zbrajanjem $m_F=m_J+m_I$, gdje su m_J i m_I magnetski kvantni brojevi elektrona i jezgre.



Sl. A.104. Ovisnost energetske razine cezija 133 u njegovu osnovnom stanju $^2S_{1/2}$ o vanjskom magnetskom polju (x je proporcionalan B). Desna slika ilustrira prijelaz između stanja (4,0) i (3,0). Na tom prijelazu temelji se definicija sekunde od godine 1967.

U vezi s krivuljama na slici A.104a korisno je dodati objašnjenje o vrijednostima magnetskih kvantnih brojeva za pojedine krivulje. Osam gornjih Zeemanovih linija imaju kvantni broj elektrona $m_J=1/2$, a osam donjih $m_J=-1/2$ (suprotna orijentacija spina). S magnetskim je kvantnim brojem jezgre m_I drukčije: u gornjoj polovici dijagrama vrijednost m_I diskretno pada (računajući odozgo prema dolje) od $m_I=7/2$ preko $5/2,\ldots,-5/2$ do $m_I=-7/2$. Budući da je $m_F=m_J+m_I$, to vrijednost m_F pada od $m_F=1/2+7/2=4$ (gornja krivulja gornje polovice slike) do $m_F=1/2+(-7/2)=-3$. Donja polovica slike A.104a zrcalna je slika gornje polovice: uz $m_0=-1/2$ vrijednosti m_I rastu od $-7/2$ do $+7/2$ (odozgo prema dolje,) pa zato m_F raste od -4 (kosa ravna crta) do $m_F=+3$.

Za slaba magnetska polja B energetske razine cezija mogu se prikazati slikom A.104b. Iz obiju se slika razabire da su stanja ($F=4$, $m_F=0$) i ($F=3$, $m_F=0$) *najmanje osjetljiva* na vanjska magnetska polja. Zato je Međunarodni komitet za mjere i utege CIPM godine 1964. odabrao baš ta stanja pri definiciji sekunde, odnosno

pri izjavi o vrsti pramjerila frekvencije (odlomak 10.1.4; CIPM je umjesto oznake m_F upotrijebio slovo M). Iz *Breit-Rabi*jeve formule proizlazi da se za slaba vanjska magnetska polja (nekoliko μT) frekvencija f prijelaza cezijeva pramjerila između navedenih stanja pokorava jednadžbi

$$f(\mathrm{Cs}) = f_0(\mathrm{Cs}) + AB + D,$$

gdje je $f_0(\mathrm{Cs}) = 9\,172\,631\,770$ Hz frekvencija prijelaza pri $B=0$. Slovo D označuje zbroj članova višeg reda koji se obično zanemaruju, dok je A konstanta koja za cezij iznosi $A = 4{,}274 \cdot 10^{10}$ Hz/T^2 (za talij je, na primjer, $B = 2{,}05 \cdot 10^9$ Hz/T^2). Naravno da se promjena AB^2 rezonantne frekvencije cezija direktno odrazuje na frekvenciji f kremenog oscilatora (sl. A.103). Ako je, na primjer, $f = 5$ MHz pri $B=0$, stvarna će frekvencija iznositi

$$f = 5\ \mathrm{MHz}\,[1 + AB^2/f_0(\mathrm{Cs})].$$

Zato se uređaji izrađuju tako da B bude što manje, na primjer $B = 5\ \mu$T. U tom slučaju relativna promjena frekvencije iznosi oko

$$4{,}274 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{Hz}}{\mathrm{T}^2}\,(5\ \mu\mathrm{T})^2 : 9{,}193 \cdot 10^9\ \mathrm{Hz} \approx 1 \cdot 10^{-10}.$$

Ako se polje B mjeri s relativnom pogreškom oko 10^{-4}, iz gornjih podataka slijedi da bi se frekvencija atomskog pramjerila mogla reproducirati s relativnom pogreškom oko 10^{-14}! To vrijedi uz pretpostavku da osim polja B ne postoje drugi sistematski i slučajni poremećajni utjecaji, za sada neobjašnjivi. Budući da oni postoje, situacija je nešto lošija: smatra se da relativna reproducibilnost najboljeg cezijevog pramjerila frekvencije (NBS III; ovo je pramjerilo najviše istraživano i uspoređivano s drugima) iznosi oko 10^{-12}. Ovaj podatak, slikovito rečeno, znači ovo: ako bismo takvo pramjerilo upotrijebili za uru (integracija intervalâ $1/f_0$), pogreška od 1 sekunde nakupila bi se tek nakon 30 000 godina (usporedi s odlomkom 10.7.2)!

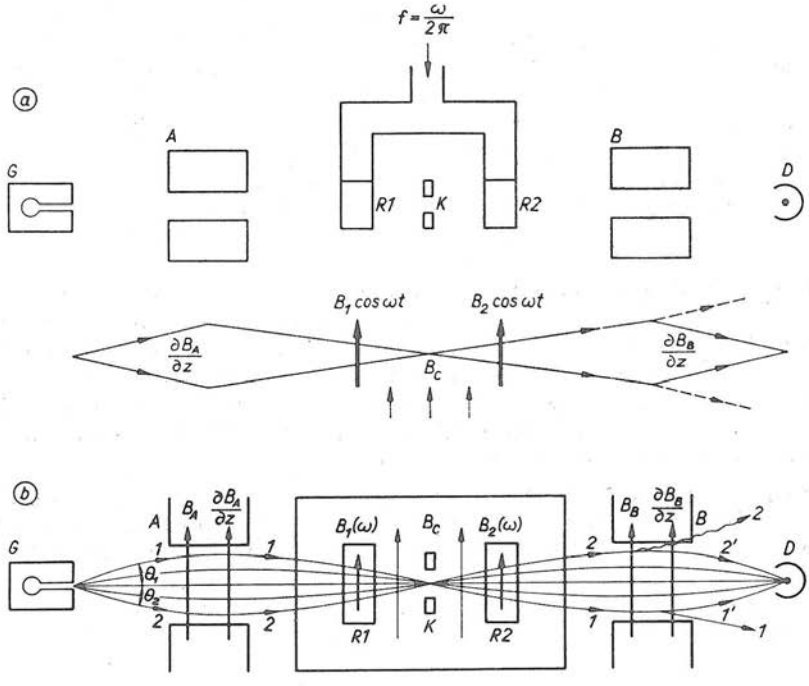
10.6.3. O djelovanju cezijeva rezonatora. Da bi rezonancija cezijevih atoma mogla *automatski* korigirati frekvenciju f kremenog oscilatora i održavati je stalnom (sl. A.103), mora postojati *detektor* rezonancije (vidi idući odlomak) i, dakako, uređaj kojim se rezonancija izaziva. Taj uređaj, cezijev rezonator (općenito: atomski rezonator), izveden je u obliku evakuirane cijevi, unutar koje se odigravaju pojave ilustrirane slikom A.105. Zbog te cijevi uređaj nazivaju i »cezijeva cijev« ili »cezijeva komora« (sl. A.106).

Na jednom kraju cijevi nalazi se izvor atoma cezija G. On se zagrijava na temperaturu oko 90 °C (talište cezija iznosi oko 30 °C) i time kroz kapilarnu rešetku ubacuje atome cezija u evakuiranu cijev (tlak $10^{-7} \ldots 10^{-8}$ mm Hg). Tako nastaje neprekidni *snop* cezijevih atoma koji najprije ulijeću u nehomogeno polje otklonskog magneta A. Budući da atomi posjeduju efektivni magnetski moment M, ovisan o stanju u kojem se nalaze (odlomak 10.6.2),

$$M = -m_F g_I M_0 \mp M_0 (g_I - g_J) \frac{\dfrac{x}{2} + \dfrac{m_F}{2I+1}}{\left(1 + \dfrac{4\,x\,m_F}{2I+1} + x^2\right)^{1/2}},$$

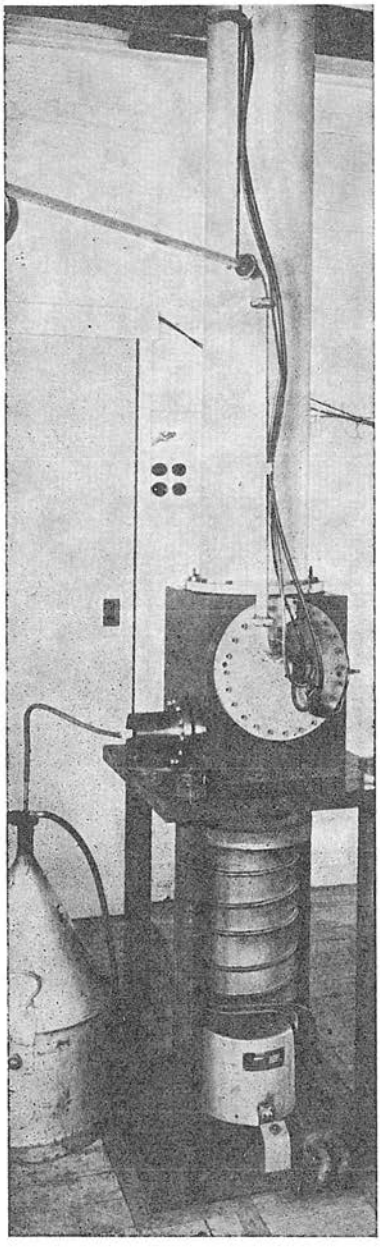
to je otklonska sila na atome proporcionalna tom momentu i gradijentu polja $\partial B_A/\partial z$, gdje je z koordinata okomita na os cijevi, a na slici A.105 usmjerena je prema gore. Ako je M pozitivan, što jest u slučaju stanja (4,0), tj. stanja $F=4$, $m_F=0$ (sl. A.104), tada otklonska sila djeluje prame dolje. Atome u stanju (3,0), tj. $F=3$, $m_F=0$, sila otklanja prema gore. Prema tome, u polju otklonskog magneta A nastaje separacija atoma različitih stanja koji izlijeću iz grijalice G pod različitim kutovima: oni atomi u stanju (4,0) što ulaze pod kutom θ_1 u trajektoriju *1* (sl. A.105b) zakrenut će svoju putanju prema prvom rezonatoru *R1*; atomi istog stanja (4,0), ali pod kutom θ_2, završavaju na stijenkama cijevi, tj. ispadaju iz snopa. Isto se duž putanje *2* događa s atomima u stanju (3,0). Prema tome u prostor rezonatora *R1* separirano ulijeću cezijevi atomi stanja (4,0) i (3,0). Budući da je polje otklonskog magneta A vrlo jako, do kolimatora K obično dopiru i atomi u stanjima (4,4), (4,3), (4,2), (4,1), (4,−2) i (4,−3) koji su izašli iz grijalice pod pozitivnim kutom θ_1. Analogno se zbiva s atomima u stanjima (4,−4), (3,3), ... (3,−3) koji su pošli ispod osi cijevi. Prema tome u snopu postoje atomi različitih stanja, ali su oni prostorno separirani u skladu s opisanim spektroskopskim djelovanjem.

Ako u rezonatorima *R1* i *R2* nema visokofrekventnog polja, a otklonsko je polje magneta B jednako polju A, atomi će se u polju B_B raspršiti, tj. neće doprijeti do detektora D, već će izletjeti iz snopa putanjama *1*(4,0) i *2*(3,0). U zagradama



Sl. A.105. Shematski prikaz djelovanja atomskog rezonatora izvedenog u obliku evakuirane cijevi: f — frekvencija upravljanog kremenog oscilatora (sl. A.103), G — grijalica, A i B — otklonski magneti, *R1* i *R2* — prostorni rezonatori, K — kolimacijski prorez, D — detektor, B_1 i B_2 — radio-frekventno polje frekvencije f, B_C — homogeno statičko magnetsko polje ($H_C \approx 4$ A/m)

smo radi primjera naveli pripadna stanja; to vrijedi i za ostala stanja. Zamislimo sada da u prostoru između magneta A i B djeluju dva polja. Jedno je homogeno, slabo, statičko magnetsko polje B_C (vrijednosti nekoliko mikrotesla) kojemu je zadatak da u prostoru između A i B separira atome u željena prijelazna stanja (vidi prošli odlomak). Drugo je visokofrekventno polje frekvencije f (radarski centimetarski valovi) proizvedeno upravljanim kremenim oscilatorom (sl. A.103), frekventno umnoženo i uvedeno valovodom u oba prostorna rezonatora. Ako je frekvencija f vrlo bliska rezonantnoj frekvenciji f_0 cezijevog prijelaza $(4,0) \leftrightarrow (3,0)$, atomi tih stanja reagirat će s poljem f, tj. atom (4,0) emitirat će kvant energije, a atom (3,0) apsorbirat će kvant hf. Pri tom će svaki od tih atoma prekrenuti svoj magnetski moment (usporedi s odlomkom E.1.5.3). Zato atomi koji su bili u stanju (4,0), a sada se nalaze u stanju (3,0), neće više slijediti putanju *1*, već putanju *1'*. Prema tome neće ispasti iz snopa, nego će se usmjeriti prema detektoru D, jer se zbog njihova prekretanja promijenila sila kojom ih otklanja polje magneta B. Isto se na drugoj strani događa s atomima u stanju (3,0) koji su apsorpcijom kvanata energije polja f prešli u stanje (4,0): oni sada više ne slijede putanju *2*, već *2'*, dakle dopiru na detektor.

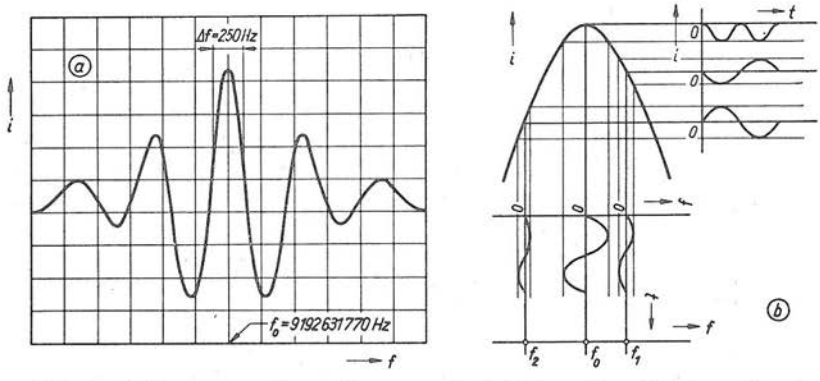


Nemamo, na žalost, mjesta da podrobnije opišemo pojedine dijelove cezijevog rezonatora i njihovo djelovanje. Jedino radi stjecanja stanovite predodžbe reproduciramo fotografiju (sl. A.106) dijela vrhunskog engleskog pramjerila frekvencije, dugačkog oko 5 metara i postavljenog vertikalno. Njemu je slično vrhunsko američko cezijevo pramjerilo (NBS III), čija interakcijska duljina (udaljenost između rezonatora *R1* i *R2* na slici A.105 iznosi 3,66 m). Kanadsko (NRC) je drukčije: položeno horizontalno i sveukupno dugačko 2,1 m. Napominjemo da na tržištu postoje tzv. *komercijalne* izvedbe pramjerila (Hewlett-Packard, Varian, General Technology Co. i drugi proizvođači) frekvencije. Ta cezijeva, vodikova i rubidijeva pramjerila su prijenosna i vrlo malog volumena

Sl. A.106. Donji dio cijevi (vakuumske komore) cezijeva pramjerila frekvencije engleskog metrološkog zavoda National Physical Laboratory, NPL. Cijev je sveukupno dugačka oko 5 metara, a prikazani donji kraj sadrži grijalicu učvršćenu prirubnicom. Na podu se nalazi uređaj za evakuiranje cijevi. (Foto: NPL. S dopuštenjem NPL. British Crown Copyright)

(npr. cezijevo: 42×42×22 cm), a cijena im iznosi između 10 i 15 tisuća dolara (1967). Američka vojska služi se posebnim robusnim rubidijskim pramjerilima.

10.6.4. Detekcija rezonancije u rezonatoru cezijevog pramjerila frekvencije obično se ostvaruje na principu tzv. površinske ionizacije. Detektor *D* na slici A.105 u biti je volframova traka zagrijana na oko 1000 °C. Udarivši o tu traku, atomi cezija predaju joj svoj valentni elektron, pa se atom pretvara u pozitivan ion. Time nastaje električna struja, koja se pojačava elektronskim množiteljem ili drukčijim pojačalom, ali tako da je pojačani signal proporcionalan dotoku cezijevih atoma koji su udarili o detektorsku traku. Prema tome maksimum signala (struje ili napona) svjedoči da je u pramjerilu frekvencije došlo do rezonancije, tj. do prijelaza $(4,0) \leftrightarrow (3,0)$, što je dokaz da je frekvencija f visokofrekventnog polja jednaka rezonantnoj cezijevoj frekvenciji f_0(Cs).



Sl. A.107. Detekcija rezonancije cezijeva pramjerila frekvencije: a) frekvencija visokofrekventnog polja f jednaka je rezonantnoj f_0 onda kad je jakost detektirane struje najveća (Ramseyeva rezonantna linija); b) diskriminacijsko djelovanje rezonancije cezijeva pramjerila frekvencije

Izgled jednog stvarnog strujnog (i) rezonantnog signala detektiranog iz cezijeva pramjerila prikazuje slika A.107a. Lijevo i desno od rezonantnog šiljka (pri f_0) nalaze se još drugi šiljci, ali niži od rezonantnog, što je posljedica primjene dvaju odvojenih interakcijskih područja, tj. razmaknutih rezonatora *R1* i *R2* na slici A.105. To je *Ramsey*eva tehnika, a njena je prednost prema *Rabi*jevoj tehnici (jedan rezonator) dvojaka: uža spektralna linija i blaži zahtjevi na polje B_C. Širina Δf spektralne linije povezana je, naime, s preletnim vremenom Δt pomoću Heisenbergove jednadžbe (odlomak 3.2.1) koju za naš slučaj možemo napisati u obliku $\Delta f \Delta t \approx 1$. Ako je L duljina interakcijskog područja, a $v = L/\Delta t$ prosječna brzina atoma u tom području, iz navedene jednadžbe slijedi minimalna širina $\Delta f = v/L$, tj. rezonantna je linija to uža što je duljina L veća i što su atomi sporiji.

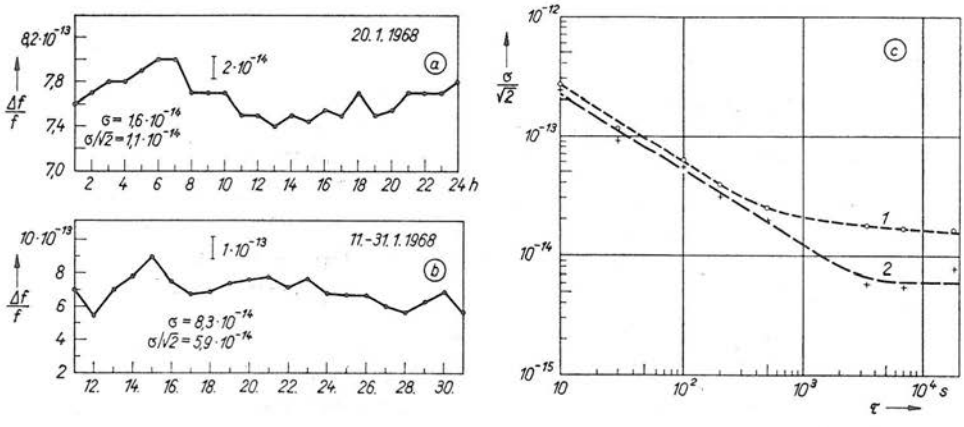
Djelovanje rezonantnog signala u regulacijskom krugu automatskog održavanja frekvencije kremenog oscilatora (sl. A.103) na vrijednosti strogo proporcionalnoj frekvenciji f_0(Cs) može se ilustrirati slikom A.107b. Ako je $f = f_0$, tj. ako je frekvencija visokofrekventnog polja jednaka rezonantnoj cezijevoj frekvenciji, diskriminacijski signal ima dvostruku frekvenciju modulacijskog. U ostalim slučajevima (f_1, f_2) signal ima frekvenciju moduliranja, a njegova faza ovisi o tome da li je f veća ili manja od f_0. Suvremenim logičkim sklopovima ove se fazne i frekvencijske

razlike mogu lako upotrijebiti za automatsko održavanje frekvencije f na vrijednosti f_0.

10.6.5. Stabilnost, tačnost i reproducibilnost atomskih pramjerila. Stalnost frekvencije nekog atomskog pramjerila frekvencije može se utvrditi jedino *usporedbom* s nekim drugim pramjerilom. To drugo pramjerilo mora, dakako, opet biti atomsko, jer u naše doba ne postoje neke druge vrste pramjerila koje bi proizvodile još stalnije frekvencije. Potkraj godine 1968. smatralo se da su *vodikovi maseri* ona pramjerila frekvencije (tzv. aktivna, odlomak 10.6.1) što proizvode najstalniju frekvenciju, i to kako kratkotrajno (engl. short-term), tako i dugotrajno. Zasad su mane vodikovih masera skupoća, statička izvedba (nisu prenosivi) i pomanjkanje iskustva s njima.

Međusobne usporedbe atomskih pramjerila stalno se obavljaju u vrhunskim metrološkim zavodima. U nastavku ćemo iznijeti rezultate jedne takve usporedbe, učinjene početkom godine 1968. u kanadskom metrološkom zavodu National Research Council (NRC). U toku pet tjedana permanentno su mjerene razlike frekvencije dvaju vodikovih masera. Kroz to vrijeme rezonator nije bio ni jednom zakrenut za 180°, što se inače čini radi poboljšanja svojstava pramjerila (usporedi sa slikom A.109). Dobivene rezultate sažeto prikazuje slika A.108. Označimo li frekvenciju jednog masera slovom f_1, a drugoga slovom f_2, njihova je razlika $\Delta f = f_1 - f_2$, i ta je razlika mjerena. Omjer $\Delta f/f$ zvat ćemo »relativna promjena frekvencije«; za ovovrsne račune posve je svejedno da li pod f razumijemo f_1, f_2 ili neku srednju vrijednost. Sličica a) prikazuje rezultate usporedbe u toku jednog dana. Svaka tačka krivulje prikazuje srednju vrijednost u toku jednog sata. Vidimo da najveća i najmanja relativna promjena u toku jednog dana (to je bio jedan od stabilnijih dana) iznose $8 \cdot 10^{-13}$ i $7{,}4 \cdot 10^{-13}$, a njihova razlika $6 \cdot 10^{-14}$. Standardno odstupanje σ (odsječak 3.3) veličine $\Delta f/f$, izračunato pomoću jednadžbe

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{\Delta f}{f} - \frac{\overline{\Delta f}}{f} \right)^2, \quad \text{gdje je} \quad \frac{\overline{\Delta f}}{f} = \frac{1}{n} \sum \frac{\Delta f}{f},$$



Sl. A.108. Rezultati usporedbe frekvencija dvaju masera u kanadskom metrološkom zavodu NRC godine 1968: a) relativna stabilnost za jednosatni period uprosječivanja ($\tau = 1$ h) u toku 24 h; b) relativna stabilnost za 24-satni period uprosječivanja ($\tau = 24$ h) u toku 3 tjedna; c) ovisnost relativne stabilnosti o trajanju perioda uprosječivanja τ

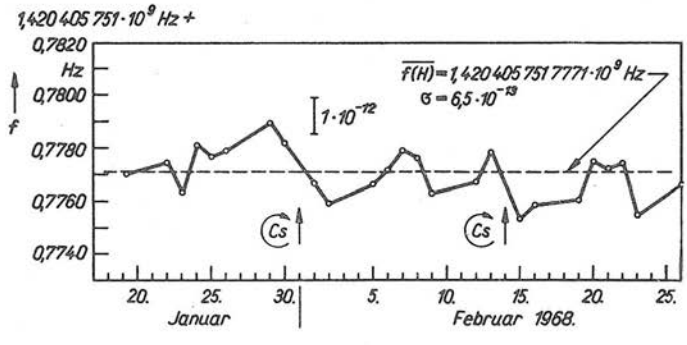
a n ukupan broj mjerenja, tj. ukupan broj rezultata $\Delta f/f$, iznosilo je $\sigma = 1{,}6 \cdot 10^{-14}$. Pretpostavimo li da je svaki maser podjednako pridonosio fluktuaciji relativne razlike, možemo reći da je *relativna stabilnost* svakog masera u toku 24 sata iznosila

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}} = 1{,}1 \cdot 10^{-14}.$$

Takva stabilnost bila je karakteristična za jednu trećinu ukupnog mjernog perioda od 5 tjedana. Predodžbu o izračunatoj stabilnosti dobivamo ako se prisjetimo da godina sadrži oko $3{,}1 \cdot 10^7$ sekundi. Idealiziramo: trebalo bi proći oko tri milijuna godina da ura s vodikovim maserom nakupi pogrešku od 1 sekunde.

Slika A.108b prikazuje promjenu $\Delta f/f$ u toku tri tjedna mjerenja. Pri tom tačke krivulje predstavljaju jednodnevni prosjek ($\tau = 24$ h) veličine $\Delta f/f$. Maksimum krivulje iznosi $9{,}1 \cdot 10^{-13}$, a minimum $5{,}4 \cdot 10^{-13}$, što znači da je maksimalna mjesečna razlika (temeljena na dnevnim prosjecima) $3{,}7 \cdot 10^{-13}$. Pripadno standardno odstupanje (računski interval $\tau = 22$h) za razdoblje od tri tjedna iznosi $8{,}3 \cdot 10^{-14}$. To znači da je mjesečna relativna stabilnost frekvencije svakog masera oko $5{,}9 \cdot 10^{-14}$, tj. oko 5 puta je lošija od dnevne stabilnosti.

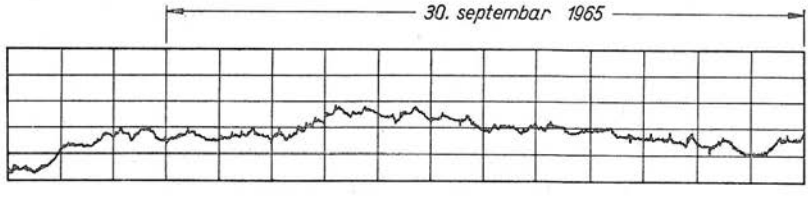
Iz gornjeg je opisa očito da podatak o stabilnosti pramjerila ovisi o trajanju pokusa, ali on ovisi i o tome kako se uzimaju (mjere) i statistički obrađuju uzorci (odlomak 3.6.6). Objasnimo to ovim primjerom. Vrijednost veličine $\Delta f/f$ mjerena je (NBS) u toku jednog sata. Pri tom je za svaki od 20 trominutnih intervala, koji su uzeti za uzorak, izračunata srednja vrijednost $\Delta f/f$. Ta vrijednost smatra se jednim mjernim rezultatom koji ulazi u prije navedenu jednadžbu za izračunavanje σ. Ako sa 20 takvih uzoraka, koji su nastali u toku jednog sata ($\tau = 1$h), izračunamo σ, dobivamo »jednosatno standardno odstupanje«, tj. standardno odstupanje srednje vrijednosti dvadeset trominutnih prosjeka. Što je dulji period uprosječivanja τ, tj. period stvaranja prosjeka (engl. averaging), to je vrijednost standardnog odstupanja manja. Tu činjenicu prikazuje za primjer dvaju masera NRC slika A.108c, u kojoj je krivulja *1* dobivena *Mungall*ovom metodom (1969), a krivulja *2 Allan*ovom (1966).



Sl. A.109. Rezultati usporedbe frekvencije f vodikova masera NRC s frekvencijom f_0 cezijeva pramjerila NRC uz pretpostavku da je $f_0 = 9\,192\,631\,770$ Hz. Usporedba je trajala 41 dan. Svaka tačka krivulje predstavlja srednju vrijednost mjernog perioda koji je trajao 2 000 ili 3 000 sekundi

S obzirom na fenomenalnu stabilnost dvaju vodikovih masera, a posve slične rezultate postigli su i američki metrolozi, bilo je korisno usporediti frekvenciju masera s frekvencijom kanadskog cezijevog pramjerila. Rezultat prikazuje slika A.109: utvrđena je srednja frekvencija f jednog masera, a standardno odstupanje (uz $\tau =$ $=2000$ ili 3000 s) iznosilo je $\sigma = 0{,}65 \cdot 10^{-12}$, tj. oko $1 \cdot 10^{-12}$, a tolika je procijenjena tačnost američkog cezijevog pramjerila NBS III. Simbol Cs (cezij) napisan u polukrugu na slici A.109 označuje da je cezijev rezonator bio dva puta zakrenut za 180° da bi se kompenzirao fazni pomak.

Prije smo spomenuli *tačnost* američkog cezijeva pramjerila, pa bi valjalo objasniti što se pod time razumijeva. Neprilika je, naime, u tome što je definicijom sekunde od godine 1967. (odlomak 10.1.3) frekvenciji cezijeva pramjerila *dodijeljena* vrijednost $f_0 = 9\,192\,631\,770$ Hz. »Dodijeljena« kažemo zato jer je pomoću astronomske sekunde vrijednost f_0(Cs) eksperimentalno utvrđena s pogreškom ± 20 Hz (odlomak 10.2.6), dakle s relativnom pogreškom oko $2 \cdot 10^{-9}$. To je, kako smo vidjeli, barem 2 000 puta više od pogreške usporedbe vodikov maser—cezijevo pramjerilo. Budući da je, dakle, vrijednost f_0(Cs) zapravo utvrđena per definitionem, pod tačnošću cezijeva pramjerila valja razumijevati *procjenu* relativne stabilnosti frekvencije tog pramjerila. Globalna procjena zahtijeva, dakako, utvrđivanje niza parcijalnih procjena, npr. slučajnih pogrešaka, niza sistematskih pogrešaka itd. Opsežnim analizama mogućih izvora pogrešaka zaključilo se da tačnost najboljih metroloških cezijevih pramjerila iznosi oko $1 \cdot 10^{-12}$.

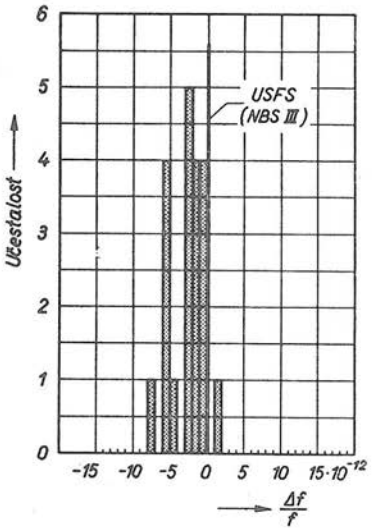


Sl. A.110. Tok usporedbe fazne razlike dvaju cezijevih pramjerila. Puna visina trake predstavlja razliku 0,2 μs

Procijenjena tačnost može se donekle provjeriti rezultatima direktne usporedbe dvaju ili više cezijevih pramjerila u metrološkom zavodu. Pri tom se može uspoređivati ili njihova frekvencija ili njihova faza. Potonji slučaj (iz NBS) prikazuje slika A.110, koja predstavlja isječak usporedbe koja je trajala 10 dana. Izračunajmo grubo i naprečac kolika je bila relativna nestabilnost pri usporedbi dvaju pramjerila dana 30. 9. 1965. Iz dijagrama vidimo da maksimalna fluktuacija razlike faza toga dana iznosi oko 40 % visine trake (0,2 μs), tj. $0{,}4 \cdot 0{,}2\ \mu s = 0{,}08\ \mu s$. Budući da dan traje oko $8 \cdot 10^4$ s, podjelom dobivamo $8 \cdot 10^{-8}\ s/(8 \cdot 10^4\ s) = 10^{-12}$. Godine 1967. američki su metrolozi objavili da dugotrajna stabilnost (1 dan) cezijevih pramjerila može postići i vrijednost $2 \cdot 10^{-13}$!

U najnovije doba atomska pramjerila frekvencije proizvodi nekoliko američkih elektronskih industrija i prodaju ih na tržištu jednako kao i druge mjerne uređaje. Tako se pojavio pojam: *komercijalno pramjerilo*. U vezi s njima nastao je pojam *vlastita reproducibilnost* (engl. intrinsic reproducibility), koja karakterizira valjanost nebaždarenog uređaja, a definira se kao stupanj slaganja frekvencije niza

nominalno jednakih komercijalnih pramjerila. Tu kompliciranu terminologiju najlakše ćemo objasniti primjerom. Slika A.111 prikazuje histogram (odsječak 3.6) usporedbe frekvencije nominalno jednakih (istog tipa) cezijevih pramjerila s frekvencijom američkog pramjerila USFS (US Frequency Standard). Napominjemo da nijedno od 21 uspoređenog pramjerila nije prethodno baždareno, ni u tvornici, ni prilikom usporedbe, već je uspoređeno sa USFS onako kako je proizvedeno. To i jest smisao pojma »vlastita reproducibilnost«, jer ako se korekture i baždarenja učine, onda se to karakterizira pojmom »reproducibilnost«. Iz slike A.111 razabiremo da pri statističkoj sigurnosti $P=68\,\%$ vlastita reproducibilnost iznosi oko $5 \cdot 10^{-12}$.



Sl. A.111. Histogram usporedbe 21 komercijalnog cezijeva pramjerila (Varian BLR-3) s američkim primarnim pramjerilom USFS (NBS III)

10.7. Atomske i koordinirane vremenske skale

U klasičnom astronomskom značenju naziva »vremenska skala« ne bismo smjeli govoriti o »atomskoj vremenskoj skali«, jer se ona ne može protegnuti u *prošlost*, nekoliko stotina godina unatrag. Budući da je, međutim, nedavno ustanovljeno da je frekvencija atomskih pramjerila nekoliko tisuća puta stalnija od frekvencije vrtnje Zemlje (na njoj se temelji skala svjetskog vremena *UT2*), prvobitno značenje naziva »vremenska skala« ponešto se promijenilo. Fenomenalno usavršena tehnika primjene kvantnih oscilatora i radio-distribucije vremenskih signala dovela je, naime, do toga da se od godine 1964. atomska vremenska skala već i međunarodno koordinira (BIH), a u tom važnom i delikatnom poslu sudjeluje preko 30 nacionalnih službi vremena. Neke pojedinosti o tome iznijet ćemo u idućim odlomcima.

10.7.1. Ustrojstvo atomske vremenske skale. Jednolična i kontinuirana vremenska skala temelji se, među ostalim, na dvije pretpostavke: 1) da je frekvencija f periodičke pojave *stalna*, dakle $f=\text{const}$; 2) da postoji uređaj koji *neprekidno* proizvodi stalnu frekvenciju f. Uz te pretpostavke fizikalnu veličinu *vrijeme* t definiramo jednadžbom

$$t-t_0=\frac{Z-Z_0}{f}, \tag{10.7-1}$$

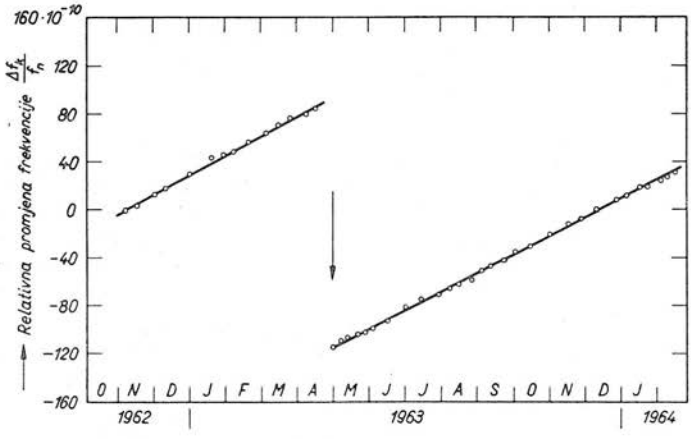
gdje je $Z-Z_0$ broj perioda $T=1/f$ proteklih u vremenskom intervalu $t-t_0$. Iako ne postoje pojave i uređaji koji bi savršeno udovoljili navedenim uvjetima, nedavno razvijena atomska pramjerila frekvencije nevjerojatno su se približila tim uvjetima (odsječak 10.6). Zato su atomska pramjerila frekvencije odabrana za osnovu tzv. *atomskog vremena AT* (franc. temps atomique, engl. Atomic Time).

Atomska vremenska skala (l'échelle de temps atomique, Atomic Time Scale) mora imati svoj početak (epohu), tj. mora biti definiran ternutak t_0 od kada se $t=AT$ prati ponavljanjem periodičke pojave frekvencije $f=1/T$. Za taj početni trenutak u mnogih je atomskih skala odabran trenutak 1958. januar 0, $0^h\ 0^m\ 0^s$ *UT2*, tj. sam početak godine 1958. (odlomak 10.5.5) na skali svjetskog vremena *UT2* (odlomak 10.3.6). Tom je trenutku na tim atomskim skalama pripisana vrijednost $t_0=0$, pa jednadžba (10.7-1) prelazi u oblik

$$t=AT=\frac{Z}{f}. \qquad (10.7\text{-}2)$$

Pri $t_0=0$ je, naime, $Z_0=0$, jer u tom trenutku uređaj tek počinje kontinuirano brojiti uzastopne jednake vremenske intervale $[t]=T=1/f$. Drugi su pak početnom trenutku atomske skale pripisali vrijednost $t_0=ET$ (vrijednost efemeridnog vremena u tom trenutku), na primjer laboratorij LSRH, Neuchâtel (Švicarska).

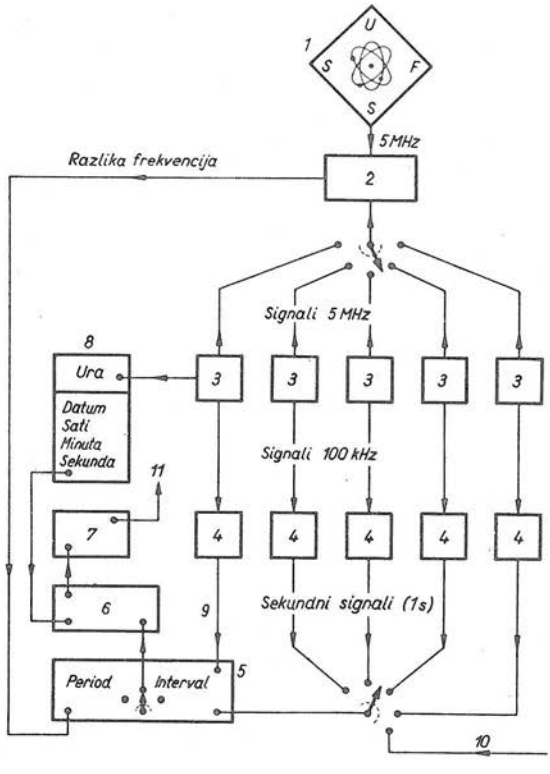
Uređaj koji ostvaruje atomsku skalu treba, prema tome, da se sastoji od atomskog pramjerila frekvencije f i brojačkog sistema koji neprekidno broji Z i u svakom trenutku t može pokazati vrijednost omjera Z/f iz jednadžbe (10.7-2). Sadašnja atomska pramjerila mogu izdržati besprijekoran (bez kvara) kontinuirani pogon od nekoliko godina, što je zanemarivo malo prema pouzdanosti astronomskog vremena utemeljenog na periodičnosti ponavljanja nebeskih pojava. Da bi se osigurala velika pouzdanost kontinuiteta skale AT, morala bi biti istodobno u pogonu najmanje tri atomska pramjerila, a četvrto u rezervi. Pri tom bi frekvencija f iz (10.7-2) bila srednja vrijednost frekvencija triju pramjerila. Skupoća četiriju ili pet atomskih pramjerila, a i teškoće koje bi imali pri držanju toliko cezijevih pramjerila u pogonu, nagnali su stručnjake da na *indirektan* način održavaju stalnost frekvencije f u rangu cezijeva pramjerila.



Sl. A.112. Tok promjene frekvencije dobrog kremenog oscilatora izrađenog u američkom metrološkom zavodu NBS

Periodična elektromagnetska pojava dobiva se, naime, iz grupe od 5 ili više *kremenih oscilatora*, koji su bitno jeftiniji od atomskih i lakše ih je održavati. Njihova stvarna frekvencija f_k periodički se uspoređuje sa f atomskog pramjerila. Ako je, prema pokazivanju takve kremene ure, između dvije uzastopne usporedbe prošlo

vrijeme Δt_k, onda se taj isti interval u skali AT izračunava pomoću jednadžbe $\Delta t = (f_n/f_k)\Delta t_k$, gdje je f_n nazivna frekvencija kremenog oscilatora. Pri tom se pretpostavlja da je promjena $f_n \to f_k$ tekla linearno. Ta pretpostavka provjerena je mnogobrojnim eksperimentima, što vidimo na slici A.112, koja prikazuje tipičnu »krivulju starenja« dobrog kremenog oscilatora. Napominjemo da je prikazani oscilator već bio u neprekidnom pogonu nekoliko mjeseci prije početka mjeseca novembra 1962, otkad započinje dijagram na slici. Dana 1. maja 1963. eksperimentatori su snizili frekvenciju oscilatora, što je na slici prikazano strelicom. Pomoću metode najmanjih kvadrata može se izračunati da je, prije sniženja, relativna promjena frekvencije kremenog oscilatora iznosila $0{,}536 \cdot 10^{-10}$/dan, a nakon sniženja $0{,}515 \cdot 10^{-10}$/dan. Iz ovih podataka slijedi da ubrzanje frekvencije iznosi oko $-1 \cdot 10^{-14}/(\text{dan})^2$. To ubrzanje ne može doći do bitnog izražaja zato što je interval između dviju usporedbi (kremenog oscilatora i atomskog pramjerila) kratak. Interval između dviju uzastopnih usporedbi kreće se, naime, od jednog dana (NBS-A, A.1-USNO) do 10 dana (TA1-LSRH; objašnjenje kratica vidi u tablici A-23). U vezi sa spomenutim kremenim urama važno je spomenuti i ovo: kad se, na primjer, za cezijevo pramjerilo kaže da mu je tačnost $\pm 1 \cdot 10^{-11}$, onda to znači da se pomoću prijelaza atoma cezija 133 toliko stalno održava frekvencija kremenog oscilatora.

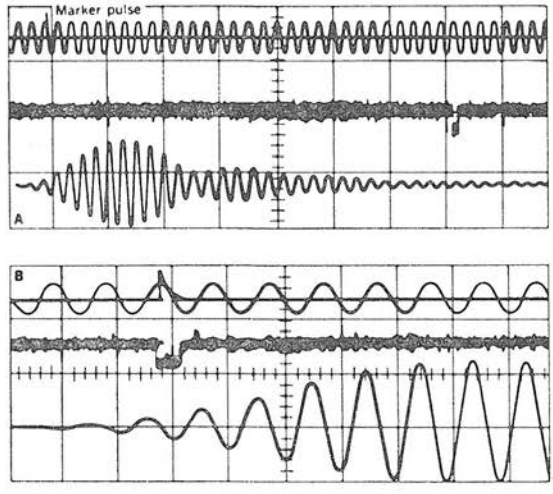


Sl. A.113. Blokovska shema stvaranja atomske vremenske skale NBS-A: *1* — pramjerilo frekvencije USFS (NBS II), *2* — mikser, *3* — kremeni oscilatori, *4* — djelitelji frekvencije, *5* — brojilo vremenskih intervala i perioda, *6* — bušilo IBM, *7* — računalo 7090, *8* — ura s pokazivanjem datuma, sati, minuta i sekundi, *9* — stalan spoj (startni signal), *10* — signal vanjskih pojava, *11* — izlazni podaci

Na opisanom principu djeluje, na primjer, uređaj za održavanje atomske vremenske skale NBS-A u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards, NBS. Pripadnu načelnu shemu prikazuje slika A.113. Svaki od pet kremenih oscilatora djeluje nezavisno od ostala četiri, a od njihove prosječne frekvencije (uračunavši faktor utjecaja, »težinu«) tvori se putem $t = Z/f = ZT$ skala atomskog vremena AT. Svakodnevna kontrola te frekvencije obavlja se pomoću primarnog (cezijevog) američkog pramjerila frekvencije USFS (United States Frequency Standard) koji također djeluje u NBS (Boulder, Colorado), a ima naziv NBS II.

Sasvim je drukčije nastala jedna druga američka atomska skala, *A.1* (USNO): opservatorij američke mornarice tvorio je skalu *A.1* na temelju opće srednje vrijednosti frekvencije devet različitih laboratorijskih i tzv.

komercijalnih cezijevih pramjerila koja se nalaze u raznim opservatorijima širom svijeta (od početka godine 1967. skala *A.1*-USNO temelji se na vlastitim cezijevim pramjerilima koja nadzire vodikov maser). Podatke o vrijednosti frekvencije i ostalih vremenskih veličina USNO je svakodnevno dobivao pomoću *radio-signala* od odašiljača GBR (tablica A-28) i drugih radiostanica koje emitiraju vremenske signale. Tu je, dakle, iskorištena ona prednost koju ima pramjerilo frekvencije u odnosu prema pramjerilima svih drugih fizikalnih veličina: mogućnost distribucije podataka o vremenskim veličinama širom svijeta pomoću elektromagnetskih valova.



Sl. A.114. Oscilogrami radio-signala stanice Goonhilly (V. Britanija) primljenih 27. augusta 1962. u stanici Andover (USA) putem satelita Telstar: A) u trenutku 17 h 52 m 20 s, B) u trenutku 17 h 54 m 00 s (ovdje je vremenska skala osciloskopa razvučena u odnosu prema slici A). Krivulje prikazuju: gore — vremensku oznaku (marker) i val 100 kHz, sredina — impulse 5 μs, dolje — signale stanice Loran-C (tablica A-28)

Iako ćemo u odsječku 10.8 dati neke bitne podatke o spomenutim radio-signalima, za razumijevanje daljnjeg teksta korisno je spomenuti da mnogi metrološki zavodi i zvjezdarnice imaju vlastite radio-stanice (NBS ima, na primjer, 8 radio-stanica) koje stalno ili u unaprijed najavljeno vrijeme odašilju radio-signale frekvencije, vremenskih intervala, »tačnog vremena« (trenutaka na vremenskoj skali), razlike između *UT2* i *UTC* (odlomak 10.7.3) itd. Te signale primaju pomorski i zračni navigatori, službe tačnog vremena pojedinih zemalja i mnogi drugi kojima su ti podaci potrebni. Kako izgledaju prijemni oscilogrami takvih signala vidimo na slici A.114 koju je 27. augusta 1962. primila stanica Andover (USA) od stanice Goonhilly (V. Britanija), a pri tom je Zemljin satelit Telstar I poslužio kao reflektor. Obje su stanice istovremeno (prema pokazivanju svojih ura) jedna drugoj, putem Telstara, svakih 10 sekundi odašiljale impulse koji su trajali 5 μs. Mjerenjem intervala između primljenih i odaslanih impulsa *direktno* su u svakoj stanici izmjerili razliku pokazivanja satova: Andover je u trenutku mjerenja zaostajao $(72{,}6 \pm 0{,}8)$ μs. Pri tom su u navedenom rezultatu uzeta u obzir trajanja širenja signala, što je izračunato pomoću satelitovih efemerida, i mnogi drugi utjecaji.

10.7.2. Pouzdanost atomske vremenske skale. U prošlom smo odlomku vidjeli kako se može oblikovati atomska vremenska skala. Iz tih razlaganja slijedi da *vlastitu* atomsku vremensku skalu može održavati svaki laboratorij koji ima ili vlastito atomsko pramjerilo frekvencije ili može svoje kremene ure nadzirati tuđim atomskim pramjerilom. Tako se, u stvari, održavaju pojedine vremenske skale koje se prema rječniku Međunarodne službe vremena (Bureau International de l'Heure, BIH) zovu *lokalne* vremenske skale (franc. l'échelles locaux). Spomenimo, radi ilustracije, nekoliko atomskih vremenskih skala.

Najstarija je atomska skala *A.1* opservatorija američke mornarice (USNO) koja djeluje od godine 1958, a ekstrapolirana je do 1956; njena epoha stavljena je na početak 1958, kako smo već spomenuli u prošlom odlomku. Druga američka skala je atomska skala *NBS(A)*, čija je kratica i *NBS-A*; značenje kratice NBS i niza drugih kratica, koje će se često pojavljivati u daljnjem tekstu, objašnjava tablica A-23. Uređaji koji tvore tu skalu letimično su opisani u prošlom odlomku (slika A.113). Skala *NBS(A)* temelji se na frekvenciji primarnog američkog cezijevog pramjerila frekvencije USFS (NBS II) prema kojem radio-stanica WWVB (u okviru NBS; vidi tablicu A-28) odašilje stalnu frekvenciju i vremenske intervale. Čuvena je i cezijeva atomska skala *TA1* koju tvori i radio-signalima odašilje švicarski vremenski laboratorij LSRH (tablica A-23). Među najstarije atomske vremenske skale ubraja se i ona koju pomoću cezijeva pramjerila frekvencije održava engleski metrološki zavod NPL. Desetak godina nakon prve opsežnije primjene atomskih pramjerila za tvorbu vremenskih skala, dakle oko godine 1967, mnoge zemlje posjeduju vlastite atomske skale (vidi tablice A-24, 25).

Tablica A-23

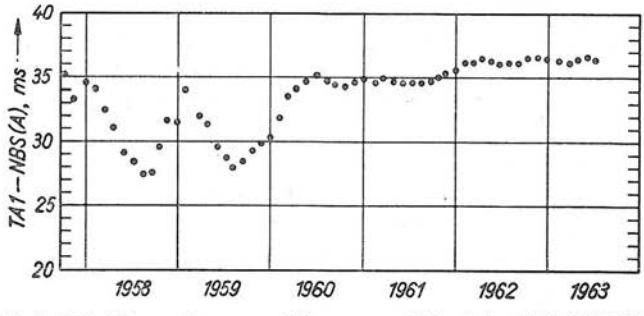
Objašnjenje najčešće upotrebljavanih kratica

Kratica	Druge kratice	Naziv ustanove, mjesto, zemlja
BIH		Bureau International de l'Heure, Paris, Francuska
CNET	Bgn	Centre National d'Etudes des Télécommunications, Bagneux (Seine), Francuska
CRUFT		Cruft Laboratories, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, USA
J		Republic Observatory, Johannesburg, Južna Afrika
LSRH		Laboratoire Suisse de Recherches Horlogeres, Neuchâtel, Švicarska
MSO	MS	Mount Stromlo Observatory, Canberra, Australija
NBS	Bld	National Bureau of Standards, Boulder, Colorado, USA
NPL	ET	National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, Engleska
NRC		National Research Council, Ottawa, Kanada
OP	Pa	Observatoire de Paris, Francuska
PTB	Br	Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, S. R. Njemačka
RGO		Royal Greenwich Observatory, Herstmonceux Castle, Engleska
RIND	Sto, FOA	Research Institute of National Defense, Stockholm, Švedska
RRL		Radio Research Laboratory, Tokyo, Japan
TAO		Tokyo Astronomical Observatory, Tokyo, Japan
USNO	WNO	U.S. Naval Observatory, Washington, D.C., USA

S obzirom na posve kratkotrajno iskustvo s atomskim pramjerilima, često se postavlja pitanje: što će se dogoditi ako brojački uređaj atomske ure pogriješi ili ako pramjerilo zataji, recimo jednom u dvije godine! Ne smije se, naime, zaboraviti da pri oblikovanju vremenske skale mora biti udovoljeno i ovim zahtjevima: kontinuitet djelovanja uređaja, proizvodnja stalne frekvencije f, mogućnost zbrajanja stalnih perioda $T=1/f$ u vremensku skalu, distribucija perioda T i skale AT svima

kojima je potrebna itd. Desetogodišnja primjena uređaja za održavanje atomskih vremenskih skala pokazala je da *AT* udovoljavaju nabrojenim i mnogim drugim zahtjevima. Mnogostrana povezanost lokalnih atomskih skala radio-emisijama omogućuje da se brzo otkrije svaka pogreška u brojanju (jednadžba 10.7-2) i da se ta pogreška prati dalje, tj. uzima u obzir u daljnjem toku vremena. Osim toga, gotovo u svakom vremenskom laboratoriju postoji nekoliko atomskih ura, a »prebacivanje« *AT* jedne atomske ure na drugu može se izvesti s pogreškom koja nije veća od 1 mikrosekunde! Tako se, konačno, radi i kod astronomske vremenske skale: ako u zvjezdarnici ispadne iz pogona kremena ura, zastoj se tačnije premošćuje svođenjem rezultata na druge kremene ure negoli na zvijezde. U idućem tekstu navest ćemo nekoliko podataka što ilustriraju fenomenalnu pouzdanost atomskih vremenskih skala koje su nekoliko tisuća puta jednoličnije od astronomske.

Dijagram na slici A.115 prikazuje rezultate šestogodišnje usporedbe švicarske atomske skale *TA1* i američke *NBS(A)*. Ordinata dijagrama predstavlja razliku (u ms) između pokazivanja švicarske atomske ure i signala koji je za nominalno isti vremenski trenutak (fazu, epohu) odaslala američka radio-stanica WWV(NBS), a koji je primljen u Neuchâtelu (Švicarska). Potpuna jednakost frekvencija skala *TA1* i *NBS(A)* odrazila bi se u dijagramu kao ravna crta paralelna apscisi. Vidimo da je razlika frekvencijâ naglo pala nakon godine 1960. Razlog tome je dvojak: 1) te godine LSRH je dotadašnji amonijakov maser nadomjestio cezijevim pramjerilom, 2) u Americi je za pramjerilo frekvencije uveden cezijev oscilator NBS II. Osjetnija razlika frekvencija između *TA1* i *NBS(A)* nastala je ponovno od sredine godine 1961. do početka 1962, a uzrokovala ju je teškoća s magnetskom zaštitom (oklopljenjem) u LSRH. Relativna razlika frekvencija iznosila je u to doba oko $8 \cdot 10^{-11}$. Nakon toga sistematska razlika iznosila je oko $1 \cdot 10^{-11}$, što znači da bi se razlika $TA1-NBS(A)=1$ sekunda u takvim uvjetima nakupila tek nakon 3 tisuće godina!



Sl. A.115. Usporedba atomskih vremenskih skala *TA1* (LSRH) i *NBS(A)*

Pozitivan rezultat usporedbe frekvencija *dvaju* atomskih pramjerila svakako još nije valjan dokaz o izvanrednoj stalnosti frekvencije i jednoličnosti atomskih vremenskih skala. Zato u tablici A-24 navodimo rezultate usporedbi *niza* lokalnih atomskih vremenskih skala *AT*(i) sa njihovom srednjom vrijednošću *A3* (simboli naziva laboratorija objašnjeni su u tablici A-23). Međunarodni ured za vrijeme (BIH) oblikuje, naime, na temelju signala primljenih od lokalnih vremenskih skala *AT*(i), tzv. *međunarodno atomsko vrijeme A3* (franc. temps atomique international). BIH izračunava skalu *A3* prema primljenim fazama nominalno istodobnih trenutaka emitiranih od *AT*(i) na vrlo dugačkim valovima, pa onda iz vremenskih razlika izračunava relativne razlike frekvencija između *A3* i pojedinih *AT*(i). Te mjesečne razlike $(f_{A3}-f_{AT(i)})/f_{A3}$ navedene su za godinu 1967. u tablici A-25. Pri tvorbi srednje vrijednosti, tj. pri izračunavanju f_{A3}, uzima se u obzir faktor utjecaja p

Tablica **A-24**

Razlika $A3 - AT(i)$ pojedinih atomskih vremenskih skala izražena milisekundama

Laboratorij $AT(i)$	Jan. 1961.	Jan. 1964.	Jan. 1965.	Jan. 1966.	Jan. 1967.	Juni 1967.
CNET	0	+18,1	+17,6	−0,3	−0,7	—
LSRH	0	− 2,4	− 2,7	−2,3	—	—
NBS	0	− 0,1	− 0,6	−0,5	−0,5	−0,5
NPL	0	+ 2,5	+ 3,2	+2,8	+2,7	+2,6
NRC	—	—	—	+0,1	0	0
OP	—	—	—	0	+0,3	+0,5
RIND	—	—	—	0	0	−0,1
USNO	0	+12,2	+13,1	−0,1	−0,1	−0,1

(»težina«), jer niti imaju svi laboratoriji jednako pouzdana pramjerila frekvencije niti posjeduju jednako iskustvo u radu s njima. Kako razabiremo iz tablice A-25, najveća je pouzdanost pripisana američkim pramjerilima i kanadskom.

Tablica **A-25**

Razlika frekvencije $\Delta f = f_{A3} - f_i$ izražena pikohertzima (10^{-12} Hz)

1967.	CNET	J	MSO	NBS	NPL	NRC	OP	PTB	RIND	USNO
Jan.	− 7	− 6	—	+2	+ 3	0	+12	—	−10	0
Feb.	− 7	+ 2	—	−2	+13	− 4	+10	—	+ 6	−5
Mar.	− 4	+11	—	−2	− 7	+ 1	+ 6	—	+ 3	−1
Apr.	−17	+ 5	—	−1	− 3	+10	+ 8	—	− 4	−4
Maj	—	+ 5	—	−4	− 7	+ 3	+13	—	+ 1	0
Juni	—	+ 5	—	−1	− 6	+ 2	+10	—	− 6	−2
Juli	—	+ 7	—	−4	− 3	− 5	+21	—	0	+1
Aug.	—	+ 6	—	−1	− 3	− 1	+11	—	− 2	−2
Sept.	—	− 2	—	−2	− 2	− 2	+19	—	+ 2	0
Okt.	—	+10	+7	−1	− 3	− 3	+10	—	− 4	−1
Nov.	—	+ 1	+2	+1	+ 3	− 1	0	−5	− 3	0
Dec.	—	+ 5	+1	−3	− 3	+ 1	+ 3	+1	− 2	1
$p=$	1	1	1	5	1	2	1	1	1	5(1)*

* Do 30. juna 1967. faktor utjecaja p (težina) iznosio je 1, a nakon toga 5.

Međunarodna atomska skala dobila je godine 1961. oznaku *A3* zato što je u to doba BIH tvorio srednju vrijednost na temelju primljenih signala od *tri* cezijeva pramjerila: NBS, NPL i LSRH. Ta tri laboratorijska pramjerila bila su izrađena međusobno nezavisno, a razlikovala su se u mnogim izvedbenim detaljima. Godine 1969. skalu *A3* stvaralo je preko deset lokalnih atomskih pramjerila koja održavaju vlastite atomske vremenske skale $AT(i)$.

Podaci u tablicama A-24 i 25 zavređuju da ih barem letimično razmotrimo i usporedimo sa stalnošću frekvencije f_z kojom se oko svoje osi okreće Zemlja, jer o f_z ovisi jednoličnost astronomske vremenske skale *UT2* (odlomak 10.3.6). Da bismo mogli učiniti tu usporedbu, prethodno ćemo odnose među veličinama formulirati matematički. Frekvenciju f neke periodičke pojave i njen period T per definitionem povezuje jednadžba $f=1/T$, odnosno $fT=1$. Diferenciranjem tog izraza dobivamo $f\,\mathrm{d}T+T\,\mathrm{d}f=0$, odakle slijedi $\mathrm{d}f/f=-\mathrm{d}T/T$. Zamijenimo li diferencijale sa stvarnim promjenama, dobivamo ekvivalentne izraze

$$\frac{\Delta f}{f}=-\frac{\Delta T}{T},\quad \Delta T=-\frac{\Delta f}{f}T,\quad T=-\frac{\Delta T}{\Delta f/f}. \tag{10.7-3}$$

Pogledajmo sada u tablici A-24 redak koji se odnosi na engleski metrološki zavod NPL. U razdoblju od januara 1966. do januara 1967, dakle u intervalu $T=1$ godina $\approx 3{,}15\cdot 10^7$ s, nastala je razlika između skala *A3* i *AT*(NPL) u iznosu $\Delta T=-0{,}1$ ms $=-1\cdot 10^{-4}$ s. To znači da je relativna promjena frekvencije engleskog pramjerila, u odnosu prema *A3*, iznosila

$$\frac{\Delta f}{f}=\frac{0{,}1\text{ ms}}{3{,}15\cdot 10^7\text{ s}}=\frac{10^{-4}\text{ s}}{3{,}15\cdot 10^7\text{ s}}\approx 3\cdot 10^{-12}.$$

Slične bismo rezultate dobili i za druge laboratorije navedene u tablici (ne smiju nas zavarati veliki skokovi između 1965. i 1966, jer su oni posljedica uvođenja novih pramjerila, a ne promjene frekvencije; zato je najbolje uspoređivati podatke poslije godine 1966, ili iz mjesečnih podataka, navedenih u tablici A-25, metodom najmanjih kvadrata izračunati godišnji prosjek). Koliki bi morao biti interval T da uz $\Delta f/f=3\cdot 10^{-12}$ razlika vremenskih skala *A3* i *AT*(NPL) postigne vrijednost $\Delta T=1$ s? Odgovor dobivamo pomoću treće jednadžbe (10.7-3), tj. $T=1\text{ s}/(3\cdot 10^{-12})\approx$ $\approx 3\cdot 10^{11}$ s $\approx$ 10 000 godina!

Vrtnja Zemlje oko vlastite osi također je periodička pojava za koju, prema tome, vrijede jednadžbe (10.7-3). Budući da je jednolična skala efemeridnog vremena *ET* bliska atomskoj vremenskoj skali *AT*, analogan račun možemo učiniti na temelju podataka zabilježenih na slici A.93 (odlomak 10.2.5; vidi i tablicu A-21). U razdoblju od godine 1900. do 1920, dakle u intervalu $T=20$ godina, razlika između *ET* i *UT2* postigla je vrijednost oko $\Delta T=24$ s. To znači da je relativna promjena frekvencije vrtnje Zemlje u tom intervalu u prosjeku iznosila (zanemarujemo predznake)

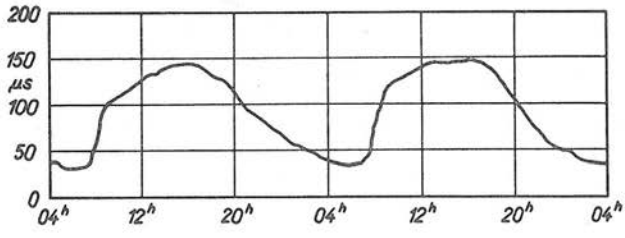
$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_z=\frac{24\text{ s}}{20\text{ god}}=\frac{24\text{ s}}{20\cdot 3{,}15\cdot 10^7\text{ s}}\approx 4\cdot 10^{-8}.$$

Drugim riječima: razlika $\Delta T=ET-UT=1$ s nakupila bi se u toku $T=\Delta T/(\Delta f/f)=$ $=1\text{ s}/(4\cdot 10^{-8})\approx 0{,}8$ godina! Proračun je, dakako, ispravan, jer je frekvencija vrtnje Zemlje oko 13 000 puta nestalnija od frekvencije atomskog pramjerila, tj.

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_z:\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{AT}=4\cdot 10^{-8}:3\cdot 10^{-12}\approx 1{,}3\cdot 10^4=13\,000.$$

Izračunati podatak neobično je jak argument u prilog sveopće distribucije atomskog vremena, pogotovo jer u naše vrijeme razlika *ET*$-$*UT2* iz godine u godinu raste (vidi tablicu A-26 u odlomku 10.7.3), a stabilnost frekvencije atomskih oscilatora raste.

U tablicama A-24 i 25 navedene su gotovo sve lokalne AT(i) koje sa svojim atomskim pramjerilima frekvencije sudjeluju u oblikovanju $A3$. Nameće se pitanje: na čemu se osnivaju službe održavanja i distribucije tačnog vremena i frekvencije



Sl. A.116. Fazna razlika između izlaza kremenog oscilatora australskog zavoda NSL i radio-signala stalne frekvencije primljenih od američkih i britanskih odašiljača. Iako se faza primljenih signala mijenja u toku dana (različito širenje valova), dnevna relativna pogreška australskog vremena ne premašuje 10^{-10}

onih zemalja koje nemaju atomskih pramjerila! Većina zemalja postupa, ako im je to iz radio-geografskih razloga ikako moguće, onako kako je sve donedavna činila Australija, tj. njen metrološki zavod NSL. Oni upotrebljavaju skupinu kremenih oscilatora kojima se faza može pomicati posebnim (vrlo preciznim) elektromehaničkim sklopom uz digitalno pokazivanje pomaka. Frekvencija oscilatora korigira se i namješta prema radio-signalima stalne frekvencije primljenima od prekomorskih američkih i britanskih radio-stanica [NBA (Summit, Canal Zone), 18 kHz te GBR i WWVL (tablica A-29)]. Ti signali slijede frekvenciju cezijevih pramjerila USA i V. Britanije (odlomak 10.7.1). Fazna razlika između kremenog oscilatora NSL i primljenih signala neprekidno se mjeri (sl. A.116) i u skladu s time namješta se frekvencija oscilatora. Na taj način se od kremenog oscilatora dobiva frekvencija s relativnom pogreškom oko $1 \cdot 10^{-10}$ unutar intervala 24 h. Odatle se onda izvode i emitiraju ostale vremenske veličine. Godine 1968. započeo je u NSL pokusni rad vlastitog atomskog pramjerila, vodikovog masera.

10.7.3. Koordinirano svjetsko vrijeme *UTC*. Sva dosadašnja ljudska djelatnost oslanja se na *astronomsku* vremensku skalu, posebno na skalu *svjetskog vremena UT2* (odlomak 10.3.6). Astronomska vremenska skala regulira cjelokupni život čovječanstva, podsjetimo se samo na pojasno (zonsko) vrijeme te pomorsku, zračnu i svemirsku navigaciju. Svojedobno su mnoge zvjezdarnice bile osnovane baš sa svrhom da utvrđuju astronomske podatke neophodne za predviđanje budućeg položaja zvijezda, što je omogućivalo pouzdanu pomorsku navigaciju, a kasnije i zračnu. Budući da je pri tom trebalo »pohranjivati vrijeme« (između dva uzastopna astronomska motrenja), astronomija je stalno poticala usavršavanje ura, ona je u velikoj mjeri pridonijela naglom razvoju atomskih pramjerila frekvencije i stvaranju atomske vremenske skale. Oduvijek je, naime, zadatak vremenske skale bio trojak: 1) utvrđivanje dnevnog vremena, tj. utvrđivanje vremenskog trenutka na vremenskoj skali u bilo kojem trenutku u toku dana, 2) utvrđivanje godišnjeg doba, 3) utvrđivanje mjerne jedinice za mjerenje vremenskih intervala. Tim trima bitno različitim zadacima mora udovoljavati i svaka nova vremenska skala ako se želi da ona bude univerzalno primjenljiva.

Dnevno vrijeme i godišnje doba može se utvrđivati (a da se ne izazovu bitni poremećaji) jedino astronomskim motrenjima, dakle pomoću astronomske vremenske skale. Budući da je, kako smo vidjeli u prošlom odlomku, atomska vremenska skala AT mnogo jednoličnija od astronomske $UT2$, svakako je valjalo AT dovesti u pomoć astronomskoj skali. To je doista i ostvareno tako što je AT *koordinirana*

sa *UT2*. Pri tom je *AT* uvedena u službe za emitiranje radio-signala o dnevnom vremenu, frekvenciji, vremenskim intervalima itd. sa željom da se udovolji ovim trima zahtjevima: 1) izvanredno postojana frekvencija atomskih pramjerila treba da je lako dostupna svima kojima je potrebno njeno poznavanje, 2) uvođenje *AT* u radio-signale ne smije uzrokovati zbrku koja bi nastala postojanjem dvaju paralelnih sistema vremenskih signala, 3) nova skala mora biti tako ustrojena da njeni signali dnevnog vremena budu dovoljno bliski skali *UT2*. To je, naime, potrebno onim navigatorima kojima nisu pristupačne korekcije, tj. razlike između *UT2* i *AT*.

Tablica **A-26**

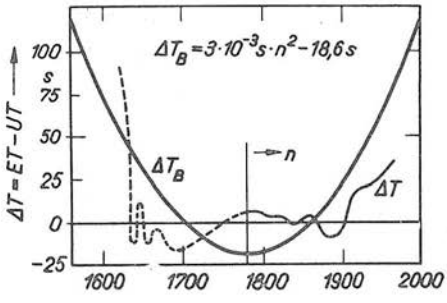
Razlika između skala *A3* i *UT2* izražena sekundama

Datum	*A3*−*UT2*	Datum	*A3*−*UT2*
7. 1. 1956	−0,8186	10. 1. 1963	+2,2993
1. 1. 1957	−0,4973	5. 1. 1964	+2,8602
6. 1. 1958	+0,0036	4. 1. 1965	+3,5636
1. 1. 1959	+0,4962	4. 1. 1966	+4,3713
6. 1. 1960	+0,9827	4. 1. 1967	+5,2590
10. 1. 1961	+1,4215	4. 1. 1968	+6,1188
5. 1. 1962	+1,8257		

Prema spomenutim smjernicama djelovala je od godine 1955. do 1958. britanska služba za emitiranje standardne frekvencije. Pri tom se ona oslonila na cezijevo pramjerilo frekvencije u NPL, a provizorna atomska sekunda bila je izjednačena sa sekundom svjetskog vremena *UT2* od godine 1955, tj. prema sekundi *UT2* (1955) utvrđena je frekvencija pramjerila i tu frekvenciju održavalo je pramjerilo NPL konstantnom [f(Cs)=9 192 631 830/s]. Godine 1958. jasno je izbilo na vidjelo da permanentno raste razlika između vremenske skale *UT2* i skale *AT*(NPL). Porast razlike prikazuje tablica A-26, u kojoj je spomenuto razdoblje već svedeno na međunarodnu atomsku skalu *A3*, o kojoj smo govorili u odlomku 10.7.2. Time su potvrđena predviđanja *D. Brouwera* (1952) i drugih da će najmanje do godine 2000. rasti razlika između skale *UT2* i jednolične vremenske skale efemeridnog vremena *ET*. (Istraživanja *W. Nicholsona* i *D. Sadlera* od godine 1966. pokazuju da je skala *ET* jednolična u odnosu prema atomskoj skali *AT*.) Dugoročnu Brouwerovu prognozu porasta razlike $\Delta T = ET - UT2$, tj. razlike $AT - UT2$ prikazuje parabola na slici A.117. Osmogodišnje uspoređivanje *AT* i *UT2* ponešto je korigiralo Brouwerovu prognozu. Utvrđeno je, naime, da se stvarna razlika $AT - UT2$ dobiva ako se paraboli ΔT_B doda sinusni član amplitude 2,56 s i perioda 24,1 godina (sinusoida je postigla svoj maksimum na početku godine 1967). Tako korigirana parabola vrlo je korisna za *kratkoročno* predviđanje razlike $AT - UT2$.

Da bi se kompenzirala stalno rastuća razlika između vremenskih skala *AT* i *UT2* (tablica A-26), britanski su stručnjaci godine 1958. uveli posve osebujnu promjenu u odašiljanju vremenskih signala kojima se tvori emitirana *AT*: *promijenili su frekvenciju* nosećeg vala svoje službe vremena, tj. frekvenciju emitiranih radio-signala. Taj zahvat nazvat ćemo *promjena frekvencije* (engl. frequency offset,

franc. décalage de fréquence). Prvu promjenu najavili su Englezi na simpoziju Međunarodne astronomske unije (International Astronomical Union, IAU) godine 1958. Vrijednost prve *relativne promjene frekvencije* $\Delta f/f$ odašiljača za godinu 1959. utvrđena je u suradnji s astronomskim opservatorijima, dakako sa ciljem da se radiom emitirana skala AT što više približi skali *UT2*. Tako je, na primjer, usvojena vrijednost $\Delta f/f\,(1959) = -170 \cdot 10^{-10}$, a godinu dana kasnije $\Delta f/f\,(1960) = -150 \cdot 10^{-10}$, tj. frekvencija je smanjena za 17 odnosno 15 milijardinki. Pri tom je frekvencija f cezijeva pramjerila već bila definirana u odnosu prema efemeridnoj sekundi koju je Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila na svom zasjedanju godine 1960. (vidi odlomke 10.1.5 i 10.2.6). Drugim riječima, emitirani »sekundni signali« $[t]$ nisu bili jednaki sekundi (s) Međunarodnog sistema jedinica (SI), već su bili *veći*, tj.



Sl. A.117. Tendencija porasta razlike efemeridnog vremena *ET* i svjetskog vremena *UT2* (usporedi sa slikama A.93 i 118). Navedena jednadžba opisuje Brouwerovu parabolu ΔT_B

$$[t] = \left(1 - \frac{\Delta f}{f}\right) \cdot \mathrm{s(SI)}, \quad \text{odnosno} \quad [t]\,(1960) = (1 + 150 \cdot 10^{-10}) \cdot \mathrm{s(SI)}.$$

Do ove jednadžbe dolazimo pomoću (10.7-3) ako stavimo $T = 1$ s(SI) i $[t] = T + \Delta T = (1 - \Delta f/f) = (1 - \Delta f/f) \cdot$ s(SI).

Na isto takve teškoće oko razlike između AT i *UT2* naišli su u isto vrijeme i stručnjaci američkog metrološkog zavoda NBS, pa su pri odašiljanju svojih vremenskih radio-signala i oni uveli promjenu frekvencije. Godine 1960. predložila je Međunarodna znanstvena radio-unija (International Scientific Radio Union, URSI) da BIH za svaku iduću godinu *najavi* vrijednost relativne promjene frekvencije $\Delta f/f$ te da ta promjena (frequency offset) ostane ista u toku čitave iduće godine. Taj prijedlog poduprla je IAU godine 1961. (BIH djeluje pod pokroviteljstvom IAU), pa su tako do 1968. prihvaćene ove vrijednosti:

1961.	$\Delta f/f = -150 \cdot 10^{-10}$	1965.	$\Delta f/f = -150 \cdot 10^{-10}$
1962.	$-130 \cdot 10^{-10}$	1966.	$-300 \cdot 10^{-10}$
1963.	$-130 \cdot 10^{-10}$	1967.	$-300 \cdot 10^{-10}$
1964.	$-150 \cdot 10^{-10}$	1968.	$-300 \cdot 10^{-10}$

To znači, na primjer, da je godine 1968. emitirani sekundni signal trajao 30 milijardinki dulje nego što traje atomska sekunda [s(SI, 1967)] definirana i međunarodno prihvaćena na Generalnoj konferenciji za mjere i utege godine 1967. (odlomak 10.1.3).

Godina 1959. ubraja se među najvažnije u pogledu *koordinacije* dviju vrsti radio-signala koje su u to vrijeme emitirale radio-stanice službe vremena, tj. u pogledu koordinacije signala standardne frekvencije (NPL, NBS) i signala dnevnog vremena (astronomski opservatoriji). Do te koordinacije došlo je istovremeno u V. Britaniji i USA; u Britaniji je njeno provođenje bilo olakšano time što je obje vrste signala emitirala ista radio-stanica, Rugby (Post Office Radio Station Rugby). NPL i zvjezdarnica Royal Greenwich Observatory sporazumjeli su se godine 1959.

da će se od 1960. u obje emisije odašiljati isti sekundni signali, tj. oni proizvedeni kremenim oscilatorima, a pri tom je frekvencija oscilatora utvrđena cezijevim pramjerilom frekvencije NPL (usporedi s odlomkom 10.7.1 i slikom A.113).

Ova koordinacija atomske i svjetske vremenske skale, tj. *AT* i *UT2*, zahtijevala je daljnje promjene u emitiranju koordiniranih signala vremenskih veličina, jer promjena $\Delta f/f$ možda ne bi bila dovoljna da smanji razliku $AT-UT2$ na potrebnu (navigacija!) minimalnu vrijednost. Zato je uvedena još jedna mogućnost smanjivanja te razlike, i to *pomakom epohe* (»pomakom faze«) radio-signala dnevnog vremena (engl. adjustment of the epoch, phase adjustment, epoch step, adjustment in the phase of second pulses, step adjustment; franc. l'ajustement de l'époque). Te iste godine 1959. dogovorile su se mjerodavne ustanove V. Britanije i USA da nazivnu frekvenciju treba održavati s relativnom pogreškom najviše $\pm 1 \cdot 10^{-10}$ i da jednaki pomak epohe treba istodobno uvesti u obje zemlje.

Međunarodna astronomska unija IAU preporučila je godine 1964, u suglasnosti sa URSI i CCIR, da vrijednost pomaka epohe treba da iznosi ± 100 ms i da se pomak može uvesti u vremenske radio-emisije jedino na samom početku mjeseca. Tom je prilikom unaprijed utvrđena i vrijednost moguće promjene frekvencije, tj. ona može iznositi $\Delta f/f = n \cdot 50 \cdot 10^{-10}$, gdje je n cio pozitivan ili negativan broj. Promjena frekvencije može se prema toj preporuci izvesti samo jednom godišnje, i to na samom početku godine, što mora biti unaprijed najavljeno. U skladu sa svim tim Međunarodna služba vremena reorganizirala je svoj Bulletin Horaire du BIH, tj. uvedena je u međunarodnim relacijama (oko 30 država godine 1968) nova vremenska skala, koja na gore opisani način *koordinira* atomsku skalu *A3* i skalu svjetskog vremena *UT2*. Zbog toga se ta međunarodna skala zove *koordinirano svjetsko vrijeme* (franc. temps universel coordonné, *TUC*; engl. Universal Time Coordinated, *UTC*; u američkoj se literaturi može zapaziti i naziv Universal Atomic Time, *UA*).

Međunarodna skala *UTC*, koju BIH koordinira od početka godine 1964, može se matematički izraziti ovim trima jednadžbama

$$UTC = \left(1 + \frac{\Delta f}{f}\right) AT + B; \quad UT2 - UTC \leqq 0{,}1\,\mathrm{s}; \quad \frac{\Delta f}{f} = n \cdot 50 \cdot 10^{-10}.$$

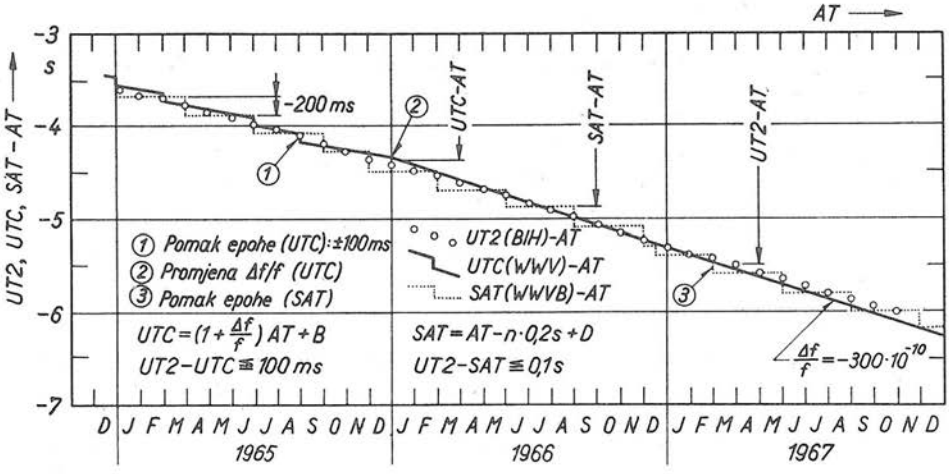
To znači da razlika skala *UT2* i *UTC* ni u jednom trenutku ne smije premašiti jednu desetinku sekunde (100 ms), tj. onoliko koliko iznosi eventualni pomak epohe na početku mjeseca. Slovo B u prvoj jednadžbi predstavlja konstantu koja ovisi o početnoj razlici skala *UTC* i *AT* te o učinjenim pomacima epohe. Do početka godine 1968. BIH je pri odašiljanju radio-signala vremena *UTC* uveo ove pomake:

1. 11. 1963	−100 ms	1. 03. 1965	−100 ms
1. 04. 1964	−100 ms	1. 07. 1965	−100 ms
1. 09. 1964	−100 ms	1. 09. 1965	−100 ms
1. 01. 1965	−100 ms	1. 02. 1968	+100 ms

Primjena čak četiriju pomaka u godini 1965. nije nastala zbog izvanredne nejednoličnosti vrtnje Zemlje (*UT2*), već zato da bi se izbjegla nova promjena frekvencije koja je 1964. i 1965. iznosila $\Delta f/f = -150 \cdot 10^{-10}$. Obrnuto, u toku 1966. i 1967. nije bilo pomaka epohe, jer je u to doba relativna promjena frekencije bila veća, iznosila je $-300 \cdot 10^{-10}$.

Dosadašnja razlaganja o koordiniranoj skali svjetskog vremena *UTC*, koja predstavlja kombinaciju svjetskog vremena *UT2* i atomskog vremena *AT*, možemo

sažeti u dijagram na slici A.118. Da bismo održali preglednost, prikazali smo samo razdoblje od početka godine 1965. do kraja godine 1968. Budući da je dijagram nesumnjivo jasan i bez komentara, napominjemo samo ovo: kratica WWV predstavlja pozivni znak radio-stanice NBS koja odašilje signale *UTC*, dok kratica WWVB predstavlja znak stanice NBS koja odašilje signale vremenske skale *SAT* (odlomak 10.7.4). Te kratice naveli smo samo radi ilustracije, jer skalu *UTC* odašilju i mnoge druge stanice (tablica A-28), a skalu *SAT* i stanica DCF 77 u S. R. Njemačkoj.



Sl. A.118. Tok vremenskih skala *UT2*, *UTC* i *SAT* od kraja godine 1964. do početka 1968. Na apscisu je nanesena atomska vremenska skala *AT(A3)*, a na ordinatu razlike *UT2−AT*, *UTC−AT* i *SAT−AT*. Kružići prikazuju tok skale svjetskog vremena *UT2*, puna izlomljena crta tok koordiniranog svjetskog vremena *UTC* (tu skalu koordinira od godine 1964. BIH), a tačkasta izlomljena crta tok diskontinuiranog atomskog vremena *SAT* (Stepped Atomic Time), o kojemu se govori u odsječku 10.7.4. Kratice WWV i WWVB označuju radio-stanice NBS koje odašilju signale odgovarajućih vremenskih veličina (odlomak 10.7.5)

10.7.4. Diskontinuirana atomska skala *SAT*. U najnovije se doba eksperimentira s atomskom vremenskom skalom u kojoj emitirani sekundni radio-signali *doista* traju jednu sekundu Međunarodnog sistema jedinica (SI), tj. u toj skali *nema promjene frekvencije* ($\Delta f/f=0$), pa je

$$[t]=1\ \mathrm{s(SI,\ 1967)}.$$

Tu skalu nazvali smo *diskontinuirana atomska vremenska skala*, iako njeni nazivi na francuskom i engleskom glase: l'échellle de temps atomique avec sauts ili temps atomique avec sauts (*TAS*) i Stepped Atomic Time (*SAT*). Signale skale *SAT* odašilju dvije radio-stanice, jedna je radio-stanica američkog NBS s pozivnim znakom WWVB (tablica A-28 i odlomak 10.7.5), a druga je DCF 77 u S. R. Njemačkoj. Od početka godine 1967. ove skale koordinira Međunarodna služba vremena (BIH), a sinhronizacija tih skala tačna je na 1 milisekundu.

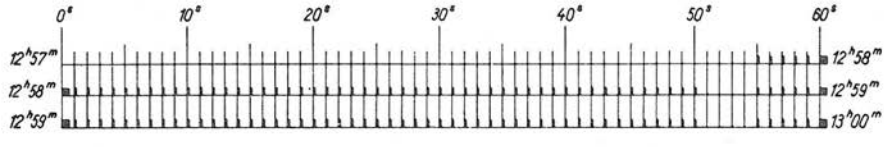
Budući da pri odašiljanju radio-signala skale *SAT* nema promjene frekvencije nosećeg vala, s vremenom rastuća razlika između *UT2* i *SAT* kompenzira se povremenim pomacima epohe (franc. l'ajustement de l'époque; engl. step adjustment, epoch step), dakle na isti način kakav se upotrebljava pri skali *UTC*. Ipak

postoji razlika: pomaci iznose 0,2 s=200 ms. Oni se najavljuju unaprijed, a uvode se u radio-emisije jedino na samom početku mjeseca, i to ako je potrebno, tj. ako postoji opasnost da bi se u idućem mjesecu skale *UT2* i *SAT* međusobno udaljile za više od 0,1 s=100 ms. Matematički se, prema tome, skala *SAT* može formulirati ovako

$$SAT=AT-n\cdot 0{,}2\text{ s}+D, \qquad UT2-SAT \leqq 0{,}1\text{ s}.$$

Pri tom je n cio pozitivan ili negativan broj (u toku mjeseca marta 1967. vrijedilo je $n=28$), a D je konstanta koja ovisi o tome kolika je bila razlika $UT2-SAT$ u trenutku $n=0$, tj. prilikom uvođenja *SAT*. Tok te diskontinuirane skale u odnosu prema kontinuiranoj atomskoj skali *AT* prikazuje slika A.118 (tačkasta krivulja).

10.7.5. Emitiranje vremenskih signala. Iako ćemo se s distribucijom vremenskih signala nešto podrobnije pozabaviti u odsječku 10.8, smatramo korisnim da već ovdje ukratko spomenemo kako korisnici službe vremena dolaze do radijskih informacija o frekvenciji, vremenskim intervalima, dnevnom vremenu (trenucima na skali *UTC* ili *UT2*) itd. Pri tom je važno znati kako se *najavljuju* uvjeti pod kojima će se odašiljati buduće emisije i kako se *objavljuju* zahvati učinjeni prilikom prošlih radio-emisija. Iako se ovdje ne možemo upuštati u vrlo zanimljive podrobnosti o načinu i opsežnosti emitiranja radio-signala vremena, ipak ćemo pokušati pružiti letimičan uvid u djelovanje *službe vremena*, jer je ona nadasve važna kako za svaku državu posebno, tako i za svijet kao cjelinu. Prije nego što iznesemo nekoliko konkretnih podataka, želimo primjerom objasniti što se razumijeva pod »radio-signalima vremena«. Četiri radio-stanice američkog metrološkog zavoda NBS emitiraju *osam različitih* vrsta signala: signale standardne radio-frekvencije, audiofrekventne signale, signale dnevnog vremena (tj. signale »tačnog vremena«), signale stalnih vremenskih intervala, signale razlike $UT2-AT$ itd. Svi ti signali ubrajaju se u »radio-signale vremena«, iako se jedni odnose na frekvenciju, drugi na vremenske trenutke, a treći na vremenske intervale.



Sl. A.119. Program emitiranja signala vremena švedskih radio-stanica u godini 1969. Podebljane crtice označuju sekundne signale, koji traju oko 0,1 s, a crni pravokutnici (0,6 s) signale koji označuju punu minutu dnevnog vremena

Za svakodnevni život, uključivši pomorsku i zračnu navigaciju, radio-difuziju i televiziju, željeznicu, telefonsku javnu službu, elektroprivredu itd. najvažniji su *radio-signali dnevnog vremena* (»signali vremena«), tj. signali koji označuju trenutke na vremenskoj skali. Te signale emitiraju radio-stanice pojedinih zemalja prema programu koji se utvrđuje i objavljuje unaprijed za svaku iduću kalendarsku godinu. Tako su, na primjer, švedske radio-stanice emitirale u godini 1969. zvučne signale vremena koji su grafički prikazani slikom A.119. Iz slike razabiremo da su toj radio-emisiji svakog dana posvećene tri minute, i to od trenutka 12 h 57 m i 0 s dnevnog vremena do trenutka 13 h 00 m 00 s. Unutar tog intervala zvučni se signali pojavljuju prema nacrtanoj shemi. Od trenutka 12 h 57 m 00 s do 55-e

sekunde nema nikakvih signala, a zatim se javljaju sekundni signali 55, 56, 57, 58. i 59. sekunde (podebljane crtice), od kojih svaki traje oko 0,1 sekundu. Interval između dvaju uzastopnih sekundnih signala traje 1 sekundu. Trenutak 12 h 58 m 00 s objavljuje dulji signal (oko 0,6 s; označen je crnim pravokutnikom). Nakon njega jednolično se pojavljuju sekundni signali sve do trenutka 12 h 58 m 50 s nakon čega se četiri sekundna signala ne pojavljuju. Prvi idući signal javlja se u trenutku 12 h 58 m 55 s, a zatim se opisani slijed ponavlja do 13 h 00 m 00 s.

Programi emitiranja radio-signala vremena razlikuju se od zemlje do zemlje, tj. prilagođeni su potrebama korisnika i mogućnostima emitiranja. Tako, na primjer, »Državna služba vremena i frekvencije SSSR« raspolaže sa 8 radio-stanica čiji signali mogu doprijeti u gotovo sve krajeve Sovjetskog Saveza. Maksimalni nesklad tih stanica ne premašuje 0,2 milisekunde, a širenje elektromagnetskih valova među njima ne traje više od 20 ms. Postoji nekoliko programa emitiranja, ali je svima njima zajedničko ovo: punu minutu dnevnog vremena označuje signal koji traje oko 0,5 s, sekundni signali traju oko 0,1 s, a signali 55, 56, 57, 58. i 59. sekunde su propušteni (usporedi sa slikom A.119). Razlika među pojedinim programima sastoji se u tome što ta propuštanja pet sekundnih signala nisu jednaka u svim programima. Tako se, na primjer, u prvom programu propusti događaju u 5, 25, 35. i 55. minuti.

Američka služba vremena i frekvencije smatra se u sadašnje vrijeme najkvalitetnijom, što nije ni čudno ako se uzme u obzir kolike su potrebe USA: pomorska i zračna navigacija širom svijeta, svemirska navigacija, satelitski prijenosi radio-signala i TV-emisija itd. Neobično razgranata i snažna vremenska služba USA oslanja se na 4 radio-stanice NBS koje imaju ove pozivne znakove: WWVB, WWV, WWVL, i WWVH (podrobnosti o njima vidi u tablici A-28, odlomak 10.8.2). Stanica WWVB emitira skalu diskontinuiranog atomskog vremena *SAT* [pripadna nacionalna skala USA donedavna se označivala kraticom *SAB*; godine 1967. uvedena je kratica *NBS(SA)*] o kojoj smo govorili u odlomku 10.7.3. Ostale tri stanice emitiraju signale prema skali koordiniranog svjetskog vremena *UTC* (odlomak 10.7.3). Zbog odlika američke službe vremena navest ćemo nekoliko bitnih podataka iz obavijesti o radio-emisijama stanica NBS. Te informacije NBS svakog mjeseca objavljuje u obliku »Obavijesti o standardnoj frekvenciji i vremenu« (Standard Frequency and Time Notices), sl. A.120.

U prvom se dijelu obavijesti navodi, među ostalim, da će stanica WWVB (ona emitira podatke atomske skale *SAT*) na samom početku mjeseca juna 1967. skokom 200 ms promijeniti svoju epohu, tj. toliki će biti pomak unatrag sekundnih impulsa. Napominjemo da noseća frekvencija WWVB iznosi 60 kHz i održava se s relativnom pogreškom $2 \cdot 10^{-11}$ u odnosu prema primarnom američkom cezijevom pramjerilu. Signali vremena proizvode se amplitudnom modulacijom nosećeg vala, a svaki impuls počinje pri istoj relativnoj fazi perioda vala. Tako se impulsni signal ponavlja svake sekunde, a budući da nema promjene frekvencije (f=const, odlomak 10.7.4), između uzastopnih impulsa doista postoji vremenski interval $[t]$=s(SI,1967). Na samom kraju obavijesti navodi se i to da je 15. decembra 1966. faza impulsa stanice WWVB bila pomaknuta za −114,7638 ms, pa se zato signali pojavljuju kasnije negoli odgovarajući signali u jednoličnoj atomskoj skali NBS(A). Razlika je jednaka cjelobrojnom višekratniku skoka 200 ms (usporedi sa slikom A.118).

U drugom dijelu faksimila obavijesti navode se podaci o relativnoj promjeni frekvencije $\Delta f/f$ (odlomak 10.7.3) stanicâ WWV, WWVH i WWVL koje

Notice of Change in Phase of Seconds Pulses from NBS Radio Station WWVB and No Change in Phase of Time Pulses from NBS Radio Stations WWV and WWVH on June 1, 1967

In accordance with the National Bureau of Standards policy of giving monthly notices regarding changes of phases in seconds pulses, notice is hereby given that there was an adjustment in the phase of seconds pulses emitted from radio station WWVB, Fort Collins, Colo. On June 1, 1967, the clock at the station was retarded by 200 ms at 0000 hours UT, as announced by the Bureau International de l'Heure (BIH) for the stepped atomic time (SAT) system. The successive time pulses emitted from station WWVB are one second apart. The carrier frequency is 60 kHz and is broadcast without offset.

Notice is also hereby given that there was no adjustment in the phases of time signals emitted from radio stations WWV, Fort Collins, Colo., and WWVH, Maui, Hawaii, on June 1, 1967. During 1967, the pulses will occur at intervals which are longer than one second by 300 parts in 10^{10}, due to the offset to be maintained in carrier frequencies, as coordinated by the BIH.

Monthly Fractional Frequency Offsets and Time Deviations for NBS Radio Stations WWV, WWVH, WWVL, and WWVB

Because of wide interest in accurate values presently available as a result of improved monitoring and control techniques, the National Bureau of Standards' Radio Standards Laboratory furnishes each month frequency and time correction data relating to its broadcasts from radio stations WWV, WWVH, WWVL, and WWVB. The first of these notices exhibited data beginning January 1, 1965, and was published in the PROCEEDINGS in the April, 1965, issue.

Frequency: The frequencies of WWV, Fort Collins, Colo., WWVH, Maui, Hawaii, and WWVL, Fort Collins, Colo., were offset from their nominal values by −150 parts in 10^{10} during 1965, were offset by −300 parts in 10^{10} during 1966, and will be offset by the same amount during 1967. Determination of the offset to be used each year is coordinated by the Bureau International de l'Heure (BIH). The frequency of WWVB, Fort Collins, Colo., is not offset.

The frequencies of WWV and WWVH are kept constant at their intended values, within 2 parts in 10^{11} and 1 part in 10^{10}, respectively. The frequencies of WWVL and WWVB, Fort Collins, Colo., are controlled to within 2 parts in 10^{11} of their intended values.

Time: The timing signals emitted from WWV and WWVH are in agreement with each other within 1 ms at present. Since these signals are locked to the carrier frequency of the transmissions, a continuous departure from UT2 may occur. Final emission time differences for WWV are determined and published by the U. S. Naval Observatory. The timing signals are maintained within about 100 ms of UT2 by offsetting the broadcast frequency from its nominal value, defined in terms of the NBS Frequency Standard at the beginning of each year and by making step adjustments of 100 ms in phase on the first of a month when necessary. Because of the use of an offset in frequency on the UTC system, the time intervals between pulses are longer than one second (by 150 parts in 10^{10} for 1965; 300 parts in 10^{10} for 1966 and 1967).

Since January 1, 1965, the seconds pulses from WWVB give the international unit of time—the second.[2] These signals are locked to the broadcast frequency, which is no longer offset. A continuous departure from UT2 occurs, and the differences are coded on the broadcasts. The seconds pulses are maintained within about 100 ms of UT2 by making step adjustments of 200 ms in phase on the first of a month when necessary.

On December 15 a retardation of 114.7638 ms was introduced in WWVB pulse emission times. As a result, the signals now occur later than the corresponding scale markers of the uniform atomic scale NBS (A) by an integral multiple of 200 ms. The pulses are now to be emitted according to the Stepped Atomic Time (SAT) system coordinated by the BIH; the corresponding scale will be called NBS (SA) instead of SAB.

Sl. A.120. Faksimil pretežnog dijela obavijesti Standard Frequency and Time Notices koju je NBS objavio u časopisu Proceedings of the IEEE *55* (1967), juni, No 6, str. 1125. Takve obavijesti NBS objavljuje svaki mjesec jednom

emitiraju signale koordiniranog svjetskog vremena *UTC* i kaže se da će u toku 1967. ona stalno iznositi $\Delta f/f = -300 \cdot 10^{-10}$. Relativna pogreška frekvencijâ stanice WWV, koja emitira šest nosećih valova (tablica A-28), iznosi najviše $2 \cdot 10^{-11}$, a stanice WWVH $1 \cdot 10^{-10}$ (vidi tablicu A-27). Signali vremena tih stanica razilaze se najviše za 1 ms=0,001 s.

Tri radio-stanice NBS emitiraju i razliku *UT2 — UTC*, odnosno *UT2 — SAT*; to čine svaki puni sat i svakih 20 minuta nakon toga pomoću Morseove abecede. Pri tom odašilju ili znak AD (engl. to add znači dodati), iza kojeg slijedi troznamenkasti broj, ili znak SU (to subtract znači oduzeti), iza kojeg se opet nadovezuju tri znamenke. To znači da toliko milisekundi treba dodati ili oduzeti od emitiranog vremena da bi se dobilo vrijeme *UT2*. Budući da su te razlike predviđanja, konačne razlike *UT2 — UTC*(WWV) utvrđuje i objavljuje u svojim publikacijama USNO (US Naval Observatory).

Tablica **A-27**

Relativno odstupanje frekvencije radio-stanica NBS od frekvencije američkog pramjerila u NBS

Dec. 1966.	WWV	WWVH	WWVL	WWVB
1.	$-300{,}0 \cdot 10^{-10}$	$-299{,}8 \cdot 10^{-10}$	$-300{,}0 \cdot 10^{-10}$	$-2 \cdot 10^{-12}$
4.	−300,0	−300,0	−300,0	+1
8.	−300,0	−300,0	−300,0	−2
12.	−300,0	−299,9	−300,0	+2
16.	−300,0	−299,9	−300,0	0
20.	−300,0	−300,0	−300,0	0
24.	−300,0	−300,0	−300,0	0
28.	−300,0	−300,0	−300,0	−2
Srednja vrijed.	−300,00 ±0,01	−300,01 ±0,09	−300,00 ±0,01	0 ±1

Frekvencija nosećih valova radio-stanica WWV, WWVL i WWVB svakog se dana uspoređuje s frekvencijom glavne atomske ure (engl. Master Clock), a njezina vrijednost svakodnevno se utvrđuje u odnosu prema frekvenciji primarnog američkog pramjerila. Oba uređaja smještena su u koloradskom dijelu zavoda NBS (Radio Standards Laboratory, Boulder, Colorado), koji je udaljen oko 90 km od navedenih triju radio-stanica (Fort Collins). Na toj udaljenosti kontrolni sistem VHF omogućuje da emitirana frekvencija bude gotovo identična s frekvencijom pramjerila USA. Dokaz tome je tablica A-27, koja sadrži odstupanja $(f - f_0)/f_0$ pojedinih radio-stainca NBS; ovdje slovo f označuje emitiranu frekvenciju, a f_0 frekvenciju pramjerila.

Tablica je, u stvari, izvadak iz opsežnije tablice koju je u mjesečnim »Notices« objavio časopis Proc. IEEE 1967, No 3 (mart), dakle tri mjeseca otkako je protekao razmatrani mjesec (decembar 1966); potrebno je, naime, dosta vremena dok se srede svi izmjereni podaci. U originalnim ovovrsnim tablicama navedena su odstupanja frekvencije za svaki dan, dok smo mi ubilježili samo odstupanja frekvencije svakog četvrtog dana. Na dnu tablice napisane su mjesečne srednje vrijednosti veličine $(f - f_0)/f_0$ i pripadna standardna odstupanja ($P = 68\%$; odsječak 3.6). Vidimo da je stabilnost frekvencije, emitirane iz triju stanica NBS, doista fantastična: $1 \cdot 10^{-12}$. Godinu dana prije toga, u novembru 1965, stabilnost je bila gotovo za red veličine lošija, iznosila je $(8...9) \cdot 10^{-12}$.

10.7.6. Buduća skala svjetskog vremena. Iz razlaganja u prošlim odlomcima (vidi i odsječak 10.8) možemo razabrati da su atomske vremenske skale *već uvedene* u službe vremena. Te službe sada emitiraju vremenske intervale, proizvedene atomskim pramjerilima, sa znatno manjom nepouzdanošću negoli prije uvođenja atomske sekunde (odlomak 10.1.3). Nesumnjivo je eksperimentalno dokazano (vidi i odlomak 10.8.4) da mnoštvo atomskih ura širom svijeta, međusobno izvrsno sinhroniziranih i koordiniranih, može besprijekorno proizvoditi i održavati najjednoličniju vremensku skalu, tj. atomsku skalu (*AT*).

Unatoč potpunoj afirmaciji *AT*, službe vremena nisu se u načelu promijenile: atomske skale *UTC* i *SAT* (odlomci 10.7.3, 4 i sl.A.118) predstavljaju kompromis koji ove jednolične skale dovodi (pomacima faze, promjenom frekvencije) u što bolji sklad s *nejednoličnom* skalom *UT2*. Postoje i druge mane kompromisnih skala *UTC* i *SAT*, spomenimo samo neke: 1) Korisnici službe vremena moraju znati koliko iznose fazne i frekvencijske korekcije, kada su učinjene ili kada će biti, a moraju znati i to kako se one primjenjuju. 2) Nije logično da služba vremena odašilje »sekundni signal« (*UTC*) koji nije jednak sekundi SI definiranoj frekvencijom atomskog prijelaza cezija 133. Osim toga, trajanje tog »sekundnog signala« povremeno se mijenja (tablica u odlomku 10.7.3), tj. godine 1966. »sekunda« je bila dulja negoli godine 1965! Prisjetimo se tom zgodom jednog od temelja metrologije: mjernu jedinicu valja održavati što stalnijom. 3) Uređaji za održavanje *AT* moraju se iznova namjestiti ako se želi promijeniti vrijednost postojeće frekventne promjene $\Delta f/f$. 4) Pri jednoj metodi emitiranja, promjena frekvencije dovodi do toga da noseći val i impulsi vremena (trenutaka) nisu koherentni. Moglo bi se navesti još čitav niz manje važnih nedostataka.

Nabrojene i druge mane postojećih *AT* uočili su, dakako, i stručnjaci koji se profesionalno bave održavanjem vremena, službom emitiranja vremena te korisnici njihovih usluga. Tako je, na primjer, Međunarodna astronomska unija (IAU) godine 1964. preporučila da zainteresirane organizacije prouče i pronađu takav sistem djelovanja službe vremena u kojem bi signali vremena doista vjerno slijedili skalu *UT2* i u kojem ne bi bilo ni pomaka faze ni promjene frekvencije, a postojao bi poznat odnos između frekvencije i signala vremena. Dvije godine kasnije, CCIR (Comité Consultatif International des Radiocommunications, Međunarodni savjetodavni odbor za radio-komunikacije) uveo je i pomak faze i promjenu frekvencije! URSI (Međunarodna znanstvena radio-unija) izrazila je mišljenje, također godine 1966, da nijedan od predloženih sistema nije bez mane i da će službe vremena bezuvjetno morati prihvatiti sistem kojim će se emitirati jednolična *atomska skala i stalna frekvencija*. Takvo mišljenje zastupa i *L. Essen*, glasoviti engleski učenjak, jedan od pionira kvantne metrologije (radi u Division of Quantum Metrology, tj. u odjelu za kvantnu metrologiju engleskog metrološkog zavoda NPL). On je potkraj godine 1968. predložio da buduća služba vremena djeluje, na primjer od 1. 1. 1970, prema ovim načelima:

1) Stalnu frekvenciju, a time i stalne vremenske intervale, proizvode što bolje sinhronizirana atomska pramjerila; njihovo djelovanje međunarodno je koordinirano.

2) Noseći je val bez faznog pomaka i bez promjene frekvencije s time da signali označuju stalan vremenski interval s(SI,1967), a signali vremena i faza nosećeg vala su koherentni.

3) Emitiraju se i signali razlike između emitiranog vremena i *UT2*; pri tom je pogreška te razlike neznatna, iako u trenutku emitiranja nije posve točno poznata vrijednost *UT2*.

4) U unaprijed utvrđenom i objavljenom trenutku, na samom početku mjeseca, minutni pokazivač pomaknut će se tačno za 1 sekundu ako razlika između emitiranog vremena i *UT2* postigne $\frac{1}{2}$ sekunde.

Vidimo, dakle, da *Essen* predlaže takvu službu vremena koja bi emitirala stalnu frekvenciju, stalne intervale i diskontinuiranu vremensku skalu (usporedi s odlomkom 10.7.4) sa sekundnim pomakom *bilježenja* vremena, ali bez ikakvog preuređivanja uređaja. Imenujemo li tu skalu *ATCS* (Atomic Time Coordinated and Stepped), sadržaj četvrte tačke možemo matematički označiti ovako: $AT-ATCS=n\cdot$s ako je $UT2-ATCS\geqq\frac{1}{2}$s. Ovdje je *AT* skala pravog atomskog vremena, *n* cio broj, a s kratica sekunde = s(SI, 1967).

S *Essen*ovim prijedlogom podudaraju se i teze (juli 1968) Studijske grupe VII CCIR za međunarodnu raspravu o poboljšanju postojećeg sistema *UTC* (International Working Party on the *UTC* System). Jedino su teze određenije u pogledu tačke 3), tj. u njima se kaže: radio-emisije treba da sadrže jednostavan kôd (ili sistem označivanja) koji će s pogreškom manjom od 10 ms *svake minute* pružati informaciju o razlici između *ATCS* i *UT2*. U vrijeme objavljivanja teza s potrebom rasprave suglasile su se službe vremena ovih zemalja: Francuske, Italije, Japana, Kanade, S. R. Njemačke, SSSR, Švicarske, USA i V. Britanije. Korisno je spomenuti da je sredinom oktobra 1968. održan u Međunarodnom komitetu za mjere i utege (CIPM) sastanak Pripremne komisije za vremenske skale (Preparatory Commission for Time Scales). Ta komisija sazvana je u okviru CIPM zato što mnogi stručnjaci (navigatori, astronomi, geodeti, fizičari itd., koji imaju posla s vremenskim skalama) smatraju da ni jedna specijalizirana međunarodna organizacija nije sama kompetentna da odlučuje o svim aspektima u vezi s vremenskom skalom, već da problem valja riješiti u okviru Konvencije o metru (odsječak 6.3), tj. na jednom od idućih zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege. Pripremna je komisija, u biti, prihvatila ono isto što je predložio *Essen*.

Do sredine godine 1969. ništa se bitno nije dogodilo u pogledu odluke o budućoj vremenskoj skali. I dalje se široko primjenjuju kako atomska skala, tako i *UT2*. Postupak emitiranja *AT* i *UT* u istoj radio-emisiji, a da ne bude opasnosti od zbrke, nije još pronađen. S druge strane, mnogi specijalisti koji upotrebljavaju ili *UT*, ili *AT*, ili oboje smatraju da bi trebalo nezavisno i paralelno postojati atomsko i svjetsko vrijeme. Oni čak predlažu da se te skale razlikuju u radio-emisijama na više načina: po oznakama vremena (umjesto 1 Hz markera da se za *AT* uvede 2 Hz), po frekventnom području (npr. VLF, LF i HF; vidi odlomak 10.8.2) itd. Očito je, dakle, da se definitivan međunarodni dogovor o tome neće postići preko noći. Valja, naime, naglasiti da paralelno s time treba riješiti i neke druge probleme, na primjer: način utvrđivanja statističkog faktora utjecaja (težine) pojedinih atomskih ura ili grupa atomskih ura pri oblikovanju *A3*, način utvrđivanja srednje vrijednosti, prikladnost uvođenja novih vrsta atomskih pramjerila, način uzimanja u obzir relativističkih efekata itd.

10.8. Distribucija frekvencije i signala vremena

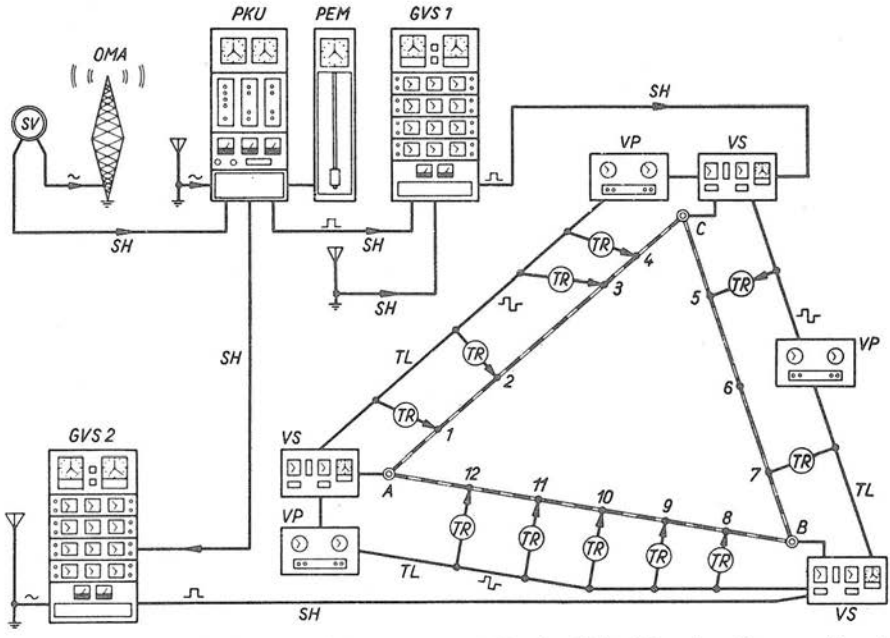
Informacije o stanju na vremenskoj skali, o stalnoj frekvenciji, o stalnim vremenskim intervalima, o razlici između *UT2* i *UTC* itd. dobivaju vrijednost jedino u slučaju ako su dostupne svima koji ih trebaju. Zato se službama za distribuciju vremenskih signala u mnogim zemljama posvećuje izuzetna pažnja, pogotovo ondje gdje su potrebne za svemirsku navigaciju. Idućih pet odlomaka pružit

će skromnu sliku o tome kako se ti signali dostavljaju korisnicima. Budući da Jugoslavija, u stvari, nema (!) službe za distribuciju vremenskih signala (odlomak 10.8.6), posljednjim se odlomkom opisuje kako bi tu službu u načelu valjalo organizirati, a da pri tom troškovi, vjerojatno, ne premaše sadašnje. Dio tog prijedloga oslanja se na iskustvo opisano u odlomku 10.8.5.

10.8.1. Potreba distribucije signala vremena. Potreba što tačnijeg poznavanja dnevnog vremena posve je očita, na primjer u pomorskoj, zračnoj i svemirskoj navigaciji. Manje je očito, iako gotovo jednako važno, da se dnevno vrijeme mora dovoljno tačno znati i u *privredi*. Prisjetimo se samo željezničkog transporta: kako pouzdano uskladiti vozne redove unutar države s međunarodnim voznim redom ako sve željezničke stanice ne djeluju prema jedinstvenoj vremenskoj skali? *Jedinstvena služba vremena* (*JSV*) potrebna je i u velikim elektroenergetskim sistemima s jedinstvenim dispečerskim centrom koji ponegdje upravlja elektroprivredama nekoliko država. Pa i unutar velikih industrijskih poduzeća potrebna je *JSV*, posebno u visokoautomatiziranim poduzećima. U njima posebni sinhronizatori usklađuju radni ritam niza automatskih proizvodnih traka, jer taj se ritam u toku radne smjene prilagođuje zamoru radnika. Djelovanje svih tih sinhronizacijskih uređaja temelji se na *JSV*. Takvih bismo primjera mogli nabrojiti mnogo. U nastavku ćemo se zadržati samo na dva primjera koji letimično ilustriraju neophodnost *JSV*: prvi će se primjer odnositi na *JSV* unutar željezničkog sistema, a drugi na baždarenje brodske ure (kronometra) koja omogućuje da se brodom pouzdano upravlja predviđenom putanjom u skladu sa *UT2*, tj. u skladu s jedinstvenom svjetskom vremenskom skalom definiranom u odnosu prema zvijezdama. Primjeri će dati naslutiti zašto se radio-prijenosima signala vremena posvećuje izuzetna pozornost, o čemu će ponešto biti riječi u idućim odlomcima.

Željeznica Čehoslovačke predstavlja jedinstvenu privrednu organizaciju, a upravljanje njome oslanja se na vlastitu jedinstvenu službu vremena (*JSV*) priključenu na opću čehoslovačku službu vremena. *JSV* organizirana je tako da je teritorij čitave države razdijeljen na nekoliko sekcija u skladu s duljinom i gustoćom željezničke mreže. Svaka sekcija obuhvaća teritorij koji približno odgovara jednoj administrativnoj oblasti, tj. 10 do 20 tisuća kvadratnih kilometara, a prosječna duljina pruga sekcije iznosi oko 1000 km. Primarne ure u tom sistemu su glavne željezničke kremene ure (*PKU*), kojih relativna pogreška ne premašuje $5 \cdot 10^{-8}$, tj. dnevna pogreška *PKU* nije veća od $5 \cdot 10^{-8} \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 0{,}00432\,\mathrm{s} \approx 4\,\mathrm{ms}$. Te kremene ure povezane su s primarnim elektromehaničkim urama s njihalom (*PEM*), čija relativna pogreška nije veća od $1{,}4 \cdot 10^{-6}$ ($\approx 0{,}12$ s/dan). *PKU* i *PEM* sinhronizirane su sa signalima čehoslovačke službe vremena (*SV*), koje dobivaju na dva načina: prijemom radio-signala stanice OMA (tablica A-28) i direktnom kabelskom vezom.

Tipnu shemu organizacije *JSV* jedne sekcije prikazuje slika A.121. Prikazana sekcija sastoji se od 3 željeznička čvora i 12 stanica. Radom te sekcije upravljaju glavna vremenska stanica (*GVS1*) i njen dvojnik (*GVS2*); te stanice sinhronizirane su sa *PKU*. Sekciju poslužuju tri vremenske stanice (*VS*) smještene u čvorove iz kojih nezavisno upravljaju vremenskim podstanicama (*VP*). Te stanice međusobno su razmaknute 50...70 km i služe za pojačavanje signala vremena i njihov prijenos daljnjim dijelovima mreže. Kako razabiremo iz sheme, *JSV* sekcije organizirana je u obliku zatvorene petlje, pa tako signali ulaze u svaku stanicu s dviju strana. Time se povećava pouzdanost željezničke vremenske službe, jer prekid telefonske linije (*TL*) na bilo kojem mjestu ne sprečava dolazak signala s druge, suprotne strane.



Sl. A.121. Shema jedinstvene službe vremena čehoslovačkih željeznica. Shema prikazuje samo jedan sektor željezničke mreže, a oznake predočuju: *1, 2, 3, ...* — željezničke stanice, *A, B, C* — čvorovi, *TR* — translacijski relej, *TL* — telefonska linija, *SH* — sinhronizacija, *SV* — pramjerilo čehoslovačke službe vremena, *OMA* — radio-stanica *SV*, *PKU* — primarne kremene ure, *PEM* — elektromehaničke ure s njihalom, *GVS* — glavna vremenska stanica, *VS* — vremenska stanica, *VP* — vremenska podstanica

Opis načela *baždarenja brodske ure* (kronometra) bit će naš drugi primjer. Pod »baždarenjem« razumijevamo u ovom slučaju utvrđivanje razlike između pokazivanja brodske ure (to može, dakako, biti i laboratorijska ura) u nekom trenutku i stvarnog stanja na vremenskoj skali u tom istom trenutku, tj. utvrđivanje pogreške pokazivanja ure. Pri tom se stvarno dnevno vrijeme konstatira pomoću sekundnih radio-signala o kojima je bilo riječi u odlomku 10.7.5. Bit metode objasnit ćemo uz pomoć slike A.122a. Nešto prije najavljene emisije sekundnih radio-signala pusti se u rad kronograf koji na svoju traku bilježi te impulse. U identificiranom trenutku t_R emitiranog dnevnog vremena kronografu pripišemo vrijednost T_1. Zatim omogućimo da kronograf u trenutku t pokazivanja baždarene ure zabilježi taj trenutak T_2 na svojoj vremenskoj skali. Očito je da pri tom kronograf igra ulogu »pohranjivala vremena« (timekeeper). Iz slike nesumnjivo proizlazi da vrijedi jednadžba $t = t_R + (T_2 - T_1)$ ako baždarena ura doista pokazuje tačno vrijeme i ako sam postupak baždarenja ne unosi nikakvu pogrešku, uključivši i pogrešku kronografa. Pribrojnik $(T_2 - T_1)$ pojavljuje se, naime, zato jer je to interval koji je prošao između prvog (t_R, T_1) i drugog (T_2, t) mjerenja.

Budući da nema posve tačnih ura, navedenoj jednadžbi može biti udovoljeno samo slučajno. Redovito postoji stanovita razlika između t i $t_R + (T_2 - T_1)$, a ta je razlika pogreška Δt baždarene ure:

$$\Delta t = t - [t_R + (T_2 - T_1)] = (t - t_R) - (T_2 - T_1). \qquad (10.8\text{-}1)$$

Postupak baždarenja jedne brodske ure možemo ilustrirati ovim brojčanim primjerom. Dana 4. 1. 1968. kronograf je pokazivao $T_1=45$ m 10,22 s u trenutku $t_R=9$ h 56 m 01 s (taj trenutak identificiran je prema radio-signalima službe vremena). Kad je baždarena ura pokazivala vrijeme $t=9$ h 57 m 10 s, kronograf je zabilježio stanje $T_2=46$ m 30,35 s. Ove podatke, utvrđene pomoću dvaju mjerenja, napisat ćemo tako da budu prilagođeni postupku računanja:

$t_R=9$ h 56 m 01 s	$T_1=54$ m 10,22 s
$t=9$ h 57 m 10 s	$T_2=46$ m 30,35 s
$t-t_R=0$ h 01 m 09 s	$T_2-T_1=01$ m 20,13 s

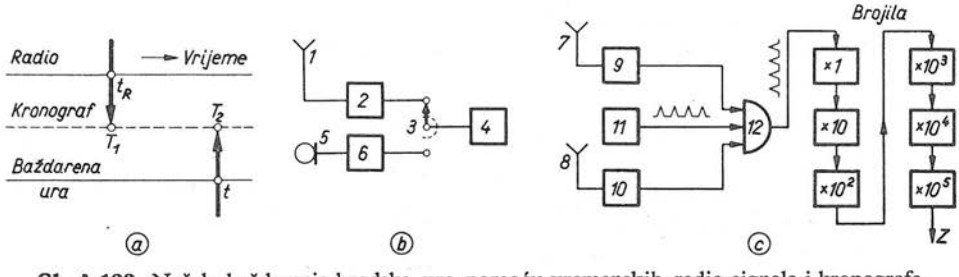
Pogrešku pokazivanja baždarene ure u trenutku t_R izračunavamo pomoću desne jednadžbe (10.8-1):

$$\Delta t=1\text{ m }9\text{ s}-1\text{ m }20{,}13\text{ s}=-11{,}13\text{ s}.$$

Predznak minus upućuje na to da ura kasni u odnosu prema vremenu radio-signala. Sutradan u isto vrijeme izmjereno je ovo:

$t_R=9$ h 56 m 01 s	$T_1=50$ m 05,30 s
$t=9$ h 57 m 15 s	$T_2=51$ m 28,40 s
$t-t_R=0$ h 01 m 14 s	$T_2-T_1=01$ m 23,10 s

Pogreška baždarene ure iznosila je, dakle, 5. 1. 1968. $\Delta t=1\text{ m }9\text{ s}-1\text{ m }23{,}10\text{ s}=-9{,}10$ s, tj. bila je manja nego prije 24 sata. To znači da je u toku 24 h ura ubrzala svoje pokazivanje za $\omega=-9{,}10\text{ s}-(-11{,}13\text{ s})=+2{,}03$ s (»dnevni hod ure«), odnosno da njena relativna pogreška iznosi $g=+2{,}03\text{ s}/1\text{ dan}=+2{,}35\cdot10^{-5}$.



Sl. A.122. Načelo baždarenja brodske ure pomoću vremenskih radio-signala i kronografa. a) prikaz baždarenja na vremenskim skalama; b) blokovska shema mjernog postupka: *1* — antena i radio-prijemnik, *2* — detektor, *3* — preklopka, *4* — pojačalo i kronograf (kremena ura s pisačem), *5* — piezo-električki mikrofon, *6* — pretpojačalo; c) blokovska shema digitalnog kronografa: *7* — prijemnik radio-signala »stop«, *9*, *10* — okidni sklopovi, *11* — generator impulsa stalne frekvencije, *12* — logički sklop koji potiče ili zaustavlja brojila

Opisani postupak baždarenja nadopunit ćemo posve općenitim shemama sudjelujućih uređaja, sl. A.122b. Radio-prijemnikom *1* uhvaćeni signali najprije se detektiraju (*2*) i preklopkom (*3*) u nacrtanom položaju uvode u kronograf (*4*). Time se signal trenutka t_R (sl. A.122a) sinhronizira s pokazivanjem kronografa T_1. Zatim se preklopka prebaci u suprotan položaj (kronograf radi dalje), a mikrofon

(*5*) stavi u neposrednu blizinu baždarene ure. Njene sekundne signale, pretvorene u električke impulse, pojačava pojačalo (*6*), a zatim ih registrira kronograf. Time je signal trenutka t (baždarene ure) sinhroniziran sa T_2 kronografa. Taj uređaj obično je komercijalni kremeni generator. Pogreška njegovih znakova na traci obično ne premašuje 0,01 s=10 ms.

Umjesto registracijskog kronografa u novije se vrijeme za opisanu svrhu sve češće primjenjuje *digitalni* kronograf, ako ga smijemo tako nazvati. To je uređaj kakav se sada općenito upotrebljava za precizno mjerenje kratkih vremenskih intervala (sl. A.122c). Kremeni oscilator (*11*) proizvodi strme signale koje logički sklop (*12*) propušta u digitalna brojila u intervalu između dolaska vanjskog radio-signala (*7*), koji otvara vrata sklopa, i pristignuća signala (*8*), koji ih zatvara. Taj interval baš je mjereni interval, koji na dekadnim brojilima saznajemo tako da period $[t]$ oscilatora pomnožimo sa stanjem Z brojilâ. Ovim se uređajem, prema tome, može *izravno* mjeriti razlika između t_R (trenutak na skali službe vremena) i t (isti trenutak na skali baždarene ure), tj. pogreška ure iznosi $\Delta t=t_R-t=Z\cdot[t]$. Za taj slučaj, dakako, ne vrijedi više slika A.122a, jer je tačka T_2 zbog istodobnosti pomaknuta u T_1. Budući da pogreška digitalnih uređaja obično iznosi najmanju znamenku ± 1, kod vrijednosti Z preko 1 milijun kreće se relativna pogreška utvrđivanja razlike $\Delta t=t_R-t$ oko 10^{-6}. Znatno veće pogreške, od kojih se neke mogu uzeti u obzir kao sistematske, nastaju zbog zatezanja u elektronskim sklopovima, zbog sezonske ili dnevne promjene trajanja širenja radio-valova itd.

10.8.2. Distribucija vremena HF i LF radio-signalima. U iduća dva odlomka letimično ćemo opisati kako razvijene službe vremena prenose radio-signale frekvencije i vremena. Pri tom ćemo podatke crpsti iz objavljenih radova američkih stručnjaka *A. H. Morgana*, *R. E. Beehlera* i drugih od godine 1967, te iz dokumenata Studijske komisije CCIR (Japan, USA, V. Britanija) od 1968. Mnogobrojna eksperimentalna istraživanja što tačnijeg prenošenja signala na što veće udaljenosti ovih su godina neobično intenzivirana, jer to zahtijevaju nastale potrebe, na primjer: vođenje svemirskih letjelica, sinhronizacija atomskih i kremenih ura širom čitave Zemlje, međunarodno uspoređivanje atomskih pramjerila, radio-navigacija, astronomija itd. Pri tom se upotrebljavaju elektromagnetski valovi vrlo različitih frekvencija. U idućim tekstovima upotrebljavat ćemo ove kratice valova s obzirom na njihove frekvencije (prema engleskom nazivlju):

HF i VHF — visoka i vrlo visoka frekvencija (3...300 MHz),

LF — niska frekvencija (30...300 kHz),

VLF — vrlo niska frekvencija (10...30 kHz).

Svojedobno su radio-signali vremena i frekvencije emitirani gotovo isključivo na HF, tj. *visokom frekvencijom* u području 2,5...25 MHz. Sada se signali vremena odašilju u gotovo čitavom radio-frekventnom spektru, tj. od oko 10 kHz pa do nekoliko stotina MHz. Neke značajke dijela najvažnijih radio-stanica koje odašilju signale vremena i frekvencije donosi tablica A-28. Mnoge od tih stanica sudjeluju u međunarodnoj koordinaciji vremena (BIH). Signali vremena tih koordinirajućih stanica međusobno su usklađeni na oko 1 milisekundu, a od skale *UT2* odstupaju za najviše 100 ms (odlomak 10.7.3). Stupci 4, 5 i 6 u tablici opisuju noseći val, a stupci 7, 8 i 9 trajanje emitiranja. Napominjemo da neke stanice (OMA, RWM-RES, ZUO itd.) imaju još i druge odašiljače, čak i geografski udaljene, koji emitiraju signale na drugim frekvencijama i uz drukčije pomake epoha.

Tablica A-28

Značajke nekih radio-stanica koje emitiraju signale frekvencije i vremena

Pozivni znak	Približna lokacija	Širina i duljina	Frekvencija MHz	Snaga kW	Tačnost $\times 10^{-9}$	Trajanje minuta	Dana tjedno	Sati dnevno
1	2	3	4	5	6	7	8	9
CHU	Ottawa Kanada	45°18′ N 75°45′ W	3,33; 7,335 14,67	0,5; 3 5	5	stalno	7	24
DCF 77	Mainflingen Njemačka	50°1′ N 9°9′ E	0,0775	12			6	6
FFH	Paris Francuska	48°59′ N 2°29′ E	2,5	0,3	2	10/20	2	8,5
GBR	Rugby V. Britanija	52°22′ N 1°11′ W		300 40	0,1	4/5	7	22
HBN	Neuchâtel Švicarska	46°58′ N 6°57′ E	5	0,5	0,1	5/10	7	24
HBG	Prangins Švicarska	46° N 6° E	0,075	20	0,02	stalno	7	24
IAM	Rim Italija	41°52′ N 12°27′ E	5	1	0,5	10/15	6	1
JJY	Tokyo Japan	35°42′ N 139°31′ E	2,5; 5 10; 15	2	0,5	stalno	7	24
LOL	Buenos Aires Argentina	34°37′ S 58°21′ W	5; 10 15	2	20	4/60	6	5
Loran-C	Carolina Beach N. C., USA	34° 4′ N 77°55′ W	0,1	300	0,05	stalno	7	24
MSF	Rugby V. Britanija	52°22′ N 1°11′ W	2,5; 5; 10 0,06	0,5 10	0,1 0,1	5/10 5/10	7 7	24 1
OMA	Prag Čehoslovačka	50° 7′ N 14°35′ E	2,5	1	1	15/30	7	24
RWM–RES	Moskva SSSR	56°37′ N 36°36′ E	5; 10 15	20	5	10/120	7	19
WWV	Fort Collins Colo, USA	40°41′ N 105° 2′ W	2,5; 20; 25 5; 10; 15	2,5 10	0,02	stalno	7	22,5
WWVB	Fort Collins		0,06	13	0,02	stalno	7	24
WWVH	Hawaii USA	20°46′ N 156°28′ W	2,5 5; 10; 15	1 2	0,1	stalno	7	22,5
WWVL	Fort Collins		0,02	1,8	0,02		7	24
ZLFS	Lower Hutt New Zealand	41°14′ S 174°55′ E	2,5	0,3	50		1	3
ZUO	Johannesburg Južna Afrika	26°11′ S 28° 4′ E	10	0,25	0,5	stalno	7	24

Tačnost prijema HF radio-signala intervala i vremena (trenutaka na vremenskoj skali, epoha) ovisi o mnogim faktorima: o putanji signala od odašiljača do prijemnika, o stanju atmosfere, da li je putanja djelomično na svjetlu ili u mraku, kolika je noseća frekvencija, koliki je interval unutar kojeg se utvrđuje srednja vrijednost rezultatâ itd. Švedski i japanski eksperimenti od godine 1965. pokazuju da se standardno odstupanje (odsječak 3.3) pojedinih mjerenja kreće od oko 0,01 ms pri malim prijenosnim udaljenostima pa do oko 0,5 ms pri udaljenosti oko 18 000 km. Slične rezultate dobili su i američki eksperimentatori. Fluktuacija frekvencije pri HF znatno je veća negoli pri LF ili VLF, ona se kreće od oko 10^{-10} (kraće udaljenosti, jednomjesečni mjerni interval) do oko 10^{-7} (kratkotrajno mjerenje, 1 s do 1 h). Smatra se da tačnost pri emisijama HF uvjetuje prijenosna sredina, bez obzira na duljinu mjernog perioda.

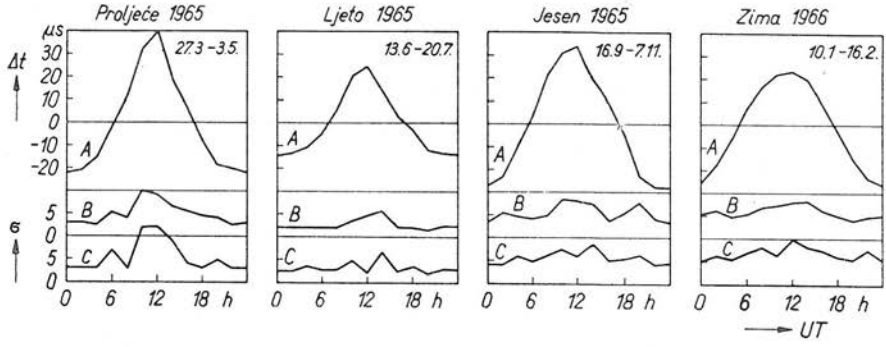
Tačnost radio-emisija frekvencije i intervala u *niskofrekventnom* području (LF, 30...300 kHz) kreće se od 0,2 do $50 \cdot 10^{-10}$ (tablica A-28), tj. znatno je bolja negoli u području HF. Tako su, na primjer, godine 1965. ustanovili da tačnost prijema signala švicarske radio-stanice HBG (75 kHz) na udaljenosti 1000 km iznosi 0,1 ms, a stabilnost površinskog vala oko ± 2 μs pri 500 km. Veća tačnost na LF postiže se zbog veće stabilnosti svojstava prijenosne sredine. Mjerenja su pokazala da srednja fluktuacija faze vala stanice WWVB (tablica A-28) na udaljenosti 2400 km danju iznosi 0,1 do 0,2 μs, a noću oko 0,6 μs (pri tom je svaki mjerni niz trajao pola sata). Druga pak mjerenja, gdje je odašiljač bila stanica Loran-C, a prijemnik u Washingtonu (manje udaljenosti), pokazala su da jednodnevna preciznost primljenog intervala iznosi oko 0,1 μs, što omogućuje tačnost usporedbe frekvencije oko $1 \cdot 10^{-12}$.

10.8.3. Distribucija signala vrlo niskom frekvencijom (VLF) znatno je tačnija negoli pomoću HF ili LF. U to nas mogu uvjeriti podaci u tablici A-29, gdje su za usporedbu navedeni i rezultati dobiveni pomoću tzv. putujuće ure (odlomak 10.8.4). Zato se posljednjih 7 do 8 godina sve intenzivnije upotrebljava distribucija pomoću VLF, iako je za službu vremena ona prvi put primijenjena prije gotovo 15 godina. O prikladnosti VLF svjedoči i činjenica da se frekvencija atomskih pramjerila raznih zemalja od samog početka njihove primjene kontinuirano uspoređuje pomoću signala VLF. Tako je, na primjer, u USA već godine 1963. utvrđeno da preciznost VLF uspoređivanja frekvencije na putanji dugačkoj oko 7500 km iznosi oko $(2...5) \cdot 10^{-12}$. Novije, a i starije rezultate reda nekoliko 10^{-12}, sadrži tablica A-29 (oznake kratica objašnjava tablica A-23). Odatle jasno proizlazi izvanredna korist primjene VLF za distribuciju frekvencije: radio-signalima na VLF mogu se nadasve pouzdano baždariti lokalni oscilatori, tj. utvrditi njihova frekvencija, te permanentno pratiti i korigirati njihova promjena (vidi sl. A.116 u odlomku 10.7.2).

Letimično spomenute prednosti signala na VLF potakle su godine 1965. i američku svemirsku službu (NASA, National Aeronautic and Space Administration) da prouči primjenu sistema VLF za distribuciju vremena prilikom vođenja satelita (satellite tracking stations). Takozvani Omega Navigation System, koji se temelji na VLF distribuciji vremena pomoću višestrukih nosećih valova, bit će, na primjer, u stanju da sa osam radio-stanica dopre svojim signalima na bilo koju tačku globusa. Specijalizirane organizacije niza zemalja vrlo intenzivno istražuju daljnje mogućnosti primjene VLF za službu vremena i radio-navigaciju. Među njima odlično mjesto zauzima japanska organizacija predvođena Laboratorijem za radio-električka istraživanja (RRL) i Astronomskim opservatorijem u

Tokiju (TAO). Ta organizacija istražuje primjenu VLF od godine 1960. i u svom je radu došla do mnogih značajnih rezultata, od kojih ćemo u nastavku neke spomenuti.

Pogreška uspoređivanja *frekvencije* na VLF nastaje zbog mnogih uzroka, na primjer zbog: faznog skoka u prijemniku, promjene faze signala uzrokovane odašiljačkom i prijemnom antenom, nestabilnosti prijenosne sredine, pojave faznih anomalija duž putanje, interferencije, sezonske i dnevne promjene faze vala itd. Pri uspoređivanju *vremena* (trenutaka na vremenskoj skali) navedenim se uzrocima pridružuje slabo poznavanje fazne i grupne brzine vala duž prijenosne putanje. Od tih mnogobrojnih pojava ovdje ćemo sažeto spomenuti rezultate japanskih istraživanja, objavljenih godine 1968, o *dnevnim i sezonskim promjenama faze* primljenih signala vremena na VLF.



Sl. A.123. Varijacije faze signala vremena stanice NPG-NLK (USA) registrirane u Japanu za sva četiri godišnja doba

Od mjeseca marta 1965. do februara 1966. japanski je laboratorij RRL, koji ima vlastito atomsko pramjerilo frekvencije, stalno registrirao fazu signala primljenog od američke radio-stanice NPG-NLK (Jim Creek, Washington, 18,6 kHz, 1200 kW+250 kW), udaljene oko 7700 km. Sređivanjem mjernih rezultata dobivene su krivulje prikazane na slici A.123. Krivulje A (Δt u μs) predstavljaju srednju varijaciju faze u toku dana za četiri godišnja doba (razmatrani periodi navedeni su na crtežima), krivulje B pripadni tok fluktuacije (standardno odstupanje u μs) oko krivulje A, a krivulje C razliku faze (standardno odstupanje) uzastopnih dana za trenutke pomaknute 24 sata. Iz slike se vrlo jasno razabire da su vrijednosti veličine $\sigma(C)$ vrlo povoljne kad je putanja valova VLF obasjana suncem (apscisa na slikama predstavlja skalu *UT*, a Japan se nalazi gotovo na suprotnom meridijanu od radio-stanica NPG-NLK; vidi sliku A.100 i odlomak 10.4.1). Iz krivulja C možemo izračunati da se pripadna preciznost usporedbe frekvencije (24 h) kreće u rasponu $(3\ldots7)\cdot10^{-11}$ danju i u rasponu $(6\ldots11)\cdot10^{-11}$ noću. Vrijednost unutar raspona ovisi o godišnjem doba (sezoni).

Odlike distribucije signala vremena na VLF možemo uočiti iz još jedne serije japanskih eksperimenata. Od septembra 1964. do januara 1967. tokijska je zvjezdarnica TAO kontinuirano registrirala fazu signala (16 kHz) radio-stanice GBR (tablica A-28), udaljene oko 9500 km, i stanice GBZ (19,6 kHz, Criggion, oko 9600 km). Obrada mjernih rezultata dovela je do zaključka da se sezonska varijacija srednje (mjesečne) faze nosećeg vala, izražena odstupanjem Δt trenutka njegova prispijeća u TAO, može izraziti jednadžbom

Tablica A-29

Usporedba frekvencije pojedinih pramjerila sa f_{NBS}. Razlika je izražena jedinicom pHz (= 10^{-12} Hz)

Laboratorij	Vrlo niskom frekvencijom (VLF)		Putujućom urom		
Godina	1961–62.	1965.	1964.	1965.	1966.
CNET	+245*	− 8	−	−	−12
LSRH	− 34	+ 2	+7	− 5	+ 2
NPL	+ 55	− 9	−	+23	− 2
NRC	+164*	+ 5	−	+ 5	− 3
OP	−	−	−	−	+15
PTB	−	−	−	+34	−14
RIND	−	+ 4	−	+ 6	− 2
RRL	−	− 2	−	0	+ 2
USNO	+ 36	+37	−5**	−	− 2**

Opaske: * Pramjerilo je bilo promijenjeno pošto su izvršena ova mjerenja. — ** Nije bilo upotrijebljeno isto pramjerilo koje je poslužilo za usporedbu radio-valovima vrlo niske frekvencije.

$$\Delta t = K \cos \frac{2\pi}{365} (j+9).$$

Pri tom vrijednost konstante K iznosi: 14,1 μs (GBR); 16,1 μs (GBZ). Slovo j označuje broj dana prošlih od početka godine. Vrijednost Δt maksimalna je prilikom zimskog solsticija, a minimalna prilikom ljetnjeg.

10.8.4. Sinhronizacija vremenskih skala putujućom urom. Do sada opisana metoda distribucije signala frekvencije i vremena (trenutaka na vremenskoj skali) pomoću radio-valova može biti od neposredne koristi gotovo svakom potencijalnom korisniku tih signala ako on posjeduje odgovarajuće radio-prijemne uređaje. Najtačnija distribucija signala na velike udaljenosti, ali određenim pojedinačnim korisnicima, ostvaruje se takozvanim *putujućim urama* (engl. portable clock - prijenosna ura, flying clock - leteća ura). Tu metodu prvi put je upotrijebio NBS godine 1959, a njen princip sastoji se u ovome. Stanovito stacionarno atomsko pramjerilo frekvencije (npr. NBS ili NRC ili NPL itd.) odabere se za referenciju (f_0) prema kojoj će se izražavati rezultati svih mjerenja frekvencije u poduzetom eksperimentu. To putujuće pramjerilo održava u toku pokusa vlastitu atomsku vremensku skalu *AT0* (odsječak 10.7) prema kojoj će se mjeriti objektivno isti vremenski trenuci drugih atomskih vremenskih skala *AT*(i), tj. skala udaljenih laboratorija, npr. na relaciji Boulder (USA) — Neuchâtel (Švicarska) ili Boulder — Tokio.

Zamislimo da je riječ o distribuciji signala f_0 i *AT0* američkog NBS u japanski laboratorij RRL (tablica A-23), čije atomsko pramjerilo održava frekvenciju svog cezijeva pramjerila f_i konstantnom, a ono tvori vlastitu skalu vremena *AT*(i). Distribucija započinje time što se putujuće pramjerilo (atomsko ili kremeno) stavi u pogon i baždari u Boulderu prema f_0 i *AT0*. Time se, dakle, utvrđuje frekvencija f_p tog trećeg pramjerila, a epoha njegove vremenske skale *ATP* izjednači se s tadašnjim vremenom skale *AT0*. Zatim se tako aktivirani putujući uređaj ukrca

u avion, gdje dalje radi, i njime se prenese u Tokio. Tamo se njegova frekvencija f_p usporedi s f_i, a istodobni trenutak na skali ATP sa skalom $AT(i)$. Time se utvrđuju razlike $f_p - f_i$ i $ATP - AT(i)$. Putujuća ura omogućila je, dakle, da se posredno usporedi frekvencija i vrijeme američke i japanske službe vremena. Ili drugim riječima: putujućom se urom mogu sinhronizirati vremenske skale vrlo udaljenih službi vremena. Tačnost te skupe metode najveća je koja se uopće može postići u naše doba: pogreška sinhronizacije vremena može se sniziti na oko 1 mikrosekundu ($\mu s = 10^{-6}$ s), a relativna pogreška utvrđivanja frekvencije f_i na približno $(2...3) \cdot 10^{-12}$.

Prilikom transporta ure i manipulacija njome mogu nastati nepredvidive pogreške u radu pramjerila, na primjer: skokovi faze, promjene frekvencije u djeliteljima frekvencije (odlomak 10.7.1), nepoznati utjecaji udaraca, vibracija, promjene napona i temperature itd. Zato se prilikom avionskog povratka putujuće ure u polazište (na primjer iz Tokija u Boulder), tadašnje vrijednosti f_p i ATP *iznova usporede* sa f_0 *i* $AT0$. Rezultati polučeni u odredištu (Tokio) valjani su jedino u slučaju ako ta druga usporedba (Boulder) nije otkrila postojanje jedne od navedenih pogrešaka. Vidimo, dakle, da se putujuća ura upotrebljava u biti na isti način kako se međunarodno uspoređuju normale električkog otpora i napona pomoću tzv. putujućih normala (odsječci E.3.5, 6).

Prije smo spomenuli da se lokalne atomske vremenske skale $AT(i)$ mogu putujućom urom sinhronizirati s pogreškom oko 1 μs. Promislimo malo što to znači ako smjeramo na usporedbu jednoličnosti astronomske i atomske skale vremena. U odlomku 10.7.3 opisali smo kako se zasad najjednoličnija skala AT prilagođuje (pomacima 100 ms i promjenama frekvencije) manje jednoličnoj skali $UT2$. Podijelimo li 100 ms = 0,1 s s mjernom pogreškom 1 μs pri upotrebi putujućih ura, dobivamo omjer 100 ms/1 $\mu s = 10^5 = 100\,000$. To znači da se ionako nadasve fine *razlike* (0,1 s) mogu utvrđivati nepojmljivo tačno, 1 : 100 000, a nemojmo zaboraviti da sadašnja istraživanja nastoje pogrešku još više smanjiti, možda na 0,1 μs, dakle omjer sniziti na $1 : 10^6$! Zato se autoru ove knjige čini da svijetu neminovno predstoji potpun prijelaz od svjetskog vremena $UT2$ na međunarodnu atomsku skalu, jer njihova je pouzdanost nedvojbeno dokazana. Razmišljanja uz tablice A-24, 25 i 29 vjerojatno mogu samo potvrditi takav zaključak koji je daleko od pomisli da su klasična astronomska motrenja i održavanje astronomskih vremenskih skala nepotreban ili besperspektivan posao. Naprotiv, univerzalna primjena atomskog vremena unaprijedit će astrometriju i omogućiti bolje razumijevanje svemira.

Podatke u citiranim tablicama ilustrirat ćemo s nekoliko svježih primjera. Atomske skale vremena NBS i NRC (za kratice vidi tablicu A-23) održavane su od marta 1965. do maja 1966. u sinhronizmu s pogreškom 17 mikrosekundi (tome odgovara prosječna relativna razlika frekvencija oko $5 \cdot 10^{-13}$). To je utvrđeno metodom valova VLF. Pokusi s putujućom urom učinjeni u maju 1966. i septembru 1967. pokazali su da su se skale NRC i NBS u tom razdoblju udaljile za 68 μs (razlika frekvencija $1{,}6 \cdot 10^{-12}$). Istodobno su se skale NRC i USNO razmaknule samo za 18 μs $(4 \cdot 10^{-13})$.

Veličanstven napredak metrologije frekvencije i vremena omogućio je da se na temelju opisanih eksperimenata pokuša utvrditi da li, i koliko, velike mase utječu na promjenu frekvencije elektromagnetskih valova koji prolaze u blizini tih masa. Odgovor na to i slična pitanja u naše vrijeme traže kozmolozi i drugi znanstvenici. Godine 1968. *D. Saleh* i dr. ustvrdili su, naime, da se frekvencija f vala mijenja za vrijednost $\Delta f = -Kfm\,\Delta L/r^2$, ako val prolazi na udaljenosti r od centra tijela mase m. Simbol ΔL označuje duljinu putanje, a $K = 1{,}23 \cdot 10^{-29}$ m/kg konstantu.

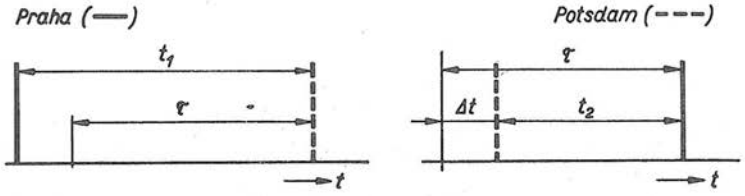
Početkom godine 1969. *A. G. Mungall* i dr. objavili su proturaspravu kojom dokazuju da iz rezultata dotadašnjih eksperimenata pomoću putujuće ure ne bi valjalo zaključivati o utjecaju m na f. Bez obzira na konačno rješenje ovog problema, za nas je ovaj primjer poučan s drugog stajališta: sadašnja vrhunska metrologija vremena omogućuje da se spoznaju do sada nepoznati fundamentalni prirodni zakoni.

10.8.5. Međunarodna distribucija signala televizijskom mrežom. Institut za radio-tehniku i elektroniku u Pragu i Geodetski institut u Potsdamu (D. R. Njemačka) poduzeli su godine 1964. istraživanja o mogućnosti primjene radio-relejnih linija (RRL), koje retransliraju TV programe, za prijenos signala vremena. U tu svrhu Potsdam je upotrijebio prijevozni TV odašiljač koji je predavao signale TV tornju Petkus. Da bi ustanovili trajanje širenja impulsa duž RRL, eksperimentatori su postupili ovako: praške sekundne signale vremena (i Prag i Potsdam posjedovali su kremena pramjerila frekvencije koja su tvorila dvije nezavisne vremenske skale) primao je Potsdam pomoću RRL. Uređajem za mjerenje vremenskih intervala (usporedi sa slikom A.122c) utvrđena je vremenska razlika između prispijeća praškog signala i pokazivanja potsdamske kremene ure.

Istovremeno su se pomoću RRL odašiljali potsdamski signali vremena u Prag, gdje su učinjena analogna mjerenja, dakako u odnosu prema praškoj kremenoj uri. Rezultate smo grafički prikazali slikom A.124, iz koje se vidi da su praški signali (puna crta) za Δt prethodili potsdamskima (crtkano). Ako trajanje širenja vala na relaciji Prag—Potsdam (i obratno) označimo sa τ, vrijede jednadžbe $t_1 = \tau + \Delta t$ i $t_2 = \tau - \Delta t$. Odatle slijede izrazi

$$\tau = \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2) \quad \text{i} \quad \Delta t = \tfrac{1}{2}(t_1 - t_2)$$

pomoću kojih možemo izračunati τ i razliku vremena Δt praške i potsdamske kremene ure. U toku tri mjeseca eksperimentiranja ustanovili su godine 1964. da je $\tau = (1143 \pm 1)\ \mu s$ i da ta vrijednost ostaje stalnom. Mjerna pogreška pretežno je uvjetovana digitalnim brojilom.

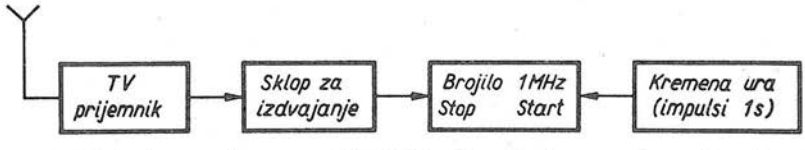


Sl. A.124. Mjerenje trajanja τ širenja impulsa vremena radio-relejnom linijom Praha — Potsdam i razlike Δt pokazivanja kremenih ura u tim gradovima: t_1 — praški mjerni rezultat, t_2 — potsdamski mjerni rezultat, crtkane linije odnose se na potsdamski sekundni impuls, a pune na praški

Postignuti eksperimentalni rezultati potakli su čehoslovačke i njemačke stručnjake da pojednostave načelo uspoređivanja prostorno udaljenih kremenih ura. Pri tom su otkrili vrlo tačnu i jeftinu metodu koja se može upotrijebiti za *distribuciju* signala vremena i frekvencije na teritoriju koji prekriva TV mreža. To može biti teritorij jedne zemlje (npr. Jugoslavije, vidi prijedlog u odlomku 10.8.7) ili nekoliko zemalja, tj. metoda je primjenljiva za distribuciju signala u okviru nekoliko država (»međunarodna TV distribucija«). Zato ćemo joj posvetiti još nekoliko redaka letimično opisujući iskustvo čehoslovačko-njemačke suradnje.

Opisana primjena RRL za prijenos signala vremena djelomično onemogućuje upotrebu tih linija za onu svrhu kojoj su namijenjene, tj. blokira ih u stanovitim razdobljima, pa je potreban precizan dogovor sa TV i drugim korisnicima RRL. Zato su se stručnjaci u Pragu i Potsdamu u nastavku svog istraživanja poslužili drugom metodom: za usporedbu kremenih ura upotrijebili su *sinhronizacijske impulse televizijske slike.* U tu svrhu poslužili su se TV odašiljačem u Dresdenu i pretpostavili da se visokofrekventni elektromagnetski valovi šire kvazioptički. Ta metoda zahtijeva da se raspolaže mogućnošću utvrđivanja vremenskog položaja signala, moduliranih (na primjer sekundnim impulsima) u odašiljaču, u oba prijemna mjesta, i to u odnosu prema signalima vremena pripadnih kremenih ura. Znajući trajanje širenja impulsa, može se izmjeriti interval između položaja modulirajućeg impulsa TV odašiljača i signala vremena ure. Zatim se iz razlike može utvrditi razlika pokazivanja ura. Naravno da se umjesto frekvencije 1 Hz za modulaciju mogu upotrijebiti i druge frekvencije.

Mjerenja prema spomenutoj metodi obavljena su na relaciji Praha—Potsdam u novembru 1965, a pri tom su ispitane tri varijante: 1) pomoću radio-relejne linije (RRL), 2) pomoću zajedničkog TV odašiljača i 3) pomoću različitih odašiljača. Eksperimentiranje sa RRL obavljeno je u biti onako kako smo već opisali. Pri tom je sjedište kremene ure priključeno na liniju putem obližnjeg odašiljača bez upotrebe prijevozne TV stanice. Za prenošenje informacija poslužili su slikovni sinhronizacijski impulsi ispitne tablice koju je studio u Adlershofu predavao odašiljaču u Köpenicku. Usporedo s time tablice su RRL retranslirali u Prag i emitirali odašiljačima Leipzig, Dresden, Usti, Cukrak i Petrin. Pola sata nakon početka emisije praški je odašiljač ispitnu tablicu poslao radio-relejnom linijom u Berlin. Davači impulsa nalazi su se u TV studijima u Pragu i Adlershofu i bili su međusobno povezani pomoću RRL. Mjerenjem signala odašiljača Köpenick u Potsdamu i signala odašiljača Cukrak u Pragu usklađene su krajnje tačke RRL sa sjedištima uspoređivanih kremenih ura. Udaljenosti između tih tačaka male su u usporedbi sa RRL Praha—Adlershof, pa je utjecaj tih sekcija na cjelokupnu mjernu pogrešku zanemariv.



Sl. A.125. Blok-shema mjernog uređaja. TV prijemnik je normalan prijemnik na koji se nadovezuje vrlo jednostavan sklop za izdvajanje vertikalnih sinhronizacijskih impulsa. Digitalno brojilo (mjerenje intervala) pokreće se impulsom kremene ure, a zaustavlja slikovnim sinhronizacijskim impulsom

Pri drugoj varijanti (zajednički TV odašiljač) dolazio je u obzir jedan od ovih odašiljača: Dresden, Leipzig, Usti. Budući da se jedino Leipzig dobro prima i u Pragu i u Potsdamu, on je odabran za zajednički odašiljač. Povremene industrijske smetnje otklonjene su usavršenjem antena. Ako se u Pragu i Potsdamu istodobno utvrde vremenski položaji sinhronizacijskih impulsa u odnosu prema pripadnim kremenim urama, može se saznati zbroj trajanja širenja signala i razlika pokazivanja ura (sl. A.125). Pri tom treba što tačnije znati optičku udaljenost između odašiljača i prijemnika. Budući da je jakost polja na mjestu prijema kod ove varijante vrlo malena, ona nije uvijek upotrebljiva. Zbog toga je istraživana mogućnost pri-

mjene (za mjerenje) dvaju različitih TV odašiljača, na primjer Dresdena za Prag i odašiljača Leipzig za Potsdam. U tom slučaju treba tačno znati trajanje širenja signala između ta dva odašiljača. Analiza pokazuje da primjena druge varijante uzrokuje minimalne troškove, prva je najpouzdanija, a treća je moguć izvor dodatnih pogrešaka ako se često ne kontrolira trajanje širenja signala.

Jednostavnom analizom mogu se postaviti formule koje pomoću izmjerenih podataka daju traženu razliku pokazivanja dviju kremenih ura. Prije toga treba, dakako, utvrditi trajanje širenja impulsa. Tako je, na primjer, 10. i 11. 11. 1965. za relaciju Prag—Potsdam oba dana utvrđena vrijednost $\tau=(1140\pm1)$ μs. Taj rezultat provjeren je ovako: prema geografskim koordinatama TV tornjeva utvrđene su geodetske udaljenosti, pa je onda pomoću brzine širenja elektromagnetskih valova izračunato trajanje širenja impulsa. Razlika između računskog i eksperimentalnog rezultata iznosila je 7 μs, što se objašnjava pogreškom koordinata i zatezanjem elektronskih uređaja. Sve tri varijante upotrebljavaju se od 1. 1. 1966. za uspoređivanje pramjerila frekvencije i vremena u Pragu i Potsdamu. Vjerojatno će se primjeni opisane metode pridružiti i druge zemlje. Zato ćemo u odlomku 10.8.7 prenijeti prijedlog o tome kako da se TV sinhronizacijski impulsi slike primijene za buduću distribuciju signala vremena u našoj zemlji.

10.8.6. Služba vremena i distribucije u Jugoslaviji. U toku većeg dijela dana mnoge jugoslavenske radio-stanice emitiraju svakog punog sata »znak tačnog vremena«, tj. tri uzastopna zvučna signala; treći signal je najdulji, a njegov kraj označuje najavljeni puni sat na vremenskoj skali. Na kojoj vremenskoj skali, *UT2* ili *UTC*! Pitanje je bespredmetno, jer je pogreška emitiranog znaka »tačnog« vremena ponekad stotinjak puta veća od razlike između navedenih dviju skala! Tu tvrdnju ilustrirat ćemo primjerom: slušatelj u Zagrebu istodobno je slušao dva radio-prijemnika očekujući znak tačnog vremena. Jedan prijemnik bio je ugođen na frekvenciju radio-stanice u Ljubljani, a drugi na radio-stanicu Zagreb. Sa zaprepaštenjem je »na sluh« ustanovio da razlika dvaju znakova, koji bi trebalo da označe isti vremenski trenutak, iznosi oko 3 sekunde. Neki stručnjaci tvrde da pogreška znakova tačnog vremena mnogih jugoslavenskih radio-stanica ponekad dostiže čak i 6 (šest) sekundi! Ako tome dodamo da se u Jugoslaviji ne emitiraju radio-signali stalne frekvencije i konstantnih vremenskih intervala, onda možemo bez krzmanja ustvrditi da *Jugoslavija nema službe za distribuciju vremena.*

Pri tom postoji jedan paradoks. Astronomski opservatorij u Beogradu (AOB) aktivan je član Međunarodne službe vremena BIH (tablica A-23) od godine 1953, kada je još pohranjivao vrijeme pomoću četiri precizne ure s njihalom pod stalnim tlakom i dvije ure s aneroidnom kompenzacijom, a pri tom se služio sa dva kronografa vlastite izrade. Astronomski se vrijeme utvrđuje u AOB pasažnim instrumentom s bezličnim (franc. impersonnel, usporedi sa slikom A.96) mikrometrom. Radio-signali vremena primali su se do godine 1947. improviziranim uređajem, a od 1956. specijalnim Philipsovim prijemnikom, kojim se mogu oscilografski registrirati i signali vremena vrlo udaljenih stanica, npr. Šangaja. Pomoću te oskudne opreme, ali uz spremnost i požrtvovnost svojih stručnjaka, AOB je u pogledu tačnosti bio na 16. mjestu od ukupno 27 opservatorija koji su godine 1953. sudjelovali u svjetskoj koordinaciji vremena (BIH). Deset godina kasnije, tj. 1963, AOB je počeo pohranjivati vrijeme skupinom kremenih ura švicarske proizvodnje (Rohde Schwarz, tip CAA). Od godine 1951. AOB prima 6 radio-emisija dnevno, od toga 4 za utvrđivanje vremena, a dvije za kontrolu ura (više emisija ne prima se zbog nedostatka osoblja!). Uvodno spomenuti paradoks sastoji se u ovome: Jugoslavija ima solidan i uvježban centar za utvrđivanje vremena (AOB u prisnoj suradnji s

Vojnogeografskim institutom), ali nema jedinstvene jugoslavenske službe za distribuciju radio-signala vremena, frekvencije i intervala.

Paradoks nam se čini još većim kad se prisjetimo da u zemlji postoje i druge ustanove koje se bave poslovima službe vremena. Uprava za radio-veze, Elektroinstitut JNA, institut Mihailo Pupin u Beogradu, Radiodifuzija i još neke ustanove, kako je naveo *B. Kovačević* na simpoziju JUKEM godine 1969, posjeduju vlastite kremene ure, a svaka od tih ustanova ima *vlastitu* službu za uspoređivanje svojih ura s inozemnim službama vremena, tj. za baždarenje svojih ura. Vjerojatno nećemo pogriješiti ako pretpostavimo da zbroj troškova održavanja svih tih pojedinačnih službi premašuje troškove koje bi uzrokovala jedinstvena jugoslavenska služba vremena. Pri tom, dakako, zamišljamo da ta jedinstvena služba ima razgranatu *distribuciju*, jer bez toga takva služba nema valjana razloga postojanju. Informacije o vremenu, frekvenciji, stalnim intervalima itd. moraju, naime, biti na raspolaganju svakome u Jugoslaviji kome su te informacije potrebne bilo u znanstvene bilo u privredne svrhe.

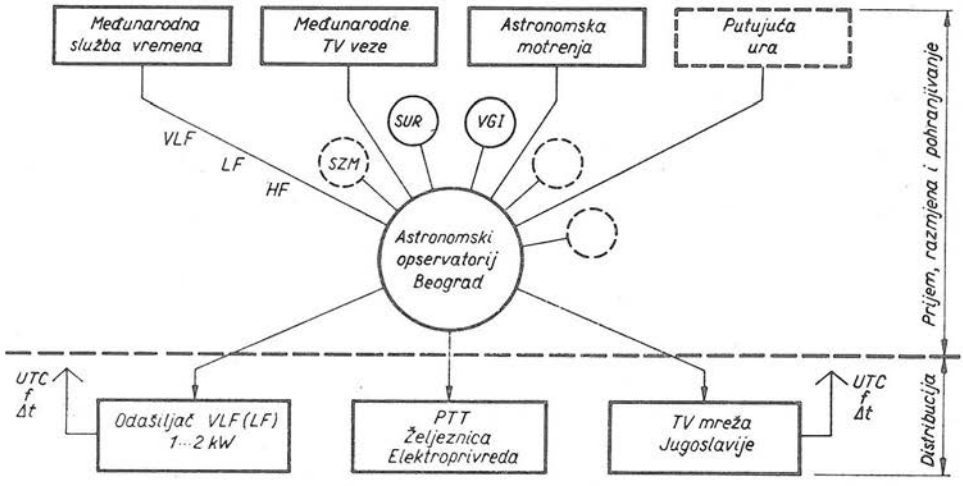
Valja naglasiti da je pomanjkanjem distribucije vremena (pod »distribucijom vremena« općenito razumijevamo distribuciju signala trenutaka na vremenskoj skali, stalne frekvencije i konstantnih intervala) pogođena cjelokupna jugoslavenska vrhunska metrologija, jer vrijeme i njena jedinica predstavljaju neophodnu osnovu za precizna mjerenja većine ostalih fizikalnih veličina. Da postojeće stanje pogađa našu metrologiju, svjedoči i ova činjenica: u vezi s vremenom nigdje nismo spomenuli Savezni zavod za mjere i dragocjene metale (SZM), koji bi trebalo da predstavlja vrh jugoslavenske metrološke piramide. Uzrok tome je: SZM još se ne bavi (1969) preciznim mjerenjem vremenskih intervala i frekvencije, što bi prema svojoj funkciji trebalo da čini.

Letimično opisano stanje jugoslavenske službe vremena očito šteti daljnjem razvoju privrede i znanosti. Druge države, privredno i znanstveno razvijene kao Jugoslavija ili čak manje razvijene, imaju *sređenu* (koordiniranu, jedinstvenu) službu vremena i metrologiju vremena. Nema nikakvih razloga da tako ne bude i u našoj zemlji, jer se tu, zapravo, uopće ne radi o znatnim financijskim sredstvima, već o *koordinaciji* rada postojećih uređaja i stručnjaka. Za početak su potrebna neznatna sredstva, koja bi se, vjerojatno, vrlo brzo otplatila uštedama nastalim eliminacijom postojećih paralelnih, ali nekoordiniranih službi.

10.8.7. Prijedlog distribucije vremena u Jugoslaviji. Okvirne zadatke nacionalne službe vremena, a to vrijedi i za buduću jugoslavensku, definirao je godine 1966. u jednoj raspravi *D. Šaletić*. Konkretan plan organizacije jugoslavenske *distribucije* predložio je godine 1969. na 4. simpoziju Jugoslavenskog komiteta za električka mjerenja (JUKEM) *B. Kovačević*. U nastavku ćemo iznijeti bitne značajke (neznatno nadopunjene u sitnim detaljima) tog prijedloga koji se temelji na pretpostavci da naša buduća služba vremena treba da prvenstveno služi potrebama Jugoslavije, tj. geografski maloj zemlji s prilično razvijenom mrežom javnih radio-odašiljača i TV odašiljača. *Kovačević* predlaže uspostavljanje *dvaju međusobno nezavisnih sistema* za radio-distribuciju signala vremena (trenuci, frekvencija, intervali): 1) sistem za distribuciju signala vremena valovima vrlo niske frekvencije (VLF); 2) sistem za distribuciju signala vremena postojećom televizijskom mrežom.

S obzirom na dosadašnji rad beogradske Astronomske opservatorije (AOB), što smo letimično spomenuli u prošlom odlomku, posve je prirodno da centar

buduće jugoslavenske službe vremena, uključivši distribuciju, bude AOB. Pripadnu grubu strukturu te službe prikazuje slika A.126. Oba sistema omogućivali bi distribuciju signala trenutaka s pogreškom od nekoliko mikrosekundi i signala frekvencije s relativnom pogreškom 10^{-12}... 10^{-10}, ovisno o tome da li bi u AOB postojala atomska pramjerila ili ne.



Sl. A.126. Gruba struktura buduće jugoslavenske službe vremena uključivši distribuciju. Kratice označuju: *UTC* — koordinirano svjetsko vrijeme (odlomak 10.7.3), *VGI* — Vojno-geografski institut u Beogradu, *SUR* — Savezna uprava za radio-veze u Beogradu, *SZM* — budući vremenski laboratorij Saveznog zavoda za mjere i dragocjene metale u Beogradu. Prazni crtkani kružići označuju za sada nepoznate institucije koje bi svojim uređajima mogle pridonijeti poboljšanju prijema signala inozemnih službi vremena, međunarodnoj razmjeni signala i pohranjivanju frekvencije i stalnih vremenskih intervala

Međunarodna znanstvena radio-unija (URSI, International Scientific Radio Union) preporučila je godine 1967. da je za Evropu, do udaljenosti oko 800 km, najprikladnija distribucija signala vremena valovima niske i vrlo niske frekvencije (usporedi s odlomkom 10.8.3). Poznajući u vezi s time eksperimentalne rezultate njemačke radio-distribucije, *Kovačević* smatra da je za distribuciju širom čitave Jugoslavije dovoljan jedan odašiljač snage 1 ... 2 kW, a da pri tom prijemnik ne mora biti osjetljiviji od prijemnika široke potrošnje. Noseća frekvencija odašiljača sinhronizirala bi se (ili dobivala) kremenom ili atomskom urom.

Bit djelovanja metode distribucije signala vremena televizijskom mrežom opisali smo u odlomku 10.8.5. Budući da TV mreža praktički prekriva čitavu Jugoslaviju, ovim bi se sistemom mogli koristiti gotovo svi potencijalni korisnici stalnih intervala (npr. 1 s i 20 ms). Za tu svrhu ne bi trebalo mnogo uraditi: vertikalne sinhronizacijske impulse TV studija trebalo bi sinhronizirati s glavnom urom buduće jugoslavenske službe vremena. Prijemnik tih signala je jednostavan elektronski sklop prigrađen običnom TV prijemniku (sl. A.125). Usporedbeno mjerenje može se obaviti, na primjer, logičkim sklopom s digitalnim očitanjem (sl. A.122). Informacija o vremenu može se prenijeti i pomoću posebnih impulsa ubačenih u jednu od ispitnih linija. S tim impulsima mogu se, dakako, sinhronizirati lokalne

ure. Postoji, uostalom, niz načina vrlo preciznog prenošenja raznovrsnih vremenskih podataka televizijskom mrežom, a svima je zajednička jedna vrlo važna osobina: jeftinoća.

U vezi sa slikom A.126 želimo letimično upozoriti na bogato strano iskustvo s prijenosom signala vremena telefonskim linijama i koaksijalnim kabelima, jer će takve veze biti neophodne između AOB i odašiljača, odnosno direktnih korisnika. Tako se, na primjer, podzemna telefonska linija dugačka 18 km upotrebljava za prijenos signala 10 kHz, izvedenog iz vodikova masera, od US Naval Research Laboratory do US Naval Observatory (USA) i natrag. Ispitivanja pokazuju da na fazu prenošenih signala utječu promjene temperature i promjene otpora voda, a oboje ovisi o godišnjem doba. Posljedice su, međutim, beznačajne za buduću jugoslavensku službu: svedeno na frekvenciju, njena relativna promjena iznosi nekoliko 10^{-12} ako je duljina kabela između 30 i 70 km. Ponašanje koaksijalnih kabela prilikom prijenosa signala vremena nije još do kraja istraženo. Stanovito iskustvo stečeno je na 163 km dugačkom koaksijalnom kabelu London—Birmingham; pri 1 kHz promjena faze iznosila je 2 do 3,5°, što može uzrokovati pogrešku vremena oko 20 μs. Ograničeno iskustvo stekao je i NBS s koaksijalnim kabelom dugačkim 300 metara. Nagle promjene temperature uzrokovale su znatne promjene faze i frekvencije, preciznije: porast temperature smanjio je fazno zatezanje. To je u nekoliko navrata zapaženo na kabelu koji je bio izložen sunčanom svjetlu.

Glava **B**

Mjerni sistemi mehanike i hidraulike

SADRŽAJ

1. Veličine i jedinice prostora

1.1. Veličine prostora 416
1. Duljina, 2. Kut, 3. Prostorni kut 418
1.2. Metričke i pomorske jedinice duljine 418
1. Jedinica duljine metar, 2. Ostale metričke jedinice duljine, 3. Spektroskopske jedinice duljine, 4. Pomorske jedinice duljine 421
1.3. Astronomske jedinice duljine 422
1. Astronomska jedinica, 2. Siriometar, 3. Parsec, 4. Sirius, 5. Svjetlosna godina, 6. Međusobni odnosi astronomskih jedinica duljine 425
1.4. Mjerne jedinice kuta 426
1. Jedinica kuta radijan, 2. Puni kut i pravi kut, 3. Kutni stupanj, minuta i sekunda, 4. Metričke jedinice kuta, 5. Artiljerijske i pomorske jedinice kuta 430
1.5. Metričke jedinice površine 431
1. Jedinica površine kvadratni metar, 2. Ostale metričke jedinice površine, 3. Jedinice ar i hektar, 4. Nuklearne jedinice površine, 5. Neke starije jedinice površine 434
1.6. Jedinice prostornog kuta 434
1. Jedinica prostornog kuta steradijan, 2. Ostale jedinice prostornog kuta 435

1.7. Metričke, pomorske i drvne jedinice volumena 435
1. Jedinica volumena kubni metar, 2. Ostale metričke jedinice volumena, 3. Litar i litarske jedinice, 4. Pomorska jedinica volumena, 5. Jedinice za drvo 438

2. Vremenske i kinematičke veličine i jedinice

2.1. Vremenske veličine 439
1. Vrijeme, 2. Period, 3. Frekvencija 440
2.2. Neke kinematičke veličine 440
1. Brzina, 2. Ubrzanje, 3. Kutna brzina (rotancija), 4. Brzina vrtnje (frekvencija vrtnje), 5. Odnos veličina ω i n, 6. Tok proračuna vrtnje sa ω i sa n, 7. Kruženje satelita oko Zemlje 447
2.3. Jedinice vremena i frekvencije 448
1. Jedinica vremena sekunda, 2. Decimalni dijelovi sekunde, 3. Minuta, sat i dan, 4. Kalendarske jedinice vremena, 5. Jedinica frekvencije hertz 449
2.4. Metričke i angloameričke jedinice brzine i ubrzanja 450
1. Jedinica brzine m/s, 2. Ostale metričke jedinice brzine, 3. Pomorska jedinica brzine čvor (knot), 4. Angloameričke jedinice brzine, 5. Vansistemske jedinice brzine, 6. Beaufortova skala brzina, 7. Jedinice ubrzanja 455
2.5. Jedinice veličinâ vrtnje 456
1. Jedinice rotancije (kutne brzine), 2. Jedinica kutnog ubrzanja, 3. Jedinice frekvencije vrtnje, 4. Odnosi jedinica veličina ω i n 457

3. Masene veličine. Jedinice mase, gustoće i koncentracije

3.1. Veličine mase i gustoće 460
1. Fizikalna veličina masa, 2. Gustoća, 3. Specifični volumen, 4. Relativna gustoća, 5. Maseni protok, 6. Koncentracija, 7. Ostale masene veličine 464
3.2. Mjerenje gustoće tekućih, krutih i šupljikavih tvari 465
1. Definicije gustoćâ i poroznosti, 2. Mjerenje gustoće hidrostatskom vagom, 3. Mjerenje gustoće piknometrom, 4. Mjerenje gustoće tekućina areometrima 470
3.3. Mjerne jedinice mase 471
1. Jedinica mase kilogram, 2. Ostale metričke jedinice mase, 3. Dvostruko značenje riječi karat, 4. Jedinice mase hyl i slug, 5. Molne, standardne i angloameričke jedinice mase 476
3.4. Metričke i angloameričke jedinice gustoće 477
1. Jedinica gustoće kg/m^3, 2. Ostale metričke jedinice gustoće, 3. Angloameričke jedinice gustoće 479
3.5. Areometarske skale gustoće tekućina 479
1. Proračun areometarske skale, 2. Bauméove areometarske skale, 3. Ostale areometarske skale, 4. Centezimalne alkoholometrijske skale 485
3.6. Metričke i angloameričke jedinice protoka i masenog protoka 485
1. Jedinica masenog protoka kg/s, 2. Ostale metričke jedinice protoka, 3. Angloameričke jedinice protoka 486

4. Tlak. Jedinice sile i tlaka

4.1. Veličina tlak i načelo mjerenja tlaka 490
1. Fizikalna veličina tlak, 2. Nadtlak i podtlak (vakuum), 3. Načelo hidrostatskog mjerenja tlakova 491
4.2. Jedinice sile i težine 493
1. Jedinica sile newton, 2. Višekratnici jedinice newton, 3. Jedinice sile sthène i dyn, 4. Jedinica sile kilopond, 5. Preračunavanje kilopond $\rightleftarrows$ newton, 6. Angloameričke jedinice sile 497

4.3. Metričke jedinice tlaka i naprezanja 501
1. Jedinica tlaka N/m², 2. Jedinica tlaka SI mendeljejev, 3. Jedinice tlaka izvedene iz N/m², 4. Jedinica tlaka bar, 5. Jedinice tlaka pièze i pascal, 6. Normalna (standardna) atmosfera, 7. Jedinica tlaka tehnička atmosfera, 8. Jedinica tlaka torr i mm Hg, 9. Jedinice tlaka m H_2O i mm H_2O 512

4.4. Angloameričke jedinice tlaka 512
1. Jedinice tlaka izvedene iz poundala, 2. Jedinice tlaka izvedene iz pound-force, 3. Jedinice tlaka psi, psia, psig itd., 4. Jedinice tlaka izvedene iz ton-force, 5. Primjer upotrebe angloameričkih jedinica, 6. Jedinica tlaka british atmosphere, 7. Angloameričke stupčane jedinice tlaka (ft H_2O, in H_2O, in Hg) 515

5. Rad, energija, snaga i njihove jedinice

5.1. Veličine rad, energija i snaga 517
1. Rad i energija, 2. Gustoća energije, 3. Snaga 521

5.2. Metričke jedinice energije 522
1. Jedinica energije joule, 2. Jedinica energije kilovatsat, 3. Jedinica energije kilopondmetar, 4. Jedinica energije erg, 5. Jedinice energije kalorija i kilokalorija, 6. Jedinica energije litar-atmosfera 525

5.3. Angloameričke jedinice energije 528

5.4. Jedinice energije u atomskoj i nuklearnoj fizici 531
1. Elektronvolt (eV), 2. Sekunda^{-1} ili hertz, 3. Metar^{-1} i centimetar^{-1}, 4. Metar i centimetar, 5. Kelvin (K), 6. Rydberg (Ry), 7. Masene jedinice enegije, 8. Jedinstvena masena jedinica energije, 9. Usporedba jedinica energije atomske fizike 535

5.5. Metričke jedinice snage 536
1. Jedinica snage vat, 2. Jedinica kilopondmetar u sekundi, 3. Jedinica konjska snaga, 4. Ostale metričke jedinice snage 540

5.6. Angloameričke jedinice snage 540

6. Viskoznosti i njihove jedinice

6.1. Dinamička i kinematička viskoznost. Fluidnost 543
1. Veličina dinamička viskoznost, 2. Kinematička viskoznost, 3. Fluidnost 545

6.2. Direktno mjerenje dinamičke viskoznosti tekućina 545
1. Načelo direktnog mjerenja viskoznosti, 2. Mjerenje viskoznosti kapilarnim viskozimetrom, 3. Mjerenje viskoznosti rotacijskim viskozimetrom, 4. Ostale direktne metode mjerenja 549

6.3. Usporedbeno mjerenje viskoznosti tekućina 549
1. Načelo usporedbenog mjerenja viskoznosti, 2. Cannon-Fenskeovi i Ubbelohdeovi viskozimetri, 3. Precizni usporedbeni viskozimetri, 4. Korekcije usporedbenih viskozimetara 555

6.4. Jedinice dinamičke viskoznosti 556
1. Jedinica dinamičke viskoznosti Ns/m², 2. Jedinica dinamičke viskoznosti bernoulli, 3. Jedinica dinamičke viskoznosti poise, 4. Ostale metričke jedinice dinamičke viskoznosti, 5. Angloameričke jedinice dinamičke viskoznosti 561

6.5. Jedinice kinematičke viskoznosti 562
1. Jedinice m²/s, cm²/s i mm²/s, 2. Jedinica kinematičke viskoznosti stokes, 3. Angloameričke jedinice kinematičke viskoznosti 564

6.6. Industrijske skale kinematičke viskoznosti 564
1. Načelo industrijskih skala, 2. Englerova skala, 3. Englerova sekundna skala, 4. Skala Saybolt Universal, 5. Skala Saybolt-Furol, 6. Redwoodove skale, 7. Pregled ostalih skala, 8. Baždarenje industrijskih viskozimetara 573

7. Međunarodni sistem jedinica (SI) u mehanici

7.1. Svrha uvođenja i prednosti Međunarodnog sistema jedinica (SI) 575
1. Zakonitost Međunarodnog sistema jedinica, 2. Svrha primjene SI, 3. Glavne prednosti SI, 4. Šire značenje naziva SI 577
7.2. Definicije jedinica Međunarodnog sistema jedinica 579
1. Građenje koherentnog sistema jedinica, 2. Osnovne jedinice SI, 3. Dopunske jedinice SI, 4. Izvedene jedinice SI 581
7.3. Primjena veličina težina i masa 587
1. Težina tijela, 2. Mjesna i normalna težina, 3. Masa i težina u svemiru, 4. Masa kupljene i prodane robe, 5. Cijena robe, 6. Nosivost i noseća sila 596
7.4. Primjeri upotrebe jedinica SI u mehanici 597
1. Napetost u niti prilikom vrtnje, 2. Vozilo u klizavu zavoju, 3. Odjeljivanje drugog stepena rakete, 4. Proračun sigurnosnog ventila, 5. Strojna obrada vratila..... 600
7.5. Primjena Međunarodnog sistema jedinica (SI) u hidraulici 601
1. Općenito o primjeni SI u hidraulici, 2. Jedinica SI otpora strujanju tekućina, 3. Brzohodnost turbina i pumpi 603
7.6. Primjena višekratnika jedinica SI 604
1. Višekratnici jedinica, 2. Višekratnici jedinice tlaka SI 605

8. Tehnički, CGS i MTS sistemi jedinica u mehanici

8.1. Tehnički sistem jedinica mehanike 607
1. Osnova Tehničkog sistema jedinica, 2. Jedinica sile TS kilopond, 3. Jedinica mase TS hyl, 4. Izbjegavanje jedinice mase u primjeni TS, 5. Neopravdan prigovor Tehničkom sistemu, 6. Veličina težina u TS, 7. Nedosljedna primjena jedinica TS 616
8.2. Fizikalni (CGS) sistem jedinica mehanike 616
1. Osnova fizikalnog sistema jedinica, 2. Imenovane jedinice sistema CGS, 3. Jedinica tlaka sistema CGS, 4. Današnja primjena jedinica sistema CGS 619
8.3. Sistem jedinica MTS mehanike 619
1. Osnova sistema jedinica MTS, 2. Izvedene jedinice sistema MTS 620

9. Prijelaz od Tehničkog sistema jedinica na Međunarodni sistem jedinica (SI)

9.1. Neki razlozi relativno sporog uvođenja Međunarodnog sistema jedinica 621
1. Industrijska tradicija, 2. Nedovoljna aktivnost školstva, 3. Površna izdavačka djelatnost, 4. Pogreške u novinama, 5. Namjena ovog poglavlja 624
9.2. Primjena masenih veličina umjesto težinskih 624
1. Primjena mase umjesto težine, 2. Primjena gustoće umjesto specifične težine, 3. Primjena masenog protoka umjesto težinskog 626
9.3. Računanje energija u duhu TS i SI 627
1. Računanje potencijalne energije, 2. Računanje kinetičke energije 627
9.4. Prijelaz od TS na SI u području sila 628
1. Preračunavanje sila, 2. Proračun kontinuiranog nosača, 3. Korisnost dekadskih višekratnika 631
9.5. Preračunavanje vrijednosti čvrstoće, tlaka i tvrdoće 631
1. Preračunavanje vrijednosti čvrstoće, 2. Preračunavanje vrijednosti tlaka, 3. Preračunavanje vrijednosti tvrdoće 633

10. Pouzdano računanje s veličinskim jednadžbama. Sistemi dimenzija

10.1. Jednoliko gibanje, frekvencija vrtnje i angloamerička jednadžba snage 635
1. Općenito o veličinskim i brojčanim jednadžbama, 2. Jednoliko pravocrtno gibanje, 3. Frekvencija vrtnje, 4. Angloamerička jednadžba snage 638

10.2. Težina žice, moment rotirajućih tijela i gubitak tlaka 639
1. Težina bakrene žice, 2. Moment rotirajućih tijela, 3. Gubitak tlaka u cjevovodu .. 643
10.3. Osvrt na nekoliko sistema dimenzija mehanike 644
1. Općenito o dimenzijama, 2. Sistem dimenzija LTM, 3. Sistem dimenzija LTF, 4. Ostali sistemi dimenzija 645

11. Angloamerički sistemi jedinica prostora i mase

11.1. Osnova jedinstvenog angloameričkog sistema jedinica 648
1. Potreba poznavanja angloameričkih jedinica, 2. Yard—osnovna jedinica duljine, 3. Pound—osnovna jedinica mase, 4. Razlika između engleskog i američkog gallona, 5. Engleski i američki bushel, 6. Neke osobitosti angloameričkih sistema jedinica .. 652
11.2. Iz povijesti engleskih i američkih osnovnih jedinica 654
1. Iz povijesti engleskog yarda, 2. Engleski Imperial Standard Yard, 3. Još dva engleska yarda, 4. Iz povijesti američkog yarda, 5. Usporedba triju yarda, 6. Iz povijesti engleskog pounda, 7. Bivši američki pound (US pound avoirdupois) 658
11.3. Angloameričke jedinice duljine i površine 658
1. Angloameričke jedinice duljine, 2. Pomorske jedinice duljine, 3. Ostale angloameričke jedinice duljine, 4. Angloameričke jedinice površine 661
11.4. Angloameričke jedinice volumena 663
1. Kubne jedinice volumena, 2. Engleske jedinice volumena osnovane na UK gallonu, 3. Američke jedinice volumena osnovane na US gallonu, 4. Američke jedinice volumena osnovane na US bushelu, 5. Preračunavanje engleskih jedinica volumena na američke i obrnuto, 6. Angloameričke pomorske jedinice volumena, 7. Angloameričke jedinice za drvo, 8. Ostale angloameričke jedinice volumena 670
11.5. Angloameričke jedinice mase 671
1. Jedinice mase za opću primjenu (system avoirdupois), 2. Jedinice mase za primjenu u farmaciji (apothecaries-system), 3. Jedinice mase u draguljarstvu (system troy), 4. Ostale angloameričke jedinice mase 675
11.6. Angloameričke jedinice ostalih veličina 676
11.7. Angloamerički koherentni sistemi jedinica mehanike 677
1. Koherentni maseni sistem jedinica, 2. Angloamerički Tehnički sistem jedinica .. 678

1. Veličine i jedinice prostora

1.1. Veličine prostora

Pod »veličinama prostora« razumijevamo ove fizikalne veličine: duljina, kut (plošni kut), površina, prostorni kut i volumen. Iako te veličine obilježavaju pojmove koje svakodnevno susrećemo i njima se služimo, ipak ćemo im ovdje posvetiti nekoliko riječi sa svrhom da u daljnjim tekstovima ove knjige imamo jednoznačno definirane i interpretirane veličine pomoću kojih izvodimo niz drugih.

1.1.1. Duljina. U odlomku A.8.1.1 podrobno smo razložili što razumijevamo pod veličinom duljina. Rekli smo da je duljina osnovna veličina trgovine, tehnike i znanosti, dakle osnovna veličina svakodnevnog života. Iz iskustva znamo što treba razumijevati pod pojmom »duljina«. To je osnovno obilježje pravca, krivulje, razmaknutosti. Značajke pravca imaju visine, širine, duljine, promjeri, udaljenosti, razmaci, a značajke krivulja lukovi, obodi, opsezi itd. Pomoću duljine l definiramo druge veličine: površinu, volumen, brzinu itd.

Glavna i opća *oznaka* (simbol) veličine duljina je l, a u geometriji katkada s. Pojedine vrste duljine imaju ove simbole koji su standardizirani međunarodnom (ISO) i nacionalnim standardizacijama: za širinu b, za visinu i dubinu h i c, za debljinu t, za polumjer r i R, za promjer d i D, za put ili omeđeni dio duljine (dužina) s i l. Jedinica duljine u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je metar (kratica: m). O jedinicama duljine govori se u odsječcima 1.2 i 1.3.

U vezi s fizikalnom veličinom »duljina« dat ćemo nekoliko napomena o klasifikaciji veličina na pojedine razrede. Teorija metrologije, naime, razlikuje pojam »rod veličine« od »vrste veličine«. Tako je, na primjer, »duljina« rod koji se dijeli u pojedine »vrste«: jedna vrsta je duljina u smislu pravca, a druga duljina u smislu luka kao dijela krivulje. Prema tome pravac i luk su dvije vrste roda veličina »duljina«.

Osim toga teorija metrologije razlikuje prema *Busemann*u četiri »razreda« veličina u ovisnosti o jednoznačnosti utvrđivanja jedinica tih veličina. To su: 1) Razred kvantiteta, u koji ulazi većina veličina, npr. sve vrste duljina, masa, sila itd. 2) Razred brojčanih veličina, u koji idu korisnosti (stupnjevi djelovanja), plošni kut, prostorni kut itd. 3) Razred potencijala, u koji ulaze npr. gravitacijski i električki potencijal itd. 4) Razred kvaliteta, u koji idu sve one veličine koje se ne mogu svrstati u jedan od nabrojenih triju razreda, npr. neke fotometrijske i akustičke veličine. Opsežnija razmatranja o ovim spoznajno-teoretskim pitanjima čitatelji mogu naći u knjizi *F. Avčin*: »Osnove metrologije«, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1952. (str. 16 i dalje) ili u literaturi citiranoj na kraju ove knjige (*Fleischmann, Landolt, Wallot*).

1.1.2. Kut. Veličinu »kut« definiramo definicijskom *jednadžbom* pomoću veličine »duljina«. Pod kutom (plošni, ravninski kut) razumijevamo *omjer* duljine luka s, koji na kružnici polumjera r omeđuju dvije zrake povučene iz središta, i duljine polumjera r. Prema slici B.1a kut je dakle definiran jednadžbom

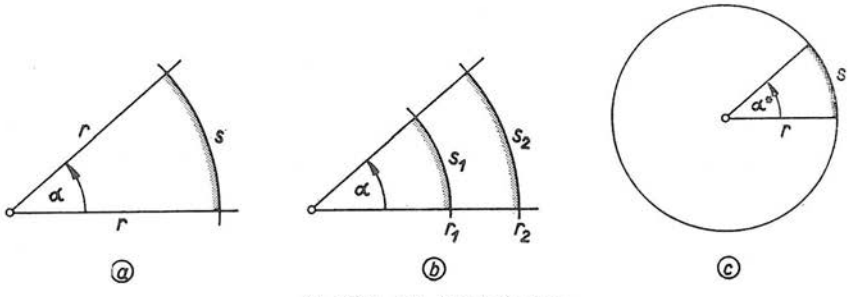
$$\alpha = \frac{s}{r}. \tag{1.1-1}$$

Kut je dvaput veći ako na istoj kružnici radijalne zrake odsijecaju dvaput dulji luk. To znači da je uz $r = \text{const}$ općenito

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{s_1}{s_2}.$$

Kod istog kuta, dakle kod $\alpha = \text{const}$ (sl. B.1b), zrake odsijecaju na kružnicama polumjera r_1 i r_2 lukove s_1 i s_2 koji se odnose kao polumjeri, dakle

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$



Sl. B.1. Uz definiciju kuta

Kutovi se mogu *zbrajati i oduzimati* isto kao i duljine. Prema jednadžbi (1.1-1) kutu α_1 pripada na kružnici polumjera r luk $s_1 = \alpha_1 r$, a kutu α_2 na toj istoj kružnici luk $s_2 = \alpha_2 r$. Zbroj tih dvaju lukova iznosi $s = s_1 + s_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) r$, pa je ukupni kut

$$\alpha = s/r = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Fizikalna veličina kut označuje se malim *grčkim* slovima α, β, γ, δ itd. Jedinica kuta u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je radijan (kratica: rad). O jedinicama kuta govori se u odsječku 1.4, a o SI u poglavlju 7.

Vratimo se za trenutak na definiciju plošnog kuta, tj. na jednadžbu (1.1-1) koja definira kut α kao omjer luka s i polumjera r (sl. B.1a). Budući da je, dakle, riječ o omjeru dviju duljina, definirana veličina »kut α« je tzv. »brojčana veličina«; o tom razredu veličina govorili smo pri kraju odlomka 1.1.1. Smatra se da je takva definicija kuta neracionalna, jer se uspoređuju dvije vrste iz roda duljina: jedna je luk s, tj. duljina u smislu krivulje, a druga polumjer r, tj. duljina u smislu pravca.

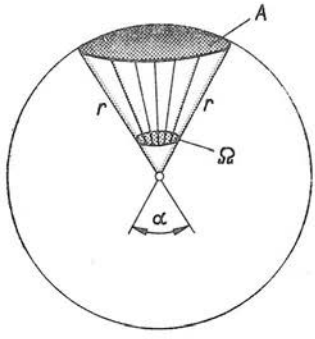
Racionalna definicija kuta nastala bi kad bismo u omjer stavili dvije istovrsne duljine, na primjer luk s i opseg kruga $2\pi r$, dakle (sl. B.1c)

$$\alpha^* = \frac{s}{2\pi r}. \tag{1.1-2}$$

Time bismo dobili novu veličinu »racionalni kut« α^*, koja se razlikuje od veličine α, tj. $\alpha = 2\pi\alpha^*$. Iako je definicija kuta α^* (1.1-2) racionalna, ona nema izgleda da istisne postojeću (1.1-1), jer su u skladu s definicijom $\alpha = s/r$ utvrđene i pripadne mjerne jedinice kuta (radijan, kutni stupanj itd.; vidi odlomak 1.4), a njima su izraženi rezultati mjerenja u čitavom svijetu tokom njegove povijesti, u njima su baždareni geodetski i drugi instrumenti itd. Osim toga morala bi se zbog toga promijeniti neka od pravila diferencijalnog i trigonometrijskog računanja, kako je to dokazao u citiranoj knjizi *F. Avčin* (odlomak 1.1.1).

1.1.3. Prostorni kut. Fizikalnu veličinu »prostorni kut« (oznaka: Ω) definiramo ovom jednadžbom

$$\Omega = \frac{A}{r^2}. \qquad (1.1\text{-}3)$$



Sl. B.2. Uz definiciju prostornog kuta

Geometrijsko objašnjenje ove definicije vidimo na slici B.2, koja kružnicom polumjera r predstavlja kuglu. Iz centra kugle povučen je stožac koji na površini kugle omeđuje površinu A. To znači da je prostorni kut Ω (tzv. analitički prostorni kut) omjer površine A, koju na kugli polumjera r omeđuje stožac prostornog kuta Ω, i kvadrata polumjera (r^2) kugle. Takva definicija prostornog kuta je neracionalna, tj. uspoređuje se jedna zakrivljena ploha (A) s ravnom (r^2). Stoga u tom pogledu vrijede analogna razmišljanja kao na kraju odlomka 1.1.2, tj. racionalna definicija prostornog kuta glasila bi $\Omega^* = A/4\pi r^2$.

Veličina prostorni kut Ω najviše se upotrebljava u geometriji, astronomiji i rasvjetnoj tehnici, odnosno fotometriji. Budući da ne postoje mjerni uređaji koji bi direktno mjerili prostorni kut, to se mjerenje veličine Ω izvodi indirektno, tj. mjerenjem plošnog kuta α (sl. B.2). Između prostornog kuta Ω i pripadnog plošnog kuta α stošca postoji, naime, veza

$$\Omega = 2\pi\,(1 - \cos\alpha/2). \qquad (1.1\text{-}4)$$

Razvoj ove jednadžbe u red daje za male kutove α ($\alpha/2 \ll 1$ rad) ovu vezu (prvo približenje) između prostornog kuta Ω i plošnoga kuta α

$$\Omega(\pi/2 \ll 1\,\text{rad}) = \frac{\pi}{4}\alpha^2.$$

Jedinica prostornog kuta u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je steradijan (kratica: sr). O jedinicama prostornog kuta govori se u odsječku 1.6.

1.2. Metričke i pomorske jedinice duljine

1.2.1. Jedinica duljine metar. U poglavlju A.8 opširno smo razmotrili način reprodukcije metra, osnovne jedinice duljine u Međunarodnom sistemu jedinica (SI), a u odlomku A.8.1.2 naveli smo definiciju metra koja je na snazi od godine 1960: »Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala u vakuumu zračenja koje odgovara prijelazu između razina $2\,p_{10}$ i $5\,d_5$ atoma kriptona 86.« Manje pot-

puna definicija glasi: »Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala zračenja kriptona.« Prema tome možemo zabilježiti

$$\text{jedinica duljine SI} = \text{metar} = \text{m},$$

tj. kratica jedinice metar je malo uspravno slovo m.

Napominjemo da je metar osnova ne samo metričkom sistemu jedinica već i angloameričkom, jer je jedinica yard danas definirana ovako: yard = 0,9144 metra (tačno). Podrobnije se o tome raspravlja u odlomku 1 1.1.2.

Osnovnom jedinicom duljine bila je stoljećima zaokupljena znanost svih razvijenih zemalja. Stoga čitatelju preporučujemo da u poglavlju A.6 pročita dio povijesti o nastanku jedinice metar i o načinu reprodukcije te jedinice.

1.2.2. Ostale metričke jedinice duljine. Na jedinicu metar (m) lako se primjenjuju decimalni i dekadski višekratnici (prefiksi) koje smo opisali u odsječku A.2.3 i skupili u tablici A-1. Upotreba jedinice metar opremljene višekratnicima nije uobičajena samo među stručnjacima, već i u općoj primjeni, na primjer

$$\text{kilometar} = \text{k}\cdot\text{metar} = \text{km} = 1000\ \text{m} = 10^3\ \text{m},$$

$$\text{decimetar} = \text{d}\cdot\text{metar} = \text{dm} = 0{,}1\ \text{m} = 10^{-1}\ \text{m},$$

$$\text{milimetar} = \text{m}\cdot\text{metar} = \text{mm} = 0{,}001\ \text{m} = 10^{-3}\ \text{m}.$$

Ostale ovovrsne jedinice duljine i njihove međusobne odnose sadrži tablica B-1, iz koje, na primjer, vidimo da je hektometar = hm = 100 m = 0,1 km, itd.

Tablica **B-1**

Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama duljine

Jedinica		Kratica	μm	mm	cm	dm	m	hm	km
mikrometar	=	μm	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-9}
milimetar	=	mm	10^{3}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-6}
centimetar	=	cm	10^{4}	10^{1}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-5}
decimetar	=	dm	10^{5}	10^{2}	10^{1}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-4}
metar	=	m	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	1	10^{-2}	10^{-3}
hektometar	=	hm	10^{8}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	1	10^{-1}
kilometar	=	km	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{1}	1

U pogledu naziva i kombiniranja višekratnika u primjeni se nalaze i neka odstupanja od tablice B-1. Tako se, na primjer, umjesto jedinice mikrometar = $= \mu m = 10^{-6}$ m katkada upotrebljava naziv »mikron«, a njegova kratica je μ, dakle

$$\text{mikrometar} = \mu m = \text{mikron} = \mu = 10^{-6}\ \text{m}.$$

Da bi se izbjegao nesporazum, bolje je upotrebljavati naziv mikrometar (μm), iako je to i naziv za jednu mjernu spravu.

Druga iznimka je »milimikron«. Naziv kaže da je to tisući (m = mili = = 1/1000) dio »mikrona«, dakle mmikron $= 10^{-3}$ μm. Budući da je prema tablici A-1 $10^{-3} \cdot \mu$ (mikro) $= 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 10^{-9} =$ nano, to je bolje da se umjesto naziva »milimikron« upotrebljava jedinica

$$\text{nanometar} = \text{nm} = 10^{-9}\ \text{m} = \text{milimikron}.$$

Analogno je bolje da se umjesto »mikromikrona« ($\mu\mu$), koji se naziva i »stigma«, upotrebljava

$$\text{pikometar} = \text{pm} = 10^{-12}\ \text{m} = \text{mikromikron}\ (\mu\mu).$$

Napominjemo da je Generalna konferencija za mjere i utege (o njoj vidi odsječak A.7.1) na svom trinaestom zasjedanju godine 1967. stavila van tečaja naziv jedinice »mikron« (franc. micron) i kraticu te jedinice »μ« (rezolucija 7/1967). Time je Generalna konferencija automatski eliminirala i naziv »milimikron«.

Jedinice »kvadrant« (zemaljski kvadrant) $= 10^7$ m $= 10000$ km i »mirijametar« $= 10^4$m $= 10$ km danas se gotovo nigdje više ne upotrebljavaju (o porijeklu jedinice duljine »kvadrant« vidi odsječak A.6.2).

U literaturi o atomskoj i nuklearnoj fizici možemo u posljednje vrijeme zapaziti i jedinice duljine »fermi«, »dekafermi« i »centifermi«. Pri tom je fermi definiran jednadžbom među jedinicama: fermi $= 10^{-15}$ metara. Zavirimo li u tablicu A-1, možemo vidjeti da je fermi u stvari femtometar, jer je decimalni višekratnik femto = f $= 10^{-15}$. Prema tome je, u skladu sa SI, pravilnije umjesto nabrojenih jedinica duljine pisati

$$\text{femtometar} = \text{fm} = 10^{-15}\ \text{m} = \text{fermi},$$

$$\text{dekafermi} = 10\ \text{fm} = 10^{-14}\ \text{m},$$

$$\text{centifermi} = 0{,}01\ \text{fm} = 10^{-17}\ \text{m} = 10\ \text{am}.$$

Ovdje je a = atto $= 10^{-18}$, dakle am = attometar $= 10^{-18}$ metara.

Dvostrane odnose među različitim jedinicima duljine, naročito angloameričkima, sadrže tablice **3** i **4** u prilogu knjige. Način građenja angloameričkih jedinica duljine i njihove vrijednosti navedeni su u odsječku 11.3.

1.2.3. Spektroskopske jedinice duljine. U spektroskopiji i rendgenografiji upotrebljavaju se ove dvije jedinice duljine

$$\text{ångström} = \text{Å} = 10^{-10}\ \text{m} = 0{,}1\ \text{nanometar} = 0{,}1\ \text{nm},$$

$$\text{metrička jedinica } X = (1{,}00202 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-13}\ \text{m}.$$

O jedinici Å čitatelj se može podrobnije informirati u odsječku A.8.9. Jedinica »metrička jedinica X« je u stvari Siegbahns' X Unit, a navedena vrijednost rezultat

je istraživanja koja je godine 1947. završila *X*-Ray Analysis Group of the American Institute of Physics u sporazumu s American Society for *X*-Ray and Electron Diffraction. Za neposrednu primjenu možemo zabilježiti

$$\text{Å} = 0{,}1 \text{ nm}; \quad \text{jedinica } X = 0{,}1002 \text{ pm},$$

gdje je $\text{nm} = 10^{-9}$ metara, te pm = pikometar $= 10^{-12}$ metara.

1.2.4. Pomorske jedinice duljine. Zakonom o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. u Jugoslaviji je u pomorskom i zrakoplovnom saobraćaju dopuštena javna upotreba jedinice »morska milja«. Upotreba ove jedinice dopuštena je i u većini drugih »metričkih« zemalja, jer to za sada iziskuju specijalni uvjeti međunarodnog brodarstva i zrakoplovstva. Definicija ove jedinice je

morska milja (international nautical mile) = 1 n mile = 1852 metra.

Ovu jedinicu, koju je na prijedlog Bureau des Longitudes prihvatila godine 1928. u Monacu Međunarodna hidrografska konferencija, upotrebljava u pomorskom i zrakoplovnom saobraćaju većina zemalja.

Argentina, Ekvador, Engleska, Irska, Kanada, Kina i Peru upotrebljavaju u pomorskom saobraćaju englesku morsku milju, tj. milju United Kingdoma:

UK nautical mile = 1853,18 metara.

Do godine 1954. u USA je odgovarajuća pomorska jedinica bila definirana sa US nautical mile = 1853,18 m (tačno), ali je te godine sporazumnom odlukom Ministarstva trgovine i Ministarstva obrane USA prihvaćena za *zakonsku* jedinicu međunarodna milja, tj. možemo reći:

US nautical mile = international nautical mile.

Odgovarajući tekst odluke glasi: The International Nautical Mile (1852 metres) shall be used within the Department of Commerce as the standard length of the nautical mile. This directive is effective 1 July 1954.

Dvostrane odnose među razmotrenim pomorskim jedinicama duljine i nekim drugim jedinicama sadrži tablica **4** u prilogu knjige.

Zanimljivo je, barem letimično, razmotriti porijeklo jedinice duljine morska milja (nautical mile). Budući da se geografska duljina i širina izražavaju *kutovima*, moreplovci su željeli imati takvu jedinicu duljine da bi brojčani iznos $\{s\}$ *udaljenosti* između dvije tačke na površini zemaljske kugle bio jednak brojčanom iznosu razlike geografskih koordinata $\{\varphi\}$ između te dvije tačke (o brojčanim iznosima, veličinama i jedinicama vidi odsječak A.1.3). Želja je, dakle, bila $\{\varphi\} = \{s\}$. Općenito je brojčani iznos jednak omjeru fizikalne veličine i odabrane mjerne jedinice, u našem slučaju dakle $\{\varphi\} = \varphi/[\varphi]$ i $\{s\} = s/[s]$, gdje uglate zagrade označuju opće (još nedefinirane) jedinice kuta i duljine (luka). Prema tome želju moreplovaca možemo napisati i u obliku $\varphi/[\varphi] = s/[s]$, odakle možemo izračunati vrijednost jedinice duljine $[s]$ u ovisnosti o jedinici kuta $[\varphi]$:

$$[s] = \frac{s}{\varphi}\{\varphi\}\,. \tag{1.2-1}$$

Za jedinicu kuta odabrana je 1′ (jedna seksagezimalna minuta; vidi odlomak 1.4.3), dakle $[\varphi] = 1'$.

Vezu između luka s na meridijanu zemaljskog sferoida i pripadnog kuta φ predstavlja jednadžba $\mathrm{d}s = M\,\mathrm{d}\varphi$, gdje je

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \approx a\left[1 - e^2 + \frac{3}{4}e^2(1-\cos 2\varphi)\right]. \qquad (1.2\text{-}2)$$

U ovoj jednadžbi slovo a predstavlja duljinu veće poluosi elipsoida čijom vrtnjom nastaje sferoid koji približno opisuje stvaran oblik Zemlje. Slovo e predstavlja tzv. prvu ekscentričnost tog elipsoida. Prema *F. N. Krasovskom*, vrijednosti ovih veličina iznose

$$a = 6378245\ \mathrm{m}, \quad e^2 = 6{,}6743722 \cdot 10^{-3}.$$

Uz pretpostavku da je $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi = s/\varphi$, te uz poznati odnos $1' = \pi\ \mathrm{rad}/10800 \equiv \pi/10800$ ($2\pi\ \mathrm{rad} = 360°$), pomoću $[\varphi] = 1'$ i jednadžbi (1.2-1,2) računanjem dobivamo

$$[s] = 1852{,}25\ \mathrm{m} - 9{,}31\ \mathrm{m}\cdot\cos 2\varphi = \text{milja}. \qquad (1.2\text{-}3)$$

Vidimo da se duljina milje *mijenja* s geografskom širinom φ. Za nekoliko vrijednosti φ računanjem dobivamo ove vrijednosti jedinice $[s]$ = milja u metrima:

$\varphi/°$	$[s]$/m	$\varphi/°$	$[s]$/m
0	1842,9	45	1852,2
15	1844,2	60	1856,9
30	1847,6	90	1861,6

Iako vrijednost milje prema jednadžbi (1.2-3) ne odstupa od $[s]_{45°}$ za više od 0,5 % (u najlošijem slučaju), ipak je milju valjalo definirati neovisno o φ, jer pomorski mjerni instrumenti ne mogu slijediti jednadžbu (1.2-3), već moraju biti baždareni tako da je omjer $[s]$/metar konstantan. Zbog toga je godine 1928. Međunarodni hidrografski ured prihvatio za međunarodnu morsku milju (international nautical mile) zaokruženu srednju vrijednost iz tablice (dakle pri $\varphi = 45°$), tj. 1852 m, kako smo naveli na početku ovog odlomka.

1.3. Astronomske jedinice duljine

Ni Generalna konferencija za mjere i utege, a ni nacionalna zakonodavstva ne bave se jedinicama koje se upotrebljavaju u astronomiji i astrofizici. Normiranjem mjernih rezultata, tj. dogovornim utvrđivanjem vrijednosti nekih nebeskih i geodetskih konstanti na temelju niza motrenja i drugih mjerenja bave se Međunarodna astronomska unija (International Astronomical Union), Bureau des Longitudes u Parizu i Međunarodna unija za geodeziju i geofiziku (International Union of Geodesy and Geophysics). Na temelju zaključaka nekoliko kongresa navedenih međunarodnih organizacija u nastavku ćemo najprije letimično razmotriti temeljnu jedinicu, »astronomsku jedinicu«, a zatim ostale jedinice koje iz nje proizlaze ili je uobičajeno da se upotrebljavaju. To su: siriometar, parsec, sirius i svjetlosna godina.

1.3.1. Astronomska jedinica. Međunarodna astronomska unija prihvatila je na svom kongresu održanom godine 1964. u Hamburgu ovu vrijednost sunčeve paralakse

$$p_0 = 8{,}794''.$$

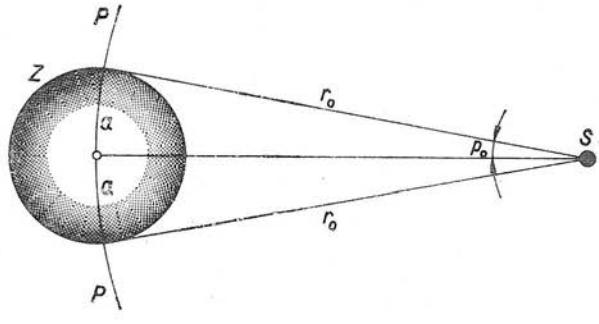
Ovdje znak ″ predstavlja kutnu sekundu (vidi odlomak 1.4.3), a sunčevu paralaksu označili smo zbog tipografskih razloga sa p_0, iako se u astronomiji obično upotrebljava grčko slovo π opremljeno indeksom u obliku kružića s tačkom (oznaka za Sunce). Na spomenutom kongresu prihvaćena je nova normirana vrijednost »astronomske jedinice« koja odgovara navedenoj paralaksi:

$$\text{astronomska jedinica} = \text{a.j.} = 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ metara},$$

tj. astronomskoj jedinici odgovara oko 150 milijuna kilometara.

Do navedene odluke, tj. do godine 1964, na snazi su bili ovi normirani podaci koje je prihvatio kongres Unije godine 1896, a potvrdio kongres godine 1950: $p_0 = 8{,}80''$ i a.j. $= 1{,}495 \cdot 10^{11}$ m (kratice za »astronomsku jedinicu« različite su u pojedinim jezicima, npr. engleski je A.U. — astronomical unit, francuski u.a. — unité astronomique itd.). Ovi normirani podaci bili su od godine 1960. upotrebljavani u svim astronomskim i nautičkim godišnjacima.

Budući da je »astronomska jedinica« izvanredno važna u astronomiji, a osnova je i nekim drugim jedinicama, letimično ćemo je razmotriti uz pomoć slike B.3, koja prikazuje međusobni položaj Sunca i Zemlje. Kut p_0, pod kojim se iz centra Sunca vidi ekvatorski polumjer Zemlje, naziva se »dnevnom horizontalnom ekvatorskom sunčevom paralaksom«, odnosno skraćeno *sunčevom paralaksom*. U nacrtanom međusobnom položaju Sunca i Zemlje geocentrički i astronomski zenit se podudaraju za tačke na ekvatoru, pa je p_0 maksimalno moguća vrijednost paralakse, koja na raznim mjestima Zemljine eliptičke putanje ima različite vrijednosti. Udaljenost r_0 (sl. B.3), tj. razmak između Sunca i Zemlje, naziva se *astronomskom jedinicom* (a.j.). Pojedine veličine na slici međusobno su povezane relacijom



Sl. B.3. Uz objašnjenje astronomske jedinice
Z — Zemlja, S — Sunce, p_0 — sunčeva paralaksa, P — Zemljina eliptička putanja, a — polumjer Zemlje

$$\sin p_0 = \frac{a}{r_0}, \quad \text{odnosno} \quad r_0 = \frac{a}{\sin p_0}, \tag{1.3-1}$$

gdje je a veća poluos zemaljskog elipsoida.

Iz jednadžbe (1.3-1) razabiremo da se astronomska jedinica r_0 može izraziti jedinicom duljine metar na temelju poznavanja polumjera Zemlje a i sunčeve paralakse p_0. Tako su u stvari astronomi mjerili udaljenost Sunce—Zemlja u vremenu od 300. godine prije naše ere (*Aristarh*) pa sve do godine 1961, kada je prvi put uspjelo r_0 izmjeriti *direktno* pomoću *radara* (Venera, Merkur). U toku ta 22 stoljeća mjerne metode su se usavršavale, a među njima je najuspješnija ona od druge polovine 19. stoljeća: sunčeva paralaksa p_0 izračunata je iz izmjerene paralakse p planetoida (Eros), jer je preciznost mjerenja to veća što je planetoid manji i bliže Zemlji. Za

udaljenost r planetoida vrijedi ova veza s njegovom paralaksom $\sin p = a/r$, što uz pomoć jednadžbe (1.3-1) daje

$$\sin p_0 = \frac{r}{r_0} \sin p. \tag{1.3-2}$$

Budući da prema trećem *Kepler*ovu zakonu vrijedi $T^2/T_0^2 = r^3/r_0^3$, gdje su T i T_0 ophodna vremena planetoida i Zemlje, pomoću (1.3-2) dobiva se vrijednost sunčeve paralakse p_0.

Na početku odlomka naveli smo da su međunarodno normirane vrijednosti sunčeve paralakse $p_0 = 8{,}794''$ i astronomske jedinice $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m. U skladu s jednadžbom (1.3-1) to znači da je normirana i veća poluos *a Hayford*ova rotacijskog elipsoida, koji je International Union of Geodesy and Geophysics godine 1924. prihvatila za računski oblik Zemlje (vidi odlomak A.9.2.6). Njena vrijednost je $a = 6378{,}2$ km s nepouzdanošću oko $\pm 0{,}05$ km. Iz svih tih razlaganja razabiremo da je astronomska jedinica (a.j.) trajno podvrgnuta korekcijama u skladu s pouzdanijim poznavanjem rezultata mjerenja a i p_0.

Ovaj promjenljiv odnos astronomske jedinice i metra pokušala je eliminirati drukčija definicija a.j. Međunarodne astronomske unije od godine 1938. koja je a.j. definirala kao »polumjer kružne putanje kojom planet zanemarive mase obiđe Sunce u toku vremena $T_0 = 365{,}256\,898\,3263$ dana srednjeg sunčevog vremena«. To znači da je neki planet udaljen 1 astronomsku jedinicu od Sunca onda ako oko njega kruži jednolikom kutnom brzinom $\omega = 360°/T_0 = 0{,}985\,607\,668\,601\,425$ kutni stupanj/srednji dan. Vidimo da je to hipotetička putanja, jer stvarno se planeti gibaju eliptičkim putanjama, a ne kružnima; osim toga, omjer mase bilo kojeg planeta i mase Sunca ipak nije zanemariv. Utvrđeno je da taj hipotetički polumjer iznosi oko $1/(1 + 2{,}3 \cdot 10^{-7})$ veće poluosi zemaljske putanje, odnosno $1/(1 + 1{,}4 \cdot 10^{-4})$ srednjeg razmaka između Sunca i Zemlje.

1.3.2. Siriometar. U astronomiji se upotrebljava i milijun puta veća jedinica od astronomske jedinice (a.j.), tj.

$$\text{siriometar} = 10^6 \text{ a.j.} = 1{,}496 \cdot 10^{17} \text{ m}.$$

Vrijednost u metrima dobivena je na temelju relacije a.j. $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m, koja vrijedi od godine 1964. Odnose siriometra prema drugim astronomskim jedinicama sadrži tablica B-2.

1.3.3. Parsec. Za mjerenje razmaka među zvijezdama stajačicama astronomi upotrebljavaju jedinicu parsec (kratica pc; čitaj »parsek«), koju nazivaju i ovim imenima: astron, metron, makron i zvjezdana udaljenost. Jedinica parsec temelji se na godišnjoj zvjezdanoj paralaksi p, koja je definirana kao kut p pod kojim se iz udaljenosti d vidi astronomska jedinica. Analogno jednadžbi (1.3-1), definicijska jednadžba zvjezdane paralakse je

$$\sin p = \text{astronomska jedinica} : d, \tag{1.3-3}$$

gdje je d spomenuta udaljenost Sunca od zvijezde stajačice.

Pomoću jednadžbe (1.3-3) jedinica parsec (pc) definirana je kao ona udaljenost zvijezde stajačice od Sunca čija zvjezdana paralaksa iznosi $p = 1$ kutna sekunda $=$ $= 1''$, dakle

$$\text{pc} = \frac{\text{a.j.}}{\sin 1''} \approx \frac{\text{a.j.}}{1''} = \frac{\text{a.j.} \times 360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi \text{ rad}}.$$

U ovom računanju izjednačili smo sin 1″ sa 1″, jer je riječ o neznatnim kutovima, a 1″ smo preračunali u radijane pomoću odnosa 2π rad $= 360° = 360 \cdot 60 \cdot 60''$. Daljnjim računanjem dobivamo

$$\text{pc} = 206264{,}8 \text{ astronomskih jedinica,}$$

čemu odgovara $3{,}087 \cdot 10^{13}$ kilometara.

U najnovije vrijeme astronomi primjenjuju na jedinicu parsec dekadske višekratnike kilo $= \text{k} = 10^3$ i mega $= \text{M} = 10^6$ (o višekratnicima jedinica vidi odsječak A.2.3), pa tako dobivaju

$$\text{kiloparsec} = \text{kpc} = 2{,}062\,648 \cdot 10^8 \text{ a.j.}$$

$$\text{megaparsec} = \text{Mpc} = 2{,}062\,648 \cdot 10^{11} \text{ a.j.}$$

U vezi s time interesantno je spomenuti da za izražavanje volumena svemirskog prostora astronomi upotrebljavaju jedinicu »kubni megaparsec« ($= \text{Mpc}^3$), naročito za izražavanje vrijednosti veličine »gustoća galaksije« (na primjer ovako: »U jatu postoji 100 galaksija po kubnom megaparseku«).

1.3.4. Sirius ili »siriusna udaljenost« je jedinica duljine 5 puta veća od parseka, dakle

$$\text{sirius} = 5\,\text{pc} = 1\,031\,324 \text{ a.j.,}$$

odnosno oko $1{,}5436 \cdot 10^{14}$ kilometara. U skladu s jednadžbom (1.3-3) jedinicu sirius možemo definirati kao onu udaljenost zvijezda stajačica—Sunce čija zvjezdana paralaksa iznosi $p = 0{,}2''$.

1.3.5. Svjetlosna godina. Ova jedinica duljine definirana je kao ona udaljenost koju svjetlo prođe u praznom prostoru za vrijeme jedne tropske godine. To znači da vrijedi jednadžba

$$\text{svjetlosna godina} = v_0 \cdot t,$$

gdje je $v_0 = 299\,792$ km/s brzina svjetla u vakuumu, a $t = 3{,}155\,693 \cdot 10^7$ s trajanje tropske godine (vidi odsječak A.10.2). Pomoću ova dva podatka računanjem dobivamo

$$\text{svjetlosna godina} = 9{,}460\,51 \cdot 10^{12} \text{ km} = 9{,}460\,51 \cdot 10^{15} \text{ m.}$$

Nepouzdanost ove vrijednosti iznosi oko $\pm 9 \cdot 10^7$ km, tj. oko 90 milijuna kilometara. Relativna nepouzdanost iznosi $\pm 9 \cdot 10^7 \text{ km}/9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km} \approx 10^{-5}$.

Kratica jedinice »svjetlosna godina« nije međunarodno standardizirana. Obično se upotrebljavaju nacionalne kratice, npr. u francuskom govornom području a.l. (année de lumière), u engleskom l.y. (light year), itd. U nekim publikacijama jedinica svjetlosna godina naziva se *urania*.

1.3.6. Međusobni odnosi astronomskih jedinica duljine. Radi pregleda razmotrenih astronomskih i astrofizikalnih jedinica duljine, u tablici B-2 donosimo dvostrane odnose među ovim jedinicama: astronomska jedinica, siriometar, parsec, svjetlosna godina, kilometar. Način primjene tablice možemo razabrati iz ovog primjera: siriometar $= 4{,}848\,137$ parsec.

Napominjemo da je tablica sastavljena na temelju normiranih podataka $p = 8{,}80''$, $a = 6378{,}388$ km koje su prihvatile Međunarodna astronomska unija (1950)

i Međunarodna unija za geodeziju i geofiziku, iako je godine 1964. za dnevnu sunčevu paralaksu normirana nova vrijednost, $p(1964) = 8{,}794''$. Tako smo učinili zato što se posljednjih 70 godina svi podaci u godišnjacima i ostalim publikacijama navode na bazi $p = 8{,}80''$.

Tablica **B-2**

Dvostrani odnosi među astronomskim jedinicama duljine

	astronomska jedinica	siriometar	parsec	svjetlosna godina	kilometar
astronomska jedinica =	1	10^{-6}	$4{,}848137 \cdot 10^{-6}$	$1{,}5803 \cdot 10^{-5}$	$1{,}495042 \cdot 10^{8}$
siriometar =	10^{6}	1	4,848137	$1{,}5803 \cdot 10$	$1{,}495042 \cdot 10^{14}$
parsec =	$2{,}062648 \cdot 10^{5}$	0,2062648	1	3,2596	$3{,}083745 \cdot 10^{13}$
svjetlosna godina =	$6{,}3279 \cdot 10^{4}$	$6{,}3279 \cdot 10^{-2}$	0,30679	1	$9{,}4605 \cdot 10^{12}$
kilometar =	$6{,}68878 \cdot 10^{-9}$	$6{,}68878 \cdot 10^{-15}$	$3{,}242810 \cdot 10^{-14}$	$1{,}0570 \cdot 10^{-13}$	1

Opaska: Odnosi među jedinicama baziraju se na ovim konstantama: sunčeva paralaksa 8,80″, ekvatorski polumjer Zemlje 6378,388 km, brzina svjetla 299792 km/s. Primjer upotrebe tablice: 1 svjetlosna godina = $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ kilometara.

1.4. Mjerne jedinice kuta

1.4.1. Jedinica kuta radijan (kratica: rad) je jedinica kuta u Međunarodnom sistemu jedinica (SI). Radijan je kut između dva polumjera koji na kružnici odrezuju luk čija je duljina jednaka polumjeru. U skladu sa slikom B.1a i definicijskom jednadžbom kuta (1.1-1), jedinica plošnog kuta radijan definirana je, dakle, ovako

$$\text{jedinica kuta SI} = \text{radijan} = \text{rad} = [\alpha]_{\text{M}} = \left(\frac{s}{r}\right)_{s=r} = \frac{r}{r} = 1, \qquad (1.4\text{-}1)$$

tj. pri $s = r$ kut između dva polumjera iznosi $\alpha = 1 = 1$ rad; indeksom M uz uglatu zagradu želimo naglasiti da je riječ o jedinici SI (o načelu građenja jedinica vidi odsječak A.5.1).

Radijan (franc. i engl. radian, njem. Radiant) vrlo je prikladna jedinica u teoretskim razmatranjima, ali za stvarno mjerenje kutova nije, jer se u praksi ne upotrebljavaju mjere i mjerni instrumenti graduirani u radijanima.

1.4.2. Puni kut i pravi kut. Jedinicu kuta »puni kut« (kratica: P) možemo zamisliti ovako (sl. B.1a): polumjer r zakreće se oko svog ishodišta duž čitava oboda

kružnice; pošto se vratio u polazni položaj, opisao je »puni krug«, dakle opisani luk je $s = 2\pi r$, pa je u skladu s definicijskom jednadžbom kuta (1.1-1)

$$\text{puni kut} = \mathrm{P} = \left(\frac{s}{r}\right)_{s=2\pi r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi . \tag{1.4-2}$$

Budući da je prema jednadžbi (1.4-1) radijan = 1, to se gornja relacija može napisati i u obliku

$$\text{puni kut} = \mathrm{P} = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ rad}; \quad \text{rad} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{P}.$$

Odavde se vidi da je radijan $1/2\pi$-ti dio punog kuta.

Za puni kut $\mathrm{P} = 2\pi$ rad predlažu se različiti nazivi. Tako, na primjer, u engleskom jeziku »revolution«, na francuskom »tour«, a na ruskom »oborot«; odgovarajuće kratice bi glasile rev, tr, ob. Prema tome je $\mathrm{P} = \text{rev} = \text{tr} = \text{ob}$ $(= 2\pi$ rad).

Pravi kut (oznaka ⌞) je kut između dva pravca koji se sijeku pod jednakim kutovima. Geometrijski je očigledno da puni kut (P) sadrži tačno četiri prava kuta (⌞). Prema tome uz pomoć jednadžbe (1.4-2) dobivamo

$$\text{pravi kut} = \llcorner = \frac{1}{4}\mathrm{P} = \frac{1}{4}2\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{2}\text{ rad}. \tag{1.4-3}$$

Za stvarno mjerenje kutova pravi kut ⌞ je izvanredno važna jedinica, jer se iz njega izvode sve ostale jedinice kuta, kako seksagezimalne, tako i centezimalne i artiljerijske (vidi odlomke 1.4.3,4,5).

1.4.3. Kutni stupanj, minuta i sekunda dijelovi su pravog kuta, a definirani su ovako

$$\text{kutni stupanj} = 1^\circ = \frac{1}{90}\text{pravi kut} = \frac{1}{90}\llcorner,$$

$$\text{kutna minuta} = 1' = \frac{1}{60}\text{kutni stupanj} = \frac{1}{60}1^\circ,$$

$$\text{kutna sekunda} = 1'' = \frac{1}{60}\text{kutna minuta} = \frac{1}{60}1'.$$

U gornje tri relacije pisali smo 1°, $1'$ i $1''$s brojem 1 samo zato da bi se vidio položaj znakova $^\circ$, $'$ i $''$ koji označuju kutni stupanj, kutnu minutu i kutnu sekundu.

Ove jedinice kuta nazivaju se i »seksagezimalnim jedinicama« (franc. sexagésimal = šezdesetinski), jer je $1^\circ = 60'$ i $1' = 60''$, a neki ih autori nazivaju i »starim kutnim stupnjem«, »starom minutom« itd.

Budući da, prema izloženom, pravi kut ⌞ sadrži 90 kutnih stupnjeva, a puni krug četiri prava kuta, to je očito da je puni kut $\mathrm{P} = 360^\circ$. Podjela punog kuta, tj. kuta koji pripada krugu, na 360° prastarog je porijekla. Kaldejci, koji su imali visoko razvijenu kulturu dok je u Evropi još vladao mrak, svojim su astronomskim motrenjima utvrdili da Sunce prođe tijekom jedne godine (oko 365 dana) puni krug. Da bi mogli mjeriti razmake između zvijezda stajačica, upotrijebili su tu mnogo puta potvrđenu pravilnost vrtnje Sunca oko Zemlje (kako su to oni smatrali) pri definiciji kuta. Vjeruje se da su broj 365 zaokružili na 360 radi jednostavnijeg raču-

nanja, jer pogreška $1/360 - 1/365 \approx 4 \cdot 10^{-5}$ uz tadašnju mjernu netačnost nije dolazila do izražaja pri mjerenju malih kutova.

Dvostrane odnose među nabrojenim jedinicama kuta sadrže tablice **5** i **6** u prilogu knjige; tako je, na primjer, $1° = 3600''$, itd. Tablicu **5** nadopunjujemo ovim odnosima

$$\text{rad} = 57{,}2958° = 57°\,17'\,44{,}8''; \qquad 1° = 0{,}01745329 \text{ rad}.$$

Za najtačnije račune moraju se dakako uzeti odnosi $\text{rad} = 180°/\pi$ i $1° = \pi/180$ rad (vidi tablicu B-3).

Primjer. Izračunajmo koliki luk s pripada kutu 30°, ako je polumjer 150 m (vidi sliku B.1a u odlomku 1.1.2)! Luk s izračunat ćemo pomoću jednadžbe (1.1-1), tj. pomoću $s = r\alpha$. Uvrštenjem zadanih vrijednosti dobivamo $s = r\alpha = 150\ \text{m} \cdot 30° = 4500\ \text{m} \cdot (°)$ (ovdje smo oznaku kutnog stupnja stavili u zagradu zato da bi se ona istakla kao ravnopravna jedinica metru s kojim se u gornjem rezultatu množi). Budući da je $1° = \text{rad}/57{,}3$, slijedi dalje

$$s = 4500\,\text{m} \cdot (°) = 4500\,\text{m} \cdot \text{rad}/57{,}3 = 78{,}5\,\text{m} \cdot \text{rad} = 78{,}5\,\text{m},$$

jer je rad = 1, kako nam govori jednadžba (1.4-1). Iz ovog primjera možemo steći pouku da je već pri uvrštavanju vrijednosti kuta najpouzdanije da se on izrazi u radijanima.

1.4.4. Metričke jedinice kuta, nazvane i »centezimalne jedinice kuta« (franc. centésimal = stotinski) ili »nove jedinice«, definirane su na principu 1:100, tj. ovako

$$\text{grad} = \text{gradus} = \text{gon} = \frac{1}{100}\,\text{pravi kut} = \frac{1}{100}\,\llcorner = 1^{g},$$

$$\text{metrička minuta} = \frac{1}{100}\,1^{g} = \text{centigon} = 1^{cg} = 1^{c},$$

$$\text{metrička sekunda} = \frac{1}{100}\,1^{cg} = \frac{1}{100}\,1^{c} = 10^{-4g} = 1^{cc}.$$

Ovdje smo naveli nekoliko naziva i skraćenica za iste jedinice, jer se svi oni upotrebljavaju u literaturi, a nisu međunarodno standardizirani. Čini se da je za »metrički kutni stupanj« (= novi kutni stupanj = novi gradus = grad = centezimalni kutni stupanj) najprikladniji naziv »gon«, koji je godine 1949. predložio *H. Bock*. Kratica jedinice gon je ^{g}, tj. malo slovo g podignuto kao eksponent, što je analogno položaju znakova za jedinice kuta u odlomku 1.4.3. U jednom dijelu francuske i engleske literature upotrebljava se i kratica gr koja dolazi od »grad«.

Oznake 1^{c} i 1^{cc} za metričke kutne minutu i metričke kutne sekunde u skladu su s decimalnim višekratnicima koje smo nanizali u tablici A-1. Budući da je c = = centi = 1/100, to je očito

$$\text{metrička minuta} = 0{,}01\ \text{gon} = \text{c} \cdot \text{gon} = \text{cg},$$

$$\text{metrička sekunda} = 0{,}01\ \text{cgon} = \text{c} \cdot \text{cgon} = \text{ccg},$$

dakle, metrička sekunda = centi · centigon = 10^{-4} gon. Razlika prema normalnom pisanju višekratnika (npr. m, k, M, itd.; vidi tablicu A-1) jest u tome što se u svih tih jedinica kuta skraćenica jedinice ne piše normalno u retku, već povi-

Tablica **B-3**

Dvostrani odnosi među temeljnim jedinicama kuta

Jedinica	Kratica	radijan, rad	pravi kut, ∟	kutni stupanj, 1°	gon, 1ᵍ
radijan =	rad	**1**	$\frac{2}{\pi} = 0{,}6366198$	$\frac{180}{\pi} = 57{,}2958$	$\frac{200}{\pi} = 63{,}66198$
pravi kut =	∟	$\frac{\pi}{2} = 1{,}570796$	**1**	**90**	**100**
kutni stupanj =	1°	$\frac{\pi}{180} = 0{,}01745329$	$\frac{1}{90} = 0{,}0111111$	**1**	$\frac{100}{90} = 1{,}111111$
gon =	1ᵍ	$\frac{\pi}{200} = 0{,}01570796$	**0,01**	**0,9**	**1**

Tablica **B-4**

Dvostrani odnosi među artiljerijskim, navigacijskim i nekim drugim jedinicama kuta

Jedinica	Kratica	radijan, rad	pravi kut, ∟	art. hiljadita, m_a	hiljadita, m	rumb (morski)
radijan =	rad	**1**	0,6366198	1018,592	954,9297	5,092958
pravi kut =	∟	1,570796	**1**	**1600**	**1500**	**8**
artiljerijska hiljadita =	m_a	$9{,}817477 \cdot 10^{-4}$	$\mathbf{6{,}25 \cdot 10^{-4}}$	**1**	**0,9375**	**0,005**
hiljadita =	m	$1{,}047198 \cdot 10^{-3}$	$6{,}66667 \cdot 10^{-4}$	1,066667	**1**	$5{,}333333 \cdot 10^{-3}$
morski rumb (nautička crtica) =		0,1963495	**0,125**	**200**	**187,5**	**1**

šeno — po obliku kao da je eksponent. Napominjemo da jedinice kuta ne ulaze u nadležnost Generalne konferencije za mjere i utege; jedino je radijan i steradijan (jedinica prostornog kuta) Generalna konferencija propisala u okviru SI.

Primjer 1. Izračunajmo u kakvom je odnosu jedinica kuta miligon (1^{mg}) prema jedinicama 1^c i 1^{cc}, tj. prema metričkoj (centezimalnoj) minuti i sekundi. Budući da je miligon $= 1^{mg} = 0{,}001$ gon, a gon $= 100^c$ i gon $= 10^4{}^{cc}$, to je očito

$$\text{miligon} = 1^{mg} = 0{,}001 \text{ gon} = 0{,}001 \cdot 100^c = 0{,}1^c,$$

$$\text{miligon} = 1^{mg} = 0{,}001 \cdot 10\,000^{cc} = 10^{cc}.$$

Razmotrene centezimalne (metričke) jedinice kuta nisu samo teoretska mogućnost već se primjenjuju i u praksi, na primjer u fotogrametriji i u znatnom dijelu geodezije. Nasuprot tome, u astronomiji i pomorskoj navigaciji gotovo se isključivo upotrebljavaju seksagezimalne jedinice kuta iz odlomka 1.4.3.

Razlaganja u odlomcima 1.4.1,2,3,4 možemo sažeti u pogledu definicije osnovnih jedinica kuta SI, seksagezimalnog i centezimalnog sistema u ovo:

$$1\,\text{rad} = \frac{2}{\pi}\llcorner\,; \quad 1^\circ = \frac{1}{90}\llcorner\,; \quad 1^g = \frac{1}{100}\llcorner\,.$$

Ovdje, dakako, simbol $\llcorner$ označuje pravi kut. Međusobne odnose ovih jedinica detaljno prikazuje tablica B-3, a međusobne odnose nekih drugih do sada razmotrenih jedinica tablice **5** i **6** u prilogu knjige. Za neposrednu primjenu korisno je zabilježiti ove odnose:

$$\text{rad} = 63^g\,66^c\,19{,}8^{cc}; \qquad 1^g = 0{,}015\,707\,96\,\text{rad};$$

$$1^g = 0^\circ\,54'; \qquad 1^c = 0'\,32{,}4''; \qquad 1^{cc} = 0{,}324''.$$

Primjer 2. Izračunajmo koliki dio pravog kuta ($\llcorner$) je jedna metrička (centezimalna) sekunda 1^{cc}! Na početku ovog odlomka definirali smo gon sa $1^g = 0{,}01\,\llcorner$, a u primjeru 1 smo izračunali da je $1^{mg} = 10^{cc}$, što znači da je gon $= 1\,000^{mg} = 1\,000 \cdot 10^{cc} = 10\,000^{cc}$. Iz $\llcorner = 100^g = 100$ gon slijedi konačno $\llcorner = 100 \cdot 10\,000^{cc} = 1\,000\,000^{cc}$, tj. pravi kut sadrži milijun centezimalnih sekundi.

1.4.5. Artiljerijske i pomorske jedinice kuta. Neki kutomjeri baždareni su u jedinici kuta »hiljadita« (franc. millième Rimailho), koja je definirana ovako

$$\text{hiljadita} = \text{m} = \frac{1}{1500}\llcorner = \frac{1}{6000}\text{P},$$

gdje slovo P označuje puni kut (vidi odlomak 1.4.2). Naziv »hiljadita« potječe otuda što je duljina luka koji odgovara ovom kutu približno jednaka tisućinki polumjera. Kutomjeri graduirani u hiljaditima razdijeljeni su na 60 glavnih podjela, a vrijednost kutova se izražava troznamenkastim brojem. Prva znamenka označuje broj glavnih podjela, a druge dvije broj hiljaditih.

U artiljeriji se upotrebljava »artiljerijska hiljadita« (franc. millième d'artillerie, engl. artillery mil), koja je definirana ovako

$$\text{artiljerijska hiljadita} = \text{m}_a = \frac{1}{1600}\llcorner = \frac{1}{6400}\text{P}.$$

U pomorskoj navigaciji i u meteorologiji ponekad se upotrebljava jedinica kuta rumb

$$\text{morski rumb} = \text{nautička crtica} = \frac{1}{8}\llcorner = 11{,}25° = 12{,}5^{g}$$

$$\text{meteorološki rumb} = \frac{1}{4}\llcorner = 22{,}5° = 25^{g}.$$

Dvostrane odnose među jedinicama kuta hiljadita (m), artiljerijska hiljadita (m_a), rumb (morski), pravi kut ($\llcorner$) i radijan (rad) sadrži tablica B-4. Tako je, na primjer, $m_a = 0{,}9375$ m (tačno), radijan = 954,9297 m. Upotrebljava se i jedinica Dez = 10°.

1.5. Metričke jedinice površine

1.5.1. Jedinica površine kvadratni metar (kratica: m^2). U odsječku A.5.1 objasnili smo kako se gradi sistem jedinica, tj. kako se jedinice izvode iz osnovnih. Fizikalnu veličinu površina A možemo zamisliti kao pravokutnik čije su stranice a i b, pa je površina tog pravokutnika $A = ab$. Tu jednadžbu možemo po principu $G = \{G\}\,[G]$ (vidi odsječak A.5.1) pisati u obliku $\{A\}\,[A]_M = \{a\}\,[a]_M\,\{b\}\,[b]_M$, gdje indeksi M označuju da je riječ o jedinicama Međunarodnog sistema jedinica (SI). Budući da u svakom sistemu jedinica postoji samo jedna osnovna jedinica duljine, a u SI to je metar, dakle $[a]_M = [b]_M = [l]_M =$ metar, to možemo dalje pisati

$$\{A\}\,[A]_M = \{a\}\cdot\{b\}\,[l]_M\cdot[l]_M = \{a\}\,\{b\}\,[l]^2. \qquad (1.5\text{-}1)$$

Budući da su prema izvođenju u odlomku A.5.1 jedinice nekog sistema jedinica koherentne samo u slučaju kada su veličinske i brojčane jednadžbe identične po obliku (jednadžba A.5.1-6), to je prema gornjem izrazu (1.5-1) ovom uvjetu udovoljeno u slučaju ako je $[A]_M = [l]^2_M =$ metar^2, tj. metar na kvadrat. Prema tome je jedinica površine u Međunarodnom sistemu jedinica (SI)

$$\text{jedinica površine SI} = \text{metar}^2 = \text{m}^2 = \text{kvadratni metar}. \qquad (1.5\text{-}2)$$

Kvadratni metar možemo dakle zamisliti kao površinu kvadrata čiji su bridovi međusobno jednaki i dugački tačno 1 metar.

1.5.2. Ostale metričke jedinice površine. Na glavnu jedinicu površine SI kvadratni metar (m^2) mogu se primjenjivati dekadski i decimalni višekratnici kao i na druge jedinice (vidi npr. odlomak 1.2.2). No pri tom je potrebna povećana pažljivost, jer u primjeni višekratnika (prefiksa) postoji stanovit dogovor koji je ozakonjen u propisu kako se pišu kratice jedinica. Razmotrimo to na dva primjera.

Primjer 1. Koliko kvadratnih centimetara sadrži jedan kvadratni metar? Znamo da je centimetar = cm = 10^{-2} m = 0,01 m, odnosno m = 100 cm. Ako tu relaciju cm = 10^{-2} m uvrstimo u jednadžbu (1.5-2), tj. u jednadžbu »kvadratni metar = m^2 = metar × metar«, dobivamo

$$\text{m}^2 = \text{m}\cdot\text{m} = (100\ \text{cm})\cdot(100\ \text{cm}) = 100\cdot100\cdot\text{cm}\cdot\text{cm}. \qquad (1.5\text{-}3)$$

Umnožak cm·cm nazivamo »kvadratni centimetar« i označujemo sa

$$\text{kvadratni centimetar} = \text{cm}^2 = (\text{cm})^2,$$

Tablica **B-5**

Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama površine

Jedinica		Kratica	mm^2	cm^2	dm^2	m^2	a	ha	km^2
kvadratni milimetar	=	mm^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}
kvadratni centimetar	=	cm^2	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
kvadratni decimetar	=	dm^2	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
kvadratni metar	=	m^2	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
ar	=	a	10^8	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}
hektar	=	ha	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}
kvadratni kilometar	=	km^2	10^{12}	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1

tj. jedinicu površine kvadratni centimetar možemo zamisliti kao površinu kvadrata čiji su bridovi međusobno jednaki i dugački točno 1 centimetar. Prema tome izraz (1.5-3) možemo pisati dalje ovako

$$m^2 = 10000\ (cm)^2 = 10^4\ cm^2,$$

što znači da kvadratni metar sadrži deset tisuća kvadratnih centimetara, $m^2 = 10000\ cm^2$.

Primjer 2. Koliko kvadratnih kilometara sadrži jedan kvadratni milimetar? Najprije u odnosu prema kvadratnom metru utvrdimo što znače jedinice »kvadratni kilometar« i »kvadratni milimetar«. U skladu s razlaganjem u primjeru 1 vrijedi

$$\text{kvadratni kilometar} = (km)^2 = (1000\ m)^2 = 10^6\ m^2 = km^2,$$

$$\text{kvadratni milimetar} = (mm)^2 = (0{,}001\ m)^2 = 10^{-6}\ m^2 = mm^2.$$

To znači da su *dogovorene* i zatim standardizirane kratice ovih jedinica: km^2 ($= 10^6\ m^2$) i mm^2 ($= 10^{-6}\ m^2$). Podijelimo li međusobno gornje dvije jednadžbe, dobivamo odgovor na postavljeno pitanje:

$$\frac{mm^2}{km^2} = \frac{(mm)^2}{(km)^2} = \frac{10^{-6}\,m^2}{10^6\,m^2} = 10^{-12}.$$

Analogno se izvode i označuju ostale metričke jedinice površine, čije smo međusobne odnose svrstali u tablicu B-5. Dvostrane odnose s angloameričkim i nekim metričkim jedinicama sadrže tablice **7**, **8** i **9** u prilogu knjige. Građa angloameričkih jedinica površine objašnjena je u odsječku 11.3.

1.5.3. Jedinice ar i hektar. Jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. dopušta da se uz jedinice navedene u prošla dva odlomka upotrebljavaju i ove jedinice površine

$$ar = a = 100\ m^2,$$

$$\text{hektar} = ha = 100\ ar = 10000\ m^2.$$

Ove jedinice dopuštene su i u drugim »metričkim« zemljama, jer su se u poljoprivredi uvriježile neposredno nakon francuske revolucije (vidi odsječak A.6.2).

Primjer. Televizija i novine donijeli su vijest da je prinos pšenice na njivama neke zadruge iznosio 52 kvintala po hektaru. Izrazimo tu vrijednost (52 q/ha) jedinicama SI. U odsječku 3.3 možemo pronaći da je kvintal (metrička centa) = q = 100 kg, dakle stotinu kilograma. Budući da je hektar = ha = 10000 m^2, prinos pšenice je iznosio

$$52\,\frac{q}{ha} = 52\,\frac{100\,kg}{10000\,m^2} = 0{,}52\,\frac{kg}{m^2},$$

tj. oko pola kilograma pšenice po kvadratnom metru.

Dvostrane odnose jedinica ar i hektar prema drugim metričkim jedinicama sadrži tablica B-5, a analogne odnose prema angloameričkim jedinicama površine tablica **7** u prilogu knjige.

1.5.4. Nuklearne jedinice površine. U nuklearnoj fizici se katkada za mjerenje udarnog presjeka nuklearnih reakcija i drugih pojava upotrebljava jedinica površine

$$\text{barn} = 10^{-28}\ m^2 = 10^{-24}\ cm^2,$$

a primjenjuju se i tisuću te milijun puta manje jedinice

$$\text{milibarn} = \text{mbarn} = 10^{-31}\ m^2 = 10^{-35}\ cm^2,$$

$$\text{mikrobarn} = \mu\text{barn} = 10^{-34}\ m^2 = 10^{-38}\ cm^2.$$

Neki upotrebljavaju i jedinicu površine »kvadratni fermi« (o jedinici duljine fermi = = femtometar = 10^{-15} m vidi kraj odlomka 1.2.2), tj.

$$\text{kvadratni fermi} = \text{kvadratni femtometar} = (\text{fm})^2 = \text{fm}^2 = 10^{-30}\ \text{m}^2.$$

Veze između $\text{fm}^2 = (\text{fm})^2$, barna i milibarna su ove:

$$\text{barn} = 100\ \text{fm}^2;\ \text{milibarn} = 0{,}1\ \text{fm}^2 = 10^{-31}\ \text{m}^2.$$

Ove jedinice nisu međunarodno standardizirane. To je potpuno razumljivo: barn i fermi nepotrebne su jedinice površine, jer na raspolaganju stoji širok raspon decimalnih višekratnika jedinica (vidi tablicu A-1).

1.5.5. Neke starije jedinice površine. U prošlosti, prije a i nakon usvajanja Konvencije o metru (vidi odsječke A.6.2, 3), upotrebljavalo se za mjerenje površine mnoštvo različitih jedinica, koje su s vremenom iščezle ili su se unificirale snagom državnih zakonodavstava. U velikom dijelu Jugoslavije seljaci još i danas upotrebljavaju pri kupoprodaji zemlje neke jedinice površine koje su većinom austrougarskog porijekla. Stoga ćemo navesti vrijednosti nekoliko takvih jedinica u kvadratnim metrima, odnosno u arima ili hektarima:

bečki četvorni (kvadratni) hvat = □ = 3,596 65 m^2,

jutro (ral) = 1600□ = 5754,64 m^2 = 0,575 464 ha,

madžarsko jutro = 1200□ = 4315,98 m^2 = 0,431 598 ha,

dunum = 10 ar = 1000 m^2 = 0,1 hektar,

lanac = 2000□ = 7193,3 m^2 = 0,719 33 hektara.

1.6. Jedinice prostornog kuta

1.6.1. Jedinica prostornog kuta steradijan (međunarodna kratica: sr; u Njemačkoj i Italiji se unatoč tome obično upotrebljava kratica str, a u SSSR na ruskom pismu ster) jedinica je prostornog kuta u Međunarodnom sistemu jedinica (SI). Steradijan je prostorni kut čiji se vrh nalazi u središtu kugle, a na njenoj plohi omeđuje površinu jednaku kvadratu polumjera kugle (sl. B.2).

Ako je polumjer kugle r, onda — prema navedenoj definiciji — prostorni kut 1 steradijan na njoj omeđuje površinu $A = r^2$. Uvrstimo li ove podatke u jednadžbu (1.1-3), kojom smo u odlomku 1.1.3 definirali veličinu »prostorni kut« Ω, dobivamo

$$\text{jedinica prostornog kuta SI} = \text{steradijan} = \text{sr} = [\Omega]_{\text{M}} = \left(\frac{A}{r^2}\right)_{A=r^2} = 1, \qquad (1.6\text{-}1)$$

tj. pri $A = r^2$ je $\Omega = 1 = 1$ steradijan. Indeksom M uz uglatu zagradu željeli smo naglasiti da je riječ o jedinici SI. Steradijan je zbog steradijan = 1 »brojčana jedinica«, pa za nju vrijede posve analogna rasuđivanja kakva smo imali za radijan u odlomku 1.4.3 (brojčani primjer).

1.6.2. Ostale jedinice prostornog kuta. Neki autori upotrebljavaju uz steradijan i jedinicu »puni prostorni kut«, tj. prostorni kut uokolo tačke ($\alpha = 2\pi \times$ $\times$ rad), koji nazivaju sphere (engleski) ili spat (u Njemačkoj):

$$\text{sphere} = \text{spat} = \text{sp} = 4\pi\,\text{sr}.$$

Do ove jedinice dolazi se pomoću jednadžbe (1.1-4), ako se u nju uvrsti $\alpha = 2\pi$ rad.

U literaturi ponekad naiđemo, doduše vrlo rijetko, i na ove jedinice prostornog kuta:

$$\text{stari kvadratni stupanj} = \square^2 = (1^\circ)^2 = (\pi/180)^2\ \text{sr},$$

$$\text{kvadratni gon} = (1^g)^2 = (\pi/200)^2\ \text{sr},$$

gdje su 1° i 1^g kutni stupanj i gon (gradus), tj. jedinice plošnog kuta (vidi odsječak 1.4). Strani nazivi za jedinicu »stari kvadratni stupanj« jesu: engleski square degree, francuski degré carré, njemački Quadrat-Altgrad, dok su odgovarajući nazivi za »kvadratni gon«: square grade, grade carré i Quadrat-Neugrad (Quadrat-Gon). Dvostrane odnose ovih jedinica sa steradijanom sadrži ova tablica:

	$(1^\circ)^2$	$(1^g)^2$	sr
$(1^\circ)^2$ =	1	1,234568	$3{,}046174 \cdot 10^{-4}$
$(1^g)^2$ =	0,81	1	$2{,}467401 \cdot 10^{-4}$
sr =	3282,806	4052,847	1

Primjer: Koliko steradijana ima prostorni kut $\Omega = 500\ (1^g)^2$? Iz gornje tablice slijedi računanjem $\Omega = 500 \cdot 2{,}467401 \cdot 10^{-4}$ sr $= 0{,}1233701$ sr.

1.7. Metričke, pomorske i drvne jedinice volumena

1.7.1. Jedinica volumena kubni metar (kratica: m^3). Posve analogno kao što smo u odlomku 1.5.1 izveli jedinicu površine SI kvadratni metar (m^2), možemo izvesti i jedinicu volumena u Međunarodnom sistemu jedinica

$$\text{jedinica volumena SI} = \text{metar}^3 = \text{m}^3 = \text{kubni metar}. \qquad (1.7\text{-}1)$$

Kubni metar možemo sebi predočiti kao volumen što ga zauzima kocka čiji su bridovi dugački tačno 1 metar, tj. kubni metar $= \text{m} \times \text{m} \times \text{m} = \text{m}^3$.

1.7.2. Ostale metričke jedinice volumena. Na glavnu jedinicu volumena kubni metar (m^3) mogu se primjenjivati dekadski i decimalni višekratnici (prefiksi) iz tablice A-1. No pri tom je potreban stanovit oprez, slično kao kod jedinica površine (vidi odlomak 1.5.2). Pokažimo to na nekoliko primjera.

Tablica **B-6**

Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama volumena

Jedinica		Kratica	mm^3	cm^3	cl	dl	l (dm^3)	hl	m^3
kubni milimetar	=	mm^3	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-9}
kubni centimetar	=	cm^3	10^3	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-6}
centilitar	=	cl	10^4	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-5}
decilitar	=	dl	10^5	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-4}
litar (≡ kubni decimetar)	=	l (dm^3)	10^6	10^3	10^2	10^1	1	10^{-2}	10^{-3}
hektolitar	=	hl	10^8	10^5	10^4	10^3	10^2	1	10^{-1}
kubni metar	=	m^3	10^9	10^6	10^5	10^4	10^3	10^1	1

Primjer 1. Koliko kubnih decimetara sadrži jedan kubni metar? Iskorištavamo iskustvo iz primjera 1 u odlomku 1.5.2 i računamo ovako: 1 metar sadrži 10 decimetara (d = 0,1; dakle je dm = 0,1 m), tj. metar = 10 decimetara, odnosno skraćeno m = 10 dm. Ako tu relaciju uvrstimo u jednadžbu (1.7-1), dobivamo

$$\text{kubni metar} = \text{m}^3 = (10\ \text{dm})^3 = 1000\ (\text{dm})^3 = 1000\ \text{dm}^3.$$

To znači da je dm^3 u stvari »stenogram« od $(\text{dm})^3$, tj. $\text{dm}^3 = (\text{dm})^3$.

Primjer 2. Koliko kubnih centimetara sadrži jedan kubni kilometar? Razjasnimo najprije što znači svaka od tih jedinica. U skladu s izvođenjem u primjeru 1 očito je

$$\text{kubni centimetar} = \text{cm}^3 = (\text{cm})^3 = (0{,}01\ \text{m})^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3,$$

jer je centimetar = cmetar = 0,01 m (c = centi = 0,01). Analogno tome je

$$\text{kubni kilometar} = \text{km}^3 = (\text{km})^3 = (1000\ \text{m})^3 = 10^9\ \text{m}^3,$$

jer je kilometar = kmetar = 1000 metara = 10^3 m. Prema tome odgovor na postavljeno pitanje glasi

$$\frac{\text{km}^3}{\text{cm}^3} = \frac{(\text{km})^3}{(\text{cm})^3} = \frac{10^9\ \text{m}^3}{10^{-6}\ \text{m}^3} = 10^{12}.$$

Analogno se izvode i označuju ostale metričke jedinice volumena, čije smo međusobne odnose svrstali u tablicu B-6. Dvostrane odnose s angloameričkim i nekim metričkim jedinicama volumena sadrže tablice **10**, **11** i **12** u prilogu knjige. Struktura angloameričkih jedinica volumena objašnjena je u odsječku 11.4.

1.7.3. Litar i litarske jedinice. Zaključkom dvanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege, održanog godine 1964, jedinica volumena »litar« iznova je definirana, i to ovako (vidi sl. A.25)

$$\text{litar (l)} = \text{kubni decimetar} = \text{dm}^3 \text{ (tačno)},$$

tj. riječ litar samo je poseban naziv za kubni decimetar. Generalna konferencija stavila je tom prilikom van tečaja odnos litar = 1,000 028 dm^3, koji je do tada bio na snazi, te preporučila da se naziv litar ne upotrebljava pri izražavanju rezultata vrlo preciznih volumetrijskih mjerenja. U ovoj knjizi dosljedno je primijenjen odnos litar = dm^3 (tačno). Iznimka je učinjena jedino u tablici **35** u prilogu knjige, jer tako zahtijeva priroda te tablice.

Povijest promjenljivog odnosa litar/dm^3 vrlo je zanimljiva, ali je ipak — povijest. Radoznali čitalac naći će objašnjenje u članku *H. Moreau*a, citiranom na kraju knjige.

U primjeni su, naročito u farmaciji, te općenito za mjerenje tekućina, mnoge jedinice izvedene iz litra pomoću decimalnih i dekadskih višekratnika (tablica A-1):

$$\begin{aligned}
\text{mikrolitar} &= \mu\text{l} = 10^{-6}\ \text{dm}^3 = 10^{-9}\ \text{m}^3,\\
\text{mililitar} &= \text{ml} = 10^{-3}\ \text{dm}^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3,\\
\text{centilitar} &= \text{cl} = 10^{-2}\ \text{dm}^3 = 10^{-5}\ \text{m}^3,\\
\text{decilitar} &= \text{dl} = 10^{-1}\ \text{dm}^3 = 10^{-4}\ \text{m}^3,\\
\text{hektolitar} &= \text{hl} = 10^{2}\ \text{dm}^3 = 0{,}1\ \text{m}^3.
\end{aligned}$$

Neke od tih jedinica prikazane su u dvostranoj tablici B-6. Odgovarajuće mnogobrojne i raznovrsne angloameričke jedinice volumena objašnjene su u odsječku 11.4.

1.7.4. Pomorska jedinica volumena. Jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. dopušta da se u pomorskom prometu upotrebljava jedinica volumena

$$\text{brodska tona} = 2{,}832\ \text{m}^3.$$

Usporedimo li ovu jedinicu s angloameričkom pomorskom jedinicom volumena register ton (odlomak 11.4.6), vidimo da je stvarno

$$\text{brodska tona} = \text{register ton} = 100\ \text{cubic foot}.$$

Pri ovom izjednačenju učinjena je relativna pogreška oko 10^{-4}, što je za brodske terete beznačajno, pa je zato zakonodavac propisao zaokruženi odnos brodska tona/$\text{m}^3 = 2{,}832$.

1.7.5. Jedinice za drvo. Citirani jugoslavenski zakon dopušta da se u prometu drvom može upotrebljavati jedinica

$$\text{prostorni metar} = \text{prm} = \text{složaj drva u 1 m}^3\ \text{prostora}.$$

Cjepanice su pri tom složene u kocku čiji su bridovi dugački 1 metar. Mimo zakona upotrebljava se i jedinica

$$\text{kubni (metrički) hvat} = 4\ \text{prm}.$$

U Francuskoj i u nekim anglosaskim zemljama upotrebljavaju se i ove jedinice za drvo

$$\text{stère (engl. stere)} = \text{s} = \text{prostorni metar} = \text{prm},$$
$$\text{décastère} = 10\ \text{prostornih metara}.$$

Strukturu nekih angloameričkih jedinica za drvo i njihove odnose prema m^3 (prm) opisuje odlomak 11.4.7.

2. Vremenske i kinematičke veličine i jedinice

2.1. Vremenske veličine

2.1.1. Vrijeme jedna je od osnovnih veličina, analogna duljini, masi, jakosti električne struje. Predodžbu o vremenu dobili smo u poglavlju A.10, koju ovdje možemo rezimirati ovako: fizikalna veličina vrijeme t je naš misaoni model prirodne pojave koja se u životu manifestira starenjem, događajima što se nižu jedan za drugim itd. Pojam vremena iskustvene je prirode i na taj je način ušao u čovjekove životne djelatnosti. Predodžbu o vremenu stječemo usporedbom. Veličina vrijeme od koristi je kad se može *uspoređivati s trajanjem neke pojave.*

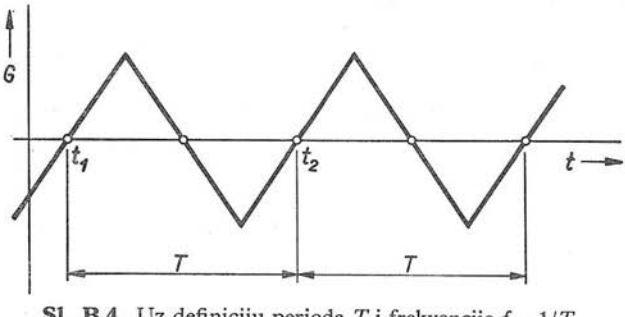
Trajanja, tj. »vremenski razmaci« (intervali), mogu se zbrajati i oduzimati. Vrijeme uvijek računamo u odnosu prema nekoj zadanoj »vremenskoj tački« koju smatramo ishodištem. Kad kažemo da jedan titraj traje vrijeme T (sl. B.4), onda time vremensko ishodište postavljamo na početak titraja, tj. trajanje titraja označujemo kao razliku vremena $T = t_2 - t_1$ između vremenskih tačaka t_2 i t_1 unutar kojih je došlo do jednog potpunog titraja. Pri tom se vremensko ishodište može postaviti u bilo kojem momentu prije t_1.

Jedinica vremena u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je sekunda (kratica: s; vidi odlomak A.10.1.3). Ostale jedinice vremena razmotrene su u odsječku B.2.3.

2.1.2. Period je vremenska veličina koja karakterizira titranje, tj. ponavljanje neke pojave. Ta pojava može biti: njihanje njihala, titranje strune, vibriranje temelja, gibanje klipa motora s unutrašnjim sagorijevanjem, mijenjanje magnetskog polja u električkom stroju itd.

Titranje je *periodičko* ako se vrijednost razmatrane fizikalne veličine, koja se mijenja u toku vremena, ponavlja nakon jednakog vremenskog razmaka (vremenskog perioda). Taj vremenski period nazivamo: *period titranja* ili kraće *period.* Označujemo ga slovom T, dakle

$$\text{period} = T.$$



Sl. B.4. Uz definiciju perioda T i frekvencije $f = 1/T$

Budući da je period T stanovito vrijeme, u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) mjerimo ga jedinicom vremena sekunda (s).

2.1.3. Frekvencija titranja je veličina recipročna periodu T, što možemo napisati u obliku jednadžbe

$$\text{frekvencija } f = \frac{1}{\text{period } T}; \quad f = \frac{1}{T}. \tag{2.1-1}$$

Budući da je jedinica perioda T u Međunarodnom sistemu sekunda, to je jedinica frekvencije $1/\mathrm{s} = \mathrm{s}^{-1}$, tj. recipročna sekunda. Ova jedinica zove se hertz = Hz = $= 1/\mathrm{s} = \mathrm{s}^{-1}$.

2.2. Neke kinematičke veličine

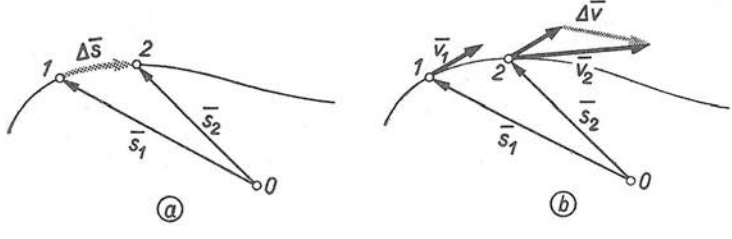
2.2.1. Brzina. Fizikalna veličina »brzina« v oslanja se na pojam koji nazivamo gibanje. Brzina je jedna od opisnih značajki gibanja. O gibanju imamo *iskustvene* predodžbe, na primjer: dva tijela gibaju se jednako brzo kad u jednakim vremenskim razmacima prijeđu jednake udaljenosti. Za dva tijela kažemo da imaju različite brzine v_1 i v_2 kad u jednakim vremenima t prijeđu nejednake putove s_1 i s_2. U tom se slučaju brzine odnose kao prijeđene udaljenosti, tj. $v_1 : v_2 = s_1 : s_2$. Prijeđu li dva tijela isti put s tijekom različitih vremena t_1 i t_2, brzine se odnose obrnuto od trajanja, dakle $v_1 : v_2 = t_2 : t_1$. Pri ovim rasuđivanjima prešutno se pretpostavljalo da su pri gibanjima pojedine brzine konstantne, a putanje pravci. Na temelju opisanih iskustava, brzina jednolikog gibanja v definirana je omjerom

$$\text{brzina } v = \frac{\text{duljina puta } s}{\text{vrijeme } t}; \quad v = \frac{s}{t}. \tag{2.2-1}$$

U općenitom slučaju brzina je *vektorska veličina* $\boldsymbol{v}$ definirana kao prva derivacija radijus-vektora s po vremenu t, što nam ilustrira slika B.5a. Zamislimo da se tačka giba krivuljom *12*. U toku vremenskog intervala $t_2 - t_1 = \Delta t$ tačka se pomakla iz *1* u *2*, a vektorska razlika položaja tačke iznosi $\Delta s = s_2 - s_1$. U bilo kojem trenutku t brzina iznosi

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{2.2-2}$$

Jednadžba (2.2-1) najjednostavniji je oblik jednadžbe (2.2-2), jer vrijedi samo za jednoliko pravocrtno gibanje.



Sl. B.5. Uz definiciju brzine i ubrzanja

Jedinica brzine v u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je metar u sekundi (kratica: m/s). O drugim jedinicama brzine govori se u odsječku 2.4.

2.2.2. Ubrzanje je također vektorska veličina, a definirana je kao vremenska derivacija brzine (vidi sliku B.5b)

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.2-3}$$

Ako je riječ o pravocrtnom jednoliko ubrzanom gibanju, tj. o gibanju sa $\boldsymbol{a} = \text{const}$, jednadžba (2.2-3) prelazi u najjednostavniji skalarni oblik

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \tag{2.2-4}$$

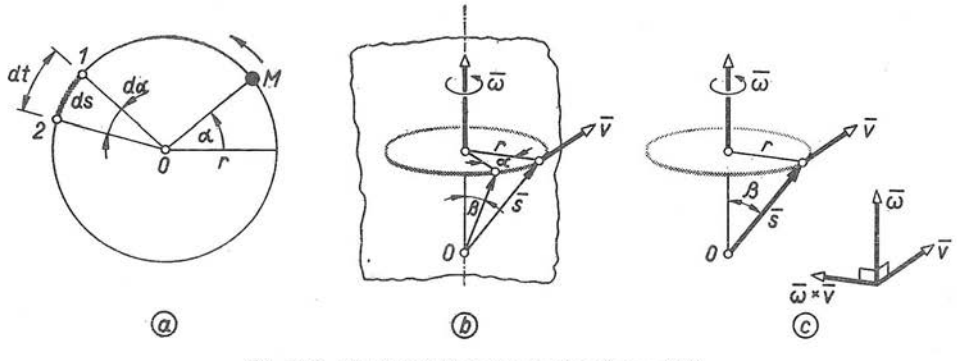
što je ujedno i jednadžba za računanje »prosječnog« ubrzanja.

Jedinica ubrzanja a u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je metar u sekundi na kvadrat (kratica: $\mathrm{m/s^2}$). Ostale jedinice ubrzanja opisane su u odlomku B.2.4.6.

Primjer. Automobil je 15 sekundi nakon starta postigao brzinu 100 km/h. Izračunajmo koliko je iznosilo prosječno ubrzanje! Poslužit ćemo se jednadžbom (2.2-4) u koju ćemo staviti $v_2 - v_1 = 100\ \mathrm{km/h} - 0 = 100 \cdot 1000\ \mathrm{m/3600\ s} = 27{,}8\ \mathrm{m/s}$ i $t_2 - t_1 = 15$ s. Računanjem dobivamo prosječno ubrzanje $a = 27{,}8\ \mathrm{ms^{-1}} : 15\ \mathrm{s} = 1{,}85\ \mathrm{m/s^2}$.

2.2.3. Kutna brzina (rotancija). Slika B.6a prikazuje jednoliku vrtnju tačke M u udaljenosti r od čvrstog središta vrtnje O; to može biti, na primjer, pogled na kraj vratila nekog rotacijskog stroja. Vrtnja vratila je jednolična, što znači da je brzina v mrlje M na površini vratila konstantna, dakle $v = \text{const}$ (pretpostavljamo da smo to utvrdili eksperimentalno pomoću indukcijskog davača koji miruje neposredno uz osovinu; pri tom oznaka M predstavlja permanentni magnet koji u davaču zbog $U = \text{const} \cdot v$ inducira konstantan napon U, ako je obodna brzina v vratila konstantna). U toku diferencijala vremena $\mathrm{d}t$ tačka M zakrene se zajedno s vratilom za $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$. Budući da je prema slici B.6a polumjer vratila r, prevaljeni put tačke možemo izraziti i ovako: $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\alpha$ [vidi jednadžbu (1.1-1) kojom je definirana veličina »kut«], gdje je $\mathrm{d}\alpha$ diferencijal kuta koji je opisao polumjer r da bi iz tačke *1* stigao u *2*. Izjednačimo li $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t = r\,\mathrm{d}\alpha$, dobivamo za kružno gibanje odnos $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = v/r$. Fizikalna veličina $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ najčešće se naziva

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \text{kutna brzina}, \tag{2.2-5}$$



Sl. B.6. Uz definiciju kutne brzine (rotancije) ω

a upotrebljavaju se i nazivi »kutna frekvencija«, »pulzacija« i »rotancija« (*Miljanić*). Neke strane nazive ove veličine zabilježili smo u tablici B-7.

Uz pomoć definicijske jednadžbe (2.2-5) rezultat našeg proučavanja vrtnje tačke na obodu vratila možemo zbog $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = r\,\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ napisati u obliku

$$v = \omega r \quad \text{ili} \quad \omega = \frac{v}{r}. \tag{2.2-6}$$

Prema strogoj teoriji »kutna brzina« ω je vektor (zapravo antisimetričan tenzor drugog stupnja) definiran vektorskim produktom

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}$$

koji vrijedi za odnose prikazane na slikama B.6b, c. Iz ove *Euler*ove jednadžbe i crteža na sl. B.6b, c lako se vektorskim računom dobije izraz (2.2-6), ako je $\beta = \pi/2$ rad, jer je u tom slučaju $\sin\beta = 1$.

Jedinica kutne brzine u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je radijan u sekundi (kratica: rad/s), što neposredno proizlazi iz definicijske jednadžbe (2.2-5). Ostale jedinice opisane su u odlomku 2.5.1.

Primjer. Mjerenje pomoću indukcijskog davača pokazalo je da se vratilo polumjera $r = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$ vrti konstantnom obodnom brzinom $v = 3{,}14\,\mathrm{m/s}$. Treba izračunati kolika je kutna brzina (rotancija) ω koju smo definirali jednadžbom (2.2-5). Rješenje dobivamo pomoću desnog izraza (2.2-6)

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3{,}14\,\mathrm{m/s}}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 31{,}4\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Rezultat ponešto iznenađuje, barem što se tiče jedinice u kojoj smo dobili vrijednost rotancije ωi Korektnim računanjem dobili smo, naime, u rezultatu jedinicu $\mathrm{s}^{-1} = 1/\mathrm{s}$, a trebali smo dobit. jedinicu rad/s, jer to zahtijeva jednadžba (2.2-5) koja definira rotanciju kao omjer kuta i vremena.

Nedoumicu možemo otkloniti ako se prisjetimo definicije jedinice SI kuta radijan u odlomku 1.4.1. Tamo smo jednadžbom (1.4-1) utvrdili da je radijan = rad = 1, tj. radijan je samo opis broja 1 (stoga radijan nazivamo »brojčanom ili opisnom mjernom jedinicom« koja je jednaka broju 1; isto vrijedi i za steradijan = sr = 1 itd.). Prema tome naš rezultat $\omega = 31{,}4/\mathrm{s}$ možemo bez daljnjega navesti u opisnom obliku $\omega = 31{,}4$ rad/s, jer je $1/\mathrm{s} = \mathrm{rad/s}$.

2.2.4. Brzina vrtnje (frekvencija vrtnje). Razmotrimo sada vrtnju obodne tačke M vratila (sl. B.6a) na drukčiji način. Znamo otprije da se tačka M giba stalnom brzinom v (primjer u prošlom odlomku!). Označimo sa T vrijeme koje je potrebno da tačka M načini *jedan puni okretaj*, tj. da prevali put $s = 2\pi r$, dakle puni krug. Budući da je riječ o jednolikom gibanju tačke, tj. o gibanju sa $v = \mathrm{const}$, možemo upotrijebiti jednadžbu $t = s/v$, odnosno u našem slučaju

$$T = \frac{\text{opseg kruga } s}{\text{brzina } v} = \frac{s}{v}. \tag{2.2-7}$$

Veličinu T nazivamo *period vrtnje* ili »trajanje jednog okretaja«, jer toliko traje puni ophod tačke M prilikom njena jednolikog gibanja duž kružnice polumjera r (sl. B.6a).

Veličinu koja je recipročna veličini »period vrtnje T« naročito često upotrebljavaju u tehničkim znanostima (strojarstvo i elektrotehnika), a nazivaju je

$$\text{brzina vrtnje } n = \frac{1}{\text{period vrtnje } T}.$$

U obliku jednadžbe, te uz pomoć jednadžbe (2.2-7), gornja definicija brzine vrtnje glasi

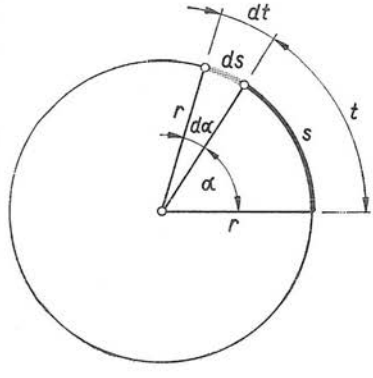
$$n = \frac{1}{T} = \frac{v}{s}. \tag{2.2-8}$$

Budući da je mjerna jedinica perioda T u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) sekunda (s), to je jedinica veličine »brzina vrtnje« (bolji naziv je »frekvencija vrtnje«; vidi kraj odlomka 2.2.5) SI recipročna sekunda, tj. $1/\mathrm{s} = \mathrm{s}^{-1}$.

2.2.5. Odnos veličina ω i n. Iz definicije kutne brzine ω (rotancije) i definicije brzine vrtnje (frekvencije vrtnje) n u odlomcima 2.2.3, 4 opažamo da je riječ o dva različita načina opisivanja iste pojave: »kutnom brzinom« ω opisujemo vremensku promjenu kuta radijus-vektora OM u odnosu prema nekom njegovom početnom položaju (sl. B.6a), a »brzinom vrtnje $n = 1/T$« opisujemo periodičnost kojom se tačka M (sl. B.6a) uvijek iznova pojavljuje na promatranom mjestu u toku svog kruženja stalnom brzinom v. Riječ je, dakle, o dva bitno različita pristupa promatranju pojave vrtnje. Ako se ta dva načina razmatranja nepažljivo pomiješaju, može doći do nepotrebnih poteškoća pri računanju, pa i do pogrešaka.

Zbog toga ćemo analitički most između veličina ω i n uspostaviti na ponovnom razmatranju kruženja tačke M (sl. B.6a) i u tu svrhu pomažemo se slikom B.7. Prema definiciji kutne brzine (rotancije) ω (2.2-5) vrijedi $\mathrm{d}\alpha = \omega\,\mathrm{d}t$; taj izraz bit će osnova naših daljnjih razmatranja. Za potpuni obilazak kružnice potrebno je vrijeme $t = T$, kako smo definirali u odlomku 2.2.4. Pri tom je radijus-vektor opisao kut $\alpha = \alpha_0 = 2\pi$ rad, jer toliki kut odgovara punom krugu (vidi odlomak 1.4.2). Stoga jednadžbu $\mathrm{d}\alpha = \omega\,\mathrm{d}t$ možemo integrirati ovako

$$\int_0^{\alpha=\alpha_0} \mathrm{d}\alpha = \omega \int_0^{t=T} \mathrm{d}t,$$



Sl. B.7. Usporedba veličina ω i n

gdje su gornje granice integrala $\alpha_0 = 2\pi$ rad i $T = 1/n$ (vidi definicijsku jednadžbu brzine vrtnje 2.2-8). Budući da je $\omega = \mathrm{const}$, rješenje gornjih integrala je

$$\frac{\omega}{n} = 2\pi\,\mathrm{rad}, \quad \text{odnosno} \quad \omega = 2\pi\,\mathrm{rad}\,n. \tag{2.2-9}$$

Budući da je radijan = rad = 1, tj. radijan je opis broja 1, kako smo utvrdili u odlomku 1.4.1, gornja jednadžba (2.2-9) obično se piše u obliku

$$\omega = 2\pi n, \tag{2.2-10}$$

tj. zbog izjednačenja rad = 1 ispuštena je oznaka jedinice kuta rad. Iz jednadžbe (2.2-9) jasno se razabire da su rotancija (kutna brzina) ω i frekvencija vrtnje (brzina vrtnje) n međusobno *različite fizikalne veličine.*

Frekvenciju vrtnje $n = 1/T$ možemo dovesti u vezu s brzinom gibanja v kombiniranjem jednadžbi (2.2-6 i 9)

$$n = \frac{1}{T} = \frac{v}{r\,2\pi\,\mathrm{rad}}.$$

Zbog radijan = rad = 1, i ovaj izraz obično pišemo u obliku

$$n = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}. \qquad (2.2\text{-}11)$$

Zbog premalo pažljive interpretacije ove jednadžbe, ponekad dolazi do nejasnoća u udžbenicima, a i do grešaka u proračunima.

Primjer. Vratilo promjera 0,2 m vrti se konstantnom frekvencijom vrtnje tako da se svake sekunde okrene oko svoje osi pet puta. U tehnici je uobičajeno da se taj podatak opiše sa $n = 5$ okr/s i u takvom obliku stavlja u jednadžbe. Izračunajmo kolika je brzina v tačke na obodu vratila i koliki je period T vrtnje, tj. trajanje jednog okretaja.

U tehnici se računa s jednadžbom (2.2-11); ako u nju uvrstimo zadani podatak $n = 5$ okr/s, dobivamo

$$v = 2\pi r n = 2\pi \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 5\,\frac{\mathrm{okr}}{\mathrm{s}} = 3{,}14\,\frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{okr}}{\mathrm{s}}.$$

U rezultatu smo dobili »čudnu« jedinicu brzine gibanja v: »metar × okretaj/sekunda«. Izjednačimo li dobiveni rezultat s onim u primjeru u odlomku 2.2.3, jer je riječ o *istom primjeru*, dobivamo jednakost: okretaj = okr = 1. Očito je, dakle, da je »okretaj« jedna od »opisnih jedinica«, a jednaka je broju 1. Naznakom »okretaj« želi se istaknuti činjenica da je tačka prilikom vrtnje jedanput obišla čitav obod kruga. Zbog jednakosti okretaj = 1 naš rezultat $v = 3{,}14$ m·okr/s možemo bez daljnjega pisati u uobičajenom obliku $v = 3{,}14$ m/s, tj. staviti okr = 1.

Period vrtnje T izračunat ćemo pomoću jednadžbe $T = 1/n$. Ako u nju uvrstimo podatak $n = 5$ okr/s, kako je to uobičajeno u tehnici, dobivamo

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{5\,\mathrm{okr/s}} = 0{,}2\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{okr}}.$$

Taj rezultat »čudan« je sve dok ne stavimo okr = 1, pa na taj način dobivamo očekivani rezultat $T = 0{,}2$ s/okr = 0,2 s = 0,2 sekunde. Na taj smo rezultat, naime, pomislili već prilikom čitanja teksta zadatka, jer napamet možemo izračunati da je trajanje jednog okretaja 0,2 s, ako se osovina u jednoj sekundi okrene 5 puta.

Iz gornjeg primjera i dosadašnjih razlaganja u ovom odlomku, kao i u odlomcima 2.2.3,4, vidimo da nam veličine »kutna brzina« (rotancija) ω i »brzina vrtnje« (frekvencija vrtnje) n sa svojim jedinicama rad/s = 1/s i okr/s = 1/s (isto vrijedi i za ostale jedinice, npr. rad/min = 1/min i okr/min = 1/min) mogu donijeti stanovite neprilike pri konkretnom računanju. Stoga ćemo ih ponovno razmotriti u narednom odlomku. No prije toga još se načas vratimo pojmu »brzina vrtnje« n.

Ako definiciju veličine n (2.2-8) usporedimo s definicijom veličine »frekvencija« f (2.1-1), vidimo da formalno nema razlike. Slično možemo zaključiti i iz francuskih izraza u tablici B-7. No u tehničkoj praksi je veličina »brzina vrtnje« duboko ukorijenjena i stoga moramo operirati sa obje veličine: n i f. Ipak postoji stanovito razgraničenje u primjeni: naziv »brzina vrtnje« (n) upotrebljava se uglavnom tamo gdje se vrti neka tvar (vratilo motora, turbine itd.), a naziv »frekvencija« (f) tamo, gdje je riječ o valnim harmoničkim pojavama (akustički i elektromagnetski valovi itd.). Zbog toga veličinu $n = 1/T$ neki autori nazivaju »mehanička frekvencija«. Prema tome izrazi »frekvencija vrtnje«, »brzina vrtnje« i »mehanička

frekvencija« znače isto — veličinu n iz jednadžbe (2.2-8). Do sada se u jugoslavenskoj tehničkoj literaturi najčešće upotrebljavao izraz »brzina vrtnje«, ako zanemarimo fizikalno potpuno promašen izraz »broj okretaja« (na primjer »broj okretaja« ispitivanog elektromotora može iznositi nekoliko milijuna, ali je ispitivanje trajalo nekoliko godina; pri tom je »frekvencija vrtnje« =»brzina vrtnje« stalno iznosila npr. $n = 50$ okr/s).

Ni veličina $\omega = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ (odlomak 2.2.3) nema sretno odabran naziv. Najčešće se rabi »kutna brzina«, a u njemu smeta riječ »brzina« (isto kao i u izrazu »brzina vrtnje» za n), jer »brzina« je nešto posve drugo, to je fizikalna veličina $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ egzaktno definirana jednadžbom (2.2-2) u odlomku 2.2.1. Zbog toga se u ovoj knjizi trudimo da za veličinu ω uvedemo izraz »rotancija«, koji je predložio *P. Miljanić*, a za fizikalnu veličinu $n = 1/T$ termin »frekvencija vrtnje«.

2.2.6. Tok proračuna vrtnje sa ω i sa n. Rezultate raspravljanja u odlomku 2.2.5 saželi smo u tablicu B-7. Na kraju tablice naveli smo i po četiri strana naziva za rotanciju ω i frekvenciju vrtnje n. To, nažalost, nisu i jedini nazivi; odabrali smo stoga samo one za koje smatramo da su najuobičajeniji u navedenim jezicima. Strane nazive morali smo spomenuti zbog toga jer su zbrka i nedosljednost u pogledu ovih dviju veličina i njihovih jedinica karakteristični za gotovo svu stručnu literaturu. To će nam potvrditi i primjer na kraju ovog odlomka.

Tablica **B-7**

Usporedba rotancije (kutne brzine) s frekvencijom vrtnje (brzinom vrtnje)

Veličina, jedinica ili naziv	Kutna brzina ω (rotancija)	Brzina vrtnje n (frekvencija vrtnje)
Definicija veličine	$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$	$n = \dfrac{1}{T}$
Veza s obodnom brzinom	$v = \omega r$	$v = 2\pi n r$
Međusobna veza	$\omega = 2\pi n$	$n = \omega/2\pi$
Jedinica SI	rad/s	1/s
Jedinice upotrebljavane uz SI	1°/s	okr/s, okr/min
Strani nazivi veličine:		
engleski	angular frequency	rotational frequency
francuski	pulsation	fréquence (vitesse) de rotation
ruski	uglovaja skorost	skorost vraščenija
njemački	Kreisfrequenz	Drehgeschwindigkeit ili Anzahl der Umdrehungen je Zeiteinheit ili Drehzahl

Ulogu »opisne jedinice« 1, koju smo u dva različita značenja susreli u odlomcima 2.2.3, 5, najbolje nam može ilustrirati stvaran primjer. Radi preglednosti prikazali smo primjer iz odlomaka 2.2.3, 5 u obliku tablice B-8. Iz nje razabiremo da nam inače korektno računanje ω pomoću jednadžbe $\omega = v/r$ s jedne strane daje rezultat $\omega = 31{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$ umjesto $\omega = 31{,}4$ rad/s (što bismo očekivali u skladu s definicijskom jednadžbom 2.2-5), a s druge strane $n = 5\ \mathrm{s}^{-1}$ (ispravno!) umjesto u

tehnici uobičajenog (»zornog«) oblika $n = 5$ okr/s. Odavde možemo ponovno zaključiti da je značenje »opisne (brojčane) jedinice« 1 bitno različito u ova dva slučaja. Pri razmatranju vrtnje pomoću rotancije (»kutne brzine«) ω vrijedi

$$\text{opisna jedinica } 1 = \text{radijan},$$

a to je u skladu s definicijom jedinice kuta u SI radijan (odlomak 1.4.1). Pri razmatranju vrtnje pomoću veličine »frekvencija vrtnje« n »opisna jedinica 1« ima sasvim drugo značenje:

$$1 = \text{okretaj} = \text{okr} = \text{naznaka za proces u kojem je tačka obišla jedan puni krug.}$$

Tablica **B-8**

Usporedba toka proračuna pomoću rotancije i pomoću frekvencije vrtnje

Zadano	$r = 0{,}1\,\text{m};\ v = 3{,}14\,\text{m/s}$	$r = 0{,}1\,\text{m};\ v = 3{,}14\,\text{m/s}$
Traži se	rotancija ω	frekvencija vrtnje n
Tok proračuna	$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3{,}14\,\text{m/s}}{0{,}1\,\text{m}}$	$n = \frac{v}{2\pi r} = \frac{3{,}14\,\text{m/s}}{2\pi \cdot 0{,}1\,\text{m}}$
	$\omega = 31{,}4\ 1/\text{s}$	$n = 5\ 1/\text{s}$
Način izražavanja u tehnici	$\omega = 31{,}4$ rad/s	$n = 5$ okr/s $= 300$ okr/min
Opisna (brojčana) jedinica »1« znači	$1 = \text{rad} = \frac{\text{puni kut}}{2\pi}$	1 = okr = okretaj = naznaka za proces u kojem je tačka obišla jedan puni krug

Ako se ne razlikuju ova dva značenja opisne jedinice 1, može doći do neprilika. Takva jedna neprilika potkrala se među ostalima i sastavljačima britanskih standarda (British Standard 350: Conversion factors and tables, 1959), koji su objavili dvostrane odnose među jedinicama rad/s, rad/min, okr/s, okr/min itd. U našoj tablici B-9 donosimo izvadak iz tog britanskog standarda, dakako s prevedenim tekstom. Tablica kaže da je, na primjer, okr/s = 6,283 19 rad/s (pri tom je 6,283 19 približna vrijednost za 2π), a takva relacija ne može postojati, ako se

Tablica **B-9**

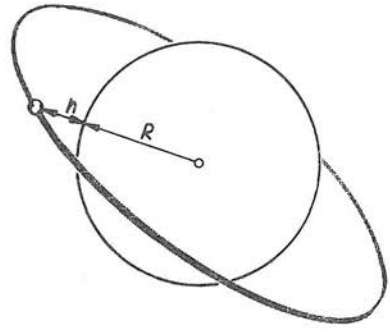
Nekorektna usporedba jedinica različitih veličina

Jedinica		Kratica	rad/s	okr/s
radijan u sekundi	=	rad/s	1	0,159 155
okretaj u sekundi	=	okr/s	6,283 19	1

poštuju definicije veličina ω i n iz prošlih odlomaka i osnovna metrološka pravila računanja. Spomenuta relacija, naime, znači da je okretaj $= 2\pi$ rad, tj. da je opisna jedinica »okretaj« jedinica *kuta*, i to po vrijednosti jednaka punom kutu $P = 2\pi$ rad (vidi odlomak 1.4.2 o jedinicama kuta). S druge strane smo u odlomku 2.2.5 doka-

zali da je okretaj = 1 i da označuje proces u kojem je tačka obišla jedan puni krug (tablica B-8). Naravno da ne mogu paralelno postojati odnosi okr = 1 i okr = $= 2\pi$ rad! Stoga ćemo ovu zagonetku objasniti u odlomku 2.5.4.

2.2.7. Kruženje satelita oko Zemlje. Raspravljene pojmove primijenit ćemo na primjeru umjetnog satelita koji kruži oko Zemlje po koncentričnoj kružnoj putanji. Zadatak glasi: koliki je period satelita, ako on kruži u udaljenosti 900 km iznad površine Zemlje? Za kruženje satelita vrijedi jednadžba $v = 2\pi nr = 2\pi r/T$, gdje je $r = R + h$ (sl. B.8) polumjer kruženja, a T period satelita, tj. vremenski interval nakon kojeg se satelit pojavljuje povrh mirujućeg promatrača na Zemlji. Kruženje u putanji r održava se zbog ravnoteže gravitacijske i centrifugalne sile. Prva sila je $F_g = \gamma m_s m_z / r^2$, gdje je γ gravitacijska konstanta (vidi odsječak A.9.2), a m_s i m_z predstavljaju masu satelita i Zemlje. Suprotno toj sili djeluje centrifugalna sila satelita $F_c = m_s v^2 / r$. Izjednačenjem $F_g = F_c$ i uvrštenjem $v = 2\pi r/T$ dobivamo



Sl. B.8. Uz proračun kruženja satelita oko Zemlje

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m_z} r^3.$$

Masu Zemlje m_z možemo izračunati iz relacije $m_s g = \gamma m_z m_s / R^2$, gdje je $g = 9{,}81$ m/s^2 ubrzanje teže na Zemlji, a R polumjer Zemlje. Budući da je dakle $\gamma m_z = gR^2$, jednadžba za period T dobiva konačan oblik

$$T = 2\pi \frac{R+h}{R} \sqrt{\frac{R+h}{g}}.$$

Polumjer Zemlje iznosi oko $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, a visina na kojoj kruži satelit zadana je sa $h = 900$ km $= 9 \cdot 10^5$ m. Stoga uz pomoć $r = R + h = 7{,}3 \cdot 10^6$ m iz gornje jednadžbe dobivamo računanjem

$$T = 2\pi \frac{7{,}3 \cdot 10^6 \text{ m}}{6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m}} \sqrt{\frac{7{,}3 \cdot 10^6 \text{ m}}{9{,}81 \text{ m/s}^2}} = 6180 \text{ s}.$$

Bolju predodžbu o trajanju jednog ophoda satelita T dobit ćemo ako dobiveni rezultat preračunamo pomoću relacije minuta = 60 s. Tako dobivamo period $T = 6180$ min/60 = 103 minute, tj. satelit ćemo ponovno zapaziti nakon 103 minute.

Pomoću jednadžbi (2.2-8) i (2.2-6) možemo izračunati frekvenciju vrtnje n (vidi tablicu B-7), stvarnu brzinu gibanja v satelita u odnosu prema Zemlji i rotanciju (kutnu brzinu) ω:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{6180 \text{ s}} = 1{,}616 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}} = 1{,}616 \cdot 10^{-4} \frac{\text{okr}}{\text{s}} = 0{,}5825 \frac{\text{okr}}{\text{h}},$$

$$v = 2\pi r n = 2\pi (R+h) n = 2\pi \cdot 7{,}3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 1{,}616 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}} = 7400 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 1{,}616 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} = 0{,}001014 \text{ s}^{-1} = 0{,}001014 \text{ rad/s}.$$

Brzinu satelita možemo možda bolje »osjetiti« ako je izrazimo jedinicom kilometar na sat; tako dobivamo $v = 7400\ \text{m/s} = 7400 \cdot 3{,}6\ \text{km/h} = 26\,600\ \text{km/h}$.

U gornjim proračunima upotrijebili smo i odnose okr = 1 i rad = 1, o kojima smo naširoko raspravljali u odlomcima 2.2.5, 6 i još ćemo raspravljati u odlomku 2.5.4.

2.3. Jedinice vremena i frekvencije

2.3.1. Jedinica vremena sekunda (kratica: s). U poglavlju A.10 opširno smo razmotrili način reprodukcije sekunde, osnovne jedinice vremena u Međunarodnom sistemu jedinica (SI), te naveli definiciju sekunde od godine 1967. koju ćemo ovdje ponoviti: »Sekunda je trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma cezija 133.« Ako period konstantnog zračenja cezija 133 označimo sa T, onda je prema citiranoj definiciji

$$\text{sekunda} = \text{s} = 9\,192\,631\,770\ T.$$

Tako definirana i reproducirana sekunda (vidi odsječak A.10.6) osnovna je jedinica Međunarodnog sistema jedinica, što možemo zabilježiti ovako

$$\text{jedinica vremena SI} = \text{sekunda} = \text{s}.$$

Međunarodna kratica sekunde je malo uspravno slovo s, a ne »sek«, kao što mnogi pišu. Napominjemo da je sekunda osnovna jedinica vremena i metričkog i anglo-američkog metrološkog svijeta, tj. u pogledu jedinica vremena oduvijek postoji jedinstvo čitava svijeta.

2.3.2. Decimalni dijelovi sekunde. Na osnovnu jedinicu vremena sekundu lako se primjenjuju decimalni višekratnici iz tablice A-1; dekadski višekratnici rijetko se upotrebljavaju u svakodnevnom životu, jer se umjesto njih primjenjuju nedekadske jedinice vremena minuta i sat (vidi odlomak 2.3.3). No u tehničkim i prirodoslovnim znanostima vrlo se često upotrebljavaju decimalni višekratnici mili, mikro i nano, tj.

$$\text{milisekunda} = \text{m sekunda} = 10^{-3}\ \text{s} = \text{ms},$$

$$\text{mikrosekunda} = \mu\ \text{sekunda} = 10^{-6}\ \text{s} = \mu\text{s},$$

$$\text{nanosekunda} = \text{n sekunda} = 10^{-9}\ \text{s} = \text{ns}.$$

U vezi s jedinicom vremena nanosekunda zanimljivo je spomenuti da je po njoj dobila ime čitava jedna grana električke impulsne tehnike, tzv. nanosekundna tehnika. Naravno da se na sekundu mogu primijeniti i drugi višekratnici iz tablice A-1.

2.3.3. Minuta, sat i dan. Zbog uske povezanosti astronomskog motrenja nebeskog svoda i mjerenja kuta, nedekadske jedinice vremena minuta i sat definirane su po istom ključu kao i jedinice kuta (vidi odlomak 1.4.3), tj. ovako

$$\text{minuta} = \text{min} = 60\ \text{sekunda} = 60\ \text{s},$$

$$\text{sat} = \text{h} = 60\ \text{minuta} = 60\ \text{min} = 3600\ \text{s}.$$

Osim toga današnja standardizacija i nacionalni zakoni propisuju i jedinicu vremena »dan« (lat. dies, engl. day)

$$\text{dan} = \text{d} = 24\ \text{sata} = 24\ \text{h} = 86\,400\ \text{s}.$$

Ove tri jedinice oslanjaju se, dakle, na sekundu kao osnovu, a propisani su tačni nedekadski višekratnici. Stoga minuta, sat i dan nisu ni u kakvom fiksiranom odnosu, na primjer, prema danu koji proizlazi iz kalendara (vidi odsječak A.10.5) ili »srednjem danu« tropske ili zvjezdane godine (odsječak A.10.3). Odnose između gore definiranih nedekadskih jedinica vremena sadrži tablica B-10.

Tablica **B-10**

Dvostrani odnosi među jedinicama vremena

Jedinica	Kratica	s	min	h	dan
sekunda =	s	1	$1{,}6667 \cdot 10^{2}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}157404 \cdot 10^{-5}$
minuta =	min	60	1	$1{,}6667 \cdot 10^{-2}$	$6{,}94444 \cdot 10^{-4}$
sat =	h	3600	60	1	$4{,}1667 \cdot 10^{-2}$
dan =	d	86 400	1440	24	1

Ove jedinice potječu iz razdoblja 700 do 500 godina prije početka naše ere. Dok podjela jedinica u omjeru 1/60 očito potječe iz zvjezdoznanstva, dotle podjela 1/24, tj. dan = 24 sata, najvjerojatnije dolazi od babilonskih jedinica. Babilonci su, naime, imali sistem jedinica u kojem su se jedinice izvodile primjenom faktora 2, 5, 12. Tako su imali jedinice duljine subban = 60 ammatu (a), gar = 12 a, kanu = = 6 a itd.; pri tom približno vrijedi a = 0,495 metara.

2.3.4. Kalendarske jedinice vremena. U metrološkom smislu to nisu egzaktne jedinice vremena, jer nisu precizno definirane (vidi odsječak A.10.5), ali se stvarno upotrebljavaju u svakodnevnom životu, u povijesnoj literaturi, odnosno općenito za grubu orijentaciju u vremenu. Među te jedinice idu:

tjedan = 7 dana,
dekada = 10 dana,
mjesec = 28...31 dan,
trimestar = 90...92 dana,
semestar = 181...184 dana,
desetljeće (decenij) = 10 godina,
stoljeće (vijek) = 100 godina,
tisućljeće (milenij) = 1000 godina.

Čak ni stoljeće = 100 godina i sl. nisu precizno definirani, jer nije označeno o kakvoj je godini riječ. Iznimka je »julijansko stoljeće« koje upotrebljavaju astronomi (odsječak A.10.2).

2.3.5. Jedinica frekvencije hertz (kratica: Hz). U odlomku 2.1.3 definirali smo frekvenciju f kao veličinu recipročnu periodu titraja T, tj. $f = 1/T$. Budući da je T vremenska veličina, a vrijeme se u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) mjeri jedinicom sekunda, to je očito da je jedinica frekvencije u SI recipročna sekunda, tj. $1/\mathrm{s} = \mathrm{s}^{-1}$. Ova jedinica dobila je naziv hertz (izgovori: herc) prema fizičaru *H. Hertz*u; stoga je

$$\text{jedinica frekvencije SI} = \frac{1}{\text{sekunda}} = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1} = \text{hertz} = \mathrm{Hz}.$$

Na ovu jedinicu primjenjuju se neki dekadski višekratnici iz tablice A-1. Tako se, na primjer, u fizici, tehnici kratkih valova, radio-tehnici, akustici i drugdje vrlo intenzivno upotrebljavaju ove jedinice

$$\text{kilohertz} = \text{k hertz} = \text{kHz} = 10^3\ \text{Hz},$$

$$\text{megahertz} = \text{M hertz} = \text{MHz} = 10^6\ \text{Hz},$$

$$\text{gigahertz} = \text{G hertz} = \text{GHz} = 10^9\ \text{Hz},$$

a mogu se, ako je potrebno, upotrebljavati i drugi višekratnici iz tablice A-1.

Engleska standardizacija još nije prihvatila metričku jedinicu frekvencije hertz (vidi odsječak A.6.6). British standard 1991 od godine 1963. propisuje umjesto *naziva* hertz

$$\text{cycle per second (c/s)} = \text{s}^{-1}$$

i dopušta primjenu dekadskih višekratnika. Stoga u angloameričkoj literaturi možemo zapaziti podatke o frekvenciji oblika kilocycle per second (kc/s), Mc/s itd.

2.4. Metričke i angloameričke jedinice brzine i ubrzanja

2.4.1. Jedinica brzine m/s (metar u sekundi). Budući da su osnovne jedinice duljine l i vremena t u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) metar (m) i sekunda (s), lako je iz opće definicijske jednadžbe $v = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ ili $v = l/t$ (jednoliko pravocrtno gibanje) izvesti jedinicu brzine SI. Načelo građenja izvedenih jedinica objasnili smo u odsječku A.5.1. Primjena tog načela na koherentan Međunarodni sistem jedinica daje

$$[v]_{\mathrm{M}} = \frac{[l]_{\mathrm{M}}}{[t]_{\mathrm{M}}} = \frac{\text{metar}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

gdje indeks M upućuje da je riječ o jedinicama SI. Prema tome je

$$\text{jedinica brzine SI} = \text{metar u sekundi} = \frac{\text{metar}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ova jedinica još ni izdaleka nije jedina koja se upotrebljava u svakodnevnom životu te u tehničkim i prirodoslovnim znanostima. Stoga ćemo niz njih razmotriti u narednim odlomcima.

2.4.2. Ostale metričke jedinice brzine. Na jedinicu »metar u sekundi« (m/s) dekadski i decimalni višekratnici iz tablice A-1 obično se primjenjuju samo na jedinicu metar u složenici m/s. Takve su jedinice kilometar u sekundi, centimetar u sekundi itd., a grade se jednako kao i one za površinu ili volumen (vidi odsječke 1.5,7), dakle na primjer

$$\frac{\text{kilometar}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{k metar}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{km}}{\text{s}} = \frac{1000\ \text{m}}{\text{s}} = 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Dvostrane odnose među jedinicama brzine građenima na takav način sadrži tablica B-11 (vidi i tablicu B-12 te tablicu **13** u prilogu knjige).

Tablica **B-11**

Dvostrani odnosi među nekim dekadskim jedinicama brzine

Jedinica		Kratica	km/s	m/s	dm/s	cm/s	mm/s
kilometar u sekundi	=	km/s	1	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}
metar u sekundi	=	m/s	10^{-3}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}
decimetar u sekundi	=	dm/s	10^{-4}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}
centimetar u sekundi	=	cm/s	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}
milimetar u sekundi	=	mm/s	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1

Tablica **B-12**

Dvostrani odnosi među nekim satnim i dekadskim jedinicama brzine

Jedinica		Kratica	km/h	m/h	m/s	cm/s
kilometar na sat	=	km/h	1	1000	0,277778	27,77778
metar na sat	=	m/h	0,001	1	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-2}$
metar u sekundi	=	m/s	3,6	3600	1	100
centimetar u sekundi	=	cm/s	0,036	36	0,01	1

Napominjemo da se u prošlosti jedinica centimetar u sekundi = cm/s nazivala »kin« i »cel«.

Drugi način građenja metričkih jedinica brzine osniva se na ovoj kombinaciji: umjesto metra u jedinici m/s upotrebljavaju se jedinice km, cm i druge (dakle

s višekratnicima), a umjesto sekunde seksagezimalne jedinice minuta i sat (odlomak 2.3.3). Izračunajmo, za primjer, odnos između jedinice »kilometar na sat« (km/h) i jedinice »metar u sekundi« (m/s):

$$\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}277\,778\,\frac{\text{m}}{\text{s}};\quad \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Odnose među nakim »satnim« jedinicama brzine i »dekadskim« jedinicama sadrži tablica B-12. Dvostrane odnose među metričkim i angloameričkima sadrži tablica **13** u prilogu knjige.

Primjer. Izrazimo brzinu $v = 5$ m/s u jedinici decimetar u minuti! Budući da je m = 10 dm, min = 60 s, računanjem slijedi

$$v = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 5\,\frac{10\,\text{dm}}{\text{min}/60} = 5 \cdot 10 \cdot 60\,\frac{\text{dm}}{\text{min}} = 3060\,\frac{\text{dm}}{\text{min}}.$$

2.4.3. Pomorska jedinica brzine čvor (knot). Jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. dopušta da se uz jedinice m/s, cm/s, . . . , km/h itd. u pomorskom saobraćaju upotrebljava jedinica

$$\text{čvor} = \frac{\text{morska milja}}{\text{sat}} = 1825\,\frac{\text{m}}{\text{h}} = 1{,}852\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Tu jedinicu dopuštaju i druge zemlje s metričkom metrologijom, pa je stoga ta jedinica međunarodna, a na engleskom jeziku se zove international knot (kratica: kn), jer je engl. knot = čvor. Prema tome je

$$\text{international knot} = \text{kn} = \frac{\text{international nautical mile}}{\text{hour}} = \frac{\text{n mile}}{\text{h}} = 1852\,\frac{\text{m}}{\text{h}}.$$

Valja naglasiti da se »britanski čvor« (UK knot) *razlikuje* od međunarodnog čvora koji inače upotrebljava čitav svijet. Prema British standard od godine 1963. vrijedi odnos

$$\text{UK knot} = 1{,}00\,64\ \text{int. knot} = 1853{,}18\ \text{m/h},$$

tj. britanski čvor veći je za 0,64 promila od međunarodnoga.

2.4.4. Angloameričke jedinice brzine sastoje se od omjera angloameričkih jedinica duljine (vidi odsječak 11.3) i jedinica vremena sekunda, minuta i sat (engleski: second = s, minute = min, hour = h). Zbog kompliciranе veze među pojedinim angloameričkim jedinicama duljine (vidi tablicu B-61 u odlomku 11.3.1) i odnosa h = 60 min, min = 60 s, međusobni odnosi angloameričkih jedinica brzine vrlo su zamršeni. Neke od tih odnosa skupili smo u tablici B-13, dok su dvostrani odnosi među nekim angloameričkim i metričkim jedinicama brzine zabilježeni u tablici **13** u prilogu knjige. Napominjemo da se u angloameričkoj literaturi mogu naći i kratice jedinica koje odstupaju od engleskih ili američkih standarda. U takvim slučajevima čitatelj je uglavnom prepušten samom sebi da odgonetne pravo značenje. Na primjer, nestandardnu kraticu mph neki autori upotrebljavaju u smislu meter per hour, a drugi u značenju mile per hour!

Ovdje navodimo neke odnose angloameričkih jedinica brzine prema metričkima:

$$\left.\begin{array}{l}\text{mile per hour} = \text{mile/h}\\ \text{mile per second} = \text{mile/s}\end{array}\right\} = 1609{,}344 \left\{\begin{array}{l}\text{m/h}\\ \text{m/s}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{yard per hour} = \text{yd/h}\\ \text{yard per minute} = \text{yd/min}\\ \text{yard per second} = \text{yd/s}\end{array}\right\} = 0{,}9144 \left\{\begin{array}{l}\text{m/h}\\ \text{m/min}\\ \text{m/s}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{foot per hour} = \text{ft/h}\\ \text{foot per minute} = \text{ft/min}\\ \text{foot per second} = \text{ft/s}\end{array}\right\} = 0{,}3048 \left\{\begin{array}{l}\text{m/h}\\ \text{m/min}\\ \text{m/s}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{inch per minute} = \text{in/min}\\ \text{inch per second} = \text{in/s}\end{array}\right\} = 25{,}4 \left\{\begin{array}{l}\text{mm/min}\\ \text{mm/s}\end{array}\right.$$

Preračunavanje angloameričkih jedinica brzine u metričke i obratno obavlja se po istom ključu kao i preračunavanje metričkih jedinica. Jedino treba više računati, jer su odnosi kompliciraniji. Razmotrimo to na tri konkretna primjera.

Primjer 1. Preračunajmo brzinu $v = 8$ yd/min u m/s! Budući da je $\text{yd} = 0{,}9144$ m i $\text{min} = 60$ s, računanjem slijedi

$$v = 8\frac{\text{yd}}{\text{min}} = 8\frac{0{,}9144\ \text{m}}{60\ \text{s}} = 8 \cdot 0{,}015\,24\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}121\,92\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Primjer 2. Izračunajmo koliko yd/s sadrži jedinica brzine mile/h. Budući da je mile = = 1760 yard, a hour = h = 3600 s, računanjem dobivamo

$$\frac{\text{mile}}{\text{hour}} = \frac{1\,760\ \text{yd}}{3\,600\ \text{s}} = \frac{176}{360}\frac{\text{yd}}{\text{s}} = 0{,}463\,158\frac{\text{yd}}{\text{s}}.$$

Primjer 3. Preračunajmo metričku jedinicu brzine cm/min u angloameričku jedinicu yard per hour! Budući da je centimetar = cm = 0,01 m, a yd = 0,9144 m, to slijedi cm = $= 0{,}01 \cdot \text{yd}/0{,}9144 = \text{yd}/91{,}44$. S druge strane je minuta = min = hour/60, tj. min = sat/60; pomoću ovih podataka možemo izračunati

$$\frac{\text{cm}}{\text{min}} = \frac{\text{yd}/91{,}44}{\text{h}/60} = \frac{60}{91{,}44}\frac{\text{yd}}{\text{h}} = 0{,}656\,26\frac{\text{yd}}{\text{h}}.$$

Na analogan način možemo izračunati i međusobne odnose ostalih metričkih i angloameričkih jedinica brzine.

2.4.5. Vansistemske jedinice brzine. Pod nazivom »vansistemska jedinica« razumijevamo onu jednicu koja ne ulazi ni u jedan postojeći ili historijski sistem jedinica, a ipak se upotrebljava u stanovitim strukama (takve su, na primjer, astronomske jedinice duljine koje smo razmotrili u odsječku 1.3).

Takva jedinica brzine je »mach« (po fizičaru *E. Mach*u), koja ima dva značenja. Neki autori smatraju pod machom stvarnu brzinu kojom se zvuk širi u zraku određene temperature i pod određenim tlakom (npr. $\vartheta = 10\,^{\circ}\text{C}$, $p = 1$ atm). Ta se brzina može izračunati pomoću jednadžbe (D.4.2-21) u glavi D, a iznosi oko 340 m/s, tj. oko 1200 km/h. Većina autora, međutim, pod machom razumijeva vrijednost tzv. *Mach*ove značajke, o kojoj se govori u odlomku D.4.2.5 i tablici D-19. Ta značajka definirana je omjerom $M = v/u$, gdje je v brzina strujanja tvari u istra-

Tablica B-13

Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama brzine

Jedinica	Kratica	$\frac{\text{mile}}{\text{h}}$	$\frac{\text{mile}}{\text{s}}$	$\frac{\text{yd}}{\text{h}}$	$\frac{\text{yd}}{\text{min}}$	$\frac{\text{yd}}{\text{s}}$	$\frac{\text{ft}}{\text{min}}$	$\frac{\text{ft}}{\text{s}}$	$\frac{\text{in}}{\text{min}}$	$\frac{\text{in}}{\text{s}}$
mile per hour =	mile/h	1	$\frac{1}{3600}$	1760	$\frac{88}{3}$	$\frac{44}{90}$	88	$\frac{22}{15}$	1056	$\frac{88}{5}$
mile per second =	mile/s	3600	1	6336000	105600	1760	316800	5280	3801600	63360
yard per hour =	yd/h	$\frac{1}{1760}$	$\frac{1}{6336000}$	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{3600}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1200}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{100}$
yard per minute =	yd/min	$\frac{3}{88}$	$\frac{1}{105600}$	60	1	$\frac{1}{60}$	3	$\frac{1}{20}$	36	$\frac{3}{5}$
yard per second =	yd/s	$\frac{90}{44}$	$\frac{1}{1760}$	3600	60	1	180	3	2160	36
foot per minute =	ft/min	$\frac{1}{88}$	$\frac{1}{316800}$	20	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{180}$	1	$\frac{1}{60}$	12	$\frac{1}{5}$
foot per second =	ft/s	$\frac{15}{22}$	$\frac{1}{5280}$	1200	20	$\frac{1}{3}$	60	1	720	12
inch per minute =	in/min	$\frac{1}{1056}$	$\frac{1}{3801600}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{2160}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{720}$	1	$\frac{1}{60}$
inch per second =	in/s	$\frac{5}{88}$	$\frac{1}{63360}$	100	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{36}$	5	$\frac{1}{12}$	60	1

živanom sredstvu (plinu ili tekućini), a u brzina zvuka u tom istom sredstvu na istom mjestu. U tom smislu mach nije »prava« jedinica brzine kao što je to npr. m/s, već je »jedinica relativne brzine«, ako omjer v/u možemo nazvati »relativnom brzinom« (u analogiji s »relativnom gustoćom« ρ/ρ_0; vidi odsječak 3.1).

Druga vansistemska jedinica brzine je »lorentz«, iako predstavlja osnovnu jedinicu mnogih »prirodnih sistema jedinica« (*Planck*, *Fleming*, *Louis*, *Eddington*, *Stille* itd.). U nekim od tih 14 »prirodnih sistema jedinica« (toliko ih je autor uspio nabrojiti) brzina svjetla odabrana je za jedinicu i nazvana lorentz $= v_0 = 2{,}997\,925 \cdot 10^8$ m/s. U praktičnoj primjeni ova jedinica, kao uostalom ni svi prirodni sistemi, nemaju nikakve uloge pa ih zato nismo ni obrađivali u ovoj knjizi.

2.4.6. Beaufortova skala brzina. U meteorologiji se za označivanje »jakosti vjetra« upotrebljavaju posebne brojčane oznake, tj. brojevi od 1 do 12. Iako te oznake ne predstavljaju jedinice u smislu m/s ili km/h, one su vrlo važne u svakodnevnom životu, naročito u izvještajima o vremenu. Skup brojčanih oznaka (0 do 12) i pripadnih raspona vrijednosti brzine vjetra naziva se *Beaufort*ova skala (čitaj: Boforova skala).

Tablica **B-14**

Beaufortova skala jakosti vjetra u ovisnosti o brzini vjetra

Jakost vjetra	Brzina vjetra		Riječima izražena jakost vjetra
	m/s	km/h	
0	0,0...1,3	0,00...4,68	tišina
1	1,4...2,7	5,04...9,7	lahor
2	2,8...4,5	10,1...16,2	povjetarac
3	4,6...6,6	16,5...23,7	vjetrić
4	6,7...8,9	24,1...32,0	umjereni vjetar
5	9,0...11,3	32,4...40,7	umjereno svježi vjetar
6	11,4...13,8	41,0...49,7	svježi vjetar
7	13,9...16,4	50,0...59,0	jaki vjetar
8	16,5...19,2	59,4...69,1	vrlo jaki vjetar
9	19,3...22,4	69,5...80,6	olujni vjetar
10	22,5...26,0	81,0...93,6	vihor
11	26,1...30,0	93,9...108,0	orkan
12	30,1...	108,4...	uragan

Značenje brojčanih oznaka ove skale zabilježeno je u tablici B-14. Tako se npr. vjetar brzine između 11,4 i 13,8 m/s označuje brojem 6 *Beaufort*ove skale, a ta naznaka opisuje se izjavom »da jakost vjetra iznosi 6 bofora« itd. U tablici su brzine vjetra paralelno navedene i u jedinici brzine km/h.

2.4.7. Jedinice ubrzanja. Fizikalna veličina ubrzanje a definirana je jednadžbom (2.2-3) u odlomku 2.2.2. Po uzoru na izvođenje jedinica SI u prošlim odlomcima, iz spomenute definicijske jednadžbe ubrzanja $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ slijedi

$$\text{jedinica ubrzanja SI} = \frac{\text{metar}}{\text{sekunda}^2} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

koja se izgovara »metar u sekundi na kvadrat« ili »metar u sekundi na sekundu«. Iz definicije u obliku $[a]_{\mathrm{M}} = [\mathrm{d}v/\mathrm{d}t]_{\mathrm{M}} = \mathrm{m/s^2}$ slijedi definicija riječima: »Metar u

sekundi na kvadrat je ubrzanje tijela čija se brzina u toku jedne sekunde jednoliko promijeni za 1 m/s.«

Na jedinicu ubrzanja SI m/s^2 mogu se, dakako, primjenjivati decimalni i dekadski višekratnici iz tablice A-1. Obično se primjenjuju decimalni višekratnici $m = mili = 10^{-3}$ i $\mu = mikro = 10^{-6}$, dakle $mm/s^2 = 10^{-3}\ m/s^2$ te $\mu m/s^2 = 10^{-6}\ m/s^2$, jer su najprikladniji za vrijednosti ubrzanja koje se pojavljuju u geofizici, mehanici i drugim granama.

U literaturi ćemo naići i na jedinicu ubrzanja »gal« (po *G. Galileju*), koja je definirana kao $gal = cm/s^2$, a potječe iz tzv. sistema jedinica CGS (vidi odsječak 8.2). Na gal se također primjenjuju višekratnici, na primjer

$$\text{hektogal} = \text{hgal} = 100\ \text{gal} = 100\ \text{cm/s}^2 = \text{m/s}^2,$$

$$\text{miligal} = \text{mgal} = 10^{-3}\ \text{gal} = 10^{-3}\ \text{cm/s}^2 = 10^{-5}\ \text{m/s}^2 = 10\ \mu\text{m/s}^2.$$

Rijetko se upotrebljavaju jedinice ubrzanja koje kao jedinicu vremena sadrže minutu ili sat. Ukoliko se na takvu jedinicu negdje naiđe, lako ju je preračunati na m/s^2.

Primjer 1. Preračunajmo ubrzanje $a = 35{,}3\ km/min^2$ na jedinicu SI m/s^2, a zatim na jedinicu gal! Budući da je km = 1 000 m, a minuta = 60 s, računanjem slijedi

$$a = 35{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{min}^2} = 35{,}3\,\frac{1000\,\text{m}}{(60\,\text{s})^2} = \frac{35\,300\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}^2} = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Zbog $m/s^2 = 100\ cm/s^2 = 100$ gal dobivamo dalje $a = 9{,}81\ m/s^2 = 9{,}81 \cdot 100$ gal $= 981$ gal.

Primjer 2. Koliko centripetalno ubrzanje djeluje na čovjeka koji sjedi na rubu vrtuljka polumjera 10 metara, ako se vrtuljak okrene jadanput svakih 12,5 sekundi? Ubrzanje a može se izračunati pomoću jednadžbe $a = v^2/r$, jer je riječ o jednolikom kružnom gibanju. Prema jednadžbi (2.2-6) je $v = \omega r$, dakle $a = \omega^2 r$. Vrijednost polumjera vrtuljka znamo: $r = 10$ m. Rotanciju ω ne znamo, ali nam je stvarno zadana frekvencija vrtnje $n = \omega/2\pi$ (vidi odlomak 2.2.5), jer je zadano $n = 1\ okr/12{,}5\ s = 0{,}08\ okr/s$. Prema tome je

$$a = \omega^2 r = (2\pi n)^2 r = 4\pi^2 n^2 r = 4\pi^2 \cdot 0{,}08^2\,\frac{\text{okr}^2}{\text{s}^2}\,10\,\text{m} = 2{,}53\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

jer je okr = 1 (vidi odlomak 2.2.5), pa dakle i $okr^2 = 1$.

Na području gdje se upotrebljava angloamerički sistem jedinica, za mjerenje ubrzanja uglavnom se upotrebljavaju ove dvije jedinice:

$$\text{foot/s}^2 = 0{,}3048\ \text{m/s}^2; \quad \text{yard/s}^2 = 0{,}9144\ \text{m/s}^2 = 3\ \text{ft/s}^2.$$

Primjer 3. Preračunajmo na metričke jedinice ubrzanje $a = 32{,}2\ ft/s^2$. Budući da je $ft/s^2 = 0{,}3048\ m/s^2$, uvrštenjem slijedi $a = 32{,}2 \cdot 0{,}3048\ m/s^2 = 9{,}81\ m/s^2$.

2.5. Jedinice veličinâ vrtnje

2.5.1. Jedinice rotancije (kutne brzine) već smo djelomično razmotrili u odlomcima 2.2.3,4, gdje smo tu veličinu definirali jednadžbom $\omega = d\alpha/dt$. Stoga možemo odmah zabilježiti

$$\text{jedinica rotancije SI} = \frac{\text{radijan}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

što možemo izraziti i u obliku $rad/s = 1/s = s^{-1}$, jer je rad = 1 (radijan je tzv. opisna jedinica; vidi odlomak 1.4.1).

Upotrebljavaju se i ove dvije jedinice koje proizlaze iz primjene drugih jedinica kuta (vidi odsječak 1.4):

$$\text{rad/min} = 0{,}0166667\ \text{rad/s}; \qquad 1°/\text{s} = 0{,}0174533\ \text{rad/s}.$$

$$\text{rad/s} = 60\ \text{rad/min}; \qquad \text{rad/s} = 57{,}2958\ °/\text{s}.$$

2.5.2. Jedinica kutnog ubrzanja. Veličina »kutno ubrzanje« ϵ definirana je jednadžbom $\epsilon = d\omega/dt = d^2\alpha/dt^2$, gdje je ω rotancija, a α kut. Budući da je jedinica rotancije (kutne brzine) SI rad/s, a jedinica vremena sekunda = s, to je

$$\text{jedinica kutnog ubrzanja SI} = \frac{\text{radijan}}{\text{sekunda}^2} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

što možemo napisati i u obliku $\text{rad/s}^2 = 1/\text{s}^2$, jer je rad = 1 (vidi odlomak 1.4.1). Rijetko se upotrebljavaju neke druge jedinice kutnog ubrzanja ϵ.

2.5.3. Jedinice frekvencije vrtnje. Fizikalnu veličinu »frekvencija vrtnje« (brzina vrtnje) n definirali smo jednadžbom $n = 1/T$ u odlomku 2.2.4. Budući da je jedinica vremena (perioda) T SI sekunda = s, to je

$$\text{jedinica frekvencije vrtnje SI} = \frac{1}{\text{sekunda}} = \frac{1}{\text{s}},$$

što možemo napisati i u obliku $1/\text{s} = \text{s}^{-1} = \text{okr/s}$, jer je okretaj = okr = 1 (vidi primjer u odlomku 2.2.4 i tablicu B-8). Ostale jedinice frekvencije vrtnje su

$$\frac{\text{okr}}{\text{min}} = \frac{1}{60}\,\frac{\text{okr}}{\text{s}}; \qquad \frac{\text{okr}}{\text{h}} = \frac{1}{60}\,\frac{\text{okr}}{\text{min}} = \frac{1}{3600}\,\frac{\text{okr}}{\text{s}},$$

koje se upotrebljavaju uglavnom u tehnici (stojarstvo i elektrotehnika).

2.5.4. Odnosi jedinica veličina ω i n. Pri kraju odlomka 2.2.6 i u tablici B-9 spomenuli smo neprilike koje mogu nastati u primjeni jedinica rad/s i okr/s te najavili da ćemo odnose među ovim jedinicama do kraja razjasniti u ovom odlomku.

U tom razjašnjavanju ispravimo najprije naslov ovog odlomka u kojem pogrešno piše o odnosima među jedinicama fizikalne veličine »kutna brzina« (rotancija) ω i jedinicama »brzine vrtnje« (frekvencija vrtnje) n. Pogreška je u tome što *ne smijemo i ne možemo uspoređivati jedinice različitih veličina*, a veličine ω i n su međusobno različite veličine, kao što se vidi iz odlomka 2.2.5 i najpotpunije jednadžbe (2.2-9).

Nikome ne pada na pamet da kaže kako je 1 kilogram = 1 litar, tj. ne mogu se izjednačiti jedinice različitih veličina, u ovom slučaju mase i volumena. Može se, međutim, na primjer reći »jedan litar vode *odgovara* jednom kilogramu vode«, što se bilježi ovako

$$1\ \text{litar vode} \mathrel{\hat{=}} 1\ \text{kilogram vode},$$

gdje krovčić iznad znaka jednakosti označuje »odgovara«. Gornja relacija prikazuje dva opisa iste stvari: navedenu količinu vode možemo valjano opisati na dva načina:

Tablica **B-15**

Dvostrani odnosi među brojčanim iznosima rotancije (kutne brzine) i frekvencije vrtnje (brzine vrtnje)

Brojčani iznos: Naziv veličine	Brojčani iznos: Jedinica	Oznaka brojčanog iznosa	$\{\omega\}_{\mathrm{rad/s}}$	$\{\omega\}_{\mathrm{rad/min}}$	$\{\omega\}_{^\circ/\mathrm{s}}$	$\{n\}_{\mathrm{okr/s}}$	$\{n\}_{\mathrm{okr/min}}$
rotancija ω	rad/s	$\{\omega\}_{\mathrm{rad/s}} =$	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{\pi}{180}$	2π	$\frac{\pi}{30}$
rotancija ω	rad/min	$\{\omega\}_{\mathrm{rad/min}} =$	60	1	$\frac{\pi}{3}$	120π	2π
rotancija ω	1°/s	$\{\omega\}_{^\circ/\mathrm{s}} =$	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{3}{\pi}$	1	360	6
frekvencija vrtnje n	okr/s	$\{n\}_{\mathrm{okr/s}} =$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{120\pi}$	$\frac{1}{360}$	1	$\frac{1}{60}$
frekvencija vrtnje n	okr/min	$\{n\}_{\mathrm{okr/min}} =$	$\frac{30}{\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{6}$	60	1

Primjer upotrebe tablice: ako je $n = 300$ okr/min, onda je $\omega = 300 \cdot (\pi/30)$ rad/s $= 31{,}4$ rad/s.

jednom volumenom $V = 1$ litar, a drugi put masom $m = 1$ kg, jer je u tom slučaju doista $V/\mathrm{litar} = 1 = m/\mathrm{kg}$. Posve analogno možemo napisati

$$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{okr}}{\mathrm{s}} = 0{,}159\,155\,\frac{\mathrm{okr}}{\mathrm{s}},$$

gdje je rad/s jedinica rotancije (kutne brzine) ω, a okr/s jedinica frekvencije vrtnje (brzine vrtnje) n.

Relacije sa znakom »odgovara« ($\hat{=}$) pod upitnikom su u pogledu korektnosti u metrološkom smislu. Stoga ih valja primijeniti samo u slučaju ako se nikakav drugi, korektniji izlaz ne može naći. Budući da to za naš primjer jedinice rotancije ω i frekvencije vrtnje n ne dolazi u obzir, u nastavku ćemo pokazati kako zapravo treba uspostaviti odnose među *brojčanim iznosima* tih veličina i kako se jedino tako mogu sastaviti ispravni i upotrebljivi brojčani odnosi (umjesto tablice B-9).

Veličine ω i n najpotpunije (metrološki ispravno) povezuje jednadžba (2.2-9), tj. jednadžba $\omega = 2\pi\,\mathrm{rad}\,n$. Veličine ω i n možemo prema pravilima računanja (vidi odsječak A.1.3) prikazati kao umnoške brojčanih iznosa i jedinica. Općenito je $G = \{G\}\,[G]$, tj. »veličina = brojčani iznos × jedinica«. Ako, dakle, pišemo $\omega = \{\omega\}\,[\omega]$ i $n = \{n\}\,[n]$, od jednadžbe (2.2-9) dobivamo

$$\frac{\{\omega\}}{\{n\}} = 2\pi\,\mathrm{rad}\,\frac{[n]}{[\omega]}. \qquad (2.4\text{-}1)$$

Ovdje još nismo definirali koje su to jedinice $[n]$ i $[\omega]$, pa se stoga još ne zna koliki je omjer brojčanih iznosa na lijevoj strani jednadžbe (2.4-1). To se mora učiniti za svaki slučaj posebno. Rezultat takvih proračuna sadrži tablica B-15 (okr = 1).

Primjer 1. Izračunajmo kako se odnose brojčani iznosi rotancije ω izražene u kutnim stupnjevima u sekundi (1 °/s) prema brojčanim iznosima frekvencije vrtnje n izražene u 1/min! Ako u jednadžbu (2.4-1) stavimo $[\omega] = 1\,°/s$ i $[n] = 1/\text{min}$, te upotrijebimo odnose $2\pi\ \text{rad} = 360°$ (vidi odlomak 1.4.3) i minuta $= 60$ s, dobivamo

$$\frac{\{\omega\}_{°/s}}{\{n\}_{1/\text{min}}} = 2\pi\ \text{rad}\,\frac{1/\text{min}}{1°/s} = 360°\ \frac{s}{60\ s \cdot 1°} = 6,$$

tj. brojčani iznos rotancije ω u jedinici 1 °/s šest puta je veći od brojčanog iznosa frekvencije vrtnje n u jedinici 1/min, ako se opisuje *ista* vrtnja.

Primjer 2. Zamašnjak ima frekvenciju vrtnje $n = 3\,000$ okr/min (tj. $n = 3\,000$ 1/min, jer je okr = 1). Kolika je rotancija ω tog zamašnjaka u jedinici rad/s? Tablica B-15 sadrži odnos $\{\omega\}_{\text{rad/s}} = \{n\}_{\text{okr/min}} \cdot \pi/30$. U našem je slučaju, dakle, vrijednost veličine rotancija $\omega = 3\,000 \cdot (\pi/30)$ rad/s $= 100\pi$ rad/s $= 314$ rad/s.

3. Masene veličine. Jedinice mase, gustoće i koncentracije

3.1. Veličine mase i gustoće

3.1.1. Fizikalna veličina masa. Veličina »masa« jedna je od osnovnih veličina svih prirodoslovnih i tehničkih znanosti. Zbog toga smo toj veličini i njenim jedinicama posvetili izuzetnu pažnju, gotovo onakvu kao i veličinama »duljina« i »vrijeme«. Fizikalnu veličinu masa, posebno njenu vezu s ubrzanjem zemljine teže, opširno smo razmotrili u poglavlju A.9, na koje upućujemo čitatelja. S druge smo strane u poglavlju D.1 pokušali veličinu »masa« staviti u vezu s pojmom »količina tvari«, koji je vrlo koristan u kemiji i nauci o toplini.

Jedinica mase u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je kilogram = kg. Ta i druge metričke jedinice mase razmotrene su u odsječku 3.3, dok su raznovrsne angloameričke jedinice mase opisane u odsječku 11.5.

3.1.2. Gustoća. Stroga definicija fizikalne veličine »gustoća« ρ glasi

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}, \tag{3.1-1}$$

čime je gustoća tvari definirana u tački. Pomoću te definicije može se veličina ρ upotrebljavati i za rješavanje onih zadataka kod kojih se gustoća iste tvari mijenja od mjesta do mjesta. Definicija (3.1-1) vrijedi za svako agregatno stanje tvari.

Za homogene tvari definicijska jednadžba (3.1-1) prelazi u oblik

$$\text{gustoća } \rho = \frac{\text{masa } m}{\text{volumen } V}; \quad \rho = \frac{m}{V}. \tag{3.1-2}$$

Gustoća je, dakle, omjer mase m neke tvari i volumena V koji ta homogena tvar zauzima (vidi i specijalizirane pojmove gustoće u odlomku 3.2.1). Moramo primijetiti da se tzv. kvocijentne veličine, kao što su gustoća ili specifični volumen, u nekim udžbenicima krivo definiraju. Kaže se na primjer: »gustoća je masa jedinice volumena.« Gustoća nije masa, već posve *nova* veličina, definirana *omjerom* mase i volumena.

Budući da je gustoća definirana omjerom mase i volumena, ona ne ovisi o ubrzanju zemljine teže g, jer ne ovisi ni masa, a dakako ni volumen. No gustoća ovisi o stanju tijela, npr. o temperaturi i o atmosferskom tlaku. Stoga se pri objavljivanju vrijednosti gustoće navode ti podaci. Gustoća žive (Hg), na primjer, iznosi pri temperaturi $\vartheta = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$ i tlaku $p = 760$ torr $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13\,595{,}1\ \mathrm{kg/m^3}$ (vidi poglavlje 4).

Umjesto izraza »gustoća« neki autori upotrebljavaju termin »specifična masa«, koji također definiraju izrazom $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$, odnosno $\rho = m/V$. Taj izraz nema ni-

kakve prednosti pred »gustoćom«, naprotiv: dulji je od »gustoće«, dakle manje praktičan. I u drugim jezicima postoje nazivi analogni »gustoći«: slovenski gostota, ruski plotnost, češki hustota, poljski gestość, engleski density, francuski densité, talijanski densità, španjolski densidad, njemački Dichte. Stoga bi i u hrvatsko-srpskom jeziku valjalo potpuno napustiti nelijepi i nepraktični izraz »specifična masa« te dosljedno upotrebljavati »gustoća«. Eventualna bojazan da bi došlo do brkanja s viskoznošću (kako neki misle), suvišna je, jer tko zna što je viskoznost i potreban mu je taj pojam, taj neće pogriješiti; kome nije potrebna »viskoznost«, taj neće ni doći u priliku da pogriješi.

Jedinica mase u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je kilogram po kubnom metru = kg/m³. U odsječku 3.4 opisane su i druge jedinice gustoće, metričke i anglo-američke. U tablicama **17** i **18** u prilogu knjige prikazani su dvostrani odnosi među nizom jedinica gustoće.

Spomenimo još da je gustoća ρ sa »specifičnom težinom« $\gamma = \mathrm{d}G/\mathrm{d}V$ u odnosu $\gamma = \rho g$, gdje je g ubrzanje zemljine teže. Ako je riječ o normiranoj težini ($G_0 = m_0 g$), onda namjesto g mora stajati normirano ubrzanje zemljine teže $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$.

3.1.3. Specifični volumen recipročna je veličina od gustoće ρ, definirana je dakle jednadžbom

$$\text{specifični volumen } v = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}m} = \frac{1}{\text{gustoća}} = \frac{1}{\rho}. \qquad (3.1\text{-}3)$$

Za homogene tvari definicijska jednadžba specifičnog volumena u skladu s izrazom (3.1-2) glasi (pri stanovitom tlaku i temperaturi)

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}.$$

Jedinica specifičnog volumena u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je kubni metar po kilogramu = m³/kg. Ostale jedinice specifičnog volumena recipročne su raznoraznim jedinicama gustoće; jedinice gustoće skupljene su u odsječku 3.4.

Budući da je $v = 1/\rho$, a $\rho = \gamma/g$, to između specifičnog volumena v i specifične težine γ postoji veza $v = g/\gamma$.

Primjer. Pronađena je pločica nekog nepoznatog metala izmjera $12 \times 5 \times 1$ mm. Da bi se ustanovilo o kakvom je metalu riječ, vagom je izmjerena masa pločice, $m = 1{,}16$ g. Podacima o volumenu pločice $V = 12\ \mathrm{mm} \times 5\ \mathrm{mm} \times 1\ \mathrm{mm} = 60\ \mathrm{mm^3}$ i $m = 1{,}16$ g izračunata je gustoća metala

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1{,}16\ \mathrm{g}}{60\ \mathrm{mm^3}} = \frac{1{,}16 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{60 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m^3}} = 19\,333\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}.$$

Izračunata gustoća $\rho = 19\,333\ \mathrm{kg/m^3} = 19{,}333\ \mathrm{kg/dm^3}$ uspoređena je s podacima o gustoćama u priručnicima te je utvrđeno da je riječ o volframu. Specifični volumen volframa iznosi $v = 1/\rho = 5{,}17 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/kg} = 51{,}7\ \mathrm{cm^3/kg}$, tj. 51,7 kubnih centimetara volframa ima masu 1 kilogram.

3.1.4. Relativna gustoća definirana je kao omjer gustoće ρ neke tvari i gustoće ρ_0 »standardne« ili »referentne« tvari pri određenom fizikalnom stanju (tlak, temperatura)

$$d = \frac{\text{gustoća tvari } \rho}{\text{gustoća standardne tvari } \rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Relativna gustoća d je tzv. brojčana veličina, a njena jedinica je broj 1.

Za »standardnu tvar« obično se pri utvrđivanju relativne gustoće d krutih tijela i tekućina upotrebljava *voda* pri maksimalnoj gustoći, tj. odzračena destilirana voda pri temperaturi 4 °C i normiranom tlaku 1,01325 bar (1 atm). Za plinove se kao standardna tvar upotrebljava suh atmosferski zrak pri temperaturi 0 °C i tlaku 1,01325 bar ili pri 20 °C i istom tlaku.

Budući da se prilikom mjerenja u laboratoriju ne može uvijek bez teškoća ostvariti temperatura oko 4 °C, mjerenja se obavljaju pri stvarnoj temperaturi, različitoj od 4 °C, a rezultati se mogu preračunati na maksimalnu gustoću vode ρ_0 pomoću podataka iz tablice B-16.

Tablica **B-16**

Ovisnost gustoće vode o temperaturi pri tlaku 1,01325 bar (1 atm)

ϑ °C	ρ kg/m³	ϑ °C	ρ kg/m³	ϑ °C	ρ kg/m³	ϑ °C	ρ kg/m³
0	999,850	10	999,700	20	998,203	30	995,65
1	999,899	11	999,604	21	997,991	35	994,03
2	999,940	12	999,497	22	997,769	40	992,21
3	999,964	13	999,376	23	997,537	45	990,22
4	999,972	14	999,243	24	997,295	50	988,05
5	999,964	15	999,098	25	997,043	60	983,21
6	999,940	16	998,942	26	996,782	70	977,78
7	999,901	17	998,773	27	996,511	80	971,80
8	999,848	18	998,594	28	996,231	90	965,32
9	999,780	19	998,404	29	995,943	100	958,35

U tablici B-16 možda upada u oči da maksimalna gustoća vode, tj. pri 4 °C, iznosi $\rho_0 = 0{,}999\,972$ kg/dm³, a ne 1 kg/litar (tačno), kako piše u većini priručnika. Ova razlika u brojčanim iznosima u vezi je s novom definicijom (zapravo s ponovnim prihvaćanjem definicije litra od godine 1795) jedinice volumena »litar« (vidi odlomak 1.7.3) koja je od godine 1964. sinonim za kubni decimetar, tj. sada vrijedi tačno litar (l) = dm³. Prije toga vrijedio je odnos litar (»metrološki litar«, l_m) = = 1,000 028 dm³. Budući da je za vodu pri 4 °C gustoća iznosila tačno 1 kg/l_m, to je očito $\rho_0 = 1\,\text{kg}/l_m = 1\,\text{kg}/(1{,}000\,028\ \text{dm}^3) = 0{,}999\,972\ \text{kg/dm}^3$.

3.1.5. Maseni protok. Ovu veličinu definirat ćemo uz pomoć slike B.9, koja shematski prikazuje dio cijevi četvrtastog presjeka površine A. Kroz tu cijev konstantnom brzinom u struji plin ili tekućina stalne gustoće ρ. Zamislimo da se u trenutku t_1 sloj P strujećeg medija, okomit na smjer strujanja, nalazi u tački *1*. U trenutku t_2 taj isti sloj dospio je jednoličnim strujanjem u tačku t_2; sloj P pomakao se, dakle, za $\Delta s = u\,\Delta t$, gdje je $\Delta t = t_2 - t_1$. To znači da je kroz presjek A u tački *1* u toku vremenskog intervala Δt prošla strujeća tvar volumena $\Delta V = A\,\Delta s$. Veličinu

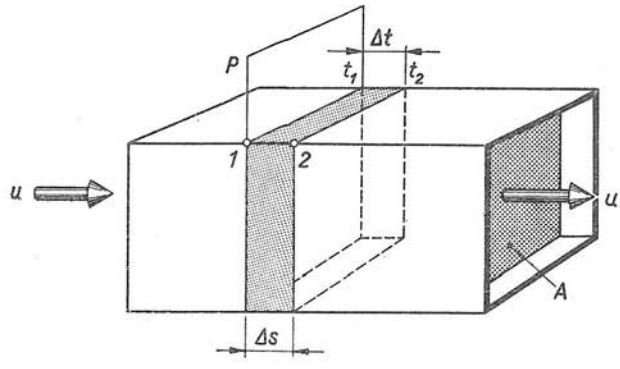
$$q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = Au \tag{3.1-4}$$

nazivamo *protok* ili »volumni protok«. Ako je strujanje doista sa stalnom brzinom, dakle sa $u = \text{const}$, gornju jednadžbu možemo napisati u obliku $q = V/t$, gdje je V volumen medija koji je prošao kroz cijev u vremenskom intervalu t.

Masa tvari stalne gustoće ρ, koja je u toku vremena Δt prošla kroz zamišljeni sloj P na slici B.9, iznosi prema jednadžbi (3.1-1), tj. prema definiciji »gustoće«, $\Delta m = \rho \Delta V$. Veličinu

$$m' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \rho q = \rho A u \qquad (3.1\text{-}5)$$

nazivamo *maseni protok*. Ako je strujanje sa $u = \text{const}$, gornju definiciju masenog protoka možemo napisati u obliku $m' = m/t$, gdje je m masa medija koji je prošao kroz cijev na bilo kojem njenom mjestu u vremenskom intervalu t.



Sl. B.9. Uz definiciju masenog protoka m'

Jedinica masenog protoka m' u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je kilogram u sekundi = = kg/s, a jedinica (volumnog) protoka q je kubni metar u sekundi = m^3/s. Ostale jedinice obaju protoka sadrže tablice **22** i **23** u prilogu knjige.

Primjer. Kroz okruglu sapnicu promjera 10 mm struji iz spremnika zrak brzinom $u = 300$ m/s. Specifični volumen zraka na izlazu iz sapnice iznosi $v = 0{,}73$ m³/kg. Izračunajmo koliki je protok i koliki je maseni protok zraka! Zadatak ćemo riješiti pomoću jednadžbi (3.1-4,5), ali uvrstivši u drugu v umjesto ρ, dakle $\rho = 1/v$, čime se dobiva izraz $m' = \rho q = q/v$.

Najprije izračunajmo presjek sapnice $A = d^2\pi/4 = (10\text{ mm})^2\pi/4 = 78{,}5\text{ mm}^2$. Uvrštenjem te vrijednosti u (3.1-4) dobivamo protok

$$q = Au = 78{,}5\text{ mm}^2 \cdot 300\text{ m/s} = 78{,}5 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2 \cdot 300\text{ m/s} = 0{,}023\,55 \frac{\text{m}^3}{\text{s}},$$

dok pomoću jednadžbe $m' = q/v$ dobivamo maseni protok

$$m' = \frac{q}{v} = \frac{0{,}02355\text{ m}^3/\text{s}}{0{,}73\text{ m}^3/\text{kg}} = 0{,}032 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Vrijednosti izračunatih veličina nisu tako malene kako se možda čini onome tko je navikao na druge jedinice protoka. Stoga preračunajmo rezultate na jedinice m³/h i kg/h. Slijedi $q = 0{,}023\,55\text{ m}^3 \cdot 3\,600/\text{h} = 84{,}6\text{ m}^3/\text{h}$ i $m' = 0{,}032\text{ kg/s} = 0{,}032\text{ kg} \cdot 3\,600/\text{h} = 116\text{ kg/h}$!

3.1.6. Koncentracija. U kemiji i farmaciji se pod veličinom »koncentracija« najčešće razumijeva omjer mase m_0 otopljene tvari i ukupne mase m otopine. U obliku jednadžbe ovu definiciju možemo zabilježiti ovako

$$\text{koncentracija} = \frac{\text{masa otopljene tvari}}{\text{masa otopine}} = \frac{m_0}{m} = k. \qquad (3.1\text{-}6)$$

Budući da je riječ o omjeru dviju istovrsnih veličina, to je jedinica koncentracije broj 1 ili njegovi dijelovi: postotak (procent) = % (= 1/100) i promil = ‰ (= 1/1000). Ukoliko se proračuni koncentracije izvode gustoćom tekućina ρ (vidi primjer 3 u nastavku), u kemiji i farmaciji se upotrebljavaju vrlo različite jedinice gustoće,

npr. mg/l, gr/UK gal, gr/US gal, oz/US gal itd. Dvostrane odnose među takvim jedinicama gustoće sadrži tablica **18** u prilogu knjige.

Primjer 1. Koliko se kilograma 5-postotne otopine KOH može izraditi od 10 litara vode? Sredimo najprije podatke: 10 litara vode ima masu $m_v = 10$ kg, a zadana koncentracija iznosi $k = 5\,\%$. S ovim podacima računamo pomoću jednadžbe (3.1-6) ovako: ako sa m označimo masu otopine, a sa m_0 masu KOH, onda vrijede jednadžbe $m = m_0 + m_v$ te $m_0 = km$. Odavde slijedi

$$m = \frac{m_v}{1-k} = \frac{10\text{ kg}}{1-5\%} = \frac{10\text{ kg}}{1-0{,}05} = 10{,}52\text{ kg}.$$

Može se, dakle, izraditi 10,52 kg petpostotne otopine KOH.

Primjer 2. Koliko ima soli, a koliko vode u 800 grama 12-postotne otopine $NaNO_3$? Masa m_0 otopljene soli je $m_0 = 12\,\% \cdot 800\text{ g} = 0{,}12 \cdot 800\text{ g} = 96\text{ g}$. Ostatak je otapalo (voda): $m - m_0 = 800\text{ g} - 96\text{ g} = 704\text{ g}$.

Primjer 3. Koliki volumen 9,5-postotne otopine Na_2CO_3 gustoće 1,1 g/ml treba dodati vodi mase 100 g, da bi se dobila 3-postotna otopina? Označimo najprije ovo mnoštvo podataka prikladnim oznakama: masa vode je $m_v = 100$ g, koncentracija prije miješanja je $k_1 = 9{,}5\,\%$, gustoća $\rho_1 = 1{,}1$ g/ml, a nakon miješanja koncentracija je $k_2 = 3\,\%$. Nepoznat je volumen V_1 otopine Na_2CO_3 koncentracije k_1 (prije miješanja).

Ako za trenutak pretpostavimo da znamo V_1, možemo reći da je $m_1 = V_1\rho_1$, a masa otopljene tvari $m_0 = k_1 m_1$. Nakon miješanja mora biti udovoljeno relaciji $k_2 = m_0/(m_1 + m_v)$; odavde uz pomoć navedenih jednadžbi slijedi

$$V_2 = \frac{k_2}{k_1 - k_2}\,\frac{m_v}{\rho_1} = \frac{3\%}{9{,}5\% - 3\%}\,\frac{100\text{ g}}{1{,}1\text{ g/ml}} = \frac{3 \cdot 100}{6{,}5 \cdot 1{,}1}\text{ml} = 41{,}9\text{ ml}.$$

Prema tome treba dodati 41,9 mililitara 9,5-postotne otopine Na_2CO_3.

3.1.7. Ostale masene veličine. Uz masene veličine koje smo razmotrili u prošlih šest odlomaka postoji još niz njih koje upotrebljavamo u tehničkim ili prirodoslovnim znanostima. Dio tih veličina skupili smo u tablici B-17. Takozvane »molne veličine«, koje se upotrebljavaju u kemiji i nauci o toplini, obradili smo u stanovitoj mjeri u glavi D ove knjige. Tamo su obrađene i pripadne jedinice »mol«, »kilomol« itd.

Tablica **B-17**

Masene veličine, njihove definicijske jednadžbe i jedinice SI kojima se mjere

Red. broj	Naziv veličine	Oznaka	Jedinica SI	Definicijska jednadžba
1	masa	m	kg	
2	gustoća	ρ	kg/m³	$\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$
3	specifični volumen	v	m³/kg	$v = \mathrm{d}V/\mathrm{d}m = 1/\rho$
4	relativna gustoća	d	1	$d = \rho/\rho_0$
5	maseni protok	m'	kg/s	$m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$
6	jedinični maseni protok	m_1'	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$	$m_1' = \mathrm{d}m'/\mathrm{d}A$
7	koncentracija	k	1	$k = m_0/m$
8	plošna gustoća	—	kg/m²	$\mathrm{d}m/\mathrm{d}A$
9	impuls (količina gibanja)	p, I	kg m/s	$\mathrm{d}p = \mathrm{d}(mv)$; v — brzina
10	moment impulsa	L, I	kg m²/s	$L = pr$; r — krak
11	moment tromosti (inercije)	I, J	kg m²	$I = \int r^2\,\mathrm{d}m$

U vezi s tablicom B-17 korisno je da se za trenutak zadržimo uz veličine opisane pod rednim brojevima 6 i 8. »Jedinični maseni protok« m_1' definiran je omjerom masenog protoka m' i površine A kroz koju okomito struji neka tvar. Ilustrirajmo to podacima iz primjera na kraju odlomka 3.1.5. Tamo smo imali maseni protok zraka $m' = 0{,}032\ \mathrm{kg/s}$, a površina otvora sapnice iznosila je $A = 78{,}5\ \mathrm{mm^2}$. Prema tome je jedinični maseni protok

$$m_1' = \frac{m'}{A} = \frac{0{,}032\ \mathrm{kg/s}}{78{,}5\ \mathrm{mm^2}} = \frac{0{,}032\ \mathrm{kg/s}}{78{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}} = 407\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s\,m^2}}.$$

Taj podatak možemo sebi predočiti tako kao da kroz otvor površine 1 kvadratni metar u 1 sekundi prođe 407 kilograma zraka.

Veličina »plošna gustoća« (redni broj 8 u tablici B-17) definirana je omjerom mase i površine. Pomoću nje karakteriziraju se, na primjer, željezni limovi i ploče, a vrlo je korisna za trgovinu, transport i skladišta. Dvostrane odnose među različitim jedinicama »plošne gustoće«, uključivši angloameričke, sadrži tablica **19** u prilogu knjige. Primijetimo usput da se upotrebljava i veličina »linijska gustoća«, koja je definirana omjerom mase (npr. žice, željeznih profila itd.) i duljine.

3.2. Mjerenje gustoće tekućih, krutih i šupljikavih tvari

3.2.1. Definicije gustoćâ i poroznosti. Veličina »gustoća«, koju smo u odlomku 3.1.2 definirali omjerom mase m i volumena V, odnosno preciznije $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$, odnosi se na homogene krute, tekuće i plinovite tvari. Navedena definicija nedovoljno je jednoznačna za neke tvari koje su šupljikave ili se sastoje od mnoštva sitnijih komada. Primjeri za to su npr. šamotna opeka, koja sadrži mnoštvo zračnih mjehurića, i pšenica (rastresita tvar). Stoga se u građevinarstvu, prehrambenoj industriji, drvnoj industriji i drugdje upotrebljavaju neki dodatni pojmovi, koje ćemo definirati u nastavku.

Prava gustoća ρ_s, koja se naziva i »stvarnom gustoćom« ili »gustoćom same tvari«, omjer je mase tvari prema njenom stvarnom volumenu, tj. u stvarni volumen nisu uračunate pore i šupljine. Ta prava gustoća ρ_s definira se pri propisanoj temperaturi i vlažnosti

Prividna gustoća ρ_v, koja se naziva i »gustoća tvari s porama« ili »volumna masa«, omjer je mase tvari prema njenom ukupnom volumenu, tj. zajedno s porama i šupljinama. I prividna gustoća ρ_v definira se pri propisanoj temperaturi i vlažnosti.

Razliku između prave gustoće i prividne gustoće ilustrirat će nam konkretan *primjer*. Iz šamotne opeke pažljivo smo izrezali kockicu izmjera $2\ \mathrm{cm} \times 2\ \mathrm{cm} \times 2\ \mathrm{cm}$, izvagali je i dobili njenu masu $m = 14{,}4$ grama. Označimo li volumen kockice sa $V_v = 8\ \mathrm{cm^3}$, možemo izračunati »prividnu gustoću« $\rho_v = m/V_v = 14{,}4\ \mathrm{g}/8\ \mathrm{cm^3} = 1{,}8\ \mathrm{g/cm^3} = 1{,}8\ \mathrm{kg/dm^3}$. Zatim smo kockicu zdrobili i samljeli, te piknometarskom metodom (vidi odlomak 3.2.3) ustanovili da je volumen šamotne prašine $V_s = 5{,}55\ \mathrm{cm^3}$. Omjer $\rho_s = m/V_s = 14{,}4\ \mathrm{g}/5{,}55\ \mathrm{cm^3} = 2{,}6\ \mathrm{g/cm^3} = 2{,}6\ \mathrm{kg/dm^3}$ je »prava gustoća« šamotne tvari.

Gustoća pri stanovitoj vlažnosti ρ_{vx} je »prividna gustoća« ρ_v pri stanovitoj vlažnosti. Indeks x označuje stupanj vlažnosti tvari u momentu utvrđivanja gustoće. Za tvar u potpuno osušenom stanju upotrebljava se oznaka ρ_{v0} (tj. $x = 0$).

Gustoća pri stanovitoj zbijenosti (ρ_{vr}, ρ_{vz}, ρ_{vm}) omjer je mase *rastresite* tvari prema njenom volumenu zajedno s porama i šupljinama, uključujući međuprostore

između čestica. Ta gustoća definirana je pri propisanoj temperaturi, vlažnosti i zbijenosti nastaloj propisanim postupkom stresanja, prešanja i sl. Simbol ρ_{vr} odnosi se na tvar u rastresitom stanju (bez zbijanja), ρ_{vz} na tvar u zbijenom stanju, a ρ_{vm} na tvar u stanju neke »srednje« zbijenosti.

Prava poroznost p omjer je volumena svih pora i šupljina, sadržanih u stanovitoj šupljikavoj tvari, prema volumenu te tvari zajedno s porama i šupljinama. Prava poroznost obično se naziva samo imenom »poroznost«. Vezu između p, ρ_v i ρ_s možemo uspostaviti ovako: sa V_v i V_s označimo prividni i pravi volumen (vidi prethodni primjer), a sa m, $\rho_v = m/V_v$ i $\rho_s = m/V_s$ masu, prividnu gustoću i pravu gustoću. Budući da je prava poroznost definirana omjerom $p = (V_v - V_s)/V_v = 1 - V_s/V_v$, to kombinacijom navedenih odnosa dobivamo $p = 1 - \rho_v/\rho_s$.

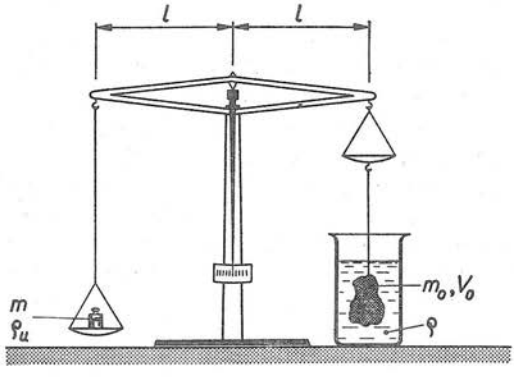
Prividna poroznost p_p ili »poroznost otvorenih pora« omjer je volumena otvorenih pora, ispunjenih destiliranom vodom pri propisanoj temperaturi i tlaku, prema ukupnom volumenu šupljikave tvari zajedno s porama i šupljinama. Prividna poroznost izračunava se pomoću izraza $p_p = \Delta m : (\rho V_v)$, gdje su: Δm — masa upijene vode, ρ njena gustoća, a V_v volumen šupljikave tvari zajedno s porama i šupljinama.

Skrivena poroznost p_{skr} ili »poroznost zatvorenih pora« omjer je volumena zatvorenih pora, u koje tekućina ne može ući kad poroznu tvar u nju uronimo, prema ukupnom volumenu ispitivane tvari. Vrijedi dakako $p = p_p + p_{skr}$.

Ispunjenost i omjer je volumena same tvari prema ukupnom volumenu šupljikave tvari zajedno s porama i šupljinama, dakle $i = V_s/V_v$. Između prave poroznosti p i ispunjenosti i postoji veza $p = 1 - i$.

Upojnost U ili »upijanje vode« omjer je mase destilirane vode koju je šupljikava tvar upila pri propisanoj temperaturi i tlaku prema masi osušene te iste tvari. Upojnost se izračunava pomoću izraza $U = (m_v/m_s) - 1$. Ovdje simbol m_v označuje masu vodom zasićene tvari, a m_s masu osušene tvari.

3.2.2. Mjerenje gustoće hidrostatskom vagom. Princip djelovanja hidrostatske vage objasnit ćemo na jednom od primjera te vage (sl. B.10): utvrđivanje nepoznate gustoće ρ *tekućine*. Na desnom kraku vage ovješeno o nit visi tijelo T (od običnog ili kremenog stakla) poznate mase m_0 i volumena V_0 pri temperaturi ϑ. Uronimo li pri toj istoj temperaturi ϑ ovješeno tijelo T u mjerenu tekućinu, tj. ispod desne zdjelice vage podmetnemo posudu napunjenu tekućinom nepoznate gustoće ρ, vaga će biti u ravnoteži ako se na lijevom kraku vage nalazi uteg mase m (volumen tog utega je $V = m/\rho_u$, gdje je ρ_u gustoća kovine od koje je izrađen uteg).



Sl. B.10. Načelo djelovanja hidrostatske vage

Budući da je riječ o ravnokrakoj vagi, momenti lijevog i desnog kraka vage bit će jednaki ako su jednake sile teže što djeluju na oba kraka. Na lijevi krak djeluje težina utega mg umanjena za silu uzgona istisnutog zraka $V\rho_z g = m g \rho_z/\rho_u$, a na

desni krak težina $m_0 g$ tijela T umanjena za silu uzgona istisnute tekućine $V_0 \rho g$. Ubrzanje zemljine teže g konstantno je na području gdje se nalazi vaga, pa ga možemo odstraniti iz gornjih izraza, i tako dobivamo jednadžbu ravnoteže

$$m - m\rho_z/\rho_u = m_0 - V_0\rho, \tag{3.2-1}$$

koja je osnovom primjene hidrostatske vage. U razmatranom slučaju, tj. pri *mjerenju gustoće* ρ *tekućine*, iz gornjeg izraza dobivamo

$$\rho = \frac{1}{V_0}\left[m_0 - m\left(1 - \frac{\rho_z}{\rho_u}\right)\right]. \tag{3.2-2}$$

Ako se ne traži preciznost mjerenja veća od 0,01 %, za gustoću zraka uzima se vrijednost $\rho_z = 0{,}0012$ kg/dm³ bez obzira na temperaturu i tlak (vidi tablicu B-18). Kod manje preciznih mjerenja može se omjer ρ_z/ρ_u zanemariti (npr. za željezne utege taj omjer iznosi oko $1{,}5 \cdot 10^{-4}$), pa jednadžba (3.2-2) prelazi u oblik $\rho = (m_0 - m)/V_0$.

Volumen pomoćnog tijela V_0 mijenja se s temperaturom ϑ. Stoga se taj volumen utvrđuje dvostrukim vaganjem na istoj hidrostatskoj vagi iz slike B.10. Najprije se vaga uravnoteži u zraku; u tom slučaju vrijedi jednadžba ravnoteže

$$m_0 - V_0\rho_z = m_1 - V_1\rho_z, \tag{3.2-3}$$

gdje je m_1 masa utega kojim smo postigli ravnotežu, a V_1 volumen tog utega. Zatim izvedemo novo vaganje; ono isto tijelo T, koje ima nepoznati volumen V_0 i masu m_0, uronimo u tekućinu *poznate gustoće* ρ_v (obično je to destilirana voda; vidi tablicu B-16) i sada utegom mase m_2 postignemo ravnotežu. U tom slučaju vrijedi jednadžba

$$m_0 - V_0\rho_v = m_2 - V_2\rho_z. \tag{3.2-4}$$

Iz jednadžbi (3.2-3,4) možemo izračunati volumen V_0 tijela T pri temperaturi na kojoj se obavlja mjerenje

$$V_0 = \frac{m_1 - m_2 - (V_1 - V_2)\rho_z}{\rho_v - \rho_z}, \tag{3.2-5}$$

dok se masa tijela m_0 može izračunati iz jednadžbe (3.2-3), jer je V_0 sada poznat iz jednadžbe (3.2-5).

Hidrostatske vage najčešće se danas izrađuju u obliku *Mohr-Westphal*ove vage (podrobnosti o tome vidi u knjizi *I. Filipović — P. Sabioncello*: »Laboratorijski priručnik«, dio I, knjiga 3, Tehnička knjiga, Zagreb 1965). Danas već postoje i takve vage koje su graduirane tako da gustoću mjerene tekućine pokazuju direktno u jedinicama gustoće (npr. u g/cm³). Pomoću hidrostatske vage mogu se mjeriti i gustoće *krutih tvari*. Način primjene vage u tu svrhu opisan je u citiranoj knjizi.

3.2.3. Mjerenje gustoće piknometrom sastoji se od trostrukog mjerenja mase polužnom vagom. Piknometar je staklena posuda (jedan oblik piknometra prikazuje slika B.11) s uskim grlom koje se zatvara čepom. U taj čep može biti ugrađen termometar. Sa strane ili u čepu piknometar ima kapilaru na kojoj je ubilježena crta do koje se piknometar prilikom mjerenja napuni tekućinom.

Pri mjerenju *gustoće tekućine* piknometar se najprije izvaže prazan (utezi mase m_1 na polužnoj vagi). Zatim se napuni destiliranom vodom do crtice (gustoća vode

Tablica **B-18**

Ovisnost gustoće zraka (u g/m³) o temperaturi i tlaku

Tlak, bar	Temperatura u °C													
	−25	−20	−15	−10	−5	0	+5	+10	+15	+20	+25	+30	+35	+40
0,900	1263,5	1238,5	1214,5	1191,5	1169,2	1147,8	1127,2	1107,3	1088,1	1069,5	1051,1	1034,3	1017,5	1001,2
0,910	77,5	52,3	28,0	1204,7	82,2	60,6	39,7	19,6	1100,2	81,4	63,3	45,7	28,8	12,4
0,920	91,6	66,0	41,5	17,9	95,2	73,3	52,3	31,9	12,3	93,3	75,0	57,2	40,1	23,5
0,930	1305,6	79,8	55,0	31,2	1208,2	86,1	64,8	44,2	24,4	1105,2	86,7	68,7	51,4	34,6
0,940	19,6	93,6	68,5	44,4	21,2	98,9	77,3	56,5	36,5	17,1	98,3	80,2	62,7	45,7
0,950	33,7	1307,3	82,0	57,7	34,2	1211,6	89,8	68,8	48,5	29,0	1110,0	91,7	74,0	57,9
0,960	47,7	21,1	95,5	70,9	47,2	24,4	1202,4	81,1	60,6	40,8	21,7	1103,2	85,3	68,0
0,970	61,7	34,9	1309,0	84,1	60,2	37,1	14,9	93,4	72,7	52,7	33,4	14,7	96,6	79,1
0,980	75,8	48,6	22,5	97,4	73,2	49,9	37,4	1205,7	84,8	64,6	45,1	26,2	1107,9	90,2
0,990	89,8	62,4	36,0	1310,6	86,2	62,6	39,9	18,0	96,9	76,5	56,8	37,7	19,2	1101,4
1,000	1403,9	76,1	49,5	23,8	99,2	75,4	52,5	30,3	1209,0	88,4	68,4	49,2	30,5	12,5
1,010	17,9	89,9	63,0	37,1	1312,2	88,1	65,0	42,6	21,1	1200,3	80,1	60,7	41,8	23,6
1,020	31,9	1403,7	76,5	50,3	25,1	1300,9	77,5	54,9	33,2	12,1	91,8	72,2	53,1	34,7
1,030	46,0	17,4	90,0	63,5	38,1	13,6	90,0	67,2	45,3	24,0	1203,4	83,6	64,4	45,9
1,040	60,0	31,2	1403,5	76,8	51,1	26,4	1302,6	79,6	57,4	35,9	15,2	95,1	75,7	57,0
1,050	74,1	44,9	17,0	90,0	64,1	39,1	15,1	91,9	69,4	47,8	26,9	1206,6	87,1	68,1
1,060	88,1	58,7	30,5	1403,3	77,1	51,9	27,6	1304,2	81,5	59,7	38,5	18,1	98,4	79,2
1,070	1502,1	72,5	43,9	16,5	90,1	64,7	40,1	16,5	93,6	71,6	50,2	29,6	1209,7	90,3
1,080	16,2	86,2	57,4	29,8	1403,1	77,4	52,7	28,8	1305,7	83,4	61,9	41,1	21,0	1201,5
1,090	30,2	1500,0	70,9	43,0	16,1	90,2	65,2	41,1	17,8	95,3	73,6	52,6	32,3	12,6

ρ_v pri izmjerenoj temperaturi je poznata; vidi tablicu B-16) i tako napunjen vodom ponovno se izvaže (utezi mase m_2). Konačno se piknometar izvaže (utezi mase m_3) kad je do iste crtice napunjen tekućinom čiju gustoću ρ želimo saznati. Ta tri stanja ravnoteže opisuju ove tri jednadžbe:

$$m_1 - \rho_z m_1/\rho_u = m_p - \rho_z \Delta V + \rho_z V,$$
$$m_2 - \rho_z m_2/\rho_u = m_p - \rho_z \Delta V + \rho_v V,$$
$$m_3 - \rho_z m_3/\rho_u = m_p - \rho_z \Delta V + \rho V,$$

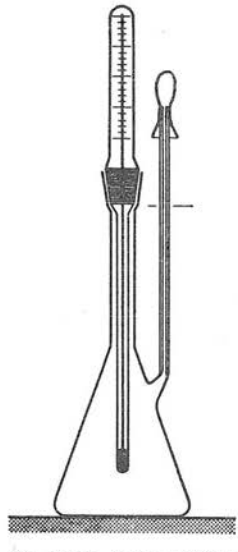
gdje je ρ_z — gustoća zraka (tablica B-18), ρ_u — gustoća utega, m_p — masa piknometrane računajući masu zraka u njemu (dakle evakuiranog), ΔV — volumen koji zauzimaju tvari od kojih je izrađen piknometar, ρ_v — gustoća vode pri temperaturi na kojoj se obavljaju sva tri mjerenja (tablica B-16), V — volumen unutrašnjosti piknometarske posude (do crtice na kapilari). Riješimo li sistem ovih triju jednadžbi, dobivamo izraz za izračunavanje mjerene gustoće tekućine

$$\rho = (\rho_v - \rho_z)\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} + \rho_z \qquad (3.2\text{-}6)$$

pri temperaturi na kojoj su zadane veličine ρ_v i ρ_z. Vidimo da volumen V piknometra ne moramo poznavati, jer je on isti u sva tri uravnoteženja vage.

Pri *mjerenju gustoće praškastih tvari* također su potrebna tri mjerenja, ali pri tom se piknometar važe samo dva puta. Postupak je ovakav: najprije se piknometar izvaže kad je napunjen vodom gustoće ρ_v (utezi mase m_2 na polužnoj vagi). Zatim se u piknometar usipa ispitivana praškasta tvar kojoj želimo ustanoviti gustoću ρ. Prije toga prašak je izmjeren na vagi (bez piknometra) i utvrđeno je da ima masu m. Prilikom usipavanja praška u piknometar, iz piknometra izađe toliki volumen vode koliki je volumen unijetog praška, a to je m/ρ. Pošto je sav prašak usut u piknometar, on se drugi put izvaže (utezi mase m_3 na polužnoj vagi). Opisana dva stanja ravnoteže opisuju jednadžbe

$$m_2 - \rho_z m_2/\rho_u = m_p - \rho_z(V + \Delta V) + \rho_v V,$$
$$m_3 - \rho_z m_3/\rho_u = m_p - \rho_z(V + \Delta V) + m + \rho_v(V - m/\rho).$$



Sl. B.11. Jedan oblik piknometra s termometrom

Riješimo li ove dvije jednadžbe, oduljim računanjem dobivamo

$$\rho = \rho_v \frac{m}{(1 - \rho_z/\rho_u)(m_2 - m_3) + m}. \qquad (3.2\text{-}7)$$

Tamo gdje nije potrebna naročita preciznost, zanemaruje se član ρ_z/ρ_u, pa jednadžba (3.2-7) prelazi u približan oblik

$$\rho = \rho_v \frac{m}{m_2 - m_3 + m}, \qquad (3.2\text{-}8)$$

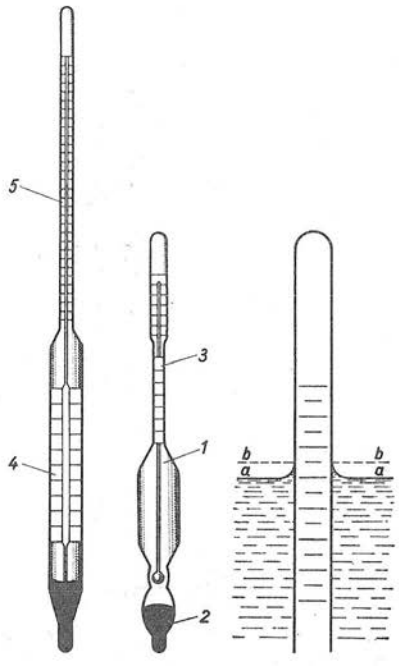
koji daje oko $(1 + 1{,}5 \cdot 10^{-4})$ puta manje vrijednosti negoli izraz (3.2-7).

Primjer. Pri utvrđivanju gustoće praškastog barita vagao je piknometar zajedno s vodom $m_2 = 80{,}0058$ grama. Masa uzorka iznosila je $m = 6{,}3329$ g, a vaganje piknometra zajedno s praškom i ostatkom vode dalo je rezultat $m_3 = 84{,}8206$ g. Relativna gustoća barita prema jednadžbi (3.2-8) iznosi

$$d = \frac{\rho}{\rho_v} = \frac{6{,}3329\,\text{g}}{80{,}0058\,\text{g} + 6{,}3329\,\text{g} - 84{,}8206\,\text{g}} = \frac{6{,}3329}{1{,}5181} = 4{,}1716.$$

O veličini »relativna gustoća« vidi odlomak 3.1.4.

3.2.4. Mjerenje gustoće tekućina areometrima. Za povremeno mjerenje gustoće tekućina i koncentracije otopina u procesnoj, prehrambenoj i drugim industrijama dovoljno je precizan nadasve jednostavan mjerni uređaj nazvan *areometar*. To je u stvari plovak koji pluta u mjerenoj tekućini i uranja u nju to dublje što je gustoća tekućine manja. Stoga dubina uranjanja areometra može biti mjerom gustoće tekućine (vidi odlomak 3.5.1). Areometar djeluje zapravo u skladu s *Arhimed*ovim zakonom uzgona, tj. areometar uranja toliko duboko u mjerenu tekućinu da se njegova težina uravnoteži s težinom tekućine koju je istisnuo.



Sl. B.12. Dva oblika staklenog areometra s termometrom

U principu se areometar (sl. B.12) sastoji od šupljeg tijela *1* s opteretnom komorom *2* i vrata *3*. Većina areometara izrađena je od stakla, ali ima i metalnih. U komori *2* nalazi se stanovita količina žive ili olovne sačme, što je potrebno da bi areometar djelomično uronio i pri tom stabilno plutao. Vrat *3* areometra u stvari je uska okrugla cijev koja je na vrhu zataljena, a na svom dnu tako udružena sa cilindričkim tijelom *1* da se simetrale tijela *1* i vrata *3* podudaraju. S unutrašnje strane staklenog vrata *3* prilijepljena je papirnata skala *4* (sl. B.12). Areometri s ugrađenim termometrom (*5*) nazivaju se »termoareometri«.

Prilikom mjerenja areometar se pažljivo spušta u mjerenu tekućinu kako bi mirno plutao, a ne da iskoči ako je bio gurnut preduboko. Gustoća se očitava na presjecištu razine tekućine sa crticom skale, i to u visini $a-a$, a ne $b-b$ (sl. B.12; jedino se na nekim specijalnim areometrima očitava $b-b$, ali je to onda posebno naznačeno). Mjerena tekućina mora se nalaziti u takvoj posudi da tijelo areometra ne dotiče stijene posude, a razina tekućine mora biti barem tolika da je udaljenost od donjeg kraja areometra do dna posude najmanje 2 centimetra. Prije uranjanja areometar treba brižljivo oprati i osušiti, a tekućinu dovesti na temperaturu okolnog zraka.

Areometar daje precizne rezultate samo za one tekućine za koje je baždaren. Ako se uroni u neku drugu tekućinu, njegovi se mjereni rezultati moraju korigirati »kapilarnom korekturom«, tj. korekturom dubine uranjanja. Ta dubina se mijenja pod utjecajem različitih površinskih napetosti tekućina, a o njima ovise volumen i

masa meniskusa. Kapilarna korektura dobiva se pomoću jednadžbe $\Delta k = (a_2 - a_1)\pi\rho^2 d/m$, gdje su a_2 i a_1 kapilarne konstante mjerene tekućine i tekućine za koju je areometar baždaren, ρ tražena gustoća tekućine, d promjer vrata areometra i m masa areometra.

Utjecaj temperature na pokazivanje areometra je dvojak. Odstupanje temperature mjerene tekućine od nazivne temperature areometra uzrokuje promjenu njegova volumena, a promjena temperature tekućine (naročito ako je riječ o malim uzorcima) mijenja gustoću mjerene tekućine. Temperaturna korektura zbog promjene volumena areometra nije velika, a u svakom se slučaju posebno ocjenjuje izrazom $\rho - \rho' = -\beta(\vartheta - \vartheta_0)\rho'$, gdje je ρ' pokazivanje areometra, β koeficijent širenja stakla areometra, a $\vartheta - \vartheta_0$ razlika između stvarne i nazivne (normalne, propisane) temperature areometra. Veći utjecaj ima korektura zbog širenja mjerene tekućine. Stoga za mnoge tekućine postoje tablice gustoće i koncentracije u ovisnosti o temperaturi (vidi npr. tablicu B-16). Na temelju njih sastavljene su posebne areometarske tablice pomoću kojih se pokazivanja areometara pri nekoj temperaturi mogu preračunati na vrijednosti gustoće ili koncentracije pri normalnoj temperaturi. Za areometre za mjerenje gustoće morske vode normalna temperatura je 17,5 °C, za areometre za mjerenje gustoće ljepila 75 °C, a za sve ostale areometre 20 °C.

S obzirom na mjerenu veličinu areometri se dijele u dvije skupine: 1) Areometri za mjerenje gustoće tekućine (denzimetri) čija je skala graduirana u jedinicama gustoće (npr. u g/cm³). Među ove se ubrajaju denzimetri za mjerenje gustoće kiselina, naftenih derivata, mlijeka, morske vode, elektrolita u akumulatorima itd. 2) Areometri za mjerenje koncentracije otopina čija je skala graduirana u procentima masenog ili volumnog udjela otopljene tvari u otopini. Alkoholometri (vidi odlomak 3.5.4) su, na primjer, graduirani u »volumnim procentima«, a vrijednosti na njihovim skalama padaju odozgo prema dolje, jer što je veći udio alkohola u otopini (mješavini), to manja je gustoća i to dublje uranja areometar.

Razred preciznosti areometara određen je razlikom vrijednosti gustoće između dvije susjedne crtice skale. Razredi su: 0,0001 kg/dm³, 0,0002 kg/dm³ (etalonski i primarni areometri, denzimetri za morsku vodu), 0,0005 kg/dm³ (primarni areometri, za naftene derivate, za mlijeko); 0,001, 0,002, 0,005, 0,01 i 0,02 kg/dm³ (denzimetri za opću namjenu, za naftene derivate, akumulatorski itd.). Navedeni iznosi ujedno predstavljaju i vrijednosti relativne gustoće (vidi odlomak 3.1.4) u odnosu prema gustoći vode. Areometri za mjerenje koncentracije dijele se u ove razrede: 0,1 % i 0,2 % (primarni i laboratorijski), 0,5 % i 1 % (tehnički); o namjeni areometara ovisi da li je riječ o volumnim ili masenim postocima (vidi odlomak 3.5.4). Pogreška pokazivanja areometara ne smije premašiti najmanji razmak između dvije susjedne crtice. Iznimka su alkoholometri kod kojih je taj razmak 0,5 % i 1 % (vol.), a pogreška ne smije biti veća od $\pm 0{,}3$ % i $\pm 0{,}5$ %.

Drukčije skale areometara (*Baumé*, *Twaddel* itd.) opisane su u odlomcima 3.5.2,3.

3.3. Mjerne jedinice mase

3.3.1. Jedinica mase kilogram (kratica: kg). U odsječku A.9.3 opširno smo razmotrili kako je realizirana jedinica mase Međunarodnog sistema jedinica, prikazali smo fotografije međunarodnog prakilograma te naveli definiciju kilograma koju ćemo ovdje ponoviti: »Kilogram je masa međunarodne pramjere koja je pohranjena u Međunarodnom uredu za mjere i utege.« Uvjeti pod kojima je pohra-

njena međunarodna pramjera kilograma i način uspoređivanja (vaganja) utega s međunarodnom pramjerom također su opisani u citiranom odsječku.

Jedinica mase kilogram jedna je od osnovnih jedinica mase Međunarodnog sistema jedinica (SI), što možemo zabilježiti ovako

$$\text{jedinica mase SI} = \text{kilogram} = \text{kg}.$$

Međunarodna kratica kilograma su mala uspravna slova k i g koja stoje zajedno, a ne Kg, KG ili kG, kako se može naći u nekih autora, u trgovinama itd. Kratica »kg« historijskog je porijekla (vidi odsječak A.6.2) : gram (franc. gramme) bila je jedinica mase u metričkom sistemu jedinica koji je godine 1795. prva u svijetu ozakonila Francuska. Međunarodni standardni uteg — prakilogram koji se spominje u definiciji jedinice mase SI — kilogram ima tisuću (kilo = k = 1000) puta veću masu od pramjere mase — grama od godine 1795. (apstrahiramo pri tom poboljšanje preciznosti mjerenja mase od tada do danas!).

Protiv *naziva* »kilogram« za *osnovnu* jedinicu mase, koja je ostvarena u obliku međunarodne pramjere — prakilograma u Međunarodnom uredu za mjere i utege (Sèvres kraj Pariza), bilo je sve donedavna jakih protivljenja. Glavni razlog tom protivljenju je činjenica da naziv osnovne jedinice mase sadrži dekadski višekratnik (kilo) jedne druge jedinice (gram). Tako je Amerikanac *Robertson* još godine 1904. predložio da se jedinica mase, koju predstavlja međunarodna pramjera, nazove »kam«; do tog naziva došao je eliminacijom k(ilogr)am. Godine 1953. Commissione Italiana di Metrologia predložila je naziv »bes« (kratica: b), koji potječe od latinskog binae partes assis, što je 2/3 stare rimske jedinice mase »as« ili »libra«. Ti prijedlozi, tj. kam = bes (= kg), nisu naišli na odaziv, jer je naziv »kilogram« uvriježen stoljećima, a u svakodnevnom životu se ni ne pomišlja da je *naziv* »kilogram« u stvari »1000 × gram«. Zbog toga se decimalni i dekadski višekratnici moraju na kilogram primjenjivati *drukčije* negoli na ostale osnovne i izvedene jedinice SI, što ćemo vidjeti u odlomku 3.3.2.

Na području primjene angloameričkih jedinica postoje tri kompletna »sistema« jedinica mase (za opću primjenu, za farmaciju i za draguljarstvo). Oni su detaljno razmotreni u odsječku 11.5.

3.3.2. Ostale metričke jedinice mase. Pri kraju prošlog odlomka smo naglasili da se dekadski i decimalni višekratnici (tablica A-1) primjenjuju na *gram*, a ne na kilogram, iako je kilogram osnovna jedinica SI. (To je ponovno potvrdila Generalna konferencija za mjere i utege na svom najnovijem, 13. zasjedanju godine 1967.) Stoga je pri računanju s tako izvedenim jedinicama mase uvijek potrebna znatna pažnja. Izvod jedinice, na primjer, ide ovako: miligram = m gram = mg = $= 10^3$ g = 0,001 g. Budući da je kilogram = k gram = kg = 10^3 g = 1000 g, to su veze između miligrama i kilograma ove:

$$\frac{\text{mg}}{\text{kg}} = \frac{10^{-3}\,\text{g}}{10^{3}\,\text{g}} = 10^{-6}; \qquad \frac{\text{kg}}{\text{mg}} = 10^{6}.$$

Na opisanom principu izvedene su i druge metričke jedinice mase, čiji su dvostrani odnosi skupljeni u tablicama B-19, 20. U tablici B-19 nalazimo i jedinicu mase »karat«, koja nije u decimalnom odnosu prema gramu. Uporaba te jedinice mase dopuštena je za dragulje (vidi odlomak 3.3.3). U tablici B-19 nalazi se i posebna jedinica mase kvintal (q) = 100 kg. Javna uporaba ove jedinice dopuštena je jugoslavenskim Zakonom o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961,

Tablica **B-19**

Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama mase

Jedinica		Kratica	μg	mg	karat, k	gram, g	dag (dkg)	kg	kvintal, q	tona t
mikrogram	=	μg	1	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-12}
miligram	=	mg	10^{3}	1	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-9}
karat	=	k	$2 \cdot 10^{5}$	$2 \cdot 10^{2}$	1	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$
gram	=	g	10^{6}	10^{3}	5	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-6}
dekagram	=	dag (dkg)	10^{7}	10^{4}	$5 \cdot 10^{1}$	10^{1}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-5}
kilogram	=	kg	10^{9}	10^{6}	$5 \cdot 10^{3}$	10^{3}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-3}
kvintal (metrička centa)	=	q	10^{11}	10^{8}	$5 \cdot 10^{5}$	10^{5}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-1}
tona	=	t	10^{12}	10^{9}	$5 \cdot 10^{6}$	10^{6}	10^{5}	10^{3}	10^{1}	1

Tablica **B-20**

Dvostrani odnosi među metričkim i nekim kemijskim jedinicama mase

Jedinica		Kratica	pg γγγ	ng γγ	μg γ	mg	cg	dg	g	kg
pikogram mikrogama	= =	pg γγγ	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-15}
nanogram miligama	= =	ng γγ	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-12}
mikrogram gama	= =	μg γ	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}
miligram	=	mg	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}
centigram	=	cg	10^{10}	10^{7}	10^{4}	10^{1}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}
decigram	=	dg	10^{11}	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10^{1}	1	10^{-1}	10^{-4}
gram	=	g	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	1	10^{-3}
kilogram	=	kg	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	1

a upotrebljava se uglavnom u poljoprivredi. Budući da je kvintal = q = 100 kg = $= 10^5$ g, to bi naziv ove jedinice u duhu dekadskih višekratnika glasio »pentagram« (penta = pe = 10^5), a takav višekratnik nije međunarodno usvojen. Osim toga i tradicija naziva (stara francuska jedinica quintal = 100 livre = 48,95 kg) potakla je zakonodavca da dopusti ovu iznimku, ali uz definiciju

$$\text{kvintal (metrička centa)} = \text{q} = 100 \text{ kg}.$$

U tablici B-20, koja sadrži dvostrane odnose među jedinicama mase od pikograma do kilograma, nalazimo i tri vrlo sitne jedinice mase koje se upotrebljavaju u analitičkoj kemiji. To su

$$\text{gama (gamma)} = \gamma = 10^{-6} \text{ grama}$$

i njene izvedenice miligama (kratica: $\gamma\gamma$) = 10^{-3} $\gamma = 10^{-9}$ g i mikrogama (kratica: $\gamma\gamma\gamma$) = 10^{-6} $\gamma = 10^{-12}$ g. Iz tablice B-20 se vidi da su nazivi »gama«, koji međunarodno nikada nisu bili standardizirani, posve suvišni, jer se decimalnim višekratnicima iz tablice A-1 mogu mnogo prikladnije izvesti nazivi tih jedinica, koji su u skladu s građom ostalih izvedenih jedinica (npr. nanosekunda, pikofarad itd.):

$$\text{pikogram} = \text{pg} = 10^{-12}\text{g} = 10^{-15}\text{kg} = \gamma\gamma\gamma,$$

$$\text{nanogram} = \text{ng} = 10^{-9}\text{ g} = 10^{-12}\text{ kg} = \gamma\gamma,$$

$$\text{mikrogram} = \mu\text{g} = 10^{-6}\text{ g} = 10^{-9}\text{ kg} = \gamma.$$

U stručnoj literaturi se mogu naći i ove metričke jedinice mase:

$$\text{hektogram} = \text{hg} = 100\text{ g} = 0{,}1\text{ kg},$$

$$\text{mirijagram (franc. myriagramme)} = 10^4\text{ g} = 10\text{ kg},$$

$$\text{millier} = 1000\text{ kg (= tona)},$$

$$\text{megatona} = \text{Mt} = 10^6\text{ t} = 10^6 \cdot 1000\text{ kg} = 10^9\text{ kg}.$$

U nekim stručnim člancima, naročito francuskim, mogu se zapaziti i posve besmislene kombinacije višekratnika, koje autori ponekad primjenjuju i na jedinicu gram. Evo dvije takve suvišnosti: hektokilo = hk = $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$, dekamega = $= \text{daM} = 10 \cdot 10^6 = 10^7$!

3.3.3. Dvostruko značenje riječi karat. U prvom značenju »karat« je jedinica za izražavanje *mase* dijamanata, dragocjenog kamenja i pravog biserja. To je međunarodno usvojena jedinica (ali van djelokruga rada Generalne konferencije za mjere i utege), koja je u ovom odnosu prema ostalim metričkim jedinicama mase:

$$\text{karat (k)} = 2 \cdot 10^{-4}\text{ kg} = 0{,}2\text{ grama} = 200\text{ miligrama}.$$

Za navedenu svrhu primjenu ove jedinice dopušta i jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. Odnose međunarodnog karata = 0,2 g prema ostalim metričkim jedinicama mase sadrži tablica B-19. Odgovarajuće angloameričke jedinice mase dragulja sadrži tablica u odlomku 11.5.3 (system troy), te tablica **15** u prilogu knjige.

U *drugom značenju* riječ »karat« označuje maseni *udio* zlata u zlatnoj leguri prema 24-stepenoj skali. Naznaka »1-karatno zlato« odnosi se na leguru koja se sastoji od 1/24 zlata. Čisto zlato označeno je sa 24 karata.

3.3.4. Jedinice mase hyl i slug. U takozvanom Tehničkom sistemu (metričkom) jedinica (vidi odsječak 8.1) odabrane su za osnovne ove jedinice: za duljinu — metar (m), za vrijeme — sekunda (s), za silu — kilopond (kp). Budući da je taj sistem jedinica prema svojoj koncepciji koherentan, to se izvedena jedinica mase u Tehničkom sistemu dobiva iz jednadžbe $m = F/a$, ako se u nju umjesto oznaka za veličine uvrste one jedinice koje su odabrane za osnovne. To znači da uvrštavamo jedinice $[F]_T = \text{kp} = \text{kilopond}$, $[a]_T = \text{m/s}^2 = \text{metar}$ u sekundi na kvadrat; tako dobivamo

$$[m]_T = \frac{[F]_T}{[a]_T} = \frac{\text{kp}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{kp} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = \text{hyl} = \text{techma}. \qquad (3.3\text{-}1)$$

Indeksom T označujemo da je riječ o jedinicama (metričkog) Tehničkog sistema jedinica. Nazivi »hyl« ili »techma« mogu se naći u literaturi vrlo rijetko, što je razumljivo, jer ta jedinica nigdje nije bila ni standardizirana ni ozakonjena. Posvemašnjim prihvaćanjem Međunarodnog sistema jedinica (SI), jedinica »hyl« ili »techma« iščezla je iz suvremene literature.

Budući da je jedinica sile kilopond definirana relacijom $\text{kp} = 9{,}806\,65\ \text{kg m/s}^2$ (tačno), uvrštenjem tog odnosa u jednadžbu (3.3-1) dobivamo

$$[m]_T = 9{,}806\,65\ \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{s}^2}{\text{m}} = 9{,}806\,65\ \text{kg (tačno)},$$

tj. hyl (= techma) je nedekadski višekratnik jedinice mase kilogram; tu jedinicu mase možemo sebi približno zamisliti realiziranu sa deset utega po 1 kilogram.

Posve analogno je u angloameričkom tehničkom sistemu jedinica izvedena jedinica mase (vidi odsječak 11.7).

$$\text{slug} = \frac{\text{pound-force}}{\text{ft/s}^2} = 32{,}174\,0\ \text{lb} = 14{,}593\,9\ \text{kg}.$$

3.3.5. Molne, standardne i angloameričke jedinice mase. U kemiji, fizikalnoj kemiji i nauci o toplini upotrebljavaju se i tzv. individualne jedinice mase mol i kilomol, a u elektrokemiji jedinice val i kiloval. Budući da se te jedinice ne upotrebljavaju u mehanici, na koju se odnosi ova glava B knjige, u pogledu nabrojenih individualnih jedinica mase upućujemo na odsječak D.1.6 u glavi D. Ujedno upozoravamo da se jedinice mol, kmol i mold mogu interpretirati, a i interpretiraju se, na primjer u fizikalnoj kemiji, kao jedinice »količine tvari«. O tome se raspravlja u odsječcima D.1.3,4 i u odlomku D.3.7.2.

Pod »standardnim« ili »referentnim« jedinicama mase razumijevaju se one vrijednosti veličine masa koje su odabrane za osnovu prema kojoj se računaju vrijednosti veličina »relativna molekularna masa« i »relativna atomska masa«. U tzv. Međunarodnoj ugljikovoj skali atomskih masa, koja se upotrebljava od godine 1961, za »standardnu« vrijednost mase odabrana je 1/12 mase nuklida ugljika ^{12}C. O tome kao i o fizikalnoj i kemijskoj skali relativnih masa govori se u odsječku D.1.2.

Angloamerički sistemi jedinica mase (system avoirdupois, apothecaries--system i system troy) podrobno su razmotreni u odsječku 11.5. Dvostrane odnose među metričkim i angloameričkim jedinicama mase sadrže tablice **14**, **15** i **16** u prilogu knjige.

3.4. Metričke i angloameričke jedinice gustoće

3.4.1. Jedinica gustoće kg/m³ (kilogram po kubnom metru). To je jedinica gustoće u Međunarodnom sistemu jedinica (SI), koja slijedi iz definicijske jednadžbe gustoće $\rho = m/V$ (vidi odlomak 3.1.2), ako se upotrijebe jedinice SI mase $[m]_M = \text{kg}$ i volumena $[V]_M = \text{m}^3$. Prema tome je

$$\text{jedinica gustoće SI} = \frac{\text{kilogram}}{\text{kubni metar}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Uz tu jedinicu upotrebljava se još niz drugih koje se ili izvode iz kg/m³ pomoću višekratnika (vidi tablicu A-1) ili su angloameričkog porijekla. Njih ćemo razmotriti u naredna dva odlomka. »Areometarske jedinice gustoće« opisane su u odsječku 3.5.

3.4.2. Ostale metričke jedinice gustoće. Pri kraju odlomka 3.3.1 i na početku odlomka 3.3.2 naglasili smo da se decimalni i dekadski višekratnici iz tablice A-1 primjenjuju na *gram*, a ne na kilogram. Tako je na primjer

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{10^3\ \text{g}}{\text{m}^3} = 1000\,\frac{\text{g}}{\text{m}^3}. \tag{3.4-1}$$

Način primjene višekratnika na jedinicu volumena kubni metar = m³ prikazali smo u odlomku 1.7.2, odakle prenosimo $\text{m}^3 = 1000\ \text{dm}^3$, gdje je $\text{dm}^3 = (\text{dm})^3 = $ kubni decimetar. Ako relaciju $\text{m}^3 = 1000\ \text{dm}^3$ uvrstimo u jednadžbu (3.4-1), dobivamo

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1000\,\frac{\text{g}}{\text{m}^3} = \frac{1000\,\text{g}}{1000\,\text{dm}^3} = \frac{\text{gram}}{\text{kubni decimetar}} = \frac{\text{g}}{\text{dm}^3}. \tag{3.4-2}$$

Budući da prema zaključku 12. zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege, održanog godine 1964, vrijedi odnos

$$\text{litar (l)} = \text{kubni decimetar} = \text{dm}^3,$$

tj. litar je sinonim za kubni decimetar, izraz (3.4-2) možemo napisati i u obliku

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{gram}}{\text{litar}} = \frac{\text{g}}{\text{l}}.$$

Primjenom decimalnih višekratnika iz tablice A-1 na jedinicu mase gram ili na jedinicu volumena kubni metar, ili na oboje, opisanim načinom nastaje mnoštvo jedinica gustoće koje se upotrebljavaju u mnogim znanostima, a naročito u kemiji. Dvostrane odnose među nekim takvim jedinicama gustoće sadrži tablica B-21. Odnose prema angloameričkim jedinicama gustoće sadrže tablice **17** i **18** u prilogu knjige.

Na nekoliko mjesta u tablici B-21 napisane su dvije različite kratice za istu jedinicu gustoće. Naravno da vrijedi

$$\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{l}},\quad \frac{\text{g}}{\text{dm}^3} = \frac{\text{g}}{\text{l}},\quad \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{g}}{\text{ml}},\quad \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} = \frac{\text{g}}{\mu\text{l}},$$

jer vrijede ovi odnosi: $\text{dm}^3 = \text{l} = $ litar, $\text{cm}^3 = \text{ml} = $ mililitar, $\text{mm}^3 = \mu\text{l} = $ mikrolitar (vidi odlomak 1.7.3).

Primjer. Volumometrijskom metodom izmjerena je gustoća cementa $\rho = 3{,}1$ g/ml. Izrazimo tu vrijednost u kg/dm³ i kg/m³! Pomoću tablice B-21 dobivamo $\rho = 3{,}1 \cdot 1000$ kg/m³ = $= 3100$ kg/m³ i $\rho = 3{,}1 \cdot 1$ kg/dm³ = 3,1 kg/dm³.

Tablica **B-21**

Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama gustoće

Jedinica		Kratica	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{kg/dm^3}{kg/l}$	$\frac{g/dm^3}{g/l}$	$\frac{g/cm^3}{g/ml}$	$\frac{g/mm^3}{g/\mu l}$	$\frac{t}{m^3}$	$\frac{t}{hl}$
kilogram po kubnom metru	=	$\frac{kg}{m^3}$	1	10^{-3}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}
kilogram po kubnom decimetru (litru)	=	$\frac{kg/dm^3}{kg/l}$	10^{3}	1	10^{3}	1	10^{-3}	1	10^{-1}
gram po kubnom decimetru (litru)	=	$\frac{g/dm^3}{g/l}$	1	10^{-3}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}
gram po kubnom centimetru (mililitru)	=	$\frac{g/cm^3}{g/ml}$	10^{3}	1	10^{3}	1	10^{-3}	1	10^{-1}
gram po kubnom milimetru (mikrolitru)	=	$\frac{g/mm^3}{g/\mu l}$	10^{6}	10^{3}	10^{6}	10^{3}	1	10^{3}	10^{2}
tona po kubnom metru	=	$\frac{t}{m^3}$	10^{3}	1	10^{3}	1	10^{-3}	1	10^{-1}
tona po hektolitru	=	$\frac{t}{hl}$	10^{4}	10^{1}	10^{4}	10^{1}	10^{-2}	10^{1}	1

3.4.3. Angloameričke jedinice gustoće. Jedinice gustoće građene su u Engleza i Amerikanaca jednako kao i u metričkom sistemu, samo što su upotrijebljene njihove jedinice mase i volumena. Tako se npr. odnos angloameričke jedinice gustoće pound per cubic yard (lb/yd³) prema kg/m³ dobiva uvršenjem lb = = 0,453 592 37 kg (vidi odsječke 11.4,5) i yd³ = 0,764 555 m³, što nakon računanja daje

$$\text{pound per cubic foot} = \text{lb/ft}^3 = 16{,}0185 \text{ kg/m}^3.$$

Postoji još niz drugih engleskih i američkih jedinica gustoće, npr. pound per cubic inch = lb/in³, UK ton per cubic yard, grain per US gallon itd. Sve te jedinice, njihove međusobne odnose, te njihov odnos prema metričkim jedinicama sadrže tablice **17** i **18** u prilogu knjige. Iz tih tablica se, na primjer, vidi da je

$$\text{lb/in}^3 = 1728 \text{ lb/ft}^3 = 231 \text{ lb/US gal} = 27{,}6799 \text{ g/cm}^3 \text{ itd.}$$

Osim veličine gustoća $\rho = m/V$ postoji i veličina »plošna gustoća« = masa/površina (vidi odlomak 3.1.7). Međusobne odnose različitih jedinica plošne gustoće sadrži tablica **19** u prilogu knjige. Tako je npr. oz/yd² = 3,390 57 mg/cm² (oz = = ounce) itd.

3.5. Areometarske skale gustoće tekućina

3.5.1. Proračun areometarske skale. U odlomku 3.2.4 opisali smo metodu mjerenja gustoće tekućina areometrima. Da bismo mogli uspostaviti vezu između vrijednosti gustoće ρ (npr. u jedinici kg/m³, kg/dm³ itd.; vidi odsječak 3.4) i vrijednosti koje pokazuju crtice na areometrima, izvest ćemo vezu između gustoće ρ mjerene tekućine i pripadne dubine uranjanja l areometra u tu tekućinu. Radi toga ćemo se poslužiti skicama na slici B.13, koja načelno prikazuje djelovanje areometra (zanemarili smo problem stabilnosti areometra — plovka, zbog čega se areometri i izvode nalik na slike B.12 u odlomku 3.2.4).

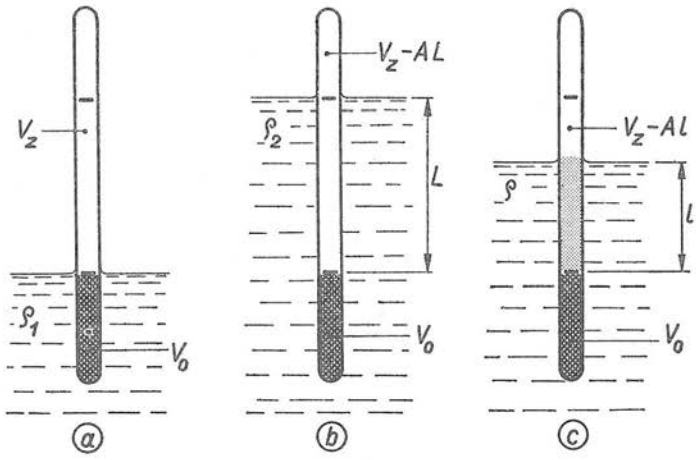
Želimo, dakle, da naš stakleni areometar svojom dubinom uranjanja $0 \leqq l \leqq L$ direktno pokazuje vrijednosti gustoće ρ, i to u rasponu od vrijednosti ρ_1 (donja mjerna granica) do vrijednosti ρ_2 (gornja granica). Prema tome su ρ_1 i ρ_2 unaprijed zadane konstante. Položaj crtica koje pripadaju gustoćama ρ_1 i ρ_2 utvrdit ćemo eksperimentalno (sl. B.13): kad areometar uronimo u tekućinu poznate gustoće ρ_1, on će plutati u stanju prikazanom na slici B.13a, dok će uronjen u tekućinu gustoće ρ_2 plutati uronjen do gornje crtice udaljene za L od donje (sl. B.13b). Prilikom kasnije upotrebe, za mjerenje gustoće u rasponu $\rho_1 < \rho < \rho_2$, areometar će plutati tako da razina tekućine bude udaljena l od donje crtice (sl. B.13c).

Označimo li masu hermetički zatvorenog areometra sa m_0, volumen njegova donjeg dijela, tj. od njegova donjeg kraja do donje crtice, sa V_0, a preostali volumen što ga zauzima areometar sa V_z (vidi sl. B.13a, b, c), možemo prikazana tri stanja hidrostatske ravnoteže opisati ovim jednadžbama

$$m_0 = \rho_1 V_0 + \rho_z V_z,$$

$$m_0 = \rho_2 V_0 + \rho_2 AL + \rho_z (V_z - AL),$$

$$m_0 = \rho V_0 + \rho Al + \rho_z (V_z - Al),$$



Sl. B.13. Uz proračun gustoće ρ mjerene tekućine i dubine uranjanja l areometra: a) areometar se nalazi u tekućini poznate gustoće ρ_1, b) areometar se nalazi u tekućini poznate gustoće ρ_2, c) areometar mjeri gustoću ρ tekućine koja se nalazi između donje mjerne granice ρ_1 i gornje granice ρ_2. U sva tri slučaja temperatura je ista

gdje je ρ_z gustoća zraka (uzima se vrijednost $\rho_z = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$; vidi tablicu B-18), a A poprečni presjek grla areometra. Napominjemo da je u sva tri slučaja temperatura svih triju tekućina ista. Riješimo li gornji sistem jednadžbi, dobivamo izraz

$$\frac{l}{L} = \frac{(\rho_2 - \rho_z)(\rho - \rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho - \rho_z)}, \tag{3.5-1}$$

koji povezuje udaljenost l od donje crtice areometra s mjerenom gustoćom ρ tekućine. Pomoću tog izraza možemo na areometru ispravno nacrtati podjelu između donje i gornje crtice. Iz (3.5-1) se, naime, vidi da je skala areometra nejednolika. Uvedemo li kratice

$$K = (\rho_2 - \rho_z)/(\rho_2 - \rho_1); \qquad K_0 = \rho_1 K,$$

koje su za zadane granice areometra konstante, od izraza (3.5-1) dobivamo jednadžbu

$$\rho = \frac{K_0 - \rho_z N}{K - N} \tag{3.5-2}$$

u kojoj je $N = l/L$. To znači da svakoj vrijednosti gustoće ρ pripada stanovita vrijednost omjera $N = l/L$.

Primjer. Izračunajmo raspodjelu crtica na skali areometra za vodu, koji treba da djeluje u području od $\rho_1 = 0{,}98\ \mathrm{kg/dm^3}$ do $\rho_2 = 1{,}02\ \mathrm{kg/dm^3}$! Pomoću izraza (3.5-2), gustoće zraka $\rho_z = 0{,}0012\ \mathrm{kg/dm^3}$ i kratice $N = l/L$ računanjem dobivamo

$\rho/(\mathrm{kg/dm^3})$	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02
$N = l/L$	0	0,25758	0,51001	0,75740	1

Rezultat nam pokazuje da crtice na skali areometra nisu jednoliko raspodijeljene duž L, jer jednolikoj bi razdiobi odgovarale redom vrijednosti $N = l/L$ 0; 0,25; 0,50; 0,75 i 1,00.

3.5.2. Bauméove areometarske skale. Gustoća zraka ρ_z vrlo je malena u odnosu na gustoće *tekućina* koje se mjere areometrima; ona je npr. gotovo tisuću puta manja od gustoće vode: iznosi oko 0,0012 kg/dm³ (tablica B-18). Ako zbog toga gustoću zraka zanemarimo u proračunu areometarske skale, konstante iz odlomka 3.5.1 prelaze u oblik

$$K = \rho_2/(\rho_2 - \rho_1), \quad K_0 = \rho_1 K,$$

a jednadžba (3.5-2) dobiva jednostavniji oblik

$$\rho = \frac{K_0}{K - N}. \tag{3.5-3}$$

Na taj način skala areometra postaje *linearna*, tj. razmak između bilo koje dvije susjedne crtice na skali areometra isti je duž čitave duljine L skale (vidi sl. B.13). Stoga skalu možemo proširiti daleko iznad vrijednosti $N = l/L = 1$. Drugim riječima: pod l možemo razumijevati razmak između dvije susjedne crtice skale, a pod L stvarnu duljinu skale.

Granice skale možemo odabrati po volji, a isto tako možemo tim graničnim vrijednostima gustoće svojevoljno pripisati vrijednosti omjera N. Ako odaberemo parove u kojima

$$\left.\begin{aligned} \rho &= 1 \text{ kg/dm}^3 \quad \text{odgovara } N = 0 \\ \rho &= 1{,}8427 \text{ kg/dm}^3 \quad \text{odgovara } N = 66 \end{aligned}\right\} \tag{3.5-4}$$

iz jednadžbe (3.5-3) računanjem dobivamo

$$K = 144{,}32 \quad \text{i} \quad K_0 = 144{,}32 \text{ kg/dm}^3,$$

pa izraz (3.5-3) prelazi u konkretan oblik

$$\rho = \frac{144{,}32 \text{ kg/dm}^3}{144{,}32 - N}; \quad \rho \geqq 1 \text{ kg/dm}^3. \tag{3.5-5}$$

Skala nastala propisivanjem parova vrijednosti (3.5-4) zove se *racionalna Bauméova skala za tekućine čija je gustoća veća od 1 kg/dm³*. Ta skala propisana je francuskom državnom uredbom od godine 1919, a *brojčana veličina* N dobila je i svoju *brojčanu jedinicu*

$$\text{stupanj Baumé} = {}^\circ\text{Bé} \equiv 1.$$

To znači da u podacima (3.5-4) možemo pisati $N = 0\,^\circ$Bé, odnosno $N = 66\,^\circ$Bé. U praktičnoj primjeni ove areometarske skale uvriježilo se stoga reći: »Gustoća akumulatorske kiseline iznosi 32 °Bé«, tj. $N = 32\,^\circ$Bé. Stvarna gustoća elektrolita može se izračunati pomoću jednadžbe (3.5-5) ako se u nju stavi $N = 32$. Pojedinačnim računanjem dobivaju se tako podaci sadržani u gornjem dijelu tablice B-22. Da bismo u daljnjim razmatranjima, kao i primjeni, mogli razlikovati stvarnu gustoću ρ od brojčane veličine N, potonju ćemo nazivati *areometarskom gustoćom.*

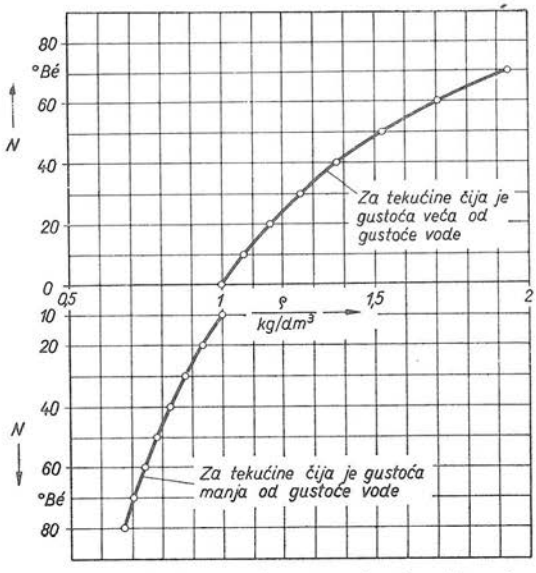
Spomenutom francuskom uredbom propisano je i ovo: skala definirana sa (3.5-4,5) vrijedi za tekućine čija je gustoća *veća* od $\rho = 1$ kg/dm³, dok su za tekućine gustoća *manjih* od $\rho = 1$ kg/dm³ propisani parovi vrijednosti u kojima

$$\left.\begin{aligned} \rho &= 1 \text{ kg/dm}^3 \quad \text{odgovara } N = 10\,^\circ\text{Bé}, \\ \rho &= 0{,}6434 \text{ kg/dm}^3 \quad \text{odgovara } N = 90\,^\circ\text{Bé}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5-6}$$

Za ove vrijednosti jednadžba (3.5-3) dobiva oblik analogan jednadžbi (3.5-5), ali ipak bitno različit

$$\rho = \frac{144{,}32\ \text{kg/dm}^3}{134{,}32 + N}; \quad \rho \leqq 1\ \text{kg/dm}^3. \tag{3.5-7}$$

Na slici B.14 grafički su prikazane ovisnosti (3.5-5,6) obiju *Baumé*ovih areometarskih gustoća N o stvarnoj gustoći ρ, a tablica B-22 sadrži ekvivalente u intervalima od po 1 °Bé.



Sl. B.14. Međusobna zavisnost racionalne *Baumé*ove areometarske skale N i gustoće ρ za područje $\rho > 1$ kg/dm³ (gornja krivulja) i za područje $\rho < 1$ kg/dm³

Valja reći da su ove skale, koje su danas najrašireniije u metričkom svijetu, prilikom osnivanja bile propisane drukčije nego što smo naveli u jednadžbama (3.5-4,6). Spomenutom uredbom obje *Baumé*ove skale bile su, međutim, redefinirane time što su godine 1919. propisane jednadžbe (3.5-5,7).

Postoje još tri *Baumé*ove areometarske skale: »starija«, »holandska« i »američka«. Ovisnosti $\rho = f(N)$ sadrži tablica B-23.

Primjer 1. Areometarska gustoća elektrolita punog automobilskog akumulatora pri 15 °C iznosi $N = 32$ °Bé. Izračunajmo kolika je prava gustoća! Budući da nije izričito navedeno o kojoj je *Baumé*ovoj skali riječ, pretpostavit ćemo da je riječ o tzv. racionalnoj *Baumé*ovoj skali. Za preračunavanje areometarske gustoće 32 °Bé u pravu gustoću primijenit ćemo izraz (3.5-5), jer on vrijedi za tekućine čija je gustoća *veća* od 1 kg/dm³. Uvrstimo li, dakle, $N = 32$, dobivamo

$$\rho = \frac{144{,}32\ \text{kg/dm}^3}{144{,}32 - 32} = \frac{144{,}32}{112{,}32}\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1{,}2849\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

Grubo možemo ovaj rezultat kontrolirati pomoću dijagrama na slici B.14, a precizno pomoću tablice B-22.

Primjer 2. Gustoća neke tekućine iznosi $\rho = 0{,}783$ kg/dm³ pri 15 °C. Izračunajmo areometarsku gustoću u racionalnoj *Baumé*ovoj skali! Budući da je $\rho = 0{,}783$ kg/dm³, dakle *manje* od 1 kg/dm³, moramo primijeniti izraz (3.5-7). Uvrštenjem dobivamo

$$N = \frac{144{,}32\ \text{kg/dm}^3}{\rho} - 134{,}32 = \frac{144{,}32}{0{,}783} - 134{,}32 = 50 = 50\ \text{°Bé},$$

tj. areometarska gustoća iznosi 50 °Bé.

3.5.3. Ostale areometarske skale građene su na sličnom principu kakav smo za racionalnu *Baumé*ovu skalu opisali u odlomku 3.5.2. Definicijske jednadžbe ostalih skala zabilježene su u tablici B-23.

Jedina iznimka u načinu građenja je *Twaddel*ova areometarska skala u kojoj je veza N sa ρ drukčija negoli u ostalih skala (vidi formulu u retku 10 tablice B-23).

Tablica **B-22**

Usporedba vrijednosti areometarske racionalne Bauméove skale s vrijednostima gustoće tekućine u jedinici kg/dm³ pri temperaturi 15 °C

	°Bé	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
za $\rho > 1$ kg/dm³	0	1,0000	1,0070	1,0141	1,0212	1,0285	1,0359	1,0434	1,0510	1,0587	1,0665
	10	1,0744	1,0825	1,0907	1,0990	1,1074	1,1160	1,1247	1,1335	1,1425	1,1516
	20	1,1609	1,1703	1,1799	1,1896	1,1995	1,2095	1,2197	1,2301	1,2407	1,2515
	30	1,2624	1,2736	1,2849	1,2964	1,3082	1,3202	1,3324	1,3448	1,3574	1,3703
	40	1,3834	1,3968	1,4105	1,4244	1,4386	1,4531	1,4679	1,4829	1,4983	1,5141
	50	1,5301	1,5465	1,5633	1,5804	1,5979	1,6158	1,6341	1,6528	1,6719	1,6915
	60	1,7116	1,7321	1,7532	1,7747	1,7968	1,8195	1,8427	1,8665	1,8910	1,9161
	70	1,9419	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Primjer: areometarskoj gustoći 32 °Bé (za $\rho > 1$ kg/dm³) odgovara gustoća $\rho = 1{,}2849$ kg/dm³.

	°Bé	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
za $\rho < 1$ kg/dm³	10	1,0000	0,9931	0,9863	0,9796	0,9730	0,9665	0,9601	0,9537	0,9475	0,9413
	20	0,9352	0,9292	0,9232	0,9174	0,9116	0,9058	0,9002	0,8946	0,8891	0,8837
	30	0,8783	0,8730	0,8677	0,8625	0,8574	0,8523	0,8473	0,8424	0,8375	0,8327
	40	0,8279	0,8232	0,8185	0,8139	0,8093	0,8048	0,8004	0,7959	0,7916	0,7873
	50	0,7830	0,7788	0,7746	0,7704	0,7664	0,7623	0,7583	0,7543	0,7504	0,7465
	60	0,7427	0,7389	0,7351	0,7314	0,7277	0,7241	0,7204	0,7169	0,7133	0,7098
	70	0,7063	0,7029	0,6995	0,6961	0,6928	0,6895	0,6862	0,6829	0,6797	0,6765
	80	0,6734	0,6703	0,6672	0,6641	0,6610	0,6580	0,6550	0,6521	0,6492	0,6463
	90	0,6434	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Primjer: areometarskoj gustoći 50 °Bé (za $\rho < 1$ kg/dm³) odgovara stvarna gustoća $\rho = 0{,}783$ kg/dm³.

Veza areometarskih gustoća raznih skala sa stvarnom gustoćom ρ — Tablica **B-23**

Redni broj	Naziv skale	Temperatura, °C	Veza sa stvarnom gustoćom ρ	
			za $\rho > 1\ kg/dm^3$	za $\rho < 1\ kg/dm^3$
1	2	3	4	5
1	Ballingova	17,5	$\rho = \frac{200\ kg/dm^3}{200 - N}$	$\rho = \frac{200\ kg/dm^3}{200 + N}$
2	Bauméova, racionalna	15	$\rho = \frac{144{,}32\ kg/dm^3}{144{,}32 - N}$	$\rho = \frac{144{,}32\ kg/dm^3}{134{,}32 + N}$
3	Bauméova, starija	17,5	$\rho = \frac{146{,}78\ kg/dm^3}{146{,}78 - N}$	$\rho = \frac{146{,}78\ kg/dm^3}{146{,}78 + N}$
4	Bauméova, američka	15	$\rho = \frac{145\ kg/dm^3}{145 - N}$	$\rho = \frac{140\ kg/dm^3}{130 + N}$
5	Bauméova, holandska	12,5	$\rho = \frac{144\ kg/dm^3}{144 - N}$	$\rho = \frac{144\ kg/dm^3}{144 + N}$
6	Beckova	12,5	$\rho = \frac{170\ kg/dm^3}{170 - N}$	$\rho = \frac{170\ kg/dm^3}{170 + N}$
7	Brixova	15,625	$\rho = \frac{400\ kg/dm^3}{400 - N}$	$\rho = \frac{400\ kg/dm^3}{400 + N}$
8	Cartierova	12,5	$\rho = \frac{136{,}8\ kg/dm^3}{126{,}1 - N}$	$\rho = \frac{136{,}8\ kg/dm^3}{126{,}1 + N}$
9	Stoppanova	15,625	$\rho = \frac{166\ kg/dm^3}{166 - N}$	$\rho = \frac{166\ kg/dm^3}{166 + N}$
10	Twaddelova, engleska	15,56	$\rho = \left(1 + \frac{N}{200}\right) \frac{kg}{dm^3}$	–
11	American Petroleum Institute	15,56	–	$\rho = \frac{141{,}5\ kg/dm^3}{131{,}5 + N}$

Primjer. Izračunajmo kolika je *Twaddel*ova areometarska gustoća elektrolita iz prvog primjera u odlomku 3.5.2! Do rezultata ćemo doći tako da izračunamo N iz formule u stupcu 4 tablice B-23, jer stvarnu gustoću znamo, $\rho = 1{,}2849\ \mathrm{kg/dm^3}$. Tako dobivamo

$$N = 200\left(\rho\frac{\mathrm{dm^3}}{\mathrm{kg}} - 1\right) = 200(1{,}2849 - 1) = 56{,}98 = 56{,}98\ ^\circ\mathrm{Tw}.$$

U računu smo zanemarili razlike pri kojima su definirane racionalna *Baumé*ova skala (15 °C) i *Twaddel*ova (60 °F, čemu odgovara 15,56 °C).

3.5.4. Centezimalne alkoholometrijske skale. Kvantitativna analiza mješavine alkohola i vode često se obavlja mjerenjem gustoće ove mješavine. Stoga treba poznavati vezu između izmjerene gustoće mješavine i udjela alkohola u mješavini. Postoje tablice koje povezuju alkoholometrijske veličine n i p sa d, gdje je d relativna gustoća $d = \rho/\rho_0$ (vidi odlomak 3.1.4) u odnosu prema gustoći ρ_0 vode. U našoj tablici B-24 donosimo izvadak iz takvih tablica koje je izdao francuski Bureau des Longitudes. Vrijednosti relativne gustoće d navedene su u odnosu prema gustoći vode pri 15 °C.

Tablica **B-24**

Odnosi između alkoholometrijskog stupnja, masenog stupnja i relativne gustoće alkoholne mješavine

n %	d	p %	n %	d	p %	n %	d	p %
0	1,0000	0,0	35	0,9592	29,0	70	0,8903	62,5
5	0,9928	4,0	40	0,9520	33,4	75	0,8776	67,9
10	0,9865	8,1	45	0,9436	37,9	80	0,8642	73,5
15	0,9810	12,2	50	0,9344	42,5	85	0,8498	79,4
20	0,9759	16,3	55	0,9242	47,3	90	0,8341	85,7
25	0,9708	20,5	60	0,9135	52,2	95	0,8164	92,4
30	0,9654	24,7	65	0,9022	57,2	100	0,7943	100,0

Alkoholometrijske veličine n i p definirane su ovako (pri temperaturi 15 °C):

$$n = \frac{\text{volumen čistog alkohola}}{\text{volumen mješavine}} = \frac{V_a}{V_m},$$

$$p = \frac{\text{masa čistog alkohola}}{\text{masa mješavine}} = \frac{m_a}{m_m}.$$

Veličina n naziva se volumni udio alkohola (franc. degré alcoométrique, titre volumétrique), a veličina p maseni udio alkohola ili težinski udio (franc. degré pondéral), jer se mase odnose jednako kao i pripadne težine, tj. $m_a/m_m = G_a/G_m$. U tablici B-24 navedene su veličine n i p u postocima (% = 0,01), ali se mogu izraziti i u decimalnim brojevima, npr. $n = 10\,\% = 0{,}1$.

3.6. Metričke i angloameričke jedinice protoka i masenog protoka

3.6.1. Jedinica masenog protoka kg/s (kilogram u sekundi). Veličinu »maseni protok« $m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ razmatrali smo u odlomku 3.1.5 zajedno s veličinom »protok« (volumni protok) $= q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$. Budući da se veličine masa m, vrijeme t i volumen V mjere u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) redom jedinicama ki-

logram = kg, sekunda = s i kubni metar = m^3, to su koherentne jedinice SI masenog protoka m' i protoka (volumnog) q:

$$\text{jedinica masenog protoka SI} = \frac{\text{kilogram}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}},$$

$$\text{jedinica protoka (volumnog) SI} = \frac{\text{kubni metar}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Uz ove jedinice upotrebljava se i niz drugih koje ili imaju za osnovu drugu jedinicu vremena ili uz to i drugu jedinicu mase, odnosno volumena. Neke od njih razmotrit ćemo u narednom odlomku.

3.6.2. Ostale metričke jedinice protoka. Dvostrane odnose među nekim metričkim jedinicama *volumnog protoka* sadrži tablica B-25. Načelo uspostavljanja odnosa među različitim jedinicama isto je, naravno, kao i kod svih drugih jedinica. Stoga, primjera radi, izračunajmo koliko hektolitara u minuti = hl/min sadrži jedinica kubni metar u satu = m^3/h.

Ponovimo najprije što znače pojedini nazivi jedinica koje moramo staviti u omjer. Hektolitar = hl jest 100 litara, jer je h = hekto = 100 (vidi tablicu A-1). Litar je definiran sa litar = (l) = kubni decimetar (tačno). Prema tome je hektolitar = = hl = 100 dm^3 = 0,1 m^3, jer kubni metar = m^3 sadrži 1000 dm^3 (vidi odsječak 1.7). Budući da je sat = h (ovdje je sada h oznaka za sat) = 60 minuta = 60 min, računanjem dobivamo

$$\frac{\text{hl}}{\text{min}} = \frac{0{,}1\ \text{m}^3}{\text{sat}/60} = 6\frac{\text{m}^3}{\text{sat}} = 6\frac{\text{m}^3}{\text{h}}.$$

Dvostrane odnose nekih metričkih jedinica volumnog protoka prema angloameričkim jedinicama sadrži tablica **22** u prilogu knjige. Iz te tablice se vidi da je na primjer UK gallon per second = 16,3659 m^3/h itd.

Dvostrane odnose većine upotrebljavanih metričkih jedinica masenog protoka sadrži tablica B-26, a međusobne odnose metričkih i angloameričkih jedinica masenog protoka tablica **23** u prilogu knjige.

Primjer. Izračunajmo bez pomoći tablica koliko puta je jedinica masenog protoka tona u minuti = t/min veća od jedinice kilogram u sekundi = kg/s! Budući da je t = 1000 kg (vidi odlomak 3.3.2), a min = 60 s, lako dobivamo (približno)

$$\text{t/min} = 1000\ \text{kg}/(60\ \text{s}) = 16{,}6667\ \text{kg/s}.$$

3.6.3. Angloameričke jedinice protoka. Temeljna angloamerička jedinica masenog protoka je pound per second (lb/s). Ona se od osnovne metričke jedinice kg/s razlikuje isto onako kako se jedinica mase pound razlikuje od kilograma (vidi odlomak 11.1.3). Prema tome je

$$\text{lb/s} = 0{,}453\,592\ \text{kg/s}, \qquad \text{kg/s} = 2{,}204\,62\ \text{lb/s}.$$

No postoji još niz drugih angloameričkih jedinica: pound per hour (lb/h), UK ton per hour, itd. Dvostrane odnose među tim jedinicama masenog protoka sadrži tablica **23** u prilogu knjige, npr. UK ton/h = 0,282235 kg/s itd. Međusobne odnose jedinica *volumnog protoka* $q = V/t$ (vidi odlomak 3.1.5) sadrži tablica **22** u prilogu knjige.

Tablica **B-25**

Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama volumnog protoka

Jedinica		Kratica	$\frac{m^3}{s}$	$\frac{hl}{s}$	$\frac{l}{s}$	$\frac{l}{min}$	$\frac{hl}{min}$	$\frac{m^3}{h}$	$\frac{l}{h}$
kubni metar u sekundi	=	$\frac{m^3}{s}$	1	10	10^3	$6 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^2$	$3{,}6 \cdot 10^3$	$3{,}6 \cdot 10^6$
hektolitar u sekundi	=	$\frac{hl}{s}$	10^{-1}	1	10^2	$6 \cdot 10^3$	60	$3{,}6 \cdot 10^2$	$3{,}6 \cdot 10^5$
litar u sekundi	=	$\frac{l}{s}$	10^{-3}	10^{-2}	1	60	$6 \cdot 10^{-1}$	3,6	$3{,}6 \cdot 10^3$
litar u minuti	=	$\frac{l}{min}$	$1{,}66667 \cdot 10^{-5}$	$1{,}66667 \cdot 10^{-4}$	$1{,}66667 \cdot 10^{-2}$	1	10^{-2}	$6 \cdot 10^{-2}$	60
hektolitar u minuti	=	$\frac{hl}{min}$	$1{,}66667 \cdot 10^{-3}$	$1{,}66667 \cdot 10^{-2}$	1,66667	10^2	1	6	$6 \cdot 10^3$
kubni metar u satu	=	$\frac{m^3}{h}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-3}$	0,277778	16,6667	0,166667	1	10^3
litar u satu	=	$\frac{l}{h}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-7}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-6}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}66 \cdot 10^{-2}$	$1{,}66667 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	1

Tablica **B-26**

Dvostrani odnosi među metričkim jedinicama masenog protoka

Jedinica	Kratica	$\frac{kg}{s}$	$\frac{kg}{min}$	$\frac{kg}{h}$	$\frac{g}{s}$	$\frac{q}{h}$	$\frac{t}{min}$	$\frac{t}{h}$
kilogram u sekundi =	$\frac{kg}{s}$	1	60	$3{,}6 \cdot 10^{3}$	10^{3}	36	$6 \cdot 10^{-2}$	3,6
kilogram u minuti =	$\frac{kg}{min}$	$1{,}66667 \cdot 10^{-2}$	1	60	16,6667	$6 \cdot 10^{-1}$	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-2}$
kilogram u satu =	$\frac{kg}{h}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}66667 \cdot 10^{-2}$	1	0,277778	10^{-2}	$1{,}66667 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}
gram u sekundi =	$\frac{g}{s}$	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-2}$	3,6	1	$3{,}6 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
kvintal (metrička centa) u satu =	$\frac{q}{h}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-2}$	1,66667	10^{2}	27,7778	1	$1{,}66667 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}
tona u minuti =	$\frac{t}{min}$	16,6667	10^{3}	$6 \cdot 10^{4}$	$1{,}66667 \cdot 10^{4}$	$6 \cdot 10^{2}$	1	60
tona u satu =	$\frac{t}{h}$	0,277778	16,6667	10^{3}	$2{,}77778 \cdot 10^{2}$	10	$1{,}66667 \cdot 10^{-2}$	1

Primjer. Kroz neki cjevovod teče voda; protok iznosi $q = 2000$ UK gallon per minute. Izračunajmo bez pomoći tablica koliki je *maseni protok* u metričkoj jedinici kg/s! Vidimo da se zadatak sastoji od dva bitno različita dijela: Najprije treba UK gal/min preračunati u m^3/s, a zatim dobiveni rezultat »preračunati« u kg/s, što možemo, jer znamo da je riječ o *vodi*.

U odlomku 11.4.2 imamo zabilježeno da je UK gal $= 4{,}546087\ dm^3$, a jer je minuta $= 60$ s, računanjem dobivamo

$$\frac{\text{UK gal}}{\text{min}} = \frac{0{,}004\,546\,087\ m^3}{60\ s} = 0{,}000\,075\,7681\ \frac{m^3}{s}.$$

Budući da je riječ o protoku $q = 20000$ UK gal/min, to je

$$q = 20000 \cdot 7{,}57681 \cdot 10^{-5}\ m^3/s = 1{,}515\ m^3/s.$$

Između masenog protoka m' i volumnog protoka q postoji veza $m' = q\rho$, gdje je ρ gustoća tekućine (vidi odlomak 3.1.5). U našem je slučaju $\rho = 1000\ kg/m^3$ (voda!), pa rješenje zadatka glasi

$$m' = q\rho = 1{,}515\ \frac{m^3}{s} \cdot 1000\ \frac{kg}{m^3} = 1515\ \frac{kg}{s}.$$

4. Tlak. Jedinice sile i tlaka

4.1. Veličina tlak i načelo mjerenja tlaka

4.1.1. Fizikalna veličina tlak. Općenito je veličina »tlak« definirana limesom omjera normalne komponente F_n sile F koja djeluje na ravnu plohu površine A, dakle

$$p = \lim_{A \to 0} \frac{F_n}{A} = \left(\frac{\partial F}{\partial A} \right)_n . \tag{4.1-1}$$

Ako se sila F, koju ćemo u daljnjim razmatranjima smatrati *okomitom* na površinu A, jednoliko porazdijeli na čitavu površinu A, onda se tlak p može slijedom jednadžbe (4.1-1) definirati ovako

$$\text{tlak } p = \frac{\text{sila } F}{\text{površina } A}; \quad p = \frac{F}{A} . \tag{4.1-2}$$

To je ujedno i definicija tzv. »srednjeg« ili »prosječnog« tlaka.

Jedinica tlaka u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je newton na kvadratni metar (kratica: N/m^2). Ostale jedinice tlaka opisane su u odsječcima 4.3,4.

Tlak je nova veličina, koja je jednadžbom (4.1-2) definirana kao *omjer* sile i površine. Stoga nije ispravno definirati tlak kao »silu po jedinici površine«.

U našem jeziku upotrebljava se uz izraz »tlak« i izraz »pritisak«, također u značenju $p = F/A$. Iako mnogi misle da je to isto, bilo bi korisno da se ova dva izraza oštro odvoje: pod »tlakom« da se razumijeva omjer sila/površina, a pod »pritiskom« da se razumijeva *sila*. Na takvo mišljenje upućuju nas terminološke poteškoće, ako se »pritisak« primjenjuje u značenju tlaka. Naročito je dvoznačnost »pritiska« neugodna u hidrostatici, odnosno u hidraulici uopće, a time i u onim industrijama gdje je ugrađena hidraulička i pneumatska oprema.

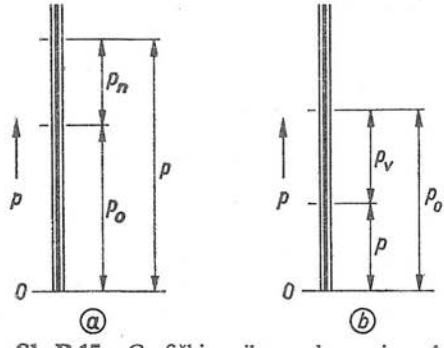
4.1.2. Nadtlak i podtlak (vakuum). Kod tekućina i plinova razlikujemo nekoliko vrsta tlakova. Tlak okoline nazivamo *atmosferskim tlakom* (ili »okolišnim tlakom«) i označujemo ga slovom p_0. Višak tlaka iznad atmosferskog nazivamo *nadtlakom* (ili »pretlakom«) i označujemo ga sa p_n. Manjak tlaka ispod atmosferskog nazivamo *podtlakom* ili *vakuumom* i označujemo ga sa p_v; podtlak je, dakle, negativni nadtlak, $p_v = -p_n$. Stvarni tlak plina pare ili tekućine nazivamo *apsolutnim tlakom* i označujemo ga slovom p. To je, na primjer, tlak koji vlada u unutrašnjosti parnog kotla. Stvarni ili apsolutni tlak p je parametar stanja tvari koji npr. ulazi u *Clapeyron*ovu jednadžbu $pv = RT$, u toplinske dijagrame (*is*, *Ts*, *pv* itd.), u tablice svojstava para, plinova, tekućina itd. Nasuprot tome, čvrstoća stijenki parnih kot-

lova, cjevovoda i druge opreme proračunava se pomoću nadtlaka p_n. U skladu s izrečenim definicijama vrijedi ovaj odnos među pojedinim tlakovima:

$$p = p_0 + p_n \quad \text{ili} \quad p = p_0 - p_v. \tag{4.1-3}$$

Grafički su ti odnosi prikazani na slici B.15, na kojoj a) prikazuje odnose između atmosferskog tlaka p_0, nadtlaka p_n i apsolutnog tlaka p, dok b) prikazuje vezu između p_0, podtlaka (vakuuma) p_v i apsolutnog tlaka p.

U stručnoj literaturi se upotrebljavaju i neki drugi izrazi i oznake. Na primjer, atmosferski tlak p_0 naziva se i »barometarski tlak« te označuje slovom p_b, dakle je $p_0 = p_b$. Oznaka za apsolutni tlak je katkada p_{abs}, dakle $p = p_{abs}$.



Sl. B.15. Grafički prikaz odnosa između apsolutnog tlaka p, atmosferskog tlaka p_0, nadtlaka p_n i podtlaka (vakuuma) p_v

4.1.3. Načelo hidrostatskog mjerenja tlakova. U skladu s definicijama različitih vrsta tlakova, navedenima u odlomku 4.1.2, jest i mjerenje tih tlakova. *Atmosferski tlak* p_0 najjednostavnije se mjeri pomoću »barometra«, tj. pomoću vertikalno stojeće staklene mjerne cijevi u kojoj se nalazi tekućina gustoće ρ (npr. živa, voda, alkohol itd.), kako to prikazuje slika B.16a. Presjek A cijevi je konstantan, a volumen V tekućine u cijevi, računajući od razine u plitici, iznosi $V = h_0 A$. Težina stupca tekućine iznad razine u plitici je

$$G = mg = V\rho g = h_0 A\rho g,$$

gdje je g ubrzanje zemljine teže. Težini G drži ravnotežu sila $F = p_0 A$ kojom okolna atmosfera uzdiže stupac tekućine u cijevi (sl. B.16a; prostor *1* povrh stupca tekućine je zrakoprazan, tj. evakuiran). To znači da je visina h_0 stupca tekućine u cijevi baš tolika da je $G = F$, odnosno $h_0 A\rho g = p_0 A$. Odavde slijedi

$$p_0 = \rho g h_0. \tag{4.1-4}$$

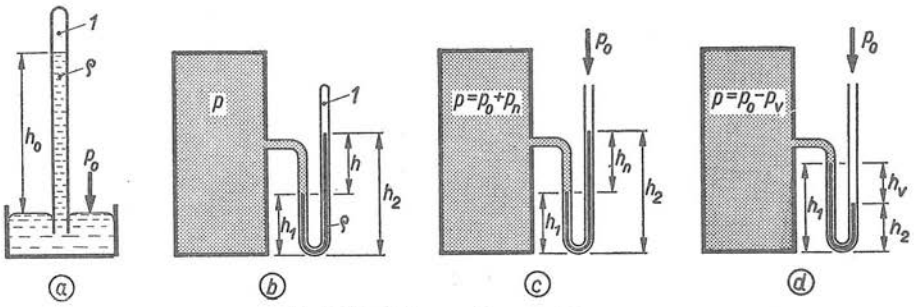
Budući da su na mjernom mjestu gustoća ρ tekućine i ubrzanje zemljine teže g poznate konstante, apsolutni je tlak p_0 izravno razmjeran visini stupca h_0.

Kod vrlo preciznih mjerenja po načelu (4.1-4) treba pouzdano znati stvarnu gustoću ρ pri temperaturi mjerenja, stvarno ubrzanje zemljine teže g (vidi odsječke A.9.4,5), te uvesti korekcijske faktore zbog meniskusa površine tekućine, rastezanja skale barometra, stvarne nadmorske visine, napetosti površine para itd.

Apsolutni tlak p može se mjeriti u načelu posve analogno kao i atmosferski tlak (sl. B.16b; oznaka *1* prikazuje zrakoprazan prostor). Stoga je i odnos između visine stupca h tekućine i apsolutnog tlaka p analogan izrazu (4.1-4), tj.

$$p = \rho g h. \tag{4.1-5}$$

Do tog odnosa možemo doći kratkim računom uz pomoć slike B.16b. Posuda je puna plina pod apsolutnim tlakom p, a u priključenoj, takozvanoj mjernoj (U) cijevi nalazi se mjerna tekućina poznate gustoće ρ. S lijeve strane cijevi djeluje sila pA, kojom plin pritišće na tekućinu, te težina lijevog stupca $h_1 A\rho g$. Zbroju tih sila



Sl. B.16. Načelo mjerenja tlakova
a) atmosferskog tlaka, b) apsolutnog tlaka, c) nadtlaka, d) podtlaka (vakuuma)

drži ravnotežu težina desnog stupca tekućine $h_2 A \rho g$. To znači da je $pA + h_1 A \rho g = h_2 A \rho g$, odakle slijedi jednadžba (4.1-5), jer je $h = h_2 - h_1$. U gornjim jednadžbama je, kao i prije, A stalan presjek mjerne cijevi.

Nadtlak (nazvan i pretlak) p_n može se mjeriti prema slici B.16c. S lijeve strane cijevi djeluje sila $pA + h_1 A \rho g$, a s desne $p_0 A + h_2 A \rho g$ (cijev je otvorena!). Izjednačenjem ovih jednadžbi dobivamo $p - p_0 = \rho g h_n$, jer je $h_n = h_2 - h_1$. Iz jednadžbe (4.1-3) znamo da je $p_n = p - p_0$, pa je dakle nadtlak

$$p_n = p - p_0 = \rho g h_n. \tag{4.1-6}$$

Ako je u nekom stvarnom primjeru atmosferski tlak p_0 izmjeren pomoću barometra (sl. B.16a), a nadtlak p_n pomoću manometra (sl. B.16c), onda se apsolutni tlak p dobiva njihovim zbrajanjem, kako to opisuje lijeva jednadžba (4.1-3).

Podtlak ili *vakuum* može se mjeriti prema slici B.16c. S lijeve strane mjerne U-cijevi djeluje sila $pA + h_1 A \rho g$, a s desne strane $p_0 A + h_2 A \rho g$. U stanju ravnoteže je dakle $p - p_0 = (h_2 - h_1)\rho g$, odnosno $p_n = (h_2 - h_1)\rho g$, jer je nadtlak $p_n = p - p_0$. Budući da je $h_1 > h_2$, to je vrijednost p_n *negativna*. Uvedemo li veličinu podtlak (vakuum) $p_v = -p_n$, dobivamo

$$p_v = p_0 - p = \rho g h_v, \tag{4.1-7}$$

jer je prema slici B.16d $h_v = h_1 - h_2$. Prema tome je podtlak razlika između atmosferskog tlaka i apsolutnog tlaka (tj. tlaka u posudi). Što je stupac tekućine na slici B.16d viši, to je podtlak veći, a plin u posudi rjeđi. Kad bi prostor u posudi bio potpuno prazan, onda bi podtlak p_v bio jednak atmosferskom tlaku p_0, jer potpuna praznina prostora znači da je apsolutni tlak jednak nuli, tj. $p = 0$, $p_0 = p_v$.

Primjer 1. Živin manometar (sl. B.16c) pokazao je $h_n = 100$ mm stupca žive (Hg), a neki barometar je pokazao da atmosferski tlak iznosi 1 normalnu (standardnu) atmosferu, 1 atm. Koliki je apsolutni tlak p u posudi na slici B.16c? Prema jednadžbi (4.1-6) i slici B.15 apsolutni tlak p jednak je zbroju atmosferskog tlaka p_0 i nadtlaka p_n, dakle $p = p_0 + p_n = p_0 + \rho g h_n$. Budući da je $p_0 = 1$ atm, to je $p_0 = 1{,}013250$ bar, jer je bar $= 10^5$ N/m^2, a 1 atm $= 1{,}013250 \cdot 10^5$ N/m^2 (vidi odlomak 4.3.5).

Gustoća žive je $\rho = 13595{,}1$ kg/m^3, a za g ćemo uzeti normirano ubrzanje sile teže $g_0 = 9{,}80665$ m/s^2 jer ne znamo *stvarnu* vrijednost g. Prema tome iz jednadžbe $p = p_0 + \rho g h_n$ slijedi

$$p = 1{,}013250 \text{ bar} + 13595{,}1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}1 \text{ m} \approx 1{,}1466 \text{ bar}.$$

Primjer 2. Koliko iznosi podtlak p_v u posudi (izraziti u N/m^2 i u %), ako je vakuummetar na slici B.16d pokazao $h_v = 10$ cm stupca žive uz atmosferski tlak $p_0 = 1$ at (at je kratica za tzv. tehničku atmosferu, at $= 0{,}980665$ bar; vidi odlomak 4.3.6).

Kako vidimo iz jednadžbe (4.1-7), podtlak p_v ovisi samo o veličinama ρ, g i h_v. To znači da je

$$p_v = h_v \rho g = 10\,\text{cm} \cdot 13\,595{,}1\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}806\,65\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}1334 \cdot 10^5\,\text{N/m}^2.$$

Izjava $p_v = 0{,}1334 \cdot 10^5$ N/m^2 = 0,1334 bar znači samo to da je apsolutni tlak p u posudi na slici B.16d za 0,1334 bar manji od atmosferskog tlaka p_0, tj. tlaka okoline. Stoga je podtlak u postocima: $p_v/p_0 = 0{,}1334$ bar/1 at $\approx 0{,}1334/0{,}9807 = 0{,}136 = 13{,}6\%$.

4.2. Jedinice sile i težine

O veličini »sila« opširno smo raspravljali u prva tri odsječka poglavlja A.9; tamo smo silu općenito definirali *Newton*ovim zakonom $F = ma$, gdje slovo F označuje silu, a slovo m masu tijela koje se giba ubrzanjem $a = \mathrm{d}^2l/\mathrm{d}t^2$ (o veličini »ubrzanje« vidi odlomak 2.2.2). U odsječku A.9.2 utvrdili smo da je »težina« $G = mg$ samo jedna vrsta sile, tj. sila kojom tijelo mase m pritišće na svoju podlogu na mjestu gdje ubrzanje zemljine teže iznosi g. Pri tom se pod g razumijeva »mjesno ubrzanje teže«, tj. ubrzanje na onom mjestu (na Zemlji ili na nekom drugom planetu) gdje želimo znati silu težinu $G = mg$. Pod »normiranom težinom« G_0 razumijevamo težinu tog istog tijela mase m koje se nalazi na mjestu gdje je ubrzanje zemljine teže tačno $g = g_0 = 9{,}806\,65$ m/s^2, tj. $G_0 = mg_0$.

Budući da je, dakle, težina samo jedna vrsta sile, prirodno je da se ona mjeri *istim jedinicama* kojima se mjeri i svaka druga sila. Stoga ćemo u daljnjem tekstu spominjati samo veličinu »sila«, a time će biti obuhvaćene sve vrste sila, dakle i težina.

4.2.1. Jedinica sile newton (kratica: N) je jedinica sile u Međunarodnom sistemu jedinica (SI). Definiciju te jedinice izvest ćemo na temelju spomenutog *Newton*ova zakona (jedinica je dobila ime po fenomenalnom učenjaku, fizičaru i matematičaru *Isaak*u *Newton*u). Budući da je u SI jedinica mase $[m]_M$ = kilogram = kg, a jedinica ubrzanja $[a]_M$ = m/s^2 (vidi odlomke 3.3.1 i 2.4.6), to iz jednadžbe $F = ma$ slijedi jedinica sile SI

$$[F]_M = [m]_M [a]_M = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N}.$$

Prema tome je newton = N (čitaj: njutn) samo kratica umnoška kg m/s^2, tj.

$$\text{jedinica sile SI} = \frac{\text{kilogram} \times \text{metar}}{\text{sekunda}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{newton} = \text{N}.$$

U skladu s time definicija jedinice sile SI glasi: »Newton je sila koja tijelu mase 1 kilogram daje ubrzanje 1 metar u sekundi na kvadrat.«

Uz newton postoji mnoštvo drugih jedinica sile (ili drugih naziva za iste jedinice; vidi odlomak 4.2.3). O njima se govori u daljnjih šest odlomaka. Dvostrane odnose među nekim metričkim i angloameričkim jedinicama sile sadrže tablice **24** i **25** u prilogu knjige.

4.2.2. Višekratnici jedinice newton. Kao što se decimalni i dekadski višekratnici iz tablice A-1 primjenjuju na druge jedinice (npr. kilometar, centimetar itd.), oni se posve jednako primjenjuju i na jedinicu newton (N). Tako je, na primjer,

$$\text{kilonewton} = \text{kilo N} = \text{kN} = 1000\ \text{N} = 10^3\ \text{N}.$$

U praktičnoj primjeni, u literaturi, danas često nalazimo ove izvedene jedinice newtona: milinewton (mN), kilonewton (kN) i meganewton (MN). S vremenom će se opseg primjene decimalnih i dekadskih višekratnika jedinice newton još proširiti, jer se SI svakog dana sve više primjenjuje u dnevnom životu, a time i višekratnici jedinice sile tog sistema jedinica. Korisno je stoga da zabilježimo odnose među nekim izvedenicama newtona:

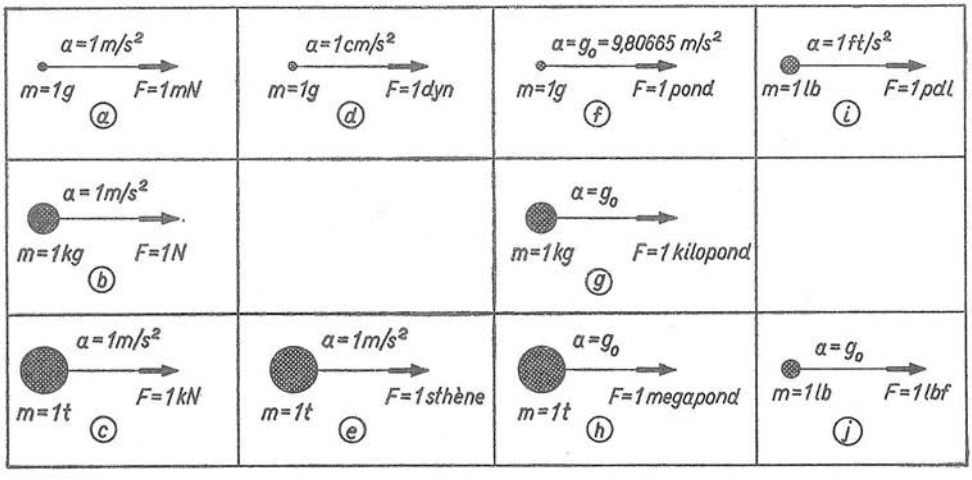
$$\text{milinewton (mN)} = 10^{-3}\ \text{N} = 10^{-6}\ \text{kN} = 10^{-9}\ \text{MN},$$

$$\text{newton (N)} = 10^{3}\ \text{mN} = 10^{-3}\ \text{kN} = 10^{-6}\ \text{MN},$$

$$\text{kilonewton (kN)} = 10^{3}\ \text{N} = 10^{6}\ \text{mN} = 10^{-3}\ \text{MN},$$

$$\text{meganewton (MN)} = 10^{6}\ \text{N} = 10^{9}\ \text{mN} = 10^{3}\ \text{kN}.$$

Grafički možemo sebi definicije prvih triju od navedenih jedinica sile zamisliti kao na slici B.17 a, b, c. Ako na tijelo mase $m = 1$ gram $= 1\ \text{g} = 10^{-3}$ kg djeluje sila $F = 1$ milinewton $= 1\ \text{mN} = 10^{-3}$ N, ubrzanje tijela će iznositi $a = F/m = 1\ \text{mN}/1\ \text{g} = 10^{-3}\ \text{N}/10^{-3}\ \text{kg} = 1\ \text{N/kg}$. Budući da je prema definiciji



Sl. B.17. Ilustracija definicija nekih jedinica sile

$\text{N} = \text{kg m/s}^2$, to je $\text{N/kg} = \text{m/s}^2$, dakle traženi rezultat glasi $a = 1\ \text{N/kg} = 1\ \text{m/s}^2$. Isti rezultat dobivamo i u slučaju ako tijelo ima masu $m = 1$ tona $= 1$ t, a sila $F = 1$ kN, jer je $\text{t} = 1000$ kg (vidi odlomak 3.3.2), a $\text{kN} = 1000$ N.

Međusobne odnose jedinica sile izvedenih iz newtona (N) i jedinica izvedenih iz ponda (p) sadrži tablica B-28 u odlomku 4.2.4. Dvostrane međusobne odnose nekih metričkih i angloameričkih jedinica sile sadrže tablice **24** i **25** u prilogu knjige.

4.2.3. Jedinice sile sthène i dyn. U francuskoj literaturi zapazit ćemo još i danas jedinicu sile »sthène« (kratica: sn), koja predstavlja jedinicu sile sistema s ovim osnovnim jedinicama: za duljinu — metar (m), za vrijeme — sekunda (s), za masu — tona (t). Taj sistem jedinica bio je u Francuskoj službeno usvojen uredbom od 28. februara 1948, tj. prije nego je Generalna konferencija za mjere i utege godine 1954. prihvatila Međunarodni sistem jedinica (SI).

U skladu s navedenim podacima i *Newton*ovim zakonom $F = ma$ jedinica sthène je definirana ovako

$$\text{sthène} = \text{sn} = \frac{\text{tona} \times \text{metar}}{\text{sekunda}^2} = \frac{\text{t m}}{\text{s}^2} = \frac{1000\ \text{kg m}}{\text{s}^2} = 1000\ \text{N},$$

jer je tona = 1000 kg, a kg m/s² = newton = N (vidi i sl. B.17e).

Na jedinicu sile sthène primjenjuju se mnogi decimalni i dekadski višekratnici iz tablice A-1. Na taj način nastaju izvedenice msn, csn, dsn itd. Dvostrani odnosi tih jedinica prema jedinici SI newton i njenim izvedenicama prikazani su u tablici B-27, iz koje se vidi da je npr. hsn = 100 kN itd. U toj tablici i sthène i višekratnici pisani su na francuskom jeziku, jer se te jedinice uglavnom nalaze u literaturi Francuske i bivših njenih kolonija.

Na dnu tablice B-27 vidimo i jedinicu sile »dyn«. To je jedinica starog koherentnog, tzv. fizikalnog ili CGS sistema jedinica (vidi odsječak 8.2), u kojem su za osnovne jedinice odabrane ove: za duljinu — centimetar (cm), za vrijeme — sekunda (s), za masu — gram (g). S ovim podacima iz *Newton*ova zakona $F = ma$ proizlazi definicija jedinice sile CGS sistema i njen odnos prema newtonu:

$$\text{dyn} = \frac{\text{gram} \times \text{centimetar}}{\text{sekunda}^2} = \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} = \frac{10^{-3}\ \text{kg} \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{\text{s}^2} = 10^{-5}\ \text{N},$$

jer je N = kg m/s². Ilustraciju definicije sile dyn = g cm/s² prikazuje slika B.17d. Na jedinicu dyn rijetko su primjenjivani višekratnici; u litaraturi mogao se zapaziti samo megadyn = Mdyn = 10^6 dyn = 10 N.

Napominjemo da jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. ne dopušta javnu upotrebu ni jedinice dyn, ni jedinice sthène i njenih izvedenica.

4.2.4. Jedinica sile kilopond (kratica: kp) jedna je od triju osnovnih jedinica tzv. Tehničkog sistema jedinica (vidi odsječak 8.1) koji se osniva na ovim jedinicama: za duljinu — metar, za vrijeme — sekunda, za silu — kilopond. Pod jedinicom kilopond razumijevamo silu koja tijelu mase 1 kilogram daje ubrzanje $a = g_0 = 9{,}806\,65$ m/s² (tačno), tj. normirano ubrzanje zemljine teže (vidi sl. B.17g). Prema tome je

$$\text{kilopond} = \text{kp} = 1\ \text{kg} \cdot g_0 = 9{,}806\,65\ \text{kg m/s}^2 = 9{,}806\,65\ \text{N},$$

jer je newton = N = kg m/s². Vrijedi obrnuti odnos (približno)

$$\text{newton} = \text{N} = 0{,}101\,971\,6\ \text{kiloponda}.$$

U primjeni dekadskih i decimalnih višekratnika iz tablice A-1 ovdje postoje posve iste poteškoće kao i kod jedinice mase (vidi odlomak 3.3.2). Višekratnici se primjenjuju na *pond*, a ne na kilopond! Prema tome je npr.

$$\text{milipond} = \text{m pond} = \text{mp} = 10^{-3}\ \text{p} = 10^{-6}\ \text{kp},$$

$$\text{kilopond} = \text{k pond} = \text{kp} = 10^{3}\ \text{p} = 10^{6}\ \text{mp}\ \text{itd.}$$

Zornu predodžbu o ovim jedinicama sile sadrže slike B.17 f, g, h, koje su naročito instruktivne ako ih usporedimo sa slikama a, b, c.

Tablica **B-27**

Dvostrani odnosi među jedinicama sile izvedenima iz newtona, sthènea i dyna

Jedinica		Kratica	mN	N	kN	MN	msn	csn	dsn	sn	dasn	hsn	ksn	dyn
milinewton	=	mN	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{2}
newton	=	N	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{5}
kilonewton	=	kN	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{8}
meganewton	=	MN	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{11}
millisthène	=	msn	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{5}
centisthène	=	csn	10^{4}	10	10^{-2}	10^{-5}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{6}
décisthène	=	dsn	10^{5}	10^{2}	10^{-1}	10^{-4}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{7}
sthène	=	sn	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{8}
décasthène	=	dasn	10^{7}	10^{4}	10^{1}	10^{-2}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{9}
hectosthène	=	hsn	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10^{-1}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{10}
kilosthène	=	ksn	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{11}
dyn	=	dyn	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	1

Činjenica da se višekratnici primjenjuju s jedne strane na pond, a s druge strane na newton, znade u primjeni i preračunavanju ovih jedinica uzrokovati pogreške. Stoga smo u tablici B-28 skupili međusobne odnose jedinica sile koje su izvedene iz newtona i onih koje su izvedene iz ponda. Tako je, na primjer,

$$\text{megapond} = \text{Mp} = 9806{,}25\ \text{N} = 9{,}806\,65\ \text{kN},$$

tj. Mp je nešto manji od 10 kilonewtona. Svojedobno su se često upotrebljavali ovi nazivi:

gram-sila (g*) za pond,

kilogram-sila (kg*) za kilopond,

tona-sila (t*) za megapond,

a kratice su bile opremljene zvjezdicom (ili križićem) da bi se razlikovale od jedinica *mase* gram (g), kilogram (kg) i tona (t) = 1000 kg.

Jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. dopušta javnu upotrebu jedinice pond i njenih izvedenica kilopond, milipond itd. Dvostrane odnose kiloponda prema nekim metričkim i angloameričkim jedinicama sile sadrže tablice **24** i **25** u prilogu knjige.

4.2.5. Preračunavanje kilopond ⇄ newton. U ovom desetljeću mnogi se ljudi muče da vrijednosti sila izraženih kilopondima preračunaju na vrijednosti u newtonima. Računanje oduzima dosta vremena, jer je tačan preračunski faktor dugačak: kp = 9,806 65 N. Da bismo taj posao olakšali, objavljujemo tablice B-29 i 30, pomoću kojih se preciznije od 0,01 % može brzo preračunavati.

Tablice su bez decimalnog zareza, pa ga čitatelj mora stavljati sam. To nije teško, jer približno vrijedi kp ≈ 10 N i N ≈ 0,1 kp. Isto vrijedi i za interpolaciju koja je navedena na desnoj strani obiju tablica. Za preračunavanje jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva interpolacija nije potrebna. Tako je, na primjer (tablica B-29),

$$2\ \text{kp} = 19{,}61\ \text{N}, \qquad 73\ \text{kp} = 715{,}9\ \text{N}.$$

Posve analogno dobiva se iz tablice B-30

$$2\ \text{N} = 0{,}2039\ \text{kp}, \qquad 73\ \text{N} = 7{,}444\ \text{kp}.$$

Upotrebu interpolacije ilustriraju ova dva primjera:

$$\begin{aligned} 5{,}11\ \text{kp} &= 50{,}01\ \text{N} \\ &+\ 0{,}10\ \text{N} \\ \hline 5{,}11\ \text{kp} &= 50{,}11\ \text{N} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5{,}111\ \text{kp} &= 50{,}01\ \text{N} \\ &+\ 0{,}10\ \text{N} \\ &+\ 0{,}01\ \text{N} \\ \hline 5{,}111\ \text{kp} &= 50{,}12\ \text{N} \end{aligned}$$

Tačno računanje pomoću relacije kp = 9,806 65 N daje za prvi slučaj rezultat 5,11 kp = = 50,111 9815 N, a za drugi slučaj 5,111 kp = 50,121 788 15 N, što znači da pogreške iznose manje od 0,004 %.

4.2.6. Angloameričke jedinice sile. Obje temeljne angloameričke jedinice sile podrobno se razmatraju u odlomcima 11.7.1,2. To su ($g_0 = 9{,}806\,65\ \text{m/s}^2$):

$$\text{poundal (pdl)} = \text{lb}\cdot\text{ft/s}^2 = 0{,}138\,255\ \text{newton (N)},$$

$$\text{pound-force (lbf)} = \text{lb}\cdot g_0 = 4{,}448\,22\ \text{newton (N)}.$$

Tablica **B-28**

Dvostrani odnosi među jedinicama sile izvedenima iz

Jedinica		Kratica	μN	mN	N	kN
mikronewton	=	μN	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
milinewton	=	mN	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}
newton	=	N	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}
kilonewton	=	kN	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1
meganewton	=	MN	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}
milipond	=	mp	9,80665	$9{,}80665 \cdot 10^{-3}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-6}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-9}$
pond	=	p	$9{,}80665 \cdot 10^{3}$	9,80665	$9{,}80665 \cdot 10^{-3}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-6}$
kilopond	=	kp	$9{,}80665 \cdot 10^{6}$	$9{,}80665 \cdot 10^{3}$	9,80665	$9{,}80665 \cdot 10^{-3}$
megapond	=	Mp	$9{,}80665 \cdot 10^{9}$	$9{,}80665 \cdot 10^{6}$	$9{,}80665 \cdot 10^{3}$	9,80665
gigapond	=	Gp	$9{,}80665 \cdot 10^{12}$	$9{,}80665 \cdot 10^{9}$	$9{,}80665 \cdot 10^{6}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-3}$

Grafički prikaz definicija ovih jedinica vidimo na slikama B.17 i, j, a njihovo mjesto među mnoštvom drugih na slici B.18. Uz navedene dvije angloameričke jedinice sile upotrebljavaju se i ove

$$\text{ounce-force (ozf)} = 0{,}278014 \text{ N},$$

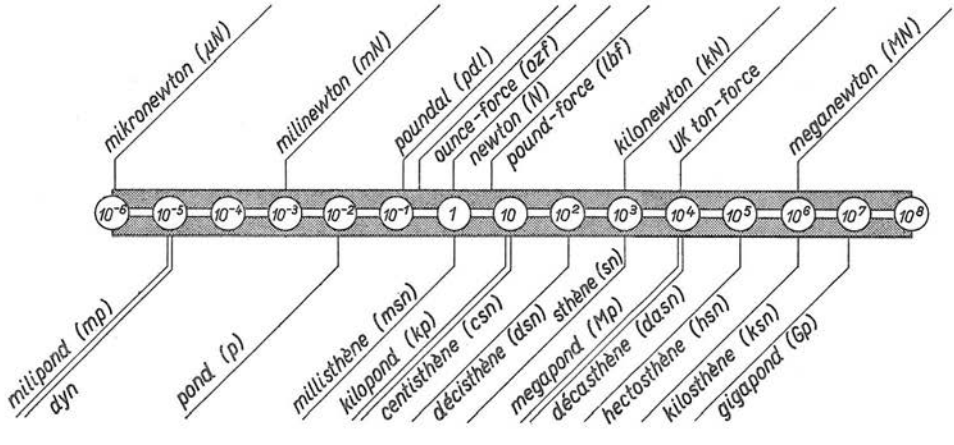
$$\text{UK ton-force (tonf)} = 9964{,}02 \text{ N}.$$

Prva od njih definirana je relacijom $\text{ozf} = \text{oz} \cdot g_0$, gdje je ounce (avoirdupois) = = oz = pound/16 (vidi odlomak 11.5.1), što znači da je ozf = lbf/16 = 0,278014 N, kako smo gore naveli. Analogno je UK ton-force (tonf) = 2240 lb·g_0 = 2240 lbf = = 9964,02 N. Kod primjene ove jedinice valja biti pažljiv prilikom korištenja *američke* literature, jer je jedinica mase US short ton = 2000 lb, iz čega slijedi US ton-force = 2000 lb·g_0 = 8896,44 N, što je *manje* od UK ton-force (podrobnije o jedinicama »ton« u odlomku 11.5.1).

Dvostrane odnose među angloameričkim jedinicama sile sadrži tablica **25** u prilogu knjige. U toj tablici navedeni su i dvostrani odnosi angloameričkih jedinica prema metričkim jedinicama sile, npr. N = 7,23301 pdl itd. Nije uobičajena primjena dekadskih i decimalnih višekratnika na angloameričke jedinice sile.

newtona i jedinicama sile izvedenima iz ponda

MN	mp	p	kp	Mp	Gp
10^{-12}	$1{,}019716 \cdot 10^{-1}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-4}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-7}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-10}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-13}$
10^{-9}	$1{,}019716 \cdot 10^{2}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-1}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-4}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-7}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-10}$
10^{-6}	$1{,}019716 \cdot 10^{5}$	$1{,}019716 \cdot 10^{2}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-1}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-4}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-7}$
10^{-3}	$1{,}019716 \cdot 10^{8}$	$1{,}019716 \cdot 10^{5}$	$1{,}019716 \cdot 10^{2}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-1}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-4}$
1	$1{,}019716 \cdot 10^{11}$	$1{,}019716 \cdot 10^{8}$	$1{,}019716 \cdot 10^{5}$	$1{,}019716 \cdot 10^{2}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-1}$
$9{,}80665 \cdot 10^{-12}$	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
$9{,}80665 \cdot 10^{-9}$	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
$9{,}80665 \cdot 10^{-6}$	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}
$9{,}80665 \cdot 10^{-3}$	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}
9,80665	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1



Sl. B.18. Grubi grafički prikaz međusobnih odnosa različitih jedinica sile. Osnova je jedinica Međunarodnog sistema (SI) newton = N

Tablica **B-29**

Preračunavanje vrijednosti sila izraženih kilopondima na newtone (kp = 9,806 65 N)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Interpolacija	
0	0	98	196	294	392	490	588	686	785	883		
1	981	1079	1177	1275	1373	1471	1569	1667	1765	1863	1	10
2	1961	2059	2157	2256	2354	2452	2550	2648	2746	2844	2	20
3	2942	3040	3138	3236	3334	3432	3530	3628	3727	3825	3	29
4	3923	4021	4119	4217	4315	4415	4511	4609	4707	4805	4	39
5	4903	5001	5099	5198	5296	5394	5492	5590	5688	5786	5	49
6	5884	5982	6080	6178	6276	6374	6472	6570	6668	6767	6	59
7	6865	6963	7061	7159	7252	7355	7453	7551	7649	7747	7	69
8	7845	7943	8041	8140	8238	8336	8434	8532	8630	8728	8	78
9	8826	3924	9022	9120	9218	9316	9414	9512	9611	9709	9	88

Primjer upotrebe tablice: 4,967 kp = 48,05 N + 0,59 N + 0,069 N = 48,709 N.

Tablica **B-30**

Preračunavanje vrijednosti sila izraženih newtonima na kiloponde
(N = kp/9,806 65 = 0,101 972 kp)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Interpolacija	
0	0	102	204	306	408	510	612	714	816	918		
1	1020	1122	1224	1326	1428	1530	1632	1734	1835	1937	1	10
2	2039	2141	2243	2345	2447	2549	2651	2753	2855	2957	2	20
3	3059	3161	3263	3365	3467	3569	3671	3773	3875	3977	3	31
4	4079	4181	4283	4385	4487	4589	4691	4793	4895	4997	4	41
5	5099	5201	5303	5404	5506	5608	5710	5812	5914	6016	5	51
6	6118	6220	6322	6424	6526	6628	6730	6832	6934	7036	6	61
7	7138	7240	7342	7444	7546	7648	7750	7852	7954	8056	7	71
8	8158	8260	8362	8464	8566	8668	8770	8872	8974	9075	8	82
9	9177	9279	9381	9483	9588	9687	9789	9891	9993	10095	9	92

Primjer upotrebe tablice: 26,31 N = 2,651 kp + 0,031 kp + 0,001 kp = 2,683 kp.

Primjer. Izračunajmo kolikom silom opterećuje cestu kamion mase 1900 lb, koji je natovaren sa 3 kubna yarda boksita gustoće 150 lb/ft³! Silu ćemo izračunati pomoću jednadžbe $G = (m + V\rho)g$, u koju ćemo uvrstiti $m = 1900$ lb, $V = 3$ yd³ $= 3 \cdot 27$ ft³ $= 81$ ft³ (vidi odlomak 11.4.1), $\rho = 150$ lb/ft³ i $g = g_0 = 9{,}80665$ m/s². Dobivamo

$$G = (1900 \text{ lb} + 81 \text{ ft}^3 \cdot 150 \text{ lb/ft}^3) \cdot 9{,}80665 \text{ m/s}^2$$

$$G = 14050 \text{ lb} \cdot 9{,}80665 \text{ m/s}^2 = 14050 \text{ lbf},$$

jer je prema definiciji pound-force (lbf) = lb·g_0 (vidi početak ovog odlomka i sliku B.17j). Predodžbu o dobivenom rezultatu steći ćemo ako ga preračunamo na metričke jedinice, tj. $G = 14050$ lbf $= 14050 \cdot 4{,}448$ N $= 62{,}3$ kN $= 6350$ kp.

4.3. Metričke jedinice tlaka i naprezanja

Za izražavanje vrijednosti veličine »naprezanje« $\sigma = F/A$ upotrebljavaju se u nauci o čvrstoći, a i u drugim tehničkim disciplinama, dijelom iste jedinice kao i za mjerenje tlaka. Pri tom je uobičajeno da je jedinica naprezanja uvijek izražena u obliku omjera jedinice sile i jedinice površine, dakle u obliku N/mm², kp/cm² itd., a ne u obliku bar ($= 10^5$ N/m²; vidi odlomak 4.4.3) ili u obliku at (tehnička atmosfera), koja je inače definirana ovako at = kp/cm² (vidi odlomak 4.3.6). Isto tako nije uobičajeno da se naprezanje, odnosno čvrstoća materijala izražava u tzv. stupčanim jedinicama (o njima vidi odlomke 4.3.7,8 i 4.4.7).

U skladu s ovim napomenama obrađene su u narednim odlomcima jedinice »tlaka« pod kojima u spomenutom opsegu razumijevamo i jedinice fizikalnih veličina »naprezanje« i »čvrstoća«.

4.3.1. Jedinica tlaka N/m² (newton na kvadratni metar). Veličinu »tlak« općenito smo definirali jednadžbama (4.1-1,2) u odlomku 4.1.1. Budući da je u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) jedinica sile newton = N, a jedinica površine kvadratni metar = m², iz definicijske jednadžbe tlaka $p = F/A$ dobivamo

$$\text{jedinica tlaka SI} = \frac{\text{newton}}{\text{kvadratni metar}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Ona još nema međunarodno usvojenog naziva po nekom čuvenom prirodoznancu, kao što je to za jedinice newton, joule, volt itd. Budući da je N = kg m/s² (vidi odlomak 4.2.1), jedinicu tlaka SI mogli bismo pisati i u obliku

$$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2},$$

ali nikome ne pada na pamet da pri rješavanju zadataka tako radi, jer je u stvarnoj primjeni jedinica to nepraktično, tj. nepregledno i dugačko. Jedinica tlaka izražena u obliku N/m² svojom strukturom neposredno pokazuje da je riječ o omjeru jedinice sile i jedinice površine, dakle o jedinici tlaka i naprezanja.

Dvostrane odnose među različitim jedinicama tlaka, uključivši angloameričke jedinice tlaka, sadrže tablice **26**, **27**, **28** i **29** u prilogu knjige.

4.3.2. Jedinica tlaka SI mendeljejev. Postoji nekoliko prijedloga o nazivu jedinice tlaka SI N/m². U francuskoj literaturi možemo zapaziti naziv »pascal« (*Pascal*ov zakon; više vidi na str. 507), a neki drugi autori predlažu »giorgi« po Talijanu *G. Giorgi*ju, kojeg smatraju utemeljiteljem Međunarodnog sistema jedinica (SI). Korisno je zabilježiti prijedloge naziva

$$\text{pascal (Pa ili P)} = \text{giorgi (G)} = \text{N/m}^2$$

da bi ih čitatelj mogao bez teškoća odgonetnuti ako ih zapazi u sadašnjoj ili budućoj literaturi (vidi i odlomak 4.3.5). Naglašavamo ponovno da nazivi pascal i giorgi ne postoje u međunarodnoj standardizaciji i da su ti nazivi za jedinicu tlaka SI za sada samo izraz nacionalnih želja.

Kako uopće teče proces međunarodnog prihvaćanja naziva neke jedinice SI po imenu čovjeka koji je zaslužan za razvoj znanosti ili tehnologije? Konačnu odluku donosi Generalna konferencija za mjere i utege (o njoj vidi poglavlja A.6, 7) na prijedlog svog stalnog tijela, Međunarodnog komiteta za mjere i utege (CIPM). Prije toga prijedloge naziva jedinice SI obično razmotri i preporuči neka međunarodna stručna organizacija ili čak više njih, na primjer International Standardizing Organization (ISO) ili International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) ili neka druga. Ove međunarodne organizacije dobivaju prijedlog naziva jedinice SI od odgovarajuće *nacionalne* organizacije koja je učlanjena u međunarodnu. To znači da stanovita nacija mora poduzeti niz koraka da svoj prijedlog »progura« kroz nabrojene instancije sve do Generalne konferencije za mjere i utege.

Taj proces je dug i zamoran, jer nisu u pitanju samo zasluge čovjeka po kojem jedinica treba da dobije ime, već i prikladnost predloženog imena u pogledu primjene kratice, budući da je danas još samo malo slova slobodnih. No iznad svega treba savladati nacionalne i ideološke otpore protupredlagača. Još nam je uvijek u pameti živ primjer mukotrpnog procesa prihvaćanja imena jedinice magnetske indukcije u SI. Od godine 1960, kada je to ime prihvatila Generalna konferencija, ta se jedinica zove »tesla« ($T = Wb/m^2 = Vs/m^2$; vidi odsječak E.2.2) po jugoslavenskom učenjaku i izumitelju Nikoli *Tesli*, rođenom u ličkom selu Smiljani. Grupa beogradskih elektroinženjera, na čelu sa Slavkom *Bokšan*om, desetljećima je čitavom svijetu dokazivala veličinu Teslina djela i korist tog djela za čovječanstvo. Nakon Tesline posmrtne afirmacije, prijedlog $[B]_M = \text{tesla} = T$ prihvatila je Međunarodna elektrotehnička komisija (ona je od godine 1947. sastavni dio ISO), pa onda i CIPM, koji je prijedlog iznio na 11. zasjedanju Generalne konferencije godine 1960.

Smatralo se da je prihvaćanje imena tesla samo stvar formalnog izglasavanja na zasjedanju. Bilo je, međutim, sasvim drukčije: delegati nekih zemalja, a osobito Nizozemske, Danske i Italije, nisu se ustručavali da na toj posljednjoj instanciji omalovaže Teslino djelo i gotovo su oborili prijedlog. Da tom prilikom u delegaciji Jugoslavije nije bio i *Francè Avčin* (pokretači čitave akcije iz Beograda nisu bili prisutni), koji je u dva navrata morao na zasjedanju obarati protuargumente, te da ga u tome nisu poduprli delegati SSSR, Zapadne Njemačke, istočnoevropskih zemalja i predsjednik zasjedanja Francuz *Danjon*, prijedlog bi bio zauvijek propao.

Ovaj letimični historijat usvajanja naziva tesla za jedinicu magnetske indukcije SI navodimo zbog toga što smo svjesni da slične — možda ipak nešto manje — neprilike može doživjeti prijedlog što ga u pogledu imena jedinice tlaka SI N/m^2 *predlaže* autor ove knjige. Predlažemo, naime, da to bude

$$\text{mendeljejev} = M = \frac{\text{newton}}{\text{metar}^2} = \frac{N}{m^2},$$

po glasovitom ruskom učenjaku, profesoru kemije u tadašnjem Petrogradu, Dmitriju Ivanoviču *Mendeljejevu* (1834...1907). Držimo da njegove zasluge za cjelokupnu znanost ne treba posebno dokumentirati; njegovo ime znade već i đak osnovne škole čim primi prvu poduku iz kemije (vidi pet članaka u broju 12 časopisa »Kemija u industriji« za godinu 1969. koje su napisali G. T. Seaborg, H. Iveković, M. Laćan i N. A. Gorjunova).

Za kraticu jedinice tlaka SI $[p]_M$ = mendeljejev predlažemo slovo M, dakle $M = N/m^2$. Predodžbu o toj jedinici možemo dobiti usporedbom s jedinicom bar = $= 10^5\ N/m^2$ (vidi odlomak 4.3.4): $bar = 10^5\ M = 100\ kM = 0{,}1\ MM$ (MM = = megamendeljejev).

Do sada 14 jedinica SI ima vlastita imena koja su dobile po učenjacima 6 nacionalnosti. To su:

Amerika (USA):	*Francuska*:	*Italija*:
henry (H)	amper (A) coulomb (C)	volt (V)
Jugoslavija:	*Njemačka*:	*Velika Britanija*:
tesla (T)	hertz (Hz) ohm (Ω) weber (Wb) siemens (S)	farad (F), joule (J) newton (N), watt (W) kelvin (K)

Nazivi jedinica farad, amper, volt i kelvin dolaze od glasovitih prezimena: *Faraday, Ampère, Volta* i *Lord Kelvin*. Vidimo da u dodjeljivanju imena jedinicama Međunarodnog sistema nema nikakva teritorijalnog ili nacionalnog principa: Englezi imaju 5 imena, Nijemci 4, Francuzi 2, Italija 1. Na čitav ostali svijet otpadaju samo dva: USA 1, Jugoslavija 1. Riječ je, dakle, o apsolutnom primatu zapadne Evrope. Tako je bilo i u *prošlosti*. Evo naziva nekih važnijih imenovanih jedinica (sistemi CGS i neke vansistemske jedinice) iz razdoblja prije postojanja SI:

Amerika (USA):	*Francuska*:	*Italija*:	*Nizozemska*:
bel, franklin	biot, curie, poise, stupanj Réaumura	gal, torr	oersted
Njemačka:	*Švedska*:	*Velika Britanija*:	
gauss, Hefnerova svijeća, röntgen,	ångström, stupanj Celsiusa	dalton, gilbert, stupanj Fahrenheita, maxwell, stupanj Rankina, stokes	

Znatan dio tih jedinica i danas se upotrebljava u pojedinim granama prirodoslovnih i tehničkih znanosti.

Iz ova dva pregleda razabire se još jedno veliko značenje prihvaćanja imena tesla (T) za jedinicu SI magnetske indukcije: time se među nazivima jedinica prvi put pojavilo *slavensko ime*! Jedinica mendeljejev = M bilo bi drugo.

U odlomku 6.4.2 autor predlaže još jedan naziv: za imenovanu jedinicu SI dinamičke viskoznosti. To je bernoulli = $B = Ns/m^2$, po glasovitom *švicarskom* učenjaku. Slučaj je, dakle, htio da se istodobno nađu predloženi sinovi jednog velikog i jednog (brojčano) malog naroda:

$$\text{mendeljejev} = M = N/m^2, \qquad \text{bernoulli} = B = Ns/m^2.$$

Između tih predloženih jedinica SI lako je uspostaviti vezu

$$\text{bernoulli} = \text{mendeljejev} \times \text{sekunda}, \qquad B = Ms,\ M = B/s.$$

U vezi s time možda je zanimljivo spomenuti da je od godine 1725. do 1730. *Bernoulli* (1700...1782) radio u ruskoj Akademiji nauka, u vrijeme dakle kad se *Mendeljejev* nije još bio ni rodio.

Protiv naziva i kratice jedinice tlaka SI mendeljejev mogu se očekivati dva prigovora. Navedimo ih i odbacimo odmah oba. Prvi je da je naziv »mendeljejev« dugačak, odnosno težak za izgovor, ako se želi ispravno ruski izgovoriti (mendjeljejev). Tome je lako doskočiti po uzoru na dosadašnje jedinice: jedinica prozvana po *Faradayu* zove se »farad«, jedinica prozvana po *Galileju* zvala se »gal«, po *Torricelliju* »torr«, po *Poiseuilleu* se zove »poise« (čitaj: poaz). Isto tako jedinica SI prozvana po Mendeljejevu može se zvati »mendel« ili još kraće »mend«, dakle

$$\text{mendel (mend)} = \text{M} = \text{N/m}^2!$$

Drugi prigovor može se očekivati protiv kombinacije skraćenice *jedinice* M i simbola dekadskog *višekratnika* (prefiksa) M, dakle protiv MM = megamendel(ejev) = 10^6 N/m². Ta će se kombinacija u tehničkoj praksi češće pojavljivati ako se prihvati M = mendel(ejev) = N/m². Reći će se, na primjer, da atmosferski tlak iznosi 0,1 MM (to je jednako 1 bar, jer je bar = 10^5 N/m²). Prigovor protiv MM možemo eliminirati protupitanjem: zašto se nitko ne buni protiv jedinice duljine milimetar = mm = 10^{-3} metar? Kod mm je situacija još teža, jer s milimetrom imaju posla gotovo svi ljudi, od laika do učenjaka. S jedinicama tlaka nije tako; njima se služe oni koji imaju stanovitu, barem minimalnu, stručnu naobrazbu!

4.3.3. Jedinice tlaka izvedene iz N/m². Na jedinicu tlaka N/m² dekadski i decimalni višekratnici mogu se primjenjivati ovako: ili samo na newton = N, ili samo na kvadratni metar = m² (o načinu primjene višekratnika na jedinice površine vidi odlomak 1.5.2) ili istodobno na oboje (premda to nije ispravno; vidi odsječak A.2.3). Takvu kompleksnu primjenu višekratnika vidimo, na primjer, u izvedenici »kilonewton na kvadratni milimetar« = kN/mm².

Izračunajmo koliko N/m² sadrži jedinica kN/mm². U tu svrhu stavljamo u omjer kilonewton = kN = 10^3 N i kvadratni milimetar = mm² = 10^{-6} m² pa računanjem dobivamo

$$\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} = \frac{10^3\,\text{N}}{10^{-6}\,\text{m}^2} = 10^9\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Analogno možemo izračunati odnose jedinica tlaka kN/m², MN/m², kN/cm² itd., prema osnovnoj jedinici tlaka SI N/m², te odnose među njima. Pregled dvostranih odnosa među njima sadrži tablica B-31, iz koje se vidi da je npr. kN/cm² = = 10 MN/m² itd. (O najpouzdanijoj primjeni višekratnika u složenim jedinicama tlaka vidi odsječak 7.6.)

Dvostrane odnose među različitim jedinicama tlaka, uključivši angloameričke jedinice tlaka, sadrže tablice **26, 27, 28** i **29** u prilogu knjige.

4.3.4. Jedinica tlaka bar (neka zakonodavstva dopuštaju kraticu: b). Jedinicu tlaka »bar« mogli smo zapaziti u tablici B-31 definiranu odnosom

$$\text{bar} = 10^5\ \text{N/m}^2 = 100000\ \text{N/m}^2.$$

Ta je jedinica prvotno bila upotrebljavana samo u meteorologiji (npr. izvještaj na radiju: »zračni tlak iznosi 756 milibara«), a bila je definirana relacijom bar = = 10^6 dyn/cm² (o jedinici sile dyn vidi odlomak 4.2.3). Iz nje su se izvodile manje jedinice: centibar = 10^4 dyn/cm², milibar = 10^3 dyn/cm², mikrobar = 1 dyn/cm² itd.

Jedinica tlaka »bar« danas se mnogo upotrebljava i u *tehnici*, naročito u nauci o toplini, a do intenzivne primjene došlo je nakon sveopćeg uvođenja Među-

Tablica **B-31**

Dvostrani odnosi među jedinicama tlaka koje su pomoću višekratnika jedinica izvedene iz newtona i kvadratnog metra

Jedinica		Kratica	$\frac{N}{m^2}$	$\frac{kN}{m^2}$	$\frac{MN}{m^2}$	bar	$\frac{N}{cm^2}$	$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{kN}{cm^2}$	$\frac{kN}{mm^2}$
newton na kvadratni metar	=	$\frac{N}{m^2}$	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-9}
kilonewton na kvadratni metar	=	$\frac{kN}{m^2}$	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}
meganewton na kvadratni metar	=	$\frac{MN}{m^2}$	10^{6}	10^{3}	1	10^{1}	10^{2}	1	10^{-1}	10^{-3}
bar	=	bar	10^{5}	10^{2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}
newton na kvadratni centimetar	=	$\frac{N}{cm^2}$	10^{4}	10^{1}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}
newton na kvadratni milimetar	=	$\frac{N}{mm^2}$	10^{6}	10^{3}	1	10^{1}	10^{2}	1	10^{-1}	10^{-3}
kilonewton na kvadratni centimetar	=	$\frac{kN}{cm^2}$	10^{7}	10^{4}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{1}	1	10^{-2}
kilonewton na kvadratni milimetar	=	$\frac{kN}{mm^2}$	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{3}	10^{2}	1

narodnog sistema jedinica (1954) i spoznaje o praktičnosti višekratnika iz tablice A-1. Stručnjaci su, naime, željeli zadržati »osjećaj za vrijednost« pa su stoga u svoje tablice (npr. u *is*-tablice za vodenu paru) uveli jedinicu »bar« koja je po svojoj veličini vrlo bliska dotada upotrebljavanim jedinicama tlaka, a ipak predstavlja dekadski višekratnik jedinice SI N/m^2 (ova pojava još je jedan dokaz da bi trebalo imenovati jedinicu N/m^2, kao što smo naveli u odlomku 4.3.2). Budući da su se dotada uglavnom upotrebljavale jedinice $at = kp/cm^2$ = atmosfera (tehnička) i atm = normalna (standardna) atmosfera, tehničari su prigrlili jedinicu bar, jer se ona po vrijednosti nalazi između spomenute dvije, što nam prikazuje tablica B-32 (o jedinicama atm i $at = kp/cm^2$ vidi odlomke 4.3.7,6).

Tablica **B-32**

Dvostrani odnosi među vrlo bliskim jedinicama tlaka: normalna (standardna) atmosfera (atm), bar i tehnička atmosfera ($at = kp/cm^2$)

Jedinica		Kratica	atm	bar	kp/cm^2, at
normalna (standardna, fizikalna) atmosfera	=	atm	1	1,013250	1,033227
bar	=	bar	0,986923	1	1,019716
kilopond na kvadratni centimetar, (tehnička) atmosfera	=	kp/cm^2, at	0,967841	0,980665	1

Rumunj *E. Bodea* zalagao se da se jedinica 10^5 N/m^2 nazove »pentagiorgi«, tj. da se na jedinicu »giorgi« = N/m^2 (prijedlog) primijeni novi decimalni višekratnik penta = pe = 10^5. Na taj način vrijedilo bi

$$\text{pentagiorgi} = \text{peG} = 10^5\ N/m^2.$$

To je bilo u vrijeme dok još tehničari nisu »otkrili« bar.

Na jedinicu bar mogu se prema jugoslavenskom Zakonu o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. primjenjivati dekadski i decimalni višekratnici iz tablice A-1. Danas se najčešće upotrebljavaju tako izvedene jedinice milibar i mikrobar. Odnose tih jedinica prema N/m^2 sadrži tablica B-33.

Dvostrane odnose među različitim jedinicama tlaka, uključivši angloameričke jedinice tlaka, sadrže tablice **26, 27, 28** i **29** u prilogu knjige.

4.3.5. Jedinice tlaka pièze i pascal. U odlomku 4.2.3 naveli smo da se u Francuskoj upotrebljavao sistem jedinica osnovan na metru, sekundi i toni, a jedinica sile u tom sistemu je sthène, po vrijednosti jednaka sn = 1000 N. Jedinica tlaka u tom sistemu prozvana je

$$\text{pièze} = \text{pz} = \frac{\text{sthène}}{\text{metar}^2} = \frac{\text{sn}}{\text{m}^2} = 1000\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

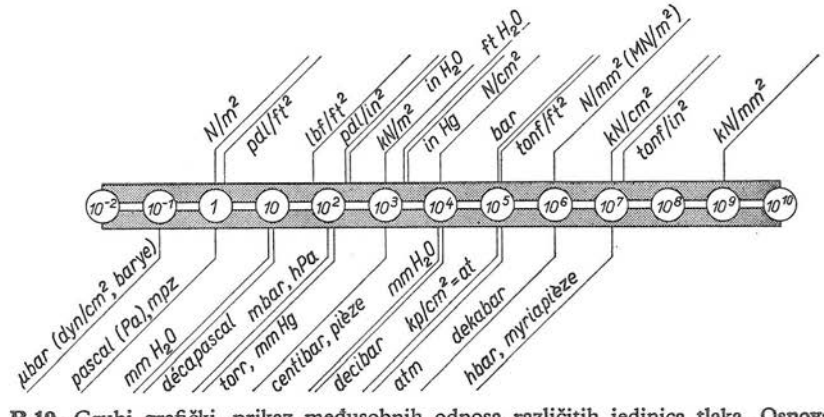
Tablica **B-33**

Decimalni dijelovi jedinice tlaka bar i njihov odnos prema jedinici N/m^2

Jedinica		Kratica	μb	mb	b	$\frac{N}{m^2}$
mikrobar	=	μb	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-1}
milibar	=	mb	10^{3}	1	10^{-3}	10^{2}
bar	=	b	10^{6}	10^{3}	1	10^{5}
newton na kvadratni metar	=	$\frac{N}{m^2}$	10	10^{-2}	10^{-5}	1

Od te jedinice Francuzi su pomoću dekadskih i decimalnih višekratnika iz tablice A-1 načinili mnogo izvedenica. One su zajedno s nizom drugih jedinica abecedno poredane u tablici B-34. Među njima je i »pascal« (kratica je Pa ili P) = N/m^2, o kojem smo već govorili u odlomku 4.3.1. Izvedenice te jedinice (s višekratnicima) također smo svrstali u tablicu B-34, i to u originalnom francuskom načinu pisanja, jer se te jedinice — odnosno nazivi — upotrebljavaju jedino u Francuskoj i u zemljama francuskog kulturnog ili tehničko-ekonomskog utjecaja. Potkraj godine 1969. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM) izglasao je preporuku Generalnoj konferenciji da se »pascal« uvede kao službeni naziv jedinice SI tlaka.

Tablica B-34 vrlo nam poučno pokazuje kako je teško snaći se u mnoštvu jedinica tlaka na koje možemo naići u literaturi. Da bismo olakšali snalaženje među gotovo svim jedinicama tlaka, orijentacijski smo ih svrstali u grubi grafički prikaz na slici B.19. Tu se nalaze i one jedinice tlaka koje obrađuju idući odlomci.



Sl. B.19. Grubi grafički prikaz međusobnih odnosa različitih jedinica tlaka. Osnova je jedinica Međunarodnog sistema (SI) N/m^2

Tablica **B-34**

Odnosi među jedinicama tlaka bar, dyn/cm², pascal, pièze i njihovim izvedenicama

bar = 10^5 N/m² = hectopièze = 10^6 dyn/cm²

barye = 0,1 N/m² = décipascal = dyn/cm²

centibar (cbar) = 1000 N/m² = pièze

centipièze (cpz) = 10 N/m² = décipascal

décabar (dabar) = 10^6 N/m² = 10 bar = 10^7 dyn/cm²

décapascal (daPa) = 10 N/m² = centipièze

décibar (dbar) = 10^4 N/m² = 0,1 bar = 10^5 dyn/cm²

décipascal (dPa) = 0,1 N/m² = barye = dyn/cm²

dyn/cm² = 0,1 N/m² = barye = décipascal

hectobar (hbar) = 10^7 N/m² = myriapièze

hectopascal (hPa) = 100 N/m² = millibar = 1000 dyn/cm²

hectopièze (hpz) = 10^5 N/m² = bar = 10^6 dyn/cm²

mégadyn/cm² = 10^5 N/m² = bar = hectopièze

microbar (μbar) = 0,1 N/m² = barye = dyn/cm² = décipascal

millibar (mbar) = 100 N/m² = hectopascal = 1000 dyn/cm²

millipièze (mpz) = N/m² = 10 barye = pascal = 10 dyn/cm²

myriapièze (mapz) = 10^7 N/m² = 100 bar = 10^8 dyn/cm²

pascal (Pa) = N/m² = 10^{-5} bar = millipièze

pièze (pz) = sthène/m² = 1000 N/m² = centibar

Primjer. U jednom francuskom udžbeniku pronašli smo ovakav zadatak: kolika je snaga zračnog ventilatora korisnosti 70% koji radi na razliku tlaka 300 daPa, a protok iznosi 2 m³/s? Sredimo najprije podatke: protok (vidi odlomak 3.1.5) iznosi $q = 2$ m³/s, korisnost $\eta = 70\% = 0{,}7$; razliku tlaka dobivamo uz pomoć tablice B-34, odakle uzimamo relaciju décapascal = daPa = = 10 N/m², dakle $\Delta p = 300$ daPa $= 300 \cdot 10$ N/m² $= 3000$ N/m². Kratkim računom slijedi tražena snaga

$$P = \frac{q\Delta p}{\eta} = \frac{1}{0{,}7}\, 2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\, 3000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 8575\,\mathrm{W} = 8{,}575\ \mathrm{kW},$$

jer je jedinica snage SI Nm/s = watt = W (vidi poglavlje 5), a 1000 W = kW.

4.3.6. Normalna (standardna) atmosfera. Generalna konferencija za mjere i utege definirala je godine 1954. jedinicu tlaka normalna (standardna, fizikalna) atmosfera ovako

$$\mathrm{atm} = \text{normalna atmosfera} = 1{,}013\,25 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}\ \text{(tačno)},$$

tj. atm je *tačno propisani* višekratnik jedinice N/m². Budući da je bar = 10^5 N/m², gornju jednadžbu možemo pisati i u obliku

$$\mathrm{atm} = 1{,}013\,25\ \mathrm{bar}\ \text{(tačno)}.$$

Napominjemo da je prije toga, zaključkom Generalne konferencije za mjere i utege (1927), normalna atmosfera bila definirana tlakom što ga proizvodi stupac žive visok 760 mm. Njena vrijednost u N/m^2 bila je atm(1927) = 1,013 250 144 354 × $\times 10^5$ N/m^2.

Dvostrane odnose jedinice tlaka atm prema jedinicama bar i at = kp/cm^2 sadrži tablica B-32. Manje precizne odnose prema većem broju drugih jedinica, uključivši angloameričke, sadrži tablica **28** u prilogu knjige.

4.3.7. Jedinica tlaka tehnička atmosfera (kratica: at) definirana je omjerom jedinice sile kilopond = kp (vidi odlomak 4.2.4) i jedinice površine kvadratni centimetar = cm^2, dakle

$$\text{tehnička atmosfera} = \text{at} = \frac{\text{kilopond}}{\text{centimetar}^2} = \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}.$$

Budući da je kp = 9,806 65 N (tačno), vrijedi odnos at = kp/cm^2 prema N/m^2 i prema bar = 10^5 N/m^2

$$\text{at} = \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 10^4 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} = 98\,066{,}5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 0{,}980\,665\,\text{bar}.$$

Dvostrane odnose tehničke atmosfere prema bliskim (po veličini) jedinicama atm i bar sadrži tablica B-32, a dvostrane odnose prema mnogim drugim jedinicama tlaka (uključivši angloameričke) tablice **26**, **28** i **29** u prilogu knjige.

U vezi s jedinicom tehnička atmosfera=at valja nešto primijetiti o *pogrešnom načinu pisanja* te jedinice. Piše se npr. $p = 12$ atp, čime se želi reći »da nadtlak (pretlak) iznosi 12 tehničkih atmosfera«. Štaviše, u *jugoslavenskoj* literaturi možemo naći zabilježeno ovako: $p = 12$ atü (od njemačkog Überdruck). Pogrešno se piše i ovako: $p = 13$ ata, a ponekad se čak i kaže »da tlak iznosi 13 *apsolutnih atmosfera*«.

Ne postoje, dakako, ovakve i onakve atmosfere (at, atp, ata). Nitko razuman ne kaže »uzdužni metar«, »poprečni metar«, »visinski metar«, »dubinski metar« itd. Jedinicom »metar« možemo mjeriti razmake, širine, visine, dubine itd. Posve analogno je s tlakom. Valja dakle reći: vrijednost nadtlaka iznosi $p_n = 12$ at, apsolutni tlak iznosi $p = 13$ at (vidi odlomak 4.1.2 itd). Za utjehu možemo reći da se stvari kao ata i atp mogu naći i u suvremenoj angloameričkoj literaturi (vidi odlomak 4.4.3).

4.3.8. Jedinice tlaka torr i mm Hg. Zakonodavstva pojedinih država različito definiraju ove dvije jedinice, ali zbog toga nema nikakvih štetnih posljedica za njihovu praktičnu primjenu. Tako, na primjer, čehoslovački standard ČSN 01 1300 »Zakonske mjerne jedinice« (Zakonné měrove jednotky), koji je na snazi od 1. 7. 1963, definira

$$\text{torr} = 133{,}322\ \text{N/m}^2 \quad \text{(tačno)} \qquad (4.3\text{-}1)$$

i pri tom daje objašnjenje: »Torr je jednak hidrostatskom tlaku jednog milimetra stupca žive (gustoće 13 595,1 kg/m^3 pri 0 °C) na temperaturi 0 °C i pri normalnom ubrzanju sile teže 9,806 65 m/s^2.« Citirani čehoslovački standard ujedno navodi da se ne dopušta upotreba naziva »milimetar stupca žive« ni upotreba kratice »mm Hg«.

Jugoslavenski zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. navodi ovu definiciju jedinice tlaka

$$\text{milimetar stupca žive} = \text{mm Hg} = 133{,}32 \text{ N/m}^2, \tag{4.3-2}$$

a u prikazu odnosa među pojedinim jedinicama tlaka navodi i ovu relaciju: atm (normalna atmosfera) = 760 mm Hg. O jedinici tlaka »torr« u jugoslavenskom zakonu ništa se ne govori, što znači da ona nije dopuštena za javnu primjenu. U zakonu su naime izričito navedene jedinice koje *jesu* dopuštene.

Iz citiranih odredaba čehoslovačkog standarda i jugoslavenskog zakona, tj. iz naših jednadžbi (4.3-1,2), proizlazi da je

$$\text{torr} = \text{mm Hg} = 133{,}322 \text{ N/m}^2, \tag{4.3-3}$$

ako pretpostavimo da u relaciji (4.3-2) na kraju stoji još jedna znamenka 2 (dva). Za zakonsku i preciznu metrologiju na snazi je dakle (4.3-3).

Vrijedno je ipak istražiti zašto dvije države, koje su obje članice Konvencije o metru (vidi odsječke A.6.3,5) i ISO (International Standards Organization), donose otprilike u isto vrijeme zakonske odluke u kojima se za iste jedinice upotrebljavaju *različiti* nazivi, a u pogledu drugih jedinica ova su dva dokumenta gotovo identična! Da bismo to saznali, moramo barem letimično istražiti porijeklo jedinica i naziva »milimetar stupca žive« i »torr«.

Izvršni odbor Svjetske meteorološke organizacije (World Meteorological Organization) definirao je godine 1953, nakon izmjene mišljenja s International Union of Geodesy and Geophysics i s Međunarodnim komitetom za mjere i utege (vidi odsječke A.7.3, 4), normalne (standardne) uvjete pri kojima živini termometri visinom svog stupca žive *precizno* mjere tlak (o takvom načinu mjerenja tlaka vidi odlomak 4.1.3). To su

$$g_0 = 9{,}806\,65 \text{ m/s}^2, \quad \vartheta = 0\,^\circ\text{C}.$$

Uz te uvjete i pri tlaku 1,013 25 bar, gustoća žive iznosi (propisano je koliko živa mora biti rafinirana te drugi mjernotehnički uvjeti; vidi i odlomak D.3.6.6):

$$\rho(\text{Hg}) = 13\,595{,}1 \text{ kg/m}^3.$$

Pomoću tih podataka i jednadžbe $p = h\rho g_0$ (vidi odlomak 4.1.3) definirana je jedinica »milimetar stupca žive« (kratica: mm Hg) ovako: »Jedinica tlaka mm Hg definirana je kao razlika tlakova između dvije tačke udaljene vertikalno za 1 milimetar u tekućini gustoće 13 595,1 kg/m³, koja se nalazi na mjestu gdje je ubrzanje zemljine teže 9,806 65 m/s², a temperatura 0 °C.« Vrijednost te jedinice tlaka u N/m² izračunat ćemo tako da u jednadžbu $p = h\rho g_0$ stavimo vrijednosti $h = h_0 = 1$ mm, $\rho(\text{Hg}) = 13\,595{,}1$ kg/m³, $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s², pa onda opća jednadžba $p = h\rho g_0$ prelazi u definicijsku jednadžbu

$$\text{mm Hg} = h_0\,\rho(\text{Hg})\,g_0 = 1 \text{ mm} \cdot 13\,595{,}1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}806\,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Pošto izmnožimo brojeve i sredimo jedinice, dobivamo rezultat

$$\text{mm Hg} = 133{,}322\,387\,415 \text{ N/m}^2, \tag{4.3-4}$$

jer je mm = 10^{-3} m, a kgm/s² = N. Posve precizno ova se jedinica u meteorologiji naziva na engleskom »millimetre of mercury under standard conditions« ili »conventional barometric millimetre of mercury«.

Tablica **B-35**

Dvostrani odnosi među nekim jedinicama tlaka

Jedinica		Kratica	$\frac{N}{m^2}$	torr	$\frac{kp}{m^2}$	mm H_2O
newton na kvadratni metar	=	$\frac{N}{m^2}$	1	$7{,}50062 \cdot 10^{-3}$	0,1019716	0,1019754
torr	=	torr	133,3224	1	13,59510	13,59548
kilopond na kvadratni metar	=	$\frac{kp}{m^2}$	9,806650	$7{,}35559 \cdot 10^{-2}$	1	1,000028
milimetar stupca vode	=	mm H_2O	9,80638	$7{,}35538 \cdot 10^{-2}$	0,999972	1

Jedinica tlaka »torr«, prozvana tako u čast talijanskog fizičara *Torricelli*ja, definirana je kao 760. dio normalne atmosfere (atm), tj.

$$\text{torr} = \frac{1}{760} \text{normalne atmosfere (atm)}.$$

U odlomku 4.3.5 imamo da je atm = 101 325 N/m² (tačno), pa je dakle tačan odnos između jedinica torr i N/m²

$$\text{torr} = \frac{101\,325 \text{ N/m}^2}{760} = 133{,}322\,368\,421 \frac{N}{m^2}. \qquad (4.3\text{-}5)$$

Usporedimo li jednadžbe (4.3-4, 5), vidimo da je mm Hg > torr, a njihov omjer iznosi

$$\frac{\text{mm Hg}}{\text{torr}} = \frac{133{,}322\,387\,415}{133{,}322\,368\,421} = 1{,}000\,000\,142,$$

tj. jedinica tlaka mm Hg je $(1 + 1{,}4 \cdot 10^{-7})$ puta veća od jedinice torr. Relativna razlika iznosi oko $1:10^7$, tj. kao 1 prema 10 milijuna! Otprilike s tolikom nepouzdanošću poznata je i gustoća žive, pa je, dakle, za uobičajena laboratorijska mjerenja zadovoljavajuće izjednačenje (4.3-3). Za vrhunska metrološka mjerenja, međutim, nipošto ne smije stajati naznaka »tačno«, kao što vidimo u jednadžbi (4.3-1), ako se misli na torr = atm/760 (tačno).

Dvostrane odnose jedinice tlaka torr prema jedinicama N/m², kp/m² i mm H_2O (milimetar stupca vode) prikazuje tablica B-35. Odnose među ostalim jedinicama tlaka sadrže tablice B-31, 32, 33, 34 i tablice **26, 27, 28** i **29** u prilogu knjige.

4.3.9. Jedinice tlaka m H_2O i mm H_2O. Jedinica »metar stupca vode« (kratica: m H_2O) definirana je kao onaj tlak što ga stvara vertikalni stupac vode visok $h = 1$ metar pri maksimalnoj gustoći vode i uz normirano ubrzanje zemljine teže $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s². Budući da je pri temperaturi oko 4 °C gustoća destilirane i odzračene vode najveća, a iznosi $\rho(H_2O) = 999{,}972$ kg/m³ (vidi tablicu B-16), to vrijednost jedinice »m H_2O« izraženu jedinicom SI N/m² dobivamo tako da podatke o visini stupca, o gustoći vode i o ubrzanju zemljine teže uvrstimo u jednadžbu $p = h\rho g_0$ (vidi odsječak 4.1). Računanjem dobivamo

$$\text{m } H_2O = 1 \text{ m} \cdot 999{,}972 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}806\,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9806{,}38 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \qquad (4.3\text{-}6)$$

Tisuću puta manja jedinica tlaka je *milimetar stupca vode* (kratica: mm H_2O), koja se uglavnom upotrebljava za izražavanje malih podtlakova:

$$\text{mm } H_2O = \text{m } H_2O/1000 = 9{,}806\,38 \text{ N/m}^2.$$

Dvostrane odnose između ove jedinice tlaka i nekih drugih jedinica sadrži tablica B-35. Iz te se tablice vidi i to da je

$$\text{milimetar stupca vode} = \text{mm } H_2O = 0{,}999\,972 \text{ kp/m}^2,$$

što se može dobiti i iz jednadžbe (4.3-6), jer je $\text{kp} = \text{kg} \cdot g_0 = 9{,}806\,65$ kgm/s² (tačno). Navedena vrijednost samo je 1,000 028 puta manja od 1,0 kp/cm². Stoga se u industrijskim i rutinskim laboratorijskim mjerenjima može bez daljnjega računati da je

$$\text{mm } H_2O = \text{kp/m}^2 \quad \text{i} \quad \text{m } H_2O = \text{kp/cm}^2,$$

ali uz uvjet da je destilirana voda na temperaturi 4 °C i da je $g = 9{,}806\,65$ m/s². Ako tim uvjetima nije udovoljeno, mora se uzeti u obzir korekcija zbog drukčije vrijednosti gustoće vode (vidi tablicu B-16) i drukčije vrijednosti ubrzanja zemljine teže.

4.4. Angloameričke jedinice tlaka

4.4.1. Jedinice tlaka izvedene iz poundala. Angloameričke jedinice tlaka izvode se na isti način kao i metričke: jedinica tlaka dobiva se kao omjer jedinice sile i jedinice površine. Tako je, na primjer,

$$\frac{\text{poundal per}}{\text{square foot}} = \frac{\text{pdl}}{\text{ft}^2} = \frac{0{,}138\,255 \text{ N}}{0{,}092\,903 \text{ m}^2} = 1{,}488\,16 \text{ N/m}^2,$$

jer je poundal definiran sa $\text{pdl} = \text{lb} \cdot \text{ft/s}^2$, odakle slijedi dalje pdl = 0,138 255 N (vidi odlomke 4.2.6 i 11.7.1).

Budući da je foot = 12 inch (vidi odlomak 11.3.1), dakle $\text{ft}^2 = 144 \text{ in}^2$, jedinica poundal per square inch je 144 puta veća od jedinice pdl/ft²

$$\frac{\text{poundal per}}{\text{square inch}} = \frac{\text{pdl}}{\text{in}^2} = \frac{\text{pdl}}{\text{ft}^2/144} = 144 \frac{\text{pdl}}{\text{ft}^2} = 214{,}295 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Dvostrane odnose jedinice pdl/ft² prema mnogim drugim jedinicama tlaka sadrži tablica **26** u prilogu knjige.

4.4.2. Jedinice tlaka izvedene iz pound-force. Jedinicu sile pound-force (tj. »angloamerički kilopond«) izveli smo u odlomku 11.7.2 i tamo ustanovili da je pound-force (lbf) = 4,448 22 N, što znači da je lbf = 0,453 592 kp (vrijedi naime odnos lbf/kp = lb/kg; vidi slike B.17 g, j). Podijeli li se ta jedinica sile sa angloameričkim jedinicama površine, dobivaju se ove češće upotrebljavane jedinice tlaka

$$\text{pound-force per square foot} = \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2} = \frac{4{,}448\,22\ \text{N}}{0{,}092\,903\ \text{m}^2} = 47{,}8803\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$\text{pound-force per square inch} = \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2} = \frac{4{,}448\,22\ \text{N}}{6{,}4516\ \text{cm}^2} = 6894{,}76\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Dvostrane odnose ovih angloameričkih jedinica prema drugim jedinicama tlaka sadrži tablica **26** u prilogu knjige.

4.4.3. Jedinice tlaka psi, psia, psig itd. Mnogi stručnjaci, koji žive i rade na području metričkih jedinica, zapadnu u nepriliku pri proučavanju angloameričke literature kad naiđu npr. na podatak da tlak iznosi 1,72 psia. Da piše samo psi, pomislili bi da to znači »pound per square inch«, dakle ono što je u angloameričkom svijetu standardizirano službenom kraticom lbf/in² (vidi odlomak 4.4.2). Znamo, naime, da neki autori pišu mph umjesto mile/h za jedinicu »mile per hour« (vidi odlomak 2.4.4), pa nije, dakle, isključeno da je psi = lbf/in².

Doista je tako. U pogledu pak jedinica psia i sličnih, pročitajmo tumačenje u *Granaet*ovoj knjizi »Elementary Applied Thermodynamics«, koja je izašla u New Yorku godine 1965, dakle nedavno: »Mnoge mehaničke sprave za mjerenje tlaka (pressure gages), kao što je na primjer *Bourdon*ova cijev, mjere tlak iznad mjesnog (local) atmosferskog tlaka. Taj tlak zove se tlak sprave (gage pressure), a mjeri se jedinicom pound-force na jedinicu površine, tj. jedinicom psig ili psfg. Odnos tlaka sprave prema apsolutnom tlaku opisuje jednadžba apsolutni tlak = = atmosferski tlak + tlak sprave. Apsolutni tlak [koji je jedina jedinica od značenja (meaningful) upotrebljavana u termodinamici] označen je sa psia i psfa. Obično se uzima da je tlak atmosfere jednak 14,7 psia. No u metričkom sistemu 1 atm je definirana kao 1 kp/cm², a to je mnogo bliže 14,2 psia. Treba biti pažljiv ako se primjenjuju jedinice tlaka metričkog sistema kao što su atmosfere.« No comment! Dakle, bez komentara o gornjem tekstu, napišimo da vrijedi

$$\text{psi} = \text{pound-force per square inch} = \text{lbf/in}^2,$$

$$\text{psf} = \text{pound-force per square foot} = \text{lbf/ft}^2,$$

a u pogledu dodatka a ili g na kraju vrijedi slično onome što smo napisali u odlomku 4.3.6! Ispravna primjena izraza i jedinica objašnjena je u odlomku 4.1.2.

4.4.4. Jedinice tlaka izvedene iz ton-force. U odlomku 11.5.1 navedena su tri različita naziva za dvije jedinice mase: short ton (US) = 2000 lb i ton (UK) = = long ton (US) = 2240 lb. Pomoću tih jedinica mase izvode se (odlomak 11.7.2) jedinice sile ovako ($g_0 = 9{,}806\,65$ m/s²):

$$\text{UK ton-force} = \text{UK tonf} = \text{UK ton} \cdot g_0 = 2240\ \text{lb} \cdot g_0 = 9964{,}02\ \text{N},$$

$$\text{US ton-force} = \text{US tonf} = \text{US ton} \cdot g_0 = 2000\ \text{lb} \cdot g_0 = 8896{,}44\ \text{N}.$$

Ako se već primjenjuje, onda se primjenjuje ona angloamerička jedinica tlaka koja je izvedena iz *engleske* ton-force (UK), a ona je identična s američkom long ton (US). Iz $\mathrm{tonf} = 2240\ \mathrm{lb} \cdot g_0$ dakle slijedi:

$$\text{ton-force per square foot} = \frac{\mathrm{tonf}}{\mathrm{ft}^2} = 1{,}072\,52 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1{,}072\,52\ \mathrm{bar},$$

$$\text{ton-force per square inch} = \frac{\mathrm{tonf}}{\mathrm{in}^2} = 1{,}544\,43 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 154{,}443\ \mathrm{bar}.$$

Ovdje je $\mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{N/m^2}$ (vidi odlomak 4.3.4). Napominjemo da se umjesto kratice tonf u starijoj angloameričkoj literaturi može naći Ton (analogno Lb umjesto lbf; vidi odlomak 11.7.2).

Dvostrani odnosi među mnoštvom angloameričkih i metričkih jedinica tlaka i naprezanja svrstani su u tablici **26** u prilogu knjige. Otuda vidimo da je npr. $\mathrm{bar} = 14{,}5038\ \mathrm{lbf/in^2}$, $\mathrm{tonf/in^2} = 322\,560\ \mathrm{lbf/ft^2}$ itd.

4.4.5. Primjer upotrebe angloameričkih jedinica. Da bismo barem malo ilustrirali kako se računa angloameričkim jedinicama, izračunat ćemo s njima ovaj zadatak: Dušik se nalazi pod tlakom u spremniku koji propušta. Utvrđeno je da je iz spremnika u 10 minuta isteklo 12 $\mathrm{ft^3}$ dušika u okolinu koja se nalazi pod atmosferskim tlakom $14{,}7\ \mathrm{lbf/in^2}$. Izračunajmo prosječnu snagu koju je razvijao dušik prodirući u okolinu.

Pod volumenom $V = 12\ \mathrm{ft^3}$ moramo razumijevati volumen dušika pod tlakom okoline $p = 14{,}7\ \mathrm{lbf/in^2}$. Prilikom potiskivanja okolnog zraka dušik je obavio radnju $W = Vp$, pa je dakle prosječna snaga

$$P = \frac{W}{t} = \frac{12\,\mathrm{ft^3} \cdot 14{,}7\,\mathrm{lbf/in^2}}{10\,\mathrm{min}} = 2540 \frac{\mathrm{ft\ lbf}}{\mathrm{min}}.$$

Budući da je $\mathrm{min} = 60\ \mathrm{s}$, a $\text{horse power} = \mathrm{hp} = 550\ \mathrm{ft\ lbf/s}$ (vidi odsječak 5.6), dobivamo traženi rezultat

$$P = \frac{2540}{60 \cdot 550}\ \mathrm{hp} = 0{,}077\ \mathrm{hp}.$$

Predodžbu o toj snazi dobivamo ako rezultat preračunamo u vate (W). Budući da je $\mathrm{hp} = 745{,}7\ \mathrm{W}$ (vidi tablicu **37** u prilogu knjige), slijedi $P = 0{,}077 \cdot 745{,}7\ \mathrm{W} = 57{,}42\ \mathrm{W}$.

4.4.6. Jedinica tlaka british atmosphere (kratica: br atm). Uz navedene jedinice tlaka u Engleskoj neki upotrebljavaju »britansku atmosferu«, koja se razlikuje od međunarodne normalne (fizikalne, standardne) atmosfere (o njoj vidi odlomak 4.3.6). Jedinica tlaka british atmosphere (br atm) definirana je živinim stupcem visokim $h = 30$ inch. Prema tome je (usporedi s izvođenjima u odlomku 4.3.8):

$$\text{british atmosphere} = \text{br atm} = 30\ \text{in Hg}.$$

Računanjem preko $p = h\rho g$ dobivamo vrijednost ove jedinice u SI

$$\text{br atm} = 30 \cdot 0{,}0254\ \mathrm{m} \cdot 13\,595{,}1 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 9{,}806\,65 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 1{,}015\,917 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}.$$

Odnosi ove jedinice prema ostalima su ovi:

$$\text{br atm} = 762 \text{ torr} = 1{,}002\,632 \text{ atm},$$

gdje je atm = 1,013250 bar (tačno) = $1{,}013250 \cdot 10^5$ N/m².

4.4.7. Angloameričke stupčane jedinice tlaka. Po uzoru na metričke »stupčane« jedinice tlaka mm Hg, m H_2O itd. (vidi odlomke 4.3.8,9), upotrebljavaju se i u zemljama engleskoga govornog područja odgovarajuće jedinice koje se zovu »stopa vode«, »palac vode« i »palac žive«, odnosno na engleskom jeziku:

foot of water (kratica: ft H_2O),

inch of water (kratica: in H_2O),

inch of mercury (kratica: in Hg).

Vrijednost ovih jedinica tlaka u metričkim jedinicama izvest ćemo pomoću relacije $p = h\rho g_0$ koju smo podrobno obradili u odlomku 4.3.8. Budući da je riječ o istoj živi ili vodi (ρ) i o istim uvjetima okoline (g_0, ϑ), dovoljno je da se poslužimo *usporedbama*. Ako smo metričku stupčanu jedinicu tlaka definirali sa $[p]_m = [l]_m \rho g_0$, gdje je $[l]_m$ metrička jedinica duljine (npr. milimetar), isto tako možemo angloameričku stupčanu jedinicu tlaka $[p]_A$ definirati sa $[p]_A = [l]_A \rho g_0$; ovdje je $[l]_A$ angloamerička jedinica duljine. Podijelimo li međusobno ove dvije jednadžbe, dobivamo

$$[p]_A = [p]_m \frac{[l]_A}{[l]_m} \tag{4.4-1}$$

Uvrštavanjem pripadnih vrijednosti dobit ćemo računanjem odnose gore spomenutih angloameričkih stupčanih jedinica prema metričkima.

Tablica **B-36**

Dvostrani odnosi među angloameričkim stupčanim jedinicama tlaka

	in Hg	in H_2O	ft H_2O	N/m²
in Hg =	1	13,5951	1,13292	3386,39
in H_2O =	0,0735559	1	0,0833333	249,089
ft H_2O =	0,882671	12	1	2989,07
N/m² =	$2{,}95300 \cdot 10^{-4}$	$4{,}01463 \cdot 10^{-3}$	$3{,}34553 \cdot 10^{-4}$	1

Foot of water (ft H_2O) dobit ćemo pomoću jednadžbe (4.4-1) tako da u nju stavimo $[p]_m = \text{m } H_2O = 9{,}806\,38 \text{ N/m}^2$ (vidi odlomak 4.3.9), $[p]_A = \text{ft } H_2O =$ = foot of water, $[l]_A = \text{foot} = 0{,}3048$ m, $[l]_m = 1$ m. Računanjem slijedi tražena vrijednost

$$\text{ft } H_2O = 9806{,}38 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0{,}3048 = 2989{,}07 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 304{,}8 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}.$$

Inch of water (in H_2O) 12 puta je manja jedinica tlaka od ft H_2O, jer je foot = 12 inch. Prema tome je

$$\text{in } H_2O = \frac{1}{2} \text{ ft } H_2O = 249{,}089 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 25{,}4 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}.$$

Inch of mercury (in Hg) izračunat ćemo pomoću jednadžbe (4.4-1) analogno onom što smo učinili sa ft H_2O. Pri tom ćemo upotrijebiti odnose (vidi odlomak 4.3.8) $[p]_A = \text{in Hg}$, $[p]_m = \text{mm Hg} = 133{,}322\,387\,415 \text{ N/m}^2$, $[l]_A = \text{inch}$, $[l]_m =$ = 1 milimetar. Budući da je inch = 25,4 mm (tačno), slijedi tražena vrijednost

$$\text{in Hg} = 133{,}322\,387\,415 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 25{,}4 = 3386{,}39 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Korisno je zabilježiti i odnos in Hg = 345,316 kp/m².

Dvostrane odnose među razmotrenim i ostalim jedinicama tlaka sadrže tablice **26, 27, 28** i **29** u prilogu knjige.

5. Rad, energija, snaga i njihove jedinice

5.1. Veličine rad, energija i snaga

5.1.1. Rad i energija. Iako je fizikalna veličina »energija« pojam koji svakodnevno upotrebljavamo bezbroj puta, predodžbu o energiji zapravo dobivamo zaobilaznim putem, razmatranjem konkretnih primjera i upotrebom pojma »rad« (ili »radnja«). Uz pomoć slike B.20, koja prikazuje gibanje nekog tijela (zamišljenog da je koncentrirano u tački — hvatištu sile) duž putanje *12* pod djelovanjem sile F, elementarni mehanički rad $\mathrm{d}A$ definiramo kao skalarni umnožak vektora sile F i vektora pomaka $\mathrm{d}s$ tijela

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}s = F\cos\alpha\;\mathrm{d}s, \tag{5.1-1}$$

gdje je α kut koji zatvaraju vektor sile i vektor diferencijala duljine staze kojom se tijelo giba pod djelovanjem te sile. Da bi se tijelo premjestilo iz tačke *1* u *2* (sl. B.20), treba da se izvrši rad

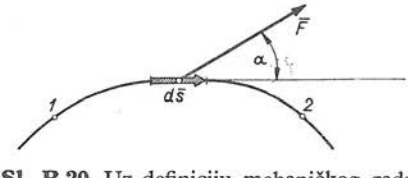
$$A_{12} = \int_1^2 F\,\mathrm{d}s = \int_1^2 F\cos\alpha\;\mathrm{d}s,$$

tj. treba zbrojiti sve elementarne radove iz jednadžbe (5.1-1).

U termodinamici definiramo elementarni rad jednadžbom

$$\mathrm{d}A = p\,\mathrm{d}V \quad \text{ili} \quad \mathrm{d}A = V\,\mathrm{d}p. \tag{5.1-2}$$

Lijeva se jednadžba odnosi na tzv. termodinamički rad prilikom promjene volumena, a desna na rad prilikom promjene tlaka. Ovaj drugi slučaj rada postoji npr. prilikom premještanja tekućina, plinova ili para iz područja tlaka p_1 u područje tlaka p_2. To je, na primjer, rad sisaljke za premještanje tekućine, kompresora za pomicanje plina, parne turbine za premještanje pare iz parnog kotla u kondenzator, plinske turbine za premještanje plina iz komore za sagorijevanje u regenerator itd. Ukupni rad na temelju obiju definicijskih jednadžbi (5.1-2) iznosi



Sl. B.20. Uz definiciju mehaničkog rada

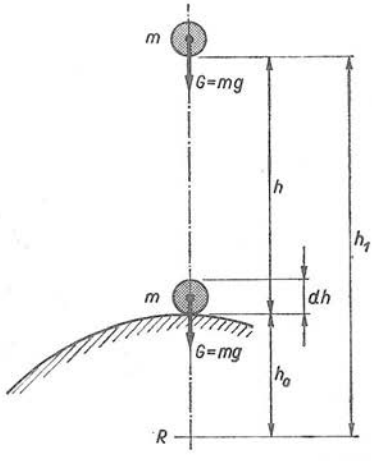
$$A_{12} = \int_1^2 p\,\mathrm{d}V \quad \text{ili} \quad A_{12} = \int_1^2 V\,\mathrm{d}p.$$

Granice lijevog integrala su dakako početni i konačni volumen V_1 i V_2, a granice desnoga početni i konačni tlak p_1 i p_2.

Izvršenjem rada A stječe se mogućnost, sposobnost da se obavi neki novi rad. Na primjer, za stiskanje elastične čelične opruge treba uložiti stanovit rad A, ali stisnuta opruga sada posjeduje sposobnost da prilikom svog rastezanja obavi neki rad, npr. komprimira plin u nekom cilindru. Taj akumulirani rad, tu sposobnost da se izvrši rad, nazivamo *energija*. No bolje od mnogih riječi, pojam energije objasnit će nam nekoliko primjera.

Da bi se tijelo mase m podiglo za $\mathrm{d}h$ (sl. B.21), treba, prema jednadžbi (5.1-1), obaviti elementarni rad

$$\mathrm{d}A = G\,\mathrm{d}h = m\,g\,\mathrm{d}h, \tag{5.1-3}$$



Sl. B.21. Preobrazba rada u potencijalnu energiju

gdje je $G = mg$ težina tijela (vidi odsječak A.9.2), a g ubrzanje zemljine teže. Izraz $\mathrm{d}A = G\,\mathrm{d}h$ potpuno je u skladu sa (5.1-1), jer se u slučaju slike B.21 vektori pomaka $\mathrm{d}h$ i sile F podudaraju, pa je kut α među njima jednak nuli. Da bi se tijelo iz slike B.21 podiglo s razine h_0 na razinu h_1, treba obaviti (uložiti) rad

$$A = \int_0^1 G\,\mathrm{d}h = m\int_0^1 g\,\mathrm{d}h = mg(h_1 - h_0). \tag{5.1-4}$$

Pri tom smo pretpostavili da je $g = \mathrm{const}$, što je u redu ako je riječ o neznatnim visinama iznad površine Zemlje.

Nakon podizanja tijela na razinu h_1 uloženi rad $A = mg(h_1 - h_0)$ nije iščezao, on nije izgubljen: možemo ga vratiti ako dopustimo da se tijelo pod djelovanjem zemljine teže spusti natrag na razinu h_0. Prema tome je rad $mg(h_1 - h_0)$ nagomilan, pohranjen u podignutom tijelu u obliku *potencijalne* (preciznije: geopotencijalne) energije W_p.

Kako vidimo iz slike B.21, potencijalnu energiju W_p mjerimo od proizvoljno odabrane referentne razine R, kojoj pripisujemo konstantnu vrijednost, obično nulu (kao u našem slučaju). Za primjenu pojma energije to je posve u redu, jer je pri tom uglavnom riječ o *razlikama energije* između pojedinih razina. Stoga je važno samo to da u toku proučavanja stanovitog problema imamo stalno *istu* referentnu razinu h_0 kojoj obično pripisujemo vrijednost $h_0 = 0$.

Da bismo tijelu mase m povećali brzinu za $\mathrm{d}v$, moramo uložiti *rad* $\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}s = m\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = m\,v\,\mathrm{d}v$. Ako je na početku tijelo mirovalo, ono će posjedovati *kinetičku energiju*

$$W_\mathrm{k} = \int_0^v mv\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{5.1-5}$$

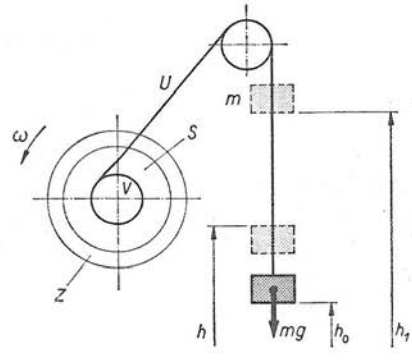
kad se bude gibalo brzinom v. Taj rad možemo vratiti ako tijelo zakočimo na početnu brzinu, tj. na $v = 0$. I ovdje mora postojati referencija, tj. mjerenje brzine gibanja tijela u odnosu na zamišljeni nepokretni sistem. U većini slučajeva smatramo površinu Zemlje nepokretnom.

Potencijalna i kinetička energija mogu se nagomilati i u molekulama kao *unutarnja energija*. Ta vrsta nagomilane energije izvanredno je važna u toplinskoj tehnici i zato su joj posvećeni odlomci D.2.3.1,2 u glavi D ove knjige.

Prijelazne energije pojavljuju se prilikom mijenjanja oblika nagomilane energije, ili kad nagomilana energija prelazi iz jednog tijela u drugo. Za tu vrstu energija karakteristična je njihova kratkotrajnost. Jedna vrsta prijelazne energije jest *mehanički rad*, koji se ne može nagomilati ili pohraniti, već se mora trošiti onako kako se pojavljuje. Primjer vidimo na slici B.22. U zamašnjaku Z mase m, koji se vrti s rotancijom (kutnom brzinom) ω (vidi odlomak 2.2.3), nagomilana je kinetička energija vrtnje (rotacije)

$$W = \tfrac{1}{2} J \omega^2 = 2\pi^2 n^2 J, \qquad (5.1\text{-}6)$$

gdje je J moment tromosti (inercije) zamašnjaka. Vitlo V, na koje je učvršćeno uže U, može se pomoću spojke S priključiti na zamašnjak Z. Ako to učinimo, vitlo će se vrtjeti zajedno sa zamašnjakom i preko užeta dizati tijelo mase m od razine $h_0 = 0$ do h_1. Energija vrtnje zamašnjaka neprestano se pretvara u potencijalnu energiju tijela mase m. Pri tom se zamašnjak usporava, sve dok se pri položaju tijela u h_1 ne zaustavi. U toku preobrazbe energije iz kinetičke u potencijalnu obavlja se rad mgh, koji raste od $mgh_0 = 0$ do $mgh_1 = J\omega^2/2$. Cjelokupna potencijalna energija mgh_1 jednaka je smanjenju kinetičke energije zamašnjaka. I *električka energija* je prijelazna energija. Tumačenje čitatelj može izvesti sam ako umjesto zamašnjaka na slici B.22 zamisli elektromotor.



Sl. B.22. Uz objašnjenje pojma »prijelazna energija«

Uz navedene vrste energija postoje još *kemijska* energija, koja dolazi do izražaja prilikom kemijskih reakcija, zatim *nuklearna* (atomska) energija itd.

Iz gornjih razmatranja proizlazi da su rad i energija istovrsne veličine, pa se stoga mogu mjeriti istom jedinicom. U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) tako se i postupa. Jedinica *svih* vrsta energija u SI je joule (kratica: J; izgovara se »džul«), koja se tako zove po engleskom učenjaku *J. P. Joule*u. O toj jedinici energije i rada (u daljnjem tekstu govorit ćemo samo »jedinica energije«), kao i o nizu drugih, raspravlja se u odsječcima 5.2,3,4.

Primjer 1. Kolika će biti potencijalna energija tijela mase $m = 5$ kg sa slike B.21, ako je ono podignuto na visinu $h = h_1 - h_0 = 10$ m? Budući da je ubrzanje zemljine teže približno $g = 9{,}81$ m/s^2, potencijalna energija na visini h_1 (uz odabiranje $h_0 = 0$) iznosit će, prema jednadžbi (5.1-4), $W_p = mhg = 5$ kg · 10 m · 9,81 m/s^2 = 490,5 J (o jedinici J = joule vidi odlomak 5.2.1).

Primjer 2. Koliki rad obavi zamašnjak polumjera $r = 1$ m ako ga zakočimo od frekvencije vrtnje (brzine vrtnje; vidi odsječke 2.2,5) $n_1 = 360$ okr/min na $n_2 = 120$ okr/min. Željezni zamašnjak izrađen je u obliku punog diska debljine $b = 30$ cm! Obavljeni rad izračunat ćemo uz pomoć jednadžbe (5.1-6)

$$\Delta A = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2} J(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 2\pi^2 J(n_1^2 - n_2^2),$$

gdje je moment tromosti $J = 0{,}5\, mr^2$. Budući da je gustoća željeza oko $\rho = 7800$ kg/m^3, masa zamašnjaka iznosi $m = \pi r^2 b \rho = \pi \cdot 1$ m^2 · 0,3 m · 7800 kg/m^3 = 7350 kg. Prema tome je moment tromosti

$J = 0{,}5\ mr^2 = 0{,}5 \cdot 7350\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \mathrm{m}^2 = 3675\ \mathrm{kgm}^2$. Ako podatke o frekvencijama vrtnje preračunamo na jedinicu 1/s, dobivamo $n_1 = 360\ \mathrm{okr/min} = 360/(60\ \mathrm{s}) = 6/\mathrm{s}$ (vidi odsječak 2.5) i $n_2 = 2/\mathrm{s}$. Uvrštenjem svih tih podataka u izraz za ΔA slijedi konačan rezultat

$$\Delta A = 2\pi^2\ 3675\ \mathrm{kgm}^2\ (36-4)/\mathrm{s}^2 = 2{,}32 \cdot 10^6\ \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2 = 2{,}32\ \mathrm{MJ},$$

jer je $\mathrm{kgm/s}^2 = \mathrm{N} = \text{newton}$, $\mathrm{Nm} = \mathrm{J} = \text{joule}$, a $\mathrm{M} = \text{mega} = 10^6$.

Primjer 3. U nekoj tvornici dogodila se nezgoda: veliki puni čelični valjak promjera 40 cm, koji se okretao brzinom vrtnje $n = 3000\ \mathrm{okr/min} = 50/\mathrm{s}$, ispao je iz ležajeva i pao na strmu ravnu cestu koja prolazi kraj tvornice. Koliku bi visinsku razliku valjak približno postigao da se prestao vrtjeti time što se kotrljao, uzdižući se zajedno sa cestom (zanemarimo gubitke zbog trenja)? Prilikom ispada iz ležajeva valjak je posjedovao energiju vrtnje prema jednadžbi (5.1-6). U toku valjanja cestom ta se energija postepeno preobražavala u potencijalnu. Kad se zaustavio, valjak je imao potencijalnu energiju prema jednadžbi (5.1-4), gdje je $h_1 - h_0 = h$ visinska razlika mjesta tvornice i mjesta gdje se valjak zaustavio. Iz jednakosti tih dviju jednadžbi proizlazi

$$h = \frac{1}{g}(\pi r n)^2 = \frac{(\pi \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot 50/\mathrm{s})^2}{9{,}81\ \mathrm{m/s}^2} = 101\ \mathrm{m}.$$

Da je strmina ceste iznosila 5%, valjak bi prošao cestom oko 2 kilometra.

5.1.2. Gustoća energije (preciznije: prostorna ili volumna gustoća energije) jest veličina kojom se može karakterizirati raspored (koncentracija) energije u nekom prostoru. Taj prostor može biti npr. volumen što ga zauzima plin u nekom spremniku, volumen neke krute tvari itd. Gustoća energije w definirana je diferencijalnim kvocijentom

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}, \tag{5.1-7}$$

a kod primjene Međunarodnog sistema jedinica (SI) mjeri se jedinicom joule po kubnom metru = $\mathrm{J/m}^3$.

Izobarni termodinamički procesi imaju, na primjer, konstantnu gustoću energije plina. To možemo ustanoviti tako da u definicijsku jednadžbu (5.1-7) uvrstimo lijevu jednadžbu (5.1-2)

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{p\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = p,$$

tj. gustoća energije jednaka je tlaku plina. Gustoću potencijalne energije homogena tijela koje posjeduje potencijalnu energiju W dobivamo tako da izraz (5.1-4) podijelimo s volumenom tijela $V = m/\rho$. Slijedi

$$w = \frac{W}{V} = \frac{mg(h_1 - h_0)}{m/\rho} = g\rho h,$$

gdje je $h = h_1 - h_0$ stvarna iskoristiva visina (vidi sliku B.21). Posve analogno dobivamo prostornu gustoću kinetičke energije homogena tijela koje se giba brzinom v. Podijelimo li, naime, jednadžbu (5.1-5) s volumenom V tijela gustoće ρ, dobivamo

$$w = \frac{W_\mathrm{k}}{V} = \tfrac{1}{2}\frac{mv^2}{m/\rho} = \tfrac{1}{2}\rho v^2, \tag{5.1-8}$$

tj. gustoća energije proporcionalna je gustoći tijela i kvadratu brzine njegova gibanja.

Primjer. Izračunajmo kolika je gustoća energije vrtnje valjka iz primjera 3 u odlomku 5.1.1 neposredno nakon ispadanja iz ležajeva, a kolika pošto se valjak zaustavio na visini 101 m! Gustoću energije w dobit ćemo tako da podijelimo jednadžbu (5.1-6) s volumenom valjka $V = m/\rho$. Budući da je $J = 0{,}5mr^2$, a $\rho = 7800\ \mathrm{kg/m^3}$, računanjem dobivamo

$$w = \rho(\pi r n)^2 = 7800\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\,(\pi \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 50/\mathrm{s})^2 = 7{,}7\ \mathrm{MJ/m^3}.$$

Tu gustoću energije valjak je imao čitavo vrijeme kotrljanja, jer smo pretpostavili da ne nastaju gubici zbog trenja. Prema tome ima je i pošto se zaustavio, jer je $w = \rho(\pi r n)^2 = g\rho h$.

5.1.3. Snaga. U tehničkim i prirodoslovnim znanostima ova je veličina izvanredno korisna. Snaga je definirana diferencijalnim kvocijentom rada i vremena

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \quad \text{ili} \quad P = \frac{A}{t}, \tag{5.1-9}$$

tj. snaga P pokazuje kako se brzo ulaže ili dobiva rad (drugi izraz vrijedi ako se pojava zbiva jednoliko). Vezu veličine »snaga« s drugim veličinama možemo uspostaviti pomoću jednadžbi iz odlomka 5.1.1. Tako se, na primjer, snaga P koja se razvija prilikom premještanja tijela pod djelovanjem sile F (vidi sliku B.20) dobiva tako da se izraz (5.1-1) uvrsti u (5.1-9).

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{d}t}\,F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = Fv,$$

gdje je $v = \cos\alpha\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ brzina u smjeru djelovanja sile F.

Za slučaj slobodnog pada snaga se može izračunati uz pomoć jednadžbe (5.1-3)

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = mg^2t,$$

jer je u tom slučaju $\mathrm{d}h = v\,\mathrm{d}t$, a $v = gt$, gdje je g ubrzanje zemljine teže. Na sličan način za snagu pri vrtnji dobivamo izraz $P = M\omega$, gdje je M zakretni moment, a ω rotancija (kutna brzina; vidi odlomak 2.2.3).

Korisno je znati vezu između snage P, gustoće energije w (vidi odlomak 5.1.2), gustoće ρ tekućine ili plina te protoka q i m'. U odlomku 3.1.5 definirali smo »maseni protok« sa $m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ i uspostavili odnos $m' = \rho q$, gdje je $q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ »volumni protok«. Ako kroz neku cijev struji konstantnom brzinom v tekućina ili plin *stalnog* protoka $m' = \mathrm{const}$, diferencijal energije gibanja tog medija je $\mathrm{d}W = \mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}v^2m'\,\mathrm{d}t$, jer je $v = \mathrm{const}$ i $m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$. Stavimo li ovamo $m' = \rho q$ i poslužimo se jednadžbom (5.1-8), dobivamo izraz

$$P = \tfrac{1}{2}m'v^2 = wq, \tag{5.1-10}$$

gdje je w gustoća kinetičke energije medija koji struji. Tu snagu P mogla bi razmatrana struja razviti ako bi naišla na neku prepreku, npr. turbinsko kolo.

Jedinica snage u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je vat (watt; kratica: W), koja je u ovom odnosu s nekim drugim jedinicama SI: $\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{Nm/s} = \mathrm{kg\,m^2/s^3}$. O tim odnosima i o drugim jedinicama snage govori se u odsječcima 5.5,6.

Primjer. 1 Izračunajmo koliku bi snagu mogao dati mlaz zraka koji smo razmatrali u primjeru u odlomku 3.1.5! Tamo smo imali maseni protok $m' = 0{,}032$ kg/s i brzinu $v = 300$ m/s. Pomoću jednadžbe (5.1-10) dobivamo

$$P = \tfrac{1}{2} m' v^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}032 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 9 \cdot 10^4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1440 \text{ W} = 1{,}44 \text{ kW}.$$

Primjer 2. Kolika bi morala biti snaga elektromotora da se rad iz primjera 1 u odlomku 5.1.1 jednoliko obavi u toku 10 sekundi? U spomenutom primjeru imali smo $A = 490{,}5$ J, pa je dakle $P = A/t = 490{,}5$ J/10 s = 49,05 W.

Primjer 3. Koliku je prosječnu snagu davao zamašnjak iz primjera 2 u odlomku 5.1.1, ako mu je brzina vrtnje smanjena u toku pola minute? Budući da je zamašnjak u toku vremena $t = 30$ s izgubio energiju vrtnje $W = 2{,}32$ MJ, prosječna snaga je iznosila $P = W/t = 2{,}32$ MJ/30 s = = 77,3 kW.

5.2. Metričke jedinice energije

5.2.1. Jedinica energije joule (kratica: J). To je jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI); njome se mjere rad i sve vrste energije, tj. potencijalna, kinetička, toplinska, energija elektromagnetskog polja, nuklearna itd. Ovisnost ove jedinice o ostalim jedinicama Međunarodnog sistema možemo izvesti na osnovu bilo koje jednadžbe za rad ili energiju u odlomku 5.1.1. Učinimo to pomoću jednadžbe (5.1-1) koju ćemo napisati u obliku $A = Fs$, koja vrijedi za rad sile F na duljini s ravne putanje čiji se smjer podudara sa smjerom sile. Budući da je jedinica sile SI $[F]_M$ = newton = N (vidi odlomak 4.2.1), a jedinica duljine $[s]_M$ = metar = = m, to je koherentna jedinica rada i energije $[A]_M$ u SI (o načinu građenja koherentnog sistema jedinica vidi odsječak A.5.1) zbog $A = Fs$ definirana sa joule = = J = $[A]_M = [F]_M [s]_M$, odnosno

$$\text{jedinica energije SI} = \text{newton} \times \text{metar} = \text{joule} = \text{J}.$$

Budući da je N = kg m/s² (vidi odlomak 4.2.1), gornji izraz možemo napisati i u obliku

$$\text{joule (čitaj: džul)} = \text{J} = \text{N m} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}.$$

Na temelju relacije J = N m jedinica joule obično se definira ovako: »Joule je rad koji izvrši sila 1 newton kada se njeno hvatište pomakne za 1 metar u smjeru sile.«

Na jedinicu joule lako se primjenjuju decimalni i dekadski *višekratnici* iz tablice A-1. Na primjer, energija ionizacije atoma (vidi tablicu D-4 u odsječku D.1.7) može se izraziti najsitnijim decimalnim višekratnikom atto = a = 10^{-18}, dakle

$$\text{attojoule} = \text{aJ} = 10^{-18} \text{ J},$$

dok se u elektroprivredi upotrebljava najveći dekadski višekratnik T = tera = = 10^{12}, tj.

$$\text{terajoule} = \text{TJ} = 10^{12} \text{ J}.$$

Između aJ i TJ postoje, a svakodnevno se i primjenjuju, gotovo svi ostali višekratnici iz tablice A-1, naročito oni koji su veći od 1 (vidi i tablicu B-37).

Dvostrane odnose među mnogobrojnim metričkim, angloameričkim i atomskim jedinicama energije sadrže tablice B-37, 38, 39, 40 i 41, te tablice **32, 33, 34** i **35** u prilogu knjige.

5.2.2. Jedinica energije kilovatsat (kratica: kWh). Ova jedinica ne pripada ni jednom sistemu jedinica, ali se — naročito u elektroprivredi — jako mnogo primjenjuje. Možemo je definirati uz pomoć desne jednadžbe (5.1-9), ako zamislimo da je snaga $P = 1\,\text{kW}$ djelovala u toku vremena $t = 1$ sat $= 1$ h. U tom slučaju je obavljeni rad $A = 1\,\text{kW} \cdot 1\,\text{h} = 1\,\text{kWh}$, tj. $A =$ kilovatsat $=$ kWh. Budući da je vat $=$ $=$ watt $=$ W $=$ J/s, a kW $= 1000$ W i h $= 3600$ s, to je kilovatsat $=$ kWh $= 1000\,\text{W} \cdot 3600\,\text{s} = 3\,600\,000$ Ws, odnosno

$$\text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J} = 3600\ \text{kJ} = 3{,}6\ \text{MJ},$$

jer je joule $=$ J $=$ Ws (vidi odlomak 5.5.1).

Jedinicu kWh možemo smatrati višekratnikom jedinice vatsat $=$ Wh $= 3600$ J, tj. kilovatsat $=$ kilo $\cdot$ Wh $= 1000$ Wh. Analogno se u praksi primjenjuju i drugi dekadski višekratnici veći od 1:

$$\text{megavatsat} = \text{MWh} = 3{,}6 \cdot 10^9\ \text{J} = 3{,}6\ \text{gigajoule} = 3{,}6\ \text{GJ},$$

$$\text{gigavatsat} = \text{GWh} = 3{,}6 \cdot 10^{12}\ \text{J} = 3{,}6\ \text{terajoule} = 3{,}6\ \text{TJ}.$$

Dvostrane odnose među mnogobrojnim jedinicama energije, uključivši angloameričke i atomske, sadrže tablice B-38, 39, 40, 41 te tablice **32, 33, 34** i **35** u prilogu knjige.

Napominjemo da javnu upotrebu jedinice energije Wh i njenih izvedenica (uz pomoć višekratnika iz tablice A-1) dopušta jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961.

Primjer. U elektroprivrednom izvještaju smo pročitali da je u Jugoslaviji u januaru 1966. proizvedeno 1245 GWh električke energije. Preračunajmo taj rezultat na vrijednost s jedinicom joule, opremljen odgovarajućim višekratnikom! Uz pomoć tablice B-37 dobivamo

$$1245\,\text{GWh} = 1245 \cdot 3{,}6\ \text{TJ (terajoule)} = 4482\ \text{TJ} = 4482 \cdot 10^{12}\ \text{J}.$$

5.2.3. Jedinica energije kilopondmetar (kratica: kpm). Vezu ove jedinice s jedinicom energije joule $=$ J vrlo je lako utvrditi. Iz odlomka 4.2.4 znamo da je kp $=$ kilopond $= 9{,}80665$ N (tačno), pa je očito

$$\text{kilopondmetar} = \text{kpm} = 9{,}80665\ \text{Nm} = 9{,}80665\ \text{J},$$

jer je J $=$ Nm (vidi odlomak 5.2.1). Upotrebljava se i tisuću puta (mega $=$ M $=$ $=$ 1000 kilo) veća jedinica i stotinu tisuća puta manja:

$$\text{megapondmetar} = \text{Mpm} = 1000\ \text{kpm},$$

$$\text{pondcentimetar} = \text{pcm} = 10^{-3}\ \text{kp} \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 10^{-5}\ \text{kpm}.$$

Odnose ovih jedinica prema nekim drugim jedinicama energije sadrži tablica B-38 te tablice **32** i **33** u prilogu knjige.

Jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. dopušta javnu primjenu jedinice kilopondmetar, ali ne i upotrebu Mpm i pcm. Zakon ne dopušta ni javnu upotrebu jedinice »konjska snaga sat« $=$ KSh, koja je definirana ovako

$$\text{KSh} = 75\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}}\,\text{h} = 75 \cdot 3\,600\ \text{kpm} = 270\,000\ \text{kpm},$$

jer je »konjska snaga« $=$ KS $= 75$ kpm/s (vidi odsječak 5.5).

Tablica **B-37**

Dvostrani odnosi među jedinicama energije

Jedinica		Kratica	J	kJ	MJ	GJ
joule	=	J	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
kilojoule	=	kJ	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}
megajoule	=	MJ	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}
gigajoule	=	GJ	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1
terajoule	=	TJ	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}
vatsat	=	Wh	$3{,}6 \cdot 10^{3}$	3,6	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	$3{,}6 \cdot 10^{-6}$
kilovatsat	=	kWh	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	$3{,}6 \cdot 10^{3}$	3,6	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
megavatsat	=	MWh	$3{,}6 \cdot 10^{9}$	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	$3{,}6 \cdot 10^{3}$	3,6
gigavatsat	=	GWh	$3{,}6 \cdot 10^{12}$	$3{,}6 \cdot 10^{9}$	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	$3{,}6 \cdot 10^{3}$

5.2.4. Jedinica energije erg. To je jedinica energije u tzv. fizikalnom ili CGS sistemu jedinica (vidi odsječak 8.2), a definirana je ovako: »Erg je rad koji izvrši sila 1 dyn kad se njeno hvatište pomakne za 1 centimetar u smjeru sile.« Budući da je dyn $= 10^{-5}$ newton (vidi odlomak 4.2.3), a cm $= 10^{-2}$ m, to je

$$\text{erg} = \text{dyn} \cdot \text{cm} = 10^{-5}\ \text{N} \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 10^{-7}\ \text{J},$$

jer je N m = J. Napominjemo da prema jugoslavenskom Zakonu o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. nije dopuštena javna upotreba jedinice erg. Za one koji se moraju služiti literaturom u kojoj se nalazi erg, prikazali smo vezu te jedinice s ostalima u tablici B-38 te u tablici **35** u prilogu knjige.

5.2.5. Jedinice energije kalorija i kilokalorija (kratice: cal, kcal). Ove su jedinice *definirane odnosom* prema jedinici joule:

$$\text{kalorija} = \text{cal} = 4{,}1868\ \text{J (tačno)},$$

$$\text{kilokalorija} = \text{kcal} = 4186{,}8\ \text{J (tačno)}.$$

izvedenima iz jedinica joule i vatsat

TJ	Wh	kWh	MWh	GWh
10^{-12}	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-7}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-10}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-13}$
10^{-9}	$2{,}77778 \cdot 10^{-1}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-7}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-10}$
10^{-6}	$2{,}77778 \cdot 10^{2}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-1}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-7}$
10^{-3}	$2{,}77778 \cdot 10^{5}$	$2{,}77778 \cdot 10^{2}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-1}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$
1	$2{,}77778 \cdot 10^{8}$	$2{,}77778 \cdot 10^{5}$	$2{,}77778 \cdot 10^{2}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-1}$
$3{,}6 \cdot 10^{-9}$	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
$3{,}6 \cdot 10^{-6}$	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}
$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}
3,6	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1

Budući da su se ove dvije jedinice najviše upotrebljavale u nauci o toplini (a i danas dosta sporo ustupaju svoje mjesto jedinici SI joule), objasnili smo historijat gornjeg odnosa cal/J = 4,1868 (točno) u odsjećku D.5.2 glave D.

Dvostrane odnose ovako definirane kalorije prema drugim jedinicama energije sadrži tablica B-39 i tablice **32, 33** i **35** u prilogu knjige.

5.2.6. Jedinica energije litar-atmosfera (kratica: latm). Definicija ove jedinice rada i energije glasi: »Litar-atmosfera je rad koji tekućina pod tlakom 1 normalna (standardna) atmosfera (atm) obavi pri takvom pomicanju stapa da on prođe volumen 1 litar.« Prema tome je ova jedinica energije definirana uz pomoć lijeve jednadžbe (5.1-2).

Prije nego što izračunamo odnos jedinice latm prema jedinici joule, moramo naglasiti da je pri tom riječ o starom litru (metrološki litar, l_m) koji je do godine

Tablica **B-38**

Dvostrani odnosi među različitim

Jedinica		Kratica	J	kJ	MJ
joule	=	J	1	10^{-3}	10^{-6}
kilojoule	=	kJ	10^{3}	1	10^{-3}
megajoule	=	MJ	10^{6}	10^{3}	1
kilovatsat	=	kWh	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	$3{,}6 \cdot 10^{3}$	3,6
kilopondmetar	=	kpm	9,80665	$9{,}80665 \cdot 10^{-3}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-6}$
pondcentimetar	=	pcm	$9{,}80665 \cdot 10^{-5}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-8}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-11}$
konjska snaga sat	=	KSh	$2{,}647796 \cdot 10^{6}$	$2{,}647796 \cdot 10^{3}$	2,647796
erg	=	erg	10^{-7}	10^{-10}	10^{-13}

1964. bio definiran relacijom $l_m = 1{,}000028 \cdot 10^{-3}\ m^3$ (vidi odlomak 1.7.3). Budući da je atm = normalna atmosfera = $1{,}01325 \cdot 10^{5}\ N/m^2$ (vidi odlomak 4.3.5), to je

$$\text{litar-atmosfera} = l_m \cdot \text{atm} = 1{,}000028 \cdot 10^{-3}\ m^3 \cdot 1{,}01325 \cdot 10^{5}\ N/m^2.$$

Računanjem tog umnoška dobivamo rezultat

$$\text{latm} = 101{,}327837\ \text{J}.$$

Budući da od godine 1964. vrijedi odnos litar = dm^3 (tačno), Generalna konferencija za mjere i utege ne preporučuje da se ta jedinica upotrebljava za izražavanje rezultata vrlo preciznih mjerenja.

Dvostrane odnose jedinice latm = 101,3278 J prema nekim drugim jedinicama energije sadrži tablica B-39 i tablica **35** u prilogu knjige.

Upotreba jedinice energije pod nazivom »litar-atmosfera« ne preporučuje se i zato što se paralelno s latm upotrebljavala i jedinica »tehnička litar-atmosfera« u kojoj je atmosfera = at = kp/cm^2 (vidi odlomak 4.3.6), dakle

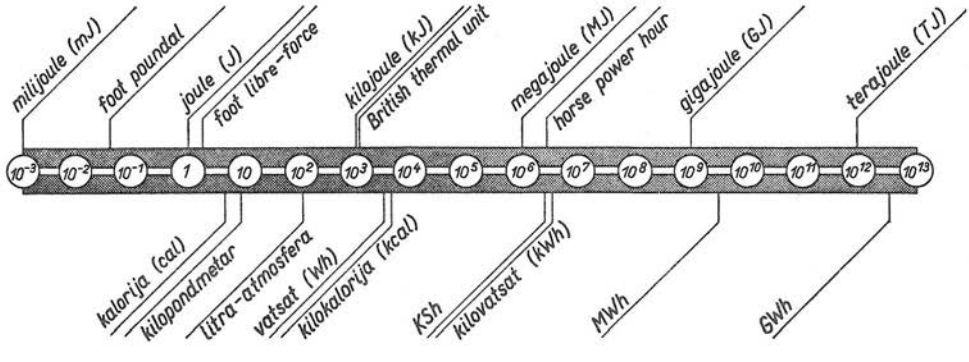
$$\text{lat} = l_m \cdot \text{at} = 10{,}00028\ \text{kpm} = 98{,}0692\ \text{J} = 0{,}967841\ \text{latm},$$

tj. lat je toliko puta manja jedinica od latm koliko je puta at manja od atm.

metričkim jedinicama energije

kWh	kpm	pcm	KSh	erg
$2{,}7778 \cdot 10^{-7}$	0,1019716	$1{,}019716 \cdot 10^{4}$	$3{,}776727 \cdot 10^{-7}$	10^{7}
$2{,}7778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}019716 \cdot 10^{2}$	$1{,}019716 \cdot 10^{7}$	$3{,}776727 \cdot 10^{-4}$	10^{10}
0,27778	$1{,}019716 \cdot 10^{5}$	$1{,}019716 \cdot 10^{10}$	0,3776727	10^{13}
1	$3{,}670978 \cdot 10^{5}$	$3{,}670978 \cdot 10^{10}$	1,359622	$3{,}6 \cdot 10^{13}$
$2{,}724069 \cdot 10^{-6}$	1	10^{5}	$3{,}703704 \cdot 10^{-6}$	$9{,}80665 \cdot 10^{7}$
$2{,}724069 \cdot 10^{-11}$	10^{-5}	1	$3{,}703704 \cdot 10^{-11}$	$9{,}80665 \cdot 10^{2}$
0,735499	$2{,}7 \cdot 10^{5}$	$2{,}7 \cdot 10^{10}$	1	$2{,}647796 \cdot 10^{13}$
$2{,}7778 \cdot 10^{-14}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-8}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-3}$	$3{,}776727 \cdot 10^{-14}$	1

Jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. ne dopušta javnu primjenu ni latm ni lat.



Sl. B.23. Grubi grafički prikaz međusobnih odnosa različitih jedinica energije u odnosu prema J = joule

Tablica **B-39**

Dvostrani odnosi među različitim

Jedinica		Kratica	J	kJ
joule	=	J	1	10^{-3}
kilojoule	=	kJ	10^{3}	1
megajoule	=	MJ	10^{6}	10^{3}
kalorija	=	cal	4,1868	$4{,}1868 \cdot 10^{-3}$
kilokalorija	=	kcal	$4{,}1868 \cdot 10^{3}$	4,1868
kilovatsat	=	kWh	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	$3{,}6 \cdot 10^{3}$
litar-atmosfera*	=	latm	$1{,}013278 \cdot 10^{2}$	0,1013278

* Ovdje je litar = 1,00002 dm^3. Od godine 1964. litar je definiran sa litar (l) = dm^3 (tačno). Zbog te promjene ne preporučuje se upotreba jedinice latm kao ni lat (tehnička litar-atmosfera).

5.3. Angloameričke jedinice energije

U angloameričkom jezičnom području znatan broj jedinica energije tvori se na isti način kao što nastaju metričke jedinice energije, tj. umnoškom jedinice duljine i jedinice sile. Budući da postoji mnoštvo angloameričkih jedinica tih dviju veličina (vidi odlomke 11.3.1 i 4.2.6), može se na takav način izvesti ogroman broj jedinica. Srećom su se u primjeni u mehanici do sada pretežno upotrebljavale samo ove četiri jedinice energije

foot pound-force = ft lbf (ft Lb),

foot poundal = ft pdl,

inch ounce-force = in ozf (oz in),

horse power hour = hp h (HPh).

Iza znaka jednakosti naveli smo službene kratice engleske standardizacije, a u zagradama kratice koje, uz standardizirane, možemo naći u angloameričkoj litera-

metričkim jedinicama energije

MJ	cal	kcal	kWh	latm
10^{-6}	0,238846	$2{,}38846 \cdot 10^{-4}$	$2{,}7778 \cdot 10^{-7}$	$9{,}86895 \cdot 10^{-3}$
10^{-3}	$2{,}38846 \cdot 10^{2}$	0,238846	$2{,}7778 \cdot 10^{-4}$	9,86895
1	$2{,}38846 \cdot 10^{5}$	$2{,}38846 \cdot 10^{2}$	0,27778	$9{,}86895 \cdot 10^{3}$
$4{,}1868 \cdot 10^{-6}$	1	10^{-3}	$1{,}163 \cdot 10^{-6}$	$4{,}13198 \cdot 10^{-2}$
$4{,}1868 \cdot 10^{-3}$	10^{3}	1	$1{,}163 \cdot 10^{-3}$	$4{,}13198 \cdot 10$
3,6	$8{,}59845 \cdot 10^{5}$	$8{,}59845 \cdot 10^{2}$	1	$3{,}552824 \cdot 10^{4}$
$1{,}013278 \cdot 10^{-4}$	$2{,}42015 \cdot 10$	$2{,}42015 \cdot 10^{-2}$	$2{,}814662 \cdot 10^{-5}$	1

turi. U nastavku ćemo kratkim postupkom izračunati odnose između nabrojenih četiriju jedinica energije i osnovne jedinice Međunarodnog sistema jedinica joule (J = Nm).

Iz odlomka 11.3.1 znamo da je foot = ft = yard/3 = 0,3048 m (tačno), a iz odlomka 4.2.6 da je pound-force (lbf) = 4,44822 newton (N). Umnožak ovih dviju jedinica daje

$$\text{ft lbf} = 0{,}3048\ \text{m} \cdot 4{,}44822\ \text{N} = 1{,}35582\ \text{joule (J)}.$$

Obrnuti odnos, te odnose prema nekim drugim metričkim i angloameričkim jedinicama energije, sadrži tablica B-40.

Vezu jedinice foot poundal s jedinicom joule dobit ćemo tako da metrički ekvivalent jedinice foot pomnožimo s vrijednošću jedinice sile poundal = pdl = = 0,138255 N (vidi odlomak 4.2.6):

$$\text{foot poundal} = \text{ft pdl} = 0{,}3048\ \text{m} \cdot 0{,}138255\ \text{N} = 0{,}0421401\ \text{J}.$$

Jedinica energije inch ounce-force je 192 puta manja od jedinice ft lbf, jer je foot = 12 inch (vidi odlomak 11.3.1), a pound = 16 ounce (odlomak 11.5.1). Ovdje navodimo jedinice mase, iako želimo utvrditi odnos jedinica sile lbf/ozf. To možemo, jer zbog definicije jedinica sile lbf = lb $\cdot g_0$ i ozf = oz $\cdot g_0$ (vidi odlomak

Tablica **B-40**

Dvostrani odnosi među nekim angloameričkim

Jedinica		Kratica	J	kJ
joule	=	J	1	10^{-3}
kilojoule	=	kJ	10^{3}	1
megajoule	=	MJ	10^{6}	10^{3}
foot poundal	=	ft pdl	$4{,}21401 \cdot 10^{-2}$	$4{,}21401 \cdot 10^{-5}$
foot pound-force	=	ft lbf	1,35582	$1{,}35582 \cdot 10^{-3}$
horse power hour	=	hp h	$2{,}68452 \cdot 10^{6}$	$2{,}68452 \cdot 10^{3}$
British thermal unit	=	Btu	$1{,}05506 \cdot 10^{3}$	1,05506

4.2.6) slijedi lbf/ozf = lb/oz; analogon tome na metričkom području je kp/p = kg/g. Prema tome vrijednost jedinice in ozf u jedinici J iznosi

$$\text{in ozf} = \frac{\text{ft lbf}}{192} = \frac{1{,}355\,82\ \text{J}}{192} = 7{,}061\,56 \cdot 10^{-3}\ \text{J},$$

tj. in ozf vrlo je sitna jedinica energije, nešto veća od 7 mJ. [Jedinica in ozf mnogo se češće rabi kao jedinica zakretnog momenta, tj. in ozf = 7,061 56 mNm (milinewtonmetar)].

Angloamerička jedinica horse power hour (hp h) definirana je kao umnožak jedinice snage horse power = hp = 550 ft lbf/s (vidi odsječak 5.6) i jednog sata, dakle

$$\text{hp h} = \text{hp} \cdot \text{h} = 550\,\frac{\text{ft lbf}}{\text{s}} \cdot 3600\ \text{s} = 2{,}684\,5236 \cdot 10^{6}\ \text{J}.$$

Obrnuti odnos, te odnose hp h prema nekim drugim metričkim i angloameričkim jedinicama energije, sadrži tablica B-40.

Uz nabrojene angloameričke jedinice, u nauci o toplini upotrebljava se British thermal unit (Btu) koja je danas *definirana relacijom*

$$\text{Btu} = \text{British thermal unit} = 1055{,}06\ \text{J}.$$

jedinicama energije i jedinicama J, kJ i MJ

MJ	ft pdl	ft lbf	hp h	Btu
10^{-6}	$2{,}37304 \cdot 10$	0,737562	$3{,}72506 \cdot 10^{-7}$	$9{,}47817 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$2{,}37304 \cdot 10^{4}$	$7{,}37562 \cdot 10^{2}$	$3{,}72506 \cdot 10^{-4}$	0,947817
1	$2{,}37304 \cdot 10^{7}$	$7{,}37562 \cdot 10^{5}$	0,372506	$9{,}47817 \cdot 10^{2}$
$4{,}21401 \cdot 10^{-8}$	1	$3{,}10810 \cdot 10^{-2}$	$1{,}56974 \cdot 10^{-8}$	$3{,}99409 \cdot 10^{-5}$
$1{,}35582 \cdot 10^{-6}$	$3{,}21740 \cdot 10$	1	$5{,}05051 \cdot 10^{-7}$	$1{,}28507 \cdot 10^{-3}$
2,68452	$6{,}37048 \cdot 10^{7}$	$1{,}98 \cdot 10^{6}$	1	$2{,}54443 \cdot 10^{3}$
$1{,}05506 \cdot 10^{-3}$	$2{,}50370 \cdot 10^{4}$	$7{,}78169 \cdot 10^{2}$	$3{,}93015 \cdot 10^{-4}$	1

Ovu relaciju indirektno je propisala Međunarodna konferencija o svojstvima pare (International Conference on Properties of Steam) na petom zasjedanju godine 1956. u Londonu. Konferencija je propisala odnos international table calorie = $= \mathrm{cal_{IT}} = 4{,}1868$ J (tačno), što smo već imali u odlomku 5.2.5. No budući da je

$$\frac{\text{Btu}}{\text{pound}} = 2326 \frac{\text{joule}}{\text{kilogram}} \text{(tačno)},$$

to iz umnoška pound·2326/kilogram = 2326·0,45359237 slijedi približna vrijednost 1055,06, a time i Btu = 1055,06 J, kako smo naveli na početku. Pojedinosti o mnogobrojnim angloameričkim jedinicama Btu čitalac može vidjeti u odsječku 5.4 glave D.

Dvostrane odnose među različitim metričkim i angloameričkim jedinicama energije sadrže tablice **32, 33, 34** i **35** u prilogu knjige.

5.4. Jedinice energije u atomskoj i nuklearnoj fizici

Pri rješavanju zadataka atomske i nuklearne fizike stručnjaci upotrebljavaju u nekim slučajevima svojevrsne »jedinice energije« (navodnike će opravdati izvodi u daljnjem tekstu). Te jedinice proizlaze iz energetskih razina (ili razlika među njima) atomskih čestica pri određenim stanjima. U biti te su jedinice skra-

ćeni opis jednadžbi koje povezuju energiju W (ili razliku dviju energetskih razina) i neke od ovih prirodnih konstanti: elementarni električki naboj $e = 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ C, *Planck*ovu konstantu $h = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}$ Js, *Boltzmann*ovu konstantu $k = 1{,}380\,54 \cdot 10^{-23}$ J/K, *Avogadro*vu konstantu $N_A = 6{,}022\,52 \cdot 10^{26}$ 1/kmol, brzinu svjetla u vakuumu $c = 2{,}997\,925 \cdot 10^{8}$ m/s, *Rydberg*ov specifični broj duljina vala za neizmjernu masu $\sigma_{RH} = (1{,}097\,373\,09 \pm 1{,}2 \cdot 10^{-7}) \cdot 10^{7}\ m^{-1}$ itd. Vrijednosti ovih konstanti nisu dane per definitionem, već se dobivaju preciznim mjerenjem i računanjem najpouzdanijih srednjih vrijednosti. U skladu s time mijenjaju se i vrijednosti tih »energetskih jedinica« onako kako se mijenja pouzdanost mjernih rezultata, a ona je svakim danom sve bolja.

Vrijednosti prirodnih konstanti sadrži tablica 2 u prilogu knjige. U tu tablicu svrstane su i neke druge konstante koje računanjem proizlaze iz prvih. Tablica 2 sadrži »najbolje vrijednosti« od godine 1963, a objavila ih je grupa američkih autora pod vodstvom *E. R. Cohen*a i *J. W. Du Mond*a u okviru Committee on Fundamental Constants of the National Academy of Sciences — National Research Council. Ovaj odbor objavljuje najnovije precizne vrijednosti osnovnih konstanti prirode svakih nekoliko godina, tj. unosi korekcije u tablice iz prethodnog razdoblja. S tim podacima se služi praktički čitav svijet, odnosno stručnjaci kojima su pri računanju potrebne što preciznije vrijednosti konstanti.

U tablici 2 navedene su i nepouzdanosti uvrštenih vrijednosti konstanti. Budući da su te »najbolje vrijednosti« rezultat niza mjerenja različitih autora pod različitim uvjetima, *Du Mond* i *Cohen* razvili su posebnu metodu računanja kojom od niza mjernih rezultata iste konstante dolaze do »najbolje« vrijednosti. Pri tom rezultatima pojedinih autora pripisuju različite »težine« i služe se teorijom najmanjih kvadrata (vidi odsječak A.3). Osim toga navedene »najbolje« vrijednosti temelje se na pretpostavci da je ispravna vrijednost ubrzanja zemljine teže ona koja se dobije ako se vrijednosti g prema Potsdamskom gravimetrijskom sistemu oduzme $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ m/s² (vidi odlomak A.9.4.4). Primijenjena je Međunarodna (ugljikova) skala atomskih masa s nuklidom ^{12}C kao bazom (vidi odlomak D.1.2.3).

5.4.1. Elektronvolt. Kratica ove jedinice je eV, gdje e označuje elementarni električni naboj, a V jedinicu SI električkog napona i potencijala volt. Jedinica energije »elektronvolt« se izvodi iz opisa ubrzavanja elektrona u električkom polju, a definiran je kao ona kinetička energija elektrona koju on dobije prošavši kroz električko polje razlike potencijala $U = 1$ V. Znamo da kinetička energija W koju čestica naboja e oduzima polju pri prolazu kroz razliku potencijala U iznosi

$$W = e\,U.$$

Stavimo li namjesto e njenu »najbolju vrijednost« iz tablice 2 u prilogu knjige, te $U = 1$ V, dobivamo

$$\text{eV} = \text{elektronvolt} = e \cdot 1\,\text{V} = 1{,}602\,10 \cdot (1 \pm 4{,}4 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-19}\ \text{J},$$

jer je C = coulomb = As, te AsV = J = joule. Upotrebljavaju se i izvedenice ove jedinice, tj. opremljene dekadskim i decimalnim višekratnicima iz tablice A-1:

$$\text{keV} = 10^{3}\ \text{eV}, \quad \text{MeV} = 10^{6}\ \text{eV}, \quad \text{GeV} = 10^{9}\ \text{eV}.$$

Gigaelektronvolte upotrebljavaju fizičari koji rade s akceleratorima elementarnih čestica, npr. s protonskim sinhrotronom ili akumulacijskim prstenom (engl. storage ring).

5.4.2. Sekunda^{-1} ili hertz. Ova »jedinica energije« potječe od skraćenog opisivanja energije svjetlosnog kvanta, naročito u spektroskopiji. Znamo da energija W svjetlosnog kvanta frekvencije f iznosi

$$W = hf,$$

gdje je h *Planck*ova konstanta. Ako bi frekvencija iznosila $f = 1$ Hz, energija kvanta bila bi $W = h \cdot 1\ \text{Hz} = h/\text{s}$. Toliku energiju nazvali su fizičari jedinicom »sekunda^{-1}« ($= 1/\text{s}$), odnosno »hertz« (USA). Naravno da 1/s *nije jednako* $h \cdot 1/\text{s}$, pa stoga stavljamo znak $\triangleq$, tj. »odgovara«:

$$\text{s}^{-1} = \text{Hz} \triangleq h \cdot \frac{1}{\text{s}} = 6{,}6256 \cdot (1 \pm 8 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-34}\ \text{J}.$$

Vrijednost *Planck*ove konstante h uzeta je iz tablice **2** u prilogu knjige.

U duhu veličinskih jednadžbi (načelno o njima vidi odsječak A.1.4) možemo »jedinicu energije« s^{-1} interpretirati i drukčije. Veličinska jednadžba $W = hf$ nimalo se ne mijenja ako njenu desnu stranu istodobno pomnožimo i podijelimo s jedinicom frekvencije hertz = Hz = 1/s (vidi odlomak 2.3.5). Ona pri tom dobiva oblik $W = h \cdot 1\ \text{Hz} \cdot f/\text{Hz}$. Budući da umnožak *Planck*ove konstante h i jedinice Hz iznosi $h \cdot \text{Hz} = h/\text{s} = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}$ J, to se gornja veličinska jednadžba može napisati u obliku

$$W = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot f/\text{Hz}.$$

Odavde je porijeklo »jedinice energije« hertz. Ako je $f = 1$ Hz, onda gornja jednadžba daje vrijednost energije

$$W = W_{f=1\,\text{Hz}} = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot 1\,\text{Hz}/\text{Hz} = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}\ \text{J},$$

pa se stoga kaže da Hz = 1/s *odgovara* ($\triangleq$) energiji $6{,}6256 \cdot 10^{-34}$ J. Na istom principu građene su i ostale »jedinice energije« u slijedećim odlomcima 5.4.3, 4, 5, 6. To znači da su takve jedinice svojevrsni stenogrami jednadžbi $W = hf$, $W = hc\sigma$, $W = hc/\lambda$, $W = kT$ itd.

Primjer. Kolika energija odgovara svjetlosnom kvantu frekvencije $f = 4{,}95 \cdot 10^{14}$ Hz. Budući da jednom hertzu odgovara energija $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J, navedenoj će frekvenciji odgovarati $6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 4{,}95 \cdot 10^{14}\ \text{J} = 3{,}28 \cdot 10^{-19}$ J.

5.4.3. Metar^{-1} i centimetar^{-1}. Jednadžbu $W = hf$ možemo napisati i u obliku $W = hc\sigma$, gdje je $\sigma = 1/\lambda$ specifični broj duljina vala σ, tj. fizikalna veličina koja je recipročna duljini vala λ nekog zračenja, a $c = f\lambda$ brzina svjetla u vakuumu. Ako bi specifični broj duljina vala iznosio $\sigma = 1\ \text{m}^{-1}$, energija kvanta bila bi $W = hc \cdot 1\ \text{m}^{-1}$. Toliku energiju nazvali su jedinicom »metar^{-1}«. To znači da jednom m^{-1} *odgovara* energija:

$$\text{m}^{-1} \triangleq hc \cdot 1\,\text{m}^{-1} = 1{,}986\,30 \cdot (1 \pm 8 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-25}\ \text{J}.$$

Stotinu puta *veća* jedinica je $\text{cm}^{-1} = 100\ \text{m}^{-1} \triangleq 1{,}9863 \cdot 10^{-23}$ J.

Primjer. Kolika energija odgovara svjetlosnom kvantu sa specifičnim brojem valnih duljina $\sigma = 1{,}65 \cdot 10^{6}\ \text{m}^{-1}$. Budući da jednom m^{-1} odgovara energija $1{,}9863 \cdot 10^{-25}$ J, navedenoj će vrijednosti σ odgovarati $1{,}9863 \cdot 10^{-25} \cdot 1{,}65 \cdot 10^{6}\ \text{J} = 3{,}28 \cdot 10^{-19}$ J. Istu vrijednost kao i u prethodnom primjeru dobili smo zbog toga jer smo podacima za f i σ opisali isti svjetlosni val: zračenje izotopa kriptona 86 koji je od godine 1960. osnovom definicije jedinice duljine metar (vidi odsječak A.8.7).

5.4.4. Metar i centimetar. Jednadžbu $W = hc\sigma$ možemo zbog $\sigma = 1/\lambda$ pisati i u obliku $W = hc/\lambda$. Ako bi duljina vala iznosila $\lambda = 1$ m, energija kvanta bila bi $W = hc/(1\text{ m})$. U Americi količinu energije koja odgovara valu $\lambda = 1$ m fizičari češće upotrebljavaju. Vrijedi

$$\text{metar} = \text{m} \mathrel{\widehat{=}} \frac{hc}{\text{m}} = 1{,}986\,30 \cdot (1 \pm 8 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-25}\,\text{J}.$$

Napominjemo da se pri računanju stvarnih primjera gornja vrijednost mora *podijeliti* s brojčanim iznosom duljine vala u metrima da bi se dobila pripadna energija.

Primjer. Kolika energija pripada kvantu svjetla valne duljine $\lambda = 6{,}0578 \cdot 10^{-5}$ m. Prema gornjoj uputi dobivamo računanjem $1{,}986 \cdot 10^{-25}\,\text{J} : 6{,}0578 \cdot 10^{-5} = 3{,}28 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$.

5.4.5. Kelvin (K). Budući da je energija slobodne molekule plina (vidi odlomak D.2.2.2) proporcionalna umnošku *Boltzmann*ove konstante k i termodinamičke temperature T, fizičari katkada upotrebljavaju »jedinicu energije kelvin (K)«. Ona slijedi iz relacije $W = kT$ za kinetičku energiju jedne molekule najvjerojatnije brzine pri temperaturi $T = 1$ K, dakle

$$\text{K} \mathrel{\widehat{=}} k \cdot \text{K} = 1{,}380\,54 \cdot (1 \pm 1{,}3 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{-23}\,\text{J}.$$

Primjena ovog »K« analogna je prije opisanim jedinicama Hz, m^{-1} i m.

5.4.6. Rydberg (Ry). Ova se jedinica upotrebljava u atomskoj fizici u vezi s radom ionizacije, a definirana je energijom atoma vodika H. Za njegovo osnovno stanje vrijedi $W = hf_{\text{R}}$, gdje je f_{R} *Rydberg*ova frekvencija koja je s *Rydberg*ovom konstantom R_∞ povezana ovako

$$f_{\text{R}} = cR_\infty, \text{ gdje je } R_\infty = \frac{me^4}{8\epsilon_0^3 ch^3}.$$

Prema tome je pripadna energija W, koja je nazvana »jedinicom energije« rydberg (Ry):

$$W = \text{Ry} = hf_{\text{R}} = hcR_\infty \approx 2{,}178 \cdot 10^{-18}\,\text{J}.$$

Vrijednost jedinice Ry u jouleima izračunali smo množenjem vrijednosti konstanti h, c i R_∞ koje su navedene u tablici 2 u prilogu knjige.

5.4.7. Masene jedinice energije. Prema *Einstein*ovoj teoriji relativnosti, tvari mase m pripada energija mirovanja $W = mc^2$, gdje je c brzina svjetla (vidi odsječak A.9.1). Na temelju te relacije izvedene su tri jedinice energije koje se upotrebljavaju u atomskoj fizici: elektronska, protonska i neutronska masena jedinica energije.

Elektronska masena jedinica energije nastaje ako u gornju jednadžbu uvrstimo vrijednosti mase *elektrona* m_{e} i vrijednost kvadrata brzine svjetla

$$W = m_{\text{e}}c^2 = 9{,}1091 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot (2{,}997\,925 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 8{,}187 \cdot 10^{-5}\,\text{J}.$$

Vrijednost ove jedinice, ali izražena u eV, navedena je u tablici B-41 u skladu s vrijednostima m_{e} i c iz tablice 2 u prilogu knjige.

Ako u jednadžbu $W = mc^2$ uvrstimo masu *protona* m_p ili masu *neutrona* m_n, dobivamo protonsku ili neutronsku masenu jedinicu energije:

$$m_p c^2 = 1{,}672\,52 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot (2{,}997\,925 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 1{,}503 \cdot 10^{-10}\,\text{J},$$

$$m_n c^2 = 1{,}674\,82 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot (2{,}997\,925 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 1{,}505 \cdot 10^{-10}\,\text{J}.$$

Vrijednosti izražene u eV sadrži tablica B-41.

5.4.8. Jedinstvena masena jedinica energije. I ova jedinica izvedena je na temelju relacije $W = mc^2$, ali je za masu uzeta vrijednost

$$m = \text{u} = \frac{1}{12} m_{\text{C12}},$$

tj. jedna dvanaestina mase jednog atoma nuklida ^{12}C. (Od godine 1961. ugljik ^{12}C osnova je tzv. Međunarodne skale relativnih atomskih masa; vidi odsječak D.1.2.) Budući da je $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}/\text{kmol}$ (vidi tablicu D-2 u odlomku D.1.5.3), to za ^{12}C s relativnom atomskom masom $A = 12$ (tačno, per definitionem) slijedi vrijednost jedinice mase »u«

$$\text{u} = \frac{1}{12} m_{\text{C12}} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{N_A} = \frac{1}{12}\,\frac{\text{kmol}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = \frac{\text{kg}}{6{,}023 \cdot 10^{26}}.$$

Uvrstimo li $m = \text{u}$ u izraz $W = mc^2$, dobivamo »jedinstvenu masenu jedinicu energije«

$$\text{u}c^2 = \frac{\text{kg}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} (2{,}997\,925 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 1{,}492 \cdot 10^{-10}\,\text{J}.$$

Napominjemo da se u anglosaskoj literaturi jedinica »u« najčešće naziva unified atomic mass unit, a u njemačkoj Masseneinheit (ME); tu se upotrebljava i 1000 puta manja jedinica TME (Tausendstel-Masseneinheit). Gore izračunatu masu $\text{u} = \text{kg}/6{,}022\,52 \cdot 10^{26} \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$ fizikalni kemičari su proglasili jedinicom mase i dali joj naziv »dalton«. Ona se odnosila na tzv. kemijsku skalu (vidi odlomak D.1.2.4), pa je stoga dalton bio definiran ovako: dalton je masa jednog atoma hipotetske tvari kojoj je relativna atomska masa u kemijskoj skali $A_K = 1$. Porijeklo ove jedinice, jednako kao i jedinice mase »u« u Međunarodnoj skali atomskih masa, praktične je prirode: mase atoma ili izotopa dobivamo tako da »u« (ili ME) pomnožimo s pripadnom relativnom atomskom ili izotopnom masom.

5.4.9. Usporedba jedinica energije atomske fizike. U prošlih osam odlomaka prikazali smo način građenja većine vansistemskih jedinica energije koje se upotrebljavaju u atomskoj i nuklearnoj fizici. Vidjeli smo da njihov odnos prema jedinici energije joule nije fiksan, već se u toku vremena mijenja u skladu s preciznošću poznavanja prirodnih konstanti. Stoga smo odnose tih jedinica prema jouleu uglavnom navodili samo približno, kako je potrebno prilikom rutinskih računanja.

Za vrlo precizna računanja navodimo tablicu B-41 koja većinu nabrojenih jedinica prikazuje u ovisnosti o jedinici elektronvolt (eV). Brojčani iznosi temelje se na *Cohen-Du Mond*ovim podacima od godine 1964. Preračunavanje na joule može se izvesti pomoću relacije

$$\text{eV} = 1{,}602\,10 \cdot (1 \pm 4{,}4 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-19}\,\text{J},$$

koja se također temelji na vrijednosti elementarnog naboja od godine 1964.

Tablica **B-41**

Odnosi među nekim jedinicama energije atomske fizike i elektronvolta

Jedinica	Kratica	Jednadžba	Vrijednost u eV
sekunda^{-1} (hertz)	s^{-1} (Hz)	$W = hf$	$4{,}135\,53 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-15}$
metar^{-1}	m^{-1}	$W = h\,c\,\sigma$	$1{,}239\,81 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-6}$
masa elektrona	m_e	$W = m_e c^2$	$5{,}110\,06 \cdot (1 \pm 1 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{5}$
masa protona	m_p	$W = m_p c^2$	$9{,}382\,56 \cdot (1 \pm 1{,}5 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{8}$
masa neutrona	m_n	$W = m_n c^2$	$9{,}395\,50 \cdot (1 \pm 1{,}5 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{8}$
jedinstvena masena jedinica	u	$W = u c^2$	$9{,}314\,78 \cdot (1 \pm 1{,}5 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{8}$

Pri izračunavanju rezultata preciznih eksperimenata ponekad su potrebne i neke recipročne relacije od onih navedenih u tablici B-41. Stoga navodimo neke od njih:

$$\text{za } f\text{: } \mathrm{eV} \triangleq 2{,}418\,04 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz},$$

$$\text{za } \sigma\text{: } \mathrm{eV} \triangleq 8{,}065\,73 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{5}\ \mathrm{m^{-1}},$$

$$\text{za } T\text{: } \mathrm{eV} \triangleq 1{,}160\,49 \cdot (1 \pm 1{,}4 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{4}\ \mathrm{K}.$$

Grube dvostrane odnose među različitim jedinicama energije atomske i nuklearne fizike sadrži tablica **34** u prilogu knjige.

5.5. Metričke jedinice snage

5.5.1. Jedinica snage vat (kratica: W) dobila je ime po glasovitom engleskom pronalazaču *James*u *Watt*u. To je jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI), a definirana je ovako

$$\text{jedinica snage SI} = \frac{\text{joule}}{\text{sekunda}} = \text{watt}.$$

Ona proizlazi iz jednadžbe koja povezuje rad A, vrijeme t i snagu P, tj. $P = A/t$. Ako u tu jednadžbu, u skladu s načelom građenja koherentnog sistema jedinica (vidi odsječak A.5.1), uvrstimo jedinice SI rada i energije $[A]_M = \text{joule} = \text{J}$, $[t]_M = \text{sekunda} = \text{s}$, dobivamo gore napisanu definiciju $[P]_M = \text{watt} = \text{W} = [A]_M/[t]_M = \text{J/s}$. Definicija jedinice snage SI glasi: »Vat je snaga pri kojoj se u toku 1 sekunde obavi rad 1 joule (čitaj: džul).«

Jedinica watt = W, koja se u nas obično izgovara »vat«, a na engleskom približno »uot«, može se izraziti i u ovisnosti o nekim drugim jedinicama SI što se upotrebljavaju u mehanici. Budući da je, naime, joule = J = newton × metar =

Tablica **B-42**

Dvostrani odnosi među nekim jedinicama snage izvedenima iz vata pomoću decimalnih i dekadskih višekratnika

Jedinica		Kratica	μW	mW	W	kW	MW
mikrovat	=	μW	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
milivat	=	mW	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
vat	=	W	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}
kilovat	=	kW	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}
megavat	=	MW	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1

= Nm (vidi odlomak 5.2.1), a newton = N = kg m/s² (vidi odlomak 4.2.1), jednadžba među jedinicama watt = W = J/s može se napisati i u obliku

$$\text{watt} = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}.$$

Na jedinicu snage vat u praksi se vrlo intenzivno primjenjuju decimalni i dekadski višekratnici iz tablice A-1. To je razumljivo, jer je ogroman raspon snaga koje se pojavljuju u pojedinim granama privrede i znanosti. Na primjer, u modernoj elektroprivredi je snaga 200 MW jednog generatora u elektrani posve normalna, a grade se već i generatori hlađeni vodom (rotor i stator) snage 900 MW! S druge strane, u uzbudnim sistemima takvih generatora postoje mikrologički poluvodički sklopovi čija je snaga reda vrijednosti mikrovata (μW). Već na tom primjeru nalazimo odnos snaga 900 MW/1 μW = $9 \cdot 10^{14} = 900$ tisuća milijardi, a takvih primjera ima bezbroj.

Dvostrane odnose među najčešće upotrebljavanim izvedenicama jedinice vat svrstali smo u tablicu B-42. Odnose jedinice W prema nekim drugim metričkim jedinicama snage sadrži tablica B-43, a prema nekim angloameričkim jedinicama tablica B-44. Priručničke odnose među najčešće upotrebljavanim metričkim i angloameričkim jedinicama snage sadrže tablice **37** i **38** u prilogu knjige.

5.5.2. Jedinica kilopondmetar u sekundi (kratica: kpm/s). O jedinici energije kilopondmetar (kpm) raspravljali smo u odlomku 5.2.3 i rekli da je to jedinica energije u tzv. metričkom Tehničkom sistemu jedinica (vidi odsječak 8.1). Budući da je kpm = 9,806 65 J (tačno), to je očito

$$\frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 9{,}806\,65 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 9{,}806\,65\ \text{W}.$$

Tablica **B-43**

Dvostrani odnosi među

Jedinica		Kratica	W	kW
vat	=	W	1	10^{-3}
kilovat	=	kW	10^{3}	1
kilopondmetar u sekundi	=	kpm/s	9,80665	$9,80665 \cdot 10^{-3}$
poncelet	=	—	$9,80665 \cdot 10^{2}$	0,980665
konjska snaga	=	KS	$7,35499 \cdot 10^{2}$	0,735499
kilokalorija u satu	=	kcal/h	1,1630	$1,1630 \cdot 10^{-3}$
erg u sekundi	=	erg/s	10^{-7}	10^{-10}

Obrnuti odnos zabilježen je, zajedno s drugim odnosima među metričkim jedinicama snage, u tablici B-43.

U francuskoj literaturi mogu se naći i dva dekadska višekratnika jedinice snage kpm/s koji imaju vlastito ime. To su

$$\text{poncelet} = 100 \text{ kpm/s} = 10 \text{ prony},$$

$$\text{prony} = 10 \text{ kpm/s} = 0{,}1 \text{ poncelet}.$$

Jedinicu snage poncelet prikazali smo u odnosu na druge jedinice snage u tablici B-43.

5.5.3. Jedinica konjska snaga (kratice: KS, KM, ch, PS, k). Ova jedinica snage ne pripada nijednom sistemu jedinica, a definirana je ovako

$$\text{konjska snaga} = \text{KS} = 75 \text{ kpm/s (tačno)},$$

tj.: »Jedinica konjska snaga je snaga pri kojoj se u toku 1 sekunde obavi rad 75 kilopondmetara.« Budući da je kpm/s = 9,80665 W (tačno), to je

$$\text{KS} = 735{,}49875 \text{ W (tačno)},$$

metričkim jedinicama snage

kpm/s	poncelet	KS	kcal/h	erg/s
0,1019716	$1{,}019716 \cdot 10^{-3}$	$1{,}359622 \cdot 10^{-3}$	0,859845	10^{7}
$1{,}019716 \cdot 10^{2}$	1,019716	1,359622	$8{,}59845 \cdot 10^{2}$	10^{10}
1	10^{-2}	$1{,}33333 \cdot 10^{-2}$	8,43216	$9{,}80665 \cdot 10^{7}$
10^{2}	1	1,33333	$8{,}43216 \cdot 10^{2}$	$9{,}80665 \cdot 10^{9}$
$7{,}5 \cdot 10$	0,75	1	$6{,}3241 \cdot 10^{2}$	$7{,}35499 \cdot 10^{9}$
0,118593	$1{,}18593 \cdot 10^{-3}$	$1{,}58126 \cdot 10^{-3}$	1	$1{,}1630 \cdot 10^{7}$
$1{,}019716 \cdot 10^{-8}$	$1{,}019716 \cdot 10^{-10}$	$1{,}359622 \cdot 10^{-10}$	$8{,}59845 \cdot 10^{-8}$	1

što obično zaokružujemo na KS = 735,499 W (vidi tablicu B-43) ili na KS ≈ 736 W. Na drugim jezicima naziv jedinice »konjska snaga« ima isto porijeklo kao i u hrvatskosrpskom:

slovenski: konjska moč (KM),

češki: kůň (k),

ruski: lošadinaja sila (л.с.),

poljski: koń mechaniczny (KM),

francuski: cheval-vapeur (ch),

njemački: Pferdstärke (PS),

a znači isto, jedinicu 75 kpm/s. Angloamerička jedinica »horse power« (hp) je *veća* od KS (vidi odsječak 5.6).

Dvostrane odnose jedinice KS prema nekim drugim jedinicama snage sadrži tablica B-43. Napominjemo da jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. dopušta, uz vat i izvedenice te jedinice (odlomak 5.5.1), javnu upotrebu samo ovih dviju jedinica snage: kpm/s i KS.

5.5.4. Ostale metričke jedinice snage. Budući da se jedinice snage lako tvore omjerom jedinice energije i vremena, a jedinica energije i vremena ima mnogo, to je u toku historije postojalo — a i još postoji — mnoštvo jedinica snage koje su se pojavljivale u pojedinim granama tehnike i znanosti. Neke od njih ovdje ćemo samo spomenuti

erg u sekundi = erg/s = 10^{-7} W,

kalorija u sekundi = cal/s = 4,1868 W,

kilokalorija u satu = kcal/h = 1,163 W itd.

Više o jedinicama toplinske snage na bazi kalorije vidi u odsječku 6.1 glave D.

Dvostrane odnose jedinica erg/s i kcal/h prema nekim drugim jedinicama snage sadrži tablica B-43, a kompletnije odnose tablice **37** i **38** u prilogu knjige.

5.6. Angloameričke jedinice snage

Većina angloameričkih jedinica snage tvori se dijeljenjem jedinice energije s jedinicom vremena, dakle jednako kao i metričke jedinice snage. Budući da smo

Tablica **B-44**

Dvostrani odnosi među metričkim i

Jedinica		Kratica	W	kW
vat	=	W	1	10^{-3}
kilovat	=	kW	10^{3}	1
foot poundal per second	=	ft pdl/s	$4{,}214\,01 \cdot 10^{-2}$	$4{,}214\,01 \cdot 10^{-5}$
foot pound-force per minute	=	ft lbf/min	$2{,}259\,70 \cdot 10^{-2}$	$2{,}259\,70 \cdot 10^{-5}$
foot pound-force per second	=	ft lbf/s	1,355 82	$1{,}355\,82 \cdot 10^{-3}$
horse power	=	hp	$7{,}457\,00 \cdot 10^{2}$	0,745 700
British thermal unit per hour	=	Btu/h	0,293 071	$2{,}930\,71 \cdot 10^{-4}$

u odsječku 5.3 skupili niz odnosa angloameričkih jedinica energije prema jouleu, lako izračunavamo metričke ekvivalente odgovarajućih jedinica snage:

foot poundal per second = ft pdl/s = 0,0421401 W,

foot pound-force per second = ft lbf/s = 1,35582 W,

foot pound-force per minute = ft lbf/min = 0,022597 W,

inch ounce-force per second = in ozf/s = 0,00706156 W.

Posve nezavisno definirana je angloamerička »konjska snaga« koja se zove

horse power = hp = 550 foot pound-force per second.

Budući da je ft lbf/s = 1,35582 W, to je vrijednost jedinice hp u vatima

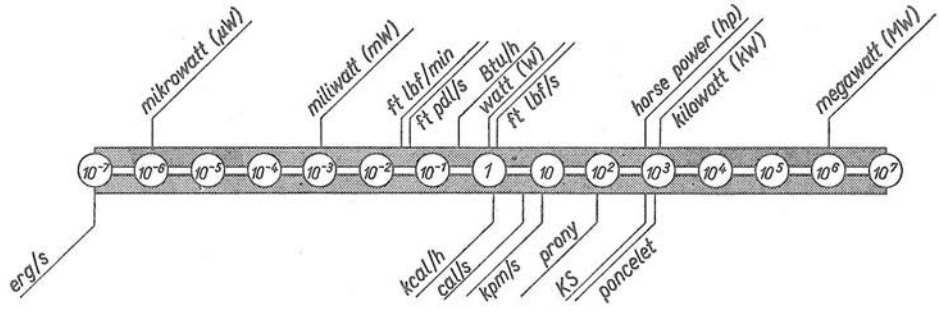
$$hp = 550 \text{ lbf/s} = 550 \cdot 1{,}35582 \text{ W} = 745{,}700 \text{ W},$$

što znači da je horse power 745,7/735,49875 = 1,01387 puta *veća* od metričke konjske snage (vidi odlomak 5.5.3). Dvostrane odnose većine nabrojenih anglo-

angloameričkim jedinicama snage

ft pdl/s	ft lbf/min	ft lbf/s	hp	Btu/h
$2{,}37304 \cdot 10$	$4{,}425372 \cdot 10$	0,737562	$1{,}34102 \cdot 10^{-3}$	3,41214
$2{,}37304 \cdot 10^{4}$	$4{,}42537 \cdot 10^{4}$	$7{,}37562 \cdot 10^{2}$	1,34102	$3{,}41214 \cdot 10^{3}$
1	1,86486	$3{,}10810 \cdot 10^{-2}$	$5{,}65109 \cdot 10^{-5}$	0,143788
0,536233	1	$1{,}66667 \cdot 10^{-2}$	$3{,}0303 \cdot 10^{-5}$	$7{,}71039 \cdot 10^{-2}$
$3{,}21740 \cdot 10$	$6 \cdot 10$	1	$1{,}81818 \cdot 10^{-3}$	4,62623
$1{,}769576 \cdot 10^{4}$	$3{,}3 \cdot 10^{4}$	$5{,}50 \cdot 10^{2}$	1	$2{,}54443 \cdot 10^{3}$
6,95469	$1{,}29695 \cdot 10$	0,216158	$3{,}93015 \cdot 10^{-4}$	1

američkih jedinica snage prema jedinicama W i kW sadrži tablica B-44 (vidi i tablice **37** i **38** u prilogu knjige).



Sl. B.24. Grubi grafički prikaz vrijednosti raznih jedinica snage u odnosu na vat

Posebnu grupu angloameričkih jedinica (toplinske) snage predstavljaju one koje se izvode iz jedinice energije British thermal unit (Btu); to su:

British thermal unit per hour = Btu/h = 0,293071 W,

British commercial ton of refrigeration = CTR = 1,1154 CTR (US),

American commercial ton of refrigeration = CTR (US) = 12000 Btu/h.

Potankosti o ovim jedinicama čitatelj može vidjeti u odsječku 6.1 glave D ove knjige.

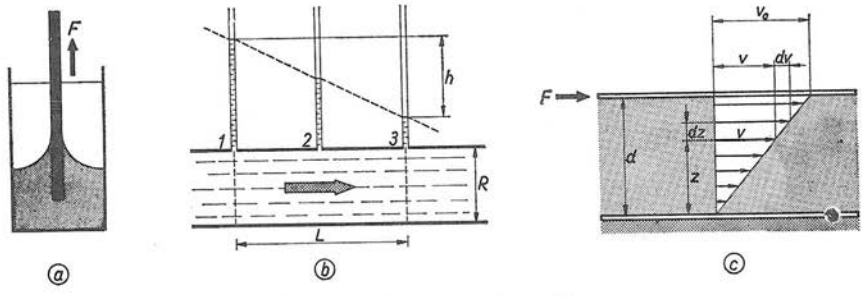
Prilikom brzog pronalaženja odnosa među različitim metričkim i angloameričkim jedinicama snage neka se čitatelj posluži tablicama **37** i **38** u prilogu knjige.

6. Viskoznosti i njihove jedinice

6.1. Dinamička i kinematička viskoznost. Fluidnost

6.1.1. Veličina dinamička viskoznost. Suštinu pojma viskoznost možemo najlakše objasniti primitivnim eksperimentom. Na slici B.25a vidimo staklenu posudu gotovo do vrha napunjenu glicerinom. Donji sloj glicerina u posudi obojen je nekom tamnijom bojom, što je na slici prikazano sivilom. Prilikom izvlačenja krute ploče iz posude, može se vidjeti kako se obojeni glicerin prilijepio uz ploču (engl. viscosity = ljepljivost).

Opisano svojstvo ljepljivosti (viskoznosti) nema samo obojeni glicerin, već i svaka druga tekućina, plin ili para, jer je viskoznost posljedica unutarnjeg trenja koje nastaje u tekućini ili plinu prilikom gibanja. To možemo provjeriti drugim primitivnim pokusom, shematski prikazanim na slici B.25b. U horizontalnoj cijevi izbušena su tri tanka otvora za manometre *1*, *2*, *3*. Ako tekućina (plin) u cijevi miruje, razina tekućine u sva tri manometra bit će ista. No ako se tekućina giba stalnom brzinom u naznačenom smjeru, tlak će padati od vrijednosti p_1 na mjestu *1* do p_3 na mjestu *3*. Pad tlaka na duljini L cijevi iznosit će $\Delta p = p_1 - p_3 = g\rho h$. (O mjerenju tlaka vidi odlomak 4.1.3.)



Sl. B.25. Uz objašnjenje pojma viskoznost

Da u tekućini djeluju samo sile tlaka, dio tekućine između presjeka *1* i *2* (isto tako između *2* i *3*) bi se ubrzavao. U stvarnosti se to ne opaža, što znači da na tekućinu (plin) u gibanju djeluju sile koje su usmjerene suprotno smjeru gibanja tekućine. Te sile uravnotežuju silu nastalu zbog razlike tlaka u pojedinim presjecima (sl. B.25b). Sile uzrokovane viskoznošću su tangencijalne sile; one ne postoje samo između vanjskog sloja tekućine i stijenke cijevi već i među susjednim slojevima tekućine koji klize jedan u odnosu prema drugom. Postojanje tangenci-

jalnih sila unutar tekućine u gibanju uzrokuje to da sloj koji se nalazi neposredno uz cijev djeluje na susjedni sloj, ovaj na daljnji itd. Stoga se tangencijalne sile kojima stijenka cijevi djeluje na vanjski sloj tekućine prenose dalje i utječu na brzinu čitavog toka tekućine. Dok se vanjski sloj tekućine »prilijepio« uz stijenku, unutarnji slojevi se gibaju to brže što su bliže osi cijevi, tj. što su dalje od stijenke cijevi.

Načelo razdiobe brzine pojedinih slojeva tekućine možemo objasniti uz pomoć slike B.25c, koja prikazuje tekućinu između dvije vodoravne ploče. Donja ploča je učvršćena, dakle miruje, dok gornju vučemo stalnom horizontalnom silom F, tako da je brzina ploče $v_0 = \text{const}$. Takav pokus pokazuje da je sila F direktno proporcionalna brzini v_0 gornje ploče i površini A te ploče, a indirektno proporcionalna razmaku d među pločama; F je, dakle, proporcionalna izrazu Av_0/d. Osim toga, F ovisi o samoj tekućini (plinu); za glicerin je npr. sila F veća negoli za vodu, ako su A, d i temperatura isti. Ovo vlastito svojstvo tekućine (plina) nazvano je *dinamičkom viskoznošću* (ili »apsolutnom viskoznošću«) i označeno slovom η (ili μ). Za naš slučaj slike B.25c, dakle, vrijedi

$$F = \eta \frac{Av_0}{d} \quad \text{ili} \quad \tau = \eta \frac{v_0}{d}, \tag{6.1-1}$$

gdje je $\tau = F/A$ takozvana tangencijalna napetost. Vrijednost dinamičke viskoznosti η dobiva se, dakle, u razmatranom slučaju mjerenjem veličina F, A, v_0 i d.

U gornjem razmatranju je pretpostavljeno da je sloj tekućine vrlo tanak (d na slici B.25c) pa stoga postoji linearna veza između v_0 i d. U stvarnosti se brzina v ne mijenja linearno s udaljenošću sloja od donje ploče kao na slici B.25c, već drukčije, što se vidi na profilu obojenoga glicerina na slici B.25a. Brzina v pojedinih slojeva tekućine ovisi o udaljenosti z od nepomične stijenke (ploče) pa se u definicijsku jednadžbu dinamičke viskoznosti (6.1-1) mora umjesto $v_0/d = \text{const}$ staviti gradijent brzine $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$, dakle

$$F = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \quad \text{ili} \quad \tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}. \tag{6.1-2}$$

Ovdje je A površina sloja na udaljenosti z od nepomične stijenke, tj. na granici između slojeva z i $z + \mathrm{d}z$. Prema tome je izraz (6.1-1) samo pojednostavnjena definicijska jednadžba (6.1-2) za slučaj kada se brzina razdjeljuje linearno pa vrijedi $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z = v_0/d = \text{const}$.

Jedinica dinamičke viskoznosti u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) jest newtonsekunda po kvadratnom metru ($\mathrm{Ns/m^2}$). Ta i ostale jedinice obrađene su u odsječku 6.4.

6.1.2. Kinematička viskoznost. Ova veličina važna je u vezi s primjenom *Reynolds*ove značajke (vidi odlomak 4.2.5 u glavi D), a definirana je ovako

$$\text{kinematička viskoznost} = \frac{\text{dinamička viskoznost}}{\text{gustoća}}; \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}. \tag{6.1-3}$$

Budući da je kinetička energija tekućine proporcionalna gustoći ρ (vidi odsječak 5.1), a rad viskoznih sila dinamičkoj viskoznosti η ($A = Fs$), to je kinematička viskoznost $\nu = \eta/\rho$ veličina iz čije se vrijednosti može prosuđivati o utjecaju svojstava tekućine na strujanje. Tako je, na primjer, dinamička viskoznost vode gotovo 60

puta veća od η zraka pri temperaturi 20 °C, ali je kinematička viskoznost ν vode oko petnaest puta manja od zraka. Stoga će kod inače jednakih uvjeta pojava viskoznosti jače utjecati na strujanje zraka negoli vode!

Jedinica kinematičke viskoznosti ν u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) jest kvadratni metar u sekundi (m^2/s). Ta i ostale jedinice veličine ν razmotrene su u odsječku 6.5.

Primjer. Pri temperaturi $\vartheta = 10\,°C$ izmjerena je dinamička viskoznost destilirane vode i dobivena vrijednost $\eta = 1{,}307\ mNs/m^2$ ($mNs/m^2 =$ milinewtonsekunda po kvadratnom metru; o tome vidi odlomak 6.4.1). Kolika je kinematička viskoznost? Odgovor možemo dobiti pomoću jednadžbe (6.1-3) ako u nju uvrstimo gustoću vode pri $\vartheta = 10\,°C$. U tablici B-16 imamo zabilježeno da je pri 10 °C gustoća vode $\rho = 999{,}7\ kg/m^3$. Prema tome je kinematička viskoznost vode pri toj temperaturi

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1{,}307\,mNs/m^2}{999{,}7\,kg/m^3} = \frac{1{,}307 \cdot 10^{-3}}{999{,}7}\ \frac{Ns\,m}{kg} = 1{,}31 \cdot 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}.$$

U rezultatu smo dobili jedinicu kinematičke viskoznosti SI m^2/s, jer je $N = kg\,m/s^2$ (o jedinici sile newton = N vidi odlomak 4.2.1). Budući da kvadratni metar sadrži 10^6 kvadratnih milimetara, rezultat možemo napisati i u obliku $\nu = 1{,}31\ mm^2/s$.

6.1.3. Fluidnost je veličina recipročna dinamičkoj viskoznosti, definirana je dakle jednadžbom

$$\text{fluidnost} = \frac{1}{\text{dinamička viskoznost}}; \quad \Phi = \frac{1}{\eta}.$$

Jedinica fluidnosti recipročna je, dakako, jedinici dinamičke viskoznosti. Budući da je u SI jedinica veličine η Ns/m^2, to je jedinica fluidnosti SI $[\Phi]_M = m^2/Ns$.

Za mjerenje veličine »fluidnost« upotrebljava se i jedinica »rhe« koja je definirana ovako: rhe = 1/poise = 1/P (o jedinici P vidi odlomak 6.4.3). Naziv »rhe« grčkog je porijekla, a znači »teći, lijevati«. U skladu s time je i ruski naziv za veličinu $\Phi = 1/\eta$: »tekučest«.

Primjer. Koliko iznosi fluidnost vode iz primjera u odlomku 6.1.2? Tamo smo imali $\eta = 1{,}307\ mNs/m^2$. Prema tome je pripadna fluidnost

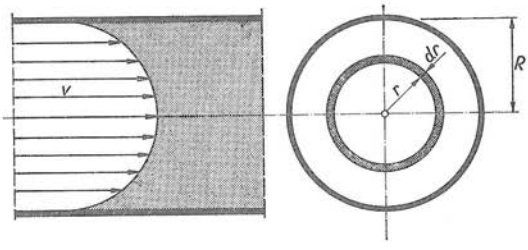
$$\Phi = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{1{,}307\,mNs/m^2} = \frac{1}{1{,}307 \cdot 10^{-3}\,Ns/m^2} = 765{,}1\ \frac{m^2}{Ns}.$$

6.2. Direktno mjerenje dinamičke viskoznosti tekućina

6.2.1. Načelo direktnog mjerenja viskoznosti. *Newton*ova jednadžba (6.1-2) vrijedi za tekućine koje struje *laminarno*. Uz taj uvjet ona se dade primijeniti za opis djelovanja uređaja za mjerenje dinamičke viskoznosti η, tzv. *viskozimetara*. Načelo djelovanja viskozimetra možemo objasniti već poznatom slikom B.25b u odlomku 6.1.1. Ta slika prikazuje vodoravnu cijev unutarnjeg promjera R, a duž cijevi — između presjeka *1* i *3* — pad tlaka iznosi $\Delta p = p_1 - p_3 = g\rho h$. Ovdje je ρ gustoća tekućine koja struji, g ubrzanje zemljine teže, a h razlika visine stupaca koje pokazuju manometarske cjevčice *1* i *3* međusobno udaljene L (sl. B.52b). Protok tekućine je stalan, tj. $q = \text{const}$, a isto tako i presjek okrugle cijevi $A_0 = \pi R^2$. Riječ je, dakle, o stacionarnom strujanju tekućine kroz cijev koja je u dva presjeka prikazana na slici B.26.

Izlaganja u odlomku 6.1.1 pokazala su nam da u ovdje razmatranom slučaju brzina strujanja v pojedinih slojeva tekućine ovisi o udaljenosti r sloja od osi okrugle cijevi; uz samu stijenku brzina je nula, a prema osi cijevi raste s promjenljivim gradijentom brzine dv/dr. Zamislimo li bilo koji sloj tekućine na polumjeru r (zadatak je rotacijsko-simetričan; sl. B.26), možemo na nj primijeniti jednadžbu (6.1-2), koja zbog $A = 2\pi r L$ ovdje prelazi u oblik

$$F = \eta A \, dv/dz = \eta 2\pi r L \, dv/dz.$$



Sl. B.26. Razdioba brzina strujanja tekućine u okrugloj cijevi

Toj viskoznoj sili na zamišljenom valjku duljine L i polumjera r drži ravnotežu sila $A_0(p_1 - p_3) = A_0 \Delta p = \pi r^2 \Delta p = \pi r^2 g \rho h$, nastala zbog razlike tlakova između presjeka *1* i *3*. Izjednačimo li izraze za ove dvije sile, dobivamo $2r\eta L \, dv/dz = \Delta p r^2$, odakle ćemo izračunati ovisnost dinamičke viskoznosti η o veličinama koje možemo *izmjeriti*. Napišemo li, naime, tu jednadžbu u obliku $dv = \Delta p \, r \, dr : (2 \eta L)$ i integriramo je u granicama od r do R, slijedi ovisnost brzine v tekućine o zamišljenom polumjeru r

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2).$$

Ova jednadžba opisuje poznatu činjenicu da je brzina tekućine uz stijenku cijevi ($r = R$) jednaka nuli, a u osi cijevi ($r = 0$) maksimalna, $v_m = \Delta p R^2 : (4\eta L)$.

Diferencijal protoka dq kroz diferencijal površine presjeka cijevi $dA_0 = 2\pi r \, dr$ (sl. B.26 desno) iznosi $dq = dA_0 v$, gdje je v brzina tekućine na granici slojeva r i $r + dr$. Prema tome je

$$dq = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2) 2\pi r \, dr,$$

odakle se integriranjem od granice $r = 0$ do $r = R$ dobiva ukupni protok q tekućine kroz cijev

$$q = \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi R^4}{8\eta}, \quad \text{odnosno} \quad \eta = \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi R^4}{8q}. \tag{6.2-1}$$

Iz ove *Poiseuille*ove jednadžbe za idealno strujanje razabire se da se pomoću uređaja sa slike B.25b dinamička viskoznost η pri određenoj temperaturi može utvrditi tako da se izmjeri pad tlaka $\Delta p = g \rho h$ na duljini L cijevi unutarnjeg promjera R, kroz koju struji tekućina izmjerenog protoka q, a izmjerene vrijednosti uvrste u jednadžbu (6.2-1).

Primjer. Pri dnu velikog industrijskog spremnika za vodu nalazi se otvor na koji je priključena horizontalna cijev unutarnjeg promjera 100 mm, dugačka 10 m. Koliki će približno biti protok vode u cijevi pri temperaturi 20°C u trenutku kad razina vode u spremniku bude 5 metara iznad otvora? Protok ćemo izračunati pomoću lijeve jednadžbe (6.2-1), u koju ćemo uvrstiti ove

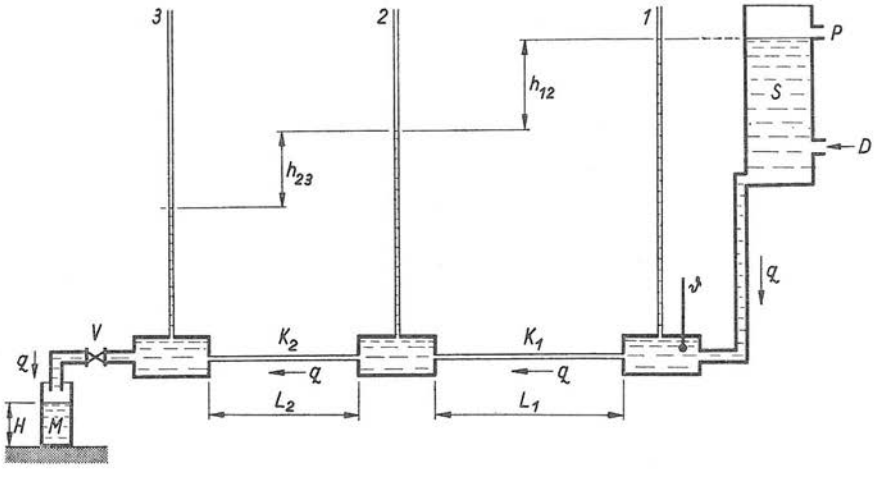
podatke: $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $h = 5\ \mathrm{m}$ ($\Delta p = g\rho h$), $R = 50\ \mathrm{mm} = 5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$ i $L = 10\ \mathrm{m}$. Za dinamičku viskoznost vode pri 20 °C odabrat ćemo vrijednost $\eta = 1\ \mathrm{mNs/m^2} = 1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Ns/m^2}$ iz tablice B-45. Na taj način iz (6.2-1) dobivamo

$$q = \frac{g\rho h}{L} \frac{\pi R^4}{8\eta} = \frac{9{,}81 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 1000 \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 5\,\mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} \frac{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^4}{8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m^2}},$$

odakle uz pomoć preračunavanja jedinice $\mathrm{N} = \mathrm{kg\ m/s^2}$ (o N vidi odlomak 4.2.1) slijedi traženi rezultat $q = 12{,}05\ \mathrm{m^3/s} = 12\,050$ litara u sekundi $\approx 12\ \mathrm{m^3/s}$.

6.2.2. Mjerenje viskoznosti kapilarnim viskozimetrom. Metoda mjerenja dinamičke viskoznosti η čije smo načelo opisali u prošlom odlomku ima stanovite nedostatke. Jednadžba (6.2-1) ne opisuje, naime, vjerno pojave koje se zbivaju u *neidealnom*, tj. stvarnom mjernom sistemu prema slici B.25b, u kojem se dio razlike tlaka Δp troši za ubrzavanje tekućine prilikom ulaska iz većeg spremnika u horizontalnu cijev. I drugi faktori, npr. površinska napetost, utječu na to da je η manja od one koju daje izraz (6.2-1).

Većina tih utjecaja može se izbjeći pomoću tzv. kapilarnog viskozimetra, čiji je princip djelovanja prikazan na slici B.27. Mjerena tekućina laminarno struji iz spremnika S kroz dvije kapilarne cijevi K_1 i K_2 jednakog promjera ali nejednakih



Sl. B.27. Djelovanje kapilarnog viskozimetra za direktno mjerenje dinamičke viskoznosti tekućina

duljina (L_1 i L_2) i ventil V. Tekućina dotječe kroz otvor D spremnika, višak se prelijeva kroz preljevni otvor P, a ventilom V se namjesti željena vrijednost protoka q. Tlakovi se očitavaju sa tri manometarske cijevi *1*, *2*, *3*. Protok se mjeri tako da se u menzuri M izmjeri visina H dotekle tekućine (presjek menzure je dakako poznat) u toku trajanja mjerenja t.

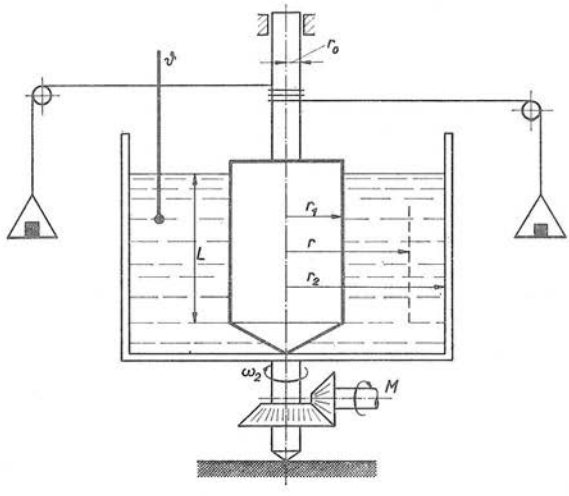
Za svaku od kapilara vrijedi jednadžba (6.2-1). Budući da su obje kapilare spojene u seriju, protok će biti isti, dakle $q_1 = q_2 = q = \mathrm{const}$. Ako sa K označimo

konstantu $K=\pi g\rho R^4:(8q)$, za svaku od kapilara možemo napisati $h_{12}=\eta L_1/K$, $h_{23}=\eta L_2/K$, odakle oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo

$$\eta = K\frac{h_1-h_2}{L_1-L_2} = \frac{\pi g\rho R^4}{8q(L_1-L_2)}(h_{12}-h_{23}). \qquad (6.2\text{-}2)$$

Ponavljanjem mjerenja s različitim protocima q dobivaju se mjerenjem pri istoj temperaturi različite razlike visina $h_{12}-h_{23}$. Ako uvrštenje niza parova izmjerenih vrijednosti u izraz (6.2-2) daje istu vrijednost η, onda je to dokaz da je strujanje u kapilarama bilo laminarno.

6.2.3. Mjerenje viskoznosti rotacijskim viskozimetrom. I ovaj viskozimetar djeluje u skladu s definicijskom jednadžbom dinamičke viskoznosti (6.1-2). Načelo tog mjernog uređaja možemo razabrati iz slike B.28. Ispitivana tekućina stavi se u cilindričku posudu polumjera r_2, koja se pomoću elektromotora M može vrtjeti stalnom rotancijom (kutnom brzinom) ω_2 (vidi odlomak 2.2.3). U toj posudi nalazi se valjak polumjera r_1, koji se može okretati oko vlastite vertikalne osi. Taj valjak završava osovinom polumjera r_0, na koju je omotana uzica o čije su krajeve ovješeni utezi čijim zakretnim momentom M možemo valjak (r_1) zadržati u mirovanju. Taj moment, nastao djelovanjem utega, uravnotežuje, dakle, moment viskoznih sila.



Sl. B.28. Načelo djelovanja rotacijskog viskozimetra

Prilikom vrtnje cilindrične posude (r_2), vanjski sloj mjerene tekućine priljubljen je uz posudu; to znači da se on u odnosu na valjak polumjera r_1 okreće rotancijom ω_2. Uz valjak (r_1) tekućina je također priljubljena, tj. za nj je rotancija $\omega_1=0$. Brzina *tekućine* u odnosu na mirujući valjak (r_1) mijenja se, dakle, od $v_2=r_2\,\omega_2$ do $v_1=r_1\omega_1=0$. Bilo gdje između r_2 i r_1 brzina tekućine iznosi $v=r\omega$. Promjena brzine $\mathrm{d}v$ na graničnom sloju između r i $r+\mathrm{d}r$ iznosi, prema tome, $\mathrm{d}v=r\,\mathrm{d}\omega$.

Budući da je površina graničnog sloja $A=2\pi rL$ (duljina valjka na slici B.28 pojednostavnjeno je prikazana naznačenom kotom L), osnovna *Newton*ova jednadžba (6.1-2) dobiva oblik

$$F=\eta A\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\eta\,2\pi rL\frac{r\,\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}=\eta\,2\pi Lr^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}.$$

Zakretnom momentu viskoznih sila Fr drži ravnotežu izmjereni moment utega M (sl. B.28). To znači da je $M=Fr$, što uz pomoć gornjeg izraza za F daje ovisnost diferencijala rotancije o drugim veličinama

$$\mathrm{d}\omega=\frac{M}{2\pi\eta L}\frac{\mathrm{d}r}{r^3}.$$

Izračunamo li integral lijeve strane jednadžbe od $\omega = \omega_1 = 0$ do $\omega = \omega_2$, a desne od $r = r_1$ do $r = r_2$, nakon kraćeg računanja dobivamo rezultat

$$\eta = \frac{M}{4\pi\,\omega_2 L}\,\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}\,. \tag{6.2-3}$$

Budući da su sve veličine na desnoj strani jednadžbe poznate, lako je na temelju izmjerenih vrijednosti izračunati dinamičku viskoznost η.

Mjerenje prema jednadžbi (6.2-3) može se obavljati na dva načina: ili je rotancija $\omega_2 = \text{const}$, pa se dodavanjem utega (sl. B.28) pronalazi M, ili je pak $M = \text{const}$ (stalni utezi), pa se ω_2 mijenja sve dok se valjak (r_1) ne umiri. Jednadžba (6.2-3) daje to preciznije rezultate što je omjer L/r_1 veći, ali rotancija ω_2 ne smije biti prevelika, da se ne bi narušila laminarnost strujanja.

6.2.4. Ostale direktne metode mjerenja η. Postoji još niz metoda za direktno mjerenje dinamičke viskoznosti. Metode možemo razdijeliti u dvije skupine. U prvu skupinu metoda idu one koje se temelje na mjerenju srednje brzine tekućine u stacionarnom laminarnom strujanju (npr. kapilarni viskozimetar; vidi odlomak 6.2.2) ili na mjerenju brzine stacionarnog gibanja (padanja) krutog tijela određenog oblika u viskoznoj tvari, te na mjerenju tangencijalne napetosti τ pri zadanom konstantnom gradijentu brzine. U drugu skupinu ulaze metode koje se temelje na mjerenju brzine nestacionarnog gibanja, na primjer na mjerenju koeficijenta gušenja njihanja diska, valjka ili pločice u viskoznoj tvari.

Uređaje iz prve skupine načelno smo razmotrili u odlomcima 6.2.1,2,3. Jedino nismo obradili poznatu metodu padajuće kuglice (*Höpplerov* viskozimetar) kod koje se dinamička viskoznost dobiva iz *Stokes*ove formule s *Ladenburg*ovom korekcijom. U drugoj skupini raširena je metoda ultrazvučnog mjerenja, koja se temelji na kontinuiranom mjerenju gušenja njihanja npr. magnetostrikcijskog vibratora smještenog u mjerenu tvar; pri tom se njihanje pločice periodički uzbuđuje generatorskim impulsima. Ovi uređaji zapravo mjere umnožak gustoće ρ i dinamičke viskoznosti η.

6.3. Usporedbeno mjerenje viskoznosti tekućina

Direktna mjerenja dinamičke viskoznosti, opisana u odsječku 6.2, dugotrajna su i skupa, jer zahtijevaju vrlo precizne mjerne uređaje i mnogo vremena za pripremu i izvođenje mjerenja. No pošto je jednom (na temelju direktnih mjerenja) poznata vrijednost veličine η neke tekućine (referentne) pri poznatoj temperaturi ϑ, dinamička viskoznost neke druge tekućine može se pri toj istoj temperaturi mnogo brže i jeftinije ustanoviti *usporedbom*. U ovom odsječku 6.3 obradit ćemo usporedbeno mjerenje kinematičke viskoznosti tekućina nešto opširnije nego što u ovoj knjizi razmatramo analogna mjerenja drugih fizikalnih veličina. Razlog tome je taj što u jugoslavenskoj literaturi ovakva mjerenja nisu podrobno opisana. Pri tom opisivanju uglavnom ćemo se oslanjati na odgovarajući standard USA: ASTM (American Society for Testing and Materials) D 445-61: Standard Method of Test for Kinematic Viscosity.

6.3.1. Načelo usporedbenog mjerenja viskoznosti sastoji se u ovome: stanoviti volumen V tekućine *poznate* viskoznosti η_0 propušta se kroz kapilaru (vidi odlomak 6.2.1) i izmjeri vrijeme t_0 potrebno da čitava količina proteče kroz kapilaru (veličine s indeksom $_0$ karakteriziraju tekućinu poznatih svojstava). Zatim se kroz

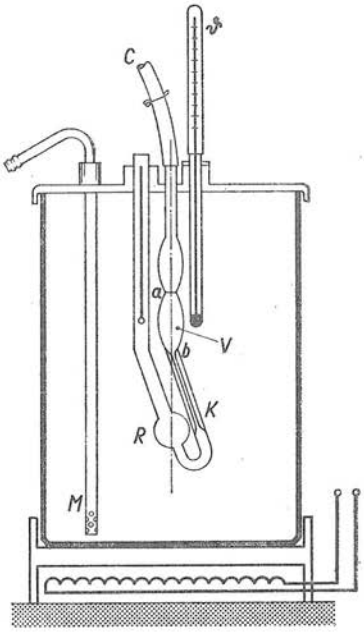
istu kapilaru propusti *isto toliki* volumen V tekućine nepoznate viskoznosti η i izmjeri potrebno vrijeme t. Oboje je učinjeno pri *istoj* temperaturi. Iz omjera izmjerenih dvaju vremena t/t_0 može se izračunati nepoznata viskoznost η druge tekućine. Jedna vrsta takvog usporedbenog viskozimetra je *Cannon-Fenske*ova modifikacija *Ostwald*ova viskozimetra (sl. B.29).

Gornji tekst opisao nam je u stvari način *baždarenja* (kalibracije) usporedbenih viskozimetara. Fizikalnu osnovanost tog postupka objasnit će nam naredno razlaganje. Trajanje t_0 istjecanja *referentne* tekućine (to je ona tekućina čiju viskoznost i gustoću pri stanovitoj temperaturi poznajemo na temelju direktnih mjerenja obavljenih pomoću jedne od metoda iz odsječka 6.2) vremenski je interval potreban da se razina te tekućine spusti od crtice a do crtice b (sl. B.29). Protok q referentne tekućine kroz kapilaru K određen je jednadžbom (6.2-1), tj. u našem slučaju

$$q_0 = K\frac{\rho_0}{\eta_0}, \quad \text{gdje je } K = \frac{\pi g h R^4}{8L}.$$

Slovo R predstavlja polumjer kapilare, a L njenu duljinu. Pri ponavljanju postupka, ali s tekućinom gustoće ρ kojoj želimo *izmjeriti* dinamičku viskoznost η, mjerenjem dobivamo trajanje istjecanja t, a protok te tekućine u skladu s jednadžbom (6.2-1) iznosi

$$q = K\rho/\eta.$$



Sl. B.29. *Ostwald*ov (*Cannon-Fenske*ova modifikacija) viskozimetar u izvedbi propisanoj od American Society for Testing Materials (ASTM). G — grijalica, M — zračna miješalica tekućine, C — gumena cijev sa štrcaljkom, ϑ — termometar, R — rezervoar, V — volumen između a i b, K — kapilara

Budući da za prvu tekućinu vrijedi $q_0 = \mathrm{d}V_0/\mathrm{d}t$, a za drugu $q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$, integriranjem prvog protoka od 0 do t_0 i drugog od 0 do t dobivamo

$$V_0 = \int K\frac{\rho_0}{\eta_0}\,\mathrm{d}t = V = \int K\frac{\rho}{\eta}\,\mathrm{d}t = V,$$

jer je $V_0 = V$, tj. V je volumen prostora između crtica a i b (sl. B.29). Iz rješenja gornjih integrala proizlazi

$$\eta = \eta_0\frac{\rho}{\rho_0}\frac{t}{t_0} \quad \text{ili} \quad \nu = \nu_0\frac{t}{t_0}, \tag{6.3-1}$$

jer je kinematička viskoznost općenito definirana omjerom $\nu = \eta/\rho$ (vidi odlomak 6.1.2). Jednadžba (6.3-1) kaže, dakle, da se kinematičke viskoznosti dviju tekućina

pri istoj temperaturi odnose kao i pripadna trajanja istjecanja jednakih volumena, tj. $\nu : \nu_0 = t : t_0$. Zbog jednostavnosti te relacije, veličina »kinematička viskoznost« ν široko se primjenjuje u industriji ulja, naftenih derivata itd.

Pri tom se desna jednadžba (6.3-1) upotrebljava u prikladnijem obliku

$$\nu = C_0 t, \quad \text{gdje je} \quad C_0 = \nu_0 / t_0. \tag{6.3-2}$$

Konstanta C_0 u gornjoj jednadžbi zove se *konstanta viskozimetra*; vrijednost C_0 odnosi se na stanovitu temperaturu ϑ_0, tj. na onu temperaturu pri kojoj referentna tekućina ima vrijednost kinematičke viskoznosti ν_0, a istjecanje definiranog volumena V te tekućine trajalo je t_0, te na konkretan viskozimetar. To znači da bismo jednadžbe (6.3-2) zapravo morali pisati u obliku $\nu(\vartheta_0) = C_0(\vartheta_0) t$ i $C_0(\vartheta_0) = \nu_0(\vartheta_0)/t_0$ pri $V(\vartheta_0)$. Za neku drugu vrijednost temperature (ϑ) lijeva jednadžba (6.3-2) dobiva oblik

$$\nu(\vartheta) = C(\vartheta) t \quad \text{ili kraće} \quad \nu = C t, \tag{6.3-3}$$

gdje je dakako $\nu = \nu(\vartheta)$ i $C = C(\vartheta)$. Vrijednost konstante stanovitog viskozimetra pri temperaturi ϑ može se izračunati iz C_0 (pri ϑ_0) pomoću jednadžbe

$$C = C_0 \left(1 - \frac{V - V_0}{h \pi r^2} \right) \tag{6.3-4}$$

u kojoj simboli označuju ove veličine: V_0 — volumen tekućine u viskozimetru pri ϑ_0, V — volumen tekućine u viskozimetru pri ϑ, h — razina tekućine, r — unutarnji polumjer donjeg, kuglastog spremnika (*7* na slici B.30).

Primjer. Izračunajmo omjere dinamičkih i kinematičkih viskoznosti zraka i vode pri temperaturi 20 °C! Za vodu dobivamo podatke iz tablice B-45 u odlomku 6.3.3: $\nu_v = 1{,}0038 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ i $\eta_v = 1002 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Ns/m^2}$. U bilo kojem strojarskom ili kemijskom priručniku nalazimo za gustoću i kinematičku viskoznost zraka pri temperaturi 20 °C i tlaku 1 at ove podatke: $\rho = 1{,}164\,\mathrm{kg/m^3}$, $\nu = 15{,}7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$. Imamo dakle

$$\nu_z = 15{,}7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}, \quad \eta_z = 1{,}164\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 15{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}} = 18{,}3 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m^2}}.$$

Ovim podacima možemo izračunati tražene omjere

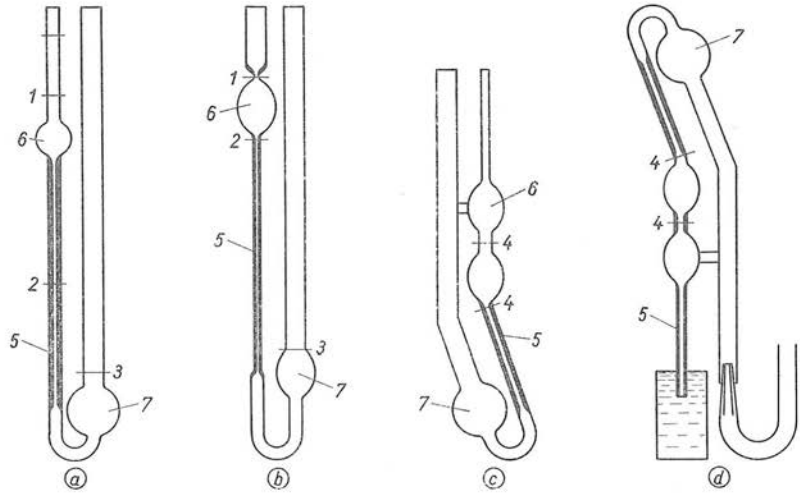
$$\frac{\nu_z}{\nu_v} = \frac{15{,}7}{1{,}0038} = 15{,}6; \quad \frac{\eta_z}{\eta_v} = \frac{18{,}3}{1002} = \frac{1}{55}.$$

Kinematička viskoznost zraka je dakle oko 16 puta *veća* od kinematičke viskoznosti vode, a dinamička viskoznost je oko 55 puta *manja*.

6.3.2. Cannon-Fenskeovi i Ubbelohdeovi viskozimetri. Originalni *Ostwald*ov viskozimetar od godine 1920. ne izgleda kao na slici B.29, već onako kako to prikazuju slike B.30a, b. Sastoji se dakle od staklene cijevi u obliku slova *U*, a jedan krak te cijevi najprije se širi u spremnik *6* i zatim suzuje u kapilaru *5*. Drugi krak *U*-cijevi ima blizu dna veće proširenje (spremnik *7*). Originalni *Ostwald*ov viskozimetar nije standardiziran (ne nalazi se ni u američkom standardu ASTM D 445-61).

U nastojanju da se računski posao oko korigiranja dobivenih mjernih rezultata svede na minimum i omogući standardizacija čitavih slogova viskozimetara, posljednjih 40 godina *Ostwald*ov je viskozimetar mnogostruko modificiran. Jedna od najraširenijih modifikacija je *Cannon-Fenske*ov viskozimetar prikazan na slici

B.30c. Njegov mjerni raspon kreće se od vrijednosti kinematičke viskoznosti oko 0,4 mm^2/s do oko 16000 mm^2/s (centistokes = cSt = mm^2/s; o jedinicama vidi odsječke 6.5 i 8.2).



Sl. B.30. Skice *Ostwald*ova i *Cannon-Fenske*ova viskozimetra za rutinska mjerenja: a), b) originalni stakleni *Ostwald*ovi viskozimetri od godine 1920. (danas se ne upotrebljavaju), c) viskozimetar za providne tekućine koji su godine 1938. predložili *M. R. Cannon* i *M. R. Fenske*, d) tehnika punjenja viskozimetra sa skice c)

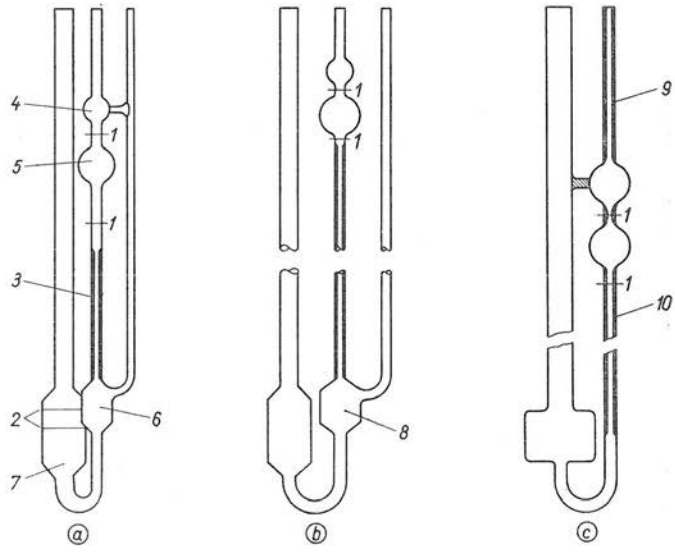
1 — gornja jetkana crtica, *2* — donja crtica, *3* — crtica za doziranje punjenja, *4* — crtica, *5* — kapilara, *6* — spremnik (proširenje) iz kojeg istječe mjerena tekućina, *7* — prijemni spremnik

Budući da se atmosferski tlak i tlak stupca tekućine, koji potiskuju tekućinu kroz kapilaru, ne mogu mijenjati, znatniji mjerni raspon viskoznosti može se postići jedino primjenom čitavog *sloga* mjernih uređaja i kapilara različitih izmjera (npr. dvanaest kapilara). Njihove konstante C kreću se od 2000 m^2/s^2 do 20 mm^2/s^2. Volumen mjerne tekućine (uzorka) iznosi oko 7 kubnih centimetara, a za osam većih kapilara ne treba uzimati u obzir korekciju zbog kinetičke energije, jer je zanemariva (o korekcijama vidi odlomak 6.3.4). Trajanje istjecanja može biti kraće od 200 sekundi, ako se dopusti malo pogoršanje preciznosti. Baždarenje *Cannon-Fenske*ovih viskozimetara obično se u USA obavlja pri temperaturi 100 °F (37,8 °C).

*Ubbelohde*ovi viskozimetri (sl. B.31a,b) upotrebljavaju se za mjerenje kinematičke viskoznosti providnih newtonovskih tekućina. Mjerni raspon kreće se od 0,3 do 100000 mm^2/s, što se postiže slogom od 16 različitih kapilara. Vrijednosti njihovih konstanti C (jednadžba 6.3-3) kreću se od 10^{-3} do 100 mm^2/s^2. Zbog konstrukcije ovog viskozimetra, konstanta C gotovo se nimalo ne mijenja s temperaturom, pa je on stoga primjenljiv kako za visoke tako i za niske temperature pri mjerenju.

6.3.3. Precizni usporedbeni viskozimetri. Prema ASTM to su oni viskozimetri čija je preciznost mjerenja bolja od 0,35 %. Obično se izvode sa staklenom kapilarom čija radna duljina iznosi najmanje 40 centimetara (sl. B.31b,c), a konstruirani su tako da su im pogreške zbog efekata površinske napetosti, kinetičke

energije i rubnih (krajnjih) pojava minimalne. Razlika razina h u takvih preciznih viskozimetara (engl. master viscometers) je oko 4 puta veća negoli u rutinskih viskozimetara.



Sl. B.31. Skice *Ubbelohde*ova (1936) i *Cannon*ova (1944) viskozimetra za precizna mjerenja: a) *Ubbelohde*ov viskozimetar za providne tekućine, b) *Ubbelohde*ov precizni viskozimetar sa kapilarom duljom od 40 centimetara, c) *Cannon*ov precizni viskozimetar

1 — jetkana crtica, *2* — crtice za doziranje punjenja, *3* — kapilara, *4* — proširenje za prelijevanje, *5* — spremnik iz kojeg istječe tekućina, *6* — izlazni spremnik, *7* — prijemni spremnik, *8* — sferni pojas, *9* — gornja kapilara, *10* — radna kapilara

Precizni usporedbeni viskozimetri najviše se upotrebljavaju za utvrđivanje kinematičke viskoznosti takozvanih »uljnih standarda« (engl. one-pint oil standards). To su uzorci volumena 1 pint = 1/8 US gallona (vidi odsječak 11.4) koji pri stanovitim temperaturama imaju propisane vrijednosti kinematičke viskoznosti, a proizvode ih i razašilju korisnicima National Bureau of Standards (vidi odsječak A.7.2) i Cannon Instrument Co. Uzorci imaju svoje oznake prema kojima se zna njihova viskoznost; na primjer uzorak ASTM *S3* ima pri temperaturama −65, −40 i +100 °F kinematičke viskoznosti 340, 86 i 3 mm²/s, a uzorak NBS *J* ima pri temperaturama 68, 77 i 100 °F viskoznosti 25, 20 i 12 mm²/s. ASTM asortiman uzoraka proteže se od *S3* do *S2000* (to znači $\nu = 2000$ mm²/s pri 100 °F), a NBS asortiman obuhvaća uzorke označene slovima *D, H, I, J, K, L, M, N, OB, P.* Ovim uzorcima baždare se rutinski viskozimetri. Budući da »uljni standardi« starenjem mijenjaju viskoznost, precizni viskozimetri se u USA upotrebljavaju i za kontroliranje uzoraka dva do tri puta godišnje.

Precizni usporedbeni viskozimetri baždare se pomoću referentne tekućine kako smo opisali u odlomku 6.3.1, a za referentnu tekućinu upotrebljava se svježa destilirana voda. Vrijednosti viskoznosti takve vode pri različitim temperaturama sadrži tablica B-43 (vrijednosti gustoće vode pri različitim temperaturama sadrži tablica B-15), a dobivene su direktnim mjernim metodama (odsječak 6.2). Podaci iz

tablice B-43 (mN = milinewton) osnova su za baždarenje svih preciznih usporedbenih viskozimetara, tj. za sva mjerenja viskoznosti u industriji. Naročito je važan podatak $\nu = 1{,}0038$ mm²/s = 1,0038 cSt pri temperaturi 20 °C (toj Celzijevoj temperaturi tačno odgovara 68 °F Fahrenheitove temperaturne skale; vidi odsječak D.3.4).

Tablica **B-45**

Ovisnost dinamičke i kinematičke viskoznosti destilirane vode o temperaturi prema DIN 51550

ϑ °C	η mNs/m²	ν mm²/s	ϑ °C	η mNs/m²	ν mm²/s
0	1,792	1,792	50	0,548	0,554
5	1,520	1,520	55	0,505	0,512
10	1,307	1,307	60	0,467	0,475
15	1,138	1,139	65	0,434	0,443
20	1,002	1,0038	70	0,404	0,413
25	0,890	0,893	75	0,378	0,388
30	0,797	0,801	80	0,355	0,365
35	0,719	0,724	85	0,334	0,345
40	0,653	0,658	90	0,315	0,326
45	0,598	0,604	95	0,298	0,310
50	0,548	0,554	100	0,282	0,295

Opaske: mNs/m² = cP; mm²/s = cSt (vidi tablice B-46, 48).

Baždarenje stanovitog sloga preciznih viskozimetara obavlja se postupkom »korak naviše« (engl. step-up). Najprije se viskozimetar napuni propisanim volumenom svježe destilirane vode. Pri temperaturi 20 °C (68 °F) izmjeri se trajanje istjecanja t_0, koje ne smije biti kraće od 200 sekundi, s preciznošću najmanje $\pm 0{,}1$ s. Pomoću vrijednosti ν_0 iz tablice B-45 i izmjerene vrijednosti t_0 dobivamo konstantu viskozimetra C_0 računanjem

$$C_0 = \nu_0/t_0 - B/t_0, \qquad (6.3\text{-}5)$$

gdje je B tzv. korekcija za kinetičku energiju, koja se uzima u obzir samo u slučaju ako ima primjetan utjecaj na rezultat (inače se umjesto jednadžbe 6.3-5 upotrebljava lijeva 6.3-2).

Na opisani način učinjen je prvi korak: saznali smo kolika je konstanta C_0 prvog od preciznih viskozimetara u slogu. Pomoću tog istog viskozimetra sada izmjerimo kinematičku viskoznost *druge tekućine* (veće viskoznosti, ljepljivije), time je učinjen drugi korak. Pomoću ove druge tekućine na analogan način utvrdimo konstantu *drugog viskozimetra*, koji ima kapilaru većeg promjera; to je treći korak. I tako se postupak baždarenja sloga viskozimetara metodom »korak naviše« nastavlja na sve šire kapilare i na sve viskoznije tekućine.

Pri tom temperatura mjernih uređaja i tekućina treba da je stalna, tj. ona s kojom smo započeli opisanu seriju mjerenja (u našem slučaju 20 °C). Ako to nije slučaj, moraju se uzeti u obzir temperaturne korekcije (odlomak 6.3.4). Dok standardno

odstupanje mjernog rezultata rutinskih viskozimetara (prema ASTM) iznosi oko $\pm 0{,}2\,\%$, standardno odstupanje srednje vrijednosti dobivene *Cannon*ovim i *Ubbelohde*ovim preciznim viskozimetrima iznosi oko $\pm 0{,}1\,\%$. Za komparaciju navodimo da relativna nesigurnost poznavanja viskoznosti svježe destilirane vode iznosi oko $\pm 3 \cdot 10^{-4} = \pm 0{,}03\,\%$, a »uljnih standarda« oko $\pm 0{,}05\,\%$. Nesigurnost poznavanja apsolutne vrijednosti izmjerene kinematičke viskoznosti ne ovisi, međutim, samo o preciznosti viskozimetara, već i o dva druga važna elementa: o stvarnoj vrijednosti viskoznosti vode i o pažnji s kojom su prilikom mjerenja uzete u obzir korekcije.

6.3.4. Korekcije usporedbenih viskozimetara. Pri najpreciznijim mjerenjima viskoznosti mora se uzeti u obzir sedam različitih korekcija koje ćemo spomenuti u nastavku. Utjecaj *ubrzanja zemljine teže* uzima se u obzir korekcijskom jednadžbom

$$C_2 = C_1 g_2/g_1,$$

gdje slovo g predstavlja ubrzanje zemljine teže; indeks 1 odnosi se na vrijednosti g i C na mjestu gdje je viskozimetar baždaren, a indeks 2 na mjesto gdje se on stvarno upotrebljava. Ovaj utjecaj može uzrokovati pogrešku do 0,2 %.

Utjecaj *temperature* na konstantu viskozimetra C može biti znatan ako se viskozimetar upotrebljava pri drukčijoj temperaturi nego što je ona pri kojoj je bio baždaren. Za *Cannon*ov precizni viskozimetar korekcija iznosi 0,1 % ako se temperatura mijenja od 38 °C (100 °F) do 99 °C (210 °F), dok za *Ubbelohde*ov viskozimetar ova korekcija nije potrebna. Podrobne upute o tome kako se temperaturne korekcije uzimaju u obzir sadrži dodatak (appendix) citiranih standarda USA ASTM D 445-61. Utjecaj *nevertikalnosti* viskozimetra prilikom mjerenja ne treba uzimati u obzir ako je kut otklona α od vertikale manji od 1°. Za veće otklone (od vertikale) viskozimetara koji su izrađeni u obliku slova U pogreška zbog nevertikalnosti iznosi $[1 - \cos\alpha \pm (b/h) \sin\alpha]$, gdje je b horizontalan pomak cijevi, a h srednja efektivna razina tekućine. Utjecaj *uzgona* uzima se u obzir na uobičajeni način, tj. proporcionalan je omjeru gustoće zraka i gustoće tekućine (vidi odsječke A.9.3 i B.3.5).

Takozvana korekcija za *kinetičku energiju* B, koju smo imali uz jednadžbu (6.3-5), potrebna je zbog toga jer se strujanje tekućine kroz kapilaru ne pokorava u potpunosti *Poiseuille*ovom zakonu. Vrijednost korekcijskog faktora B iznosi

$$B = \frac{mV}{8\pi L},$$

gdje je m korekcijski koeficijent, V volumen tekućine koja istječe iz viskozimetra, a L duljina kapilare. Koeficijent m je manji kad krajevi kapilare završavaju u obliku proširene mlaznice, a ne odsječeno. Za vrlo precizne viskozimetre utjecaj faktora B pri 20 °C spušta se i do samo 0,04 %.

Utjecaj *površinske napetosti* nastaje u dva slučaja: 1) ako gornji i donji meniskus tekućine mijenjaju svoj promjer u toku istjecanja, 2) ako se površinska napetost baždarne tekućine razlikuje od napetosti mjerene tekućine. Najveći je utjecaj onda ako se viskozimetar baždari vodom, a upotrebljava za ulje; za rutinski *Ostwald*ov viskozimetar u takvom slučaju potrebna korekcija iznosi oko 0,47 % pri 38 °C (100 °F), a za *Cannon*ov precizni viskozimetar oko 0,1 %. Korekcija zbog utjecaja površinske napetosti proporcionalna je izrazu

$$\frac{1}{gh}\left(\frac{f_v}{\rho_v} - \frac{f_u}{\rho_u}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

gdje simboli označuju: g — ubrzanje zemljine teže, h — prosječna razlika razina koja uzrokuje strujanje tekućine, f_v — površinska napetost vode, ρ_v — gustoća vode, f_u — površinska napetost ulja, ρ_u — gustoća ulja, r_1 — srednji radni polumjer spremnika iz kojeg istječe tekućina, r_2 — srednji polumjer donjeg spremnika. Na primjer površinska napetost vode pri 20 °C (68 °F) iznosi $f_v = 0{,}07275$ N/m².

Utjecaj *zagrijavanja tekućine* nastaje stoga jer se zbog trenja tekućine o kapilaru razvija toplina koja podiže temperaturu tekućine. I u slučaju kad se precizni viskozimetar nalazi u kupki konstantne temperature, taj se utjecaj ne može izbjeći, jer je koeficijent prenošenja topline malen kako za ulje tako i za staklo. U većini slučajeva, međutim, ta se korekcija može zanemariti. Na primjer u *Cannon*-ovu preciznom viskozimetru sa $h = 47$ cm porast temperature ulja zbog ovog efekta iznosi oko 0,002 °C, a u rutinskom viskozimetru modificirane *Ostwald*ove izvedbe samo oko 0,0006 °C.

6.4. Jedinice dinamičke viskoznosti

6.4.1. Jedinica dinamičke viskoznosti Ns/m². To je jedinica dinamičke viskoznosti u Međunarodnom sistemu jedinica (SI). Jedinicu SI Ns/m² možemo izvesti iz definicijske jednadžbe dinamičke viskoznosti η (6.1-2). Ako namjesto veličina sila F, površina A, duljina z i brzina v u toj jednadžbi napišemo jedinice SI, iz jednadžbe $\eta = (F/A)\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}v$ dobivamo jedinicu dinamičke viskoznosti SI $[\eta]_M$

$$[\eta]_M = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2},$$

gdje je N = newton = kg m/s² (vidi odlomak 4.2.1). Prema tome je

$$\text{jedinica dinamičke viskoznosti SI} = \frac{\text{newton} \times \text{sekunda}}{\text{kvadratni metar}}.$$

U skladu s desnom jednadžbom (6.1-2) $\tau = \eta\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ možemo izreći definiciju te jedinice: »Newtonsekunda po kvadratnom metru je dinamička viskoznost tekućine u laminarnom strujanju u kojoj nastaje tangencijalna napetost 1 N/m² pri gradijentu brzine 1/s (= ms^{-1}/m) okomitom na smjer strujanja.« Jedinica SI Ns/m² još nema vlastitog imena (vidi odlomak 6.4.2). U nekim publikacijama nalazimo jedinicu dinamičke viskoznosti SI napisanu u obliku kg/(sm), jer je zbog N = kg m/s²

$$\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{sm}}.$$

Na jedinicu Ns/m² dosta se teško primjenjuju decimalni višekratnici iz tablice A-1 (dekadski uglavnom nisu ni potrebni, jer se u stvarnosti susrećemo samo tvari s viskoznošću manjom od 1 Ns/m²). Zapravo se teško primjenjuje samo višekratnik m = mili = 0,001, jer je njegova kratica posve ista, čak je i uspravno pisana, kao i kratica jedinice metar = m. Tako je, na primjer,

$$\frac{\mathrm{mNs}}{\mathrm{m}^2} = 10^{-3}\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2},$$

Tablica **B-46**

Dvostrani odnosi među jedinicama dinamičke viskoznosti osnovanima na jedinicama Ns/m^2 i poise

Jedinica		Kratica	$\frac{Ns}{m^2}$	$\frac{mNs}{m^2}$	$\frac{\mu Ns}{m^2}$	P	cP	mP
newtonsekunda po kvadratnom metru	=	$\frac{Ns}{m^2}$	1	10^3	10^6	10^1	10^3	10^4
milinewtonsekunda po kvadratnom metru	=	$\frac{mNs}{m^2}$	10^{-3}	1	10^3	10^{-2}	1	10^1
mikronewtonsekunda po kvadratnom metru	=	$\frac{\mu Ns}{m^2}$	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{-5}	10^{-3}	10^{-2}
poise	=	P	10^{-1}	10^2	10^5	1	10^2	10^3
centipoise	=	cP	10^{-3}	1	10^3	10^{-2}	1	10^1
milipoise	=	mP	10^{-4}	10^{-1}	10^2	10^{-3}	10^{-1}	1

pa jedinicu mNs/m^2 valja čitati ovako: »milinewtonsekunda po kvadratnom metru«. Sa drugim decimalnim višekratnikom — mikro, koji uz mili praktički gotovo jedini dolazi u obzir za primjenu, nema teškoća:

$$\frac{\mu Ns}{m^2} = 10^{-6}\frac{Ns}{m^2} = 10^{-3}\frac{mNs}{m^2}.$$

Dvostrane odnose jedinica dinamičke viskoznosti Ns/m^2, mNs/m^2 i $\mu Ns/m^2$ prema tzv. CGS jedinicama sadrži tablica B-46, a odnose prema nekim drugim metričkim i angloameričkim jedinicama sadrži tablica B-47.

6.4.2. Jedinica dinamičke viskoznosti bernoulli. U prošlom odlomku 6.4.1 vidjeli smo da primjena decimalnog višekratnika $m = mili = 10^{-3}$ na jedinicu Ns/m^2 može uzrokovati neprilike, možda i pogreške. U svakom slučaju, u primjeni jedinice mNs/m^2 — a njena vrijednost vrlo je prikladna u svakodnevnim proračunima viskoznosti (npr. voda ima η oko 1 mNs/m^2, eter oko 0,25 mNs/m^2, glicerin oko 11 mNs/m^2 itd.) — potreban je poseban oprez; to su nam mogli ilustrirati i primjeri u odlomcima 6.1.2, 6.2.1 i u odsječku 6.3 kao i sama tablica B-45.

Pa i sama je jedinica dinamičke viskoznosti SI Ns/m^2 glomazna; sastoji se čak od *triju* drugih jedinica SI. Za jedinice SI nekih veličina, koje se sastoje samo od

Tablica **B-47**

Dvostrani odnosi među metričkim i angloameričkim

Jedinica		Kratica	$\frac{Ns}{m^2}$	P
newtonsekunda po kvadratnom metru	=	$\frac{Ns}{m^2}$	1	10^1
poise	=	P	10^{-1}	1
milinewtonsekunda po kvadnom metru	=	$\frac{mNs}{m^2}$	10^{-3}	10^{-2}
kilopondsekunda po kvadratnom metru	=	$\frac{kp\,s}{m^2}$	9,806 65	9,806 65 ·10
poundal second per square foot	=	$\frac{pdl\,s}{ft^2}$	1,488 16	1,488 16 ·10
pound-force second per square foot	=	$\frac{lbf\,s}{ft^2}$	4,788 03 ·10	4,788 03 ·10²

dviju drugih jedinica SI, usvojena su posebna imena, npr. J = joule = Nm, W = = watt = J/s, C = coulomb = As, Wb = weber = Vs, T = tesla = Wb/m² itd. Stoga autor smatra da bi i jedinica dinamičke viskoznosti u Međunarodnom sistemu jedinica trebalo da dobije *vlastito ime*. Predlaže da to bude

$$[\eta]_M = \text{bernoulli} = B = Ns/m^2$$

u počast velikom teoretičaru hidrodinamike *Danielu Bernoulliju* (1700 — 1782), koji je i uveo taj termin. Kratica jedinice bernoulli može biti veliko slovo B, jer ne postoji ni jedna jedinica SI kojoj bi kratica mogla biti B. Na taj bismo način imali, na primjer,

$$\text{milibernoulli} = mB = 10^{-3}\ Ns/m^2, \quad B = Ns/m^2 = 10^3\ mB,$$

$$\text{mikrobernoulli} = \mu B = 10^{-6}\ Ns/m^2, \quad B = Ns/m^2 = 10^6\ \mu B \text{ itd.},$$

pa bismo za dinamičku viskoznost vode pisali $\eta = 1\,mB$, glicerina 11 mB itd. Lako bi se preračunavali i podaci iz starije literature, jer je milibernoulli = mB = centipoise = cP (vidi odlomak 6.4.3).

Korisno je i poučno jedinicu dinamičke viskoznosti SI $[\eta]_M = Ns/m^2$ = bernoulli = B (prijedlog!) dovesti u vezu s jedinicom tlaka SI $[p]_M = N/m^2$ = men-

jedinicama dinamičke viskoznosti

$\frac{mNs}{m^2}$	$\frac{kps}{m^2}$	$\frac{pdls}{ft^2}$	$\frac{lbfs}{ft^2}$
10^3	0,101972	0,671969	$2{,}08854 \cdot 10^{-2}$
10^2	$1{,}01972 \cdot 10^{-2}$	$6{,}71969 \cdot 10^{-2}$	$2{,}08854 \cdot 10^{-3}$
1	$1{,}01972 \cdot 10^{-4}$	$6{,}71969 \cdot 10^{-4}$	$2{,}08854 \cdot 10^{-5}$
$9{,}80665 \cdot 10^3$	1	6,58976	0,204816
$1{,}48816 \cdot 10^3$	0,151570	1	$3{,}10810 \cdot 10^{-2}$
$4{,}78803 \cdot 10^4$	4,88243	$3{,}21740 \cdot 10$	1

deljejev (mend) = M, čiji smo naziv predložili u odsječku 4.3.2. Eliminacijom jedinice površine SI m^2, iz navedenih jednadžbi među jedinicama proizlazi veza B = Ms ili M = B/s, odnosno riječima

bernoulli (B) = mendeljejev (M) × sekunda (s).

Prihvaćenjem naziva »bernoulli« i »mendeljejev« nastali bi, dakle, među jedinicama SI dinamičke viskoznosti η i tlaka p analogni odnosi kakvi vladaju među jedinicama SI u mehanici i elektromagnetizmu. To su na primjer:

J = Nm, joule = newton × metar,

W = J/s, watt = joule/sekunda,

C = As, coulomb = amper × sekunda,

V = W/A, volt = watt/amper itd.

U primjeni jedinica pri računanju, a naročito u nastavi, ovi odnosi među jedinicama pokazali su se izvanredno korisnima.

U odlomku 6.5.1 predlažemo naziv za još jednu jedinicu SI: »lomonosov« = = L za jedinicu SI veličine »kinematička viskoznost« ν, dakle $[\nu]_M = m^2/s = L$. Iz $B = Ms = Ns/m^2$ i $L = m^2/s$ lako je uspostaviti vezu N/B, odnosno riječima

$$\text{lomonosov (L)} = \text{newton (N)} : \text{bernoulli (B)},$$

a isto tako i niz drugih odnosa između svih triju jedinica SI kojima smo predložili vlastita imena, npr.

$$M = \frac{N}{m^2} = \frac{LB}{m^2} = \frac{B}{s} = \frac{N}{Ls} \text{ itd.}$$

Na konkretnim primjerima čitatelj se može lako sam uvjeriti kako je jednostavno i pouzdano na jedinice M, B i L primjenjivati dekadske i decimalne višekratnike iz tablice A-1.

6.4.3. Jedinica dinamičke viskoznosti poise (kratica: P; čitaj »poaz«) jedinica je tzv. fizikalnog (CGS) sistema jedinica (vidi odsječak 8.2). To je koherentna jedinica tog sistema definirana analogno definiciji jedinice SI Ns/m^2 u odlomku 6.4.1. Za jedinicu sile odabran je dyn, za jedinicu površine cm^2, dok je jedinica brzine cm/s. Stoga je

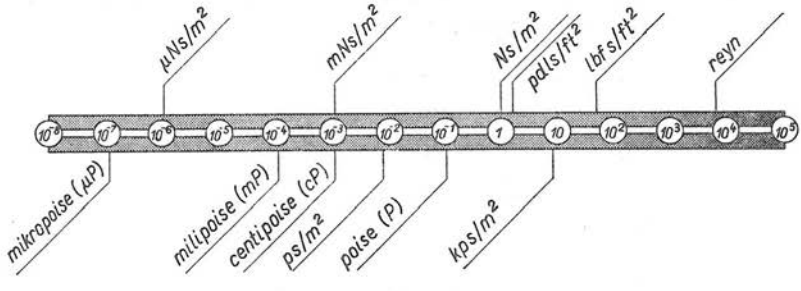
$$\text{poise} = P = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}\,\frac{\text{cm}}{\text{cm/s}} = \frac{\text{dyn s}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{g}}{\text{s cm}},$$

jer je $\text{dyn} = \text{g cm/s}^2$ (vidi odlomak 4.2.3). Svoj naziv ova jedinica sistema CGS dobila je po francuskom učenjaku *J. L. M. Poiseuille*u (1799 — 1869). Na poise = P primjenjuju se neki decimalni višekratnici:

$$\text{centipoise} = \text{cP} = 10^{-2}\,\text{P} = 10^{-3}\,\text{Ns/m}^2 = 1\ \text{mNs/m}^2,$$

$$\text{milipoise} = \text{mP} = 10^{-3}\,\text{P} = 10^{-4}\,\text{Ns/m}^2 = 100\ \mu\text{Ns/m}^2,$$

$$\text{mikropoise} = \mu\text{P} = 10^{-6}\,\text{P} = 10^{-7}\,\text{Ns/m}^2 = 0{,}1\ \mu\text{Ns/m}^2.$$



Sl. B.32. Grubi grafički prikaz međusobnih odnosa jedinica dinamičke viskoznosti u odnosu na jedinicu SI Ns/m^2

Dvostrane odnose među jedinicama SI i jedinicama sistema CGS sadrži tablica B-46, a odnos jedinice poise prema nekim drugim jedinicama dinamičke viskoznosti, uključivo angloameričke, sadrži tablica B-47.

Primjer. Izračunajmo odnos između jedinice poise i jedinice SI Ns/m^2! Budući da je $P = dyn\,s/cm^2$, a $dyn = 10^{-5}N$ i $cm^2 = 10^{-4}\,m^2$, usporedbom slijedi

$$\frac{\text{poise}}{Ns/m^2} = \frac{dyn\,s}{cm^2\,Ns/m^2} = \frac{10^{-5}}{10^{-4}} = 10^{-1} = 0{,}1,$$

tj. poise = P = 0,1 Ns/m^2, odnosno $Ns/m^2 = 10$ P.

6.4.4. Ostale metričke jedinice dinamičke viskoznosti su one koje se izvode iz kiloponda, sekunde i sata. Tako je, na primjer, koherentna jedinica dinamičke viskoznosti u tzv. Tehničkom sistemu jedinica (vidi odsječak 8.1)

$$\frac{kp\,s}{m^2} = \frac{\text{kilopond} \times \text{sekunda}}{\text{kvadratni metar}} = 9{,}806\,65\,\frac{Ns}{m^2}.$$

Upotrebljava se i 1000 puta manja jedinica

$$\frac{\text{pond} \times \text{sekunda}}{\text{kvadratni metar}} = \frac{ps}{m^2} = 9{,}806\,65 \cdot 10^{-3}\,\frac{Ns}{m^2}.$$

Obrnute odnose sadrži tablica B-47, a odnose jedinice $kp\,s/m^2$ prema angloameričkim jedinicama prikazuje tablica **30** u prilogu knjige.

6.4.5. Angloameričke jedinice dinamičke viskoznosti. U skladu s definicijom veličine »dinamička viskoznost« (vidi odlomak 6.1.1), jedinica dinamičke viskoznosti u sistemu ft-s-lb (odlomak 11.6.1) jest poundal second per square foot, tj.

$$\frac{pdl \cdot s}{ft^2} = 1{,}488\,16\,\frac{Ns}{m^2},$$

gdje je N oznaka za jedinicu sile Međunarodnog sistema newton. Obrnuto vrijedi

$$\frac{Ns}{m^2} = 0{,}671\,969\,\frac{pdl \cdot s}{ft^2}.$$

U angloameričkom tehničkom sistemu jedinica (vidi odlomak 11.6.2) jest jedinica dinamičke viskoznosti pound-force second per square foot

$$\frac{lbf \cdot s}{ft^2} = 47{,}8803\,\frac{Ns}{m^2} = 32{,}174\,\frac{pdl \cdot s}{ft^2}.$$

Obrnuti odnosi zabilježeni su u tablici B-47.

U angloameričkoj literaturi može se ponekad zapaziti jedinica »reyn« (po *Reynolds*u), koja ne pripada ni jednom sistemu jedinica, a definirana je ovako

$$\text{reyn} = \frac{\text{pound-force second}}{\text{square inch}} = \frac{lbf \cdot s}{in^2}.$$

Budući da je $in^2 = ft^2/144$ (vidi odlomak 11.3.4), to vrijedi

$$\text{reyn} = \frac{lbf \cdot s}{in^2} = 144\,\frac{lbf \cdot s}{ft^2} = 6{,}894\,76 \cdot 10^3\,\frac{Ns}{m^2}.$$

Dvostrane odnose među svim češće upotrebljavanim metričkim i angloameričkim jedinicama dinamičke viskoznosti sadrži tablica **30** u prilogu knjige.

6.5. Jedinice kinematičke viskoznosti

6.5.1. Jedinice m^2/s, cm^2/s i mm^2/s. Veličinu »kinematička viskoznost« ν definirali smo u odlomku 6.1.2 kao omjer dinamičke viskoznosti η i gustoće ρ, dakle $\nu = \eta/\rho$. Budući da je u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) jedinica dinamičke viskoznosti $[\eta]_M = Ns/m^2$ (vidi odlomak 6.4.1), a jedinica gustoće $[\rho]_M = kg/m^3$ (vidi odlomak 3.4.1), to je jedinica kinematičke viskoznosti SI $[\nu]_M = [\eta]_M : [\rho]_M = Ns\,m^{-2} : kg\,m^{-3} = kgm\,s^{-2}\,s\,m^{-2} : kg\,m^{-3} = m^2 s^{-1} = m^2/s$. To znači da je

$$\text{jedinica kinematičke viskoznosti SI} = \frac{\text{kvadratni metar}}{\text{sekunda}} = \frac{m^2}{s}.$$

U skladu s definicijskom jednadžbom kinematičke viskoznosti $\nu = \eta/\rho$ može se izreći definicija njene jedinice SI: »Kvadratni metar u sekundi jest kinematička viskoznost tekućine gustoće 1 kg/m^3 čija dinamička viskoznost iznosi 1 Ns/m^2.«

Decimalni višekratnici jedinice m^2/s upotrebljavaju se, ali s onim istim oprezom kako se upotrebljavaju pri metričkim jedinicama površine (vidi odlomak 1.5.2).

$$cm^2/s = (cm)^2/s = 10^{-4}\ m^2/s; \qquad m^2/s = 10^4\ cm^2/s,$$
$$mm^2/s = (mm)^2/s = 10^{-6}\ m^2/s; \qquad m^2/s = 10^6\ mm^2/s.$$

Tablica **B-48**

Dvostrani odnosi među metričkim i angloameričkim

Jedinica		Kratica	$\frac{m^2}{s}$	$\frac{cm^2/s}{St}$
kvadratni metar u sekundi	=	$\frac{m^2}{s}$	1	10^4
kvadratni centimetar u sekundi stokes	= =	cm^2/s St	10^{-4}	1
kvadratni milimetar u sekundi centistokes	= =	mm^2/s cSt	10^{-6}	10^{-2}
milistokes	=	mSt	10^{-7}	10^{-3}
kvadratni metar u satu	=	$\frac{m^2}{h}$	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	2,77778
foot squared per second	=	$\frac{ft^2}{s}$	$9{,}29030 \cdot 10^{-2}$	$9{,}29030 \cdot 10^{2}$
inch squared per second	=	$\frac{in^2}{s}$	$6{,}4516 \cdot 10^{-4}$	6,4516

Ove bi se teškoće mogle izbjeći ako bi se za jedinicu *dinamičke* viskoznosti SI η prihvatio naziv i kratica bernoulli = B = Ns/m² (vidi odlomak 6.4.2). Odavde je, naime, m² = Ns/B, a budući da je $[\nu]_M = m^2/s$, uvrštenjem dobivamo

$$[\nu]_M = \frac{m^2}{s} = \frac{Ns/B}{s} = \frac{N}{B} = \frac{\text{newton}}{\text{bernoulli}},$$

što je slično relaciji joule/vat = sekunda. Na ovako oblikovanu jedinicu kinematičke viskoznosti lako bi se primjenjivali decimalni višekratnici

$$mN/B = 10^{-3}\ N/B = 10^{-3}\ m^2/s = 10\ cm^2/s$$

$$\mu N/B = 10^{-6}\ N/B = 10^{-6}\ m^2/s = 1\ mm^2/s.$$

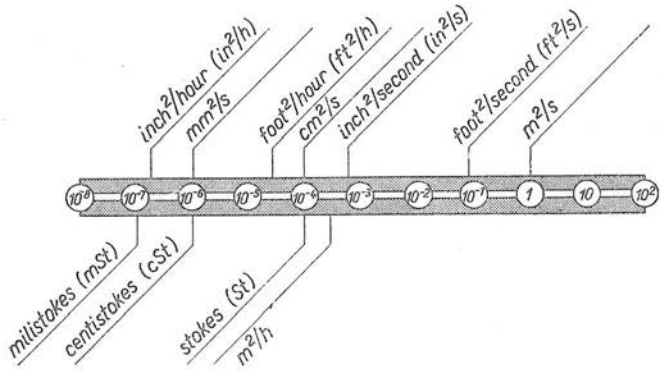
Naravno da se i jedinica N/B = m²/s može nazvati posebnim imenom, npr. »lomonosov« = L, jer bi u tom slučaju primjena decimalnih višekratnika bila još pouzdanija (npr. mL = 10 St, μL = 1 cSt itd.).

Dvostrane odnose razmatranih jedinica kinematičke viskoznosti m²/s, cm²/s i mm²/s prema drugim jedinicama sadrži tablica B-48, a odnose m²/s prema nizu drugih jedinica tablica **31** u prilogu knjige.

jedinicama kinematičke viskoznosti

$\frac{mm^2/s}{cSt}$	mSt	$\frac{m^2}{h}$	$\frac{ft^2}{s}$	$\frac{in^2}{s}$
10^6	10^7	$3{,}6 \cdot 10^3$	$1{,}07639 \cdot 10^1$	$1{,}55 \cdot 10^3$
10^2	10^3	0,36	$1{,}07639 \cdot 10^{-3}$	0,155
1	10^1	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	$1{,}07639 \cdot 10^{-5}$	$1{,}55 \cdot 10^{-3}$
10^{-1}	1	$3{,}6 \cdot 10^{-4}$	$1{,}07639 \cdot 10^{-6}$	$1{,}55 \cdot 10^{-4}$
$2{,}77778 \cdot 10^2$	$2{,}77778 \cdot 10^3$	1	$2{,}98998 \cdot 10^{-3}$	0,430556
$9{,}29030 \cdot 10^4$	$9{,}29030 \cdot 10^5$	$3{,}34451 \cdot 10^2$	1	$1{,}44 \cdot 10^2$
$6{,}4516 \cdot 10^2$	$6{,}4516 \cdot 10^3$	2,32258	$6{,}94444 \cdot 10^{-3}$	1

6.5.2. Jedinica kinematičke viskoznosti stokes (kratica: St; čita se »stouks« ili »stok«) jedinica je tzv. fizikalnog (CGS) sistema jedinica (vidi odsječak 8.2). To je koherentna jedinica tog sistema, definirana analogno definiciji jedinice SI m^2/s u odlomku 6.5.1. Za jedinicu površine odabrana je jedinica cm^2 = kvadratni centimetar, a za vrijeme s = sekunda, jer su to jedinice CGS sistema jedinica.



Sl. B.33. Grubi grafički prikaz međusobnih odnosa jedinica kinematičke viskoznosti u odnosu na jedinicu SI m^2/s

Tako izvedenoj jedinici fizičari su svojevremeno dali poseban naziv

$$\text{stokes} = \text{St} = \text{cm}^2/\text{s}$$

po engleskom učenjaku *G. G. Stokes*u (1819—1903), koji je postigao značajne rezultate u istraživanju laminarnih strujanja.

Na jedinicu stokes = St mnogo se primjenjuju decimalni višekratnici centi i mili:

$$\text{centistokes} = \text{cSt} = 0{,}01\ \text{St} = 10^{-2}\ \text{cm}^2/\text{s} = 1\ \text{mm}^2/\text{s},$$

$$\text{milistokes} = \text{mSt} = 0{,}001\ \text{St} = 10^{-3}\ \text{cm}^2/\text{s} = 0{,}1\ \text{mm}^2/\text{s}.$$

Dvostrane odnose ovih jedinica prema nekoliko drugih jedinica kinematičke viskoznosti sadrži tablica B-48, a još opširnija je tablica **31** u prilogu knjige.

Primjer. Preračunajmo vrijednosti kinematičke viskoznosti vode i zraka iz primjera u odsječku 6.3 na jedinice stokes i centistokes! Tamo smo imali za vodu $\nu_v = 1{,}0038 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$ i za zrak $\nu_z = 15{,}7 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$. Budući da je $m^2/s = 10^4\ St = 10^6\ cSt$, odgovor glasi: $\nu_v = 0{,}010038$ St = 1,0038 cSt, $\nu_z = 0{,}157$ St = 15,7 cSt.

6.5.3. Angloameričke jedinice kinematičke viskoznosti. U skladu s oba angloamerička sistema jedinica (odlomci 11.6.1,2) osnovna jedinica kinematičke viskoznosti je foot squared per second

$$\text{ft}^2/\text{s} = 0{,}092\,903\ \text{m}^2/\text{s},$$

dakle ft^2/s jest kinematička viskoznost tekućine čija je dinamička viskoznost 1 pdl · s/ft^2, a gustoća 1 lb/ft^3. Obrnuta je veza

$$\text{m}^2/\text{s} = 10{,}7639\ \text{ft}^2/\text{s}.$$

Postoji još niz drugih angloameričkih jedinica kinematičke viskoznosti koje proizlaze iz jedinica duljine angloameričkog svijeta. To su npr. in^2/s, ft^2/h itd. Dvostrane odnose među nekim jedinicama kinematičke viskoznosti sadrži tablica B-48, dok potpunije odnose objavljuje tablica **31** u prilogu knjige.

6.6. Industrijske skale kinematičke viskoznosti

6.6.1. Načelo industrijskih skala. U odsječku 6.3 opisali smo metodu *usporedbenog* mjerenja viskoznosti tekućina i došli do jednadžbe (6.3-1), koja kaže da se u istom kapilarnom viskozimetru odnose kinematičke viskoznosti ν dviju

tekućina jednako kao i trajanja istjecanja t jednakog volumena V obiju tekućina pri istoj temperaturi. U skladu s time na slici B.29 prikazali smo *Ostwald*ov viskozimetar u američkoj izvedbi prema ASTM. Spomenutu jednadžbu (6.3-1) možemo napisati u obliku

$$\nu = \nu_0 \frac{t}{t_0}, \tag{6.6-1}$$

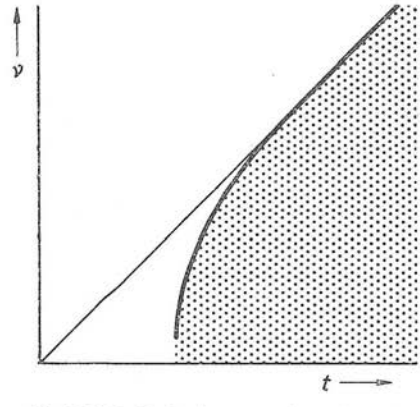
gdje su veličine referentne tekućine opremljene indeksom nula.

Iz jednadžbe (6.6-1) razabire se da bismo za precizno *propisani viskozimetar* (propisana kapilara ili otvor za istjecanje mjerene tekućine, propisani volumen tekućine, propisani oblik uređaja) omjer ν_0/t_0 mogli proglasiti konstantom, pa bi onda (6.6-1) prešlo u oblik

$$\nu = At, \tag{6.6-2}$$

gdje je $A = \nu_0/t_0$. Jednadžba (6.6-2) pokazuje da se kinematička viskoznost ν tekućinâ može ustanoviti samo *jednim* mjerenjem trajanja istjecanja t pri stanovitoj temperaturi.

Naravno da konstantu A treba utvrditi prethodnim baždarenjem viskozimetra koji će djelovati prema jednadžbi (6.6-2). To se može učiniti ovako: kroz baždareni viskozimetar propusti se stanovit volumen V neke tekućine (npr. vode) pri temperaturi ϑ. Pri tom je izmjereno trajanje istjecanja t_0. Zatim se pri istoj temperaturi ϑ u nekom drugom viskozimetru, npr. u jednom od »direktnih« (vidi odsječak 6.2), izmjeri vrijednost ν_0 kinematičke viskoznosti te iste tekućine. S izračunatom konstantom $A = \nu_0/t_0$ viskozimetar je baždaren, pa se njime preko jednadžbe (6.6-2) može mjeriti kinematička viskoznost ν drugih tekućina. Pri tom se mjeri trajanje istjecanja t propisanog volumena V mjerene tekućine pri temperaturi ϑ na kojoj je taj viskozimetar baždaren. To znači da je trajanje istjecanja t *mjera viskoznosti* (podrobnosti vidi u odsječku 6.3).



Sl. B.34. Općenita veza između trajanja istjecanja t tekućine iz viskozimetra i kinematičke viskoznosti ν

Jednadžba (6.6-2) vrijedi na žalost samo za vrlo malen broj tekućina (za tzv. newtonovske tekućine), odnosno samo za stanovit raspon vrijednosti veličine ν ostalih tekućina. Općenito je veza između kinematičke viskoznosti ν i trajanja istjecanja t tekućina funkcija oblika

$$\nu = Bt - \frac{C}{t} \tag{6.6-3}$$

koja je načelno prikazana na slici B.34.

Industrijsko mjerenje veličine ν viskozimetrom koji djeluje u skladu s jednadžbom (6.6-3) svodi se, dakle, na mjerenje vremena istjecanja t propisanog volumena V mjerene tekućine pri propisanoj temperaturi. U skladu s time je i termino-

logija koja prati takva mjerenja. Kaže se, na primjer, »viskoznost ulja pri temperaturi 130 °F iznosi 105 SUS (Saybolt Universal Seconds)«. To znači da je iz propisanog *Saybolt*ova viskozimetra (vidi odlomak 6.6.4) propisani volumen ulja ($V = 60$ cm³) pri temperaturi 130 °F (°F = stupanj Fahrenheita; o angloameričkim jedinicama temperature vidi odsječak D.3.4) istjecao 105 sekundi.

Takav se rezultat onda opisuje riječima ovako: »viskoznost iznosi 105 Sayboltovih univerzalnih sekundi«. S metrološkog stanovišta citirana je izjava dvostruko pogrešna: niti se viskoznost može izražavati jedinicama vremena (kao što je ispravno npr.: masa $m = 40$ kilograma), niti postoje nekakve *Saybolt*ove (i *Redwood*ove i *Engler*ove; vidi odlomke 6.6.3,4,5) sekunde. Ipak, pri tom je loša samo terminologija, mjerenje i rezultati su u redu! Izjave nalik na »viskoznost iznosi 105 SUS« samo su svojevrstan »žargon« ili »stenogram« usvojen u industriji i laboratorijima čitava svijeta. Naša razlaganja u ovom i u narednim odlomcima ovog odsječka 6.6 pokušat će stoga da taj žargon donekle uklope u okvire metrologije osnovane na načelima iz poglavlja A.1.

Pri kraju ovog izlaganja kažimo još zašto se upotrebljavaju takvi propisani viskozimetri, a ne oni za direktno mjerenje iz odsječka 6.2. Danas se to čini zato što se u suvremenoj industriji čitavog svijeta *svakodnevno* obavlja nekoliko milijuna mjerenja viskoznosti, pa je prirodno da se to želi obaviti *brzo i jeftino*. Direktne metode nisu ni jedno ni drugo. U prošlosti, dok je industrija još bila slaba, razlog je bio taj što je viskoznost tekućina (ulja) valjalo mjeriti u vrijeme kada još nije bila razrađena primjena teorije viskoznosti tekućina.

6.6.2. Englerova skala. U Evropi i u Sovjetskom Savezu upotrebljava se *Engler*ova viskozimetrijska skala koja se temelji na propisanom *Engler*ovu viskozimetru. Za referentnu tekućinu odabrana je destilirana *voda* temperature 20 °C, a propisani volumen iznosi $V = 200$ cm³. Svi bitni dijelovi viskozimetra strogo su definirani. Tako su, na primjer, izmjere blago stožaste kapilare (otvora) tolerirane sa $2{,}9 \pm 0{,}02$ mm i $2{,}8 \pm 0{,}02$ mm. Trajanje istjecanja referentne tekućine t_0 kreće se od 50...53 sekunde, što ovisi o izvedbi uređaja (postoje još engleski i američki *Engler*ov viskozimetar čiji se mjerni rezultati neznatno razlikuju od evropskog).

Ako se kroz *Engler*ov viskozimetar propusti $V = 200$ cm³ tekućine kinematičke viskoznosti ν, trajanje istjecanja iznosit će t. Omjer t/t_0 naziva se

$$\text{Englerova viskoznost } N = t/t_0, \tag{6.6-4}$$

a omjer $t/t_0 = 1$ naziva se

$$\text{Englerov stupanj} = {}^\circ\text{E} = t/t_0 = 1.$$

To znači da destilirana voda temperature 20 °C ima »Englerovu viskoznost« $N = 1$ °E, jer je $t = t_0$. Pri temperaturi ϑ nižoj od 20 °C bit će međutim za vodu $t > t_0$, dakle $N_\vartheta > 1$ °E.

Eksperimentalno je utvrđeno da za područje $\nu > 60 \cdot 10^{-6}$ m²/s (60 cSt) vrijedi jednadžba (6.6-2), koja se za *Engler*ov viskozimetar može napisati u obliku

$$\nu = D_0 N. \tag{6.6-5}$$

Konstanta D_0 formalno je dobivena uvrštenjem izraza (6.6-4) u (6.6-2), dakle $D_0 = A t_0$, dok je eksperimentalno utvrđena vrijednost

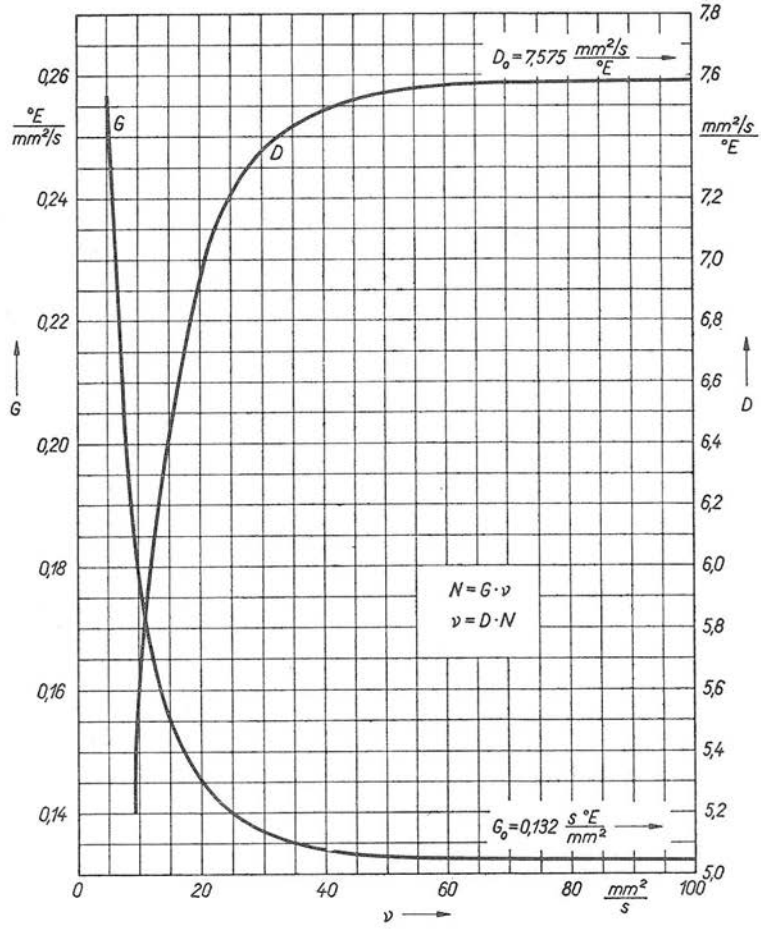
$$D_0 = 7{,}575 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2/\text{s}}{{}^\circ\text{E}} = 7{,}575 \frac{\text{cSt}}{{}^\circ\text{E}}.$$

Obrnutu vezu, tj. ovisnost Englerove viskoznosti N o kinematičkoj viskoznosti ν, za područje $\nu > 60 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} = 60\ \mathrm{cSt}$ možemo definirati uz $G_0 = 1/D_0$

$$N = G_0 \nu; \quad G_0 = 0{,}1320 \cdot 10^6 \frac{^\circ\mathrm{E}}{\mathrm{m^2/s}} = 0{,}132 \frac{^\circ\mathrm{E}}{\mathrm{cSt}}. \tag{6.6-6}$$

Vrijednost konstante G_0 propisana je njemačkim standardom DIN 51560. Standard ne dopušta preračunavanje Englerove viskoznosti N u kinematičku viskoznost ν prema jednadžbi (6.6-5), kako bi se izbjegla eventualna zabluda o većoj sigurnosti poznavanja ν nego što je izmjereno *Engler*ovim viskozimetrom.

Za područje $\nu < 60 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$ spomenuti standard daje tabelarni odnos između ν i N. Izvadak iz te tablice donose prva dva stupca naše tablice B-49. U njoj je kinematička viskoznost ν navedena u jedinici $\mathrm{mm^2/s}$ ($= \mathrm{cSt} = 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$; vidi odlomak 6.5.2), a Englerova viskoznost N u Englerovu stupnju $= {}^\circ\mathrm{E} = 1$ (°E je, dakle, tzv. brojčana jedinica kao što je npr. radijan ili okretaj; vidi odlomke 1.4.1 i 2.5.3).



Sl. B.35. Vrijednosti veličina D i G u ovisnosti o kinematičkoj viskoznosti ν

Za računanje je možda prikladniji grafički prikaz kontinuirane funkcije G i D od ν. Stoga smo na slici B.35 sastavili dijagrame ovisnosti veličina G i D o kinematičkoj viskoznosti za područje do 100 mm²/s (cSt). Pomoću G i D iz slike B.35 računa se u skladu s jednadžbom (6.6-2), tj.

$$N = G\nu; \qquad \nu = DN. \tag{6.6-7}$$

Za područje $\nu > 60 \cdot 10^{-6}$ m²/s = 60 cSt Englerova viskoznost N i kinematička viskoznost ν međusobno se preračunavaju pomoću jednadžbi (6.6-6,5), tj. u tom području krivulja na slici B.34 prešla je praktički u pravac. Položaj Englerove skale u odnosu na neke druge viskozimetrijske skale koje se upotrebljavaju u industriji prikazuje slika B.36.

Primjer 1. Izračunajmo kolika je kinematička viskosnost ν neke tekućine pri temperaturi 20 °C, ako Englerova viskoznost iznosi $N = 9$ °E! Budući da je riječ o $\nu > 60 \cdot 10^{-6}$ m²/s, možemo se poslužiti jednadžbom (6.6-5)

$$\nu = 7{,}575 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2/\text{s}}{^\circ\text{E}} \cdot 9\ ^\circ\text{E} = 68{,}175 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 68{,}175\ \text{cSt}.$$

Tablica **B-49**

Ekvivalenti kinematičke viskoznosti u Englerovoj, Redwoodovoj i Sayboltovoj (Universal) viskozimetrijskoj skali

Kinematička viskoznost	Englerova viskoznost	Redwoodova viskoznost (No 1)	Viskoznost Saybolt Universal	
ν; mm²/s (cSt)	N; °E	t_R; s	t_{SU}; s	
	20 °C (68 °F)	70 °F	100 °F	210 °F
2	1,1195	30,215	32,62	32,85
3	1,218	32,725	36,03	36,28
4	1,3075	35,33	39,14	39,41
5	1,394	37,94	42,35	42,65
6	1,4805	40,55	45,56	45,88
7	1,566	43,26	48,77	49,11
8	1,6535	46,07	52,09	52,45
9	1,743	48,93	55,50	55,89
10	1,834	51,80	58,91	59,32
12	2,023	58,02	66,04	66,50
14	2,222	64,50	73,57	74,09
16	2,435	71,32	81,30	81,87
18	2,646	78,31	89,44	90,06
20	2,876	85,64	97,77	98,45
22	3,11	93,17	106,4	107,1
24	3,35	100,7	115,0	115,8
26	3,59	108,4	123,7	124,5
28	3,83	116,2	132,5	133,4
30	4,08	124,1	141,3	142,3
35	4,71	143,75	163,7	164,9
40	5,35	163,7	186,3	187,6
45	5,995	183,8	209,1	210,5
50	6,64	203,9	232,1	233,8
55	7,30	224,0	255,2	257,0
60	7,95	244,2	278,3	280,2
100	13,21	406,1	463,5	466,7

Primjer 2. Kolika je Englerova viskoznost ako je $\nu = 12$ mm²/s? Moramo se poslužiti dijagramom na slici B.35 i lijevom jednadžbom (6.6-7). Iz dijagrama možemo procijeniti približno $G = 0{,}17\,°\mathrm{E}/(\mathrm{mm}^2/\mathrm{s})$. Prema tome je

$$N = G\nu = 0{,}17 \frac{°\mathrm{E}}{\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}} \cdot 12 \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{s}} = 0{,}17 \cdot 12\,°\mathrm{E} = 2{,}04\,°\mathrm{E}.$$

Račun možemo kontrolirati pomoću tablice B-49; iz nje dobivamo $N = 2{,}023\,°\mathrm{E}$.

6.6.3. Englerova sekundna skala. U Engleskoj i USA također se ponekad upotrebljava Englerova viskozimetrijska skala, ali se rezultati mjerenja najčešće izražavaju sekundama (s), a ne stupnjevima Englera (°E). To znači da je t iz jednadžbe (6.6-2) ili (6.6-3) mjera viskoznosti; u ovom slučaju t se naziva »Englerova sekundna viskoznost« i mjeri, dakako, sekundama.

Vezu između »Englerove viskoznosti« N i »Englerove sekundne viskoznosti« t već imamo u jednadžbi (6.6-4), tj. $t = Nt_0$. Prema tome vezu ν s Englerovom sekundnom viskoznošću t možemo u skladu s jednadžbama (6.6-4,5,6,7) napisati u obliku

$$t = g_0\nu, \qquad \nu = d_0 t,$$

što vrijedi za područje $\nu > 60 \cdot 10^{-6}$ m²/s, a pri tom je

$$g_0 = G_0 t_0, \qquad d_0 = D_0/t_0.$$

Obično se uzima da je $t_0 = 51$ s, ali to nije posve korektno, jer se vrijednost trajanja istjecanja t_0 referentne tekućine (vode) zapravo kreće između 50 i 53 sekunde, ovisno o viskozimetru. Stoga ovdje ne navodimo vrijednosti konstanti g_0 i d_0.

Analogno vrijedi i za područje $\nu < 60 \cdot 10^{-6}$ m²/s, tj. »Englerove sekundne viskoznosti« su

$$t = g\nu, \qquad \nu = dt,$$

a pri tom su g i d definirani relacijama

$$g = Gt_0, \qquad d = D/t_0.$$

Ovisnost veličina G i D o ν prikazana je u skladu sa standardom DIN 51560 na dijagramu slike B.35.

Približan položaj Englerove sekundne viskozimetrijske skale u odnosu na neke druge skale prikazan je na slici B.36.

6.6.4. Skala Saybolt Universal je najraširenija industrijska viskozimetrijska skala u USA. Propisani *Saybolt*ov viskozimetar sadrži 60 kubnih centimetara ispitivane tekućine, a promjer kapilare dugačke 12,25 mm iznosi 1,76 mm. Mjeri se trajanje istjecanja t_{SU} tih 60 cm³ tekućine. Općenita veza kinematičke viskoznosti ν s trajanjem istjecanja t (6.6-3) prelazi, dakle, za *Saybolt*ov viskozimetar u oblik

$$\nu = Bt_{SU} - C/t_{SU}, \tag{6.6-8}$$

gdje su vrijednosti konstanti B i C:

$$\text{za } t > 100 \text{ s}: \quad B = 0{,}220 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2, \quad C = 135 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2,$$

$$\text{za } t < 100 \text{ s}: \quad B = 0{,}226 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2, \quad C = 195 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2.$$

Uz slovo t, koje označuje trajanje istjecanja propisanog volumena tekućine iz viskozimetra, stavili smo indeks SU da bismo naznačili da je riječ o trajanju istjecanja

u viskozimetru Saybolt Universal. Veličinu t_{SU} pojedini autori nazivaju »Saybolt Universal Viscosity«, tj. »Sayboltova univerzalna viskoznost«, dok većina autora kaže ovako: »Viskoznost iznosi... Sayboltovih sekundi.« Takvu terminologiju komentirali smo pri kraju odlomka 6.6.1.

Primjer 1. Izračunajmo kolika je kinematička viskoznost tekućine kojoj je izmjerena Sayboltova viskoznost $t_{SU} = 58{,}91$ s (u uobičajenom žargonu Amerikanci bi napisali da viskoznost iznosi 58,91 SUS)! Za ovu vrijednost t_{SU} vrijede vrijednosti konstanti B i C za $t < 100$ s. Pomoću (6.6-8), dakle, dobivamo

$$\nu = 0{,}226 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot 58{,}91\ \mathrm{s} - \frac{195 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{58{,}91\ \mathrm{s}} = 10{,}003 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}},$$

tj. $\nu = 10$ cSt, jer je $\mathrm{m}^2/\mathrm{s} = 10^6$ cSt (vidi odlomak 6.5.2).

Usporedbeni prikaz ekvivalenata kinematičke viskoznosti ν i Sayboltove univerzalne viskoznosti t_{SU} sadrži tablica B-49. U njoj postoje dva stupca: prvi za temperaturu $\vartheta_F = 100\,^\circ\mathrm{F}$ (tome odgovara Celzijeva temperatura $\vartheta = 37{,}8\,^\circ\mathrm{C}$; vidi odsječak D.3.4), te drugi za temperaturu $\vartheta_F = 210\,^\circ\mathrm{F}$ (98,8 °C). Sayboltova viskoznost $t_{SU}(\vartheta_F)$ pri nekoj drugoj temperaturi ϑ_F može se izračunati iz vrijednosti viskoznosti t_{SU} (100 °F) iz tablice B-49 pomoću jednadžbe

$$t_{SU}(\vartheta_F) = t_{SU}(100\,^\circ\mathrm{F})\left[1 + 6{,}4 \cdot 10^{-5}\left(\frac{\vartheta_F}{^\circ\mathrm{F}} - 100\right)\right]. \qquad (6.6\text{-}9)$$

Primjer 2. Sayboltova viskoznost neke tekućine iznosi 55,5 s pri temperaturi 100 °F. Kolika je viskoznost Saybolt Universal pri temperaturi $\vartheta_F = 210\,^\circ\mathrm{F}$? Pomoću jednadžbe (6.6-9) dobivamo

$$t_{SU}(210\,^\circ\mathrm{F}) = 55{,}5\ \mathrm{s}\ [1 + 6{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 110] = 55{,}89\ \mathrm{s}.$$

Vidimo da smo dobili istu vrijednost koju za 210 °F daje tablica B-49. Ovim računom zapravo smo provjerili jednadžbu (6.6-9).

U tablici B-49 navedeni su ekvivalenti veličina ν i t_{SU} samo do stanovite vrijednosti ν. Za ljepljivije tekućine (veća viskoznost) kinematička viskoznost ν preračunava se u Sayboltovu t_{SU} (i obratno) pomoću jednadžbi

$$t_{SU} = L\nu; \qquad \nu = M t_{SU}, \qquad (6.6\text{-}10)$$

gdje je $M = 1/L$. Vrijednosti ovih konstanti iznose pri temperaturama:

100 °F	210 °F
$L = 4{,}635 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2 = 4{,}635$ s/cSt	$L = 4{,}667 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2 = 4{,}667$ s/cSt
$M = 2{,}157 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 0{,}2157$ cSt/s	$M = 2{,}143 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 0{,}2143$ cSt/s.

Primjer 3. Izračunajmo kolika je »viskoznost Saybolt Universal« t_{SU} pri 100 °F, ako je kinematička viskoznost pri toj temperaturi $\nu = 500\ \mathrm{mm}^2/\mathrm{s}$ (= 500 cSt)! Pomoću lijeve jednadžbe (6.6-10) dobivamo

$$t_{SU} = 4{,}635 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2} \cdot 500 \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{s}} = 2317{,}5\ \mathrm{s}.$$

Uobičajena terminologija industrijske viskozimetrije izrazila bi taj rezultat ovako: »viskoznost iznosi 2317,5 Sayboltovih univerzalnih sekundi« (engleski: SUS, Saybolt Universal Seconds).

6.6.5. Skala Saybolt-Furol također se upotrebljava u USA, ali za izražavanje viskoznosti ljepljivijih tvari negoli skala Saybolt Universal. Razliku možemo najbolje zapaziti na slici B.36: za istu kinematičku viskoznost ν je t_{SU} gotovo deset puta veća od t_{SF} (Saybolt-Furol).

Za vrijednosti veće od $\nu = 4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$ ($= 400\ \mathrm{cSt}$) »viskoznost Saybolt-Furol« t_{SU} može se izračunati iz ν pomoću jednadžbe

$$t_{SF} = 4{,}717 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{m^2}} \cdot \nu = 0{,}4717 \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{cSt}} \cdot \nu.$$

Jednadžba vrijedi za temperaturu $\vartheta_F = 122\,^\circ\mathrm{F}$ (prema podacima American Society for Testing Materials).

6.6.6. Redwoodove skale. U USA se upotrebljava tzv. skala Redwood Admirality, koja se temelji na viskozimetru volumena $50\ \mathrm{cm^3}$ i temperaturi $32\,^\circ\mathrm{F}$. Kinematička viskoznost ν i trajanje istjecanja t_{RA} (»viskoznost Redwood Admirality«) tog viskozimetra međusobno su povezani približnom jednadžbom oblika (6.6-3), tj. relacijom

$$\nu = B t_{RA} - C/t_{RA}$$

u kojoj konstante B i C imaju ove vrijednosti:

$$B = 2{,}39 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s^2} = 2{,}39\ \mathrm{cSt/s},$$

$$C = 4{,}03 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2} = 40{,}3\ \mathrm{s \cdot cSt}.$$

U Engleskoj se upotrebljava skala *Redwood Commercial*, koja se obično naziva samo *Redwood*. Ona se bazira na odgovarajućem viskozimetru volumena $50\ \mathrm{cm^3}$ i temperature $60\,^\circ\mathrm{F}$. Prema podacima American Petroleum Institute od godine 1965, kinematičku viskoznost ν i trajanje istjecanja t_R (»Redwoodova viskoznost«) približno povezuje relacija

$$\nu = B t_R - C/t_R$$

u kojoj konstante B i C imaju ove vrijednosti:

$$B = 2{,}60 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s^2} = 0{,}260\ \mathrm{cSt/s},$$

$$C = 1{,}72 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2} = 172\ \mathrm{s \cdot cSt}.$$

Usporedimo li opisane dvije Redwoodove skale, vidjet ćemo da je t_R oko 10 puta veća od t_{RA} za istu kinematičku viskoznost ν (vidi sliku B.36).

6.6.7. Pregled ostalih skala. Uz razmotrene industrijske viskozimetrijske skale postoji još niz drugih koje možemo susresti u tehničkoj operativi. Neke od njih prikazat ćemo ovdje, ali samo u obliku *tabelarne* usporedbe trajanja istjecanja tekućine iz stanovitog viskozimetra s kinematičkom viskoznošću. Takvu ekvivalentnost sadrži tablica B-50 koja vrijedi za temperaturu $25\,^\circ\mathrm{C}$, čemu odgovara Fahrenheitova temperatura $77\,^\circ\mathrm{F}$. Uspoređenih 10 viskozimetrijskih skala uglavnom se upotrebljava u proizvodnji i upotrebi *ulja*. U zaglavlju tablice B-50 naveden je naziv svake viskozimetrijske skale. Tablica je sastavljena prema ASTM od godine 1952 (American Standards for Testing Materials).

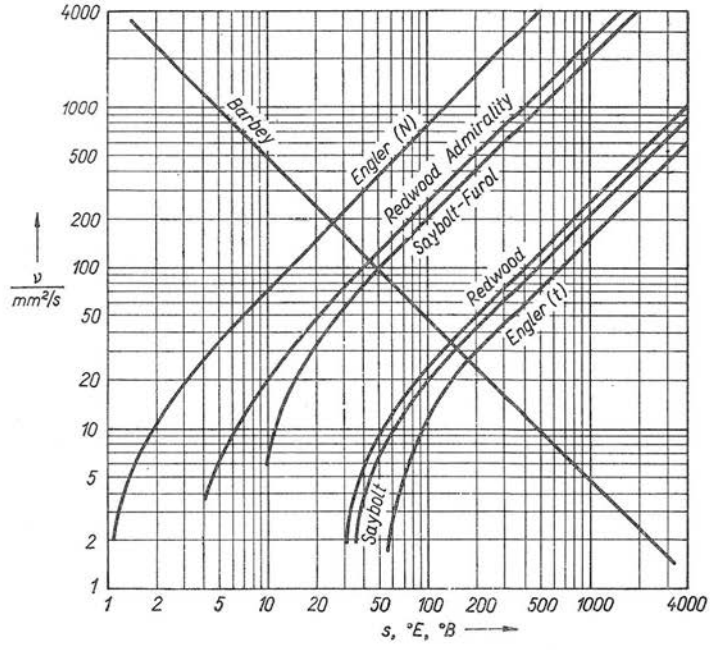
U industriji *motornih* ulja upotrebljava se viskozimetrijska skala SAE (Society of Automotive Engineers). Porijeklo joj je američko, ali se skala upotrebljava u čitavu svijetu. Raspon viskoznosti ulja obilježen je brojčanom oznakom, što

Tablica **B-50**

Ekvivalenti kinematičke viskoznosti u različitim industrijskim viskozimetrijskim skalama pri temperaturi 25 °C (77 °F)

Kinematička viskoznost ν	Saybolt--Furol	Ford 3	Ford 4	Parlin 7	Parlin 10	Parlin 15	Parlin 20	Westing-house	Gardner--Holt	Gardner--Holtova slovna ozn.
mm^2/s (cSt)	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
0,505	—	7	7	25	—	4,4	—	5,1	—	A5
6,24	—	9	8	28	—	4,6	—	6,7	—	A4
14,4	—	14	10	31	—	4,9	—	9,0	—	A3
22	—	19	12	35	—	5,2	2,7	11,1	—	A2
32,1	—	24	15	39	—	5,5	2,8	13,9	—	A1
50	26	28	20	48	—	6,2	3,0	18,8	1,2	A
65	33	35	25	55	—	6,7	3,2	23,9	1,3	B
85	42	44	30	65	—	7,4	3,4	28,5	1,5	C
100	48	50	34	73	25	7,9	3,6	32,6	1,6	D
125	60	62	40	89	30	8,7	3,8	39,5	1,9	E
140	67	68	45	98	33	9,0	4,0	43,6	2,1	F
165	78	80	51	117	38	10,0	4,3	50,5	2,3	G
200	94	95	60	144	44	11,0	4,6	60,2	2,8	H
225	106	106	67	165	50	12,0	5,0	67	3,1	I
250	118	118	74	185	54	13,0	5,3	75	3,4	J
275	129	129	80	206	59	13,9	5,6	83	3,8	K
300	141	140	87	227	64	14,9	6,0	88	4,1	L
320	150	149	92	242	68	15,6	6,2	94	4,4	M
340	160	158	98	257	72	16,5	6,5	100	4,7	N
370	174	171	106	281	77	17,8	6,9	107	5,1	O
400	188	185	113	305	84	19,0	7,4	115	5,5	P
435	204	200	122	—	90	20,5	8,0	125	6,0	Q
470	220	216	131	—	97	21,9	8,5	135	6,4	R
500	234	230	140	—	103	23,0	8,9	143	6,8	S
550	258	253	152	—	112	25,0	9,7	157	7,6	T
625	293	286	172	—	126	33,3	10,8	177	8,6	U
884	414	404	240	—	177	39,0	15,0	249	12,1	V
1070	502	487	289	—	214	46,9	17,9	293	14,7	W
1290	605	586	348	—	258	56,6	21,5	353	17,7	X
1760	825	797	475	—	352	78,3	29,2	482	24,0	Y
2270	1064	1027	613	—	460	101,7	37,4	622	31,0	Z
2700	1265	1220	729	—	625	122,4	44,3	740	37,0	Z1
3620	1697	1634	975	—	775	168,0	49,3	992	50,0	Z2
4630	2170	2089	1245	—	1020	220,0	75,8	1269	63,0	Z3

vidimo u tablici B-51 (W — winter engleski znači zima, tj. W je oznaka za tzv. »zimsko ulje«). Tako npr. oznaka SAE 20 znači da se pripadna Sayboltova viskoznost t_{SU} (vidi odlomak 6.6.4) ulja pri temperaturi 130 °F kreće između 120 i 185 sekundi. U krajnjem desnom stupcu naveli smo *približan* ekvivalent »viskoznosti SAE« u jedinicama kinematičke viskoznosti $mm^2/s = centistok = cSt = 10^{-6}\ m^2/s$ (vidi odlomak 6.5.2).



Sl. B.36. Gruba usporedba različitih industrijskih viskozimetrijskih skala s kinematičkom viskoznošću. Na apscisnu os nanesene su vrijednosti u sekundama (za skale: Redwood Admirality, Saybolt-Furol, Redwood-Commercial, Saybolt Universal i Englerovu — sekundnu) ili u stupnjevima (°B, °F) za Barbeyevu i Englerovu skalu. Na ordinatnu os nanesene su vrijednosti kinematičke viskoznosti u jedinici mm^2/s (= cSt)

Spomenimo još da se u Francuskoj upotrebljava *Barbeyeva viskozimetrijska skala* koja se izražava u »stupnjevima Barbeya« (°B). Vezu između »Barbeyeve viskoznosti« N_B (analogno Englerovoj viskoznosti N; vidi odlomak 6.6.2) i kinematičke viskoznosti ν približno izražava jednadžba

$$N_B = G/\nu,$$

gdje vrijednost konstante G iznosi $G = 4850\,°B \cdot mm^2/s$. Vidimo da vrijednost »Barbeyeve viskoznosti« N_B *pada* s kinematičkom viskoznošću ν, dakle obratno negoli u svih drugih viskozimetrijskih skala (vidi sliku B.36). Što je, dakle, tekućina ljepljivija (viskoznija), to je manja »Barbeyeva viskoznost« N_B!

6.6.8. Baždarenje industrijskih viskozimetara. Za baždarenje industrijskih viskozimetara, tj. za utvrđivanje odnosa vremena istjecanja t (vidi odsječak 6.3) i pripadne vrijednosti kinematičke viskoznosti ν pri određenoj temperaturi, naročito su pogodne dvije tvari. Prva je *destilirana voda*; ovisnost njene ν o tempe-

Tablica **B-51**

Usporedba viskoznosti SAE s viskoznošću Saybolt Universal i s kinematičkom viskoznošću pri različitim temperaturama

SAE No	Temperatura °F	Temperatura °C	Viskoznost Saybolt Universal, sekunde	Ekvivalentna kinematička viskoznost ν (približno), mm^2/s (cSt)
10 W	0	−17,8	5 000...10000	
20 W	0	−17,8	10 000...40000	
10	130	54,5	90...120	19...26
20	130	54,5	120...185	26...40
30	130	54,5	185...255	40...55
40	130	54,5	više od 255	više od 55
40	210	98,8	manje od 75	manje od 16
50	210	98,8	75...105	16...22
60	210	98,8	105...125	22...27
70	210	98,8	125...150	27...32

raturi sadrži tablica B-45, dok su u tablici B-16 navedene gustoće vode pri tim istim temperaturama i tlaku 1 normalna atmosfera. Vrijednosti kinematičke viskoznosti vode u rasponu temperatura od 0 °C do 100 °C kreću se, dakle, od oko 1,8 mm^2/s do oko 0,30 $mm^2/s = 0{,}30$ cSt.

Drugo vrlo precizno uporište pri baždarenju viskozimetara može dati približno 60 %-tna *otopina trščanog šećera* (saharoze) u vodi. Navedeni postotak odnosi se na maseni udjel, tj. u 1 kilogramu otopine nalazi se 600 grama šećera (čistog i suhog), izvaganog u zraku. Iz direktnih mjerenja viskoznosti (vidi odsječak 6.2) poznata je veza gustoće ρ takve otopine s kinematičkom viskoznošću ν pri određenim temperaturama. Takvu jednu vezu pri temperaturi 25 °C sadrži tablica B-52. Vidimo da se vrijednost ν kreće između 33,3 mm^2/s i 35 mm^2/s, već prema gustoći šećerne otopine.

Tablica **B-52**

Ovisnost kinematičke viskoznosti približno 60%-tne otopine trščanog šećera o gustoći otopine pri temperaturi 25 °C

Gustoća ρ, kg/dm^3	Kinematička viskoznost ν, mm^2/s (cSt)	Gustoća ρ, kg/dm^3	Kinematička viskoznost ν, mm^2/s (cSt)
1,2828	33,32	1,2840	34,18
1,2830	33,37	1,2842	34,35
1,2832	33,53	1,2844	34,51
1,2834	33,70	1,2846	34,69
1,2836	33,86	1,2848	34,85
1,2838	34,02	1,2850	35,03

7. Međunarodni sistem jedinica (SI) u mehanici

7.1. Svrha uvođenja i prednosti Međunarodnog sistema jedinica (SI)

7.1.1. Zakonitost Međunarodnog sistema jedinica. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je taj sistem jedinica na svom jedanaestom zasjedanju godine 1960. Tom prilikom Konferencija je zaključila da kratica naziva tog sistema na svim jezicima bude SI, od francuskog Système International d'Unités. Tom odlukom Međunarodni sistem jedinica (SI) postao je »obaveznim« za sve države supotpisnice Konvencije o metru (vidi odsječak A.6.3), a to znači za više od 40 država (vidi A.6.5). Riječ obavezan stavili smo u navodnike zbog toga što jedna međunarodna organizacija ne može zadirati u suverena prava država članica Konvencije. No većina država smatra zaključke i preporuke Generalne konferencije za mjere i utege *obaveznima*, jer bi inače Konvencija o metru u znatnoj mjeri izgubila smisao postojanja (vidi odsječak A.7.1).

Djelotvornost preporuka Generalne konferencije možemo vidjeti i na ovom primjeru: Vlada Jugoslavije već krajem godine 1961. objavljuje »Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima« (»Službeni list« broj 45 od 15. 11. 1961), koji u pojedinim svojim članovima nalaže:

Član 1.

Mjerenje u Socijalističkoj Federativnoj Republici Jugoslaviji obavlja se mjernim jedinicama što ih određuje ovaj zakon.

Član 2.

U javnom saobraćaju mogu se upotrebljavati samo mjerne jedinice Međunarodnog sistema jedinica. Upotreba drugih mjernih jedinica u javnom saobraćaju dopuštena je samo onda kada to predvida ovaj zakon.

Član 8.

Mjerne jedinice moraju se upotrebljavati u javnom saobraćaju pod nazivima i skraćenim oznakama što ih određuje ovaj zakon.

Član 9.

Za mjerenja koja se ne mogu izvršiti mjernim jedinicama određenim u članu 7. ovog zakona Savezno izvršno vijeće može prema potrebi odrediti nove mjerne jedinice, ali se one moraju zasnivati na mjernim jedinicama Međunarodnog sistema jedinica.

Član 11.

Državni organi, ustanove, privredne i društvene organizacije moraju u svom radu odnosno poslovanju u javnom saobraćaju upotrebljavati mjerne jedinice što ih određuje ovaj zakon.
Odredba stava 1. vrijedi i za privatne radnje.

Član 50.

Postojeći propisi koji predviđaju mjerne jedinice što nisu u suglasnosti s odredbama ovog zakona moraju se uskladiti s njegovim odredbama u roku 3 mjeseca od dana stupanja na snagu ovog zakona.

Vidimo da se u citiranim članovima Zakona u nekoliko navrata naglašava da se u javnom saobraćanju mogu upotrebljavati samo jedinice Međunarodnog sistema jedinica (Système International, SI), a uz njih samo još one jedinice koje Zakon izričito navodi. Ostale jedinice, prema tome, nisu dopuštene za javnu upotrebu. Citirani zakon na snazi je od 15. decembra 1961. (idućih godina trebat će zakon revidirati; vidi odlomak A.7.5.7).

Preporuke Generalne konferencije, s jedanaestog zasjedanja od godine 1960, Sovjetski Savez je ozakonio državnim standardom GOST 9867 od godine 1961. pod nazivom »Međunarodni sistem jedinica«. Čehoslovačka Socijalistička Republika izdala je godine 1962. odgovarajući zakon (Zakon o měrove službe) koji je preciziran u čehoslovačkom državnom standardu ČSN 01 1300 (Zakonne měrové jednotky), a na snazi je od 1. 7. 1963. Slične zakone i standarde o obaveznoj primjeni SI objavila je u isto vrijeme ili nešto kasnije većina ostalih država članica Konvencije o metru.

U zakonodavnom pogledu povijest Međunarodnog sistema jedinica (SI) relativno je kratka. Godine 1948. Generalnoj konferenciji obratila se Međunarodna unija za čistu i primijenjenu fiziku sa zahtjevom da se definira i usvoji sistem jedinica koji bi se mogao primjenjivati u međunarodnom mjerilu. Konferencija je donijela odluku da se o tome provede anketa kod svih država članica Konvencije o metru, a Međunarodni komitet za mjere i utege (vidi odsječak A.7.1) zadužila da obavi sve poslove u vezi s pripremom ostvarenja takvog međunarodnog sistema jedinica.

Godine 1954. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je za osnovne jedinice Međunarodnog sistema (SI) ove jedinice: metar, kilogram, sekundu, amper, stupanj Kelvina i candelu. Nakon toga je Međunarodni komitet za mjere i utege iz svojih redova odabrao posebnu komisiju koja je godine 1956. predložila projekt o nazivu sistema jedinica, te popis dopunskih i izvedenih jedinica. Komitet je zasjedao godine 1956. i 1958, te priredio rezolucije koje je zatim prihvatila Generalna konferencija godine 1960. na svom jedanaestom zasjedanju. Nakon toga preporuke su ozakonjene u pojedinim državama, kako smo naveli na početku ovog odlomka.

7.1.2. Svrha primjene SI u svim granama ljudske djelatnosti je korjenito *olakšanje svih radova* povezanih s kvantitativnim ocjenama svakovrsnih pojava i procesa koji se pojavljuju u privredi, tehnologiji i znanosti. U tom smislu SI oslobađa čitavo čovječanstvo od bezbrojnih teškoća što nastaju pri upotrebi dotadašnjeg nepreglednog mnoštva kaotičnih jedinica, od pogrešaka i nepouzdanog računanja, od gubljenja zornosti fizikalnih zakonitosti izraženih jednadžbama, od pamćenja mnoštva definicija i naziva nekoherentnih jedinica, od kompliciranih odnosa među njima itd.

Ukratko, SI oslobađa ljude od neracionalnog trošenja umnog rada i vremena, pa je zbog toga Generalna konferencija za mjere i utege godine 1960. prihvatila SI. Na temelju odluka te konferencije zakonodavstva većine država propisala su posebnim zakonima obaveznu primjenu SI, kako smo na nekoliko primjera vidjeli u

prošlom odlomku 7.1.1. Primjenu SI preporučile su i Međunarodna organizacija za standardizaciju (ISO), Međunarodna unija za čistu i primijenjenu fiziku, Međunarodna elektrotehnička komisija itd.

7.1.3. Glavne prednosti SI koje su uvjetovale da se Međunarodni sistem jedinica relativno brzo uvede, ne samo silom nacionalnih zakona i međunarodnih preporuka, jesu ove:

Univerzalnost Međunarodnog sistema jedinica koji obuhvaća *sve* grane tehnike i znanosti, svu ljudsku djelatnost.

Jednostavnost i logičnost izgradnje SI na temelju koherentnosti ($1 \times 1 = 1$, $1/1 = 1$) među jedinicama, stvaranje svih jedinica na istom principu, što omogućuje nadopunjavanje sistema novim koherentnim jedinicama u skladu s daljnjim razvojem znanosti i tehnike.

Eliminacija mnoštva različitih jedinica za mjerenje iste ili istorodnih veličina, te ostvarenje uvjeta za lako uspoređivanje nezavisno dobivenih mjernih rezultata u različitim krajevima.

Pojednostavnjenje proračuna, jer primjena SI dovodi do iščezavanja tzv. parazitnih koeficijenata iz jednadžbi u koje su svojevremeno ušli zbog izbora nesistematičnog skupa jedinica. Na taj način primjena SI u stvari automatski dovodi do primjene veličinskih jednadžbi.

Zornost u nastavi i njeno pojednostavnjenje, jer primjena veličinskih jednadžbi daje najzorniji prikaz prirodnih pojava i tehničkih procesa. U današnjoj epohi, kada gotovo čitavo čovječanstvo napregnuto uči i istražuje, to je neprocjenjivi dobitak koji donosi SI.

Razgraničenje pojmova mase, težine i sile; to imperativno zahtijevaju i različito imenovane jedinice: za masu — kilogram (kg), za silu — newton (N). U prošlosti je, naime, dvoznačnost naziva »kilogram« dovodila do znatnih neprilika.

Lakša primjenljivost računske tehnike u privredi, jer analogna i digitalna računala mogu rezultate računanja lako direktno izražavati u jedinicama SI.

Postojanje većine jedinica SI u tehnici i znanosti i prije proglašenja SI obaveznim. Metar, sekunda, kilogram, gotovo sve jedinice elektromagnetizma (u stvarnoj upotrebi) i fotometrije te niz drugih jedinica SI stvarno se već desetljećima primjenjuju.

Višekratnici jedinica, tj. dekadski i decimalni višekratnici iz tablice A-1 (vidi odsječak A.2.3), u većini se slučajeva lako primjenjuju na jedinice SI. Budući da su višekratnici jednoznačno definirani (npr. $\mathrm{k} = \text{kilo} = 10^3$, $\mu = \text{mikro} = 10^{-6}$ itd.), njihova je primjena jednoznačna na svim jezicima.

7.1.4. Šire značenje naziva SI. U odsječku A.5.1 nedvojbeno smo utvrdili da naziv »*sistem* mjernih jedinica« zavređuje samo takav skup jedinica u kojem se izvedene jedinice grade od polaznih (osnovnih) *na principu koherencije* (»$1 \times 1 = 1$«, »$1/1 = 1$«). Tako su na primjer izvedene jedinice newton (N), joule (J), watt (W), volt (V) itd. koherentne s polaznim jedinicama metar (m), sekunda (s), kilogram (kg) i amper (A):

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\quad 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2},$$

$$1\,\mathrm{W} = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3},\quad 1\,\mathrm{V} = \frac{1\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{A}} = \frac{1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3}{1\,\mathrm{A}} \text{ itd.}$$

U smislu izlaganja u odsječku A.5.1, skup svih tih i takvih jedinica čini *sistem* jedinica. Odlukom jedanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege od godine 1960, taj sistem dobio je vlastito ime: Međunarodni sistem jedinica (Système International d'Unités, SI).

S druge strane, *dekadski i decimalni višekratnici jedinica* (vidi odsječak A.2.3) omogućuju da se te koherentne jedinice SI N, J, W itd. savršeno pouzdano i ekonomično (ušteda vremena i duševnog napora) primjenjuju u svim granama ljudske djelatnosti. Tako na primjer s lakoćom svakodnevno primjenjujemo jedinice: centimetar = cm = 10^{-2} m, kilovat = kW = 10^{3} W, miliamper = mA = 10^{-3} A itd. Nabrojene mjerne jedinice cm, kW, mA itd. *nisu koherentne* s polaznim jedinicama SI m, s, kg, A, K i cd! U duhu definicije *sistema* jedinica (koherentnost, odsječak A.5.1) jedinice cm, kW, mA itd. prema tome ne pripadaju sistemu SI!

Da bi se izbjegla suprotnost između naziva SI (sistem, dakle koherentan skup jedinica) i koristi koju pružaju dekadski i decimalni višekratnici jedinica, Međunarodni komitet za mjere i utege (o njemu vidi odlomak A.7.1.1) preporučio je u oktobru godine 1967. da se pod nazivom »Međunarodni sistem jedinica« ne razumijeva samo *koherentan sistem* već skup kako koherentnih jedinica SI (npr. m, s, N, J, A itd.) tako i tih jedinica opremljenih dekadskim i decimalnim prefiksima (cm, ms, MN, kJ, μA itd.) iz tablice A-1. Preporuku Komiteta možemo sažeti u ovo: 1) naziv »Međunarodni sistem jedinica (SI)« označuje skup jedinica koji se sastoji od koherentnih jedinica SI te od dekadskih i decimalnih višekratnika tih koherentnih jedinica, 2) u skladu s time riječ »sistem« označuje »sistematično organizirani skup«, a ne samo »skup koherentnih jedinica«, 3) polazne (osnovne) jedinice, dopunske jedinice (vidi odlomak 7.2.3) i izvedene jedinice — koje sve zajedno čine koherentan skup jedinica, valja nazivati imenom »jedinice Međunarodnog sistema«, a kratica im je »jedinice SI«, 4) dekadske i decimalne višekratnike »jedinica SI« (npr. cm, ms, MN, kJ, μA itd.) valja nazivati imenom »dekadski i decimalni višekratnici jedinica SI«. Cjelokupni tekst preporuke na francuskom jeziku glasi:

Recommandation 1 (1967)

Le Comité International des Poids et Mesures,

considérant

la Résolution 12 de la Onzième Conférence Générale des Poids et Mesures (1960) et particulièrement l'appellation »Systéme International d'Unités«,

qu'il existe pour chaque grandeur physique une seule unité cohérente avec les unités de base du Système International d'Unités,

que ces unités cohérentes forment avec leurs multiples et sous-multiples décimaux un ensemble non cohérent,

décide

1° l'appellation »Système International d'Unités« et son abréviation »SI« désignent l'ensemble des unités, des multiples et sous-multiples décimaux et tout ce qui pourrait être adopté à l'avenir par la Conférence Générale en cette matière;

2° en conséquence, dans cette appellation, le mot »système« signifie »ensemble organisé systématiquement« et non pas seulement »ensemble d'unités cohérentes«;

3° les unités de base, les unités supplémentaires et les unités dérivées, qui forment un ensemble cohérent, sont désignées sous le nom d'»Unités du Système International« avec l'abréviation »Unités SI«;

4° les multiples et sous-multiples décimaux des Unités du Système International doivent être désignées sous le nom complet de »multiples et sous-multiples des Unités SI«.

Citiranu preporuku možemo u biti svesti na ovo: nema nikakve zapreke da se svestrano upotrebljavaju jedinice SI opremljene prefiksima iz tablice A-1 (odsječak A.2.3). Tako se na primjer umjesto vrijednosti naprezanja $2{,}5 \cdot 10^8$ N/m² može pisati 250 MN/m² ili 250 N/mm² (vidi odlomak 7.6.2), a da se autor tog pisanja u svakom od ova tri slučaja služi »Međunarodnim sistemom jedinica«. Isto vrijedi i za gustoću električne struje, npr. $J = 2 \cdot 10^6$ A/m² = 2 MA/m² = 2 A/mm² itd. Iako navedena preporuka Međunarodnog komiteta za mjere i utege nipošto nije beskorisna, ona bi mnogo pridonijela olakšanju računanja da je u njoj preporučeno nešto drugo: *primjena veličinskih jednadžbi*. Te jednadžbe naime omogućuju najzornije poimanje i opisivanje fizikalnih pojava, te savršeno pouzdano računanje u znanosti i tehnici (vidi npr. odsječak A.1.4 i A.2.1, poglavlje B.10 i odgovarajuća poglavlja u glavama D i E). Stoga korisniku veličinskih jednadžbi mjerne jedinice ne predstavljaju nikakve poteškoće, a citirana preporuka gotovo mu je suvišna.

7.2. Definicije jedinica Međunarodnog sistema jedinica

7.2.1. Građenje koherentnog sistema jedinica. U odsječku A.5.1 razmotrili smo kako se od neophodnog broja osnovnih jedinica, koje odabiremo po svojoj volji, izvode takozvane izvedene jedinice. Ovdje ćemo u sažetom obliku ponoviti glavna načela građenja koherentnog sistema jedinica, jer nam je to potrebno u daljnjem praktičnom izlaganju. Iz razlaganja u odsječku A.5.1 i pripadnih slika A.15 i 16 možemo sažeti ova tri principa građenja koherentnog sistema jedinica:

1. U mehanici treba za osnovne jedinice odabrati jedinice triju međusobno nezavisnih veličina.

2. U načelu je posve svejedno koje tri međusobno nezavisne jedinice proglasimo osnovnima.

3. Sistem jedinica je skladan ili koherentan onda kad se izvedene jedinice grade direktno množenjem, dijeljenjem, potenciranjem ili korjenovanjem kombinacija odabranih osnovnih jedinica.

Posljedica koherentnosti jedinica (tačka 3) jest identičnost oblika veličinskih i brojčanih jednadžbi; drugim riječima: primjena koherentnog sistema jedinica automatski dovodi do primjene univerzalnih i pouzdanih veličinskih jednadžbi. U tački 3 smo naveli da se izvedene jedinice grade »direktno«, što znači da su pri tom tzv. količnici jedinica među *svim* jedinicama jednaki 1.

Građenje koherentnog sistema jedinica, i to baš Međunarodnog sistema jedinica (SI), opisali smo u odsječku A.5.1 glave A, pa to ovdje nećemo ponavljati, već čitatelju preporučujemo da pročita spomenuti odsječak u kojem su izvedene koherentne jedinice SI: newton = N = kg · m/s², watt = W = N · m/s = kg · m²/s³ itd. U svim tim »jednadžbama među jedinicama« količnici jedinica jednaki su 1, tj. 1 watt × 1 sekunda = 1 joule, 1 metar × 1 metar = 1 kvadratni metar, 1 kg/m³ = = 1 kilogram : 1 kubni metar itd. Zbog toga simbolički kažemo da je koherentan sistem jedinica onaj u kojem su jedinice u međusobnom odnosu »1 × 1 = 1« ili »1 : 1 = 1« (engl. one-to-one relationship).

7.2.2. Osnovne jedinice SI. Za osnovne jedinice Međunarodnog sistema jedinica Generalna konferencija za mjere i utege proglasila je godine 1954. ove jedinice:

jedinica *duljine*: »metar« (kratica: m),

jedinica *vremena*: »sekunda« (kratica: s),

jedinica *mase*: »kilogram« (kratica: kg),

jedinica *temperature*: »kelvin« (kratica: K),

jedinica *električne struje*: »amper« (kratica: A),

jedinica *jakosti svjetla*: »candela« (kratica: cd).

Za građenje onih izvedenih jedinica SI koje se upotrebljavaju u mehanici, uključivši hidrauliku, potrebne su i dovoljne prve tri osnovne jedinice SI, tj. metar, sekunda i kilogram. Ostale tri osnovne jedinice SI priključuju se prvim trima redom: u nauci o toplini (vidi glavu D), elektromagnetizmu (glava E) i fotometriji (glava G). Prve tri osnovne jedinice SI definirali smo u odlomcima 1.2.1, 2.3.1 i 3.3.1, odakle prenosimo tekstove definicija:

Jedinica duljine: metar (m) — »Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala u vakuumu zračenja koje odgovara prijelazu između razina $2p_{10}$ i $5d_5$ atoma kriptona 86« (način reprodukcije metra opisan je u odsječcima A.8.7 i A.8.8).

Jedinica vremena: sekunda (s) — »Sekunda je trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma cezija 133« (vidi odsječke A.10.1 i A.10.6).

Jedinica mase: kilogram (kg) — »Kilogram je masa međunarodne pramjere koja je pohranjena u Međunarodnom uredu za mjere i utege« (vidi odsječak A.9.3).

7.2.3. Dopunske jedinice SI. U odlomku 7.1.1 naveli smo da je Generalna konferencija za mjere i utege godine 1960. ozakonila SI i definirala osnovne i neke druge jedinice. Među njima je definirala i dvije »dopunske« jedinice. To su:

jedinica *kuta*: »radijan« (kratica: rad),

jedinica *prostornog kuta*: »steradijan« (kratica: sr).

Veličine »kut« α i »prostorni kut« Ω definirali smo i razmotrili u odlomcima 1.1.2,3, a njihove jedinice radijan i steradijan u odlomcima 1.4.1 i 1.6.1. Iz tih odlomaka prenosimo definicije:

Jedinica kuta: radijan (rad) — »Radijan je kut između dva polumjera koji na kružnici odrezuju luk čija je duljina jednaka polumjeru« (radijan je definiran jednadžbom 1.4-1).

Jedinica prostornog kuta: steradijan (sr) — »Steradijan je prostorni kut čiji se vrh nalazi u središtu kugle, a na njenoj plohi omeđuje površinu jednaku kvadratu polumjera kugle« (steradijan je definiran jednadžbom 1.6-1).

7.2.4. Izvedene jedinice SI. Načelo građenja izvedenih jedinica koherentnog sistema jedinica, dakle i jedinica SI, spomenuli smo u odlomku 7.2.1. U nastavku navodimo definicije izvedenih jedinica SI nekih veličina prostora i mehanike:

Jedinica površine: kvadratni metar (m^2)	»Kvadratni metar je površina kvadrata čije su stranice dugačke jedan metar« (vidi odlomak 1.5.1).
Jedinica volumena: kubni metar (m^3)	»Kubni metar je volumen kocke čiji su bridovi dugački jedan metar« (vidi odlomak 1.7.1).
Jedinica frekvencije: hertz (Hz)	»Hertz je frekvencija periodičke pojave čiji period traje jednu sekundu« (vidi odlomak 2.3.5).
Jedinica brzine: metar u sekundi (m/s)	»Metar u sekundi je brzina tijela koje u jednolikom gibanju prijeđe put jedan metar u jednoj sekundi« (vidi odlomak 2.4.1).
Jedinica ubrzanja: metar u sekundi na kvadrat (m/s^2)	»Metar u sekundi na kvadrat je ubrzanje tijela čija se brzina u toku jedne sekunde jednoliko promijeni za jedan metar u sekundi« (vidi odlomak 2.4.7).
Jedinica gustoće: kilogram po kubnom metru (kg/m^3)	»Kilogram po kubnom metru je gustoća homogene tvari koje jedan kubni metar ima masu jedan kilogram« (vidi odlomak 3.4.1).
Jedinica sile: newton (N)	»Newton je sila koja tijelu mase jedan kilogram daje ubrzanje jedan metar u sekundi na kvadrat« (vidi odlomak 4.2.1).
Jedinica tlaka: newton po kvadratnom metru (N/m^2)	»Newton po kvadratnom metru je tlak koji proizvodi sila jedan newton jednoliko porazdijeljena na površinu jedan kvadratni metar okomitu na smjer sile« (vidi odlomak 4.3.1).
Jedinica dinamičke viskoznosti: newtonsekunda po kvadratnom metru (Ns/m^2)	»Newtonsekunda po kvadratnom metru je dinamička viskoznost tekućine u laminarnom strujanju u kojoj nastaje tangencijalna napetost 1 N/m^2 pri gradijentu brzine 1/s okomitom na smjer strujanja« (vidi odlomak 6.4.1).
Jedinica kinematičke viskoznosti: kvadratni metar u sekundi (m^2/s)	»Kvadratni metar u sekundi je kinematička viskoznost tekućine gustoće 1 kg/m^3 čija dinamička viskoznost iznosi 1 Ns/m^2« (vidi odlomak 6.5.1).
Jedinica energije i rada: joule (J)	»Joule je rad koji izvrši sila jedan newton kada se njeno hvatište pomakne za jedan metar u smjeru sile« (vidi odlomak 5.2.1).
Jedinica snage: watt (W)	»Watt je snaga pri kojoj se u toku jedne sekunde obavi rad jedan joule« (vidi odlomak 5.5.1).

Kratice navedenih jedinica kao i jedinica većine drugih veličina mehanike sadrži stupac 5 tablice B-53. U toj tablici veličine smo razdijelili u 6 skupina: prostorne veličine, vremenske, masene, veličine sile, naprezanja i energetske veličine.

Tablica **B-53**

Pregled jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina prostora i mehanike

Red. broj	Naziv veličine	Oznaka	Definicijska jednadžba	Kratica jedinice SI	Naziv jedinice ili opaska
1	2	3	4	5	6
			Prostorne veličine i jedinice		
1	Duljina	l, s, a	—	m	Definiciju metra vidi u odlomku B.7.2.2, a način reprodukcije u poglavlju A.8.
2	Kut	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	$\alpha = s/r$	rad	Definiciju radijana vidi u odlomku B.7.2.3.
3	Površina	A, S	$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	m^2	kvadratni metar
4	Prostorni kut	Ω, ω	$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}A/r^2$	sr	Definiciju steradijana vidi u odlomku B.7.2.3.
5	Volumen	V, τ	$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	m^3	kubni metar
6	Moment površine	I_a	$\mathrm{d}I_a = z^2\mathrm{d}A$	m^4	metar na četvrtu
7	Polumjer momenta površine	i, r	$i^2A = I_a$	m	metar
8	Polarni moment površine	I_p	$\mathrm{d}I_p = (x^2+y^2)\mathrm{d}A$	m^4	metar na četvrtu
9	Moment tromosti volumena	I_v	$\mathrm{d}I_v = z^2\mathrm{d}V$	m^5	metar na petu
			Vremenske veličine i jedinice		
10	Vrijeme	t, τ	—	s	Definiciju sekunde vidi u odlomku B.7.2.2, a način reprodukcije u poglavlju A.10.
11	Period	T, τ	$T = t_2 - t_1$	s	Definiciju perioda vidi u odlomku B.2.1.2.

1	2	3	4	5	6
12	Frekvencija	f, ν	$f = 1/T$	Hz	Hz = hertz = 1/s
13	Kružna frekvencija	ω	$\omega = 2\pi f$	s^{-1}	Recipročna sekunda ili sekunda na minus prvu
14	Rotancija (kutna brzina)	ω	$\omega = d\alpha/dt$	rad/s	Vidi odsječke B.2.2,5.
15	Frekvencija vrtnje	n	$n = 1/T$	s^{-1}	Vidi odlomke B.2.2.4,5 i B.2.5.4.
16	Kutno ubrzanje	ϵ	$\epsilon = d\omega/dt$	rad/s^2	radijan u sekundi na kvadrat
17	Brzina	v, u, c, w	$v = ds/dt$	m/s	Vidi odlomak B.2.2.1.
18	Gradijent brzine	—	grad $v = dv/dl$	s^{-1}	sekunda na minus prvu
19	Ubrzanje	a	$a = dv/dt$	m/s^2	Vidi odlomak B.2.2.2.
20	Ubrzanje zemljine teže	g		m/s^2	Vrijednost normiranog ubrzanja zemljine teže iznosi $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s^2.
21	Gradijent ubrzanja	—	grad $a = da/dl$	s^{-2}	sekunda na minus drugu
22	Protok	q	$q = dV/dt$	m^3/s	Vidi odlomke B.3.1.5 i 3.6.1.
23	Jedinični protok	q_0	$q_0 = dq/dA$	m/s	metar u sekundi

Masene veličine i jedinice

24	Masa	m, M	—	kg	Definiciju kilograma vidi u odlomku B.7.2.2, a pohranjivanje prakilograma u poglavlju A.9.
25	Linijska gustoća	—	dm/dl	kg/m	kilogram po metru
26	Plošna gustoća	—	dm/dA	kg/m^2	kilogram po kvadratnom metru
27	Gustoća	ρ	$\rho = dm/dV$	kg/m^3	Vidi odsječke B.3.1,4.

Tablica **B-53** (nastavak)

1.	2	3	4	5	6
28	Specifični volumen	v	$v = 1/\rho = \mathrm{d}V/\mathrm{d}m$	m^3/kg	Vidi odlomak D.4.2.1.
29	Relativna gustoća	d	$d = \rho/\rho_0$	1	Vidi odlomak B.3.1.4.
30	Maseni protok	m'	$m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$	kg/s	Vidi odlomak B.3.1.5.
31	Jedinični maseni protok	m_1	$m_1' = \mathrm{d}m'/\mathrm{d}A$	kg/s m^2	Vidi odlomak B.3.1.7.
32	Količina gibanja	p	$\mathrm{d}p = \mathrm{d}(mv)$	kg m/s	kilogrammetar u sekundi
33	Moment količine gibanja	b	$b = pr = J\omega$	kg m^2/s	kilogrammetar na kvadrat u sekundi
34	Moment tromosti	J, I	$\mathrm{d}J = \mathrm{d}m\, r^2$	kg m^2	kilogrammetar na kvadrat
35	Polumjer tromosti tijela	r, R	$r^2 m = J$	m	metar
36	Zamašni moment	—	mD^2	kg m^2	Vidi odsječak B.10.4.
			Veličine i jedinice sile		
37	Sila	F	$F = ma$	N	N = kgm/s²; definiciju newtona vidi u odlomku B.4.2.1.
38	Gravitacijska sila	F_g	$F_g = \kappa m_1 m_2/r^2$	N	Vidi poglavlje A.9.
39	Jakost gravitacijskog polja	E, a_g	$E = F_g/m = a_g$	m/s^2	metar u sekundi na kvadrat
40	Težina	G	$G = mg$	N	Vidi poglavlje A.9.
41	Normirana težina	G_0	$G_0 = mg_0$	N	$g_0 = 9{,}80665$ m/s²
42	Specifična težina	γ	$\gamma = \mathrm{d}G/\mathrm{d}V = g\rho$	N/m^3	newton po kubnom metru
43	Normirana specifična težina	γ_0	$\gamma_0 = \mathrm{d}G_0/\mathrm{d}V_0 = g_0\rho$	N/m^3	

1	2	3	4	5	6
44	Impuls sile	I	$\mathrm{d}I = F\mathrm{d}t$	Ns	newtonsekunda
45	Moment sile	M	$M = rF\sin(r, F)$	Nm	newtonmetar
46	Moment para sila	D, T, M_d	$D = rF$	Nm	r — okomita udaljenost između antiparalelnih sila F
47	Zakretni moment	T, M, D	$T = rF = P/\omega$	Nm	P — snaga, ω — kutna brzina (rotancija)
48	Impuls momenta sile	L	$\mathrm{d}L = M\,\mathrm{d}t$	Nsm	newtonsekunda metar
49	Tlak	p	$p = \mathrm{d}F/\mathrm{d}A$	N/m²	Vidi odsječak B.4.1.
50	Stvarni (apsolutni) tlak	p	$p = p_0 + p_\mathrm{n}$	N/m²	Na primjer p u jednadžbi $pV = mRT$.
51	Atmosferski (okolišni) tlak	p_0	$p_0 = p - p_\mathrm{n}$	N/m²	Vidi odlomak B.4.1.3.
52	Nadtlak	p_n	$p_\mathrm{n} = p - p_0$	N/m²	Mjerodavan za proračun čvrstoće cjevovoda, kotlova itd.
53	Podtlak (vakuum)	p_v	$p_\mathrm{v} = p_0 - p$	N/m²	Vidi primjer 2 u odlomku B.4.1.3.
54	Dinamička viskoznost	η, μ	$F = \eta A\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$	Ns/m²	Vidi odlomak B.6.1.1 i odsječak B.6.2.
55	Fluidnost	Φ, ξ	$\Phi = 1/\eta$	m²/Ns	Vidi odlomak B.6.1.3.
56	Kinematička viskoznost	ν	$\nu = \eta/\rho$	m²/s	Vidi odlomak B.6.1.2 i odsječak B.6.4.
			Veličine i jedinice naprezanja		
57	Naprezanje, normalno	$\sigma, \sigma_\mathrm{n}$	$\sigma_\mathrm{n} = \mathrm{d}F_\mathrm{n}/\mathrm{d}A$	N/m²	$\sigma^2 = \sigma_\mathrm{n}^2 + \tau^2$
58	Naprezanje, tangencijalno	τ	$\tau = \mathrm{d}F_\mathrm{t}/\mathrm{d}A$	N/m²	newton po kvadratnom metru
59	Relativno izduženje	ϵ, e	$\epsilon = \Delta l/l_0$	1	$l = l_0(1 + \epsilon)$
60	Relativno poprečno skraćenje	η	$\eta = -\Delta b/b_0$	1	$b = b_0(1 - \eta) = b_0(1 - \mu\epsilon)$

Tablica **B-53** (nastavak)

1	2	3	4	5	6
61	Poissonov broj	μ	$\mu = \eta/\epsilon$	1	η — relativno uzdužno izduženje, ϵ — relativno poprečno skraćenje
62	Poissonova konstanta	m	$m = 1/\mu = \epsilon/\eta$	1	Veličina m rjeđe se upotrebljava.
63	Relativno klizanje (smik)	γ	$\gamma = \Delta s/l_0$	1	
64	Relativni zasuk	ϑ	$\vartheta = \varphi/l_0$	rad/m	radijan po metru
65	Modul klizanja (torzije)	G	$G = \tau/\gamma$	N/m²	newton po kvadratnom metru
66	Modul elastičnosti	E	$E = \sigma_n/\epsilon$	N/m²	E se naziva i Youngov modul.
67	Koeficijent linearnog izduženja	α	$\alpha = \epsilon/\sigma_n = 1/E$	m²/N	kvadratni metar po newtonu
68	Modul stlačivosti	κ, χ, k	$\kappa = -\frac{1}{V_0}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$	m²/N	Pozitivnom $\mathrm{d}p$ odgovara negativan $\mathrm{d}V$.
	Energetske veličine i jedinice				
69	Rad	A, W	$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}s$	J	J = Nm = kgm²/s²; definiciju joulea vidi u odlomku B.5.2.1.
70	Energija, potencijalna	W, E, U	$W_p = mgh$	J	joule
71	Energija, kinetička	W, E, U	$W_k = \frac{1}{2}mv^2$	J	Vidi primjere u odlomku B.5.1.1.
72	Energija vrtnje	W, E, U	$W_i = \frac{1}{2}J\omega^2$	J	Vidi primjere u odlomku B.5.1.1.
73	Gustoća (prostorna) energije	w	$w = \mathrm{d}W/\mathrm{d}V$	J/m³	Vidi odlomak B.5.1.2.
74	Snaga	P	$P = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t$	W	W = J/s = kgm²/s³; definiciju watta vidi u odlomku B.5.5.1.
75	Korisnost	η	$\eta = P_o/P_d$	1	P_d — dovedena snaga, P_o — odvedena snaga

Tablica B-53 postaje naročito poučna i korisna ako se usporedi s tablicom B-54 u poglavlju 8, gdje su za iste veličine navedene jedinice (metričkog) Tehničkog sistema jedinica i CGS sistema.

Nije na odmet da uz tablicu B-53 stavimo jednu napomenu. Pod rednim brojevima 45, 46 i 47 navedena je veličina »moment« i njena jedinica SI newtonmetar = Nm = $[M]_M$, gdje indeks $_M$ označuje da je riječ o jedinici SI. Neki čuveni autori s područja električkih strojeva prešli su, naime, u novim izdanjima svojih djela na primjenu jedinica SI i pri tom učinili pogrešku: zakretni moment izražavaju jedinicom joule (J). Na prvi pogled to izgleda u redu, jer pod rednim brojevima 69 i 70 tablice B-53 imamo navedeno da je J = joule = Nm jedinica rada i energije, a pod brojevima 45...47 da je jedinica momenta $[M]_M$ = Nm. Iz toga ti autori zaključuju da je $[W]_M = J = Nm = [M]_M$. Baš taj zaključak je pogrešan!

Generalna konferencija za mjere i utege donijela je, naime, rezoluciju da je *naziv* jedinice *rada i energije* J = joule = Nm, ali nije imala ni na kraj pameti da naziv joule bude i naziv jedinice momenta Nm. Prema tome je ispravno:

$$\text{jedinica energije SI} = [W]_M = \text{Nm} = \text{joule} = \text{J},$$

$$\text{jedinica momenta SI} = [M]_M = \text{Nm}.$$

Riječ je, dakle, o dvije različite veličine koje imaju istu strukturu jedinice, ali je naziv usvojen samo za jedinicu jedne od tih veličina (energiju, odnosno rad). Navedeni pogrešan primjer donekle je nalik na slučaj koji bi nastao kad bismo tvrdili da su »tlak« p i »naprezanje« σ iste veličine zato što imaju istu jedinicu N/m².

7.3. Primjena veličina težina i masa

7.3.1. Težina tijela je fizikalna veličina koja je isključivo vezana uz naš planet Zemlju. Iako se veličina »težina« svakodnevno upotrebljava gotovo u svim ljudskim djelatnostima, mnogi nemaju jasnu predodžbu o toj veličini, pa je stoga zamjenjuju s veličinom »masa« ili pak veličinu »težina« primjenjuju u pogrešnom značenju. Nesporazume oko pojma težine naročito potencira primjena jedinice sile tzv. Tehničkog sistema »kilopond« (vidi odlomak 8.1.2). Da bismo otklonili sve eventualne nedoumice, u ovom ćemo odsječku podrobno objasniti definiciju veličine »težina« koja glasi: »*Težina tijela, koje miruje na nekom mjestu Zemlje, jest sila kojom to tijelo u zrakopraznom prostoru pritišće na svoju podlogu.*« Ovoj definiciji obično se dodaje još jedna rečenica: »Težina je razmjerna ubrzanju zemljine teže.« Težina se proračunava jednadžbom (vidi odlomak A.9.2.4)

$$G = mg, \tag{7.3-1}$$

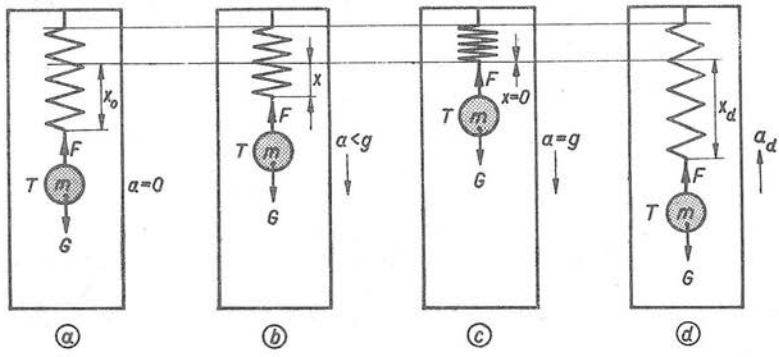
gdje slovo G označuje težinu tijela koje ima masu m; slovo g predstavlja ubrzanje teže na onom mjestu Zemlje na kojem želimo utvrditi težinu G tijela (vidi odsječke A.9.4,5). Jednadžba (7.3-1) je, dakle, specijalna primjena *Newton*ova zakona $F = ma$ (vidi odsječak A.9.2).

Navedenu definiciju veličine »težina«, razmotrit ćemo uz pomoć slike B.37, na kojoj sva četiri crteža prikazuju kabinu dizala (lifta) kakvo se upotrebljava u stambenim zgradama (osobno) ili za transport robe (teretno dizalo). O strop kabine dizala učvršćeno je čelično pero (opruga) na čijem je donjem kraju ovješeno tijelo T poznate mase m. Na slici B.37a kabina dizala *miruje* u odnosu prema Zemlji; u tom slučaju tijelo T svojom *težinom* $G = mg$ nateže pero, čije izduženje x (razlika duljine

nategnutog pera i njegove duljine kad je ono posve skupljeno — neopterećeno) u tom stanju iznosi x_0. Zbog toga pero drži ravnotežu težini tijela $G = mg$ silom $F = Cx_0 = G$, gdje je C tzv. konstanta pera. Značajka je upotrijebljenog pera, naime, da je sila F stezanja pera izravno razmjerna njegovu izduženju x. Prema tome za tijelo T mase m, koje miruje (u odnosu na Zemlju) zajedno s dizalom, vrijedi jednadžba statičke ravnoteže

$$F = Cx_0 = G = mg, \tag{7.3-2}$$

gdje je g ubrzanje zemljine teže na mjestu gdje se nalazi dizalo (o ovisnosti g o geografskoj širini Zemlje vidi odlomak A.9.2.5, a o mjerenju g odsječke A.9.4,5).



Sl. B.37. Uz objašnjenje definicije veličine težina: a) dizalo miruje u odnosu prema Zemlji, b) dizalo se spušta s ubrzanjem $0 < a < g$, c) dizalo se spušta s ubrzanjem $a = g$ (slobodan pad), d) dizalo se diže s ubrzanjem a_d

Sada razmotrimo sliku B.37b, koja prikazuje isto dizalo kad se ono vertikalno *spušta* s konstantnim ubrzanjem a. Zajedno s dizalom spušta se i tijelo T ovješeno o ono isto pero iz slike B.37a. Vrijednost ubrzanja a nalazi se u granicama $0 < a < g$, tj. ono je manje od ubrzanja zemljine teže g. Napominjemo da je ubrzanje dizala a izmjereno *u odnosu na Zemlju*, tj. u odnosu na zgradu, što je isto, jer je zgrada čvrsto ukopana u zemlju. Čelično pero je u ovom slučaju kraće negoli u slučaju slike B.37a, njegova duljina iznosi $x < x_0$. To znači da je i sila pera $F = Cx$ manja od sile Cx_0, jer je konstanta pera C ostala nepromijenjena. Tijelo T, ovješeno o čelično pero u kabini dizala, spušta se, dakle, zajedno s kabinom uz jednoliko ubrzano gibanje, a pri tom je sila pera $F = Cx < Cx_0$. Ovo gibanje opisuje *Newton*ova jednadžba dinamičke ravnoteže

$$F = Cx = mg - ma = G - ma. \tag{7.3-3}$$

Na slici B.37c prikazan je slučaj kad je uže dizala prekinuto, pa kabina *slobodno pada* pod djelovanjem zemljine teže. Ako zanemarimo otpore gibanju, možemo reći da dizalo u tom slučaju pada jednoliko ubrzano s ubrzanjem $a = g$. Stoga jednadžba dinamičke ravnoteže (7.3-3) dobiva specijalan oblik

$$F = mg - mg = 0,$$

što znači da je $F = 0$, dakle zbog $F = Cx$ je i $x = 0$. Stvarno se čelično pero u tom slučaju posve stislo, jer na njega ne djeluje nikakva vanjska sila F.

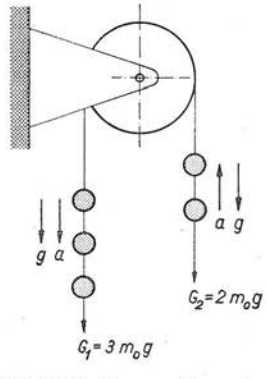
Konačno na slici B.37d vidimo slučaj kada se dizalo *diže* s jednolikim ubrzanim gibanjem a_d. Jednadžba (7.3-2) vrijedi i za taj slučaj ako stavimo $a = -a_d$ (ubrzanje je sada usmjereno suprotno nego u prethodna dva primjera) i dobiva oblik

$$F = Cx_d = mg + ma_d = G + ma_d. \tag{7.3-4}$$

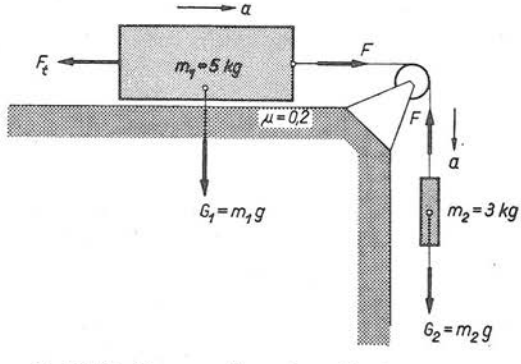
Sila pera $F = F_d$ sada je najveća, a izduženje pera u granicama $x_d > x_0 > x$.

Ovaj poznati pokus (postoji još ilustrativniji pokus *Ljubimova*, koji je u posve lagano dizalo-okvir paralelno učvrstio tri jednaka čelična pera o koja je ovjesio tri nejednaka utega: u mirovanju i pri gibanju $a \neq g$ pera su nejednako izdužena, dok su u slučaju $a = g$ sva tri pera jednako stisnuta) opisali smo zato da oštro odvojimo silu pera F (vage na pero!) od težine tijela $G = mg$. Samo je u jednom slučaju sila pera F jednaka težini tijela $G = mg$; taj slučaj opisuje jednadžba (7.3-2), a to je onda kad tijelo *T miruje u odnosu prema Zemlji*. Radi toga je u definiciju »Težina tijela, koje miruje na nekom mjestu Zemlje, jest sila kojom to tijelo u zrakopraznom prostoru pritišće na svoju podlogu« umetnuta rečenica »koje miruje na nekom mjestu Zemlje«. U mnogim djelima autori to nisu učinili pa danas mnogi inteligentni đaci nepotrebno raspravljaju o tome kako se težina tijela mijenja prilikom gibanja svemirom. Vidimo da tome nije tako: težina G tijela mase m *per definitionem* jednaka je umnošku mase m tijela i ubrzanja zemljine teže g na *mjerenom mjestu* na Zemlji.

Primjer 1. Na jednostavnoj koloturi (sl. B.38) s jedne su strane na uže ovješena tri utega mase m_0 svaki, a s desne strane dva isto takva utega. Izračunajmo s kolikim će se ubrzanjem a spuštati uže s tri utega, ako pretpostavimo da se uže ne rasteže i da nema mase, te da nema trenja u ležaju i na koloturi kao ni da nema otpora zraka i uzgona!



Sl. B.38. Uz proračun ubrzanja utega na koloturi



Sl. B.39. Uz proračun ubrzanja drvene ploče na vodoravnom stolu

Razmotrimo najprije dinamičku ravnotežu lijevog užeta, tj. lijevo od simetrale koloture (sl. B.38). Masa triju utega iznosi $m_1 = 3\,m_0$, a njihova težina $G_1 = m_1g$, gdje je g ubrzanje zemljine teže. Uže je napregnuto silom F koju možemo izračunati pomoću jednadžbe (7.3-3), one koja odgovara spuštanju dizala na slici B.37b. Prema tome je

$$F = m_1g - m_1a = 3m_0(g - a).$$

Analogno za uže desno od simetrale koloture na slici B.38 vrijedi jednadžba (7.3-4), koja odgovara dizanju dizala na slici B.37d, tj.

$$F = m_2g + m_2a = 2m_0(g + a).$$

Sila F kojom je napregnuto uže jednaka je, naime, po vrijednosti na lijevoj i desnoj strani, a isto tako i ubrzanje utega a; jedino je ubrzanje a na desnoj strani usmjereno suprotno negoli na lijevoj, što smo grafički naznačili na slici B.38. Zbog toga ($F = F$) iz gornje dvije jednadžbe dobivamo izraz za ubrzanje

$$a = \frac{1}{5} g,$$

tj. ubrzanje iznosi 20 % od ubrzanja zemljine teže g. Sila kojom je napregnuto uže iznosi $F = 2{,}4 \cdot m_0 g = 1{,}2\, G_2$, jer je $G_2 = 2\, m_0 g$.

Primjer 2. Na horizontalnom stolu leži drvena ploča mase $m_1 = 5$ kg o koju je učvršćeno uže. Na drugom kraju užeta visi uteg mase $m_2 = 3$ kg (sl. B.39), koji dovodi ploču u jednoliko ubrzano gibanje s ubrzanjem a. Izračunajmo koliko je to ubrzanje i kolikom silom F je napregnuto uže, ako je koeficijent trenja pri gibanju ploče $\mu = 0{,}2$. Zanemarenja su ista kao i u primjeru 1.

Rasuđivanje o dinamičkoj ravnoteži slično je kao i u primjeru 1; jedino u jednadžbe još ulazi sila trenja $F_t = \mu G_1 = \mu m_1 g$. Prema tome pripadne jednadžbe glase

$$F = F_t + m_1 a = (\mu g + a) m_1; \quad F = (g - a) m_2.$$

Iz ovih dviju jednadžbi dobivamo vrijednost ubrzanja

$$a = g \frac{1 - \mu m_1/m_2}{1 + m_1/m_2} = g \frac{1 - 0{,}2 \cdot 5/3}{1 + 5/3} = \frac{1}{4} g = 2{,}45 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

jer smo za ubrzanje zemljine teže uzeli vrijednost $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Iz gornjih dviju jednadžbi za silu F dobivamo izraz za proračunavanje sile kojom je napregnuto uže

$$F = \frac{1 + \mu}{1 + m_1/m_2} m_1 g = \frac{1 + 0{,}2}{1 + 5/3} 5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 22\,\mathrm{N},$$

jer je $\mathrm{N} = \text{newton} = \mathrm{kgm/s^2}$ (vidi odlomak 4.2.1).

7.3.2. Mjesna i normalna težina. U odsječku A.9.2 izložili smo da ubrzanje zemljine teže g nije konstanta, već se mijenja, uglavnom ovisno o geografskoj širini φ. Na polovima Zemlje vrijednost g_φ je najveća, a na ekvatoru najmanja. Prema tome *stvarna težina* G_φ tijela mase m na onom mjestu Zemlje gdje je stvarna vrijednost ubrzanja zemljine teže g_φ, prema jednadžbi (7.3-1), iznosi

$$G_\varphi = m g_\varphi. \tag{7.3-5}$$

Težinu G_φ nazivamo *mjesnom težinom* ili »lokalnom težinom«, jer ona ovisi o mjestu na Zemlji, tj. mijenja se — iako vrlo malo — od mjesta do mjesta.

Mjesna težina je ona *stvarna sila* koja napreže mostove, ceste, građevinske konstrukcije, čelične opruge kamiona itd. Budući da se g_φ mijenja od zemaljskog pola do ekvatora samo za oko 0,5 % (vidi odsječak A.9.2), u proračunu navedenih konstrukcija te razlike zanemarujemo. Stoga se prilikom proračuna u *tehnici* obično uzima da je $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ ili $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ ili čak $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, te se pretpostavlja da je ta vrijednost *konstantna*. Time se u račune svjesno unosi pogreška, ali ona je neznatna. Kad se, naime, zna da faktor sigurnosti strojarske ili građevinske konstrukcije iznosi nekoliko stotina postotaka i da su dopuštena naprezanja (σ, τ) poznata s pogreškom od nekoliko postotaka, onda pogreška u g_φ od nekoliko dijelova promila ili postotka ne može uzrokovati nikakve loše posljedice. S druge strane, proglašavanje vrijednosti $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ ili $10\ \mathrm{m/s^2}$ konstantom donosi bitne uštede u trajanju proračuna.

Kod *vrlo preciznih* mjerenja, a naročito prilikom vrhunskih metroloških mjerenja, takva se zanemarenja ne mogu dopustiti. Tamo se *mora* računati sa *stvarnim* ubrzanjem zemljine teže g_φ (vidi npr. reprodukciju velikih sila u odlomku A.9.3.4

ili reprodukciju jedinice jakosti električne struje amper pomoću tzv. strujne vage u poglavlju E.3). Budući da razni metrološki zavodi i drugi precizni laboratoriji leže na mjestima različitih g_φ, njihovi se rezultati mjerenja svode (preračunavaju) na stanovitu vrijednost g_0 koja je odabrana za normiranu (normalnu, standardnu). Godine 1901. Generalna konferencija za mjere i utege propisala je da vrijednost *normiranog* (standardnog) ubrzanja zemljine teže iznosi

$$g_0 = 9{,}806\,65 \text{ m/s}^2 \text{ (tačno).}$$

Za tu vrijednost upotrebljava se i simbol g_n, dakle $g_0 = g_n = 9{,}806\,65$ m/s^2.

Ako normalno ubrzanje zemljine teže $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s^2 uvrstimo u jednadžbu (7.3-5), dobivamo *normalnu* (normiranu, standardnu) *težinu*

$$G_0 = mg_0, \tag{7.3-6}$$

tj. normalna težina G_0 tijela jednaka je umnošku mase tog tijela i normalnog ubrzanja zemljine teže g_0. U preciznoj metrologiji se gotovo uvijek računa s normalnom težinom, iako se to obično posebno ne ističe. Vezu između stvarne (mjesne) težine G_φ i normalne težine G_0 dobivamo usporedbom jednadžbi (7.3-5,6). Pri tom iz računa ispada masa tijela m, jer ona *ne ovisi* o ubrzanju zemljine teže. Masa m je, naime, veličina koja karakterizira količinu tvari, a ona ostaje ista bez obzira da li je izložena ubrzanju g_φ ili g_0. Prema tome je zbog $m = G_\varphi/g_\varphi = G_0/g_0$

$$G_\varphi = G_0 \frac{g_\varphi}{g_0},$$

tj. mjesna (stvarna) težina proporcionalna je normalnoj težini G_0 i omjeru stvarnog i normalnog ubrzanja zemljine teže g_φ/g_0.

Primjer. Izračunajmo kolika je normalna težina utega mase $m = 1$ kilogram! Poslužujemo se jednadžbom (7.3-6) i dobivamo

$$G_0 = mg_0 = 1 \text{ kg} \cdot 9{,}806\,65 \text{ m/s}^2 = 9{,}806\,65 \text{ N},$$

jer je N = newton = kgm/s^2. Normalna težina tijela mase $m = 1$ kg odabrana je u Tehničkom sistemu jedinica za osnovnu jedinicu sile i nazvana je posebnim imenom kilopond = kp = 9,806 65 N (vidi odlomak 8.1.2).

7.3.3. Masa i težina u svemiru. U prošla dva odlomka 7.3.1,2 ponovno smo se mogli uvjeriti da je veličina »masa« daleko univerzalniji pojam negoli veličina »težina«. Štoviše, ustanovili smo da je »težina« pojam koji smo definirali samo za naš planet Zemlju; taj pojam može se, dakako, proširiti i na druge planete, ali od njega možemo očekivati korist samo u slučaju ako tijelo (o čijoj je težini riječ) miruje u sferi gravitacijskih polja tih planeta.

Pogledajmo stoga kako jasno dolazi do izražaja pojam mase kad tijelo izađe iz gravitacijskog polja Zemlje i stigne u prostor u kojem ne djeluje nikakvo ili gotovo nikakvo gravitacijsko polje nekog drugog planeta. To se već događa prilikom svemirskih letova sovjetskih i američkih letjelica koje njihovi raketni motori dovode u predviđene putanje, a zatim se gibaju dalje pod djelovanjem tromosti i upravljaju pomoćnim raketnim motorima ili raketnim nabojima. Svi predmeti u letjelici, a i ona sama, dospijevaju u tzv. »beztežinsko stanje«, tj. predmeti prestaju pritiskati na svoje podloge, deformacije tijela iščezavaju, satovi na uteg se zaustave itd. Predmeti u kabini letjelice »teturaju« oslobođeni zemljine teže (bilo Zemlje, bilo nekog drugog planeta), pomiču se kabinom tek kad ih ljudska ruka ili neka druga sila udari.

Poneseni impulsom te sile kreću se dok ne naiđu na stijenu kabine ili dok se ne sudare s nekim drugim predmetom koji isto tako »tetura« prostorom kabine.

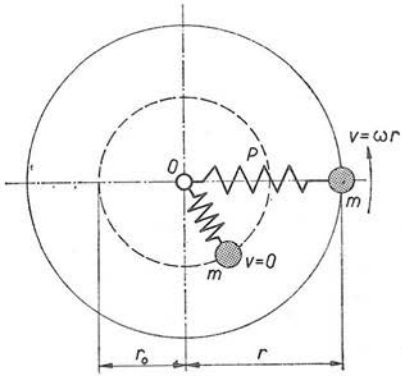
Zbog $g = 0$ (ili $g \approx 0$) težine $G = mg$ nema! A što je s masom m? Metodama uobičajenim na Zemlji ne možemo izmjeriti ni masu u letjelici koja juri kroz svemir. To je očito, jer zemaljske metode uspoređivanja masa (vaganja; vidi odsječak A.9.3) djeluju na principu uravnoteženja momenata ili sila (ako su kraci polužne vage jednako dugački ili kod vage na pero) izazvanih silom teže $G = mg$, dakle težinom tjelesa. No kako se ipak u jurećoj svemirskoj letjelici može izmjeriti masa m tijela?

Odgovor smo već dali u drugom pasusu ovog odlomka: mjerenje se, naime, može obaviti u skladu s *Newton*ovim zakonom $F = ma = m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, koji možemo napisati u obliku (opsežnije vidi u odsječku A.9.1)

$$m = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{t_1}^{t_2} F\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta v} F \Delta t.$$

Ovaj izraz odmah otkriva i metodu mjerenja: poznatom silom F dat će se tijelu nepoznate mase m impuls sile (integral u gornjoj jednadžbi ili umnožak $F\Delta t$, ako je sila F stalna u toku vremenskog intervala Δt), te izmjeriti trajanje impulsa $\Delta t = t_2 - t_1$ i promjena brzine $\Delta v = v_2 - v_1$ mjerenog tijela u toku istog vremena.

Poznatu silu F astronaut može proizvesti na dva načina. Prvi je taj da je sa Zemlje ponio baždareno pero (oprugu) čija je osobina $F = Cx$ (vidi odlomak 7.3.1); njime se može proizvesti željena sila za stvaranje impulsa $F\,\Delta t$. Drugi je način taj da je astronaut sa Zemlje ponio uteg poznate mase m_0 te pomoću njega baždario pero analognim prethodnim impulsnim mjerenjem kod kojeg je dobio $F = m_0 \Delta v_0 / \Delta t_0$. Ako zatim tom istom silom F djeluje impulsom $F\,\Delta t$ na tijelo čiju masu m mjeri, dobit će relaciju $F = m\Delta v/\Delta t$. Iz ove dvije jednadžbe slijedi $m = m_0(\Delta v_0/\Delta v) \cdot (\Delta t/\Delta t_0)$.



Sl. B.40. Uz mjerenje mase u svemiru

No ako u letjelici već ima uteg mase m_0, astronaut će se radije poslužiti jednostavnijom »vagom« koja je nacrtana na slici B.40. Pero P učvršćeno je u okretištu O oko kojeg se može vrtjeti pod djelovanjem elektromotora ili pernog mehanizma. Na drugom kraju pera pričvršćeno je tijelo nepoznate mase m. Ako se pero, zajedno s tijelom, okreće rotancijom (kutnom brzinom) ω, ono će se toliko rastegnuti da bude udovoljeno jednadžbi

$$m\omega^2 r = C(r - r_0),$$

jer centrifugalna sila $F = m\omega^2 r$ drži ravnotežu sili stezanja pera $F = Cx = C(r - r_0)$; ovdje je r_0 duljina pera kad ono miruje, tj. kad je posve skupljeno.

Vrijednost konstante C saznat će astronaut tako da na istom peru zavrti uteg poznate mase m_0 koji je donio sa Zemlje. Pri tom će izmjeriti r_1, ω_1 i r_0; za ove vrijednosti veličina vrijedi dakako jednadžba

$$m_0 \omega_1^2 r_1 = C(r_1 - r_0).$$

Iz tih dviju jednadžbi proizlazi tražena masa m nepoznatog tijela

$$m = m_0 \frac{T^2}{T_1^2} \frac{1 - r_0/r}{1 - r_0/r_1}.$$

Ovdje su T i T_1 period vrtnje u prvom i drugom pokusu (o T vidi odlomak 2.1.2). Prema tome astronaut mora izmjeriti r_0, r, r_1, T i T_0, ako nema baždareno pero. Ako, međutim, zna C u jednadžbi $F = C(r - r_0)$, dovoljno je da mjeri samo r_0, r i T, jer je $\omega = 2\pi/T$.

7.3.4. Masa kupljene i prodane robe. U opsežnim odlomcima 7.3.1,2,3 mogli smo ustanoviti da je veličina *masa m* doista univerzalan pojam kojim se tvar može pouzdano karakterizirati kako na Zemlji tako i u svemiru. Za veličinu *težina* $G = mg$ ustanovili smo da je korisna i pouzdana samo na našem planetu — Zemlji. Budući da ljudi žive i nastavit će živjeti na Zemlji, korisno je razmotriti koju je veličinu razumnije i praktičnije upotrebljavati: da li masu m ili težinu G?

Tražeći odgovor na to pitanje, moramo poći od stanovitih *činjenica* u pogledu mjernih jedinica mase i sile. Oslonimo se na ove tri činjenice: 1. Svatko zna da na utegu, na tržnici ili u trgovini, piše »1 kg«; svi slojevi stanovništva nazivaju taj uteg »kilogramskim utegom«; na tržnici kućanica zahtijeva od prodavača: »Odvagnite mi, molim, osam kilograma krumpira.« 2. Kilogram (kg) je jedinica fizikalne veličine koja se zove *masa* (vidi odlomak 3.3.1); izražavanje mase kilogramom propisano je međunarodnom standardizacijom i jugoslavenskim Zakonom o mjernim jedinicama i mjerilima. 3. Jedinica sile, dakle i *težine*, u Međunarodnom sistemu jedinica (SI; on je na snazi od godine 1960) jest newton (N), koji je definiran ovako: $\mathrm{N} = \mathrm{kgm/s^2}$ (vidi odlomak 4.2.1); no citirani Zakon dopušta i primjenu jedinice sile kilopond = 9,80665 N (vidi odlomak 4.2.4).

Sa ove tri konstatacije mogu se izvesti različiti postupci u pogledu trgovine robom. Pod *robom* razumijevamo sve tvari koje se pojavljuju na tržištu: povrće, konzerve, piće, tekstil, metali, gorivo, ulje, ... i tako dalje u nedogled; sve čemu se količina može izmjeriti te prodati i kupiti.

Prvi postupak. Pretpostavka: *želimo se držati Međunarodnog sistema jedinica* (SI), jer znamo da on ima niz prednosti, da ga svijet sve više upotrebljava i da ostali sistemi jedinica polako iščezavaju.

Količinu tvari (stanovita količina kupusa, ugljena itd.; više o tome vidi u odsječku D.1.3 glave D) u svakodnevnom životu najčešće karakteriziramo ili *masom m* ili *težinom G*. Rjeđe je karakteriziramo *volumenom* (vino, ulje, gorivo, odnosno općenito tekućine). Težina G tvari definirana je umnoškom mase m te tvari i ubrzanja zemljine teže g, tj. $G = mg$ (vidi odlomak 7.3.1). Uz navedenu pretpostavku da se želimo držati jedinica SI, moramo masu m izražavati jedinicom SI kilogram (kg), a težinu jedinicom SI newton (N). Konkretno: došavši na tržnicu domaćica može zahtijevati *istu količinu* krumpira na dva načina: »Molim, odvagnite mi količinu krumpira ...

... *mase* 8 kilograma.« ili ... *težine* 78,4 newtona.«

Pri tom smo na vrijednost težine došli računom $G = mg = 8\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} = 78{,}4\ \mathrm{kgm/s^2} = 78{,}4\ \mathrm{N}$ (približno).

Primjer je, dakako, karikiran: prosječno naobražena, a to znači u pogledu prirodoznanstva loše, domaćica neće upotrijebiti ni riječ »masa«, ni riječ »težina«; ona će jednostavno prodavaču reći: »*Molim, odvagnite mi 8 kilograma krumpira*«

(vjerojatnije: »... 8 *kila* krumpira«). Ipak, noseći krumpir kući, domaćica će se možda požaliti susjedi: »Oh, kako sam se namučila. Znate, *težina* tog krumpira je 8 kilograma.« Upotreba riječi »težina« jedina je pogreška koju je u ove dvije rečenice učinila domaćica, to je dakle *terminološka* pogreška uvjetovana podukom koju je svojedobno dobila u školi.

Drugom mogućnošću (»... 78,4 newtona«) domaćica se *sigurno* neće poslužiti; ne bi je vjerojatno prodavač krumpira ni razumio. Prema tome možemo zaključiti ovako: ispravno je robu karakterizirati jedinicom *mase* kilogram, ali je neispravno reći da je *težina* toliko i toliko kilograma; zbog toga djecu treba u *osnovnoj školi* priviknuti na pojam mase.

Drugi postupak. Pretpostavka: *ne ustrajemo* uz dosljednu primjenu Međunarodnog sistema jedinica (SI), već uz jedinice SI upotrebljavamo i druge jedinice koje dopušta već citirani Zakon. Konkretno: došavši na tržnicu domaćica može zahtijevati *istu količinu* krumpira na dva načina: »Molim, odvagnite mi količinu krumpira...

... *mase* 8 kilograma.« ili ... *težine* 8 kiloponda.«

Pri tom smo na vrijednost težine došli računom $G = mg = 8\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 = 8$ kiloponda $= 8$ kp, jer je ova jedinica sile, dakle i težine, definirana jednadžbom $\text{kp} = 9{,}8\,\text{kgm/s}^2$ (približno; tačno vidi u odlomcima 4.2.4 i 9.2.1).

Naravno da je i ovaj primjer karikiran; domaćica će, naime, jednako kao i u opisu prvog postupka reći da je »... *težina* tog krumpira 8 kilograma«. Učinit će dakle *istu terminološku pogrešku* kao i prije, jer ona vjerojatno i ne zna da postoji jedinica težine (sile) kilopond.

Zaključak ovog razmatranja je jasan: ljude treba priviknuti da govore o *masi* tvari kad kupuju ili prodaju neku robu, a oni će je — kao i do sada, znajući ili ne znajući za metrološke pojmove i primjenu ovog ili onog sistema jedinica — izražavati *kilogramima*. Prema tome valja reći:

masa sadržaja konzerve (neto) iznosi .... 100 g,
masa zamotka šećera je ..... 2 kg,
masa uljne peći je ..... 48 kg,
masa dopremljenog ugljena je ..... 1 t,
masa lokomotive iznosi ..... 70 t

Obrazložimo još zašto smo u ovom razmatranju za primjer uzeli *domaćicu*, a ne neku školovaniju osobu. Razlog je taj što su jedinice *duljine, površine, volumena, brzine i mase* (npr. m, m^2, m^3, m/s, kg) ona kategorija mjernih jedinica koje upotrebljava *sve pučanstvo*, bez obzira na školsku spremu i zanimanje. Sasma je druga kategorija *specijalnih jedinica* (sa stanovišta laika): watt, m/s^2, kg/m^3, henry itd., za veličine snaga, ubrzanje, gustoća, induktivitet itd. Negdje na pola puta između ove dvije kategorije su, na primjer, jedinice volt i amper, jer se one pojavljuju na natpisnim pločicama kućanskih aparata i na upozorenjima o zaštiti od »struje«.

No dok se podjela na ove dvije kategorije može tolerirati kod prirodoslovno neznatno naobražena pučanstva, ona se *ne smije* tolerirati u novinara, urednika i prevodilaca dnevnih, tjednih i mjesečnih listova, jer je njihov utjecaj na pučanstvo izvanredno velik (više o tome vidi u odlomku 9.1.4).

7.3.5. Cijena robe je veličina s kojom smo se susreli već na samom početku knjige (odsječak A.2.1). Ta veličina (a pogotovo njene vrijednosti!) izvanredno je važan regulator gotovo svih ljudskih djelatnosti. Do pojma *cijena c* dolazi se na dva načina, ovisno o načinu kupoprodaje robe. Znamo da se roba kupuje i prodaje na tri načina: 1. komadno, 2. vaganjem, 3. mjerenjem volumena.

U prvom slučaju govorimo (precizno) o *komadnoj cijeni*. Kažemo, na primjer, da »cijena jajetu iznosi 70 para«. Tu rečenicu bilježimo u obliku jednadžbe ovako

$$c_j = 70 \text{ para/kom.}$$

Ovdje slovo c označuje veličinu »komadna cijena«, indeks j odnosi se na tvar o kojoj je riječ (jaje), para je novčana jedinica (dinar = 100 para), a kom (skraćenica od »komad«) je simbol za jedno jaje, tj. broj 1 (više o tome vidi u odsječku D.1.3 pod naslovom »Količina tvari«).

U drugom slučaju govorimo (precizno) o *jediničnoj cijeni* ili *specifičnoj cijeni*. Do tog pojma dolazimo ovako: zamislimo da prodavač nuđa punu košaru naranči za 80 din. Tih 80 din je vrijednost veličine koja se zove *trošak* ili *cijena* (ne »jedinična cijena«, već »cijena« čitave količine naranči); označimo je sa $T = 80$ din. Vaganjem je ustanovljeno da je *masa* ponuđene količine naranči $m = 20$ kg. Jedinična (ili specifična) cijena u tom slučaju iznosi

$$c = \frac{T}{m} = \frac{80\,\text{din}}{20\,\text{kg}} = 4\frac{\text{din}}{\text{kg}},$$

tj. jedinična cijena definirana je omjerom troška (cijene) robe i njene *mase*.

Može se, dakako, jedinična cijena definirati i omjerom troška (cijene) T i *težine* G robe, tj. jedinična cijena c' definirana je u tom slučaju sa $c' = T/G = T/(mg)$, što znači da je $c' = c/g$. Primjenom Međunarodnog sistema jedinica (SI) jedinična cijena naših naranči iznosila bi

$$c' = \frac{c}{g} = \frac{4\,\text{din/kg}}{9{,}8\,\text{m/s}^2} = 0{,}408\frac{\text{din}}{\text{N}},$$

gdje je N = newton = kgm/s² jedinica sile (dakle i težine) u SI.

Naravno da nitko nema važnog razloga da jediničnu cijenu definira sa $c' = T/G$, pa da se onda muči s jedinicom din/N i pripadnim brojčanim iznosima (npr. 0,408). Mnogo je lakše, a uz to racionalno, da se jedinična cijena definira omjerom $c = T/m$, pa se onda roba kupuje i prodaje s vrijednošću u jedinici din/kg. No u tom slučaju valja količinu robe karakterizirati *masom m* (vidi odlomak 7.3.4). To je ispravno i sa strogog znanstvenog stanovišta: kad je veliki *Newton* uveo pojam *masa*, on je pod time razumijevao »količinu tvari« (quantitas materiae), dakle baš ono što u obliku krumpira ili naranči kupuje domaćica. (Na ove pojmove još ćemo se jednom vratiti u ovoj knjizi; u poglavlju 9 raspravlja se, naime, o načinu prijelaza s tzv. Tehničkog sistema jedinica na SI.)

Pri kupoprodaji robe na temelju mjerenja *volumena V* (vino, ulje, benzin itd). cijena se definira omjerom troška T i volumena V, dakle

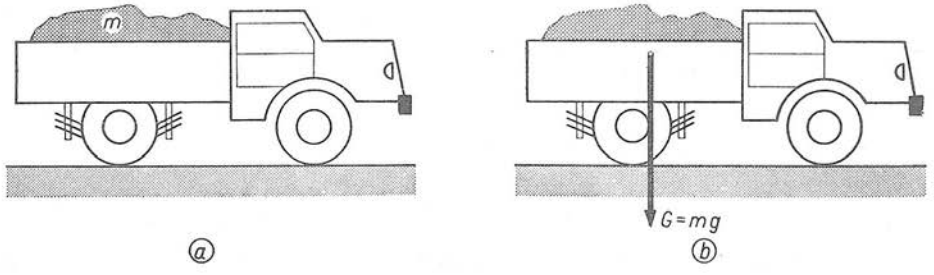
$$c'' = \frac{T}{V}.$$

Na primjer, jedinična cijena mineralne vode je $c''_v = 1{,}2$ din/l, gdje je l kratica jedinice volumena litar $=$ dm$^3 = 10^{-3}$ m^3. Lako možemo ustanoviti da između jediničnih cijena $c = T/m$, $c' = T/G$ i $c'' = T/V$ postoje odnosi

$$c' = \frac{c}{g_0}, \quad c'' = \rho c, \quad c'' = g_0 \rho c',$$

gdje je $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s^2 normirano ubrzanje zemljine teže (vidi odlomak 7.3.2), a $\rho = m/V$ gustoća robe (vidi odlomke 3.1.2 i 3.2.1).

7.3.6. Nosivost i noseća sila. Svrha je transportnih sredstava da robu i ljude prenose s jednog mjesta na drugo. Među transportna sredstva ubrajaju se kamion, željeznički vagon, kran, dizalica, putnički automobil, dvokolica itd. Ti uređaji prenose *tvari*, a jedna od najprikladnijih značajki za karakteriziranje tvari je *masa* tvari (vidi prošle odlomke 7.3.3,4,5). U skladu s time mora biti i terminologija transporta. Obično se npr. kaže da »... *teret* iznosi 4 tone«. Govornik je



Sl. B.41. Uz definiciju nosivosti i noseće sile: a) nosivost, b) noseća sila

time skraćeno rekao da *masa* prevezene ili prenesene tvari (robe) iznosi 4 tone ($= 4000$ kg). Prema tome je riječ »teret« sinonim za »masu tvari (tereta, tovara)«.

Pojam »teret« zanima kako vlasnika transportirane robe tako i vlasnika transportnog sredstva. Za potonjeg je, naime, važno da zna kolika je *nosivost* njegova kamiona ili dizalice. »Nosivost« je značajka transportnog sredstva; ona kaže za koliku najveću *masu tvari* je uređaj građen. Na slici B.39a shematski je prikazano da kamion transportira rasuti teret mase m. Nosivost m_0 tog kamiona uvijek mora biti veća ili jednaka masi natovarene tvari, dakle $m_0 \geqq m$. Ako je $m > m_0$, tj. ako je masa natovarene tvari veća od nosivosti kamiona m_0, kamion će se oštetiti ili slomiti (ili će vlasnika kazniti milicija, ako ga ulovi).

Prema tome *ispravno je* kad na kamionima piše »nosivost 4 tone«, ili na portalnoj dizalici »maksimalna nosivost 120 tona«, tj. pri maksimalnoj udaljenosti hvatišta tereta ona može dizati ili spuštati tvar (najveće) mase 120 000 kg.

Za *konstruktora* transportnog uređaja važna je *noseća sila*. To je najveća sila koja djeluje na uređaj i na koju su u pogledu čvrstoće dimenzionirani kritični sklopovi transportnog uređaja. Kod kamiona su to, na primjer, opruge (ili pneumatici itd.). Najveća *sila* što vertikalno djeluje na vitalni dio kamiona je težina najvećeg dopuštenog tereta

$$G_0 = m_0 g,$$

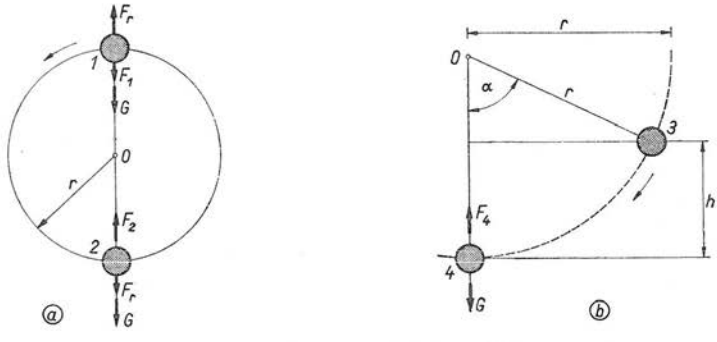
gdje je m_0 nosivost kamiona, a g ubrzanje zemljine teže $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Isto vrijedi i za svako drugo transportno sredstvo.

Primjer. Kolika je noseća sila krana nosivosti 12 tona? Budući da je $m_0 = 12\ \mathrm{t} = 12000\ \mathrm{kg}$, noseća sila iznosi $G = m_0 g = 12000\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} = 118000\ \mathrm{N} = 118\ \mathrm{kN}$ (kN = kilonewton).

7.4. Primjeri upotrebe jedinica SI u mehanici

U dosadašnje tekstove ove knjige uvrstili smo niz konkretnih primjera iz kojih se može razabrati kako se najpouzdanije obavlja neki proračun. U tim primjerima u pravilu se računa s jedinicama SI u veličinskim jednadžbama (o njima vidi odsječak A.1.4). Iskustvo autora ove knjige i njegovih kolega pokazuje da je navođenje riješenih primjera najbolje sredstvo za definitivno objašnjenje izloženog gradiva i za učvršćenje znanja. Prilikom nedoumice pri nekom svom proračunu, čitatelj se rado vraća na te primjere kako bi ustanovio da li je na pravom putu. Stoga ovdje navodimo nekoliko primjera računanja s jedinicama SI; kombinirani s izlaganjima u poglavlju 10 oni mogu čitatelju stvoriti osjećaj potpune sigurnosti i samostalnosti. Primjeri nisu problemski, dakle nisu »teški«, ali su *tipični*. Svrha im je da čitatelju posluže kao uzor načina rješavanja sličnih težih zadataka.

7.4.1. Napetost u niti prilikom vrtnje. Na kraju niti nalazi se uteg koji se, zajedno s niti učvršćenom u središtu vrtnje O, okreće u vertikalnoj ravnini (sl. B.42a). Ustanovimo za koliko je sila koja napreže nit u tački *2* veća od analogne sile u tački *1*. Ustanovimo, osim toga, kolikom je silom F nategnuta nit u tački *4*, ako smo je zajedno s utegom mase $m = 2$ kg ispustili iz tačke *3* ($\alpha = 90°$; vidi sliku B.42b).



Sl. B.42. Uz primjer kruženja tijela ovješenog o nit

Riješimo najprije prvi dio zadaće (sl. B.42a). U tački *1* na nit izvana djeluju dvije sile: jedna je težina $G = mg$, gdje je m masa tijela koje kruži ovješeno o niti duljine r, a druga je centrifugalna sila $F_r = mv^2/r$. Toj sili drži ravnotežu zbroj sila $G + F_1$, gdje je F_1 sila kojom je napregnuta nit; prema tome je

$$F_1 = F_r - G = m\frac{v^2}{r} - mg = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right).$$

U tački *2* sile su orijentirane onako kako je nacrtano na slici B.42a, pa vrijedi

$$F_2 = F_r + G = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right).$$

Zadatkom je tražena razlika ovih dviju sila. Ona iznosi

$$\Delta F = F_2 - F_1 = 2\,G = 2\,mg,$$

tj. razlika je jednaka dvostrukoj težini $G = mg$ tijela koje kruži.

Drugi dio zadaće riješit ćemo uz pomoć slike B.42b: u tački *3* brzina kruženja v jednaka je nuli, jer iz nje puštamo nit s utegom da se zanjiše. U toj tački tijelo mase $m = 2$ kg ima potencijalnu energiju (u odnosu na tačku *4*) $W_p = mgh$. Pošto tijelo stigne u tačku *4*, ono više nema potencijalne energije, ali ima kinetičku $W_k = \frac{1}{2}mv^2$, gdje je v brzina kojom se tijelo giba (kruži) dospjevši u tačku *4*. Budući da je $W_p = W_k$ (vidi odsječak 5.1), slijedi

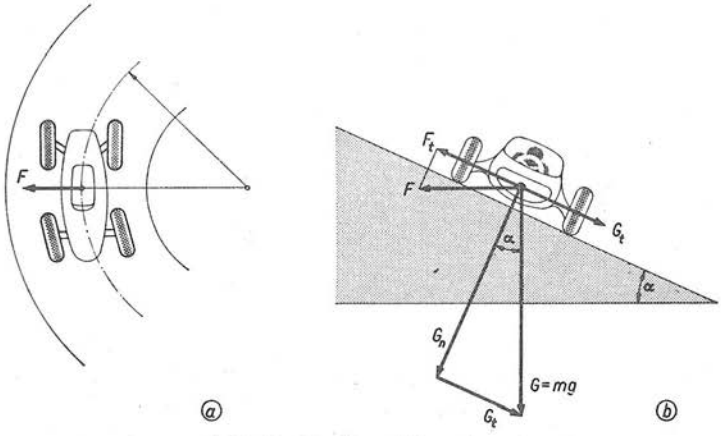
$$mv^2 = 2\,mgh = 2\,mgr(1 - \cos\alpha),$$

jer je $h = r(1 - \cos\alpha)$ (sl. B.42b). Uvrstimo li ovaj izraz u jednadžbu za F_2 iz prvog dijela zadaće (tačka *4* odgovara tački *2*), dobivamo

$$F_4 = 2mg(1 - \cos\alpha) + mg = mg(3 - \cos\alpha) = G(3 - \cos\alpha).$$

Ako je $\alpha = 90°$, onda je $\cos\alpha = 0$, a budući da je $m = 2$ kg, računanjem slijedi sila F_4 kojom je napregnuta nit: $F_4 = 3\,G = 3\,mg = 3 \cdot 2\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 = 58{,}8$ N.

7.4.2. Vozilo u klizavu zavoju. Kroz zavoj glatke asfaltne ceste polumjera zakrivljenosti $r = 150$ m i nagiba ceste u tom zavoju $\alpha = 6°$ prošao je defektan kamion cisterna iz kojeg je curilo ulje. S kolikom maksimalnom brzinom v može proći kroz taj zavoj automobil koji vozi iza kamiona cisterne, a da ne sleti sa ceste (sl. B.43a)?



Sl. B.43. Vozilo na klizavoj cesti

Uljem polivenu asfaltnu cestu možemo smatrati idealno glatkom, tj. nema sile trenja koja bi automobil održala na cesti ako vozi zavojem brzinom prevelikom u toj situaciji. Prema tome na vozilo mase m djelovat će samo one sile koje su nacrtane na slici B.43b. Vodoravna centrifugalna sila iznosit će $F = mv^2/r$. Tangencijalna komponenta te sile $F_t = F\cos\alpha = mv^2\cos\alpha/r$ nastojat će zbaciti automobil sa ceste. Tome se odupire tangencijalna komponenta težine vozila $G_t =$

$= G \sin \alpha = mg \sin \alpha$. Automobil neće sletjeti sa ceste sve dok je $G_t \geqq F_t$, tj. dok je $mg \sin \alpha \geqq mv^2 \cos \alpha / r$. Odavde slijedi brzina kojom smije kroz zavoj voziti automobil, a da još ne sleti preko vanjskog ruba ceste

$$v = \sqrt{r \operatorname{tg} \alpha \, g} = \sqrt{150\ \mathrm{m} \cdot 0{,}105 \cdot 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}} = 12{,}4\ \mathrm{m/s},$$

jer je $\operatorname{tg} 6° = 0{,}105$. Brzinu $v = 12{,}4$ m/s možemo izraziti jedinicom km/h; slijedi $v = 12{,}4$ m/s $= 12{,}4 \cdot 3{,}6$ km/h $= 44{,}7$ km/h (o jedinicama brzine vidi odsječak 2.4).

7.4.3. Odjeljivanje drugog stepena rakete. Dvostepena raketa ukupne mase 1 tonu imala je u odnosu na Zemlju brzinu $v = 171$ m/s kad se od nje odijelio drugi stepen rakete mase $m_2 = 400$ kg. Prilikom odjeljivanja brzina drugog stepena rakete povećala se na $v_2' = 185$ m/s u odnosu na Zemlju. Kolikom se brzinom gibao prvi stepen rakete nakon odjeljivanja?

Sve do odjeljivanja oba stepena rakete gibala su se kao cjelina, tj. vrijedilo je $v_1 = v_2 = v$, a njihov ukupni impuls iznosio je $(m_1 + m_2)v$, gdje je m_1 masa prvog stepena rakete, a m_2 masa drugoga. Nakon odjeljivanja svaki stepen rakete nastavio se gibati samostalno brzinama v_1' i v_2', a njihov ukupni impuls iznosio je $m_1 v_1' + m_2 v_2'$. Prema zakonu o održanju impulsa vrijedi (vidi odsječak A.9.1)

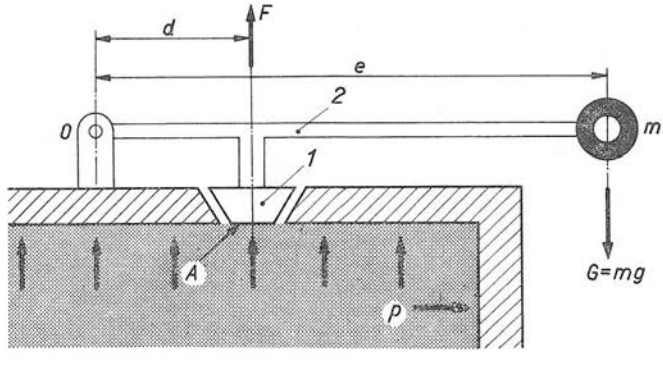
$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

odakle dobivamo brzinu prvog stepena rakete nakon odjeljivanja

$$v_1' = v - \frac{m_2}{m_1}(v_2' - v) = 171 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \frac{400\,\mathrm{kg}}{600\,\mathrm{kg}} 14 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 161{,}7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Prvi stepen rakete smanjit će dakle svoju brzinu za oko 5,5%.

7.4.4. Proračun sigurnosnog ventila. Načelo djelovanja sigurnosnog ventila parnog kotla prikazuje slika B.44: Čep *1* kruto je učvršćen na polugu *2*, koja se može zakretati oko okretišta *O*. Na desnom kraju poluge nalazi se uteg mase m, koji pod djelovanjem sile teže stvara zakretni moment utega $M_u = eG = emg$ u odnosu na *O*. Čep *1* ne dopušta da para tlaka p izlazi iz spremnika sve dok protumoment pritiska pare $M_p = pAd$ ne premaši moment M_u. Izračunajmo kolika mora biti masa utega m da bi sigurnosni ventil proradio pošto tlak pare premaši vrijednost 50 bar. Konstrukcijski podaci ventila su ovi: $d = 4$ cm, $e = 20$ cm, $A = 1$ cm^2 (površina čepa na koju djeluje tlak pare).



Sl. B.44. Uz proračun sigurnosnog ventila

Ako zanemarimo masu poluge *2*, trenje u ležaju *O* i silu uzgona koja djeluje na uteg m, traženom će uvjetu biti udovoljeno u slučaju kada je $M_u = M_p$, tj. $emg = pAd$. Odavde slijedi tražena masa utega

$$m = \frac{d}{e} \frac{Ap}{g} = \frac{4\,\mathrm{cm}}{20\,\mathrm{cm}} \frac{1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} \cdot 50 \cdot 10^5\,\mathrm{N/m^2}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} = 10{,}2\,\mathrm{kg}.$$

Ovdje smo odmah uvrstili $A = 1\ \text{cm}^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2$ i $p = 50\ \text{bar} = 50 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$ (o jedinici tlaka bar vidi odlomak 4.3.4). Rezultat smo u stvari dobili u jedinici Ns^2/m, no budući da je $\text{N} = \text{kg m/s}^2$ (vidi odlomak 4.2.1), to je dalje $\text{Ns}^2/\text{m} = (\text{kgm/s}^2) \cdot \cdot \text{s}^2/\text{m} = \text{kg}$.

7.4.5. Strojna obrada vratila. Čelično vratilo promjera $d = 60$ mm i duljine $l = 180$ mm obrađuje se na tokarskom stroju. Pri tom nož djeluje na osovinu silom $F = 4800$ N (sl. B.45). Izračunajmo koliko je maksimalno naprezanje vratila na torziju, kut zasuka i relativni zasuk vratila!

Sukanje (torzija) vratila nastaje zbog djelovanja zakretnog momenta

$$M = Fd/2 = 4800\ \text{N} \cdot 60\ \text{mm}/2 = 144\ \text{Nm}.$$

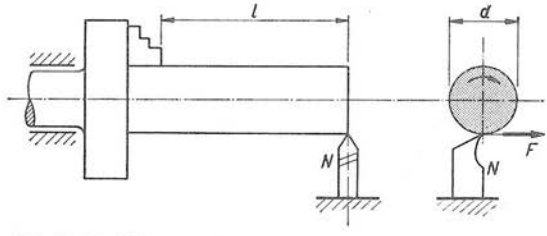
Budući da je polarni moment otpora vratila

$$W = \frac{\pi}{16} d^3 \approx 0{,}2\, d^3 = 0{,}2 \cdot (6\,\text{cm})^3 = 43{,}2\,\text{cm}^3 = 4{,}32 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3,$$

maksimalno tangencijalno naprezanje vratila iznosi

$$\tau = M/W = 144\ \text{Nm}/(4{,}32 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3) = 3{,}34\ \text{MN/m}^2 = 334\ \text{N/cm}^2.$$

Kut zasuka φ vratila, računajući od oštrice noža do mjesta učvršćenja vratila u glavu tokarskog stroja, izračunat ćemo pomoću *Hooke*ova zakona $\varphi = Ml/(GJ)$, gdje je G modul klizanja (torzije), a J polarni moment tromosti. Za čelik je približno $G = 85000\ \text{MN/m}^2 = 8500\ \text{kN/cm}^2$. Polarni moment tromosti pune okrugle osovine iznosi $J = Wd/2 = 43{,}2\ \text{cm}^3 \cdot 3\ \text{cm} = 129{,}6\ \text{cm}^4$. Uvrštenjem vrijednosti $M = 14400$ Ncm, $l = 180\ \text{mm} = 18$ cm, $G = 8500\ \text{kN/cm}^2 = 8{,}5 \cdot 10^6\ \text{N/cm}^2$, $J = 129{,}6\ \text{cm}^4$ računanjem slijedi kut zasuka



Sl. B.45. Uz proračun naprezanja vratila pri strojnoj obradi

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ} = \frac{14400\,\text{Ncm} \cdot 18\,\text{cm}}{8{,}5 \cdot 10^6 \dfrac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cdot 129{,}6\,\text{cm}^4} = 2{,}35 \cdot 10^{-4}.$$

Kut zasuka je, dakle, $\varphi = 0{,}000235$ rad (o radijanu vidi odlomak 1.4.1). U tablici **5** u prilogu knjige nalazimo da je radijan = rad = 206265 kutnih sekundi (″). Stoga je vrijednost našeg φ u kutnim sekundama

$$\varphi = 2{,}35 \cdot 10^{-4}\ \text{rad} = 2{,}35 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}06265 \cdot 10^{5}'' = 48{,}5''.$$

Relativni zasuk (vidi tablicu B-53) iznosi $\vartheta = \varphi/l = 48{,}5''/0{,}18\ \text{m} = 270''/\text{m} = = 4{,}5'/\text{m}$.

7.5. Primjena Međunarodnog sistema jedinica (SI) u hidraulici

7.5.1. Općenito o primjeni SI u hidraulici. Budući da su hidrostatika i hidrodinamika dio opće mehanike, očito je da uvođenje jedinica SI u hidrauliku uzrokuje iste promjene kakve općenito uzrokuje u statici i dinamici (vidi prethodne odsječke ovog poglavlja 7). To znači da je i na tom području mehanike korisno uvođenje veličine *masa* umjesto veličine *težina*, gustoće umjesto specifične težine itd. U skladu s time, na primjer, jednadžbe kontinuiteta i *Bernoulli*jeva jednadžba prelaze u oblik

$$m' = A v \rho, \quad q = A v,$$

$$\frac{W}{m} = hg + \frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2} v^2 = \text{const.}$$

I u pogledu primjene jedinica SI vrijedi isto što i za ostalu mehaniku: za energiju valja upotrebljavati jedinicu J = joule, za silu N = newton, za tlak N/m², za maseni protok m³/s, za snagu W = watt itd. Uz ove jedinice lako se upotrebljavaju standardizirani višekratnici jedinica (vidi odsječak 7.6).

Stoga ne vidimo jačeg razloga da posebno razmotrimo hidrauliku u svjetlu veličinskih jednadžbi i jedinica SI. Pri tom ćemo ipak učiniti dvije iznimke: u naredna dva odlomka razmotrit ćemo veličinu »otpor strujanju« i njenu jedinicu SI, te veličinu »brzohodnost« turbostrojeva, jer su obje te veličine vrlo važne u suvremenoj tehnici.

Primjer. Kolika je specifična energija W/m vode pod tlakom 10 bar na visini 5 metara, ako struji brzinom 2 m/s? Ako u gore navedenu *Bernoulli*jevu jednadžbu uvrstimo $h = 5$ m, $g = 9{,}8$ m/s², $p = 10$ bar $= 10^6$ N/m², $\rho = 1000$ kg/m³ i $v = 2$ m/s, dobivamo

$$\frac{W}{m} = 5\,\text{m} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{10^6\,\text{N/m}^2}{1000\,\text{kg/m}^3} + \frac{1}{2}\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$\frac{W}{m} = 49 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1000 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1051 \frac{\text{J}}{\text{kg}},$$

jer je N = kg m/s² i J/kg = Nm/kg = (kgm²/s²)/kg = m²/s².

7.5.2. Jedinica SI otpora strujanju tekućina. Prilikom strujanja tekućina u zatvorenim cijevima, one pružaju stanoviti otpor gibanju tekućina. Taj otpor može se izraziti gubitkom tlaka Δp duž cijevi duljine l (*Darcy*jeva formula)

$$\Delta p = \xi \tfrac{1}{2} \rho v^2, \tag{7.5-1}$$

gdje je ρ gustoća tekućine, v njena brzina, a ξ tzv. koeficijent gubitaka. Za cijevi kružnog presjeka taj koeficijent definiran je jednadžbom

$$\xi = \lambda l/d, \tag{7.5-2}$$

gdje je λ koeficijent trenja, l duljina ravne cijevi, a d konstantni unutarnji promjer cijevi. Koeficijent trenja λ ovisi o *Reynolds*ovoj značajki Re (vidi odlomak D.4.2.5) i relativnoj hrapavosti unutrašnje stijene cijevi k/d; ovdje je k hrapavost cijevi, tj. prosječna visina neravnina (izbočina) cijevi.

Jednadžbu (7.5-1) možemo izraziti u ovisnosti o protoku q (vidi odlomak 3.1.5), koji je u ovom odnosu s brzinom tekućine v i presjekom A cijevi: $q = Av$. Budući da je za okruglu cijev $A = d^2\pi/4$, uz pomoć izraza (7.5-2) od (7.5-1) dobivamo

$$\Delta p = Rq^2, \tag{7.5-3}$$

gdje je R *otpor strujanju* ili kraće *otpor* (njem. Widerstandkennziffer). Taj otpor R ovisi o prije navedenim veličinama ovako

$$R = R_0 l; \quad R_0 = \frac{8\rho}{\pi^2} \frac{\lambda}{d^5}.$$

Veličina $R_0 = R/l$ naziva se *specifičnim otporom*. Naziv »otpor« i »specifični otpor« potječu otuda što se između jednadžbe (7.5-3) i *Joule*ova zakona gubitaka u elektrotehnici $\Delta P = ri^2$ može postaviti formalna analogija; pri tom je ΔP snaga gubitaka, r električki otpor, a i jakost električne struje (stvarno električko modeliranje jednadžbe 7.5-3 izvodi se mnogo kompliciranije).

Pri električkom modeliranju vodovodnih i drugih distributivnih mreža, kao i pri ručnom proračunavanju takvih mreža u osnovi je jednadžba (7.5-3). Stoga ovdje želimo ustanoviti kojom će se jedinicom $[R]_M$ u primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) mjeriti veličina otpor R i u kakvom je odnosu jedinica $[R]_M$ prema jedinici Tehničkog sistema koja se pretežno upotrebljavala prije uvođenja SI (1960).

Budući da je jedinica tlaka p u SI $[p]_M = \mathrm{N/m^2}$ (vidi odlomak 4.3.1), a jedinica volumnog protoka q $[q]_M = \mathrm{m^3/s}$, to iz jednadžbe (7.5-3) neposredno proizlazi

$$[R]_M = \frac{[p]_M}{[q]_M^2} = \frac{\mathrm{N/m^2}}{\mathrm{m^6/s^2}}.$$

Jedinica newton = N definirana je jednadžbom $\mathrm{N = kgm/s^2}$, što uvrštenjem u gornji izraz daje

$$[R]_M = \frac{\mathrm{s^2 N}}{\mathrm{m^8}} = \frac{\mathrm{s^2 kgm/s^2}}{\mathrm{m^8}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^7}}, \tag{7.5-4}$$

dakle kilogram kroz metar na sedmu.

U njemačkoj hidrotehničkoj literaturi smo pronašli da se do postanka SI godine 1960. upotrebljavala jedinica Tehničkog sistema (o tom sistemu jedinica vidi odsječak 8.1) $\mathrm{kp\,m^{-8}s^2}$, koja je čak imala svoje ime i kraticu

$$\text{weisbach} = \mathrm{Wb} = \frac{\mathrm{kp/m^2}}{\mathrm{m^6/s^2}} = \frac{\mathrm{s^2 kp}}{\mathrm{m^8}}. \tag{7.5-5}$$

Ovdje je kp = kilopond = 9,806 65 N (vidi odlomak 4.2.4). Vidimo da je upotrijebljena kratica Wb koju u SI ima jedinica magnetskog toka weber = Wb = Vs (vidi odsječak E.2.2; jedinicu $\mathrm{s^2kp/m^8}$ neki autori nazivaju »milimurg«).

Poslužimo se ipak kraticom Wb (= weisbach) da bismo do kraja izveli naš naum, tj. usporedili jedinicu Wb sa $[R]_M$. Podijelimo li međusobno jednadžbe (7.5-5 i 4), slijedi

$$\frac{\mathrm{Wb}}{[R]_M} = \frac{\mathrm{s^2 kp}}{\mathrm{m^8}} \frac{\mathrm{m^8}}{\mathrm{s^2 N}} = \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{N}} = 9{,}806\,65,$$

tj. jedinica Tehničkog sistema je 9,806 65 puta veća od pripadne jedinice SI $[R]_M = \mathrm{kg/m^7}$.

7.5.3. Brzohodnost turbina i pumpi. Graditelji i eksploatatori hidrauličkih turbina i pumpi upotrebljavaju veličinu »brzohodnost«, koju obično definiraju u odnosu na posve konkretne jedinice. Prilikom uvođenja jedinica Međunarodnog sistema (SI) stručnjaci ove struke našli su se vjerojatno pred pitanjem: da li u vezi s uvođenjem SI treba da iznova definiraju veličinu »brzohodnost«? Naša naredna razmatranja, posve uopćena i skraćena na minimum, pokazat će nam da *nisu* potrebne nikakve promjene, ali uz uvjet da su dosadašnje definicije bile ispravne.

Radi svestranog uspoređivanja geometrijski sličnih turbostrojeva na njih se primjenjuje *teorija sličnosti*. Ova teorija polazi od temeljnih zakona hidraulike $v^2 = 2gh$, $q = Av$ i mehanike $v = \omega r = 2\pi nr$. Ovdje slovo v označuje brzinu (tekućine ili lopatice stroja), g ubrzanje zemljine teže, h hidraulički pad (tzv. neto-pad), q protok (volumni), A površinu, n frekvenciju (brzinu) vrtnje, a r polumjer lopatičnog kola, odnosno općenito izmjere stroja.

Označimo li podatke stroja (geometrijski sličnog stroju za koji smo napisali navedene tri jednadžbe), koji smo svojevoljno odabrali za *referentni* (usporedbeni, modelni), indeksom $_0$ (nula), dobivamo jednadžbe $v_0^2 = 2gh_0$, $q_0 = A_0 v_0$, $v_0 = 2\pi n_0 r_0$. Podijelimo li međusobno ove dvije skupine jednadžbi, slijedi

$$\frac{v_0}{v} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^{1/2}; \quad \frac{q_0}{q} = \frac{A_0}{A}\,\frac{v_0}{v}; \quad \frac{v_0}{v} = \frac{n_0}{n}\,\frac{r_0}{r}.$$

Budući da je površina općenito $A = \text{const} \cdot r^2$, to je $A_0/A = r_0^2/r^2$, pa iz desnih dviju jednadžbi nastaje jedna, odnosno od triju jednadžbi dvije:

$$\frac{v_0}{v} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^{1/2}, \quad \frac{q_0}{q} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^3 \left(\frac{n}{n_0}\right)^2.$$

Ako iz ovih dviju jednadžbi eliminiramo omjer v_0/v, dobivamo izraz

$$\frac{n_0}{n} = \left(\frac{q}{q_0}\right)^{1/2} \left(\frac{h_0}{h}\right)^{3/4} \quad \text{ili} \quad n_0 = \frac{n}{\sqrt{h/h_0}} \sqrt{\frac{q/q_0}{\sqrt{h/h_0}}} \tag{7.5-6}$$

Veličina n_0, tj. frekvencija vrtnje (vidi odlomak 2.2.4) modelnog stroja, obično se naziva *brzohodnost*, a označuje sa n_q, dakle $n_0 = n_q$.

Umjesto u ovisnosti o omjeru protoka q/q_0, izrazi (7.5-6) mogu se prikazati i u ovisnosti o omjeru snagâ strojeva P/P_0, jer je za hidrauličke strojeve približno

$$\frac{P}{P_0} = \frac{q}{q_0}\,\frac{h}{h_0}.$$

Uvrstimo li q/q_0 iz ove jednadžbe u izraz (7.5-6), slijedi

$$\frac{n}{n_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/2} \left(\frac{h_0}{h}\right)^{5/4} \quad \text{ili} \quad n_0 = \frac{n}{\sqrt{h/h_0}} \sqrt{\frac{P/P_0}{\sqrt{h/h_0} \cdot h/h_0}}. \tag{7.5-7}$$

Naravno da je veličina n_0 ista kao i u jednadžbi (7.5-6). Unatoč tome n_0 iz jednadžbe (7.5-7) naziva se brzohodnost n_s, dakle $n_0 = n_s$, a ne n_q kako smo imali u izrazu (7.5-6).

Razlog tome je taj što hidrostrojarski stručnjaci nisu u prošlosti pisali korektnu jednadžbu (7.5-6), već su modelnom stroju pripisali vrijednosti

$$h_0 = 1\,\mathrm{m},\quad q_0 = 1\,\mathrm{m^3/s}, \tag{7.5-8}$$

čime desna jednadžba (7.5-6) prelazi u oblik

$$n_0 = n_q = \frac{n}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{q}{\sqrt{h}}}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{m^3}}}}. \tag{7.5-9}$$

Ovdje su ispod znaka desnog korijena s i m oznake za jedinicu vremena sekundu i jedinicu duljine metar. U stvari oni su čitav desni korijen jednadžbe (7.5-9) *odbacili*, jer prilikom uvrštenja vrijednosti modelnih veličina nisu pisali kao što je navedeno u jednadžbi (7.5-8), već $h_0 = 1$ i $q_0 = 1$. Na taj način umjesto pouzdane *veličinske* jednadžbe stvorili su ograničenu *brojčanu* jednadžbu koja je vrijedila samo za jedinice m i $\mathrm{m^3/s}$.

Posve analogno su hidrostrojarski stručnjaci učinili i s izrazom (7.5-7), ali su u njega uvrstili

$$P_0 = 1,\quad h_0 = 1,$$

misleći pri tom na $P_0 = 1$ KS $= 1$ konjska snaga (vidi odlomak 5.5.3) i $h_0 = 1$ m $=$ $= 1$ metar. Tako su i od (7.5-7) dobili *brojčanu* jednadžbu koja je vrijedila samo za brojčane iznose snage P u KS i za h u m. Zbog toga su i postojala *dva brojčana iznosa brzohodnosti*, n_q i n_s, koji su se međusobno razlikovali.

Nakon ovih konstatacija možemo se vratiti na početak ovog odlomka, gdje smo tvrdili da SI ne donosi promjene na ovom području *ako su definicije ispravne*. Jednadžbe (7.5-6,7) ne ovise, naime, o izboru sistema jedinica ili čak heterogenog skupa jedinica, jer je riječ o *omjeru veličina*; tvrdnja je, dakle, na mjestu. S druge strane, osakaćena jednadžba (7.5-9), tj. uz odbačeni desni korijen, neispravna je, manjkava. Potrebu za prijelazom na jednadžbu (7.5-6) ne zahtijeva, dakle, uvođenje SI, već korektna primjena teorije modeliranja turbostrojeva.

7.6. Primjena višekratnika jedinica SI

7.6.1. Višekratnici jedinica. U odsječku A.2.3 razmotrili smo dekadske i decimalne višekratnike koje je prihvatila Generalna konferencija za mjere i utege na svojim zasjedanjima godine 1960. i 1964. Ti usvojeni višekratnici imaju vlastita imena i kratice (prefikse), a svugdje se smiju upotrijebiti oni koji su u međusobnom odnosu 1000:1. To su (vidi i tablicu A-1):

atto $= a = 10^{-18}$	
femto $= f = 10^{-15}$	
piko $= p = 10^{-12}$	tera $= T = 10^{12}$
nano $= n = 10^{-9}$	giga $= G = 10^{9}$
mikro $= \mu = 10^{-6}$	mega $= M = 10^{6}$
mili $= m = 10^{-3}$	kilo $= k = 10^{3}$

Kratica naziva višekratnika (prefiks) uvijek se stavlja ispred jedinice, neposredno uz nju. Na primjer, MJ = megajoule $= 10^6$ J, kN = kilonewton $= 10^3$ N. U izgovoru se naziv višekratnika i ime jedinice povezuju, dakle onako kako smo i

napisali u ova dva primjera. Prefiks *množi* jedinicu, a jedna jedinica može imati samo *jedan* prefiks, dakle nm = nanometar = 10^{-9} m, a ne μmm = mikromilimetar = 10^{-9} m.

U primjeni imenovanih višekratnika jedinica može doći do stanovitih teškoća, do nedovoljne sigurnosti i nepreglednosti pri računanju. Stoga ćemo u narednom odlomku razmotriti konkretan primjer i iz njega pokušati izvući pouku kako valja računati s prefiksima da bi računanje bilo pregledno i sigurno, pa makar to ponekad išlo na uštrb trajanja računanja.

7.6.2. Višekratnici jedinice tlaka SI. Jedinica naprezanja, čvrstoće i tlaka u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) jest N/m^2 = newton na kvadratni metar. U većini svakodnevnih tehničkih primjena ova jedinica je mnogostruko premalena. Tako je, na primjer, tlak vodovodne mreže oko 10^6 N/m^2, a dopušteno naprezanje čelika reda veličine 10^7 N/m^2. U prvi se mah čini posve prirodnim da se ovdje upotrijebi dekadski višekratnik mega = M = 10^6 pa da se, na primjer, kaže da prema JUS C.B0.501 granica razvlačenja čelika Č.0460 iznosi

$$\sigma \geqq 250 \text{ MN/m}^2.$$

Ovakvom načinu pisanja stavljaju se dva prigovora. *Prvi*: u takvom obliku podaci nisu navedeni ni u jednom priručniku! To je istina. I mi smo do navedenog podatka došli tako što smo podatak $\sigma \geqq 25$ kp/mm^2, nađen u priručniku, preračunali uz tačan odnos $mm^2 = 10^{-6}$ m^2 i približan odnos kp ≈ 10 N. Tako smo izračunali

$$\sigma \geqq 25 \text{ kp/mm}^2 = 25 \cdot 10 \text{ N}/(10^{-6} \text{ m}^2) = 250 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2,$$

što na kraju daje 250 MN/m^2, jer je $M = 10^6$.

Drugi prigovor je stvar osjećaja, navike: vrijednost naprezanja 250 MN/m^2 *teško je predočljiva.* Kad se kaže 250 N/mm^2 (a to je isto kao i 250 MN/m^2), ljudi imaju predodžbu da na svaki kvadratni milimetar djeluje sila 250 newtona, kao da na jedan kvadratni milimetar pritišće svojom težinom oko 25 jednokilogramskih utega ($G = mg \approx 25 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 250$ N). A teško je čovjeku zamisliti 250 MN/m^2, tj. da sila 250 milijuna newtona pritišće na jedan kvadratni metar! I taj subjektivni prigovor je istinit. Konačno sistemi jedinica i prefiksi stvoreni su za ljude da im olakšaju posao, a time i život.

Napustimo na čas ova dva prigovora i prisjetimo se pravila primjene prefiksa: na jednu jedinicu primjenjuje se *jedan* prefiks! U našem slučaju osnovna jedinica je N/m^2, tj. složena jedinica koja se sastoji od dvije druge jedinice, N i m^2. Ako se držimo spomenutog pravila, prefiks M (ili bilo koji drugi) možemo primijeniti ili na N (newton) ili na m^2 (kvadratni metar). No višekratnici jedinice m^2 su donekle nezgodni za računanje (vidi odlomak 1.5.2); tako je npr. $cm^2 = (cm)^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4}$ m^2, te $mm^2 = (mm)^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6}$ m^2. To znači da kod jedinica površine

$$mm^2, \; cm^2, \; dm^2$$

ne postoji onaj zoran princip primjene prefiksa kao što je kod svih onih jedinica koje nisu sastavljene od kvadrata, kubusa ili više potencije jedinice duljine metar. Kod jedinice MJ, GJ, kN, kW itd. takvih problema nema.

Odgovorimo sada na opravdana dva prigovora. U tablicama neka i dalje ostanu podaci u »predočljivim« jedinicama, npr. u N/mm^2 ili N/cm^2 (vidi i odsje-

čak 9.5). No prije nego što se ti podaci uvrste u formulu, *preračunajmo* podatke u takav oblik *da u nazivniku iščeznu prefiksi.* Ako smo u tablici našli podatak $\sigma = 250\ \mathrm{N/mm^2}$, preračunajmo ga prije uvrštenja u formulu na $\mathrm{N/m^2}$ i dodajmo potreban prefiks. Znamo da je u našem slučaju to $\sigma = 250\ \mathrm{MN/m^2}$. Tako valja učiniti i s drugim jedinicama površine, volumena, momenta otpora, tromosti i dr. Svrha je tog postupka: *potpuna sigurnost pri računanju.* Takav se postupak prividno čini dugotrajnijim. Kažemo prividno; u stvari nije, jer u tom slučaju račun gotovo ne moramo ni kontrolirati, dakle ne gubimo vrijeme. Naravno, ako se služimo veličinskim jednadžbama.

Primjer takvog pouzdanog računanja već smo imali u odlomku 7.4.5. Tamo smo najprije izračunali da je moment otpora vratila $W = 43{,}2\ \mathrm{cm^3}$, a zatim smo uz pomoć $\mathrm{cm^3} = (\mathrm{cm})^3 = (10^{-2}\ \mathrm{m})^3 = 10^{-6}\ \mathrm{m^3}$ otpor vratila preračunali u $W = 43{,}2\ \mathrm{cm^3} = 43{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3} = 4{,}32 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3}$. Zatim smo sa $M = 144\ \mathrm{Nm}$ izračunali naprezanje

$$\tau = \frac{M}{W} = \frac{144\,\mathrm{Nm}}{4{,}32 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}} = 3{,}34 \cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = 3{,}34\,\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m^2}}.$$

Odavde smo zatim ponovno prešli na »predočljivu« vrijednost $\tau = 334\ \mathrm{N/cm^2}$, jer je $\mathrm{MN/m^2} = 10^6\ \mathrm{N}/(10^4\ \mathrm{cm^2}) = 100\ \mathrm{N/cm^2}$.

Ova rasuđivanja ne vrijede, dakako, samo za jedinice tlaka i naprezanja Međunarodnog sistema (SI). Posve ista je situacija i kod jedinica tzv. Tehničkog sistema (vidi odsječak 9.5), u kojem je osnovna jedinica duljine m = metar, površine $\mathrm{m^2}$ itd., a ipak u tablicama nalazimo podatke u $\mathrm{kp/mm^2}$ i $\mathrm{kp/cm^2}$, jer su pripadni brojčani iznosi u tehničkoj operativi prikladniji (kraći).

8. Tehnički, CGS i MTS sistemi jedinica u mehanici

8.1. Tehnički sistem jedinica mehanike

8.1.1. Osnova Tehničkog sistema jedinica. Naglasimo odmah da ovaj sistem jedinica nikada nije bio međunarodno standardiziran, a njegov domašaj nikada nije prelazio okvire tehničke mehanike uključivši hidrauliku. Nastao je u okviru strojarske industrije, i to u njeno mlado i zlatno doba kad se mislilo da je ta industrija na zenitu svog uspona, a bila je u stvari vrlo labavo vezana uz susjedne tehnike, toplinsku tehniku i elektrotehniku, a da ne govorimo o fizici. Danas znamo da je to bila iluzija; cjelokupnost ljudskih djelatnosti u tehnici i prirodoznanstvu povezao je tek Međunarodni sistem jedinica (SI). No Tehnički sistem (TS) moramo temeljito obraditi u ovoj knjizi, jer se s njegovim rudimentima susrećemo na mnogim mjestima tehničke operative. Osim toga, mnogi ljudi ne znaju kako da od Tehničkog sistema (TS), na koji su navikli školovanjem ili dugogodišnjom praksom, prijeđu na SI, pa to valja objasniti (vidi poglavlje 9), a prije toga barem letimično opisati bit TS.

Tehnički sistem jedinica mehanika osniva se na tri osnovne jedinice:

jedinica duljine: »metar« (m)
jedinica vremena: »sekunda« (s)
jedinica sile: »kilopond« (kp).

Iako smo u odlomku 4.2.4 već razmatrali definiciju jedinice sile TS kilopond, ipak na ovom mjestu valja podrobnije ući u njeno porijeklo.

8.1.2. Jedinica sile TS kilopond. Generalna konferencija za mjere i utege definirala je godine 1899. pramjere za jedinice metar i kilogram (vidi odsječak A.6.4). Budući da su u to vrijeme postojala različita mišljenja o značenju riječi »kilogram«, Generalna je konferencija 22. oktobra 1901. ponovno naglasila da je kilogram jedinica *mase*, koja je ostvarena u obliku svoje pramjere — pariskog prakilograma (vidi i odlomak 9.1.2).

Generalna je konferencija tada ujedno propisala da je normirana težina pariskog prakilograma umnožak njegove mase 1 kg i normiranog (normalnog) ubrzanja zemljine teže $g_0 = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$. Normirana težina pariskog prakilograma iznosi, dakle, prema $G = mg = 1\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2} = 9{,}806\,65\ \mathrm{kgm/s^2}$ (tačno). Ta normirana težina pariskog prakilograma mnogo je kasnije, godine 1934, nazvana »kilopond«.

Danas nacionalna zakonodavstva tretiraju kp kao jednu od dopuštenih vansistemskih jedinica koja je definirana ovako (vidi odlomak 4.2.4)

$$\text{kilopond} = \text{kp} = 9{,}806\,65\ \text{N (tačno)}, \tag{8.1-1}$$

gdje je N = newton = kgm/s² (vidi odlomak 4.2.1). Njegovu upotrebu dopušta i jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961, koji smo djelomično citirali u odlomku 7.1.1.

Kako smo vidjeli, *naziv* kilopond je novijeg datuma. U naše krajeve prodro je nakon drugoga svjetskoga rata. U međuvremenu, dok se još nije rodio naziv kilopond (*Hoffmann* i *Wallot*), pisci su u publikacijama imali dosta muke kad su morali naglašavati da je u nekom slučaju riječ o kilogramu mase, a u drugome o kilogramu sile. Stoga ćemo još i danas u starim knjigama naći oznake težine npr. 92 kg*, što je označivalo 92 »kilograma težine«, tj. u današnjem govoru 92 kiloponda. A neki su autori označivali baš *obratno*, sa kg* jedinicu mase. Zbrka je bila potpuna. Našoj generaciji, srednjoškolcima pred drugi svjetski rat, pitanja ove vrste iz fizike bila su prava muka. Ne samo nama već i profesorima! Čini se da oni i danas s time muku muče (vidi odlomak 9.1.2).

Ipak je taj sistem jedinica, Tehnički sistem, osnovan na metru, sekundi i kilopondu, pustio duboko korijenje u *tehnici*. Možda je jedan od razloga tome bilo pomanjkanje domaćih tehničkih udžbenika i priručnika. U nas se, osim toga, mnogo upotrebljavala njemačka stručna literatura, koja je u tom pogledu bila natražna. To je paradoksalno kad se sjetimo da je baš Njemačka rodila *J. Wallot*a, koji je uveo veličinske jednadžbe i znatno pridonio uvođenju reda u njemačku i svjetsku metrologiju! No bilo kako bilo, TS jedinica počeo je praktički ubrzano odumirati s uvođenjem Međunarodnog sistema jedinica (SI) godine 1960, dakle nedavno.

8.1.3. Jedinica mase TS hyl. Tehnički sistem jedinica (TS) razlikuje se od Međunarodnog sistema jedinica (SI; vidi poglavlje 7) po tome što za treću osnovnu jedinicu ima jedinicu *sile* (kilopond), dok Međunarodni sistem ima jedinicu *mase* (kilogram). To znači da su sve geometrijske i kinematičke izvedene jedinice jednake (vidi tablicu B-54) u oba sistema. Razlikuju se samo one jedinice u kojima se pojavljuju masa i sila.

Izračunajmo kako se odnosi jedinica mase tehničkog sistema $[m]_T$ prema jedinici mase u SI — kilogramu (kg)! Prije računanja moramo naglasiti da je TS sistematičan skup *koherentnih* jedinica, tj. građenih na principu »1 × 1 = 1« (vidi odlomak 7.2.1), dakle građenih na istom principu kao što su građene i jedinice SI. Stoga pri izvođenju jedinica TS primjenjujemo jednaki postupak kao i pri izvođenju jedinica TS. Jedinicu mase TS $[m]_T$ izvest ćemo iz jednadžbe koja povezuje masu nekog tijela m i težinu G tog istog tijela, dakle iz $G = mg$. Budući da je jedinica sile, dakle i težine, u TS $[F]_T = [G]_T =$ kilopond = kp, a jedinica ubrzanja $[a]_T = [g]_T =$ m/s² (vidi tablicu B-54), iz jednadžbe $m = G/g$ proizlazi jedinica mase u TS:

$$[m]_T = \frac{[F]_T}{[a]_T} = \frac{\text{kilopond}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{kp} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = \text{hyl}. \qquad (8.1\text{-}2)$$

Ta jedinica mase $[m]_T = \text{kps}^2/\text{m}$ dobila je naziv »hyl« ili »techma«. No naziv nigdje nije bio nikada službeno usvojen niti je primjenjivan u široj tehničkoj javnosti; nalazimo ga samo u specijalnim metrološkim raspravama.

Vezu između jedinice mase TS hyl = $[m]_T$ i jedinice SI kg uspostavit ćemo tako da u jednadžbu (8.1-2) uvrstimo odnos (8.1-1), tj. kp = 9,806 65 kgm/s² (tačno)

$$[m]_T = \text{hyl (techma)} = \frac{\text{kp}}{\text{m/s}^2} = \frac{9{,}806\,65\,\text{kgm/s}^2}{\text{m/s}^2} = 9{,}806\,65\,\text{kg}.$$

Jedinica mase TS hyl (ili techma) tačno je 9,80665 puta *veća* od jedinice mase Međunarodnog sistema jedinica (SI) kilograma! Za grube usporedbe dobro je zapamtiti da je hyl otprilike predstavljen sa 10 jednokilogramskih utega!

8.1.4. Izbjegavanje jedinice mase u primjeni TS. Krugovi onih tehničara koji su upotrebljavali Tehnički sistem jedinica (TS) našli su se u nezgodnoj situaciji: nisu mogli ignorirati postojanje kilogramskih utega i mjerenje mase njima, a koherentnost TS nalagala im je da upotrebljavaju za mjerenje mase jedinicu mase $[m]_T = \text{hyl} = 9{,}80665\ \text{kg}$, koja se nikako nije mogla probiti u uvriježeni način vaganja. Stoga su našli svojevrstan izlaz kojim su uopće izbjegli upotrebu veličine masa. Objasnit ćemo to na *primjeru.*

Kolika je snaga kočenja autobusa ukupne težine 10 tona koji se u toku 5 sekundi zakoči od brzine 72 km/h do mirovanja? Ispravimo prije računanja jednu *pogrešku* koja se uvukla u tekst zadatka! Riječ je o jedinici »tona«; to *nije* jedinica težine, već jedinica *mase* (vidi odlomak 3.3.2). Prema tome težinu autobusa treba izraziti jedinicom sile TS kilopondom (kp); stoga podaci treba da glase:

$$G = 10000\ \text{kp},\quad v = 20\ \text{m/s},\quad t = 5\ \text{s}.$$

Ovdje smo brzinu v odmah preračunali na jedinicu TS m/s; očito je $v = 20\ \text{m/s} = 20 \cdot 0{,}001\ \text{km/(h/3600)} = 20 \cdot 3{,}6\ \text{km/h} = 72\ \text{km/h}$.

Da bismo izračunali prosječnu snagu kočenja P, moramo najprije znati energiju gibanja koju treba da trenjem pretvore u toplinu obloge kočnice. Autobus je prilikom gibanja brzinom v imao kinetičku energiju

$$W = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} \frac{G}{g} v^2, \tag{8.1-3}$$

a iz W se dobiva prosječna energija kočenja $P = W/t$ (vidi odlomak 5.1.3).

U jednadžbi (8.1-3) je m masa autobusa. Budući da je, kako smo rekli, jedinica mase u TS hyl bila nepopularna, oni koji su upotrebljavali TS, napisali su uz pomoć $m = G/g$ jednadžbu za kinetičku energiju u obliku desne jednadžbe (8.1-3). Time je uvjetovan daljnji tok računanja

$$W = \tfrac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 = \tfrac{1}{2} \frac{10000\ \text{kp}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} \left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 204000\ \text{kpm}.$$

Ovdje je $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ približna vrijednost ubrzanja zemljine teže, a kpm je jedinica energije i rada u Tehničkom sistemu jedinica (vidi tablicu B-54).

Prosječnu snagu kočenja potrebnu za zaustavljanje autobusa lako izračunamo iz

$$P = \frac{W}{t} = \frac{204000\ \text{kpm}}{5\ \text{s}} = 40800\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}}.$$

Iz tablice B-54 razabiremo da je jedinica snage u TS: kpm/s. Korisnici TS nisu se, međutim, dosljedno služili tom koherentnom jedinicom snage TS, već 75 puta većom *vansistemskom* jedinicom konjska snaga = KS = 75 kpm/s (vidi odlomak 5.5.3). Na taj način dobili su prosječnu snagu kočenja u jedinici KS

$$P = 40800\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 40800\ \frac{\text{KS}}{75} = 545\ \text{KS},$$

jer je kpm/s = KS/75 (tačno).

Tablica **B-54**

Pregled jedinica Tehničkog sistema jedinica, CGS sistema jedinica i odnosi tih jedinica prema jedinicama SI

Redni broj	Naziv veličine	Oznaka	Definicijska jednadžba	Jedinica Tehničkog sistema (TS)		Jedinica CGS sistema jedinica		Kratica jedinice SI
				Kratica jedinice TS	Omjer jed. TS / jed. SI	Kratica jedinice CGS	Omjer jed. CGS / jed. SI	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Prostorne veličine i jedinice							
1	Duljina	l, s, a	—	m	1	cm	10^{-2}	m
2	Kut	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	$\alpha = s/r$	rad	1	rad	1	rad
3	Površina	A, S	$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	m^2	1	cm^2	10^{-4}	m^2
4	Prostorni kut	Ω, ω	$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}A/r^2$	sr	1	sr	1	sr
5	Volumen	V, τ	$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	m^3	1	cm^3	10^{-6}	m^3
6	Moment površine	I_a	$\mathrm{d}I_a = z^2\,\mathrm{d}A$	m^4	1	cm^4	10^{-8}	m^4
7	Polumjer momenta površine	i, r	$i^2 A = I_a$	m	1	cm	10^{-2}	m
8	Polarni moment površine	I_p	$\mathrm{d}I_p = (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A$	m^4	1	cm^4	10^{-8}	m^4
9	Moment tromosti volumena	I_v	$\mathrm{d}I_v = z^2\,\mathrm{d}V$	m^5	1	cm^5	10^{-10}	m^5
	Vremenske veličine i jedinice							
10	Vrijeme	t, τ	—	s	1	s	1	s
11	Period	T, τ	$T = t_2 - t_1$	s	1	s	1	s

1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	Frekvencija	f, ν	$f = 1/T$	s^{-1}	1	s^{-1}	1	Hz
13	Kružna frekvencija	ω	$\omega = 2\pi f$	s^{-1}	1	s^{-1}	1	s^{-1}
14	Rotancija (kutna brzina)	ω	$\omega = d\alpha/dt$	rad/s	1	rad/s	1	rad/s
15	Frekvencija vrtnje	n	$n = 1/T$	s^{-1}	1	s^{-1}	1	s^{-1}
16	Kutno ubrzanje	ϵ	$\epsilon = d\omega/dt$	rad/s^2	1	rad/s^2	1	rad/s^2
17	Brzina	v, u, c, w	$v = ds/dt$	m/s	1	cm/s	10^{-2}	m/s
18	Gradijent brzine	—	grad $v = dv/dl$	s^{-1}	1	s^{-1}	1	s^{-1}
19	Ubrzanje	a	$a = dv/dt$	m/s^2	1	cm/s^2	10^{-2}	m/s^2
20	Ubrzanje zemljine teže	g		m/s^2	1	cm/s^2 (gal)	10^{-2}	m/s^2
21	Gradijent ubrzanja	—	grad $a = da/dl$	s^{-2}	1	s^{-2}	1	s^{-2}
22	Protok	q	$q = dV/dt$	m^3/s	1	cm^3/s	10^{-6}	m^3/s
23	Jedinični protok	q_0	$q_0 = dq/dA$	m/s	1	cm/s	10^{-2}	m/s
			Masene veličine i jedinice					
24	Masa	m, M	$m = F/a$	kps^2/m (hyl)	9,80665	g	10^{-3}	kg
25	Linijska gustoća	—	dm/dl	kps^2/m^2	9,80665	g/cm	10^{-1}	kg/m
26	Plošna gustoća	—	dm/dA	kps^2/m^3	9,80665	g/cm^2	10	kg/m^2
27	Gustoća	ρ	$\rho = dm/dV$	kps^2/m^4	9,80665	g/cm^3	10^3	kg/m^3
28	Specifični volumen	v	$v = 1/\rho = dV/dm$	$m^4kp^{-1}s^{-2}$	0,101972	cm^3/g	10	m^3/kg

Tablica **B-54** (nastavak)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
29	Relativna gustoća	d	$d = \rho/\rho_0$	1	1	1	1	1
30	Maseni protok	m'	$m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$	kp s/m	9,80665	g/s	10^{-3}	kg/s
31	Jedinični maseni protok	m'_1	$m'_1 = \mathrm{d}m'/\mathrm{d}A$	kp s/m^3	9,80665	g/s cm^2	10	kg/sm^2
32	Količina gibanja	p	$\mathrm{d}p = \mathrm{d}(mv)$	kp s	9,80665	g cm/s	10^{-5}	kg m/s
33	Moment količine gibanja	b	$b = pr = J\omega$	kp sm	9,80665	g cm^2/s	10^{-7}	kg m^2/s
34	Moment tromosti	J, I	$\mathrm{d}J = \mathrm{d}mr^2$	kp s^{2}m	9,80665	g cm^2	10^{-7}	kg m^2
35	Polumjer tromosti tijela	r, R	$r^2m = J$	m	1	cm	10^{-2}	m
36	Zamašni moment	—	mD^2	kp s^{2}m	9,80665	g cm^2	10^{-7}	kg m^2
			Veličine i jedinice sile					
37	Sila	f	$F = ma$	kp	9,80665	dyn (g cm/s^2)	10^{-5}	N
38	Gravitacijska sila	F_g	$F_g = \kappa m_1 m_2/r^2$	kp	9,80665	dyn	10^{-5}	N
39	Jakost gravitacijskog polja	E, a_g	$E = F_g/m = a_g$	m/s^2	1	cm/s^2	10^{-2}	m/s^2
40	Težina	G	$G = mg$	kp	9,80665	dyn	10^{-5}	N
41	Normirana težina	G_0	$G_0 = mg_0$	kp	9,80665	dyn	10^{-5}	N
42	Specifična težina	γ	$\gamma = \mathrm{d}G/\mathrm{d}V = g\rho$	kp/m^3	9,80665	dyn/cm^3	10	N/m^3
43	Normirana specifična težina	γ_0	$\gamma_0 = \mathrm{d}G_0/\mathrm{d}V = g_0\rho$	kp/m^3	9,80665	dyn/cm^3	10	N/m^3
44	Impuls sile	I	$\mathrm{d}I = F\,\mathrm{d}t$	kp s	9,80665	dyn s	10^{-5}	Ns
45	Moment sile	M	$M = rF\sin(r,F)$	kp m	9,80665	dyn cm	10^{-7}	Nm

1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	Moment para sila	D, T, M_d	$D = rF$	kpm	9,80665	dyncm	10^{-7}	Nm
47	Zakretni moment	T, M, D	$T = rF = P/\omega$	kpm	9,80665	dyncm	10^{-7}	Nm
48	Impuls momenta sile	L	$dL = M\,dt$	kpsm	9,80665	dynscm	10^{-7}	Nsm
49	Tlak	p	$p = dF/dA$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
50	Stvarni (apsolutni) tlak	p	$p = p_0 + p_n$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
51	Atmosferski (okolišni) tlak	p_0	$p_0 = p - p_n$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
52	Nadtlak	p_n	$p_n = p - p_0$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
53	Podtlak (vakuum)	p_v	$p_v = p_0 - p$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
54	Dinamička viskoznost	η, μ	$F = \eta A\,dv/dz$	kps/m²	9,80665	poise (dyn s/cm²)	10^{-1}	Ns/m²
55	Fluidnost	Φ, ξ	$\Phi = 1/\eta$	m²/kps	0,101972	poise^{-1}	10	m²/Ns
56	Kinematička viskoznost	ν	$\nu = \eta/\rho$	m²/s	1	stokes (cm²/s)	10^{-4}	m²/s

Veličine i jedinice naprezanja

57	Naprezanje, normalno	σ, σ_n	$\sigma_n = dF_n/dA$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
58	Naprezanje, tangencijalno	τ	$\tau = dF_t/dA$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
59	Relativno izduženje	ϵ, e	$\epsilon = \Delta l/l_0$	1	1	1	1	1
60	Relativno poprečno skraćenje	η	$\eta = -\Delta b/b_0$	1	1	1	1	1
61	Poissonov broj	μ	$\mu = \eta/\epsilon$	1	1	1	1	1
62	Poissonova konstanta	m	$m = 1/\mu = \epsilon/\eta$	1	1	1	1	1

Tablica **B-54** (nastavak)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
63	Relativno klizanje (smik)	γ	$\gamma = \Delta s/l_0$	1	1	1	1	1
64	Relativni zasuk	ϑ	$\vartheta = \varphi/l_0$	rad/m	1	rad/cm	10^2	rad/m
65	Modul klizanja (torzije)	G	$G = \tau/\gamma$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
66	Modul elastičnosti	E	$E = \sigma_n/\epsilon$	kp/m²	9,80665	dyn/cm²	10^{-1}	N/m²
67	Koeficijent linearnog izduženja	α	$\alpha = \epsilon/\sigma_n = 1/E$	m²/kp	0,101972	cm²/dyn	10	m²/N
68	Modul stlačivosti	κ, χ, k	$\kappa = -\frac{1}{V_0}\frac{dV}{dp}$	m²/kp	0,101972	cm²/dyn	10	m²/N
			Energetske veličine i jedinice					
69	Rad	A, W	$dA = F\,ds$	kpm	9,80665	erg (dyn cm)	10^{-7}	J
70	Energija, potencijalna	W, E, U	$W_p = mgh$	kpm	9,80665	erg	10^{-7}	J
71	Energija, kinetička	W, E, U	$W_k = \frac{1}{2}mv^2$	kpm	9,80665	erg	10^{-7}	J
72	Energija vrtnje	W, E, U	$W_i = \frac{1}{2}J\omega^2$	kpm	9,80665	erg	10^{-7}	J
73	Gustoća (prostorna) energije	w	$w = dW/dV$	kpm/m³	9,80665	erg/cm³	10^{-1}	J/m³
74	Snaga	P	$P = dA/dt$	kpm/s	9,80665	erg/s	10^{-7}	W
75	Korisnost	η	$\eta = P_0/P_d$	1	1	1	1	1

8.1.5. Neopravdan prigovor Tehničkom sistemu. Protivnici Tehničkog sistema jedinica ponekad mu nekritički spočitavaju da je »neznanstven«, jer navodno ovisi o geografskoj širini, dakle o mjestu na Zemlji, pa da zato ni njegovi rezultati nisu dovoljno precizni. Takva je tvrdnja *neispravna*, što ćemo odmah ustanoviti ponovnim razmatranjem jedinice sile TS kilopond, jer baš tu počinje razlika između TS i SI. Stoga usporedimo jedinice sile u ta dva sistema jedinica.

Jedinica sile TS, koja je jedna od triju *osnovnih, polaznih* jedinica tog sistema jedinica, definirana je prema jednadžbi (8.1-1) *tačnim* odnosom

$$\text{kilopond (kp)} = 9{,}806\,65 \text{ newton (N)}.$$

To znači da je kp ovisan o geografskoj težini isto onoliko koliko i newton, *izvedena* jedinica SI. A newton je u SI definiran jednadžbom (vidi odlomak 4.2.1)

$$\text{newton (N)} = \text{kilogram (kg)} \times \text{metar (m)/sekunda}^2 \text{ (s}^2\text{)},$$

tj. $\mathrm{N} = \mathrm{kgm/s^2}$. U ovoj definiciji nema ni traga mjesnom (lokalnom) ubrzanju zemljine teže. Prema tome ni kilopond nije ni u kakvoj ovisnosti o g_φ (vidi odlomak 7.3.2), već je jednostavno tačno propisani višekratnik jedinice newton.

Nepravedna optužba TS vjerojatno potječe iz usporedbe stvarne (mjesne) težine G_φ i normalne (normirane) težine G_0, o kojima smo govorili u odlomku 7.3.2, gdje smo ustanovili da je $G_\varphi/g_\varphi = G_0/g_0$. No iz ove *veličinske jednadžbe* ne mogu se i ne smiju izvlačiti nikakvi zaključci u pogledu *jedinica*. Veličinske jednadžbe su naime *univerzalne*, one vrijede za bilo koje jedinice pripadnih veličina; stoga navedena veličinska jednadžba vrijedi i onda ako npr. G_φ uvrstimo u kp, g_φ u $\mathrm{ft/min^2}$, G_0 u pdl (vidi odlomak 4.2.6), a g_0 u $\mathrm{m/s^2}$!

8.1.6. Veličina težina u TS. Izbjegavanje primjene jedinice mase TS hyl, o čemu smo raspravljali u odlomku 8.1.4, jedan je od uzroka zašto tehničari primjenjivači TS nisu upotrebljavali veličinu *masa*, nego veličinu *težina* (u stvari veličinu »normalna težina«; vidi odlomak 7.3.2). U skladu s time težina se u duhu primjene TS izražava jedinicom sile kilopond. Način te primjene objasnit će nam ovaj primjer.

Zamislimo da neko tijelo (npr. neki čovjek) ima masu $m = 100$ kg, gdje je kg = kilogram jedinica mase u Međunarodnom sistemu jedinica (SI). *Normirana* (ili normalna) *težina* (vidi odlomak 7.3.2) tog tijela iznosit će $G = mg$, gdje je $g = g_0 = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$ *normirano* ubrzanje zemljine teže. Prema tome u našem primjeru (normirana) težina tog tijela iznosi $G = mg = 100\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$, što možemo napisati i u obliku $G = 100 \cdot 9{,}806\,65\ \mathrm{kgm/s^2}$. Budući da je prema jednadžbi (8.1-1) (vidi i odlomak 4.2.4) $9{,}806\,65\ \mathrm{kgm/s^2} = \mathrm{kp}$, to je $G = 100$ kp. Prema tome *isto* tijelo okarakterizirali smo na dva načina

masom u SI:	težinom u TS:
$m = 100$ kg	$G = 100$ kp

Ove dvije jednadžbe možemo napisati i u obliku $100 = m/\mathrm{kg}$, $100 = G/\mathrm{kp}$, što nakon izjednačenja $100 = 100$ daje

$$\frac{m}{\mathrm{kg}} = \frac{G}{\mathrm{kp}}. \qquad (8.1\text{-}4)$$

Ovaj temeljni izraz možemo izraziti riječima ovako: *brojčani iznosi mase u kilogramima* (jedinica SI!) *jednaki su brojčanim iznosima težine u kilopondima* (jedinica TS!). Stoga označivanje količine tvari masom (u SI) i težinom (u TS) možemo ilustrirati ovim primjerima:

	Masa u SI:	Težina u TS:
sadržaj konzerve (neto)	100 g	100 p
zamotak šećera	2 kg	2 kp
uljna peć	48 kg	48 kp
dopremljeni ugljen	1 t	1 Mp
lokomotiva	70 t	70 Mp

Napomenimo da pojedine kratice jedinica označuju: g = gram = 10^{-3} kg, t = tona = = 1000 kg, p = pond = 10^{-3} kp, Mp = megapond = 10^{6} p = 1000 kp.

Ovdje smo samo naznačili bitnu razliku dvojakog opisivanja količine tvari, jednom masom (u SI), a drugi put težinom (u TS). Takva načelna razlika ima i svoje konkretne posljedice: u primjeni SI upotrebljava se veličina »gustoća« (vidi odlomak 3.1.2), a u primjeni TS veličina »specifična težina«. Takvih razlika ima još nekoliko, uglavnom kod svih tzv. kvocijentnih veličina. Na njih ćemo se još vratiti u poglavlju 9.

8.1.7. Nedosljedna primjena jedinica TS. Tablica B-54 sadrži u svom stupcu 5 jedinice Tehničkog sistema mnogih veličina mehanike, a u stupcu 6 odnos jedinice TS prema jedinici SI. Neke od tih odnosa vidimo i u grubom, ali zornom grafičkom prikazu na slici B.46. Iz te tablice, koja se odnosi na iste veličine kao i tablica B-53, možemo razabrati da gotovo ni jedan autor *nije dosljedno primjenjivao* Tehnički sistem jedinica. Evo nekoliko primjera!

U odlomku 8.1.3 već smo vidjeli da je jedinica snage u TS kpm/s = $[P]_T$ Većina tehničara je, međutim, prije uvođenja SI upotrebljavala jedinicu snage KS = konjska snaga, koju su neki čak pogrešno nazivali »konjska *sila*«. Ali KS = = 75 kpm/s je *vansistemska jedinica*, koja je bliža Tehničkom sistemu negoli SI jedino toliko što je kp jedinica sile TS, a nije jedinica SI!

Jedinica tlaka u TS je kp/m² (vidi tablicu B-54). Tehničari su, međutim, pretežno upotrebljavali jedinicu *tehnička atmosfera*, at = kp/cm² (vidi odlomak 4.3.7), koja je 10000 puta veća od koherentne jedinice TS kp/m². Vansistemsku jedinicu kp/cm² možemo shvatiti i kao dekadski višekratnik jedinice TS kp/m², ali takva primjena višekratnika ide u kategoriju manje pouzdanih primjena višekratnika jedinica (vidi odlomak 7.6.2). Slično je i s jedinicama specifične težine (γ) kp/dm³, kp/cm³, i kp/mm³, s jedinicom momenta otpora (W) pri naprezanju cm⁴ itd.

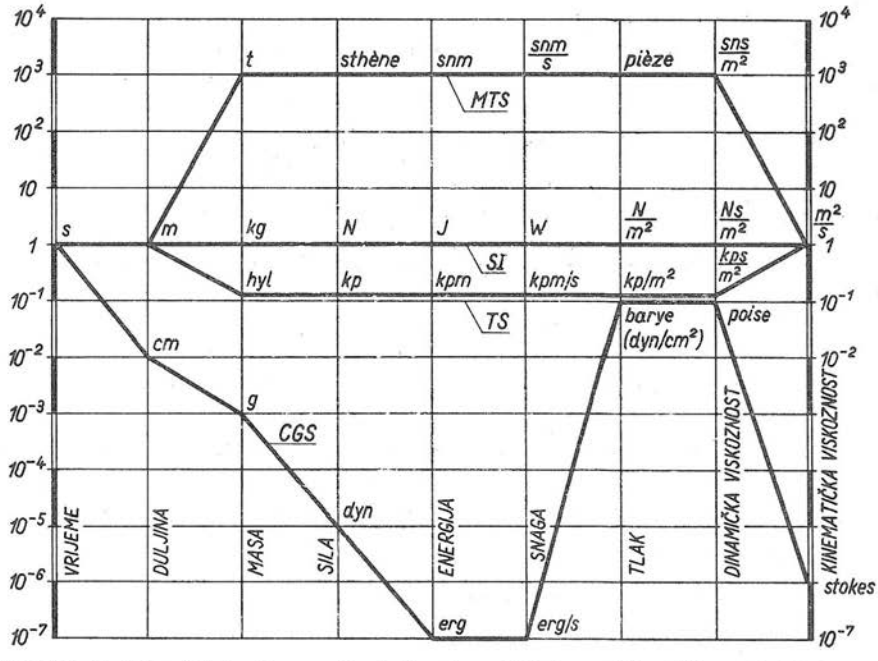
8.2. Fizikalni (CGS) sistem jedinica mehanike

8.2.1. Osnova fizikalnog sistema jedinica. Pod nazivom Fizikalni sistem jedinica razumijevamo skup koherentnih jedinica koje su izvedene iz ovih osnovnih jedinica:

za duljinu: »centimetar« (cm),
za vrijeme: »sekunda« (s),
za masu: »gram« (g).

Centimetar je stoti dio metra, dakle cm = 0,01 m, a gram tisućinka mase pariskog prakilograma, g = 0,001 kg. Prema početnim slovima tih jedinica ovaj je sistem dobio svoj drugi naziv: »CGS sistem jedinica«.

Budući da su centimetar i gram decimalni dijelovi osnovnih jedinica Međunarodnog sistema (SI), a jedinica vremena je ista, to su i izvedene jedinice CGS sistema decimalni dijelovi ili dekadski višekratnici jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI). To možemo lijepo vidjeti u tablici B-54, koja omjere »jedinica CGS/jedinica SI« sadrži u stupcu 8. Grubo, ali vrlo pregledno, ovi se omjeri mogu za neke veličine razabrati i iz slike B.46.



Sl. B.46. Grubi grafički prikaz međusobnih odnosa jedinica nekih veličina u četiri sistema jedinica. Oznake predočuju: SI — Međunarodni sistem jedinica, TS — Tehnički sistem jedinica, CGS — Fizikalni sistem jedinica, MTS — sistem jedinica s osnovnim jedinicama metar, tona i sekunda. Pri usporedbi uzeta je za osnovu vrijednost jedinica SI

8.2.2. Imenovane jedinice sistema CGS. Samo nekoliko izvedenih jedinica CGS sistema ima svoja vlastita imena. Neka od njih potječu od imena čuvenih učenjaka, dok su druga kratice grčkih naziva onih fizikalnih veličina koje se tim jedinicama mjere. Ovdje ćemo te imenovane jedinice CGS redom navesti, te izračunati njihov odnos prema jedinicama SI. Uz to ćemo u zagradi spomenuti u kojem je odlomku glave B ta jedinica razmotrena u sklopu ostalih jedinica i s njima uspoređena.

Svojevremeno su jedinicu *brzine* u CGS sistemu nazivali »kin« (ili »cel«). To je brzina 1 centimetar u sekundi. Budući da je cm = 10^{-2} m, vrijedi odnos (vidi odlomak 2.4.2)

$$\text{kin} = \text{cm/s} = 10^{-2}\ \text{m/s} = 0{,}01\ \text{m/s}.$$

Jedinica *ubrzanja* CGS naziva se »gal« (po *G. Galileju*). To je ubrzanje 1 cm u sekundi na kvadrat, dakle (odlomak 2.4.6)

$$\text{gal} = \text{cm/s}^2 = 10^{-2}\,\text{m/s}^2 = 0{,}01\,\text{m/s}^2.$$

Jedinica *sile* nazvana je »dyn«. To je sila koja tijelu mase 1 gram (g) daje ubrzanje 1 gal, dakle (vidi odlomak 4.2.3)

$$\text{dyn} = \text{g} \cdot \text{gal} = \text{g}\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-3}\,\text{kg}\,\frac{10^{-2}\,\text{m}}{\text{s}^2} = 10^{-5}\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10^{-5}\,\text{N},$$

gdje je N = newton jedinica sile SI.

Ime nosi i CGS jedinica *rada i energije*, koja se zove »erg«. Rad jednog erga obavi sila 1 dyn kad joj se hvatište pomakne za 1 centimetar. U skladu s jednadžbom energije $W = Fl$ dobivamo koherentnu jedinicu CGS sistema

$$\text{erg} = \text{dyn} \cdot \text{cm} = \text{g}\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\,\text{cm} = \text{g}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2}.$$

Budući da je $\text{dyn} = 10^{-5}\,\text{N}$, a $\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$, uvrštenjem u gornju jednadžbu dobivamo

$$\text{erg} = \text{dyn} \cdot \text{cm} = 10^{-5}\,\text{N} \cdot 10^{-2}\,\text{m} = 10^{-7}\,\text{Nm} = 10^{-7}\,\text{joule (J)},$$

jer je J = Nm (vidi odlomak 5.2.1).

Posebna imena nose još i jedinice viskoznosti. Jedinica *dinamičke viskoznosti* u CGS sistemu je »poise« (kratica: P; vidi odlomak 6.4.3)

$$\text{poise} = \text{P} = \frac{\text{dyn} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{g}}{\text{cm s}} = \frac{10^{-3}\,\text{kg}}{10^{-2}\,\text{m s}} = 0{,}1\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2},$$

jer je $\text{N} = 10^5\,\text{dyn}$, $\text{cm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2$. Jedinica *kinematičke viskoznosti* je »stokes« (St; vidi odlomak 6.5.2)

$$\text{stokes (St)} = \text{cm}^2/\text{s} = 10^{-4}\,\text{m}^2/\text{s}.$$

Ova se jedinica izgovara »stouks«, iako je neki čitaju »stok«.

Pregled ostalih, neimenovanih jedinica sistema CGS sadrži tablica B-54, koja u stupcu 8 donosi omjer »jedinica CGS/jedinica SI«.

Ovdje je prilika da naglasimo kako tzv. »fizikalne« jedinice tlaka »normalna (standardna) atmosfera« = atm (vidi odlomak 4.3.6), energije »elektronvolt« = eV, »bar« itd. *nisu* pripadnice koherentnog CGS sistema jedinica, već vansistemske jedinice namjernice koje smo razmotrili u odlomcima 4.3.6, 5.4.1, 4.3.4 itd.

8.2.3. Jedinica tlaka sistema CGS ima vrlo zanimljivu povijest, koja utječe i na današnju primjenu nekih višekratnika te jedinice. Stoga ćemo ovdje letimično iznijeti dio te povijesti. Godine 1900. predložio je *Guillaume* da se za jedinicu tlaka prihvati $\text{Mdyn/cm}^2 = 10^6\,\text{dyn/cm}^2$ i da se toj jedinici dade ime *barye*. Prijedlog nije prihvaćen (tako definirana jedinica ne bi bila koherentna unutar sistema CGS), već je to ime dano jedinici dyn/cm^2, dakle

$$\text{barye} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} = \frac{10^{-5}\,\text{N}}{10^{-4}\,\text{m}^2} = 0{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Ovaj naziv nije naišao na širu primjenu, pogotovo zato što su godine 1902. *Sandström* i *Helland-Hansen* predložili da se tlak 10^6 dyn/cm² nazove *bar*, dakle

$$\text{bar} = 10^6 \text{ dyn/cm}^2 = 10^6 \cdot 10^{-5} \text{ N}/(10^{-4} \text{ m}^2) = 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Taj bar $= 10^5$ N/m² imamo i danas (vidi odlomak 4.3.4), iako je *Richards* godine 1904. predložio da se ime bar dade jedinici dyn/cm². Svrha svih tih prijedloga bila je u to vrijeme da se prestanu upotrebljavati tzv. stupčane jedinice tlaka mm Hg itd. (vidi odlomak 4.3.9).

Jedinica bar ($= 10^5$ N/m²) bila je stekla mnogo pristaša, a isto tako višekratnici te jedinice

$$\text{milibar} = \text{mbar} = 10^3 \text{ N/m}^2 \quad \text{i} \quad \text{mikrobar} = \mu\text{bar} = 0{,}1 \text{ N/m}^2.$$

Već je godine 1913. Permanentni meteorološki komitet preporučio da se kod svih aeroloških motrenja barometarski tlak navodi i u jedinici milibar. Uskoro zatim ušla je ta jedinica i u službene publikacije meteorologije i oceanografije, npr. u The Observatories' Year Book (London), u sinoptičke karte atmosferskih stanja što ih izrađuju pojedini univerziteti i laboratoriji itd. Napominjemo da za jedinicu tlaka bar nije međunarodno usvojena nikakva kratica.

8.2.4. Današnja primjena jedinica sistema CGS. Svjetskim prihvaćanjem Međunarodnog sistema jedinica (Système International d'Unités, SI) te uvođenjem SI u zakonodavstva pojedinih država, svi dotada upotrebljavani sistemi jedinica stavljeni su van snage (ako su prije toga uopće bili zakonom ili standardom propisani). No svaki od zakona koji propisuje primjenu SI dopušta i uporabu još nekih jedinica, koje obično naziva »vansistemske«. Među njima je uvijek i nekoliko mjernih jedinica koje potječu iz CGS sistema.

Jugoslavenski Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. također dopušta da se uz jedinice SI upotrebljavaju u javne svrhe i neke jedinice koje potječu iz CGS sistema. To su npr. jedinice cm, cm², cm³, gram, g/cm³, bar, poise i stokes. Javnu primjenu jedinica dyn i erg ovaj zakon ne dopušta, a isto tako ni tzv. CGS jedinice elektromagnetskih veličina (vidi odlomak E.2.5.5).

8.3. Sistem jedinica MTS mehanike

8.3.1. Osnova sistema jedinica MTS sadržana je u kratici MTS, koja predstavlja početna slova triju osnovnih (polaznih) jedinica tog sistema:

za duljinu: »metar« (m),
za masu: »tona« (t),
za vrijeme: »sekunda« (s).

Pri tom je osnovna jedinica mase ovog sistema

$$\text{tona} = \text{t} = 1000 \text{ kg},$$

gdje je kg = kilogram jedinica mase SI, predstavljena prakilogramom pohranjenim u Međunarodnom uredu za mjere i utege (vidi odlomak A.9.3.3).

Očito je da se sistem jedinica MTS u pogledu interpretacije veličina (masa, težina itd.) potpuno podudara sa sistemom jedinica SI i CGS (vidi poglavlje 7 i odsječak 8.2). Prema tome svaki čitatelj može sam izvesti jedinice sistema MTS tako da u tablici B-53 namjesto kg stavi t ($= 1000$ kg).

Napomenimo još da je sistem jedinica MTS u Francuskoj bio službeno dopušten prije uvođenja Međunarodnog sistema jedinica (SI). Izvan te zemlje malo ga je tko upotrebljavao, primjenjivalo se svega nekoliko njegovih jedinica, koje ćemo razmotriti u narednom odlomku.

8.3.2. Izvedene jedinice sistema MTS. Jedinice sile i tlaka u sistemu MTS već smo razmotrili u odlomcima 4.2.3 i 4.3.5, gdje smo jedinice tih veličina nanizali bez obzira na njihovu pripadnost ovom ili onom sistemu jedinica. Tako smo imali

$$\text{sthène} = \text{sn} = \frac{\text{t} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \frac{1000\,\text{kgm}}{\text{s}^2} = 1000\,\text{N} = 1\,\text{kN}.$$

$$\text{pièze} = \text{pz} = \frac{\text{sn}}{\text{m}^2} = 1000\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}.$$

Ostale jedinice sistema MTS lako možemo izvesti iz navedenih dviju jedinica sile i tlaka. Tako su, na primjer, jedinice *energije i snage*

$$\text{sthène} \times \text{metar} = \text{sn} \cdot \text{m} = 1000\,\text{N} \cdot \text{m} = 1000\,\text{J} = 1\,\text{kJ},$$

$$\text{sn} \cdot \text{m/s} = 1000\,\text{Nm/s} = 1000\,\text{J/s} = 1000\,\text{W} = 1\,\text{kW}.$$

Analognim računanjem možemo saznati i jedinice sistema MTS drugih veličina.

Smatramo, međutim, da to nije potrebno, jer sistem jedinica MTS danas ima uglavnom samo povijesno značenje. Osim toga, jednostavnost izvođenja odnosa jedinice sistema MTS prema jedinicama SI je tolika (vidi sliku B.46) da eventualno potrebne odnose čitatelj može sebi lako sam izračunati.

9. Prijelaz od Tehničkog sistema jedinica na Međunarodni sistem jedinica (SI)

9.1. Neki razlozi relativno sporog uvođenja Međunarodnog sistema jedinica

9.1.1. Industrijska tradicija. U vrijeme izlaženja ove knjige Međunarodni sistem jedinica (SI; vidi poglavlje 7) energično istiskuje iz svih prirodoslovnih i tehničkih znanosti sve ostale, starije sisteme jedinica. Pohod Međunarodnog sistema ubrzavaju i zakonski akti većine civiliziranih država koji u skladu s međunarodnim dogovorom favoriziraju SI. Može se tvrditi da nigdje nema svjesnog i promišljenog otpora protiv zamjene starih sistema Međunarodnim sistemom. Razlozi relativno sporog prihvaćanja SI u *nekim granama tehnike*, naročito u strojogradnji i građevinarstvu, nisu u uvjerenju da je, na primjer, Tehnički sistem jedinica (TS; vidi poglavlje 8) »bolji« od SI, već u posve ljudskoj osobini stručnjaka tih grana: ljudi su u toku dugogodišnje praktične djelatnosti u svojoj struci *navikli* da se služe npr. Tehničkim sistemom jedinica (i to nepotpunim, vidi odlomak 8.1.7), njima je *teško* u jeku dnevnog operativnog posla temeljito proučiti posljedice nastale uvođenjem SI. Napor koji treba uložiti pri tom prijelazu je to veći što je stanovita grana tehnike ili zemlja jače industrijalizirana, tj. što je jači njen industrijski potencijal. Razlog je očit: u jakoj suvremenoj industriji postoji ogroman dokumentacijski materijal (usporedi s odlomkom A.6.6.3), mjerna oprema i stručnjaci koji s time rade, a sve tri komponente prilagođene su starom sistemu jedinica ili mješavini jedinica različitih sistema.

Sa Tehničkog sistema jedinica može se prijeći na primjenu SI a da se i ne pročita čitava ova debela knjiga. U tu svrhu poslužit će naredni odsječci i odlomci ovog poglavlja 9 koji su napisani tako da iz navedenih primjera i uputa svaki stručnjak može zapamtiti recepturu »prijelaza« i analogijom je primijeniti na svom konkretnom zadatku. Dokaze za ispravnost takvog postupka čitalac će naći na drugim mjestima u knjizi; na ta mjesta upozoravat ćemo odgovarajućim naznakama.

9.1.2. Nedovoljna aktivnost školstva. Izlaganja u prošlom odlomku 9.1.1 pokazala su nam da stručnjaci u tehničkoj i privrednoj operativi imaju *i objektivnih* razloga krzmanju pri uvođenju SI. To se ne može, na žalost, reći za znatan dio nastavnika (od učitelja do sveučilišnih profesora) škola svih razina i smjerova. Iako je nastavnicima fizike, kemije i tzv. tehničkih predmeta — ukratko svih prirodoslovnih i tehničkih predmeta — podučavanje *profesija*, mnogi od njih svoje đake uopće ne informiraju o današnjoj situaciji u pogledu mjernih jedinica. Upravo katastrofalna je situacija u *najvažnijim* školama: pučkim ili osnovnima, kako smo ih svojevremeno nazivali. Najvažnije su te škole zato što u njima *svi* đaci primaju osnovnu naobrazbu, a mnogima od njih ta će naobrazba biti i *jedina*.

O kvaliteti nastave prirodoslovnih predmeta sigurno možemo steći stanovitu sliku ako prelistamo udžbenike koji su *propisani* od prosvjetnih vlasti za osnovno školovanje. Navest ćemo samo *nekoliko* pogrešnih objašnjavanja u *udžbenicima fizike* koji su objavljeni poslije godine 1961, tj. nakon proglašenja jugoslavenskog Zakona o mjernim jedinicama i mjerilima (1961).

U jednom *zagrebačkom* udžbeniku fizike na bezbroj mjesta piše da »težina utega iznosi 1 kg«, da »razlika težine (pol—ekvator iznosi 5 g po kg«, da se jedan od tehničkih sistema jedinica zove »MKpS«, da je »... za težinu uzeta mjerna jedinica kg, s kojom se još uvijek susrećemo u praksi...«, da »... masa tijela iznosi približno 1/10 njegove težine«, da »... masa tijela iznosi 0,02 kg sek²/m...« itd. itd. Kratice jedinica autor udžbenika odabire sam: za sekundu »sek«, za kilowatt »KW« itd. itd.

U jednom *sarajevskom* udžbeniku fizike nalazimo istaknuti tekst da je godine 1799. za jedinicu *težine* bila odabrana težina 1 dm³ čiste vode pri 4 °C na 45° geografske širine i na morskoj površini. Zašto godina 1799? Evo što o tome kaže rezolucija Generalne konferencije za mjere i utege, s trećeg zasjedanja godine 1901: »1. *Kilogram* je jedinica mase; on je jednak masi međunarodnog prototipa kilograma; 2. Riječ *težina* označuje veličinu iste vrste kao što je *sila*; težina nekog tijela je umnožak mase tog tijela i ubrzanja zemljine teže; normalna težina nekog tijela je umnožak mase tog tijela i normalnog ubrzanja zemljine teže; 3. Vrijednost normalnog ubrzanja zemljine teže koju je prihvatila Međunarodna služba za mjere i utege, a prihvatila su je i zakonodavstva nekih zemalja, iznosi 980,665 cm/s².«

Radi autentičnosti navodimo i originalni francuski tekst gornjeg, slobodnog prijevoda: 1° Le *kilogramme* est l'unité de masse; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme; 2° Le terme *poids* désigne une grandeur de la même nature qu'une *force*; le poids d'un corps est le produit de la masse de ce corps par l'accélération de la pesanteur; en particulier, le poids normal d'un corps est le produit de la masse de ce corps par l'accélération normale de la pesanteur; 3° Le nombre adopté dans le Service international des Poids et Mesures pour la valeur d'accélération normale de la pesanteur est 980,665 cm/s², nombre sanctionné déjà par quelques législations (kurzivi su u originalu!).

U jednom *beogradskom* udžbeniku definirana je jedinica mase kilogram u dvije susjedne rečenice i kao masa kubnog decimetra vode i kao masa prakilograma. Autor doduše spominje i newton, ali i dyn (izmišlja im kratice Nt i D!), silu mjeri i jedinicom kG (to je kilopond), a na jednom mjestu nas uvjerava da je praktično upotrebljavati kilopond. Kad je sve to dobro pomiješano, autor mirne savjesti piše da je »... težina nekog aluminijskog predmeta 135 grama (ponda) ...«, a na ilustraciji zakona akcije i reakcije vrlo čitko piše da svaki od dvaju dinamometara pokazuje silu 5 kg! U jednom primjeru saznajemo da »... komad drveta ima specifičnu težinu 0,6«, a u drugome da je »... specifična težina ulja 0,8«, u trećem autor izmišlja kraticu litra »lit« itd. itd.

Udžbenike obično sastavljaju najbolji nastavnici, oni što izvrsno znaju predmet i dobri su pedagozi. Tisuće nastavnika u školama služe se takvim udžbenicima i *pogrešno uče djecu.*

Ovdje nije mjesto, a ni pedagoški ne bi bilo ispravno, da spominjemo mnoštvo drugih metroloških i standardizacijskih pogrešaka kojima vrve mnogi jugoslavenski udžbenici fizike za osnovno školovanje, mnogi udžbenici za stručne škole itd. Nastavnici i prosvjetne vlasti morali bi se duboko zamisliti nad katastrofalnom razinom udžbenika, a prema tome i nastavom prirodoslovlja uopće. Navedeni loši primjeri su, naime, samo *sićušni dio* pogrešaka koje je zapazio autor prelistavajući 22 jugo-

slavenska udžbenika fizike namijenjena gimnazijama! Onim đacima koji pođu dalje na fakultete, neispravne će pojmove ispraviti sveučilišta, ali većina njih odlazi iz gimnazije u *život*. Vidjeli smo otprilike s kakvim znanjem.

9.1.3. Površna izdavačka djelatnost. Iz prošlog odlomka 9.1.2 možemo zaključiti da je uvođenje Međunarodnog sistema jedinica (SI) samo iznijelo *na vidjelo* nekvalitetnost udžbenika fizike i tehničkih predmeta; njihova loša kvaliteta postojala je i prije, a traje i dalje. Stoga je dosljedna primjena SI u udžbenicima prilika da se oni *temeljito revidiraju* ne samo mehaničkom zamjenom jedne jedinice drugom već i bitno drukčijim, suvremenim pristupom objašnjavanju gradiva. Zašto autorima udžbenika nije npr. uzor predivna *Pohl*ova trilogija fizike?

Pri tom mogu mnogo pomoći *izdavači* udžbenika i ostalih knjiga s područja prirodoslovnih i tehničkih znanosti. Mnogi jugoslavenski izdavači posvećuju štampanju takvih knjiga gotovo posve jednaku brigu kao i štampanju prijevoda neke kriminalističke priče (pa i u potonjima griješe u pogledu mjernih jedinica!). U zemljama s *tradicijom* u izdavanju stručne i školske literature radi se sasvim drukčije: urednici su *stručnjaci*, dapače vrhunski stručnjaci u pojedinim strukama, koji autorima mogu pomoći, ispravno sugerirati, sazvati skup stručnjaka kad je to potrebno, upriličiti diskusiju između autora i recenzenata sa željom da djelo bude što bolje. U nas je malo izdavačkih poduzeća koja tako rade. Posljedice toga vidimo u mnogim stručnim knjigama, koje su stručno zastarjele, pune metroloških pogrešaka, a takve grafičke opremljenosti koja je dovoljna za obične brošure, ali ne i za stručnu literaturu.

9.1.4. Pogreške u novinama. Među izdavačima moramo svakako spomenuti i one koji izdaju dnevne listove, tjednike i mjesečnike, jer se danas ni ove publikacije ne mogu zamisliti bez »znanstvenih« i »tehničkih« priloga, kako se te rubrike sve ne zovu. Prečesto novinari u novinama, na radiju i na televiziji ne udovoljavaju nužnim zahtjevima za obavljanje tih poslova. Pri tom, dakako, mislimo na znanje s područja svakodnevnih mjernih jedinica (vidi i odlomak 7.3.4). Ti ljudi prema svojoj funkciji u društvu moraju imati sveučilišnu naobrazbu, ali unatoč tome svaki dan u gotovo svakom dnevnom listu nalazimo

Piše:	Pogreška je:
»... težina kompozicije iznosila je 1300 tona...«	Tona (t) je jedinica *mase*, t = 1000 kg
»...pušten je u pogon dalekovod napona 110 kW...«	kW = kilovat je jedinica *snage*, a kV = kilovolt jedinica *napona*
»...elektrana će davati 3 milijarde kilovata električne energije godišnje...«	Jedinica *energije* je kWh = kilovatsat
»...snaga stroja je 2000 konjskih sila...«	Jedna od zastarjelih jedinica snage je KS = konjska *snaga*
»...tvornica troši pet milijuna litara vode...«	Da li na dan, na tjedan, na mjesec?

No svaku mjeru prevršio je novinar (u pravilu osoba sa sveučilišnom naobrazbom) koji je u povodu moguće afere oko nabavke uvoznih automobila među ostalim napisao ovo: »Auto-temperatura, koja je prije nekoliko dana bila došla

do tačke ključanja, pala je za cijelih 180 stupnjeva. Mnogi zagrijani kupci ustuknuli su...«. Rečenica, koja je čitaocima trebalo da dočara uzavrelost među dijelom javnosti, upropaštena je nerazlikovanjem »stupnjeva« kojima se mjeri temperatura od »stupnjeva« kojima se mjeri kut! A taj tekst nisu objavile bilo koje novine, već »Borba« od 4. juna 1967, na stranici 9. Da nije žalostan odraz neznanja, citiranu bismo rečenicu mogli proglasiti za »jugoslavenski metrološki vic 1967«.

Takvih primjera ima bezbroj ne samo u dnevnim listovima već i na televiziji, u trgovačkim prospektima, u računima tiskanicama, u izjavama funkcionera izvršnih vlasti itd. Neznanje se ponekad obrazlaže time da je to »stručna stvar« ili da se radi »na brzinu«. No to nije istina, danas je to stvar *opće kulture*, a nerazlikovanje kW od kWh samo je još dokaz pomanjkanja opće kulture novinara, urednika, korektora, šefova propagande itd. Zašto se takve pogreške ne pojavljuju na stranicama »The Economist«?

9.1.5. Namjena ovog poglavlja je da pruži pomoć stručnjacima u privredi (odlomak 9.1.1), nastavnicima i đacima u gimnazijama i drugim školama (odlomak 9.1.2) i ljudima koji profesionalno rade u izdavačkim poduzećima, na radiju i televiziji (odlomci 9.1.3,4). Ta pomoć odnosit će se samo na nekoliko pojmova i mjernih jedinica. No ti pojmovi neobično su važni, jer zadiru u ono područje u kojem treba da vlada gotovo ista terminologija i za domaćice i za pravog člana akademije znanosti i umjetnosti. Recepture za pomoć u drugim dijelovima prirodoslovnih i tehničkih znanosti vjerojatno nisu ni potrebne, jer su one manje ili više odmaknute od svakodnevice većine ljudi, tj. njima se bave stručnjaci koji dobro znaju svoju struku i s punim razumijevanjem prate i usvajaju metrološke promjene na svom području.

9.2. Primjena masenih veličina umjesto težinskih

Onom čitatelju koji želi saznati sve podrobnosti razloga zašto je pri upotrebi Međunarodnog sistema (SI) praktičnije i razumnije primjenjivati tzv. masene veličine (masa, gustoća, maseni protok) umjesto tzv. težinskih (težina, specifična težina, težinski protok), preporučujemo da prethodno pročita odsječak 7.3. Od koristi će mu biti i odlomak 8.1.4, odnosno čitav odsječak 8.1.

9.2.1. Primjena mase umjesto težine. Podsjetimo se da *istu* količinu tvari možemo obilježiti ili masom m ili težinom G (odsječak 7.3). Pod težinom obično razumijevamo normalnu (normiranu) težinu koja je *definirana* jednadžbom

$$G_0 = mg_0, \tag{9.2-1}$$

gdje je $g_0 = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$ normirano ubrzanje zemljine teže. Ako veličinu težina G izrazimo jedinicom Tehničkog sistema (vidi odsječak 8.1) $[G]_\mathrm{T} = \text{kilopond} = \text{kp}$, a veličinu masa m jedinicom Međunarodnog sistema (SI) $[m]_\mathrm{M} = \text{kilogram} = \text{kg}$, možemo simbole *veličina* G i m razložiti na umnoške brojčanih iznosa i pripadnih jedinica (vidi odsječak A.1.3):

$$G = \{G\}_\mathrm{T}[G]_\mathrm{T} = \{G\}_\mathrm{T} \cdot \mathrm{kp}; \quad m = \{m\}_\mathrm{M}[m]_\mathrm{M} = \{m\}_\mathrm{M} \cdot \mathrm{kg}. \tag{9.2-2}$$

Ovdje simbol $\{G\}_\mathrm{T}$ označuje da je to *brojčani iznos* težine u kilopondima; mogli smo napisati i $\{G\}_\mathrm{kp}$, jer je to isto kao i $\{G\}_\mathrm{T}$. Simbol $\{m\}_\mathrm{M}$ označuje da je to *brojčani iznos* mase u kilogramima; umjesto $\{m\}_\mathrm{M}$ mogli smo napisati i $\{m\}_\mathrm{kg}$, jer je to isto.

Uvrstimo li umnoške brojčanih iznosa i jedinica (9.2-2) u veličinsku jednadžbu (9.2-1), dobivamo

$$\{G\}_T \cdot \mathrm{kp} = \{m\}_M \cdot \mathrm{kg} \cdot g_0,$$

odakle sređenjem slijedi dalje

$$\{G\}_T = \{m\}_M \frac{\mathrm{kg} \cdot g_0}{\mathrm{kp}}.$$

Budući da je per definitionem $\mathrm{kp} = \mathrm{kg} \cdot g_0$ (vidi odlomak 4.2.4), gornja jednadžba prelazi u oblik

$$\{G\}_T = \{m\}_M \quad \text{ili} \quad \{G\}_{kp} = \{m\}_{kg}. \tag{9.2-3}$$

Ova *brojčana jednadžba* identična je s jednadžbom (8.1-4), koja glasi $G/\mathrm{kp} = m/\mathrm{kg}$, jer je $\{G\}_T = \{G\}_{kp} = G/\mathrm{kp}$ brojčani iznos težine u kilopondima, a $\{m\}_M = \{m\}_{kg} = m/\mathrm{kg}$ brojčani iznos mase u kilogramima. Prema tome je i opis jednadžbe (9.2-3) identičan opisu jednadžbe (8.1-4) u odlomku 8.1.6: *brojčani iznosi mase u kilogramima jednaki su brojčanim iznosima težine u kilopondima.*

Primjer. Težine čovjeka, automobila i neke količine ugljena redom iznose $G_1 = 92$ kp, $G_2 = 850$ kp i $G_3 = 2$ Mp. Kolike su odgovarajuće mase u jedinicama SI? Prema jednadžbi (9.2-3) ili (8.1-4) za prva dva slučaja vrijedi $m_1 = 92$ kg, $m_2 = 850$ kg. Za treći slučaj, radi sigurnosti, najprije preračunajmo $G_3 = 2\ \mathrm{Mp} = 2 \cdot 10^6\ \mathrm{p} = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{kp} = 2000$ kp. Prema tome je $m_3 = 2000$ kg. Budući da je tona $= 1000$ kg, možemo pisati dalje $m_3 = 2$ t.

Iz ovog primjera možemo izvući i daljnju pouku $G_3/\mathrm{Mp} = 2 = m_3/\mathrm{t}$, odnosno općenito

$$\frac{m}{\mathrm{t}} = \frac{G}{\mathrm{Mp}},$$

tj. *brojčani iznosi mase u tonama* (t) *jednaki su brojčanim iznosima težine u megapondima* (Mp).

9.2.2. Primjena gustoće umjesto specifične težine. Veličina gustoća ρ definirana je omjerom $\rho = m/V$ (vidi odsječak 3.1), a veličina specifična težina γ omjerom $\gamma = G/V$. Lako možemo izračunati da ove dvije veličine međusobno povezuje veličinska jednadžba

$$\gamma = \rho g_0, \tag{9.2-4}$$

gdje je $g_0 = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$ normalno ubrzanje zemljine teže.

U Tehničkom sistemu jedinica (vidi odsječak 8.1 i tablicu B-54) specifična težina γ se izražava jedinicom $\mathrm{kp/m^3}$, a u Međunarodnom sistemu se gustoća ρ izražava jedinicom $\mathrm{kg/m^3}$ (vidi odlomak 3.1.2 i tablicu B-53). Analogno kao u odlomku 9.2.1 i ovdje možemo veličine γ i ρ izraziti umnoškom brojčani iznos $\times$ $\times$ jedinica, dakle u obliku

$$\gamma = \{\gamma\}_T \cdot \mathrm{kp/m^3}; \quad \rho = \{\rho\}_M \cdot \mathrm{kg/m^3},$$

što uvrštenjem u jednadžbu (9.2-4) daje

$$\{\gamma\}_T \cdot \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m^3}} = \{\rho\}_M \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} g_0.$$

Odavde zbog $\mathrm{kp} = \mathrm{kg} \cdot g_0$ slijedi brojčana jednadžba

$$\{\gamma\}_{\mathrm{kp/m^3}} = \{\rho\}_{\mathrm{kg/m^3}} \tag{9.2-5}$$

jer je $\{\gamma\}_{\mathrm{T}} = \{\gamma\}_{\mathrm{kp/m^3}}$ i $\{\rho\}_{\mathrm{M}} = \{\rho\}_{\mathrm{kg/m^3}}$. Riječima ova jednadžba glasi: *brojčani iznosi specifične težine u* kp/m³ *jednaki su brojčanim iznosima gustoće u* kg/m³.

Primjer 1. Do jednadžbe (9.2-5) možemo doći i pomoću izvođenja u odlomku 9.2.1. Zamislimo da je u posudu volumena $V = 10\ \mathrm{dm^3} = 0{,}01\ \mathrm{m^3}$ izliven aluminij. Zatim je vaganjem utvrđeno da je masa aluminija $m = 27$ kilograma. Iz ova dva podatka možemo izračunati gustoću aluminija

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{27\ \mathrm{kg}}{0{,}01\ \mathrm{m^3}} = 2700\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}.$$

Izliveni aluminij mase $m = 27$ kg ima težinu $G = 27$ kp (vidi odlomak 9.2.1), pa je, dakle, specifična težina tog aluminija u jedinici Tehničkog sistema

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{27\ \mathrm{kp}}{0{,}01\ \mathrm{m^3}} = 2700\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m^3}}.$$

Primjer 2. Izračunajmo sada ovo: specifičnu težinu u jedinicama SI, a gustoću u jedinicama TS. Prvi dio zadatka rješavamo sa $\rho = 2700\ \mathrm{kg/m^3}$ pomoću veličinske jednadžbe (9.2-4):

$$\gamma = \rho g_0 = 2700\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 9{,}806\,65\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 26\,500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^3}} = 26{,}5\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m^3}},$$

jer je N = newton = kgm/s². Drugi dio zadatka rješavamo sa $\gamma = 2700\ \mathrm{kp/m^3}$ i jednadžbom (9.2-4):

$$\rho = \frac{\gamma}{g_0} = \frac{2700\ \mathrm{kp/m^3}}{9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}} = 275\ \frac{\mathrm{kps^2/m}}{\mathrm{m^3}} = 275\ \frac{\mathrm{hyl}}{\mathrm{m^3}},$$

jer je hyl = kps²/m jedinica mase u Tehničkom sistemu jedinica (vidi redak 24 u tablici B-54):

Iz ovog primjera razabiremo da je gotovo jednako nepraktično izražavati specifičnu težinu u N/m³ (jedinice SI!) kao i gustoću u hyl/m³ (jedinice TS!).

Ovdje je mjesto da spomenemo nešto u vezi s veličinom *specifični volumen.* Ta veličina definirana je ovako: $v = V/m$, pa je, dakle, recipročna gustoći ρ, dakle $v = V/m = 1/\rho$. Budući da korisnici Tehničkog sistema jedinica izbjegavaju pojam mase i jedinicu mase TS hyl (vidi odlomak 8.1.4), oni specifični volumen definiraju u odnosu na *težinu* G, dakle ovako $v' = V/G$. Ovdje smo slovu v dodali crticu, jer su v i v' međusobno različite veličine. Lako je izračunati da je $v = v' g_0$, jer je v' u stvari $v' = V/G = 1/\gamma$, gdje je γ specifična težina. Podrobnije smo ove razlike razmotrili u odlomku 4.2.1 glave D, gdje smo naveli i druge slične primjere.

9.2.3. Primjena masenog protoka umjesto težinskog. U odlomku 3.1.5 definirali smo veličinu maseni protok m' jednadžbom $m' = m/t$. Iz istih razloga koje smo naveli u prošlom odlomku, korisnici Tehničkog sistema jedinica upotrebljavaju veličinu »težinski protok«, a definiraju je sa $G' = G/t$. Posve analognim razmatranjem kao prije dobiva se brojčana jednadžba

$$\{G'\}_{\mathrm{kp/s}} = \{m'\}_{\mathrm{kg/s}},$$

tj. *brojčani iznos težinskog protoka u* kp/s *jednak je brojčanom iznosu masenog protoka u* kg/s. Odgovarajuće konkretne primjere možemo vidjeti u odlomku D.4.2.4.

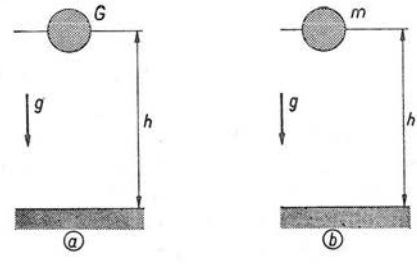
9.3. Računanje energija u duhu TS i SI

9.3.1. Računanje potencijalne energije. O računanju potencijalne (zapravo geopotencijalne) energije stanovitog tijela u odnosu na svojevoljno odabranu referentnu razinu govorili smo u odsječku 5.1. Ovdje ćemo uz pomoć slike B.47 proračunati potencijalnu energiju za slučaj kada se na visini $h = 10$ m nalazi tijelo *težine* $G = 20$ kiloponda (govoreći u duhu primjene TS, sl. B.47a). To isto tijelo ima *masu* $m = 20$ kilograma (govoreći u duhu primjene SI, sl. B.47b). Paralelno ćemo taj isti primjer računati u jednoj i drugoj interpretaciji:

Tehnički sistem (TS)	Međunarodni sistem (SI)
$G = 20$ kp	$m = 20$ kg
$h = 10$ m	$h = 10$ m
$W = Gh = 20\ \text{kp} \cdot 10\ \text{m}$	$W = mgh = 20\,\text{kg} \cdot 9{,}806\,65\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\,\text{m}$
$W = 200$ kpm	$W = 1961$ J

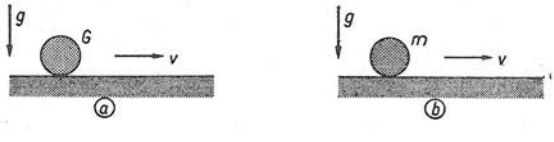
Ovdje je kpm = kilopondmetar jedinica rada i energije u TS (vidi odlomak 5.2.3), a J = joule = Nm = kgm^2/s^2 jedinica rada i energije u SI (vidi odlomak 5.2.1).

Pri računanju sa SI u jednadžbi $W = mgh$ pojavljuje se veličina »ubrzanje zemljine teže« g. To je *logično*, jer g predstavlja jakost gravitacijskog polja Zemlje, a ono je i omogućilo da se podizanjem tijela na visinu $h = 10$ m nagomila energija $W = mgh$. Zbog toga smo na slici B.47 simbolički naznačili djelovanje tog polja (strelica uz g).



Sl. B.47. Uz proračun potencijalne energije: a) u duhu Tehničkog sistema jedinica, b) u duhu Međunarodnog sistema jedinica

9.3.2. Računanje kinetičke energije. Tijelo iz prošlog odlomka stavili smo sada na glatku horizontalnu plohu (okomitu na smjer djelovanja g) i dali mu takav impuls sile da se giba brzinom v. Želimo izračunati kolika je kinetička ener-



Sl. B.48. Uz proračun kinetičke energije: a) u duhu Tehničkog sistema jedinica, b) u duhu Međunarodnog sistema jedinica

gija tog tijela kad se giba brzinom $v = 5$ m/s. Proračun ćemo izvesti paralelno u obje interpretacije:

Tehnički sistem (TS)	Međunarodni sistem (SI)
$G = 20$ kp	$m = 20$ kg
$v = 5$ m/s	$v = 5$ m/s
$W = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2 = \frac{1}{2}\frac{20\,\text{kp}}{9{,}806\,65\,\text{m/s}^2}\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$	$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\,20\,\text{kg}\cdot\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$
$W = \frac{1}{2}\frac{20\,\text{kp}}{9{,}806\,65\,\text{m/s}^2}\,25\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	$W = \frac{1}{2}\,20\,\text{kg}\cdot 25\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$
$W = 25{,}5$ kpm	$W = 250\,\text{kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 250$ J

Pri računanju Tehničkim sistemom jedinica (TS) u jednadžbi kinetičke energije pojavljuje se ubrzanje zemljine teže g. To *nije logično*, jer gibanje tijela u horizontalnoj ravnini nema nikakve veze s ubrzanjem zemljine teže (smjer djelovanja g okomit je na plohu kojom se kotrlja tijelo; sl. B.48).

9.4. Prijelaz od TS na SI u području sila

9.4.1. Preračunavanje sila. U prošlim odsječcima 9.2,3 naznačili smo kako se gotovo bez poteškoća može prijeći od jedinica Tehničkog sistema (TS) na primjenu jedinica Međunarodnog sistema (SI). Pri tom su preračunavanja u cijelosti izbjegnuta time što smo prešli na primjenu *masenih* veličina umjesto *težinskih*. Rezultat tih istraživanja možemo sažeti u ove upute:

1. Količinu tvari treba karakterizirati *masom m*, koja se u SI izražava jedinicom kilogram (kg); u tom slučaju brojčani iznos mase u kg jednak je brojčanom iznosu težine G u jedinici kilopond (kp), tj. u jedinici sile u TS.

2. Tvari treba karakterizirati *gustoćom* $\rho = m/V$, koja se u SI izražava jedinicom kg/m³; u tom slučaju brojčani iznos gustoće u kg/m³ jednak je brojčanom iznosu specifične težine $\gamma = G/V$ u jedinici TS kp/m³; isto vrijedi i za ρ u kg/dm³, a γ u kp/dm³ itd.

3. Analogni efekt postiže se na isti način primjenom veličine *maseni protok* $m' = m/t$ umjesto veličine težinski protok $G' = G/t$.

4. Transportne uređaje valja karakterizirati *nosivošću*, tj. masom tvari što je uređaj može prenijeti; efekt u pogledu prijelaza od TS na SI isti je kao i u prethodna tri slučaja (vidi odlomak 7.3.6).

Ovakav postupak, opisan u gornje 4 tačke, omogućio nam je da ništa ne moramo preračunavati (npr. tabelarne podatke) i da naziv jedinice kilogram zadržimo u njenom prvobitnom značenju te da tako iz upotrebe eliminiramo jedinicu sile TS kilopond, koja u primjeni izaziva nepotrebnu pomutnju (vidi odlomak 9.1.2).

Pri računanju potencijalne i kinetičke energije (vidi odsječak 9.3) ovaj nenaporni postupak je zakazao. Tamo smo morali prijeći na primjenu jedinice rada i energije SI joule = J = Nm = kgm^2/s^2 koja je u ovoj vezi s jedinicom rada i energije TS kpm:

kilopondmetar = kpm = 9,806 65 J (tačno).

Posve ista je situacija pri proračunavanju strojarskih i građevinskih konstrukcija, gdje moramo stvarno uzeti u obzir *sile koje naprežu te konstrukcije.* Tu se mora sila F, izražena jedinicom TS kp (ili Mp), preračunati u jedinicu SI newton (N) ili kilonewton (kN) itd. Preračunavanje se može olakšati pomoću tablica B-29 i B-30 koje smo uvrstili u odlomak 4.2.5. Razmotrimo jedno takvo preračunavanje!

Na neki strojni sklop djeluje sila $F = 2{,}5$ Mp. Izrazimo tu silu jedinicom SI, newtonom! *Tačan* proračun obavljamo pomoću relacije kp = 9,806 65 N; budući da je $F = 2{,}5$ Mp = 2 500 kp (Mp = 1000 kp), tačno preračunavanje daje

$$F = 2500 \text{ kp} = 2\,500 \cdot 9{,}806\,65 \text{ N} = 24\,516{,}625 \text{ N},$$

odnosno $F = 24{,}516\,625$ kN, jer je kN = kilonewton = 1000 N.

Pitamo se: kakvog smisla ima da računamo tako tačno, množenjem sa 9,806 65? Promislimo: 1. Da li je zadana sila $F = 2500$ kp doista *tačno* 2500 kp, sa svim nulama? 2. Ako je sila F u stvari *težina* G predmeta (mase $m = 2500$ kg) koja napreže spomenuti sklop, koliko je bilo ubrzanje zemljine teže g na mjestu gdje se nalazi sklop? Znamo, naime, da se g neznatno mijenja s geografskom širinom (vidi odlomak 7.3.2), a $F = G = mg$ je stvarna (mjesna, lokalna) težina, gdje je g gotovo uvijek različito od normalnog (normiranog) ubrzanja zemljine teže $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s^2. 3. Podsjetimo se da se u strojarskim i građevinskim konstrukcijama računa s *faktorom sigurnosti* čije se značenje sastoji u tome da se sklop proračuna uz poznatu čvrstoću konstrukcijskog materijala kao da je sila F nekoliko puta veća (čak i za nekoliko 100 % veća od stvarno očekivane sile 2500 kp)!

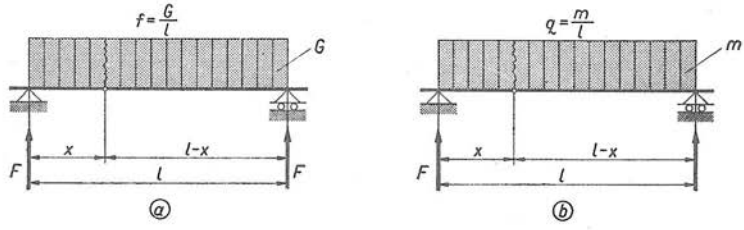
Naše razmišljanje u vezi s tačkom 2 sigurno će nas dovesti do ovog rezultata: *gotovo ni u jednom tehničkom proračunu, a u strojarskim i građevinskim nikako, ne treba računati s kompliciranom relacijom* kp = 9,806 65 N, *već možemo mirne savjesti računati s nadasve jednostavnim odnosom*

kilopond (kp) = 10 newtona (N). (9.4-1)

Izračunajmo koliku smo pogrešku pri tom učinili. Jugoslavija leži na sjevernim širinama od oko $\varphi = 41°$ do $\varphi = 46°40'$. Ubrzanje zemljine teže kreće se u tom rasponu oko vrijednosti $g_\varphi = 9{,}783$ m/s^2 (vidi odsječak A.9.2). To znači da je stvarna (mjesna, lokalna) težina predmeta oko 0,24 % manja od normalne (normirane) težine koju dobivamo ako računamo sa $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s^2 (vidi odlomak 7.3.2). No ako računamo sa $g = 10$ m/s^2, što zapravo donosi jednadžba (9.4-1), ta pogreška se penje na oko 2,2%. Budući da je pogreška od 0,24 % ionako neminovna ako primjenjujemo g_0, primjena relacije (9.4-1) unosi *dodatnu* pogrešku oko 2 %. Ta pogreška *zanemariva je* prema netačnosti strojarskih i građevinskih proračuna kao i prema faktoru sigurnosti koji se pri tom uzima u obzir. Osim toga ta pogreška od 2 % djeluje u tom smislu da sklop ili konstrukcija postaju još sigurniji!

Primjer. Na kraju konzole dugačke 2 metra stoji čovjek mase 80 kg. Utvrdimo na brzinu koliki moment, izražen jedinicom SI, napreže materijal konzole! Težina čovjeka je oko 800 N (masa 80 kg → težina 80 kp → težina 800 N), dakle moment iznosi 800 N × 2 m = 1600 Nm.

9.4.2. Proračun kontinuiranog nosača. Pogledajmo kako se zamjena Tehničkog sistema jedinica Međunarodnim sistemom (SI) odrazuje u proračunu građevinskih konstrukcija. Za primjer smo uzeli kontinuirano opterećeni nosač (sl. B.49). Želimo izračunati moment M i vrijednosti sila reakcija F koje djeluju u osloncima. Raspon iznosi $l = 10$ m, a ukupna *masa* kontinuiranog, jednoliko porazdijeljenog tereta iznosi $m = 10$ tona.



Sl. B.49. Uz proračun kontinuirano opterećenog nosača: a) u duhu TS, b) u duhu SI

Za korisnike Tehničkog sistema teret $m = 10\text{ t} = 10000$ kg predstavlja težinu $G = 10000$ kp (vidi odlomak 9.2.1). Stoga oni kažu da je *linijska težina* (ili »specifična težina«!) $f = G/l = 10000\text{ kp}/10\text{ m} = 1000\text{ kp/m}$, tj. na jedan metar duljine nosača otpada teret težine 1000 kp. Korisnik SI reći će da je *linijska masa* (vidi kraj odlomka 3.1.7) $q = m/l = 10\text{ t}/10\text{ m} = 1\text{ t/m} = 1000\text{ kg/m}$. Moment M_x na bilo kojem mjestu x nosača računat će prvi (TS) pomoću jednadžbe

$$M_x = \tfrac{1}{2} f x\,(l - x),$$

a drugi (SI) pomoću izraza

$$M_x = \tfrac{1}{2} g q x\,(l - x).$$

Naravno da je to u stvari ista jednadžba

$$M_x = \tfrac{1}{2} G x\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \tfrac{1}{2} m g x\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

jer zbog definicije linijske mase $q = m/l$ i linijske težine $f = G/l$ preko $G = mg$ slijedi $f = gq$.

Maksimalni moment nastaje, kako znamo, na sredini nosača, gdje je $x = l/2$. Stoga paralelan proračun s jedinicama obaju sistema teče ovako:

Tehnički sistem (TS)	Međunarodni sistem (SI)
$G = 10000$ kp	$m = 10\text{ t} = 10000$ kg
$l = 10$ m	$l = 10$ m
$f = G/l = 10000\text{ kp}/10\text{ m} = 1000\text{ kp/m}$	$q = m/l = 10000\text{ kg}/10\text{ m} = 1000\text{ kg/m}$
$M = \frac{1}{8} f l^2$	$M = \frac{1}{8} g q l^2$
$M = \frac{1}{8} 1000 \frac{\text{kp}}{\text{m}} (10\text{ m})^2$	$M = \frac{1}{8} 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}} (10\text{ m})^2$
$M = 12500$ kpm	$M = 122600$ Nm $= 122{,}6$ kNm.

Napominjemo da smo u desnom stupcu (SI) mogli mirne duše računati sa $g = 10\ m/s^2$ (vidi prošli odlomak 9.4.1), pa bi u tom slučaju proračun bio jednako lagan kao i u lijevom stupcu (TS).

9.4.3. Korisnost dekadskih višekratnika. Pri uporabi jedinice sile Tehničkog sistema — kiloponda, ponešto je ograničena primjena imenovanih dekadskih višekratnika (o njima vidi odsječke A.2.4 i B.7.6). Budući da je naime kp = = kilo × pond u stvari pond s višekratnikom kilo = 10^3, korisnici TS nerado su se odlučivali na primjenu višekratnika mega = M = 10^6, jer njega valja primijeniti opet na pond. Pri preračunavanju, na primjer, sa $F = 70000$ kp na $F = 70$ Mp, što je isto, čovjek mora — ako želi biti siguran — računati zapravo ovako: »70000 kp je $7 \cdot 10^4$ kp, to je $7 \cdot 10^7$ p, a budući da je Mp = 10^6 p, onda je dakle 70000 kp = $= 7 \cdot 10^{7-6}$ Mp = $7 \cdot 10$ p = 70 Mp«. Ako čovjek takav način preračunavanja ne podnosi, on ili pogleda u neku tablicu (u kojoj piše Mp = 10^3 kp), ili stvarno preračuna na papiru, a najčešće — ostavi dugačak broj 70000 kp!

U primjeni jedinice SI takvih poteškoća nema: na N (newton) lako se primjenjuju dekadski i decimalni višekratnici kilo = 10^3 = k, mega = 10^6 = M itd. Primjera u tom smislu imali smo na stranicama ove knjige mnogo.

Primjer. Površina dna parnog kotla iznosi $A = 2\ m^2$. Kolika sila djeluje na dno, ako je nadtlak u kotlu $p = 80$ bar? Budući da je bar = $10^5\ N/m^2$ (vidi odlomak 4.3.4) računanjem dobivamo silu

$$F = Ap = 2\ m^2 \cdot 80\ bar = 2\ m^2 \cdot 80 \cdot 10^5\ N/m^2 = 160 \cdot 10^5\ N.$$

Najprikladnije je da rezultat zabilježimo u obliku $F = 16$ MN, jer je MN = 10^6 N.

9.5. Preračunavanje vrijednosti čvrstoće, tlaka i tvrdoće

9.5.1. Preračunavanje vrijednosti čvrstoće. U većini strojarskih, građevinskih i elektrotehničkih priručnika nalazimo podatke o čvrstoći materijala svrstane u tablice i izražene jedinicama kp/mm² i kp/cm². Ovdje ćemo razmotriti nekoliko mogućnosti prerade takvih tablica na jedinice Međunarodnog sistema (SI). U tu svrhu u tablici B-55 donosimo izvadak iz JUS C.B0.501 o čelicima za noseće konstrukcije. Podaci o čvrstoćama izraženi su omjerom jedinice sile Tehničkog sistema kp = kilopond i jedinice površine mm² = kvadratni milimetar ($= 10^{-2}\ cm^2 = 10^{-6}\ m^2$).

Tablica **B-55**

Čvrstoća čelika za noseće konstrukcije

Oznaka prema JUS	Granica razvlačenja, kp/mm²	Zatezna čvrstoća, kp/mm²
1	2	3
Č.0360 Č.0361 Č.0362 Č.0363	najmanje 20	37 do 45
Č.0460	najmanje 25	42 do 50
...	...	...

Pažnju ćemo najprije obratiti na podatak o granici razvlačenja, i to na vrijednost: »najmanje 20 kp/mm²«. Umjesto jedinice čvrstoće (naprezanja) TS kp/mm² moramo u primjeni SI upotrijebiti jedinicu N (newton), s imenovanim višekratnikom (prefiksom) ili bez njega, podijeljenu s nekom od metarskih jedinica površine. Praktički dolaze u obzir ove složenice jedinice čvrstoće SI:

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}, \quad \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}, \quad \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}.$$

One su u ovim odnosima s jedinicom TS kp/mm²:

$$\left.\begin{aligned} 1\ \mathrm{kp/mm^2} &= 9{,}806\,65\ \mathrm{MN/m^2} \approx 10\ \mathrm{MN/m^2}, \\ 1\ \mathrm{kp/mm^2} &= 9{,}806\,65\ \mathrm{N/mm^2} \approx 10\ \mathrm{N/mm^2}, \\ 1\ \mathrm{kp/mm^2} &= 0{,}980\,665\ \mathrm{kN/cm^2} \approx 1\ \mathrm{kN/cm^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.5\text{-}1)$$

Kad kažemo da »praktički dolaze u obzir«, smjeramo na to da brojčani iznosi budu »priručni, praktični«, tj. da ne budu ni veliki dekadski brojevi, ni nespretni decimalni brojevi. Te praktično upotrijebljene mogućnosti prikazane su u stupcima 3 do 7 tablice B-56.

Tablica **B-56**

Usporedba primjene različitih jedinica čvrstoće SI

Oznaka prema JUS	Granica razvlačenja, najmanje					
	kp/mm²	MN/m²	N/mm²	kN/cm²	MN/m²	kN/cm²
1	2	3	4	5	6	7
Č.0360	20	196	196	19,6	200	20
...	...	...	...	...	...	...

Do vrijednosti u jedinicama SI došli smo u stupcima 3, 4 i 5 tako da smo vrijednost 20 kp/mm² preračunali pomoću *tačnih* (lijevih) relacija (9.5-1), na primjer

$$20\ \mathrm{kp/mm^2} = 20 \cdot 9{,}806\,65\ \mathrm{MN/m^2} = 196{,}133\ \mathrm{MN/m^2},$$

a zatim *zaokružili* vrijednost na 196 MN/m² (pogreška 0,068 %, ako smatramo da je 20 kp/mm² apsolutno tačna vrijednost). Do vrijednosti u stupcima 6 i 7 došli smo *približnim računom* s desnim relacijama (9.5-1), što se svodi na usvajanje odnosa kp = 10 N! Pri tom je učinjena pogreška oko 2 % (vidi odlomak 9.4.1), ako se pretpostavi da je polazna vrijednost 20 kp/mm² tačna.

A da li je tačna? Očito nije, jer čvrstoća materijala sigurno se ne mjeri preciznije od ±2 %! Stoga preporučujemo da se preračunavanje tablica od kp/mm² na jedinice SI obavlja *približno i brzo* usvajanjem relacija (u tu svrhu, samo u tu svrhu!)

$$1\ \mathrm{kp/mm^2} = 10\ \mathrm{MN/m^2} = 10\ \mathrm{N/mm^2} = 1\ \mathrm{kN/cm^2}.$$

Pogotovo je to opravdano za takve podatke kakvi su, na primjer, oni u stupcu 3 tablice B-55. Tamo je navedeno da se zatezna čvrstoća nalazi u rasponu (37...45) kp/mm², što bi tačnim preračunavanjem dalo (363...441) MN/m², a približnim preračunavanjem (370...450) MN/m².

Drugo je pitanje koju od jedinica SI valja upotrijebiti pri računanju: MN/m^2, N/mm^2 ili kN/cm^2? Sa stanovišta pouzdanog računanja (vidi odsječak 7.6) najbolje je upotrijebiti jedinicu MN/m^2. Iz istog razloga manje se preporučuje N/mm^2, iako je po vrijednosti ta jedinica jednaka jedinici MN/m^2. Jedinica kN/cm^2 najmanje se preporučuje sa stanovišta pouzdanog računanja; ona sadrži u sebi dva prefiksa, od toga jedan (c = centi) u nazivniku, a to se protivi uvriježenom pravilu o primjeni decimalnih i dekadskih višekratnika jedinica (vidi odlomak 7.6.2). No ona ima vrlo privlačno svojstvo: $kp/mm^2 \approx kN/cm^2$! Prema tome svaki autor mora u tom pogledu sam donijeti odluku, uzimajući pri tom u obzir kome je njegovo djelo namijenjeno.

9.5.2. Preračunavanje vrijednosti tlaka. Jedinica tlaka u Tehničkom sistemu jedinica (TS) je kp/m^2 (vidi tablicu B-54). No mnogo se češće korisnici TS služe jedinicom $kp/cm^2 = 10^4\ kp/m^2$ = tehnička atmosfera = at (vidi odlomak 8.1.7). Treba, dakle, ovdje da razmotrimo preračunavanje od kp/m^2 i od kp/cm^2 = = at na jedinice SI. U pogledu kp/m^2 nema nekih teškoća. Preračunavanje po ključu

$$kp/m^2 = 9{,}806\,65\ N/m^2 \quad \text{ili} \quad kp/m^2 = 10\ N/m^2$$

(potonje ako tražena preciznost to dopušta) daje otprilike 10-struke brojčane iznose koji nisu neprikladni, ako to nisu bili već iznosi u kp/m^2.

Sasvim je drukčije u pogledu at = kp/cm^2. I ovdje se, u ovisnosti o traženoj preciznosti, formalno može računati sa

$$at = kp/cm^2 = 9{,}806\,65 \cdot 10^4\ N/m^2 \quad \text{ili} \quad at = kp/cm^2 = 10^5\ N/m^2.$$

Broj $10^5 = 100\,000$ je, dakako, nezgrapan pri neposrednoj upotrebi jedinice N/m^2. Stoga suvremeni tehničari upotrebljavaju jednu od ovih triju jedinica SI

$$MN/m^2, \quad \text{bar}, \quad N/cm^2.$$

One su u ovom odnosu prema osnovnoj jedinici tlaka SI N/m^2:

$$MN/m^2 = 10^6\ N/m^2,$$
$$\text{bar} = 10^5\ N/m^2,$$
$$N/cm^2 = 10^4\ N/m^2.$$

Od njih je jedinici $at = kp/cm^2$ po vrijednosti najbliži bar,

$$\text{bar} = 1{,}019\,716\,\frac{kp}{cm^2}; \quad \frac{kp}{cm^2} = 0{,}980\,665\ \text{bar},$$

pa se on stoga u *tehničkoj* praksi najviše upotrebljava. Podrobnosti o SI i drugim jedinicama tlaka čitatelj može naći u odsječku 4.3.

Sa stanovišta pouzdanog računanja u jednadžbama, najprikladnija jedinica SI jest $MN/m^2 \approx 10\ kp/cm^2$ (vidi odsječak 7.6), a sa stanovišta očuvanja približno istih *brojčanih iznosa* tlaka ponovno bar, jer je $\text{bar} \approx kp/cm^2$.

9.5.3. Preračunavanje vrijednosti tvrdoće. Najprije moramo naglasiti da »tvrdoća« nije fizikalna veličina kao što su duljina, tlak, energija itd. »Tvrdoća« nije definirana nekim drugim *veličinama*; pojam »tvrdoća« i vrijednost tog pojma utvrđeni su *mjernim postupkom*. Tako je, na primjer, »tvrdoća po Brinellu«, koja se

označuje sa HB, omjer sile F kojom se u ispitivani materijal utiskuje čelična kuglica i površine A otiska (kalote) u materijalu. Slično se mjeri i »tvrdoća po Vickersu«, dok je »tvrdoća po Rockwellu« drukčije definirana.

Tako izmjereni omjer F/A može se mjeriti različitim jedinicama. Tehničari za tvrdoću po Brinellu ili Vickersu u Evropi najčešće upotrebljavaju jedinicu kp/mm² (po Rockwellu je neimenovani broj). Ako se žele primijeniti jedinice SI, praktički dolaze u obzir dvije:

$$\mathrm{N/mm^2} \approx 0{,}1\ \mathrm{kp/mm^2}; \qquad \mathrm{kp/mm^2} \approx 10\ \mathrm{N/mm^2},$$

$$\mathrm{MN/m^2} \approx 0{,}1\ \mathrm{kp/mm^2}; \qquad \mathrm{kp/mm^2} \approx 10\ \mathrm{MN/m^2}.$$

Primjer. Tvrdoća nekog čelika po Brinellu iznosi 103 kp/mm². Jedinicama SI to možemo izraziti približnom vrijednošću 1030 MN/m² (uz kp = 10 N) ili tačnom vrijednošću 1010 MN/m² (uz kp = 9,806 65 N).

10. Pouzdano računanje s veličinskim jednadžbama. Sistemi dimenzija

10.1. Jednoliko gibanje, frekvencija vrtnje i angloamerička jednadžba snage

10.1.1. Općenito o veličinskim i brojčanim jednadžbama. U poglavljima A.1 i A.2 ove knjige objasnili smo da je za praktične svrhe računanja, za primjenu stručnih knjiga, za učenje u školama i za što veću zornost znanstvenog istraživanja od izvanredne koristi ako se jednadžbe pišu tako da simboli u njima predočuju *veličine*, a ne brojeve. Ta izlaganja potkrijepili smo s nekoliko raznorodnih primjera. Ovdje ćemo ta razmatranja nadopuniti daljnjim specijaliziranim primjerima iz mehanike. Brojnost tih primjera neka bude potvrda o tome koliko je ta stvar važna. Iskustvo, naime, pokazuje da poznavanje veličinskih jednadžbi i poznavanje načina računanja s njima stavlja pitanje *sistema jedinica* u pozadinu. Veličinske jednadžbe zaista su toliko univerzalne da one uopće ne zahtijevaju računanje sa sistemom jedinica, već to može biti i posve nesistematičan skup jedinica.

Prednosti veličinskih jednadžbi osjećaju i stručnjaci u svom svakodnevnom radu i profesori u školama. Prvi mogu pomoću njih intimno računati s onakvim jedinicama na kakve su navikli, a drugi mogu đacima najkraćim putem doista objasniti *suštinu pojava*, a ne da gube sate i sate na »paralelno« pretvaranje vrijednosti pojedinih veličina na vrijednosti u jedinicama upotrebljavanog sistema u kutu školske ploče.

Ovdje ćemo prije prijelaza na najavljene primjere ponoviti osnove računanja s veličinskim jednadžbama. Temelj tog računanja je da svaki simbol u formuli predstavlja umnožak brojčanog iznosa (broj) i pripadne jedinice. Kad kažemo »promjer je drveta jedan i pol metar«, onda to veličinskom jednadžbom izražavamo u obliku $d = 1{,}5$ m. Pri tom je d simbol za veličinu »promjer«, broj 1,5 je brojčani iznos, a m kratica za jedinicu duljine metar. U općenitom obliku to pišemo kao $G = \{G\}[G]$, tj.

$$\text{veličina } G = \text{brojčani iznos } \{G\} \times \text{jedinica } [G].$$

Ova jednadžba slijedi neposredno iz samog načela mjerenja, $\{G\} = G/[G]$, tj. mjerni broj dobiva se tako da se stvarna veličina G izmjeri (usporedi) s upotrijebljenom jedinicom $[G]$.

Oznake G odnose se na bilo koju veličinu, stoga je jednadžba $G = \{G\}[G]$ opća jednadžba. U našem posebnom primjeru je dakako veličina $G = d$, brojčani iznos $\{G\} = 1{,}5$, a jedinica $[G] = \text{m}$. Kad pišemo $d = 1{,}5$ m, time stvarno mislimo »$d = 1{,}5$ puta jedan metar«, dakle je stvarno $d = 1{,}5 \times \text{m}$ ili $d = 1{,}5 \cdot \text{m}$; ipak tačku

obično ne pišemo, osim u slučajevima kad se bez te tačke ne bi vidjelo da je riječ o umnošku mjernog broja (= brojčani iznos) i upotrijebljene jedinice.

Suprotno od veličinskih, *brojčane jednadžbe* sa svojim simbolima predstavljaju *brojeve*, tj. mjerne brojeve (brojčane iznose). U duhu brojčanih jednadžbi morali bismo naš primjer promjera drveta napisati u obliku

$$\{d\} = 1{,}5$$

a zapamtiti ili negdje posebno pribilježiti da je to promjer od jedan i pol metar (vidi odsječak A.1.4). Ako se taj zapis izgubi, onda čovjek koji nije prisustvovao premjeravanju drveta neće znati da li je promjer 1,5 decimetar ili možda 1,5 yard!

10.1.2. Jednoliko pravocrtno gibanje. U nekoj smo knjizi našli jednadžbu za jednoliko gibanje tijela napisanu ovako

$$l = 0{,}278\, v t, \tag{10.1-1}$$

koja kaže da neko tijelo u vremenskom razdoblju t prijeđe put l, ako se jednoliko giba brzinom v. Pokušajmo pomoću ove jednadžbe izračunati prevaljeni put l nakon vremena $t = 2$ sekunde $= 2$ s, ako je brzina $v = 1$ m/s. Račun nam daje

$$l = 0{,}278 \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\,\text{s} = 0{,}556\ \text{m}.$$

Naravno da to nije istina, jer u glavi možemo naprečac izračunati da npr. pješak brzinom od jedan metar u sekundi prijeđe u vremenu od dvije sekunde tačno 2 metra.

Ovaj neispravni rezultat dokazuje nam da izraz (10.1-1) *nije* veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo kakve jedinice, već da je to *brojčana jednadžba* koja vrijedi samo za brojčane iznose u strogo određenim jedinicama.

I stvarno, na stranici ispred one na kojoj je tiskana jednadžba (10.1-1) nalazimo u jednoj rečenici da je autor mjerio brzinu u kilometrima na sat, a vrijeme u sekundama i pri tom izračunao put u metrima. To znači da su stvarno upotrijebljene jedinice $[l] = \text{m}$, $[v] = \text{km/h}$, $[t] = \text{s}$, a jednadžbu (10.1-1) treba napisati u skladu s našim oznakama kao *brojčanu jednadžbu*

$$\{l\} = 0{,}278\ \{v\}\ \{t\}, \tag{10.1-2}$$

gdje simboli u { } predstavljaju brojčane iznose.

U skladu s općim oblikom $\{G\} = G/[G]$ možemo i simbole $\{l\}$, $\{v\}$, $\{t\}$ za brojčane iznose izraziti kao omjere *veličina* l (put), v (brzina) i t (vrijeme) i upotrijebljenih jedinica, dakle

$$\{l\} = \frac{l}{[l]} = \frac{l}{\text{m}}; \quad \{v\} = \frac{v}{[v]} = \frac{v}{\text{km/h}}; \quad \{t\} = \frac{t}{[t]} = \frac{t}{\text{s}}.$$

Uvrstimo li to u izraz (10.1-2), dobivamo

$$\frac{l}{\text{m}} = 0{,}278 \frac{v}{\text{km/h}} \frac{t}{\text{s}}, \tag{10.1-3}$$

ili u obliku

$$l = 0{,}278 \frac{v}{\text{km/h}} \frac{t}{\text{s}} \text{m}, \tag{10.1-4}$$

ako kraticu za metar (m) prebacimo na desnu stranu jednadžbe.

Izraz (10.1-4) možemo srediti ako se prisjetimo da je km = 1000 m, a sat = h = = 3600 s:

$$l = vt\,0{,}278\frac{\mathrm{m}}{\frac{1000\,\mathrm{m\,s}}{3600\,\mathrm{s}}} = vt\,0{,}278\cdot 3{,}6,$$

jer su se jedinice metar i sekunda pokratile. Umnožak $0{,}278\cdot 3{,}6 = 1$, pa dakle gornja jednadžba dobiva najjednostavniji oblik

$$l = vt, \tag{10.1-5}$$

koji poznajemo već iz definicije brzine (vidi odlomak 2.2.1). Izraz (10.1-5) je dakako prava *veličinska* jednadžba, dakle univerzalna. Primijenimo li na nju naše podatke $v = 1$ m/s i $t = 2$ s, odmah dobivamo očekivani rezultat

$$l = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 2\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{m}.$$

I jednadžba (10.1-4) je veličinska. Ali ona je specijalni oblik veličinske jednadžbe *prilagođen* upotrebi: za brzinu jedinici km/h, a za vrijeme sekundi. Ako je npr. $v = 3{,}6$ km/h, a $t = 2$ s, onda ona daje:

$$l = 0{,}278\,\frac{3{,}6\,\mathrm{km/h}}{\mathrm{km/h}}\cdot\frac{2\,\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m},$$

dakle isti rezultat koji smo dobili pomoću veličinske jednadžbe (10.1-5). To je očito, jer je $v = 3{,}6$ km/h = 1 m/s. Jednadžbe oblika (10.1-4) nazivamo »prilagođenim veličinskim jednadžbama« (vidi odsječak A.1.6).

10.1.3. Frekvencija vrtnje. U nekim udžbenicima i priručnicima mehanike nalazimo ovakve izraze za obodnu brzinu v i rotanciju ω remenica, zupčanika ili osovina

(10.1-6)
$$\{v\} = \frac{\pi\{D\}\{n\}}{60}; \quad \{\omega\} = \frac{\pi\{n\}}{30}. \tag{10.1-7}$$

Već samim načinom štampanja tih formula označili smo da je riječ o *brojčanim* jednadžbama, a ne o univerzalnim veličinskim. U istim tim knjigama u većini slučajeva nalazimo u tekstu naputak »da jednadžba (10.1-6) daje brzinu v u m/s, ako se promjer D uvrsti u metrima, a brzina vrtnje u 1/min«.

Budući da je izraz (10.1-6) brojčana jednadžba, simboli $\{v\}$, $\{D\}$, $\{n\}$ predstavljaju brojčane iznose. Kako je općenito $\{G\} = G/[G]$, možemo svaki simbol iz (10.1-6) nadomjestiti omjerom veličine i pripadne jedinice. Za naš slučaj dobivamo, analogno izvođenju u prošlim odlomcima,

$$\{v\} = \frac{v}{\mathrm{m/s}}; \quad \{D\} = \frac{D}{\mathrm{m}}; \quad \{n\} = \frac{n}{\mathrm{min^{-1}}} = n\cdot\mathrm{min}.$$

Uvrstimo li ovako izražene brojčane vrijednosti $\{v\}$, $\{D\}$, $\{n\}$ u jednadžbu (10.1-6), dobivamo

$$\frac{v}{\mathrm{m/s}} = \frac{\pi}{60}\,\frac{D}{\mathrm{m}}\,n\cdot\mathrm{min} \text{ i dalje } v = \pi D n\,\frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{min}}{60\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}.$$

Stavimo li u krajnji desni izraz jednakost: minuta = 60 s, slijedi

$$\frac{\mathrm{m}\cdot 60\,\mathrm{s}}{60\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}} = 1,$$

pa je dakle zbog $D = 2r$

$$v = \pi Dn = 2\pi rn,$$

što je univerzalna veličinska jednadžba. Analognim postupkom dobili bismo od brojčane jednadžbe (10.1-7) veličinsku jednadžbu $\omega = 2\pi n$. (Podrobnosti o veličinama rotancija ω i frekvencija vrtnje n, kao i o njihovim jedinicama rad/s, okr/s i okr/min raspravljene su u odsječcima 2.2 i 2.5.)

10.1.4. Angloamerička jednadžba snage. U jednom poznatom američkom stručnom časopisu objavljen je godine 1964. članak o utvrđivanju snage P na osovini stroja mjerenjem obodne sile F i frekvencije vrtnje n osovine poznatog polumjera r. Autor je članka svojim čitateljima preporučio da se služe ovom jednadžbom za proračunavanje snage

$$\mathrm{HP} = \frac{F \times r \times \mathrm{rpm}}{5252}. \qquad (10.1\text{-}8)$$

Mora se proučiti gotovo čitav članak da bi se u njemu pronašlo da autor izražava polumjer osovine u jedinici foot = ft, a silu jedinicom pound = lb (tu je autor pogriješio, jer je lb angloamerička jedinica *mase*, dok je jedinica *sile* pound-force = = lbf; vidi odsječak 11.5 i odlomak 4.2.6, te tablice **14** i **25** u prilogu knjige).

Izvedimo od gornje brojčane jednadžbe (nema nikakve sumnje da je to brojčana jednadžba!) pravu veličinsku jednadžbu kojom ćemo se moći služiti i mi Evropljani, koji upotrebljavamo metrički sistem jedinica. Da bismo to uradili, moramo najprije ustanoviti što znače oznake rpm i HP. U angloameričkom jezičnom području neki autori izrazom »revolutions per minute« (rpm) označuju našu »frekvenciju vrtnje« (doslovan prijevod znači »okretaji u minuti«; o teškoćama s tim pojmovima vidi odsječke 2.2 i 2.5). Slova HP zastarjela su angloamerička kratica za jedinicu snage »horse power« (angloamerička »konjska snaga«); sadašnja službena kratica je hp, a vrijednost te jedinice u vatima je hp = 745,7 W (odsječak 5.6).

Prema tome ispravan brojčani oblik brojčane jednadžbe (10.1-8) treba da glasi ovako (usporedi s odlomkom A.1.4.5)

$$\{P\}_{\mathrm{hp}} = \frac{1}{5252}\{F\}_{\mathrm{lbf}}\{r\}_{\mathrm{ft}}\{n\}_{\mathrm{rpm}}. \qquad (10.1\text{-}9)$$

Po načelu $\{G\} = G/[G]$, ove brojčane iznose možemo izraziti omjerom veličine i pripadne jedinice, dakle

$$\{P\}_{\mathrm{hp}} = P/\mathrm{hp},\ \{F\}_{\mathrm{lbf}} = F/\mathrm{lbf},\ \{r\} = r/\mathrm{ft},\ \{n\}_{\mathrm{rpm}} = n/(\mathrm{min}^{-1}).$$

Ako ove omjere uvrstimo u brojčanu jednadžbu (10.1-9), dobivamo prilagođenu veličinsku jednadžbu

$$\frac{P}{\mathrm{hp}} = \frac{1}{5252}\,\frac{F}{\mathrm{lbf}}\,\frac{r}{\mathrm{ft}}\,\frac{n}{\mathrm{min}^{-1}},$$

odakle grupiranjem veličina i jedinica slijedi

$$P = ZFrn, \text{ gdje je } Z = \frac{\text{hp} \cdot \text{min}}{5252 \cdot \text{lbf} \cdot \text{ft}}. \qquad (10.1\text{-}10)$$

Između jedinica koje su navedene u gornjoj desnoj jednadžbi vladaju ovi odnosi

$$\text{hp} = 745{,}7\ \text{W}, \quad \text{W} = \text{Nm/s}, \quad \text{min} = 60\ \text{s},$$
$$\text{ft} = 0{,}3048\ \text{m}, \quad \text{lbf} = 4{,}448\,22\ \text{N},$$

gdje je N kratica jedinice SI newton = kgm/s² (vidi odlomak 4.2.1). Pomoću tih jedinica možemo izračunati konstantu Z:

$$Z = \frac{60\,\text{s} \cdot 745{,}7\ \text{Nm/s}}{5252 \cdot 4{,}448\,22\,\text{N} \cdot 0{,}3048\,\text{m}} = 6{,}28.$$

Lako je odgonetnuti da je tačna vrijednost $Z = 2\pi$, što znači da veličinska jednadžba (10.1-10, lijevo) treba da glasi

$$P = 2\pi nrF \quad \text{ili} \quad P = \omega rF \quad \text{ili} \quad P = Fv,$$

jer je rotancija $\omega = 2\pi n$ (odlomak 2.2.3), a obodna brzina $v = \omega r = 2\pi nr$.

10.2. Težina žice, moment rotirajućih tijela i gubitak tlaka

10.2.1. Težina bakrene žice. U nekom smo priručniku našli fomulu za brzo izračunavanje težine okrugle *bakrene žice*:

$$G = 7ld^2. \qquad (10.2\text{-}1)$$

U tekstu iza formule napisano je da se težina dobiva u kilopondima, ako se duljina žice uvrsti u kilometrima, a promjer u milimetrima. To znači da su G, l i d simboli za *brojčane iznose*, a jednadžba (10.2-1) je brojčana jednadžba koju bi trebalo napisati u obliku

$$\{G\} = 7\,\{l\}\,\{d\}^2, \qquad (10.2\text{-}2)$$

A što se zbiva ako želimo npr. težinu *željezne* žice? U tom slučaju moramo ili izvesti pravu veličinsku jednadžbu, koja vrijedi za bilo koji homogeni materijal, ili pak od gornje brojčane jednadžbe napraviti prilagođenu veličinsku jednadžbu.

Budući da su simboli u izrazu (10.2-2) oznake brojčanih iznosa u navedenim jedinicama, možemo napisati

$$\{G\} = G/\text{kp}; \quad \{l\} = l/\text{km}; \quad \{d\} = d/\text{mm}.$$

Uvrstimo li ove odnose namjesto simbola $\{G\}$, $\{l\}$, $\{d\}$ u (10.2-2), slijedi

$$\frac{G}{\text{kp}} = 7\frac{l}{\text{km}}\left(\frac{d}{\text{mm}}\right)^2,$$

odakle nastaje ograničeno prilagođena veličinska jednadžba, jer vrijedi samo za okrugle *bakrene* žice

$$G = 7\frac{l}{\text{km}}\left(\frac{d}{\text{mm}}\right)^2 \text{kp}. \qquad (10.2\text{-}3)$$

Ako je, na primjer, duljina bakrene žice $l = 2$ km, a promjer $d = 2{,}25$ mm, gornja jednadžba omogućuje račun

$$G = 7 \cdot 2 \cdot 2{,}25^2 \text{ kp} = 70{,}9 \text{ kp}.$$

Pretvorimo izraz (10.2-3) u potpunu *veličinsku jednadžbu*! Veličine G, l i d odvajamo od jedinica i sređujemo jedinice:

$$G = l d^2 7 \frac{\text{kp}}{\text{km mm}^2} = l d^2 7000 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}, \qquad (10.2\text{-}4)$$

jer je km $= 1000$ m, mm$^2 = 10^{-6}$ m^2. Vidimo da na desnoj strani nismo dobili čist broj kao u prijašnja dva primjera, već vrijednost neke *veličine* koja se mjeri jedinicom kp/m^3. Takva veličina je specifična težina γ. Budući da je u uvodu izričito naglašeno kako (10.2-1) vrijedi samo za *bakrene* žice, to u (10.2-4) moramo vrijednost 7000 kp/m^3 izraziti specifičnom težinom bakra $\gamma = 8900$ kp/m^3. Za bakar je, dakle, kp/m$^3 = \gamma/8900$. Uvrstimo li tako izraženu jedinicu kp/m^3 u izraz (10.2-4), koji još uvijek vrijedi samo za bakar, dobivamo

$$G = l d^2 7000\gamma/8900 = l d^2 \gamma \cdot 0{,}787.$$

Pokušavanjem odgonetavamo da je 0,787 približno jednako $\pi/4$, pa gornja *veličinska* jednadžba dobiva konačni oblik

$$G = \gamma \frac{\pi}{4} d^2 l. \qquad (10.2\text{-}5)$$

Tačna vrijednost omjera $\pi/4$ je 0,785, ali je prilikom stvaranja brojčane jednadžbe (10.2-1) broj povišen na 0,787 kako bi brojčani faktor bio tačno 7.

Jednadžba (10.2-5) potpuna je veličinska jednadžba *koja vrijedi za bilo koji materijal*. Porijeklo omjera $\pi/4$ posve je prirodno, jer se težina žice određuje umnoškom specifične težine materijala i volumena V žice, $G = \gamma V$. Budući da je volumen valjka $V = lA$, gdje je $A = d^2\pi/4$ presjek, na taj način odmah slijedi univerzalna veličinska jednadžba (10.2-5).

Moramo napomenuti da ni veličinska jednadžba (10.2-5) nije baš najprikladnija za primjenu, jer ona omogućuje izračunavanje *težine* G žice. Kako znamo iz odsječaka 7.3 i 9.2, težina nije primarno svojstvo materije. Univerzalna karakteristika je *masa* m. Primjena mase umjesto težine pogodna je i u vezi s primjenom Međunarodnog sistema jedinica (vidi odsječak 9.2).

Našu žicu okarakterizirat ćemo *masom* m tako da veličinsku jednadžbu (10.2-5) podijelimo s ubrzanjem zemljine teže g, dakle $m = G/g$. Na taj način dobivamo masu žice

$$m = \rho \frac{\pi}{4} d^2 l, \qquad (10.2\text{-}6)$$

gdje je $\rho = \gamma/g$ *gustoća* materijala žice. Za naš konkretan primjer, kada je duljina bakrene žice $l = 2$ km, a promjer $d = 2{,}25$ mm, pomoću (10.2-6) dobivamo

$$m = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\pi}{4} \cdot 2\,\text{km} \cdot (2{,}25\,\text{mm})^2 = 70{,}6 \text{ kg},$$

gdje smo uvrstili gustoću bakra $\rho = 8900$ kg/m^3.

10.2.2. Moment rotirajućih tijela. U nekim priručnicima i udžbenicima nalazimo ovu jednadžbu za određivanje momenta ubrzavanja ili usporavanja rotirajućih tijela

$$M = \frac{GD^2}{375}\,\frac{dn}{dt}. \tag{10.2-7}$$

U tekstovnom opisu ove jednadžbe napisano je da se moment dobiva u kilopondmetrima (kpm), ako se težina rotirajućeg predmeta računa s kilopondima, reducirani promjer s metrima, brzina vrtnje sa $1/\text{min} = \text{min}^{-1}$, a vrijeme sa sekundama. To znači da opće oznake brojčanih iznosa u jednadžbi (10.2-7) valja shvatiti kao omjere veličina i nabrojenih jedinica, dakle u skladu s općim načelom $\{G\} = G/[G]$:

$$\{M\} = M/\text{kpm},\quad \{G\} = G/\text{kp},\quad \{n\} = n/\text{min}^{-1},\quad \{t\} = t/\text{s}.$$

Prema tome *prilagođena* veličinska jednadžba za naš slučaj nastaje tako da se navedeni odnosi stave u izraz (10.2-7), jer je npr. M iz (10.2-7) u stvari $\{M\} = M/\text{kpm}$ itd.:

$$\frac{M}{\text{kpm}} = \frac{1}{375}\,\frac{G}{\text{kp}}\,\frac{D^2}{\text{m}^2}\,\frac{dn/\text{min}^{-1}}{dt/\text{s}}. \tag{10.2-8}$$

Pregrupiranjem jedinica na desnu stranu gornje jednadžbe slijedi:

$$M = GD^2\frac{dn}{dt}Z,\ \text{gdje je}\ Z = \frac{\text{kpm}\cdot\text{min}\cdot\text{s}}{375\,\text{kp}\cdot\text{m}^2}, \tag{10.2-9}$$

što nakon kraćenja kp u brojniku i nazivniku te uvođenja $\text{min} = 60\ \text{s}$ daje

$$Z = \frac{60}{375\,\text{m/s}^2} = \frac{1}{6{,}25\,\text{m/s}^2}.$$

Budući da je normirano ubrzanje zemljine teže $g = 9{,}806\,65\ \text{m/s}^2$, to je $6{,}25\ \text{m/s}^2 = g\cdot 0{,}637$, pa je dakle

$$Z = \frac{1}{g\cdot 0{,}637} = \frac{1{,}57}{g}.$$

Broj 1,57 približno je jednak omjeru $\pi/2$, dakle $\pi/2 = 1{,}57$, što konačno daje u izrazu za Z:

$$Z = \frac{\pi}{2g}.$$

Uvrstimo li ovako dobiveni Z u jednadžbu (10.2-9), slijedi

$$M = \frac{\pi}{2g}GD^2\frac{dn}{dt}, \tag{10.2-10}$$

što je prava univerzalna *veličinska* jednadžba, u kojoj svako slovo označuje veličinu, tj. umnožak brojčanog iznosa i jedinice.

Budući da je masa rotirajućeg tijela $m = G/g$, izraz (10.2-10) može se dalje napisati u obliku

$$M = \frac{\pi}{2}mD^2\frac{dn}{dt}, \tag{10.2-11}$$

odnosno zbog $\omega = 2\pi n$ i $D = 2r$, gdje je r reducirani polumjer na koji zamišljamo svedenu ukupnu masu:

$$M = mr^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \qquad (10.2\text{-}12)$$

Netom napisana jednadžba već je sasvim blizu posve općenitoj vezi između zakretnog momenta M i (dinamičkog) momenta tromosti (inercije) J

$$M = J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

Stvarno je prema definiciji momenta tromosti (vidi tablicu B-53)

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m,$$

u našem slučaju $J = mr^2 = mD^2/4$, pa zbog $\omega = 2\pi n$ nastaje jednadžba (10.2-11), a od nje preko $m = G/g$ izraz (10.2-10).

Za *praktičan* je rad izraz (10.2-11) prikladniji od (10.2-12) zbog ovih razloga: Prilikom mjerenja promjene frekvencije vrtnje $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ obično se lakše izmjeri frekvencija vrtnje n u pojedinim momentima negoli rotancija ω. Osim toga lakše je tačno izmjeriti D nego r, ako se radi s reduciranom masom, a ne s reduciranim polumjerom ili promjerom.

Još će stanovito vrijeme biti važan i »moment inercije tehničara«, tzv. zamašni moment. Naime GD^2 iz jednadžbe (10.2-10) za iskusne ispitivače strojeva daje »predodžbu o momentu tromosti dotičnog stroja«, dok za stvarnu tromost $J = mr^2 = mD^2/4$ smatraju »da previše naginje fizici«. Naravno da je to samo stvar navike, a »osjećaj za mjeru« prečesto je doveo u tehnici do zabluda!

Ipak, ako ne želimo zanemariti taj subjektivni moment, možemo navedeni »osjećaj za mjeru« zadržati i u primjeni Međunarodnog sistema jedinica pri upotrebi jednadžbe (10.2-10). To će nam pokazati slijedeći stvarni *primjer*. Neka je reducirana masa rotora nekog stroja $m = 2000$ kg, a promjer $D = 1{,}2$ m. Prema tome je u jednadžbi (10.2-11)

$$mD^2 = 2000 \text{ kg} \cdot 1{,}2^2 \text{ m}^2 = 2880 \text{ kgm}^2.$$

Istodobno je na površini Zemlje težina istog rotora $G = 2000$ kiloponda, pa ćemo u izraz (10.2-10) uvrstiti

$$GD^2 = 2000 \text{ kp} \cdot 1{,}44 \text{ m}^2 = 2880 \text{ kpm}^2.$$

To znači da su *brojčane vrijednosti* veličine mD^2, kad se mjeri sa kgm^2, i veličine GD^2, kad se mjeri sa kpm^2, *međusobno jednake* (vidi odsječak 9.2), ali samo brojčane vrijednosti, jer je $m/\text{kg} = G/\text{kp}$. Fizikalno su veličine mD^2 i GD^2 međusobno potpuno *različite*. Prava značajka dinamičke tromosti rotora jedino je

$$J = mr^2 = mD^2/4 = 720 \text{ kgm}^2,$$

tj. moment tromosti. Ova veličina ne ovisi o tome kakvo je ubrzanje zemljine teže g, da li se stroj nalazi na Zemlji, Mjesecu ili u rudničkoj dizalici. Sa GD^2 to nije tako, jer prema $G = mg$ vrijedi $GD^2 = mgD^2$, pa dakle zbog različitih vrijednosti g veličina GD^2 nije invarijantna prema ubrzanju zemljine teže g. Na kraju krajeva možemo se upitati kakvog posla uopće ima g u izrazima za vrtnju strojnih dijelova? Odgovor na to pitanje sadrže raspravljanja u odsječcima 7.3 i 9.2.

10.2.3. Gubitak tlaka u cjevovodu. U dobrom udžbeniku tehničke hidraulike našli smo ovu formulu za proračunavanje »gubitka visine« h prilikom strujanja konstantnog protoka q kroz horizontalno položenu cijev unutarnjeg promjera D i duljine L:

$$h = 0{,}0826\,\lambda L q^2/D^5. \tag{10.2-13}$$

Pri tom je slovo λ objašnjeno kao koeficijent trenja koji ovako ovisi o promjeru cijevi D i o koeficijentu hrapavosti n:

$$\lambda = 124{,}6 \cdot n^2/\sqrt[3]{D}. \tag{10.2-14}$$

Uz jednadžbu (10.2-13) dužni smo objasniti da se u hidraulici tlak ili gubitak tlaka često izražavaju pomoću visine stupca tekućine, što smo obradili u odsječku 4.1. Prema tome gubitku visine h stvarno pripada gubitak tlaka $p = \rho g h$, gdje je g ubrzanje zemljine teže, a ρ gustoća tekućine koja struji.

Koeficijent trenja λ je čist broj, a isto tako i koeficijent hrapavosti n, koji se određuje eksperimentalno (*Manning*). Izraz (10.2-13) očito *nije veličinska jednadžba.* Kontroliramo li ga npr. pomoću općih, još nedefiniranih jedinica (dimenzija)

$$[h] = [l], \quad [\lambda] = [1], \quad [q] = [l]^3[t]^{-1}, \quad [D] = [l],$$

od izraza (10.2-13) dobivamo $[l] = [l]\,[l]^6\,[t]^{-2}\,[l]^{-5}$, a ta jednakost ne postoji jer

$$[l] \neq [l]^2\,[t]^{-2}.$$

Od *brojčane* jednadžbe (10.2-13) napravit ćemo univerzalnu veličinsku jednadžbu. Pri tom moramo pronaći na koje su jedinice vezani mjerni *brojevi* h, L, q i D iz jednadžbe (10.2-13). Nakon duljeg traganja u udžbeniku pronalazimo pripadne jedinice m, m, m^3/s i m. Stoga možemo pisati

$$\{h\} = h/\mathrm{m}; \quad \{L\} = L/\mathrm{m}; \quad \{q\} = q/(\mathrm{m}^3/\mathrm{s}); \quad \{D\} = D/\mathrm{m}.$$

Budući da slova h, L, q i D u *brojčanoj* jednadžbi (10.2-13) u stvari predstavljaju brojčane iznose $\{h\} = h/\mathrm{m}$ itd., uvrštenjem navedenih odnosa u (10.2-13) dobivamo

$$h = \lambda L Q^2 D^{-5} Z, \tag{10.2-15}$$

gdje je

$$Z = 0{,}0826 \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2 \mathrm{m}^5}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^6} = 0{,}0826 \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}.$$

Izračunajmo recipročni omjer. Dobivamo $Z = 1/(12{,}11\ \mathrm{m/s^2})$. Očito je, dakle, da je u nazivniku sakriveno ubrzanje zemljine teže $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Stavimo li to u gornju jednadžbu, nakon računanja slijedi $Z = 0{,}81/g$. Sada je još potrebno odgonetnuti porijeklo broja 0,81. To moramo učiniti pokušavanjem. Budući da je riječ o cijevima valjkasta oblika, možemo pomisliti da mora biti umiješan faktor $\pi = 3{,}14\ldots$ Stvarno nam pokušavanje daje odgovor

$$0{,}81 = 8/\pi^2, \text{ pa je dakle } Z = \frac{8}{\pi^2 g}.$$

Uvrstimo li Z u izraz (10.2-15), nastaje konačno prava *veličinska* jednadžba za izračunavanje »gubitka visine«

$$h = \frac{8\lambda}{\pi^2 g} \frac{q^2 L}{D^5}. \tag{10.2-16}$$

Stvarni gubitak tlaka je prema $p = \rho g h$:

$$p = \frac{8 \rho \lambda}{\pi^2} \frac{q^2 L}{D^5}. \tag{10.2-17}$$

Usporedimo li veličinsku jednadžbu (10.2-16) s brojčanom (10.2-13), vidimo da je izraz (10.2-13) posve blizu prave veličinske jednadžbe. Budući da je

$$\frac{8}{\pi^2 g} = \frac{8}{\pi^2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}0826\,\mathrm{s^2/m},$$

može se (10.2-13) napisati u obliku

$$h = K \lambda L q^2 / D^5. \tag{10.2-18}$$

Prigodom obrazloženja konstante $K = 0{,}0826\ \mathrm{s^2/m}$ valja naglasiti da je u njoj sadržano ubrzanje zemljine teže, pa zbog toga izraz (10.2-18) nije univerzalna veličinska jednadžba.

Ni izraz (10.2-14) nije veličinska jednadžba: λ i n su brojčani koeficijenti, dakle brojevi, a desno vidimo pod trećim korijenom promjer. Ako shvatimo znak D u (10.2-14) kao brojčani iznos, onda je dovoljno samo uvrstiti $\{D\} = D/\mathrm{m}$ (u udžbeniku se uz opis naše jednadžbe može pronaći da treba D uvrštavati u metrima!), pa je veličinski oblik izraza (10.2-14):

$$\lambda = 124{,}6\, n^2 / \sqrt[3]{D/\mathrm{m}}.$$

To je, dakako, *prilagođena* veličinska jednadžba (vidi odsječak A.1.6).

10.3. Osvrt na nekoliko sistema dimenzija mehanike

10.3.1. Općenito o dimenzijama. Osnovne pojmove o dimenzijama veličina i o sistemima dimenzija raspravili smo u odsječku A.5.2. Pojam dimenzije koristan je u teoriji sličnosti i u dimenzijskoj analizi. Budući da se zbog ograničenosti prostora u ovoj knjizi ne možemo baviti s te dvije grane primijenjene formalističke metrologije, spomenut ćemo samo ukratko nekoliko sistema dimenzija mehanike koji mogu biti od koristi pri brzoj kontroli nekih računskih ili teoretskih rezultata. Time zapravo dimenzijama veličina i sistemima dimenzija dajemo znatno manju ulogu nego što su je imali u prošlosti. To je razumljivo, jer sva naša razmatranja u ovoj knjizi počinju od veličinskih jednadžbi i vraćaju se na njih. Budući da se prema izlaganjima u poglavlju A.5 od veličinskih jednadžbi dolazi na jednadžbe dimenzija jednostavnim odbacivanjem svih brojčanih faktora, za praktične je svrhe zaista mnogo jednostavnije raditi s takvim »izniveliranim« veličinskim jednadžbama negoli stvarati posebne »sisteme dimenzija«.

Kako je poznato iz odsječka A.5.2, sistem dimenzija počiva na nekoliko nezavisnih dimenzija koje nazivamo i »osnovnim dimenzijama«. Broj tih osnovnih dimenzija ovisi o tome o kojoj je grani riječ. U dinamici su potrebne 3 osnovne dimenzije, u elektromagnetizmu četiri.

Koje će dimenzije pojedinac odabrati za osnovne, ovisi posve o njegovoj volji. Ta njegova volja potječe od koristi koju on ima od nekog sistema dimenzija, a korist je obično veća kad se dimenzije svode na slijed definicija veličina na koji je dotični naučen. Posebno valja naglasiti da sistemi dimenzija nemaju nikakve veze sa sli-

jedom definicija takozvanih osnovnih jedinica. Budući da definicije jedinica moraju nekako slijediti jedna iza druge, nastao je slijed definicija jedinica, ali to nema nikakva utjecaja na sisteme dimenzija.

U mnogim knjigama označuju se dimenzije neke veličine tako da se simbol veličine zatvori u uglatu zagradu. Tako je na primjer $[V]$ oznaka za dimenziju volumena V. U našim ranijim razmatranjima tako smo označivali opću, još nedefiniranu jedinicu. Da ne bi dolazilo do zamjena, a da ujedno uštedimo prostor, oznaku za dimenziju pisat ćemo bez uglate zagrade. Da je ipak razlučimo od veličine, tiskat ćemo znak za dimenziju uspravnim slovima, za razliku od veličina, koje tiskamo *kurzivnim* slovima. To znači da je dim $V = \mathrm{V}$.

Oznake dimenzija triju veličina predstavljaju iznimku. To su dimenzije za duljinu l, vrijeme t i masu m. Za njih se odvajkada upotrebljavaju oznake dimenzija L, T i M. Tu praktičnu tradiciju zadržat ćemo i ovdje. Prema tome je dim $l = \mathrm{L}$, dim $t = \mathrm{T}$, dim $m = \mathrm{M}$.

10.3.2. Sistem dimenzija LTM. Najstariji i najčešće upotrebljavani sistem dimenzija mehanike je takozvani LTM sistem. Kod njega su kao osnovne dimenzije odabrane one za duljinu, vrijeme i masu. Veliku je popularnost taj sistem stekao zato što je potpuno u skladu s uobičajenim slijedom definicija jedinica tih triju veličina, jer se, kako znamo, jedinice mehanike obično definiraju ovim slijedom:

Brzina $v = l/t$ ima u tom sistemu dimenziju $\mathrm{v} = \mathrm{LT}^{-1}$. Budući da je ubrzanje $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, to je dimenzija ubrzanja $\mathrm{a} = \mathrm{LT}^{-2}$. Kako je sila $F = ma$, dimenzija sile izvodi se kao $\mathrm{F} = \dim F = \dim a \times \dim m$, što uvrštenjem daje $\dim F = \mathrm{F} = \mathrm{LT}^{-2}\mathrm{M}$. Lako je izvesti dimenzije ostalih veličina. Budući da je energija $W = Fl$, to je $\dim W = \mathrm{W} = \mathrm{LT}^{-2}\mathrm{ML} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\mathrm{M}$; snaga P ima zbog $P = W/t$ dimenziju $\mathrm{P} = \mathrm{WT}^{-1} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\mathrm{MT}^{-1} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}\mathrm{M}$. Dimenzije nekih drugih veličina mehanike u sistemu jedinica LTM vidimo u tablici B-57 (stupac 4).

10.3.3. Sistem dimenzija LTF. Nekima je od veće koristi sistem dimenzija LTF, koji se od LTM razlikuje u tome što su za treću osnovnu dimenziju umjesto mase odabrali *silu*. Znači da u ovom sistemu masa ima izvedenu dimenziju, dok je u LTM bilo obratno. Dimenzije svih ostalih veličina ne moramo računati korak po korak ako već imamo napisane dimenzije u sistemu LTM. Dovoljno je izračunati koju dimenziju (sada izvedenu) ima u sistemu LTF masa m, pa onda tu dimenziju uvrštavati namjesto M. Budući da je $\mathrm{F} = \mathrm{LT}^{-2}\mathrm{M}$, to je očito $\mathrm{M} = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^2\mathrm{F}$. Stavimo li to u dimenziju, na primjer, snage P u sistemu LTM, dobivamo dimenziju snage u sistemu LTF, dakle $\dim P = \mathrm{P} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}\mathrm{M} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^2\mathrm{F} = \mathrm{LT}^{-1}\mathrm{F}$. Dimenzije ostalih veličina u sistemu LTF vidimo u tablici B-57 (stupac 5).

10.3.4. Ostali sistemi dimenzija. Nekima se čini najpraktičnijim »energetski« sistem dimenzija LTW, kojemu su osnovne dimenzije duljine, vremena i energije. Ako imamo poznate dimenzije veličina u sistemu LTM (kao u tablici B-57), onda se od LTM prelazi na LTW najjednostavnije tako da se potraži kakva je dimenzija energije W u sistemu LTM. To je $\mathrm{W} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\mathrm{M}$, što se vidi iz stupca 4 tablice. Odavde potražimo obrnutu zavisnost ako u energetskom sistemu dim W shvaćamo kao osnovnu dimenziju: $\mathrm{M} = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^2\mathrm{W}$. Stavimo li ovako izraženi M na sva mjesta izvedenih dimenzija u sistemu LTM, dobivamo stupac 6 u tablici. Tako je, na primjer, dimenzija snage P u sistemu LTW: $\mathrm{P} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}\mathrm{M} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^2\mathrm{W} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{W}$, što je očito, jer je $P = W/t$.

Stupac 7 tablice B-57 sadrži dimenzije u sistemu LTP. Vezu između sistema LTM i LTP ostvarujemo preko $\mathrm{P} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}\mathrm{M}$, dakle $\mathrm{M} = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^3\mathrm{P}$.

Tablica **B-57**

Nekoliko sistema dimenzija mehanike

Veličina	Oznaka	Jednadžba	LTM	LTF	LTW	LTP	LTUI
1	2	3	4	5	6	7	8
Masa	m	$m=\frac{F}{a}$	M	$L^{-1}T^2F$	$L^{-2}T^2W$	$L^{-2}T^3P$	$L^{-2}T^3UI$
Sila	F	$F=m\frac{d^2l}{dt^2}$	$LT^{-2}M$	F	$L^{-1}W$	$L^{-1}TP$	$L^{-1}TUI$
Energija, zakretni moment	W, M	$W=\frac{1}{2}mv^2;\ M=J\frac{d\omega}{dt}$	$L^2T^{-2}M$	LF	W	TP	TUI
Impuls, količina gibanja	I	$I=\int F\,dt=mv$	$LT^{-1}M$	TF	$L^{-1}TW$	$L^{-1}T^2P$	$L^{-1}T^2UI$
Snaga	P	$P=dW/dt=Fv$	$L^2T^{-3}M$	$LT^{-1}F$	$T^{-1}W$	P	UI
Moment tromosti	J	$J=\int r^2\,dm$	L^2M	LT^2F	T^2W	T^3P	UT^3I
Tlak	p	$p=\frac{F}{A}$	$L^{-1}T^{-2}M$	$L^{-2}F$	$L^{-3}W$	$L^{-3}TP$	$L^{-3}TUI$
Gustoća	ρ	$\rho=\frac{m}{V}$	$L^{-3}M$	$L^{-4}T^2F$	$L^{-5}T^2W$	$L^{-5}T^3P$	$L^{-5}T^3UI$
Specifična težina	γ	$\gamma=\frac{G}{V}=g\rho$	$L^{-2}T^{-2}M$	$L^{-3}F$	$L^{-4}W$	$L^{-4}TP$	$L^{-4}TUI$
Dinamička viskoznost	η	$\eta=\frac{F/A}{dv/dx}=\rho\nu$	$L^{-1}T^{-1}M$	$L^{-2}TF$	$L^{-3}TW$	$L^{-3}T^2P$	$L^{-3}T^2UI$

U stupcu 8 prikazali smo »električki« sistem dimenzija, koji se razlikuje od LTP samo po tome što je snaga P izražena električki pomoću napona U i struje I, $P = UI$. Tu vidimo kako se mehanički sistem dimenzija LTP zbog $P = UI$ odmah transformira u »četvorni« sistem, čime se iz mehanike prelazi u elektromagnetizam. Nekad se to smatralo osebujnošću dimenzijske analize. Danas, kad se služimo veličinskim jednadžbama, to je posve normalno.

Postoji još niz sistema dimenzija. Na primjer, glasovit je sistem LTH, gdje je H dimenzija *Planck*ove konstante h, sistem LTI, gdje je I dimenzija impulsa itd.

Ispravan je svaki od tih sistema koji se u mehanici temelji na tri međusobno nezavisne dimenzije. Kome je potreban sistem dimenzija, odabrat će onaj koji mu je općenito ili za neki specijalni problem najprikladniji.

11. Angloamerički sistemi jedinica prostora i mase

11.1. Osnova jedinstvenog angloameričkog sistema jedinica

11.1.1. Potreba poznavanja angloameričkih jedinica. Pod »angloameričkim mjernim jedinicama« razumijevamo cjelokupnost jedinica koje se snagom nacionalnih zakona, tradicije ili zbog ekonomskih razloga upotrebljavaju u nekim državama Commonwealtha, u United Kingdomu (Velika Britanija i Sjeverna Irska), Sjedinjenim Američkim Državama (USA), u bivšim britanskim kolonijama, te u onim zemljama koje u znatnijoj mjeri ovise o mjernim jedinicama američkog i britanskog kapitala. Poznavanje angloameričkih jedinica *danas* je izvanredno važno i za zemlje u kojima je metrički sistem tradicionalan i odavno ozakonjen. To poznavanje vjerojatno će u budućnosti biti *još potrebnije*!

Ovu paradoksalnu tvrdnju (vidi odlomke A.6.5,6 u kojima se opisuje silan prodor metričkog sistema jedinica u zemlje engleskog govora) možemo objasniti ovime: fenomenalan napredak *transporta i komunikacija* u toku drugog svjetskog rata i nakon njega »skratili« su udaljenosti među kontinentima, a pogotovu među susjednim državama; izgradnja velikih *teretnih brodova i tankera* bitno je snizila udio cijene transporta u cijeni proizvoda, pa velike industrije mogu uspješno konkurirati i na drugim kontinentima; i *kreditiranje* nerazvijenih i manje razvijenih zemalja od strane visokorazvijenih (npr. USA) jedan je od faktora koji zahtijeva poznavanje angloameričkih jedinica, jer često su ti krediti odobreni uz uvjet da se oprema kupi u zemlji kreditora; potreba i želja da se »metrička roba« *plasira* na tržišta engleskog govora također zahtijeva da se poznaju jedinice potencijalnog kupca.

Neke od tih prividnih paradoksa možemo zapaziti i u evropskim trgovinama živežnih namirnica: na izložbenim policama poslagane su npr. jedna uz drugu na izgled posve jednake mesne (ili voćne ili riblje) konzerve; prva je npr. francuske proizvodnje, pretežno namijenjena izvozu u Englesku, a na njoj je masa sadržaja označena u »oz« (angloamerička jedinica mase »ounce«; vidi odsječak 11.5), dok je druga proizvedena u Engleskoj, a na njoj je masa označena samo gramima, dakle metričkom jedinicom! Borba proizvođača za strana tržišta uvjetuje, dakle, da proizvođač opisuje svoj proizvod onim jedinicama na koje je naviknut kupac.

Utjecaj angloameričkih jedinica na metrička tržišta naročito je snažan u *pomorskom transportu*. Tu ne mislimo samo na milje i druge specijalne mjerne jedinice moreplovstva, već i na bezbroj angloameričkih jedinica kojima se obilježavaju brodski tereti. Izvoznici i trgovci s metričkih tržišta moraju poznavati značenje pojedinih angloameričkih jedinica, jer inače mogu zapasti u neprilike koje ponekad završe i novčanim gubicima. Za primjer može nam poslužiti jedinica volumena barrel (liquid) koja u USA sadrži 31 do 42 gallona; zakoni nekih saveznih država USA

definiraju barrel sa 31,5 gallona, federalni porezi za fermentirane likere baziraju se na barrelu koji sadrži 31 gallon, a porezi na čistu žestu na barrelu od 40 gallona; za naftne proizvode upotrebljava se barrel = 42 gallona itd. (vidi odlomak 11.4.4). Slično je i s nizom drugih jedinica.

Da bi se pomoglo izvoznicima i uvoznicima, tehničarima i mnogim drugima koji su po prirodi svog posla vezani s angloameričkim mjernim jedinicama, u nizu narednih odsječaka i odlomaka dat ćemo pregled tih jedinica, njihove međusobne odnose, odnose prema metričkim jedinicama, razliku između istoimenih američkih i engleskih jedinica itd.

Posve neupućenom možda se čini da u angloameričkom skupu jedinica nema nikakva reda i sistematičnosti. To je tačno samo u stanovitoj mjeri. Svojevrsnu logiku građenja i nadograđivanja angloameričkih jedinica može čitalac spoznati tako da barem donekle upozna historijat temeljnih jedinica, a to su: yard, pound, gallon i bushel (vidi odsječak 11.2). Historijski prikaz, s naznakom vrijednosti pojedinih angloameričkih jedinica u raznim vremenskim periodima, potreban je i zbog toga da se mogu ispravno tumačiti stariji pravni i znanstveni dokumenti.

11.1.2. Yard — osnovna jedinica duljine. Od godine 1963. u svim je anglosaskim zemljama yard jednako definiran. Tada je, naime, United Kingdom proglasio nov zakon o mjernim jedinicama, Weights and Measures Act 1963, kojim je *osnovna* jedinica duljine definirana ovako:

$$\text{yard} = 0{,}9144 \text{ metra (tačno).} \qquad (11.1\text{-}1)$$

Tako definiran yard vrijedi za *sve primjene* u United Kingdomu.

Prije toga, godine 1959, gornju definiciju prihvatila su zakonodavstva pojedinih država Commonwealtha i Sjedinjenih Američkih Država (Nova definicija ubilježena je u U.S. Federal Register of 1st July 1959).

Na taj način anglosaski svijet ima od godine 1963. *jedinstvenu* osnovnu jedinicu duljine (do tog vremena to nije bilo tako; vidi odsječak 11.2), a time i *sve ostale jedinice duljine*. Budući da je npr. yard (yd) = 36 incha (in), to iz jednadžbe (11.1-1) slijedi vrijednost jedinice inch, čija je jedinstvenost za industriju najvažnija:

$$\text{inch} = \frac{\text{yard}}{36} = \frac{0{,}9144\,\text{m}}{36} = 25{,}4 \text{ mm (tačno).}$$

Prema tome se angloameričke jedinice duljine baziraju na onom istom zračenju atoma kriptona 86 pomoću kojeg je definiran metar (vidi odsječak A.8.7). Spomenuti britanski Weights and Measures Act 1963 predstavlja *bitnu* promjenu osnove britanskog zakonodavstva: do godine 1963. osnovna jedinica bila je, naime, duljina metalnog štapa Imperial Standard Yard (vidi odlomke 11.2.1,2).

11.1.3. Pound — osnovna jedinica mase. Britanski i američki zakoni koje smo citirali u odlomku 11.1.2 te pojedini nacionalni zakoni definiraju od godine 1963. jedinstvenu osnovnu jedinicu *mase* USA, United Kingdoma i nekih država Commonwealtha ovako:

$$\text{pound} = 0{,}453\,592\,37 \text{ kilograma (tačno).} \qquad (11.1\text{-}2)$$

To znači da je osnovna angloamerička jedinica mase pound (kratica je lb, što dolazi od »libre«) samo tačno propisani dio kilograma koji je realiziran prakilogramom pohranjenim u Međunarodnom uredu za mjere i utege u Sèvresu kraj Pariza (vidi odlomak A.9.3.3).

Definicija pounda (11.1-2) predstavlja za Britaniju *bitnu promjenu*. Do godine 1963. jedinica pound (tačnije imperial pound; vidi odlomak 11.2.6) bila je, naime, prema zakonu jedinica *težine*, dok je sada jedinica *mase*; osim toga sada je jedinstveni angloamerički pound definiran *odnosom* prema kilogramu, dok je prije toga u Britaniji postojala posebna pramjera — Imperial Standard Pound (vidi odlomak 11.2.6). Iz relacije (11.1-2) proizlazi sitna, ali važna angloamerička jedinica mase

$$\text{grain (gr)} = \frac{\text{pound (lb)}}{7000} = 0{,}064\,798\,91 \text{ gram (tačno).}$$

Ovdje je gram = g = kg/1000, tj. tisućinka kilograma.

11.1.4. Razlika između engleskog i američkog gallona. Jedinice vremena engleskog govornog područja iste su kao i u metričkom području; osnova je, dakle, sekunda (vidi odsječak A.10.1). Budući da su od godine 1963. osnovna jedinica duljine — yard (yd) i osnovna jedinica mase — pound (lb) jedinstvene, to je očito da se s osnovnom trojkom yard-second-pound u čitavom angloameričkom području grade jedinstvene izvedene jedinice. Tako je, na primjer, svugdje square yard = yd^2, cubic yard = yd^3, horsepower = hp = 550 ft lbf/s, itd.

Postoji, međutim, dosta opširno područje u kojem *nema* te jedinstvenosti engleskih i američkih jedinica, gdje se engleske i američke jedinice bitno *razlikuju*, iako većinom nose *ista* imena. Ove razlike nisu uspjeli ukloniti ni najnoviji zakonodavni akti, britanski od godine 1963. i američki od 1959. Nejedinstvenost je ostala u jednom dijelu jedinica *volumena*, tj. kod onih jedinica volumena čije je porijeklo u tzv. *šupljim mjerama*. To su raznovrsne posude kojima se mjere tekućine, suhe tvari, farmaceutski proizvodi itd.

Osnovom tih mnogobrojnih jedinica volumena (vidi odsječak 11.4) jesu dvije jedinice: »gallon« i »bushel«. One su u USA i Engleskoj (tačnije: United Kingdom) posve različito definirane. Stoga ćemo ih u daljnjem tekstu razlikovati pomoću odgovarajućih predmetaka: američku jedinicu označit ćemo s predmetkom US, a englesku sa UK; npr. US gallon (US gal) i UK gallon (UK gal). Takvo označivanje u skladu je s British Standard 350 (1959/1963), koji nalaže da istoimene jedinice moraju imati prefikse US ili UK ako među njima postoji razlika u veličini. Napominjemo i to da je prefiks UK u potpunosti zamijenio nekadašnji engleski prefiks imperial (npr. imperial gallon = imp. gal).; djelomično i zato što su neke UK jedinice ponešto drukčije definirane nego što su bile »imperial« jedinice.

Britanski zakon Weights and Measures Act (1963) definira **UK gallon** ovako: »UK gallon je prostor koji zauzima 10 pounda destilirane vode gustoće 0,998 859 g/ml, izvagane u zraku gustoće 0,001 217 g/ml pomoću utega gustoće 8,136 g/ml.« Ovdje je ml = mililitar = 0,001 litar. Citirani zakon objavljen je godine 1963, kada je litar još bio definiran ovako: litar = 1,000 028 dm^3 tačno (vidi odlomak 1.7.3), pa je na temelju gornje definicije odnos između UK gallona i litra (do 1964) ovakav: UK gallon = 4,545 96 litara (do 1964). Budući da je Generalna konferencija za mjere i utege godine 1964. litar izjednačila s kubnim decimetrom, tj. definirala litar (poslije 1964) = dm^3, najbolje je da eventualnu nejasnost izbjegnemo tako da iz daljnjih tekstova izostavimo dvoznačni litar. U tu svrhu vezu među jedinicama UK gallon = 4,545 96 litara (do 1964) pretvaramo u vezu s kubnim decimetrom, tj. UK gallon = 4,545 96 · 1,000 028 dm^3 = 4,546 087 286 88 dm^3. Tu vrijednost možemo napisati u približnom obliku

$$\text{UK gallon} = 4{,}546\,087 \text{ dm}^3, \qquad (11.1\text{-}3)$$

čime smo učinili relativnu pogrešku $-6{,}3:10^8$ u odnosu prema pravoj vrijednosti. Prema tome jednadžbu (11.1-3) možemo smatrati dovoljno tačnim odnosom između engleskog gallona i kubnog decimetra čak i za najstrože potrebe vrhunske metrologije.

Prije godine 1963. odnos imp. gallon/dm³ iznosio je 4,54609 (to je zaokruženje umnoška $4{,}5459631 \times 1{,}000028$), a nastao je mjerenjima i tumačenjem stručnjaka iz engleskog National Physical Laboratory, koji su uspostavili vezu između definicije imp. gallona prema Weights and Measures Act (1878) i kubnog decimetra.

Američki gallon (US gallon) potječe od »gallona za vino kraljice Ann« (Queen Ann wine gallon), a danas je definiran jednadžbom

$$\text{US gallon} = 231 \text{ cubic inch (tačno).} \qquad (11.1\text{-}4)$$

Ovdje je inch = yard/36, a yard je definiran izrazom (11.1-1). Napominjemo da se u USA taj gallon upotrebljava samo za mjerenje *tekućina i farmaceutskih proizvoda* (vidi odlomak 11.4.3).

Između engleskog UK gallona i američkog US gallona postoje ovi preračunski odnosi:

$$\text{UK gallon} = 1{,}20095 \text{ US gallon},$$

$$\text{US gallon} = 0{,}832675 \text{ UK gallon},$$

tj. engleski gallon veći je za oko 20 % od američkog.

11.1.5. Engleski i američki bushel. Jedinica bushel upotrebljava se u Engleskoj kako za tekuće tako i za suhe tvari. U Sjedinjenim Američkim Državama upotrebljava se *samo za suhe tvari*. UK bushel i američki bushel međusobno se razlikuju, što nam pokazuju ove definicije.

Engleski UK bushel definiran je kao cjelobrojni višekratnik jedinice UK gallon:

$$\text{UK bushel} = 8 \text{ UK gallon},$$

što preračunavanjem daje ove približne odnose

$$\text{UK bushel} = 2219{,}35 \text{ in}^3 = 36{,}3687 \text{ dm}^3.$$

Američki US bushel, koji se upotrebljava *samo za suhe tvari*, definiran je ovako

$$\text{US bushel} = 2150{,}42 \text{ cubic inch},$$

odakle preračunavanjem dobivamo

$$\text{US bushel} = 35{,}2391 \text{ dm}^3.$$

Između engleskog UK bushela i američkog US bushela postoje ovi preračunski odnosi

$$\text{UK bushel} = 1{,}03206 \text{ US bushel},$$

$$\text{US bushel} = 0{,}968940 \text{ UK bushel},$$

tj. engleski bushel veći je za oko 3 % od američkog.

11.1.6. Neke osobitosti angloameričkih sistema jedinica. Prije nego što u odsječku 11.3 i daljnjima prijeđemo na detaljna razmatranja angloameričkih jedinica, navest ćemo neke specijalnosti koje ili prate čitave skupove jedinica ili su pak karakteristične za pojedine jedinice.

Prefiksi su kod Engleza i Amerikanaca uobičajeni u primjeni elektromagnetskih jedinica, odnosno u primjeni metričkih jedinica ako je riječ o drugim granama tehnike, znanosti ili trgovine. Novi britanski standard BS 350 predviđa, međutim, dva prefiksa i uz jedinicu *duljine* inch. To su prefiksi mili (m) i mikro (μ). Tako je

$$\text{milli-inch} = 0{,}001 \text{ inch}, \quad \text{microinch } (\mu\text{in}) = 10^{-6} \text{ inch}.$$

Jedinica milli-inch zove se i »mil« ili »thou«.

Mil je riječ koja se često upotrebljava u engleskoj metrologiji. Prema BS 350 ona ima *pet* različitih značenja: kao jedinica duljine, to je mil = 0,001 inch; kao jedinica površine, to je circular mil = $(\text{in}/1000)^2 \cdot \pi/4$; kao jedinica volumena, to je tisućinka litra, dakle mil = mililitar (prema British Pharmacopeia 1953); kao jedinica kuta, može imati dva značenja: angular mil = radijan/1000 = 3′26,25″ ili angular mil = 360/6400 degree = 3′22,5″.

Kratice jedinica postale su prema BS 350 (1959/1963) znatno sličnije kraticama metričkih jedinica. Tako je, na primjer,

$$\text{square foot} = \text{ft}^2, \quad \text{cubic inch} = \text{in}^3 \text{ itd.},$$

ali je i dalje dopušten stariji oblik

$$\text{square foot} = \text{sq ft}, \quad \text{cubic inch} = \text{cu in itd.}$$

Razlika je samo u tome što se sada sve kratice dosljedno pišu *bez tačke* na kraju. Kratica British thermal unit sada je Btu (a ne BTU), kratica jedinice horsepower je hp (a ne HP), ali je za frekvenciju ostala jedinica cycle per second (c/s), a nije uvedena međunarodna kratica Hz (hertz). Isto tako prema BS 350 piše se npr. »degree Celsius (°C)«, a ne »centigrade« (time je britanski standard u suglasnosti s preporukom Generalne konferencije za mjere i utege od 1948). Spomenute kratice i nazive, kao i niz njih koje ovdje ne spominjemo, primijenjene su u daljnjim odlomcima ovog poglavlja.

Metričke jedinice metar i kilogram pišu se u Americi i Engleskoj različito, što vidimo u ovom pregledu

USA	United Kingdom
meter	metre
kilogram	kilogramme

Milijun i višekratnici milijuna imaju različito značenje u Engleskoj i Sjedinjenim Američkim Državama. Razliku prikazuje iduća tablica, iz koje razabiremo kako nastaje bilijun itd. U Evropi i Engleskoj je bilijun = milijun × milijun = 10^{12}, trilijun = milijun × bilijun = 10^{18}, kvadrilijun = milijun × trilijun = 10^{24}, dok je u USA slijed definiranja ovakav: milijun = 1000 × 1000 = 10^6, bilijun = 1000 × milijun = 10^9, trilijun = 1000 × bilijun = 10^{12}, kvadrilijun = 1000 × trilijun = 10^{15}.

Naziv		Značenje	
hrvatskosrpski	engleski	U Evropi i u United Kingdom	u USA
milijun	million	10^6	10^6
bilijun	billion	10^{12}	10^9
trilijun	trillion	10^{18}	10^{12}
kvadrilijun	quadrillion	10^{24}	10^{15}

Korisno je spomenuti da od »evropskog pravila« odstupa

Francuska. U toj se zemlji, naime, pod nazivima milijarda i trilijun razumijeva ovo:

$$\text{milijarda (milliard)} = 10^9,$$
$$\text{trilijun (trillion)} = 10^{12}.$$

Prema tome u Francuskoj riječi trilijun znači isto što i u Sjedinjenim Američkim Državama.

US survey foot jedina je angloamerička jedinica duljine koja se ne pokorava relaciji (11.1-1). Ova jedinica zadržana je za geodetske svrhe u USA, a definirana je ovako

$$\text{US survey foot} = \frac{1200}{3937}\,\text{m} = \frac{\text{foot}}{0{,}999\,998} = 1{,}000\,002\ \text{ft}.$$

Ako tu relaciju usporedimo s navodima u odlomku 11.2.4, vidimo (yard = 3 foot) da je to u stvari US foot prema zakonu od godine 1893.

Smanjenje američkih jedinica duljine, površine i volumena u odnosu na prijašnje vrijednosti, karakteristika je novog, jedinstvenog angloameričkog sistema jedinica. Ako npr. yard iz jednadžbe (11.1-1) usporedimo sa US yard (1893), vidimo da relativno smanjenje pri prijelazu na jedinstveni yard (1963) iznosi $2:10^6$. Isto vrijedi i za ostale američke jedinice duljine. Za jedinice površine relativno smanjenje iznosi $4:10^6$, a za jedinice volumena $6:10^6$. Nasuprot tome bivše engleske jedinice (imperial) duljine, površine i volumena (usporedi s odsječkom 11.2) relativno su *povećane* redom za $8:10^7$, $1{,}6:10^6$ i $2{,}3:10^6$. Ovi podaci mogu biti od koristi pri proučavanju američke literature prije godine 1959, odnosno engleske prije godine 1963.

Pisanje množine jedinica uobičajeno je u angloameričkoj literaturi, što je u skladu s pravilima engleskog jezika. Tako se u engleskoj literaturi, na primjer, piše: furlong = 220 yards, UK bushel = 8 UK gallons itd., dakle sa s na kraju jedinice kao oznakom množine. Jedina je iznimka jedinica foot, jer u engleskom jeziku množina od foot glasi feet, npr. yard = 3 feet. Britanski standard o jedinicama nalaže da se *kratica* jedinice u množini piše jednako kao i kratica u jednini, npr.: yd = = 3 ft, $\text{yd}^2 = 9\ \text{ft}^2$ itd. U tekstu naše knjige pisali smo množinu angloameričkih jedinica drukčije, tj. onako kako pišemo i metričke jedinice, npr. yard = 3 foot, furlong = 220 yard itd.

11.2. Iz povijesti engleskih i američkih osnovnih jedinica

11.2.1. Iz povijesti engleskog yarda. Predaja kaže da je godine 1101. engleski kralj *Henry I* naredio da se izradi štap koji je upravo toliko dugačak kolika je udaljenost između vrška njegova nosa i palca njegove ispružene lijeve ruke. Time je nastala kraljevska jedinica duljine »yard«, koja je bila ozakonjena. Kažu da je 223 godine kasnije *Edward II* izabrao iz sredine ječmenog klasa tri zrna i njihovu ukupnu duljinu nazvao »inch«. Englezi su i prije dva opisana događaje imali razne istoimene, ali kao i u Evropi različito velike jedinice, pretežno rimskog porijekla. Kraljevske odluke samo su dokrajčile vječne prepirke oko toga tko je ispravno izmjerio robu, da li prodavač ili kupac.

Yard je prvi put standardiziran i materijaliziran prije nekih 700 godina, za vrijeme vladavine kralja *John*a. To je bio čelični štap čiji su krajevi (krajnja mjera; vidi analogan odlomak A.6.4 o štapnom metru) bili udaljeni 1 yard. Druga čelična pramjera duljine, poznata pod nazivom *Ulna*, bila je izrađena oko godine 1305. po naredbi kralja *Edwarda I.* U narednim stoljećima bilo je izrađeno još nekoliko prayarda u obliku krajnjih mjera, što se vidi iz ovog pregleda (duljina yarda izražena je u odnosu na današnji inch):

Ulna kralja Edwarda I	1305	35,96 inch
Exchequer standard yard	1497	35,963 inch
Yard kraljice Elizabeth I	1588	35,99 inch
Imperial standard yard	1845	36,00001 inch
Imperial standard yard	1870	36,00000 inch
	1889	Međunarodni prametar
Imperial standard yard	1895	35,99997 inch
Imperial standard yard	1922	35,99994 inch
Jedinstveni yard	1959	36,00000 inch
	1960	Valni metar (Kr 86)

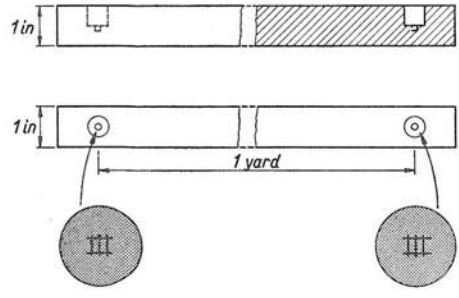
U kronologiju engleskog yarda na dva smo mjesta, radi usporedbe, uvrstili značajne datume metričkog sistema jedinica (vidi odgovarajuće odsječke A.6.2, 3, 4).

Godine 1824. Englezi su pokušali primijeniti prirodno pramjerilo duljine: njihalo koje bi u Londonu (na razini mora, u vakuumu) imalo period 1 sekundu bilo bi 39,1393/36 puta dulje od novog imperijskog yarda. Pripadna teoretska definicija navedena je čak i u zakonu od godine 1824. (Act for ascertaining and establishing Uniformity of Weights and Measures), ali je zbog mjernotehničkih razloga ta definicija bila *materijalizirana* u obliku štapne mjere s tačkicama. Time počinje engleska znanstvena metrologija duljine.

11.2.2. Engleski Imperial Standard Yard. Već je godine 1758. izrađen tzv. Bird Yard, tj. metalni štap na kojem je razmak između dviju tačkica na upuštenim zlatnim pločicama iznosio 1 yard (oznaka »imperijski« bila je prihvaćena godine 1824). No on je propao u požaru Parlamenta godine 1834.

Stoga je godine 1845. od Bailyjeva metala (vrsta bronce) odliven niz štapova duljine 38 incha (yard = 36 inches). Presjek štapa iznosi 1 square inch (kvadratni palac), a u udaljenosti 1 inch od svakog kraja brončanog štapa nalazi se udubina promjera 1/2 inch i duboka 1/2 inch (sl. B.50). U svaku od tih udubina učvršćena

je u visini neutralne linije ispolirana zlatna pločica promjera 1/10 inch na kojoj su ugravirane tri crtice razmaknute 1/100 inch. Okomito na te tri crtice, tj. paralelno s uzdužnom osi štapa, ugravirane su dvije crtice. »Imperial Standard Yard« definiran je kao udaljenost između dviju srednjih crtica, ako je temperatura 62 stupnja Fahrenheita (vidi odlomak D.3.4.2). Štapna pramjera bila je pohranjena u Standards Department of the Board of Trade na 8 valjaka koji su jednoliko preuzeli težinu štapa.



Sl. B.50. Skica pramjere Imperial Standard Yarda koji je bio zakonom na snazi do godine 1963.

Zakonima o mjerama i utezima (Weights and Measures Act) od godine 1855. i 1878. bilo je određeno da se na različitim mjestima mora pohraniti pet kopija tog štapa. Time se željela izbjeći propast standardne mjere duljine kao što se dogodilo godine 1834. Te kopije nazvane su »parlamentarnim primjercima« (PC — Parliamentary Copies), a pohranjene su ovako: PC 2 u Royal Mintu, PC 3 u Royal Society of London, PC 4 uzidana u New Palace of Westminster, PC 5 u Royal Observatory u Greenwichu, te PC 6 u Board of Trade, gdje se — kako smo već spomenuli — nalazi i PC 1, tj. Imperial Standard Yard.

U Međunarodnom uredu za mjere i utege u Sèvresu (vidi poglavlje A.7) uspoređena je godine 1895. duljina prayarda (PC 1) sa štapnim prametrom, tj. s osnovom metarskog sistema jedinica. Usporedba je učinjena interferencijskom metodom (vidi poglavlje A.8) i pri tom je dobiven odnos

$$\text{imperial standard yard} = 0{,}914\,399\,21 \text{ m}, \qquad (11.2\text{-}1)$$

gdje je m kratica jedinice duljine metar. Ovaj odnos *ozakonjen* je u Engleskoj zakonom Weights and Measures (Metric System) Act od godine 1898, a naveden je u sastavnom dijelu tog zakona, tj. u Equivalents of Metric Weights and Measures in Terms of Imperial Weights and Measures for Use in Trade. Jednadžba (11.2-1) bila je, dakle, *zakonski* odnos propisan u Engleskoj, odnosno u čitavom imperiju. Taj odnos bio je na snazi sve do godine 1963, dakle donedavno, iako su interferencijska mjerenja nakon godine 1895. pokazala da omjer imp. yard (PC 1)/metar s vremenom postaje sve manji (vidi tablicu B-58), tj. da PC 1 postaje sve kraći u odnosu prema prametru.

11.2.3. Još dva engleska yarda. Uz opisani zakonski yard u Engleskoj su postojala još dva yarda, koji su se *stvarno* upotrebljavali. Prvi od njih možemo nazvati *znanstvenim* yardom. Do njega se došlo ovako: interferencijske usporedbe prametra u Sèvresu i engleskog prayarda PC 1 dale su rezultate koji su skupljeni u tablici B-58. National Physical Laboratory, vrhunska engleska metrološka ustanova, odabrao je u svoje vrijeme rezultate mjerenja, koje su godine 1922. obavili *Sears*, *Johnson* i *Jolly*, za osnovu pri *najpreciznijim znanstvenim istraživanjima*, tj. za baždarenje najpreciznijih krajnjih štapnih mjera itd. Prema tome »znanstveni yard« i »znanstveni inch« bili su u ovom odnosu prema metru, odnosno milimetru

$$\text{m} = 39{,}370\,147 \text{ inch}, \quad \text{odnosno} \quad \text{inch} = 25{,}399\,956 \text{ mm}.$$

Tablica **B-58**

Rezultati uspoređivanja prayarda (PC 1) i prametra (Sèvres)

Godina mjerenja	Omjer yard/metar	Omjer inch/milimetar	Omjer metar/inch
1895	0,914 399 2	25,399 978	39,370 113
1922	398 4	956	147
1932	398 2	950	156
1947	397 5	931	186

Treći engleski yard (prvi je zakonski, drugi znanstveni) bio je tzv. *industrijski yard*; neki ga nazivaju i »međunarodni yard«. Njegova historija vrlo je kratka: godine 1930. prihvatila je British Standards Institution (BSI) za potrebe *industrijske standardizacije* ove definicije:

$$\text{yard} = 0{,}9144 \text{ metra (tačno)},$$

$$\text{inch} = 25{,}4 \text{ milimetra (tačno)}.$$

Tri godine kasnije ove je odnose prihvatila i American Standards Association (ASA), a godine 1959. i standardizacijske ustanove država Commonwealtha (Sydney, Ottava, Lower Hult, Pretoria).

Na takvu industrijsku unifikaciju jedinica duljine natjerala je anglosaski svijet ekonomsko-industrijska nužda, jer je jedinstvena jedinica duljine jedan od preduvjeta ekonomične industrijske suradnje, podjele poslova i servisnog održavanja strojeva i uređaja na znatnom dijelu kugle zemaljske.

Iskustva s jedinstvenim industrijskim yardom bila su pozitivna. Stoga je on prerastao — najprije u USA godine 1959, a zatim godine 1963. u Engleskoj — u novi i jedini zakonski yard anglosaskog svijeta (vidi odlomak 11.1.2).

11.2.4. Iz povijesti američkog yarda. Zakon Sjedinjenih Američkih Država od 28. jula 1866. ozakonio je *metrički sistem jedinica*. U prilogu tog zakona (Section 205: Authorized Tables) navedeni su *zakonski* odnosi do tada uobičajenih američkih jedinica duljine prema metru. Od tada pa do godine 1959. vrijedio je zakonski odnos

$$\text{metar} = 39{,}37 \text{ US inch (tačno)}.$$

U skladu s ovim odnosom bila je prema takozvanom Mendenhall Order od godine 1893. relacija

$$\text{US yard} = \frac{3600}{3937} \text{ metara}.$$

Ovdje su oba broja tačna. U decimalnom obliku ovaj odnos je glasio US yard = = 0,914 401 829 metara. Ostale američke jedinice duljine izvode se odatle na temelju odnosa yd = 3 ft = 36 in, ft = 12 in itd.

Vidimo da je u USA, za razliku od Engleske, osnovom jedinice duljine uvijek bio *propisani odnos* između yarda i metra, a ne štapna pramjera duljine. Budući da je osnovom mjera i utega (isto vrijedi i za jedinicu mase, vidi odlomak 11.5) američkog zakonodavstva metrički sistem jedinica, a stvarno se upotrebljava skup jedinica yard, inch itd., nije čudno što je još godine 1937. tadašnji direktor National Bureau of Standards *L. J. Briggs* rekao: »... I tako imamo u našoj zemlji ovakvu

anomaliju: ozakonjeni metrički sistem mjera i utega, koji se ne upotrebljava, i starinski sistem mjera i utega koji formalno nikada nije bio legaliziran.«

I u USA su neko vrijeme postojala dva yarda. Uz netom opisani zakonski US yard postojao je onaj isti industrijski yard koji smo spomenuli pri kraju odlomka 11.2.3, a koji je danas jedini i isključivi zakonski yard čitavog anglosaskog svijeta.

11.2.5. Usporedba triju yarda. Razlaganja u prethodna tri odlomka možemo sažeti ovako: u USA je do godine 1959. bio ozakonjen US yard, koji je bio veći od današnjeg jedinstvenog yarda, a u Velikoj Britaniji do godine 1963. imperial yard, koji je bio manji od njega. Pri proučavanju stanovitih dokumentacijskih materijala iz doba prije unifikacije yarda može zatrebati poznavanje tih sitnih razlika. Stoga smo ih prikupili u tablici B-59.

Tablica **B-59**

Usporedba triju yarda

Vrsta yarda	Omjer yard/m	Relativna razlika
yard (jedinstveni; od godine 1963)	0,91440000	0
imperial yard (od 1898. do 1963)	0,91439921	$-0{,}86\cdot10^{-6}$
US yard (od 1893. do 1959)	0,914401829	$+2{,}0\cdot10^{-6}$

Pod relativnom razlikom u tablici razumijevamo vrijednost izraza imp. (ili US) yard/yard — 1, gdje u jednom slučaju u brojniku imamo imp. yard, a u drugom US yard. Tako npr. za stari zakonski US yard gornja formula daje relativnu razliku $(0{,}914401829 - 0{,}9144)/0{,}9144 = 2\cdot10^{-6}$.

11.2.6. Iz povijesti engleskog pounda. Znanstvena povijest osnovne engleske jedinice mase pound vjerojatno počinje godine 1758. s mjedenim utegom Troy Pound čija je masa odabrana za jedinicu, a ostale engleske jedinice mase izvodile su se preko relacije troy pound = 5760 grain (tačno) i drugih zakonom propisanih odnosa. Uteg Troy Pound bio je izrađen u obliku valjka sa zaobljenim vrhom — dugmetom. Ukupna visina pramjere iznosila je 2,576 incha, a promjer cilindričkog dijela i dugmeta 1,445 i 1,012 incha. Na temelju tog »original and genuine Standard Measure of Weight« definirana je zakonom Weights and Measures Act (1824) osnovna engleska jedinica mase Imperial Standard Pound. Pramjera engleskog pounda propala je u požaru Parlamenta godine 1834.

Godine 1844. odlivena je od platine nova pramjera mase Imperial Standard Avoirdupois Pound i prve četiri njegove kopije (Parliamentary Copies, PC; vidi odlomak 11.2.2). Visina tog platinskog valjka iznosi 1,35 incha, a promjer 1,15 incha. Prve četiri kopije pohranjene su u Royal Mintu, u Royal Society of London, u Royal Observatory u Greenwichu i u New Palace of Westminster (uzidano). Godine 1855. Imperial Standard Pound je ozakonjen.

Peta kopija izrađena je godine 1879, ali od platinsko-iridijeve slitine, a pohranjena je u Board of Trade; vodi se pod nazivom PC 5, a legalizirana je godine 1886. Zakon od godine 1878. nalaže da se sve kopije Imp. Pounda, izuzevši onu koja je uzidana (PC 4), moraju međusobno usporediti svakih 10 godina, a s pramjerom Imperial Standard Pound svakih 20 godina.

Engleskim zakonom Weights and Measures Act od godine 1878. jedinica imperial pound (kratica je bila imp. lb, što dolazi od »libre«) nije bila ozakonjena kao jedinica mase, već kao jedinica *težine*. Iako je propisivanjem vaganja u vakuumu zakon uzeo u obzir korekturu zbog uzgona, on nije definirao vrijednost ubrzanja zemljine teže na mjestu vaganja. Stoga se već dugo smatralo, unatoč drukčijem tekstu zakona, da je Imperial Standard Pound *pramjera mase*, a imperial pound (imp. lb) jedinica mase. Raskorak između zakonskog tumačenja i stvarnog shvaćanja uklonjen je tek novim zakonom godine 1963, prema kojem je pound jedinica *mase* (ali definirana bez prapounda; vidi odlomak 11.1.3).

Na temelju usporedbe mase prakilograma iz Sèvresa i mase Imperial Standard Pounda, obavljene godine 1883. u Međunarodnom uredu za mjere i utege, *ozakonjen* je godine 1898. ovaj odnos

$$\text{imperial pound} = 0{,}453\,592\,43 \text{ kilograma.}$$

Ovaj odnos bio je na snazi za trgovinu sve do godine 1963, premda su novije usporedbe dale (neznatno) drukčije rezultate. Istodobno su bili ozakonjeni i odnosi kilogram = 2,204 6223 imp. pounda, kilogram = 15 432,3564 imp. graina, jer je imp. pound = 7000 graina (tačno; o jedinici mase grain vidi odsječak 11.5).

Za *znanstvena* istraživanja, gdje je potrebna najveća dostiživa preciznost, engleski metrološki zavod National Physical Laboratory upotrebljavao je odnose kilogram = 2,204 622 777 imp. pounda, imp. pound = 0,453 592 338 kilograma, jer oni slijede iz usporedbenih mjerenja godine 1933. Relativna razlika između zakonskog i znanstvenog pounda iznosila je $2 \cdot 10^{-7}$.

Od godine 1963. sve je to historija, jer od tada je i zakonski na snazi pound = = 0,453 592 37 kilograma, koji je do tog vremena bio samo pound američke i britanske standardizacije.

11.2.7. Bivši američki pound (US pound avoirdupois). Posve analogno kao kod US yarda (vidi odlomak 11.2.4), američki pound je bio definiran ozakonjenim *odnosom* prema kilogramu. Osim toga, američki su zakoni pod poundom uvijek razumijevali jedinicu *mase*, a ne težine kao engleski. Američki pound bio je do godine 1959. definiran na temelju rezultata usporedbe engleskog Imperial Standard Pounda i prakilograma u Sèvresu, izvršene godine 1883. Dobiveni odnos ušao je iste godine u američko zakonodavstvo putem tzv. Mendenhall Ordera, a glasio je

$$\text{US pound} = 0{,}453\,592\,427\,7 \text{ kilograma.}$$

To je bio tzv. US avoirdupois pound, čija je puna kratica glasila lb avdp, a uobičajena jednostavno lb. Obrnuta relacija imala je oblik kilogram = 2,204 622 341 US pound.

Relativna razlika (usporedi odlomak 11.2.5) između bivšeg zakonskog imperial pounda i bivšeg zakonskog US pounda iznosila je $5 \cdot 10^{-9}$, bila je dakle posve beznačajna čak i u vrhunskoj metrologiji.

11.3. Angloameričke jedinice duljine i površine

11.3.1. Angloameričke jedinice duljine. Skup jedinica duljine koji se upotrebljava u anglosaskom svijetu nije decimalan. Pojedine jedinice definiraju druge jedinice pomoću *cjelobrojnih faktora*, i to je zapravo jedina zakonitost građenja angloameričkih jedinica. Tako je, na primjer, yard = 3 foot, foot = 12 inch, yard = 36 inch itd. Ove tri jedinice u našem jeziku znače: yard = korak, foot = = stopa, inch = palac.

Osnova angloameričkih jedinica duljine je »yard« koji je (vidi odlomak 11.1.2) definiran odnosom prema metru:

$$\text{yard (yd)} = 0{,}9144\ \text{m (tačno)}.$$

Pomoću ove relacije i pomoću tačno definiranih odnosa između yarda i ostalih angloameričkih jedinica može se izračunati vrijednost tih jedinica u metričkima. Tako je, na primjer,

$$\text{inch (in)} = \frac{\text{yd}}{36} = \frac{914{,}4\,\text{mm}}{36} = 25{,}4\,\text{mm (tačno)}.$$

Ova je jedinica vrlo važna u angloameričkim industrijama, jer su pomoću nje opisani mnogi industrijski standardi (tablica B-60).

Tablica **B-60**

Preračunavanje vrijednosti 0 do 10 incha u milimetre, u koracima 1/16 incha

inch	0	1/16″	1/8″	3/16″	1/4″	5/16″	3/8″	7/16″	1/2″
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0	0,00	1,59	3,18	4,76	6,35	7,94	9,53	11,11	12,70
1	25,40	26,99	28,58	30,16	31,75	33,34	34,93	36,51	38,10
2	50,80	52,39	53,98	55,56	57,15	58,74	60,33	61,91	63,50
3	76,20	77,79	79,38	80,96	82,55	84,14	85,73	87,31	88,90
4	101,60	103,19	104,78	106,36	107,95	109,54	111,13	112,71	114,30
5	127,00	128,59	130,18	131,76	133,35	134,94	136,53	138,11	139,70
6	152,40	153,99	155,58	157,16	158,75	160,34	161,93	163,51	165,10
7	177,80	179,39	180,98	182,56	184,15	185,74	187,33	188,91	190,50
8	203,20	204,79	206,38	207,96	209,55	211,14	212,73	214,31	215,90
9	228,60	230,19	231,78	233,36	234,95	236,54	238,13	239,71	241,30
10	254,00	255,59	257,18	258,76	260,35	261,94	263,53	265,11	266,70

inch	9/16″	5/8″	11/16″	3/4″	13/16″	7/8″	15/16″	1″
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0	14,29	15,88	17,46	19,05	20,64	22,23	23,81	25,40
1	39,69	41,28	42,86	44,45	46,04	47,63	49,21	50,80
2	65,09	66,68	68,26	69,85	71,44	73,03	74,61	76,20
3	90,49	92,08	93,66	95,25	96,84	98,43	100,01	101,60
4	115,89	117,48	119,06	120,65	122,24	123,83	125,41	127,00
5	141,29	142,88	144,46	146,05	147,64	149,23	150,81	152,40
6	166,69	168,28	169,86	171,45	173,04	174,63	176,21	177,80
7	192,09	193,68	195,26	196,85	198,44	200,03	201,61	203,20
8	217,49	219,08	220,66	222,25	223,84	225,43	227,01	228,60
9	242,89	244,48	246,06	247,65	249,24	250,83	252,41	254,00
10	268,29	269,88	271,46	273,05	274,64	276,23	277,81	279,40

Niz drugih angloameričkih jedinica duljine sadrži tablica B-61, iz koje se mogu razabrati i definicije pojedinih jedinica. Tako se, na primjer, iz tablice B-61 dobiva:

$$\text{chain} = 22\ \text{yd};\quad \text{rod (pole, perch)} = \frac{1}{4}\ \text{chain};\quad \text{furlong} = 220\ \text{yd, itd.}$$

Vrijednosti tih jedinica u metrima sadrže tablice **3** i **4** u prilogu knjige. Iz tablice **3** vidi se, na primjer, da je rod = 5,0292 m, mile = 1760 yd = 1609,344 m (ova jedinica ranije se u Americi nazivala »statute mile«). Tablicama B-61, **3** i **4** čitatelj može odgonetnuti većinu angloameričkih podataka o jedinicama duljine; ako navedene tablice nisu dovoljne, neka se posluži odnosima u naredna dva odlomka.

Tablica **B-61**

Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama duljine

Jedinica	Kratica	inch	foot	yard	rod	chain	furlong	mile
inch =	in	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{198}$	$\frac{1}{792}$	$\frac{1}{7920}$	$\frac{1}{63360}$
foot =	ft	12	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{660}$	$\frac{1}{5280}$
yard =	yd	36	3	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{220}$	$\frac{1}{1760}$
rod =	—	198	$\frac{33}{2}$	$\frac{11}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{320}$
chain =	—	792	66	22	4	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{80}$
furlong =	—	7920	660	220	40	10	1	$\frac{1}{8}$
mile =	—	63360	5280	1760	320	80	8	1

Tablica **B-62**

Dvostrani odnosi među pomorskim jedinicama duljine

Jedinica	foot	fathom	UK nautical mile	international nautical mile	metar
foot =	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6080}$	$1{,}64579 \cdot 10^{-4}$	0,3048
fathom =	6	1	$9{,}86842 \cdot 10^{-4}$	$9{,}87473 \cdot 10^{-4}$	1,8288
UK nautical mile =	6080	1013,33	1	1,00064	1853,18
international nautical mile =	6076,12	1012,69	0,999361	1	1852
metar =	3,28084	0,546807	$5{,}39612 \cdot 10^{-4}$	$5{,}39957 \cdot 10^{-4}$	1

11.3.2. Pomorske jedinice duljine. U pomorstvu angloamerički svijet uglavnom upotrebljava jedinice foot, fathom (= sežanj; za dubine) i UK nautical mile (= morska, nautička milja). Odnose među nabrojenim jedinicama sadrži tablica B-62. U njoj su navedene i veze do international nautical mile (= međunarodna morska milja) i metra. Vidimo da je engleska morska milja samo 0,64 promila veća od međunarodne.

Poučna je tablica **4** u prilogu knjige, iz koje se vidi da je angloamerička kopnena milja (mile) oko 13 % manja od morske.

11.3.3. Ostale angloameričke jedinice duljine. Uz jedinice koje smo naveli u prošlom odlomku, u anglosaskom svijetu, naročito u USA, upotrebljavaju se i ove jedinice duljine:

mil = 0,001 inch	hand = 1/9 yard
point (printer's) = 1/2592 yd	link = 22/100 yard
line (button) = 1/1440 yd	span = 9 inch

Postoje, međutim, dvije jedinice pod imenom »link«. To nam pokazuje naredni pregled u kojem su po abecedi skupljene još neke angloameričke jedinice duljine, koje nisu obuhvaćene zakonodavstvom, ali se ponekad upotrebljavaju:

barleycorn (Brit.) = $\frac{1}{3}$ inch	pace = 30 inch
bolt of cloth = 120 foot	palm = 3 inch
cable length = 240 yard	picas (printer's) = 12 point
cubit = 18 inch	point (paper stock) = 0,001 inch
ell = 45 inch	pole = perch = rod = 0,25 chain
link (Gunter's) = 0,22 yard	rope (Brit.) = 20 foot
link (Ramden's) = 1 foot	skein = 360 foot
nail (Brit.) = 2,25 inch	varas (California) = 33 inch

Vidimo da nazivi tih jedinica potječu iz svakodnevnog života. Tako je na primjer: barleycorn — ovseno zrno, nail — čavao, pace — korak, palm — dlan, pole — štap, rope — uže itd. U ovom pregledu oznaka Brit. stavljena je uz one jedinice koje se upotrebljavaju ili su se upotrebljavale u Engleskoj i njenim bivšim kolonijama. Američke jedinice su bez pobliže oznake.

11.3.4. Angloameričke jedinice površine izvode se jednako kao i metričke jedinice površine. Na primjer, square yard (kratice su yd^2, sq yd), tj. kvadratni yard, predstavljen je površinom kvadrata čije su stranice dugačke 1 yard. Budući da je yard = 0,9144 m (tačno), vrijednost osnovne i jedinstvene angloameričke jedinice površine izražene u kvadratnim metrima (m^2) iznosi:

$$\text{square yard} = yd^2 = yd \times yd = (0{,}9144\ \text{m})^2 = 0{,}836\,127\,36\ m^2.$$

Budući da je yard = 3 foot, to je očito square yard = $yd^2 = (3\ ft)^2 = 9\ ft^2 = 9$ square foot. Na takav način možemo izvesti odnose i među drugim angloameričkim jedinicama površine. Ti odnosi skupljeni su u tablicama B-63 i B-64. Iz njih se vidi da je na primjer:

$$\text{square foot} = ft^2 = 144 \text{ square inch} = 144\ in^2,$$

acre = 160 square rod, square mile = 640 acre, itd.

Tablica **B-63**

Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama površine

Jedinica		Kratica	in^2	ft^2	yd^2	sq rod
square inch	=	in^2	1	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{1296}$	$\frac{1}{39204}$
square foot	=	ft^2	144	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{1089}$
square yard	=	yd^2	1296	9	1	$\frac{4}{121}$
square rod	=	—	39204	$\frac{1089}{4}$	$\frac{121}{4}$	1

Tablica **B-64**

Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama površine

Jedinica		square rod	rood	acre	square mile
square rod	=	1	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{102400}$
rood	=	40	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2560}$
acre	=	160	4	1	$\frac{1}{640}$
square mile	=	102400	2560	640	1

Odnose svih tih jedinica prema metričkim jedinicama površine sadrže tablice **7**, **8** i **9** u prilogu knjige. Na primjer, iz tablice **7** se vidi da je acre oko 0,4 hektara, a iz tablice **8** da je kvadratna stopa (ft^2) = 9,2903 dm^2.

U tablici **9** možemo zapaziti dvije osebujne jedinice: prva je circular mil, tj. »kružni mil«. Ta jedinica jednaka je površini kruga *promjera* $d = 1$ mil = 0,001 inch. Budući da je izraz za površinu kruga $d^2\pi/4$, u ovom je slučaju

$$\text{circular mil} = \frac{\pi}{4}\text{mil}^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\text{inch}}{1000}\right)^2$$

$$\text{circular mil} = \frac{\pi}{4\,000\,000}\text{sq inch} = 5{,}067\,07 \cdot 10^{-4}\ \text{mm}^2.$$

Druga »kružna« jedinica površine je circular inch. Ona je definirana površinom kruga promjera 1 inch. Analognim računanjem kao za circular mil dobivamo

$$\text{circular inch} = \frac{\pi}{4}\text{inch}^2 = \frac{\pi}{4}\text{square inch},$$

što znači da je circular inch milijun puta veća jedinica od circular mil.

U vezi s tablicama napominjemo da su u njima navedene samo službene skraćenice jedinica, tj. one koje preciziraju odgovarajući zakoni ili standardi. U praksi se, međutim, upotrebljavaju i ove: circular mil = cml, circular inch = c in, square pole = sq po, acre = ac = A, square mile = sq ml, itd. Interesantno je možda spomenuti još i to da i Englezi upotrebljavaju neke tipične američke jedinice, iako nisu definirane engleskim zakonodavstvom. To je očito posljedica utjecaja pojačane trgovine, brze razmjene informacija i upotrebe američke stručne literature.

11.4. Angloameričke jedinice volumena

Evropljani najjače osjećaju nepriličnost šarenila angloameričkih jedinica i nedostatak sistematičnosti pri jedinicama volumena. Osobito je neugodna činjenica što neke od tih jedinica imaju *isti naziv* u Amerikanaca i Engleza, ali se u pogledu veličine one međusobno *bitno razlikuju*. Radi toga ćemo u narednim odlomcima iznijeti pregled odnosa među samim angloameričkim jedinicama volumena, njihove odnose prema metričkim jedinicama i razlike između istoimenih američkih (US) i engleskih (UK) jedinica.

Postoje četiri glavna niza angloameričkih jedinica volumena:

1. Kubne jedinice koje se grade na osnovu kocke čiji su bridovi jednaki jedinici duljine.

2. Engleske jedinice šupljih mjera koje se temelje na UK gallonu kao polaznoj jedinici; te jedinice služe u United Kingdomu za *sve primjene* (i u farmaciji).

3. Američke jedinice volumena koje se temelje na US gallonu, a upotrebljavaju se za mjerenje tekućina i u farmaciji.

4. Američke jedinice volumena koje se temelje na US bushelu, a upotrebljavaju se *samo za mjerenje suhih tvari*.

Ova četiri niza jedinica građena su po stanovitim sistemima, koje ćemo objasniti u narednim odlomcima. Preostale jedinice volumena za drvo, i druge, razmotrene su u odlomcima 11.4.5, 6, 7, 8.

11.4.1. Kubne jedinice volumena. Polazna jedinstvena angloamerička jedinica volumena je kubni yard, tj. volumen kocke čiji su bridovi dugački jedan yard. Pri tom je yard = 0,9144 m (tačno), kako je to definirano jednadžbom (11.1-1). Prema tome je (približno)

$$\text{cubic yard} = \text{yard}^3 = 0{,}76455486\ \text{m}^3.$$

Kratica za cubic yard je yd^3 ili cu yd.

Budući da je yard = 3 foot, to je očito cubic yard = 27 cubic foot, a cubic foot = 1728 cubic inch, jer je foot = 12 inch itd. Odnosi među ostalim jedinstvenim angloameričkim kubnim jedinicama volumena skupljeni su u tablicama **10** i **11** u prilogu knjige. U njima su navedeni i odnosi prema metričkim jedinicama volumena. Na primjer, iz tablice **11** možemo izvaditi podatak da je cubic foot = 28,3168 dm^3 itd.

11.4.2. Engleske jedinice volumena osnovane na UK gallonu. U odlomku 11.1.4 naveli smo definiciju engleskog UK gallona, a jednadžbom (11.1-3) utvrdili vezu te jedinice s metričkim jedinicama volumena:

$$\text{UK gallon} = 4{,}546087\ \text{dm}^3.$$

Pojedine jedinice izvode se na temelju UK gallona po propisanim pravilima koja sadrže tablice B-65 i B-66. Tako je, na primjer,

$$\text{UK quart} = \frac{1}{4}\ \text{UK gallon}, \quad \text{UK bushel} = 8\ \text{UK gallon}, \text{ itd.}$$

Tablica **B-65**
(vidi i tab. B-66)

Dvostrani odnosi među engleskim jedinicama volumena osnovanima na UK gallonu

Jedinica		UK minim	UK fluid scruple	UK fluid drachm	UK fluid ounce	UK gill	UK pint	UK gallon*
UK minim	=	1	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{2400}$	$\frac{1}{9600}$	$\frac{1}{76\,800}$
UK fluid scruple	=	20	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{3840}$
UK fluid drachm	=	60	3	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{1280}$
UK fluid ounce	=	480	24	8	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{160}$
UK gill	=	2400	120	40	5	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
UK pint	=	9600	480	160	20	4	1	$\frac{1}{8}$
UK gallon*	=	76800	3840	1280	160	32	8	1

* UK gallon = 4,546087 dm^3

Neke odnose između ovovrsnih engleskih i metričkih jedinica sadrže tablice **10**, **11** i **12** u prilogu knjige. Za ostale jedinice iz tablica B-65 i 66 navodimo odgovarajuće približne preračunske koeficijente:

UK fluid scruple = 1,183 88 cm^3, UK peck = 9,092 17 dm^3,

UK gill = 142,065 cm^3, UK quarter = 290,950 dm^3,

UK quart = 1,136 52 dm^3, UK chaldron = 1,309 27 m^3.

Ovih šest jedinica novi British Standard 350 ne preporučuje za javnu uporabu (ne navodi ih u svojim tekstovima).

U vezi s engleskim jedinicama minim, fluid scruple, fluid drachm i fluid ounce korisno je spomenuti da se one međusobno odnose isto onako kako se međusobno odnose jedinice mase apothecaries-systema (vidi odsječak 11.5). Konkretno to znači: minim : fluid scruple : fluid drachm : fluid ounce = grain : scruple : drachm : : apothecaries' ounce.

Tablica **B-66**

(vidi i tab. B-65)

Dvostrani odnosi među engleskim jedinicama volumena osnovanima na UK gallonu

Jedinica		UK quart	UK peck	UK bushel	UK quarter	UK chaldron	UK gallon*
UK quart	=	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1152}$	$\frac{1}{4}$
UK peck	=	8	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{144}$	2
UK bushel	=	32	4	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{36}$	8
UK quarter	=	256	32	8	1	$\frac{2}{9}$	64
UK chaldron	=	1152	144	36	$\frac{9}{2}$	1	288
UK gallon*	=	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{288}$	1

* UK gallon = 4,546087 dm^3

Tablica **B-67**

Dvostrani odnosi među američkim jedinicama volumena osnovanima na US gallonu

Jedinica		US minim	US fluid dram	US fluid ounce	US gill	US liquid pint	US liquid quart	US gallon*
US minim	=	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{1920}$	$\frac{1}{7680}$	$\frac{1}{15360}$	$\frac{1}{61440}$
US fluid dram	=	60	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1024}$
US fluid ounce	=	480	8	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{128}$
US gill	=	1920	32	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$
US liquid pint	=	7680	128	16	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
US liquid quart	=	15360	256	32	8	2	1	$\frac{1}{4}$
US gallon*	=	61440	1024	128	32	8	4	1

* US gallon = 231 in^3

11.4.3. Američke jedinice volumena osnovane na US gallonu. Jedinice ovog američkog sistema, koji se upotrebljava za *tekućine i farmaceutske proizvode*, definirane su cjelobrojnim višekratnicima ili dijelovima američkog US gallona. Taj gallon definiran je jednadžbom (11.1-4)

$$\text{US gallon} = 231 \text{ cubic inch (tačno)},$$

čemu približno odgovara US gallon = 3,78541 dm³.

Zakonitost građenja ovovrsnih američkih jedinica volumena sadrži tablica B-67. Interesantna je usporedba ove tablice s tablicom B-65, koja sadrži *istoimene* engleske jedinice. Razmotrimo jedan *primjer*: prema navedenim tablicama engleska i američka jedinica minim definirane su ovako

$$76\,800 \text{ UK minim} = \text{UK gallon},$$

$$61\,440 \text{ US minim} = \text{US gallon}.$$

Budući da je omjer US gallon/UK gallon = 0,832 675, to iz gornjih dviju jednadžbi proizlazi omjer američkog i engleskog minima

$$\frac{\text{US minim}}{\text{UK minim}} = 0{,}832\,675\,\frac{76\,800}{61\,440} = 1{,}040\,84,$$

tj. američki minim za 4% je veći od engleskog. Isto vrijedi i za fluid dram i fluid ounce (u Americi se piše dram, a u Engleskoj drachm). Drukčiji su ti odnosi za ostale jedinice osnovane na američkom i engleskom gallonu (vidi odlomak 11.4.5).

Odnose američkih jedinica volumena osnovanih na US gallonu prema metričkim jedinicama sadrže tablice **11** i **12** u prilogu knjige. Iz tih tablica npr. dobivamo US liquid pint = 0,473 176 dm³, US fluid ounce = 29,5735 cm³. Metrički ekvivalenti ostalih jedinica su (približno):

US minim = 61,612 mm³, US gill = 118,29 cm³,

US fluid dram = 3,696 71 cm³, US liquid quart = 0,946 36 dm³.

11.4.4. Američke jedinice volumena osnovane na US bushelu. U odlomku 11.1.5 naveli smo da je američki bushel definiran ovom jednadžbom

$$\text{US bushel} = 2150{,}42 \text{ cubic inch (tačno)},$$

odakle preračunavanjem dobivamo približan metrički ekvivalent US bushel = = 35,2391 dm³, tj. nešto više od 35 litara.

Pomoću pravila iz tablice B-68 izvode se ostale jedinice, npr. US peck = = 8 US dry quart = 16 US dry pint itd. Sve ove jedinice služe za mjerenje *suhih tvari* (dry znači engleski suh).

Metrički ekvivalenti ovih jedinica približno iznose:

US dry pint = 0,550 61 dm³, US peck = 8 809 76 dm³,

US dry quart = 1,101 22 dm³, US dry barrel = 115,627 dm³.

Za te jedinice upotrebljavaju se ove (neslužbene) kratice: dry pt, dry qt, p, bbl.

Tablica **B-68**

Dvostrani odnosi među američkim jedinicama za suhe tvari osnovanima na US bushelu

Jedinica		US dry pint	US dry quart	US peck	US bushel*
US dry pint	=	1	1/2	1/16	1/64
US dry quart	=	2	1	1/8	1/32
US peck	=	16	8	1	1/4
US bushel	=	64	32	4	1

Američka *zakonska* jedinica dry barrel (za voće, povrće i suhe živežne namirnice) definirana je ovako

dry barrel = 7056 cubic inch (tačno).

U Americi se dosta upotrebljava »petrolejski barrel«: 1 barrel (US) = = 9702 in^3 (tačno) = 158,987 dm^3 = 34,9723 gal (UK). U Engleskoj jedinica barrel *nije* legalizirana. Tome sigurno ima razloga, jer evo što se sve (ako je sve?) krije pod nazivom barrel (kratica: bbl):

brewers' barrel = 7161 US cubic inch

imp. barrel = 36 imp. gallon

cranberry barrel = 5826 US cubic inch

petroleum barrel = 42 US gallon

liquid barrel = 31,5 US liquid gallon

barrel of cement = 376 US pound of cement

Vidimo da se upotrebljava i takav barrel (za cement) koji nije jedinica volumena, već jedinica *mase*! (O još nekim osobitostima jedinice barrel vidi odlomak 11.1.1.)

Slično jedinici »barrel of cement« postoji i jedan *bushel*. Prema zaključku International Wheat Agreement 1949 pod nazivom

international corn bushel

razumijeva se količina žitarica mase 60 pounda.

11.4.5. Preračunavanje engleskih jedinica volumena na američke i obrnuto. Razmatranja u odlomcima 11.4.2,3 i tablice B-65...68 pokazali su nam da postojanje istoimenih ali različito velikih angloameričkih jedinica volumena može nedovoljno upućenima uzrokovati vrlo neugodne neprilike pa i financijske štete. Stoga ćemo u ovom odlomku izvesti odnose između pojedinih grupa engles-

kih i američkih jedinica volumena osnovanih na UK gallonu s jedne strane, a na US gallonu i US bushelu s druge strane. Tako dobivene odnose svrstat ćemo u odgovarajuće tablice prikladne za neposrednu upotrebu.

Tablica **B-69**

Pretvorba engleskih (UK) jedinica volumena u američke (US)

UK minim UK fluid drachm UK fluid ounce	= 0,960759	US minim US fluid dram US fluid ounce
UK gill UK pint UK quart UK gallon	= 1,20095	US gill US liquid pint US liquid quart US gallon
UK pint UK quart UK peck UK bushel	= 1,03206	US dry pint US dry quart US peck US bushel

Tablica **B-70**

Pretvorba američkih (US) jedinica volumena u engleske (UK)

US minim US fluid dram US fluid ounce	= 1,04084	UK minim UK fluid drachm UK fluid ounce
US gill US liquid pint US liquid quart US gallon	= 0,832675	UK gill UK pint UK quart UK gallon
US dry pint US dry quart US peck US bushel	= 0,968940	UK pint UK quart UK peck UK bushel

Izračunajmo razliku između engleske jedinice volumena UK gill i američke jedinice US gill. Prema tablici B-65 prva od ovih jedinica definirana je relacijom UK gill = UK gallon/32, a druga jednadžbom US gill = US gallon/32. Prema tome je omjer tih dviju jedinica UK gill/US gill = UK gallon/US gallon. Omjer ovih dvaju gallona možemo izračunati pomoću podataka u tablici **11** u prilogu knjige

$$\text{UK gallon} = 277{,}419\ \text{in}^3, \qquad \text{US gallon} = 231\ \text{in}^3,$$

$$\text{UK gallon/US gallon} = 277{,}419/231 = 1{,}20095.$$

Prema tome je traženi omjer UK gill/US gill = 1,20095. Taj omjer vrijedi i za jedinice pint, quart i gallon, što smo pregledno prikazali u tablici B-69. Recipročni odnos, tj. 1/1,20095 = 0,832675 sadrži tablica B-70.

Razmotrimo još jedan primjer: usporedimo englesku jedinicu UK quart s američkom jedinicom US dry quart (ova američka jedinica upotrebljava se samo za suhe tvari; vidi odlomak 11.4.4). Prema tablici B-66 je UK quart = UK gallon/4, a prema tablici B-68 US dry quart = US bushel/32. Prema tome je

$$\frac{\text{UK quart}}{\text{US dry quart}} = \frac{\text{UK gallon}/4}{\text{US bushel}/32} = 8\,\frac{\text{UK gallon}}{\text{US bushel}}.$$

U prethodnom primjeru imali smo UK gallon = 277,419 in³, a u odlomku 11.4.4 imamo zabilježenu definiciju US bushel = 2150,42 in³. Prema tome je

$$\frac{\text{UK quart}}{\text{US dry puart}} = \frac{8 \cdot 277{,}419}{2150{,}42} = 1{,}03206.$$

Taj odnos, kao i njegova recipročna vrijednost 1/1,03206 = 0,968940, vrijedi i za jedinice US dry pint, peck i bushel, što je pregledno prikazano u tablicama B-69 i 70.

11.4.6. Angloameričke pomorske jedinice volumena. U pomorskom transportu vrlo se često upotrebljavaju tri jedinice volumena građene na principu kubnih jedinica (vidi odlomak 11.4.1). To su višekratnici jedinice volumena cubic foot:

$$\text{register ton} = 100 \text{ cubic foot} = 2{,}83168 \text{ m}^3,$$

$$\text{UK shipping ton} = 42 \text{ cubic foot} = 1{,}1893 \text{ m}^3,$$

$$\text{US shipping ton} = 40 \text{ cubic foot} = 1{,}13267 \text{ m}^3.$$

Iz ovog pregleda vidimo da je engleska »brodska tona« 5% veća od američke. Napominjemo da je *metrička* »brodska tona« = 2,832 m³ (prema jugoslavenskom Zakonu o mjernim jedinicama od godine 1961).

11.4.7. Angloameričke jedinice za drvo. Za daske i ostalu piljenu robu u *Americi* se upotrebljavaju ove jedinice:

$$\text{board foot (b ft)} = \frac{1}{12} \text{ cubic foot} = 2{,}35973 \text{ dm}^3,$$

$$\text{mille board ft (M b ft)} = 1000 \text{ board foot} = 2{,}36 \text{ m}^3,$$

$$\text{cunit} = 100 \text{ cubic foot} = 2{,}83168 \text{ m}^3.$$

Pod jedinicom board foot razumijeva se volumen daske površine 1 square foot i debljine 1 inch. Za tu jedinicu upotrebljavaju se i ovi nazivi: board foot (b ft) = = foot board measure (FBM) = super foot = superficial foot (su ft).

Ova jedinica primjenjuje se i za pilanske trupce, a i za cijela debla. Pri tom se smjera na volumen dasaka koje se mogu dobiti preradom trupaca ili debla. (Podrobnosti o tome vidi u »Drvarskom priručniku«, Tehnička knjiga, Zagreb 1967.)

U *Engleskoj* se upotrebljavaju jedinice:

$$\text{hoppus foot (H ft)} = \frac{4}{\pi}\,\text{ft}^3 = 1{,}2732\ \text{ft}^3 = 36\ \text{dm}^3,$$

$$\text{load hoppus measure (load H/M)} = 50\ \text{H ft} = 1{,}803\ \text{m}^3,$$

$$\text{petrogradski standard} = 165\ \text{ft}^3 = 4{,}672\ \text{m}^3.$$

Jedinica hoppus foot naziva se i foot hoppus measure (FHM). Način primjene ovih jedinica objašnjen je u spomenutom priručniku.

Za volumen *složenog* (cijepanog) drva upotrebljavaju se ove angloameričke jedinice (u narednom pregledu prm je kratica jedinice »prostorni metar«; to je volumen drvenih cjepanica naslaganih u kocku čiji su bridovi dugački 1 metar):

$$\text{cord (short)} = 8\ \text{ft} \times 4\ \text{ft} \times 3\ \text{ft} = 96\ \text{ft}^3 = 2{,}71\ \text{prm},$$

$$\text{stack} = 12\ \text{ft} \times 3\ \text{ft} \times 3\ \text{ft} = 108\ \text{ft}^3 = 3{,}06\ \text{prm},$$

$$\text{cord (standard)} = 8\ \text{ft} \times 4\ \text{ft} \times 4\ \text{ft} = 128\ \text{ft}^3 = 3{,}62\ \text{prm},$$

$$\text{cord (long)} = 8\ \text{ft} \times 4\ \text{ft} \times 5\ \text{ft} = 160\ \text{ft}^3 = 4{,}52\ \text{prm},$$

$$\text{fathom} = 6\ \text{ft} \times 6\ \text{ft} \times 6\ \text{ft} = 216\ \text{ft}^3 = 6{,}12\ \text{prm}.$$

Osim toga u nekim južnim dijelovima USA upotrebljava se jedinica pen; to je 6 foot visok složaj cjepanica složenih u križ, i to tako da u svakom redu budu samo dvije cjepanice. U Indiji se upotrebljava 100 cubic foot stacked = 2,83 prm.

11.4.8. Ostale angloameričke jedinice volumena. Uz mnoštvo jedinica volumena koje smo spomenuli u prošlih šest odlomaka, u Americi, Engleskoj i njenim bivšim kolonijama postoji znatan broj starijih jedinica (neke su očito rimskog porijekla) volumena, čije će značenje možda zatrebati ponekom korisniku ove knjige.

Stoga smo abecednim redom nanizali 25 tih starijih jedinica, a njihovu vrijednost iskazali u odnosu na druge angloameričke jedinice volumena. Oznaka Brit. upućuje na jedinice koje se upotrebljavaju ili su se upotrebljavale u Britaniji i bivšim njenim kolonijama. Američkim jedinicama nismo dodali podrobnu oznaku.

bag (Brit.) = 24 UK gallon
bucket (Brit.) = 4 UK gallon
butt (Brit.) = 2 hogshead
chaldron = 36 US bushel
coomb (Brit.) = 32 UK gallon
cup = 8 US fluid ounce
firkin (Brit.) = 9 UK gallon
firkin = 9 US gallon
hogshead (Brit.) = 63 UK gallon
hogshead = 63 US gallon
kilderkin (Brit.) = 18 UK gallon
last (Brit.) = 640 UK gallon
noggin (Brit.) = 1 UK gill
perche (masonry) = 24,75 cu ft
pottle (Brit.) = 4 UK pint
puncheon (Brit.) = 70 UK gallon
quartern, dry (Brit.) = 0,5 UK gallon
quartern, liq. (Brit.) = 1 UK gill
rod, vol. (Brit.) = 1000 cubic foot
sack (Brit.) = 3 UK bushel
seam (Brit.) = 64 UK gallon
stricke (Brit.) = 2 UK bushel
tablespoonful = 4 US fluid dram
teaspoonful = $\frac{1}{3}$ tablespoonful
wey (Brit.) = 40 UK bushel

11.5. Angloameričke jedinice mase

U odlomku 11.1.3 naveli smo da je osnovna jedinica mase u jedinstvenom angloameričkom skupu jedinica pound (lb), a da je vrlo važna sedam tisuća puta manja jedinica grain (gr) = pound/7000. Vrijednosti tih jedinica mase izražene kilogramom iznose:

pound (lb) = 0,453 592 37 kg (tačno),

grain (gr) = 64,798 91 miligram (tačno).

Sa ove dvije jedinice izvode se sve ostale jedinice mase anglosaskog svijeta. Pri tom postoje tri skupa jedinica koji se nazivaju »sistemima«, a upotrebljavaju se za određene namjene:

za mjerenje mase dragulja i dragocjenih metala upotrebljava se tzv. *system troy*,

za mjerenje mase farmaceutskih proizvoda upotrebljava se tzv. *apothecaries-system*,

za mjerenje mase u svim drugim primjenama upotrebljava se tzv. *system avoirdupois*.

U naredna tri odlomka razmotrit ćemo način građenja svakog od nabrojenih skupova jedinica (»sistema«).

11.5.1. Jedinice mase za opću primjenu (system avoirdupois). Način građenja jedinica mase ovog skupa jedinica razabire se iz tablica B-71 i B-72. Iz njih se vidi da je, na primjer,

$$\text{dram} = \frac{1}{256}\ \text{pound}; \quad \text{US short ton} = 2000\ \text{lb}.$$

Vrijednosti tih i ostalih jedinica izražene metričkim jedinicama sadržane su u tablici B-73 i u tablicama **14**, **15** i **16** u prilogu knjige, npr.:

dram = 1,771 85 grama,

US short ton = 907,185 kilograma.

Tablica **B-71**
(vidi i tab. B-72)

Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama mase za opću primjenu (system avoirdupois)

Jedinica		Kratica	grain	dram	ounce	pound
grain	=	gr	1	$\frac{256}{7000}$	$\frac{16}{7000}$	$\frac{1}{7000}$
dram (UK) dram avdp (US)	= =	dr dr avdp	$\frac{7000}{256}$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{256}$
ounce (UK) ounce avdp (US)	= =	oz oz avdp	$\frac{7000}{16}$	16	1	$\frac{1}{16}$
pound	=	lb	7000	256	16	1

Iz tablica B-71 i B-72 vidi se da za istu jedinicu postoje u Amerikanaca i Engleza različiti nazivi. Tako npr. jedinicu mase 112 pound Amerikanci nazivaju long hundredweight, a Englezi samo hundredweight. Zbog toga smo u zagradama naveli odgovarajuće oznake (US ili UK). Podrobniju oznaku imaju i *američke* jedinice dram i ounce, tj. oznaku »avoirdupois«, koju smo u tablicama pisali u obliku uobičajene skraćenice avdp. Ta oznaka potrebna je zato da ne bi došlo do zbrke s američkim jedinicama »fluid dram« i fluid ounce«, koje su jedinice *volumena* (vidi odlomak 11.4.3).

Zanimljivo je spomenuti da je naziv ovog skupa jedinica mase (system avoirdupois) francuskog porijekla. U prvotnom, francuskom obliku, naziv je glasio »avoir bon poids«, tj. »posjedovati dobre utege«, a primjenom u engleskom jeziku s vremenom je nastala današnja nerazumljiva riječ avoirdupois.

Tablica **B-72**
(vidi i tab. B-71)

Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama mase za opću primjenu (system avoirdupois)

Jedinica	Kratica	stone (UK)	quarter (UK)	cental (UK) sh cwt (US)	cwt (UK) l cwt (US)	sh tn (US)	ton (UK) l tn (US)	pound
stone (UK) =	—	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{100}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{1000}$	$\frac{1}{160}$	14
quarter (UK) =	—	2	1	$\frac{28}{100}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{14}{1000}$	$\frac{1}{80}$	28
cental (UK) = short hundredweight (US) =	— sh cwt	$\frac{100}{14}$	$\frac{100}{28}$	1	$\frac{100}{112}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{10}{224}$	100
hundredweight (UK) = long hundredweight (US) =	cwt l cwt	8	4	$\frac{112}{100}$	1	$\frac{56}{1000}$	$\frac{1}{20}$	112
short ton (US) =	sh tn	$\frac{1000}{7}$	$\frac{1000}{14}$	20	$\frac{1000}{56}$	1	$\frac{1000}{1120}$	2000
ton (UK) = long ton (UK) =	ton l tn	160	80	$\frac{224}{10}$	20	$\frac{1120}{1000}$	1	2240
pound =	lb	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{112}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{2240}$	1

11.5.2. Jedinice mase za primjenu u farmaciji (apothecaries-system). Za izražavanje mase farmaceutskih proizvoda Amerikanci i Englezi upotrebljavaju poseban skup jedinica koji nazivaju »ljekarnički sistem«. Građenje jedinica možemo razabrati iz tablice B-74. Budući da je grain (gr) = pound (lb)/7000, to je u stvari scruple = 20 gr, drachm = 3 scruple = 60 gr itd., ali grain ne pripada ovom skupu jedinica.

Tablica **B-73**

Preračunavanje pounda u kilograme

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0,45359	0,90718	1,3608	1,8144	2,2680	2,7216	3,1751	3,6287	4,0823
10	4,5359	4,9895	5,4431	5,8967	6,3503	6,8039	7,2575	7,7111	8,1647	8,6183
20	9,0718	9,5254	9,9790	10,4326	10,8862	11,3398	11,7934	12,2470	12,7006	13,1542
30	13,6078	14,0614	14,5150	14,9685	15,4221	15,8757	16,3293	16,7829	17,2365	17,6901
40	18,1437	18,5973	19,0509	19,5045	19,9581	20,4117	20,8652	21,3188	21,7724	22,2260
50	22,6796	23,1332	23,5868	24,0404	24,4940	24,9476	25,4012	25,8548	26,3084	26,7619
60	27,2155	27,6691	28,1227	28,5763	29,0299	29,4835	29,9371	30,3907	30,8443	31,2979
70	31,7515	32,2051	32,6587	33,1122	33,5658	34,0194	34,4730	34,9266	35,3802	35,8338
80	36,2874	36,7410	37,1946	37,6482	38,1018	38,5554	39,0089	39,4625	39,9161	40,3697
90	40,8233	41,2769	41,7305	42,1841	42,6377	43,0913	43,5449	43,9985	44,4521	44,9056
100	45,3592	45,8128	46,2664	46,7200	47,1736	47,6272	48,0808	48,5344	48,9880	49,4416
110	49,8951	50,3488	50,8023	51,2559	51,7095	52,1631	52,6167	53,0703	53,5239	53,9775
120	54,4311	54,8847	55,3383	55,7919	56,2454	56,6990	57,1526	57,6062	58,0598	58,5134
130	58,9670	59,4206	59,8742	60,3278	60,7814	61,2350	61,6886	62,1422	62,5957	60,3493

Primjeri: 70 pound (lb) = 31,7515 kg, 74 lb = 33,5658 kg, 74,3 lb = 33,5658 kg + 0,1361 kg = 33,7019 kg.

Tablica **B-74**

Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama mase za primjenu u farmaciji (apothecaries-system)

Jedinica	Kratica	scruple	drachm (dram)	ounce (apoth)	pound (apoth)	pound
scruple (UK) =	—	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{20}{7000}$
apothecaries' scruple (US) =	s ap					
drachm (UK) =	—	3	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{60}{7000}$
apothecaries' dram (US) =	dr ap					
apothecaries' ounce (UK i US) =	oz ap	24	8	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{480}{7000}$
apothecaries' pound (samo US) =	lb ap	288	96	12	1	$\frac{5760}{7000}$
pound =	lb	$\frac{7000}{20}$	$\frac{7000}{60}$	$\frac{7000}{480}$	$\frac{7000}{5760}$	1

I ovdje se engleski i američki nazivi pojedinih jedinica razlikuju; svi američki imaju pridjev apothecaries. To je zbog toga da ne bi došlo do zamjene npr. sa fluid dram itd., a to je jedinica *volumena* (vidi odlomke 11.4.2,3). Postoji i dosta drukčijih mogućnosti zabune, naročito ako se ne posveti pažnja razlici između jedinica avoirdupois i apothecaries', što se Evropljaninu lako može dogoditi. Razmotrimo primjer jedinice mase ounce. U system avoirdupois to je

$$\text{ounce (oz)} = \frac{1}{16}\,\text{lb} = 28{,}3495 \text{ grama},$$

a u apothecaries-system

$$\text{apothecaries' ounce (oz ap)} = \frac{480}{7000}\,\text{lb} = 31{,}1035 \text{ grama}.$$

Razlika je oko deset posto! Da bi se spriječile zabune, u tablici **15** u prilogu knjige izričito smo naglasili da li je riječ o jedinicama avoirdupois ili apothecaries.

Primjer. Izračunajmo bez pomoći tablice **15** kolika je masa lijeka u gramima, ako na američkoj ljekarničkoj posudi piše da je neto-sadržaj 5 apothecaries' dram. Zadatak je, dakle, preračunavanje ove jedinice u grame. U tu svrhu najprije ćemo pomoću tablice B-74 naći odnos dram (apoth)/pound. U krajnjoj desnoj koloni nalazimo da je to 60/7000. Sada još pronađimo omjer lb/kg. U odlomku 11.1.3 imamo zabilježeno lb = 0,453 592 37 kg. S ovim podacima možemo izvršiti preračunavanje:

$$\text{dram (apoth)} = \frac{60}{7000}\,\text{lb} = \frac{60 \cdot 453{,}592\,37\ \text{g}}{7000} = 3{,}8879\ \text{g}.$$

U našem slučaju riječ je o pet puta većoj masi, pa je dakle odgovor $5 \cdot 3{,}8879\ \text{g} = 19{,}4395$ grama, dakle oko 20 grama.

11.5.3. Jedinice mase u draguljarstvu (system troy). Masu dragulja i dragocjenih metala Englezi i Amerikanci izražavaju istim jedinicama, ali je u Amerikanaca jedna jedinica više. To je

$$\text{troy pound} = \frac{5760}{7000}\ \text{pound},$$

odnosno troy pound (lb t) = 5760 grain (jedinica grain ne upotrebljava se u draguljarstvu). Stoga smo u tablici B-75, koja prikazuje kako su međusobno povezane angloameričke draguljarske jedinice mase, posebno naglasili da je riječ o lb t.

Usporedimo li tablice B-75 (troy) i B-71 (avoirdupois), vidimo da se jedinice oz t i oz po svojoj vrijednosti međusobno razlikuju

$$\text{troy ounce (oz t)} = \frac{480}{7000}\ \text{pound},$$

$$\text{ounce (oz)} = \frac{1}{16}\ \text{pound},$$

tj. troy ounce potpuno je jednaka apothecaries' ounce (oz ap). Stoga je razlika između nabrojenih dviju jedinica ista kao što je spomenuta pri kraju odlomka 11.5.2.

Tablica **B-75**

Dvostrani odnosi među angloameričkim jedinicama mase za mjerenje dragulja i dragocjenih metala (system troy)

Jedinica		Kratica	dwt	oz t	lb t (US)	lb
pennyweight	=	dwt	1	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{24}{7000}$
troy ounce	=	oz t	20	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{480}{7000}$
troy pound (US)	=	lb t	240	12	1	$\frac{5760}{7000}$
pound	=	lb	$\frac{7000}{24}$	$\frac{7000}{480}$	$\frac{7000}{5760}$	1

Primjer. Izračunajmo kolika je masa (u metričkim karatima) nekog dragulja za koji je javljeno da ima masu 10 dwt. Najprije utvrdimo što znače netom spomenute dvije jedinice mase; iz odlomka 3.3.3 znamo da je karat (metrički) = 200 mg = 0,2 g, a iz tablice B-75 da je dwt = pennyweight = 24/7000 pound. Izračunajmo najprije omjer

$$\frac{\text{dwt}}{\text{karat}} = \frac{24\ \text{lb}}{7000 \cdot 0{,}2\ \text{g}} = \frac{24 \cdot 453{,}592\,37\ \text{g}}{1400\ \text{g}} = 7{,}775\,868.$$

Prema tome masa dragulja iznosi 5 dwt = 5·7,776 karata = 38,88 karata.

11.5.4. Ostale angloameričke jedinice mase. Uz niz jedinica mase koje smo spomenuli u prošla tri odlomka, u Americi, Engleskoj i njenim bivšim kolonijama postoji znatan broj starijih jedinica mase, koje će možda zatrebati ponekom koris-

niku ove knjige. Stoga smo abecednim redom nanizali 15 takvih jedinica i njihov odnos prema jedinstvenoj jedinici pound = 0,453 592 37 kg.

bag of cement = 94 pound of cement
barrel of cement = 4 bag of cement
bushel, international corn = 60 pound
carat (1887) = 205,28 gram
clove = 128 ounce (avdp)
geepound = 1 slug
kip = 1000 pound
load (Brit.) = 252 pound
quarter, long (Brit.) = 28 pound
quarter, short (Brit.) = 25 pound
quarter, long (US) = 560 pound
quarter, short (US) = 500 pound
quintal, long = 112 pound
stone, cust. (Brit.) = 8 pound
wey (Brit.) = 1 load

Američki i engleski tehničari upotrebljavaju katkada i jedinicu mase

slug = 32,1740 pound = 14,5939 kg,

o čijem se porijeklu podrobno govori u odlomku 11.7.2.

11.6. Angloameričke jedinice ostalih veličina

U prošlih pet odsječaka razmotrili smo angloameričke jedinice ovih fizikalnih veličina: duljine, površine, volumena i mase. Budući da se na temelju njih angloameričke jedinice ostalih veličina izvode gotovo bez izuzetka po istom načelu kao i metričke jedinice, ovdje prestajemo sa separatnim objašnjavanjem ili navođenjem angloameričkih jedinica ostalih veličina. Smatramo, naime, korisnijim da se angloameričke jedinice gustoće, sile, tlaka itd. navode u onim odlomcima knjige gdje se

Tablica **B-76**

Pregled mjesta u ovoj knjizi gdje se razmatraju angloameričke jedinice nekih veličina

Veličina	Odlomak ili odsječak	Tablica u prilogu knjige	Veličina	Odlomak ili odsječak	Tablica u prilogu knjige
Gustoća	B.3.4.3	17, 18	Kinematička viskoznost	B.6.5.3	31
Areometarske skale	B.3.5.3	—	Industrijske viskozimetrijske skale	B.6.6	—
Protok	B.3.6.3	22, 23	Temperatura	D.3.4	—
Sila	B.4.2.6	24, 25	Toplina	D.5.4	32...35
Tlak	B.4.4	26...29	Specifična toplina	D.6.1	36
Energija	B.5.3	32...35	Toplinska snaga	D.6.1	37, 38
Snaga	B.5.6	37, 38	Gustoća snage	D.6.2	39
Dinamička viskoznost	B.6.4.5	30	Specifična toplinska vodljivost	D.6.2	—

obrađuju i metričke jedinice tih veličina. Na taj način, vjerujemo, čitatelj dobiva bolji pregled gotovo svih mogućih jedinica pojedinih veličina, jer su sve one koncentrirane na jednom mjestu.

Za one čitatelje koji žele sistematično proučiti do kraja angloamerički skup jedinica, opisana su u odsječku 11.7 dva angloamerička sistema jedinica mehanike. Priloženi pregled u tablici B-76 omogućuje da čitatelj brzo pronađe u kojem su odlomku ili odsječku ove knjige razmotrene one angloameričke jedinice koje nisu skupljene u odsječcima 11.1 do 11.5.

11.7. Angloamerički koherentni sistemi jedinica mehanike

11.7.1. Koherentni maseni sistem jedinica. Osnovom ovog sistema jedinica mehanike su angloameričke jedinice duljine, vremena i mase. Sistem je, dakle, osnovan jednako kao i SI ili CGS, ali s tom razlikom što su osnovne jedinice:

za duljinu: foot (ft) = 0,3048 m,
za vrijeme: second (s),
za masu: pound (lb) = 0,453 592 37 kg.

Naglašavamo da je za osnovnu jedinicu duljine odabran foot, a ne yard.

Tablica **B-77**

Jedinice koherentnog angloameričkog masenog sistema jedinica mehanike

Veličina		Jedinica koherentnog angloameričkog masenog sistema		Ekvivalent u SI
Naziv	Simbol	Naziv	Kratica	
Duljina	l	foot	ft	= 0,3048 m
Vrijeme	t	second	s	= 1 s
Masa	m	pound	lb	= 0,4536 kg
Sila	F	poundal = lb·ft/s²	pdl	= 0,138 255 N
Energija, rad	W	foot-poundal	ft·pdl	= 0,042 14 J
Snaga	P	foot-poundal per second	ft·pdl/s	= 0,042 14 W
Tlak	p	poundal per square foot	pdl/ft²	= 1,488 16 N/m²
Gustoća	ρ	pound per cubic foot	lb/ft³	= 16,0185 kg/m³
Specifična težina	γ	poundal per cubic foot	pdl/ft³	= 4,869 N/m³
Dinamička viskoznost	η	poundal second per square foot	pdl·s/ft²	= 1,488 16 Ns/m²
Kinematička viskoznost	ν	foot squared per second	ft²/s	= 0,092 903 m²/s

Izvedene jedinice ovog koherentnog sistema jedinica definiraju se kao i u metričkim sistemima. Tako, na primjer, jedinica sile ovog sistema slijedi iz *Newtonova* zakona: sila = masa × ubrzanje, tj. $F = ma = m\mathrm{d}^2l/\mathrm{d}t^2$, ako u nj uvrstimo pripadne osnovne jedinice

$$[m] = \mathrm{lb}, \quad [l] = \mathrm{ft}, \quad [t] = \mathrm{s}.$$

Na taj način dobivamo izvedene jedinice u tom sistemu:

$$[F] = [m]\frac{[l]}{[t]^2} = \text{pound (lb)}\,\frac{\text{foot (ft)}}{\text{second}^2}.$$

Ova jedinica sile zove se »poundal«, a kratica joj je pdl (vidi sl. B-17i). Budući da je pound = 0,453 592 37 kg, a foot = 0,3048 m, to je poundal u ovom odnosu prema jedinici sile SI newton (N) = kgm/s²:

$$\text{poundal (pdl)} = 1\,\mathrm{lb}\cdot\mathrm{ft/s^2} = 0{,}453\,592\,37\ \mathrm{kg}\cdot 0{,}3048\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\text{poundal (pdl)} = 0{,}138\,255\ \text{newton (N)}.$$

U skladu s pravilima građenja izvedenih jedinica koherentnog sistema (vidi odlomak 7.2.1), ostale se jedinice izvode na poznati način:

za energiju: foot × poundal,

za snagu: foot × poundal/second

i tako redom za sve ostale jedinice. U tablici B-77 navedene su neke izvedene jedinice kao i njihova vrijednost u jedinicama SI.

11.7.2. Angloamerički Tehnički sistem jedinica. Ovaj sistem jedinica angloamerički je analogon metričkog Tehničkog sistema (vidi odsječak 8.1), a osnovne su mu jedinice

za duljinu: foot (ft) = 0,3048 m,

za vrijeme: second (s),

za silu: pound-force (lbf) = 4,448 22 N.

Prema tome ovaj sistem jedinica razlikuje se od »masenog sistema« (odlomak 11.7.1) po tome što je za osnovnu jedinicu odabrana jedinica *sile*, a ne mase.

Jedinica sile »pound-force« (lbf) definirana je kao ona sila koja tijelu mase 1 pound (lb) daje normalno ubrzanje $g_0 = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$ (vidi sl. B.17j). Prema tome pound-force je angloamerički analogon kilopondu (vidi odlomak 8.1.2). Prema definiciji je dakle

$$\text{pound-force (lbf)} = \text{pound (lb)}\cdot g_0,$$

odakle se računanjem dobiva

$$1\,\mathrm{lbf} = 0{,}453\,592\,37\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2} = 4{,}448\,22\ \mathrm{N}.$$

Dok se u Engleskoj ova jedinica naziva pound-force, dakle »funta-sila«, u Americi je uobičajeniji naziv pound weight, dakle »funta-težina«.

Umjesto kratice lbf, koja je propisana u British Standard 350, u praksi se često upotrebljava Lb, tj. ista oznaka kao za jedinicu mase pound (lb), ali s velikim slovom L. Prema tome vrijedi

$$\text{pound-force} = \mathrm{lbf} = \mathrm{Lb}.$$

Tablica B-78

Jedinice koherentnog angloameričkog Tehničkog sistema jedinica mehanike

Veličina		Jedinica Tehničkog sistema		Ekvivalent u SI
Naziv	Simbol	Naziv	Kratica	
Duljina	l	foot	ft	= 0,3048 m
Vrijeme	t	second	s	= 1 s
Sila	F	pound-force	lbf (Lb)	= 4,448 22 N
Masa	m	slug	slug	= 14,5939 kg
Energija, rad	W	foot pound-force	ft lbf	= 1,355 82 J
Snaga	P	foot pound-force per second	ft lbf/s	= 1,355 82 W
Tlak	p	pound-force per square foot	lbf/ft^2	= 47,8803 N/m^2
Gustoća	ρ	slug per cubic foot	$slug/ft^3$	= 515,4 kg/m^3
Specifična težina	γ	pound-force per cubic foot	lbf/ft^3	= 157,087 N/m^3
Dinamička viskoznost	η	pound-force second per square foot	$lbf \cdot s/ft^2$	= 47,8803 Ns/m^2
Kinematička viskoznost	ν	foot squared per second	ft^2/s	= 0,092 903 m^2/s

Jedinica mase u ovom je sistemu *izvedena jedinica*. Budući da je riječ o koherentnom sistemu jedinica, to je jedinica mase

$$\text{slug} = \frac{\text{pound-force}}{\text{ft/s}^2} = \frac{\text{lbf}}{\text{ft/s}^2},$$

tj. masu 1 slug ima ono tijelo koje dobiva ubrzanje 1 ft/s^2 kad na nj djeluje sila 1 pound-force. Vezu ove jedinice mase sa kilogramom i poundom dobivamo pomoću relacija $lbf = g_0 \cdot lb$ ($g_0 = 9{,}806\,65\ m/s^2$) i ft = 0,3048 m, ako ih uvrstimo u gornji izraz

$$\text{slug} = \text{lb}\,\frac{9{,}806\,65\,\text{m/s}^2}{0{,}3048\,\text{m/s}^2} = 32{,}174\ \text{lb},$$

$$\text{slug} = 32{,}174 \cdot 0{,}453\,592\,37\ \text{kg} = 14{,}5939\ \text{kg}.$$

To znači da je jedinica slug nešto veća od jedinice quarter iz sistema avoirdupois (vidi tablicu B-72 i odlomak 11.5.1).

Ostale jedinice angloameričkog Tehničkog sistema jedinica izvode se u skladu s pravilom građenja koherentnih jedinica (vidi odlomak 7.2.1). Neke od njih svrstane su u tablici B-78, u kojoj su navedeni i odnosi prema odgovarajućim jedinicama sistema SI. Tako je, na primjer,

foot pound-force per second = 1,355 82 W,

slug per cubic foot = 515,4 kg/m^3, itd.

Glava **C**

Veličine i mjerne jedinice akustike

SADRŽAJ

1. Veličine i jedinice fizikalne akustike

1.1. Brzina zvuka, zvučni tlak i njihove jedinice 683
1. Brzina zvuka, 2. Zvučni tlak, 3. Jedinice brzine zvuka i zvučnog tlaka 685

1.2. Akustička snaga, jakost zvuka i njihove jedinice 686
1. Akustička snaga, 2. Jedinice akustičke snage, 3. Jakost zvuka, 4. Gustoća akustičke energije, 5. Jedinice jakosti zvuka i gustoće energije 688

1.3. Akustički otpori i elektroakustička analogija 689
1. Akustička impedancija i valni otpor, 2. Jedinice impedancija i valnog otpora, 3. Elektromagnetska analogija akustičkih pojava 692

1.4. Razina jakosti zvuka i njena jedinica decibel 694
1. Razina jakosti zvuka, 2. Jedinica decibel, 3. Razina zvučnog tlaka 696

1.5. Pregled nekih akustičkih veličina, njihovih jedinica i akustičke terminologije 697
1. Pregled akustičkih veličina i jedinica, 2. Terminološke teškoće u akustici 697

2. Fonometrijske veličine i jedinice

2.1. Objektivna i subjektivna visina tona 700
1. Frekventni interval i jedinica oktava, 2. Milioktava i cent, 3. Subjektivna visina tona (mel-skala) 701

2.2. Razina glasnoće zvuka i njena jedinica phon 703
1. Razina glasnoće zvuka, 2. Referentni zvučni tlak i normalni zvuk, 3. Mjerenje razine glasnoće, 4. Jedinica razine glasnoće phon, 5. Krivulje ISO jednake razine glasnoće, 6. Stari phon 707
2.3. Veličina glasnoća i njena jedinica son 708

3. Jedinice neper i decibel u električkim telekomunikacijama

3.1. Jedinica neper i njen odnos prema decibelu 710
1. Jedinica neper, 2. Odnos nepera prema decibelu 710
3.2. Apsolutna i relativna razina u telekomunikacijama 711
1. Apsolutna razina, 2. Relativna razina 713

1. Veličine i jedinice objektivne akustike

Manifestacije zvuka istražuju se i primjenjuju na dva glavna načina: *objektivna* (fizikalna) akustika razmatra zvuk u plinovima, tekućinama i krutim tvarima bez obzira na to kako zvukove osjeća čovjek. Stoga je objektivna akustika u stvari samo primjena mehanike na specijalne probleme koje donosi širenje, gušenje, reflektiranje, pojačavanje itd. zvuka. Specifičnost tih problema uzrokovala je da se u akustici primjenjuju posebne veličine ili barem posebni nazivi tih veličina. Pripadne jedinice, međutim, u biti su iste kao i u mehanici, ali se ponekad drukčije nazivaju, a primjenjuju dosta nesistematično. O takvim veličinama i njihovim jedinicama raspravljat će se u ovom prvom poglavlju.

Čovjek osjeća zvukove samo u onolikoj mjeri koliko to dopušta njegov slušni organ — uho. Taj ljudski instrument zapaža zvukove u relativno uskom rasponu frekvencija i zvučnih tlakova. Grana akustike koja se bavi *subjektivnim* doživljavanjem i mjerenjem zvukova zove se *fonometrija*. Ona je za svoje potrebe definirala nekoliko veličina (fonometrijske veličine), pripadnih jedinica i niz mjernih postupaka. O njima će biti govora u poglavlju 2 ove glave C.

Neke jedinice akustike naišle su na primjenu u električkim telekomunikacijama. Stoga moramo u pogledu jedinica barem letimično razmotriti i tu granu tehnike, pogotovo što je teško postaviti čvrstu granicu između akustike, elektroakustike i telekomunikacija, jer se kvaliteta telekomunikacijskih uređaja djelomično mora ocjenjivati na temelju fonometrijskih utisaka. Neke telekomunikacijske jedinice razmotrit ćemo u poglavlju 3.

1.1. Brzina zvuka, zvučni tlak i njihove jedinice

1.1.1. Brzina zvuka. Širenje zvuka u plinovima (i tekućinama) možemo razmotriti uz pomoć jednostavnog misaonog modela, koji vidimo shematski prikazan na slici C.1: vrlo dugačka cijev stalnog presjeka A napunjena je plinom i na jednom kraju zatvorena pomičnim stapom S. Ako se stap pomakne udesno, on će pomaknuti čestice plina koje ga dodiruju, one će pomaknuti udaljenije čestice itd., tj. u plinu će se duž cijevi širiti uzdužni val zgušćenja plina. Zadatak nam je da utvrdimo brzinu širenja tog zvučnog vala, tj. *brzinu zvuka* c.

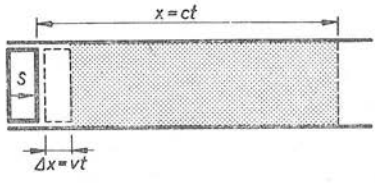
Za vrijeme t zvuk će proći udaljenost $x = ct$, tj. za vrijeme t u stanje valovanja doći će prostor $V = Ax = Act$. U isto vrijeme stap S pomaknut će se samo za $\Delta x = vt$, gdje je v brzina pomicanja stapa. U prostoru V nalazi se plin mase m; njegova je gustoća prije pomaka stapa udesno $\rho_0 = m/V$. Pomakom stapa udesno za mali

razmak $\Delta x = vt$ masa tog plina ostala je ista, ali je volumen prostora smanjen za $\Delta V = Avt$. To znači da se gustoća plina povećala na vrijednost

$$\rho = \frac{m}{V - \Delta V} = \frac{\rho_0 Act}{At(c-v)} = \rho_0 \frac{c}{c-v}.$$

Razlika gustoća u trenutku t i $t=0$ (početak micanja stapa) prema tome iznosi

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = \frac{\rho_0}{c/v - 1} = \rho_0 \frac{v}{c-v}. \quad (1.1\text{-}1)$$



Sl. C.1. Uz izvođenje brzine zvuka u plinu

Zbog promjene gustoće plina došlo je do promjene njegova tlaka; ako je prije pojave zvuka ($t=0$) tlak plina iznosio p_0, pomakom stapa S za Δx udesno (sl. C.1) on je porastao na p. Sila F kojom stap tlači na plin jednaka je umnošku njegove površine A i razlike tlaka $(p - p_0)$, dakle $F = A(p - p_0)$. Impuls te sile Ft jednak je promjeni količine gibanja mv, gdje je m masa plina koja je došla u stanje valovanja, tj. masa plina u volumenu $V = Act$. Prema tome je $Ft = (p - p_0)At = mv = \rho_0 Act$, odakle kraćenjem slijedi

$$\Delta p = p - p_0 = \rho_0 vc. \quad (1.1\text{-}2)$$

Iz jednadžbi (1.1-1,2) dobivamo eliminacijom brzine v stapa:

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0 \Delta p}{\rho_0 c^2 - \Delta p} = \frac{\Delta p}{c^2 - \Delta p/\rho_0}, \quad (1.1\text{-}3)$$

tj. vezu između promjene gustoće plina $\Delta\rho = \rho - \rho_0$, promjene tlaka $\Delta p = p - p_0$, brzine zvuka c i prvobitne gustoće plina ρ_0.

Zvuk se može proizvoditi harmonijskim titranjem stapa S iz slike C.1, tj. brzim uzastopnim kompresijama i ekspanzijama plina. Pri tom se u plinu razvija toplina, koja se zbog loše toplinske vodljivosti i velike brzine nastajanja ne dospijeva prenijeti na susjedna i sve udaljenija područja. Stoga se te toplinske pojave odigravaju *adijabatski*, a za njih vrijedi poznati *Boyle-Mariotte*ov zakon $p/\rho^\varkappa = p_0/\rho_0^\varkappa = \text{const}$, gdje je $\varkappa = c_p/c_v$, tj. omjer specifičnih toplina plina pri stalnom tlaku i pri stalnom volumenu. Deriviranjem tog izraza po gustoći ρ dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \varkappa p_0 \frac{\rho^{\varkappa-1}}{\rho_0^\varkappa}. \quad (1.1\text{-}4)$$

Smatramo li da $\Delta\rho$ i Δp iz jednadžbe (1.1-3) teže prema $\mathrm{d}\rho$ i $\mathrm{d}p$, uvrštenjem izraza (1.1-4) u (1.1-3) slijedi

$$\rho_0 c^2 - \mathrm{d}p = \varkappa\, p_0 (\rho/\rho_0)^{\varkappa-1}.$$

Ako je $\mathrm{d}p \to 0$, onda i ρ teži k ρ_0, pa ovaj izraz dobiva konačan oblik

$$c = \sqrt{\varkappa p_0/\rho_0} = \sqrt{\varkappa R T_0}. \quad (1.1\text{-}5)$$

Do desnog izraza za brzinu zvuka došli smo pomoću jednadžbe stanja za idealne plinove $p_0/\rho_0 = RT_0$ (vidi odlomak D.2.1.1). Ovdje veličine označene nulom upozoravaju da je riječ o stanju plina prije pojave zvuka.

Primjer. Budući da se jednadžba (1.1-5) savršeno podudara s eksperimentalnim podacima, ona se upotrebljava i za izračunavanje vrijednosti $\kappa = c_p/c_v$. Pri tom se brzina zvuka c saznaje iz poznate frekvencije stojnih valova (*Kundt*ove figure). Tako je u zraku temperature 18 °C i tlaka 1 atm = 1,01325 · 10^5 N/m² izmjerena gustoća 1,215 kg/m³ i brzina zvuka $c = 342$ m/s. S ovim podacima možemo iz lijeve jednadžbe (1.1-5) izračunati

$$\kappa = \frac{\rho_0 c^2}{p_0} = \frac{1{,}215 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(342 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1{,}01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2} = 1{,}41,$$

jer je N = newton = kgm/s² (vidi odlomak B.4.2.1).

1.1.2. Zvučni tlak. Stap S na slici C.1 možemo dovesti u harmoničko gibanje frekvencijom f. U tom je slučaju proizvedeni zvuk monokromatski ravni val koji možemo opisati jednadžbama

$$v = v_m \sin [2\pi f(t - x/c)], \tag{1.1-6}$$

$$p = p_m \sin [2\pi f(t - x/c)]. \tag{1.1-7}$$

U tim jednadžbama simboli predstavljaju ove veličine: x udaljenost promatranog mjesta od izvora zvuka (stapa), c brzinu zvuka, t vrijeme, v brzinu gibanja čestica plina i stapa, v_m amplitudu te brzine, p zvučni (akustički) tlak u plinu, p_m amplitudu tog tlaka. Veličine v i p su, dakle, periodičke funkcije *vremena* t i *udaljenosti* x.

U vezi sa zvučnim tlakom p iz jednadžbe (1.1-7), moramo naglasiti da je to zapravo Δp iz jednadžbe (1.1-2), dakle zvučni tlak koji je *superponiran* statičkom (atmosferskom) tlaku. Ako zvučni tlak iz jednadžbe (1.1-7) označimo sa $p(t)$, a statički tlak sa p_a, onda je ukupni tlak u plinu

$$p_u(t) = p_a + p(t).$$

Jednadžbe (1.1-6,7) pokazuju da između brzine čestica $v(t)$ i zvučnog tlaka $p(t)$ nema faznog pomaka. To vrijedi za ravan zvučni val, dok za druge vrste valova pomak postoji i ovisi o omjeru duljine vala zvuka i udaljenosti čela zvučnog vala od centra vala.

U akustici se primjenjuje spomenuti superponirani zvučni tlak $p(t)$, čiju smo vremensku i mjesnu ovisnost za monokromatski zvuk prikazali jednadžbom (1.1-7). Za takve zvukove upotrebljava se veličina *efektivni zvučni tlak* p_e koji je definiran relacijom

$$p_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t)\, dt,$$

gdje je $T = 1/f$ period (trajanje perioda) koji je s duljinom vala λ i brzinom zvuka c povezan relacijom $\lambda = cT$. Kad se u akustici govori o zvučnom tlaku, obično se pod tim razumijeva baš »efektivni zvučni tlak« p_e koji je u ovom odnosu prema maksimalnom zvučnom tlaku p_m

$$p_e = p_m/\sqrt{2} \approx 0{,}7071 \cdot p_m. \tag{1.1-8}$$

1.1.3. Jedinice brzine zvuka i zvučnog tlaka. O jedinicama tih veličina ne bi zapravo vrijedilo govoriti, jer to su jedinice brzine i tlaka koje vrlo dobro poznajemo iz odsječaka B.2.4 i B.4.3. No ipak ih moramo spomenuti, jer se na nekima od njih osnivaju jedinice drugih akustičkih veličina.

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) upotrebljavaju se jedinice

brzine .... m/s,

tlaka ..... N/m^2,

a u primjeni CGS (fizikalnog) sistema jedinica (vidi odsječak B.8.2) jedinice

brzine .... $cm/s = 10^{-2}$ m/s,

tlaka ..... $dyn/cm^2 = 0{,}1$ N/m^2.

U akustici se uglavnom ne upotrebljava naziv CGS jedinice tlaka dyn/cm^2, već mikrobar (μbar). Po veličini je to, međutim, ista jedinica:

$$\mu\text{bar} = 10^{-6}\,\text{bar} = 10^{-6}\cdot 10^{5}\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^{-1}\frac{10^{5}\,\text{dyn}}{10^{4}\,\text{cm}^2} = 1\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}.$$

Pri ovom izvodu upotrijebili smo relacije $N = 10^5$ dyn, $\text{bar} = 10^5$ N/m^2 i $m^2 = 10^4$ cm^2.

1.2. Akustička snaga, jakost zvuka i njihove jedinice

1.2.1. Akustička snaga. Naša razmatranja o veličinama i jedinicama zvuka nastavit ćemo s monokromatskim zvučnim valom frekvencije f koji nastaje kad stap S (sl. C.1) harmonijski titra u skladu s jednadžbom (1.1-6). Budući da je riječ o ravnom valu, u tom je slučaju zvučni tlak $p(t)$ određen jednadžbom (1.1-7). On je u fazi s brzinom $v(t)$ čestica plina (i stapa) koje titraju prema (1.1-6).

Akustička snaga P u zvukovodu na slici C.1 je ona koju česticama plina predaje stap S, a to je umnožak zvučnog tlaka $p(t)$ iz jednadžbe (1.1-7), presjeka A stapa i brzine $v(t)$ iz jednadžbe (1.1-6). Ovisnost snage zvuka o vremenu i mjestu prikazuje, dakle, jednadžba

$$P(t,x) = Fv = p(t,x)Av(t,x). \tag{1.2-1}$$

Ako u ovaj izraz uvrstimo jednadžbe (1.1-6,7), dobivamo

$$P(t,x) = \tfrac{1}{2}Ap_{\text{m}}v_{\text{m}}\sin^2[2\pi f(t-x/c)],$$

što trigonometrijskom transformacijom prelazi u oblik

$$P(t,x) = \tfrac{1}{2}Ap_{\text{m}}v_{\text{m}}[1-\cos 4\pi f(t-x/c)]. \tag{1.2-2}$$

Iz ove jednadžbe razabiremo da akustička snaga oscilira dvostrukom frekvencijom zvuka od nule do maksimalne vrijednosti $P_{\text{m}} = Ap_{\text{m}}v_{\text{m}}$. Ta snaga oscilira oko *efektivne akustičke snage* P_{e} koja je definirana konstantnim članom jednadžbe (1.2-2)

$$P_{\text{e}} = \tfrac{1}{2}Ap_{\text{m}}v_{\text{m}} = Ap_{\text{e}}v_{\text{e}}. \tag{1.2-3}$$

Do jednakosti $P_{\text{e}} = Ap_{\text{e}}v_{\text{e}}$ došli smo od lijeve jednadžbe (1.2-2) pomoću izraza (1.1-8), koji kaže da je kod sinusnih veličina amplituda $\sqrt{2}$ puta veća od efektivne vrijednosti.

Obično se brzina čestica plina v ne upotrebljava u akustičkim proračunima, već ostale poznate veličine: zvučni tlak, gustoća plina i brzina zvuka. To znači da v_e iz jednadžbe (1.2-3) valja nadomjestiti sa

$$v_e = \frac{p_e}{\rho c}, \tag{1.2-4}$$

koja proizlazi iz (1.1-2) ako umjesto tamošnjeg simbola za zvučni tlak Δp primijenimo ovdje upotrebljavanu oznaku za efektivni tlak p_e. Isto smo tako umjesto ρ_0 napisali ρ, jer ionako gustoću mjerimo prije prolaza zvuka, a osim toga razlika između njih je neznatna. Na taj način uz pomoć (1.2-4) od jednadžbe (1.2-3) nastaje

$$P_e = \tfrac{1}{2} A \frac{p_m^2}{\rho c} = A \frac{p_e^2}{\rho c}, \tag{1.2-5}$$

tj. efektivna akustička snaga proporcionalna je kvadratu efektivnog zvučnog tlaka, a obrnuto proporcionalna gustoći plina i brzini širenja zvuka koja je određena jednadžbom (1.1-5).

1.2.2. Jedinice akustičke snage. U Međunarodnom sistemu jedinica (SI) snaga se mjeri jedinicom watt = W (odsječak B.5.5). U nekadašnjem CGS sistemu jedinica upotrebljavala se jedinica snage erg/s (odsječak B.8.2); vrlo se često primjenjuje i jedinica mikrowatt = μW = 10^{-6} W. Uz nabrojene tri jedinice snage zvuka ostale se gotovo ne upotrebljavaju u akustici. Vrijede ovi odnosi

$$\text{erg/s} = 10^{-7}\ \text{W}, \quad \mu\text{W} = 10^{-6}\ \text{W}, \quad \text{erg/s} = 0{,}1\ \mu\text{W}$$

$$\text{W} = 10^{7}\ \text{erg/s}, \quad \text{W} = 10^{6}\ \mu\text{W}, \quad \mu\text{W} = 10\ \text{erg/s}.$$

1.2.3. Jakost zvuka je u stvari plošna gustoća akustičke snage, a definirana je relacijom

$$I(t,x) = \frac{\mathrm{d}P(t,x)}{\mathrm{d}A} = \tfrac{1}{2} p_m v_m [1 - \cos 4\pi f(t - x/c)]. \tag{1.2-6}$$

Ovdje smo prije derivacije po površini A, okomitoj na smjer širenja zvuka, namjesto $P(t, x)$ uvrstili jednadžbu (1.2-2). U akustici se redovito primjenjuje *efektivna jakost zvuka* I_e, a to je konstantni član iz jednadžbe (1.2-6)

$$I_e = \tfrac{1}{2} p_m v_m = p_e v_e = \frac{p_e^2}{\rho c} = \frac{c p_e}{\kappa} = \frac{P_e}{A}. \tag{1.2-7}$$

Primjer. Površina slušnog kanala čovjeka iznosi oko 60 mm². Kolika je najmanja akustička snaga, ako uho još reagira na jakost zvuka oko $I = 10^{-12}$ W/m²? Odgovor nam daje kratak račun

$$P = A I = 60 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2 \cdot 10^{-12}\ \text{W/m}^2 = 60 \cdot 10^{-18}\ \text{W} = 60\ \text{aW},$$

gdje je a = atto = 10^{-18} (vidi odsječak A.2.4 i tablicu A-1).

1.2.4. Gustoća akustičke energije, odnosno preciznije »prostorna gustoća akustičke energije« definirana je jednadžbom $w = W/V$, gdje je W akustička energija u prostoru V. Tu energiju izračunat ćemo integriranjem akustičke snage $P(t, x)$ iz jednadžbe (1.2-2) u vremenskom intervalu $t = 0$ do $t = T$, gdje je $T = 1/f$ period zvuka recipročan frekvenciji f. To možemo sasvim slobodno učiniti, ako pri tom pod

volumenom razumijevamo $V = A\,c\,t = A\,c\,T$ (vidi sliku C.1 i odlomak 1.1.1). Na taj način uz $x = 0$ dobivamo

$$w = \frac{W}{V} = \frac{p_m v_m}{2cT} \int_0^T (1 - \cos 4\pi f t)\,dt = \tfrac{1}{2} \frac{p_m v_m}{c}.$$

U ovisnosti o efektivnim veličinama prostornu gustoću akustičke energije možemo prikazati ovako

$$w = \frac{p_e v_e}{c} = \frac{p_e^2}{\rho c^2}. \tag{1.2-8}$$

Usporedimo li jednadžbu (1.2-7) sa (1.2-8), dobivamo vezu između jakosti zvuka I_e i gustoće akustičke energije w:

$$w = I_e/c \quad \text{ili} \quad I_e = cw. \tag{1.2-9}$$

Primjer. Kolika je prostorna gustoća energije zvuka minimalne jakosti koji smo imali u prethodnom primjeru (odlomak 1.2.3)? Pretpostavimo da je brzina zvuka $c = 340$ m/s. U tom slučaju pomoću jednadžbe (1.2-9) dobivamo

$$w = \frac{I}{c} = \frac{10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}}{340\,\mathrm{m/s}} = 2{,}94 \cdot 10^{-15}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}} = 2{,}94\,\frac{\mathrm{fJ}}{\mathrm{m^3}}.$$

Ovdje je fJ = femtojoule = 10^{-15} J (vidi odsječak A.2.4 i tablicu A-1).

1.2.5. Jedinice jakosti zvuka i gustoće energije. Prilikom primjene Međunarodnog sistema jedinica (SI) jakost zvuka I mjeri se jedinicom koja proizlazi iz definicije veličine I, tj. iz jednadžbe (1.2-6). Budući da je jakost zvuka omjer snage i površine, to je jedinica jakosti zvuka SI

$$[I]_M = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} = \text{watt po kvadratnom metru.}$$

Ovdje $[I]_M$ označuje jedinicu SI veličine I u skladu s izvođenjima u glavama A i B ove knjige (vidi na primjer odlomak B.7.2.1 i odsječak A.5.1).

Dok se još upotrebljavao sistem jedinica CGS (vidi odsječak B.8.2), jakost zvuka I mjerila se jedinicom

$$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s\,cm^2}} = \frac{10^{-7}\,\mathrm{J}}{10^{-4}\,\mathrm{m^2\,s}} = 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} = 1\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m^2}}.$$

U akustici se često upotrebljava jedinica jakosti zvuka

$$\frac{\mu\mathrm{W}}{\mathrm{cm^2}} = \frac{10^{-6}\,\mathrm{W}}{10^{-4}\,\mathrm{m^2}} = 10^{-2}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}.$$

Dvostrane odnose među ovim jedinicama jakosti zvuka sadrži tablica C-1.

Jedinica Međunarodnog sistema (SI) veličine »prostorna gustoća zvučne energije« $w = W/V$ je

$$[w]_M = \frac{[W]_M}{[V]_M} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}} = \frac{\text{joule}}{\text{kubni metar}}.$$

Tablica C-1

Dvostrani odnosi među nekim jedinicama jakosti zvuka

Jedinica		$\frac{W}{m^2}$	$\frac{mW}{m^2}$	$\frac{\mu W}{cm^2}$	$\frac{erg}{s\,cm^2}$
$\frac{W}{m^2}$	=	1	10^3	10^2	10^3
$\frac{mW}{m^2}$	=	10^{-3}	1	0,1	1
$\frac{\mu W}{cm^2}$	=	10^{-2}	10	1	10
$\frac{erg}{s\,cm^2}$	=	10^{-3}	1	0,1	1

U starijim djelima s područja akustike nalazimo i jedinicu CGS sistema

$$\frac{erg}{cm^3} = \frac{10^{-7}\,J}{10^{-6}\,m^3} = 0{,}1\,\frac{J}{m^3}\,.$$

Obrnuti odnos ovih dviju jedinica je

$$J/m^3 = 10\ erg/cm^3.$$

1.3. Akustički otpori i elektroakustička analogija

1.3.1. Akustička impedancija i valni otpor. Ako je riječ o periodičkim zvučnim pojavama, u akustici se upotrebljavaju slične veličine kao i u elektrotehnici (izmjenične struje). Tako se, uostalom, postupa i u mehanici: znamo da se *mehaničkom impedancijom* Z_m (ili w) naziva omjer veličina

$$Z_m = \frac{F}{v}\,.$$

Ovdje je F periodička sila koja djeluje na neko tijelo i time ga dovodi u periodičko gibanje brzinom v. Za jedinicu mehaničke impedancije Z_m svojevremeno su u okviru sistema jedinica CGS odabrali naziv

$$[Z_m]_{CGS} = \text{»mehanički ohm«} = \frac{dyn}{cm/s}\left(= 10^{-3}\,\frac{Ns}{m}\right)!$$

Slično je definirana veličina *akustička impedancija*

$$Z = \frac{p}{U} = \frac{p}{vA}\,, \tag{1.3-1}$$

gdje je p zvučni tlak, v brzina čestica, A površina. Veličina U naziva se *akustički protok* (o terminologiji vidi odlomak 1.5.2), a definirana je relacijom $U = vA$. Mjesto simbola U upotrebljava se i q.

Specifična akustička impedancija naziva se omjer akustičke impedancije Z i površine A, tj.

$$z = \frac{Z}{A} = \frac{p}{v}, \tag{1.3-2}$$

što smo dobili podjelom jednadžbe (1.3-1) sa površinom A.

Valni otpor zvukovoda ili »karakteristična akustička impedancija« zvukovoda je umnožak gustoće tvari ρ, kroz koju se zvuk širi, i brzine c zvuka

$$Z_c = \rho c. \tag{1.3-3}$$

Između nabrojene tri veličine Z, z, Z_c možemo pomoću jednadžbi (1.3-1,2,3) uspostaviti ove međusobne odnose

$$Z = zA = \frac{Z_c}{A}; \quad z = \frac{Z}{A} = \frac{Z_c}{A^2}; \quad Z_c = zA^2 = ZA. \tag{1.3-4}$$

Pri tom smo upotrijebili i jednadžbu (1.2-4), tj. $p = \rho v c$ (indekse za efektivne vrijednosti smo napustili, jer je riječ o omjerima veličina, pa ne može doći do pogreške ako i ne držimo na umu da se radi o efektivnim vrijednostima).

Primjer 1. Izračunajmo koliki je valni otpor zraka čiji su podaci navedeni u primjeru iz odlomka 1.1.1. U tom je primjeru navedeno da je pri temperaturi 18 °C i tlaku 1 atm gustoća zraka 1,215 kg/m³, a brzina zvuka 342 m/s. Pomoću jednadžbe (1.3-3) dobivamo vrijednost valnog otpora

$$Z_c = \rho c = 1{,}215 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \, 342 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 415 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3},$$

jer je $\text{kgm/s}^2 = \text{N} = \text{newton}$ (vidi odlomak B.4.2.1).

Primjer 2. U odlomku 1.2.3 (primjer) naveli smo da je presjek slušnog kanala čovjeka oko 60 mm². Izračunajmo kolika je akustička impedancija slušnog kanala! Budući da je u uhu zrak, možemo uz malu pogrešku uzeti da je valni otpor zraka u uhu isti kakav smo izračunali u prethodnom primjeru, $Z_c = 415\ \text{Ns/m}^3$. Površina iznosi $A = 60\ \text{mm}^2 = 6 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2$, pa iz lijeve jednadžbe (1.3-4) dobivamo

$$Z = \frac{Z_c}{A} = \frac{415\ \text{Ns/m}^3}{6 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2} = 6{,}9 \cdot 10^6 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^5} = 6{,}9 \frac{\text{MNs}}{\text{m}^5}.$$

Ovdje je M = mega = 10^6 (vidi odsječak A.2.4 i tablicu A-1).

1.3.2. Jedinice impedancija i valnog otpora. Veličine koje smo spomenuli u prošlom odlomku 1.3.1 gotovo se isključivo izražavaju ili jedinicama Međunarodnog sistema (SI) ili jedinicama CGS sistema jedinica (o potonjem vidi odsječak B.8.2). Stoga ćemo ovdje razmotriti samo odnose jedinica ovih dvaju sistema. Pomoću njih, te pomoću tablica i tekstova u glavi B knjige, čitatelj će lako sam izračunati veze s jedinicama drugih sistema (npr. Tehničkog ili angloameričkog), ako na njih naiđe u literaturi o akustici.

Veličina *valni otpor* Z_c definirana je jednadžbom (1.3-3), tj. umnoškom gustoće ρ i brzine zvuka c. Budući da je u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) jedinica gustoće $[\rho]_M = \text{kg/m}^3$ (vidi odsječak B.3.4), a jedinica brzine $[c]_M = \text{m/s}$, koherentna jedinica valnog otpora SI je

$$[Z_c]_M = [\rho]_M [c]_M = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N/m}^2}{\text{m/s}}.$$

Do krajnjeg rezultata došli smo na temelju definicije jedinice sile SI N = newton = = kgm/s².

Posve analogno izvodi se jedinica veličine valni otpor CGS sistema. Za jedinicu gustoće odabran je g/cm³ (vidi tablicu B-54), a za jedinicu brzine cm/s. S ove dvije jedinice dobivamo CGS jedinicu valnog otpora

$$[Z_c]_{CGS} = \frac{g}{cm^3}\,\frac{cm}{s} = \frac{g}{s\,cm^2} = \frac{dyn\cdot s}{cm^3} = \frac{\mu bar}{cm/s}.$$

Krajnji rezultat dobili smo iz relacije dyn = g cm/s² (vidi odsječak B.8.1 i sliku B.17d) i μbar = $10^{-6}\cdot 10^5$ N/m² = 10^{-1} N/m² = $10^{-1}\cdot 10^5$ dyn/(10^4 cm²) = dyn/cm². Izvedena CGS jedinica valnog otpora zove se rayl (po *Rayleigh*u; »Rayleighova pločica«):

$$[Z_c]_{CGS} = \frac{dyn\cdot s}{cm^3} = \frac{g}{s\,cm^2} = \text{rayl}.$$

Međusobne odnose jedinice SI i jedinice CGS valnog otpora lako je izračunati kad se zna da je dyn = 10^{-5} N i cm = 10^{-2} m:

$$\frac{[Z_c]_M}{[Z_c]_{CGS}} = \frac{Ns/m^3}{dyn\,s/cm^3} = \frac{N}{dyn}\,\frac{cm^3}{m^3} = 10^5\cdot 10^{-6} = 0{,}1.$$

Veličina *akustička impedancija* može se smatrati definiranom lijevom jednadžbom (1.3-4), tj. $Z = Z_c/A$, gdje je A površina. Budući da je u SI jedinica površine kvadratni metar = m², to lako izračunamo da je jedinica akustičke impedancije SI

$$[Z]_M = \frac{[Z_c]_M}{[A]_M} = \frac{Ns/m^3}{m^2} = \frac{Ns}{m^5}.$$

Analognim postupkom dobivamo CGS jedinicu akustičke impedancije

$$[Z]_{CGS} = \frac{[Z_c]_{CGS}}{[A]_{CGS}} = \frac{dyn\,s/cm^3}{cm^2} = \frac{dyn\,s}{cm^5} = \frac{\mu bar}{cm^3/s}.$$

Tu jedinicu akustičke impedancije neki su autori nazvali »akustički ohm«, dakle

$$dyn\,s/cm^5 = \frac{\mu bar}{cm^3/s} = \text{akustički ohm}.$$

Omjer izvedenih dviju jedinica akustičke impedancije iznosi

$$\frac{[Z]_M}{[Z]_{CGS}} = \frac{Ns/m^5}{dyn\,s/cm^5} = \frac{N}{dyn}\,\frac{cm^5}{m^5} = 10^5\cdot 10^{-10} = 10^{-5},$$

tj. CGS jedinica akustičke impedancije je 100000 puta *veća* od jedinice SI Ns/m⁵.

Pomoću srednje jednadžbe (1.3-4) možemo izračunati SI i CGS jedinice *specifične akustičke impedancije* $z = Z/A$

$$[z]_M = \frac{Ns/m^5}{m^2} = \frac{Ns}{m^7};\quad [z]_{CGS} = \frac{dyn\,s/cm^5}{cm^2} = \frac{dyn\,s}{cm^7}.$$

Omjer ovih dviju jedinica iznosi

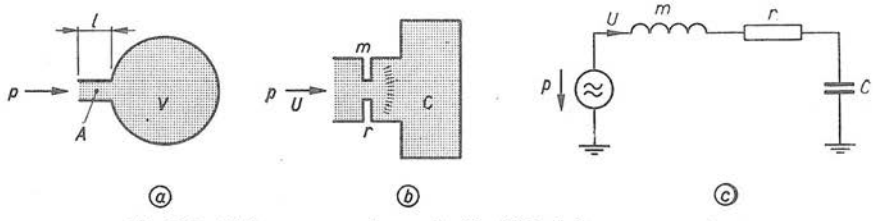
$$\frac{[z]_{\mathrm{M}}}{[z]_{\mathrm{CGS}}} = \frac{\mathrm{Ns/m^7}}{\mathrm{dyn\,s/cm^7}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{dyn}}\,\frac{\mathrm{cm^7}}{\mathrm{m^7}} = 10^5 \cdot 10^{-14} = 10^{-9}.$$

Ovdje smo, dakako, pri računanju držali na umu da je $\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$ te da je $\mathrm{cm^7} = (\mathrm{cm})^7 = (10^{-2}\,\mathrm{m})^7 = 10^{-14}\,\mathrm{m^7}$. Gornji nam je račun pokazao da je CGS jedinica specifične akustičke impedancije milijardu (10^9) puta *veća* od jedinice SI $\mathrm{Ns/m^7}$.

1.3.3. Elektromagnetska analogija akustičkih pojava. Kao što se mehaničke pojave modeliraju električkim strujnim krugovima (npr. induktivitet modelira masu, kapacitet elastičnost, električki otpor mehanički otpor F/v itd.), tako se i akustičke pojave mogu modelirati električkim strujnim krugovima. Na taj način mogu se mnogo brže riješiti mnogi komplicirani akustički zadaci. *Analogija* akustičkih i električkih pojava već se odrazila u prošlim odlomcima 1.3.1,2, gdje smo imali veličine »akustička impedancija«, »valni otpor« i njihove jedinice. »Akustički ohm« $=$ dyn s/cm³ iz odlomka 1.3.2 posve je očit odraz elektromagnetske analogije akustičkih pojava. Stoga valja barem letimično opisati tu analogiju, pogotovo jer ona u akustiku uvodi neke veličine koje inače ne bi bile potrebne.

Princip analogije prikazuje tablica C-2: lijevo od sredine su akustičke veličine, a desno analogne elektromagnetske veličine. Iz oblika jednadžbi za akustički otpor, masu (induktivitet) i kapacitet vidimo da je primijenjen simbolički (*Gauss*ov) račun u kojem je $\omega = 2\pi f$ kružna frekvencija, a $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Očito je, dakle, da analogija vrijedi za monokromatske zvukove.

Primjer elektromagnetske analogije akustičkog sistema vidimo na slici C.2. Sličica a) shematski prikazuje *Helmholtz*ov rezonator, b) strukturu akustičkog sis-



Sl. C.2. Elektromagnetska analogija Helmholtzova rezonatora

tema izraženu veličinama iz tablice C-2, a sličica c) analogni električki strujni krug u koji su unesene akustičke oznake za visokofrekventni izvor, struju, induktivitet otpor i kapacitet. Riječ je, dakle, o tipičnom serijskom strujnom krugu.

Akustički kapacitet C i akustička masa m (akustički induktivitet) mogu se izračunati pomoću jednadžbi

$$C = \frac{V}{\rho c^2}, \quad m = \rho \frac{l}{A},$$

gdje je V volumen rezonatora, A presjek otvora, l duljina otvora, ρ gustoća plina, c brzina širenja zvuka. Navedene jednadžbe, samo na drukčiji način, prikazuju C i m iz tablice C-2. Akustički otpor r načelno se za okruglu cijev promjera D i duljine l računa pomoću izraza

$$r = \frac{128}{\pi}\,\frac{\eta l}{D^4},$$

Tablica **C-2**

Elektromagnetska analogija akustičkih veličina

Akustičke veličine				Elektromagnetske veličine			
Veličina	Oznaka	Jednadžba	Jedinica	Jedinica	Jednadžba	Oznaka	Veličina
zvučni (akustički) tlak	p	$p=\frac{F}{A}$	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	V	—	u	električki napon
akustički protok	U	$U=vA$	$\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$	A	—	i	električna struja
akustički otpor	r	$r=\frac{p}{U}$	$\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^5}$	Ω	$R=\frac{u}{i}$	R	električki otpor
akustička masa (akustički induktivitet)	m	$m=\frac{p}{\mathrm{j}\,\omega U}$	$\frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}^5}$	H	$L=\frac{u}{\mathrm{j}\,\omega i}$	L	induktivitet
akustički kapacitet	C	$C=\frac{U}{\mathrm{j}\,\omega p}$	$\frac{\mathrm{m}^5}{\mathrm{N}}$	F	$C=\frac{i}{\mathrm{j}\,\omega u}$	C	kapacitet
akustička impedancija	Z	$Z=\frac{p}{U}$	$\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^5}$	Ω	$Z=\frac{u}{i}$	Z	impedancija
vrijeme	t	—	s	s	—	t	vrijeme
akustička snaga	P	$P=p_\mathrm{e}U_\mathrm{e}\cos\varphi$	W	W	$P=u_\mathrm{e}i_\mathrm{e}\cos\varphi$	P	snaga
kinetička akustička energija	W_k	$W_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mU^2$	J	J	$W_\mathrm{m}=\frac{1}{2}Li^2$	W_m	energija magnetskog polja
potencijalna akustička energija	W_p	$W_\mathrm{p}=\frac{1}{2}Cp^2$	J	J	$W_\mathrm{e}=\frac{1}{2}Cu^2$	W_e	energija elektrostatskog polja

gdje je η dinamička viskoznost plina. U takvom »akustičkom otporniku« troši se zvučna energija to više što su zvukovodi tanji (D^{-4}!); primjer toga su tkanine, koje snažno upijaju zvukove.

1.4. Razina jakosti zvuka i njena jedinica decibel

1.4.1. Razina jakosti zvuka. U primijenjenoj akustici zvučni se efekti uglavnom ne ocjenjuju u apsolutnom smislu, već u relativnom, tj. u odnosu prema stanovitoj referentnoj vrijednosti jakosti zvuka I_0 ili nekoj drugoj akustičkoj veličini. Radi toga je u akustiku uvedena veličina *razina jakosti zvuka* L, koja je mjera pojačanja ili oslabljenja jakosti zvuka, a definirana je jednadžbom

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \tag{1.4-1}$$

Ovdje je lg simbol za dekadski logaritam, tj. sa bazom 10, a I_0 referentna jakost zvuka. Vrijednost I_0 približno iznosi $I_0 = 10^{-12}$ W/m², što odgovara donjoj granici čujnosti prosječnog ljudskog uha pri frekvenciji zvuka $f = 1000$ Hz (podrobnije o tome vidi u poglavlju 2).

Veličina L je tzv. *brojčana veličina*; iz strukture jednadžbe (1.4-1) vidi se da je razina jakosti zvuka L logaritam omjera dviju vrijednosti iste veličine. To znači da veličina L ima »brojčanu jedinicu«, u stvari ta jedinica je sam *broj* 1 (usporedi s brojčanim jedinicama radijan i steradijan u odlomcima B.1.4.1 i B.1.6.1). Broj 1 u svojstvu jedinice veličine L zove se »bel«, tj. postoji identičnost

$$\text{bel} = \text{B} \equiv 1.$$

Naziv bel ova je brojčana jedinica dobila po *Al. Grahamu Bell*u, jednom od izumitelja telefona. U pogledu kratice jedinice nema jedinstva; u Engleskoj i USA većinom upotrebljavaju kraticu b, dakle malo slovo, ali to nije naročito sretan izbor, jer mnogi autori u akustici upotrebljavaju istodobno b kao kraticu jedinice tlaka bar. U ovoj knjizi upotrebljavamo, zajedno s drugom grupom autora, kraticu B, kako bismo unaprijed osujetili eventualne zamjene i nesporazume. Tu kraticu preporučuju i međunarodne organizacije.

U skladu s izloženim možemo rezimirati: razina jakosti zvuka L ima vrijednost

$$L = 1\ \text{B} \quad \text{ako je} \quad \lg I/I_0 = 1,$$

a pri tom je jedinica bel = B identična s brojem 1, B ≡ 1. Shvatimo li brojčanu *veličinu* L kao umnožak brojčanog iznosa $\{L\}_\text{B}$ i jedinice $[L] = \text{B} = \text{bel}$ (o načelu $G = \{G\}\,[G]$ vidi odsječak A.1.3), dakle $L = \{L\}_\text{B} \cdot \text{B}$, odnosno $\{L\}_\text{B} = L/\text{B}$, definicijsku jednadžbu (1.4-1) morali bismo zapravo napisati u drukčijem obliku: ili

$$\{L\} = \frac{L}{\text{B}} = \lg \frac{I}{I_0} \quad \text{ili} \quad L = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)\text{B}, \tag{1.4-2}$$

gdje se vrijednost logaritma množi s jedinicom B ≡ 1.

Primjer. Koliki je omjer I/I_0 ako je u jednom slučaju $L = 1$ bel = 1 B, a u drugom $L = 5$ B? Rješenje nam daje desna jednadžba (1.4-2) u obliku

$$I/I_0 = 10^{L/\text{B}}.$$

Za prvi slučaj dobivamo $I/I_0 = 10^{1\,\text{B}/\text{B}} = 10^1 = 10$, a za drugi $I/I_0 = 10^{5\,\text{B}/\text{B}} = 10^5 = 100\,000$.

1.4.2. Jedinica decibel. U praktičnoj primjeni se pokazalo da je jedinica bel = B ponešto prevelika u pogledu prikladnih vrijednosti razine jakosti zvuka L, pa se stoga pretežno upotrebljava 10 puta manja jedinica

$$\text{decibel} = \text{dB} = 0{,}1\ \text{B}.$$

Razmotrimo kakav oblik moraju dobiti jednadžbe (1.4-2) da bi bile prilagođene jedinici decibel = dB. Budući da je B = 10 dB, uvrštenjem ovog odnosa u desnu jednadžbu (1.4-2) i uz pomoć $\{L\}_{\text{dB}} \cdot \text{dB} = L = \{L\}_{\text{B}} \cdot \text{B}$ dobivamo

$$\{L\}_{\text{dB}} = \frac{L}{\text{dB}} = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad \text{ili} \quad L = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0}\right) \text{dB}. \tag{1.4-3}$$

Primjer. Koliki je omjer I/I_0 ako je u jednom slučaju $L = 2$ dB, a u drugom $L = 60$ dB? Rješenje nam daje desna jednadžba (1.4-3) u obliku

$$I/I_0 = 10^{0{,}1 L/\text{dB}}$$

Za prvi slučaj dobivamo $I/I_0 = 10^{0{,}1 \cdot 2\ \text{dB}/\text{dB}} = 10^{0{,}2} = 1{,}585$, a za drugi slučaj $I/I_0 = 10^{0{,}1 \cdot 60\ \text{dB}/\text{dB}} = 10^6$, tj. omjer iznosi milijun:1.

Tablica **C-3**

Odnosi između L i I/I_0

L dB	L B	$\frac{I}{I_0}$	L dB	L B	$\frac{I}{I_0}$	L dB	L B	$\frac{I}{I_0}$
1	0,1	1,259	11	1,1	12,59	30	3	10^3
2	0,2	1,585	12	1,2	15,85	40	4	10^4
3	0,3	1,995	13	1,3	19,95	50	5	10^5
4	0,4	2,512	14	1,4	25,12	60	6	10^6
5	0,5	3,162	15	1,5	31,62	70	7	10^7
6	0,6	3,981	16	1,6	39,81	80	8	10^8
7	0,7	5,012	17	1,7	50,12	90	9	10^9
8	0,8	6,310	18	1,8	63,10	100	10	10^{10}
9	0,9	7,943	19	1,9	79,43	110	11	10^{11}
10	1,0	10,000	20	2,0	100	120	12	10^{12}

Računanjem kao u gornjem primjeru za $L = 3$ dB = 0,3 B dobivamo omjer $I/I_0 = 1{,}995$, za $L = 30$ dB = 3 B dobivamo $I/I_0 = 10^3 = 1000$ itd. Iscrpniji prikaz veza između L i I/I_0 prema jednadžbama (1.4-2, 3) sadrži tablica C-3.

Ovdje je korisno napomenuti da se, na primjer, desna jednadžba (1.4-3) može primijeniti i na druge veličine. Između veličinâ jakost zvuka I, prostorna gustoća energije w, akustička snaga P i zvučni tlak p postoje, naime, čvrsti odnosi (1.2-4, 6, 7, 8) pomoću kojih pojedini autori, na primjer, definiraju veličinu L i na jedan od ovih načina

$$L = 10 \lg \frac{w}{w_0}\ \text{dB} = 10 \lg \frac{P}{P_0}\ \text{dB}. \tag{1.4-4}$$

U skladu s jednom od ovih dviju definicijskih jednadžbi, ti autori onda veličinu L nazivaju npr. »razina gustoće energije« ili »razina akustičke snage«.

1.4.3. Razina zvučnog tlaka. Ova je veličina mjera pojačanja ili oslabljenja zvučnog tlaka, a definirana je jednadžbom

$$L_p = 20 \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \mathrm{dB} = 10 \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \mathrm{dB}. \qquad (1.4\text{-}5)$$

Ovdje je p_0 referentni zvučni tlak koji je međunarodno definiran vrijednošću

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2},$$

što odgovara donjoj granici čujnosti prosječnog ljudskog uha pri frekvenciji zvuka $f = 1000$ Hz (podrobnije o tome vidi u poglavlju 2).

Prema jednadžbi (1.2-7) efektivne vrijednosti jakosti zvuka I i zvučnog tlaka p vezane su jednadžbom $I = \rho c p^2$, gdje je ρ gustoća plina kojim se zvuk širi brzinom c. Prema tome i za referentne veličine vrijedi $I_0 = \rho c p_0^2$, pa je, dakle,

$$I/I_0 = p^2/p_0^2, \quad \text{odnosno} \quad p/p_0 = (I/I_0)^{1/2}.$$

Uvrstimo li taj odnos u jednadžbu (1.4-5), dobivamo

$$L_p = 20 \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)^{1/2} \mathrm{dB} = 10 \lg \frac{I}{I_0} \mathrm{dB}.$$

Usporedimo li ovu jednadžbu sa (1.4-3), vidimo da su one međusobno jednake, tj.

$$L = L_p. \qquad (1.4\text{-}6)$$

Pri tom je, dakako, dB = 0,1 B, gdje je B = bel ≡ 1 (vidi početak odlomka 1.4.1).

Pri upotrebi jednadžbe (1.4-5) valja pažljivo postupati, jer u mnogim slučajevima *nije* udovoljeno jednadžbi $I = \rho c p^2$, pa, dakle, ne vrijedi uvijek relacija (1.4-6)!

Primjer. Koliki je zvučni tlak p, ako je razina zvučnog tlaka $L_p = 100$ dB? Računat ćemo na osnovu poznatog referentnog zvučnog tlaka $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m². Jednadžba (1.4-5) omogućuje nam proračun

$$p = p_0 \cdot 10^{L/20\,\mathrm{dB}} = p_0 \cdot 10^{100/20} = p_0 \cdot 10^5,$$

$$p = 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2} = 2\ \mathrm{N/m^2}.$$

Iz odlomka 1.4.2, 3 možemo razabrati da se brojčana jedinica »decibel« danas upotrebljava za izražavanje razina mnogih veličina. U poglavlju 3 vidjet ćemo da se ona primjenjuje i u električkim telekomunikacijama (usporedo s neperom). Da bi se jedinica dB zadržala samo u vezi s dekadskim logaritmom omjera akustičkih veličina I/I_0, w/w_0 i p/p_0, Amerikanac *E. I. Green* je godine 1954. predložio da se uvede naziv *decilog* (dg) »...za mjerenje dekadskog logaritma omjera dviju vrijednosti bilo koje veličine«. Decilog bi bio vrijednost $10^{0,1} = 1{,}25892$. To znači da bi decibel bio samo specijalni naziv za decilog, i to samo za primjenu u objektivnoj akustici.

1.5. Pregled nekih akustičkih veličina, njihovih jedinica i akustičke terminologije

1.5.1. Pregled akustičkih veličina i jedinica. Razumljivo je da ne možemo razmatrati sve veličine akustike i fonometrije te njihove jedinice. Tih veličina, naročito prostorno-akustičkih, ima samo u standardima pojedinih država više od 80, a to znači da ih u stvarnoj primjeni ima još i više. Stoga se u ovoj knjizi ograničujemo na razmatranje samo onih akustičkih i fonometrijskih veličina koje smatramo najvažnijima sa stanovišta metrologije i standardizacije. Mnoge od tih veličina i jedinica razmotrene su u prethodnim odlomcima ovog poglavlja 1, dok su fonometrijske veličine i njihove jedinice razmotrene u poglavlju 2. Pregled tog malog skupa akustičkih veličina sadrži tablica C-4, uz koju treba dati nekoliko napomena.

U stupcu 4 tablice C-4 navedene su veličinske jednadžbe koje povezuju pojedine veličine. Te jednadžbe mogu se u pojedinim slučajevima smatrati definicijskim jednadžbama veličina, ali se njima ni u kojem slučaju na to ne pretendira. Razlog je taj što razni autori u području akustike definiraju pojedine veličine akustike različitim redom, kojemu su onda prilagođene i jednadžbe. U vezi sa stupcem 4 napomenimo i to da indeksima nismo podrobno naznačivali da li je riječ o efektivnim vrijednostima veličina ili ne; podrobnosti o tome čitatelj može vidjeti u odsječku 1.2.

U pogledu jedinica koje su navedene u stupcima 5, 6 i 7 tablice C-4, valja napomenuti ovo: 1) Jedinice Međunarodnog sistema jedinica (SI) N = newton, W = watt i J = joule definirane su u poglavlju B.7 ove knjige. 2) Jedinice CGS sistema jedinica erg i dyn definirane su u odsječku B.8.2. 3) U stupcu 7 tablice C-4 navedene su »mješovite jedinice« koje dosta često susrećemo u akustici. One su mješavina jedinica, koja potječe iz kombinacije jedinica CGS sistema i SI. To su, na primjer,

$$\mu\mathrm{W} = \text{mikrowatt} = 10^{-6}\,\mathrm{W}, \quad \mu\mathrm{bar} = 10^{-1}\,\mathrm{N/m^2} = \mathrm{dyn/cm^2}$$

i njihove kombinacije navedene pod brojevima 9, 10 i 11 tablice C-4.

1.5.2. Terminološke teškoće u akustici. Na terminologiju akustike utječu terminologije susjednih grana, mehanike i elektrotehnike, a od utjecaja je i opća terminologija fizike. Zbog primjene akustike u arhitekturi i građevinarstvu ni ove struke nisu ostale bez utjecaja. Kad tome još pribrojimo terminologiju koja se stječe u fonometriji iz fiziologije, postaje nam jasno zašto se akustička terminologija u raznih autora toliko međusobno razlikuje. Ta razlika velika je i u stranim jezicima, ne samo u našem.

Zbog toga smo u tablici C-5 skupili komparativni pregled naziva nekih temeljnih veličina akustike i fonometrije na hrvatskosrpskom, engleskom, francuskom, ruskom i njemačkom jeziku. Taj pregled sastavljen je na temelju rječnika Međunarodne elektrotehničke komisije (Commission Électrotechnique Internationale), drugo izdanje (1960), pod naslovom »Vocabulaire électrotechnique international«, groupe 08: Électroacoustique. Napominjemo da je Međunarodna elektrotehnička komisija sastavni dio Međunarodne organizacije za standardizaciju (ISO), pa su, dakle, navedeni izrazi službena terminologija pojedinih nacionalnih standardizacija. Hrvatskosrpske nazive dijelom smo sakupili iz postojeće jugoslavenske literature, a dijelom stvorili po uzoru na strane izraze.

Tablica C-4

Pregled nekih akustičkih veličina i njihovih jedinica

Redni broj	Veličina	Oznaka	Jednadžba	Jedinica SI	Jedinica CGS	Mješovite jedinice
1	2	3	4	5	6	7
1	Brzina zvuka	c	$c^2 = \kappa p/\rho$	m/s	cm/s	–
2	Brzina čestice	v	$(\rho - \rho_0)(c - v) = \rho_0 v$	m/s	cm/s	–
3	Zvučni tlak	p	$p - p_0 = \rho_0 v c$	N/m^2	dyn/cm^2	$= \mu bar$
4	Akustička snaga	P	$dP = I\,dA$	W	erg/s	μW
5	Jakost zvuka, efektivna	I	$I = \frac{p^2}{\rho c}$	W/m^2	$\frac{erg}{cm^2 s}$	$\frac{\mu W}{cm^2}$
6	Razina jakosti zvuka	L	$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$	dB	dB	–
7	Gustoća akustičke energije	w	$w = I/c$	J/m^3	erg/cm^3	–
8	Akustički protok	U, q	$U = vA$	m^3/s	cm^3/s	–
9	Valni otpor	Z_c	$Z_c = \rho c$	$\frac{Ns}{m^3}$	$\frac{dyn\ s}{cm^3}$	$= \frac{\mu bar}{cm/s}$
10	Akustička impedancija	Z	$Z = \frac{p}{U} = \frac{p}{vA}$	$\frac{Ns}{m^5}$	$\frac{dyn\ s}{cm^5}$	$= \frac{\mu bar}{cm^3/s}$
11	Specifična akustička impedancija	z	$z = Z/A = p/v$	$\frac{Ns}{m^7}$	$\frac{dyn\ s}{cm^7}$	$= \frac{\mu bar}{cm^5/s}$

Tablica C-5

Strani nazivi nekih akustičkih i fonometrijskih veličina

Redni broj	Hrvatskosrpski	Engleski	Francuski	Ruski	Njemački
1	brzina zvuka	velocity of sound	vitesse de son	skorost zvuka	Schallgeschwindigkeit
2	brzina čestice	sound particle velocity	vitesse d'une particule	skorost častici	Schallschnelle
3	zvučni tlak	sound pressure	pression acoustique	zvukovoje davljenije	Schalldruck
4	razina zvučnog tlaka	sound pressure level	niveau de pression acoustique	urovenj zvukovogo davljenija	Schalldruckpegel
5	akustička snaga	sound energy flux	puissance acoustique	patok zvukovoj energij	Schalleistung
6	jakost zvuka	sound intensity	intensité acoustique	intensivnost zvuka	Schallintensitöt
7	gustoća akustičke energije	sound energy density	densité d'energie acoustique	plotnost zvukovoj energij	Schallenergiedichte
8	akustički protok	volume velocity	flux de vitesse acoustique	abjomnaja kolebateljnaja skorost	Schallfluss
9	valni otpor	characteristic (specific) acoustic impedance	impédance acoustique caractéristique	volnovoje soprotivljenje	Schallkennimpedanz
10	akustička impedancija	acoustic impedance	impédance acoustique	akustičeskoje soprotivljenije	Akustische Impedanz
11	specifična akustička impedancija	specific acoustic impedance	impédance acoustique intrinsèque	udeljnoe akustičeskoje soprotivljenije	Spezifische Schallimpedanz
12	razina glasnoće	loudness level	niveau de force sonore	urovenj gromkosti zvuka	Lautstärke (Lautklasse)
13	glasnoća	loudness	intensité auditive	gromkost zvuka	Lautheit

2. Fonometrijske veličine i jedinice

2.1. Objektivna i subjektivna visina tona

2.1.1. Frekventni interval i jedinica oktava. Glazbeno vrednovanje glazbenog intervala ne ovisi o razlici frekvencija dvaju tonova, gdje je frekvencija jednog od tih tonova odabrana za osnovu, već o omjeru frekvencija obaju tonova unutar glazbenog (muzičkog) intervala. Osjećaj *visine tona* pretežno ovisi o logaritmu omjera frekvencija dvaju tonova, ali i o razini zvučnog tlaka (vidi odlomak 2.1.3).

Podloga kako za subjektivno tretiranje visine tona u glazbi tako i za objektivno tretiranje zvukova u tehničkoj akustici i elektroakustici jest *frekventni interval*, koji se u duhu glazbene terminologije naziva i »glazbeni interval«, »muzički interval« ili »relativna visina tona«. U tom smislu, tj. u smislu objektivne (fizikalne) akustike, fizikalna veličina frekventni interval Δ definira se za dva tona frekvencija f i f_0 zajedno s pripadnom jedinicom »oktava«:

$$\Delta = \log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)\text{ok}. \tag{2.1-1}$$

Ovdje smo nestandardiziranu kraticu »ok« (= oktava) upotrijebili samo zato da bismo je mogli lakše primjenjivati u daljnjim jednadžbama. Baza gornjeg logaritma je 2, što smo istakli indeksom $_2$ uz log u jednadžbi (2.1-1). Ta jednadžba riječima se opisuje tako da se kaže: frekventni interval iznosi 1 oktavu, ako je omjer frekvencija $f/f_0 = 2$. To neposredno slijedi i računski iz (2.1-1) ako stavimo $f = 2f_0$:

$$\Delta = \log_2\left(\frac{2f_0}{f_0}\right)\text{ok} = 1\,\text{ok} = 1\text{ oktava}.$$

Definicija oktave je, dakle, posve analogna definicijama bela ili nepera u odlomcima 1.4.1 i 3.1.1, tj. ok = oktava ≡ 1 (brojčana jedinica). Jednadžbu (2.1-1) možemo napisati i u obliku

$$2^{\Delta/\text{ok}} = f/f_0,$$

odakle slijedi obrazac za izračunavanje Δ u ovisnosti o omjeru f/f_0

$$\frac{\Delta}{\text{ok}} = \frac{\lg f/f_0}{\lg 2}.$$

Ovdje lg označuje dekadski logaritam s bazom 10. Budući da je lg 2 = 0,301 03, gornji izraz prelazi u oblik dekadskog logaritma

$$\Delta = 3{,}3219 \lg\left(\frac{f}{f_0}\right)\text{ok}. \tag{2.1-2}$$

Primjer. Koliko iznosi Δ »velike terce« za koju vrijedi $f:f_0 = 5:4$? Uvrštenjem omjera $f/f_0 = 5/4 = 1{,}25$ u izraz (2.1-2) dobivamo

$$\Delta = 3{,}3219 \cdot \lg 1{,}25 \text{ ok} = 0{,}3219 \text{ oktava.}$$

Analogno bismo za »malu tercu« ($f:f_0 = 6:5$) dobili 0,263 oktava.

2.1.2. Milioktava i cent. Iz gornjeg primjera vidimo da je u glazbi oktava prevelika jedinica. To nam može još bolje ilustrirati podatak da je npr. za »mali poluton« $\Delta = 0{,}0589$ oktava, za »sintonijski zarez« $\Delta = 0{,}0179$ oktava itd. Stoga se upotrebljava 1000 puta manja jedinica

$$\text{milioktava} = \text{mok} = 10^{-3} \text{ ok.}$$

Jednadžbe analogne izrazima (2.1-1) i (2.1-2), koje vrijede za oktavu, dobivaju se iz spomenutih jednadžbi tako da se u njih uvrsti $\text{ok} = 10^3$ mok

$$\Delta = 1000 \log_2 \left(\frac{f}{f_0}\right) \text{mok}; \qquad \Delta = 3321{,}9 \lg \left(\frac{f}{f_0}\right) \text{mok.}$$

Računanje s ovom jednadžbom obavlja se, dakako, posve jednako kao i sa (2.1-2); primjer imamo na kraju prošlog odlomka.

Uz oktavu i milioktavu u glazbi se upotrebljava i jedinica »cent«, koja je 1200 puta manja od oktave, dakle

$$\text{cent} = \frac{\text{oktava}}{1200}.$$

Do odgovarajućih jednadžbi dolazimo tako da u (2.1-1, 2) umjesto ok stavimo 1200 cent, jer je oktava = 1200 cent:

$$\Delta = 1200 \log_2 \left(\frac{f}{f_0}\right) \text{cent}; \qquad \Delta = 3986{,}3 \lg \left(\frac{f}{f_0}\right) \text{cent.}$$

Tako, na primjer, za »veliku tercu« (terca u dur-skali tablice C-6) dobivamo pomoću $f/f_0 = 5:4 = 1{,}25$

$$\Delta = 3986{,}3 \lg 1{,}25 \text{ cent} = 386{,}3 \text{ cent.}$$

Uz tablicu C-6 napominjemo da terca, seksta i septima u dur-skali imaju pridjev »velika«, a u molnoj skali »mala«.

Uz navedene jedinice oktavu, milioktavu i cent upotrebljava se i jedinica *savart*. Jedinici oktava odgovara 301,03 ($= 1000 \lg 2$) savarta.

2.1.3. Subjektivna visina tona (mel-skala). U prošla dva odlomka razmatrali smo frekventni interval i njegove jedinice, koji su definirani objektivnim (fizikalnim) mjerenjem frekvencija zvuka. Ljudsko uho, za koje se glazba i govor jedino stvaraju i reproduciraju, *subjektivno osjeća* visinu tonova. Amerikanac *G. G. Stevens* i njegovi suradnici objavili su godine 1938. rezultate svojih istraživanja na tom polju i predložili »mel-skalu« za vrednovanje tog subjektivnog ljudskog osjećanja visine tonova. Njihov rad naišao je na odaziv i danas je mel-skala jedna od osnova subjektivne akustike (riječ »mel« potječe od grčkog melos = ton).

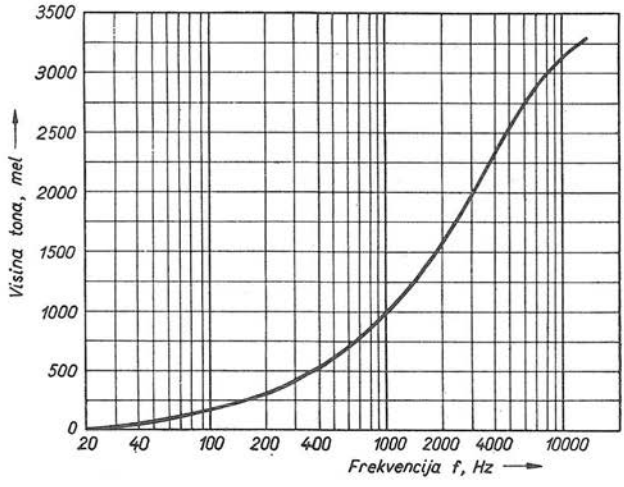
Tablica C-6

Dijatonske skale čistih tonova

Tonski interval	Pitagorejska skala			Dur-skala			Mol-skala		
	Simbol	$\frac{f}{f_0}$	Δ cent	Simbol	$\frac{f}{f_0}$	Δ cent	Simbol	$\frac{f}{f_0}$	Δ cent
Prima	c	1:1	0	c	1:1	0	c	1:1	
Sekunda	d	9:8	203,9	d	9:8	203,9	d	9:8	203,9
Terca	e	81:64	407,8	—	—	—	—	—	—
Velika terca	—	—	—	e	5:4	386,3	—	—	—
Mala terca	—	—	—	—	—	—	es	6:5	315,6
Kvarta	f	4:3	498,0	f	4:3	498,0	f	4:3	498,0
Kvinta	g	3:2	702,0	g	3:2	702,0	g	3:2	702,0
Seksta	a	27:16	905,9	—	—	—	—	—	—
Velika seksta	—	—	—	a	5:3	884,4	—	—	—
Mala seksta	—	—	—	—	—	—	as	8:5	813,7
Septima	h	243:128	1109,8	—	—	—	—	—	—
Vel. septima	—	—	—	h	15:8	1088,3	—	—	—
Mala septima	—	—	—	—	—	—	b	9:5	1017,5
Oktava	c′	2:1	1200,0	c′	2:1	1200,0	c′	2:1	1200,0

*Stevens*ova mel-skala definirana je fiksiranjem koordinata dviju tačaka krivulje dobivene eksperimentiranjem s mnogo osoba; krivulja prikazuje prosječnu vrijednost subjektivnog osjećanja visine tona o frekvenciji (vidi sliku C.3). Prvoj tački pripisana je vrijednost subjektivne visine tona 1000 mel koju osjeća standardni slušač ako zvuk frekvencije $f = 1000$ Hz efektivnog zvučnog tlaka $p_e = 2 \cdot 10^{-3}$ N/m² sprijeda dolazi na oba njegova uha. Drugoj tački pripisana je nulta vrijednost (0 mel) ako isti slušač na jednaki način prima zvuk frekvencije $f = 50$ Hz kojega je razina glasnoće 40 phon (o »razini glasnoće« vidi odlomak 2.2.1).

Tako fiksirana krivulja na slici C.3 omogućuje primjenu mel-skale u jedinstvenom tretiranju osjećanja visine tona. To osobito koristi pri istraživanju glasnoće šumova i buke (o veličini »glasnoća« vidi odsječak 2.3).



Sl. C.3. Ovisnost subjektivne visine tona o frekvenciji

2.2. Razina glasnoće zvuka i njena jedinica phon

2.2.1. Razina glasnoće zvuka. Doživljavanje zvuka je *subjektivna* osobina ljudi. Grana akustike koja se bavi proučavanjem i mjerenjem doživljavanja zvuka kod ljudi zove se *fonometrija*. Osnova je fonometrije, dakako, ljudsko uho koje na poseban način doživljava zvučne pojave. Proučavanja su već davno pokazala da prosječno ljudsko uho, tj. uho zdrava mlada čovjeka (18...25 godina), čuje zvučne titraje ograničena pojasa frekvencija od oko 20 Hz do oko 20000 Hz (oko 10 oktava). Uho je najosjetljivije na zvukove frekvencije između 3000 i 4000 Hz.

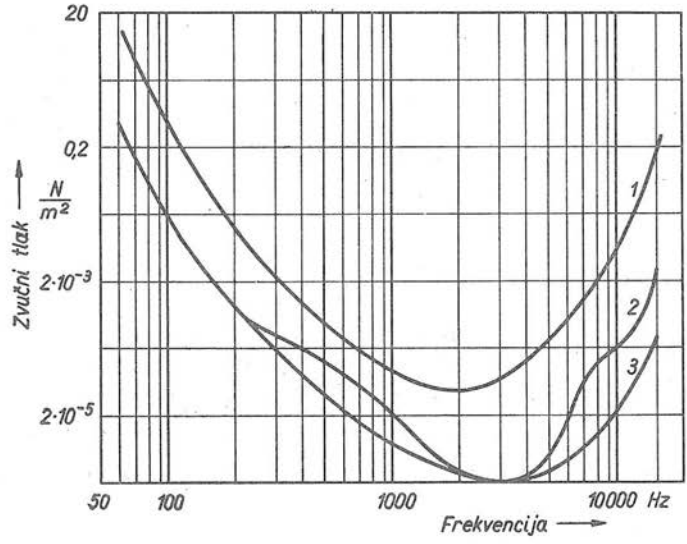
Pod *osjetljivošću* ljudskog uha razumijevamo minimalni zvučni tlak p koji čovjek može osjetiti. (Budući da prema jednadžbi 1.2-7 postoji čvrsta veza između zvučnog tlaka p i jakosti zvuka I, pod osjetljivošću se razumijeva i minimalna jakost zvuka.) Taj minimalni zvučni tlak naziva se *prag čujnosti*. On izvanredno jako ovisi o frekvenciji tona kao i o tome na kakav način taj prag mjerimo. To nam vrlo zorno pokazuje dijagram na slici C.4.

Doživljaj zvuka čovjek karakterizira visinom tona (visok, dubok, svijetao itd.), bojom zvuka, šumovima itd. Jedna od bitnih karakteristika subjektivne akustike je *glasnoća zvuka*. Pri istoj frekvenciji zvuka subjektivni osjećaj povećanja glasnoće zvuka proporcionalan je relativnom povećanju zvučnog tlaka $\Delta p/p$. Ako taj subjektivni osjećaj označimo sa Λ, a umjesto Δp stavimo infinitezimalnu promjenu dp, vezu između Λ i dp/p možemo napisati u obliku $d\Lambda = K\, dp/p$, gdje je K konstanta.

Za promjenu zvučnog tlaka od svojevoljno odabrane vrijednosti p_0 do vrijednosti p integriranjem gornjeg diferencijalnog izraza dobivamo

$$\Lambda = \int_0^{\Lambda} d\Lambda = K \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = C \lg \frac{p}{p_0}, \qquad (2.2\text{-}1)$$

gdje je C druga konstanta. Veličinu Λ nazivamo *razinom glasnoće zvuka.*



Sl. C.4. Ovisnost praga čujnosti o frekvenciji f zvuka i o načinu njegova mjerenja
1 — pri slušanju jednim uhom, *2* — pri slušanju s oba uha kad zvuk dopire sprijeda, *3* — pri slušanju s oba uha kad zvuk dopire iz raznih smjerova

Izraz (2.2-1) matematički je oblik *Weber-Fechner*ova zakona koji kaže da je subjektivni osjećaj glasnoće zvuka razmjeran logaritmu omjera zvučnog tlaka p slušanog zvuka i referentnog tlaka p_0 zvuka iste frekvencije. Taj zakon vrijedi dosta tačno za frekvencije zvuka oko $f = 1000$ Hz. Za niže čujne frekvencije zakon se dosta udaljuje od stvarnosti. Pri frekvencijama višim od 1000 Hz odstupanje od tog zakona nije tako jako (vidi odlomak 2.2.5).

2.2.2. Referentni zvučni tlak i normalni zvuk. Subjektivna veličina »razina glasnoće zvuka« iz jednadžbe (2.2-1) može biti od koristi za fonometriju tek pošto definiramo vrijednost referentnog tlaka p_0. Međunarodnim dogovorom (ISO) godine 1937. usvojeno je da se za referentni tlak odabere efektivna vrijednost

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2} = 2 \cdot 10^{-4}\ \mu\mathrm{bar},$$

što *približno* odgovara pragu čujnosti pri frekvenciji zvuka $f = 1000$ Hz. Čisti zvuk frekvencije

$$f = 1000\ \mathrm{Hz}$$

proglašen je *normalnim tonom* (normalnim zvukom). Prilikom mjerenja razine glasnoće normalni ton se proizvodi u obliku ravnog vala koji dolazi sprijeda prema glavi slušača.

Izračunajmo kolika je jakost zvuka I_0 koja pripada zvuku tlaka p_0 u *zraku*. Proračun možemo obaviti pomoću jednadžbe (1.2-7) u obliku $I_0 = p_0^2/(\rho c)$, gdje se pod I_0 i p_0 razumijevaju efektivne vrijednosti. Da bismo mogli izračunati I_0, moramo znati gustoću ρ zraka i brzinu zvuka c u zraku. Znamo da i ρ i c ovise o temperaturi (vidi odlomak 1.1.1), atmosferskom tlaku i vlažnosti. Mjerenja pokazuju da su vrijednosti ovih veličina u suhom zraku:

pri $p = 1$ atm, $\vartheta = 0\,°C$:	pri $p = 1$ atm, $\vartheta = 20\,°C$:
$\rho = 1{,}2931\ \mathrm{kg/m^3}$	$\rho = 1{,}2046\ \mathrm{kg/m^3}$
$c = 331{,}7\ \mathrm{m/s}$	$c = 343{,}6\ \mathrm{m/s}$
$\rho c = 428{,}9\ \mathrm{Ns/m^3}$	$\rho c = 413{,}9\ \mathrm{Ns/m^3}$

Desni stupac sadrži tzv. akustičko normirano stanje (vidi odlomak D.1.5.2). Stoga ćemo za nj izračunati vrijednost I_0:

$$I_0 = \frac{p_0^2}{\rho c} = \frac{4 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N^2/m^4}}{413{,}9\,\mathrm{Ns/m^3}} = 0{,}966 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \approx 10\,\frac{\mathrm{nW}}{\mathrm{m^2}}.$$

Ovdje je n = nano = 10^{-9} (vidi tablicu A-1).

2.2.3. Mjerenje razine glasnoće provodi se tako da slušač naizmjenično sa oba uha sluša normalni zvuk i mjereni zvuk. Pri tom svaki od zvukova sluša jednako dugo, oko jednu sekundu, jer je time umor ušiju približno jednak za oba zvuka. Jedna sekunda je dovoljna, jer se za to vrijeme potpuno uspostavi osjećanje zvuka.

Mjerenje razine glasnoće Λ obično se izvodi jednim od ovih triju postupaka. Prvi je *postupak izjednačenja*: razinu zvučnog tlaka normalnog zvuka ($f = 1000$ Hz) slušač mijenja sâm tako dugo dok mu se normalni zvuk i mjereni zvuk ne čine jednako glasnima. Drugi je *granični postupak*: razina zvučnog tlaka normalnog zvuka polagano se povisuje sve dok normalni zvuk ne postane jedva zamjetno glasniji od mjerenog zvuka. Zatim se razina tlaka normalnog zvuka mijenja u obrnutom smjeru, tj. snizuje se; to snižavanje ide dotle dok se normalni zvuk ne čini jedva zamjetno manje glasnim od mjerenog zvuka. Iz obje granične vrijednosti izračuna se aritmetička srednja vrijednost razine glasnoće. Treći je postupak *konstantnog nadražaja*. Slušač prima niz jednako stupnjevanih razina tlaka normalnog zvuka, ali je pri tom njihov slijed bez ikakva reda (idealni nered). Slušač nema nikakve mogućnosti da mijenja razinu tlaka normalnog zvuka, već može jedino da tvrdi da li je normalni zvuk tiši ili glasniji od mjerenog zvuka. Iz dobivenih ocjena slušača posebnim se postupkom obrade rezultata izračunava razina glasnoće.

2.2.4. Jedinica razine glasnoće phon. Na zasjedanju Odbora za akustiku Međunarodne organizacije za standardizaciju (tadašnja International Federation of Standardizing Associations, današnja ISO) godine 1937. u Parizu je prihvaćena tzv. *fonometrijska skala* razine glasnoće zvuka. To je učinjeno tako što je razini glasnoće iz jednadžbe (2.2-1) per definitionem pripisana vrijednost $\Lambda = 80$, ako zvučni tlak normalnog zvuka ($f = 1000$ Hz) iznosi $p = 0{,}2\ \mathrm{N/m^2}$. Time je u stvari definirana konstanta C iz jednadžbe (2.2-1), jer je za p_0 već odabrana vrijednost $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2}$ (vidi odlomak 2.2.2):

$$C = \frac{\Lambda}{\lg p/p_0} = \frac{80}{\lg(0{,}2/2 \cdot 10^{-5})} = \frac{80}{\lg 10^4} = 20.$$

Prema tome, izraz za računanje razine glasnoće dobiva definitivan oblik

$$\Lambda = 20 \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \text{ph}, \tag{2.2-2}$$

gdje je ph kratica jedinice razine glasnoće phon (čitaj »fon«), a $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m² referentni tlak fonometrijske skale.

Budući da je razina glasnoće »brojčana veličina« (usporedi s odlomkom 1.4.1), to je i njena jedinica »brojčana jedinica«, u stvari sam broj 1, tj.

$$\text{phon} = \text{ph} \equiv 1.$$

Prema tome, u skladu s jednadžbom (2.2-2), možemo reći da razina glasnoće Λ ima vrijednost

$$\Lambda = 1 \text{ ph} \quad \text{ako je} \quad 20 \lg p/p_0 = 1.$$

Prilike su, dakle, formalno identične onima koje smo za razinu jakosti zvuka L imali u odlomcima 1.4.1 i 1.4.2.

Primjer. Zvonjava telefonskog aparata udaljena 1 metar od slušača stvara razinu glasnoće oko $\Lambda_1 = 70$ ph. Kolika će biti približno razina glasnoće (buke), ako na istoj udaljenosti zvoni deset takvih telefona? Budući da je prema jednadžbi (1.2-7) $p^2 = \rho c I$, jednadžbu (2.2-2) možemo napisati u obliku

$$\Lambda = 10 \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ph},$$

gdje je I_0 oko 10 nW/m², kako smo izračunali pri kraju odlomka 2.2.2. U istom prostoru deset jednakih telefonskih aparata proizvodi približno 10 puta veću jakost zvuka ($I = P/A$), tj. $I_{10} = 10\, I_1$, ako sa I_1 označimo jakost zvuka što ga proizvodi jedan aparat. Prema tome, razine glasnoće za slučaj jednog i deset aparata prema gornjoj jednadžbi glase

$$\Lambda_1 = 10 \lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \text{ph}; \qquad \Lambda_{10} = 10 \lg\left(\frac{10\, I_1}{I_0}\right) \text{ph}.$$

Odavde jednostavnim računanjem dobivamo

$$\Lambda_{10} = 10 \lg 10 \text{ ph} + \Lambda_1 = 10 \text{ ph} + 70 \text{ ph} = 80 \text{ ph}.$$

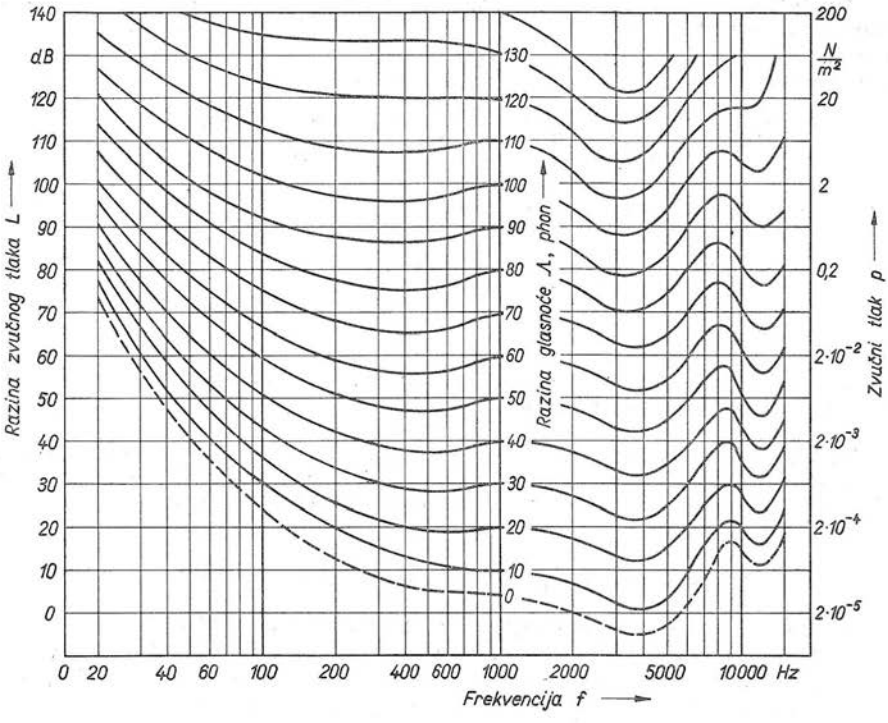
To znači da je razina glasnoće porasla od 70 ph na 80 ph.

2.2.5. Krivulje ISO jednake razine glasnoće. Amerikanci *H. Fletcher* i *W. A. Munson* objavili su godine 1933. rezultate mjerenjâ razine glasnoće Λ, koja su obavili na mnoštvu ljudi s tzv. normalnim sluhom. I ostali istraživači, npr. *Kingsburry* i drugi, proveli su vrlo opsežna mjerenja razine glasnoće subjektivnom usporedbom (vidi odlomak 2.2.3) čistih tonova frekvencije od 20 do 20000 Hz s normalnim tonom frekvencije 1000 Hz. Pošto se sakupilo dovoljno rezultata mnogih istraživača, krivulje $\Lambda(f, p)$ međunarodno su standardizirane u okviru organizacije ISO (International Standardizing Organisation).

Krivulje ISO jednake razine glasnoće Λ prikazuje slika C.5. Neki ih autori nazivaju »krivuljama razdiobe spektralne osjetljivosti uha«, misleći pri tom na ovisnost Λ o frekvenciji zvukova f. Iz slike C.5 se vidi koliko je silna ovisnost Λ o frekvenciji tona f, naročito u području ispod 300 Hz.

Najniža krivulja na slici C.5 predstavlja tzv. *prag čujnosti*, o kojem smo govorili u odlomku 2.2.1. Iz slike se vidi da krivulja $\Lambda = 0$ ph pri normalnoj frekvenciji

prolazi *iznad* referentnog zvučnog tlaka $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m². Novija precizna mjerenja, koja su već uključena u krivulje ISO na slici C.5, pokazala su da razina zvučnog tlaka iznosi $L = +4{,}2$ dB pri $\Lambda = 0$ ph (za ton $f = 1000$ Hz). Prije toga smatralo se, naime, da je pri $f = 1000$ Hz: $\Lambda = 0$ ph, $L = 0$ dB.



Sl. C.5. Krivulje jednake razine glasnoće prema ISO

Međunarodna organizacija ISO objavila je i posebnu formulu koja povezuje veličine Λ, f i L u obliku kvadratne jednadžbe u kojoj vrijednosti koeficijenata ovise o frekvenciji f. Paralelno s tom formulom objavljene su i tablice ovisnosti tih koeficijenata o f. Na temelju takve tablice sastavljen je dijagram na slici C.5.

Napomenimo ponovno da su brojčane vrijednosti razine glasnoće Λ u ph i brojčane vrijednosti razine zvučnog tlaka L (ili jakosti zvuka; vidi odlomak 1.2.3) u dB međusobno jednake samo za ton 1000 Hz (osim za prag čujnosti!), te za pojedine tačke u kojima se sijeku pravci L i krivulje Λ (vidi sliku C.5). Stoga ne čine dobro oni autori koji razinu glasnoće Λ izražavaju jedinicom dB, a ne jedinicom ph. Isto tako krivo čine oni autori koji razinu zvučnog tlaka (ili jakosti zvuka) L izražavaju jedinicom ph. Danas se, naime, jedinica phon upotrebljava samo tamo gdje je razina glasnoće utvrđena *subjektivnom* usporedbom (vidi odlomak 2.2.3).

2.2.6. Stari phon. Prije međunarodnog usvajanja vrijednosti $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m² za referentni zvučni tlak, u Njemačkoj se razina glasnoće Λ definirala ovako:

$$\Lambda = 20 \lg \frac{p}{p_{0s}} \text{ ph(s)}; \quad p_{0s} = \sqrt{10} \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2. \tag{2.2-3}$$

To znači da je definicijska jednadžba bila ista kao i današnja (2.2-2), ali je referentni zvučni tlak p_{0s} bio *veći*. Zbog toga smo brojčanoj jedinici phon u lijevoj jednadžbi (2.2-3) u zagradi pripisali slovo s, čime naglašavamo da je riječ o *starom phonu*.

Izračunajmo u kakvom su odnosu brojčani iznosi razine glasnoće Λ izraženi današnjim phonom ph i starim phonom ph(s). U tu svrhu na jednadžbe (2.2-2, 3) primjenjujemo osnovnu metrološku relaciju $\{\Lambda\} = \Lambda/[\Lambda]$ (vidi odsječak A.1.3), čime dobivamo

$$\{\Lambda\}_{\text{ph}} = \frac{\Lambda}{\text{ph}} = 20 \lg \frac{p}{p_0}; \qquad \{\Lambda\}_{\text{ph(s)}} = \frac{\Lambda}{\text{ph(s)}} = 20 \lg \frac{p}{p_{0s}}.$$

Oduzmemo li drugu jednadžbu od prve, slijedi

$$\{\Lambda\}_{\text{ph}} - \{\Lambda\}_{\text{ph(s)}} = 20 \lg \frac{p_{0s}}{p_0} = 3{,}9794 \approx 4. \tag{2.2-4}$$

To znači da su *brojčani iznosi razine glasnoće u jedinici phon za 4 veći od brojčanih iznosa u starim phonima*. Pri proučavanju literature objavljene prije godine 1937. ovu konstataciju treba uzimati u obzir.

Primjer. Razina glasnoće u starim phonima iznosi 20 phona. Kolika je razina glasnoće u današnjim phonima? Pomoću jednadžbe (2.2-4) lako izračunamo da će brojčana vrijednost te iste razine glasnoće u današnjim phonima iznositi $4 + 20 = 24$, dakle $\Lambda = 24$ ph.

2.3. Veličina glasnoća i njena jedinica son

Suočeni s industrijskom i velegradskom bukom, Amerikanci su već godine 1942. u okviru svojih standarda za mjerenje šumova uveli fonometrijsku veličinu *glasnoća* (engl. loudness, franc. sonie, ruski gromkost zvuka, njemački Lautheit). Oznaka te veličine je N, a njena jedinica zove se son (ili sone).

Veličina glasnoća N služi za subjektivno karakteriziranje osjećaja glasnoće zvuka, a definirana je sa dvije vrijednosti razine glasnoće Λ normalnog tona frekvencije $f = 1000$ Hz. Prva vrijednost je $N = 1$ son, ako je $\Lambda = 40$ phon, a druga $N = 10^{-3}$ son pri $\Lambda = 0$ ph. Obje vrijednosti odnose se na normalni ton 1000 Hz. Takvu definiciju normalizirala je i organizacija ISO. U skladu s njom između glasnoće N i razine glasnoće Λ postoji veza

$$N = 2^{(\Lambda/\text{ph} - 40)/10} \text{ son}. \tag{2.3-1}$$

Obrnuta veza, tj. ovisnost Λ o N glasi

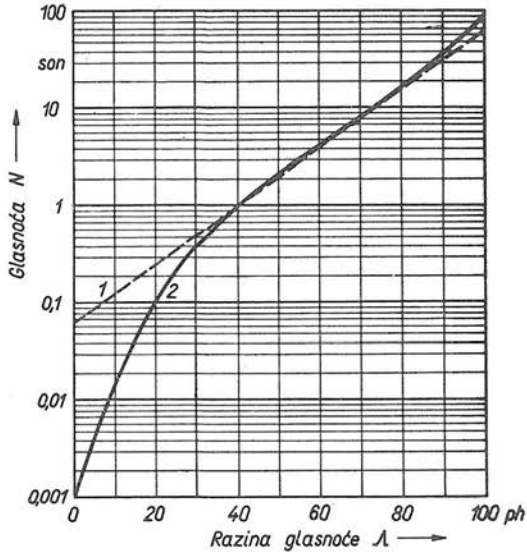
$$\Lambda/\text{ph} = 10 \log_2 (N/\text{son}) + 40.$$

Pomoću jednadžbe (2.3-1) možemo izračunati nekoliko parova vrijednosti veličina Λ, N:

Λ/ph	0	20	30	40	50	60	80	100	120
N/son	0,0625	0,25	0,5	1	2	4	16	64	256

Ovisnost N o Λ prikazuje u logaritamskom mjerilu pravac *1* na slici C.6. Očito je da zvuk glasnoće $N = 2$ sona čovjek osjeća dva puta glasnije negoli normalni zvuk razine $\Lambda = 40$ ph i glasnoće $N = 1$ son. Stvarna veza između veličina N i Λ prikazana je na slici C.6 krivuljom *2* koja je dobivena eksperimentalno. Vidimo da se iznad $N = 1$ son obje krivulje podudaraju, a to je u području velikih glasnoća kojima je subjektivna veličina N i namijenjena. Za zvukove frekvencija različitih od 1000 Hz ovisnost N o razini zvučnog tlaka L obično se prikazuje snopom krivulja prema *Stevens*u.

Za grubo računanje u praksi vrlo je korisna i normirana glasnoća prema jednadžbi (2.3-1), jer se vrijednosti glasnoće N mogu *zbrajati* nezavisno o frekvenciji. To znači da se glasnoća šumova, tzv. mješavina frekvencija, dade izračunati tako da se utvrde glasnoće pojedinih frekventnih područja, a zatim zbroje u rezultantnu glasnoću. S prikladnim korekcijskim koeficijentima mogu se pri brzim proračunima uzeti u obzir odstupanja tog zakona sumiranja od stvarnih prilika.



Sl. C.6. Ovisnost glasnoće N o razini glasnoće normalnog tona 1000 Hz
1 — prema standardizaciji ISO, *2* — prema rezultatima stvarnih mjerenja

3. Jedinice neper i decibel u električkim telekomunikacijama

3.1. Jedinica neper i njen odnos prema decibelu

3.1.1. Jedinica neper je brojčana jedinica veličine »prirodni logaritam omjera dviju istorodnih veličina«, na primjer dviju amplituda (A, A_0), neke sinusne veličine. Prema tome je ta veličina tzv. brojčana veličina (»brojčana veličina« je npr. i plošni kut; vidi odlomak B.1.1.2). Označimo li veličinu »prirodni logaritam omjera dviju istorodnih veličina« posve općenito slovom L, a dvije vrijednosti iste veličine slovima A i A_0, jednadžba koja povezuje veličinu L i njenu jedinicu neper (Np) glasi

$$\frac{L}{\mathrm{Np}} = \{L\}_{\mathrm{Np}} = \ln\frac{A}{A_0} \quad \text{ili} \quad L = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)\mathrm{Np}. \tag{3.1-1}$$

Ovdje je $\{L\}_{\mathrm{Np}}$ brojčani iznos veličine L u jedinici neper = Np, a ln kratica prirodnog logaritma kojemu je baza e = 2,718... Prema jednadžbi (3.1-1) veličina L ima vrijednost

$$L = 1\ \mathrm{Np} \quad \text{ako je} \quad \ln A/A_0 = 1.$$

Jedinica neper dobila je ime po škotskom matematičaru *J. Napier*u (1550—1617), tvorcu teorije logaritama.

Kratica jedinice »neper« nije jednoznačno definirana; većina autora upotrebljava kraticu Np da bi se razlikovala od kratice jedinice sile N = newton, dok mnogi autori upotrebljavaju kraticu N.

Jedinica neper upotrebljava se isključivo u električkim *telekomunikacijama*, gdje se veličinom L iz (3.1-1) i jedinicom Np karakterizira tzv. prigušenje telekomunikacijskih vodova (npr. $A/A_0 = U_2/U_1 = \mathrm{e}^{-L}$).

U ovoj glavi C jedinicu neper razmatramo zato što se danas i mnoge telekomunikacijske veličine izražavaju jedinicom decibel, pa je, dakle, potrebno izračunati odnos između Np i dB.

3.1.2. Odnos nepera prema decibelu možemo utvrditi na temelju poznatih definicija jedne od onih brojčanih veličina koje se mogu izraziti i decibelom i neperom. Jedna od njih je, na primjer, (relativna) *razina snage* L. Kad se veličina razina snage L izražava jedinicom decibel, njena definicijska jednadžba u akustici glasi

$$L = 10\ \lg\left(\frac{P}{P_0}\right)\mathrm{dB}. \tag{3.1-2}$$

Tu jednadžbu dobili smo iz desne jednadžbe (1.4-3), jer je prema (1.2-6) $P = IA$ i $P_0 = I_0 A$, dakle $P/P_0 = I/I_0$.

U telekomunikacijskoj tehnici definicijska jednadžba veličine razina snage L, izražena jedinicom neper, glasi

$$L = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \text{Np}. \tag{3.1-3}$$

Budući da jednadžbe (3.1-2, 3) opisuju istu veličinu »razina snage« L, njihovim izjednačenjem dobivamo

$$10 \lg \left(\frac{P}{P_0} \right) \text{dB} = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \text{Np}.$$

Odavde možemo izračunati odnos jedinica neper/decibel

$$\frac{\text{Np}}{\text{dB}} = \frac{10 \lg P/P_0}{\tfrac{1}{2} \ln P/P_0} = 20 \frac{\log \mathrm{e} \cdot \ln P/P_0}{\ln P/P_0}$$

$$\frac{\text{Np}}{\text{dB}} = 20 \cdot \log \mathrm{e} = 20 \cdot 0{,}434\,294 = 8{,}6859.$$

Računanje nas je, prema tome, dovelo do traženog rezultata

neper (Np) = 8,6859 decibela (dB),

decibel (dB) = 0,1151293 nepera (Np).

Grube odnose između jedinica neper i decibel sadrži tablica C-7.

Primjer. Izračunajmo razinu snage (tzv. relativnu razinu snage) L, ako je omjer $P/P_0 = 10^4$; razinu treba izraziti najprije decibelima, a zatim neperima! Rješenje u decibelima dobivamo pomoću jednadžbe (3.1-2)

$$L = 10 \cdot \lg 10^4 \text{ dB} = 10 \cdot 4 \text{ dB} = 40 \text{ dB},$$

a rješenje u neperima pomoću jednadžbe (3.1-3)

$$L = \tfrac{1}{2} \ln 10^4 \text{ Np} = 0{,}5 \cdot 2{,}302\,585 \cdot \lg 10^4 \text{ Np} = 4{,}605 \text{ Np}.$$

Do tog drugog rješenja mogli smo doći i pomoću prvoga ako u nj stavimo dB = 0,1151293 Np

$$L = 40 \text{ dB} = 40 \cdot 0{,}115\,1293 \text{ Np} = 4{,}605 \text{ Np}.$$

3.2. Apsolutna i relativna razina u telekomunikacijama

3.2.1. Apsolutna razina. Međunarodnim dogovorom je usvojeno da referentne veličine u električkim telekomunikacijama iznose

$$P_0 = 1 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ W}, \quad R_0 = 600 \ \Omega.$$

Razina na kojoj se nalaze ove vrijednosti naziva se tzv. »nulta razina«. Ako je referentna snaga P_0 iz jednadžbi (3.1-2, 3) baš $P_0 = 1$ mW, onda se veličina L naziva *apsolutna razina snage* (razina je na engleskom level, a na njemačkom Pegel).

Budući da je općenito $P = U^2/R$, to je i $P_0 = U_0^2/R_0$, gdje je $U_0 = 775$ mV, što proizlazi iz navedena dva podatka o nultoj razini. Ako ove dvije jednadžbe uvrstimo u izraz (3.1-3), dobivamo

Tablica **C-7**

Preračunavanje nepera (Np) u decibele (dB)

Np		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		8,686	17,372	26,058	34,744	43,430	52,116	60,802	69,488	78,174
10	86,86	95,546	104,232	112,918	121,604	130,290	138,976	147,662	156,348	165,034
20	173,72	182,406	191,092	199,778	208,464	217,150	225,836	234,522	243,208	251,894
30	260,58	269,266	277,952	286,638	295,324	304,010	312,696	321,382	330,068	338,754
40	347,44	356,126	364,812	373,498	382,184	390,870	399,556	408,242	416,928	425,614
50	434,30	442,986	451,672	460,358	469,044	477,730	486,416	495,102	503,788	512,474
60	521,16	529,846	538,532	547,218	555,904	564,590	573,276	581,962	590,648	599,334
70	608,02	616,706	625,392	634,078	642,764	651,450	660,136	668,822	677,508	686,194
80	694,88	703,566	712,252	720,938	729,624	738,310	746,996	755,682	764,368	773,054
90	781,74	790,426	799,112	807,798	816,484	825,170	833,856	842,542	851,228	859,914
100	868,59	877,28	885,96	894,65	903,33	912,02	920,71	929,39	938,08	946,76
110	955,45	964,13	972,82	981,51	990,19	998,88	1007,56	1016,25	1024,94	1033,62
120	1042,31	1050,99	1059,68	1068,37	1077,05	1085,74	1094,42	1103,11	1111,79	1120,48

Primjer upotrebe tablice: 12 Np = 10 Np + 2 Np = 86,86 dB + 17,37 dB = 104,23 dB.

$$L=\tfrac{1}{2}\ln\frac{P}{P_0}\,\mathrm{Np}=\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{U^2/R}{U_0^2/R_0}\right)\mathrm{Np},$$

odakle slijedi dalje

$$L=\ln\frac{U}{U_0}\,\mathrm{Np}-\tfrac{1}{2}\ln\frac{R}{R_0}\,\mathrm{Np}. \tag{3.2-1}$$

Prvi desni član $L_U=\ln U/U_0$ nazivamo apsolutnom razinom *napona*, dok veličinu $L_R=\ln R/R_0$ nazivamo apsolutnom razinom *otpora*. To znači da je apsolutna razina snage

$$L=L_U-\tfrac{1}{2}L_R. \tag{3.2-2}$$

Primjer. U nekom je slučaju uz $R\approx R_0=600\,\Omega$ izmjereno $U=0{,}42$ V. Budući da je pri tom bilo $U_0=0{,}775$ V, to je omjer $U/U_0=0{,}542$, a prirodni logaritam $\ln 0{,}542=-0{,}6125$. Zbog $R=R_0$ je $\ln R/R_0=0$, pa je prema jednadžbi (3.2-1) apsolutna razina snage L jednaka apsolutnoj razini napona $L=\ln(U/U_0)\,\mathrm{Np}=-0{,}6125$ Np. Ovaj rezultat komentira se riječima da *prigušenje* iznosi 0,6125 Np.

Ako se snaga izrazi u ovisnosti o jakosti električne struje I i električkom otporu R, onda zbog $P=I^2R$ i $P_0=I_0^2R$ izraz (3.1-3) dobiva oblik

$$L=\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{I^2R}{I_0^2R_0}\right)\mathrm{Np}=\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)\mathrm{Np}+\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)\mathrm{Np},$$

$$L=L_I+\tfrac{1}{2}L_R. \tag{3.2-3}$$

Ovdje je L_I apsolutna razina *struje*, a vrijednost referentne struje iznosi

$$I_0=U_0/R_0=775\ \mathrm{mV}/600\ \Omega=1{,}2917\ \mathrm{mA}.$$

Zbrajanjem jednadžbi (3.2-2, 3) dobivamo ovisnost L o L_U i L_I

$$L=\tfrac{1}{2}(L_U+L_I),$$

što smo mogli dobiti i neposredno iz (3.1-3) da smo stavili $P=UI$, $P_0=U_0I_0$.

3.2.2. Relativna razina razlikuje se od »apsolutne razine« u ovome: apsolutna razina L ima za referentne veličine P_0, R_0, U_0 koje su međunarodno dogovorene (vidi odlomak 3.2.1); relativna razina L_r ima za referentne veličine svojevoljno odabrane veličine P_1, R_1 i druge koje iz ovih slijede preko jednadžbi $P_1=R_1I_1^2$ itd.

Pri konkretnoj primjeni relativnih razina odnosi među veličinama definiraju se električkim četveropolom. Na njegovu izlazu vrijednosti veličina iznose U, I, P, a na ulazu U_1, I_1, P_1; potonje su odabrane za referentne veličine, one predstavljaju referentnu razinu prema kojoj se računa relativna razina L_r. Tako je npr. relativna razina *snage* u skladu s jednadžbom (3.1-2)

$$L_r=10\lg\left(\frac{P}{P_1}\right)\mathrm{dB}. \tag{3.2-4}$$

Naravno da se L_r može definirati i jednadžbom (3.1-3), ali je u tom slučaju rezultat izražen neperima (Np). Pomoću $P=U^2/R$ i $P_1=U_1^2/R_1$ iz (3.2-4) slijedi

$$L_r = 20 \lg \left(\frac{U}{U_1} \right) \text{dB} - 10 \lg \left(\frac{R}{R_1} \right) \text{dB},$$

a uz pomoć $P = I^2R$, $P_1 = I_1^2 R_1$

$$L_r = 20 \lg \left(\frac{I}{I_1} \right) \text{dB} + 10 \lg \left(\frac{R}{R_1} \right) \text{dB}.$$

Ove dvije jednadžbe možemo napisati i u obliku

$$L_r = L_{rU} - \tfrac{1}{2} L_{rR}; \quad L_r = L_{rI} + \tfrac{1}{2} L_{rR}.$$

Ovdje je L_r relativna razina *snage*, L_{rU} relativna razina *napona*, L_{rI} relativna razina *struje*, a L_{rR} relativna razina *otpora*.

Kad je relativna razina pozitivna, govorimo o *pojačanju*, a kad je negativna, govorimo o *prigušenju*. Ako npr. omjer snaga na kraju i početku telefonske linije iznosi $P/P_1 = 0{,}01 = 10^{-2}$, relativna razina snage na kraju linije je $L_r = 10 \lg 10^{-2}$ dB $= -20$ dB $= -20$ decibela. Predznak minus svjedoči o tome da je riječ o *prigušenju*. Istu vrijednost dobili bismo i za relativnu razinu struje L_{rI} ako je $L_{rR} = 0$.

Pri uspoređivanju razina nekoliko sklopova u telekomunikacijama i elektronici ponekad valja odabrati referentnu razinu koja je zajednička svim sklopovima. Teoretski je najprirodnije da se u takvom slučaju radi s »apsolutnim razinama« iz odlomka 2.2.1. No međunarodno usvojene referentne vrijednosti P_0, R_0 nisu uvijek najprikladnije, pa onda autori sami odabiru referentne vrijednosti P_1, U_1, I_1 kako im najbolje odgovara. Te vrijednosti mogu biti $P_1 = 1$ W ili $U_1 = 1$ V itd. U skladu s time onda rezultat računanja relativne razine izražavaju jedinicom »dB(W)« ili »dB(V)«, čime žele istaći da je vrijednost referentne veličine 1 W ili 1 V. U tom smislu možemo npr. u angloameričkoj literaturi zapaziti oznaku dBvg, što znači decibel voltage gain.

Glava **D**

Veličine i mjerne jedinice nauke o toplini i kemije

SADRŽAJ

1. Temeljni pojmovi kemije i nauke o toplini

1.1. Neke osobitosti nauke o toplini i kemije 718
1. Temperatura kao četvrta osnovna veličina, 2. Mjerenje temperature, 3. Količina tvari i veličinske jednadžbe 719

1.2. Relativna atomska i molekularna masa 720
1. Relativna atomska masa, 2. Relativna molekularna masa, 3. Međunarodna ugljikova skala relativnih masa, 4. Kemijska i fizikalna skala relativnih masa 723

1.3. Količina tvari i njena jedinica mol 725
1. Fizikalna veličina »količina tvari«, 2. O jedinici količine tvari, 3. Definicija jedinice mol, 4. Odnos između količine tvari i mase, 5. Jedinice kilomol i milimol 730

1.4. Veličine s količinom tvari kao osnovom (molne veličine)..... 732
1. Molna masa, 2. Molni volumen, 3. Molna toplina, 4. Molna plinska konstanta.... 733

1.5. Normirana stanja i normirane veličine 734
1. Fizikalno normirano stanje, 2. Tehničko, industrijsko i akustičko normirano stanje, 3. Normirani molni volumen, 4. Normirani kubni metar..... 736

1.6. Kemijske formule. Mol kao jedinica mase 737
1. Zakon o održanju mase, 2. Primjer kemijske reakcije, 3. Značenje kemijske formule, 4. Mol i kilomol kao jedinice mase, 5. Jedinice grammolekula, gramatom itd. 742
1.7. Periodni sistem kemijskih elemenata 743
1. Periodni zakon, 2. Elektronska konfiguracija ljuski, 3. Energija veze, 4. Periodičnost osobina elemenata 746

2. Fizikalne veličine nauke o toplini

2.1. Jednadžba stanja i plinska konstanta idealnog plina 748
1. Jednadžba stanja idealnog plina, 2. Univerzalna plinska konstanta, 3. Boltzmannova konstanta 753
2.2. Kinetička predodžba topline, nepovratljivosti i entropije 754
1. Kinetička predodžba topline, 2. Kinetička teorija topline i nepovratljivost, 3. Entropija i vjerojatnost 757
2.3. Pregled ostalih veličina nauke o toplini 759
1. Unutarnja energija, 2. Entalpija, 3. Specifične topline, 4. Vođenje topline i temperature, 5. Mjerenje λ i električka analogija toplinskih krugova, 6. Prijelaz i prolaz topline, 7. Pregled fizikalnih veličina nauke o toplini 772

3. Temperatura i jedinice temperature

3.1. Definicije empiričke i termodinamičke temperature 773
1. Empirička temperatura, 2. Termodinamička temperatura 774
3.2. Termodinamička temperatura i njene jedinice 776
1. Osnova termodinamičke temperaturne skale, 2. Trojna tačka vode, 3. Ledište vode, 4. Jedinica termodinamičke temperature kelvin, 5. Ukinuće kratica °K i deg, 6. Jedinica stupanj Rankinea 784
3.3. Plinska termometrija kao osnova termodinamičke temperature 784
1. Načelo djelovanja plinske termometrije, 2. Plinski termometar na stalni volumen, 3. Plinski termometar na stalni tlak, 4. Plinski termometar na stalnu temperaturu, 5. Korekture plinskih termometara, 6. Nesigurnost najpreciznijih mjerenja temperature 790
3.4. Celzijeva i Fahrenheitova termodinamička temperaturna skala te pripadne jedinice 790
1. Celzijeva termodinamička temperatura, 2. Fahrenheitova termodinamička temperatura, 3. Veza između Celzijeve i Fahrenheitove skale 795
3.5. Iz povijesti empiričkih temperaturnih skala 798
1. Fahrenheitova temperaturna skala, 2. Réaumurova temperaturna skala, 3. Celzijeva temperaturna skala 800
3.6. Međunarodna empirička temperaturna skala 1968 800
1. Temelj Međunarodne temperaturne skale 1968, 2. Precizna interpolacija temperature, 3. Interpolacija temperature u ostala tri područja, 4. Ravnotežna stanja vodika, 5. Ravnotežna stanja neona, kisika i vode, 6. Mjerenje tlaka i njegov utjecaj na krutišta, 7. Standardni otpornički termometar i termopar, 8. Razlika između temperaturnih skala 1968 i 1948, 9. Iz povijesti Međunarodne temperaturne skale 815
3.7. Temperatura kao zavisna veličina i posljedice takvog shvaćanja 819
1. Temperatura kao zavisna veličina, 2. Izvedena jedinica temperature stefan, 3. Specifične topline i njihove jedinice, 4. Entropija, 5. Posljedice uvođenja $\theta = T$ u fenomenološku termodinamiku 826

4. Međunarodni sistem jedinica u nauci o toplini

4.1. Karakteristike Međunarodnog sistema jedinica (SI) 830
1. Svrha uvođenja i prednosti SI, 2. Definicije jedinica SI, 3. Građenje složenih jedinica SI 831

4.2. Neke značajke SI u nauci o toplini 834
1. Primjena mase umjesto težine, 2. Iščezavanje toplinskih i ostalih ekvivalenata, 3. Utjecaj SI na toplinske proračune, 4. Iščezavanje veličine *g* iz jednadžbi, 5. Promjena oblika zakona sličnosti 845
4.3. Prijelazni period uvođenja SI u nauku o toplini 849
1. Postojanje vansistemskih jedinica, 2. Dopuštene vansistemske jedinice 850

5. Sistemi jedinica nauke o toplini. Različite metričke i angloameričke jedinice topline

5.1. Koherentni i Tehnički sistem jedinica nauke o toplini 852
1. Koherentni sistem jedinica nauke o toplini, 2. Tehnički »sistem« jedinica nauke o toplini, 3. Angloamerički Tehnički »sistem« jedinica 857
5.2. Kalorija parnih tablica i kalorija petnaestog stupnja 857
1. Općenito o kalorijama, 2. Kalorija parnih tablica od godine 1956, 3. Kalorija petnaestog stupnja, 4. Jedinice thermie i frigorie 861
5.3. Ostale kalorije i usporedba različitih kalorija 861
1. Srednja kalorija, 2. Termokemijska kalorija, 3. Usporedba različitih kalorija 862
5.4. Angloameričke jedinice topline 863
1. Steam Table British thermal unit, 2. Mean British thermal unit, 3. Ostale angloameričke jedinice topline 864
5.5. Neke mjerne jedinice nuklearne energetike 865
1. Veličina specifični odgor (specific burnup), 2. Jedinica energije megavatdan (MWd), 3. Druge jedinice odgora nuklearnog goriva, 4. Suvišnost jedinice W_{el} 868

6. Preračunavanje nekih vansistemskih jedinica u jedinice SI. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi

6.1. Jedinice specifičnih veličina i jedinice toplinske snage 869
1. Specifične veličine i toplinska snaga, 2. Preračunavanje jedinice kcal/kg, 3. Preračunavanje jedinice Btu/lb, 4. Preračunavanje jedinica kcal/s, kcal/min i kcal/h, 5. Preračunavanje angloameričkih jedinica toplinske snage, 6. Usporedba različitih jedinica toplinske snage 871
6.2. Jedinice gustoće snage, toplinske vodljivosti te koeficijenata prolaza i prijelaza topline 871
1. Preračunavanje jedinice kcal/(m²h), 2. Preračunavanje jedinice Btu/(ft²h), 3. Preračunavanje jedinica specifične toplinske vodljivosti, 4. Preračunavanje jedinica koeficijenata prolaza i prijelaza topline 873
6.3. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi 873
1. Brzina istjecanja plinova i para, 2. Specifični potrošak pare i topline 875

1. Temeljni pojmovi kemije i nauke o toplini

1.1. Neke osobitosti nauke o toplini i kemije

1.1.1. Temperatura kao četvrta osnovna veličina. U geometriji je dovoljna jedna osnovna veličina, *duljina*. Njome možemo izraziti i površinu i volumen, a isto tako i kut, te prostorni kut (vidi poglavlje B.1). U kinematici sama duljina nije više dovoljna. Zato se tamo uvodi i druga osnovna veličina, *vrijeme*. Pomoću duljine i vremena izgradili smo pojmove brzine, ubrzanja i kutnog ubrzanja (poglavlje B.2). Dinamici nisu dovoljne ni dvije osnovne veličine, pa joj se zato pridružuje treća. Obično se za treću osnovnu veličinu odabire ili *masa m* ili sila *F* (poglavlje B.7 i odsječak B.8.1). Sa tri osnovne veličine može se potpuno obraditi čitava mehanika, klasična i relativistička. Iskustvena termodinamika zahtijeva da se trima osnovnim veličinama pridruži još i četvrta, *temperatura*.

Pri uvođenju osnovnih veličina (npr. duljine, vidi odlomak A.8.1.1) polazili smo od iskustvene predodžbe o osnovnim veličinama. Veličinu »duljina« nismo mogli definirati već poznatim veličinama, pa smo stoga takve vrste veličina nazvali aksiomskima. Takva je veličina i temperatura, koju u nauci o toplini obično smatramo osnovnom veličinom, i prema tome je ne definiramo (drukčiji nazor vidi u odsječku 3.7). Pomoću osnovne veličine »temperatura« definiramo niz drugih, izvedenih veličina.

Temperatura se ne očituje samo kao poticaj na jednu vrstu nadražaja čovjekovih osjetila, već i na niz drugih načina, od kojih ćemo spomenuti samo neke. Povišenje temperature uzrokuje promjenu izmjerâ tjelesa; neka se tijela povećavaju, druga smanjuju. S porastom temperature produžuje se npr. metalni štap, skraćuje kaučukova nit, plinovi povećavaju svoj obujam itd. Promjena temperature uzrokuje promjenu električkog otpora vodiča; pri višim temperaturama otpor bakrene žice je veći, a ugljenog štapa manji.

Promjena temperature uzrokuje promjenu agregatnog stanja tvari. Pri niskim temperaturama voda se, na primjer, skrućuje, pri višim ona je u tekućem stanju, a pri još višim prelazi u paru (vidi odlomak 3.2.2). Razlike temperature uzrokuju nastanak električkog napona između dva zavarena metala (odlomak 3.6.3). Fizikalnih i kemijskih reakcija što ih uzrokuje promjena temperature ima neobično mnogo i njima se katkada koristimo, a ponekad se u svakodnevnom životu i borimo protiv njih.

1.1.2. Mjerenje temperature. Svaku od navedenih reakcija na temperaturu možemo upotrijebiti kao osnovu za *mjerenje temperature*. Tako se doista i radi: živin termometar promjenom visine živina stupca mjeri temperaturu bolesnika, plinski termometar (s vodikom ili helijem umjesto živom; vidi odsječak 3.3) služi

za najpreciznija baždarenja ostalih termometara, a termoelemenata ima na stotine u svakoj modernoj tvornici.

Prema tome za termometričko tijelo možemo u načelu upotrijebiti gotovo svaku tvar čije se termometrijsko svojstvo može reproducirati svugdje i u dovoljnom broju primjeraka. Stoga je značajka temperature bilo koja fizikalna veličina za koju se jednoznačno dogovorimo o načinu njena mjerenja. S mjernog stajališta povoljno je pri tom odabrati takvo termometričko tijelo koje se mijenja *razmjerno* s temperaturom.

Temperatura je temeljna fizikalna veličina tzv. nauke o toplini, ali bez nje se ne može zamisliti ni jedna druga grana tehnike i znanosti, pa ni zdravstvo, energetika — ukratko: ona prožima čitav život na našem planetu pa čak i ljudske pothvate izvan Zemlje. Zato ćemo temperaturi, njenim jedinicama i drugim pojavama vezanima uz temperaturu posvetiti znatan dio ove knjige (poglavlje D.3). Budući da se veličina »temperatura« pojavljuje u zakonitostima ponašanja krutih tvari, plinova, para i plazme, podrobno ćemo je razmotriti pošto u poglavlju 2 dodirnemo neke od bitnih pojava i fizikalnih veličina nauke o toplini. Stoga ćemo do poglavlja 3 s veličinom *temperatura* T operirati kao da nam je to posve poznat pojam, a isto tako i njene jedinice. Napomenimo ovdje samo to da pod simbolom T razumijevamo tzv. termodinamičku temperaturu (za razliku od Celzijeve, koju označujemo slovom ϑ ili t).

1.1.3. Količina tvari i veličinske jednadžbe. Kemijski procesi, elektrolize i toplinske pojave odigravaju se međusobnim djelovanjem golemog mnoštva čestica, tj. molekula, atoma, iona itd. Od tih čestica mikrosvijeta sastoje se tvari našeg makrosvijeta, u kojem predmete u smislu »količine tvari« karakteriziramo masom, na primjer: masa kupljene robe, masa automobila itd. (vidi odsječak B.7.3). Kemijske i toplinske procese istražujemo, predviđamo i proračunavamo na dva načina, ovisno o tome koji nam je način u danom slučaju prikladniji ili brži. Prvi se način oslanja na predodžbu o tvari sastavljenoj od mnoštva čestica, dok drugi način ne vodi računa o tome od čega su i kako predmeti sastavljeni.

Te dvije interpretacije tvari dolaze zajedno na mnogim mjestima tehničke i znanstvene operative. Ako pri tom nisu precizno definirani pojmovi, tj. fizikalne veličine (u smislu odsječka A.1.2), nastaju pojmovne teškoće, zamorna i nesigurna preračunavanja, pa i pogreške. Stoga je u odsječcima 1.3 i 1.6 znatna pažnja posvećena tome da se podrobno utvrdi što se danas razumijeva pod fizikalnom veličinom »količina tvari« Z u smislu broja čestica. Na tom su polju u novije vrijeme postignuta znatna usavršenja (odlomak 1.3.2) u međunarodnim relacijama. Zasluga za to dijelom pripada i unifikaciji tzv. skale relativnih atomskih masa (odsječak 1.2). Slijedom toga »količina tvari« u smislu mase (odlomak 1.6.4) sve se manje upotrebljava.

Cijela je ova knjiga prožeta idejom da je dosljedna primjena veličinskih jednadžbi daleko vrednija od propisivanja primjene ovog ili onog sistema jedinica (vidi poglavlja A.2 i B.10 te odsječak D.6.3). Stoga je prirodno da smo tu ideju pokušali primijeniti i na računanja u kemiji i nauci o toplini. Pri tom smo veličinski nazor unosili postupno: najprije pri definiciji relativne molekularne mase (odlomak 1.2.2), zatim pri uvođenju fizikalne veličine »količina tvari« i njenih jedinica (odlomci 1.3.1,2,3), pa onda pri definiranju tzv. molnih veličina (odsječak 1.4). Konačno smo u odsječku 1.6 veličinski nazor pokušali primijeniti na postojeću simboliku kemijskih formula. Sve to spominjemo zato jer u kemiji i nauci o toplini mladi stručnjaci — pogotovo studenti i đaci tehničkih škola — dosta

često s teškoćom premošćuju raspon između dvojakog interpretiranja tvari »količinom tvari« i »masom«. Zbog toga na pojedinim mjestima svog proračuna moraju pribjeći upotrebi (stvarnoj ili misaonoj) znaka $\hat{=}$ (»odgovara«, »predstavlja isto«; vidi odlomak 1.6.3). Time se prekida kontinuitet računanja (kakav je na primjer: $F = 50\ \mathrm{N}$, $v = 12\ \mathrm{m/s}$, $P = Fv = 50\ \mathrm{N} \cdot 12\ \mathrm{m/s} = 600\ \mathrm{W}$), gubi sigurnost, opterećuje pamćenje i dodatno troši vrijeme. Kontinuiranim veličinskim računanjem (odlomak 1.3.4 i odsječak 1.4) nastojimo prebroditi te neprilike.

1.2. Relativna atomska i molekularna masa

1.2.1. Relativna atomska masa. Sve se tvari sastoje od atoma; do danas su poznate 103 vrste atoma (vidi tablicu 1 u prilogu knjige). Tvari koje se sastoje od istovrsnih atoma nazivamo *kemijskim elementima*. O vrsti atoma ovise fizikalna i kemijska svojstva elemenata (vidi odsječak 1.7). Atomi različitih elemenata mogu se međusobno spajati; pri tom nastaju kemijski spojevi čija su fizikalna i kemijska svojstva potpuno različita od svojstava elemenata koji su se spojili.

Pri utvrđivanju ili predviđanju kvantitativnih odnosa u kemiji, fizikalnoj kemiji i nauci o toplini izvanredno je korisna brojčana fizikalna veličina *relativna atomska masa*, koja se obično označuje slovom A. »Relativna atomska masa« je omjer mase m_1 jednog atoma nekog kemijskog elementa i jedne dvanaestine mase m_{1C} nuklida ugljika ^{12}C, dakle

$$\text{relativna atomska masa } A = \frac{\text{masa atoma } m_1}{\frac{1}{12} \text{ mase nuklida ugljika } {}^{12}C},$$

odnosno u obliku jednadžbe sa simbolima

$$A = \frac{m_1}{\frac{1}{12} m_{1C}} = 12 \frac{m_1}{m_{1C}}. \qquad (1.2\text{-}1)$$

Veličinu A većina autora naziva »atomska masa« ili »atomska težina« (vidi kraj ovog odlomka). Iz definicijske jednadžbe (1.2-1) vidimo da izraz »atomska masa« nije ispravan, jer A ne predstavlja masu, već *omjer* masa dviju čestica, dakle čist broj.

Pri definiranju »relativne atomske mase« A upotrijebili smo riječ *nuklid* (engl. nuclide). Njome se precizno obilježava da je riječ o takvim neutralnim atomima kemijskog elementa koji imaju međusobno jednake atomske brojeve i međusobno jednake masene brojeve. Pri tom se pod »atomskim brojem« razumijeva višekratnik elementarnog električkog naboja jezgre atoma (broj protona), a pod »masenim brojem« suma broja protona i neutrona jezgre. Prema tome riječ »nuklid« ne znači isto što i *izotop*; pod »izotopima« razumijevamo naime takve atome kemijskog elementa koji imaju međusobno jednake atomske brojeve, ali različite masene brojeve. Opisano značenje riječi »nuklid« prihvatile su godine 1951. dvije velike i važne međunarodne organizacije: International Union of Pure and Applied Physics (na sedmom zasjedanju Generalne skupštine u Kopenhagenu) i International Union of Pure and Applied Chemistry (na šesnaestom zasjedanju Generalne skupštine u New Yorku).

Veličinu A, definiranu jednadžbom (1.2-1), mnogi autori nazivaju *atomska težina*. U stvari i tu je riječ o »*relativnoj* atomskoj težini«, tj. o čistom broju. Budući

da je fizikalna veličina težina G definirana umnoškom mase m i normiranog ubrzanja zemljine teže $g_0 = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2} = \mathrm{const}$ (vidi odlomak B.7.3.2), dakle $G = mg_0$, to se jednadžba (1.2-1) može napisati u obliku

$$A = 12\frac{G_1}{G_{1C}}.$$

Ovdje je $G_1 = m_1 g_0$ normirana težina jednog atoma nekog kemijskog elementa, a $G_{1C} = m_{1C} g_0$ normirana težina nuklida ugljika ^{12}C.

1.2.2. Relativna molekularna masa. Riječ *molekula* označuje u kemiji česticu koja je sastavljena od atoma. Na primjer »vodikova molekula« H_2 sastoji se od dva atoma vodika (H). Pri sobnoj temperaturi plin vodik sastoji se od takvih dvoatomnih *molekula* H_2; suprotno tome, živine pare, također pri sobnoj temperaturi, sastoje se od *atoma* žive (Hg); molekula žive je, dakle, jednoatomna. Prema tome je »molekula« širi pojam od »atoma«, jer on obuhvaća kako višeatomne molekule tako i jednoatomne molekule, same atome.

U analogiji s »relativnom atomskom masom« A iz jednadžbe (1.2-1), molekule se karakteriziraju brojčanom fizikalnom veličinom *relativna molekularna masa* M. Ta veličina definirana je jednadžbom

$$M = \frac{m_m}{\frac{1}{12} m_{1C}} = 12\frac{m_m}{m_{1C}}, \qquad (1.2\text{-}2)$$

tj. relativna molekularna masa je omjer mase m_m jedne molekule kemijskog elementa ili kemijskog spoja i mase jedne dvanaestine mase m_{1C} nuklida ugljika ^{12}C. Umjesto izraza »relativna molekularna masa« upotrebljavaju se i termini *molekulska masa* ili *molekulska težina*.

Relativnu molekularnu masu M *kemijskog spoja* lako je izračunati pomoću jednadžbe (1.2-2) ako se zna sastav molekule tog spoja, jer su relativne atomske mase M kemijskih elemenata vrlo dobro poznate (tablica **1** u prilogu knjige). Uputu za izračunavanje M izvest ćemo na općem primjeru. Zamislimo da masa jedne molekule kemijskog spoja iznosi m_m, a ta molekula sastavljena je od x atoma elementa »a«, y atoma elementa »b« itd. (npr. molekula vode H_2O sastoji se od $x = 2$ atoma vodika H i od $y = 1$ atom kisika O). Ako masa jednog atoma elementa »a« iznosi m_{1a}, a masa jednog atoma elementa »b« m_{1b} itd., onda masa jedne molekule kemijskog spoja iznosi

$$m_m = x m_{1a} + y m_{1b} \ldots$$

Uvrstimo li ovaj izraz u definicijsku jednadžbu relativne molekularne mase (1.2-2), dobivamo

$$M = 12\frac{m_m}{m_{1C}} = x\frac{12\, m_{1a}}{m_{1C}} + y\frac{12\, m_{1b}}{m_{1C}} + \ldots \qquad (1.2\text{-}3)$$

Pogled na jednadžbu (1.2-1) pokazuje nam da omjeri $12\, m_{1a}/m_{1C}$ itd. predstavljaju relativne atomske mase A pojedinih elemenata. Prema tome izraz (1.2-3) možemo napisati u obliku

$$M = x A_a + y A_b + \ldots, \qquad (1.2\text{-}4)$$

što riječima možemo opisati ovako: relativna molekularna masa M kemijskog spoja jednaka je zbroju umnožaka broja atoma i pripadnih relativnih atomskih masa elemenata koji tvore molekulu spoja.

Jednadžbu (1.2-4) možemo pomoću simbola $M_a = xA_a$, $M_b = yA_b$ itd. napisati u obliku

$$M = M_a + M_b + \ldots, \tag{1.2-5}$$

tj. relativna molekularna masa M *kemijskog spoja* jednaka je zbroju relativnih masa onih molekula čijom je međusobnom reakcijom nastala molekula spoja. (Više o molekulama vidi u odsječku 1.6.)

Primjer 1. Kolika je vrijednost relativne molekularne mase kuhinjske soli? Znamo da je kuhinjska sol natrijev klorid (NaCl), a svaka molekula tog klorida sastoji se od jednog atoma natrija (Na) i jednog atoma klora (Cl). U duhu jednadžbe (1.2-4) je, dakle: $x = 1$, $y = 1$, te $A_a = A_{Na}$ i $A_b = A_{Cl}$. U tablici 1 u prilogu knjige nalazimo vrijednosti $A_{Na} = 22{,}9898$, $A_{Cl} = 35{,}453$. Prema tome relativna molekularna masa kuhinjske soli iznosi

$$M_{NaCl} = A_{Na} + A_{Cl} = 22{,}9898 + 35{,}453 = 58{,}4428.$$

To znači da je masa jedne molekule NaCl 58,4428 puta veća od jedne dvanaestine mase nuklida ugljika ^{12}C.

Primjer 2. Kolika je relativna masa M molekule amonijaka NH_3? Računat ćemo pomoću jednadžbe (1.2-4). Ako pod »*a*« shvatimo dušik N, a pod »*b*« vodik H, imamo $x = 1$, $y = 3$ (molekula amonijaka NH_3 sastoji se od jednog atoma dušika i tri atoma vodika). Budući da je prema tablici 1 u prilogu knjige

$$A_N = 14{,}0067, \qquad A_H = 1{,}00797,$$

jednadžba (1.2-4) uvrštenjem navedenih podataka daje

$$M_{NH_3} = 1 \cdot 14{,}0067 + 3 \cdot 1{,}00797 = 17{,}0306,$$

tj. masa jedne molekule NH_3 17,0306/12 puta je veća od mase nuklida ugljika ^{12}C. (Daljnji primjeri računanja M mogu se naći u odsječku 1.6.)

1.2.3. Međunarodna ugljikova skala relativnih masa. Skup vrijednosti brojčane fizikalne veličine »relativna atomska masa« A svih poznatih kemijskih elemenata zove se »skala relativnih atomskih masa« (engl. scale of the relative atomic masses). Za osnovu skale načelno se može odabrati masa m_1 (vidi odlomak 1.2.1) atoma bilo kojeg kemijskog elementa. Zato se ona mora pobliže označiti u pogledu tog svog ishodišta. Skala relativnih atomskih masa, koju smo definirali u odlomku 1.2.1, zove se *ugljikova skala* (engl. carbon scale), jer se oslanja na masu nuklida ugljika ^{12}C. Osim toga, ona se zove i *međunarodna* ili *jedinstvena*, jer je godine 1960. uvedena zato da bi kako kemičari, tako i fizičari, a time i svi drugi upotrebljavali *iste vrijednosti* A za iste tvari (do tada nije bilo tako, vidi odlomak 1.2.4).

U razdoblju od godine 1955. do 1960. nekoliko je studijskih odbora Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku (International Union of Pure and Applied Physics, IUPAP) i Međunarodne unije za čistu i primijenjenu kemiju (International Union of Pure and Applied Chemistry, IUPAC) pripremalo uvođenje jedinstvene ugljikove skale relativnih atomskih masa. Rezultat je bila rezolucija IUPAP koju je ona donijela na svojoj desetoj generalnoj skupštini godine 1960. (paralelno je analognu rezoluciju donijela IUPAC). Ta, jednoglasno prihvaćena rezolucija glasi:

Following the report (Document S. G. 59-5) of the study committee on nuclidic masses, presided by Prof. I. Mattauch, and in agreement with the recommendation of the SUN Commission and that of the International Union of Pure and Applied Chemistry,

The 10th General Assembly of the IUPAP recommends the adaption of the exact number **12** as the relative nuclidic mass of the carbon isotope of mass number **12.**

This action will effect a unification of the physical scale of relative nuclidic masses and the chemical scale of atomic weights.

Naša definicija jedinstvene ugljikove skale relativnih masa iz odlomka 1.2.1 u skladu je, kako vidimo, sa citiranom rezolucijom IUPAP. Iz gornjeg teksta možemo razabrati i to da se tako definirana relativna masa zove i »nuklidna«, jer se temelji na nuklidu ugljika ^{12}C (vidi odlomak 1.2.1).

Prirodno je da se upitamo: koji su razlozi nedavno naveli skupove vrhunskih fizičara i kemičara da se odreknu svojih dotadašnjih skala i da godine 1960. prihvate tu novu, jedinstvenu ugljikovu skalu relativnih atomskih masa? Razlog je postojanje *izotopa*, pod kojima razumijevamo atome koji imaju jednaki električki naboj jezgre, ali *različite* mase. Takvi atomi praktički imaju isti sastav elektronske ljuske i pripadaju jednom kemijskom elementu periodnog sistema (vidi odsječak 1.7). Pojava izotopije otkrivena je godine 1909. prilikom proučavanja prirodnih radioaktivnih elemenata. Zatim je godine 1920. primjenom metodâ masene spektrometrije izotopija zapažena i u prirodnim spojevima neradioaktivnih elemenata.

Istraživanja prirodnih spojeva različitih elemenata pokazuju da stabilni izotopi postoje kod većine elemenata periodnog sistema. Tako, na primjer, uopće nisu bili nađeni atomi klora relativne atomske mase 35,453, koja odgovara periodnom sistemu, već se klor u svojim spojevima sastoji od atoma relativne mase 34,980 (udio 75,4 %) i atoma relativne mase 36,977 (udio 24,6 %). Prema tome je 35,453 srednja vrijednost.

Izotopni sastav elemenata u njihovim prirodnim spojevima odlikuje se velikom stalnošću. Sve donedavna nije bila pronađena razlika izotopnog sastava elemenata s obzirom na različite njihove prirodne spojeve i različita nalazišta. Razlika nije zapažena ni prema izotopnim sastavima elemenata u meteoritima. No u najnovije je vrijeme povećana preciznost eksperimentiranja u nekim slučajevima pouzdano utvrdila nevelika, doduše, ali izmjerljiva odstupanja.

Tako se, na primjer, izotop kisika ^{18}O nalazi s većim udjelom u kisiku vapnenca negoli u kisiku vode oceana, a izotop ^{13}C s većim je udjelom u ugljiku vapnenca negoli u ugljiku atmosferskog ugljičnog dioksida. No te razlike u sadržaju izotopa vrlo su malene i malo utječu na praktičnu primjenu relativne atomske mase A. Moguća odstupanja ne premašuju za vodik $\pm 1 \cdot 10^{-5}$, za ugljik $\pm 5 \cdot 10^{-5}$, a za kisik $\pm 1 \cdot 10^{-4}$. Najveće razlike pronađene su za bor i sumpor u iznosu $\pm 3 \cdot 10^{-3}$.

Nuklid ugljika ^{12}C, koji se sastoji od 6 neutrona, 6 protona i 6 elektrona, vrlo je prikladan za mjerenje relativnih masa A drugih elemenata metodama nuklearne fizike, čija relativna nepreciznost iznosi oko 10^{-7}. Osim toga ^{12}C relativno je lako odvojiti od izotopa ^{13}C, s kojim dolazi u omjeru oko 1 : 100. Nuklid ^{12}C prikladan je i u primjeni metoda masene spektrometrije. Jedan razlog je taj što dvostruko, trostruko ili četverostruko ionizirani ^{12}C može poslužiti kao dubletni partner za nuklide čiji je broj nukleona 6, 4 i 3. Drugi je razlog taj što je ugljik takav element od kojeg se mogu proizvesti ionizirane molekule sa najvećim brojem istovrsnih atoma, tj. deset i više atoma ugljika u jednoj molekuli. Uz sve nabrojene prednosti dolazi i činjenica da ugljik omogućuje stvaranje više hidrida $^{12}C_nH_m$ negoli bilo koji drugi element.

1.2.4. Kemijska i fizikalna skala relativnih masa. Najstarija skala relativnih atomskih masa, *kemijska*, bila je definirana u odnosu prema jednoj šesnaestini mase atoma kisika O, dakle analogno definiciji A u odlomku 1.2.1: »Rela-

tivna atomska masa A je omjer mase atoma neke tvari i jedne šesnaestine mase atoma kisika.« U ovom stoljeću izotopna su istraživanja pokazala (o izotopiji vidi odlomak 1.2.3) da se kisik u prirodi pojavljuje u obliku mješavine svojih izotopa ^{16}O, ^{17}O i ^{18}O. Udjeli tih izotopa u mješavini nisu uvijek isti. To znači da za najpreciznija mjerenja kemijska skala A_K nije dovoljno pouzdana u pogledu reproducibilnosti. Kemijska skala imala je za referenciju masu atoma prosječne mješavine spomenutih kisikovih izotopa (oznaka $\overline{O}$). Prema gore navedenoj definiciji osnova kemijske skale je $A(\overline{O})_K = 16$.

Dvadesetih godina ovog stoljeća otkrivena je izotopija kisika. Precizna i opsežna istraživanja pokazala su da se učestalosti pojavljivanja stabilnih izotopa ^{16}O, ^{17}O i ^{18}O u mješavini $\overline{O}$ odnose približno kao 99,76:0,04:0,2. Zato je uvedena tzv. *fizikalna skala* relativnih atomskih masa u kojoj je izotopu ^{16}O propisana vrijednost $A(^{16}O)_F = 16$ (točno). Otuda potječe i naziv »izotopna relativna masa«, koji se može zapaziti u literaturi. U toj fizikalnoj skali je npr. $A(^{17}O)_F = 17{,}004\,507$, a $A(^{18}O)_F = 18{,}004\,875$. Na temelju niza mjerenja utvrđen je omjer između vrijednosti relativnih atomskih masa u fizikalnoj i kemijskoj skali, tzv. *Smythov faktor*:

$$\frac{A_F}{A_K} = 1{,}000\,279\,(1 \pm 3 \cdot 10^{-6}).$$

Uz relativnu atomsku masu kisika u analitičkoj je kemiji vrlo važna relativna masa *dušika* i *srebra*. I kod ova dva elementa pojavljuju se izotopi, dakle i analogne poteškoće. Mjerenja su dala rezultate koje sadrži tablica D-1.

Tablica **D-1**

Relativne atomske mase mješavine izotopa kisika, dušika i srebra u kemijskoj i fizikalnoj skali

Element (mješavina izotopa)	A_K	A_F
Kisik $\overline{O}$	16	$16{,}004\,465\,(1 \pm 3 \cdot 10^{-6})$
Dušik $\overline{N}$	$14{,}0081\,(1 \pm 5 \cdot 10^{-5})$	$14{,}011\,17\,(1 \pm 2 \cdot 10^{-5})$
Srebro $\overline{Ag}$	$107{,}882\,(1 \pm 1 \cdot 10^{-3})$	$107{,}912\,(1 \pm 1 \cdot 10^{-3})$

Crtice iznad simbola kemijskih elemenata označuju da je riječ o mješavini izotopa.

Pri kraju ovog razmatranja korisno je zabilježiti odnose koji vladaju između vrijednosti relativnih atomskih masa u opisane tri skale. Da bismo onemogućili bilo kakvu pogrešku, najprije ćemo objasniti značenje simbola:

A — vrijednost relativne atomske (nuklidne) mase u međunarodnoj ugljikovoj skali s osnovom ^{12}C.

A_F — vrijednost relativne atomske (izotopne) mase u fizikalnoj skali s osnovom ^{16}O,

A_K — vrijednost relativne atomske mase u kemijskoj skali s osnovom $\overline{O}$ (mješavina izotopa).

Iz tablica koje su godine 1960. objavili *J. H. E. Mattauch* i dr. slijedi da se vrijednosti izražene fizikalnom skalom (A_F) preračunavaju u vrijednosti ugljikove skale (A) pomoću izraza

$$\frac{A_F}{A} = 1{,}000\,317\,917\,(1 \pm 2 \cdot 10^{-8}),$$

tj. vrijednosti A_F treba prilikom prijelaza na A *smanjiti* za oko 0,318 promila. Isto vrijedi i za jedinicu mol (vidi odlomak 1.3.2), jer je

$$\frac{\text{mol}(^{16}\text{O})}{\text{mol}(^{12}\text{C})} = \frac{A_F}{A}.$$

Za preračunavanje vrijednosti relativnih atomskih masa izraženih kemijskom skalom (A_K) u vrijednosti ugljikove skale (A) upotrebljava se relacija

$$\frac{A_K}{A} = \frac{\text{mol}(\bar{\text{O}})}{\text{mol}(^{12}\text{C})} = 1{,}000\,042\,20 \ldots 1{,}000\,042\,95.$$

Prvi broj odnosi se na rezultate dobivene mjerenjem pomoću metoda nuklearne fizike, a drugi na rezultate dobivene masenom spektrometrijom. To znači da vrijednosti A_K treba prilikom prijelaza na A *smanjiti* za oko 0,043 promila.

1.3. Količina tvari i njena jedinica mol

1.3.1. Fizikalna veličina »količina tvari«. U privredi i ekonomici izraz »količina« primjenjuje se za stvari koje se sastoje od mnogo pojedinačnih dijelova, čestica. Pri tom te stvari obično ne zadržavaju svoj oblik pod međusobnim djelovanjem sastavnih dijelova. To su, na primjer, krute tvari u obliku meljavine ili praška, kaše, tekućine, plinovi. Govorimo o količini ugljena, količini primjesa, količini zraka u prostoriji itd. Čak ni promjena agregatnog stanja ne mijenja našu predodžbu o pojmu »količina«: grumen leda predstavlja istu količinu tvari i pošto se otopio u vodu.

»Količina« *nije*, dakako, masa, ali *ima* masu, *ima* volumen, sastoji se od određenog *broja komada*! U svakodnevnom životu se pojmovi masa, volumen, broj komada itd. primjenjuju za izražavanje rezultata mjerenja neke količine ako treba kvantitativan odgovor na pitanje »koliko«. U takvim slučajevima, na primjer, odgovaramo: 10 kilograma brašna (masa!), 2 litra vina (volumen!), 6 jaja (broj!) itd. Neku količinu vina možemo na primjer opisati njenim volumenom V, masom m, težinom G itd. Ako to vino, dakle, možemo svesti na volumen, masu, težinu itd., onda to znači da su te veličine (V, m, G itd.) osnova neke druge veličine, koja se njima može izmjeriti i na koju smo pri tom *stvarno mislili*. Tu veličinu nazivamo *količinom*. Ona nam govori — da se izrazimo posve neznanstveno — koliko je od neke konkretne tvari (tijelo, predmet, tvar) prisutno *ovdje*. Jasno je da tako ne možemo govoriti o *svakoj* konkretnoj stvari u smislu njene »količine«. Što bi npr. trebalo da znači »količina radio-aparata«? Može se govoriti samo npr. o količini radio-aparata određene vrste, koji su proizvedeni u toku stanovitog vremena itd.

Ovaj nam primjer pokazuje kako se pojam konkretne stvari suzuje, ako nam je potrebna iole oštrija definicija pojma »količina« u znanosti i tehnici. Stoga se količina može definirati ovako: »Ako jednake konkretne stvari čine veću cjelinu, onda pod količinom konkretnih pojedinačnih stvari razumijevamo jednostavno njihov

broj« (DIN). U trgovini govorimo o »broju komada«; kupujemo, na primjer, 20 cigareta. U trgovini gotovih proizvoda broj komada je najprisniji opis »količine«, na primjer: 6 jaja, 4 žemičke itd. (Uzgred napominjemo da još mnogi jugoslavenski fizičari, naročito u Sloveniji, umjesto naziva »veličina« upotrebljavaju riječ »količina«, iako tom riječju opisuju »fizikalnu veličinu«, dakle ono što se npr. engleski kaže quantity, francuski grandeur, njemački Grösse itd.)

Tehnika i znanost bave se *tvarima* (engl. substance, njem. Stoff). U većini slučajeva to su *homogene tvari* koje se sastoje od jednakih *molekula*. U tom slučaju su »pojedinačne stvari« (vidi gore citiranu definiciju »količine« prema DIN) molekule, pa je, dakle, fizikalna veličina »količina tvari« jednostavno broj molekula Z. Ako »količina tvari« Z ima masu m, a masa je svake od jednakih molekula m_1, onda očito vrijedi odnos

$$Z=\frac{m}{m_1}=\frac{\rho V}{m_1}=\frac{G/g_0}{m_1}. \tag{1.3-1}$$

Ovdje slovo $\rho=m/V$ označuje fizikalnu veličinu gustoća (vidi odlomak B.3.1.2), a $g_0=9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$ je normirano ubrzanje zemljine teže (vidi odlomak B.7.3.2).

Neki autori nazivaju veličinu Z »molekularna količina tvari«, ali to vjerojatno nije u redu, jer »pojedinačna stvar« može biti molekula, atom, ion, elektron itd. Zato je ispravnije upotrebljavati općenitiji naziv »količina tvari«, dakle bez pridjeva »molekularna«. Tako je i u drugim jezicima, npr. engleski amount of substance ili amount of matter ili quantity of substance (stariji naziv), francuski quantité de matière, njemački Teilchenmenge ili Stoffmenge.

»Količina tvari« Z, definirana jednadžbom (1.3-1) kao omjer dviju istorodnih fizikalnih veličina (mase!), također je fizikalna veličina. Takva je veličina npr. i »korisnost« stroja $\eta=W_2/W_1$, definirana kao omjer odvedene i dovedene energije. Za one veličine koje su istodobno i brojevi (npr. Z i η) kažemo da su *brojčane veličine* ili »bezdimenzionalne veličine« (tzv. razred brojčanih veličina; vidi kraj odlomka B.1.1.1).

1.3.2. O jedinici količine tvari. Pri upotrebi brojčane fizikalne veličine »količina tvari« Z iz jednadžbe (1.3-1) treba biti pažljiv. Ako na primjer napišemo

$$Z=2\cdot10^{25}\ \text{čestica}, \tag{1.3-2}$$

nismo učinili ništa loše. No očito je da čestica nije nikakva fizikalna veličina (u smislu fizikalnih veličina koje se u obliku simbola pojavljuju u jednadžbama; vidi npr. odsječak A.1.2), već *konkretna stvar*, a stvari i nazivi stvari ne ulaze u fizikalne formule. Isto tako u jednadžbe ne ulaze ni neke pojave, na primjer okretaj (vidi odsječak B.2.2) itd. U smislu fizikalne veličine (= apstrakcija svojstava tvari, stanja i procesa; vidi odsječak A.1.2) jednadžbu (1.3-2) treba napisati u obliku

$$Z=2\cdot10^{25}, \tag{1.3-3}$$

što tačno odgovara tvrdnji: »Broj čestica iznosi $2\cdot10^{25}$.« Radi bolje zornosti mogli smo (1.3-3) napisati u obliku $Z_č=2\cdot10^{25}$, gdje indeks č uz znak Z kaže da je riječ o broju čestica stanovite vrste. No u tom slučaju morali bismo $Z_č$, dakle s indeksom, pisati i u čitavom daljnjem tekstu.

Bilo bi *pogrešno* u jednadžbi (1.3-2) broj $2\cdot10^{25}$ smatrati *brojčanim iznosom*, a riječ »čestica« *mjernom jedinicom* veličine Z (formalno je to u skladu sa $G=\{G\}\,[G]$; vidi odsječak A.1.3.). Jedinica je, naime, utvrđeni stalni dio istorodne veličine. Na

primjer, jedinica mase kilogram je stanovita masa s kojom uspoređujemo sve ostale. Dodatak »čestica« u izrazu (1.3-2) to svakako nije, pa je stoga (1.3-3) jedini ispravan način uvođenja fizikalne veličine »količine tvari« Z u fizikalne jednadžbe. Isto vrijedi i za druge *stvari* i *pojave*, na primjer neutrone (odsječak H.1.4) ili raspade (odlomak H.1.2.4).

U skladu s osnovnom relacijom veličinskog računanja $G = \{G\}[G]$, tj. »veličina = brojčani iznos × jedinica« (vidi odsječak A.1.3), možemo i »količinu tvari« Z pisati kao

$$Z = \{Z\}[Z], \tag{1.3-4}$$

gdje $\{Z\}$ označuje brojčani iznos, slovo Z veličinu »količina tvari«, a $[Z]$ jedinicu te veličine.

Jedinicu $[Z]$ brojčane veličine »količina tvari« Z možemo odabrati po svojoj volji. To može biti bilo koji pozitivan broj, na primjer i broj 1, dakle

$$[Z] = 1,$$

što znači jedna molekula, jedan atom, jedan ion, jedan elektron — općenito jedna čestica (partikula). No iz historijskih razloga (vidi odlomak 1.6.4) odabrana je mnogo veća jedinica »mol«.

1.3.3. Definicija jedinice mol. Generalna konferencija za mjere i utege (vidi poglavlje A.7) do sada se nije bavila jedinicama brojčanih veličina kakva je npr. »količina tvari« Z definirana u odlomku 1.3.1, već jedinicama fizikalnih veličina kao što su duljina, masa, vrijeme, električki napon itd. Zbog toga se jedinice količine tvari ne pojavljuju ni u nacionalnim zakonodavstvima.

Budući da ovom knjigom želimo obuhvatiti gotovo sve jedinice koje se upotrebljavaju u suvremenoj znanosti, tehnici i privredi, naša daljnja izlaganja o jedinicama veličine količina tvari oslonit ćemo na preporuke Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku (International Union of Pure and Applied Physics, IUPAP) i Međunarodne unije za čistu i primijenjenu kemiju (International Union of Pure and Applied Chemistry, IUPAC). Godine 1957. IUPAP je, na prijedlog SUN (IUPAP-Commission on Symbols, Units and Nomenclature), prihvatila ovu definiciju jedinice količine tvari »mol«: »Mol je količina tvari koja sadrži toliki broj molekula (ili iona, atoma, elektrona) koliko ima atoma u 16 grama čistog izotopa kisika ^{16}O.«

Korisno je citirati cjelokupni tekst preporuke IUPAP od godine 1957, jer su njome definirane i tzv. molne veličine o kojima će biti riječi u odsječku 1.4:

Definition of the unit »mole«

1. It is recommended that the unit »mole« should be considered in physics as a unit for *quantity of substance* (indicated by the symbol Q). Its definition should be: »1 mole (symbol: mole) is the quantity of substance which contains the same number of molecules (or ions, or atoms, or electrons, as the case may be) as there are atoms in exactly 16 gram of pure oxygen isotope ^{16}O.« This quantity and corresponding unit should be considered in the field where they are used as a fundamental (or basic) quantity and unit respectively.

2. *Related quantities*, defined in terms of this quantity are: The molar mass (Definition: $M = m/Q$, m = mass of quantity of substance Q) with CGS unit: g/mole. The molar volume (Definition: v/Q, v = volume of quantity of substance Q) with the CGS unit: cm^3/mole. The molecular weight with the definition »physical molecular weight = 16 × molar mass of substance: :molar mass of (atomic) ^{16}O«, which quantity thus should be consider as a pure number. Avogadro's constant (Definition: N/Q, N is number of molecules in a quantity of substance Q) with the unit: $mole^{-1}$. Its present value should thus be expressed as: $N_0 = N/Q = 6{,}025 \cdot 10^{23}$ $mole^{-1}$.

3. *Remark*: The unit »grammole« (symbol: g-mole) should be considered as a non-coherent unit of mass characteristic for any particular substance.

Od godine 1957. do godine 1960, kada je održano deseto zasjedanje Generalne skupštine IUPAP (General Assembly of the IUPAP), IUPAC i IUPAP našle su zajedničko rješenje u pogledu jedinstvene skale relativnih atomskih masa (vidi odsječak 1.2): za referenciju je odabran ugljikov nuklid ^{12}C. Osim toga »količina tvari« dobila je na engleskom naziv »amount of substance« (vidi kraj odlomka 1.3.1) i uvedena je kratica mola za sve jezike: »mol«. Spomenuto deseto zasjedanje IUPAP prihvatilo je godine 1960. ovu definiciju jedinice mol:

> Mol je količina tvari koja sadrži toliki broj molekula (iona, atoma, elektrona) koliko ima atoma u 12 grama čistog ugljikovog nuklida ^{12}C.

Napominjemo da smo značenje riječi »nuklid« objasnili u odlomku 1.2.1 (iza jednadžbe 1.2-1). Navedena definicija mola od godine 1960. u stvari je dio opsežnijeg teksta IUPAP koji u originalu glasi:

In the field of chemical and molecular physics, in addition to the basic quantities having units defined by the General Conference on Weights and Measures, *amount of substance* is also treated as a basic quantity. The recommended basic unit is the mole, with the symbol mol, defined as the amount of substance which contains the same number of molecules (or ions, or atoms, or electrons, as the case may be), as there are atoms in exactly 12 gramme of the pure carbon nuclide ^{12}C.

Radi potpunosti navodimo da je od 4. do 7. aprila godine 1967. zasjedao Savjetodavni odbor za jedinice Međunarodnog komiteta za mjere i utege (vidi odlomak A.7.1.3). Odbor je u jednoj od svojih preporuka Međunarodnom komitetu (BIPM) predložio ovo: 1. da se jedinica količine tvari (quantité de matière) mol prihvati za sedmu osnovnu jedinicu Međunarodnog sistema jedinica (SI; vidi poglavlja D.4 i B.7), 2. da definicija mola glasi:

La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. Les entités élémentaires doivent être spécifiés et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, etc., ou bien des groupements spécifiés de telles particules.

Vidimo da se ta definicija u biti ne razlikuje od one koju je godine 1960. preporučila IUPAP. Generalna konferencija za mjere i utege nije na svom zasjedanju u oktobru 1967. prihvatila nikakvu rezoluciju u tom smislu, vjerojatno je prijedlog spomenutog Savjetodavnog odbora propao već u BIPM. To bi bilo i logično, jer mol je mjerna jedinica veličine »količina tvari« Z, dakle jedinica *brojčane veličine*. Prema jednadžbi (1.3-1) veličina Z definirana je *omjerom* dviju vrijednosti mase, a za fizikalnu veličinu »masa« u SI već postoji (osnovna) jedinica, kilogram.

1.3.4. Odnos između količine tvari i mase. Posve općenito o mjernoj jedinici brojčane veličine »količina tvari« Z raspravljali smo u odlomku 1.3.2. Ustanovili smo da se za jedinicu $[Z]$ može odabrati bilo koji pozitivan cijeli broj. S druge smo strane u prošlom odlomku 1.3.3 citirali današnju definiciju jedinice »mol«, koju možemo sažeti u izraz

$$[Z] = \text{mol} \mathrel{\widehat{=}} 12 \text{ grama nuklida } ^{12}C. \qquad (1.3\text{-}5)$$

Ovdje simbol $\mathrel{\widehat{=}}$ označuje »odgovara«, »predstavlja isto«. (Analogno možemo za vodu napisati »1 litar vode $\mathrel{\widehat{=}}$ 1 kilogram vode«, jer je gustoća vode $\rho = 1$ kg/dm^3.)

Posrednim je *mjerenjima* utvrđeno da se 12 grama nuklida ^{12}C sastoji od oko $6{,}023 \cdot 10^{23}$ atoma, tj. $\text{mol} = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ čestica, odnosno posve precizno

$$\text{mol} = 6{,}023\,09 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{23}. \tag{1.3-6}$$

Iz jednadžbe (1.3-6) ne razabire se o kojim je česticama riječ, iako smo do nje došli računajući s atomima ^{12}C, tj. jednadžba nema obilježje konkretnog kemijskog elementa. Baš ta neobilježenost značajka je jedinice »količine tvari« mol, tj. $6{,}023 \cdot 10^{23}$ međusobno jednakih čestica čini mol. To mogu biti molekule vodika H_2, atomi ugljika C, molekule vode H_2O itd. Tako npr. $6{,}023 \cdot 10^{23}$ molekula kuhinjske soli NaCl predstavlja 1 mol; isto tako i $6{,}023 \cdot 10^{23}$ molekula Cl_2 predstavlja 1 mol. U tom smislu valja čitati jednadžbu (1.3-6) ovako: »Mol je $6{,}023 \cdot 10^{23}$ čestica (molekula, atoma itd.) tog i tog elementa (ili kemijskog spoja).«

Obilježenost elemenata i spojeva dolazi do izražaja u trenutku kad želimo uspostaviti matematički odnos između fizikalne veličine »količina tvari« Z i veličine »masa« m. Da bismo saznali tu vezu, zamislit ćemo stanovitu količinu tvari koja se sastoji od međusobno jednakih molekula (općenito: čestica). Svaka od molekula ima masu m_1. Ako postoji Z takvih molekula, njihova ukupna masa m iznosi

$$m = Z m_1. \tag{1.3-7}$$

Masa m_1 jedne molekule (atoma, nuklida) može se izraziti u ovisnosti o masi m_{1C} nuklida ugljika ^{12}C, ako se zna vrijednost »relativne molekularne mase« M, koju smo definirali u odlomku 1.2.2. Iz jednadžbe (1.2-2) naime slijedi

$$m_1 = \frac{M}{12} m_{1C}. \tag{1.3-8}$$

Uvrštenjem izraza (1.3-8) u (1.3-7) dobivamo ovisnost ukupne mase m tvari, koja se sastoji od Z molekula relativne mase M, o masi m_{1C} nuklida ^{12}C

$$m = Z \frac{M}{12} m_{1C}. \tag{1.3-9}$$

Masu jednog atoma ^{12}C izračunat ćemo ovako: izraz (1.3-5) opisuje činjenicu da masa jednog mola nuklida ^{12}C iznosi 12 grama, a jednadžba (1.3-6) činjenicu da se 1 mol sastoji od oko $6{,}023 \cdot 10^{23}$ atoma ^{12}C. To znači da je masa svakog od atoma ^{12}C

$$m_{1C} = \frac{12\,\text{g}}{6{,}023 \cdot 10^{23}},$$

tj. masa $m_{1C} = 1{,}99 \cdot 10^{-23}$ grama. Uvrstimo li gornju jednadžbu u izraz (1.3-9), dobivamo

$$m = Z \frac{M}{12} \frac{12\,\text{g}}{6{,}023 \cdot 10^{23}}.$$

Budući da je prema (1.3-6) $\text{mol} = 6{,}023 \cdot 10^{23}$, od gornje jednadžbe nastaje veza između mase m i količine tvari Z:

$$m = Z \frac{M \cdot \text{g}}{\text{mol}} \qquad \text{ili} \qquad Z = m \frac{\text{mol}}{M \cdot \text{g}}. \tag{1.3-10}$$

Primjer 1. U toku nekog eksperimenta izvagana je masa $m = 398$ grama čistog ugljika. Izračunajmo kolika je vrijednost odgovarajuće količine tvari Z i od koliko se atoma ^{12}C sastoji taj grumen ugljika. Odgovor na prvo pitanje daje nam desna jednadžba (1.3-10) uz $M = 12$, jer je za ^{12}C relativna masa tačno $M(^{12}C) = 12$:

$$Z = 398\ \text{g}\frac{\text{mol}}{12\ \text{g}} = 33{,}2\ \text{mol}.$$

Broj atoma dobivamo tako da u gornji izraz namjesto jedinice mol uvrstimo desnu stranu jednadžbe (1.3-6), dakle

$$Z = 33{,}2\ \text{mol} = 33{,}2 \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23} = 2 \cdot 10^{25}.$$

Prema tome se 398 grama čistog ugljika sastoji od $2 \cdot 10^{25}$ atoma.

Primjer 2. Izračunajmo kolika je približno vrijednost Z (u molovima i u broju molekula) jednog litra vode. Budući da su volumen V i masa m vezani relacijom $m = \rho V$, gdje je ρ gustoća tvari (vidi odlomak B.3.1.2), desna jednadžba (1.3-10) dobiva oblik

$$Z = \rho V \frac{\text{mol}}{M \cdot \text{g}}.$$

Za vodu je $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3 = 1\ \text{kg/l} = 1000\ \text{g/l}$. Budući da je molekula vode H_2O, njena relativna molekularna masa približno iznosi $M(H_2O) = 2 \cdot 1 + 16 = 18$ (vidi odlomak 1.2.2). Pomoću gornjeg izraza dobivamo

$$Z = 1000\frac{\text{g}}{\text{l}}\ 1\ \text{l}\frac{\text{mol}}{18 \cdot \text{g}} = 55{,}6\ \text{mol}.$$

Pripadni broj molekula saznajemo na isti način kao i u prethodnom primjeru, tj. $Z = 55{,}6 \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23} = 3{,}35 \cdot 10^{25}$. Od toliko molekula H_2O sastoji se dakle 1 litar vode.

1.3.5. Jedinice kilomol i milimol. Uz jedinicu količine tvari mol, definiranu u odlomku 1.3.3, često se upotrebljava tisuću puta veća jedinica »kilomol« i tisuću puta manja jedinica »milimol«. Te dvije jedinice nastaju primjenom dekadskog i decimalnog višekratnika (vidi tablicu A-1) $\text{k} = \text{kilo} = 10^3$ i $\text{m} = \text{mili} = 10^{-3}$, dakle

$$\text{kilomol} = \text{kmol} = 10^3\ \text{mol},$$

$$\text{milimol} = \text{mmol} = 10^{-3}\ \text{mol}.$$

Budući da je $\text{mol} = 10^{-3}$ kmol, desnu jednadžbu (1.3-10) možemo zabilježiti u obliku

$$Z = m\frac{\text{mol}}{M \cdot \text{g}} = m\frac{10^{-3}\,\text{kmol}}{M \cdot \text{g}} = m\frac{\text{kmol}}{M \cdot 1000\ \text{g}}.$$

Umjesto 1000 g možemo napisati kg, jer je kilogram = kg = 1000 g. Prema tome umjesto izraza (1.3-10) dobivamo

$$m = Z\frac{M \cdot \text{kg}}{\text{kmol}} \quad \text{ili} \quad Z = m\frac{\text{kmol}}{M \cdot \text{kg}}. \tag{1.3-11}$$

Analogno se za Z u jedinici milimol $= 10^{-3}$ mol i za m u jedinici miligram = mg = $= 10^{-3}\ \text{g} = 10^{-6}$ kg dobivaju jednadžbe

$$m = Z\frac{M \cdot \text{mg}}{\text{mmol}} \quad \text{ili} \quad Z = m\frac{\text{mmol}}{M \cdot \text{mg}}. \tag{1.3-12}$$

Lako je ustanoviti da su sve tri jednadžbe (1.3-10,11,12) međusobno jednake, jer je kmol/kg = mol/g i mmol/mg = mol/g; u prvom smo slučaju, naime, međusobno kratili k = kilo, a u drugom m = mili.

Iz ovog izlaganja je očito da ne moramo upotrebljavati isključivo definiciju mola iz odlomka 1.3.3, ako nam je iz bilo kojeg razloga prikladnije da se služimo jedinicom količine tvari kilomolom ili milimolom. Pripadne definicije u tom slučaju glase:

> Kilomol [milimol] je količina tvari koja sadrži toliki broj molekula (iona, atoma, elektrona) koliko ima atoma u 12 kilograma [miligrama] čistog ugljikovog nuklida ^{12}C.

Jedinice u uglastim zagradama međusobno su korespondentne. U analogiji s jednadžbom (1.3-6) možemo dakle pisati

$$\left.\begin{aligned} \text{kilomol} = \text{kmol} &= 6{,}023\,09 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{26} \\ \text{milimol} = \text{mmol} &= 6{,}023\,09 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{20} \end{aligned}\right\} \qquad (1.3\text{-}13)$$

jer je kmol = 10^3 mol = 10^6 mmol, odnosno mmol = 10^{-3} mol = 10^{-6} kmol.

Ovdje je korisno spomenuti da jednadžbe (1.3-10,11,12) neki autori pišu i u drukčijem obliku. Oni naime umjesto omjera Z/mol pišu slovo n, koje označuje brojčani iznos »količine tvari« Z u jedinici mol (ili kilomol ili milimol), tj.

$$n = \{Z\}_{\text{mol}} = \frac{Z}{\text{mol}}, \qquad (1.3\text{-}14)$$

što je u skladu s jednadžbom (1.3-4) u odlomku 1.3.2. U tom slučaju jednadžbe (1.3-11) glase

$$m = n \cdot M \cdot \text{kg} \qquad \text{ili} \qquad n = \frac{m}{M \cdot \text{kg}}. \qquad (1.3\text{-}15)$$

Primjer. U čeličnoj boci nalazi se 10^{27} molekula N_2. Izrazimo tu količinu tvari jedinicama kilomol, mol i milimol, te izračunajmo kolika je masa dušika spremljenog u boci. Količina tvari je dakle $Z = 10^{27}$ (molekula N_2). Prema jednadžbi (1.3-13) je 1 (molekula) = kmol/(6,023·10^{26}). Prema tome količinu tvari Z možemo izraziti jedinicom kmol ovako

$$Z = 10^{27} = 10^{27} \cdot 1 = 10^{27}\,\frac{\text{kmol}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = 1{,}66\ \text{kmol}.$$

Budući da je kmol = 10^3 mol = 10^6 mmol, slijedi dalje

$$Z = 1{,}66\ \text{kmol} = 1660\ \text{mol} = 1{,}66 \cdot 10^6\ \text{mmol}.$$

Masu m te količine tvari izračunat ćemo pomoću lijeve jednadžbe (1.3-11); pri tom moramo znati vrijednost relativne molekularne mase M_{N_2}. U tablici **1** u prilogu knjige imamo zabilježeno da relativna masa dušikovih (N) atoma iznosi oko 14. Za molekule N_2 relativna masa je dvostruka (vidi odlomak 1.2.2), dakle $M_{N_2} = 2 \cdot 14 = 28$. Sa $Z = 1{,}66$ kmol i $M = 28$ pomoću lijeve jednadžbe (1.3-11) dobivamo

$$m = \frac{Z}{\text{kmol}} M \cdot \text{kg} = \frac{1{,}66\ \text{kmol}}{\text{kmol}}\,28\ \text{kg} = 1{,}66 \cdot 28\ \text{kg} = 46{,}5\ \text{kg}.$$

Napominjemo da su vrijednosti relativne atomske mase A u tablici **1** izražene ugljikovom skalom (odlomak 1.2.3). Osim toga, pod kemijskim elementima se razumijevaju one mješavine izotopa koje se najčešće pojavljuju, a ne pojedini izotopi ili nuklidi (odlomak 1.2.4).

1.4. Veličine s količinom tvari kao osnovom (molne veličine)

1.4.1. Molna masa. U odlomku 1.3.3 citirali smo preporuku Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku u pogledu jedinice količine tvari mol (Definition of the unit »mole«). U drugoj tački (Related quantities, tj. izvedene fizikalne veličine) te preporuke naznačen je postupak definiranja fizikalnih veličina kojima je osnova veličina količina tvari. Tako je npr. *molna masa* μ definirana omjerom

$$\mu = \frac{m}{Z} = \frac{\text{masa}}{\text{količina tvari}}. \tag{1.4-1}$$

Tu veličinu autori engleskog teksta citirane preporuke nazivaju molar mass. Analogan francuski izraz je masse molaire, a njemački molare Masse.

U nas se najčešće rabi izraz »molna masa«, koji je potpuno u skladu s navedenim engleskim, francuskim i njemačkim izrazima; svi oni, naime, izviru iz naziva jedinice »mol«! No ni jedan od njih nije u skladu s jednadžbom (1.4-1) koja definira *novu* fizikalnu veličinu μ, tj. *omjer* veličine m i veličine Z. Istina je da veličinu »količina tvari« Z najčešće izražavamo jedinicom »mol«, ali to ne bi smjelo dovoditi do toga da pomoću *jedinice* definiramo *veličinu* i njen naziv. U analogiji s ova četiri kritizirana izraza trebalo bi da npr. umjesto »specifične entropije« $s = S/m$ (vidi odlomak 2.2.3 i tablicu D-7) upotrebljavamo izraz »kilogramska entropija«, jer masu najčešće mjerimo jedinicom kilogram! Zbog toga se u najnovijoj njemačkoj literaturi predlaže terminologija koja je u skladu s definicijskom jednadžbom (1.4-1) i koja izbjegava pridjev »molar«. Tako smo na primjer zapazili pojavljivanje termina teilchenmengebezogene Masse, definiranog jednadžbom $\mu = \text{Masse/Teilchenmenge}$ (ili Stoffmenge; vidi kraj odlomka 1.3.2). Nismo još zapazili analogna terminološka usavršenja u jugoslavenskoj stručnoj literaturi. Zbog toga ćemo u daljem tekstu upotrebljavati pridjev »molni« (npr. molni volumen, molna masa itd.), iako je očito da to ne odgovara načelima tvorbe dobre terminologije.

Vrlo je korisno »molnu masu« $\mu = m/Z$ iz jednadžbe (1.4-1) dovesti u matematičku vezu sa relativnom molekularnom masom M, koju smo razmotrili u odlomku 1.2.2. U tu svrhu poslužujemo se jednadžbom (1.3-11) u obliku $m/Z = M \cdot \text{kg/kmol}$. Uvrštenjem te relacije u (1.4-1) dobivamo

$$\mu = \frac{m}{Z} = M \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}, \tag{1.4-2}$$

tj. molna masa μ ovisi jedino o relativnoj molekularnoj (atomskoj) masi $M(A)$.

Primjer. Izračunajmo koliko iznosi molna masa μ čistog ugljika. Budući da je u tom slučaju $M = M(^{12}\text{C}) = 12$, jednadžba (1.4-2) daje $\mu = 12$ kg/kmol $(= 12$ g/mol). To znači da jedan mol nuklida ^{12}C ima masu 12 grama, što smo na drukčiji način već zabilježili izrazom (1.3-5).

1.4.2. Molni volumen. Preporuka Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku (odlomak 1.3.3) sugerira da se fizikalna veličina *molni volumen* v definira ovako

$$v = \frac{V}{Z} = \frac{\text{volumen}}{\text{količina tvari}}. \tag{1.4-3}$$

Vezu veličine v sa molnom masom $\mu = m/Z$ lako je uspostaviti. Budući da je gustoća tvari ρ definirana jednadžbom $\rho = m/V$ (vidi odlomak B.3.1.2), to je

$$\mu = \frac{m}{Z} = \frac{\rho V}{Z} = M \frac{\text{kg}}{\text{kmol}},$$

odakle dobivamo potrebne jednadžbe

$$v=\frac{V}{Z}=\frac{\mu}{\rho} \qquad \text{ili} \qquad v=\frac{M\cdot\mathrm{kg}}{\rho\cdot\mathrm{kmol}} \tag{1.4-4}$$

Primjer. Gustoća vodika H_2 pri temperaturi 0 °C i tlaku 1 atm iznosi $\rho=0{,}09$ kg/m³. Izračunajmo koliko iznosi njegov molni volumen v. Računat ćemo pomoću lijeve jednadžbe (1.4-4). Pri tom treba da znamo relativnu atomsku masu vodika M_{H_2}. Iz tablice 1 u prilogu knjige saznajemo $M_{H_2}=2\cdot 1{,}008=2{,}016$. Prema tome je

$$\mu=M_{H_2}\cdot\mathrm{kg/kmol}=2{,}016\ \mathrm{kg/kmol},$$

tj. masa jednog kilomola vodika H_2 iznosi 2,016 kg. Pomoću poznatih vrijednosti μ i ρ možemo izračunati molni volumen

$$v=\frac{\mu}{\rho}=\frac{2{,}016\ \mathrm{kg/kmol}}{0{,}09\ \mathrm{kg/m^3}}=22{,}4\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kmol}},$$

tj. pri temperaturi 0 °C i tlaku 1 atm jedan kilomol vodika H_2 zaprema volumen 22,4 kubna metra (vidi odlomak 1.5.3).

1.4.3. Molna toplina definira se posve analogno molnoj masi i molnom volumenu, tj. kao specifična veličina sa količinom tvari kao osnovom. Prema tome je *molna toplina* c_μ

$$c_\mu=\frac{Q}{Z\,\Delta T}, \tag{1.4-5}$$

gdje simboli predstavljaju ove veličine: Q — količina topline, Z — količina tvari, ΔT — razlika temperature.

Masenu specifičnu toplinu c definirali smo u odlomku 2.3.3 jednadžbom $Q=cm\Delta T$. Uvrstimo li tu jednadžbu u (1.4-5), dobivamo

$$c_\mu=\frac{c\,m\,\Delta T}{Z\,\Delta T}=c\,\frac{m}{Z}.$$

Budući da prema (1.4-2) postoji veza $\mu=m/Z$, gornja jednadžba prelazi u oblik

$$c_\mu=\mu\,c=c\,M\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}.$$

Primjer. Izračunajmo kolika je vrijednost molne topline vodika H_2 iz primjera u odlomku 1.4.2. U nekom priručniku moramo najprije pronaći da je $c_{H_2}=14{,}2$ kJ/(kg K). Budući da je $\mu=2{,}016$ kg/kmol, uvrštenjem ovih vrijednosti u gornju jednadbžu slijedi

$$c_\mu=\mu\,c=2{,}016\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}\,14{,}2\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}=28{,}4\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kmol\,K}}.$$

To znači da treba uložiti oko 28,4 kJ topline da bi se jedan kilomol vodika H_2 zagrijao za 1 kelvin, npr. od 0 °C do 1 °C (o jedinici temperature kelvin vidi odlomak 3.2.4).

1.4.4. Molna plinska konstanta u stvari je prirodna konstanta koja vrijedi za sve idealne plinove. Njezin odnos prema »individualnoj plinskoj konstanti« R možemo dobiti usporedbom dvaju oblika jednadžbe stanja $pV=mRT$ i $pV=ZR_0T$ (vidi odsječak 2.1). Iz jednakosti $pV=pV$ naime slijedi $mRT=ZR_0T$, odakle je univerzalna plinska konstanta (odlomak 2.1.2)

$$R_0=\frac{m}{Z}R=\mu R=RM\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}. \tag{1.4-6}$$

Najnovija eksperimentalna istraživanja pokazuju da vrijednost univerzalne (opće) plinske konstante iznosi

$$R_0 = 8{,}31334 \cdot (1 \pm 2 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kmol(^{12}C)}}. \qquad (1.4\text{-}7)$$

Ovdje smo uz jedinicu količine tvari kmol u zagradi dodali ^{12}C, čime upozoravamo da je riječ o molu koji se osniva na ugljikovoj skali relativne molekularne mase (vidi odsječak 1.2 i odlomak 1.3.3).

Primjer. Izračunajmo kolika je vrijednost individualne plinske konstante dvoatomnog vodika za koji je $M = 2{,}016$ (vidi primjer u odlomku 1.4.2). Upotrijebit ćemo jednadžbu (1.4-6), u koju ćemo uvrstiti vrijednost univerzalne plinske konstante (1.4-7)

$$R = \frac{R_0}{M}\frac{\mathrm{kmol}}{\mathrm{kg}} = \frac{8314\ \mathrm{J}}{\mathrm{K\,kmol}}\,\frac{1}{2{,}016}\,\frac{\mathrm{kmol}}{\mathrm{kg}} = 4125\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kg}}.$$

Potvrdu ove vrijednosti možemo naći u gotovo svakom udžbeniku ili priručniku kemijske ili tehničke termodinamike.

1.5. Normirana stanja i normirane veličine

1.5.1. Fizikalno normirano stanje. Gustoća plinova i tekućina osjetno se mijenja u ovisnosti o temperaturi i tlaku (za idealne plinove vidi odsječak 2.1). Sa gustoćom se mijenja i specifična toplina (vidi npr. tablicu D-25), specifična unutrašnja energija itd. Da bi se pri uspoređivanju eksperimentalnih rezultata i u proračunima toplinskih procesa vrijednosti tih veličina mogle primjenjivati sa što manje napora i gubitka vremena, stručnjaci pojedinih grana znanosti i tehnike dogovorili su se da *normiraju* (propišu) temperaturu i tlak na koje valja svesti vrijednosti pojedinih karakterističnih veličina.

Stanje tvari pri normiranom tlaku i temperaturi zove se *normirano stanje*. Postoje i drugi nazivi za to stanje: »fizikalno normirano stanje«, »standardno stanje«, »normalno stanje«, »normno stanje« itd. U nekim zemljama postoje i norme (standardi) u tom smislu. Tako se npr. u S.R. Njemačkoj od godine 1964. upotrebljava DIN 1343: »Normzustand, Normvolumen«, gdje je »normirano stanje« definirano rečenicom: »Normirano stanje u smislu ove norme je stanje krute, tekuće ili plinovite tvari definirano normiranom temperaturom i normiranim tlakom.« Pri tom su vrijednosti normiranih veličina

$$T = T_0 = 273{,}15\ \mathrm{K}\ (\vartheta = \vartheta_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}),$$

$$p = p_0 = 1\ \mathrm{atm} = 101\,325\ \mathrm{N/m^2} = 1{,}013\,25\ \mathrm{bar}.$$

Vidimo da je vrijednost normirane temperature zadana ledištem vode (odlomak 3.2.3). Vrijednost normiranog tlaka je jedna »standardna atmosfera«, koju nazivamo i »fizikalna atmosfera«; kratica te jedinice je »atm«. Vrijede odnosi

$$\mathrm{atm} = 101\,325\ \mathrm{N/m^2} = 760\ \mathrm{torr} = 1{,}033\,227\ \mathrm{at},$$

gdje je $\mathrm{at} = \mathrm{kp/cm^2}$ tzv. tehnička atmosfera. O tim jedinicama podrobno se raspravlja u odsječku B.4.3.

1.5.2. Tehničko, industrijsko i akustičko normirano stanje. U nekim granama tehnike dosta se upotrebljava *tehničko normirano stanje* definirano ovim vrijednostima temperature i tlaka:

$$\vartheta = 20\,^{\circ}\mathrm{C}\ (T = 293{,}15\ \mathrm{K}),$$

$$p = 1\ \mathrm{at} = 1\ \mathrm{kp/cm^2} = 0{,}980\,665\ \mathrm{bar}.$$

Danas se *industrijsko normirano stanje* vrlo rijetko upotrebljava, ali ga katkada ipak možemo zapaziti u literaturi. Definirano je temperaturom i tlakom:

$$\vartheta = 15\,^{\circ}\mathrm{C}\ (T = 288{,}15\ \mathrm{K}),$$

$$p = 1\ \mathrm{at} = 1\ \mathrm{kp/cm^2}.$$

Uz »industrijsko normirano stanje« postoji još tzv. *akustičko normirano stanje*, koje se katkada primjenjuje u akustici. Ono je definirano ovim vrijednostima:

$$\vartheta = 20\,^{\circ}\mathrm{C}\ (T = 293{,}15\ \mathrm{K}),$$

$$p = p_0 = 1\ \mathrm{atm} = 1{,}013\,25\ \mathrm{bar}.$$

U pojedinim specijalističkim granama upotrebljavaju se i druga normirana stanja, npr. meteorološko, mjerno, stehiometrijsko, spektroskopsko itd.

1.5.3. Normirani molni volumen. Fizikalnu veličinu »molni volumen« definirali smo jednadžbom (1.4-3) u odlomku 1.4.2. Tamo smo ustanovili da su molni volumen ν, relativna molekularna masa M i gustoća ρ međusobno vezani relacijom

$$\nu = \frac{M \cdot \mathrm{kg}}{\rho \cdot \mathrm{kmol}}. \tag{1.5-1}$$

Za sve *idealne plinove* u fizikalnom normiranom stanju (odlomak 1.5.1) vrijednost veličine ν je ista. Taj zaključak proizlazi iz same definicije $\nu = V/Z = R_0 T/p$ (odlomak 1.4.2), što izjednačenjem sa (1.5-1) daje

$$\nu = R_0 \frac{T}{P} = \frac{M \cdot \mathrm{kg}}{\rho \cdot \mathrm{mol}}.$$

Pri fizikalnom normiranom stanju vrijednosti temperature i tlaka iznose $T = 273{,}15$ K, $p = 1$ atm, a R_0 je konstanta (odlomak 2.1.2). Označimo li vrijednost ν idealnih plinova u normiranom stanju sa ν_n, uvrštenjem spomenutih vrijednosti od gornje jednadžbe dobivamo

$$\nu_n = \frac{M \cdot \mathrm{kg}}{\rho_n \cdot \mathrm{kmol}} = 22{,}4136 \cdot (1 \pm 4 \cdot 10^{-5}) \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kmol}}, \tag{1.5-2}$$

tj. volumen jednog kilomola idealnog plina u fizikalnom normiranom stanju ($\vartheta = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$, $p = 1$ atm) iznosi 22,4136 kubnih metara. U jednadžbi (1.5-2) indeks n upozorava da je riječ o (fizikalnom) normiranom stanju. Napominjemo da se pod jedinicom kmol razumijeva kilomol definiran u odnosu na ugljikovu skalu relativne molekularne mase, u kojoj je tačno $M(^{12}\mathrm{C}) = 12$ (vidi odsječak 1.2 i odlomke 1.3.3,4). Posebno smo to naglasili u tablici D-2, gdje smo upotrijebili oznaku kmol(^{12}C).

Korisno je uspostaviti matematičku vezu između molnog volumena $\nu = V/Z$, definiranog u odlomku 1.4.2, i specifičnog volumena $v = 1/\rho = V/m$, definiranog u

Tablica **D-2**

Vrijednosti nekih konstanti izraženih kilomolom

Konstanta	Simbol	Vrijednost
Molni normirani volumen	ν_n	$2{,}241\,36\cdot(1\pm4\cdot10^{-5})\cdot10\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kmol\,(^{12}C)}}$
Opća plinska konstanta	R_0	$8{,}314\,34\cdot(1\pm5\cdot10^{-5})\cdot10^3\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kmol\,(^{12}C)}}$
Avogadrova konstanta	N_A	$6{,}023\,09\cdot(1\pm3\cdot10^{-5})\cdot10^{26}\ \frac{1}{\mathrm{kmol\,(^{12}C)}}$
Faradayeva konstanta	F	$9{,}649\,16\cdot(1\pm2\cdot10^{-5})\cdot10^7\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kmol\,(^{12}C)}}$

odlomku B.1.3.3 (vidi i odlomak D.4.2.1). Napišemo li ove definicijske jednadžbe u obliku $V=\nu Z$ i $V=vm=m/\rho$, izjednačenjem dobivamo

$$v=\frac{V}{m}=\frac{\nu}{\mu}, \tag{1.5-3}$$

tj. specifični volumen dobiva se dijeljenjem molnog volumena ν sa molnom masom μ, gdje je $\mu=m/Z$ (odlomak 1.4.1). Za normirano stanje ($\vartheta=0\,^\circ\mathrm{C}$, $p=1$ atm) od jednadžbe (1.5-3) dobivamo, dakako, »normirani specifični volumen«

$$v_n=\frac{\nu_n}{\mu};\qquad \mu=\frac{m}{Z}=M\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}. \tag{1.5-4}$$

Primjer. Izračunajmo kolika je vrijednost specifičnog volumena i kolika je gustoća vodika H_2 u normiranom stanju, tj. pri temperaturi 0 °C i tlaku 1 atm. U skladu s jednadžbom (1.5-4) najprije moramo izračunati vrijednost relativne molekularne mase M_{H_2}. Taj podatak imamo zabilježen u primjeru odlomka 1.4.2, i to već u obliku $\mu_{H_2}=2{,}016$ kg/kmol. Vrijednost normiranog molnog volumena imamo zapisanu u tablici D-2. Pomoću lijeve jednadžbe (1.5-4) možemo izračunati

$$v_n=\frac{\nu_n}{\mu}=\frac{22{,}41\ \mathrm{m^3/kmol}}{2{,}016\ \mathrm{kg/kmol}}=11{,}15\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg}}.$$

Normiranu gustoću lako saznajemo iz $\rho_n=1/v_n=1:(11{,}15\ \mathrm{m^3/kg})=0{,}09\ \mathrm{kg/m^3}$ (usporedi s primjerom u odlomku 1.4.2).

1.5.4. Normirani kubni metar promašeni je naziv za jednu jedinicu fizikalne veličine *količina tvari Z* (upotrebljavaju se i nazivi »normalni kubni metar« ili »normni kubni metar«). Tu jedinicu možemo izvesti uz pomoć jednadžbe (1.4-3) u obliku $Z=V/\nu$, gdje simbol Z predstavlja veličinu »količina tvari« (odlomak 1.3.1), V volumen, a ν molni volumen (odlomak 1.4.2). Pretpostavimo da je riječ o idealnom plinu u (fizikalnom) normiranom stanju. U tom slučaju plin i njegovo stanje karakterizirani su sa

$$\nu=\nu_n=22{,}4136\ \mathrm{m^3/kmol},\quad \vartheta=0\,^\circ\mathrm{C},\quad p=1\ \mathrm{atm}.$$

Zamislimo dalje da volumen posude u kojoj se nalazi taj plin iznosi tačno $V=1\ \mathrm{m^3}$. Uvrštenjem tih podataka u jednadžbu $Z=V/\nu$ dobivamo

$$Z=\frac{V}{\nu_n}=\frac{1\ \mathrm{m^3}}{22{,}4136\ \mathrm{m^3/kmol}}=0{,}044\,616\ \mathrm{kmol}. \tag{1.5-5}$$

Ova vrijednost *količine tvari* naziva se »normirani kubni metar«! Upotrebljavaju se različite kratice ove jedinice, najčešće m_n^3 i nm^3. Vidimo da nije pogrešan samo naziv jedinice već i njena kratica (m je kratica jedinice duljine metar). Zbog toga ćemo upotrijebiti navodnike, dakle

$$»m_n^3« = »nm^3« = 0{,}044\,616 \text{ kmol} = 44{,}616 \text{ mol}.$$

U istom smislu neki autori upotrebljavaju tisuću puta manju jedinicu »normirani litar« = »nl«:

$$»nl« = \frac{\text{litar}}{22{,}4136 \text{ l/mol}} = 0{,}044\,661 \text{ mol}.$$

Napominjemo da je jedinica volumena litar = 1 sinonim za kubni decimetar = dm^3 = $= m^3/1000$ (vidi odlomak B.1.7.3).

Vrlo se rijetko upotrebljava jedinica količine tvari »mali normirani (normalni) kubni metar«. Definiran je relacijom

$$»nm_{24}^3« = \frac{\text{kmol}}{24},$$

ali pri ovakvom normiranom stanju: $\vartheta = 10\,°C$, $p = 1$ at $= 1$ kp/cm².

Primjer. Provjerimo da li je jedinica količine tvari »nm_{24}^3« nastala na isti način kao i »m_n^3«, ali za normirano stanje $T = 283{,}15$ K ($\vartheta = 10\,°C$) i $p = 1$ at $= 1$ kp/cm². U tu svrhu poslužit ćemo se jednadžbom stanja idealnog plina prilagođenom količini tvari Z, tj. $pV = ZR_0T$, gdje je R_0 univerzalna plinska konstanta iz tablice D-2 (vidi i odlomak 2.1.2).

Označimo veličine u fizikalnom normiranom stanju indeksima 1, dakle $p_1 = 1$ atm, V_1, Z_1, $T_1 = 273{,}15$ K. Drugo normirano stanje označujemo indeksom 2, dakle $p_2 = 1$ at $= 1$ kp/cm², V_2, Z_2, $T_2 = 283{,}15$ K. Pri računanju Z pomoću jednadžbe (1.5-5) dobili smo u stvari $Z_1 = »m_n^3« =$ $=$ kmol/22,4136, a pri tom smo propisali $V_1 = 1$ m³. Isto vrijedi i za ovaj naš primjer, s time što i za drugo normirano stanje propisujemo isti volumen, dakle $V_2 = 1$ m³. Na taj način računanjem slijedi

$$\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{Z_1R_0T_1}{Z_2R_0T_2}, \qquad \text{odnosno} \qquad Z_2 = Z_1\frac{T_1}{T_2}\,\frac{p_2}{p_1}.$$

Uvrštenjem prije navedenih vrijednosti nakon kraćeg računanja dobivamo

$$Z_2 = \frac{\text{kmol}}{22{,}4136}\,\frac{273{,}15\text{ K}}{283{,}15\text{ K}}\,\frac{1\text{ at}}{1\text{ atm}} = \frac{\text{kmol}}{24}.$$

Pri tom smo uzeli u obzir da je atm = 1,033227 at (vidi odsječak B.4.3).

1.6. Kemijske formule. Mol kao jedinica mase

1.6.1. Zakon o održanju mase. Početkom devetnaestog stoljeća *J. L. Gay-Lussac*, *A. von Humboldt*, *A. Avogadro* i drugi objasnili su fizikalnim predodžbama mehanizam kemijskih reakcija — to je vrijeme naglog uspona fizikalne kemije. Rezultati dotadašnjih eksperimentalnih istraživanja mogli su se svesti na ovo: potpuna kemijska reakcija (stvaranje kemijskog spoja) nastaje onda kada su mase sudjelujućih tvari u stanovitom međusobnom odnosu. Pri tom vrijedi *zakon o održanju mase*

$$m_a + m_b + \ldots = m, \tag{1.6-1}$$

gdje je m_a masa tvari »a«, m_b masa tvari »b« itd., a m masa reakcijom nastalog kemijskog spoja. Tako, na primjer, kemijsku reakciju nastajanja kuhinjske soli možemo u skladu s jednadžbom (1.6-1) opisati ovako:

$$\underset{\text{natrija (Na)}}{22{,}99\ \text{g}} + \underset{\text{klora (Cl)}}{35{,}45\ \text{g}} = \underset{\text{soli (NaCl)}}{58{,}44\ \text{g}}$$

U tom je slučaju, dakle, $m_a = 22{,}99$ grama (natrij), $m_b = 35{,}45$ g (klor), $m = 58{,}44$ g (natrijev klorid).

Preskočimo historijski razvoj i pokušajmo jednadžbu (1.6-1) preinačiti tako da ona povezuje pripadne vrijednosti fizikalne veličine »količina tvari« Z. Tu veličinu definirali smo u odlomku 1.3.1 brojem čestica od kojih se tvari sastoje (molekule, ioni, atomi itd.). Pri tom ćemo se poslužiti lijevom jednadžbom (1.3-11), koja u obliku

$$m = Z\frac{M\cdot\text{kg}}{\text{kmol}} \qquad \text{ili} \qquad m = Z\frac{A\cdot\text{kg}}{\text{kmol}} \tag{1.6-2}$$

povezuje količinu tvari Z sa pripadnom masom m svake od tvari iz jednadžbe (1.6.-1). Slovo M predstavlja relativnu molekularnu masu (odlomak 1.2.2) ako se pod Z razumijeva broj molekula. Ako Z predstavlja broj atoma, onda se umjesto M mora, dakako, uvrstiti vrijednost relativne atomske mase A (odlomak 1.2.1) kao što smo učinili u desnoj jednadžbi (1.6-2).

Primijenimo li (1.6-2) na tvari »a«, »b« itd., uvrštenjem tako nastalih izraza u jednadžbu (1.6-1) i kraćenjem sa kg/kmol = g/mol = const (vidi odlomak 1.3.5) slijedi

$$M_aZ_a + M_bZ_b + \ldots = MZ. \tag{1.6-3}$$

Ova jednadžba opisuje slučaj kada kao rezultat potpune kemijske reakcije nekoliko tvari (reaktanata) nastaje samo *jedna* tvar (produkt). Općenitiji je, međutim, slučaj kada reakcijom nekoliko tvari $a, b, \ldots$ nastaje *nekoliko* produkata $u, v, \ldots$ Takav posve općenit slučaj potpune kemijske reakcije bilježimo u obliku izraza

$$M_aZ_a + M_bZ_b + \ldots = M_uZ_u + M_vZ_v + \ldots, \tag{1.6-4}$$

koji proizlazi iz općeg oblika zakona o održanju mase pri potpunim kemijskim reakcijama $m_a + m_b + \ldots = m_u + m_v + \ldots$ Pomoću jednadžbe (1.6-4) možemo izračunati sve količinske odnose pri potpunim kemijskim reakcijama.

1.6.2. Primjer kemijske reakcije. U prethodnom smo se odlomku trudili da fizikalnu veličinu »količina tvari« Z uklopimo u normalan postupak računanja pomoću veličinskih jednadžbi. Te su jednadžbe primjenljive u svim granama tehnike i znanosti, upotrebljive su čak i za »novčane veličine« (odlomak A.2.1.1), pa nema razloga da ih ne primjenjujemo u kemiji, kad znamo da ih resi potpuna *pouzdanost*. Da bismo ilustrirali primjenljivost jednadžbe (1.6-4), izradit ćemo jednostavan primjer koji će nam kasnije poslužiti za izvođenje zaključaka o kemijskoj simbolici (odlomak 1.6.3).

U tu ćemo svrhu razmotriti proces dobivanja klorovodika (HCl) iz natrijeva klorida (NaCl) i sumporne kiseline (H_2SO_4). Tu potpunu reakciju, u toku koje nastaje i natrijev sulfat (Na_2SO_4), kemičari opisuju tzv. kemijskom formulom

$$2\,NaCl + H_2SO_4 = Na_2SO_4 + 2\,HCl. \tag{1.6-5}$$

Za sada nećemo objašnjavati što znače gornji simboli u *kvantitativnom* pogledu. Zamislimo da smo opisani proces ostvarili u laboratoriju i pri tom vaganjem ustanovili da su mase reaktanata iznosile

$$m_a = m(\mathrm{NaCl}) = 351\ \mathrm{g}\ \text{(natrijev klorid) i}$$

$$m_b = m(\mathrm{H_2SO_4}) = 294{,}3\ \mathrm{g}\ \text{(sumporna kiselina),}$$

tj. ukupna masa reaktanata iznosila je $m_a + m_b = 645{,}3$ g. Pošto je potpuna reakcija završena, vaganjem smo izmjerili mase produkata:

$$m_u = m(\mathrm{Na_2SO_4}) = 426{,}3\ \mathrm{g}\ \text{(natrijev sulfat) i}$$

$$m_v = m(\mathrm{HCl}) = 219\ \mathrm{g}\ \text{(klorovodik).}$$

Vidimo da je ukupna masa produkata $m_u + m_v = 645{,}3$ g, dakle jednaka masi reaktanata, pa je time udovoljeno zakonu o održanju mase (1.6-1), tj. $m_a + m_b = m_u + m_v$, odnosno konkretno za naš slučaj

$$\underset{(\mathrm{NaCl})}{315\ \mathrm{g}} + \underset{(\mathrm{H_2SO_4})}{294{,}3\ \mathrm{g}} = \underset{(\mathrm{Na_2SO_4})}{426{,}3\ \mathrm{g}} + \underset{(\mathrm{HCl})}{219\ \mathrm{g}}. \qquad (1.6\text{-}6)$$

Opišimo sada tu istu kemijsku reakciju fizikalnom veličinom »količina tvari« Z, dakle jednadžbom nalik na (1.6-4). Budući da smo *izmjerili* mase $m_a, \ldots$, do odgovarajućih $Z_a, \ldots$ moramo doći *računanjem*. Poslužit ćemo se desnom jednadžbom (1.3-10), ali prije moramo izračunati relativne molekularne mase $M_a, \ldots$ reaktanata i produkata. Postupak računanja razmotrili smo u odsječku 1.2, gdje smo naveli i primjere. Računanjem dobivamo (tačnije vrijednosti navedene su u tablici **1** u prilogu knjige):

$$M_a = M(\mathrm{NaCl}) = A_{\mathrm{Na}} + A_{\mathrm{Cl}} = 23 + 35{,}5 = 58{,}5,$$

$$M_b = M(\mathrm{H_2SO_4}) = 2\,A_{\mathrm{H}} + A_{\mathrm{S}} + 4\,A_{\mathrm{O}} = 2 + 32{,}1 + 64 = 98{,}1,$$

$$M_u = M(\mathrm{Na_2SO_4}) = 2\,A_{\mathrm{Na}} + A_{\mathrm{S}} + 4\,A_{\mathrm{O}} = 46 + 32{,}1 + 64 = 142{,}1,$$

$$M_v = M(\mathrm{HCl}) = A_{\mathrm{H}} + A_{\mathrm{Cl}} = 1 + 35{,}5 = 36{,}5.$$

Sada imamo sve potrebne podatke za primjenu prije spomenute jednadžbe (1.3-10). Računamo

$$Z_a = \frac{m_a}{M_a}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{g}} = \frac{351\ \mathrm{g}}{58{,}5}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{g}} = 6\ \mathrm{mol\,(NaCl)},$$

$$Z_b = \frac{m_b}{M_b}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{g}} = \frac{294{,}3\ \mathrm{g}}{98{,}1}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{g}} = 3\ \mathrm{mol\,(H_2SO_4)},$$

$$Z_u = \frac{m_u}{M_u}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{g}} = \frac{426{,}3\ \mathrm{g}}{142{,}1}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{g}} = 3\ \mathrm{mol\,(Na_2SO_4)},$$

$$Z_v = \frac{m_v}{M_v}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{g}} = \frac{219\ \mathrm{g}}{36{,}5}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{g}} = 6\ \mathrm{mol\,(HCl)}.$$

Iako smo u odlomku 1.3.4 jedinicu mol definirali relacijom $\mathrm{mol} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$, u gornje četiri jednadžbe napisali smo radi zornosti uz mol (u zagradi) simbol

molekule na koju se odnosi pripadna vrijednost veličine Z. Tako, na primjer, rezultat $Z_u = 3$ mol (Na_2SO_4) znači da je u reakciji sudjelovalo $Z_u = 3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}806 \cdot 10^{24}$ molekula natrijeva sulfata.

Provjerimo da li izračunati rezultati, tj. vrijednosti $Z_a, \ldots$, udovoljavaju temeljnoj jednadžbi (1.6-4). Vrijednosti pojedinih veličina uvrštavat ćemo postupno, jer će nam neke jednadžbe trebati u idućem odlomku:

$$M_a Z_a + M_b Z_b = M_u Z_u + M_v Z_v \tag{1.6-7}$$

$$M_a \cdot 6 \text{ mol} + M_b \cdot 3 \text{ mol} = M_u \cdot 3 \text{ mol} + M_v \cdot 6 \text{ mol} \tag{1.6-8}$$

$$58{,}5 \cdot 2 + 98{,}1 = 142{,}1 + 36{,}5 \cdot 2 \text{ (kratili smo sa 3 mol)}$$
$$117 + 98{,}1 = 142{,}1 + 73 \rightarrow 215{,}1 = 215{,}1.$$

Lijeva strana jednadžbe jednaka je desnoj. Prema tome naš je račun ispravan.

1.6.3. Značenje kemijske formule. U sadašnjoj kemijskoj literaturi nećemo, u pravilu, naići na takav način rješavanja zadatka kakav smo primijenili u netom izvedenom primjeru. Računali smo, naime, s veličinskim jednadžbama (poglavlje A.2), tj. dosljedno smo se koristili normalnom matematičkom interpretacijom fizikalnih veličina, njihovih jedinica i brojčanih iznosa. Kemičari se, međutim, pretežno služe stanovitom *simbolikom*, tj. »kemijskim formulama«. Bit tih formula razjasnit ćemo tako da nadovežemo na izlaganja u odlomku 1.6.2. U tu svrhu ponovno ćemo napisati jednadžbu (1.6-6), ali u općem obliku, i jednadžbu (1.6-8):

$$m_a + m_b = m_u + m_v \tag{1.6-9}$$

$$6 \frac{\text{mol}}{\text{g}} \cdot M_a + 3 \frac{\text{mol}}{\text{g}} \cdot M_b = 3 \frac{\text{mol}}{\text{g}} \cdot M_u + 6 \frac{\text{mol}}{\text{g}} \cdot M_v. \tag{1.6-10}$$

U našem konkretnom primjeru te dvije jednadžbe su identične, jer iz $m_a = 351$ g itd. i uvrštenja $Z_a = 6$ mol itd. pomoću $m_a = Z_a M_a$ mol/g itd. (odlomak 1.3.4) od (1.6-9) dobivamo (1.6-10). Posve *općenita* identičnost postoji, međutim, među izrazima

$$m_a + m_b = m_u + m_v \quad \text{i} \quad M_a Z_a \frac{\text{mol}}{\text{g}} + M_b Z_b \frac{\text{mol}}{\text{g}} = M_u Z_u \frac{\text{mol}}{\text{g}} + M_v Z_v \frac{\text{mol}}{\text{g}}.$$

Od korektne veličinske jednadžbe (1.6-10) do simbolike (kemijske formule) dva su koraka. Prvi činimo time što u (1.6-10) kratimo 3/g. Dobivamo

$$2 \text{ mol} \cdot M_a + 1 \text{ mol} \cdot M_b = 1 \text{ mol} \cdot M_u + 2 \text{ mol} \cdot M_v. \tag{1.6-11}$$

Budući da indeksi (odlomak 1.6.2) označuju $a \mathrel{\widehat{=}} \text{NaCl}$, $b \mathrel{\widehat{=}} H_2SO_4$, $U \mathrel{\widehat{=}} Na_2SO_4$, $v \mathrel{\widehat{=}} \text{HCl}$ (simbol $\mathrel{\widehat{=}}$ označuje »odgovara«; tako npr. litar vode odgovara kilogramu vode, tj. 1 l $\mathrel{\widehat{=}}$ 1 kg, jer je gustoća vode $\rho = 1$ kg/l), jednadžbu (1.6-11) možemo za naš primjer napisati ovako

$$2 \text{ mol} \cdot M(\text{NaCl}) + 1 \text{ mol} \cdot M(H_2SO_4) = 1 \text{ mol} \cdot M(Na_2SO_4) + 2 \text{ mol} \cdot M(\text{HCl}).$$

Kemičari češće pišu simbol relativne molekularne mase tako da indeksom označe o kojoj je tvari riječ. U tom duhu gornja jednadžba dobiva nov oblik

$$2 \text{ mol} \cdot M_{\text{NaCl}} + 1 \text{ mol} \cdot M_{H_2SO_4} = 1 \text{ mol} \cdot M_{Na_2SO_4} + 2 \text{ mol} \cdot M_{\text{HCl}}. \tag{1.6-12}$$

Ova se jednadžba pojednostavnjuje ako kratimo jedinicu količine tvari mol. To možemo učiniti, jer je mol posve općenito (dakle za bilo koje čestice) definiran relacijom mol = $6{,}02 \cdot 10^{23}$ (odlomak 1.3.4). Tako od (1.6-12) nastaje

$$2\,M_{NaCl}+M_{H_2SO_4}=M_{Na_2SO_4}+2\,M_{HCl}. \qquad (1.6\text{-}13)$$

Taj izraz opisuje naš konkretan primjer. Posve općenito on bi glasio

$$n_aM_a+n_bM_b+\ldots=n_uM_u+n_vM_v+\ldots, \qquad (1.6\text{-}14)$$

gdje slova $n_a, \ldots$ označuju *brojčane iznose* »količine tvari« Z u jedinici mol, kilomol itd., tj. $n_a=\{Z_a\}=Z_a/\text{mol}$ itd. (vidi odlomak 1.3.5).

Od jednadžbe (1.6-13) ili (1.6-14) do kemijske simbolike drugi je korak. Učinili smo ga ako umjesto jednadžbe (1.6-13) napišemo *kemijsku formulu*

$$2\ NaCl+H_2SO_4=Na_2SO_4+2\ HCl, \qquad (1.6\text{-}15)$$

koju smo već spomenuli u odlomku 1.6.2 (jednadžba 1.6-5). Ta formula čita se ovako:

2 mola	i	1 mol	reakcijom	1 mol	i	2 mola	(1.6-16)
NaCl	(+)	H_2SO_4	daju (=)	Na_2SO_4	(+)	HCl	

Zadržimo se načas na ovoj jednadžbi u kojoj mol znači mol=$6{,}02\cdot10^{23}$, što znači da jedinica mol predstavlja $6{,}02\cdot10^{23}$ molekula, i to redom: molekulâ natrijeva klorida, molekulâ sumporne kiseline, molekulâ natrijeva sulfata i molekulâ klorovodika. Podijelimo (1.6-12) s brojem $6{,}02\cdot10^{23}$, tj. učinimo kvocijent mol/$(6{,}023\cdot10^{23})=1=1$ molekula (usporedi s odlomkom 1.3.2). Tako nastalu kemijsku jednadžbu čitamo u duhu jednadžbe (1.6-16) ovako:

2 molekule	i	1 molekula	reakcijom	1 molekulu	i	2 molekule	
NaCl	(+)	H_2SO_4	daju (=)	Na_2SO_4	(+)	HCl	(1.6-17)

Ovo razmatranje o značenju kemijskih formula, posebno u vezi s veličinom »količina tvari« (odsječak 1.3), možemo zaključiti konstatacijom: kemijska formula (1.6-15), koju čitamo kao (1.6-16) ili 1.6-17), predstavlja simbolički prikaz zakona o održanju mase, tj. ona simbolički prikazuje jednadžbe (1.6-6, 10, 11, 12, 13) kojima računski obrađujemo potpunu kemijsku reakciju.

1.6.4. Mol i kilomol kao jedinice mase. U dosadašnjem tekstu ovog poglavlja D.1 riječ »mol« označavala je jedinicu brojčane fizikalne veličine »količina tvari« Z. Tu veličinu i njene jedinice opisali smo u odsječku 1.3. Riječ »mol« uveo je *W. Ostwald* i njome označio »konkretnu količinu tvari koja odgovara umnošku $M\cdot g$«; pri tom je M relativna molekularna masa (odlomak 1.2.2).

Neki autori, naročito s područja kemije, ne upotrebljavaju posebnu fizikalnu veličinu »količina tvari« Z, već pod količinom tvari razumijevaju *masu* m te tvari. Prema tome za njih je fizikalna veličina Z suvišna, odnosno $Z=m$! Posljedica toga je i *drukčija interpretacija jedinica*. Tako, na primjer, zbog $Z=m$ jednadžbe (1.3-10,11) prelaze u oblik

$$\text{mol}=M\cdot\text{g} \quad \text{i} \quad \text{kmol}=M\cdot\text{kg}, \qquad (1.6\text{-}18)$$

tj. mol i kilomol su *jedinice mase*. Budući da se vrijednost te mase, izražena gramima ili kilogramima, mijenja od tvari do tvari (ovisno o M), mol i kilomol nazivaju se *individualne jedinice mase*.

U skladu s jednadžbama (1.6-18) definicija tako interpretiranih jedinica mol i kmol glasi: »Mol [kilomol] neke tvari je masa jednaka toliko grama [kilograma] tvari kolika je njena relativna molekularna masa.« Na primjer relativna molekularna masa natrija je $M_{Na}=A_{Na}=22{,}99$, pa je dakle »mol natrija« mol$=$ $=M_{Na}\cdot g=A_{Na}\cdot g=22{,}99$ g$=22{,}99$ grama. Analogno je »mol klora« mol$=$ $=A_{Cl}\cdot g=35{,}45$ grama itd.

Izjednačenje $Z=m$ i poimanje mola kao jedinice mase nije fizikalno osnovano. Masa je, naime, karakteristika *tromosti* tijelâ (vidi odsječak A.9.1), a na kemijske i toplinske pojave tromost gotovo ni ne utječe; te se pojave osnivaju na međusobnom djelovanju čestica (molekula, atoma, iona). No pri računanju kemijskih i toplinskih procesa interpretacija »mol$=M\cdot$g« ima, po mišljenju korisnika relacija (1.6-18), stanovitih prednosti. Tako, na primjer, umjesto jednadžbe (1,6-13) oni pišu

$$\underset{\text{NaCl}}{2\text{ mola}}+\underset{H_2SO_4}{1\text{ mol}}=\underset{Na_2SO_4}{1\text{ mol}}+\underset{\text{HCl}}{2\text{ mola}} \tag{1.6-19}$$

što je posve ispravno, jer prema (1.6-18) mol je jedinica *mase*. Pri tom izraz (1.6-19) nastaje tako što se (1.6-13) pomnoži univerzalnom jedinicom mase gram (g$=10^{-3}$kg; o kilogramu vidi odlomke A.9.1.1 i 9.3.3) i uzme u obzir da je »mol natrijeva klorida«

$$\text{mol (NaCl)}=M_{NaCl}\cdot g=(A_{Na}+A_{Cl})\cdot g=58{,}44\text{ g}.$$

Analogno je »mol sumporne kiseline« mol$(H_2SO_4)=M_{H_2SO_4}\cdot$ g$=98{,}1$ g itd.

Dosljedna primjena jednadžbi (1.6-18) dovodi do iščezavanja tzv. molnih veličina iz odsječka 1.4, odnosno do njihova izjednačenja sa specifičnim veličinama (npr. $v=V/m$). Iznimka je »molna plinska konstanta« R_0 iz jednadžbe (1.4-7), koju smo u odlomku 2.1.2 nazvali »univerzalna plinska konstanta«. Stavimo li, naime, u (1.4-7) kmol$=M\cdot$kg, dobivamo

$$R_0=\frac{8314\text{ J}}{M\cdot\text{kg}\cdot\text{K}}, \tag{1.6-20}$$

gdje je K jedinica termodinamičke temperature »kelvin« (vidi odlomak 3.2.4). Budući da se vrijednost M mijenja od plina do plina, to je očito da R_0 iz (1.6-20) nije konstanta, već za svaki plin ima drugu vrijednost, tj. vrijednost individualne plinske konstante $R=pv/T$ (vidi odlomak 2.1.1). To se može objasniti i posve općenito. Pri razlikovanju veličina Z i m vrijede jednadžbe stanja idealnih plinova $pV=ZR_0T$ (odlomak 2.1.2) i $pV=mRT$. Priznajemo li jednadžbe (1.6-18), time uvodimo $Z=m$, pa je dakle $R_0=R$, tj. R_0 iz (1.6-20) postaje individualna plinska konstanta izražena općim jedinicama J, kg i K.

1.6.5. Jedinice grammolekula, gramatom itd. Interpretacija mola i kilomola kao jedinica mase, tj. poistovjećivanje »količine tvari« Z s masom m, dovodi do niza naziva »individualnih jedinica mase«, naročito u kemiji. Tako se, na primjer, mol i kilomol iz (1.6-18) zovu:

$$\text{grammolekula}=\text{grammol}=\text{mol}=M\cdot\text{g},$$
$$\text{kilogrammolekula}=\text{kilogrammol}=\text{kilomol}=M\cdot\text{kg}.$$

Neki autori pišu te nazive razdvojeno, tj. ovako: gram-molekula, gram-mol, kilogram-molekula i kilogram-mol. U literaturi se može naći jedinica tonamol$=$tmol

(ili tona-mol), definirana analogno gornjima: tmol=$M \cdot$t, gdje je t kratica jedinice mase tona=t=1000 kg. Vrijede, dakako, odnosi

$$\text{kilogrammol}=10^3 \text{ grammol}=10^{-3} \text{ tonamol}.$$

Napominjemo da primjenu nabrojenih »kemijskih jedinica«, kao i onih što ćemo ih nanizati u nastavku, ne reguliraju zakoni o primjeni mjernih jedinica (vidi kraj odlomka 1.3.3).

Ako su molekule tvari *jednoatomne*, onda se umjesto naziva mol (grammol) upotrebljava naziv

$$\text{gramatom}=\text{gatom}=A \cdot \text{g},$$

gdje je A relativna atomska masa elementa od kojeg se sastoji jednoatomna tvar. Pri tom se ta jedinica obično definira ovako: »Ako uzmemo onoliko grama kolika je relativna atomska masa elementa, dobivamo vrijednost za kemijsku jedinicu nazvanu gramatom.« U tom smislu postoji i tisuću puta veća jedinica: kilogramatom (kgatom) = $A \cdot$ kg=1000 gatom.

Primjenu tih jedinica ilustrirat ćemo konkretnim primjerom. Razmotrimo kemijsku reakciju pri kojoj djelovanjem sumporne kiseline (H_2SO_4) na magnezij (Mg) nastaje magnezijev sulfat ($MgSO_4$), a pri tom se oslobađa vodik (H_2). »Kemijska formula«, nalik na izraz (1.6-5), za tu reakciju glasi

$$Mg+H_2SO_4=MgSO_4+H_2.$$

Zapis analogan jednadžbi (1.6-19) u ovom slučaju ima oblik

$$\underset{\text{Mg}}{1 \text{ gramatom}} + \underset{H_2SO_4}{1 \text{ mol}} = \underset{MgSO_4}{1 \text{ mol}} + \underset{H_2}{1 \text{ mol}}$$

Šarenilo »kemijskih jedinica« povećava *kemijska valencija* koju ćemo ovdje označiti slovom n. Valencija, naime, definira »ekvivalentnu relativnu masu« (»ekvivalentnu težinu«) E elemenata, pomoću jednadžbe $E=A/n$, gdje je A relativna atomska masa elementa. Vrijednost veličine E često se izražava jedinicom »gramekvivalent« koja je definirana ovako

$$\text{gramekvivalent (gval, val)} = E \cdot \text{g}.$$

Upotrebljava se i tisuću puta veća i tisuću puta manja jedinica

$$\text{kilogramval (kgval)} = E \cdot \text{kg}=1000 \text{ val},$$

$$\text{miligramval (milival)} = E \cdot \text{mg}=0{,}001 \text{ val}.$$

Neki autori pišu te nazive razdvojeno, tj. ovako: gram-ekvivalent, kilogram-ekvivalent itd.

1.7. Periodni sistem kemijskih elemenata

1.7.1. Periodni zakon. Još godine 1869. otkrio je *D. I. Mendeljejev* da su kemijska i fizikalna svojstva kemijskih elemenata periodična funkcija relativne atomske mase A, tj. svojstva elemenata (talište, vrelište, gustoća, kovkost itd.) periodične su krivulje u ovisnosti o A. *Van den Broek* je, na osnovu novih otkrića, 44 godine kasnije usavršio *periodni zakon*: ustanovio je da su kemijski elementi u

periodnom sistemu u stvari poredani u ovisnosti o rastućem *električnom naboju jezgre atoma*, tj. redni broj elementa jednak je *atomskom broju* njegovih atoma. Pod »atomskim brojem« razumijevamo višekratnik elementarnog električnog naboja jezgre atoma (njem. Kernladungszahl). Današnje stanje periodnog sistema prikazano je na tablici **1** u prilogu knjige. Uz svaki element napisan je njegov redni broj, koji je jednak atomskom broju (npr. za kripton je atomski broj 36).

Elementi su svrstani u sedam horizontalnih *perioda* od kojih su neke razdijeljene u dva *reda*. Prva perioda sadrži 2 elementa, druga i treća po 8 elemenata, četvrta i peta po 18 elemenata, šesta 32 elementa, a sedma — koja još nije zaključena — 17 elemenata. Na dnu svake četvorine tablice **1** navedena je relativna atomska masa (npr. za kripton 83,80) u tzv. Međunarodnoj skali (vidi odsječak 1.2). U eventualnim uglastim zagradama napisani su maseni brojevi najstabilnijih izotopa dotičnih elemenata, tj. suma broja protona i broja neutrona (broj nukleona), odnosno relativna atomska masa zaokružena na cijeli broj. Svaka perioda započinje alkalijskim metalom, a završava plemenitim plinom.

Periode su vertikalnim kolonama razdijeljene u devet *grupa* ili *skupina* kemijskih elemenata, tj. u grupe I do VIII i u nultu grupu. Elementi iste grupe imaju slična fizikalna i kemijska svojstva te se nazivaju *srodnici*. Elementi na lijevoj strani i u sredini periodnog sistema su *metali* koji se odlikuju dobrom električkom i toplinskom vodljivošću, kovkošću, metalnim sjajem itd. Na desnoj strani periodnog sistema (vidi tablicu **1**) ubilježeni su *nemetali*. Između ove dvije vrste nalaze se *metaloidi*, koji nemaju izrazitih metalnih svojstava, i to u dijagonali periodnog sistema (B, Si, Ge, As, Sb, Te, Po). Metalni karakter elemenata opada duž periode, računajući slijeva udesno, dok energija ionizacije raste (o njoj vidi odlomak 1.7.3).

1.7.2. Elektronska konfiguracija ljuski. Svojstva kemijskih elemenata dosta se dobro mogu objasniti građom njihovih atoma, jer svojstva elemenata uglavnom ovise o elektronskoj konfiguraciji *vanjske ljuske* njegovih atoma. Pod »ljuskom« razumijevamo sloj u kojem se gibaju ophodni elektroni. Ljuske su označene slovima K, L, M, N, O, P i Q, a najveći mogući broj elektrona u svakoj ljusci može biti $Z = 2\,n^2$, gdje je n redni broj ljuske, koji je jednak glavnom kvantnom broju atoma ($n = 1 \mathrel{\widehat{=}} K$, $n = 2 \mathrel{\widehat{=}} L$ itd.). Međutim više od $Z = 32$ elektrona praktički ne postoji ni u jednoj ljusci danas poznatih kemijskih elemenata.

Po dva elektrona u svakoj ljusci čine njezinu prvu *podljusku s* ili *podgrupu s* (*s* od engleskog sharp = oštar). Elektroni iz te podgrupe čvršće su vezani s jezgrom atoma negoli elektroni iz ostalih podgrupa. Šest elektrona druge podgrupe p (p — principal = glavni) nešto su čvršće vezani s jezgrom negoli elektroni narednih podgrupa d, f (d — diffuse = rastegnut, f — fundamental = osnovan). Elektroni svakog atoma označuju se slovom podgrupe, a broj ispred te oznake predstavlja oznaku ljuske. Broj elektrona u podgrupi označuje se eksponentom uz slovo. Na primjer, $3\,d^{10}$ označuje podgrupu d treće ljuske (M); u toj podgrupi nalazi se 10 elektrona. Pomoću tih simbola može se skraćeno opisati građa bilo kojeg elementa. Na primjer, za klor (Cl) je: $1\,s^2\;2\,s^2\;2\,p^6\;3\,s^2\;3\,p^5$. Konfiguracija elektrona u svim ljuskama može se stoga opisati shemom u tablici D-3.

Prema kvantnoj mehanici svaki elektron u atomu opisan je svojom *orbitalnom valnom funkcijom* ili *orbitalom*. Oznake s, p, d i f upotrebljavaju se i za označivanje orbitala. U okviru kvantne mehanike vrijedi *Pauli*jev princip zabrane: »Isto kvantno stanje može zaposjesti samo jedan elektron«, tj. u atomu ne mogu postojati dva elektrona, a da im se podudaraju sva četiri kvantna broja.

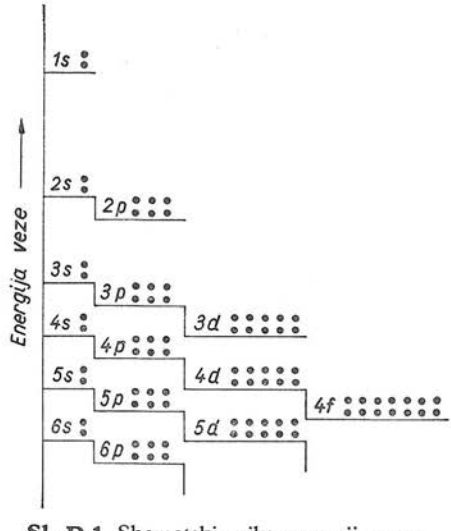
Tablica **D-3**

Elektronska konfiguracija atoma

Ljuska	Elektronska konfiguracija	Broj elektrona
K	$1s^2$	2
L	$2s^2\ 2p^6$	8
M	$3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}$	18
N	$4s^2\ 4p^6\ 4d^{10}\ 4f^{14}$	32
O	$5s^2\ 5p^6\ 5d^{10}\ 5f^{14}$	32
P	$6s^2\ 6p^6$	8
Q	$7s^2$	2

1.7.3. Energija veze. Što je atomski broj elementa veći, to je veći električni naboj jezgre, pa ona jače privlači ophodne elektrone. Stoga su elektroni težih atoma bliži jezgri pa za njihovo odjeljivanje od atoma treba utrošiti veću energiju. Na primjer, srednja udaljenost elektrona od jezgre helija ($Z=2$) iznosi oko $3\cdot10^{-11}$ metara, a *energija veze* (to je energija koju treba utrošiti da bi se elektron izvukao iz atoma) iznosi 3,94 aJ (a = atto = 10^{-18}; vidi tablicu A-1). U atomu kriptona ($Z=36$) srednja udaljenost je oko $1{,}5\cdot10^{-11}$ m, a energija veze elektrona s jezgrom iznosi oko 2400 aJ, dakle oko 600 puta više negoli u helija.

Shematski prikaz energije veze različitih potpuno izgrađenih podgrupa vidimo na slici D.1. Razlika u energiji veze između elektrona dviju susjednih podgrupa iste ljuske općenito je manja negoli razlika energije veze elektrona istoimenih podgrupa dviju ljusaka. No energija veze elektrona prvih podgrupa date ljuske može biti veća od energije veze elektrona posljednjih podgrupa prethodne ljuske. Tako, na primjer, prvi elektronski par četvrte ljuske (elektroni 4 *s*) posjeduju nešto veću energiju veze negoli elektroni posljednje podgrupe treće ljuske (elektroni 3 *d*). Stoga devetnaesti elektron atoma kalija i dvadeseti elektron atoma kalcija ne započinju izgradnjom podgrupe 3 *d*, već zauzimaju položaj 4 *s*, jer to odgovara njihovoj većoj energiji veze u atomu. Prema tome se u tom slučaju narušava slijed izgradnje (punjenja) ljusaka atoma elektronima. Tek pošto je, u energetskom pogledu najpogodnija, izgrađena podgrupa četvrte ljuske, naredni elektroni u atomima skandija, titana, vanadija, kroma, mangana, itd. konačno dovršavaju treću ljusku. To se ponavlja i kod narednih ljuski.

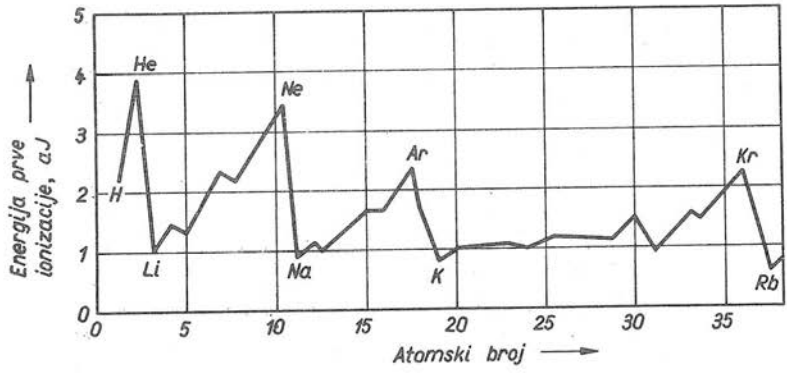


Sl. D.1. Shematski prikaz energije veze elektrona s jezgrom

Kod cezija počinje izgradnja šeste ljuske, iako još nije dovršena podgrupa 5 *d* pete ljuske, a ni u četvrtoj još nije započela izgradnja podgrupe 4 *f*. Izgradnja ove podgrupe, koja se već nalazi duboko unutar atoma, nastaje tek kod elemenata od Ce ($Z = 58$) do Lu ($Z = 71$), koji tvore skupinu rijetkih zemalja ili *lantanida*. Atomi ovih elemenata imaju analognu strukturu dviju vanjskih ljusaka, ali se razlikuju u stupnju izgrađenosti unutrašnje (četvrte) ljuske. Ovi se elementi međusobno vrlo malo razlikuju u kemijskim svojstvima, jer su kemijska svojstva uglavnom određena strukturom vanjskih elektronskih ljusaka. Slična je pojava i u sedmoj periodi, gdje kod elemenata koji slijede iza aktinija (zato se zovu *aktinidi*) dolazi do dovršavanja podgrupe *f* pete ljuske.

1.7.4. Periodičnost osobina elemenata. Osnovni razlog periodičnog ponavljanja analognih kemijskih i drugih osobina elemenata je taj što se u nizu elemenata, svrstanih prema rastućem atomskom broju, periodički ponavlja proces izgradnje novih (vanjskih) elektronskih ljusaka. *Stoga pojedinim grupama kemijskih elemenata* (vidi tablicu **1** u prilogu knjige) *uvijek pripadaju oni elementi čiji atomi imaju u vanjskim ljuskama jednaki broj elektrona.*

Takvi se atomi ne razlikuju mnogo u pogledu energije veze vanjskih elektrona s jezgrom. Na primjer, atomi svih inertnih plinova, osim helija, sadrže po osam elektrona u vanjskoj ljusci i uvijek imaju relativno veliku energiju prve ionizacije (vidi sl. D.2 i tablicu D-4). Atomi svih alkalijskih metala sadrže po jedan elektron u vanjskoj ljusci i stoga imaju malu energiju ionizacije. *Kemijska svojstva elemenata određuju se u prvom približenju brojem elektrona u vanjskoj ljusci elektrona i energijom veze s jezgrom.*



Sl. D.2. Energija prve ionizacije (aJ = attojoule = 10^{-18} J)

U spomenutoj tablici D-4 naveli smo podatke o energiji prve, druge itd. *ionizacije* prvih petnaest elemenata periodnog sistema. Pod *prvom ionizacijom* razumijevamo oduzimanje atomu onog elektrona koji se dade najlakše odijeliti. *Energija potrebna za prvu ionizaciju jednaka je energiji veze odgovarajućeg elektrona s jezgrom.* Druga, treća itd. ionizacija je oduzimanje atomu daljnjeg — drugog elektrona, trećeg itd. Energija druge, treće itd. ionizacije uvijek je veća od energije veze pripadnih elektrona, jer je energija veze određena količinom energije potrebne za odjeljivanje datog elektrona od *neutralnog atoma*, a energija ionizacije (osim prve)

odnosi se na odjeljivanje tog istog elektrona od *pozitivnog* iona. Energija veze vanjskih elektrona određuje *različitost svojstava* analognih elemenata i njihovih istovrsnih spojeva.

Tablica **D-4**

Uzastopne energije ionizacije atoma laganih kemijskih elemenata

Elementi		Energija ionizacije, aJ				
Redni broj	Simbol	Prva	Druga	Treća	Četvrta	Peta
1	H	2,18				
2	He	3,94	8,71			
3	Li	0,86	12,11	19,61		
4	Be	1,49	3,92	24,61	34,80	
5	B	1,33	4,03	6,07	41,50	54,50
6	C	1,81	3,90	7,66	10,32	62,80
7	N	2,33	4,74	7,58	12,40	15,67
8	O	2,18	5,63	8,80	12,39	18,22
9	F	2,79	5,60	10,03	13,96	18,30
10	N	3,46	6,57	10,25	15,55	20,27
11	Na	0,82	7,57	11,47	15,83	22,20
12	Mg	1,22	2,41	12,83	17,50	22,60
13	Al	0,96	3,01	4,55	19,21	24,60
14	Si	1,31	2,62	5,36	7,22	26,70
15	P	1,69	3,14	4,82	8,23	10,41

Pri prijelazu od lakih elemenata prema težima, unutar svake podgrupe elemenata energija ionizacije se smanjuje. Zbog toga, iako dušik, fosfor, arsen, antimon i bizmut u vanjskoj elektronskoj ljusci imaju isti broj elektrona, čvrstoća njihove veze postepeno opada pri prijelazu od dušika prema bizmutu. Time se objašnjava i davno utvrđeni porast metaličnosti samih elemenata, slabljenje kiselinskih svojstava i porast osnovnih svojstava njihovih istovrsnih oksida, hidroksida, sulfida te smanjenje stabilnosti spojeva s metalima ili s vodikom.

Razmatranje strukture elektronskih ljusaka i podgrupa odmah dovodi do konstatacije da svaka struktura u izgrađenom stanju sadrži parni broj elektrona. U tome se očituje stabilizirajuće djelovanje sparivanja elektrona. Može se ustanoviti da se sparivanje ne pojavljuje u jednakom stupnju kod različitih grupa elektrona. Na primjer, elektroni podgrupe *s* imaju vrlo jaku tendenciju stvaranja elektronskih parova, što se vidi i pogledom na energije prve ionizacije u tablici D-4 za prvu, drugu i treću grupu elemenata u periodnom sistemu. Istodobno elektroni *p* obično iz početka izgrađuju podgrupu *p* u obliku nesparenih elektrona i tek pošto su takve mogućnosti iscrpene, stvaraju elektronske parove. Stvaranje takvih *elektronskih parova* od velikog je značenja kako u strukturi atoma, tako i pri ostvarivanju veze među atomima, pri nastanku molekula.

2. Fizikalne veličine nauke o toplini

Svrha je ovog poglavlja da na sažet i što pregledniji način izloži temelje nekojima se osniva suvremena nauka o toplini i da pri tom opiše kako su uvedena ili definirane fizikalne veličine ove grane znanosti i tehnike. Bez dubokog poznavanja tih veličina bilo bi definiranje i opisivanje odgovarajućih jedinica nemoguće ili barem površno. Razmatranja u ovom poglavlju kretat će se stoga u vrlo širokom rasponu: od nepobitnih eksperimentalnih iskustava do pojednostavnjenog prikaza toplinskih pojava pomoću statističkih vjerojatnosti, koje za ogromna mnoštva molekula vrijede kao prirodni zakoni. Taj raspon diktiran je samom naravi nauke o toplini, jer je ona baš takva.

2.1. Jednadžba stanja i plinska konstanta idealnog plina

2.1.1. Jednadžba stanja idealnog plina. Eksperimentalna istraživanja plinova omogućila su da se poznavanje toplinskih pojava produbi, proširi i tako stvori jedinstvena fizikalna slika gotovo svih procesa u nauci o toplini. Stoga će se i naša letimična razmatranja nekih veličina nauke o toplini osloniti na rezultate eksperimenata provedenih s plinovima.

Mnogostruko ponovljeni, najpreciznije izvedeni pokusi s plinovima su pokazali da *pri strogo konstantnoj temperaturi* ($T = \text{const}$) plina između njegova tlaka p i gustoće ρ postoji jednostavna veza

$$p = \rho \cdot \text{const}, \tag{2.1-1}$$

koju možemo napisati i u ova dva oblika

$$pv = \text{const}, \qquad p = \frac{m}{V} \cdot \text{const}, \tag{2.1-2}$$

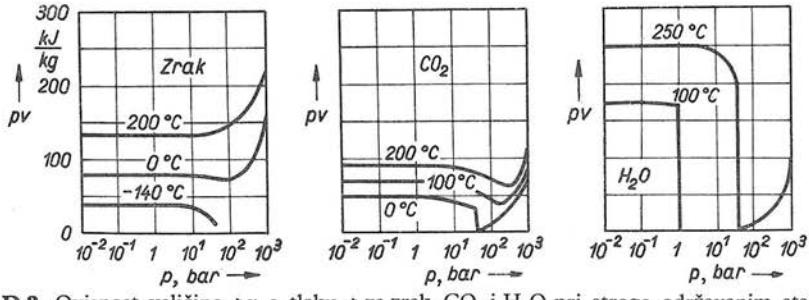
jer je gustoća $\rho = m/V = 1/v$, gdje je $v = V/m$ specifični volumen, tj. omjer volumena V i pripadne mase m plina. Riječima možemo gornje jednadžbe opisati ovako: tlak p plina proporcionalan je masi m date količine plina, a obrnuto proporcionalan volumenu V koji plin zauzima (*Boyle-Mariotte*ov zakon).

Pri dovoljno visokim temperaturama i dovoljno malim gustoćama taj zakon (jednadžbe 2.1-1, 2) vrlo dobro ili čak u potpunosti vrijedi za sve tvari koje se nalaze u obliku plina ili pare. To možemo razabrati iz eksperimentalnih podataka skupljenih u dijagramima slike D.3: veličina $pv = p/\rho$ ostaje konstantna u vrlo širokom rasponu tlakova p (upozoravamo da je tlak nanesen u logaritamskom mjerilu!). Što su pri višim temperaturama provedena istraživanja, to šire je područje tlakova

u kojem je $pv = \text{const}$. Ta područja prikazana su ravnim dijelovima krivulja na slici D.3.

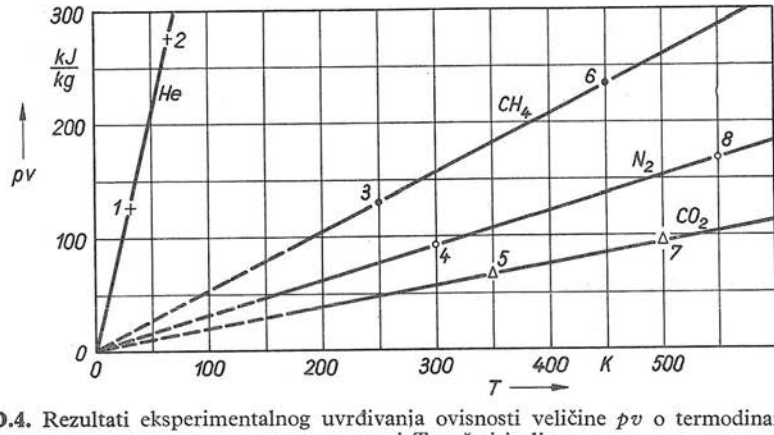
Prema tome u onim područjima temperatura i tlakova gdje je krivulja $pv = f(p)$ horizontalna crta, veličina pv ne ovisi o tlaku p. Plinove s takvim značajkama nazivamo *idealnim plinovima*, dok plinove sa odstupanjem od jednadžbi (2.1-1, 2) nazivamo *realnima*. Ako su odstupanja velika, govorimo o *parama*; to su, na primjer, vertikalni dijelovi krivulja na slici D.3, koji odgovaraju prijelazu dijela plina ili pare u tekućinu.

Pri umjerenim tlakovima i temperaturama se vodik, neutralni plinovi, zrak itd. ponašaju kao *idealni* plinovi, ugljični dioksid, klor, dušik itd. kao *realni* plinovi, a voda, benzol itd. kao *pare*. No pri dovoljno niskim tlakovima i dovoljno visokim temperaturama ova podjela gubi smisao, jer se u takvim uvjetima sve tvari ponašaju kao idealni plinovi.



Sl. D.3. Ovisnost veličine pv o tlaku p za zrak, CO_2 i H_2O pri strogo održavanim stalnim temperaturama. U području ravnih horizontalnih dijelova krivuljâ vrijedi *Boyle-Mariotte*ov zakon $pv = \text{const}$

Vrijednosti veličine $pv = p/\rho$ raznih idealnih plinova bezbroj su puta izmjerene pri različitim vrijednostima temperature u vrlo širokom rasponu. Neki od dobivenih rezultata grafički su prikazani na dijagramu slike D.4. Vidimo da se mjerni rezultati veličine pv nižu na *pravcima* u izravnoj ovisnosti o termodinamičkoj temperaturi T. *Nagib* pravaca mijenja se od plina do plina, ali njihovi produžeci ulijevo sastaju se na osi apscisa, koju sijeku u tački $T = 0\,\text{K}$ ($\vartheta = -273{,}15\,^\circ\text{C}$).



Sl. D.4. Rezultati eksperimentalnog uvrđivanja ovisnosti veličine pv o termodinamičkoj temperaturi T za četiri plina

Utvrđena zakonitost $pv = \text{const} \cdot T$ izražava se u poznatoj *jednadžbi stanja idealnog plina*

$$pv = RT. \tag{2.1-3}$$

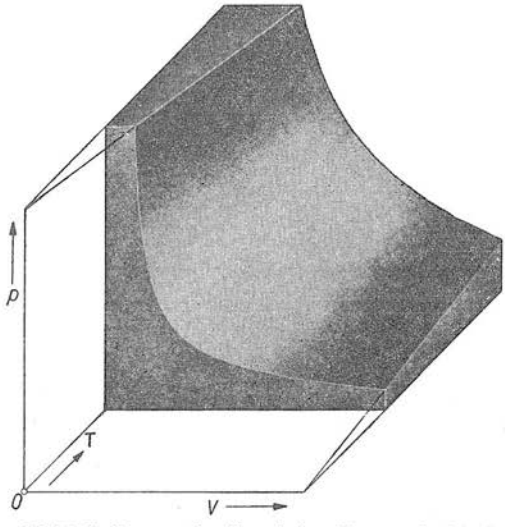
Veličina R je *plinska konstanta*; ona ima stalnu vrijednost za svaki idealan plin, ali za svaki plin drukčiju. Zato se naziva i *individualna* plinska konstanta. Na primjer, za četiri plina iz slike D.4 vrijednosti konstante R možemo naći u tablici D-5.

Budući da je specifični volumen $v = V/m = 1/\rho$, izraz (2.1-3) možemo napisati i u obliku

$$p = \rho RT, \tag{2.1-4}$$

što je također jedan od oblika jednadžbe stanja idealnog plina. Još jedan oblik često se upotrebljava

$$pV = mRT, \tag{2.1-5}$$



Sl. D.5. Prostorni prikaz jednadžbe stanja idealnog plina

gdje je m masa plina koji zauzima obujam V. Do izraza (2.1-5) dolazimo od (2.1-3) pomoću supstitucije $v = V/m$.

Jednadžba stanja plinova, opisana izrazima (2.1-3, 4, 5), jedan je od fundamenata nauke o toplini, iako ona vrijedi samo za idealne plinove (srećom u širokom rasponu tlakova; vidi sliku D.3). Stoga smo je na slici D.5 pokušali prikazati prostornim dijagramom za oblik $pV = \text{const} \cdot T$. Iz slike D.5 može se dokučiti kako nastaju karakteristične krivulje nauke o toplini (sl. D.6):

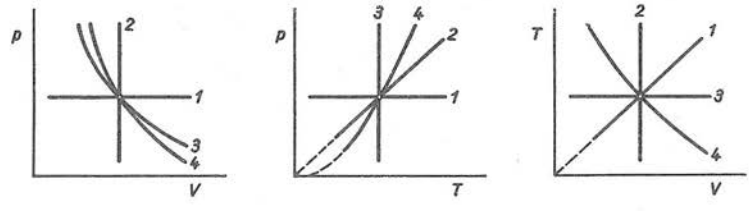
1 — izobara, $p = \text{const}$,

2 — izohora, $V = \text{const}$,

3 — izoterma, $T = \text{const}$,

4 — adijabata, $Q = 0$.

Uz krivulju *4*, adijabatu, napominjemo da ta krivulja nastaje kad se toplinski proces odvija bez izmjene topline Q s okolnom sredinom, dakle uz $Q = 0$.



Sl. D.6. Karakteristične krivulje nauke o toplini: *1* — izobara, *2* — izohora, *3* — izoterma, *4* — adijabata

Tablica **D-5**

Relativna molekularna masa, plinska konstanta, specifična toplina i gustoća nekih plinova (gustoća pri fizikalnom normiranom stanju)

Plin	Kemijska formula	Relativna molekularna masa M	Plinska konstanta R J/kg K	Specifična toplina c_p J/kg K	Gustoća ρ_0 kg/m³
1	2	3	4	5	6
Helij	He	4,003	2078	5237	0,1785
Argon	Ar	39,94	208,2	523	1,7834
Vodik	H_2	2,016	4122	14245	0,0899
Dušik	N_2	28,02	296,7	1038	1,2505
Kisik	O_2	32,00	259,8	913	1,4290
Zrak	—	28,96	287	1005	1,2928
Ugljični monoksid	CO	28,01	296,9	1042	1,2500
Ugljični dioksid	CO_2	44,01	188,8	820	1,9768
Sumporni dioksid	SO_2	64,06	129,8	607	2,9265
Amonijak	NH_3	17,03	488,2	2055	0,7713
Acetilen	C_2H_2	26,04	319,6	1511	1,1709
Metan	CH_4	16,04	518,7	2156	0,7168
Metilklorid	CH_3Cl	50,49	164,7	737	2,3084
Etilen	C_2H_4	28,05	296,7	1612	1,2604
Etan	C_2H_6	30,07	276,7	1729	1,3560

Primjer. Kolika je masa m plina metana koji se nalazi u čeličnoj boci volumena $V = 0{,}3\ \mathrm{m^3}$ pod tlakom $p = 100$ bar (1 bar $= 10^5\ \mathrm{N/m^2} = 0{,}986\,923$ atm) pri temperaturi $T = 300$ K ($\vartheta = 26{,}85\,^\circ\mathrm{C}$)? Odgovor dobivamo uz pomoć jednadžbe (2.1-5), ako uzmemo u obzir da je prema tablici D-5 vrijednost plinske konstante metana $R(CH_4) = 518{,}7\ \mathrm{J/(kg\,K)}$:

$$m = \frac{p}{R}\,\frac{V}{T} = \frac{100 \cdot 10^5 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}\, 0{,}3\ \mathrm{m^3}}{518{,}7 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\, 300\ \mathrm{K}} = 19{,}3\ \mathrm{kg},$$

jer je $\mathrm{J} = \mathrm{Nm}$, $\mathrm{N} = \mathrm{kgm/s^2}$ (vidi odsječak B.7.2).

2.1.2. Univerzalna plinska konstanta. U jednadžbi stanja (2.1-5) slovo m predstavlja *masu* idealnog plina. Pogledajmo kakav će oblik dobiti jednadžba stanja ako umjesto mase m upotrijebimo *količinu tvari* Z (odlomak 1.3.1). U tu svrhu lijevu jednadžbu (1.3-11) uvrstimo na mjesto m u (2.1-5). Dobivamo jednadžbu

$$pV = Z\frac{M \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}} RT, \tag{2.1-6}$$

u kojoj ćemo podrobnije razmotriti umnožak MR kg/kmol. U njemu M, dakako, predstavlja relativnu molekularnu masu (odsječak 1.2) tvari koja ima plinsku konstantu R. Budući da je (2.1-6) opći izraz, jednako kao i (2.1-5), on vrijedi za bilo koji idealan plin. Iz tablice D-5 možemo nasumce odabrati nekoliko parova vri-

jednosti M i R. Računanjem umnoška MR kg/kmol iz jednadžbe (2.1-6) dobivamo ove rezultate (približno):

argon (Ar) $$MR\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 39{,}94 \cdot 208{,}2 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 8314\frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$$

dušik (N_2) $$MR\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 28{,}02 \cdot 296{,}7 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 8314\frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$$

zrak $$MR\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 28{,}96 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 8314\frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$$

amonijak (NH_3) $$MR\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 17{,}03 \cdot 488{,}2 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 8314\frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$$

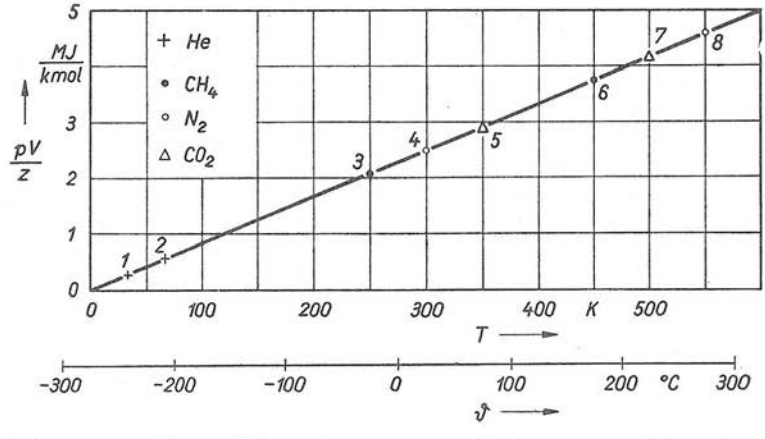
Daljnjim primjerima množenja vrijednosti iz stupaca 3 i 4 tablice D-5 ustanovili bismo da je umnožak konstantan za sve idealne plinove i da iznosi

$$R_0 = MR\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 8314{,}34 \cdot (1 \pm 5 \cdot 10^{-5})\frac{\text{J}}{\text{kmol K}} \tag{2.1-7}$$

Ta se konstanta zove *univerzalna plinska konstanta* (ili »opća plinska konstanta«); označujemo je slovom R_0. Uvrstimo li izraz (2.1-7) u jednadžbu (2.1-6), nastaje jednadžba stanja u kojoj je količina plina predstavljena fizikalnom veličinom »količina tvari« Z (odlomak 1.3.1):

$$pV = ZR_0T. \tag{2.1-8}$$

Ova razmatranja možemo grafički sažeti u dijagram na slici D.7, koji prikazuje ovisnost veličine pV/Z o termodinamičkoj temperaturi T. Ako sliku D.7 usporedimo sa slikom D.4 (ovisnost $pv = pV/m$ o T), vidimo da su se sva četiri pravca $pv = f(T)$ pod djelovanjem relativne molekularne mase M udružila u jedan jedini, koji na slici D.7 divno prikazuje jednadžbu stanja idealnih plinova u obliku $pV/Z = R_0T = T \cdot \text{const}$. Radi lakše usporedbe korespondentnih tačaka na slikama D.4 i D.7 označili smo ih brojevima 1 do 8.



Sl. D.7. Ovisnost veličine $pV/Z = R_0T$ o termodinamičkoj temperaturi T za plinove helij, metan, dušik i ugljični dioksid

Primjer 1. Količina kisika (O_2) mase $m = 50$ kg zauzima pri temperaturi $\vartheta = 25\,°C$ volumen $V = 250$ litara. Koliki je tlak p kisika u čeličnoj boci? Sredimo najprije podatke tako da budu prikladni za primjenu u jednadžbi stanja (2.1-5): $m = 50$ kg, $T = 273{,}15\,K + 25\,°C = 298{,}15$ K, $V = 0{,}25$ m³ (o jedinicama temperature vidi odsječak 3.4).

Potražimo u tablici D-5 vrijednost plinske konstante za kisik: $R = 259{,}8$ J/(K kg). Uvrštenjem u izraz (2.1-5) dobivamo

$$p = \frac{m}{V} R T = \frac{50\,\text{kg}}{0{,}25\,\text{m}^3} 259{,}8\,\frac{\text{J}}{\text{K kg}} 298{,}15\,\text{K}$$

$$p = 1{,}55 \cdot 10^7\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 155\ \text{bar}.$$

Primjer 2. U kemiji i fizici često se relativna molekularna masa *M para* eksperimentalno utvrđuje mjerenjem gustoće ρ pare pri dovoljno visokim temperaturama T i niskim tlakovima p. U tom slučaju, naime, vrijedi jednadžba stanja idealnog plina (2.1-4), tj. $p = \rho R T$. U nekom konkretnom slučaju treba ustanoviti koliki je M za CCl_4, ako je pri tlaku $p = 700$ mm Hg i temperaturi $T = 350$ K izmjerena gustoća $\rho = 4{,}95$ kg/m³.

Izračunat ćemo M pomoću jednadžbe (2.1-7), ali prije toga moramo u nju uvrstiti $R = p/(\rho T)$, što slijedi iz $p = \rho R T$. Tako za plin CCl_4 dobivamo

$$M = \frac{\rho T}{p R_0}\,\frac{\text{kmol}}{\text{kg}} = \frac{4{,}95\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,350\,\text{K}\cdot\text{kmol}}{700\,\text{mm Hg}\cdot 8314\,\frac{\text{J}}{\text{kmol K}}\,\text{kg}} = 155.$$

Ovdje smo, dakako, uzeli u obzir da je J = Nm te mm Hg = 133,32 N/m² (vidi odlomak B.4.3.8).

2.1.3. Boltzmannova konstanta. Brojčanu fizikalnu veličinu »količina tvari« Z opširno smo razmotrili u odsječku 1.3. Općenito o jedinici veličine Z raspravljali smo u odlomku 1.3.2 te utvrdili da se za mjernu jedinicu može npr. odabrati »jedna čestica« (molekula, atom, ion itd.), što možemo zabilježiti u obliku $[Z] = 1$. U skladu s takvim nazorom utvrdili smo jednadžbom (1.3-6) mnogo veću jedinicu količine tvari mol $= 6{,}023 \cdot 10^{23}$, tj. skup od $6{,}023 \cdot 10^{23}$ jednakih čestica predstavlja jedinicu koja se zove mol. U odlomku 1.3.5 definirali smo tisuću puta veću jedinicu količine tvari:

$$\text{kilomol} = \text{kmol} = 6{,}023 \cdot 10^{26}.$$

U duhu takve interpretacije veličine »količina tvari« Z dobili smo u prošlom odlomku 2.1.2 jednadžbu stanja idealnih plinova (2.1-8), u kojoj veličinu Z možemo, dakako, izražavati i jedinicom $[Z] = 1$. Primijenimo tu jedinicu u izrazu za univerzalnu plinsku konstantu R_0 iz jednadžbe (2.1-7), tj. uvrstimo u nju $6{,}023 \cdot 10^{26}$ namjesto jedinice kmol. Računanjem dobivamo približno

$$R_0 = 8314\,\frac{\text{J}}{\text{kmol K}} = \frac{8314}{6{,}023 \cdot 10^{26}}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Usporedimo li vrijednost $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K sa vrijednošću *Boltzmannove konstante* k u tablici 2 u prilogu knjige, uviđamo da je k identički jednaka konstanti R_0, dakle

$$k = R_0 = M R\,\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}. \qquad (2.1\text{-}9)$$

Prema tome jednadžbu stanja idealnih plinova (2.1-8) možemo zbog $k = R_0$ napisati u obliku

$$pV = ZkT. \qquad (2.1\text{-}10)$$

Jednadžbe (2.1-8,10) *najopćenitiji* su oblik jednadžbe stanja idealnih plinova. Iz (2.1-10) neposredno proizlazi *Avogadrov* zakon: »Pod istim tlakom p u istom volumenu V nalazi se pri istoj temperaturi T jednaki broj Z molekula bilo kojeg plina.« Ovdje više nema nikakva obilježja individualnosti plina. Izraz (2.1-10), naime, ništa ne govori o tome o kojemu je plinu riječ, on samo međusobno povezuje tlak i volumen s brojem molekula i termodinamičkom temperaturom. Najopćenitiji oblik jednadžbe stanja plinova uopće ne vodi računa o tome da li su molekule složene i velike ili je riječ o jednoatomnom plinu! Zato je jednadžba (2.1-10) temeljni zakon nauke o toplini.

2.2. Kinetička predodžba topline, nepovratljivosti i entropije

2.2.1. Kinetička predodžba topline. Klasična nauka o toplini izvela je svoje zakonitosti iz opažanja ponašanja plinova i krutih tvari, a da pri tom nije pokušala dati neku atomističku predodžbu toplinskih pojava. To je razumljivo, jer s jedne je strane bila poznata mehanika velikih tijela, a s druge je strane uveden pojam temperature kao osnovna veličina o kojoj se mogla steći stanovita predodžba samo po njenim efektima »fiziološkog stupnja topline«, širenja plinova, produženja metalnih štapova i nizom drugih efekata (vidi odlomak 1.1.2).

Kasnije je znanost obogatila svoje spoznaje o toplinskim pojavama pomoću takozvane *kinetičke teorije topline*, koja je uspjela toplinu svesti na kaotično gibanje molekula i atoma. Ta je teorija utvrdila da je temperatura proporcionalna kinetičkoj energiji molekula. Pri tom zakoni mehanike nisu bili dovoljni, već je čitava struktura kinetičke teorije topline sagrađena na osnovi statistike *ogromnog mnoštva molekula*. Ta kombinacija mehanike molekula i statističkih zakona velikog mnoštva molekula (reda 10^{27} do 10^{30} molekula) dala je teoriju koja je bila u skladu s ranijim iskustvom klasične termodinamike, objasnila je bit toplinskih pojava, čak je i nepovratljivost toplinskih procesa svela na statističke vjerojatnosti. Kad se, zapravo nedavno (1926), teoriji pridružila kvantna statistika, ova je teorija uspjela objasniti i proračunati gotovo sve toplinske pojave ne samo u području životnih temperatura već i u blizini apsolutne ništice temperature, a i u drugom ekstremu: kod vrlo visokih temperatura.

Opseg ove knjige ne dopušta da ulazimo u stroge izvode kinetičke teorije topline, iako je to izvanredno zanimljivo. Za naše potrebe poslužit ćemo se primitivnim modelom kinetičke teorije, a neupućeni čitalac neka se posluži bilo kojim boljim visokoškolskim udžbenikom fizike, gdje će pomoću kanonske raspodjele molekula na energetske nivoe, odnosno pomoću *Fermi-Diracove* kvantne statistike, dobiti iscrpne odgovore na sva pitanja na koja klasična termodinamika ne može odgovoriti, niti joj je to cilj.

Naš primitivni model dat će nam isti rezultat kao i strogi i dugački izvodi pomoću statistike. Zamislimo da se u šupljoj kocki stranica duljine a nalazi Z molekula idealnog plina, tj. takvog koji se pokorava jednadžbi stanja plinova. Pretpostavimo dalje da je masa svake molekule m_1, a njezina brzina u. Iako je gibanje svake molekule kao jedinke potpuno kaotično, zbog njihova velikog broja one će prema vjerojatnosti, koja uvijek vrijedi za velika mnoštva, djelovati na stijene kocke

tako kao da se po jedna trećina molekula, dakle $Z/3$, giba između dvije nasuprotne stijene kocke. Svaka od tih molekula udari o stijenu kocke, elastično se odrazi i juri natrag prema suprotnoj stijeni. Pri tom smo, dakako, pretpostavili da su molekule idealno tvrdi i elastični grumeni koji udaraju o isto tako tvrde stijene kocke.

Razmotrimo u tom primitivnom modelu putovanje jedne molekule od jednog zida do njemu suprotnog i odande natrag, dakle putovanje na dužini $2a$. Budući da je brzina molekule u, za prelaženje tog puta bit će potrebno vrijeme $t = 2a/u$. Za to vrijeme t na svaku od šest stijena kocke jedanput udari $Z/3$ molekula. Svaka molekula ima impuls sile $m_1 u$, no kad leti prema stijeni, ona ima impuls $+m_1 u$, a pošto se odbila od stijene, impuls $-m_1 u$. Promjena impulsa molekula jest, dakle, $2 m_1 u$, a ta je promjena predana stijeni. Budući da je riječ o udaru $Z/3$ molekula, čitava će stijena dobiti impuls

$$I = 2 m_1 u \frac{Z}{3}.$$

Sve se to zbilo za vrijeme $t = 2\,a/u$. Vremenska promjena impulsa jednaka je sili F (vidi odlomak A.9.1.3); prema tome će sila na stijenu iznositi

$$F = \frac{I}{t} = \frac{Z}{3} 2 m_1 u \frac{u}{2a} = \frac{2 Z m_1 u^2}{3 \cdot 2a}.$$

Tlak p na stijenu dobit ćemo dijeljenjem ukupne sile F s površinom stijene $A = a^2$:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2}{3} Z \frac{m_1 u^2}{2a^3}.$$

Nadomjestimo li a^3 sa V, jer je obujam kocke $V = a^3$, dobivamo konačno

$$p V = \frac{2}{3} Z \frac{m_1 u^2}{2}. \tag{2.2-1}$$

Ovaj fundamentalni rezultat kinetičke teorije topline dobiva se i pomoću stroge teorije koja se služi, na primjer, poznatom *Maxwell*ovom razdiobom brzina molekula.

Jednadžba (2.2-1) ne znači da *svaka* molekula ima kinetičku energiju $m_1 u^2/2$, već jedino to da je $3\,pV/2$ jednako ukupnoj kinetičkoj energiji $Z m_1 u^2/2$. Uvedemo li gustoću plina $\rho = Z m_1 / V$ (vidi odlomak 1.3.1), izraz (2.2-1) prelazi u oblik

$$p = \frac{2}{3} \frac{\rho u^2}{2} = \frac{2}{3} w,$$

gdje je w prostorna gustoća kinetičke energije molekula plina. To znači da je tlak p jednak dvjema trećinama prostorne gustoće kinetičke energije plina.

Klasična nauka o toplini upotrebljava osnovni zakon stanja idealnih plinova uglavnom u obliku $pV = mRT$, koji se, prema izlaganju u odlomku 2.1.3, može napisati i ovako

$$pV = kZT. \tag{2.1-10}$$

Usporedimo li kinetičku jednadžbu stanja (2.2-1) s klasičnom (2.1-10), dobivamo

$$kT = \frac{1}{3} m_1 u^2. \tag{2.2-2}$$

Ova jednadžba, posredno bezbroj puta eksperimentalno potvrđena, bit će osnov naših kasnijih razmatranja u odsječku 3.7.

Izraz (2.2-2) možemo napisati i u obliku $m_1 u^2 = 3\,kT$, što znači da se na lijevoj strani jednadžbe nalazi dvostruka prosječna kinetička energija W_1 *jedne* molekule. Prema tome za jednu molekulu u prosjeku vrijedi

$$W_1 = \frac{3}{2} kT, \tag{2.2-3}$$

a to znači: *temperatura plina određena je srednjom kinetičkom energijom njegovih molekula* ili drugim riječima: *srednja kinetička energija* W_1 *svake od molekula bilo kojeg idealnog plina proporcionalna je njegovoj temperaturi* T, *a uopće ne ovisi o kemijskom sastavu plina, o izgradnji molekula, o masi molekula* m_1 *ili o relativnoj molekularnoj masi* M. Iz jednadžbe (2.2-3) može se dobiti izraz za proračunavanje prosječne brzine molekula plina $u = (3\,RT)^{1/2}$.

2.2.2. Kinetička teorija topline i nepovratljivost. Podudaranje statističko-kinetičke teorije topline s iskustvom fenomenološke termodinamike nije slučajno. To možemo ocijeniti kad se sjetimo da termodinamika radi s ogromnim brojevima molekula (npr. jedinica kmol sadrži $6{,}02 \cdot 10^{26}$ molekula), pa su njene zakonitosti u stvari *statističke vjerojatnosti*, dakle *prosječni* rezultat ponašanja mnoštva sićušnih čestica u prostoru i vremenu. Te statističke vjerojatnosti toliko su velike da se u termodinamici javljaju kao strogi zakoni, iako su oni zapravo posljedica kaotičnog gibanja teško predočivog ogromnog mnoštva molekula i atoma (vidi primjer u odlomku 2.2.3).

Fenomenološka termodinamika ima jednu temeljnu i bitnu značajku: jednosmjernost procesa, *nepovratljivost*. Dodir dviju tvari različitih temperatura uvijek dovodi do toga da se hladnija tvar ugrije na onu temperaturu na koju se toplija tvar ohladi. Miješanje plinova ide također samo u jednom smjeru. Razmješavanje dvaju ili više plinova nikad ne dolazi samo od sebe. Posljedica je svega toga ta da se mehanički rad ne može dobiti drukčije nego prilikom premetanja topline iz toplijeg u hladniji spremnik topline. Iako za toplinu, kao oblik energije, vrijedi stavak o održanju energije, ipak još nikada nije opaženo da bi se metalna kugla i podloga ohladile i kugla ponovno poletjela uvis, iako je ona prilikom prethodnog pada na podlogu pretvorila svoju kinetičku energiju u toplinu!

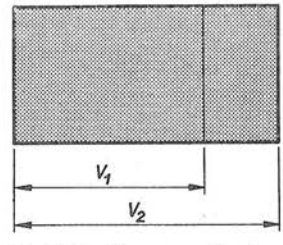
Ova jednosmjernost toplinskih procesa u prvi mah kao da je nespojiva s mehaničkim modelom topline koji smo nabacili u odlomku 2.2.1. Mehanika, a ona je u osnovima kinetičke teorije topline, jednako računa promatramo li pojavu vremenski unaprijed ili unatrag! Prividnu nespojivost mehanike i fenomenološke termodinamike premošćuje statistička vjerojatnost. Ako zakone termodinamike shvatimo kao statističke vjerojatnosti, onda se jednosmjernost toplinskih procesa može objasniti »prijelazom od manje vjerojatnih na vjerojatnija stanja« (vidi odlomak 2.2.3). Kako smo vidjeli, plinovi imaju različitu temperaturu onda kad njihove molekule posjeduju različite kinetičke energije. Dovedemo li dva takva plina u dodir, molekule će srazovima izmjenjivati svoje impulse, dakle i energije. Molekule čestica s većom energijom ubrzat će sporije, a pri tom će se same usporavati. Na kraju će se ustaliti najvjerojatnije stanje: molekule oba plina imat će istu prosječnu kinetičku energiju. Posve je nevjerojatno da bi se dva pomiješana plina jednake temperature sami od sebe počeli razdvajati i jedan hladiti, a drugi ugrijavati.

Komprimiramo li plin u jedan dio veće posude, a onda maknemo pregradu u posudi, plin će se jednoliko raširiti na čitav obujam. Mogućnost da će se nakon nekog vremena plin sam od sebe stisnuti na prvotni volumen posve je nevjerojatna. U termodinamici kažemo da je proces neprovratljiv.

Statistička vjerojatnost oduzela je mehanici osnovni temelj kojim se inače mehanika služi u makroskopskom mjerilu: u nepreglednom mnoštvu molekula nemoguće je odrediti neko početno stanje svake molekule, tj. njenu brzinu i položaj. Bez toga klasična mehanika ne može proračunati gibanja, pa tako, po principu neodređenosti, nije čak ni načelno moguće rekonstruirati toplinsku prošlost. Prema tome ono što u fenomenološkoj termodinamici nazivamo jednosmjernošću procesa (nepovratljivost), to u kinetičkoj teoriji topline obilježavamo vjerojatnošću, tj. procesi teku od manje vjerojatnih u vjerojatnija stanja.

2.2.3. Entropija i vjerojatnost. U tehničkoj termodinamici od velike je koristi pojam entropije S koji je fenomenološki definiran u tablici D-7. Iako se u proračunima svakodnevno susrećemo s tom veličinom, ipak je entropija u krugu tehničara obavijena velom »misterioznosti«, zbog čega ulijeva naročito poštovanje. Pokušajmo sa stajališta kinetičko-statističke teorije prema *R. W. Pohl*u razmotriti pojam entropije na jednostavnom modelu.

Slika D.8 jednodimenzionalno prikazuje prostor obujma V_2. U tom prostoru možemo zamisliti manji prostor V_1, a omjer volumena označit ćemo sa $x = V_2/V_1$. Prema tome je broj x uvijek veći ili jednak 1. Pretpostavimo najprije da se u prostoru V_2 nalazi jedna jedina molekula plina. Vjerojatnost w_2 da se ta molekula nalazi u volumenu V_2 očito je $w_2 = 1/1$. No vjerojatnost da se istodobno ta ista molekula nalazi u volumenu V_1 iznosi $w_1 = 1/x$, što će reći da se u statističkom prosjeku može ta molekula naći u obujmu V_1 jednom u x opažanja.



Sl. D.8. Uz entropiju kao vjerojatnost stanja

U slučaju kad se u volumenu V_2 nalaze dvije molekule plina, vjerojatnosti da se obje molekule istodobno nađu u V_2 ili V_1 iznose

$$w_2 = 1/1; \quad w_1 = (1/x)^2.$$

Ako je riječ o tri molekule, vjerojatnosti iznose

$$w_2 = 1/1; \quad w_1 = (1/x)^3.$$

Analogno za Z molekula vrijedi

$$w_2 = 1/1; \quad w_1 = (1/x)^Z.$$

Broj molekula Z opisuje, dakako, količinu plina mase m (o »količini tvari« Z vidi odsječak 1.3).

Pomoću omjera $W = w_2/w_1$ možemo označiti koliko je puta vjerojatnije naći u istom trenutku *svih* Z molekula u volumenu V_2, a ne u V_1. Budući da je $w_2 = 1$, očito je

$$W = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{(1/x)^Z} = x^Z = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^Z.$$

Logaritmiramo li ovu jednadžbu, dobivamo

$$\ln W = Z \ln \frac{V_2}{V_1}, \tag{2.2-4}$$

dakle prirodni logaritam vjerojatnosti W. U svakom udžbeniku nauke o toplini nalazimo ovaj izraz za porast entropije $\Delta S = S_2 - S_1$ idealnog plina mase m pri konstantnoj temperaturi

$$\Delta S = mR \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{2.2-5}$$

Budući da je prema izvođenjima u odlomku 2.1.3 $mR = Zk$, jednadžba (2.2-5) dobiva oblik

$$\Delta S = kZ \ln \frac{V_2}{V_1},$$

gdje je k *Boltzmann*ova konstanta. Uvrstimo li ovamo izraz (2.2-4), slijedi

$$\Delta S = k \ln W = k \ln \frac{w_2}{w_1}, \tag{2.2-6}$$

tj. promjena entropije proporcionalna je logaritmu omjera dviju vjerojatnosti stanja. Jednadžba (2.2-6) označuje prijelaz plina iz stanja manje vjerojatnosti u stanje veće vjerojatnosti. Prema tome je pojam entropije sveden na *vjerojatnost*, a to je u skladu s tumačenjem nepovratljivosti toplinskih procesa statističkom vjerojatnošću (odlomak 2.2.2).

Primjer. Pomoću Boltzmannove formule (2.2-6), dakle pomoću promjene entropije ΔS dvaju tijela koja se nalaze na temperaturama $T_1 = 301$ K i $T_2 = 300$ K, izračunajmo *omjer* vjerojatnosti stanja w_2/w_1, ako se od jednog tijela predaje drugome toplina $Q = 57{,}3$ pJ $= 5{,}73 \cdot 10^{-8}$ J. Razlika je temperature, dakle, $\Delta T = T_1 - T_2 = 1$ K, a količina topline je upravo nepredočivo malena (pJ $= 10^{-9}$ J; kcal $= 4186$ J, dakle $Q = 5{,}73 \cdot 10^{-8}$ J $= 0{,}573$ erg $= 1{,}37 \cdot 10^{-11}$ kcal, tj. reda veličine stotisućinke od jedne milijutinke kilokalorije).

Proračunom ćemo zapravo utvrditi *odnos* vjerojatnosti w_2 prijelaza topline $Q = 57{,}3$ pJ od toplijeg tijela na hladnije prema vjerojatnosti w_1 prijelaza iste količine topline Q od hladnijeg tijela na toplije. Ova je druga mogućnost prema Clausiusovu (fenomenološkom) teoremu nemoguća, ali u statističkom razmatranju ipak postoji neka vjerojatnost.

Za toplinu izmjene $Q = 57{,}3$ pJ fenomenološka termodinamika daje promjenu entropije

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} = \frac{Q(T_1 - T_2)}{T_1 \cdot T_2} = \frac{Q\,\Delta T}{T_1 T_2}.$$

Iz jednadžbe (2.2-6) slijedi obrazac

$$\frac{w_2}{w_1} = \mathrm{e}^{\Delta S/k} = \exp \frac{\Delta S}{k},$$

odakle, uvrštenjem vrijednosti

$$\Delta S/k = 6{,}37 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J/K} : 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K} = 4{,}61 \cdot 10^{10}$$

u gornju jednadžbu, slijedi kraćim računanjem

$$\frac{w_2}{w_1} = \mathrm{e}^{4{,}61 \cdot 10^{10}} = 10^{2 \cdot 10^{10}}.$$

To znači da na svakih $10^{2 \cdot 10^{10}}$ slučajeva prijelaza beznačajno male količine topline $Q = 5{,}73 \cdot 10^{-8}$ J sa tijela temperature 301 K na tijelo temperature 300 K može doći jedan slučaj prijelaza iste količine topline s tijela temperature 300 K na tijelo temperature 301 K.

Teško je sebi predočiti veličinu broja $10^{2 \cdot 10^{10}}$. Kad bismo ga napisali na papirnu traku u obliku broja s odgovarajućim mnoštvom znamenki (nula), traka bi bila toliko dugačka da bismo njome mogli omotati zemaljsku kuglu (dakle oko 40 milijuna kilometara). Pri tom bismo na svaki centimetar trake morali napisati pet znamenki (cifri).

Posve bi drukčiji rezultat nastao kad bismo analogan proračun proveli za još manju prenesenu toplinu $Q = 0{,}86$ aJ (a = atto = 10^{-18}). U tom je slučaju $w_2/w_1 = 2$, što znači da je za taj slučaj prema računima statistike prijelaz topline s hladnijeg na toplo tijelo upola manje vjerojatan od obrnutog puta.

Pomoću jednadžbe (2.2-3) možemo izračunati da bi ukupnu kinetičku energiju od 0,86 aJ imalo oko 140 molekula nekog plina pri temperaturi 300 K. Riječ je, dakle, o gotovo *izoliranim* molekulama (usporedite sa $6{,}02 \cdot 10^{26}$ molekula u jednom kilomolu!), a za njih ne vrijede ni statističke ni fenomenološke zakonitosti, koje se odnose na prosjeke *ogromnog mnoštva* molekula, što smo istakli u uvodu odlomka 2.2.1.

2.3. Pregled ostalih veličina nauke o toplini

2.3.1. Unutarnja energija. Pod »unutarnjom energijom« razumijevamo energiju sistema koja ovisi samo o termodinamičkom stanju. Za one sisteme koji nisu pod djelovanjem vanjskih sila i koji se nalaze u stanju makroskopskog mirovanja, pod unutarnjom energijom U razumijevamo ukupnu energiju sistema. U nekim jednostavnijim slučajevima unutarnja energija je razlika između ukupne energije sistema W i zbroja kinetičke energije makroskopskog gibanja sistema W_k i potencijalne energije W_p nagomilane djelovanjem vanjskih sila na sistem, dakle $U = W - (W_k + W_p)$. Unutarnja energija je jednoznačna funkcija stanja sistema, a njena promjena $\Delta U = U_2 - U_1$ pri prijelazu procesa iz stanja *1* u stanje *2* ne ovisi o obliku tog prijelaza, tj. procesa. Ako sistem obavlja kružni proces, ukupna promjena unutarnje energije jednaka je nuli, $\Delta U = 0$.

Unutarnja energija sistema jednaka je zbroju: *kinetičke* energije kaotičnog gibanja mikročestica sistema (molekula, atoma, iona, slobodnih elektrona itd.), *potencijalne* energije međusobnog djelovanja tih čestica, energije *interakcije* atoma ili iona u molekulama, energije *elektronskih ljusaka* atoma i iona, energije *atomskih jezgara* i energije *elektromagnetskog zračenja.*

Unutarnja energija U homogenog sistema je *aditivna* veličina, tj. jednaka je zbroju unutarnjih energija svih njegovih makroskopskih dijelova, proporcionalna je, dakle, masi sistema. Stoga se često upotrebljava veličina *specifična unutarnja energija*

$$u = \frac{U}{m},$$

tj. omjer unutarnje energije sistema U i njegove mase m. Unutarnja energija *heterogenih* sistema uključuje ne samo zbroj unutarnjih energija svih homogenih dijelova sistema već i energiju molekularnog međusobnog djelovanja njihovih površinskih slojeva.

U najpovoljnijem slučaju unutarnja energija U može se utvrditi onoliko precizno koliko se netačno poznaje stalna komponenta (referencija) U_0, a ova se ne može ustanoviti pomoću termodinamičkih metoda (u fizikalnom smislu U_0 je jednaka umnošku mase sistema i kvadrata brzine svjetla, tj. $u_0 = U_0/m$ je npr. za vodik H_2 pri $T = 0$ $u_0 = 9 \cdot 10^{16}$ J/kg = $2{,}5 \cdot 10^{10}$ kWh/kg, dakle izvanredno velika vrijednost). U stvarnosti, tj. u praktičnoj primjeni veličine U to nije važno, jer se u termodinamičkoj analizi sistema ne poslužujemo apsolutnim vrijednostima njihove unutarnje energije, već *promjenama* veličine U u različitim procesima.

Stoga se za stalnu komponentu, tj. referenciju obično odabire $U_0 = 0$ (pri definiranom toplinskom stanju), a pod unutarnjom energijom razumijevaju one njene komponente koje se mijenjaju u razmatranim procesima. Na primjer, pod unutarnjom energijom idealnih plinova možemo smatrati zbroj kinetičkih energija gibanja njihovih molekula. Prema tome specifična unutarnja energija idealnih plinova ovisi samo o njihovoj termodinamičkoj temperaturi T, pa u diferencijalnom obliku možemo, dakle, pisati $du = \mathrm{d}U/m = c_v \mathrm{d}T$, gdje je $c_v = f(T)$ specifična toplina pri stalnom volumenu (vidi odlomak 2.3.3). Za jednoatomne plinove c ne ovisi o temperaturi, pa je $u = c_v T$, gdje indeks v upućuje da je riječ o stalnom volumenu.

2.3.2. Entalpija. Veličina unutarnja energija u tehničkoj se termodinamici pretežno upotrebljava pri razmatranju procesa kod kojih se ne mijenja radna tvar. No tamo gdje se radna tvar *giba* (para u turbini, zrak u kompresoru itd.), prikladno je upotrebljavati veličinu *entalpija*. Ova veličina (oznaka I ili H) nema, doduše, neki naročiti fizikalni smisao, ali je korisna i karakteristična za procese *prigušivanja*; za njih je $I = \mathrm{const}$, tj. entalpija se ne mijenja prilikom prigušivanja ako su brzine tvari ispred i iza prigušilišta međusobno jednake. Entalpija je, jednako kao i unutarnja energija, čista veličina stanja, tj. ovisna samo o toplinskom stanju tvari.

Za takav proces prigušivanja karakteristična je stalnost veličine entalpija (zvana i sadržaj topline)

$$I = U + pV. \tag{2.3-1}$$

Gornja jednadžba može poslužiti i kao definicija entalpije. U diferencijalnom obliku možemo jednadžbu (2.3-1) napisati ovako

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p. \tag{2.3-2}$$

Budući da za mehanički uravnotežene sisteme, ograničene samo na dobivanje mehaničkog rada, vrijedi prvi glavni stavak u diferencijalnom obliku

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V, \tag{2.3-3}$$

to kombiniraniem jednadžbi (2.3-2, 3) slijedi

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}I - V\,\mathrm{d}p. \tag{2.3-4}$$

Ovdje je $V\mathrm{d}p$ diferencijal povratljivog tehničkog rada. Izraz (2.3-3) možemo riječima opisati ovako: »dovedena energija u obliku topline = porast unutarnje energije + energija predana u obliku vanjskog rada«, a jednadžbu (2.3-4) ovako: »dovedena energija u obliku topline = prirast entalpije — energija predana u obliku tehničkog rada«.

U tehnici se za dobivanje rada vrlo često upotrebljavaju procesi pri stalnom tlaku ($\mathrm{d}p = 0$) ili procesi među stalnim tlakovima bez dovođenja topline ($Q = 0$). U prvom je slučaju $Q = I_2 - I_1$, a u drugome $\mathrm{d}I = V\,\mathrm{d}p$.

Kao što se primjenjuje specifična unutarnja toplina $u = U/m$, tako se analogno upotrebljava i *specifična entalpija* $i = I/m$, tj. omjer entalpije I i mase m tvari koja ima entalpiju I. Uz primjenu veličine i umjesto I, gornje jednadžbe dobivaju oblik

$$i = u + pv, \quad \mathrm{d}i = \mathrm{d}u + p\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}p, \quad \mathrm{d}q = \mathrm{d}u + p\,\mathrm{d}v,$$

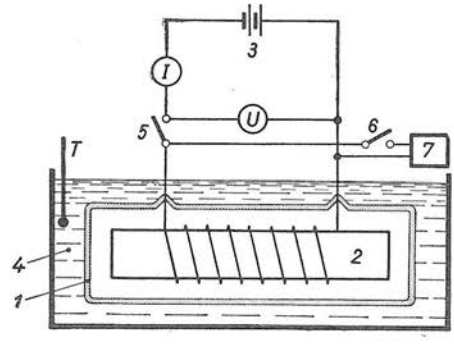
$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}i - v\,\mathrm{d}p,$$

jer je $q = Q/m$, a $v = V/m$ specifični volumen ($v = 1/\rho$). Napominjemo da sve te jednadžbe vrijede za bilo koju tvar.

2.3.3. Specifične topline. Skica na crtežu D.9 prikazuje *Nernstov* kalorimetar. To je dvostruka staklena posuda *1* u koju se stavlja kruto tijelo *2* mase m kojemu želimo izmjeriti neka toplinska svojstva. Prije toga na tijelo se spiralno namota platinska grijaća žica, čiji se izvodi priključe na izvor električne struje *3*. Zatim se iz unutrašnjosti kalorimetra i prostora među stijenkama isiše zrak, te konačno obje staklene posude zatale. Tako evakuirana staklena posuda stavi se u veću posudu *4*, koja se nalazi na onoj temperaturi T na kojoj želimo provesti pokus.

Uklapanjem preklopke *5*, kroz platinsku grijaću žicu poteče stalna električna struja I. Budući da je napon U konstantan, izvor *3* daje stalnu električku snagu $P = UI$. Ako je preklopka uključena u toku vremenskog intervala Δt (simbol t označuje vrijeme), izvor električke energije u toku Δt odašilje količinu energije

$$\Delta W = P\,\Delta t = U I\,\Delta t.$$



Sl. D.9. Određivanje specifične topline krutog tijela pomoću Nernstova kalorimetra

Ova električka energija pretvara se u platinskom grijaču u *toplinsku energiju*. Prema zakonu o održanju energije, tj. prema prvom stavku nauke o toplini, razvijena *količina topline* ΔQ jednaka je utrošenoj količini električke energije, dakle $\Delta Q = \Delta W$.

Posljedica dovođenja topline ΔQ u nutrinu izvrsno izoliranog kalorimetra uzrokovala je povišenje temperature eksperimentalnog tijela *2* za vrijednost ΔT. Ako je na samom početku pokusa, dakle u trenutku t_1, temperatura iznosila $T = T_1$, onda je u trenutku t_2 temperatura tijela porasla na T_2: u toku vremenskog intervala Δt temperatura je porasla za $\Delta T = T_2 - T_1$. Temperatura se mjeri otporničkom metodom (vidi odsječak 3.6), a kao otpornik služi sama platinska grijaća žica. Neposredno prije trenutka t_1 uključi se preklopka *6* i pomoću električkog mjernog mosta *7* izmjeri električki otpor platinske žice R_1. Nakon vremenskog intervala Δt ponovno se uključi *6* te izmjeri povišeni otpor R_2 (vidi odgovarajuće izraze u odlomku 3.6.3). Iz omjera R_2/R_1 može se izračunati povišenje temperature ΔT.

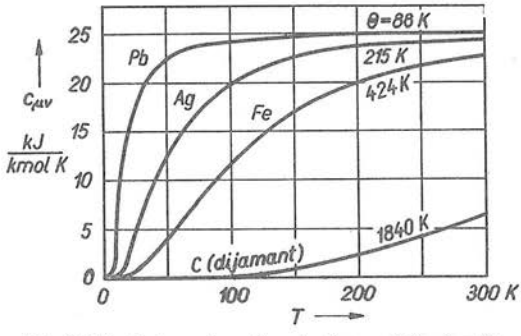
Mnogobrojni pokusi pokazuju da između razvijene topline $\Delta Q = \Delta W = U I\,\Delta t$, mase tijela m i povišenja temperature ΔT postoji linearna veza $\Delta Q = c\,m\,\Delta T$. Veličinu

$$c = \frac{\Delta Q}{m \Delta T} \tag{2.3-5}$$

nazivamo *specifičnom toplinom* ili »specifičnim toplinskim kapacitetom«. U matematičkoj interpretaciji izraz (2.3-5) piše se u obliku

$$c = \frac{\mathrm{d}Q}{m\,\mathrm{d}T}, \tag{2.3-6}$$

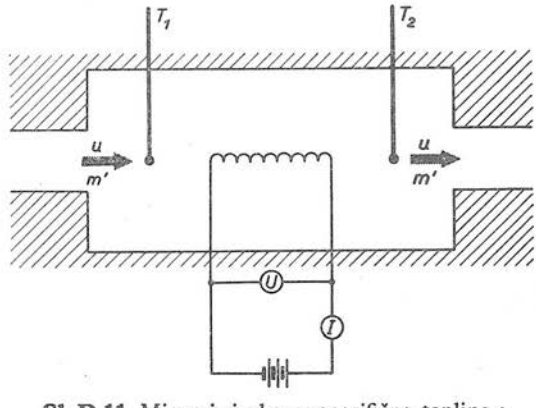
tj. realno povišenje temperature ΔT zamijenjeno je diferencijalom dT, te analogno ΔQ sa dQ. Ovdje možemo napomenuti da se u jednadžbe (2.3-5, 6) umjesto razlike termodinamičkih temperatura ΔT, odnosno dT, može staviti i razlika relativnih (npr. Celzijeve) temperatura $\Delta\vartheta$, odnosno $d\vartheta$, jer je $\Delta T = T_2 - T_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \Delta\vartheta$ (vidi odlomak 3.4.1).



Sl. D.10. Ovisnost molne topline nekih krutih tvari o temperaturi. θ označuje temperaturu pri kojoj se specifična toplina približava maksimalnoj vrijednosti

Vrijednost specifične topline c mijenja se od tvari do tvari, a osim toga ona ovisi o temperaturi pri kojoj je izmjerena (u praksi se često upotrebljava »srednja specifična toplina«, koja približno vrijedi za određeni temperaturni interval (vidi npr. odsječak 5.2 i tablicu D-25). To nam ilustrira slika D.10, koja se odnosi na *krute tvari*, a prikazuje »molnu toplinu« (vidi odlomak 1.4.3). Za pare i plinove (vidi tablicu D-5) ta je različitost još jače izražena. Osim toga do izražaja dolaze uvjeti pod kojima se mjeri c (na primjer tlak). U praksi se zato primjenjuju *dvije različite* specifične topline: c_p — specifična toplina pri stalnom tlaku (izobarna specifična toplina) i c_v — specifična toplina pri stalnom volumenu (izohorna specifična toplina).

Izobarna specifična toplina c_p plinova i para u načelu se mjeri prema slici D.11: ispitivana tvar jednoliko, dakle sa stalnom brzinom u struji kroz dobro izolirani cilindar presjeka A. Maseni protok m' tvari je dakle konstanta te iznosi $m' = \rho A u$, gdje je ρ gustoća tvari (vidi odlomak B.3.1.5). Grijalica razvija stalnu snagu $P = UI$, pa se, dakle, u toku vremena Δt plinu (koji struji) predaje toplina $\Delta Q = P\,\Delta t$. U toku Δt kroz bilo koji presjek cilindra prođe količina tvari mase $m = m'\Delta t$. Ugrađeni termometri pokazuju razliku temperature $\Delta T = T_2 - T_1$. Prema tome je izobarna specifična toplina prolazeće tvari



Sl. D.11. Mjerenje izobarne specifične topline c_p

$$c_p = \frac{\Delta Q}{m\,\Delta T}, \qquad (2.3\text{-}7)$$

odakle uvrštenjem navedenih izraza dobivamo

$$c_p = \frac{P}{m'\,\Delta T}.$$

Sve tri veličine na desnoj strani jednadžbe relativno je lako mjeriti. Indeks p označuje da su mjerene pri *stalnom tlaku.*

U matematičkoj interpretaciji izraz (2.3-7) obično se piše ovako

$$c_p = \frac{dQ}{m\,dT} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p, \tag{2.3-8}$$

što neposredno slijedi uz pomoć jednadžbe (2.3-4) iz prošlog odlomka. To znači da je izobarna specifična toplina c_p jednaka omjeru prirasta specifične entropije i prirasta temperature pri stalnom tlaku.

Izohorna specifična toplina c_v definirana je istom jednadžbom (2.3-7), ali pri $V = \text{const}$, gdje je V obujam ispitivane količine tvari. Pri tom vrijedi

$$c_v = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v, \tag{2.3-9}$$

što se može dobiti uz pomoć jednadžbi iz odlomka 2.3.2.

Veličinu c_v vrlo je teško precizno izmjeriti. Stoga se ona izračunava iz poznate c_p i poznatog omjera $\kappa = c_p/c_v$, dakle mjerenjem κ. Ovaj omjer može se precizno utvrditi na mnogo načina. Jedan od njih je pomoću mjerenja brzine u zvuka u ispitivanoj tvari. S poznatom brzinom zvuka, κ se dobiva pomoću jednadžbe $\kappa = u^2/(RT)$, gdje je u brzina zvuka (vidi odlomak C.1.1.1).

Primjer 1. Izračunajmo specifičnu unutarnju energiju u i entalpiju i zraka temperature $\vartheta = 25\,°C$, ako smo odabrali referentne vrijednosti $u_0 = 0$, $i_0 = 0$ pri $\vartheta_0 = 0\,°C$ (ledište vode).

Integriranjem jednadžbe (2.3-8) dobivamo $i = c_p(T - T_0) + i_0 = c_p(\vartheta - \vartheta_0) = c_p\vartheta$, jer je $i_0 = 0$ pri $\vartheta_0 = 0$. Vrijednost specifične entalpije pri 25 °C, dakle, jest

$$i = c_p\,\vartheta = 1005\frac{\text{J}}{\text{kg °C}} \cdot 25\,°C = 25{,}1\ \text{kJ/kg},$$

gdje smo vrijednost $c_p = 1005\ \text{J/kg °C}$ uzeli iz tablice D-5.

Analogno iz jednadžbe (2.3-9) dobivamo $u = c_v\vartheta$. Budući da je za zrak $\kappa = c_p/c_v = 1{,}40$, možemo dalje pisati $u = \vartheta c_p/\kappa = i/\kappa = (25{,}1/1{,}4)\ \text{kJ/kg} = 17{,}95\ \text{kJ/kg}$.

Primjer 2. U savršeno izoliranom kalorimetru nalazi se voda mase $m_2 = 0{,}5$ kg i temperature $\vartheta_2 = 25\,°C$. U taj kalorimetar ubaci se komad aluminija mase $m_1 = 0{,}30$ kg i temperature $\vartheta_1 = 120\,°C$ (slika D.12). Pri tom se temperature vode i aluminija izjednače i postignu vrijednost $\vartheta = 35{,}8\,°C$. Kolika je specifična toplina c_1 aluminija?

Prilikom uronjavanja aluminija u vodu temperatura aluminija je spala od ϑ_1 na ϑ, a temperatura vode u kalorimetru je porasla od ϑ_2 na ϑ. To znači da je aluminij predao vodi toplinu

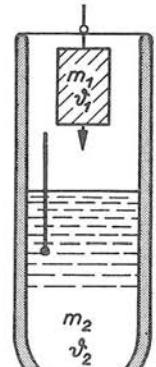
$$Q = m_1 c_1(\vartheta_1 - \vartheta) = m_2 c_2(\vartheta - \vartheta_2),$$

odakle slijedi izraz za traženu specifičnu toplinu aluminija

$$c_1 = c_2\frac{m_2}{m_1}\frac{\vartheta - \vartheta_2}{\vartheta_1 - \vartheta}.$$

U priručnicima nalazimo da specifična toplina vode pri temperaturi oko 40 °C iznosi $c_2 = 4{,}178\ \text{kJ/kg °C}$ (kod tačnijeg računa može se vrijednost veličine c_2 interpolirati na $\vartheta = 35{,}8\,°C$). Računanjem dobivamo

$$c_1 = 4{,}178\frac{\text{kJ}}{\text{kg °C}}\,\frac{0{,}5}{0{,}3}\,\frac{35{,}8 - 25}{120 - 35{,}8} = 0{,}895\frac{\text{kJ}}{\text{kg °C}}.$$



Sl. D.12. Kalorimetrijsko utvrđivanje specifične topline krutih tijela

Primjer 3. Izračunajmo koliki je toplinski kapacitet 3 kilograma aluminija i kolika je njegova molna (specifična) toplina. Iz primjera 2 znamo da je za aluminij $c = 0{,}895$ kJ/(kg °C). Budući da je $m = 3$ kg, toplinski kapacitet iznosi

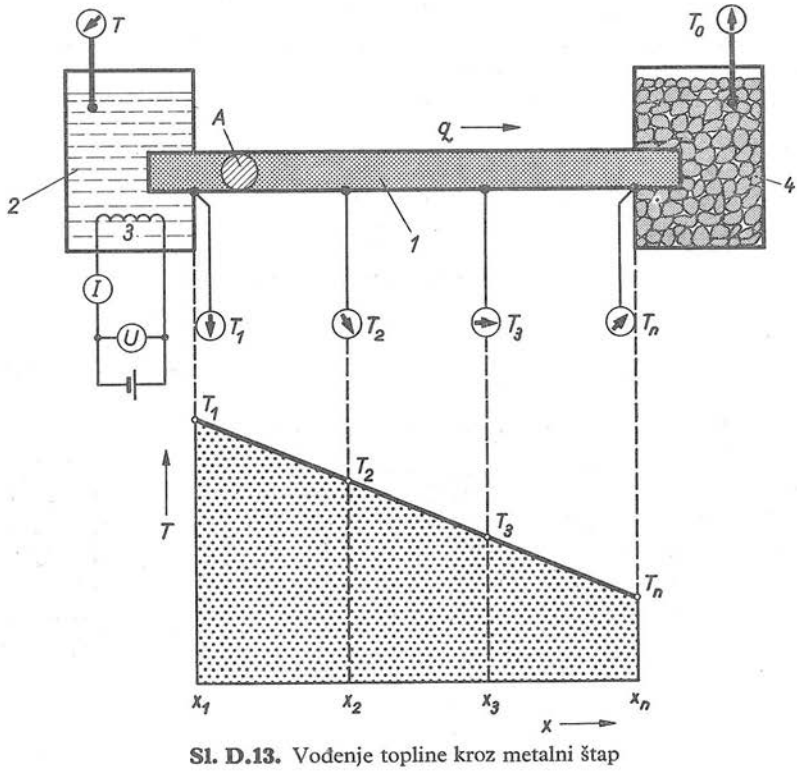
$$C = mc = 3 \text{ kg} \cdot 0{,}895 \text{ kJ/(kg °C)} = 2{,}685 \text{ kJ/°C}.$$

Relativna molekularna masa M aluminija jednaka je njegovoj relativnoj atomskoj masi $A = M = 26{,}98$ (vidi tablicu 1 u prilogu knjige). Ako to uvrstimo u izraz (1.4-5) za c_μ (odlomak 1.4.3), dobivamo molnu toplinu

$$c_\mu = cM \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 0{,}895 \frac{\text{kJ}}{\text{kg °C}} 26.98 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 24{,}2 \frac{\text{kJ}}{\text{°C kmol}}.$$

Usporedbom sa slikom D.10 vidimo da i drugi metali pri temperaturama bliskima $\vartheta = 0$ °C ($T \approx 273$ K) imaju približno istu vrijednost specifične topline u odnosu prema individualnoj jedinici mase kilomol.

2.3.4. Vođenje topline i temperature. Toplina se može prenositi od toplijeg tijela na hladnije na tri načina: *vođenjem* (kondukcijom), *strujanjem* tekućine, plina ili pare (konvekcijom) i *zračenjem* (radijacijom; vidi odsječak G.1.3). U ovom odlomku obradit ćemo prvi način, vođenje topline.



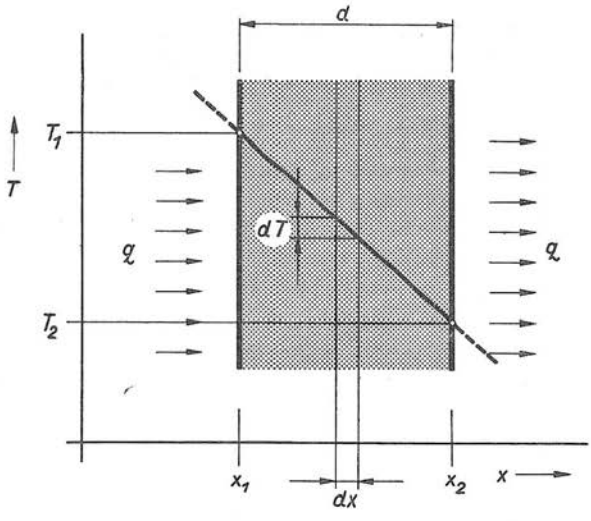
Sl. D.13. Vođenje topline kroz metalni štap

U tu svrhu razmotrimo jednostavan pokus koji je prikazan na slici D.13. Homogeni metalni štap *1* ugrađen je svojim lijevim krajem u posudu *2* temperature T. U posudi se nalazi tekućina koja se može zagrijavati električkom grijalicom *3*. Desni kraj štapa ugrađen je u posudu s ledom *4*, koja se stalno nalazi na temperaturi

$T_0 = 273{,}15$ K (načelno to može biti i bilo koja druga temperatura manja od T, dakle $T_0 < T$). Zamislimo da je štap *1* tako dobro izoliran od okoline da se nikakva toplina ne prenosi od štapa na okolinu ili obratno. U tom slučaju toplina može prelaziti s toplije posude *2* na hladniju posudu samo na taj način da je vodi metalan štap *1*. Posve analogno metalna žica vodi električnu struju.

Pošto je uspostavljeno stacionarno strujanje topline između *2* i *4*, tj. pošto su se stabilizirale temperature T i T_0, izmjerimo temperature u tačkama x_1, x_2, x_3 . . . , x_n, na primjer pomoću privarenih električkih termometara. Mjerenje će dati pripadne temperature T_1, T_2, T_3, . . . , T_n, koje su grafički prikazane na dijagramu slike D.13. Vidimo da temperatura linearno opada s udaljenošću x.

U mislima možemo dio štapa *1* izdvojiti i posebno ga nacrtati, kao što smo učinili na slici D.14, tj. izdvojili smo dio štapa između x_1 i x_2. Na temelju mnogobrojnih pokusa *Fourier* je postavio teoriju vođenja topline, koja se za slučaj slike D.14 može napisati u obliku



Sl. D.14. Sniženje temperature prilikom vođenja topline kroz zid od homogene krute tvari

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}, \tag{2.3-10}$$

a posve općenito u diferencijalnom obliku

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\lambda A \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}. \tag{2.3-11}$$

Pri tom simbol ΔQ predstavlja količinu topline koja u toku vremena Δt prođe kroz bilo koji presjek A (okomit na smjer vođenja topline) štapa. Veličina λ naziva se *specifična toplinska vodljivost* (neki je autori nazivaju »koeficijent toplinske vodljivosti«). Za većinu tvari λ ovisi o temperaturi po zakonu $\lambda = \lambda_0(1 + b\vartheta)$, gdje je $\lambda = \lambda_0$ pri $\vartheta = 0\,^\circ\mathrm{C}$; konstanta b utvrđuje se eksperimentalno, a može biti i negativna (npr. za većinu kapljevina i metala).

Za slučaj slike D.14 u jednadžbi (2.3-10) treba da stoji $\Delta T = T_1 - T_2$, $\Delta x = x_2 - x_1 = d$. Na desnoj strani jednadžbi (2.3-10, 11) predznak minus stoji zato što s prirastom duljine x temperatura T pada, tj. temperatura postaje sve niža u smjeru širenja topline.

Budući da je toplina Q u stvari energija, to nam je omjer $\Delta Q/\Delta t$, odnosno diferencijalni kvocijent $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, poznat iz mehanike kao *snaga* P. U nauci o toplini tu snagu nazivamo *toplinska snaga* (neki je autori nazivaju »toplinski mlaz« ili

»toplinski tok«), a pretežno je označujemo posebnim slovom Φ (sa P označuje se snaga u svim drugim granama tehnike), dakle:

$$\Phi = P = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Ako je strujanje topline jednoliko u toku vremena Δt, onda vrijedi $\Phi = \Delta Q/\Delta t$, a ako je stalno u toku duljeg vremena t, može se jednostavno pisati $\Phi = Q/t$. Prema tome u skladu s jednadžbom (2.3-11) općenito vrijedi

$$\Phi = -\lambda A \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}. \qquad (2.3\text{-}12)$$

Ovaj izraz možemo pojednostavniti dalje ako uvedemo veličinu *gustoća snage*

$$q = \frac{\Phi}{A}, \qquad (2.3\text{-}13)$$

tj. omjer snage Φ i okomite površine A kroz koju ta snaga prolazi (npr. presjek A štapa *1* na slici D.13). Veličinu q neki autori nazivaju i »površinska gustoća snage« ili »gustoća toplinskog toka«. Uz pomoć (2.3-13) izraz (2.3-12) može se dovesti u oblik

$$q = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \qquad (2.3\text{-}14)$$

koji za slučaj primjera na slici D.14 (vođenje topline kroz ravnu stijenu) uz $q = \Phi/A$ glasi

$$q = \frac{\Phi}{A} = \frac{\lambda}{d}(T_1 - T_2) = \frac{\lambda}{d}\Delta T. \qquad (2.3\text{-}15)$$

Vrijednost specifične toplinske vodljivosti λ jako ovisi o vrsti tvari, a osim toga o strukturi i vlažnosti tvari te o temperaturi i tlaku. Za *plinove* se kreće u rasponu $\lambda = 0{,}006 \ldots 0{,}6$ W/Km, raste s temperaturom, a o tlaku praktički ne ovisi. Za *kapljevine* raspon je $0{,}09 \ldots 0{,}7$ W/Km; λ pada s temperaturom — iznimka su voda i glicerin. *Konstrukcijski i izolacijski* materijali imaju $0{,}023 \ldots 2{,}9$ W/Km, a λ raste s temperaturom; znatan je utjecaj šupljikavosti i vlažnosti. Za većinu *metala* λ pada s temperaturom i s udjelom primjesa; kreće se između 2 i 420 W/Km.

Primjer 1. Izračunajmo koliko se toplinske energije izgubi u toku mjesec dana zbog vođenja topline kroz zid debljine 25 cm, ako su izmjere zida $5 \times 2{,}4$ m, a na unutarnjoj i vanjskog stijeni zida se podržavaju temperature $\vartheta_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$ i $\vartheta_2 = -25\,^\circ\mathrm{C}$. U jednom slučaju zid je izrađen od opeke, a u drugome od drozgine vune.

Veličine koje se odnose na zid od opeke označit ćemo indeksom $_1$, a veličine koje se odnose na zid od drozgine vune indeksom $_2$. U nekom starom udžbeniku pronašli smo da je specifična toplinska vodljivost zida od opeke $\lambda_1 = 0{,}65$ kcal/(hKm), a za zid od drozgine vune $\lambda_2 = 0{,}034$ kcal/(hKm). Stoga ćemo ove vrijednosti najprije pretvoriti u jedinice Međunarodnog sistema jedinica. Računanjem dobivamo (vidi odlomak 6.2.3)

$$\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{hKm}} = \frac{4186{,}8\ \mathrm{J}}{3\,600\ \mathrm{sKm}} = 1{,}163\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Km}}.$$

Stoga naši podaci glase:

$$\lambda_1 = 0{,}756\ \mathrm{W/Km}; \qquad \lambda_2 = 0{,}0395\ \mathrm{W/Km}.$$

Razlika temperature iznosi $\Delta T = \Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 = 25\,°C - (-25\,°C) = 50\,°C = 50\,K$ (vidi odlomak 3.4.1) i ona je jednaka u oba slučaja. Pomoću jednadžbe (2.3-15) za zid od opeke dobivamo gustoću snage i snagu

$$q_1 = \frac{\lambda_1 \Delta T}{d} = \frac{0{,}756 \cdot 50\ \mathrm{W/m}}{0{,}25\ \mathrm{m}} = 152\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2},$$

$$\Phi_1 = q_1 A = 152\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot 2{,}4\,\mathrm{m} = 1810\,\mathrm{W} = 1{,}81\,\mathrm{kW}.$$

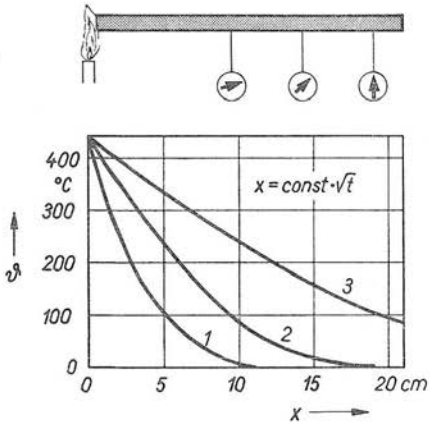
Mjesečno (30 dana) se gubi toplina

$$Q_1 = \Phi_1 t = 1{,}81\,\mathrm{kW} \cdot 30 \cdot 24\,\mathrm{h} = 1300\,\mathrm{kWh}.$$

Za zid od drozgine vune ove će veličine biti $\lambda_2/\lambda_1 = 0{,}0395/0{,}756 = 0{,}0522\ (= 1/19{,}1)$ puta veće, dakle

$$q_2 = q_1 \lambda_2/\lambda_1 = 7{,}95\ \mathrm{W/Km};$$

$$\Phi_2 = 94{,}5\ \mathrm{W};\quad Q_2 = 68\ \mathrm{kWh}.$$



Sl. D.15. Nestacionarno vođenje topline okrugle željezne šipke dugačke 1 m, promjera 8 mm, bez toplinske izolacije: *1* — krivulja za $t_1 = 0{,}5$ min, *2* — za $t_2 = 2$ min, *3* — za $t_3 = 8$ min

Specifična toplinska vodljivost λ odnosi se na *stacionarno* strujanje topline, tj. pojave na slici D.13 počeli smo promatrati tek pošto je uspostavljeno stacionarno stanje. Prilike su posve drukčije pri *nestacionarnom* stanju, što vidimo na grubom eksperimentalnom uređaju prikazanom na slici D.15. U trenutku $t = 0$ temperatura T_0 jednaka je duž čitava metalnog štapa. Ako zatim temperaturu lijevog kraja štapa skokomice (trenutno) povisimo na vrijednost T, mjerenjem ćemo na raznim mjestima x dobiti vrijednosti prikazane krivuljama *1*, *2*, *3*. Za konkretan slučaj krivulja *1* prikazuje razdiobu temperature u trenutku $t = 0{,}5$ minuta nakon povišenja od T_0 na T (za sliku vrijedi $\vartheta = T - 273{,}15\,\mathrm{K}$; vidi odlomak 3.4.1). Ostale dvije krivulje vrijede u trenucima mjerenja $t_2 = 2$ min, $t_3 = 8$ min.

Ova se pojava, koju letimično opisuje slika D.15, može proučavati samo pomoću osnovne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

gdje je veličina *a specifična vodljivost temperature* definirana izrazom

$$a = \frac{\lambda}{c\,\rho}. \tag{2.3-16}$$

Ovdje je λ stacionarna specifična toplinska vodljivost, c specifična toplina, a ρ gustoća tvari. Veličinu a neki autori nazivaju »koeficijent temperaturne vodljivosti«, a u engleskom jezičnom području »thermal diffusivity«.

Primjer 2. Izračunajmo specifičnu vodljivost temperature a za materijale iz primjera 1. U priručnicima nalazimo ove podatke:

$$\text{opeka: } \lambda_1 = 0{,}756\ \mathrm{W/Km},\quad c_1 = 0{,}84\ \mathrm{kJ/kgK},\quad \rho_1 = 1800\ \mathrm{kg/m^3};$$

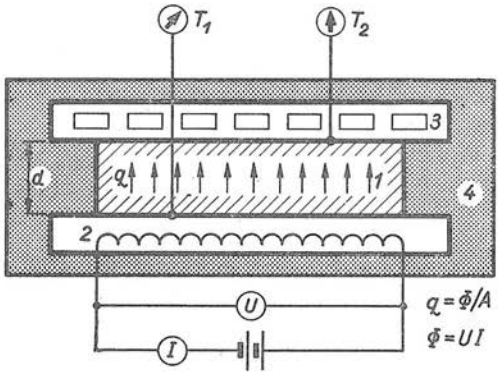
$$\text{drozgina vuna: } \lambda_2 = 0{,}0395\ \mathrm{W/Km},\quad c_2 = 0{,}75\ \mathrm{kJ/kgK},\quad \rho_2 = 250\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Računanjem pomoću jednadžbe (2.3-16) dobivamo a_1 za zid od opeke:

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1} = \frac{0{,}756 \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\,m}}}{0{,}84 \dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}\ 1800 \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}.$$

Analognim računanjem za zid od drozgine vune dobili bismo $a_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s}$, tj. nebitno različitu vrijednost od a_1. To znači da u pogledu brzine širenja temperature oba zida imaju približno jednaka svojstva.

2.3.5. Mjerenje λ i električka analogija toplinskih krugova. Postoji niz načina mjerenja specifične toplinske vodljivosti λ; radi zornosti ovdje ćemo prikazati načelno najjednostavniji (sl. D.16). U stacionarnom toplinskom stanju sva toplina koju proizvodi grijalica *2* prolazi kroz ispitivanu tvar *1* i predaje se hladnjaku *3*. Budući da se pri tom mjere temperature T_1 i T_2, pomoću jednadžbe (2.3-15) može se izračunati specifična toplinska vodljivost ispitivane tvari



Sl. D.16. Gruba skica uređaja za mjerenje λ izolacijskih i konstrukcijskih materijala: *1* — ispitivani materijal, *2* — električka grijalica, *3* — vodni hladnjak, *4* — toplinska izolacija

$$\lambda = \Phi \frac{d}{A\,\Delta T} = U I \frac{d}{A\,(T_1 - T_2)},$$

jer je toplinska snaga $\Phi = UI$, a površina ispitivane ploče A (okomito na smjer strujanja topline). U stvarnosti uređaj iz slike D.16 ponešto je kompliciraniji, ima npr. kompenzacijske grijalice.

Između električkih i toplinskih strujnih krugova postoji formalna *analogija*, koja se pri eksperimentalnim istraživanjima odlično iskorištava za *električko modeliranje toplinskih krugova*. Do predodžbe o toj analogiji možemo doći ako napišemo jednadžbe strujanja u električkim krugovima

$$U = \Delta V = V_1 - V_2 = I R = I \frac{l}{\kappa A}.$$

Ovdje simboli označuju: U — električki napon; V_1, V_2 — električke potencijale; $\Delta V = V_1 - V_2$ — razliku električkih potencijala (napon). U istom obliku možemo napisati i jednadžbu (2.3-15)

$$\Delta T = \Phi \frac{d}{\lambda A},$$

što je potpuno analogno izrazu za električko strujanje

$$\Delta V = I \frac{l}{\kappa A}.$$

U praksi se primjenjuju uglavnom dvije analogije, jedna prema *Bošnjakoviću* (s indeksom B u tablici D-6), te druga prema *Mihjejevu* (s indeksom M).

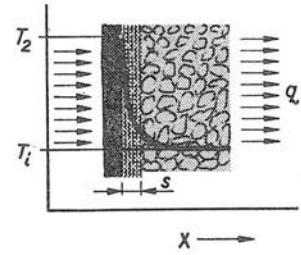
Tablica **D-6**

Analogija električkih i toplinskih strujnih krugova

Veličina	Električki krug	Toplinski krug	
		Bošnjaković	Mihjejev
Duljina	l	d	d
Presjek	A	A	A
Specifična vodljivost	κ	λ	λ
Otpor	$R=\frac{l}{\kappa A}$	$R_B=\frac{d}{\lambda A}$	$R_M=\frac{d}{\lambda}$
Vodljivost	$G=1/R$	$G_B=1/R_B$	$G_M=1/R_M$
Struja	I	Φ	q
Napon	$\Delta V=IR$	$\Delta T=\Phi R_B$	$\Delta T=qR_M$

2.3.6. Prijelaz i prolaz topline. U tehničkim proračunima neobično je važno prenošenje topline od tekuće ili plinovite tvari na krutu tvar. Proces prenošenja topline odvija se istodobno *vođenjem* kroz *granični sloj* tekućine ili plina te *konvekcijom*. Taj *prijelaz topline* osnova je djelovanja izmjenjivača topline, čija je suština dodir struje plinova, tekućina ili para sa stijenkama metalnih cijevi ili ploča.

Zamislimo da vruća metalna stijenka temperature T_2 (sl. D.17) predaje toplinu tekućini koja struji duž stijenke. Iako je strujanje tekućine *turbulentno*, ipak neposredno uz površinu cijevi postoji *granični sloj* debljine s u kojem je strujanje *laminarno*. U tom sloju toplina se uglavnom prenosi time što tekućina (ili plin ili para) *vodi* toplinu. U vanjskom sloju toplina se prenosi intenzivnim premještanjem čestica tekućine, *konvekcijom*. Za plinove, vodu, ulja itd. prijelaz topline od metalne stijenke uglavnom ovisi o vodljivosti graničnog sloja (sl. D.17). Prijelaz topline ovisi o mnogim fizikalnim svojstvima plina, pare ili tekućine: o specifičnoj toplinskoj vodljivosti λ, specifičnoj toplini c, gustoći ρ, specifičnoj vodljivosti temperature a, viskoznosti η itd. U pravilu su ti parametri funkcija temperature, a neki od njih i tlaka.



Sl. D.17. Promjena temperature u graničnom sloju pri zagrijavanju tekućine u izmjenjivaču topline

Prijelaz topline računa se pomoću *Newton*ova zakona (vidi sl. D.17)

$$q = \alpha \Delta T = \alpha (T_2 - T_1), \qquad (2.3\text{-}17)$$

Tablica **D-7**

Pregled toplinskih veličina, njihovih oznaka, jednadžbi u kojima dolaze i jedinica Međunarodnog sistema kojima se mjere

Red. br.	Naziv veličine	Oznaka	Jedinica Međunarodnog sistema	Jednadžba i opaska
1	2	3	4	5
1	Termodinamička temperatura, apsolutna temperatura	T, Θ	K	$T_t = 273{,}16$ K
2	Celzijeva termodinamička temperatura, Celzijeva temperatura, relativna temperatura	ϑ, t	°C	$\vartheta = T - 273{,}15$ K
3	Nadtemperatura, razlika temperature	$\Delta\vartheta$, ΔT	K	K = °C
4	Toplina, količina topline	Q	J	$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W$; $\mathrm{d}W = P\mathrm{d}t$
5	Toplina fazne pretvorbe (isparivanja, taljenja, sublimacije)	L	J	
6	Unutarnja energija	U	J	$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$
7	Specifična unutarnja energija	u	J/kg	$u = \mathrm{d}U/\mathrm{d}m$
8	Entalpija, sadržaj topline	I, H	J	$I = U + pV$
9	Specifična entalpija	i, h	J/kg	$i = \mathrm{d}I/\mathrm{d}m$
10	Slobodna energija (Helmholtz)	F	J	$F = U - TS$
11	Specifična slobodna energija	f	J/kg	$f = \mathrm{d}F/\mathrm{d}m$
12	Slobodna entalpija, Gibbsova funkcija	G	J	$G = I - TS = F + pV$
13	Specifična slobodna entalpija	g	J/kg	$g = \mathrm{d}G/\mathrm{d}m$
14	Eksergija	E	J	$E = I - I_0 - T_0(S - S_0)$
15	Specifična eksergija	e	J/kg	$e = \mathrm{d}E/\mathrm{d}m$
16	Toplinski kapacitet	C	J/K	$C = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}T = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}\vartheta$
17	Specifična toplina fazne pretvorbe — isparivanja — taljenja — sublimacije	L/m l λ r	J/kg J/kg J/kg J/kg	
18	Specifična toplina (specifični toplinski kapacitet)	c	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$	$\mathrm{d}Q = mc\mathrm{d}T$; $\mathrm{d}T = \mathrm{d}\vartheta$
	— izobarna	c_p	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$	$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p$; K = deg = °C
	— izohorna	c_v	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$	$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$; K = deg = °C

Red. br.	Naziv veličine	Oznaka	Jedinica Međunarodnog sistema	Jednadžba i opaska
1	2	3	4	5
19	Entropija sistema	S	J/K	$dS = dQ/T$
20	Specifična entropija	s	$\frac{J}{kg\,K}$	$s = dS/dm$
21	Toplinska snaga, toplinski tok, toplinski mlaz	Φ, P	W	$\Phi = dQ/dt$
22	Gustoća snage, površinska gustoća snage	q, φ	W/m²	$q = d\Phi/dA$
23	Specifična toplinska vodljivost, koeficijent toplinske vodljivosti	λ	$\frac{W}{K\,m}$	$\lambda = -q\,dx/dT$; K = °C
24	Koeficijent prijelaza topline	α, h	$\frac{W}{m^2\,K}$	$q = \alpha \Delta T$
25	Koeficijent prolaza topline	k	$\frac{W}{m^2\,K}$	$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \Sigma \frac{d}{\lambda}$
26	Specifična vodljivost temperature, toplinska difuznost	a	m²/s	$a = \frac{\lambda}{c\rho}$
27	Koeficijent linearnog širenja	α, λ	1/K	$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dT}$; K = °C
28	Koeficijent prostornog širenja	γ, β	1/K	$\gamma = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dT}$; K = °C
29	Temperaturni koeficijent tlaka	β	1/K	$\beta = \frac{dp}{p_0} \frac{1}{dT}$; K = °C
30	Plinska konstanta	R	$\frac{J}{kg\,K}$	$pv = RT$; K = °C

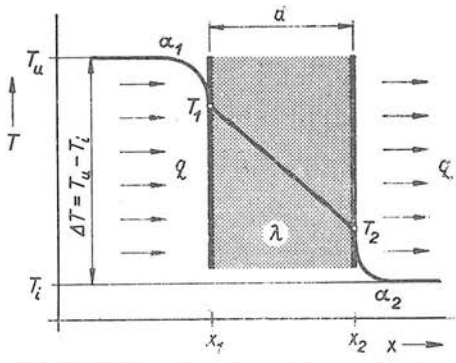
gdje je q gustoća toplinske snage koju smo razmotrili u odlomku 2.3.4. Budući da je toplinska snaga $\Phi = qA$, gdje je A površina na kojoj toplina prelazi, to jednadžbu (2.3-17) možemo napisati u obliku

$$\Phi = \alpha A(T_2 - T_1).$$

Veličinu α nazivamo *koeficijentom prijelaza topline*. Vrijednost α se mijenja u vrlo širokim granicama, a ovisi o nizu parametara koje smo spomenuli.

U tehničkim proračunima redovito se utjecaji specifične toplinske vodljivosti λ (npr. stijenke cijevi izmjenjivača topline) i koeficijenta prijelaza topline α uzimaju zajedno u račun. Na primjer, slika D.18 može prikazivati dio presjeka čelične

cijevi izmjenjivača topline: lijevo struji para temperature T_u, šrafirano je prikazan presjek cijevi, a desno uz desnu stijenku cijevi struji topla voda. Toplina prelazi od pare na vodu s gustoćom snage q, a temperatura pri tom pada u skladu s krivuljom $T_u T_1 T_2 T_i$. Prema jednadžbama (2.3-15, 17) možemo pisati



Sl. D.18. Promjena temperature pri prolazu topline

$$q = \alpha_1 (T_u - T_1) = \frac{\lambda}{d} (T_1 - T_2) = \alpha_2 (T_2 - T_i).$$

Uvođenjem *koeficijenta prolaza topline* k ovaj izraz možemo napisati u obliku

$$q = k (T_u - T_i) = k \Delta T, \quad (2.3\text{-}18)$$

a za ukupnu snagu Φ koja je s pare prešla na vodu

$$\Phi = q A \Delta T = q A (T_u - T_i).$$

Kombinacijom gornjih jednadžbi i uz pomoć slike D.18 dobivamo izraz za proračunavanje koeficijenta prolaza topline

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (2.3\text{-}19)$$

Ako se stijenka sastoji od više slojeva, onda je $d/\lambda = d_1/\lambda_1 + d_2/\lambda_2 + \ldots$ Prenošenje topline zbog djelovanja zračenja uzima se u obzir dodatnim članom $1/\alpha$ u (2.3-19).

2.3.7. Pregled fizikalnih veličina nauke o toplini. U dosadašnjim razmatranjima veličina i jedinica nauke o toplini prodiskutirali smo većinu onih pojmova koji u metrološkom smislu mogu biti nejasni ili sporni. Ostale veličine nije potrebno potanko proučavati, pa smo ih zato svrstali u tablicu D-7. Tamo smo uz naziv dopisali međunarodno usvojene simbole, jedinice Međunarodnog sistema jedinica (SI) kojima se te veličine mjere i veličinske jednadžbe u kojima nabrojene veličine dolaze. Neke od tih jednadžbi ujedno su i definicijske jednadžbe izvedenih veličina. U pogledu jednakosti K = °C čitalac neka prouči odlomke 3.2.4,5 i 3.4.1.

Napominjemo da smo u tablicu D-7 stavili i veličinu *eksergija*, koju je prije desetak godina u tehničku termodinamiku uveo *Z. Rant* iz Ljubljane, sada profesor u Braunschweigu.

3. Temperatura i jedinice temperature

U odsječku 1.1 naglasili smo da je veličina »temperatura« temeljna fizikalna veličina nauke o toplini, štoviše, da se bez nje ne može zamisliti ni jedna druga grana tehnike i znanosti, te da je uz taj pojam vezana čitava civilizacija ljudskog roda. U skladu s tim njenim značenjem, u ovom poglavlju posvećujemo temperaturi izuzetno veliku pažnju i prostor. Pri tom ćemo morati mimoići mnoge zanimljive historijske činjenice koje bi mogle ilustrirati ogroman istraživački rad obavljen posljednjih stoljeća na unapređenju mjerenja temperature, na njenom definiranju i odabiranju jedinica temperature. Naša će izlaganja pokušati pružiti jasnu suvremenu fizikalnu sliku pojma »temperatura«, današnje definicije jedinica temperature, međunarodno prihvaćene uporišne vrijednosti temperatura u odnosu prema kojima se obavljaju najpreciznija mjerenja, letimičnu skicu najpreciznije — plinske termometrije, te uvid u posljedice koje nastaju kad se temperatura razmatra u svjetlu statističke fizike.

3.1. Definicije empiričke i termodinamičke temperature

3.1.1. Empirička temperatura. U odlomku 1.1.2 nabrojili smo nekoliko primjera kako se svojstva ili stanja krutih tijela, plinova i tekućina mijenjaju pod djelovanjem veličine koju smo nazvali »temperatura«. Najčešće se kao mjera promjene temperature upotrebljava promjena duljine stupca (niti) tekućine; stupac se produžuje ili skraćuje pod djelovanjem promjene temperature (npr. Celzijev tekućinski termometar za mjerenje osobne temperature bolesnika itd.). Ako nekim duljinama h stupca tekućine takvog termometra proizvoljno pripišemo stanovite vrijednosti temperature, onda *tako definiranu* fizikalnu veličinu nazivamo *empirička temperatura*, koju obično označujemo slovom t ili θ. Naravno da veza $h = f(t)$ nije jedina mogućnost definiranja empiričke temperature. U obzir dolaze i mnoge druge fizikalne pojave kod kojih se dade dovoljno precizno utvrditi matematički izraz koji povezuje empiričku temperaturu i termometrijsku veličinu (to može biti električki otpor, energija zračenja itd.).

Na primjer, temperaturno područje između ledišta vode i krutišta antimona (vidi odlomak 3.6.3 o Međunarodnoj temperaturnoj skali; »međunarodna temperatura« t također je empirička temperatura) interpolira se mjerenjem omjera električkih otpora R/R_0 platinske žice pomoću jednadžbe $R/R_0 = 1 + At + Bt^2 = f(t)$; vrijednosti A i B dobivaju se *empirički*, mjerenjem omjera R/R_0 pri vrelištu vode i krutištu cinka. To znači da se konstante A i B oslanjaju na stanovita fizikalna svojstva smišljeno odabranih tvari. S gornjom relacijom $f(t)$ empirička temperatura je, dakle, *definirana*. Za druga temperaturna područja veličina t se definira pomoću drugih

odgovarajućih jednadžbi i drugih empiričkih mjernih postupaka. Tako se korak po korak empirička temperatura t može definirati u vrlo širokom rasponu.

Najizrazitiji primjer je tzv. međunarodna temperatura t koja je empirički interpolirana kroz četiri područja (vidi odlomak 3.6.3). Unutar svakog od četiri područja t se oslanja na tzv. *fiksne temperaturne tačke* kojima su pripisane stanovite vrijednosti empiričke međunarodne temperature. Napominjemo da se empirička definicija t iz jednog područja *ne smije* ekstrapolirati na drugo područje, jer u tom slučaju dobivamo neku *drugu* veličinu, a ne empiričku međunarodnu temperaturu t oslonjenu na fiksne tačke navedene u tablicama D-11 i D-12.

3.1.2. Termodinamička temperatura. Mjerenje i empiričko definiranje temperature pomoću termometrijskih tjelesa ima bitni nedostatak: svojstvo termometrijskog tijela (električki otpor, napon itd.; vidi odsječak 1.1 i odlomak 3.6.2), strogo uzevši, nikada nije *tačno* proporcionalno temperaturi u svim područjima (npr. od vrelišta vodika pa sve do krutišta volframa i još dalje), dakle ovisi o svojstvima termometrijskih tvari i pomagala.

U želji za materijalno nezavisnim mjerenjem i reprodukcijom temperature, *Thompson* (*Lord Kelvin*) je godine 1848. za termometrijsku veličinu odabrao samu količinu topline Q. Iz prvog glavnog stavka (zakon o očuvanju energije primijenjen na toplinu i unutarnju energiju) i drugog glavnog stavka termodinamike (toplina ne prelazi sama od sebe s tijela niže temperature na tijelo više temperature) proizlazi, naime, načelna mogućnost definiranja *termodinamičke temperature* T, koja *ne ovisi* o svojstvima termometrijskog tijela. Zamislimo da se *Carnot*ov kružni proces odvija između dvije temperature koje se razlikuju za infinitezimalnu vrijednost $\mathrm{d}T$. Rad koji daje stroj prilikom prenošenja količine topline Q iz spremnika više temperature $T+\mathrm{d}T$ u spremnik niže temperature T proporcionalan je razlici temperatura, tj.

$$\frac{đW}{Q}=f(T)\cdot \mathrm{d}T. \tag{3.1-1}$$

Ovdje je $f(T)$ funkcija koja ovisi samo o temperaturi, dakle ne ovisi o radnom mediju Carnotova procesa. Infinitezimalni rad označili smo sa $đW$, a ne sa $\mathrm{d}W$, zato da bismo istakli kako je riječ o stanovitom iznosu rada, a ne o prirastu funkcije W. Iz istog razloga u nastavku ćemo pisati $đQ$, a ne $\mathrm{d}Q$.

Jednadžbu (3.1-1) možemo interpretirati i kao rezultat rada rashladnog stroja koji radi s negativnim Carnotovim procesom, dakle u suprotnom smjeru od radnog stroja. U tom slučaju je $đW$ infinitezimalni rad koji treba stroj uložiti da bi se količina topline Q prenijela od niže temperature T na višu $T+\mathrm{d}T$ (vidi sliku D.19). To je u skladu s drugim stavkom termodinamike (*R. Clausius*, 1850).

Budući da je veličina $f(T)$ *jedino* funkcija temperature, *Clausius* i *Thompson* nezavisno su zapazili da se na temelju navedenoga temperatura može definirati kao *nezavisna* termodinamička veličina. *Thompson* je prvobitno definirao termodinamičku temperaturu θ uvođenjem $f(\theta)\equiv 1$. U tom slučaju jednadžba (3.1-1) glasi $đW=Q\,\mathrm{d}\theta$. *J. P. Joule* je pokusima s komprimiranim zrakom ustanovio da je $f(T)$ obrnuto proporcionalna tzv. apsolutnoj temperaturi iz jednadžbe stanja plinova. Stoga je *Thompson* uveo novu definiciju, $f(T)=1/T$. Na taj način jednadžba (3.1-1) prelazi u oblik

$$\frac{đW}{Q}=\frac{\mathrm{d}T}{T} \quad \text{ili} \quad \frac{Q'}{Q}=\frac{T'}{T}, \tag{3.1-2}$$

jer je $Q' = Q + W$. Lijeva jednadžba vrijedi za Carnotov proces između infinitezimalne razlike temperatura, a desna za Carnotov proces između konačne razlike temperatura $T' - T$ (sl. D.19 dolje).

Za idealni plin kao radni medij u Carnotovu procesu (3.1-2) može se dokazati posve općenito da je Kelvinova termodinamička temperatura T proporcionalna veličini »temperatura« koja se upotrebljava u plinskoj termometriji; u tu ćemo svrhu pri ovom izvođenju temperaturu (ranije zvanu apsolutna) plinske termometrije označiti slovom $^*T$, dakle sa zvjezdicom na lijevoj strani. Želimo ustanoviti *proporcionalnost* veličina $^*T$ i T, gdje je T Thompsonova termodinamička temperatura iz jednadžbe (3.1-2).

Primjenom prvog glavnog stavka termodinamike $đQ = dU + p\,dV$, uz pomoć $pV = mR\,^*T$ (vidi odlomak 2.1.1), duž izoterma $^*T$ i $^*T'$ zbog $dU = 0$ dobivamo $đQ = mR\,^*T\,dV/V$, odnosno

$$Q = mR\,^*T \ln(V_2/V_1), \qquad Q' = mR\,^*T' \ln(V_2'/V_1'). \tag{3.1-3}$$

Duž adijabata ($S_1 = \text{const}$, $S_2 = \text{const}$) vrijedi $dQ = 0$, pa je $dU = -p\,dV$, odnosno zbog $pV = mR\,^*T$ slijedi $dU/^*T = -mR\,dV/V$. Odavde za obje adijabatske promjene u Carnotovu procesu između temperatura $^*T$ i $^*T'$ proizlazi

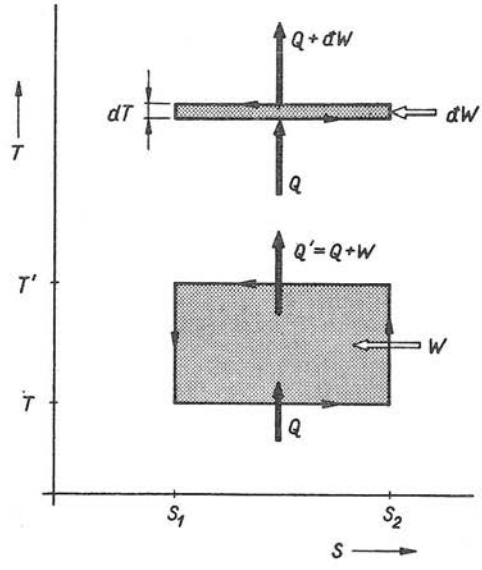
$$\int_{^*T}^{^*T'} \frac{dU}{^*T} = mR \ln \frac{V_2}{V_2'} = mR \ln \frac{V_1}{V_1'},$$

odnosno $V_2/V_1 = V_2'/V_1'$. Uvrstimo li ovaj odnos u jednadžbe (3.1-3), dobivamo

$$Q'/Q = {}^*T'/{}^*T.$$

Budući da su veličine Q' i Q iz ove jednadžbe identične s istoimenim veličinama iz jednadžbe (3.1-2), slijedi

$$\frac{T'}{T} = \frac{^*T'}{^*T}.$$



Sl. D.19. Infinitezimalni i konačni ljevokretni Carnotov kružni proces u dijagramu temperatura—entropija

Riječima ovaj rezultat glasi: apsolutna temperatura idealne plinske termometrije $^*T$ *proporcionalna je* termodinamičkoj temperaturi T definiranoj Carnotovim procesom.

Do *izjednačenja* ovih dviju veličina samo je jedan korak: treba im pripisati *istu* referentnu tačku. Stavimo li, na primjer, $T' = {}^*T' = T_t = 273{,}16$ K (tačno), iz gornje jednadžbe proporcionalnosti slijedi $T = {}^*T$. Tako je u stvari učinjeno (vidi odlomak 3.2.1); T_t pri tom predstavlja temperaturu *trojne tačke vode* (vidi odlomak 3.2.2).

Prema tome termodinamička temperatura T Carnotova procesa jednakovrijedno je definirana jednadžbom stanja idealnih plinova. Ona se može realizirati plinskim termometrom u kojem je termometrijsko sredstvo *idealni plin*. Znamo da za idealni plin vrijedi jednadžba stanja $pV = kZT$ (vidi odlomak 2.1.3), odakle slijedi termodinamička temperatura:

$$T = \frac{1}{kZ} pV = \text{const} \cdot pV. \tag{3.1-4}$$

Ovdje oznake predočuju: p tlak plina, V njegov volumen, Z količinu plina (vidi odlomak 2.1.2), k Boltzmannovu konstantu.

Pod idealnim plinom razumijevamo takav plin kojemu je svojstvo pri nekoj stalnoj temperaturi izraženo jednadžbom $pV = \text{const}$. Pokusi pokazuju da umnožak pV svakog plina ovisi o tlaku p, što znači da idealnih plinova zapravo nema. No odstupanja realnih plinova od idealnih su to manja što su mjerna područja niža od vrelišta upotrijebljenog plina kao termometrijskog sredstva, a s druge strane što je manji tlak plina. Pokusi, osim toga, pokazuju da je odstupanje kod plemenitih plinova i kod plinova čije molekule sadrže po dva jednaka atoma (npr. H_2, N_2, O_2) bitno manje negoli kod kompliciranije građenih plinova i para. Stoga će se plinski termometar to bolje pokoravati jednadžbi stanja što su potpunije ispunjeni spomenuti uvjeti. Zato se u svrhu najpreciznijih mjerenja upotrebljava helijev plinski termometar i pri tom uzimaju u obzir korekture kojima se realni plin svodi na idealni. (O mjernim metodama plinske termometrije i o svođenju realnih plinova na idealni vidi odlomak 3.3.5.)

Pri temperaturi T_r (referentna termodinamička temperatura) jednadžba (3.1-4) za idealni plin dobiva oblik

$$T_r = \text{const} \cdot (pV)_r, \tag{3.1-5}$$

gdje je $(pV)_r$ izmjerena vrijednost umnoška pV pri temperaturi T_r. Podjelom jednadžbi (3.1-4, 5) nastaje

$$\frac{T}{T_r} = \frac{pV}{(pV)_r} \quad \text{ili} \quad T = T_r \frac{pV}{(pV)_r}, \tag{3.1-6}$$

dakle jednadžba analogna izrazu (3.1-2), gdje se umjesto termometrijske veličine Q pojavljuje umnožak pV. Ukoliko se mjerni postupak može provesti tako da je npr. $V = V_r = \text{const}$, onda izraz (3.1-6) prelazi u oblik $T = T_r p/p_r$. Obrnuto je kad se mjerni postupak može provesti pri $p = p_r = \text{const}$; onda vrijedi $T = T_r V/V_r$.

3.2. Termodinamička temperatura i njene jedinice

3.2.1. Osnova termodinamičke temperaturne skale. Ishodište termodinamičke temperaturne skale predstavljaju jednadžbe (3.1-2) i (3.1-6) s time da se *per definitionem* mora fiksirati vrijednost referentne temperaturne tačke T_r. Generalna konferencija za mjere i utege definirala je godine 1954. tu skalu tako što je za referentnu tačku odabrala termodinamičku temperaturu *trojne tačke vode* T_t i propisala joj vrijednost (tačno):

$$T_r = T_t = 273{,}16 \text{ kelvina} = 273{,}16 \text{ K}.$$

Odgovarajući tekst rezolucije broj 3 desetog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege od godine 1954. glasi:

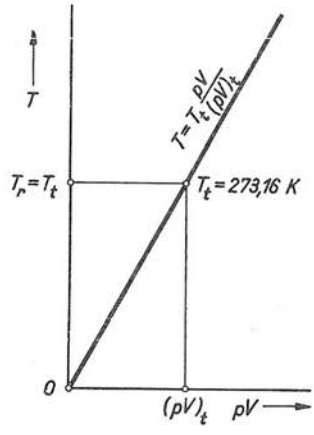
> Generalna konferencija za mjere i utega na svom desetom zasjedanju odlučuje da se termodinamička temperaturna skala definira pomoću trojne tačke vode odabrane za fiksnu fundamentalnu tačku, kojoj dodjeljuje vrijednost 273,16 K (tačno).

Originalni tekst rezolucije glasi (i prijevod i original promijenili smo utoliko što za kraticu jedinice SI $[T]_M$ upotrebljavamo simbol K, a ne °K; vidi odlomke 3.2.4 i 3.2.5):

> La Dixième Conférence Générale des Poids et Mesures décide de définir l'échelle thermodynamique de température au moyen du point triple de l'eau comme point fixe fondamental, en lui attribuant la température 273,16 K, exactement.

Prema tome je termodinamička temperatura T danas definirana na temelju *jedne* fiksna temperaturne tačke, tj. trojne tačke vode (vidi odlomak 3.2.2), kojoj je propisana vrijednost *tačno* $T = T_r = T_t = 273{,}16$ K. Citiranu rezoluciju možemo prikazati grafički u obliku pravca (sl. D.20) koji fizikalnu veličinu T povezuje sa $T_r = T_t$ i termometrijskom veličinom pV *idealnog* plina (vidi odlomak 3.1.2):

$$T = T_t \frac{Q}{Q_t} = T_t \frac{pV}{(pV)_t}.$$



Sl. D.20. Uz definiciju termodinamičke temperaturne skale

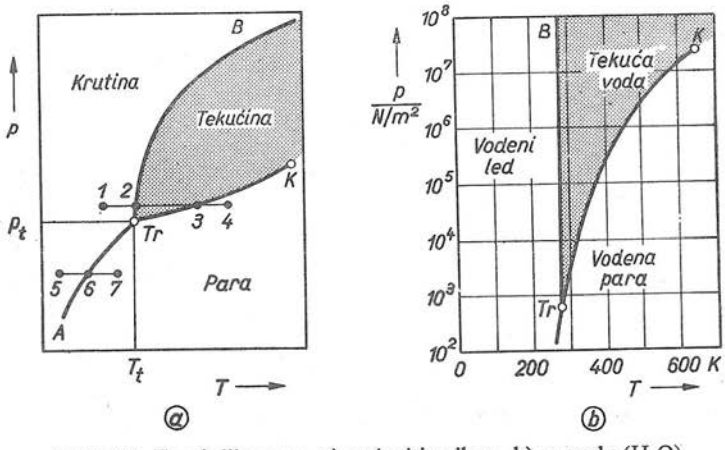
Naglašavamo da je Generalna konferencija fizikalnu veličinu T nazvala »termodinamičkom temperaturom«. Umjesto naziva »termodinamička temperatura«, odnosno »termodinamička Kelvinova temperatura« ili »Kelvinova temperatura«, u prošlosti se pretežno upotrebljavao naziv »apsolutna temperatura«. Stoga je naziv »apsolutna temperatura« vrlo raširen u primjeni. Pridjev »apsolutan« dovodi do zabune pa se zato danas izbjegava u svim granama metrologije; valja ga dakle izbjegavati i u nauci o toplini. Generalna konferencija za mjere i utege, na primjer, tu riječ uopće ne primjenjuje u svojim rezolucijama posljednjih zasjedanja, već samo »termodinamičku skalu« (l'échelle thermodynamique) itd.

3.2.2. Trojna tačka vode. Izbor trojne tačke vode za temelj termodinamičke temperaturne skale duboko je promišljen i utemeljen dugogodišnjim najpreciznijim mjerenjima u vrhunskim metrološkim zavodima i drugim laboratorijima čitava svijeta. Trojna tačka vode kao ravnotežna tačka krutine, tekućine i pare može se reproducirati na $\pm 0{,}0001$ K $= \pm 10^{-4}$ K pouzdano. To znači da relativna nepouzdanost reprodukcije vrijednosti $T_t = 273{,}16$ K iznosi $\Delta T_t / T_t = \pm 10^{-4}$ K/273,16 K $= \pm 4 \cdot 10^{-7}$, što je znatno bolje negoli su npr. prilike u fundamentalnoj električkoj metrologiji (vidi poglavlje E.3).

Tvari mogu u zemaljskoj atmosferi postojati u tri agregatna stanja (faze): u krutom, tekućem i plinovitom (danas se u laboratorijima na visokim temperaturama stvara i četvrto stanje: plazma). U svakom od tih stanja tvari se sastoje od

molekula, koje su međusobno vezane međumolekularnim silama. Molekule se neprekidno kreću kaotičnim gibanjima. U krutim tjelesima međumolekularne privlačne sile toliko su jake da krutina podržava svoj oblik i kad na nju djeluje znatna vanjska sila. U tekućinama su međumolekularne sile znatno slabije, pa stoga one nisu kadre zadržati svoj oblik, već se prilagođuju obliku posude u kojoj se nalaze. U plinovitih tijela razmaci među molekulama su neusporedivo veći nego u tekućina i krutina. Pri tom su međumolekularne privlačne sile neznatne, pa se plinovite tvari šire u čitav prostor u kojem se nalaze.

Uz stanovite vanjske poticaje tvar može prijeći iz jednog agregatnog stanja (faze) u drugo. Mogući prijelazi tvari iz jedne faze u drugu mogu se prikazati *faznim dijagramima*. Načelan prikaz faznog dijagrama vidimo na slici D.21a, a konkretan fazni dijagram vode (H_2O) na slici D.21b. Na ordinatnu os su nanesene vrijednosti tlaka p, a na apscisnu vrijednosti termodinamičke temperature T.



Sl. D.21. Fazni dijagram: a) općeniti prikaz, b) za vodu (H_2O)

Krivuljama ATr, TrB i TrK površina faznog dijagrama razdijeljena je na tri područja. Prvo je područje *krutine*, lijevo od krivulje $ATrB$. Drugo je područje *tekućine*, omeđeno krivuljama $BTrK$, a treće područje *pare*, koje se nalazi desno od krivulje $ATrK$. Krivulja ATr je granična krivulja između krutog i plinovitog stanja (krivulja sublimacije), krivulja TrB je granična krivulja između krutog i tekućeg stanja (krivulja taljenja), a krivulja TrK je granična krivulja između tekućine i pare (krivulja isparavanja ili krivulja napetosti).

Pravac *1—4* grafički prikazuje proces u kojem se kruta tvar dovođenjem topline pri konstantnom tlaku ($p = \text{const}$) najprije pretvara u tekućinu, a zatim u plin (paru). U tački taljenja *2* tijelo se istodobno može nalaziti u dva stanja, u dvije faze: krutoj i tekućoj. Na dijelu *2—3* tvar se nalazi u tekućem stanju, a temperatura joj dalje raste, jer joj se i dalje dovodi toplina. U tački *3* tvar se može nalaziti u dvije faze: u tekućoj ili u obliku pare (zasićena para). Na dijelu *3—4* tvar se nalazi u stanju pare. Tačka K je tzv. *kritična tačka*, u kojoj para kontinuirano prelazi u tekućinu (kapljevinu) prilikom ohlađivanja.

Ako smanjujemo tlak p pri kojem izvodimo naš misaoni pokus prema slici D.21a, pravac procesa *1—4* paralelno će se premještati naniže. Konačno će, pri tlaku koji odgovara tački Tr, tačke *2* i *3* potpuno prijeći jedna u drugu, udružiti se

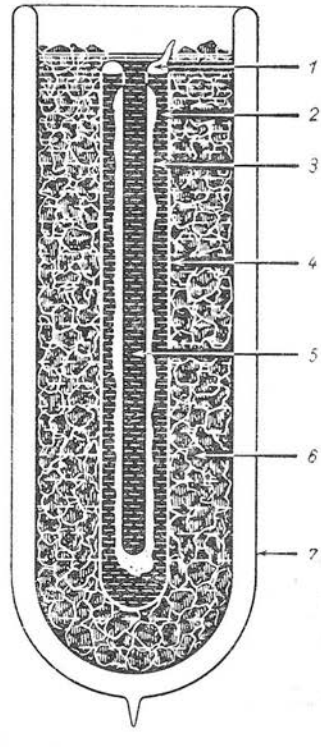
u tačku *Tr*. Ta tačka naziva se *trojna tačka*, jer jedino u trojnoj tački mogu istodobno usporedo postojati sve tri faze, tj. kruta, tekuća i plinovita (para). U toj tački sve tri faze su u *ravnoteži*, tj. ni jedna od faza ne povećava se na račun drugih dviju ako nema vanjskih poticaja.

Trojna tačka *Tr* karakterizirana je sa dva parametra: temperaturom trojne tačke T_t i tlakom p_t trojne tačke (sl. D.21a). Budući da je temperatura trojne tačke vode (određenog izotopnog sastava) odabrana za ishodište mjerenja Kelvinove termodinamičke temperature T, trojnoj tački vode *propisana* je vrijednost (vidi odlomak 3.2.1)

$$T_t(H_2O) = 273{,}16\ \text{K (tačno)}.$$

Reprodukcija (ostvarenje) trojne tačke vode u ampuli od kremenog stakla delikatan je, dugotrajan i skup laboratorijski posao (sl. D.22). Čistoća vode mora biti izvanredna, a izotopni sastav vode mora odgovarati tzv. *oceanskoj vodi*. Na temelju bogatog iskustva najboljih stručnjaka svijeta, Međunarodni komitet za mjere i utege preporučio je godine 1968. postupak reproduciranja trojne tačke vode koji ćemo spomenuti u nastavku. Najprije treba hlađenjem iznutra stvoriti tanak sloj leda oko stijenke termometra. Zatim treba, opet iznutra, ponešto otopiti taj sloj da bi tako nastao nov sloj voda-led pridružen stijenci. Temperatura kojoj je izložena stijenka termometra poraste za nekoliko milikelvina u toku prvih nekoliko sati pripremanja ampule. Nakon 1 do 3 dana ona se stabilizira, a zatim čak i mjesecima ostaje konstantna unutar granica $\pm 0{,}1$ mK.

Početnu promjenu temperature vjerojatno uzrokuje rast ledenih kristala ili polagano iščezavanje napetosti u kristalima. Pokusi s mnogim ampulama za



Sl. D.22. Presjek ampule za reprodukciju trojne tačke vode u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards. Ampula sadrži najčišću odzračenu vodu i permanentno je izolirana, tako da voda svojom gornjom razinom dolazi u dodir samo sa vlastitom parom. Ampula se nalazi u kupki koja se sastoji od mješavine vode i leda. Sistem se nalazi na temperaturi trojne tačke vode onda kad led, voda i para istodobno postoje unutar ampule (tačka *Tr* na sl. D.21): *1* — vodena para, *2* — voda, *3* — led, *4* — izolacijska posuda, *5* — šupljina za baždareni termometar, *6* — mješavina vode i leda, *7* — vakuumska posuda

reprodukciju trojne tačke vode, izvedeni na opisani način, pokazali su da se reproducirane temperature trojne tačke vode međusobno ne razlikuju za više od 0,2 mK, iako su ampule i posude bile različitog porijekla (materijali, proizvođači). Pri reprodukciji trojne tačke vode opasno je sunčano ili umjetno svjetlo ako pada na posudu s ledom. Zato se preporučuje da se mjerenja obavljaju tako da su uređaji zaštićeni od zračenja.

Opsežna istraživanja pokazala su da je izotopni sastav prirodne vode takav da može ponešto utjecati na vrijednost temperature trojne tačke. Zato se za reproduciranje trojne tačke vode uzima voda tzv. *oceanskog sastava*. Oceanska voda sadrži

oko 0,016 molova deuterija (^2H) na 100 molova vodika (^1H), te 0,04 mola ^{17}O i 0,2 mola ^{18}O na 100 molova ^{16}O. Ti udjeli teških izotopa najveći su što su se mogli zapaziti u prirodnoj vodi. U kontinentalnim krajevima voda normalno sadrži oko 0,015 molova ^2H na 100 molova ^1H, dok voda nastala od polarnog snijega katkada sadrži manje od 0,01 mol ^2H na 100 molova ^1H. Usporedbena su mjerenja pokazala da povećanju udjela ^2H za 0,001 mol na 100 molova ^1H odgovara povećanje temperature trojne tačke vode za 0,04 mK. To je, dakle, razlika temperature trojnih tačaka oceanske i kontinentalne vode. Do godine 1968. istraživanja su pokazala da najveća razlika među prirodnim vodama iznosi 0,25 mK.

3.2.3. Ledište vode. U prošlosti je za fundamentalnu fiksnu tačku termodinamičke temperature upotrebljavana temperatura ledišta vode T_0, a termodinamička temperaturna skala bila je osnovana na *dvije fiksne tačke* (ledište i vrelište vode). Od ledišta vode odustalo se godine 1954. zato što se ta temperaturna tačka može reproducirati samo na oko $\pm 0{,}001$ K pouzdano, dakle oko deset puta manje pouzdano negoli trojna tačka vode T_t (vidi odlomak 3.2.2).

Temperatura ledišta vode T_0 mjerena je na različite načine u toku dugog niza godina s najvećom mogućom preciznošću u najbolje opremljenim laboratorijama svijeta. Uzimajući u obzir potrebne korekcije svođenja mjernih rezultata na idealni plin, dobivene su na primjer vrijednosti svrstane u tablici D-8.

Tablica D-8
Rezultati najpreciznijih mjerenja temperature ledišta vode

Laboratorij	T_0
Massachusetts Institute of Technology	273,174 K
Physikalisch-Technische Bundesanstalt	273,149 K
Scientific Research Institute, Tokio	273,148 K
Kamerlingh Onnes Laboratory	273,144 K
Srednja vrijednost	273,154 K

H. Moser iz njemačkog metrološkog zavoda Physikalisch-Technische Bundesanstalt posvetio je preko 30 godina istraživanju pouzdanosti reproduciranja trojne tačke vode, ledišta vode i drugih važnih temperaturnih tačaka. Pri tom je utvrdio da se trojna tačka vode može reproducirati s nepouzdanošću oko $\pm 10^{-4}$ K i unutar nje održavati nekoliko sati. *Moser*ova vrlo opsežna i nadasve pažljiva mjerenja su pokazala da je temperatura trojne tačke vode za oko 0,0098 K veća od temperature ledišta vode; pri tom je nesigurnost poznavanja te razlike oko $(2\ldots3)\cdot 10^{-3}$ K. Prema tome *Moser* je izmjerio razliku

$$T_t - T_0 = 9{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K} \pm (2\ldots3)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}, \qquad (3.2\text{-}1)$$

koju su potvrdili i drugi istraživači iz specijaliziranih termometrijskih laboratorija. Nesigurnost razlike je, kako vidimo, znatna, jer se vrijednost razlike nalazi negdje između 0,012 K i 0,0068 K. Daljnje istraživačke radove na utvrđivanju što preciznije vrijednosti temperature ledišta vode koordinirao je nakon drugog svjetskog rata Savjetodavni odbor za termometriju (vidi odlomak A.7.1.3), a rezultat rada u tom odboru kao i u Međunarodnom komitetu za mjere i utege (BIPM) bila je rezolucija broj 3 Generalne konferencije za mjere i utege koju je ona donijela na devetom zasjedanju godine 1948. Tom se rezolucijom utvrđuje da se temperatura trojne tačke vode dade reproducirati pouzdanije negoli vrijednost tempera-

ture ledišta vode, pa se stoga ishodište (nultačka) Celzijeve termodinamičke temperaturne skale (vidi odlomak 3.4.1) definira kao ona temperatura koja je za 0,0100 K niža od T_t. To znači da je u stvari ledištu vode bila propisana vrijednost

$$T_0 = T_t - 0{,}0100\ \mathrm{K}, \tag{3.2-2}$$

gdje dvije nule na kraju upozoravaju na vrijednost per definitionem.

Do slijedećeg zasjedanja Generalne konferencije mnogi metrološki zavodi ponovno su obavili najpreciznija mjerenja metodom plinske termometrije (vidi odsječak 3.3). Dobivene rezultate i mišljenja o osnovi termodinamičke temperaturne skale Savjetodavni odbor za termometriju temeljito je proučio i preko BIPM dostavio Generalnoj konferenciji prijedlog rezolucije koju je ona prihvatila na svom desetom zasjedanju godine 1954. Tekst te rezolucije citirali smo u odlomku 3.2.1. Za nju je karakteristično ovo: 1. Termodinamička temperaturna skala definira se u odnosu na *jednu* fiksnu temperaturnu tačku, tj. trojnu tačku vode. 2. Toj tački propisana je vrijednost $T_t = 273{,}16$ K (tačno).

Lako je dokazati da rezolucija zahtijeva ukidanje jednadžbe (3.2-2). Budući da je od godine 1954. per definitionem $T_t = 273{,}16$ K, to bi u slučaju zadržavanja izraza (3.2-2) dobili temperaturu ledišta također per definitionem, jer bi vrijedilo

$$T_0 = 273{,}16\ \mathrm{K} - 0{,}0100\ \mathrm{K} = 273{,}1500\ \mathrm{K}\ \text{(tačno)}.$$

To je, međutim, u suprotnosti s jednadžbom (3.2-1), koja kaže da je razlika između temperature trojne tačke i ledišta vode stanovita vrijednost utvrđena *mjerenjem*. Pri tom je nepouzdanost mjerenja oko $\pm 0{,}002$ K i tu nepouzdanost teško je smanjiti, jer ovisi o tome koliko je voda, nastala taljenjem leda, zasićena zrakom.

Jednadžba (3.2-2) ipak je potrebna baš u navedenom obliku, jer se na nju oslanja definicija fizikalne veličine »Celzijeva termodinamička temperatura ϑ« (vidi odlomak 3.4.1). Zbog toga je uveden pojam *fiktivne* vrijednosti temperature ledišta vode, tj. konstanta per definitionem

$$^*T_0 = T_t - 0{,}0100\mathrm{K} = 273{,}15\mathrm{K}\ \text{(tačno)}.$$

Tu fiktivnost označili smo zvjezdicom na lijevoj strani simbola za ledište vode. Prema tome se *stvarna* (fizikalna) vrijednost temperature ledišta vode T_0 i u principu razlikuje od fiktivne $^*T_0$: vrijednost T_0 dobivena je *mjerenjem* (npr. pomoću jednadžbe 3.2-1) i poznata je sa stanovitom mjernom nepouzdanošću, a vrijednost $^*T_0 = 273{,}15$ K dobivena je *propisivanjem* vrijednosti razlike $T_t - {}^*T_0 = 0{,}01$ K (tačno).

Razlika između T_0 i $^*T_0$ važna je samo za razumijevanje principa na kojima se temelji suvremena termometrija. Pri stvarnim mjerenjima ona ne dolazi do izražaja iz dva razloga: 1. Ako je riječ o najpreciznijim mjerenjima, onda se termodinamička temperatura T i međunarodna empirička temperatura t stvarno dovode u vezu mimo Celzijeve termodinamičke temperature. 2. Ako je riječ o mjerenjima koja u pogledu preciznosti nisu vrhunska, onda razlika $T_0 - {}^*T_0$ uopće ne dolazi do izražaja.

3.2.4. Jedinica termodinamičke temperature kelvin. Propisivanjem vrijednosti temperature trojne tačke vode $T_t = 273{,}16$ K (vidi odlomak 3.2.1) definirana je i jedinica termodinamičke temperature »kelvin« (kratica: K). Jednadžbu »$T_t = 273{,}16 \cdot$ K« možemo, naime, napisati u obliku

$$\text{K} = \text{kelvin} = \frac{T_t}{273{,}16}. \qquad (3.2\text{-}3)$$

Stvarno je Generalna konferencija za mjere i utege na svom trinaestom zasjedanju u oktobru godine 1967. jedinicu termodinamičke temperature T definirala posebnom rezolucijom koja riječima opisuje jednadžbu (3.2-3):

> Jedinica termodinamičke temperature kelvin je 273,16-i dio termodinamičke temperature trojne tačke vode.

Generalna konferencija je tu definiciju objavila u rezoluciji broj 4 (1967), koja u originalu glasi:

Résolution 4

La Treizième Conférence Générale des Poids et Mesures,

considérant qu'il est utile de formuler dans une rédaction explicite la définition de l'unité de température thermodynamique contenue dans la Résolution 3 de la Dixième Conférence Générale (1954),

décide d'exprimer cette définition de la façon suivante:

Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

U prvi mah takva se definicija jedinice možda čini neobična, ali analogne definicije imamo i kod nekih drugih osnovnih jedinica: jedinica duljine metar definirana je kao duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala zračenja kriptona 86 (odlomak A.8.1.3), jedinica vremena sekunda definirana je kao trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja cezija 133 (odlomak A.10.1.3), a potpuna analogija s definicijom »kelvina« postoji pri definiciji jedinice luminancije (odlomak G.3.2.6). I u pogledu reprodukcije jedinice kelvin postoji potpuna analogija: metar se npr. reproducira kriptonskom izbojnom žaruljom (sl. A.29), a kelvin ampulom i kupkom sa slike D.22.

Nepouzdanost reprodukcije jedinice $[T]_{\text{M}} = \text{kelvin} = \text{K}$ (jedinica kelvin odabrana je za jednu od osnovnih jedinica Međunarodnog sistema jedinica, SI; vidi poglavlje 4) ovisi o nepouzdanosti kojom se pomoću uređaja sa slike D.22 može ponoviti temperaturno stanje propisano jednadžbom $T_t = 273{,}16$ K. Kako smo spomenuli u odlomku 3.2.2, ta nepouzdanost iznosi u najpovoljnijem slučaju oko $\pm 10^{-4}$ K. Pri tom je termodinamička temperatura T definirana u odnosu na *jednu* temperaturnu tačku (T_t, vidi odlomak 3.2.1). Prije godine 1954. veličina T se oslanjala na *dvije* tačke, na temperaturu ledišta vode T_0 i temperaturu vrelišta vode T_v, a pripadna jedinica kelvin bila je definirana relacijom $T_v - T_0 = 100$ K, dakle

$$\text{kelvin} = \text{K} = \frac{T_v - T_0}{100}.$$

Budući da je nepouzdanost reprodukcije vrelišta vode T_v u najpovoljnijem slučaju oko $\pm 0{,}001$ K, to je i nesigurnost tako definirane jedinice K bila najmanje 10 puta lošija nego što je u današnjeg kelvina iz jednadžbe (3.2-3).

3.2.5. Ukinuće kratica °K i deg. Naziv jedinice termodinamičke temperature »kelvin« (definiciju vidi u prošlom odlomku 3.2.4) i njena kratica »K« službeno su prihvaćeni nedavno, na zasjedanju Generalne konferencije za mjere i utege krajem godine 1967. Prijevod odgovarajuće rezolucije glasi:

Rezolucija 3

Generalna konferencija za mjere i utege, na svom trinaestom zasjedanju, *uzimajući u obzir* nazive »stupanj kelvina« i »stupanj«, simbole »°K« i »deg« te pravila njihove primjene sadržane u rezoluciji 7 devetog zasjedanja Generalne konferencije (1948), u rezoluciji 12 jedanaestog zasjedanja (1960) i u odluci koju je godine 1962. prihvatio Međunarodni komitet za mjere i utege (objavljenoj u Proces-Verbaux, *30*, str. 27),

da su jedinica termodinamičke temperature i jedinica temperaturnog intervala jedna te ista jedinica koja treba da se označuje jedinstvenim nazivom i jedinstvenim simbolom,

odlučuje

1. Naziv jedinice termodinamičke temperature jest »kelvin«, a njen simbol »K«;
2. Isti naziv i isti simbol treba upotrebljavati za izražavanje temperaturnog intervala;
3. Temperaturni interval može se izražavati i jedinicom stupanj Celzija;
4. Ukidaju se gore spomenute odluke o nazivu jedinice termodinamičke temperature, njenom simbolu i označivanju jedinice za izražavanje temperaturnog intervala ili razlike, ali primjene koje su posljedica tih odluka ostaju privremeno dopuštene.

Navodimo i originalni francuski tekst ove rezolucije koja je važna kako za dnevnu operativu tako i za stručnu literaturu i nastavu:

Résolution 3

La Treizième Conférence Générale des Poids et Mesures, *considérant*

les noms »degré Kelvin« et »degré«, les symboles »°K« et »deg« et leurs règles d'emploi contenus dans la Résolution 7 de la Neuvième Conférence Générale (1948), dans la Résolution 12 de la Onzième Conférence Générale (1960) et la décision prise par le Comité International des Poids et Mesures en 1962 (Proces-Verbaux, *30*, page 27),

que l'unité de température thermodynamique et l'unité d'intervalle de température sont une même unité qui devrait être désignée par un nom unique et par un symbole unique,

décide

1° L'unité de température thermodynamique est désignée sous le nom »kelvin« et son symbole est »K«;

2° Ce même nom et ce même symbole sont utilisés pour exprimer un intervalle de température;

3° Un intervalle de température peut aussi s'exprimer en degrés Celsius;

4° Les décisions mentionnées au premier considérant concernant le nom de l'unité de température thermodynimique, son symbole et la désignation de l'unité pour exprimer un intervalle ou une différence de température sont abrogées, mais les usages qui sont la conséquence de ces décisions restent admis temporairement.

Razlog postojanja *dvaju* naziva za *istu* jedinicu sve do potkraj godine 1967, tj. postojanje naziva »stupanj kelvina« = °K za izražavanje vrijednosti veličine »termodinamička temperatura« T i naziva »stupanj« = deg (ruski grad, franc. degré, engl. degree, njem. Grad) za izražavanje razlike temperatura, iznijeli smo pri kraju odlomka 3.4.1. Posebno upozoravamo na dva konkretna brojčana primjera priložena citiranom odlomku. Pomoću njih lako spoznajemo da naziv »stupanj« = deg = Grd nikada ne bi bio ni uveden da su ljudi — u skladu s veličinskim nazorom iz poglavlja A.1 — dosljedno razlikovali veličinu »Celzijeva termodinamička temperatura« ϑ (vidi odlomak 3.4.1) od fizikalne veličine »Kelvinova termodinamička temperatura« T. Pri tom mislimo na razlikovanje kakvo postoji na primjer između veličine »promjer kruga« d i veličine »radijus kruga« r, tj. $d = 2r$. U tom bi slučaju i jednakost jedinica, °C = K = deg (zapravo tri naziva za istu

jedinicu) već odavno bila posve prirodna; od godine 1967. ta prirodnost je uspostavljena citiranom rezolucijom 3 (1967) Generalne konferencije za mjere i utege.

U vezi s time zanimljivo je naglasiti da su neki istaknuti stručnjaci već *prije* oktobra godine 1967. djelovali u tom smislu. Tako je npr. *M. Oprešnik* u predgovoru svoje knjige »Naloge in rešitve iz termodinamike« (Tehnička knjiga, Zagreb 1967) kratko ali savršeno jasno obrazložio svoj postupak primjene simbola »K« (bez kružića) i eliminacije naziva »stupanj« (deg): »U djelu sam sa K označio kako stupanj kelvina tako i temperaturnu razliku; to, doduše, nije u skladu sa standardima, ali je praktično.«

3.2.6. Jedinica stupanj Rankinea. U angloameričkom jezičnom području djelomično se upotrebljava jedinica »stupanj Rankinea« (engl. degree Rankine). Simbol ove jedinice prema britanskoj standardizaciji jest °R. Ta jedinica služi za mjerenje termodinamičke temperature T (odlomak 3.2.1), a u ovom je odnosu prema jedinici kelvin

$$°\mathrm{R} = \frac{5}{9}\,\mathrm{K}, \qquad \text{odnosno} \qquad \mathrm{K} = \frac{9}{5}\,°\mathrm{R} = 1{,}8\,°\mathrm{R},$$

tj. jedinica K je 1,8 puta veća od °R. Za °R u literaturi se upotrebljavaju i oznake deg R, °Rank ili čak samo R. Preporučljiva je jedino oznaka °R!

Osim stupnja Rankinea engleska *meteorologija* upotrebljava vlastitu temperaturnu skalu s jedinicom °A, koja je jednaka K, dakle °A = K, ali ledište vode ima vrijednost $T_0 = 273{,}00\ °\mathrm{A} \pm 0{,}00\ °\mathrm{A}$.

Primjer. Temperatura trojne tačke vode može se reproducirati u okviru pouzdanosti $T_t = (273{,}16 \pm 0{,}0001)$ K. Ovu relaciju treba izraziti stupnjevima Rankinea! Budući da vrijedi *tačno* K = 1,8 °R, uvrštenjem ovog odnosa u gornju jednadžbu dobivamo $T_t = (273{,}16 \pm 0{,}0001) \cdot 1{,}8\ °\mathrm{R} = (491{,}6880 \pm 0{,}0002)\ °\mathrm{R}$.

3.3. Plinska termometrija kao osnova termodinamičke temperature

3.3.1. Načelo djelovanja plinske termometrije. Mjerenje termodinamičke temperature T metodom plinske termometrije svodi se na precizno mjerenje tlaka i volumena plina u zatvorenoj posudi, a pri tom se oslanja na jednadžbu stanja idealnih plinova (vidi kraj odlomka 3.1.2)

$$T = T_r \frac{pV}{(pV)_r}, \tag{3.3-1}$$

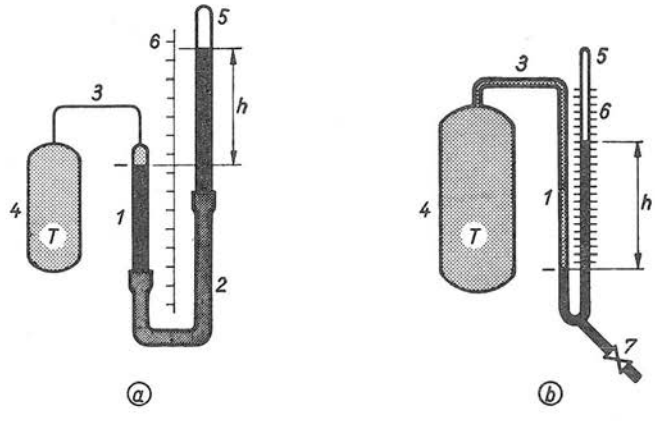
u kojoj veličine p_r i V_r označuju tlak i volumen posude pri referentnoj temperaturi T_r. Polazište plinske termometrije je referentna temperaturna tačka

$$T_r = T_t = 273{,}16\ \mathrm{K}\ (\text{tačno}),$$

koja je osnova Kelvinove termodinamičke temperaturne skale (odlomak 3.2.1). Svako mjerenje termodinamičke temperature T metodom plinske termometrije sastoji se od toga da se izmjere tlak p i volumen V plina u *dva različita* termodinamička stanja, jedno je npr. pri vrijednostima T, p, V, a drugo pri vrijednostima

T_r, p_r, V_r. Pri tom masa m plina mora da bude jednaka u oba stanja, dakle $m = \text{const}$.

Plinski se termometar u načelu sastoji od staklene ili metalne nepropusne posude koja je uronjena u tvar čiju termodinamičku temperaturu mjerimo (zapravo mjerimo p i V te posude). Pomoću posebne cijevi (kapilare) na posudu je priključen manometar za mjerenje tlaka. Posuda i kapilara napunjeni su radnim



Sl. D.23. Načelo djelovanja plinskog termometra: a) s pomičnom cijevi, b) s ventilom za živu

plinom, tj. plinom čije je ponašanje što je moguće bliže ponašanju idealnog plina, za koji vrijedi jednadžba stanja $pV = mRT$. Idealiziranu skicu plinskog termometra prikazuje slika D.23a. Stvarni plinski termometri mnogo su kompliciraniji i opremljeni su posebnim posudama za živu, brižljivo i od posebnog stakla izrađenim kapilarima, nonijem na skali za očitavanje tlaka (visine stupca), te nizom drugih rafiniranih pomagala. Plinski termometar na slici D.23a djeluje na temelju jednadžbe (3.3-1), gdje je T_r referentna temperatura (npr. trojna tačka vode). Posuda *4*, koja se nalazi na mjerenoj temperaturi T, ispunjena je mjernim plinom. Kroz kapilaru *3* plin dolazi u dodir sa živom (crno) u staklenoj cijevi *1*. Živa ispunjuje i drugu, pomičnu cijev *5*, koja se zbog gibljive veze *2* između obje cijevi može podizati i spuštati, tako da plin iz *4* stalno dopire do nacrtane oznake (crtice) i time pri bilo kojoj temperaturi T posude *4* zadržava stalan volumen, $V = \text{const}$. Isto se postiže i pomoću plinskog termometra na slici D.23b, koji se od onoga na slici a razlikuje samo u tome što se pri svakom mjerenju razina žive namješta do crtice pomoću ventila *7*. Pri referentnoj temperaturi T_r razlika razina iznosit će h_r, a pri temperaturi T iznosit će h. Budući da je prema $p = g\rho h$ tlak proporcionalan razlici razina h (vidi odsječak B.4.1), to pri $V = \text{const}$ jednadžba (3.3-1) prelazi u oblik

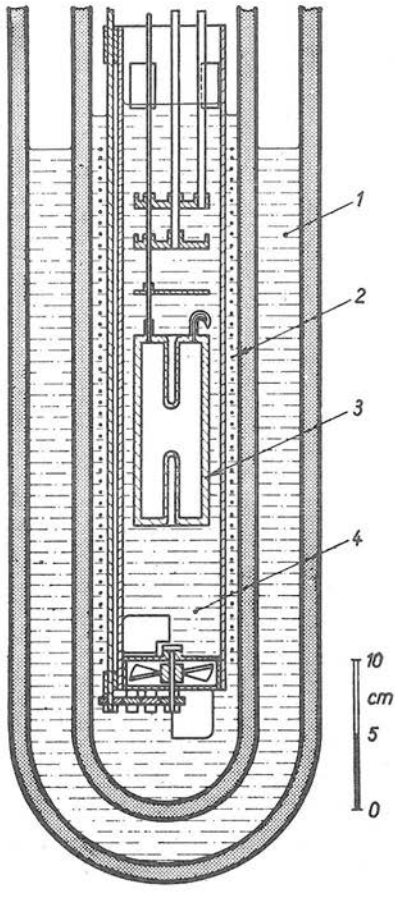
$$T = T_r \frac{p}{p_r} = T_r \frac{h}{h_r}, \tag{3.3-2}$$

čime se u prvom približenju (bez korekcija) utvrđuje mjerena temperatura T.

Plinski se termometri upotrebljavaju samo za najpreciznija mjerenja, jer je rad s tim glomaznim i osjetljivim uređajima skup, dugotrajan i toliko delikatan

da svako mjerenje predstavlja pravi pothvat eksperimentalne znanosti i vještine. Stoga je prvenstveni zadatak plinske termometrije da periodički utvrđuje razliku između termodinamičke i međunarodne empiričke temperaturne skale (o potonjoj vidi odsječak 3.6) sa ciljem da ta razlika postane što manja.

Stanovitu predodžbu o eksperimentalnim poteškoćama plinske termometrije može nam pružiti detalj iz engleskog metrološkog zavoda National Physical Laboratory. Slika D.24 prikazuje pojednostavljeni presjek kriostata njihovog plinskog termometra na helij pomoću kojega su oko godine 1965. mjerili razliku između termodinamičke temperature T i međunarodne empiričke temperature t u rasponu od 0 °C do −183 °C (vrelište kisika). Vanjski cilindar izrađen je od metala, a isto tako i unutarnji (nerđajući čelik) promjera oko 8 cm i duljine 48 cm. Na slici se vide cilindrička udubljenja na posudi *3*; u njih se prilikom baždarenja stavlja platinski otpornički termometar (vidi odlomak 3.6.2). Izopentan upotrebljavaju u rasponu temperatura od 0 °C do −150 °C, a pentan u rasponu od −150 °C do −180 °C.



Sl. D.24. Kriostat plinskog termometra na helij koji upotrebljava engleski metrološki zavod National Physical Laboratory: *1* — tekući dušik, *2* — grijalica, *3* — bakrena posuda s helijem, *4* — izopentan ili propan miješan propelerom na dnu unutarnjeg valjka (vide se dvije od šest lopatica)

Pri spomenutim mjerenjima referentna temperatura T_r reproducirana je posebnim uređajem za stvaranje temperature trojne tačke vode (sl. D.22), dakle $T_r = T_t = 273{,}16$ K. Vrijednost mjerene temperature T nije izračunata pomoću načelne jednadžbe (3.3-1), već pomoću kompliciranog izraza

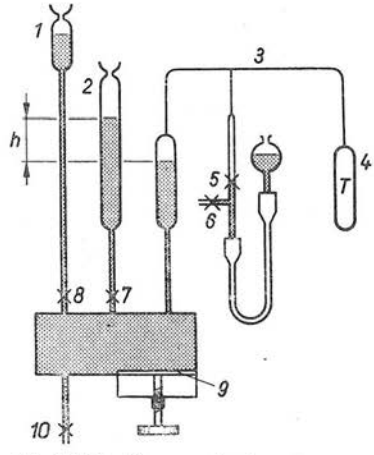
$$T = T_r \frac{p}{p_r} \frac{V}{V_r} \frac{1+\dfrac{T}{V}\sum\left(\dfrac{V_{dr}}{T_{dr}}\right)}{1+\dfrac{T_r}{V_r}\sum\left(\dfrac{V_d}{T_d}\right)} \frac{1+B_r p_r}{1+Bp}, \quad (3.3\text{-}3)$$

u kojem se indeksi r odnose na vrijednosti veličina pri referentnoj temperaturi T_r; simboli veličina bez indeksa odnose se na mjerenu temperaturu T. U gornjoj jednadžbi simboli označuju: V — volumen posude s helijem, V_d — volumen »štetnog prostora« (engl. dead space; vidi odlomak 3.3.5), T_d — termodinamičku temperaturu štetnog prostora, B — takozvane virijalne koeficijente, koji uzimaju u obzir neidealnost plina (vidi odlomak 3.3.5).

3.3.2. Plinski termometar na stalni volumen. Na početku prošlog odlomka smo naveli da se mjerenje plinskom termometrijom sastoji od toga da se izmjere pojedine fizikalne veličine u *dva različita* termodinamička stanja. Budući da se prilikom promjene iz jednog u drugo stanje mogu pri $m = \text{const}$ držati konstantnim ili V ili p ili T, nastala su tri načela primjene plinske termometrije. Metodu sa $V = \text{const}$ već smo zapravo opisali u odlomku

3.3.1 i ilustrirali slikom D.23. Stoga ćemo ovdje uz pomoć slike D.25 letimično opisati manipulaciju s termometrom na stalni volumen.

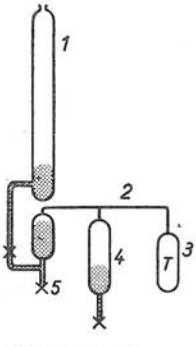
Posuda *4* priključena je na manometar *2* putem kapilare *3*. Pomoću pipaca (ventila) sistem se evakuira i napuni termometrijskim plinom. Tlak p utvrđuje se na temelju razlike visine h stupaca žive u manometru. Prvo punjenje i grubo namještanje razine žive u manometru izvodi se pomoću lijevka i pipaca *7*, *8*. Za preciznu regulaciju služi membrana *9*, koja se namješta vijkom (sl. D.25).



Sl. D.25. Shema plinskog termometra na stalni volumen

Plinski termometar se graduira pri referentnoj temperaturi T_r tako da se posuda *4* stavlja u odgovarajući termostat. U prvom približenju se mjerena temperatura T, a to je temperatura sredine u koju je stavljena posuda *4*, utvrđuje pomoću izraza (3.3-2), gdje indeks r označuje referentne veličine.

3.3.3. Plinski termometar na stalni tlak. Radna posuda *3* plinskog termometra priključena je na manometar *1* pomoću kapilare *2* (sl. D.26). Punjenje živom izvodi se pomoću pipca *5*. Dopunski spremnik *4* nalazi se na referentnoj temperaturi i služi za održavanje stalnog tlaka u sistemu. Nakon stavljanja radne posude *3* u tvar čiju temperaturu T mjerimo, promijeni se volumen plina zatvorenog u spremniku *4*. Stoga se pomoću pipca *5* količina žive u manometru *1* mijenja tako da tlak radnog plina u termometru ostane nepromijenjen pri svim mjerenim temperaturama.



Sl. D.26. Shema plinskog termometra na stalni tlak

Prema promjeni količine žive u prostoru *4* ocjenjuje se promjena volumena plina. U prvom približenju se mjerena temperatura izračunava pomoću jednadžbe

$$T = T_r \frac{V}{V - V_d},$$

gdje je V volumen radne posude *3*, a V_d volumen dopunskog spremnika *4*.

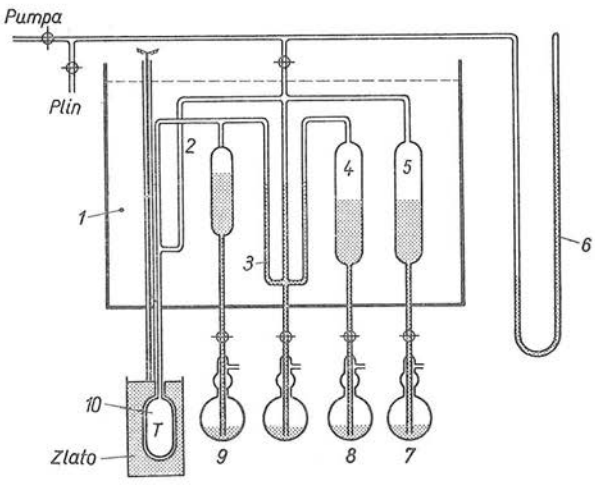
3.3.4. Plinski termometar na stalnu temperaturu. Posuda *10* plinskog termometra (sl. D.27) spojena je s manometrima *3* i *6* (drugi služi za grubo utvrđivanje početnog tlaka). Evakuiranje i punjenje manometra plinom obavlja se pomoću manometra *3*; u tu svrhu iz njega se povremeno ispušta živa. Svi pomoćni volumeni i sistemi manometra za mjerenje tlaka nalaze se na stalnoj temperaturi u termostatu *1*. Tlak plina u posudama *10* i *2* uravnotežuje se s tlakom plina u posudi *4* pomoću preciznog diferencijalnog manometra *3*. Za kompenzaciju utjecaja barometarskog koeficijenta tlaka spremnika *10* i difuzije plina kroz njegove stijenke služi posuda *5*.

Pomoću pipaca *7*, *8* i *9* može se ispuštanjem žive s potrebnom preciznošću mijenjati tlak u pomoćnim posudama. Vaganjem žive utvrđuje se promjena volu-

mena. U prvom približenju se mjerena temperatura T tvari u koju je uronjena posuda *10* utvrđuje uz pomoć referentne temperature T_r izrazom

$$T = T_r \frac{V}{V_r}\left(\frac{p_r}{p} - 1\right).$$

Referentnu temperaturu T_r ima npr. zlatna posuda (sl. D.27).



Sl. D.27. Shema plinskog termometra na stalnu temperaturu

3.3.5. Korekture plinskih termometara. Područje primjene plinskih termometara kreće se od oko 2 K pa do temperatura reda veličine 1600 K. Ti termometri služe uglavnom samo za najpreciznija mjerenja u metrološkim zavodima. Za praktičnu termometriju nisu prikladni, jer je mjerenje pomoću njih vrlo komplicirano i skupo, već se primjenjuju druge vrste termometara uz pomoć Međunarodne temperaturne skale (vidi odsječak 3.6).

Preciznost opisanih triju vrsta plinskih termometara je različita. Najpreciziniji je plinski termometar na stalni volumen za mjerenje niskih temperatura. Pri visokim temperaturama nije presudna preciznost mjerenja tlaka, već adsorpcija i desorpcija plina u stijenke posude prilikom promjene temperature i prolaženja plina kroz te stijenke, što se u stanovitoj mjeri dešava pri svakom mjerenju. Stoga se pri mjerenju visokih temperatura upotrebljavaju plinski termometri konstruirani drukčije nego opisani.

Preciznost mjerenja temperature u krajnjoj liniji ovisi o nepouzdanosti reprodukcije referentne temperature. Jedna od najvažnijih referentnih temperatura je trojna tačka vode T_t, o kojoj je bilo riječi u odlomku 3.2.2. Najpreciziniji eksperimenti pokazali su da se T_t može reproducirati s maksimalnom pouzdanošću $\pm 0{,}0001$ K, tj. trojna tačka pouzdana je u okviru vrijednosti $T_t = (273{,}1600 \pm 0{,}0001)$ K. Ta vrijednost može se pouzdano održavati stalnom u toku nekoliko sati, što je, dakako, vrlo pogodno pri mjerenju temperatura, uzimajući T_t za referenciju. Prema tome pri najpreciznijim mjerenjima teoretski ima smisla mjerna preciznost do otprilike $\pm 0{,}0001$ K. Praktički je ona, međutim, nedostiživa za temperaturne tačke različite od T_t.

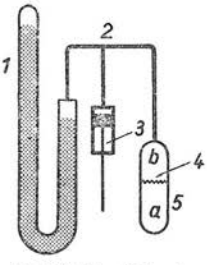
Iako se mjerenje tlaka i volumena u plinskoj termometriji izvodi izvanredno preciznim instrumentima i s odgovarajućom pažnjom, postoje stanovite sistematske mjerne pogreške koje valja korigirati pri obradi mjernih rezultata. Od takvih korektura ovdje ćemo spomenuti tri glavne: korektura toplinskog širenja mjerne posude (spremnika), korektura štetnog volumena i korektura neidealnosti plina (vidi npr. jednadžbu 3.3-3).

Korektura toplinskog širenja mjerne posude. Pri uronjavanju mjerne posude plinskog termometra u tvari različitih temperatura volumen posude ponešto se

mijenja zbog mijenjanja izmjera materijala posude pod utjecajem različitih temperatura. Stoga se ovom korekturom uzima u obzir promjena volumena posude.

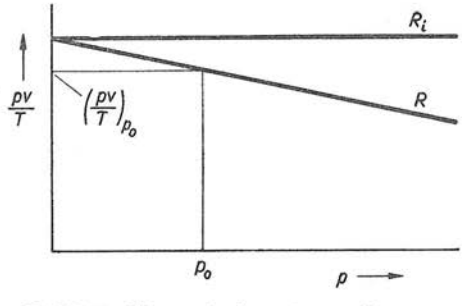
Korektura štetnog volumena. Mjerna posuda svakog plinskog termometra priključena je na precizni manometar tankom kapilarom. Iznad žive u manometru i unutar kapilare nalazi se »štetni« volumen plina u kojem se temperatura mijenja od mjerene do laboratorijske. Pri promjeni temperature posude mijenja se količina plina koji se nalazi u štetnom volumenu. Razlika temperatura plina u mjernoj posudi i štetnom volumenu uzrokuje potrebu uvođenja korekture u pokazivanje plinskog termometra. Za utvrđivanje te korekture treba znati količinu plina u raznim dijelovima štetnog volumena i njegove temperature. Ova korektura može se ustanoviti samo približno.

Pri mjerenju niskih temperatura upotrebljava se zbog toga plinski termometar bez štetnog volumena, kod kojega je, dakle, ova korektura nepotrebna (sl. D.28). Posuda *5* takvog plinskog termometra razdijeljena je osjetljivom elastičnom membranom *4* na dva dijela, *a* i *b*. Dio *a* je stvarna mjerna posuda napunjena plinom, dok je dio *b* pomoćni volumen koji je pomoću kapilare *2* priključen na manometar *1* i uređaj *3*. Taj uređaj omogućuje da se u prostoru *b* kontinuirano mijenja tlak. Pomoću jednostavnog električkog sloga može se pratiti progib membrane i u prostoru *b* tlak mijenjati tako da membrana ostane u ravnotežnom položaju, tj. da bude ravna. Tako se manometrom *1* mjeri tlak u zatvorenom volumenu *a* mjerne posude.



Sl. D.28. Principna shema plinskog termometra bez štetnog volumena

Korektura neidealnosti plina. Plinski je termometar stvarno napunjen *realnim* plinom, a ne hipotetičkim idealnim za koji vrijedi jednadžba stanja $pv = RT$, gdje je R individualna plinska konstanta. Stoga treba pokazivanje termometra svesti na stanje kao da se u njemu nalazi idealni plin. Energija realnih plinova ovisi, naime, zbog pojava sila kohezije, osim o temperaturi T još i o tlaku plina p. Stoga plinska konstanta $R = pv/T$ realnih plinova nije konstanta pri $T = \text{const}$, već pada s porastom tlaka p, kao što se vidi na slici D.29, gdje R_i predstavlja omjer pv/T za idealni plin (vidi i odsječak 2.1).



Sl. D.29. Uz svođenje realnog plina na idealni

Svođenje realnog plina na idealni izvodi se za niske tlakove (do oko 2 bara) pomoću jednadžbi oblika

$$(pv)_i = (pv)_R\,(1 - \kappa p_0),$$

gdje se indeks R odnosi na realni plin, p_0 predstavlja tlak normiranog stanja, a κ je koeficijent karakterističan za dani plin. Na primjer, vrijednosti korekcijskog faktora $(1 - \kappa p_0)$ pri fizikalnom normiranom stanju iznose:

$$\text{za kisik } O_2\text{: } 1{,}000954 \pm 9 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{za dušik } N_2\text{: } 1{,}000456 \pm 3 \cdot 10^{-6}.$$

Idealnom plinu je najbliži helij, ali on relativno lako difundira kroz stijenke posuda, naročito pri visokim temperaturama. Stoga se u plinskim termometrima

namijenjenim mjerenju visokih temperatura upotrebljava dušik. U prošlosti se mnogo primjenjivao vodik.

3.3.6. Nesigurnost najpreciznijih mjerenja temperature. U prošlim smo odlomcima naglasili da se metodama plinske termometrije mogu najtačnije izmjeriti temperature. Razlaganja u odlomku 3.3.5 pokazala su nam da plinska termometrija ima svoju granicu, tj. nesigurnost reprodukcije temperature trojne tačke vode (odlomak 3.2.2), a ona iznosi oko $\pm$ 0,1 mK. Budući da se sva mjerenja oslanjaju na trojnu tačku vode, to je očito da se ni jedno mjerenje ne može ostvariti s pogreškom manjom od $\pm$ 0,1 milikelvin.

Nesigurnost vrijednosti temperature nekih karakterističnih temperaturnih stanja

Ravnotežno stanje	Temperatura T, K	Nesigurnost K
Trojna tačka ravnotežnog vodika	13,81	0,01
Vodikova tačka 17,042 K (tablica D-11)	17,042	0,01
Vrelište ravnotežnog vodika	20,28	0,01
Vrelište neona	27,102	0,01
Trojna tačka kisika	54,361	0,01
Vrelište kisika	90,188	0,01
Trojna tačka vode	273,16	0,0001
Vrelište vode	373,15	0,005
Krutište kositra	405,118	0,015
Krutište cinka	692,73	0,03
Krutište srebra	1235,08	0,2
Krutište zlata	1337,58	0,2

Stanovitu predodžbu o vrhunskim mogućnostima termometrije mogu nam pružiti podaci koje je godine 1968. objavio Međunarodni komitet za mjere i utege (o njemu vidi u odsječku A.7.1) u vezi s Međunarodnom empiričkom temperaturnom skalom 1968 (odsječak 3.6). Te podatke svrstali smo u priloženu tablicu koja sadrži vrijednosti termodinamičke temperature fiksnih tačaka (i krutišta kositra) Međunarodne skale. U posljednjem stupcu navedena je nesigurnost s kojom su pojedine vrijednosti T poznate. Te vrijednosti odabrane su za definirajuće temperaturne tačke skale 1968, pa prema tome predstavljaju osnovu prema kojoj se stvarno izvode precizna mjerenja temperature.

Plinskom se termometrijom pojedina stanja mogu izmjeriti i s manjom pogreškom nego što je navedeno u tablici, ali se ta ravnotežna stanja ne mogu reproducirati pouzdanije od naznačenih nesigurnosti. Prema tome tablica ilustrira sadašnje *stvarne* mogućnosti precizne termometrije osnovane na Međunarodnoj empiričkoj temperaturnoj skali 1968, koja je temelj svih praktički provedivih preciznih mjerenja. Iznad temperature krutišta zlata nesigurnost raste s temperaturom.

3.4. Celzijeva i Fahrenheitova termodinamička temperaturna skala te pripadne jedinice

Pored termodinamičke temperaturne skale, opisane u odlomku 3.2.1, upotrebljava se i »Celzijeva termodinamička skala«, a u engleskom govornom području i »Fahrenheitova termodinamička skala«. Obje skale, Celzijeva i Fahrenheitova, strogo se oslanjaju na termodinamičku temperaturu T, a od nje se razlikuju samo za *konstantnu* vrijednost.

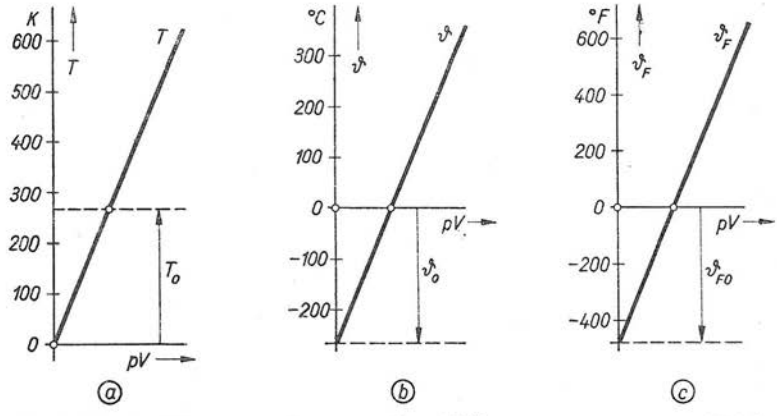
3.4.1. Celzijeva termodinamička temperatura ϑ i pripadna temperaturna skala definirane su jednadžbom (veličina ϑ zove se i »relativna termodinamička temperatura«)

$$\vartheta = T - T_0, \tag{3.4-1}$$

gdje je konstanta

$$T_0 = 273{,}15\ \mathrm{K}$$

vrijednost termodinamičke temperature ledišta vode (zapravo $^*T_0$; vidi kraj od-



Sl. D.30. Grafička usporedba termodinamičkih temperatura: a — Kelvinova, b — Celzijeva, c — Fahrenheitova

lomka 3.2.3). To znači da se simbolom ϑ izražava temperatura u odnosu prema (fiktivnom) ledištu vode, odnosno da je ledište vode izraženo Celzijevom skalom

$$\vartheta = \vartheta_0 = 0.$$

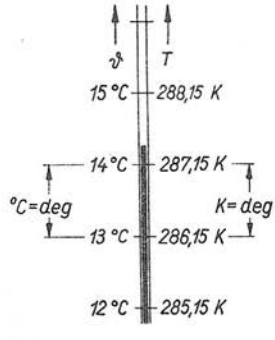
Grafički prikaz veze između ϑ i T vidimo na slikama D.30a, b. Ako je, na primjer, za krutište cinka $T_{\mathrm{Zn}} = 692{,}73$ K, isto temperaturno stanje opisat ćemo pomoću Celzijeve (termodinamičke) temperature ovako

$$\vartheta_{\mathrm{Zn}} = T_{\mathrm{Zn}} - T_0 = 692{,}73\ \mathrm{K} - 273{,}15\ \mathrm{K} = 419{,}58\ \mathrm{K}.$$

Historijski su razlozi uvjetovali da se u primjeni »Celzijeve termodinamičke temperature« $\vartheta = T - T_0$ jedinica kelvin = K = $T_t/273{,}16$ (vidi odlomak 3.2.4) naziva posebnim imenom

»stupanj Celzija« (kratica: °C)

po švedskom učenjaku *Celsius*u (vidi odlomak 3.5.3). Ovaj naziv i kraticu propisuju nacionalna zakonodavstva ili standardizacijske ustanove većine država. Prema tome jedinica °C *identički je jednaka* jedinici K (sl. D.31), definirana je dakle jednadžbom (3.2-3)



Sl. D.31. Dio skala Celzijeve i Kelvinove termodinamičke temperature na istom termometru

$$°\mathrm{C} = \mathrm{K} = \frac{T_t}{273{,}16}\ \text{(tačno)}, \tag{3.4-2}$$

gdje je T_t vrijednost Kelvinove termodinamičke temperature trojne tačke vode (vidi odlomak 3.2.4). Prema tome se npr. krutište cinka (Zn) može ovako opisati ili Kelvinovom termodinamičkom temperaturom T ili Celzijevom termodinamičkom temperaturom ϑ:

$$T_{Zn} = 692{,}73 \text{ K}, \quad \vartheta_{Zn} = 419{,}58 \text{ °C}.$$

Analogno se putem definicijske jednadžbe $\vartheta = T - T_0$, gdje je $T_0 = 273{,}15$ K, dobiva nekoliko karakterističnih temperaturnih tačaka u obje termodinamičke skale:

apsolutna nula	$T = 0$	$\vartheta = -273{,}15$ °C
ledište vode	$T = T_0 = 273{,}15$ K	$\vartheta = \vartheta_0 = 0$
trojna tačka vode	$T = T_t = 273{,}16$ K	$\vartheta = \vartheta_t = 0{,}01$ °C
vrelište vode	$T = T_v = 373{,}15$ K	$\vartheta = \vartheta_v = 100$ °C

Vidimo da se jedinicom »°C« samo *posebno naglašava* da je riječ o Celzijevoj termodinamičkoj temperaturi ϑ, a ne o Kelvinovoj termodinamičkoj temperaturi T.

Ova razmatranja o »Celzijevoj termodinamičkoj temperaturi« ϑ korisno je zaključiti dvjema konstatacijama: 1. Fizikalne veličine ϑ i T su dvije *različite veličine*. 2. Obje veličine izražavaju se *istom jedinicom* K, koja se pri upotrebi veličine ϑ zove °C. Prvoj konstataciji možemo naći paralelu pri označivanju poznatog pojma »nadmorska visina«. Gravitacijske teorije traže da se udaljenosti planeta računaju od njihovih *središta* pa to vrijedi i za Zemlju (vidi odsječak A.9.2). Ako npr. udaljenost vrha Triglava od središta označimo sa R, a udaljenost razine mora sa R_0, »nadmorsku visinu« h Triglava izražava jednadžba $h = R - R_0$. Analogija sa $\vartheta = T - T_0$ je dakle

$$h \mathrel{\widehat{=}} \vartheta, \quad R \mathrel{\widehat{=}} T, \quad R_0 \mathrel{\widehat{=}} T_0,$$

gdje simbol $\mathrel{\widehat{=}}$ znači »odgovara«. Posve analogne slučajeve imamo i s pojmom energija (vidi odlomak B.5.1.1).

Bitno je drukčije s jedinicom »stupanj Rankina« (°R; vidi odlomak 3.2.6): tom jedinicom (°R = K/1,8) mjeri se *ista* veličina, termodinamička temperatura T. A sasvim je različita situacija s »Fahrenheitovom termodinamičkom temperaturom« ϑ_F (odlomak 3.4.2) i njenom jedinicom °F: tu je i $\vartheta_F \neq T$ i °F ≠ K, ali je °F = °R.

Vratimo se za trenutak na vezu između ϑ i T koju opisuje jednadžba (3.4-1). Mnogi autori pišu tu jednadžbu u obliku

$$\vartheta = T - 273{,}15, \tag{3.4-3}$$

koja *nije* ispravna ako se pod simbolima ϑ i T razumijevaju *veličine*, ako se dakle (3.4-3) smatra *veličinskom* jednadžbom. Provjerimo to besprijekornim veličinskim računom koji se temelji na osnovnoj metrološkoj relaciji »veličina G = brojčani iznos $\{G\} \times$ jedinica $[G]$« (vidi odsječak A.1.3). Podijelimo li definicijsku jednadžbu (3.4-1) jedinicom kelvin = K, dobivamo

$$\{\vartheta\}_K = \{T\}_K - 273{,}15, \tag{3.4-4}$$

jer je $\{\vartheta\}_K = \vartheta/\text{K}$, $\{T\}_K = T/\text{K}$ i $T_0/\text{K} = 273{,}15 \text{ K}/\text{K} = 273{,}15$. Budući da je prema (3.4-2) K = °C, primjenom ove jednakosti na brojčani iznos $\{\vartheta\}_K$ u brojčanoj jednadžbi (3.4-4) dobivamo

$$\{\vartheta\}_{°C} = \{T\}_K - 273{,}15. \tag{3.4-5}$$

To je *brojčana* jednadžba, koja vrijedi samo onda kada se za $\{\vartheta\}$ uvrštavaju brojčani iznosi u °C, a za $\{T\}$ u K. Prema tome je i (3.4-3) brojčana jednadžba! Budući da su brojčane jednadžbe nepouzdane (vidi odsječke A.1.4 te poglavlja B.10 i D.7), treba ih izbjegavati. Ako iz bilo kojih razloga čovjek ne želi upotrebljavati veličinsku jednadžbu (3.4-1), može se umjesto brojčanom jednadžbom (3.4-5) poslužiti »prilagođenom veličinskom jednadžbom« (odsječak A.1.6), koja za naš slučaj glasi

$$\frac{\vartheta}{°C} = \frac{T}{K} - 273{,}15. \tag{3.4-6}$$

Tako na primjer za $\vartheta = 20\,°C$ pomoću ove jednadžbe pouzdanim računanjem slijedi vrijednost Kelvinove termodinamičke temperature

$$\frac{T}{K} = \frac{\vartheta}{°C} + 273{,}15 = \frac{20\,°C}{°C} + 273{,}15 = 293{,}15,$$

dakle $T/K = 293{,}15$, odakle dobivamo $T = 293{,}15$ K.

U postojećoj literaturi nalazimo i druge nazive odnosno kratice za jedinicu »stupanj Celzija«. Tako na primjer

$$\text{stupanj Celzija} = °C = \text{deg C} = \text{deg}_C = C$$

ili čak jednostavno °C = deg. Naravno da takvo šarenilo kratica i naziva smeta, a može uzrokovati i pogreške. Unatoč tome autor ove knjige predlaže da se umjesto naziva »stupanj Celzija« upotrebljava kraći naziv

$$\text{»celzij«} = °C,$$

dakle posve analogno kao što je nedavno umjesto naziva »stupanj Kelvina« usvojen kraći naziv »kelvin« (K; vidi odlomak 3.2.5). U neslužbenom izražavanju vrijednosti temperature mnogi ljudi govore »celzij«, a ne »stupanj Celzija«. Konačno, tako je i s nazivima imenovanih jedinica svih ostalih veličina (joule, watt, newton itd.). Stoga ćemo u daljnjem tekstu ove knjige pod »celzijem« razumijevati »stupanj Celzija« iz jednadžbe (3.4-2). U pogledu kratice te jedinice neka ostane kako je i sada, dakle »°C« (sa kružićem), iako »kelvin« od godine 1967. više nema kružića. Razlog tome je taj što bi odbacivanje kružića sa °C dovelo do »C«, a to je službena kratica jedinice elektrike SI »coulomb« (vidi poglavlje E.2).

Sve do godine 1967. razlika temperature označivala se jedinicom »deg« (franc. degré, engl. degree), što je strana kratica za riječ »stupanj«. To je bio *treći naziv* za jedinicu »kelvin«, tj.

$$\text{deg} = K = °C. \tag{3.4-7}$$

Porijeklo naziva »deg« konkretno nam objašnjavaju slijedeća dva primjera (vidi i odlomak 3.2.5).

Primjer 1. Nekom stroju valja izmjeriti povišenje temperature do kojeg je došlo u toku rada stroja. Mjerenja su nezavisno obavila dva mjerioca. Prvi je imao instrumente baždarene u Celzijevoj skali, a drugi u Kelvinovoj. Prvi je izmjerio temperaturu $\vartheta_1 = 20\,°C$ hladnog stroja, te $\vartheta_2 = 85\,°C$ zagrijanog stroja. Na temelju tih rezultata u protokolu je iskazao povišenje temperature

$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 85\,°C - 20\,°C = 65\,°C.$$

Drugi mjerilac dobio je sa svojim termometrom, baždarenim u Kelvinovoj skali, rezultate $T_1 = 293{,}15$ K, $T_2 = 358{,}15$ K. U mjernom protokolu iskazao je povišenje temperature ovako:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 358{,}15\text{ K} - 293{,}15\text{ K} = 65\text{ K}.$$

Prema definicijskoj jednadžbi (3.4-1) je $\vartheta_1 = T_1 - T_0$, $\vartheta_2 = T_2 - T_0$, dakle

$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = T_2 - T_1 = \Delta T,$$

odnosno

$$\Delta\vartheta = 65\ ^\circ\mathrm{C} = 65\ \mathrm{K} = \Delta T.$$

Umjesto da priznaju relaciju °C = K, dakle našu jednadžbu (3.4-2), ljudi su radije s jedne strane pisali °C = deg, a s druge strane K = deg. Ove komplikacije posljedice su brojčanog naziranja na jednadžbe.

Primjer 2. U jednoj od tablica gotovo svih udžbenika nalazimo da su specifična plinska konstanta i specifična toplina zraka pri fizikalnom normiranom stanju

$$R = 287\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kg}}\ ;\quad c_p = 1005\,\frac{\mathrm{J}}{^\circ\mathrm{C\,kg}}.$$

Znamo da vrijedi relacija $R = c_p - c_v$, gdje je c_v specifična toplina pri konstantnom volumenu. Pokušamo li c_v izračunati iz navedena dva podatka, dobivamo

$$c_v = c_p - R = 1005\,\frac{\mathrm{J}}{^\circ\mathrm{C\,kg}} - 287\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kg}} = ?$$

Oduzimanje možemo obaviti tek pošto umjesto °C napišemo K, ili obratno, ili ako stavimo °C = = K = deg, dakle na jedan od ova tri načina:

$$c_v = 1005\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kg}} - 287\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kg}} = 718\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,kg}},$$

$$c_v = 1005\,\frac{\mathrm{J}}{^\circ\mathrm{C\,kg}} - 287\,\frac{\mathrm{J}}{^\circ\mathrm{C\,kg}} = 718\,\frac{\mathrm{J}}{^\circ\mathrm{C\,kg}},$$

$$c_v = 1005\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{deg\,kg}} - 287\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{deg\,kg}} = 718\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{deg\,kg}}.$$

Poteškoće slične ovima u primjerima naveli su Generalnu konferenciju za mjere i utege da na svom devetom zasjedanju za izražavanje *intervala i razlika* temperatura dopusti upotrebu »stupnja«, tj. na francuskom »degré«, a na engleskom »degree« (kratica: deg). Naravno da je naziv »deg« bio posve suvišan (pri veličinskom računanju), pa ga je zato godine 1967. Generalna konferencija za mjere i utege eliminirala (vidi odlomak 3.2.5).

3.4.2. Fahrenheitova termodinamička temperatura ϑ_F, koja se upotrebljava u engleskom govornom području, definirana je jednadžbom

$$\vartheta_F = T - T_{0R},\quad \text{gdje je}\quad T_{0R} = 459{,}67\ ^\circ\mathrm{R}. \tag{3.4-8}$$

U odlomku 3.2.6 smo zabilježili da je °R = stupanj Rankinea = K/1,8.

Izračunajmo temperaturu ϑ_{F0} ledišta vode u Fahrenheitovoj skali. Budući da ledište vode ima $T_0 = 273{,}15$ K, računanjem dobivamo tu temperaturu izraženu jedinicom stupanj Rankinea $T_0 = 273{,}15 \cdot 1{,}8\ ^\circ\mathrm{R} = 491{,}67\ ^\circ\mathrm{R}$. Uvrstimo li tu vrijednost namjesto T u jednadžbi (3.4-8), dobivamo Fahrenheitovu temperaturu ledišta vode

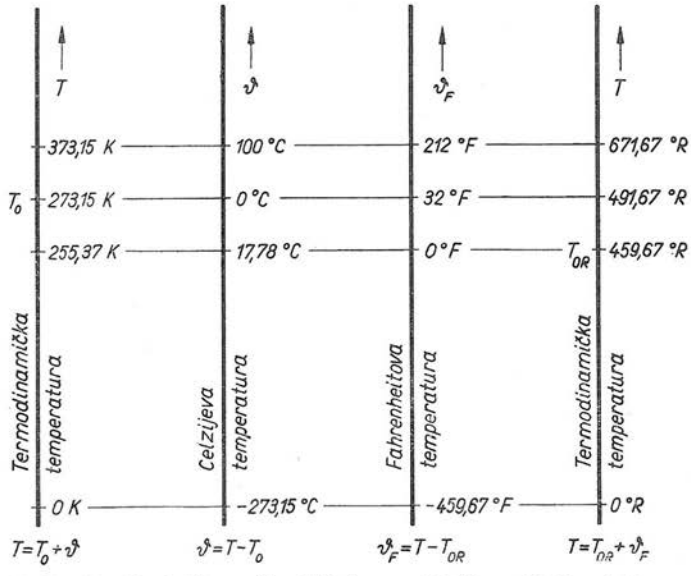
$$\vartheta_{F0} = T_0 - T_{0R} = 491{,}67\ ^\circ\mathrm{R} - 459{,}67\ ^\circ\mathrm{R} = 32\ ^\circ\mathrm{R}.$$

Prema tome u Fahrenheitovoj skali nije ledište vode nultačka skale (u Celzijevoj jest, jer je $\vartheta_0 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$), već je ona 32 °R *ispod* ledišta vode. Razlog tome objašnjen je u odlomku 3.5.1.

Fahrenheitova temperatura običava se izražavati »stupnjem Fahrenheita« = = °F, koji je u pogledu veličine (iznosa) jednak stupnju Rankinea. Situacija je, dakle, posve analogna kao kod °C i K (sl. D.31). Vrijedi

$$°R = \deg R = °F = \deg F.$$

Slova R i F pišu se katkada i kao indeksi, dakle $\deg_F$ ili $\deg_R$.



Sl. D.32. Karakteristične tačke Kelvinove, Celzijeve i Fahrenheitove termodinamičke temperaturne skale

Prema tome za neke karakteristične temperaturne tačke možemo pisati:

apsolutna nula	$T = 0$	$\vartheta_F = -459{,}67\,°F$
ledište vode	$T_0 = 491{,}67\,°R$	$\vartheta_{F0} = 32\,°F$
vrelište vode	$T_v = 671{,}67\,°R$,	$\vartheta_{Fv} = 212\,°F$.

Cjelovitiji pregled i usporedbu s ostalim razmatranim termodinamičkim temperaturnim skalama vidimo na slici D.32.

3.4.3. Veza između Celzijeve i Fahrenheitove skale. Direktnu vezu između Celzijeve termodinamičke temperature ϑ i Fahrenheitove termodinamičke temperature ϑ_F možemo uspostaviti pomoću definicijskih jednadžbi (3.4-1,8) tih fizikalnih veličina. Uz te jednadžbe naveli smo vrijednosti konstanti T_0 i T_{0R} te konstatirali odnose među različitim mjernim jedinicama. Sve te podatke možemo sažeti u ovaj pregled

$\vartheta = T - T_0$	$T_0 = 273{,}15\,K$	$K = 1{,}8\,°R$
$\vartheta_F = T - T_{0R}$	$T_{0R} = 459{,}67\,°R$	$°R = °F$

Ako iz definicijskih jednadžbi eliminiramo T, dobivamo izraz

$$\vartheta = \vartheta_F + T_{0R} - T_0$$

u kojem razlika dviju konstanti iznosi (izraženo u °F)

$$T_{0R} - T_0 = 459{,}67\,°R - 273{,}15 \cdot 1{,}8\,°R$$

$$T_{0R} - T_0 = 459{,}67\,°R - 491{,}67\,°R = -32\,°F,$$

jer je °R = °F. Prema tome veza između fizikalnih veličina ϑ i ϑ_F glasi

$$\vartheta = \vartheta_F - 32\,°F. \tag{3.4-9}$$

To je *veličinska* jednadžba. »Prilagođenu veličinsku jednadžbu« dobivamo tako da (3.4-9) podijelimo jedinicom °C i upotrijebimo odnos °C = 1,8 °F:

$$\frac{\vartheta}{°C} = \frac{\vartheta_F}{°C} - 32\frac{°F}{°C} = \frac{5}{9}\frac{\vartheta_F}{°F} - 32\frac{5}{9}.$$

Uvođenjem brojčanih iznosa $\{\vartheta\}_{°C} = \vartheta/°C$ i $\{\vartheta_F\}_{°F} = \vartheta_F/°F$ (usporedi s jednadžbama 3.4-4,5 u odlomku 3.4.1) od gornje prilagođene veličinske jednadžbe nastaje »brojčana jednadžba«

$$\{\vartheta\}_{°C} = \frac{5}{9}\{\vartheta_F\}_{°F} - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}\{\vartheta_F\}_{°F} - 17{,}778. \tag{3.4-10}$$

Obrnutu vezu dobivamo tako da brojčanu jednadžbu (3.4-10) pomnožimo sa 9/5:

$$\{\vartheta_F\}_{°F} = 1{,}8\,\{\vartheta\}_{°C} + 32. \tag{3.4-11}$$

Analognim računanjem sastavili smo (tablica D-9) brojčane jednadžbe koje povezuju brojčane iznose veličina T, ϑ i ϑ_F, izražene jedinicama K, °R, °C i °F. Način upotrebe tablice D-9 objasnit ćemo ovim primjerom: želimo izračunati vrijednost Fahrenheitove termodinamičke temperature ϑ_F stanja koje je obilježeno sa $\vartheta = 50\,°C$. U tom je slučaju dakle $\{\vartheta\}_{°C} = 50$. Odgovarajuća brojčana jednadžba iz tablice D-9 daje

$$\{\vartheta_F\}_{°F} = 1{,}8\{\vartheta\}_{°C} + 32 = 1{,}8 \cdot 50 + 32 = 122.$$

To znači da je $\vartheta_F/°F = 122$, odakle slijedi $\vartheta_F = 122\,°F$.

Najpouzdanije je računanje pomoću *veličinske* jednadžbe (3.4-9), iako u prvi mah izgleda dugotrajnije. Najprije (3.4-9) napišemo u obliku $\vartheta_F = \vartheta + 32\,°F$. Za-

Tablica **D-9**

Brojčane jednadžbe koje povezuju različite termodinamičke temperaturne skale

	$\{T\}_K$	$\{\vartheta\}_{°C}$	$\{\vartheta_F\}_{°F}$	$\{T\}_{°R}$
$\{T\}_K =$	–	$\{\vartheta\}_{°C} + 273{,}15$	$\frac{5}{9}\{\vartheta_F\}_{°F} + 255{,}372$	$\frac{5}{9}\{T\}_{°R}$
$\{\vartheta\}_{°C} =$	$\{T\}_K - 273{,}15$	–	$\frac{5}{9}\{\vartheta_F\}_{°F} - 17{,}778$	$\frac{5}{9}\{T\}_{°R} - 273{,}15$
$\{\vartheta_F\}_{°F} =$	$1{,}8\,\{T\}_K - 459{,}67$	$1{,}8\,\{\vartheta\}_{°C} + 32$	–	$\{T\}_{°R} - 459{,}67$
$\{T\}_{°R} =$	$1{,}8\,\{T\}_K$	$1{,}8\,\{\vartheta\}_{°C} + 491{,}67$	$\{\vartheta_F\}_{°F} + 459{,}67$	–

tim uvrstimo našu vrijednost $\vartheta = 50\,°C$, dakle $\vartheta_F = 50\,°C + 32\,°F$. Sada namjesto jedinice °C uvrstimo 1,8 °F (jer je $°C = 1{,}8\,°F$), pa konačno dobivamo $\vartheta_F = 50 \cdot 1{,}8\,°F + 32\,°F = 112\,°F$.

Primjer 1. U nekom smo priručniku pročitali da temperatura iznosi 320 °F. Želimo znati kako to isto temperaturno stanje opisuju Celzijeva termodinamička temperatura ϑ i Kelvinova termodinamička temperatura T. (Prije računanja moramo se uvjeriti da je navodom 320 °F mišljena Fahrenheitova temperatura, dakle da je $\vartheta_F = 320\,°F$.) Poslužit ćemo se jednadžbom (3.4-9) i odnosom $°F = °C/1{,}8$:

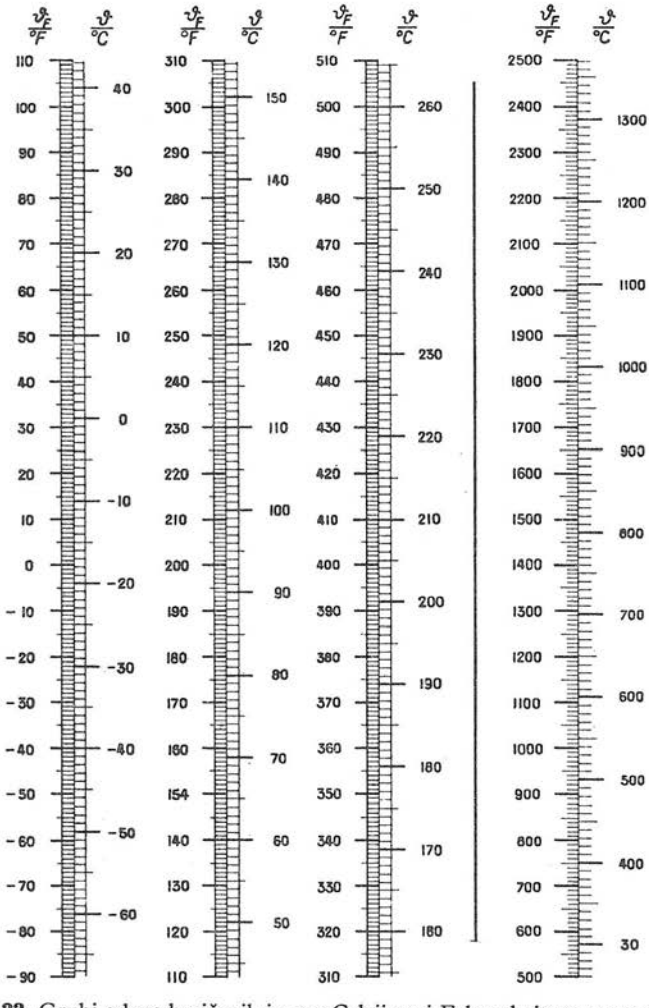
$$\vartheta = 320\,°F - 32\,°F = 288\,°F = 288\,°F/1{,}8 = 160\,°C.$$

Pripadnu termodinamičku temperaturu T dobivamo ili pomoću (3.4-1)

$$T = 273{,}15\ \text{K} + 160\ °C = 433{,}15\ \text{K}$$

ili pomoću (3.4-8)

$$T = 459{,}67\ °R + 320\ °F = 779{,}67\ °R.$$



Sl. D.33. Grubi odnos brojčanih iznosa Celzijeve i Fahrenheitove termodinamičke temperature za ista temperaturna stanja

Pomoću odnosa °R = K/1,8 lako kontroliramo da je doista

$$T = 779{,}67\ °\mathrm{R} = 779{,}67\ \mathrm{K}/1{,}8 = 433{,}15\ \mathrm{K}.$$

Primjer 2. U nekom priručniku engleskog porijekla pronašli smo podatak da je za nelegirani čelik koeficijent linearnog istezanja $\alpha = 6{,}7 \cdot 10^{-6}/°\mathrm{F}$. Tu veličinu treba izraziti jedinicom °C. U prvi mah nam se čini normalnim da to učinimo uvrštenjem odnosa °C = 1,8 °F, odnosno 1/°F = 1,8/°C u izraz za α, dakle

$$\alpha = 6{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}8/°\mathrm{C} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}/°\mathrm{C}.$$

Pogledavši, međutim, jednadžbu (3.4-9) $\vartheta = \vartheta_F - 32\,°\mathrm{F}$, koja povezuje Celzijevu temperaturu ϑ i Fahrenheitovu ϑ_F, dolazimo u nedoumicu: ne utječe li jednadžba (3.4-9) na to da *veličina* α nije ista u oba slučaja (u primjeni ϑ_F i ϑ)? Rješenje dobivamo razmatranjem definicije veličine α. Pri upotrebi Celzijeve temperature, α je definiran jednadžbom $\epsilon = \alpha \Delta\vartheta = \alpha(\vartheta_2 - \vartheta_1)$, gdje je $\epsilon = \Delta l/l$ omjer promjene duljine Δl i te duljine l. Prema tome je ϵ čist broj.

Pri upotrebi Fahrenheitove temperature ϑ_F definiran je ϵ jednadžbom $\epsilon = \alpha_F \Delta\vartheta_F = \alpha_F(\vartheta_{F2} - \vartheta_{F1})$. Ovdje je α_F linearni koeficijent istezanja prilagođen Fahrenheitovoj skali; za α_F *pretpostavljamo* da je različit od α. Budući da je $\epsilon = \Delta l/l$ u oba slučaja isti, usporedbom oba izraza za ϵ dobivamo

$$\frac{\alpha_F}{\alpha} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_{F2} - \vartheta_{F1}}.$$

Uvrstimo li namjesto ϑ_2 jednakost $\vartheta_2 = \vartheta_{F2} - 32\,°\mathrm{F}$ iz jednadžbe (3.4-9), te analogno za ϑ_1, slijedi

$$\frac{\alpha_F}{\alpha} = \frac{\vartheta_{F2} - 32\,°\mathrm{F} - \vartheta_{F1} + 32\,°\mathrm{F}}{\vartheta_{F2} - \vartheta_{F1}} = 1,$$

odnosno $\alpha = \alpha_F$. Prema tome je račun na početku primjera bio valjan, a rezultat $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}/°\mathrm{C}$ ispravan.

U praksi često treba *brzo* preračunati Fahrenheitovu temperaturu na Celzijevu ili obratno. Da ne bismo morali računati pomoću izraza (3.4-9) ili (3.4-11), poslužujemo se *grubim* dijagramom na slici D.33. Na primjer, $\vartheta_F = 50\,°\mathrm{F}$ predstavlja isto temperaturno stanje kao i $\vartheta = 10\,°\mathrm{C}$.

3.5. Iz povijesti empiričkih temperaturnih skala

Razliku između empiričke i termodinamičke temperature objasnili smo u odsječku 3.1. Stoga ćemo ovdje nadovezati na tamošnja izlaganja s time što ćemo »Međunarodnu empiričku temperaturnu skalu« obraditi u narednom odsječku 3.6. U počecima termometrije bile su empiričke temperaturne skale isključivo osnovane na toplinskom širenju tjelesa, naročito na promjeni dužine stupca (niti) tekućine u staklenom termometru (danas je to, na primjer, bolesnički termometar). Pri tom su osnovu empiričke temperaturne skale činila izrazita toplinska stanja stanovitih tvari, tzv. *fiksne temperaturne tačke*, a skale su bile definirane temperaturnim razmakom (intervalom) između *dvije* fiksne temperaturne tačke iste tvari. Tim tačkama pripisane su proizvoljno određene vrijednosti temperature.

3.5.1. Fahrenheitova temperaturna skala. Godine 1714. *G. D. Fahrenheit* je za termometrijsko sredstvo svog termometra odabrao vinsku žestu, a kasnije je upotrijebio živu. Za donju fiksnu tačku žestina termometra odabrao je temperaturu mješavine nišadora (salmijaka) i leda, kojoj je pripisao vrijednost 0 stupnjeva (0 degree). Za gornju, višu »fiksnu« tačku odabrao je »normalnu« (!) temperaturu ljudskog tijela (!), a pripisao joj je vrijednost 100 stupnjeva.

U svom *živinu* termometru *Fahrenheit* je za fiksne tačke upotrijebio dvije karakteristične temperaturne tačke vode: ledištu vode pripisao je vrijednost + 32

deg (danas je to + 32 °F), a vrelištu vode + 212 deg. Ove vrijednosti odabrao je zato da bi se nova (živina) temperaturna skala podudarala sa prvobitnom žestinom skalom. Razmak između dviju fiksnih tačaka Fahrenheitova živina termometra iznosi dakle 180 degree Fahrenheit = 180 °F.

Veza između Celzijeve i Fahrenheitove empiričke temperature ista je kao i u odlomku 3.4.3, dakle

$$t = t_F - 32\,°F, \tag{3.5-1}$$

gdje je t Celzijeva empirička temperatura (odlomak 3.5.3), a t_F Fahrenheitova. Između jedinica vlada odnos °C = 1,8 °F. Položaj »Fahrenheitove empiričke temperaturne skale« u odnosu prema ostalim skalama razabire se iz tablice D-10, a praktični grubi odnosi između t i t_F nacrtani su na slici D.33 ($\vartheta \mathrel{\widehat{=}} t$, $\vartheta_F \mathrel{\widehat{=}} t_F$).

Zanimljivo je napomenuti da u Engleskoj, kolijevci Fahrenheitove skale, nema zakonodavnog ili standardizacijskog dokumenta koji bi egzaktno definirao ovu skalu. *Uobičajene* su vrijednosti 32 i 212 °F za ledište i vrelište vode.

3.5.2. Réaumurova temperaturna skala. Francuz *Réaumur* osnovao je svoju skalu na termometru napunjenu mješavinom alkohola i vode. Sa 1 degré (danas je to 1 stupanj Réaumura) označio je onaj temperaturni interval u kojem se volumen termometrijske tekućine promijenio za 1 promil. Za dvije fiksne tačke

Tablica **D-10**

Definicijski podaci o Celzijevoj, Fahrenheitovoj i Réaumurovoj empiričkoj temperaturnoj skali

Empirička temperaturna skala	Simbol jedinice	Jedinica skale	Vrijednost skale za	
			ledište t_0	vrelište t_v
Celzijeva	°C	$\frac{t_v - t_0}{100}$	0	+ 100 °C
Fahrenheitova	°F	$\frac{t_v - t_0}{180}$	+ 32 °F	+ 212 °F
Réaumurova	°Ré	$\frac{t_v - t_0}{80}$	0	+ 80 °Ré

odabrao je ledište i vrelište vode, kojima je pripisao vrijednosti 0 deg i 80 deg. Prema tome razmak između fiksnih tačaka iznosi 80 deg = 80 stupnjeva Réaumura (vidi i tablicu D-10), pa je dakle

$$°Ré = 1{,}25\,°C, \quad \text{odnosno} \quad °C = 0{,}8\,°Ré.$$

Ovdje upotrebljavamo simbol °Ré da ne bi došlo do zamjene sa °R = stupanj Rankinea (vidi odlomak 3.2.6). Inače je uobičajena kratica za stupanj Réaumura »°R«.

Primjer. Treba izračunati koliko stupnjeva Réaumura (°Ré) ima tekućina kojoj je izmjerena temperatura 264 °F. Najprije izračunajmo pomoću izraza (3.5-1) pripadnu Celzijevu empiričku temperaturu:

$$t = 264\,°F - 32\,°F = 232\,°F = 232\,°C/1{,}8 = 129\,°C.$$

Budući da Réaumurova skala ima iste dvije fiksne tačke kao i empirička Celzijeva skala (tablica D-10), treba pri daljnjem računu uzeti u obzir samo odnos među jedinicama °C = 0,8 °Ré, dakle $t = 129\,°C = 129 \cdot 0{,}8\,°Ré = 103\,°Ré$.

3.5.3. Celzijeva temperaturna skala. Šveđanin *O. Celsius* odabrao je godine 1742. za termometrijsko tijelo *živu*, dakle kao i *Fahrenheit*, ali je fiksnim tačkama pripisao drukčije vrijednosti. Ledište vode označio je sa 100 stupnjeva, a vrelište sa 0 stupnjeva, dakle obrnuto nego što je uobičajeno danas. Njegov zemljak *Strömer* obavio je zamjenu kakvu imamo danas: ledište vode $t_0 = 0\,°C$, vrelište vode $t_v = 100\,°C$. Prema tome razmak između dviju fiksnih tačaka iznosi 100 °C; to je, dakle, centezimalna skala i u tome je historijski njena najveća vrijednost za praktičnu primjenu.

Položaj »Celzijeve empiričke temperature« u odnosu prema ostalim skalama razabire se iz tablice D-10, a grubi odnosi prema Fahrenheitovoj temperaturi na slici D.33 ($\vartheta \triangleq t$, $\vartheta_F \triangleq t_F$).

3.6. Međunarodna empirička temperaturna skala 1968

U odlomku 3.1.2 naglasili smo da je *termodinamička* temperaturna skala prema definiciji potpuno neovisna o svojstvima termometrijskog tijela. Budući da se ta skala ostvaruje preko jednadžbe stanja *idealnih* plinova, njena *realizacija* ipak ovisi o odstupanju upotrijebljenih realnih plinova od idealnog stanja. To odstupanje može se gotovo u potpunosti uzeti u račun pomoću odgovarajućih korektura (vidi odlomak 3.3.5), koje zahtijevaju izvođenje dodatnih mjerenja.

Izvanredno precizne mjerne metode plinske termometrije (vidi odsječak 3.3) su *skupe*, zahtijevaju *mnogo vremena*, a mjerni uređaji su *glomazni*. Sažeto rečeno: te mjerne metode *neprikladne* su za preciznu praktičnu termometriju. Zbog toga se od godine 1927. za precizna praktična mjerenja primjenjuje međunarodnim dogovorom prihvaćena *Međunarodna empirička temperaturna skala.*

Generalna konferencija za mjere i utege ovlastila je na svom 13. zasjedanju (1967) Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM; o njemu vidi odsječak A.7.1) da definira i objavi *novu* temperaturnu skalu. Komitet je to učinio na svom zasjedanju u oktobru godine 1968. Prema publikacijama CIPM, Savjetodavnog odbora za termometriju i prema drugim najnovijim izvorima, u idućim odlomcima navodimo bitne podatke o tako prihvaćenoj *Međunarodnoj empiričkoj temperaturnoj skali 1968*. Povijest skale letimično je opisana u odlomku 3.6.9.

3.6.1. Temelj Međunarodne temperaturne skale 1968. Metodama plinske termometrije, dakle najpreciznijim metodama (odsječak 3.3), izmjerene su vrijednosti termodinamičke temperature T (ili Celzijeve termodinamičke temperature $\vartheta = T - T_0$, gdje je $T_0 = 273{,}15$ K; vidi odlomak 3.4.1) dobro ponovljivih (reproducibilnih) ravnotežnih stanja karakterističnih tvari. Jedanaest takvih vrijednosti odabrao je Međunarodni komitet za *definirajuće fiksne tačke* (engl. defining fixed points) »Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968«. Tu skalu tvore fiksne tačke (tablica D-11), propisani mjerni postupci i standardni instrumenti baždareni pri temperaturnim stanjima koja su opisana fiksnim tačkama. Svrha je skale postizanje jedinstva preciznog i pouzdanog mjerenja temperature u čitavu svijetu. Pri tom se od skale zahtijeva da što manje odstupa od termodinamičke temperature T (Kelvinove), odnosno ϑ (Celzijeve; vidi odlomak 3.4.1), te da rad s njom bude pouzdan, jeftin i brz.

Naziv skale na francuskom glasi Échelle Internationale Pratique de Température de 1968, a na engleskom International Practical Temperature Scale of 1968 (IPTS-68). Ovdje smo pridjev »praktička« preveli s »empirička«, jer smatramo

Tablica **D–11**

Definirajuće fiksne tačke Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968

Definirajuće vrijednosti		Ravnotežno stanje pri normiranom tlaku $p_0 = 1{,}01325$ bar = 1 atm. Iznimke su trojne tačke i drugo ravnotežno stanje vodika (17,042 K)
t, °C	T_{68}, K	
−259,34	13,81	Ravnoteža krute i tekuće faze *ravnotežnog vodika* s njegovom parom (trojna tačka ravnotežnog vodika)
−256,108	17,042	Ravnoteža tekućeg *ravnotežnog vodika* i njegove pare pri tlaku 33330,6 N/m²
−252,87	20,28	Ravnoteža tekućeg *ravnotežnog vodika* i njegove pare (vrelište ravnotežnog vodika)
−246,048	27,102	Ravnoteža tekućeg *neona* i njegove pare (vrelište neona)
−218,789	54,361	Ravnoteža krute i tekuće faze *kisika* s njegovom parom (trojna tačka kisika)
−182,962	90,188	Ravnoteža tekućeg *kisika* i njegove pare (vrelište kisika)
0,01	273,16	Ravnoteža krute i tekuće faze *vode* s njenom parom (trojna tačka vode)[1]
100	373,15	Ravnoteža *vode* i njene pare (vrelište vode)[2]
419,58	692,73	Ravnoteža krute i tekuće faze *cinka* (krutište cinka)
961,93	1235,08	Ravnoteža krute i tekuće faze *srebra* (krutište srebra)
1064,43	1337,58	Ravnoteža krute i tekuće faze *zlata* (krutište zlata)

Opaske: 1) Upotrijebljena voda mora imati izotopni sastav oceanske vode (vidi odlomak 3.2.2).
2) Umjesto vrelišta vode može se upotrijebiti ravnotežno stanje krute i tekuće faze kositra (krutište kositra), kojega je temperatura $t = 231{,}9681$ °C.

da je u našem jeziku tako bolje, a osim toga u skladu je s pojmom »empirička temperatura« (odsječak 3.1). Riječ »praktička« (pratique, practical) uvedena je, naime, svojedobno zato da se ne bi stekao krivi dojam da je IPTS dio *termodinamičke* temperaturne skale.

Primjenom Međunarodne skale 1968 uvode se u upotrebu dvije empiričke fizikalne veličine: 1) »međunarodna empirička Kelvinova temperatura« T_{68} (engl. International Practical Kelvin Temperature), 2) »međunarodna empirička Celzijeva temperatura« t (engl. International Practical Celsius Temperature), za koju se upotrebljava i oznaka t_{68}, vrijedi dakle $t = t_{68}$. Te dvije veličine *definicijski* su međusobno povezane veličinskom jednadžbom

$$t = T_{68} - 273{,}15\ \mathrm{K}, \tag{3.6-1}$$

tj. povezane su kao Kelvinova (T) i Celzijeva (ϑ) *termodinamička* temperatura (odlomak 3.4.1). Slovo K u jednadžbi (3.6-1) kratica je jedinice »kelvin«; njena se definicija nalazi u odlomku 3.2.5.

U rasponima između fiksnih tačaka (tablica D-11) skala je definirana posebnim jednadžbama (odlomci 3.6.2,3), tzv. interpolacijskim formulama. Te jednadžbe povezuju vrijednosti pokazane standardnim instrumentima s pripadnim vrijednostima Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968. Propisani (standardni) instrument za mjerenje temperature u rasponu $T_{68} = 13{,}81$ K ... 903,89 K ($t = -259{,}34$ °C ... 630,74 °C) jest *platinski otpornički termometar*. Otpornik termometra mora biti izrađen od ižarene čiste platine (odlomak 3.6.7). Omjer otporâ

$$W = W(T_{68}) = \frac{R(T_{68})}{R(273{,}15\ \mathrm{K})}, \tag{3.6-2}$$

gdje slovo R predstavlja električki otpor platinskog termometra, ne smije biti manji od 1,392 50 pri temperaturi $T_{68}=373{,}15$ K (vrelište vode).

Standardni instrument za mjerenje temperature u rasponu $T_{68}=903{,}89$ K ... ... 1337,58 K ($t=630{,}74$ °C ... 1064,43 °C) jest *termopar platina-platinrodij* (odlomak 3.6.7). Iznad fiksne temperaturne tačke $T=1337{,}58$ K ($t=1064{,}43$ °C) Međunarodna skala 1968 definirana je Planckovim zakonom zračenja (odsječak G.1.3). Pri tom vrijednost konstante iznosi $C_2=0{,}014\,388$ Km.

Uz 11 fiksnih temperaturnih tačaka (tablica D-11) upotrebljava se još niz drugih, tzv. *sekundarnih* referentnih tačaka. Njihove vrijednosti navedene su u tablici D-12. Temperature definirajućih i sekundarnih tačaka izmjerene su plinskom termometrijom, tj. to su najpouzdanije vrijednosti.

3.6.2. Precizna interpolacija temperature. Između pojedinih fiksnih tačaka Međunarodna empirička temperaturna skala 1968 definirana je na nekoliko načina. Pri tom je podijeljena na četiri tzv. *interpolacijska područja*. U nastavku ćemo, prema podacima Međunarodnog komiteta za mjere i utege od godine 1968, navesti bitna obilježja interpolacije unutar temperaturnog područja 13,81 K ... 273,15 K (−259,34 °C ... 0 °C). Interpolacijske jednadžbe, koje ćemo navesti u nastavku, omogućuju baždarenje standardnih platinskih otporničkih termometara prema tzv. *referentnoj funkciji* W_{CCT}, koja nadasve vjerno simulira ponašanje tipičnog visokokvalitetnog otporničkog termometra. Način interpoliranja u ostala tri područja opisan je u odlomku 3.6.3.

Između trojne tačke ravnotežnog vodika (13,81 K) i ledišta vode (273,15 K) empirička temperatura T_{68} definirana je jednadžbom

$$W=W_{\mathrm{CCT}}+\Delta W. \tag{3.6-3}$$

Ovdje simbol W označuje omjer otporâ platinskog termometra; taj omjer definirali smo jednadžbom (3.6-2). Simbol W_{CCT} predstavlja spomenutu referentnu funkciju čije je vrijednosti objavio Međunarodni komitet na temelju rezultata dobivenih dugotrajnim mjerenjima u najboljim termometrijskim laboratorijima svijeta. U originalnim dokumentima Generalne konferencije i njenih organa ta funkcija ima oznaku $W_{\mathrm{CCT-68}}(T_{68})$; radi jednostavnijeg pisanja mi smo tu oznaku skratili u W_{CCT}. Indeks CCT kratica je francuskog naziva Savjetodavnog odbora za termometriju (odlomak A.7.1.3). Neke vrijednosti funkcije W_{CCT} navedene su u tablici D-13.

Funkcija W_{CCT} je kontinuirana, što možemo vidjeti na prvom dijagramu slike D.34. Utvrđena je dugogodišnjim eksperimentalnim i računskim radom stručnjaka Savjetodavnog odbora za termometriju. Pri tom su permanentno sudjelovali metrolozi iz gotovo svih većih metroloških laboratorija svijeta, a posebno su se angažirali svojom plinskom i otporničkom termometrijom britanski National Physical Laboratory (nacionalna temperaturna skala NPL-61), sovjetski Institut za fizikalno-tehnička i radio-tehnička mjerenja (PRMI-54), američki National Bureau of Standards (NBS-55), američki Pennsylvania State University (skala PSU-54), kanadski National Research Council i nizozemski Kamerlingh Onnes Laboratory (vidi i odlomak 3.6.9).

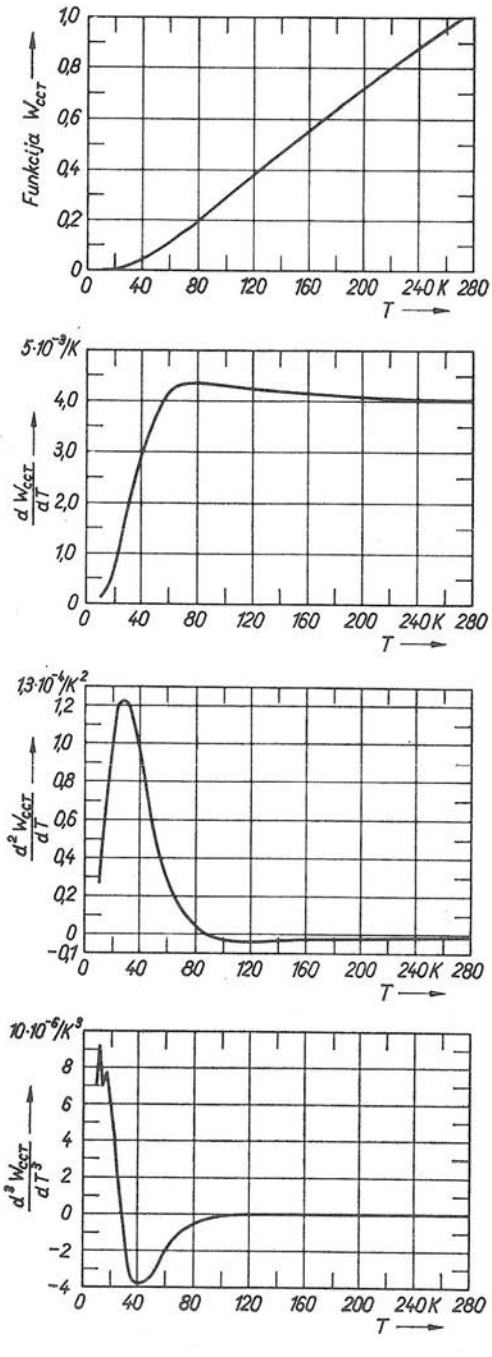
Nemoguće je u nekoliko redaka objasniti kako je iz 68 niskotemperaturnih i 98 visokotemperaturnih tačaka, odabranih iz velikog mnoštva drugih, metodom najmanjih kvadrata izračunata polinomska funkcija $T=\Phi(W)$ koju vidimo na

slici D.34. Zato ćemo spomenuti samo dva glavna načela prema kojima je to učinjeno: 1) Funkcija W_{CCT} mora biti što bliža funkciji $W=W(T)$ [T je Kelvinova termodinamička temperatura] stvarnog visokokvalitetnog platinskog otporničkog termometra. 2) Prve tri derivacije funkcije W_{CCT} ne smiju imati osjetne skokove, tj. vrijednosti derivacija moraju se polako mijenjati u čitavom području 13,81 K...273,15 K. Derivacijski dijagrami na slici D.34 dokazuju da je tom uvjetu udovoljeno, iako je u niskotemperaturnom području funkcija W_{CCT} kompromis između četiri prije spomenute nacionalne skale. U području viših temperatura funkcija W_{CCT} pretežno se oslanja na rezultate plinske termometrije kanadskog National Research Councila. Ti rezultati potvrđeni su plinskim mjerenjima u Leidenu, Moskvi i Teddingtonu.

Odstupanje ΔW (jednadžba 3.6-3), koje se u originalnim dokumentima CIPM označuje simbolom $\Delta W\,(T_{68})$, dobiva se pri fiksnim tačkama (tablica D-11) kao razlika *izmjerenog* omjera W i vrijednosti W_{CCT} referentne funkcije pri istoj temperaturi (tablica D-14). Između fiksnih tačaka vrijednost omjera W dobiva se pomoću interpolacijskih jednadžbi. Područje 13,81 K ... 273,15 K razdijeljeno je pri tom na *četiri temperaturna intervala*. Odstupanje u intervalu 13,81 K ... 20,28 K izražava jednadžba

$$\Delta W = A_1 + B_1 T_{68} + C_1 T_{68}^2 + D_1 T_{68}^3. \qquad (3.6\text{-}4)$$

Konstante se utvrđuju mjerenjem odstupanja ΔW pri trojnoj tački ravnotežnog vodika, pri temperaturi 17,042 K, pri vrelištu ravnotežnog vodika i pomoću derivacije funkcije odstupanja (3.6-5) pri vrelištu ravnotežnog vodika.



Sl. D.34. Ovisnost referentne funkcije i prvih triju njenih derivacija o temperaturi

Tablica **D-12**

Sekundarne referentne tačke Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968

Definirajuće vrijednosti		Ravnotežno stanje pri normiranom tlaku $p_0 = 1{,}01325$ bar = 1 atm. Iznimke su trojne tačke i ona stanja za koja vrijede niže navedene jednadžbe, što povezuju tlak i temperaturu
t, °C	T_{68}, K	
−259,194	13,956	Ravnoteža krute i tekuće faze *normalnog vodika* s njegovom parom (trojna tačka normalnog vodika)
−252,753	20,397	Ravnoteža tekućeg *normalnog vodika* i njegove pare (vrelište normalnog vodika). Za temperaturno područje 13,956 K ... 30 K vrijedi jednadžba $$\lg(p/p_0) = A + B/T_{68} + C T_{68} + D T_{68}^2.$$ Vrijednosti konstanti iznose: $A = 1{,}734791$, $B = -44{,}62368$ K, $C = 0{,}0231869$/K, $D = -0{,}000048017$/K²
−248,595	24,555	Ravnoteža krute i tekuće faze *neona* s njegovom parom (trojna tačka neona). Za ravnotežu tekućeg neona i njegove pare u temperaturnom području 24,555 K ... 40 K vrijedi gore navedena jednadžba, ali vrijednosti konstanti iznose: $A = 4{,}61152$, $B = -106{,}3851$ K, $C = -0{,}0368331$/K, $D = 4{,}24892 \cdot 10^{-4}$/K²
−210,002	63,148	Ravnoteža krute i tekuće faze *dušika* s njegovom parom (trojna tačka dušika)
−195,802	77,348	Ravnoteža tekućeg *dušika* i njegove pare (vrelište dušika). Za temperaturno područje 63,148 K ... 84 K vrijedi jednadžba $$\lg(p/p_0) = A + B/T_{68} + C \lg(T_{68}/T_0) + D T_{68} + E T_{68}^2.$$ Vrijednosti konstanti: $A = 5{,}893139$, $B = -404{,}13105$ K, $C = -2{,}3749$, $D = -0{,}0142505$/K, $E = 7{,}25342 \cdot 10^{-5}$/K² Za ravnotežu tekućeg *kisika* i njegove pare u temperaturnom području 54,361 K ... 94 K vrijedi prethodna jednadžba, ali vrijednosti konstanti iznose: $A = 5{,}961546$, $B = -467{,}45576$ K, $C = -1{,}664512$, $D = -0{,}013213001$/K, $E = 5{,}08041 \cdot 10^{-5}$/K²
−78,476	194,674	Ravnoteža krutog *ugljičnog dioksida* i njegove pare (tačka sublimiranja ugljičnog dioksida). Za temperaturno područje 194 K ... 195 K vrijedi jednadžba $$T_{68}/\mathrm{K} = 194{,}674 + 12{,}264\,(p/p_0 - 1) - 19{,}15\,(p/p_0 - 1)^2$$
−38,862	234,288	Ravnoteža krute i tekuće *žive* (ledište žive)*

0	273,15	Ravnoteža vodenog leda i zrakom zasićene *vode* (ledište vode)
26,87	300,02	Ravnoteža krute i tekuće faze *fenoksibenzena* (phenoxybenzene, diphenyl ether) s njegovom parom (trojna tačka fenoksibenzena)
122,37	395,52	Ravnoteža krute i tekuće faze *benzenske kiseline* s njenom parom (trojna tačka benzenske kiseline)
156,634	429,784	Ravnoteža krutog i tekućeg *indija* (krutište indija)*
271,442	544,592	Ravnoteža krutog i tekućeg *bizmuta* (krutište bizmuta)*
321,108	594,258	Ravnoteža krutog i tekućeg *kadmija* (krutište kadmija)*
327,502	600,652	Ravnoteža krutog i tekućeg *olova* (krutište olova)*
356,66	629,81	Ravnoteža tekuće *žive* i njene pare (vrelište žive). Za područje tlaka $p=0{,}9\cdot10^5$ N/m²...$1{,}04\cdot10^5$ N/m² vrijedi jednadžba $t_{68}/°C=356{,}66+55{,}552\,(p/p_0-1)-23{,}03\,(p/p_0-1)^2+14{,}0\,(p/p_0-1)^3$
444,674	717,824	Ravnoteža tekućeg *sumpora* i njegove pare. Za područje tlaka $p=0{,}9\cdot10^5$ N/m²... $1{,}04\cdot10^5$ N/m² vrijedi jednadžba $t_{68}/°C=444{,}674+69{,}010\,(p/p_0-1)-27{,}48\,(p/p_0-1)^2+19{,}14\,(p/p_0-1)^3$
548,23	821,38	Ravnoteža krutog i tekućeg eutektika *bakar-aluminij*
630,74	903,89	Ravnoteža krutog i tekućeg *antimona* (krutište antimona)*
660,37	933,52	Ravnoteža krutog i tekućeg *aluminija* (krutište aluminija)
1084,5	1357,6	Ravnoteža krutog i tekućeg *bakra* (krutište bakra)
1455	1728	Ravnoteža krutog i tekućeg *nikla* (krutište nikla)
1494	1767	Ravnoteža krutog i tekućeg *kobalta* (krutište kobalta)
1554	1827	Ravnoteža krutog i tekućeg *paladija* (krutište paladija)
1772	2045	Ravnoteža krute i tekuće *platine* (krutište platine)
1963	2236	Ravnoteža krutog i tekućeg *rodija* (krutište rodija)
2447	2720	Ravnoteža krutog i tekućeg *iridija* (krutište iridija)
3387	3660	Ravnoteža krutog i tekućeg *volframa* (talište volframa)

* Utjecaj tlaka na vrijednost temperature skrućivanja opisan je u odlomku 3.6.5.

Tablica **D-13**

Vrijednost omjera $W_{CCT} = W_{CCT\text{-}68}(T_{68})$

T_{68} K	W_{CCT}	T_{68} K	W_{CCT}	T_{68} K	W_{CCT}	T_{68} K	W_{CCT}
		45	0,05764486	80	0,19958212	115	0,35078519
		46	0,06106161	81	0,20391714	116	0,35505910
		47	0,06454679	82	0,20825445	117	0,35932989
13	0,00123061	48	0,06809690	83	0,21259344	118	0,36359754
14	0,00145973	49	0,07170835	84	0,21693388	119	0,36786199
15	0,00174541	50	0,07537756	85	0,22127523	120	0,37212331
16	0,00209474	51	0,07910123	86	0,22561712	121	0,37638151
17	0,00251512	52	0,08287595	87	0,22995916	122	0,38063657
18	0,00301428	53	0,08669859	88	0,23430105	123	0,38488851
19	0,00359962	54	0,09056600	89	0,23864248	124	0,38913732
20	0,00427780	55	0,09447515	90	0,24298315	125	0,39338316
21	0,00505495	56	0,09842336	91	0,24732290	126	0,39762594
22	0,00593668	57	0,10240774	92	0,25166128	127	0,40186567
23	0,00692804	58	0,10642583	93	0,25599836	128	0,40610242
24	0,00803316	59	0,11047506	94	0,26033369	129	0,41033628
25	0,00925504	60	0,11455312	95	0,26466718	130	0,41456709
26	0,01059585	61	0,11865789	96	0,26899870	131	0,41879507
27	0,01205690	62	0,12278722	97	0,27332807	132	0,42302015
28	0,01363901	63	0,12693914	98	0,27765516	133	0,42724233
29	0,01534261	64	0,13111189	99	0,28197988	134	0,43146169
30	0,01716768	65	0,13530363	100	0,28630201	135	0,43567831
31	0,01911363	66	0,13951284	101	0,29062154	136	0,43989210
32	0,02117944	67	0,14373800	102	0,29493841	137	0,44410322
33	0,02336343	68	0,14797773	103	0,29925245	138	0,44831159
34	0,02566335	69	0,15223058	104	0,30356359	139	0,45251730
35	0,02807645	70	0,15649541	105	0,30787183	140	0,45672033
36	0,03059953	71	0,16077108	106	0,31217710	141	0,46092077
37	0,03322916	72	0,16505643	107	0,31647939	142	0,46511861
38	0,03596155	73	0,16935049	108	0,32077856	143	0,46931387
39	0,03879305	74	0,17365240	109	0,32507467	144	0,47350660
40	0,04171968	75	0,17796117	110	0,32936765	145	0,47769682
41	0,04473760	76	0,18227605	111	0,33365751	146	0,48188459
42	0,04784292	77	0,18659628	112	0,33794416	147	0,48606985
43	0,05103178	78	0,19092107	113	0,34222768	148	0,49025274
44	0,05430036	79	0,19524992	114	0,34650800	149	0,49443319
45	0,05764486	80	0,19958212	115	0,35078519	150	0,49861135

U intervalu 20,28 K... 54,361 K funkciju odstupanja ΔW opisuje analogna jednadžba

$$\Delta W = A_2 + B_2 T_{68} + C_2 T_{68}^2 + D_2 T_{68}^3. \qquad (3.6\text{-}5)$$

Konstante A_2, B_2, C_2 i D_2 utvrđuju se mjerenjem odstupanja ΔW pri vrelištu vodika, pri vrelištu neona, pri trojnoj tački kisika (tablica D-11) i pomoću derivacije funkcije odstupanja (3.6-6) pri trojnoj tački kisika.

U intervalu 54,361 K... 90,188 K funkciju odstupanja ΔW izražava kvadratna jednadžba

$$\Delta W = A_3 + B_3 T_{68} + C_3 T_{68}^2. \qquad (3.6\text{-}6)$$

Navedene tri konstante utvrđuju se mjerenjem odstupanja $\Delta W = W - W_{CCT}$ (jednadžba 3.6-3) pri trojnoj tački kisika, pri vrelištu kisika i pomoću derivacije funkcije odstupanja (3.6-7) pri vrelištu kisika.

pri cjelobrojnim vrijednostima temperature T_{68}

T_{68} K	W_{CCT}	T_{68} K	W_{CCT}	T_{68} K	W_{CCT}	T_{68} K	W_{CCT}
150	0,49861135	185	0,64353094	220	0,78634756	255	0,92744283
151	0,50278707	186	0,64763807	221	0,79040151	256	0,93145101
152	0,50696058	187	0,65174352	222	0,79445409	257	0,93545805
153	0,51113172	188	0,65584730	223	0,79850523	158	0,93946371
154	0,51530065	189	0,65994947	224	0,80255506	159	0,94346822
155	0,51946737	190	0,66404996	225	0,80660352	260	0,94747152
156	0,52363180	191	0,66814886	226	0,81065054	261	0,95147352
157	0,52779409	192	0,67224607	227	0,81469625	262	0,95547430
158	0,53195417	193	0,67634176	228	0,81874059	263	0,95947385
159	0,53611211	194	0,68043577	229	0,82278364	264	0,96347219
160	0,54026792	195	0,68452825	230	0,82682531	265	0,96746931
161	0,54442167	196	0,68861913	231	0,83086561	266	0,97146513
162	0,54857336	197	0,69270841	232	0,83490461	267	0,97545980
163	0,55272291	198	0,69679617	233	0,83894224	268	0,97945325
164	0,55687048	199	0,70088232	234	0,84297857	269	0,98344541
165	0,56101606	200	0,70496694	235	0,84701353	270	0,98743642
166	0,56515958	201	0,70905004	236	0,85104726	271	0,99142614
167	0,56930112	202	0,71313161	237	0,85507963	272	0,99541471
168	0,57344076	203	0,71721174	238	0,85911069	273	0,99940199
169	0,57757848	204	0,72129026	239	0,86314046		
170	0,58171423	205	0,72536733	240	0,86716894		
171	0,58584806	206	0,72944288	241	0,87119611		
172	0,58997999	207	0,73351690	242	0,87522199		
173	0,59411008	208	0,73758947	243	0,87924657		
174	0,59823835	209	0,74166059	244	0,88326994		
175	0,60236478	210	0,74573026	245	0,88729200		
176	0,60648931	211	0,74979841	246	0,89131269		
177	0,61061208	212	0,75386518	247	0,89533224		
178	0,61473310	213	0,75793043	248	0,89935049		
179	0,61885229	214	0,76199430	249	0,90336744		
180	0,62296972	215	0,76605672	250	0,90738309		
181	0,62708540	216	0,77011770	251	0,91139753		
182	0,63119939	217	0,77417730	252	0,91541074		
183	0,63531164	218	0,77823545	253	0,91942274		
184	0,63942213	219	0,78229223	254	0,92343343		
185	0,64353094	220	0,78634756	255	0,92744283		

U temperaturnom intervalu 90,188 K...273,15 K funkciju odstupanja ΔW opisuje jednadžba

$$\Delta W = A_4 t + C_4 t^3 \ (t - 100\ ^\circ\text{C}). \qquad (3.6\text{-}7)$$

Pri tom vrijedi relacija $t = T_{68} - 273{,}15$ K, što smo istakli izrazom (3.6-1) u odlomku 3.6.1. Jedinica °C=stupanj Celzija jednaka je kelvinu (K), o čemu smo raspravljali u odlomku 3.4.1. Konstante A_4 i C_4 utvrđuju se mjerenjem vrijednosti odstupanja ΔW pri vrelištu kisika i pri vrelištu vode. Umjesto vrelišta vode može se upotrijebiti krutište kositra (tablica D-14). U tom se slučaju vrijednost W (100 °C) platinskog termometra izračunava pomoću jednadžbi (3.6-8,9).

3.6.3. Interpolacija temperature u ostala tri područja. Međunarodni komitet za mjere i utege preporučio je godine 1968. da se za navođenje podataka ispod ledišta vode upotrebljava fizikalna veličina T_{68} (jednadžba 3.6-1), a za više

temperature veličina t ($=t_{68}$). Na taj način se izbjegavaju negativne vrijednosti. Ovdje postupamo prema toj preporuci, tj. $t = T_{68} - 273{,}15\,\mathrm{K}$.

Područje 0 °C...630,74 °C (273,15 K...903,89 K). U tom području, tj. između ledišta vode i krutišta antimona, Međunarodna empirička temperatura definirana je jednadžbom

$$t = t' + 0{,}045\left(\frac{t'}{100\ ^\circ\mathrm{C}}\right)\left(\frac{t'}{100\ ^\circ\mathrm{C}} - 1\right)\left(\frac{t'}{419{,}58\ ^\circ\mathrm{C}} - 1\right)\left(\frac{t'}{630{,}74\ ^\circ\mathrm{C}} - 1\right)^\circ\mathrm{C}. \tag{3.6-8}$$

Pri tom se t' dobiva pomoću izraza

$$t' = \frac{1}{a}[W(t') - 1] + \delta\left(\frac{t'}{100\ ^\circ\mathrm{C}}\right)\left(\frac{t'}{100\ ^\circ\mathrm{C}} - 1\right). \tag{3.6-9}$$

Ovdje je omjer $W(t')$ definiran kao $W(t') = R(t')/R(0\ ^\circ\mathrm{C})$. Konstante a, δ i $R(0\ ^\circ\mathrm{C})$ utvrđuju se mjerenjem otpora termometra pri trojnoj tački vode, pri vrelištu vode (ili pri krutištu kositra) i pri krutištu cinka (tablica D-11).

Napominjemo da je izraz (3.6-9) Callendarov oblik poznatije jednadžbe

$$W(t') = 1 + A\,t' + B\,t'^2.$$

Odgovarajuće konstante međusobno su povezane relacijama

$$A = a\,(1 + \delta/100\ ^\circ\mathrm{C}) \quad \text{i} \quad B = a\,\delta/(100\ ^\circ\mathrm{C})^2.$$

Tablica **D–14**

Vrijednosti funkcije W_{CCT} za neke definirajuće i sekundarne tačke Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968

Fiksna tačka	t, °C	T_{68}, K	W_{CCT}
Trojna tačka e-H_2	−259,34	13,81	0,00141206
Tačka e-H_2 (17,042 K)	−256,108	17,042	0,00253444
Vrelište e-H_2	−252,87	20,28	0,00448517
Vrelište Ne	−246,048	27,102	0,01221272
Trojna tačka O_2	−218,789	54,361	0,09197252
Ledište vode	0	273,15	1
Vrelište vode	100	373,15	1,39259668
Krutište kositra Sn	231,9681	505,1181	1,89257086

Područje 630,74 °C...1064,43 °C (903,89 K...1337,58 K). Između krutišta antimona i krutišta zlata Međunarodna empirička temperatura definirana je jednadžbom

$$U_t = a + bt + ct^2,$$

a mjerenje se obavlja pomoću *termopara* (termočlanka) platina-platinrodij. Simbol U_t predstavlja termoelektrički napon standardnog termopara ako se jedno spojno mjesto nalazi na temperaturi 0 °C, a drugo na temperaturi t. Konstante a, b i c utvrđuju se pomoću gornje jednadžbe iz vrijednosti U_t pri temperaturi 630,74 °C ±0,2 °C (izmjerenoj platinskim otporničkim termometrom), pri krutištu srebra i pri krutištu zlata.

Žice standardnog termopara moraju biti ižarene, a čistoća platinske žice mora biti takva da omjer $W(100\ °C)$ ne bude manji od 1,3920. Nominalno žica od platinrodija sadrži 0,9 masenih udjela platine i 0,1 udio rodija. Kad se jedno spojno mjesto tako izvedenog termopara nalazi na temperaturi 0 °C, a drugo na 630,74 °C ili na temperaturi skrućivanja srebra (Ag) ili na temperaturi skrućivanja zlata (Au), termopar mora dati napone koji udovoljavaju ovim jednadžbama

$$U_{Au}=20\,300\ \mu V\pm 50\ \mu V,$$

$$U_{Au}-U_{Ag}=10\,300\ \mu V+0{,}158\ (U_{Au}-10\,300\ \mu V)\pm 4\ \mu V,$$

$$U_{Au}-U_{630{,}74\,°C}=4766\ \mu V+0{,}631\ (U_{630{,}74\,°C}-10\,300\ \mu V)\pm 8\ \mu V.$$

Područje iznad 1337,58 K (1064,43 °C). Iznad temperature skrućivanja zlata Međunarodna empirička temperatura $T_{68}=t+273{,}15$ K definira se pomoću omjera spektralnih snaga zračenja idealnog zračila (crnog tijela)

$$\frac{M_\lambda(T_{68})}{M_\lambda(T_{68}(\mathrm{Au}))}=\frac{\exp\left[C\lambda_2/(T_{68}(\mathrm{Au}))\right]-1}{\exp\left[C_2/(\lambda T_{68})\right]-1}.$$

Ovdje slovo M_λ predstavlja spektralnu gustoću snage zračenja (odlomak G.1.3.3), λ duljinu vala zračenja, a $T_{68}(\mathrm{Au})$ temperaturu skrućivanja zlata. Vrijednost konstante iznosi $C_2=0{,}014\,388$ Km. Budući da je $T_{68}(\mathrm{Au})$ vrlo bliska termodinamičkoj temperaturi krutišta zlata, a konstanta C_2 gotovo identična s drugom Planckovom konstantom, ne treba specificirati duljinu vala zračenja primijenjenog pri mjerenju (usporedi s odlomkom 3.6.9).

3.6.4. Ravnotežna stanja vodika. Do godine 1968. Međunarodna temperaturna skala sezala je samo do vrelišta kisika (−182,962 °C). Opsežna termometrijska istraživanja *vodika* omogućila su da se nova skala (1968) spusti sve do 13,81 K (−259,34 °C). Pri tom je uvedeno nekoliko vodikovih ravnotežnih tačaka (tablice D-11,12), o kojima ćemo u nastavku pružiti bitne podatke.

Vodik se pojavljuje u dvije molekulske modifikacije, označene predmecima *orto* i *para*. Modifikacije su uzrokovane različitim relativnim orijentacijama nuklearnih spinova u dvoatomnim molekulama vodika. Ravnotežni sastav orto-para ovisi o temperaturi; pri sobnoj temperaturi sastav je ovakav: oko 75% ortovodika i 25% paravodika (takozvani »normalni vodik«). Prilikom likvefakcije sastav se u toku vremena polako mijenja, a posljedica toga su odgovarajuće promjene fizikalnih osobina. Pri vrelištu ravnotežni sastav sadrži 0,21% ortovodika i 99,79% paravodika, a temperatura je za oko 0,12 K niža od vrelišta normalnog vodika (usporedi tablice D-11,12). Naziv »ravnotežni vodik« znači da vodik ima svoj ravnotežni sastav orto-para pri naznačenoj temperaturi.

Temperatura ravnotežnog stanja krute i tekuće faze vodika s njegovom parom (trojna tačka) može se reprodurcirati pomoću dovoljne količine tekućeg vodika i stanovitim katalizatorom, na primjer željeznim dioksidom. Pri tom se oboje nalazi u šupljini bakrenog tijela u koju je uronjen platinski otpornički termometar, a okolina je evakuirana. Temperatura bakra snizuje se tako dugo dok se vodik ne skrutne, a zatim se pusti da temperatura polako raste i promatra prijelaz u trojnu tačku. Pri tom ravni dio krivulje vrijeme—temperatura ostaje unutar granica ± 0,0001 K barem pola sata.

Temperatura ravnotežnog stanja tekućeg i plinovitog vodika obično se ostvaruje statičkom metodom. Šupljina tijela (bloka) velike toplinske vodljivosti

održava se na temperaturi bliskoj vrelištu, i to tako što se stavi u tekući vodik. Da bi se izbjegli temperaturni gradijenti uzrokovani hidrostatskim tlakom, tekući vodik dodiruje samo vrh tijela, dok je donji dio zaštićen vakuumskim omotačem. U šupljini se nalazi mala količina vrlo čistog tekućeg vodika zajedno s nekim katalizatorom. Tlak pare tog vodika prenosi se tankom cjevčicom slabe toplinske vodljivosti na manometar koji se nalazi izvan vakuumske obloge. Moguć izvor pogrešaka jest direktno zračenje (duž te cijevi) u šupljinu; mora se osigurati to da se svaka tačka cijevi nalazi na višoj temperaturi nego što je temperatura površine tekućeg helija u šupljini. Uspoređuje se pokazivanje tako nastalog termometra na tlak pare s pokazivanjem platinskog termometra uronjenog u uski otvor koji se nalazi kraj šupljine metalnog tijela. Valjanost mjerenja provjerava se ispitivanjem da li rezultat ovisi o omjeru volumena tekućeg vodika prema volumenu pare u šupljini.

Temperatura T_{68}, kao funkcija tlaka pare ravnotežnog vodika, izražena je u rasponu 13,81 K...23 K jednadžbom

$$\lg(p/p_0) = A + B/T_{68} + CT_{68} + DT_{68}^2.$$

Pogreška iznosi nekoliko milikelvina. Pri tom vrijednosti konstanti iznose: $p_0 = 1{,}01325$ bar$=1$ atm, $A=1{,}711466$, $B=-44{,}01046$ K, $C=0{,}0235909$/K, $D=-0{,}000048017$/K^2.

3.6.5. Ravnotežna stanja neona, kisika i vode. Temperatura vrelišta neona reproducira se na sličan način kao i kod vodika (odlomak 3.6.4). Normalan izotopni sastav neona jest: 0,0026 mola ^{21}Ne i 0,088 mola ^{22}Ne na 0,909 mola ^{20}Ne. U rasponu 27 K...27,2 K temperatura T_{68} *neona* ovako ovisi o tlaku p neonskih para

$$T_{68}/\mathrm{K} = 27{,}102 + 3{,}3144(p/p_0 - 1) - 1{,}24(p/p_0 - 1)^2 + 0{,}74(p/p_0 - 1)^3.$$

U spomenutom temperaturnom rasponu jednadžba uzrokuje pogrešku oko $\pm 0{,}2$ mK.

Trojna tačka i vrelište *kisika* proizvode se slično kao i kod vodika. Posebna se pozornost mora posvetiti čistoći kisika. Kisik je dovoljno čist ako temperatura vrelišta ostaje konstantna iako se sukcesivno oduzima njegova para. U području 90,1 K...90,3 K temperatura T_{68} *kisika* ovako ovisi o tlaku p njegovih para (pogreška iznosi oko $\pm 0{,}1$ mK).

$$T_{68}/\mathrm{K} = 90{,}188 + 9{,}5648(p/p_0 - 1) - 3{,}69(p/p_0 - 1)^2 + 2{,}22(p/p_0 - 1)^3.$$

Budući da smo bitne podatke o *trojnoj tački vode* spomenuli u odlomku 3.2.2, ovdje ćemo navesti obilježja *ledišta vode*. U skladu s izlaganjem u odlomku 3.2.3 (vidi i tablicu D-12), ledište vode ima temperaturu $t = t_{68} = 0$ °C, odnosno $T_{68} = t + 273{,}15$ K$=273{,}15$ K (jednadžba 3.6-1). Naravno da reprodukcija ledišta vode, tj. ostvarenje te temperature u laboratoriju nije savršeno. Nesigurnost reprodukcije ledišta vode ocjenjuje se na oko $\pm 0{,}001$ °C, tj. ona je desetak puta manje pouzdana od reprodukcije temperature trojne tačke (odlomak 3.2.2). Budući da je postupak reprodukcije trojne tačke vode dugotrajan i skup posao, o željenoj i potrebnoj preciznosti ovisi da li će se reproducirati ledište ili trojna tačka. Ako je dovoljno ledište, onda se fino usitnjeni led pomiješa s vodom zasićenom zrakom. Ta mješavina drži se u Dewarovoj posudi koja se i sama nalazi na temperaturi vrlo bliskoj 0 °C, pa nema gotovo nikakve razmjene topline između mješavine i okoline.

Ravnotežna temperatura vode i leda pri okolnom atmosferskom tlaku p računa se, prema podacima Savjetodavnog odbora za termometriju, pomoću jednadžbe

$$t = A(1 - p/p_0) + Bh.$$

Ovdje je h dubina mjerene tačke, računajući od razine vode. Vrijednosti konstanti iznose: $A = 0{,}01$ °C, $p_0 = 1{,}01325$ bar $= 1$ atm $= 760$ mm Hg (o jedinicama tlaka vidi odsječak B.4.3), $B = -7 \cdot 10^{-7}$ °C/mm.

Spomenimo još *vrelište vode*, tj. temperaturu ravnotežnog stanja vode i njene pare. To stanje najčešće se reproducira dinamičkom metodom s termometrom u zasićenoj pari. Za precizna baždarenja preporučuje se zatvoreni sistem, gdje su kotao i manometar priključeni na manostat napunjen zrakom ili, bolje, helijem.

Kotao mora biti izveden tako da ne može doći do zagađenja vode. Termometar se mora zaštititi od zračenjâ koja odašilju tijela što se nalaze na temperaturama različitim od temperature vrelišta. Kad se postigne ravnoteža, mjerena temperatura (svedena na stalan tlak) neće ovisiti o vremenu, promjeni dotoka topline tekućini i dubini urinuća termometra. Promjena udjela deuterija u vodi uzrokuje promjenu temperature vrelišta u istom smislu kao i kod trojne tačke (odlomak 3.2.2), ali oko tri puta manju. U području 99,9 °C ... 100,0 °C temperatura $t = t_{68} = T_{68} - 273{,}15$ K vrelišta vode ovako ovisi o tlaku p svoje pare

$$t/\,°\mathrm{C} = 100 + 28{,}0216(p/p_0 - 1) - 11{,}642(p/p_0 - 1)^2 + 7{,}1(p/p_0 - 1)^3.$$

U spomenutom temperaturnom rasponu ova jednadžba uzrokuje pogrešku oko $\pm 0{,}1$ mK. Referentni tlak iznosi, kao i u prethodnim slučajevima, $p_0 = 101\,325$ N/m^2.

3.6.6. Mjerenje tlaka i njegov utjecaj na krutišta. Tlak se u termometriji najčešće mjeri visinom *živina stupca*. Pri tom mjerna pogreška ovisi o pouzdanosti s kojom poznajemo gustoću žive ρ i mjesno ubrzanje zemljine teže (odsječak B.4.1). Budući da se gustoća žive mijenja s temperaturom t i tlakom p, neophodno je da se zna veza između ρ, t i p. Za temperaturni interval $t = 0$ °C ... 40 °C Međunarodni komitet za mjere i utege preporučio je godine 1968. ovaj izraz kojim se izračunava prosječna gustoća čiste žive u barometarskom stupcu pod tlakom p i pri temperaturi t $(= t_{68})$:

$$\rho\left(t, \frac{p}{2}\right) = \frac{\rho(20\,°\mathrm{C}, p_0)}{[1 + A(t - 20\,°\mathrm{C}) + B(t - 20\,°\mathrm{C})^2] \cdot [1 - \chi(p/2 - p_0)]}.$$

Vrijednosti konstanti iznose: $A = 1{,}8115 \cdot 10^{-4}$/°C, $B = 8 \cdot 10^{-9}$/°C^2, $\chi = 4 \cdot 10^{-11}$ m^2/N, $\rho(20\,°\mathrm{C}, p_0) = 1{,}354\,587 \cdot 10^4$ kg/m^3 pri tlaku $p_0 = 1{,}01325 \cdot 10^5$ N/m^2 $= 1$ atm.

Pri upotrebi vrijednosti mjesnog ubrzanja zemljine teže g_φ valja biti vrlo pažljiv. Gotovo svi postojeći podaci o g_φ poznati su u odnosu prema Potsdamu (odlomak A.9.4.4), tj. u odnosu prema potsdamskoj osnovici $g\,(\mathrm{P}) = 9{,}81274$ m/s^2. Godine 1968. Međunarodni komitet za mjere i utege *promijenio je*, baš za svrhe najpreciznijih mjerenja, tu osnovicu u njenu stvarnu vrijednost

$$g\,(\mathrm{P}, 1968) = 9{,}81260\ \mathrm{m/s^2},$$

tj. staru je vrijednost umanjio za $1{,}4 \cdot 10^{-4}$ m/s^2 ($= 14$ miligala). Prema tome treba računati s novim vrijednostima mjesnog ubrzanja zemljine teže:

$$g_\varphi(1968) = g - 1{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}.$$

Ovdje, dakako, slovo g označuje vrijednost mjesnog ubrzanja zemljine teže prema staroj potsdamskoj osnovici.

Utjecaj tlaka na temperaturu skrućivanja nekih kovina

Kovina	Krutište (t) pri tlaku 1 atm, °C	Tlačni koeficijent	
		K/bar	K/cm tekućine
Živa	−38,862	+ 0,0053	+ 0,000071
Indij	156,634	+ 0,0048	+ 0,000033
Kositar	231,9681	+ 0,0033	+ 0,000022
Bizmut	271,442	− 0,0035	− 0,000034
Kadmij	321,108	+ 0,0061	+ 0,000048
Olovo	327,502	+ 0,0079	+ 0,000082
Cink	419,58	+ 0,0042	+ 0,000027
Antimon	630,74	+ 0,00084	+ 0,000005

Utjecaj tlaka na temperature referentnih ravnotežnih stanja Međunarodne skale 1968 opisuju jednadžbe nanizane u tablici D-12. Hidrostatski tlak utječe, dakako, i na temperature skrućivanja *kovina* odabranih za referentne tačke. Ti utjecaji pomno su istraženi, a dobivene rezultate sadrži priložena tablica (bar = $=10^5$ N/m^2). U desnom stupcu te tablice vrijednosti tlačnog koeficijenta temperature skrućivanja navedene su u jedinici »kelvin/cm tekućine«. Pri tom se pod »tekućinom« razumijeva ona tvar o kojoj je riječ u pripadnom retku. Tako, na primjer, vrijednost tlačnog koeficijenta cinka (Zn) iznosi + 0,000027 K/cm Zn.

3.6.7. Standardni otpornički termometar i termopar. Prilikom uvođenja »Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968« Međunarodni komitet (CIPM) objavio je niz podataka o mjernim uređajima. Ti podaci rezultat su dugogodišnjeg iskustva i zato ih ovdje djelomično prenosimo. Pri tom ćemo opisati bitna obilježja standardnih platinskih otporničkih termometara i standardnih termoparova (termočlanaka).

Standardni termometri moraju biti izrađeni kao otpornički elementi sa četiri priključka (usporedi s odlomkom E.3.6.1). Otpornik ne smije biti mehanički naprezan, ni u primjeni ni onda kad je izvan upotrebe. Zadovoljavajući otpornici izrađuju se od platinskih žica jednoličnog promjera između 0,05 i 0,5 mm, a od platine moraju biti i kratke priključne žice. Uobičajeno je da otpor R(0 °C) iznosi oko 25 Ω, a mjerna struja 1 ili 2 mA. Svi oni dijelovi termometra koji se nalaze u neposrednoj blizini otpornika moraju biti čisti te izrađeni od takvih materijala koji ne reagiraju s platinom. CIPM preporučuje da se u toku izrade termometar drži evakuiranim do temperature oko 450 °C, zatim napuni plinom i potom hermetički zatvori. Poželjno je da u plinu ima kisika, jer se time osigurava da će oksidirati tragovi nečistoća u platini, dakle ostati u obliku oksida. Nakon zatvaranja treba otpornički element stabilizirati zagrijavanjem na temperaturu višu od predviđene maksimalne radne temperature, a ni u kojem slučaju na manje od 450 °C. Tako izrađeni termometar mora imati otpornički omjer (odlomak 3.6.1)

$$W(100\ °C) \geqq 1{,}392\,50 \quad \text{pri} \quad t = 100\ °C.$$

Napominjemo da se kod prijašnje Međunarodne skale (1948) zahtijevala manja vrijednost, $W(100\ °C) \geqq 1{,}3920$.

Izolacijski otpor svih dijelova na koje se oslanjaju otpornički element i dovodi mora biti dovoljno velik da bi se time osujetio osjetan odvod struje. Mora se izbjeći kondenzacija vodene pare u prostoru među vodičima pri niskim temperaturama i šupljikavost izolatora pri visokim. Izolatori su obično od tinjca, kremena i drugih

tvari, a ti materijali normalno posjeduju potreban otpor do 500 °C. Kad temperatura dosegne 630 °C, nastaju problemi, a pogreška u temperaturi lako naraste na oko 1 mK i više. Kod tinjčeve izolacije iskrsavaju dodatne teškoće (odlomak 3.6.9): pri temperaturi iznad 450 °C oslobađa se iz tinjca znatna količina vode, pa se nastala vlaga mora odvoditi povremenim ispumpavanjem.

Da bi se osigurala potrebna stabilnost otpora i njegovog temperaturnog koeficijenta, otpornik standardnog platinskog termometra mora se održavati, ako je ikako moguće, u ižarenom stanju. Do porasta otpora može doći i pri normalnoj primjeni termometra, a pogotovo kao posljedica naglog hlađenja prilikom prenošenja otpornika iz sredine temperature oko 500 °C na sobnu temperaturu. Prvotni otpor može se postići žarenjem na 500 °C u toku pola sata. Znatne pogreške može uzrokovati zračenje termometra, i to potpunom refleksijom zračenja na konstrukcijskim elementima, posebno onima od kremena. Ova pojava može se izbjeći potamnjivanjem površina koloidnim grafitom ili pjeskarenjem. Dovršeni termometar valja ispitati u pogledu dubine uranjanja, tj. ustanoviti da li je dubina dovoljna da se izbjegnu pogreške zbog vođenja topline. To se može učiniti tako što se pri temperaturi skrućivanja kovina provjeri da li je prividni temperaturni gradijent u skladu s onim koji se očekuje od hidrostatskog tlaka (vidi tablicu u odlomku 3.6.6).

Efikasnost žarenja i pouzdanost termometra mogu se utvrditi provjeravanjem stalnosti njegova otpora pri referentnoj temperaturi. U tu svrhu najčešće se upotrebljavaju trojna tačka vode (273,16 K) i vrelište helija (4,215 K). Praksa je pokazala da promjena otpora pri trojnoj tački vode ne smije premašiti $4 \cdot 10^{-6} \cdot R(0\ °C)$, čemu odgovara oko 1 mK iznad 40 K, ako je riječ o komercijalnim visokotemperaturnim termometrima, a ne smije premašiti $5 \cdot 10^{-7} \cdot R(0\ °C)$ ako je riječ o najboljim termometrima primjenjivanim s najvećom brižljivošću. Promjene otpora onih termometara koji se upotrebljavaju samo pri temperaturi oko 100 °C, ili nižoj, također ne smiju premašiti $5 \cdot 10^{-7} \cdot R(0\ °C)$.

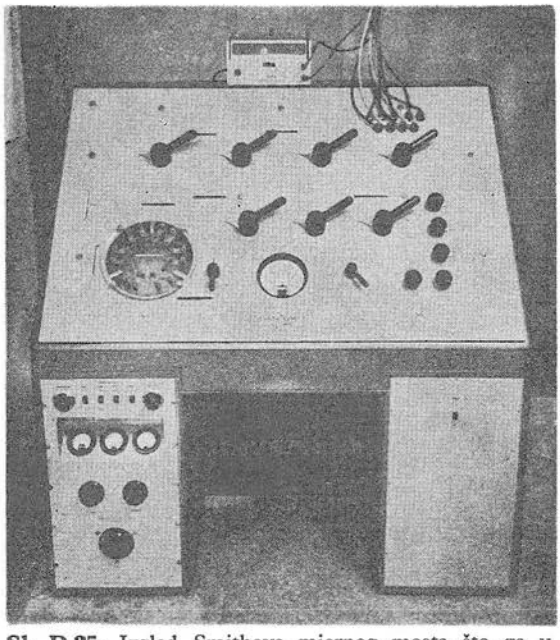
Za mjerenje temperature ispod 90 K obično se upotrebljavaju sitni platinski otpornički termometri kojih promjer ne premašuje 5 mm, a duljina 60 mm. Na taj način oni se mogu u cijelosti staviti u jednoliko temperaturno područje. Pri tom se odvođenje topline kroz priključne žice sprečava time što se okruže prikladnim prstenom. Da bi se osigurao dobar toplinski kontakt otpornika i okolne sredine, otpornik se stavi u tanku košuljicu, obično izrađenu od platine debljine 0,25 mm, napunjenu helijem.

Male sistematske pogreške, uzrokovane mjernom strujom, lako se utvrđuju mjerenjima iste temperature s dvije različite jakosti struje. U vezi s time korisno je spomenuti da kompletan uređaj za mjerenje temperature pomoću platinskog otporničkog termometra sadrži i niz drugih pomagala. Među njima je za preciznu termometriju vrlo važan *Smithov mjerni most* (sl. D.35). Shemu tog mosta otkrio je godine 1912. Englez *F. E. Smith.*

Nekoliko podataka o standardnim *termoparovima* već smo spomenuli pri kraju odlomka 3.6.3. Ponovimo da žice moraju biti ižarene, čistoća platinske žice takva da omjer $W(100\ °C)$ ne bude manji od 1,3920, a sastav druge žice: 90% platine i 10% rodija (maseni udjeli). Dobri standardni termoparovi izrađuju se od žica jednolikog promjera između 0,35 i 0,65 mm.

Žarenje žica potrebno je zato da bi se u primjeni termopara osigurala stalnost termonapona. U tu svrhu treba platinsku žicu zagrijati do najmanje 1100 °C, a platinrodijevu do 1450 °C. Ako su žice žarene prije montaže na izolacijsko tijelo,

kompletan termopar mora se ponovo žariti pri najmanje 1100 °C, i to tako dugo dok se termonapon ne stabilizira. Kvaliteta žarenja može se provjeriti ovako: u dobra termopara termonapon se neće mijenjati ako se mijenja temperaturni gradijent duž žica.



Sl. D.35. Izgled Smithova mjernog mosta što ga u termometriji s platinskim otporničkim termometrima upotrebljava Međunarodni ured za mjere i utege. (Foto: BIPM)

3.6.8. Razlika između temperaturnih skala 1968 i 1948. Poboljšanu »Međunarodnu empiričku temperaturnu skalu 1948« prihvatila je Generalna konferencija za mjere i utege na svom 11. zasjedanju godine 1960. Ta nadopunjena i usavršena skala, nazvana »International Practical Temperature Scale of 1948 (amended edition of 1960)«, IPTS-60, nije se bitno razlikovala od prvotne skale 1948, jer su vrijednosti temperature referentnih tačaka ostale nepromijenjene. Prema tome možemo bez daljnjega izravno usporediti skale 1968 i 1948, sa željom da na bitne razlike upozorimo korisnike međunarodne skale i naznačimo korekcije koje treba uvesti pri preračunavanju mjernih rezultata dobivenih prema skali 1948 (tablica D-15).

Donja granica skale 1968 spušta se do 13,81 K, dok je granica skale 1948 bila 90,18 K (vrelište kisika). Promijenjene su gotovo sve vrijednosti definirajućih fiksnih tačaka, ostala je samo ona za trojnu tačku vode, koja je ionako postojana per definitionem, i za vrelište vode. Osim toga, sada ima 11 definirajućih tačaka (tablica D-11), dok je u skali 1948 bilo 8, a i od tih je ispalo vrelište sumpora, koje se sada nalazi među sekundarnim tačkama (tablica D-12). Interpolacijski instrumenti (odlomci 3.6.2,3) ostali su isti, ali se od standardnih platinskih termometara sada traži da udovoljavaju uvjetu $W(100\ °C) \geqq 1{,}3925$, a ne samo 1,3920 (1948).

Radikalna promjena dogodila se u bivšem interpolacijskom rasponu 90,188 K ...273,15 K. Odustalo se od Callendar-Van Dusenove jednadžbe, a umjesto nje uvedena je referentna funkcija $W_{\text{CCT-68}}(T_{68})$ (vidi odlomak 3.6.2 i tablicu D-13). Iznad 0 °C Callendarova je jednadžba preinačena tako da sada interpolira vrijednosti mnogo bliže termodinamičkim vrijednostima. Posljednja je bitna promjena pouzdanija vrijednost konstante zračenja: $C_2 = 0{,}014388$ Km (1968) umjesto 0,01438 Km (1948).

Posljedice svih tih promjena sumarno prikazuje tablica D-15. Iz nje razabiremo da, na primjer, pri $t_{68} = -160$ °C razlika iznosi $t_{68} - t_{48} = -0{,}005$ °C, pri $t_{68} = -40$ °C iznosi $t_{68} - t_{48} = -0{,}024$ °C, dok je pri $t_{68} = 590$ °C ta razlika $t_{68} - t_{48} = 0{,}137$ °C.

Približna razlika $(t_{68}-t_{48})$/°C Međunarodnih temperaturnih skala 1968 i 1948

t_{68}/°C	0	−10	−20	−30	−40	−50	−60	−70	−80	−90	−100
−100	0,022	0,013	0,003	−0,006	−0,013	−0,013	−0,005	0,007	0,012		
0	0,000	0,006	0,012	0,018	0,024	0,029	0,032	0,034	0,033	0,029	0,022

t_{68}/°C	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0	0,000	−0,004	−0,007	−0,009	−0,010	−0,010	−0,010	−0,008	−0,006	−0,003	0,000
100	0,000	0,004	0,007	0,012	0,016	0,020	0,025	0,029	0,034	0,038	0,043
200	0,043	0,047	0,051	0,054	0,058	0,061	0,064	0,067	0,069	0,071	0,073
300	0,073	0,074	0,075	0,076	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,076	0,076
400	0,076	0,075	0,075	0,075	0,074	0,074	0,074	0,075	0,076	0,077	0,079
500	0,079	0,082	0,085	0,089	0,094	0,100	0,108	0,116	0,126	0,137	0,150
600	0,150	0,165	0,182	0,200	0,23	0,25	0,28	0,31	0,34	0,36	0,39
700	0,39	0,42	0,45	0,47	0,50	0,53	0,56	0,58	0,61	0,64	0,67
800	0,67	0,70	0,72	0,75	0,78	0,81	0,84	0,87	0,89	0,92	0,95
900	0,95	0,98	1,01	1,04	1,07	1,10	1,12	1,15	1,18	1,21	1,24
1000	1,24	1,27	1,30	1,33	1,36	1,39	1,42	1,44			

t_{68}/°C	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1000		1,5	1,7	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
2000	3,2	3,5	3,7	4,0	4,2	4,5	4,8	5,0	5,3	5,6	5,9
3000	5,9	6,2	6,5	6,9	7,2	7,5	7,9	8,2	8,6	9,0	9,3

Tablica D-15

3.6.9. Iz povijesti Međunarodne temperaturne skale. Veliki i bogato opremljeni državni instituti utvrdili su najpreciznijim mjerenjima šest fiksnih temperaturnih tačaka (ledišta, vrelišta i krutišta prikladnih tvari), međusobno usporedili mjerne rezultate, a Generalna konferencija za mjere i utege objavila je godine 1927. prvi put te vrijednosti kao osnovu za unificirano mjerenje temperature u čitavu civiliziranom svijetu. Objavljene vrijednosti tih šest fiksnih tačaka utvrđene su s pouzdanošću koja se u to vrijeme mogla postići. Za interpolacijsko utvrđivanje temperature t između tih šest tačaka bili su godine 1927. u okviru Međunarodne temperaturne skale 1927 (franc. Échelle Internationale de Température) izdani propisi o vrsti i načinu izvođenja interpolacijskih mjerenja.

Istraživanja na tom području bila su permanentno nastavljana (vidi odlomak A.7.4.4), stjecani su novi mjerni rezultati i iskustva, što je brojčane podatke usavršilo u pogledu pouzdanosti, pa je stoga Generalna konferencija za mjere i utege godine 1948. objavila novu, poboljšanu Međunarodnu temperaturnu skalu 1948. Strogi naziv njene jedinice glasio je »°C(Int. 1948)«. Bitna razlika između skala 1948 i 1927 bila je u promjeni vrijednosti temperature skrućivanja srebra (960,8 °C umjesto 960,5 °C), u fiksiranju nove vrijednosti konstante zračenja C_2(0,01438 Km umjesto 0,01432 Km), primjeni *Planck*ova zakona zračenja umjesto *Wien*ova, proširenju skale na obje strane, a poboljšani su zahtjevi u pogledu čistoće termometrijskih pomagala itd.

»Međunarodna empirička temperaturna skala 1948«, koju je Generalna konferencija za mjere i utege poboljšala godine 1960, ne predstavlja reviziju skale od godine 1948, već samo njeno usavršenje. Tako je npr. umjesto ledišta vode za fiksnu

tačku prihvaćena trojna tačka vode, umjesto vrelišta sumpora preporučena je primjena krutišta cinka, a neznatne promjene unesene su u interpolaciju Međunarodne temperature.

Celzijeva termodinamička temperatura $\vartheta = T - T_0$ (odlomak 3.4.1) oslanja se direktno na Kelvinovu termodinamičku temperaturu T (odlomak 3.1.2), koja se može najpreciznije mjeriti metodama plinske termometrije (odsječak 3.3). U najbolje opremljenim metrološkim zavodima neprekidno se eksperimentalno istražuje razlika $\vartheta - t$, a rezultati periodički objavljuju. Tako nastaju tzv. *korekcije*, kojima se eksperimentatori služe pri vrlo preciznim mjerenjima temperature pomoću Međunarodne empiričke temperaturne skale. Ovdje ćemo navesti rezultate istraživanja razlike $\vartheta - t$ koje su utvrđene na zasjedanjima eksperata u Moskvi i Lenjingradu od 8. do 14. septembra 1966, a objavljeni su početkom godine 1967. Na tim zasjedanjima raspravile su svoje rezultate dvije radne grupe stručnjaka raznih nacionalnosti, koje su eksperimentalno istraživale poboljšanje Međunarodne temperaturne skale 1948 i njeno proširenje prema temperaturama koje su bile niže i više od tadašnjih granica skale. Grupe su djelovale u smislu zadataka koje je Generalna konferencija za mjere i utege godine 1964. postavila Savjetodavnom odboru za termometriju.

Usporedba Međunarodne temperature t s rezultatima plinske termometrije i rezultatima mjerenja pomoću *Planck*ova zračila pokazala je da t *znatno odstupa* od termodinamičke skale. Spomenute radne grupe Savjetodavnog odbora za termometriju skupile su, naime, najnovije rezultate utvrđivanja termodinamičke Celzijeve temperature $\vartheta = T - T_0$ ($T_0 = 273{,}15$ K) i usporedile ih s Međunarodnom empiričkom temperaturom t; nakon obrade mjernih rezultata one su preporučile upotrebu korekcija koje grafički prikazuju crteži na slici D.36.

Velika korektura Δt iznad krutišta zlata (treći dijagram na slici D.36) potječe otuda što je u *Planck*ovu formulu za zračenje uvrštena tadašnja »najbolja« vrijednost druge konstante zračenja i »najbolja« vrijednost temperature skrućivanja zlata. Te »najbolje« vrijednosti bile su

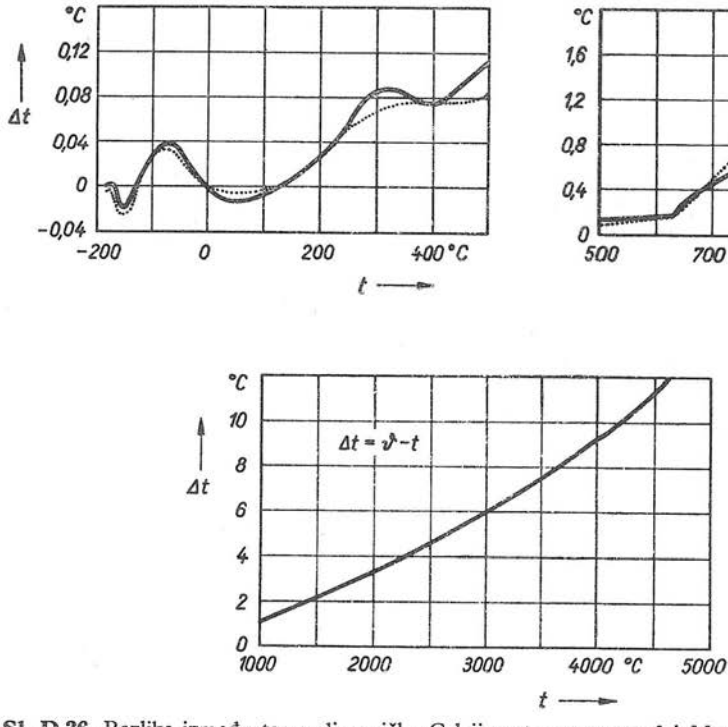
$$C_2 = 0{,}014\,388 \text{ Km}, \quad t_{Au} = 1064{,}43\,^\circ\text{C},$$

dok Međunarodna empirička temperaturna skala 1948 od godine 1960. propisuje $C_2 = 0{,}014\,38$ Km i $t_{Au} = 1063\,^\circ$C

Ako se upotrebljavaju neispravne vrijednosti konstante C_2 i temperature skrućivanja zlata, a to je bilo u slučaju primjene Međunarodne empiričke temperaturne skale 1948, onda vrijednosti za t iznad t_{Au} ponešto ovise o duljini vala. Da bi se osiguralo jedinstvo skale, mora se, dakle, usvojiti jedinstvena duljina vala. Budući da se u posljednje vrijeme gotovo svuda primjenjivala valna duljina $6{,}500 \cdot 10^{-7}$ m, radna grupa 1 Savjetodavnog odbora za termometriju preporučila je tu duljinu vala za Međunarodnu empiričku temperaturnu skalu.

Utvrđena odstupanja Međunarodne empiričke temperature t od Celzijeve termodinamičke temperature $\vartheta = T - T_0$ ($T_0 = 273{,}15\,^\circ$C), jedna su od korisnih posljedica zaključaka dvanaestog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege, održanog u oktobru 1964. Na tom je zasjedanju, naime, Generalna konferencija ponovno razmotrila osnove Međunarodne temperaturne skale 1948, ali nije donijela nikakve radikalne odluke, već je u rezoluciji broj 10 zatražila da se u svim vrhunskim metrološkim ustanovama što brže nastave istraživanja potrebna za reviziju Međunarodne temperaturne skale 1948. Pri tom je Konferencija u toj rezo-

luciji zatražila: da se ubrzano istražuje plinska termometrija u svim temperaturnim područjima, uključivši istraživanje koeficijenta širenja materijala od kojih su izrađeni termometarski baloni, naročito pri visokim temperaturama; da se definira



Sl. D.36. Razlike između termodinamičke Celzijeve temperature ϑ i Međunarodne empiričke temperature t što su ih septembra 1966. utvrdile radne grupe Savjetodavnog odbora za termometriju. Crtkane krivulje prikazuju razliku $\vartheta - t$ koju su iste grupe ustanovile godine 1963.

skala platinskog otporničkog termometra u području između 630 i 1063 °C, kako bi taj termometar nadomjestio termopar; da se dalje istražuje zračenje crnog tijela između 630 i 1063 °C; da se verificiraju tablice vrijednosti reduciranog električkog otpora ispod 0 °C, uključivši studij metoda baždarenja platinskih otporničkih termometara; da se iznova utvrdi vrelište kisika.

Za rješavanje ovih zadataka Generalnoj konferenciji je odgovoran Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM; vidi poglavlje A.7), a on u tu svrhu uz laboratorije Međunarodnog ureda za mjere i utege u Sèvresu ima za područje termometrije Savjetodavni odbor za termometriju (Comité Consultatif de Thermométrie), osnovan godine 1937. Taj odbor formirao je nekoliko specijalističkih radnih grupa koje su u okviru velikih nacionalnih metroloških zavoda i specijaliziranih instituta istraživale načine usavršenja Međunarodne empiričke temperaturne skale 1948. Na mnogo mjesta širom svijeta obavljena su opširna eksperimentalna istraživanja, čiji su rezultati u svrhu diskusije i razmjene informacija ubrzano objavljivani. Ovdje ćemo letimično referirati o nekim značajnijim rezultatima.

U engleskom metrološkom zavodu National Physical Laboratory *C. R. Barber* i *A. Horsford* uspoređivali su 1963—1965. termodinamičku temperaturnu skalu

s Međunarodnom empiričkom temperaturnom skalom u području od minus 183 °C do 0 °C. Pri tom su upotrebljavali helijev plinski termometar na stalni volumen i njime baždarili platinske otporničke termometre da bi što pouzdanije ustanovili vezu između otpora čiste platine i termodinamičke temperature T, odnosno Celzijeve $\vartheta = T - T_0$, gdje je $T_0 = 273{,}15$ K. Pogreška mjerenja veličine T (statistička sigurnost 95 %) kretala se od 0,0056 K do 0,005 K u rasponu vrijednosti T od 253 K do 93 K. Rezultate tih višegodišnjih mjerenja sadrži slika D.36.

R. J. Berry iz kanadskog metrološkog zavoda National Research Council istraživao je mogućnost primjene platinskih termometara za mjerenje temperature iznad 630 °C. Takva istraživanja od velike su praktične vrijednosti, jer platinski termometri su jedan od najvažnijih instrumenata za mjerenje temperature: vrlo su precizni, imaju izvanrednu reproducibilnost i vrlo široko područje primjene. Stoga Savjetodavni odbor za termometriju Međunarodnog komiteta za mjere i utege vodi istraživačke radove o načinu upotrebe platinskih termometara od $t = -260$ °C s jedne strane, te do $t = 1063$ °C s druge strane. Na ta istraživanja se i odnosi *Berry*jev rad od godine 1965. Njegova istraživanja pokazuju da komercijalni standardni platinski otpornički termometri ne mogu zadovoljiti za precizna mjerenja znatno iznad 630 °C. Razlog je električki proboj izolacije. Situacija se komplicira još i ovime: mikanitna izolacija oslobađa svoju vlagu pri grijanju iznad 550 °C, pa ta vlaga uzrokuje proboj izolacije pri nižim temperaturama, naročito u blizini 0 °C. Ta neprilika vjerojatno će se izbjeći upotrebom silikonskih i sličnih izolacija.

J. A. Hall iz engleskog metrološkog zavoda National Physical Laboratory istraživao je u području između 175 °C i 1063 °C razliku između termodinamičke skale ostvarene zračenjem crnog tijela i Međunarodne skale 1948. Za referentnu tačku odabrao je krutište cinka sa $t = 419{,}58$ °C, koliko je prema najnovijim mjerenjima (plinska termometrija) naveo *Moser* iz Physikalisch-Technische Bundesanstalt. Za *Planck*ovu konstantu upotrijebio je vrijednost $C_2 = 0{,}014388$ Km. *Hall*ova mjerenja su pokazala da je tako (radijacijski) utvrđena temperatura tališta zlata $t = 1063{,}7$ °C. *Heusinkveld* iz nizozemskog Physics Laboratory (Utrecht) na isti je način dobio $1064{,}4 \pm 0{,}4$ °C.

U skladu sa zaključcima 12. zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege, održanog godine 1964, o proširenju primjene platinskih otporničkih termometara na području ispod $t = 0$ °C, ostvarena je divna međunarodna suradnja unutar radne grupe 2 Savjetodavnog odbora za termometriju (o Savjetodavnim odborima vidi odlomak A.7.1.3). Stručnjaci iz sovjetskog Instituta za fizikalnotehnička i radio-tehnička mjerenja i stručnjaci iz engleskog National Physical Laboratory izradili su zajednički na temelju dugotrajnog eksperimentalnog istraživanja tablicu funkcije $T = f(W)$ platinskih otporničkih termometara u području termodinamičke temperature T od 12 K do 273,15 K. U SSSR su utvrđene 34 tačke (12 K...95 K), a u Engleskoj 32 (90 K...273,15 K).

Ova tablica, objavljena godine 1966, izvanredno je važna za preciznu termometriju, jer pomoću nje mnoštvo eksperimentatora širom svijeta može relativno jednostavno mjeriti temperature između — 261 °C i 0 °C metodom platinskih otporničkih termometara. Tablica je dobila ime »Privremena referentna tablica CCT 64, $T = f(W)$«, odnosno na engleskom »Provisional Reference Table CCT 64, $T = f(W)$«. Oznaka CCT skraćuje francuski naziv za Savjetodavni odbor za termometriju, a oznaka 64 godinu 1964, kada je definiran zahtjev za izradu takve tablice. Pridjev »privremena« upućuje na to da će još drugi metrološki instituti kontrolirati vrijednosti u tablici prije nego što je Generalna konferencija za mjere i utege preporuči.

Radna grupa 2 bavila se i proširenjem skale ispod granice skale 1948 (vrelište kisika; 90,18 K). Glavni zaključci u tom pogledu bili su: 1) skalu treba produžiti ispod trojne tačke vodika (13,8 K) pomoću platinskih otporničkih termometara; 2) ovo produženje uzrokovat će promjenu skale 1948 između 90,18 K i 273,15 K (ledište vode); 3) toj promjeni mora prethoditi privremena niskotemperaturna skala koja će obuhvatiti područje od 13,8 K do 273,15 K, a bazirat će se na »Privremenoj referentnoj tablici CCT 64, $T=f(W)$«.

Svi ti radovi, a i mnoštvo drugih koje nismo mogli spomenuti, omogućili su stvaranje *posve nove* »Međunarodne empiričke temperaturne skale 1968« (IPTS-68). Tu skalu, opisanu u prethodnih sedam odlomaka, prihvatio je i objavio godine 1968. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM) koji je za to imao ovlaštenje Generalne konferencije (1967). Time, međutim, rad na usavršavanju Međunarodne temperaturne skale nije završen. U čitavom se svijetu, naime, proučavaju i eksperimentalno istražuju nove metode mjerenja temperature u termodinamičkoj skali. Jedna od metoda je npr. utvrđivanje T pri niskim tlakovima pomoću mjerenja brzine zvuka u prema jednadžbi $u^2 = RT(c_p/c_v)_{p=0}$. Za sada se ova akustička metoda ne može u pogledu preciznosti usporediti s plinskom termometrijom. Nasuprot tome je primjena plinske termometrije otežana pri niskim temperaturama, pa se stoga T pokušava utvrditi mjerenjem paramagnetske susceptibilnosti $\chi = C/T$, gdje je C *Curie*ova konstanta. Radi se i na razvoju termometara za mjerenje vrlo niskih termodinamičkih temperatura na bazi ovisnosti kvadrupolne nuklearne rezonancije o temperaturi. Moguće je da će se u skoroj budućnosti na temelju jedne od ovih metoda u području ispod 0 °C fiksirati stanovite primarne tačke Međunarodne temperaturne skale.

3.7. Temperatura kao zavisna veličina i posljedice takvog shvaćanja

Poglavlje o temperaturi i jedinicama temperature završit ćemo s ovim odsječkom u kojem ćemo veličinu »temperatura« razmotriti sa stanovišta kinetičke predodžbe topline koju smo obradili u odsječku 2.2. Stoga je korisno da se prije prijelaza na daljnja izlaganja barem prelistaju izvođenja u odsječku 2.2. Daljnja rasuđivanja ovog odsječka možda nisu od neposredne koristi za današnju praktičnu termometriju, ali ona pružaju mogućnost za još dublje spoznavanje fenomena pod nazivom »temperatura«, a možda će već uskoro biti poticajem promjenama u toplinskoj metrologiji.

3.7.1. Temperatura kao zavisna veličina. U odsječku 2.1 započeli smo razmatranje nekih veličina nauke o toplini tako da smo trima osnovnim veličinama mehanike dodali *četvrtu osnovnu veličinu*, termodinamičku temperaturu T. Osnovnu veličinu uopće ne možemo definirati pomoću neke jednadžbe, dakle nekim već definiranim veličinama. U tome i jest razlika između izvedenih i osnovnih (nezavisnih, aksiomskih) veličina. S druge smo pak strane jednadžbom (2.2-2) pokazali da je prema kinetičko-statističkoj teoriji plinova temperatura T *proporcionalna* već ranije u mehanici definiranim veličinama m_1 i u, a između T i $m_1 u^2$ posreduje faktor 1/3 i univerzalna *Boltzmann*ova konstanta k.

Vidimo da se temperatura T na temelju kinetičko-statističke teorije pojavljuje kao *izvedena* veličina. Prema tome možemo jednadžbom (2.2-2) *definirati* temperaturu. Budući da u klasičnoj termodinamici temperatura kao osnovna veličina uopće nije definirana, sada je možemo definirati po svojoj volji.

Pretpostavimo u prvi mah da je nova veličina, »kinetička temperatura« θ, *drukčija* veličina nego što je klasična termodinamička temperatura T. Definirajmo kinetičku temperaturu jednadžbom

$$\theta = \frac{1}{3} m_1 u^2, \tag{3.7-1}$$

tj. jednim dijelom kinetičke energije što je u statističkom prosjeku posjeduje jedna molekula ili jedan atom plina. Riječ atom smjera na slučaj kad je riječ o jednoatomnim plinovima (plemeniti plinovi, pare žive itd.), a riječ molekula na dvoatomne i višeatomne plinove, čije se molekule sastoje od više atoma.

Ovakva definicija temperature nije nova. Vjerojatno je glasoviti američki profesor matematičke fizike *I. W. Gibbs* (1839—1903) prvi izrazio temperaturu na taj najprirodniji način. Još davno prije *Gibbsa*, godine 1703, francuski je akademik *Amontons* izložio svoju teoriju prema kojoj je toplina jedna vrsta gibanja. On je smatrao da je prirodna nul-tačka temperature postignuta onda kad se to gibanje posve smiri. *Amontons* je također prvi izradio plinski termometar na stalni volumen i prvi je pokušao proračunati koliko se stupnjeva ispod tališta leda nalazi nul-tačka temperature.

Budući da je u prosjeku kinetička energija jedne molekule jednaka $\frac{1}{2} m_1 u^2$, prema (3.7-1) kinetička je temperatura

$$\theta = \frac{2}{3} \frac{m_1 u^2}{2} \tag{3.7-2}$$

jednaka dvjema trećinama prosječne kinetičke energije jedne molekule kaotičnog gibanja čestica plina. Pomoću jednadžbi (2.2-2) i (3.7-2) možemo izračunati da je kinetička temperatura

$$\theta = kT, \tag{3.7-3}$$

tj. jednaka je umnošku *Boltzmann*ove konstante k i klasične termodinamičke temperature T.

Prema kinetičko-statističkoj teoriji topline veličina $\theta = kT$, izražena rječnikom teoretske fizike, prosječna je energija linearnog harmoničkog oscilatora kojim se temperatura krutog tijela očituje kao titranje atoma oko njegova položaja ravnoteže. Takav jedinični oscilator ima, kao i svaki drugi oscilator, potencijalnu i kinetičku energiju koje su vremenski pomaknute, a njihova suma u svakom trenutku iznosi $\theta = kT$.

U našem pojednostavnjenom modelu (vidi odlomak 2.2.1) možemo svako kruto tijelo predočiti trodimenzionalnim nizom atoma koji u sva tri smjera prostornih koordinata titraju kao harmonički oscilatori. Na svaki od ova tri smjera u prosjeku otpada energija $\theta = kT = m_1 u^2/3$, dakle onoliko koliko smo u odlomku 2.2.1 izračunali da kod plinova otpada od jedne iz kaotičnog mnoštva čestica na dvije nasuprotne stijene šuplje kocke.

Sada možemo s našom definicijom kinetičke temperature poći još korak dalje. Iako smo definicijom (3.7-1) stvarno uspostavili odnos (3.7-3), još uvijek možemo slobodno ustvrditi da kinetička temperatura θ nije neka drukčija veličina od klasične termodinamičke temperature T, već da su to identički jednake veličine, dakle

$$T \equiv \theta. \tag{3.7-4}$$

Drugim riječima da je $kT = T$, odakle slijedi prvi rezultat *definiranja* termodinamičke temperature

$$k = 1,$$

tj. *Boltzmann*ova konstanta k jednaka je broju 1.

Ovaj je rezultat posve normalan: budući da je prema klasičnom nazoru fenomenološke termodinamike termodinamička temperatura osnovna veličina, a prema kinetičko-statističkoj teoriji izvedena veličina, to smo temperaturu T (sada više ne trebamo razlikovati T i θ, jer smo sa (3.7-4) uspostavili identičku jednakost) stvarno *definirali* tako što smo stavili $k = 1$.

Opravdanje takvom postupku posve je jednostavno. Ako je T bila suvišna osnovna veličina, onda je ona imala i suvišnu osnovnu jedinicu kelvin = K, pa je k samo faktor pretvorbe između »osnovne« jedinice fenomenološke termodinamike i izvedene jedinice temperature kinetičko-mehanički definirane temperature.

3.7.2. Izvedena jedinica temperature stefan. Da bismo lakše pratili daljnja izlaganja, zadržimo još neko vrijeme oznaku θ za termodinamičku temperaturu, iako smo sa (3.7-4) nametnuli identičnost $\theta \equiv T$. Da izvedemo jedinicu temperature $[\theta]$, formulirajmo najprije opću jednadžbu stanja plinova pomoću veličine θ. Uvrstimo li $\theta = kT$ u jednadžbu (2.1-9), dobivamo jednadžbu stanja u novom obliku

$$pV = Z\theta, \tag{3.7-5}$$

gdje je Z broj molekula plina u obujmu V pod tlakom p. U odsječku 1.3 pokazali smo da se veličina »količina tvari« može prikazivati brojem molekula Z, te naznačili da pri tom vrijedi osnovna metrološka relacija $G = \{G\}\,[G]$, tj. »veličina = = brojčani iznos × jedinica«. Stoga ćemo pisati $Z = \{Z\}\,[Z]$; isto se tako i ostale veličine rastavljaju u $p = \{p\}\,[p]$, $V = \{V\}\,[V]$, $\theta = \{\theta\}\,[\theta]$, gdje simboli u vitičastim zagradama predočuju brojčane iznose fizikalnih veličina mjerenih jedinicom u uglastoj zagradi (vidi odsječke A.1.3, 5 i B.7.2). U skladu sa (3.7-5) možemo pisati:

$$\{p\}\,[p]\ \{V\}\,[V] = \{Z\}\,[Z]\ \{\theta\}\,[\theta]. \tag{3.7-6}$$

U odsječku A.5.1 utvrdili smo da sistem jedinica ima pravo na naziv »sistem« onda kad su jedinice u odnosu $1 \times 1 = 1$ (skladne ili koherentne jedinice). U tom su slučaju brojčane jednadžbe potpuno jednako građene kao i veličinske. Izraz (3.7-5) je veličinska jednadžba, dok se od (3.7-6) može izraditi brojčana jednadžba

$$\{p\}\{V\} = \{Z\}\{\theta\}$$

onda kad je jednadžba među jedinicama *skladna*:

$$[p]\,[V] = [Z]\,[\theta]. \tag{3.7-7}$$

Odavde dobivamo opću (još nedefiniranu) jedinicu temperature koja nas zanima

$$[\theta] = \frac{[p]\,[V]}{[Z]}.$$

Budući da je $p = F/A$, to je $[p] = [F]/[l]^2$, a kako je $[V] = [l]^3$, vidimo da je $[p]\,[V] = [F]\,[l] = [W]$, to jest opća jedinica *energije* W, pa je

$$[\theta] = \frac{[W]}{[Z]}. \tag{3.7-8}$$

Prema tome je izvedena jedinica temperature jedinica energije podijeljena s jedinicom količine tvari Z. Budući da je Z u stvari broj molekula, najprirodnije je da se za jedinicu veličine Z upotrijebi broj 1, tj. jedna molekula, dakle $[Z]=1$. No ova jedinica suviše je malena za uobičajene račune, pa ćemo stoga odabrati mnogo veću jedinicu, na primjer *Ulich*ov *dekadski mol*

$$[Z]_{\mathrm{M}} = 10^{24} = \mathrm{mold},$$

gdje smo indeksom M istakli da tu jedinicu predlažemo za Međunarodni sistem jedinica (usporedi s definicijom jedinice mol u odlomku 1.3.3).

Takav izbor sličan je onome u kojem, u Međunarodnom sistemu jedinica (SI), upotrebljavamo kilogram, dakle osnovnu jedinicu koja iz historijskih razloga nosi prefiks kilo. Budući da nemamo prefiksa za 10^{24}, upotrijebili smo staru riječ mol i dodali joj na kraju slovo d kao oznaku da je riječ o dekadskom molu. Kad bismo d stavili ispred riječi mol, dolazilo bi možda do zabuna, jer bi mnogi mogli pomišljati na »decimol«, dakle na $0{,}1 \times 6{,}023 \cdot 10^{23}$. Jedinicu mold treba jednostavno čitati »mold«.

U Međunarodnom sistemu jedinica energiju mjerimo jedinicom joule, dakle je $[W]_{\mathrm{M}} = \mathrm{J}$. Prema jednadžbi (3.7-8) jedinica temperature je dakle

$$[\theta]_{\mathrm{M}} = \frac{[W]_{\mathrm{M}}}{[Z]_{\mathrm{M}}} = \frac{\text{joule}}{\text{mold}} = \frac{\mathrm{J}}{\text{mold}} = \frac{\mathrm{J}}{10^{24}}.$$

Predlažemo da ova mjerna jedinica dobije naziv

$$\text{»stefan«} = \mathrm{S} = \frac{\mathrm{J}}{\text{mold}}$$

po glasovitom slovenskom fizičaru, pjesniku i piscu*.

Jedinicu temperature »stefan« ima neki plin onda kad njegovih 10^{24} molekula posjeduje kinetičku energiju od jednog joulea. Drugim riječima: kad u prosjeku svaka molekula ima kinetičku energiju u iznosu 10^{24}-tog dijela jedinice energije joule. Praktičnost primjene jedinice J/mold, a ne J/1 je u tome, što u skladu s veličinskom jednadžbom (3.7-5) prema uvriježenoj praksi lakše računamo ako količinu tvari Z opisujemo moldima nego stvarnim brojem molekula, na primjer $Z = 14$ mold, a ne $Z = 14 \cdot 10^{24}$.

Preostaje nam još da izračunamo odnos između izvedene jedinice termodinamičke temperature stefan i stare »osnovne« jedinice $\mathrm{K} = \text{kelvin}$. U odlomku 3.7.1 vidjeli smo da *definicija* temperature $\theta = T$ iziskuje izjednačenje *Boltzmann*ove konstante k s brojem 1, dakle zbog $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K slijedi

$$1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} = 1,$$

odakle je odmah

$$\text{kelvin} = \mathrm{K} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J}.$$

* *Jožef Stefan* (1835—1892) bio je koruški Slovenac, a djelovao je kao sveučilišni profesor fizike u Beču. Ime mu je ostalo zabilježeno u tzv. *Stefan-Boltzmann*ovu zakonu. Njegov život i djelo prikazani su u nizu radova *Šubic*a, *Adlešič*a i *Čermelj*a, koji su citirani u iscrpnom članku o djelovanju *Stefan*ovu na polju elektrotehnike: *J. Boncelj*, Jožef Stefan i njegovo djelovanje na području elektrotehnike, Elektrotehnički vjesnik *26* (1958), br. 1—2, str. 41; članak je pisan u nastavcima. U slavu i na uspomenu na *Stefan*a nuklearni institut u Ljubljani nosi naziv »Jožef Stefan«.

Ovaj se izraz ne mijenja ako desnu stranu pomnožimo brojem 1 koji se zbog mold = $= 10^{24}$ može pisati kao $1 = 10^{24}/\text{mold}$, dakle

$$K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{J} \cdot 10^{24}/\text{mold}.$$

Prema tome je

$$K = {}^{\circ}C = 13{,}8 \text{ stefan} = 13{,}8\ \text{S},$$

jer smo izvedenu jedinicu temperature definirali sa stefan (S) = J/mold. Obrnuto vrijedi

$$\text{stefan} = \text{S} = \text{K}/13{,}8 = 0{,}0725\ \text{K}.$$

Naravno da možemo odmah uvesti i 1000 puta veću jedinicu kilostefan (kS), dakle

$$\text{kilostefan} = \text{kS} = 72{,}5\ \text{K}; \quad \text{K} = 0{,}0138 \text{ kilostefan}.$$

Ovdje moramo spomenuti da su pojedini autori već ranije predložili definiranje temperature kao izvedene veličine. Već smo spomenuli *Gibbs*a. U novije doba *Bodea* je predložio definiciju temperature sa $\theta_B = m_1 u^2/2$, koja je 1,5 puta manja od naše, dakle $\theta = 1{,}5\ \theta_B$. Ovaj je prijedlog usavršio *F. Avčin*. Na temelju dekadskog mola i klasičnog mola $= 6{,}02 \cdot 10^{23}$, oni su izveli jedinice temperature θ_B clausius = J/mold = 0,048 K i carnot = J/mol = 0,08 K. Svi su ovi prijedlozi još u stadiju proučavanja.

3.7.3. Specifične topline i njihove jedinice. Definiranje temperature $T = \theta$ kao zavisne (izvedene) veličine i s time vezano rađanje izvedene jedinice temperature stefan = J/mold znatno pojednostavnjuje čitavu formalističku zgradu jednadžbi fenomenološke termodinamike. Budući da je prema ranijem izlaganju *Boltzmann*ova konstanta izjednačena s brojem 1, dakle

$$k = R_0 = 1,$$

klasične veličinske jednadžbe termodinamike postaju bitno preglednije i fizikalno razumljivije.

Poučno je pri tom razmotriti specifične topline, koje možemo izvesti kao parcijalne derivacije unutarnje energije U po temperaturi T pri konstantnom tlaku ili konstantnom volumenu (vidi odlomak 2.3.3). *Einstein*ova kvantna teorija toplinskog kapaciteta *krutog tijela* daje za molnu specifičnu toplinu krutog tijela pri konstantnom volumenu izraz ($c_\mu = C$, usporedi s odlomkom 1.4.3)

$$C_v = \frac{1}{Z}\frac{\partial U}{\partial T} = 3 R_0 H^2 e^H (e^H - 1)^2, \tag{3.7-9}$$

gdje je $H = hf/T$ (ovdje smo već uzeli u obzir da je $k = 1$ zbog $T = \theta$; klasično je $H = hf/kT$). Pri dovoljno visokim temperaturama je $hf \ll T$, pa gornji izraz za C_v uz $R_0 = k = 1$ prelazi u približni oblik

$$C_v = 3,$$

tj. molna (specifična) toplina jednaka je čistom broju 3! Sniženjem temperature C_v pada; kod $T \to 0$ i C_v teži k nuli.

Velikim slovom označujemo tzv. molne veličine koje se upotrebljavaju u jednadžbama oblika $Q = CZ\Delta T$ (vidi odlomak 1.4.3), dok malo slovo označuje (masenu) specifičnu veličinu u jednadžbi oblika $Q = cm\Delta T$ (vidi i tablicu D-16).

Jedinice molne specifične topline odredit ćemo iz veličinske jednadžbe $Q = CZ\Delta T$, odakle je $C = W:(Z\Delta T)$, pa koherentna opća jedinica glasi

$$[C] = \frac{[W]}{[Z][W]/[Z]} = 1,$$

dakle čist broj. Jedinicu *masene specifične topline* c izračunat ćemo iz jednadžbe $Q = cm\Delta T$, odakle slijedi opća jedinica

$$[c] = \frac{[W]}{[m][W]/[Z]} = \frac{[Z]}{[m]},$$

jer je opća jedinica temperature $[T] = [W]/[Z]$. Budući da je u Međunarodnom sistemu jedinica mase $[m]_M = \text{kg}$, a za jedinicu količine tvari odabiremo $[Z]_M = \text{mold}$, to je prema gornjoj jednadžbi

$$[c]_M = \text{mold/kg},$$

dakle 10^{24} molekula po jedinici mase kilogram.

Za *jednoatomne plinove* kvantna teorija daje $C_v = R_0 \cdot 3/2$. Budući da je $R_0 = 1$, to je

$$C_v = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

C_p i C_v međusobno su vezane relacijom $C_p = R_0 + C_v$, pa zbog $R_0 = 1$ ona prelazi u oblik

$$C_p = 1 + C_v, \quad \text{odnosno} \quad C_p - C_v = 1, \tag{3.7-10}$$

što za jednoatomne idealne plinove daje

$$C_p = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Dvoatomnim plinovima određuje unutarnju energiju izraz

$$U = Z[1{,}5\, R_0 T + R_0 T + hf(e^H - 1)^{-1}],$$

što uz $R_0 = 1$ i $C_v = (\partial U/\partial T)/Z$ uz $hf/T \ll 1$ daje molne specifične topline

$$C_v = \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad C_p = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Analogno bismo mogli izvesti i za troatomne plinove, što se vidi iz tablice D-16.

Tablica **D-16**

Molne specifične topline triju vrsta plinova

Vrsta molekule	Primjer plina	Molna specifična toplina C_p	Molna specifična toplina C_v	$\kappa = C_p/C_v$
Jednoatomna	Plemeniti plinovi	2,50	1,50	1,667
Dvoatomna	H_2, O_2, N_2, CO, HCl	3,50	2,50	1,400
Troatomna	CO_2, SO_2, H_2S	4,00	3,00	1,333

Stvarni plinovi dakako nisu idealni. Njihove vrijednosti manje ili više odstupaju od idealnih vrijednosti koje su navedene u tablici D-16. No svrha tablice nije da ovdje dade upotrebljive podatke za neki toplinski proračun, već da pokaže kako se kreću vrijednosti za C_p i C_v kad se temperatura T definira kao što smo učinili, te da *Boltzmann*ovu konstantu prikaže kao preračunski faktor jedinicâ, jednako kao što je to npr. i mehanički ekvivalent topline (vidi odlomak 4.2.2).

Veza između masenih specifičnih toplina c_p i c_v ostaje ista kao i u klasičnoj termodinamici, iako je termodinamička temperatura T definirana kao izvedena veličina. Znamo da prema definiciji vrijedi (vidi tablicu D-7 i odlomak 2.3.2)

$$\text{entalpija } I = \text{unutarnja energija } U + \text{rad } pV.$$

Budući da je

$$U = mc_v T + U_0;\quad I = mc_p = I_0,$$

to je

$$pV = I - U = mT(c_p - c_v),$$

gdje smo svojevoljno odabrali $U_0 = 0$ i $I_0 = 0$ kod $T = 0$. S druge je strane $pV = mRT$, gdje je R individualna plinska konstanta, a m masa plina. Usporedba daje

$$c_p - c_v = R. \tag{3.7-11}$$

Prema tome: za svaki idealni plin razlika $(c_p - c_v)$ jednaka je plinskoj konstanti R razmatranog plina.

Budući da je općenito (vidi odlomak 1.4.3) $c = CZ/m$, gdje je Z količina tvari, a veliko slovo C označuje molnu toplinu, izraz (3.7-11) prelazi u oblik

$$(C_p - C_v)\, Z = Rm.$$

Masa plina jednaka je umnošku broja molekula Z i mase m_1 svake molekule, dakle $m = Zm_1$. Uvrstimo li to u gornju jednadžbu, kratimo sa Z i uzmemo li u obzir da je $m_1 R = k = 1$, dobivamo izraz

$$C_p - C_v = 1,$$

koji smo već primijenili na temelju jednadžbe (3.7-10).

3.7.4. Entropija. Ovu veličinu opširno smo razmatrali u odsječku 2.2. Jednadžba (2.2-6) opisala je promjenu entropije koja je za tehničku termodinamiku od velike praktične važnosti. Uz $k = 1$, jednadžba (2.2-6) prelazi u oblik

$$\Delta S = \ln W = \ln \frac{w_2}{w_1}, \tag{3.7-12}$$

što znači da je promjena entropije *jednaka* prirodnom logaritmu omjera dviju vjerojatnosti stanja.

Jednadžba (3.7-12) pokazuje da je entropija S »brojčana veličina«. Primjenom jednadžbi (2.2-4) i (3.7-12) dobivamo $\Delta S = Z \ln (V_2/V_1)$, odakle vidimo da je možemo u našem primjeru odrediti umnoškom broja molekula (količina tvari) Z i logaritma omjera V_2/V_1 (u drugim slučajevima još i T_2/T_1 ili p_2/p_1). Budući da smo za Z odabrali jedinicu mold $= 10^{24}$, to će i jedinica entropije S biti

$$[S]_M = \text{mold} = \text{joule/stefan},$$

jer smo izvedenu jedinicu temperature stefan definirali kao stefan = joule/mold.

Jedinicu (masene) specifične entropije s odredit ćemo pomoću jednadžbe $s = S/m$, gdje m označuje masu tvari koja ima entropiju S. Iz te jednadžbe slijedi opća jedinica specifične entropije $[s] = [S]/[m]$, što u našem primjeru uz $[S]_M =$ $=$ mold, $[m]_M =$ kg daje

$$[s]_M = \frac{\text{mold}}{\text{kg}}.$$

Ovaj izbor jedinica u skladu je s osnovnim jednadžbama $dQ = T\,dS = Tm\,ds$. Specifičnu entropiju možemo upotrijebiti i kao molnu veličinu s_m u izrazu $dQ =$ $= TZ\,ds_m$. U tom je slučaju $s_m = S/Z$, što znači da je jedinica $[s_m]_M =$ mold/ /mold = 1. Pri tom mislimo na molne veličine u smislu odsječka 1.4.

3.7.5. Posljedice uvođenja $\theta = T$ u fenomenološku termodinamiku. Do sada smo vidjeli nekoliko posljedica definiranja termodinamičke temperature $T \equiv \theta$ kao izvedene veličine. *Boltzmann*ova konstanta k i univerzalna plinska konstanta R_0 idealnih plinova izjednačile su se i postale jednake broju 1. To znači da iščezavaju iz svih onih jednadžbi termodinamike koje smo do sada smatrali veličinskima. Dalje, iščezavaju jedinice temperature kelvin, celzij, stupanj Fahrenheita itd. Uvedena je jedinica količine tvari »dekadski mol« = mold = 10^{24}, a to povlači za sobom izvedenu jedinicu temperature $[T]_M =$ stefan = J/mold. Nadalje molne specifične topline postaju čiste brojčane značajke, a entropija se izjednačuje s vjerojatnošću.

Svakako je zanimljivo pogledati kako izgleda termodinamika i vrijednosti njenih veličina s temperaturom kao definiranom i izvedenom veličinom uz ovdje predložene jedinice. Razmotrit ćemo samo nekoliko primjera koji izgledaju najinteresantniji, iako nisu najbitniji.

Najprije ćemo razmotriti vrijednosti karakterističnih temperaturnih tačaka. Pretpostavit ćemo da će se dalje upotrebljavati Celzijeva termodinamička temperatura $\vartheta = T - T_0$, gdje je $T_0 = 273{,}15$ K termodinamička temperatura ledišta vode (vidi odlomak 3.4.1). Pri tom ćemo odmah utvrditi temperaturu T_0 u jedinici stefan (S). Ustanovili smo da je

$$\text{K} = {}^\circ\text{C} = 13{,}8\,\text{S},$$

gdje je S = stefan = J/mold. Prema tome je temperatura ledišta vode

$$T_0 = 273{,}15\,\text{K} = 273{,}15 \cdot 13{,}8\,\text{S} = 3769{,}61\,\text{S};\quad \vartheta = 0\,\text{S}.$$

Vrelište vode T_v ima za $\Delta T = 100$ K višu temperaturu od T_0, dakle je $\Delta T =$ $= 100$ K. Tome odgovara $\Delta T = 100 \cdot 13{,}8$ S = 1380 S, pa je prema tome $T_v =$ $= 5149{,}61$ S. Nekoliko drugih temperaturnih tačaka dobivaju ove vrijednosti:

vrelište kisika $T = 90{,}188\,\text{K} = 1244{,}48\,\text{S}$

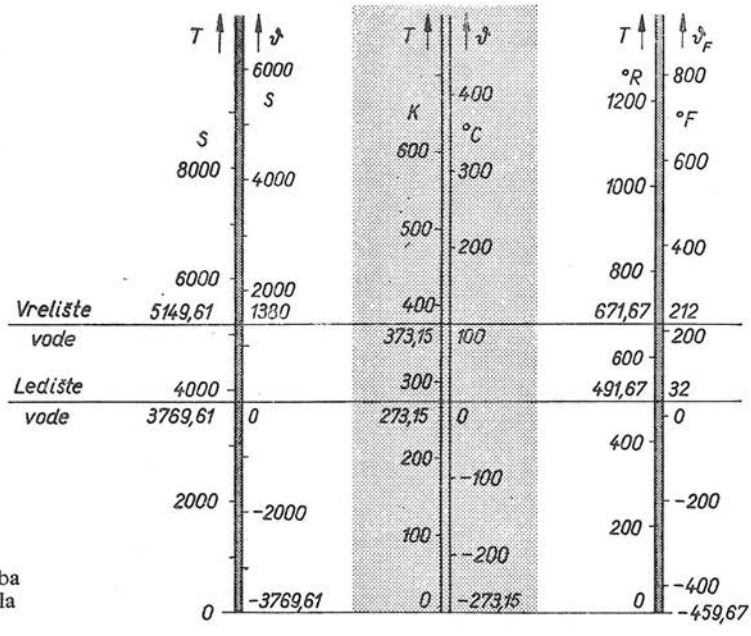
talište antimona $\vartheta = 630{,}74\,{}^\circ\text{C} = 8701\,\text{S}$.

Ilustraciju raspona Celzijeve temperature $\vartheta = T - T_0$ (gdje je $T_0 = 273{,}15\,\text{K} =$ $= 3769{,}61$ S) u jedinicama °C i S vidimo u tablici D-17, a usporedbu termodinamičke (Stefanove i Kelvinove), Celzijeve, Rankineove i Fahrenheitove termodinamičke temperature na slici D.37. Vidimo da je za visoke temperature prikladna 1000 puta veća nova jedinica kilostefan (kS) = 1000 S.

Tablica **D-17**

Celzijeva temperatura u jedinici °C i predloženoj jedinici stefan

ϑ/°C	− 100	− 10	0	10	100	1000
ϑ/S	−1380	−138	0	138	1380	13800
ϑ/kS	−1,38	−0,138	0	0,138	1,38	13,8



Sl. D.37. Usporedba temperaturnih skala

Liječnički termometri, koji danas rade u području $\vartheta = 35\,°C$ do $42\,°C$, imali bi u stefanima približno ove vrijednosti:

ϑ/°C	35	37	39	41
ϑ/S	482	510	538	566

Uvođenjem izvedene temperature i njezine jedinice stefan mijenjaju se i sve *prirodne konstante* u kojima dolazi dosadašnja jedinica temperature. Tako, na primjer, *Stefan-Boltzmann*ova konstanta u zakonu zračenja (vidi odlomak G.1.3.5) više ne glasi

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15}\frac{k^4}{v_0^2 h^3} = 5{,}66 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}, \quad \text{već} \quad \sigma = \frac{2\pi^5}{15 v_0^2 h^3} = 1{,}56 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{S^4 m^2}},$$

jer je $k = 1$, a $\mathrm{K} = 13{,}8$ S. Isto tako i druga *Planck*ova konstanta zračenja ne iznosi više

$$c_2 = h v_0 / k = 0{,}01438\ \mathrm{K\,m}, \quad \text{već} \quad c_2 = h v_0 = 0{,}198\ \mathrm{S\,m}.$$

Pogledajmo još koliko bi iznosile vrijednosti pojedinih značajki termodinamike prema svim dosadašnjim izlaganjima. U tu svrhu moramo najprije utvrditi preračunske koeficijente između do sada upotrebljavanih jedinica i ovdje predloženih. Izračunajmo odnos između J/(kgK) i jedinice kmold/kg. To vrijedi za veličine R, c_p, c_v, s:

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot 13{,}8\,\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot 13{,}8\,\mathrm{J/mold}} = 0{,}0725\,\frac{\mathrm{mold}}{\mathrm{kg}},$$

gdje je K = °C (vidi odlomak 3.4.1). Prema tome je

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} = 7{,}25\cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{kmold}}{\mathrm{kg}}.$$

Na primjer, za vodik je $c_p = 14245$ J/(kgK) = $1{,}4245\cdot 10^4\cdot 7{,}25\cdot 10^{-5}$ kmold/kg = = 1,0325 kmold/kg = 1032,5 mold/kg, a plinska je konstanta $R = 4122$ J/(kgK) = = 4122·0,0725 mold/kg = 299 mold/kg = 0,299 kmold/kg. Naravno da u svim tim vrijednostima možemo umjesto mold pisati J/S, jer je mold = joule/stefan = J/S. Možemo, dakle, reći $R = 299$ J/(kg S) = 0,299 kJ/(kg S). Pregled vrijednosti specifične topline u raznim jedinicama sadrži tablica D-18.

Za veličinu molna specifična toplina C treba izračunati odnos između jedinice J/(molK) i nove jedinice 1 (čist broj). Taj odnos je:

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}} = \frac{\xi\,\mathrm{J}}{\mathrm{mold}\cdot 13{,}8\,\mathrm{J/mold}} = \frac{\xi}{13{,}8} = 0{,}1204.$$

Tablica **D-18**

Specifične topline nekih plinova pri temperaturi $\vartheta = 20$ °C i tlaku 1 kp/cm²

Tvar	Znak	M	Specifična toplina			Molna specifična toplina			$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$
			c_p	c_p	c_p	C_p	C_p	C_p	
			kcal/kg K	J/kg K	kmold/kg	kcal/kmol K	kJ/kmol K	1	
Helij	He	4,003	1,260	5275	0,3821	5,04	21,12	2,54	1,66
Argon	Ar	39,94	0,127	532	0,0385	5,07	21,24	2,56	1,66
Vodik	H_2	2,016	3,408	14269	1,0326	6,86	28,77	3,46	1,41
Kisik	O_2	32,00	0,218	913	0,0662	6,97	29,21	3,51	1,40
Zrak	—	28,95	0,241	1007	0,0730	6,97	29,21	3,51	1,40
Amonijak	NH_3	17,03	0,530	2219	0,1607	9,03	37,79	4,55	1,31
Metan	CH_4	16,03	0,531	2223	0,1613	8,52	35,64	4,28	1,31
Etan	C_2H_6	30,06	0,413	1729	0,1252	12,43	51,98	6,26	1,20

Ovdje je $\xi = \text{mold/mol} = 10^{24} : 6{,}023 \cdot 10^{23} = 1{,}6597$. Tu vrijednost možemo zaokružiti na $\xi = 1{,}66$, jer time činimo pogrešku od samo 0,18 promila. Za vodik je, na primjer, vrijednost molne specifične topline $C_p = 28{,}77\ \text{J/(molK)} = 28{,}77 \cdot 0{,}1204 = 3{,}46$. Za amonijak je $C_p = 4{,}55$ itd.

Preostaje nam još samo da nađemo preračunski koeficijent između sadašnje jedinice J/K za entropiju S (prije smo u prvoj grupi pretvorbe izračunali koeficijent za specifičnu entropiju s) i nove jedinice $[S]_M = \text{mold} = \text{J/S}$:

$$\frac{\text{J}}{\text{K}} = \frac{\text{J}}{13{,}8\,\text{J/mold}} = 0{,}0725\ \text{mold} = 0{,}0725\ \frac{\text{J}}{\text{S}}.$$

Ostale specifične veličine ne doživljavaju u svojim vrijednostima nikakve promjene (u, i), ali zato valja vrijednosti koeficijenata rastezanja α i γ pretvarati na ovaj način:

$$\frac{1}{°\text{C}} = \frac{1}{\text{K}} = \frac{1}{13{,}8\,\text{S}} = \frac{0{,}0725}{\text{S}} = \frac{0{,}0725}{\text{J/mold}},$$

$$\frac{1}{°\text{C}} = \frac{1}{\text{K}} = 0{,}0725\ \frac{1}{\text{S}}.$$

Ako je, na primjer, za aluminij $\alpha = 2{,}38 \cdot 10^{-5}/°\text{C}$, u novoj će jedinici iznositi $\alpha = 2{,}38 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}0725/\text{stefan} = 1{,}73 \cdot 10^{-6}/\text{S}$.

4. Međunarodni sistem jedinica u nauci o toplini

4.1. Karakteristike Međunarodnog sistema jedinica (SI)

4.1.1. Svrha uvođenja i prednosti SI. U poglavlju B.7 opisali smo temelje na kojima se bazira Međunarodni sistem jedinica (Système International d'Unités; kratica na svim jezicima: SI). Opis smo posvetili uglavnom onom dijelu SI koji se pretežno upotrebljava u mehanici. Budući da će neke čitatelje zanimati samo ovo poglavlje, tj. primjena Međunarodnog sistema jedinica u nauci o toplini, ovdje ćemo donekle ponoviti neka izlaganja iz poglavlja B.7 i nadopuniti ih, dakako u skladu sa zahtjevima koje na SI postavljaju specifičnosti nauke o toplini.

Svrha je primjene Međunarodnog sistema jedinica (SI) *korjenito olakšanje svih radova* povezanih s kvantitativnim ocjenama svakovrsnih pojava i procesa koji se pojavljuju u tehnici, znanosti i privredi. U tom smislu SI oslobađa čitavo čovječanstvo od bezbrojnih teškoća što nastaju pri upotrebi nepreglednog mnoštva kaotičnih jedinica, od pogrešaka i nepouzdanog računanja, od gubljenja zornosti fizikalnih zakonitosti izraženih jednadžbama, od pamćenja mnoštva imena jedinica, od kompliciranih odnosa među njima; ukratko rečeno: *SI oslobađa ljude od neracionalnog trošenja umnog rada i vremena.* Zbog toga je Generalna konferencija za mjere i utege na svom jedanaestom zasjedanju godine 1960. prihvatila SI (vidi i odlomak B.7.1.4). Na temelju odluka tog zasjedanja zakonodavstva većine država propisala su posebnim zakonima (vidi odlomak B.7.1.1) obaveznu primjenu SI. Donošenje tih zakona uvjetovale su ove *glavne prednosti* SI:

Univerzalnost Međunarodnog sistema jedinica koji obuhvaća *sve* grane tehnike i znanosti, svu ljudsku djelatnost;

Jednostavnost i logičnost izgradnje SI na temelju koherentnosti ($1 \times 1 = 1$, $1/1 = 1$) među jedinicama, stvaranje svih jedinica na istom principu, što omogućuje nadopunjavanje sistema novim koherentnim jedinicama u skladu s daljnjim razvojem znanosti i tehnike;

Eliminacija mnoštva različitih jedinica za mjerenje iste veličine ili istorodnih veličina, te ostvarenje uvjeta za lako uspoređivanje mjernih rezultata dobivenih nezavisno jednog od drugoga u različitim krajevima;

Pojednostavnjenje proračuna, jer primjena SI dovodi do iščezavanja tzv. parazitnih koeficijenata (odnosa među jedinicama) iz jednadžbi u koje su ušli zbog izbora nesistematičnog skupa jedinica. Na taj način primjena SI u stvari automatski dovodi do primjene veličinskih jednadžbi;

Zornost u nastavi i njeno pojednostavnjenje, jer primjena veličinskih jednadžbi daje najzorniji prikaz prirodnih pojava i tehničkih procesa. U današnjoj eri, kada gotovo čitavo čovječanstvo napregnuto uči i istražuje, to je neprocjenjivi dobitak;

Razgraničenje pojmova mase, težine i sile; to imperativno zahtijevaju i različito imenovane jedinice: za masu — kilogram (kg), za silu newton (N). U prošlosti je, naime, dvoznačnost naziva »kilogram« dovodila do znatnih neprilika;

Lakša primjenljivost računske tehnike u privredi, jer će analogna i digitalna računala moći rezultate računanja direktno izražavati u jedinicama SI;

Postojanje većine jedinica SI u tehnici i znanosti i prije proglašenja SI obaveznim. Metar, sekunda, kilogram, gotovo sve jedinice elektromagnetizma (u stvarnoj upotrebi) i fotometrije te niz drugih jedinica SI stvarno se već desetljećima primjenjuju;

Višekratnici jedinica, tj. dekadski i decimalni višekratnici jedinica u tablici A-1 (vidi odsječak A.2.3) u većini se slučajeva lako primjenjuju na jedinice SI.

4.1.2. Definicije jedinica SI u nauci o toplini nadovezuju se na one koje smo naveli u glavama A i B. Stoga ovdje nećemo navoditi definicije jedinice duljine »metar« (te m^2 i m^3), ni jedinice vremena »sekunda«, ni jedinice mase »kilogram« kao ni ostalih jedinica geometrije, kinematike i dinamike koje iz njih proizlaze. Definicije tih jedinica skupljene su u odsječku B.7.2.

U dinamici je SI trebao za osnovne (polazne) jedinice metar, sekundu i kilogram. Te tri jedinice bile su dovoljne za izgradnju svih ostalih, tzv. izvedenih jedinica. Znamo, međutim, da u praktičnoj termodinamici nisu dovoljne tri osnovne jedinice, već su potrebne *četiri*, od kojih jedna mora biti jedinica *temperature*, jer temperatura je ona veličina koja daje specifično obilježje nauci o toplini.

Generalna konferencija za mjere i utege odredila je na svom desetom zasjedanju godine 1954. »kelvin« (K) za jedinicu termodinamičke temperature Međunarodnog sistema jedinica i tu jedinicu definirala na trinaestom zasjedanju godine 1967. ovako:

Kelvin je 273,16-i dio termodinamičke temperature trojne tačke vode.

O jedinici kelvin = K podrobno smo raspravljali u odlomku 3.2.4, a o drugim jedinicama temperature (°C, °F, °R itd.) u ostalim odlomcima poglavlja 3.

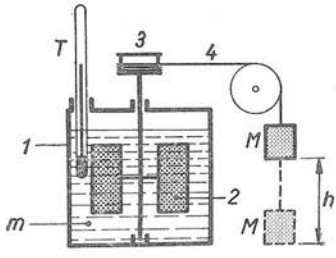
Sa »četvorkom« m, s, kg, K mogu se izvesti *sve* ostale jedinice SI u nauci o toplini. U narednom odlomku pokazat ćemo na nekoliko primjera kako se to radi.

4.1.3. Građenje složenih jedinica SI. Zamislimo da pomoću uređaja na slici D.38 moramo izmjeriti specifičnu toplinu c vode. Slika prikazuje toplinski izoliranu posudu *1* u kojoj se nalazi miješalica *2*. Na osovini miješalice nataknuta je remenica *3*, oko koje je omotano uže *4*. Na kraju užeta ovješen je uteg mase M. Pod djelovanjem zemljine teže uteg se spušta, uže se odmata s remenice i pri tom vrti miješalicu *2*. Na termometru T opaža se da se pri tom temperatura vode u posudi povisila za ΔT.

Pri izvođenju takvog jednog pokusa masa vode u posudi iznosila je $m = 0{,}5$ kg, masa utega $M = 200$ kg, a temperatura se povisila za $\Delta T = 1{,}2$ K kad se uteg spustio za $h = 2{,}56$ metara. Izračunajmo iz tih podataka kolika je specifična toplina vode (zanemarujemo toplinski kapacitet miješalice i nesavršenost izolacije).

Uređaj na slici D.38 prikazuje nam, dakle, pretvaranje potencijalne energije W utega u toplinsku energiju vode Q. Pokazivanje termometra svjedoči da se događa isto kao da se posuda s vodom nalazi povrh plamenika, tj. kao da se dovodi toplina. Pojavu možemo sebi objasniti time da se oslobođena energija utega W,

zbog trenja miješalice o vodu kao i zbog unutrašnjeg trenja čestica miješane vode, pretvorila u toplinu koja je povećala unutrašnju energiju vode.



Sl. D.38. Uz mjerenje specifične topline vode

Uteg mase M ima težinu $G = Mg$, gdje je $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ ubrzanje zemljine teže. Potencijalna energija utega smanjila se za $\Delta W = Gh = Mgh$, kad se uteg spustio za h (sl. D.38). Ako pretpostavimo da nema gubitaka energije zbog trenja u ležajevima i užetu, a ni drugih gubitaka, možemo reći da je ΔW uzrokovala povišenje toplinske energije vode $\Delta Q = mc\Delta T$, gdje je m masa vode u posudi I, ΔT povišenje temperature, a c za sada još nepoznata specifična toplina vode. Prema zakonu o održanju energije je $\Delta W = \Delta Q$, dakle $Mgh = mc\Delta T$. Odavde dobivamo izraz pomoću kojeg ćemo izračunati specifičnu toplinu vode:

$$c = \frac{M}{m}\,\frac{hg}{\Delta T}. \tag{4.1-1}$$

Uvrštenje vrijednosti pojedinih veličina za naš pokus daje

$$c = \frac{100\,\mathrm{kg}}{0{,}5\,\mathrm{kg}}\,\frac{2{,}56\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{1{,}2\,\mathrm{K}} = 4180\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2\,K}}.$$

Jedinica specifične topline u Međunarodnom sistemu jedinica $[c]_M = \mathrm{m^2/s^2\,K}$, koju smo ovdje dobili, čini nam se »čudnom« ili u najmanju ruku nepoznatom, dakle sumnjivom. Iz tablice D-7 ili izlaganja u odlomku 2.3.3, naime, znamo da je jedinica SI za specifičnu toplinu $[c]_M = \mathrm{J/(kg\,K)}$. Ako je naš račun pomoću jednadžbe (4.1-1) ispravan, morale bi jedinice $\mathrm{m^2/(s^2\,K)}$ i $\mathrm{J/(kg\,K)}$ biti međusobno jednake, dakle (zbog kraćenja sa K)

$$\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}. \tag{4.1-2}$$

Provjerimo da li je to istina!

Iz izlaganja u odlomku B.5.2.1 znamo da je J = joule jedinica energije i rada SI definirana kao umnožak jedinice sile SI newton = N i jedinice duljine SI metar = m, dakle J = Nm. Dalje znamo da je newton ona sila koja jedinici mase SI kilogram = kg daje ubrzanje $\mathrm{m/s^2}$, dakle $\mathrm{J = Nm = (kg\,m/s^2)\cdot m = kg\,m^2/s^2}$. Uvrštenjem odnosa $\mathrm{J = kg\,m^2/s^2}$ u jednadžbu (4.1-2) slijedi

$$\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2/s^2}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}.$$

To znači da je (4.1-2) ispravan odnos, a isto je tako ispravan i naš račun uz pomoć jednadžbe (4.1-1)!

U skladu s time možemo i jedinicu SI specifične entalpije $i = I/m$ upotrebljavati u dvojakom obliku: $[i]_M = \mathrm{J/kg}$ ili $[i]_M = \mathrm{m^2/s^2}$. No drugi oblik gotovo nitko ne upotrebljava, iako nije nimalo kompliciraniji od oblika J/kg. Razlog tome je *prirodna čovjekova težnja da iz strukture jedinice svake veličine barem približno osjeti fizikalnu narav razmatrane veličine.* Na taj se način postiže stanovita *zornost*, a to se baš pri upotrebi SI dade vrlo lako postići.

Prema tome smo »osnovnoj četvorki« jedinica SI u nauci o toplini, tj. četvorki m, s, kg, K (vidi odlomak 4.1.2), pridružili petu jedinicu, joule = J, jer je to u toj grani tehnike i znanosti jedna od najčešće upotrebljavanih jedinica. Iz toga bismo brzopleto mogli zaključiti da u nauci o toplini i u primjeni Međunarodnog sistema upotrebljavamo *pet* osnovnih jedinica, no takav zaključak ne bi bio ispravan. Stvarno pri njegovoj upotrebi uopće ne mislimo na to koja je jedinica osnovna, već upotrebljavamo kombinaciju jedinica koja nam se čini najpreglednijom, *najpraktičnijom*. Sa stanovišta metrologije posve je svejedno da li ćemo specifičnu entalpiju izražavati sa m^2/s^2 ili sa J/kg. Istom sa stanovišta *fizikalne predočivosti* većini je ljudi očitije kada se upotrebljava jedinica J/kg, jer to nam odmah dočarava predodžbu o energiji po jedinici mase.

Ovaj nam je primjer otkrio izvanrednu spoznaju o daljnjim prednostima koherentnog univerzalnog sistema jedinica kakav je SI, a ta je: *pojam osnovnih jedinica uopće nije potreban.* Za jednog će čovjeka Međunarodni sistem jedinica u termodinamici slijediti iz polaznih jedinica m, s, J, K, a za drugoga iz m, s, kg, K. Treći će možda poći od s, kg, J, K, ali će ipak u svojim računima upotrebljavati jedinicu metar, a ne $s(J/kg)^{1/2}$, što je isto.

Sve ove navode lijepo ilustrira tablica D-23, gdje su posve desno napisani odnosi među jedinicama SI. Vidimo da je posve svejedno da li ćemo jedinicu sile u Međunarodnom sistemu pisati kao J/m ili kao VAs/m ili kao kgm/s^2 jer sve one predstavljaju newton = N. Stvar je praktičnosti da i u nauci o toplini primjenjujemo N, a ne J/m, jer kod ove druge jedinice moramo tek preko izraza $F = W/l$ dovesti u vezu jedinicu energije i duljine.

Posve je jednako i s jedinicom tlaka (vidi tablicu D-23). Smatrajući da su »osnovne« jedinice toplinskog dijela Međunarodnog sistema m, s, J, K, došli bismo do toga da je jedinica tlaka J/m^3. Analogno bismo u mehanici s »osnovnim« jedinicama m, s, kg morali za jedinicu tlaka upotrebljavati $kg/(ms^2)$, a u elektrotehnici VAs/m^3. Izvanredna prednost univerzalnog i koherentnog SI baš je u tome što mu nisu potrebne takve prisile, pa u ovom primjeru u sve tri navedene discipline tlak mjerimo jedinicom N/m^2.

Pojam »osnovne jedinice« nastao je iz više razloga. Jedan od njih bio je taj što je *slijed definicija* jedinica bio shvaćen kao propisani recept primjene jedinica koje su građene iz prije definiranih jedinica. Drugi je razlog u nekoherentnosti starijih sistema jedinica. Budući da su se, na primjer, u nauci o toplini za neke veličine upotrebljavale jedinice Tehničkog sistema, a za druge veličine jedinice kcal i K, postalo je gotovo nužno da se ta osnovnost jedinica posebno naglasi. Posljedice znamo: pojavljivanje »ekvivalenata«, upotreba »petornog« sistema m, s, kp, K, kcal, te ovim jedinicama pripadne brojčane jednadžbe (vidi odlomak 4.2.2). Primjenom SI sve te neprilike iščezavaju. Ekvivalenti nestaju, a jednadžbe nužno postaju prave veličinske jednadžbe koje su univerzalne (vrijede i za nekoherentne jedinice), a ujedno su najkraće i fizikalno toliko razumljive koliko se to uopće može postići.

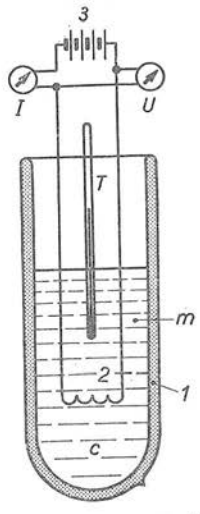
Pri mjerenju specifične topline tekućine mogli smo se umjesto uređajem na slici D.38 poslužiti *električkom* aparaturom koja je shematski prikazana na slici D.39: u termostatu *1* nalazi se tekućina mase m i specifične topline c. U tekućinu je uronjena električka grijalica *2* koja dobiva energiju iz akumulatorske baterije *3*. Tokom vremena t konstantna električna struja I u grijalici pretvori u toplinu električku energiju $\Delta W = UIt$. Za vrijeme t termometar je pokazao porast tempera-

ture ΔT, a pri tom je tekućina preuzela toplinu $Q = mc\Delta T$. Zbog toga je $\Delta W = \Delta Q$, odnosno $UIt = mc\Delta T$, odakle slijedi jednadžba analogna izrazu (4.1-1)

$$c = \frac{UIt}{m\Delta T},$$

odakle sličnim rasuđivanjem kao u odlomku 4.1.3 dobivamo jedinicu specifične topline u SI

$$[c]_{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{kgK}}.$$



Sl. D.39. Uz električko utvrđivanje specifične topline tekućine

Naravno da u nauci o toplini nitko ne upotrebljava ovaj komplicirani oblik jedinice $[c]_{\mathrm{M}}$, već jednostavno J/(kg K), jer je joule = J = VAs (o tome vidi npr. opširno u poglavlju E.2)!

Pri kraju ovog izlaganja možemo još napomenuti da su slike D.38 i 39 karakteristične za objašnjavanje historije tzv. »ekvivalenata topline, mehaničkog rada i električne energije« u starijim udžbenicima fizike i nauke o toplini. Na žalost, u tom svojstvu susrećemo ih i u novijim djelima. A kakvo je pravo značenje tih »ekvivalenata«, objasnit ćemo u odlomku 4.2.2.

4.2. Neke značajke SI u nauci o toplini

4.2.1. Primjena mase umjesto težine. U odsječcima B.7.3 i B.9.2 naširoko smo raspravljali o primjeni *mase m* umjesto *težine G*. Tamo smo utvrdili da je dosljedno uvođenje Međunarodnog sistema jedinica znatno olakšano ako se u mehanici primjenjuje pojam mase, a ne pojam težine. Isto vrijedi i za nauku o toplini; stoga čitaocu preporučujemo da prije čitanja nastavka ovog odlomka prouči spomenute odsječke u glavi B.

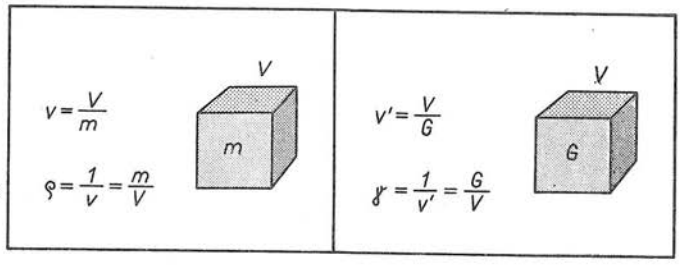
U tablici D-7 svrstan je niz tzv. *specifičnih veličina* (u, i, f, g, e, r itd.) koje su definirane kao omjer neke fizikalne veličine (obično energije) i *mase m*. U većini starijih djela o nauci o toplini, a gotovo isključivo u *tehničkim* termodinamikama, te specifične veličine bile su definirane u odnosu prema *težini G*. Razmotrimo u tom smislu veličinu koja se u nauci o toplini upotrebljava gotovo na svakom koraku, *specifični volumen v*. U odlomku B.3.1.3 specifični volumen v definirali smo kao omjer volumena V i *mase m* te tvari koja zauzima volumen V, dakle

$$v = \frac{V}{m}. \tag{4.2-1}$$

U starijim djelima, kako smo već spomenuli, specifični volumen definiran je kao omjer tog istog volumena V (što ga zauzima tvar mase m) i *težine G* te tvari, dakle

$$v' = \frac{V}{G}. \tag{4.2-2}$$

Tako definirani specifični volumen (v') opremili smo crticom, jer *to nije ista veličina kao v*. Ona se, na žalost, samo jednako naziva. To nam ilustrira trivijalna slika D.40. Oba crteža prikazuju *isto tijelo*. Lijevi crtež opisan je volumenom V i masom m, a desni crtež volumenom V i težinom G tijela.



Sl. D.40. Uz pojam gustoće i specifične težine

Tvar od koje je sastavljeno tijelo na slici D.40 možemo okarakterizirati i na drukčiji način, ne samo specifičnim volumenom. Kako znamo, omjer m/V nazivamo *gustoćom*, a omjer G/V *specifičnom težinom*, dakle

$$\text{gustoća} = \rho = \frac{m}{V} = \frac{1}{v}, \tag{4.2-3}$$

$$\text{specifična težina} = \gamma = \frac{G}{V} = \frac{1}{v'}. \tag{4.2-4}$$

Vidimo da su jednadžbe (4.2-3, 4) recipročne od (4.2-1, 2).

U odsječku B.7.3 opširno smo raspravili vezu između mase m i težine G *istog* tijela. Utvrdili smo vezu $G = mg$, gdje je g ubrzanje zemljine teže, odnosno preciznije $G = mg_0$, gdje je $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s² normirano ubrzanje zemljine teže. Uvrstimo li $G = mg_0$ u jednadžbu (4.2-2) i tako dobiveni izraz usporedimo sa (4.2-1), slijedi $v' = V/G = V/(mg_0) = v/g_0$, dakle $v' = v/g_0$. Fizikalno je veličina »specifični volumen v'« posve drukčija veličina negoli »specifični volumen v«, isto kao što su različite veličine masa i težina koje veže relacija $g_0 = G/m$ $(= v/v')$.

Primjer 1. Izračunajmo specifičnu težinu i specifični volumen vode čija je gustoća $\rho = 1000$ kg/m³. Budući da je specifična težina $G/V = 1/v' = \gamma = \rho g_0$, to je specifična težina vode

$$\gamma = 1\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}806\,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9806{,}65 \frac{\text{N}}{\text{m}^3},$$

jer je N = newton = kg m/s². Specifični volumen vode je $v = 1/\rho = 1 : (1\,000 \text{ kg/m}^3) = 0{,}001 \text{ m}^3/\text{kg}$, a »težinski specifični volumen« $v' = 1/\gamma = 1 : (9\,806{,}65 \text{ N/m}^3) = 0{,}000\,102 \text{ m}^3/\text{N}$.

Odnose posve analogne izvedenom $v' = v/g_0$ dobivamo i za niz drugih tzv. specifičnih veličina. Na primjer, »masena« specifična entalpija definirana je sa $i = I/m$, dok je »težinska« definirana sa $i' = I/G$, gdje je $G = mg_0$. Odavde je odmah dalje $i' = i/g_0$. Isto vrijedi i za niz drugih veličina:

$$\begin{aligned} u' &= u/g_0 & u &= u'g_0 \\ c' &= c/g_0 & c &= c'g_0 \\ R' &= R/g_0 & R &= R'g_0 \end{aligned}$$

itd.

Nužnost primjene normiranog ubrzanja zemljine teže $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s², a ne mjesne vrijednosti g (na onom mjestu Zemlje gdje se provodi mjerenje), zahtijeva definicija jedinice sile kp u Tehničkom sistemu jedinica: kilopond = kp = = 9,806 65 newton (odlomak B.4.2.4). U protivnom se u načelu ne bi mogle uspoređivati *količine tvari* koje su npr. djelomično izražene jedinicom mase SI kg, a djelomično jedinicom težine kp Tehničkog sistema jedinica (vidi odsječak B.9.2).

Primjer 2. Plinska konstanta zraka iznosi $R = 287$ J/kgK, gdje je J = joule jedinica energije SI, a kg = kilogram jedinica mase SI. Izračunajmo vrijednost »težinske« plinske konstante (R'), ali ne s jedinicom energije joule, već s jedinicom kilopondmetar = kpm!

»Masena« individualna plinska konstanta R upotrebljava se u jednadžbi $pV = RmT$, a »težinska« R' u jednadžbi $pV = R'GT$, gdje je $G = mg_0$. Iz ova dva izraza odmah slijedi $R'G = R\,m$, odnosno $R' = R/g_0$, jer je $G/m = g_0$. Vrijednost masene plinske konstante možemo napisati i ovako $R = 287$ Nm/kgK, jer je J = Nm = newton × metar. Iz $R' = R/g_0$ računanjem slijedi

$$R' = \frac{R}{g_0} = \frac{287\ \text{Nm}}{g_0\ \text{kgK}} = \frac{287}{9{,}806\,65}\ \frac{\text{m}}{\text{K}} = 29{,}27\,\frac{\text{m}}{\text{K}},$$

jer je kp = g_0 kg (vidi odlomak B.4.2.4). No obično se u starijoj tehničkoj termodinamici, gdje se upotrebljavao Tehnički sistem jedinica (vidi odsječak 5.2), nije upotrebljavala jedinica m/K, već kpm/(kpK), što je dakako isto. Prema tome traženi rezultat valja napisati u obliku $R' = 29{,}27$ kpm/(kpK).

4.2.2. Iščezavanje toplinskih i ostalih ekvivalenata. Tijekom prošlih 200 godina nauka o toplini izvanredno je napredovala u mjerno-tehničkom i u spoznajnom pogledu. Tako je fizikalna veličina »količina topline« izgubila svoju samostalnost i postala samo jedan oblik *energije*, dakle član obitelji potencijalne, kinetičke itd. energije, a prvi glavni stavak termodinamike sveo se na iskustvom iznuđeno načelo o održanju energije. Iz literature, međutim, još nisu iščezli tragovi shvaćanja »topline« Q kao samostalne veličine. Ti se tragovi očituju u takozvanim ekvivalentima topline koje ćemo razmotriti u daljnjem tekstu.

Na slici D.39 vidimo skicu termostata *1*, u kojem se nalazi tekućina mase m i specifične topline c. U tekućinu je uronjena električka grijalica *2*, koja ugrijava tekućinu pomoću istosmjerne električne struje, te termometar T. U toku vremena t konstantna električna struja, pod djelovanjem napona U baterije *3*, u grijalici pretvori u toplinu električku energiju $W = UIt$. Za vrijeme t termometar je pokazao porast temperature ΔT. Prema razlaganju u odlomku 2.3.3 tekućina je pri tom preuzela toplinu $Q = cm\,\Delta T$.

Znamo da se sva električka energija grijalice W pretvorila u toplinu Q, tj. energija W jednaka je toplinskoj energiji Q. Taj zakon o održanju energije možemo izraziti veličinskom jednadžbom

$$W = Q, \tag{4.2-5}$$

gdje oba simbola, dakako, predstavljaju fizikalne *veličine*. Ako primijenimo zastarjeli način opisivanja ove pretvorbe energije pomoću *brojčanih* jednadžbi (vidi odsječak A.1.4), nastaju komplikacije čije neugodne posljedice osjećamo u starijoj stručnoj literaturi. Do brojčanog opisa pretvorbe doći ćemo tako da simbole veličina W i Q iz jednadžbe (4.2-5) izrazimo po načelu $G = \{G\}\,[G]$, tj. umnoškom brojčanih iznosa i pripadnih jedinica (vidi odsječak A.1.3). Ako smo električku energiju W mjerili jedinicom $[W]$, a toplinu jedinicom $[Q]$, vrijedi $W = \{W\}\,[W]$, $Q = \{Q\}\,[Q]$, gdje simboli $\{W\}$ i $\{Q\}$ predočuju brojčane iznose! Ako to uvrstimo u veličinsku jednadžbu (4.2-5), dobivamo

$$\{W\}\,[W] = \{Q\}\,[Q], \tag{4.2-6}$$

odakle možemo izvesti omjer $[W]/[Q] = \{Q\}/\{W\}$, tj. jedinice se odnose obratno od pripadnih brojčanih iznosa. Omjer

$$A = \frac{[W]}{[Q]} \tag{4.2-7}$$

nazivamo »toplinski ekvivalent električke energije«. Vidimo da je toplinski ekvivalent električke energije neimenovani broj, omjer jedinice energije $[W]$ kojom smo mjerili električku energiju W i jedinice energije $[Q]$ kojom smo mjerili toplinu Q (vidi sl. D.39).

Uvrstimo li sada (4.2-7) u jednadžbu (4.2-6), dobivamo *brojčanu* jednadžbu

$$\{Q\} = A\{W\}, \tag{4.2-8}$$

u kojoj ekvivalent A posreduje kao parazitni koeficijent između brojčanih iznosa $\{W\}$ i $\{Q\}$. Naravno da u literaturi ne nalazimo oznake s vitičastim zagradama, već jednadžbu $AW = Q$, koja *izgleda* kao veličinska jednadžba!

Uz toplinski ekvivalent električke energije A postoji i njegova recipročna vrijednost $J = 1/A$, dakle

$$J = [Q]/[W] = 1/A, \tag{4.2-9}$$

koji se naziva »električki ekvivalent topline«. Pomoću njega brojčana jednadžba (4.2-8) dobiva zbog $J = 1/A$ oblik

$$\{W\} = J\{Q\}. \tag{4.2-10}$$

Izračunajmo nekoliko toplinskih ekvivalenata električke energije. Pretpostavimo da su pri mjerenju, prema slici D.39, upotrijebljene jedinice $[W] = \text{joule} = \text{J}$ i $[Q] = \text{kilokalorija} = \text{kcal}$, gdje pod kcal razumijevamo $\text{kcal} = \text{kcal}_{\text{IT}} = 4186{,}8$ J. U skladu sa (4.2-7) slijedi konkretna vrijednost toplinskog ekvivalenta električke energije

$$A_1 = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{\text{J}}{\text{kcal}} = \frac{\text{J}}{4186{,}8\ \text{J}} = \frac{1}{4186{,}8} = 0{,}0002389.$$

Prema tome brojčana jednadžba (4.2-8) sada glasi

$$A_1\{W\} = \{Q\}, \text{ odnosno } 0{,}0002389 \cdot \{W\} = \{Q\}.$$

Ona vrijedi samo za slučaj kada $\{W\}$ predstavlja broj joulea, a $\{Q\}$ broj kilokalorija. Pripadni električki ekvivalent topline u ovom je slučaju $J_1 = 1/A_1 = 4186{,}8$, pa u skladu s time brojčana jednadžba (4.2-10) glasi $\{W\} = 4186{,}8 \cdot \{Q\}$; ona vrijedi samo za strogo ograničeni slučaj: $\{W\}$ predstavlja broj joulea, a $\{Q\}$ broj kilokalorija, tj. $\{W\}_{\text{J}}$ i $\{Q\}_{\text{kcal}}$ (usporedi s odlomkom B.9.2.2).

Analogno možemo izvesti još niz drugih toplinskih i električkih ekvivalenata. Na primjer, pomoću tablica **32** i **33**, koje u prilogu knjige sadrže odnose među jedinicama energije, možemo izračunati nekoliko ekvivalenata A i J:

$$A_2 = \text{kWh/kcal} = 860\ \text{kcal/kcal} = 800;\quad J_2 = 1/A_2 = 0{,}001\,163$$

$$A_3 = \text{joule/Btu} = 9{,}479 \cdot 10^{-4}\ \text{Btu/Btu} = 0{,}0009479;\quad J_3 = 1055$$

$$A_4 = \text{kWh/Btu} = 3412\ \text{Btu/Btu} = 3412;\quad J_4 = 0{,}0002931.$$

Uz »toplinske ekvivalente električke energije« postoje i drukčiji; među njima »najodličnije« mjesto zauzima »toplinski ekvivalent mehaničkog rada«, koji ćemo zbog nedostatka slobodnih slova također označiti sa A. U skladu s definicijskom jednadžbom (4.2-8) obično se pod toplinskim ekvivalentom mehaničkog rada razumijeva omjer između tzv. mehaničke jedinice rada i jedinice topline. Najpoznatiji je ekvivalent

$$A_1 = \text{kpm/kcal} = 1/427 = 0{,}002\,343,$$

gdje je kpm jedinica rada u Tehničkom sistemu jedinica »kilopondmetar«, koji je s kilokalorijom vezan relacijom $\text{kcal}_{\text{IT}} = 426{,}9275$ kilopondmetara. Upotrebljava se i toplinski ekvivalent

$$A_2 = \text{KSh/kcal} = 632{,}5,$$

gdje je KSh = konjska snaga × sat = 270000 kpm. Pripadni »mehanički ekvivalenti topline« za naše primjere iznose

$$J_1 = 1/A_1 = 427, \qquad J_2 = 1/A_2 = 0{,}001\,581.$$

Logično se nameće pitanje zašto se pojavljuju ti mnogi »ekvivalenti«, ako se primjenjuju brojčane jednadžbe? Znamo, naime, da su ti ekvivalenti samo omjeri jedinica, pa se, dakle, u veličinskim jednadžbama i ne mogu pojaviti. Odgovor će nam dati konkretan primjer. Želimo izračunati korisnost η nekog toplinskog procesa kojemu se dovodi toplina Q, a odvodi koristan mehanički rad W. Znamo da je u tom slučaju korisnost

$$\eta = W/Q. \tag{4.2-11}$$

To je, dakako, veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo kakve jedinice, jer su W i Q simboli fizikalnih *veličina*. Od ove jednadžbe možemo načiniti brojčanu jednadžbu tako da u skladu sa $G = \{G\}\,[G]$ pišemo $W = \{W\}\,[W]$, $Q = \{Q\}\,[Q]$, što uvrštenjem u (4.2-11) daje

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{\{W\}\,[W]}{\{Q\}\,[Q]} = A\frac{\{W\}}{\{Q\}} = \frac{\{W\}}{J\{Q\}}. \tag{4.2-12}$$

Ekvivalenti A i J definirani su jednadžbama (4.2-7) i (4.2-9).

Uzmimo da je mehanički rad mjeren jedinicom kpm, a toplina kilokalorijama. Prije smo izračunali da je u tom slučaju $A = 0{,}002\,343$ i $J = 427$, pa stoga brojčanu jednadžbu (4.2-12) možemo izraziti u obliku

$$\eta = \frac{\{W\}}{427\{Q\}}. \tag{4.2-13}$$

To je, dakako, brojčana jednadžba u kojoj simbol $\{W\}$ predstavlja broj kilopondmetara, a $\{Q\}$ broj kilokalorija. Ako je u nekom slučaju izmjeren rad $W = 153\,700$ kpm i uložena toplina $Q = 1200$ kcal, brojčani su iznosi $\{W\} = W/\text{kpm} = 153\,700$, $\{Q\} = Q/\text{kcal} = 1200$. Stavimo li te brojčane iznose $\{W\} = 153\,700$, $\{Q\} = 1200$ u brojčanu jednadžbu (4.2-13), dobivamo vrijednost korisnosti

$$\eta = \frac{153\,700}{427 \cdot 1200} = 0{,}30 = 30\,\%.$$

Vidimo, dakle, da nas računanje pomoću »ekvivalenta« dovodi do istih teškoća kakve inače imamo s brojčanim jednadžbama: one daju ispravne rezultate *samo* u slučaju ako se u njih uvrštavaju brojčani iznosi koji se odnose na strogo *propisane* jedinice. Prema tome su »ekvivalenti« u brojčanim jednadžbama oni brojčani faktori koji omogućuju ispravne računske rezultate uz primjenu brojčanih iznosa nastalih izražavanjem propisanim jedinicama.

Jednostavan, zoran i nadasve pouzdan *veličinski račun* pomoću veličinske jednadžbe (4.2-11) u našem bi slučaju dao

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{153700 \text{ kpm}}{1200 \text{ kcal}} = \frac{153700 \text{ kpm}}{1200 \cdot 427 \text{ kpm}} = 0{,}30.$$

Posve pouzdano možemo tvrditi da za koju godinu nijedna nova knjiga iz nauke o toplini neće više sadržavati A i J. Dvoja su vrata na koja se tjeraju parazitni koeficijenti A i J iz literature: prvo su veličinske jednadžbe, koje u sebi ne mogu sadržavati omjere jedinicâ, a drugo sâm Međunarodni sistem jedinica (SI), koji sve vrste energije, dakle i toplinsku, mjeri koherentnom i univerzalnom jedinicom joule.

4.2.3. Utjecaj SI na toplinske proračune. U odlomku 4.1.1 naveli smo da dosljedna primjena Međunarodnog sistema jedinica automatski dovodi do upotrebe veličinskih jednadžbi, dakle do zornog i pouzdanog računanja. U dokaz tome ovdje ćemo izraditi relativno jednostavan proračun *Rankine*ova toplinskog kružnog procesa. Usput ćemo izvesti neke odnose među veličinama kako bi se dobila cjelovita fizikalna slika razmatranog procesa.

Proračunat ćemo ovaj *primjer*: U parnoj turbini termoelektrane vodena para ekspandira od stanja $p_1 = 35$ bar (bar $= 10^5$ N/m^2), $\vartheta_1 = 435\,^\circ$C na tlak u kondenzatoru $p_2 = 0{,}04$ bar. Električka snaga na stezaljkama generatora je $P = 50$ MW. Korisnost generatora iznosi $\eta_G = 0{,}98$, mehanička korisnost turbine $\eta_m = 0{,}96$, a tzv. unutarnja korisnost turbine $\eta_i = 0{,}79$. Treba izračunati protok pare m', sveukupnu korisnost elektrane η i dotok goriva m'_g, ako je ogrjevna moć goriva (ugljena) $H = 14{,}65$ MJ/kg, a korisnost kotla $\eta_K = 0{,}88$. Zbog jednostavnijeg proračuna zanemarit ćemo gubitke u cjevovodima, rad napojnih pumpi i ostale manje gubitke (zbog toga će dijagrami Ts i is biti pojednostavnjeni). Shema elektrane prikazana je na slici D.41a, dok je na slikama b i c prikazan *Rankine*ov kružni proces u dijagramu Ts, odnosno is.

Prije nego što izvršimo konkretan proračun za naš primjer, uspostavit ćemo općenite odnose i definirati neke veličine. Znamo, a to smo istakli i na crtežu D.41a, da postoji zatvoreni kružni put vode (pare) u kojem protok m' pri nekoj snazi P generatora ima istu vrijednost na bilo kojem mjestu kružnog toka, dakle $m' = \text{const}$. Pod protokom vode (odnosno pare) razumijevamo diferencijalni kvocijent $m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$, gdje je m masa vode (ili pare). Naravno da se pod $\mathrm{d}m$ ne misli na promjenu mase, već na diferencijal vode (ili pare) $\mathrm{d}m$ koji je u toku diferencijala vremena $\mathrm{d}t$ prošao kroz bilo koje mjesto kružnog toka postrojenja na slici a (o veličini m' vidi i odlomak B.3.1.5).

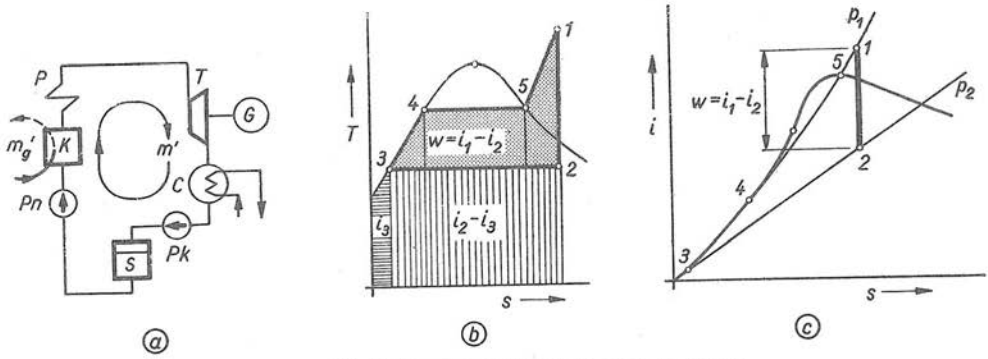
Iz dijagrama Ts i is na slici D.41 vidi se da specifična entalpija pare na ulazu u turbinu iznosi i_1, dok je vrijednost na izlazu i_2. Prilikom prolaza diferencijala mase pare $\mathrm{d}m$ kroz turbinu teoretski se dobiva koristan rad $\mathrm{d}W = (i_1 - i_2)\,\mathrm{d}m$. Budući da je količina pare $\mathrm{d}m$ prošla kroz turbinu u toku vremena $\mathrm{d}t$, ona je pri tom razvila snagu

$$P_0 = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = wm', \tag{4.2-14}$$

jer je $m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$, a

$$w = i_1 - i_2 \tag{4.2-15}$$

teoretski raspoloživ koristan rad po jedinici mase pare koja struji kroz turbinu. Zbog toga se snaga P_0 i naziva teoretska snaga turbine.



Sl. D.41. Uz proračun kružnog procesa
S — spremnik napojne vode, *Pn* — napojna pumpa, *K* — parni kotao, *P* — pregrijač pare, *T* — parna turbina, *G* — električki generator, *C* — kondenzator, *Pk* — kondenzatna pumpa

Između teoretske snage turbine P_0 i snage P na stezaljkama električkog generatora postoji veza

$$P = \eta_e P_0 = \eta_e w m'. \tag{4.2-16}$$

Korisnost $\eta_e = \eta_G \eta_m \eta_i$ naziva se »korisnošću turbosklopa«. Značenje ostalih triju korisnosti objasnili smo prilikom navođenja podataka o zadatku.

Toplinska korisnost η_t idealnog procesa definirana je omjerom teoretske snage turbine P_0 i snage kotla $P_K = (i_1 - i_3)\, m'$, tj. snage koju parni kotao (uključivši pregrijač) prenosi na vodu i paru (vidi sl. D.41b, c). Prema tome je

$$\eta_t = \frac{P_0}{P_K} = \frac{wm'}{(i_1 - i_3)m'} = \frac{w}{i_1 - i_3} = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_3}. \tag{4.2-17}$$

U ložište kotla stalno ulazi gorivo s dotokom m_g' (ovdje ne možemo govoriti o protoku kao kod vode ili pare, jer gorivo neprekidno izgara). Budući da je ogrjevna moć goriva H, ulazeće gorivo u ložištu razvija snagu

$$P_g = H m_g'. \tag{4.2-18}$$

Korisnost kotla je $\eta_K < 1$. Stoga je snaga kotla P_K, tj. toplinska snaga koju kotao predaje vodi i pari, $P_K = \eta_K P_g = \eta_K H m_g'$.

Korisnost elektrane η definiramo kao omjer snage na stezaljkama generatora P i snage goriva P_g, dakle

$$\eta = P/P_g = \eta_e \eta_t \eta_K, \tag{4.2-19}$$

jer je

$$P = \eta_e P_0, \quad P_0 = \eta_t P_K \quad \text{i} \quad P_K = \eta_K P_g.$$

S navedenim izrazima možemo prići konkretnom proračunu za naš zadatak. Protok pare (i vode) m' izračunat ćemo pomoću jednadžbe (4.2-16), a u tu svrhu moramo prethodno izračunati η_e i w. Pomoću zadanih vrijednosti slijedi

$$\eta_e = \eta_G \cdot \eta_m \cdot \eta_i = 0{,}98 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}79 = 0{,}744.$$

Jedinični teoretski raspoloživi specifični rad w izračunat ćemo pomoću izraza (4.2-15) na temelju podataka

$$i_1 = 3302 \text{ kJ/kg}, \quad i_2 = 2092 \text{ kJ/kg}$$

očitanih iz dijagrama *is* za vodenu paru. Usput možemo iz parnih tablica izvaditi vrijednost $i_3 = 121$ kJ/kg (tačka *3* u dijagramima slike D.41). Tako dobivamo

$$w = i_1 - i_2 = 1210 \text{ kJ/kg}.$$

Budući da je $P = 50$ MW, iz jednadžbe (4.2-16) slijedi protok pare (i vode)

$$m' = \frac{P}{\eta_e w} = \frac{50 \text{ MW}}{0{,}744 \cdot 1{,}21 \text{ MJ/kg}} = 55{,}6 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Ovdje smo uzeli u obzir da je J = Ws, dakle i MJ = MWs.

Za proračun dotoka goriva m'_g pomoću jednadžbe (4.2-18) moramo saznati korisnost η elektrane. Budući da znamo $\eta_e = 0{,}744$ i $\eta_K = 0{,}88$, potrebno nam je za uvrštenje u (4.2-19) izračunati toplinsku korisnost η_t. To ćemo učiniti pomoću (4.2-17)

$$\eta_t = \frac{w}{i_1 - i_3} = \frac{1210}{3302 - 121} = \frac{1210}{3181} = 0{,}3805.$$

Uz pomoć (4.2-19) dobivamo $\eta = 0{,}744 \cdot 0{,}3805 \cdot 0{,}88 = 0{,}249$, tj. korisnost elektrane. Uvrštenjem izraza $P_g = P/\eta$ u (4.2-18) slijedi vrijednost dotoka goriva (ugljena)

$$m'_g = \frac{P_g}{H} = \frac{P}{\eta H} = \frac{50 \text{ MW}}{0{,}249 \cdot 14{,}65 \text{ MJ/kg}} = 13{,}7 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Time je naš zadatak riješen. No budući da mnogi među nama imaju »bolji osjećaj za stvari« kad se protok i dotok izražavaju jedinicom »tona na sat« (t/h), preračunat ćemo protok pare m' i dotok goriva m'_g sa kg/s na t/h:

$$m' = 55{,}6 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 55{,}6 \frac{0{,}001 \text{ t}}{\text{h}/3600} = 55{,}6 \cdot 3{,}6 \frac{\text{t}}{\text{h}} = 200 \frac{\text{t}}{\text{h}}.$$

Analogno dobivamo za dotok goriva $m'_g = 49{,}3$ t/h. Pri ovom računu smo, dakako, uzeli u obzir da je tona = t = 1000 kg, te sat = h = 3600 s.

Bilo bi korisno da čitalac usporedi netom izrađeni proračun sa sličnim proračunima koji su objavljeni u većini knjiga o parnim strojevima i termoelektranama. U tim knjigama primjenjuju se uglavnom *brojčane jednadžbe*, oblikovane za primjenu jedinica kpm, kcal, KSh itd. Na taj način nastaje čitava šuma slabo preglednih formula u kojima je vrlo lako previdjeti neki koeficijent ili zapostaviti neki preračunski (»parazitni«) koeficijent među propisanim raznovrsnim jedinicama energije koje se *moraju* upotrebljavati u takvim brojčanim jednadžbama. Dio tih teškoća može se razabrati i iz primjera u odlomku 4.2.2 i odsječku 6.3. Posljedice su,

dakako, neugodno zamorno traganje za pogreškom u proračunu ili čak pogreška u konstrukciji.

4.2.4. Iščezavanje veličine g iz jednadžbi. U različitim granama *tehnike*, pa tako i u nauci o toplini, vrlo se često u jednadžbama pojavljuje veličina ubrzanje zemljine teže g ($\approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$). U nekim slučajevima postojanje veličine g u jednadžbi je opravdano, tj. sama fizikalna priroda jednadžbom opisivanog procesa to zahtijeva. No u većini slučajeva nema nikakva razloga da se g nalazi u jednadžbama, pa samo unosi dodatan posao prilikom proračuna i zamagljuje fizikalnu sliku razmatrane pojave. Nekoliko takvih slučajeva obradit ćemo u naredna četiri primjera.

Primjer 1. Brzinu širenja zvuka u plinovima tehničari često računaju pomoću jednadžbe

$$u = \sqrt{g\kappa p v'} = \sqrt{g\kappa R' T}, \tag{4.2-20}$$

gdje su: $g = g_0 = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$ normirano ubrzanje zemljine teže, $\kappa = c_p/c_v$ omjer specifičnih toplina plina, p tlak, $v' = 1/\gamma$ »težinski specifični volumen« (vidi odlomak 4.2.1), R' težinska plinska konstanta, a T termodinamička temperatura. Izračunajmo u — brzinu zvuka u zraku temperature $\vartheta = 20\,^\circ\mathrm{C}$.

Prije nego počnemo računati, preinačit ćemo jednadžbu (4.2-20) tako da iz nje iščezne ubrzanje zemljine teže g. Posve je, naime, jasno da prema prirodi pojave brzina zvuka u nimalo ne ovisi o g! Znamo da je v' recipročno od specifične težine γ, dakle $v' = 1/\gamma$, vidi jednadžbu (4.2-4), a budući da je $\gamma = g\rho$ (ρ je gustoća, $\rho = m/V$), to je

$$g v' = \frac{g}{\gamma} = \frac{g}{g\rho} = \frac{1}{\rho} = v,$$

gdje je v maseni specifični volumen, $v = m/V$. Uvrstimo li $g v' = v$ u izraz (4.2-20), slijedi

$$u = \sqrt{\kappa p v} = \sqrt{\kappa p/\rho} = \sqrt{\kappa R T}. \tag{4.2-21}$$

Do krajnjeg desnog izraza došli smo pomoću jednadžbe stanja $pv = RT$. Ovdje je, dakako, R tzv. masena plinska konstanta (vidi odsječak 2.1).

Celzijevoj temperaturi $\vartheta = 20\,^\circ\mathrm{C}$ odgovara termodinamička temperatura $T = 293{,}15\ \mathrm{K}$. Vrijednost plinske konstante zraka nalazimo u tablici D-5: $R = 287\ \mathrm{J/kg\,K}$; za zrak je $\kappa = 1{,}4$. Uvrštenjem tih vrijednosti u izraz (4.2-21) dobivamo brzinu zvuka u zraku

$$u = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} 293{,}15\ \mathrm{K}} = 343\ \mathrm{m/s}.$$

Pri računanju smo, dakako, uzeli u obzir odnose među jedinicama $\mathrm{J} = \mathrm{N\,m} = \mathrm{kg\,m^2/s^2}$, $\mathrm{J/kg} = \mathrm{m^2/s^2}$.

Primjer 2. Treba izračunati maseni protok m' vode koja struji kroz mjerni zaslon presjeka otvora $A = 25\ \mathrm{cm^2}$. Na manometru je izmjeren pad tlaka $\Delta p = 50\ \mathrm{mm}$ vodenog stupca (mm v.s. ili mm H_2O). Koeficijent strujanja iznosi $\alpha = 0{,}64$.

U starijim knjigama nalazimo formulu za proračunavanje *težinskog* protoka G' u obliku

$$G' = \alpha A \sqrt{2 g \gamma \Delta p}, \tag{4.2-22}$$

gdje je γ specifična težina tekućine. U analogiji s izvođenjem u odlomku 4.2.3, pod težinskim protokom G' razumijevamo veličinu $G' = \mathrm{d}G/\mathrm{d}t$, gdje je G težina tekućine. Budući da težinu G i masu m veže relacija $G = mg$, to je $G' = g\,\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = gm'$, jer je maseni protok $m' = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$. Uvrstimo li $G' = gm'$ u jednadžbu (4.2-22), dobivamo

$$m' = \alpha A \sqrt{2g\gamma\,\Delta p/g^2} = \alpha A \sqrt{2\,\Delta p\,\gamma/g}.$$

Budući da je $\gamma/g = \rho$ gustoća tekućine, od gornjeg izraza konačno dobivamo veličinsku jednadžbu najprikladniju za računanje masenog protoka tekućine u SI

$$m' = \alpha A \sqrt{2\rho\,\Delta p}. \tag{4.2-23}$$

Prije nego s njom počnemo računati, svest ćemo zadane podatke u jedinice SI. Presjek otvora mjernog zaslona je $A = 25\ \mathrm{cm^2} = 25 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2}$. Vrijednost pada tlaka svest ćemo na $\mathrm{N/m^2}$ ovako: $\Delta p = 50$ mm v.s. $= 50 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N/m^2} = 490{,}5\ \mathrm{N/m^2}$, jer je mm v.s. $= 9{,}81\ \mathrm{N/m^2}$ (vidi odlomak B.4.3.9). Uvrštenjem tih vrijednosti u izraz (4.2-23) dobivamo

$$m' = 0{,}64 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2} \sqrt{2 \cdot 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\, 490{,}5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}},$$

jer je gustoća vode $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$. Budući da je $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}$, daljnjim računanjem slijedi

$$m' = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2} \sqrt{0{,}981 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{kg^2}}{\mathrm{s^2 m^4}}} = 1{,}58\ \mathrm{kg/s}.$$

Primjer 3. Kroz cijev promjera $d = 0{,}4$ m struji pri temperaturi 0 °C zrak brzinom $u = 6$ m/s. Treba izračunati Reynoldsovu značajku Re (vidi odlomak 4.2.5), ako je dinamička viskoznost zraka $\eta = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Ns/m^2}$.

U tehničkoj literaturi obično se za Re upotrebljava izraz u kojem se pojavljuje g, koji je nepotreban pri primjeni Međunarodnog sistema jedinica. Taj izraz glasi (vidi i tablicu D-19):

$$\mathrm{Re} = \frac{ul\gamma}{g\eta}. \tag{4.2-24}$$

Budući da je $\gamma/g = \rho =$ gustoća, gornju jednadžbu možemo napisati u obliku koji je prikladniji za računanje sa SI, a u njemu osim toga nema nepotrebnog ubrzanja zemljine teže g:

$$\mathrm{Re} = \frac{ul\rho}{\eta}. \tag{4.2-25}$$

Slovo l predstavlja karakterističnu linearnu izmjeru, u našem primjeru promjer cijevi d. Prema tome ćemo uvrstiti $l = d$.

Vrijednost gustoće zraka možemo naći u tablici D-5. Pri $\vartheta = 0$ °C ona iznosi $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg/m^3}$. S ostalim podacima $d = 0{,}4$ m, $u = 6$ m/s i $\eta = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Ns/m^2}$ pomoću (4.2-25) dobivamo

$$\mathrm{Re} = \frac{6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}4\ \mathrm{m} \cdot 1{,}3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}}{2 \cdot 10^5\ \mathrm{Ns/m^2}} = 156\,000.$$

Primjer 4. Ovdje ćemo, preinačivši staru formulu, izračunati povišenje temperature plina koji prigušujemo u nekoj vodoravnoj cijevi. Neka taj plin bude zrak s izobarnom specifičnom toplinom $c = 1005$ J/(kg K), koji struji brzinom $u = 120$ m/s.

U starijim udžbenicima tehničke termodinamike nalazimo ovu jednadžbu za proračunavanje povišenja temperature plina prilikom prigušivanja

$$\Delta T = \frac{A u^2}{2 g c'}, \tag{4.2-26}$$

gdje je A tzv. toplinski ekvivalent mehaničkog rada $A = 1/427$. Budući da je izraz (4.2-26) *brojčana jednadžba*, autori tih udžbenika navode da simbol u predstavlja broj m/s, c' broj kcal/(kpK), ΔT broj kelvina, a $g = 9{,}81$. Prema tome jednadžbu (4.2-26) valja napisati u jasnom brojčanom obliku (vidi odsječke A.1.3,4,5)

$$\{\Delta T\} = \frac{A}{2} \frac{\{u\}}{\{g\}\{c'\}}. \tag{4.2-27}$$

Pri tom je, u skladu s osnovnom metrološkom relacijom $\{G\} = G/[G]$ (brojčani iznos = veličina : jedinica), za naše brojčane iznose:

$$\{\Delta T\} = \frac{\Delta T}{\mathrm{K}}, \quad A = \frac{\mathrm{kpm}}{\mathrm{kcal}} = \frac{1}{427}, \quad \{u\} = \frac{u}{\mathrm{m/s}},$$

$$\{g\} = \frac{g}{\mathrm{m/s^2}}, \quad \{c'\} = \frac{c'}{\mathrm{kcal/(kp\,K)}}.$$

Od brojčane jednadžbe (4.2-27) možemo načiniti veličinsku jednadžbu tako da umjesto simbola brojčanih iznosa u nju uvrstimo gore napisane omjere veličina/jedinica. Na taj način dobivamo

$$\frac{\Delta T}{\mathrm{K}} = \frac{\dfrac{1}{427}\,\dfrac{u^2}{\mathrm{m^2/s^2}}}{2\,\dfrac{g}{\mathrm{m/s^2}}\,\dfrac{c'}{\mathrm{kcal/(kp\,K)}}} = \frac{u^2}{2 g c'}\,\frac{\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\,\dfrac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kpK}}}{427\,\mathrm{m^2/s^2}},$$

što uz pomoć odnosa kcal = 427 kpm daje *veličinsku* jednadžbu

$$\Delta T = \frac{u^2}{2 g c'}.$$

Budući da je $c' = c/g$ ($Q = cm\Delta T = c' G \Delta T$; vidi odlomak 4.2.1), gornja veličinska jednadžba prelazi u definitivan oblik

$$\Delta T = \frac{u^2}{2c}, \tag{4.2-28}$$

koja ne sadrži ubrzanje zemljine teže g, jer je g ovdje stvarno nepotrebno. Ne postoji, naime, nikakva veza između prigušivanja plina u vodoravnoj cijevi i gravitacijskog polja Zemlje. Slovo c predstavlja, dakako, masenu specifičnu toplinu.

Uvrštenjem zadanih vrijednosti $u = 120\,\mathrm{m/s}$ i $c1 = 005\,\mathrm{J/kgK}$ u (4.2-28) saznajemo povišenje temperature u našem slučaju prigušivanja

$$\Delta T = \frac{120^2\,\mathrm{m^2/s^2}}{2 \cdot 1005\,\mathrm{J/kg\,K}} = \frac{14\,400\,\mathrm{m^2 kg\,K}}{2010\,\mathrm{J\,s^2}} = 7{,}17\,\mathrm{K},$$

jer je $\mathrm{J} = \mathrm{Nm} = \mathrm{kgm^2/s^2}$, pa se sve jedinice krate osim K.

Možda će se netko upitati kako je uopće nastao izraz (4.2-28). Odgovor nam pružaju osnovi strujanja: ako plin mase m struji brzinom u, njegova kinetička energija iznosi $W = \frac{1}{2}mu^2$. Prigušimo li adijabatski to strujanje, kinetička energija strujećeg plina utrošit će se na povećanje entalpije $\Delta I = mc\,\Delta T$. Budući da je u idealnom slučaju $W = \Delta I$, slijedi $\frac{1}{2}mu^2 = mc\,\Delta T$, odakle odmah nastaje posve jednostavna i zorna veličinska jednadžba (4.2-28).

4.2.5. Promjena oblika zakona sličnosti. Racionalna upotreba Međunarodnog sistema jedinica (SI) traži, kako znamo, primjenu pojmova gustoće ρ i mase m mjesto pojmova specifična težina γ i težina G (vidi odsječak B.9.2). Posljedice te promjene odrazuju se i u formi *zakona sličnosti* formuliranih u obliku karakterističnih značajki. Slučaj potrebe za promjenom oblika *Reynolds*ove značajke Re već smo imali u trećem primjeru odlomka 4.2.4.

Prijelaz od G na m, dakle od γ na ρ, odrazuje se i na većini ostalih značajki. Nastale promjene prikazali smo pregledno u tablici D-19, u kojoj stupac 3 prikazuje strukturu značajke u odnosu prema masenim veličinama, a stupac 4 u odnosu prema starim, težinskim veličinama. Jednostavna razmatranja, koja čitalac može provesti sam, pokazuju da su »masene značajke« fizikalno zornije, a uz upotrebu SI jedino je s njima racionalno raditi (kraći i brži račun).

U vezi s tablicom D-19 napominjemo da se umjesto dinamičke viskoznosti η katkada upotrebljava kinematička viskoznost $\nu = \eta/\rho$, gdje je ρ gustoća tvari (vidi poglavlje B.6). U tom slučaju neke značajke postaju jednostavnije, npr. $\mathrm{Re} = vl/\nu$. S druge strane u nekim se značajkama upotrebljava specifična vodljivost temperature $a = \lambda/(c\rho)$ (vidi odlomak 2.3.4). Takvu primjenu veličine a vidjet ćemo u narednom *primjeru.*

Vrlo dugačku čeličnu osovinu promjera $d = 400$ mm treba toplinski obraditi u peći. Zbog nedostatka iskustva proces toplinske obrade želi se ispitati na *modelnoj* osovini u manjoj peći, tj. na geometrijski sličnoj modelnoj osovini izmjerit će se raspodjela temperature. Model će se izraditi od legiranog čelika koji ima ova svojstva: specifična toplinska vodljivost $\lambda_\mathrm{m} = 16{,}2\,\mathrm{W/m\,°C}$, koeficijent prijelaza topline $\alpha_\mathrm{m} = 151\,\mathrm{W/m^2\,°C}$, specifična vodljivost temperature $a_\mathrm{m} = 5{,}3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ (indeks m upozorava da je riječ o modelnoj osovini).

Primjenom zakona sličnosti treba ustanoviti koliki mora biti promjer d_m modelne osovine i koliko vremena t_m treba modelnu osovinu držati u peći da bi nastale iste temperaturne prilike kao u pravoj osovini koja se u peći nalazi 2, 3 ili 4 sata. Osovina je izrađena od čelika ovih svojstava: $\lambda = 40\,\mathrm{W/m\,°C}$, $\alpha = 116\,\mathrm{W/m^2\,°C}$, $a = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$.

Promjer modelne osovine d_m odredit ćemo pomoću Nusseltove značajke $\mathrm{Nu} = \alpha d/\lambda$, koja mora biti ista u oba slučaja, dakle $\mathrm{Nu} = \alpha d/\lambda = \alpha_\mathrm{m} d_\mathrm{m}/\lambda_\mathrm{m}$, odnosno

$$\frac{d_\mathrm{m}}{d} = \frac{\alpha}{\alpha_\mathrm{m}} \frac{\lambda_\mathrm{m}}{\lambda} = \frac{116}{151} \frac{16{,}2}{40} = 0{,}311.$$

Odavde slijedi $d_\mathrm{m} = 0{,}311 \cdot d = 0{,}311 \cdot 400\,\mathrm{mm} = 124\,\mathrm{mm}$.

Tablica **D-19**

Tabelarni prikaz utjecaja primjene Međunarodnog sistema jedinica na oblik zakona sličnosti

	Naziv značajke	Jednadžba značajke u odnosu prema masi	Jednadžba značajke u odnosu prema težini
1	2	3	4
Cl	Clausiusova značajka	$\mathrm{Cl} = \frac{v^3 l \rho}{\lambda \Delta T}$	$\mathrm{Cl} = \frac{v^3 l \gamma}{g \lambda \Delta T}$
	Upotrebljava se za istraživanje prisilnih vođenja topline. Veličine: v — brzina, l — duljina, ρ — gustoća, λ — specifična toplinska vodljivost, ΔT — razlika temperature, γ — specifična težina, g — ubrzanje zemljine teže.		
Du	Dulongova značajka	$\mathrm{Du} = \frac{v^2}{c \Delta T}$	$\mathrm{Du} = \frac{v^2}{g c' \Delta T}$
	Upotrebljava se za istraživanje akumulacije energije u strujećim tvarima. Veličine: v — brzina, c — izobarna masena specifična toplina, ΔT — promjena temperature, g — ubrzanje zemljine teže, c' — izobarna težinska specifična toplina.		
Eu	Eulerova značajka	$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2}$	$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta p}{\gamma v^2 / 2g}$
	Upotrebljava se za istraživanje strujanja nestlačivih tvari. Veličine: Δp — razlika tlakova, ρ — gustoća, v — brzina, γ — specifična težina, g — ubrzanje zemljine teže.		
Fo	Fourierova značajka	$\mathrm{Fo} = \frac{t \lambda}{l^2 \rho c}$	$\mathrm{Fo} = \frac{t \lambda}{l^2 \gamma c'}$
	Upotrebljava se za istraživanje vremenski promjenljivih pojava vođenja topline. Veličine: t — vrijeme, λ — specifična toplinska vodljivost, l — duljina, ρ — gustoća, c — izobarna masena specifična toplina, γ — specifična težina, c' — izobarna težinska specifična toplina.		
Fr	Froudova značajka	$\mathrm{Fr} = \frac{v^2}{g l}$	$\mathrm{Fr} = \frac{v^2}{g l}$
	Upotrebljava se za istraživanje odnosa između sila tromosti i težine u tvari koja struji. Veličine: v — brzina, g — ubrzanje zemljine teže, l — duljina.		
Ga	Gay-Lussacova značajka	$\mathrm{Ga} = \frac{1}{\beta \Delta T}$	$\mathrm{Ga} = \frac{1}{\beta \Delta T}$
	Upotrebljava se za istraživanje pojava toplinskih širenja kod malih Grashofovih značajki uz velike razlike temperature. Veličine: β — koeficijent prostornog širenja, ΔT — razlika temperatura.		

Nastavak tablice **D-19**

1	2	3	4
Gr	Grashofova značajka	$\mathrm{Gr}=\frac{g\beta l^3\Delta T}{(\eta/\rho)^2}$	$\mathrm{Gr}=\frac{\beta l^3\Delta T}{g(\eta/\gamma)^2}$
	Upotrebljava se za istraživanje sila koje nastaju u tekućini zbog razlike gustoće. Vrijedi odnos $\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Ga}\cdot\mathrm{Fr}=\mathrm{Re}^2$. Veličine: g — ubrzanje zemljine teže, β — koeficijent prostornog širenja, l — duljina, ΔT — razlika temperatura, η — dinamička viskoznost, ρ — gustoća, γ — specifična težina. Opaska: veličina $\eta/\rho=\nu$ je kinematička viskoznost (vidi odsječak B.6.1).		
Gz	Grätzova značajka	$\mathrm{Gz}=\frac{m'c}{\lambda l}$	$\mathrm{Gz}=\frac{G'c'}{\lambda l}$
	Upotrebljava se za istraživanje pojava prenošenja topline na tvarima koje struje. Veličine: m' — maseni protok, c — izobarna masena specifična toplina, λ — specifična toplinska vodljivost, l — duljina, G' — težinski protok, c' — izobarna težinska specifična toplina (o masenom protoku vidi odsječke B.3.1 i 3.6).		
Ho	Hookeova značajka	$\mathrm{Ho}=\frac{\rho v^2}{E}$	$\mathrm{Ho}=\frac{\gamma v^2}{gE}$
	Upotrebljava se za istraživanje elastičnosti tekućina koje struje. Veličine: ρ — gustoća, v — brzina, E — modul elastičnosti, γ — specifična težina, g — ubrzanje zemljine teže. Opaska: Hookeova značajka Ho naziva se i Cauchyjeva značajka.		
M	Machova značajka	$\mathrm{M}=\frac{v}{u}$	$\mathrm{M}=\frac{v}{u}$
	Upotrebljava se za istraživanje pojava pri brzom strujanju tvari. Veličine: v — brzina tekućine, u — brzina zvuka.		
Ne	Newtonova značajka	$\mathrm{Ne}=\frac{R}{\rho v^2 l^2}$	$\mathrm{Ne}=\frac{gR}{\gamma v^2 l^2}$
	Upotrebljava se za istraživanje otpora strujanju. Veličine: R — otpor, ρ — gustoća, v — brzina, l — duljina, g — ubrzanje zemljine teže, γ — specifična težina.		
Nu	Nusseltova značajka	$\mathrm{Nu}=\frac{\alpha l}{\lambda}$	$\mathrm{Nu}=\frac{\alpha l}{\lambda}$
	Upotrebljava se za istraživanje prenošenja topline na granici stijenka — tekućina. Veličine: α — koeficijent prijelaza topline, l — duljina, λ — specifična toplinska vodljivost. Opaska: Nusseltova značajka Nu naziva se i Biotova značajka, $\mathrm{Bi}=\mathrm{Nu}$.		
Pe	Pécletova značajka	$\mathrm{Pe}=\frac{\rho c v l}{\lambda}$	$\mathrm{Pe}=\frac{\gamma c' v l}{\lambda}$
	Upotrebljava se za istraživanje vođenja topline u tvarima koje struje. Vrijedi odnos $\mathrm{Pe}=\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}$. Veličine: ρ — gustoća, c — izobarna masena specifična toplina, v — brzina strujanja, l — duljina, λ — specifična toplinska vodljivost, γ — specifična težina, c' — izobarna težinska specifična toplina.		

Nastavak tablice **D-19**

1	2	3	4
Pr	Prandtlova značajka	$\mathrm{Pr} = \frac{c\eta}{\lambda}$	$\mathrm{Pr} = \frac{gc'\eta}{\lambda}$
	Upotrebljava se za istraživanje vođenja topline u tvarima koje struje. Vrijedi odnos $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pe}/\mathrm{Re}$. Veličine: c — izobarna masena specifična toplina, η — dinamička viskoznost, λ — specifična toplinska vodljivost, c' — izobarna težinska specifična toplina, g — ubrzanje zemljine teže. Opaska: veličinu $\lambda/(c\rho) = a$ nazivamo specifičnom vodljivošću temperature (odlomak 2.3.4).		
Ra	Rayleighova značajka	$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta l^3 \Delta T \rho^2 c}{\eta\lambda}$	$\mathrm{Ra} = \frac{\beta l^3 \Delta T \gamma^2 c'}{\eta\lambda}$
	Upotrebljava se za istraživanje pojava u tvarima koje struje. Vrijedi odnos $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr}$. Veličine: g — ubrzanje zemljine teže, β — koeficijent prostornog širenja, l — duljina, ΔT — razlika temperature, ρ — gustoća, c — izobarna masena specifična toplina, η — dinamička viskoznost, λ — specifična toplinska vodljivost, γ — specifična težina, c' — izobarna težinska specifična toplina.		
Re	Reynoldsova značajka	$\mathrm{Re} = \frac{vl\rho}{\eta}$	$\mathrm{Re} = \frac{vl\gamma}{g\eta}$
	Upotrebljava se za istraživanje odnosa sila tromosti i sila viskoznosti pri strujanju tekućina. Vrijede odnosi $\mathrm{Re} = \mathrm{Pe}/\mathrm{Pr}$, $\mathrm{Re}^2 = \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Ga}\cdot\mathrm{Fr}$. Veličine: v — brzina, l — duljina, ρ — gustoća, η — dinamička viskoznost, γ — specifična težina, g — ubrzanje zemljine teže.		
St	Stantonova značajka	$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{\rho c v}$	$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{\gamma c' v}$
	Upotrebljava se za istraživanje prijelaza topline. Vrijedi odnos $\mathrm{St} = \mathrm{Nu}:(\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr})$. Veličine: α — koeficijent prijelaza topline, ρ — gustoća, c — izobarna masena specifična toplina, v — brzina, γ — specifična težina, c' — izobarna težinska specifična toplina.		
Sh	Strouhalova značajka	$\mathrm{Sh} = \frac{v}{fl}$	$\mathrm{Sh} = \frac{v}{fl}$
	Upotrebljava se za istraživanje vrtloženja pri strujanju. Veličine: f — frekvencija vrtloženja, l — duljina, v — brzina.		

Vrijeme t_m, odnosno omjer vremena t_m/t, izračunat ćemo pomoću Fourierove značajke Fo iz tablice D-19. Budući da su nam poznate vrijednosti specifične vodljivosti temperature $a = \lambda/(c\rho)$, izraz za Fo iz tablice D-19 napisat ćemo u obliku $\mathrm{Fo} = ta/d^2 = t_\mathrm{m} a_\mathrm{m}/d_\mathrm{m}^2$. Odavde slijedi

$$\frac{t_\mathrm{m}}{t} = \frac{a}{a_\mathrm{m}} \frac{d_\mathrm{m}^2}{d^2} = \frac{12}{5{,}3} 0{,}311^2 = 0{,}219.$$

To znači da vremenu $t = 2$ h toplinske obrade prave osovine odgovara vrijeme $t_\mathrm{m} = 0{,}219 \cdot 2\ \mathrm{h} = 0{,}438$ h modelne osovine. Itd.

4.3. Prijelazni period uvođenja SI u nauku o toplini

4.3.1. Postojanje vansistemskih jedinica. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je na jedanaestom zasjedanju godine 1960. Međunarodni sistem jedinica (SI). Na taj način SI je postao obveznim za sve države supotpisnice *Konvencije o metru* (u Konvenciju je godine 1964. bilo učlanjeno 40 država; vidi odsječak A.6.3), jer je Generalna konferencija najviši organ Konvencije. No unutar pojedinih država primjenu SI mogu propisati samo nacionalni zakoni tih država. Zbog toga su nakon godine 1960. u gotovo svim državama supotpisnicama Konvencije objavljeni zakoni ili državni standardi koji u duhu spomenute odluke Generalne konferencije propisuju obaveznu primjenu i način primjene SI. U Jugoslaviji ta pitanja regulira »Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima« od godine 1961. (vidi odlomak A.7.5.7 i odsječak B.7.1), u ČSSR »Zakon o mjernoj službi« (1962) i ČSN 01 1300 (1963), u SSSR državni standardi GOST 9867-61, 7664-61, 8033-56, 8550-61, 7932-56, 8849-58 i 8848-58. Analogni zakoni objavljeni su, dakako, i u mnogim drugim zemljama.

Prilikom izrade zakona ili obaveznih državnih standarda svaki se zakonodavac našao u znatnoj neprilici. Bilo mu je jasno da, propisujući primjenu SI, *mora* dopustiti primjenu i nekih jedinica koje nisu sastavni dio SI, ali su toliko uvriježene u privredi da bi njihovo zabranjivanje dovelo do *privrednih poremećaja* u zemlji. Ne zaboravimo, naime, da se, na primjer, uvođenjem jedinice joule umjesto kilokalorije ne mijenja samo vrijednost nekih toplinskih veličina u odnosu kcal = = 4186,8 J, već da se pri tom moraju prebaždariti mnogi mjerni instrumenti, izraditi neki novi, preračunati mnoge tablice i dijagrami. Konačno — što je vrlo značajno — u glavama ljudi treba da se stvori »osjećaj mjere« za jedinicu joule onakav kakav je prije toga postojao za kilokaloriju. Slično je i za druge jedinice, npr. newton, N/m^2 itd.

Nevolja zakonodavca sastojala se u tome da odluči *koje* se vansistemske (izvan SI) jedinice smiju upotrebljavati pored jedinica SI. Rezultate te odluke u Jugoslaviji, ČSSR i SSSR djelomično ćemo vidjeti (za vansistemske jedinice sile, tlaka i energije) u odlomku 4.3.2. Posve je slično i u drugim državama. Karakteristično je da u tom pogledu nema *bitnih* razlika između pojedinih država.

Primjena vansistemskih jedinica, tzv. jedinica izuzetaka, smanjuje prednosti što bi ih donijela isključiva primjena SI (vidi odlomak 4.1.1). No zakonodavac, našavši se u procijepu između isključive primjene najracionalnijeg sistema jedinica (SI) i negativnih privrednih posljedica (ako se ne dopusti primjena nekih jedinica izuzetaka), učinio je u svim zemljama jedino mogući logičan kompromis: *privremeno* je dopustio upotrebu nekih vansistemskih jedinica. U zakonodavnim aktima je tačno precizirao koje su to jedinice. Pri tom nije izričito odredio koliko će trajati ta privremenost, ali zato jedinice dijeli u dvije velike skupine: u prvoj su *glavne jedinice* — to su jedinice SI, a u drugoj su *pomoćne, drugostepene* jedinice (češki: vedlejši u ČSN 01 1300) — to su vansistemske jedinice.

Jasno je da će dodaci tim zakonima, do kojih će dolaziti u budućnosti, smanjivati broj dopuštenih vansistemskih jedinica. O brzini uvođenja SI ovisi kakvim će tempom opadati broj jedinica izuzetaka, odnosno kada će se postići krajnji cilj — isključiva primjena SI, dakle ostvarenje svih njegovih prednosti, nabrojenih u odlomku 4.1.1.

U sadašnjem periodu prijelaza na primjenu SI u nauci o toplini jedan je od velikih zadataka primjena jedinice »joule« umjesto »kilokalorije«. To je vrlo opsežan posao, jer je mnoštvo podataka o svojstvima tvari danas još isključivo objavljeno

s jedinicama kcal, kcal/kg itd., iako su npr. tablice i dijagrami o vodenoj pari već dostupni i s podacima u kJ/kg itd. Vjerojatno će mnogi od čitalaca ponekad morati i sami preračunati neke tablice. U narednom primjeru navest ćemo kako se takve »transformacije« (istodoban prijelaz na »masene« veličine i na jedinice SI) mogu provesti pouzdano i brzo skraćenim postupkom.

Primjer. U starijim tablicama navedene su vrijednosti specifičnih toplina u kcal/kp, tj. u odnosu prema težini tvari. Tako je npr. izobarna specifična toplina zraka $c' = 0{,}240$ kcal/(kpK). Izračunajmo koliko iznosi pripadna *masena* specifična toplina c zraka u jedinicama SI.

U odlomku 4.2.1 ustanovili smo da je $c = c' g_0$, gdje je $g_0 = 9{,}806\,65$ m/s² normirano ubrzanje zemljine teže. Iz odlomka B.4.2.4 znamo da se g_0 može prikazati i u obliku $g_0 =$ = kilopond/kilogram = kp/kg. Stoga možemo pisati $c = c' \cdot$ kp/kg (vidi odlomak 4.2.1), a to u našem primjeru daje

$$c = c' \frac{\text{kp}}{\text{kg}} = 0{,}24 \frac{\text{kcal}}{\text{kp K}} \cdot \frac{\text{kp}}{\text{kg}} = 0{,}24 \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}.$$

Uz pomoć odnosa kcal = 4186,8 J (vidi odsječak 5.2) račun se nastavlja u

$$c = 02{,}4 \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}} = 0{,}24 \cdot 4186{,}8 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 1005 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

Iz ovog primjera možemo zaključiti da se brzo i pouzdano može preračunavati pomoću izraza

$$\frac{\text{kcal}}{\text{kp}} \mathrel{\widehat{=}} 4186{,}8 \frac{\text{J}}{\text{kg}},$$

gdje znak jednakosti s krovićem označuje »odgovara«, tj. brojčanom iznosu težinske specifične veličine (s crticom) pripada 4186,8 puta veći brojčani iznos u J/kg masene veličine (bez crtice). U našem je primjeru $c' = 0{,}24$ kcal/kp K. Pomoću gornjeg izraza odmah dobivamo $c = 0{,}24 \cdot 4186{,}8$ J/kg K = 1005 J/kg K.

4.3.2. Dopuštene vansistemske jedinice. U ovom odlomku iznijet ćemo podatke o nekim vansistemskim jedinicama koje su prema nacionalnim zakonima dopuštene u javnoj upotrebi. Pri tom ćemo se ograničiti na vansistemske jedinice onih veličina koje se u nauci o toplini najviše upotrebljavaju, a to su sila, tlak i energija. Usporedit ćemo zakone ili državne standarde Jugoslavije, ČSSR i SSSR koje smo citirali u odlomku 4.3.1.

Rezultate te usporedbe svrstali smo u tablice D-20, 21 i 22. Oznaka + u tim tablicama znači da je primjena jedinice dopuštena, a — da nije dopuštena. Uz pojedine tablice navedene su na dnu opaske koje ili upućuju na stanovite razlike među

Tablica **D-20**

Dopuštene vansistemske jedinice sile

Naziv jedinice	Kratica	Vrijednost	Jugoslavija	ČSSR	SSSR
newton	N	= 1 N	+	+	+
kilopond	kp	= 9,806 65 N	+	+	—
kilogram-sila	kgs, kG	= 9,806 65 N	—	—	+
tona-sila	ts	= 9 806,65 N	—	—	+
dyn	dyn	= 10^{-5} N	—	—	+

zakonima triju država ili pružaju stanovite dodatne informacije. Podrobnije su jedinice sile, tlaka i energije razmotrene u odsječcima B.4.2, 4.3 i 4.4, te u poglavlju B.5.

Tablica **D-21**

Dopuštene vansistemske jedinice tlaka

Naziv jedinice	Kratica	Vrijednost	Jugoslavija	ČSSR	SSSR
newton na kvadratni metar	N/m^2	$= 1\ N/m^2$	+	+	+
bar	bar	$= 10^5\ N/m^2$	+	+[1]	−[2]
kilopond na kvadratni metar	kp/m^2	$= 9{,}80665\ N/m^2$	+	+	−
kilogram-sila na kvadratni metar	kgs/m^2	$= 9{,}80665\ N/m^2$	−	−	+
kilopond na kvadratni centimetar	kp/cm^2	$= 9806{,}65\ N/m^2$	+	+	+[3]
milimetar vodenog stupca	mm H_2O	$\approx 1\ kp/m^2$	−	+	+[4]
tehnička atmosfera	at	$= 1\ kp/cm^2$	+	−	+
atmosfera	at	$= 1\ kp/cm^2$	−	+	−
torricelli	torr	$= 133{,}322\ N/m^2$	−	+	−
milimetar stupca žive	mm Hg	$= 133{,}322\ N/m^2$	+	−	+
normalna (fizikalna) atmosfera	atm	$= 101\,325\ N/m^2$	+	−	−
dyn na kvadratni centimetar	dyn/cm^2	$= 0{,}1\ N/m^2$	−	−	+

Opaske: 1) U ČSSR je dopuštena kratica b, dakle bar = b. — 2) U SSSR je primjena jedinice bar zabranjena tzv. Metodskim pismom broj 1 Državnog komiteta za standarde, mjere i mjerne uređaje od godine 1964. — 3) Za SSSR mora umjesto kp stajati kgs. — 4) U SSSR je $kgs/m^2 = mm\ H_2O$.

Tablica **D-22**

Dopuštene vansistemske jedinice energije

Naziv jedinice	Kratica	Vrijednost	Jugoslavija	ČSSR	SSSR
joule	J	$= 1\ J$	+	+	+
vatsat	Wh	$= 3600\ J$	+	+	+
kilokalorija	kcal[1]	$= 4186{,}8\ J$	+	+	+
kilopondmetar	kpm[2]	$= 9{,}80665\ J$	+	+	−
kilogram (sila) metar	kgs·m	$= 9{,}80665\ J$	−	−	+
erg	erg	$= 10^{-7}\ J$	−	−	+
elektronvolt	eV	$= 1{,}60206 \cdot 10^{-19}\ J$	−	+	+

Opaske: 1) Prefiksi se odnose na kaloriju (cal), npr. kcal = 1000 cal. — 2) Prefiksi se odnose na pondmetar (pm), npr. kpm = 1000 pm, Mpm = 10^6 pm.

Interesantno je još spomenuti dopuštene vansistemske jedinice *viskoznosti*. Jugoslavenski i čehoslovački zakonodavni akti dopuštaju za mjerenje *dinamičke viskoznosti* vansistemsku jedinicu poise = $P = 0{,}1\ Ns/m^2$, a za mjerenje *kinematičke viskoznosti* stokes = $St = 10^{-4}\ m^2/s$ (vidi poglavlje B.6).

5. Sistemi jedinica nauke o toplini. Različite metričke i angloameričke jedinice topline

5.1. Koherentni i Tehnički sistem jedinica nauke o toplini

5.1.1. Koherentni sistem jedinica nauke o toplini. Prije četrdesetak godina bila je jedinica topline kilokalorija još posve izolirana od ostalih jedinica energije. Tek je godine 1929. uspostavljen čvrst odnos s jedinicom kWh (vidi odlomak 5.2.2), a time i s jedinicom joule. Unatoč tome mnogi stručnjaci na polju toplinskih znanosti i dalje su, sve do unatrag desetak godina, smatrali kilokaloriju osnovnom jedinicom nauke o toplini. Budući da su u toj nauci dovoljne četiri polazne (osnovne) jedinice, na taj način nastaje »koherentni sistem jedinica nauke o toplini« s ovim osnovnim jedinicama:

jedinica duljine l:	metar (m),
jedinica vremena t:	sekunda (s),
jedinica termodinamičke temperature T:	kelvin (K),
jedinica topline Q:	kilokalorija (kcal).

U odsječku A.5.1 utvrdili smo da skup jedinica može imati naziv *sistem* jedinica samo onda ako su izvedene jedinice *skladne* ili *koherentne*, tj. građene po načelu $1 \times 1 = 1$. S navedene četiri osnovne jedinice može se, dakako, izgraditi *koherentan* sistem jedinica, što ćemo vidjeti u daljnjem tekstu.

Prije negoli započnemo graditi izvedene jedinice, moramo reći nešto o vezi između termodinamike i mehanike. Očito je da nauku o toplini, kao posve izoliranu granu znanosti i tehnike, uopće ne možemo zamisliti. Svoj razvoj ona zahvaljuje i tome što čovjek želi zgodnim slijedom toplinskih procesa iz goriva dobiti mehanički rad (vidi npr. odlomak 4.2.3) ili pak prikladnim ulaganjem mehaničke ili električke snage postići posebno toplinsko stanje (npr. rashlađivanje). Stoga se toplinski procesi uopće ne mogu zamisliti, a da se njihovo djelovanje ne odrazuje mehanički, električki, kemijski ili nekako drukčije.

Prema tome će se i uvođenje koherentnog sistema jedinica nauke o toplini metar-sekunda-kelvin-kilokalorija ili kraće »msKkcal« morati odraziti na izvedenim jedinicama *mehanike* u onolikoj mjeri koliko mehaniku trebamo u termodinamici. Prihvatimo li, naime, veličine l, t, T i Q za osnovne fizikalne veličine, očito je da uz l i t više neće biti treća osnovna veličina masa ili sila, već će m ili F biti *izvedene* veličine. Pogledajmo ukratko kakav će pri tom biti slijed definicija izvedenih jedinica!

Sila F vezana je s energijom W i duljinom l jednadžbom $F = W/l$. Budući da je toplina Q samo vrsta energije, to je $W = Q$, pa je $F = Q/l$. Kako su u razmatranom sistemu jedinica »msKkcal« kcal i metar osnovne jedinice veličina Q i l, koherentna izvedena jedinica sile je $[F]_K$ = kcal/metar. Budući da je kcal = 4186,8 J (vidi odlomak 5.2.2), to je koherentna *jedinica sile* sistema »msKkcal« jednaka

$$[F]_K = \frac{\text{kcal}}{\text{m}} = 4186{,}8\ \text{N}$$

jer je newton = N = J/m. Koherentnu jedinicu mase $[m]_K$ lako dobivamo iz jednadžbe $m = F/a$, gdje je a ubrzanje. Budući da je i u ovom sistemu jedinica ubrzanja $[a]_K = \text{m/s}^2$, to je

$$[m]_K = \frac{[F]_K}{[a]_K} = \frac{\text{kcal/m}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2/\text{s}^2} = 4186{,}8\ \text{kg}.$$

Ovdje je, dakako, kg jedinica mase u Međunarodnom sistemu jedinica (vidi odlomke A.9.3.3 i B.3.3.1), a u ovom se izrazu pojavila zato što je s jedne strane kcal = = 4186,8 J, a s druge strane (vidi odsječak B.7.2 i poglavlje D.4)

$$\frac{\text{J}}{\text{m}^2/\text{s}^2} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2/\text{s}^2} = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{m/s}^2} = \text{kg}.$$

Jedinica tlaka slijedi iz jednadžbe $p = F/A$, gdje je A površina na koju okomito djeluje sila F. Budući da je, kako smo vidjeli, u »koherentnom sistemu msKkcal« jedinica sile $[F]_K$ = kcal/m, a jedinica površine $[A]_K = \text{m}^2$, jedinica tlaka je

$$[p]_K = \frac{[F]_K}{[A]_K} = \frac{\text{kcal/m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3} = 4186{,}8\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Posve analogno izvest ćemo koherentne jedinice *specifičnih* veličina, kako mehaničkih, tako i toplinskih. Pri tom ćemo raditi s *masenim* specifičnim veličinama, tj. definirati ih u odnosu prema masi m, a ne u odnosu prema težini G. Specifični volumen v definiran je omjerom volumena V i mase m, dakle $v = V/m$. Prema tome je jedinica specifičnog volumena u sistemu »msKkcal«

$$[v]_K = \frac{[V]_K}{[m]_K} = \frac{\text{m}^3}{\text{kcal s}^2/\text{m}^2} = \frac{\text{m}^5}{\text{kcal s}^2} = \frac{1}{4186{,}8}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

Jedinicu *specifične topline* u koherentnom sistemu »msKkcal« izvest ćemo iz jednadžbe $Q = cm\Delta T$, dakle

$$[c]_K = \frac{[Q]_K}{[m]_K [T]_K} = \frac{\text{kcal}}{\dfrac{\text{kcal}}{\text{m}^2/\text{s}^2}\,\text{K}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\,\text{K}} = \frac{\text{J}}{\text{kg K}},$$

gdje je K = kelvin (vidi odlomak 3.2.4). Vidimo da je ova jedinica ista kao i jedinica SI, jer je J = Nm = kg m^2/s^2, pa je dakle J/kg K = m^2/s^{2}K.

Jednakost jedinica našli bismo još i kod specifične entropije s, specifične entalpije i, specifične unutarnje energije u, te kod individualne plinske konstante R. Dosta opširan pregled koherentnih jedinica sistema »msKkcal« sadrži tablica D-23.

Tablica **D-23**

Jedinice nekih toplinskih i mehaničkih veličina u koherentnom sistemu msKkcal i u Međunarodnom sistemu jedinica

Fizikalna veličina		Koherentni sistem msKkcal		Razni oblici jedinice SI
Naziv veličine	Simbol	Jedinica	=jedinica SI	
Temperatura	T	K	1	K
Toplina, energija	Q, W	kcal	z	$J = Nm = kg\,m^2/s^2 = Ws = VAs$
Masa	m	$kcal\,s^2/m^2$	z	$kg = Js^2/m^2 = Ns^2/m^2 = VAs^3/m^2$
Sila	F	kcal/m	z	$N = kg\,m/s^2 = J/m = VAs/m$
Toplinska snaga	Φ, P	kcal/s	z	$W = J/s = kg\,m^2/s^3 = VA$
Tlak	p	$kcal/m^3$	z	$N/m^2 = J/m^3 = kg/(m\,s^2) = VAs/m^3$
Specifični volumen	v	$\frac{m^5}{s^2\,kcal}$	$\frac{1}{z}$	$\frac{m^3}{kg} = \frac{m^5}{s^2\,J} = \frac{m^5}{s^3\,VA}$
Specifična entropija	s	$\frac{m^2}{sK}$	1	$\frac{J}{K\,kg} = \frac{VAs}{K\,kg} = \frac{m^2}{Ks^2}$
Specifična entalpija	i	m^2/s^2	1	$J/kg = VAs/kg = m^2/s^2$
Specifična toplinska vodljivost	λ	$\frac{kcal}{K\,s\,m}$	z	$\frac{W}{K\,m} = \frac{kg\,m}{Ks^3} = \frac{VA}{Km}$
Koeficijent prijelaza topline	α	$\frac{kcal}{K\,s\,m^2}$	z	$\frac{W}{Km^2} = \frac{kg}{Ks^3} = \frac{VA}{Km^2}$

Opaska: Faktor z iznosi $z = 4186{,}8$, jer je kcal = 4186,8 J (vidi odlomak 5.2.2). *Primjer:* Jedinica sile $kcal/m = z \cdot N = 4186{,}8$ N.

Primjer. Pogledajmo kako bi se računalo s jedinicama sistema jedinica »msKkcal«. Neka je u nekom spremniku zatvoren zrak temperature 27 °C. Na neki se način saznalo da je umnožak $pV = 2060$ kcal. Treba ustanoviti kolika je masa m zraka u spremniku.

Poslužit ćemo se jednadžbom stanja $pV = mRT$. Iz tablica znamo da je za zrak $R = 287\ \mathrm{J/(kg\,K)} = 287\ \mathrm{m^2/s^2K}$. Budući da je $\vartheta = 27\,^\circ\mathrm{C}$, termodinamička je temperatura približno $T = 300$ K. S ovim vrijednostima jednadžba stanja daje

$$m = \frac{pV}{RT} = \frac{2060\,\mathrm{kcal}}{287\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2K}} \cdot 300\,\mathrm{K}} = 0{,}0239\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m^2/s^2}}.$$

Tolika je, dakle, *masa* plina; $\mathrm{kcal\,s^2/m^2}$ jest, naime, jedinica mase u ovom koherentnom sistemu jedinica (vidi tablicu D-23).

Naravno da o vrijednosti mase 0,0239 $\mathrm{kcal\,s^2/m^2}$ nemamo nikakve predodžbe, jer smo navikli masu mjeriti kilogramima. Budući da je, kako smo ranije vidjeli, $\mathrm{kcal\,s^2/m^2} = 4186{,}8$ kg, to gornji rezultat izražen u jedinicama SI iznosi

$$m = 0{,}0239 \cdot 4186{,}8\ \mathrm{kg} = 100\ \mathrm{kg}!$$

Ovim sistemom jedinica »msKkcal« *nitko se ne služi*, niti se služio, iako je to pravi koherentni »toplinski« sistem jedinica. Unatoč tomu ovdje smo ga razmotrili kako bismo mogli jasno shvatiti stvarno upotrebljavani nekoherentni skup jedinica koji se u termodinamici naziva »Tehnički sistem jedinica«.

5.1.2. Tehnički »sistem« jedinica nauke o toplini nesretna je kombinacija Tehničkog sistema jedinica mehanike (vidi odsječak B.8.1) i *dviju* osnovnih jedinica nauke o toplini, kilokalorije i kelvina. Stoga je taj sistem »predimenzioniran« osnovnim jedinicama, jer ih ima čak *pet*. To su jedinice ovih veličina:

jedinica duljine l:	metar (m)
jedinica vremena t:	sekunda (s)
jedinica sile F:	kilopond (kp)
jedinica termodinamičke temperature T:	kelvin (K),
jedinica topline Q:	kilokalorija (kcal).

Budući da sustav jednadžbi nauke o toplini zahtijeva samo *četiri* polazne veličine, dakle i četiri osnovne jedinice, primjena sistema s pet osnovnih jedinica morala je biti nekako razgraničena, tako da se za »mehaničke veličine« upotrebljava Tehnički sistem jedinica mehanike (odsječak B.8.1), a za »toplinske veličine« jedinice K i kcal. Naravno da u skladu s osnovima formiranja sistema jedinica (vidi odsječak A.5.1) takav nesistematičan, predimenzioniran i nekoherentan skup jedinica nema pravo na naziv »sistem jedinica«. U pomanjkanju prave terminologije ovdje ga ipak nazivamo sistemom, iako pri tom mislimo na »sistem«.

Taj »petorni sistem« upotrebljavao se do prihvaćanja univerzalnog Međunarodnog sistema jedinica u tehničkoj termodinamici. Ni fizičari, međutim, nisu imali boljeg sistema, samo su umjesto kilokalorije upotrebljavali kaloriju (cal = = kcal/1000), tj. tzv. »malu kaloriju«. Uz ostale loše posljedice, takav »petorni sistem« osnovnih jedinica uzrokuje pojavljivanje »ekvivalenata« koje smo razmotrili u odsječku 4.2.2.

Vještina primjene ovog sistema jedinica je u tome da se one veličine koje se mjere termometrom i klasičnim kalorimetrom izražavaju kelvinom i kilokalorijom, a sve ostale metrom, sekundom i kilopondom. Pregled upotrebe tih jedinica vidimo u tablici D-24, gdje je u posljednjem stupcu navedeno koliko Međunarodnih jedi-

Tablica **D-24**

Neke jedinice Tehničkog »sistema« nauke o toplini

Naziv veličine	Simbol	Jednadžba	Jedinica Tehničkog »sistema«		Jedinica Tehničkog »sistema« izražena u jedinicama SI
			Naziv	Kratica	
Temperatura	T, ϑ	$T = 273{,}15\ \mathrm{K} + \vartheta$	kelvin	K	$= 1\ \mathrm{K}$
Toplina	Q	$Q = c' G \Delta\vartheta$	kilokalorija	kcal	$= 4186{,}8\ \mathrm{J}$
Rad, energija	W	$W = pV$	kilopondmetar	kpm	$= 9{,}80665\ \mathrm{J}$
Težina, sila	G, F	$W = Gh$	kilopond	kp	$= 9{,}80665\ \mathrm{N}$
Toplinska snaga	Φ, P	$Q = \Phi t$	—	$\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}}$	$= 1{,}163\ \mathrm{W}$
Tlak	p	$F = pA$	—	$\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m^2}}$	$= 9{,}80665\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}$
Specifični volumen	v'	$V = v' G$	—	$\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kp}}$	$= 0{,}102\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{N}}$
Specifična toplina	c'	$Q = c' G \Delta T$	—	$\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kp\,K}}$	$= 427\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{N\,K}}$
Specifična entalpija	i'	$I = Gi'$	—	$\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kp}}$	$= 427\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{N}}$
Plinska konstanta	R'	$pV = R' G T$	—	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{K}}$	$= 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{K}}$
Specifična toplinska vodljivost	λ	$\Phi = \lambda A \Delta T / l$	—	$\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{s\,K\,m}}$	$= 4186{,}8\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\,m}}$
Koeficijent prijelaza topline	α	$\Phi = \alpha A \Delta T$	—	$\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{s\,K\,m^2}}$	$= 4186{,}8\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\,m^2}}$

Primjer: kcal/kp = 427 J/N = 427 m, jer je J = Nm = newton × metar.

I angloamerički svijet ima nešto slično kaloriji. To je tzv. British thermal unit, Btu (tj. britanska jedinica topline). Ona je u anglosaskom jezičnom području uzrokovala, a i još uvijek uzrokuje slične neprilike kao kalorija u ostalom svijetu. Stoga ćemo u odsječku 5.4 obraditi i nekoliko jedinica topline poznatih pod zajedničkim imenom Btu.

5.2.2. Kalorija parnih tablica od godine 1956. Godine 1929. održano je u Londonu prvo zasjedanje Međunarodne konferencije o svojstvima vodene pare (International Steam Table Conference). Ta je Konferencija na prijedlog *Jakoba* odlučila da se uvede »kilokalorija parnih tablica« $\mathrm{kcal_{IT}}$, definirana kao točno određeni dio jedinice kilovatsat:

$$\mathrm{kcal_{IT}} = \frac{1}{860}\,\mathrm{kW_0h}. \qquad (5.2\text{-}2)$$

U ovoj jednadžbi stavili smo jedinici W = watt indeks 0, dakle W_0, jer je Konferencija svoju odluku temeljila na vatu Internacionalnog sistema jedinica elektromagnetizma (zvan i Tehnički sistem). Taj sistem obradili smo u odsječku E.5.3 pod naslovom »Tehnički sistem jedinica elektromagnetizma«. Indeks IT uz gornju kilokaloriju potječe od engleskog, odnosno francuskog i njemačkog naziva Konferencije i tamo prihvaćene jedinice: **I**nternational Steam **T**able Unit (Internacionalna jedinica parnih tablica). Upotrebljava se i indeks ST (od **S**team **T**able), pa je dakle $\mathrm{kcal_{IT}} = \mathrm{kcal_{ST}}$. Ovaj drugi indeks gotovo se isključivo upotrebljava u angloameričkom jezičnom području. Budući da je k = kilo = 1000, jednadžba (5.2-2) može se pisati i u obliku

$$\mathrm{cal_{IT}} = \frac{1}{860}\,\mathrm{W_0h} \quad \text{ili} \quad \mathrm{W_0h} = 860\,\mathrm{cal_{IT}}.$$

Umjesto indeksa 0 u literaturi nalazimo i indeks int, dakle $W_0 = W_{int}$.

Kalorija i kilokalorija parnih tablica $\mathrm{cal_{IT}}$ i $\mathrm{kcal_{IT}}$ našle su na široku primjenu u toplinskoj tehnici, energetici te u drugim granama znanosti i tehnike. Budući da su bile direktno vezane na »elektrotehničku« jedinicu kilovatsat ($\mathrm{kW_0h}$), nazivali su je i »električka«, »elektrotehnička«, te »međunarodna« kalorija. Međunarodna energetska konferencija, održana godine 1930. u Berlinu, također je preporučila »međunarodnu kaloriju« (tj. $\mathrm{kcal_{IT}}$) za primjenu u toplinskoj energetici.

Generalna konferencija za mjere i utege donijela je, međutim, na svom devetom zasjedanju godine 1948. odluku da se od tzv. tehničkih jedinica elektromagnetizma prijeđe na tzv. apsolutne jedinice (vidi poglavlje E.5) i pri tom propisala odnose

$$V_0 = 1{,}000\,34\ \mathrm{V}; \qquad \Omega_0 = 1{,}000\,49\ \Omega,$$

a slijedom toga je joule (J) današnjeg sistema jedinica SI (Système International d'Unités) vezan sa starom »praktičkom« (»tehničkom«) jedinicom J_0 ovako:

$$J_0 = W_0 s = \frac{V_0^2 s}{\Omega_0} = \frac{(1{,}000\,34\ \mathrm{V})^2 s}{1{,}000\,49\ \Omega} = 1{,}000\,19\ \mathrm{J},$$

jer je današnji joule dakako J = Ws = Nm (točno).

S ovim podacima možemo uspostaviti vezu između kalorije parnih tablica $\mathrm{cal_{IT}}$ i joulea (J). U tu svrhu poslužimo se jednadžbom (5.2-2), u njoj kratimo de-

nica SI sadrži jedna jedinica Tehničkog »sistema«. Ni sekunda *nije* dosljedno primjenjivana. Za specifičnu toplinsku vodljivost λ i koeficijent prijelaza topline α tehničari su se uglavnom služili jedinicom vremena sat = h, jer su navodno na taj način dobivali prikladnije brojčane iznose.

Sažmimo ovo kratko izlaganje o Tehničkom »sistemu« jedinica u nauci o toplini: temelji se na pet ili čak šest (sat = h!) osnovnih jedinica i zahtijeva podjelu veličina na »mehaničke« i »toplinske«. U skladu s time mjeri npr. silu jedinicom kilopond, a toplinsku snagu jedinicom kcal/h itd. (vidi tablicu D-24). Posljedica svega toga su nepregledni, dugotrajni i nesigurni (opasnost od pogrešaka) proračuni toplinskih procesa te njihova izoliranost od drugih grana tehnike i znanosti (vidi npr. odsječak 6.3), jer je izbor takvog nesistematičnog skupa jedinica u praksi uzrokovao primjenu *brojčanih* jednadžbi (o njihovim nedostacima vidi u odsječku A.1.4). Unatoč tome još se i danas u redovima tehničkih stručnjaka nađu vatreni zagovarači tog »sistema« jedinica. Sic!

5.1.3. Angloamerički Tehnički »sistem« jedinica. I angloamerički svijet ima sličan Tehnički »sistem« jedinica nauke o toplini s ovom osnovom:

jedinica duljine l:	foot (ft)
jedinica vremena t:	second (s)
jedinica sile F:	pound-force (lbf)
jedinica termodinamičke temperature T:	degree Rankine (°R)
jedinica topline Q:	British thermal unit (Btu)

O tim i drugim angloameričkim jedinicama kao i o njihovu odnosu prema jedinicama SI podrobno se govori u nastavku ovog poglavlja 5 te u poglavlju 6.

5.2. Kalorija parnih tablica i kalorija petnaestog stupnja

5.2.1. Općenito o kalorijama. U prethodnim odlomcima ove glave mnogo smo puta računali s kalorijom i kilokalorijom, a u odlomku 5.1.1 odabrali smo je čak i za jednu od osnovnih jedinica jedinog koherentnog, dakle pravog starijeg *sistema* jedinica nauke o toplini. Kilokaloriju, tj. kcal = 1000 cal, *definirali* smo odnosom

$$\text{kcal} = 4186{,}8 \text{ joule}, \tag{5.2-1}$$

jer jedino takvu kilokaloriju *danas* dopuštaju zakoni pojedinih država. Pri tom je broj 4,1868 *apsolutno točan*, propisan zakonima i standardima. *To znači da su kcal i cal samo stanoviti višekratnik joulea, i to nedekadski*!

Iz stručne literature, naročito starije, znamo da postoji *nekoliko različitih* kalorija odnosno kilokalorija. Sve one, osim cal = 4,1868 J, danas nisu dopuštene u javnoj upotrebi, ali se, dakako, nalaze u starijoj literaturi. Zadatak je narednih odlomaka da letimično prikažu odnose tih različitih kalorija prema jedinici joule, jer je poznavanje tih odnosa potrebno pri upotrebi podataka navedenih u starijim knjigama i tablicama. U narednim razmatranjima ujedno će se i osjetiti dio razvojnog puta nauke o toplini, koja je svoju kaloriju stalno iznova prilagođavala trenutnom stanju toplinske metrologije.

kadski višekratnik k = kilo, upotrijebimo odnos h = 3600 s i $J_0 = 1{,}000\,19$ J. Na taj način od izraza (5.2-2) dobivamo

$$\text{cal}_{\text{IT}} = \frac{3600}{860}\ 1{,}000\,19\ \text{J} = 4{,}1868\ \text{J (tačno)},$$

odnosno 1000 puta veću jedinicu

$$\text{kcal}_{\text{IT}} = 4186{,}8\ \text{J (tačno)}. \qquad (5.2\text{-}3)$$

Ovdje je J = joule = Nm (newton × metar) jedinica energije u Međunarodnom sistemu jedinica (SI; vidi odsječke B.5.2, B.7.2 i D.4.1).

Vidimo da je (5.2-3) onaj *isti* odnos kcal = 4186,8 J koji smo u obliku jednadžbe (5.2-1) naveli kao zakonom propisani odnos između kilokalorije i joulea! Ujedno vidimo i to da *propisivanje apsolutno tačnog broja* 4186,8 *znači da kalorija nije više vezana na toplinska svojstva vode, već je samo nedekadski višekratnik jedinice joule.*

Stoga je Međunarodna konferencija o svojstvima vodene pare, na svom petom zasjedanju godine 1956. u Londonu, potvrdila neophodnost primjene jedinice joule za jedinicu količine topline. Osim toga na toj je konferenciji zaključeno da se pri sastavljanju jedinstvenih tablica o vodenoj pari prvenstveno upotrebljava jedinica joule. Time je na djelu potvrđen zaključak četvrtog zasjedanja Konferencije, održanog u Philadelphiji godine 1954, gdje je već bilo zaključeno da treba prijeći na primjenu jedinice joule. Originalni tekst odgovarajuće rezolucije petog zasjedanja Međunarodne konferencije o svojstvima vodene pare (1956) glasi:

Resolution 1: *The heat unit*
It is resolved

1. *To note that*, in accordance with the decision of the 9th Conférence Générale des Poids et Mesures, 1948, the joule (i.e. the absolute joule of exactly ten million ergs) is the basic unit of heat, 1 J = 1 Ws = 10^7 erg.

2. *To confirm that*, in accordance with the resolution of the Steam Table Conference held in Philadelphia in 1954, the unit adopted for the international comparision of data relating to the thermodynamic properties of steam is, for specific enthalpy, the joule per gramme, or, what is the same thing, the kilojoule per kilogramme, 1 J/g = 1 kJ/kg.

3. *To recommend that* the joule and decimally related units be given the widest use.

4. *To record that* in addition to the erg and the joule, other recognised heat units are: a) decimal multiples and submultiples of the erg and of the joule, b) the international table calorie (cal_{IT}) as defined below, c) the international table British thermal unit (Btu_{IT}) as defined below.

5. *To redefine* the international table calorie by: 1 international table calorie = 4,1868 joule, i.e. 1 cal_{IT} = 4,1868 J, exactly.

6. *To define* the international table British thermal unit by: 1 international table British thermal unit per pound = 2,326 joule per gramme, i.e. 1 Btu_{IT}/lb = 2,326 J/g, exactly.

Na istom je zasjedanju Međunarodne konferencije o svojstvima vodene pare prihvaćena i rezolucija 2 »Referentno stanje i osnovne vrijednosti parnih tablica« (Reference state and base values in Steam tables), u kojoj se odlučuje: 1. Referentno stanje treba da bude stabilna tačka. 2. Novo referentno stanje za vodu je tekuća faza pri trojnoj tački čiste vode. 3. Pri ovom novom referentnom stanju vrijednost entropije i unutrašnje energije treba da iznosi tačno nula.

5.2.3. Kalorija petnaestog stupnja. Naziv »kalorija« vjerojatno su godine 1859. uveli *Favre* i *Silbermann*. Pod time se razumijevala količina topline koja je potrebna da se 1 gram *vode* zagrije za 1 °C (o jedinicama temperature vidi poglavlje

3, a posebno odlomak 3.4.1). Pri tom se u početku pretpostavljalo da specifična toplina vode ne ovisi o temperaturi. To je uzrokovalo pomutnju, jer se rezultati toplinskih istraživanja raznih autora nisu mogli međusobno uspoređivati: oni su eksperimentirali pri različitim, manje-više proizvoljno odabranim temperaturama. Pošto je utvrđena temperaturna ovisnost specifične topline, trebalo je definirati temperaturni interval zagrijavanja vode. U tom razdoblju nastao je čitav niz »kalorija«, od kojih ćemo spomenuti samo neke, one koje se najčešće nalaze u starijoj literaturi.

»Kalorija petnaestog stupnja« (cal_{15}) bila je definirana kao ona količina topline koja je potrebna da se 1 gram vode pri normiranom atmosferskom tlaku ($p_0 = 1\,\mathrm{atm}$) zagrije od 14,5 °C do 15,5 °C. Analogno tome je 1000 puta veća jedinica $\mathrm{kcal}_{15} = 1000\ \mathrm{cal}_{15}$ bila definirana kao ona količina topline koja je potrebna da se 1 kilogram vode pod istim uvjetima zagrije za 1 °C u istom rasponu temperatura (za ove jedinice postojali su i drugi nazivi: cal = »mala kalorija« = »gram-kalorija«, kcal = »velika kalorija« = »kilogram-kalorija«). Prema tome su cal_{15} i kcal_{15} u biti bile definirane vrijednošću specifične topline vode $c_{15}(p_0, \mathrm{H_2O})$ pri srednjoj temperaturi $\vartheta = 15\,°\mathrm{C}$ i normiranom tlaku $p_0 = 1\,\mathrm{atm}$, jer su se definicije izvodile iz jednadžbe $Q = cm\Delta\vartheta$ (vidi odlomak 2.3.3).

Time je, dakako, učinjena pogreška, jer se specifična toplina vode *c mijenja* i u rasponu 15,5 °C ... 14,5 °C (vidi tablicu D-25). Međutim najpreciznija mjerenja su pokazala da je vrijednost omjera

$$\frac{\int c(p_0, \mathrm{H_2O})\,\mathrm{d}\vartheta}{\Delta\vartheta \cdot c_{15}(p_0, \mathrm{H_2O})} = 1{,}000\,001,$$

što znači da vrijednost c_{15} odstupa od stvarne vrijednosti s relativnom pogreškom $1 \cdot 10^{-6}$. U gornjoj jednadžbi integral ima donju granicu 14,5 °C, a gornju 15,5 °C, dok je $\Delta\vartheta = 1\,°\mathrm{C}$.

Ovih 10^{-6} je, međutim, stotinu ili čak dvije stotine puta bolje od relativne nepouzdanosti s kojom možemo poznavati vrijednost $c_{15}(p_0, \mathrm{H_2O})$. Niz najpreciznijih mjerenja, obavljenih između godine 1941. i 1950. u velikim metrološkim zavodima pokazalo je, naime, da se specifična toplina vode pri 15 °C i 1 atm poznaje s relativnom nepouzdanošću $\pm 2 \cdot 10^{-4}$, odnosno u apsolutnom iznosu

$$c_{15}(p_0, \mathrm{H_2O}) = (4{,}1855 \pm 0{,}0008)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\,°C}},$$

a to znači da se i stvarna vrijednost »kalorije petnaestog stupnja« kreće između 4,1847 J i 4,1863 J. Prema tome, kad u publikacijama nalazimo da je

$$\mathrm{cal}_{15} = 4{,}1855\ \mathrm{J}; \quad \mathrm{kcal}_{15} = 4185{,}5\ \mathrm{J},$$

valja držati na umu da je pri tom relativna nepouzdanost $\pm 2 \cdot 10^{-4}$!

Godine 1950. izdao je Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM) podatke o najvjerojatnijim vrijednostima specifične topline vode pri $p_0 = 1$ atm za područje 0 °C do 100 °C. U tablici D-25 donosimo dio tih podataka za područje od 0 °C do 29 °C, jer je to područje interesantno u vezi s definicijama različitih kalorija (pri različitim temperaturama) kao i britanskih toplinskih jedinica (Btu; vidi odsječak 5.4). Vrijednosti specifične topline vode u tablici D-25 rezultat su spomenutih

dugogodišnjih najpreciznijih mjerenja u bogato opremljenim državnim metrološkim zavodima, a relativna nepouzdanost podataka je u rasponu $\pm (1...2) \cdot 10^{-4}$.

Tablica **D-25**

Vrijednosti specifične topline vode pri tlaku 1 atm prema podacima CIPM

ϑ °C	c J/(g °C)	ϑ °C	c J/(g °C)	ϑ °C	c J/(g °C)
0	4,2174	10	4,1919	20	4,1816
1	4,2138	11	4,1904	21	4,1810
2	4,2104	12	4,1890	22	4,1805
3	4,2074	13	4,1877	23	4,1801
4	4,2045	14	4,1866	24	4,1797
5	4,2019	**15**	**4,1855**	25	4,1793
6	4,1996	16	4,1846	26	4,1790
7	4,1974	17	4,1837	27	4,1787
8	4,1954	18	4,1829	28	4,1785
9	4,1936	19	4,1822	29	4,1783

Budući da je »kalorija petnaestog stupnja« vezana na preciznost toplinskih mjerenja, odnos cal_{15} prema jedinici joule mijenjao se u toku vremena. Tako se npr. u razdoblju između 1921. i 1929. smatralo da je $\text{cal}_{15} = 4{,}1841$ J, a prema istraživanjima između 1938. i 1941. da je $\text{cal}_{15} = 4{,}1858$ J. Današnja vrijednost $\text{cal}_{15} = 4{,}1855$ J sigurno će se promijeniti u skladu s napretkom toplinske mjerne tehnike, odnosno barem smanjiti nepouzdanost poznavanja te vrijednosti.

5.2.4. Jedinice thermie i frigorie. Francuzi su svojedobno propagirali sistem jedinica MTS (polazne jedinice duljine, mase i vremena: metar, tona, sekunda; vidi odsječak B.8.3), a u okviru primjene tog sistema na nauku o toplini upotrebljavali su jedinice količine topline »thermie« (kratica: th) i »frigorie« (fr), koje su imale za osnovu kcal_{15}:

$$\text{thermie (th)} = 1000\ \text{kcal}_{15} = 10^6\ \text{cal}_{15},$$

$$\text{frigorie (fr)} = 0{,}001\ \text{th} = \text{kcal}_{15}.$$

To znači da su jedinicu količine topline thermie definirali kao onu toplinu koja je potrebna da se jedna tona vode pri $p_0 = 1$ atm zagrije od 14,5 °C do 15,5 °C.

5.3. Ostale kalorije i usporedba različitih kalorija

Unatoč tome što je umjesto mnogobrojnih kalorija međunarodno prihvaćena jedinica topline joule, u narednim ćemo odlomcima kratko obraditi neke od važnijih, tj. češće upotrebljavanih »kalorija«. To je potrebno zato da bi se u primjeni moglo koristiti rezultatima koji su navedeni u različitim starijim djelima, odnosno i u novijima koja upotrebljavaju zastarjele jedinice poznate pod zajedničkim nazivom »kalorija«.

5.3.1. Srednja kalorija definirana je kao stoti dio one količine topline koja je potrebna da se jedan gram vode pri normiranom tlaku $p_0 = 1$ atm zagrije od temperature 0 °C na temperaturu 100 °C. Srednju kaloriju označujemo sa cal_s ili $\overline{\text{cal}}$, dakle sa crtom iznad cal. (Neki su autori označivali srednju kaloriju znakom K,

dakle $cal_s = K$.) Isto vrijedi i za 1000 puta veću jedinicu $kcal_s = 10^3\ cal_s$. Prema tome je $kcal_s$ proporcionalna srednjoj vrijednosti specifične topline vode u intervalu $\vartheta_0 = 0\,°C$ i $\vartheta_v = 100\,°C$, a definirana je jednadžbom

$$cal_s = \frac{1}{\vartheta_v - \vartheta_0} \int c(p_0, H_2O)\, d\vartheta, \qquad (5.3\text{-}1)$$

gdje su granice integrala temperature ledišta i vrelišta vode. Najpreciznija mjerenja i proračuni dali su rezultate

$$cal_s = 4{,}1897\ J; \qquad kcal_s = 4189{,}7\ J,$$

čija je relativna nepouzdanost u granicama $(1...2)\cdot 10^{-4}$.

5.3.2. Termokemijska kalorija. Ova kalorija, koja se naziva i *Rossini*jeva kalorija, jer ju je *Rossini* godine 1931. uveo u američkom National Bureau of Standards, pretežno se upotrebljava u USA. Njena oznaka je $cal_{thermochem}$ ili kraće cal_t. Rossinijeva kalorija prvenstveno se upotrebljava pri razmatranju termokemijskih ravnoteža, a osniva se na primarnim (apsolutnim) standardima električkih veličina u National Bureau of Standards (NBS). To znači da je cal_t bila ovako definirana u odnosu prema jouleu (NBS) $= J_{NBS}$:

$$cal_t = 4{,}1833\ J_{NBS}.$$

Napominjemo da je ovaj priključak kalorije na električke jedinice učinjen prije nego što je godine 1948. Generalna konferencija za mjere i utege definitivno utvrdila odnose između »tehničkih« i »apsolutnih« (SI) jedinica elektromagnetizma (vidi poglavlje E.5).

Budući da je tadašnji američki joule (NBS) bio 1,000165 puta veći od današnjeg univerzalnog joulea ($J = Nm = Ws = kgm^2/s^2 = VA$), to je $J_{NBS} = 1{,}000165 \cdot J$, pa je dakle

$$cal_t = 4{,}184\ J; \qquad kcal_t = 4184\ J,$$

što je zaokruženi brojčani iznos 4,18399 (zaokruženje je izveo NBS).

5.3.3. Usporedba različitih kalorija. U dosadašnjem izlaganju obrazložili smo ili spomenuli niz starijih jedinica količine topline pod zajedničkim imenom »kalorija«:

$$cal = cal_{IT},\quad cal_{15} = \text{frigorie},\quad cal_s,\quad cal_t.$$

Zajedno s njima pojavljuju se i tisuću puta veće jedinice koje nose prefiks k = kilo

Tablica **D-26**

Dvostrani odnosi među različitim jedinicama količine topline

	J	cal	cal_{15}	cal_t	Btu
joule =	1	0,238846	0,238920	0,239006	$9{,}4781\cdot 10^{-4}$
cal =	4,1868	1	1,00031	1,00067	$3{,}96829\cdot 10^{-3}$
cal_{15} =	4,1855	0,99969	1	1,00036	$3{,}96706\cdot 10^{-3}$
cal_t =	4,1840	0,99933	0,99964	1	$3{,}96564\cdot 10^{-3}$
Btu =	1055,06	251,996	252,075	252,166	1

Opaska: $cal = cal_{IT}$, cal_t = termokemijska kalorija, $Btu = Btu_{ST}$.

(iznimka je thermie = $kcal_{15}$). Uz te kalorije bilo ih je u prošlosti još nekoliko, koje možemo samo spomenuti: »kalorija nultog stupnja« (cal_0), »kalorija četvrtog stupnja« (cal_4) i »kalorija dvadesetog stupnja« (cal_{20}), gdje se broj odnosi na broj °C pri kojoj temperaturi vode je takva kalorija definirana. Bitno različita od njih je »kalorija plinske konstante« ($cal^* = 1{,}00027 \cdot cal_{15}$; relativna nepouzdanost oko $\pm 2 \cdot 10^{-4}$), koja proizlazi iz vrijednosti univerzalne plinske konstante $R_0 = 1{,}9860$ $cal^*/(K\ mol_K)$. Ovdje *indeks* K upućuje na kemijsku skalu relativne atomske mase (vidi odlomak 1.2.4).

Dvostrane odnose među različitim jedinicama količine topline svrstali smo u tablicu D-26. Dodali smo i British thermal unit (Btu) o kojoj se govori u narednom odsječku 5.4. Primjena tablice je očigledna: npr. J = 0,238 446 cal, dok je obrnuto cal = 4,1868 J.

5.4. Angloameričke jedinice topline

U engleskom govornom području upotrebljavale su se, a i sada se još dosta upotrebljavaju, posebne jedinice količine topline poznate pod nazivom British thermal unit, Btu (tj. britanska jedinica topline). One su prilagođene specifičnostima angloameričkih sistema jedinica. U ovom slučaju te su specifičnosti: upotreba jedinice mase pound (kratica: lb; vidi odlomak B.11.1.3) te upotreba Fahrenheitove termodinamičke skale i pripadne jedinice stupanj Fahrenheita, °F = °R (vidi odsječak 3.4).

Jedinice Btu engleski su analogon metričkih kalorija. Iz istih razloga ima ih čitav niz. Ovdje ćemo obraditi samo neke od njih, tj. one koje se danas pretežno susreću u trgovačkim i tehničkim dodirima između angloameričkog jezičnog područja i ostalog svijeta. Pri tom ćemo upotrebljavati kraticu

Btu = British thermal unit,

što je u skladu s britanskim zakonodavstvom od godine 1963. (vidi odlomak B.11.1.6). U starijoj angloameričkoj literaturi čitalac će obično umjesto kratice »Btu« nalaziti »BTU«, dakle sva tri slova velika.

5.4.1. Steam Table British thermal unit, Btu_{ST}. Na onoj istoj Međunarodnoj konferenciji o svojstvima vodene pare, koju smo spomenuli u odlomku 5.2.2 (vidi citiranu rezoluciju 1), definirana je i jedinica Btu_{ST} = Steam table British thermal unit (tj. britanska toplinska jedinica parnih tablica). Definicijska jednadžba glasi

$$\frac{cal_{IT}}{g} = \frac{°C}{°F}\,\frac{Btu_{ST}}{lb}, \tag{5.4-1}$$

gdje je lb kratica za angloameričku jedinicu mase pound = lb = 0,453 592 37 kg (vidi odlomak B.11.1.3), °C i °F su jedinice Celzijeve i Fahrenheitove termodinamičke temperaturne skale, a g je kratica jedinice mase gram. Budući da je °C = = 1,8 °F (vidi odsječak 3.4), od jednadžbe (5.4-1) dobivamo (vidi odsječak B.5.3)

$$Btu = Btu_{ST} = 1055{,}06\ J = 1{,}055\,06\ kJ,$$

$$Btu = Btu_{ST} = 251{,}996\ cal_{IT} = 251{,}996\ cal.$$

Ovdje smo već uzeli u obzir odbacivanje indeksa IT uz kaloriju, što smo obrazložili u odlomku 5.2.2. Analogno smo izjednačili: $Btu = Btu_{ST}$, jer indeks ST ima u engleskom govornom području isto značenje kao i IT u ostalom svijetu (Steam Table). Iz gornjih relacija vidimo da je Btu samo nešto preko 5 % veća od kilojoulea (kJ).

Dvostrane odnose jedinice Btu prema ostalim jedinicama količine topline sadrži tablica D-26 u odlomku 5.3.3.

5.4.2. Mean British thermal unit, Btu_{mean}. Ova jedinica definirana je uz pomoć kilokalorije petnaestog stupnja ($kcal_{15}$; vidi odlomak 5.2.3), analogno kao i srednja kalorija cal_s u jednadžbi (5.3-1), tj.

$$Btu_{mean} = \frac{\int c(p_0, H_2O)\,d\vartheta}{(\vartheta_v - \vartheta_0)\cdot c_{15}(p_0, H_2O)} \frac{lb}{kg}\frac{°F}{°C} kcal_{15}.$$

Pri tom su granice integrala $\vartheta_0 = 0\,°C$ ($\vartheta_F = 32\,°F$) i $\vartheta_v = 100\,°C$ ($\vartheta_{Fv} = 212\,°F$), tj. temperature ledišta i vrelišta vode. Ostale oznake su kao u odlomku 5.3.1. Veličina $c(p_0, H_2O)$ je temperaturno zavisna specifična toplina vode čije su vrijednosti djelomično skupljene u tablici D-25. Vrijede ovi odnosi jedinice Btu_{mean} prema nekim drugim jedinicama količine topline:

$$Btu_{mean} = 1055{,}79\ J, \qquad Btu_{mean} = 1{,}000\,70\ Btu,$$

$$Btu_{mean} = 252{,}168\ cal_{IT}, \qquad Btu_{mean} = 252{,}249\ cal_{15}.$$

U prva tri slučaja relativna nepouzdanost navedenih vrijednosti kreće se u rasponu $\pm (1...2)\cdot 10^{-4}$, dok je u četvrtom $\pm (1...2)\cdot 10^{-5}$.

5.4.3. Ostale angloameričke jedinice topline. Pored navedene dvije British thermal unit, u anglosaskom svijetu postoji još niz jedinica količine topline, od kojih ćemo letimično razmotriti samo one koje smatramo najvažnijima, tj. one koje se ipak ponekad pojavljuju u stručnoj literaturi ili u trgovačko-industrijskim odnosima.

Btu_{39}. To je zapravo $Btu_{39,2}$, gdje broj 39,2 označuje Fahrenheitovu temperaturu $\vartheta_F = 39{,}2\,°F$, kojoj odgovara Celzijeva temperatura $\vartheta = 4\,°C$. Jedinica Btu_{39} definirana je u odnosu prema $kcal_{15}$ ovako:

$$Btu_{39} = \frac{c_4(p_0, H_2O)}{c_{15}(p_0, H_2O)} \frac{lb}{kg}\frac{°F}{°C} kcal_{15} = 0{,}253\,14\ kcal_{15} = 1054{,}5\ J.$$

Ovdje indeksi uz c označuju da je riječ o Celzijevoj temperaturi 4 °C, odnosno 15 °C. Relativna nepouzdanost omjera $Btu_{39}/kcal = 0{,}253\,14$ iznosi $\pm 2\cdot 10^{-5}$.

Btu_{60}. To je zapravo Btu pri $\vartheta_F = 60{,}5\,°F$, čemu odgovara Celzijeva temperatura $\vartheta = 15{,}83\,°C$, pa je definicija

$$Btu_{60} = \frac{c_{15,83}(p_0, H_2O)}{c_{15}(p_0, H_2O)} \frac{lb}{kg}\frac{°C}{°F} kcal_{15} = 0{,}251\,95\ kcal_{15}.$$

Relativna nepouzdanost rezultata također je $\pm 2\cdot 10^{-5}$.

Jedinstvena Btu. U nastojanju da se smanji broj različitih Btu, British Standard Institution preporučila je godine 1952. da se upotrebljava *jedinstvena* British thermal unit (kratica: B.th.u.) definirana jednadžbom

$$B.th.u. = 4186{,}8\ J \frac{lb}{kg}\frac{°F}{°C}.$$

Usporedimo li ovaj izraz s jednadžbom (5.4-1), vidimo da je to u stvari $Btu_{ST} =$ = Steam Table British thermal unit, jer je prema izvođenju u odlomku 5.2.2 cal = $= cal_{IT} = 4{,}1868$ J. S relativnom nepouzdanošću $(1...2)\cdot 10^{-4}$ vrijedi, dakako, i odnos $B.th.u. = Btu_{ST} = 0{,}252\,07\ kcal_{15}$.

CTU ili **CHU.** Uz jedinice Btu upotrebljavale su se u engleskom jezičnom području jedinice koje se baziraju na specifičnoj toplini vode i na *centezimalnoj Celzijevoj temperaturnoj skali.* Ove su se jedinice nazivale Centigrade thermal unit (CTU) ili Centigrade heat unit (CHU). Međusobno se CHU razlikuju prema temperaturi pri kojoj su definirane: CHU_{15} odnosi se na temperaturni interval od 14,5 °C do 15,5 °C, a CHU_{mean} na interval od 0 °C do 100 °C. Te jedinice bile su definirane jednadžbom

$$\frac{CHU_{15}}{kcal_{15}} = \frac{CHU_{mean}}{kcal_s} = \frac{lb}{kg} = 0{,}453\,5923.$$

Odnos između niza odgovarajućih jedinica Btu i CHU je dakako CHU/Btu = 1,8, jer je °C = 1,8 °F (vidi odlomak 3.4.3). Vrijedi odnos $CHU_{mean} = 1900{,}5$ J.

Therm ili **Therme** upotrebljava se u angloameričkom svijetu uglavnom pri proračunu stapnih parnih strojeva, a primjenjuje se u *dva* značenja: jednom kao therm = 10^5 Btu, a drugi put kao therm = 10^3 kcal!

Ton of refrigeration. Obično se ova jedinica upotrebljava kao jedinica toplinske snage (vidi odlomak 6.2.2). No postoji još i USA Standard ton of refrigeration koja je definirana sa

$$\text{Ton of refrig., U.S., std.} = 288\,000\ Btu_{ST},$$

gdje je $Btu_{ST} = 1055{,}06$ J (vidi odlomak 5.4.1).

5.5. Neke mjerne jedinice nuklearne energetike

U nuklearnoj energetici, najnovijoj grani energetike, upotrebljavaju se uz »klasične« mjerne jedinice energije (joule, kWh, kcal itd.) i neke posebne jedinice koje su nastale zbog organske povezanosti fisije atomskih jezgara i stvaranja topline u gorivu nuklearnog reaktora. U narednim odlomcima letimično ćemo spomenuti neke od tih posebnih jedinica i naznačiti njihove međusobne odnose.

5.5.1. Veličina specifični odgor (specific burnup). Izlazna snaga nuklearnog reaktora može se grubo izraziti jednadžbom

$$P = w_1 \varphi N A V, \tag{5.5-1}$$

gdje simboli označuju: w_1 — energija koja se oslobađa pri jednoj fisiji (cijepanju; ruski delenije, engl. i franc. fission, njem. Spaltung), φ — prosječna gustoća toka termalnih neutrona (vidi odlomak H.1.4.2), N — broj fisijskih atoma u jedinici volumena nuklearnog goriva (npr. jedinica $1/m^3$), A — tzv. nuklearni presjek fisije (npr. jedinica m^2/nukleus), V — volumen goriva. Vrijednost w_1 iznosi oko $3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J ≈ 200 MeV. Jednadžba (5.5-1) može se napisati i u takvom obliku da izlazna snaga reaktora P ovisi o masi nuklearnog goriva u reaktoru:

$$P = B \varphi A m. \tag{5.5-2}$$

Karakterističnu fizikalnu veličinu B, koju preinačivanjem jednadžbe (5.5-2) možemo izraziti ovako

$$B = \frac{P}{\varphi A m}, \tag{5.5-3}$$

nazivat ćemo *specifični odgor*. Do sada u hrvatskosrpskom jeziku nismo, koliko nam je poznato, imali vlastiti naziv za veličinu B; »specifični odgor« predložio je godine

1968. *V. Dabac.* Strani nazivi za *B* glase: engleski specific burnup (neki autori pišu i specific burn-up; naziv veličine recipročne *B* neki angloamerički autori nazivaju consumption rate of nuclear fuel), francuski combustion spécifique, ruski vigoranije, njemački spezifischer Abbrand.

Riječima se veličina »specifični odgor« *B* obično definira ovako: »Specifični odgor je energija koja se u nuklearnom gorivu oslobađa po jedinici njegove mase«. U skladu s izrazom »specifični odgor«, umnožak *Bm* možemo nazivati odgor (engl. burnup, njem. Abbrand).

5.5.2. Jedinica energije megavatdan (MWd). U nuklearnoj se energetici veličina »specifični odgor« pretežno izražava jedinicom MWd/t, gdje slovo d označuje jedinicu vremena dan (lat. dies, engl. day), a slovo t jedinicu mase tona. Pri tom se pod masom razumijeva masa nuklearnog goriva u kojem je uključena i masa fisijskog materijala.

Izračunajmo odnos između jedinice energije megavatdan = MWd i jedinice SI joule = J. Budući da je J = Ws, gdje je W = watt jedinica snage SI, računanjem dobivamo

$$\mathrm{MWd} = 10^6 \cdot \mathrm{W} \cdot 8{,}64 \cdot 10^4\ \mathrm{s} = 8{,}64 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}, \qquad (5.5\text{-}4)$$

jer je d = dan = 24 h = 24 · 3600 s = 8,64 · 10^4 s. Upotrijebimo li dekadski višekratnik T = tera = 10^{12} (vidi tablicu A-1), jednadžba među jedinicama (5.5-4) prelazi u oblik

$$\mathrm{MWd} = 0{,}0864\ \mathrm{TJ} \quad \text{ili} \quad \mathrm{TJ} \approx 11{,}6\ \mathrm{MWd}.$$

Prema tome jedinicu specifičnog odgora MWd/t možemo izraziti drugim jedinicama ovako

$$\frac{\mathrm{MWd}}{\mathrm{t}} = 0{,}0864 \frac{\mathrm{TJ}}{\mathrm{t}} = 86{,}4 \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{t}} = 0{,}0864 \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{kg}} \text{ itd.},$$

jer je t = 1000 kg (vidi odlomak B.3.3.2) i G = giga = 10^9. Na primjer pri iskorištenju 1 kg fisijskog materijala u 1 toni nuklearnog goriva (u tom slučaju kažemo da »iskorištenje goriva« ili »relativni odgor« iznosi 1 kg/1 t = 10^{-3} = 0,1 %) »specifični odgor« iznosi

$$B = 950 \frac{\mathrm{MWd}}{\mathrm{t}} = 950 \cdot 0{,}0864 \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{kg}} = 82 \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{kg}}.$$

Pri tom je pretpostavljena vrijednost $w_1 = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J po jednoj fisiji (vidi odlomak 5.5.1).

5.5.3. Druge jedinice odgora nuklearnog goriva. Pri izražavanju energije koja se u nuklearnim reaktorima dobiva iz goriva upotrebljavaju se uz GJ/kg, MWd/t itd. i druge jedinice koje ne predstavljaju direktno veličinu *B* iz jednadžbe (5.5-3), već veličine koje su proporcionalne *B*. Tako se na primjer upotrebljava jedinica »broj fisija po kubnom centimetru«, jedinica »%« za »relativni odgor« (vidi kraj odlomka 5.5.2) itd.

Neke od tih jedinica slabo su prikladne za primjenu u ekonomskoj ili tehničkoj interpretaciji nuklearnog goriva, jer ovise o kemijskom sastavu goriva (npr. 10^5 MWd/t oksidnog goriva ekvivalentno je oko 6 · 10^4 MWd/t metalnog), o izboru jedinice mase (tona = 1000 kg, long ton = UK ton = 1016 kg, short ton = US short ton = 907 kg; vidi tablicu **16** u prilogu knjige) kao i o tome da li se odgor odnosi

Tablica **D-27**

Mjerne jedinice odgora ekvivalentne jedinici g(f)/cm³

Mjerna jedinica	Nuklearno gorivo			
	oksidi[b])	karbidi[c])	tvrdi metali[d])	tekući metali[e])
g(f)/cm³ = kg(f)/dm³ = t(f)/t	1	1	1	1
g(f)/cm³ za »prividnu« gustoću[a])	0,95	0,95	0,80	0,95
relativni odgor teških atoma, %	12,17	9,09	6,54	25,0
MWd/t teških atoma	$1{,}141 \cdot 10^5$	$8{,}52 \cdot 10^4$	$6{,}12 \cdot 10^4$	$2{,}342 \cdot 10^5$
MWd/UK ton teških atoma	$1{,}159 \cdot 10^5$	$8{,}66 \cdot 10^4$	$6{,}22 \cdot 10^4$	$2{,}38 \cdot 10^5$
MWd/US short ton teških atoma	$1{,}035 \cdot 10^5$	$7{,}73 \cdot 10^4$	$5{,}55 \cdot 10^4$	$2{,}125 \cdot 10^5$
MWd/t goriva	$1{,}006 \cdot 10^5$	$8{,}11 \cdot 10^4$	$5{,}51 \cdot 10^4$	$1{,}005 \cdot 10^5$
MWd/UK ton goriva	$1{,}022 \cdot 10^5$	$8{,}3 \cdot 10^4$	$5{,}6 \cdot 10^4$	$1{,}02 \cdot 10^5$
MWd/US short ton goriva	$9{,}13 \cdot 10^4$	$7{,}36 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$9{,}12 \cdot 10^4$
fisija/cm³	$2{,}53 \cdot 10^{21}$	$2{,}53 \cdot 10^{21}$	$2{,}53 \cdot 10^{21}$	$2{,}53 \cdot 10^{21}$
fisija/cm³ [a])	$2{,}28 \cdot 10^{21}$	$2{,}4 \cdot 10^{21}$	$2{,}02 \cdot 10^{21}$	$2{,}4 \cdot 10^{21}$

Opaske: a) »Prividna« (engl. smeared) gustoća je omjer mase goriva i ukupnog unutarnjeg volumena gorivnog elementa.— b) Gustoća iznosi 9316 kg/m³ (85% od teoretske), a »prividna« 8384 kg/m³ (90% vol.).— c) Gustoća iznosi 11560 kg/m³ (85% od teoretske), a »prividna« 10980 kg/m³ (95% vol.).— d) Gustoća iznosi 17000 kg/m³ (90 masenih % teških atoma), a »prividna« 13600 kg/m³ (80% vol.).— e) Gustoća iznosi 9320 kg/m³ (4 g Pu na 1 cm³ goriva).

na masu goriva ili na masu teškog elementa. Stoga se u novije vrijeme dosta upotrebljava jedinica »gram fisijskog materijala po kubnom centimetru goriva«, koju ćemo označiti kraticom »g(f)/cm³«; slovo f u zagradi upozorava da je riječ o *fisijskom* materijalu. Budući da je $g/cm^3 = kg/dm^3 = t/m^3$ (vidi tablicu B-21), umjesto jedinice $g(f)/cm^3$ možemo bez ikakvog preračunavanja upotrebljavati njene identitete

$$\frac{g(f)}{cm^3} = \frac{kg(f)}{dm^3} = \frac{kg(f)}{l} = \frac{t(f)}{m^3}.$$

Pri tom je »l« simbol jedinice »litar« (vidi odlomke B.1.7.3 i A.7.5.5).

Da bi se olakšala primjena raznorodnih jedinica specifičnog odgora različitih nuklearnih goriva, u tablici D-27 donosimo ekvivalente jedinice $g(f)/cm^3$; npr. 1 $g(f)/cm^3$ predstavlja isto što i 85200 MWd/t (teških atoma) karbidnog nuklearnog goriva. Tablica je sastavljena uz pretpostavku da se jednom fisijom dobiva energija $3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J = $3{,}2 \cdot 10^{-17}$ MJ (= 199 MeV) i da tome odgovara $8{,}1 \cdot 10^{10}$ J/g(f) = = 0,937 MWd/g(f). Ostale važne opaske navedene su na dnu tablice D-27.

5.5.4. Suvišnost jedinice W_{el}. U mnogim člancima i knjigama autori upotrebljavaju jedinicu snage »električki vat«, koju označuju simbolom »W_{el}«. Tako se npr. za snagu na pragu nuklearne elektrane i za cijenu energije proizvedene u takvoj elektrani navodi (npr. časopis »Atomwirtschaft«, 1967, No 3, str. 146)

$$200\ MW_{el} \qquad 1{,}1 \cdot 10^{-4}\ \frac{DM}{kW_{el}\,h}. \tag{5.5-5}$$

Ovdje simbol DM označuje njemačku novčanu jedinicu »Deutsche Mark« (o računanju s novčanim jedinicama vidi odlomak A.2.1.1).

Jedinicu snage Međunarodnog sistema jedinica (SI) vat = watt = W definirali smo u odlomku B.5.5.1 jednadžbom W = J/s, a J = joule definirali smo u odlomku B.5.2 jednadžbom J = Nm (= kgm^2/s^2). Prema tome je W = J/s = Nm/s = = kgm^2/s^3. Ta jedinica služi za mjerenje *svih vrsta* snage: mlina na vjetar, parnog kotla (vidi odlomak 4.2.3), elektromotora, nuklearne elektrane itd. Prema tome jedinica snage W_{el} je *besmislena* (analogna besmislica je »efektivni volt« = V_{eff}, »dužinski metar« = m′ itd.).

Autori podatka »200 MW_{el}« htjeli su reći da »snaga na pragu nuklearne elektrane iznosi 200 MW«. To je dakako »električka snaga elektrane«, a ne na primjer »toplinska snaga nuklearnog reaktora«. Ako *fizikalnu veličinu* »snaga na pragu nuklearne elektrane« označimo simbolom P_p, neispravan lijevi podatak u jednadžbi (5.5-5) dobiva valjani oblik

$$P_p = 200\ MW.$$

Isto vrijedi i za drugi podatak u jednadžbi (5.5-5). Autori su htjeli reći da je cijena električke energije na pragu elektrane

$$c_p = 1{,}1 \cdot 10^{-4}\ \frac{DM}{kWh}.$$

Loših primjera, sličnih opisanom, ima u tehničkim i ekonomskim publikacijama bezbroj. Iz gornjeg izlaganja proizlazi da treba ispravno opisivati i označivati veličine o kojima je riječ, a da je mjerna jedinica uvijek ista.

6. Preračunavanje nekih vansistemskih jedinica u jedinice SI. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi

Unatoč postojanju mnogobrojnih tablica koje omogućuju brzo preračunavanje jednih jedinica u druge, pri proučavanju stručne literature ili izvođenju proračuna moramo često sami izračunavati odnose među *složenim* jedinicama. Budući da u nauci o toplini postoji mnoštvo tzv. vansistemskih jedinica, dopuštenih i nedopuštenih, u ovom ćemo poglavlju izvesti niz takvih preračunavanja s dvojakom svrhom: prvo, da razne vansistemske jedinice na očitim primjerima svedemo na jedinice Međunarodnog sistema; drugo, da na posve realnim primjerima čitaocu pružimo priliku da provjeri svoje mogućnosti i vještinu u takvim preračunavanjima.

6.1. Jedinice specifičnih veličina i jedinice toplinske snage

6.1.1. Specifične veličine i toplinska snaga. Pod »specifičnim toplinskim veličinama« ovdje smatramo one veličine koje su definirane kao omjer količine topline Q i mase m. Prema tablici D-7 u odlomku 2.3.7 to su: u, i, f, g, e, l, λ, r i c. U Međunarodnom sistemu jedinica (SI) sve te veličine imaju temeljnu jedinicu joule/kilogram = J/kg, a prema potrebi se upotrebljavaju i prefiksi (vidi tablicu A-1), pa je na primjer: kJ/kg = 10^3 J/kg = 10^{-3} MJ/kg = 1 MJ/t = 1 J/g itd. U narednim odlomcima izvest ćemo nekoliko preračunavanja sa složenih jedinica kojima su osnova kcal i Btu na jedinice SI.

Veličinu »toplinska snaga« Φ (ili P) razmotrili smo u odlomku 2.3.4. U literaturi nalazimo mnoštvo vansistemskih jedinica ove veličine. U odlomcima 6.1.4,5 obradit ćemo samo ove: kcal/s, kcal/min, kcal/h, Btu/s, Btu/min i Btu/h. Preračunat ćemo ih na jedinicu snage Međunarodnog sistema watt = W.

6.1.2. Preračunavanje jedinice kcal/kg. Ovu jedinicu želimo preračunati na jedinicu SI J/kg. Budući da je kilogram u oba slučaja isti, potrebno je preračunati samo jedinicu kcal; budući da je (vidi odlomak 5.2.2) kcal = 4186,8 J, uvrštenjem ovog odnosa u jedinicu kcal/kg dobivamo

$$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} = \frac{4186{,}8\,\text{J}}{\text{kg}} = 4186{,}8\,\frac{\text{J}}{\text{kg}} = 4{,}1868\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

6.1.3. Preračunavanje jedinice Btu/lb. Ovdje se i jedinica količine topline Btu i jedinica mase lb (pound) razlikuje od jedinica SI J = joule i kg, na koje ih želimo preračunati. U odlomku 5.4.1 već smo imali da je

$$\text{Btu} = 1055{,}06\ \text{J}, \qquad \text{lb} = 0{,}4535923\ \text{kg}.$$

Uvrštenjem ovih »jednadžbi među jedinicama« u složenu jedinicu Btu/lb dobivamo

$$\frac{\text{Btu}}{\text{lb}} = \frac{1055{,}06\ \text{J}}{0{,}453\,5923\ \text{kg}} = 2325{,}96\,\frac{\text{J}}{\text{kg}} = 2{,}326\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}},$$

tj. Btu/lb je oko dva puta veća jedinica od kJ/kg (ovakva opaska korisna je za dobivanje »osjećaja« o veličini jedinice Btu/lb).

6.1.4. Preračunavanje jedinica kcal/s, kcal/min i kcal/h. Pri ovom računu moramo uzeti u obzir odnos kcal = 4186,8 J, te odnos među jedinicama vremena:

$$\text{h} = 60\ \text{min} = 3600\ \text{s} \qquad \text{min} = 60\ \text{s},$$

gdje je min kratica za jedinicu minuta, a s kratica za jedinicu sekunda. Podsjetimo se još da je watt = W = J/s = Nm/s jedinica snage u SI. Uvrstimo li odgovarajuće vrijednosti, dobivamo:

$$\frac{\text{kcal}}{\text{s}} = \frac{4186{,}8\ \text{J}}{\text{s}} = 4186{,}8\ \text{W} = 4{,}1868\ \text{kW}.$$

Analogno možemo izračunati odnose kcal/min i kcal/h prema jedinici W:

$$\frac{\text{kcal}}{\text{min}} = \frac{4186{,}8\ \text{J}}{60\ \text{s}} = 69{,}78\ \text{W},$$

$$\frac{\text{kcal}}{\text{h}} = \frac{4186{,}8\ \text{J}}{3600\ \text{s}} = 1{,}163\ \text{W}.$$

Prema tome je kcal/h = 1,163 W, tj. malo više od jednog watta.

6.1.5. Preračunavanje angloameričkih jedinica toplinske snage. Ovdje ćemo preračunati četiri angloameričke jedinice toplinske snage: Btu/s, Btu/min, Btu/h i Ton of refrigeration. Budući da je Btu = 1055,06 J, redom dobivamo:

$$\frac{\text{Btu}}{\text{s}} = \frac{1055{,}06\ \text{J}}{\text{s}} = 1055{,}06\,\frac{\text{J}}{\text{s}} = 1055{,}06\ \text{W},$$

$$\frac{\text{Btu}}{\text{min}} = \frac{1055{,}06\ \text{J}}{60\ \text{s}} = 17{,}584\,\frac{\text{J}}{\text{s}} = 17{,}584\ \text{W},$$

$$\frac{\text{Btu}}{\text{h}} = \frac{1055{,}06\ \text{J}}{3600\ \text{s}} = 0{,}293\,072\,\frac{\text{J}}{\text{s}} \approx 0{,}2931\ \text{W}.$$

U *rashladnoj tehnici* angloameričkog jezičnog područja upotrebljava se jedinica toplinske snage Commercial Ton of Refrigeration (ovdje ćemo primijeniti skraćenicu CTR, iako inače ta jedinica nema službene kratice). Postoje dvije CTR: britanska CTR(B) i američka CTR(USA), koje su u ovom međusobnom odnosu

$$\text{CTR(B)} = 1{,}1154\ \text{CTR(USA)}.$$

Američka CTR(USA) definirana je ovako

$$\text{CTR(USA)} = \frac{12\,000\ \text{Btu}}{\text{h}}.$$

Budući da je prema izvođenju u odlomku 5.4.1 Btu = 1055,06 J, od gornje jednadžbe uvrštenjem tog odnosa dobivamo

$$\mathrm{CTR(USA)} = \frac{12000 \cdot 1055{,}06\ \mathrm{J}}{3600\ \mathrm{s}} = 3516{,}9\ \mathrm{W} \approx 3{,}517\ \mathrm{kW}.$$

Prema tome je američka Commercial Ton of Refrigeration malo veća od 3,5 kilovata.

6.1.6. Usporedba različitih jedinica toplinske snage. Budući da se mnogi stručnjaci, naročito stariji, dosta teško prilagođuju jedinici toplinske snage watt (W) Međunarodnog sistema jedinica (SI), sastavili smo na temelju rezultata računanja u prošla dva odlomka, kao i na temelju dodatnih računa, tablicu D-28. U njoj su navedeni dvostrani odnosi među nekim, u prošlosti najčešće upotrebljavanim jedinicama toplinske snage (zvane i »toplinski tok« i »toplinski mlaz«). Odnosi su *grubi*, tj. reducirani uglavnom na četiri znamenke ili manje, jer su namijenjeni za praktične račune.

Tablica **D-28**

Dvostrani odnosi među različitim jedinicama toplinske snage

	W	kcal/min	kcal/h	Btu/min	Btu/h	CTR(USA)
watt, W =	1	0,0143	0,8599	0,0569	3,412	$2{,}847 \cdot 10^{-4}$
kcal/min =	69,78	1	60	3,968	238,1	$1{,}984 \cdot 10^{-2}$
kcal/h =	1,163	0,0167	1	0,0661	3,968	$3{,}307 \cdot 10^{-4}$
Btu/min =	17,58	0,252	15,12	1	60	$5 \cdot 10^{-3}$
Btu/h =	0,2931	0,0042	0,252	0,0167	1	$8{,}333 \cdot 10^{-5}$
CTR(USA) =	3517	50,4	3,024	200	12000	1

Opaska: kcal = $\mathrm{kcal_{IT}}$ = 4186,8 J; Btu = $\mathrm{Btu_{ST}}$ = 1055,06 J; CTR(USA) = Commercial Ton of Refrigeration = 12000 Btu/h.

Primjer upotrebe tablice: Koliko vata predstavlja jedinica Btu/h? U pretposljednjem retku prvog stupca potražimo Btu/h, a u prvom stupcu, u kojem se nalazi W, nalazimo broj 0,2931. To znači da je Btu/h = 0,2931 W. Obratno je W = 3,412 Btu/h.

6.2. Jedinice gustoće snage, toplinske vodljivosti te koeficijenata prolaza i prijelaza topline

O veličini »gustoća snage« q raspravljali smo u odlomku 2.3.4 i definirali je kao omjer toplinske snage P (ili Φ) i površine A kroz koju ta snaga prolazi. U diferencijalnom obliku definicijska jednadžba glasi $q = \mathrm{d}P/\mathrm{d}A$. U starijoj tehničkoj praksi primjenjivale su se uglavnom jedinice kcal/(m²h) i Btu/(ft²h), gdje je m kratica jedinice metar, a ft = foot kratica angloameričke jedinice duljine »stopa« (vidi odsječak B.11.3). U odlomcima 6.2.1, 2 ove ćemo dvije jedinice preračunati na W/m², jedinicu SI. Ova jedinica proizlazi iz činjenice što se toplinska snaga P mjeri wattima (W), a površina kvadratnim metrima (m²), pa je dakle zbog $q = P/A$ jedinica $[q]_{\mathrm{M}} = [P]_{\mathrm{M}}/[A]_{\mathrm{M}} = \mathrm{W/m^2}$.

6.2.1. Preračunavanje jedinice kcal/(m²h). U odlomku 6.1.4 već smo izračunali omjer kcal/h = 1,163 W. Prema tome je

$$\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\text{h}} = \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \frac{1}{\text{m}^2} = 1{,}163\ \text{W} \frac{1}{\text{m}^2} = 1{,}163 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Jedinica gustoće toplinske snage kcal/(m²h) dakle je samo neznatno veća od jedinice SI W/m², tj. odnos je isti kao i kod odgovarajućih jedinica toplinske snage: kcal/h = 1,163 W (vidi odlomak 6.1.4).

6.2.2. Preračunavanje jedinice Btu/(ft²h). U odlomku 6.1.5 utvrdili smo da je Btu/h = 0,2931 W. Prema tome treba da još uzmemo u obzir kvadratnu stopu = square foot = ft². Znamo da je ft = 0,3048 m (vidi odlomak B.11.3.1). Računanjem slijedi

$$\frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2\text{h}} = \frac{0{,}2931\ \text{W}}{0{,}3048^2\ \text{m}^2} = 3{,}155 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Vidimo da je Btu/(ft²h) nešto veća jedinica od 3 vata po kvadratnom metru.

6.2.3. Preračunavanje jedinica specifične toplinske vodljivosti. Veličinu specifična toplinska vodljivost λ definirali smo u odsječku 2.3.4 jednadžbom $q = -\lambda \mathrm{d}T/\mathrm{d}x$. Budući da se u SI gustoća snage q mjeri jedinicom W/m², termodinamička temperatura T jedinicom kelvin = K, a duljina x jedinicom m, to je očito jedinica specifične toplinske vodljivosti SI $[\lambda]_{\text{M}} = \text{W/(Km)}$.

U vezi s kilokalorijom u toplinskoj tehnici upotrebljavala se pretežno jedinica kcal/(h m °C), odnosno kcal/(h m K) ili kcal/(h m deg) s primjenom jedinica K, °C ili deg (°C = K = deg, vidi kraj odlomka 3.4.1). Analogno se u engleskom govornom području upotrebljava jedinica Btu/(h ft °F), gdje je h = sat = 3600 s, ft = = foot = 0,3048 m, a °F = stupanj Fahrenheita = °C/1,8. Navedene dvije jedinice specifične toplinske vodljivosti preračunat ćemo u jedinicu SI $[\lambda]_{\text{M}} = \text{W/(Km)} =$ = W/(°Cm). Prvu od njih lako preračunamo uz pomoć podataka u odlomku 6.1.4:

$$\frac{\text{kcal}}{\text{h m °C}} = \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \frac{1}{\text{m °C}} = 1{,}163\ \text{W} \frac{1}{\text{°Cm}} = 1{,}163 \frac{\text{W}}{\text{°Cm}}.$$

Angloameričku jedinicu moramo stvarno preračunati, ali i ovdje uz pomoć rezultata Btu/h = 0,2931 W u odlomku 6.1.5:

$$\frac{\text{Btu}}{\text{h ft °F}} = \frac{\text{Btu}}{\text{h}} \frac{1}{\text{ft °F}} = 0{,}2931\ \text{W} \frac{1}{0{,}3048\ \text{m} \cdot \text{°C}/1{,}8} = 1{,}731 \frac{\text{W}}{\text{°Cm}}.$$

Umnožak celzija (°C) i metra (m) pišemo u slijedu °Cm zato jer bi u obliku m°C eventualno moglo nastati krivo tumačenje da je riječ o »milicelziju« (vidi tablicu A-1).

Napominjemo da sve izvedene jednadžbe među vansistemskim jedinicama i jedinicama SI vrijede i za slučaj kada se namjesto °C nalazi K (kelvin), dakle

$$\frac{\text{kcal}}{\text{h m °C}} = 1{,}163 \frac{\text{W}}{\text{Km}}, \quad \frac{\text{Btu}}{\text{h ft °F}} = 1{,}731 \frac{\text{W}}{\text{Km}} \text{ itd.}$$

Razlog tome je jednakost K = °C (vidi kraj odlomka 3.4.1).

6.2.4. Preračunavanje jedinica koeficijenata prolaza i prijelaza topline. Veličine »koeficijent prolaza topline« k i »koeficijent prijelaza topline« α definirali smo u odlomku 2.3.6. Iz jednadžbe (2.3-19) se razabire da k i α imaju istu jedinicu SI, tj. pomoću izraza $q = \alpha \Delta T$ možemo utvrditi da je $[k]_M = [\alpha]_M = W/(m^2K)$.

U području primjene kilokalorije upotrebljavala se za mjerenje veličina k i α jedinica kcal/(h m² °C). Do jedinice SI W/(m²K) dolazimo vrlo lako, jednostavno pomoću rezultata u prošlom odlomku 6.2.3:

$$\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2\,^\circ\text{C}} = \frac{\text{kcal}}{\text{h m}\,^\circ\text{C}} \frac{1}{\text{m}} = 1{,}163 \frac{\text{W}}{\text{m}\,^\circ\text{C}} \frac{1}{\text{m}} = 1{,}163 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,^\circ\text{C}}.$$

Analogno preračunavanje možemo učiniti s angloameričkom jedinicom veličina k i α, tj. s jedinicom Btu/(h ft² °F). U tom slučaju treba Btu/(h ft °F) = = 1,731 W/(°C m) podijeliti sa ft = 0,3048 m; tako dobivamo

$$\frac{\text{Btu}}{\text{h ft}^2\,^\circ\text{F}} = 5{,}679 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C m}^2}.$$

Naravno da i ovdje možemo umjesto °C staviti K (kelvin), jer je po iznosu (veličini) °C = K (vidi kraj odlomka 3.4.1).

6.3. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi

U poglavljima A.1 i B.10 već smo objasnili koje su prednosti univerzalnih veličinskih jednadžbi, a koje su mane brojčanih. Na nizu primjera konkretno je pokazana pouzdanost, veća razumljivost i mnogostruka jednostavnost računanja na veličinski način. Budući da su veličinske jednadžbe univerzalne, izložena pravila vrijede, dakako, i za one izraze koji obrađuju termodinamiku. Stoga nećemo ponavljati načela rada s veličinama.

Čitaoca koji je preskočio poglavlje o mehanici — jer ga zanima samo nauka o toplini — upućujemo da prije nego pročita ovaj odsječak prouči odsječak A.1.4 ove knjige, jer će tako lakše slijediti primjere u naredna dva odlomka. Oni će pokazati *kako od brojčanih jednadžbi pravimo veličinske*, a odnosit će se uglavnom na *tehničku* termodinamiku, gdje se na žalost još uvijek u mnogim knjigama upotrebljavaju ograničene i nepregledne brojčane jednadžbe.

6.3.1. Brzina istjecanja plinova i para. Gotovo u svim dijagramima *is* za vodenu paru nalazimo nacrtano dvostrano mjerilo kojim se može odrediti teoretska brzina u istjecanja pare iz sapnice ili nekog otvora u ovisnosti o smanjenju specifične entalpije $\Delta i = i_1 - i_2$. Iz tog se mjerila može izračunati, a na nekim dijagramima *is* i piše, jednadžba za određivanje idealne brzine istjecanja

$$u = 91{,}5 \sqrt{\Delta i'}. \tag{6.3-1}$$

To je, dakako, *brojčana* jednadžba; u skladu s odlomkom A.1.4.2 (vidi i odsječak A.1.3) valja je napisati u izrazitom brojčanom obliku

$$\{u\} = 91{,}5 \sqrt{\{\Delta i'\}}. \tag{6.3-2}$$

U dijagramu *is* redovito je naznačeno da se brojčani iznosi $\{u\}$ odnose na brzinu u metrima u sekundi, a $\{\Delta i'\}$ na kcal/kp. Stoga smo na $\Delta i'$ stavili crticu, jer je

riječ o »težinskoj veličini« (vidi odlomak 4.2.1). Prema tome možemo u skladu s osnovnom relacijom »brojčani iznos = veličina/jedinica«, dakle sa $\{G\} = G/[G]$, gdje je $\{G\}$ brojčani iznos, G veličina, a $[G]$ jedinica, pisati

$$\{u\} = \frac{u}{\text{m/s}}, \quad \{\Delta i'\} = \frac{\Delta i'}{\text{kcal/kp}} = \frac{\Delta i}{\text{kcal/kg}},$$

jer su masena i težinska entalpija međusobno povezane relacijom $i = g_0 i' = i' \cdot \text{kp/kg}$, budući da je $\text{kp/kg} = 9{,}806\,65\ \text{m/s}^2 = g_0 \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$ (vidi odlomak 4.2.1).

Uvrstimo li gornja dva izraza u jednadžbu (6.3-2), dobivamo prilagođenu veličinsku jednadžbu

$$\frac{u}{\text{m/s}} = 91{,}5 \sqrt{\frac{\Delta i}{\text{kcal/kg}}} \tag{6.3-3}$$

u kojoj je $i = I/m$ masena specifična entalpija (vidi odlomak 2.3.2). Jednadžbu (6.3-3) lako preoblikujemo u

$$u = \sqrt{\Delta i} \cdot 91{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{kcal}}}. \tag{6.3-4}$$

Razmotrimo što nam predstavlja omjer jedinice mase Međunarodnog sistema kg i jedinice topline kcal. U odlomku 5.2.2 naznačili smo odnos između kilokalorije i joulea, kcal = 4186,8 joule (J), a budući da je $\text{J} = \text{Nm} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ (vidi tablicu D-23), to je

$$\text{kcal/kg} = 4186{,}8\ \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Uvrstimo li ovu »jednadžbu među jedinicama« u izraz (6.3-4), dobivamo

$$u = \sqrt{\Delta i} \cdot 91{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{\text{kg}}{4186{,}8\ \text{kg m}^2/\text{s}^2}}.$$

Jednostavnim računom i kraćenjem jedinica lako dobivamo da je čitav dio jednadžbe desno od $\Delta i^{1/2}$ jednak čistom broju $2^{1/2}$, dakle

$$u = \sqrt{\Delta i} \cdot \sqrt{2},$$

što možemo napisati i ovako:

$$u = \sqrt{2\Delta i}, \quad \text{odnosno} \quad \Delta i = \tfrac{1}{2} u^2. \tag{6.3-5}$$

To su sada univerzalne *veličinske* jednadžbe koje vrijede za bilo koji sistem jedinica ili čak nesistematičan skup jedinica.

Razmotrimo još kako bi glasila lijeva jednadžba (6.3-5) u *brojčanom* obliku, koja će biti ograničena na stanovite *angloameričke* jedinice. Pri tom ćemo upotrijebiti ove jedinice: $[u]$ = foot per second = ft/s, $[i]$ = British thermal unit per pound = Btu/lb, gdje pod lb razumijevamo jedinicu mase (vidi odlomak B.11.1.3).

Budući da je veličina jednaka umnošku brojčanog iznosa i jedinice, tj. općenito $G = \{G\}[G]$, u našem primjeru imat ćemo $u = \{u\}[u]$, $\Delta i = \{\Delta i\}[i]$, gdje simboli u vitičastim zagradama predstavljaju brojčane iznose. Uvrštenje u lijevu jednadžbu (6.3.5) daje

$$\{u\}[u] = \sqrt{2\{\Delta i\}[i]},$$

odakle dalje slijedi

$$\{u\} = \sqrt{\{\Delta i\}} \cdot \sqrt{\frac{2\,[i]}{[u]^2}} = \sqrt{\{\Delta i\}} \cdot \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Btu/lb}}{(\mathrm{ft/s})^2}}\,.$$

Izraz pod opsežnijim desnim korijenom možemo posebno izračunati jer je Btu/lb = = 1055,1 J/0,453 59 kg, a ft/s = 0,3048 m/s, što daje

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 1055{,}1\,\mathrm{J}}{0{,}453\,59\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}3048^2\,\mathrm{m^2/s^2}}} = 223{,}85.$$

Prema tome je *brojčana* jednadžba

$$\{u\} = 223{,}85 \sqrt{\{\Delta i\}},$$

pomoću koje se brojčani iznos $\{u\}$ teoretske brzine istjecanja u jedinici ft/s dobiva samo onda kada se za brojčani simbol $\{\Delta i\}$ uvrsti brojčani iznos pada entalpije izražen u Btu/lb. *Prilagođena* angloamerička veličinska jednadžba (vidi odsječak A.1.6) glasi

$$u = 223{,}85 \sqrt{\frac{\Delta i}{\mathrm{Btu/lb}}}\ \mathrm{ft/s},$$

gdje simboli u i Δi označuju *fizikalne veličine* (usporedi s prilagođenom veličinskom jednadžbom (6.3-3) u evropskim termodinamikama).

6.3.2. Specifični potrošak pare i topline. U većini udžbenika tehničke termodinamike i parnih strojeva najčešće nalazimo ove *brojčane jednadžbe* za energetski opis djelovanja parnih strojeva

$$A\{L_0\}\{D\} = 632 \qquad (6.3\text{-}6)$$

$$\{W\} = \frac{632\{q\}}{\{L_0\}A}, \qquad (6.3\text{-}7)$$

naravno bez vitičastih zagrada. Lijeva jednadžba međusobno povezuje brojčane iznose mehaničkog ekvivalenta topline A (o njemu vidi odlomak 4.2.2), specifičnog mehaničkog rada pare $\{L_0\}$ i specifičnog potroška pare $\{D\}$. Desna jednadžba povezuje brojčani iznos specifičnog potroška topline $\{W\}$ s brojčanim iznosima specifične utrošene topline $\{q\}$, te sa $\{L_0\}$ i A.

U udžbenicima s gornjim jednadžbama piše da brojčane vrijednosti $\{L_0\}$ moraju biti izražene u kpm/kp, a $\{D\}$ u kp/KSh. Budući da je $A = 1/427$ (= kpm/ /kcal), u skladu s osnovnim načelom $G = \{G\}\,[G]$ možemo pisati

$$A = \frac{1}{427}, \quad \{L_0\} = \frac{L_0}{\mathrm{kpm/kp}}; \quad \{D\} = \frac{D}{\mathrm{kp/KSh}}.$$

Srednji izraz možemo pisati kao $\{L_0\} = L_0/\mathrm{m}$ jer smo kratili kp. I u trećem izrazu možemo pojednostavniti, jer je KS = 75 kpm/s, pa je dakle KSh = 75 kpm s^{-1} · 3600 s = 270 000 kpm, odnosno KSh/kp = 270 000 m. Prema tome je

$$A = \frac{1}{427}, \quad \{L_0\} = \frac{L_0}{\mathrm{m}}, \quad \{D\} = D \cdot 270\,000\ \mathrm{m}.$$

Uvrstimo li to u jednadžbu (6.3-6), dobivamo

$$\frac{1}{427}\,\frac{L_0}{\mathrm{m}}\,D \cdot 270\,000\ \mathrm{m} = 632,$$

odakle odmah slijedi lijepa *veličinska* jednadžba

$$L_0 D = 1 \quad \text{ili} \quad D = 1/L_0 \quad \text{ili} \quad L_0 = 1/D. \tag{6.3-8}$$

Prema tome je specifični potrošak pare D recipročna veličina specifičnog mehaničkog rada L_0. To je razumljivo jer D i L_0 stvarno su ovako definirani: Tijekom nekog po volji odabranog trajanja kroz stroj prođe količina pare mase m. Za to vrijeme jednolikog rada stroja dobivena je korisna radnja L. Specifični potrošak pare D određuje se omjerom mase pare m i obavljena rada L, dakle

$$D = m/L.$$

Pod specifičnim mehaničkim radom L_0 razumijeva se omjer korisnog rada L i protekle mase pare

$$L_0 = L/m.$$

Pomnožimo li ove dvije veličinske jednadžbe, dobivamo (6.3-8), dakle $L_0 D = 1$. Vidimo da je jedna od tih veličina *suvišna*. Ono što nam kaže, na primjer, L_0, na drukčiji nam način izražava D.

Analizirajmo još *brojčanu* jednadžbu (6.3-7). U opisu takvih jednadžbi nalazimo da $\{q\}$ treba uvrštavati u kcal/kp, $\{L_0\}$ u kp/KSh, kako bi se specifični potrošak topline $\{W\}$ dobio u kcal/KSh. Prema tome je

$$\{W\} = \frac{W}{\text{kcal/KSh}}; \quad \{q\} = \frac{q}{\text{kcal/kp}}; \quad \{L_0\} = \frac{L_0}{\text{kpm/kp}}; \quad A = \frac{1}{427}.$$

Uvrstimo li gornje odnose u izraz (6.3-7), dobivamo

$$\frac{W}{\text{kcal/KSh}} = \frac{632 \dfrac{q}{\text{kcal/kp}}}{\dfrac{L_0}{\text{kpm/kp}} \dfrac{1}{427}}.$$

Sređenjem ove jednadžbe slijedi

$$W = \frac{q}{L_0} \frac{632 \cdot 427\,\text{kpm}}{\text{KSh}} = \frac{q}{L_0}.$$

Vidimo da je specifični potrošak topline omjer utrošene specifične topline q i dobivenog specifičnog rada L_0. To nije ništa drugo nego recipročna veličina od toplinske korisnosti η koja je definirana omjerom korisnog rada $L = mL_0$ i uložene topline $Q = mq$, dakle

$$\eta = \frac{L}{Q} = \frac{mL_0}{mq} = \frac{L_0}{q} = \frac{1}{W}.$$

Toplinsku korisnost η ionako većinom upotrebljavamo pri toplinskim proračunima, pa nam je W posve nepotrebna veličina, jer samo na recipročan način prikazuje isto što i η. U to nas može uvjeriti primjer u odlomku 4.2.3.

Glava E

Mjerni sistemi elektromagnetizma

SADRŽAJ

1. Fizikalne veličine elektromagnetskog polja

1.1. Pregled elektromagnetskih veličina 880

1. Četvrta osnovna veličina, 2. Pregled elektromagnetskih veličina 882

1.2. Fizikalne veličine elektrostatskog polja 882

1. Strujni udar i električka indukcija, 2. Električki kapacitet i dielektričnost, 3. Električka polarizacija, 4. Električka susceptibilnost 886

1.3. Neke veličine magnetskog polja 888

1. Induktivitet i magnetska indukcija, 2. Permeabilnost, 3. Magnetska polarizacija, 4. Magnetska susceptibilnost 891

1.4. Fizikalne veličine elektromagnetskog polja 892

1. Brzina širenja elektromagnetske pojave, 2. Valni otpor, 3. Poyntingov vektor, 4. Gustoća energije elektromagnetskog polja 896

1.5. Nuklearna rezonancija i njena indikacija 898

1. Impuls vrtnje i magnetski moment, 2. Žiromagnetska konstanta elektrona, 3. Nuklearna rezonancija, 4. Uvjet nuklearne rezonancije, 5. Vrijednost žiromagnetske konstante protona, 6. Indikacija nuklearne rezonancije 906

2. Međunarodni sistem jedinica (SI) u elektromagnetizmu

2.1. Nezavisna jedinica elektromagnetizma SI amper 909
1. Svrha uvođenja i prednosti SI, 2. Četvrta nezavisna jedinica SI u elektromagnetizmu, 3. Načelo djelovanja pramjerila jedinice amper, 4. Definicija nezavisne jedinice SI amper 914

2.2. Definicije imenovanih jedinica SI u elektromagnetizmu 915
1. Načelo definiranja izvedenih jedinica SI, 2. Sloboda definiranja izvedenih jedinica, 3. Elektromagnet kao pramjerilo polazne jedinice, 4. Definicije svih nezavisnih jedinica SI, 5. Definicije imenovanih jedinica SI u elektromagnetizmu, 6. Udobnost računanja pomoću jedinica SI 924

2.3. Veličine i jedinice u tehnici izmjeničnih struja 929
1. Temeljne veličine tehnike izmjeničnih struja, 2. Prividna i djelatna snaga, 3. Jalova snaga, 4. Jedinica jalove snage var 933

2.4. Primjeri upotrebe jedinica SI u elektromagnetizmu 934
1. Izolacijski otpor kabela, 2. Sila na ulje u kondenzatoru, 3. Izboj kondenzatorske baterije, 4. Polumjer elektromagneta ciklotrona, 5. Induktivitet toroida, 6. Regulacija napona za rasvjetu 938

2.5. Neke posljedice uvođenja Međunarodnog sistema jedinica u područje elektromagnetizma 940
1. Veličinske jednadžbe, 2. Primjena mase umjesto težine, 3. Prebaždarenje instrumenata i otporničkih normala, 4. Westonov zasićeni normalni element, 5. Zabrana javne primjene sistema jedinica CGS 946

3. Reproduciranje i pohranjivanje elektromagnetskih jedinica

3.1. Strujna vaga — pramjerilo jedinice amper 947
1. Načelo djelovanja strujne vage, 2. Pohranjivanje izmjerene vrijednosti struje, 3. O rukovanju strujnom vagom, 4. Različite izvedbe strujnih vaga, 5. Nesigurnost vrijednosti struje reproducirane vagom, 6. Poteškoće pri mjerenju strujnom vagom 961

3.2. Reproduciranje ampera pomoću indiciranja nuklearne rezonancije 963
1. Prikladnost nuklearnog pramjerila ampera, 2. Zamisao o nuklearnom pramjerilu, 3. Geometrijska konstanta solenoida, 4. Posljedice zamjene strujne vage nuklearnim pramjerilom, 5. Jugoslavensko nuklearno pramjerilo ampera 977

3.3. Reproduciranje električkog otpora pramjerilima. Računski standard međuinduktiviteta 979
1. Kapacitivno pramjerilo otpora, 2. Komutacijsko pramjerilo otpora, 3. Campbellovo pramjerilo otpora, 4. Lorenz-Smithovo pramjerilo otpora, 5. Računski standard međuinduktiviteta 994

3.4. Računski standard kapaciteta. Reproduciranje električkog napona pramjerilima 1000
1. Lampardov teorem o kapacitetu, 2. Računski standard kapaciteta, 3. Konstrukcija australskog kapacitivnog standarda, 4. Tekućinski elektrometar — pramjerilo napona, 5. Naponska vaga — pramjerilo napona, 6. Taylorovo supravodljivo pramjerilo napona 1017

3.5. Pohranjivanje vrijednosti napona pomoću naponskih normala 1020
1. Razlog upotrebe normala, 2. Osobine naponske normale — Westonova elementa, 3. Nacionalni volt i V(BIPM), 4. Načelo pohranjivanja grupnom normalom, 5. Pohranjivanje napona u NBS, 6. Interkomparacije naponskih normala u BIPM, 7. Stvarna vrijednost napona normale 8. Jugoslavenska grupna normala napona, 9. Zenerova naponska normala 1040

3.6. Pohranjivanje vrijednosti otpora pomoću otporničkih normala 1041
1. Općenito o otporničkim normalama, 2. Pohranjivanje ohma u NBS, 3. Interkomparacije otporničkih normala u BIPM, 4. Prva jugoslavenska usporedba otporničkih normala, 5. Stvarna vrijednost otpora normale 1049

3.7. Preciznost vrhunske metrologije elektromagnetizma 1053
1. Nesigurnost reprodukcije struje, napona i otpora, 2. Nepouzdanost vrijednosti brzine svjetla, 3. Temelj mjerenja visokofrekventnih veličina, 4. O preciznosti mjerenja visokofrekventnih veličina 1059

4. Fizikalni ili CGS sistemi jedinica elektromagnetizma

4.1. Elektrostatski (CGSE) sistem jedinica 1063
1. Ishodište sistema CGSE, 2. Definicija CGSE jedinice elektrike, 3. CGSE jedinice ostalih »električkih« veličina, 4. CGSE jedinice magnetskog polja i indukcije, 5. CGSE jedinice ostalih »magnetskih« veličina, 6. Primjeri upotrebe CGSE jedinica..... 1070
4.2. Magnetostatski (CGSM) sistem jedinica 1073
1. Ishodište sistema CGSM, 2. CGSM jedinice struje i elektrike, 3. Jedinice gauss i oersted, 4. CGSM jedinice ostalih veličina, 5. CGSM jedinica magnetizacije 1078
4.3. Gaussov mješoviti sistem jedinica 1079
1. Porijeklo naziva sistema, 2. »Brzina« c u jednadžbama, 3. Primjer upotrebe jedinica Gaussova sistema, 4. Primjena jedinica različitih sistema 1084
4.4. Nepotpuni CGS sistemi jedinica elektromagnetizma 1086
1. Teškoće sa starijom literaturom, 2. Neke nepotpune CGSE i CGSM jedinice, 3. Nefizikalnost nepotpunih jedinica 1088
4.5. Postanak CGSM i CGSE sistema jedinica 1089
1. Gaussova koncepcija, 2. Razlog osnivanja magnetostatskog sistema, 3. Iskrivljenje Gaussove ideje 1091

5. Iz povijesti mjernih sistema elektromagnetizma

5.1. Razdoblje od godine 1832. do početka stoljeća 1092
1. Gaussov temelj metrologije elektromagnetizma, 2. Plodna metrološka djelatnost BAAS, 3. Radovi elektrotehničkih kongresa 1096
5.2. Proces nastajanja Međunarodnog sistema jedinica. O racionalizaciji 1098
1. Giorgijev prijedlog od godine 1901, 2. Ascolijevo pravilo o koherenciji jedinica, 3. Tehnički sistem jedinica od godine 1908, 4. Početak Međunarodnog sistema jedinica (SI), 5. Proces međunarodnog prihvaćanja SI, 6. O problemu racionalizacije. .. 1106
5.3. Tehnički (internacionalni) sistem jedinica elektromagnetizma 1109
1. Reprodukcija ampera voltametrom, 2. Živina normala »internacionalnog ohma«, 3. Ostale jedinice Tehničkog sistema, 4. Promašenost Tehničkog sistema..... 1114

6. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi. Sistemi dimenzija

6.1. Brojčane i veličinske jednadžbe magnetskog polja 1115
1. Magnetsko polje ravnog vodiča, 2. Privlačna sila magneta 1117
6.2. Dvije radio-tehničke brojčane jednadžbe 1119
1. Otpor zračenja antene, 2. Thomsonova jednadžba titrajnog kruga 1120
6.3. Preobrazba brojčane jednadžbe Zeemanova efekta u veličinsku 1121
1. Brojčana jednadžba Zeemanova efekta, 2. Preobrazba u veličinsku jednadžbu, 3. Još jedna brojčana jednadžba 1123
6.4. Sistemi dimenzija elektromagnetizma 1125
1. Mie-Perryjev sistem, 2. Sistem dimenzija Kalantarova, 3. Ostali sistemi dimenzija elektromagnetizma 1127

1. Fizikalne veličine elektromagnetskog polja

1.1. Pregled elektromagnetskih veličina

1.1.1. Četvrta osnovna veličina. Čitavom mehanikom ovladali smo u glavi B sa tri veličine, koje smo svojevoljno proglasili osnovnim. Bile su to duljina, vrijeme i masa. Kasnije smo pokazali da umjesto mase možemo odabrati energiju ili neku drugu veličinu koja ne ovisi o duljini i vremenu. Tri veličine nismo mogli definirati nekim drugima, već poznatim, i stoga smo ih nazvali nezavisnim, aksiomskim, polaznim ili osnovnim veličinama. U glavi D morali smo im, prema klasičnom nazoru, pridružiti još četvrtu nezavisnu veličinu, temperaturu, jer pomoću nje možemo zgodno povezati toplinske pojave koje smo najprije zamijetili fiziološki. U odsječku D.3.7 pokazali smo, doduše, da se temperatura može svesti na energiju gibanja molekula, ali budućnost će pokazati da li je takvo tretiranje termodinamike najpraktičnije.

Elektromagnetska su polja posve nov fenomen koji se ne može objasniti neposrednim ljudskim iskustvom kakvo čovjek ima s duljinom ili težinom. Stoga se ni elektromagnetske pojave ne mogu opisivati sa tri osnovne veličine koje smo tijekom povijesti znanosti najprije razvili u mehanici, najbližoj svakodnevnom iskustvu i eksperimentalnoj verifikaciji.

Niz veličina koje opisuju elektromagnetske pojave čine prirodnu i logičnu cjelinu tek onda kad se i u opisu tih pojava pomoću veličina primjenjuje *četvrta nezavisna veličina* elektromagnetske prirode. Samorodnost elektromagnetizma priznavali su već od samih početaka istraživanja na tom golemom području znanosti prvi pioniri, ti najblistaviji umovi čovječanstva koji su skromnim alatom, snagom svog intelekta i marljivošću prodrli tamo gdje se ništa nije vidjelo, a u početku ni osjetilo. Svi oni, od *Faraday*a i *Gauss*a do *Maxwell*a i *Emde*a, shvaćaju elektromagnetska polja u praznini i u tvarima kao *posebne* pojave koje se ne mogu objasniti veličinama poznatim iz mehanike ili nauke o toplini.

Zato u elektromagnetizmu moramo usvojiti *četiri* nezavisne ili osnovne fizikalne veličine. Koje su to četiri međusobno nezavisne veličine — teoretski je posve svejedno, jer u biti ni jedna veličina sama po sebi nije osnovna. Veličine su ljudi izmislili da bi im služile kao odličan alat za iskorištavanje prirodnih pojava, pa stoga po svojoj volji mogu nekima od njih pridodati posebno obilježje osnovnosti. Bitno je samo to da broj tih polaznih veličina — kojima se pomoću jednadžbi definiraju ostale, izvedene — u elektromagnetizmu bude četiri.

Odraz takve naučne slobode vidimo i u suvremenoj znanstvenoj i tehničkoj literaturi. Teoretsku mehaniku možemo započeti utegom, a isto tako i »principom najmanjeg djelovanja«. U nauci o elektromagnetskim poljima različitih putova ima

Tablica **E-1**

Elektromagnetske veličine, njihove oznake, veličinske jednadžbe u kojima se pojavljuju i jedinice Međunarodnog sistema (SI) kojima se mjere

Redni broj	Naziv veličine	Simbol	Jedinica SI	Jednadžba
1	2	3	4	5
1	Jakost električne struje	I	A	$Q = It$
2	Električki napon	U	V	$U = El$
3	Gustoća električne struje	J	A/m²	$I = JA$
4	Jakost električkog polja	E	V/m	$F = QE$
5	Električka indukcija	D	C/m²	$Q = DA$
6	Dielektričnost	ϵ	F/m	$D = \epsilon E$
7	Relativna dielektričnost	ϵ_r	1	$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$
8	Električka konstanta	ϵ_0	F/m	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 v_0^2)$
9	Električki tok	Ψ	C	$\Psi = DA = Q$
10	Električka polarizacija	P	C/m²	$D = \epsilon_0 E + P$
11	Električka susceptibilnost	ξ	1	$P = \xi \epsilon_0 E$
12	Električki moment (V=volumen)	m_e	Cm	$m_e = PV$
13	Elektrika	Q	C	$Q = It$
14	Kapacitet	C	F	$I\,dt = C\,dU$
15	Električki otpor	R	Ω	$U = IR$
16	Električka vodljivost	G	S	$I = GU$
17	Specifični otpor	ρ	Ωm	$E = \rho J$
18	Magnetska indukcija	B	T	$\text{rot}\, E = \partial B/\partial t$
19	Jakost magnetskog polja	H	A/m	$\text{rot}\, H = J + \partial D/\partial t$
20	Sila na vodič	F	N	$dF = I\,dl \times B$
21	Magnetski vektorski potencijal	A	Tm	$\text{rot}\, A = B$
22	Permeabilnost	μ	H/m	$B = \mu H$
23	Relativna permeabilnost	μ_r	1	$\mu = \mu_r \mu_0$
24	Magnetska konstanta	μ_0	H/m	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
25	Magnetski tok	Φ	Wb	$\Phi = BA$
26	Magnetska uzbuda	Θ	A	$\Theta = \Sigma I = \oint H\,dl$
27	Magnetska polarizacija	J	T	$B = \mu_0 H + J$
28	Magnetska susceptibilnost	κ	1	$J = \kappa \mu_0 H$
29	Magnetski moment (V = volumen)	m_m	Tm³	$m_m = JV$
30	Magnetska vodljivost (V = magnetski napon)	Λ	H	$\Lambda = \mu A/l = \Phi/V$
31	Magnetski napon	V, F	A	$dV = H\,dl$
32	Induktivitet	L	H	$U\,dt = L\,dI$
33	Poyntingov vektor	S	W/m²	$S = E \times H$
34	Gustoća energije električkog polja	w_e	J/m³	$w_e = \frac{1}{2} ED$
35	Gustoća energije magnetskog polja	w_m	J/m³	$w_m = \frac{1}{2} BH$
36	Gubici histereze	ΔW	W	$d\Delta W = H\,dB$
37	Valni otpor vakuuma	Z_0	Ω	$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$
38	Brzina elektromagnetske pojave	v	m/s	$v = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$
39	Lorentzova sila	F	N	$F = Q(E + v \times B)$
40	Žiromagnetska konstanta protona	γ	rad/(Ts)	$\omega = \gamma B$

još više. Većina autora počinje razlagati elektrofiziku pomoću *Priestley-Coulomb*ova zakona sile između dvije množine elektrike, iako matematičke tačkice nagomilane elektrike možemo samo zamisliti. *Stratton* započinje od *Maxwell*ovih jednadžbi, a *Pohl* mjerenjem električne struje i napona. Svaki autor odabire po svojoj pedagoškoj sklonosti skup od četiri međusobno nezavisne veličine i pomoću njih

definira sve ostale, koje nazivamo izvedenim. Tako, na primjer, *Sommerfeld* počinje »Optiku« Poyntingovim vektorom (vidi odsječak 1.4) koji je uveo u »Elektrici«.

Većina autora odabire za osnovne veličine elektromagnetizma ove četiri veličine: duljinu, vrijeme, napon i struju ($l\,t\,U\,I$). Takva osnovna četvorka vjerojatno je najjednostavnija za nastavu, jer preko *Ohm*ova zakona $R = U/I$ definira električki otpor i tako redom dalje. Samo rijetki autori upotrebljavaju za osnovnu četvorku $l\,t\,m\,I$. Razlog je u tome što su daljnja izlaganja otežana zbog prisutnosti mase m, koja u elektromagnetizmu igra manje upadljivu, iako ne podređenu ulogu (elektronika!). Podrobno smo izbor »osnovnih« veličina ukratko obradili u odsječku A.5.1 i odlomku E.2.2.2.

1.1.2. Pregled elektromagnetskih veličina. Nije zadatak metrologije, pa zato ni ove knjige, da favorizira ovaj ili onaj skup osnovnih četvorki elektromagnetizma. Kako smo već rekli, autor udžbenika osnova elektrofizike ili elektrotehnike započet će slijed definicija izvedenih elektromagnetskih veličina onako kako smatra da je najprikladnije za što bolji uspjeh svojih đaka kojima je knjiga namijenjena. Stoga smo u tablici E-1 skupili niz elektromagnetskih veličina i jednadžbi u kojima one dolaze, a da nam nije bila namjera da se jednadžbe shvate kao definicijske, iako mnoge od njih to mogu biti. Simboli u tablici predstavljaju veličine, pa su zato i jednadžbe veličinske, dakle primjenljive za bilo koji sistem jedinica ili nesistematični skup jedinica.

Mnoge od tih jednadžbi trebali bismo pisati u vektorskom obliku. To nismo učinili uglavnom iz tiskarskih razloga, jer bi dosljedna primjena vektorskog računa znatno povisila troškove tiskanja, a nismo uvjereni da bi s time u skladu bila veća korist od knjige. Ni jednadžbe većinom nisu pisane u najstrožim diferencijalnim ili integralnim oblicima, jer smo držali na umu da će knjigu većinom čitati oni kojima je doduše potrebno znanje o jedinicama, ali ne i viša matematika. Matematski visoko školovani čitatelj sam će se znati od makroskopskih i izotropnih jednadžbi podsjetiti na precizne diferencijalne definicijske jednadžbe.

U tablici E-1 naveli smo u stupcu 3 jedinice Međunarodnog sistema jedinica (SI). To je učinjeno zato da ne moramo kasnije pri opisu tog sistema jedinica ponovo sastavljati sličnu tablicu (vidi poglavlje 2).

Iza ovog odsječka slijede još četiri koji dodiruju najvažnije elektromagnetske pojave u praznini i u tvarima. Smatrali smo to potrebnim zato što su analogni prikazi u udžbenicima obično šturo sastavljeni, iako se baš na pojavama polarizacije i širenju elektromagnetskih pojava sastaju gotovo sve elektromagnetske veličine. Pri tome smo se služili najprimitivnijim modelima i eksperimentima, iako oni zato nisu neispravni.

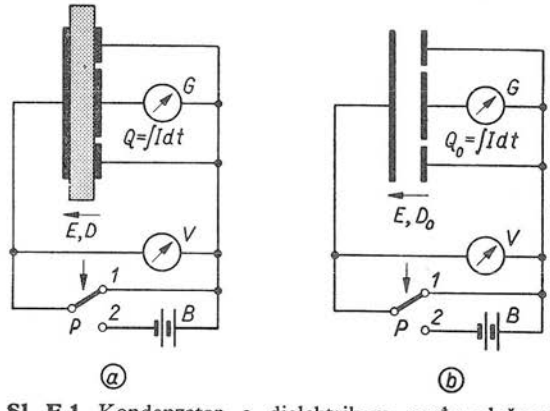
1.2. Fizikalne veličine elektrostatskog polja

1.2.1. Strujni udar i električka indukcija. Na slici E.1a vidimo u presjeku pločast kondenzator ispunjen nekim dielektrikom, što je istaknuto šrafiranjem. Jedna metalna ploča kondenzatora izrađena je u komadu, dok je druga izvedena tako da srednja četvorina ima površinu A. Rubni dio desne ploče kondenzatora postoji zato da bi vektor jakosti električkog polja E u svakom dijelu prostora ispod površine A bio jednak i na čitavom putu do lijeve ploče okomit na ravninu ploče, da bi, dakle, polje bilo *homogeno*.

U nacrtanom položaju preklopke P kondenzator je električki potpuno neaktivan jer je preko kontakta 1 kratko spojen. To se vidi na elektrostatskom voltmetru V koji ne iskazuje nikakav otklon. Prebacimo li preklopku P u položaj 2, voltmetar će pokazivati napon U, a balistički će galvanometar G svojim otklonom zabilježiti da je kroz njega protekla elektrika Q. Vratimo li sada preklopku opet u položaj 1, balistički će galvanometar ponovo dati otklon Q, dok će napon spasti na nulu.

Galvanometar G izmjerio je onu elektriku Q koja se kod nabijena kondenzatora nalazi na srednjoj desnoj ploči površine A. Tačno nasuprot površini A nalazi se na lijevoj ploči, također na površini A, elektrika Q. Ove se elektrike, pozitivna na desnoj ploči, a negativna na lijevoj, nalaze u ravnoteži, tj. po apsolutnoj su vrijednosti jednake. One su jednoliko razdijeljene po površini ploča.

Dielektrik između nasuprotnih površina A nalazi se u posebnom napetom stanju, njega prožima električko polje koje karakteriziramo sa dva vektora. Jedan od njih je jakost električkog polja E koje u našem primjeru iznosi $E = U/l$, gdje je U napon između ploča, a l razmak paralelnih ploča.



Sl. E.1. Kondenzator s dielektrikom među pločama i bez njega

Prema priznatom *Faraday-Maxwell*ovu shvaćanju električkog polja, između obloga kondenzatora prolazi kroz dielektrik električki tok Ψ, analogno magnetskom toku Φ kroz feromagnetike. Električki tok Ψ počinje od pozitivne elektrike $+Q$ i završava u negativnoj $-Q$, a na samoj oblozi jednak je toj elektrici, dakle $\Psi = Q$. Gustoću toga toka nazivamo električkom indukcijom D (ponekad i gustoćom dielektričkog pomaka), koju definiramo relacijom $\Psi = DA$, gdje su indukcija D i površina A vektori, a njihov umnožak skalarni produkt vektora. Ovdje vektorske oznake ispuštamo jer promatramo samo homogena polja i izotropne dielektrike.

Prema tome možemo reći da je balistički galvanometar, izmjerivši strujni udar Q (vidi sliku E.1a), ujedno izmjerio Ψ, pa je, dakle, $Q = \Psi = DA$. Opis polja sa Ψ i Q samo su dva nazora na električke pojave; prvi je pomoću polja, a drugi (stariji) pomoću »djelovanja elektrike na daljinu«. U primjeni se koristimo s oba gledanja, pa čak i zajedno kao što je i ovdje slučaj, jer je to katkada od koristi pri računu. Prednosti predodžbe sa Ψ i s vektorima E i D opažaju se naročito jako onda kada je riječ o elektromagnetskim poljima u kojima se vektori D i E ne moraju završavati u elektrikama Q, već se bez izvora i ponora ($\pm Q$) ulančuju s magnetskim poljima (elektromagnetska indukcija). Iz $Q = \Psi = DA$ vidimo da je apsolutna vrijednost vektora D jednaka površinskoj gustoći elektrike $\sigma = Q/A$, koja je jednoliko razmještena na svakoj od ploča površine A.

1.2.2. Električki kapacitet i dielektričnost. Omjer izmjerene elektrike Q i izmjerenog napona U nazivamo *kapacitetom* kondenzatora

$$C = \frac{Q}{U},$$

što se zbog $\Psi = Q = DA$ te $U = El$ može napisati i u obliku

$$C = \frac{DA}{El}. \tag{1.2-1}$$

Sada naš misaoni pokus izvedimo prema slici E.1b, tj. iz prostora među pločama izvukli smo dielektrik. Ostao je samo zrak (strogo govoreći morali bismo međuprostor iscrpsti tako da bi u nutrini vladao potpuni vakuum). Prebacimo li preklopku P u položaj *2*, voltmetar na ovom, sada zračnom kondenzatoru, pokazat će opet napon U, ali će otklon balističkog galvanometra biti *manji* i iznositi Q_0. Zato će prema $\Psi_0 = Q_0 = D_0 A$ i električka indukcija D_0 u zraku biti manja nego kad je u kondenzatoru bio dielektrik, jer je površina A ostala nepromijenjena. Isto je tako ostala nepromijenjena i jakost električkog polja $E = U/l$ jer su isti i U i l. Stoga će kapacitet zračnog kondenzatora

$$C_0 = \frac{D_0 A}{El} \tag{1.2-2}$$

biti manji od ranije izračunatog C, dakle $C_0 < C$.

Omjer između Q i Q_0, Ψ i Ψ_0, D i D_0 iz ova dva pokusa nazivamo *relativnom dielektričnošću* ϵ_r; prema tome je

$$\epsilon_r = \frac{\Psi}{\Psi_0} = \frac{D}{D_0} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{C}{C_0} \tag{1.2-3}$$

čist broj, jer je riječ o omjeru istorodnih veličina različitih vrijednosti. Odavde vidimo da je $D = \epsilon_r D_0$, $\Psi = \epsilon_r \Psi_0$ itd.

U izrazu (1.2-2) dolazi omjer dvaju istosmjernih vektora D_0 i E. Pokusi su pokazali da je omjer D_0/E prirodna konstanta čija vrijednost približno iznosi

$$\epsilon_0 = 8{,}85421 \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$$

gdje je F kratica za jedinicu kapaciteta SI »farad« = Vs/A. Univerzalnu konstantu ϵ_0 nazivamo *električkom konstantom*; ovaj naziv (franc. constante électrique, engl. electric constant) prihvatila je CEI (Commission Electrotechnique Internationale) svojom publikacijom 206 od godine 1966: Dénomination des grandeurs caractérisant les propriétés magnétiques et électriques du vide et d'une substance. Prije toga veličinu ϵ_0 nazivali smo *influencijskom konstantom* ili »dielektričnošću vakuuma«. Ovaj drugi, stariji naziv, potječe iz slijedećeg rasuđivanja.

Budući da je $\epsilon_0 = D_0/E$, izraz (1.2-2) za kapacitet vakuumskog kondenzatora glasi $C_0 = \epsilon_0 A/l$. Zato što je prema (1.2-3) $D = \epsilon_r D_0$, analogno građeni izraz (1.2-1) za kapacitet kondenzatora s dielektrikom možemo pisati u obliku

$$C = \frac{\epsilon_r D_0 A}{El} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{l} = \frac{\epsilon A}{l}, \tag{1.2-4}$$

gdje je veličina $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ nazvana *dielektričnošću*, a jednaka je umnošku relativne dielektričnosti ϵ_r i električke konstante ϵ_0. Budući da je za vakuum $\epsilon_r = 1$, za nj je, dakle, $\epsilon = \epsilon_0$, pa se stoga ϵ_0 naziva i *dielektričnost vakuuma*.

Opisana dva mjerenja na slikama E.1a i b stvarno se primjenjuju za mjerenje relativne dielektričnosti. Budući da prvo mjerenje daje C, a drugo C_0, zbog

$$C = \epsilon A/l, \quad C_0 = \epsilon_0 A/l$$

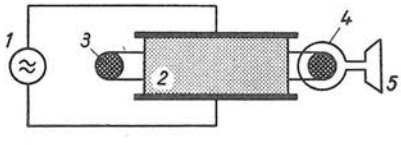
slijedi $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = C/C_0$, što smo već napisali u jednadžbi (1.2-3).

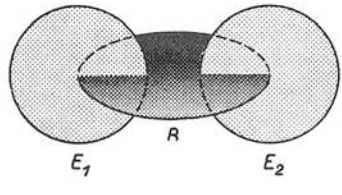
1.2.3. Električka polarizacija. Prvo mjerenje s dielektrikom dielektričnosti ϵ dalo je električku indukciju D, a drugo mjerenje s vakuumom između ploča kondenzatora manju indukciju D_0. Očito je razliku indukcije

$$P = D - D_0 \tag{1.2-5}$$

izazvao umetnuti dielektrik. Veličinu P nazivamo električkom polarizacijom, koju tumačimo atomističkom strukturom materije. Ako zamislimo u primitivnom modelu atome kao električki pozitivno nabijene teške jezgre oko kojih kruže lagani električki negativni elektroni, onda je u normalnom stanju atom električki uravnotežen, jer, na primjer, dielektrik, koji je također sastavljen od atoma, prema vani ne pokazuje nikakvo električko djelovanje. Kad atome stavimo u električko polje jakosti E, na jezgre s elektrikom $+q$ djeluje sila $F = qE$, a na elektrone suprotno usmjerena sila $F = -qE$. Time se poremeti prvotna električka ravnoteža pa se putanje elektrona razvuku suprotno smjeru polja E, a jezgra pomakne u smjeru polja. Tako svaki atom postane električki dipol koji više nije električki neutralan prema vani, a sav je elastično napregnut. Pod djelovanjem vanjskog polja E atomi su se *polarizirali* i sa svojim električkim poljima drže ravnotežu vanjskom polju E, na primjer polju našeg kondenzatora. Zbog toga veličinu $D = Q/A$ možemo shvatiti kao gustoću pomaka elektrike Q preko presjeka A. Iako u vakuumu nema atoma, ipak i u njemu vrijedi $D_0 = Q_0/A$, što nam može pokazati pokus koji je prvi put izveo godine 1905. *Whitehead* da bi dokazao ispravnost *Maxwell*ove teze o pomačnim strujama $I = \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ kroz dielektrik i kroz vakuum.

Na slici E.2 vidimo kako je izvor visokofrekventnog napona *1* priključen na ploče kondenzatora među čijim se pločama nalazi dielektrik *2* izveden u obliku valjka. Dielektrički valjak obuhvaća željezni prsten *3* oko kojega je namotana zavojnica *4* na čije je krajeve priključen mikrofon *5*. Pokus je pokazao da zvučnik





Sl. E.2 (lijevo). Whiteheadov pokus s pomačnim strujama. **Sl. E.3** (desno). Ulančenje magnetskog polja sa dva električka polja: E_1 — električko polje kondenzatora, B — magnetsko polje željeznog prstena, E_2 — električko polje zavojnice zvučnika

proizvodi zvukove ako se pusti u pogon generator *1*. To znači da se u svitku *4* inducirao električki napon, a odatle slijedi da se u željeznom prstenu *3* morao mijenjati magnetski tok, jer je $-U_i = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Ovo magnetsko polje mogla je stvoriti samo električna struja I što teče okomito na ravninu u kojoj leži željezni prsten *3*.

To znači da je ta struja usmjerena baš od jedne ploče kondenzatora prema drugoj. Budući da je prema definiciji $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, a $Q = \Psi$, to je

$$I = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$

jakost struje kroz dielektrik. Budući da zbog savršenosti dielektrika to nije galvanska struja, kao, na primjer, kod strujanja kroz otporničke vodiče, ona se naziva pomačnom strujom.

Pogledamo li sliku E.2, vidimo da su prilikom pokusa međusobno ulančena tri polja. Najprije je izmjenično električko polje kondenzatora $E_1 = U/l$ stvorilo u željeznom prstenu *3* magnetsko polje indukcije B, a ovo je u zavojnici zvučnika proizvelo novo električko polje E_2. Takvu dvostruku ulančenost triju polja simbolički prikazuje slika E.3. Smisao prve *Maxwell*ove jednadžbe za dielektrik

$$\oint H\,\mathrm{d}l = A\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \qquad \text{ili} \qquad \mathrm{rot}\,H = \frac{\partial D}{\partial t} \tag{1.2-6}$$

baš i jest u tome što opisuje prvo ulančenje $E_1 - B$ na slici E.3. Pri tom znak $\oint$ predstavlja kružni integral.

Pokusi su pokazali da zvučnik *5* na slici E.2 zuji i onda kad između ploča kondenzatora nema dielektrika, premda to još fizikalno ne znamo objasniti jer u vakuumu primitivni modeli atoma zakazuju. To što je u ovim pokusima primijenjena izmjenična struja, ne protivi se našem razmatranju uz sliku E.1, jer priključivanje kondenzatora na istosmjerni napon predstavlja također vremenski promjenljivu pojavu, u biti istu kao što su izmjenične struje.

1.2.4. Električka susceptibilnost. Vratimo se sada veličini električka polarizacija P koju smo uveli jednadžbom (1.2-5). Budući da je $D = \epsilon_r D_0$, a $D_0 = \epsilon_0 E$, izraz (1.2-5) možemo napisati i u obliku

$$P = D - D_0 = (\epsilon_r - 1)D_0 = \epsilon_0 E(\epsilon_r - 1). \tag{1.2-7}$$

Razliku između relativne dielektričnosti ϵ_r i 1 nazivamo električkom susceptibilnošću

$$\xi = \epsilon_r - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{P}{D_0}. \tag{1.2-8}$$

Zapravo je to relativna susceptibilnost; apsolutna susceptibilnost bila bi $\xi\epsilon_0$, jer bi u analogiji sa $\epsilon = D/E$ onda bilo $\xi\epsilon_0 = P/E$, a to je dio dielektričnosti koji prema

$$\epsilon = \epsilon_0 + \xi\epsilon_0 = \epsilon_0(1 + \xi) = \epsilon_0\epsilon_r$$

nedostaje do pune apsolutne dielektričnosti ϵ. Ovdje možemo spomenuti da električka polarizacija P, odnosno električka susceptibilnost ξ, nije konstantna veličina, već ona znatno ovisi o jakosti električkog polja E, o temperaturi u obliku $\xi = \mathrm{const}/T$, a napose o tome kakva je elektriziranja i razelektriziranja doživio dielektrik ranije (dielektrička histereza!). Pod »specifičnom električkom susceptibilnošću« razumijeva se veličina

$$\chi = \frac{\xi}{\rho} = \frac{\epsilon_r - 1}{\rho} = \frac{P}{\rho\epsilon_0 E}, \tag{1.2-9}$$

gdje je ρ gustoća dielektrika, $\rho = m/V$.

Dosadašnja razmatranja vrijedila su za slučaj kad je prostor između obloga kondenzatora bio potpuno ispunjen dielektrikom. Ako tome nije tako, prilike se potpuno mijenjaju. U tu svrhu razmotrimo slučaj kad se u prvotno homogeno električko polje u zraku $E = U/l$ stavi dielektrik dielektričnosti ϵ. Neka je to šuplji valjak kao na slici E.4. Već na skici silnicâ električkog polja vidimo da će polje u unutrašnjosti valjka E_u biti slabije od prvotnoga E, jer su se na čeonim stranama dielektričkog valjka influencirale pozitivne i negativne množine elektrike.

Električka indukcija u unutrašnjosti valjka iznosit će $D_u = D_0 - NP$, gdje je $D_0 = \epsilon_0 E$ prvotna indukcija, a N faktor depolarizacije. Jakost polja također će biti smanjena; iznosit će

$$E_u = E - N\frac{P}{\epsilon_0},$$

a polarizacija P više neće slijediti jednadžbu (1.2-8) već $P = \xi \epsilon_0 E_u$. Stavimo li ovaj P u gornju jednadžbu, dobivamo polje u šupljini dielektričkog valjka

$$E_u = \frac{E}{1 + N\xi}. \tag{1.2-10}$$

Obrnuta je situacija kad se u prostoru između ploča kondenzatora nalazi dielektrik sa ϵ, a u njemu je, na primjer, zračni mjehurić u obliku rotacijskog elipsoida s većom osi u smjeru polja. Jakost električkog polja E_u u takvom mjehuriću iznosi

$$E_u = \frac{E}{1 - N\xi/\epsilon_r}, \tag{1.2-11}$$

dakle je $E_u > E$ za razliku od prijašnjeg primjera gdje je bilo $E_u < E$.

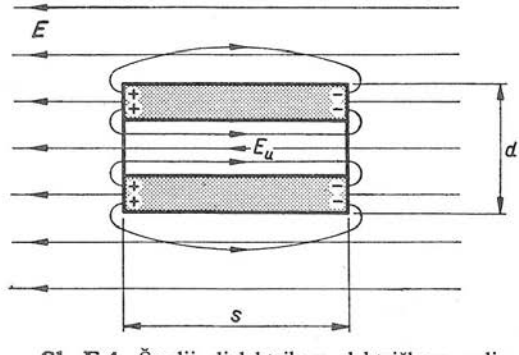
Ukoliko mjehurić ili dielektrik na slici E.4 nemaju oblik rotacijskog elipsoida, polje u njima neće biti samo pojačano ili oslabljeno, već će postati i nehomogeno. Jedino elipsoid ne uzrokuje nehomogenost polja. Ako je veća os rotacijskog elipsoida s, a manja d, onda su vrijednosti faktora depolarizacije N sakupljene u tablici E-2.

Kugla ima $s/d = 1$, pa je $N = 1/3$, što u kuglici dielektrika stavljenoj u električko polje E uzrokuje jakost polja

$$E_u = \frac{3}{2 + \epsilon_r} E,$$

dok je jakost polja u okruglom zračnom mjehuriću

$$E_u = \frac{3\epsilon_r}{2\epsilon_r + 1} E.$$



Sl. E.4. Šuplji dielektrik u električkom polju

Prilikom stvarnih mjerenja izduženi rotacijski elipsoidi nadomještavaju se valjcima kojima je $s \gg d$ (vidi sliku E.4).

Tablica **E-2**

Faktor depolarizacije N rotacijskog elipsoida

s/d	1	2	5	10	20	50	100
N	1/3	0,174	$5{,}58 \cdot 10^{-2}$	$2{,}03 \cdot 10^{-2}$	$6{,}75 \cdot 10^{-3}$	$1{,}44 \cdot 10^{-3}$	$4{,}3 \cdot 10^{-4}$

U starijoj literaturi, osobito onoj koja upotrebljava brojčane jednadžbe prilagođene *Gaussovu* sistemu jedinica (vidi odsječak 4.3), električka susceptibilnost povezana je s relativnom dielektričnošću jednadžbom

$$\xi' = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi}. \tag{1.2-12}$$

Za razliku od naše susceptibilnosti ξ iz jednadžbe (1.2-8), ovu stariju nazivamo »neracionalnom susceptibilnošću« i označujemo crticom. Usporedimo li izraz (1.2-8) sa (1.2-12), vidimo da je

$$\xi = 4\pi\xi'.$$

U skladu s jednadžbom (1.2-9) analogno se odnose i specifične susceptibilnosti, $\chi = 4\pi\chi'$. Obratno je za stari faktor depolarizacije N' koji je s racionalnim N u odnosu

$$N' = 4\pi N,$$

pa, na primjer, za kuglu iznosi $N' = 4\pi/3$, dok je prema tablici E-2 sadašnji racionalni faktor depolarizacije $N = 1/3$.

1.3. Neke veličine magnetskog polja

1.3.1. Induktivitet i magnetska indukcija. Na slici E.5 nacrtali smo magnetski analogon električkog uređaja sa slike E.1. Da bismo u unutrašnjosti prerezanog metalnog valjka izrađenog od električki odlično vodljivog lima dobili homogeno magnetsko polje, razdijelili smo valjak na tri dijela dužine l_1, l i l_2. Za naša mjerenja služit ćemo se samo srednjim dijelom valjka dužine l, a oba rubna služit će samo zato da održe homogenost magnetskog polja u srednjem valjku. U tu svrhu treba otpornike R_1, R i R_2 namjestiti tako da kroz dovodne žice teku iz baterije B baš takve struje I_1, I i I_2 koje udovoljavaju tom zahtjevu. Pri naročito preciznim magnetskim mjerenjima možemo zamisliti da su lijevi i desni rubni valjak produženi i savijeni tako da se sastaju, dakle predstavljaju kružni valjak.

Kad preklopkom P uključimo bateriju B, strujomjer srednjeg valjka pokazivat će struju I, balistički voltmetar G pokazat će naponski udar (naponski impuls) Φ_0, a to je magnetski tok u zraku unutar srednjeg valjka. Mnogobrojni pokusi pokazuju da je taj magnetski tok Φ_0 razmjeran struji I, dakle $\Phi_0 = L_0 I$, gdje je L_0 konstanta svojstvena geometrijskim dimenzijama uređaja sa slike E.5. Omjer magnetskog toka i struje

$$L_0 = \frac{\Phi_0}{I} \tag{1.3-1}$$

nazivamo induktivitetom (samoinduktivitetom) našeg svitka koji se sastoji od jednog zavoja — prerezanog valjka duljine l.

Veličinu $B_0 = \Phi_0/A$ nazivamo magnetskom indukcijom. Ovdje je $A = r^2\pi$ presjek šupljine valjka ako je r njegov polumjer. Budući da je B_0 omjer toka Φ_0 i površine A kroz koju taj tok prolazi, magnetska se indukcija katkada naziva i gustoćom magnetskog toka.

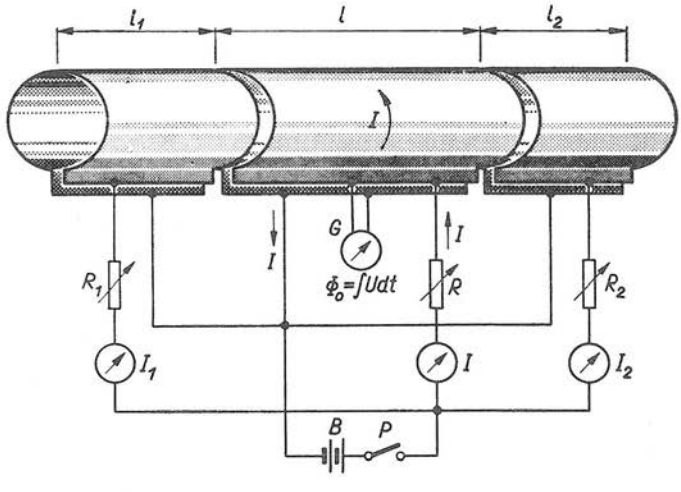
Budući da je magnetski tok Φ_0 uzbudila električna struja I, u magnetskim se poljima uvodi pomoćna veličina: jakost magnetskog polja $H = I/l$, odnosno općenitije $H = \Theta/l$, gdje je veličina $\Theta = NI$ magnetska uzbuda jednaka umnošku broja zavoja N i jakosti struje I što teče tim zavojima. U našem je slučaju $\Theta = I$, jer je $N = 1$. Uzbuda Θ i tok Φ_0 odnose se kao uzrok i posljedica. Uvrstimo li izraze $\Phi_0 = B_0 A$ i $I = Hl$ u jednadžbu (1.3-1), dobivamo induktivitet srednjeg valjka na slici E.5

$$L_0 = \frac{B_0 A}{H l}. \tag{1.3-2}$$

1.3.2. Permeabilnost. Pokusi pokazuju da je omjer B_0/H u vakuumu univerzalna konstanta. Vrijednost je te konstante (odsječak 2.1)

$$\mu_0 = \frac{B_0}{H} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}},$$

gdje je H kratica za jedinicu induktiviteta H = henry = Vs/A. Veličinu μ_0 nazivamo *magnetskom konstantom*. Stariji nazivi su »indukcijska konstanta« i »permeabilnost vakuuma« (o terminologiji vidi odlomak 1.2.2).



Sl. E.5. Magnetsko polje u prerezanom valjku

Sada naš pokus promijenimo samo utoliko da u šupljinu valjaka stavimo neki feromagnetik, na primjer željezo. Uključenje preklopke P dat će sada na balističkom voltmetru G neki drugi otklon, pokazat će da je u nutrini srednjeg valjka magnetski tok Φ, koji je *veći* od prvotnoga Φ_0, iako smo struju I zadržali na istoj vrijednosti. Budući da je presjek valjka $A = r^2\pi$ ostao nepromijenjen, veća je i magnetska

indukcija, koja sada zbog većeg magnetskog toka iznosi $B = \Phi/A$. U analogiji s jednadžbom (1.3-2) induktivitet srednjeg valjka sada iznosi

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{BA}{Hl}, \tag{1.3-3}$$

jer se jakost magnetskog polja H nije promijenila zato što struja i u ovom pokusu iznosi I, a ostale su iste i dimenzije valjka.

Omjer veličina Φ i Φ_0, B i B_0 te L i L_0 nazivamo relativnom permeabilnošću μ_r; prema tome je

$$\mu_r = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{L}{L_0} \tag{1.3-4}$$

čist broj, jer je riječ o omjeru različitih vrijednosti istorodnih veličina. Iz gornje jednadžbe vidimo da je $\Phi = \mu_r \Phi_0$, $B = \mu_r B_0$ i $L = \mu_r L_0$. Stoga izraz (1.3-3) možemo napisati u obliku $L = \mu_r B_0 A : (Hl)$, a kako je $B_0/H = \mu_0$, induktivitet L valjka ispunjenog feromagnetikom je

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{A}{l} = \mu \frac{A}{l},$$

gdje je $\mu = \mu_r \mu_0$ permeabilnost, a jednaka je umnošku relativne permeabilnosti μ_r i magnetske konstante μ_0. Za vakuum je $\mu_r = 1$; stoga je i formalno za nj $\mu = \mu_0$, pa se zato μ_0 naziva i permeabilnošću vakuuma.

1.3.3. Magnetska polarizacija. Usporedimo li gornja izlaganja s onima u odsječku 1.2, vidimo da formalno postoji potpuna analogija jednadžbi. Električkom toku Ψ odgovara magnetski tok Φ, električkoj indukciji D magnetska indukcija B, električkom polju E magnetsko polje H, a dielektričnosti ϵ permeabilnost μ. Iako su za pamćenje jednadžbi i procesa takve analogije vrlo korisne, one katkada mogu stvoriti kriv utisak, jer stvarno se lako dadu mjeriti veličine E i B, dok D i H smatramo u novije vrijeme pomoćnim veličinama.

Analogije se produžuju još i dalje. Već sam zakon induciranja napona $-U_i = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$, koji u strogoj nauci o elektromagnetizmu pišemo u integralnom i diferencijalnom obliku druge *Maxwell*ove glavne jednadžbe kao

$$\oint E \,\mathrm{d}l = -A\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{ili} \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.3-5}$$

potpuno je nalik prvom *Maxwell*ovu zakonu koji smo napisali u jednadžbi (1.2-6). Spomenimo usput da izraz (1.3-5) opisuje drugo elektromagnetsko ulančenje $(B-E_2)$ na slici E.3.

Spomenute analogije jednadžbi idu još dalje. Prilikom mjerenja na našem uređaju sa slike E.5 ustanovili smo da je uz istu uzbudu Θ kroz valjak s feromagnetikom permeabilnosti μ prolazio magnetski tok Φ, a kad njega nije bilo tok Φ_0. Pripadne magnetske indukcije bile su $B = \Phi/A$ i $B_0 = \Phi_0/A$. Očito je razliku magnetskih indukcija

$$J = B - B_0$$

uzrokovao umetnuti feromagnetik. Veličinu J nazivamo magnetskom polarizacijom, analogno električkoj polarizaciji P (odlomak 1.2.3). Magnetsku polarizaciju

J također tumačimo atomskom strukturom materije. Za izvor dodatnog magnetskog toka smatramo tokove što ih stvaraju vrtnje elektrona oko vlastite osi (spin). Kad feromagnetska tvar nije u vanjskom magnetskom polju, kakvo je na primjer u šupljini našeg valjka, elektronska magnetska polja orijentirana su kojekako, pa je njihov magnetski efekt prema vani jednak približno nuli. Kad feromagnetik dođe u vanjsko magnetsko polje, ova se kaotična ravnoteža narušava, a suma sada jednako orijentiranih elektronskih magnetskih tokova makroskopski se iskazuje kao magnetska polarizacija J.

1.3.4. Magnetska susceptibilnost. Razliku između relativne permeabilnosti μ_r i broja 1 nazivamo relativnom magnetskom susceptibilnošću

$$\kappa = \mu_r - 1 = \frac{J}{B_0} = \frac{B - B_0}{B_0}, \tag{1.3-6}$$

dok je apsolutna susceptibilnost umnožak $\kappa\mu_0$, pa dakle vrijedi $\mu = \mu_0 + \kappa\mu_0$, odnosno $B = \mu H = (\mu_0 + \kappa\mu_0)H = \mu_0 H + J = B_0 + B_i$, jer je prema jednadžbi (1.3-6) $J = \kappa B_0 = \kappa\mu_0 H = B_i$.

Specifična magnetska susceptibilnost definirana je analogno električkoj kao omjer susceptibilnosti κ i gustoće ρ:

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho} = \frac{\mu_r - 1}{\rho} = \frac{J}{\rho\mu_0 H}. \tag{1.3-7}$$

Na primjer, relativna susceptibilnost vode pri temperaturi $\vartheta = 0\,^\circ\mathrm{C}$ iznosi $\chi = -9{,}07 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m^3/kg}$, što znači da je $\kappa = -9{,}07 \cdot 10^{-6}$. Vidimo da je voda dijamagnetična, tj. ima manju permeabilnost od vakuuma. Kisik je, naprotiv, paramagnetičan, jer je $\kappa = +1{,}86 \cdot 10^{-6}$.

Kao ni električka susceptibilnost ξ, tako ni magnetska susceptibilnost κ nije stalna veličina, već znatno ovisi o jakosti magnetskog polja H u kojem se nalazi tvar, o prošlosti (histereza), a njena vrijednost pada s temperaturom. Isto vrijedi i za J.

Pojave depolarizacije (demagnetizacije) nastaju kod magnetskih polja posve analogno kao kod električkih. U slučaju šupljeg grumena feromagnetika (nalik na sliku E.4), odnosno zračnog mjehurića u feromagnetiku, vrijede jednadžbe (1.2-10) i (1.2-12) prošlog odsječka, samo treba umjesto simbola E_u, E, ξ i ϵ_r staviti H_u, H, κ i μ_r. Faktor magnetske depolarizacije N za rotacijski elipsoid (odnosno praktički za izduženi valjak) istih je vrijednosti kao i N u tablici E-2.

Magnetska susceptibilnost κ' u starijoj literaturi u vezi je s relativnom permeabilnošću na ovaj način (usporedi s krajem odlomka 1.2.3)

$$\kappa' = \frac{\mu_r - 1}{4\pi},$$

pa je, dakle, odnos sadašnje i stare (neracionalne) magnetske susceptibilnosti isti kao kod električke

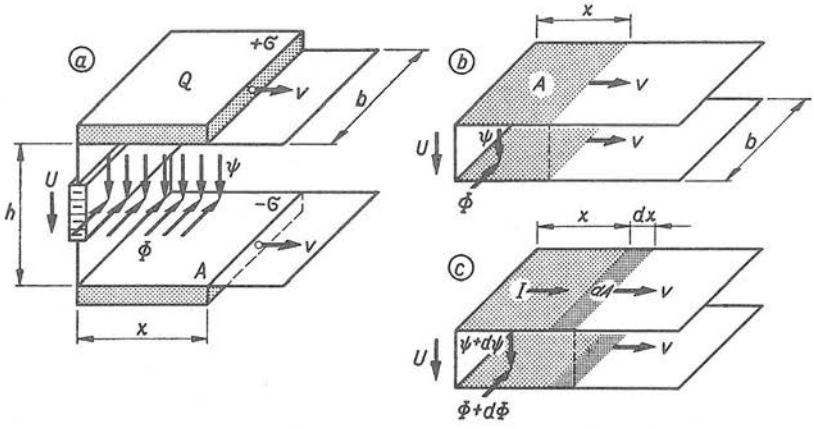
$$\kappa = 4\pi\kappa'.$$

Isto je tako i $\chi = 4\pi\chi'$. Za faktor depolarizacije već smo u prošlom odsječku naveli da je $N' = 4\pi N$.

1.4. Fizikalne veličine elektromagnetskog polja

1.4.1. Brzina širenja elektromagnetske pojave u ovisnosti o dielektričnosti ϵ i permeabilnosti μ obično se izvodi pomoću dvije *Maxwell*ove jednadžbe navedene pod rednim brojevima 18 i 19 u tablici E-1. Pri tom je potrebno znanje više matematike, pa takve izvode nalazimo samo u visokoškolskim udžbenicima. Da omogućimo uvid u ove pojave, bitne i za kasnije razmatranje mjernih sistema elektromagnetizma, i onima koji ne vladaju diferencijalnim jednadžbama, priredili smo pojednostavnjeni izvod na primitivnom modelu. Pri tom je potrebno znati samo pojam diferencijala koji smo već u niz navrata primjenjivali u ovoj knjizi. Tko nije naviknut na računanje diferencijalima, neka npr. pod znakom dA (čitaj: diferencijal površine A) zamišlja izvanredno malu površinu. Jednako je i s ostalim veličinama (dx, $d\Phi$ itd.).

Na slici E.6a nacrtan je dio naročitog dalekovoda koji se sastoji od dvije paralelne metalne trake. Svaka traka široka je b, a međusobno su razmaknute h. Duljina trake x vrlo je velika, u prvi mah možemo zamisliti da se prostire unedogled daleko. Nacrtane trake smještene su tako da je $b \gg h$, pa stoga u daljnjem razmišljanju možemo pretpostaviti da su polja homogena, a rubni efekti zanemarivi. Osim toga



Sl. E.6. Utvrđivanje brzine elektromagnetskog polja

ćemo u računu pretpostaviti da nema gubitaka snage i energije (Jouleova toplina, vrtložne struje, polarizacija dielektrika itd.). Na lijevoj strani našeg dalekovoda na slici E.6a ugrađena je baterija koja nakon uključenja stalno drži metalne trake pod istosmjernim naponom U. Prostor između traka ispunjen je tvari s dielektričnosti ϵ i permeabilnosti μ.

Kao i svaka pojava u prirodi, tako će se i elektromagnetsko polje širiti nekom konačnom brzinom v. Naš je zadatak da utvrdimo kako svojstva tvari ϵ i μ utječu na tu brzinu. Kad uključimo bateriju, između lijevog kraja dalekovoda pojavit će se napon U, a jakost električkog polja u prostoru između traka iznosit će $E = U/h$. Ovo posebno stanje prostora širit će se duž dalekovoda brzinom v. Budući da u dielektriku djeluje polje E, električka će indukcija D u dielektriku iznositi $D = \epsilon E$. Vektor indukcije D bit će usmjeren od gornje ploče, gdje je površinska gustoća pozitivne elektrike $\sigma = Q/A$, prema donjoj traci, gdje je gustoća negativne elektrike $\sigma = -Q/A$. Ovdje je $A = bx$ površina trake koju je do promatranog trenutka

t zaposjela elektrika Q i $-Q$. Kroz dielektrik u prostoru između nasuprotnih površina A prolazit će električki tok Ψ, koji zbog $E = U/h$ iznosi

$$\Psi = DA = \epsilon EA = \epsilon Ebx = \epsilon Ub\frac{x}{h}. \tag{1.4-1}$$

Stanje u prostoru na slici E.6a u promatranom trenutku t možemo opisati i drukčije. Znamo da je $Q = CU$, gdje je C kapacitet kondenzatora (koji predstavlja dio našeg dalekovoda) obložen elektrikom Q. Budući da je (vidi tablicu E-1) $\Psi = Q$, iz usporedbe jednadžbe $Q = \Psi = CU$ sa (1.4-1) slijedi kapacitet elektrikom prožetog dalekovoda

$$C = \epsilon b\frac{x}{h}. \tag{1.4-2}$$

Kapacitet po jedinici duljine dalekovoda iznosi

$$C_0 = \frac{C}{x} = \epsilon\frac{b}{h}. \tag{1.4-3}$$

Slika E.6b prikazuje isto stanje kao na slici a, samo pojednostavnjeno. Sada pogledajmo kakvo je stanje na našem dalekovodu u trenutku $t+\mathrm{d}t$, to jest $\mathrm{d}t$ nakon razmatranoga stanja. U toku vremena $\mathrm{d}t$ polje će se proširiti duž dalekovoda za

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t, \qquad \text{gdje je} \qquad v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \tag{1.4-4}$$

brzina polja. Time će se površina na koju je doprla nova elektrika povećati za $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}x$. Novo stanje prikazuje slika E.6c.

Budući da opet pretpostavljamo puni napon U između nasuprotnih površina $\mathrm{d}A$, u toku diferencijala vremena $\mathrm{d}t$ nastao je novi električki tok

$$\mathrm{d}\Psi = D\,\mathrm{d}A = \epsilon E\,\mathrm{d}A = \epsilon Ub\frac{\mathrm{d}x}{h}.$$

Kako je prema izrazu (1.4-3) jedinični kapacitet $C_0 = \epsilon b/h$, to je dalje $\mathrm{d}\Psi = UC_0\mathrm{d}x$, što je očito jer je $\mathrm{d}C = C_0\mathrm{d}x$ povećanje kapaciteta do kojeg je došlo tijekom vremena $\mathrm{d}t$. Zbog $\Psi = Q$ vrijedi i $\mathrm{d}\Psi = \mathrm{d}Q$, pa je, dakle, $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}\Psi = UC_0\mathrm{d}x$. Podijelimo li ovu jednadžbu sa $\mathrm{d}t$, dobivamo

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = UC_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \text{ili} \qquad I = UC_0v, \tag{1.4-5}$$

jer smo brzinu v definirali desnom jednadžbom (1.4-4).

Simbol I predstavlja, dakako, jakost električne struje koja mora neprekidno dotjecati u vrijednosti $I = UC_0v$ da bi se između novo »zaposjednutih« površina $\mathrm{d}A$ u vremenu $\mathrm{d}t$ uspostavio napon baterije U. Ova struja polazi iz baterije kako je nacrtano na slici E.6c, teče duž duljine x gornje trake, prelazi u obliku pomačne struje $I = D\,\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ kroz dielektrik na donju traku i vraća se po njoj opet u bateriju. Prema tome struja I teče u zatvorenom strujnom krugu, zatvara dakle zamku.

U trenutku t površina te zamke je hx (sl. E.6a i b), pa kroz nju prolazi magnetski tok $\Phi = Bhx = \mu Hhx$. Jakost magnetskog polja H iznosi $H = I/b$, jer smo

već na početku našeg izlaganja pretpostavili da je $b \gg h$. Prema tome je induktivitet L prostora, koji je u momentu t zaposjelo elektromagnetsko polje,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{I}{b} \frac{hx}{I} = \mu \frac{hx}{b}.$$

Induktivitet po jedinici duljine dalekovoda iznosi

$$L_0 = \frac{L}{x} = \mu \frac{h}{b}. \tag{1.4-6}$$

U trenutku $t+\mathrm{d}t$ (sl. E.6c) povećana je i površina hx kroz koju prolazi tok Φ za iznos $h\,\mathrm{d}x$. Budući da je struja I ostala nepromijenjena, povećanje magnetskog toka je

$$\mathrm{d}\Phi = Bh\,\mathrm{d}x = IL_0\,\mathrm{d}x.$$

Znamo da promjena magnetskog toka uzrokuje induciranje napona u zamci koja obuhvaća tok. U našem slučaju vodljiva zamka je onaj dio dalekovoda kroz koji prolazi magnetski tok $\Phi+\mathrm{d}\Phi$. Prema tome je inducirani napon

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -IL_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -IL_0 v. \tag{1.4-7}$$

Pretpostavili smo da nema gubitaka snage, pa smo time ujedno pretpostavili neizmjerno vodljivu kovinu od koje je izrađena traka našeg dalekovoda. Prema tome nema omskih padova napona, pa naponu baterije U drži naponsku ravnotežu samo inducirani napon U_i. Budući da zbroj napona u zatvorenom strujnom krugu mora biti jednak nuli, to jest $U+U_\mathrm{i}=0$, uz pomoć izraza (1.4-7) dobivamo

$$U = IL_0 v. \tag{1.4-8}$$

Izrazi (1.4-5) i (1.4-8) doveli su nas posve blizu traženog rješenja. Uvrstimo li (1.4-8) u (1.4-5), slijedi $I = IL_0 v C_0 v$, odakle ispada I, pa je dalje

$$L_0 C_0 v^2 = 1. \tag{1.4-9}$$

Stavimo li u netom dobivenu jednadžbu vrijednosti za L_0 i C_0 iz (1.4-3) i (1.4-6), dobivamo

$$\frac{\mu h}{b} \frac{\epsilon b}{h} v^2 = 1,$$

odakle odmah slijedi

$$\epsilon \mu v^2 = 1, \quad \text{odnosno} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{1.4-10}$$

Vidimo, dakle, da brzina elektromagnetskog polja ovisi samo o dielektričnosti ϵ i permeabilnosti μ tvari koja se nalazi između traka našeg dalekovoda. Stroga izvođenja pokazuju da to vrijedi za bilo kakvu konfiguraciju vodiča, a ne samo za kutiji sličan dalekovod sa slike E.6a.

U *vakuumu* je relativna dielektričnost $\epsilon_\mathrm{r} = \epsilon/\epsilon_0$ jednaka jedinici, a isto tako i relativna permeabilnost $\mu_\mathrm{r} = \mu/\mu_0$. U tom slučaju izraz (1.4-10) dobiva oblik

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \tag{1.4-11}$$

gdje su ϵ_0 i μ_0 električka i magnetska konstanta. Budući da je prema dogovoru $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (odsječak 2.1), a *mjerenje* daje za električku konstantu $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m, pomoću izraza (1.4-11) dobivamo vrijednost brzine v_0

$$v_0 = 2{,}997\,92 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Prema tome je v_0 brzina širenja *svjetla* do čije se vrijednosti došlo posve *drukčijim* mjerenjima nego prilikom određivanja ϵ_0 mjerenjem.

Budući da je $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ i $\mu = \mu_r \mu_0$, to se v iz jednadžbe (1.4-10) može izraziti pomoću brzine svjetla (vidi odlomak 3.7.2)

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}. \tag{1.4-12}$$

Odavde vidimo da će brzina elektromagnetskog polja u zraku biti približno jednaka brzini svjetla, jer je za zrak približno $\epsilon_r = 1$ i $\mu_r = 1$, dakle kao za vakuum. U ostalim tvarima, gdje je ili ϵ_r (dielektrici) ili μ_r (feromagnetici) mnogo veće od 1, brzina će polja biti *manja* od brzine svjetla.

1.4.2. Valni otpor. Pogledajmo još letimično neke druge veličine elektromagnetskog polja u koje nam daje uvid naš primitivni model dalekovoda sa slike E.6. Budući da znamo napon U i struju I, možemo pomoću *Ohm*ova zakona odrediti otpor našeg dalekovoda

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{h}{b}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{h}{b} Z_v,$$

gdje veličinu Z_v nazivamo valnim otporom (usporedi s odlomkom 6.2.1)

$$Z_v = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \tag{1.4-13}$$

U vakuumu je, dakako, valni otpor

$$Z_{v0} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376{,}73\ \Omega,$$

što smo dobili pomoću prije navedenih vrijednosti magnetske i električke konstante. Valni otpor Z_v vrlo je važna veličina ne samo u teoriji već i u primjeni elektromagnetskih valova, a pogodan je u računima zato što ovisi samo o značajkama tvari ϵ i μ.

Valni otpor možemo izraziti i pomoću brzine v elektromagnetskog polja. Uvrstimo li, naime, u (1.4-13) jednadžbu (1.4-10), dobivamo

$$Z_v = \sqrt{\mu/\epsilon} = \mu v = \frac{1}{\epsilon v}. \tag{1.4-14}$$

1.4.3. Poyntingov vektor. U energetskim razmatranjima elektromagnetskog polja važna je veličina Poyntingov vektor S koji je definiran jednadžbom

$$S = EH, \tag{1.4-15}$$

gdje smo propustili označiti da su sve tri veličine vektori i da je riječ o vektorskom produktu. Budući da je prema ranijem izlaganju $E = U/h$ i $H = I/b$, to je

$$S = EH = \frac{U}{h}\,\frac{I}{b} = \frac{P}{A_0},$$

gdje je P snaga elektromagnetskog polja, a $A_0 = hb$ površina kroz koju brzinom v napreduje elektromagnetski val (slika E.6).

Poyntingov vektor možemo izraziti i drukčije. Stavimo li u (1.4-8) $I = bH$, dobivamo $U = bHL_0v$, što pomoću $E = U/h$ uvrštenjem u (1.4-15) daje $S = vL_0H^2b/h$. S ranije izvedenim jednadžbama odavde je lako izvesti

$$S = H^2 Z_v = \frac{E^2}{Z_v},$$

odakle se pomoću jednadžbe (1.4-14) odmah dobiva

$$S = \mu v H^2 = \epsilon v E^2.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi jedan od najvažnijih izraza za proučavanje elektromagnetskog polja

$$\mu H^2 = \epsilon E^2 \quad \text{ili} \quad \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{E}{H} = Z_v, \tag{1.4-16}$$

što se može napisati i u obliku

$$\mu BH = \epsilon ED.$$

1.4.4. Gustoća energije elektromagnetskog polja. Ukupnu energiju elektromagnetskog polja izračunat ćemo tako da zbrojimo energije električkog i magnetskog polja, za koje znamo da iznose $\frac{1}{2}CU^2$ i $\frac{1}{2}LI^2$. Budući da je $C = C_0x$, $L = L_0x$, ukupna je energija elektromagnetskog polja

$$W = \tfrac{1}{2}(C_0U^2 + L_0I^2)x.$$

Budući da je $U = Eh$, prvi član u zagradi iznosi $C_0U^2 = C_0E^2h^2$. Kako je prema (1.4-3) $C_0 = \epsilon b/h$, dobivamo dalje $C_0U^2 = \epsilon E^2bh$. Analogno pomoću $I = Hb$ i $L_0 = \mu h/b$ nastaje $L_0I^2 = \mu H^2bh$. Prema tome ukupna energija elektromagnetskog polja iznosi

$$W = \tfrac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)bhx.$$

U našem modelu širenja elektromagnetskog polja (sl. E.6) polje nakon vremena t prodre do $x = vt$ od početka. Pri tom zauzima prostor $V = bhx$. Stoga gustoću energije elektromagnetskog polja w dobivamo tako da gornji izraz za ukupnu energiju W podijelimo s volumenom V. Odmah slijedi

$$w = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 + \tfrac{1}{2}\mu H^2 = w_e + w_m, \tag{1.4-17}$$

gdje je w_e gustoća energije električkog polja, a w_m gustoća energije magnetskog polja. Iz ovog razmatranja razabiremo zanimljivu činjenicu da je gustoća energije polja konstantna, iako se polje širi brzinom v. Isto je tako konstantan Poyntingov vektor S, što nam pokazuje jednadžba (1.4-15).

Jednadžba (1.4-17) pojednostavnjuje se kad u nju uvrstimo (1.4-16):

$$w = \epsilon E^2 = \mu H^2. \tag{1.4-18}$$

Budući da je Poyntingov vektor $S=\mu v H^2=\epsilon v E^2$, gornjim se izrazom lako uspostavlja veza između w i S:

$$S=vw. \tag{1.4-19}$$

Ovaj izraz vrijedi onda kada su gustoće energije električkog i magnetskog polja međusobno jednake.

U svom gibanju elektromagnetski val ne nosi samo energiju W već i mehanički impuls koji je usmjeren isto kao Poyntingov vektor, dakle u smjeru gibanja polja v. Kad elektromagnetsko polje dopre do neke zapreke, ono prenese taj impuls na zapreku, a to se očituje kao sila koja djeluje između polja i zapreke. Izračunajmo najkraćim putem koliko iznosi tlak polja na zapreku kad elektromagnetsko polje potpuno prožme zapreku, dakle kad nema refleksije.

Ranije smo izračunali da je energija elektromagnetskog polja $W=wV$, gdje je volumen polja $V=A_0x$, a $A_0=bh$ površina kroz koju se širi polje (vidi sliku E.6). Ako to polje mora da savlada silu F, onda mora izvršiti rad $\mathrm{d}W$, koji zbog $W=wA_0x$ iznosi $\mathrm{d}W=wA_0\mathrm{d}x$, pa vrijedi da je rad sile $F\mathrm{d}x=\mathrm{d}W$, što daje $F=wA_0$. Budući da sila djeluje na površinu A_0, to je tlak elektromagnetskog polja na zapreku

$$p=\frac{F}{A_0}=w\frac{A_0}{A_0}=w, \tag{1.4-20}$$

dakle jednak je gustoći energije polja.

Gornji izraz vrijedi, kako smo rekli, kad zapreka potpuno upije polje. Drugi je ekstremni slučaj kad zapreka potpuno odbije (reflektira) polje. Tada polje na zapreci promijeni smjer impulsa pa je tlak dva puta veći, dakle $p=2w$. U stvarnosti se događaju kompromisi: zapreka jednim dijelom upije polje, a preostalim ga dijelom reflektira, pa je zato

$$p=w(1+r),$$

gdje je r faktor refleksije, $r\leqq 1$.

Primjer. Dalekosežnost i univerzalnost ovdje skiciranih odnosa među veličinama elektromagnetskog polja može nam ilustrirati primjer. *J. C. Maxwell* prvi je proračunao da za sunčana dana tlak svjetla na crnu površinu iznosi oko $p=4\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2}$. Kasniji su pokusi to potvrdili.

Budući da je svjetlo elektromagnetsko polje, to je prema (1.4-20) gustoća energije svjetlosnog polja $w=p=4\cdot 10^{-6}\,\mathrm{J/m^3}$. Kako zrak praktički ima iste osobine kao i vakuum, to je $v=v_0=3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$, što prema (1.4-19) daje Poyntingov vektor

$$S=3\cdot 10^8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 4\cdot 10^6\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}}=1{,}2\cdot 10^3\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}=1{,}2\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m^2}},$$

tj. na svaki kvadratni metar površine Zemlje okomito pada sunčana snaga od 1,2 kW! Polumjer Zemlje je $r=6400\,\mathrm{km}=6{,}4\cdot 10^6\,\mathrm{m}$, što znači da je okomitom udaru svjetla izložena površina $A=r^2\pi=(6{,}4\cdot 10^6\,\mathrm{m})^2\pi=1{,}29\cdot 10^{14}\,\mathrm{m^2}$, pa je ukupna snaga svjetlosnog polja što dopire na Zemljinu polutku

$$P=AS=1{,}29\cdot 10^{14}\,\mathrm{m^2}\cdot 1{,}2\cdot 10^3\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}=1{,}54\cdot 10^{17}\,\mathrm{W}.$$

To je izvanredna snaga od preko sto tisuća teravata (o dekadskim višekratnicima jedinica vidi odsječak A.2.3 i tablicu A-1), snaga neshvatljiva u usporedbi s onom kojom se danas koristi čovječanstvo (154 milijuna elektrana svaka snage 1000 MW)!

Izračunajmo još koliki su H i E svjetlosnog polja. Iz jednadžbe (1.4-18) slijedi

$$H^2=\frac{w}{\mu_0}=\frac{4\cdot 10^{-6}\,\mathrm{J/m^3}}{4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}}=3{,}19\frac{\mathrm{A^2}}{\mathrm{m^2}},$$

odakle je $H = 1{,}79$ A/m. Drugu komponentu svjetlosnog polja najlakše izračunamo pomoću desne jednadžbe (1.4-16) $E = Z_v H$, gdje je u našem slučaju $Z_v \approx Z_{v0} = 377\ \Omega$. Prema tome je $E = 377\ \Omega \cdot 1{,}79$ A/m $= 675$ V/m.

1.5. Nuklearna rezonancija i njena indikacija

1.5.1. Impuls vrtnje i magnetski moment. Fizikalna veličina »impuls« I definirana je pri ravnocrtnom gibanju tijela mase m umnoškom $I = mv$, gdje je v brzina gibanja tog tijela. Impuls I je vektorska veličina (vidi odlomak A.9.1.2). Pri opisivanju kružnih gibanja upotrebljava se veličina *impuls vrtnje* (njem. Drehimpuls ili Drall, engl. angular momentum ili moment of momentum), koju ćemo ovdje označiti slovom G. Ova vektorska veličina definirana je umnoškom momenta tromosti J tijela koje kruži i vektora rotancije Ω (kutne brzine; vidi odlomak B.2.2.3), dakle jednadžbom

$$G = J\Omega. \tag{1.5-1}$$

Rotancija Ω je u skalarnom obliku definirana jednadžbom $\Omega = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}r$, a s brzinom kruženja v povezana je jednadžbom $v = \Omega r$, gdje je r udaljenost kružećeg tijela od centra vrtnje. Za tijelo mase m, koje jednoliko kruži stalnom brzinom v na udaljenosti r od centra vrtnje, jednadžba (1.5-1) može se napisati u obliku vektorskog umnoška

$$\boldsymbol{G} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}, \tag{1.5-2}$$

jer u tom slučaju opći izraz za moment tromosti

$$J = \Sigma \Delta m r^2$$

dobiva oblik $J = mr^2$. Važno je naglasiti, iako je to evidentno, da su veličine »impuls« I i »impuls vrtnje« G posve različite veličine, koje — na žalost — imaju sličan naziv. Prva se mjeri npr. jedinicom kg m/s = Ns, a druga jedinicom kg·m·m/s = $= \mathrm{kg\,m^2/s} = \mathrm{Nm\,s}$.

U idućim odlomcima bit će nam potrebna fizikalna veličina »magnetski moment«, koju ćemo ovdje označiti slovom M. Valja naglasiti da u literaturi još nema jedinstva u tome što se razumijeva pod tim nazivom (vidi npr. DIN 1324—1964). Tako npr. neki autori razumijevaju pod »magnetskim momentom« umnožak magnetske polarizacije (vidi odlomak 1.3.3) i volumena, do čega se dolazi preko omjera zakretnog (mehaničkog) momenta T i jakosti vanjskog magnetskog polja H (jedinica magnetskog momenta SI u tom je slučaju dakle $\mathrm{Nm} : (\mathrm{Am^{-1}}) = \mathrm{Tm^3}$, jer je Nm = VAs i T = tesla = $\mathrm{Vs/m^2}$; vidi poglavlje 2). Drugi autori razumijevaju pod veličinom »magnetski moment« M omjer zakretnog momenta T i gustoće vanjskog magnetskog polja B (jedinica SI je u tom slučaju $[M]_M = \mathrm{Nm : T} = \mathrm{Am^2}$). Mi ćemo se ovdje poslužiti ovom drugom interpretacijom magnetskog momenta, prema kojoj na tijelo magnetskog momenta M djeluje mehanički zakretni moment

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B}, \tag{1.5-3}$$

ako se to tijelo (plosnati ili štapni permanentni magnet, plosnati ili štapni kruti svitak kroz koji teče električna struja) stavi u homogeno magnetsko polje gustoće B.

1.5.2. Žiromagnetska konstanta elektrona. Budući da je pridjev »žiromagnetski« nastao na temelju klasične predodžbe o građi tvari, poslužit ćemo se *Bohr*ovim modelom atoma, u kojem oko teške pozitivno nabijene jezgre velikim

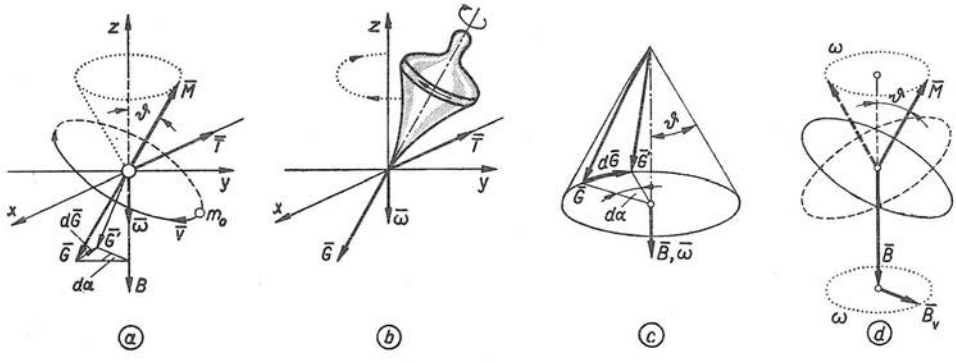
brzinama kruže elektroni. Svaki elektron nosi elementarni električni naboj e (negativnog predznaka), što se pri njegovom gibanju kružnicom manifestira tako kao da kružnicom polumjera r teče električna struja jakosti (vidi odlomak 4.3.2)

$$i = \frac{ev}{2\pi r} = \frac{er\Omega}{2\pi r} = \frac{e\Omega}{2\pi}.$$

Umnožak te struje i i površine A koju zatvara putanja elektrona (sl. E.7a) predstavlja veličinu »magnetski moment« M, o kojoj je bilo riječi pri kraju prošlog odlomka

$$M = iA = -\tfrac{1}{2}er^2\Omega. \tag{1.5-4}$$

Pri tom je M vektor, usmjeren suprotno od rotancije $\Omega = v/r$ elektrona, gdje je v brzina kojom kruži elektron. Predznak minus u jednadžbi (1.5-4) opisuje tu suprotnu orijentiranost, koja je nastala zato što je smjer gibanja elektrona suprotan dogovorenom smjeru električne struje (pozitivan je smjer gibanja pozitivne elektrike).



Sl. E.7. Uz klasično objašnjenje precesije elektrona u stalnom magnetskom polju gustoće B
a) putanja elektrona i pripadni vektori, b) analogija sa zvrkom, c) odnosi među vektorima, d) potrebna orijentacija visokofrekventnog polja B_v

Budući da elektron ima masu m_0, on će prilikom gibanja kružnicom brzinom $v = r\Omega$ posjedovati impuls vrtnje G koji u vektorskom obliku opisuje jednadžba (1.5-2). Za slučaj kružnog gibanja elektrona tu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$G = m_0 r^2 \Omega. \tag{1.5-5}$$

Omjer magnetskog momenta elektrona iz jednadžbe (1.5-4) i njegova impulsa vrtnje iz (1.5-5) nazivamo *žiromagnetska konstanta* γ, dakle

$$\text{žiromagnetska konstanta } \gamma = \frac{\text{magnetski moment } M}{\text{impuls vrtnje } G}. \tag{1.5-6}$$

Taj izraz nastao je razmatranjem pojave do koje dolazi kad se elementarna kružna struja (elektron u gibanju kao na slici E.7a) stavi u vanjsko magnetsko polje gustoće B. Tu pojavu razmotrit ćemo na temelju teorije klasične fizike.

Pretpostavka je te teorije da prilikom kruženja elektrona u vanjskom magnetskom polju B ne nastaju nikakvi gubici energije. Stoga impuls vrtnje G zadržava svoju vrijednost, ali se orijentacija tog vektora neprekidno mijenja posve analogno

zvrku (sl. E.7b). Budući da je vektor (mehaničkog) zakretnog momenta definiran jednadžbom

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.5-7}$$

a vektori $\boldsymbol{T}$ i $\boldsymbol{G}$ stalno su međusobno okomiti (sl. E.7a), dakle

$$M G = G \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tfrac{1}{2} G^2) = M G \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

to je doista $G = \text{const}$. Da elektronska putanja *precesira*, tj. izvodi gibanje poput zvrka (pojava na kojoj se temelji djelovanje žiroskopa), možemo utvrditi ovako. Zamislimo da je vektor $\boldsymbol{G}$ u toku vremenskog intervala $\mathrm{d}t$ promijenio svoj položaj u $\boldsymbol{G}'$ (sl. E.7a,c). Vektorski možemo tu promjenu u skladu s jednadžbom (1.5-7) napisati u obliku $\mathrm{d}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}t$, odnosno

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G},$$

gdje je ω rotancija precesijskog gibanja elektronske putanje. Pri tom vrijednost promjene vektora impulsa vrtnje iznosi $\mathrm{d}G = G \sin\vartheta\, \mathrm{d}\alpha = \omega G \sin\vartheta\, \mathrm{d}t$, jer je $\mathrm{d}\alpha = \omega\, \mathrm{d}t$.

S druge strane vanjsko (stalno) magnetsko polje B djeluje na kružnu struju (elektronsku putanju) zakretnim momentom T iz jednadžbe (1.5-3), koji je u slučaju ustaljenog žiromagnetskog precesiranja putanje jednak momentu T iz gornje jednadžbe; to je, dakako, vektorska jednakost. Prema tome je

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G}. \tag{1.5-8}$$

Budući da se vektori $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{\omega}$ podudaraju u smjeru, a vektori $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{G}$ su suprotno orijentirani, gornju jednadžbu možemo napisati u skalarnom obliku $\omega/B = M/G$. Usporedbom ovog izraza s definicijskom jednadžbom žiromagnetske konstante elektrona (1.5-6) možemo utvrditi da je omjer *Larmor*ove precesijske rotancije ω i gustoće vanjskog magnetskog polja B

$$\gamma = \frac{\omega}{B} = 2\pi \frac{f}{B}, \tag{1.5-9}$$

gdje je $f = \omega/2\pi$ frekvencija precesijskog gibanja (frekvencija precesije).

Primjer 2. Izračunajmo kolika je vrijednost žiromagnetske konstante γ elektrona koji se giba kružnicom. Konstanta γ definirana je vektorskom jednadžbom (1.5-6), koju — kako smo vidjeli — možemo napisati u skalarnom obliku $\gamma = M/G$. Magnetski moment elektrona opisuje jednadžba (1.5-4), dakle skalarno $M = e r^2 \omega/2$, a impuls vrtnje jednadžba (1.5-5) $G = m_0 r^2 \omega$, gdje je m_0 masa elektrona. Prema tome je

$$\gamma = \frac{M}{G} = \frac{e r^2 \omega/2}{m_0 r^2 \omega} = \frac{1}{2}\,\frac{e}{m_0}.$$

U tablici **2** u prilogu knjige imamo zabilježenu vrijednost omjera e/m_0. Prema tome odgovor na postavljeno pitanje glasi

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\,\frac{e}{m_0} = 8{,}793\,98\,(1 \pm 1 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{10}\,\frac{1}{\mathrm{Ts}}.$$

Ovdje valja dodati opasku u pogledu recipročne jedinice tesla × sekunda = Ts žiromagnetske konstante. U tablici **2** imamo, naime, vrijednost izraženu jedinicom coulomb/kilogram = C/kg. Dokažimo usput da je C/kg = 1/(Ts). Jedinica energije SI je joule = J = newton × metar, dakle J = = Nm, a budući da je N = kgm/s² (vidi odlomak B.4.2.1), to je J = kgm²/s². S druge strane je J = = volt × amper × sekunda = VAs = VC, gdje je C = As. Iz jednakosti J = kgm²/s² = J = VC slijedi

$C/kg = m^2/(s^2V)$. Budući da je tesla $= T = Vs/m^2$, slijedi jednadžba među jedinicama $C/kg = 1/(Ts)$.

Primjer 2. Izračunajmo kolika je vrijednost magnetskog momenta elektrona u *Bohr*ovu modelu vodikova (H) atoma. Poslužit ćemo se jednadžbom (1.5-6) u obliku $M = \gamma G$, jer vrijednost γ znamo, a impuls vrtnje G možemo izračunati iz *Bohr*ova kvantnog postulata koji zahtijeva da između G i Planckove konstante h postoji diskretna veza $2\pi G = nh$, gdje n može poprimiti bilo koju cjelobrojnu vrijednost između $+l$ i $-l$ (slovo l predstavlja orbitalni kvantni broj impulsa vrtnje). U našem slučaju vodikova atoma je $n = 1$, odakle slijedi $G = h/2\pi$. Prema tome možemo izračunati

$$M = \gamma G = \tfrac{1}{2} \frac{e}{m_0} \frac{h}{2\pi} = 9{,}273 \cdot 10^{-24} \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{T}}.$$

Time smo dobili elementarni magnetski moment, koji se obično naziva *Bohrov magneton* i označuje slovom μ_B ili m_B. Napominjemo da je gornji elementarni magnetski moment tzv. B-veličina (B = gustoća magnetskog toka, magnetska indukcija), koja je s mehaničkim zakretnim momentom T povezana relacijom $T = MB$, odnosno u vektorskom obliku relacijom (1.5-3).

Primjer 3. Pri kraju odlomka 1.5.1 spomenuli smo da neki autori pod magnetskim momentom razumijevaju tzv. H-veličinu za koju vrijedi $T = M'H$ (umjesto $T = MB$). Izračunajmo kolika je vrijednost takvog elementarnog magnetskog momenta, dakle *Bohr*ova H-magnetona. Budući da za prostor unutar planetarnog modela atoma vrijedi $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (vidi odlomak 1.3.2), to je

$$M' = \mu_0 M = \frac{\mu_0}{4} \frac{e}{m_0} h.$$

Uvrštenjem odgovarajućih vrijednosti iz tablice **2** u prilogu knjige, dobivamo približno

$$M' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}}{4\pi} 1{,}759 \cdot 10^{11} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}} \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} = 1{,}16 \cdot 10^{-29} \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{A}}.$$

Do konačne jedinice Nm^2/A došli smo računanjem pomoću jednadžbi među jedinicama $H = Vs/A$, $C/kg = 1/(Ts)$, $T = Vs/m^2$ i $J = VAs$, dakle ovako

$$\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs^2}} \mathrm{VAs^2} = \frac{\mathrm{VA\,s\,m}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{J\,m}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{A}},$$

jer je $J = Nm = VAs$.

1.5.3. Nuklearna rezonancija. Klasična slika precesiranja elektronske putanje u odlomku 1.5.2 potpuno je idealizirana. Njome smo se poslužili samo zato da bismo zorno definirali pojam »žiromagnetska konstanta« γ iz jednadžbe (1.5-6) i objasnili porijeklo tog naziva. Veličina γ nije, naime, karakteristična samo za precesiranje putanje elektrona u vanjskom magnetskom polju, već i za jezgre atoma. I jezgre (nukleusi) posjeduju magnetski moment, a time i makroskopski dijelovi tvari, i to u sva tri agregatna stanja. To je prvi put otkriveno prilikom istraživanja atomskih spektara (naročito vodika i deuterija) pomoću spektrografa s velikom moći razlučivanja, kada je utvrđeno da se mnoge spektralne linije cijepaju u multiplete. Tu pojavu, nazvanu »hiperfina struktura«, objasnio je *W. Pauli* godine 1924. pripisavši jezgrama atoma vlastiti impuls vrtnje G i magnetski moment M. Niz daljnjih eksperimentalnih istraživanja potvrdio je njegovu pretpostavku, a istraživačke metode bile su bitno usavršene godine 1939. kada su *I. Rabi*, *I. Ramsey* i dr. uveli metodu *nuklearne rezonancije*. Njihovu metodu uspješno su krajem godine 1945. na makroskopske količine tvari nezavisno primijenile dvije grupe istraživača. *E. M. Purcell* i drugovi (Harvard University) prvi su utvrdili apsorpciju ili emisiju energije prilikom nuklearne rezonancije u parafinu, a *F. Bloch* i njegova ekipa (Stanford University) analognu pojavu u vodi.

Smisao pojma »nuklearna rezonancija« pokušat ćemo objasniti na onoj istoj klasičnoj predodžbi koju smo imali u odlomku 1.5.2. Pri tom ćemo zanemariti

razlike u predznaku električnog naboja, kako bismo se mogli poslužiti postojećom slikom E.7a. Magnetsko polje B na toj slici ne može promijeniti ravnotežnu orijentaciju precesirajućeg magnetskog momenta M u odnosu prema vektoru polja B, tj. vrijednost kuta ϑ je konstantna. Da bi se taj kut promijenio, potrebno je jedno drugo magnetsko polje čija je jedna komponenta B_v *okomita* na stalno polje B u kojem precesira magnetski moment M. Polje B_v ne smije biti statičko, jer ono bi se superponiralo polju B i time samo promijenilo položaj osi oko koje precesira M, već mora biti *izmjenično* polje koje rotira *okomito* oko vektora B (sl. E.7d).

Potencijalna energija magnetskog momenta M u polju B funkcija je kuta ϑ između ta dva vektora. Iz lijeve jednadžbe (1.5-8), naime, slijedi da je vrijednost zakretnog momenta $T = MB \sin\vartheta$, a energija W i taj moment T vezani su jednadžbom $\mathrm{d}W = T\,\mathrm{d}\vartheta$. Najmanja je potencijalna energija onda kad su vektori M i B paralelni, a najveća onda kad su suprotno orijentirani (antiparalelni). Da bi se magnetski moment M zakrenuo u polju B iz paralelnog stanja $\vartheta = 0$ u stanje $\vartheta > 0$, treba uložiti energiju

$$\Delta W = \int_0^{\vartheta} T\,\mathrm{d}\vartheta = MB\int_0^{\vartheta} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = MB\,(1-\cos\vartheta).$$

Za prekretanje iz paralelnog stanja u antiparalelno ($\vartheta = \pi$) treba, dakle, uložiti energiju

$$\Delta W = MB\,[1-(-1)] = 2MB, \qquad (1.5\text{-}10)$$

koja se gomila u obliku potencijalne energije čestice s magnetskim momentom M u polju B. Obrnuto, prekretanje iz antiparalelnog stanja u paralelno mora biti praćeno smanjenjem potencijalne energije za $\Delta W = 2MB$. Opisani proces prekretanja precesirajućeg magnetskog momenta nuklearnih čestica naziva se *nuklearna magnetska rezonancija*, koju najčešće nazivamo »nuklearna rezonancija« ili »protonska rezonancija«.

Do nuklearne rezonancije može doći, kako smo prije spomenuli (sl. E.7d), samo u slučaju ako na atome koji se nalaze u stalnom polju B djeluje dodatno magnetsko polje B_v. To polje (ili barem njegova komponenta) mora biti izmjenično i okomito na polje B. Neophodnost poprečnog polja B_v očita je i iz makroskopskih rasuđivanja. Magnetski momenti elektrona, koji prema *Bohr*ovu modelu atoma kruže oko jezgre atoma, veći su od magnetskih momenata jezgre (nukleusa) za red veličine 1000. Stoga nuklearni magnetski momenti mogu doći do izražaja samo u onim tvarima u čijim se atomima elektronski momenti međusobno posve kompenziraju, ali taj utjecaj je reda veličine $1:10^5$, tj. povećanje magnetske susceptibilnosti je $(1+1\cdot10^{-5})$-struko, dakle povećanje permeabilnosti μ u odnosu prema magnetskoj konstanti (vakuum!) μ_0 je zanemarivo. Prema tome jedino intenzivno dovođenje energije poprečnog visokofrekventnog polja B_v može izazvati toliko izraženo makroskopsko pojavljivanje nuklearnog magnetskog momenta da se on može pouzdano indicirati i mjeriti.

1.5.4. Uvjet nuklearne rezonancije. Prema zakonima kvantne mehanike protoni se u konstantnom magnetskom polju gustoće B mogu nalaziti samo u dva stanja. U prvome je magnetski moment M paralelan s vektorom polja B, a u drugome je M antiparalelan sa B. Jednadžba (1.5-10) pokazala nam je da treba uložiti energiju $\Delta W = 2MB$ da bi proton prešao iz paralelnog u antiparalelno stanje. Ta energija ΔW mora se crpsti iz okolnog poprečnog izmjeničnog polja B_v. Kod obrnutog

procesa, dakle kod prevraćanja iz antiparalelnog stanja u paralelno, dolazi do emisije energije ΔW u obliku zračenja. Frekvencija tog zračenja f određena je poznatom kvantnom jednadžbom

$$\Delta W = hf, \tag{1.5-11}$$

gdje je h *Planck*ova konstanta.

Jednakost energije ΔW iz jednadžbe (1.5-11) sa ΔW iz jednadžbe (1.5-10) uvjet je nastanka i održavanja protonske rezonancije. Budući da do apsorpcije ili emisije energije ΔW može doći samo u slučaju ako okomito na stalno magnetsko polje B djeluje izmjenično magnetsko polje B_v, to iz $hf = 2MB$ proizlazi da frekvencija f tog poprečnog polja mora biti baš ona iz jednadžbe (1.5-10). Iz napisane jednakosti slijedi da je to $f = 2MB/h$; time je rezonantna frekvencija f dovedena u ovisnost o magnetskom momentu M i stalnom magnetskom polju B.

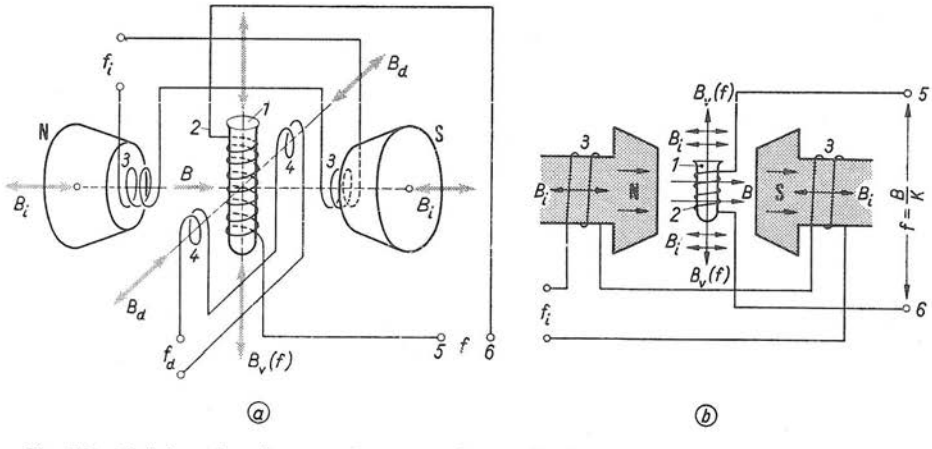
Prema kvantnoj teoriji proton ima impuls vrtnje $G = h/4\pi$, što možemo pisati u obliku $h = 4\pi G$. Ako taj odnos uvrstimo u netom dobiveni izraz $f = 2MB/h$, slijedi

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{G}B \quad \text{ili} \quad \frac{2\pi f}{B} = \frac{M}{B}.$$

Usporedimo li desni izraz s jednadžbom (1.5-9), vidimo da smo dobili matematički uvjet protonske rezonancije

$$\omega = \gamma B, \tag{1.5-12}$$

jer je pomoću jednadžbe (1.5-6) žiromagnetska konstanta definirana omjerom M/G. U gornjem je izrazu $\omega = 2\pi f$ rotancija precesijskog gibanja, tj. frekvencija f poprečnog polja B_v mora biti jednaka frekvenciji $f = \omega/2\pi$ precesije magnetskog momenta protona u polju B (sl. E.7d).



Sl. E.8. Načelo mjerenja gustoće magnetskog polja B metodom protonske rezonancije N, S — polovi elektromagneta, B — mjereno polje između polova, B_i — modulirajuće polje industrijske frekvencije f_i, B_v — visokofrekventno polje frekvencije f kojim se izaziva rezonancija, *1* — epruvetica s rezonantnim sredstvom (voda), *2* — svitak u kojem se proizvodi visokofrekventno poprečno polje $B_v(f)$, *3* — modulirajući svitak, *4* — detekcijski svitak, *5* i *6* — stezaljke za priključak izvora napona promjenljive visoke frekvencije (i uređaja za indikaciju protonske rezonancije, vidi sl. E.10)

Zakonitost (1.5-12) ne služi samo za fizikalna istraživanja, već se može upotrijebiti i prilikom *mjerenja* gustoće stalnog magnetskog polja B metodom protonske rezonancije. Za takve svrhe prikladnije je da se jednadžba (1.5-12) napiše u obliku

$$B = Kf, \quad \text{gdje je} \quad K = 2\pi/\gamma. \tag{1.5-13}$$

Odavde je očito da se mjerenje vrijednosti veličine B svodi na *mjerenje frekvencije* f poprečnog magnetskog polja B_v, pri kojoj je nastala rezonancija. Načelo takva mjerenja prikazuje slika E.8a: pojava nuklearne rezonancije *indicira* se detekcijskim svitkom *4* koji je okomit kako na mjereno polje B, tako i na uzbudno visokofrekventno polje B_v frekvencije f. Napon za stvaranje polja B_v u svitku *2* proizvodi oscilator (koji je priključen na stezaljke *5* i *6*) čiju frekvenciju možemo mijenjati, dakle namjestiti i na rezonantnu vrijednost $f = B/K$ iz jednadžbe (1.5-13). Prilikom prekretanja protonskih momenata, tj. prilikom nuklearne rezonancije, u detekcijskom svitku *4* inducira se napon čija je frekvencija $f_d = f = B/K$.

Na slici E.8b vidimo isti uređaj za mjerenje B metodom nuklearne rezonancije, ali bez detekcijskog svitka *4*. U tom slučaju rezonancija se indicira time što se na prikladan način utvrdi da oscilator (priključen na stezaljke *5*, *6*) odašilje energiju u svitak *2* (vidi odlomak 1.5.6).

Vratimo se još za trenutak na jednadžbu (1.5-13). Iz nje, naime, proizlazi i to da je preciznost mjerenja gustoće magnetskog toka B direktno proporcionalna pouzdanosti poznavanja konstante K, dakle i žiromagnetske konstante protona γ (frekvencija f može se izmjeriti znatno preciznije nego što je pouzdanost poznavanja γ; vidi odsječak A.10.6). Razumljivo je stoga što se teoretskim istraživanjima htjela konstanta γ dovesti u vezu s drugim, već poznatim prirodnim konstantama, dakle γ *izračunati*. No svi ti pokušaji su propali, tj. vrijednost γ može se utvrditi jedino *mjerenjem* (npr. nije još jasno zašto je vrijednost *Landéova* faktora protona $g \approx 5{,}56$ toliko velika; g je definiran omjerom stvarnog magnetskog momenta protona i tzv. »nuklearnog magnetona« $eh/4\pi m_p$, gdje je m_p masa protona; usporedi s »Bohrovim magnetonom« iz primjera 2 u odlomku 1.5.2). Stoga se danas smatra da je žiromagnetska konstanta protona γ nezavisna prirodna konstanta, jednako samostalna kao i *Planck*ova konstanta ili brzina svjetla itd.

1.5.5. Vrijednost žiromagnetske konstante protona. Iz gornjeg izlaganja se vidi da o nepouzdanosti poznavanja vrijednosti γ protona izravno ovisi preciznost mjerenja veličine B ako se upotrebljava metoda nuklearne rezonancije, odnosno nesigurnost reprodukcije jedinice SI tesla ili amper pomoću »protonskog rezonatora« (vidi poglavlje 3). Stoga je Savjetodavni odbor za elektromagnetizam Međunarodnog komiteta za mjere i utege (o tim odborima vidi odsječak A.7.1) imenovao radnu grupu eksperata koja je mjerenjima trebala ustanoviti kolika je vrijednost konstante γ protona. Ta mjerenja obavili su na najprecizniji mogući način neki odlično opremljeni metrološki zavodi: National Bureau of Standards (NBS), National Physical Laboratory (NPL), Svesavezni metrološki institut imena Mendeljejeva (IMM), Institut za mjerenja i mjerne instrumente (Harkov, IMMIK) i Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB). Prva tri zavoda eksperimentirala su metodom konstantnog magnetskog polja elektromagneta (npr. $B = 0{,}5$ T), a ostala dva metodom promjenljive gustoće (npr. od 10^{-5} do 10^{-3} T). Savjetodavni odbor za elektromagnetizam objavio je godine 1963. sređene rezultate mjerenja, koje smo uvrstili u tablicu E-3. Sve vrijednosti svedene su na amper i volt koje svojim održavajućim standardima reproducira Međunarodni ured za mjere i utege (vidi odsječak 3.5).

Tablica **E-3**
Vrijednost žiromagnetske konstante protona

Zavod	Vrijednost γ, 1/(Ts)
NBS, Washington	$2{,}675\,15 \cdot 10^8$
NPL, Teddington	15
IMM, Lenjingrad	04
IMMIK, Harkov	08
PTB, Braunschweig	$2{,}675\,21 \cdot 10^8$
Srednja vrijednost	$2{,}675\,13 \cdot 10^8$

Međunarodni komitet za mjere i utege (BIPM) objavio je godine 1963. na temelju navedenih rezultata privremenu vrijednost žiromagnetske konstante protona *u vodi* $\gamma = 2{,}675\,13 \cdot 10^8\ \mathrm{T^{-1}s^{-1}}$. Nepouzdanost ove vrijednosti nije naznačena. Vođa spomenute radne grupe, *P. Vigoureux* iz NPL, smatra da relativna nesigurnost iznosi $\pm 5 \cdot 10^{-6}$ (u NPL je γ posredno izmjerena u odnosu prema jedinici jakosti struje izmjerene strujnom vagom, a nesigurnost takve reprodukcije jedinice SI amper iznosi u NPL oko $\pm 4 \cdot 10^{-6}$; vidi odlomak 3.1.5.). Prema tome vrijednost žiromagnetske konstante protona u vodi (bez dijamagnetske korekcije) možemo zabilježiti u obliku

$$\gamma = 2{,}675\,13\,(1 \pm 5 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^8 \frac{1}{\mathrm{Ts}}, \qquad (1.5\text{-}14)$$

odakle pomoću desne jednadžbe (1.5-13) možemo izračunati vrijednost konstante K u izrazu $B = Kf$:

$$K = 2\pi/\gamma = 2{,}348\,758\,(1 \pm 5 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Ts},$$

$$1/K = \gamma/2\pi = 4{,}257\,577\,(1 \pm 5 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^7\ \mathrm{Hz/T}.$$

Napominjemo da je »Radna grupa za metode i rezultate mjerenja žiromagnetske konstante protona«, koja djeluje u okviru Savjetodavnog odbora za elektromagnetizam (odlomak A.7.1.3) godine 1968. objavila da najpouzdanije vrijednosti žiromagnetskih konstanti iznose (bez dijamagnetske korekcije):

$$\gamma = 2{,}675\,12 \cdot 10^8 \frac{1}{\mathrm{Ts}}, \qquad 1/K = 4{,}257\,5857 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz/T}.$$

Te vrijednosti grupa je objavila na temelju rezultata niza eksperimenata izvršenih od 1963. do 1968. u spomenutih pet laboratorija (tablica E-3). Gore navedenu vrijednost γ prihvatio je na svom 57. sastanku (oktobra 1968) i Međunarodni komitet za mjere i utege.

Primjer. Metodom protonske rezonancije mjerena je gustoća stalnog magnetskog polja B. Izračunajmo kolika je vrijednost B, ako je do nuklearne rezonancije došlo pri frekvenciji $f = 40$ MHz ($\lambda \approx 7{,}5$ m) poprečnog magnetskog polja B_ν (sl. E.8). Poslužujemo se lijevom jednadžbom (1.5-13) u koju uvrštavamo gore navedenu vrijednost konstante K, dakle

$$B = Kf = 2{,}348\,758\,(1 \pm 5 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Ts} \cdot 4 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}$$

$$B = 0{,}940\,103\,(1 \pm 5 \cdot 10^{-6})\ \mathrm{T},$$

jer je Hz = 1/s (vidi odlomak B.2.3.5). Pri tom smo pretpostavili da je frekvencija f izmjerena s relativnom nepouzdanošću barem $1:10^7$, što se ostvaruje s lakoćom.

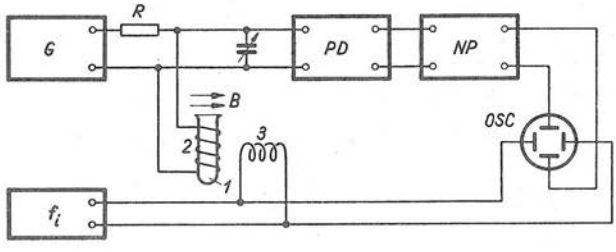
1.5.6. Indikacija nuklearne rezonancije. U stvarnosti do rezonancije ne dolazi pri diskretnoj vrijednosti f iz jednadžbe (1.5-13), već se proces rezonancije odvija u stanovitom frekventnom *području* $\pm\Delta f$ oko vrijednosti $f = B/K$. Relativna širina tog područja iznosi za vodu oko $\Delta f/f = \pm 5 \cdot 10^{-7}$, a objašnjava se postojanjem promjenljivog vlastitog magnetskog polja protona kao i polja paramagnetskih iona. Paramagnetski ioni (npr. željezne ili manganove soli, Fe_2NO_3 ili $MnSO_4$, otopljene u vodi) namjerno se stavljaju u rezonantno sredstvo da bi se time povećala snaga apsorpcije iz poprečnog magnetskog polja B_v frekvencije f (sl. E.8b), čime se olakšava *indikacija* nuklearne rezonancije. Time se, naime, pospješuje prijelaz energije magnetskih momenata s protona na toplinsko gibanje, pa je u tvari uzorka veći udio onih protona koji se prekreću iz paralelnog stanja u antiparalelno. Za rezonantno sredstvo (uzorak) obično se upotrebljava nekoliko desetaka kubnih milimetara vode stavljene u staklenu epruveticu (*1* na slici E.8). Izbor vode posve je prirodan, jer protoni su jezgre atoma vodika. Na širenje frekventnog područja $\Delta f/f$ utječe osim toga i nehomogenost samog mjerenog polja B, tj. ne nalaze se svi protoni uzorka (vode) u polju za koje bi savršeno vrijedilo $B = \text{const}$.

U odlomku 1.5.4 uz sliku E.8b spomenuli smo da se pojava nuklearne rezonancije može indicirati i drukčije nego što smo prikazali na slici E.8a (s detekcijskim svitkom). Najprikladniji uređaj za tu svrhu je osciloskop, a rad njime znatno se olakšava ako se mjereno magnetsko polje B neznatno modulira izmjeničnim poljem B_i frekvencije f_i. To može biti i mrežna frekvencija, dakle $f_i = 50$ Hz. U tom se slučaju rezultantna gustoća magnetskog polja $B_s(t)$ na mjestu rezonantne tvari (*1* na slici E.8) mijenja prema jednadžbi

$$B_s(t) = B + B_i \sin \omega_i t. \qquad (1.5\text{-}15)$$

Tipične vrijednosti su, na primjer, $B = 0{,}1$ T (mjereno polje), $B_i = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ T ($f_i = 50$ Hz), $\omega_i = 2\pi f_i \approx 314$ rad/s $= 314/$s.

Indiciranje rezonancije osciloskopom ne ide direktno, jer je signal uzrokovan nuklearnom rezonancijom vrlo slab. Stoga se on najprije pojačava, detektira, pa onda ponovno pojačava i dovodi na osciloskop. Načelnu shemu jednog od mnogih uređaja kojima se to postiže prikazuje slika E.9. Visokofrekventni generator G napaja svitak *2* (usporedi sa slikom E.8) preko otpornika R velikog otpora. Prilikom nuklearne rezonancije uzorak apsorbira energiju generatora, a posljedica toga je smanjenje dobrote Q i paralelne impedancije ugođenog titrajnog kruga (Q je definirana omjerom snage koja se sistemu dovodi i snage koja se u njemu apsorbira). Zbog toga se u krugu smanji visokofrekventni napon, koji se pojačava te zatim de-

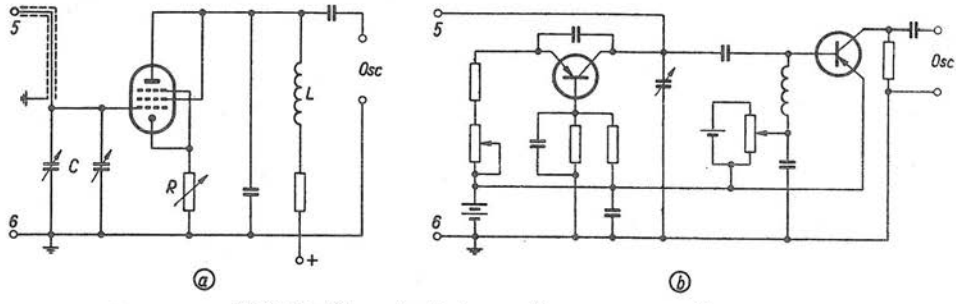


Sl. E.9. Načelna shema za indiciranje nuklearne rezonancije

G — visokofrekventni generator, *PD* — visokofrekventno pojačalo s detektorom, *NP* — niskofrekventno pojačalo, *Osc* — osciloskop, f_i — generator niske frekvencije (za oznake *1*, *2*, *3* i *B* vidi sliku E.8)

tektira i ponovno pojačava na niskoj frekvenciji. Ako se vrijednost moduliranog polja $B_s(t)$ iz jednadžbe (1.5-15) u pojedinim trenucima podudara s vrijednošću $B=Kf$, rezonancija će se indicirati na osciloskopu u obliku oštrih šiljaka (apsorpcija!) koji će se pojaviti dva puta u toku perioda $T_i=1/f_i$ (vidi sl. E.11), a može se indicirati i kao neravnoteža mjernog mosta.

Dvije podrobnije sheme indikatora prikazuje slika E.10. Svitak *2* sa slike E.8 priključuje se u oba slučaja na stezaljke *5* i *6*. Razmotrimo letimično lijevu, elektronsku shemu (sl. E.10a). Svitak *2* vezan je s kondenzatorima za grubo i fino namještanje kapaciteta pomoću koaksijalnog kabela i tako postoji titrajni krug koji se može ugoditi na različite frekvencije, dakle i na rezonantnu frekvenciju $f=B/K$ iz jednadžbe (1.5-13). Ovaj titrajni krug priključen je na negativni otpornik izveden s dvostrukom triodom. Sa zajedničkim katodnim otpornikom R, odnosno impedancijom, oscilator se namjesti na radnu frekvenciju posve blizu rezonantne. U tom je stanju napon kruga vrlo osjetljiv na porast prigušenja do kojeg dolazi prilikom odavanja



Sl. E.10. Shema indikatora nuklearne rezonancije
a) izvedba s elektronkom, b) tranzistorska izvedba. Na stezaljke *5* i *6* priključen je svitak *2* sa slike E.8, koji zajedno s kondenzatorom promjenljiva kapaciteta tvori titrajni krug

energije iz titrajnog kruga, tj. prilikom apsorpcije energije u svitku *2* zbog nuklearne rezonancije. Analogni tranzistorski indikator prikazan je na slici E.10b; rezonancija se manifestira promjenom napona na kolektoru tranzistora.

Pošto smo načelno upoznali djelovanje indikatora nuklearne rezonancije, možemo razmotriti što će se vidjeti na zaslonu osciloskopa, ako je frekvencija oscilatora f' *veća* od rezonantne frekvencije $f=B/K$, dakle $f'>f$, gdje je B mjereno magnetsko polje. Takav slučaj prikazan je na slici E.11a. Frekvenciji f' prema lijevoj jednadžbi (1.5-13) formalno pripada gustoća magnetskog toka $B'=Kf'$, koja je veća od mjerene, dakle $B'>B$. Stoga ćemo na osciloskopu u trenucima t_1, t_2, t_3 i t_4 opaziti apsorpcijske šiljke, jer u tim je trenucima udovoljeno jednadžbi

$$B'=Kf'=B_s(t)=B+B_i \sin \omega_i t,$$

gdje simbol t redom predstavlja t_1, t_2, t_3 i t_4 (osciloskop je sinhroniziran s niskom frekvencijom f_i). Zbog $B'>B$ razmaci između apsorpcijskih linija (šiljaka) nisu jednaki, tj. (sl. E.11a)

$$t_3-t_2 \neq t_2-t_1.$$

Ako mijenjamo vrijednost modulirajućeg polja B_i, šiljci se na zaslonu međusobno *pomiču*, sužavaju i šire; to je još jedan dokaz da frekvencija oscilatora f' nije jednaka rezonantnoj $f=B/K$.

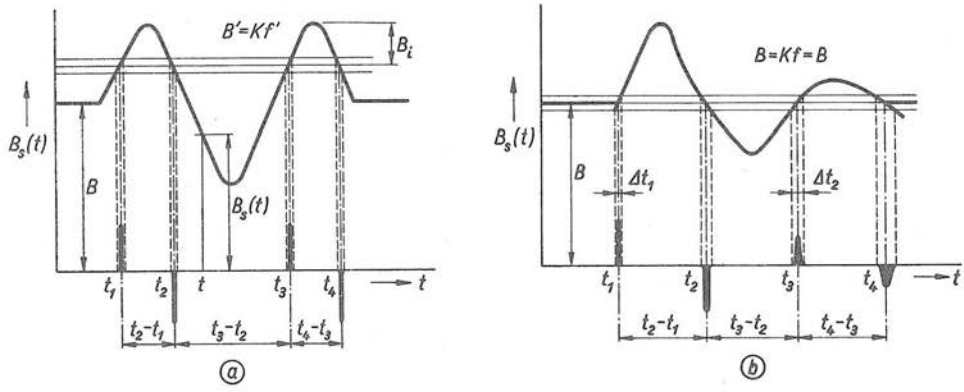
Postepenim mijenjanjem frekvencije oscilatora dolazi do jednakosti $f' = f$, kada u jednakim vremenskim intervalima

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3$$

dolazi do pojavljivanja apsorpcijskih šiljaka na zaslonu osciloskopa (sl. E.11b). U tom slučaju promjena vrijednosti modulacijskog polja B_i ne izaziva međusobno pomicanje šiljaka, tj. za trenutke t_1, t_2, t_3 i t_4 sa slike E.11b vrijedi jednadžba

$$B_s(t) = B = Kf = B + B_i \sin \omega_i t.$$

Posljedica mijenjanja modulacije je jedino promjenljivost visine i širine (Δt_1 i Δt_2 na slici) apsorpcijskih šiljaka.



Sl. E.11. Utvrđivanje nuklearne rezonancije osciloskopom prilikom mjerenja B
a) frekvencija f' oscilatora veća je od rezonantne f, b) frekvencija oscilatora jednaka je frekvenciji $f = B/K$ pri kojoj nastaje nuklearna rezonancija

Pri kraju ovog razmatranja o primjeni nuklearne rezonancije za mjerenje istosmjernih magnetskih polja valja naglasiti da mjereno magnetsko polje B mora biti homogeno u relativno velikom prostoru, jer rezonantno sredstvo (*1* na slici E.8) zauzima stanovit prostor, nije zamišljena matematička tačka. Ako je nehomogenost polja znatna, metodom se ne može postići ona mjerna preciznost koju nudi jednadžba $B = Kf$ iz odlomka 1.5.4: vrhunska preciznost koja se uopće može postići u elektromagnetskoj metrologiji. Vrijednost rezonantne frekvencije f može se, naime, pri uporabi nuklearne rezonancije izmjeriti s nepouzdanošću od najmanje $\pm 5 \cdot 10^{-7}$. Stoga opisanu metodu valja upotrebljavati tamo gdje je uvjet homogenosti polja ispunjen u dovoljnoj mjeri, a to su posebno oblikovani standardni svici o kojima je riječ u odsječcima 3.2 i 3.3.

2. Međunarodni sistem jedinica (SI) u elektromagnetizmu

2.1. Nezavisna jedinica elektromagnetizma SI amper

2.1.1. Svrha uvođenja i prednosti SI. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je taj sistem jedinica na svom jedanaestom zasjedanju godine 1960. Konferencija je pri tom zaključila da kratica naziva tog sistema na svim jezicima bude SI, što dolazi od francuskog **S**ystème **I**nternational d'Unités. Tom odlukom Međunarodni sistem jedinica (SI) postao je »obaveznim« za sve države supotpisnice Konvencije o metru (vidi odsječak A.6.3), a to znači za više od 40 država (odlomak A.6.5.1). Riječ obavezan stavili smo u navodnike zato što jedna međunarodna organizacija ne može zadirati u suverena prava država članica Konvencije. No većina država smatra zaključke i preporuke Generalne konferencije za mjere i utege doista *obaveznima*, jer inače bi Konvencija o metru u znatnoj mjeri izgubila svoj smisao (vidi odsječak A.7.1). Tako je, na primjer, Vlada Jugoslavije već krajem godine 1961. objavila »Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima«, objavljen u »Službenom listu« broj 45 od 15. 11. 1961. (Zakon će trebati revidirati s obzirom na rezolucije trinaestog zasjedanja Generalne konferencije održanog godine 1967; vidi odlomak A.7.5.7.) Izvode iz zakona citirali smo u odlomku B.7.1.1.

Svrha je primjene Međunarodnog sistema jedinica (SI) *korjenito olakšanje svih radova* povezanih s kvantitativnim ocjenama svakovrsnih pojava i procesa koji se pojavljuju u tehnici, znanosti i privredi. U tom smislu SI oslobađa čitavo čovječanstvo od bezbrojnih teškoća što nastaju pri upotrebi mnoštva kaotičnih jedinica, od pogrešaka i nepouzdanog računanja, od gubljenja zornosti fizikalnih zakonitosti izraženih jednadžbama, od pamćenja mnoštva imena jedinica, od kompliciranih odnosa među njima; ukratko: SI oslobađa ljude od neracionalnog trošenja umnog rada i vremena. Zbog toga je Generalna konferencija za mjere i utege godine 1960. i prihvatila SI. Na temelju odluka tog zasjedanja zakonodavstva većine država propisala su posebnim zakonima obaveznu primjenu SI. Donošenje tih zakona uvjetovale su ove *glavne prednosti* SI:

- *Univerzalnost* Međunarodnog sistema jedinica koji obuhvaća *sve* grane tehnike i znanosti, svu ljudsku djelatnost.
- *Jednostavnost* i logičnost izgradnje SI na temelju koherentnosti ($1 \times 1 = 1$, $1/1 = 1$) među jedinicama, stvaranje svih jedinica na istom principu, što omogućuje nadopunjavanje sistema novim koherentnim jedinicama u skladu s daljnjim razvojem prirodnih i tehničkih znanosti.
- *Eliminacija* mnoštva različitih jedinica za mjerenje iste veličine ili istorodnih veličina, te ostvarenje uvjeta za lako uspoređivanje mjernih rezultata dobivenih nezavisno jednog od drugoga u različitim krajevima.

• *Pojednostavnjenje* proračunâ, jer primjena SI dovodi do iščezavanja tzv. parazitnih koeficijenata (odnosa među jedinicama) iz jednadžbi u koje su ušli zbog izbora nesistematičnog skupa jedinica. Na taj način primjena SI u stvari automatski dovodi do primjene veličinskih jednadžbi.

• *Zornost* u nastavi i njeno pojednostavnjenje, jer primjena veličinskih jednadžbi daje najzorniji prikaz prirodnih pojava i tehničkih procesa. U današnjoj eri, kada gotovo čitavo čovječanstvo napregnuto uči i istražuje, to je neprocjenjiv dobitak.

• *Razgraničenje* pojmova mase, težine i sile; to imperativno zahtijevaju i različito imenovane jedinice: za masu kilogram (kg), za silu newton (N). U prošlosti je, naime, dvoznačnost naziva »kilogram« dovodila do znatnih neprilika.

• *Lakša primjenljivost* računske tehnike u privredi, jer će analogna i digitalna računala moći rezultate računanja direktno izražavati jedinicama SI.

• *Postojanje* većine jedinica SI u tehnici i znanosti i prije proglašenja SI obaveznim. Metar, sekunda, kilogram, gotovo sve jedinice elektromagnetizma (u stvarnoj upotrebi) i fotometrije te niz drugih jedinica SI uistinu se već desetljećima primjenjuju.

• *Primjena višekratnika jedinica*, tj. dekadski i decimalni višekratnici iz tablice A-1 (odsječak A.2.3) u većini se slučajeva lako i s mnogo uspjeha primjenjuju na jedinice SI, npr. $mA = 10^{-3}$ A, $MW = 10^{6}$ W itd. (O širem značenju naziva SI vidi odlomak B.7.1.4.)

2.1.2. Četvrta nezavisna jedinica SI u elektromagnetizmu. S »Međunarodnim sistemom jedinica« prvi smo se put u ovoj knjizi temeljitije pozabavili u poglavlju B.7, koje se odnosi na mehaniku, uključivši hidrauliku. Tamo smo pod tim imenom razmatrali onaj dio SI koji je naročito prikladan za mehaniku; jedinice tog dijela SI izvodili smo iz pramjerila duljine (metar), pramjere mase (kilogram) i pramjerila vremena (sekunda; o pramjerilima i pramjerama vidi odsječak A.5.3). Zato smo SI shvaćali kao sistem s nezavisnom (polaznom, osnovnom) trojkom m, kg i s. Neki ga autori zato nazivaju kraticom MKS, gdje ova slova označuju prva slova naziva tih triju jedinica.

Drugi smo put o Međunarodnom sistemu jedinica opsežno raspravljali u poglavlju D.4, gdje je bilo govora o njegovoj primjeni u nauci o toplini. Pokazalo se da se trima nezavisnim jedinicama mehanike (m, kg, s) mora pridružiti još i *četvrta*: jedinica termodinamičke temperature »kelvin« (K; vidi odlomak D.3.2.4). Sa četiri nezavisne jedinice (npr. m, kg, s, K) mogu se u nauci o toplini izvoditi jedinice SI svih drugih veličina. U poglavlju D.4 ustanovili smo da je za *proračunavanje* toplinskih zadaća i za nastavu vrlo prikladna polazna četvorka jedinica: m, s, J (joule) i K. Takav izbor polaznih jedinica (»polaznih«, jer od njih polaze, počinju definicije ostalih jedinica SI) vrlo je prikladan u nauci o toplini, jer se jedinica energije (topline) joule = J u toj grani vrlo često upotrebljava. No odmah smo uvidjeli da se fizikalna veličina *masa* u nauci o toplini također veoma često upotrebljava, a time i njena jedinica kilogram. Zato smo uz joule mirne duše upotrebljavali jedinicu mase SI kg, a da o nezavisnosti polaznih jedinica nismo ni razmišljali (ako bismo se dosljedno oslanjali na polaznu četvorku m, s, J i K, masu bismo uvijek morali izražavati jedinicom »Js^2/m^2«, jer je ta kombinacija jedinica identički jednaka kilogramu). Pri tom smo pod nazivom »Međunarodni sistem jedinica« (SI) razumijevali skup međusobno koherentnih jedinica m, s, m/s, m/s^2, kg, newton = N = kgm/s^2 (odlomak B.4.2.1), joule = Nm = kgm^2/s^2 (odlomak B.5.2.1) itd.

Došavši u odsječku E.1.1 do veličina elektromagnetizma, ustanovili smo da u toj grani znanosti i tehnike nisu dovoljne tri nezavisne (osnovne) veličine mehanike, već da moraju biti *četiri* (pri tom su, dakako, isključene temperaturne pojave, tj. pri tom smatramo da temperatura ne pripada tzv. elektromagnetskim veličinama). Budući da svaka veličina mora imati svoju jedinicu, u elektromagnetizmu moramo u svrhu definicije izvedenih jedinica imati i *četiri međusobno nezavisne* polazne (osnovne) jedinice. »Mehaničkoj« trojki polaznih jedinica (npr. m, s, kg ili m, s, N ili m, s, W ili m, s, J itd.) moramo, dakle, pridružiti jedinicu jedne tzv. elektromagnetske veličine, tj. fizikalne veličine karakteristične za elektromagnetske pojave. U načelu to može biti mjerna jedinica *bilo koje* elektromagnetske veličine, na primjer:

jedinica jakosti električne struje I,
jedinica električkog napona U,
jedinica induktiviteta L,
jedinica jakosti električkog polja E itd.

Budući da je ta četvrta polazna jedinica *nezavisna* od ostalih jedinica, možemo je definirati po svojoj volji. Tako je, uostalom, učinjeno i s drugim nezavisnim jedinicama SI. Jedinica duljine »metar« definirana je propisanim višekratnikom duljine vala zračenja kriptona (odlomak A.8.1.2), a to se zračenje proizvodi uz precizno propisani postupak (odsječak A.8.8). Jedinica vremena »sekunda« definirana je frekvencijom zračenja atoma cezija 133 (odlomak A.10.1.3) uz propisani postupak (odsječak A.10.6). Isto vrijedi za jedinicu termodinamičke temperature »kelvin« (odlomak D.3.2.4) i za jedinicu luminancije »nit« (odlomak G.2.3.2). Vidimo da se navedene nezavisne (osnovne) jedinice SI metar, sekunda, kelvin i nit osnivaju na *pramjerilima* o kojima smo načelno raspravljali u odsječku A.5.3. Jedino se jedinica mase »kilogram« osniva na *pramjeri*, tj. na prakilogramskom utegu (odlomak A.9.3.3).

Čovječanstvo ne zna pouzdano pohranjivati stanovitu vrijednost elektromagnetske veličine pomoću pramjere (vidi odsječke 3.5 i 3.6), tj. na način kako je to učinilo s pramjerom mase (odsječak A.9.3), pa se zato služi *pramjerilima*. Načelo djelovanja pramjerila polazne (nezavisne, osnovne) jedinice elektromagnetizma, tj. jedinice jedne od fizikalnih veličina I, U, L, E itd., kako smo prije spomenuli, od samih se početaka znanstvene metrologije elektromagnetizma (odlomak 5.1.1) *razlikuje* od načela djelovanja pramjerila duljine, vremena, temperature itd. Pramjerilo jedinice duljine (odsječci A.8.7,8), na primjer, jest uređaj koji, uz propisane uvjete okoline, *proizvodi* svjetlo stalne duljine vala λ, pramjerilo jedinice vremena uređaj koji *proizvodi* konstantnu frekvenciju f (odsječak A.10.6) itd. Nasuprot tome, pramjerilo polazne jedinice elektromagnetizma mora biti odabrano tako da se njime *izmjerena* elektromagnetska jedinica *čvrsto oslanja* na tri već definirane, međusobno nezavisne jedinice, reproducirane pramjerilima ili pramjerama (to su, na primjer, metar, sekunda i kilogram). Pri tom se odabrana (dogovorena) vrijednost polazne elektromagnetske jedinice utvrđuje (reproducira) tako da se njeno *djelovanje* izjednači (uravnoteži) sa istovrsnim djelovanjem neke fizikalne veličine koje vrijednost je poznata u zavisnosti od spomenute tri nezavisne jedinice (npr. m, s, kg).

To »djelovanje« obično je *zakretni moment* ili *sila*. Budući da u području elektromagnetizma sila nastaje ili između vodiča kojima teče električna struja (permanentni magneti zbog svoje nestalnosti ne dolaze u obzir) ili između mirujućih elektrika (elektrostatska sila), pramjerilo polazne elektromagnetske jedinice osniva se na jednom od ova dva načela: 1. Izjednačenje sile između propisano (dogovoreno)

oblikovanih vodiča kojima teče električna struja i propisane vrijednosti sile proizvedene *neelektromagnetskim* postupkom (strujna vaga, odsječak 3.1). 2. Izjednačenje sile između propisano oblikovanih elektroda između kojih djeluje električki napon i propisane vrijednosti sile proizvedene neelektromagnetskim postupkom (naponska vaga, tekućinski elektrometar; odsječak 3.4).

U naše vrijeme pouzdanost reprodukcije polazne elektromagnetske jedinice prema prvom načelu znatno premašuje pouzdanost koja se može postići drugim načelom (vidi poglavlje 3). Zato je Generalna konferencija za mjere i utege odlučila da reprodukciju polazne elektromagnetske jedinice osloni na strujnu vagu. Time je za polaznu jedinicu u elektromagnetizmu odabrala

$$\text{jedinicu jakosti električne struje SI} = [I]_{\mathrm{M}} = \text{amper} = \mathrm{A},$$

koja je nazvana tim imenom po *Andréu Marie Ampèreu* (1775...1836), čuvenom francuskom fizičaru i matematičaru, jednom od utemeljitelja elektrodinamike.

Reprodukcijom jedinice $[I]_{\mathrm{M}} = \text{amper}$ pomoću strujne vage (odsječak 3.1) u najboljem se slučaju danas postiže relativna pouzdanost vrijednosti jakosti struje pramjerila oko $\Delta I/I = \pm 4 \cdot 10^{-6}$, tj. nesigurnost iznosi oko $\pm 4\,\mu\mathrm{A/A}$, i to samo za istosmjernu struju vrijednosti oko 1 A. Proglašenjem tako reproducirane nezavisne jedinice $[I]_{\mathrm{M}} = \mathrm{A}$ članom Međunarodnog sistema jedinica (SI), automatski su definirane i jedinice SI svih ostalih elektromagnetskih veličina. One se, naime, iz nezavisne četvorke m, s, kg, A moraju izvoditi na principu koherencije (odlomak A.5.1.2), tj. međusobno moraju biti u odnosu »$1 \times 1 = 1$«, kao što je npr. $1\,\mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot 1\ m/s^2}$, $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N \cdot 1\ m}$ itd. Jedino se na taj način koherencija jedinica SI može produžiti iz mehanike u elektromagnetizam (analogno i u nauku o toplini, fotometriju itd.), a to i jest svrha SI: iste fizikalne veličine izražavaju se u svim granama znanosti i tehnike istim mjernim jedinicama. Zato je SI *univerzalan* sistem jedinica cjelokupne znanosti, tehnike i privrede, dakle sveukupne mjerne djelatnosti čovječanstva.

Iz gornjih razlaganja možemo steći dva zaključka: 1. Ni jedna druga polazna jedinica ne može se poznavati pouzdanije od ampera, koji je proglašen nezavisnom jedinicom. 2. Ostale jedinice elektromagnetskih veličina u SI definiraju se pomoću ampera i triju nezavisnih jedinica (npr. m, s i kg) tzv. mehaničkih veličina.

2.1.3. Načelo djelovanja pramjerila jedinice amper. Pramjerilo ampera, strujna vaga (odsječak 3.1), djeluje na principu uravnoteženja sile između propisano oblikovanih vodiča kojima teče električna struja i propisane vrijednosti sile proizvedene neelektromagnetskim postupkom. Ovdje ćemo uz pomoć slike E.12 taj *princip* razmotriti podrobnije. Zamislimo dva *neizmjerno* duga *ravna* vodiča (sl. E.12a) smještena u *vakuumu*. Vodiči su međusobno *paralelni* i udaljeni jedan od drugoga za x; pri tom je x najkraća udaljenost između bilo koje dvije nasuprotne tačke paralelnih vodiča, tj. x je okomica na pravac kojim se protežu vodiči (vektorske oznake propuštamo).

Uzmimo da kroz lijevi vodič teče istosmjerna struja jakosti I_1, a u istom smislu teče kroz desni vodič struja jakosti I_2. U skladu s teorijom elektromagnetskog polja struja I_1 lijevog vodiča stvorit će na udaljenosti x od njegove osi, dakle na mjestu gdje se nalazi desni vodič, magnetsko polje gustoće (indukcije)

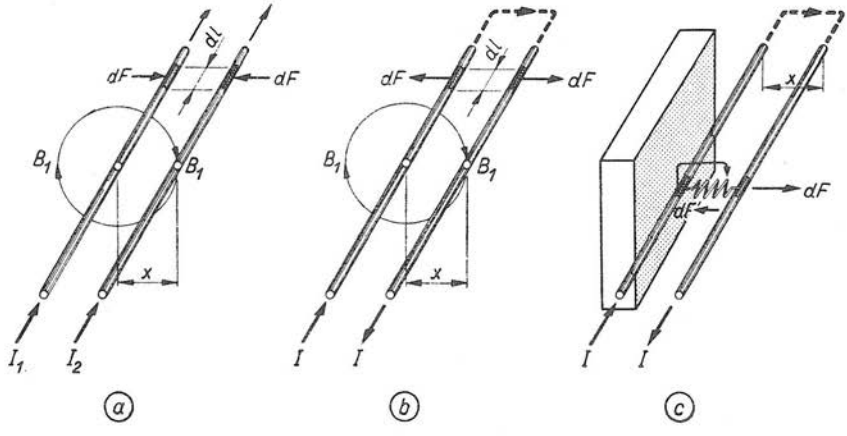
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}, \qquad (2.1\text{-}1)$$

gdje je μ_0 tzv. magnetska konstanta (permeabilnost vakuuma; vidi odlomak 1.3.2). Njena vrijednost zasad nam je *nepoznata*, ali znamo da je *konstantna*. Eksperimentalno je davno utvrđeno da se vodiči sa slike E.12a kojima teku naznačene struje *privlače* silom F koje se diferencijal $\mathrm{d}F$ pokorava zakonu

$$\mathrm{d}F = B_1 I_2 \mathrm{d}l. \tag{2.1-2}$$

Ovdje je B_1 magnetska indukcija polja koje struja I_1 proizvodi na mjestu x, I_2 je jakost struje desnog vodiča, a $\mathrm{d}l$ diferencijal duljine jednog i drugog vodiča. Uvrštenjem jednadžbe (2.1-1) u (2.1-2) dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi x}. \tag{2.1-3}$$



Sl. E.12. Uz definiciju nezavisne elektromagnetske jedinice SI amper

Preinačimo u našim mislima uređaj sa slike E.12a tako da vrijednosti struja I_1 i I_2 budu međusobno *jednake*, dakle $I_1 = I_2 = I$. Tu jednakost možemo postići tako da *ista* struja teče kroz oba vodiča (sl. E.12b; struja I »vraća« se preko crtkano prikazanog spoja, koji se nalazi »negdje u neizmjernosti«). U tom slučaju vodiči se *odbijaju*, a sila odbijanja po jedinici njihove duljine iznosi

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi x}, \tag{2.1-4}$$

što smo dobili iz jednadžbe (2.1-3) pošto smo u nju uvrstili $I_1 = I_2 = I$.

Pod djelovanjem jedinične sile (2.1-4) vodiči bi se razmicali, teoretski neizmjerno daleko. Da bi oni ostali *stalno* međusobno udaljeni x, u mislima ćemo između elemenata duljine vodiča $\mathrm{d}l$ ugraditi pero (oprugu) koja će ih *privlačiti* jediničnom silom $\mathrm{d}F'/\mathrm{d}l$ (o djelovanju pera raspravljali smo u odlomku B.7.3.2). Načelo takvog uređaja prikazali smo slikom E.12c, na kojoj vidimo da je lijevi vodič učvršćen na nepomični neferomagnetski predmet. Desni vodič prestat će se odmicati od lijevoga (nepomičnoga) onda kad vrijednost jedinične sile pera $\mathrm{d}F'/\mathrm{d}l$ bude *jednaka*

vrijednosti suprotno usmjerene elektromagnetske jedinične sile dF/dl iz jednadžbe (2.1-4). Desni vodič mirovat će, dakle, u odnosu prema lijevome u slučaju kada je

$$\frac{dF'}{dl} = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi x}. \tag{2.1-5}$$

Zamislimo sada da su vodiči sa slike E.12c razmaknuti u vakuumu tačno $x = 1$ metar $= 1\,\mathrm{m}$, te da vrijednost oprugom proizvedene jedinične sile dF'/dl (pretpostavljamo, dakako opet teoretski, da se sila dF' na element dl može proizvesti, i to po volji precizno) iznosi tačno $dF'/dl = 2 \cdot 10^{-7}$ N/m. Ovdje je N kratica jedinice sile SI newton $=$ kgm/s^2 (vidi odlomak B.4.2.1; o preciznoj proizvodnji sila vidi odlomak A.9.3.4). Ako pri

$$x = 1\,\mathrm{m}, \qquad dF'/dl = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/m}, \text{ u vakuumu}, \tag{2.1-6}$$

desni vodič sa slike E.12c *miruje* prema lijevome, proglašujemo da vrijednost jakosti struje I iz jednadžbe (2.1-5) iznosi

$$I = [I]_{\mathrm{M}} = 1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{amper}, \tag{2.1-7}$$

tj. *proglašujemo* da pri tom kroz vodiče teče *jedinica* SI jakosti električne struje I.

Objavama (2.1-7), (2.1-6) i opisom slike E.12c *propisujemo* vrijednost magnetske konstante μ_0 (permeabilnost vakuuma) za koju smo na početku ovog odlomka pretpostavili da joj ne znamo vrijednost. S navedenim podacima (2.1-6,7) možemo, naime, pomoću jednadžbe (2.1-5), koja vrijedi za uređaj na slici E.12c, izračunati tu vrijednost

$$\mu_0 = \frac{2\pi x}{I^2}\,\frac{dF'}{dl} = \frac{2\pi \cdot 1\,\mathrm{m}}{(1\,\mathrm{A})^2} \cdot 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}. \tag{2.1-8}$$

Pošto je na osnovu podataka (2.1-6,7) definirana vrijednost μ_0, jednadžba (2.1-4) može se upotrijebiti *za računanje elektrodinamičkih sila drukčije oblikovanih vodiča ili svitaka*. I ne samo jednadžba (2.1-4) već i mnogo općenitiji izraz (2.1-3), jer *omjer* I_1/I_2 može se *izmjeriti* izvanredno precizno, *neovisno* o nepouzdanosti reprodukcije jedinice $[I]_{\mathrm{M}} =$ amper iz jednadžbe (2.1-7). Pri upotrebi pramjerila u obliku »strujne vage« (odsječak 3.1) doista se služimo teorijom elektromagnetskih sila koja se temelji na (2.1-3) u vektorskom obliku.

2.1.4. Definicija nezavisne jedinice SI amper. S prije navedenim podacima $x = 1\,\mathrm{m}$ i $dF'/dl = 2 \cdot 10^{-7}$ N/m, uz propisivanje vrijednosti $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2, možemo sada pomoću jednadžbe (2.1-5) za mjerni uređaj (pramjerilo na slici E.12c) izračunati jakost struje I u položaju mirovanja vodiča

$$I^2 = \frac{2\pi x}{\mu_0}\,\frac{dF'}{dl} = \frac{2\pi \cdot 1\,\mathrm{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}}\,2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{A}^2; \quad I = 1\,\mathrm{A} = [I]_{\mathrm{M}}.$$

U skladu s tim proračunom, odnosno u skladu sa čitavim razmatranjem u odlomku 2.1.3, definira se nezavisna jedinica SI jakosti električne struje ovako:

> Amper je ona stalna električna struja koja prolazeći dvama paralelnim, ravnim, neizmjerno dugačkim vodičima, zanemarivo malena kružnog presjeka, razmaknutim 1 metar u vakuumu, uzrokuje između njih silu $2 \cdot 10^{-7}$ newtona po metru duljine.

Ovu definiciju ampera prihvatila je Generalna konferencija za mjere i utege (vidi odsječak A.6.3) na svom devetom zasjedanju godine 1948. Originalni tekst definicije glasi:

> L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ unité M.K.S. de force par mètre de longueur.

U tekstu definicije nalazimo samo jedan podatak koji nismo prethodno razmotrili u odlomku 2.1.3. To je dio rečenice: »zanemarivo malen kružni presjek«. Njome se naglašava činjenica da jednadžbe (2.1-1...5) vrijede samo za teoretski slučaj kada zamišljamo da su vodiči neizmjerno tanke *niti* u kojima je, dakle, gustoća struje beskrajno velika. Budući da se u stvarnosti tom uvjetu ne može udovoljiti, pa čak ni u supravodljivom stanju, pri izradi stvarnih pramjerila jakosti struje mora se uzeti u obzir *korekcija* koja stvarne presjeke vodiča svodi na tzv. strujne niti. Isto vrijedi i za proračunavanje magnetske indukcije B u unutrašnjosti standardnih svitaka tzv. održavajućih standarda (vidi odsječke 3.2 i 3.3).

2.2. Definicije imenovanih jedinica SI u elektromagnetizmu

2.2.1. Načelo definiranja izvedenih jedinica SI opisali smo u odsječku A.5.1 na primjeru univerzalnog koherentnog sistema jedinica, u stvari na primjeru Međunarodnog sistema jedinica (SI). Opisano načelo vrijedi, dakako, i za definiranje izvedenih jedinica SI elektromagnetskih veličina, pa ćemo ga zato ovdje primjenjivati bez podrobnih objašnjenja. Korisno je prije toga spomenuti da se naznakom »definiranje izvedenih jedinica« ne smjera na uputu o *konkretnoj reprodukciji* izvedenih jedinica, već na stvaranje jasne *fizikalne predodžbe* o tim jedinicama sa svrhom da se time olakša *računanje* pomoću jedinica (vidi kraj odlomka 2.2.2). Tako smo radili i u mehanici. U odlomku B.4.2.1 definirali smo, na primjer, jedinicu sile SI newton umnoškom $\mathrm{N} = \mathrm{kgm/s^2}$; pri tom smo držali na pameti samo jednadžbu $F = ma = m\mathrm{d}^2l/\mathrm{d}t^2$, dok se za stvarnu reprodukciju jedinice N nismo zanimali (o proizvodnji sila bilo je riječi u odlomku A.9.3.4).

Prije nego što smo u odlomku 2.1.4 definirali nezavisnu elektromagnetsku jedinicu SI $[I]_{\mathrm{M}} = \mathrm{amper} = \mathrm{A}$, imali smo na raspolaganju velik skup međusobno koherentnih jedinica SI definiranih već u mehanici i nauci o toplini. To su, na primjer, jedinice: metar (m), sekunda (s), kilogram (kg), newton (N), mendeljejev (M; to je prijedlog, vidi odlomak B.4.3.2), joule (J), bernoulli (B; prijedlog, vidi odlomak B.6.4.2), kelvin (K) itd. Budući da se elektromagnetske jedinice definiraju pomoću četiri nezavisne (osnovne) jedinice, o čemu smo letimično raspravljali u odlomku 2.1.2, za njih moramo imati četiri međusobno nezavisne (osnovne) jedinice. O našoj volji ovisi koje će to četiri jedinice biti. U odlomku 2.1.3 implicitno smo odabrali četvorku nezavisnih jedinica

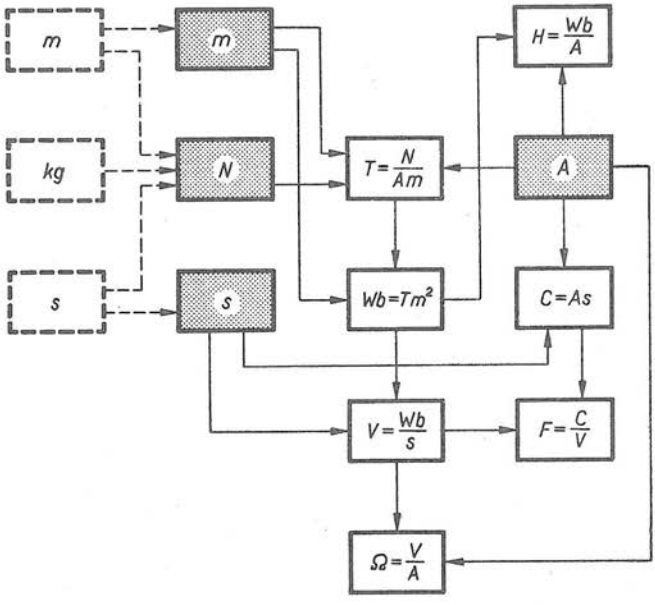
$$[l]_{\mathrm{M}} = \mathrm{m}, \quad [t]_{\mathrm{M}} = \mathrm{s}, \quad [F]_{\mathrm{M}} = \mathrm{N}, \quad [I]_{\mathrm{M}} = \mathrm{A}. \tag{2.2-1}$$

tj. smatrali smo da je N *nezavisna* jedinica, iako smo u mehanici tu jedinicu smatrali *zavisnom* i definirali je jednadžbom među jedinicama $\mathrm{N} = \mathrm{kgm/s^2}$.

Kompletnu shemu definiranja imenovanih jedinica SI u području elektromagnetizma prikazuje slika E.13. Kratice jedinica označuju:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= [I]_{\mathrm{M}} = \text{amper}, & \Omega &= [R]_{\mathrm{M}} = \text{ohm}, \\ \mathrm{V} &= [U]_{\mathrm{M}} = \text{volt}, & \mathrm{Wb} &= [\Phi]_{\mathrm{M}} = \text{weber}, \\ \mathrm{H} &= [L]_{\mathrm{M}} = \text{henry}, & \mathrm{C} &= [Q]_{\mathrm{M}} = \text{coulomb}, \\ \mathrm{T} &= [B]_{\mathrm{M}} = \text{tesla}, & \mathrm{F} &= [C]_{\mathrm{M}} = \text{farad}. \end{aligned}$$

Uglaste zagrade zatvaraju simbole odgovarajuće fizikalne veličine (tablica E-1). Crtkano smo na slici E.13 označili jedinice m, kg i s, koje smo u *mehanici* smatrali nezavisnim jedinicama. Ovdje smo preko veze $\mathrm{N} = \mathrm{kgm/s^2}$ za nezavisnu jedinicu proglasili N = newton, koji je zajedno s nezavisnim jedinicama m, s i A na slici istaknut rasterom.



Sl. E.13. Shema definiranja izvedenih jedinica SI polaznom četvorkom m, s, N, A

2.2.2. Sloboda definiranja izvedenih jedinica. Slijed definicija izvedenih jedinica elektromagnetizma započeli smo u prošlom odlomku od četvorke (2.2-1), tj. jedinice SI metar, sekundu, newton i amper proglasili smo nezavisnima. Rezultat smo saželi na slici E.13. Slijed definicija mogli smo, međutim, započeti polaznom četvorkom

$$[l]_{\mathrm{M}} = \mathrm{m}, \quad [t]_{\mathrm{M}} = \mathrm{s}, \quad [P]_{\mathrm{M}} = \mathrm{W}, \quad [I]_{\mathrm{M}} = \mathrm{A}, \tag{2.2-2}$$

gdje simbol W označuje jedinicu snage SI $[P]_{\mathrm{M}} = \text{watt}$, koju u mehanici možemo zamisliti definiranu jednadžbom

$$[P]_{\mathrm{M}} = \mathrm{W} = \mathrm{N}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}. \tag{2.2-3}$$

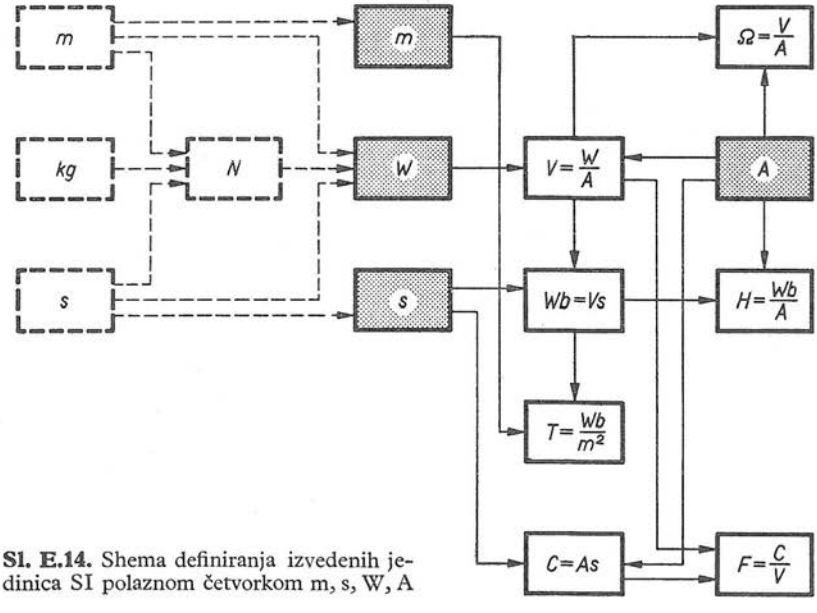
Ova jednadžba među jedinicama slijedi iz veličinske jednadžbe $P = Fv$ (odlomak B.5.1.3) koja međusobno povezuje snagu P, silu F i brzinu v.

Uz takav izbor nezavisnih jedinica (jednadžba 2.2-2) izvedene se jedinice definiraju pomoću slijeda jednadžbi

$$\begin{aligned} U = P/I &\rightarrow [U]_{\mathrm{M}} = \text{volt} = \mathrm{V} = \mathrm{W/A}, \\ R = U/I &\rightarrow [R]_{\mathrm{M}} = \text{ohm} = \Omega = \mathrm{V/A}, \\ Q = It &\rightarrow [Q]_{\mathrm{M}} = \text{coulomb} = \mathrm{C} = \mathrm{As} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Pripadnu shemu definiranja vidimo na slici E.14, koja se od E.13 razlikuje samo u tome što se na mjestu N nalazi W.

Zakonodavni akti većine država redovito propisuju slijed definicija koji počinje od nezavisne četvorke (2.2-2). Možemo se upitati: zašto je tome tako, ima li četvorka (2.2-2) neke prednosti pred četvorkom (2.2-1)? Odgovoriti možemo tek pošto utvrdimo čemu uopće služe *definicije* izvedenih mjernih jedinica. Da li definicije služe kao upute za reprodukciju jedinica ili se njima koristimo za fizikalnu predodžbu o jedinicama? Ako smatramo da definicija izvedene jedinice mora sadržavati uputu za najpouzdaniju reprodukciju jedinice, onda je izbor nezavisne jedinice $[P]_M = W$ *lošiji* od nezavisne jedinice $[F]_M = N$. Jedinice snage reproduciraju se,



Sl. E.14. Shema definiranja izvedenih jedinica SI polaznom četvorkom m, s, W, A

naime, daleko manje pouzdano (nepouzdanost je veća) negoli jedinice sile čiju smo reprodukciju opisali u odlomku A.9.3.4, jer snaga se najčešće utvrđuje mjerenjem najmanje dviju drugih fizikalnih veličina (npr. mjerenjem para F, v, ili U, I ili W, t itd.). Prema tome propisani slijed definicija iz odlomka 2.2.5 *ne teži* da propiše slijed *reprodukcije* jedinica.

Ako, dakle, definicije izvedenih jedinica služe zato da bismo njima stekli *fizikalnu predodžbu* o mjernim jedinicama, onda četvorka polaznih jedinica (2.2-2) *ima prednost* pred (2.2-1): većini ljudi lakše je predočiv izvod jedinice $V = W/A$ iz jednadžbe snage električkog strujnog kruga $U = P/I$ negoli izvod jedinice $T = N/(Am)$, naveden u slici E-13.

Odgovor na pitanje o svrsi definicija jedinica možemo proširiti novim pitanjem: može li autor udžbenika s područja elektromagnetizma odstupiti od službenog slijeda definicija koji započinje od (2.2-2), tj. od m, s, W, A? Držimo da može, štoviše da i treba, ako je slijed njegova izlaganja elektromagnetizma — za koji on

svakako smatra da je najinstruktivniji — takav da zahtijeva drukčiji slijed definicija jedinica. To je u skladu s naučnom slobodom odabiranja nezavisnih fizikalnih veličina, o čemu smo pisali pri kraju odlomka 1.1.1. Prema tome službeni slijed definicija jedinica SI elektromagnetskih veličina u odlomku 2.2.5 shvatit ćemo kao *preporuku*, a ne kao krut propis, koji bi autorima mogao oduzeti ono najvrednije — originalnost.

Pri kraju možemo u pogledu službenog slijeda definicija jedinica dodati još ovo. Taj slijed zapravo je *reprodukcijski slijed* jedinica koji se osniva na dva *održavajuća standarda* (odlomak A.5.3.4): za električki napon (Westonov element; vidi odsječak 3.5) i za električki otpor (otporničke normale; odsječak 3.6). No taj slijed više ne može služiti kao *definicijski slijed* jedinica, jer je godine 1948. prihvaćena definicija ampera iz odlomka 2.1.4. Time se, naime, Međunarodni sistem jedinica (SI) proširio na elektromagnetizam tako što se trima »mehaničkim« jedinicama pridružila *jedna* »elektromagnetska« (odlomak 2.1.3).

2.2.3. Elektromagnet kao pramjerilo polazne jedinice. Sloboda definiranja *izvedenih* jedinica, o kojoj smo govorili u prošlom odlomku, može se proteg-nuti i na *polaznu* elektromagnetsku jedinicu. Tu tvrdnju pokušat ćemo dokazati zamislivši da elektromagnet na slici E.15 želimo upotrijebiti kao *pramjerilo* jedinice magnetske indukcije B (tu veličinu definirali smo u odlomku 1.3.1). Drugim riječima: ne znamo, tj. ne želimo znati, da postoji pramjerilo jedinice struje $[I]$, prikazano slikom E.12, već želimo elektromagnetom reproducirati jedinicu magnetske indukcije $B=[B]=$ tesla $=$ T i tu jedinicu smatrat ćemo četvrtom polaznom jedinicom elektromagnetizma (za historijat jedinice T vidi odlomak B.4.3.2). Budući da jedinica $[B]=$T mora biti *koherentna* jedinica SI, ona se mora oslanjati na onu istu magnetsku konstantu μ_0 koju smo imali u jednadžbi (2.1-8), ali ćemo je ovdje izraziti jedinicom T, tj. $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ T^{2}m^2/N, jer je prema slici A.13 T=N/(Am).

Zamislimo da se elektromagnet na slici E.15 uzbuđuje istosmjernom strujom I čiju jakost možemo mijenjati i namjestiti na potrebnu jakost, a da pri tom ne znamo kolika je njena vrijednost. Dalje zamislimo da imamo poseban uređaj za *mjerenje sile* F kojom se privlače oba pola elektromagneta kad njegovim namotom teče električna struja. Tu silu mogli bismo mjeriti vrlo osjetljivom polužnom vagom (poglavlje A.9) koja bi na jednom svom kraku imala ovješen jedan pol elektromagneta, a na drugom kraku utege. Prema tome, mjerenje sile izvodi se usporedbom elektromagnetske sile F sa *gravitacijskom silom*, tj. težinom mg. Pretpostavimo da je magnetsko polje u rasporu presjeka A homogeno, da nema tzv. rubnih efekata ni niza drugih poremećajnih utjecaja, tj. pretpostavljamo da je riječ o *idealnom* elektromagnetu u *vakuumu*. Za takav slučaj teorija elektromagnetskog polja daje jednadžbu

$$F=\tfrac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}A$$

za proračunavanje sile F kojom se međusobno privlače polovi elektromagneta na slici E.15. Gornju jednadžbu možemo napisati i u obliku

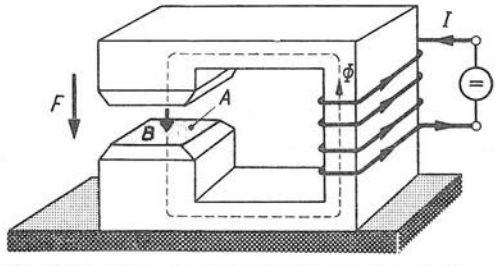
$$p=\tfrac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}, \quad \text{gdje je} \quad p=\frac{F}{A} \tag{2.2-4}$$

tlak kojim magnetsko polje privlači polove (usporedi s odlomkom 1.4.4).

Promjenom jakosti struje I mijenja se magnetska indukcija B u rasporu vakuumskog elektromagneta, a time se prema (2.2-4) mijenja tlak p, koji mjerimo gravitacijskom metodom, na primjer tlakomjerom opisanim u odsječku B.4.1. Prema tome, postepenim mijenjanjem jakosti struje I može se dogoditi da u rasporu postoji polje indukcije $B = [B] = \text{tesla} = 1$ T. Pitamo se koliku će vrijednost p pokazati tlakomjer ako je u vakuumskom rasporu $B = 1$ T? Odgovor nam daje jednadžba (2.2-4) ako u nju uvrstimo $B = 1$ T i $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T²m²/N:

$$p = \tfrac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \tfrac{1}{2}\frac{(1\,\mathrm{T})^2}{4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T^2m^2/N}} = \frac{10^7}{8\pi}\frac{\mathrm{NT^2}}{\mathrm{T^2m^2}} = \frac{10^7}{8\pi}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}. \qquad (2.2\text{-}5)$$

Elektromagnet na slici E.15, opremljen polužnom vagom ili tlakomjerom, poslužio nam je, dakle, kao *mjerni uređaj* za utvrđivanje vrijednosti $B = [B] = 1$ T, koju smo odabrali za *polaznu* elektromagnetsku jedinicu. Ako bismo opisanim uređajem mogli nadasve pouzdano mjeriti tlak p, za uređaj bismo rekli da je *pramjerilo* kojim *reproduciramo* jedinicu magnetske indukcije. Na takvo pramjerilo mogli bismo osloniti definiciju polazne elektromagnetske jedinice, jer jednadžbu (2.2-5) možemo pročitati ovako: »Tesla je ona magnetska indukcija u polju vakuumskog elektromagneta pri kojoj se njegovi polovi privlače tlakom $10^7/(8\pi)$ mendeljejeva« (naziv jedinice tlaka u SI mendeljejev = N/m² *predložili* smo u odlomku B.4.3.2).



Sl. E.15. Ilustracija mogućnosti primjene elektromagneta za pramjerilo polazne jedinice elektromagnetizma

Istim idealnim elektromagnetom mogli bismo reproducirati i jedinicu jakosti struje $[I] = \text{amper} = \text{A}$. Ako visinu vakuumskog raspora označimo sa x, a duljinu preostalog magnetskog kruga sa y, magnetska uzbuda elektromagneta iznosi (vidi tablicu E-1, redni broj 26)

$$\theta = NI = \frac{1}{\mu_0} Bx + \frac{1}{\mu} By, \qquad (2.2\text{-}6)$$

gdje je N broj zavoja namota elektromagneta. Posebnim komparacijskim mjerenjem, čiji rezultat *ne ovisi* o sistemu jedinica, možemo ustanoviti omjer $\mu_r = \mu/\mu_0$, tj. *omjer* permeabilnosti željeza μ i magnetske konstante μ_0 (permeabilnosti vakuuma). Na taj način od jednadžbe uzbude (2.2-6) dobivamo

$$I = \frac{B}{\mu_0 N}\left(x + \frac{y}{\mu_r}\right),$$

odakle uvrštenjem lijeve jednadžbe (2.2-4) slijedi ovisnost struje I o izmjerenom tlaku p, broju zavoja N, relativnoj permeabilnosti μ_r i izmjerama x, y:

$$I = \frac{1}{N}\left(x + \frac{y}{\mu_r}\right)\sqrt{\frac{2p}{\mu_0}}.$$

Sve nabrojene veličine mogu se izmjeriti bez prethodnog poznavanja bilo koje elektromagnetske jedinice. Za *konkretan* su elektromagnet veličine N, x, y i μ_r konstante, pa se gornja jednadžba može napisati u obliku

$$I = K\sqrt{p}, \quad \text{gdje je} \quad K = \frac{1}{N}\left(x + \frac{y}{\mu_r}\right)\sqrt{\frac{2}{\mu_0}}. \tag{2.2-7}$$

Budući da je za konkretan elektromagnet vrijednost konstante K poznata, iz lijeve jednadžbe (2.2-7) može se izračunati kod kojeg će tlaka p struja uzbude I biti jednaka jedinici, tj. $I = 1$ A:

$$p = 1\ \text{A}/K^2 = p_0.$$

Prema tome, jedinicu struje reproducirali bismo pomoću pramjerila na slici E.15 tako što bismo vrijednost I mijenjali tako dugo dok tlakomjer ne bi pokazao vrijednost p_0 iz gornje jednadžbe. Korisno je napomenuti da se izraz $F = HI^2$, koji je posve analogan lijevoj jednadžbi (2.2-7), upotrebljava prilikom primjene danas najpouzdanijeg pramjerila elektromagnetske jedinice, strujne vage (odlomak 3.1.6).

Pramjerilom na slici E.15 mogli bismo reproducirati i jedinice drugih elektromagnetskih veličina: magnetskog toka, električkog napona itd. S punim bismo pravom zatim mogli *definirati* pripadne jedinice, na primjer, ovako: »Weber (Wb = $= \text{Tm}^2$) je magnetski tok koji prolazi kroz okomitu površinu 1 kvadratni metar ako njegova indukcija iznosi 1 teslu«. Pomoću tako definirane jedinice magnetskog toka Φ možemo pomoću slike E.15 i zakona $U = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ zamisliti definiciju jedinice napona volt $= \text{V} = \text{Wb/s} = \text{Tm}^2/\text{s}$: »U petlji koja se nalazi u rasporu elektromagneta nastat će napon 1 volt ako se magnetski tok unutar petlje promijeni za 1 weber u toku 1 sekunde«. Itd.

Pri kraju ovog razmatranja možemo se upitati zašto se za pramjerilo polazne elektromagnetske jedinice upotrebljava strujna vaga (odsječak 3.1), a ne elektromagnet prikazan slikom E.15? Strujna se vaga upotrebljava zato jer je to mjerni uređaj kojim se u naše vrijeme može *najsigurnije* reproducirati polazna elektromagnetska jedinica. Otkriće bilo kakvog sigurnijeg mjernog uređaja odmah bi detroniziralo strujnu vagu, jer njena je primjena dugotrajna i skupa. O istraživačkim naporima da se ona zamijeni nekim drugim pramjerilima govori se u poglavlju 3.

2.2.4. Definicije svih nezavisnih jedinica SI. Prije nego što izložimo *službeni* slijed definicija *imenovanih* jedinica elektromagnetizma, ovdje ćemo skupiti definicije svih šest nezavisnih jedinica SI. U zagradi ćemo uz svaku definiciju navesti na kojem je zasjedanju Generalne konferencije za mjere i utege (GKMU) ona prihvaćena i uputiti na onaj odlomak ili odsječak ove knjige gdje se ona podrobnije razmatra.

Jedinica duljine: metar (m)

»Metar je duljina jednaka 1 650 763,73 duljine vala u vakuumu zračenja koje odgovara prijelazu između razina $2\,p_{10}$ i $5\,d_5$ atoma kriptona 86« (11. GKMU, 1960, odlomak A.8.1.2; vidi i odsječke A.8.7 i A.8.8).

Jedinica vremena: sekunda (s)

»Sekunda je trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma cezija 133« (13. GKMU, 1967; vidi odlomak A.10.1.3 i odsječak A.10.6).

Jedinica mase: kilogram (kg)	»Kilogram je masa međunarodne pramjere koja je pohranjena u Međunarodnom uredu za mjere i utege« (3. GKMU, 1901; vidi odlomak A.9.3.3).
Jedinica jakosti električne struje: amper (A)	»Amper je ona stalna električna struja koja, prolazeći dvama paralelnim, ravnim, neizmjerno dugačkim vodičima, zanemarivo malena kružnog presjeka, razmaknutim 1 metar u vakuumu, uzrokuje između njih silu $2 \cdot 10^{-7}$ newtona po metru duljine« (9. GKMU, 1948, odlomak E.2.1.4; vidi odsječak E.3.1).
Jedinica termodinamičke temperature: kelvin (K)	»Kelvin je 273,16-i dio termodinamičke temperature trojne tačke vode« (13. GKMU, 1967, odlomak D.3.2.4; na tom zasjedanju GKMU uveden je naziv jedinice »kelvin« i njen simbol K umjesto dotadašnjeg naziva »stupanj Kelvina« i simbola °K).
Jedinica svjetlosne jakosti: candela (cd)	»Candela je svjetlosna jakost, u okomitom smjeru, površine 1/600000 kvadratnog metra crnog tijela na temperaturi skrućivanja platine pri tlaku 101325 N/m²« (13. GKMU, 1967, odlomak G.3.2.5).

2.2.5. Definicije imenovanih jedinica SI u elektromagnetizmu oslonit ćemo na »Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima« koji je objavljen u Službenom listu SFR Jugoslavije od 15.11.1961 (broj 45). Tekstove tih definicija smatrat ćemo *preporukama*, kako smo to objasnili u odlomku 2.2.2. Definiciju nezavisne jedinice amper = A nećemo navoditi, jer je ona zabilježena u odlomcima 2.2.4 i 2.1.4. Ni definiciju jedinice snage SI W = watt nećemo navoditi (ona je potrebna pri definiciji volta, vidi daljnji tekst), jer je zajedno s drugim »mehaničkim« jedinicama SI definirana u odlomku B.7.2.4. Definicije ćemo izvesti samo za one jedinice SI koje prema citiranom zakonu imaju *vlastita imena*, dakle za imenovane jedinice SI u području elektromagnetizma. Pri tom može biti od koristi shema na slici E.14.

Elektrika (količina elektrike, količina elektriciteta). Jedinica elektrike SI je coulomb (kratica: C), koja je dobila ime po francuskom učenjaku *Charles*u *Auguste*u *de Coulomb*u (1736...1806):

Coulomb je količina elektrike koja u 1 sekundi prođe vodičem kojim teče stalna struja 1 amper.

U skladu s izrazom $Q = It$, jedinica elektrike coulomb ovisi o drugim dvjema jedinicama ovako:

$$\text{coulomb} = \text{C} = [I]_{\text{M}}\,[t]_{\text{M}} = \text{A} \cdot \text{s} = \text{As}.$$

Električki napon i potencijal. Jedinica električkog napona je volt (kratica: V), koja je dobila ime po talijanskom fizičaru *Alessandru Volti* (1745...1887):

Volt je električki napon između dviju tačaka homogenog žičanog vodiča kojim prolazi stalna električna struja 1 amper, a utrošena snaga između ovih dviju tačaka iznosi 1 watt.

Prema izrazu za snagu $P = UI$, odnosno $U = P/I$, jedinica napona volt ovisi o ostalim jedinicama ovako:

$$\text{volt} = \text{V} = \frac{[P]_{\text{M}}}{[I]_{\text{M}}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \frac{\text{J}}{\text{As}} = \frac{\text{N m}}{\text{A s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3},$$

jer je W = joule/sekunda = Nm/s, a N = kgm/s².

Električki otpor. Jedinica električkog otpora je ohm (kratica: Ω), koja je dobila ime po njemačkom fizičaru *G. S. Ohm*u (1787...1854):

> Ohm je električki otpor vodiča, koji ne sadrži nikakav izvor napona, u kojem stalan napon 1 volt, doveden na njegove krajeve, uzrokuje struju 1 amper.

U skladu s *Ohm*ovim zakonom $I = U/R$, odnosno $R = U/I$, jedinica električkog otpora ohm ovisi o ostalim jedinicama ovako:

$$\text{ohm} = \Omega = \frac{[U]_{\text{M}}}{[I]_{\text{M}}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \frac{\text{W}}{\text{A}^2} = \frac{\text{J}}{\text{A}^2\text{s}} = \frac{\text{N m}}{\text{A}^2\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A}^2\text{s}^3}.$$

U definiciji ohma umetnutom se rečenicom »koji ne sadrži nikakav izvor napona« smjera na to da vodič ne sadrži npr. izvore termoelektričkih napona, elektrokemijske napone itd.

Električka vodljivost. Jedinica električke vodljivosti je siemens (kratica: S), koja je dobila ime po njemačkom inženjeru *E. W. Siemens*u (1816...1892):

> Siemens je električka vodljivost vodiča otpora 1 ohm.

Budući da je vodljivost recipročna otporu, to je siemens = S = 1/Ω.

Napominjemo da »siemens« još nije službeni naziv jedinice vodljivosti u SI. Vjerojatno će ga prihvatiti Generalna konferencija na slijedećem zasjedanju, jer je potkraj godine 1969. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM) izglasao preporuku u tom smislu. U angloameričkim zemljama jedinicu siemens obično označuju sa »mho«, što je natraške čitan »ohm«.

Električki kapacitet. Jedinica električkog kapaciteta je farad (kratica: F), koja je dobila ime po engleskom fizičaru i kemičaru *Michael*u *Faraday*u (1791... 1867):

> Farad je kapacitet električkog kondenzatora koji se nabije elektrikom 1 coulomb kada se na njegove elektrode dovede stalan napon 1 volt.

Prema jednadžbi $C = Q/U$ jedinica kapaciteta farad ovisi o ostalim jedinicama ovako:

$$\text{farad} = \frac{[Q]_{\text{M}}}{[U]_{\text{M}}} = \text{F} = \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{As}}{\text{V}}.$$

Magnetski tok. Jedinica magnetskog toka je weber (kratica: Wb), koja je dobila ime po njemačkom fizičaru *Wilhelm*u *Weber*u (1804...1891):

> Weber je magnetski tok pri čijem nestanku proteče elektrika 1 coulomb strujnim krugom otpora 1 ohm koji obuhvaća taj magnetski tok.

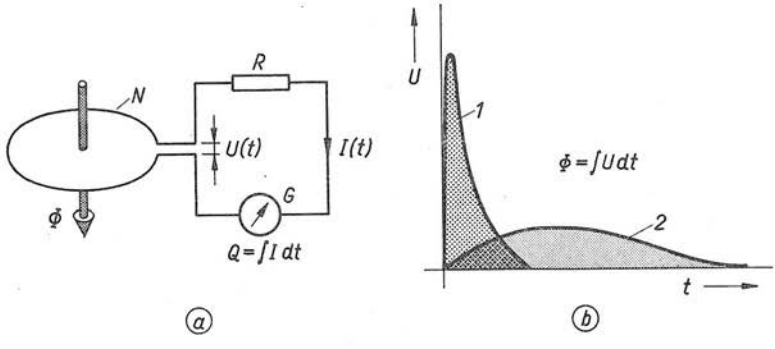
Definiciju jedinice magnetskog toka weber objasnit ćemo uz pomoć idejne sheme na slici E.16a. Namot N, koji se sastoji od jednog zavoja, obuhvaća magnetski tok Φ. Na namot je priključen balistički galvanometar G i otpornik R. (Otpornik u shemi zapravo predstavlja ukupni otpor strujnog kruga, dakle zbroj otpora namota, spojnih žica, galvanometra i serijski uključenog otpornika.) Ako magnetski tok unutar namota smanjujemo od vrijednosti Φ do 0, na izvodima namota pojavit će se za vrijeme procesa smanjivanja toka inducirani napon čija vrijednost u svakom trenutku t iznosi

$$U(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{2.2-8}$$

Na slici E.16b vidimo kako se mijenja $U(t)$ ovisno o vremenu t. Kad se tok brzo mijenja, nastaje krivulja *1*, a u slučaju spore promjene — krivulja *2*. Šrafirane površine prikazuju magnetski tok

$$\Phi = \int U(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.2-9}$$

koji je postojao unutar namota neposredno prije nego što smo ga počeli smanjivati prema nuli. Integral se proteže od $t=0$, kad smo započeli naš misaoni pokus, do $t=\infty$. Izraz (2.2-9) zapravo je integrirana jednadžba (2.2-8). Naravno da su površine ispod krivulja *1* i *2* međusobno jednake.



Sl. E.16. Uz definiciju jedinice magnetskog toka SI weber

Za vrijeme procesa smanjivanja toka Φ inducirani napon $U(t)$ uzrokovao je u strujnom krugu slike E.16a struju jakosti $I(t)=U(t)/R$, gdje je R stalan otpor. Prema tome jednadžbu (2.2-9) možemo napisati u obliku

$$\Phi = R\int I(t)\,\mathrm{d}t = RQ,$$

jer je $Q=\int I(t)\,\mathrm{d}t$ elektrika što je za vrijeme procesa prošla kroz strujni krug, a izmjerio ju je balistički galvanometar.

Na temelju jednadžbe $\Phi=RQ$ definirana je jedinica magnetskog toka SI weber u ovisnosti o ostalim jedinicama SI, kako smo na početku naveli. Budući da je prema definiciji webera električki otpor $R=1\,\Omega$, a $Q=1\,\mathrm{C}$, uvrštenjem tih vrijednosti u jednadžbu $\Phi=RQ$ dobivamo

$$\text{weber} = \mathrm{Wb} = [R]_{\mathrm{M}}\,[Q]_{\mathrm{M}} = \Omega\,\mathrm{C} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\,\mathrm{A\,s} = \mathrm{Vs}.$$

Zbog Wb = Vs katkada se i u govoru umjesto naziva »weber« upotrebljava termin »voltsekunda«.

Magnetska indukcija. Jedinica magnetske indukcije je tesla (kratica: T), koja je dobila ime po jugoslavenskom elektrotehničaru *Nikoli Tesli* (1856...1943):

> Tesla je magnetska indukcija homogenog magnetskog toka 1 weber koji prolazi kroz površinu 1 kvadratni metar okomitu na magnetsku indukciju.

U skladu s izrazom $B = \Phi/A$, jedinica magnetske indukcije tesla ovisi o ostalim jedinicama ovako:

$$\text{tesla} = \text{T} = \frac{[\Phi]_{\text{M}}}{[A]_{\text{M}}} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{A m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{A m}}.$$

Induktivitet. Jedinica induktiviteta je henry (kratica: H), koja je dobila ime po američkom fizičaru *Joseph*u *Henry*ju (1799...1878):

> Henry je induktivitet zatvorenog strujnog kruga u kojem struja 1 amper uzrokuje u krugu magnetski tok 1 weber.

U skladu s jednadžbom $L = \Phi/I$, jedinica induktiviteta henry ovisi o ostalim jedinicama ovako:

$$\text{henry} = \text{H} = \frac{[\Phi]_{\text{M}}}{[I]_{\text{M}}} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \Omega\text{s} = \frac{\text{J}}{\text{A}^2}.$$

2.2.6. Udobnost računanja pomoću jedinica SI. Razmatranja u odlomku 2.2.2 pokazala su nam da u definicijske svrhe možemo bilo koje četiri međusobno nezavisne jedinice SI proglasiti polaznima (osnovnima). Na temelju toga možemo izvesti mnoštvo »sistema« jedinica, na primjer »sistem m, s, N, A« (sl. E.13), »sistem m, s, W, A« (sl. E.14) itd. U većini slučajeva za prve dvije polazne jedinice odabiru se $[l]_{\text{M}}$ = metar i $[t]_{\text{M}}$ = sekunda. Razlog tome je *prikladnost* takvog izbora za primjenu (fizikalna zornost, jer u elektromagnetizmu se neprestano služimo jedinicama duljine i vremena), ali nije nužnost. Teoretski se, naime, za jedinice polazne četvorke mogu odabrati bilo koje četiri *međusobno nezavisne* jedinice (vidi *Ascoli*jevo pravilo u odlomku 5.2.2), npr. četvorka N, J, C, T ili kg, N, J, A itd., pa je u prvom slučaju izvedena jedinica duljine metar = J/N, a u drugom je izvedena jedinica vremena sekunda = kg J/N² itd.

Svaki od takvih *definicijskih* »sistema« jedinica teoretski je, dakle, potpuno ispravan i jednako vrijedan. Ovaj ili onaj odabrat ćemo već prema tome koji nam od njih u primjeni pruža najviše udobnosti, tj. koji zahtijeva najmanje napora i vremena pri računanju. U elektromagnetizmu općenito najprikladnija je polazna četvorka m, s, V, A, jer se od veličina l, t, U, I izvode mnoge druge fizikalne veličine, mnogi zakoni elektromagnetizma povezuju baš ove veličine, a praktična električka mjerenja imaju u osnovi mjerenje struje i napona. No unutar elektromagnetizma ponekad nam nije najprikladniji »sistem« m, s, V, A, već npr. m, s, V, F (elektrostatika) ili m, s, A, T (magnetizam) itd. Očigledno je, dakle, da će isti čovjek u istoj struci upotrebljavati *nekoliko* definicijskih »sistema« jedinica. Zato je korisno pogledati kako se jednostavno prelazi od jedne polazne četvorke na drugu.

Pri tom prelaženju valja se pridržavati načela *zajedničke jedinice* u oba definicijska »sistema«. Kao zajednička jedinica može se općenito upotrijebiti bilo koja

jedinica, ali se zbog lakšeg računanja najčešće upotrebljava jedinica SI jedne od ovih veličina: snaga, energija, gustoća energije, sila, tlak. Prelaženje ćemo objasniti primjerom u kojem želimo naći »jednadžbe među jedinicama« (vidi odlomak A.1.6.3) prilikom prijelaza od definicijskog »sistema« m, s, kg, A na »sistem« m, s, V, A. Pri tom ćemo se poslužiti jednadžbom snage koja npr. u mehanici glasi $P = Fv$, a u elektrotehnici $P = UI$. Budući da i četvorka m, s, kg, A i četvorka m, s, V, A sadrže jedinice univerzalnog koherentnog Međunarodnog sistema jedinica (SI), to je očito da u oba slučaja snagu P mjerimo jedinicom $[P]_M = W$ = watt. Iz $P = Fv$ i $P = UI$, dakle, proizlazi

$$[F]_M\,[v]_M = [P]_M = W = [U]_M\,[I]_M. \tag{2.2-10}$$

Budući da je $[F]_M = N = kgm/s^2$ (izraženo prvim »sistemom«), a $[v]_M = m/s$, iz (2.2-10) uvrštenjem slijedi dalje

$$kg\frac{m}{s^2}\,\frac{m}{s} = VA \quad \text{ili} \quad kg\frac{m^2}{s^3} = VA. \tag{2.2-11}$$

U desnoj jednadžbi (2.2-11) lijevo od znaka jednakosti nalaze se jedinice »sistema« m, s, kg, A, a desno jedinice »sistema« m, s, V, A. Odavde dobivamo, na primjer, dalje

$$kg = \frac{s^3}{m^2}VA \quad \text{ili} \quad V = \frac{kg\,m^2}{A\,s^3}.$$

Ove odnose unijeli smo na odgovarajuća mjesta u stupac 5 tablice E-4. Pomoću jednadžbe $R = U/I$ možemo saznati dalje

$$[R]_M = \frac{[U]_M}{[I]_M} = \frac{V}{A} = \frac{1}{A}\,\frac{kg\,m^2}{A\,s^3} = \frac{kg\,m^2}{A^2\,s^3} = \Omega.$$

Budući da je $[Q]_M = As$, iz jednadžbe $C = Q/U$ slijedi

$$[C]_M = \frac{[Q]_M}{[U]_M} = \frac{A\,s}{\frac{kg\,m^2}{A\,s^3}} = \frac{A^2\,s^4}{kg\,m^2} = F \text{ itd., itd.}$$

Analognim računanjem možemo ispuniti čitav stupac 5 tablice E-4.

Da bismo korisnicima ove knjige uštedjeli trud oko proračunavanja ovovrsnih odnosa među jedinicama, sastavili smo tablice E-4 i E-5 u kojima je 13 različitih jedinica SI izraženo u ovisnosti o 14 četvorki polaznih jedinica SI. Tako je, na primjer, jedinica induktiviteta SI henry = H = J/A^2 (stupac 6 tablice E-4) = $T\,m^2/A$ (stupac 7, E-4) = Ωs (stupac 9, E-4) = s^2/F (stupac 6 tablice E-5) itd. itd. U vezi s tablicama E-4,5 želimo naglasiti da smo u njih uvrstili i *naziv* jedinice tlaka SI

$$[p]_M = \text{mendeljejev} = M = N/m^2,$$

koji još nije međunarodno prihvaćen; taj naziv *predložili* smo u odlomku B.4.3.2.

Prikazanu lakoću i udobnost računanja odnosa među jedinicama SI lako je razumjeti: *sve jedinice* (i mnoge druge koje nismo naveli) u tablicama E-4,5 pripadaju univerzalnom Međunarodnom sistemu jedinica (SI), one su, dakle, međusobno

Tablica **E-4**

Ovisnost jedinica SI o sedam četvorki polaznih jedinica

Jedinica SI		msNA	mskgA	msVA	msJA	msAT	mskgV	mskgΩ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
kilogram	kg =	$\frac{N s^2}{m}$	kg	$\frac{VA s^3}{m^2}$	$\frac{J s^2}{m^2}$	$A T s^2$	kg	kg
newton	N =	N	$\frac{kg\,m}{s^2}$	$\frac{VA s}{m}$	$\frac{J}{m}$	$A T m$	$\frac{kg\,m}{s^2}$	$\frac{kg\,m}{s^2}$
mendeljejev	M =	$\frac{N}{m^2}$	$\frac{kg}{s^2\,m}$	$\frac{VA s}{m^3}$	$\frac{J}{m^3}$	$\frac{A T}{m}$	$\frac{kg}{s^2\,m}$	$\frac{kg}{s^2\,m}$
joule	J =	N m	$\frac{kg\,m}{s^2}$	VA s	J	$A T m^2$	$\frac{kg\,m^2}{s^2}$	$\frac{kg\,m^2}{s^2}$
watt	W =	$\frac{N m}{s}$	$\frac{kg\,m^2}{s^3}$	VA	$\frac{J}{s}$	$\frac{A T m^2}{s}$	$\frac{kg\,m^2}{s^3}$	$\frac{kg\,m^2}{s^3}$
amper	A =	A	A	A	A	A	$\frac{kg\,m^2}{V s^3}$	$\frac{kg^{1/2}\,m}{s^{3/2}\,\Omega^{1/2}}$
coulomb	C =	A s	A s	A s	A s	A s	$\frac{kg\,m^2}{V\,s^2}$	$\frac{kg^{1/2}\,m}{s^{1/2}\,\Omega^{1/2}}$
volt	V =	$\frac{N m}{A s}$	$\frac{kg\,m^2}{A\,s^3}$	V	$\frac{J}{A s}$	$\frac{T m^2}{s}$	V	$\frac{kg^{1/2}\,\Omega^{1/2}\,m}{s^{3/2}}$
farad	F =	$\frac{A^2 s^2}{N m}$	$\frac{A^2 s^4}{kg\,m^2}$	$\frac{A s}{V}$	$\frac{A^2 s^2}{J}$	$\frac{A s^2}{T m^2}$	$\frac{kg\,m^2}{V^2 s^2}$	$\frac{s}{\Omega}$
weber	Wb =	$\frac{N m}{A}$	$\frac{kg\,m^2}{A\,s^2}$	V s	$\frac{J}{A}$	$T m^2$	V s	$\frac{kg^{1/2}\,\Omega^{1/2}\,m}{s^{1/2}}$
tesla	T =	$\frac{N}{A m}$	$\frac{kg}{A\,s^2}$	$\frac{V s}{m^2}$	$\frac{J}{A\,m^2}$	T	$\frac{Vs}{m^2}$	$\frac{kg^{1/2}\,\Omega^{1/2}}{s^{1/2}\,m}$
henry	H =	$\frac{N m}{A^2}$	$\frac{kg\,m^2}{A^2\,s^2}$	$\frac{V s}{A}$	$\frac{J}{A^2}$	$\frac{T m^2}{A}$	$\frac{V s^4}{kg\,m^2}$	Ω s
ohm	Ω =	$\frac{N m}{A^2 s}$	$\frac{kg\,m^2}{A^2\,s^3}$	$\frac{V}{A}$	$\frac{J}{A^2 s}$	$\frac{T m^2}{A s}$	$\frac{V^2 s^3}{kg\,m^2}$	Ω

Tablica **E-5**

Ovisnost jedinica SI o drugih sedam četvorki polaznih jedinica

Jedinica SI		m s W A	m s M A	m s A H	m s A F	m s C T	m s V H	m s V F
1	2	3	4	5	6	7	8	9
kilogram	kg =	$\frac{\mathrm{W\,s^3}}{\mathrm{m^2}}$	$\mathrm{M\,s^2\,m}$	$\frac{\mathrm{A^2\,H\,s^2}}{\mathrm{m^2}}$	$\frac{\mathrm{A^2\,s^4}}{\mathrm{F\,m^2}}$	$\mathrm{C\,T\,s}$	$\frac{\mathrm{V^2\,s^4}}{\mathrm{H\,m^2}}$	$\frac{\mathrm{V^2\,F\,s^2}}{\mathrm{m^2}}$
newton	N =	$\frac{\mathrm{W\,s}}{\mathrm{m}}$	$\mathrm{M\,m^2}$	$\frac{\mathrm{A^2\,H}}{\mathrm{m}}$	$\frac{\mathrm{A^2\,s^2}}{\mathrm{F\,m}}$	$\frac{\mathrm{C\,T\,m}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{V^2\,s^2}}{\mathrm{H\,m}}$	$\frac{\mathrm{V^2\,F}}{\mathrm{m}}$
mendeljejev	M =	$\frac{\mathrm{W\,s}}{\mathrm{m^3}}$	M	$\frac{\mathrm{A^2\,H}}{\mathrm{m^3}}$	$\frac{\mathrm{A^2\,s^2}}{\mathrm{F\,m^3}}$	$\frac{\mathrm{C\,T}}{\mathrm{s\,m}}$	$\frac{\mathrm{V^2\,s^2}}{\mathrm{H\,m^3}}$	$\frac{\mathrm{V^2\,F}}{\mathrm{m^3}}$
joule	J =	W s	$\mathrm{M\,m^3}$	$\mathrm{A^2\,H}$	$\frac{\mathrm{A^2\,s^2}}{\mathrm{F}}$	$\frac{\mathrm{C\,T\,m^2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{V^2\,s^2}}{\mathrm{H}}$	$\mathrm{V^2\,F}$
watt	W =	W	$\frac{\mathrm{M\,m^3}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{A^2\,H}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{A^2\,s}}{\mathrm{F}}$	$\frac{\mathrm{C\,T\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$	$\frac{\mathrm{V^2\,s}}{\mathrm{H}}$	$\frac{\mathrm{V^2\,F}}{\mathrm{s}}$
amper	A =	A	A	A	A	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{H}}$	$\frac{\mathrm{V\,F}}{\mathrm{s}}$
coulomb	C =	A s	A s	A s	A s	C	$\frac{\mathrm{V\,s^2}}{\mathrm{H}}$	V F
volt	V =	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}}$	$\frac{\mathrm{M\,m^3}}{\mathrm{A\,s}}$	$\frac{\mathrm{A\,H}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{F}}$	$\frac{\mathrm{T\,m^2}}{\mathrm{s}}$	V	V
farad	F =	$\frac{\mathrm{A^2\,s}}{\mathrm{W}}$	$\frac{\mathrm{A^2\,s^2}}{\mathrm{M\,m^3}}$	$\frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{H}}$	F	$\frac{\mathrm{C\,s}}{\mathrm{T\,m^2}}$	$\frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{H}}$	F
weber	Wb =	$\frac{\mathrm{W\,s}}{\mathrm{A}}$	$\frac{\mathrm{M\,m^3}}{\mathrm{A}}$	A H	$\frac{\mathrm{A\,s^2}}{\mathrm{F}}$	$\mathrm{T\,m^2}$	V s	V s
tesla	T =	$\frac{\mathrm{W\,s}}{\mathrm{A\,m^2}}$	$\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{A}}$	$\frac{\mathrm{A\,H}}{\mathrm{m^2}}$	$\frac{\mathrm{A\,s^2}}{\mathrm{F\,m^2}}$	T	$\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}}$	$\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}}$
henry	H =	$\frac{\mathrm{W\,s}}{\mathrm{A^2}}$	$\frac{\mathrm{M\,m^3}}{\mathrm{A^2}}$	H	$\frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{F}}$	$\frac{\mathrm{T\,m^2\,s}}{\mathrm{C}}$	H	$\frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{F}}$
ohm	Ω =	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A^2}}$	$\frac{\mathrm{M\,m^3}}{\mathrm{A^2\,s}}$	$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{F}}$	$\frac{\mathrm{T\,m^2}}{\mathrm{C}}$	$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{F}}$

koherentne kako unutar pojedinih grana (mehanika, eletromagnetizam, nauka o toplini itd.), tako i između pojedinih grana. Izvanrednu udobnost pri računima, koju omogućuje koherentni sistem jedinica SI, možemo ilustrirati primjerom. Veličinskim jednadžbama možemo ovako opisati lanac idealne transformacije energije iz jednog oblika u nekoliko drugih:

$$W = Gh = \tfrac{1}{2}mv^2 = Fl = pV = m\Delta i = mc\Delta T =$$

$$= UIt = \tfrac{1}{2}CU^2 = \tfrac{1}{2}QU = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}\Phi I = I^2Rt.$$

Ovdje izrazi za energiju predstavljaju redom: potencijalnu energiju, kinetičku, dva oblika mehaničke energije (ili rada), zatim dva oblika toplinske energije, energiju električkog strujnog kruga, četiri izraza za energiju električkog i magnetskog polja te, naposljetku, električku energiju koja se pretvorila u toplinu. Taj bismo teoretski niz jednadžbi mogli nastaviti još dalje, ali smatramo da to nije potrebno. Želimo samo pokazati da se zbog obavezne primjene Međunarodnog sistema jedinica sve te energije mjere jednom te istom jedinicom, joule = J. Kako je joule sastavljen od ostalih jedinica Međunarodnog sistema, možemo vidjeti ako u gornju jednadžbu umjesto fizikalnih veličina redom uvrstimo pripadne jedinice SI:

$$\mathrm{J} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\mathrm{m}^3 = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\mathrm{K} =$$

$$= \mathrm{V}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{s} = \mathrm{F}\cdot\mathrm{V}^2 = \mathrm{C}\cdot\mathrm{V} = \mathrm{H}\cdot\mathrm{A}^2 = \mathrm{V}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{A} = \mathrm{A}^2\,\Omega\,\mathrm{s}.$$

Ove i još neke ovisnosti jedinice J o ostalim jedinicama SI sadrže tablice E-4 i E-5.

Primjer. Pogledajmo kako jednostavno možemo povezati dvije vrlo različite vrste energije. Na visini $h = 10$ m iznad odabrane referentne razine (vidi odsječak B.5.1) nalazi se $V = 1$ litar $= 10^{-3}$ m^3 vode. Koliki će biti napon kondenzatora kapaciteta $C = 16\ \mu\mathrm{F} = 1{,}6\cdot10^{-5}$ F (vidi tablicu A-1), ako se potencijalna energija vode pretvori u električku energiju kondenzatora s korisnošću pretvorbe $\eta = 0{,}1 = 10\%$.

Potencijalna energija iznosi $W = Gh$, gdje je G težina vode. Budući da je $G = mg$, gdje je $g = 9{,}81$ m/s^2 ubrzanje zemljine teže, izraz za W glasi $W = mgh$. Masa vode iznosi $m = \rho V$, gdje je gustoća vode $\rho = 10^3$ kg/m^3. Prema tome je

$$W = \rho g V h.$$

No samo jedan dio te energije pretvorio se u energiju W_e električkog polja kondenzatora, $W_e = \frac{1}{2}CU^2$, i to tako da je $W_e = \eta W$, pa je stoga $\frac{1}{2}CU^2 = \eta\rho g V h$. Odavde je kvadrat napona

$$U^2 = 2\eta\rho g V h\frac{1}{C}.$$

Uvrštenjem vrijednosti svih veličina na desnoj strani jednadžbe slijedi

$$U^2 = 2\cdot0{,}1\cdot10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\,9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,10^{-3}\mathrm{m}^3\cdot10\,\mathrm{m}:(1{,}6\cdot10^{-5}\,\mathrm{F})$$

$$U^2 = 1{,}227\cdot10^6\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2\,\mathrm{F}} = 1{,}227\cdot10^6\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{F}}.$$

Pri tom smo se poslužili tablicom E-4, u kojoj imamo zabilježeno da je J = kgm^2/s^2. Iz stupca 9 tablice E-5 možemo saznati da je J = V^{2}F, dakle J/F = V^2. Prema tome rezultat glasi $U^2 = 1{,}227\cdot10^6$ V^2, odakle korjenovanjem dobivamo napon kondenzatora $U = 1110$ V.

2.3. Veličine i jedinice u tehnici izmjeničnih struja

2.3.1. Temeljne veličine tehnike izmjeničnih struja. U odsječku 1.1 i tablici E-1 razmotrili smo ili zabilježili većinu fizikalnih veličina i njima pripadnih jedinica SI koje se upotrebljavaju u fizici i elektrotehnici. Pažljivom čitaocu sigurno nije promaklo da nismo ni uvrstili ni komentirali veličine i jedinice tzv. tehnike izmjeničnih struja. Budući da su jedinice nekih od tih veličina posve svojevrsne (npr. »var«, vidi odlomak 2.3.4), u ovom ćemo ih odsječku podrobnije razmotriti pošto se prethodno podsjetimo definicija odgovarajućih izmjeničnih veličina.

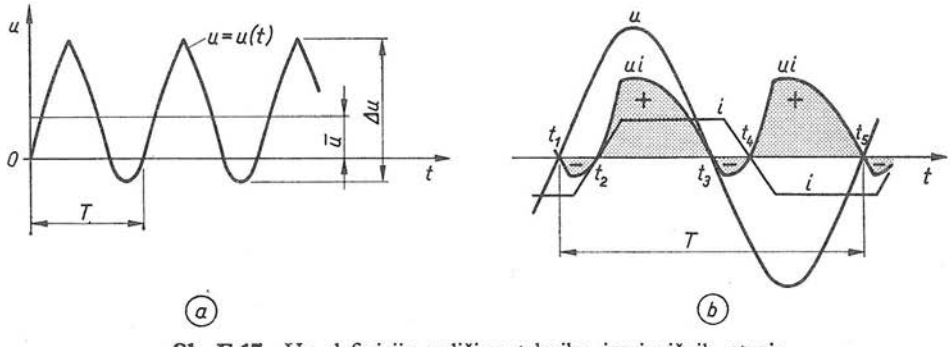
Pod nazivom *izmjenična veličina* razumijevamo takvu fizikalnu veličinu (napon, struja) čija je *trenutna vrijednost* periodička funkcija vremena t, a njena srednja vrijednost u toku perioda T jednaka je nuli (o periodu $T = 1/f$, gdje je f frekvencija, vidi odlomak B.2.1.2). Tako definirana »izmjenična veličina« specijalan je oblik tzv. *mješovite izmjenične veličine* (njem. Mischgrösse) kod koje je srednja vrijednost različita od nule (sl. E.17a). *Efektivna struja* I (»efektivna vrijednost struje«) i *efektivni napon* U (»efektivna vrijednost napona«) definirani su jednadžbama

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}; \qquad U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t}, \tag{2.3-1}$$

gdje su $i = i(t)$ i $u = u(t)$ trenutne vrijednosti jakosti struje i napona. Srednju vrijednost »mješovite izmjenične veličine« zovemo *istosmjerna vrijednost* (»istosmjerna struja«, »istosmjerni napon«, »udio istosmjerne struje« itd.). Za napon na slici E.17a u tom smislu kažemo da je njegova istosmjerna vrijednost

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,\mathrm{d}t, \quad \text{dok je} \quad \bar{i} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,\mathrm{d}t. \tag{2.3-2}$$

Simbol Δu na slici E.17a prikazuje tzv. »širinu titranja« mješovitog napona.



Sl. E.17. Uz definicije veličina tehnike izmjeničnih struja

Trenutna vrijednost udjela izmjenične struje iznosi $i - \bar{i}$, a pripadna efektivna vrijednost tog udjela je

$$I_\sim = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (i - \bar{i})^2\,\mathrm{d}t}. \tag{2.3-3}$$

Pomoću veličina $I_\sim$ i $\bar{i}$ iz jednadžbi (2.3-2,3) definira se

$$\text{valovitost} = \frac{I_\sim}{\bar{i}}.$$

Napominjemo da se u dojavnoj tehnici (DIN 1344 od godine 1959) pod »valovitošću« razumijeva omjer U_{max}/U_{min}, tj. omjer maksimalnog i minimalnog napona duž linije, a u ispravljačkoj tehnici se pod »valovitošću« razumijeva omjer $U_\sim/\bar{u}$, gdje je $U_\sim$ definiran analogno jednadžbi (2.3-3).

Izmjeničnu veličinu možemo razložiti u *sinusni* osnovni titraj (harmonik) i u niz sinusnih titraja viših frekvencija (viši harmonici). Označimo li efektivne vrijednosti osnovnog harmonika struje sa I_1, a efektivne vrijednosti viših harmonika struje sa I_2, I_3, I_4 itd., pomoću njih možemo izračunati efektivnu vrijednost izmjenične struje

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots} \tag{2.3-4}$$

Pri računanju s višim harmonicima koristan je *faktor nelinearnog izobličenja* (njem. Oberschwingungsgehalt, Klirrfaktor), koji je za struju definiran omjerom

$$k = \frac{1}{I}\sqrt{I^2 - I_1^2} = \frac{1}{I}\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots}$$

Ovdje slova predstavljaju veličine iz jednadžbe (2.3-4).

Snaga je u elektrotehnici općenito definirana umnoškom trenutnih vrijednosti napona i struje, dakle umnoškom ui. U toku perioda T ovom se umnošku predznak mijenja (sl. E.17b): u intervalu $t_2 - t_1$ umnožak ui je negativan, u intervalu $t_3 - t_2$ pozitivan itd. Tokovi snage ui su suprotni ako imaju suprotne predznake. *Prosječna* vrijednost snage ui u toku jednog perioda

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t \tag{2.3-5}$$

zove se *djelatna snaga* i označuje slovom P. Prosječna negativna snaga P_R (predznak minus na slici E.17b) zove se *povratna snaga*, a prosječna pozitivna snaga P_V zove se *polazna snaga* (njem. Vorlaufleistung). One su definirane jednadžbama

$$P_R = \frac{1}{2T}\int_0^T (|ui| - ui)\,\mathrm{d}t; \qquad P_V = P + P_R.$$

Pojmom »snage« i njegovom raznovrsnošću u tehnici izmjeničnih struja podrobnije ćemo se pozabaviti u idućem odlomku.

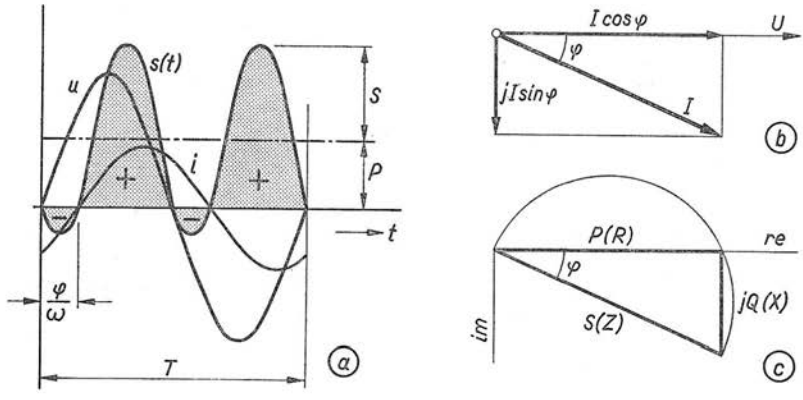
2.3.2. Prividna i djelatna snaga. Zamislimo strujni krug induktivnog karaktera (npr. namot asinhronog motora), u kojem teče struja čija vrijednost u bilo kojem trenutku t iznosi

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \varphi). \tag{2.3-6}$$

Ovdje je I_m maksimalna vrijednost struje čija je efektivna vrijednost $I(= I_m/\sqrt{2})$ definirana lijevom jednadžbom (2.3-1). Tu struju proizvodi napon čija je trenutna vrijednost

$$u = U_m \sin \omega t = \sqrt{2}\, U \sin \omega t. \tag{2.3-7}$$

I ovdje postoji odnos $U = U_m/\sqrt{2}$. Kut φ u vremenskom obliku φ/ω predstavlja tzv. zaostajanje struje i iza napona u. Napon u i struja i su *sinusne veličine*, a njihova kružna frekvencija iznosi $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Grafički prikaz ovih dviju veličina vidimo na slici E.18a.



Sl. E.18

Snaga je u svakom trenutku t definirana umnoškom ui, tj. umnoškom jednadžbi (2.3-6) i (2.3-7)

$$s = s(t) = ui = 2IU \sin(\omega t - \varphi) \sin \omega t.$$

Trigonometrijskom transformacijom $\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi$ gornju jednadžbu možemo napisati u obliku

$$s(t) = ui = 2IU[\sin^2 \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi]$$

odakle daljnjim transformacijama pomoću formula oblika $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ i $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ dobivamo

$$s(t) = ui = IU[\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]. \tag{2.3-8}$$

Ova jednadžba izvor je niza specijalnih veličina tehnike izmjeničnih struja definiranih ovako:

$$\left.\begin{aligned} &\text{prividna snaga } S = IU, \\ &\text{djelatna snaga } P = IU \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2.3-9}$$

Uvrstimo li ove simbole u jednadžbu (2.3-8), dobivamo

$$s(t) = S \cos \varphi - S \cos(2\omega t - \varphi) = P - S \cos(2\omega t - \varphi). \tag{2.3-10}$$

Odavde razabiremo da je $s(t)$ trenutna vrijednost *prividne snage* S; pri tom su kako P tako i S tzv. efektivne veličine. Grafički prikaz vremenskog toka veličina u, i, $s(t)$ vidimo na slici E.18a: Krivulja $s(t)$ omeđuje šrafiranu površinu koja predstavlja energiju jednog perioda T što se prenosi od izvora potrošaču. Dio označen sa plus (+) dospijeva do potrošača, a dio označen sa minus (−) vraća se u izvor (»povratna snaga« iz odlomka 2.3.1), ali se oba prenose dalekovodom ili kabelom. U toku svakog daljnjeg perioda T pojava se ponavlja. Napominjemo da bismo izraz $P = IU \cos \varphi$ iz (2.3-9) dobili i računanjem pomoću jednadžbe (2.3-5), koja vrijedi i za nesinusoidne periodičke veličine.

2.3.3. Jalova snaga. U Gaussovoj kompleksnoj ravnini efektivne vrijednosti napona U i struje I prikazuju se u obliku *kazaljki* (njemački Zeiger; to nisu vektori u pravom fizikalnom smislu, iako se obično tako govori) kao na slici E.18b. Struju I, koja je nacrtana pomaknuta za kut φ iza napona U, možemo dakako razložiti u dvije komponente: *djelatnu* $I\cos\varphi$, koja je u fazi s naponom, i *jalovu* $\mathrm{j}I\sin\varphi$, koja je okomita na U. Prema pravilima računanja s kompleksnim veličinama možemo pisati

$$I = I\cos\varphi + \mathrm{j}\,I\sin\varphi,$$

gdje je $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Ako gornji izraz skalarno pomnožimo s efektivnom vrijednošću napona U, dobivamo

$$IU = IU\cos\varphi + \mathrm{j}\,IU\sin\varphi. \qquad (2.3\text{-}11)$$

Usporedimo li ovu jednadžbu s definicijama (2.3-9), vidimo da je $IU = S$ prividna snaga, a $IU\cos\varphi = P$ djelatna snaga. Umnožak $IU\sin\varphi$ nazivamo

$$\text{jalova snaga } Q = IU\sin\varphi.$$

Prema tome kompleksnu jednadžbu (2.3-11) možemo napisati u obliku

$$S = P + \mathrm{j}Q. \qquad (2.3\text{-}12)$$

Grafički prikaz jednadžbe (2.3-12) vidimo na slici E.18c. Ista slika vrijedi i za veličine Z, R i X (vidi tablicu E-6), pa su stoga one stavljene u zagrade pokraj pojedinih stranica trokuta.

Jednadžbe (2.3-10, 12) na dva posve različita načina prikazuju istu pojavu. Prva jednadžba izražava snagu $s(t)$ koja se svakog trenutka prenosi od izvora prema potrošaču (slika E.18a), dok druga za svrhe praktičnog i brzog računanja govori da se od prividne snage S potrošaču dostavlja djelatna snaga P, a jalova Q beskorisno se (pa čak i štetno, jer pridonosi gubicima) njiše između izvora i potrošača.

Tablica **E-6**

Neke veličine i njihove jedinice u tehnici izmjeničnih struja

Red. br.	Naziv veličine	Simbol	Jedinica SI	Jednadžba
1	2	3	4	5
1	Djelatna snaga	P	W	$P = UI\cos\varphi$
2	Prividna snaga	S, P_s	W	$S = UI$
3	Jalova snaga	Q, P_q	W	$Q = UI\sin\varphi$
4	Faktor snage	$\cos\varphi$	1	$\cos\varphi = P/S$
5	Faktor jalovosti	$\sin\varphi$	1	$\sin\varphi = Q/S$
6	Impedancija, prividni otpor	Z	Ω	$Z = R + \mathrm{j}x$
7	Admitancija, prividna vodljivost	Y	S	$Y = I/U = 1/Z$
8	Djelatni otpor	R	Ω	$R = P/I^2$
9	Reaktancija, jalovi otpor	X	Ω	$X = Q/I^2$
10	Električka vodljivost (djelatna)	G	S	$G = P/U^2$
11	Susceptancija, jalova vodljivost	B	S	$B = Q/U^2$
12	Djelatna struja	I_d	A	$I_d = P/U$
13	Jalova struja	I_q	A	$I_q = Q/U$
14	Djelatni napon	U_d	V	$U_d = P/I$
15	Jalovi napon	U_q	V	$U_q = Q/I$

2.3.4. Jedinica jalove snage var. Niz veličina s područja izmjeničnih struja svrstali smo u tablicu E-6. Sa stanovišta mjernih jedinica osebujne su veličine djelatna snaga P, prividna snaga S i jalova snaga Q, koje su navedene pod rednim brojevima 1, 2 i 3. U stupcu 4 naznačili smo da se sve tri veličine mjere istom jedinicom: watt (W). To je i prirodno, jer znamo da se istorodne veličine mjere istom jedinicom, duljine metrima, struje amperima, pa dakle i snage wattima.

Pogledamo li u priručnike i u neke udžbenike elektrotehnike, vidjet ćemo da se tamo primjenjuju i drukčije jedinice, na primjer za:

djelatnu snagu P: W,
prividnu snagu S: VA,
jalovu snagu Q: var, Var, bW.

Ponegdje ćemo pronaći opasku da var znači »voltamper reaktivni«, odnosno na francuskom i njemačkom jeziku: volt-ampère réactif i bW = Blindwatt = jalovi watt. To se nazivom, dakako, posve razlikuje od jedinice watt pod rednim brojevima 1 i 3 u tablici E-6! Pokušat ćemo ukratko objasniti porijeklo ove razlike i dokazati da su navodi u tablici ispravni.

Upotreba oznaka var (= Var = bW) i VA potječe iz simbolike opisane u odlomku 2.3.3. Tim se oznakama, naime, želi *dvostruko naglasiti* da je veličina »jalova snaga« Q doista jalova. Analogno se za »prividnu snagu« S izražavanjem njene vrijednosti u VA želi reći da to nije djelatna, korisna snaga, već prividna. U tom duhu nalazimo ovakav primjer za neki mali stroj: $S = 100$ VA, $P = 80$ W, $Q = 60$ var (to znači da je faktor snage $\cos\varphi = 0{,}8$).

Za pravokutni trokut na slici E.18c očito vrijedi

$$S^2 = P^2 + Q^2.$$

Uvrštenjem naših vrijednosti dobivamo

$$10000\ (\text{VA})^2 = 6400\ \text{W}^2 + 3600\ (\text{var})^2.$$

Ovoj jednadžbi može biti udovoljeno jedino kad vrijedi jednakost

$$\text{VA} = \text{W} = \text{var}.$$

To znači da su jedinice VA i var (= VAr = bW) u stvari posve normalni watti, ali svojim posebnim naznakama upućuju na to da u prvom slučaju njima mjerimo prividnu snagu S, a u drugom jalovu snagu Q.

Primjena VA, var, bW, VAr u naznačenom smislu nije pogrešna, ali ona zamagljuje osnovnu fizikalnu sliku pojava kod izmjeničnih struja (slika E.18a). Zato je sigurno najbolje da se govori i piše ovako (za naš primjer):

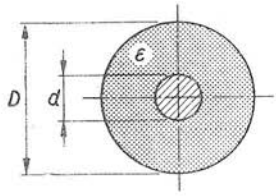
djelatna snaga stroja je $P = 80$ W,
jalova snaga stroja je $Q = 60$ W,
prividna snaga stroja je $S = 100$ W.

Pri tom, naravno, ne smijemo zaboraviti da to nisu snage u bilo kojem trenutku t, već da su to *prosjeci* u toku trajanja T jednog perioda izmjenične struje.

2.4. Primjeri upotrebe jedinica SI u elektromagnetizmu

U ovom odsječku izradit ćemo, radi uvježbavanja računanja s jedinicama Međunarodnog sistema jedinica u elektrotehnici, šest računskih primjera kakve moraju npr. rješavati studenti elektrotehnike ili fizike na početku svog studija. Pri tom nećemo dokazivati da je npr. $(\mathrm{J/kg})^{1/2} = \mathrm{m/s}$, $\mathrm{CT/kg} = 1/\mathrm{s} = \mathrm{Hz}$, $\mathrm{s^2/F} = \mathrm{H}$ itd., jer su ti odnosi eksplicitno ili implicitno sadržani u odsječku 2.2 i u tablicama E-4 i E-5. Konačno je jedna od svrha ovog odsječka da čitaoca uputi i na to da sâm preračunava odnose među jedinicama na principu $1 \times 1 = 1$ (koherencija).

2.4.1. Izolacijski otpor kabela. Mjerenjem je ustanovljeno da jednožilni kabel (sl. E.19) duljine $l = 1{,}2$ km ima izolacijski otpor $R = 2{,}7$ MΩ. Koliki je specifični otpor ρ izolacije, ako je vanjski promjer izolacije $D = 7{,}8$ cm, a promjer vodiča $d = 2{,}6$ cm.



Sl. E.19. Presjek jednožilnog kabela

Rješenje. Električki otpor cilindričkog šupljeg tijela računa se prema izrazu

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{D}{d}, \quad \text{tj.} \quad \rho = \frac{2\pi R l}{\ln D/d}. \qquad (2.4\text{-}1)$$

Izračunajmo najprije $\ln D/d = \ln 7{,}8/2{,}6 = \ln 3 = 1{,}1$ (ili izvadimo iz tablica nekog priručnika). Uvrštenjem podataka dobivamo

$$\rho = \frac{2\pi \cdot 2{,}7\ \mathrm{M\Omega} \cdot 1{,}2\ \mathrm{km}}{1{,}1} = 1{,}85 \cdot 10^{10}\ \Omega\mathrm{m}.$$

U vezi s jednadžbom (2.4-1) upozoravamo da između otpora R, kapaciteta C, specifičnog otpora ρ i dielektričnosti ϵ postoji veza

$$RC = \rho\epsilon,$$

koja može biti od koristi ako npr. znamo izraz za R, a ne znamo za C. Na primjer, kapacitet C kabela sa slike E.19 (zamišljamo da je vodič jedna elektroda, a metalni plašt na promjeru D druga) računamo pomoću jednadžbe

$$C = 2\pi\epsilon l \frac{1}{\ln D/d},$$

koja proizlazi iz izraza $RC = \rho\epsilon$, ako u nj uvrstimo lijevu jednadžbu (2.4-1).

2.4.2. Sila na ulje u kondenzatoru. Pločasti zračni kondenzator djelomično je uronjen u ulje relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 5$ (sl. E.20). Metalne ploče razmaknute su za $d = 4$ cm. Izračunajmo za koliko će se podići razina ulja unutar kondenzatora, kad se na njegove ploče dovede napon $U = 90$ kV. Pri računanju možemo pretpostaviti da je volumen ulja u posudi mnogo veći od prostora među pločama, te zanemariti adheziona djelovanja između ulja i elektroda, viskoznost, vodljivost itd., dakle zanemariti sve osim djelovanja zemljine teže.

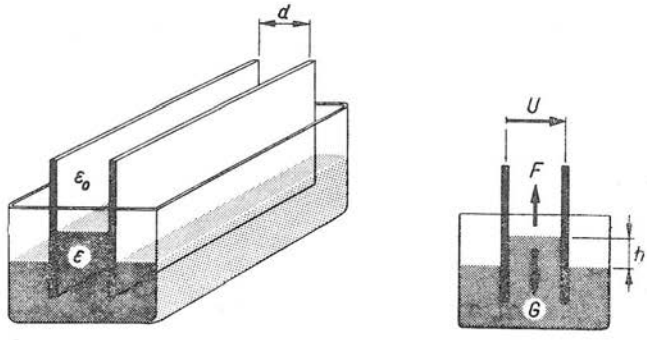
Rješenje. Budući da električko polje između ploča djeluje paralelno s dodirnom plohom ulje/zrak, polje će podizati ulje (uvlačiti ga s tendencijom da ispuni kondenzator) silom na jedinicu površine granične plohe ulje/zrak $f = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0) E^2$, gdje je $E = U/d$ jakost električkog polja, ϵ dielektričnost ulja, a $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m

električka konstanta. Ukupna sila koja diže ulje $F = fA$, gdje je A površina granične plohe, iznosi

$$F = \tfrac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0) E^2 A.$$

Sili F suprotstavlja se težina uzdignutog ulja $G = g\rho V$, gdje je $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ ubrzanje zemljine teže, $\rho = 940\ \mathrm{kg/m^3}$ gustoća ulja, a $V = Ah$ obujam uzdignutog ulja, dakle $G = g\rho Ah$. Budući da su sile F i G u ravnoteži, to iz usporedbe izraza za F i G dobivamo jednadžbu za izračunavanje izdignuća

$$h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) E^2}{2 g \rho}.$$



Sl. E.20. Pločasti zračni kondenzator djelomično uronjen u ulje

U našem je slučaju jakost električkog polja $E = U/d = 90\,\mathrm{kV}/4\,\mathrm{cm} = 22{,}5\ \mathrm{kV/cm} = 2{,}25 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}$, a $E^2 = 5{,}06 \cdot 10^{12}\ \mathrm{V^2/m^2}$. Uvrštenjem ove i ostalih vrijednosti u izraz za h dobivamo

$$h = \frac{(5-1) \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot 5{,}06 \cdot 10^{12} \dfrac{\mathrm{V^2}}{\mathrm{m^2}}}{2 \cdot 9{,}81 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 940 \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}} = 9{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Ulje se, dakle, podiglo za 9,7 mm. (U gornjem računu uzeli smo, među ostalim, u obzir ove odnose među jedinicama: $\mathrm{F} = \mathrm{C/V} = \mathrm{As/V}$, $\mathrm{kg} = \mathrm{VAs^3/m^2}$; vidi tablicu E-4.)

2.4.3. Izboj kondenzatorske baterije. U cilindričkoj posudi duljine $l = 0{,}9$ m i promjera $d = 40$ cm izbija se kondenzatorska baterija radi dobivanja tzv. goruće plazme. Početni tlak plina u posudi iznosi $p = 0{,}01$ mm Hg. Koliki treba da bude kapacitet kondenzatorske baterije C, induktivitet uvodâ L i srednja vrijednost jakosti struje I impulsa da bi čestice plazme postigle temperaturu $T = 5 \cdot 10^6$ K, ako je trajanje impulsa $\tau = 10^{-5}$ sekunde? Kondenzatori se nabijaju do napona $U = 30$ kV.

Rješenje. Pri rješavanju zadatka pretpostavit ćemo da je ionizacija plina u posudi potpuna (100%) i da je korisnost djelovanja ovog uređaja $\eta = 1$, tj. da se sva energija nagomilana u kondenzatorima predaje česticama plazme. Iako je ova druga pretpostavka netačna, pomoću nje možemo ocijeniti minimalne neophodne vrijednosti C i I te maksimalnu vrijednost L.

Najprije treba da izračunamo koliko se čestica N nalazi u posudi. Avogadrov zakon kaže da jedan kilomol bilo kojeg idealnog plina sadrži $6{,}023 \cdot 10^{26}$ čestica, a pri temperaturi 0 °C i tlaku $p_0 = 1$ standardna atmosfera (= 760 mm Hg) zauzima volumen 22,41 $\mathrm{m^3}$ (vidi odlomak D.1.5.3). To znači da se u jedinici volumena nalazi $N_0 = 6{,}023 \cdot 10^{26}/22{,}41\ \mathrm{m^3} = 2{,}69 \cdot 10^{25}/\mathrm{m^3}$ čestica. Kako u našoj cilindričkoj posudi

ne vlada tlak p_0, već $p = 0{,}01$ mm Hg, stvarni broj čestica u jedinici volumena pri temperaturi 0 °C iznosit će

$$N_0' = N_0 \frac{p}{p_0} = 2{,}69 \cdot 10^{25} \frac{1}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{0{,}01}{760} = 3{,}54 \cdot 10^{20} \frac{1}{\mathrm{m}^3}.$$

Volumen posude i ukupan broj čestica u njoj iznose

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 l = \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}4\ \mathrm{m})^2 \cdot 0{,}9\ \mathrm{m} = 0{,}113\ \mathrm{m}^3,$$

$$N = N_0' V = 3{,}54 \cdot 10^{20} \frac{1}{\mathrm{m}^3} \cdot 0{,}113\ \mathrm{m}^3 = 4 \cdot 10^{19}.$$

Prilikom potpune ionizacije plina broj čestica se udvostruči. Stoga energija svih čestica pri $T = 5 \cdot 10^6$ K mora iznositi (vidi odsječak D.2.2) $W = 3\,NkT$, gdje je $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta. Prema tome je

$$W = 3 \cdot 4 \cdot 10^{19} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 5 \cdot 10^6\ \mathrm{K} = 8{,}28\ \mathrm{kJ}.$$

Budući da se prema pretpostavci sva energija kondenzatora predaje česticama plazme, to je $\frac{1}{2} C U^2 = W$, odakle slijedi

$$C = \frac{2W}{U^2} = \frac{2 \cdot 8{,}28\ \mathrm{kJ}}{9 \cdot 10^8\ \mathrm{V}^2} = 1{,}84 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F} = 18{,}4\ \mu\mathrm{F}.$$

Srednja vrijednost struje približno iznosi

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{CU}{\tau} = \frac{1{,}84 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F} \cdot 3 \cdot 10^4\ \mathrm{V}}{10^{-5}\ \mathrm{s}} = 5{,}52 \cdot 10^4\ \mathrm{A} = 55{,}2\ \mathrm{kA}.$$

Budući da je trajanje impulsa jednako poluperiodu $T/2$ titrajnog kruga sastavljenog od L i C, induktivitet ćemo približno ocijeniti pomoću izraza

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\tau,$$

$$L = \frac{\tau^2}{\pi^2 C} = \frac{10^{-10}\ \mathrm{s}^2}{9{,}9 \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F}} = 5{,}44 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H} = 0{,}54\ \mu\mathrm{H}.$$

2.4.4. Polumjer elektromagneta ciklotrona. Indukcija magnetskog polja u akceleratorskoj komori ciklotrona iznosi $B = 1{,}8$ T. Izračunajmo (približno) kolika mora biti frekvencija f visokofrekventnog generatora za napajanje ciklotrona, ako se ubrzavaju ioni deuterija. Koliki treba da bude polumjer R komore i polnih nastavaka elektromagneta, ako maksimalna energija ubrzanih deuterona iznosi $W_\mathrm{k} = 12$ MeV?

Rješenje. Procijenimo najprije u kolikoj mjeri valja uzeti u obzir relativističku promjenu mase ubrzavane čestice. Iz osnovnih jednadžbi specijalne teorije relativnosti slijedi (vidi odlomak A.9.1.3) da konačna energija čestice iznosi $W = W_0 + W_\mathrm{k}$, gdje je $W_0 = m_0 c^2$ tzv. energija mirovanja, a W_k kinetička energija. Iz ovih jednadžbi dobivamo

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{W_\mathrm{k}}{W_0} = 1 + \frac{12 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} = 1 + 0{,}0064.$$

Ovdje smo uzeli u obzir da je $\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$ (tablica **34** u prilogu knjige), da je masa čestice jednaka dvostrukoj masi protona (tablica **2**), a da brzina svjetla iznosi približno $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$. Prema tome promjena mase iznosit će oko 0,6%, pa je u daljnjem računu možemo zanemariti.

Frekvencija f potrebnog visokofrekventnog polja ciklotrona proizlazi iz temeljne jednadžbe $\omega = eB/m_0$, gdje je $\omega = 2\pi f$ kružna frekvencija polja i rotancija (kutna brzina; vidi odlomak B.2.2.3) čestice. Budući da je brzina čestice $v = \omega R$, navedenu jednadžbu možemo napisati i u obliku $ReB = vm_0$. Iz prve jednadžbe dobivamo potrebnu frekvenciju polja

$$f = \frac{eB}{2\pi m_0} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1{,}8\ \mathrm{T}}{2\pi \cdot 2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 1{,}37 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz} = 13{,}7\ \mathrm{MHz}.$$

Polumjer kruga kojim se giba čestica u magnetskom polju odredit ćemo pomoću izraza $ReB = m_0 v$, u kojem brzinu v možemo nadomjestiti kinetičkom energijom $W_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m_0 v^2$. Ipak računamo postepeno:

$$v = \sqrt{2W_\mathrm{k}/m_0} = (12 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} : 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})^{1/2} = 3{,}4 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s},$$

$$R = \frac{m_0 v}{eB} = \frac{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot 3{,}4 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1{,}8\ \mathrm{T}} = 0{,}395\ \mathrm{m},$$

tj. polumjer ciklotronske komore i polova elektromagneta mora iznositi najmanje 39,5 centimetara.

2.4.5. Induktivitet toroida. Izračunajmo induktivitet L toroida u ovisnosti o magnetskoj indukciji B, ako je njegova jezgra izrađena od kvalitetnog lima (karakteristika $B-H$ prikazana je na slici E.21a), a faktor punjenja željeza iznosi $f_ž = 0{,}9$. Ostali podaci su: $D_1 = 70\ \mathrm{mm}$, $D_2 = 30\ \mathrm{mm}$ (slika E.21b), broj zavoja $N = 400$.

Rješenje. Induktivitet je definiran jednadžbom $L = N\Phi/I$, gdje je magnetski tok $\Phi = BA$, dakle $L = NBA/I$. Budući da želimo znati L u ovisnosti o B, moramo eliminirati struju I, koja je u ovoj vezi s jakošću magnetskog polja H u toroidu: $H = NI/l$. Odavde je $I = Hl/N$, pa konačno slijedi

$$L = \frac{N^2 A}{l} \frac{B}{H} = K \frac{B}{H} = K \cdot \mu,$$

gdje je konstanta $K = N^2 A/l$, a $\mu = B/H$ permeabilnost željeza (vidi odlomak 1.3.2).

Izračunajmo najprije konstantu K za razmatrani toroid. Presjek A prema slici E.21b i navedenim podacima iznosi

$$A = a^2 f_ž = (D_1 - D_2)^2 f_ž = 4^2\ \mathrm{cm}^2 \cdot 0{,}9 = 14{,}4\ \mathrm{cm}^2.$$

Srednja duljina magnetskog polja je

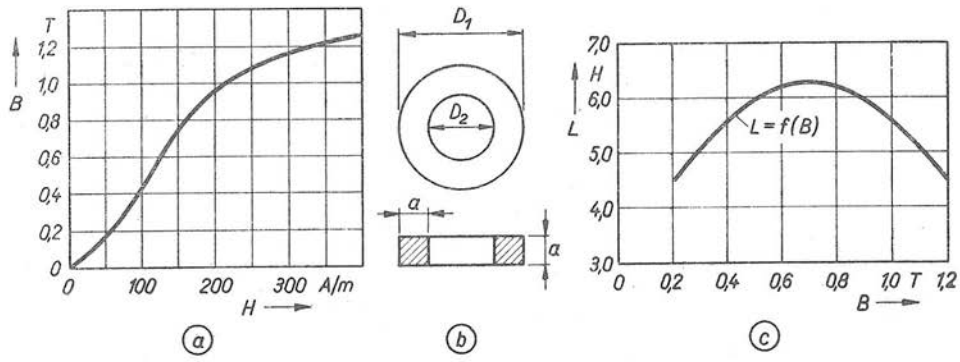
$$l = \pi \frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{\pi}{2}(7 + 5)\ \mathrm{cm} = 18{,}85\ \mathrm{cm}.$$

Prema tome je vrijednost konstante

$$K = \frac{N^2 A}{l} = \frac{400^2 \cdot 14{,}4\ \mathrm{cm}^2}{18{,}85\ \mathrm{cm}} = 1{,}22 \cdot 10^5\ \mathrm{cm} = 1{,}22 \cdot 10^3\ \mathrm{m}.$$

U jednadžbi $L = KB/H$ ne možemo L izraziti samo u ovisnosti o B, već istodobno i o pripadnoj jakosti magnetskog polja H. To znači da iz krivulje na slici E.21a moramo očitati *parove* vrijednosti veličina B i H, a zatim izračunati njihov omjer $\mu = B/H$. Na primjer, za $B = 0{,}6$ T očitavamo pripadni $H = 120$ A/m, odakle je

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0{,}6\ \mathrm{T}}{120\ \mathrm{A/m}} = 5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}} = 5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}.$$



Sl. E.21. Uz primjere u odlomcima 2.4.5 i 2.4.6

Induktivitet za $B = 0{,}6$ T iznosi

$$L = K\mu = 1{,}22 \cdot 10^3\ \mathrm{m} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H/m} = 6{,}1\ \mathrm{H}.$$

B(T)	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$H\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$	55	85	120	160	220	320
$\mu\left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right)$	$3{,}64 \cdot 10^{-3}$	$4{,}7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$4{,}55 \cdot 10^{-3}$	$3{,}75 \cdot 10^{-3}$
L(H)	4,44	5,73	6,10	6,10	5,55	4,67

Vrijednosti induktiviteta za nekoliko parova $B-H$ navedene su u tablici. Dobiveni podaci prikazani su u obliku krivulje na slici E.21c.

2.4.6. Regulacija napona za rasvjetu. Za kontinuiranu širokopojasnu regulaciju napona kazališne rasvjete ponekad se upotrebljava prigušnica sa željeznom jezgrom uključenom serijski sa skupinom svjetiljki (sl. E.22a). Prigušnica ima *pomičan* jaram pravokutnog oblika izrađen od transformatorskog lima. Masa jezgre iznosi $m = 10$ kg, srednja duljina magnetskog polja u željezu jezgre $l = 1\,000$ mm, a gustoća željeza $\rho = 7{,}8$ kg/dm^3. Djelatni otpor namota prigušnice je $R = 0{,}4\ \Omega$, a namot se sastoji od $N = 1\,000$ zavoja bakrene žice. Napon mreže je $U = 220$ V, a frekvencija $f = 50$ Hz.

Izračunajmo koliki mora biti zračni raspor d da bi napon na svjetiljkama iznosio $U_s = 120$ V uz struju $I = 10$ A, ako se pretpostavi da su gubici snage u

željezu jezgre i u bakru namota međusobno jednaki (krivulja magnetiziranja jezgre prigušnice prikazana je na slici E.21a).

Rješenje. Pri nazivnom naponu na svjetiljkama gubici snage u bakru iznose $\Delta P_b = I^2R = (10\,\text{A})^2 \cdot 0{,}4\,\Omega = 40\,\text{W}$. Isto toliko iznose i gubici u željezu $\Delta P_ž = 40\,\text{W}$. Ukupna snaga troši se na svjetiljke ($P_s = U_s I$) i na pokrivanje gubitaka u prigušnici

$$P = P_s + \Delta P_b + \Delta P_ž = 120\,\text{V} \cdot 10\,\text{A} + 40\,\text{W} + 40\,\text{W} = 1280\,\text{W}.$$

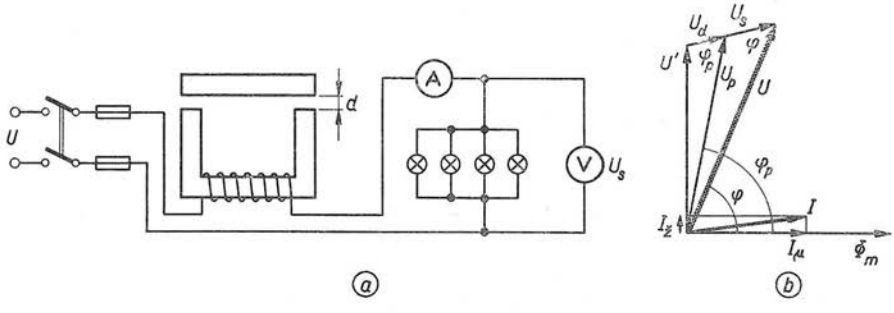
Prividna snaga je $P = UI\cos\varphi$, odakle je

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{1280\,\text{W}}{220\,\text{V} \cdot 10\,\text{A}} = 0{,}583.$$

Vektorski dijagram (dijagram kazaljki) prikazan je na slici E.22b. Iz njega proizlazi naputak za računanje napona na prigušnici

$$U_p^2 = U^2 + U_s^2 - 2\,U\,U_s \cos\varphi$$

$$U_p = \sqrt{220^2\,\text{V}^2 + 120^2\,\text{V}^2 - 2 \cdot 220\,\text{V} \cdot 120\,\text{V} \cdot 0{,}583} = 179\,\text{V}.$$



Sl. E.22. Shema regulacije kazališne rasvjete i pripadni vektorski dijagram

Faktor snage prigušnice $\cos\varphi_p$ možemo odrediti iz jednadžbe $P_p = \Delta P_b + \Delta P_ž = U_p\,I\cos\varphi_p$, odakle slijedi

$$\cos\varphi_p = \frac{P_p}{U_p\,I} = \frac{80\,\text{W}}{179\,\text{V} \cdot 10\,\text{A}} = 0{,}0447.$$

Komponenta napona U', koja drži ravnotežu induciranom naponu prigušnice, prema dijagramu na slici E.22b iznosi

$$U'^2 = U_p^2 + U_d^2 - 2\,U_p\,U_d \cos\varphi_p$$

$$U' = \sqrt{179^2\,\text{V}^2 + 4^2\,\text{V}^2 - 2 \cdot 179\,\text{V} \cdot 4\,\text{V} \cdot 0{,}0447} = 179\,\text{V},$$

gdje je, dakako, $U_d = IR = 10\,\text{A} \cdot 0{,}4\,\Omega = 4\,\text{V}$. Iz jednadžbe $U' = E = 4{,}44\,Nf\,\Phi_m$ izračunat ćemo maksimalnu vrijednost magnetskog toka

$$\Phi_m = \frac{U'}{4{,}44\,Nf} = \frac{179\,\text{V}}{4{,}44 \cdot 1000 \cdot 50\,\text{Hz}} = 8{,}07 \cdot 10^{-4}\,\text{Wb}.$$

Nađimo još presjek jezgre A. Iz jednadžbe za masu jezgre $m = \rho A l$ slijedi

$$A = \frac{m}{l\rho} = \frac{10\,\text{kg}}{10\,\text{dm} \cdot 7{,}8\,\text{kg/dm}^3} = 12{,}8\,\text{cm}^2,$$

pa je, dakle, maksimalna indukcija u jezgri

$$B_\text{m} = \frac{\Phi_\text{m}}{A} = \frac{8{,}07 \cdot 10^{-4}\,\text{Wb}}{12{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 0{,}63\,\text{T}.$$

Iz krivulje magnetiziranja na slici E.21a nalazimo maksimalnu vrijednost jakosti magnetskog polja $H_\text{m} = 125\,\text{A/m}$.

Komponentu struje $I_ž$ uzrokovanu gubicima u željezu i komponentu struje magnetiziranja I_μ određujemo ovako

$$I_ž = \Delta P_ž / U' = 40\,\text{W}/179\,\text{V} = 0{,}224\,\text{A},$$

$$I_\mu = \sqrt{I^2 - I_ž^2} = \sqrt{10^2\,\text{A}^2 - 0{,}224^2\,\text{A}^2} = 10\,\text{A}.$$

Iz zakona magnetske uzbude $I_{\mu\text{m}} N = H_\text{m} l + 2 d B_{\text{m}0}/\mu_0$ možemo izračunati jakost magnetskog polja u zračnom rasporu $H_{\text{m}0}$. Budući da je $I_{\mu\text{m}} = \sqrt{2}\, I_\mu = 1{,}41 \cdot 10\,\text{A} = 14{,}1\,\text{A}$, $N = 1000$, $H_\text{m} = 125\,\text{A/m}$, $l = 1\,\text{m}$, $H_{\text{m}0} = B_{\text{m}0}/\mu_0 = 0{,}63\,\text{T} : (4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H/m}) = 504 \cdot 10^3\,\text{A/m}$, slijedi tražena vrijednost zračnog raspora

$$d = \frac{I_{\mu\text{m}} N - H_\text{m} l}{2 H_{\text{m}0}} = \frac{14{,}1\,\text{A} \cdot 1000 - 125\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 1\,\text{m}}{2 \cdot 504 \cdot 10^3\,\text{A/m}} = 0{,}014\,\text{m}.$$

Potreban zračni raspor, dakle, iznosi $d = 14\,\text{mm}$.

2.5. Neke posljedice uvođenja Međunarodnog sistema jedinica u područje elektromagnetizma

2.5.1. Veličinske jednadžbe. Definiranjem ampera pomoću pramjerila koje djeluje na načelu mjerenja sile između vodičâ kroz koje teče električna struja (odlomak 2.1.4), uveden je godine 1948. Međunarodni sistem jedinica (SI) u *elektromagnetizam*. U to vrijeme taj su sistem jedinica zvali »MKSA sistem« (naziv dolazi od imena nezavisnih jedinica metar, kilogram, sekunda i amper), jer se odnosio samo na područje elektromagnetizma, ili »Giorgijev sistem jedinica« (vidi odlomak 5.2.1). Na jedanaestom zasjedanju Generalne konferencije za mjere i utege godine 1960. skup koherentnih jedinica m, s, kg, N, J, W, A, V, Ω itd. dobio je ime »Međunarodni sistem jedinica« (Système International d'Unités, SI) i preporučen je za *sve* grane znanosti, tehnike i privrede. Odmah zatim njegovu primjenu propisale su zakonodavnim aktima mnoge države (vidi odsječak B.7.1).

Budući da su jedinice SI koherentne (npr. $\text{J} = \text{Nm} = \text{VAs} = \text{ATm}^2 = \text{V}^2\text{F}$ itd.; vidi tablice E-4,5 u odlomku 2.2.6), brojčane jednadžbe dobivaju isti oblik kao i veličinske jednadžbe. Drugim riječima: primjenom SI brojčane jednadžbe postaju suvišne, preostaju veličinske, a njima se računa nadasve pouzdano (vidi odsječke A.1.4,5 i poglavlje A.2, poglavlje B.10 i odsječak D.6.3). Posljedice toga možemo lako zamisliti, jer konkretni proračuni nekog procesa ili elementa ne mogu se stisnuti samo u okvir jedne od grana znanosti ili tehnike. Proračun električkog stroja,

na primjer, nije samo stvar elektromagnetizma, već i mehanike, nauke o čvrstoći, termodinamike i nauke o strujanju rashladnog sredstva. Prije međunarodnog prihvaćanja SI za ove grane, konstruktor takvog stroja imao je znatne poteškoće kad je nakon posve električkog proračuna morao prijeći na mehanički, gdje su mu stajale na raspolaganju brojčane jednadžbe, prilagođene, na primjer, jedinicama Tehničkog sistema (odsječak B.8.1). Pri tom je često morao upotrebljavati preračunske koeficijente između kW i kpm/s i niz drugih (odlomak B.10.1.4). Posao mu se još otežao kad je vršio toplinsku kontrolu, pri čemu je morao najprije preračunati npr. kW u kcal/h ili kcal/s, a tek onda nastaviti u specifičnom duhu brojčanih jednadžbi termodinamike (vidi npr. odsječak D.6.3).

Sav taj suvišan i zamoran posao, nakon kojega čovjek nikada nije posve siguran nije li negdje pogriješio, otpada ako se primjenjuju jedinice SI. Primjer jednadžbe idealne transformacije energije $W = Gh = \frac{1}{2}mv^2 = \ldots = I^2Rt$ (vidi odlomak 2.2.6), koju bismo mogli nastaviti pisati dalje u hidrodinamiku, zračenje i kemiju, mogao nam je dočarati izvanredno zbližavajuću ulogu Međunarodnog sistema jedinica. Dodatna korist postiže se višekratnicima jedinica, o kojima smo raspravljali u odsječcima A.2.3 i B.7.6 (vidi i odlomak B.7.1.4).

2.5.2. Primjena mase umjesto težine. Prije ozakonjenja Međunarodnog sistema jedinica (SI) elektrotehničari su upotrebljavali sistem jedinica s nezavisnim jedinicama m, s, V_0, A_0 ili sistem m, cm, V_0, A_0 (indeks $_0$ označuje jedinice tzv. Tehničkog sistema; vidi odsječak 5.3), ali samo u okviru elektrotehnike u užem smislu. Kad je trebalo proračunati nešto »mehaničko«, odmah su segnuli za kilopondom, tehničkom atmosferom itd. Tjelesa su uglavnom karakterizirali *težinom*, a samo u manjoj mjeri *masom*.

U odsječku B.7.3 opsežno smo raspravljali o upotrebi fizikalne veličine »masa« umjesto veličine »težina« (vidi i odlomak D.4.2.1), te konstatirali da je masa prikladniji pojam. Zatim smo u odsječku B.9.2 podrobno razmotrili kako se od tzv. težinskih veličina prelazi na tzv. masene. Ustanovili smo da je i s obzirom na postojeće tabelarne i dijagramske brojčane podatke praktičnije upotrebljavati veličinu masu i njenu jedinicu kilogram negoli uvoditi jedinicu *sile* SI newton na sva ona mjesta gdje se prije toga upotrebljavala jedinica sile (težine) kilopond. Elektrotehničari su, dakle, u tom pogledu doživjeli iste promjene kao i strojari, pa stoga možemo samo uputiti na čitanje citiranih odsječaka. Prema tome ih najpraktičnija primjena Međunarodnog sistema jedinica upućuje na to da kažu kako *masa* nekog čovjeka iznosi 75 kilograma, a *gustoća* vode 1 000 kg/m³, a ne da *specifična težina* vode ima vrijednost 9 807 N/m³!

Kod sila i tlakova ne može se izbjeći radikalna izmjena. S vremenom će newton, mendeljejev (vidi odlomak B.4.3.2) ili neka druga jedinica SI s prefiksom (tablica A-1) do kraja istisnuti kilopond i obje atmosfere. Podrobnije se o tom prijelaznom razdoblju govori u odsječcima B.9.4 i 9.5.

Katkada se čuje »da je Međunarodni sistem jedinica već gotovo deset godina službeno na snazi, a da ga tek sada polako uvode u škole i visokostručne publikacije, premda postoji i zakon koji ga favorizira«. Time se želi reći da prihvaćanje tog sistema ide nekako *sporo*.

Takva je izjava samo relativne vrijednosti. Metrološke promjene nisu financijske uredbe koje se strogošću zakona primjenjuju od dana potpisa zakonodavca. Iza jedinica i njihovih sistema stoje milijuni ljudi koji su navikli čak i misliti u određenim jedinicama, i ti ljudi moraju najprije u sebi slomiti stare navike da bi mogli prihvatiti nove. Stoga promjena sistema jedinica nije dekretirana nova pri-

mjena uredbe, već dubok intimni prijelom u samim ljudima, a takvi procesi nisu podložni mjerenju malim vremenskim jedinicama! Pročitajmo samo dva poglavlja o povijesti mjernih jedinica (A.6 i E.5), pa ćemo vidjeti koliko su dugo u prošlosti trajale metrološke promjene. Stoga možemo smatrati da je proces uvođenja SI zapravo *izvanredno brz*. Tome nije toliko pridonijelo to što su ljudi danas pametniji nego prije, već znatno pojačana komunikativnost među pojedincima i državama, brzo prenošenje iskustava putem literature i sve veća međusobna povezanost raznih grana tehnike i znanosti, odnosno iščezavanje nekada toliko razvikane razlike između znanosti i tehnike. Pretjerane razlike danas postoje samo tamo gdje se nauka njeguje kao akademska fraza. Danas su posve rijetki fizičari kao oni koji su prije 20 godina govorili da SI (tj. MKSA) »tehnizira« fiziku, a i tehničari koji su istodobno uzvikivali da taj sistem znači »fizikalizaciju« tehnike.

Takva prorijeđena mišljenja pokazuju neshvaćanje biti promjene, a s druge strane uskoću horizonata; ne vide dalekosežnost Međunarodnog sistema: *sve* jednadžbe, bilo u fizici, bilo u tehnici, postaju primjenom tog sistema međusobno *jednake*; *svi* mjere ili izražavaju rezultate mjerenja i računanja *istim* jedinicama u *svim* granama nauke i tehnike, nestaje — barem u tom pogledu — *umjetna* ograda između tzv. čiste nauke i primijenjenih znanosti. Tijekom drugog svjetskog rata pokazalo se kako te razlike nema kad su sve snage angažirane za isti cilj. To pokazuje i upravo fantastičan razvoj tehnike i znanosti nakon posljednjeg rata i postojanje izvanrednih laboratorija velikih tvornica iz kojih gotovo svaki dan dolaze »najznanstveniji« rezultati. Umjetno stvorene ograde između znanosti i tehnike srušene su pod zahtjevom suvremena života, a postoje još samo u onim konzervativnim akademskim tradicijama koje nemaju veze sa stvarnim životom, a vrijeme ih je ostavilo daleko iza sebe.

2.5.3. Prebaždarenje instrumenata i otporničkih normala. Drugi odraz uvođenja SI u elektrotehniku bio je *mjernotehničke* prirode. Usporedbena mjerenja u Međunarodnom uredu za mjere i utege (BIPM) i u nacionalnim metrološkim zavodima (vidi tablicu E-9 u odlomku 3.1.4 te odsječke 3.5 i 3.6) pokazala su da između starijih »tehničkih« (internacionalnih, materijalnih; indeks $_0$, vidi odsječak 5.3) i SI (apsolutnih) jedinica postoje odnosi čije su srednje vrijednosti (odlomak 5.2.5)

$$p = \frac{\Omega_0}{\Omega} = 1{,}00049\,, \qquad q = \frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}} = 0{,}99985,$$

tj. stari ohm Ω_0 *veći* je od današnjeg ohma SI (Ω), dok je »srebrni amper« A_0 (vidi odlomak 5.3.1) *manji* od ampera SI (A) iz odlomka 2.1.4. Budući da je $\mathrm{A}_0 = q\mathrm{A}$ i $\Omega_0 = p\Omega$, iz relacije $\mathrm{V}_0 = \Omega_0 \mathrm{A}_0$ dobivamo vezu između starog volta V_0 i volta SI (V)

$$\mathrm{V}_0 = p\Omega q\mathrm{A} = pq\mathrm{V},$$

jer je $\mathrm{V} = \Omega\mathrm{A}$. Analognim postupkom zbog $\mathrm{W}_0 = \mathrm{A}_0\mathrm{V}_0$ i $\mathrm{W} = \mathrm{AV}$ dobivamo i sve druge odnose među jedinicama Tehničkog sistema (odlomak 5.3.3) i jedinicama Međunarodnog sistema (SI):

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_0 &= q\mathrm{A} & \qquad \mathrm{J}_0 &= pq^2\mathrm{J} \\ \Omega_0 &= p\Omega & \qquad \mathrm{C}_0 &= \mathrm{C}/q \\ \mathrm{V}_0 &= pq\mathrm{V} & \qquad \mathrm{F}_0 &= p\mathrm{F} \\ \mathrm{W}_0 &= pq^2\mathrm{W} & \qquad \mathrm{H}_0 &= \mathrm{H}/p, \end{aligned}$$

Tablica **E-7**

Preračunavanje vrijednosti otpora sa jedinice Ω_0 na jedinicu Ω(SI)

Ω_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,00049	2,00098	3,00147	4,00196	5,00245	6,00294	7,00343	8,00392	9,00441
10	10,0049	11,0054	12,0059	13,0064	14,0069	15,0074	16,0078	17,0083	18,0088	19,0093
20	20,0098	21,0103	22,0108	23,0113	24,0118	25,0123	26,0127	27,0132	28,0137	29,0142
30	30,0147	31,0152	32,0157	33,0162	34,0167	35,0172	36,0176	37,0181	38,0186	39,0191
40	40,0196	41,0201	42,0206	43,0211	44,0216	45,0221	46,0225	47,0230	48,0235	49,0240
50	50,0245	51,025	52,0255	53,026	54,0265	55,027	56,0274	57,0279	58,0284	59,0289
60	60,0294	61,0299	62,0304	63,0309	64,0314	65,0319	66,0323	67,0328	68,0333	69,0338
70	70,0343	71,0348	72,0353	73,0358	74,0363	75,0368	76,0372	77,0377	78,0382	79,0387
80	80,0392	81,0397	82,0402	83,0407	84,0412	85,0417	86,0421	87,0426	88,0431	89,0436
90	90,0441	91,0446	92,0451	93,0456	94,0461	95,0466	96,0470	97,0475	98,0480	99,0485
100	100,0490	101,0495	102,05	103,0505	104,051	105,0514	106,0519	107,0524	108,0529	109,0534
110	110,0539	111,0544	112,0549	113,0554	114,0559	115,0563	116,0568	117,0573	118,0578	119,0583
120	120,0588	121,0593	122,0598	123,0603	124,0608	125,0612	126,0617	127,0622	128,0627	129,0632

Primjer: $R = 1{,}250\ \Omega_0 = 1{,}00049\ \Omega + 0{,}250123\ \Omega = 1{,}25051\ \Omega$.

Tablica **E-8**

Preračunavanje vrijednosti napona sa jedinice V_0 na jedinicu V(SI)

V_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,00034	2,00068	3,00102	4,00136	5,00170	6,00204	7,00238	8,00272	9,00306
10	10,0034	11,0037	12,0041	13,0044	14,0048	15,0051	16,0054	17,0058	18,0061	19,0065
20	20,0068	21,0071	22,0075	23,0078	24,0082	25,0085	26,0088	27,0092	28,0095	29,0099
30	30,0102	31,0105	32,0109	33,0112	34,0116	35,0119	36,0122	37,0126	38,0129	39,0133
40	40,0136	41,0139	42,0143	43,0146	44,0150	45,0153	46,0156	47,0160	48,0163	49,0167
50	50,0170	51,0173	52,0177	53,0180	54,0184	55,0187	56,0190	57,0194	58,0197	59,0201
60	60,0204	61,0207	62,0211	63,0214	64,0218	65,0221	66,0224	67,0228	68,0231	69,0235
70	70,0238	71,0241	72,0245	73,0248	74,0252	75,0255	76,0258	77,0262	78,0265	79,0269
80	80,0272	81,0275	82,0279	83,0282	84,0286	85,0289	86,0292	87,0296	88,0299	89,0303
90	90,0306	91,0309	92,0313	93,0316	94,0320	95,0323	96,0326	97,0330	98,0333	99,0337
100	100,0340	101,0343	102,0347	103,035	104,0354	105,0357	106,036	107,0364	108,0368	109,0371
110	110,0374	111,0377	112,0381	113,0384	114,0388	115,0391	116,0394	117,0398	118,0401	119,04
120	120,0408	121,0411	122,0415	123,0418	124,0422	125,0425	126,0428	127,0432	128,0435	129,0439

Primjer: $U = 11{,}50\ V_0 = 11{,}0037\ V + 0{,}50017\ V = 11{,}50387\ V.$

gdje simboli A, Ω, V, W, J, C, F i H redom predočuju jedinice Međunarodnog sistema SI amper, ohm, volt, watt, joule, coulomb, farad i henry. Vrijednosti preračunskih koeficijenata iznose

$$p = 1{,}00049, \qquad pq = 1{,}00034,$$
$$q = 0{,}99985, \qquad pq^2 = 1{,}00019.$$

Iz vrijednosti faktora p i q te njihovih kombinacija vidimo da je A_0 manji za 0,015% od ampera Međunarodnog sistema, a Ω_0 veći je za 0,049% od Ω. To znači da na mjerne instrumente, uključivši razred 0,1, prijelaz na jedinice SI uopće nema utjecaja. Međutim kod preciznijih instrumenata mora se uzeti u obzir korektura i pri tom naročito paziti u kojem je smjeru (+ ili −) bila pogreška tih instrumenata u jedinicama A_0, Ω_0, V_0 i W_0. U nekim će slučajevima instrumenti zbog djelomične kompenzacije ranije pogreške i faktora p i q postati precizniji u jedinicama SI nego što su bili u jedinicama TS. Kod drugih je baš obratno, tamo se povećavaju konačni korekcijski faktori u odnosu na jedinice SI. Za olakšanje takvih radova, kao i za druge potrebe, prilažemo tablicu E-7 (faktor p) i tablicu E-8 (faktor pq).

Vrlo precizne *otporničke normale* (o njima vidi odsječak 3.6), razreda $10^{-5} = 0{,}001\%$, svakako treba prebaždariti na ohme SI, jer zbog $p = \Omega_0/\Omega = 1{,}00049$ ovdje postoji razlika 0,049% ili $4{,}9 \cdot 10^{-4}$, što mnogo premašuje njihovu nazivnu netačnost. Takvih najpreciznijih i skupocjenih normala ima malo, pa je najbolje da se dadu prebaždariti u jedinicu otpora SI u jednom od renomiranih državnih metroloških zavoda (vidi odsječak A.7.2), iako je to vrlo skupa usluga. Takav je postupak, međutim, neophodan ako se želi imati osnova za sve sekundarne i tercijarne industrijske normale. I manje precizne otporničke normale, razreda $10^{-4} = 0{,}01\%$, valja prebaždariti, jer je $p = \Omega_0/\Omega = 1{,}00049$, tj. promjena oko $0{,}05\% > 0{,}01\%$. Nove vrijednosti otpora mogu se, doduše, uzeti u obzir i faktorom korekcije tih normala, ali je pouzdanije prebaždariti ih u Ω SI pomoću normala 0,001% koje smo ranije spomenuli.

Mjerni mostovi ne mijenjaju se uvođenjem SI, jer mostovima ionako samo određujemo omjere između otpora. Normale tih mostova moraju, međutim, biti prebaždarene u jedinice SI (otporničke, induktivne i kapacitativne normale), ako je razred mosta takav da bi se u njemu osjetila minimalna razlika tehničkih i međunarodnih jedinica.

2.5.4. Westonov zasićeni normalni element. Međunarodna konferencija o električkim jedinicama i standardima (International Conference on Electrical Units and Standards) preporučila je na svom zasjedanju u Londonu godine 1908. ovu formulu za proračunavanje napona neopterećenog Westonova zasićenog normalnog elementa u ovisnosti o temperaturi

$$E = E_{20} - 4{,}06 \cdot 10^{-5}\left(\frac{\vartheta}{°C} - 20\right)V_0 - 9{,}5 \cdot 10^{-7}\left(\frac{\vartheta}{°C} - 20\right)^2 V_0 + \\ + 1 \cdot 10^{-8}\left(\frac{\vartheta}{°C} - 20\right)^3 V_0. \qquad (2.5\text{-}1)$$

Ovdje slovo V_0 predstavlja jedinicu napona volt tzv. Tehničkog sistema jedinica elektromagnetizma (vidi odsječak 5.3), za koji smo u odlomku 2.5.3 spomenuli odnos prema voltu SI: $V_0 = 1{,}00034$ V. Simbol E_{20} predstavlja vrijednost napona neopterećenog Westonova elementa pri temperaturi $\vartheta = 20\,°C$ (odlomak 3.5.2).

Poseban odbor (International Technical Committee) spomenute Konferencije eksperimentalno je godine 1910. utvrdio i preporučio srednju vrijednost

$$E_{20} = 1{,}0183\ V_0. \qquad (2.5\text{-}2)$$

Uvođenjem Međunarodnog sistema jedinica (SI) godine 1948. valjalo je jednadžbu (2.5-1) prilagoditi jedinici V(SI). Zbog neznatne razlike faktora 1,00034 od 1, koeficijenti u izrazu (2.5-1) praktički nisu bili pogođeni prijelazom na SI, već jedino vrijednost E_{20} iz (2.5-2). Njoj se danas pripisuje vrijednost $E_{20} = 1{,}01865$ V(SI) pri $\vartheta = 20\,°C$. Neki autori smatraju da nesigurnost poznavanja vrijednosti E_{20} iznosi $\pm 30\ \mu V$. To znači da se vrijednost E_{20} najbolje izrađenih i održavanih Westonovih zasićenih elemenata nalazi unutar intervala

$$E_{20} = 1{,}01865\ (1 \pm 3 \cdot 10^{-5})\ V.$$

Podrobnije se o vrijednosti E_{20} i o relativnom mjerenju te vrijednosti raspravlja u odsječku 3.5, dok je načelo utvrđivanja stvarne vrijednosti tzv. apsolutnim mjerenjem opisano u odlomku 3.1.2.

2.5.5. Zabrana javne primjene sistema jedinica CGS. Uvođenjem Međunarodnog sistema jedinica samo su neznatno pogođeni oni fizičari koji su dosljedno upotrebljavali sistem CGS u *mehanici* (o tom sistemu vidi odsječak B.8.2). Oni su se i prije godine 1948. služili pojmom mase i gustoće, a ne težinom i specifičnom težinom. Zato prijelaz od grama na kilogram i od dyna na newton za njih ne znači gotovo nikakvu teškoću. Ni svi fizičari, međutim, nisu bili dosljedni u primjeni svog sistema CGS. I oni su se služili atmosferama umjesto jedinicom tlaka dyn/cm², kalorijama umjesto ergima itd., a pri elektromagnetskim *mjerenjima* redovito su upotrebljavali ampermetre i voltmetre baždarene u A_0 i V_0.

U području *elektromagnetizma* sistem CGS grana se u tri zasebna sistema: CGSG, CGSM i CGSE (vidi poglavlje 4). Neke jedinice tih sistema svojedobno su dobile i posebne nazive, na primjer: oersted, gauss, maxwell, gilbert, biot, franklin itd. (Uz poglavlje 4 vidi o tome poglavlje 5 i tablicu **40** u prilogu knjige.) Te imenovane jedinice CGS upotrebljavali su i fizičari i tehničari. Baš u sadašnje vrijeme iz literature iščezavaju jedinice oersted, gauss i maxwell (ostale se nisu ni uvriježile). Uvođenjem SI godine 1960. sve to šarenilo jedinica, pogotovo jer je najčešće bilo nefizikalno interpretirano (vidi odsječke 4.4 i 4.5), postalo je *suvišno*. Zbog toga zakonski akti mnogih država, naročito oni objavljeni poslije godine 1960, ne dopuštaju javnu primjenu jedinica sistema CGSG, CGSM i CGSE, među njima ni jugoslavenski »Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima«, koji je na snazi od godine 1961. Naglašavamo da taj zakon ne dopušta javnu upotrebu *ni jedne* jedinice CGS(G,M,E); prema tome je *zabranjena javna primjena* jedinica oersted ($= 1000/4\pi$ A/m), gauss $= 10^{-4}$ tesla, maxwell $= 10^{-8}$ Wb itd.

Time je bio najjače pogođen *jedan dio teoretskih fizičara*; oni su, uostalom, bili jedini koji su u elektromagnetizmu *dosljedno* upotrebljavali jedinice CGSG i zbog toga u *brojčanim* jednadžbama nepotrebno ponavljali slovo »*c*«, tj. brojčani iznos brzine svjetla (odlomak 4.3.2). Budući da primjena koherentnih jedinica SI automatski uzrokuje jednakost oblika brojčanih i veličinskih jednadžbi, to zabrana javne primjene jedinica CGS(G,M,E) potiče primjenu veličinskih jednadžbi (odlomak 2.5.1). Dodajemo da su od svih teoretskih fizičara američki bili prvi koji su iz svojih djela izbacili jedinice CGSG(M,E), prihvatili SI, a preko njega izravno ili neizravno veličinske jednadžbe.

3. Reproduciranje i pohranjivanje elektromagnetskih jedinica

3.1. Strujna vaga — pramjerilo jedinice amper

3.1.1. Načelo djelovanja strujne vage. U odlomku 2.1.3 naveli smo zakonitost teorije elektromagnetskog polja na kojoj se temelji djelovanje pramjerila za reprodukciju željene vrijednosti fizikalne veličine »jakost električne struje« I. Definiciju stanovite vrijednosti struje $I = [I]_M$ tj. definiciju nezavisne jedinice SI $[I]_M = \mathrm{A} = \text{amper}$, citirali smo u odlomku 2.1.4. Ta definicija je jednostavna, pogotovo kad je razmatramo u vezi sa slikom E.12, ali je upotrebljiva samo u *zakonodavne* svrhe. Pokušamo li, naime, u skladu s njom izraditi pramjerilo, nailazimo na nesavladive poteškoće: neizmjerno dugački vodiči, zanemarivo malen presjek vodiča, neuobičajeno mala sila! Zato se pramjerilo, tj. uređaj za mnogostruko ponovljivo mjerenje (reprodukciju) $I = 1$ A ili željene vrijednosti I jakosti struje, ne može izraditi prema citiranoj definiciji. Teoretski jednakovrijedno, a mjerno-tehnički upotrebljivo pramjerilo može se, međutim, izraditi na temelju one *iste opće teorije elektromagnetskog polja* na kojoj se temelji definicija ampera (odlomak 2.1.4 i slika E.12). U nastavku ćemo opisati primjenu te teorije na uređaj koji je oblikovan drukčije od onoga na slici E.12, ali koji dopušta primjenu vodiča *konačne* duljine i presjeka, a proizvodi toliko velike sile da se one preciznom vagom mogu izmjeriti znatnom preciznošću (o takvim vagama vidi odlomak A.9.3.2).

U tu svrhu razmotrimo uređaj sa slike E.23, koji zovemo *strujna vaga* (engl. current balance), jer se njome uravnotežuje težina utega poznate mase sa silom koja djeluje između svitaka kada kroz njih teku električne struje. To je izvanredno precizna, osjetljiva i čvrsta ravnokraka vaga koja na jednom kraku ima ovješen uteg mase m, a na drugom kraku svitak *1* koji se nalazi između dva veća svitka označena na slici E.23 sa *2* i *3*. Ta su dva svitka kruto učvršćena na postolje vage, dakle *nepomična*. Za razliku od njih svitak *1* je *pomičan*, jer se pomiče gore-dolje ako se poluga vage njiše.

Zamislimo da kroz svitke *1*, *2* i *3* teku istosmjerne struje jakosti I_1, I_2 i I_3. Teorija elektromagnetskog polja, tj. ona ista teorija koju smo primijenili u odlomcima 2.1.3 i 2.1.4, navodi da energija W magnetskog polja triju svitaka iznosi

$$W = \tfrac{1}{2}L_1I_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2I_2^2 + \tfrac{1}{2}L_3I_3^2 + M_{12}I_1I_2 + M_{13}I_1I_3, \qquad (3.1\text{-}1)$$

gdje pojedini simboli označuju: L_1, L_2, L_3 — induktivitete (samoinduktivitete) svitaka *1*, *2* i *3*; M_{12} međuinduktivitet svitaka *1* i *2*; M_{13} međuinduktivitet svitaka *1* i *3*. Zamislimo, dalje, da smo svitke *1*, *2* i *3* sa slike E.23 međusobno električki povezali u *seriju*. To znači da kroz sva tri svitka teče *ista* struja, dakle

$$I_1 = I_2 = I_3 = I.$$

Za takav slučaj — a baš se na njemu osniva djelovanje strujnih vaga — jednadžba (3.1-1) dobiva oblik

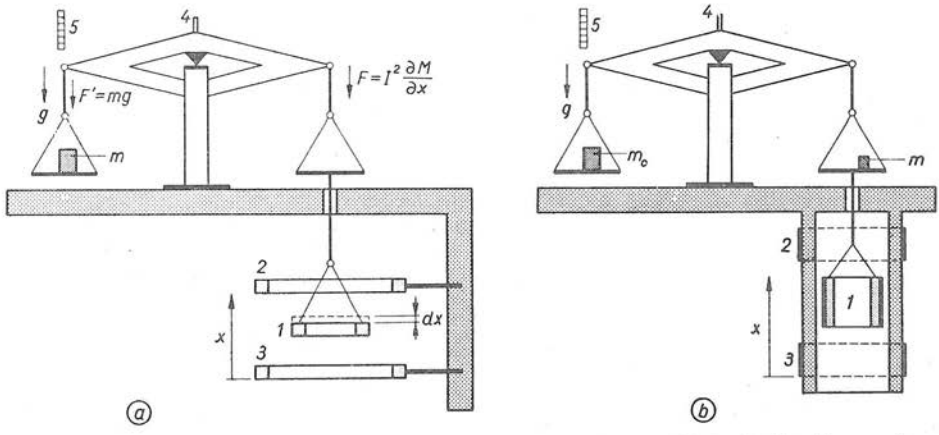
$$W=\tfrac{1}{2}(L_1+L_2+L_3)I^2+(M_{12}+M_{13})I^2,$$

koji prelazi u vrlo preglednu jednadžbu

$$W=\tfrac{1}{2}LI^2+MI^2, \tag{3.1-2}$$

ako umjesto svih prije upotrebljavanih simbola za induktivitete i međuinduktivitete uvedemo skraćenice

$$L=L_1+L_2+L_3, \quad M=M_{12}+M_{13}. \tag{3.1-3}$$

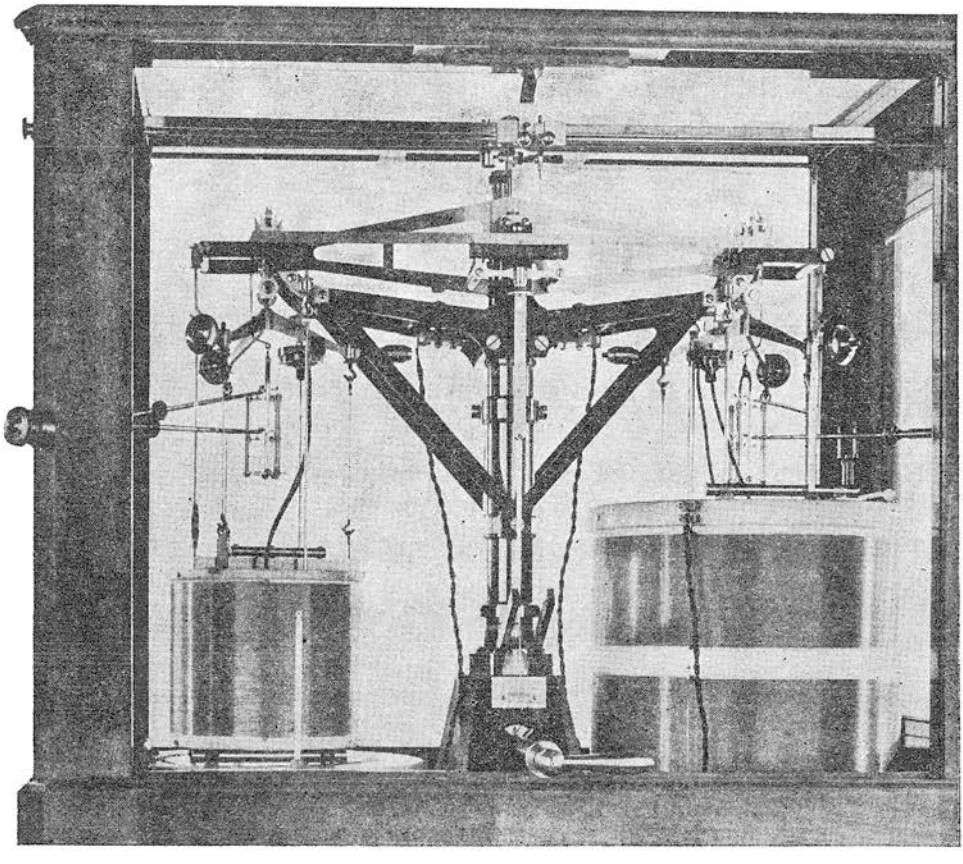


Sl. E.23. Načelo djelovanja pramjerila za reproduciranje vrijednosti jakosti električne struje — strujna vaga Rayleighova tipa: a) s kvadratičnim svicima, b) s helikoidnim svicima
1 — pomični svitak, *2*, *3* — nepomični (učvršćeni) svici, *m* — uteg (mjerni) mase *m*, *4* — zrcalo, *5* — skala, *g* — mjesno ubrzanje zemljine teže, *x* — koordinata paralelna ubrzanju *g*, m_0 — protuuteg mase m_0 (vidi odlomak 3.1.3)

Jednadžbu (3.1-2) možemo, dakako, napisati i u obliku $W=(\frac{1}{2}L+M)I^2$, odakle bismo bez vage mogli saznati vrijednost *I* ako bismo znali *precizno* mjeriti energiju magnetskog polja *W*. Veličine *L* i *M* mogu se, naime, vrlo precizno *izračunati* iz geometrije svitaka, njihova međusobnog položaja, a permeabilnost μ (vidi odlomak 1.3.2) atmosfere u kojoj se nalaze svici možemo ustanoviti *usporedbenim* mjerenjem, tj. usporedbom permeabilnosti atmosfere μ sa magnetskom konstantom ($\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ H/m). No energija *W* vrlo je neprikladna za mjerenje, preciznost je daleko lošija od preciznosti mjerenja mnogih drugih fizikalnih veličina, pogotovo nezavisnih (vrijeme, masa, duljina). Zato se reprodukcija vrijednosti struje *I* svodi na uspoređivanje *sila*, jer je taj dio metrologije vrlo precizan i provjeren iskustvom stoljeća.

Da bismo izračunali elektrodinamičku silu *F*, koja djeluje na desni krak vage sa slike E.23, zamislimo da kroz sva tri svitka *1*, *2*, *3* teče *ista* istosmjerna struja *I*, a ravnokraka je vaga uravnotežena težinom utega *m*, tj. elektrodinamičkoj sili *F* drži ravnotežu težina utega $F'=mg$, gdje je *g* mjesno ubrzanje zemljine teže. (Prije nego što se kroz svitke pusti struja, vaga se uravnoteži — to se precizno očita na skali *5* na koju zrcalo *4* baca zraku svjetla — a u trenutku uključenja struje stavlja se na

zdjelicu uteg mase m; podrobnije o tome vidi odlomak 3.1.3.) Sada zamislimo da je ravnoteža vage poremećena time što smo pomični svitak *1*, a time i desni krak vage, pomakli neizmjerno malo *vertikalno* (u smjeru x) prema gore, tj. za diferencijal dx.



Sl. E.24. Ayrton-Jonesova strujna vaga koju upotrebljava engleski metrološki zavod National Physical Laboratory (NPL). Lijevi nepomični dvojni svitak (*2* i *3* sa slike E.23b) je skinut da bi se na slici mogao vidjeti pomični svitak ovješen o lijevi krak vage. Platinski utezi (pločice) mase oko 4 grama stavljaju se na zdjelice vage ili skidaju s njih pomoću lijeve i desne štipaljke kojima se upravlja izvan ostakljenog prostora u kojem se nalazi vaga. (Foto: NPL. S dopuštenjem NPL. British Crown Copyright)

Takvo se pomicanje moglo provesti jedino uz utrošak rada $dW' = F\,dx$, gdje je F sila kojom magnetsko polje triju svitaka djeluje na svitak *1* nastojeći ga zadržati na onom mjestu između *2* i *3* gdje se nalazio prije poremećaja. Diferencijalni pomak svitka *1* promijenio je, međutim, i energiju polja W koju opisuje jednadžba (3.1-2), i to za diferencijal dW. Budući da se tom infinitezimalnom promjenom energije nisu promijenili Jouleovi gubici u svicima, rad dW' jednak je promjeni energije polja, dakle

$$dW' = F\,dx = dW. \tag{3.1-4}$$

Prema tome se elektrodinamička sila na svitak *1*, tj. sila koja na desni krak vage (sl. E.23) djeluje suprotno pomaku dx pomičnog svitka, može izračunati pomoću jednadžbi (3.1-2,4) ovako

$$F = F_x = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tfrac{1}{2}L I^2 + M I^2). \tag{3.1-5}$$

Ovdje indeksom x uz F posebno naglašavamo da je riječ o elektrodinamičkoj sili u smjeru x, tj. u smjeru ubrzanja zemljine teže (predznake ovdje zanemarujemo).

U toku beskrajno malog pomaka dx jakost struje I nije se promijenila. Isto je tako ostao nepromijenjen induktivitet L definiran lijevom jednadžbom (3.1-3). Prema tome je

$$I = \text{const} \quad \text{i} \quad L = \text{const}. \tag{3.1-6}$$

S međuinduktivitetom $M = M_{12} + M_{13}$ pomičnog svitka nije tako, on *ovisi* o položaju x svitka *1* u prostoru između nepomičnih svitaka *2* i *3*, dakle i o diferencijalu dx. Prema tome jednadžba (3.1-5) uz uvjete (3.1-6) prelazi u oblik

$$F = F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = I^2 \frac{\partial M}{\partial x}. \tag{3.1-7}$$

U ravnotežnom položaju ravnokrake vage ova je sila jednaka težini utega $F' = mg$ (podrobnije o stvarnom radu sa strujnom vagom vidi u odlomku 3.1.3), tj. $F' = F$. Prema tome iz (3.1-7) slijedi

$$mg = I^2 \frac{\partial M}{\partial x},$$

odakle preinačenjem jednadžbe i korjenovanjem dobivamo

$$I = \sqrt{\frac{mg}{\partial M/\partial x}}. \tag{3.1-8}$$

Taj izraz znači: ako je vaga uravnotežena utegom mase m, a nalazi se na mjestu gdje ubrzanje zemljine teže iznosi g, onda se jakost izvagane struje I (koja teče kroz sva tri svitka na slici E.23) može izračunati pomoću jednadžbe (3.1-8) ako se zna parcijalni diferencijal međuinduktiviteta $M(x)$ po vertikali x, i to baš na onom mjestu x gdje se svitak *1* nalazi u ravnotežnom položaju. Budući da je strujna vaga pramjerilo nezavisne jedinice veličine »jakost električne struje« I, dakle jedinice one veličine pomoću koje se izvode sve druge jedinice elektromagnetizma, očito je da se moraju *maksimalno mogućom* preciznošću izmjeriti sve veličine koje se nalaze na desnoj strani jednadžbe (3.1-8). Te veličine su: masa m utega (vidi odsječak A.9.3), mjesno ubrzanje zemljine teže g (odsječci A.9.4,5) i položaj x u kojem se nalazi svitak *1* prilikom ravnoteže (odsječak A.8.5). Osim toga, mora se *izračunati* gradijent $\partial M/\partial x$ za tu istu ravnotežnu tačku x i pri tom znati kolika je stvarna permeabilnost μ atmosfere u kojoj se nalazi vaga. Naravno, da se u toku uravnoteženja vage, odnosno u toku čitava njena rada moraju poduzeti sve mjere da nesavršenost vage i manipulacije njome što manje pogoršavaju preciznost i tačnost mjerenja struje I, tj. da nesigurnost te vrijednosti bude što manja.

3.1.2. Pohranjivanje izmjerene vrijednosti struje. Strujne vage su skupi i komplicirani mjerni uređaji, rukovanje njima je delikatno i dugotrajno, izrada tih vaga pravi je pothvat tehnologije i metrologije duljine, a uspješno ih mogu pri-

mjenjivati samo nadasve iskusni metrolozi (odlomci 3.1.3 do 3.1.6). Zato strujne vage posjeduje svega nekoliko metroloških zavoda u svijetu, no i oni ih upotrebljavaju samo povremeno. U prvi bismo mah mogli pomisliti da bi strujnom vagom valjalo baždariti ampermetar spojen u seriju sa sva tri svitka (sl. E.23). Time bismo, međutim, polučili slabu korist: relativna pogreška najboljeg ampermetra iznosi oko $0{,}1\,\%=1\cdot10^{-3}$, dok je relativna nesigurnost vrijednosti izmjerene najboljom strujnom vagom oko $4\cdot10^{-6}$, tj. vaga je oko 250 puta pouzdanija. Osim toga, tačnost ampermetra može se srušiti, na primjer, i posve sitnom vibracijom.

Zbog toga se strujnom vagom ne baždare drugi mjerni instrumenti, već se njome baždari vrijednost struje I, koju *pohranjuje* kombinacija naponske i otporničke *normale*. (O tim normalama podrobno se raspravlja u odsječcima 3.5 i 3.6.) Na slici E.25 naponsku smo normalu označili slovom E, a otporničku normalu slovom R; obje normale obuhvaćene su crtkanim okvirom, a svici uravnotežene strujne vage sa slike E.23 označeni su brojevima *1*, *2*, *3*. Izvor struje je velika akumulatorska baterija B; pomoću promjenljivog otpornika r jakost struje I regulira se tako dugo dok pad napona IR na otporničkoj normali ne postane jednak naponu *neopterećene* naponske normale, dakle

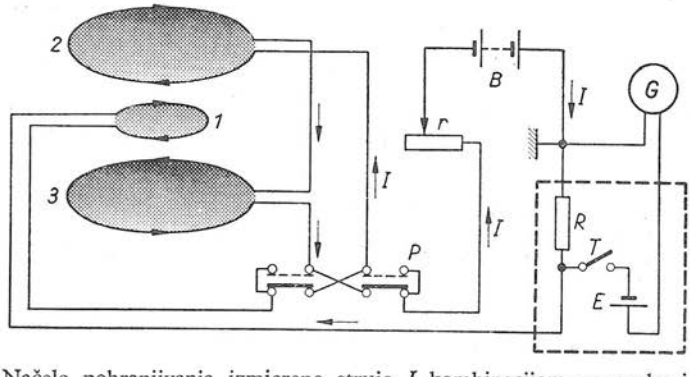
$$E=RI. \tag{3.1-9}$$

To stanje indicira galvanometar G time što ne pokazuje nikakav otklon kad uključimo tipku T. U isto vrijeme kad je na snazi jednadžba (3.1-9), vrijedi i jednadžba (3.1-8), jer je vaga uravnotežena utegom mase m. Udružimo li te dvije jednadžbe, dobivamo

$$E=R\sqrt{\frac{mg}{\partial M/\partial x}}, \tag{3.1-10}$$

gdje je E napon neopterećene naponske normale, a R otpor opterećene otporničke normale. Iz ovog opisa je očito da je reproduciranje struje $I=E/R$ strujnom vagom u stvari *utvrđivanje vrijednosti omjera E/R normala.*

Strujnom vagom, prema tome, ne možemo utvrditi vrijednosti ni napona E ni otpora R normala, već jedino njihov *omjer*. Zbog toga se u vrhunskoj metrologiji



Sl. E.25. Načelo pohranjivanja izmjerene struje I kombinacijom naponske i otporničke normale (u crtkanom okviru)

1 — pomični svitak strujne vage iz slike E.23, *2*, *3* — nepomični svici, I — struja, E — naponska normala, R — otpornička normala, r — promjenljivi otpornik, B — akumulatorska baterija, G — galvanometar (nulindikator), T — tipka, P — preklopka za reverziranje smjera struje (vidi odlomak 3.1.3)

otpor R utvrđuje *posebnim* mjerenjima, upotrebom *pramjerila otpora* (vidi odsječak 3.3). Pošto se pomoću tih otporničkih pramjerila, koja se u svom djelovanju baziraju na istoj teoriji elektromagnetskog polja na kojoj se osniva načelo rada strujne vage, utvrdi vrijednost R otporničke normale, daljnji put je jasan: uz poznati R jednadžba (3.1-10) daje vrijednost napona E naponske normale.

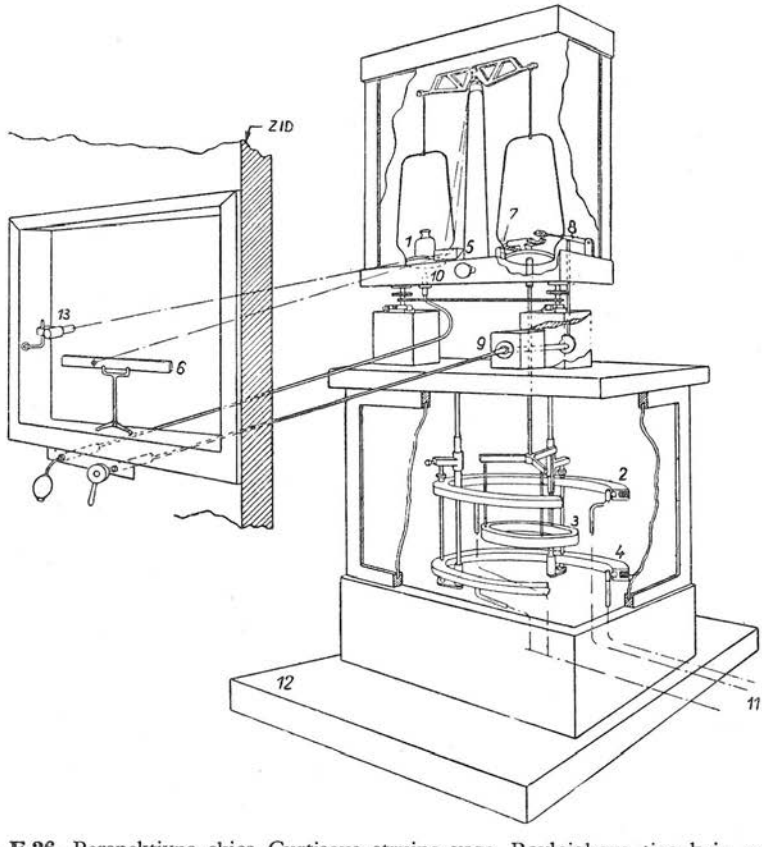
Prije nego što se u idućim odlomcima udubimo u izvanredno važne mjerne postupke vrhunske metrologije elektromagnetizma, korisno je da pobliže opišemo stvarno značenje dvaju izraza koje ćemo često upotrebljavati. Prvi od tih izraza je *preciznost*, koji smo dodirnuli u odlomku A.3.1.3, a egzaktno razmotrili u odsječku A.3.6. Radi tečnijeg izlaganja, u nastavku ćemo smatrati da naznaka »precizno mjerenje«, tj. precizan mjerni postupak, automatski u sebi uključuje pretpostavku da je riječ o vrlo *tačnim* pojedinim mjernim rezultatima. Pri tom ćemo pod »tačnošću« razumijevati »relativnu pogrešku pojedinog mjerenja« (odlomci A.3.1.1,3). Budući da termin »tačnost« karakterizira rezultat *pojedinog* mjerenja, a izraz »preciznost« usklađenost *mnoštva* rezultatâ ponovljenih mjerenja, pretpostavka o tačnosti preciznog mjerenja ne mora biti ispravna. U vrhunskoj metrologiji, međutim, ta pretpostavka *jest* ispravna. Razlog je očit: vrhunska se metrologija služi takvim mjernim uređajima, pramjerama, pramjerilima i metodama kojima se mogu postići i najpreciznji i najtačniji mjerni rezultati, tj. najmanje rasipani rezultati izmjereni s najmanjim relativnim pogreškama.

Drugi od najavljenih dvaju izraza jest *reprodukcija*. U dosadašnjim smo tekstovima nekoliko puta spomenuli da strujna vaga reproducira (ili proizvodi) struju jakosti I ili mjernu jedinicu $[I]$. Riječi »reproducirati« i »reprodukcija« ubrajaju se u žargon mjerne tehnike kojim se skraćeno, gotovo simbolički, opisuje mjerni postupak utvrđivanja jedinice pomoću pramjerila. Očito je, naime, da struju I *stvarno proizvodi* akumulatorska baterija B na slici E.25. Strujna vaga, označena na toj slici brojevima *1*, *2* i *3* (svici), *mjeri* vrijednost te struje I, tj. ona uz pomoć jednadžbe (3.1-8) *utvrđuje vrijednost struje I koja teče njenim svicima*. Prema tome »reproduciranje struje« znači *mjerenje* njene stvarne vrijednosti, tzv. apsolutno mjerenje (vidi odlomak 5.1.1, u kojem se govori o prvom takvom mjerenju). Analogno »reproduciranje mjerne jedinice« označuje takav eksperiment kod kojega su vrijednosti fizikalnih veličina m, g i $\partial M/\partial x$ u jednadžbi (3.1-8) baš takve da je $I = [I]$, na primjer $[I] = 1$ A. Spomenuta terminologija ne vrijedi, dakako, samo za strujnu vagu, već i za druga pramjerila kojima se neelektričkim mjernim postupcima utvrđuje vrijednost elektromagnetske veličine (vidi odlomke 2.2.3, 3.4.4 i 3.4.5).

3.1.3. O rukovanju strujnom vagom. U dosadašnjem razmatranju o strujnoj vagi opisali smo samo *načelo* njena djelovanja (sl. E.23,25). Ipak, fotografija na slici E.24 mogla nas je upozoriti da je strujna vaga izvanredno kompleksan i delikatan mjerni uređaj. To nam, donekle, može dočarati perspektivna skica E.26. Na njoj vidimo da je prostorija u kojoj se nalazi precizna vaga sa svicima zidovima potpuno odijeljena od prostorije odakle operator upravlja vagom. On to čini štapom učvršćenim na sklopku *9* i na uređaj za dodavanje ili skidanje utega *8*. Time operator može *istodobno* promijeniti smjer struje u nekim svicima i dodati (ili skinuti) mjerni uteg na desnoj zdjelici. Njihanje vage može se pojačati ili ograničiti strujom zraka koju operator proizvodi pomoću puhaljke *10* ispod lijeve zdjelice.

Pri opisivanju načela djelovanja strujne vage (odlomak 3.1.1 i slika E.23) nismo mogli podrobno objasniti rukovanje utegom m koji proizvodi protusilu $F' = mg$. Stvarno se upotrebljavaju *dva utega*, a struja se izmjeri pomoću dva mjerenja. Prilikom prvog mjerenja, na desnoj zdjelici (sl. E.23b) nema »mjernog utega«

mase m; jedino se na lijevoj zdjelici nalazi »protuuteg« m_0, koji silom $F'' = m_0 g$ uravnotežuje elektrodinamičku silu $F = I^2 \partial M/\partial x$, koja djeluje na desnu zdjelicu prema dolje. Takva usmjerenost elektrodinamičke sile uvjetovana je smjerom struje kroz svitke *1*, *2* i *3*. Masa protuutega m_0 odabrana je tako da se sredina njihaja svjetlosne zrake (ili pokazne igle) nalazi vrlo blizu njenog konačnog, smirenog položaja. Njihanje vage promatra se kod nekih strujnih vaga teleskopom na poluprozirnoj skali (sl. E.23, 26), a kod drugih direktnim motrenjem otklanjanja igle (sl. E.24).



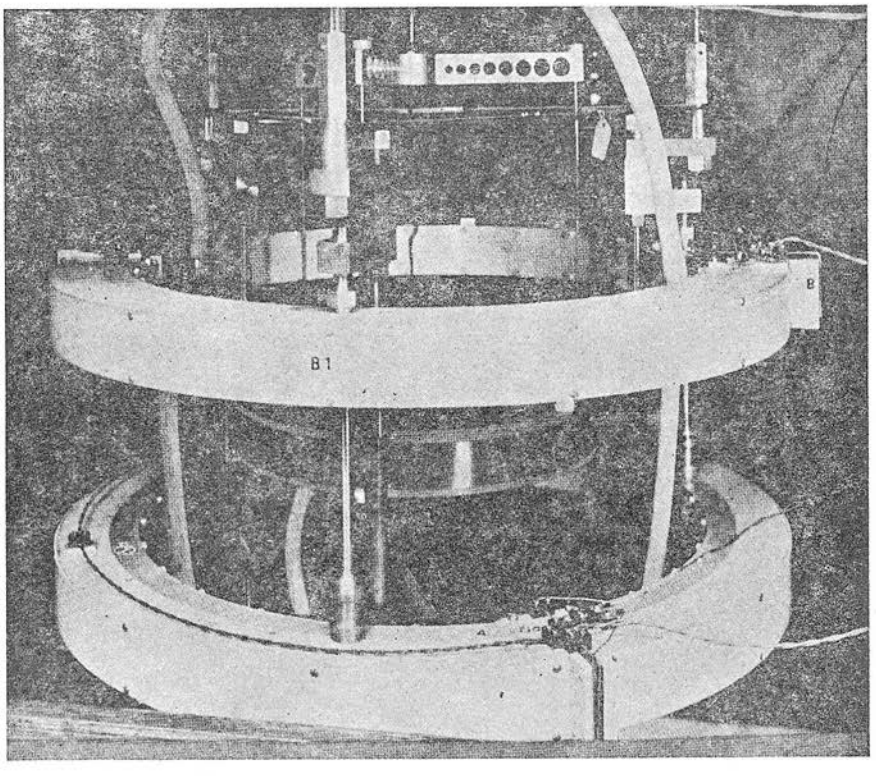
Sl. E.26. Perspektivna skica Curtisove strujne vage Rayleighova tipa koju upotrebljava američki metrološki zavod National Bureau of Standards

1 — protuuteg, *2* i *4* — nepomični svici, *3* — pomični svitak, *5* — skala za očitavanje ravnoteže vage, *7* — fleksibilne dovodne žice za privođenje struje u pomični svitak, *8* — uređaj za dodavanje ili skidanje mjernog utega, *9* — sklopka za mijenjanje smjera struje kojom se suprotno usmjerava elektrodinamička sila, a istodobno uređaj *8* dodaje ili skida mjerni uteg, *10* — zračna puhaljka, *11* — dovodi temperaturno regulirane rashladne vode, *12* — antivibracijski temelji, *13* — izvor svjetla

Drugo mjerenje obavlja se ovako: bez aretiranja vage *istodobno* se reverzira smjer struje u pomičnom svitku (crtkani položaj preklopke P na slici E.25) i stavi mjerni uteg mase m na desnu zdjelicu (sl. E.23b). Reverziranjem struje elektrodinamička sila F promijenila je svoj smjer djelovanja, tj. sada djeluje prema gore. Prema

tome masa m mjernog utega mora biti tolika da njegova težina $F' = mg$ bude otprilike jednaka dvostrukoj vrijednosti elektrodinamičke sile. Ako je uteg m takav da je doista $mg = 2I^2 \partial M/\partial x$, onda će se sredina njihaja vage pri prvom mjerenju podudarati sa sredinom pri drugom (reverziranom) mjerenju. Podudaranje ne mora, međutim, biti savršeno. Iz odstupanja drugog smirenog položaja zrake ili igle od prvoga može se, naime, utvrditi kolika sila odgovara tom odstupanju (vidi odsječak A.9.3).

Budući da je strujna vaga pramjerilo nezavisne jedinice elektromagnetizma, nepouzdanost reprodukcije vrijednosti struje pomoću nje mora biti svedena na minimum koji se može postići. Zbog toga pri manipuliranju vagom stručnjaci moraju osujetiti sve one štetne utjecaje koji bi mogli nastati neispravnim izborom mjernih uređaja ili premalo pažljivim rukovanjem. Ovdje ćemo nabrojiti neke od tih mogućih utjecaja. Tako, na primjer, vaga u užem smislu mora biti precizna najmanje $1:10^8$, jer je masa pomičnog svitka oko 100 do 200 puta veća od mase m mjernog utega. Pa i uz relativnu pogrešku vage $1:10^8$ ona pridonosi nepouzdanosti reprodukcije I oko $\pm 2:10^6$. Budući da se vaga ne aretira prilikom istodobnog reverziranja struje i dodavanja ili skidanja mjernog utega, može se promijeniti duljina kraka vage; promjena duljine kraka za 0,01 mikrometar (to je 1/5 duljine vala zelenožutog svjetla!) povećat će nepouzdanost $\Delta I/I$ za $1:10^6$. Gustoća $\rho = m_0/V_0$ protuutega mora biti



Sl. E.27. Dva nepomična svitka i u sredini između njih pomičan svitak Curtisove vage Rayleighova tipa (tzv. kombinirani tip) u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards

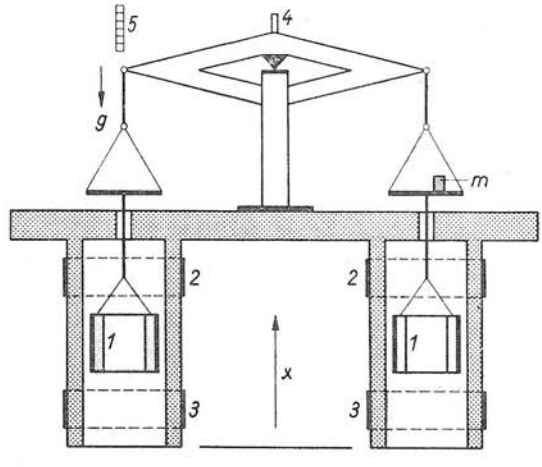
približno jednaka prosječnoj gustoći pomičnog svitka; time se izbjegava ovisnost smirenog položaja zrake ili igle o promjeni atmosferskog tlaka.

Struju u pomičnom svitku treba održavati konstantnom u toku nekoliko sati prije vaganja da bi se ustalila strujanja zraka. Temperatura krakova vage mora, naime, biti u toku vaganja što stalnija, a gradijenti temperature moraju težiti nuli. Budući da temperaturni koeficijent brončanog kraka iznosi oko $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ /°C, razlika temperature $5 \cdot 10^{-4}$ °C između oba kraka može uzrokovati promjenu prividne težine za $1:10^8$. U tom su smislu kremeni krakovi prikladniji: zbog koeficijenta oko $2{,}6 \cdot 10^{-7}$/°C, ista promjena nastaje pri razlici temperatura $4 \cdot 10^{-2}$ °C. Itd.

3.1.4. Različite izvedbe strujnih vaga. Svici strujne vage mogu se izraditi u dva oblika koji omogućuju vrlo precizan proračun ovisnosti međuinduktiviteta o izmjerama i o međusobnom položaju svitaka. U skladu s time moguć je precizan proračun $\partial M/\partial x$. Jedan oblik svitaka prikazali smo na slici E.23a: presjek svih svitaka gotovo je kvadratičan. Kao vodiči upotrebljavaju se bakar i aluminij različitih oblika: okrugla ili kvadratična izolirana žica većeg ili manjeg presjeka, plosnata traka ili vodič pravokutnog presjeka. I način namatanja vodiča može biti različit: plosnata traka može se namatati spiralno, pa je širina svitka jednaka širini trake, a može se namatati i helikoidno, dakle traka do trake po obodu valjka izrađenog od izolacijske tvari malog temperaturnog koeficijenta istezanja (kremen, staklo). Od okruglih ili kvadratičnih žica izrađuju se kako kvadratični svici (sl. E.23a), tako i jednoslojni helikoidni svici (sl. E.23b i sl. E.24).

Kvadratični i jednoslojni helikoidni svici mogu se i kombinirati. Tako, na primjer, na slici E.27 vidimo da su nepomični svici izrađeni u pravokutnom obliku, dok je pomični svitak namotan helikoidno tankom okruglom bakrenom žicom. Pri tom su nepomični svici izrađeni od spiralno namotanih eloksiranih aluminijskih traka. To se na slici ne vidi, jer su svici radi hlađenja vodom brtvljeni oklopom.

U dosadašnjem tekstu neprekidno smo se pozivali na strujnu vagu Rayleighova tipa (sl. E.23, 26), koju su svojedobno isključivo upotrebljavali u američkom NBS. To smo činili zato što je ta strujna vaga pogodna za objašnjavanje načela djelovanja strujne vage uopće. Za stvarnu reprodukciju željene vrijednosti električne struje prikladniji je, međutim, Ayrton-Jonesov tip strujne vage prikazan shematski na slici E.28 (usporedi sa slikom E.24). Takvu strujnu vagu od samog početka egzaktne primjene strujnih vaga (tridesetih godina našeg stoljeća) upotrebljava engleski



Sl. E.28. Načelo djelovanja strujne vage Ayrton-Jonesova tipa koju upotrebljava engleski metrološki zavod National Physical Laboratory (fotografiju vidi na slici E.24)

1 — pomični svitak, *2*, *3* — nepomični svici namotani helikoidno u jednom sloju na izolacijski valjak, *4* — zrcalo, *5* — skala za očitanje otklona vage, *m* — mjerni uteg, *g* — ubrzanje zemljine teže, *x* — koordinata paralelna sa *g*

metrološki zavod National Physical Laboratory, a u najnovije vrijeme i američki NBS, koji time odustaje od vage Rayleighova tipa.

Bitna karakteristika Ayrton-Jonesove strujne vage je primjena *dvostrukog* sloga svitaka (sl. E.28), tj. i na lijevom i na desnom kraku vage vise jednako izrađeni pomični svici *1*. Nepomični svici *2* i *3* svakog sloga namotani su (jednoslojno helikoidno) na *zajedničko* valjkasto tijelo izrađeno od mramora. To znači da *2* i *3* možemo smatrati dvjema polovicama nepomičnog vanjskog svitka. Svih 6 svitaka, tj. i oni ispod lijevog kraka vage i oni ispod desnog, spojeni su u seriju, pa kroz njih teče ista struja *I*. Međusobno su povezani tako da, na primjer, lijevi pomični svitak djeluje elektrodinamičkom silom (kad kroz sve njih teče struja *I*) prema gore, a desni prema dolje. Kad se smjer struje *reverzira* (vidi odlomak 3.1.3), elektrodinamičke sile mijenjaju svoje predznake. To znači da prilikom mjerenja treba uravnotežiti *dvostruku silu.*

Tablica **E-9**

Mjerenje vrijednosti »srednjeg internacionalnog ampera«

Godina	Autori	Metoda	A_{int}/A_{SI}
1936	Vigoureux	Ayrton-Jones	0,999 863
1939	Curtis, Critchfield	Rayleigh	860
1942	Curtis, Driscol, Critchfield	Kombinirana	856
	Srednja vrijednost		0,999 860

Rezultati niza mjerenja (prema shemi na sl. E.25) pomoću strujnih vaga različitih tipova omogućili su da se godine 1948. propiše prijelazni odnos između »srednjeg internacionalnog ampera« $A_{int}(=V_{int}/\Omega_{int})=V_0/\Omega_0$; o tim »tehničkim« jedinicama vidi odsječak 5.3 i odlomak 5.2.3) i jedinice SI »amper« (A_{SI}) definirane u odlomku 2.1.4. Na temelju tih i sličnih rezultata (tablica E-9) Generalna konferencija za mjere i utege propisala je godine 1948. odnos $A_{int}\,(=A_0)=0{,}999\,85\cdot A_{SI}$. Objašnjenje o reproduciranju »tehničke« jedinice A_0 srebrnim voltametrom nalazi se u odlomku 5.3.1.

3.1.5. Nesigurnost vrijednosti struje reproducirane vagom. Razmatranja o strujnoj vagi u prošlim odlomcima pokazala su nam da se vrijednost polazne elektromagnetske jedinice SI $[I]_M$=amper=A utvrđuje *mjerenjem*, tj. uravnoteženjem elektrodinamičke sile s gravitacijskom pomoću ravnokrake vage. Tako utvrđena (reproducirana) jedinica jakosti struje u stanovitoj je mjeri *nepouzdana*, jer bespogrešni mjerni rezultati nikada se ne mogu polučiti. Da bismo stekli dojam o toj nepouzdanosti, odnosno o preciznosti strujne vage uopće, ukratko ćemo opisati i komentirati rezultate najnovije reprodukcije jedinice amper u engleskom metrološkom zavodu National Physical Laboratory (NPL). Ta reprodukcija trajala je sedam mjeseci (pripremni radovi nisu uračunati), a obavljena je od mjeseca oktobra 1962. do aprila 1963. pomoću strujne vage prikazane slikom E.24. Budući da je reprodukcijski eksperiment dugotrajan i skup, on se rijetko izvodi. Tako je, na primjer, reprodukcija u NPL izvedena godine 1908, 1936. i 1962, a u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards (NBS) godine 1939, 1942. i 1958.

U odlomku 3.1.2 objasnili smo da se stanovita vrijednost struje I reproducira vagom zato da bi se utvrdio *omjer* napona E neopterećene naponske normale (Westonov element) i otpora R opterećene otporničke normale (1 Ω). Engleski reprodukcijski eksperiment od godine 1962. bio je poduzet uglavnom zato da bi se što pouzdanije ustanovila vrijednost žiromagnetske konstante (odlomak 1.5.5), koja je prethodno bila izmjerena u odnosu prema jedinici struje A(N) pohranjivane kombinacijom engleske naponske i otporničke normale u spoju prema slici E.25 (podrobnosti o tome vidi na kraju ovog odlomka i u odsječcima 3.5,6).

Stalnost napona E i otpora R što ih pohranjuju radne normale NPL bila je u toku sedmomjesečnog eksperimenta kontrolirana usporedbama s vrijednostima E(N) i R(N) *grupnih normala* NPL. Prirodno je, naime, da se za eksperimentiranje ne upotrebljavaju normale koje tvore grupnu normalu (odlomak 3.5.4), već *radna normala* kojoj se vrijednost napona E ili otpora R utvrđuje u odnosu prema vrijednostima E(N) i R(N) grupne normale. Ta su kontrolna mjerenja pokazala da je u tom razdoblju napon E radne normale spao za svega 0,1 μV u odnosu prema E(N). Stalnost otpora R radne normale 1 Ω nije bila tako dobra. Njen je otpor neprestano rastao »brzinom« oko jedne milijuntinke u toku 4 mjeseca. To je, dakako, uzeto u obzir pri analitičkoj obradi mjernih rezultata. Posebna pažnja posvećivana je i kontroli stalnosti struje koju u svicima strujne vage proizvodi akumulatorska baterija B na slici E.25. Neke podrobnosti o samoj provedbi mjerenja opisane su u odlomku 3.1.6.

Prvi niz od $n_1=40$ mjerenja prema shemi na slici E.25 učinjen je u toku mjeseca oktobra i novembra godine 1962. Dobiveni su rezultati koje smo grafički prikazali slikom E.29a; prethodno su, dakako, eliminirane sve *poznate* sistematske pogreške. Ta slika nacrtana je u stilu slike A.8b, kojom smo u odsječku A.3.6 ilustrirali raspodjelu rezultata ponovljenih mjerenja. Vidimo da se raspodjela 40 mjernih rezultata slabo približava zakonu normalne raspodjele (usporedi sa slikom A.8e). Budući da nemamo druge mogućnosti, pretpostavit ćemo da je rasipanje na slici E.29a doista rezultat utjecaja slučajnih pogrešaka te da zakoni poglavlja A.3 vrijede za prikazane rezultate ponovljenih mjerenja.

Pomoću jednadžbe (3.4-1) u odlomku A.3.4.1 izračunat ćemo srednju vrijednost $\bar{x}_1$ struje izmjerene strujnom vagom $n_1=40$ puta

$$\bar{x}_1=1{,}018\,600\,77\ \mathrm{A}\approx 1{,}018\,601\ \mathrm{A}.$$

Ocjenu *preciznosti mjernog postupka* dobivamo pomoću standardnog odstupanja (odlomak A.3.3.3). Postupkom opisanim u odlomku A.3.4.3 (vidi i tablicu A-7) možemo izračunati standardno odstupanje skupa mjernih rezultata prikazanih slikom E.29a:

$$s_1=6{,}9\cdot 10^{-6}\ \mathrm{A}=6{,}9\ \mu\mathrm{A}.$$

Najzorniju predodžbu o preciznosti mjernog postupka, tj. o preciznosti mjerenja struje vagom NPL, pruža nam »relativno standardno odstupanje« (odlomak A.3.3.4), koje u najnovije vrijeme neki zovu »preciznost« (odlomak A.3.1.3):

$$r_1=\frac{s_1}{\bar{x}_1}=\frac{6{,}9\ \mu\mathrm{A}}{1{,}0186\,\mathrm{A}}=6{,}8\cdot 10^{-6}\approx 7\cdot 10^{-6}=7:10^6.$$

Statistička sigurnost (odlomak A.3.6.5) netom izračunatih veličina s_1 i r_1 iznosi $P=68\%$.

Budući da je obavljen znatan broj ponovljenih mjerenja ($n_1=40$) pod posve jednakim uvjetima, nepouzdanost srednje vrijednosti $\bar{x}_1$ znatno je manja od s_1.

Izrazom (3.3-23) u odlomku A.3.3.5 možemo izračunati *relativnu nepouzdanost* srednje vrijednosti

$$c_1 = \frac{r_1}{\sqrt{n_1}} = \pm\frac{6{,}8\cdot 10^{-6}}{\sqrt{40}} = \pm 1{,}08\cdot 10^{-6} \approx \pm 1\cdot 10^{-6}\ (P=68\%).$$

Prema tome konačan rezultat 40 ponovljenih mjerenja struje koju pohranjuje kombinacija naponske i otporničke grupne normale NPL možemo zabilježiti u obliku

$$I(\mathrm{N}) = \frac{E(\mathrm{N})}{R(\mathrm{N})} = \bar{x}_1(1+c_1) = 1{,}018\,601\ (1\pm 1\cdot 10^{-6})\ \mathrm{A}\ \text{ pri }\ P=68\%.$$

Statistička sigurnost 68% vrlo je malena. Zato ćemo izračunati relativnu nepouzdanost uz statističku sigurnost $99{,}994\%$ (vidi tablicu A-8 u odlomku A.3.6.5)

$$c_1(P=99{,}994\%) = 4\,c_1(P=68\%) = \pm 4{,}3\cdot 10^{-6} \approx \pm 4\cdot 10^{-6}.$$

To znači da je gotovo 100% sigurno da će se izračunata srednja vrijednost $\bar{x}_1$ nalaziti unutar intervala $\bar{x}_1(1\pm 4\cdot 10^{-6})$. Prema tome podaci na slici E.29a dovode nas do zaključka da se u NPL jedinica jakosti struje amper može reproducirati unutar granica pouzdanosti

$$I = 1\,\mathrm{A}\,(1\pm 4\cdot 10^{-6})\ \text{uz}\ P=99{,}994\%.$$

Pri razmatranju 40 rezultata ponovljenih mjerenja engleske su metrologe zabrinule dvije stvari: 1) dosta velika vrijednost relativnog standardnog odstupanja r_1, jer su očekivali veću preciznost strujne vage; 2) veliko odstupanje stvarne raspodjele pojedinih rezultatâ od očekivane normalne raspodjele. To neslaganje zorno prikazuje položaj medijana (crtkano) u odnosu prema srednjoj vrijednosti $\bar{x}_1$ na slici E.29a (medijan je takva vrijednost da je polovica mjernih rezultata manja od nje, a polovica veća). Zato su od februara do aprila godine 1963. obavili nov niz od $n_2=30$ ponovljenih mjerenja.

Grafički prikaz rezultatâ tog drugog mjernog niza ($n_2=30$) prikazuje slika E.29b. Računanjem, analognim onome pri razmatranju prvog mjernog niza ($n_1=40$), možemo utvrditi da vrijednosti karakterističnih veličina iznose:

srednja vrijednost $\bar{x}_2 = 1{,}018\,604$ A,

standardno odstupanje $s_2 = 4{,}4\ \mu\mathrm{A}\ (P=68\%)$,

relativno standardno odstupanje $r_2 = s_2/\bar{x}_2 = 4{,}3\cdot 10^{-6}\ (P=68\%)$,

relativna nepouzdanost $c_2 = r_2/\sqrt{n_2} = \pm 0{,}79\cdot 10^{-6} \approx \pm 0{,}8\cdot 10^{-6}\ (P=68\%)$,

relativna nepouzdanost $c_2 = 4\,c_2(P=68\%) \approx \pm 3\cdot 10^{-6}\ (P=99{,}994\%)$.

Usporedbom tih rezultata s odgovarajućim vrijednostima prvog mjernog niza možemo konstatirati da je u drugom nizu mjerni postupak bio nešto *precizniji*, $s_2 < s_1$. Zato je i nepouzdanost druge srednje vrijednosti $c_2 < c_1$, iako je $n_2 < n_1$. Osim toga, medijan (crtkano na slici E.29b) gotovo se podudara sa srednjom vrijednošću $\bar{x}_2$.

Drugi je mjerni niz donio, međutim, veliko razočaranje. Usporedimo li, naime, izračunate srednje vrijednosti prvog i drugog niza, vidimo da je razlika

$$\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 3\ \mu\mathrm{A}$$

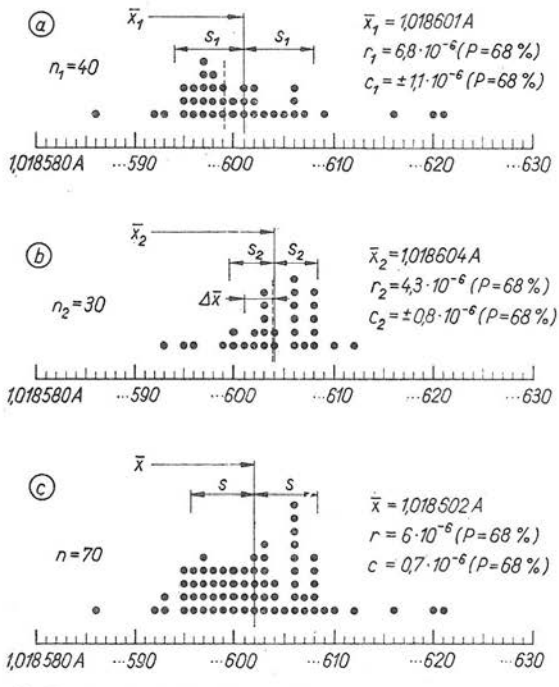
samo nešto manja od standardnog odstupanja s_2 ili s_1 i da je gotovo četiri puta veća od nepouzdanosti $C_2(P=68\%) = \bar{x}_2 c_2 = \pm 0{,}8\ \mu\mathrm{A}$! Tendenciju pomicanja srednje

vrijednosti udesno engleski su metrolozi otkrili već nakon prvih nekoliko mjerenja u drugom nizu. Zato su odmah nakon tog otkrića, tj. prije završetka drugog mjernog niza, pokušali otkriti uzrok pomicanju. U tu svrhu nekoliko su puta iznova namjestili velike svitke (sl. E.24) i pomične svitke te poduzeli niz drugih ispitivanja.

Unatoč tridesetgodišnjem iskustvu sa strujnom vagom (*P. Vigoureux* mjerio je istom strujnom vagom i prilikom eksperimenata godine 1936!), nisu mogli otkriti uzrok pomaku $\Delta\bar{x}=3\,\mu A$. U toku mjerenja godine 1962. i 1963. mjerni je postupak, doduše, poboljašavan, tj. uvođene su sve rafiniranije korekcije, ali one su prema procjeni engleskih metrologa mogle pridonijeti nekoliko desetinki mikroampera, a nikako nekoliko desetaka puta više, tj. 3 μA. Uzrok pomaku $\Delta\bar{x}=3\,\mu A$ nisu otkrili ni do sredine godine 1968. Zato taj pomak smatraju posljedicom *sistematske pogreške zasad nepoznatog uzroka.*

Rezultate engleskog reprodukcijskog eksperimenta komentirali smo toliko podrobno zato što se strujna vaga u NPL smatra najpreciznijom na svijetu i što metrolozi NPL imaju najbogatije iskustvo s njom. Unatoč tome oni su se našli u neprilici kad su se morali odlučiti koju vrijednost da usvoje kao srednju vrijednost. Mogli su se, na primjer, odlučiti da »konačnu« srednju vrijednost $\bar{x}$ izračunaju kao *opću srednju vrijednost* (odlomak A.3.5.1). U tom bi slučaju dobili

$$\bar{x}=\frac{p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2}{p_1+p_2}=1{,}018\,603\,\mathrm{A},$$



Sl. E.29. Grafički prikaz najnovijih rezultata mjerenja struje $I(\mathrm{N})=E(\mathrm{N})/R(\mathrm{N})$ koju pohranjuju engleske grupne normale napona i otpora. Mjerenja su izvedena pomoću strujne vage prikazane slikom E.24, za koju se smatra da je najpreciznija i najtačnija na svijetu

a) rezultati prvog niza od 40 ponovljenih mjerenja obavljenih u toku mjeseca oktobra i novembra godine 1962; b) rezultati drugog niza od 30 mjerenja obavljenih u toku februara, marta i aprila 1963; c) rezultati oba mjerna niza prikazani zajedno. Simboli označuju: n — broj ponovljenih mjerenja, $\bar{x}$ — srednju vrijednost, s — standardno odstupanje, r — relativno standardno odstupanje (preciznost), c — relativnu nepouzdanost, P — statističku sigurnost, crtkana vertikala — medijan

gdje faktori utjecaja iznose $p_1=(K/c_1)^2=0{,}86$ i $p_2=(K/c_2)^2=1{,}60$ ako se za konstantu odabere $K=1\cdot10^{-6}$. Pripadna relativna nepouzdanost tako izračunate opće srednje vrijednosti iznosila bi prema jednadžbi (A.3.5-7) $c=\pm0{,}64\cdot10^{-6}\approx\approx\pm0{,}6\cdot10^{-6}(P=68\,\%)$.

Metrolozi u NPL odlučili su se, međutim, na drukčije rješenje: svih $n=n_1+n_2=70$ mjernih rezultata razmatrali su kao *jedan* mjerni niz (sl. E.29c), tj. pretpostavili su da svaki od 70 rezultata ima jednaki utjecaj, težinu. Postupkom kakav

smo primijenili pri izračunavanju $\bar{x}_1$ i $\bar{x}_2$ možemo iz $n=70$ rezultata saznati karakteristične veličine (medijan se podudara sa srednjom vrijednošću):

srednja vrijednost $\bar{x}=1{,}018\,602$ A,
standardno odstupanje $s=6\cdot10^{-6}$ μA ($P=68\%$),
relativno standardno odstupanje $r=s/\bar{x}=5{,}9\cdot10^{-6}\approx6\cdot10^{-6}$ ($P=68\%$),
relativna nepouzdanost $c=r/\sqrt{n}=\pm0{,}7\cdot10^{-6}\approx\pm1\cdot10^{-6}$ ($P=68\%$),
relativna nepouzdanost $c=4\,c(P=0{,}68)=\pm2{,}8\cdot10^{-6}\approx\pm3\cdot10^{-6}(P=0{,}99994)$.

Na temelju provedene analize rezultatâ ponovljenih mjerenja moramo donijeti dvije procjene: kolika je *preciznost* postupka mjerenja strujnom vagom i kolika je *nepouzdanost* izračunate srednje vrijednosti? U pogledu preciznosti postupka ne moramo se mnogo dvoumiti, jer ako odaberemo

$$\text{relativno standardno odstupanje } r=7\cdot10^{-6}(P=0{,}68),$$

time vrlo dobro obuhvaćamo čitavo područje unutar kojeg je došlo do prije opisanog pomicanja srednje vrijednosti (usporedi međusobno sva tri crteža na sl. E.29).

U pogledu relativne nepouzdanosti mnogo se teže odlučujemo na stanovitu procjenu, jer smo suočeni s ovom činjenicom: dok izračunata nepouzdanost srednjih vrijednosti u sva tri slučaja (sl. E.29a, b, c) iznosi oko $C=c\bar{x}=\pm1$ μA ($P=0{,}68$), pomak dviju srednjih vrijednosti iznosi 3 puta više, $\Delta\bar{x}=3$ μA! Taj pomak uzrokovala je sistematska pogreška E nepoznate vrijednosti i nepoznatog uzroka. Možemo se nadati da nećemo mnogo pogriješiti ako procijenimo tu *preostalu* sistematsku pogrešku (sve poznate sistematske pogreške uzete su u obzir prije iskazivanja rezultata na slici E.29). Time, u stvari, odustajemo od primjene pojma nepouzdanost C na razmatrani slučaj i uvodimo pojam *nesigurnost* U koji smo definirali u odlomku A.3.8.1. Ako na temelju slika E.29 *procijenimo* vrijednost preostale sistematske pogreške sa $E=3$ μA, jednadžba (A.3.8-2) daje nam nesigurnost vrijednosti struje izmjerene strujnom vagom

$$U=\pm\{|C|+|E|\}=\pm(1\ \mu\text{A}+3\ \mu\text{A})=\pm4\ \mu\text{A}\ \text{ uz }\ P=68\%.$$

Pripadnu relativnu nesigurnost u izračunavamo pomoću jednadžbe (3.4-4) u odlomku A.3.8.2:

$$u=\frac{U}{\bar{x}}=\frac{\pm4\,\mu\text{A}}{1{,}018\,\text{A}}=\pm4\cdot10^{-6}=\pm4{:}10^{6}\ \text{ uz }\ P=68\%.$$

Naznaka statističke sigurnosti P ovdje, zapravo, nije jako važna, jer zbog velikog udjela E utjecaj C nije znatan. Tako bismo, na primjer, za $P=95\%$ ($z=2$, vidi tablicu A-8) dobili

$$u=\pm(2\cdot10^{-6}+3\cdot10^{-6})=\pm5\cdot10^{-6}\ \text{ uz }\ P=95\%,$$

dakle neznatno drukčiji rezultat od onoga uz $P=68\%$. Prema tome možemo vjerovati da se polazna elektromagnetska jedinica može u naše vrijeme utvrditi unutar granica nesigurnosti

$$1\ \text{A}(1\pm4\cdot10^{-6})=1\ \text{A}\pm4\ \mu\text{A}.$$

Tu granicu konstatirali su i stručnjaci američkog metrološkog zavoda NBS prilikom svog reprodukcijskog eksperimenta godine 1958. To je, dakle, sam vrh metrologije elektromagnetizma.

Nema sumnje da će metrolozi u NPL i NBS otkriti, možda već uskoro, uzrok i pravu vrijednost sistematske pogreške E koju smo *procijenili* sa 3 μA ne znajući njen predznak. Time će ona postati *korekcijom*, pa će se umjesto nesigurnošću U reprodukcija ampera karakterizirati nepouzdanošću C. U tom će se slučaju vrh metrologije elektromagnetizma nalaziti pri relativnoj nepouzdanosti $c=\pm 1\cdot 10^{-6}$ ($P=68\%$), odnosno $c=\pm 3\cdot 10^{-6}$ ($P=99{,}73\%$), a to će biti još uvijek nekoliko tisuća puta lošije od vrhunske metrologije vremena i mase!

Opisani engleski eksperiment strujnom vagom pokazao je, dakle, da kroz svitke vage teče struja $I=1{,}018\,602$ A, gdje je A=A(SI), tj. jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI). Ta struja bila je jednaka onoj koju pohranjuje kombinacija naponske i otporničke normale NPL (sl. E.25). Budući da je otpor normale iznosio $R(\mathrm{N})=1\ \Omega(\mathrm{SI})$, naravno u granicama pouzdanosti njegova utvrđivanja (odsječak 3.3), a napon Westonova elementa $E(\mathrm{N})=1{,}018\,587$ V(N), gdje je V(N) »engleski volt« pohranjen nacionalnom grupnom normalom (odsječak 3.5), to iz jednakosti $I=1{,}018\,602$ A$=1{,}018\,587$ V(N)/1 Ω slijedi

$$\mathrm{A(N)}=\frac{\mathrm{V(N)}}{\Omega}=\frac{1{,}018\,602}{1{,}018\,587}\mathrm{A}=(1+15\cdot 10^{-6})\mathrm{A}.$$

To znači da je godine 1963. engleski amper A(N) bio za 15 milijuntinki veći od ampera SI reproduciranog strujnom vagom. Preciznije valja gornji rezultat zabilježiti u obliku

$$\mathrm{A(NPL,\ 1963)}=[1+(15\pm 4)\cdot 10^{-6}]\ \mathrm{A},$$

gdje je naznačena nesigurnost veze A(N) i A=A(SI). Pomoću gornjeg odnosa izračunata je vrijednost žiromagnetske konstante protona, nekorigirane za dijamagnetizam, u jedinicama SI

$$\gamma=2{,}675\,13\,(1\pm 5\cdot 10^{-6})\cdot 10^{8}\ \mathrm{C/kg}.$$

Ovdje je C=coulomb=As. Prethodno je, naime, vrijednost konstante γ bila izražena jedinicom C(N)=A(N) s, jer je bila izmjerena u odnosu prema engleskim nacionalnim normalama (vidi i podatke u odlomku 1.5.5).

3.1.6. Poteškoće pri mjerenju strujnom vagom. Pri kraju odlomka 3.1.1 naznačili smo glavne uzroke tome da se ni najboljom strujnom vagom ne može bitno poboljšati preciznost mjernog postupka. Vjerujemo da je zanimljivo detaljnije navesti koji su ostali uzroci i kako se njihov štetan utjecaj pokušava smanjiti. Pri tom opisu ponovno ćemo se poslužiti podacima iz NPL od godine 1963, jer je njihova vaga najbolja, a eksperiment najnoviji. Evo najprije nekompletnog, iako dugačkog popisa uzroka koji dovode do relativne nesigurnosti $\pm 4\cdot 10^{-6}$ (odlomak 3.1.5) mjernog rezultata polučenog strujnom vagom: nepouzdanost poznavanja izmjera pojedinih dijelova strujne vage, nedovoljna krutost vage, njena ograničena i promjenljiva osjetljivost, nepouzdanost vrijednosti ubrzanja zemljine teže, necentričnost svitaka, nepouzdanost poznavanja njihova položaja, neparalelnost svitaka, utjecaj promjene temperature, iako su stvoreni takvi uvjeti da se ona koleba u vrlo uskim granicama, starosne promjene visine i polumjera svih svitaka, analogne promjene izmjera žica svitaka, pojavljivanje termonapona u strujnim krugovima, nesigurnost očitavanja na skali vage, te niz uzroka za koji se ili ne zna ili ih ni najiskusniji specijalisti ne znaju objasniti.

Stalnost temperature u toku mjerenja strujnom vagom bezuvjetno se mora ostvariti, jer i najmanje promjene temperature bitno mijenjaju vrijednost veličine

$\partial M/\partial x$ u jednadžbama (3.1-8, 10). Taj utjecaj lijepo se može uočiti u odlomku 3.3.5 (vidi i kraj odlomka 3.1.3). Zato je u toku reprodukcijskog eksperimenta u NPL, dakle u toku 7 mjeseci (pripremni radovi nisu uračunati), poseban vodni sistem za grijanje održavao temperaturu prostorije u kojoj se nalazi vaga u rasponu između 18 i 20,5 °C. U jednom danu izvršili su po dva kompletna mjerenja, a između njih je bila stanka 4...5 sati da bi se temperature sastavnih dijelova vage, koji se zagrijavaju za vrijeme vaganja, izjednačile s okolinom. Svi rezultati svedeni su na stanovitu vrijednost temperature, što je učinjeno pomoću zakona prirasta sistematskih pogrešaka (odsječak A.4.3).

Nakon prvog niza od 40 ponovljenih mjerenja struje (odlomak 3.1.5) opsežnim su mjerenjem utvrđene izmjere svih svitaka. Tako je, na primjer, izmjereno po 40 promjera na svakoj polovici nepomičnog namota, 50 promjera na manjem, niz aksijalnih razmaka itd. Ta mjerenja bila su malobrojnija od onih godine 1932, kada je vaga u NPL izrađena. Iskustvo, naime, pokazuje da se nepravilnosti raspodjele žice na tijelima svitaka ne mijenjaju s vremenom, a te nepravilnosti raspodjele utvrđene su opsežnim mjerenjima godine 1932. Zato su godine 1962. mjerenjem ustanovili samo *razlike* izmjera koje su nastale u toku 30 godina. Promjer gornje polovice nepomičnog svitka smanjio se za 5,7 μm (7,9), promjer donje za 5,9 μm (8,1), a promjer pomičnog svitka za 4,7 μm (2,1). Podaci ispred zagrade odnose se na jedan krak vage (lijevi), a podaci u zagradi na drugi.

Na temelju spomenutih rezultata mjerenja izmjerâ svitaka, njihovih udaljenosti i položaja te uz pomoć izmjera utvrđenih godine 1932, izračunata je konstanta H strujne vage NPL pri temperaturi 18 °C. Njena vrijednost iznosi $H=$ $=0{,}037\,822\,790$ N/A^2, gdje je N kratica jedinice sile SI newton. Ta konstanta ulazi u jednadžbu

$$F=HI^2, \tag{3.1-11}$$

koja za konkretnu strujnu vagu (sl. E.24) zamjenjuje izraz (3.1-7). Pri tom je F zbroj svih vertikalnih elektrodinamičkih sila koje djeluje suprotno težini mjernog utega (kod istokrake vage na slici E.23 ta bi sila bila upola manja ako bismo upotrijebili isti pomičan i nepomičan svitak). Odavde je lako izračunati da masa mjernog utega mora pri ravnoteži jednakokrake vage iznositi oko 4 grama, što smo naveli u opisu slike E.24.

Budući da u konkretnoj primjeni vage NPL nepomični svici nisu stavljeni u onaj položaj za koji je konstanta $H=F/I^2$ izračunata, treba H korigirati za vrijednost $-9\cdot10^{-9}$ N/A^2, dobivenu računanjem, što je gotovo zanemarivo. Mnogo je veća jedna druga korekcija koju godine 1936. nisu uzeli u obzir. Ta korekcija posljedica je mnogobrojnih mjerenja vanjskih promjera svitaka pomoću mjernog stroja, jer pri tom dolazi do *stlačivanja* žice. Usporedbenim mjerenjima na drugim svicima slične izrade i promjera procijenjeno je, naime, da su promjeri svitaka vage za oko 0,6 μm veći nego što pokazuje mjerni uređaj. Takva promjena može uzrokovati relativnu nepouzdanost struje oko $\pm2\cdot10^{-6}$! U NPL su računanjem procijenili da zbog te pojave korekcija konstante H iznosi $1{,}49\cdot10^{-7}$ N/A^2. S navedene dvije korekcije dobiva se vrijednost konstante strujne vage NPL pri 18 °C

$$H=0{,}037\,822\,930 \text{ N/A}^2.$$

Ta konstanta upotrijebljena je pri izračunavanju mjernih rezultata koje smo razmatrali u odlomku 3.1.5 (sl. E.29).

Naponska normala (Westonov element) koja ulazi u reprodukcijski eksperiment prema slici E.25 bila je uronjena u uljnu kupku obloženu plutom. Kupka

se nalazila u istoj prostoriji gdje i strujna vaga. Bio je odabran Westonov element izrađen godine 1935. za koji se znalo da svoj napon održava ekstremno stalnim. Usporedbama s grupnom normalom napona NPL utvrđeno je da se u toku 7 mjeseci trajanja eksperimenta njegov napon nije promijenio za više od 0,1 μV. Temperatura upotrijebljenog elementa očitavana je daljinski na termometru s podjelom 0,01 °C. Pri tom se povećalom mogla procijeniti 1/10 podjele, dakle temperatura očitavati s pogreškom oko ±0,001 °C. Zanimljivo je spomenuti to da je prilikom tih mjerenja otkriveno da se temperatura Westonova elementa mijenja manje i sporije ako se ulje *ne* miješa.

Prilikom reprodukcijskog eksperimenta godine 1936. engleskim je metrolozima mnogo muka zadala radna otpornička normala nazivnog otpora 1 Ω, jer je nepouzdanost njenog otpora bila znatna. Zato su godine 1962. pažljivo odabrali takvu normalu za koju su prethodna višegodišnja praćenja pokazala da joj je otpor izvanredno stalan. Da bi doista predstavljala 1 Ω(SI), što je indirektno izmjereno u odnosu prema međuinduktivnom standardu, trebalo je njen otpor smanjiti za oko 0,2 mΩ. Stručnjaci NPL nisu mjerili samo ovisnost promjene otpora normale o promjeni temperature već i promjenu otpora u ovisnosti o jakosti struje i o intenzivnosti miješanja rashladnog ulja u koje je otpornik bio uronjen. Pri tom su jakost struje povećavali gotovo od nule do 1,02 A. Temperaturu su očitavali relativno grubim termometrom, njegova podjela iznosila je 0,1 °C. To, međutim, zadovoljava traženoj preciznosti, jer je temperaturni koeficijent otpora pri 19 °C jednak nuli, a pri 20 °C iznosi $-1 \cdot 10^{-6}/°C$. U toku reprodukcijskog eksperimenta otpor upotrijebljene radne normale često su mjerili u odnosu prema otporu grupne normale NPL. Stvarnu (apsolutnu) vrijednost otpora grupne normale utvrdili su posebnim mjerenjem, tj. u odnosu prema međuinduktivnom standardu otpora (vidi odlomak 3.3.3). Ta mnogostruko ponavljana mjerenja pokazala su da otpor radne normale 1 Ω u prosjeku raste za oko jednu milijuntinku u toku četiri mjeseca.

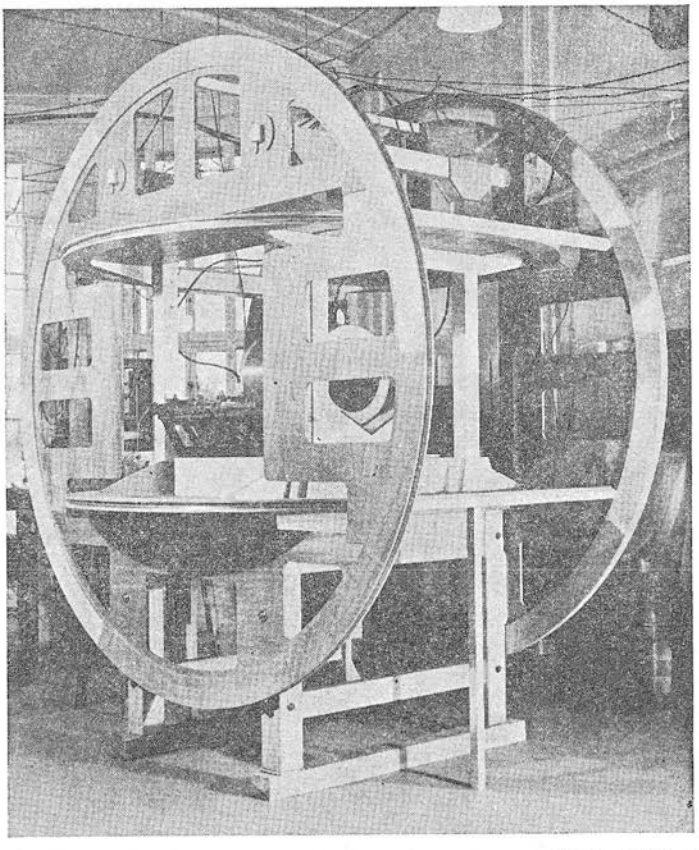
Budući da termonapon u galvanometarskom krugu valja uzeti u obzir korekcijom prilikom obrade rezultata mjerenja struje, u NPL su taj napon mjerili prije i nakon svakog vaganja. U tu svrhu za trenutak su prekinuli mjerenu struju, naponsku normalu isključili iz strujnog kruga (pomoću sklopke koja se sastoji od bakrenih štapova i čašica sa živom) i očitali otklon galvanometarske zrake. Osjetljivost galvanometra iznosila je 1 nanoamper (n=nano=10^{-9}) po milimetru otklona na skali udaljenoj 2,64 m, a otpor galvanometra (zajedno sa shuntom, kritično prigušenje) 20,3 Ω. Budući da se pri tom u krugu nalazila samo normala otpora 1 Ω, termonapon po milimetru otklona iznosio je oko 20 Ω · 1 nA=0,02 μV.

3.2. Reproduciranje ampera pomoću indiciranja nuklearne rezonancije

3.2.1. Prikladnost nuklearnog pramjerila ampera. Opis strujnih vaga u odsječku 3.1 pokazao nam je da reproduciranje stanovite vrijednosti struje *I* pomoću njih predstavlja čitav pothvat znanstvene metrologije. Ustanovili smo da najbolja od takvih vaga, najnovija u engleskom metrološkom zavodu National Physical Laboratory (sl. E.24), može reproducirati istosmjernu električnu struju (vrijednosti bliske 1 A) s relativnom nesigurnošću koja u najboljem slučaju iznosi oko $\pm 4 \cdot 10^{-6}$. Letimičan i nepotpun opis rukovanja strujnom vagom mogao nam je pružiti stanovit uvid u dugotrajnost i teškoće reproduciranja jedinice električne struje SI »amper«.

Tom prilikom mogli smo steći stanovitu predodžbu o skupoći strujne vage — pramjerila ampera. Ta skupoća ne sastoji se samo od troškova izrade pramjerila,

već i od njegova održavanja te školovanja i financiranja kontinuiranog rada metrologa na tom području. Sve te troškove teško mogu podnositi male zemlje, pogotovo ako njihove industrije nisu na tolikoj razini da im je slog pramjerila elektromagnetskih jedinica doista neophodan.



Sl. E.30. Uređaj za mjerenje žiromagnetske konstante protona u National Physical Laboratory (NPL). Dva vertikalna i dva horizontalna svitka, namotana na kružnim drvenim okvirima promjera preko 2 metra, služe za neutralizaciju magnetskog polja Zemlje. Istosmjerno magnetsko polje B (usporedi sa slikom E.8) proizvodi se solenoidom (u sredini između 4 okvira), koji je izrađen tako da je na mramorni cilindar helikoidno namotan jednoslojni svitak. Rezonantno sredstvo nalazi se u središtu solenoida. (Foto: NPL. S dopuštenjem NPL. British Crown Copyright)

Rezultati opsežnih istraživanja nuklearne rezonancije (vidi odsječak 1.5) nakon drugog svjetskog rata omogućili su da se i metrološki zavodi manje bogatih zemalja opreme *jeftinijim* pramjerilom električne struje, takozvanim *nuklearnim pramjerilom ampera*. Ideja nuklearnog pramjerila (autor ove knjige predložio je nuklearno pramjerilo pod nazivom »protonski rezonator« godine 1960) nametnula se proučavanjem metode *mjerenja* žiromagnetske konstante protona; tu metodu opisali smo u odlomku 1.5.4. Tamo smo utvrdili da se vrijednost žiromagnetske konstante može saznati tako da se u konstantnom magnetskom polju *poznate* indukcije

B izmjeri frekvencija f drugog (poprečnog) polja B_v kojim se izaziva nuklearna rezonancija (vidi sl. E.8). Prilikom najpreciznijih mjerenja *prirodne konstante* γ (odlomak 1.5.5) stalno polje B proizvodi se *solenoidom* (vrijednost izmjeničnog poprečnog polja B_v ne treba precizno poznavati). Dio uređaja za mjerenje γ u engleskom National Physical Laboratory prikazuje slika E.30; solenoid se nalazi u središtu čitavog uređaja, a rezonantno sredstvo (npr. voda) smješteno je na osi u središtu solenoida.

Magnetsko polje na svakom mjestu u šupljini solenoida može se *izračunati* (odlomak 3.2.3) ako su poznate sve potrebne izmjere $L, u, v, z, \ldots$ solenoida, koordinate l, r, φ mjesta gdje se nalazi rezonantno sredstvo, permeabilnost μ atmosfere, broj zavoja svitka N i *jakost struje* I koja kroz njih teče itd. Prema tome magnetska indukcija B u šupljini solenoida funkcija je niza veličina

$$B = B(\mu, N, I, L, u, v, z \ldots) \tag{3.2-1}$$

i tu funkciju treba znati prilikom mjerenja γ. Polje B može se, dakako, proizvesti i tzv. *Helmholtz*ovim ili *Maxwell*ovim svicima, a ne baš solenoidom, ali se i u tom slučaju mora što je moguće preciznije poznavati odgovarajuća funkcija nalik na (3.2-1).

Uz pretpostavku (3.2-1), vrijednost žiromagnetske konstante protona γ dobiva se pomoću jednadžbi (1.5-13), koje ćemo ovdje ponovno zabilježiti

$$B = Kf, \quad \text{gdje je} \quad K = 2\pi/\gamma. \tag{3.2-2}$$

Slovo f predstavlja pri tom *izmjerenu* frekvenciju poprečnog polja. Lijeva jednadžba objašnjava mogućnost primjene uređaja sa slike E.30, koji ćemo nazivati *nuklearno pramjerilo ampera*, za reprodukciju električne struje: ako je poznata *prirodna konstanta* K (precizno je izmjerena, na primjer, u NPL; vidi tablicu E-3 i odlomak 3.2.2), svaki metrološki zavod može — pomoću uređaja sličnog onom na slici E.30 — reproducirati željenu vrijednost struje I (≈ 1 A), ako zna funkciju (3.2-1) *svog* solenoida te ako *izmjeri* rezonantnu frekvenciju f. Podrobnije ćemo tu mogućnost objasniti pri kraju odlomka 3.2.2.

Relativna nepouzdanost $\Delta I/I$ struje I reproducirane nuklearnim pramjerilom bit će nešto *lošija* od relativne pogreške s kojom poznajemo konstantu K. Budući da tu konstantu ne možemo, naime, izmjeriti preciznije nego što je relativna nesigurnost struje reproducirane najboljom strujnom vagom ($\pm 4 \cdot 10^{-6}$), to je očito da će struja nuklearnog pramjerila biti nepouzdanija. Vjerojatno se može računati da će relativna nepouzdanost iznositi oko

$$c_I = \frac{\Delta I}{I} = \pm 6 \cdot 10^{-6}, \tag{3.2-3}$$

gdje je uključeno $\pm 4 \cdot 10^{-6}$ uzrokovano nesigurnošću strujne vage prilikom mjerenja K. Pri tom se, dakako, pretpostavlja da je nuklearno pramjerilo izrađeno u skladu s današnjim mogućnostima tehnologije i fine mehanike (o tome vidi odsječak 3.3, gdje je, među ostalim, riječ o međuinduktivnom svitku čiji se međuinduktivitet dobiva preciznim proračunom funkcije slične jednadžbi 3.2-1; problemi njegove izrade slični su, naime, onima pri izradi solenoida za nuklearno pramjerilo ampera).

Došavši tako do predodžbe o načelu djelovanja nuklearnog pramjerila, možemo postaviti logično pitanje: zar ne bismo mogli eliminirati strujnu vagu kao pramjerilo struje i nadomjestiti ga nuklearnim pramjerilom, *propisavši* konstanti K *tačnu*

vrijednost K_0? Ta time bismo izbjegli relativnu nesigurnost $\pm 4 \cdot 10^{-6}$ koju u (3.2-3) unosi strujna vaga! U svojim prvim raspravama o primjeni nuklearne rezonancije za reproduciranje stanovite vrijednosti I struje, autor ove knjige smatrao je da se to može učiniti bez ikakvih štetnih posljedica (danas još tako misle i mnogi strani metrolozi). Zamjena se, na žalost, *ne može* izvesti bez *dalekosežnih* posljedica. Objašnjenje te konstatacije može se naći u odlomku 3.2.4.

3.2.2. Zamisao o nuklearnom pramjerilu. Razmatranja u prošlom odlomku pokazala su nam da se nuklearna rezonancija može upotrijebiti za reprodukciju stanovite vrijednosti električne struje u slučaju ako je udovoljeno jednadžbi (3.2-2), tj. jednadžbi $B = Kf$. Pri tom je $K = 2\pi/\gamma$, gdje je γ žiromagnetska konstanta protona, a vrijednost konstante iznosi (odlomak 1.5.5):

$$K = 2{,}348\,758\,(1 \pm 5 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Ts}. \tag{3.2-4}$$

Simbol B u jednadžbi rezonancije $B = Kf$ predstavlja magnetsku indukciju na onom mjestu u nutrini solenoida (tačka M na slikama E.32), gdje se nalazi rezonantno sredstvo.

Zamislimo da upotrebljavamo solenoid koji je izrađen tako što je na neferomagnetski valjak (npr. mramor) helikoidno jednoslojno namotano N zavoja dobro vodljive žice kroz koju teče istosmjerna struja jakosti I. Duljina solenoida, tj. onog dijela duljine valjka na koji je priljubljeno jedan uz drugi N zavoja, iznosi L. Iz teorije elektromagnetskog polja znamo da u *sredini* solenoida, tj. na udaljenosti $L/2$ od krajnjeg zavoja (sl. E.32) magnetska indukcija B u *osi* solenoida iznosi

$$B = G \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L}. \tag{3.2-5}$$

Ovdje je G tzv. geometrijska konstanta solenoida koja ovisi o geometriji svitka, načinu namatanja žice, o njenim izmjerama itd. (vidi odlomak 3.2.3), a $\mu_r = \mu/\mu_0$ relativna permeabilnost atmosfere u kojoj se nalazi rezonantno sredstvo (uključivši utjecaje permeabilnosti tog sredstva i tvari od kojih je svitak izrađen). Simbol μ_0 označuje tzv. magnetsku konstantu (permeabilnost vakuuma; odlomak 1.3.2). Njena vrijednost iznosi *tačno*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}, \tag{3.2-6}$$

tj. zadana je per definitionem, a nije dobivena mjerenjem (odlomak 2.1.3).

Nuklearna rezonancija nastaje u slučaju ako B iz jednadžbe (3.2-2) ima istu vrijednost kao i B iz (3.2-5). Zato za slučaj rezonancije te dvije jednadžbe možemo izjednačiti. Tako, uz pretpostavku da se rezonantno sredstvo doista nalazi na mjestu u šupljini solenoida za koje vrijedi G iz (3.2-5), dobivamo

$$G \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L} = Kf. \tag{3.2-7}$$

Odavde slijedi linearna ovisnost struje solenoida I o izmjerenoj frekvenciji f poprečnog magnetskog polja (odlomak 1.5.4) i o novoj konstanti S:

$$I = Sf. \tag{3.2-8}$$

Konstantom S nuklearnog pramjerila obuhvatili smo sve fizikalne veličine o kojima je do sada bilo riječi

$$S = \frac{1}{\mu_0 \mu_r N} \frac{KL}{G}. \tag{3.2-9}$$

Pri izračunavanju vrijednosti konstante S nema nikakvih teškoća sa μ_0, μ_r i N: vrijednost μ_0 *tačno* je zadana jednadžbom (3.2-6), $\mu_r = \mu/\mu_0$ može se izmjeriti nadasve precizno neovisno o upotrijebljenim jedinicama, a broj zavoja N solenoida lako je tačno prebrojiti. Posve je drukčije s veličinama L i G. Duljinu L svitka konkretnog solenoida valja precizno *izmjeriti* (odlomak 3.2.3), a geometrijsku konstantu istog solenoida treba *izračunati* pomoću jednadžbe

$$G = G(u, v, z, \ldots), \tag{3.2-10}$$

koja je s iznimkom veličina μ, I, L i N funkcija istih veličina kao i jednadžba (3.2-1). Karakteristične izmjere u, v, z, ... u zagradi jednadžbe (3.2-10) moraju se, dakako, prethodno *izmjeriti*, npr. serijama najpreciznijih interferencijskih mjerenja (vidi odsječke A.8.5,6).

Pokušajmo procijeniti preciznost mjerenja (reprodukcije) struje nuklearnim pramjerilom i nepouzdanost vrijednosti struje I utvrđene takvim ponovljenim mjerenjima. Budući da između struje I i rezonantne frekvencije f postoji linearna ovisnost (3.2-8), preciznost (relativno standardno odstupanje; vidi odlomke A.3.1.3, 3.3.3) mjernog postupka možemo izračunati pomoću jednadžbe

$$r_I^2 = r_S^2 + r_f^2. \tag{3.2-11}$$

Pri tom je r_S preciznost s kojom je utvrđena konstanta S nuklearnog pramjerila, a r_f preciznost mjerenja frekvencije. Do izraza (3.2-11) došli smo pomoću jednadžbe (A.4.1-2) u poglavlju A.4, gdje se objašnjava izračunavanje preciznosti (relativnog standardnog odstupanja) indirektno mjerene fizikalne veličine. Na isti se način može izračunati ovisnost preciznosti r_S o preciznosti mjernih postupaka prilikom utvrđivanja vrijednosti veličina K, L i G (r_μ možemo zanemariti), tj.

$$r_S^2 = r_K^2 + r_L^2 + r_G^2. \tag{3.2-12}$$

Uvrštenjem netom napisanog izraza (3.2-12) u jednadžbu preciznosti mjerenja struje nuklearnim pramjerilom (3.2-11) slijedi

$$r_I^2 = r_K^2 + r_L^2 + r_G^2 + r_f^2. \tag{3.2-13}$$

Ako bismo znali funkciju (3.2-10) stvarnog solenoida, mogli bismo r_G u (3.2-12) razviti dalje u ovisnosti o karakterističnim izmjerama solenoida u, v, z, ...

Kvadratima relativnih standardnih odstupanja na desnoj strani jednadžbe (3.2-13) moramo pribrojiti još jedan koji ćemo označiti sa r_D. Ta pogreška nastaje zato što se rezonantno sredstvo ne nalazi tačno u središtu i u osi solenoida, već negdje u blizini tog središta (vidi sliku E.32d u odlomku 3.2.3). Ujedno r_D uključuje i pogrešku zbog konačnog volumena rezonantnog sredstva. Valja se, naime, podsjetiti da je geometrijska konstanta G solenoida izračunata za *tačku u središtu* osi solenoida (tačka M uz $l=0$ ili $L/2$ na slici E.32c). Uvođenjem r jednadžba (3.2-13) proširuje se u oblik

$$r_I^2 = r_K^2 + r_L^2 + r_G^2 + r_D^2 + r_f^2. \tag{3.2-14}$$

Da bismo mogli procijeniti preciznost r_I mjerenja (reproduciranja) struje I nuklearnim pramjerilom, moramo prethodno procijeniti vrijednost pojedinih pribrojnika u jednadžbi (3.2-14). Budući da relativna nesigurnost vrijednosti $K = 2\pi/\gamma$, gdje je γ žiromagnetska konstanta protona, iznosi oko $\pm 5 \cdot 10^{-6}$ (odlomak 1.5.5), a pretežno je uzrokovana sistematskom pogreškom strujne vage (odlomak 3.1.5), možemo očekivati da preciznost mjerenja veličine K pri statističkoj

sigurnosti $P=68\%$ neće premašiti $r_K=9\cdot10^{-6}$. Razmatranja uz sliku E.29 pokazala su nam, naime, da preciznost strujne vage iznosi oko $7\cdot10^{-6}$. Ostale preciznosti procjenjujemo ovako:

$$r_L=r_G=r_D=2\cdot10^{-6},\qquad r_f<1\cdot10^{-6}.$$

U valjano opremljenom metrološkom laboratoriju te se preciznosti mogu bez daljnjega postići. Uvrštenjem navedenih procjena u jednadžbu (3.2-14) dobivamo kvadrat preciznosti r_I^2:

$$r_I^2=(81+4+4+4+1)\cdot10^{-12}=94\cdot10^{-12}.$$

Odavde slijedi preciznost mjerenja jakosti struje I nuklearnim pramjerilom

$$r_I\approx10\cdot10^{-6}=1\cdot10^{-5},$$

tj. ona je nešto lošija nego što je preciznost strujne vage (odlomak 3.1.5).

Relativna nepouzdanost c srednje vrijednosti I, dobivene ponovljenim mjerenjima pomoću nuklearnog pramjerila, izračunava se jednadžbom (3.6-21) u odlomku A.3.6.6. Pri statističkoj sigurnosti $P=68\%$ ($z=1$) i broju ponovljenih mjerenja $n=25$ relativna nepouzdanost c_I srednje vrijednosti struje I iznosila bi

$$c_I=\frac{r_I}{\sqrt{n}}=\frac{10\cdot10^{-6}}{\sqrt{25}}=\pm2\cdot10^{-6}\,(P=68\%).$$

Taj je rezultat, međutim, previše optimističan. Iz njega, naime, proizlazi zaključak da je reproduciranje struje nuklearnim pramjerilom pouzdanije od reproduciranja strujnom vagom, a takav je zaključak *pogrešan*. Vrijednost konstante K najpouzdanije se utvrđuje baš strujnom vagom (vidi kraj ovog odlomka) pa, dakle, nepouzdanost c_K ne može biti bolja od oko $\pm4\cdot10^{-6}$, što smo na temelju procjene preostale sistematske pogreške utvrdili u odlomku 3.1.5. Zato možemo očekivati da će relativna nepouzdanost vrijednosti struje I izmjerene nuklearnim pramjerilom iznositi

$$c_I=\pm(4...5)\cdot10^{-6}.$$

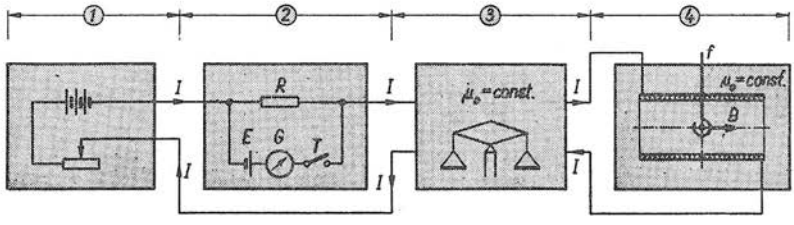
Vidimo da glavninu nepouzdanosti uzrokuje nesigurno poznavanje konstante K iz jednadžbe (3.2-4). Zato je korisno da letimično razmotrimo kako je izmjerena njena vrijednost. Pri tom ćemo se poslužiti shemom na slici E.31, koja u načelu prikazuje najpreciznije moguće utvrđivanje vrijednosti $K=2\pi/\gamma$, tj. mjerenje K pomoću *strujne vage* iz odsječka 3.1. Vrijednost struje I koja prilikom rezonancije teče kroz solenoid *4* mjerimo strujnom vagom *3*. Na slici smo vagu prikazali simbolom; on u stvari predstavlja shemu na slici E.25 (bez normala u crtkanom okviru; normale napona i otpora prikazali smo na slici E.31 posebnim blokom *2*).

U trenutku nastanka nuklearne rezonancije udovoljeno je jednadžbi $B=Kf$. U tom trenutku izmjerena je frekvencija f poprečnog polja u solenoidu (odlomci 1.5.4,5), a strujna je vaga utvrdila da jakost struje iznosi I. Prema tome mjerenjem smo utvrdili vrijednosti I i f, pa pomoću izraza (3.2-8) možemo izračunati konstantu S. Ovisnost te konstante *solenoida* (*4* na sl. E.31) o utjecajnim veličinama prikazuje jednadžba (3.2-9). Pomoću nje možemo izračunati K, dakle i žiromagnetsku konstantu protona $\gamma=2\pi/K$. Pri tom moramo što je moguće pouzdanije znati vrijednosti veličina μ_0, μ_r, N, L i G iz jednadžbe (3.2-9), jer nastaju isto onakve pogreške kakve

smo obuhvatili izrazima (3.2-11) do (3.2-14). Naglašavamo da je u toku opisanog mjerenja i računanja stalno vrijedila relacija (3.2-6), tj.

$$\mu_0 = \text{const} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m},$$

što smo u blokovima *3* i *4* na slici E.31 posebno naglasili.



Sl. E.31. Načelo mjerenja žiromagnetske konstante protona pomoću stujne vage *1* — snažna akumulatorska baterija i otpornik za namještanje jakosti struje, *2* — naponska i otpornička normala čiji se omjer E/R također može izmjeriti prilikom mjerenja konstante K, *3* — strujna vaga, *4* — solenoid u čijem se polju B nalazi rezonantno sredstvo

Sliku E.31 možemo shvatiti i kao *shemu baždarenja* solenoida *4* strujnom vagom, jer je opisanim mjerenjem utvrđena vrijednost konstante solenoida $S = I/f$. Relativna nepouzdanost njene vrijednosti bit će $c_S \approx c_I$, tj. približno jednaka relativnoj nepouzdanosti struje izmjerene strujnom vagom, jer je nepouzdanost frekvencije c_f praktički zanemariva (odlomak 1.5.6). Vjerojatno se shemom E.31 može poslužiti samo onaj metrološki zavod *koji ima* strujnu vagu. Ne postoji još, naime, iskustvo u pogledu moguće promjene veličina L i G u jednadžbi (3.2-9) ako se solenoid *4* transportira iz jednog nacionalnog metrološkog zavoda u drugi (vibracije, udarci, nagle promjene temperature itd.).

Vrijednost konstante S, utvrđena opisanim baždarenjem solenoida, nije vječna ni za vlasnika strujne vage: ako se u toku vremena pomakne položaj rezonantnog sredstva u šupljini solenoida (tačka M na slici E.32d), omjer I/f imat će neku drugu vrijednost! Prema tome krajnji je cilj sheme na slici E.31 da se pomoću istodobno izmjerenih veličina S i f i jednadžbe (3.2-9) što pouzdanije sazna vrijednost *prirodne konstante* K. Od te konstante i njene nepouzdanosti moći će pomoću jednadžbi (3.2-8,9) polaziti vrhunska mjerenja onih metroloških zavoda koji nemaju strujnu vagu, ali posjeduju nuklearno pramjerilo.

Uz sliku E.31 dužni smo jedno objašnjenje. Direktno mjerenje struje I pomoću strujne vage *3* uzrokovalo bi velike poteškoće. Zbog toga treba najprije strujnom vagom *3* izmjeriti omjer E/R naponske i otporničke normale *2*, tj. pohraniti vrijednost reproducirane struje (vidi odlomak 3.1.2), a zatim strujnu vagu *3* premostiti — isključiti iz daljnjeg eksperimenta.

3.2.3. Geometrijska konstanta solenoida. Da bismo stekli stanovit uvid u teškoće proračunavanja geometrijske konstante G iz jednadžbe (3.2-10), letimično ćemo opisati proračun magnetskog polja u šupljini solenoida. Pri tom odmah uvodimo pretpostavku koja *silno pojednostavnjuje* računanje: želimo proračunati B tačno *u osi* solenoida.

Na slici E.32a nacrtan je jedan zavoj okrugle vodljive žice; polumjer tog zavoja iznosi R. Na udaljenosti l od plohe zavoja zamislili smo u njegovoj *osi* tačku M

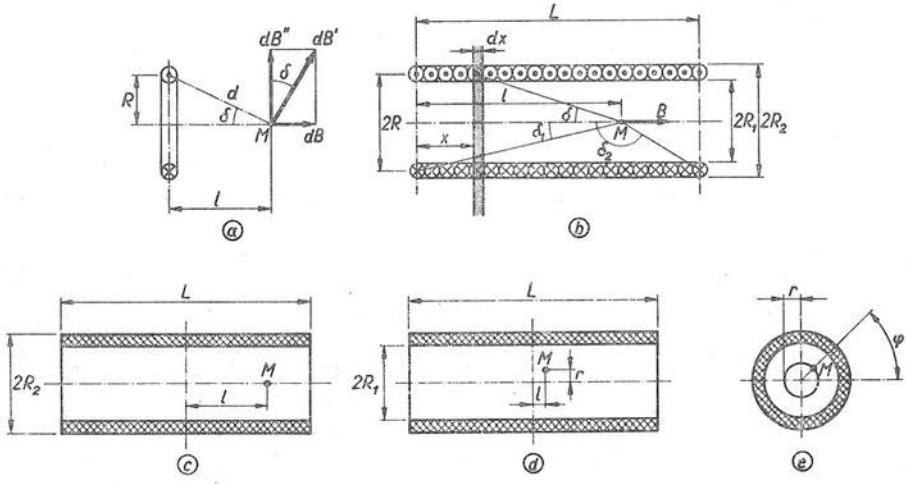
i želimo znati kolika je magnetska indukcija u njoj kad kroz zavoj teče električna struja stalne jakosti I. Odgovor nam može dati *Ampèreov* zakon u diferencijalnom obliku (vektorske oznake propuštamo)

$$\mathrm{d}B' = \mu_0 \mu_r \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi d^2},$$

koji doduše nema fizikalnog značenja, ali je vrlo koristan za proračunavanja. Orijentaciju vektora $\mathrm{d}B'$ vidimo na slici E.32a: uzduž osi, tj. okomito na ravninu zavoja, otpada komponenta $\mathrm{d}B$, a okomito na taj vektor komponenta $\mathrm{d}B''$:

$$\mathrm{d}B = \mathrm{d}B' \sin\delta, \qquad \mathrm{d}B'' = \mathrm{d}B' \cos\delta.$$

Iz slike se vidi da je kut δ definiran relacijom $\operatorname{tg}\delta = d/l$ ili $\sin\delta = R/d$.



Sl. E.32. Magnetsko polje u šupljini solenoida

Budući da je tačka M odabrana tačno na osi zavoja, očito vrijedi

$$\oint \mathrm{d}B'' = 0,$$

dok je stvarna uzdužna indukcija (u smjeru osi) u tački M

$$B = \oint \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{\mathrm{d}s}{d^2} \sin\delta.$$

Jednostavnim računanjem ovog integrala dobivamo ovisnost B o drugim veličinama

$$B = \mu_0 \mu_r I \frac{\sin^3\delta}{2R} = \mu_0 \mu_r I \frac{R^2}{2d^3}. \qquad (3.2\text{-}15)$$

Toliku magnetsku indukciju B u smjeru osi proizvodi u tački M na osi solenoid koji se sastoji od jednog zavoja (sl. E.32a) ako kroz njega teče struja I.

Jednadžbu (3.2-15) možemo primijeniti na proračun indukcije B u osi *solenoida*, tj. svitka s N zavoja (sl. E.32b). Zanima nas B u tački M, koju smo opet zamislili u osi; tačka je udaljena l od lijevog kraja solenoida. Budući da je solenoid dugačak L, a sastoji se od N zavoja kroz koje teče struja I, diferencijal solenoida ima uzbudu $NI\,\mathrm{d}x/L$. U skladu s diferencijalnom primjenom jednadžbe (3.2-15) čitav solenoid proizvodi u tački M magnetsku indukciju u smjeru osi

$$B = \mu_0 \mu_r \int_0^L \frac{NI\,\mathrm{d}x}{L} \frac{\sin^3 \delta}{2R}.$$

Iz geometrije slike E.32b razabiremo da vrijedi relacija

$$l - x = R \operatorname{ctg} \delta, \quad \text{pa je} \quad \mathrm{d}x = R\,\mathrm{d}\delta/\sin^2 \delta.$$

Uz pomoć tog izraza za $\mathrm{d}x$ od gornjeg integrala računanjem dobivamo

$$B = \tfrac{1}{2}(\cos \delta_1 - \cos \delta_2)\, \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L}. \tag{3.2-16}$$

Ova jednadžba osnova je proračuna različitih solenoida. Za *sredinu* solenoida, kad je M na mjestu $l = L/2$ (sl. E.32b), jednadžba (3.2-16) dobiva oblik

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 + (2R/L)^2}}\, \mu_0 \mu_r \frac{NI}{I}. \tag{3.2-17}$$

Ako je solenoid vrlo *dugačak* (uzak), gornji izraz prelazi u približan oblik

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L}; \quad L \gg 2R,$$

dok za *široki* (plosnati) solenoid približno vrijedi

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{2R}; \quad 2R \gg L.$$

Obje jednadžbe vrijede samo za tačku M u *sredini* solenoida ($l = L/2$) na njegovoj osi.

Usporedimo li jednadžbu (3.2-16) sa (3.2-5) iz odlomka 3.2.2, možemo konstatirati da je vrijednost *geometrijske konstante* G solenoida u općem slučaju (tačka M na bilo kojem mjestu $0 \leqq l \leqq L$, ali na osi)

$$G = \tfrac{1}{2}(\cos \delta_1 - \cos \delta_2), \tag{3.2-18}$$

dok je u specijalnom slučaju (M na mjestu $l = L/2$, tj. u središtu solenoida)

$$G_{L/2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2R/L)^2}} = 1 - 2\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{R}{L}\right)^4 - \cdots,$$

što smo dobili usporedbom jednadžbi (3.2-5,17).

Iz ovog bismo razmatranja mogli zaključiti da je geometrijsku konstantu G solenoida vrlo jednostavno i lako izračunati. Na žalost, nije tako! Ne smijemo, naime, smetnuti s uma da smo računanje B u šupljini solenoida prešutno započeli

s nekoliko *zanemarenja*, a ona su nedopustiva kad je riječ o željenoj pouzdanosti $\Delta G/G \approx \pm 1 \cdot 10^{-6}$ poznavanja G! Jedno od zanemarenja je ignoriranje *debljine žice*. Na desnoj strani solenoida (vidi sliku E.32) podrobno smo naznačili stvarnu razliku između vanjskog R_2 i unutarnjeg polumjera R_1 solenoida. Dok u uobičajenim tehničkim proračunima ova razlika ne igra nikakvu ulogu, ovdje je ona od presudne važnosti, jer je solenoid sastavni dio nuklearnog *pramjerila*, dakle jednog od temelja vrhunske metrologije elektromagnetizma. Dodajmo još tome da je žica nesavršeno izrađena: njen promjer nije stalan, pa zato razlika $(R_2 - R_1)$ varira kako od zavoja do zavoja, tako i unutar svakog od zavoja. Za vrhunsku metrologiju te su razlike od znatnog utjecaja! U računu smo, dalje, pretpostavili da je struja I koncentrirana u tzv. strujnu nit koja prolazi kroz središte žice. To je, dakako, pogrešno, jer struja mora teći kroz vodiče konačnog presjeka. Štoviše, taj presjek mora biti znatan da ne bi dolazilo do neželjenog zagrijavanja solenoida pa time i do štetne promjene njegove duljine L. Zanemarili smo i *rubne pojave*, tj. sitne, ali za metrologiju osjetljive deformacije magnetskog polja na krajevima solenoida itd. itd.

Proračun geometrijske konstante za potrebe vrhunske metrologije mnogo je kompliciraniji od opisanog i predstavlja ogroman posao. Tako je, na primjer, godine 1952. *B. Berkeš* izradio proračun magnetskog polja solenoida iz kojeg slijedi izraz za geometrijsku konstantu (sl. E.32c)

$$G = \frac{1}{2 \ln \dfrac{R_2}{R_1}} \ln \left[\frac{A + \sqrt{A^2 + R_2^2}}{A + \sqrt{A^2 + R_1^2}} \cdot \frac{B + \sqrt{B^2 + R_1^2}}{B + \sqrt{B^2 + R_2^2}} \right], \qquad (3.2\text{-}19)$$

gdje konstante A i B imaju ova značenja

$$A = l - L/2, \qquad B = l + L/2.$$

Pri izvođenju jednadžbe (3.2-19) autor je *pretpostavio* da je namot solenoida pun, tj. kao da je riječ o jednom zavoju vodljive trake debljine $R_2 - R_1$ široke L! Naravno da se tako solenoid ne može izraditi, već jedino helikoidnim namatanjem žice kvadratičnog ili okruglog presjeka. Valja naglasiti i to da izraz (3.2-19) vrijedi samo za tačku M zamišljenu *tačno u osi* solenoida (sl. E.32c). Za M tačno u *sredini solenoida* — naravno, opet na osi — moramo u (3.2-19) staviti $l = 0$, pa dobivamo jednostavniji izraz

$$G = \frac{1}{2 \ln \dfrac{R_2}{R_1}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + (2R_2/L)^2} - 1}{\sqrt{1 + (2R_1/L)^2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1 + (2R_1/L)^2} + 1}{\sqrt{1 + (2R_2/L)^2} + 1} \right], \qquad (3.2\text{-}20)$$

koji vrijedi uz ista ograničenja kao i (3.2-19). Računanje limesa pokazuje da G iz jednadžbe (3.2-20) teži vrijednosti $G = 1$ kad $R_1 \to R_2$, tj. kad žica teoretski postaje beskrajno tanka. U tom slučaju vrijedi $B = \mu_0 \mu_r NI/L$, a to je isti rezultat koji smo dobili približenjem iz (3.2-17) kad smo pretpostavili $L \gg 2R$.

Ni citirana jednadžba (3.2-19) ne daje dovoljno pouzdanu vrijednost geometrijske konstante solenoida G kakva je potrebna za nuklearno pramjerilo električne struje I. Kad i ne bi pretpostavljala mnoga zanemarenja, jednadžba bi bila nedovoljno pouzdana već zbog toga jer vrijedi samo za tačke M u *osi* solenoida (sl. E.32c). Središte rezonantnog sredstva možemo, međutim, samo slučajno smjestiti *tačno*

u tačku $l = L/2$ na osi. Vjerojatnije je da će središte sredstva M odstupati od središta solenoida (položaj označen na sl. E.32d,e koordinatama l, r i kutom φ). Prema tome, treba znati funkciju $G(l, r)$ u neposrednom okolišu zamišljenog središta solenoida $M(l=0, r=0)$. Pomoću takve funkcije može se procijeniti vrijednost relativnog standardnog odstupanja r_D u jednadžbi (3.2-14).

Gornja razmatranja možemo sažeti ovako: teoretskim istraživanjima mora se pronaći funkcija $G = G(R_1, R_2, L, l, r \ldots)$ koja će odgovarati pouzdanosti koja se traži od jednadžbe (3.2-9). Pri tom istraživanju treba uzeti u obzir profil žice (okrugao ili kvadratičan), utjecaj promjene temperature na izmjere solenoida, mogućnost izrade višeslojnog namota itd. Nije naodmet reći da se prije takvog preciznog računanja mora definirati što se zapravo razumijeva pod duljinom solenoida L. Da je to potrebno, uvjerava nas slika E.32b, koja ponešto karikirano ističe izmjere žice. S druge strane, međutim, ta slika ne pokazuje činjenicu da se ravnine zavoja solenoida ne nalaze pod kutom $\pi/2$ prema osi solenoida, već pod manjim.

Na važnost poznavanja geometrijske konstante G solenoida pokušali smo upozoriti zato što su slični problemi posve teoretske naravi postojali i prilikom proračuna međuinduktiviteta M i $\partial M/\partial x$ strujne vage (vidi odsječak 3.1) ili induktiviteta tzv. standardnih svitaka (odsječak 3.3). Na pronalaženje odgovarajućih geometrijskih funkcija, temperaturnih utjecaja i procjenjivanje pogrešaka pojedini stručnjaci nacionalnih metroloških zavoda utrošili su desetke godina života (tako su, na primjer, godine 1912. *E. B. Rosa* i *F. W. Grover* objavili Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance).

3.2.4. Posljedice zamjene strujne vage nuklearnim pramjerilom. Pri kraju odlomka 3.2.1 zapitali smo se ne bismo li skupu i dosta nesigurnu ($\Delta I/I \approx \approx \pm 4 \cdot 10^{-6}$, vidi odlomak 3.1.5) strujnu vagu mogli zamijeniti nuklearnim pramjerilom iz odlomka 3.2.2. Tom prilikom izjavili smo da je to moguće, ali da bi zamjena uzrokovala dalekosežne posljedice. Te ćemo posljedice ovdje podrobnije razmotriti.

Zamislimo da strujnih vaga uopće nema ili ne znamo da one postoje kao mjerni uređaji vrhunske metrologije. Time ujedno pretpostavljamo da ne postoji definicija *nezavisne* jedinice elektromagnetizma amper iz odlomka 2.1.4 (vidi i odlomak 2.1.3). To znači da četvrtu nezavisnu jedinicu tek moramo definirati. Stavili smo se, dakle, u položaj u kojem smo bili na početku odlomka 2.1.3, gdje još nismo znali kolika je vrijednost magnetske konstante μ_0; do vrijednosti $\mu_0 = = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2 došli smo, naime, tek pomoću jednadžbe (2.1-8) pošto smo prethodno definirali uvjete (2.1-6). Odrekavši se tako ampera kao nezavisne jedinice SI i njene (idealizirane) realizacije prema slici E.12, onemogućili smo reprodukciju svih ostalih jedinica SI elektromagnetskih veličina. Stekli smo, dakle, slobodu da po svojoj volji odaberemo način reprodukcije *četvrte nezavisne jedinice* SI (tri nezavisne jedinice već imamo definirane u mehanici; vidi odlomak 2.2.2), tj. reprodukcije nezavisne jedinice SI jedne elektromagnetske veličine.

Neovisno o izboru četvrte nezavisne jedinice, pretpostavljamo, postoji *eksperimentalno iskustvo* s nuklearnom rezonancijom. To iskustvo može se sažeti u jednadžbu

$$B = Kf \tag{3.2-21}$$

koja opisuje pokusima utvrđenu činjenicu da je indukcija B stalnog magnetskog polja proporcionalna frekvenciji f, tj. K je *prirodna konstanta* (podrobnosti o nuklearnoj rezonanciji i njenoj primjeni vidi u odsječku 1.5 i odlomku 3.2.2). Ako toj konstanti *propišemo* vrijednost K_0, na primjer

$$K_0 = 2{,}348 \cdot 10^{-8} \text{ Ts (tačno)}, \tag{3.2-22}$$

time jednadžbu (3.2-21) preinačujemo u oblik

$$B = K_0 f, \tag{3.2-23}$$

gdje je vrijednost K_0 zadana *per definitionem, a nije dobivena mjerenjem.* Uvođenjem (3.2-22) automatski prestaje valjanost jednadžbe (3.2-21), pa se u daljnjem tekstu moramo služiti isključivo formulom (3.2-23).

Pretpostavimo da jednadžbu (3.2-23) možemo upotrijebiti za definiranje četvrte nezavisne jedinice SI, tj. jedinice magnetske indukcije $[B]_M = \mathrm{T} =$ tesla. Za $B = [B]_M = 1$ T izraz (3.2-23) daje

$$f = \frac{B}{K_0} = \frac{1}{2{,}348 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Ts}} = 4{,}267453 \cdot 10^7 \frac{1}{\mathrm{s}},$$

tj. frekvencija poprečnog polja iznosi oko $f = 42{,}7$ MHz ($1/\mathrm{s} = \mathrm{Hz}$). Tako definirana nezavisna jedinica $[B]_M = \mathrm{T} =$ tesla vezana je samo s *jednom* od tri (m, kg, s ili m, N, s itd.) nezavisne jedinice definirane u mehanici (sekundom). Prema tome definiranje $[B]_M = \mathrm{T}$ pomoću jednadžbe (3.2-23) ne uključuje tu jedinicu u čvrst koherentan skup *univerzalnih* jedinica Međunarodnog sistema koji treba da vrijedi za *sve* grane tehnike i znanosti. Zato jednadžbu (3.2-23) moramo primijeniti na takav mjerni uređaj u kojem će $[B]_M$ biti funkcija *triju* nezavisnih jedinica mehanike (npr. m, s, N) i *propisane* vrijednosti K_0 iz (3.2-22).

Takav uređaj prikazuje slika E.15 u odlomku 2.2.3. Zamislimo, naime, da smo rezonantno sredstvo stavili u vakuumski raspor elektromagneta u kojem indukciju B možemo mijenjati regulacijom jakosti struje I namota. Pretpostavljamo, osim toga (odlomak 2.2.3), da imamo mjerni uređaj kojim se može mjeriti tlak $p = F/A$ kojim se privlače polovi elektromagneta kad je on uzbuđen. Jednadžba (2.2-4) opisuje ovisnost tog tlaka p o magnetskoj indukciji B u rasporu i o magnetskoj konstanti μ_0 čiju vrijednost ne znamo:

$$p = \frac{F}{A} = \tfrac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}. \tag{3.2-24}$$

U trenutku nuklearne rezonancije vrijednost veličine B iz (3.2-24) jednaka je vrijednosti B iz jednadžbe (3.2-23). Zato se za slučaj rezonancije jednadžba (3.2-23) može uvrstiti u (3.2-24), pa dobivamo

$$p = \tfrac{1}{2}\frac{K_0^2 f^2}{\mu_0},$$

odakle slijedi izraz koji je prikladniji za daljnje razmatranje

$$\mu_0 = \tfrac{1}{2}\frac{K_0^2 f^2}{p}. \tag{3.2-25}$$

Prilikom indiciranja nuklearne rezonancije u vakuumskom rasporu elektromagneta (kombinacija slika E.15 i E.8) učinili smo u mislima ovo: *izmjerili* smo frekvenciju f poprečnog polja i tlak p kojim se privlače polovi elektromagneta. Budući da smo jednadžbom (3.2-22) *propisali* tačnu vrijednost (K_0) prirodne konstante K, iz formule (3.2-25) nesumnjivo slijedi da smo opisanim eksperimentom *mjerili* vrijednost magnetske konstante μ_0.

Očito je, dakle, da su eliminacijom strujne vage i uvođenjem nuklearnog pramjerila prirodne konstante K_0 i μ_0 međusobno zamijenile uloge: za strujnu je vagu $\mu_0 = \text{const}$ per definitionem, a $K_0 = \text{var}$ u smislu nepouzdanosti vrijednosti dobivene *mjerenjem* (sl. E.31), dok je za nuklearno pramjerilo $K_0 = \text{const}$ per definitionem, a $\mu_0 = \text{var}$ u smislu pogreške izmjerene vrijednosti. Objektivno su, dakako, i μ_0 i K_0 prirodne *konstante*, ali vrijednost jedne od njih uvijek je praćena mjernom nepouzdanošću, ako drugoj propišemo tačnu vrijednost. Posljedice opisane zamjene uloga K_0 i μ_0 odrazile bi se ne samo na vrhunsku metrologiju elektromagnetizma već i na samo polazište teorije elektromagnetskih polja. U toj bi se teoriji magnetska konstanta μ_0 morala interpretirati otprilike onako kao što se danas (uz $\mu_0 = \text{const}$) čini s električkom konstantom ϵ_0 (odlomak 1.2.2).

Promjena koncepcije, tj. $K_0 = \text{const}$ umjesto $\mu_0 = \text{const}$, uzrokovala bi, dakle, znatan poremećaj. Možemo se upitati: da li bi ta promjena za uzvrat pridonijela općem unapređenju vrhunske metrologije elektromagnetizma? Odgovor se ne može dati naprečac. Najprije valja utvrditi kojim se uređajem sila elektrodinamičkog porijekla može izmjeriti najpreciznije. Očito je, naime, da taj uređaj ne može biti elektromagnet sa slike E.15, jer tlak $p = F/A$ u međupolnom prostoru ne znamo mjeriti dovoljno precizno. Morali bismo vjerojatno upotrijebiti *strujnu vagu* iz odsječka 3.1, jer ona je danas najpreciznija uređaj za uspoređivanje sila gravitacijskog i elektrodinamičkog porijekla.

Poslužimo se, dakle, strujnom vagom i stavimo rezonantno sredstvo u šupljinu pomičnog svitka. Taj svitak će, zajedno s dva nepomična, predstavljati solenoid o kojem smo raspravljali u odlomku 3.2.3. Strujna vaga će u trenutku nuklearne rezonancije utvrditi ravnotežu

$$F = I^2 \frac{\partial M}{\partial x}, \tag{3.2-26}$$

gdje je $F = mg$ (vidi jednadžbu 3.1-7 u odlomku 3.1.1). Pri tom je međuinduktivitet funkcija $M = \mu_0 Q(u, v, z, \ldots)$, a u skladu s time i

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \mu_0 Z(u, v, z, \ldots). \tag{3.2-27}$$

I ovdje i u narednim funkcijama Ψ i W slova u, v, z, ... predstavljaju mjerodavne izmjere svitaka vage solenoida, uključivši koordinatu položaja x. Uvrstimo li jednadžbu (3.2-27) u (3.2-26), dobivamo

$$F = I^2 \mu_0 Z. \tag{3.2-28}$$

Magnetska indukcija B strujne vage u sredini pomičnog svitka funkcija je jakosti struje I, broja zavoja, položaja itd., što općenito možemo prikazati funkcijom $B = \mu_0 I \Psi(u, v, z, \ldots)$. Sigurno postoji i funkcija W koja se može izračunati pomoću izmjerenih karakterističnih veličina

$$I = \frac{B}{\mu_0} W(u, v, z, \ldots). \tag{3.2-29}$$

Ni ovdje, dakako, vrijednost magnetske konstante μ_0 nije još poznata. Ako (3.2-29) uvrstimo u (3.2-28), slijedi

$$F = Z W^2 B^2 / \mu_0,$$

odakle uvrštenjem jednadžbe (3.2-23), gdje je K_0 *propisana* vrijednost, dobivamo

$$\mu_0 = Z W^2 K_0^2 \frac{f}{F}. \tag{3.2-30}$$

Ovdje su f i F *izmjerene* veličine, K_0 je *propisana*, a funkcije Z i W *izračunate* su bez poznavanja vrijednosti μ_0. Strujna vaga će nam, prema tome, izmjeriti vrijednost μ_0. Budući da je ona, kako znamo, nesavršen mjerni uređaj, dobiveni rezultat sadržavat će stanovitu mjernu pogrešku. Relativna nesigurnost iznosit će za najbolju današnju vagu (vidi odlomak 3.1.5) oko

$$\frac{\Delta\mu_0}{\mu_0} = \pm 4 \cdot 10^{-6}.$$

Ta nesigurnost ući će preko jednadžbe (3.2-9) i u konstantu S solenoida zasebnog nuklearnog pramjerila, a time i u reprodukcijsku jednadžbu (3.2-8), tj. u izraz $I = Sf$.

Odavde razabiremo da nuklearnim pramjerilom struju ne možemo reproducirati pouzdanije nego što to činimo danas pomoću strujne vage uz $\mu_0 = \text{const}$. Prema tome vagu ne možemo odbaciti tako dugo dok se ne pronađe neki precizniji (ili barem jednostavniji) uređaj kojim se *uspoređuju sile* elektrodinamičkog i gravitacijskog porijekla. Do tada valja strujne vage dotjerivati i pri tom zasebno nuklearno pramjerilo upotrebljavati kao *sekundarno pramjerilo*, dakle u smislu koji smo naznačili u odlomku 3.2.1.

Primjer. Izračunajmo koliko mora *približno* iznositi frekvencija f poprečnog polja nuklearnog rezonatora iz jednadžbe (3.2-8), ako želimo reproducirati jedinicu jakosti struje amper. Proračun će biti posve grub, a služi samo tome da nam pruži stanovit uvid u red vrijednosti frekvencije, magnetske indukcije i jakosti magnetskog polja.

Pretpostavimo da je riječ o solenoidu s omjerom $L/N = 10^{-3}$ m, što može biti slučaj ako je duljina solenoida $L = 1$ metar, a na njemu je namotano $N = 1\,000$ zavoja žice promjera 1 mm. Budući da se vrijednost geometrijske konstante G solenoida (vidi odlomak 3.2.3) samo neznatno razlikuje od broja 1, u našem ćemo grubom proračunu pretpostaviti da je $G = 1$. Isto tako pretpostavit ćemo da je $\mu_r = 1$, tj. kao da se solenoid nalazi u vakuumu. Vrijednost konstante K znamo iz odlomaka 1.5.5 i 3.2.2.

Da bismo iz $I = Sf$ izračunali frekvenciju f pri $I = 1$ A, moramo najprije saznati vrijednost konstante S konkretnog solenoida. Pomoću jednadžbe (3.2-9) dobivamo približno

$$S = \frac{2{,}348 \cdot 10^{-8}\ \text{Ts}}{1 \cdot 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m}} 10^{-3}\,\text{m} = 1{,}87 \cdot 10^{-5}\ \text{As}.$$

Pri ovom računanju poslužili smo se jednadžbama među jedinicama $\text{T} = \text{Vs/m}^2$ i $\text{H} = \text{Vs/A}$ (vidi tablicu E-4). Iz temeljne relacije $I = Sf$ za $I = 1$ A slijedi vrijednost rezonantne frekvencije

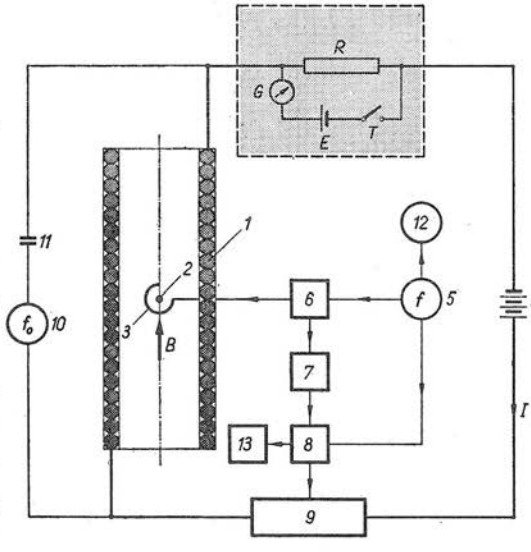
$$f = \frac{I}{S} = \frac{1\ \text{A}}{1{,}87 \cdot 10^{-5}\ \text{As}} = 5{,}35 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}} = 53{,}5\ \text{kHz}.$$

Jakost magnetskog polja u sredini solenoida iznosit će oko (odlomak 3.2.3) $H = GIN/L = 1 \cdot 1\ \text{A} \cdot 10^3/\text{m} = 1\,000\ \text{A/m}$, a pripadna magnetska indukcija

$$B = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 1000 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{T}.$$

Riječ je, dakle, o vrlo slabom polju $B = 1{,}256$ mT, koje svakako treba zaštititi od utjecaja zemaljskog magnetskog polja (sl. E.30).

3.2.5. Jugoslavensko nuklearno pramjerilo ampera. Razmatranja o nuklearnom pramjerilu započeli smo u odlomku 3.2.1 tvrdnjom da bi takvo pramjerilo bilo prikladno za reprodukciju stanovite jakosti struje u onim metrološkim zavodima koji nemaju strujne vage. Među takve mnogobrojne zavode ubraja se i jugoslavenski »Savezni zavod za mjere i dragocjene metale« (više o njemu u odlomku A.7.2.3). U vezi s time može biti od koristi da uz pomoć sheme na slici E.33 u grubim crtama skiciramo kako zamišljamo djelovanje takvog nuklearnog pramjerila. Solenoid *1* izveden je u obliku izolacijskog valjka (kremen ili neki sličan materijal), na koji je helikoidno namotana bakrena žica u jednom ili više slojeva. Na sredini osi solenoida, hlađenog uljem ili na drugi način, nalazi se rezonantno sredstvo *2* (npr. voda s dodatkom paramagnetskih iona; podrobnije o tome u odsječku 1.5), oko kojeg je namotan uzbudni svitak *3* u čijoj se nutrini proizvodi visokofrekventno magnetsko polje frekvencije f kojim će se potaći nuklearna rezonancija (usporedi sa slikom E.8). Baterija *4* velikog kapaciteta proizvodi u podebljanom strujnom krugu solenoida *1* stabilnu električnu struju jakosti I, koja u centru svitka stvara magnetsko polje indukcije B. Brojem *5* označen je stabilizirani visokofrekventni oscilator koji preko mjernog mosta napaja uzbudni svitak *3*.



Sl. E.33. Pojednostavnjena shema automatski reguliranog nuklearnog pramjerila za reprodukciju stanovite vrijednosti I električne struje

1 — solenoid, *2* — paramagnetsko sredstvo (voda), *3* — uzbudni (visokofrekventni) svitak koji proizvodi polje frekvencije f, *4* — izvor istosmjerne struje kojom se napaja solenoid *1*, *5* — stabilizirani visokofrekventni oscilator frekvencije f, *6* — mjerni most, *7* — pojačalo signala neravnoteže mosta, *8* — ispravljač, *9* — regulator, *10* — izvor niskofrekventne struje za proizvodnju superponiranog polja niske frekvencije f_0 unutar solenoida *1*, *11* — zaporni kondenzator, *12* — mjerilo frekvencije stabiliziranog oscilatora, *13* — oscilografska kontrola rezonancije, R — otpornička normala, E — naponska normala, T — tipka, G — galvanometar (nulindikator)

Nuklearno pramjerilo na slici E.33 služi u stvari za utvrđivanje vrijednosti omjera E/R naponske i otporničke normale, tj. upotrebljava se na isti način kao i strujna vaga (vidi sl. E.25 i odlomak 3.1.2). Zbog toga smo na slici E.33 obje normale za pohranjivanje vrijednosti napona i otpora istakli crtkanim okvirom. Prilikom udovoljenja uvjetu nuklearne rezonancije $I = Sf$, mjerni most *6* je uravnotežen. No tako dugo dok uvjet $I = Sf$ nije ispunjen, most *6* daje signal neravnoteže koji se vodi u pojačalo *7*. Tako pojačani signal ispravlja se i glača u ispravljaču *8*, odakle se napaja regulator *9* jakosti istosmjerne struje I. Taj regulator mijenja jakost struje tako dugo dok ne iščezne signal neravnoteže mosta, tj. dok nije udovoljeno jednadžbi $I = Sf$ kada nastaje pojava nuklearne rezonancije. Za vizuelnu kontrolu ispunjenja uvjeta $I = Sf$ brine se izvor napona *10* industrijske frekvencije f_0, koji preko

zapornog kondenzatora *11* napaja solenoid *1* u svrhu indikacije rezonancije na oscilografu *13*. Podrobnije smo indikaciju razmatrali u odlomku 1.5.6.

Korisno je da ovdje naznačimo neke od teškoća s kojima se susreće primjena svih pramjerila u čijoj su osnovi svici (vidi odsječak 3.3 i odsječak 3.1), dakle i primjena nuklearnog pramjerila. To su *štetni utjecaji* koji pogoršavaju nepouzdanost $\Delta I/I$ reprodukcije željene vrijednosti struje $I = Cf$. Prvo su štetni utjecaji *okoline*. Među ove idu zemaljsko magnetsko polje, polja kozmičkih čestica i utjecaj feromagnetskih predmeta koji se nalaze u okolini pramjerila. Kod relativne nepouzdanosti kao što je $\pm 5 \cdot 10^{-6}$ smetnje uzrokuje čak magnetičnost opeke i cementa građevine u kojoj se nalazi aparatura! Eliminiranje tih smetnji predstavlja velik problem. Jedno od rješenja je montaža pramjerila u male razbacane paviljone od kojih se danas sastoje moderne metrološke institucije. Zbog toga se i čuvene institucije kao što su američka i njemačka sele dalje od gradova, gdje postoje jaki štetni utjecaji civilizacije i njenih tehničkih tekovina na preciznost mjerenja. U bližu okolinu možemo ubrojiti i pojedine elektronske aparature koje pripadaju pramjerilu. Ni utjecaje tih uređaja nije lako posve izbjeći, ali se oklapanjem i primjenom dobro uzemljenih koaksijalnih kabela ipak mogu eliminirati.

Poseban problem tvore stalnost *temperature* prostora u kojem se nalaze uređaji, kao i temperatura samih uređaja. To je osobito važno za solenoid *1* na slici E.33. Znamo, naime, da prema jednadžbi (3.2-9) konstanta S solenoida izravno ovisi o duljini L svitka, a geometrijska konstanta G (vidi odlomak 3.2.3) o pojedinim karakterističnim izmjerama solenoida (u, v, z, . . .). S obzirom na potrebu izvanredno pouzdanog poznavanja izmjerâ (odlomak 3.2.2) — a mogućnosti mjerenja s relativnom pouzdanošću $\pm 1 : 10^8$ postoje (vidi odsječke A.8.5,6 i E.3.3) — očito je da i najmanje promjene temperature mogu znatno promijeniti izmjere solenoida, pa onda stvarna vrijednost konstante S nije više jednaka proračunatoj u izrazu $I = Sf$. Za utjehu valja reći da s dosadašnjim pramjerilima (strujna vaga, standardni svici itd.) u stranim metrološkim zavodima postoji bogato i uspješno iskustvo u pogledu takvog manipuliranja pramjerilima da se temperatura održava unutar potrebnih granica. Slični su, iako blaži, problemi održavanja stalne vlažnosti i tlaka, eliminiranja vibracija, utjecaja starenja materijalâ itd.

Posebnu teškoću uzrokuje *pozicioniranje* rezonantne tvari na željeno mjesto u šupljini solenoida, tj. na ono mjesto za koje vrijedi proračun konstante S iz jednadžbe (3.2-9). Najpouzdanije se pozicioniranje može izvesti interferencijskim metodama koje smo opisali u poglavlju A.8.

Već iz ovog šturog opisa uvjetâ pod kojima se nuklearno pramjerilo može pravilno upotrebljavati, nedvosmisleno proizlazi kako mora biti opremljen metrološki zavod (pri tom nećemo dodirivati pitanja odgoja i usavršavanja stručnjaka metrologa):

1. Zgrada ili paviljon moraju biti locirani i izgrađeni tako da su seizmički utjecaji, vibracije, parazitna polja i drugi štetni utjecaji okoline svedeni na minimalnu moguću mjeru.

2. Stalnost temperature i vlažnosti ispitne prostorije mora biti održavana otprilike onako kao pri upotrebi strujne vage (odlomak 3.1.6).

3. Zavod mora raspolagati opremom za interferencijsko mjerenje duljine (poglavlje A.8) i najpreciznijim vagama (odsječak A.9.3).

4. Zavod mora biti osposobljen za precizno mjerenje frekvencije napona, i to napona niskih frekvencija (0 do 150 Hz) i srednjih frekvencija (reda desetak

kHz). Pri tom može surađivati i sa zvjezdarnicom ili drugim institutima koji imaju razvijenu metrologiju vremena (odsječak A.10.8).

5. U Zavodu moraju postojati slogovi naponskih i otporničkih normala za pohranjivanje njihova omjera E/R (odlomak 3.1.2) čija se vrijednost povremeno utvrđuje nuklearnim pramjerilom. Slogovi normala moraju se održavati u propisanim uvjetima (odsječci 3.5 i 3.6).

6. Uz nuklearno pramjerilo moraju postojati standardni svici (odsječak 3.3), kompletirani pripadnim mjernim mostovima i drugom opremom. Tim svicima utvrđuje se vrijednost R, čime se uz pomoć $I = E/R$ (dobiveno nuklearnim pramjerilom) može utvrditi vrijednost E koju pohranjuje slog naponskih normala.

7. Neophodni su mjerni mostovi za uspoređivanje primarnih zavodskih normala s uporabnima.

8. Metrologija temperature mora biti barem na tolikoj razini koliko to zahtijeva neophodna pouzdanost poznavanja geometrijske konstante G solenoida i drugih svitaka.

Na temelju navedenih osam tačaka — nepotpunih i dodirnutih samo nasumce — nedvojbeno se nameće zaključak: elektromagnetska metrologija ne može se unaprijediti ako nije razvijena metrologija duljine, sile, temperature, vremena itd. Ili drugim riječima: metrologija jedne zemlje može se unapređivati samo kao *cjelina*.

Vrhunska nacionalna metrologija ne može se *odjednom* radikalno unaprijediti, čak ni u slučaju ako se stručnjacima stave na raspolaganje ispravno planirana sredstva, laboratoriji, specijalizacije itd. Tako je, na primjer, trebalo proći oko 20 godina (1948...1968) da bi se kanadski nacionalni metrološki zavod National Research Council uvrstio među najkvalitetnije zavode svijeta. Iako ima svega oko 20 milijuna stanovnika, dakle koliko i Jugoslavija, Kanada je shvatila da joj takav zavod treba, iako vrhunske metrološke usluge može kupovati od svog susjeda, metrološke velesile, USA. Poučan je i primjer australskog metrološkog zavoda National Standards Laboratory, koji je u toku prošlih 10 godina stao uz bok vodećih metroloških zavoda, iako je broj stanovnika Australije upola manji od pučanstva Jugoslavije ili Kanade.

Reorganizaciji, koja mu neminovno predstoji, jugoslavenski metrološki zavod morao bi u pogledu nuklearnog pramjerila postupiti *postepeno*, na primjer ovako: 1) Proračunati solenoid i projektirati prateću mjernu opremu. 2) Izraditi nekoliko solenoida prema tom proračunu, a paralelno opremati pripadne laboratorije, uključivši održavanje nacionalnih normala (odsječci 3.5,6). 3) Solenoide baždariti u nekom od renomiranih nacionalnih metroloških zavoda (pomoću tzv. putujućeg standarda; vidi odlomak 3.3.5). 4) Paralelno s gornjim radovima osvojiti kapacitivne standarde (odsječak 3.4) i pripadne mjerne postukpe (odlomak 3.3.1) te primjenu Taylorovog supravodljivog pramjerila, ako se ono pokaže tako prikladnim kako se danas čini (odlomak 3.4.6).

3.3. Reproduciranje električkog otpora pramjerilima. Računski standard međuinduktiviteta

Načelo pohranjivanja vrijednosti struje I reproducirane strujnom vagom opisali smo u odlomku 3.1.2 (vidi i sliku E.25). Tamo smo spoznali da pomoću strujne vage utvrđujemo *omjer* $I = E/R$ napona i otpora naponske i otporničke normale (o njima vidi odsječke 3.5 i 3.6). Iz ove konstatacije nameće se pitanje: zašto se

vrijednost I, reproducirana strujnom vagom, ne pohranjuje nekom posebnom »strujnom normalom«? Razlog je taj što vrijednost struje ne znamo pohranjivati posebnom normalom ni približno toliko pouzdano kako to činimo s naponom ili otporom pomoću njihovih normala. Postojeće dobro iskustvo s normalama napona E i otpora R izaziva novo pitanje: zašto ne upotrebljavamo *dva pramjerila*, jedno za napon, a drugo za R? U stvari doista upotrebljavamo dva pramjerila, ali ne za E i R, već za I i R. Razlog je taj što pramjerila *napona* (na primjer »naponska vaga« ili »tekućinski elektrometar«; vidi odsječak 3.4.) *danas* još nisu toliko pouzdana kao kombinacija pramjerila struje I (strujna vaga) i otpora R (vidi iduće odlomke).

Možda će suvremena tehnologija, precizna mehanika, metrologija duljine, precizna gravimetrija itd. uskoro ostvariti pramjerilo napona koje će reproducirati napon jednako pouzdano kao što to danas čini kombinacija strujne vage — pramjerila strujne vage i pramjerilo otpora. Danas je još, međutim, kombinacija pramjerila I—R ono najpouzdanije što može pružiti vrhunska metrologija elektromagnetizma, pa tu kombinaciju zato valja opisati barem letimično. Budući da smo pramjerilo struje već razmotrili (odsječak 3.1), u nastavku ćemo opisati nekoliko od mnogobrojnih pramjerila otpora koja se upotrebljavaju u metrološkim zavodima.

Prije nego što prijeđemo na njihovo konkretno razmatranje, upozorit ćemo na jednu terminološku poteškoću o kojoj smo općenito raspravljali u odsječku A.5.3. Kondenzator (međuinduktivni svitak), kojega se kapacitet C (međuinduktivitet M) želi što pouzdanije izračunati iz mjerenjem utvrđenih izmjerâ zvat ćemo »standard« (odlomak A.5.3.4). Njime u trenutku mjerenja *reproduciramo* unaprijed izračunatu vrijednost C (ili M) pri okolišnim uvjetima (temperatura, tlak, vlažnost, vibracije itd.) koji su pretpostavljeni prilikom proračuna. Uređaje za *pohranjivanje* (što pouzdanije održavanje stalne vrijednosti) stanovite vrijednosti elektromagnetskih veličina (naponska normala i otpornička normala; vidi odsječke 3.5 i 3.6) zvat ćemo »normala«. Jedini razlog takvog diferenciranja »standarda« (reproduciranje) i »normale« (pohranjivanje) jest želja da u idućim tekstovima bude što manje nejasnoća.

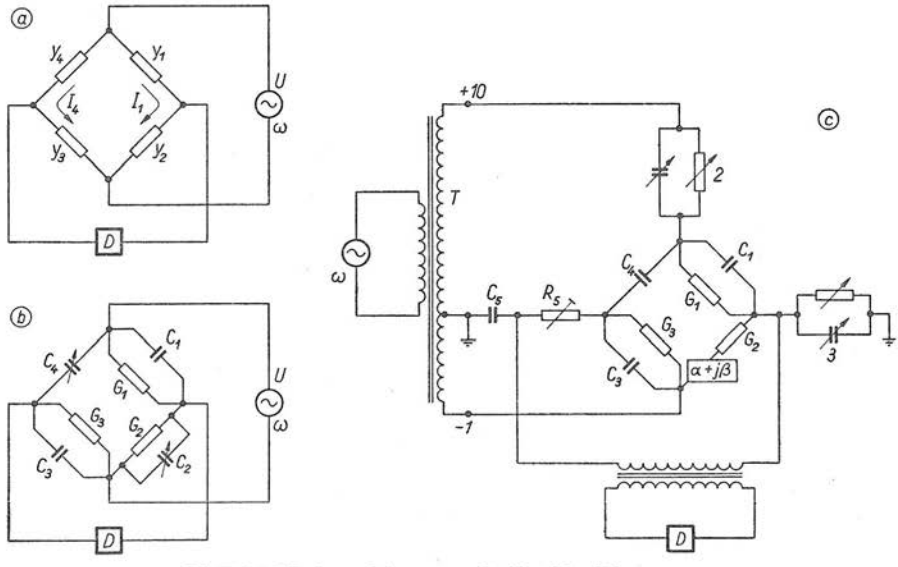
3.3.1. Kapacitivno pramjerilo otpora djeluje na principu usporedbe susceptancije (jalove vodljivosti; vidi tablicu E-6) kondenzatora *poznatog* (izračunatog) kapaciteta C sa (djelatnom) vodljivošću G otporničke normale u izmjeničnom mjernom mostu. Pri uravnoteženom mostu vrijedi relacija $G = K\omega C$ (vidi jednadžbu 3.3-5), gdje je $\omega = 2\pi f$ kružna frekvencija sudjelujućih izmjeničnih veličina, a K konstanta koja je rezultat niza međusobnih *usporedbi* kapaciteta nekoliko kondenzatora s jedne strane, te vodljivosti nekoliko otpornika s druge strane. Prema tome se otpor $R = 1/G$ otporničke normale (odsječak 3.6) utvrđuje *mjerenjem* frekvencije f, *usporedbom* kapacitetâ, *usporedbom* otporâ i *proračunom* kapaciteta takozvanog računskog standarda kapaciteta (odlomak 3.4.2).

U vrhunsku metrologiju ovo se pramjerilo probilo oko godine 1965, pošto je u australskom metrološkom zavodu National Standards Laboratory (NSL) usavršena primjena *Lampard*ova teorema otkrivenog godine 1956. (odlomak 3.4.1). Izvanredna je prednost kapacitivnog pramjerila to što cjelokupno mjerenje, koje daje traženi rezultat $G = K\omega C$ s relativnom nepouzdanošću

$$\Delta G/G = \Delta R/R = \pm 7 \cdot 10^{-7},$$

traje svega oko *tri sata*. Za usporedbu navodimo da analogna mjerenja pomoću standarda međuinduktiviteta (vidi, na primjer, odlomak 3.3.3.) traju mjesecima, a priprema laboratorija i više ako se želi postići $\Delta G/G$ oko $\pm 2 \cdot 10^{-6}$.

Spomenutu jednadžbu ravnoteže mjernog mosta $G = K\omega C$ načelno ćemo objasniti uz pomoć slike E.34 na kojoj dio a) prikazuje izmjenični mjerni most u čije se četiri grane nalaze admitancije Y_1 do Y_4. Ako je most *uravnotežen*, kroz detektor D ne teče nikakva struja, dok kroz Y_1 i Y_2 teče struja $I_1 = I_2$, a kroz Y_4 i



Sl. E.34. Uz kapacitivno pramjerilo električkog otpora

a) Izmjenični mjerni most s admitancijama Y u granama: U — napon frekvencije $f = \omega/2\pi$, D — detektor (nulindikator). b) Ogawin otporničko-kapacitivni most. c) Modificiran Ogawin most koji je poslužio kao ishodište australskog pramjerila otpora: *1* — glavni ravnotežni sklop (fino regulirani izvor napona), *2* — izvorski ravnotežni sklop (400 pF, 60 kΩ), *3* — detektorski ravnotežni sklop (5 nF, 20 kΩ), T — precizni transformator omjera sekundarnih napona 10 : 1, $C_1 = C_3 = 5$ nF, $G_1 = G_3 = 50$ μS, $\omega = 10^4$ rad/s, $C_4 = 5$ nF, $G_2 = 100$ μS, $C_5 = 5$ nF, $R_5 = 1$ kΩ

Y_3 struja $I_4 = I_3$ (ovdje kompleksne veličine ne označujemo posebnim simbolima). I pripadni kompleksni padovi napona međusobno su jednaki, tj. $I_1/Y_1 = I_4/Y_4$ te $I_1/Y_2 = I_4/Y_3$. Iz ovih dviju jednadžbi slijedi temeljna jednadžba ravnoteže izmjeničnog mjernog mosta

$$Y_1 Y_3 = Y_2 Y_4. \tag{3.3-1}$$

Jednadžbu (3.3-1) primijenit ćemo na most koji je predložio *Ogawa* (sl. E.34b). On se sastoji samo od *paralelnih* komponenata u pojedinim granama mosta, čime se postiže veća preciznost usporedbe negoli u slučaju kad su komponente spojene u seriju. Admitancije četiriju grana (sl. E.34b), prema općem izrazu $Y = G + \mathrm{j}B$, za paralelan spoj u prikazanom slučaju iznose

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= G_1 + \mathrm{j}\,\omega C_1 & \qquad Y_2 &= G_2 + \mathrm{j}\,\omega C_2 \\ Y_3 &= G_3 + \mathrm{j}\,\omega C_3 & \qquad Y_4 &= \mathrm{j}\,\omega C_4 \end{aligned}\right\} \tag{3.3-2}$$

Uvrstimo li ova četiri izraza u jednadžbu ravnoteže mosta (3.3-1), dobivamo

$$G_1 G_2 + \mathrm{j}\,\omega C_1 G_3 + \mathrm{j}\,\omega C_3 G_1 - \omega^2 C_1 C_3 = \mathrm{j}\,\omega C_4 G_2 - \omega^2 C_2 C_4.$$

Pri tom smo uzeli u obzir da je $j^2 = 1$. Odvajanjem realnih i imaginarnih članova, od gornje jednadžbe nastaju izrazi

$$G_1 G_2 = \omega^2 (C_1 C_3 - C_2 C_4) \quad \text{i} \quad C_1 G_3 = C_4 G_2 - C_3 G_1 \tag{3.3-3}$$

koji opisuju ravnotežu mosta; pri tom je $\omega = 2\pi f$ kružna frekvencija pri kojoj je postignuta ravnoteža.

Mjernim mostom sa slike E.34b želimo utvrditi vrijednost vodljivosti G neke otporničke normale u odnosu prema izmjerenoj ravnotežnoj kružnoj frekvenciji ω i poznatom (izračunatom) kapacitetu C standarda kapaciteta iz odlomka 3.4.2. Pretpostavimo da smo posebnim *usporedbenim mjerenjima* (koja ne ovise o reprodukciji jedinica SI!) ustanovili *omjere*

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= C_1/C, \quad a_2 = C_2/C, \quad a_3 = C_3/C, \quad a_4 = C_4/C, \\ b_1 &= G_1/G, \quad b_2 = G_2/G, \quad b_3 = G_3/G, \end{aligned}\right\} \tag{3.3-4}$$

tj. kapacitet C standarda i vodljivost G mjerene normale odabrali smo za osnove prema kojima izražavamo kapacitete i vodljivosti elemenata u granama mosta. Uvrstimo li omjere (3.3-4) u obje jednadžbe (3.3-3), one prelaze u oblik $b_1 b_2 G^2 = = \omega^2 C^2 (a_1 a_3 - a_2 a_4)$ i $a_1 b_3 = a_4 b_2 - a_3 b_1$, odakle slijedi tražena veza

$$G = K \omega C. \tag{3.3-5}$$

Iz netom navedenih dviju jednadžbi dobivamo ovisnost kvadrata konstante K o izmjerenim omjerima iz (3.3-4)

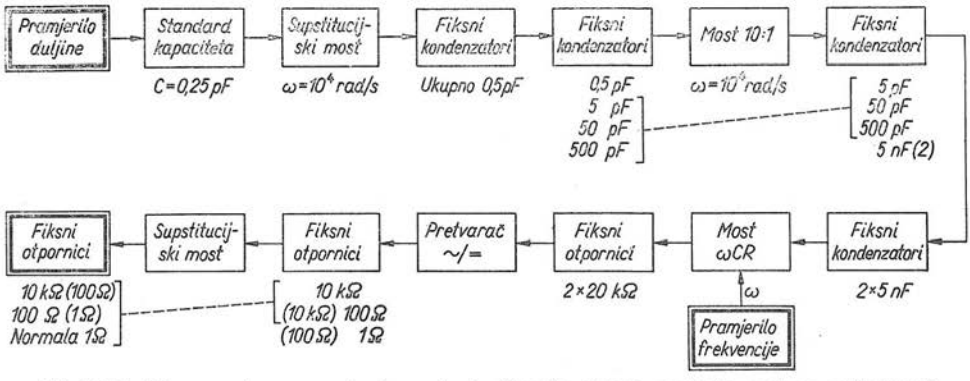
$$K^2 = \frac{a_1 a_3}{b_1 b_2} \left[1 - \frac{a_2 b_3}{a_3 b_2} - \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} \right].$$

Za stvarnu reprodukciju otpora pomoću standarda kapaciteta australski su metrolozi upotrijebili modificiran Ogawin most koji vidimo na slici E.34c. Pomoću njega postiže se relativna pogreška $\pm 1 \cdot 10^{-8}$ usporedbi admitancija vrijednosti oko 50 μS (S = siemens = 1/Ω). Pri tom je upotrijebljen transformator izvanredno pouzdano poznatog ($1 \cdot 10^{-8}$) omjera napona 10:1 između dva dijela sekundarnog namota (vidi sl. E.36). Ravnoteža mosta postiže se namještanjem vrijednosti relativno malog napona kojim poseban izvor napaja jednu granu mosta. U najnovije vrijeme Australci su most usavršili tako da je on neovisan o malim faznim defektima komponenata.

Prije desetak godina metrolozi su dosta skeptično primili australski kondenzatorski standard, koji je oslonac pramjerilu otpora prema jednadžbi (3.3-5), jer jedinični kapacitet tog kondenzatora ne dostiže ni $2 \cdot 10^{-12}$ F/m = 2 pF/m (vidi odlomak 3.4.2). U međuvremenu je primjena jednadžbe (3.3-5) uspješno razrađena sve do apsolutnog mjerenja električkog otpora normale nazivnog otpora $R = 1\,\Omega$; pri tom relativna nepouzdanost utvrđene vrijednosti otpora R iznosi oko $\pm 7 \cdot 10^{-7}$! Na slici E.35 vidimo shemu čitavog mjernog postupka koji je australski metrološki zavod NSL upotrebljavao godine 1967. pri utvrđivanju otpora svojih triju primarnih otporničkih normala.

Za standard kapaciteta odabran je tip koji je konstruirao *W. K. Clothier* iz NSL (odlomak 3.4.2); njegova nazivna vrijednost iznosi 25 pF, a relativna nepouzdanost kapaciteta pri frekvenciji oko 1592 Hz iznosi oko $\pm 6 \cdot 10^{-7}$, što je eksperimentalno konstatirano u toku godina 1963...1964. Budući da se kapacitet tog standardnog kondenzatora može *mijenjati*, supstitucijskim se mostom (sl. E.36a)

izmjeri kapacitet niza nominalno jednakih fiksnih kondenzatora malog kapaciteta. Paralelnim spojem tih kondenzatora dobiva se ukupan fiksni kapacitet 0,5 pF (sl. E.35). Zatim se četiri puta primijeni mjerni most koji sadrži transformator omjera 10:1 dvaju sekundarnih napona (sl. E.34c i 36b), čime se redom utvrđuju vrijednosti fiksnih kondenzatora 5, 50, 500 i 5000 pF (5 nF). Sa dva tako baždarena kondenzatora od 5 nF utvrđuje se frekventno ovisnim mostom (nalik na sl. E.34b) otpor dvaju otpornika nazivne vrijednosti 20 kΩ (svaki) pri nadasve pouzdano poznatoj frekvenciji $f = \omega/2\pi$ ($\omega = 10^4$ rad/s).



Sl. E.35. Shema mjernog postupka pri utvrđivanju otpora normala nazivne vrijednosti $R = 1\ \Omega$ na temelju izračunatog kapaciteta Thompson-Clothierova standardnog kondenzatora

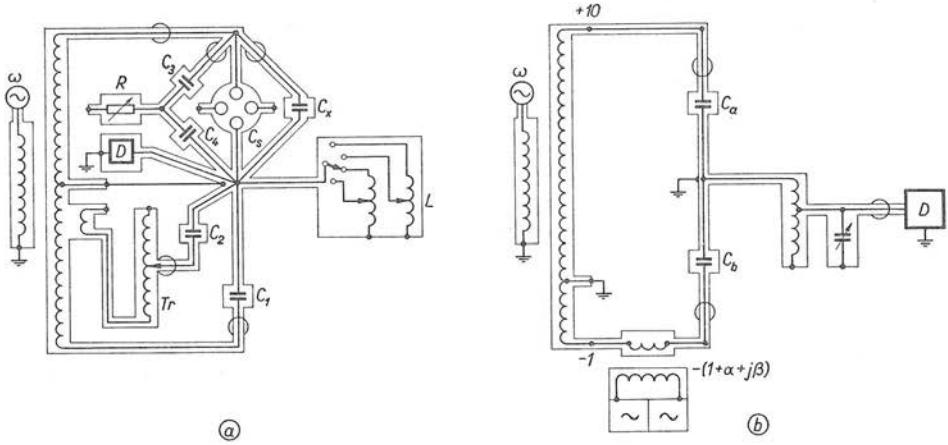
Paralelnim spajanjem ovih dvaju otpornika dobiva se otpor 10 kΩ za *izmjeničnu* struju spomenute frekvencije. Posebnim supstitucijskim mjerenjima pri frekvencijama između 50 Hz i 5 kHz ustanovljuje se ovisnost vrijednosti složenog otpornika 10 kΩ o frekvenciji f, a zatim se dobivenom krivuljom otpor pri 1592 Hz ekstrapolira na *istosmjernu* struju, tj. na $f = 0$ (na slici E.35 označeno sa »pretvarač ~/=«). Daljnja mjerenja obavljaju se *istosmjernom* mjernom tehnikom. Najprije se slog od 10 nominalno jednakih otpornika 1 kΩ, spojenih u seriju, usporedi sa prije utvrđenom vrijednošću otpornika 10 kΩ pri $f = 0$. Prespajanjem u paralelu posebnom se supstitucijskom tehnikom dobiva vrijednost otpornika 1 kΩ u ovisnosti o ω i C standardnog kondenzatora. Zatim se na analogan način upotrijebi slog od 10 otpornika 10 Ω. Otpor paralelne kombinacije ovog sloga uspoređuje se sa otporničkom normalom 1 Ω i na taj način utvrđuje vrijednost njenog otpora. Tako je, na primjer, u februaru godine 1967. izmjereno

$$R(\mathrm{NSL}) = 1\ \Omega - 3{,}80\ \mu\Omega \pm 0{,}7\ \mu\Omega,$$

tj. relativna nepouzdanost rezultata iznosi $\pm\ 7 \cdot 10^{-7}$; od toga standard kapaciteta sâm donosi $\pm 6 \cdot 10^{-7}$ (vidi odlomak 3.4.2).

Prije spomenuto supstitucijsko mjerenje kapaciteta može se obaviti prema shemi na slici E.36a. Nepoznati kapacitet C_x nadomještava se standardnim kondenzatorom (odlomak 3.4.2) kojemu se, pomicanjem elektroda, kapacitet $C_s = C'l$ mijenja tako dugo dok se ne postigne $C_s = C_x$. Pri tom se upotrebljava preklopka slična onoj na slici E.47 u odlomku 3.4.2. To znači da ukupni kapacitet u gornjoj grani mosta na slici E.36a ostaje prilikom supstitucije nepromijenjen i jednak kapacitetu C_1 donje grane, ako je udovoljeno uvjetu ravnoteže ovog kapacitivnog mosta koji se napaja naponima omjera 1:1 na sekundarnoj strani. Kapacitivna ravnoteža

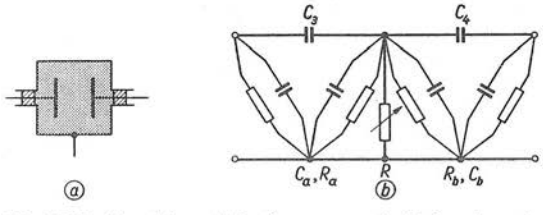
postiže se kondenzatorom C_2 priključenim na niskonaponski transformator Tr koji ima namjestiv omjer transformacije. Otporničku ravnotežu daje T-sklop C_3RC_4, čija fazna pogreška iznosi oko $\omega C_0 R_0 \approx \omega C_0 R$, ali je rezultirajuća pogreška mjerenja kapaciteta zanemariva, jer se fazna pogreška može kompenzirati ako se paralelno s R priključi induktivitet $L = 1/\omega^2 C_0$. Ovdje je $C_0 = C_3 + C_4 + C_a + C_b$, dok je $1/R_0 = 1/R + 1/R_a + 1/R_b$. Objašnjenje ovih oznaka vidimo na slici E.37b, koja prikazuje kompletnu nadomjesnu shemu T-člana C_3RC_4 sa slike E.36a.



Sl. E.36. Supstitucijsko mjerenje kapaciteta (sl. a) i baždarenje omjera dvaju napona sekundarnog namota 10:1 (sl. b)

Kondenzatori C_3 i C_4, a isto tako i C_2, jesu tzv. troelektrodni plinom punjeni kondenzatori (sl. E.37a) izvanredne stabilnosti kapaciteta. Oni su savršeno izolirani, oklopljeni i držani na konstantnoj temperaturi u termostatiranoj uljnoj kupki. Oklopljeni su i svi drugi dijelovi mosta na slici E. 36a. Osim toga, koaksijalni su vodovi na odgovarajućim mjestima provučeni kroz toroidne jezgre velike permeabilnosti, što je na slici E.36 označeno nepotpunim krugovima. Velikoj osjetljivosti mosta na sl. E.36a pridonosi relativno visoki napon, 700 do 1000 V u svakoj polovici sekundarnog namota transformatora.

U mjernom mostu na slici E.34c izvanredno je važan transformator čija su dva sekundarna napona u omjeru 10:1. Da bi taj omjer napona bio gotovo jednak omjeru broja zavoja, između primarnog namota (100 zavoja u australskoj izvedbi) i sekundarnog namota (110 zavoja ali sa 11 otcijepa, što na slikama E.34c i 36b nije nacrtano) nalaze se zasloni od bakra i permaloja. Na taj način svaki zavoj sekundarnog namota obuhvaća isti magnetski tok, a omjeri napona susjednih sekcija (između susjednih otcijepa) gotovo su jednaki. Postoje još dva sekundarna namota (nije nacrtano) na koje je priključen poseban transformator



Sl. E.37. Troelektrodni plinom punjeni kondenzator postojanog kapaciteta

a) shema spoja, b) nadomjesna shema T člana sa slike E.36b

sa uzdužnom i poprečnom regulacijom (pomoću otcijepa) izlaznog napona. Vrijednost tog napona može se namještati u koracima $\Delta U = U(\alpha + j\beta) = U(\pm 5 \cdot 10^{-4} \pm j \cdot 10^{-5})$ s rezolucijom $\pm 1 \cdot 10^{-8}$. Pri tom smo slovom U označili napon donje grane mosta, odnosno deseti dio napona gornje. Taj fino regulirani izvor napona uključuje se u jednu granu mosta gdje služi kao glavni sklop za uravnoteženje mosta (sl. E.34b).

Iako konstrukcija i spomenuta ekranizacija osiguravaju da je omjer dvaju napona na sekundarnoj strani vrlo blizak omjeru broja zavoja, ipak treba baždarenjem što preciznije utvrditi vrijednost omjera za radno stanje mosta. To se čini pomoću jedanaest kondenzatora namještenih na gotovo jednake vrijednosti kapaciteta, tj. njihova međusobna odstupanja svedena su na ostvariv minimum. Jedan od tih kondenzatora (C_a, sl. E.36b) uravnoteži se s ostalih deset koji su spojeni paralelno (C_b). Pri tom se most uravnotežuje spomenutim fino reguliranim izvorom napona. Posebnom permutacijskom metodom tako se mjeri 11 puta.

Radi cjelovitosti opisa ove nove tehnike letimično ćemo spomenuti koje pogreške (i koliko) pridonose relativnoj nepouzdanosti $\pm 7 \cdot 10^{-7}$ utvrđivanja vrijednosti otpora normala nazivne vrijednosti $R = 1\,\Omega$ koju smo spomenuli na početku ovog izlaganja o kapacitivnom pramjerilu otpora. Analize i pokusi pokazuju da relativna nepouzdanost rezultata usporedbe kapaciteta fiksnog kondenzatora sa standardom kapaciteta (odlomak 3.4.2) iznosi oko $\pm 1 \cdot 10^{-7}$. Isto tolika relativna pogreška nastaje prilikom prijelaza s izmjenične struje na istosmjernu (pretvarač $\sim/=$ na sl. E.35). I usporedba $10\,k\Omega$ otpornika sa normalom $1\,\Omega$ donosi oko $\pm 1 \cdot 10^{-7}$. Budući da je maksimalna moguća pogreška svakog ravnotežnog sklopa oko $\pm 1 \cdot 10^{-8}$, a isto toliko i pogreška poznavanja omjera sekundarnih napona, mjerenja frekvencije i korekcije napona, to sva izmjenična mjerenja zajedno ne mogu premašiti $\pm 5 \cdot 10^{-8}$. Prema tome relativna nepouzdanost, uzrokovana opisanim mjerenjima, iznosi oko $\pm 2 \cdot 10^{-7}$.

Pri tom nismo uzeli u obzir nepouzdanost poznavanja kapaciteta standardnog kondenzatora. Taj kapacitet ovisi o kvadratu brzine svjetla (odlomak 3.4.2), a budući da je ona nepouzdana s oko $\pm 3 \cdot 10^{-7}$, to njen utjecaj na nepouzdanost $\Delta R/R$ otporničke normale iznosi $\pm 6 \cdot 10^{-7}$. Prije spomenuta vjerojatna nepouzdanost $\pm 2 \cdot 10^{-7}$ neznatna je prema utjecaju brzine svjetla, a u najlošijem slučaju one se zajedno reflektiraju na nepouzdanost otpora normale $1\,\Omega$ sa $\Delta R/R = \pm 7 \cdot 10^{-7} = \pm 0{,}7\ \mu\Omega/\Omega$.

3.3.2. Komutacijsko pramjerilo otpora. U vrijeme dok još nije bio poznat standard kapaciteta opisan u odlomku 3.4.2, neki od vodećih metroloških zavoda upotrebljavali su kao pramjerilo otpora komutacijski Maxwellov most. Načelo djelovanja tog mosta objasnit ćemo uz pomoć slike E.38a. U kondenzatorskoj grani mosta nalazi se sklopnik S koji jednolično priključuje kondenzator C na napon U (lijevi položaj sklopnika). Frekvencija nabijanja i izbijanja kondenzatora iznosi n; njena stalna vrijednost, na primjer $n = 100$ Hz, izmjerena je velikom preciznošću. Prosječna vrijednost struje kondenzatora pri tom iznosi $I_4 = UnC$. Prema tome komutirani kondenzator djeluje u mjernom mostu kao otpornik prividnog otpora $R_4 = U/I_4$. Iz ovih dviju jednadžbi dobivamo

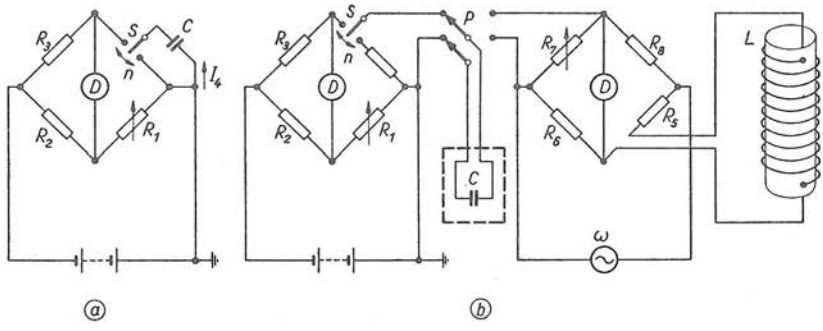
$$R_4 = \frac{1}{nC}. \tag{3.3-6}$$

Most na slici E.38a možemo, dakle, zamisliti kao da se sastoji od četiri otpornika R_1, R_2, R_3 i $R_4 = 1/(nC)$.

Ako je most uravnotežen, vrijedi relacija $R_1 R_3 = R_2 R_4$ (vidi jednadžbu 3.3-1 u prošlom odlomku), odakle pomoću jednadžbe (3.3-6) slijedi

$$\frac{R_1 R_3}{R_2} = \frac{1}{nC}. \tag{3.3-7}$$

Ova jednadžba, koja opisuje *načelo* rada mosta, vrijedi uz pretpostavku da je detekcijski period dug u odnosu prema prekidačkom. Zanemareni su i utjecaji impedancije izvora i detektora D, koji jače dolaze do izražaja u neravnotežnom stanju mosta negoli prilikom ravnoteže.



Sl. E.38. Utvrđivanje vrijednosti otpora komutacijskim pramjerilom
a) načelo djelovanja (D — detektor), b) shema koju je primijenio National Bureau of Standards (L — prigušnica čiji su induktivitet izračunali pomoću formula koje je godine 1928. izveo *C. Snow*)

Budući da pramjerilom želimo utvrditi vrijednost otporničke normale (o njima vidi odsječak 3.6), odvojenim se mjerenjem precizno utvrđuju omjeri

$$a_1 = R_1/R, \qquad a_2 = R_2/R, \qquad a_3 = R_3/R,$$

gdje je R otpor normale (analogno mjerenje spomenuli smo u prošlom odlomku uz jednadžbu 3.3-4). Uvrstimo li ove omjere dobivene *usporedbenim* mjerenjem u izraz (3.3-7), slijedi tražena veza

$$R = \frac{W_1}{nC}, \quad \text{gdje je} \quad W_1 = \frac{a_1 a_3}{a_2}. \tag{3.3-8}$$

Prema tome se utvrđivanje otpora R normale svodi na mjerenje omjerâ a_1, a_2, a_3 i konstantne frekvencije n sklopnika S uz pretpostavku da je kapacitet C kondenzatora sa slike E.38a poznat.

Prije desetak godina, kada računski standard kapaciteta (odlomak 3.4.2) još nije bio poznat, vrijednost kapaciteta C kondenzatora iz lijeve jednadžbe (3.3-8) (sl. E.38a) utvrđivana je isključivo *mjernom usporedbom* s induktivitetom L standardnog svitka (o standardnom svitku, čiji se induktivitet ili međuinduktivitet dobiva računanjem i mjerenjem izmjera, vidi odlomak 3.4.5). Za tu svrhu upotrebljavao je, na primjer, američki metrološki zavod National Bureau of Standards (*H. L. Curtis, C. Moon, C. M. Sparks*, 1938) Maxwell-Wienov *izmjenični* most, koji vidimo na desnom dijelu slike E.38b ($f = \omega/2\pi = 24$ Hz). Pri tom je preklopkom P u desnom položaju kondenzator C bio spojen paralelno s otpornikom R_7.

Admitancija te grane iznosila je $Y_7 = 1/R_7 + j\omega C$, dok je impedancija grane s poznatim induktivitetom L iznosila $Z_5 = R_5 + j\omega L$. U slučaju ravnoteže mosta vrijedi jednadžba $Z_5/Y_7 = Z_6 Z_8 = R_6 R_8$. Odavde se iz jednakosti imaginarnih komponenti dobiva $C = L/(R_5 R_7)$.

Odvojenom mjernom usporedbom mogu se ustanoviti omjeri $a_5 = R_5/R$ i $a_7 = R_7/R$, gdje je R otpor one iste normale prema kojoj su izmjerene vrijednosti omjera $a_1, \ldots, a_4$. Prema tome vrijedi relacija

$$C = \frac{1}{W_2}\,\frac{L}{R^2}, \quad \text{gdje je} \quad W_2 = a_5 a_7. \tag{3.3-9}$$

Zakretanjem preklopke P u lijevi položaj kondenzator C postaje dijelom komutacijskog mosta (sl. E.38b) koji smo prije opisali uz pomoć slike E.38a. U slučaju njegove ravnoteže vrijedi izraz (3.3-8), koji zajedno s (3.3-9) daje vezu između otpora R normale, poznatog (izračunatog) induktiviteta L standardnog svitka, frekvencije komutacije n i omjerâ $a_1, \ldots, a_7$:

$$R = \frac{1}{W}\,nL. \tag{3.3-10}$$

Ovdje je $W = W_1 W_2 = a_1 a_3 a_5 a_7 / a_2$. Prema tome se utvrđivanje vrijednosti R svodi na precizno mjerenje veličina W i n uz pretpostavku da je induktivitet proračunat s dovoljnom preciznošću (odlomak 3.3.5). Prilikom opisanog utvrđivanja vrijednosti R kondenzator je, dakle, poslužio samo kao oslonac za prenošenje mjerenja s područja izmjenične struje (ω) u područje prekidane istosmjerne (n). Zato kapacitet C tog kondenzatora u načelu nije bitan, važno je samo to da se u toku opisanih mjerenja ne mijenja.

Na kraju ovog opisa načela djelovanja komutacijskog pramjerila otpora korisno je spomenuti da iz temeljne jednadžbe izmjeničnog mosta na slici E.38b $Z_5/Y_7 = R_6 R_8$ proizlazi još jedan dodatni uvjet. Izjednačenjem realnih članova slijedi, naime, jednadžba $1 + \omega^2 L C a_7/a_5 = (1 + \omega^2 C^2 R^2 a_7^2) \cdot a_6 a_8/(a_5 a_7)$.

3.3.3. Campbellovo pramjerilo otpora sastoji se od dva standardna svitka poznatih međuinduktiviteta M_1 i M_2 te specijalnog izmjeničnog mjernog mosta koji je godine 1925. predložio *A. Campbell* iz engleskog metrološkog zavoda National Physical Laboratory (NPL). Svaki međuinduktivni svitak sastoji se od dvije razmaknute polovice primarnog namota i jednog sekundarnog namota (vidi odlomak 3.3.5). Prvo takvo pramjerilo izradili su u NPL godine 1936, a u poboljšanoj izvedbi 1951. Najdotjeraniji oblik Campbellova pramjerila otpora NPL upotrebljava od godine 1963.

Načelo djelovanja tog uređaja objasnit ćemo pomoću slike E.39a, na kojoj M_1 i M_2 predstavljaju dva *radna* standardna svitka. Vrijednost međuinduktiviteta svakoga od njih utvrđuje se *mjerenjem*, tj. posebnom usporedbom (sl. E.40) sa *izračunatim* međuinduktivitetom M standardnog svitka (tzv. primarni standardni svitak; odlomak 3.3.5). Ako detektor D na slici E.39a ne indicira nikakvu struju, most je u ravnoteži. U tom stanju očito vrijede ove jednadžbe naponske ravnoteže:

$$U_1 = -j\omega M_1 I_1, \quad U_2 = -j\omega M_2 I_2, \quad U_2 = R_4 I_1 - R_3 I_2,$$

$$U_1 + (R_1 + R_2 + R_3) I_2 + j\omega (L_1 + L_2) I_2 = 0.$$

Pri tom su R_1, R_2, L_1 i L_2 djelatni otpori i samoinduktiviteti namota radnih standarda međuinduktiviteta M_1 i M_2 u krugu struje I_2. Eliminacijom I_1 i I_2 iz gornjih jednadžbi te odvajanjem realnih članova od imaginarnih za slučaj ravnoteže mosta slijede dva uvjeta:

$$\omega^2 M_1 M_2 = R_4(R_1 + R_2 + R_3), \qquad M_1 R_3 = (L_1 + L_2) R_4. \tag{3.3-11}$$

Budući da pramjerilom želimo utvrditi R otporničke normale (odsječak 3.6), posebnim mjerenjima možemo izvanredno precizno utvrditi vrijednosti otpora R_1, R_2, R_3 i R_4 u odnosu prema R, tj.

$$a_1 = R_1/R, \qquad a_2 = R_2/R, \qquad a_3 = R_3/R, \qquad a_4 = R_4/R. \tag{3.3-12}$$

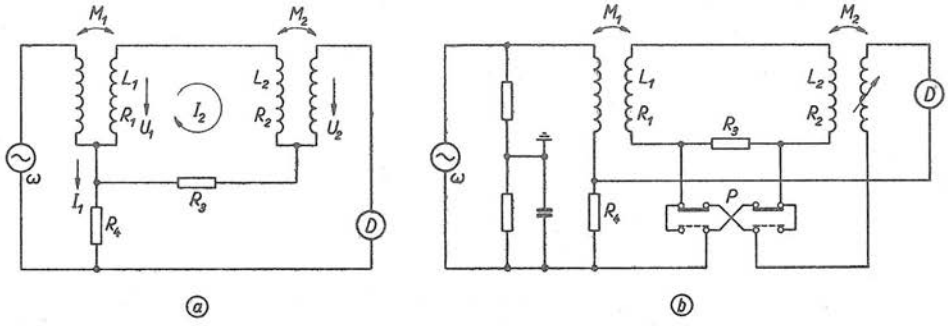
Analogno možemo posebnim mjerenjem (sl. E.40) ustanoviti vrijednosti M_1 i M_2 prema poznatom (izračunatom) međuinduktivitetu M standardnog svitka iz odlomka 3.3.5

$$b_1 = M_1/M, \qquad b_2 = M_2/M. \tag{3.3-13}$$

Uvrštenjem tih precizno izmjerenih omjera u lijevu jednadžbu (3.3-11) nastaje izraz koji povezuje R otporničke normale s poznatim međuinduktivitetom M:

$$R = S\,\omega M. \tag{3.3-14}$$

Vrijednost mjerne konstante S dobiva se iz izraza $1/S = [(a_1 + a_2 + a_3)/(b_1 b_2)]^{1/2}$, koji slijedi iz jednadžbi (3.3-11...14). Prema tome se utvrđivanje R otporničke normale svodi na mjerenje niza omjera $a_1, \ldots, b_1, b_2$, na mjerenje frekvencije $f = \omega/2\pi$ i na precizan proračun međuinduktiviteta M standardnog svitka.



Sl. E.39. Načelo djelovanja Campbellova pramjerila otpora
a) osnovna shema, b) shema koja je godine 1964. upotrijebljena u NPL

Usavršenu shemu Campbellova mosta od godine 1964. (NPL) prikazuje slika E.39b. Preklopkom P mogu se reverzirati priključci otpornika R_3, ali se pri tom mora reverzirati i jedan međuinduktivni svitak tako da bude i dalje udovoljeno ravnotežnim jednadžbama (3.3-11). Budući da svaki od četiriju namota dvaju međuinduktivnih svitaka može biti uključen u most na dva načina, to se most može uravnotežiti u osam različitih kombinacija. Svaka od njih omogućuje provedbu jednog niza mjerenja. Prema tome se jedna primjena Campbellova pramjerila sastoji od osam takvih nizova mjerenja.

Međuinduktivni svici M_1 i M_2 slične su konstrukcije, a nazivni međuinduktivitet svakoga od njih (u NPL) iznosi oko 10 mH (odlomak 3.3.5). Primarni namot

sastoji se od dvije razmaknute polovice između kojih se nalazi sekcijski sekundardni namot. To su kompaktni višeslojni svici namotani na mramorni cilindar. Otpornik $R_4 \approx 1\ \Omega$ (radna normala) izrađen je od manganinske žice promjera 1 mm, namotane na izolacijsko tijelo na takav način da je induktivitet iščezavajuće malen. Relativni porast vrijednosti R_4 pri promjeni frekvencije od $f = 0$ (istosmjerna struja) na 125 Hz iznosi oko $1 \cdot 10^{-8}$, dakle je zanemariv. Na djelatni otpor $R_{123} = R_1 + R_2 + R_3$ sekundarnog kruga, koji sadrži otpore R_1 i R_2 po jednog namota svakog međuinduktivnog svitka M_1 i M_2 i otpor R_3, porast frekvencije ima primjetan utjecaj. Tako je, na primjer, u NPL izmjeren porast $\Delta R_{123} = 4{,}5\ (1 \pm 7 \cdot 10^{-2}) \cdot 10^{-4}\ \Omega$, kad je frekvencija povišena od 0 na 125 Hz. Engleski metrološki zavod NPL napaja u najnovije vrijeme Campbellov most frekvencijom $f = 125$ Hz (prije 100 Hz) da bi se izbjegao utjecaj drugog harmonika od mrežnih 50 Hz. Frekvencija se mjeri u odnosu prema pramjerilu frekvencije (Cs 133) koje posjeduje NPL, pa pogreška poznavanja njene vrijednosti ovdje uopće ne dolazi do izražaja (vidi odsječak A.10.6).

Jednadžba (3.3-14) vrijedi uz pretpostavku da ne postoje parazitni otpori, induktiviteti, međuinduktiviteti i kapaciteti. Oni, međutim, dolaze do izražaja i onda kad se upotrebljavaju rafinirana pomagala (diferencijski spojevi, kalibracijski mostovi, ponovljena mjerenja omjera $a_1, \ldots, b_1, \ldots$ itd. Zato se osnovna jednadžba ravnoteže (3.3-11) mora proširiti uvođenjem štetnih utjecaja; na taj način ona dobiva oblik

$$\omega^2 [(M_1 + \Delta M_1)(M_2 + \Delta M_2 - L_3) + (L_1 + L_2) L_4] = \\ = (R_{123} + \Delta R_{123})(R_4 + R_0) - R_3 N_1.$$

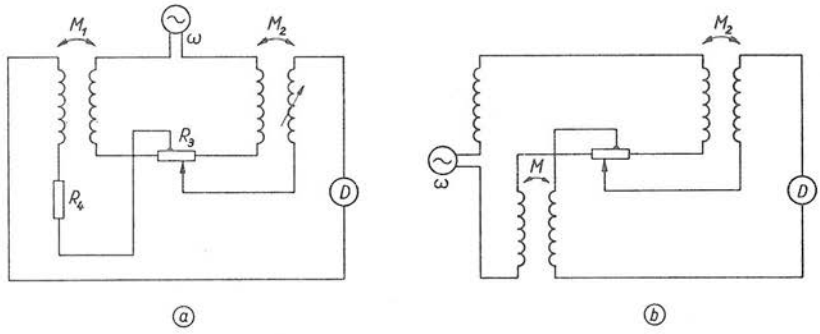
Ovdje su ΔM_1, ΔM_2 i ΔR_{123} promjene uzrokovane prijelazom od frekvencije 10 Hz na 125 Hz (vidi kasnije), L_3 i L_4 predstavljaju induktivitete otpornika R_3 i R_4, slovo R_0 označuje ekvivalentni otpor impedancije koja povezuje primarnu i detekcijsku petlju (sl. E.39b) za slučaj kada bi teoretski moralo biti $R_0 = 0$, dok faktor N_1 uzima u obzir utjecaj kapaciteta na međuinduktivitet M_1 (fazna pogreška). Obično se sve nabrojane korekcije uzimaju u obzir jednom jedinom korekturom k, čime se lijeva jednadžba (3.3-11) dovodi u oblik

$$\omega^2 M_1 M_2 (1 + k) = R_4 R_{123}.$$

Vrijednost faktora k različita je za prije spomenutih osam kombinacija spoja mosta. Osim toga, k ovisi o frekvenciji pri kojoj je M_1 uspoređen sa M_2.

Mjerni most sa slike E.39b dovodi se u ravnotežu namještanjem vrijednosti M_2 i R_3. Međuinduktivnom svitku može se, naime, mijenjati M_2 unutar raspona 5 μH (oko pola promila od nazivne vrijednosti), a i otpornik R_3 ima mali promjenljivi dio. Pošto se tako stvori ravnoteža, treba izmjeriti omjere $a_{123} = R_{123}/R$ i $a_4 = R_4/R$ (vidi jednadžbe 3.3-12) i omjere b iz jednadžbi (3.3-13). Pri tom je, kako smo već naveli, R otpor mjerene normale, a M izračunata vrijednost računskog standarda međuinduktiviteta (odlomak 3.3.5). Da bi se mjerenjem utvrdila vrijednost M_1 u odnosu prema M_2, spoj sa slike E.39b treba promijeniti u oblik prikazan na slici E.40a; pri tom predznaci međuinduktiviteta moraju biti suprotni. Konačno se M_2 izmjeri u odnosu prema računskom standardu međuinduktiviteta M (sl. E.40b), ali pri tom frekvencija $f = \omega/2\pi$ ne smije premašiti 10 Hz. Toliko niska frekvencija potrebna je zato da stvarna vrijednost M standarda ne bi u prevelikoj mjeri odstupala od izračunate (pri $f = 0$) zbog djelovanja kapaciteta i induktiviteta među zavojima. Usporedba M_1/M_2 izvodi se u NPL pri dvije frekvencije: 10 i 125 Hz. Mjerenja koja smo letimično opisali predstavljaju jedan mjerni niz; sveukupno treba obaviti, kako smo već spomenuli, osam takvih nizova, što se može učiniti u toku jednog dana.

Pomoću opisanog novog Campbellova pramjerila NPL je novembra 1963. i novembra 1964. izmjerio otpor R(NPL) engleske otporničke normale. Svake od navedenih jeseni učinjena su četiri niza od osam kompletnih mjerenja, i to dva pri 10 Hz, a dva pri 125 Hz. Analiza rezultata koju je godine 1967. objavio *G. H. Rayner* pokazuje da pri uspoređivanju M_1 sa M_2 postoji sistematska relativna pogreška procijenjena na oko $\pm 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ (redni broj 13 u tablici E-10). Njeno porijeklo nisu mogli utvrditi, ali sumnjaju na premalo ispravno uzimanje u obzir parazitnih kapaciteta u međuinduktivitetima M_1 i M_2.



Sl. E.40. Mjerenje M_1 u odnosu prema M_2 (sl. a) i M_2 u odnosu prema međuinduktivitetu M računskog standarda (sl. b)

Sve poznate parcijalne relativne nepouzdanosti, koje pridonose nepouzdanosti utvrđivanja R(NPL) engleske otporničke normale 1 Ω pomoću opisanog pramjerila, sadrži tablica E-10 (za oznake vidi slike E.39b i 40). Statistička sigurnost tih nepouzdanosti iznosi $P = 50\%$. Bitni su utjecaji navedeni pod rednim brojevima 1 i 13. U odlomku 3.3.5 saznajemo da relativna nepouzdanost

Tablica **E-10**

Pregled relativnih pogrešaka pri upotrebi Campbellova pramjerila otpora u NPL

Red. br.	Mjerene veličine	Relativna nepouzdanost $\times 10^6$	Kvadrat nepouzdanosti $\times 10^{12}$
1	Standardni međuinduktivni svitak M	0,7	0,49
2	Otpor R_4 } usporedba s referentnom	0,2	0,04
3	Otpor R_{123} } grupom	0,2	0,04
4	Otpor R_4; =/125 Hz	0,0	0,00
5	Otpor R_{123}; =/125 Hz	0,2	0,04
6	Induktivitet otpornika R_4	0,1	0,01
7	Induktivitet otpornika R_3	0,1	0,01
8	Utvrđivanje ravnoteže mosta	0,1	0,01
9	Fazna pogreška M_1	0,2	0,04
10	M_1; 10 Hz/125 Hz	0,5	0,25
11	M_2; 10 Hz/125 Hz	0,5	0,25
12	Razlika pri 10 Hz i 125 Hz	0,35	0,12
13	Sistematska razlika mjernih nizova	1,4	1,96
14	Ostalo	0,2	0,04
	Ukupno		3,30

standardnog svitka NPL iznosi $\Delta M(P=68\%)/M = \pm 1 \cdot 10^{-6}$, što znači da pri $P=50\%$ pripadna relativna nepouzdanost ima vrijednost $\Delta M(P=50\%)/M = \pm 1 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}674 = \pm 0{,}7 \cdot 10^{-6}$ (vidi odlomak A.3.6.6). Sistematska pogreška (broj 13) nepoznata porijekla uzrokuje nepriliku sličnu onoj koju smo spominjali uz strujnu vagu (odlomak E.3.1.5). Zato bi, strogo uzevši, trebalo govoriti o nesigurnosti, a ne o nepouzdanosti. Uzimajući u obzir sve pogreške iz tablice E-10, stručnjaci iz NPL smatraju da relativna nesigurnost utvrđivanja vrijednosti otpora R(NPL) engleske otporničke normale (1 Ω) Campbellovim pramjerilom iznosi

$$\frac{\Delta R(\mathrm{NPL})}{R(\mathrm{NPL})} = \sqrt{3{,}30 \cdot 10^{-12}} \approx \pm 2 \cdot 10^{-6}.$$

Budući da je opisanim mjerenjem utvrđena vrijednost $R(\mathrm{NPL}) = 1\ \Omega - 3{,}7\ \mu\Omega$, gdje je $\Omega = \Omega_{SI}$, definitivni rezultat glasi

$$R(\mathrm{NPL}) = 1\ \Omega - 3{,}7\ \mu\Omega \pm 2\ \mu\Omega. \qquad (3.3\text{-}15)$$

Interkomparacija (vidi odsječak 3.6) otporničkih normala nazivnog otpora 1 Ω u Međunarodnom uredu za mjere i utege (BIPM) pokazala je godine 1964. da vrijedi odnos $R(\mathrm{NPL}) = (1 - 3{,}5 \cdot 10^{-6}) \cdot R(\mathrm{BIPM})$; pri tom relativna pogreška interkomparacije iznosi oko $\pm 2 \cdot 10^{-7}$. Odavde se uz pomoć jednadžbe (3.3-15) dobiva vrijednost $R(\mathrm{BIPM}) = 1\ \Omega - 0{,}2\ \mu\Omega \pm 2\ \mu\Omega$ (usporedi s australskim rezultatima koji su navedeni u odlomku 3.6.7).

3.3.4. Lorenz-Smithovo pramjerilo otpora. Utvrđivanje vrijednosti električkog otpora R primjenom Faradayeva zakona induciranja napona $U = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ predložio je godine 1873. *Lorenz*. Četrdeset godina kasnije njegovu je zamisao usavršio *F. E. Smith* iz engleskog metrološkog zavoda National Physical Laboratory (NPL), gdje je izrađeno pramjerilo koje djeluje na principu uravnoteženja navedenog induciranog napona sa padom napona $\Delta U = R I$ na otporniku (otporničke normala) čiju vrijednost R želimo utvrditi.

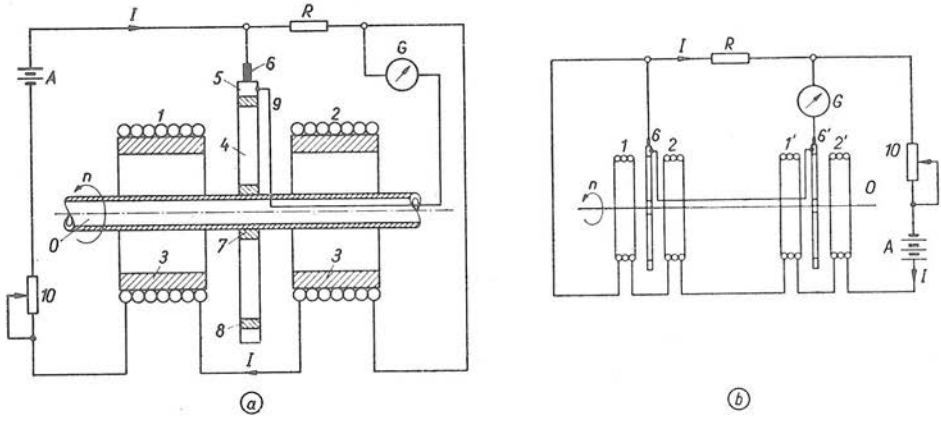
Princip djelovanja tog pramjerila možemo razabrati sa shematskog presjeka prikazanog na slici E.41a. Dugačku osovinu O pogoni elektromotor (nije nacrtan) čiju frekvenciju vrtnje n možemo fino regulirati i precizno mjeriti. Koaksijalno s osovinom učvršćeni su svici *1* i *2*, koji su u NPL izvedeni tako što je žica helikoidno namotana na ožlijebljeni mramorni cilindar *3*. Svici su, dakle, izrađeni slično onima kod engleske strujne vage (odlomak 3.1.5). U prostoru na sredini između *1* i *2* učvršćen je na osovinu metalni disk *4*, koji rotira istom frekvencijom vrtnje n kao i osovina O. Na vanjskom rubu diska *4* nalazi se metalni klizni prsten *5* na koji naliježe četkica *6*. Osovina O, disk *4* i prsten *5* međusobno su izolirani prstenastim uloškima *7* i *8*. U poseban radijalni utor diska *4* uložen je vodič *9*, koji je s jedne strane učvršćen na prsten *5*, a s druge strane izolirano prolazi kroz šuplju osovinu na jednu stezaljku galvanometra *G*.

Iz dosadašnjeg opisa se razabire da slika E.41a u stvari prikazuje shemu unipolarnog generatora. Uključimo li, naime, akumulatorsku bateriju *A*, kroz strujni krug otporničke normale R i svitaka *1*, *2* teći će struja jakosti I. Svici će proizvoditi aksijalni magnetski tok Φ koji će prolaziti kroz disk unutar kruga što ga tvori metalni prsten *5*. Ako se disk *4* (zajedno s osovinom O, izolacijama *7* i *8*, prstenom *5* i vodičem *9*) jednolično vrti, u vodiču *9* će se inducirati istosmjerni napon $U = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Pri stalnoj frekvenciji vrtnje n osovine, otpornikom *10* može se namjestiti takva

vrijednost struje I da je pad napona $\Delta U = RI$ na otporniku R jednak induciranom naponu U, tj. $\Delta U = U$, odnosno

$$RI = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{3.3-16}$$

To ravnotežno stanje indicira galvanometar G koji pri tom ne pokazuje otklon.



Sl. E.41. Lorenz-Smithovo pramjerilo otpora kakvo upotrebljava engleski National Physical Laboratory: a) načelo djelovanja, b) pojednostavnjena shema stvarno upotrebljavanog dvostrukog uređaja

1, *2* — dvije polovice primarnog namota, *3* — mramorni cilindri, *4* — metalni disk, *5* — metalni prsten, *6* — četkica, *7* i *8* — izolacijski prsteni, *9* — vodič, *10* — promjenljivi otpornik, *O* — šuplja osovina, *A* — akumulatorska baterija, *G* — galvanometar, *R* — otpornička normala

Svitke *1* i *2* možemo shvatiti kao dvije polovice primarnog namota međuinduktivnog svitka (vidi odlomak 3.3.5) u čijoj se sredini nalazi jednozavojni sekundarni namot — rotirajući metalni prsten *5*. Međuinduktivitet M te kombinacije namota *1*, *2* i *5* može se vrlo precizno *izračunati*, jer se mjerenjem — nakon ili prije eksperimenta — mogu ustanoviti izmjere svitaka *1* i *2*, njihova udaljenost od sekundarnog namota *5* i promjer tog namota — prstena. Ako kroz polusvitke *1* i *2* teče struja I, prsten *5* obuhvaća magnetski tok $\Phi = MI$. Budući da je uređaj na slici E.41a rotacijski simetričan, razdioba gustoće magnetskog toka jednaka je duž bilo kojeg radijusa diska *4*. Zato prilikom svog zakretanja vodič *9* u toku diferencijala vremena $\mathrm{d}t$ zahvati nov magnetski tok $\mathrm{d}\Phi = \Phi\,\mathrm{d}t/T$. Ovdje je $\Phi = MI$, a T period vrtnje, tj. vremenski interval potreban da vodič *9* na disku *4* opiše pun krug. Iz odsječka B.2.2 znamo da je $T = 1/n$, pa zato vrijedi

$$\mathrm{d}\Phi = \Phi n\,\mathrm{d}t = MIn\mathrm{d}t,$$

što uvrštenjem u jednadžbu (3.3-16) daje $RI = MIn$. Odavde kraćenjem sa I slijedi

$$R = Mn. \tag{3.3-17}$$

Prema tome se utvrđivanje vrijednosti R otporničke normale svodi na *proračun* međuinduktiviteta M i *mjerenje* frekvencije vrtnje n za slučaj kada galvanometar G ne pokazuje nikakav otklon.

Engleski metrološki zavod NPL u stvari upotrebljava *udvostručeni* uređaj sa slike E.41a. Posve simbolički prikaz tako nastalog Lorenz-Smithova pramjerila otpora vidimo na slici E.41b. Višestruke su njegove prednosti pred jednostrukim uređajem. Tako je, na primjer, inducirani napon udvostručen (oko 2×2 mV), jer za serijski spoj vrijedi

$$U+U'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi+\Phi')=(M+M')n.$$

Ovdje simboli sa crticama označuju fizikalne veličine koje se odnose na drugi, pridodani jednostruki uređaj. Parazitni naponi, inducirani zbog postojanja zemaljskog magnetskog polja, gotovo iščezavaju, a neslučajni kontaktni naponi i termonaponi na četkici *6'* (sl. E.41b) usmjereni su suprotno od odgovarajućih napona na četkici *6* itd.

Izmjere opisanog pramjerila otpora vrlo su velike; tako, na primjer, duljina osovine pramjerila u NPL iznosi oko devet metara. Razlog tome je bojazan da željezo pogonskog elektromotora ne unese štetne utjecaje u izračunate vrijednosti međuinduktiviteta M i M'. I međusobni odnosi izmjera pojedinih dijelova postrojenja vrlo su pažljivo odabrani. Promjer metalnih prstenova *5* i *5'* je takav da se oni nalaze u području gdje magnetsko polje parova polusvitaka *1 2* i *1' 2'* mijenja smjer, tj. gdje je njegova vrijednost praktički jednaka nuli (usporedi sa slikom E.42b). U tom položaju međuinduktivitet je maksimalan, a derivacija $\partial M/\partial r$ teži k nuli. Potonje je vrlo važno, jer se na taj način pogreška pri mjerenju polumjera r prstena odrazuje samo neznatno u izračunatoj vrijednosti M.

Tablica **E-11**

Mjerenje vrijednosti »srednjeg internacionalnog ohma«

Godina	Autori	Metoda	Ω_{int}/Ω_{SI}
1937	Vigoureux	Lorenz-Smith	1,000499
1937	Hartshorn i Astbury	Campbell	505
1936...38	Curtis, Moon i Sparks	Komutacijska	472
1948	Thomas, Peterson, Cooter i Kotter	Wenner	484
	Srednja vrijednost		1,000490

Ovdje je prilika da navedemo nekoliko mjernih podataka o primjeni četiriju vrsta pramjerila otpora (tablica E-11). Ona su u razdoblju do godine 1948. upotrebljavana za utvrđivanje vrijednosti »srednjeg internacionalnog ohma« $\Omega_{int}=\Omega_0$ (vidi odlomke 5.2.3 i 5.3.2). Na temelju podataka iz tablice E-11 i sličnih rezultata Generalna konferencija za mjere i utege propisala je godine 1948. odnos $\Omega_0=\Omega_{int}=$ $=1{,}00049\cdot\Omega_{SI}$ (usporedi s tablicom E-9 u odlomku 3.1.5). Objašnjenje o reproduciranju starog (materijalnog) ohma živinim stupcem nalazi se u odlomku 5.3.2.

U tablici E-11 spominje se *Wennerovo pramjerilo otpora*, koje nismo razmatrali u ovoj knjizi, a u razdoblju od godine 1938. do 1949. upotrebljavao ga je američki metrološki zavod National Bureau of Standards. Temelj tog pramjerila su Campbellov standard međuinduktiviteta (odlomak 3.3.5) i dva komutatora, od kojih jedan periodički prekida struju u primarnom namotu standarda poznatog (izračunatog-međuinduktiviteta M, a drugi ispravlja napon koji se pri tom inducira u sekundar)

nom namotu. Sinhrono s ova dva komutatora okreće se frekvencijom vrtnje n otpornička mreža priključena na kolektor sličan kolektoru istosmjernog stroja. Podrobnija razmatranja pokazuju da je otpor R mjerene otporničke normale proporcionalan frekvenciji vrtnje n (mjereno) i međuinduktivitetu M računskog standardnog svitka, odnosno preciznije $R = 4nM$.

3.3.5. Računski standard međuinduktiviteta. Pod tim nazivom (engl. calculable primary standard of mutual inductance ili calculable mutual inductor) razumijevamo uređaj čiji međuinduktivitet M možemo *izračunati* poznajući vrlo precizno izmjere bitnih dijelova uređaja i znajući zakonitosti utjecaja koji uzrokuju odstupanje stvarne vrijednosti M od izračunate. Da bi relativna nepouzdanost $\Delta M/M$ međuinduktiviteta M tog uređaja bila što manja, njegov oblik mora biti jednostavan, a izvedba takva da se interferencijskim mjerenjima (vidi poglavlje A.8) mogu precizno utvrditi izmjere onih dijelova uređaja o kojima ovisi proračun M. Materijali od kojih je uređaj, računski standard međuinduktiviteta, izrađen moraju biti tako odabrani da je utjecaj promjene temperature, vlažnosti itd. na vrijednost M što manji, a konstrukcija takva da su utjecaji frekvencije izmjeničnih veličina, vlastitih kapaciteta, vanjskih magnetskih polja, vibracija, kožnog pojava, starenja materijala itd. na M što manji i što bolje poznati. Zato se standardi međuinduktiviteta obično sastoje od nekoliko jednoslojnih namota čiji su zavoji uloženi u spiralne utore izbrušene po obodu kremenog ili mramornog valjka. Uzimajući u obzir nabrojene i druge utjecaje, danas se postiže relativna nepouzdanost vrijednosti međuinduktiviteta najbolje izvedenih računskih standarda $\Delta M/M = \pm 1 \cdot 10^{-6}$ (statistička sigurnost $P = 68\%$).

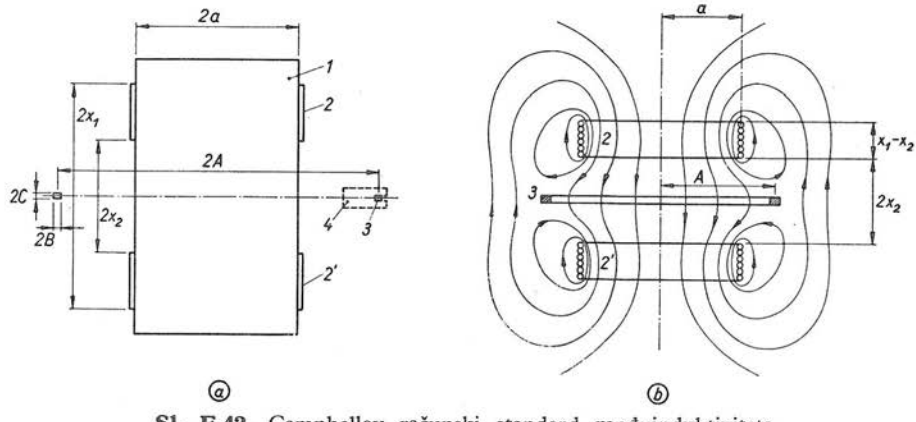
Većina dobro opremljenih metroloških zavoda izradila je sebi takav uređaj u obliku »Campbellova standardnog svitka« koji je *Albert Campbell* iz engleskog metrološkog zavoda National Physical Laboratory (NPL) izumio godine 1905. Shematsku skicu najnovije izvedbe (NPL, 1963) standarda međuinduktiviteta vidimo na slici E.42a: na kremeni valjak *1* helikoidno su namotane dvije polovice (*2* i *2'*) jednoslojnog primarnog namota, a u sredini raspora među njima nalazi se sekundarni višeslojni namot *3* smješten u utor fiksirane staklene ploče *4* (usporedi sa slikom E.43). Primarni polunamoti *2* i *2'* električki su spojeni u seriju, pa tako nastaje magnetsko polje, kao na slici E.42b, ako kroz njih teče električna struja. Prema tome se sekundarni namot *3* nalazi u onom dijelu prostora gdje je polje vrlo slabo. Zbog toga se pri računanju međuinduktiviteta M između primarnog (*2 2'*) i sekundarnog namota (*3*) položaj potonjeg može poznavati nekoliko puta manje precizno negoli položaj i izmjere primarnog namota.

Stanovitu predodžbu o engleskom standardu međuinduktiviteta (sl. E.42,43) možemo steći ako navedemo nekoliko podataka o njemu. Duljina kremenog valjka iznosi oko 50 cm, promjer primarnih polunamota je oko 29 cm, razmak među njima 20 cm, a srednji promjer sekundarnog namota iznosi oko 51 cm. Svaki polunamot dugačak je 10 cm, a sastoji se od 100 zavoja bakrene žice nazivnog promjera 0,6 mm, namotane s korakom 1 zavoj po milimetru. Sekundarni namot tvori 495 zavoja lakirane žice koji su raspoređeni u 23 sloja. Nazivna vrijednost međuinduktiviteta iznosi 10 mH; postoji još jedan dodatni sekundarni zavoj pomoću kojega se, zajedno s potenciometrom, međuinduktivitet može kontinuirano mijenjati unutar granica ± 11 μH. Gotovo identične međuinduktivne standarde, također nazivne vrijednosti 10 mH, posjeduje kanadski metrološki zavod NRC. Od godine 1960. NPL i NRC međusobno uspoređuju svoje standarde mjereći M u odnosu prema isto takvom »putujućem standardu« (travelling mutual inductor).

Proračun međuinduktiviteta M_i opisanog Campbellova svitka oslanja se na formulu koju je godine 1898. objavio *J. Jones-Viriamu*. Za međuinduktivitet između helikoidnog namota i koncentričnog kruga koji se nalazi u ravnini na jednom kraju namota ta formula glasi

$$M_i = \tfrac{1}{2}\mu_0\,\mu_r n x r[K - E + (K - P)\,(A - a)^2/r^2], \qquad (3.3\text{-}18)$$

a vrijedi uz pretpostavku da je kružni presjek vodiča zanemariv. Simboli u gornjoj jednadžbi označuju: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, μ_r — rezultantna relativna permeabilnost tvari koje tvore standard, n — korak zavoja helikoidnog (primarnog) namota, x — duljina namota, A — polumjer koncentričnog kruga (sredina sekundarnog namota), a — polumjer primarnog namota. Vrijednost simbola r slijedi iz jednadžbe $r^2 = (A + a)^2 + x^2$, dok su K, E i P kompletni eliptički integrali s modulima k (za K i E) i c, čiji su kvadrati $k^2 = 4Aa/r^2$ i $c^2 = 4Aa/(A + a)^2$.



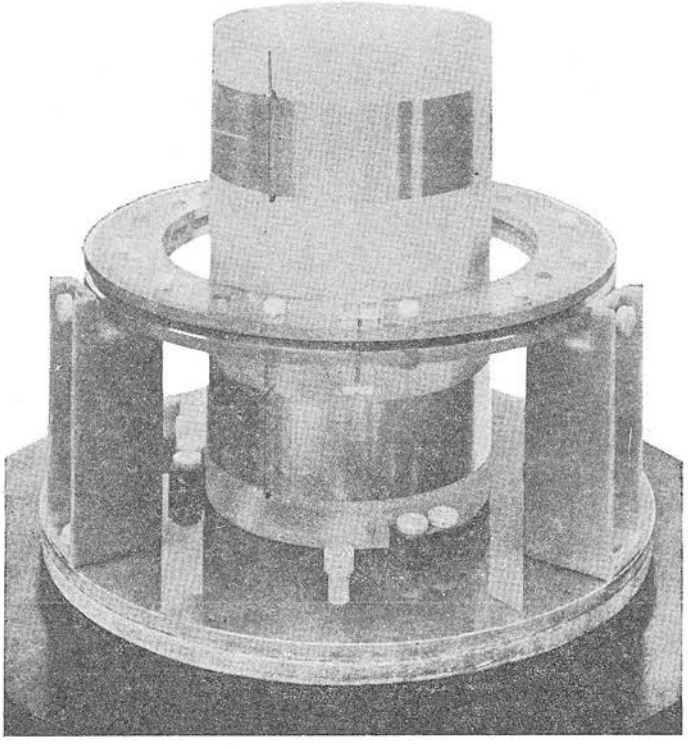
Sl. E.42. Campbellov računski standard međuinduktiviteta .
a) shematska skica, b) približan oblik magnetskog polja kad kroz primarne polunamote *2* i *2'* teče električna struja
1 — kremeni valjak, *2* i *2'* — dvije polovice helikoidnog primarnog namota, *3* — višeslojni sekundarni namot, *4* — staklena ploča u čijem je utoru učvršćen sekundarni namot (usporedi sa slikom E.43)

Međuinduktivitet između sekundarnog kruga (*3* na slici E.42a) i jednog primarnog polunamota iznosi $M_1 - M_2$, gdje su M_1 i M_2 vrijednosti za M_i iz jednadžbe (3.3-18) ako se stavi $x = x_1$, odnosno $x = x_2$. Pri tom je x_1 udaljenost ravnine sekundarnog namota od udaljenijeg kraja jednog polunamota, a x_2 udaljenost od njegovog bližeg kraja. Polumjer neutralnog kruga u kojem se nalazi središte sekundarnog namota jest onaj za koji je međuinduktivitet maksimalan; za nj vrijedi $\partial M_1/\partial A = \partial M_2/\partial A$. Jednadžba (3.3-18) obično se primjenjuje uz tri pretpostavke: 1. struja primarnog namota koncentrirana je u osi žice, 2. svi zavoji i njihova struja sekundarnog namota koncentrirani su u neutralnom krugu, 3. susceptibilnost tvari jednaka je nuli, tj. $\mu_r = 1$. Tako dobiven rezultat korigira se *naknadno* (vidi kasnije).

Najjače od svih izmjera na nepouzdanost $\Delta M/M$ utječe pogreška poznavanja srednje vrijednosti polumjera a primarnog namota (za oznake vidi sl. E.42a). U to se lako uvjeravamo ako umjesto jednadžbe (3.3-18) upotrijebimo (uz $nx = \text{const}$) izraz

$$M = A\frac{\partial M}{\partial A} + a\frac{\partial M}{\partial a} + x\frac{\partial M}{\partial x}, \qquad (3.3\text{-}19)$$

koji proizlazi iz *Eulerova* teorema primijenjenog na homogenu funkciju $M = M(A, a, x)$. (Ovdje izostavljamo indeks $_i$ koji naglašava da je M_i izračunata vrijednost.)



Sl. E.43. Izgled računskog standarda međuinduktiviteta koji je engleski metrološki zavod National Physical Laboratory (NPL) izradio godine 1963. Primarni namot sastoji se od dva međusobno razmaknuta helikoidna polunamota čijih 2×100 zavoja bakrene žice je namotano u utore izbrušene i izjetkane u kremeni valjak promjera oko 29 cm i duljine oko 50 cm. Sekundarni namot od 495 zavoja nalazi se u sredini između dva primarna polunamota, a višeslojno je smješten u kvadratni utor koji tvore tri staklena prstena. Međuinduktivitet prikazanog standarda iznosi oko 10 mH, a relativna nepouzdanost (sigurnost $P = 68\%$) njegove vrijednosti je $\Delta M/M = \pm 1 \cdot 10^{-6}$. (Foto: NPL. S dopuštenjem NPL. British Crown Copyright)

Tako su, na primjer, u NPL ustanovili da za njihov novi standard međuinduktiviteta derivacije iznose $\partial M/\partial A = -69{,}94082$ μH/m, $\partial M/\partial a = 387{,}58329$ μH/m i $\partial M/\partial x = -61{,}59039$ μH/m. To znači da je utjecaj pogrešnog poznavanja veličine a na $\Delta M/M$ preko 6 puta snažniji od utjecaja pogreške poznavanja x. Zbog toga se prije računanja M izmjeri promjer *svakog* zavoja obiju polovica primarnog namota, i to u šest azimuta. Istodobno se u tim tačkama mjeri i korak n namota. Rezultate jedne takve serije mjerenja srednje vrijednosti promjera, pod kojim se razumijeva dijametralni razmak između neutralnih osi namotane žice, sadrži tablica E-12 ($\mu m = 10^{-6}$ m). Oni se ne odnose na svih 200 zavoja, već na 10 *grupa* zavoja; uz redni broj grupe u zagradi tablice naveden je broj zavoja u grupi. Prema tome se jedna serija mjerenja promjera primarnog namota sastoji od $200 \cdot 6 = 1200$ pojedinačnih mjerenja!

Tablica **E-12**

Promjer primarnog namota standarda međuinduktiviteta NPL

Grupa i broj zavoja u njoj	Srednji promjer, μm	Odstupanje od srednje vrijednosti promjera polunamota, μm	Odstupanje od srednje vrijednosti promjera namota, μm
1 (12)	290140,6	+0,4	−0,7
2 (24)	290140,5	+0,3	−0,8
3 (28)	290140,1	−0,1	−1,2
4 (24)	290140,1	−0,1	−1,2
5 (12)	290139,9	−0,3	−1,4
6 (12)	290143,0	+0,5	+1,7
7 (24)	290142,3	−0,2	+1,0
8 (28)	290141,9	−0,6	+0,6
9 (24)	290141,8	−0,7	+0,5
10 (12)	290143,5	+1,0	+2,2

Takvim i sličnim mjerenjima NPL je utvrdio srednji polumjer primarnog namota $a = 14{,}507060$ cm i srednji polumjer sekundarnog $A = 25{,}39840$ cm pri temperaturi 20 °C. Uvrštenjem tih i ostalih potrebnih vrijednosti u jednadžbu (3.3-18) dobivene su vrijednosti međuinduktiviteta između jednog primarnog polunamota i *jednog* zavoja sekundarnog namota

$$M_0 = M_1(x_1) - M_2(x_2) = 26{,}9069648\ \mu\text{H} - 16{,}7990344\ \mu\text{H} = 10{,}1079304\ \mu\text{H}.$$

Računanjem pomoću jednadžbe (3.3-19) dobiven je rezultat koji se od gornjeg razlikuje za $4 \cdot 10^{-7}$ μH, tj. u relativnoj mjeri za $4 \cdot 10^{-8}$. Budući da postoje dva primarna polunamota, a sekundarni se namot sastoji od 495 zavoja, ukupni međuinduktivitet opisanog standarda iznosi

$$M_1 = 2 \cdot 495 \cdot M_0 = 10006{,}851\ \mu\text{H}.$$

Prije smo spomenuli da izračunatoj vrijednosti M_1 treba dodati *korekcije* uzrokovane različitim odstupanjima od pretpostavki na kojima se osniva teorija proračuna. Ukupna korekcija iznosi $\Delta M_k = -320$ nH ($n = 10^{-9}$), pa korigirana vrijednost međuinduktiviteta računskog standarda iznosi $M = M_1 + \Delta M_k = 10006{,}851\ \mu\text{H} - 0{,}32\ \mu\text{H} = 10006{,}531\ \mu\text{H}$.

Tablica **E-13**

Korekcije i utvrđene nepouzdanosti međuinduktiviteta M standarda NPL

Red. br.	Uzrok korekcije i nepouzdanosti	Korekcija, nH	Nepouzdanost $\Delta M(P=95\%)$, nH
1	Razdioba primarne struje	− 30	± 5
2	Presjek sekundarnog namota	−340	± 3
3	Permeabilnost kremena	− 48	± 3
4	Promjer primarnih polunamota	+ 3	±18
5	Korak primarnih polunamota	+ 95	± 6

Nejednolikost gustoće struje u okrugloj bakrenoj žici primarnog namota uzrokuju dvije pojave: električki otpor materijala i jakost električkog polja u žici. Budući da otpor metala ovisi o tome koliko je on mehanički napregnut, specifični otpor ρ žice veći je na vanjskim dijelovima zavoja, jer je ona prilikom namatanja tamo jače naprezana. Utvrđeno je da unutar granice elastičnosti ρ raste proporcionalno duljini vodiča l. Budući da je jakost polja duž žice obrnuto proporcionalna polumjeru zavoja, gustoća struje J slijedi zakon $J = J_0/(1 + y/a)^n$. Pri tom je J_0 gustoća struje u središtu žice (na polumjeru a; vidi sliku E.42a), y udaljenost od mjesta na polumjeru a, dok je n eksponent. Za slučaj $\rho = \text{const}$ je $n = 1$, dok je u slučaju $\rho = \text{const} \cdot l$ vrijednost eksponenta $n = 2$. Za opisani engleski standard međuinduktiviteta ove dvije pojave zahtijevaju korekciju $\Delta M_{k1} = -30$ nH. Ovaj podatak unesen je u tablicu E-13 pod rednim brojem 1.

Druga korekcija (redni broj 2) potrebna je zato jer je međuinduktivitet izračunat uz pretpostavku da se sekundarni namot sastoji od jednog zavoja smještenog tačno u neutralnoj ravnini. U stvarnosti se taj namot sastoji, na primjer, od 495 zavoja. Korekcija se računa pomoću *Searles*ove formule

$$\Delta M_{k2} = \frac{1}{6}\left[\frac{C^2}{A}\,\frac{\partial M}{\partial A} + (B^2 - C^2)\,\frac{\partial^2 M}{\partial A^2}\right].$$

Značenja oznaka razabiru se na slici E.42a. Podrobnim računanjem dobiveno je za standard NPL $\Delta M_{k2} = -340$ nH. Treću korekciju uzrokuje paramagnetičnost žice, stakla i zraka te dijamagnetičnost kremena. Magnetske susceptibilnosti (vidi odlomak 1.3.4) tih materijala prethodno se izmjere, a zatim se njihov utjecaj na M_i izračuna numeričkom integracijom potencijalne energije, jer ne postoji, na primjer, eksplicitna formula za proračunavanje utjecaja susceptancije kremena na M. Za spominjani engleski standard rezultat je naveden pod brojem 3 u tablici E-13. Pri tom nepouzdanost uzrokuje to što različiti kremeni dijelovi imaju, doduše, istu susceptibilnost, ali neznatno različite gustoće.

Utvrđene bitne nepouzdanosti (statistička sigurnost 95%) vrijednosti međuinduktiviteta M računskog standarda (NPL) navedene su u desnom stupcu tablice E-13. Drugi korijen iz sume njihovih kvadrata iznosi $\Delta M(95\%) = \pm 20$ nH. Budući da, dakle, vrijedi $M = 10006{,}531\ \mu\text{H} \pm 20$ nH, relativna nepouzdanost iznosi

$$\Delta M(95\%)/M = \pm 20\ \text{nH}/10^4\ \mu\text{H} = \pm 2 \cdot 10^{-6}.$$

Budući da su granice pouzdanosti pri statističkoj sigurnosti $P = 68\%$ oko dva puta šire negoli pri statističkoj sigurnosti 95% (vidi odlomak A.3.6.6), gornji podatak možemo napisati i u obliku

$$\frac{\Delta M(P = 68\%)}{M} = \pm 1 \cdot 10^{-6}.$$

Navedeni podatak vrijedi uz pretpostavku da je sekundarni namot *3* ispravno smješten u odnosu prema primarnom *2* (sl. E.42a, 43). Namještanje se izvodi u tri koraka: 1) Najprije se osi namotâ *2* i *3* dovedu u paralelan položaj time što se gornja čela namota *2* i *3* namjeste u horizontalan položaj. 2) Zatim se osi dovedu u koincidenciju time što se izjednače radijalni raspori između oba namota u svim smjerovima. 3) Konačno se izvede definitivno najfinije namještanje: kroz suprotno spojene primarne polunamote pusti se struja, a sekundarni se namot aksijalno namješta tako dugo dok se u posebnom detektoru, priključenom na sekundarni namot,

ne inducira nikakav napon. Time je, dakle, konstatirano da se sredina sekundarnog namota nalazi u neutralnoj ravnini dvodijelnog primarnog namota. Za opisani engleski standard M utvrđeno je da odstupanja od tog položaja uzrokuju ove specifične promjene međuinduktiviteta: radijalno $-7{,}41\ \mu H/cm^2$, aksijalno $14{,}8\ \mu H/cm^2$, otklonski (nagib!) 4,8 mH/rad. Tako, na primjer, pogreška namještanja u radijalnom (aksijalnom) smjeru 0,1 mm uzrokuje relativnu promjenu međuinduktiviteta M u iznosu $-7\cdot10^{-8}$ ($1{,}5\cdot10^{-7}$). Očito je, dakle, da se pogreške ove vrste mogu lako izbjeći.

Izračunata vrijednost M (i njena pouzdanost) opisanog Campbellova standarda međuinduktiviteta ovisi u primjeni još o dva faktora. Jedan je frekvencija izmjeničnih veličina u strujnom krugu standarda, a drugi je utjecaj otpora, induktiviteta i kapaciteta primarnog i sekundarnog namota standarda (neznatno utječe i konfiguracija ostalih elemenata strujnog kruga). Zato se u stvarnoj primjeni, kao što je Campbellovo pramjerilo otpora, mora računati s *efektivnom* vrijednošću međuinduktiviteta M_e standarda, i to pri *niskoj* frekvenciji (do oko 10 Hz), ako se želi održati relativna nepouzdanost M_e oko $\pm 1\cdot10^{-6}$.

U pramjerilu otpora ne upotrebljava se sâm standard međuinduktiviteta (M_e), već dva »radna standarda« (odlomak 3.3.3). Vrijednosti njihova međuinduktiviteta M_1 i M_2 u odnosu prema M_e utvrđuju se posebnim mjernim mostom koji je godine 1925. izumio *L. Hartshorn*. U tom mostu primarni namot standarda spojen je u seriju sa sekundarnim. Međusobnom orijentacijom namota određena je vrijednost efektivne vrijednosti

$$M_e = \pm M - C_1 R_1 R_2 \pm M\,\omega^2\left[C_1L_1 + C_2L_2 + \frac{C_{12}}{\pm M}(L_1 \pm M)(L_2 \pm M)\right].$$

Indeksi 1 odnose se na veličine primarnog namota, indeksi 2 na veličine sekundarnog, a C_{12} predstavlja kapacitet između priključnih stezaljki serijske kombinacije. Aritmetička sredina dviju apsolutnih vrijednosti M_e iznosi

$$M_{es} = M(1 + Kf^2), \tag{3.3-20}$$

gdje konstanta K ovako ovisi o navedenim otporima, kapacitetima i induktivitetima

$$K = 4\pi^2\,[C_1L_1 + C_2L_2 + C_{12}(L_1 + L_2)].$$

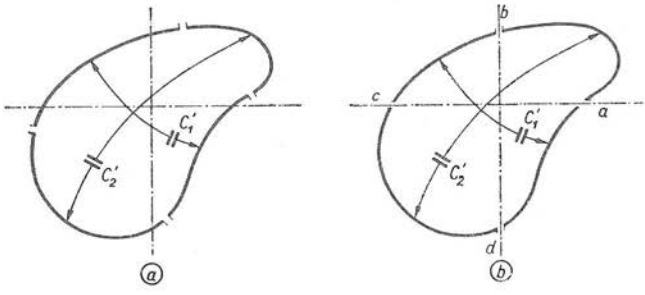
Tako se, na primjer, iz podataka opisanog engleskog standarda $C_1 = 130$ pF, $L_1 = 7{,}7$ mH, $C_2 = 380$ pF, $L_2 = 308$ mH, $C_{12} = 10$ pF (osim toga je $R_1 = 11{,}8\ \Omega$, $R_2 = 81{,}4\ \Omega$) računanjem dobiva vrijednost konstante $K = 4{,}8\cdot10^{-9}\ s^2$. Za frekvenciju $f = 10$ Hz na taj način pomoću jednadžbe (3.3-20) slijedi $M_e = M\,(1 + 4{,}8\cdot10^{-9}\ s^2\cdot100/s^2) = M\,(1 + 4{,}8\cdot10^{-7})$. Prilikom računanja konstante K možemo se uvjeriti da induktivitet i kapacitet sekundarnog namota pridonose oko 97%.

Prethodna načelna razmatranja o standardu međuinduktiviteta mogla su djelomično dočarati neke teškoće koje treba savladati ako se želi postići $\Delta M(68\%)/M = \pm 1\cdot10^{-6}$. Pri tom nismo ni spomenuli nepojmljivo mučnu izradu helikoidnih utora na vanjskoj površini kremenog valjka kuda se ulažu zavoji primarnog namota. Zato je prirodna težnja vrhunske metrologije da se nastoji poslužiti drukčijim pramjerilima (ili za druge fizikalne veličine), ako je reprodukcija mjernih jedinica pomoću njih pouzdanija ili brža ili barem jeftinija. U idućem odsječku 3.4 razmotrit ćemo nedavne uspjehe na tom području i naznačiti tok suvremenih istraživanja omogućen današnjim stanjem tehnologije.

3.4. Računski standard kapaciteta. Reproduciranje električkog napona pramjerilima

U uvodu odsječka 3.3 naveli smo razloge zašto se uz strujnu vagu (odsječak 3.1) upotrebljavaju pramjerila električkog otpora. Pri tom se pramjerilo otpora može oslanjati na proračunatom međuinduktivitetu (odlomci 3.3.2,3,4) ili na proračunatom kapacitetu (odlomak 3.3.1). Ovdje ćemo u prva tri odlomka opisati najnovije dostignuće vrhunske metrologije — računski standard kapaciteta. Zatim ćemo u daljnjim odlomcima iznijeti bit novijih prijedloga za izradu pramjerila električkog napona. Napominjemo da smo neke terminološke finese (standard, normala) dodirnuli na kraju uvoda u odsječak 3.3.

3.4.1. Lampardov teorem o kapacitetu. Metrolozi su za reprodukciju električkog otpora sve donedavna gotovo isključivo upotrebljavali standarde međuinduktiviteta (i induktiviteta) zato jer nisu znali izraditi i primijeniti takav kondenzator (standard kapaciteta) čiji bi se kapacitet mogao s potrebnom pouzdanošću *izračunati* iz izmjera kondenzatora. Iako su *Ayrton* i *Perry* već godine 1879. upotrebljavali »računski kondenzator«, mogućnost izrade standarda kapaciteta (u smislu vrhunske metrologije) najavljena je tek godine 1956, kada je *D. G. Lampard* iz australskog metrološkog zavoda National Standards Laboratory (NSL) objavio svoj divan teorem o kapacitetu. Iste godine *Lampard* i *A. M. Thompson* predložili su prikladan oblik standarda kapaciteta (engl. calculable standard of capacitance), koji se danas već upotrebljava u nekoliko vodećih metroloških zavoda, a izveden je u obliku sloga ravnih metalnih *cilindara*. Na pomolu je, međutim, još savršeniji računski kondenzator: potkraj godine 1969. predložio je *D. Makow* (National Research Council of Canada) računski kondenzator izveden u obliku sloga metalnih ~~valjaka~~ prstenova



Sl. E.44. Presjek cilindričkog kondenzatora — računskog standarda kapaciteta. Prema Lampardovu teoremu (sl. b) jedinični kapacitet C' između traka u nasuprotnim kvadrantima ne ovisi ni o veličini ni o obliku traka

Lampardov ćemo teorem opisati uz pomoć slike E.44, koja prikazuje presjek neizmjerno dugačkog vodljivog cilindra razdijeljenog u četiri trake međusobno izolirane rasporima koji su paralelni uzdužnoj osi cilindra. Označimo li sa C'_1 i C'_2 kapacitet po jedinici duljine ($C' = C/l$, gdje se l mjeri duž osi cilindra) između nasuprotnih traka (sl. E.44a), njihov međusobni odnos pokorava se u *vakuumu* jednadžbi

$$\exp(-\pi C'_1/\epsilon_0) + \exp(\pi C'_2/\epsilon_0) = 1, \qquad (3.4\text{-}1)$$

koja je opći matematički izraz Lampardova teorema. Ovdje je ϵ_0 električka konstanta (dielektričnost vakuuma), koja je ovako povezana s magnetskom konstantom (odlomak 1.4.1)

$$\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1.$$

Molimo da ispravite:

Stranica, redak	Stoji	Treba da bude
62, jedn. (2.2-10)	$T\,e^2$	$T^2\,e$
211, 3. odozdo	vrhom	svrhom
293, 11. odozdo	**F**	**G**
386, sl. A. 117	ΔT	ΔT_B
452, 14. odozgo	1825	1852
748, 2. odozgo	ne	na
809, 9. odozdo	repodrucirati	reproducirati
815, tablica	—	Tablica D-15
900	Primjer 2	Primjer 1
960, 4. odozgo	μA	A
962, 14. odozdo	dobievnu	dobivenu
1000, 10. odozdo	*valjaka*	*prstenova*

Pri tom je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m per definitionem tačna vrijednost (odlomak 2.1.3; H/m = N/A²), a v_0 je *izmjerena* vrijednost brzine elektromagnetskih valova u *vakuumu*. Pomoću $1/\epsilon_0 = \mu_0 v_0^2$ teorem (3.4-1) glasi

$$\exp(-\pi \mu_0 v_0^2 C_1') + \exp(-\pi \mu_0 v_0^2 C_2') = 1, \tag{3.4-2}$$

gdje je umnožak $\pi \mu_0 = 4\pi^2 \cdot 10^{-7}$ H/m = const. Gornji izraz ne ovisi o obliku i izmjerama četiriju traka; jedini je uvjet da su raspori na slici E.44a paralelni s uzdužnom osi cilindra.

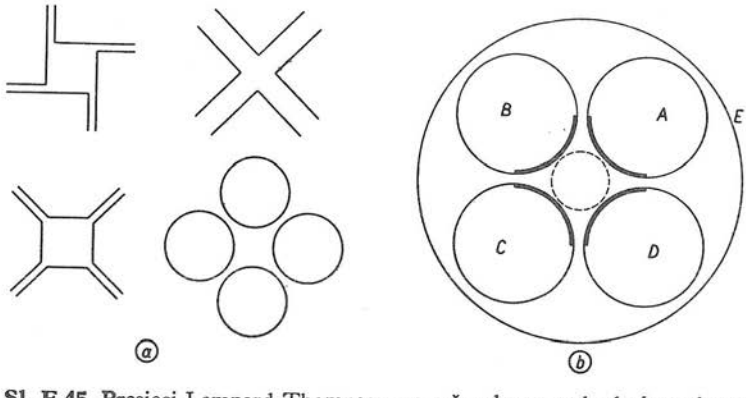
Teorem (3.4-2) dobiva posve jednostavan matematički oblik ako su četiri trake izrezane tako da se raspori podudaraju s dvije međusobno okomite ravnine koje su paralelne s osi cilindra (sl. E.44b). U tom su slučaju kapaciteti (po jedinici duljine) C_1' i C_2' traka iz nasuprotnih kvadranata (na primjer ab i cd) međusobno *jednaki*, a vrijednost im iznosi

$$C' = C_1' = C_2' = \frac{\epsilon_0}{\pi} \ln 2 = \frac{\ln 2}{\pi \mu_0} \frac{1}{v_0^2}. \tag{3.4-3}$$

Pomoću vrijednosti $v_0 = 2{,}997925\,(1 \pm 3 \cdot 10^{-7}) \cdot 10^8$ m/s (odlomak 3.7.2) odavde dobivamo kapacitet po jedinici duljine (u vakuumu)

$$C' = 1{,}95354849\ldots \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \approx 1{,}95 \text{ pF/m}.$$

3.4.2. Računski standard kapaciteta. U australskom je metrološkom zavodu NSL *A. M. Thompson* proučio različite mogućnosti primjene specijaliziranog Lampardovog teorema (3.4-3) za izradu računskog standarda kapaciteta. Pri tom je glavni zahtjev bio da se izolirajući raspor mora nalaziti tamo gdje je njegov poremećajni utjecaj na poprečni kapacitet (C_1, C_2') malen te da elektrode imaju takav geometrijski oblik koji se može izraditi sa što većom preciznošću. Na slici E.45a vidimo izbor mogućih presjeka standarda kapaciteta koji tim zahtjevima udovoljavaju u različitim stupnjevima pouzdanosti. NSL se bio odlučio za izradu četvrtog oblika, tj. na izradu četiri jednaka kružna valjka. Presjek te kombinacije podrobnije prikazuje slika E.45b, na kojoj slova *A*, *B*, *C* i *D* označuju četiri nominalno jednaka



Sl. E.45. Presjeci Lampard-Thompsonova računskog standarda kapaciteta: a) prikladni oblici, b) oblik odabran u NSL

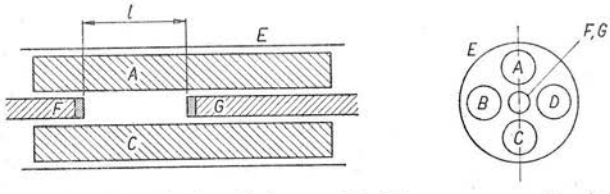
kružna vodljiva valjka smještena vrlo blizu jedan drugome tako da njihove paralelne osi tvore kvadrat. Uzemljeni cilindrički oklop E gotovo tangira valjke s vanjske strane. U takvim je okolnostima za kapacitet između para nasuprotnih valjaka (na primjer kapacitet između A i C) od bitne važnosti samo onaj dio njihove površine koji je deblje nacrtan (silnice s ostalog dijela valjka ne mogu dosegnuti dijagonalno suprotni valjak).

Jedinični kapacitet C' iz jednadžbi (3.4-1, 2, 3) *računska* je veličina. Za *stvarna* mjerenja moramo upotrijebiti uređaj na slici E.45b konačne duljine l, pa tako kapacitet C dvaju nasuprotnih valjaka iznosi

$$C = C'l = \frac{\ln 2}{\pi \mu_0 v_0^2} l. \tag{3.4-4}$$

Prema tome se pri utvrđivanju kapaciteta Lampard-Thompsonova vakuumskog kondenzatora mora izmjeriti brzina v_0 elektromagnetskih valova u vakuumu i duljina l valjaka. Australski metrološki zavod NSL odabrao je takvu konstrukciju kondenzatora kod koje se duljina l može *mijenjati kontinuirano*, a mjeriti precizno pomoću ugrađenog interferometra (odlomak 3.4.3).

Načelo mijenjanja l vidi se na slici E.46: valjci A, B, C i D fiksne su duljine, ali se u centralni prostor između njih utiskuju dva uzemljena metalna valjka (F, G) koji gotovo dodiruju okolna četiri valjka (crtkano na slici E.45b). Za kapacitet C prema jednadžbi (3.4-4) mjerodavna je samo prikazana duljina l, jer je preostali prostor duž kondenzatorskih valjaka električki zasjenjen *metalnim* valjcima F i G, čija je dielektričnost jednaka nuli. Budući da neposredno uz čelne strane tih valjaka električko polje nije homogeno, optički izmjeren razmak l između F i G ne podudara se s »električkim razmakom« koji ulazi u izraz (3.4-4). Ti rubni efekti lako se, međutim, eliminiraju izvođenjem dvaju mjerenja, tako da ipak vrijedi relacija $C = C'l$ (s neznatnim, ali poznatim korekcijama). Osim toga, čelne plohe valjaka F i G opremaju se kompenzacijskim šiljcima kojima se rubne pojave smanjuju na neznatnu mjeru.



Sl. E.46. Aksijalan i radijalan presjek Thompsonova računskog standarda namjestivog kapaciteta $C = C'l$

A, B, C, D — jednaki metalni valjci čije osi tvore kvadrat, E — uzemljeni oklop, F, G — pomični metalni valjci, l — promjenljiva efektivna duljina standarda kapaciteta

Jednadžba (3.4-3) vrijedi uz pretpostavku da su četiri valjka savršeno glatka, jednakog promjera te da su učvršćena tačno u uglove kvadrata. U stvarnosti se to ne može postići, pa zato postoji stanovita razlika, na primjer $\Delta C = C_1 - C_2 = (C_1' - C_2')l$; ovdje je $C_1 = C_{AC}$ i $C_2 = C_{BD}$ (sl. E.47). Naredno će nam razmatranje pokazati da je utjecaj razlike ΔC na *srednju vrijednost* C_s kapaciteta Lampard-Thompsonova standarda vrlo malen; pri tom C_s definiramo relacijom $C_s = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$, a C_1 i C_2 ovise ovako o karakterističnom omjeru a/b izmjerâ, koji proizlazi iz vrlo kompliciranе teorije,

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 l}{\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right), \qquad C_2 = \frac{\epsilon_0 l}{\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

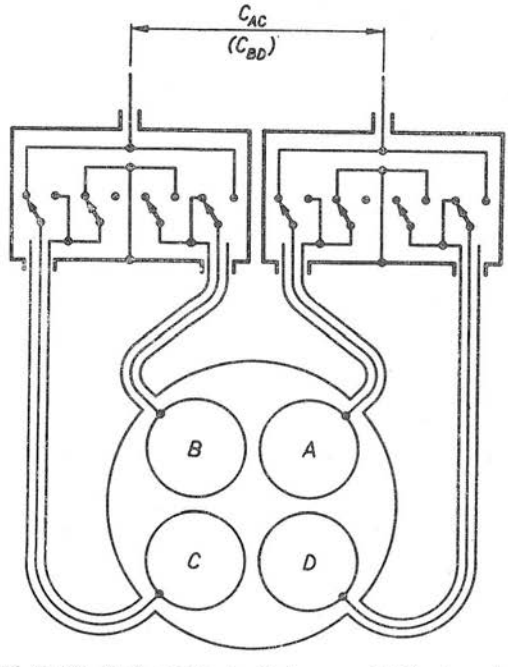
Omjer a/b vrlo je blizak broju 1, a prema tome i omjer b/a. Oduljim računanjem, primjenom e-funkcija i razvojem hiperbolne funkcije i logaritma u red može se omjer a/b eliminirati i C_s izraziti u ovisnosti o teoretskoj vrijednosti C iz (3.4-4) i o omjeru $\Delta C/C$

$$C_s = C\left[1+\frac{\ln 2}{8}\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 - \frac{(\ln 2)^3}{192}\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^4 + \dots\right].$$

Članove više od drugoga opravdano možemo odbaciti; na taj način dobivamo relativnu pogrešku srednje vrijednosti kapaciteta

$$g = \frac{C_s - C}{C} = \frac{\frac{1}{2}(C_1 + C_2) - C}{C} = \frac{\ln 2}{8}\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2.$$

Ako je, na primjer, $\Delta C/C = 3{,}4 \cdot 10^{-4}$, što se u metrološkim zavodima može bez daljnjega postići, gornji izraz daje relativnu pogrešku $g = 1 \cdot 10^{-8}$! Napominjemo da se omjer $\Delta C/C \approx \Delta C/C_1 \approx \Delta C/C_2$ može utvrditi mjernim mostom uz pomoć bilo kakve stabilne kapacitivne normale, dakle bez poznavanja mjernih jedinica, jer je riječ o *uspoređivanju* kapaciteta.



Sl. E.47. Spoj preklopke kojom se odabire kapacitet para valjaka AC ili valjaka BD, a da su pri tom svi ostali dijelovi ostali oklopljeni i uzemljeni

Australski su metrolozi proučili i niz drugih utjecaja na pouzdanost proračunate vrijednosti kapaciteta opisanog standarda koji je osnova njihovog pramjerila otpora (odlomak 3.3.1). Pri tom je naročito važan utjecaj duljine l na slici E.46, jer se prema $C = C'l$ namješta vrijednost kapaciteta standarda, a o njemu ovisi preciznost mosnog uspoređivanja tog kapaciteta s kapacitetom radnih kapacitivnih normala (plinom punjeni oklopljeni kondenzatori s tri stezaljke, treća je priključena na oklop; vidi odlomak 3.3.1). Australci su, u stvari, željeli utvrditi pri kojoj je duljini l njihov standard najpouzdaniji. Rezultate vidimo u tablici E-14 za promjenu l od vrijednosti 1 mm do 1 metar. Vidimo da se maksimalna preciznost mjerenja duljine l postiže u području od 3 do 30 cm, ali preciznost mosnog uspoređivanja kapaciteta raste sa l. Budući da su optička i električka mjerenja od podjednakog utjecaja na pouzdanost poznavanja C, optimalno je područje između 3 i 30 cm, tj. od 0,06 do 0,6 pF. Duljina l mjerena je Fabry-Perotovim interferometrom, a izvor svjetla bila je Hg 198 (vidi odlomak A.8.7.4).

Vrlo podrobne analize australskih metrologa pokazuju da bi relativna nepouzdanost reprodukcije kapaciteta njihovog kapacitivnog standarda iznosila oko

$\pm 1 \cdot 10^{-7}$ ako bi brzina v_0 elektromagnetskih valova u vakuumu bila tačno poznata. Budući da nepouzdanost (u stvari relativno standardno odstupanje; vidi odlomak 3.7.2) $\Delta v_0/v_0$ iznosi oko $\pm 3 \cdot 10^{-7}$, to je relativna nepouzdanost reproduciranog

Tablica **E-14**

Utvrđivanje optimalne duljine standarda kapaciteta u NSL

Duljina l, mm	Kapacitet (približno), pF	Preciznost mjerenja duljine, $1:10^8$	Preciznost uspoređivanja kapaciteta, $1:10^8$
0,1	0,002	7	100
1	0,02	2	10
3	0,06	1	3
10	0,2	1	1
30	0,6	2	0,5
100	2	3	0,3
1000	20	5	0,2

kapaciteta oko $\pm 6 \cdot 10^{-7}$, jer prema jednadžbi (3.4-4) kapacitet ovisi o kvadratu brzine elektromagnetskih valova u vakuumu. Pri utvrđivanju vrijednosti otpora pomoću kapacitivnog pramjerila (odlomak 3.3.1) dolaze, dakako, do izražaja i druge pogreške, tako da konačna nepouzdanost utvrđivanja otpora (1 Ω) iznosi oko $\Delta R/R \approx \pm 7 \cdot 10^{-7}$ (vidi odlomak 3.3.1).

Korisno je barem letimično razmotriti strukturu uzroka koji dovode do prije spomenute relativne nepouzdanosti $\pm 1 \cdot 10^{-7}$. To ćemo učiniti uz pomoć tablice E-15, u kojoj smo skupili eksperimentalne i računske podatke australskih metrologa

Tablica **E-15**

Korekcije i utvrđene nepouzdanosti kapaciteta C standarda NSL

Red. br.	Uzrok korekcije i nepouzdanosti	Relativna korekcija, $\times 10^{-8}$	Relativna nepouzdanost, $\times 10^{-8}$
1	Razmaci između elektroda-valjaka	-2	$\pm 0{,}5$
2	Razmaci između elektroda i pomičnih cijevi za zaslanjanje	$-0{,}3$	$\pm 0{,}1$
3	Razmaci između elektroda i šupljeg valjka		$< \pm 0{,}1$
4	Nejednolikost poprečnih izmjera, nesavršenost površina		± 5
5	Ekscentričnost na krajevima pomičnih cijevi		± 2
6	Bliskost pomičnih cijevi pri 0,1 pF	-19	± 2
7	Preostali tlak plina		$< \pm 0{,}2$
8	Utjecaj elektrostatskih sila		± 2
9	Utjecaj viših frekvencija	$+3$	± 1
10	Nepouzdanost duljine vala svjetla		± 2
11	Utjecaj konačnosti optike	$+6$	± 1
12	Električka i optička neosjetljivost, nestabilnost		± 2

(usporedi s analognom tablicom E-13 u odlomku 3.3.5). Pri tom u tablici navodimo i korekcije koje valja uzeti u obzir prilikom primjene jednadžbe (3.3-4). Podaci su maksimalni za raspon kapaciteta od 0,1 pF do 0,35 pF i za frekvenciju 1592 Hz upotrijebljenih izmjeničnih veličina u mjernom mostu (odlomak 3.3.1).

Najveću korekciju ($-19\cdot10^{-8}$ u relativnoj mjeri) nalazimo pod brojem 6 u tablici E-15. Uzrok joj je moguća velika blizina dviju pomičnih cijevi čija udaljenost l određuje kapacitet standarda (detaljniji opis vidi u odlomku 3.4.3). Ta se korekcija može smanjiti na oko $-2\cdot10^{-8}$ ako se minimalni razmak poveća na oko 1 cm, ali to bi išlo na račun povećane nepouzdanosti pri maksimalnom razmaku. Znatnija je još jedino korekcija $+6\cdot10^{-8}$ uzrokovana konačnom izmjerom otvora za utvrđivanje centra interferencijskih pruga (redni broj 11).

Posve desni stupac u tablici E-15 sadrži poznate relativne nepouzdanosti kapaciteta australskog standarda uz iste uvjete koje smo naveli za korekcije. Najveću relativnu nepouzdanost $\pm5\cdot10^{-8}$ uzrokuje kombinirano djelovanje nejednolikosti promjera elektroda-valjaka, nejednolikost dijagonalnog razmaka među njima i nesavršena glatkoća površina. Pod brojem 11 uzeta je u obzir i nepouzdanost duljine vala zračenja Hg 198 (vidi odlomak A.8.7.7). Napominjemo da su u tablici navedene procijenjene maksimalne vrijednosti nepouzdanosti. Kvadriramo li 12 parcijalnih relativnih nepouzdanosti, dobivene kvadrate zbrojimo, a zbroj korjenujemo (vidi odsječak A.4.2), dobivamo rezultantnu relativnu nepouzdanost $\pm7\cdot10^{-8}\approx$ $\approx\pm1\cdot10^{-7}$.

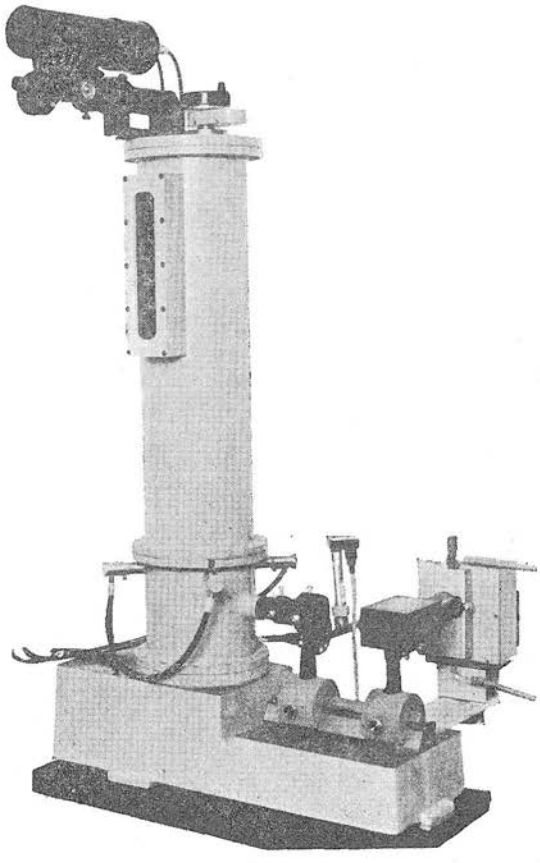
3.4.3. Konstrukcija australskog kapacitivnog standarda. U nastavku izlaganja o računskom standardu kapaciteta ukratko ćemo opisati bitne dijelove tog uređaja i način na koji su oni složeni u pouzdanu cjelinu. Pri tom ćemo opis osloniti na izvedbu australskog metrološkog zavoda National Standards Laboratory (NSL) od godine 1965. (u najnovije vrijeme s takvim standardom eksperimentira i američki National Bureau of Standards, NBS). Australski metrolozi taj standard razvijaju i dotjeruju oko deset godina, a naš će se opis odnositi na konstrukciju koju je nakon niza prototipova, mjerenja i istraživanja poremećajnih utjecaja izradio *W. K. Clothier* sa suradnicima.

Fotografiju australskog kapacitivnog standarda, kojemu se kapacitet može kontinuirano namještati između vrijednosti 90 fF i 367 fF (f = femto = 10^{-15}; f = 10^{-3} piko; vidi tablicu A-1), prikazuje slika E.48. Funkcioniranje i konstrukciju standarda u presjeku prikazuje slika E.49 (usporedi sa sl. E.46), na koju će se odnositi naš opis.

Mjedeni valjci (elektrode) *1* promjera 34,95 mm platirani su rodijem, a sa svake svoje strane učvršćeni su u temeljne ploče *2*. Pri tom su upotrijebljene kremene podložne pločice *3*, pločice *4* od nerđajućeg čelika i stezne mjedene matice *5*. Debljina temeljnih ploča tako je odabrana da su one u stanovitoj mjeri savitljive; na taj način ploče osiguravaju traženi međuelektrodni razmak, a da se pri montaži elektrode ne savijaju zbog, neznatne doduše, razlike u duljini. U gornju temeljnu ploču u tu su svrhu izglodani utori. Šuplji valjak *6* izrađen je od nerđajućeg čelika, a isto tako i njegovi poklopci *7* i *8*. Valjak *6*, poklopci *7* i *8* tvore zajedno sa četiri elektrode čvrstu temeljnu konstrukciju.

Pomična cijev od invara centrirana je na svom donjem kraju teflonskim prstenom *9*, a na gornjem kraju završava zglobom *10* učvršćenim na maticu *11*. Okretanjem vodećeg vijka *12* cijev se, dakle, pomiče gore ili dolje i time se mijenja kapacitet kondenzatora (cijev, dakle, odgovara jednom od pomičnih cilindara *F*, *G* na slici

E.46) prema jednadžbi (3.4-4). Vijak *12* je mijehom priključen na pogonsku osovinu koja napušta evakuirani prostor kroz specijalnu brtvu. Cjelokupni hod cijevi iznosi 142 mm čime se kapacitet mijenja u rasponu od 90 do 367 fF. Poseban uređaj *13* ne dopušta da se matica *11* pokuša pomaknuti izvan tih granica. Donja cijev za zasjenjivanje na slici E.49 (usporedi sa sl. E.46) izrađena je zajedno s prstenastim perom *14* i montažnim prstenom *15*. Poseban daljinski upravljani elektromagnetski uređaj *16* dovodi interferencijsku pločicu *17* u položaj paralelan odgovarajućoj pločici na dnu gornje, pomične cijevi.

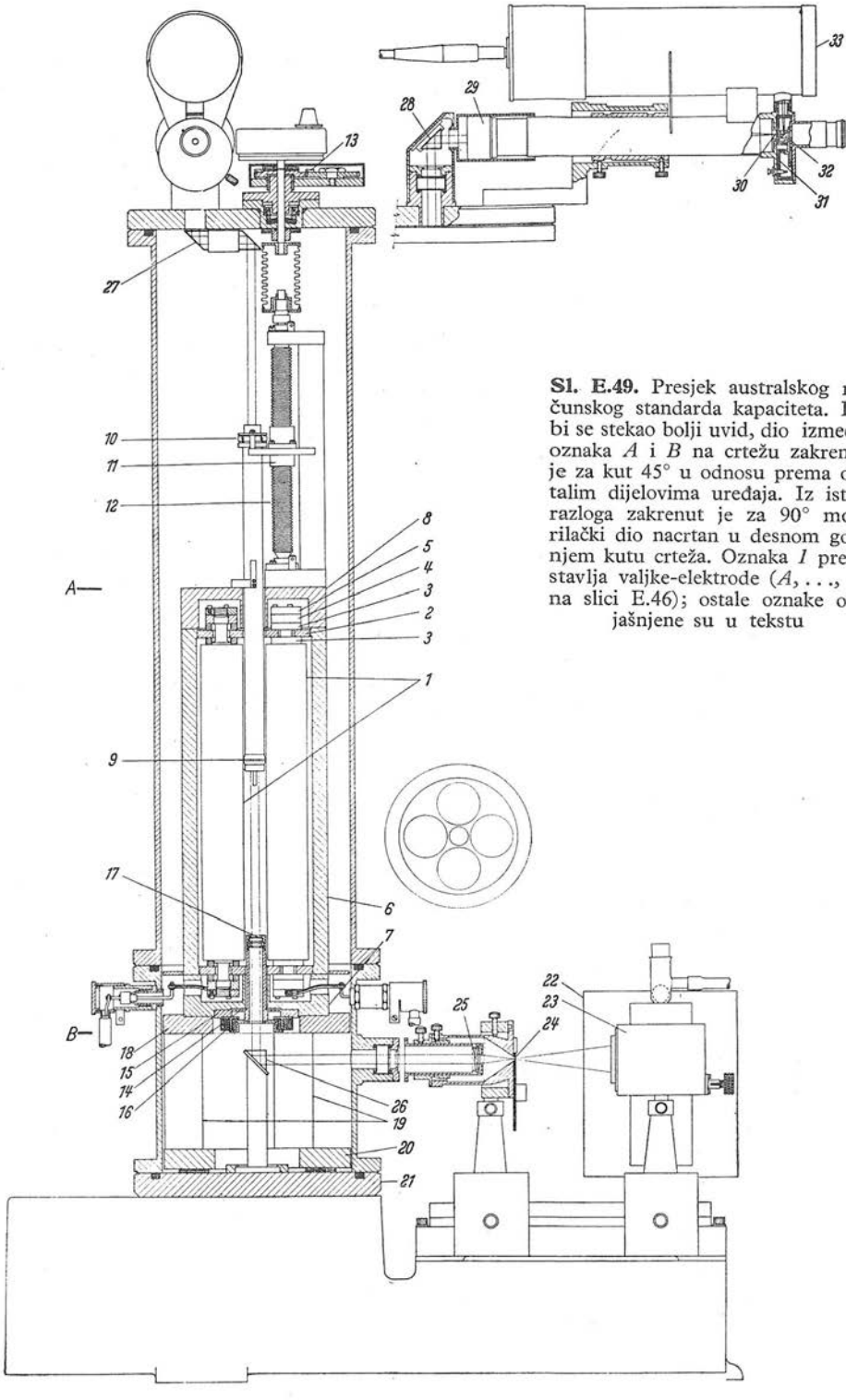


Sl. E.48. Izgled računskog standarda kapaciteta australskog metrološkog zavoda National Standards Laboratory (NSL) koji je konstruirao, ispitao i dotjerao *W. K. Clothier*. Visina čitavog uređaja iznosi oko 110 cm, a promjer uspravnog valjka oko 17 cm. Konstrukcija standarda razabire se na slici E.49. (Foto: NSL)

Opisani dijelovi kapacitivnog standarda imaju za temelj čvrst prsten *18* poduprt s tri podupore *19*. One su učvršćene na prsten *20*, koji je izoliran od temeljne ploče *21*. Svi ti dijelovi izrađeni su od mjedi. Ploča *21*, koja ujedno služi kao donja brtva evakuiranog prostora, pričvršćena je na temelj od lijevana željeza. Kondenzator se evakuira difuzijskom uljnom pumpom i dvostepenom mehaničkom pumpom, a u toku primjene standarda tlak je ispod $5 \cdot 10^{-3}$ mm Hg.

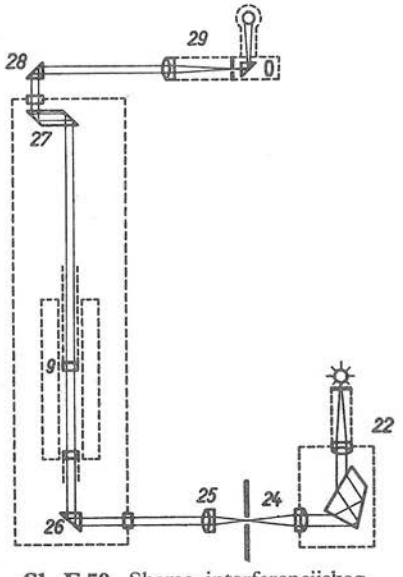
Optički sistem za interferencijsko mjerenje efektivne duljine l elektroda, koja s korekcijama ulazi u jednadžbu (3.4-4), prikazan je zasebno na slici E.50. Brojčane se oznake odnose na iste dijelove kapacitivnog standarda kao i na slici E.49. Izvor svjetla je bezelektrodna žarulja koja sadrži Hg 198 i argon (podrobnije o interferencijskom mjerenju duljine vidi u poglavlju A.8), a djeluje na temperaturi 12 °C. Dvije takve žarulje, uzbuđene oscilatorom frekvencije 250 MHz, čine kompaktnu jedinicu *22*. Žarulje su smještene neposredno uz monokromator *23*, tako da leće nisu potrebne. Svjetlo iz monokromatora pada na otvor *24* (0,71 mm), prolazi kroz kolimator *25* i ulazi u evakuirani prostor.

Zatim se svjetlo prizmom *26* skreće vertikalno, ulazi u prostor donje cijevi za zasjenjivanje elektroda, produžuje kroz dvije interferencijske pločice (na krajevima obiju cijevi), nastavlja kroz gornju cijev i pada na dvostruku prizmu *27*. Na vertikalnom putu prema prizmi *28* svjetlo napušta evakuirani prostor i ulazi u teleskop *29*, gdje se nalazi žičani križ *30*. Dvopozicijski rotacijski zaslon *31* ima dva otvora.



Sl. E.49. Presjek australskog računskog standarda kapaciteta. Da bi se stekao bolji uvid, dio između oznaka *A* i *B* na crtežu zakrenut je za kut 45° u odnosu prema ostalim dijelovima uređaja. Iz istog razloga zakrenut je za 90° motrilački dio nacrtan u desnom gornjem kutu crteža. Oznaka *1* predstavlja valjke-elektrode (*A*, . . ., *D* na slici E.46); ostale oznake objašnjene su u tekstu

Jedan, veliki, služi za motrenje čitavog vidnog polja, dok drugi otvor promjera 0,24 mm služi za utvrđivanje centra interferencijskih pruga. Kad je mali otvor namješten, prizma *32* otklanja svjetlo na katodu fotomultiplikatora *33*. Njegov izlaz priključen je na pojačalo i katodni osciloskop. Promjer interferencijskih pločica iznosi 12 mm (kut 10′), a njihova površina prekrivena je peteroslojnim filmom cinkova sulfida i magnezijeva fluorida, čime se za zeleno živino svjetlo dobiva faktor refleksije oko 70%. Da bi se smanjila upojnost svjetla, sve potrebne optičke plohe prekrivene su magnezijevim fluoridom.



Sl. E.50. Shema interferencijskog mjerenja nezasjenjene duljine *l* (sl. E.46). Brojevi označuju isto što i na slici E.49

3.4.4. Tekućinski elektrometar — pramjerilo napona. U australskom metrološkom zavodu National Standards Laboratory (NSL) stekli su u toku prošlih desetak godina veliko iskustvo pri izradi i primjeni kapacitivnih standarda (vidi odlomke 3.3.1 i 3.4.3). To iskustvo i današnje mogućnosti fine mehanike, interferometrije i gravimetrije ponukali su godine 1965. *W. K. Clothiera* iz NSL da obnovi ideju o pramjerilu napona koju je 1834. objavio *S. Harris*, godine 1880. usavršio *Lord Kelvin*, a 1921. u nesavršenom obliku primjenjivao *C. Barus*. Načelo reproduciranja stanovite vrijednosti istosmjernog napona pomoću tzv. tekućinskog elektrometra (engl. liquid electrometer), koji djeluje na *principu izjednačenja gravitacijske sile s elektrostatskom silom*, opisat ćemo uz pomoć slike E.51. *Horizontalna* vodljiva ploča *1* (disk) okružena je u istoj visini širokim vodljivim prstenom *2*, koji je od ploče izoliran zračnim rasporom. Ispod ravnine *1*, *2* nalazi se *vodljiva tekućina 3* (npr. živa), koja je na istom električkom potencijalu kao i prsten *2* (galvanski spoj *4*). Ako se između diska *1* i vodljive tekućine *3* dovode istosmjerni napon U, razina tekućine ispod *1* podići će se pod djelovanjem elektrostatske sile (usporedi s odlomkom 2.4.2 i slikom E.20) otprilike onako kao što je karikirano prikazano slikom E.51.

U neposrednom okolišu središta diska *1* elektrostatsko polje je homogeno, a razina tekućine horizontalna, tj. okomita na smjer djelovanja mjesnog ubrzanja zemljine teže g. U tom području elektrostatska sila F djeluje vertikalno prema gore nastojeći povećati kapacitet kondenzatora koji tvore disk *1* i izdignuta vodljiva tekućina *3* (stavak o maksimalnoj energiji električkog polja kondenzatora). Pod djelovanjem elektrostatske sile F razina tekućine digne se za x iznad položaja koji je zauzimala dok nije djelovao napon ($U=0$), tj. iznad položaja u kojem se pri $U>0$ nalazi tekućina ispod prstena *2*. Pri tom je ta sila uravnotežena težinom izdignute tekućine, tj. ovo pramjerilo djeluje na načelu uspoređivanja (jednakosti) elektrostatske i gravitacijske sile, što je neophodno za reprodukciju nezavisne jedinice SI u području elektromagnetizma.

Zamislimo oko samog središta kružnog diska *1* vrlo malenu površinu ΔA, tako da ispod nje doista možemo pretpostaviti *homogeno* elektrostatsko polje $E=U/(L-x)$; ovdje je L razmak između *1* i *3* prije nego što je priključen napon,

a x izdignuće tekućine pošto se priključi napon $U > 0$. Na isto toliku površinu ΔA tekućine djeluje vertikalna elektrostatska sila ΔF. Prema teoriji elektromagnetskog polja omjer te sile i pripadne površine iznosi $f = \Delta F/\Delta A = \frac{1}{2}\epsilon E^2$, gdje je ϵ dielektričnost prostora između *1* i *3*. Tlak f kojim polje drži tekućinu na visini x za naš slučaj iznosi

$$f = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon \frac{U^2}{y^2}, \tag{3.4-5}$$

gdje je $y = L - x$ (sl. E.51). Suprotno tom tlaku djeluje gravitacijski tlak p izdignute tekućine. Budući da gustoća te tekućine iznosi ρ, vrijednost je tlaka (vidi odsječak B.4.1)

$$p = g\rho x. \tag{3.4-6}$$

Pod djelovanjem polja $E = U/y$ tekućina se izdigne za toliku vrijednost x da su tlakovi f i p međusobno jednaki, $f = p$. Izjednačenjem jednadžbi (3.4-5,6) slijedi

$$U^2 = \frac{2}{\epsilon} g\rho x y^2. \tag{3.4-7}$$

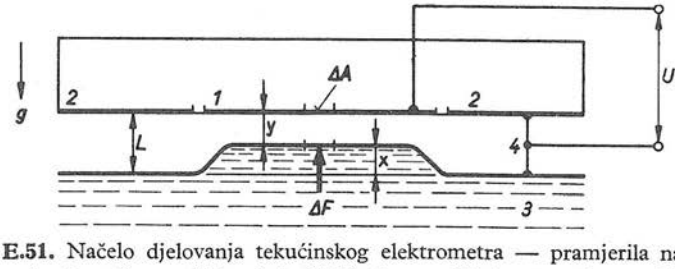
Zamislimo da se opisano pramjerilo napona (sl. E.51) nalazi u *vakuumu*, pa je dielektričnost ϵ prostora između *1* i *3* jednaka električkoj konstanti ϵ_0 (vidi odlomak 1.2.2). U tom slučaju vrijedi jednadžba $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$ (odlomak 1.4.1), gdje je v_0 brzina svjetla u vakuumu, a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (tačno) magnetska konstanta (odlomak 2.1.3). Uvrštenjem $1/\epsilon_0 = \mu_0 v_0^2$ namjesto ϵ u jednadžbi (3.4-7) dobivamo

$$U = Cy\sqrt{x} = Cy\sqrt{L - y}. \tag{3.4-8}$$

U toj jednadžbi obuhvatili smo konstantom C ostale sudjelujuće veličine na ovaj način

$$C = v_0\sqrt{2\mu_0 g\rho}. \tag{3.4-9}$$

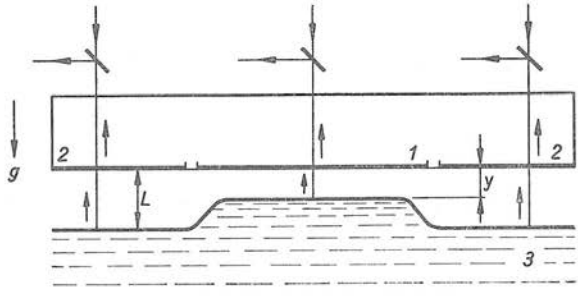
Odavde vidimo da je vrijednost napona U reproduciranog pramjerilom na slici E.51 to manje nepouzdana što su preciznije izmjereni razmaci y i x (ili L), brzina svjetla u vakuumu v_0, mjesno ubrzanje zemljine teže g i gustoća ρ vodljive tekućine.



Sl. E.51. Načelo djelovanja tekućinskog elektrometra — pramjerila napona
1 — horizontalna vodljiva ploča (disk), *2* — vodljivi prsten, *3* — vodljiva tekućina, *4* — galvanski spoj

Australski metrolozi predviđaju da će razmake L i y mjeriti refleksijskim Fabry-Perotovim interferometrom u skladu sa shemom na slici E.52. To znači da elektrode *1* i *2* moraju biti polupropusne za upotrijebljeno interferirajuće zračenje (vidi poglavlje A.8). Zato će ih vjerojatno izraditi tako da će na donju površinu

glatkog staklenog bloka nanijeti vrlo tanak sloj metala. Za vodljivu tekućinu vjerojatno će izabrati *živu*. Među njene dobre strane ubrajaju se veliki faktor refleksije, lako pročišćavanje i relativna pouzdanost poznavanja njene gustoće $1:10^6$, dok su mane: velika gustoća (mala vrijednost veličine x!) i relativno visok tlak pare. U obzir dolazi i galij; prednost mu je mala gustoća i nizak parcijalni tlak, dok mu je mana ponešto visoka temperatura taljenja (29,92 °C). Proučava se i mogućnost primjene galijevih slitina te nemetalnih vodljivih tekućina.



Sl. E.52. Interferencijsko mjerenje razmaka L i y (za ostale oznake vidi sliku E.51)

S tekućinskim elektrometrom metrolozi nemaju iskustva u smislu vrhunske metrologije (pramjerilo napona!). Zato australski metrolozi proučavaju sve moguće utjecaje koji bi mogli poboljšati pouzdanost reproducirane vrijednosti napona U. Jedan od takvih utjecaja je razlika između »optičke« (izmjerene interferometrijski) udaljenosti L među elektrodama *1* i *3*, odnosno *2* i *3*, te »električke« udaljenosti (površinski efekt). Ta razlika može se u konkretnom slučaju ustanoviti eksperimentalno. Drugi je utjecaj površinska napetost tekućine. Oblik krivulje razine ispod raspora između elektroda *1* i *2* (sl. E.51) ovisi, naime, o gradijentu električkog polja i o napetosti površine tekućine; zato se udaljenost L mora mjeriti dovoljno daleko od raspora *1*, *2*. Pri tom može biti od koristi iskustvo stečeno s kapilarnom depresijom u živinim cijevnim barometrima. Treći negativni utjecaj očekuje se od mjesnih nepravilnosti površine vodljive tekućine, što se može vrlo neugodno odraziti pri interferencijskim mjerenjima. Metrolozi se, međutim, najviše pribojavaju četvrtog utjecaja: *vibracija*. I u najbolje lociranim laboratorijima neznatni seizmički poremećaji uzrokovali bi znatne pogreške pri mjerenju udaljenosti L i y (sl. E.52), a o vrijednostima tih veličina, prema jednadžbi (3.4-8), ovisi vrijednost reproduciranog napona U. Zato se predviđa prigušivanje vibracija posebnim postupkom: ispod »brijega« žive (sl. E.52) stavit će se amalgamirana ploča učvršćena na stap koji u vodilicama može klizati gore-dolje. Uvođenje tog antivibracijskog uređaja uzrokuje prividnu promjenu gustoće žive, ali se to može računski uzeti u obzir. Drugo ili dodatno rješenje problema vibracija je klasično: pasivni prigušnici koji djeluju ili direktno na tekućinu ili na postolje na kojem se nalazi pramjerilo.

Većina nabrojenih utjecaja još je nedovoljno istražena, pa je zato nemoguće pouzdano ocijeniti preciznost mjerenja (reprodukcije) napona U tekućinskim elektrometrom. Stanoviti uvid u preciznost ipak možemo steći primjenom metode računanja relativnog standardnog odstupanja indirektno mjerene fizikalne veličine. U tu svrhu primjenjujemo jednadžbu (4.1-3) u odlomku A.4.1.1, prilagođenu ovdašnjim oznakama,

$$r_U^2 = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{s_i}{U} \right)^2 . \qquad (3.4\text{-}10)$$

Pri tom slovo x_i predstavlja opću oznaku za veličine v_0, g, ρ, y i L u jednadžbama (3.4-8, 9), slovo s_i standardno odstupanje navedenih veličina, a r_U relativno standardno odstupanje napona izmjerenog tekućinskim elektrometrom.

Naznačene parcijalne derivacije izraza (3.4-8), koji sadrži (3.4-9), glase:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial v_0} &= \frac{U}{v_0}, \quad \frac{\partial U}{\partial g} = \tfrac{1}{2}\frac{U}{g}, \quad \frac{\partial U}{\partial \rho} = \tfrac{1}{2}\frac{U}{\rho}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \tfrac{1}{2}\frac{2L-3y}{L-y}\frac{U}{y}, \quad \frac{\partial U}{\partial L} = \tfrac{1}{2}\frac{L}{L-y}\frac{U}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (3.4\text{-}11)$$

Uvrštenjem gornjih rezultata u izraz (3.4-10) dobivamo ovisnost kvadrata preciznosti (relativnog standardnog odstupanja) napona r_U o preciznostima spomenutih pet veličina

$$r_U^2 = r_{v_0}^2 + \frac{1}{4}\left[r_g^2 + r_\rho^2 + \left(\frac{2-3y/L}{1-y/L}\right)^2 r_y^2 + \left(\frac{1}{1-y/L}\right)^2 r_L^2\right]. \qquad (3.4\text{-}12)$$

Pri tom su preciznosti definirane kao omjer standardnog odstupanja i srednje vrijednosti, na primjer: $r_g = s_g/g$ (odlomak A.3.3.3).

Neke parcijalne preciznosti u jednadžbi (3.4-12) mogu se dobro procijeniti. Tako je, na primjer, $r_{v_0} = (3...5)\cdot 10^{-7}$ i $r_g = 3\cdot 10^{-7}$. Gustoća žive poznaje se na oko $1:10^6$ tačno (komparativnim mjerenjem gustoće drugih tekućina pri laboratorijskoj temperaturi ta nepouzdanost ne pogoršava se bitno), pa možemo uzeti da r_ρ iznosi oko $1\cdot 10^{-6}$. Teže je procijeniti vrijednosti ostalih članova u jednadžbi (3.4-12), jer moramo znati omjer y/L. Pretpostavimo li da je $y/L = 0{,}75$ (vidi primjer na kraju ovog odlomka), spomenuta jednadžba prelazi u oblik

$$r_U^2 = r_{v_0}^2 + \frac{1}{4}\left[r_g^2 + r_\rho^2 + r_y^2 + 16\, r_L^2\right].$$

Vidimo da je za odabrani omjer y/L utjecaj preciznosti mjerenja veličine L izvanredno velik (faktor 16!). S obzirom na vibracije vjerojatno se ne može ostvariti znatna preciznost mjerenja duljina y i L (sl. E.52). Ako pretpostavimo $r_y \approx r_L \approx \approx 1\cdot 10^{-6}$, gornja se jednadžba praktički reducira u

$$r_U^2 \approx 4\, r_L^2 \quad \text{ili} \quad r_U \approx 2\, r_L \approx 2\cdot 10^{-6}.$$

Načelo djelovanja tekućinskog elektrometra razmatrali smo uz pretpostavku da je riječ o *istosmjernom* naponu U. Jednadžbe (3.4-5...9) ostaju, međutim, na snazi i onda ako između elektroda elektrometra (sl. E.51) djeluje *izmjenični* napon. Jedino se pri tom u njih mora umjesto simbola istosmjernog napona U staviti oznaka trenutne vrijednosti izmjeničnog napona u. Pretpostavimo li da se mjeri *sinusni* napon $u = U_m \sin \omega t$, kvadrat trenutne vrijednosti napona iznosit će (usporedi s odsječkom 2.3)

$$u^2 = \frac{1}{2} U_m^2 (1 - \cos 2\,\omega\, t) = \frac{1}{2} U_m^2 - \frac{1}{2} U_m^2 \cos 2\,\omega\, t.$$

Usporedbom ovog izraza s jednadžbom (3.4-7) uočavamo da ona ostaje na snazi ako pod simbolom U razumijevamo *efektivni* napon (odlomak 2.3.1). Prema tome tekućinski elektrometar omogućuje *direktnu* reprodukciju mjerne jedinice sinusnog napona, tj. bez uobičajenog pretvarača $=/\approx$. Moguća je i drukčija primjena tekućinskog elektrometra: dobivanje jedinice istosmjernog napona iz izmjeničnog pomoću pretvarača $\approx/=$.

Dalekosežne će biti posljedice ako metrolozi uspiju izraditi predloženo pramjerilo kojim će se napon reproducirati s relativnom nepouzdanošću $\pm 2 \cdot 10^{-6}$, što je najmanje dva puta bolje od nesigurnosti današnje strujne vage (odsječak 3.1). Novim bi se, naime, pramjerilom *direktno* utvrđivala vrijednost *napona* normala, a ne bi se kombinacijom naponske i otporničke normale morala pohranjivati vrijednost *struje* ($I = E/R$; vidi sliku E.25 u odlomku 3.1.2). Time bi pramjerila struje postala nepotrebna, dok bi se pramjerila otpora (odsječak 3.3) i dalje primjenjivala za utvrđivanje vrijednosti otporničkih normala.

Primjer. S obzirom da je pri predloženom pramjerilu napona riječ o ravnoteži elektrostatske sile i težine izdignute tekućine, saznajmo kriterij stabilnosti djelovanja uređaja i pripadnu osjetljivost; na temelju izvedenog kriterija i električke čvrstoće vakuuma izračunajmo koliko bi približno iznosile vrijednosti veličina x, L i U (sl. E.51). Do ovisnosti $\mathrm{d}x/x = f(x, y, \mathrm{d}U/U)$ dolazimo tako da deriviramo jednadžbu (3.4-8) po x uzimajući da je pri tom $C = \text{const}$ i $L = x + y = \text{const}$. Tako nastaje izraz za osjetljivost

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2y}{y - 2x} \frac{\mathrm{d}U}{U}, \tag{3.4-13}$$

(to je, u stvari, četvrti član jednadžbe [3.4-12], izražen varijablom x), odakle proizlazi da je sistem stabilan pri $y > 2x$, odnosno $L > 3x$.

Da bismo mogli obaviti željeni proračun, moramo najprije izračunati konstantu C iz jednadžbe (3.4-7). Pretpostavljamo da će se raditi sa živom u vakuumu, pa zato uzimamo u obzir ove podatke (približno): $v_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2, $g = 9{,}81$ m/s^2, $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ kg/m^3. Uvrštenjem u (3.4-7) slijedi kvadrat konstante C, tj. $C^2 = v_0^2 \mu_0 g \rho$:

$$C^2 = \left(3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}36 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 0{,}335 \frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{A}^2 \mathrm{s}^4 \mathrm{m}}.$$

Pri tom smo uzeli u obzir da je $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}$ i $\mathrm{kg} = \mathrm{VAs^3/m^2}$ (vidi tablice E-4,5). Odavde slijedi približna vrijednost $C = 1{,}74 \cdot 10^8$ V/m$^{3/2}$.

Pretpostavimo da za svrhe interferencijskog mjerenja zadovoljava izdignuće $x = 0{,}3$ mm (maloj vrijednosti x težimo zato da bismo dobili što manju vrijednost napona U). Za taj slučaj jednadžba (3.4-8) daje vrijednost jakosti električkog polja u prostoru između *1* i *3* (sl. E.51)

$$E = \frac{U}{y} = C x^{1/2} = 1{,}74 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^{3/2}} (3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m})^{1/2} = 3 \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}},$$

tj. vakuum je električki napregnut gotovo do svoje gornje granice (naprezanje se može povećati uvođenjem plina pod tlakom, ali u tom slučaju u izraz za C ulazi relativna dielektričnost $\epsilon_r > 1$ tog plina). Izvedenom kriteriju stabilnosti $y > 2x$ udovoljit ćemo ako, na primjer, odaberemo $y = 3x = 0{,}9$ mm, pa je $L = x + y = 4x = 1{,}2$ mm. Prema tome je

$$U = yE = 0{,}9 \text{ mm} \cdot 3 \text{ kV/mm} = 2700 \text{ V}.$$

Budući da smo odabrali $y = 3x$, iz jednadžbe (3.4-13) dobivamo vrijednost osjetljivosti $\mathrm{d}x/x = 6\,\mathrm{d}U/U$.

3.4.5. Naponska vaga — pramjerilo napona. Najstariji instrumenti za mjerenje električkog napona su tzv. elektrostatski voltmetri. Njihovo se djelovanje temelji na činjenici da električko polje kondenzatora izvodi na njegove elektrode sile koje nastoje povećati energiju W tog polja. Ako se kondenzator kapaciteta C izvede tako da je jedna elektroda pomična, između nje i fiksne elektrode djeluje sila

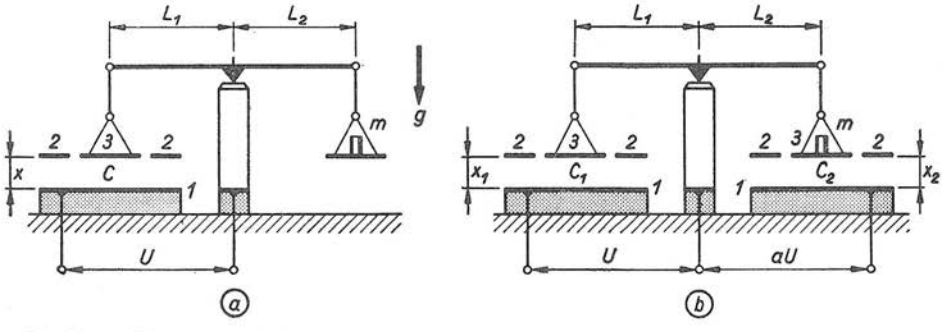
$$F = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x} U^2, \tag{3.4-14}$$

gdje je $W = \frac{1}{2} C U^2$ energija polja, U napon između elektroda, a x koordinata u smjeru u kojem se pomiče elektroda. U izrazu (3.4-14) je pretpostavljeno $U = \text{const}$.

Elektrostatska sila F uravnotežuje se u visokonaponskim elektrometrima, na primjer, silom pera $F' = xK$, gdje je K poznata konstanta. Iz jednakosti $F = F'$ dobiva se ovisnost mjerenog napona U o x, $\partial C/\partial x$ i K.

Relativno standardno odstupanje laboratorijskih elektrostatskih voltmetara sa svjetlosnim očitanjem iznosi oko $\pm 1 \cdot 10^{-3} = \pm 0{,}1\,\%$. Prema tome je pogreška najboljih takvih instrumenata 200 do 500 puta veća od nepouzdanosti pramjerila struje ili otpora. Unatoč tome Šveđanin *R. Ohlon* predložio je godine 1967. da se posebna izvedba elektrostatskog instrumenta (modificiran Kelvinov elektrometar) upotrijebi za direktno (apsolutno) utvrđivanje vrijednosti napona normala (Westonovih elemenata; odsječak 3.5). Time je on, u stvari, predložio primjenu *pramjerila napona* umjesto delikatnog pramjerila struje (posljedice bi, dakako, bile one iste koje smo spomenuli na kraju odlomka 3.4.4, ispred primjera) i vjeruje da bi relativno standardno odstupanje pri reprodukciji napona iznosilo oko $\pm 2 \cdot 10^{-6}$.

Predloženo bi pramjerilo djelovalo na načelu *automatskog uravnoteženja* elektrostatske sile (3.4-14) s poznatom gravitacijskom silom. Budući da bi se kapacitet C tog elektrometra mogao utvrditi izvanredno precizno, usporedbom s kapacitivnim standardom (odlomak 3.4.2), primjena tog pramjerila svela bi se u biti na precizno mjerenje izmjera i razmaka. Četiri su načelne izvedbene *prednosti* elektrostatskog pramjerila (napona) pred elektrodinamičkim (strujna vaga; odsječak 3.1): 1) Geometrija sastavnih dijelova i čitavog uređaja bolje je definirana, pa je zato mjerenje izmjerâ preciznije. 2) Zagrijavanje bitnih dijelova je neznatno, pa su posljedice temperaturnih promjena izmjera beznačajne. 3) Ekraniziranje se u slučaju elektrostatskih polja može izvesti gotovo savršeno, i to relativno jednostavnim sredstvima, što nije slučaj kod elektromagnetskih polja. 4) Dielektrička svojstva tvari od kojih je izrađeno pramjerilo mogu se preciznije izmjeriti negoli magnetska svojstva. Načelna i najveća *mana* elektrostatskog pramjerila je relativno velika vrijednost reproduciranog napona i mala sila između elektroda. Zato će se prilikom njegove usporedbe s naponom normale morati upotrijebiti najpreciznija djelitelji napona, a to unosi sitnu dodatnu pogrešku.



Sl. E.53. Uz načelo djelovanja naponske vage — pramjerila napona. a) Skica elektrometra prema Kelvinu, b) Ohlonov prijedlog pramjerila napona

1 — fiksna horizontalna ploča-elektroda, *2* — zaštitna prstenasta ploča, *3* — pomična kružna ploča-elektroda, C — kapacitet pločastog kondenzatora *1 3*, x — vertikalni razmak između ploča *1* i *3* (paralelan sa smjerom ubrzanja zemljine teže), L_1 i L_2 — duljine krakova vage. Tačkice predstavljaju električki izolator. Ploča *3* dovedena je na napon pomoću vodljive podupore i kraka vage

Načelo djelovanja elektrostatskog pramjerila, izvedenog u obliku *naponske vage*, možemo objasniti pomoću skice E.53a. Između fiksne kondenzatorske ploče

1 i pomične ploče *3* dovede se napon čiju vrijednost U želimo utvrditi. Kružna ploča *3*, koju okružuje prstenasta zaštitna ploča *2*, ovješena je o lijevi krak vage (o najpreciznijim vagama vidi poglavlje A.9). Ploče *1* i *3* privlače se silom F prema jednadžbi (3.4-14), ako između njih djeluje napon U (na slici E.53 pretpostavljeno je da su električki vodljivi svi dijelovi vage, osim tačkasto naznačene izolacije). Pri tom je A površina pomične ploče *3*, C kapacitet kondenzatora što ga tvore horizontalne ploče *1* i *3*, a x koordinata paralelna s ubrzanjem zemljine teže g. Sila F izvodi zakretni moment $M = FL_1$ u odnosu prema okretištu vagine poluge. Vagu možemo uravnotežiti utegom mase m, koji se nalazi u desnoj zdjelici. Budući da težina mg tog utega izvodi zakretni moment $M_m = mgL_2$, za slučaj ravnoteže vrijedi $M = M_m$, odnosno $\frac{1}{2} U^2 L_1 \partial C/\partial x = mgL_2$. Odavde dobivamo ovisnost vrijednosti U mjerenog napona o sudjelujućim veličinama

$$U = \sqrt{\frac{2mg}{\partial C/\partial x} \frac{L_2}{L_1}}. \tag{3.4-15}$$

Ako u ovom načelnom razmatranju zanemarimo nehomogenost polja uz rubove ploče *3*, kapacitet C kondenzatora *13* možemo izraziti jednadžbom $C = \epsilon A/x$. Prema tome je $\partial C/\partial x = -\epsilon A/x^2 = -C/x$. Budući da je $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ (odsječak 1.2), a $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$, gdje je v_0 brzina svjetla u vakuumu, slijedi dalje $\partial C/\partial x = \epsilon_r A/(x^2 \mu_0 v_0^2)$. Uvrstimo li ovaj izraz u jednadžbu (3.4-15), dobivamo

$$U = x v_0 \sqrt{\frac{2\mu_0}{\epsilon_r A} \frac{L_2}{L_1} mg}. \tag{3.4-16}$$

Ovdje je, dakako, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m per definitionem tačna vrijednost (odlomak 2.1.3). Prema tome nepouzdanost $\Delta U/U$ reproduciranog napona U ovisi o pogreškama s kojima poznajemo udaljenost x, površinu A, relativnu dielektričnost ϵ_r, omjer duljina krakova L_2/L_1, mjesno ubrzanje zemljine teže g, masu utega m i brzinu svjetla u vakuumu v_0.

Umjesto opisanog »Kelvinovog pločastog elektrometra«, *R. Ohlon* je predložio izradu modificirane izvedbe koju prikazuje skica E.53b. Na njoj vidimo da se na svakom kraku vage nalazi jedan par elektroda: na lijevi par priključi se napon U, a desna zdjelica optereti se utegom m. Da bi se vaga dovela u ravnotežu, na desni par elektroda *automatski* se dovede napon aU, gdje je $a < 1$. Prema tome na lijevi krak vage djeluje elektrostatska sila $\frac{1}{2} U^2 \partial C_1/\partial x_1$, a na desni krak zbroj sila $mg + \frac{1}{2}(aU)^2 \partial C_2/\partial x_2$. U ravnotežnom položaju vrijedi jednadžba

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C_1}{\partial x_1} U^2 L_1 - mgL_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial C_2}{\partial x_2} (aU)^2 L_2 = 0. \tag{3.4-17}$$

Uloge lijevog i desnog para elektroda na slici E.53b možemo, dakako, zamijeniti: ako uteg mase m stavimo na lijevu zdjelicu (C_1), a napon U dovedemo na desni par elektroda (C_2), ravnoteža će se postići dovođenjem napona bU na C_1. Za taj slučaj vrijedi

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C_2}{\partial x_2} U^2 L_2 - mgL_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial C_1}{\partial x_1} (bU)^2 L_1 = 0. \tag{3.4-18}$$

Ta jednadžba vrijedi uz pretpostavku da se prilikom premještanja utega nije promijenio omjer L_1/L_2. Ako uvedemo kratice

$$K_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial C_1}{\partial x_1} \quad \text{i} \quad K_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial C_2}{\partial x_2},$$

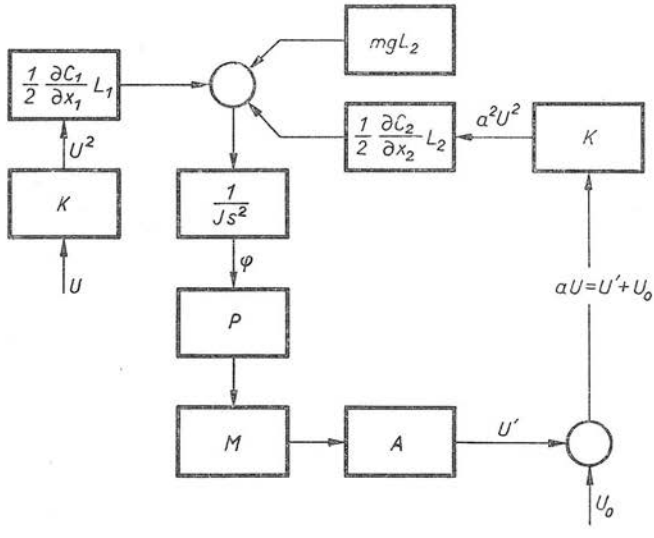
zbrajanjem i oduzimanjem jednadžbi (3.4-17, 18) dobivamo relacije

$$\left.\begin{aligned} U^2[(1-b^2)K_1+(1-a^2)K_2L_2/L_1] &= mg\,(1+L_2/L_1),\\ U^2[(1+b^2)K_1-(1+a^2)K_2L_2/L_1] &= mg\,(L_2/L_1-1)\end{aligned}\right\} \qquad (3.4\text{-}19)$$

Iz ovih se jednadžbi razabire da duljina krakova vage ne utječe na vrijednost U, već *omjer* duljina L_1 i L_2. Budući da se veličine K_1, K_2, a i b mogu *izmjeriti* (prve dvije u odnosu prema standardu kapaciteta; odlomak 3.4.2), iz omjera jednadžbi (3.4-19) proizlazi

$$\frac{(1-b^2)\,K_1+(1-a^2)\,K_2L_2/L_1}{(1+b^2)\,K_1-(1+a^2)\,K_2L_2/L_1}=-\frac{1+L_2/L_1}{1-L_2/L_1},$$

tj. omjer L_2/L_1 može se utvrditi računski ako su izmjerene spomenute četiri veličine.



Sl. E.54. Blokovska shema Ohlonova pramjerila napona s povratnom vezom K — kvadrator, P — diferencijalni kapacitivni prijenosnik, M — naponski most, A — pojačalo, demodulator i kompenzator, J — moment tromosti sistema, s — Laplaceov operator

Automatsko uravnoteženje vage *R. Ohlon* je zamislio pomoću prijenosnika koji se sastoji od dva kondenzatora u diferencijalnom spoju mehanički kruto vezana s polugom vage. Ta mehanička veza može se, na primjer, zamisliti u samom okretištu poluge. Kut otklona φ poluge od njenog neutralnog položaja uzrokovat će razliku kapaciteta prijenosnika, pa će time u naponskom mostu nastati napon proporcionalan otklonu. Nakon pojačanja, demodulacije i kompenzacije tako nastali napon U' tvori jednu komponentu napona aU (ili bU). Druga komponenta je fiksan napon $U_0=\text{const}$, pa je $aU=U'+U_0$. Ako je $U_0 \gg U'$, sistem s povratnom vezom bit će praktički linearan. Blokovsku shemu tog sistema prikazuje slika E.54 za slučaj kada se uteg mase m nalazi na desnoj zdjelici vage, pa u ravnotežnom položaju vrijedi jednadžba (3.4-17). Simbol J na shemi predstavlja moment tromosti sistema, a slovo »s« Laplaceov operator.

Do godine 1969. ni jedan metrološki zavod nije objavio nikakvu vijest o eksperimentima s predloženim pramjerilom napona. Budući da naponska vaga

predstavlja za vrhunsku metrologiju dosta neispitano područje, vjerojatno će proći nekoliko godina razvojnog rada prije nego što se steknu mjerodavni eksperimentalni podaci o relativnoj nepouzdanosti vrijednosti napona U iz jednadžbe (3.4-15). Pri tom valja razviti i primjenu nadasve preciznih djelitelja napona (vidi i odlomak 3.4.6). Naponskoj vagi mora se, naime, dovesti relativno velik napon, jer u protivnom bi elektrostatske sile bile ekstremno male (vidi primjer na kraju ovog odlomka). S tim velikim naponom U naponska se normala (≈ 1 V) može baždariti jedino pomoću preciznog djelitelja napona. Budući da, dakle, ne postoje provjereni podaci o preciznosti (relativnom standardnom odstupanju) r_U naponske vage, procijenit ćemo je metodom koju smo opisali u poglavlju A.4. Primjenom jednadžbe (A.4.1-16) na izraz (3.4-15) dobivamo

$$r_U^2 = \frac{1}{4}(r_m^2 + r_g^2 + r_C^2 + r_x^2). \tag{3.4-20}$$

Ovdje indeksi m, g, C i x redom upozoravaju da je riječ o preciznostima mjerenja mase utega, ubrzanja zemljine teže, kapaciteta i razmaka među pločama vage. Pri izvođenju jednadžbe (3.4-20) uzeli smo u obzir prije dobiveni približan odnos $\partial C/\partial x = -C/x$ i jednakost $L_1 = L_2$.

Desnoj strani jednadžbe (3.4-20) treba dodati kvadrat još jedne preciznosti. To je r_n djelitelja napona, gdje je $n > 1$ prijenosni omjer, tj. omjer napona normale i napona vage. Time izraz (3.4-20) prelazi u oblik

$$r_U^2 = \frac{1}{4}(r_m^2 + r_g^2 + r_C^2 + r_x^2) + r_n^2.$$

Pojedine preciznosti možemo procijeniti samo približno. Budući da je masa utega vrlo malena (vidi primjer na kraju odlomka), a u takvom je slučaju vaganje manje precizno (vidi sliku A.75), procjenjujemo $r_m = 3 \cdot 10^{-6}$. Relativna standardna odstupanja ubrzanja zemljine teže i kapaciteta procjenjujemo jednako, $r_g = r_C = 1 \cdot 10^{-6}$. S obzirom na rubne efekte, preciznost mjerenja veličine x možemo ocijeniti znatno lošije, $r_x = 3 \cdot 10^{-6}$. Preostaje još procjena relativnog standardnog odstupanja djelitelja napona; odabiremo $r_n = 2 \cdot 10^{-6}$. Uvrštenjem navedenih vrijednosti u gornju jednadžbu dobivamo

$$r_U^2 = \frac{1}{4}(9 + 1 + 1 + 9) \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}.$$

Zbrajanjem i dijeljenjem slijedi $r_U^2 = 9 \cdot 10^{-12}$, odakle korjenovanjem dobivamo $r_U = 3 \cdot 10^{-6}$ (statistička sigurnost $P = 68\,\%$).

Vidimo da teoretski procijenjena preciznost Ohlonove naponske vage premašuje preciznost najbolje strujne vage (sl. E.29 u odlomku 3.1.5)! Teško je vjerovati da će se $r_U = 3 \cdot 10^{-6}$ postići pri prvoj naponskoj vagi, vjerojatnije je da nismo uzeli u obzir neke mjerne pogreške koje nismo u stanju pretpostaviti. Zato pouzdaniji podatak o r_U jedino može pružiti eksperimentalno istraživanje.

Primjer. Izračunajmo (približno) kolika treba da bude masa utega naponske vage (sl. E.53a) ako je polumjer pomične ploče $R = 5$ cm, njen razmak od nepomične $x = 5$ mm, a vrijednost reproduciranog napona $U = 1000$ V. Masu m izračunat ćemo pomoću jednadžbe (3.4-15) uz pretpostavku da je riječ o ravnokrakoj vagi. Budući da je površina $A = \pi R^2 = 78{,}5$ cm², kapacitet iznosi

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{x} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\ \frac{7{,}85 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2}{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 1{,}4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F} = 14\,\mathrm{pF}.$$

U tekstu ispred jednadžbe (3.4-16) izračunali smo da je $\partial C/\partial x = C/x$. Za naš slučaj je $\partial C/\partial x = 1{,}4 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F}/(5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}) = 2{,}8 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F/m}$. Pomoću (3.4-15) konačno dobivamo

$$m = \frac{U^2}{2g}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{(1000\ \mathrm{V})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} 2{,}8 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} = 0{,}14\ \mathrm{g}.$$

Ovdje smo se poslužili jednadžbom među jedinicama $\mathrm{kg} = \mathrm{V^2Fs^2/m^2}$ (tablica E-5).

3.4.6. Taylorovo supravodljivo pramjerilo napona. U prethodnim odlomcima 3.4.4,5 opisali smo najnovije prijedloge za izradu pramjerila *napona* u obliku tekućinskog elektrometra i naponske vage. Svrha je tih prijedloga i istraživanja da se pronađe dovoljno pouzdano pramjerilo napona kojim će se moći *direktno* utvrđivati vrijednost napona što je pohranjuje naponska normala (vidi odsječak 3.5). Na taj bi način strujna vaga, kojom se danas *indirektno* utvrđuje napon normale (vidi odlomak 3.1.2 i uvod u odsječak 3.3), postala nepotrebna. Tim naporima na razvoju vrhunske metrologije elektromagnetizma pridružio se potkraj godine 1967. Amerikanac *B. N. Taylor* iz laboratorija poznatog poduzeća Radio Corporation of America (RCA), koji je s kolegama iz američkog metrološkog zavoda National Bureau of Standards (NBS) i sa University of Pennsylvania predložio primjenu izmjeničnog Josephsonova efekta za baždarenje naponskih normala.

Prije nego što započnemo s opisom *Taylor*ova prijedloga i rezultata njegova eksperimentiranja, valja reći kako njegovo minijaturno pramjerilo (veličine tranzistora) djeluje u metrološkom smislu. To je uređaj koji proizvodi napon U proporcionalan frekvenciji f nezavisnog elektromagnetskog polja, dakle

$$U = Cf, \tag{3.4-21}$$

gdje je C *prirodna konstanta*. Vrijednost te konstante C mora se najpreciznije utvrditi (posredno) pomoću kombinacije strujne vage — pramjerila struje i pramjerila otpora ($U = E = RI$; vidi odlomak 3.1.2 i uvod u odsječak 3.3). Pomoću najbolje strujne vage i najboljeg pramjerila otpora na taj bi se način mogla postići relativna nepouzdanost poznavanja vrijednosti konstante $\Delta C/C = \pm(4...6) \cdot 10^{-6}$. Pošto je tako jednom utvrđena vrijednost C, uređaj se može primjenjivati za utvrđivanje (baždarenje) vrijednosti naponskih normala, za praćenje njihovih promjena tokom godina i za interkomparacije (vidi odlomak 3.5.6). Prema tome taj uređaj u metrološkom smislu djeluje kao i nuklearno pramjerilo struje koje smo opisali u odsječku 3.2, gdje je jednadžba analogna izrazu (3.4-21) glasila $B = Kf$. U oba slučaja može se zanemariti pogreška mjerenja frekvencije, jer je ona iščezavajuće mala u odnosu prema nepouzdanostima pramjerila struje i otpora. Štoviše, konstanti C mogla bi se propisati *tačna* vrijednost C_0, ali bi u tom slučaju nastale iste posljedice ($\mu_0 = \mathrm{var}$) koje smo utvrdili u odlomku 3.2.4 za slučaj propisivanja tačne vrijednosti K_0.

Djelovanje Taylorova pramjerila napona temelji se, kako smo već spomenuli, na izmjeničnom Josephsonovu efektu (engl. alternating current Josephson effect), koji je godine 1962. otkrio *B. D. Josephson* na vodičima u *supravodljivom stanju*, dakle pri temperaturi vrlo bliskoj apsolutnoj nuli. On je, naime, teoretski dokazao da između dva »labavo vezana« supravodiča (odvojena — na primjer — slojem izolacije debelim oko 1 nm = 10 Å), treba da teče izmjenična struja frekvencije f ako se između spomenuta dva supravodiča podržava napon U. Frekvenciju i napon povezuje jednadžba (3.4-21) u kojoj je konstanta

$$C = \frac{h}{2e}, \tag{3.4-22}$$

gdje je h Planckova konstanta, a e elementarni električni naboj. *Taylor*ova mjerenja pokazuju da je vrijednost konstante

$$C = 2{,}067846\,(1 \pm 6 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-15}\ \mathrm{V/Hz},$$

odnosno približno $C = 2{,}068\ \mu\mathrm{V/GHz}$. Recipročna je vrijednost konstante

$$1/C = 2e/h = 4{,}835914\,(1 \pm 6 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz/V},$$

odnosno približno $1/C = 483{,}6\ \mathrm{MHz}/\mu\mathrm{V}$. Eksperimentalna istraživanja raznovrsnih »labavih spojeva« (Sn — SnO — Sn, Sn — Sn, Ta — Ta, Sn — SnO — Pb, Nb — Ta, Ta — Nb_3Sn, Pb — PbO — Pb) u cijelosti su potvrdila Josephsonovu teoriju, tj. jednadžbe (3.4-21,22). Utvrđeno je da izmjenični Josephsonov efekt ne ovisi ni o vrsti supravodiča, ni o temperaturi (unutar tzv. mješovitog ili otporničkog supravodljivog područja), ni o magnetskom polju ni o načinu na koji se izvodi »labav spoj« (odvajanje oksidom ili uobičajenim izolacijskim materijalom); to se objašnjava makroskopskom kvantizacijom.

Postoji nekoliko pojava koje izviru iz opisanog efekta, a mogu se egzaktno verificirati eksperimentima. Na jednu od njih upozorio je sâm *Josephson*: ako se »labavi spoj« ozračuje visokofrekventnim elektromagnetskim poljem, kroz izolaciju između dva priljubljena supravodiča teći će dodatna istosmjerna struja koja nastaje pri diskretnim vrijednostima napona između oba supravodiča. Eksperimenti pokazuju da skok struje I, koja teče kroz spoj, nastaje uvijek kada se napon između oba supravodiča promijeni za vrijednost $U_0 = Cf$, gdje je C konstanta iz jednadžbe (3.4-22). Ako je frekvencija polja stalna, dakle $f = \mathrm{const}$, a napon U između supravodiča kontinuirano mijenjamo, skokovi struje nastajat će nakon jednakih naponskih intervala $U_0 = \mathrm{const}$. Tako, na primjer, pri $f = 10\ \mathrm{GHz}$ skok struje nastaje onda kad se napon U promijeni za vrijednost

$$U_0 = 2{,}068 \cdot 10^{-15}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Hz}}\ 10^{10}\ \mathrm{Hz} = 20{,}68\ \mu\mathrm{V}.$$

U slučaju da pri $f = \mathrm{const}$ promjena napona iznosi U, nastat će $n = U/U_0$ skokova. Općenito, dakle, možemo zabilježiti

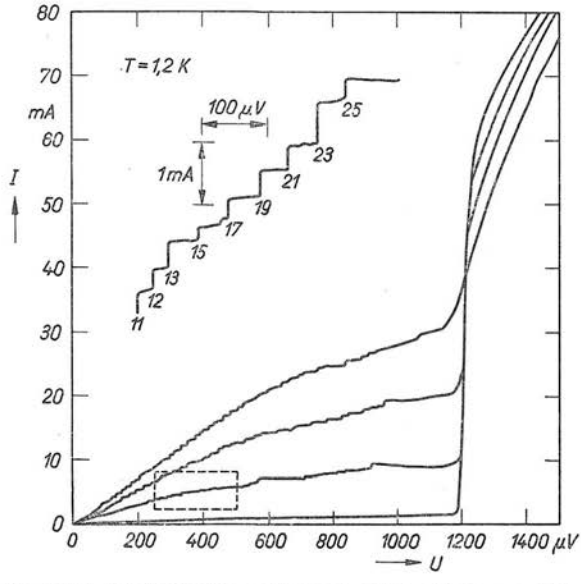
$$U = n U_0 = Cnf. \qquad (3.4\text{-}23)$$

Ako je, na primjer, pri $f = 10\ \mathrm{GHz}$ registrirano $n = 50$ strujnih skokova, to znači da je promjena napona iznosila $U = n U_0 = 50 \cdot 20{,}68\ \mu\mathrm{V} = 1034\ \mu\mathrm{V} \approx 1\ \mathrm{mV}$.

Opisanu pojavu prikazuje dijagram na slici E.55, snimljen pisačem X—Y. Na ordinatnu os je nanesena vrijednost struje I, koja teče kroz »labavi spoj« dvaju supravodiča pri termodinamičkoj temperaturi $T = 1{,}2\ \mathrm{K}$, u ovisnosti o naponu U dovedenom među stezaljke supravodiča. Slika se odnosi na slučaj kada su supravodiči od kositra (Sn), a izolacijski sloj među njima je oksid kositra (SnO). Upotrijebljeno je zračenje frekvencije oko 10 GHz. Četiri krivulje na slici vrijede za četiri različite razine snage mikrovalnog zračenja; snaga raste od dolje prema gore. Dio druge krivulje, omeđen crtkanom četvorinom, povećano je prikazan u sredini dijagrama; brojevi označuju vrijednost višekratnika $n = U/U_0$. Struja I može se *reverzirati* promjenom polariteta stezaljki izvora napona U, jer su krivulje $I - U$ u trećem kvadrantu simetrične s onima u prvom (sl. E.55). U metrološkoj primjeni reverzibilnost može biti od koristi iz najmanje dva razloga: 1) napon je dvostruko veći ($2\,U = Cnf$), gdje je sada n ukupan broj skokova struje u oba kvadranta; 2) eliminiraju se neki od parazitnih napona.

Iz ovog letimičnog opisa jedne od nekoliko poznatih manifestacija izmjeničnog Josephsonova efekta nedvosmisleno proizlazi naputak za njegovu primjenu u metrologiji električkog napona: vrijednost mjerenog napona U dobiva se prema jednadžbi (3.4-23) tako da se *izmjeri* frekvencija f polja i *prebroji* broj skokova n struje. To vrijedi uz pretpostavku da je vrijednost konstante $C = h/2e$ poznata s pouzdanošću koja je potrebna u vrhunskoj metrologiji.

Budući da je klasično utvrđena relativna nepouzdanost $\Delta C/C$ iznosila oko $\pm 10 \cdot 10^{-6}$, *B. N. Taylor* je morao najprije pouzdanije utvrditi vrijednost konstante C. U tu svrhu on je pri $T = 1{,}2$ K do 1,6 K na svoj uređaj doveo *poznati napon* U, pa onda iz prebrojenog n i izmjerene f pomoću (3.4-23) utvrdio C. Pri tom je morao savladati kompliciranu tehniku pouzdanog dijeljenja napona u omjeru $(10:1)^3 = 1000:1$. To je bilo potrebno zbog toga jer je teško izazvati skokove struje ako je napon U veći od nekih 600 do 800 μV (vidi sliku E.55). Budući da napon E naponske normale iznosi oko 1 V (Westonov element; odsječak 3.5), potreban je djelitelj omjera $k = E/U = 1000$, i to u slučaju ako se pri brojenju n napon U reverzira, čime se, u stvari, upotrebljivo područje udvostručuje na 1200 do 1600 μV.



Sl. E.55. Izmjenični Josephsonov efekt prikazan u obliku krivulja I—U. Efekt je izazvan na »labavom spoju« Sn—SnO—Sn poljem frekvencije oko 10 GHz pri temperaturi $T = 1{,}2$ K. Dio druge krivulje, omeđen crtkanom četvorinom, povećano je prikazan u sredini slike. Brojevi uz povećanu krivulju označuju vrijednost višekratnika $n = U/U_0$, gdje je $U_0 = hf/2e$

Taylorovu metodu intenzivno usavršavaju dobro opremljeni metrološki zavodi, a posljedica toga su sve pouzdanije vrijednosti konstante $1/C = 2e/h$. Tako su npr. sredinom godine 1970. *B. W. Petley* i *K. Morris* iz National Physical Laboratory (Division of Quantum Metrology!) objavili vrijednost

$$1/C = 2e/h = 4{,}835\,938\,(1 \pm 2{,}3 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{14}\ \text{Hz/V (BIPM, 1969)}.$$

Pribrojnik u zagradi označuje relativno standardno odstupanje, a pod V(BIPM, 1969) razumijeva se volt pohranjivan u Međunarodnom uredu za mjere i utege (odlomak 3.5.3). Da bi došli do tog rezultata, spomenuti su autori obavili preko 400 nizova mjerenja na 10 različitih Josephsonovih spojeva.

Iako Taylorov supravodljivi uređaj ne predstavlja pramjerilo u smislu strujne ili naponske vage (vidi odsječak 3.1 i odlomke 3.4.4,5), pomoću kojih se vrijednost struje (napona) utvrđuje uravnoteženjem gravitacijske i elektrodinamičke (elektrostatske) sile, on će — ako se njegova primjena posreći — izvanredno unaprijediti vrhunsku metrologiju električkog napona. Posve su očite tri važne primjene Taylorova pramjerila:

1. Svaki iole opremljeniji metrološki zavod moći će sâm utvrđivati vrijednost napona koji pohranjuju njegove naponske normale (*Taylor* procjenjuje kompletne troškove uspostavljanja te djelatnosti, uključivši krioniku, na 15 do 25 tisuća dolara). Pri tom će vrijednost konstante C iz jednadžbe (3.4-23) biti poznata s maksimalnom pouzdanošću, jer će je u odnosu prema svojim pramjerilima struje i otpora izmjeriti vrhunski metrološki zavodi (NPL, NBS itd.).

2. Međunarodna komparacija naponskih normala, koja se danas obavlja tako da se putujuće normale periodički šalju na usporedbu u Međunarodni ured za mjere i utege — BIPM (vidi odlomak 3.5.6), reducirat će se na uspoređivanje vrijednosti umnoška nf iz jednadžbe (3.4-23). Taj umnožak dobit će se mjerenjem — usporedbom normale sa Taylorovim pramjerilom u samom nacionalnom metrološkom zavodu. Otpast će, dakle, potreba za transportiranjem naponskih normala u Sèvres i one će moći desetljećima stajati nepomično u termostatiranim prostorijama.

3. Budući da je $C = \frac{1}{2}h/e$ prirodna konstanta, dakle vremenski nezavisna, Taylorovim će se uređajem moći pratiti promjene napona normala u toku godina i desetljeća.

To bi bila epohalna usavršenja tehnike međunarodnog pohranjivanja vrijednosti napona, jer ta je tehnika danas složena, skupa i ograničeno pouzdana (vidi naredni odsječak 3.5). Moramo, međutim, ponovno naglasiti da se nabrojane prednosti novog pramjerila temelje na pretpostavci da u blizini apsolutne nule temperature doista uvijek vrijedi relacija (3.4-23) sa $C = \frac{1}{2}h/e = \text{const}$. Od otkrića Josephsonova efekta do Taylorova prijedloga prošlo je svega šest godina, pa je zato prirodno očekivati (riječ je o vrhunskoj metrologiji!) dugogodišnje eksperimentalno provjeravanje te pretpostavke u najbolje opremljenim metrološkim zavodima svijeta.

3.5. Pohranjivanje vrijednosti napona pomoću naponskih normala

3.5.1. Razlog upotrebe normala. Pramjerilima koja smo opisali u prošlim odlomcima, a i drugim pramjerilima, vrhunska se metrologija služi samo onda kad treba najvećom dostižívom pouzdanošću reproducirati stanovite vrijednosti fizikalnih veličina (općenito o jedinicama, pramjerilima itd. vidi u odsječku A.5.3). Glavni razlozi neposjedovanja i nečeste primjene pramjerila jesu: 1) Ogroman utrošak vremena za izvođenje jedne jedine serije reprodukcijskih mjerenja; jedno mjerenje pomoću strujne vage traje, na primjer, od nekoliko mjeseci do nekoliko godina. To znači da su, u većini slučajeva, pramjerila potpuno neprikladna za ona precizna mjerenja kojima se u razumnom roku želi saznati rezultat. 2) Ulaganje znatnog kapitala u izradu *čitavog sloga* pramjerila i nacionalnih pramjera, jer posjedovanje pramjerila za jednu fizikalnu veličinu nužno zahtijeva i posjedovanje pramjerila i opreme za više drugih veličina (vidi kraj odlomka 3.2.5). Uz taj investicijski kapital moraju postojati garancije da će u neposrednoj i daljoj budućnosti postojati financijska sredstva za održavanje postojećih pramjerila, za njihovo usavršavanje i za izradu novih. Svi ti troškovi zajedno nisu maleni ako ih iz sredstava za znanstvena istraživanja mora permanentno namirivati privredno nejaka država. 3) Mora postojati permanentna *potreba* za pramjerilima i uvjerenost u korisnost postojanja precizne nacionalne metrologije (vidi odlomke A.1.1.3 i A.7.2.3). 4) U zemlji o kojoj je riječ, vrhunska metrologija mora imati odgovarajući status u društvu, koji se — među ostalim — temelji i na postojanju afirmiranih stručnjaka različitih grana metrologije, što opet ovisi o klimi u kojoj se obavljaju znanstvena istraživanja i industrijski razvoj. Zvanje metrologa (franc. métrologiste) zahtijeva čitav životni vijek čovjeka;

zato mlad i talentiran stručnjak mora prilikom ulaska u metrološki rad biti siguran da će bez poremećaja nastaviti djelo prethodnika, a pri kraju svog života posao prepustiti nasljednicima (vidi npr. opis održavanja naponskih normala u odlomcima 3.5.5,6, opis kontinuiteta interferencijske metrologije duljine u odsječku A.8.9, opis razvoja gravimetrijskog sistema u odsječku A.9.4 itd.).

Malo je zemalja u kojima su ispunjena navedena četiri uvjeta (i drugi). Do prije tridesetak godina to su u pogledu pramjerila elektromagnetskih veličina bile Engleska (NPL) i Sjedinjene Američke Države (NBS). U novije vrijeme njima se u tom dijelu metrologije pridružuju Sovjetski Savez, Australija i Kanada, tj. ili industrijski jake države ili inače bogate zemlje. No, na čemu da baziraju metrologiju elektromagnetizma one države koje nemaju npr. strujne vage (odsječak 3.1) da bi realizirale definiciju ampera iz odlomka 2.1.4? Naglašavamo da reprodukcija nezavisne jedinice elektromagnetizma SI amper nije fundamentalna samo za elektromagnetizam, već i za sve druge grane fizike i tehnike. Tako se, na primjer, vrhunska metrologija nauke o toplini temelji na mjerenju snage, energije i niza drugih veličina *električkim* metodama (vidi odsječke D.2.3 i D.3.6).

Odgovor na gornje pitanje pruža postupak nekih metroloških zavoda: u pomanjkanju strujne vage metrološki zavod neke zemlje može reproducirati poznatu vrijednost jakosti električne struje *održavajućim standardom* (vidi odlomak A.5.3.4): »nuklearnim pramjerilom« koji smo opisali u odsječku 3.2. To pramjerilo tek se u najnovije vrijeme upotrebljava za nacionalnu reprodukciju struje, a nepouzdanost rezultata pri njegovoj primjeni ovisi o tome s kolikom je nesigurnošću *strujnom vagom* (u NBS ili NPL) utvrđena vrijednost žiromagnetske konstante protona. No i nuklearno pramjerilo struje predstavlja znatan metrološki pothvat, pogotovo u smislu fine mehanike i interferencijske metrologije duljine, a u primjeni je također delikatno, iako manje od strujne vage.

Bez obzira na to da li se struja I reproducira vagom ili nuklearnim uređajem, vrhunskoj metrologiji nije dovoljno da se vrijednost I samo *proizvede*, već je treba i *pohraniti*, kao što, na primjer, »nacionalni prakilogram« pohranjuje vrijednost »međunarodnog prakilograma« (vidi odsječke A.9.3 i A.6.4). *Svi* metrološki zavodi svijeta pohranjuju, danas kao i pred 60 godina (odlomak 3.5.6), poznatu vrijednost jakosti električne struje pomoću *dva* »održavajuća standarda«, pomoću *dvije normale*. To su:

naponska normala, o kojoj ćemo raspravljati u ovom odsječku, i

otpornička normala, o kojoj će biti riječi u odsječku 3.6.

Te dvije normale pohranjuju većom ili manjom stalnošću (u toku vremena) stanovitu vrijednost fizikalnih veličina »električki napon« E i »električki otpor« R. Ako pod simbolima E i R shvatimo stvarne vrijednosti pohranjivanih veličina, onda je očito da će normala napona proizvesti u normali otpora istosmjernu struju $I = E/R$.

Vrijednost te struje utvrđuje se kompenzacijskom metodom pomoću strujne vage. Budući da se vrijednost R otporničke normale može saznati neposrednom usporedbom s jednim od pramjerila otpora (odsječak 3.3), iz poznatog omjera $I = E/R$ i poznatog R računanjem se saznaje stvarna vrijednost napona $E = R \cdot E/R = RI$ koju pohranjuje naponska normala. Takav postupak opisali smo u odlomku 3.1.2 i ilustrirali ga slikom E.25 (vidi i jednadžbu 3.1-10). Sve to može se, dakako, učiniti samo u onim metrološkim zavodima koji posjeduju kako pramjerila I i R, tako i normale E i R. Kompenzacijskom usporedbom s tako baždarenim normalama pojedine zemlje mogu saznati kolika je stvarna vrijednost napona $E(\mathrm{N})$ i otpora $R(\mathrm{N})$ njihovih *nacionalnih normala*. Budući da nemaju pramjerila I i R, tim je zem-

ljama kombinacija normala $E(N)$ i $R(N)$ *ishodište* najpreciznijeg mjerenja napona, otpora i struje, jer je $I(N) = E(N)/R(N)$. Pri tom je, dakako, razina preciznosti metrologije napona, otpora, struje i drugih elektromagnetskih veličina niža od one koju postižu oni zavodi što raspolažu pramjerilima I i R. Razlog su mjerne pogreške nastale prilikom baždarenja nacionalnih normala, štetni utjecaji prilikom njihova transporta itd.

Naponske i otporničke normale imaju uz niz dobrih strana i nekoliko loših. Od potonjih je za održavajući standard, normalu, najneugodnija *nepostojanost* pohranjene veličine: vrijednost fizikalne veličine koju pohranjuje normala *nije stalna*, već se *mijenja* u toku vremena. Ovisnost promjene o toku vremena ne pokorava se ni jednom poznatom zakonu, već je posve slučajna i sasma različita za inače istovrsne normale (vidi, na primjer, odlomak 3.5.5). Zato se vrijednosti normala moraju povremeno izmjeriti pomoću pramjerila i na temelju toga pohranjenim veličinama propisati nove vrijednosti (vidi odlomak 3.5.7). Pohranjivanje, baždarenje i uspoređivanje normala napona delikatan je, kontinuiran i dugotrajan posao, koji ćemo opisati u idućim odlomcima (o normalama otpora vidi odsječak 3.6). Postoje, međutim, izgledi da će se taj posao olakšati upotrebom minijaturnog supravodljivog pramjerila predloženog potkraj godine 1967. (odlomak 3.4.6).

3.5.2. Osobine naponske normale — Westonova elementa. Galvanski element izvanredno postojanog napona složio je godine 1893. Englez *Weston*, po kojemu se taj element (članak, ćelija) zove »Westonov normalni element« ili kraće »normalni element«. Presjek te naponske normale prikazuje slika E.56. Pozitivna elektroda (*2*) je živa, negativna (*4*) kadmijev amalgam, a elektrolit (*6*) je zasićena vodena otopina kadmijeva sulfata. Kristali (*5*) lako se međusobno spajaju, čime tvore koricu koja živu, pastu i amalgam štiti od pomicanja pri naginjanju ili prevrtanju čitave normale. Napon E_ϑ (pri temperaturi ϑ) Westonova normalnog elementa rezultat je kemijske reakcije:

$$\mathrm{Cd} + \mathrm{Hg_2SO_4} + \frac{8}{3}\mathrm{H_2O} = \mathrm{CdSO_4} \cdot \frac{8}{3}\mathrm{H_2O} + 2\,\mathrm{Hg}.$$

U kadmijevom elementu, shematski prikazanom na slici E.56, elektrolitska otopina $CdSO_4$ je zasićena, pa višak kristala $CdSO_4 \cdot 8/3\ H_2O$ postoji pri bilo kojoj normalnoj (sobnoj) temperaturi. Takav *zasićeni* element održava svoj napon u toku znatnih vremenskih intervala vrlo stalnim ako je neopterećen, ali iskazuje vrlo jaku ovisnost — u smislu vrhunske metrologije — tog napona o temperaturi. Tu ovisnost izražava jednadžba

$$E_\vartheta = E_{20} - K_1(\vartheta - 20\,^\circ\mathrm{C}) - K_2(\vartheta - 20\,^\circ\mathrm{C})^2 + K_3(\vartheta - 20\,^\circ\mathrm{C})^3, \qquad (3.5\text{-}1)$$

gdje je E_ϑ napon elementa pri bilo kojoj temperaturi ϑ u rasponu između $-8\,^\circ$C i $+43\,^\circ$C, a E_{20} napon pri $\vartheta = 20\,^\circ$C. Podrobnija istraživanja pokazuju da temperaturni koeficijenti napona iznose

$$K_1 = (41 \pm 2{,}6)\ \mu\mathrm{V/^\circ C},$$
$$K_2 = 0{,}95\ \mu\mathrm{V/^\circ C^2}, \quad K_3 = 0{,}01\ \mu\mathrm{V/^\circ C^3}. \qquad (3.5\text{-}2)$$

Vrijednost konstante K_1 može, dakle, varirati od elementa do elementa za oko $\pm 6\%$. Njemačke (DIN), sovjetske (GOST) i druge norme propisuju da se pri *izračunavanju* napona E_ϑ upotrebljavaju konstante

$$E_{20} = 1{,}018\,65\ \mathrm{V} \quad \text{i} \quad K_1 = 40{,}6\ \mu\mathrm{V/^\circ C}, \qquad (3.5\text{-}3)$$

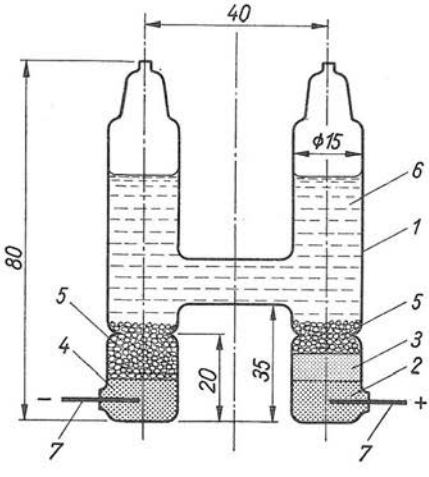
te vrijednosti K_2 i K_3 zabilježene jednadžbom (3.5-2).

Dugogodišnja istraživanja izrade Westonovih zasićenih normalnih elemenata i praćenja ponašanja njihovih napona pokazala su da vrijednost E_{20} varira od elementa do elementa za oko ± 30 μV, iako su oni izrađeni na jednak način (sl. E.56). Metrolozi danas smatraju da se napon zasićenih normalnih Westonovih elemenata pri temperaturi 20 °C kreće u granicama

$$E_{20} = 1{,}018\,62\ \text{V} \pm 30\ \mu\text{V}.$$

Pri tom se misli na najpažljivije izrađene primjerke. *Stvarna* vrijednost *konkretnog* elementa može se pouzdano utvrditi jedino kompenzacijskom usporedbom s pramjerilima (vidi kraj odlomka 3.5.1), ali i to vrijedi egzaktno samo za trenutak kada je usporedba učinjena. U toku niza godina, naime, vrijednost se E_{20} svakog Westonovog elementa ponešto mijenja, tako da i najbolji od probranih elemenata ponekad doživljuju u toku svog trajanja znatne promjene napona (vidi odlomak 3.5.6).

Pomoću jednadžbi (3.5-1,2,3) možemo izračunati da je pri $\vartheta < 20$ °C napon E_ϑ veći od E_{20}, dok je za $\vartheta > 20$ °C napon E_ϑ manji od E_{20}. Izračunatu razliku $(E_\vartheta - E_{20})$ svrstali smo za pojedine vrijednosti temperature ϑ u tablicu E-16, koja vrijedi za neopterećen element. Pouzdanost podataka u stupcu 2 ovisi o stabilnosti temperature na kojoj se element nalazi. Iz jednadžbi (3.5-1,2,3) proizlazi da nepouzdanost *razlike* $(E_\vartheta - E_{20})$ iznosi oko ± 42 μV ako je temperatura stabilna na ± 1 °C, te oko ± 4 μV ako je nestabilnost temperature oko deset puta manja, dakle $\pm 0{,}1$ °C. Podaci u stupcu 3 tablice E-16, tj. vrijednosti E_ϑ pri temperaturi ϑ, vrijede samo za slučaj ako je $E_{20} = 1{,}018\,650$ V i $K_1 = 40{,}6$ μV/°C.



Sl. E.56. Presjek zasićenog Westonova (kadmijeva) normalnog elementa

1 — staklena posuda, *2* — čista živa, *3* — pasta sastavljena od živina sulfata Hg_2SO_4, žive i otopine kadmijeva sulfata $CdSO_4$, *4* — dvofazni kadmijev amalgam (oko 10% Cd), *5* — sloj malih kristala hidrata $3\,CdSO_4 \cdot 8\,H_2O$, *6* — zasićena vodena otopina kadmijeva sulfata, *7* — platinske elektrode. Izmjere su navedene u milimetrima

Tablica **E-16**

Ovisnost napona zasićenog normalnog Westonova elementa o temperaturi

ϑ °C	$E_\vartheta - E_{20}$ μV	E_ϑ V	ϑ °C	$E_\vartheta - E_{20}$ μV	E_ϑ V
1	2	3	1	2	3
10	+ 301	1,018 951	20	0	1,018 650
11	+ 281	1,018 931	21	− 42	1,018 608
12	+ 259	1,018 909	22	− 85	1,018 565
13	+ 234	1,018 884	23	− 130	1,018 520
14	+ 207	1,018 857	24	− 177	1,018 473
15	+ 178	1,018 828	25	− 225	1,018 425
16	+ 147	1,018 797	26	− 276	1,018 374
17	+ 113	1,018 763	27	− 327	1,018 323
18	+ 77	1,018 727	28	− 380	1,018 270
19	+ 40	1,018 690	29	− 435	1,018 215

Godine 1967. istraživana je u njemačkom metrološkom zavodu Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB, Braunschweig) mogućnost ostvarenja temperaturne stabilnosti Westonovih elemenata bez upotrebe termostata s brzom regulacijom temperature. U tu svrhu element je stavljen u evakuiranu posudu (Dewarova posuda) ispunjenu izolacijskim materijalom velikog toplinskog kapaciteta (parafin, prašak Al_2O_3 itd.). Usporedba običnog elementa s elementom u Dewarovoj posudi pokazala je, na primjer, ovo: pri hlađenju prvoga od 30 °C njegova je temperatura za 24 sata pala na 25 °C, a napon E_9 promijenio se za 260 μV; u isto vrijeme temperatura drugoga smanjila se za svega 0,05 °C, a napon se promijenio 4...5 μV.

Uz navedene temperaturne utjecaje, na napon E_{20} Westonovih elemenata djeluju i drugi; njihov mehanizam pretežno je nepoznat. Događa se, naime, da i najbolji od probranih elemenata u toku desetak godina promijene svoj napon za nekoliko desetaka mikrovolta (vidi odlomak 3.5.6). Zato se razredi (klase) elemenata, u koje se oni razvrstavaju slično kao i električki instrumenti, obilježavaju s dva podatka: nepouzdanošću vrijednosti napona E_{20} i godišnjim pomakom (drift) vrijednosti E_{20}, npr. 50 μV/god.

Na promjenu napona Westonovog normalnog elementa utječe i način njegove *primjene*. Pri tom su značajne dvije histerezne pojave, temperaturna i opteretna. Prva se opaža ako temperaturu elementa najprije povisimo, a odmah zatim smanjimo na prijašnju vrijednost (ili obrnuto). Napon elementa neće odmah slijediti promjenu temperature; na primjer temperaturni skok 5 °C uzrokovat će da se napon elementa približi staroj vrijednosti tek nakon 24 sata i zaustavi na vrijednosti koja je 2...5 μV različita od stare. Efekt temperaturne histereze je manji ako je element izveden tako da je njegov toplinski kapacitet velik, a toplinska izolacija dobra. Prije opisano stavljanje elementa u evakuiranu posudu (PTB) jedan je od načina ublaženja tog lošeg utjecaja. Pojava *opteretne histereze* posljedica je otperećenja Westonovog elementa. Ako, na primjer, element u toku 3 minute izbijamo strujom 0,1 mikroamper, treba da prođe nekoliko minuta neopterećenog stanja da bi se njegov napon približio staroj vrijednosti barem sa sigurnošću ±2 μV. I vibracije utječu na vrijednost napona. Istraživanja pokazuju da njihov utjecaj iznosi oko ±5 μV.

Osjetljivost napona normalnih elemenata na opisane poremećaje nameće potrebu da se njima rukuje izvanredno pažljivo (vidi kraj odlomka 3.5.5). Pojava opteretne histereze zahtijeva, kako smo vidjeli, da se Westonovi elementi upotrebljavaju isključivo pri kompenzacijskim mjerenjima, a i tamo s mnogo opreza. Zato se, čak ni kratkotrajno, elementi ne opterećuju strujom većom od 0,1 miliamper, tj. opteretni otpor nije manji od oko 1 kΩ (unutarnji otpor Westonova elementa kreće se između 1300 i 80 Ω, ovisno o proizvođaču). Važna je i temperatura pri kojoj se elementi uskladištuju. Podrobne upute o tome navode proizvođači, a općenito vrijedi: izloženost temperaturi ispod 4 °C i iznad 40 °C može trajno oštetiti element, tj. učiniti ga neupotrebljivim.

Pri kraju ovog opisa svojstava zasićenog Westonova normalnog elementa valja spomenuti da postoji i tzv. *nezasićena* izvedba kod koje je koncentracija $CdSO_4$ takva da zasićenje nastaje tek pošto temperatura padne na 4 °C, tj. pri višim temperaturama manjkaju kristali $CdSO_4$. Odlika je takvih nezasićenih elemenata zanemariva vrijednost temperaturnog koeficijenta napona, pa se oni zato upotrebljavaju u mnogim laboratorijima (naročito u USA), te za prijenosne izvedbe. Loša im je strana što je njihov napon još manje stalan negoli napon zasićenog Westonova elementa, pa ih zato u vrhunskoj metrologiji ne upotrebljavaju. (Sovjetski standard, na primjer, propisuje da se njihov napon pri 20 °C mora nalaziti u rasponu 1,0185...1,0195 V, a godišnji pomak ne smije biti veći od 300 μV.)

3.5.3. Nacionalni volt i V(BIPM). Prije nego što započnemo opisivati kako se normalnim elementom pohranjuje vrijednost napona, u ovom ćemo odlomku upozoriti na skupinu posebnih termina koji se pri tom upotrebljavaju. Tako, na primjer, u stručnoj literaturi nalazimo izraze »američki volt«, »australski volt« itd., te njihove kratice V(NBS), V(NSL) ili V_{NBS} i V_{NSL}. Porijeklo kratica NBS i NSL lako je odgonetnuti; one dolaze od naziva američkog i australskog metrološkog zavoda: National Bureau of Standards (Washington) i National Standards Laboratory (Sydney). Pridjevi »američki«, »australski« itd. uz »volt« označuju da je riječ o jedinici napona »volt« koju pohranjuje američka, australska itd. naponska normala. Budući da takav »volt« može pohranjivati svaki nacionalni metrološki zavod, uvest ćemo općeniti naziv »nacionalni volt« i označiti ga simbolom V(N).

Da bismo ustanovili što znači termin »nacionalni volt«, moramo se za trenutak vratiti na izlaganja u odlomku 2.5.4 (vidi i odlomak 5.2.3). Tamo smo naveli da je International Technical Committee godine 1910. utvrdio da napon neopterećenog Westonova elementa iznosi $E_{20} = 1{,}0183\ V_0$. Slovo V_0 označuje »internacionalni volt«, koji su u ono vrijeme reproducirali srebrnim voltametrom i živinim stupcem (vidi odlomak 3.5.5 i odsječak 5.3). Iz gornje jednadžbe slijedi

$$\text{internacionalni volt} = V_0 = \frac{E_{20}}{1{,}0183}. \tag{3.5-4}$$

U prošlom odlomku 3.5.2 smo vidjeli da se *stvarna* vrijednost napona E_{20} zasićenog normalnog Westonova elementa pri temperaturi $\vartheta = 20\,°C$ *razlikuje* od inače posve jednako izrađenog drugog primjerka Westonova elementa. Osim toga, stvarna vrijednost E_{20} *istog* elementa mijenja se u toku vremena. Prema tome stvarna vrijednost »nacionalnog volta« V(N), definiranog relacijom

$$\text{nacionalni volt} = V_0(N) = \frac{E_{20}(N)}{1{,}0183}, \tag{3.5-5}$$

koja proizlazi iz (3.5-4), uz dogovor da se zadrži količnik 1,0183 (tačno), ovisi o vrijednosti E_{20} konkretnog *nacionalnog* elementa u razmatranom trenutku.

Godine 1948. uveden je Međunarodni sistem jedinica (SI), čija se jedinica napona volt = V(SI) = V de facto reproducira pramjerilima struje i otpora, tj. strujnom vagom (odsječak 3.1) i jednim od pramjerila otpora (odsječak 3.3). Mjerenjima je utvrđeno (usporedi s tablicama E-9,11 u odlomcima 3.1.5 i 3.3.4), a to je Generalna konferencija za mjere i utege kasnije propisala, da između internacionalnog volta (V_0) i volta SI (V) vlada odnos (odlomak 2.5.3)

$$V_0 = pq\ V = 1{,}000\,34\ V.$$

Uvrstimo li ovaj izraz u jednadžbu (3.5-4), dobivamo $V_0 = pqV = E_{20}/1{,}0183$, odnosno $V = E_{20}/(pq \cdot 1{,}0183)$. Analogno postanku jednadžbe (3.5-5) nastaje izraz koji definira stvarnu vrijednost nacionalnog volta u ovisnosti o naponu E_{20} pohranjivanom u razmatranom trenutku nekim nacionalnim Westonovim elementom

$$V(N) = \frac{E_{20}(N)}{1{,}000\,34 \cdot 1{,}0183} = \frac{E_{20}(N)}{1{,}018\,6462}. \tag{3.5-6}$$

Odavde je jasno kako se *uspoređuje* vrijednost nacionalnog volta $V(N_1)$ jedne zemlje s nacionalnim voltom $V(N_2)$ druge, ako stvarne vrijednosti njihovih Westonovih

elemenata iznose $E_{20}(N_1) \neq E_{20}(N_2)$. Budući da je 1,018 6462 = const, iz (3.5-6) slijedi

$$\frac{V(N_1)}{V(N_2)} = \frac{E_{20}(N_1)}{E_{20}(N_2)}. \qquad (3.5\text{-}7)$$

Tako je, na primjer, godine 1963. prilikom interkomparacije naponskih normala (odlomak 3.5.6) izmjerena razlika između australske i američke normale +7,7 μV, tj. $E_{20}(NSL) - E_{20}(NBS) = +7{,}7\ \mu V$. Smatramo li da N_1 označuje NSL, a N_2 NBS, pomoću jednadžbe (3.5-7) dobivamo

$$\frac{V(NSL)}{V(NBS)} = \frac{E_{20}(NSL)}{E_{20}(NBS)} = \frac{7{,}7\ \mu V + E_{20}(NBS)}{E_{20}(NBS)} = 1 + \frac{7{,}7\ \mu V}{E_{20}(NBS)}.$$

U neizračunatom omjeru nevažna je pouzdanost vrijednosti $E_{20}(NBS)$. Ako uzmemo da iznosi 1,0186 V, dobivamo

$$V(NSL) = (1 + 7{,}6 \cdot 10^{-6}) \cdot V(NBS).$$

To znači da je godine 1963. »australski nacionalni volt« bio za oko 8 milijuntinki veći od »američkog nacionalnog volta«.

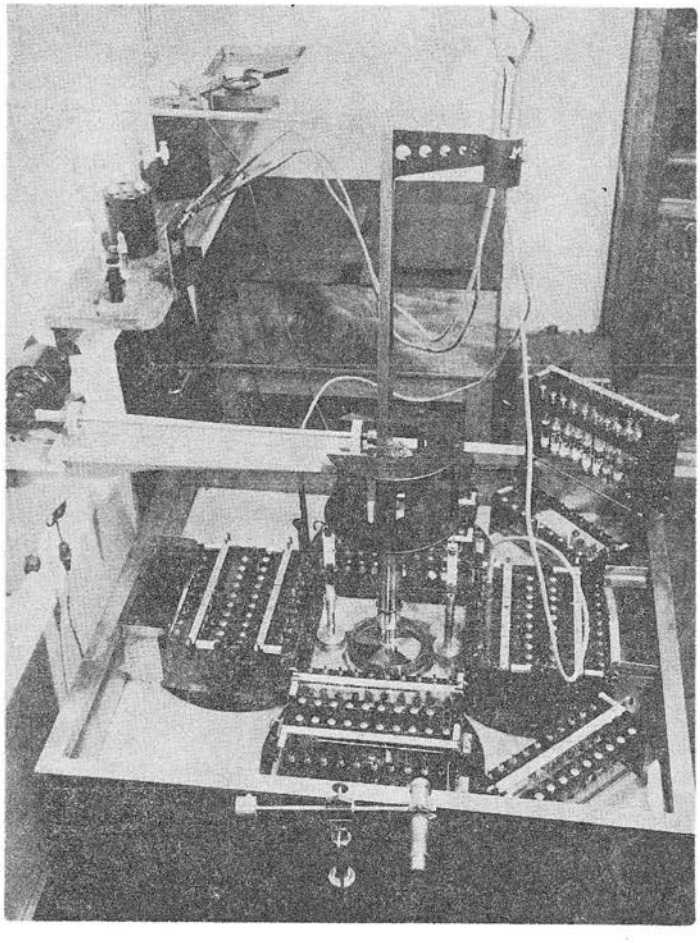
Valja naglasiti, iako izgleda posve trivijalno, da V(NSL), V(NBS) i drugi »nacionalni volti« (jednadžba 3.5-6!) nemaju nikakve veze s »voltom Međunarodnog sistema jedinica« $= V_{SI} = V$. Odnos između pojedinih V(N) i jedinstvenog $V = V_{SI}$ može se u razmatranom trenutku uspostaviti jedino *mjerenjem*. Tako je, na primjer, američki metrološki zavod NBS primjenom strujne vage i pramjerila otpora mjerenjem utvrdio

$$V(NBS, 1967) = 1{,}000012\ V \pm 4\ \mu V,$$

tj. »američki nacionalni volt«, pohranjivan Westonovim elementom, bio je godine 1967. veći za 12 μV od tzv. apsolutnog volta ($= V_{SI} = V$) reproduciranog pramjerilima. Pri tom nepouzdanost rezultata iznosi oko ±4 μV (statistička sigurnost 50%), odnosno u relativnoj mjeri $\pm 4 \cdot 10^{-6}$. Toliku nepouzdanost uglavnom je uzrokovala nesigurnost reprodukcije strujne vage (vidi odlomak 3.1.5). Napominjemo da su mjerenja razlike $E_{20}(N_1) - E_{20}(N_2)$ prilikom komparacija i interkomparacija (odlomak 3.5.6) mnogo preciznija: relativno standardno odstupanje (preciznost) spušta se čak do $\pm 1 \cdot 10^{-7}$.

Međunarodni ured za mjere i utege (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM; vidi poglavlje A.7) također posjeduje grupu zasićenih Westonovih normalnih elemenata — normalu napona. Jednako kao i nacionalni metrološki zavodi, tako i BIPM pomoću normala pohranjuje vlastiti volt, tj. »volt BIPM« $=$ $= V(BIPM) = E_{20}(BIPM)/1{,}018\,6462$ (jednadžba 3.5-6). Naponska normala Međunarodnog ureda izvanredno je važna za metrologiju električkog napona, jer se u odnosu prema njenoj vrijednosti $E_{20}(BIPM)$ svake tri godine kompenzacijskim mjerenjima utvrđuju razlike među nacionalnim normalama. Podrobnije se o takvim interkomparacijama (sl. E.57) govori u odlomku 3.5.6. Pri tom je u pogledu stalnosti svog napona normala Međunarodnog ureda možda i kvalitetnija od nacionalnih normala. Budući da se, naime, interkomparacije obavljaju u sjedištu BIPM (Sèvres, Francuska), normale BIPM *miruju*, dok su nacionalne normale izložene riziku promjena napona ili oštećenja prilikom transporta (Australija, Japan, USA!). Naravno da se na komparaciju u BIPM ne šalje neka od normala koja pripada nacionalnoj grupnoj normali (odlomak 3.5.4), već tzv. *putujuća normala* (engl.

travelling standard). Napon te putujuće normale najprije se u nacionalnom metrološkom zavodu izmjeri u odnosu prema nacionalnoj grupnoj normali, zatim se normala transportira u Sèvres, gdje se njen napon izmjeri u odnosu prema grupnoj normali BIPM (odlomak 3.5.6), a nakon povratka putujuće



Sl. E.57. Interkomparacija nacionalnih normala napona (Westonovih elemenata) u Međunarodnom uredu za mjere i utege (BIPM). Normale se nalaze u uljnoj kupci čija se temperatura održava stalnom najmanje na ± 0,01 °C, a njenu jednolikost unutar kupke osigurava miješalica. Na dnu fotografije vidi se dalekozor kojim se očitavaju termometri. Priključci spojnih žica na platinske elektrode Westonovih elemenata obično se izvode u obliku živinih čašica. (Foto: BIPM)

normale u nacionalni zavod ponovno joj se napon izmjeri u odnosu prema nacionalnoj grupnoj normali. Uspješna primjena novog supravodljivog pramjerila napona (odlomak 3.4.6) mogla bi u tom pogledu dovesti nacionalne normale u ravnopravan položaj prema normali BIPM.

3.5.4. Načelo pohranjivanja grupnom normalom. U ovom ćemo odlomku opisati načelo postupka kojim se u vrhunskim metrološkim zavodima (o njima vidi odsječak A.7.2) pomoću »grupne normale« pohranjuje vrijednost stanovite fizikalne veličine. Pri tom ćemo riječju »normala« označivati uređaje ili predmete, koji — uz propisane uvjete uskladištenja i primjene — utjelovljuju stanovitu vrijednost fizikalne veličine i održavaju je što stalnijom kroz što je moguće dulji vremenski period.

Najzornije »grupnu normalu« možemo sebi predočiti grupom nominalno jednakih utega izrađenih sa svrhom da pohranjuju stanovitu vrijednost fizikalne veličine »masa«. Svaki od utega (grupa se sastoji, na primjer, od 10 ili 25 utega) izrađen je tako da njegova masa bude jednaka masi bilo kojeg drugog utega iz grupe, tj. u trenutku uspostavljanja »masene grupne normale« mase utega bile su, u granicama mjerne preciznosti, međusobno *jednake* (o preciznom uspoređivanju masa vidi odlomak A.9.3.2). Ako nakon nekoliko godina ponovno međusobno usporedimo mase tih istih utega, koji čine grupnu normalu, ustanovit ćemo da su se pojavile *razlike* (vidi odlomak A.9.3.3). Naglašavamo da je fizikalna veličina »masa« ona karakteristika tvari koja se, prema dosadašnjem iskustvu, *najmanje* mijenja u toku vremena (riječ je, dakako, o masi tvari koje miruju; osvrt na utjecaj brzine na masu tijela vidi u odsječku A.9.1).

Vrijednosti elektromagnetskih veličina (napon, otpor, kapacitet itd.) ne mogu se pohranjivati ni izdaleka toliko pouzdano kao vrijednosti mase. Iskustvo je pokazalo da se vrijednost napona Westonova elementa ili otpora najstabilnijeg električkog otpornika vremenom toliko mijenja da se ni u kojem slučaju takav uređaj ne može odabrati za pramjeru napona ili otpora (kao što je, na primjer, prakilogram pramjera mase). To i jest glavni razlog zašto se u vrhunskoj metrologiji elektromagnetske jedinice reproduciraju *pramjerilima* (odsječci 3.1,2,3,4), tj. uređajima koji stanovitu vrijednost veličine proizvode samo onda kada je to potrebno (o pojmovima jedinica, mjera, pramjerilo itd. vidi u odsječku A.5.3). Stavljanje elektromagnetskih pramjerila u pogon potrebno je onda kad se njima želi utvrditi vrijednost fizikalne veličine koju pohranjuje *održavajući standard*. Takav »održavajući standard« je, na primjer, »grupna normala«, koju tvori grupa Westonovih elemenata ili grupa stabilnih otpornika (odsječak 3.6). Westonov element (ili otpornik) iz takve grupe obično se zove *normala*, tj. »naponska normala« ili »otpornička normala«.

U nastavku ćemo opisati postupak oko održavanja grupnih normala u toku prošlih pola stoljeća i način odstranjivanja pojedine normale iz grupe ako se utvrdi da se njena vrijednost mijenja znatno više negoli vrijednosti ostalih normala grupe. U tu svrhu postoji *veća grupa* od N najpažljivije izrađenih normala. Iz te grupe izdvoji se *manja grupa* od n *odabranih* normala, koje tvore »grupnu normalu« (zove se i »primarna referentna grupa«). Vrijednosti pohranjene fizikalne veličine (E ili R) elemenata grupe n međusobno se mjerenjem *uspoređuju* u vremenskim intervalima koji za naponske normale obično iznose jedan mjesec, a za otporničke normale do godinu dana. Takvim mjerenjem u nacionalnom metrološkom zavodu utvrđuje se, u stvari, vrijednost svake normale u odnosu prema *srednjoj vrijednosti* čitave grupe n. Prilikom prethodne mjerne usporedbe na isti je način bila utvrđena vrijednost svake normale u odnosu prema srednjoj vrijednosti prethodnog mjerenja, tj. u odnosu prema *staroj* srednjoj vrijednosti grupe n. Zatim se izmjerena relativna vrijednost (omjer vrijednosti pojedine normale i srednje vrijednosti grupe n) svake normale usporedi s relativnom vrijednošću dobivenom prethodnim mjerenjem. Ako su tako utvrđena odstupanja *novih* i *starih* relativnih vrijednosti razumno

malena i statistički dobro porazdijeljena, onda se smatra da je sve u redu. Napominjemo da su ta odstupanja *prividna*, jer ne znamo koliko se između dvije mjerne usporedbe promijenila srednja vrijednost grupe *n*. Drugim riječima: pretpostavljamo da je srednja vrijednost čitave grupe *n* između dvije mjerne usporedbe ostala konstantna (nekonstantnost možemo dokazati jedino usporedbama s pramjerilom uz pretpostavku da to dopušta nepouzdanost pramjerila).

Ako se odstupanje relativnih vrijednosti jedne normale znatno razlikuje od odstupanja ostalih iz grupe *n*, onda je to dokaz da su se njena svojstva pogoršala, pa tu normalu treba izbaciti iz grupe *n*. Na njeno se mjesto stavlja nova normala koja se do tada nalazila u većoj grupi *N*. Analognim mjerenjem unutar grupe *N* bilo je, naime, utvrđeno da ta nova normala (nova za grupu *n*) udovoljava zahtjevima koji se stavljaju na normale »održavajućeg standarda« — grupe *n*.

Za odstranjivanje preostalih sumnjivih normala iz grupe *n* primjenjuje se nakon opisanog postupka nov kriterij koji se proteže preko niza mjernih perioda. Kriterij se odnosi na one normale čija se relativna vrijednost *polagano* mijenja u toku duljeg vremenskog raspona. Pomicanje vrijednosti u *jednom* smjeru utvrđuje se usporedbom s rezultatom niza prethodnih mjerenja. Pri tom se primjenjuju dva postupka: 1. Prihvaća se vrijednost sredine (srednje vrijednosti) nove grupe koju je ona imala na početku posljednjeg intervala između mjernih usporedbi. 2. Nova vrijednost grupne normale može se izvesti uz pretpostavku da je sumnjiva normala bila eliminirana u vrijeme kad se počela pomicati njena vrijednost i da je ostatak grupe pohranjivao vrijednost grupne normale (ovaj se postupak engleski naziva recapturing; pravnički termin recaption znači povrat brodskog tereta mirnim putem).

Postupak pod 2 formalno dopušta skokovitu promjenu vrijednosti grupne normale u trenutku »vraćanja«, jer će se rezultat mjerenja iste veličine neposredno prije i neposredno nakon »vraćanja« razlikovati za vraćenu vrijednost. Suprotno tome, postupak opisan pod 1 raspodjeljuje promjenu na čitav period pomicanja. Postupak pod 2 mnogo je prikladniji za eliminaciju kumulativnog efekta jednosmjernog pomicanja u toku dugog perioda. On se obično primjenjuje na normale napona, jer defektnim Westonovim elementima napon u pravilu pada. Za normale otpora (odsječak 3.6) primjenjuje se prvi postupak. Oba postupka, pogotovo jer su mjerni periodi kratki, a preciznost usporedbenih mjerenja velika, omogućuju da se defektna normala otkrije i odstrani prije nego što njen utjecaj postane značajan. Upotreba velikog broja normala ($n = 10$, 25 ili više) omogućuje, osim toga, da se smanji utjecaj pomicanja jedne od njih na čitavu grupu.

3.5.5. Pohranjivanje napona u NBS. U mnogim stručnim publikacijama možemo zapaziti različite opise rezultata pohranjivanja vrijednosti napona pomoću normala — Westonovih elemenata (odlomak 3.5.2). Naročito se opisi razlikuju u pogledu brojčanih podataka. Razlog tome je ili taj što su autori razmatrali prekratak vremenski period pohranjivanja ili što su se oslanjali na podatke o različitim normalama. Da bi se stekao cjelovit uvid u način pohranjivanja vrijednosti napona pomoću normala, u nastavku ćemo letimično opisati kako to čine u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards (NBS).

Na četvrtom Međunarodnom elektrotehničkom kongresu, održanom godine 1903. u Chicagu (odlomak 5.1.3) dodijeljen je Clarkovu elementu napon 1,434 volta pri temperaturi 15 °C. Do godine 1906. izrađen je niz novih Clarkovih elemenata, a pri tom su upotrebljavani čišći materijali negoli do tada. Zbog veće čistoće živinog sulfata i odabiranja referentne temperature 25 °C (ne više 15 °C) novom Clarkovu

elementu dodijeljena je srednja vrijednost 1,421 10 volta. Zatim su godine 1906. izrađeni zasićeni Westonovi kadmijevi elementi i uspoređeni sa Clarkovima. Mjernom usporedbom utvrđena je srednja vrijednost grupne normale od 12 Westonovih elemenata: 1,018 09 volta pri 25 °C. Ova grupna normala služila je kao američki udio pri radu Međunarodnog tehničkog odbora godine 1910. (vidi odlomak 2.5.4). Mnoštvom eksperimenata pomoću nekoliko tipova srebrnog voltametra Odbor je utvrdio jedinicu »internacionalni amper« (A_0; vidi odsječak 5.3). U tom poslu Odbor se oslonio na prethodna utvrđivanja vrijednosti otporničkih normala (odsječak 3.6) pomoću živinog stupca, a otpor tih normala bio je izražen jedinicom »internacionalni ohm« Ω_0 (odlomak 5.3.2). Kombinacijom takvih otporničkih normala i srebrnih voltametara Odbor je eksperimentalno ustanovio da volt grupne normale NBS (V_{NBS}; vidi odlomak 3.5.3), koja je upotrijebljena prilikom tih radova, ima za 852 μV manju vrijednost od »internacionalnog volta« V_0. Pri tom je V_0 bio izveden iz umnoška $V_0 = A_0\Omega_0$, dakle reproduciran padom napona koji je struja 1 A_0 (voltametar) stvorila na otporničkoj normali otpora 1 Ω_0. Zbog toga je 1. 1. 1911. svim američkim naponskim normalama propisana nova vrijednost, 0,852 mV manja od prijašnje.

Prilikom opisanog eksperimentiranja NBS je došao u posjed grupe od 36 Westonovih elemenata koje je uključio u veću grupu elemenata američkog, engleskog i njemačkog porijekla. Do mjeseca januara godine 1912. ova je grupa služila za pohranjivanje jedinice napona V(NBS). Sa tih 36 elemenata željela se pri 20 °C održavati srednja vrijednost grupe 1,018 300 volta (usporedi s odlomkom 3.5.3). Tada je izašlo na vidjelo da se vrijednost napona nekih elemenata znatno pomakla. Manja grupa od 19 elemenata, koja je pokazivala stalan i podjednak porast napona u odnosu prema novoj osnovi (4 od njih bila su u onoj grupi od godine 1908), služila je do godine 1914. kao grupna normala napona USA. U tom razdoblju eliminirane su dvije normale. Godine 1914. učinjene su stanovite promjene, tako da je do jula 1919. za pohranjivanje jedinice napona služila grupna normala sastavljena od 18 elemenata. Tada su 3 normale izbačene, a 5 ih je dodano. Iz te grupe od 20 elemenata odstranjene su u aprilu 1937. četiri normale, a u decembru 1932. dodano je devet novih. Tih 25 normala tvorilo je primarnu grupnu normalu USA sve do godine 1947.

Kao dokaz znatnog međusobnog sklada vrijednosti napona niza Westonovih normalnih elemenata mogu poslužiti podaci izmjereni u razdoblju između godine 1919. i 1933: napon 18 normala promijenio se prema srednjoj vrijednosti grupe za manje od 15 mikrovolta. Od toga je polovici napon blago porastao, a drugoj se smanjio. Prosječna promjena u toku 14 godina, ne uzimajući u obzir predznak, iznosila je 5 μV. To odgovara prosječnom pomaku 0,25 μV/god., dok je najveća promjena srednje vrijednosti grupne normale iznosila 1 μV/god. Osim ovih promjena napona postoje još i neznatna kolebanja koja se zovu *slučajna*. Uzastopna mjerenja napona istog elementa pokazuju, naime, da se rezultati u jednogodišnjim razmacima razlikuju u prosjeku za $\pm 2\mu$V. Budući da mjerna pogreška ponovljenih mjerenja, učinjenih u razmacima od nekoliko sati do nekoliko dana, iznosi oko $\pm 0{,}1$ μV, ove se promjene pripisuju slučajnim promjenama u elementima. Ni jedna od godišnjih razlika nije premašila 10 μV, a 83% od njih bilo je manjih od 4 μV.

Gornji tekst opisao nam je ponašanje »dobrih« Westonovih elemenata — normala. Za razliku od njih, neke su nakon niza godina »dobrog ponašanja« počele gubiti napon u iznosu 3 do 10 μV godišnje. Od godine 1919. utvrđena su četiri takva slučaja, pa su defektne normale odstranjene iz grupne normale; kasnija mjerenja su pokazala da je njihov napon dalje padao. Zbog tih loših normala primijenjen je postupak »vraćanja« vrijednosti napona grupne normale koji smo spomenuli u odlomku

3.5.4 (engl. recapturing). Vraćena srednja vrijednost izračunata je opisanim postupkom tako da su se unatrag uzele u obzir samo dobre normale sve do trenutka kada je počelo nenormalno ponašanje defektne. Tako je skok vrijednosti napona grupne normale uveden 19. 9. 1933, 10. 4. 1937. i 7. 9. 1944; on je redom iznosio 4,6 μV, 0,8 μV i 1,1 μV. Promjene sastava grupne normale između godine 1912. i 1919. nastale su iz drugog razloga: tri Westonova elementa su pukla, ali to nije uzrokovalo promjenu vrijednosti napona koji pohranjuje grupna normala.

Opisane dugogodišnje brižljive mjerne usporedbe vrijednosti napona pojedinih normala sa srednjom vrijednošću grupne normale ne mogu otkloniti osnovni nedostatak takvog »održavajućeg standarda« (vidi odsječak A.5.3), a to je: *međusobne* usporedbe ne mogu pokazati koliko se u toku vremena promijenila vrijednost napona čitave grupne normale (analogni nedostatak razmatrali smo u odlomku A.9.3.3 za pramjeru mase). Promjena vrijednosti može se utvrditi jedino usporedbom s pramjerilima, i to s preciznošću koja ovisi o nepouzdanosti reprodukcije napona kombinacijom strujne vage i pramjerila otpora (vidi odlomak 3.1.2). Stanoviti uvid u dugoročne promjene napona grupne normale ipak se može steći *usporedbom s drugom grupnom normalom*. U nastavku ćemo taj postupak spomenuti na američkom primjeru, dok rezultate međunarodnih usporedbi navodimo u odlomku 3.5.6.

Godine 1925. sastavili su u NBS posebnu grupnu normalu napona koja se sastojala od šest Westonovih elemenata izrađenih od materijala tada dostižive čistoće. Mjerenjem je utvrđeno da je srednja vrijednost te nove grupe za 12 μV veća od srednje vrijednosti veće grupe sastavljene 15 godina prije toga prilikom rada Međunarodnog tehničkog odbora. Slični podaci dobiveni su dugotrajnom usporedbom engleskih i američkih grupnih normala (odlomak 3.5.6). Engleski metrološki zavod National Physical Laboratory (NPL) obnavlja, naime, svoje grupne normale tako da svakih nekoliko godina u grupu uvodi novu normalu, a odstranjuje najstariju. Na taj se način grupa sastoji od normala starih 1 do 20 godina, u prosjeku 6 godina. Starost američkih neutralnih Westonovih elemenata iznosila je godine 1948. u prosjeku 20 godina, od 6 do 41 godinu. Drugi razlog razlika napona između američkih i engleskih normala potječe otuda što su do godine 1937. sve NBS normale bile neutralne dok NPL upotrebljava 0,1-normalno zakiseljene normale. Od godine 1925. do 1948. razlika između V(NPL) i V(NBS) (o nacionalnom voltu vidi odlomak 3.5.3) kolebala se u granicama ± 7 μV oko razlike srednjih vrijednosti 24 μV; engleski volt bio je veći (vidi sliku E.58 u odlomku 3.5.6). Ne zna se uzrok razlici od 18 μV koja je nastala između godine 1911. i 1925, tj. u prosjeku 1,3 μV/god.

Godine 1931. učinjena je serija eksperimenata pomoću srebrnog voltametra sa svrhom da se ustanovi koliko se promijenila srednja vrijednost napona grupne normale NBS u razdoblju od godine 1910. kada je na taj način utvrđena vrijednost napona Westonovog elementa (vidi početak ovog odlomka). Pokuse su izveli u NBS, NPL i Physikalisch-Technische Reichsanstalt. Tim je mjerenjima utvrđeno da se V(1912) ne razlikuje od V(1931) za više od 10 μV, tj. da prosječna promjena ne premašuje 0,6 μV/god. U spomenutih 10 μV uključena je i nepouzdanost rezultata dobivenih srebrnim voltametrom.

Na kraju ovog letimičnog opisa američke grupne normale napona korisno je ilustrirati s koliko se pažnje i strepnje čuvaju Westonovi elementi koji tvore tu grupu (vidi analogne mjere opreza pri čuvanju prakilograma i njegovih svjedoka u odlomku A.9.3.3). Iz straha od požara ili neke druge katastrofe, grupnoj normali NBS služe kao rezerva dvije druge grupe normala; svaka od njih sastoji se od 10 Westonovih

elemenata. Da bi rizik od oštećenja ili uništenja bio što manji, grupe se nalaze u različitim zgradama. Uzgred napominjemo da srednje vrijednosti napona E_{20} tih grupa ne pokazuju tendenciju odstupanja od primarne grupe, iako nisu držane na konstantnoj temperaturi.

3.5.6. Interkomparacije naponskih normala u BIPM. Američki metrološki zavod NBS i engleski zavod NPL od samog su početka primjene Westonovih elemenata povremeno međusobno uspoređivali svoje naponske normale. Godine 1927. tim su se usporedbama službeno priključili i metrološki zavodi drugih zemalja, jer je te godine osnovan Savjetodavni odbor za elektromagnetizam (vidi odlomak A.7.1.3). Taj odbor stručnjaka vodi i koordinira u okviru djelokruga Generalne konferencije za mjere i utege istraživačke radove na unapređivanju metrologije elektromagnetizma (odlomak A.7.4.5). Dio tih radova obavlja se u laboratorijima Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM), među njima i periodičke (u pravilu svake tri godine) međunarodne komparacije napona nacionalnih normala. Takva međunarodna komparacija zove se *interkomparacija*, što dolazi od engleskog naziva international comparison. U interkomparaciju ulazi i normala Međunarodnog ureda, jer i BIPM posjeduje svoju grupnu normalu Westonovih elemenata, odnosno preciznije: BIPM je čuvar grupne normale čiji su Westonovi elementi izrađeni u toku različitih razdoblja u šest velikih nacionalnih metroloških zavoda.

Westonovi elementi vrlo su osjetljivi na transport, što pri velikim udaljenostima (Sydney—Paris, Tokio—Paris itd.) zahtijeva izuzetnu pažnju. Općenito nacionalni zavodi šalju na interkompariranje 4 do 10 elemenata zasićenog tipa. Takve elemente resi dobra stalnost napona, ali im je temperaturna osjetljivost znatna, temperaturni koeficijent napona iznosi oko 41 μV/°C (odlomak 3.5.2). To je, u stvari, razlika dvaju zasebnih koeficijenata potencijala svake od elektroda Westonova elementa; koeficijenti svakog poluelementa iznose više od 300 μV/°C, ali su njihovi predznaci suprotni. Zato temperaturni gradijenti u uljnoj kupci (sl. E.57) mogu uzrokovati relativno velike razlike. Osim toga, neki nacionalni metrološki zavodi uskladištuju svoje naponske normale pri temperaturi oko 20 °C, drugi pri 16 °C, a klima u Washingtonu zahtijeva da temperatura uljne kupke bude oko 28 °C, jer se time sprečava kondenziranje vlage. Konačno na promjenu temperaturnog koeficijenta utječe i starost normala, a vjerojatno i kiselost.

Stanovitu predodžbu o preciznosti takvih interkomparacija može nam pružiti podatak od godine 1929. kada su objavljeni rezultati šest interkomparacija. Pri tom je u svakoj od tih šest interkomparacija sudjelovala druga grupa naponskih normala. Standardno odstupanje od srednje vrijednosti šest razlika između normala NBS i NPL iznosilo je $\pm 4 \cdot 10^{-6}$. Druga predodžba o preciznosti međunarodnih usporedbi može se steći praćenjem najvećeg i najmanjeg omjera napona normala NBS i NPL u toku 7 godina, jer se razlika između svakog para ekstremnih vrijednosti smatra mjerom nepouzdanosti za dotičnu godinu. Prosječna razlika za sedam godina iznosila je $9 \cdot 10^{-6}$. Ovi rezultati dobiveni su u slučaju kad su u interkomparaciji sudjelovale normale iz Sovjetskog Saveza i Japana, transportirane na velike udaljenosti i s kojima se mnogo puta eksperimentiralo u različitim laboratorijima. (U to vrijeme tek su započinjale sistematske interkomparacije. Do tada su obavljane više-manje sporadično: prilikom putovanja u Evropu, koje je imalo posve drugi cilj, neki bi učenjak »usput« ponio naponske i otporničke normale; boraveći u metrološkim centrima usput bi ih usporedio u odnosu prema domaćinovima.) Mnogo manje razlike nastaju ako nema utjecaja tih transportnih poteškoća. Tako je, na primjer, godine 1931. u njemačkom metrološkom zavodu PTR interkomparirana grupa od

8 naponskih normala NPL sa grupom od 10 normala NBS. Trenuci mjerenja pali su na 8 različitih dana unutar intervala od 5 tjedana, a u međuvremenu normale nisu bile micane. Jedino na dva takva dana utvrđeno je odstupanje $\pm 1 \cdot 10^{-6}$ od srednje vrijednosti razlike koja je iznosila $30 \cdot 10^{-6}$.

Iako smo to naglasili pri kraju odlomka 3.5.3, korisno je ovdje ponovno istaći da se na interkomparaciju u BIPM ne šalje normala koja pripada nacionalnoj grupnoj normali, već tzv. *putujuća normala* (engl. travelling standard). To vrijedi kako za naponske normale, tako i za otporničke (odsječak 3.6), a i za ostale normale (kapacitivne, induktivne). Obično se za putujuću naponsku normalu odabire takva vrst Westonova elementa koja u pogledu stalnosti svog napona dobro podnosi daleki transport i znatne promjene temperature. Kod primjene *naponske* putujuće normale postupa se ovim redoslijedom: 1) napon putujuće normale izmjeri se u nacionalnom metrološkom zavodu u odnosu prema naponu nacionalne grupne normale, 2) putujuća se normala pažljivo transportira u laboratorij BIPM (Sèvres, predgrađe Pariza) i tamo pohrani zajedno s ostalim interkompariranim normalama, 3) nakon stanovitog vremena (stabilizacija!) izmjeri se napon putujuće normale u odnosu prema normali BIPM, 4) putujuća se normala transportira natrag u nacionalni metrološki zavod, 5) pošto se obave potrebne predradnje, putujuća se normala opet usporedi s nacionalnom grupnom normalom, tj. ponovi se mjerenje navedeno pod 1). Usporedba rezultata operacija 1) i 5) omogućuje da se procijeni nije li prilikom transporta došlo do nedopustive promjene napona putujuće normale.

Rezultate niza interkomparacija naponskih normala u razdoblju od godine 1911. do 1948. prikazuje slika E.58. Na ordinatnoj su osi nanesene vrijednosti relativnog odstupanja »nacionalnog volta« V(N) od »srednjeg internacionalnog volta« V(s) (engl. mean international Volt). Pojam »relativno odstupanje« razumjet ćemo na temelju izlaganja u odlomku 3.5.3, gdje smo slovom V(N) općenito označili »nacionalni volt«, tj. vrijednost volta pohranjenog nacionalnom naponskom normalom. Ako srednju vrijednost napona interkompariranih normala pri 20 °C označimo slovom $E_{20}(\mathrm{s})$, a vrijednost napona bilo koje od uspoređenih nacionalnih normala slovom $E_{20}(\mathrm{N})$, relativno odstupanje napona iznosi

$$\frac{E_{20}(\mathrm{N}) - E_{20}(\mathrm{s})}{E_{20}(\mathrm{s})} = \frac{E_{20}(\mathrm{N})}{E_{20}(\mathrm{s})} - 1.$$

Budući da je na snazi opća jednadžba (3.5-7) iz odlomka 3.5.3, njenom primjenom na gornji izraz slijedi

$$\frac{\mathrm{V(N)} - \mathrm{V(s)}}{\mathrm{V(s)}} = \frac{\mathrm{V(N)}}{\mathrm{V(s)}} - 1 = \frac{E_{20}(\mathrm{N})}{E_{20}(\mathrm{s})} - 1. \qquad (3.5\text{-}8)$$

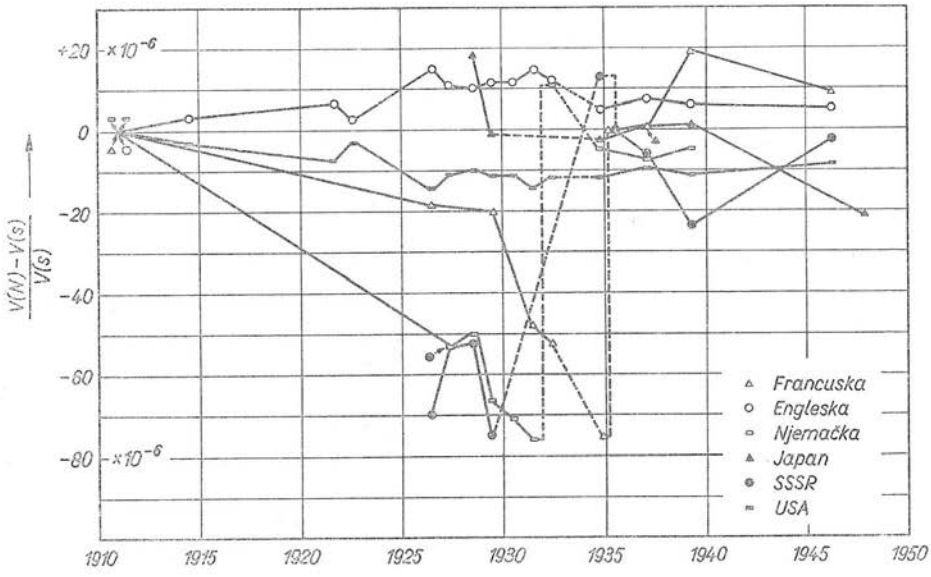
Prema tome milijuntinke na ordinati slike E.58 istodobno prikazuju i relativno odstupanje nacionalne normale od srednje vrijednosti svih interkompariranih normala i relativno odstupanje nacionalnog volta V(N) od zamišljenog »srednjeg internacionalnog volta« V(s).

Korelacije relativnih odstupanja nacionalnih normala u pojedinim trenucima interkompariranja (sl. E.58) osnivaju se na nekim proizvoljnim pretpostavkama. Za razdoblje od godine 1911. do uključivo 1932. pretpostavlja se da je srednja vrijednost između V(NPL) i V(NBS) bila konstantna. Zato je sredina relativne razlike engleske i američke normale odabrana za apscisnu os dijagrama na slici E.58. Njemačka nor-

mala nije pri tom uzeta u obzir, jer je u tom razdoblju interkomparirana mali broj puta. Osim toga, godine 1931. njemački je metrološki zavod PTR ustanovio da se vrijednost njegove normale pomakla za 82 milijuntinke. Bilo je teško ustanoviti kada je nastala glavnina tog pomaka i učiniti ispravnu korekciju na dijagramu. Nakon godine 1934. podaci na slici E.58 zabilježeni su uz pretpostavku da je vrijednost »srednjeg internacionalnog volta« V(s) stalna, tj. V(s) = const. Pri tom je V(s) dobiven interkomparacijom kao srednja vrijednost napona primarnih grupnih normala velikih nacionalnih metroloških zavoda navedenih šest država. Za razdoblje drugog svjetskog rata, kada se interkomparacije nisu mogle obaviti, pretpostavka V(s) odgovara pretpostavci da je napon velike grupne normale u BIPM (koja se sastojala od 47 Westonovih elemenata izrađenih u metrološkim zavodima šest zemalja) ostao nepromijenjen.

Godine 1931. jasno je izašlo na vidjelo, kako smo već spomenuli, da raste razlika između E_{20}(PTR) s jedne strane te E_{20}(NPL) i E_{20}(NBS) s druge. Zbog toga su na traženje PTB godine 1931. u Berlinu interkomparirane otporničke i naponske normale NBS, NPL i PTR. Pri tom je izveden niz eksperimenata pomoću srebrnog voltametra ($V_0 = \Omega_0 A_0$; vidi početak odlomka 3.5.5). Posljedica tih opsežnih radova bila je ta što je PTB podigla vrijednost svoje nacionalne jedinice V(PTB) za 82 milijuntinke (crtkano na slici E.58). Analogno je i Sovjetski Savez, na temelju rezultata eksperimentiranja sa srebrnim voltametrom i otporničkom normalom (odsječak 3.6) u razdoblju od godine 1929. do 1934, podigao vrijednost svom V(SSSR).

U BIPM se započelo interkompariranjem naponskih normala četiriju zemalja godine 1932, a u decembru 1934. bio je poznat rezultat interkomparacije normala iz svih tadašnjih velikih nacionalnih metroloških zavoda. Usporedba je pokazala da



Sl. E.58. Relativno odstupanje »nacionalnog volta« V(N), pohranjivanog naponskim normalama u šest velikih metroloških zavoda, od zamišljenog »srednjeg internacionalnog volta« V(s). Vrijednosti relativnog odstupanja $V(N)/V(s) - 1 = E_{20}(N)/E_{20}(s) - 1$ navedene su u milijuntinkama. Rezultate interkomparacija u razdoblju od godine 1950. do 1963. prikazuje slika E.59

Tablica **E-17**

Interkomparacijama utvrđena razlika V(N) – V(BIPM) izražena mikrovoltima

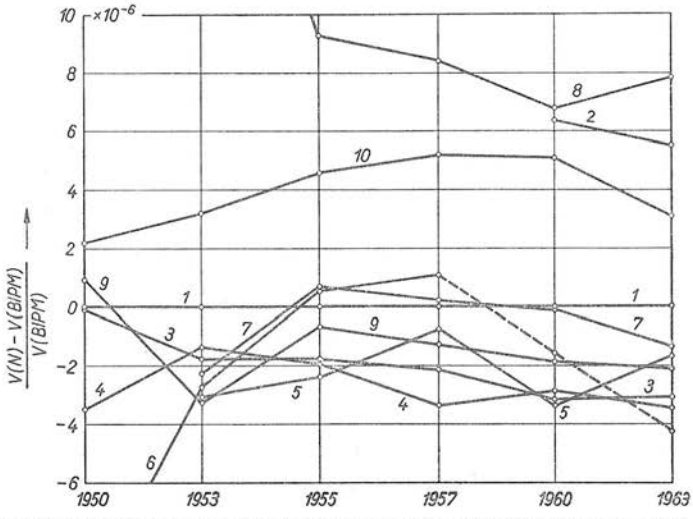
Metrološki zavod	1950	1953	1955	1957	1961	1964	1967
DAM	−10,2	−2,8	+0,5	+1,1	—	−4,3	−6,8
ETL	−3,5	−1,4	−2,0	−3,4	−2,9	−3,5	−2,7
IEN	—	—	—	—	0	+0,8	−0,9
LCIE	−0,1	−1,8	−1,8	−2,1	−3,2	−3,1	−4,9
NBS	+0,8	−3,3	−0,7	−1,3	−1,9	−2,2	−2,6
NPL	+2,2	+3,2	+4,5	+5,2	+5,1	+3,1	+2,6
NRC	—	−3,1	−2,4	−0,8	−3,4	−1,7	−3,0
PTB	—	−2,3	+0,6	+0,2	−0,1	−1,4	−0,6
VNIIM	+23,0	+22,3	+9,3	+8,4	+6,8	+7,8	+8,4

vrijednost francuske normale znatno odstupa od ostalih pet. Zato je LCE (Laboratoire Central d'Electricité) godine 1935. povisio vrijednost francuskog nacionalnog volta V(LCE) za 76 milijuntinki (crtkano na slici E.58). Budući da su razlike između V(N) ostalih pet nacionalnih zavoda bile neznatne, Savjetodavni odbor za elektromagnetizam preporučio je godine 1935. da se svim interkompariranim normalama propiše ista vrijednost, i to srednja vrijednost $E_{20}(s)$ koja proizlazi iz interkomparacije pet nacionalnih normala (bez francuske). Preporuku je prihvatio jedino Sovjetski Savez, koji je vrijednost svog volta V(SSSR) smanjio za 13 milijuntinki (crtkano na slici E.58). Odmah nakon drugog svjetskog rata u interkomparaciji je sudjelovalo pet nacionalnih zavoda (manjkao je PTB). Rezultat je na slici E.58 nacrtan uz pretpostavku da se u međuvremenu nije promijenila srednja vrijednost napona koji je pohranjivala grupna normala GV_2 (47 normala) Međunarodnog ureda za mjere i utege.

Nakon drugog svjetskog rata interkomparacije naponskih normala nastavljene su u još većem opsegu (sl. E.59): uključili su se moderni metrološki zavodi Australije i Kanade, zavodi obiju Njemački, a godine 1963. i zavod Italije (nije nacrtano; relativno odstupanje talijanske normale iznosilo je $+0{,}8 \cdot 10^{-6}$). Nazivi tih nacionalnih metroloških zavoda glase (u zagradi je navedena brojčana oznaka krivulje na slici E.59):

DAM — Deutsches Amt für Messwesen, Berlin (6)
ETL — Electrotechnical Laboratory, Tokio (4)
IEN — Istituto Nazionale di Elettrotecnica G. Ferraris, Torino
LCIE — Laboratoire Central de l'Industrie de l'Electricité, Paris (3)
NBS — National Bureau of Standards, Washington (9)
NPL — National Physical Laboratory, Teddington (10)
NRC — National Research Council, Ottawa (5)
NSL — National Standards Laboratory, Sydney (2)
PTB — Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig (7)
VNIIM — Vsesojuznij naučno-isljedovateljski institut imena Mendeljejeva, Lenjingrad (8)

Danas je uobičajeno da se rezultati interkomparacija izražavaju relativnim odstupanjem nacionalnog volta V(N) (za njegovu definiciju vidi odlomak 3.5.3) od »volta Međunarodnog ureda za mjere i utege« = V(BIPM) koji pohranjuje grupna normala BIPM. Tako smo učinili i na slici E.59, gdje milijuntinke na ordinati predstavljaju vrijednosti relativnog odstupanja V(N)/V(BIPM)−1. Dijagram na



Sl. E.59. Rezultati interkomparacija naponskih normala u BIPM od godine 1950. do 1963. (usporedi sa slikom E.58). Na ordinatu su nanesene vrijednosti (u milijuntinkama) relativnog odstupanja nacionalnog volta V(N) od V(BIPM) koji pohranjuje grupna normala Međunarodnog ureda za mjere i utege. Budući da se relativno odstupanje računa u odnosu prema normali BIPM, relativno odstupanje V(BIPM) uvijek je jednako nuli (pravac *1*), bez obzira na stvarnu (apsolutnu) vrijednost V(BIPM), koja se u toku godina mijenja. Krivulje se odnose na naponske normale metroloških zavoda ovih država: *2* — Australija, *3* — Francuska, *4* — Japan, *5* — Kanada, *6* — Njemačka Demokratska Republika, *7* — Njemačka Savezna Republika, *8* — Sovjetski Savez, *9* — USA, *10* — Velika Britanija

slici E.59 vrlo je poučan, naročito u usporedbi sa slikom E.58: najveća relativna razlika između bilo koja dva nacionalna volta između godine 1955. i 1963. ne premašuje oko 12 milijuntinki! Podrobne podatke o interkomparacijama u razdoblju od godine 1950. do 1967. sadrži tablica E-17. Komparacija od godine 1963. završena je u januaru 1964, pa zato u pogledu godina prividno postoji nesklad između tablice E-17 i slike E.59. Iduća interkomparacija započet će, kako predviđaju u Međunarodnom uredu za mjere i utege, u decembru godine 1969.

Zemlje koje ne sudjeluju u interkomparaciji mogu vrijednost svog nacionalnog volta utvrditi usporedbom svojih naponskih normala s normalama sudjelujuće zemlje. Tako su, na primjer, u augustu i oktobru godine 1966. u Pragu uspoređeni sovjetski (4 komada) i čehoslovački (6) Westonovi elementi. Pošto su sovjetski metrolozi donijeli Westonove elemente i otporničke normale (tom su zgodom uspoređene i otporničke normale), ostavili su ih tri tjedna da miruju u uljnom termostatu. Nakon što se njihov napon ustalio, usporedbenim je mjerenjem utvrđen odnos $V(\text{ČSSR}) = (1 + K) \cdot V(\text{SSSR})$ za svaki element pri temperaturi 20,00 °C. Relativna razlika K kretala se u granicama $(-1{,}0 \ldots + 1{,}3) \cdot 10^{-6}$. Pri tom je razlika napona između četiri sovjetske normale iznosila maksimalno 4 μV, a odstupanje od njihove srednje vrijednosti ±2 μV. Budući da je interkomparacijom u BIPM go-

dine 1966. izmjeren odnos V(SSSR) = V(BIPM) + 7,9 μV [u ovovrsnim izrazima bez daljnjega se može zanemariti razlika između V(BIPM) i V = V(SI)], usporedbom SSSR—ČSSR dobivena je ovisnost čehoslovačkog nacionalnog volta V(ČSSR) o V(BIPM).

3.5.7. Stvarna vrijednost napona normale. Iz opisa interkomparacija naponskih normala u BIPM i primjera usporedbe ČSSR—SSSR, a takvih je dvostranih usporedbi više, nedvojbeno proizlazi da je V(BIPM) vrlo važna jedinica operativne vrhunske metrologije. Isto je tako važna i mjerna jedinica »ohm Međunarodnog ureda za mjere i utege« = Ω(BIPM), o kojoj se raspravlja u odsječku 3.6. Pohranjivanje jedinice V(BIPM) svodi se, kako smo vidjeli u prošlim odlomcima, na uzorno održavanje i pažljivu upotrebu Westonovih elemenata, te na neprekidnu brižljivu kontrolu *međusobnog odstupanja* napona Westonovih elemenata koji tvore grupnu normalu. Pri opisu postupka pohranjivanja nigdje nismo, međutim, upotrebljavali *stvarnu vrijednost* (apsolutnu vrijednost) ni V(BIPM) ni nacionalnog volta V(N). Pod »stvarnom vrijednošću« razumijevamo, dakako, vrijednost napona izraženog jedinicom Međunarodnog sistema jedinica (SI) volt = V = V(SI), odnosno u obliku jednadžbe $V(BIPM) = x \cdot V$ ili $V(N) = y \cdot V$ (zanemarimo za trenutak da se volt SI = V ne može reproducirati savršeno pouzdano, jer i najbolja pramjerila uzrokuju relativnu nepouzdanost volta SI oko $\pm 4 \cdot 10^{-6}$). Koeficijenti x i y vrlo su bliski broju 1, ali samo slučajno mogu biti jednaki 1. Osim toga, oni se u toku vremena *mijenjaju*; dokaz tome su krivulje na slikama E.58 i 59.

Te nam krivulje, na žalost, ne mogu dati podatke o *stvarnim* (apsolutnim) promjenama napona normala, već samo promjene u odnosu prema proizvoljno odabranom uporištu (prema normali BIPM, na primjer), koje se i samo mijenja. Situacija je, dakle, slična onoj kod pramjera mase (vidi odlomak A.9.3.3 i tablicu A-13), ali postoje dvije bitne razlike: 1. Prema današnjem znanju, relativna promjena mase utega nekoliko je tisuća puta manja od relativne promjene napona E_{20} probranih Westonovih elemenata (u toku jednakih vremenskih intervala, tj. u toku nekoliko desetljeća). 2. Stvarna (apsolutna) promjena mase nekog utega *nikako se ne može utvrditi*, već jedino relativna promjena, tj. promjena u odnosu prema masi nekih drugih utega. Promjena napona normale u toku vremena, naprotiv, *može se utvrditi*: usporedbom s poznatim naponom koji reproducira kombinacija dvaju pramjerila, strujne vage (odsječak 3.1) i jednog od pramjerila otpora (odsječak 3.3). Načelo tog postupka opisali smo u odlomku 3.1.2, za koji je karakteristična shema na slici E.25.

Tako se, u stvari, i postupa. No, budući da Međunarodni ured za mjere i utege ne posjeduje (!!) kombinaciju pramjerila, do vrijednosti E_{20}(BIPM) ili V(BIPM) dolazi se zaobilaznim putem. Neki od nacionalnih metroloških zavoda, koji posjeduje pramjerila (NPL, NBS itd.), utvrdi stvarnu vrijednost napona svoje nacionalne normale. Postupkom iz odlomka 3.5.3 dobiva se tako odnos između V(N) i V = V(SI), tj. $V(N) = y(N) \cdot V$. Budući da je otprilike u isto vrijeme interkomparacijom utvrđen odnos $V(N) = z(N) \cdot V(BIPM)$, izjednačenjem ovih dviju jednadžbi slijedi

$$V(BIPM) = \frac{y(N)}{z(N)} V = x \cdot V.$$

Mjerenja u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards i u engleskom National Physical Laboratory pokazala su da je vrijednost koeficijenta x godine 1965. približno iznosila

$$x(1965) = 1 + 11 \cdot 10^{-6} \pm 4 \cdot 10^{-6},$$

tj. V(BIPM), pohranjivan naponskom normalom u BIPM, veći je za 11 milijuntinki od volta SI = V. Relativna nepouzdanost poznavanja x u iznosu $\pm 4 \cdot 10^{-6}$ (statistička sigurnost 50%) uzrokovana je nesigurnošću vrijednosti struje i otpora reproduciranih strujnom vagom i pramjerilom otpora. Pomoću tako utvrđenog koeficijenta x, čija vrijednost teoretski vrijedi samo za trenutak uspoređivanja i reproduciranja, mogu preko relacije

$$V(N) = z(N) \cdot V(BIPM) = x \cdot z(N) \cdot V$$

utvrditi stvarnu vrijednost svog nacionalnog volta V(N) i one zemlje koje ne posjeduju pramjerila, ali sudjeluju u interkomparacijama (odlomak 3.5.6).

Ostale zemlje koje niti imaju pramjerila niti sudjeluju u interkomparacijama mogu vrijednost svog V(N), odnosno vrijednost $E_{20}(N)$ svoje nacionalne grupne normale, saznati jedino usporedbom s interkompariranim normalama (vidi primjer usporedbe Čehoslovačka—Sovjetski Savez na kraju prošlog odlomka). Naravno da dvostruka usporedba povećava početnu relativnu nesigurnost $\pm 4 \cdot 10^{-6}$, a osim toga uvijek postoji opasnost da će transport normala uzrokovati pomicanje vrijednosti njenog napona. Zato bi uspješna primjena Taylorova minijaturnog pramjerila napona (zapravo: uređaja koji pohranjuje vrijednost omjera $E/f = \text{const}$; frekvencija f elektromagnetskog polja može se mjeriti preko milijun puta preciznije negoli napon), koji smo opisali u odlomku 3.4.6, neprocjenjivo mnogo unaprijedila metrologiju električkog napona.

Smatrajući da treba voltu BIPM = V(BIPM) dodijeliti novu vrijednost (sada razlika V(BIPM) — V(SI) iznosi oko 11 μV), Savjetodavni odbor za elektromagnetizam Međunarodnog komiteta za mjere i utege pozvao je nedavno vodeće metrološke zavode svijeta da na tom polju učine ovo: 1. da pomoću svojih pramjerila struje i otpora utvrde *sadašnju* vrijednost V(BIPM), 2. da istraže mogućnosti *direktnog* utvrđivanja vrijednosti V(BIPM) pomoću *pramjerila napona.*

Na svom 12. sastanku, održanom godine 1968, Savjetodavni odbor za elektromagnetizam (o savjetodavnim odborima vidi odlomak A.7.1.3) već je objavio preporuku kojom preporučuje da se grupnoj normali BIPM dodijeli *stvarna* vrijednost napona, a time da se uvede takav »volt BIPM« ($V_{69\,BI}$) koji je što bliži V(SI). Na temelju rezultata prije spomenutih mjerenja u NBS i NPL Odbor je preporučio da se od 1. 1. 1969. upotrebljava odnos

$$V(BI, 69) = V_{69\,BI} = (1 - 11 \cdot 10^{-6}) \cdot V(BIPM).$$

Ovdje je V(BIPM) »stari volt BIPM« dobiven na način koji smo opisali u odlomku 3.5.3. Tom preporukom i *formalno* je omogućeno da oni nacionalni metrološki zavodi koji ne posjeduju pramjerila struje i otpora mogu interkomparacijom utvrditi *stvarnu* vrijednost napona pohranjivanu svojom nacionalnom grupnom normalom.

3.5.8. Jugoslavenska grupna normala napona. Ovaj podnaslov je pogrešan, jer Jugoslavija još *nema* (uključivši godinu 1969) »nacionalnu grupnu normalu napona«, jednako kao što nema ni »nacionalnu grupnu normalu otpora« (odlomak 3.6.4). Jugoslavija nema, dakako, ni pramjerila otpora (odsječak 3.3), ni strujne vage (3.1), ni nuklearnog pramjerila (3.2), ni standarda kapaciteta (3.4). Sažeto rečeno: Jugoslavija nema pouzdanog i jedinstvenog vrha metrologije elektromagnetizma prema kojemu bi se u čitavoj državi mjerile elektromagnetske veličine, a i mnoge neelektričke veličine. Budući da nema nacionalnih grupnih normala

napona i otpora, Jugoslavija ne može sudjelovati u međunarodnim komparacijama (odlomak 3.5.6) i ne dolazi u dodir sa stranim metrološkim zavodima, gdje se inače mogu steći mnoga znanja potrebna za unapređivanje metrologije, sveukupne znanosti i industrije.

Vrh sadašnje jugoslavenske metrologije napona tvore veće ili manje skupine heterogenih naponskih normala smještenih u laboratorijima pojedinih instituta i fakulteta. One se održavaju pod nejednakim uvjetima, različito su eksploatirane, a ako su neke dobre (u smislu vrhunske metrologije), možemo to zahvaliti sretnom slučaju i požrtvovnosti slabo plaćenih i neshvaćenih metrologa u tim laboratorijima. Zato nije čudo ako nam je vrh metrologije elektromagnetizma vjerojatno najniži u Evropi (vidi predgovor ovoj knjizi). Dokaz tome razabrat ćemo iz idućeg teksta.

Stanovitu predodžbu o nepouzdanosti jugoslavenskih naponskih normala (Westonovih elemenata) možemo steći iz rezultata usporedbe napona 17 Westonovih elemenata koju je od mjeseca marta do augusta godine 1968. učinio *D. Božić*. Te normale vlasništvo su Elektrotehničkog instituta poduzeća Rade Končar i Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu. Rezultate je *Božić* objavio u referatu »Problematika etalona napona sa Zenerovim diodama i usporedba s Westonovim elementima«, predočenom na 4. simpoziju Jukem-a (Jugoslavenski komitet za električna mjerenja), održanom godine 1969. u Beogradu. Navodimo bitne podatke iz tog referata.

Preliminarna mjerenja su pokazala da od 17 raspoloživih normala ima smisla uspoređivati samo 6, dok ostale ne dolaze u obzir zbog jednog od ovih razloga: prevelik unutarnji otpor (nekoliko desetaka kΩ), nestabilnost napona normala u toku mjerenja, veliko odstupanje napona od srednje vrijednosti. U toku petomjesečnog eksperimenta uspoređivane su normale mirovale. Jedna od njih, koja je pri obradi rezultata odabrana za referenciju, nalazila se u ultratermostatu, pa joj je temperatura varirala za maksimalno $\pm 0{,}02$ °C. Ostalih pet normala nalazilo se u dobro izoliranim posudama, tako da njihova temperatura nije spala ispod 19 °C niti premašila 25 °C.

Rezultate usporedbe, svedene na temperaturu 20 °C, možemo sažeti u ovo: 1) najveća razlika napona dviju normala iznosi oko 2600 μV, tj. oko $2{,}6 \cdot 10^{-3} = 0{,}26\,\%$ u odnosu prema nazivnom naponu normala, 2) najveće odstupanje napona normale od srednje vrijednosti (od 6 uspoređivanih normala) iznosi oko ± 1200 μV ili 0,12 %, 3) relativni porast srednje vrijednosti pri 20 °C iznosi u prosjeku oko 35 μV mjesečno, 4) napon se triju normala u pojedinim razdobljima povećao s porastom temperature, iako je trebalo da se smanji (odlomak 3.5.2). Ovim poraznim rezultatima (usporedi s odlomkom 3.5.6) nije potreban nikakav komentar! Uvjereni smo da bi jugoslavenska komparacija naponskih normala dala slične ili još lošije rezultate nego što su dobiveni ovom djelomičnom zagrebačkom komparacijom (usporedi s odlomkom 3.6.4).

Istini za volju treba priznati da su neke jugoslavenske normale uspoređivane s normalama stranih metroloških centara. Tako su, na primjer, stručnjaci beogradskog instituta »Nikola Tesla« nosili normale (naponske i otporničke) na baždarenje u njemački metrološki zavod PTR. Takvi hvalevrijedni pothvati (za mali institut takva je usporedba pravi financijski pothvat!), izvedeni povremeno i bez garantiranog dugoročnog programa održavanja grupnih normala, unapređuju doduše jugoslavensku metrologiju, ali time još ne oblikuju jedinstven vrh jugoslavenske metrologije elektromagnetizma.

Što treba učiniti da se stanje poboljša? Prije nego što iznesemo prijedloge, želimo naglasiti da se vrhunska nacionalna metrologija ne može odjednom radikalno unaprijediti, čak ni u slučaju ako se stručnjacima stave na raspolaganje programi razvoja, ispravno planirana sredstva, laboratoriji, specijalizacije itd. Tako je, na primjer, trebalo proći oko 20 godina (1948...1968) da bi se kanadski nacionali metrološki zavod National Research Council uvrstio među kvalitetnije zavode svijeta. Premda ima svega oko 20 milijuna stanovnika, dakle koliko i Jugoslavija, Kanada je shvatila da joj takav zavod treba, iako vrhunske metrološke usluge može kupovati od svog susjeda, metrološke velesile USA. Poučan je i primjer australskog metrološkog zavoda National Standards Laboratory, koji je u toku prošlih 10 godina stao uz bok vodećih metroloških zavoda, iako je broj stanovnika Australije upola manji od pučanstva Jugoslavije ili Kanade.

Autor ove knjige iznio je konkretne prijedloge o unapređivanju vrhunske jugoslavenske metrologije elektromagnetizma na 4. simpoziju Jukem u Beogradu godine 1969. (vidi i odlomak 3.2.5). Ovdje te prijedloge, koje je prihvatila Godišnja skupština Jukem 1969, ponavljamo:

1) Savezni zavod za mjere i dragocjene metale obvezan je državi da formira, održava i primjenjuje »nacionalne grupne normale« otpora i napona. Država je dužna da taj posao financira, jer je to jedna od grana na kojima počivaju privreda i znanost, dakle budućnost Jugoslavije.

2) Ako Savezni zavod nije u stanju ili ne želi obavljati tu djelatnost, njegova je dužnost da za taj rad ovlasti neki od postojećih laboratorija i da permanentno financira njegov rad. Ta dužnost proizlazi iz obveze države prema programu industrijalizacije zemlje, tj. prema opstanku jugoslavenske industrije na svjetskom tržištu.

3) Vrhunska jugoslavenska metrologija stvar je svih korisnika i sudionika te metrologije, a ne samo Saveznog zavoda. Zato determinirani dugoročni program razvoja metrologije elektromagnetizma mora donijeti, i kontrolirati njegovo provođenje, kvalificirani skup jugoslavenskih metrologa. Smatramo da je simpozij Jukem pozvan da izabere takav skup.

4) Prema smjernicama tog permanentnog skupa treba da rade (eksperimentalno i teoretski) specijalizirane radne grupe, locirane tamo gdje je to optimalno sa stanovišta nacionalne metrologije. Taj rad treba da financira država putem Saveznog zavoda ili putem nekog drugog fonda.

3.5.9. Zenerova naponska normala. U vrhunskoj metrologiji elektromagnetizma napon se sve donedavna pohranjivao isključivo Westonovim elementima, koji su tako postali sinonim za naponske normale. U novije se vrijeme, međutim, nastoje Westonovi elementi zamijeniti *Zenerovim normalama*, tj. stabilizirajućim kaskadnim sklopovima sa Zenerovim diodama. Budući da u trenutku objavljivanja ove knjige još nema dovoljno eksperimentalnih podataka o tome da li Zenerove normale doista mogu uspješno zamijeniti Westonove elemente, ovdje ćemo te nove normale napona dodirnuti samo letimično.

Zenerova dioda ima postojanu strminu karakteristike struja—napon. Zato se i posve jednostavnim sklopom s jednom diodom može postići faktor stabilizacije napona do 100, što znači da se, na primjer, 1 %-tna (10^{-2}) promjena napona na ulazu sklopa odražava kao 0,01 %-tna (10^{-4}) promjena napona na izlazu sklopa. Serijskim spajanjem nekoliko takvih sklopova (kaskadni spoj) može se lako postići faktor stabilizacije napona $10^3...10^4$. U literaturi su već objavljeni podaci da su izrađene Zenerove normale koje u toku dvije godine održavaju napon U stabilnim unutar granica oko $\pm 1 \cdot 10^{-6}\ U$, tj. unutar milijuntog dijela izlaznog napona U. Tu tvrdnju teško je provjeriti, jer napon takve Zenerove normale treba uspoređivati s naponima Westonovih elemenata, a oni se u tom razdoblju mijenjaju za više od jedne milijuntinke (vidi slike E.58, 59 i tablicu E-17).

Najstabilnije Zenerove normale izvode se u obliku sklopova s temperaturnom kompenzacijom, a same diode drže se pri tom u sitnom termostatu. Na taj način uspijeva se ovisnost napona U o temperaturi sniziti sve do $7 \cdot 10^{-7} \cdot U/°C$ u intervalu 20...25 °C, što je znatno bolje negoli u Westonovih elemenata. Zenerove normale imaju i drugih prednosti: smiju se jače opteretiti negoli Westonovi elementi, normala se može napajati iz rasvjetne mreže (uz transformator, ispravljač i predstabilizator) itd.

Decidirani odgovor o mogućnosti uvođenja Zenerovih normala u vrhunsku metrologiju dobit će se nakon desetak godina eksperimentiranja. Ne smije se, naime, smetnuti s uma da je Zenerova dioda *poluvodič*, a poznato je da su poluvodiči vrlo podložni *starenju* (primjer iz nedavne prošlosti: germanijeve diode!), dakle promjeni svojih fizikalnih osobina. Pri tom eksperimentiranju vrhunske će se Zenerove normale uspoređivati kako međusobno tako i s westonskim grupnim normalama. Pozitivne preliminarne rezultate u tom smislu postigli su i jugoslavenski metrolozi (vidi *Božićev* referat citiran u odlomku 3.5.8). Istraživačke radove na razvoju Zenerovih normala preporučio je na svom sastanku godine 1968. i Savjetodavni odbor za elektromagnetizam Komiteta CIPM.

3.6. Pohranjivanje vrijednosti otpora pomoću otporničkih normala

3.6.1. Općenito o otporničkim normalama. U odlomku 3.5.1 smo naglasili da se u elektromagnetskoj metrologiji moraju *pohranjivati* stanovite vrijednosti fizikalnih veličina, jer sama trenutna proizvodnja (reprodukcija) pomoću pramjerila nije dovoljna. Za najstabilnije pohranjivanje vrijednosti električkog otpora upotrebljavaju se *otporničke normale*, tj. naročito brižljivo izrađeni i održavani otpornici čiji se otpor u toku vremena što manje mijenja. Te normale obično su izrađene tako da njihov nazivni otpor pri temperaturi 20 °C iznosi $R = 10^n \Omega$, gdje je eksponent n cijeli broj između -4 i $+6$.

Otpornička se normala u biti sastoji od otporničke žice ili trake oblikovane u okrugli helikoidni svitak, plosnati helikoidni svitak ili pločicu, što ovisi o potrebnoj vrijednosti otpora. Budući da iste normale obično služe za mjerenja istosmjernom i izmjeničnom strujom, izrađuju se tako da utjecaj frekvencije f bude što manji: za normale do 100 Ω žica se namata bifilarno, a za veće otpore u obliku Chaperonova namota (čitav je svitak razdijeljen u nekoliko višeslojnih manjih svitaka s malim brojem zavoja po sloju, a smjer namatanja žice se mijenja).

Jedan od najprikladnijih otporničkih materijala za izradu normala je *manganin*, tj. slitina bakra (86%), mangana (12%) i nikla (2%). Specifični otpor takve slitine (napominjemo da pod nazivom »manganin« postoje slitine vrlo različitog sastava u kojima se udio bakra kreće od 53 do 86%) iznosi oko $4{,}3 \cdot 10^{-7}$ Ωm pri 20 °C, dok je vrijednost temperaturnog koeficijenta otpora oko $1 \cdot 10^{-5}/°C$. U novije se vrijeme upotrebljavaju i druge slitine. Tako je godine 1965. australski metrološki zavod NSL izradio normale 1 Ω od slitine »evanohm«, koja se sastoji od nikla (74,5%), kroma (20%), bakra i aluminija (svaki 2,75%). Njen specifični otpor iznosi oko $1{,}33 \cdot 10^{-6}$ Ωm, a temperaturni koeficijent manje od $10^{-6}/°C$! Upotrebljavaju se i žice od zlatne slitine (sa oko 2% kroma). Oko godine 1933. u NBS je istraživana mogućnost primjene čistih metala (platina i zlato), ali je njihov temperaturni koeficijent otpora vrlo velik, oko $4 \cdot 10^{-3}/°C$, tj. promjena temperature za 0,00025 °C uzrokuje relativnu promjenu otpora 10^{-6}. Održavanje stalnosti temperature unutar $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ °C nalazi se, međutim, na granici mogućeg (vidi odsječak D.3.6). Pokusi u NBS su pokazali da otpornici od čistih zlatnih žica imaju vrlo stalan otpor. U

razdoblju od godine 1933. do 1939. njihov je otpor opadao za 0,13 milijuntinki godišnje (mjereno u odnosu prema srednjoj vrijednosti grupne otporničke normale; vidi odlomak 3.6.3). Platinski otpornici pokazivali su, međutim, veći relativni porast otpora: $0{,}7 \cdot 10^{-6}$/god. Godine 1947. zapažena su oštećenja izolacije, tako da se otpor tih zlatnih i platinskih otpornika više nije mogao pratiti. Nedavnim otkrićem boljih izolacijskih materijala otpornici od čistih metala ponovno su postali aktuelni pa se sada u BIPM istražuje mogućnost njihove primjene (odlomak A.7.4.5).

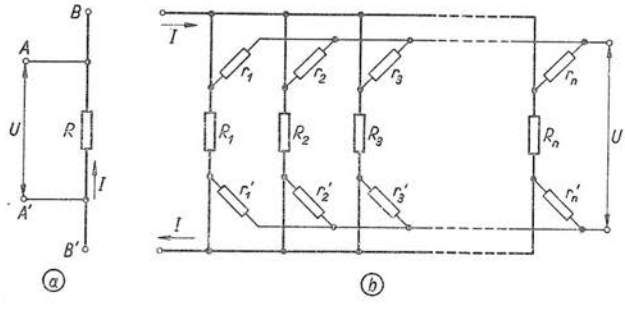
Prilikom upotrebe otporničke normale na vrijednost njenog otpora temperatura utječe na još dva načina. Kod prvoga se pojavljuju kontaktni termonaponi na površinama dodira bakrenih dovoda i manganinske (ili od drugog otporničkog materijala) žice. Za spoj bakar-manganin termonaponi iznose oko 1 μV/°C, a za spoj bakar-evanohm oko 2,5 μV/°C. Drugi utjecaj je povišenje temperature žice zbog prolaza struje kroz normalu. Taj se utjecaj ublažuje tako što se normala opterećuje manjom strujom (manja snaga disipacije), a konstruira tako da rashladna površina bude što veća. Osim toga, uzima se u obzir toplinska vremenska konstanta o kojoj ovisi brzina izjednačenja temperature žice i kupke u koju je normala uronjena prilikom mjerenja.

Na stalnost otpora normale ne utječe samo temperatura, već postoji niz pojava koje uzrokuju promjenu otpora; ovdje ćemo se na njih osvrnuti samo letimično. Jedan od utjecaja je mehaničko naprezanje žice prilikom njenog namatanja u svitak. To naprezanje s vremenom uzrokuje promjenu kristalnih rešetaka materijala, a time i otpora žice. Tome se donekle doskače toplinskom obradom (umjetno starenje): žica se nekoliko puta zagrijava do stanovite temperature (za manganin oko 140 °C) na kojoj se drži i do nekoliko desetaka sati. Drugi su postupak, na primjer, godine 1954. primijenili u australskom metrološkom zavodu NSL: manganinske žice držali su na temperaturi 550 °C u toku 1,5 sati. Pri tom se manganin nalazio u čeličnim pločama uronjenim u bornu kiselinu. Neki umjetno ostaruju već namotani svitak, a ne žicu prije namatanja: kratkotrajnim impulsima jake struje svitak se zagrije do temperature oko 600 °C. Nestabilnost otpora potiču i elastične deformacije žice, pa se zato ona namata malim silama. I kemijske reakcije na površini žice, posebno oksidacija, uzrokuju nestabilnost otpora normale. Da bi se te reakcije spriječile, otornički se svitak uranja u neutralnu tekućinu (ulje) ili plin (suhi zrak, argon). Znatan je i utjecaj vlage: tijelo na koje je namotana otornička žica i lak kojim je svitak premazan (i ispečen) ponešto su higroskopni, pa zbog toga s promjenom vlažnosti variraju izmjere otporničke žice. Time nastaju promjene otpora donekle slične onima zbog promjene temperature. Stanoviti utjecaj na stabilnost otpora ima i tlak pod kojim se nalazi otornički svitak.

Budući da kod otporničkih normala nazivnog otpora ispod 100 Ω jako dolazi do izražaja promjenljivost kontaktnog otpora (on iznosi do nekoliko stotina mikroohma), takve se normale često izrađuju sa *četiri* priključne stezaljke (engl. four-terminal resistor). Na slici E.60a prikazana je shema takve normale: za potrebe *kompenzacijskih* mjerenja sa »naponskih stezaljki« A i A' odvodi se napon $U = IR$, gdje je I struja koja se normali dovodi i odvodi preko »strujnih stezaljki« B i B'. Time je iz naponskih mjerenja (usporedbi) isključen promjenljivi kontaktni otpor na stezaljkama B i B' koji ovisi o površini i čistoći vodiča, o međusobnom nalijeganju svornjaka stezaljke i stopice dovodne žice, o tlaku kojim je stopica pritisnuta itd. Znatan dio neprilika s promjenljivim kontaktnim otporom izbjegava se upotrebom žive: umjesto pomoću vijaka, stopica i matica kontakt se ostvaruje uranjanjem priključaka u zdjelice sa živom. Svojedobno su tako izrađivali samo »strujne stezaljke«, a sada se ista tehnika primjenjuje i za naponske. Upotreba zdjelica sa živom

(analogno se upotrebljavaju amalgamirana čepišta u komparatorima) ne isključuje, dakako, potrebu za opremanjem otporničkih normala sa četiri stezaljke, jer sa stezaljkama A i A' (sl. E.60a) otpor normale bolje je definiran i fiksiran negoli u slučaju ako postoje samo strujne stezaljke B i B'.

Iskustvo pokazuje da se dobre normale nazivnog otpora između 0,01 i 10000 Ω mogu izraditi, održavati i primjenjivati tako da kratkotrajna relativna nepouzdanost njihovog otpora iznosi barem $\pm 1 \cdot 10^{-6}$. Pri tom pod nepouzdanošću razumijevamo odstupanje izmjerenog otpora normale od srednje vrijednosti dobivene nizom uzastopnih mjerenja obavljenih u kratkom vremenskom razdoblju. Ta mjerenja obavljena su u odnosu prema otporu neke druge normale za koju se pouzdano zna da u mjernom razdoblju odlično pohranjuje utjelovljenu vrijednost otpora (nacionalna grupna otpornička normala, vidi odlomak 3.6.2). Za normale 10^4 do 10^6 Ω relativna nepouzdanost je lošija, kreće se u blizini $\pm 1 \cdot 10^{-5}$. Najbolje su normale nazivnog otpora 1 i 10 Ω, što je razumljivo, jer u toku prošlih 60 godina — koliko otprilike traje sistematsko pohranjivanje vrijednosti otpora — posvećivana je normalama 1 Ω izuzetna pažnja (vidi odlomke 3.6.2,3).



Sl. E.60. Shema otpornika sa četiri stezaljke (a) i paralelan spoj n otpornika sa četiri stezaljke (b)

Budući da je primjena otpornika sa četiri stezaljke dala dobre rezultate, metrolozi ih upotrebljavaju i za izradu »složivih normala« (engl. build-up standard resistors). Načelo djelovanja »složive normale« možemo uočiti na primjeru deset nazivno jednakih otpornika po 10 Ω: spojeni u seriju oni tvore složivu normalu otpora 100 Ω, dok u paralelnom spoju predstavljaju 1 Ω. Općeniti slučaj paralelnog spoja n otpornika $R_1, R_2, \ldots, R_n$ (sa četiri stezaljke) prikazuje slika E.60b. Dodatni otpornici $r_1, r_2, \ldots, r_n$ i $r_1', r_2', \ldots, r_n'$ u naponskim priključcima moraju biti tako odabrani da bude udovoljeno uvjetima

$$r_1/R_1 = r_2/R_2 = \ldots = r_n/R_n \quad \text{i} \quad r_1'/R_1 = r_2'/R_2 = \ldots = r_n'/R_n.$$

B. V. Hamon iz NSL otkrio je godine 1954. takav spoj složive normale kod kojeg je jedanaest nazivno jednakih otpornika $R_1, R_2, \ldots, R_{11}$ *stalno* spojeno u seriju. Na svakom spojnom mjestu dvaju susjednih otpornika nalazi se jedna strujna stezaljka i jedna naponska. Pomoću dva spojna bloka svi otpornici mogu se spojiti paralelno, a mogu se učiniti i druge serijsko-paralelne kombinacije (prikladnim spajanjem odgovarajućih strujnih i naponskih stezaljki izvedenih u obliku živinih čašica i amalgamiranih kontakata). Označimo li otpor serijskog spoja 10 otpornika po 10 Ω sa R_{100}, a otpor paralelnog spoja tih 10 otpornika sa R_1, omjer iznosi $R_{100}/R_1 = 100\,(1 \pm 10^{-8})$, ako se pojedini otpornici R_{10} međusobno ne razlikuju za

više od $\pm R_{10} \cdot 10^{-4}$. Zato su takvi složivi otpornici prikladni za primjenu u onim mjernim mostovima gdje je potrebno vrlo precizno poznavanje omjera otporâ. Hamonov spoj usvojili su mnogi metrološki zavodi i pri tom još podrobnije razradili pripadnu teoriju (godine 1965. *C. H. Page*, a godine 1967. *J. C. Riley*).

3.6.2. Pohranjivanje ohma u NBS. U ovom ćemo odlomku letimično opisati kako se u američkom metrološkom zavodu National Bureau of Standards (NBS) otporničkom normalom pohranjuje vrijednost jedinice otpora. Budući da je pri tom u nizu detalja postupak analogan onome pri pohranjivanju vrijednosti napona, korisno je prethodno pročitati odlomke 3.5.4,5.

Godine 1901, kada je osnovan NBS, smatralo se da njemačka tvrtka *O. Wolff* iz Berlina izrađuje najbolje otporničke normale. Zato je NBS od nje naručio otporničke normale čiju je vrijednost PTB utvrdila pomoću živinog stupca (odsječak 5.3). Grupa od 4 takva otpornika prevezena je godine 1907. u Washington. Njihova vrijednost poslužila je za baždarenje veće grupe od 10 otpornika nazivnog otpora 1 ohm i sedam otpornika 0,1 ohm. Eksperimenti u NBS uskoro su pokazali da se otpor njemačkih normala, koji su bili otvorene izvedbe, znatno mijenja. Tako su, na primjer, promjene otpornika 1 000 Ω iznosile oko 0,2 Ω unutar tri mjeseca. Utvrđeno je da promjenu otpora uzrokuje sezonsko variranje vlažnosti zraka.

Da bi se to izbjeglo, *E. B. Rosa* iz NBS predložio je novu izvedbu otporničkih normala: izolirani manganinski svitak stavljen je u hermetički zatvoren metalni spremnik ispunjen rafiniranim mineralnim uljem, a priključci su provedeni kroz poklopac od tvrde gume. Veći broj takvih otpornika izradili su u radionici NBS te u berlinskom poduzeću. Od godine 1909. do 1932. bio je Ω(NBS) pohranjivan »primarnom grupom« (odlomak 3.5.4) koja se sastojala od 10 otpornika tipa Rosa nazivnog otpora 1 Ω. Prilikom rada Međunarodnog tehničkog odbora opisana američka normala uspoređena je godine 1910. s engleskom (NPL) i njemačkom (PTB) normalom. Mjerenjem je utvrđeno da je u to vrijeme Ω(NBS) za 2 milijuntinke veći od Ω(PTB) i za 7 milijuntinki veći od sredine između Ω(PTB) i Ω(NPL), koja je bila odabrana za osnovu interkomparacija (odlomak 3.6.3). Napominjemo da pod simbolima Ω(NBS), Ω(NPL) itd. razumijevamo stvarnu (apsolutnu) vrijednost otpora nacionalne normale održavane u nacionalnom metrološkom zavodu USA, Engleske itd. Taj način označivanja identičan je s onim koji smo u odlomku 3.5.3 uveli za volt pohranjivan u nacionalnim zavodima pomoću Westonovih elemenata.

U razdoblju od godine 1909. do 1932. deset otpornika od 1 Ω pažljivo je međusobno uspoređivano u ponešto nejednakim intervalima (prosjek 6 mjeseci). Pri svakoj se usporedbi i proračunavanju dobivenih rezultata pretpostavljalo da se prosječni otpor tih 10 odabranih otpornika nije promijenio od trenutka prethodne usporedbe. Na temelju toga dodjeljivana je nova vrijednost svakoj normali grupe. Prosječna razlika (bez obzira na predznak) između dviju uzastopno dodijeljenih vrijednosti iznosila je $\pm$ 1,3 μΩ, a u 95% slučajeva razlika uzastopnih vrijednosti bila je manja od $\pm$ 3 μΩ. Grupnu normalu USA tvorilo je u toku 23 godine 20 različitih otpornika. U tom razdoblju otpornici su izdvajani iz grupe 15 puta, od toga šest puta u svrhu slanja na interkomparacije ili za druge primjene. Pet otpornika zamijenjeno je novima zbog prevelikog porasta otpora, koji je iznosio 5 do 12 μΩ u intervalu između dvije međusobne usporedbe. Jedan je otpornik zamijenjen zbog toga jer je pukao poklopac pa su priključci olabavili. Tri normale odstranjene su iz grupe zbog prevelikog smanjenja otpora. Dvije su ostale u grupi u toku čitavog razdoblja, a 6 ih se zadržalo više od 15 godina.

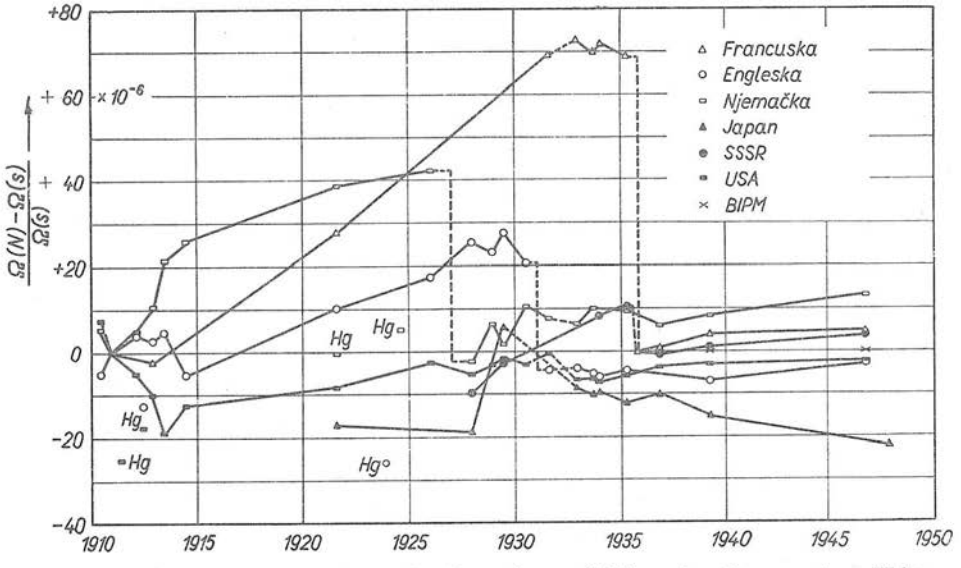
Rezultati međusobnih usporedbi su pokazali da se otpor pet normala mijenjao polagano i kontinuirano u toku njihova zadržavanja u primarnoj grupi. Pomicanje pojedinih otpornika kretalo se od 1 milijuntinke godišnjeg smanjenja do porasta $4 \cdot 10^{-6}$/god. U grupi se kratko vrijeme nalazila i normala čije je smanjenje otpora iznosilo $6 \cdot 10^{-6}$/god. Najbliži srednjoj vrijednosti grupe bio je otpornik sa smanjenjem otpora za 0,3 milijuntinke godišnje. Nekim je normalama prilikom uvrštenja u grupu otpor rastao sa $0{,}6 \cdot 10^{-6}$/god., da bi nakon nekoliko godina padao sa oko 2 milijuntinke godišnje!

Početkom godine 1928. *J. L. Thomas* iz NBS izumio je nekoliko novih vrsta otporničkih normala (engl. double-walled standard resistor). Manganinska žica bila je žarena pri temperaturi 500 °C ili više u vakuumu i namotana na izolirani mjedeni valjak. Tako omotani valjak smješten je u nešto veći mjedeni valjak napunjen suhim zrakom pod atmosferskim tlakom. Grupa takvih otpornika dala je prilikom eksperimentiranja tako dobre rezultate da su dva Thomasova otpornika uvrštena u grupnu normalu USA potkraj godine 1930, a treći početkom 1932. Krajem te godine iz grupe su odstranjene sve normale tipa Rosa, pa je 10 otpornika tipa Thomas promjera 6 cm pohranjivalo Ω(NBS) sve do marta 1939. U toku tog perioda polugodišnje međusobne usporedbe pokazale su prosječne razlike 0,3 μΩ, a 80% tih razlika bile su manje od 0,8 μΩ. Podrobna su računanja pokazala da su otpornici tipa Thomas za red veličine stabilniji od tipa Rosa. Zato je godine 1933. izrađena dodatna grupa Thomasovih otporničkih normala, ali promjera 8 cm (veća rashladna površina). Od 1932. do 1939. grupa od 10 takvih otpornika uspoređivana je sa grupom manjih. Od marta 1939. grupna normala sastavljena od 10 većih Thomasovih normala služila je za pohranjivanje Ω(NBS). Prosječna promjena između uzastopnih usporedbi iznosila je za pojedine normale $\pm 0{,}2$ μΩ, a 95% izmjerenih razlika nije premašilo $\pm 0{,}5$ μΩ. Standardno odstupanje iznosilo je oko 0,1 μΩ.

Stabilnost otpora grupne normale USA bitno je bolja od stabilnosti normala metroloških zavoda drugih zemalja (vidi dijagram na sl. E.61 u odlomku 3.6.3). Metrolozi u NBS smatraju da je pri tom odigrala ulogu i sreća: nekim otpornicima u grupi otpor je rastao, a drugima padao. Vjeruje se da tendenciju porasta otpora uzrokuju oksidacija ili korozija otporničke slitine, dok sniženje vjerojatno potječe od polaganog smanjenja unutarnjih naprezanja ili od nekih drugih nepoznatih metalurških procesa. Zato postojanje većeg broja otpornika u grupnoj normali povećava vjerojatnost da će čitava grupa stabilnije pohranjivati vrijednost otpora (dok su Amerikanci imali u grupnoj normali 10 otpornika, Nijemci i Englezi imali su samo po 4).

3.6.3. Interkomparacije otporničkih normala u BIPM. Međunarodni tehnički odbor (International Technical Committee; odlomak 2.5.4), koji je u Washingtonu eksperimentirao i zasjedao od 4.4. do 25.5.1910, a u njemu su sudjelovali predstavnici nacionalnih metroloških zavoda Engleske, Francuske, Njemačke i USA, utvrdio je vrijednost triju interkompariranih otporničkih normala (NBS, NPL, PTB) u odnosu prema srednjoj vrijednosti između engleske i njemačke normale. U toku kasnijih interkomparacija tu zamišljenu srednju vrijednost neko vrijeme zvali su »washingtonska jedinica« (engl. Washington unit). Ona je bila 7 milijuntinki manja od vrijednosti otpora tadašnje američke otporničke normale, tj. od Ω(NBS). Naziv »washingtonska jedinica« upotrebljavali su u to vrijeme nacionalni metrološki zavodi i zato da bi njime označili kako je riječ o jedinici ohm utjelovljenoj svitkom manganinske žice, a ne o jedinici ohm reproduciranoj živinim stupcem; potonju su nazivali »internacionalni ohm«.

Opsežne i sistematske interkomparacije otporničkih normala započele su godine 1929. u okviru Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM). Pri tom su interkomparirane normale metroloških zavoda Engleske (NPL), Francuske (LCE), Japana (ETL), Njemačke (PTR), SSSR (VNIIM) i USA (NBS). Rezultati su grafički prikazani na slici E.61, koja je nacrtana uz nekoliko pretpostavki (usporedi s odlomkom 3.5.6). Od godine 1910. do 1932. relativne vrijednosti »nacionalnog ohma« $\Omega(N)$ (u pogledu naziva »nacionalni ohm« usporedi s odlomkom 3.5.3) oslanjaju se na srednju vrijednost $\Omega(s)$ dobivenu interkomparacijom normala NBS, NPL i PTR. Drugi metrološki zavodi nisu uzeti u obzir, jer su samo povremeno sudjelovali u interkomparacijama. Pri tom je pretpostavljeno da srednja vrijednost triju »washingtonskih jedinica« (WU), koje su u tom razdoblju pohranjivale jedinicu otpora, raste za 1,1 milijuntinku godišnje. Ta samovoljna pretpostavka nastala je ovako: Godine 1931. NPL je na temelju mjerenja pomoću živinog stupca (odlomak 3.6.5) ustanovio da je otpor engleske normale porastao za 30 milijuntinki u toku 21 godine. Slično su u PTR ustanovili da je porast otpora njihove normale iznosio $1{,}9 \cdot 10^{-6}$/god. Američki zavod NBS je, međutim, smatrao da se beznačajne promjene otpora njegove normale mogu zanemariti, dakle izjednačiti s nulom. Srednja vrijednost tih triju prosječnih godišnjih promjena iznosi $1{,}1 \cdot 10^{-6}$.



Sl. E.61. Relativno odstupanje »nacionalnog ohma« $\Omega(N)$, pohranjivanog otporničkim normalama u šest velikih metroloških zavoda, od zamišljenog »srednjeg internacionalnog ohma« $\Omega(s)$. Vrijednosti relativnog odstupanja $\Omega(N)/\Omega(s) - 1$ navedene su u milijuntinkama

U razdoblju između godine 1932. i 1939. stručnjaci BIPM uveli su prikladniju osnovu za kontinuirano praćenje rezultata uzastopnih interkomparacija. Godine 1935. Savjetodavni odbor za elektromagnetizam (odlomak A.7.1.3) preporučio je da se prilikom svake interkomparacije za »srednji internacionalni ohm« $= \Omega(s)$ (engl. mean international ohm) uzima srednja vrijednost interkompariranih otporničkih normala Engleske, Japana, Njemačke, SSSR i USA. Francuska normala nije

došla u obzir za tu svrhu, jer je znatno odstupala od ostalih. Zato je francuski metrološki zavod Laboratoire Central d'Electricité odlučio da vrijednost otpora svoje normale smanji za 69,5 milijuntinki (sl. E.61), a sovjetski metrološki zavod za $10{,}6 \cdot 10^{-6}$. Sovjetsko sniženje učinjeno je, dakako, tek pošto je utvrđena srednja vrijednost Ω(s, 1935), kojoj je na slici E.61 dodijeljeno relativno odstupanje 0. To znači da je uvedena pretpostavka $\Omega(\text{s}, 1910) = \Omega(\text{s}, 1935)$. Preračunavanja pokazuju da postoji zadovoljavajuća korelacija između vrijednosti polučenih godine 1931. na staroj bazi i podataka dobivenih 1932. na novoj bazi (uzimajući u obzir prosječnu godišnju promjenu otpora).

Rat je onemogućio interkomparacije otporničkih normala. Zato je nakon njegovog završetka, u svrhu praćenja međusobnih odnosa otpora nacionalnih normala, uvedena pretpostavka $\Omega(\text{BIPM},1939) = \Omega(\text{BIPM},1946)$, tj. pretpostavka da se otpor grupne normale Međunarodnog ureda za mjere i utege (BIPM) nije mijenjao od godine 1939. do 1946. Na toj osnovi ubilježeni su na slici E.61 rezultati interkomparacije obavljene godine 1947. U međuvremenu je višestruko utvrđivanje stvarne (apsolutne) vrijednosti Ω(s), tj. mjerenje Ω(s) u odnosu prema ohmu reproduciranome pramjerilom otpora (vidi odlomak 3.6.5 i tablicu E-11 u odlomku 3.3.4), pokazalo da vrijedi odnos

$$\Omega(\text{s}) = p\,\Omega = 1{,}00049\ \Omega.$$

Ovdje simbol Ω predstavlja jedinicu Međunarodnog sistema (SI), dakle $\Omega = \Omega(\text{SI})$. Odnos $\Omega(\text{s})/\Omega = p = 1{,}00049$ preporučio je godine 1946. Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM, vidi odlomak A.7.1.1), a naknadnom odlukom Generalne konferencije za mjere i utege taj je odnos u čitavom svijetu stupio na snagu 1.1.1948. Taj trenutak vrlo je važan za analitičku obradu rezultata daljnjih interkomparacija, jer se poslije 1.1.1948. na temelju *postojećih* nacionalnih otporničkih normala (one koje su dotada i nakon toga pohranjivale vrijednost otpora) »nacionalni ohm« = Ω(N) definira relacijom

$$\text{nacionalni ohm} = \Omega(\text{N}) = \frac{R(\text{N})}{1{,}00049}. \qquad (3.6\text{-}1)$$

Ovdje simbol R(N) označuje stvarnu vrijednost otpora nacionalne normale nazivnog otpora 1 Ω pri temperaturi 20 °C. Za nove normale, izrađene nakon godine 1948, jednadžba (3.6-1) ne vrijedi, jer su nove normale izrađene sa željom da bude $R(\text{N}) = 1\ \Omega$.

Vidimo da je prilikom uvođenja SI u pogledu nacionalnog ohma Ω(N) primijenjen analogni postupak kakav smo za nacionalni volt V(N) opisali u odlomku 3.5.3. Zato su analogne i posljedice. Tako se, na primjer, vrijednost nacionalnog ohma $\Omega(\text{N}_1)$ jedne zemlje odnosi prema vrijednosti $\Omega(\text{N}_2)$ druge zemlje kao

$$\frac{\Omega(\text{N}_1)}{\Omega(\text{N}_2)} = \frac{R(\text{N}_1)}{R(\text{N}_2)}. \qquad (3.6\text{-}2)$$

Pri tom se pod stvarnim otporima normala $R(\text{N}_1)$ i $R(\text{N}_2)$ razumijevaju otpori pri temperaturi 20 °C i u istom trenutku. Za slučaj usporedbe neke nacionalne otporničke normale s normalom BIPM jednadžba (3.6-2) prelazi u oblik

$$\Omega(\text{N}) = z(\text{N}) \cdot \Omega(\text{BIPM}), \quad \text{gdje je} \quad z(\text{N}) = R(\text{N})/R(\text{BIPM}).$$

Ovdje je R(BIPM) otpor normale koju održava Međunarodni ured za mjere i utege (ona također sudjeluje u interkomparacijama). Poslije godine 1948. rezultati interkomparacija izražavaju se u odnosu prema Ω(BIPM), i to ili u obliku razlike

$$\Omega(\mathrm{N}) - \Omega(\mathrm{BIPM}) = [\varepsilon(\mathrm{N}) - 1] \cdot \Omega(\mathrm{BIPM})$$

ili u obliku relativne razlike $\Omega(\mathrm{N})/\Omega(\mathrm{BIPM}) - 1 = \varepsilon(\mathrm{N}) - 1 = R(\mathrm{N})/R(\mathrm{BIPM}) - 1$. Rezultate četiriju interkomparacija otporničkih normala prikazuje tablica E-18 (u μΩ). Kratice naziva metroloških zavoda objašnjene su u odlomku 3.5.6.

Tablica **E-18**

Interkomparacijama utvrđena razlika Ω(N) − Ω(BIPM) izražena mikroohmima

Metrološki zavod	1950	1953	1955	1957	1961	1964	1967
DAM	+17,9	+22,0	+20,9	+16,9	−2,9	−3,8	−0,4
ETL	−2,1	−1,0	−0,2	−0,4	−0,3	−0,3	−0,1
IEN	—	—	—	—	0	+0,2	+0,9
LCIE	+1,0	−5,0	−6,2	−7,4	−8,5	−9,2	−12,2
NBS	−0,4	−0,2	0,0	−1,0	−0,4	−0,2	−0,2
NPL	−2,6	−4,1	−3,4	−3,4	−3,4	−3,5	−3,5
NRC	—	−4,3	−5,2	−4,8	−4,1	−4,0	−2,9
PTB	—	+1,7	+2,0	+3,3	+3,7	+4,8	+5,1
VNIIM	+1,0	+0,8	+2,0	+0,4	−0,7	−0,9	−0,5

Zemlje koje ne sudjeluju u interkomparacijama mogu vrijednost svog nacionalnog ohma utvrditi usporedbom svoje otporničke normale s normalom zemlje koja sudjeluje. Tako su, na primjer, godine 1967. u Pragu uspoređene sovjetske normale (po dva otpornika nazivnog otpora 100000 Ω, 1 Ω i 0,001 Ω) s otporničkim normalama Čehoslovačke. Mjerenjem pri temperaturi 20,00 °C ustanovljena je za normale 1 Ω razlika $\Omega(\mathrm{\check{C}SSR}) - \Omega(\mathrm{BIPM}) = (1{,}7 \ldots 2)\ \mu\Omega$. Pri tom je uzet u obzir rezultat prethodne interkomparacije sovjetske normale u BIPM: $\Omega(\mathrm{SSSR}) = \Omega(\mathrm{BIPM}) - 0{,}9\ \mu\Omega$.

3.6.4. Prva jugoslavenska usporedba otporničkih normala. U trenutku objavljivanja ove knjige »Savezni zavod za mjere i dragocjene metale« (vidi odlomke A.7.2.3, E.3.2.5 i E.3.5.8) još ne posjeduje jugoslavensku grupnu normalu otpora (ni normalu napona) i pripadnu mjernu opremu za baždarenje laboratorijskih normala koje se upotrebljavaju u mnogim znanstvenim i razvojnim institutima. Budući da ni jedan jugoslavenski institut ili elektrotehnički laboratorij nema pramjerila otpora (odsječak 3.3), vrhunska jugoslavenska metrologija elektromagnetizma oslanja se na certifikate koje su vlasnici otporničkih i naponskih normala dobili prilikom njihove kupovine od inozemnih proizvođača ili prilikom rijetkih baždarenja u stranim metrološkim zavodima. Da bi se ustanovilo koliki je nesklad

između normala u nekim jugoslavenskim laboratorijima, Jugoslavenski komitet za električka mjerenja (Jukem) organizirao je godine 1966. pod vodstvom svog predsjednika *V. Bege* usporedbu otpora normalâ 1 Ω iz laboratorija ovih ustanova:

Elektrotehnički institut Nikola Tesla, Beograd,
Zavod za avtomacijo (Iskra), Ljubljana i
Elektrotehnički fakultet, Zagreb.

Ova tri laboratorija sudjelovala su sa svojim otporničkim normalama 1 Ω u prvoj jugoslavenskoj usporedbi godine 1966. O rezultatima usporedbe referirao je *V. Bego* na Trećem simpoziju o električkim mjerenjima i električkoj mjernoj opremi održanom godine 1966. u Ljubljani. Ovdje ćemo letimično opisati organizaciju usporedbe i navesti dobiveni rezultat.

Najprije je svaki od triju centara usporedio vrijednosti otpora onih normala sa svog područja koje je smatrao najboljima. Prethodno su, dakako, obavljeni opsežni pripremni radovi: izbor najpreciznijih dostupnih mjernih metoda (s obzirom na postojeću mjernu opremu), osiguranje održavanja stalne temperature normala, izrada dodatnih uređaja potrebnih pri mjerenju, stjecanje rutine pri radu itd. Na taj način odabrana je u Ljubljani, Beogradu i Zagrebu po jedna otporn ička normala 1 Ω. Otpor tih triju reprezentativnih normala međusobno je uspoređen najprije u Ljubljani, zatim u Zagrebu te na kraju u Beogradu. Ponavljanjem usporedbi istih normala u tri centra željelo se izbjeći sistematske pogreške.

Sveukupno je uspoređeno preko 20 otporničkih normala nazivnog otpora 1 Ω. Iako se prije usporedbi smatralo da su usporedbom doista obuhvaćene »najbolje« normale, relativno odstupanje otpora (od vrijednosti oko koje se gomilaju otpori ostalih normala) jedne normale iznosilo je $0{,}2\% = 2 \cdot 10^{-3}$! Spomenute tri završne usporedbe triju reprezentativnih normala dale su vrlo skladne rezultate. Najveća relativna razlika otpora dviju reprezentativnih normala iznosila je oko

$$1{,}5 \cdot 10^{-4} = 0{,}015\%.$$

To je 10 do 100 puta veći nesklad od onoga koji se u novije vrijeme zapaža prilikom interkomparacija nacionalnih otporničkih normala 1 Ω (vidi tab. E-18 i sl. E.61).

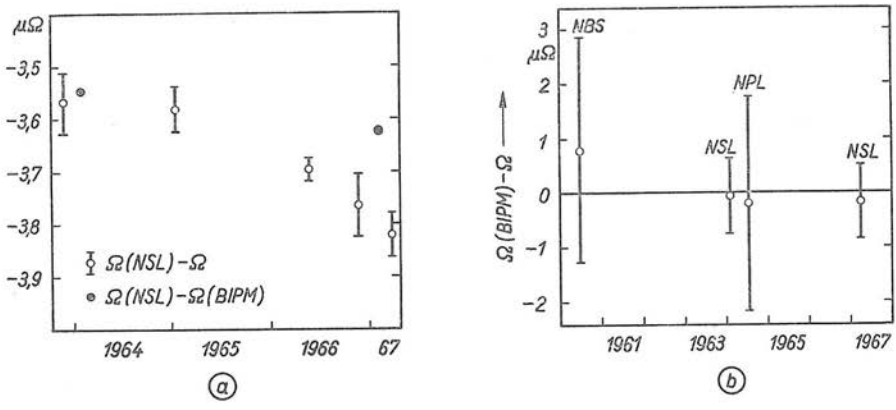
Ova prva jugoslavenska usporedba izvanredno je korisna i poučna. Korisna je zato što je tom prilikom uvježbana primjena preciznih mjernih metoda u tri centra i što je među njima uspostavljena uska stručna suradnja. Usporedba je poučna zato jer je dokazala staru tvrdnju da se bez dobro opremljenog (sa stručnjacima i mjernom opremom) državnog metrološkog zavoda ne može postići neophodno potrebna jedinstvenost najpreciznijih mjerenja (u drugim zemljama takve usporedbe ne obavljaju stručne organizacije kao što je Jukem, već to periodičkim baždarenjima čine nacionalni metrološki zavodi).

Poznato je da su od svih održavajućih standarda otporničke normale 1 Ω najstabilnije i da imaju najpreciznije utvrđenu vrijednost (vidi odlomak 3.6.1). Ako je u Jugoslaviji za njih utvrđeno međusobno relativno odstupanje $1{,}5 \cdot 10^{-4}$, lako je pretpostaviti da su odstupanja ostalih normala (drugih vrijednosti otpora, naponskih, kapacitivnih, induktivnih itd.) još veća. Zato Jukem ima u svom programu rada i usporedbu ostalih normala.

3.6.5. Stvarna vrijednost otpora normale. Postupak pri utvrđivanju stvarne (apsolutne) vrijednosti napona Westonova elementa opisali smo u odlomku 3.5.7. Budući da se otpor otporničkih normala također mijenja u toku vremena (od-

lomak 3.6.3), u dobro opremljenim metrološkim zavodima povremeno se utvrđuje *stvarna vrijednost* otpora normale. Na početku primjene normala u obliku manganinskih otpornika vrijednost njihovog otpora utvrđivana je usporedbom s otporom živinog stupca, koji je u to vrijeme bio vrhunski materijalni standard jedinice električkog otpora (vidi odgovarajuću definiciju u odlomku 5.2.3 i realizaciju u odlomku 5.3.2). Tako je, na primjer, usporedbom američke otporničke normale sa živinim stupcem godine 1911—12 u NBS utvrđeno da se vrijednost »washingtonske jedinice (WU)« (odlomak 3.6.3) podudara s ohmom živinog stupca unutar nepouzdanosti reprodukcije otpora pomoću žive.

U engleskom zavodu NPL analogna su vrlo pažljiva mjerenja obavljena godine 1912. i 1924. Ustanovljeno je da je otpor WU za 16 (1912), odnosno 41 (1924), milijuntinki veći od živinog ohma. Zato je nakon interkomparacije godine 1931. NPL odstupio od WU i svojoj normali dodijelio za $30 \cdot 10^{-6}$ manju vrijednost (vidi sliku E.61, na kojoj izolirane tačke »Hg« označuju trenutke usporedbe i dobivene rezultate). Opsežne usporedbe učinio je u razdoblju 1923—25 njemački metrološki zavod PTR. Rezultat također vidimo na slici E.61: godine 1927. PTR je svojoj otporničkoj normali dodijelio za 33 milijuntinke manju vrijednost.



Sl. E.62. Rezultati utvrđivanja vrijednosti otpora Ω(NSL) australske otporničke normale pomoću kapacitivnog pramjerila otpora; dvije crne tačke prikazuju rezultate interkomparacije Ω(NSL) u BIPM godine 1964. i 1967. (sl. a). Desna slika (b) prikazuje vrijednosti $x-1=\Omega(\text{BIPM})/\Omega-1$ dobivene interkomparacijama i pramjerilima američkog, engleskog i australskog metrološkog zavoda. Vertikalne crte oko svakog kružića predstavljaju granice nepouzdanosti pramjerila (statistička sigurnost 50%)

Razvojni radovi u najbolje opremljenim nacionalnim metrološkim zavodima doveli su do toga da su oko godine 1935. mogla započeti opsežna i vrlo seriozna utvrđivanja otpora normala pomoću *pramjerilâ otpora*. Neka od tih pramjerila opisali smo u odsječku 3.3. Napominjemo da se u prošlosti postupak utvrđivanja vrijednosti neke fizikalne veličine pramjerilom nazivao *apsolutno mjerenje* (vidi citat BAAS-a u odlomku 5.1.2), a dobiveni rezultat *apsolutna vrijednost* (u ovoj knjizi pretežno upotrebljavamo izraz »stvarna vrijednost«). Takva terminologija nastala je u vrijeme kada je precizno mjerenje pomoću pramjerila bilo rijetkost. Od godine 1936. do 1948. pramjerilima je utvrđen niz stvarnih vrijednosti nacionalnih otporničkih normala. Rezultate iz tog razdoblja sadrži tablica E-11 (odlomak 3.3.4).

Usavršenjem i pojednostavnjenjem pramjerila otpora, naročito »kapacitivnog računskog standarda« (odlomak 3.4.2), određivanje otpora normala u odnosu prema

pramjerilima postaje sve učestalije. U tom smislu Savjetodavni odbor za elektromagnetizam nedavno je pozvao vodeće metrološke zavode da što češće obavljaju takva mjerenja. Time se, naime, unapređuje sveukupna metrologija elektromagnetizma, prati se mijenjanje otpora nacionalnih otporničkih normala u toku vremena i sve pouzdanije utvrđuje stvarna vrijednost Ω(BIPM) u pojedinim trenucima. Postupak utvrđivanja stvarne (apsolutne) vrijednosti otpora Ω(BIPM) normale Međunarodnog ureda za mjere i utege u načelu je jednak onome koji smo za V(BIPM) opisali u odlomku 3.5.7. U nastavku ćemo s nekoliko podataka ilustrirati najnovija i najpreciznija utvrđivanja stvarne vrijednosti Ω(BIPM), tj. utvrđivanje omjera $x = \Omega(\mathrm{BIPM})/\Omega$, gdje je Ω jedinica SI reproducirana pramjerilom otpora.

Najprije se u nekom nacionalnom metrološkom zavodu utvrdi vrijednost otpora Ω(N) nacionalne otporničke normale u odnosu prema otporu 1 Ω reproduciranom pomoću pramjerila. Time se, dakle, saznaje omjer

$$y(\mathrm{N}) = \frac{\Omega(\mathrm{N})}{\Omega},$$

gdje je $\Omega = \Omega(\mathrm{SI})$. Postupak utvrđivanja omjera y(N) pomoću kapacitivnog pramjerila opisali smo u odlomku 3.3.1. Tablica E-19 sadrži rezultate mjerenja $y(\mathrm{NSL}) = \Omega(\mathrm{NSL})/\Omega$ koje je na opisani način stekao australski metrološki zavod National Standards Laboratory (NSL, Sydney) u intervalu od tri i pol godine (vidi i sliku E.62a). Usput napominjemo da australski ohm Ω(NSL) pohranjuju tri otporničke normale nazivnog otpora 1 Ω.

Tablica **E-19**

Utvrđivanje stvarne vrijednosti Ω(NSL) australske otporničke normale

Sredina mjernog perioda	Trajanje mjerenja, dana	Broj mjerenja	Srednja vrijednost $y(\mathrm{NSL}) = \frac{\Omega(\mathrm{NSL})}{\Omega}$	Preciznost mjerenja omjera y(NSL)
20. 11. 1963.	70	18	$1 - 3{,}57 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-8}$
30. 1. 1965.	91	21	$1 - 3{,}59 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-8}$
16. 5. 1966.	9	5	$1 - 3{,}69 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-8}$
26. 11. 1966.	7	3	$1 - 3{,}77 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-8}$
17. 4. 1967.	6	11	$1 - 3{,}82 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-8}$

Načelo utvrđivanja stvarne (apsolutne) vrijednosti Ω(BIPM) analogno je utvrđivanju vrijednosti V(BIPM) opisanom u odlomku 3.5.7. Budući da je interkomparacijom u Međunarodnom uredu za mjere i utege (odlomak 3.6.3) s izvanrednom preciznošću (relativno standardno odstupanje $\pm 1 \cdot 10^{-8}$) izmjeren omjer

$$z(\mathrm{N}) = \frac{\Omega(\mathrm{N})}{\Omega(\mathrm{BIPM})},$$

kombiniranjem ove jednadžbe s izrazom $y(\mathrm{N}) = \Omega(\mathrm{N})/\Omega$ dobiva se ovisnost Ω(BIPM) o $\Omega = \Omega(\mathrm{SI})$:

$$x = \frac{y(\mathrm{N})}{z(\mathrm{N})} = \frac{\Omega(\mathrm{N})/\Omega}{\Omega(\mathrm{N})/\Omega(\mathrm{BIPM})} = \frac{\Omega(\mathrm{BIPM})}{\Omega}.$$

Pri tom se vrijednosti $y(N)$ i $z(N)$ moraju odnositi na *isti trenutak* i, dakako, na istu nacionalnu otporničku normalu. Budući da se normala ne može istodobno nalaziti u nacionalnom metrološkom zavodu i u BIPM, svođenje na isti trenutak izvodi se interpolacijom (ili ekstrapolacijom) uzastopnih rezultata mjerenja veličine $y(N)$. Taj postupak objasnit će nam konkretni primjeri nedavnih mjerenja.

U januaru godine 1964. interkomparacijom u BIPM izmjeren je omjer $z(\mathrm{NSL},1964) = 1 - 3{,}55 \cdot 10^{-6}$. Interpoliramo li vrijednosti $y(\mathrm{NSL})$ iz tablice E-19 na januar 1964, dobivamo $y(\mathrm{NSL},1964) = 1 - 3{,}58 \cdot 10^{-6}$. Prema tome u tom je mjesecu omjer $x(1964)$ iznosio

$$x(1964) = \frac{y(\mathrm{NSL},1964)}{z(\mathrm{NSL},1964)} = \frac{1-3{,}58\cdot 10^{-6}}{1-3{,}55\cdot 10^{-6}} = 1 - 0{,}03 \cdot 10^{-6},$$

tj. $\Omega(\mathrm{BIPM})$ bio je za 30 milijardinki manji od $\Omega = \Omega(\mathrm{SI})$, jer je $\Omega(\mathrm{BIPM}, 1964) = x(1964) \cdot \Omega = (1 - 0{,}03 \cdot 10^{-6})\,\Omega$.

Tri godine kasnije, u februaru 1967, interkomparacija istih normala dala je rezultat $z(\mathrm{NSL},1967) = 1 - 3{,}63 \cdot 10^{-6}$. Interpolacijom vrijednosti $y(\mathrm{NSL})$ iz tablice E-19 na februar 1967. dobiva se $y(\mathrm{NSL},1967) = 1 - 3{,}80 \cdot 10^{-6}$. Pomoću ovih dvaju podataka slijedi

$$x(1967) = \frac{y(\mathrm{NSL},1967)}{z(\mathrm{NSL},1967)} = 1 + 3{,}63 \cdot 10^{-6} - 3{,}80 \cdot 10^{-6} = 1 - 0{,}17 \cdot 10^{-6}.$$

Tablica **E-20**

Stvarna vrijednost $\Omega(\mathrm{BIPM})$ utvrđena pramjerilima i interkomparacijama

Metrološki zavod	Godina	Omjer $x = \Omega(\mathrm{BIPM})/\Omega$
NPL, Engleska	1951	$1-2{,}0 \cdot 10^{-6}$
NRC, Kanada	1957	$1-3{,}4 \cdot 10^{-6}$
NBS, USA	1960	$1+0{,}85 \cdot 10^{-6}$
NSL, Australija	1964	$1-0{,}05 \cdot 10^{-6}$
NPL, Engleska	1964	$1-0{,}9 \cdot 10^{-6}$
NSL, Australija	1967	$1-0{,}17 \cdot 10^{-6}$

Budući da nekoliko nacionalnih metroloških zavoda posjeduje pramjerila, a sa svojim otporničkim normalama sudjeluju u interkomparacijama, zanimljivo je usporediti vrijednosti $x = \Omega(\mathrm{BIPM})/\Omega$ dobivene mjerenjima engleskog, kanadskog, američkog i australskog zavoda. Dostupne rezultate svrstali smo u tablicu E-20. Vidimo da razlike među njima iznose svega nekoliko milijuntinki. Te se razlike, međutim, kreću unutar granica relativne nepouzdanosti reprodukcije »ohma SI« $= \Omega = \Omega(\mathrm{SI})$ pomoću pramjerila što smo grafički istakli na slici E.62b (vidi i tablicu E-21 u odlomku 3.7.1). Prema tome nepouzdanost reprodukcije $\Omega(\mathrm{SI})$ zasad ne dopušta da se iz razlika vrijednosti x (tablica E-20) u razmatranom periodu izvuku decidirani zaključci o pomicanju vrijednosti $\Omega(\mathrm{BIPM})$. To se ne može učiniti čak ni na temelju rezultata mjerenja s najmanje nepouzdanim pramjerilom (NSL), jer je razlika prije izračunatih vrijednosti $x(\mathrm{NSL},1967) - x(\mathrm{NSL},1964) = -14 \cdot 10^{-8}$ posve bliska relativnom standardnom odstupanju $6 \cdot 10^{-8}$ (tablica E-19) s kojim su međusobno uspoređivani otpor normale NSL i otpor kapacitivnog pramjerila (preciznost = relativno standardno odstupanje; vidi odlomak A.3.1.3).

3.7. Preciznost vrhunske metrologije elektromagnetizma

U toku posljednjih dvadesetak godina vrhunska je metrologija elektromagnetizma izvanredno napredovala, a i u vrijeme objavljivanja ove knjige oplemenjuje se sve duhovitijim i rafiniranijim rješenjima. Sažetak znatnog dijela tih unapređenja skupili smo u prethodnim odsječcima ovog poglavlja 3. Zbog obilja opisa metoda i uređaja čitalac bi možda sa stanovitim naporom stekao cjelovit uvid u sadašnje stanje preciznosti vrhunske metrologije elektromagnetizma, na koju se oslanjaju sva ostala elektromagnetska mjerenja. Zato ćemo u idućim odlomcima rekapitulirati prethodna razbacana izlaganja o preciznosti, te letimično spomenuti pogrešku poznavanja brzine svjetla i pogreške pri mjerenju elektromagnetskih veličina viših frekvencija.

3.7.1. Nesigurnost reprodukcije struje, napona i otpora. O načinu utvrđivanja stvarne (apsolutne) vrijednosti *istosmjerne struje* pomoću pramjerila — strujne vage — opširno smo govorili u odsječku 3.1. U skladu s uvriježenom terminologijom taj postupak nazivamo »reprodukcija« vrijednosti struje (ili neke druge fizikalne veličine). Razmatranja u odlomku 3.1.5 pokazala su nam da se najboljim strujnim vagama može postići relativna nesigurnost reprodukcije

$$\frac{\Delta I}{I} = \pm 4 \cdot 10^{-6},$$

ako vrijednost mjerene struje iznosi oko 1 amper. To je vrhunac metrologije elektromagnetizma koji se u naše vrijeme može dosegnuti postojećim pramjerilima struje u najbolje opremljenim metrološkim zavodima svijeta. Analiza u odlomku 3.2.4 pokazala nam je, naime, da tzv. nuklearno pramjerilo struje ne daje sigurnije rezultate od strujne vage, već malo lošije, jer se ono oslanja na uređaj koji uspoređuje gravitacijsku silu s elektrodinamičkom, a najpouzdaniji takav uređaj je — strujna vaga.

Pramjerila za reproduciranje stanovite vrijednosti *istosmjernog napona* opisali smo u odlomcima 3.4.4,5 (tekućinski elektrometar i naponska vaga). Vidjeli smo da je baš u sadašnje vrijeme u toku velik istraživački napor metrologa da bi se pramjerila napona usavršila do te mjere da se njihova relativna nesigurnost reprodukcije bar donekle približi onoj koja je postignuta strujnom vagom. Taj cilj vjerojatno će se postići u budućnosti, ali za sada se pramjerila napona ne mogu nositi sa strujnom vagom. Zato se umjesto njih upotrebljava *kombinacija dvaju pramjerila*, struje i otpora, o čemu je bilo riječi u odlomku 3.1.2. Pri tom se pramjerilom struje utvrđuje omjer napona E naponske normale i otpora R otporničke normale, tj. $E/R = I$, gdje je I jakost struje utvrđena strujnom vagom (sl. E.25). Vrijednost R otporničke normale saznaje se posebnom usporedbom s jednim od pramjerila otpora iz odsječka 3.3. Zato je relativna nepouzdanost $\Delta R/R$ reprodukcije otpora pramjerilima izvanredno važna za vrhunsku metrologiju elektromagnetizma.

Stanovitu predodžbu o nepouzdanosti raznovrsnih pramjerila otpora u razdoblju od godine 1937. do 1967. prikazuju podaci u krajnjem desnom stupcu u tablici E-21, gdje je navedena razlika između vrijednosti Ω(BIPM) i jedinice »ohm SI«. To je, u stvari, drukčiji prikaz omjera $x = \Omega(\text{BIPM})/\Omega$ iz odlomka 3.6.5, tj. $\Omega(\text{BIPM}) - \Omega = (x - 1)\,\Omega$. Budući da se Ω i Ω(BIPM) međusobno neznatno razlikuju, brojčani iznosi (izraženi sa μΩ) u tablici E-21 ujedno izražavaju relativnu nepouzdanost reprodukcije otpora pramjerilima. Tako, na primjer, relativna nepouzdanost (50%) reproduciranja otpora 1 Ω u NPL Campbellovim pramjerilom

iznosi oko $\pm 2 \cdot 10^{-6}$, jer je $\pm 2\ \mu\Omega/1\ \Omega = \pm 2 \cdot 10^{-6}$. Ako apstrahiramo abnormalnu nepouzdanost pramjerila kanadskog metrološkog zavoda National Research Council (NRC) godine 1957, možemo konstatirati da se u toku 16 godina nepouzdanost reprodukcije otpora $R \approx 1\ \Omega$ smanjila gotovo 10 puta! Tome je najviše pridonijelo australsko kapacitivno pramjerilo o kojemu je bilo riječi u odlomku 3.3.1.

Tablica **E-21**

Utvrđivanje razlike Ω(BIPM) – Ω(SI) u nekoliko metroloških zavoda

Godina	Autori	Zavod	Autori metode	Ω(BIPM)–Ω(SI), μΩ
1967	Thompson	NSL	Thompson-Lampard	$-0{,}17 \pm 0{,}7$
1964	Rayner	NPL	Campbell	$-0{,}2 \pm 2$
1960	Cutkosky	NBS	Thompson-Lampard	$+1{,}0 \pm 2$
1957	Romanowski, Olson	NRC	Campbell	$-3{,}4 \pm 20$
1951	Rayner	NPL	Campbell	$-2{,}0 \pm 5$
1949	Thomas	NBS	Wenner	$-3{,}0 \pm 3$
1937	Hartshorn, Astbury	NPL	Campbell	$-2{,}0 \pm 5$

Budući da, dakle, relativna nepouzdanost reprodukcije struje iznosi $\Delta I/I = \pm 4 \cdot 10^{-6}$, a otpora $\Delta R/R \approx \pm 1 \cdot 10^{-6}$, relativna nepouzdanost napona iznosi oko $\Delta U/U = \pm(4...5) \cdot 10^{-6}$. U današnje vrijeme to je vrhunac metrologije elektromagnetizma. Tom granicom uvjetovan je, međutim, i domet preciznosti mjerenja snage, energije itd. u *svim ostalim* granama znanosti, jer najpreciznije se te zajedničke veličine mjere električkim metodama.

3.7.2. Nepouzdanost vrijednosti brzine svjetla. Razmatranja u odlomku 3.4.2 su nam pokazala da kapacitet »računskog standarda kapaciteta« ovisi o kvadratu brzine svjetla v_0 u vakuumu. Budući da je kapacitivni standard temelj najpouzdanijeg pramjerila otpora (odlomak 3.3.1), to je očito da nepouzdanost vrijednosti brzine svjetla bitno utječe na preciznost vrhunske metrologije elektromagnetizma uopće. Toliki utjecaj v_0 posve je razumljiv, jer brzina svjetla je možda najvažnija prirodna konstanta koja igra presudnu ulogu u mnogim granama fizike. Tako se, na primjer, u osnovi teorije elektromagnetizma nalazi jednadžba $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$ (odlomak 1.4.1), v_0 povezuje energiju i masu jednadžbom $W = mv_0^2$ (odsječak A.9.1), prema specijalnoj teoriji relativnosti v_0 je maksimalna brzina komuniciranja između dviju tačaka u prostoru, o v_0 ovisi preciznost vođenja svemirskih letjelica, pomoću v_0 definira se niz drugih konstanti itd. U ovoj nas knjizi, međutim, brzina svjetla zanima isključivo sa stajališta vrhunske metrologije. Zato ćemo izvanredno zanimljive eksperimente pri utvrđivanju vrijednosti v_0 spomenuti samo djelomično, a podrobniju pozornost posvetiti izmjerenoj vrijednosti v_0 i njenoj relativnoj nepouzdanosti $\Delta v_0/v_0$.

Povremeno poneki znanstvenik izrazi sumnju u stalnost vrijednosti brzine svjetla, tj. pretpostavi da se v_0 mijenja u toku vremena i u ovisnosti o frekvenciji elektromagnetskih valova. Ne postoji, međutim, teoretska podloga koja bi podržala tu sumnju, a eksperimentalni podaci učvršćuju uvjerenje da je v_0 doista prirodna konstanta, neovisna o vremenu i duljini vala. Tako su, na primjer, *B. Lowell* i drugovi godine 1964. utvrdili da se brzine svjetla i radio-valova podudaraju unutar $\pm 1 : 10^6$. Pri tom su promatrali istodobno nastale optičke i radio-valne pojave na treperavim zvijezdama, a duljina vala registriranih zračenja kretala se od $0{,}5 \cdot 10^{-6}$

do 1,2 m. Zato prividnu promjenljivost vrijednosti v_0 u toku vremena valja pripisati sistematskim pogreškama pri mjerenjima.

Većina predratnih mjerenja brzine svjetla sastojala se od utvrđivanja trajanja širenja svjetla duž putanje poznate duljine. Svjetlosnu zraku prekidao je ozubljeni kotač, rotirajuće zrcalo ili Kerrova ćelija; mjerenjem je utvrđeno koliko vremena treba svjetlosni impuls da dosegne udaljeno zrcalo i da se vrati natrag duž nezavisno izmjerene staze. Tako je, na primjer, godine 1928. *Michelson* utvrdio vrijednost v_0 s relativnom pogreškom $\pm 7 \cdot 10^{-4}$. Poslijeratnim razvojem radarske tehnike pogreška je godine 1951. smanjena deset puta (tablica E-22). Glavni uzroci pogrešaka pri svim tim mjerenjima bili su: nepreciznost poznavanja duljine staze, loše poznavanje indeksa prelamanja (vidi odsječak A.8.3) i pogreška pri mjerenju vremenskog intervala. Pri tom je, u stvari, mjerena grupna brzina, a ne fazna (valna) brzina pod čime se razumijeva »brzina svjetla«. Zbog toga se dobiveni rezultati moraju ispraviti korekcijama reda $1:10^5$.

Izvanredno mnogobrojna mjerenja brzine svjetla obavljena su Bergstrandovim geodimetrom — uređajem koji se služi moduliranom svjetlosnom zrakom. Pri tom su neki autori uspjeli sniziti relativnu mjernu pogrešku čak na $\pm 3 \cdot 10^{-7}$. Pod »pogreškom« se u ovom odlomku razumijeva drugi korijen iz zbroja kvadrata standardnog odstupanja i kvadrata utvrđene sistematske pogreške. Jedno od najnovijih mjerenja obavili su *A. Karolus* i *J. Helmberger* godine 1966. s relativnom pogreškom $\pm 5 \cdot 10^{-7}$. Oni su pri tom učinili oko 14 tisuća očitanja i utvrdili vrijednost $v_0 = (299\,792{,}47 \pm 0{,}15)$ km/s.

Tablica **E-22**

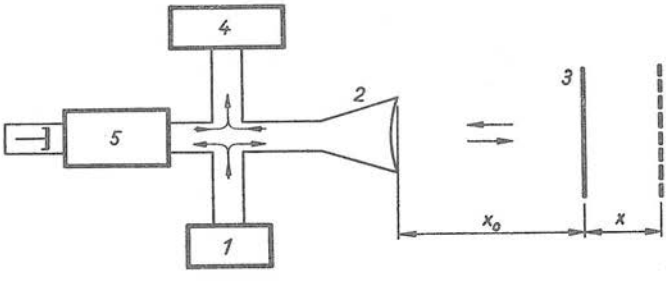
Napredak poznavanja stvarne vrijednosti brzine svjetla u vakuumu

Godina	Autor	Vrijednost v_0, m/s	Relativna pogreška
1928	Michelson	$2{,}99798 \cdot 10^8$	$\pm 7 \cdot 10^{-4}$
1951	Alakson	$2{,}997942 \cdot 10^8$	$\pm 6 \cdot 10^{-6}$
1952	Froome	$2{,}99792 \cdot 10^8$	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$
1958	Froome	$2{,}997925 \cdot 10^8$	$\pm 3 \cdot 10^{-7}$
1966	Karolus	$2{,}9979247 \cdot 10^8$	$\pm 5 \cdot 10^{-7}$

Oko godine 1950. obavljen je niz mjerenja v_0 pomoću šupljih mikrovalnih rezonatora. Relativna pogreška vrijednosti v_0 iznosila je u najboljem slučaju oko $\pm 2 \cdot 10^{-6}$, a tu granicu preciznosti uvjetuje površinska impedancija. Zato su se eksperimentatori poslužili interferometrima, ali pri tom nisu upotrijebili svjetlosne zrake, već snopove koherentnih elektromagnetskih valova duljine vala nekoliko milimetara (»mikrovalovi«). Na to ih je naputila relativno laka proizvodnja koherentnih mikrovalnih signala i mogućnost vrlo preciznog mjerenja frekvencije (laseri, za sada, ne dolaze u obzir zbog nedovoljne stabilnosti frekvencije; vidi odsječak A.8.6).

Pojednostavnjenu shemu prvog mikrovalnog interferometra prikazuje slika E.63. Njega je iz Michelsonova optičkog interferometra razvio *K. D. Froome* (pokušalo se primijeniti i Fabry-Perotov interferometar, ali je difrakcija uzrokovala prevelike pogreške). Pomicanjem zrcala mijenjaju se relativne faze dvaju signala, pa na izlazu detektora nastaju interferencijske pruge (usporedi s odsječcima A.8.2,5). Pomak zrcala između dva uzastopna minimuma (ili maksimuma) iznosi $\lambda/2$, gdje

je λ duljina vala upotrijebljenog mikrovalnog zračenja. Prilikom mjerenja brzine svjetla zrcalo se pomakne kroz poznati (prebrojani) broj N minimuma, a pomak x izmjeri se odvojeno optičkom interferometrijom. Prema tome je $\lambda = 2x/N$, odnosno $v_0 = 2fx/N$, jer je $v_0 = f\lambda$, gdje je f precizno izmjerena frekvencija mikrovalnog zračenja (vidi odsječak A.10.6). Naravno da se pri tom mora uzeti u obzir indeks prelamanja i korekcija zbog difrakcije. Godine 1954. Froome je razvio mikrovalni interferometar sa četiri roga koji je radio na frekvenciji oko 72 GHz. U njemu je primijenio valovod za konstantnu fazu, tj. uređaj kojim se može mijenjati amplituda snage u jednoj grani interferometra, a da se pri tom faza ne mijenja. Tim usavršenim interferometrom Froome je utvrdio brzinu svjetla u vakuumu $v_0 = (299\,792{,}5 \pm 0{,}1)$ km/s, dakle s preciznošću (relativnim standardnim odstupanjem) $\pm 3 \cdot 10^{-7}$. S tom vrijednošću poslužili smo se na kraju odlomka 3.3.1 prilikom računanja relativne nepouzdanosti otpora kapacitivnog pramjerila otpora.



Sl. E.63. Pojednostavnjena shema prvog Froomeova mikrovalnog (24 GHz) interferometra
1 — izvor, *2* — rog, *3* — zrcalo, *4* — detektor, *5* — varijabilni atenuator

Niz znanstvenih laboratorija u čitavom svijetu sada radi na tome da pronađe metodu mjerenja v_0 kojom će relativnu pogrešku smanjiti na $\pm 1 \cdot 10^{-7}$ ili na još manju vrijednost. Jedna od tih metoda je moduliranje svjetlosne zrake mikrovalnim frekvencijama, jer otpada problem difrakcije, a indeks prelamanja pouzdanije je poznat za vidljivo svjetlo. Zasad se u tu svrhu istražuju prikladni modulatori i detektori koji su djelotvorni pri mikrovalnim frekvencijama (diode od galijeva arsenida koje emitiraju svjetlo itd.). Američki Joint Institute for Laboratory Astrophysics eksperimentira s laserima u nadi da će nepouzdanost vrijednosti v_0 smanjiti na nekoliko $\pm 1:10^8$. Njihova metoda zahtijeva mjerenje razlike frekvencije između dviju spektralnih linija koje emitira čisti neonski laser koji ima tako namješteno jedno od krajnjih sfernih zrcala da vrijedi $2L = N_1\lambda_1 = N_2\lambda_2$. Tu su λ_1 i λ_2 duljine vala koje pripadaju frekvencijama f_1 i f_2. Lako je dokazati da je $v_0 = 2L(f_2 - f_1)/(N_2 - N_1) = 2L\,\Delta f/\Delta N$. Ukoliko se uspije dovoljno precizno izmjeriti ΔN, relativna nepouzdanost vrijednosti v_0 moći će se smanjiti gotovo do granice preciznosti interferencijskog mjerenja duljine.

3.7.3. Temelj mjerenja visokofrekventnih veličina. Gotovo sva naša dosadašnja razmatranja o vrhunskoj metrologiji elektromagnetizma odnosila su se na *istosmjerne* veličine. Čak i onda kad smo se morali poslužiti niskofrekventnim izmjeničnim veličinama (tako, na primjer, prilikom upotrebe kapacitivnog ili međuinduktivnog standarda u pramjerilu otpora; vidi odlomke 3.3.1,3), zanimala nas je, u stvari, samo *frekvencija* izmjeničnih veličina. Pri tom smo, dakako, iskorištavali poznatu činjenicu da je frekvencija ona fizikalna veličina koja se može mjeriti preciznije od bilo koje druge veličine (odsječak A.10.6). Unatoč tome što smo u razmatranim pramjerilima došli do primjene frekvencije najviše vrijednosti $f = 1592$ Hz (tj. $\omega = 10000$ rad/s; odlomak 3.3.1), morali smo spomenuti ekstrapolaciju kojom se

od mjernih podataka dobivenih izmjeničnim veličinama prelazi na podatke koji vrijede za istosmjerne ($f=0$). Utjecaji tih *vrlo niskih* frekvencija na otpor, parazitne kapacitete, induktivitete itd. vrlo su blagi i mogu se računski, a i eksperimentalno, uzeti u obzir u toliko determiniranom obliku da frekvencija ne poremećuje postignutu razinu preciznosti istosmjerne metrologije elektromagnetizma.

Mjerne metode metrologije istosmjernih i niskofrekventnih veličina ne mogu se bez daljnjega u cijelosti primijeniti na veličine *visokih* i ekstremno visokih frekvencija. S druge je strane precizno mjerenje snage, napona, jakosti polja, šumova, relativne (kompleksne) dielektričnosti itd. frekvencija do oko 40 GHz (u najnovije vrijeme i do frekvencija vidljivog svjetla, tj. nekoliko stotina THz) postalo imperativ diktiran fenomenalnim razvojem telekomunikacija. Pod pritiskom tog munjevitog napretka naglo se poslije godine 1940. razvija raznovrsna tehnika mjerenja visokofrekventnih i mikrovalnih veličina, koja godine 1957. dovodi do početka međunarodnog usklađivanja mjerenja na tom području u okviru International Radio Scientific Union (URSI). Ta je unija godine 1967. udruživala 37 zemalja, a njena se djelatnost odvija u sedam međunarodnih komisija od kojih se prva po redu bavi mjerenjem i standardima. Godine 1965. u rad na tom području uključio se i Međunarodni komitet za mjere i utege (CIPM; odlomak A.7.1.1) kao drugostepeni operativni organ Konvencije o metru. Silina razvoja i nedovršenost sistema mjernih postupaka na tom području ne dopuštaju nam da ulazimo dublje u ovu granu metrologije, pogotovo jer nije namjena ove knjige da bude priručnik o mjerenju. Zato ćemo u nastavku skicirati samo osnovu na kojoj izrasta tehnika mjerenja visokofrekventnih (VF) veličina.

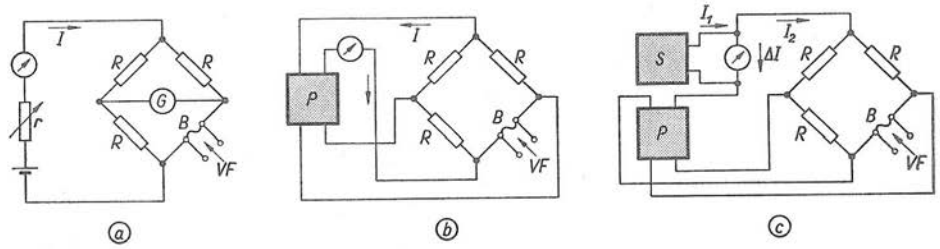
U području iznad 30 kHz, VF mjerna tehnika može se najpreciznije priključiti na postojeći (apsolutni) sistem pramjera i pramjerila (za jedinice SI: kg, m, s, A) putem mjerenja *snage*. Zato se VF mjerna tehnika osniva na izjednačenju snage elektromagnetskog polja (pretvorene u toplinsku snagu) sa snagom razvijenom istosmjernim ili niskofrekventnim (NF) strujnim krugom čija se vrijednost u najboljem slučaju može izmjeriti s relativnom nesigurnošću oko $\pm 1:10^5$. Pri tom se pretežno upotrebljavaju kalorimetrička i bolometrička metoda, a rjeđe druge (s termoelementom, s kristalnim diodama, mehaničke, na temelju Hallova efekta itd.). Ovdje ćemo letimično opisati prve dvije metode.

Kalorimetrička metoda upotrebljava se od frekvencije 0 pa sve do oko 40 GHz. Relativna nesigurnost mjernog rezultata kreće se od $\Delta P/P = \pm 2 \cdot 10^{-3} = \pm 0{,}2\%$ do 5%, što ovisi o razini snage, frekvenciji, upotrijebljenoj instrumentaciji, ispravnosti ocjene parcijalnih mjernih pogrešaka itd. Prednost je ove metode relativno visoka (!) preciznost, dok joj je mana znatna toplinska vremenska konstanta (od nekoliko minuta do nekoliko sati). Načelo djelovanja *statičkog* kalorimetra je poznato: u tvari toplinskog kapaciteta mc, gdje je m masa tvari, a c njena specifična toplina, apsorbirana elektromagnetska energija pretvara se u toplinu. U toku vremena Δt dovođenja mjerene VF elektromagnetske snage P temperatura tvari u kalorimetru, izoliranom prema okolini, poraste za ΔT. Prema tome se mjerenjem ΔT i Δt utvrđuje snaga $P = mc\Delta T/\Delta t$, što vrijedi uz pretpostavku potpune pretvorbe energije, preciznog poznavanja vrijednosti mc kalorimetra, savršene izolacije itd.

Znatan dio mjernih poteškoća može se izbjeći *supstitucijskim* statičkim kalorimetrom. On se od opisanog razlikuje u tome što posjeduje dodatnu grijaću spiralu kojoj se dovodi istosmjerna ili NF snaga, a ta se snaga može mjeriti vrlo precizno. Pri tom se zahtjev za savršenom toplinskom izolacijom kalorimetra ublažuje, a potreba za preciznim poznavanjem toplinskog kapaciteta teoretski iščezava. Upotrebljava se i *dvostruki* supstitucijski kalorimetar, koji sadrži dva jednaka kalorimetrijska

tijela. Jedno tijelo zagrijava mjereno VF polje, a drugo istosmjerni ili NF izvor. Pomoću izmjerene razlike temperatura između tih dvaju tijela saznaje se vrijednost mjerene VF snage.

VF ili mikrovalna snaga mjeri se i *protočnim* kalorimetrima kod kojih VF energiju, pretvorenu u toplinu, preuzima rashladna tekućina (ulje ili voda) stalnog protoka q. Ako u ustaljenom stanju porast temperature rashladne tekućine iznosi ΔT, snaga P dobiva se pomoću izraza $P = q\rho c\Delta T$, gdje je ρ gustoća tekućine, a c njena specifična toplina. Teškoću predstavlja potreba preciznog poznavanja vrijednosti veličina ρ i c pri stvarnim temperaturama, dakle u dosta širokom temperaturnom rasponu, a i protok q teško je precizno mjeriti. Zato se i ovdje primjenjuje *supstitucijska* metoda. Najprije se pri $q = \text{const}$ utvrdi porast temperature rashladne tekućine uzrokovan toplinom koja je pretvorbom VF energije nastala u grijalici (ili u staklenoj cijevi kroz koju teče tekućina; cijev prolazi poprečno kroz valovod ako je riječ o mikrovalovima). Zatim se dovod VF energije isključi i uključi grijalica koja se napaja iz istosmjernog ili NF izvora. Snaga izvora mijenja se tako dugo dok se pri istom protoku ne postigne isti porast temperature. U tom je slučaju VF snaga jednaka precizno izmjerenoj snazi supstitucijskog izvora.



Sl. E.64. Bolometričko mjerenje visokofrekventne snage
a) Osnovni spoj; B — bolometar, G — galvanometar. b) Načelo mosta s automatskim namještanjem ravnoteže; P — istosmjerno pojačalo. c) Primjena vrlo stabilnog izvora S konstantne struje

Prije nego što spomenemo *bolometričke metode* mjerenja VF snage, podsjetit ćemo da se pod nazivom bolometar razumijeva otpornički element osjetljiv na temperaturu, a električki mu se otpor mijenja ako je ozračen VF poljem. Postoji nekoliko vrsta bolometara od kojih se najčešće upotrebljavaju tzv. barretteri i termistori. Barretter (engleska riječ koja otprilike znači »toplinski detektor«) sastoji se od kratke i tanke otporničke žice smještene u izolacijsku epruvetu koja je na svojim krajevima zatvorena metalnim poklopcima. Otpor tog uređaja mijenja se proporcionalno snazi radio-frekventnog polja ako je riječ o niskoj razini snage, vremenska konstanta je vrlo mala (50 do 400 μs), a temperaturni koeficijent otpora pozitivan. Termistor se sastoji od sitnog grumena poluvodičkog materijala sa tankim olovnim žicama; temperaturni koeficijent je negativan, a vremenska konstanta relativno velika (oko 100 ms). Za razliku od barrettera, termistor se može opteretiti velikom VF snagom. Od ostalih vrsta bolometara najčešće se upotrebljavaju oni s tankim metalnim filmom, »opteretne svjetiljke« (veliki barretteri) i valovodni slojni bolometri (engl. waveguide wall bolometer).

Načelo primjene bolometra u Wheatstoneovu mostu prikazuje slika E.64a. Mjerenje se izvodi najpreciznije ako se upotrijebi supstitucijska metoda uz održavanje stalnog otpora bolometra: struja mosta regulira se otpornikom r tako da je otpor

bolometra jednak otporu R svake grane i u slučaja kad je bolometar ozračen mikrovalovima i kad nije. Ravnotežu mosta pri tom za oba slučaju indicira pomanjkanje otklona galvanometra G. Vrijednost VF snage, koja je jednaka dodatnoj snazi istosmjernog izvora iznosi

$$P=(I_1^2-I_2^2)R/4,$$

gdje su I_1 i I_2 struje potrebne da uravnoteže most bez djelovanja i sa djelovanjem mjerenog VF polja.

Loša je strana takvog ručnog mosta što eksperimentator mora smanjiti struju I prije nego što će uključiti VF zračenje, jer inače bi moglo doći do razaranja bolometra. Zato se upotrebljava most s automatskim namještanjem pomoću pojačala (sl. E.64b). Time se u nekim slučajevima postiže i bolja preciznost mjerenja. Pri mjerenju malih snaga (ispod 5 mW) preciznost se može povećati primjenom izvora stalne struje S (sl. E.64c). U tom se slučaju vrijednost VF snage dobiva pomoću jednadžbe $P=\Delta I^2R/4=(2I_1-\Delta I)\Delta IR/4$, gdje je $\Delta I=I_1-I_2$. Mjerni uređaj obično se izvodi tako da bez primjene VF zračenja stabilni izvor daje struju I_1, dok prilikom ozračivanja ampermetar direktno pokazuje vrijednost ΔI.

Na početku ovog odlomka naglasili smo da se u visokofrekventnoj i mikrovalnoj tehnici najpreciznije može izmjeriti snaga. U tablici E-23 možemo vidjeti da je ta preciznost vrlo skromna: u najpovoljnijem slučaju relativna nesigurnost iznosi $\pm 0{,}2\% = \pm 2\cdot 10^{-3}$. Prisjetimo se da je, na primjer, nesigurnost reprodukcije istosmjernog otpora pramjerilima oko tisuću puta manja! Daljnji napredak telekomunikacija u velikoj mjeri ovisi o unapređenju metrologije visokofrekventnih veličina, a ona o međunarodnoj usporedbi nacionalnih standarda i mjernih metoda. Zato su u toku vrlo žive interkomparacije u okviru CIPM i URSI. Tako su, na primjer, godine 1967. pod okriljem CIPM obavljene interkomparacije uređaja za mjerenje snage šupljih valovoda pri frekvenciji 10 GHz i snazi oko 10 mW (Japan, Madžarska, D.R. Njemačka, SSSR, USA), uređaja za mjerenje snage koaksijalnih sistema (3 GHz, 10...100 mW; Engleska, Kanada, D.R. Njemačka, SSSR, USA) i dielektričnosti (10 GHz; Engleska, Kanada, SSSR, USA). Istodobno je učinjeno niz interkomparacija u okviru URSI. Prilikom interkomparacija pojavile su se ozbiljne teškoće pri usklađivanju elektroničkih uređaja sudjelujućih država. Zato je prva komisija unije URSI predložila Međunarodnoj elektrotehničkoj komisiji (CEI) da prouči problem spojnih uređaja, specijalno za koaksijalne sisteme.

3.7.4. O preciznosti mjerenja visokofrekventnih veličina. Namjena je ovog odlomka da u najgrubljim crtama prikaže stanje vrhunske metrologije visokofrekventnih i mikrovalnih fizikalnih veličina. Pri tom opisu poslužit ćemo se podacima o mjernim pogreškama koje je godine 1966. i 1967. objavio američki metrološki zavod National Bureau of Standards. Ti se podaci o mjerenjima vrhunske preciznosti ne odnose samo na mogućnosti NBS već na vrhunske mogućnosti USA, jer NBS kooperira sa laboratorijima ministarstva obrane USA, usko surađuje s glavnim industrijskim i državnim laboratorijima za standarde, a razvojni rad na tom području koordinira američka Konferencija laboratorija za standarde (National Conference of Standards Laboratories; vidi odlomak A.7.2.4). S obzirom na sve to, podaci o pogreškama najpreciznijih mjerenja visokofrekventnih veličina vjerojatno predstavljaju vrhunac za čitav svijet.

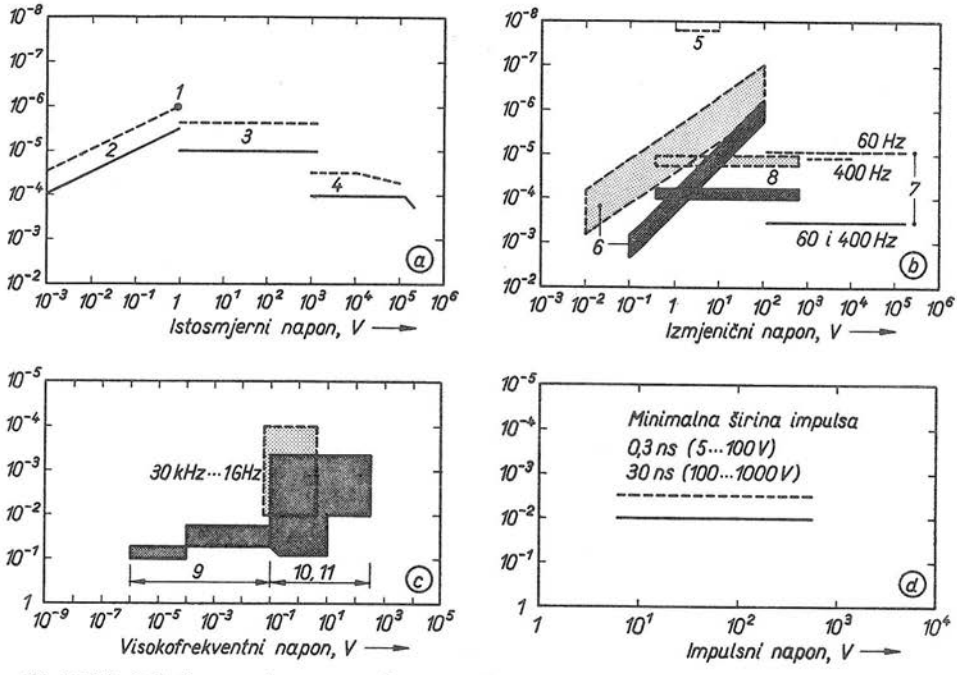
Prilike u metrologiji *napona* prikazuju dijagrami na slici E.65. Duž ordinata nanesene su relativne nesigurnosti pod kojima razumijevamo, posve općenito

Tablica **E-23**

Karakteristike uređaja za mjerenje visokofrekventne snage

Mjerni uređaj	Područje snage	Frekventno područje	Relativna nesigurnost %	Stupanj apsorpcije snage, %	Vremenska konstanta, s
Statički kalorimetar	100 μW...10 W	čitavo	0,5...5	100	...10^4
Supstitucijski kalorimetar	100 μW...1 kW	čitavo	0,5...3	100	...10^3
Dvostruki kalorimetar	100 μW...10 mW	čitavo	0,2...3	100	0,1...10^3
Protočni kalorimetar	1 W...10 W	čitavo	2...5	100	1...10^2
Supstitucijski protočni kalorimetar	10 mW...100 W	čitavo	1...5	100	1...10^2
Barretterski bolometar	1 μW...10 mW	10 MHz...40 GHz	1...5	100	10^{-3}
Termistorski bolometar	1 μW...10 mW	10 MHz...40 GHz	1...5	100	1
Bolometar s filmom	1 mW...100 mW	0,5...10 GHz	2...5	100	5...10
Valovodni slojni bolometar	1 mW...1 W	10...40 GHz	2...5	3...4	10
Direktno grijani termočlanak	1 mW...100 mW	...18 GHz	2	100	0,1
Indirektno grijani termočlanak	1 mW...100 mW	...40 GHz	2	100	1...5
Vakuumski termočlanak	...5 mW	...1 GHz	1	100	0,5

rečeno, relativnu nesigurnost rezultata dobivenog pri mjerenju ili baždarenju u odnosu prema rezultatu koji bi se dobio u idealnom slučaju (mjerenje bez pogreške, savršena pramjerila i normale itd.). Vrlo je poučna usporedba sličice a) sa ostale tri: za neka frekventna područja VF mjerenja su čak do 100 tisuća puta manje precizna od istosmjernih! Analogne dijagrame o baždarenju *otpornika* prikazuju dijagrami na slici E.66.



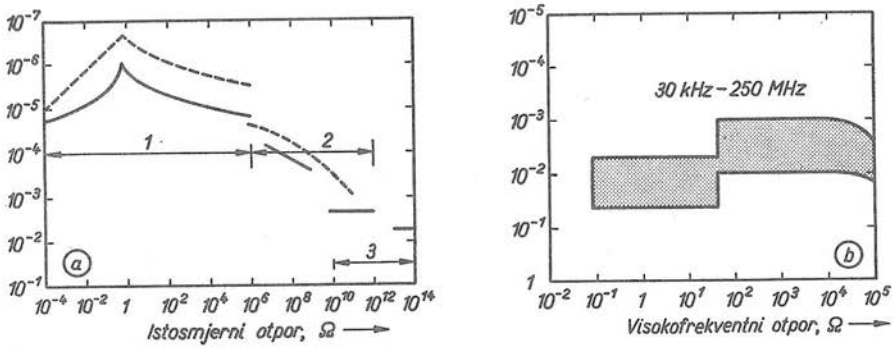
Sl. E.65. Relativna nesigurnost pri naponskim baždarenjima (pune se crte odnose na uobičajeni mjerni postupak u NBS, a crtkane na specijalni postupak)

a) Istosmjerni napon i omjer napona: *1* — baždarenje sekundarnih naponskih normala, *2* — potenciometri, *3* — izvori napona, *4* — visokonaponski djelitelji. b) Izmjenični naponi: *5* — precizni transformator 1592 Hz ($\omega = 10000$ rad/s), *6* — induktivni djelitelji 50 Hz...10 kHz, *7* — naponski transformatori, *8* — pretvarači $\sim/=$ 5 Hz...50 kHz. c) Visokofrekventni naponi 30 kHz...1 GHz u koaksijalnim sistemima: *9* — mikropotenciometri 50 kHz...900 MHz, *10* — toplinski pretvarači napona 30 kHz...100 MHz, *11* — voltmetri s termočlankom 10 MHz...1 GHz. d) Impulsni naponi u koaksijalnim sistemima

O metrologiji VF *struja* nedostaju pouzdani podaci, jer je rad na tom području u živom razvoju. U području 0,1...100 A, 1...1000 MHz očekuje se relativna nesigurnost oko $\pm 1\%$. *Induktivitet* svitaka s malim gubicima utvrđuje se u odnosu prema kapacitivnom standardu. Pri frekvencijama 30 kHz...250 MHz relativna nesigurnost vrijednosti induktiviteta nalazi se u rasponu 0,1...10% za nazivne vrijednosti induktiviteta 0,1 μH...10 mH. U istom frekventnom području kapacitet kondenzatora (s malim gubicima) nazivnog kapaciteta 10^{-13}...10^{-9} F utvrđuje se s relativnom nesigurnošću 0,1...1%.

Kompleksna relativna *dielektričnost* u frekventnom području 30 kHz...1 GHz može se utvrditi s relativnom nesigurnošću 0,5...10%, a tangens kuta gubitaka (u rasponu 10^{-4}...10^{-3}) s relativnom nesigurnošću 5...100% (!). Daleko su

povoljnije mogućnosti pri mjerenju *magnetske susceptibilnosti* i magnetskog kuta gubitaka. U istom rasponu frekvencija pripadne relativne nesigurnosti iznose 1...5% i 5...50%.



Sl. E.66. Relativna nesigurnost pri baždarenju otpornika (pune se crte odnose na uobičajeni mjerni postupak u NBS, a crtkane na specijalni postupak)

a) Otpornici za istosmjerne struje: *1* — mjerenje Wennerovim mostom, *2* — mjerenje Wheatstoneovim mostom, *3* — mjerenje pomoću izboja kondenzatora. b) Otpornici za frekvencije od 30 kHz do 250 MHz. Vrijednosti otpora utvrđene su pomoću kapacitivnog pramjerila otpora (odlomak 3.3.1)

Navest ćemo još podatke o vrhunskoj preciznosti mjerenja prigušenja i faznog pomaka. Za *prigušenja* 10...120 dB u frekventnom području 1 MHz ... 1 GHz relativna nesigurnost pri mjerenju prigušenja iznosi 0,01...5%. Za *fazne pomake* 1...100° u području 30 kHz...300 MHz relativna nesigurnost kreće se u širokom rasponu od 5% do 100%.

Time, dakako, nismo iscrpili sve VF veličine i sva frekventna područja. Navedeni podaci, iz kojih se može zaključiti o preciznosti mjerenja drugih veličina, ipak mogu stvoriti stanovitu predodžbu o razini metrologije VF veličina. To je svakako bilo potrebno, jer u literaturi se rezultati VF mjerenja ponekad navode s »preciznošću« koja znatno premašuje stvarne mogućnosti koje smo gore naveli.

4. Fizikalni ili CGS sistemi jedinica elektromagnetizma

4.1. Elektrostatski (CGSE) sistem jedinica

4.1.1. Ishodište CGSE sistema jedinica. U vremenu kad je nastao fizikalni elektrostatski sistem jedinica, tj. prije 130 godina (o povijesti vidi poglavlje 5), elektromagnetska znanost bila je tek na početku svog divovskog uspona. Zajedničke elektromagnetske nauke još nije bilo, odvojeno su se razmatrale elektrostatske pojave od magnetskih. Tada se još nije znalo da magnetska polja potječu od električnih struja, pa su se učenjaci služili, na primjer, pojmom »magnetske tekućine«, slično pojmu »toplinskog fluida« u nauci o toplini.

Pojam polja u današnjem smislu (vidi odsječak 1.4) bio je u to doba nepoznat, njega je kasnije na temelju *Faraday*eva shvaćanja uveo *J. C. Maxwell* u svom glasovitom djelu *A Treatise on Electricity and Magnetism* godine 1873. Pojave privlačenja i odbijanja dviju množina elektrike u zraku bile su smatrane ishodištem čitava znanja o elektrici. Umjesto pojma *polja* kojim danas jednostavno i elegantno rješavamo mnoge zadatke, osobito ako držimo na pameti genijalnu i jednostavnu *Faraday*evu sliku silnica polja, tadašnja je znanost o elektrici silu F između dvije množine elektrike Q_1 i Q_2 tumačila zakonima koji su u obliku jednadžbi bili građeni analogno *Newton*ovu zakonu privlačenja nebeskih masa. Danas govorimo da je to bilo razdoblje u kojem su sve električke pojave svođene na »djelovanje na daljinu«.

U naše vrijeme *Priestley-Coulomb*ov zakon o međusobnom mehaničkom djelovanju dviju elektrika znade na temelju drukčijih predodžbi izvesti gotovo svaki maturant, ako ga profesor fizike nije uvodio u poglavlje o elektrici lisičjim repovima i amalgamiranom kožom. Nalazi li se u dielektriku s dielektričnošću ϵ množina elektrike Q_1, ona će biti izvor električkog toka Ψ_1. Na površini zamišljene kugle radijusa r sa središtem u Q_1 električka će indukcija iznositi $D_1 = \Psi_1/A$, gdje je A površina te zamišljene kugle, $A = 4\pi r^2$. Budući da je jakost električkog polja $E_1 = D_1/\epsilon$, u udaljenosti r od Q_1 djelovat će polje jakosti

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon} = \frac{\Psi_1}{\epsilon A} = \frac{Q_1}{\epsilon 4\pi r^2}. \tag{4.1-1}$$

Stavi li se u to polje neka druga množina elektrike Q_2, polje E_1 djelovat će na Q_2 silom $F = E_1 Q_2$, dakle u skladu s jednadžbom (4.1-1)

$$F = E_1 Q_2 = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon 4\pi r^2}. \tag{4.1-2}$$

Umjesto da kažemo kako polje E_1 djeluje silom F na Q_2, možemo reći da se Q_1 i Q_2 odbijaju silom F koju propisuje jednadžba (4.1-2).

Ukoliko nije riječ o nekom tvarnom dielektriku, već o vakuumu (praktički zraku), umjesto ϵ napisat ćemo u (4.1-2) električku konstantu ϵ_0. Ako su još osim toga obje elektrike po vrijednosti međusobno jednake, $Q = Q_1 = Q_2$, onda uz dovoljno velik razmak r jednadžba (4.1-2) prelazi u oblik koji vrijedi za vakuum

$$F = \frac{Q^2}{\epsilon_0 4\pi r^2} \quad \text{ili} \quad F \cdot \epsilon_0 4\pi r^2 = Q^2. \tag{4.1-3}$$

Sve jednadžbe koje smo ovdje napisali univerzalne su *veličinske jednadžbe* koje vrijede za bilo koji sustav jedinica ili čak za nesistematičan skup jedinica. U poglavlju A.1 opširno smo objasnili i na primjerima pokazali kako se simbol fizikalne veličine G u veličinskim jednadžbama uvijek može razložiti na umnožak brojčanog iznosa $\{G\}$ i upotrijebljene jedinice $[G]$. Tako, na primjer, neku vrijednost sile F možemo pisati kao $F = \{F\}_1[F]_1 = \{F\}_2[F]_2$. Ako je, recimo, $F = 1\,\mathrm{N}$, tj. jedan newton, onda je brojčani iznos $\{F\}_1 = 1$ uz jedinicu sile $[F]_1 =$ newton. Ako tu istu silu mjerimo nekom drugom jedinicom $[F]_2 =$ dyn, onda je drugi brojčani iznos $\{F\}_2 = 10^5$, jer je $\mathrm{dyn} = 10^{-5}\,\mathrm{N}$, pa u tom slučaju vrijedi $F = \{F\}_1[F]_1 = \{F\}_2[F]_2$. Tako mora i biti, jer se sila F nije promijenila ako smo je u mislima jednom mjerili newtonom, a drugi put dynom.

Veličinske jednadžbe gotovo su potpuno osvojile najmoderniju fizikalnu i tehničku literaturu. Time su konačno dovedeni u sklad najprirodniji način mišljenja i računanja s jedne strane, te način objavljivanja eksperimentalnih i teoretskih rezultata s druge strane. To nam daje pravo da takozvane fizikalne sisteme jedinica elektromagnetizma razmotrimo s jedinog ispravnog stajališta priznavanja samorodnosti elektromagnetskim pojavama.

Posljedica je toga da će naš odulji prikaz besprijekornih fizikalnih sistema odstupati od uobičajenih pogleda. Pri tom imamo oslonac u identičnim nazorima *J. Wallota*, nedavno preminulog najvećeg metrologa svijeta, a potvrdu takvim nazorima u genijalnim idejama osnivača tzv. fizikalnih sistema jedinica *C. F. Gaussa* (vidi odsječak 4.5).

4.1.2. Definicija CGSE jedinice elektrike. Prije 130 godina u znanosti o elektrici nisu upotrebljavali veličinske jednadžbe. Simboli u jednadžbama predstavljali su *brojčane iznose*. Prema tome su to bile *brojčane jednadžbe*, kako danas kažemo (vidi odsječke A.1.4,5 te poglavlja B.10, D.6 i E.6). Takvim brojčanim jednadžbama pioniri nauke o elektrici opisivali su *Priestley-Coulombov* zakon za silu odbijanja dviju elektrika u vakuumu

$$\{F\} = \frac{\{Q\}^2}{\{r\}^2} \quad \text{ili} \quad \{F\}\{r\}^2 = \{Q\}^2. \tag{4.1-4}$$

Pri tom, dakako, nisu upotrebljavali vitičaste zagrade. One su potrebne *nama* da bismo u ovoj knjizi dosljedno razlikovali simbole fizikalnih veličina od simbola brojčanih iznosa (u vitičastim zagradama).

Budući da je izraz (4.1-4) bio temelj čitavoj jednoj grani znanosti, on je predstavljao i polazište definiranja jedinica. Tako je jedinica elektrike bila definirana ovako: »Jedinica elektrike je ona množina elektrike koja na isto takvu množinu elektrike djeluje silom jedan dyn, ako su elektrike međusobno udaljene 1 centimetar.« Takva definicija pomalo je čudna za današnje nazore, no ona je potpuno u skladu s brojčanom jednadžbom (4.1-4): ako su brojčani iznosi $\{F\} = 1$, $\{r\} = 1$, $\{Q\} = 1$, onda je zaista u desnoj jednadžbi (4.1-4): $1 \cdot 1^2 = 1^2$.

Izračunajmo koliko iznosi tako definirana jedinica elektrike! Budući da množine elektrike mjerimo balističkim galvanometrima, a struje ampermetrima, izrazit ćemo tu jedinicu jedinicom Međunarodnog sistema jedinica u kojemu se elektrika mjeri jedinicom coulomb = C = amper × sekunda = As (vidi odsječak 2.2). U tu svrhu moramo najprije izraz (4.1-4) pretvoriti u *veličinsku* jednadžbu. U skladu s osnovnom metrološkom relacijom »brojčani iznos $\{G\}$ = veličina G : jedinica $[G]$«, dakle $\{G\} = G/[G]$, sva tri *brojčana iznosa* $\{F\}$, $\{r\}$ i $\{Q\}$ prikazat ćemo kao omjere *veličina* F, r i Q s jedinicama koje pripadaju navedenim brojčanim iznosima. Tako je

$$\{F\} = F/[F],\ \{r\} = r/[l],\ \{Q\} = Q/[Q],$$

gdje uglate zagrade simboliziraju jedinice sile, duljine i elektrike elektrostatskog sistema (CGSE). Uvrstimo li ova tri odnosa u desnu jednadžbu (4.1-4), dobivamo

$$\frac{F}{[F]}\,\frac{r^2}{[l]^2} = \frac{Q^2}{[Q]^2}.$$

Ovdje, dakako, *kosi* simboli predstavljaju *veličine*. Preuredimo li ovu jednadžbu ovako

$$Fr^2 = Q^2\,[F]\,[l]^2\,[Q]^{-2},$$

možemo je usporediti s desnom veličinskom jednadžbom (4.1-3). Podijelimo li te dvije jednadžbe, slijedi

$$\frac{F\epsilon_0 4\pi r^2}{Fr^2} = \frac{Q^2}{Q^2\,[F]\,[l]^2\,[Q]^{-2}},$$

odakle kraćenjem istih veličina u brojniku i nazivniku dobivamo

$$[Q]^2 = \epsilon_0\, 4\pi\,[F]\,[l]^2. \tag{4.1-5}$$

Odavde sad možemo izračunati kolika je jedinica elektrike Q u CGSE sistemu jedinica, ako znamo $[F]$ i $[l]$. Te dvije jedinice (sile i duljine) preuzete su u mjerni sistem nauke o elektrici iz mehanike, gdje se upotrebljava $[F]$ = dyn = gram × × centimetar/sekunda^2 = g cm/s^2. Budući da je $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m, kvadrat elektrostatske jedinice možemo pisati dalje

$$[Q]^2 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}} \cdot 4\pi\,\mathrm{dyn\,cm^2}.$$

Budući da je dyn = 10^{-5} N te cm^2 = 10^{-4} m^2, dobivamo

$$[Q]^2 = 1{,}127 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{F\,m^{-1}} \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N} \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} = 1{,}127 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{F\,N\,m},$$

odakle zbog F = C/V, Nm = J = CV slijedi jedinica FNm = $\mathrm{CV^{-1}CV} = \mathrm{C^2}$, pa korjenovanje gornjeg izraza daje konačno vrijednost elektrostatske jedinice elektrike u jedinici SI coulomb:

$$[Q] = 3{,}3356 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C}.$$

To je vrlo sitna jedinica. Struja od jednog ampera nagomila u jednoj sekundi na svakoj oblozi kondenzatora $1 : 3{,}3356 \cdot 10^{-10} = 2997{,}9$ milijuna takvih jedinica!

Vratimo se još načas na jednadžbu (4.1-5) pomoću koje smo izračunali kvadrat jedinice elektrike u elektrostatskom sistemu jedinica. Izračunamo li drugi korijen iz (4.1-5), dobivamo

$$[Q] = [l]\sqrt{\epsilon_0 4\pi [F]} = [l]^2\sqrt{\epsilon_0 4\pi [w]} = [l]\,[t]^{-1}\sqrt{\epsilon_0 4\pi\,[m]\,[l]}. \tag{4.1-6}$$

Ovdje smo uveli još nekoliko jedinica: $[w]$ je jedinica gustoće energije, dakle $[w] = [W]/[V]$, gdje je $[V]$ jedinica volumena. Jedinica sile $[F]$ izvedena je jedinica koja polazi od jedinica mase $[m]$, duljine $[l]$ i vremena $[t]$ CGSE sistema. Znamo da je u fizikalnom sistemu jedinica mehanike CGS $[l] = \mathrm{cm}$, $[t] = \mathrm{s}$, $[m] = \mathrm{g}$ (vidi odsječak B.8.2), odakle slijede ostale dvije koherentne jedinice tog sistema:

$$[F] = \mathrm{dyn} = [m]\,[l]\,[t]^{-2} = \mathrm{g \cdot cm \cdot s^{-2}} = \mathrm{g\,cm\,s^{-2}},$$

$$[w] = \mathrm{erg/cm^3} = [W]/[V] = [F]\,[l]/[l]^3 = [F]\,[l]^{-2} = \mathrm{g\,cm^{-1}s^{-2}}.$$

Prema tome iz jednadžbe (4.1-6) dobivamo

$$[Q] = [Q]_e = \mathrm{cm\,s^{-1}}\sqrt{\epsilon_0 4\pi\,\mathrm{g\,cm}} = (4\pi)^{1/2}\,\mathrm{cm^{3/2}g^{1/2}s^{-1}}\epsilon_0^{1/2}. \tag{4.1-7}$$

Iz ovog izraza možemo zaključiti dvoje. Prvo, jedinica elektrike u elektrostatskom CGSE sistemu jedinica *nije* polazna (osnovna) jedinica, već izvedena. Iako to, kako znamo iz odsječka 2.2, uopće nije važno, valja to ipak naglasiti, jer se ponekad čuju suprotna mišljenja. Drugo, izvedena jedinica $[Q]_e$ polazi od *četiri* osnovne jedinice. Prve tri su cm, g i s iz mehanike, a četvrta je električka konstanta ϵ_0.

U izrazu (4.1-7) upotrijebili smo za jedinicu elektrike u CGSE sistemu oznaku $[Q]_e$. Indeks e stavili smo zato da izričito naglasimo da je riječ o jedinici tog sistema, jer kasnije ćemo imati analogno građene jedinice CGSM sistema (vidi naredni odsječak). Isto tako treba opravdati primjenu jedinice $[w] = \mathrm{erg/cm^3}$. Primjenjujemo je samo zbog kraćeg pisanja jednadžbi, što vidimo ako usporedimo izraze (4.1-6) i (4.1-7). Stoga ćemo i u daljnjem izlaganju upotrebljavati $[w]$, a pri tom držati na pameti da je ta jedinica sastavljena od tri osnovne mehaničke jedinice CGS sistema, jer je, kako smo ranije izveli, $[w] = \mathrm{g\,cm^{-1}s^{-2}}$.

4.1.3. CGSE jedinice ostalih »električkih« veličina. Izračunajmo sada vrijednosti ostalih jedinica CGSE sistema u jedinicama SI. Pri tom ćemo ići istim putem kojim smo izveli $[Q]_e$, tj. uspoređivat ćemo brojčane jednadžbe prilagođene CGSE jedinicama s veličinskim jednadžbama. Jakost električkog polja E u ta dva oblika glasi jednako

(4.1-8) $\qquad \{F\} = \{Q\}\{E\} \qquad\qquad F = QE, \qquad\qquad$ (4.1-9)

gdje je lijevo *brojčana* jednadžba, a desno *veličinska*. Budući da je u lijevoj jednadžbi $\{F\} = F/[F]$, $\{Q\} = Q/[Q]$, gdje je $[Q] = [Q]_e$, te $\{E\} = E/[E]$, uvrštenjem tih izraza u (4.1-8) dobivamo

$$\frac{F}{[F]} = \frac{Q\,E}{[Q]\,[E]}, \text{ što daje } F = Q\,E\frac{[F]}{[Q]\,[E]}.$$

Usporedimo li ovu desnu jednadžbu sa (4.1-9), slijedi $[E] = [F]\,[Q]$, što uz pomoć (4.1-6) ili (4.1-7) daje

$$[E] = [E]_e = \sqrt{(\epsilon_0 4\pi)^{-1}\,[w]}. \tag{4.1-10}$$

Budući da je $[w] = \mathrm{erg/cm^3} = 10^{-7}\mathrm{J} : 10^{-6}\,\mathrm{m^3} = 10^{-1}\ \mathrm{J/m^3}$, a $\epsilon_0 4\pi = 1{,}1127 \cdot 10^{-10}$ F/m, to je konačno

$$[E] = [E]_e = (10^{-1}\,\mathrm{Jm^{-3}} : 1{,}1127 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{Fm^{-1}})^{1/2} = 2{,}9979 \cdot 10^4\ \mathrm{V/m},$$

jer je $\mathrm{Jm^{-3}F^{-1}m} = \mathrm{V^2/m^2}$ (vidi tablice E-4,5 u odlomku 2.2.6).

Jedinicu električke indukcije $[D]=[D]_e$ možemo izračunati iz usporedbe jednadžbi za gustoću energije električkog polja

$$\{w\}_e=\frac{1}{8\pi}\{E\}\{D\} \qquad \text{i} \qquad w_e=\tfrac{1}{2}ED,$$

od kojih brojčana (lijeva) vrijedi samo za jedinice CGSE sistema, a desna je univerzalna veličinska jednadžba. Po već uvriježenoj praksi pišemo

$$\{w\}_e=w_e/[w],\ \{E\}=E/[E],\ \{D\}=D/[D],$$

što uvrštenjem u lijevu jednadžbu daje

$$w_e=\tfrac{1}{2}ED\frac{[w]}{4\pi[E][D]} \qquad \text{ili} \qquad [D]=\frac{[w]}{4\pi[E]},$$

što smo dobili uz pomoć veličinske jednadžbe $w_e=\frac{1}{2}ED$. Uvrštenjem jednadžbe (4.1-10) u izraz za jedinicu $[D]$ nastaje

$$[D]=\sqrt{(4\pi)^{-1}\epsilon_0[w]}=(4\pi)^{-1/2}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-1}\epsilon_0^{1/2}. \tag{4.1-11}$$

Stavimo li u ovu jednadžbu vrijednost za ϵ_0, računanjem dobivamo

$$[D]=[D]_e=2{,}6544\cdot10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}.$$

Do istog bismo rezultata mogli doći da smo uspoređivali brojčanu jednadžbu $\{D\}=\{\epsilon\}\{E\}$, koja vrijedi uz primjenu CGSE jedinica, s univerzalnom veličinskom jednadžbom $D=\epsilon E$ ili pak usporedbom brojčane jednadžbe $\{D\}\{A\}=4\pi\{Q\}$ s veličinskom jednadžbom $DA=Q$. Sve spomenute kao i ostale brojčane jednadžbe prilagođene jedinicama elektrostatskog sistema jedinica što ga ovdje razmatramo navedene su u stupcu 6 tablice **40** koja je priložena ovoj knjizi. U toj su tablici u stupcima 7, 8 i 9 naznačeni odnosi među jedinicama elektrostatskog (CGSE) sistema jedinica i sistema SI. Tamo, na primjer, piše da je $[I]_e=3{,}3356\cdot10^{-10}$ A, a to se podudara s netom izvedenom relacijom $[Q]_e=3{,}3356\cdot10^{-10}$ C, jer je C = As, a $[I]_e=[Q]_e/[t]=[Q]_e/\mathrm{s}$. Najčešće upotrebljavane *veličinske* jednadžbe elektromagnetskog polja svrstane su u stupcu 5 tablice E-1 (odlomak 1.1.1).

Za kasnija razmatranja bit će nam od koristi da izvedemo još nekoliko odnosa među jedinicama CGSE i Međunarodnog sistema. Učinimo to najprije s jedinicom električke polarizacije $[P]_e=[P]$. Brojčana i veličinska jednadžba u kojima dolazi polarizacija glase

$$\{D\}=\{E\}+4\pi\{P\}, \qquad D=\epsilon_0E+P,$$

gdje je, kao i ranije, lijevo brojčana jednadžba, a desno veličinska. Stavimo li u lijevu jednadžbu $\{D\}=D/[D]$, $\{E\}=E/[E]$, $\{P\}=P/[P]$, dobivamo

$$\frac{D}{[D]}=\frac{E}{[E]}+4\pi\frac{P}{[P]} \qquad \text{ili} \qquad D=\epsilon_0E+P\frac{4\pi[D]}{[P]},$$

jer je $[D]/[E]=\epsilon_0$, što smo implicite već izveli, a ostalo je zabilježeno u stupcu 3 tablice E-24. Usporedimo li desnu stranu gornje jednadžbe s desnom stranom veličinske jednadžbe, dobivamo da je $[P]=4\pi[D]$, odakle računanjem slijedi

$$[P]=[P]_e=\sqrt{4\pi[w]\epsilon_0}=3{,}3356\cdot10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}.$$

Ostale jedinice takozvanih *električkih* veličina lako je izvesti pomoću brojčanih jednadžbi u stupcu 6 tablice **40**, veličinskih jednadžbi iz stupca 4 ili 7 tablice E-1, te iz dosad uspostavljenih odnosa između jedinica Međunarodnog i CGSE sistema jedinica. Prijeđimo stoga na razmatranje CGSE jedinica takozvanih *magnetskih* veličina.

4.1.4. CGSE jedinice veličina B i H. Izračunajmo odnos između jedinice jakosti magnetskog polja $[H]_e = [H]$ i jedinice SI A/m. U tu svrhu poslužit ćemo se kao mostom brojčanom i veličinskom jednadžbom za Poyntingov vektor

$$\{S\} = \frac{1}{4\pi}\{E\}\{H\}, \quad S = EH,$$

gdje smo vektorske oznake propustili jer one u ovim razmatranjima nisu potrebne.

Stavimo li u lijevu, brojčanu jednadžbu, omjer veličina i pripadnih CGSE jedinica $\{S\} = S/[S]$, $\{E\} = E/[E]$, $\{H\} = H/[H]$, dobivamo prilagođenu veličinsku jednadžbu (vidi odsječak A.1.6)

$$\frac{S}{[S]} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{E}{[E]}\,\frac{H}{[H]}, \quad \text{odnosno} \quad S = EH\,\frac{[S]}{4\pi[E][H]}.$$

Usporedimo li ovaj izraz, u kojemu *kosa* slova kao i ranije predstavljaju veličine, s veličinskom jednadžbom $S = EH$, odmah slijedi CGSE jedinica jakosti magnetskog polja

$$[H] = \frac{[S]}{4\pi[E]}.$$

Upoznajmo se najprije sa CGS jedinicom $[S]$ Poyntingova vektora. Kako znamo iz odlomka 1.4.3, veličina S predstavlja površinsku gustoću snage, dakle $S = P/A = W:(At)$, gdje su P i W snaga i energija. Budući da je gustoća energije polja $w = W/V$, to je CGS jedinica veličine S:

$$[S] = \frac{[W]}{[A][t]} = \frac{[W][l]}{[V][t]} = [w]\,\frac{[l]}{[t]},$$

jer su jedinica volumena i površine povezane relacijom $[V] = [A][l]$. Budući da je $[w] = \mathrm{erg/cm^3}$, $[l] = \mathrm{cm}$, $[t] = \mathrm{s}$, to je $[S] = [S]_e = \mathrm{erg} : (\mathrm{cm^2 \cdot s}) = 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$, gdje simbol W predstavlja jedinicu SI watt (o SI vidi poglavlje 2). Prema tome je CGSE jedinica jakosti magnetskog polja

$$[H] = [H]_e = \frac{[l]}{[t]}\sqrt{(4\pi)^{-1}[w]\,\epsilon_0}.$$

Uvrštenje vrijednosti za ϵ_0 daje $[H]_e = 2{,}6544 \cdot 10^{-9}$ A/m.

Elektrostatsku jedinicu magnetske indukcije izvest ćemo iz izraza za gustoću energije magnetskog polja, analogno onome što smo ranije učinili kod izvoda $[D]$ iz jednadžbi za gustoću energije električkog polja (odlomak 4.1.3). U tu svrhu zabilježimo najprije brojčanu i veličinsku jednadžbu

$$\{w\}_m = \frac{1}{8\pi}\{B\}\{H\}, \qquad w_m = \tfrac{1}{2}BH.$$

Lijeva jednadžba (brojčana) prilagođena je, dakako, jedinicama CGSE sistema jedinica. I ovdje ćemo umjesto simbola za brojčane iznose uvrstiti omjere veličina i jedinica $\{w\}_m = w_m/[w]$, $\{B\} = B/[B]$, $\{H\} = H/[H]$, što uvrštenjem u brojčanu jednadžbu rezultira sa

$$\frac{w_m}{[w]} = \frac{B}{[B]}\,\frac{H}{[H]}\,\frac{1}{8\pi}, \quad \text{odnosno} \quad w_m = \tfrac{1}{2}BH\,\frac{[w]}{4\pi\,[B]\,[H]}.$$

Usporedimo li dobiveni desni izraz s veličinskom jednadžbom $w_m = \frac{1}{2}BH$, dobivamo izraz za jedinicu magnetske indukcije u CGSE sistemu

$$[B] = [B]_e = \frac{[t]}{[l]}\sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\epsilon_0^{-1}}.$$

Pošto uvrstimo vrijednost za $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m, računanjem nastaje

$$[B]_e = 2{,}9979 \cdot 10^6 \text{ T},$$

gdje je tesla = T = Vs/m^2 jedinica Međunarodnog sistema, SI, (odsječak 2.2).

4.1.5. CGSE jedinice ostalih »magnetskih« veličina. Budući da je veličinska jednadžba $\Phi = BA$ jednako građena kao i brojčana (vidi tablicu **40** u prilogu knjige), to je CGSE jedinica magnetskog toka

$$[\Phi]_e = [B]_e[l]^2 = 2{,}9979 \cdot 10^2 \text{ Wb},$$

gdje je weber = Vs = Tm^2 (vidi odlomak 2.2.4).

I jednadžba za magnetski napon V jednako izgleda u veličinskom i u brojčanom obliku (vidi tablice E-1 i **40**). Stoga je CGSE jedinica magnetskog napona

$$[V]_e = [H]_e[l] = 2{,}6544 \cdot 10^{-9} \text{ Am}^{-1} \cdot \text{cm} = 2{,}6544 \cdot 10^{-11} \text{ A}.$$

I brojčana jednadžba $\{B\} = \{\mu\}\{H\}$ građena je posve analogno veličinskoj $B = \mu H$. Budući da je $\mu = \{\mu\}[\mu]$, gdje je $[\mu]$ jedinica permeabilnosti CGSE sistema, usporedbom odmah slijedi

$$[\mu] = [\mu]_e = \frac{[B]}{[H]} = \frac{[t]^2}{[l]^2}\,\frac{1}{\epsilon_0} = 1{,}1294 \cdot 10^{15} \text{ H/m},$$

gdje je H kratica za henry, jedinicu induktiviteta Međunarodnog sistema jedinica (SI). Gornju jedinicu $[\mu]_e$ sistema CGSE možemo napisati i u drukčijem obliku. U odlomku 1.4.1 utvrdili smo da je u vakuumu brzina elektromagnetskog polja vezana s električkom i magnetskom konstantom pomoću jednadžbe $\epsilon_0\mu_0 v_0^2 = 1$. Stavimo li $1/\epsilon_0 = \mu_0 v_0^2$ te $[l] = \text{cm}$ i $[t] = \text{s}$ u gornju jednadžbu, dobivamo

$$[\mu]_e = \mu_0 v_0^2 \cdot \text{s}^2/\text{cm}^2 = c^2\mu_0, \tag{4.1-12}$$

jer je novo uvedeni *brojčani iznos* c u gornjoj jednadžbi

$$c = \frac{v_0}{\text{cm/s}},$$

a to je *brojčani iznos* brzine elektromagnetskog polja izražen centimetrima u sekundi, dakle $c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$. Naznačena magnetska konstanta iznosi, dakako, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

CGSE jedinicu magnetske polarizacije odredit ćemo usporedbom brojčane jednadžbe (vidi tablicu **40** u prilogu knjige) i veličinske (tablica E-1), koje međusobno povezuju brojčane iznose, odnosno veličine B, H i J:

$$\{B\} = \frac{1}{c^2}\{H\} + 4\pi\{J\} \qquad (4.1\text{-}13)$$

$$B = \mu_0 H + J. \qquad (4.1\text{-}14)$$

Lijevo je brojčana jednadžba, a desno prava veličinska jednadžba. Budući da su brojčani iznosi omjeri veličina i pripadnih jedinica, za brojčanu jednadžbu (4.1-13) možemo napisati $\{B\} = B/[B]$, $\{H\} = H/[H]$, $\{J\} = J/[J]$, gdje su u uglatim zagradama CGSE jedinice. Uvrštenje u brojčani izraz (4.1-13) daje

$$\frac{B}{[B]} = \frac{H}{c^2[H]} + 4\pi\frac{J}{[J]} \quad \text{ili} \quad B = H\frac{[B]}{c^2[H]} + J\frac{4\pi[B]}{[J]}.$$

Netom smo u (4.1-12) izveli da je $[B]/[H] = [\mu] = c^2\mu_0$. Pomoću tog odnosa gornja jednadžba prelazi u oblik

$$B = \mu_0 H + J\frac{4\pi[B]}{[J]},$$

što usporedbom s veličinskom jednadžbom rezultira sa

$$[J] = [J]_e = 4\pi[B]_e = [l]^{-1}[t]\sqrt{4\pi[w]\epsilon_0^{-1}} = 3{,}7673 \cdot 10^7 \text{ T}.$$

Odavde vidimo da jedinice $[B]$ i $[J]$ nisu međusobno jednake kao u Međunarodnom sistemu jedinica, već je $[J] = 4\pi[B]$.

Ovdje bismo još morali objasniti kako je u brojčanu jednadžbu (4.1-13) ušao faktor c^2. Znamo da je relativna permeabilnost $\mu_r = \mu/\mu_0$, gdje je μ (apsolutna) permeabilnost, a μ_0 magnetska konstanta (odlomak 1.3.2). Za vakuum je $\mu_r = 1$, pa je dakle $\mu = \mu_0$. S druge je strane veličina $\mu = \{\mu\}[\mu]_e$, gdje simbol $\{\mu\}$ predstavlja brojčani iznos permeabilnosti u CGSE sistemu. Prema tome je $\{\mu\}[\mu]_e = \mu_0$, odnosno $\{\mu\}c^2\mu_0 = \mu_0$, jer je na snazi izraz (4.1-12). Prema tome je $\{\mu\} = \{\mu\}_e = 1/c^2$, pa brojčanu jednadžbu (4.1-13) možemo pisati i u obliku $\{B\} = \{\mu\}_e\{H\} + 4\pi\{J\}$, gdje je $\{\mu\}_e = 1/c^2$ brojčani iznos permeabilnosti vakuuma izražen CGSE jedinicom $[\mu]_e$.

Ovakvim računanjem mogli bismo nastaviti dalje dok ne bismo izračunali sve odnose između jedinica CGSE i SI. Umjesto toga preskočit ćemo izvođenje, a rezultate dijelom navesti u stupcu 3 tablice E-24, odnosno mnogo potpunije u tablici **40** u prilogu knjige.

4.1.6. Primjeri upotrebe CGSE jedinica. S izvedenim CGSE jedinicama možemo dakako računati i u *veličinskim jednadžbama*, što je razumljivo, budući da smo veličinske jednadžbe uzeli za osnovu pri izračunavanju odnosa između jedinica CGSE i SI. O tome ćemo se uvjeriti na nekoliko primjera u kojima ćemo paralelno računati s veličinskim jednadžbama i s brojčanima koje su prilagođene CGSE sistemu jedinica.

Neka se u magnetskom polju jakosti $H = 100$ A/m nalazi feromagnetik relativne permeabilnosti $\mu_r = 100$. Treba ustanoviti kolika je magnetska indukcija B. Računat ćemo pomoću veličinske jednadžbe $B = \mu H$. U našem primjeru permeabilnost iznosi $\mu = \mu_r \cdot \mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-4}$ H/m. Stoga je magnetska indukcija $B = 1{,}256 \cdot 10^{-4}\,\text{Hm}^{-1} \cdot 100\,\text{Am}^{-1} = 1{,}256 \cdot 10^{-2}$ T.

Veličinski račun s CGSE jedinicama tekao bi ovako. Budući da je prema tablici **40** jedinica permeabilnosti u CGSE sistemu $[\mu]_e = 1{,}1294 \cdot 10^{15}$ H/m, to je obrnuto H/m $= 8{,}85 \cdot 10^{-16} \cdot [\mu]_e$, pa je dakle veličina $\mu = 1{,}256 \cdot 10^{-4} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-16} \cdot [\mu]_e = 1{,}1127 \cdot 10^{-19} \cdot [\mu]_e$. Zato što je $[H]_e = 2{,}654 \cdot 10^{-9}$ A/m, obrnuti je odnos A/m $= 3{,}767 \cdot 10^{8} \cdot [H]_e$, pa je jakost magnetskog polja izražena u CGSE jedinici $H = 100 \cdot 3{,}767 \cdot 10^{8} \cdot [H]_e = 3{,}767 \cdot 10^{10} \cdot [H]_e$. Prema tome magnetska indukcija iznosi

$$B = \mu H = 1{,}1127 \cdot 10^{-19}\,[\mu]_e \cdot 3{,}767 \cdot 10^{10} [H]_e = 4{,}195 \cdot 10^{-9} [B]_e,$$

jer je, kako smo prije utvrdili, $[B]_e = [\mu]_e [H]_e$.

Budući da o takvoj vrijednosti magnetske indukcije nemamo nikakve predodžbe, potražimo u tablici **40** odnos između CGSE i SI jedinice indukcije. Nalazimo $[B]_e = 2{,}9979 \cdot 10^{6}$ T, pa je konačno

$$B = 4{,}195 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^{6}\ \mathrm{T} = 1{,}256 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T},$$

dakle isti rezultat koji smo dobili kratkim postupkom pomoću jedinica SI.

Sad još proračunajmo isti primjer pomoću *brojčane* jednadžbe $\{B\} = \{\mu\}\{H\}$, u kojoj vitičasti simboli označuju brojčane iznose u CGSE jedinicama. Već smo prije izračunali da je veličina $\mu = 1{,}1127 \cdot 10^{-19} \cdot [\mu]_e$. Prema tome je brojčani iznos indukcije u CGSE jedinici $\{\mu\} = \mu/[\mu]_e = 1{,}1127 \cdot 10^{-19}$. Isto smo tako izračunali i veličinu $H = 3{,}767 \cdot 10^{10} \cdot [H]_e$, dakle u CGSE jedinici, pa je prema tome $\{H\} = H/[H] = 3{,}767 \cdot 10^{10}$. Brojčani račun, dakle, glasi

$$\{B\} = \{\mu\}\,\{H\} = 1{,}1127 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}767 \cdot 10^{10} = 4{,}195 \cdot 10^{-9}.$$

U skladu s brojčanim računom sada još moramo reći da je $\{B\} = 4{,}195 \cdot 10^{-9}$ brojčani iznos magnetske indukcije u jedinici CGSE sistema $[B]_e$. U duhu univerzalnih veličinskih jednadžbi to je $\{B\} = B/[B]_e$, dakle $B = \{B\} \cdot [B]_e = 4{,}195 \cdot 10^{-9} \cdot [B]_e = 1{,}256 \cdot 10^{-2}$ T.

Pogledajmo još kako će glasiti *brojčana jednadžba* prvog *Maxwell*ova zakona koji u veličinskom ruhu glasi

$$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{4.1-15}$$

gdje kurzivni simboli predstavljaju, dakako, veličine. Pri tom ćemo raditi po načelu »veličina = brojčani iznos × jedinica«, dakle $G = \{G\}\,[G]$, gdje vitičasti znak prikazuje brojčani iznos. Prema tome za naše tri veličine možemo pisati $E = \{E\}\,[E]$, $B = \{B\}\,[B]$, $t = \{t\}\,[t]$, gdje desne zagrade predstavljaju jedinice CGSE sistema. Sada još treba s time dovesti u vezu operaciju rot. Da ne pišemo čitav izraz, poslužimo se samo s $\mathrm{rot}_x E$ po osi x. U veličinskom obliku on glasi

$$\mathrm{rot}_x E = \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial y},$$

pa ako u nj uvrstimo $E = \{E\}\,[E]$, slijedi

$$\mathrm{rot}_x E = \frac{\partial \{E_z\}[E]}{\partial \{y\}[l]} - \frac{\partial \{E_y\}[E]}{\partial \{z\}[l]} = \frac{[E]}{[l]}\,\mathrm{rot}_x \{E\},$$

jer jedinice ne podliježu naznačenoj matematičkoj operaciji. Općenito možemo pisati

$$\mathrm{rot}\, E = [l]^{-1}\,[E]\,\mathrm{rot}\,\{E\}, \tag{4.1-16}$$

gdje su $[l]$ = cm, a $[E] = [E]_e$.

Tablica **E-24**

Jedinice nekih veličina u elektrostatskom (CGSE) i magnetostatskom (CGSM) sistemu jedinica

Red. br.	Naziv veličine	Jedinica CGSE sistema	Jedinica CGSM sistema
1	2	3	4
1	Elektrika	$[Q]_e = [l]^{3/2} \sqrt{4\pi\,[w]\,\epsilon_0}$	$[Q]_m = [l]\,[t]\sqrt{4\pi\,[w]\,\mu_0^{-1}}$
2	Jakost električkog polja	$[E]_e = \sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\epsilon_0^{-1}}$	$[E]_m = [l]\,[t]^{-1}\sqrt{(4\pi)^{-1}[w]\mu_0}$
3	Električka indukcija	$[D]_e = \sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\epsilon_0}$	$[D]_m = [l]^{-1}[t]\sqrt{(4\pi)^{-1}[w]\mu_0^{-1}}$
4	Dielektričnost	$[\epsilon]_e = \epsilon_0$	$[\epsilon]_m = [l]^{-2}\,[t]^2\,\mu_0^{-1}$
5	Električka polarizacija	$[P]_e = \sqrt{4\pi\,[w]\,\epsilon_0}$	$[P]_m = [l]^{-1}\,[t]\,\sqrt{4\pi\,[w]\,\mu_0}$
6	Magnetski tok	$[\Phi]_e = [l]\,[t]\,\sqrt{(4\pi)^{-1}[w]\epsilon_0^{-1}}$	$[\Phi]_m = [l]^{3/2}\sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\mu_0}$
7	Magnetska indukcija	$[B]_e = [l]^{-1}[t]\sqrt{(4\pi)^{-1}[w]\epsilon_0^{-1}}$	$[B]_m = \sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\mu_0}$
8	Jakost magnetskog polja	$[H]_e = [l]\,[t]^{-1}\sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\epsilon_0}$	$[H]_m = \sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\mu_0^{-1}}$
9	Permeabilnost	$[\mu]_e = [l]^{-2}\,[t]^2\,\epsilon_0^{-1}$	$[\mu]_m = \mu_0$
10	Magnetska polarizacija	$[J]_e = [l]^{-1}\,[t]\,\sqrt{4\pi\,[w]\,\epsilon_0^{-1}}$	$[J]_m = \sqrt{4\pi\,[w]\,\mu_0}$
11	Električki napon	$[U]_e = [l]\,\sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\epsilon_0^{-1}}$	$[U]_m = [l]^{3/2}\,[t]^{-1}\sqrt{(4\pi)^{-1}[w]\mu_0}$
12	Električna struja	$[I]_e = [l]^{3/2}[t]^{-1}\sqrt{4\pi\,[w]\,\epsilon_0}$	$[I]_m = [l]\,\sqrt{4\pi\,[w]\,\mu_0^{-1}}$
13	Električki otpor	$[R]_e = [l]^{-1}\,[t]\,(4\pi)^{-1}\,\epsilon_0^{-1}$	$[R]_m = [l]\,[t]^{-1}\,(4\pi)^{-1}\,\mu_0$
14	Kapacitet	$[C]_e = [l]\,4\pi\,\epsilon_0$	$[C]_m = [l]^{-1}\,[t]^2\,4\pi\,\mu_0^{-1}$
15	Induktivitet	$[L]_e = [l]^{-1}\,[t]^2\,(4\pi)^{-1}\,\epsilon_0^{-1}$	$[L]_m = [l]\,(4\pi)^{-1}\,\mu_0$

Desni dio veličinske jednadžbe (4.1-15) lako razložimo na brojčani iznos i jedinicu CGSE $[B] = [B]_e$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial\{B\}[B]}{\partial\{t\}[t]} = \frac{[B]}{[t]}\,\frac{\partial\{B\}}{\partial\{t\}}\,.$$

Složimo li ovu jednadžbu zajedno sa (4.1-16) u izraz (4.1-15), dobivamo brojčanu jednadžbu

$$\operatorname{rot}\{E\} = -\frac{\partial\{B\}}{\partial\{t\}}\,\frac{[l]\,[B]}{[t]\,[E]}\,. \qquad (4.1\text{-}17)$$

Izračunajmo odnos četiriju jedinica na desnoj strani ove brojčane jednadžbe. Izvadimo li izraze za ove jedinice iz tablice E-24, dobivamo

$$\frac{[l]}{[t]}\,\frac{[l]^{-1}\,[t]\sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\epsilon_0^{-1}}}{\sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\epsilon_0^{-1}}} = 1.$$

Prema tome *brojčana* jednadžba ima oblik

$$\mathrm{rot}\{E\} = -\frac{\partial\{B\}}{\partial\{t\}},$$

dakle posve isti kao i veličinska jednadžba (4.1-15) od koje smo počeli naše razmatranje.

4.2. Magnetostatski (CGSM) sistem jedinica

4.2.1. Ishodište sistema CGSM. Na početku prošlog odsječka naglasili smo da su fizikalni sistemi jedinica elektromagnetizma nastali u doba kad je nauka o električkim pojavama bila još odvojena od magnetike, kad univerzalne teorije elektromagnetizma još nije bilo. U skladu s time nastali su i *odvojeni* sistemi jedinica. U odsječku 4.1 obradili smo takozvani elektrostatski sistem jedinica (CGSE) koji je nikao na temelju predodžbe o međusobnom djelovanju dviju množina elektrike bez uvođenja pojma polja (elektrostatskog), kako se to danas radi. Taj sistem jedinica pretežno se upotrebljavao za mjerenje »električkih veličina«, tj. onih koje se lako mogu jednadžbama definirati iz veličine Q. Na »magnetske veličine« taj se sistem gotovo uopće nije primjenjivao, iako smo u prošlom odsječku razmotrili i njegovu upotrebu za takozvane magnetske veličine.

Paralelno sa CGSE sistemom jedinica osnovan je i magnetostatski (CGSM) sistem jedinica (vidi odsječak 4.5) koji je imao svoje ishodište u zakonu o mehaničkom djelovanju između dviju »magnetskih masa« ili »magnetskih polova«. Taj zakon potpuno je analogan izrazu (4.1-4) u prošlom odsječku, ako se znak za elektriku zamijeni simbolom za »magnetsku masu«. Pri tom je pojam polja u današnjem smislu bio nepoznat, pa se sila svodila na »djelovanje na daljinu« kao i kod privlačenja »nebeskih masa«. U daljnjim razmatranjima mimoići ćemo stare pojmove magnetskih masa i polova, jer danas je to historija. Znamo, naime, da magnetizam nije samorodna pojava, već da se svodi na posebno stanje prostora ili tvari u kojemu postoji električna struja, pa bilo da je riječ o magnetima makroskopskih dimenzija ili o sićušnim magnetskim listićima prema *Ampère*u, odnosno o *Weiss*ovim poljima magnetika.

Ovdje smo upotrijebili naziv »magnetostatski« sistem jedinica (CGSM), iako se većinom upotrebljava naziv »elektromagnetski« sistem jedinica. To smo učinili s promišljenošću prema analogiji s »elektrostatskim« sistemom, jer oznakom »elektromagnetski« obuhvaćamo u duhu suvremene terminologije mnogo šire, čitavo područje elektromagnetizma. Tako nije mišljeno ni pri osnivanju ni pri primjeni CGSM sistema. »Elektromagnetski« je, na primjer, Tehnički sistem jedinica (vidi poglavlje 5), ako baš želimo imati naročito precizna obilježavanja.

Budući da u naša razmatranja ne želimo uvlačiti preživjeli i nerealni pojam magnetskih masa, razvit ćemo CGSM sistem jedinica na primjeru kad kroz dva vrlo dugačka paralelna vodiča teku struje I_1 i I_2. Radi jednostavnosti smatrajmo da se u magnetskom polju prvog vodiča $H = I_1/(2\pi r)$ nalazi drugi vodič sa strujom I_2 (usporedi s odlomkom 2.1.3; vidi sliku E.12). Ako su oba vodiča u vakuumu, magnetska indukcija u udaljenosti r od prvog vodiča iznosit će $B = \mu_0 H = \mu_0 I_1/(2\pi r)$. Prema općem izrazu $F = B I_2 l$ za silu između magnetskog polja indukcije B i vodiča duljine l kojim teče struja I_2, u našem slučaju možemo pisati

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r},$$

gdje je r udaljenost između osi oba vodiča. Ako su te dvije struje međusobno jednake, dakle $I_1 = I_2 = I$, gornji izraz možemo napisati u pojednostavnjenom obliku

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} \quad \text{ili} \quad F 2\pi r = \mu_0 I^2 l. \tag{4.2-1}$$

Sve navedene jednadžbe su veličinske, simboli dakle predstavljaju veličine, a vrijede za beskrajno dugačke i neizmjerno tanke vodiče.

Brojčana jednadžba prilagođena jedinicama CGSM sistema glasi

$$\{F\} = 2\{I\}^2 \{l\}/\{r\} \quad \text{ili} \quad \{F\}\{r\} = 2\{I\}^2\{l\}, \tag{4.2-2}$$

gdje simboli u vitičastim zagradama predstavljaju, dakako, brojčane iznose prilagođene CGSM jedinicama koje možemo po principu »brojčani iznos = veličina: :jedinica« ($\{G\} = G/[G]$) izraziti sa

$$\{F\} = F/[F], \quad \{I\} = I/[I], \quad \{l\} = l/[l], \quad \{r\} = r/[l]. \tag{4.2-3}$$

U uglatim zagradama zatvorene su jedinice CGSM sistema, na koje ćemo zbog jednostavnijeg tiskanja samo u pojedinim slučajevima stavljati indeks m, kao što smo u prošlom odsječku samo na neke jedinice CGSE sistema stavljali indeks e, čime je precizno označeno da je riječ o jedinici CGSE sistema.

4.2.2. CGSM jedinice struje i elektrike. Uvrstimo li navedene brojčane iznose jednadžbi (4.2-3) u desnu brojčanu jednadžbu (4.2-2), dobivamo

$$\frac{F}{[F]}\,\frac{r}{[l]} = 2\frac{I^2}{[I]^2}\,\frac{l}{[l]},$$

odakle sređenjem slijedi

$$Fr = 2I^2 l\,[F]/[I]^2.$$

Uvrstimo li ovamo veličinsku jednadžbu (4.2-1), računanjem odmah nastaje odnos između CGSM jedinica

$$[I]^2 = 4\pi[F]/\mu_0.$$

U prošlom smo odsječku ispred jednadžbe (4.1-7) izveli odnos među CGS jedinicama sile $[F]$ = dyn, gustoće energije $[w]$ i duljine $[l]$ = cm. Taj odnos glasi $[F] = [w][l]^2$, pa time uvrštenjem u gornju jednadžbu za CGSM jedinicu jakosti električne struje $[I] = [I]_m$ dobivamo

$$[I]_m = [l]\sqrt{4\pi[w]\,\mu_0^{-1}}. \tag{4.2-4}$$

Izračunajmo koliko jedinica SI sadrži $[I]_m$. U tu svrhu u gornji izraz uvrštavamo $[l]$ = cm = 10^{-2} m, $[w]$ = erg/cm^3 = 10^{-1} J/m^3 i $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m. Podsjetimo se još da je H = Vs/A, čime dobivamo

$$[I]_m = 10^{-2}\,\text{m}\sqrt{4\pi\cdot 10^{-1}\,\text{Jm}^{-3} : 4\pi\cdot 10^{-7}\,\text{Vs A}^{-1}\,\text{m}^{-1}} = 10\ \text{A}.$$

Prema tome je CGSM jedinica jakosti električne struje 10 puta veća od jedinice SI. Budući da je (vidi odlomak 4.1.2) $[w]$ = g cm^{-1}s^{-2}, izraz (4.2-4) može se napisati i u obliku

$$[I]_m = (4\pi)^{1/2}\,\text{cm}^{1/2}\,\text{g}^{1/2}\,\text{s}^{-1}\,\mu_0^{-1/2}. \tag{4.2-5}$$

Iz formula (4.2-4) i (4.2-5) vidimo da se besprijekoran CGSM sistem temelji na *četiri* osnovne jedinice, kao što je u elektromagnetizmu i potrebno. Centimetru,

gramu i sekundi ovdje se pridružila i magnetska konstanta μ_0, dok je kod CGSE sistema umjesto μ_0 bila električka konstanta ϵ_0.

Ostale jedinice CGSM sistema možemo izvoditi analogno kao što smo to činili u prošlom odsječku. Jedinica elektrike, na primjer, iznosit će zbog $Q = It$

$$[Q]_m = [I]_m[t] = [l][t]\sqrt{4\pi\,[w]\,\mu_0^{-1}} = (4\pi)^{1/2}\,\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mu_0^{-1/2}. \qquad (4.2\text{-}6)$$

Takav put je, međutim, dugotrajan. Jednostavnije se do jedinice CGSM sistema dolazi pomoću odnosa između μ_0 i ϵ_0. U to ćemo se uvjeriti na jednostavnom primjeru. Podijelimo li $[I]_m$ sa $[I]_e$ (vidi tablicu E-24), dobivamo

$$\frac{[I]_m}{[I]_e} = \frac{[l]\sqrt{4\pi\,[w]\,\mu_0^{-1}}}{[l]^2[t]^{-1}\sqrt{4\pi\,[w]\,\epsilon_0}} = \frac{v_0}{\mathrm{cm/s}} = c, \qquad (4.2\text{-}7)$$

dakle $[I]_m = c[I]_e$, gdje je $c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$ brojčani iznos brzine elektromagnetskog polja u vakuumu izražen jedinicom cm/s. Do gornjeg smo izraza došli uz pomoć relacije $\epsilon_0\mu_0 v_0^2 = 1$ (vidi odsječak 1.4).

Analiziramo li omjer gornjih dviju jedinica jakosti struje u CGSM i CGSE sistemu, dolazimo do zaključka da se od elektrostatskih jedinica na magnetostatske dolazi tako da se u prve umjesto ϵ_0 stavi izraz $[l]^{-2}[t]^2\mu_0^{-1}$, to jest $s^2:(\mu_0\,\mathrm{cm}^2)$.

4.2.3. Jedinice gauss i oersted. Primijenimo navedeno pravilo na proračun jedinice magnetske indukcije u CGSM sistemu, $[B]_m$. U stupcu 3 tablice E-24 nalazimo izraz za jedinicu $[B]_e$. U skladu s pravilom bit će magnetostatska jedinica magnetske indukcije

$$[B]_m = [l]^{-1}\,[t]\sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,[l]^2\,[t]^{-2}\,\mu_0},$$

odakle dalje slijedi

$$[B]_m = \sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\mu_0} = \mathrm{gauss} = \mathrm{G}.$$

U produžetku smo odmah napisali ime i kraticu, kako se ta jedinica naziva prema čuvenom učenjaku *C. F. Gauss*u.

Uvrstimo li u gornji izraz $[w] = 10^{-1}\,\mathrm{J/m^3}$ te $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, nastaje vrijednost jedinice $[B]_m = \mathrm{G}$ u jedinici tesla ($\mathrm{T} = \mathrm{Vs/m^2}$; vidi odsječak 2.2)

$$[B]_m = \sqrt{10^{-1}\mathrm{Jm^{-3}} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\mathrm{VsA^{-1}m^{-1}}:4\pi} = 10^{-4}\,\mathrm{T},$$

tj. CGSM jedinica magnetske indukcije 10 tisuća puta je manja od jedinice SI tesla. Stanovitu predodžbu o veličini jedinice gauss = G možemo steći ako na teslu primijenimo decimalni višekratnik mili = m = 10^{-3} (vidi odsječak A.2.3 i tablicu A-1)

$$\mathrm{G} = \mathrm{gauss} = [B]_m = 0{,}1\,\mathrm{mT} \qquad \text{ili} \qquad \mathrm{mT} = 10\,\mathrm{G}.$$

Napominjemo da jedinicu gauss još i *danas* prečesto nalazimo u literaturi fizičara i elektrotehničara. Pri tom se obično upotrebljava dekadski višekratnik kilo = k = 10^3, tj.

$$\mathrm{kG} = \mathrm{kilogauss} = 10^3\,\mathrm{G} = 10^3\,[B]_m = 0{,}1\,\mathrm{T} = 100\,\mathrm{mT}.$$

Primjenom ključa koji smo spomenuli pri samom kraju odlomka 4.2.2 dobivamo od CGSE jedinice jakosti magnetskog polja $[H]_e$ jedinicu $[H]_m$ sistema

CGSM tako da u jednadžbu za $[H]_e$ u stupcu 3 tablice E-24 umjesto ϵ_0 stavimo $[l]^{-2}[t]^2\mu_0^{-1}$:

$$[H]_m = [l]\,[t]^{-1}\sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,[l]^{-2}\,[t]^2\,\mu_0^{-1}}.$$

Odavde slijedi dalje

$$[H]_m = \sqrt{(4\pi)^{-1}\,[w]\,\mu_0^{-1}} = \text{oersted} = \text{Oe}.$$

Ovdje smo u produžetku odmah napisali naziv i kraticu te jedinice nazvane prema danskom učenjaku *C. H. Oerstedu*. Iz gornje jednadžbe lako izračunamo da je

$$[H]_m = \text{Oe} = \text{oersted} = \frac{1000\,\text{A}}{4\pi\,\text{m}} = 79{,}577\ldots\ \text{A/m}.$$

Budući da se odnos Oe = 79,577 A/m često upotrebljava, donosimo tablicu E-25 koja olakšava preračunavanje vrijednosti H sa jedinice Oe na jedinicu SI A/m.

Primjer. Proračun permanentnih magneta temelji se na jednadžbi $B_z^2 = \mu_0 HBV/V_z$, gdje se veličine s indeksom z odnose na zračni raspor, a veličine bez indeksa na sam magnet (alnico, barijev ferit itd.; V — volumen). Zato je važno da se magnet projektira tako da umnožak BH bude maksimalan; to se označuje sa $(BH)_{max}$. U većini prospekata nalazimo vrijednost tog umnoška u jedinici GOe = gauss·oersted = $[B]_m\,[H]_m$. Izračunajmo kolika je vrijednost $(BH)_{max} = 3\cdot10^6$ GOe u jedinicama Međunarodnog sistema (SI).

Budući da je G = $[B]_m = 10^{-4}$ tesla = 10^{-4} T, a Oe = $[H]_m$ = 79,57 A/m, množenjem ovih dviju jedinica CGSM sistema dobivamo

$$\text{G}\cdot\text{Oe} = 10^{-4}\,\text{T}\cdot\frac{1000}{4\pi}\,\frac{\text{A}}{\text{m}} = 7{,}957\cdot10^{-3}\,\frac{\text{AT}}{\text{m}}.$$

U tablici E-4 nalazimo da je joule = J = AT m², tj. AT = J/m². Prema tome možemo pisati

$$\text{G}\cdot\text{Oe} = 7{,}957\cdot10^{-3}\ \text{J/m}^3,$$

pa za konkretan slučaj dobivamo $(BH)_{max} = 3\cdot10^{-6}\cdot7{,}957\cdot10^{-3}\ \text{J/m}^3 = 2{,}38\cdot10^4\ \text{J/m}^3 = 23{,}8$ mJ/cm³, gdje je mJ = milijoule = 10^{-3} J. Vidimo da je $(BH)_{max}$ izražen jedinicom prostorne gustoće energije. To je razumljivo, jer je gustoća energije magnetskog polja definirana jednadžbom $w = \frac{1}{2}BH$ (vidi odlomak 1.4.4).

4.2.4. CGSM jedinice ostalih veličina. Jedinice CGSM sistema nekih drugih veličina izražene su sa $[l]$, $[t]$, $[w]$ i μ_0 u stupcu 4 tablice E-24, a gotovo potpuni niz odnosa među jedinicama magnetostatskog i Međunarodnog sistema jedinica naveden je u stupcima 9, 10 i 11 tablice **40** u prilogu knjige. Tako je, na primjer, CGSM jedinica magnetskog toka $[\Phi]_m$ = maxwell = M = 10^{-8} Vs, a jedinica magnetskog napona $[V]_m$ = gilbert = Gb = 0,79577 A.

U stupcu 12 tablice **40** nanizali smo *brojčane* jednadžbe koje su prilagođene jedinicama *magnetostatskog* sistema CGSM. Usporedimo li ih s brojčanim jednadžbama koje su prilagođene *elektrostatskom* sistemu jedinica CGSE, vidimo da među njima nema znatne razlike. Do razlika dolazi samo tamo gdje se pojavljuju brojčani iznosi za dielektričnost i permeabilnost. To je i razumljivo kad se podsjetimo računa u prošlom odsječku, gdje smo utvrdili da je *brojčani iznos* permeabilnosti vakuuma kad ga izražavamo CGSE jedinicom $\{\mu\}_e = 1/c^2$. Posve je analogno s brojčanom vrijednosti *dielektričnosti* u CGSM sistemu, što ćemo odmah vidjeti.

Iz odsječka 1.3 znamo da se relativna permeabilnost može utvrditi omjerom veličina permeabilnost μ i magnetska konstanta μ_0, dakle $\mu_r = \mu/\mu_0$. U CGSM sistemu jedinica brojčani iznos permeabilnosti je $\{\mu\} = \{\mu\}_m = \mu/\mu_0$, jer je μ_0 jedinica permeabilnosti u sistemu CGSM. Prema tome je $\mu_r = \{\mu\}_m$, kao što je u CGSE sistemu bilo $\epsilon_r = \{\epsilon\}_e$.

Tablica E-25

Preračunavanje vrijednosti jakosti magnetskog polja sa jedinice CGSM oersted na jedinicu SI A/m

Oe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		79,58	159,16	238,74	318,32	397,90	477,48	557,06	636,64	716,22
10	795,78	875,36	954,94	1034,52	1114,10	1193,68	1273,26	1352,84	1432,42	1512,00
20	1591,56	1671,14	1750,72	1830,30	1909,88	1989,46	2069,04	2148,62	2228,20	2307,78
30	2387,34	2466,92	2546,50	2626,08	2705,66	2785,24	2864,82	2944,40	3024,98	3103,56
40	3183,12	3262,70	3342,28	3421,86	3501,44	3581,02	3660,60	3740,18	3819,76	3899,34
50	3978,90	4058,48	4138,06	4217,64	4297,22	4376,80	4456,38	4535,96	4615,54	4695,12
60	4774,68	4854,26	4933,84	5013,42	5093,00	5172,58	5252,16	5331,74	5411,32	5490,90
70	5570,46	5650,04	5729,62	5809,20	5888,78	5968,36	6047,94	6127,52	6207,10	6286,68
80	6366,24	6445,82	6525,40	6604,98	6684,56	6764,14	6843,72	6923,30	7002,88	7082,46
90	7162,02	7241,60	7321,18	7400,76	7480,34	7559,92	7639,50	7719,08	7798,66	7878,24
100	7957,80	8037,38	8116,96	8196,54	8276,12	8355,70	8435,28	8514,86	8594,44	8674,02
110	8753,58	8833,16	8912,74	8992,32	9071,90	9151,48	9231,06	9310,64	9390,22	9469,80
120	9549,36	9628,94	9708,52	9788,10	9867,68	9947,26	10026,84	10106,42	10186,00	10265,58

Primjer: 12,8 Oe = 954,94 A/m + 63,66 A/m = 1018,60 A/m.

Brojčanu vrijednost dielektričnosti vakuuma $\{\epsilon\}_m$ u CGSM sistemu izračunat ćemo na slijedeći način. Brojčana jednadžba glasi $\{D\}_m = \{\epsilon\}_m\{E\}_m$, gdje indeksi m upućuju da je riječ o primjeni magnetostatskih jedinica. Očito je $\{\epsilon\}_m = \epsilon_0/[\epsilon]_m$, tj. omjer električke konstante ϵ_0 i CGSM jedinice dielektričnosti. U tablici E-24 nalazimo da je $[\epsilon]_m = [l]^{-2}[t]^2\mu_0^{-1}$, što znači da je brojčani iznos relativne dielektričnosti vakuuma u CGSM sistemu

$$\{\epsilon\}_m = \frac{\epsilon_0}{[\epsilon]_m} = \frac{\epsilon_0[l]^2\mu_0}{[t]^2}.$$

S druge je strane, kako znamo iz odsječka 1.4, $\epsilon_0\mu_0 v_0^2 = 1$, a budući da je $v_0 = c[l][t]^{-1}$, gdje je $[l] = \text{cm}$, $[t] = \text{s}$, gornja jednadžba dobiva oblik

$$\{\epsilon\}_m = [l]^2[t]^{-2}c^{-2}[l]^{-2}[t]^2 = c^{-2} = \frac{1}{c^2}.$$

Stoga je konačno brojčani iznos dielektričnosti vakuuma u CGSM jedinicama $\{\epsilon\}_m = 1/c^2$, pa umjesto pripadne brojčane jednadžbe $\{D\}_m = \{\epsilon\}_m\{E\}_m$ možemo pisati

$$\{D\} = \frac{\{E\}}{c^2},$$

gdje smo napustili indekse m jer znamo da je riječ o brojčanoj jednadžbi prilagođenoj CGSM sistemu jedinica.

4.2.5. CGSM jedinica magnetizacije. Kad pregledavamo odnose između jedinica CGSM i Međunarodnog sistema u tablici **40,** svakako pada u oči da je jedinica magnetske polarizacije

$$[J]_m = 1{,}2566\cdot 10^{-3}\ \text{T},$$

a ne $[B]_m = \text{gauss} = 10^{-4}$ T. To je upadljivo zbog toga jer iz prakse znamo da se brojčana jednadžba $\{B\} = \{H\} + 4\pi\{J\}$ često upotrebljava tako da je $\{B\} = \text{B}/[B]_m = B/\text{G}$, $\{H\} = H/\text{Oe}$ i $\{J\} = J/\text{G}$, tj. da se indukcija i magnetska polarizacija mjere u gaussima, a jakost polja u oerstedima.

Pokušajmo tu kontradikciju razjasniti ovim razmatranjem. Pretpostavimo da nije riječ o brojčanoj jednadžbi $\{B\} = \{H\} + 4\pi\{J\}$, već o brojčanoj jednadžbi $\{B\} = \{H\} + 4\pi\{M\}$, gdje je $\{M\}$ brojčani iznos neke veličine M izražene jedinicom G = gauss, kako se to, kao što smo rekli, ponekad radi. U tom su slučaju brojčani iznosi izraženi omjerom veličina i navedenih jedinica po načelu $\{G\} = G/[G]$ na ovaj način

$$\{B\} = B/\text{G}, \quad \{H\} = H/\text{Oe}, \quad \{M\} = M/\text{G}.$$

Stavimo li ove odnose u brojčanu jednadžbu $\{B\} = \{H\} + 4\pi\{M\}$, dobivamo

$$\frac{B}{\text{G}} = \frac{H}{\text{Oe}} + 4\pi\frac{M}{\text{G}},$$

odakle dalje slijedi veličinska jednadžba

$$B = \mu_0 H + 4\pi M, \quad \text{jer je} \quad \text{G/Oe} = [B]_m/[H]_m = \mu_0. \tag{4.2-8}$$

U tablici E-1 imamo napisanu veličinsku jednadžbu $B = \mu_0 H + J$, što znači da veličine M i J *nisu* međusobno jednake, već je $J = 4\pi M$. Prema tome mjerenje polarizacijskog člana jedinicom gauss u stvari znači mjerenje veličine »magnetizacije« M, a ne polarizacije J.

Ovdje nećemo navoditi primjer upotrebe jedinica magnetostatskog sistema, kao što smo to učinili u odlomku 4.1.6 za jedinice CGSE sistema. Posve je naravno da su ovdje prilike iste kao i kod CGSE sistema: s jedinicama magnetostatskog sistema može se računati u veličinskim jednadžbama po istim načelima po kojima se to radi s jedinicama SI.

4.3. Gaussov mješoviti sistem jedinica

4.3.1. Porijeklo naziva sistema. Primjena ili elektrostatskog CGSE ili magnetostatskog CGSM sistema na *čitavo područje elektromagnetizma* pokazala je da su brojčani iznosi nekih veličina, uz dosljednu primjenu bilo kojeg od ta dva sistema, djelomično neprikladni, bilo da su izvanredno veliki ili pak jako mali. Induktivitet svitka od 10 milihenrija, na primjer, često se javlja u fizici i elektrotehnici. U CGSM sistemu izrazit ćemo (vidi tablicu **40**) $L = 10\ \mathrm{mH}$ sa $L = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{9}\ [L]_m = 10^{7}\ [L]_m$, jer je $[L]_m = 10^{-9}\ \mathrm{H}$, a u CGSE sistemu sa $L = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-11}\ [L]_e / 8{,}987 = 1{,}11 \cdot 10^{-4}\ [L]_e$, jer je $[L]_e = 8{,}9872 \cdot 10^{11}\ \mathrm{H}$. Isto je tako u modernim električkim strojevima normalna magnetska indukcija $B = 1{,}8\ \mathrm{T}$, što znači da je sa CGSM jedinicom $B = 1{,}8 \cdot 10^{4}\ \mathrm{G} = 18\,000\ \mathrm{G}$, a sa CGSE jedinicom $B = 1{,}8 \cdot 10^{-6}\ [B]_e / 2{,}9979 = 6 \cdot 10^{-7}\ [B]_e$. Takvih bismo primjera mogli nanizati bezbroj.

Osim toga fizičari — koji su pretežno upotrebljavali oba sistema jedinica — nerado su mjerili »električke« veličine »magnetskim« (CGSM) jedinicama. Sve do pred kraj prošlog stoljeća elektromagnetizam je, naime, bio razdvojen na nauku o elektrici i na nauku o magnetizmu, jer se sve do tada nije pojavila univerzalna *Maxwell*ova teorija elektromagnetskog polja. Stoga su od CGSE i CGSM sistema jedinica složili nov »sistem« uz ovaj dogovor: Električke veličine mjerit ćemo jedinicama CGSE sistema, a magnetske veličine jedinicama CGSM sistema. Tako nastali mješoviti sistem jedinica prozvao je *Helmholtz* godine 1882. »Gaussovim sistemom jedinica«.

Danas smo u neprilici kad moramo odgovoriti na pitanje koje su veličine »električke«, a koje »magnetske«, jer takva podjela u današnje vrijeme konstruktivne i nadasve uspješne primjene teorije elektromagnetskog polja (radar, radioastronomija!) nema nikakva smisla ni opravdanja. U »električke« veličine ubrajale su se one koje se izvode iz elektrike Q, a u »magnetske« one koje prema definicijskim jednadžbama izviru iz magnetskog toka Φ. Stoga se i električna struja I ubrajala među »električke« veličine, pa je pitanje u koju skupinu moramo da uvrstimo induktivitet koji je prema $\Phi = L I$ vezan s jednom i drugom skupinom.

Takvi su problemi i s nizom drugih veličina koje danas drukčije definiramo nego u prošlosti. Na primjer, jakost magnetskog polja H mogli bismo mirno smatrati električkom veličinom, a jakost električkog polja magnetskom, ako bismo polazili od dvije osnovne *Maxwell*ove jednadžbe (vidi pod rednim brojevima 18 i 19 u tablici E-1) ili pak ako bismo pridavali neko značenje pozitivnosti ili negativnosti eksponenata omjera c u stupcu 13 tablice **40** (u prilogu knjige).

Budući da se CGSE i CGSM razlikuju u četvrtoj osnovnoj jedinici, Gaussov »sistem« jedinica nužno je *nekoherentan*, tj. jedinice nisu u međusobnom odnosu

$1 \times 1 = 1$ u čitavom području elektromagnetizma, već samo u nauci o elektrici s jedne strane, a u nauci o magnetizmu s druge strane. Stoga su se u nekim brojčanim jednadžbama, a takve su se ranije gotovo isključivo upotrebljavale, pojavili parazitni koeficijenti kao plod omjera jedinica CGSM i CGSE sistema. Znamo da su ti omjeri ili $c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$ ili potencije tog broja.

Ovi koeficijenti javljaju se u onim brojčanim jednadžbama u kojima se sastaju simboli za brojčane iznose dijelom izraženi u CGSE, a dijelom u CGSM jedinicama. To su u prvom redu *Maxwell*ove jednadžbe koje vidimo u Gaussovu brojčanom obliku ukrašene sa c u stupcu 14 pod rednim brojevima 3 i 10 tablice **40.**

4.3.2. »Brzina« c u jednadžbama. Pogledajmo kako je došlo do pojave parazitnog faktora c. Univerzalna veličinska *Maxwell*ova jednadžba indukcije napisana je u stupcu 4 pod rednim brojem 10 tablice **40.** U odsječku 4.1 već smo izveli brojčanu jednadžbu (4.1-17) koju ćemo sada prilagoditi ovim jedinicama: jakost električkog polja E mjerimo CGSE jedinicom $[E] = [E]_e$, a magnetsku indukciju B CGSM jedinicom $[B] = [B]_m = \text{gauss} = \text{G}$. U tom slučaju *brojčana* jednadžba (4.1-17) prelazi u oblik

$$\operatorname{rot}\{E\}_e = -\frac{\partial\{B\}_m}{\partial\{t\}} \frac{[l]}{[t]} \frac{[B]_m}{[E]_e}, \tag{4.3-1}$$

gdje smo uz simbole brojčanih iznosa $\{E\}_e$, $\{B\}_m$ dodali indekse e i m, kako bismo naglasili da je u (4.3-1) $\{E\}_e = E/[E]_e$, a $\{B\}_m = B/[B]_m$.

Izračunajmo što predstavlja kombinacija od četiri jedinice u gornjoj jednadžbi. Budući da je riječ o fizikalnim sistemima i jedinicama, znamo da je $[l] = \text{cm}$, a $[t] = \text{s}$. U tablici **40** nalazimo da je $[B]_m = 10^{-4}\,\text{T}$, a $[E]_e = 2{,}9979 \cdot 10^4\,\text{V/m}$. Prema tome je

$$\frac{[l]}{[t]} \frac{[B]_m}{[E]_e} = \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{10^{-4}\,\text{T}}{2{,}9979 \cdot 10^4\,\text{V/m}} = \frac{1}{c},$$

gdje je $c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$. Gornji rezultat uslijedio je zbog toga jer je $\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$, a $\text{T} = \text{Vs/m}^2$. Prema tome izraz (4.3-1) doista prelazi u oblik

$$\operatorname{rot}\{E\}_e = -\frac{1}{c} \frac{\partial\{B\}_m}{\partial t},$$

koji smo napisali u tablici **40.** Simboli, dakako, predstavljaju brojčane iznose, s lijeve strane prilagođene CGSE jedinici, a s desne CGSM jedinici.

Iako je, dakle, broj c samo faktor izjednačenja među jedinicama pa se zato pojavljuje i u brojčanim jednadžbama, mnogi su u prošlosti toj pojavi c u *Maxwell*ovim jednadžbama pridavali gotovo mistično značenje. Vidjeli smo, međutim, da c slijedi neposredno kao $c = v_0/(\text{cm/s})$ iz veličinske jednadžbe $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$, koju smo u odsječku 1.4 izveli na primjeru nadasve primitivnog modela dalekovoda u obliku produžene kutije.

I danas još neki smatraju da je broj c, koji na žalost ponekad tretiraju kao *fizikalnu veličinu* »brzina svjetla«, neminovan za izgradnju bilo kakvog sistema jedinica elektromagnetizma, iako znaju da se c može izmjeriti na posve mehanički način pomoću *Fizeau*ova pokusa s dugačkom cijevi i zupčanikom ili *Michelson*ovim rotirajućim ogledalom itd. (vidi odlomak 3.7.2)!

Drugi pak govore o c kao o nekoj »kritičnoj brzini«. Budući da nam ta kritičnost nije jasna, pokušajmo je dokučiti na jednostavnom misaonom primjeru.

Zamislimo da je množina elektrike Q u prostoru jednoliko porazdijeljena tako da čini kružni prsten presjeka A i opsega l. Prostorna gustoća prstenastog električnog oblaka iznosi dakle $\rho = Q/V = Q/Al$. Rotira li sveukupna elektrika Q u šupljini zamišljenog prstena brzinom v, u vremenskom će intervalu dt kroz bilo koji presjek A proći množina elektrike $dQ = \rho dV = \rho A\, dl = \rho A v dt$, što znači da će postojati kružna struja

$$I = \frac{dQ}{dt} = \rho A v = \frac{Q}{l} v.$$

Pretpostavimo da množina elektrike u prstenu iznosi $Q = [Q]_e$, dakle jednu *elektrostatsku* jedinicu. U tom slučaju gornja jednadžba glasi

$$I = \frac{v}{l}[Q]_e = \frac{v}{l}\frac{[Q]_m}{c} = \frac{v}{v_0}\frac{[I]_m}{l/\mathrm{cm}},$$

jer je $[Q]_m = c\,[Q]_e$, $[I]_m = [Q]_m/s$, a $v_0 = c \cdot \mathrm{cm/s}$, gdje je v_0 brzina elektromagnetskog polja u vakuumu. Poveća li se brzina v toliko da se dosegne »kritična brzina« v_0, dakle $v = v_0$, a opseg prstena iznosi $l = 1$ cm, dakle $l/\mathrm{cm} = 1$, gornji izraz dobiva vrlo jednostavan oblik

$$[I] = [I]_m.$$

To znači: kad bismo prsten sa 1 $[Q]_e$ mogli zavrtjeti kritičnom brzinom v_0, onda bi $[Q]_e$ bila ekvivalentna kružnoj struji $[I]_m$. Uz opseg prstena $l = 10$ cm struja bi iznosila $[I]_m/10 = 1$ amper.

Naravno da je takvo povezivanje navedenih jedinica sa c najblaže rečeno igrarija, iako je to nekad bio argumenat u prilog veličanju »kritične brzine c«. Zar nije neozbiljno iz gornjeg rezultata misaonog pokusa zaključiti da se elektrika prstena u mirovanju mora mjeriti elektrostatski, a kad se prsten zavrti brzinom v_0, elektrokinetički jedinicom $[I]_m$!? Iz toga su, naime, neki zaključili da elektrika u gibanju ima drukčiju dimenziju nego u mirovanju i tako pokušali obraniti nemoguću konstrukciju nepotpunih CGS jedinica koje spominjemo u odsječku 4.4.

Čitav taj pokus jednostavno nam objašnjavaju veličinske jednadžbe u kojima, dakako, nema nikakvih jedinica. U udaljenosti r od rotirajućeg prstena električka indukcija iznosi

$$D = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{I}{2\pi r v},$$

jer je Q porazdijeljena po čitavom opsegu prstena. Budući da je prsten u zraku (vakuumu), to je prema $E = D/\epsilon_0$ jakost električkog polja u udaljenosti r

$$E = \frac{I}{\epsilon_0 2\pi r v},$$

dok jakost magnetskog polja na istoj udaljenosti iznosi

$$H = \frac{I}{2\pi r} = v D = v \epsilon_0 E.$$

Budući da u vakuumu vrijedi $B = \mu_0 H$, to slijedi jednadžba

$$B = \mu_0 v D = \epsilon_0 \mu_0 v E = E \frac{v}{v_0^2},$$

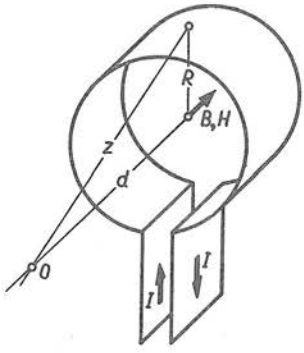
jer je $\epsilon_0\mu_0 v_0^2 = 1$. Kad bi prsten postigao i brzinu svjetla $v = v_0$ (ako ne gledamo na relativistiku pri takvim brzinama), pa bi magnetska indukcija iznosila $B = E/v_0$, to još ne bi bio nikakav znak o »kritičnoj brzini«, jer taj izraz na kraju krajeva znači samo to da su gustoće energije električkog i magnetskog polja međusobno jednake.

U to se možemo odmah uvjeriti. Budući da izraz $B = E/v_0$ možemo pisati i kao $v_0^2 B^2 = E^2$, uz pomoć $\epsilon_0\mu_0 v_0^2 = 1$ dobivamo $\epsilon_0\mu_0 E^2 = B^2$, odakle odmah nastaje

$$\frac{\epsilon_0}{\mu_0} = \frac{H^2}{E^2} \quad \text{ili} \quad \tfrac{1}{2} E D = \tfrac{1}{2} B H,$$

jer je $B = \mu_0 H$ i $D = \epsilon_0 E$. Gornje dvije jednadžbe izveli smo, međutim, usput u odlomku 1.4.1, gdje nismo ni pomišljali na prstenast električki oblak u vrtnji.

4.3.3. Primjer upotrebe jedinica Gaussova sistema. U stupcu 14 tablice **40** nanizali smo *brojčane* jednadžbe koje su prilagođene Gaussovu mješovitom skupu jedinica. Pri tom smo pojedine simbole opremili indeksima e i m koji označuju da li se znakovi za brojčane iznose veličina moraju izražavati u jedinicama CGSE ili CGSM sistema. Naravno da u starim knjigama, gdje se još upotrebljava Gaussov sistem i njemu prilagođene brojčane jednadžbe, tih indeksa i viticastih zagrada nema, pa mnogo puta čitatelj ne zna mora li misliti na jedinicu CGSE ili CGSM sistema. Stoga će niz brojčanih jednadžbi u stupcu 14 tablice **40** svakako pomoći čitatelju da se orijentira ako upotrebljava staru literaturu.



Sl. E. 67. Magnetsko polje u osi solenoida

Ima mnogo slučajeva gdje taj niz jednadžbi nije dovoljan. U heterogenoj elektro*tehničkoj* literaturi, naime, često nalazimo u poglavljima o magnetskim poljima zračnih svitaka (solenoida) najrazličitije brojčane jednadžbe prilagođene CGSM ili Gaussovu sistemu, a začinjene su amperom kao jedinicom jakosti struje.

Na slici E.67 shematski je nacrtan uzak solenoid koji se sastoji od metalne trake savijene s polumjerom r u kratak valjak. Naravno da umjesto te jedne trake možemo zamisliti svitak sa N zavoja. Uzbuda tog solenoida neka je Θ, tj. $\Theta = NI$, u našem primjeru zbog $N = 1$, $\Theta = I$. Ova magnetska uzbuda stvara u bilo kojoj tački O na uzdužnoj osi solenoida magnetsko polje indukcije (vidi odlomak 3.2.3)

$$B = \frac{\mu_0 \Theta}{2} \frac{r^2}{z^3},$$

gdje su izmjere pokazane na slici E.67, a μ_0 je magnetska konstanta. Ako je promjer solenoida znatno veći od njegove širine, dakle u slučaju uskog svitka, gornji izraz uz $\Theta = NI$ prelazi u približni oblik

$$B = \frac{\mu_0 \Theta}{2r} = \frac{\mu_0 N I}{2r}. \qquad (4.3\text{-}2)$$

To je, dakako, veličinska jednadžba koja vrijedi za bilo kakve jedinice.

Izračunajmo kolika mora biti uzbuda Θ da bi u sredini solenoida polumjera $r = 0{,}5$ m magnetska indukcija iznosila $B = 0{,}5$ militesla (mT). Najprije preinačimo jednadžbu (4.3-2) u oblik $\Theta = 2rB/\mu_0$, a onda uvrstimo vrijednosti $B = 0{,}5\ \mathrm{mT} = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}$, $2r = 1\ \mathrm{m}$ i $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$:

$$\Theta = \frac{1\ \mathrm{m} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}}{1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H/m}} = 398\ \mathrm{A}.$$

Prema tome $B = 0{,}5$ mT možemo uzbuditi sa $N = 100$ i $I = 3{,}98$ A ili bilo kojom drugom kombinacijom koja udovoljava $\Theta = NI$. U našem limenom solenoidu morala bi zbog $N = 1$ teći struja $I = 398$ A.

Pogledajmo kako bi glasila brojčana jednadžba koja bi bila prilagođena Gaussovu skupu jedinica. Struju u tom »sistemu« moramo mjeriti elektrostatskom jedinicom $[I]_e$, magnetsku indukciju B magnetostatskom jedinicom $[B]_m = \mathrm{gauss} = \mathrm{G}$, a polumjer centimetrima. Po obrascu $G = \{G\}[G]$, tj. »veličina = brojčani iznos × × jedinica«, veličine iz desne jednadžbe (4.3-2) možemo izraziti sa $B = \{B\}_m [B]_m$, $I = \{I\}_e [I]_e$, $r = \{r\}[l] = \{r\}\ \mathrm{cm}$, gdje simboli u vitičastim zagradama predstavljaju brojčane iznose u navedenim jedinicama. Uvrštenje u spomenutu jednadžbu daje

$$\{B\}_m [B]_m = \frac{\mu_0 N \{I\}_e [I]_e}{2\{r\}\ \mathrm{cm}} \quad \text{ili} \quad \{B\}_m = \frac{N\{I\}_e}{2\{r\}} \frac{\mu_0 [I]_e}{\mathrm{cm}\,[B]_m}.$$

Iz tablice **40** izvadimo vrijednosti za obje jedinice izražene jedinicama SI. S njima računanjem slijedi

$$\frac{\mu_0 [I]_e}{\mathrm{cm}\,[B]_m} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Hm^{-1}} \cdot 3{,}3356 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{A}}{10^{-2}\ \mathrm{m} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}} = \frac{4\pi}{c}.$$

Prema tome brojčana jednadžba prilagođena Gaussovu sistemu jedinica glasi

$$\{B\}_m = \frac{N\{I\}_e}{2\{r\}} \frac{4\pi}{c} = \frac{2\pi N \{I\}_e}{\{r\} c}. \tag{4.3-3}$$

Želimo li pomoću brojčanog izraza riješiti naš zadatak, moramo i pitanje prilagoditi brojčanim simbolima i jedinicama Gaussova sistema. Budući da je $B = 0{,}5$ mT, to je zbog $\mathrm{T} = 10^4 [B]_m = 10^4\ \mathrm{G}$ (vidi tablicu **40**) $B = 5\ \mathrm{G}$, pa je prema tome brojčani iznos indukcije za jednadžbu (4.3-3) $\{B\}_m = B/[B]_m = B/\mathrm{G} = 5$. Analogno je brojčani iznos polumjera solenoida $\{r\} = r/[l] = r/\mathrm{cm} = 50\ \mathrm{cm}/\mathrm{cm} = 50$, jer je $r = 0{,}5$ m. S ovim brojčanim podacima iz prekrenute jednadžbe (4.3-3) dobivamo brojčani iznos uzbude u jedinici CGSE:

$$N\{I\}_e = \{B\}_m \{r\} c/2\pi = 5 \cdot 50 \cdot 2{,}9979 \cdot 10^{10}/2\pi = 1{,}19 \cdot 10^{12}.$$

Naravno da o vrijednosti te uzbude nemamo nikakve predodžbe, makar je napisali u veličinskom obliku $NI = N\{I\}_e [I]_e = 1{,}198 \cdot 10^{12} [I]_e$. Pomognimo sebi stoga tablicom **40**, gdje nalazimo da je $[I]_e = 3{,}3356 \cdot 10^{10}\ \mathrm{A}$. Prema tome uzbuda iznosi

$$\Theta = NI = 1{,}19 \cdot 10^{12} \cdot 3{,}3356 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{A} = 398\ \mathrm{A}.$$

Vidimo koliko pažljivosti treba kad se računa pomoću brojčanih jednadžbi. Mogućnosti da pogriješimo ima bezbroj, a na kraju se ipak vraćamo na jedino pouzdani veličinski račun.

Jednadžba (4.3-3) prilagođena Gaussovu skupu jedinica nije baš praktična, kako smo vidjeli u ovom računskom primjeru. Zato se obično u magnetizmu čak ni stari fizičari ne drže te formule, već je upotrebljavaju prilagođenu CGSM sistemu jedinica. Pogledamo li brojčanu jednadžbu (4.3-3), vidimo da se samo brojčani iznos struje odnosi na CGSE sistem. Prema tome samo njega treba preinačiti na CGSM brojčani simbol. To ćemo učiniti na ovaj način. Znamo da se fizikalna veličina ne mijenja ako je mjerimo ovom ili onom jedinicom, pa stoga možemo pisati $\{I\}_e[I]_e = \{I\}_m[I]_m$, odakle je $\{I\}_e = \{I\}_m \cdot [I]_m/[I]_e$. U tablici **40** nalazimo omjer $[I]_m/[I]_e = c$, pa pomoću $\{I\}_e = c\{I\}_m$ izraz (4.3-3) dobiva novi brojčani oblik

$$\{B\}_m = 2\pi \frac{N\{I\}_m}{\{r\}} \quad \text{ili} \quad N\{I\}_m = \frac{1}{2\pi}\{r\}\{B\}_m. \tag{4.3-4}$$

Budući da je u zadatku zadano $\{r\} = 50$, $\{B\}_m = 5$, što smo obrazložili u prethodnom primjeru, brojčani račun daje

$$N\{I\}_m = 50 \cdot 5/2\pi = 39{,}8.$$

Uzbuda je, dakle, 39,8 magnetostatskih jedinica struje, odnosno $NI = N\{I\}_m[I]_m = 39{,}8\ [I]_m = 398$ A, jer je $[I]_m = 10$ A.

Koliki je pri tom brojčani iznos jakosti magnetskog polja? Budući da je riječ o zraku, relativna je permeabilnost $\mu_r = 1$. Pod rednim brojem 12 stupca 14 u tablici **40** za taj slučaj nalazimo

$$\{H\}_m = \{B\}_m,$$

tj. brojčani iznosi jakosti magnetskog polja i magnetske indukcije međusobno su jednaki pa je $\{H\}_m = 5$. Kako je $H = \{H\}_m[H]_m = \{H\}_m \cdot \text{Oe}$, jakost je magnetskog polja $H = 5$ oersteda.

4.3.4. Primjena jedinica različitih sistema. Uz navedene oblike postoji još jedna brojčana jednadžba za naš primjer (odlomak 4.3.3), a upotrebljava se u nekim elektro*tehničkim* knjigama. Struja se, naime, ne izražava brojčanim iznosom $\{I\}_m$ već sa $\{I\}_M$, što znači da se mjeri amperom, jedinicom SI! Iz $\{I\}_m[I]_m = \{I\}_M \cdot \text{A}$ zbog $[I]_m = 10$ A slijedi $\{I\}_m = \{I\}_M/10$, čime izrazi (4.3-4) glase

$$\{B\}_m = \frac{2\pi N\{I\}_M}{10\{r\}} \quad \text{ili} \quad N\{I\}_M = \frac{10\{r\}\{B\}_m}{2\pi}. \tag{4.3-5}$$

Time što je uveden indeks M za brojčani iznos struje u amperima, gornje jednadžbe nisu, dakako, postale veličinske. I dalje simboli označuju brojčane iznose

$$\{I\}_M = I/\text{A}, \quad \{r\} = r/\text{cm}, \quad \{B\}_m = B/\text{G}, \tag{4.3-6}$$

gdje je G kratica za gauss = $[B]_m$. Desna jednadžba (4.3-5) daje rješenje našeg zadatka ovako:

$$N\{I\}_M = \frac{10 \cdot 50 \cdot 5}{2\pi} = 398.$$

To je, naravno, brojčani iznos izražen amperima, pa je zbog $NI = N\{I\}_M\ \text{A} = 398$ A.

Na žalost još ni danas ne upotrebljavaju svi autori veličinske jednadžbe, pa se moraju mučiti ovako ili još više nego što smo se mi mučili obrađujući ove primjere. Najneugodnije je to što se kod takvih *brojčanih* računa izgubi sigurnost, pa čovjek na kraju ne zna da li je dobro izračunao ili nije.

Usporedba nekih veličinskih jednadžbi s brojčanima koje su prilagođene jedinicama Gaussova, CGSM i CGSE sistema

Tablica **E-26**

Red. broj.	Fizikalna veličina	Veličinska jednadžba	Brojčana jednadžba, prilagođena:	
			Gaussovu sistemu jedinica	CGSM ili CGSE sistemu jedinica
1	Jakost magnetskog polja u solenoidu	$H = \frac{NI}{2r}$	$\{H\}_m = \frac{2\pi}{c}\frac{N\{I\}_e}{\{r\}}$	$\{H\}_m = 2\pi\frac{N\{I\}_m}{\{r\}}$
2	Jakost magnetskog polja oko ravna vodiča	$H = \frac{I}{2\pi r}$	$\{H\}_m = \frac{1}{c}\frac{2\{I\}_e}{\{r\}}$	$\{H\}_m = \frac{2\{I\}_m}{\{r\}}$
3	Induktivitet dvaju paralelnih vodiča duljine l, razmaknutih d	$L = \frac{\mu_0}{\pi} l\left(\ln\frac{d}{r}+\frac{1}{4}\right)$	$\{L\}_m = 4\{l\}\left(\ln\frac{\{d\}}{\{r\}}+\frac{1}{4}\right)$	$\{L\}_e = \frac{4\{l\}}{c^2}\left(\ln\frac{\{d\}}{\{r\}}+\frac{1}{4}\right)$
4	Specifična Lorentzova sila u vakuumu	$\frac{F}{Q} = E + v\times\mu_0 H$	$\frac{\{F\}}{\{Q\}_e} = \{E\}_e + \{v\}\times\frac{\{H\}_m}{c}$	$\frac{\{F\}}{\{Q\}} = \{E\}_e + \{v\}\times\frac{\{H\}_e}{c^2}$
5	Brzina elektromagnetskog polja	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	$\{v\} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$	$\{v\} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$
6	Energija magnetskog polja	$W = \frac{1}{2}LI^2$	$\{W\} = \frac{1}{2c^2}\{L\}_m\{I\}_e^2$	$\{W\} = \frac{1}{2}\{L\}_m\{I\}_m^2$
7	Kapacitet pločastog kondenzatora	$C = \frac{\epsilon A}{d}$	$\{C\}_e = \frac{\epsilon_r\{A\}}{4\pi\{d\}}$	$\{C\}_m = \frac{\epsilon_r\{A\}}{c^2 4\pi\{d\}}$
8	Kapacitet kuglastog kondenzatora	$C = \epsilon 4\pi r$	$\{C\}_e = \epsilon_r\{r\}$	$\{C\}_m = \frac{r}{c^2}\epsilon_r\{r\}$

Opaske: Indeksi m u brojčanim jednadžbama (sa vitičastim zagradama) znače da se simboli odnose na jedinice CGSM sistema, a indeksi e na jedinice CGSE sistema jedinica. Simboli $\{r\}$, $\{l\}$ i $\{d\}$ predstavljaju brojčane iznose u centimetrima, $\{v\}$ u cm/s. Vrijednost brojčane konstante c je $c = 2{,}9979\cdot10^{10}$; $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, $\mu_r = \mu/\mu_0$ (vidi odlomke 1.2.2 i 1.3.2).

U tablici E-26 navodimo nekoliko oblika brojčanih jednadžbi koje su prilagođene ili Gaussovu ili CGSM ili CGSE sistemu jedinica. Indeksi uz simbole brojčanih iznosa jasno označuju kakve jedinice treba primijeniti. Proradi li čitatelj brojčane jednadžbe iz tablice u duhu ovih izvođenja, steći će dovoljnu rutinu da može računati i s raznim drugim brojčanim jednadžbama. Kao pouzdano uporište ipak smo u prvoj koloni tablice E-26 naveli univerzalne veličinske jednadžbe koje su, za razliku od ostalih, brojčanih, tiskane bez vitičastih zagrada. I čitatelj će vjerojatno nakon muke s brojčanim računom staviti na stranu sve brojčane jednadžbe i poslužiti se literaturom koja radi s veličinskim jednadžbama, koja dakle omogućuje pouzdan račun (vidi poglavlja A.1,2, B.10, D.6 i E.6).

Preinačimo još u zaključku brojčanu jednadžbu (4.3-5) na pravu *veličinsku* jednadžbu! To ćemo izvesti lako ako u nju stavimo izraze (4.3-6), koji predstavljaju omjere veličina i jedinica

$$\frac{B}{\mathrm{G}} = \frac{2\pi N I/\mathrm{A}}{10\, r/\mathrm{cm}} \quad \text{ili} \quad B = \frac{2\pi N I}{r}\,\frac{\mathrm{cm}\cdot\mathrm{G}}{10\,\mathrm{A}}.$$

Budući da je prema jednadžbi (4.2-8) i prema podacima iz tablice **40** $\mathrm{G} = \mu_0\,\mathrm{Oe} = \mu_0 \cdot 79{,}577\,\mathrm{A/m}$, omjer jedinica u gornjoj jednadžbi glasi $10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot\mu_0\cdot 79{,}577\,\mathrm{Am^{-1}/10\,A} = \mu_0/4\pi$, što uvrštenjem daje *veličinsku* jednadžbu

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2r},$$

a to je izraz (4.3-2) kojim smo i počeli naša razmatranja o primjeni Gaussova skupa jedinica u ovom primjeru.

4.4. Nepotpuni CGS sistemi jedinica elektromagnetizma

4.4.1. Teškoće sa starijom literaturom. U prošla tri odsječka opširno smo razmatrali tri fizikalna sistema jedinica elektromagnetizma. Nismo to učinili zato da pokažemo kako su ti sistemi praktični za primjenu, što ne bismo ni mogli već zbog toga jer smo se na primjerima uvjerili kako s jedinicama tih sistema treba biti pažljiv u računu i kako su dugotrajni računi ako s tim jedinicama želimo računati jedino pouzdanim veličinskim načinom računanja. Pa i kasniji *Lorentz*ov i *Heaviside*ovi sistemi jedinica (njih u ovoj knjizi uopće ne razmatramo, jer se nisu uvriježili u praksi) dokazuju da nešto s tim sistemima jedinica nije bilo u redu.

Dosta smo prostora posvetili CGSE, CGSM i Gaussovu sistemu jedinica iz dva razloga. Prvi je činjenica da su još prije 70 godina ova tri sistema jedinica apsolutno dominirala u elektromagnetskoj znanosti. Ne zbog toga što su nosili pridjev »apsolutni« već jednostavno zato jer drugog, boljeg sistema jedinica nije bilo. Drugi je razlog činjenica da u starijoj znanstvenoj i elektrotehničkoj literaturi iz vremena između dva rata ovi sistemi jedinica nisu posve iščezli. Stoga čitanje te literature predstavlja danas znatne poteškoće, jer mlađi fizičari i svi elektrotehničari upotrebljavaju Međunarodni sistem jedinica (SI) koji je prihvatila Generalna konferencija za mjere i utege, a u pojedinim je državama propisan standardima i zakonima (vidi poglavlja E.2, B.7 i D.4).

Vidjeli smo da su sistemi CGSE i CGSM posve ispravni iako nisu obuhvaćeni standardom. U našem prikazu oni imaju četiri osnovne jedinice, kao što je to u elektromagnetskoj znanosti potrebno. Jedino mješoviti Gaussov sistem (odsječak

4.3) nije u redu zato što je zbog usvajanja pet osnovnih jedinica »predimenzioniran«. No ako ga shvatimo kao skup jedinica u tom smislu da se za takozvane električke pojave primjenjuju jedinice CGSE sistema, a za takozvane magnetske pojave jedinice CGSM sistema, onda se s njime ipak može računati. Pri tom, doduše, nastaju neprilike tamo gdje dolazi do susreta veličina koje su umjetno razdvojene podjelom na »električke« i na »magnetske« veličine, ali to je danak koji zahtijeva ustrajanje u tradiciji.

4.4.2. Neke nepotpune CGSE i CGSM jedinice. Međutim većina njih koji upotrebljavaju CGSE i CGSM sistem jedinica ne shvaćaju ih onako kako smo ih mi u ovoj knjizi izveli. Mi smo, na primjer, u odsječku 4.1 izveli CGSE jedinicu jakosti električne struje (tablica E-24)

$$[I]_e = (4\pi)^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-2}\epsilon_0^{1/2}. \tag{4.4-1}$$

U odlomku 4.2.2 utvrdili smo da je jedinica jakosti struje u magnetostatskom sistemu jedinica (CGSM)

$$[I]_m = (4\pi)^{1/2}\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-1}\mu_0^{-1/2}. \tag{4.4-2}$$

Budući da je $\epsilon_0\mu_0 v_0^2 = 1$, gdje je

$$v_0 = c\cdot\mathrm{cm/s} = 2{,}9979\cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/s}, \tag{4.4-3}$$

što smo utvrdili u odsječku 1.4, podjela izraza (4.4-2) sa (4.4-1) daje

$$\frac{[I]_m}{[I]_e} = c.$$

To je posve normalno, jer omjer dviju različito velikih jedinica *iste veličine* uvijek daje čist broj.

Na to se možemo podsjetiti jednostavnim primjerom. Netko će za štap reći da je dugačak $l = 1$ m. Drugi može isto tako reći da je njegova duljina $l = 100$ cm. Naravno da se štap nije promijenio mjerili ga mi u mislima jedinicom duljine metar ili jedinicom centimetar. Uvijek ostaje $l = l$, pa je dakle 1 m = 100 cm ili m/cm = = 100. Ovo je trivijalan primjer, ali unatoč tomu tipična osnova svakom znanstvenom mjerenju.

Čini se da se jedino pri interpretaciji CGSE i CGSM jedinica pisci u prošlosti nisu držali tog osnovnog načela. Oni su, naime, smatrali da elektromagnetsko polje nije nešto posebno što se nikako ne može objasniti aksiomskim veličinama mehanike: duljina, vrijeme i masa, već su smatrali da se elektromagnetske veličine mogu izraziti s tri mehaničke, isto onako kao, na primjer, moment ustrajnosti. Stoga su zanijekali pravo postojanja četirima međusobno nezavisnim veličinama u elektromagnetizmu. Time se to automatski prenijelo i na jedinice, jer znamo da svakoj veličini pripada jedinica, jer je drukčije ne možemo ni mjeriti ni izraziti umnoškom mjernog broja (brojčanog iznosa) i jedinice.

Rezultat takvog nazora vidjet ćemo na našim jednadžbama (4.4-1) i (4.4-2). Odreknemo li samorodnost električkim veličinama, zanijekali smo je i njihovim jedinicama. Stoga ni μ_0 ni ϵ_0 ne mogu u tom slučaju biti osnovne jedinice, jer po tome ih nazoru uopće ne priznajemo! Stavimo li osim toga $4\pi\epsilon_0 = 1$, a $\mu_0/4\pi = 1$, spomenuti izrazi prelaze u oblik

$$[I]_m = \mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-1}, \qquad [I]_e = \mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-2}. \tag{4.4-4}$$

Što ovi izrazi fizikalno predstavljaju, nitko ne zna.

Da ne trošimo prostor na izračunavanje ostalih nepotpunih elektrostatskih i magnetostatskih jedinica, neke smo od njih svrstali u tablicu E-27. Pri tom smo odabrali samo one veličine čije su jedinice navedene i u tablici E-24, što omogućuje neposrednu usporedbu.

Tablica **E-27**

Jedinice nekih veličina u nepotpunom elektrostatskom i magnetostatskom sistemu jedinica

Red. br.	Naziv veličine	Simbol veličine	Elektrostatska jedinica	Magnetostatska jedinica
1	2	3	4	5
1	Elektrika	Q	$\mathrm{cm^{3/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$	$\mathrm{cm^{1/2}\,g^{1/2}}$
2	Jakost električkog polja	E	$\mathrm{cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$	$\mathrm{cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}}$
3	Električka indukcija	D	$\mathrm{cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$	$\mathrm{cm^{-3/2}\,g^{1/2}}$
4	Dielektričnost	ϵ	—	—
5	Električka polarizacija	P	$\mathrm{cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$	$\mathrm{cm^{-3/2}\,g^{1/2}}$
6	Magnetski tok	Φ	$\mathrm{cm^{1/2}\,g^{1/2}}$	$\mathrm{cm^{3/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$
7	Magnetska indukcija	B	$\mathrm{cm^{-3/2}\,g^{1/2}}$	$\mathrm{cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$
8	Jakost magnetskog polja	H	$\mathrm{cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}}$	$\mathrm{cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$
9	Permeabilnost	μ	—	—
10	Magnetska polarizacija	J	$\mathrm{cm^{-3/2}\,g^{1/2}}$	$\mathrm{cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$
11	Električki napon	U	$\mathrm{cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$	$\mathrm{cm^{3/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}}$
12	Električna struja	I	$\mathrm{cm^{3/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}}$	$\mathrm{cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}}$
13	Električki otpor	R	$\mathrm{cm^{-1}\,s}$	$\mathrm{cm\,s^{-1}}$
14	Kapacitet	C	cm	$\mathrm{cm^{-1}\,s^2}$
15	Induktivitet	L	$\mathrm{cm^{-1}\,s^2}$	cm

4.4.3. Nefizikalnost nepotpunih jedinica. I korisnici »jedinica« iz tablice E-27 primjenjuju odnos $[I]_\mathrm{m}/[I]_\mathrm{e} = c$, tj. da je magnetostatska jedinica jakosti struje c puta veća od elektrostatske. Podijelimo li međusobno izraze (4.4-4), dobivamo

$$c = \frac{[I]_\mathrm{m}}{[I]_\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}}}{\mathrm{cm^{3/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}}} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{cm}},$$

što možemo zbog $c = v_0/(\mathrm{cm/s})$ (odlomak 4.1.5) napisati u obliku

$$v_0 = c \cdot \mathrm{cm/s} = 2{,}99979\ \mathrm{cm/s} = 1. \qquad (4.4\text{-}5)$$

Dobili smo katastrofalan rezultat da je *fizikalna veličina* »brzina elektromagnetskog polja u vakuumu« jednaka čistom broju, i to broju 1! Drugim riječima to znači da brzina svjetla uopće ne postoji. A znamo da je v_0 jedan od najčvršćih fundamenata suvremene nauke (vidi odlomak 3.7.2)!

Na temelju jednadžbi (4.4-4) možemo izvesti još dug niz apsurda koji su analogni jednadžbi (4.4-5). Spomenimo samo da na takav način dobivamo elektrostatsku »jedinicu« električkog kapaciteta $[C]_\mathrm{e}$ = centimetar, a u magnetostatskom sistemu jedinicu induktiviteta $[L]_\mathrm{m}$ = centimetar, odakle se može zaključiti da su kapacitet i induktivitet istorodne veličine, i to duljina! Očito je da danas nema smisla raspravljati o takvim »jedinicama« i o takvim »sistemima jedinica«. Upitajmo se

radije da li je genijalni učenjak *C. F. Gauss* prilikom osnivanja CGSM sistema jedinica zaista smatrao da je induktivitet duljina, a jedinica jakosti struje ona na lijevoj strani formule (4.4-4)?

4.5. Postanak CGSM i CGSE sistema jedinica

4.5.1. Gaussova koncepcija. Uživimo se malo u vrijeme od stotinu godina i nešto više unatrag, kad se još nije znalo da je sila između dvije elektrike manja ako se između njih nalazi dielektrik (kako to danas nazivamo), nego kad je to zrak. Pokušajmo s tadašnjim jednadžbama elektrostatike, koje se dakako odnose samo na zrak, izračunati koliko iznosi sila između dvije jednake množine elektrike koje su međusobno udaljene za r.

Budući da je sveopća primjena *veličinskih* jednadžbi počela tek godine 1922, kad ih je ponovo oživio *J. Wallot*, jasno je da ćemo se u računu morati poslužiti *brojčanom* jednadžbom (općenito o brojčanim jednadžbama vidi u odlomku A.1.4.2) koja vrijedi za zrak

$$\{F\} = \frac{\{Q\}}{\{r\}^2}. \tag{4.5-1}$$

Zamislimo dalje da smo silu kod nepromijenjenih množina elektrike i geometrijskog rasporeda mjerili u dva navrata: jednom jedinicama $[F]_1$, $[Q]_1$ i $[r]_1$, a drugi put jedinicama $[F]_2$, $[Q]_2$ i $[r]_2$. Vezu između ovih jedinica neka predstavljaju ove jednadžbe

$$[F]_1 = A\,[F]_2, \quad [Q]_1 = B\,[Q]_2, \quad [r]_1 = L\,[r]_2, \tag{4.5-2}$$

gdje su A, B i L *čisti brojevi* — omjeri među jedinicama. Rezultati tog dvojakog mjerenja iznosit će u skladu s brojčanom jednadžbom (4.5-1)

$$\{F\}_1 = \frac{\{Q\}_1}{\{r\}_1^2}, \quad \{F\}_2 = \frac{\{Q\}_2}{\{r\}_2^2}, \tag{4.5-3}$$

gdje simboli, dakako, predstavljaju brojčane iznose, a to stalno ističemo vitičastim zagradama. Zamislimo još da su sile (4.5-3) uravnotežene silom

$$\{F\} = \{m\}\{a\}, \tag{4.5-4}$$

gdje su $\{m\}$ i $\{a\}$ brojčani iznosi mase i ubrzanja. U to doba, u koje smo se za trenutak prenijeli duhom, mi vrlo dobro poznajemo jednadžbu ubrzanja

$$\{a\} = \frac{\mathrm{d}\{v\}}{\mathrm{d}\{t\}} = \frac{\mathrm{d}^2\{l\}}{\mathrm{d}\{t\}^2}, \tag{4.5-5}$$

gdje simboli $\{v\}$, $\{t\}$ i $\{l\}$ predočuju brojčane iznose brzine, vremena i duljine.

Ravnoteža mehaničke sile (4.5-4) s elektrostatskom $\{F\}_1$ ili $\{F\}_2$ nije poremećena time što elektrostatsku silu mjerimo s dvije različite jedinice sile iz (4.5-2), a ostale veličine čiji su brojčani iznosi predočeni u (4.5-4) i (4.5-5) jedinicama

$$[m]_1 = M\,[m]_2, \quad [l]_1 = L\,[l]_2, \quad [t]_1 = T\,[t]_2, \tag{4.5-6}$$

gdje su M, L i T opet čisti brojevi, omjeri istorodnih jedinica.

Slijedom rečenoga dobit ćemo u ta dva mjerenja ove brojčane iznose

$$\{F\}_1 = \{m\}_1 \{a\}_1 \quad \{F\}_2 = \{m\}_2 \{a\}_2, \tag{4.5-7}$$

gdje simboli, dakako, predstavljaju brojčane iznose u jedinicama koje smo naveli u izrazima (4.5-6).

Sada izračunajmo jakost elektrostatskog polja koja je definirana sa $\{E\} = \{F\}/\{Q\}$. Dobit ćemo, naravno, dvije brojčane vrijednosti, $\{E\}_1 = \{F\}_1/\{Q\}_1$ i $\{E\}_2 = \{F\}_2/\{Q\}_2$, ali u svakom slučaju vrijedi

$$\{E\}_1 [E]_1 = \{E\}_2 [E]_2, \tag{4.5-8}$$

gdje su $[E]_1$ i $[E]_2$ dvije različito velike jedinice jakosti elektrostatskog polja, a $\{E\}_1$ i $\{E\}_2$ pripadni brojčani iznosi.

Primijenimo li načelo da se brojčani iznosi odnose obrnuto od upotrijebljenih jedinica (u poglavlju A.1 to smo označivali sa $\{G\}_1/\{G\}_2 = [G]_2/[G]_1$), tj. princip koji sadrži izraz (4.5-8), od jednadžbi (4.5-2) do (4.5-7) dobit ćemo brojčane odnose

$$\{F\}_2 = A\{F\}_1, \quad \{Q\}_2 = B\{Q\}_1, \quad \{r\}_2 = L\{r\}_1 \text{ itd.}$$

Kombiniramo li tako spomenute izraze, na kraju dobivamo

$$\frac{\{E\}_2}{\{E\}_1} = \frac{M^{1/2}}{L^{1/2} T}, \tag{4.5-9}$$

gdje su L, M i T redom *omjeri* različito velikih jedinica mase, duljine i vremena, kako nam to pokazuje jednadžba (4.5-6).

Ovaj izvod prepričan je iz njemačkog prijevoda rasprave *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*. Napisao ju je veliki *Carl Friedrich Gauss* prema predavanju koje je 15. decembra 1832. godine održao na sjednici Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, a tiskana je u 8. svesku *Abhandlungen* tog društva. Njemački prijevod izišao je tek 1894. godine kao 53. svezak *Ostwald's Klassiker*.

Jednadžbe (4.5-2, 6, 8 i 9) *prepisane su od Gaussa doslovno*. Jedinu izmjenu učinili smo time što smo primijenili današnje oznake i što smo primjer razmatrali na dvjema množinama elektrike, dok *Gauss* razmatra magnetsko polje Zemlje, pa zato uvodi pojam »slobodnog magnetizma«, a mi smo željeli izbjeći uvođenje »magnetskih masa« koje su danas iščezle iz znanosti i tehnike, jer znamo da je električna struja uzrok magnetskim pojavama.

4.5.2. Razlog osnivanja magnetostatskog sistema. Daleko bi nas odvelo kad bismo još dalje istraživali po citiranom fundamentalnom djelu. Spomenimo samo da *Gauss* ni u jednom trenutku nije posumnjao u samostalnost magnetizma. On govori o »magnetskoj tekućini«, o »slobodnom magnetizmu«, čak o »sjevernomagnetskoj« i »južnomagnetskoj tekućini!«

Možemo odgovoriti i na pitanje: što je *Gauss*a navelo da osnuje svoj sistem apsolutnih jedinica mm-mg-s (ne: cm, g, s)? To je bila težnja da se u magnetizmu stvori neprolazna *pramjera*, kao što je bio pariski prametar za duljinu ili kao što je i danas prakilogram za masu (vidi odsječak A.9.3). *Gauss* je dobro znao da se komad magneta ne može pohraniti u Sèvresu kao etalon »magnetske tekućine«, jer magnet nije vremenski stalan. Zato je uveo propisani *mjerni postupak u zraku* kojim se može uvijek lako reproducirati osnovna magnetska jedinica (vidi odlomak 5.5.1). Posve

analogno radimo i danas: amper reproduciramo strujnom vagom (odsječak 3.1), tj. elektrodinamičku silu uravnotežujemo sa gravitacijskom i pri tom propisujemo vrijednost magnetske konstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2 (vidi odlomak 2.1.3).

Iz *Gauss*ove rasprave možemo sažeti ove zaključke o tome kakve je nazore imao prilikom osnivanja CGSM sistema jedinica:

1. Smatrao je da je magnetizam nešto posve *samostalno*, što se ne objašnjava poznatim veličinama mehanike.

2. Upotrebljavao je *brojčane* jednadžbe. U raspravi na mnogim mjestima naglašava »brojčanu vrijednost« (Zahlenwert) kad spominje simbole u jednadžbama.

3. Njemu je umnožak brojčanog iznosa i jedinice *invarijantan*. To vidimo u njegovoj jednadžbi (4.5-8). Ova invarijantnost osnova je njegova računa. Vidimo, dakle, da je jedinice stavio u jednadžbe, a tako radimo i danas kad računamo s veličinama, jer naša je veličina $G = \{G\}[G]$.

4. Pri gradnji svog sistema jedinica *Gauss* poznaje samo *koherentne* jedinice, jer, na primjer, $[F] = [m][a]$ uz invarijantnost produkta $\{m\}[m]$ (vidi jednadžbu 4.5-8) omogućuje da se iz (4.5-5) izvedu (4.5-7) itd.

5. Izrazi tipa (4.5-9) kod *Gauss*a označuju *brojčanu vezu* između različitih jedinica. Tako, na primjer, na strani 48 svoje rasprave *Gauss* kaže: ». . . uzmemo li umjesto milimetra i miligrama metar i gram za jedinice, onda je $L = 1/1000$, $M = 1/1000$, dakle će biti $\{E\}_1 = \{E\}_2$; ako pak uzmemo Parisku liniju i Berlinsku funtu, onda ćemo imati $L = 1/2{,}555829$, $M = 1/467711{,}4$, dakle $\{E\}_2 = 0{,}002196161\ \{E\}_1$.«

4.5.3. Iskrivljenje Gaussove ideje. Od izraza tipa (4.5-9) učinili su *kasnije* »dimenziju« koja je predstavljala »stvarno značenje«, »bit« fizikalne veličine. Kako smo vidjeli, *Gauss* nije dao tome baš nikakva povoda. Sam *Gauss* je upozorio na to da nema nikakvih teškoća da se i »galvanska mjerenja« (tadašnji izraz za struje) svedu na apsolutna, dakako apsolutna u smislu koji smo naznačili ranije. Slijedom toga njegov je prijatelj *Wilhelm Weber* tako osnovao CGSE sistem jedinica.

Povijest CGSE sistema istraživao je *J. Fischer* i ustanovio da *Weber* i *Kohlrausch* nisu izjednačivali djelovanje ($F = \text{const} \cdot I^2$) fizikalne veličine sa samom veličinom, te da električke i magnetske veličine nisu smatrali takvima koje se mogu samo mehanički definirati. To je isto što smo mi utvrdili kod *Gauss*a.

Prema tome osnivači apsolutnih sistema jedinica elektromagnetizma *nisu* stvorili jedinice tipa $[I]_m = \text{cm}^{1/2}\text{g}^{1/2}\text{s}^{-1}$, već se to dogodilo kasnije prilikom krive interpretacije njihovih genijalnih ideja. Zato smo se u odsječcima 4.1 do 4.3 držali ideja osnivača, a one se bitno razlikuju od onoga što smo nalazili u nedavnoj fizikalnoj literaturi.

Rekli smo u *nedavnoj* literaturi, jer i to je danas prošlost. Prije desetak godina, naime, Međunarodna unija za čistu i primijenjenu fiziku (International Union for Pure and Applied Physics) prihvatila je uz metar, sekundu, kilogram i amper kao četvrtu osnovnu jedinicu. Isto je učinila i Međunarodna organizacija za standarde (ISO). Konačno je godine 1954. i Generalna konferencija za mjere i utege usvojila amper za četvrtu jedinicu, pa je dakle sada Međunarodni sistem jedinica (SI) obavezan za sve države potpisnice Konvencije o metru. Praktički je time obuhvaćena čitava kugla zemaljska.

5. Iz povijesti mjernih sistema elektromagnetizma

U prošlim smo poglavljima razmotrili dva sistema jedinica elektromagnetizma. Najprije smo u poglavlju 2 obradili Međunarodni sistem jedinica (SI), koji je danas de facto i de iure na snazi u svim granama znanosti i tehnike. Kao drugi sistem proučili smo u poglavlju 4 skupinu tzv. fizikalnih sistema jedinica elektromagnetizma (CGSE, CGSM i Gaussov). Mnoge sisteme jedinica, nastale od nekih nabrojenih, nismo ni spomenuli, jer se danas uopće ne primjenjuju, a nisu imali gotovo nikakav historijski utjecaj na metrologiju. Ti sistemi jedinica, nabrojeni i nenabrojeni, nisu, dakako, nastali u isto vrijeme, već su u raznim razdobljima prerastali iz jednog u drugi i usavršavali se s napretkom metrologije, instrumentacije i tehnologije.

Taj složeni put razvoja ne razabire se, međutim, iz odsječaka u kojima smo razmatrali pojedine sisteme jedinica. Zato smatramo korisnim da pri kraju glave o metrologiji elektromagnetizma dodamo kratak povijesni pregled koji će premostiti mnoge praznine prethodnih potpuno stručnih opisa. Taj posao bit će nam djelomično olakšan time što smo glavne predstavnike pojedinih razdoblja već podrobno proučili (jedino ćemo tzv. Tehnički sistem jedinica elektromagnetizma razmotriti u odsječku 5.3), pa nam uglavnom preostaje to da kronološkim povezivanjem parcijalnih napredaka i lutanja metrologije elektromagnetizma dočaramo približnu sliku razvoja mjernih sistema elektromagnetizma. Takav povijesni pregled čini nam se čak neophodno potrebnim, jer ćemo pomoću njega moći shvatiti zašto je SI međunarodno usvojen tek relativno kasno. Neminovno je da će naš povijesni pregled biti štur, zaustavljat ćemo se samo na onim povijesnim trenucima koji su markantni za metrologiju elektromagnetizma. Opširnije razglabanje o toj povijesti zahtijevalo bi, naime, znatno veći prostor, a rezultat bi bio: povijest čitave jedne grane fizike, zvane »elektrika«, mlade grane burne prošlosti.

5.1. Razdoblje od godine 1832. do početka stoljeća

5.1.1. Gaussov temelj metrologije elektromagnetizma. Prvi izvori električne struje bili su *kemijski*. Poticaj za njihovu primjenu dao je talijanski liječnik *L. Galvani* (1737...1798), a prvi *galvanski element* izradio je talijanski fizičar *A. Volta* (1745...1827), koji je u vezi s njime postavio i stanovita pravila. Otkrića daljnjih galvanskih elemenata — izvora elektrike (*Daniell, Leclanché* itd.) i akumulatora — uređaja za pohranjivanje elektrike (*Sinstenden, Planté* itd.), omogućila su munjeviti razvoj nauke o elektrici. Pošto je godine 1820. danski fizičar *H. C. Oersted* (1777...1851) eksperimentalno utvrdio vezu između električne struje i magnetizma (prije njega *D. Arago* je godine 1681. ustanovio vezu između

munje i magnetizma), bili su postavljeni temelji za proučavanje elektrike i magnetizma kao cjeline (*A. Ampère*, 1775...1836).

Budući da su u to doba galvanski elementi bili jedini *izvori* napona i struje, oni su istodobno predstavljali i metrološku osnovu prema kojoj su se izvodila sva električka mjerenja. Naravno da o metrologiji u današnjem smislu (nepouzdanost napona izvora, mjerna preciznost itd.) nije moglo biti ni spomena, jer se mijenjanje napona galvanskog elementa u toku vremena moglo utvrditi jedino usporedbom s isto takvim ili sličnim (promjenljivim) elementom. Podsjećamo da još i danas imamo znatne poteškoće s pohranjivanjem vrijednosti napona normalama — Westonovim elementima, što smo opisali u odsječku 3.5. Zato mjerenja u odnosu prema nezavisnim galvanskim elementima i drugim izvorima (ispravljačima itd.) nazivamo *relativnim* ili usporedbenim mjerenjima. Rezultati takvih mjerenja obično nisu u strogo determiniranoj vezi s metrologijom ostalih grana znanosti, mehanikom, naukom o toplini itd.

Apsolutna električka mjerenja, tj. utvrđivanje vrijednosti elektromagnetskih veličina u čvrstom odnosu prema metrologiji mehanike (vidi citat BAAS-a u odlomku 5.1.2), uveo je godine 1832. genijalni i svestrani njemački učenjak *Carl Friedrich Gauss* (1777...1855). Postupkom koji ćemo u nastavku letimično opisati on je prvi put primijenio *pramjerilo*, tj. uređaj kojim se utvrđuje (reproducira) *stvarna* vrijednost elektromagnetske veličine (o pramjerilima vidi odsječak A.5.3 i poglavlje E.3). Istodobno je *Gauss* postavio temelj sistema jedinica CGSM, koji smo opisali u odsječku 4.2. Godine 1851. predložio je *W. Weber* (1804...1891) analogan sistem jedinica za apsolutna mjerenja *električkih* veličina (Gaussova metoda odnosila se na tzv. magnetske veličine, koje su u to vrijeme bile odvojene od električkih; vidi odlomak 4.3.1), iz kojeg je poslije nastao CGSE sistem jedinica. Ta dva datuma prvi su koje možemo označiti kao početak znanstvene metrologije elektromagnetizma.

Gaussovo pramjerilo preteča je današnjih magnetometara. Želeći utvrditi magnetski moment M (u današnjoj terminologiji) štapnog permanentnog magneta, *Gauss* ga je u sredini podupro ležajem tako da se mogao zakretati u horizontalnoj ravnini. Izveden za kut φ iz smjera magnetskog meridijana, oslobođeni se magnet zanjihao pod djelovanjem zakretnog momenta $T = M B_0 \sin\varphi$, gdje je B_0 horizontalna komponenta magnetske indukcije zemljinog polja. Ako moment tromosti magneta označimo sa J, a trenja i elektromagnetska prigušenja zanemarimo, pri malim otklonima ($\sin\varphi \approx \varphi$) dobivamo frekvenciju njihanja magneta u polju Zemlje

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{MB_0}{J}}. \tag{5.1-1}$$

Prema tome se vrijednost *umnoška* MB_0 dobiva mjerenjem frekvencije f i momenta tromosti J (odsječak A.9.3), tj. $MB_0 = (2\pi f)^2 J$.

Da bi se utvrdila stvarna (apsolutna) vrijednost magnetskog momenta M, potrebno je još jedno mjerenje. Isti štapni magnet stavi se okomito na polje B_0 Zemlje, a u relativno velikoj udaljenosti r izmjeri se kut otklona α busole od smjera B_0. Na tom mjestu, naime, permanentni magnet stvara polje indukcije $B = \mu_0 M : (4\pi r^3)$, gdje je μ_0 magnetska konstanta. Budući da je B okomito na B_0, položaj igle busole opisuje jednadžba

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{B_0} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3 B_0}, \tag{5.1-2}$$

jer se igla otklanja u smjeru rezultante međusobno okomitih vektora B i B_0. Iz jednadžbi (5.1-1,2) slijedi rezultat opisanih dvaju eksperimenata

$$M = 4\pi r f \sqrt{\pi r J \operatorname{tg}\alpha/\mu_0}\,, \qquad (5.1\text{-}3)$$

tj. vrijednost M permanentnog magneta utvrđuje se u vakuumu (μ_0; vidi odlomak 2.1.3) računanjem pomoću (5.1-3) na temelju izmjerenih vrijednosti r, f, J, α, i per definitionem odabrane vrijednosti magnetske konstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2. Opisanim mjerenjima istodobno je utvrđena vrijednost horizontalne komponente indukcije zemaljskog polja $B_0 = (2\pi f)^2 J/M$, gdje je vrijednost M izražena jednadžbom (5.1-3).

Radovi *Gaussa*, *Webera* i drugih na području apsolutnih mjerenja bili su znatno ispred potreba svakodnevnih električkih mjerenja. Rastuće zanimanje za električke i magnetske pojave zahtijevalo je *praktične* (tj. prikladne za brz i jeftin laboratorijski rad) uređaje potrebne pri mjerenjima. Nije stoga čudno što je baš Englez *C. Wheatstone*, utemeljitelj metode mjerenja električkog otpora, između godine 1840. i 1843. izradio prvu *normalu otpora* (usporedi s odsječkom 3.6 i odlomkom 5.3.2). To je bio stupac žive duljine 1 foot i mase 100 graina (oko 6,5 grama; vidi tablicu **15** u prilogu knjige i odsječak B.11.5). Oko godine 1848. i u Njemačkoj su upotrebljavali otporničke normale, a godine 1860. *W. Siemens* je uveo živinu normalu električkog otpora (»Siemens Einheit«). Ona je bila realizirana stupcem žive duljine 1 metar, presjeka 1 mm^2. Živa se nalazila u staklenoj cjevčici uronjenoj u mješavinu leda i vode, temperatura je, dakle, iznosila 0 °C. Kao *naponska normala*, a ujedno i kao izvor napona, upotrebljavao se Daniellov element (cink-bakar). Njega je tek godine 1873. zamijenila pouzdanija normala, koju je razvio *L. Clark*, a nju je naslijedila još pouzdanija — Westonov element (odlomak 3.5.2).

5.1.2. Plodna metrološka djelatnost BAAS. Britanskom udruženju za unapređenje znanosti (The British Association for the Advancement of Science, BAAS) predložili su *Bright* i *Clark* da se usvoji i standardizira koherentan sistem jedinica koji bi bio od velike koristi i telegrafiji i znanosti. Oni su imali veliko praktično iskustvo s podmorskim kabelima, a pri tom su se služili Daniellovim elementom (oko 1,09 V) kao jedinicom napona, dok je jedinica kapaciteta bio kapacitet pločastog kondenzatora površine 1 m^2, razmaka ploča 1 mm. Elektrika kojom se taj kondenzator napunio pod djelovanjem napona Daniellova elementa služila je kao jedinica, a omjer ove jedinice elektrike i jedne sekunde smatrao se jedinicom jakosti struje. Otpor kroz koji je element proveo jediničnu struju bio je jedinica električkog otpora. Bright-Clarkov sistem temeljio se, kako vidimo, na dvije normale (napona i kapaciteta) koje su se u njihovo vrijeme upotrebljavale u telegrafiji.

BAAS je odmah godine 1861. osnovao poseban Odbor za normale električkog otpora (Committee on Standards of Electrical Resistance), u kojem su se, među ostalima, nalazili mnogi učenjaci slavni i danas: *William Thomson* (*Lord Kelvin*, 1824...1907), *Maxwell*, *Wheatstone*, *Joule*, *Siemens* itd. Djelatnost tog odbora postala je čuvena, jer on je obavio pionirski posao na tom području. Odbor je sve do godine 1867. izdavao i godišnje izvještaje, koji su postali osnovom električke metrologije. Tako je *W. Thomson* godine 1862. uveo energiju kao sponu između mehanike i elektromagnetizma. Bila su pri tom predložena dva sistema jedinica: »materijalni« za telegrafske tehničare i »apstraktni« za teoretičare. »Materijalni« sistem bio je onaj koji su predložili *Bright* i *Clark*, a »apstraktni« je bio *Gaussov*.

Godine 1867. BAAS je donio »konačne« prijedloge kojima se preporučuje za *apsolutna* mjerenja sistem s osnovnim jedinicama metar, gram, sekunda. Istodobno su predložene »praktične« normale, specijalno za električki otpor. *Clark* je jedinicu otpora, koju treba da pohranjuje otpornička normala, nazvao »ohm« (*G. S. Ohm*, 1789...1854). Spomenuti je Odbor udruženja BAAS smatrao da »praktične jedinice« treba da budu dekadski višekratnici ili decimalni dijelovi apsolutnih jedinica, koje su se tada temeljile na metru, gramu i sekundi (to znači da bi se veličine r, f, J i α iz odlomka 5.1.1 mjerile jedinicama metar, 1/s, gm^2 i radijan). Višekratnik 10^7 jedinice otpora »teoretskog« sistema predstavljao je jedan ohm. Tu jedinicu smatrali su vrlo »praktičnom« (tj. prikladnom za tehničku primjenu), jer je 1 milja telegrafske žice tada uobičajenog presjeka imala otpor približno 10 ohma.

Na prijedlog BAAS, Board of Trade je godine 1865. uveo *žičanu normalu* izrađenu od slitine platine i srebra (usporedi s odlomkom 3.6.1). Njome utjelovljena jedinica zvala se »British Association Unit« (BAU) ili »Ohmad«. U današnjim jedinicama otpora (SI) njena je vrijednost iznosila BAU = 1,988 Ω. Budući da se uskoro pokazalo da otpor takve normale nije dovoljno stalan, a i iz drugih razloga, uvedena je nova normala BAU: *stupac žive* duljine 1,048 m, presjeka 1 mm^2, pri temperaturi taljenja leda. Voltom je nazvana »praktična« jedinica koja je bila 10^5 puta veća od »teoretske« jedinice napona. Tako je volt bio približno onaj napon koji ima Daniellov element. Iako su faktori 10^7 i 10^5 bili odabrani samovoljno, ostale »praktične jedinice« pokorile su se pravilu koherencije, tj. odnosu jedinica $1 \times 1 = 1$. Zbog toga se morala promijeniti prvotna »praktična« jedinica kapaciteta »farad«.

Vidimo da je britansko udruženje BAAS obavilo izvanredan pionirski posao: za znanstvene svrhe usvojilo je »teoretski« sistem s osnovnim jedinicama m (metar!), g, s, a za praktične svrhe »praktički« sistem čije su jedinice bile dekadski višekratnici »teoretskih« jedinica. Sve jedinice svakog sistema bile su međusobno koherentne, a »praktične« su osim toga dobile nazive po glasovitim učenjacima. Zanimljivo je spomenuti koliko se nazori BAAS podudaraju s današnjim pogledima metrologije elektromagnetizma. Tako, na primjer, u izvještaju BAAS od godine 1863. (dakle pred više od stotinu godina!) piše u pogledu apsolutnih jedinica:

»Nakon zrelog razmatranja Odbor je mišljenja da sistem tzv. apsolutnih električkih jedinica, koji se temelji na posve mehaničkim mjerenjima (vidi odlomak 5.1.1 — opaska autora ove knjige), nije samo najbolji do sada predloženi sistem već i jedini koji je u skladu s našim današnjim poznavanjem kako relacija među različitim električkim pojavama, tako i veza između tih pojava i fundamentalnih mjerenja vremena, prostora i mase.« Tom *doslovno* prevedenom citatu valja dodati još jedan iz istog izvještaja: »Riječ ‚apsolutan' ovdje je upotrijebljena u smislu opozicije riječi ‚relativan' i nipošto ne znači da je mjerenje izvršeno tačno ili da je predložena jedinica savršeno izrađena (is of perfect construction); drukčije rečeno, ona ne znači da su mjerenja ili jedinice apsolutno korektni, već jedino to da je mjerenje, umjesto da bude jednostavna usporedba s proizvoljnom veličinom iste vrste kao što je mjerena, učinjeno u odnosu prema nekim fundamentalnim jedinicama druge vrste koje su odabrane za postulate.«

Godine 1868. udruženje BAAS imenovalo je nov stručni organ: »Odbor za izbor i nazive dinamičkih i električkih jedinica« (Committee for the Selection and Nomenclature of Dynamical and Electrical Units). Taj je odbor proučavao i međusobno uspoređivao prednosti i mane sistema jedinica m-g-s, foot-grain--second, mm-mg-s (Gaussov prijedlog, vidi odlomak 4.5.2) i cm-g-s u svrhu usvajanja *jedinstvenog sistema jedinica sveukupne znanosti*. Na 43. zasjedanju

BAAS u Bradfordu godine 1873. donesena je odluka: izabran je sistem s osnovnim jedinicama duljine, mase i vremena:

centimetar, gram, sekunda.

»Praktične« jedinice ohm, volt i farad bile su tim novim izborom vezane na »apsolutne teoretske jedinice« (tj. CGSM iz odsječka 4.2) faktorima 10^9, 10^8 i 10^{-9}, dakle onako kao što je danas (SI). Tom prilikom BAAS je prihvatio i nazive triju jedinica »teoretskog« sistema:

za silu dyn = g cm/s²,
za energiju erg = dyn · cm i
za snagu erg/s.

5.1.3. Radovi elektrotehničkih kongresa. Opisanom djelatnošću specijalnih odbora BAAS bila je uspješno završena izvanredno važna i plodna era električke metrologije. U Velikoj Britaniji paralelno su ušli u primjenu »teoretski« (apsolutni) sistem magnetostatskih jedinica i sistem »praktičnih« jedinica definiranih kao dekadski (decimalni) višekratnici apsolutnih jedinica. Iako nije postojao međunarodni dogovor o njihovoj upotrebi, nagli razvoj elektromagnetizma zahtijevao je i omogućio da se i u drugim zemljama uvriježuju oba sistema: prvi u znanstvenim radovima, drugi u dnevnoj operativi.

Oko godine 1880. u različitim se zemljama upotrebljavalo veliko mnoštvo različitih jedinica istih veličina, na primjer: 12 jedinica napona, 10 jedinica struje i 15 jedinica električkog otpora! Zato je prvi Međunarodni elektrotehnički kongres (Congrès International d'Electricité, CEI), održan u Parizu godine 1881, u cijelosti prihvatio prijedloge BAAS i još ih dijelom nadopunio. Kongres je, među ostalim, prihvatio prvih pet naziva »apsolutnih praktičnih jedinica«:

jedinica otpora ohm = $10^9 \cdot [R]_m$,
jedinica napona volt = $10^8 \cdot [U]_m$,
jedinica struje amper = $0{,}1 \cdot [I]_m$,
jedinica elektrike coulomb = $0{,}1 \cdot [Q]_m$,
jedinica kapaciteta farad = $10^{-9} \cdot [C]_m$.

Ove i ostale jedinice sadrži naša tablica **40** u prilogu knjige. Uglate zagrade s indeksom m označuju jedinice sistema CGSM, koji smo opisali u odsječku 4.2.

Elektrotehnički kongres godine 1881. prihvatio je i ove rezolucije u pogledu električkih jedinica: »1. Za električka mjerenja prihvaćaju se osnovne jedinice: centimetar, masa grama (masse du gramme), sekunda (CGS). 2. Praktične jedinice (les unités pratiques), ohm i volt, zadržavaju postojeće definicije: 10^9 za ohm i 10^8 za volt. 3. Jedinica otpora (ohm) predstavljena je (représentée) stupcem žive presjeka 1 mm² pri temperaturi 0 °C. 4. Ovlašćuje se jedna međunarodna komisija da za praksu (pour la pratique) na temelju novih iskustava utvrdi duljinu stupca žive presjeka 1 mm² pri temperaturi 0 °C koji predstavlja vrijednost ohma.« U daljnje tri rezolucije prihvaćeni su nazivi jedinica amper, coulomb i farad (A = = V/Ω, C = As, F = C/V).

Na Drugom kongresu godine 1889. u Parizu, usvojeni su nazivi za tri »praktične« jedinice:

jedinica energije joule = 10^7 erg,
jedinica snage watt = 10^7 erg/s,
jedinica induktiviteta henry = $10^9 \cdot [L]_m$.

Na Trećem kongresu godine 1891. u Frankfurtu predloženi su nazivi za »praktične« jedinice magnetskih veličina, ali zbog nesloge do zaključaka nije došlo. Četvrti kongres godine 1893. u Chicagu ponovo je raspravljao o nazivima magnetskih jedinica, ali je zaključio samo to da se jedinicama »teoretskog sistema« ne dodjeljuju posebni nazivi, već samo jedinicama »praktičnog sistema«. Time je bio potvrđen zaključak Kongresa od godine 1881.

Četvrti kongres propisao je način izrade normala za pohranjivanje vrijednosti »praktičnih« jedinica ohm, amper i volt. Jedinicu otpora ohm pohranjivao je stupac žive presjeka 1 mm² i duljine 106,3 cm pri temperaturi taljenja leda (usporedi s odlomkom 5.3.2). Ta otpornička normala samo se neznatno razlikovala od »ohm légal«, koji je još godine 1884. u Parizu prihvatila posebna konferencija za definiranje električkih jedinica. Taj »zakonodavstveni ohm« bio je inače već spomenuti stupac žive, ali duljine 106 cm, tako da se razlikovao za 1,4 % od ohma BAAS (odlomak 5.1.2). Navodimo skraćene upute o reproduciranju triju najvažnijih jedinica od kojih su se pomoću pravila koherencije izvodile ostale (Kongres 1893):

»Jedinica električkog otpora ohm osniva se na teoretskom ohmu koji je jednak 10^9 jedinica otpora magnetostatskog sistema; predstavljen je stupcem žive s temperaturom taljenja leda, masa mu iznosi 14,4521 gram, a duljina stupca konstantnog presjeka je 106,3 centimetra.«

»Jedinica jakosti električne struje amper, teoretski jednak 1/10 jedinice magnetostatskog sistema, predstavljen je stalnom strujom koja za jednu sekundu izluči 1,118 miligrama metala iz voltametra sa srebrnim nitratom.«

»Jedinica električkog napona volt, umnožak ohma i ampera, praktički je predstavljena sa 1/1,431-im dijelom napona Clarkova elementa«.

Godine 1900. održan je u Parizu Peti međunarodni elektrotehnički kongres, koji je svojim odlukama oborio zaključke Kongresâ od godine 1881. i 1893. o nazivima jedinica. Odlučeno je, naime, da četiri jedinice teoretskog sistema (CGSM) dobiju vlastita imena:

CGSM jedinica magnetskog napona: gilbert (Gb),
CGSM jedinica jakosti magnetskog polja: oersted (Oe),
CGSM jedinica magnetske indukcije: gauss (G),
CGSM jedinica magnetskog toka: maxwell (Mx).

U zagradi smo naveli kratice tih jedinica koje je prihvatila Međunarodna elektrotehnička komisija na svom zasjedanju u Scheveningenu godine 1935.

Ta odluka uzrokovala je kasnije u primjeni dosta nesporazuma. Neki su, naime, mislili da je gauss jedinica jakosti magnetskog polja H, a neki da je oersted jedinica magnetske indukcije B. Zbog toga je u literaturi nastala zbrka koja je trajala desetljećima. Tome je svakako pridonijelo slabo razlikovanje između fizikalnih veličina B i H, tj. ignoriranje važne uloge veličine »permeabilnost« (vidi odsječak 1.3). Uvođenje imena maxwell i gauss uzrokovalo je i druge nesporazume. Budući da su jedinice $[\Phi]_m$ i $[B]_m$ imale nazive, neki su smatrali da su to jedinice praktičnog sistema, a ne teoretskog (CGSM). Posljedica toga bila je, na primjer, *brojčana* jednadžba magnetske indukcije (istodobno i jakosti magnetskog polja) u centru solenoida $B = H = 2\pi I : (10\, r)$, prilagođena jedinicama gauss, oersted, amper i centimetar (vidi odlomke 4.3.3, 4). Miješanje apsolutnih jedinica CGSM s praktičnima (pod »praktičnima« stalno razumijevamo dekadske i decimalne višekratnike apsolutnih jedinica CGSM, vidi odlomak 5.1.2) dovelo je i do jednadžbe elektromagnetske indukcije $U = Bvl \cdot 10^{-8}$, koja je, dakako, *brojčana* jednadžba prilagođena redom jedinicama: volt, $[B]_m$ = gauss, cm/s i cm.

5.2. Proces nastajanja Međunarodnog sistema jedinica. O racionalizaciji

5.2.1. Giorgijev prijedlog od godine 1901. Početak dvadesetog stoljeća bio je vrlo značajan za metrologiju elektromagnetizma. Godine 1901. predložio je Talijan *Giovanni Giorgi* koherentan skup jedinica, koji je sa stanovitim nadopunama danas poznat pod nazivom Međunarodni sistem jedinica (SI; vidi poglavlje 2). I u naše je vrijeme zanimljivo čitati što je *Giorgi* napisao u referatu Electrical and Physical Units za Šesti elektrotehnički kongres godine 1904. u St. Louisu: »Da bi se iz mehaničkih jedinica izvele električke i magnetske jedinice, potrebna je četvrta osnovna ili nezavisna jedinica. U CGSE i CGSM sistemima za četvrtu jedinicu uzeta je elektrostatska ili magnetska konstanta slobodnog etera, što ima mnogo loših strana.« Svakako valja naglasiti da je *Giorgi* predložio racionalni oblik jednadžbi, pa se poziva i na *Heavisidea* (vidi odlomak 5.2.6). Za »magnetsku konstantu slobodnog etera« navodi $\lambda = 0{,}000\,001\,256$ henry/metar, što danas zovemo »magnetska konstanta« $\mu_0 (= 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m})$. Isto tako za električku konstantu ϵ_0 (o μ_0 i ϵ_0 vidi odlomke 1.3.2 i 1.2.2) navodi vrijednost $\epsilon_0 = 8{,}842 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$. U obrazloženju svog prijedloga *Giorgi* piše: »Ovaj sistem niti je elektrostatski niti magnetostatski, jer za osnovnu jedinicu ne uzima ni ϵ_0 ni μ_0. Ovaj sistem potpuno je dualistički, sve jedinice imaju istovremeno električko i magnetsko obilježje; sve su električke i magnetske formule identične.«

Učinili bismo historijsku nepravdu ako ne bismo spomenuli dva izvanredno važna prijedloga koja su prethodila Giorgijevu radu. Godine 1891. Englez *John Perry* predložio je sistem jedinica, koji je vrlo bliz današnjem SI. Te godine *Perry* je u članku objavljenom u časopisu The Electrician pod naslovom *Praktične elektromagnetske jedinice* napisao i ovo: »Želim predložiti da praktična jedinica magnetskog toka (ili indukcije ili sile) bude 10^8 jedinica CGSM i da dobije svoje ime. Tako se magnetska permeabilnost zraka neće više moći uzimati kao jedinica, već će se u praktičnom sistemu mjerenja iskazivati jednako kao i permeabilnost bilo koje druge tvari; permeabilnost zraka iznosit će $4\pi \times 10^{-9}$ i u budućnosti ni jedna tvar neće imati permeabilnost 1. Jedinica ukupne magnetomotorne sile u magnetskom krugu je amperzavoj, a jedinica gradijenta magnetomotorne sile treba da bude amperzavoj po centimetru...«

Vidimo da, s iznimkom centimetra umjesto metra, *Perry* u biti predlaže Međunarodni sistem jedinica kakav imamo danas. On je pri tom prihvatio prijedlog o racionalizaciji jednadžbi elektromagnetizma koju je 1882. godine predložio drugi veliki čovjek tog razdoblja, *Oliver Heaviside* (vidi odlomak 5.2.6). S koherentnim sistemom jedinica elektromagnetizma i racionalnim oblikom brojčanih jednadžbi on je ujedno bio preteča racionalnih veličinskih jednadžbi koje imamo danas.

Godine 1900. *F. J. Rogers* je predložio u Physical Review sistem jedinica mehanike metar, kilogram, sekundu s koherentnim jedinicama watt, joule i »Large Dyne« (veliki dyn), tj. današnji newton. Taj izbor opravdao je »harmonijom« jedinica, što bismo danas rekli »koherencijom jedinica«.

5.2.2. Ascolijevo pravilo o koherenciji jedinica. Na Šestom elektrotehničkom kongresu godine 1904. važan je referat predložio *Giorgi*jev zemljak *Ascoli*, koji je uočio da teoretski postoji mnoštvo sistemâ jedinica mehanike koji se mogu koherentno prilagoditi skupu jedinica amper, ohm itd. On je otkrio i posebno pravilo, koje ćemo ovdje izvesti u nešto širem obliku, a onda ga reducirati na *Ascoli*jev oblik. Posve je sigurno da su to pravilo učenjaci poznavali davno prije *Ascoli*ja

(*J. C. Maxwell*, 1873), ali vjerojatno nisu smatrali potrebnim da ga objavljuju, jer ono proizlazi iz samih osnova metrologije (usporedi s odsječkom A.5.1).

Zamislimo da želimo imati sistem jedinica koji će biti *koherentan* za mehaniku i elektromagnetizam. To znači da »zajedničke veličine« (duljina, vrijeme, energija, snaga, tlak itd.) moraju imati *iste* jedinice. (Takav je, na primjer, današnji Međunarodni sistem jedinica, SI, koji smo razmotrili u poglavljima B.7, D.4 i E.2.) Budući da je jedinica energije $[W]$ tog sistema ista u području mehanike i elektromagnetizma, možemo pisati (odsječak A.5.1)

$$[l]^2\,[m]\,[t]^{-2} = [W] = [U]\,[I]\,[t], \tag{5.2-1}$$

gdje simboli veličina u uglatim zagradama redom predočuju koherentne jedinice ovih veličina: duljine, mase, vremena, energije, napona, struje i vremena.

Sada zamislimo da želimo stvoriti još jedan koherentan sistem jedinica (indeks 0), koji se razlikuje od prvoga (bez indeksa). Za taj drugi sistem vrijedit će jednadžba među jedinicama koja je građena jednako kao i (5.2-1):

$$[l]_0^2\,[m]_0\,[t]_0^{-2} = [W]_0 = [U]_0\,[I]_0\,[t]_0. \tag{5.2-2}$$

Daljnja razmatranja bit će preglednija ako uvedemo posebne oznake za omjere jedinica prvog (bez indeksa) i drugog (0) sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{[l]}{[l]_0} &= 10^a, \quad \frac{[m]}{[m]_0} = 10^b, \quad \frac{[t]}{[t]_0} = 10^c, \\ \frac{[W]}{[W]_0} &= 10^d, \quad \frac{[U]}{[U]_0} = 10^e, \quad \frac{[I]}{[I]_0} = 10^f. \end{aligned}\right\} \tag{5.2-3}$$

Podijelimo li međusobno jednadžbe (5.2-1, 2) i uvedemo oznake omjerâ iz (5.2-3), dobivamo dva izraza koji povezuju eksponente $a \ldots f$:

$$2a + b - 2c = d, \qquad e + f + c = d. \tag{5.2-4}$$

Te dvije jednadžbe možemo, dakako, udružiti u jednu, ali pri tom ispada eksponent d:

$$2a + b - 3c - e - f = 0. \tag{5.2-5}$$

Izrazi (5.2-4, 5), koji su posljedica pravila koherencije, izražavaju činjenicu da u koherentnom sistemu jedinica ne možemo po svojoj volji odabrati sve jedinice, već jednu manje od ukupnog broja jedinica iz $[W] = [l]^2[m]\,[t]^{-2}$. To je razumljivo, jer je $[W]$ *izvedena* jedinica ako smo ostale tri odabrali za osnovne (usporedi s odsječkom 2.2).

Proglasimo sada da je koherentan sistem s indeksom 0 poznati CGS sistem jedinica koji je godine 1868. prihvatilo britansko udruženje BAAS (odlomak 5.1.2). To znači da je

$$[l]_0 = \mathrm{cm}, \quad [m]_0 = \mathrm{g}, \quad [t]_0 = \mathrm{s}, \qquad [W]_0 = \mathrm{erg} = \mathrm{cm^2\,g\,s^{-2}},$$

gdje kratice cm, g i s označuju osnovne jedinice CGS sistema centimetar, gram i sekundu. *Giorgi* je na Kongresu u St. Louisu godine 1904. predložio da novi sistem zadrži kao osnovnu jedinicu vremena sekundu, dakle

$$[t] = [t]_0 = \mathrm{s}, \quad [t]/[t]_0 = 10^c = 1 \rightarrow c = 0,$$

te da univerzalna jedinica energije bude joule = J, što je godine 1889. prihvatio Drugi kongres (vidi odlomak 5.1.3). Prema tome je

$$[W] = \mathrm{J} = 10^7 \cdot [W]_0, \quad [W]/[W]_0 = 10^d = 10^7 \rightarrow d = 7,$$

gdje je $[W]_0 = \mathrm{erg}$. Računanje nam je, dakle, pokazalo da izbor jedinica

$$[t] = \mathrm{s}, \ [W] = \mathrm{J} \text{ propisuje } c = 0, \ d = 7.$$

Uvrstimo li te vrijednosti eksponenata u lijevu jednadžbu (5.2-4), dobivamo Ascolijevo pravilo u prvotnom obliku

$$2a + b = 7. \tag{5.2-6}$$

Uvrštenjem $c = 0$, $d = 7$ u desnu jednadžbu (5.2-4) ili u (5.2-5), slijedi

$$e + f = 7.$$

Giorgi je za osnovnu jedinicu duljine predložio $[l] = \mathrm{m} = \mathrm{metar}$. Budući da je $\mathrm{m} = 100$ cm, to je $[l] = 10^2 \cdot [l]_0$, dakle $a = 2$ (jednadžba 5.2-3). Time je prema izrazu (5.2-6) automatski definirana vrijednost eksponenta $b = 7 - 2a = 7 - 4 = 3$. Budući da je $[m]/[m]_0 = 10^b$, za taj se slučaj ($b = 3$) dobiva osnovna jedinica mase Giorgijeva sistema

$$[m] = 10^3 \cdot [m]_0 = 10^3 \cdot \mathrm{g} = \mathrm{kilogram}.$$

Morala su proći dva svjetska rata od Kongresa u St. Louisu da od Giorgijeva prijedloga nastane svjetski sistem jedinica SI usvojen međunarodnim dogovorom. Razloga tome bilo je mnogo. Stanje mjerne tehnike danas i ono od prije 70 godina teško se uopće može usporediti. Paralelno s razvojem umijeća mjerenja razvijala se i teorija metrologije, koja je u nekim razdobljima prestizala mjernu tehniku, a u drugima postajala metrološka mistika. I terminologija se prilagođivala sve savršenijem stanju praktičke i teoretske metrologije. Pri proučavanju starih članaka iz električke metrologije nameće se, naime, zaključak da do rješenja mnogih pitanja nije ranije dolazilo jednostavno zato jer diskutanti nisu razumjeli jedan drugoga.

Primjer. Godine 1873. predložio je *J. C. Maxwell* koherentan sistem jedinica mehanike i elektromagnetizma koji se temeljio na ovim jedinicama: $[l] = 10^4$ km (quadrant) $= 10^9$ cm $= 10^9\,[l]_0$, $[t] = \mathrm{s} = [t]_0$, $[U] = \mathrm{volt} = 10^8 \cdot [U]_0$, $[I] = \mathrm{amper} = 10^{-1} \cdot [I]_0$. Jedinice $[U]_0 = [U]_\mathrm{m}$ i $[I]_0 = [I]_\mathrm{m}$ su jedinice CGSM sistema (odsječak 4.2), koji je koherentan za područje mehanike i elektromagnetizma. Prema oznakama iz jednadžbe (5.2-3) *Maxwell* je, dakle, odabrao vrijednosti eksponenata: $a = 9$, $c = 0$, $e = 8$, $f = -1$. Pomoću (5.2-5) dobiva se $b = 3 \cdot 0 + 8 - 1 - 18 = 10^{-11}$, tj. jedinica mase Maxwellova sistema »quadrant, gram-eleventh, second« bila je $[m] = 10^b \cdot [m]_0 = 10^{-11}$ g, jer je $[m]_0 = [m]_\mathrm{CGS} = 1$ gram. Jedinica energije tog sistema, koji nikada nije bio prihvaćen, bila je današnja jedinica SI joule = VAs ($d = 8 - 1 + 0 = 7$, $[W] = 10^7 \cdot [W]_0 = 10^7$ erg).

J. Perry je godine 1891. predložio koherentan sistem jedinica mehanike i elektromagnetizma koji se temeljio na jedinicama $[l] = \mathrm{cm} = [l]_0$, $[t] = \mathrm{s} = [t]_0$, $[U] = \mathrm{volt}$ i $[I] = \mathrm{amper}$, tzv. »VAscm sistem jedinica«. Prijedlog je godine 1910. obnovio *G. Mie*, a zatim su godine 1916. to ponovno učinili *Dellinger* i *Bennett*. Eksponenti iz jednadžbe (5.2-3) glasili su prema tome: $a = 0$, $c = 0$, $e = 8$ i $f = -1$. Pomoću oba izraza (5.2-4) dobiva se $d = 7$ i $b = 7$, tj. za jedinicu energije $[W] = \mathrm{joule}$, a za jedinicu mase $[m] = 10^7 \cdot [m]_0 = 10^7\,\mathrm{g} = 10^4\,\mathrm{kg} = 10$ tona! Vidimo da ni *Maxwell*ov ni *Perry*jev izbor nije bio nimalo prikladan za »svakodnevnu uporabu« (masa 1 litra vode, tj. oko 1 kilogram; vidi odsječak A.6.2).

5.2.3. Tehnički sistem jedinica od godine 1908. ima i nekoliko drugih imena: »internacionalni sistem jedinica«, »praktični sistem jedinica« i »materijalni sistem jedinica«. Iako je prvi naziv (internacionalni) historijski najispravniji,

ovdje ga nećemo upotrebljavati. Želimo, naime, izbjeći i najmanju mogućnost brkanja »internacionalnih jedinica« tog Tehničkog sistema (TS) s mjernim jedinicama današnjeg Međunarodnog sistema jedinica (SI) koji smo obradili u poglavlju 2. Podrobnosti o TS razmotrili smo u odsječku 5.3.

Iz daljnjeg ćemo teksta razabrati da je Tehnički sistem jedinica nastao na Međunarodnoj konferenciji o električkim jedinicama i standardima (International Conference on Electrical Units and Standards) održanoj mjeseca oktobra godine 1908. u Londonu. Konferenciji je prisustvovalo 48 delegata iz 25 zemalja, a predsjedavao joj je genijalni učenjak *Lord Rayleigh*. Prihvaćeno je devet rezolucija, koje ćemo dijelom citirati (navodnici) u doslovnom prijevodu (s tadašnjom terminologijom), a dijelom prepričati:

1. Osnovne (engl. fundamental) električke jedinice determiniraju se u odnosu prema sistemu CGSM (vidi odsječak 4.2) ovako: ohm $= 10^9\ [R]_m$, amper $= 0{,}1\ [I]_m$, volt $= 10^8\ [U]_m$, watt $= 10^7\ \mathrm{g\,cm^2/s^3}$. 2. »Kao sistem jedinica koji predstavlja (representing) gornji, a dovoljno je blizak njemu za potrebe električkih mjerenja i za osnovu zakonodavstva, Konferencija preporučuje prihvaćanje internacionalnog ohma, internacionalnog ampera i internacionalnog volta u skladu s idućim definicijama.« 3. »Ohm je prva primarna jedinica (primary unit).« 4. »Internacionalni ohm definiran je kao otpor specificiranog stupca žive.« 5. »Internacionalni ohm je otpor koji stalnoj električnoj struji pruža stupac žive mase 14,4521 gram, konstantnog presjeka i duljine 106,300 centimetara pri temperaturi taljenja leda.« 6. »Amper je druga primarna jedinica.« 7. Internacionalni amper je stalna električna struja koja iz vodene otopine srebrnog nitrata svake sekunde izluči 1,11800 miligrama srebra. 8. Internacionalni volt je električki napon (electrical pressure!) koji u vodiču otpora 1 internacionalni ohm proizvodi struju 1 internacionalni amper. 9. »Internacionalni watt je energija (energy!) koju svake sekunde troši stalna električna struja 1 internacionalni amper pod djelovanjem električkog napona 1 internacionalni volt.«

Citirane rezolucije obezvrijedile su velik dio napora i uspjeha metrologije elektromagnetizma u razdoblju od godine 1832. (*Gauss*, odlomak 5.1.1) do 1908. Vodeći metrolozi tog razdoblja uvijek su, naime, smatrali da se vrijednost elektromagnetskih jedinica utvrđuje (reproducira) pramjerilima (»apsolutna mjerenja« — vidi citat iz izvještaja udruženja BAAS od godine 1863. u odlomku 5.1.2), a tako utvrđena vrijednost *pohranjuje* materijalnim *normalama* otpora, napona itd. Naglašavamo da je taj stari nazor temelj *suvremene* metrologije elektromagnetizma, što smo opširno opisali u poglavlju E.3.

Rezolucije Konferencije od godine 1908. temelje se na dvije naivne i pogrešne pretpostavke. Prva je uvjerenost da se otpor živinog stupca ne mijenja u toku vremena. Kako inače objasniti specificiranje duljine stupca sa relativnom preciznošću barem 10^{-6} (rezolucija broj 5)? U odsječku 3.6 smo, naime, vidjeli da se i najboljim normalama 1 Ω u toku kratkih vremenskih razmaka otpor mijenja za nekoliko desetaka μΩ, dakle u relativnoj mjeri 10^{-5}! To je, doduše, eksperimentalno ustanovljeno poslije godine 1908, ali »duh materijalizacije« elektromagnetskih jedinica još dugo nije iščeznuo. Tako je, na primjer, *G. A. Campbell* na zasjedanju Odbora za simbole, jedinice i nomenklaturu (SUN) Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku (IUPAP) predložio da se izradi *pramjera* ohma i pohrani u Međunarodnom uredu za mjere i utege zajedno s prakilogramom. Taj prijedlog nije iznesen, recimo, godine 1910, već dvadesetak godina kasnije, godine 1933. u Chicagu! Iz tako konzerviranog praohma izvodile bi se prema *Campbell*u ostale elektromagnetske jedinice, vrijednost magnetske konstante μ_0 utvrđivala bi se eksperimentalno itd. Druga pogrešna pretpostavka Konferencije od godine 1908. bila je uvjerenost da srebrni voltametar, pramjerilo struje, vrlo pouzdano reproducira jakost struje, tj. da relativna nesigurnost voltametrom utvrđene struje iznosi oko $\pm 10^{-6}$ (vrijednost 1,11800 u rezoluciji broj 6!). Danas se zna da

relativna nesigurnost nije mogla biti bolja od $\pm 10^{-5}$, čak ni u slučaju da živa nije imala *izotope*, o kojima se godine 1908. nije ništa znalo (podrobnije vidi u odlomku 5.3.4).

U rezoluciji broj 2 izričito se navodi da »živin ohm« ($\Omega_0 = \Omega_{int}$) i »srebrni amper« ($A_0 = A_{int}$), tj. »internacionalne jedinice«, treba da posluže kao ishodište *zakonodavstva* i temelj *električkih mjerenja*. Tako je stvarno i bilo: većina država unijela je u svoje zakonodavne akte definicije »internacionalnih jedinica« ohm i amper u skladu s rezolucijama broj 5 i 6. Isto se dogodilo i u školstvu. Time je bila presječena veza između »praktičnih« i »teoretskih« jedinica (vidi, na primjer, rezolucije Elektrotehničkog kongresa od godine 1881. u odlomku 5.1.3), a »živin ohm« (Ω_0) i »srebrni amper« (A_0) stekli su s vremenom značenje *nezavisnih električkih jedinica*. Koherentne jedinice ostalih veličina, izvedene iz Ω_0 i A_0, tvorile su zajedno s ove dvije *samostalan sistem jedinica* (»Internacionalni sistem jedinica«, koji u ovoj knjizi zovemo »Tehnički sistem jedinica«). Značenje te nezavisnosti postalo je još izrazitije pošto je unaprijeđena metrologija eksperimentalno u nizu navrata utvrdila da vrijednosti Ω_0 i A_0 odstupaju od $10^9 \cdot [R]_m$ i $0{,}1 \cdot [I]_m$ (odlomak 5.1.3) više nego što iznosi nepreciznost mjerenja. Možemo, dakle, konstatirati da su rezolucije Konferencije od godine 1908. podigle Ω_0 i A_0 na rang samostalnih jedinica i *odvojile* ih od višekratnika »apsolutnih« jedinica $[R]_m$ i $[I]_m$.

Moglo bi se pomisliti da je ova velika metrološka greška nastala *nespretnom formulacijom* rezolucija Međunarodne konferencije o električkim jedinicama i standardima održane u Londonu godine 1908. Da tome nije tako, svjedoči dio izvještaja (Report) Konferencije, potpisan od predstavnika svih 25 država, koji donosimo u doslovnom prijevodu s engleskog:

Za one slučajeve kada nije prikladno ostvariti standarde prema navedenim rezolucijama, Konferencija preporučuje ove radne metode za realizaciju internacionalnog ohma, ampera i volta:

1. za internacionalni ohm: upotrebu kopija, izrađenih od prikladnog materijala i povremeno verificiranih, internacionalnog ohma, njegovih multipla i submultipla;

2. za internacionalni amper: a) mjerenje struje pomoću strujne vage standardizirane (baždarene!) usporedbom sa srebrnim voltametrom, ili b) upotrebu Westonove normalne ćelije čija je elektromotorna sila determinirana u ovisnosti o internacionalnom ohmu i internacionalnom amperu i otpornika poznate vrijednosti otpora izražene internacionalnim ohmom;

3. za internacionalni volt: a) usporedbu s razlikom električkog potencijala između krajeva otporničkog svitka poznate vrijednosti u jedinici internacionalni ohm ako kroz njega teče struja poznate jakosti u internacionalnim amperima, ili b) upotrebu Westonove normalne ćelije čija je elektromotorna sila determinirana u ovisnosti o jedinicama internacionalni ohm i internacionalni amper.

... Konferencija je proučila metode koje bi preporučila državama za osiguranje jedinstvene administracije u pogledu električkih jedinica i standarda te izražava mišljenje da bi najbolja metoda očuvanja jedinstvenosti (uniformity) za budućnost bilo osnivanje Međunarodnog električkog laboratorija sa zadatkom da pohranjuje i održava međunarodne električke standarde.

Citirani tekst spominje »strujnu vagu« (usporedi s odsječkom 3.1), a rezolucija broj 1 »osnovne jedinice«, ali bez determinirane veze s »primarnim jedinicama« (što znači taj izraz?) iz rezolucija broj 3 i 6. Jedino u tim izrazima i u navedenim višekratnicima naslućuje se porijeklo vrijednosti Ω_0 i A_0. Vjerojatno su te riječi ušle u rezolucije pod pritiskom argumenata genijalnog učenjaka *Lorda Rayleigha*, koji je predsjedavao Konferenciji, a zastupao je ideju apsolutne reprodukcije elektromagnetskih jedinica (pomoću pramjerila; danas se amper reproducira strujnom vagom njegove konstrukcije, vidi odsječak 3.1). Iako je sa svojim nazorom ostao u manjini, kao predsjednik Konferencije morao je prijedlog izvještaja (uključivši rezolucije) staviti na glasanje. Prijedlog je izradio Tehnički odbor

imenovan od Konferencije, koji je održao pet sjednica. Pošto su članovi Odbora prihvatili izvještaj, a njegovo je usvajanje od strane Konferencije predstavljalo formalnost, *Rayleigh* se nije mogao suzdržati a da ne kaže: »Prije nego što se Konferenciji predloži rezolucija, želim reći riječ ili dvije... Definiranje ohma kao otpora stupca žive čini mi se — neću reći nelogično, no teško da je u skladu s preciznošću apsolutnih mjerenja koja se sada može postići... S tih nekoliko primjedbi želim jedino olakšati svoju savjest... Predložit ću Konferenciji rezoluciju da internacionalni ohm treba definirati kao specificirani stupac žive... « Delegati ga nisu poslušali (ili razumjeli?), trebalo je proći daljnjih 40 godina da se usvoji ono što je on dalekovidno predlagao godine 1908.

5.2.4. Početak Međunarodnog sistema jedinica (SI). Na prigovore protiv Tehničkog sistema jedinica, kojega smo nastanak opisali u prošlom odlomku, nije se moralo dugo čekati. Čini se da je prvo prigovoreno jedinici energije joule, tj. jedinici Tehničkog sistema $J_0 = A_0 V_0 s = A_0^2 \Omega_0 s$. Vrlo precizna mjerenja na području mehanike i nauke o toplini pokazala su da jedinica J_0 nije jednaka (u okviru mjerne preciznosti) višekratniku 10^7 CGS jedinice erg (vidi, na primjer, odsječak D.5.2). Prema tome nije postojala koherencija između jedinica mehanike i elektromagnetizma, a ona je bila cilj metrologa od samog početka znanstvene metrologije elektromagnetizma (vidi odlomak 5.1.2).

S druge su strane eksperimentatori prigovarali reprodukciji »internacionalnog ampera« A_0 pomoću srebrnog voltametra, jer je rad s njime delikatan i dugotrajan (odlomak 5.3.1). Zato su izbjegavali voltametar i pretežno se služili Westonovom naponskom normalom i žičanom (manganinskom) normalom otpora. Time su se precizna mjerenja potpuno svela na *relativna* mjerenja, tj. u odnosu prema tim dvjema vrstama normala. Njihovu postojanost, bolje reći nepostojanost, mogli smo upoznati u odsječcima 3.5,6. Vrijednost napona i otpora tih normala mogla se utvrditi jedino u nekoliko vrhunskih metroloških zavoda koji su posjedovali živine stupce (Ω_0) i srebrne voltametre (A_0). Nije nimalo čudno da su, vjerojatno prvu, službenu akciju za ukidanje Tehničkog sistema jedinica poduzeli američki elektrotehničari, čija je elektrotehnika nastavljala svoj divovski uspon. Odbor za instrumente i mjerenja Udruženja američkih elektrotehničara (Committee on Instruments of the American Institute of Electrical Engineers, AIEE) predložio je svom predsjedništvu (Board of Directors) niz rezolucija koje je ono prihvatilo 27. juna 1928. Rezolucije završuju da barem neke od njih citiramo:

Budući da postoje dokazani podaci o razlikama između zakonski uspostavljenih internacionalnih električkih jedinica (ohm, amper, volt) i fundamentalnog ohma, ampera i volta, a namjena je internacionalnih jedinica da predstavljaju fundamentalne (te razlike za ohm i volt iznose oko 1/20 postotka),

budući da su razlike tih vrijednosti velike u usporedbi s potrebnom preciznošću koja se sada može postići u izradi i primjeni standarda temeljnih za sva električka mjerenja, ...

budući da je posljednjih godina umjetnost apsolutnih električkih mjerenja, oslonjena na fundamentalne jedinice duljine, mase, vremena i na permeabilnost prostora, toliko napredovala da bi tačnost i reproducibilnost sistema električkih jedinica, ostvarena takvim apsolutnim mjerenjima, bila pogodna za trgovačke, industrijske i znanstvene svrhe, ...

odlučujemo da AIEE potakne National Bureau of Standards i strane standardizacijske laboratorije da što je moguće prije poduzmu dodatna istraživanja kako bi se spomenute razlike smanjile na prihvatljive granice,

odlučujemo da AIEE potakne National Bureau of Standards i strane standardizacijske laboratorije da što je moguće prije poduzmu dodatna istraživanja potrebna da bi se, umjesto ozakonjenog internacionalnog ohma, ampera i jedinica izvedenih iz njih, ozakonili apsolutni ohm i apsolutni amper, koji se oslanjaju na elektromagnetski sistem centimetar—gram—sekunda, te apsolutni volt, watt i druge jedinice izvedene iz njih ...

Razuman apel američkih elektrotehničara naišao je, dakako, na povoljan odaziv kod vrhunskih metrologa i eksperimentalnih fizičara kako u Americi, tako i u ostalom svijetu. Mnogo je teži i dugotrajniji bio posao na promjeni zakonodavstva, tako da je kompletan Međunarodni sistem jedinica (Système International d'Unités) definitivno prihvaćen tek na jedanaestom zasjedanju Generalne konferencije za mjere i utege godine 1960. (o njoj vidi odsječke A.6.3, 7.1). Razlog toj sporosti dijelom su mjernotehnički i spoznajni problemi, dijelom rat, a dijelom neminovna sporost administracije. O prihvaćanju koherentnog univerzalnog apsolutnog sistema odlučivalo je, naime, nekoliko međunarodnih organizacija. Svaka od njih morala je za svaki problem konzultirati svoje članice — a vrijeme leti. U idućem odlomku zaustavit ćemo se na nekim djelatnostima tih organizacija, tek toliko da ocrtamo kontinuitet nastajanja i ozakonjenja SI za *cjelokupnu* ljudsku djelatnost, a ne samo za elektromagnetizam.

5.2.5. Proces međunarodnog prihvaćanja SI. Godine 1928. zasjedao je u Parizu Savjetodavni odbor za elektromagnetizam (odlomak A.7.1.3), koji je bio osnovan godinu dana prije toga. Raspravljalo se o tome da li da se i dalje zadrže »internacionalne« jedinice ili da se metrologija elektromagnetizma vrati na višekratnike Gaussovih apsolutnih jedinica. Rezultat je bio: sa zamjenom valja pričekati tako dugo dok veliki i specijalno opremljeni nacionalni metrološki zavodi ne utvrde odnose između jedinica Tehničkog sistema i jedinica CGSM sistema. Bila je zahtijevana relativna nesiugrnost 10^{-5} reprodukcije apsolutnih jedinica, što je u ono vrijeme već bilo postignuto.

Međunarodna elektrotehnička komisija (Commission International d'Electricité, CEI), koja je u pogledu mjernih jedinica, simbola, nazivlja itd. preuzela poslove Elektrotehničkih kongresa, bavila se spoznajno-formalističkim problemima metrologije elektromagnetizma. Na svom plenarnom zasjedanju u Stockholmu i Oslu godine 1930, CEI je odlučila da indukcija B i jakost magnetskog polja H u vakuumu ne budu iste fizikalne veličine, već različite. Time je permeabilnost $\mu = B/H$ i službeno dobila status samostalne veličine; jedino je relativna permeabilnost $\mu_r = \mu/\mu_0$ čist broj (odlomak 1.3.2). Istodobno su usvojeni nazivi četiriju »novih« jedinica: maxwell $= [\Phi]_m$, gauss $= [B]_m$, oersted $= [H]_m$ i gilbert $= [V]_m$ (usporedi s odlomkom 5.1.3; vidi i tablicu **40** u prilogu knjige). Osebujni su daljnji zaključci tog zasjedanja koji su propisivali da se u Tehničkom sistemu upotrebljavaju iste jedinice, ali s prefiksom »pra«, što je trebalo označivati da se radi o »praktičnim« jedinicama! Ovi zaključci nikada nisu realizirani u praksi, ali su ipak doveli do daljnjih nesporazuma.

Godine 1931. Međunarodna unija za čistu i primijenjenu fiziku osnovala je na svom zasjedanju u Bruxellesu poseban Odbor za simbole, jedinice i nomenklaturu (SUN), koji je zaključke CEI 1930. podvrgao organiziranoj međunarodnoj anketi. Ona je potvrdila samo one zaključke koji su se odnosili na razliku između B i H te na nazive CGSM jedinica. Osmi elektrotehnički kongres održan je 1932. u Parizu. Budući da se tom prilikom našlo tamo mnogo uglednih fizičara, odbor SUN sazvao je informativni skup na kojemu se većina suglasila s time »da su B i H dvije različite veličine«. Zaključeno je da se preporučuje osnivanje takvog mjernog sistema koji će sadržavati praktične jedinice J, W, C, A, Ω, V, F i H.

Slijedeće godine zasjedao je u Parizu Studijski odbor za električke i magnetske jedinice i veličine CEI, koji je potvrdio zaključke u pogledu veličina μ i μ_0 na IEC 1930. Predloženi su nazivi jedinica weber (Wb) $= 10^8 \cdot [\Phi]_m$, siemens (S) $= 1/\Omega$ i hertz (Hz) $=$ per/s $= s^{-1}$. U zaključku su raspisali anketu nacionalnim

odborima CEI, koji su trebali odgovoriti na pitanje da li su suglasni s koherentnim proširenjem apsolutnih elektromagnetskih jedinica na mjerni sistem mehanike m-kg-s, drugim riječima: da li se slažu s uvođenjem današnjeg koherentnog i univerzalnog SI. Rezultat odgovora na anketu sažet je na plenarnom zasjedanju IEC u Scheveningenu godine 1935. Zaključeno je da se uvede »apsolutni Giorgijev sistem jedinica« s osnovnim jedinicama: metar, kilogram, sekunda i jedna elektromagnetska jedinica. Izbor četvrte nezavisne (osnovne) jedinice ostao je, dakle, do daljnjega otvoren. Posljednje zasjedanje IEC prije drugog svjetskog rata održano je godine 1938. u Torquayu, Engleska, gdje je zaključeno da se jedinici sile u SI (taj naziv sistema još nije postojao) dade ime newton (N) = 10^5 dyn.

I djelatnost Generalne konferencije za mjere i utege (GK) odvijala se postepeno. Na osmom zasjedanju godine 1933. GK je definitivno potvrdila prijelaz na apsolutni sistem jedinica. Ovlastila je svoj Komitet za mjere i utege (odlomak A.7.1.1) da utvrdi odnos između jedinica TS i apsolutnih jedinica te da definira datum prijelaza. Budući da su apsolutna mjerenja, uglavnom, dugotrajna, utvrđivanje odnosa u nacionalnim metrološkim zavodima zavuklo se dulje nego što se predviđalo. Zato je godine 1935. Komitet proglasio da će do prijelaza doći 1. 1. 1940, ali je objavio *provizorne* vrijednosti omjerâ

$$\Omega_0 = 1{,}0005\ \Omega \quad \text{i} \quad V_0 = 1{,}0004\ \text{V},$$

gdje se slova s indeksom 0 odnose na jedinice Tehničkog sistema (»internacionalne«), a slova bez indeksa na jedinice današnjeg SI. Savjetodavni odbor za elektromagnetizam konstatirao je u junu 1939. da metrološki zavodi Japana, Njemačke i SSSR još nisu završili posao na definitivnom utvrđivanju spomenutih odnosa. O nastaloj situaciji trebalo je da odluči Komitet sazvan na zasjedanje u septembru 1939. Izbijanje rata prekinulo je svaku daljnju djelatnost ove vrhunske međunarodne metrološke organizacije.

Nakon preliminarnog zasjedanja novembra 1945, plenarno zasjedanje Komiteta održano je oktobra 1946. Konstatirano je da je u toku rata, osim u Njemačkoj, nastavljen i dovršen rad na utvrđivanju omjera jedinica TS i SI. Zato je Komitet odmah objavio rezoluciju o prijelazu na apsolutne jedinice i propisao faktore (vidi odlomak 2.5.3 te tablice E-9 i E-11 u odlomcima 3.1.4 i 3.3.4):

$$\Omega_0/\Omega = 1{,}00049 \quad \text{i} \quad V_0/V = 1{,}00034.$$

Za datum prijelaza proglasio je 1. 1. 1948. Ex post facto ovu je odluku potvrdila Generalna konferencija na svom devetom zasjedanju oktobra 1948.

O četvrtoj nezavisnoj jedinici apsolutnog sistema jedinica raspravljalo se na 9. zasjedanju GK, ali zaključak nije donesen. To je učinjeno na desetom zasjedanju godine 1954. Tada su usvojene ove četiri polazne (osnovne) jedinice

metar, kilogram, sekunda i amper.

Na jedanaestom zasjedanju godine 1960. prihvaćene su za polazne jedinice još dvije

kelvin i candela,

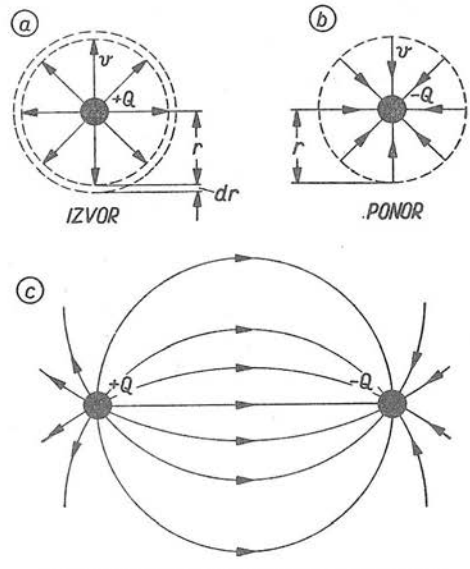
čime je u cijelosti definiran univerzalni »Međunarodni sistem jedinica«, koji je tom prilikom i službeno dobio to ime (Système International d'Unités, SI). Odluke idućih zasjedanja GK navedene su u odsječku A.7.5.

Time bismo mogli zaključiti naš prikaz historijskog razvoja sistema jedinica elektromagnetizma. SI je zauzeo mjesto svojih prethodnika CGSM, CGSE, Tehničkog sistema i mnogih drugih sistema koji su pravno nestali s međunarodne pozornice, a sada polako iščezavaju i iz prakse, gdje se odupiru još jedino silom inercije i neznanja (odsječak B.9.1). Prije zaključka ipak moramo spomenuti dvije odluke koje su važne za Jugoslaviju. Godine 1954. Studijski odbor 24 IEC preporučio je da se jedinica SI magnetske indukcije nazove »tesla« po jugoslavenskom učenjaku *Nikoli Tesli*. Međunarodni komitet za mjere i utege preuzeo je ove preporuke u svoje preporuke te uveo kraticu T = tesla. To je bio međunarodno obavezan zaključak, jer je Komitet imao za tu svrhu punomoć Generalne konferencije za mjere i utege. Naknadno je tu odluku potvrdila Generalna konferencija na svom zasjedanju godine 1960. (vidi odlomak B.4.3.2).

Druga važna odluka odnosi se na primjenu SI u Jugoslaviji. Godine 1961. objavljen je »Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima«, koji favorizira primjenu SI (vidi odlomke B.7.1.1 i A.7.5.7). Time smo u Jugoslaviji postigli visok stupanj suvremenosti u pogledu zakonodavne metrologije, ali nam je vrhunska nacionalna metrologija i dalje ostala na niskoj razini (odlomci A.7.2.3, E.3.2.5, 3.5.8 i 3.6.4).

5.2.6. O problemu racionalizacije raspravlja se od godine 1882, kada je čuveni engleski matematičar i fizičar *O. Heaviside* uočio da se faktor 4π u mnogim jednadžbama elektromagnetizma nalazi na krivom mjestu. Od tada pa do danas mnogi se stručnjaci i međunarodne organizacije bave rješavanjem pitanja: što valja učiniti da bi faktor 4π došao na pravo mjesto, tj. da bi se od »neracionalnih« jednadžbi prešlo na »racionalne«?

Ova bi knjiga postala još opsežnija ako bismo pripadnu pažnju posvetili tom, gotovo 90-godišnjem problemu. Zato zainteresiranog čitaoca upućujemo na literaturu navedenu na kraju knjige. Odgovarajući članci mogu se prepoznati po naslovima kojima je zajednička riječ »racionalizacija«, što označuje postupak prijelaza od neracionalnog na racionalni oblik jednadžbi elektromagnetskog polja. Posebno upozoravamo na članak profesora *F. Avčina* (Elektrotehnički vjesnik 1957, br. 1—2, str. 2—7) u kojemu je naznačeno osam načina racionalizacije! Autoru ove knjige se čini da je pitanje racionalizacije praktički riješeno nenajavljenim ali stvarno provedenim plebiscitom korisnika jednadžbi i jedinica u literaturi elektromagnetizma: ogromna većina pisaca s tog područja sada upotrebljava *racionalni* oblik jednadžbi s vrijednošću magnetske konstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, a pri tom su te jednadžbe sve češće *veličinske*. Zato će idući pasusi poslužiti samo tome da letimično ilustriraju dio problema poznatog pod zajedničkim imenom »racionalizacija«.



Sl. E.68. Polja između izvora i ponora

Izvire li iz nekog tačkastog izvora nestlačiva tekućina konstantnog protoka Q (sl. E.68a), tekućina će se jednoliko širiti na sve strane ako pretpostavimo da se

svuda oko izvora, ali daleko od njega, nalazi ponor kuda tekućina uvire. Pretpostavljamo, osim toga, da je isključeno gravitacijsko polje, pa se tekućina širi iz tačkastog izvora na sve strane kao da osvaja kuglasti prostor. Postavljamo pitanje: kolika je brzina tekućine v u udaljenosti r od središta izvora?

U toku diferencijala vremena dt tekućina se pomakne za $dr = v\,dt$ od izvora. Pri tom tekućina zapremi volumen $dV = A\,dr = 4\pi r^2\,dr$, gdje je $A = 4\pi r^2$ površina zamišljene koncentrične kugle ocrtane oko izvora (sl. E.68a). Prema tome je $dV = 4\pi r^2 v\,dr$. Budući da je protok Q definiran jednadžbom $Q = dV/dt$, to je $Q = 4\pi r^2 v$, odakle slijedi izraz za brzinu tekućine na udaljenosti r od izvora

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2}. \tag{5.2-7}$$

Ista jednadžba ali s negativnim predznakom vrijedi za analogno uviranje tekućine u ponor protoka $-Q$ (sl. E.68b). Kad se izvor $+Q$ nalazi u blizini ponora protoka $-Q$, nastaje polje strujanja tekućine koje je strujnicama približno nacrtano na slici E.68c. Strujnice predstavljaju konstantne brzine tekućine.

Sve tri slike vrijede i za elektrostatsko polje ako umjesto protoka $+Q$ i $-Q$ shvatimo množine elektrike, a umjesto brzine tekućine električku indukciju

$$D = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2}. \tag{5.2-8}$$

Ta dva polja pokazuju formalnu sličnost i u drugim jednadžbama, pa je tako istog oblika *Laplace*ova jednadžba, a potom i sve druge koje iz nje slijede. I jednadžbe strujanja električne struje formalno su identične s hidrodinamičkim i elektrostatskim.

Zamislimo li da je na slici E.68a prikazano elektrostatsko polje u tvari s dielektričnošću ϵ, jakost električkog polja u udaljenosti r od tačkaste elektrike Q iznosit će $E = D/\epsilon$. Stavimo li u to polje neku drugu množinu elektrike q, one će se međusobno odbijati silom $F = qE$, dakle

$$F = qE = \frac{qD}{\epsilon} = \frac{Qq}{\epsilon 4\pi r^2}. \tag{5.2-9}$$

To je *Priestley-Coulomb*ov zakon koji smo već imali u odsječku 4.1. Sve tri ovdje napisane jednadžbe su, dakako, *veličinske*. Ostale veličinske jednadžbe električkog polja, kao i elektromagnetskog polja uopće, napisali smo u stupcu 4 tablice **40** u prilogu knjige, zatim u tablici E-1, u tablici E-24, a dijelom i u odsječku 1.4.

Iz tih izlaganja slijedi da, na primjer, izrazi za kapacitet pločastog i kuglastog kondenzatora glase

$$C = \frac{\epsilon A}{d}, \qquad C = \epsilon 4\pi r, \tag{5.2-10}$$

gdje je A površina jedne od obloga pločastog kondenzatora, a d razmak među paralelnim metalnim pločama. U tablicama **40** (stupci 6, 12, 14), E-24 i u odsječku 4.1 naveli smo i drukčije oblike jednadžbi koje se upotrebljavaju u starijoj literaturi nauke o elektromagnetizmu. Tako se, na primjer, u toj literaturi za električku indukciju umjesto jednadžbe (5.2-8) upotrebljava

$$\{D\} = \frac{\{Q\}}{\{r\}^2}, \tag{5.2-11}$$

a umjesto izraza (5.2-9) piše

$$\{F\} = \frac{\{Q\}\{q\}}{\{\epsilon\}\{r\}^2}, \tag{5.2-12}$$

dok formule za kapacitet pločastog i kuglastog kondenzatora redom glase

$$\{C\} = \frac{\{\epsilon\}\{A\}}{4\pi\{d\}} \quad \text{i} \quad \{C\} = \{\epsilon\}\{r\}. \tag{5.2-13}$$

Usporedimo li izraze (5.2-8, 9, 10) sa jednadžbama (5.2-11, 12, 13), uviđamo da u starijim formulama matematički faktor 4π nedostaje baš ondje gdje bi bilo razumno da se pojavi. Zbog toga se te jednadžbe zovu »neracionalne«. Smatra se, na primjer, nerazumnim da se 4π nalazi u lijevoj jednadžbi (5.2-13), gdje je riječ o kapacitetu *pločastog* kondenzatora površine $A = ab$, a nedostaje u desnoj jednadžbi, gdje je riječ o *kugli* koju karakteriziraju površina $A = 4\pi r^2$ i obujam $V = 4\pi r^3/3$. Suprotno neracionalnim jednadžbama, izrazi (5.2-7, 8, 9 i 10) smatraju se »razumnima« ili »racionalnima«, jer se faktor 4π pojavljuje tamo gdje je to prirodno očekivati s obzirom na karakter elektrostatskog, elektrostrujnog i hidrodinamičkog polja.

U idućih nekoliko redaka ocrtat ćemo jedno od mogućih rješenja problema racionalizacije. Do formulacije tog rješenja došao je autor ove knjige u vrijeme dok se intenzivnije bavio proučavanjem tog spleta problema (vidi citiranu literaturu na kraju knjige). Pri tom moramo najprije naglasiti bitnu činjenicu koja proizlazi iz usporedbe jednadžbi (5.2-7...13): racionalne jednadžbe napisali smo u *veličinskom* obliku, a neracionalne u *brojčanom* (podrobnije o veličinskim i brojčanim jednadžbama vidi u odsječku A.1.4). Odavde odmah slijedi naputak kako se može izvršiti *racionalizacija brojčanih jednadžbi.*

Poslužimo se primjerom iz elektrostatike. Jednadžbe koje međusobno povezuju električku indukciju i električku polarizaciju glase

(5.2-14) $$D = \epsilon_0 E + P, \qquad \{D\} = \{E\} + 4\pi\{P\}, \tag{5.2-15}$$

gdje je lijevo *veličinska* jednadžba, a desno *brojčana*, prilagođena jedinicama CGSE sistema jedinica. Prema tome od desne jednadžbe možemo napraviti veličinsku tako da u (5.2-15) umjesto brojčanih iznosa $\{D\}$, $\{E\}$ i $\{P\}$, u skladu s načelom $\{G\} = G/[G]$, uvrstimo omjere veličina i pripadnih jedinica $\{D\} = D/[D]$, $\{E\} = E/[E]$, $\{P\} = P/[P]$; jedinice u uglatim zagradama predstavljaju jedinice CGSE sistema. Uvrstimo li ove odnose u (5.2-15), dobivamo

$$\frac{D}{[D]} = \frac{E}{[E]} + 4\pi\frac{P}{[P]} \quad \text{ili} \quad D = E\frac{[D]}{[E]} + P\frac{4\pi[D]}{[P]}. \tag{5.2-16}$$

Iz stupaca 7, 8 i 9 tablice **40** saznajemo da je $[D] = 2{,}6544 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$, $[E] = 2{,}9979 \cdot 10^4\ \mathrm{V/m}$, $[P] = 3{,}3356 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$. Izračunamo li omjere jedinica u desnoj jednadžbi (5.2-16), dobivamo

$$\frac{[D]}{[E]} = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} = \epsilon_0, \qquad 4\pi\frac{[D]}{[P]} = 1.$$

Uvrstimo li ove izraze u jednadžbu (5.2-16), slijedi

$$D = \epsilon_0 E + P,$$

a to je naša *racionalna veličinska jednadžba* (5.2-14). Vidimo da je racionalizacija izvršena tako što smo od *brojčane* jednadžbe (5.2-15), prilagođene CGSE jedinicama, prešli na univerzalnu *veličinsku* jednadžbu!

Takav rezultat bio je zapravo već sadržan u odsječcima 4.1 i 4.2. Tamo smo prilikom utvrđivanja odnosa među jedinicama elektrostatskog i magnetostatskog CGS sistema jedinica s jedne strane, a Međunarodnog sistema s druge, pretpostavljali da je riječ o *istim fizikalnim veličinama*, samo što su njihovi brojčani iznosi u brojčanim jednadžbama prilagođeni jedinicama CGSE ili CGSM. Prema tome takva racionalizacija dobiva definiciju: *Racionalizacija je prijelaz od brojčanih jednadžbi, prilagođenih jedinicama CGSE i CGSM, na univerzalne racionalne veličinske jednadžbe.*

Takva je racionalizacija, u stvari, potpuno u skladu sa suvremenom razvojnom linijom formalizma metrologije. Svi znamo da jednadžbe elektromagnetizma postoje zato da bismo pomoću njih mogli proračunati ono što želimo materijalno realizirati, ili da s njima otkrijemo nešto što još nije poznato. Prema tome jednadžbe služe za *praktične* svrhe. Pri tom je želja svakoga da računa pouzdano i tačno, da su mu računi pregledni. Ista je želja i u nastavi, gdje đake treba naučiti osnovama s kojima će oni raditi u radionicama ili znanstvenim institutima. Svim tim zahtjevima savršeno udovoljavaju *veličinske jednadžbe*, koje su toliko univerzalne da se u njih čak mogu uvrštavati vrijednosti veličina izražene jedinicama različitih sistema jedinica, pa čak i nesistematičnih skupova jedinica koji ne udovoljavaju načelu koherencije $1 \times 1 = 1$. O tome smo se u ovoj knjizi mogli uvjeriti na mnoštvu stvarnih primjera (odsječak A.1.5, te poglavlja B.10, D.6 i E.6).

5.3. Tehnički (internacionalni) sistem jedinica elektromagnetizma

S nastankom Tehničkog sistema jedinica elektromagnetizma upoznali smo se u odlomku 5.2.3, gdje smo citirali devet rezolucija Međunarodne konferencije o električkim jedinicama i standardima (1908). Taj sistem bio je službeno na snazi 40 godina, tj. do godine 1948, kada ga je zamijenio Međunarodni sistem jedinica SI (odlomak 5.2.5). Budući da su se te promjene dogodile u bliskoj prošlosti, korisno je da ukratko opišemo kako su se reproducirale dvije osnovne jedinice tog sistema, internacionalni amper i ohm.

5.3.1. Reprodukcija ampera voltametrom. Iz odlomka 5.2.3 prenosimo definiciju ampera (A_0) Tehničkog sistema (TS): »Internacionalni amper je stalna električna struja koja iz vodene otopine srebrnog nitrata svake sekunde izluči 1,11800 miligrama srebra.« Jedinica A_0 oslanja se, dakle, na Faradayev zakon elektrolize, koji možemo napisati u obliku

$$Q = n \frac{F}{M} m, \tag{5.3-1}$$

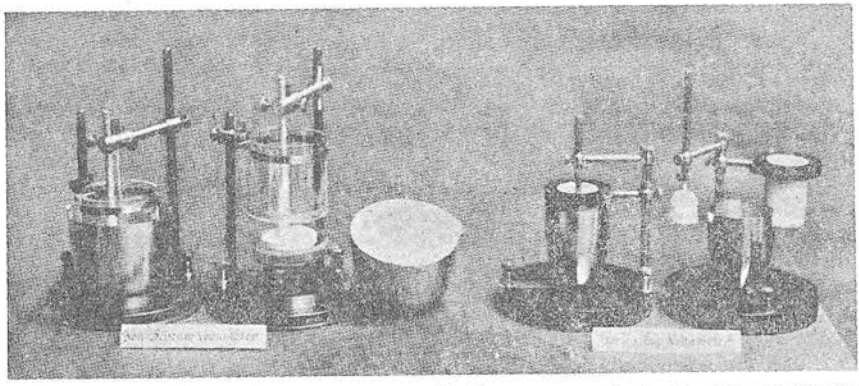
gdje pojedini simboli označuju ove fizikalne veličine: Q je množina elektrike koja je iz otopine izlučila kovinu mase m, valencije n i relativne atomske mase M. Slovo F je Faradayeva konstanta (njena vrijednost iznosi približno $9{,}649 \cdot 10^7$ As/kg).

Ako se u toku elektrolize srebrnog nitrata jakost struje I održava *konstantnom*, dakle $I = \text{const}$, umjesto Q može se pisati $Q = It$, gdje je t vrijeme u toku kojega se izluči srebro ($n = 1$) mase m. Na taj način izraz (5.3-1) prelazi u oblik

$$I = \frac{F}{M}\,\frac{m}{t}. \tag{5.3-2}$$

Vidimo da se pri reproduciranju stalne struje I voltametrom moraju znati četiri veličine: Faradayeva konstanta F, relativna atomska masa M srebra (ona iznosi 107,870; vidi tablicu 1 u prilogu knjige), masa m izlučenog srebra i trajanje t izlučivanja uz $I = \text{const}$. Jednadžbu (5.3-2) možemo do kraja prilagoditi definiciji »internacionalnog ampera« (A_0) ako uz $I = 1\,A_0$ uvrstimo $m/t = 1{,}118\,00$ mg/s:

$$A_0 = 1{,}118\,00 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}\,\frac{F}{M}. \tag{5.3-3}$$



Sl. E.69. Dva oblika voltametra — pramjerila za reproduciranje »internacionalnog ampera« (A_0) koje je upotrebljavao američki metrološki zavod National Bureau of Standards. Lijevo je Smithov voltametar, a desno Richardsov. Svaki od voltametara prikazan je u sastavljenom i rastavljenom stanju

Vrijednost M dobiva se mjerenjem (vidi odlomak D.1.2.3), koje nema nikakve veze s jedinicama elektromagnetizma. Budući da su jedinice mase (kg) i vremena (s) također neovisne o elektromagnetizmu, jednadžbu (5.3-3) možemo napisati i u obliku

$$F = C \cdot A_0, \tag{5.3-4}$$

gdje je konstanta $C = 1{,}118\,00 \cdot 10^{-6}\,\text{kg}/(\text{s}M)$. Definicijom se jedinice A_0(TS), prema tome, per definitionem propisuje vrijednost Faradayeve konstante! Postupak je u biti analogan onome koji je primijenjen pri definiciji ampera SI, gdje je magnetskoj konstanti dodijeljena vrijednost $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{N/A}^2$ (odlomak 2.1.3), ili onome koji bismo prihvatili uvođenjem žiromagnetske konstante umjesto μ_0 (odlomak 3.2.4). Budući da je F preko Avogadrove konstante vezana s nekoliko drugih prirodnih konstanti, to je očito da citirana definicija jedinice A_0 izravno utječe na znatan dio fizike (vidi odlomak 5.3.3).

Srebrni voltametar upotrebljavao se u smislu »strujne normale« znatno prije Londonske konferencije od godine 1908. Njime su reproducirali struju *Lord Rayleigh*, *Kohlrausch* i drugi, a vrijednost 1,118 mg/s usvojilo je godine 1892. britansko udruženje BAAS (vidi odlomak 5.1.2) na svom zasjedanju u Edinburghu. Tom prilikom podrobno je specificirano pod kojim se uvjetima mora upotrebljavati volta-

metar da bi izlučivanje srebra 1,118 mg/s *odgovaralo* jednom amperu. Izgled dviju vrsta voltametara prikazuje sl. E.69. Njihova upotreba iziskivala je dosta spretnosti, strpljenja i eksperimentatorskog iskustva. Tako je, na primjer, jakost struje morala biti što je moguće stalnija barem u toku jednog sata. Masa izlučenog srebra morala se izmjeriti s relativnom pogreškom $\pm 5 \cdot 10^{-7}$; pri tom je, dakako, trebalo uzeti u obzir uzgon utega i srebra u zraku. Iz dobivenog srebra morala se odstraniti sva vlaga. Posebna je teškoća bilo procjenjivanje mase tragova srebra u papiru za filtriranje. Jedno utvrđivanje jedinice A_0 zahtijevalo je oko 60 delikatnih i preciznih pokusa.

Pri tom su se eksperimentatori morali pridržavati propozicija koje je objavila Londonska konferencija od godine 1908. (Specification Relating to the Deposition of Silver.) U tim se propozicijama navodi da elektrolit mora biti otopina koja sadrži 15 do 20 masenih udjela srebra u 100 udjela destilirane vode. Otopina se smjela upotrijebiti samo jednom, a elektroliza provoditi samo tako dugo dok se iz otopine nije izlučilo 30% srebra. Anoda voltametra morala je biti izrađena od srebra, katoda od platine, gustoća struje na anodi nije smjela premašiti 0,2 A/cm², a na katodi 0,067 A/cm². Nije se smjelo upotrijebiti manje od 100 cm³ elektrolita. Posebna pažnja morala se posvećivati tome da čestice srebra koje bi se mogle mehanički odvojiti od anode ne dospiju na katodu. Prije vaganja izlučenog srebra, sa katode su se morali skinuti svi tragovi otopine, a katoda osušiti.

Sve konstrukcije raznovrsnih voltametara bile su podređene zahtjevu da se spriječi prelaženje »anodnog mulja« s anode na katodu, jer bi to uzrokovalo znatnu pogrešku pri vaganju izlučenog srebra. Tako su se anode umatale u papir za filtriranje, a oko nje se nalazio neglazirani porculanski lončić (*Richards*, sl. E.69) ili plitka staklena čaša (*Kohlrausch*). Dok je struja mogla teći kroz pore porculana, za »anodni mulj« lončić je bio nepropustan. Opisanom problemu pokušavalo se doskočiti i na niz drugih načina (*Smith*ov stakleni cilindar itd.). No unatoč svemu, pokusima s različitim voltametrima dobivali su se vrlo neskladni rezultati, ponekad i neshvatljivi. Tako je, na primjer, bez papira za filtriranje masa izlučenog srebra bila za oko 0,015% *veća* negoli u slučaju kada je on upotrijebljen! Zato se smatra da relativna nesigurnost reprodukcije A_0 pomoću voltametra nije mogla biti bolja od oko $\pm 10^{-4}$. To je oko 25 puta lošije od nesigurnosti kojom se u naše vrijeme pomoću apsolutnog pramjerila reproducira amper SI (odlomak 3.1.4).

5.3.2. Živina normala »internacionalnog ohma«. Korisno je da iz odlomka 5.2.3 prenesemo definiciju jedinice otpora »internacionalni ohm« (Ω_0) Tehničkog sistema: »Internacionalni ohm je otpor koji stalnoj električnoj struji pruža stupac žive mase 14,4521 gram, konstantnog presjeka i duljine 106,300 centimetara pri temperaturi taljenja leda.« Živu su za pohranjivanje vrijednosti električkog otpora upotrebljavali znatno prije Konferencije u Londonu godine 1908. (vidi kraj odlomka 5.1.1), i to zato jer dobro pročišćena živa ima pri sobnoj temperaturi mnogo veći specifični otpor i manji temperaturni koeficijent otpora od bilo kojeg drugog čistog metala.

Iz gornje definicije razabiremo da se Ω_0 oslanjao na izraz za djelatni otpor R štapnog vodiča $R = \kappa l/A$, gdje simboli označuju ove fizikalne veličine: l — duljinu, κ — specifičnu električku vodljivost, A — presjek vodiča. Presjek možemo izraziti volumenom vodiča (žive) $V = Al$, a volumen masom m i gustoćom ρ, jer je $V = m/\rho$. Uvrstimo li te odnose u izraz $R = \kappa l/A$, dobivamo

$$R = \frac{\rho \kappa l^2}{m}. \qquad (5.3\text{-}5)$$

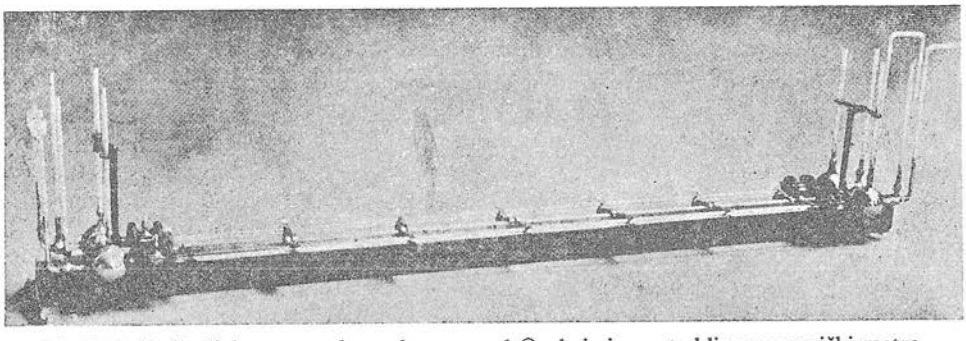
Prema definiciji je $R = 1\,\Omega_0$, ako je duljina $l = 1{,}063$ m i masa $m = 14{,}4521$ g (pri temperaturi 0 °C). Na taj način jednadžba (5.3-5) prelazi u

$$\Omega_0 = \frac{1{,}063^2\ \mathrm{m}^2}{1{,}44521 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg}}\,\rho\kappa. \qquad (5.3\text{-}6)$$

Vrijednost gustoće žive dobiva se mjerenjem koje je potpuno neovisno o elektromagnetskim jedinicama. Budući da su i jedinice kg i m neovisne o elektromagnetizmu, jednadžbu (5.3-6) možemo napisati u obliku

$$\kappa = K \cdot \Omega_0, \qquad (5.3\text{-}7)$$

gdje je konstanta $K = 1{,}44521 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg}/[\rho(1{,}063\ \mathrm{m})^2]$. Prema tome se definicijom jedinice Ω_0, u stvari, propisuje vrijednost specifične električke vodljivosti žive. Situacija je, dakle, posve analogna onoj sa A_0 (odlomak 5.3.1).



Sl. E.70. Dvije živine normale, svaka otpora 1 Ω_0, koje je upotrebljavao američki metrološki zavod National Bureau of Standards. Na kraju svake staklene cijevi, napunjene živom, nalazi se kuglasti spremnik iz kojeg izlazi naponski priključak (vertikalno) i strujni priključak (vodoravno). Sasma na lijevoj strani nalazi se lijevak za punjenje uređaja živom

Iako se definicija jedinice otpora TS Ω_0 čini vrlo jednostavnom, njena realizacija u obliku stupca žive zahtijevala je veliku vještinu eksperimentiranja. Djelomično će nam to objasniti već samo prepričavanje upute (Specification Relating to Mercury Standards of Resistance) za primjenu živine normale otpora $1\,\Omega_0$ koju je godine 1908. zajedno s rezolucijama objavila Londonska konferencija (odlomak 5.2.3). Cijevi živine normale (sl. E.70) morale su biti izrađene od takvog stakla da se izmjere što je moguće manje mijenjanju. Osim toga, one su morale biti čvrste, a provrt što jednolikiji i kružnog oblika; presjek provrta trebalo je približno da iznosi 1 mm^2. Svaka cijev morala se u tom pogledu precizno baždariti, jer presjek provrta duž cijevi nije smio varirati za više od $5{:}10^4$. Granicom živinog punjenja trebalo je smatrati ravninu okomitu na krajeve cijevi. Duljinu osi cijevi, masu žive koju sadrži cijev i električki otpor žive trebalo je mjeriti pri temperaturi što bližoj 0 °C, a dobiveni rezultati morali su se svesti na 0 °C.

Da bi se pomoću živinog uređaja, prikazanog slikom E.70, mogla valjano obavljati električka mjerenja, krajnji spremnici žive imali su strujne i naponske priključke izvedene u obliku cijevi napunjenih živom. Spremnici su morali biti kuglastog oblika promjera oko 4 cm, a na određenim su mjestima imali cilindrički izdanak kojim su se priključivali na ravnu cijev. Vanjski rub svakog kraja cijevi morao se podudarati s unutarnjom površinom pripadnog kuglastog spremnika.

Električki kontakt sa živom izveden je pomoću tankih platinskih žica utaljenih u staklo vertikalnih priključnih cjevčica (sl. E.70). Ulaz strujnog priključka i kraj ravne cijevi morali su se nalaziti na suprotnim stranama promjera spremnika, a naponski priključak u sredini između te dvije tačke.

Utjecaj otpora dvaju kuglastih spremnika uzimao se u obzir formulom $\Delta R = 0{,}8(1/r_1 + 1/r_2) : (1063\pi)$, gdje su r_1 i r_2 milimetrima izraženi polumjeri krajeva cijevi. Ta korekcija, dobivena u ohmima, morala se dodati otporu cijevi. Najmanje pet cijevi moralo se upotrijebiti pri realizaciji ohma Ω_0, a postignutim rezultatom smatrala se njihova srednja vrijednost. Mjerenje se moralo obaviti s najmanje tri različita punjenja cijevi živom.

5.3.3. Ostale jedinice Tehničkog sistema. U temeljnim jednadžbama (5.3-3,6) možemo nabrojiti *pet* različitih jedinica: A_0, kg, s, Ω_0, m. Prema tome »Tehnički sistem jedinica« ni formalno nema pravo da se zove »sistem jedinica«, jer u području elektromagnetizma su dovoljne i nužne *četiri* osnovne jedinice (vidi odlomak 2.1.2). Ako namjerno previdimo taj nedostatak, možemo primijeniti pravilo građenja koherentnih izvedenih jedinica (odsječak A.5.1) kako su to u svoje vrijeme činili korisnici tog »sistema«. Do jedinice »internacionalni volt« (V_0) dolazi se, dakako, množenjem A_0 sa Ω_0, jer je prema Ohmovu zakonu $U = IR$. Uz pomoć jednadžbi (3.5-3,6) dobivamo

$$V_0 = A_0 \Omega_0 = \frac{1{,}118 \cdot 1{,}063^2 \cdot 10^{-4}}{1{,}445\,21} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \frac{\rho \varkappa F}{M},$$

što znači da V_0 nije priključen samo na m i s, već i na četiri druge materijalne konstante.

Odavde se pomoću pravila koherencije izvode ostale jedinice Tehničkog sistema. Tako je, u skladu sa $P = I^2R$, jedinica snage TS (watt)

$$W_0 = A_0^2 \Omega_0.$$

Analogno se dobiva za jedinicu energije (joule) $J_0 = W_0 s = V_0 A_0 s = A_0^2 \Omega_0 s$ itd. Budući da se jedinice A_0 i Ω_0 Tehničkog sistema razlikuju od ampera (A) i ohma (Ω) Međunarodnog sistema jedinica (SI, vidi poglavlje 2), to je očito da ni W_0 nije jednak jedinici snage SI watt $= W = \mathrm{kgm^2/s^3}$, već je

$$W_0 = pq^2 W = 1{,}000\,19\ W.$$

Pri tom je $p = \Omega/\Omega_0 = 1{,}000\,49$ i $q = A_0/A = 0{,}999\,85$, što smo već razmatrali u odlomcima 2.5.3 i 5.2.5 (vidi i tablice E-9,11). Opisanim postupkom možemo, dakako, definirati i sve ostale jedinice TS: F_0, C_0, H_0 itd.

Brojčani iznosi nekih prirodnih konstanti, izraženih jedinicama TS, razlikuju se za iste faktore p, q i pq od brojčanih iznosa ako su te konstante izražene jedinicama SI. To je prirodno, jer vrijednosti fizikalnih veličina ne ovise o izboru mjernih jedinica (vidi odlomak A.1.3.3). U to se možemo uvjeriti kratkim računom na primjeru magnetske konstante koje vrijednost (SI!) iznosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/(Am)}$. Budući da je $A = A_0/q$ te $V = V_0/(pq)$, uvrštenjem dobivamo

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V_0 s}{pq} \frac{q}{A_0 m} = \frac{4\pi}{p} \frac{H_0}{m},$$

gdje je »internacionalni henry« $= H_0 = V_0 s/A_0$. Računanje daje vrijednost $\mu_0 = 1{,}2560 \cdot 10^{-6} H_0/m$.

Korisno je ponovno naglasiti da se faktori p i q, koji povezuju jedinice sistemâ TS i SI, ne mogu izračunati, već se utvrđuju *mjerenjem* (vidi tablice E-9,11 u odlomcima 3.1.4 i 3.3.4). Budući da su se prilikom niza takvih mjerenja rezultati neznatno razlikovali, Međunarodni komitet za mjere i utege propisao je godine 1946. *srednju vrijednost* tih omjera (vidi odlomak 5.2.5). Neke posljedice toga opisali smo u odsječku 2.5.

5.3.4. Promašenost Tehničkog sistema. Razvoj i napredak elektromagnetizma nakon godine 1908. uskoro su pokazali kako je *Lord Rayleigh* bio dalekovidan kad se onako grčevito borio protiv uvođenja Tehničkog sistema jedinica (vidi odlomak 5.2.3). Mjernotehničke i formalističke (»predimenzioniranost« sa pet osnovnih jedinica) nedostatke Tehničkog sistema jedinica usput smo spomenuli u odlomcima 5.3.2,3. Preostaje nam da ovdje nekoliko redaka posvetimo nekim od fizikalnih razloga koji ne dopuštaju da »srebrni amper« i »živin ohm« tvore osnovu vrhunske metrologije elektromagnetizma.

Jedan od razloga je *izotopija*. Živa ima sedam izotopa, od kojih se pet pojavljuje u tolikom ukupnom masenom udjelu da mogu uzrokovati variranje gustoće žive oko 2%. Srebro ima dva izotopa, ali je njihov utjecaj također oko 2%. Čini se da je volumni otpor (R/V) žive vrlo blizak za sve izotope, ali sve te činjenice nisu bile poznate u vrijeme kad se pripremalo uvođenje Tehničkog sistema jedinica. Tako je, na primjer, Elektrotehnički kongres u Chicagu godine 1893, u nastojanju da definiciju ohma učini što preciznijom, promijenio dotadašnju definiciju ohma pomoću stupca žive presjeka 1 mm^2 i određene duljine te propisao *masu* 14,4521 gram žive. Zbog toga će, jer je $R/V = \text{const}$, promjena izotopnog sastava izmijeniti otpor stupca proporcionalno promjeni gustoće upotrijebljene mješavine žive.

Možda je utjecaj izotopije žive znatno manji nego što proizlazi iz gornjih ekstremnih podataka. Utvrđeno je, naime, da prirodna živa (mješavina izotopa) iz različitih nalazišta ima vrlo bliske vrijednosti gustoće. Izotopija *srebra*, međutim, nemilosrdno dolazi do izražaja u voltametrima, jer elektroliza koncentrira teške izotope. Ako je omjer udjela lakih izotopa prema teškima u izlučevini za 1% veći negoli u otopini, izlučevina će biti za 10^{-4} lakša nego što bi bila u slučaju da nije došlo do separacije. Intenzivna primjena srebrnih voltametara u razdoblju od godine 1911. do 1914. pokazala je, osim toga, da vrhunsku preciznost ometaju i drugi utjecaji: koloidno srebro, štetni uključci u izlučevini itd.

Jednadžba (5.3-4) u odlomku 5.3.1 pokazala nam je da se primjenom specificiranog srebrnog voltametra definira vrijednost Faradayeve konstante. Drugim riječima: nepotrebno je posebnim eksperimentima utvrđivati vrijednost konstante F. Lako je spoznati da tako propisana vrijednost F nije od univerzalne primjenjivosti za čitavu fiziku. Kako da se, na primjer, na toj osnovi precizno proračuna *sila* (izražena apsolutnim jedinicama m, kg, s) između vodiča kroz koje teče električna struja? Jedino na taj način da se *prethodno izmjeri* omjer između »internacionalnih« i »apsolutnih« jedinica (recimo A_0/A, gdje je A amper SI). Za pouzdano utvrđivanje tog omjera potrebna su dotjerana pramjerila (poglavlje 3). Ako ta pramjerila jednom već imamo, onda su srebrni voltametar i stupac žive *nepotrebni*!

6. Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi. Sistemi dimenzija

6.1. Brojčane i veličinske jednadžbe magnetskog polja

U poglavljima A.1, B.10 i D.6 već smo objasnili koje su prednosti univerzalnih veličinskih jednadžbi, a koje su mane brojčanih. Na nizu primjera konkretno smo pokazali pouzdanost, veću razumljivost i mnogostruku jednostavnost računanja na veličinski način. Budući da su veličinske jednadžbe univerzalne (vrijede za sve sisteme jedinica kao i za nesistematične skupove jedinica), izložena pravila vrijede, dakako, i za one izraze koji obrađuju elektromagnetizam. Ovdje nećemo ponavljati načela računanja s veličinama, već čitaocima preporučujemo, pogotovo ako su preskočili glave A, B i D, jer ih zanima samo metrologija elektromagnetizma, da prije čitanja idućih triju odsječaka prouče odsječak A.1.4.

6.1.1. Magnetsko polje ravnog vodiča. U nekim udžbenicima i elektrotehničkim priručnicima još i danas nalazimo ovaj izraz za jakost magnetskog polja ravne, vrlo dugačke tanke žice kojom teče električna struja I

$$H = \frac{2I}{10r}. \tag{6.1-1}$$

Ovdje r predstavlja udaljenost od osi žice i na toj udaljenosti jakost polja iznosi H.

Da li je to brojčana ili veličinska jednadžba? Mi smo, doduše, izraz (6.1-1) tiskali kurzivnim znakovima *bez* vitičastih zagrada (o načinu pisanja brojčanih i veličinskih jednadžbi vidi odsječak A.2.5), ali to još nije dokaz da je jednadžba veličinska. Shvatimo li (6.1-1) kao veličinsku jednadžbu, dobit ćemo u slučaju da struja iznosi $I = 10$ A, a jakost polja želimo znati u udaljenosti $r = 1$ m,

$$H = \frac{2 \cdot 10\,\mathrm{A}}{10 \cdot 1\,\mathrm{m}} = 2\,\mathrm{A/m}.$$

Da li je taj rezultat ispravan? U (6.1-1), naime, vidimo broj 10, koji uopće ne poznajemo iz veličinskih jednadžbi, jer u njima katkada dolaze brojevi $\frac{1}{2}$, 4π, $1/2\pi$, ali broj 10 nikada.

Najbolje je da sami izvedemo veličinsku jednadžbu, pa ćemo vidjeti da li je (6.1-1) veličinska ili brojčana jednadžba. Račun ćemo izvesti pomoću zakona uzbude, koji je u tablici **40** (u prilogu knjige) naveden pod brojem 11 u stupcu 4. Taj integralni izraz kaže da je kružni integral jakosti magnetskog polja H po zatvorenom krugu oko vodiča sa strujom I jednak uzbudi koja je u udaljenosti r od vodiča stvorila magnetsko polje. Budući da je kod ravnoga vodiča uzbuda jednaka samoj

struji, to je $\Theta = I$. Zato primjena spomenutog općeg izraza iz tablice **40** za naš slučaj daje

$$H \cdot 2\pi r = I, \tag{6.1-2}$$

jer se magnetsko polje oko vodiča zatvara u koncentrične krugove. Na udaljenosti r od osi vodiča djeluje, dakle, ista jakost polja H na bilo kojem mjestu zamišljenog koncentričnog valjka polumjera r. Preoblikujemo li (6.1-2) u eksplicitni oblik

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \tag{6.1-3}$$

što je *veličinska* jednadžba, usporedbom uviđamo da (6.1-1) nije veličinska, već *brojčana* jednadžba. Zato ćemo je napisati u *brojčanom obliku* kakav upotrebljavamo u ovoj knjizi

$$\{H\} = \frac{2}{10} \frac{\{I\}}{\{r\}}. \tag{6.1-4}$$

Pitanje je sada: kojim je jedinicama prilagođena brojčana jednadžba (6.1-4)? U priručniku odakle smo izvadili (6.1-1) o tome nije ništa spomenuto. Orijentirati se ipak možemo, ako pogledamo koje jedinice autor priručnika inače upotrebljava. Nalazimo da se služi jedinicom Međunarodnog sistema (SI) amper = A, ali da udaljenosti obično mjeri centimetrima. Sada smo od 3 nepoznanice odgonetnuli dvije. Preostaje nam još da ustanovimo jedinicu jakosti magnetskog polja čiji brojčani iznos $\{H\}$ sadrži izraz (6.1-4). Tu jedinicu otkrit ćemo ako (6.1-4) postupno preobrazimo u veličinsku jednadžbu (6.1-3). Za tu svrhu, po načelu »brojčani iznos = veličina/jedinica«, dakle $\{G\} = G/[G]$, najprije izrazimo brojčane iznose $\{H\}$, $\{I\}$, $\{r\}$ iz (6.1-4) kao omjere veličina i jedinica koje pripadaju veličinama H, I, r:

$$\{H\} = H/[H], \quad \{I\} = I/\mathrm{A}, \quad \{r\} = r/\mathrm{cm}. \tag{6.1-5}$$

Jedinicu jakosti magnetskog polja $[H]$, kojom je izražen brojčani iznos $\{H\}$, nismo mogli podrobno naznačiti, jer ne znamo koja je to jedinica. Zato smo je kao nepoznanicu stavili u uglatu zagradu. Uvrstimo li (6.1-5) u brojčanu jednadžbu (6.1-4), dobivamo

$$\frac{H}{[H]} = \frac{2\, I/\mathrm{A}}{10\, r/\mathrm{cm}} \quad \text{ili} \quad H = \frac{2\, I}{10\, r} \frac{[H]\,\mathrm{cm}}{\mathrm{A}}. \tag{6.1-6}$$

To su, dakako, *veličinske* jednadžbe. Budući da je i jednadžba (6.1-3) veličinska, možemo je uvrstiti na lijevu stranu desnog izraza (6.1-6). Tako dobivamo

$$\frac{I}{2\pi r} = \frac{2\, I}{10\, r} \frac{[H]\,\mathrm{cm}}{\mathrm{A}},$$

odakle nakon kraćenja sa I i r slijedi nepoznata jedinica jakosti magnetskog polja:

$$[H] = \frac{10\,\mathrm{A}}{4\pi\,\mathrm{cm}} = \frac{1000}{4\pi} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 79{,}577\ \mathrm{A/m}.$$

Iz razmatranja u odlomku 4.2.3 (vidi i tablicu **40**) znamo da je to »oersted« (Oe), jedinica jakosti magnetskog polja H u CGSM i Gaussovu sistemu jedinica. Prema

tome je brojčana jednadžba (6.1-4), odnosno (6.1-1), prilagođena vrlo šarenom društvu jedinica različitih sistema: $\{H\}$ i $\{r\}$ predstavljaju brojčane iznose veličina H i r izraženih jedinicama CGSM, a $\{I\}$ brojčani iznos struje I izražene jedinicom Međunarodnog sistema SI amper!

Pogledajmo još kako bi izgledala *prilagođena* veličinska jednadžba, tj. jednadžba slična (6.1-4), ali napisana tako da simboli u njoj predstavljaju fizikalne veličine. (Podrobnije o prilagođenim veličinskim jednadžbama vidi u odsječku A.1.6.) Ako u lijevu jednadžbu (6.1-6), a to je prilagođena veličinska jednadžba, stavimo $[H] = \mathrm{Oe}$, dobivamo

$$\frac{H}{\mathrm{Oe}} = \frac{2}{10}\,\frac{I/\mathrm{A}}{r/\mathrm{cm}}.$$

U našem primjeru, $I = 10$ A, $r = 1$ m $= 100$ cm, s prilagođenom bismo veličinskom jednadžbom dobili

$$\frac{H}{\mathrm{Oe}} = \frac{2 \cdot 10\,\mathrm{A/A}}{10 \cdot 100\,\mathrm{cm/cm}} = 0{,}02 \quad \text{ili} \quad H = 0{,}02\,\mathrm{Oe}.$$

Budući da je $\mathrm{Oe} = 79{,}577$ A/m, slijedi dalje $H = 1{,}59$ A/m, a ne 2 A/m, kako smo izračunali na početku ovog odsječka, uz pretpostavku da je (6.1-1) veličinska jednadžba! Nismo li negdje pogriješili? Kontrolirajmo rezultat pomoću najpouzdanije, veličinske jednadžbe (6.1-3), u koju uvrstimo $I = 10$ A, $r = 1$ m:

$$H = \frac{10\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 1\,\mathrm{m}} = 1{,}59\,\mathrm{A}.$$

Kontrola je pozitivna. No ona je pokazala i to da je veličinski račun najpregledniji, najpouzdaniji, a u ovom slučaju i najkraći.

6.1.2. Privlačna sila magneta. U gotovo svim starijim elektrotehničkim priručnicima nalazimo ovaj izraz za privlačnu silu magneta u zraku

$$F = A\left(\frac{B}{5000}\right)^2.$$

To je očito *brojčana jednadžba* (broj 5000!), u kojoj simboli sile F, površine A presjeka magneta i magnetske indukcije B redom predstavljaju broj kiloponda (kp), broj kvadratnih centimetara (cm^2) i broj gaussa (G). Prema tome navedenu bi jednadžbu trebalo pisati u istaknutom brojčanom obliku

$$\{F\} = \{A\}\left(\frac{\{B\}}{5000}\right)^2 \tag{6.1-7}$$

Iz ove se jednadžbe ne razabire da je riječ o sili u zraku (preciznije: u vakuumu). To će nam pokazati tek veličinska jednadžba do koje ćemo doći od brojčane (6.1-7) kad u nju umjesto simbola za brojčane iznose (vitičaste zagrade!) uvrstimo njima jednake omjere fizikalnih veličina i onih jedinica kojima je gornji izraz prilagođen:

$$\{F\} = F/\mathrm{kp}, \quad \{A\} = A/\mathrm{cm}^2, \quad \{B\} = B/\mathrm{G}. \tag{6.1-8}$$

Napominjemo da se o jedinici kp = kilopond govori u odlomcima B.4.2.4 i B.8.1.3, a o jedinici G = gauss u odlomku E.4.2.3. Uvrstimo li tri izraza (6.1-8) u brojčanu jednadžbu (6.1-7), dobivamo

$$\frac{F}{\mathrm{kp}} = \frac{A}{\mathrm{cm}^2}\left(\frac{B}{5000\ \mathrm{G}}\right)^2. \tag{6.1-9}$$

Sve tri jedinice preračunat ćemo u jedinice Međunarodnog sistema jedinica (SI). Znamo da je kp = 9,806 65 N, $\mathrm{cm}^2 = 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$, G = 10^{-4} T, gdje je T = tesla jedinica magnetske indukcije B u SI (vidi odsječak 2.2). Uvrstivši te odnose u (6.1-9), preuređivanjem slijedi

$$F = AB^2 \frac{9{,}806\,65\ \mathrm{N}}{10^{-4}\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{T}^2/4} = AB^2 \frac{392\,266\ \mathrm{N}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{T}^2}. \tag{6.1-10}$$

Vidimo da se u skupu jedinica na desnoj strani jednadžbe sakriva neka fizikalna veličina. Koja je to veličina, utvrdit ćemo analizom kombinacije jedinica $\mathrm{m}^2\ \mathrm{T}^2/\mathrm{N}$ u nazivniku. Znamo da je $\mathrm{T} = \mathrm{Vs/m}^2$, pa je dakle $\mathrm{T}^2 = \mathrm{V}^2\ \mathrm{s}^2/\mathrm{m}^4$. S druge je strane jedinica sile newton N = joule/metar, a kako je J = VAs, to je N = VAs/m. S tim odnosima konačno dobivamo

$$\mathrm{m}^2\ \mathrm{T}^2/\mathrm{N} = \mathrm{Vs/Am} = \mathrm{H/m},$$

gdje je H kratica za jedinicu induktiviteta henry. Poznato je da se jedinicom H/m izražava vrijednost veličine

$$\text{magnetska konstanta } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m},$$

pa je, dakle, $\mathrm{H/m} = \mu_0 \cdot 10^7/4\pi$. Uvrstimo li namjesto skupa jedinica $\mathrm{m}^2\ \mathrm{T}^2/\mathrm{N}$ u nazivniku jednadžbe (6.1-10) tako izraženi omjer jedinica H/m, slijedi veličinska jednadžba

$$F = A\,B^2 \frac{392\,266}{\mu_0\ 10^7/(4\pi)} = \frac{A\,B^2}{\mu_0} 0{,}493. \tag{6.1-11}$$

Napominjemo da smo opsežno preračunavanje jedinica SI mogli izbjeći da smo se poslužili tablicama E-4 i E-5.

Brojčani faktor 0,493 iz (6.1-11) ne poznamo u veličinskim jednadžbama. Zato možemo pretpostaviti da je to zapravo $0{,}5 = \frac{1}{2}$ i da je do razlike od 14 promila došlo prilikom prilagođenja brojčane jednadžbe (6.1-7) *zaokruženom* broju 5000. Prema tome veličinska jednadžba (6.1-11) ispravno glasi

$$F = \frac{1}{2\,\mu_0} A\,B^2. \tag{6.1-12}$$

Budući da je riječ o zraku (zapravo o vakuumu), to je $H = B/\mu_0$, gdje je H jakost magnetskog polja u rasporu magneta. Na taj način dobivamo

$$F = \tfrac{1}{2}\,A\,B\,H = \tfrac{1}{2}\,\mu_0\,A H^2 = \frac{1}{2\,\mu_0} A\,B^2. \tag{6.1-13}$$

Ove izraze poznajemo već iz odlomka 1.4.4 (vidi i odsječak 2.1). Tamo smo, naime, izračunali da je tlak elektromagnetskog polja $p = F/A = \frac{1}{2}\,\mu_0 H^2$, a to je u našem primjeru magneta sa zračnim rasporom tlak sile magneta $p = F/A$, gdje je F ukupna sila opisana jednadžbom (6.1-13).

6.2. Dvije radio-tehničke brojčane jednadžbe

Postoje i danas ljudi koji se profesionalno bave radio-tehnikom, a da još uvijek nisu shvatili bit prenatrpanosti literature s tog područja najrazličitijim jedinicama. Takvima svaka knjiga ili članak, napisani s jedinicama drukčijim od onih na koje su navikli, predstavlja pravu muku pri čitanju. Iskustvo pokazuje da se uspješnost rada tih ljudi poboljša kad se oni pomoću veličinskih jednadžbi oslobode »mističnosti« jedinica, oni postaju potpuno sigurni u svoje proračune, jer ih razumiju.

6.2.1. Otpor zračenja antene. Ukupni otpor antene sastoji se od djelatnog otpora, karakteriziranog Jouleovim gubicima, i od otpora R koji proizlazi iz snage zračenja antene $P = R I^2$, gdje je I struja koju u antenu šalje generator. Otpor zračenja R opisuje veličinska jednadžba

$$R = \frac{2\pi}{3} Z_{vo} \frac{l^2}{\lambda^2}; \qquad Z_{vo} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \tag{6.2-1}$$

koja slijedi iz teorije antenskog zračenja elektromagnetskog polja (po *H. Hertz*u). U gornjoj jednadžbi Z_{vo} je valni otpor zraka koji smo u odsječku 1.4 izveli kao korijen omjera magnetske i električke konstante (μ_0 i ϵ_0). Dalje su l i λ ukupna duljina antene i duljina vala zračenih elektromagnetskih valova. Ako bi se radilo o anteni visine l koja se ne napaja u sredini, već na svom podnožju, u izrazu (6.2-1) stajao bi faktor π, a ne 2π. To znači da je otpor zračenja R upola manji, jer se uz iste jakosti polja snaga zrači samo u polovinu prostora. Gornja jednadžba vrijedi za slučaj kada je duljina antene l mala u odnosu prema λ.

U radio-tehničkim knjigama rijetko nalazimo veličinsku jednadžbu (6.2-1). Mnogo se češće pojavljuje *brojčana* jednadžba prilagođena stanovitim jedinicama na takav način da iz nje posve iščezava valni otpor zraka (vakuuma), koji je kod emisije elektromagnetskog polja stvarno od bitnog značenja (usporedi s izvođenjem u odsječku 1.4). Pogledat ćemo kako se dolazi do takvih krnjih brojčanih jednadžbi. Da bismo to učinili, moramo najprije simbole veličina u (6.2-1) prikazati kao umnoške brojčanih iznosa i upotrijebljenih jedinica po načelu $G = \{G\}\,[G]$ (vidi odsječak A.1.4). Obično se otpor zračenja mjeri ohmima, duljina antene metrima, duljina vala kilometrima, dok je $Z_{vo} = 377\ \Omega$ (odsječak 1.4). Prema tome možemo pisati

$$R = \{R\} \cdot \Omega, \quad l = \{l\} \cdot \mathrm{m}, \quad \lambda = \{\lambda\} \cdot \mathrm{km}, \tag{6.2-2}$$

gdje simboli u vitičastim zagradama označuju brojčane iznose. Uvrstimo li ove umnoške u jednadžbu (6.2-1), dobivamo

$$\{R\}\,\Omega = \frac{2\pi}{3}\, 377\ \Omega \frac{\{l\}^2\,\mathrm{m}^2}{\{\lambda\}^2\,(\mathrm{km})^2},$$

odakle preuređenjem slijedi brojčana jednadžba

$$\{R\} = 0{,}79 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\{l\}^2}{\{\lambda\}^2}. \tag{6.2-3}$$

Želimo li da se s ovom brojčanom jednadžbom ispravno računa, moramo uz nju objasniti da se broj ohma $\{R\}$ dobiva ako se u (6.2-3) namjesto $\{l\}$ uvrsti broj metara, a namjesto $\{\lambda\}$ broj kilometara.

Još je neprikladnija brojčana jednadžba koju nalazimo za otpor zračenja antene u nekim starijim udžbenicima fizike

$$\{R\} = \frac{8\pi^2}{3c} \frac{\{l\}^2}{\{\lambda\}^2}, \tag{6.2-4}$$

gdje je $c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$ (vidi odlomak 4.3.2). Čitalac može s malo muke sâm zaključiti da u ovoj brojčanoj jednadžbi simboli predočuju

$$\{R\} = R/[R]_e, \quad \{l\} = l/\text{cm}, \quad \{\lambda\} = \lambda/\text{cm},$$

gdje je $[R]_e = 8{,}9872 \cdot 10^{11}\ \Omega$, tj. jedinica CGSE sistema (kontroliraj pomoću odnosa jedinica u tablici **40** u prilogu knjige).

Iako u stvarnosti nitko živ ne računa antenu pomoću formule (6.2-4), ipak neki od ono malo gorljivih pristaša CGS sistema jedinica likuju »da je ovdje brzina svjetla c ipak na pravom mjestu«. Naravno da to nije tačno. Iz odsječka 4.3 znamo, naime, da c *nije* brzina svjetla, već *brojčani iznos* brzine svjetla mjerene jedinicom cm/s, a u (6.2-4) ulazi kao omjer CGSM i CGSE jedinica. Stvarno se u izraz za otpor zračenja R antene može vrlo lako uvesti brzina svjetla, ali *stvarno* fizikalna veličina »brzina svjetla« v_0, a ne njen brojčani iznos c! U odlomku 1.4.4 ustanovili smo da je $\epsilon_0 \mu_0 v^2 = 1$. Ako taj izraz uvrstimo u desni izraz (6.2-1), a taj odmah zatim u lijevi, slijedi

$$R = \frac{2\pi}{3} \mu_0 v_0 \frac{l^2}{\lambda^2} = \frac{2\pi}{3} \frac{l^2 f^2}{\epsilon_0 v_0^3}.$$

S temeljnom relacijom $v_0 = f\lambda$ dobili smo, dakle, ne samo v_0 u izrazu za R nego čak i treću potenciju brzine svjetla! Ipak, gornje dvije jednadžbe ne upotrebljavamo jer je (6.2-1) najjednostavnija.

6.2.2. Thomsonova jednadžba titrajnog kruga. Još i danas se objavi poneka radio-tehnička knjiga ili članak u kojima autor mjeri »centimetrom« tri *različite* fizikalne veličine: duljinu vala λ, induktivitet L i kapacitet C. Tako, na primjer, za brojčanu jednadžbu (ovdje ćemo simbole veličina, dakako, *mi* opremiti vitičastim zagradama da bismo time istakli kako je riječ o brojčanoj jednadžbi, a ne o veličinskoj) titrajnog kruga

$$\{\lambda\} = 6{,}28 \sqrt{\{L\}\,\{C\}} \tag{6.2-5}$$

kažu da se njome dobiva broj centimetara »vlastite duljine vala« titrajnog kruga, ako se namjesto $\{L\}$ uvrsti »induktivitet u centimetrima«, a namjesto $\{C\}$ »kapacitet u centimetrima«.

Izražavanje duljine vala λ jedinicom centimetar je u redu, jer je doista riječ o duljini, ali $[L] = \text{cm}$ i $[C] = \text{cm}$ su besmislice nastale pogrešnom interpretacijom CGSM i CGSE sistema jedinica (vidi odsječak 4.4 i tablicu E-27). Čak ni tvornice kondenzatora više ne navode kapacitet kondenzatora u »cm«, već u pikofaradima (»cm« $\hat{=}$ 1,1127 pF)! Brojčana jednadžba (6.2-5) prilagođena je, u stvari, CGSM jedinici induktiviteta i CGSE jedinici kapaciteta

$$[L]_m = \frac{\text{cm}}{4\pi} \mu_0 \quad \text{i} \quad [C]_e = 4\pi\,\text{cm}\,\epsilon_0. \tag{6.2-6}$$

O tim jedinicama opširno smo raspravljali u odsječcima 4.2 i 4.1.

Od brojčane jednadžbe (6.2-5) doći ćemo na veličinsku primjenom temeljne metrološke jednadžbe $\{G\} = G/[G]$, tj. »brojčani iznos = veličina/jedinica«. Pri tom ćemo upotrijebiti *pravo* značenje brojčanih simbola u (6.2-5)

$$\{\lambda\} = \frac{\lambda}{\mathrm{cm}}, \quad \{L\} = \frac{L}{[L]_\mathrm{m}}, \quad \{C\} = \frac{C}{[C]_\mathrm{e}}.$$

Ako desne oblike brojčanih iznosa uvrstimo u (6.2-5), slijedi

$$\frac{\lambda}{\mathrm{cm}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{[L]_\mathrm{m}} \frac{C}{[C]_\mathrm{e}}}.$$

Ovdje smo namjesto broja 6,28 stavili *tačan* broj 2π, jer je 6,28 njegova zaokružena vrijednost. Preuređenjem gornja jednadžba prelazi u oblik

$$\lambda = 2\pi \sqrt{LC} \cdot \sqrt{\mathrm{cm}^2 \frac{4\pi}{\mathrm{cm}\,\mu_0} \frac{1}{4\pi\,\mathrm{cm}\,\epsilon_0}},$$

što smo dobili uvrštenjem obiju jednadžbi (6.2-6). Kraćenjem jedinica, pod znakom korijena ostaje umnožak $\epsilon_0 \mu_0$. Budući da je $\epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = 1$ (odlomak 1.4.1), gdje je v_0 brzina elektromagnetskih valova u vakuumu, izvedenu veličinsku jednadžbu za λ možemo napisati u obliku

$$\lambda = 2\pi v_0 \sqrt{LC}. \tag{6.2-7}$$

To je Thomsonova jednadžba titrajnog kruga, ali u obliku koji se rijetko upotrebljava. U poznati oblik

$$\frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{LC} \quad \text{ili} \quad f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \tag{6.2-8}$$

dovodimo je uz pomoć temeljne relacije $v_0 = \lambda f$. Iako su izrazi (6.2-7) i (6.2-8) formalno identični, ipak jednadžbu (6.2-8) treba smatrati pravilnijom. Osnovna je, naime, značajka titrajnog kruga njegova vlastita *frekvencija* f, a ne duljina vala λ, jer duljina vala dobiva smisao tek onda kad titrajni krug zrači u prostor elektromagnetske valove.

6.3. Preobrazba brojčane jednadžbe Zeemanova efekta u veličinsku

Namjena je idućih odlomaka da pokažu kako je ponekad teško biti student prirodoslovnih znanosti. Ako je udžbenik fizike napisan tako da se oslanja na tzv. fizikalne jedinice (vidi poglavlje 4), student se mora najprije probiti kroz šumu posve nepotrebnih odnosa između CGSM i CGSE jedinica. Tek nakon toga shvatit će bit pojave i moći sa sigurnošću proračunavati što ga zanima ili što se od njega traži.

6.3.1. Brojčana jednadžba Zeemanova efekta. U nekim visokoškolskim udžbenicima fizike nalazimo ovu jednadžbu koja opisuje Zeemanov efekt

$$\Delta f = \pm \frac{Q H}{4\pi c m}, \tag{6.3-1}$$

tj. pojavljivanje više spektralnih linija emisija atoma koji se nalazi u magnetskom polju. U gornjoj jednadžbi simboli redom predočuju: Δf promjenu frekvencije

emisije, Q elektriku elektrona, H jakost magnetskog polja, m masu elektrona, a c brzinu svjetla — barem tako piše u udžbeniku. Budući da se u jednadžbi pojavljuje c, koji poznamo kao brojčani faktor između jedinica CGSM i CGSE sistema, opravdano se pojavljuje sumnja da li je (6.3-1) veličinska jednadžba, a c stvarno brzina svjetla koju smo označivali sa v_0 kad se radilo o vakuumu.

Da li je gornja jednadžba veličinska, možemo ustanoviti kontrolom pomoću jedinica. Uz pretpostavku da je jednadžba (6.3-1) veličinska, uvrstimo u njen desni dio jedinice SI kojima bismo mjerili *veličine* Q, H, $c = v_0$ i m. Dobivamo

$$\frac{\mathrm{A\,s \cdot A/m}}{\mathrm{m\,s^{-1}\,kg}} = \frac{\mathrm{A^2\,s}}{\mathrm{m^2 V A\,s^3/m^2}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V\,s^2}},$$

jer je $\mathrm{kg} = \mathrm{V A s^3/m^2}$ (vidi odsječak 2.2). Na lijevoj strani jednadžbe (6.3-1) stoji znak za promjenu frekvencije, a frekvencija se mjeri jedinicom $\mathrm{Hz} = \mathrm{s^{-1}}$. Budući da nikako ne vrijedi $\mathrm{s^{-1}} = \mathrm{A V^{-1} s^{-2}}$, pokušajmo shvatiti da c nije brzina svjetla, već brojčani faktor $c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$, kako smo ga tretirali u odsječku 4.3. U tom slučaju kombinacija jedinica desne strane jednadžbe (6.3-1) daje

$$\frac{\mathrm{A\,s \cdot A/m}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{A^2\,s/m}}{\mathrm{V A\,s^3/m^2}} = \frac{\mathrm{A\,m}}{\mathrm{V\,s}},$$

dakle opet nije jednaka jedinici lijeve strane ($\mathrm{s^{-1}}$), kao što bi bilo potrebno kad bi se radilo o veličinskoj jednadžbi.

Prema tome je očito da izraz (6.3-1) nije veličinska, već *brojčana jednadžba*, prilagođena nekim jedinicama, a c faktor pretvorbe među CGSM i CGSE jedinicama. No kojim je jedinicama prilagođena? Na to nam ti udžbenici ne daju odgovor, ali iz drugih jednadžbi, koje poznamo i u veličinskom i u brojčanom obliku, zaključujemo da autori upotrebljavaju Gaussov sistem jedinica (vidi odsječak 4.3). Zato izraz (6.3-1) treba izraziti u istaknutom brojčanom obliku

$$\{\Delta f\} = \pm \frac{\{Q\}_\mathrm{e}\{H\}_\mathrm{m}}{4\pi c\{m\}}, \tag{6.3-2}$$

gdje $\{Q\}_\mathrm{e}$ označuje da je to simbol brojčanog iznosa veličine Q u jedinici $[Q]_\mathrm{e}$ sistema CGSE, $\{H\}_\mathrm{m}$ simbol brojčanog iznosa veličine jakost magnetskog polja H u jedinici $[H]_\mathrm{m} = \mathrm{oersted} = \mathrm{Oe}$ sistema CGSM, a $\{m\}$ brojčani iznos mase elektrona m u jedinici mase CGS sistema gram = g.

6.3.2. Preobrazba u veličinsku jednadžbu. U skladu s načelom da je »brojčani iznos = veličina/jedinica« (vidi odsječak A.1.4), dakle $\{G\} = G/[G]$, za brojčane iznose navedene uz brojčanu jednadžbu (6.3-2) možemo pisati

$$\{Q\}_\mathrm{e} = Q/[Q]_\mathrm{e}, \quad \{H\}_\mathrm{m} = H/\mathrm{Oe}, \quad \{m\} = m/\mathrm{g}.$$

Isto možemo učiniti s frekvencijom, jer $\{\Delta f\}$ u (6.3-2) također predstavlja brojčani iznos. Budući da se u CGS sistemima frekvencija mjeri jedinicom 1/s (= Hz), to je dakle $\{f\} = f/\mathrm{s^{-1}} = f \cdot \mathrm{s}$, gdje slovo f označuje fizikalnu veličinu frekvencija, a s je kratica za sekundu. Uvrstimo li sva četiri brojčana iznosa, izražena omjerom simbola veličina i upotrijebljenih jedinica, u jednadžbu (6.3-2), dobivamo

$$\Delta f \cdot \mathrm{s} = \pm \frac{Q\,[Q]_\mathrm{e}^{-1} \cdot H/\mathrm{Oe}}{\mathrm{s}\,4\pi c\,m/\mathrm{g}} \quad \text{ili} \quad \Delta f = \pm \frac{Z}{4\pi}\frac{QH}{m}. \tag{6.3-3}$$

Radi lakšeg i preglednijeg nastavka razmatranja ovdje smo uveli kraticu

$$Z = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}\, c\, [Q]_{\mathrm{e}}\, \mathrm{Oe}} = \frac{10^{-3}\ \mathrm{V\,A\,s^3/m^2}}{\mathrm{s}\, c\, [Q]_{\mathrm{e}}\, \mathrm{Oe}},$$

jer je gram = g = 10^{-3} kg, a kg = $\mathrm{VAs^3/m^2}$ (vidi tablice E-4 i E-5).

Ostaje nam da razmrsimo izraz Z, koji sadrži samo jedinice, ali zato dobro ispremiješane. Pojednostavnjujmo taj izraz korak po korak! U tablici **40** u prilogu knjige nalazimo da je $[Q]_{\mathrm{m}} = c\,[Q]_{\mathrm{e}}$, a $\mathrm{Oe} = \mathrm{G}/\mu_0$, jer je $[H]_{\mathrm{m}} = \mathrm{Oe} = [B]_{\mathrm{m}}/\mu_0 = \mathrm{G}/\mu_0$. S ova dva odnosa formula za Z prelazi u

$$Z = \frac{10^{-3}\ \mathrm{VAs^3\,m^{-2}}\,\mu_0}{\mathrm{s}\ 10\ \mathrm{As}\ 10^{-4}\ \mathrm{V\,s\,m^{-2}}} = \mu_0.$$

Uvrstimo li $Z = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m u izraz (6.3-3), dobivamo *veličinsku* jednadžbu

$$\Delta f = \pm \frac{Q\,\mu_0\,H}{4\pi\, m} = \pm \frac{Q\,B}{4\pi\, m}, \tag{6.3-4}$$

jer je u vakuumu $B = \mu_0 H$. Univerzalna *veličinska jednadžba* (6.3-4) vrijedi za bilo koji sistem jedinica, te za nesistematične skupove heterogenih jedinica. U to se možemo uvjeriti s nekoliko redaka.

Neka se atomi nalaze u magnetskom polju indukcije $B = 10^4$ G. U tablici prirodnih konstanti **2** nalazimo da je za elektron $Q/m = 1{,}759 \cdot 10^{11}$ As/kg. Uvrštenje u (6.3-4) daje

$$\Delta f = \pm \frac{1}{4\pi}\, 10^4\ \mathrm{G} \cdot 1{,}759 \cdot 10^{11}\ \mathrm{As/kg} = \pm\, 1{,}4 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s^{-1}} = 14\ \mathrm{GHz},$$

jer je $\mathrm{G} = 10^{-4}$ T, $\mathrm{T} = \mathrm{Vs/m^2}$, $\mathrm{kg} = \mathrm{VAs^3/m^2}$, $\mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$, G (giga) = 10^9.

Iz veličinske jednadžbe (6.3-4) razabiremo da su za elektron konstantne sve veličine, osim jakosti magnetskog polja H. Budući da je $Q/m = 1{,}759 \cdot 10^{11}$ As/kg, to se formula (6.3-4) može napisati u veličinskom obliku, prilagođenom elektronu,

$$\Delta f = \pm\, K H, \tag{6.3-5}$$

gdje je konstanta $K = Q\mu_0 : (4\pi m) = 1{,}759 \cdot 10^4$ m/A = $1{,}4 \cdot 10^6$/(Oe s). Pri tom je Oe kratica za jedinicu oersted = 1000 A/(4π m), a s za sekundu. Pomoću brojčanog iznosa konstante $\{K\} = K \cdot \mathrm{Oe\,s} = 1{,}4 \cdot 10^6$, brojčana jednadžba (6.3-2) glasi

$$\{\Delta f\} = \pm\, 1{,}4 \cdot 10^6\, \{H\}_{\mathrm{m}}. \tag{6.3-6}$$

Ovdje simboli brojčanih iznosa označuju broj hertza odnosno broj oersteda, tj. $\{\Delta f\} = \Delta f/\mathrm{Hz}$ i $\{H\}_{\mathrm{m}} = H/\mathrm{Oe}$.

6.3.3. Još jedna brojčana jednadžba. Umjesto netom izvedene brojčane jednadžbe (6.3-6) u nekih autora nalazimo brojčanu formulu

$$\{\Delta f\} = \mp\, 4{,}7 \cdot 10^{-5}\, \{H\}, \tag{6.3-7}$$

koja je, štoviše, znakom jednakosti produžena *brojčana* jednadžba (6.3-1)! Autor jednadžbe (6.3-7) nije, dakako, naznačio da je riječ o brojčanoj jednadžbi; viticaste smo zagrade napisali mi, da bismo simbole fizikalnih veličina razlikovali od oznaka za brojčane iznose.

U odlomku 6.3.1 primijenili smo najprije jedinice da bismo od brojčane jednadžbe (6.3-1) došli do odgovarajuće veličinske. Zatim smo u odlomku 6.3.2 primijenili c kao omjer jedinica CGSM i CGSE sistema. Kod (6.3-7) sve to ne pomaže, jer je omjer $4{,}7\cdot10^{-5}/1{,}4\cdot10^{6}=3{,}36\cdot10^{-11}$, dakle različit od $c=2{,}998\cdot10^{10}$. Pada, ipak, u oči da je u (6.3-7) okrenut poredak predznaka; umjesto $\pm$, kao u (6.3-1), ovdje imamo $\mp$, tj. kao da je došlo do dijeljenja sa $\{\Delta f\}$, pa su predznaci zamijenili mjesta. Nema druge nego čitav problem razmotriti iz osnova. Pri tom ćemo se poslužiti *veličinskim jednadžbama*, kako se ne bismo morali boriti i s jedinicama Gaussova sistema, koje nas lako mogu odvesti u metrološku mistiku.

Fizikalne veličine frekvencija f i duljina vala λ u vakuumu međusobno su povezane veličinskom jednadžbom $f\lambda=v_0$, gdje je $v_0=2{,}9979\cdot10^{8}$ m/s brzina elektromagnetskog polja u vakuumu. Promijeni li se frekvencija za df, jednostavnim diferencijalnim računom utvrđujemo da se uz $v_0=\text{const}$ ova promjena odražava kao promjena duljine vala $d\lambda=-\lambda\, df/f$, jer, na primjer, povećanje frekvencije znači isto što i smanjenje duljine vala. Radi li se o diskretnoj promjeni frekvencije Δf, kako je po kvantnoj mehanici jedino i moguće, navedeni će izraz glasiti $\Delta\lambda/\lambda=-\Delta f/f$. To je dakle relativna promjena duljine vala koja je jednaka negativnoj relativnoj promjeni frekvencije, što je u skladu s uvjetom $v_0=\text{const}$.

Želimo li znati koliko iznosi omjer relativne promjene duljine vala $\Delta\lambda/\lambda$ prema duljini vala λ, moramo taj izraz podijeliti sa λ, dakle

$$\frac{\Delta\lambda/\lambda}{\lambda}=-\frac{\Delta f}{\lambda f}=-\frac{\Delta f}{v_0},$$

jer je $v_0=\lambda f$. Uvrstimo li u gornji izraz jednadžbu (6.3-4), dobivamo

$$\frac{\Delta\lambda/\lambda}{\lambda}=\mp\frac{Q\,B}{4\pi v_0 m}=\mp K_1 H, \tag{6.3-8}$$

gdje je $K_1=K/v_0=5{,}86\cdot10^{-5}$ s/A $=4{,}68\cdot10^{-5}$ s Oe cm. Prema tome je brojčani iznos konstante K_1 u Gaussovu sistemu jedinica $\{K_1\}=K_1/(\text{s Oe cm})=4{,}68\cdot10^{-5}$, pa brojčana jednadžba prilagođena Gaussovu sistemu jedinica glasi

$$\frac{\{\Delta\lambda\}/\{\lambda\}}{\{\lambda\}}=\frac{\{\Delta\lambda\}}{\{\lambda\}^2}=\mp4{,}68\cdot10^{-5}\{H\}_{\mathrm{m}},$$

a to je u skladu sa citiranom brojčanom jednadžbom (6.3-7).

Vidimo, dakle, da na lijevoj strani brojčane jednadžbe pogrešno stoji simbol promjene frekvencije, već mora stajati relativna promjena duljine vala podijeljena s duljinom vala! Veličinski račun, kojim smo pouzdano doprli do veličinske jednadžbe (6.3-8), pokazuje da se na lijevoj strani tog izraza nalazi veličina $\Delta\lambda/\lambda^2$. Ta je veličina karakteristična u spektrometriji i mjeri se jedinicom SI m^{-1}, a to je nešto posve drugo negoli pripadna promjena frekvencije Δf, koja se mjeri jedinicom SI hertz $=1/\mathrm{s}$.

Na ovom posljednjem primjeru u nizu usporedbi brojčanih jednadžbi (koje vrijede za tačno određene jedinice) s univerzalnim veličinskim jednadžbama (koje vrijede za bilo kakav skup jedinica), mogli smo vidjeti da brojčane jednadžbe ne uzrokuju samo povećani napor računanja i mišljenja, već uz nezornost i nesigurnost računanja mogu dovesti i do načelnih grešaka. Zato svjetski sistem jedinica SI, jedinstven za tehniku i znanost, doživljava tako brzu i punu afirmaciju, jer njegova primjena automatski svuda uzrokuje primjenu veličinskih jednadžbi, a one znače: univerzalnost, preglednost, fizikalnu zornost i pouzdanost računanja.

6.4. Sistemi dimenzija elektromagnetizma

Temeljne pojmove o »dimenzijama« fizikalnih veličina i o »sistemima dimenzija« stekli smo u odsječku A.5.2, a u odsječku B.10.3 raspravili smo nekoliko sistema dimenzija koji se upotrebljavaju u mehanici. Da ne bismo ovdje ponavljali načela građenja sistema dimenzija, upućujemo na prethodno čitanje spomenutih odsječaka.

6.4.1. Mie-Perryjev sistem. Prirodno je da u elektromagnetizmu postoje četiri polazne (osnovne, nezavisne) dimenzije, od kojih se grade izvedene dimenzije svih ostalih elektromagnetskih veličina (usporedi, na primjer, odlomke 1.1.1 i 2.1.2 sa odsječkom A.5.2). Znamo da je teoretski posve svejedno koje četiri dimenzije odaberemo za polazne, jedini je uvjet da su one međusobno nezavisne. Izbor u nastavi ovisi o pedagoškom nazoru nastavnika, a u dimenzijskoj analizi o vrsti problema koji se rješava.

Najviše autora (od onih koji se uopće služe dimenzijama!) upotrebljava *Mie-Perryjev* sistem dimenzija LTUI, koji se oslanja na polazne dimenzije duljine L, vremena T, napona U i struje I. To ime sistem je dobio po *J. Perryju* i *G. Mieu*, koji su predložili sistem jedinica VAscm (vidi primjer u odlomku 5.2.2). Neki ga autori zovu i *Oberdorferov* sistem dimenzija. Do izvedenih dimenzija tog sistema lako se dolazi kratkim računanjem. Tako, na primjer, energija W dobiva u skladu s jednadžbom $W = UIt$ dimenziju $\dim W = \mathrm{W} = \mathrm{UIT}$ (vidi odsječke A.5.2 i B.10.3). I sila F ima, dakako, u sistemu LTUI izvedenu dimenziju: iz jednadžbe $F = W/l$ odmah slijedi

$$\dim F = \mathrm{F} = \mathrm{W/L} = \mathrm{UIT/L} = \mathrm{L^{-1}TUI}.$$

Nije teško izračunati ni dimenziju mase m. Budući da je $m = F/a$, gdje je a ubrzanje s dimenzijom $\mathrm{LT^{-2}}$, dobivamo

$$\dim m = \frac{\dim F}{\dim a} = \frac{\mathrm{L^{-1}TUI}}{\mathrm{LT^{-2}}} = \mathrm{L^{-2}T^{3}UI}.$$

Gotovo bez ikakva napora možemo izvedene dimenzije dobiti uz pomoć stupca 5 u tablici E-4 (odlomak 2.2.5), koja sadrži ovisnost jedinica SI o jednoj od odabranih četvorki polaznih jedinica: umjesto jedinice SI treba staviti pripadnu dimenziju fizikalne veličine (V→U, m→L itd.). Na taj način (ili računanjem, kako smo gore naznačili) dobiva se stupac 3 u tablici E-28.

6.4.2. Sistem dimenzija Kalantarova temelji se na dimenzijama duljine L, vremena T, elektrike Q i magnetskog toka Φ, koje su odabrane za osnovne. Sistem LTQΦ, koji je godine 1929. predložio *P. L. Kalantarov*, vrlo je pogodan za teoretska razmatranja. Do izvedenih dimenzija tog sistema lako dolazimo od sistema LTUI (odlomak 6.4.1) jednostavno tako da u stupac 3 tablice E-28 umjesto simbola U stavimo $\Phi\mathrm{T^{-1}}$, a umjesto I dimenziju $\mathrm{QT^{-1}}$, jer zbog $U = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ i $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ jest $\Phi = \mathrm{TU}$ i $\mathrm{Q} = \mathrm{TI}$.

S ovim sistemom dimenzija može se najbrže raditi, a da je preglednost rezultata gotovo savršena. Naročito je prikladan pri dimenzijskoj analizi, tako npr. u istraživanju međusobne povezanosti gravitacijskih i elektromagnetskih polja, jer dovodi do mnogih zanimljivih i dalekosežnih zaključaka u pogledu najsuptilnijih odnosa između materije i polja. O primjeni tog sistema citirano je na kraju knjige

Tablica **E-28**

Nekoliko sistema dimenzija elektromagnetizma

Veličina	Simbol	LTUI	LTQΦ	LTMI	LTMQ	LTMR	LTMμ	FLIT
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Masa	m	$L^{-2}T^{3}UI$	$L^{-2}TQ\Phi$	M	M	M	M	$L^{-1}T^{2}F$
Sila	F	$L^{-1}TUI$	$L^{-1}T^{-1}Q\Phi$	$LT^{-2}M$	$LT^{-2}M$	$LT^{-2}M$	$LT^{-2}M$	F
Energija	W	TUI	$T^{-1}Q\Phi$	$L^{2}T^{-2}M$	$L^{2}T^{-2}M$	$L^{2}T^{-2}M$	$L^{2}T^{-2}M$	LF
Elektrika	Q	TI	Q	TI	Q	$LT^{-1/2}M^{1/2}R^{-1/2}$	$L^{1/2}M^{1/2}\mu^{-1/2}$	TI
Električna struja	I	I	$T^{-1}Q$	I	$T^{-1}Q$	$LT^{-3/2}M^{1/2}R^{-1/2}$	$L^{1/2}T^{-1}M^{1/2}\mu^{-1/2}$	I
Jakost magnetskog polja	H	$L^{-1}I$	$L^{-1}T^{-1}Q$	$L^{-1}I$	$L^{-1}T^{-1}Q$	$T^{-3/2}M^{1/2}R^{-1/2}$	$L^{-1/2}T^{-1}M^{1/2}\mu^{-1/2}$	$L^{-1}I$
Kapacitet	C	$TU^{-1}I$	$TQ\Phi^{-1}$	$L^{-2}T^{4}M^{-1}I^{2}$	$L^{-2}T^{2}M^{-1}Q^{2}$	TR^{-1}	$L^{-1}T^{2}\mu^{-1}$	$L^{-1}T^{2}F^{-1}I^{2}$
Dielektričnost	ϵ	$L^{-1}TU^{-1}I$	$L^{-1}TQ\Phi^{-1}$	$L^{-3}T^{4}M^{-1}I^{2}$	$L^{-3}T^{2}M^{-1}Q^{2}$	$L^{-1}TR^{-1}$	$L^{-2}T^{2}\mu^{-1}$	$L^{-2}T^{2}F^{-1}I^{2}$
Magnetski tok	Φ	TU	Φ	$L^{2}T^{-2}MI^{-1}$	$L^{2}T^{-1}MQ^{-1}$	$LT^{-1/2}M^{1/2}R^{1/2}$	$L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}\mu^{1/2}$	LFI^{-1}
Magnetska indukcija	B	$L^{-2}TU$	$L^{-2}\Phi$	$T^{-2}MI^{-1}$	$T^{-1}MQ^{-1}$	$L^{-1}T^{-1/2}M^{1/2}R^{1/2}$	$L^{-1/2}T^{-1}M^{1/2}\mu^{1/2}$	$L^{-1}FI^{-1}$
Električki napon	U	U	$T^{-1}\Phi$	$L^{2}T^{-3}MI^{-1}$	$L^{2}T^{-2}MQ^{-1}$	$LT^{-3/2}M^{1/2}R^{1/2}$	$L^{3/2}T^{-2}M^{1/2}\mu^{1/2}$	$LT^{-1}FI^{-1}$
Permeabilnost	μ	$L^{-1}TUI^{-1}$	$L^{-1}TQ^{-1}\Phi$	$LT^{-2}MI^{-2}$	LMQ^{-2}	$L^{-1}TR$	μ	FI^{-2}
Induktivitet	L	TUI^{-1}	$TQ^{-1}\Phi$	$L^{2}T^{-2}MI^{-2}$	$L^{2}MQ^{-2}$	TR	$L\mu$	LFI^{-2}
Električki otpor	R	UI^{-1}	$Q^{-1}\Phi$	$L^{2}T^{-3}MI^{-2}$	$L^{2}T^{-1}MQ^{-2}$	R	$LT^{-1}\mu$	$LT^{-1}FI^{-2}$

nekoliko podataka literature, a napose se može i u domaćoj literaturi (vidi *Avčin*ovu knjigu) naći lijepih, vrlo korisnih primjena tog sistema dimenzija.

6.4.3. Ostali sistemi dimenzija elektromagnetizma u većini se slučajeva osnivaju samo na *jednoj* elektromagnetskoj polaznoj dimenziji, dok su tri polazne dimenzije zajedničke mehanici i elektromagnetizmu. Uz L i T za treću se polaznu dimenziju najčešće odabire dimenzija mase m (dim $m = \mathrm{M}$) ili dimenzija sile F (dim $F = \mathrm{F}$). Tako su, na primjer, u stupcu 5 (tablica E-28) navedene izvedene dimenzije veličina u sistemu LTMI. Do njega se od LTUI dolazi preko dimenzijske jednadžbe snage koja izjednačuje $\mathrm{ML^2T^{-3}U = I}$. Prema tome do dimenzija veličina u sistemu LTMI dolazimo tako da u stupcu 3 namjesto U stavimo $\mathrm{U = ML^2T^{-3}I^{-1}}$. U praksi se taj sistem najčešće upotrebljava u tabelarnom obliku za brzo utvrđivanje odnosa među koherentnim jedinicama (usporedi sa stupcem 4 u tablici E-4). Slično je i sa sistemom LTMQ (*Brylinski*), koji je svrstan u stupcu 6 u tablici E-28. Do pojedinih dimenzija veličina dolazi se od LTMI stavljanjem $\mathrm{T^{-1}Q}$ namjesto I.

*Kennelly*jev sistem dimenzija s polaznom četvorkom LTMR (ponekad ga krivo nazivaju *Giorgi*jevim) posve je nepraktičan. To vidimo po tome (stupac 7 u tablici E-28) što sadrži razlomljene eksponente, koji onemogućuju bilo kakav uvid u fizikalnu strukturu izvedenih dimenzija. Do toga dolazi jer je $\mathrm{U^2R^{-1}} = \mathrm{ML^2T^{-3}}$, a slijedom toga preko $U = RI$ dobivamo $\mathrm{I = LT^{-3/2}M^{1/2}R^{-1/2}}$. Uvrštavamo li dakle taj I i $\mathrm{U = M^{1/2}LT^{-3/2}R}$ namjesto U i I u izvedene dimenzije stupca 3, dobivamo one u stupcu 7.

U stupcu 8 naveli smo dimenzije veličina u sistemu s polaznim dimenzijama duljine, vremena, mase i permeabilnosti. Taj je sistem također nepraktičan jer ima razlomljene eksponente. Naveli smo ga samo zato jer može biti od koristi prilikom proučavanja CGSM sistema jedinica (odsječak 4.2). Konačno je u stupcu 9 naveden sistem FLIT, gdje je kao treća polazna dimenzija usvojena ona sile F. U nekim primjenama on može biti od jednake koristi kao i LTMI. Od potonjega dolazi se na FLIT tako da se u izvedenim dimenzijama stupca 5 namjesto M stavi $\mathrm{L^{-1}T^2F}$.

Glava **G**

Veličine i mjerne jedinice teorije zračenja i fotometrije

SADRŽAJ

1. Veličine i jedinice teorije zračenja. Zakoni zračenja

1.1. Temeljne veličine teorije zračenja 1131

1. Veličine ozračenost i jakost zračenja, 2. Lambertov zakon i gustoća snage zračenja, 3. Snaga zračenja u poluprostor 1135

1.2. Infinitezimalna interpretacija teorije zračenja 1136

1. Osnova teorije zračenja, 2. Jakost zračenja, ozračenost i emisijska moć, 3. Veza između jakosti zračenja, ozračenosti i udaljenosti 1140

1.3. Zakoni zračenja crnog tijela 1141

1. Kirchhoffov zakon, 2. Crno tijelo (savršeno zračilo), 3. Planckov zakon zračenja crnog tijela, 4. Rayleigh-Jeansov i Wienovi zakoni, 5. Stefan-Boltzmannov zakon zračenja 1145

2. Zapažanje svjetla. Zakoni fotometrije i rasvjetne tehnike

2.1. Načelo fotometrijskih usporedbi 1147

1. Svjetlo — vidljivo zračenje, 2. Temelj fotometrije, 3. Raznobojna (heterokromna) fotometrija 1149

2.2. Ovisnost zapažanja svjetla o duljini vala zračenja 1150

1. Spektralna osjetljivost oka, 2. Purkynčov efekt, 3. Načelo mjerenja gustoće snage zračenja, 4. Zakon zbrajanja monokromatskih zračenja, 5. Primjena zakona zbrajanja na kontinuirano zračenje 1157

2.3. Luminancija i njena jedinica nit 1158
1. Fotometrijska veličina luminancija, 2. Definicija jedinice luminancije nit, 3. Fotometrijski ekvivalent zračenja, 4. Reprodukcija jedinice luminancije, 5. Veličina luminancija u objektivnoj fotometriji, 6. Nesigurnost reprodukcije savršenim zračilom 1167
2.4. Pregled fotometrijskih veličina 1167
1. Svjetlosna korisnost (vidljivost svjetla), 2. Svjetlosni tok, 3. Rasvijetljenost (osvijetljenost), 4. Svjetlosna jakost, 5. Pregled fotometrijskih veličina..... 1175
2.5. Novije koncepcije fotometrijskih veličina. Temperatura boje 1178
1. Potreba revizije postojeće koncepcije, 2. Moonov sistem fotometrijskih veličina, 3. Temperatura boje 1181

3. Temeljna mjerenja u fotometriji i fotometrijske jedinice

3.1. Temeljna mjerenja u fotometriji 1183
1. Načelo vizuelne fotometrije, 2. Lummer-Brodhunov fotometar, 3. Ulbrichtova kugla 1186
3.2. Jedinice Međunarodnog sistema (SI) fotometrijskih veličina 1189
1. Priključak fotometrije na SI, 2. Jedinica luminancije nit, 3. Jedinica svjetlosnog toka lumen, 4. Jedinica rasvijetljenosti lux, 5. Jedinica svjetlosne jakosti candela, 6. Službeni slijed definicija jedinica SI 1193
3.3. Ostale jedinice luminancije 1195
1. Jedinica stilb, 2. Jedinica apostilb, 3. Jedinice lambert i mililambert, 4. Jedinica footlambert, 5. Jedinica candle/inch^2, 6. Jedinica »tamne luminancije« skot..... 1200
3.4. Mjerne jedinice rasvijetljenosti 1202
1. Jedinice lux i kilolux, 2. Jedinice phot i miliphot, 3. Jedinica footcandle, 4. Jedinica rasvijetljenosti lumen/inch^2, 5. Jedinica »tamne rasvijetljenosti« nox 1203
3.5. Mjerne jedinice veličine ekspozicija 1204
1. Veličina ekspozicija, 2. Jedinica SI luxsekunda, 3. Jedinica photsekunda, 4. Jedinice luxsat i photsat..... 1206
3.6. Iz povijesti svjetlosnih pramjerila 1206
1. Svjetlosna pramjerila prošlog stoljeća, 2. Hefnerova svijeća, 3. Violleova svijeća, 4. Međunarodna svijeća, 5. Usporedba Međunarodne i Hefnerove svijeće, 6. Nova svijeća (candela)..... 1210

1. Veličine i jedinice teorije zračenja. Zakoni zračenja

»Zadatak je fotometrije da mjeri svjetlo, koje omogućuje viđenje predmeta. Bez oka, koje vidi, pojam »svjetlo« gubi svaki smisao: samo je oko kadro osjetiti svjetlo. Prema tome, svjetlo je veličina ljudskog, mogli bismo reći fiziološkog značaja, a ne fizikalnog. Fotometriju zahtijevaju praktične potrebe; fizikalnoj znanosti ona zapravo nije potrebna... Veličine fotometrije izvode se, dakle, iz fizikalnih veličina pomoću količnika vidljivosti...« S ovih nekoliko savršeno jasnih rečenica *F. Avčin* je u svojim »Osnovama metrologije« (1950) u cijelosti definirao zadatak i načelo rada fotometrije i njenu vezu s fizikom.

U skladu s time napisana je ova glava: najprije su razmotreni osnovni zakoni elektromagnetskog zračenja (u daljnjem tekstu »zračenje«), a zatim su opisane činjenice o tome koji dio zračenja — u ovisnosti o njegovoj frekvenciji — ljudsko oko vidi i kako ga vidi. S ova dva bitna podatka, fizikalnim i fiziološkim, u nastavku je izveden sistem tzv. fotometrijskih veličina i njihovih jedinica. Pri tom uz opis suvremenog stanja fotometrijske metrologije nije zanemarena ni njena povijest, koja još jednom dokazuje da metrologija uvijek odrazuje trenutno stanje vrhunske znanosti.

1.1. Temeljne veličine teorije zračenja

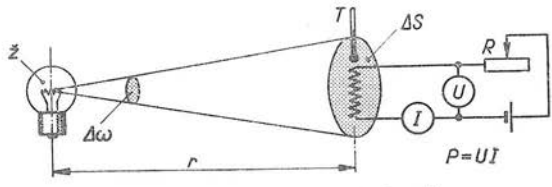
1.1.1. Veličine ozračenost i jakost zračenja. Tijelu se ozračivanjem dovodi energija. Npr. Sunce zračenjem zagrijava Zemlju, peć dozračuje toplinsku energiju ljudima i predmetima itd. Porast temperature na ozračenim plohama pruža jednu od mogućnosti mjerenja *snage zračenja* (o veličini »snaga« vidi odlomak B.5.1.3); načelo takvog mjerenja prikazuje slika G.1. Žarulja $\check{Z}$ odašilje u prostor oko sebe energiju zračenja, tj. valove vrlo širokog raspona duljina vala. Dio te energije pada na metalnu pločicu površine ΔS. Izmjere pločice gotovo su zanemarive prema udaljenosti r između $\check{Z}$ i ΔS, pa tako čitav snop zraka pada gotovo *okomito* na ΔS. Ozračena pločica premazana je čađom da bi upila (apsorbirala) gotovo svu dozračenu joj energiju. Na pločici se nalazi termometar T (termoelement) i električki grijaći uređaj (žica od konstantana koja se može priključiti na akumulatorsku bateriju).

Zamislimo ovakav pokus s mjernim uređajem iz slike G.1: najprije je električki grijaći uređaj na pločici ΔS isključen, a žarulja $\check{Z}$ dozračuje pločici snagu zračenja ΔP. Temperatura pločice raste tako dugo dok se ne uspostavi temperaturna ravnoteža, tj. do trenutka kad se dozračuje isto tolika snaga kolika se odvodi toplinskim vođenjem, zračenjem pločice udesno itd. Pošto se temperatura pločice ustalila, učinimo dvije stvari: između žarulje $\check{Z}$ i dotada ozračivane pločice ΔS stavimo zastor nepropustan za zračenje, a pločicu počnimo zagrijavati toplinom

koju proizvodi električka grijalica. Otpornikom R namjestimo takvu jakost električne struje I da termometar T pokazuje istu temperaturu kakva je bila prije — dok je grijaći uređaj bio isključen, a pločicu je grijalo zračenje odaslano iz žarulje. To znači da je električka snaga grijanja $\Delta P = IU$ jednaka snazi ΔP dozračenoj pločici iz žarulje.

Saznavši tako vrijednost dozračene snage ΔP i izmjerivši površinu pločice ΔS, možemo izračunati vrijednost veličine *ozračenost*

$$G = \frac{\text{dozračena snaga } \Delta P}{\text{ozračena površina } \Delta S}. \tag{1.1-1}$$



Sl. G.1. Načelo mjerenja snage zračenja. Unutar prostornog kuta $\Delta\omega$ žarulja $\check{Z}$ odašilje snagu zračenja ΔP, koju apsorbira okomito postavljena ozračena pločica površine ΔS

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (o SI vidi poglavlja B.7, D.4 i E.2) veličina ozračenost G mjeri se jedinicom

$$[G]_{\mathrm{M}} = \frac{\text{watt}}{\text{metar}^2} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Jedinicu snage W = watt opisali smo u odlomku B.5.5.1. Napominjemo da se snaga zračenja P naziva i »tok zračenja« te označuje i slovom Φ_{e}. Nazive na nekoliko stranih jezika sadrži tablica G-1.

Veličinom G okarakterizirali smo pojave na *ozračenoj* plohi ΔS. Zračilo, tj. *izvor zračenja*, karakteriziramo veličinom *jakost zračenja*

$$J = \frac{\text{odaslana snaga } \Delta P}{\text{prostorni kut } \Delta\omega}. \tag{1.1-2}$$

Ova definicija veličine jakost zračenja J također se temelji na slici G.1: snaga ΔP odaslana (emitirana) je iz (teoretski) tačkastog izvora zračenja u stožasti dio prostora omeđen prostornim kutom $\Delta\omega = \Delta S/r^2$, gdje je r udaljenost između žarulje $\check{Z}$ i ozračene površine ΔS.

Jedinicu Međunarodnog sistema (SI) veličine jakost zračenja J izvest ćemo iz definicijske jednadžbe (1.1-2). Budući da se snaga P mjeri jedinicom $[P]_{\mathrm{M}} = \mathrm{W} = \text{watt}$, a prostorni kut ω jedinicom $[\omega]_{\mathrm{M}} = \mathrm{sr} = \text{steradijan}$ (vidi odlomak B.1.6.1), jedinica SI jakosti zračenja je

$$[J]_{\mathrm{M}} = \frac{[P]_{\mathrm{M}}}{[\omega]_{\mathrm{M}}} = \frac{\text{watt}}{\text{steradijan}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}.$$

Uspostavimo li preko jedinice W = watt odnos između jedinice $[G]_{\mathrm{M}} = \mathrm{W/m^2}$ i $[J]_{\mathrm{M}} = \mathrm{W/sr}$, dobivamo $[J]_{\mathrm{M}} = [G]_{\mathrm{M}} \cdot \mathrm{sr/m^2}$.

Do *drukčijeg* odnosa među jedinicama SI ozračenosti G i jakosti zračenja J dolazimo ovim rasuđivanjem: jednadžbe (1.1-1, 2) možemo napisati u obliku $\Delta P = G\,\Delta S$ i $\Delta P = J\,\Delta\omega$, odakle slijedi $G\,\Delta S = J\,\Delta\omega$. Budući da je $\Delta\omega = \Delta S/r^2$ (vidi sl. G.1), prethodna jednakost prelazi u oblik

$$G\,\Delta S = J\frac{\Delta S}{r^2} \quad \text{ili} \quad r^2 G = J. \tag{1.1-3}$$

Budući da je jedinica SI ozračenosti $[G]_M = W/m^2$, a jedinica kvadrata udaljenosti $[r^2]_M = m^2$, iz desne jednadžbe (1.1-3) proizlazi

$$[J]_M = [r^2]_M [G]_M = m^2 \cdot W/m^2 = W.$$

Prije smo izračunali da je jedinica jakosti zračenja SI $[J]_M = W/sr$. Budući da je račun u oba slučaja korektan, izjednačenjem obiju jedinica $[J]_M$ dobivamo $W/sr = W$, odnosno sr = steradijan = 1. To je i tačno, jer smo identičnošću sr ≡ 1 u odlomku B.1.6.1 i definirali jedinicu prostornog kuta »steradijan«. Ove prividne nesuglasice u pogledu jedinica naglasili smo zato što zbog njih mnogi imaju poteškoća pri studiju osnova teorije zračenja i fotometrije.

Tablica **G-1**

Usporedba naziva nekih veličina teorije zračenja na šest jezika

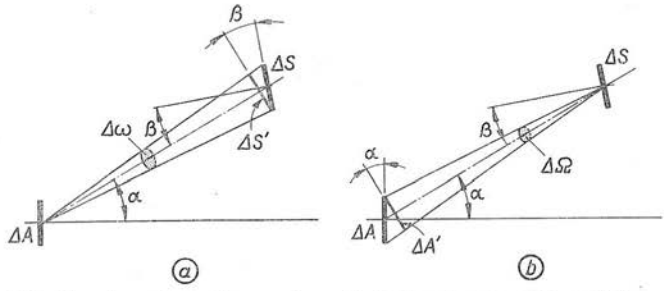
Simbol veličine: Jedinica SI:	W, Q joule = J	P, Φ_e watt = W	J watt/steradijan = W/sr
hrvatskosrpski	energija zračenja	snaga zračenja	jakost zračenja
češki	zářivá energie	zářivý výkon, zářivý tok	zářivost
ruski	energija izlučenija	patok izlučenija	energetičeskaja svetimost
engleski	radiant energy	radiant flux	radiant intensity
francuski	énergie rayonnante	flux énergétique	intensité énergétique
njemački	Strahlungsenergie	Strahlungsfluss	Strahlungsstärke

Simbol veličine: Jedinica SI:	M W/(sr·m²)	H watt/metar² = W/m²	G watt/metar² = W/m²
hrvatskosrpski	gustoća snage zračenja	emisijska moć	ozračenost
češki	zář	intensita vyzařování	ozářeni, intensita ozařováni
ruski	energetičeskaja jarkost	energetičeskaja svetnost	ablučenost
engleski	steradiancy	radiosity	irradiancy
francuski	luminance énergétique	émittance énergétique	éclairement
njemački	Strahldichte	Ausstrahlungsstärke	Bestrahlungsstärke

Već na početku ove glave o zračenju i fotometriji moramo naglasiti da je na tom području nestandardiziranost *terminologije* i oznaka veličina vjerojatno veća negoli u bilo kojoj drugoj grani. To se ne odnosi samo na termine u hrvatskosrpskom jeziku, već i na jezike koji imaju dugogodišnju znanstvenu i tehničku tradiciju. Stoga smo u tablicu G-1 svrstali usporedni pregled naziva najvažnijih veličina teorije zračenja na šest jezika. Neke od navedenih hrvatskosrpskih izraza preuzeli smo iz postojeće jugoslavenske literature (posebno po *F. Bošnjakoviću*), a u pogledu stranih naziva pretežno smo se oslonili na nazive u nacionalnim standardizacijama. Pregled u tablici G-1 sastavljen je sa željom da se na taj način olakša proučavanje literature na stranim jezicima.

1.1.2. Lambertov zakon i gustoća snage zračenja. Pri definiranju veličina *ozračenost* G i *jakost zračenja* J u prošlom smo odlomku pretpostavljali da su izmjere ploha ΔA (odašiljačka) i ΔS (ozračena) vrlo malene prema njihovoj međusobnoj udaljenosti r. Tu pretpostavku zadržat ćemo i nadalje, jer jedino uz nju vrijede rezultati daljnjih razmatranja koja ćemo nastaviti uz pomoć slike G.2a.

U njoj ΔA označuje površinu zračila, na primjer malog užarenog lima čija je ploha fino matirana. Taj lim svojom prednjom, desnom plohom zrači energiju u čitav prostor udesno.



Sl. G.2. Uz eksperimentalno ustanovljeni Lambertov zakon. ΔA — odašiljačka površina, ΔS — ozračena površina

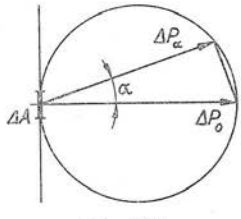
Razdiobu snage zračenja u prostoru desno od ΔA možemo ustanoviti *mjerenjima* koja su slična onima na slici G.1. Mnoštvo *pokusa* pokazuje da snaga ΔP_α, koja ozračuje površinu ΔS (sl. G.2a), ovako ovisi o veličinama ΔA, ΔS, r, α i β:

$$\Delta P_\alpha = M \cos\alpha\, \Delta A \cos\beta\, \Delta S/r^2. \tag{1.1-4}$$

Kako se vidi iz slike G.2a, sa α smo označili kut koji normala na *odašiljačku* površinu ΔA zatvara s pravcem što spaja odašiljačku (ΔA) i ozračenu (ΔS) površinu. Sa β smo označili kut koji normala na *ozračenu* površinu ΔS zatvara s tim istim pravcem.

Eksperimenti pokazuju da je za datu geometriju (sl. G.2a) i stalan izvor zračenja veličina M u jednadžbi (1.1-4) konstanta. Ta veličina zove se *gustoća snage zračenja* ili »specifična jakost zračenja« (vidi tablicu G-1). Veličina M karakterizira *izvor* zračenja.

Jednadžba (1.1-4) matematički je izraz tzv. *Lambertova zakona* koji je *I. G. Lambert* otkrio godine 1760. Bit tog zakona sastoji se u činjenici da je snaga zračenja ΔP_α u smjeru α (sl. G.2a) *proporcionalna kosinusu kuta* α. Grafički prikaz tog zakona vidimo na slici G.3, na kojoj je $\Delta P_0 = \Delta P_\alpha\ (\alpha = 0)$, tj. maksimalna vrijednost veličine ΔP_α. Jednadžbu (1.1-4) možemo napisati i u kraćem obliku



Sl. G.3

$$\Delta P_\alpha = M\, \Delta A'\, \Delta S'/r^2, \tag{1.1-5}$$

gdje su $\Delta A' = \cos\alpha\, \Delta A$ i $\Delta S' = \cos\beta\, \Delta S$ *prividne površine* zračila i ozračene površine. To znači da je $\Delta A'$ prividna površina zračila kako bi je vidio motritelj iz sredine ΔS, a $\Delta S'$ je prividna površina ozračene plohe kako ona izgleda kad se motri iz središta ΔA (sl. G.2a, b). Omjer $\Delta S'/r^2 = \cos\beta\, \Delta S/r^2 = \Delta\omega$ je prostorni kut unutar kojega izvor ΔA ozračuje površinu ΔS snagom ΔP_α. Prema tome izraz (1.1-5) možemo napisati i u obliku

$$M = \frac{\Delta P_\alpha}{\Delta\omega\, \Delta A'} = \frac{J_\alpha}{\Delta A'}. \tag{1.1-6}$$

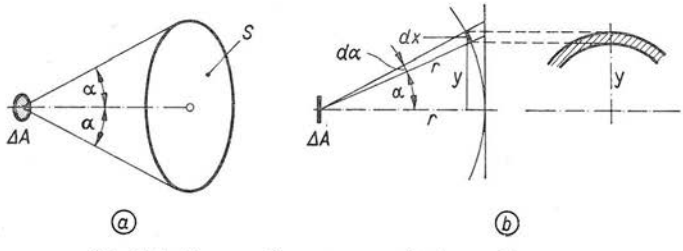
Do jednakosti $M = J_\alpha/\Delta A'$ došli smo uz pomoć jednadžbe (1.1-2) prilagodivši je oblikom $J_\alpha = \Delta P_\alpha/\Delta\omega$ bilo kojem kutu α; izraz (1.1-2) odnosio se, naime, na slučaj $\alpha = 0$. Riječima možemo desnu jednadžbu (1.1-6) opisati ovako: jakost zračenja J_α u smjeru α jednaka je umnošku gustoće snage zračenja M i prividne površine zračila $\Delta A'$.

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina gustoća snage zračenja M mjeri se jedinicom

$$[M]_M = \frac{[\Delta P_\alpha]_M}{[\Delta\omega]_M [\Delta A']_M} = \frac{\text{watt}}{\text{steradijan} \cdot \text{metar}^2} = \frac{\text{W}}{\text{sr} \cdot \text{m}^2},$$

što slijedi neposredno iz jednadžbe (1.1-6). U literaturi, međutim, često nalazimo samo $[M]_M = \text{W/m}^2$, jer je brojčana jedinica prostornog kuta steradijan = sr ≡ 1 (vidi kraj odlomka 1.1.1).

1.1.3. Snaga zračenja u poluprostor. Na temelju načela izloženih u odlomku 1.1.2 izračunat ćemo koliku snagu ΔP odašilje s površine ΔA zračilo gustoće snage zračenja M. U tu svrhu zamislimo, u skladu sa slikom G.4a, da zračilo površine ΔA ozračuje kružnu ploču površine S. Ta ploča paralelna je s odašiljačkom površinom ΔA, a njihova središta međusobno su udaljena r.



Sl. G.4. Uz proračun snage zračenja u poluprostor

Da bismo proračunali snagu zračenja ΔP, nacrtali smo na slici G.4b pogled sa strane na sistem iz slike a. Ispred ploče S nacrtali smo pomoćnu kuglu, koja je na slici b prikazana kružnicom polumjera r. Sve zračenje koje dospijeva na ploču S mora najprije proći kroz tu zamišljenu plohu. Izdvojimo na kugli niz koncentričnih prstena čiji je opseg $2\pi y$, a širina $\mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}\alpha$. Površina diferencijalnog prstena iznosi

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}x = 2\pi r^2 \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha, \qquad (1.1\text{-}7)$$

jer je $y = r \sin\alpha$. Usporedimo li sliku b sa slikom a, vidimo da je izračunata površina $\mathrm{d}S$ iz jednadžbe (1.1-7) u stvari prividna površina koju smo u jednadžbi (1.1-5) označili sa $\Delta S'$. Prema tome jednadžba (1.1-5) izražava diferencijal snage $\mathrm{d}P_\alpha$ odaslane sa ΔA pod kutom α u prsten površine $\mathrm{d}S$ na ozračenoj ploči slike G.4 ($\Delta A' = \Delta A \cos\alpha$) ovako

$$\mathrm{d}P_\alpha = M\,\Delta A \cos\alpha\,\mathrm{d}S/r^2.$$

Uvrstimo li ovamo $\mathrm{d}S$ iz jednadžbe (1.1-7), dobivamo diferencijal snage

$$\mathrm{d}P_\alpha = 2\pi M \Delta A \sin\alpha \cdot \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi M \Delta A \sin\alpha \cdot \mathrm{d}(\sin\alpha)$$

kojim je zračilo površine ΔA ozračilo diferencijalni prsten površine dS. Ako se rub okrugle ploče S na slici G.4a vidi iz ΔA pod kutom α, onda se ukupna snaga ΔP kojom je izvor ΔA ozračio površinu S dobiva zbrajanjem dP_α od $\alpha = 0$ do α, dakle

$$\Delta P \int_0^\alpha = dP_\alpha = 2\pi M \Delta A \int \sin\alpha \cdot d(\sin\alpha).$$

Rješenje tog integrala u granicama $\sin\alpha = 0$ ($\alpha = 0$) i $\sin\alpha$ glasi

$$\Delta P = \pi M \Delta A \sin^2\alpha \quad \text{ili} \quad H = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \pi M \sin^2\alpha. \tag{1.1-8}$$

Veličina $H = \Delta P/\Delta A$ naziva se *emisijska moć* zračila; to je, dakle, omjer snage zračenja ΔP i one površine ΔA zračila koja odašilje tu snagu. Obično se emisijska moć H definira za kut $\alpha = \pi/2$ rad $= 90°$ (sl. G.4), tj. kad površina ΔA zrači u čitav poluprostor ($2\alpha = 180°$). U tom je slučaju $\sin^2\alpha = 1$, pa jednadžbe (1.1-8) prelaze u oblik

$$\Delta P_m = \pi M \Delta A \quad \text{ili} \quad H = \Delta P_m/\Delta A = \pi M. \tag{1.1-9}$$

U Međunarodnom sistemu jedinica (SI) veličina $H = \Delta P_m/\Delta A$ mjeri se jedinicom

$$[H]_M = [\Delta P_m]_M/[\Delta A]_M = W/m^2,$$

tj. jedinicom watt/kvadratni metar. Budući da je jedinica gustoće zračenja SI $[M]_M = W/(sr \cdot m^2)$, to je očito da u relaciji $H = \pi M$ slovo π predstavlja π steradijana (sr $\equiv$ 1; vidi kraj odlomka 1.1.1).

Primjer. Sunce ozračuje površinu Zemlje ozračenošću (vidi odlomak 1.1.1) oko $G = 1{,}35$ kW/m^2, ako zrake padaju okomito i ako zanemarimo apsorpcijske gubitke atmosfere. Izračunajmo kolika je emisijska moć H Sunca prema jednadžbi (1.1-8), ako se Sunce (Sunčeva ploča) sa Zemlje vidi pod kutom 32 minute.

Ovdje je zadatak obrnut negoli u slučaju slike G.4a: veća ploha S (Sunčeva ploča) ozračuje manju plohu ΔA (Zemlju). To znači da ΔP u jednadžbi (1.1-8) predstavlja snagu koja je *dozračena* Zemlji, pa je dakle

$$G = \Delta P/\Delta A = H \sin^2\alpha = 1{,}35 \text{ kW/m}^2,$$

gdje je sada ΔA *ozračena* površina — Zemlja (u prošlim smo izvođenjima, naime, za površinu zračila dosljedno upotrebljavali simbol A, a za ozračenu površinu simbol S). Budući da je $\alpha = 16'$, to je $\sin\alpha = 4{,}7 \cdot 10^{-3}$, pa iz gornje jednadžbe dobivamo emisijsku moć Sunca

$$H = G/\sin^2\alpha = 1{,}35 \text{ kW m}^{-2} : 4{,}7^2 \cdot 10^{-6} = 61 \text{ MW/m}^2.$$

Prema tome kvadratni metar površine Sunca odašilje u poluprostor snagu koja je reda veličine srednje velikog generatora u elektrani.

1.2. Infinitezimalna interpretacija teorije zračenja

1.2.1. Osnova teorije zračenja je *Lambert*ov zakon formuliran jednadžbom (1.1-4) na temelju bezbrojnih *mjerenja*. Zbog eksperimentalnog porijekla te jednadžbe u njoj odašiljačka površina ΔA, ozračena površina ΔS i pripadni prostorni kutovi $\Delta\omega$ i $\Delta\Omega$ (vidi sliku G.2) sadrže oznaku Δ, čime se upozorava na to da su izmjere tih ploha znatno manje od udaljenosti r između njih. Od takvog načina označivanja neprimjetno smo odstupili u odlomku 1.1.3, gdje smo računali s diferencijalom ozračene površine dS. To znači da smo u jednadžbi (1.1-4) uzeli $\Delta S \to dS$, čime smo učinili prijelaz $\Delta P_\alpha \to dP_\alpha$.

Prirodno je da u tom smislu valja svesti na infinitezimalni oblik sve veze između pojedinih veličina teorije zračenja, jer to omogućuje da se eksperimentalna činjenica (1.1-4) primijeni na niz konkretnih problema u prirodoslovnim i tehničkim znanostima. Stoga ćemo ovdje samo naznačiti odgovarajući sistem jednadžbi i definicija veličina u diferencijalnom obliku. Prije toga naglasimo da su diferencijali površina dA i dS međusobno *nezavisni*; daljnja izvođenja možemo pratiti uz pomoć slike G.2, ako zamislimo da su realne veličine prešle u diferencijale:

$$\Delta A \to dA, \quad \Delta\omega \to d\omega, \quad \Delta S \to dS, \quad \Delta\Omega \to d\Omega.$$

Na temelju ovih napomena možemo *Lambert*ov zakon (1.1-4) napisati u obliku

$$d^2P = M \cos\alpha \, dA \cos\beta \, dS/r^2,$$

koji pomoću diferencijala prostornog kuta $d\omega = \cos\beta \, dS/r^2$ prelazi u takav oblik u kojem nema više udaljenosti r, tj.

$$d^2P = M \cos\alpha \, dA \, d\omega. \tag{1.2-1}$$

1.2.2. Jakost zračenja, ozračenost i emisijska moć. U skladu s jednadžbom (1.1-2) jakost zračenja J možemo definirati u diferencijalnom obliku

$$J = dP/d\omega, \tag{1.2-2}$$

što omogućuje da se izraz (1.2-1) napiše ovako

$$M = \frac{1}{\cos\alpha} \frac{d^2P}{dA \, d\omega} = \frac{1}{\cos\alpha} \frac{dJ}{dA}, \tag{1.2-3}$$

a to je potpuno u skladu s eksperimentalnom jednadžbom (1.1-6).

Ozračenost G (vidi odlomak 1.1.1) definiramo relacijom $G = dP/dS$, što možemo napisati u obliku $dG = d^2P/dS$, odakle uvrštenjem (1.2-1) slijedi $dG = M \cos\alpha \, dA \, d\omega/dS$. Budući da je $d\omega = \cos\beta \, dS/r^2$ i $d\Omega = \cos\alpha \, dA/r^2$ (vidi slike G.2a, b), odavde konačno slijedi $dG = M \cos\beta \, d\Omega$. Time smo dobili obrazac za izračunavanje ozračenosti G pomoću gustoće snage zračenja M i geometrije ozračene površine

$$G = \frac{dP}{dS} = \int M \cos\beta \, d\Omega = \int \frac{M}{r^2} \cos\beta \cos\alpha \, dA. \tag{1.2-4}$$

Integral se odnosi na čitavu površinu zračila koja je vidljiva iz tačke u kojoj računamo G.

Posve analogno izračunavamo veličinu emisijska moć $H = dP/dA$ s kojom smo se susreli u odlomku 1.1.3 (vidi i tablicu G-1). Budući da je $dH = d^2P/dA$, uz pomoć izraza (1.2-3) slijedi $dH = d^2P/dA = M \cos\alpha \, dA \, d\omega/dA = M \cos\alpha \, d\omega$, čime dobivamo vezu između gustoće snage zračenja M i emisijske moći H:

$$H = \frac{dP}{dA} = \int M \cos\alpha \, d\omega. \tag{1.2-5}$$

Sistematičan pregled veličina i jedinica teorije zračenja sadrži tablica G-2. U njoj su navedene i neke veličine i konstante koje se odnose na zračenje tzv. crnog tijela (vidi odlomak 1.3.2). U pogledu jedinica navedenih u tablici G-2 nije

Tablica **G-2**

Pregled veličina i jedinica teorije zračenja i zračenja crnog tijela

Red. br.	Fizikalna veličina	Oznaka	Jednadžba	Jedinica SI	Jedinica CGS	Mješovite jedinice
1	Površina zračila (odašiljačka)	A	Vidi slike G.2, 3	m^2	cm^2	—
2	Ozračena površina (prijemna)	S	Vidi slike G.1, 2, 3	m^2	cm^2	—
3	Odašiljački kut	α	Vidi sliku G.2	rad	rad	°, ′, ″
4	Kut ozračivanja	β	Vidi sliku G.2	rad	rad	°, ′, ″
5	Odašiljački prostorni kut	ω	$d\omega = \cos\beta\, dS/r^2$	sr	sr	—
6	Prostorni kut ozračivanja	Ω	$d\Omega = \cos\alpha\, dA/r^2$	sr	sr	—
7	Energija zračenja	W	$dW = P\, dt$	J	erg	—
8	Snaga zračenja	P, Φ_e	$d^3P = M_\lambda \cos\alpha\, dA\, d\omega\, d\lambda$	W	$\frac{\text{erg}}{\text{s}}$	—
9	Spektralna (monokromatska) snaga zračenja	P_λ, $\Phi_{e\lambda}$	$P_\lambda = \frac{dP}{d\lambda}$	$\frac{\text{W}}{\text{m}}$	$\frac{\text{erg}}{\text{s cm}}$	$\frac{\text{W}}{\text{Å}}$
10	Jakost zračenja	J	$J = \frac{dP}{d\omega}$	$\frac{\text{W}}{\text{sr}}$	$\frac{\text{erg}}{\text{s sr}}$	—
11	Spektralna jakost zračenja	J_λ	$J_\lambda = \frac{dJ}{d\lambda}$	$\frac{\text{W}}{\text{sr m}}$	$\frac{\text{erg}}{\text{s sr cm}}$	$\frac{\text{W}}{\text{Å sr}}$
12	Gustoća snage zračenja	M, B_e	$M = \frac{d^2P}{\cos\alpha\, dA\, d\omega} = \frac{dJ}{\cos\alpha\, dA}$	$\frac{\text{W}}{\text{sr m}^2}$	$\frac{\text{erg}}{\text{s sr cm}^2}$	—
13	Spektralna gustoća snage zračenja	M_λ, $B_{e\lambda}$	$M_\lambda = \frac{dM}{d\lambda}$	$\frac{\text{W}}{\text{sr m}^3}$	$\frac{\text{erg}}{\text{s sr cm}^3}$	$\frac{\text{W}}{\text{sr Å cm}^2}$

Nastavak tablice **G-2**

Red. br.	Fizikalna veličina	Oznaka	Jednadžba	Jedinica SI	Jedinica CGS	Mješovite jedinice
14	Emisijska moć	H	$H=\frac{dP}{dA}=\int M\cos\alpha\,d\omega$	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{erg}{s\,cm^2}$	–
15	Ozračenost	G	$G=\frac{dP}{dS}=\int M\cos\beta\,d\Omega$	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{erg}{s\,cm^2}$	–
16	Spektralna gustoća snage zračenja crnog tijela	M_λ	$M_\lambda=\frac{\partial M}{\partial\lambda}=C_1\lambda^{-5}\,[e^{C_2/\lambda T}-1]^{-1}$	$\frac{W}{sr\,m^3}$	$\frac{erg}{s\,sr\,cm^3}$	$\frac{W}{sr\,Å\,cm^2}$
17	Emisijska moć crnog tijela	H	$H=\pi M=P/A=\sigma T^4$	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{erg}{s\,cm^2}$	–
18	Snaga zračenja crnog tijela u poluprostor	P	$P=\sigma A T^4$	W	$\frac{erg}{s}$	–
19	Prva Planckova konstanta zračenja crnog tijela	C_1	$C_1=2hc^2=1{,}191\cdot10^{-16}\,W\,m^2/sr$	–	–	–
20	Druga Planckova konstanta zračenja crnog tijela	C_2	$C_2=hc/k=1{,}4388\cdot10^{-2}\,K\,m$	–	–	–
21	Stefan-Boltzmannova konstanta zračenja crnog tijela	σ	$\sigma=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}=5{,}6697\cdot10^{-8}\frac{W}{m^2\,K^4}$	–	–	–
22	Fizikalna korisnost zračila	η_f	$\eta_f=P/P_0$; P_0 – snaga dovedena zračilu	1	1	1
23	Spektralna fizikalna korisnost	η_λ	$\eta_\lambda=\frac{d\eta_f}{d\lambda}=\frac{1}{P_0}\frac{dP}{d\lambda}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{cm}$	$\frac{1}{Å}$

potrebno reći više nego to da je erg jedinica energije u CGS sistemu jedinica, dok je Å = ångström tzv. spektroskopska jedinica duljine, kojom se katkada mjere duljine valova. Vrijede ovi odnosi

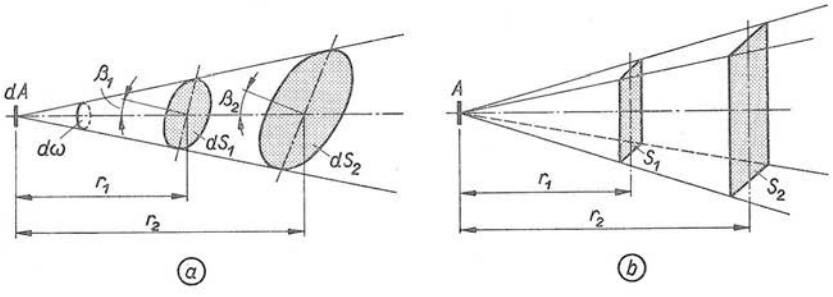
$$\text{erg} = 10^{-7}\ \text{joulea}, \quad \text{Å} = 10^{-10}\ \text{metara},$$

koji su podrobno obrazloženi u odlomku B.5.2.4 i odsječku A.8.9.

1.2.3. Veza između jakosti zračenja, ozračenosti i udaljenosti. Za praktičnu primjenu odnosa koji proizlaze iz ovih razmatranja vrlo je važna veza između jakosti zračenja J, ozračenosti G i udaljenosti r. Načelno možemo tu vezu uspostaviti uz pomoć jednadžbi (1.2-2, 4) $\mathrm{d}P = J\,\mathrm{d}\omega$, $\mathrm{d}P = G\,\mathrm{d}S$. Njihovim izjednačenjem dobivamo $J\,\mathrm{d}\omega = G\,\mathrm{d}S$. Budući da je $\mathrm{d}\omega = \cos\beta\,\mathrm{d}S/r^2$ (vidi sliku G.2), uvrštenjem slijedi

$$G = \frac{J}{r^2}\cos\beta. \tag{1.2-6}$$

Usporedimo li ovaj izraz s jednadžbom (1.1-3), vidimo da se oni podudaraju u slučaju $\beta = 0$, a baš taj slučaj bio je pretpostavljen u odlomku 1.1.1.



Sl. G.5. Uz vezu veličina G, J i r

Primjenu zakona (1.2-6) možemo ilustrirati slikom G.5a, koja prikazuje zračenje površine $\mathrm{d}A$ u prostorni kut $\mathrm{d}\omega$. Ako se pod kutom β_1 na udaljenosti r_1 nalazi ozračena površina $\mathrm{d}S_1$, a na udaljenosti r_2 pod kutom β_2 površina $\mathrm{d}S_2$, primjena jednadžbe (1.2-6) na ova dva slučaja glasi

$$G_1 = \cos\beta_1\, J/r_1^2, \quad G_2 = \cos\beta_2\, J/r_2^2.$$

Pri tom je $J = \text{const}$, jer je veličina $J = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\omega$ konstantna zbog iste snage zračenja $\mathrm{d}P$ i istog prostornog kuta $\mathrm{d}\omega$. Iz gornjih dviju relacija slijedi

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2. \tag{1.2-7}$$

Za slučaj $\beta_1 = \beta_2$ ova jednadžba prelazi u poznati oblik

$$r_1^2 G_1 = r_2^2 G_2 = r^2\, G = \text{const}, \tag{1.2-8}$$

koji se u teoriji zračenja i fotometriji često upotrebljava.

1.3. Zakoni zračenja crnog tijela

1.3.1. Kirchhoffov zakon. Dozračuje li se nekom tijelu *1* (sl. G.6a) snaga P, tijelo će (općenito) apsorbirati snagu P_a, reflektirati snagu P_r, a propustiti snagu P_d. Budući da takva preraspodjela dozračene snage načelno nastaje u svim tijelima, uvedene su posebne veličine korisne u primjeni zakona zračenja:

$$\text{koeficijent apsorpcije} \quad a = P_a/P,$$
$$\text{koeficijent refleksije} \quad r = P_r/P,$$
$$\text{koeficijent propusnosti} \quad d = P_d/P.$$

Budući da prema zakonu o održanju energije vrijedi (sl. G.6a)

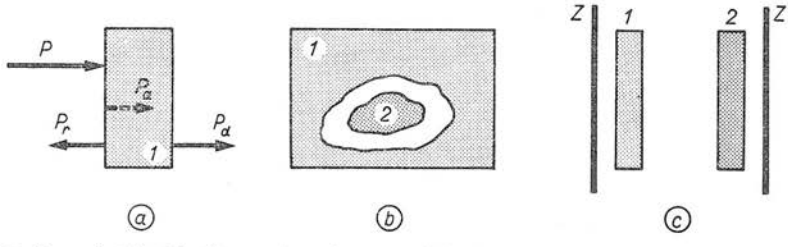
$$P = P_a + P_r + P_d = aP + rP + dP = (a + r + d)P,$$

to je očigledno da zbroj svih triju koeficijenata mora biti jednak broju 1, dakle

$$a + r + d = 1. \tag{1.3-1}$$

Umjesto naziva »koeficijent propusnosti« upotrebljava se i naziv »koeficijent dijatermnosti« ili »koeficijent prozračnosti«. Vrijednosti navedenih koeficijenata ovise o prirodi tvari na koje se koeficijenti odnose, o duljini valova zračenja i o temperaturi tvari.

U procesu razmjene energije zračenjem uvijek sudjeluju najmanje dva tijela. Jednostavan primjer toga prikazuje nam slika G.6b, u kojoj je nepropusno tijelo *2* u cijelosti okruženo tijelom *1*, također nepropusnim za zračenje. Pri tom nije



Sl. G.6. Uz opis Kirchhoffova zakona i crnog tijela. P — dozračena snaga, P_a — apsorbirana snaga, P_r — reflektirana snaga, P_d — propuštena snaga, Z — zrcala

važno da li su tvari *1* i *2* različite ili nisu. Tijelo *1* dozračuje tijelu *2* snagu P_1. Od toga tijelo *2* apsorbira i nagomilava u svoju unutarnju energiju snagu a_2P_1, te reflektira snagu r_2P_1. U stacionarnom stanju, tj. u slučaju kad su tijela *1* i *2* u *temperaturnoj ravnoteži*, mora snaga koja je dozračena tijelu *2* biti jednaka snazi koju to tijelo odašilje. Budući da tijelo *2* odašilje na račun svoje unutarnje energije prema tijelu *1* snagu P_2, to u slučaju temperaturne ravnoteže vrijedi $P_1 = P_2 + r_2P_1$. Odavde pomoću jednadžbe (1.3-1) uz $d_2 = 0$ slijedi $P_2/P_1 = a_2$. To znači da je u stanju temperaturne ravnoteže omjer odaslane i dozračene snage tijela *2* jednak koeficijentu apsorpcije a_2. Isto vrijedi i za tijelo *1*, i to kako za sveukupno zračenje svih duljina valova, tako i za svaki interval duljina vala pojedinačno.

Pojave pri razmjenjivanju snage zračenja između dvaju tijela *1* i *2* zorno nam može ilustrirati slika G.6c, koja prikazuje dio dviju paralelnih ploča izrađenih od dvaju različitih materijala. Ploče se međusobno ozračuju i u ravnotežnom stanju imaju istu temperaturu, $T_1 = T_2$. Iza svake ploče nalaze se savršena zrcala Z koja

u cijelosti reflektiraju zračenja što dopiru na njih sa stražnjih strana ploča *1* i *2*. To znači da u bilanci snage zračenja možemo razmatrati samo snage koje se razmjenjuju u prostoru između ploča *1* i *2*. Pri $T_1 = T_2$ mora, dakle, ploča *1* ozračiti ploču *2* jednakom snagom koliku ploča *1* dobije od *2*. Ploča *1* odašilje vlastitu snagu $P_1 +$ + neapsorbirani dio snage dozračene od ploče *2*, tj. $P_2 (1 - a_1)$. Analogno ploča *2* odašilje $P_2 + P_1 (1 - a_2)$. U stanju temperaturne ravnoteže, dakle, vrijedi

$$P_1 + (1 + a_1) P_2 = P_2 + (1 - a_2) P_1.$$

Budući da su površine ploča jednake, snage zračenja P_1 i P_2 proporcionalne su gustoćama snaga zračenja M_1 i M_2 (vidi odlomak 1.1.3 i jednadžbu 1.1-9). Prema tome gornju jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\frac{M_1}{a_1} = \frac{M_2}{a_2}, \tag{1.3-2}$$

koja predstavlja *Kirchhoffov zakon*. Taj zakon vrijedi za bilo koja dva tijela u temperaturnoj ravnoteži uz uvjet da omjer M/a ne ovisi o svojstvima tvari, već samo o temperaturi T i duljini vala λ zračenja.

1.3.2. Crno tijelo (savršeno zračilo). Zakon (1.3-2) vrijedi i za monokromatska zračenja. Predodžbu o tome dobivamo ako zamislimo da smo između ploča *1* i *2* na slici G.6c stavili interferencijski filtar (on ne apsorbira energiju zračenja) koji propušta samo zračenje u intervalu $\Delta\lambda$ duljine vala između λ i $\lambda + \Delta\lambda$. Ako je *spektralna* (monokromatska) gustoća snage zračenja prije umetanja filtra iznosila $\partial M/\partial\lambda$, gustoća snage zračenja iznosit će prije i nakon stavljanja filtra

$$M = \int_0^\infty \frac{\partial M}{\partial \lambda}\, d\lambda, \qquad M(\lambda) = \int_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda} \frac{\partial M}{\partial \lambda}\, d\lambda.$$

U skladu s time Kirchhoffov zakon (1.3-2) prelazi u oblik prilagođen zračenju u vrlo uskom (praktički monokromatskom) intervalu

$$\frac{M(\lambda)_1}{a(\lambda)_1} = \frac{M(\lambda)_2}{a(\lambda)_2}. \tag{1.3-3}$$

Tijelo za koje je $a(\lambda)_1 = 1$ apsorbira sve zračenje u intervalu λ i $\lambda + \Delta\lambda$; za nj su koeficijenti refleksije i propusnosti prema jednadžbi (1.3-1) jednaki nuli. U tom slučaju izraz (1.3-3) prelazi zbog $a(\lambda)_1 = 1$ u oblik

$$M(\lambda)_2 = M(\lambda)_1 \cdot a(\lambda)_2. \tag{1.3-4}$$

Tijelo sa $a(\lambda)_1 = 1$ naziva se *crno tijelo* ili *savršeno zračilo* (engl. perfect radiator); drugi naziv potječe otuda što idealno crno tijelo u temperaturnoj ravnoteži odašilje isto toliku snagu kolika se njemu dozračuje.

Jednadžba (1.3-4) vrlo je korisna u primjeni, a riječima se opisuje ovako: gustoća snage monokromatskog zračenja $M(\lambda)_2$ bilo kojeg tijela jednaka je umnošku gustoće snage zračenja tijela »crnog« za monokromatsko zračenje λ, $\lambda + \Delta\lambda$ i koeficijenta apsorpcije $a(\lambda)_2$.

1.3.3. Planckov zakon zračenja crnog tijela. Godine 1859. predložio je *G. Kirchhoff* da se crno tijelo (savršeno zračilo), tj. tijelo s koeficijentom apsorpcije $a = 1$ ($r = 0$, $d = 0$; vidi odlomak 1.3.2), realizira u obliku šuplje posude koja ima

sitan otvor. Šupljina apsorbira sve zračenje koje pada na otvor, pa stoga motritelju otvor izgleda crnji od najcrnje čađe. Ako se takvo »crno tijelo« zagrije na dosta visoku temperaturu, iz otvora zrači »crno zračenje«, koje motritelju izgleda svjetlije od bilo kojeg drugog predmeta iste temperature.

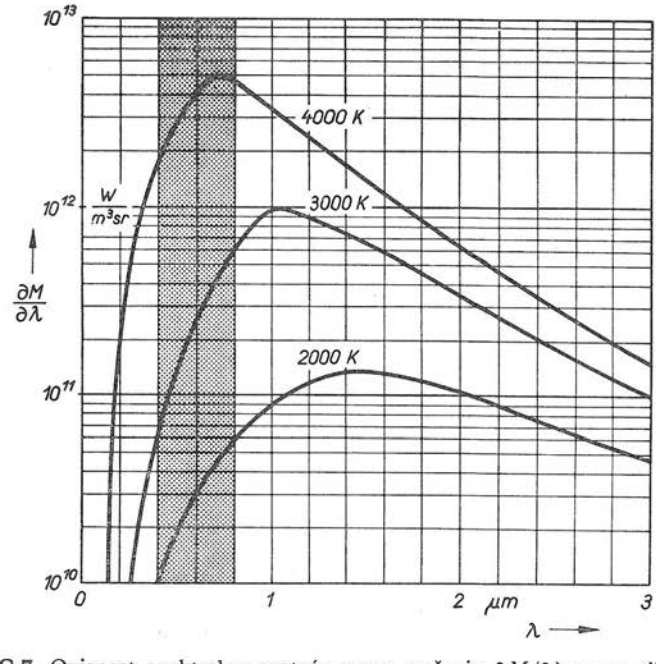
Mjerenje spektralne gustoće snage zračenja $\partial M/\partial\lambda$ (vidi odlomak 1.3.2 i tablicu G-2) obavlja se pomoću uređaja koji u načelu djeluje u skladu sa slikama G.1 i G.2a. Izmjerena snaga zračenja u intervalu duljina vala λ, $\lambda+\Delta\lambda$ iznosi (vidi odlomak 1.1.2 i jednadžbu 1.1-6)

$$\Delta P(\lambda)=\frac{\partial M}{\partial\lambda}\,\Delta\lambda\,\Delta A'\Delta\omega, \tag{1.3-5}$$

gdje je $\Delta A'$ prividna odašiljačka površina, a $\Delta\omega$ prostorni kut pod kojim se iz središta otvora crnog tijela vidi površina ozračene mjerne plohe (sl. G.2a uz $\beta=0$). U gornjem izrazu slovo λ u $\Delta P(\lambda)$ upozorava da je riječ o praktički monokromatskom zračenju u intervalu duljina vala od λ do $\lambda+\Delta\lambda$. Bezbrojna mjerenja u različitim intervalima $\Delta\lambda$ i pri različitim temperaturama T crnog tijela utvrdila su ovisnost spektralne gustoće snage zračenja $M_\lambda=\partial M/\partial\lambda$ o duljini vala λ zračenja i termodinamičkoj temperaturi T kakva je prikazana na slici G.7.

Rezultate eksperimentalnih istraživanja uspio je godine 1900. *M. Planck* obuhvatiti univerzalnom teorijom iz koje proizlazi tzv. *Planckov zakon zračenja crnog tijela*

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}=\frac{C_1}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{C_2/\lambda T}-1}\;;\qquad \frac{\partial M}{\partial f}=\frac{C_3 f^3}{e^{C_4 f/T}-1}, \tag{1.3-6}$$



Sl. G.7. Ovisnost spektralne gustoće snage zračenja $\partial M/\partial\lambda$ crnog tijela o duljini vala λ zračenja i temperaturi T

gdje je $f = c/\lambda$ frekvencija zračenja, a c brzina širenja svjetla. Vrijednosti konstanti iznose

$$C_1 = 2hc^2 = 1{,}191 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{W m^2}, \quad C_2 = hc/k = 1{,}4388 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{K m},$$

$$C_3 = 2h/c^2 = 1{,}47 \cdot 10^{-50}\ \mathrm{W s^4/m^2}, \quad C_4 = h/k = 4{,}78 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s K}.$$

Ovdje su h i k *Planck*ova i *Boltzmann*ova konstanta. Njihove precizne vrijednosti navedene su u tablici **2** u prilogu knjige, gdje su naznačene i precizne vrijednosti konstanti C_1 i C_2.

Uz gornja izlaganja potrebne su dvije napomene. Prva se odnosi na brojčani oblik konstante C_1, tzv. prve konstante zračenja. Mi smo je naveli u obliku $C_1 = 2hc^2$ i naznačili njenu vrijednost. Mnogi autori, međutim, pod istim simbolom C_1 razumijevaju konstantu $2\pi hc^2$. Ovdje ćemo tu konstantu označiti sa $C_1' = 2\pi hc^2$ ($= 3{,}7405 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{W m^2}$). Razlika je nastala zato što ti autori pri ovovrsnim računima misle na *emisijsku moć* zračila koju smo razmatrali u odlomku 1.1.3 i tamo izveli izraz (1.1-9) iz kojeg se vidi da je emisijska moć savršenog zračila π puta veća od gustoće snage zračenja M.

Druga napomena odnosi se na mjerne jedinice koje smo upotrijebili navodeći vrijednosti konstanti C_1 do C_4. Pri kraju odlomka 1.1.2 ustanovili smo da se u primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina M mjeri jedinicom $[M]_{\mathrm{M}} = \mathrm{W/(sr \cdot m^2)}$, gdje je sr = steradijan jedinica prostornog kuta. Iz lijeve jednadžbe (1.3-6) slijedi da je jedinica SI konstante C_1:

$$[C_1]_{\mathrm{M}} = \frac{[\lambda^5]_{\mathrm{M}}\,[M]_{\mathrm{M}}}{[\lambda]_{\mathrm{M}}} = \frac{\mathrm{m^5}}{\mathrm{m}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr \cdot m^2}} = \frac{\mathrm{W m^2}}{\mathrm{sr}}.$$

Prema tome trebalo bi da vrijednost konstante glasi $C_1 = 1{,}191 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{W m^2/sr}$. Analogno tome i ostale tri konstante. Do ispuštanja jedinice prostornog kuta steradijan dolazi zato što je to brojčana jedinica koja je identički jednaka broju 1, dakle $\mathrm{sr} \equiv 1$ (vidi kraj odlomka 1.1.1).

1.3.4. Rayleigh-Jeansov i Wienovi zakoni. Planckov zakon zračenja crnog tijela (1.3-6) znatno se pojednostavnjuje u dva granična slučaja. Ako je

$$\lambda T \gg C_2, \text{ odnosno } C_2/\lambda T \ll 1,$$

mogu se u nazivniku lijeve jednadžbe (1.3-6), razvijenom u red

$$\exp\frac{C_2}{\lambda T} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)^2 + \dots,$$

odbaciti svi članovi iznad drugoga, pa lijeva Planckova formula (1.3-6) prelazi u vrlo jednostavan oblik

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \frac{C_1}{C_2}\,\frac{T}{\lambda^4}. \tag{1.3-7}$$

Ova jednadžba naziva se *Rayleigh-Jeansov zakon*, i to je u stvari prvobitni zakon zračenja crnog tijela. Budući da je on u pojedinim slučajevima zatajio, *Planck* je uvođenjem kvantizacije otkrio (1.3-6).

Drugu krajnost imamo kada je vrijednost umnoška λT malena. U tom slučaju se broj 1 u nazivniku lijeve jednadžbe (1.3-6) može zanemariti, pa formula zračenja crnog tijela dobiva oblik

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\lambda C_2/\lambda T}. \tag{1.3-8}$$

Za područje $\lambda < 0{,}8$ μm (gornja granica vidljivog spektra) tako nastala pogreška manja je od 1 promila, ako temperatura ne premašuje vrijednost $T = 3000$ K. Jednadžba (1.3-8) zove se *Wienov zakon zračenja crnog tijela.*

W. Wien izveo je i tzv. *zakon pomaka* spektralne gustoće snage zračenja. Ako, naime, potražimo ekstrem lijeve jednadžbe (1.3-6) po duljini vala λ i izjednačimo ga s nulom, dobivamo transcendentnu jednadžbu iz koje slijedi *Wein*ov zakon pomaka

$$b = \lambda_m T; \quad b = 2{,}8978 \cdot 10^{-3} \text{ Km}. \tag{1.3-9}$$

Ovdje je λ_m duljina vala zračenja pri kojoj je vrijednost spektralne gustoće snage zračenja $\partial M/\partial \lambda$ maksimalna. Uvrstimo li dobivenu veličinu $\lambda = \lambda_m = b/T$ u lijevu jednadžbu (1.3-6), nastaje izraz za proračunavanje maksimalne vrijednosti spektralne gustoće snage zračenja

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)_m = \frac{C_1}{(b/T)^5} \frac{1}{e^{C_2/b} - 1} = C T^5, \tag{1.3-10}$$

koja ovisi samo o termodinamičkoj temperaturi T crnog tijela. Vrijednost konstante iznosi

$$C = \frac{C_1}{b^5 (e^{C_2/b} - 1)} = 4{,}0957 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^3 \text{ sr K}^5}.$$

Primjer. Izračunajmo kolika je spektralna gustoća snage zračenja ako se njen maksimum nalazi pri duljini vala $\lambda = \lambda_m = 0{,}7$ μm crnog tijela. Najprije pomoću (1.3-9) saznajemo temperaturu crnog tijela

$$T = b/\lambda_m = 2{,}8978 \cdot 10^{-3} \text{ Km}/7 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 4140 \text{ K}.$$

Uvrštenjem ove vrijednosti u jednadžbu (1.3-10) dobivamo

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)_m = C T^5 = 4{,}0957 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^3 \text{ sr K}^5} 4140^5 \text{ K}^5 = 5 \cdot 10^{12} \frac{\text{W}}{\text{m}^3 \text{ sr}}.$$

1.3.5. Stefan-Boltzmannov zakon zračenja. U odlomku 1.1.3 izračunali smo *emisijsku moć* zračila i dobili jednadžbu $H = \Delta P_m/\Delta A = \pi M$, gdje je ΔP_m ukupna snaga koju zračilo površine ΔA odašilje u *poluprostor*. Planckov zakon (1.3-6) možemo u duhu jednadžbe (1.3-5) primijeniti na gornji izraz za emisijsku moć, čime dobivamo

$$H = \frac{P}{A} = \frac{\Delta P_m}{\Delta A} = \pi \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\partial M}{\partial \lambda} d\lambda = \pi C_1 \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{d\lambda/\lambda^5}{e^{C_2/\lambda T} - 1}.$$

Od ovog integrala računanjem nastaje *Stefan-Boltzmannov zakon* zračenja snage P crnog tijela u *poluprostor*

$$P = HA = \pi M A = \sigma A T^4, \tag{1.3-11}$$

gdje je σ *Stefan-Boltzmannova konstanta*

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5{,}6697 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}.$$

Proporcionalnost $P/A = \sigma T^4$ prvi je otkrio godine 1879. eksperimentalno Slovenac *Jožef Stefan* (o njemu vidi odlomak D.3.7.2), a godine 1884. teoretski ju je izveo *Boltzmann.*

U primjeni se zakon (1.3-11) najčešće upotrebljava u drukčijem obliku. Jednadžba (1.3-11) opisuje snagu koju tijelo temperature T *odašilje.* Budući da okolina temperature T_0 tom tijelu *dozračuje* snagu $P_0 = \sigma A T_0^4$, tijelo temperature T *stvarno odašilje okolini* snagu (razliku)

$$P - P_0 = \sigma A (T^4 - T_0^4). \tag{1.3-12}$$

U svim tim jednadžbama slovo T označuje »termodinamičku temperaturu« o kojoj se raspravlja u odsječku D.3.2.

Radi udobnijeg računanja izrazi (1.3-11, 12) u tehničkoj se primjeni često pišu u obliku djelomično »prilagođene veličinske jednadžbe« (vidi odsječak A.1.6)

$$P = C_0 A \left(\frac{T}{100\,\mathrm{K}}\right)^4, \qquad P - P_0 = C_0 A \left[\left(\frac{T}{100\,\mathrm{K}}\right)^4 - \left(\frac{T_0}{100\,\mathrm{K}}\right)^4\right],$$

gdje slovo K označuje jedinicu termodinamičke temperature »kelvin« (odlomak D.3.2.4), a vrijednost nove konstante iznosi

$$C_0 = \sigma \cdot (100\ \mathrm{K})^4 = 5{,}6697\ \mathrm{W/m^2}.$$

Primjer 1. Izračunajmo pomoću netom izvedene formule kolika je emisijska moć tijela čija je temperatura $T = 5700$ K. Uvrštenjem te vrijednosti u lijevu gornju jednadžbu dobivamo

$$\frac{P}{A} = C_0 \left(\frac{5700\ \mathrm{K}}{100\ \mathrm{K}}\right)^4 = 5{,}67 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \cdot 57^4 = 6 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}.$$

Budući da je $10^6\ \mathrm{W} = \mathrm{MW}$ = megawatt (vidi tablicu A-1), gornju vrijednost možemo izraziti u obliku $P/A = 60\ \mathrm{MW/m^2}$. Usporedimo li taj rezultat s onim u odlomku 1.1.3 (primjer), vidimo da temperatura površine Sunca približno iznosi 5700 K; Sunce, naime, zrači približno kao crno tijelo, pa stoga za nj vrijede zakoni zračenja crnog tijela.

Primjer 2. Izračunajmo površinu crnog tijela koje zrači u poluprostor snagu $P = 200$ kW, a maksimalnu spektralnu gustoću zračenja ima pri duljini vala $\lambda = \lambda_m = 0{,}7$ μm! Pripadnu temperaturu crnog tijela izračunali smo u odlomku 1.3.4 (primjer), $T = 4140$ K. Pomoću jednadžbe (1.3-11) dobivamo

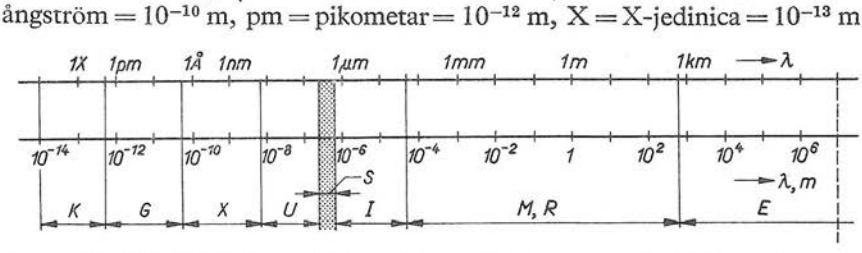
$$A = \frac{P}{\sigma T^4} = \frac{2 \cdot 10^5\ \mathrm{W}}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}} (4140\ \mathrm{K})^4} = 1{,}19 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^2},$$

tj. površina zračila iznosi 119 cm^2. Pripadna emisijska moć tog crnog tijela je $H = \pi M = P/A = 200\ \mathrm{kW}/119\ \mathrm{cm^2} = 1{,}68\ \mathrm{kW/cm^2} = 16{,}8\ \mathrm{MW/m^2}$.

2. Zapažanje svjetla. Zakoni fotometrije i rasvjetne tehnike

2.1. Načelo fotometrijskih usporedbi

2.1.1. Svjetlo — vidljivo zračenje. Uvriježena je klasifikacija elektromagnetskih zračenja prema njihovim duljinama vala. Znamo da frekvenciju zračenja f i njegovu duljinu vala λ povezuje relacija $\lambda = c/f$, gdje je c brzina širenja elektromagnetskih valova u vakuumu (približno $c = 3 \cdot 10^8$ m/s). U pojedinim rasponima duljina vala dobila su zračenja stanovite nazive, što vidimo na slici G.8. Na gornjoj vodoravnoj skali u slici navedene su i jedinice duljine kojima se u pojedinim područjima mjere duljine vala: km = kilometar = 10^3 m, m = metar, mm = = milimetar = 10^{-3} m, μm = mikrometar = 10^{-6} m, nm = nanometar = 10^{-9} m, Å = ångström = 10^{-10} m, pm = pikometar = 10^{-12} m, X = X-jedinica = 10^{-13} m.



Sl. G.8. Uobičajena podjela spektra zračenja na intervale duljine vala
K — kozmičke zrake koje dopiru na Zemlju iz svemira, G — grama-zrake koje emitira radij, X — tzv. X-zrake koje proizvode visokofrekventni oscilatori (tu su uključene i rendgenske zrake), U — ultraljubičaste zrake, S — svjetlosne zrake (vidljivo zračenje), I — infracrveno zračenje (toplinsko), M, R — mikrovalovi i radio-valovi (radar, TV, radio), E — industrijski elektromagnetski valovi (telefonija, industrijski strujni krugovi)

Iz slike G.8 je očito da ljudsko oko zamjećuje samo veoma uzak pojas elektromagnetskog zračenja, otprilike između $\lambda = 380$ nm i $\lambda = 780$ nm; zračenja drugih duljina vala ljudsko oko ne zapaža. Na taj uzak pojas zračenja odnosi se *fotometrija*, tj. nauka o mjerenju svjetla, koja uzima u obzir fizikalna, fiziološka i psihološka djelovanja svjetla na čovjeka, odnosno na njegov organ vida.

Duljina vala zračenja unutar vidljivog spektra mjerodavna je i za *boju svjetla*. Iako ne postoji jedinstvena ili čak međunarodno standardizirana podjela vidljivog spektra na pojedine boje, općenito se smatra da pojedini nazivi boja odgovaraju duljinama vala i frekvencijama zračenja koje su navedene u tablici G-3. Pri tom je nm = 10^{-9} m i THz = terahertz = 10^{12} Hz.

2.1.2. Temelj fotometrije. Naša razmatranja o zračenju elektromagnetskih valova započeli smo u odlomku 1.1.1 sa slikom G.1: na ozračenoj ploči površine ΔS imali smo ugrađen termometar; pomoću njega i ugrađene električke grijalice

mjerili smo snagu ΔP koja je ozračivala površinu ΔS. Metrologija svjetla — fotometrija — polazi od sličnog uređaja, ali s ovim razlikama: 1) Mjerenje se ne obavlja u čitavu spektru duljina valova, već samo unutar *vidljivog spektra*. Taj spektar nalazi se u granicama od $\lambda = 380$ nanometara i $\lambda = 780$ nm, kako smo vidjeli u odlomku 2.1.1 i na slici G.8. 2) Mjerenje svjetlosnih veličina ne osniva se na pokazivanju fizikalnih instrumenata, već na temelju *svjetlosnog utiska* koji o nekoj svjetlosnoj pojavi ili stanju stječe *ljudsko oko*. To je u skladu s principom fotometrije koji smo naglasili citatom navedenim u uvodu ove glave:

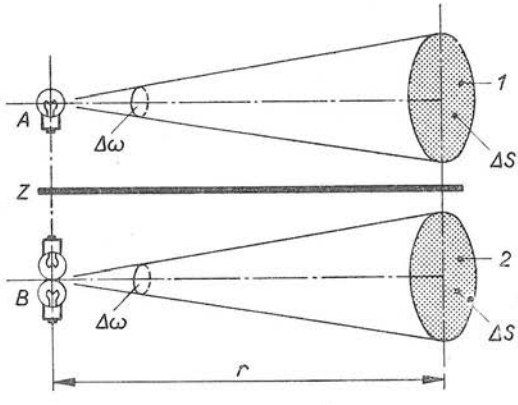
»Zadatak je fotometrije da mjeri svjetlo, koje omogućuje viđenje predmeta. Bez oka, koje vidi, pojam »svjetlo« gubi svaki smisao: samo je oko kadro osjetiti svjetlo. Prema tome, svjetlo je veličina ljudskog, mogli bismo reći fiziološkog značaja, a ne fizikalnog. Fotometriju zahtijevaju praktične potrebe; fizikalnoj znanosti ona zapravo nije potrebna... Veličine fotometrije izvode se, dakle, iz fizikalnih veličina pomoću količnika vidljivosti...« (F. Avčin).

Tablica **G-3**

Veza između boje, duljine vala i frekvencije svjetla

Boja	Duljina vala λ, nm	Frekvencija f, THz
plavoljubičasta	421...456	712...658
plava	452...485	664...618
zelenoplava	487...502	616...598
zelena	495...535	606...560
žutozelena	558...577	537...520
žuta	568...585	528...512
narančastožuta	585...597	512...502
narančasta	592...608	507...494
crvenonarančasta	604...656	497...457

Temelj fotometrije ilustrirat će nam slika G.9: ispred žarulje A nalazi se na udaljenosti r ploča *1* površine ΔS, a ispred dviju žarulja B na istoj udaljenosti ploča *2* čija površina također iznosi ΔS. Na objema površinama prilijepljen je jednaki štampani tekst. Za površine *1* i *2* kažemo da su *jednako rasvijetljene* onda ako oba teksta možemo jednako dobro *čitati*. Nikakav fizikalno-tehnički instrument ne donosi, dakle, ocjenu o jednakoj rasvijetljenosti, već jedino čovjek na temelju *zapažanja svog oka*.



Sl. G.9. Uz objašnjenje temelja fotometrije. A, B — izvori svjetla, Z — zastor nepropustan za svjetlo, *1*, *2* — ploče na kojima je prilijepljen identičan tekst, ΔS — površina svake od ploča, $\Delta\omega$ — prostorni kut osvjetljavanja ploča

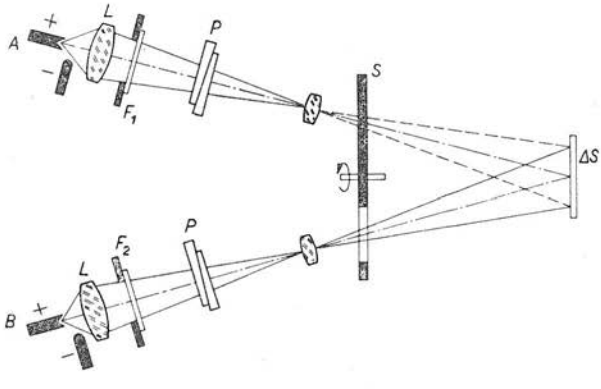
Geometrijski razmještaj rasvijetljene plohe *1* i izvora svjetla A je identičan razmještaju plohe *2* i izvora svjetla B (sl. G.9). Stoga u slučaju jednake rasvijetljenosti obiju ploha kažemo da je »svjetlosna jakost« *izvora svjetla A* jednaka »svjetlosnoj jakosti« izvora B. Ako su obje žarulje izvora B međusobno potpuno jednake, u slučaju jednake rasvijetljenosti ploha *1* i *2*, možemo reći da žarulja A ima dva puta veću svjetlosnu jakost negoli svaka od žarulja B.

Iz opisanog načela djelovanja fotometrije možemo zaključiti da bi

se, na primjer, žarulja *A* iz slike G.9 u načelu mogla odabrati za *pramjeru* jedinice fotometrijske veličine »svjetlosna jakost« (nekog izvora svjetla); to bi, dakle, bilo analogno izboru prakilograma za pramjeru jedinice mase (vidi odlomak A.9.3.3). Praktički to, međutim, ne dolazi u obzir, jer električke žarulje nisu dugog vijeka, u toku uporabe mijenjaju svoje karakteristike itd., tj. nemaju stalna svojstva i nisu reproducibilne sa znatnijom pouzdanošću, a pramjerila moraju posjedovati takva svojstva (vidi odsječak A.5.3). Zbog toga je u novije vrijeme za osnovu fotometrijskih mjerenja odabrano zračenje savršenog zračila — crnog tijela (vidi odlomak 1.3.2); podrobnije ćemo se s time upoznati u odsječku 2.3. Pri tom, dakako, ljudsko oko sa svojim zamjećivanjem svjetla i dalje ostaje ocjenjivač jednakog svjetlosnog utiska, a time i jednake rasvijetljenosti površine.

Napomenimo još da mjerni postupak iz slike G.9 možemo učiniti znatno preciznijim, ako uređaj izvedemo tako da plohe *1* i *2* graniče jedna s drugom. U tom slučaju pred očima gledalaca granica između ploha *1* i *2* *iščezava*, ako su plohe jednako rasvijetljene. U tom smislu postoji niz izvedaba takvih mjernih uređaja, fotometara (vidi npr. odsječak 3.1).

2.1.3. Raznobojna (heterokromna) fotometrija. Pri razmatranju pokusa uz sliku G.9 pretpostavili smo da je riječ o dva *istovrsna* izvora svjetla *A* i *B*, na primjer o volframovim žaruljama. Situacija se, međutim, bitno mijenja ako uspoređujemo *raznovrsne* izvore svjetla, tj. ako je *A* (sl. G.9) npr. natrijeva plinska svjetiljka (žuto svjetlo), a *B* živina plinska svjetiljka (plavozeleno svjetlo). Raznovrsne izvore svjetla imamo i u slučaju slike G.10, premda svjetlo proizvode dvije jednake lučnice *A* i *B* (ugljeni + i —). Ispred svake od njih nalaze se, naime, raznobojni filtri, npr. F_1 je crven, a F_2 plav. U tom slučaju, tj. u slučaju raznobojne (heterokromne) fotometrije, valja pojam jednake rasvijetljenosti tek *definirati*. Pri tom postoji nekoliko mogućnosti.



Sl. G.10. Uz princip višebojne fotometrije

A i *B* — jednake lučnice kao izvori svjetla, *L* — leće, *P* — polarizacijske prizme pomoću kojih se u stanovitom spektralnom području λ, $\lambda + \Delta\lambda$ može mijenjati rasvijetljenost površine ΔS, F_1 i F_2 — raznobojni filtri, *S* — sektorska ploča koja se vrti

Jedna od definicijskih mogućnosti je *oštrina videnja*, što smo za istovrsno svjetlo već imali uz sliku G.9 (odlomak 2.1.2). U tom slučaju prilijepljeni štampani tekst osvijetlimo dvjema lučnicama tako da je jedan dio teksta osvijetljen crveno,

a drugi dio — odmah do njega — zeleno. Polarizacijskom prizmom možemo kontinuirano mijenjati rasvijetljenost, npr. crveno osvijetljenog teksta, i tako utvrditi *jednaku čitljivost* obaju dijelova teksta koji su raznobojno osvijetljeni. Time jednaku čitljivost *definiramo* kao uvjet jednake rasvijetljenosti bez obzira na boju svjetla.

Postoji i niz drukčijih načina definiranja jednake rasvijetljenosti istog predmeta svjetlima različitih boja. Danas se najprikladnijim načinom smatra onaj koji ćemo opisati uz mjerni uređaj na slici G.10; ta metoda, naime, udovoljava tzv. zakonu zbrajanja (vidi odlomak 2.2.4). Pomoću raznobojnih filtara F_1 i F_2 inače jednaki izvori svjetla A i B rasvjetljuju *istu* površinu ΔS raznobojnim svjetlom. Između oba izvora i površine ΔS vrti se sektorska ploča S, tj. neprozirna ploča koja ima takve izreze (utore) da čas propušta svjetlo iz B, a odmah zatim iz A, pa opet iz B itd. Na plohi ΔS obično se vidi treperenje bojâ. No ako pomoću prizme P kontinuirano mijenjamo rasvijetljenost površine ΔS, npr. svjetlom iz A, u jednom ćemo momentu zapaziti da je treperenje boja prestalo. Pri tom će se na ΔS vidjeti mirna mješavina boja. Utvrđivanje tog prestanka treperenja možemo upotrijebiti za *definiranje* jednake rasvijetljenosti neovisno o boji svjetla.

Rasvijetljenost samo je jedna komponenta kompleksa problema pod zajedničkim nazivom »svjetlo i boja«. Činjenica da znanost i umjetnost svjetla i boja leži na granici vrlo različitih grana nauke i umjetnosti može objasniti interesantnu pojavu da su se tim problemima bavili najveći umovi čovječanstva: *da Vinci, Newton, Goethe, Maxwell, Schrödinger*, itd. I danas je to predmet istraživanja psihologa, fiziologa i fizičara. Među novijim radovima na tom polju možemo spomenuti i preporučiti djelo Nizozemca *P. J. Bouma*: »Boja i njeno zapažanje« (vidi literaturu citiranu na kraju knjige), koje je godine 1951. objavljeno na četiri jezika.

2.2. Ovisnost zapažanja svjetla o duljini vala zračenja

2.2.1. Spektralna osjetljivost oka. Iz iskustva znamo da ljudsko oko loše ocjenjuje stupanj rasvijetljenosti neke plohe, ali može izvanredno dobro zamijetiti *razliku* rasvijetljenosti dviju dodirnih ploha (usporedi s mjernim uređajima na slikama G.9, 10). Isto je tako poznato da prosječno ljudsko oko nije jednako osjetljivo na čitav spektar boja: u obasjanoj šarenoj plohi oko vrlo dobro zapaža žutu i zelenu boju, tj. boje u sredini spektra (vidi sliku G.8 i tablicu G-3); prema krajevima vidljivog spektra moć zapažanja opada, tj. osjetljivost oka na crvenu i ljubičastu boju znatno je lošija, da bi pri stanovitim duljinama vala (infracrveno i ultraljubičasto zračenje) postalo posve »slijepo«.

Polazeći od tih i niza drugih do tada utvrđenih činjenica (npr. *A. H. Munsell*, 1858—1918), *K. S. Gibson* i *E. P. T. Tyndall* iz američkog National Bureau of Standards obavili su godine 1921. opsežna eksperimentalna ispitivanja osjetljivosti ljudskog oka na monokromatska zračenja unutar vidljivog spektra. Eksperimentirali su sa 52 osobe, a rezultate su objavili godine 1923. u glasovitoj raspravi »Visibility of Radiant Energy«, tj. »Vidljivost energije zračenja«. Suština ispitivanja bila je u tome da ispitanik istodobno promatra dvije polovine osvijetljene plohe koje su osvijetljene iz dva izvora (slično našoj slici G.9) vidljivog zračenja i da kaže kada mu izgledaju jednako rasvijetljene, tj. kada ne zapaža razliku među njima. U toku ispitivanja eksperimentatori su mijenjali jakost zračenja jednog od dvaju izvora. Jedan od izvora zračio je snagu u intervalu duljina vala λ_1, $\lambda_1 + \Delta\lambda$, a drugi u intervalu λ_2, $\lambda_2 + \Delta\lambda$. Pri tom je vrijednost $\Delta\lambda$ bila tako malena da se λ_1 i λ_2 mogu smatrati monokromatskim svjetlima. I razlika između λ_2 i λ_1 bila je malena, da bi preciznost uspoređivanja bila što veća.

Na taj način je, korak po korak (step by step method), istražen čitav vidljivi spektar. Pri tom su objektivnim fizikalnim metodama (vidi odlomak 2.2.3) izmjerene gustoće snage monokromatskih zračenja $M(\lambda_1)$, $M(\lambda_2)$ itd. (jedinica SI gustoće snage $M(\lambda)$ je W/m^2sr; vidi odlomak 1.1.2) pri kojima je ispitanik doživio isti svjetlosni utisak. U mnoštvu tako izmjerenih $M(\lambda)$ utvrđena je za monokromatsko zračenje duljine vala

$$\lambda_0 = 555 \text{ nm} = 0{,}555 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5550 \text{ Å}$$

najmanja vrijednost $M(\lambda_0)$ koja daje isti svjetlosni utisak. Za bilo koje drugo monokromatsko zračenje duljine vala λ bilo je $M(\lambda) > M(\lambda_0)$. Ovisnost omjera $M(\lambda_0)/M(\lambda)$ o duljini vala monokromatskih svjetala nazvana je *krivuljom spektralne osjetljivosti prosječnog ljudskog oka* i označena sa $V(\lambda)$ ili V_λ, dakle

$$V(\lambda) = V_\lambda = \frac{M(\lambda_0)}{M(\lambda)} . \qquad (2.2\text{-}1)$$

Iz navedenog je očito da maksimalna vrijednost krivulje iznosi $V_\lambda = 1$, jer pri $\lambda = \lambda_0 = 555$ nm je $M(\lambda) = M(\lambda_0)$.

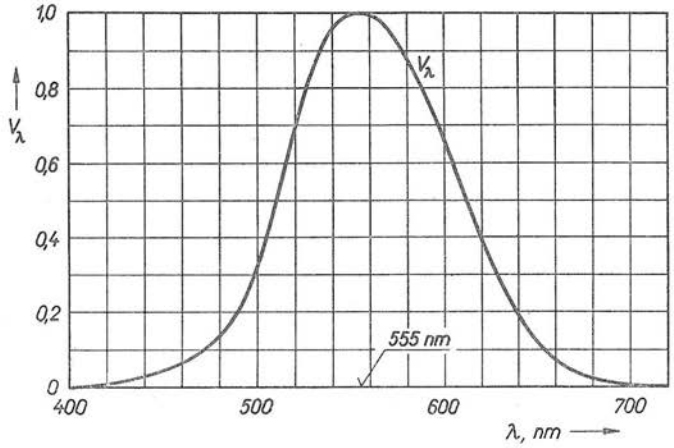
Tablica **G-4**

Vrijednosti međunarodno standardizirane krivulje spektralne osjetljivosti oka (relativna svjetlosna korisnost) za svijetlu i tamnu adaptaciju oka

λ nm	V_λ	V'_λ	λ nm	V_λ	V'_λ
380	—	$5{,}89 \cdot 10^{-4}$	580	0,870	0,1212
390	—	$2{,}209 \cdot 10^{-3}$	590	0,757	$6{,}55 \cdot 10^{-2}$
400	$4{,}0 \cdot 10^{-4}$	$9{,}29 \cdot 10^{-3}$	600	0,631	$3{,}315 \cdot 10^{-2}$
410	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$	$3{,}484 \cdot 10^{-2}$	610	0,503	$1{,}593 \cdot 10^{-2}$
420	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$	$9{,}66 \cdot 10^{-2}$	620	0,381	$7{,}37 \cdot 10^{-3}$
430	$1{,}16 \cdot 10^{-2}$	0,1998	630	0,265	$3{,}325 \cdot 10^{-3}$
440	$2{,}3 \cdot 10^{-2}$	0,3281	640	0,175	$1{,}497 \cdot 10^{-3}$
450	$3{,}8 \cdot 10^{-2}$	0,455	650	0,107	$6{,}77 \cdot 10^{-4}$
460	$6{,}0 \cdot 10^{-2}$	0,567	660	$6{,}1 \cdot 10^{-2}$	$3{,}129 \cdot 10^{-4}$
470	$9{,}1 \cdot 10^{-2}$	0,676	670	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	$1{,}480 \cdot 10^{-4}$
480	0,139	0,793	680	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$	$7{,}15 \cdot 10^{-5}$
490	0,208	0,904	690	$8{,}2 \cdot 10^{-3}$	$3{,}533 \cdot 10^{-5}$
500	0,323	0,982	700	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$	$1{,}780 \cdot 10^{-5}$
507	—	1,000	—	—	—
510	0,503	0,997	710	$2{,}1 \cdot 10^{-3}$	$9{,}14 \cdot 10^{-6}$
520	0,710	0,935	720	$1{,}05 \cdot 10^{-3}$	$4{,}78 \cdot 10^{-6}$
530	0,862	0,811	730	$5{,}2 \cdot 10^{-4}$	$2{,}546 \cdot 10^{-6}$
540	0,954	0,650	740	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$1{,}379 \cdot 10^{-6}$
550	0,995	0,481	750	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	$7{,}60 \cdot 10^{-7}$
555	1,000	—	760	$6{,}0 \cdot 10^{-5}$	$4{,}26 \cdot 10^{-7}$
560	0,995	0,3288	770	—	$2{,}413 \cdot 10^{-7}$
570	0,952	0,2076	780	—	$1{,}390 \cdot 10^{-7}$

*Gibson*ove i *Tyndall*ove rezultate provjerio je kasnije niz drugih istraživača, naročito američkih: *Hyde*, *Forsythe*, *Cady*, *Coblentz*, *Emerson*, *Nutting*, *Reeves*, *So*, *Ives*, *Priest* itd. Pri tom je ispitano oko 200 ljudi. Krivulju spektralne osjetljivosti oka V_λ (sl. G.11) prihvatila je godine 1924. Međunarodna komisija za rasvjetu

(Commission Internationale de l'Éclairage, CIE), a godine 1933. i Međunarodni komitet za mjere i utege (o ovom organu Generalne konferencije za mjere i utege vidi poglavlje A.7), tako da je ona danas međunarodno standardizirana. Tačniju ovisnost vrijednosti krivulje V_λ o λ u intervalima $\Delta\lambda = 10\ \text{nm} = 10^{-8}\ \text{m}$ sadrži tablica G-4.



Sl. G.11. Krivulja spektralne osjetljivosti oka koja je međunarodno standardizirana

Veličinu V_λ nazvali smo u gornjem tekstu »spektralna osjetljivost oka«. To je, međutim, samo jedan od naziva koji se upotrebljava u literaturi. Uz njega se danas najčešće upotrebljava »relativna svjetlosna korisnost«, gdje se misli na korisnost oka u analogiji s korisnosti nekog stroja ili uređaja (!). Uvodi se i naziv »relativna vidljivost svjetla« (ruski: otnositeljnaja vidnost sveta) ili »krivulja vidljivosti« (francuski: courbe de visibilité). Uz engleski naziv luminous effiency često se rabi i relative visibility itd. Nekompletan pregled stranih naziva na nekoliko jezika sadrži tablica G-5, koja je sastavljena s namjerom da čitateljima omogući lakše proučavanje strane literature, jer ponekad slični izrazi imaju u raznim jezicima različito značenje. O problemu terminoloških poteškoća letimično se govori i u odlomku 2.4.1.

2.2.2. Purkyněov efekt. Krivulja spektralne osjetljivosti ljudskog oka V_λ, koju smo prikazali na slici G.11 i tablici G-4, vrijedi za »svijetlo adaptirano oko«. To znači da čovjek promatra svjetleću plohu čija je luminancija (o veličini »luminancija« i njenoj jedinici »nit« vidi odsječak 2.3) veća od oko 30 nit. Češki fiziolog *J. E. Purkyně* (čitaj: Purkinje) otkrio je još godine 1819. da pri manjim luminancijama (ispod oko 3 milinita) ljudsko oko bitno drukčije zapaža svjetlo. Takvo »tamno adaptirano oko« vidi predmete osvijetljene mjesečinom plavičasto, iako je Mjesečevo svjetlo bogatije crvenim zračenjem negoli Sunčevo. Novija istraživanja pokazuju da spektralna osjetljivost tamno adaptiranog oka V'_λ ovisi o duljini vala λ svjetla onako kako to prikazuje krivulja $V\lambda$ na slici G.12 (radi usporedbe nacrtana je i krivulja V_λ za svijetlo adaptirano oko). Tačnije vrijednosti V'_λ sadrži tablica G-4.

Iz slike G.12 vidi se da je krivulja V'_λ približno jednaka krivulji V_λ, samo što je pomaknuta oko 50 nm ulijevo. Ova pojava naziva se *Purkyněov efekt*, a objašnjava se mehanizmom viđenja ljudskog oka: pri većoj luminanciji oko vidi pomoću

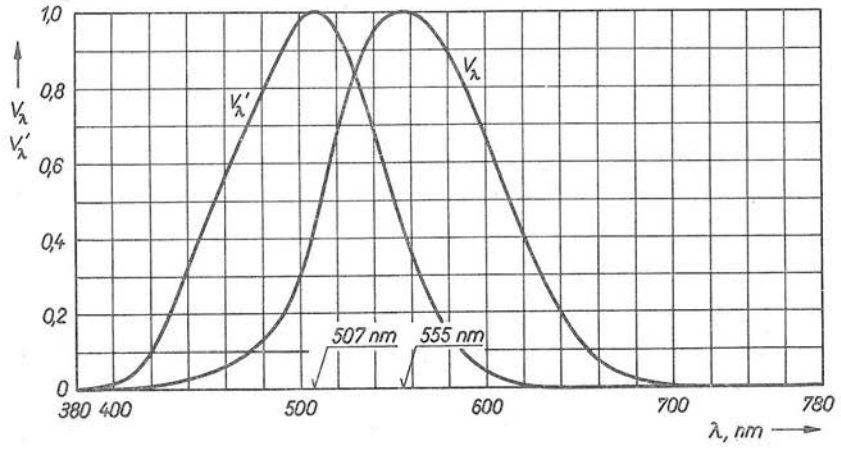
Tablica **G-5**

Usporedba naziva nekih fotometrijskih veličina na šest jezika

Simbol veličine: Jedinica SI:	V_λ 1	K_λ lumen/watt = lm/W	Φ lumen = lm = cd · sr	I candela = cd
hrvatskosrpski	relativna svjetlosna korisnost, spektralna osjetljivost oka	svjetlosna korisnost	svjetlosni tok	svjetlosna jakost
češki	poměrná světelná	světelná účinnost (monochromatického záření)	světelni tok	svítivost
ruski	vidnost monohromatičeskova sveta, otnositeljnaja vidnost sveta	vidnost sveta	svetovoj patok	sila sveta
engleski	luminous effiency of a certain wavelength, relative luminosity factor	luminous effiency (of radiation)	luminous flux	luminous intensity
francuski	efficacité lumineuse pour une longueur d'onde determiné, courbe de visibilité	efficacité lumineuse (d'un rayonnement)	flux lumineux	intensité lumineuse
njemački	monochromatisches Strahlungsäquivalent (spektraler Hellempfindlichkeitsgrad)	photometrisches Strahlungs äquivalent (spektrale Lichtausbeute einer Strahlung)	Lichtstrom	Lichtstärke

Simbol veličine: Jedinica SI:	L, B nit = nt = cd/m²	R lumen/metar² = lm/m²	E lux = lx = lm/m²	e luxsekunda = lx · s
hrvatskosrpski	luminancija	svjetloća, svijetljenje	rasvijetljenost, osvijetljenost	ekspozicija
češki	jas	světleni, intenzita světleni	osvětlení, intenzita osvětlení	osvit, expozice
ruski	jarkost	svetnost, svetimost	osveščenost	količestvo osveščenija, ekspozicija
engleski	luminance, brigtness	luminous emittance, luminosity	illumination	exposure, quantity of illumination
francuski	luminance, brillance	émittance lumineuse	éclairement	excitation, quantité d'éclairement
njemački	Leuchtdichte	spezifische Lichtausstrahlung	Beleuchtungsstärke	Belichtung

tzv. čunjića, a pri slaboj (npr. noću) pomoću tzv. štapića. Oko sadrži oko 6...7 milijuna čunjića i oko 120 milijuna štapića. Istraživanja su pokazala da čovjek zapaža svjetlo u boji isključivo čunjićima, ako je luminancija veća od oko 30 nit. Štapićima oko ne vidi spektar boja, već samo u nekom sivoplavkastom tonu; da bi vidjelo isključivo štapićima, luminancija mora biti manja od oko 3 milinit. U rasponu između navedenih vrijednosti luminancije oko vidi i čunjićima i štapićima, pa se u tom rasponu krivulja spektralne osjetljivosti oka za pojedine razine luminancije nalazi između krivulja V'_λ i V_λ (sl. G.12). Ispod 0,3 mikronita oko uopće ne zapaža svjetlo, to je dakle »prag vidljivosti«.



Sl. G.12. Krivulja spektralne osjetljivosti V'_λ tamno adaptiranog oka u usporedbi s krivuljom V_λ svijetlo adaptiranog oka

Opisani Purkyněov efekt od velikog je značenja kako za znanost, tako i za umjetnost i tehniku. Poznavanje ovisnosti krivulje V_λ o luminanciji važno je za shvaćanje što se razumijeva pod time kad se kaže da je nešto svijetlo, važno je za teoriju boja, za astronomska motrenja, za rasvjetu ulica itd.

U vezi s krivuljama spektralne osjetljivosti ljudskog oka V_λ i V'_λ, koje smo razmotrili u ovom i prošlom odsječku (vidi i slike G.11, 12 te tablicu G-4), korisno je naglasiti da su one jedan od temelja fotometrije. One, naime, predstavljaju most kojim se subjektivni ljudski doživljaj svjetla čvrsto veže s objektivnim fizikalnim mjerenjem veličina koje poznajemo iz teorije zračenja (poglavlje 1). U skladu s time je i suvremena fotometrija: udžbenici fotometrije danas počinju definicije svojih veličina primjenom krivulje V_λ (ili V'_λ ako je riječ o niskim luminancijama) na fizikalne veličine teorije zračenja u beskrajnom spektru zračenja (sl. G.8). Zbog toga su i razlaganja u ovoj knjizi morala započeti s razmatranjem načela opće teorije zračenja elektromagnetskih valova (poglavlje 1), da bi se zatim u odsječcima 2.3 i 2.4 jednostavnom analogijom preslikala u odnose među fotometrijskim veličinama.

2.2.3. Načelo mjerenja gustoće snage zračenja. Za razliku od zagrijanih tijela, koja zrače u kontinuiranom spektru frekvencija (vidi sliku G.7), plinske izbojne sijalice zrače monokromatski, tj. samo pri stanovitim frekvencijama (budući

da vrijedi odnos $f = c/\lambda$, govorimo i o monokromatskom zračenju pri određenoj duljini vala λ). Pod izbojnim sijalicama razumijevamo živine i natrijeve sijalice, neonske cijevi itd. Na primjer, visokotlačna živina sijalica emitira u vidljivom području 10 monokromatskih zračenja čije su gustoće snage $M(\lambda)$ navedene u tablici G-6. (Podaci su dobiveni mjerenjem u National Bureau of Standards na udaljenosti 2 metra od sijalice čiji je električni luk imao promjer 1,5 cm i duljinu 16,2 cm, a napon i struja luka iznosili su 174 V i 3,75 A.) U tablici je upotrijebljena jedinica snage mW = miliwatt = 10^{-3} W.

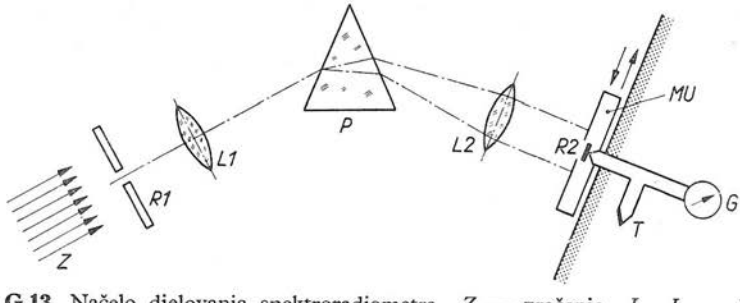
Tablica **G-6**

Vidljivi spektar zračenja visokotlačne živine sijalice

λ, nm	$M(\lambda)$, $\frac{\text{mW}}{\text{sr m}^2}$
390...391	13
405...408	245
434...436	434
492	13
546	490
577...579	600
623	6
672	8
708...709	15
760...773	6

Gustoća snage monokromatskog zračenja $M(\lambda)$, tj. zračenja u vrlo uskom rasponu duljina vala λ, $\lambda + \Delta\lambda$ (npr. u tablici G-6 vidimo da za neka monokromatska zračenja $\Delta\lambda$ iznosi 2 ili 3 nm), može se mjeriti uređajem koji je prikazan na slici G.1, dakle na principu preobrazbe energije zračenja u toplinsku. No ako se ukupno zračenje sijalice sastoji od nekoliko monokromatskih zračenja (vidi tablicu G-6), takvim se načinom ne može izmjeriti gustoća snage svakog od zračenja $M(\lambda)$, već samo ukupnoga. Zbog toga se u fotometriji primjenjuje spektroradiometrička metoda koju shematski opisuje slika G.13. Izgled dijela pripadnog mjernog uređaja vidimo na slici G.14.

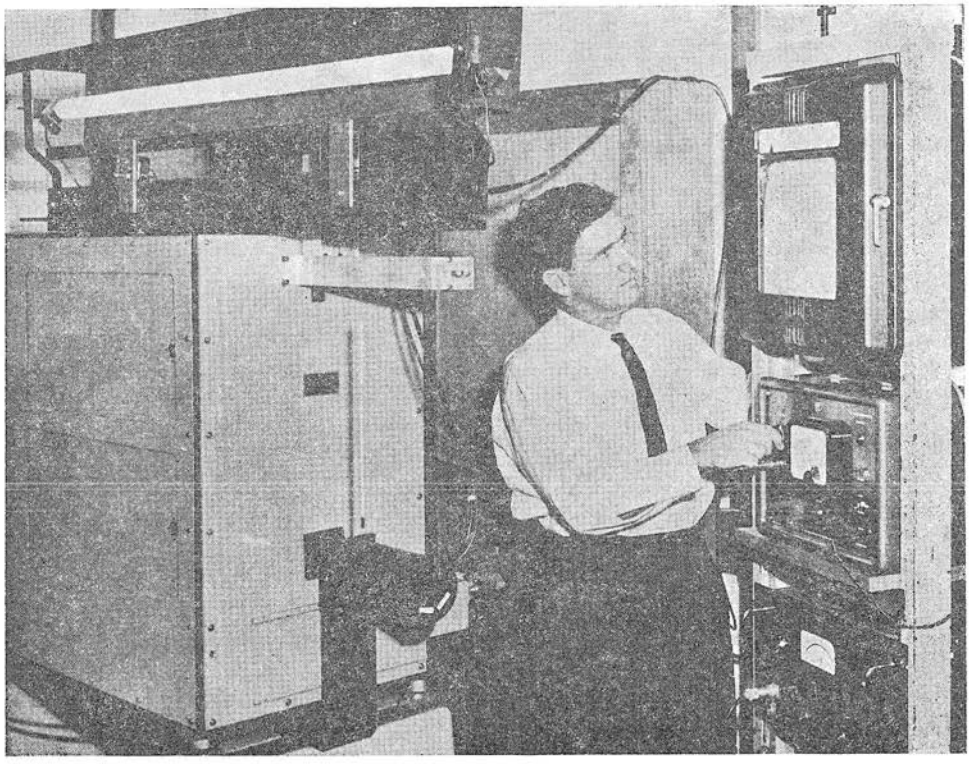
Zračenje Z, sastavljeno od nekoliko monokromatskih komponenata, prolazi kroz prvi raspor R_1 i leću L_1 te dolazi na prizmu P koja ga razvlači u širok pramen (sl. G.13). Nakon prolaza kroz leću L_2 zračenje pada na površinu mjernog uređaja



Sl. G.13. Načelo djelovanja spektroradiometra. Z — zračenje, L_1, L_2 — leće, P — prizma, R_1 — prvi raspor, R_2 — drugi raspor, ispod kojeg se nalazi termočlanak T, MU — pomični mjerni uređaj, G — galvanometar

MU. Taj *pomični* mjerni uređaj ima uzak raspor R_2 ispod kojeg se nalazi mjerna pločica s ugrađenim termočlankom T. Povišenje temperature mjerne pločice rezultat je preobrazbe snage zračenja koje je prošlo kroz raspor R_2 i doprlo do termočlanka. To povišenje pokazuje galvanometar G iz čijeg se otklona može zaključiti o snazi $M(\lambda)$ mjerenog monokromatskog zračenja duljine vala λ.

Pomicanjem mjernog uređaja MU sistematski se izmjere gustoće snage monokromatskih zračenja $M(\lambda)$ duž čitava spektra i dobiju npr. rezultati kakve imamo u tablici G-6. Pri tom širina raspora R_2 iznosi oko 10 nanometara ($\mathrm{nm} = 10^{-9}$ m). Ova metoda mjerenja gustoće snage $M(\lambda)$ pojedinačnih monokromatskih zračenja zakazuje onda ako se unutar širine raspora R_2 (npr. 10 nm) nađe više spektralnih linija.



Sl. G.14. Mjerenje spektralne razdiobe svjetla fluoroscentne cijevi prilikom jedne međunarodne usporedbe. (Foto: National Standards Laboratory, Sydney)

2.2.4. Zakon zbrajanja monokromatskih zračenja. Ovaj eksperimentalno dobiveni zakon temelji se na utvrđivanju jednakog svjetlosnog utiska dvaju ili više monokromatskih zračenja neposrednom vizuelnom usporedbom. U najjednostavnijem slučaju zakon zbrajanja (engl. summation rule, njem. Summengesetz) glasi: ako monokromatsko zračenje *1* gustoće snage zračenja $M(\lambda_1)$ izaziva u ljudskom oku isti svjetlosni utisak kao i monokromatsko zračenje *2* gustoće snage $M(\lambda_2)$, onda će i mješavina dvaju monokromatskih zračenja $a_1M(\lambda_1) + a_2M(\lambda_2)$ izazvati isti utisak ako je $a_1 + a_2 = 1$. Pri tom su λ_1 i λ_2 duljine vala svakoga od monokromatskih zračenja.

U duhu teoretske fotometrije ovaj se zakon opisuje posebnim simbolima uz pomoć po volji odabranog referentnog monokromatskog zračenja gustoće snage $M(\lambda_0)$, gdje je λ_0 duljina vala odabranog referentnog zračenja. Piše se naime

$$M(\lambda_1) \sim M(\lambda_0),$$

što znači: »$M(\lambda_1)$ izaziva jednak svjetlosni utisak kao i $M(\lambda_2)$«. Analogno za monokromatsko zračenje *2* vrijedi $M(\lambda_2) \sim M(\lambda_0)$, odnosno za oba zračenja $M(\lambda_1) \sim M(\lambda_2) \sim M(\lambda_0)$. U skladu s tom simbolikom zakon zbrajanja dvaju monokromatskih zračenja glasi

$$a_1 M(\lambda_1) + a_2 M(\lambda_2) \sim M(\lambda_0) \quad \text{uz} \quad a_1 + a_2 = 1.$$

Zakon zbrajanja može se proširiti na niz monokromatskih zračenja koja izazivaju jednak svjetlosni utisak

$$M(\lambda_1) \sim M(\lambda_2) \sim M(\lambda_3) \ldots \sim M(\lambda_i) \ldots \sim M(\lambda_0)$$

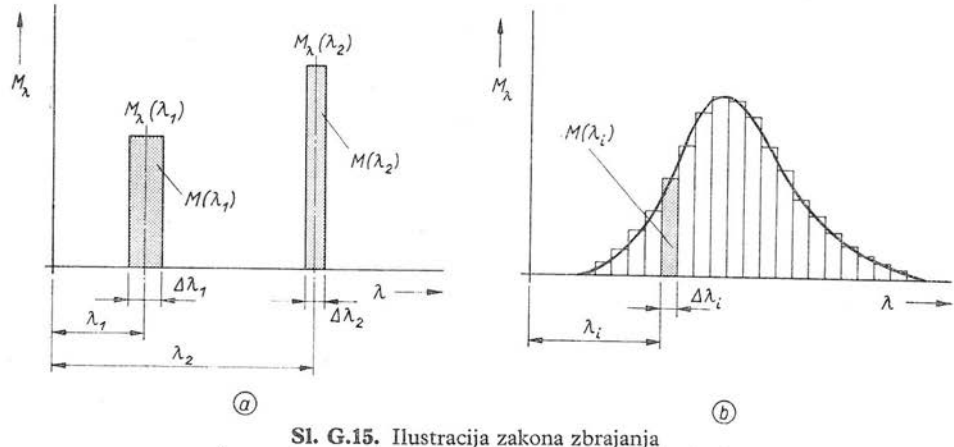
$$\Sigma a_i \cdot M(\lambda_i) \sim M(\lambda_0); \quad \Sigma a_i = 1. \tag{2.2-2}$$

Ovako formuliran zakon zbrajanja vrijedi za tzv. *monokromatska* zračenja; njegovu primjenu na kontinuirana zračenja razmotrit ćemo u narednom odlomku. Naglasimo ponovno da se veličina $M(\lambda_i)$ pri upotrebi Međunarodnog sistema jedinica (SI) mjeri jedinicom W/(sr m²).

2.2.5. Primjena zakona zbrajanja na kontinuirano zračenje. Izvedeni zakon zbrajanja (2.2-2) ne vrijedi samo za monokromatska zračenja već i za »zračenje s kontinuiranim spektrom«. Razliku između ove dvije vrsti zračenja prikazali smo idealiziranom slikom G.15: u dijagramima je na ordinatu nanesena veličina »spektralna gustoća snage zračenja« $M_\lambda(\lambda)$ definirana omjerom

$$M_\lambda(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{\Delta\lambda}. \tag{2.2-3}$$

To je, dakle, omjer gustoće snage monokromatskog zračenja $M(\lambda)$ i širine intervala duljina vala unutar kojih npr. plinska sijalica odašilje zračenja. Idealiziran grafički prikaz dvaju takvih monokromatskih zračenja sadrži slika G.15a. Za takva zračenja vrijedi jednadžba (2.2-2).



Sl. G.15. Ilustracija zakona zbrajanja
a) monokromatska zračenja, b) kontinuirano zračenje

Kontinuirano zračenje, npr. zračenje ugrijanog tijela (vidi odlomak 1.3.3), prikazuje u analognom dijagramu slika G.15b. Očito je da kontinuirani spektar možemo zamisliti sastavljen od bezbroja monokromatskih zračenja $M(\lambda)$ iz slike a.

Ako, dakle, kontinuirani spektar iz slike b razdijelimo na niz diskretnih vrijednosti gustoće snage zračenja $M(\lambda)$, očito vrijedi

$$\Sigma M(\lambda_i) = \Sigma M_\lambda(\lambda_i)\,\Delta\lambda_i \sim M(\lambda_0), \tag{2.2-4}$$

ako čitav kontinuirani spektar daje isti svjetlosni utisak kao i referentno zračenje $M(\lambda_0)$ (vidi odlomak 2.2.4). Do desne relacije (2.2-4) došli smo uz pomoć izraza (2.2-3). Izjednačimo li lijevu jednadžbu (2.2-2) sa (2.2-4), slijedi

$$\Sigma a_i M(\lambda_i) = \Sigma M_\lambda(\lambda_i)\,\Delta\lambda_i,$$

odakle uvrštenjem jednadžbe (2.2-1) nastaje

$$a_i = \frac{V(\lambda_i)\,M_\lambda(\lambda_i)\,\Delta\lambda_i}{M(\lambda_0)}. \tag{2.2-5}$$

Suma koeficijenata a_i prema desnoj jednadžbi (2.2-2) iznosi 1, pa prema tome izraz (2.2-5) dobiva oblik

$$\Sigma V(\lambda_i) M_\lambda(\lambda_i)\,\Delta\lambda_i = M(\lambda_0), \tag{2.2-6}$$

gdje je $V(\lambda_i)$ vrijednost krivulje spektralne osjetljivosti oka za monokromatsko zračenje duljine vala λ_i. Za $\Delta\lambda \to d\lambda$ jednadžba (2.2-6) prelazi u izraz

$$\int V(\lambda)\,M_\lambda(\lambda)\,d\lambda = M(\lambda_0), \tag{2.2-7}$$

u kojem simboli označuju: $V(\lambda) = V_\lambda$ krivulju spektralne osjetljivosti oka (vidi odlomak 2.2.1), $M_\lambda(\lambda) = \partial M(\lambda)/\partial\lambda$ spektralnu gustoću snage zračenja zračila s kontinuiranim spektrom (vidi odlomak 1.3.3), a $M(\lambda_0)$ — gustoću snage svojevoljno odabranog referentnog monokromatskog zračenja duljine vala λ_0.

Ako na jednu plohu ΔS mjernog uređaja, izvedenog kao na slici G.9, pada svjetlo kontinuiranog zračila karakteriziranog sa $M_{\lambda,1}(\lambda)$, a na drugu plohu svjetlo karakterizirano sa $M_{\lambda,2}(\lambda)$, zakon zbrajanja (2.2-7) opisivat će jednak svjetlosni utisak jednakošću

$$\int V(\lambda)\,M_{\lambda,1}(\lambda)\,d\lambda = \int V(\lambda)\,M_{\lambda,2}(\lambda)\,d\lambda. \tag{2.2-8}$$

Jednadžbe (2.2-7, 8) izvanredno su važne za fotometriju, jer se na njima temelje suvremene definicije fotometrijskih veličina i jedinica (vidi odsječke 2.3 i 2.4).

2.3. Luminancija i njena jedinica nit

2.3.1. Fotometrijska veličina luminancija. Zakon zbrajanja kontinuiranog zračenja, opisan jednadžbama (2.2-7, 8), povezuje *fizikalne* veličine $M_\lambda(\lambda) = \partial M(\lambda)/\partial\lambda$ i λ sa *fiziološko-psihološkim* svojstvom ljudskog oka — krivuljom spektralne osjetljivosti oka $V(\lambda)$. Stoga su te jednadžbe onaj most kojim je preko *standardizirane* krivulje $V(\lambda)$ uspostavljena čvrsta veza između fizikalnog mjerenja gustoće snage zračenja i subjektivnog ljudskog doživljavanja svjetla. [Ove jednadžbe nam, štoviše, pokazuju da bi se ljudsko oko čak moglo isključiti iz procesa uspoređivanja svjetlosnih utisaka kad bi uspjelo izraditi mjerni uređaj koji bi na vidljivo zračenje reagirao u skladu s krivuljom $V(\lambda)$. Nešto slično se i primjenjuje u tzv. objektivnoj fotometriji; vidi odlomak 2.3.5.] Zbog toga svaka funkcija

integrala (2.2-7) može poslužiti za definiciju odgovarajuće fotometrijske veličine nazvane *luminancija*. Najjednostavnija je linearna veza

$$L = K_m \int V(\lambda)\, M_\lambda(\lambda)\, d\lambda, \tag{2.3-1}$$

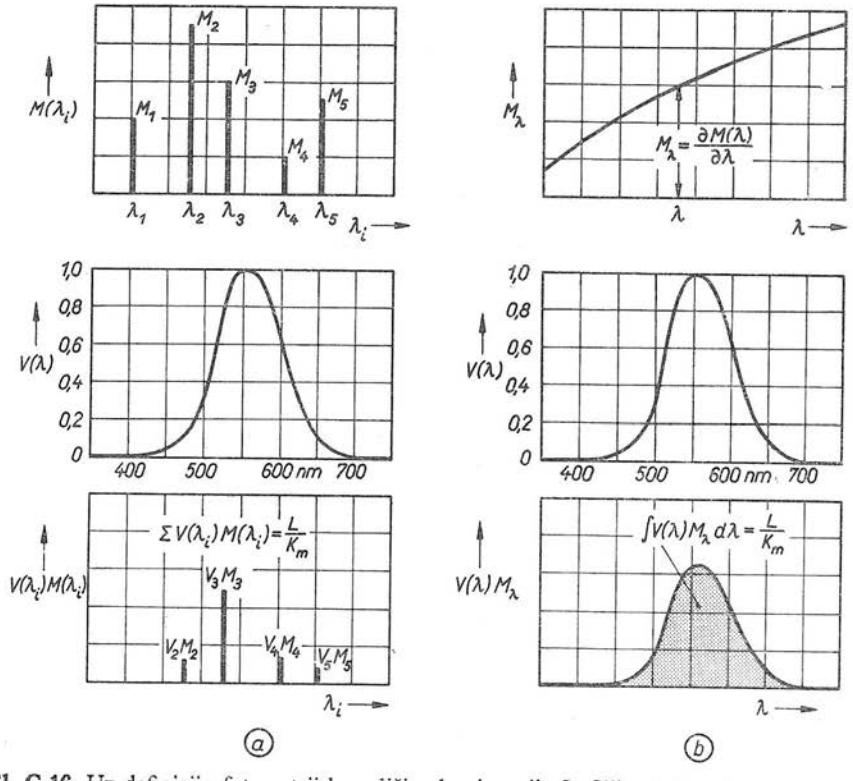
gdje je K_m *konstanta*, čije ćemo značenje razmotriti u odlomku 2.3.3. Granice integrala teoretski se protežu od $\lambda = 0$ do $\lambda = \infty$, ali praktički samo od $\lambda = 400$ nm do $\lambda = 760$ nm, jer izvan tog područja krivulja $V(\lambda)$ degenerira u nulu (to vrijedi za svijetlo adaptirano oko, dok su za tamno adaptirano oko granice druge; vidi odlomak 2.2.2).

Za spektar *monokromatskih* zračenja definicijska jednadžba luminancije L (2.3-1) prelazi u oblik

$$L = K_m \Sigma V(\lambda_i)\, M(\lambda_i). \tag{2.3-2}$$

Ovdje je $V(\lambda_i)$ vrijednost krivulje spektralne osjetljivosti oka za zračenje duljine vala λ_i, a $M(\lambda_i)$ gustoća snage zračenja (u SI mjeri se jedinicom $W/sr \cdot m^2$) iste duljine vala (vidi odlomak 2.2.4).

Grafički prikaz definicijskih jednadžbi luminancije L vidimo na slici G.16. Oznaka K_m predstavlja konstantu o kojoj se raspravlja u odlomku 2.3.3. Ovaj



Sl. G.16. Uz definiciju fotometrijske veličine luminancija L. Slike a) ilustriraju definiranje L za slučaj linijskog spektra (monokromatska zračenja), a slike b) za slučaj kontinuiranog spektra. Gornje slike prikazuju fizikalne veličine, srednje — međunarodno standardiziranu krivulju $V(\lambda)$, a donje — fotometrijsku veličinu

grafički prikaz jednadžbi (2.3-1, 2) vrijedi i za definicije ostalih fotometrijskih veličina, kako ćemo vidjeti u odsječku 2.4 i tablici G-8.

Veličinom luminancija L karakterizira se svojstvo *izvora svjetla* da u ljudskom oku izazove svjetlosni utisak. Danas je naziv »luminancija« za veličinu L udomaćen u mnogim jezicima (vidi i tablicu G-5), a u hrvatskosrpskom jeziku preporučuje ga i JUS. U starijoj literaturi nalazimo, međutim, i nazive »sjajnost«, »jarkost«, »bljesak«, »gustoća svjetla« itd.

2.3.2. Definicija jedinice luminancije nit. Zaključkom devetog zasjedanja Generalne konferencije za mjere i utege, održanog godine 1948, od 1. januara 1948. osnova cjelokupne fotometrije je zračenje *savršenog zračila* (»apsolutno crno tijelo«) pri temperaturi skrućivanja platine T_{Pt}. Na trinaestom zasjedanju Generalne konferencije, održanom godine 1967, stanje zračila dodatno je precizirano tlakom $p = 1{,}013\,25 \cdot 10^5$ N/m² (= 1 normalna atmosfera; vidi odlomak B.4.3.6). Spektralnu gustoću snage zračenja $M_\lambda(\lambda) = \partial M(\lambda)/\partial\lambda$ savršenog zračila opisuje jednadžba (1.3-6):

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{\partial M(\lambda, T)}{\partial \lambda} = C_1 \lambda^{-5} [\exp(C_2/\lambda T) - 1]^{-1}. \qquad (2.3\text{-}3)$$

Ovdje su: λ — duljina vala zračenja, T — termodinamička temperatura zračila, C_1 i C_2 — konstante (odlomak 1.3.3).

Jedinica luminancije u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) zove se *nit*, što dolazi od latinskog glagola nitescere, tj. svijetliti se. Kratica te jedinice je nt, dakle

$$[L]_M = \text{nit} = \text{nt}.$$

Predlažemo da se ta jedinica usvoji za *osnovnu* (polaznu) jedinicu Međunarodnog sistema jedinica (prema sadašnjem zakonodavstvu polazna fotometrijska jedinica SI je candela — jedinica svjetlosne jakosti; vidi odlomak 3.2.6). U tom slučaju vrijednost jedinice SI luminancije $[L]_M = \text{nit}$ utvrđuje se per definitionem: luminanciju $L = 6 \cdot 10^5$ nit ima savršeno zračilo na temperaturi skrućivanja platine T_{Pt} pri tlaku okoline $p = 1{,}013\,25 \cdot 10^5$ N/m². U skladu s tim *predlažemo* ovaj tekst definicije jedinice luminancije nit koju bi, po našem mišljenju, trebalo odabrati za osnovnu fotometrijsku jedinicu SI:

> Luminancija savršenog zračila koje se pri tlaku 101 325 N/m² u cijelosti nalazi na temperaturi taljenja platine iznosi 600 000 nita.

Matematički možemo tu definiciju opisati ovako: pri $T = T_{Pt}$ jest luminancija $L(T_{Pt}) = 6 \cdot 10^5$ nt = 600 kilonit (knt = 1000 nt). Uvrstimo li ta dva podatka u jednadžbu (2.3-1), dobivamo

$$L(T_{Pt}) = K_m \int V(\lambda) M_\lambda(\lambda, T_{Pt})\, d\lambda = 6 \cdot 10^5 \text{ nt}. \qquad (2.3\text{-}4)$$

Stavimo li i u jednadžbu (2.3-3) $T = T_{Pt}$, uvrštenjem u gornji izraz slijedi

$$K_m C_1 \int V(\lambda) \lambda^{-5} [\exp(C_2/\lambda T_{Pt}) - 1]^{-1}\, d\lambda = 6 \cdot 10^5 \text{ nt}. \qquad (2.3\text{-}5)$$

Integral ima teoretski granice $\lambda = 0, \infty$; stvarne granice su lijeva i desna nul-vrijednost krivulje spektralne osjetljivosti oka $V(\lambda)$.

Uz opis gornje definicije jedinice luminancije SI nit korisno je upozoriti na analogiju s definicijom jedinice termodinamičke temperature SI kelvin = K (vidi odlomak D.3.2.4). Kelvin je, naime, definiran tako što je trojnoj tački vode pripisana termodinamička temperatura $T = 273{,}16$ K, a temperaturna skala je oslonjena na jednadžbu stanja idealnog plina $pV = mRT$. Ovdje, u fotometriji, savršenom zračilu (pri temperaturi T_{Pt}) pripisana je luminancija $L(T_{Pt}) = 6 \cdot 10^5$ nt, a luminancijska skala se u krajnjoj liniji oslanja na zakon zbrajanja (jednadžba 2.3-1 odnosno 2.2-7).

Vezu između luminancije $L(T)$ savršenog zračila pri bilo kojoj temperaturi T s luminancijom $L(T_{Pt})$ pri temperaturi taljenja platine lako ustanovljujemo kombinacijom jednadžbi (2.3-1 i 4)

$$L(T) = L(T_{Pt}) \frac{\int V(\lambda) M_\lambda(\lambda, T)\, d\lambda}{\int V(\lambda) M_\lambda(\lambda, T_{Pt})\, d\lambda}, \qquad (2.3\text{-}6)$$

gdje je $L(T_{Pt}) = 6 \cdot 10^5$ nt. Razmotrimo li izraz (2.3-3), uviđamo da $M_\lambda(\lambda, T)$ i $M_\lambda(\lambda, T_{Pt})$ pod znakovima integrala (2.3-6) sadrže samo konstante C_2 i T_{Pt}. Budući da su njihove vrijednosti poznate (vidi naredni odlomak), a isto tako i $V(\lambda)$ (vidi odlomak 2.2.1), luminancija $L(T)$ savršenog zračila može se u ovisnosti o njegovoj temperaturi T dosta pouzdano računati pomoću jednostavnog izraza

$$\lg (L/\text{nt}) = a - b/T + c/T^2.$$

Ovdje su a, b i c konstante čija vrijednost ovisi o C_2, T_{Pt}, $V(\lambda)$ i definicijskoj vrijednosti $L(T_{Pt}) = 600$ knt.

Na kraju se možemo upitati zašto je u definiciji jedinice luminancije nit odabrana baš vrijednost $L = 6 \cdot 10^5$ nit, a ne neka druga. Razlog je taj što su prije uvođenja savršenog zračila u fotometriji postojali drukčiji normirani izvori svjetla (tzv. svijeće; vidi poglavlje 3), a njihova je luminancija *približno* iznosila 600 knt.

2.3.3. Fotometrijski ekvivalent zračenja. Uz jednadžbu (2.3-1) u odlomku 2.3.1 najavili smo da ćemo značenje konstante K_m razmotriti u ovom odlomku. Vrijednost K_m možemo stvarno izračunati pomoću jednadžbe (2.3-4) u obliku

$$K_m = \frac{6 \cdot 10^5 \text{ nt}}{C_1 \int V(\lambda) \lambda^{-5} [\exp (C_2/\lambda T_{Pt}) - 1]\, d\lambda}. \qquad (2.3\text{-}7)$$

Pri tom uz krivulju $V(\lambda)$ moramo poznavati vrijednosti konstanti C_1, C_2 i T_{Pt}. Gornji integral ne možemo, međutim, direktno izračunati, jer međunarodno standardizirana krivulja $V(\lambda)$ nije obuhvaćena matematički, već postoje samo podaci $V(\lambda_i)$ za intervale duljina vala $\Delta\lambda = 5$ nm. Zbog toga treba integral (2.3-7) nadomjestiti sumom, dakle upravo obrnuto nego što smo imali pri nastanku jednadžbe (2.2-7). Tako dobivamo

$$K_m = \frac{6 \cdot 10^5 \text{ nt}}{C_1 \int \Sigma V(\lambda_i) \lambda_i^{-5} [\exp (C_2/\lambda_i T_{Pt}) - 1]\, \Delta\lambda}. \qquad (2.3\text{-}8)$$

To znači da smo kontinuiranu krivulju $M_\lambda(\lambda, T_{Pt})$ razdijelili na niz diskretnih vrijednosti razmaknutih za $\Delta\lambda$. Svaku od tih vrijednosti $M^\lambda(\lambda_i, T_{Pt})$ množimo s pripadnom $V(\lambda_i)$ i λ_i^{-5}. Što je manji interval $\Delta\lambda$, koji možemo odabrati po volji, to je pouzdaniji rezultat — vrijednost K_m — jer se na taj način stepenasta krivulja

sve više približava stvarnoj krivulji $M_\lambda(\lambda, T_{Pt})$. Tako dugotrajnim računanjem dobivamo traženu vrijednost konstante K_m.

Podrobnije analize pokazuju (vidi odsječak A.4.3) da vrijednost K_m iz jednadžbe (2.3-8) jako ovisi o sigurnosti s kojom poznajemo konstante T_{Pt}, C_2 i C_1. Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je godine 1948. vrijednosti

$$C_1 = (3{,}740/\pi)\cdot 10^{-16}\ \mathrm{Wm^2/sr}, \quad C_2 = 0{,}014\,38\ \mathrm{Km},$$

$$T_{Pt} = 2042{,}2\ \mathrm{K} \pm 1\ \mathrm{K}$$

pomoću kojih se opisanim postupkom pretvaranja u sumu iz jednadžbe (2.3-7) može izračunati

$$K_m = (679 \pm 4)\,\frac{\mathrm{nt\,sr\,m^2}}{\mathrm{W}}.$$

Ovdje kratice jedinica označuju: sr — steradijan, m^2 — kvadratni metar, nt — nit, W — watt. U literaturi, međutim, nalazimo vrlo različite vrijednosti konstanti: $C_2 = (1{,}4389 \pm 0{,}0009)\cdot 10^{-2}$ Km, $T_{Pt} = 2042{,}5\ \mathrm{K} \pm 3{,}5\ \mathrm{K}$. Pomoću njih dobivamo mnogo nesigurniju vrijednost konstante $K_m = (683 \pm 18)\ \mathrm{nt\,sr\,m^2/W}$. Uzrok tolikoj nesigurnosti vrijednosti K_m potječe otuda što se vrijednost T_{Pt} utvrđuje usporedbom monokromatskog zračenja pri mjerenoj temperaturi s gustoćom snage zračenja savršenog zračila pri talištu zlata T_{Au}. Pri tom je nesigurnost T_{Pt} uzrokovana kako nesigurnošću poznavanja T_{Au}, tako i metodom posrednog mjerenja. Najpouzdanijim vrijednostima prve i druge *Planck*ove konstante danas valja smatrati $C_1 = (1{,}1906 \pm 0{,}0001)\cdot 10^{-16}\ \mathrm{Wm^2/sr}$ i $C_2 = (1{,}438\,79 \pm 0{,}000\,19)\cdot 10^{-2}$ Km (vidi tablicu **2** u prilogu knjige).

Konstantu K_m obično zovemo *fotometrijski ekvivalent zračenja*, iako taj »ekvivalent« nema isto značenje kao što ga imaju npr. »ekvivalenti« u nauci o toplini (vidi odlomak D.4.2.2). Fotometrijski ekvivalent zračenja K_m od velike je važnosti u fotometriji i rasvjetnoj tehnici. Njegova se uloga podrobno može shvatiti u vezi s fotometrijskom veličinom »svjetlosna korisnost« $K(\lambda)$ (ili K_λ), koja je razmotrena u odlomku 2.4.1. U vezi s K_m valja primijetiti još nešto. Obično se vrijednost K_m navodi ovako:

$$K_m = 680\ \mathrm{lm/W},$$

gdje je lm = lumen jedinica SI »svjetlosnog toka« (o toj veličini vidi odlomak 2.4.2). Takvo navođenje posve je u redu, jer je

$$\mathrm{nt\ sr\ m^2} = \mathrm{lm} = \mathrm{lumen},$$

što je potanko objašnjeno u poglavlju 3.

Uz »fotometrijski ekvivalent zračenja« K_m upotrebljava se i njegova recipročna vrijednost

$$M = 1/K_m,$$

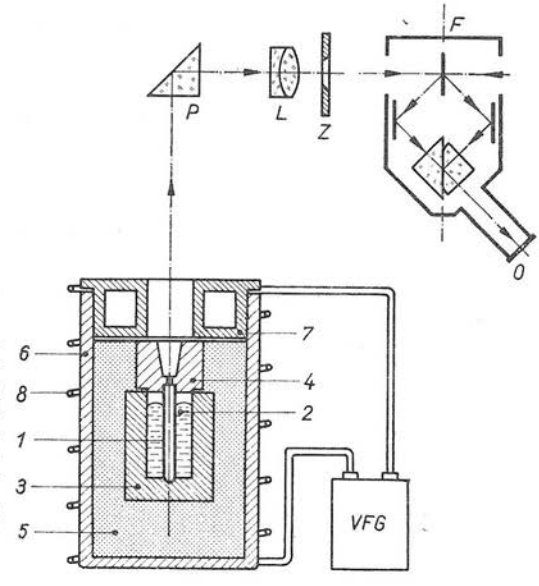
koja se u literaturi naziva »svjetlosni ekvivalent«. Za M se upotrebljavaju i manje uspješni nazivi: »mehanički svjetlosni ekvivalent« i »električki svjetlosni ekvivalent«. Prije navedenim dvjema vrijednostima fotometrijskog ekvivalenta K_m odgovaraju ove vrijednosti $M = 1/K_m$:

$$K_m = (679 \pm 4)\ \mathrm{lm/W} \qquad M = (1{,}473 \pm 0{,}009)\ \mathrm{mW/lm}$$

$$K_m = (683 \pm 18)\ \mathrm{lm/W} \qquad M = (1{,}464 \pm 0{,}04)\ \mathrm{mW/lm}.$$

Ovdje je mW = miliwatt = 10^{-3} W (o primjeni decimalnih i dekadskih višekratnika jedinica vidi odsječak A.2.3 i tablicu A-1).

2.3.4. Reprodukcija jedinice luminancije izvodi se pomoću savršenog zračila (apsolutno crno tijelo) načelno prikazanog na slici G.17, koje zrači u skladu s Planckovim zakonom (2.3-3). Opće zakone zračenja i svojstva savršenog zračila opisali smo u odlomcima 1.3.1,2. Prikazano zračilo za reprodukciju jedinice luminancije razvili su metrolozi u američkom National Bureau of Standards godine 1931.



Sl. G.17. Načelni presjek savršenog zračila za reprodukciju luminancije L = = 600 knt. Oznake predočuju: *1* — cjevčica od torijeva oksida (torina), *2* — rastaljena platina, *3*, *4* — lončić i poklopac izrađeni od torina, *5* — prah torijeva oksida, *6* — kremeni lonac, *7* — vanjski poklopac, *8* — šuplji bakreni vodič, hlađen vodom, *VFG* — visokofrekventni generator, *P* — prizma, *L* — sistem leća, *Z* — zaslon, *F* — fotometar, *O* — okular (vidi sliku G.26)

Izvor zračenja je cjevčica *1* izrađena od torijeva oksida (torina); njega resi vrlo velik faktor refleksije, a kemijski je posve neaktivan prema platini *2* koja okružuje cjevčicu. Platina se zagrijava vrtložnim strujama koje inducira visokofrekventna (VF) struja što prolazi kroz vodič *8*. Na taj način toplina se razvija u svakom djeliću platine, pa je zbog toga čitava platina *2* jednoliko zagrijana, a time i cjevčica *1*. Budući da je vrijednost luminancije $L = 600$ knt definirana pri temperaturi skrućivanja platine T_{Pt}, platina se najprije rastali VF metodom (frekvencija struje oko 205 kHz), a zatim se VF struja polako oslabljuje. Stanje skrućivanja platine, dakle temperatura $T = T_{Pt}$, konstatira se time što L [odnosno $M(\lambda, T)$] ostaje stanovito vrijeme konstantna, iako se jakost VF struje smanjuje.

Platina *2* nalazi se u lončiću od torijeva oksida *3* (sl. G.17), koji je pokriven poklopcem *4* od isto takva materijala. Izrada lončića i poklopca od tog materijala vrlo je težak posao koji mogu obaviti samo specijalizirani laboratoriji. Lončić *3* i poklopac *4* okruženi su toplinskom izolacijom *5*, a to je prah torijeva oksida. Sve skupa nalazi se u kremenom loncu *6*, koji ima poseban poklopac *7*.

Toplinsko zračenje spektralne gustoće zračenja $M_\lambda(\lambda, T_{Pt})$ izlazi iz otvorenog kraja cjevčice *1* i pada na prizmu *P* koja totalno reflektira pristiglo zračenje što preko sistema leća *L* i zaslona *Z* odlazi u fotometar. Pri tom je koeficijent apsorpcije prizme i leća poznat s relativnom pouzdanošću oko 10^{-4}, a isto tako i promjer (5...6 mm) otvora kružnog zaslona *Z*.

Opisano savršeno zračilo naziva se *fotometrijsko pramjerilo* ili »primarni standard« (etalon; vidi odsječak A.5.3). Nazivi potječu odatle što se takvo zračilo upotrebljava samo za baždarenje električkih žarulja iste »temperature boje« (odlomak 2.5.3) koje služe kao »sekundarni standardi«, s kojima se zatim uspoređuju »tercijarni standardi« itd. Zbog skupoće opisanog savršenog zračila kao i zbog skupoće rada s njima (dugotrajan rad visokospecijaliziranih i iskusnih stručnjaka), takva zračila posjeduju samo veliki državni metrološki zavodi (odsječak A.7.2) te Međunarodni ured za mjere i utege u Sèvresu (o njemu vidi poglavlje A.7).

2.3.5. Veličina luminancija u objektivnoj fotometriji. U odlomku 2.1.2 opisali smo temelj fotometrije: ljudsko oko ocjenjuje jednakost doživljenog svjetlosnog utiska što ga proizvode dva uspoređivana izvora svjetla. Primjenjujući veličinu luminancija L (odlomak 2.3.1), možemo reći: oko utvrđuje jednakost luminancija dvaju uspoređivanih izvora svjetla (vizuelna fotometrija). I definicija veličine L i definicija njene jedinice $[L]_M$ = nit (odlomak 2.3.2) osnivaju se na međunarodno *standardiziranoj* krivulji spektralne osjetljivosti oka $V(\lambda)$, koja je, zajedno s drugim osnovama fotometrije, razmotrena u odsječku 2.2. Iz nabrojenih konstatacija logično slijedi zamisao *objektivne fotometrije:* fotometrijska mjerenja mogu se obavljati i bez neposrednog sudjelovanja ljudskog oka, ali objektivni (fizikalni) mjerni uređaj mora (teoretski) imati spektralnu osjetljivost na vidljivo zračenje $V(\lambda)$, dakle istu kao i oko. Praktički takvi objektivni uređaji imaju, međutim, *sličnu* krivulju spektralne osjetljivosti $F(\lambda)$, što, doduše, omogućuje postojanje objektivne fotometrije, ali pri mjerenju uzrokuje dodatne teškoće (vidi primjer na kraju ovog odlomka).

Objektivna fotometrija posjeduje nekoliko vrsta takvih mjernih uređaja, od kojih se najčešće upotrebljava *fotoćelija,* tj. električki element koji proizvodi električnu struju i kada ga ozračuje vidljivo zračenje. To je, dakle, ćelija koja jakošću nastale električne struje i izražava »svoj« svjetlosni utisak. Takva specijalna fotoćelija (engl. light-sensitive cell) ima vlastitu spektralnu osjetljivost $F(\lambda)$, koja je definirana analogno krivulji ljudskog oka $V(\lambda)$, ali u odnosu prema proizvedenoj struji i. Vezu između jakosti struje fotoćelije i, spektralne osjetljivosti fotoćelije $F(\lambda)$ i spektralne gustoće snage *kontinuiranog* zračenja $M_\lambda(\lambda)$ predstavlja jednadžba

$$i = C \int F(\lambda)\, M_\lambda(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = R_0 C \int F(\lambda)\, R(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{2.3-9}$$

Ovdje su C i $R_0 = M_\lambda(\lambda)/R(\lambda)$ konstante koje ne ovise ni o duljini vala λ zračenja ni o temperaturi T zračila. $R(\lambda) = M_\lambda(\lambda)/R_0$ je, dakle, »relativna spektralna gustoća snage zračenja«, a tu korisnu skraćenicu uveli smo zato da bismo sve potrebne veličine mogli prikazati u jedinstvenom dijagramu slike G.18. Radi usporedbe sa $F(\lambda)$, u slici smo nacrtali i krivulju $V(\lambda)$.

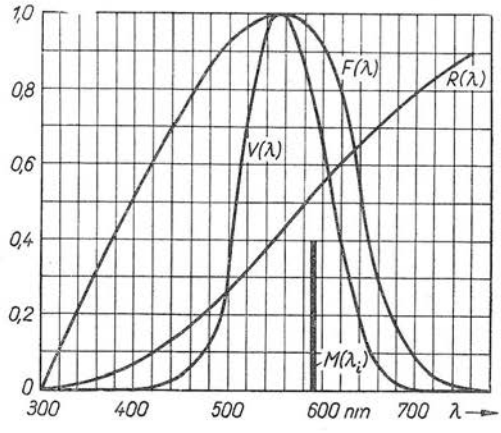
Tom istom kontinuiranom zračenju $M_\lambda(\lambda)$ ljudsko bi oko vizuelnom fotometrijom dodijelilo luminanciju (vidi odlomak 2.3.1)

$$L = K_\mathrm{m} \int V(\lambda)\, M\lambda(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = R_0\, K_\mathrm{m} \int V(\lambda) R(\lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{2.3-10}$$

Podjelom jednadžbe (2.3-9) sa (2.3-10) dobivamo odnos između luminancije L i pripadne struje i kojom fotoćelija reagira na isto zračenje $M_\lambda(\lambda)$, odnosno preciznije na $M_\lambda(\lambda, T)$:

$$k = \frac{L}{i} = \frac{K_\mathrm{m}}{C} \frac{\int V(\lambda)\, R(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda}{\int F(\lambda)\, R(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda}. \tag{2.3-11}$$

Pošto se svojevoljno odabere »količnik sličnosti« $k = L/i$, koji kaže kolika luminancija L odgovara struji i, može se izračunati konstanta C, čime je čitav sistem jednadžbi riješen i praktički upotrebljiv.



Sl. G.18. Uz načelo rada objektivne fotometrije. $F(\lambda)$ — krivulja spektralne osjetljivosti specijalne fotometrijske fotoćelije, $V(\lambda)$ — krivulja spektralne osjetljivosti ljudskog oka (standardizirano), $R(\lambda) = M_\lambda(\lambda)/R_0$ — relativna spektralna gustoća snage kontinuiranog zračenja, $M(\lambda_i)$ — gustoća snage monokromatskog zračenja pri duljini vala λ_i

Ako izvor svjetla proizvodi niz *diskretnih* (monokromatskih) zračenja gustoće snage $M(\lambda_i)$, luminancija L će u skladu s jednadžbom (2.2-6) ili (2.3-2) iznositi

$$L = K_m \Sigma V(\lambda_i) M(\lambda_i), \tag{2.3-12}$$

jer je $M(\lambda_i) = M_\lambda(\lambda_i)\Delta\lambda_i$. No ako onu istu fotoćeliju također izložimo opisanom nizu monokromatskih zračenja, ona će reagirati strujom

$$i_d = C \Sigma F(\lambda_i) M(\lambda_i). \tag{2.3-13}$$

Podjela jednadžbi (2.3-12,13) daje *nov* količnik sličnosti k_d koji povezuje L i i_d.

$$k_d = \left(\frac{L}{i}\right)_d = \frac{K_m}{C} \frac{\Sigma V(\lambda_i) M(\lambda_i)}{\Sigma F(\lambda_i) M(\lambda_i)}. \tag{2.3-14}$$

Ovaj k_d se razlikuje od količnika $k = L/i$ koji smo uveli pri mjerenju luminancije izvora svjetla s kontinuiranim spektrom. Iz $k_d \neq k$ proizlazi da se fotoćelija mora prebaždariti ako je bila namijenjena mjerenju kontinuiranog izvora, a sada je želimo upotrijebiti za mjerenje luminancije monokromatskog izvora svjetla.

Primjer. Spektralno osjetljiva fotoćelija i pripadni električki uređaji ugođeni su tako da mikroampermetar svojom strujom i ispravno pokazuje luminanciju toplinskog zračila koje se nalazi na temperaturi $T = 2900$ K. Podaci o ćeliji i zračenju navedeni su u tablici G-7 i dijagramu slike G.18. Kako se mora prebaždariti mikroampermetar uređaja da bi ispravno pokazivao luminanciju sijalice na natrijevu paru, koja glavninu zračenja odašilje pri duljini vala $\lambda = 590$ nm u vidljivom dijelu spektra?

Vrijednosti na skali mikroampermetra moraju se povećati k_d/k puta. Taj omjer naći ćemo međusobnom podjelom jednadžbi (2.3-14) i (2.3-11)

$$\frac{k_d}{k} = \frac{(L/i)_d}{L/i} = \frac{\Sigma V(\lambda_i) M(\lambda_i)}{\Sigma F(\lambda_i) M(\lambda_i)} \frac{\int F(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}{\int V(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda}. \tag{2.3-15}$$

Znakove sume u gornjoj jednadžbi možemo odbaciti, a $M(\lambda_i)$ kratiti, jer je u našem primjeru riječ samo o *jednom* monokromatskom zračenju duljine vala $\lambda_i = 590$ nm. Nemoguće je, međutim, analitički izračunati oba integrala, jer $F(\lambda)$ i $V(\lambda)$ nisu matematički zadani. Zbog toga integrale

Tablica G-7

Proračun primjera iz objektivne fotometrije

λ nm	$R(\lambda)$	$F(\lambda)$	$F(\lambda)R(\lambda)\Delta\lambda$ nm	$V(\lambda)$	$V(\lambda)R(\lambda)\Delta\lambda$ nm
1	2	3	4	5	6
300	0,005	0,00	0,000	0,0000	0,000
320	0,01	0,11	0,022	0,0000	0,000
340	0,02	0,22	0,088	0,0000	0,000
360	0,03	0,32	0,192	0,0000	0,000
380	0,05	0,42	0,420	0,0000	0,000
400	0,07	0,52	0,728	0,0004	0,000
420	0,10	0,62	1,240	0,004	0,008
440	0,14	0,71	1,988	0,023	0,064
460	0,18	0,80	2,880	0,060	0,216
480	0,22	0,87	3,828	0,139	0,612
500	0,27	0,93	5,020	0,323	1,745
520	0,33	0,97	6,510	0,710	4,680
540	0,39	1,00	7,800	0,954	7,442
560	0,45	1,00	9,000	0,995	8,955
580	0,50	0,98	9,800	0,870	8,700
600	0,56	0,92	10,302	0,631	7,070
620	0,61	0,76	9,276	0,381	4,650
640	0,66	0,52	6,864	0,175	2,310
660	0,71	0,31	4,402	0,061	0,866
680	0,76	0,17	2,584	0,017	0,258
700	0,80	0,08	1,280	0,0041	0,066
720	0,84	0,04	0,672	0,00105	0,017
740	0,87	0,02	0,348	0,00025	0,004
760	0,90	0,01	0,180	0,00006	0,000
		Zbroj	85,424	—	47,663

pretvaramo u sume (usporedi s odlomkom 2.2.5), pa jednadžba (2.3-15) u našem primjeru prelazi u oblik prikladan za računanje

$$\frac{k_d}{k} = \frac{V(\lambda_i)}{F(\lambda_i)} \frac{\Sigma F(\lambda)R(\lambda)\Delta\lambda}{\Sigma V(\lambda)R(\lambda)\Delta\lambda}. \qquad (2.3\text{-}16)$$

Sada nam još preostaje samo računanje. Iz tablica G-4 i G-7 saznajemo da je za $\lambda_i = 590$ nm

$$V(\lambda_i) = 0{,}757, \qquad F(\lambda_i) = 0{,}95.$$

Krivulju $R(\lambda) = M_\lambda(\lambda, T)/R_0$, gdje je R_0 proizvoljno odabrana konstanta, izračunamo pomoću Planckova zakona zračenja savršenog zračila pri temperaturi $T = 2900$ K. Jednadžba (2.3-3) daje nam podatke za $R(\lambda)$, koji su navedeni u stupcu 2 tablice G-7. Odaberemo li intervale duljina vala $\Delta\lambda = 20$ nm, za svaku vrijednost λ (stupac 1) dobivamo pripadnu vrijednost umnoška $F(\lambda)\cdot R(\lambda)\Delta\lambda$ (stupac 4). Analogno učinimo i sa $V(\lambda)R(\lambda)\Delta\lambda$ (stupac 6). Zbrajanjem svih umnožaka u stupcima 4 i 6 tablice G-7 dobivamo sume (prijašnje integrale)

$$\Sigma F(\lambda)R(\lambda)\Delta\lambda = 85{,}424 \text{ nm}; \qquad \Sigma V(\lambda)R(\lambda)\Delta\lambda = 47{,}663 \text{ nm}.$$

Uvrštenjem sva četiri podatka u izraz (2.3-16) slijedi traženi rezultat

$$\frac{k_d}{k} = \frac{0{,}757}{0{,}95} \frac{85{,}424 \text{ nm}}{47{,}663 \text{ nm}} = 1{,}43.$$

To znači da vrijednosti skale mikroampermetra treba pomnožiti sa 1,43 da bi on ispravno pokazivao luminanciju sijalice na natrijevu paru.

2.3.6. Nesigurnost reprodukcije savršenim zračilom. Gornja su nam razmatranja pokazala (vidi i odsječak 2.4 te poglavlje 3) da se čitava fotometrija oslanja na zračenje savršenog zračila opisanog u odlomku 2.3.4. To znači da o ponovljivosti tog zračenja direktno ovisi sigurnost reprodukcije svih ostalih fotometrijskih veličina, a time i jedinica. Pogledajmo zato o čemu sve ovisi nesigurnost reprodukcije savršenim zračilom.

Prvo je propisana čistoća platine u uređaju na slici G.17, jer o njoj ovisi da li je doista postignuta temperatura taljenja platine (vidi definiciju jedinice luminancije u odlomku 2.3.2). Ako je masa platine dovoljno velika, a udovoljeno je uvjetima koji se stavljaju na platinu za platinske otporničke termometre (vidi odlomak D.3.6.7), sa čistoćom nema poteškoća. Dalje, nesigurnost reprodukcije ovisi o tome da li se cjevčica savršenog zračila (sl. G.17) doista nalazi u potpunosti na temperaturi platine. Pri visokofrekventnom zagrijavanju lako može, naime, doći do pregrijavanja platine, a time postane temperatura cjevčice viša od propisane. Treći mogući uzrok nesigurne reprodukcije je odstupanje zračenja od 100 %-tnog »crnog zračenja« (odlomak 1.3.2); čitava se fotometrija, naime, oslanja na pretpostavku da je riječ o 100 %-tnom »crnom zračenju«. Još je jedan važan uzrok nesigurnosti reprodukcije savršenim zračilom: promjenljivost vrijednosti površine otvora koji zrači. Izmjere otvora (sl. G.17) mijenjaju se, naime, u toku reprodukcije, pa se zbog toga one moraju mjeriti prije, u toku i nakon eksperimenata.

Ako eksperimentatori imaju dovoljno iskustva, navedeni uzroci dovode do relativne nesigurnosti reprodukcije oko $\pm 1 \cdot 10^{-3}$. Pri tom se, dakako, pretpostavlja da je savršeno zračilo izrađeno doista savršeno, tj. u skladu s najnovijom tehnologijom i na temelju iskustva koje su stekle prethodne generacije metrologa u području fotometrije (vidi odsječak 3.6). Pri uspoređivanju zračenja savršenog zračila s mjerenim izvorima svjetla (odsječak 3.1) nastaju dodatne pogreške. Sve to zajedno uzrokuje da ni najprecizniji fotometrijski rezultati nisu pouzdaniji od oko $\pm (1... ...5) \cdot 10^{-3}$ (vidi i odlomak A.7.4.7 i kraj odlomka 3.6.6).

2.4. Pregled fotometrijskih veličina

2.4.1. Svjetlosna korisnost (vidljivost svjetla). Definicijske jednadžbe luminancije L (2.3-1,2) možemo napisati i u obliku

$$L = \int K(\lambda) M_\lambda(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda; \qquad L = \sum K(\lambda_i) M(\lambda_i) . \tag{2.4-1}$$

Lijeva jednadžba odnosi se na kontinuirani spektar zračenja, a desna na niz monokromatskih zračenja unutar vidljivog spektra. Iz usporedbe jednadžbi (2.4-1) s jednadžbama (2.3-1,2) proizlazi da je

$$K(\lambda) = K_\mathrm{m} V(\lambda), \quad \text{odnosno} \quad K(\lambda_i) = K_\mathrm{m} V(\lambda_i). \tag{2.4-2}$$

Veličinu $K(\lambda)$, koja se označuje i sa K_λ, većina autora naziva *svjetlosna korisnost*. Tome odgovaraju i nazivi u većini stranih jezika, što se može vidjeti i iz tablice G-5. Jedinu iznimku predstavljaju ruski naziv i drugi francuski naziv, koji možemo prevesti sa »vidljivost svjetla« odnosno »krivulja vidljivosti«.

Razmotrimo u nekoliko redaka veličinu $K(\lambda)$ i ustanovimo da joj naziv »svjetlosna korisnost« nipošto ne odgovara. U tu svrhu zamislimo da neki izvor svjetla zrači unutar vidljivog područja (tj. u području $V(\lambda) > 0$) jedno jedino monokro-

matsko zračenje $M(\lambda_1)$, dakle pri nekoj duljini vala λ_1. Za taj slučaj desna jednadžba (2.4-1) prelazi u oblik koji možemo zabilježiti ovako

$$K(\lambda_1)=\frac{L}{M(\lambda_1)}=K_m V(\lambda_1). \tag{2.4-3}$$

Desni nastavak ove jednadžbe dobili smo iz desne jednadžbe (2.4-2).

Iz netom nastalog izraza (2.4-3) razabiremo da $K(\lambda_1)$ možemo definirati kao omjer luminancije L i gustoće snage monokromatskog zračenja $M(\lambda_1)$ koje je uzrok toj luminanciji. Veličine L i $M(\lambda_1)$ su posve *raznorodne veličine*! Budući da se općenito pod nazivom »korisnost« (»stupanj korisnosti«, »stupanj djelovanja«) razumijeva omjer istovrsnih veličina (npr. korisnost u energetici, $\eta = P/P_d$ = korisna snaga/dovedena snaga), to je očito da je naziv veličine $K(\lambda)$ »svjetlosna korisnost« promašen. Ruski izraz »vidljivost svjetla« svakako je prikladniji, pogotovo što dobiva svoje značenje na temelju definicijske jednadžbe (2.4-3), pa, dakle, ne može doći ni do kakva nesporazuma. Stoga bi bilo korisno da se naziv »svjetlosna korisnost« eliminira i prihvati termin »vidljivost svjetla« ili eventualno neki bolji.

Iz desne jednadžbe (2.4-3) razabiremo da $K(\lambda)=K_m V(\lambda)$ možemo shvatiti kao umnožak »fotometrijskog ekvivalenta zračenja« K_m (vidi odlomak 2.3.3) i »spektralne osjetljivosti oka« $V(\lambda)$ (vidi odlomak 2.2.1). Budući da pri $V(\lambda)=1$ vrijedi $K(\lambda)=K_m$, mogli bismo K_m proglasiti »tjemenom vrijednošću veličine $K(\lambda)$«, jer naziv »fotometrijski ekvivalent« očito ima isti nedostatak kao i »svjetlosna korisnost«. Takvim razmatranjem dovodimo u sumnju i naziv »relativna svjetlosna korisnost« veličine $V(\lambda)=K(\lambda)/K_m=M(\lambda_0)/M(\lambda)$ (vidi odlomak 2.2.1), jer besmisleno je govoriti o nekakvoj korisnosti oka kad se u stvari misli na ono što dobro opisuje ruski izraz u tablici G-5: »vidljivost monokromatskog svjetla« ili »relativna vidljivost svjetla«.

Bojeći se nesporazuma s čitateljem, autor ove knjige nije se usudio upotrebljavati nazive »vidljivost svjetla«, »relativna vidljivost svjetla« itd., ali se ipak služi donekle prihvatljivim terminom »spektralna osjetljivost oka«, koji je našao i u jugoslavenskoj literaturi. Piscima s područja rasvjete i njoj susjednih grana preporučujemo da preispitaju postojeću terminologiju i stvore novu koja će ispravnije opisivati razmatrane pojave i pojmove.

Jedinica SI veličine $K(\lambda)$, tj. jedinica veličine »vidljivost svjetla«=»svjetlosna korisnost«, jednaka je jedinici $[K_m]_M = \mathrm{lm/W} = \mathrm{lumen/watt}$ koju smo imali u odlomku 2.3.3. Podrobnije se o jedinici $\mathrm{lm} = \mathrm{nt\,sr\,m^2}$ raspravlja u odlomku 3.2.3.

2.4.2. Svjetlosni tok. Definicijska jednadžba *fotometrijske* veličine luminancija L (2.3-2) pokazuje da L nastaje zbrajanjem umnožaka *fizikalne* veličine $M(\lambda_i)$ sa $K(\lambda_i)=K_m V(\lambda_i)$. Pri tom je $M(\lambda_i)$ gustoća snage monokromatskog zračenja pri duljini vala λ_i, a $V(\lambda_i)$ spektralna osjetljivost oka pri toj istoj duljini vala. Za kontinuirani spektar zračenja zbroj prelazi u integral, što imamo zabilježeno u jednadžbi (2.3-1). *Taj princip množenja vrijedi i za ostale fotometrijske veličine.* Tako je, na primjer, *svjetlosni tok* Φ definiran u slučaju niza monokromatskih zračenja jednadžbom

$$\Phi = \Sigma K_i P_i = K_m \Sigma V_i P_i,$$

koja u slučaju kontinuiranog spektra zračenja (npr. zračenje zagrijanog tijela) prelazi u oblik

$$\Phi = \int K(\lambda) P_\lambda \, d\lambda = K_m \int V(\lambda) P_\lambda \, d\lambda. \tag{2.4-4}$$

Pri tom je $P_\lambda = P_\lambda(\lambda) = \mathrm{d}P(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$ spektralna snaga zračenja (vidi redni broj 9 u tablici G-2), a P_1 snaga koju zračilo odašilje pri duljini vala λ_1.

Infinitezimalnu geometrijsku interpretaciju zračenja imali smo u odsječku 1.2, a pri tom nam je bila od pomoći i slika G.2. U tamošnjoj jednadžbi (1.2-3) zabilježili smo vezu između sudjelujućih veličina. Tu vezu možemo još staviti u ovisnost o λ, pa dobivamo

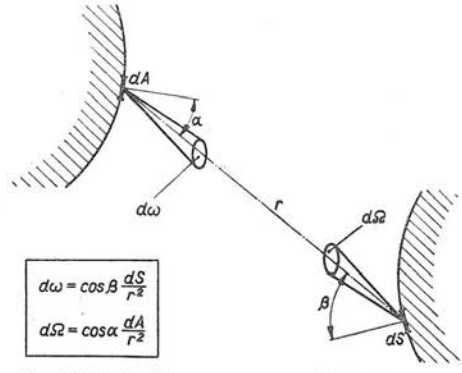
$$P_\lambda = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda} = \int\int M_\lambda \cos\alpha \,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\omega,$$

gde je $\mathrm{d}A$ odašiljačka površina, a $\mathrm{d}\omega$ odašiljački prostorni kut (vidi sliku G.19, koja predstavlja udružene slike G.2a, b). Uvrštenjem ovog izraza za P_λ u definicijsku jednadžbu (2.4-4) slijedi

$$\Phi = \int\int\int K(\lambda) M_\lambda \cos\alpha \,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\omega = \int\int L \cos\alpha \,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\omega, \qquad (2.4\text{-}5)$$

jer je luminancija L zračila s kontinuiranim spektrom definirana izrazom (2.3-1). Gornju jednadžbu možemo napisati i u obliku $\mathrm{d}^2\Phi = L\cos\alpha\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\omega$. Ako ovaj izraz usporedimo sa $\mathrm{d}^2P = M\cos\alpha\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\omega$ iz tablice G-2 (redak 12), možemo zaključiti da je geometrija fotometrije ista kao i geometrija opće teorije zračenja (odsječak 1.2) ako M nadomjestimo sa L, a P sa Φ.

Prema tome fotometrijska veličina svjetlosni tok Φ *analogna* je snazi zračenja P, isto kao što je luminancija L *analogna* gustoći snage zračenja M. Uz tu analogiju postignuta je *identičnost geometrijske interpretacije*. To smo mogli i očekivati na temelju definicijskih jednadžbi (2.3-1) i (2.4-4), koje smo zajedno s definicijama ostalih fotometrijskih veličina svrstali u tablicu G-8. Usporedba fotometrijskih i fizikalnih veličina još je preglednije prikazana u tablici G-9.



Sl. G.19. Podloga za geometrijsku interpretaciju odnosa među fotometrijskim veličinama. Odnosi su potpuno analogni onima na slici G.2, koja vrijedi za opću teoriju zračenja u čitavom spektru zračenja

Jedinica svjetlosnog toka Φ u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je lumen (kratica: lm). Njena veza s jedinicom SI nit (kratica: nt) jest $\mathrm{lm} = \mathrm{nt}\cdot\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2$. O odnosima među spomenutim fotometrijskim jedinicama raspravlja se u odsječku 3.2.

2.4.3. Rasvijetljenost (osvijetljenost) je fotometrijska veličina definirana omjerom svjetlosnog toka Φ i površine S na koju taj svjetlosni tok dopire iz nekog izvora svjetla. U diferencijalnom obliku definicija *rasvijetljenosti* E dakle glasi

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S}. \qquad (2.4\text{-}6)$$

Prema tome se veličina E odnosi na plohu koja *dobiva* svjetlo ($\mathrm{d}S$ na slici G.19). Nasuprot tome luminancija L se odnosi na plohu koja *odašilje* svjetlo ($\mathrm{d}A$).

Vezu između rasvijetljenosti E i luminancije L možemo uspostaviti preko svjetlosnog toka Φ: možemo zamisliti da na odašiljačkoj plohi ($\mathrm{d}A$) luminancija L stvara

Tablica G-8

Sistematika prijelaza od fizikalnih na fotometrijske veličine

Red. broj	Veličina	Jednadžba	Jedinice SI
		Linijski spektar (monokromatsko zračenje)	
1	luminancija	$L = \Sigma K_i M_i = K_m \Sigma V_i M_i$	$\mathrm{nt} = \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2}$
2	svjetlosni tok	$\Phi = \Sigma K_i P_i = K_m \Sigma V_i P_i$	$\mathrm{lm} = \mathrm{nt}\cdot\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2 = \mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}$
3	rasvijetljenost	$E = \Sigma K_i G_i = K_m \Sigma V_i G_i$	$\mathrm{lx} = \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}$
4	svjetlosna jakost	$I = \Sigma K_i J_i = K_m \Sigma V_i J_i$	$\mathrm{cd} = \mathrm{nt}\cdot\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{sr}}$
5	svjetloća	$R = \Sigma K_i H_i = K_m \Sigma V_i H_i$	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{nt}\cdot\mathrm{sr} = \frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}$
		Kontinuirani spektar	
1	luminancija	$L = \int K(\lambda) M_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = K_m \int V(\lambda) M_\lambda \,\mathrm{d}\lambda$	$\mathrm{nt} = \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2}$
2	svjetlosni tok	$\Phi = \int K(\lambda) P_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = K_m \int V(\lambda) P_\lambda \,\mathrm{d}\lambda$	$\mathrm{lm} = \mathrm{nt}\cdot\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2 = \mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}$
3	rasvijetljenost	$E = \int K(\lambda) G_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = K_m \int V(\lambda) G_\lambda \,\mathrm{d}\lambda$	$\mathrm{lx} = \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}$
4	svjetlosna jakost	$I = \int K(\lambda) J_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = K_m \int V(\lambda) J_\lambda \,\mathrm{d}\lambda$	$\mathrm{cd} = \mathrm{nt}\cdot\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{sr}}$
5	svjetloća	$R = \int K(\lambda) H_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = K_m \int V(\lambda) H_\lambda \,\mathrm{d}\lambda$	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{nt}\cdot\mathrm{sr} = \frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}$

svjetlosni tok Φ, koji na rasvijetljenoj plohi ($\mathrm{d}S$) uzrokuje postojanje fotometrijske veličine rasvijetljenost E. Geometrijsku vezu između Φ i L opisuje jednadžba (2.4-5). Ako u nju stavimo očigledne geometrijske odnose sa slike G.19

$$\mathrm{d}\omega = \cos\beta \,\mathrm{d}S/r^2, \qquad \mathrm{d}\Omega = \cos\alpha \,\mathrm{d}A/r^2, \tag{2.4-7}$$

a te iste odnose imali smo i u odsječku 1.2 (vidi i sliku G.2), nakon kraćeg računanja dobivamo

$$\Phi = \iint L \cos\beta \,\mathrm{d}\Omega \,\mathrm{d}S.$$

Diferenciramo li ovaj izraz po $\mathrm{d}S$, na temelju definicijske jednadžbe (2.4-6) slijedi veza između luminancije L izvora svjetla i rasvijetljenosti E ozračene plohe

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} = \int L \cos\beta \,\mathrm{d}\Omega. \tag{2.4-8}$$

Usporedimo li ovu jednadžbu s izrazom (1.2-4), uviđamo da se analogija fotometrijskih i fizikalnih veličina nastavlja: rasvijetljenosti E odgovara ozračenost G, a luminanciji L gustoća snage zračenja M. Tu analogiju imamo zabilježenu i u tablici G-9, a prijelaz fizikalna veličina → fotometrijska veličina, po uzoru na jednadžbe (2.3-1,2), naveden je u tablici G-8.

Tablica **G-9**

Usporedbeni prikaz nekih veličina i pripadnih jedinica teorije zračenja i fotometrije

Red. broj	Fizikalne veličine			Fotometrijske veličine		
	Simbol	Veličina	Jedinica SI	Simbol	Veličina	Jedinice SI
1	M	gustoća snage zračenja	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2}$	L	luminancija	$\mathrm{nt}=\frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2}$
2	P	snaga zračenja	W	Φ	svjetlosni tok	$\mathrm{lm}=\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}=\mathrm{nt}\cdot\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2$
3	G	ozračenost	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	E	rasvijetljenost	$\mathrm{lx}=\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}$
4	J	jakost zračenja	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}$	I	svjetlosna jakost	$\mathrm{cd}=\mathrm{nt}\cdot\mathrm{m}^2=\mathrm{lm}\cdot\mathrm{sr}$
5	H	emisijska moć	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	R	svjetloća	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2}=\mathrm{nt}\cdot\mathrm{sr}=\frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}$

Tablica **G-10**

Stariji definicijski niz fotometrijskih veličina i njegova usporedba s definicijama veličina teorije zračenja

Red. broj	Fizikalne veličine			Fotometrijske veličine		
	Simbol	Jednadžba	Jedinica SI	Simbol	Jednadžba	Jedinice SI
1	J	$J=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\omega}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}$	I	–	cd
2	P	–	W	Φ	$\mathrm{d}\Phi=I\,\mathrm{d}\omega$	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}=\mathrm{lm}$
3	M	$M=\frac{\mathrm{d}^2P}{\cos\alpha\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\omega}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2}$	L	$L=\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\cos\alpha\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\omega}$	$\frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2}=\mathrm{nt}=\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m}^2}$
4	G	$G=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	E	$E=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S}$	$\frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}=\mathrm{lx}=\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2}$
5	H	$H=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}A}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	R	$R=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A}$	$\frac{\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2}$

Jedinica rasvijetljenosti E u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) je lux (kratica: lx). U skladu s jednadžbom (2.4-7) je $\mathrm{lx}=\mathrm{lm}/\mathrm{m}^2$, jer je lm = lumen jedinica svjetlosnog toka. Podrobnije se te jedinice razmatraju u poglavlju 3.

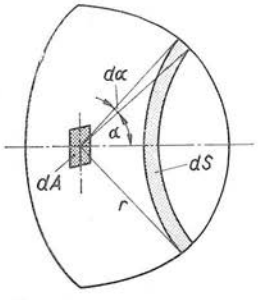
Primjer 1. Izračunajmo koliko iznosi gustoća svjetlosnog toka $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A$ na površini *savršeno difuznog izvora svjetla* ako je njegova luminancija $L=600$ knt. Za savršeno difuzni izvor karakteristična je činjenica $L=\mathrm{const}$, bez obzira na kut α pod kojim ga promatramo (sl. G.20).

Zadatak ćemo najprije riješiti posve općenito, tj. ustanovit ćemo kakva veza postoji između L i $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A$. Da bismo traženu vezu mogli izračunati, nacrtali smo iz $\mathrm{d}A$ polukuglu radijusa r (sl. G.20). Diferencijal svjetlosnog toka $\mathrm{d}\Phi$ koji odašilje savršeno difuzna površina $\mathrm{d}A$ izračunat ćemo pomoću jednadžbe (2.4-8) u koju ćemo namjesto prostornog kuta prijemne površine uvrstiti $\mathrm{d}\Omega = \cos\alpha\,\mathrm{d}A/r^2$. Svjetlosni tok $\mathrm{d}\Phi$ iz $\mathrm{d}A$ prolazi na polukugli kroz diferencijal površine (prsten)

$$\mathrm{d}S = 2\pi r \sin\alpha \cdot r\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi r^2 \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Za bilo koju tačku na površini polukugle je kut β iz jednadžbe (2.4-8) jednak nuli. To znači da je $\cos\beta = 1$. Sa svim ovim podacima jednadžba (2.4-8) prelazi u oblik prikladan za izračunavanje veze između L i $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A$:

$$\mathrm{d}\Phi = \int L\cos\beta\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}S = L\int \cos\alpha\,\frac{\mathrm{d}A}{r^2}\,2\pi r^2 \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$



Sl. G.20. Uz proračun veze svjetloće R s luminancijom L savršeno difuznog izvora svjetla

Granice integrala su $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi/2$ (vidi sl. G.20). Od gornjeg izraza računanjem dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A} = 2\pi L\int \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \pi L.$$

Prema tome jednadžba koja povezuje L i $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A$ savršeno difuznog izvora svjetla glasi:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A} = R = \pi L.$$

Veličinu $R = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A$, gdje je $\mathrm{d}A$ površina koja *odašilje* svjetlosni tok $\mathrm{d}\Phi$ u poluprostor, nazvali smo *svjetloća*. Naziv te veličine na pet drugih jezika sadrži tablica G-5.

U našem primjeru zadana je luminancija $L = 600$ knt $= 600$ kilonit $= 6\cdot 10^5$ nt (o jedinici luminancije nit vidi odsječak 2.3). Prema tome svjetloća R u tom slučaju iznosi

$$R = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A} = \pi L = \pi\cdot 6\cdot 10^5\ \mathrm{nt} = 1{,}885\,\frac{\mathrm{Mlm}}{\mathrm{m}^2}.$$

Ovdje je M = mega $= 10^6$ (vidi tablicu A-1).

Zapravo nam je računanje dalo $R = 1{,}885\cdot 10^6$ nt, ali to je nepotpun rezultat, jer prema definiciji svjetloće $R = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A$ je očito da jedinica SI veličine »svjetloća« mora biti $[R]_\mathrm{M} = \mathrm{lm/m^2}$. To znači da π u jednadžbi $R = \pi L$ u stvari predstavlja prostorni kut π radijana, jer prema izvođenjima u poglavlju 3 vrijedi: $\mathrm{lm} = \mathrm{nt}\cdot\mathrm{sr}\cdot\mathrm{m^2}$ (o jedinici prostornog kuta steradijan $= \mathrm{sr} \equiv 1$ i o poteškoćama koje ona donosi vidi odlomke G.1.1.1 i B.1.6.1). Prema tome naš račun treba da glasi

$$R = \pi\,\mathrm{sr}\cdot 6\cdot 10^5\ \mathrm{nt} = 1{,}885\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2} = 1{,}885\,\frac{\mathrm{Mlm}}{\mathrm{m}^2}.$$

Ovdje je još korisno napomenuti ovo: u tablici G-9 vidimo da je fotometrijska veličina »svjetloća« R analogon fizikalne veličine »emisijska moć« H iz opće teorije zračenja. U odlomku 1.1.3 nalazimo i jednadžbu (1.1-9) $H = \pi M$, koja je analogna netom izvedenom odnosu $R = \pi L$.

Primjer 2. Ravna kružna svjetleća ploča A rasvjetljuje plohu S koja joj je paralelna (sl. G.21). Udaljenost između obiju ploha je q, a luminancija L svjetleće ploče je konstantna. Izračunajmo: 1) rasvijetljenost u tački T ako je polumjer svjetleće ploče R, 2) rasvijetljenost ako je ploča A neizmjerno velika.

Proračun ćemo obaviti pomoću jednadžbe (2.4-8), koju uz pomoć desne jednadžbe (2.4-7) možemo napisati u diferencijalnom obliku $\mathrm{d}E = L\cos\beta\,\mathrm{d}\Omega = L\cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{d}A/r^2$. Iz slike G.21 razabiremo da je površina elementarnog prstena na svjetlećoj ploči $\mathrm{d}A = 2\pi a\,\mathrm{d}a$, te da je $\vartheta = \alpha = \beta$ i $\cos\vartheta = q/r$. S ovim podacima dobivamo

$$\mathrm{d}E = L\,\frac{q^2}{r^2}\,\frac{2\pi a\,\mathrm{d}a}{r^2} = \pi L q^2\,\frac{2a\,\mathrm{d}a}{r^4}.$$

Budući da je $r^2 = a^2 + q^2$, od gornje jednadžbe integriranjem od granice $a = 0$ do $a = R$ dobivamo rasvijetljenost E u tački T izazvanu paralelnom svjetlećom pločom polumjera R

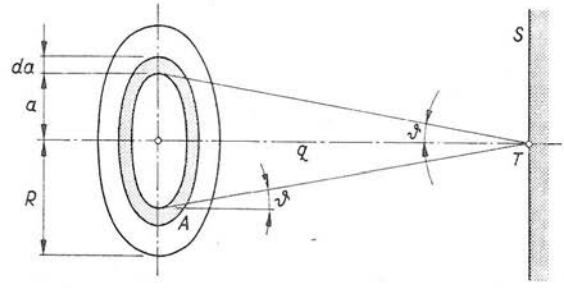
$$E = \int \mathrm{d}E = \pi L q^2 \int \frac{2a\,\mathrm{d}a}{(a^2+q^2)^2} = \pi L \frac{R^2}{R^2+q^2}.$$

Time smo riješili prvi dio zadatka.

Odgovor na drugi dio zadatka lako dobivamo ako u gornju jednadžbu stavimo $R \to \infty$. Slijedi

$$E = \pi L,$$

tj. rasvijetljenost u slučaju $R \to \infty$ ne ovisi o udaljenosti q (sl. G.21), već samo o luminanciji L neizmjerno velike ploče. Zanimljivo je naglasiti da je ovdje rasvijetljenost $E = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S = \pi L$ ista kao i svjetloća $R = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A = \pi L$ savršeno difuznog izvora svjetla (vidi primjer 1).



Sl. G.21. Uz proračun rasvijetljenosti E u tački T nasuprot svjetleće plohe A paralelne sa S

2.4.4. Svjetlosna jakost je najstarija fotometrijska veličina definirana omjerom svjetlosnog toka Φ i prostornog kuta ω u koji izvor svjetla odašilje tok Φ. U diferencijalnom obliku definicija *svjetlosne jakosti* I glasi

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega}. \tag{2.4-9}$$

Svjetlosna jakost I je, dakle, opet veličina koja karakterizira *izvor* svjetla. Vezu veličine I s luminancijom L, koja također karakterizira izvor svjetla, uspostavit ćemo tako da izraz (2.4-5) diferenciramo po ω, pa uvrštenjem u (2.4-9) odmah dobivamo

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega} = \int L \cos\alpha\,\mathrm{d}A. \tag{2.4-10}$$

Izraz (2.4-10) možemo napisati u diferencijalnom obliku $\mathrm{d}I = L\cos\alpha\,\mathrm{d}A$; ako to usporedimo sa (1.2-3) u odsječku 1.2, vidimo da je fotometrijska veličina »svjetlosna jakost« I analogna fizikalnoj veličini »jakost zračenja« $J = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\omega$. Za luminanciju L smo, naime, već prije utvrdili da je analogna veličini »gustoća snage zračenja« M. Ta analogija lijepo se vidi i iz tablica G-8,9 (pod rednim brojem 4). Prema tome za geometrijsku interpretaciju fotometrijskih veličina izravno vrijede slike G.1...G.5, kojima smo ilustrirali izlaganja o elektromagnetskim zračenjima bez obzira na njihovu vidljivost.

Prirodno je stoga da u fotometriji imamo zakon analogan jednadžbi (1.2-8) iz odsječka 1.2. Do tog izraza možemo doći vrlo lako ako se poslužimo jednadžbom (2.4-6) i uvrstimo je u (2.4-9):

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega} = E\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\omega}.$$

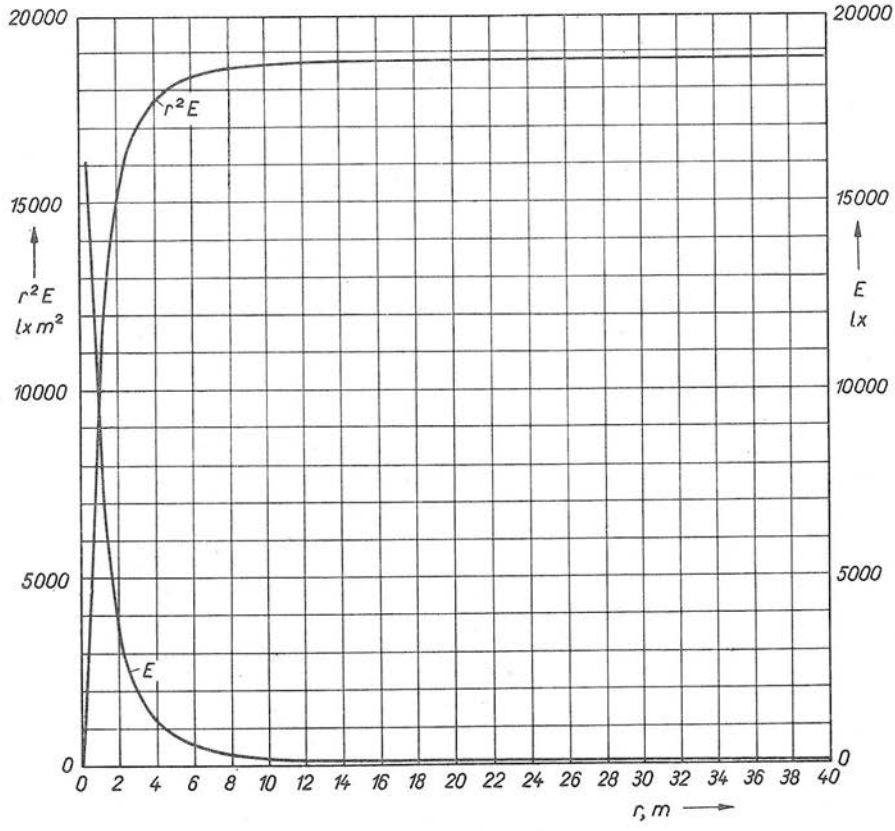
Omjer $\mathrm{d}S/\mathrm{d}\omega = r^2/\cos\beta$ već smo imali u odsječku 1.2 (vidi i slike G.2,19). Prema tome iz gornje jednadžbe proizlazi

$$I = \frac{1}{\cos\beta} r^2 E \quad \text{ili} \quad E = \frac{I}{r^2}\cos\beta, \tag{2.4-11}$$

što je potpuno analogno izrazu (1.2-6) u odsječku 1.2.

Primjenu zakona (2.4-11) možemo ilustrirati slikom G.5a (odsječak 1.2), koja sada prikazuje odnose među fotometrijskim veličinama u *diferencijalnom* obliku: izvor svjetla površine dA odašilje svjetlosni tok $d\Phi$ u prostorni kut $d\omega$. Ako se pod kutom β_1 na udaljenosti r_1 nalazi rasvijetljena površina dS_1, a na udaljenosti r_2 pod kutom β_2 površina dS_2, primjena jednadžbe (2.4-11) na ova dva slučaja glasi

$$E_1 = \cos\beta_1 I/r_1^2, \qquad E_2 = \cos\beta_2 I/r_2^2.$$



Sl. G.22. Ilustracija odstupanja od zakona $r^2E = \text{const}$ prema podacima koje je izmjerio *W. B. Boast*

Pri tom je $I = \text{const}$, jer je svjetlosna jakost $I = d\Phi/d\omega$ konstantna zbog istog svjetlosnog toka $d\Phi$ i istog prostornog kuta $d\omega$. Iz gornjih dviju relacija slijedi

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2.$$

Za slučaj $\beta_1 = \beta_2$ ova jednadžba prelazi u oblik vrlo dobro poznat u fotometriji

$$r_1^2 E_1 = r_2^2 E_2 = \ldots = r^2 E = \text{const.} \qquad (2.4\text{-}12)$$

U tehnici rasvjete jednadžbe (2.4-11,12) primjenjuju se na *stvarne prilike*, a ne na diferencijale površine, svjetlosnog toka itd. No pri tom te jednadžbe vrijede

uz stanovito *ograničenje*: izmjere (dimenzije) izvora svjetla površine A (sl. G.5b) moraju biti malene u odnosu prema udaljenosti r izvora od rasvijetljene površine S. Ako tom uvjetu nije zadovoljeno, dobivaju se *pogrešni* rezultati. Dokaz tome vidimo na slici G.22, koja prema mjerenjima *W. B. Boasta* prikazuje ovisnost izmjerene rasvijetljenosti E i izračunatog umnoška r^2E o udaljenosti r. Vrijednosti krivulje E snimljene su duž simetrale slike G.5b, a pri tom je bilo $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Na temelju takvih eksperimentalnih rezultata u tehnici rasvjete smatra se, prema *W. B. Boastu*, da zakoni (2.4-11,12) gube upotrebljivost ako najveća izmjera izvora svjetla nije barem pet puta manja od udaljenosti r. Na primjer, izmjere fluorescentne sijalice priključne snage 40 W su tolike, kako navodi *P. Moon*, da za njih zakon (2.4-12) vrijedi tek na udaljenosti 10 metara i više!

Činjenica iznesena na slici G.22 ne bi trebalo da nas iznenadi. Na početku razmatranja geometrije teorije zračenja (odlomak 1.1.1) izričito smo, naime, naglasili da su »izmjere pločice gotovo zanemarive prema udaljenosti r ... «. Na toj pretpostavci izveden je zatim čitav sistem jednadžbi geometrije teorije zračenja, a time i fotometrije.

Jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličine svjetlosna jakost I je candela (izgovara se: kandéla, s naglaskom na drugom slogu):

$$[I]_M = \text{candela} = \text{cd} = \text{nt} \cdot \text{m}^2.$$

Podrobnije se o jedinici cd i njenoj vezi s ostalim jedinicama SI fotometrijskih veličina raspravlja u odlomku 3.2.5.

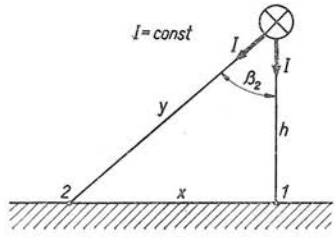
Primjer. Malen tačkasti izvor svjetla zavješen je na visini $h = 8$ m iznad poda. Karakteristika svjetlosnog izvora upravo je idealna: njegova svjetlosna jakost I ista je u svim smjerovima. Mjerenjem je ustanovljeno da je rasvijetljenost E_1 u tački *1* (sl. G.23) 10 puta veća od rasvijetljenosti E_2 u tački *2*. Kolika je udaljenost x između te dvije tačke?

Rješenje će nam dati lijeva jednadžba (2.4-11). Budući da je svjetlosna jakost $I = \text{const}$ neovisna o kutu rasvjetljavanja β, možemo napisati

$$I = h^2 E_1 = y^2 E_2 / \cos\beta_2.$$

Ovdje smo već uzeli u obzir da za tačku *1* vrijedi izraz $\cos\beta_1 = 1$. Budući da je $\cos\beta_2 = h/y$, iz gornje jednadžbe dobivamo $\cos\beta_2 = (E_2/E_1)^{1/3}$. Zadano je $E_2/E_1 = 0{,}1$, pa je dakle $\cos\beta_2 = 0{,}464$.

S druge je strane $x = h \operatorname{tg}\beta_2$ (sl. G.23). Budući da vrijednosti $\cos\beta_2 = 0{,}464$ odgovara $\operatorname{tg}\beta_2 = 1{,}907$, iz navedene jednadžbe odmah dobivamo



Sl. G.23. Uz proračun udaljenosti x na temelju izmjerenog omjera rasvijetljenosti $E_1/E_2 = 10$

$$x = 1{,}91\,h = 1{,}91 \cdot 8 \text{ m} = 15{,}28 \text{ m},$$

tj. udaljenost tačke *1* od *2* je 1,91 puta veća od visine zavješenja h.

2.4.5. Pregled fotometrijskih veličina. U prošla četiri odlomka i u odsječku 2.3 razmotrili smo šest fotometrijskih veličina (L, K, Φ, R, E, I) koje se najčešće pojavljuju u fotometriji i rasvjetnoj tehnici. U tablici G-8 pokušali smo prikazati suštinu sistematike prijelaza od fizikalnih veličina na te fotometrijske veličine u skladu s ulogom i mjestom koje danas u fotometriji ima međunarodno standardizirana krivulja $V(\lambda)$, tj. spektralna osjetljivost ljudskog oka (vidi odlomak 2.2.1). Analogiju fizikalnih i fotometrijskih veličina, nastalih na opisani način, prikazali smo u tablici G-9. S time je u skladu slijed definicija fotometrijskih veličina:

Tablica **G-11**

Pregled fotometrijskih veličina i jedinica

Red. br.	Veličina	Oznaka	Jednadžba	Jedinica SI	Mješovita jedinica
1	Površina zračila	A	Vidi slike G.2, 3, 19	m^2	cm^2
2	Rasvijetljena površina	S	Vidi slike G.1, 2, 3, 19	m^2	cm^2
3	Odašiljački kut	α	Vidi slike G.2, 19	rad	°, ′, ″
4	Kut rasvjetljivanja	β	Vidi slike G.2, 19	rad	°, ′, ″
5	Odašiljački prostorni kut	ω	$d\omega = \cos\beta\, dS/r^2$	sr	—
6	Prostorni kut osvjetljivanja	Ω	$d\Omega = \cos\alpha\, dA/r^2$	sr	—
7	Količina svjetla	Q	$dQ = \Phi\, dt$	lm s	lm h
8	Svjetlosni tok	Φ	$d^3\Phi = K_m V_\lambda M_\lambda \cos\alpha\, dA\, d\omega\, d\lambda$	lm	—
9	Svjetlosna jakost	I	$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$	cd	—
10	Luminancija	L, B	$L = \frac{d^2\Phi}{\cos\alpha\, dA\, d\omega} = K_m \int V_\lambda M_\lambda\, d\lambda$	nt	sb
11	Svjetloća	R	$R = \frac{d\Phi}{dA} = \int L \cos\alpha\, d\omega$	$\frac{lm}{m^2}$	—
12	Rasvijetljenost	E	$E = \frac{d\Phi}{dS} = \int L \cos\beta\, d\Omega$	lx	phot
13	Ekspozicija	e	$de = E\, dt = dQ/dS$	lx s	—

Red. br.	Veličina	Oznaka	Jednadžba	Jedinica SI	Mješovita jedinica
14	Spektralna osjetljivost oka, relativna vidljivost	V_λ, $V(\lambda)$	Međunarodno standardizirano (vidi tablicu G-4 i sliku G.11)	1	—
15	Svjetlosna korisnost, vidljivost svjetla	K_λ, $K(\lambda)$	$K_\lambda = \frac{\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}P/\mathrm{d}\lambda} = K_\mathrm{m} V_\lambda$	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}$	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{erg/s}}$
16	Fotometrijski ekvivalent zračenja	K_m	$K_\mathrm{m} = \frac{K_\lambda}{V_\lambda} = (K_\lambda)_\mathrm{max} = K_\lambda(\lambda = 555\ \mathrm{nm})$	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}$	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{erg/s}}$
17	Svjetlosni ekvivalent	M	$M = \frac{1}{K_\mathrm{m}}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{lm}}$	$\frac{\mathrm{erg/s}}{\mathrm{lm}}$
18	Optička korisnost	η_0	$\eta_0 = \int_1^2 P_\lambda \mathrm{d}\lambda : \int_0^\infty P_\lambda \mathrm{d}\lambda$	1	—
19	Vizuelna korisnost vidljivog zračenja	η_v	$\eta_\mathrm{v} = \int_1^2 V_\lambda P_\lambda \mathrm{d}\lambda : \int_1^2 P_\lambda \mathrm{d}\lambda$	1	—
20	Vizuelna korisnost sveukupnog zračenja	η_vs	$\eta_\mathrm{vs} = \int_1^2 V_\lambda P_\lambda \mathrm{d}\lambda : \int_0^\infty P_\lambda \mathrm{d}\lambda = M \frac{\Phi}{P}$	1	—
21	Korisnost izvora svjetla	η	$\eta = \frac{\Phi}{P_0} = K_\mathrm{m} \int V_\lambda \eta_\lambda \mathrm{d}\lambda$	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}$	$\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{erg/s}}$

Napomena. Za veličine navedene pod rednim brojevima 18, 19 i 20 granice integrala znače: 1 i 2 označuju granice međunarodno standardizirane krivulje spektralne osjetljivosti oka (vidi tablicu G-4), a 0 i ∞ označuju $\lambda = 0$ i $\lambda = \infty$. Veličina η_λ u jednadžbi pod brojem 21 je »spektralna fizikalna korisnost« (vidi tablicu G-2), a P_0 snaga dovedena zračilu.

polazi se od luminancije L i njene jedinice nit (vidi odsječak 2.3); pomoću nje se klasičnom geometrijskom interpretacijom dolazi do svjetlosnog toka Φ itd.

Još nedavno je slijed definicija fotometrijskih veličina i jedinica bio drukčiji, otprilike onakav kako to vidimo u tablici G-10. Slijed definicija započinjao je, naime, sa »svjetlosnom jakošću« I, pomoću koje je definiran, na primjer, svjetlosni tok Φ itd. Razlog je tome bio taj što je propisanim svjetlosnim standardima (normalama, etalonima, pramjerilima), izvedenima u obliku uljnih ili plinskih »svijeća« (vidi odsječak 3.6), bila definirana stanovita vrijednost svjetlosne jakosti I, a ne neke druge veličine, npr. luminancije. Ostatke tog nazora osjećamo i danas; npr. službeni slijed definicija fotometrijskih jedinica započinje sa cd/m^2 (vidi odsječak 3.2), iako je prirodniji onaj kojim smo se poslužili u odsječku 2.3.

Navedene opaske potrebne su uz tablicu G-11 koja u duhu starog slijeda definicija sadrži pregled onih fotometrijskih veličina koje se najčešće pojavljuju u rasvjetnoj tehnici. Mnoge veličine u toj tablici nisu ni spomenute, npr. pojedini koeficijenti propuštanja svjetla kroz tvari, koeficijenti refleksije itd. Smatrali smo, naime, da takve posebne veličine mogu zanimati samo specijaliste sa stanovišta optike ili rasvjetnog inženjerstva, a to oni mogu proučiti u specijaliziranim publikacijama. Osim toga, te veličine, karakteristične za sredstva i načine na koji svjetlo kroz ta sredstva prolazi, pretežno su čisti brojevi koji ne ovise o izboru jedinica i o načinu njihove reprodukcije (da li npr. savršenim zračilom ili npr. uređajem za reprodukciju »Hefnerove svijeće«).

U vezi s tablicom G-11 želimo istaći još dvije stvari. Prvo su četiri »korisnosti« (drugi nazivi su: »stupanj korisnosti«, »stupanj djelovanja«) navedene pod brojevima 18...21. Ove veličine rabe se u optici i rasvjetnoj tehnici, a terminologija je vrlo šarena. Zbog toga smo naveli dulje, opisne termine koji uz egzaktne matematičke definicije sigurno neće dopustiti da dođe do nesporazuma. Druga stvar je nekoliko fotometrijskih jedinica koje smo svrstali u stupcu »mješovita jedinica«. Tamo su navedene one jedinice koje se još ponegdje nalaze u današnjoj literaturi, iako je Međunarodni sistem jedinica (SI) u fotometriji na snazi gotovo 20 godina. O jedinicama stilb = sb i phot (zajedno s nizom drugih jedinica) govori se u poglavlju 3. U spomenutom stupcu tablice G-11 nisu navedene razne jedinice svjetlosne jakosti koje su se u prošlosti upotrebljavale. One su podrobno razmotrene u odsječku 3.6.

2.5. Novije koncepcije fotometrijskih veličina. Temperatura boje

2.5.1. Potreba revizije postojeće koncepcije. S prošlim odsječkom 2.4 i tablicom G-11 mogli bismo mirne duše završiti pregled građenja fotometrijskih veličina i opisa međusobnih odnosa fotometrijskih veličina u obliku veličinskih jednadžbi. Taj pregled je dovoljan i za utvrđivanje nedvosmislenih odnosa među pripadnim jedinicama (poglavlje 3). Izlaganja u prošlim odlomcima ovog poglavlja odnose se, dakako, na *današnje* stanje čitavog sistema fotometrijskih veličina, tj. na skup jednadžbi i fotometrijskih veličina koje danas upotrebljava pretežna većina autora s područja fotometrije i rasvjetne tehnike. Istraživači na tom području nisu, međutim, zadovoljni s postojećim stanjem sistema i smatraju da ga treba mijenjati. Svoje prijedloge u tom smislu iznijeli su u toku ovog stoljeća znameniti učenjaci: *H. E. Ives* (1917), *A. Blondel* (1928), *L. A. Jones* (1937), *A. Geršun* (1939) i mnogi drugi. U najnovije vrijeme (1942. i dalje) za reviziju sistema fotometrijskih veličina naročito se zalaže Amerikanac *Parry Moon*, koji na jednom mjestu kaže: »Postojeće definicije oslanjaju se u biti na *Lambert*ovo djelo, koje je bilo izvanredno godine

1760, ali koje ima malo veze s modernom fizikom.« Pri tom smjera na djelo *J. H. Lambert:* Photometria sive de Mensura et Gradibus Luminis, Colorum et Umbrae (1760).

Budući da će *Moon*ove ili neke druge ideje u budućnosti neminovno reformirati veličinama prenatrpani postojeći sistem fotometrijskih veličina (uzgred napomenimo da u tom području postoji i niz drugih bitnih i formalnih problema, naročito u vezi s višebojnom fotometrijom), neophodno je da se u ovoj knjizi barem *letimično* opiše jedan od nazora koji se razlikuje od postojećeg. To ćemo učiniti u odlomku 2.5.2, a opisivanje odstupanja od uobičajenog toka fotometrije usput ćemo iskoristiti i za to da u odlomku 2.5.3 ukratko objasnimo pojam »temperature boje«. Taj pojam doduše nije nov, ali mnogima unatoč tome zadaje poteškoće.

2.5.2. Moonov sistem fotometrijskih veličina. *Parry Moon*, profesor na glasovitom Massachusetts Institute of Technology, autor je najčuvenije novije američke knjige o osnovama rasvjete »The Scientific Basis of Illuminating Engineering« (»Znanstvena osnova rasvjetne tehnike«), prvi put objavljene godine 1936; ujedno je pisac mnoštva znanstvenih rasprava u časopisima američkih društava za optiku, fiziku i rasvjetu. Od novog sistema *Moon* traži da posjeduje ova četiri svojstva: egzaktnost, općenitost, jednostavnost i internacionalnost. Četvrtom zahtjevu pokušava udovoljiti time što predložene veličine naziva riječima *grčkog* porijekla i vjeruje da se one dadu prilagoditi većini jezika.

Temeljna fotometrijska veličina *Moon*ova sistema je *svjetlosni tok* Φ koji naziva *pharos*, što na grčkom znači svjetionik. Ta veličina definirana je kao u našoj tablici G-8; za geometrijsku fotometriju, a o njoj je ovdje riječ, svjetlosni tok Φ (pharos) je, dakle, polazna (osnovna) veličina. Njena jedinica je lumen = lm.

Iz svjetlosnog toka izvode se sve ostale veličine *Moon*ova sistema. Prva među njima je *gustoća svjetlosnog toka* (pharosage) D definirana sa $D = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S$, koju ćemo kraće nazivati »gustoća«. Njena jedinica je $\mathrm{lm/m^2}$. Opća veličina »gustoća« (pharosage) uključuje, dakle, četiri postojeće fotometrijske veličine koje nalazimo u raznih autora: 1. *rasvijetljenost* koja predstavlja omjer $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S = D_\mathrm{i}$, gdje je $\mathrm{d}S$ površina na koju pada svjetlosni tok (vidi odlomak 2.2.3), 2. *svjetloću* $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S = D_0$, gdje je sada $\mathrm{d}S$ površina koja odašilje $\mathrm{d}\Phi$ (vidi primjer 1 u odlomku 2.4.3), 3. *prosječnu gustoću* svjetlosnog toka D_m na nekoj površini i 4. *prostornu gustoću* svjetlosnog toka definiranu sa $\mathrm{d}D_\mathrm{s} = H\,\mathrm{d}\omega/\pi$, gdje je H *Moon*ova veličina helios (vidi malo kasnije). Veličinu D_s svojedobno je uveo *Arndt* pod nazivom »Raumbeleuchtung«, a preporučio ju je i *Geršun* u svojoj »Teoriji svjetlosnog polja« (vidi citiranu literaturu). Pri tom su D, D_i i D_0 skalarne funkcije pet nezavisnih varijabli od kojih tri određuju položaj tačke u svjetlosnom polju, a dvije određuju kutni položaj u odnosu na normalu. Postoji i mogućnost vektorske interpretacije veličine D; u tom slučaju je $\boldsymbol{D}$ funkcija triju nezavisnih varijabli, isto kao što je i D_s.

Treća *Moon*ova veličina je *helios* H, što dolazi od grčke riječi za Sunce. Ova veličina zamijenila bi današnju luminanciju (vidi odlomak 2.3.1), a u nekoj tački T definirana je jednadžbom

$$H = \pi \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega} \cos \Psi. \qquad (2.5\text{-}1)$$

Pri tom se D mjeri u tački T putem snage zračenja koja dolazi kroz prostorni kut $\mathrm{d}\omega$ s vrhom u T. Kut Ψ je upadni kut svjetlosne zrake koja prolazi kroz os $\mathrm{d}\omega$. Za jedinicu veličine helios H predložio je *Moon* naziv blondel, po zaslužnom radniku na području fotometrije *André Blondel*u. Tu jedinicu *Moon* je definirao

relacijom blondel $= \pi$lm/(sr·m^2); predložio je, dakle, *nekoherentnu* jedinicu (o koherentnosti jedinica vidi odsječak A.5.1), jer je $\pi \neq 1$!

Veličina helios H je generalizacija pojma koji poznajemo pod nazivom luminancija L (vidi odsječak 2.3). No dok se L odnosi na stanovitu (konačnu) *površinu izvora* svjetla, helios H opisuje prilike u *prijemnoj tački*. Ako tvar kojom se širi svjetlo apsorbira ili raspršuje svjetlo, vrijednost veličine H se mijenja duž svjetlosne zrake. U posebnom slučaju, kada tvar ne apsorbira svjetlo i ne raspršuje ga, vrijednost H je stalna u svim tačkama duž određene zrake; u tom slučaju H se svodi na današnji pojam luminancije.

U analogiji s jednadžbama elektromagnetizma (vidi odlomak E.5.2.6), helios H definiran jednadžbom (2.5-1) smatra se »racionalnom veličinom«. Posljedica toga je npr. jednadžba $H = \rho D_i$ za savršeno difuznu površinu; ovdje je ρ faktor refleksije. Druga posljedica je jednadžba $D = H$, koja u *Moon*ovu sistemu fotometrijskih veličina vrijedi za velike izvore konstantnog H (npr. nebo).

Osnovna jednadžba geometrijske fotometrije u *Moon*ovu sistemu veličina ima oblik

$$\mathrm{d}^2\Phi_{12} = \frac{H_2}{\pi} \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \frac{\mathrm{d}A_1\,\mathrm{d}A_2}{r^2}, \qquad (2.5\text{-}2)$$

gdje pojedini simboli označuju: $\mathrm{d}\Phi_{12}$ — svjetlosni tok između površina $\mathrm{d}A_1$ i $\mathrm{d}A_2$, r — udaljenost između centara obiju površina, ϑ_1 i ϑ_2 — kutove što ih spojnica r čini prema normalama na površine $\mathrm{d}A_1$ i $\mathrm{d}A_2$, a H_2 — helios izmjeren na mjestu *2* u smjeru *1*. Simetrija jednadžbe (2.5-2) uzrokuje jednakost $\mathrm{d}^2\Phi_{12} = \mathrm{d}^2\Phi_{21}$ ako zrači površina *2*, a H_1 je jednak prijašnjoj vrijednosti H_2 kada je svjetlosni tok izvirao u *1* i rasvjetljivao *2*. Kod velikih površina mogu se integrirati obje strane, čime se dobiva $\Phi_{12} = \Phi_{21}$, a to je »jednadžba recipročnosti« optike, koja se može primjenjivati posve općenito (tvari koje apsorbiraju svjetlo, sistem leća itd.). Ako je $\mathrm{d}\omega_2$ prostorni kut konvergentnog svjetlosnog stošca sa vrhom u središtu $\mathrm{d}A_2$, jednadžba (2.5-2) dobiva oblik

$$\mathrm{d}D_2 = \frac{H_2}{\pi} \cos\vartheta_2\, \mathrm{d}\omega_2.$$

Ova jednadžba sadrži samo veličine mjerene u *2*, a vrijedi i onda ako tvar nije homogena te ako apsorbira svjetlo.

Četvrta *Moon*ova veličina je *heliosent* G. U stanovitoj tački T duž određene svjetlosne zrake prostornog izvora svjetla ova je veličina definirana izrazom

$$G = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}. \qquad (2.5\text{-}3)$$

Prostorni izvor svjetla je, na primjer, nebo ili stanovita količina pare u električkim izbojnim sijalicama. U tački T unutar volumena tog plina veličina helios ima stanovitu konačnu vrijednost H duž neke svjetlosne zrake. Ako se tačka T pomakne za $\mathrm{d}r$, helios će se prema jednadžbi (2.5-3) promijeniti za iznos $\mathrm{d}H = G\,\mathrm{d}r$, gdje je G heliosent u tački T duž te zrake (veličina G mjeri se jedinicom blondel/m).

Ako se T nalazi izvan volumena pare, helios između tačaka a i b dobiva se integriranjem izraza $\mathrm{d}H = G(r)\,\mathrm{d}r$, ako nema apsorpcije u plinu ili pari. No ako se ovi utjecaji ne mogu zanemariti, onda proračun valja obaviti pomoću

$$H = \int G(r) \exp(-\alpha r)\,\mathrm{d}r, \qquad (2.5\text{-}4)$$

gdje je α faktor slabljenja u tvari (mjeri se jedinicom 1/metar $= m^{-1}$). Integral se proteže od tačke a do b. U slučaju $G(r) = \text{const}$, jednadžba (2.5-4) prelazi u oblik

$$H = \frac{G}{\alpha}[\exp(-\alpha a) - \exp(-\alpha b)].$$

Uz navedene četiri veličine (Φ, D, H, R), u *Moon*ovu sistemu veličina postoje još dvije (slovo t označuje vrijeme):

$$\text{phos } Q = \int \Phi \, dt, \qquad \text{phosage } W = \int D \, dt.$$

Vidimo da je *phos* veličina koju danas nazivamo »količina svjetla«, a *phosage* zamjenjuje današnju »ekspoziciju« (vidi tablicu G-11). Jedinica veličine Q je lumensekunda (lms); jedinica veličine W je lms/m^2.

*Moon*ov sistem sastoji se samo od nabrojenih 6 veličina; on tvrdi da se s prve tri (Φ, D, H) može rješavati najmanje 90% rasvjetnih proračuna. No najveću njegovu prednost *Moon* vidi u tome da se identičan oblik jednadžbi i veličina može primjenjivati i u radiometriji (općoj teoriji zračenja) te da se njima mogu elegantno obuhvatiti eritemski, baktericidni, fluorescentni, fotoelektrički, fotografski i drugi efekti. Za sve te slučajeve *Moon*, naime, predlaže uporabu istih šest veličina s istim nazivima i simbolima, eventualno opremljenima odgovarajućim indeksima. Zanimljivo je i poučno naglasiti da veličine $I = d\Phi/d\omega$ (»svjetlosna jakost« u današnjoj terminologiji; vidi odlomak 2.4.4) u *Moon*ovu sistemu uopće nema. To je posve razumljivo, jer današnja fotometrija velikih izvora svjetla (netačkastih) od I nema znatne koristi, pa se u suvremenoj tehnici rasvjete gotovo i ne upotrebljava više. Veličina I, štoviše, može pri nekritičnoj primjeni uzrokovati pogreške (vidi sl. G.22).

2.5.3. Temperatura boje pojam je koji često susrećemo u fotometriji, a odnosi se isključivo na *temperaturna zračila*, tj. na onakva zračila kakva smo razmotrili u odsječku 1.3 ili njima slična. Temperaturno zračilo je, na primjer, električka žarulja s volframovom žarnom niti, koja je od svih metalnih temperaturnih zračila najprikladnija za proizvođenje svjetla. Volfram, naime, ima relativno visoko talište (oko 3700 K) pa zbog toga žarulje s dvostrukom volframovom spiralom imaju vijek dulji od 1000 sati pri radnoj temperaturi oko 2700 K. Metali, dakle i volfram, imaju velik koeficijent refleksije r (vidi odlomak 1.3.1), a budući da im je koeficijent propusnosti $d = 0$, to je njihov koeficijent apsorpcije $a = 1 - r$ malen. Zbog toga u vidljivom dijelu spektra volfram zrači slično savršenom zračilu (»apsolutno crno tijelo«; vidi odlomak 1.3.2), ali je to ipak »sivo zračilo«, jer je njegov $a(\lambda) < 1$.

Unutar istog uskog spektralnog područja λ, $\lambda + \Delta\lambda$ gustoća snage zračenja $M(\lambda)$ sivog tijela nepoznate temperature često se mora usporediti sa $M(\lambda)$ crnog tijela (savršenog zračila) poznate temperature. Najjednostavnije se usporedba izvodi izjednačenjem gustoća snaga zračenja obaju tijela: crnom tijelu mijenja se temperatura sve dok gustoće snage zračenja crnog i sivog tijela ne postanu jednake. Pri tom temperatura crnog tijela iznosi T_c. Ta *stvarna* temperatura crnog tijela T_c naziva se *crna temperatura* mjerenog (sivog) tijela. Prema tome naziv »crna temperatura« znači ovo: u tačno definiranom spektralnom području λ, $\lambda + \Delta\lambda$ sivo tijelo odašilje istu gustoću snage zračenja $M(\lambda)$ kao i crno tijelo koje se nalazi na temperaturi T_c. Budući da je za sivo tijelo uvijek $a(\lambda) < 1$, a za crno $a(\lambda) = 1$, to je očito da je stvarna temperatura sivog tijela *uvijek viša* od temperature crnog tijela.

Razlika između »crne« i »stvarne« temperature može biti znatna, osobito kod metala čiji se koeficijent apsorpcije $a(\lambda)$ znatno mijenja s temperaturom, a ponešto i s duljinom vala λ. U tablici G-12 vidimo tu razliku za volfram koji je u fotometriji (volframove žarulje!) naročito važan. Zbog te velike razlike uveden je, uz »crnu temperaturu« T_c, još jedan pojam: *temperatura boje.*

Tablica **G-12**

Usporedba stvarne i crne temperature s temperaturom boje volframa

Stvarna temperatura, K	1000	1500	2000	3000
Crna temperatura T_c pri $\lambda = 665\,\text{nm}$, K	964	1420	1857	2673
Temperatura boje, K	1006	1517	2033	3094

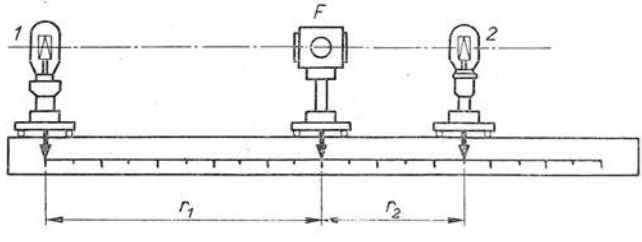
Utvrđivanje temperature boje (engl. colour temperature, njem. Farbtemperatur) obavlja se mjerenjem analognim onome pri utvrđivanju crne temperature: unutar uskog spektralnog područja λ, $\lambda + \Delta\lambda$ mijenja se temperatura crnog tijela sve dok se ne *izjednače boje* (tonovi boje; npr. crveni, crvenožuti itd.) zračenja crnog i sivog tijela. Ta *stvarna* temperatura crnog tijela T_b naziva se *temperatura boje* sivog tijela (npr. volframovo zračilo). Prema tome naziv »temperatura boje« znači ovo: u tačno definiranom spektralnom području λ, $\lambda + \Delta\lambda$ sivo tijelo odašilje zračenje iste boje kao i crno tijelo koje se nalazi na temperaturi T_b, a pri tom je uvijek $T_b > T_c$. Temperatura boje T_b općenito se manje razlikuje od stvarne temperature negoli crna temperatura. To nam pokazuje i tablica G-12, koja se odnosi na volfram.

3. Temeljna mjerenja u fotometriji i fotometrijske jedinice

3.1. Temeljna mjerenja u fotometriji

3.1.1. Načelo vizuelne fotometrije već smo spomenuli u odlomku 2.1.2. Ovdje ćemo to načelo razmotriti sa stanovišta *mjerenja* u fotometrijskom laboratoriju. Kako znamo, mjerenje se u biti sastoji u tome da ljudsko oko utvrdi jednakost svjetlosnog utiska dviju površina rasvijetljenih sa dva (uspoređivana) izvora svjetla; te površine nazivamo *fotometrijskim poljima*. Pri takvu mjerenju mora se udovoljiti zahtjevu tzv. fotometrijske simetrije, a to znači: obje površine moraju imati ista fizikalna svojstva, svjetla iz oba izvora moraju biti istog (ili vrlo bliskog) spektralnog sastava, oba svjetla moraju padati na fotometrijska polja pod istim kutovima i, konačno, oko mora oba polja promatrati pod istim kutom. Mjerenje se obavlja tako da se rasvijetljenost jednog polja mijenja (obično smanjuje, »slabi«) sve dok se ne izjednači sa stalnom rasvijetljenošću drugog polja.

»Slabljenje svjetla«, tj. smanjivanje rasvijetljenosti, mora se izvoditi egzaktno: mora se znati zakonitost tog slabljenja, te veličina tog slabljenja za svaki konkretan slučaj. U tu svrhu upotrebljavaju se raznovrsni uređaji i pomagala, na primjer: mijenjanje razmaka između izvora svjetla i fotometrijskog polja (dakle primjena jednadžbe 2.4-11), upotreba polarizacijskih prizmi ili rotirajućih sektorskih ploča (vidi odlomak 2.1.3), upotreba tvari koje na poznati način apsorbiraju svjetlo, primjena regulacijskih zaslona (dijafragme) ili rasipnih leća itd.



Sl. G.24. Načelo djelovanja fotometrijskog stola. *1*, *2* — uspoređivani izvori svjetla, *F* — fotometar, r_1, r_2 — izmjerene udaljenosti koje ulaze u jednadžbe (3.1-1,2)

Ako se slabljenje rasvijetljenosti *E* fotometrijskog polja obavlja primjenom tzv. kvadratnog zakona (2.4-11), onda se jednakost svjetlosnih utisaka utvrđuje posebnim uređajem koji je shematski prikazan na slici G.24. Uspoređivani izvori svjetla *1* i *2* mogu se pomicati na *fotometrijskom stolu* (sl. G.25). Između oba izvora nalazi se *fotometar F* (vidi odlomak 3.1.2) u čijem okularu motritelj može ustanoviti

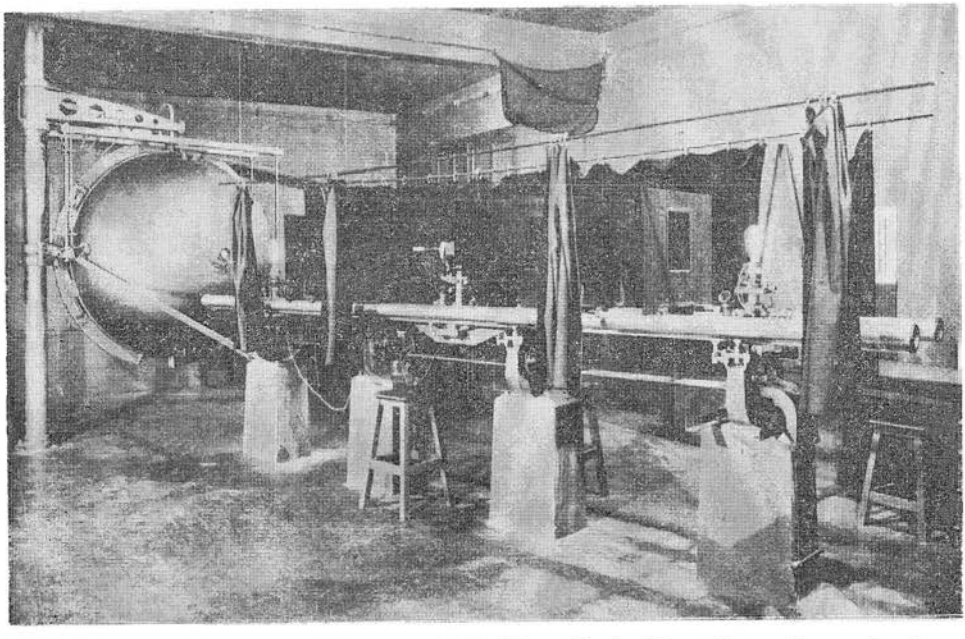
kada je rasvijetljenost E_1 lijevog fotometrijskog polja jednaka rasvijetljenosti E_2 desnoga. Pri tom je E_1 posljedica zračenja izvora svjetla *1*, a E_2 izvora *2*. Međusobne odnose udaljenosti izvora *1* i *2* te fotometra *F* eksperimentator mijenja tako dugo dok se u okularu ne utvrdi $E_1 = E_2$. U tom slučaju prema jednadžbi (2.4-11) vrijedi

$$E_1 = \frac{I_1}{\cos\beta_1 r_1^2} = \frac{I_2}{\cos\beta_2 r_2^2} = E_2. \qquad (3.1\text{-}1)$$

Budući da je $\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = 1$, gornja jednadžba prelazi u oblik

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \qquad (3.1\text{-}2)$$

Ovdje su I_1 i I_2 svjetlosne jakosti (vidi odlomak 2.4.4) obaju izvora svjetla. Jednadžba (3.1-2) vrijedi uz ograničenja koja smo naveli u odlomku 2.4.4 (vidi sl. G.22). Udaljenosti r_1 i r_2 moraju se, dakako, izmjeriti što preciznije.



Sl. G.25. Izgled fotometrijskog stola i Ulbrichtove kugle. (Foto: Bureau International des Poids et Mesures)

Izgled fotometrijskog stola u Međunarodnom uredu za mjere i utege u Sèvresu vidimo na slici G.25. Isto takvi stolovi ili slični upotrebljavaju se i u ostalim dobro opremljenim fotometrijskim laboratorijima. Stol se sastoji od dvije paralelne metalne tračnice (na slici cijevne) duge do oko 6 metara; tračnice su kruto učvršćene na stabilne nogare ili betonske fundamente. Duž tračnica lako se mogu pomicati kolica na kojima se nalaze izvori *1* i *2* iz slike G.24 i fotometar *F*; ta se kolica mogu fiksirati na bilo kojem mjestu duž tračnica i precizno izmjeriti razmaci između *1* i *F*, odnosno *F* i *2*. Na kolicima se nalaze stativi u kojima su smješteni izvori *1* i *2*,

odnosno fotometar *F*. Stativi se mogu okretati oko svoje vertikalne osi kao i pomicati (namještati) duž te osi. To namještanje potrebno je da bi se *1*, *2* i *F* nalazili u tzv. *optičkoj osi* fotometrijskog stola (crtkano na slici G.24). Osim toga postoji mogućnost da se ispitivani izvor svjetla dovede u bilo koji položaj (kut) prema okomici na optičku os stola. Time se mogu ustanoviti vrijednosti svjetlosne jakosti *I* simetričnih ili nesimetričnih izvora svjetla (npr. žarulja) u pojedinim smjerovima (vidi definiciju veličine *I* u odlomku 2.4.4, odnosno veličine J_α u odlomku 1.1.2). Upotrebljava se i takva metoda mjerenja ovisnosti *I* o kutu gdje izvor stalno ostaje na svom mjestu, a svjetlo se dovodi na optičku os pod željenim kutom pomoću sistema zrcala.

Da bi se fotometrom *F* doista uspoređivala samo svjetla iz izvora *1* i *2*, treba eliminirati utjecaj bilo kojeg drugog svjetla na mjerenje. U tu se svrhu između *1* i *F* te *F* i *2* stavlja niz *zaštitnih zaslona*. To su limene ploče koje imaju u sredini otvore, a presvučene su zagasito crnim baršunom. Osim toga fotometrijski stol je okružen neprozirnim zastorima koji se razvuku prilikom mjerenja. Sve se to lijepo vidi na slici G.25, koja u pogledu dispozicije potpuno odgovara slici G.24. Uz ove zaštitne mjere postoje još dvije: zidovi fotometrijskog laboratorija obojeni su u sivom neutralnom tonu, a prilikom mjerenja prostorija se zamračuje.

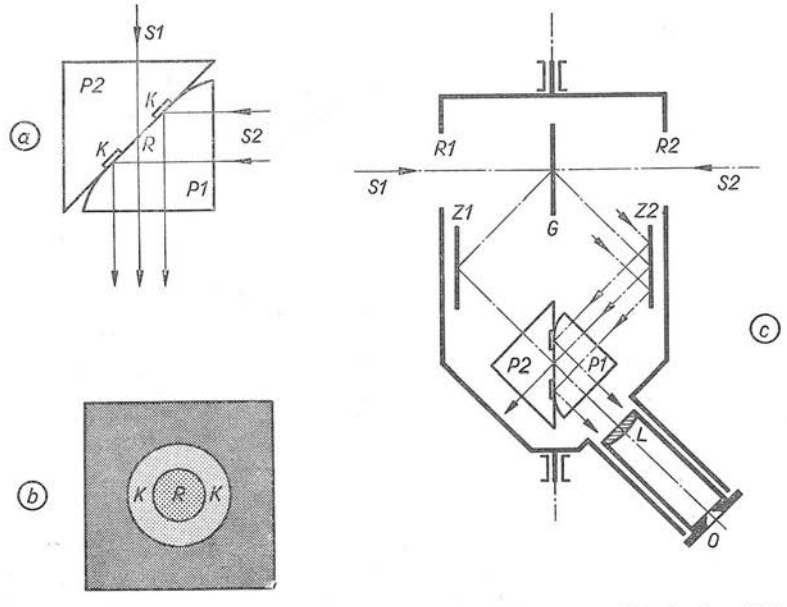
3.1.2. Lummer-Brodhunov fotometar je najprecizniji mjerni uređaj za vizuelno uspoređivanje dvaju izvora svjetla. Iskusan eksperimentator može pri uspoređivanju istobojnih svjetala postići netačnost bolju od 0,5 %. U nastavku ćemo opisati načelo rada *Lummer-Brodhun*ova fotometra koji djeluje na principu utvrđivanja jednake rasvijetljenosti dvaju fotometrijskih polja. Napominjemo da su isti autori razvili sličan fotometar koji radi na principu utvrđivanja jednakog *kontrasta* (netačnost oko $\pm 0{,}2\,\% = \pm 2 \cdot 10^{-3}$!).

Bitni dio *Lummer-Brodhun*ova fotometra na principu utvrđivanja jednake rasvijetljenosti je tzv. *fotometrijska kocka* koja se sastoji od dvije staklene prizme, *P1* i *P2* (sl. G.26a). Prizma *P1* priljubljuje se u ravnom, središnjem dijelu (*R*) uz ravnu prizmu *P2*, a na svojim rubovima je kuglasto uzdignuta. Na dodirnoj plohi prizme *P2* izjetkan je kolobar *K*, koji je na slici G.26a prikazan u presjeku. Ako su dodirne plohe prizmi *P1* i *P2* čvrsto priljubljene, svjetlo *S1* prolazi kroz površinu *R* kao da je u pitanju jedinstvena staklena tvar. Svjetlo *S2*, koje dolazi pod kutom $\pi/2$ prema *S1*, totalno se reflektira na mjestima gdje se nalazi izjetkani kolobar *K*. Rezultat takva djelovanja ovih prizmi vidi promatrač koji motri u smjeru dolaženja *S1*: on vidi figuru sa slike G.26b: polje *R* izazvano je svjetlom *S1*, a polje *K* svjetlom *S2*. Zadatak je eksperimentatora da fotometar (*F* u slici G.24) pokuša namjestiti tako da mu se polja *R* i *K* učine jednako svijetlima, tj. da iščeznu granice između polja *R* i *K*. Napomenimo još da crni okvir na slici G.26b nastaje zato što je prizma *P2* u području izvan kolobara *K* premazana neprozirnom bojom (npr. asfaltnim lakom).

Izgled kompletnog fotometra vidimo u presjeku na slici G.26c. Okomito na optičku os fotometra (usporedi sa slikom G.24) smješten je zagasito bijeli neprozirni zaslon *G* (npr. od sadre). Svaka strana zaslona nezavisno prima kroz rupice *R1* i *R2* svjetlo *S1* odnosno *S2* (iz izvora svjetla *1* i *2*, sl. G. 24) i difuzno ga reflektira na zrcala *Z1* i *Z2*. Od tih zrcala svjetlosne zrake se odbijaju i prolaze kroz fotometrijsku kocku, kako smo opisali uz sliku G.26a. U okularu *O* eksperimentator vidi figuru kao na slici G.26b. Lećom *L* može se namjestiti najprikladnija oštrina viđenja figure. Pomicanjem fotometra *F* ili izvora *1* i *2* (sl. G.24) nalazi se takav međusobni položaj da polja *R* i *K* u slici G.26b izazivaju jednaki svjetlosni utisak, tj. granice

među njima nema. U tom slučaju su rasvijetljenosti jednake, pa vrijede jednadžbe (3.1-1,2).

Da bi se izbjegle pogreške zbog nesimetrije fotometra, umjesno je provesti dvostruko mjerenje. Najprije se mjeri kao što je opisano, a zatim se fotometar okrene oko svoje osi za kut π, što je isto kao da su međusobno zamijenjeni izvori svjetla *1* i *2* (sl. G.24). Da taj kut ne bi morao učiniti i motritelj, obično se upotrebljava *Krüss*ova refleksijska prizma, koja omogućuje da oko motritelja ostane na mjestu. Od oba dobivena mjerna podatka uzima se srednja vrijednost kao konačan rezultat.

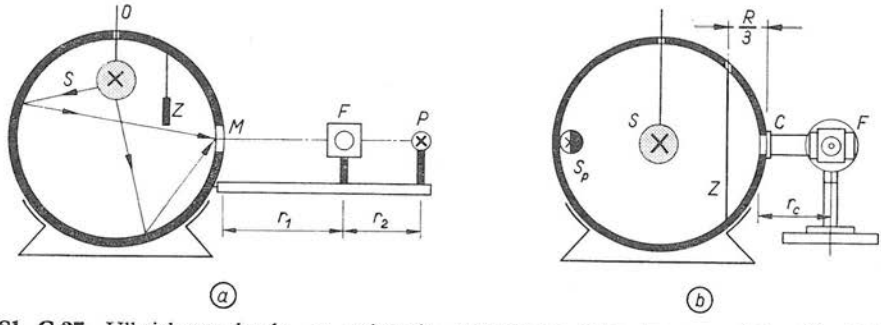


Sl. G.26. Načelo rada Lummer-Brodhunova fotometra. a) Fotometrijska kocka: *S1* i *S2* — uspoređivana svjetla, *P1* i *P2* — staklene prizme, *R* — ravni, priljubljeni dio prizmi, *K* — kolobar izjetkan u prizmi *P2*; b) figura koju eksperimentator vidi u okularu fotometra; c) presjek fotometra: *S1* i *S2* — uspoređivana svjetla, *R1* i *R2* — rupice koje propuštaju svjetlo u fotometar, *G* — sadreni zaslon koji raspršuje svjetlo, *Z1* i *Z2* — zrcala, *P1* i *P2* — staklene prizme (vidi sliku a), *L* — leća, *O* — okular

3.1.3. Ulbrichtova kugla služi za mjerenje ukupnog svjetlosnog toka Φ što ga odašilje neki izvor svjetla, npr. električka žarulja. Prvi uređaj za mjerenje svjetlosnog toka izradio je godine 1895. *Blondel*, ali se danas u tu svrhu gotovo isključivo upotrebljava kugla koju je godine 1900. predložio *Ulbricht*. To je šuplja limena kugla promjera 0,5 do 3 metra; promjer ovisi o izmjerama ispitivanog izvora svjetla. Veće kugle obično su sastavljene od dvije jednake polovice. Unutrašnjost kugle obojena je zagasitom bijelom bojom, tako da savršeno raspršuje svjetlo.

Izgled *Ulbricht*ove kugle vidimo na lijevom dijelu slike G.25, a presjek kugle na slici G.27a. Na mjestu *O* kugla ima poklopac koji pokriva otvor kroz koji se u kuglu stavlja mjereni izvor svjetla *S*. Postoji još jedan otvor: na mjestu *M* (sl. G.27a) nalazi se okrugli otvor promjera oko 5 cm. U taj *mjerni prozor* stavlja se providno difuzno staklo (»mlječno staklo«) kroz koje iz kugle izlazi svjetlo što ga proizvodi žarulja *S* ovješena u unutrašnjosti. Mjerni prozor *M* prima od žarulje *S* samo ono

svjetlo koje se *reflektiralo* od unutrašnjosti kugle. Između S i M nalazi se, naime, neprovidni zaslon Z koji ne dopušta da bi izvor S direktno osvijetlio difuzno staklo na mjestu M.



Sl. G.27. Ulbrichtova kugla za mjerenje svjetlosnog toka izvora svjetla (žarulje). a) Kugla u sklopu fotometrijskog stola: S — izvor svjetla čiji svjetlosni tok Φ_x želimo izmjeriti, O — otvor za umetanje izvora, Z — neprozirni zaslon, M — difuzno staklo mjernog prozora, F — fotometar, P — pomoćni izvor svjetla; b) kugla s prijenosnim fotometrom i pomoćnim izvorom svjetla S_p: C — zaštitna cijev fotometra

Podroban proračun pokazuje da je zbog mnogostruke refleksije svjetla unutrašnjost kugle posve jednoliko rasvijetljena, a prema tome i mjerni prozor M. Njegova rasvijetljenost E iznosi

$$E = \frac{\Phi}{2\pi R^2} \frac{\rho}{1-\rho} = K_1 \Phi, \tag{3.1-3}$$

gdje simboli predočuju: Φ — ukupni svjetlosni tok što ga odašilje izvor S (sl. G.27a), R — unutarnji promjer kugle, ρ — faktor refleksije, K_1 — konstantu ovisnu o R i ρ. Napominjemo da nije neophodno da vrijednost faktora refleksije ρ bude velika, ali je važno da je ρ *jednak* za sve duljine vala svjetla, tj. da nije selektivan (spektralno osjetljiv). Zbog toga je bojenje unutrašnjosti *Ulbricht*ove kugle od izuzetne važnosti.

Jednadžba (3.1-3), u kojoj je $2\pi R^2$ unutrašnja površina *Ulbricht*ove kugle, može se napisati i u obliku

$$E = K_2 I, \tag{3.1-4}$$

gdje je I svjetlosna jakost izvora svjetla predstavljenog mjernim prozorom M, koji se nalazi u visini optičke osi fotometrijskog stola (usporedi slike G.27a i G.24), a K_2 konstanta. Prema tome prozor kugle služi kao jedan izvor svjetla koji se u fotometru na fotometrijskom stolu uspoređuje s drugim izvorom. Taj drugi izvor je *pomoćni izvor svjetla*, koji smo na slici G.27a označili sa P. Iz jednadžbi (3.1-3,4) dobivamo vezu između svjetlosnog toka Φ i svjetlosne jakosti I izvora koji se nalazi u kugli

$$I = C\,\Phi, \tag{3.1-5}$$

gdje je $C = K_2/K_1$, dakle također konstanta. Budući da vrijedi jednadžba (2.4-11) sa $\cos\beta = 1$, izraz (3.1-5) dobiva oblik

$$E = \frac{I}{r^2} = C\frac{\Phi}{r^2}, \tag{3.1-6}$$

gdje je r udaljenost između fotometrijskog zaslona (G na slici G.26c) i mjernog prozora M *Ulbricht*ove kugle (sl. G.27a).

Nepoznati svjetlosni tok Φ_x izvora (žarulja S na slici G.27a) utvrđuje se sa *dva mjerenja*. Najprije se u *Ulbricht*ovu kuglu stavlja izvor svjetla čiji je svjetlosni tok Φ_0 *poznat* (sl. G.28a). U tom slučaju rasvijetljenost E_0 na lijevoj strani zaslona G fotometra (sl. G.26c), prema jednadžbi (3.1-6), iznosi $E_0 = C\,\Phi_0/r_1^2$. Pomoćni izvor svjetla P rasvjetljuje desnu stranu zaslona fotometra sa $E_2 = I_p/r_2^2$. Za slučaj kada je $E_0 = E_2$, vrijedi

$$E_0 = C\,\Phi_0/r_1^2 = I_p/r_2^2 = E_2.$$

Pri *drugom mjerenju* u kugli se nalazi izvor svjetla koji odašilje mjereni svjetlosni tok Φ_x (sl. G.28b). Kada je $E_x = E_4$, vrijedi

$$E_x = C\,\Phi_x/r_3^2 = I_p/r_4^2 = E_4,$$

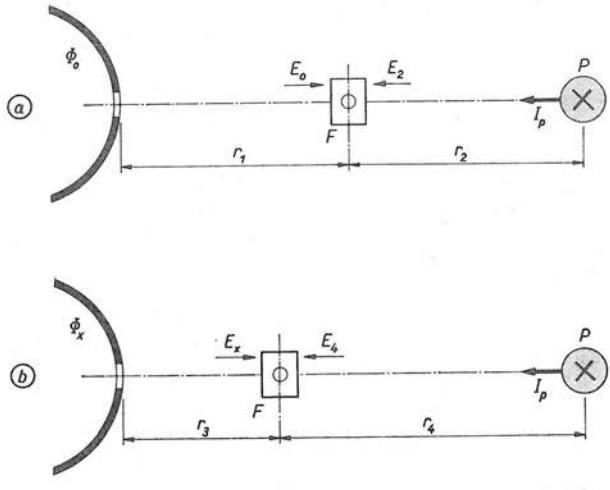
jer se pomoćni izvor svjetla P nije promijenio u toku mjerenja. Međusobnom podjelom gornjih dviju jednadžbi dobivamo

$$\Phi_x = \Phi_0\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2\left(\frac{r_2}{r_4}\right)^2. \qquad (3.1\text{-}7)$$

Ako se mjerenje izvodi tako da je udaljenost između *Ulbricht*ove kugle i fotometra u toku obaju mjerenja stalna, onda je $r_1 = r_3$, pa jednadžba (3.1-7) prelazi u jednostavniji oblik

$$\Phi_x = \Phi_0\left(\frac{r_2}{r_4}\right)^2. \qquad (3.1\text{-}8)$$

Lako je dokazati da jednadžba (3.1-8) vrijedi čak i u slučaju kada je $r_1 = r_3 = 0$, tj. kada je fotometar stavljen u sam otvor kugle (sl. G.27b). Pri takvom mjerenju uopće nema mlječnog stakla M (sl. G.27a), tj. svjetlo iz kugle direktno pada na zaslon G fotometra sa slike G.26c. Fotometar za takve svrhe obično se oprema kratkom zaštitnom cijevi C (sl.G. 27b), tako da je $r_1 = r_3 = r_c = \text{const} > 0$.



Sl. G.28. Načelo mjerenja svjetlosnog toka pomoću Ulbrichtove kugle: a) prvo mjerenje, b) drugo mjerenje

*Ulbricht*ova kugla daje vrlo precizne rezultate uz pretpostavku da njena unutrašnja površina apsorbira *sve* svjetlo koje odašilje mjereni izvor S. Tom uvjetu u stvarnosti nije udovoljeno: dio svjetlosnog toka apsorbira i balon žarulje, njeno grlo, dovodne žice, zaslon kugle itd. To u mjerenje unosi pogrešku, koja je to manja što je površina kugle veća prema površini navedenih tijela neophodnih za mjerenje, ali suprotnih zahtjevima preciznog mjerenja. Stoga je dugo vremena vladala tendencija građenja velikih kugala. Nju je podržavala i činjenica da je netačnost to veća što je veća razlika svjetlosnog toka standardne (Φ_0) i

ispitivane žarulje (Φ_x). Te nedostatke otklonio je *Helwig* uvođenjem *pomoćnog izvora* svjetla (žarulje). Presjek *Ulbricht-Helwig*ove mjerne kugle vidimo na slici G.27b: nasuprot otvoru za cijev C fotometra F u kugli je ugrađena pomoćna žarulja S_p. Zaslon Z, širok $2R/3$ (R je polumjer kugle), proteže se od vrha do dna kugle na udaljenosti $R/3$ od otvora. Polovina površine žarulje S_p premazana je takvom nepropusnom bojom koja postojano reflektira svjetlo pomoćne žarulje prema kugli. Ispitivana (Φ_x) i standardna žarulja (Φ_0) obično se stavljaju u sredinu kugle čiji polumjer iznosi između 0,7 i 1 m.

Ovom kuglom moraju se obaviti *četiri mjerenja*: 1) Pomoćna žarulja S_p ne svijetli, u kugli svijetli samo standardna žarulja (Φ_0). Mjerenjem na prije opisanom načelu dobiva se E_0, pa je $\Phi_0 = K_0 E_0$, gdje je Φ_0 poznati svjetlosni tok standardne žarulje. 2) Standardna žarulja se ugasi, ali svijetli pomoćna. Izmjeri se E_0' te dobiva relacija $\Phi_0' = K_0 E_0'$. 3) Izvadi se standardna žarulja i stavi ispitivana, ali se ona ne uključi; pomoćna žarulja i dalje svijetli. Mjerenjem se dobiva E_x' i $\Phi_x' = K_x E_x'$. 4) Pomoćna žarulja se ugasi, a ispitivana upali. Mjerenjem se dobiva E_x, odnosno $\Phi_x = K_x E_x$. Budući da je $\Phi_0' = \Phi_x'$ (svjetlosni tok pomoćne žarulje je konstantan), iz gornje četiri jednadžbe slijedi

$$\Phi_x = \Phi_0 \frac{E_x}{E_0} \frac{E_0'}{E_x'}. \tag{3.1-9}$$

Ako usporedimo izraz (3.1-9) sa (3.1-8), možemo se uvjeriti da potonji nastaje iz prvoga ako je $K_0 = K_x$.

Na kraju ovog izlaganja umjesna je jedna napomena o izvedbi *Ulbricht*ove kugle. Izrada limene kugle vrlo je skupa, pa se stoga umjesto nje danas, naročito u Engleskoj, dosta upotrebljava limena *kocka*. Time se, doduše, pogoršava preciznost mjerenja, ali se ona može poboljšati prikladnom jeftinom kompenzacijom. Nije, naime, neophodno da je rasvijetljenost E unutrašnjosti kocke potpuno jednolika, već je dovoljno da je rasvijetljenost mjernog prozora (M na slici G.27a) proporcionalna svjetlosnom toku izvora svjetla S. Na taj način mjerenje kockom gotovo je jednako precizno kao i mjerenje pomoću klasične *Ulbricht*ove kugle.

Nije naodmet spomenuti da se u najnovije vrijeme moderniziraju čitavi fotometrijski laboratoriji, a naročito fotometrijski stol. Tako su npr. početkom godine 1967. Englezi objavili da upotrebljavaju *automatski fotometar*; pri tom se služe i digitalnim mjernim instrumentima. Na taj način mogu se *vrlo brzo* obavljati opsežna fotometrijska ispitivanja žarulja. Unatoč povećanoj brzini laboratorijskog rada nije smanjena preciznost. Postiže se, na primjer, netačnost mjerenja svjetlosnog toka $\pm 0{,}5\,\% = \pm 5 \cdot 10^{-3}$, ali pri tom stabilnost napona ispitivane žarulje mora biti bolja od 1:1000 (svjetlosni tok žarulje raste približno s eksponentom 3,5 napona). Vidimo, dakle, da je najsuvremenija tehnika ovih godina prodrla i u fotometriju koja se dugo vremena smatrala nepristupačnom modernizaciji.

3.2. Jedinice Međunarodnog sistema (SI) fotometrijskih veličina

3.2.1. Priključak fotometrije na SI. Razlozi i prednosti univerzalne primjene Međunarodnog sistema jedinica (SI) u fotometriji isti su kao i u drugim granama prirodoslovlja, tehnike i privrede (vidi, na primjer, odsječak B.7.1). Razmatranja u poglavlju G.2 pokazala su nam da su fotometrijske veličine definirane time (vidi tablicu G-8) što su *fizikalne veličine* (npr. snaga, gustoća snage itd.) pomnožene na tačno propisani način s »relativnom vidljivošću« V_λ zdravog oka mlađeg čovjeka.

Pri tom je V_λ tzv. brojčana veličina (omjer dviju istorodnih fizikalnih veličina; vidi odlomke 2.2.1 i 2.4.1), čija se vrijednost mijenja između 0 i 1 u vrlo uskom rasponu duljina vala λ zračenja. Ta ovisnost V_λ o λ uzrok je tome da se fotometrijske jedinice ne mogu svrstati u istu kategoriju kao što su jedinice mase, duljine, napona itd. (kg, m, V itd.), već predstavljaju samorodnu skupinu jedinica kojoj bismo npr. u mehanici mogli zamisliti takav analogon u kojem bi jedinica mase ovisila o gustoći stanovite tvari!

Unatoč toj samorodnosti jedinice fotometrijskih veličina stavljaju se u okvir Međunarodnog sistema jedinica (SI), ali uz ograde koje smo u poglavlju G.2 opširno proučili. Te ograde možemo rezimirati ovako: 1. Fotometrijske jedinice temelje se na međunarodno standardiziranoj krivulji relativne vidljivosti V_λ ljudskog oka (vidi odlomak 2.2.1). 2. Polazna (osnovna) jedinica fotometrijskih veličina definirana je zračenjem savršenog zračila (crnog tijela) pri temperaturi taljenja platine (vidi odlomak 2.3.2).

Ove dvije fundamentalne činjenice skriveno su uvijek prisutne u svim definicijama fotometrijskih jedinica i u odnosima među tim jedinicama. Pošto se jedna od fotometrijskih jedinica odabere za polaznu (osnovnu), ostale se formalno izvode na isti način kao i jedinice fizikalnih veličina. To znači da se *sistem jedinica* gradi na principu koherencije (vidi odsječak A.5.1), preračunavanja se obavljaju kao i kod jedinica fizikalnih veličina, upotrebljavaju se decimalni i dekadski višekratnici jedinica (vidi odsječke A.2.3 i B.7.6), primjenjuju se veličinske i brojčane jednadžbe (vidi odsječak A.1.4) itd.

Pripadnost fotometrijskih jedinica nit, lumen, lux itd. (vidi naredne odlomke) Međunarodnom sistemu jedinica (SI) nema znanstvene osnove, već je to posljedica *preporuka i zakonodavnih akata* Generalne konferencije za mjere i utege, odnosno nacionalnih zakonodavstava. U odlomku 2.3.2 naveli smo, naime, da je jedinica SI luminancije $[L]_M = \text{nit}$ definirana (prijedlog) tako što je luminanciji savršenog zračila (crnog tijela) koje se nalazi na temperaturi $T = T_{Pt}$ (talište platine) dodijeljena vrijednost $L = 600$ knt ($= 60$ cd/cm^2). Da je odabrana neka druga vrijednost, na primjer $[L] = x \cdot \text{nit}$, gdje je x bilo koji broj veći od nule, jedinica $[L]$ bila bi isto tako član SI! Prema tome mora biti udovoljeno jednom *drugom uvjetu*, a taj je: jedinice *fizikalnih veličina* pomoću kojih se od nit izvode ostale fotometrijske jedinice *moraju* biti koherentne jedinice SI! To znači da ćemo jedinice SI fotometrije izvoditi iz nita uz pomoć jedinica SI: kvadratni metar (m^2), steradijan (sr), watt (W) itd.

3.2.2. Jedinica luminancije nit (kratica: nt). U odsječku 2.3 opširno smo razmotrili definiciju fotometrijske veličine »luminancija« L kao i definiciju njene jedinice SI nit. U odlomku 2.3.4 opisali smo i reprodukciju te jedinice pomoću savršenog zračila. Ponavljamo prijedlog definicije jedinice SI $[L]_M = \text{nit}$ iz odlomka 2.3.2: »Luminancija savršenog zračila koje se pri tlaku 101 325 N/m^2 u cijelosti nalazi na temperaturi taljenja platine iznosi 600 000 nita«. Prema tome možemo zabilježiti

$$\text{jedinica SI luminancije} = \text{nit} = \text{nt}.$$

Napominjemo da se naziv jedinice $[L]_M$ nit ne nalazi na službenom popisu imena jedinica koje je na svojim zasjedanjima prihvatila Generalna konferencija za mjere i utege (o ovoj vrhunskoj međunarodnoj metrološkoj organizaciji i njenim stručnim organima vidi poglavlje A.7), već se umjesto naziva »nit« upotrebljava

candela/m^2 = cd/m^2 (vidi odlomak 3.2.6). No nacionalna zakonodavstva i standardizacije izričito navode jedinicu luminancije nit, npr. u Jugoslaviji »Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima« objavljen godine 1961, u Čehoslovačkoj standard ČSN 011300 koji je na snazi od 1. 7. 1963, u SSSR standardi GOST 9867 (1961) i 7932 (1956) itd.

U novije se doba uz jedinicu luminancije nit primjenjuje dekadski višekratnik kilo = k = 1000, tj.

$$\text{kilonit} = \text{knt} = 1000 \text{ nt}.$$

Naravno da se u slučaju potrebe mogu primijeniti i drugi dekadski i decimalni višekratnici jedinica (vidi odsječak A.2.3 i tablicu A-1). Ostale jedinice luminancije, vrlo različite po porijeklu i vrijednosti, razmotrene su u odsječku 3.3.

3.2.3. Jedinica svjetlosnog toka lumen (kratica: lm). U odsječku A.5.1 objašnjeno je kako se gradi sistem jedinica. Veličine »luminancija« L i »svjetlosni tok« Φ međusobno povezuje jednadžba (2.4-5), koju možemo napisati u obliku

$$\mathrm{d}^2\Phi = L \cos\alpha \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}\omega. \tag{3.2-1}$$

Budući da su jedinice SI luminancije L, površine A i prostornog kuta ω redom

$$[L]_M = \text{nt}, \quad [A]_M = \text{m}^2, \quad [\omega]_M = \text{sr},$$

iz jednadžbe (3.2-1) neposredno slijedi jedinica svjetlosnog toka SI

$$[\Phi]_M = [L]_M \, [A]_M \, [\omega]_M = \text{nt} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sr}. \tag{3.2-2}$$

Prilikom prijelaza od veličinske jednadžbe (3.2-1) na »jednadžbu među jedinicama« (3.2-2) izostavili smo jedinicu trigonometrijske funkcije cos α. To je posve razumljivo, jer je njena jedinica broj 1.

Godine 1894. *André Blondel* je predložio da jedinica svjetlosnog toka dobije naziv »lumen« (kratica: lm). Taj naziv zadržan je i u SI, dakle $[\Phi]_M$ = lumen = = nt·m^2·sr, odnosno

$$\text{jedinica svjetlosnog toka SI} = \text{nit} \times \text{metar}^2 \times \text{steradijan} = \text{lumen} = \text{lm}.$$

Fizikalnu predodžbu o jedinici svjetlosnog toka $[\Phi]_M$ = lumen, definiranoj jednadžbom (3.2-2), možemo steći uz pomoć primjera 1 u odlomku 2.4.3 (vidi i sliku G.20). Tamo smo razmatrali svjetleću plohu koja savršeno difuzno odašilje svjetlo u poluprostor. Računanjem smo ustanovili da za taj slučaj vrijedi jednadžba $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A = \pi L$, gdje je L luminancija, a $\mathrm{d}A$ diferencijal svjetleće površine koji u poluprostor odašilje svjetlosni tok $\mathrm{d}\Phi$. U navedenom smo primjeru naglasili da pri tom π označuje prostorni kut π·sr (vrijedi sr = steradijan ≡ 1; vidi odlomke G.1.1.1 i B.1.6.1). Ako zamislimo da je riječ o izvanredno velikoj polukugli, onda možemo znak $\mathrm{d}A$ zamijeniti stvarnom površinom A koja u poluprostor odašilje svjetlosni tok Φ. Prema tome u našem primjeru možemo umjesto $\mathrm{d}\Phi = \pi L \, \mathrm{d}A$ pisati

$$\Phi = L A \pi = L A \pi \cdot \text{sr}, \tag{3.2-3}$$

jer je sr ≡ 1. Zamislimo slučaj kad su vrijednosti luminancije L i odašiljačke površine A jednake pripadnim jedinicama SI, dakle

$$L = 1 \text{ nt}, \quad A = 1 \text{ m}^2.$$

Iz jednadžbe (3.2-3) slijedi da u tom slučaju svjetleća ploha $A = 1\,\mathrm{m}^2$ odašilje u poluprostor svjetlosni tok

$$\Phi = 1\,\mathrm{nt} \cdot 1\,\mathrm{m}^2 \cdot \pi\,\mathrm{sr} = \pi\,\mathrm{nt} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{sr} = \pi\,\mathrm{lm},$$

tj. odaslani svjetlosni tok Φ je π puta veći od jedinice SI $[\Phi]_M$ = lumen. U skladu s time predlažemo ovakvu definiciju lumena:

> Lumen je π-ti dio svjetlosnog toka što ga u poluprostor odašilje savršeno difuzna svjetleća ploha površine jedan kvadratni metar i luminancije jedan nit.

Ova definicija lumena *bitno odstupa* od današnje službene definicije nacionalnih zakonodavstava (vidi odlomak 3.2.6). Razlog je tome što smo pri definiranju polazne fotometrijske jedinice pošli od jedinice luminancije $[L]_M$ = nit, a ne od jedinice svjetlosne jakosti $[I]_M$ = candela, kako to čine današnji zakonodavni akti u okviru SI. Na to odstupanje odlučili smo se zato što s jedne strane smatramo da je »luminancija« L najkarakterističnija veličina fotometrije, a s druge strane da je »svjetlosna jakost« I veličina koja u današnjoj rasvjetnoj tehnici (veliki plošni, cijevni i prostorni izvori svjetla) ubrzano gubi na korisnosti za rasvjetne proračune. Letimično smo nešto o tome spomenuli u odlomku 2.4.4.

Na jedinicu lumen mogu se, kao i na sve druge mjerne jedinice, primjenjivati dekadski i decimalni višekratnici (o njima i njihovoj primjeni vidi odsječke A.2.3 i B.7.6). U tehnici rasvjete vrlo se često upotrebljava dekadski višekratnik deka = da = 10, dakle

$$\text{dekalumen} = \text{dalm} = 10 \text{ lumena} = 10 \text{ lm}.$$

Na starijim električkim žaruljama često nalazimo oznaku Dlm, što je stara oznaka za dekalumen. Vrijedi, dakle, Dlm = dalm = 10 lumena. Ponekad se upotrebljava i višekratnik kilo = k = 1000, tj. kilolumen = klm = 1000 lm.

3.2.4. Jedinica rasvijetljenosti lux (kratica: lx). Fotometrijska veličina »rasvijetljenost« E, koja se naziva i »osvijetljenost«, definirana je jednadžbom (2.4-6) u odlomku 2.4.3. Prema tome je jedinica rasvijetljenosti SI $[E]_M = [\Phi]_M/[S]_M$ = lumen/kvadratni metar, što možemo pregledno zabilježiti u obliku

$$\text{jedinica rasvijetljenosti SI} = \frac{\text{lumen}}{\text{metar}^2} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \text{lux}.$$

Kratica jedinice rasvijetljenosti SI $[E]_M$ = lux jest lx. U skladu s navedenim i jednadžbom (2.4-6), definicija jedinice lux glasi:

> Lux je rasvijetljenost površine kojoj na kvadratni metar pada homogeni svjetlosni tok jedan lumen.

Ova definicija podudara se s današnjim zakonodavnim tekstom (vidi odlomak 3.2.6).

I na jedinicu rasvijetljenosti lux primjenjuju se višekratnici mjernih jedinica (vidi tablicu A-1). Najčešće se primjenjuje višekratnik kilo = k = 1000, dakle

$$\text{kilolux} = \text{klx} = 1000 \text{ lx}.$$

Ostale upotrebljavane jedinice rasvijetljenosti razmotrene su u odsječku 3.4.

3.2.5. Jedinica svjetlosne jakosti candela (kratica: cd). Fotometrijsku veličinu »svjetlosna jakost« I definirali smo u odlomku 2.2.4 jednadžbom $I = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\omega$. Budući da su jedinice SI svjetlosnog toka Φ i prostornog kuta ω

$$[\Phi]_{\mathrm{M}} = \text{lumen} = \text{lm}, \qquad [\omega]_{\mathrm{M}} = \text{steradijan} = \text{sr},$$

iz gornje jednadžbe dobivamo, u skladu s načelom građenja sistema koherentnih jedinica (vidi odsječak A.5.1),

$$[I]_{\mathrm{M}} = \frac{[\Phi]_{\mathrm{M}}}{[\omega]_{\mathrm{M}}} = \frac{\text{lumen}}{\text{steradijan}} = \frac{\text{lm}}{\text{sr}} = \text{candela} = \text{cd} = \text{nt} \cdot \text{m}^2. \qquad (3.2\text{-}4)$$

Kvocijent lumena i steradijana naziva se, dakle, candela (kratica je cd; izgovara se kandéla, tj. naglasak je na drugom slogu), što latinski znači »svijeća«. Prema tome je

$$\text{jedinica svjetlosne jakosti SI} = \frac{\text{lumen}}{\text{steradijan}} = \frac{\text{lm}}{\text{sr}} = \text{candela} = \text{cd}.$$

U skladu s definicijskom jednadžbom $I = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\omega$ i jednadžbom među jedinicama (3.2-4) možemo predložiti definiciju candele:

> Candela je svjetlosna jakost tačkastog izvora svjetla koji u prostorni kut jedan steradijan odašilje homogeni svjetlosni tok jedan lumen.

Ova definicija candele također se ne podudara s današnjim službenim tekstom; razlog je tome isti koji smo naveli i za definiciju lumena u odlomku 3.2.3. Fizikalnu predodžbu definicije cd = lm/sr čitatelj može steći uz pomoć izlaganja u odlomku 2.4.4 (vidi i slike G.2,19).

Primjena latinskog naziva »candela« u svim jezicima temeljito je opravdana. U prošlosti je, naime, postojao čitav niz »svijeća« (Hefnerova svijeća, međunarodna svijeća itd.; vidi odsječak 3.6), koje su se međusobno razlikovale. To je dovodilo do mnogih nesporazuma, pa i nedopustivih trgovačkih špekulacija. S današnjom definicijom candele i propisanim načinom njene reprodukcije (vidi odlomak 2.3.2) ona je jednoznačno utvrđena.

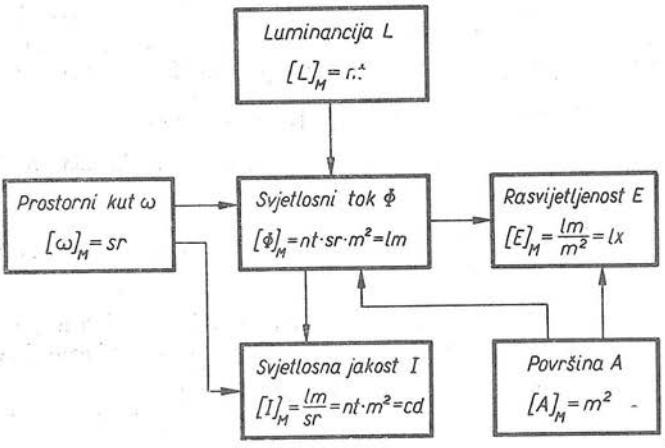
Dekadski i decimalni višekratnici jedinice candela gotovo se ne upotrebljavaju, ali se, naravno, mogu. Opis starijih jedinica svjetlosne jakosti (raznovrsne »svijeće«) i njihove međusobne odnose sadrži odsječak 3.6.

3.2.6. Službeni slijed definicija jedinica SI bitno se razlikuje od onoga koji smo iznijeli u odlomcima 3.2.2,3,4,5. Mi smo, naime, najprije definirali jedinicu luminancije SI $[L]_{\mathrm{M}} = \text{nit} = \text{nt}$, a onda pomoću jedinica steradijan = sr i kvadratni metar = m^2 izveli jedinice svjetlosnog toka Φ, rasvijetljenosti E i svjetlosne jakosti I. Taj slijed definicija ilustrira slika G.29; u njoj su luminancija L i njena jedinica SI nit polazište za definiranje lumena, luxa i candele.

S razvojem razvučenih, plošnih i prostornih izvorâ svjetla »svjetlosna jakost« I sve više postaje drugorazredna fotometrijska veličina (vidi odlomke 2.4.4 i 2.5.1). No unatoč tome slijed službenih definicija fotometrijskih jedinica danas još polazi od candele, tj. jedinice svjetlosne jakosti. Od candele se slijedom

$$\text{candela} = \text{cd} \rightarrow \text{lumen} = \text{cd} \cdot \text{sr} \rightarrow \text{nit} = \text{cd}/\text{m}^2,$$

izvode ostale fotometrijske jedinice. Ovdje nismo spomenuli lux = lm/m^2, jer je on jednako definiran, kako u suvremenoj interpretaciji (odlomci 3.2.2,3,4,5), tako i u



Sl. G.29. Slijed definicija jedinica fotometrijskih veličina koji počinje s jedinicom luminancije SI nit (prijedlog)

službenoj. Pod službenom definicijom i interpretacijom razumijevamo standarde ili zakone pojedinih država. Ilustraciju tog službenog slijeda definicija prikazuje slika G.30.

Generalna konferencija za mjere i utege prihvatila je na svom 13. zasjedanju godine 1967. (rezolucija 5) ovaj tekst definicije candele — jedinice svjetlosne jakosti u SI:

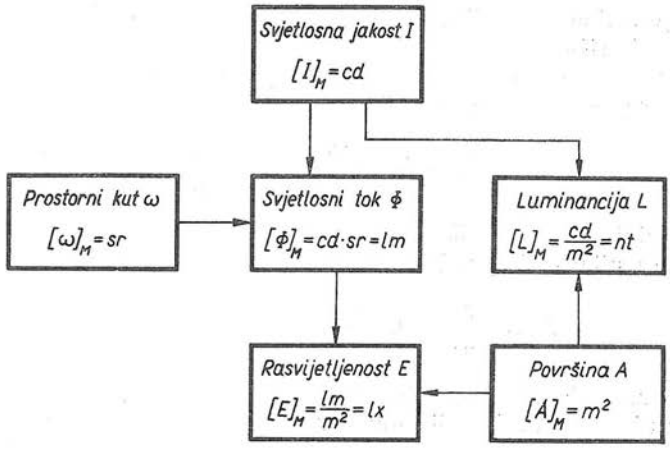
> La candela est l'intensité lumineuse, dans la direction perpendiculaire, d'une surface de 1/600000 mètre carré d'un corps noir à la température de congélation du platine sous la pression de 101 325 newtons par mètre carré.

Prijevod ove najnovije definicije candele glasi:

> Candela je svjetlosna jakost, u okomitom smjeru, površine 1/600000 kvadratnog metra crnog tijela na temperaturi skrućivanja platine pri tlaku 101 325 newtona na kvadratni metar.

Time je stavljena van tečaja definicija candele koju je Generalna konferencija prihvatila na svom devetom zasjedanju godine 1948: »Candela je šezdeseti dio svjetlosne jakosti koju odašilje u normalnom pravcu po 1 kvadratnom centimetru integralni radijator (crno tijelo) na temperaturi skrućivanja platine«. Ovu definiciju citirali smo iz Zakona o mjernim jedinicama i mjerilima od godine 1961. (Službeni list FNRJ broj 45 od 15. novembra 1961), u koju se sasvim nepotrebno uvukao izraz »integralni radijator«, koji je ropski prijevod (franc. radiateur intégral, engl. integral radiator), a označuje ono što se u nas razumijeva pod nazivom »savršeno zračilo« (engl. perfect radiator) ili »crno tijelo« (vidi odlomak 1.3.2).

Matematičku interpretaciju definicije candele od godine 1967. omogućuje jednadžba (2.4-10), koja povezuje svjetlosnu jakost I i luminanciju L izvora svjetla. Ako je riječ o *difuznom* izvoru te ako je $\alpha = 0$, onda ta jednadžba dobiva posve jednostavan oblik $I = LA$, gdje je A površina difuznog izvora. U našem slučaju



Sl. G.30. Slijed definicija jedinica fotometrijskih veličina koji počinje s jedinicom svjetlosne jakosti SI candela

to je površina otvora kroz koji savršeno zračilo odašilje svjetlo (sl. G.17). Ako navedene podatke iz definicije candele od godine 1967. napišemo u obliku $A = m^2/600000$ i $I = 1$ cd, iz netom izvedene jednadžbe $I = LA$ dobivamo

$$L = \frac{I}{A} = \frac{1\,\text{cd}}{\text{m}^2/600000} = 600\,000\,\frac{\text{cd}}{\text{m}^2} = 6 \cdot 10^5\,\frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

Budući da je prema (3.2-4) $\text{cd/m}^2 = \text{nt}$, to je vrijednost luminancije $L = 6 \cdot 10^5$ nt, a baš od te vrijednosti smo i pošli u našem prijedlogu polazišta definiranja fotometrijskih jedinica SI (vidi odlomak 2.3.2).

Pošto je jednom definirana polazna jedinica SI današnjeg fotometrijskog zakonodavstva, tj. jedinica svjetlosne jakosti SI $[I]_M = \text{cd}$, citirani jugoslavenski Zakon ovako definira ostale jedinice SI fotometrijskih veličina:

Jedinica *svjetlosnog toka* je lumen (oznaka: lm) : »Lumen je svjetlosni tok koji u prostorni kut od 1 steradijana odašilje tačkasti svjetlosni izvor čija svjetlosna jakost u svim pravcima prostora iznosi 1 candelu«.

Jedinica *rasvijetljenosti* je lux (oznaka: lx): »Lux je rasvijetljenost površine od 1 kvadratnog metra na koji dolazi, jednoliko raspoređen, svjetlosni tok od 1 lumena«.

Jedinica *luminancije* je nit (oznaka: nt): »Nit je luminancija izvora koji daje svjetlosnu jakost od 1 candele po kvadratnom metru svoje prividne površine«.

3.3. Ostale jedinice luminancije

Uz jedinicu luminancije SI nit $= \text{cd/m}^2 = \text{lm/sr} \cdot \text{m}^2$ i jedinicu kilonit $= \text{knt} =$ $= 1000$ nt, u rasvjetnoj tehnici i optici upotrebljavaju se i druge jedinice. Možemo ih podijeliti u dvije skupine: u prvu idu one koje su u dekadskom odnosu prema jedinici nit (npr. stilb, milistilb), a u drugu one koje su iz posebnih razloga u nedecimalnom odnosu prema nitu. U narednim odlomcima opisat ćemo te jedinice i objasniti porijeklo nedecimalnih odnosa.

3.3.1. Jedinica stilb (kratica: sb). Ovu jedinicu luminancije predložio je godine 1921. *A. Blondel*; ona predstavlja u stanovitom smislu produžetak CGS sistema jedinica mehanike (vidi odsječak B.8.2) u fotometriji. Stilb (stilbein grčki znači svijetliti se) definiran je relacijom

$$\text{stilb} = \text{sb} = \frac{\text{candela}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{cd}}{\text{cm}^2}.$$

Budući da jedinicu luminancije SI nit možemo pisati u obliku $\text{nt} = \text{cd/m}^2$ (vidi odlomak 3.2.6 i sliku G.29), to lako utvrđujemo vezu između stilba i nita:

$$\text{sb} = \frac{\text{cd}}{\text{cm}^2} = 10^4 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2} = 10^4\,\text{nt} = 10\,\text{knt}.$$

Tisuću puta manja jedinica je milistilb, tj. stilb na koji je primijenjen decimalni višekratnik $\text{mili} = \text{m} = 10^{-3}$ (vidi tablicu A-1)

$$\text{milistilb} = \text{msb} = 10\ \text{nt}; \qquad \text{nt} = 0{,}1\ \text{msb}.$$

Dvostrane odnose stilba prema ostalim jedinicama luminancije zabilježili smo u tablici G-13.

3.3.2. Jedinica apostilb (kratica: asb). Zamislimo da svjetlo iz nekog izvora pada na elementarnu površinu dS i rasvjetljuje je rasvijetljenošću E. U tom slučaju na dS dospijeva svjetlosni tok $d\Phi = E\,dS$, a kako faktor refleksije difuzne površine dS iznosi ρ, u poluprostor se od dS reflektira svjetlosni tok $d\Phi_\rho = \rho\,d\Phi = \rho E\,dS$. Budući da je riječ o *difuznoj* površini dS, tj. takvoj koja jednoliko reflektira svjetlo u poluprostor, ona će djelovati kao izvor svjetla luminancije L_ρ. U skladu s jednadžbom (2.4-5) za naš će slučaj vrijediti

$$d^2\Phi_\rho = L_\rho \cos\alpha\ dS\ d\omega,$$

jer je sada dS površina koja *odašilje* reflektirani svjetlosni tok. Riješimo li gornju jednadžbu za poluprostor, dobivamo $d\Phi_\rho = \pi L_\rho dS$, što usporedbom sa $d\Phi_\rho = \rho E\,dS$ daje

$$L = \frac{\rho}{\pi} E. \tag{3.3-1}$$

Ovdje smo napustili indeks ρ uz simbol luminancije, tj. $L_\rho = L$. Jednadžba (3.3-1) predstavlja, dakle, veličinsku vezu između rasvijetljenosti E i »reflektirane« luminancije L. Usput napominjemo da u jednadžbi moramo pretpostaviti $\pi = \pi \cdot \text{sr}$ ($\text{sr} \equiv 1$; vidi odlomke G.1.1.1 i B.1.6.1), jer inače jednadžba ne bi izdržala kontrolu s jedinicama:

$$[L]_\text{M} = \frac{[\rho]_\text{M}}{[\omega]_\text{M}} [E]_\text{M} \quad \rightarrow \quad \text{nt} = \frac{1}{\text{sr}}\,\text{lx} = \frac{\text{lm}}{\text{sr} \cdot \text{m}^2}.$$

Kontrola je pozitivna: u odlomku 3.2.3 imamo zabilježeno da je $\text{lm} = \text{nt} \cdot \text{sr} \cdot \text{m}^2$, a jedinica faktora refleksije ρ je broj 1, jer je to omjer dviju istorodnih veličina.

Jedinica luminancije apostilb definirana je relacijom

$$\text{apostilb} = \text{asb} = \frac{1}{\pi}\,\text{nit}, \tag{3.3-2}$$

tj. asb je π puta manja jedinica od jedinice luminancije SI nit. Pokušajmo ustanoviti zašto je apostilb definiran baš tako, tj. uvođenjem broja π? Odgovor će nam dati naredno razmatranje.

Primijenimo na *veličinsku* jednadžbu (3.3-1) osnovnu metrološku relaciju $G = \{G\}[G]$, tj. relaciju »veličina G = brojčani iznos $\{G\} \times$ jedinica $[G]$« (vidi odlomak A.1.3.3). Pri tom upotrijebimo ove jedinice: za luminanciju $[L]$ = apostilb = asb, a za rasvijetljenost $[E]$ = lux = lx. Na taj način dobivamo

$$L = \{L\}_{\text{asb}} \cdot \text{apostilb}, \qquad E = \{E\}_{\text{lx}} \cdot \text{lux},$$

pa jednadžbu (3.3-1) možemo napisati u obliku

$$\{L\}_{\text{asb}} \cdot \text{asb} = \frac{\rho}{\pi} \{E\}_{\text{lx}} \cdot \text{lx}.$$

Uvrstimo li ovamo jednadžbu među jedinicama (3.3-2), sređenjem slijedi

$$\{L\}_{\text{asb}} = \rho \{E\}_{\text{lx}} \frac{\text{lx}}{\text{nt}} = \rho \{E\}_{\text{lx}}, \tag{3.3-3}$$

jer je lx/nt = sr $\equiv$ 1 (vidi odlomak 3.4.1). To znači: *brojčani iznos luminancije (izazvane refleksijom) izražene apostilbima jednak je umnošku faktora refleksije ρ i brojčanog iznosa rasvijetljenosti izražene luxima.* U slučaju $\rho = 1$ (totalna refleksija), brojčana jednadžba (3.3-3) prelazi u najjednostavniji mogući oblik $\{L\}_{\text{asb}} = \{E\}_{\text{lx}}$!

Iz ovog izlaganja je očigledno da su rasvjetni tehničari uveli u svoja računanja nekoherentnu jedinicu apostilb = nt/π samo zato da bi sebi uštedjeli dijeljenje ili množenje sa π. Uštedu na računanju nisu postigli samo pri računanju refleksije svjetla, već i pri računanju propuštanja svjetla, jer umjesto veličinskom jednadžbom $L_\tau = E\tau/\pi$ računaju brojčanom jednadžbom

$$\{L_\tau\}_{\text{asb}} = \tau \{E\}_{\text{lx}}.$$

Ovdje slovo τ predstavlja faktor propusnosti (transmisije) svjetla.

Takvim su postupkom rasvjetni tehničari, doduše, ubrzali svoje proračune, ali su time uzrokovali najmanje tri štete: 1. Gotovo nitko od onih rijetkih mladih ljudi koji su odlučili da se bave rasvjetnom tehnikom ne razumije porijeklo jednadžbi oblika (3.3-2,3). 2. Brojčane jednadžbe imaju niz nedostataka u odnosu na veličinske (vidi odsječak A.1.4). 3. Jedinice kao apostilb (vidi i druge slične u odlomcima 3.3.3,6) su vansistemske jedinice, dakle još jedan dodatni teret na memoriju čovjeka. Zbog svega toga valja jedinicu asb izbjegavati i upotrebljavati nit, čime jednadžbe bez sumnje uvijek predstavljaju veličinske jednadžbe, to pouzdano pomagalo prirodnjaka i tehničara, odnosno svakoga tko mora računati.

U američkoj literaturi o rasvjeti možemo zapaziti jedinicu blondel (to nije ona koju je predložio *P. Moon* uz svoj sistem fotometrijskih veličina; vidi odlomak 2.5.1). U stvari je to samo drugi naziv za apostilb, dakle

$$\text{blondel} = \text{apostilb} = \text{nit}/\pi.$$

Dvostrane odnose jedinice apostilb (blondel) prema drugim jedinicama luminancije sadrži tablica G-13.

Tablica **G-13**

Dvostrani odnosi među jedinicama luminancije

Jedinica	Kratica	nt	sb	asb	la	mla	ft la	cd/in²
nit (= cd/m²) =	nt	1	10^{-4}	3,141 593	$3{,}141\,593 \cdot 10^{-4}$	$3{,}141\,593 \cdot 10^{-1}$	$2{,}918\,635 \cdot 10^{-1}$	$6{,}4516 \cdot 10^{-4}$
stilb (= cd/cm²) =	sb	10^{4}	1	$3{,}141\,593 \cdot 10^{4}$	3,141 593	$3{,}141\,593 \cdot 10^{3}$	$2{,}918\,635 \cdot 10^{3}$	6,4516
apostilb (= blondel) =	asb	$3{,}183\,099 \cdot 10^{-1}$	$3{,}183\,099 \cdot 10^{-5}$	1	10^{-4}	10^{-1}	$9{,}290\,30 \cdot 10^{-2}$	$2{,}054 \cdot 10^{-4}$
lambert =	la	$3{,}183\,099 \cdot 10^{3}$	$3{,}183\,099 \cdot 10^{-1}$	10^{4}	1	10^{3}	$9{,}290\,30 \cdot 10^{2}$	2,054
mililambert =	mla	3,183 099	$3{,}183\,099 \cdot 10^{-4}$	10	10^{-3}	1	$9{,}290\,30 \cdot 10^{-1}$	$2{,}054 \cdot 10^{-3}$
footlambert =	ft la	3,426 259	$3{,}426\,259 \cdot 10^{-4}$	$1{,}076\,391 \cdot 10$	$1{,}076\,391 \cdot 10^{-3}$	1,076 391	1	$2{,}210 \cdot 10^{-3}$
candle per square inch =	cd/in²	$1{,}550 \cdot 10^{3}$	$1{,}550 \cdot 10^{-1}$	$4{,}870 \cdot 10^{3}$	0,487	$4{,}870 \cdot 10^{2}$	$4{,}52 \cdot 10^{2}$	1

3.3.3. Jedinice lambert i mililambert (kratice: la i mla) nalazimo pretežno u američkoj literaturi. Izmišljene su iz istog razloga kao i apostilb (vidi prethodni odlomak). Vansistemska jedinica luminancije lambert definirana je odnosom

$$\text{lambert} = \text{la} = \frac{1}{\pi}\,\text{stilb} = \frac{10^4}{\pi}\,\text{nit}.$$

Analognim razmatranjem o reflektiranom svjetlu kao u odlomku 3.3.2 dobivamo *brojčanu* jednadžbu

$$\{L\}_{\text{la}} = \rho \cdot 10^{-4}\{E\}_{\text{lx}} \quad \text{ili} \quad \{L\}_{\text{la}} = \rho\{E\}_{\text{ph}},$$

gdje je $\{E\}_{\text{ph}}$ brojčani iznos rasvijetljenosti E u jedinici phot (čitaj »fot«) = ph = $= 10^4$ lx (vidi odlomak 3.4.2).

Uz jedinicu luminancije lambert često se upotrebljava decimalni višekratnik mili = m = 10^{-3} (vidi tablicu A-1). Veza između tako nastale jedinice mililambert i jedinice SI nit glasi

$$\text{mililambert} = \text{mla} = 10^{-3}\ \text{la} = \frac{10}{\pi}\,\text{nit},$$

tj. mla je oko 3 puta veća jedinica od nit. Dvostrane odnose jedinica lambert i mililambert prema ostalim jedinicama luminancije sadrži tablica G-13.

3.3.4. Jedinica footlambert (kratica: ft la). Ova se jedinica luminancije dosta često upotrebljava u angloameričkom jezičnom području, gdje se duljina i površina mjere jedinicama

$$\text{foot} = \text{ft} = 0{,}3048\ \text{m}, \quad \text{square foot} = \text{ft}^2 = 0{,}092\,903\ \text{m}^2.$$

Podrobnije se čitatelj o tim angloameričkim jedinicama može informirati u odlomcima B.11.3.1, 4 te u tablicama **4** i **7** u prilogu knjige.

Ako se površina mjeri angloameričkom jedinicom square foot = ft², onda se za rasvijetljenost E primjenjuje jedinica lumen/ft² = footcandle = ft cd (vidi odlomak 3.4.3), a za luminanciju jedinica

$$\text{footlambert} = \text{ft la} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\text{candle}}{\text{foot}^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\text{cd}}{\text{ft}^2}. \qquad (3.3\text{-}4)$$

Ovdje riječ »candle« na engleskom označuje našu »candelu« (vidi odlomak 3.2.5), iako i na engleskom valja jedinicu svjetlosne jakosti cd = nt·m² pisati u originalnom latinskom obliku (neki autori s angloameričkog jezičnog područja danas tako i rade). Jedinicu footlambert pojedini autori pišu i u obliku foot-lambert, dakle sa crticom, a kraticu ovako: ft-la. Isto tako i jedinicu rasvijetljenosti footcandle neki angloamerički autori pišu sa crticom, dakle foot-candle (kratica: ft-c).

Jedinica footlambert iz jednadžbe (3.3-4) angloamerički je analogon metričkom apostilbu (vidi odlomak 3.3.2). Uz upotrebu jedinice luminancije footlambert (ft la) i jedinice rasvijetljenosti footcandle (ft cd) od veličinske jednadžbe (3.3-1) dobiva se, naime, brojčana jednadžba

$$\{L\}_{\text{ft la}} = \rho\,\{E\}_{\text{ft cd}}. \qquad (3.3\text{-}5)$$

To znači: brojčani iznos luminancije izražene footlambertima jednak je umnošku faktora refleksije ρ i brojčanog iznosa rasvijetljenosti izražene jedinicom footcandle (usporedi s odlomkom 3.3.2).

Dvostrane odnose angloameričke jedinice footlambert s ostalim jedinicama luminancije sadrži tablica G-13.

Nije naodmet spomenuti da u angloameričkom jezičnom području postoje stanovite terminološke poteškoće u vezi s jedinicom footlambert. Tako, na primjer, neki američki autori (naročito u starijoj literaturi) umjesto naziva »footlambert« (ili foot-lambert) upotrebljavaju termine »equivalent footcandle« ili »apparent footcandle« sa šarenim društvom kratica: ft la, ft-la, ftL ili ftla. Oba naziva predstavljaju, dakako, razmotrenu jedinicu luminancije footlambert, a porijeklo im je očito u jednadžbi (3.3-5).

Primjer. Dokažimo ispravnost brojčane jednadžbe (3.3-5)! Dokaz ćemo izvesti tako da od te brojčane jednadžbe pokušamo izvesti veličinsku jednadžbu (3.3-1). Simboli $\{L\}_{\mathrm{ft\,la}}$ i $\{E\}_{\mathrm{ft\,cd}}$ u jednadžbi (3.3-5) predstavljaju brojčane iznose veličina L i E u jedinicama footlambert = ft la i footcandle = ft cd, što prema temeljnoj metrološkoj relaciji $\{G\} = G/[G]$ (vidi odlomak A.1.3.3) možemo napisati u obliku

$$\{L\}_{\mathrm{ft\,la}} = L/\mathrm{ft\,la}, \quad \{E\}_{\mathrm{ft\,cd}} = E/\mathrm{ft\,cd}.$$

Uvrstimo li ove odnose u jednadžbu (3.3-5) i poslužimo se jednadžbom (3.3-4) te upotrijebimo ft cd = lm/ft² (vidi odlomak 3.4.3), dobivamo

$$\frac{L}{\mathrm{ft\,la}} = \rho \frac{E}{\mathrm{ft\,cd}}; \qquad L = \rho E \frac{\mathrm{ft\,la}}{\mathrm{ft\,cd}} = \frac{\rho}{\pi} E \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{lm}}.$$

U odlomku 3.2.5 imamo zabilježeno da je lm/cd = sr = steradijan. Budući da je (vidi odlomke G.1.1.1 i B.1.6.1) sr ≡ 1, to možemo napisati i identičnost lm/cd ≡ 1. Prema tome gornja desna jednadžba prelazi u definitivan oblik $L = E\rho/\pi$, a to je naša veličinska jednadžba (3.3-1). Time je dokazano da je brojčana jednadžba (3.3-5) ispravna za svrhu koja je obrazložena uz tu jednadžbu.

3.3.5. Jedinica luminancije candle/inch² (kratica: cd/in²). U angloameričkoj stručnoj literaturi može se katkada zapaziti i ova jedinica luminancije. Njen odnos prema jedinici SI nit lako je utvrditi. Budući da je candle = candela, a square inch = in² = 6,4516 · 10⁻⁴ m² (vidi tablicu **7** u prilogu knjige), računanjem dobivamo

$$\frac{\mathrm{candle}}{\mathrm{inch}^2} = \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{in}^2} = \frac{\mathrm{cd}}{6{,}4516 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 1550 \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2} = 1550\,\mathrm{nt}.$$

Dvostrane odnose angloameričke jedinice candle/in² prema ostalim jedinicama luminancije sadrži tablica G-13.

3.3.6. Jedinica »tamne luminancije« skot (kratica: sk). Spektralna osjetljivost (relativna vidljivost) ljudskog oka bitno je drukčija pri malim vrijednostima luminancije promatranog izvora svjetla (ili svjetleće plohe) negoli pri većim. Tu razliku opisali smo u odlomku 2.2.2, razmatrajući *Purkyněov* efekt. Za opseg vrijednosti luminancije u kojem vrijedi krivulja V'_λ »tamno adaptiranog oka« (vidi odlomak 2.2.2, a napose sliku G.12 i tablicu G-4) oko zapaža svjetlo pomoću *štapića*, dakle bitno drukčije negoli pri »svijetlo adaptiranom oku«, kada vidi pomoću čunjića. Zbog toga se za malene vrijednosti luminancije i rasvijetljenosti (ispod 3 milinita) definira nova fotometrijska veličina, tzv. »tamna luminancija« L' (njemački Dunkelleuchtdichte)

$$L' = K_{\mathrm{m}} \int M_\lambda V'_\lambda \,\mathrm{d}\lambda, \tag{3.3-6}$$

dakle posve analogno kao što je jednadžbom (2.3-1) definirana »svijetla luminancija« L. U gornjoj jednadžbi slovo K_{m} predstavlja tzv. fotometrijski ekvivalent

zračenja (vidi odlomak 2.3.3), a M_λ spektralnu gustoću snage zračenja $M_\lambda = \partial M(\lambda)/\partial\lambda$ (vidi odlomak 1.3.3).

Zamislimo da posjedujemo izvor *monokromatskog* svjetla čiju vrijednost spektralne gustoće snage M_λ možemo mijenjati. Na taj način se luminancija izvora jednom nalazi u području gdje vrijedi krivulja V_λ, a drugi put u području V'_λ (tamna adaptacija). Budući da je riječ o monokromatskim zračenjima, za ta dva stanja jednadžba (3.3-6) dobiva oblike (usporedi prijelaz od integrala na sumu u odlomku 2.3.1)

$$\text{za svijetlu adaptaciju} \quad L = K_m V_\lambda M_\lambda \Delta\lambda$$

$$\text{za tamnu adaptaciju} \quad L' = K_m V'_\lambda M'_\lambda \Delta\lambda.$$

Luminancije L i L' su zapravo neka vrsta »spektralne luminancije« $L(\lambda)$ i $L'(\lambda)$, jer je riječ o luminanciji monokromatskog svjetla koje se sastoji od zračenja u uskom rasponu duljina vala λ, $\lambda + \Delta\lambda$. Podijelimo li međusobno navedene jednadžbe, dobivamo

$$\frac{L}{L'} = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda)} = \frac{M_\lambda}{M'_\lambda}\,\frac{V_\lambda}{V'_\lambda}.$$

Prema tome na omjer luminancija L/L' ne utječe samo omjer vrijednosti veličina M_λ/M'_λ već i omjer relativnih vidljivosti V_λ/V'_λ ljudskog oka pri različitim razinama luminancija.

Ako nije riječ o monokromatskom svjetlu, već o širokom spektru koji odašilje »temperaturno zračilo« (vidi npr. sliku G.7), prilike su znatno zamršenije. U tom slučaju mora se primijeniti jednadžba (3.3-6), pa omjer luminancije L i »tamne luminancije« L' ovisi o svim nabrojenim veličinama ovako

$$\frac{L}{L'} = \frac{\int M_\lambda\, V_\lambda\, \mathrm{d}\lambda}{\int M'_\lambda\, V'_\lambda\, \mathrm{d}\lambda}.$$

Granice gornjeg integrala su nultačke krivulje V_λ, a granice donjeg integrala nultačke krivulje V'_λ (vidi tablicu G-4).

Direktan priključak veličine L' na L može se jednoznačno izvesti samo za takva zračenja koja u oku izazivaju *jednak utisak boje*. Način utvrđivanja te jednakosti mora se *dogovoriti*, to je, dakle, konvencija. U Njemačkoj je u svrhu priključka jedinice veličine L' na jedinicu veličine L ta konvencija ostvarena odabiranjem zračenja savršenog zračila (crnog tijela) pri termodinamičkoj temperaturi 2360 K. To ujedno znači da je *temperatura boje* $T_b = 2360$ K (vidi odlomak 2.5.2) ako je riječ o nesavršenom zračilu, na primjer o volframovoj vakuumskoj žarulji.

Jedinica veličine »tamna luminancija« L' (njem. Dunkelleuchtdichte) nazvana je skot (kratica: sk). Pri temperaturi boje $T_b = 2360$ K vrijedi ova veza s jedinicom luminancije nit

$$\text{skot} = \text{sk} = \frac{1}{\pi}\,\text{milinit} = \frac{10^{-3}}{\pi}\,\text{nt}. \qquad (3.3\text{-}7)$$

Naglašavamo ponovno da jednadžba (3.3-7) vrijedi samo za zračenja temperature boje 2360 K; za sva druga zračenja odnos sk/nt je različit od $10^{-3}/\pi$.

Na razmatranju »tamne luminancije« L' morali smo se zadržati dulje zato što bez toga ne bi bilo moguće nedvosmisleno tumačiti relaciju (3.3-7). Osim toga, na istim se temeljima osniva jedinica rasvijetljenosti nox, koju ćemo razmotriti u odlomku 3.4.5.

Tablica **G-14**

Dvostrani odnosi među jedinicama rasvijetljenosti

Jedinica		Kratica	lx	klx	ph	mph	ft cd	lm/in²
lux	=	lx	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-1}	$9{,}2903 \cdot 10^{-2}$	$6{,}4516 \cdot 10^{-4}$
kilolux	=	klx	10^{3}	1	10^{-1}	10^{2}	$9{,}2903 \cdot 10$	0,64516
phot	=	ph	10^{4}	10	1	10^{3}	$9{,}2903 \cdot 10^{2}$	6,4516
miliphot	=	mph	10	10^{-2}	10^{-3}	1	0,92903	$6{,}4516 \cdot 10^{-3}$
footcandle	=	ft cd	$1{,}07639 \cdot 10$	$1{,}07639 \cdot 10^{-2}$	$1{,}07639 \cdot 10^{-3}$	1,07639	1	$6{,}9444 \cdot 10^{-3}$
lumen per sq. inch	=	lm/in²	$1{,}55 \cdot 10^{3}$	1,55	0,155	$1{,}55 \cdot 10^{2}$	$1{,}44 \cdot 10^{2}$	1

3.4. Mjerne jedinice rasvijetljenosti

3.4.1. Jedinice lux i kilolux (kratice: lx, klx). U Međunarodnom sistemu jedinica (SI) jedinica rasvijetljenosti E je lux; definicija je navedena u odlomku 3.2.4. Veza jedinice $[E]_M = \text{lux} = \text{lx}$ s ostalim jedinicama SI fotometrijskih veličina najčešće se izražava u obliku

$$\text{lux} = \text{lx} = \frac{\text{lumen}}{\text{metar}^2} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2},$$

gdje je m^2 kratica jedinice površine SI kvadratni metar. Veza lumena s jedinicama SI luminancije nit = nt i svjetlosne jakosti candela = cd glasi (vidi odsječak 3.2):

$$\text{lux} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \frac{\text{cd} \cdot \text{sr}}{\text{m}^2} = \text{nt} \cdot \text{sr}. \quad (3.4\text{-}1)$$

Na jedinicu lux mogu se, dakako, primjenjivati dekadski i decimalni višekratnici kao i na ostale jedinice (vidi tablicu A-1). U rasvjetnoj tehnici najčešće se upotrebljava višekratnik kilo = k = 1000. Tako izvedena jedinica je

$$\text{kilolux} = \text{klx} = 1000\ \text{lx}.$$

Dvostrane odnose jedinica lux i kilolux prema ostalim jedinicama rasvijetljenosti sadrži tablica G-14.

3.4.2. Jedinice phot i miliphot (kratice: ph, mph). Godine 1921. *A. Blondel* je predložio naziv »phot« (čitaj »fot«) za jedinicu rasvijetljenosti

$$\text{phot} = \text{ph} = \frac{\text{lm}}{\text{cm}^2}.$$

Ta jedinica je, dakle, stanovit produžetak mehaničkog dijela CGS sistema jedinica (o njemu vidi odsječak B.8.2) u fotometriju. Vezu jedinice phot sa jedinicom SI lux možemo uspostaviti jednadžbom (3.4-1), ako uzmemo da je $\text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2$:

$$\text{ph} = \frac{\text{lm}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{lm}}{10^{-4}\ \text{m}^2} = 10^4\ \text{lx}.$$

Budući da je phot dosta velika jedinica, u literaturi se upotrebljava i 1000 puta manja: miliphot = mph = 10^{-3} ph. Između jedinica mph i lx postoje odnosi

$$\text{mph} = 10^{-3}\ \text{ph} = 10^{-3} \cdot 10^{4}\ \text{lx} = 10\ \text{lx}; \quad \text{lx} = 0{,}1\ \text{mph}.$$

Dvostrane odnose jedinica phot i miliphot prema ostalim jedinicama rasvijetljenosti sadrži tablica G-14.

3.4.3. Jedinica footcandle (kratica: ft cd). Ovu angloameričku jedinicu rasvijetljenosti neki autori pišu foot-candle, dakle sa crticom; u tom je slučaju kratica ft-c. Naziv footcandle (engleski foot znači »stopa«, a candle »svijeća«) očito potječe od primjene relacije $I = r^2 E$ (vidi odlomak 2.4.4), dakle iz starijih dana fotometrije (usporedi sa slikom G.22).

Danas je angloamerička jedinica rasvijetljenosti E footcandle definirana relacijom

$$\text{footcandle} = \text{ft cd} = \frac{\text{lumen}}{\text{foot}^2} = \frac{\text{lm}}{\text{ft}^2}, \tag{3.4-2}$$

gdje je foot = 0,3048 m, a square foot = ft^2 = 0,092 903 m^2 (vidi tablice **4** i **7** u prilogu knjige). Lako izračunavamo odnos te jedinice prema jedinici SI lx = lm/m^2:

$$\text{ft cd} = \frac{\text{lm}}{\text{ft}^2} = \frac{\text{lm}}{0{,}092\,903\ \text{m}^2} = 10{,}7639\ \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = 10{,}7639\ \text{lx}.$$

Prema tome jedinica footcandle je oko 10 puta veća od jedinice lux.

Obrnuto vrijedi lx = 0,092 903 ft cd. Dvostrane odnose ove jedinice prema ostalim jedinicama rasvijetljenosti sadrži tablica G-14.

Primjer. Preračunajmo rasvijetljenost E = 1,2 klx na jedinice footcandle i miliphot! Budući da je klx = 10^3 lx te lx = 0,092 903 ft cd, računanjem dobivamo

$$E = 1{,}2\ \text{klx} = 1200\ \text{lx} = 1200 \cdot 0{,}092903\ \text{ft cd} = 111{,}48\ \text{ft cd}.$$

Drugi dio zadatka rješavamo pomoću relacije lx = 0,1 mph (vidi odlomak 3.4.2), tj. E = 1200 lx = = 1200 · 0,1 mph = 120 mph. Usporedimo li oba dobivena rezultata, vidimo da se jedinice footcandle i miliphot razlikuju samo za oko 8%.

3.4.4. Jedinica rasvijetljenosti lumen/inch². Ovu jedinicu često upotrebljavaju u angloameričkom svijetu, gdje za mjerenje malih površina služi jedinica square inch = inch^2 = in^2 = 6,4516 · 10^{-4} m^2 (vidi tablicu **7** u prilogu knjige). Pomoću tog podatka možemo izračunati odnos između jedinica lm/in^2 i lx, odnosno klx:

$$\frac{\text{lm}}{\text{in}^2} = \frac{\text{lm}}{6{,}4516 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 1550\ \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = 1550\ \text{lx} = 1{,}55\ \text{klx}.$$

Obrnuti odnos je lx = 6,4516 · 10^{-4} lm/in^2, odnosno klx = 0,645 16 lm/in^2. Dvostrane odnose jedinice lm/in^2 prema ostalim jedinicama rasvijetljenosti sadrži tablica G-14.

3.4.5. Jedinica »tamne rasvijetljenosti« nox (kratica: nx). U odlomku 3.3.6 razmotrili smo veličinu »tamna luminancija« L' (njem. Dunkelleuchtdichte) i njenu jedinicu skot. Pod istim uvjetima definirana je veličina »tamna rasvijetljenost« (njem. Dunkelbeleuchtungsstärke)

$$E' = \int L' \cos\beta \, \mathrm{d}\Omega.$$

Geometrijsko značenje ove jednadžbe isto je kao i u jednadžbi (2.4-8) u odlomku 2.4.3.

Mjerna jedinica veličine E' nazvana je nox (kratica: nx). Pri temperaturi boje $T_b = 2360$ K (vidi odlomak 2.5.3) vrijede ovi odnosi

$$\text{nox} = \text{nx} = 10^{-3}\,\text{lx}; \quad \text{lx} = 1000\,\text{nx}.$$

Za svjetlosne izvore drugih temperatura boje navedeni odnos nije upotrebljiv (vidi odlomak 3.3.6).

Primjer. Za zračenje temperature boje $T_b = 2360$ K vrijede odnosi nox $= 10^{-3}$ lx i skot $=$ $=$ milinit$/\pi = 10^{-3}$ nt$/\pi$ (vidi odlomak 3.3.6). Provjerimo nije li vrijednost jedinice »tamne luminancije« L' sk odabrana tako baš zato da bi se mogla uspostaviti brojčana jednadžba nalik na (3.3-3) u odlomku 3.3.2.

U tu svrhu napisat ćemo veličinsku jednadžbu (3.3-1) u obliku prilagođenom »tamnim fotometrijskim veličinama« L' i E', dakle

$$L' = \frac{\rho}{\pi} E'.$$

Ovdje je dakako ρ faktor refleksije. Na temelju osnovne metrološke relacije $G = \{G\}[G]$ (vidi odlomak A.1.3.3) veličinu L' prikazat ćemo umnoškom brojčanog iznosa $\{L'\}_{\text{sk}}$ i jedinice skot $=$ $=$ sk, a veličinu E' umnoškom brojčanog iznosa $\{E'\}_{\text{nx}}$ i jedinice nox $=$ nx (usporedi s analognim postupkom u odlomku 3.3.2). Na taj način od veličinske jednadžbe (3.4-3) dobivamo

$$\{L'\}_{\text{sk}} \cdot \text{sk} = \frac{\rho}{\pi} \{E'\}_{\text{nx}} \cdot \text{nx}.$$

Uvrstimo li ovamo nx $=$ mlx i sk $=$ mnt$/\pi$, kraćim računanjem dobivamo

$$\{L'\}_{\text{sk}} = \rho \{E'\}_{\text{nx}},$$

što znači: brojčani iznos tamne luminancije L' izražene skotima jednak je umnošku faktora refleksije ρ i brojčanog iznosa tamne rasvijetljenosti E' izražene noxima. Računanje nam je, dakle, pokazalo da je sumnja o razlogu definiranja baš u obliku skot $=$ milinit$/\pi$ bila opravdana.

3.5. Mjerne jedinice veličine ekspozicija

3.5.1. Veličina ekspozicija, koju nazivaju i »količina rasvijetljenosti« (vidi tablicu G-5), definirana je jednadžbom

$$e = \int_0^t E \, \mathrm{d}t, \tag{3.5-1}$$

gdje je E veličina »rasvijetljenost« (vidi odlomak 2.4.3), a slovo t predstavlja veličinu »vrijeme« (vidi odsječak B.2.3). Osim simbolom e, veličina »ekspozicija« označuje se i slovom H. Ako je rasvijetljenost E konstantna u toku vremena, jednadžba (3.5-1) prelazi u oblik

$$e = E\,t. \tag{3.5-2}$$

Ova jednadžba vrijedi i u slučaju ako se pod E i t razumijevaju srednje vrijednosti rasvijetljenosti neke površine i trajanja izlaganja te površine djelovanju svjetla.

Postoji niz mjernih jedinica veličine ekspozicija e (H), ali se one uglavnom baziraju na jedinicama rasvijetljenosti lux i phot. Iz angloameričkih jedinica rasvijetljenosti footcandle i lumen/inch^2 (vidi odlomke 3.4.3, 4) jedinica ekspozicije

Tablica G-15

Dvostrani odnosi među jedinicama ekspozicije

Jedinica		Kratica	lxs	klxs	lxh	phs	mphs	phh
luxsekunda	=	lxs	1	10^{-3}	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-1}	$2{,}77778 \cdot 10^{-8}$
kiloluxsekunda	=	klxs	10^{3}	1	$2{,}77778 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	10^{2}	$2{,}77778 \cdot 10^{-5}$
luxsat	=	lxh	$3{,}6 \cdot 10^{3}$	3,6	1	$3{,}6 \cdot 10^{-1}$	$3{,}6 \cdot 10^{2}$	10^{-4}
photsekunda	=	phs	10^{4}	10	2,77778	1	10^{3}	$2{,}77778 \cdot 10^{-4}$
miliphotsekunda	=	mphs	10	10^{-2}	$2{,}77778 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	1	$2{,}77778 \cdot 10^{-7}$
photsat	=	phh	$3{,}6 \cdot 10^{7}$	$3{,}6 \cdot 10^{4}$	10^{4}	$3{,}6 \cdot 10^{3}$	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	1

ne izvodi se ni u zemljama engleskoga govora. U narednim odlomcima opisat ćemo češće upotrebljavane jedinice veličine »ekspozicija«.

3.5.2. Jedinica SI luxsekunda (kratica: lxs) koherentna je jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI). Do nje vrlo lako dolazimo primjenom načela građenja *sistema* jedinica (vidi odsječak A.5.1): ako za rasvijetljenost E upotrijebimo jedinicu SI $[E]_{\mathrm{M}} = \mathrm{lux} = \mathrm{lx}$ (vidi odlomak 3.4.1), a za vrijeme jedinicu SI $[t]_{\mathrm{M}} =$ $= \mathrm{sekunda} = \mathrm{s}$, iz jednadžbi (3.5-1 i 2) dobivamo

$$\text{jedinica ekspozicije SI} = [e]_{\mathrm{M}} =$$
$$= [E]_{\mathrm{M}}\,[t]_{\mathrm{M}} = \mathrm{lx \cdot s} = \text{luxsekunda}.$$

Kratica te jedinice obično se piše bez tačke kao znaka množenja, dakle

$$\text{luxsekunda} = \text{lux} \times \text{sekunda} = \mathrm{lx \cdot s} = \mathrm{lxs}.$$

Na jedinicu lxs primjenjuju se dekadski višekratnici (vidi tablicu A-1). Najčešće se upotrebljava dekadski višekratnik kilo $= \mathrm{k} = 10^{3}$:

$$\text{kiloluxsekunda} = \mathrm{klxs} = \mathrm{k \cdot lx \cdot s} =$$
$$= 10^{3} \cdot \mathrm{lx \cdot s} = 10^{3}\ \mathrm{lxs}.$$

Dvostrane odnose jedinica luxsekunda i kiloluxsekunda prema ostalim jedinicama ekspozicije sadrži tablica G-15.

3.5.3. Jedinica photsekunda (kratica: phs). Budući da je $\text{phot} = \mathrm{ph} = 10^{4}\ \mathrm{lx}$ (vidi odlomak 3.4.2), to je lako izračunati odnos

$$\text{photsekunda} = \mathrm{phs} = \mathrm{ph \cdot s} =$$
$$= 10^{4}\ \mathrm{lx \cdot s} = 10^{4}\ \text{luxsekunda}.$$

Obrnuto vrijedi $\mathrm{lxs} = 10^{-4}\ \mathrm{phs}$. Često se upotrebljava tisuću puta manja jedinica

$$\text{miliphotsekunda} = \mathrm{mphs} = \mathrm{m \cdot ph \cdot s}.$$

Budući da je $\mathrm{m} = \text{mili} = 10^{-3}$, a $\mathrm{ph} = 10^{4}\mathrm{lx}$, od gornjeg izraza lako dobivamo

$$\text{miliphotsekunda} = \mathrm{mphs} =$$
$$= 10^{-3} \cdot 10^{4}\ \mathrm{lx \cdot s} = 10\ \mathrm{lxs}.$$

Dvostrane odnose jedinica phs i mphs prema ostalim jedinicama ekspozicije sadrži tablica G-15.

3.5.4. Jedinice luxsat i photsat (kratice: lxh i phh). Prema jednadžbi (3.5-2) vrijednost ekspozicije e iznosi 1 luxsat kada je rasvijetljenost $E = 1$ lx, a trajanje eksponiranja iznosi $t = 1$ sat $= 1$ h $= 3600$ sekundi. Naravno da se ista ekspozicija e dobiva i kada je npr. $E = 3600$ lx, a $t = 1$ s itd. Tolika ekspozicija dosta se često odabire za jedinicu, a naziv joj je »luxsat« (lxh). Vrijede odnosi

$$\text{luxsat} = \text{lxh} = \text{lx} \cdot \text{h} = \text{lx} \cdot 3600\ \text{s} = 3600\ \text{lxs},$$

$$\text{luxsekunda} = \text{lxs} = \text{lx} \cdot \text{s} = \text{lx} \frac{\text{h}}{3600} = 2{,}777\,78 \cdot 10^{-4}\ \text{lxh},$$

jer je sat $=$ h $= 3600$ s. Jedinica vremena sat $=$ h upotrebljava se i umjesto sekunde u jedinici photsekunda $=$ phs. Preračunavanje se obavlja uz pomoć jednadžbi među jedinicama

$$\text{photsat} = \text{phh} = \text{ph} \cdot \text{h} = \text{ph} \cdot 3600\ \text{s} = 3600\ \text{phs},$$

$$\text{photsat} = 3600\ \text{phs} = 3600 \cdot 10^{4}\ \text{lx} \cdot \text{s} = 3{,}6 \cdot 10^{7}\ \text{lxs},$$

$$\text{photsekunda} = \text{phs} = \text{ph} \frac{\text{h}}{3600} = 2{,}777\,78 \cdot 10^{-4}\ \text{phh} = 10^{4}\ \text{lxs}.$$

U stručnoj literaturi može se ponekad zapaziti i jedinica ekspozicije »miliphotsat« To je u stvari mph·h $=$ m·ph·h. Budući da je m $=$ mili $= 10^{-3}$, ph $=$ phot $= 10^{4}$ lx, h $=$ sat $= 3600$ s, kratkim računanjem dobivamo odnos između jedinice miliphotsat i jedinice luxsekunda:

$$\text{miliphotsat} = \text{m} \cdot \text{ph} \cdot \text{h} = 10^{-3} \cdot 10^{4}\ \text{lx} \cdot 3600\ \text{s} = 3{,}6 \cdot 10^{4}\ \text{lx}.$$

Dvostrane odnose među nabrojenim jedinicama i ostalim jedinicama ekspozicije sadrži tablica G-15.

3.6. Iz povijesti svjetlosnih pramjerila

U narednih šest odlomaka pokušat ćemo prikazati kako su se u novijoj ljudskoj povijesti mijenjali i usavršavali najpreciznij uređaji za reproduciranje polazne fotometrijske veličine. Te uređaja nazivamo »svjetlosno pramjerilo«, što je analogno npr. »pramjerilu« jedinice jakosti električne struje, jedinice vremena sekunda, itd. Sinonimi »svjetlosnog pramjerila« su »svjetlosni standard« ili »svjetlosna normala« (o terminologiji vidi odsječak A.5.3). Za polaznu fotometrijsku veličinu redovito se odabirala »svjetlosna jakost« I (vidi odlomak 2.4.4), pa je zbog toga i jedinica te veličine »svijeća« odabirana za polaznu (osnovnu).

Iz letimičnih izlaganja vidjet ćemo da je fotometrijsko pramjerilo mijenjalo svoj princip djelovanja i pouzdanost reprodukcije u skladu s općim napretkom tehničkih i prirodoslovnih znanosti. Od uljnih i plinskih svjetiljki, odabranih za pramjerilo (vidi odlomak 3.6.1), do današnjeg »savršenog zračila« (vidi odlomke 1.3.2 i 2.3.4) prijeđen je od godine 1800. do danas golem razvojni put. Taj razvoj potpuno je u skladu s razvojem rasvjetne tehnike, koja je posljedica unapređenja svih drugih znanosti i tehnologija. Od tih teoretskih i tehnoloških unapređenja metrologija u stanovitom historijskom periodu odabire ono što je najpouzdanije, najpreciznije i najdostupnije reprodukciji i to postavlja kao kriterij za sva ostala

mjerenja. Time pridonosi ostvarenju novih unapređenja, koja omogućuju još savršeniju vrhunsku metrologiju. I tako taj napredak metrologije teče dalje i nikad mu neće biti kraja.

3.6.1. Svjetlosna pramjerila prošlog stoljeća bila su gotovo isključivo svjetiljke na ulje ili plin. Francuz *Carcel* izradio je godine 1800. svjetiljku na ulje čija je svjetlosna jakost odabrana za jedinicu. Godine 1842. tu jedinicu nazvali su »carcel« i ona je bila na snazi sve do godine 1889.

U Engleskoj je zakonima Metropolitan Gas Act (1860) i Gas Works Clauses Amendment Act (1871) bilo ozakonjeno svjetlosno pramjerilo pod nazivom London Standard Spermazeti Candle (kraće: sperm candle; engl. candle znači »svijeća«). Nakon toga legalizirana je »pentanska svijeća« (pentane candle), ostvarena *Harcourt*ovom pentanskom svjetiljkom svjetlosne jakosti »1 svijeća«, pentanskom svjetiljkom sa stijenjem jakosti »1 svijeća« i pentanskom plinskom svjetiljkom od »10 svijeća«. Deseti dio svjetlosne jakosti potonje bio je godine 1898. ozakonjen kao jedinica »sperm candle«.

U Njemačkoj je od godine 1868. bila na snazi tzv. Vereins-Paraffinkerze (VK), tj. »parafinska svijeća« koju je kontrolirao Deutsches Verein von Gas- und Wasserfachmännern. Tu »parafinsku svijeću« VK zamijenila je godine 1896. Hefner-Kerze (HK), tj. »Hefnerova svijeća«, koju su prihvatili Njemačko elektrotehničko udruženje (Elektrotechnisches Verein) i Savez njemačkih elektrotehničara (Verband Deutscher Elektrotechniker).

Usporedbena mjerenja, obavljena od godine 1893. do 1911. uglavnom u njemačkom metrološkom zavodu PTR (Physikalisch-technisches Reichsanstalt), pokazala su da između navedenih »svijeća« vladaju ovi odnosi:

$$\text{sperm candle} = 1{,}14\ \text{HK}, \qquad \text{carcel} = 10{,}75\ \text{HK},$$

$$\text{pentane candle} = 1{,}11\ \text{HK}, \qquad \text{VK} = 1{,}20\ \text{HK}.$$

U Sjedinjenim Američkim Državama najprije su za jedinicu svjetlosne jakosti ozakonili »standard candle«, koja je bila jednaka engleskoj sperm candle. USA standard candle bila je u National Bureau of Standards (NBS) ostvarena slogom električkih žarulja s ugljenom niti, a njenu primjenu je propisalo udruženje American Institute of Electrical Engineers. (Paralelno su američke plinare upotrebljavale englesku svijeću pentane candle.) Budući da su godine 1898. Englezi prešli na upotrebu »pentanske svijeće« (pentane candle), nastala je razlika između engleske i američke »svijeće« (candle). Mjerenjem je utvrđen odnos pentane candle = 0,984 US standard candle. Zbog toga je godine 1909. NBS smanjio svoju »svijeću« za 1,6 % i tako je izjednačio s bougie décimale (vidi odlomak 3.6.3) i pentane candle, koje su se u to vrijeme upotrebljavale u Francuskoj i Engleskoj. Time su bili stvoreni svi preduvjeti za međunarodnu standardizaciju koja je rezultirala djelomičnim uvođenjem jedinice »međunarodna svijeća« (International Candle Power; vidi odlomak 3.6.4).

3.6.2. Hefnerova svijeća (kratica: HK, što dolazi od njem. Hefner-Kerze). Ova jedinica svjetlosne jakosti nije se upotrebljavala samo u Njemačkoj već i u Skandinaviji, Austriji i još nekim državama. U Njemačkoj je bila ozakonjena od godine 1896. do 1942. Svjetiljku za reprodukciju jedinice svjetlosne jakosti konstruirao je godine 1884. *von Hefner-Alteneck*, i po njemu je jedinica dobila ime »Hefnerova svijeća«. Ta jedinica bila je definirana kao horizontalna svjetlosna jakost *Hefner*ove svjetiljke pri njenom radu u propisanim uvjetima.

Sama svjetiljka ima debeli stijenj okružen cjevčicom od alpake (novo srebro) unutarnjeg promjera 8 mm, vanjskoga 8,3 mm i duljine 25 mm. Gorivo *Hefner*ove svjetiljke je amilacetat ($C_7H_{14}O_2$), a plamen se održava na isti način kao i kod obične petrolejske svjetiljke. Prilikom reprodukcije svjetlosne jakosti »1 Hefnerova svijeća« u horizontalnom smjeru, plamen svjetiljke mora biti visok 40 mm u slobodnom, čistom i tihom zraku. Na okolni zrak postavljaju se ovi uvjeti: odsutnost ugljičnog dioksida, tlak 760 torr, sadržaj vodene pare 8,8 litara u 1 kubnom metru zraka. Dobra strana Hefnerove svjetiljke je u tome što se pomoću nje Hefnerova svijeća (HK) može brzo reproducirati, iako su uvjeti okoline dosta neugodni ako laboratorij nije dobro opremljen. Loša joj je strana ta što se pomoću nje postiže mala rasvijetljenost polja fotometra (vidi odlomak 3.6.5) i niska (»crvena«) temperatura boje, između 1875 i 1930 K.

Jedinice lumen, lux, stilb, phot i druge koje se izvode iz »svijeće« = [*I*] označivale su se predmetkom H, dakle Hlm = Hefnerov lumen, Hsb = Hefnerov stilb itd. U vrijeme dok se upotrebljavala HK, to je bilo vrlo važno ne samo za fotometriju već i za rasvjetnu tehniku uopće (vidi odlomak 3.6.5).

Podrobniji podaci o jedinici »svjetlosne jakosti« *I* Hefnerova svijeća uklopljeni su u odlomke 3.6.5, 6.

3.6.3. Violleova svijeća. Još je godine 1879. Francuz *Violle* predložio da se za pramjerilo svjetlosne jakosti *I* upotrijebi platina površine 1 cm² ugrijana do svog tališta. Za jedinicu veličine *I* predložio je dvadeseti dio svjetlosne jakosti koju pri toj temperaturi okomito na svoju površinu ima odabrani komadić platine. *Violle*ovo zračilo očito je preteča današnjeg pramjerila candele — savršenog zračila, i svakako predstavlja početak strogo znanstvene reprodukcije polazne fotometrijske jedinice.

U Violleovo zračilo bile su polagane velike nade; u Francuskoj je od godine 1889. do 1909. služilo kao službeno pramjerilo svjetlosne jakosti, a Drugi međunarodni elektrotehnički kongres godine 1889. nazvao je dvadeseti dio veličine *I* Violleova zračenja »decimalnom svijećom« (bougie décimale). Mjerenja su pokazala da između »Hefnerove svijeće« i »decimalne svijeće« vrijedi ovaj odnos

$$\text{bougie décimale} = 1{,}12 \text{ Hefner-Kerze}.$$

Violleovo zračilo bilo je, međutim, uskoro napušteno, jer je ustanovljeno da se njegova svjetlosna jakost *I* ne može dovoljno pouzdano reproducirati s očekivanom preciznošću. Razlog je tome taj što je Violleov uređaj tipično »sivo zračilo« (vidi odlomak 1.3.1), čiji koeficijent refleksije nije stalan. Osim toga zračilo je selektivno, tj. ovisi o duljini vala emitiranog svjetla.

Unatoč tim nedostacima, Violleovo djelo predstavlja kvalitativnu promjenu odabiranja svjetlosnih pramjerila. Njegova ideja, oplemenjena spoznajom o divnim svojstvima savršenog zračila (crno tijelo), omogućila je ostvarenje današnje candele (vidi odlomak 3.6.6).

3.6.4. Međunarodna svijeća. Usporedbena mjerenja su pokazala da se jedinice svjetlosne jakosti bougie décimale i pentane candle praktički podudaraju. A kada su USA snizile vrijednost svoje standard candle za 1,6% (vidi odlomak 3.6.1), postignuta je jednakost tih triju jedinica. Fine razlike među njima otklonjene su zajedničkim radom američkog National Bureau of Standards (NBS), francuskog Laboratoire Central d'Electricité (LCE) i engleskog National Physical Laboratory (NPL). Na taj način nastala je zajednička jedinica svjetlosne jakosti

nazvana »International Candle Power« ili »International Candle« (IC), koja je u Engleskoj, Francuskoj i USA stupila na snagu 1. 4. 1909.

Vrijednost jedinice [*I*] = International Candle Power = IC bila je »materijalizirana« u obliku sloga električkih žarulja čija je temperatura boje bila znatno ispod temperature pri kojoj žarulje svijetle za normalnu upotrebu. Način reprodukcije IC ostala je vlastita stvar svakog od navedenih instituta. Iako su se metode reprodukcije međusobno razlikovale, odstupanja jedinica reproduciranih u pojedinim institutima bila su neznatna. Ona su npr. godine 1913. (1925) iznosila: NBS candle = 0,9984 (0,9977) IC, NPL candle = 1,0017 (1,0022) IC. Pri tom je IC srednja vrijednost spomenutih triju nacionalnih reprodukcija jedinice IC. Stoga je godine 1921. Međunarodna komisija za rasvjetu (Commission Internationale d'Eclairage, CIE) službeno prihvatila tu jedinicu i nazvala je Bougie Internationale (International Candle). Da bi se fotometrijske jedinice izvedene iz IC razlikovale od Hefnerovih (vidi odlomak 3.6.2), ispred njih je stavljen predmetak I, kao upozorenje da potječu od »Međunarodne svijeće« (International Candle, IC), dakle: Ilm, Isb itd.

3.6.5. Usporedba Međunarodne i Hefnerove svijeće. Međunarodna komisija za rasvjetu definirala je godine 1913. na temelju rezultata niza mjerenja odnos između jedinica International Candle (IC) i Hefner-Kerze (HK) ovako

$$\mathrm{IC} = 1{,}11\ \mathrm{HK}.$$

Usporedba se odnosila na temperaturu boje (vidi odlomak 2.5.3) električke žarulje s ugljenom niti (T_b oko 2080 K). Prema tome su i sve ostale međunarodne jedinice (Ilm, Isb itd.) bile *veće* od njemačkih jedinica (Hlm, Hsb itd.). U tome neki vide razlog zašto je Njemačka tek godine 1942. službeno napustila Hefnerovu svjetiljku, jer je na taj način npr. žarulja njemačke proizvodnje imala 11 % »veći broj lumena« od francuske ili engleske.

Tablica **G-16**

Odnosi jedinica IC i HK pri različitim temperaturama boje prema CIE 1928

Izvor svjetla	T_b K	IC/HK	HK/IC
Žarulje s ugljenom niti	2000	1,11	0,901
Vakuumske volframove žarulje	2360	1,145	0,873
Plinom ispunjene volframove žarulje	2600	1,17	0,855

Kad su se vakuumske žarulje i žarulje ispunjene inertnim plinom (dakle žarulje s relativno visokom temperaturom boje) usporedile s Hefnerovom svjetiljkom i međunarodnim (s ugljenom niti) pramjerilom, ustanovljena su sistematska odstupanja između ove dvije vrste izvora svjetla. S porastom temperature boje, a to znači i s većim udjelom plavog zračenja u emitiranom svjetlu, nastaje sve veća razlika između IC i HK. Uzrok tome smatra se s jedne strane razlika u temperaturama boje, a s druge strane vrlo malena rasvijetljenost mjernog polja fotometra (vidi odlomak 3.1.2) pri mjerenju Hefnerovom svjetiljkom. Njena udaljenost od fotometra mora, naime, biti najmanje 1 metar, kako bi se mogao primjenjivati zakon r^2E (vidi odlomak 2.4.4). Pri tom je rasvijetljenost E reda veličine 1 lx, pa nastaju poteškoće pri očitavanju fotometra, a i *Purkyněov* efekt već dolazi do izražaja, tj. maksimalna spektralna osjetljivost oka pomiče se dublje u područje plave boje (vidi odlomak 2.2.2).

Mnogim najbrižljivijim mjerenjima utvrđeni su odnosi International Candle (IC)/Hefner-Kerze (HK) različitih električkih izvora svjetla pri temperaturama boje 2000, 2360 i 2600 K. Dobivene rezultate analizirala je i godine 1928. objavila Međunarodna komisija za rasvjetu, CIE (vidi tablicu G-16).

3.6.6. Nova svijeća (candela). Probleme fotometrijskih jedinica uzela je godine 1929. u razmatranje Generalna konferencija za mjere i utege (o njoj vidi poglavlje A.7), najprije u svom Savjetodavnom odboru za elektriku, a od godine 1933. u okviru novoosnovanog Savjetodavnog odbora za fotometriju (Comité Consultatif de Photométrie). Najvažnija je bila odluka da se napusti svjetlosno pramjerilo s plamenom i da se uvede *savršeno zračilo* (crno tijelo; vidi odlomak 1.3.2). *Violle*ova ideja (vidi odlomak 3.6.3) na taj je način u dotjeranom obliku ponovno oživjela. Primjenu savršenog zračila u tu svrhu predložio je svojedobno *Lummer*, a godine 1908. ideju su razvili i realizirali *Waidner* i *Burgess*.

Godine 1933. ovlastila je Generalna konferencija za mjere i utege na svom osmom zasjedanju Međunarodni komitet za mjere i utege da definira nove svjetlosne jedinice i svjetlosno pramjerilo. Četiri godine kasnije taj Komitet je objavio definiciju »nove svijeće« (bougie nouvelle), u kojoj je rečeno da savršeno zračilo pri temperaturi skrućivanja platine ima luminanciju 60 »novih svijeća« po kvadratnom centimetru. Godine 1939. definiciju je prihvatila i CIE, a iste je godine Savjetodavni odbor za fotometriju predložio da se nove svjetlosne jedinice uvedu od 1. 1. 1941. u čitavom svijetu. Bilo je, naime, potrebno obaviti još neka usporedbena mjerenja za utvrđivanje odnosa »nove svijeće« prema IC i HK.

Drugi svjetski rat omeo je provedbu te odluke, ali već 1946. Međunarodni komitet za mjere i utege nastavlja akciju i preporučuje da se pramjerilo (savršeno zračilo) izvede u obliku koji je razvijen u američkom National Bureau of Standards (vidi sliku G.17), a da nove svjetlosne jedinice službeno stupe na snagu 1. 1. 1948. Generalna konferencija za mjere i utege potvrdila je na svom devetom zasjedanju godine 1948. zaključke svog Međunarodnog komiteta i usvojila naziv koji je za jedinicu »nova svijeća« predložila CIE:

$$\text{candela} = \text{cd}.$$

Generalna konferencija usvojila je na svom desetom zasjedanju godine 1954. candelu za polaznu jedinicu Međunarodnog sistema jedinica (vidi odlomak 3.2.6).

Mnogobrojna usporedbena mjerenja pokazala su da luminancija L savršenog zračila okomito na površinu otvora zračila pri temperaturi skrućivanja platine iznosi

$$L(T = T_{\text{Pt}}) = 60 \frac{\text{cd}}{\text{cm}^2} = 58{,}88 \text{ Isb} = 66{,}42 \text{ Hsb}.$$

Ovdje je Isb = međunarodni stilb (osnovan na International Candle), a Hsb = = Hefnerov stilb (osnovan na Hefner-Kerze). O jedinici luminancije stilb = = 10^4 nit govori se u odlomku 3.3.1. Na taj način s pogreškom od nekoliko promila vrijede ovi odnosi:

$$\text{cd} = 0{,}9813 \text{ IC} = 1{,}1070 \text{ HK},$$

$$\text{IC} = 1{,}0190 \text{ cd} = 1{,}1281 \text{ HK},$$

$$\text{HK} = 0{,}9033 \text{ cd} = 0{,}8865 \text{ IC}.$$

U engleskom National Physical Laboratory, naime, smatraju da vrhunska preciznost uspoređivanja luminancije dvaju izvora svjetla iznosi oko ± 1 promil $= \pm 10^{-3}$, a da je pouzdanost reprodukcije zahtijevane svjetlosne jakosti 2 promila $= \pm 2 \cdot 10^{-3}$.

Njemačko društvo za rasvjetnu tehniku (Deutsche Lichttechnische Gesellschaft) objavilo je godine 1942. rezultate istraživanja omjera cd/HK pri različitim izvorima svjetla, a to znači i pri različitim temperaturama boje T_b (tablica G-17).

Tablica **G-17**

Odnosi jedinica cd i HK pri različitim temperaturama boje

Izvor svjetla	T_b K	$\frac{cd}{HK}$	$\frac{HK}{cd}$
Savršeno zračilo (crno tijelo)	2042	1,107	0,9033
Vakuumske volframove žarulje	2360	1,140	0,8772
Plinom punjene volframove žarulje	2750	1,162	0,8606

Razlika dobivenih podataka od onih u tablici G-16 izvire iz zasad neriješenih problema heterokromne fotometrije (vidi odlomak 2.1.3). Na tom polju fotometrije danas je angažirano nekoliko dobro opremljenih instituta širom svijeta. Bilo bi, međutim, i suviše optimistično očekivati da će oni uskoro definitivno riješiti problem univerzalnog ulaženja suvremenih fizikalnih metoda u nadasve kompliciranо područje mjerenja boja svjetla.

Glava **H**

Veličine i mjerne jedinice ionizirajućih zračenja

SADRŽAJ

1. Pregled i definicije veličina ionizirajućih zračenja

1.1. Osobitosti ionizirajućih zračenja 1215
1. Potreba zaštite od ionizirajućih zračenja, 2. Mehanizam djelovanja, 3. Standardizacija veličina i jedinica 1216
1.2. Aktivnost raspadanja atomskih jezgara 1219
1. Osnova teorije radioaktivnosti, 2. Zakoni radioaktivnih preobrazbi, 3. Radioaktivna ravnoteža, 4. Aktivnost i specifične aktivnosti 1220
1.3. Predana energija, doza zračenja i njena snaga 1223
1. Predana energija, 2. Doza zračenja, 3. Snaga doze zračenja 1226
1.4. Tok čestica i tok energije 1226
1. Tok čestica, 2. Gustoća toka čestica, 3. Tok energije čestica, 4. Gustoća toka energije 1227
1.5. Kerma i snaga kerme 1227
1. Kerma, 2. Snaga kerme 1228
1.6. Ekspozicija, snaga ekspozicije i specifična konstanta gama 1229
1. Ekspozicija, 2. Snaga ekspozicije, 3. Specifična konstanta gama 1229

2. Mjerne jedinice veličina ionizirajućih zračenja

2.1. Jedinice SI i CGS radioaktivnosti i ionizirajućih zračenja 1231
1. Načelo građenja jedinica sistema SI i CGS, 2. Međusobni odnosi jedinica SI i CGS, 3. Primjer mjerenja ekspozicije i snage ekspozicije 1233

2.2. Standardizacija jedinica na području aktivnosti i ionizirajućih zračenja 1234
1. Jedinica SI aktivnosti, 2. Jedinice SI gustoće toka čestica i gustoće toka energije, 3. Jedinice SI doze zračenja i snage doze zračenja, 4. Jedinice SI ekspozicije i snage ekspozicije 1236
2.3. Vansistemske jedinice aktivnosti i specifične aktivnosti 1237
1. Jedinica aktivnosti curie, 2. Višekratnici jedinice curie, 3. Jedinice rutherford i militstat, 4. Jedinice specifične aktivnosti eman i mache 1242
2.4. Vansistemske jedinice ekspozicije (ekspozicijske doze) i snage ekspozicije 1243
1. Jedinica ekspozicije röntgen, 2. Višekratnici jedinice röntgen, 3. Jedinice snage ekspozicije 1247
2.5. Fizikalni i biološki ekvivalenti röntgena 1248
1. Fizikalni ekvivalent röntgena (rep), 2. Relativna biološka djelotvornost RBE, 3. Jedinica rem 1249

1. Pregled i definicije veličina ionizirajućih zračenja

1.1. Osobitosti ionizirajućih zračenja

1.1.1. Potreba zaštite od ionizirajućih zračenja. Uskoro pošto je *W. C. Röntgen* godine 1895. otkrio zrake koje su, njemu u počast, nazvane rendgenskim zrakama, liječnici su ih stali opsežno primjenjivati u medicinskoj dijagnostici. Radiolozi su nakon stanovitog vremena ustanovili da učestalo ozračenje ruku rendgenskim zrakama uzrokuje opekotine kože; to otkriće navelo je medicinu da rendgensko zračenje upotrijebi za liječenje raka. Tek 35 godina nakon upotrebe rendgenskih zraka ustanovljeno je da prekomjerno ozračivanje ljudskog organizma može uzrokovati oboljenje od raka i skratiti život. Proučavanje uzroka smrti 82441 američkog liječnika od godine 1930. do 1954. pokazalo je da je život liječnika radiologa pet godina kraći od života onih liječnika koji u toku svoje prakse nisu imali nikakav kontakt sa zračenjima.

Godine 1928. bio je osnovan Međunarodni odbor za radiološku zaštitu od rendgenskih zraka i zračenja radija (Ra), a godinu dana kasnije u USA je osnovana Nacionalna komisija za zaštitu od zračenja. Rad ovih organizacija doveo je već godine 1931. do toga da je za ljude koji se profesionalno bave zračenjem propisana granična »doza zračenja« u iznosu 1 röntgen tjedno (o veličini doza zračenja vidi odsječak 1.6). U međuvremenu ljudi su dolazili u dodir s drugim zračenjima, a ne samo s rendgenskima, pa je jedinica röntgen bila prilagođena i drugim ionizirajućim zračenjima (gama-zračenje, alfa- i beta-čestice, neutroni i druge nuklearne čestice, kozmičke zrake). Tako proširena jedinica dobila je godine 1936. naziv »biološki ekvivalentni röntgen«, a granična doza smanjena je na 0,5 röntgena tjedno. Dvanaest godina kasnije ta vrijednost smanjena je na 0,3 r tjedno. Iz ovih podataka razabiremo da su ljudi u početku *potcjenjivali* opasnost od ionizirajućih zračenja. Široka primjena zračenja u medicini, biologiji i poljoprivredi te opasnost od zračenja u laboratorijima akceleratora nuklearnih čestica i u okolini nuklearnih reaktora uzrokovali su da se stručnjaci podrobno i s mnogo opreza pozabave ovom najmlađom granom fizikalno-biološko-medicinske znanosti.

Proučavanje djelovanja ionizirajućih zračenja na ljudski organizam i dalje se nastavlja. Znanje na tom području vrlo je manjkavo — na raspolaganju su štura iskustva skupljena uglavnom u toku posljednjih 30 godina. U USA je, na primjer, u periodu od 11 godina zabilježeno 16 nesretnih slučajeva, pri čemu je prejako ozračeno 69 ljudi. Od toga su 2 bila smrtna slučaja, 19 s jakim opekotinama kože, dok je 47 bilo neznatno opečeno. Stanovito iskustvo stečeno je nesretnim slučajem kad je godine 1954. ozračeno 239 stanovnika Marshallskih otoka sa 14 do 175 röntgena prilikom ispitivanja eksplozije termonuklearne bombe. Mnogima od njih opržena je koža, doživjeli su i druge posljedice zračenja, ali se čini da su svi bili izliječeni. Još

jače bila su ozračena 23 japanska ribara koji su se nalazili 136 kilometara od mjesta eksplozije. Jedan od njih umro je od posljedica djelovanja zračenja. Strašna je bila sudbina stanovnika Nagasakija i Hirošime kad ih je potkraj drugog svjetskog rata, uz ostala djelovanja atomske bombe, zadesilo i zračenje oslobođeno pri eksploziji. Čini se da ova masovna katastrofa nije mnogo pridonijela poznavanju mehanizma djelovanja ionizirajućeg zračenja na ljudski organizam — znaju se samo posljedice.

1.1.2. Mehanizam djelovanja ionizirajućih zračenja na ljudski organizam nije još tačno poznat. Obično se uzima da je opasnost proporcionalna stupnju ionizacije što ga zračenje izaziva u tkivu. Ionizacija je direktna ako tkivo ozračuju nabijene čestice, a indirektnu ionizaciju u tkivu izazivaju elektroni oslobođeni interakcijom tkiva s rendgenskim ili gama-zrakama koje dolaze *izvana*. Ionizaciju proizvode i elektroni, protoni, neutroni, alfa-čestice i još teže nuklearne čestice.

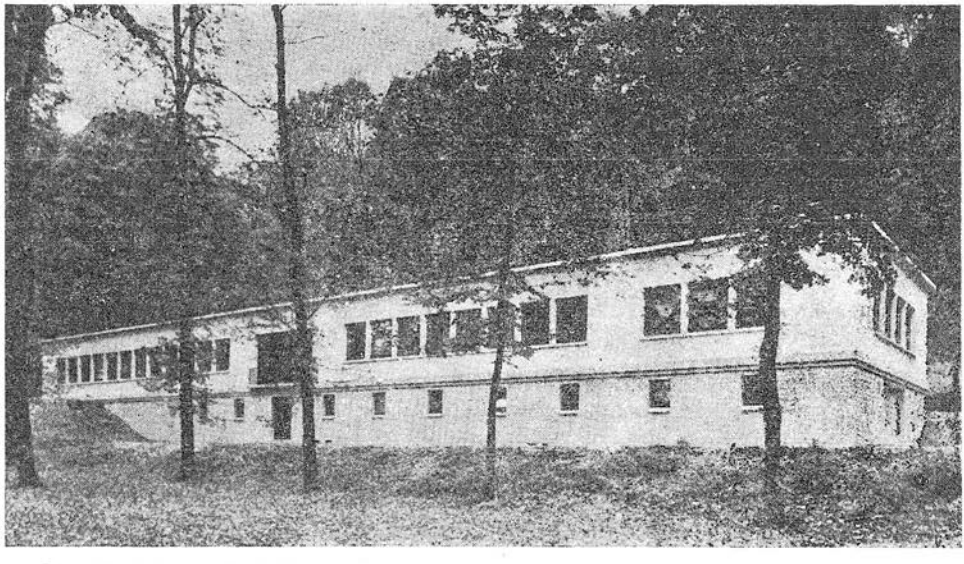
Ionizirajuća zračenja djeluju na sve *stanice* organizma. Kad, na primjer, kroz tkivo prolaze alfa-čestice, koje svu svoju energiju predaju na vrlo kratkim putovima, one stvaraju u tkivu mnogo iona. Budući da su atomi vezani u molekulama orbitalnim elektronima, ionizacija može uzrokovati labavljenje nekih kemijskih veza (vidi odsječak D.1.7). O stupnju i načinu oštećenja ovisi da li će neka stanica odmah poginuti, ostati živjeti u promijenjenom stanju još neko vrijeme ili će preživjeti. Beta-zračenje mnogo slabije oštećuje stanice negoli alfa (ceteris paribus). U organizmu postoji mnogo vrsta potpuno različitih stanica, pa su stoga one različito osjetljive na oštećenja od ionizirajućeg zračenja. Simptomi prejakog ozračivanja pojavljuju se nakon stanovitog vremena, jer tek onda dolazi na vidjelo da li su se stanice regenerirale. Na primjer, prekomjernim ozračivanjem izazvani rak nekih dijelova tijela može se pojaviti i nakon 25 godina. Pri tom bitno štetnije utječe doza zračenja koja je apsorbirana u kratkom vremenu negoli ista doza pomalo skupljena u toku duljeg vremenskog perioda. Na primjer, doza zračenja (ekspozicija; vidi odlomak 1.6.1) 700 röntgena primljena u toku jednog sata sigurno će u toku nekoliko tjedana uzrokovati smrt ako je dubinska i volumna, a ne lokalna. S druge strane, mnogi su radiolozi doživjeli i više od 60 godina, iako su u toku svog života primili ekspoziciju od preko 700 r.

Ionizirajuća zračenja djeluju, dakako, i na sve ostale dijelove i organe čovjeka. *Koža* pocrveni, postane suha, puca, a u najgorem slučaju nastaje rak kože, koji se zatim širi na ostale dijelove tijela. *Oči* su naročito osjetljive na brze neutrone. Na *krv* djeluje zračenje uglavnom tako što smanjuje brzinu kojom se stvaraju različiti sastavni dijelovi krvi. Nakon prejakog ozračivanja broj bijelih krvnih zrnaca naglo spadne i ostane tako nekoliko mjeseci. Zbog toga čovjek postane neotporan prema bolestima i infekciji. Leukemija (rak krvi) može se pojaviti i mnogo godina nakon ozračivanja. Ionizirajuća zračenja uzrokuju *ispadanje kose*, odnosno dlaka uopće. Na zračenja su naročito osjetljivi ženski i muški *spolni organi*. Rezultat njihova prejakog ozračenja je mutacija gena, sterilnost ili smrt.

1.1.3. Standardizacija veličina i jedinica. Pogibeljno djelovanje ionizirajućih zračenja na ljudski organizam letimično smo spomenuli u prošla dva odlomka zato da bismo pokazali koliko su po život čovjeka važna mjerenja na tom polju. Važnost se potencira još time što upravo sada strelovito napreduje izgradnja nuklearnih postrojenja (nuklearne elektrane i brodovi te nuklearno oružje), koja mogu unesrećiti znatan dio čovječanstva, a ne samo nekolicinu ljudi koji se profesionalno bave zračenjima.

Zbog toga je standardizacija veličina i jedinica ionizirajućih zračenja prvorazredan zadatak metroloških službi, kako nacionalnih tako i međunarodnih. Očito je, naime, da se bez jednoznačno definiranih veličina i jedinica na području ionizirajućih zračenja ne mogu pouzdano propisati metode i sredstva *zaštite* od tih zračenja. Pri tom su problemi znatno složeniji negoli u egzaktnim znanostima, tj. u fizici, tehnici, kemiji itd. Egzaktne znanosti, naime, mogu gotovo uvijek da se posluže takvim eksperimentalnim materijalom koji dopušta da se promatrana pojava može kvantitativno istraživati u jednostavnom i jasnom obliku. Medicinari i biolozi to ne mogu, jer oni su upućeni na komplicirani materijal *živog tkiva*. Njima je utoliko potrebniji dobar uvid u fizikalno jasno obuhvatljive jednostavne granične slučajeve.

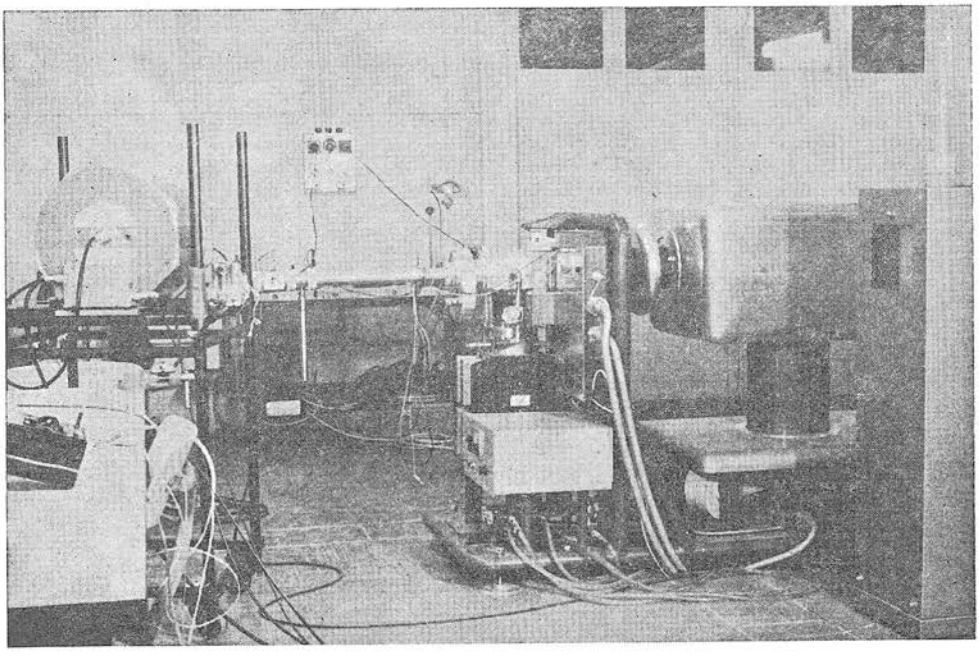
U tom smislu danas uz nacionalne komisije za sigurnost od ionizirajućih zračenja djeluju dvije važne međunarodne organizacije. Prva je Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja (International Commission on Radiological Units and Measurements, ICRU), a druga Savjetodavni odbor za standarde mjerenja ionizirajućih zračenja (Comité Consultatif pour les Etalons de Mesure des Radiations Ionisantes). Taj odbor, osnovan godine 1958, jedan je od izvršnih organa Generalne konferencije za mjere i utege, a u okviru Međunarodnog ureda za mjere i utege — BIPM — djeluje i eksperimentalno (sl. H.1). Djelatnost odbora letimično je opisana u odlomku A.7.4.7.



Sl. H.1. Laboratorij sekcije za ionizirajuća zračenja Međunarodnog ureda za mjere i utege u Sèvresu. Laboratorij je započeo radom potkraj godine 1964. (Foto: BIPM)

Spomenuti Savjetodavni odbor dobio je godine 1960, među ostalim, zadatak da se pod njegovim vodstvom izrade i održavaju standardi (tzv. održavajući standardi ili etaloni; vidi odsječak A.5.3) ionizirajućih zračenja, i to: 1. standardi za radioaktivne nuklide, 2. standardi za rendgensko zračenje i gama-zračenje i 3. standardi izvora neutrona (sl. H.2). Za standarde radioaktivnih nuklida odabrani su elementi ^{32}P, ^{131}I, ^{60}Co i ^{198}Au. Kao standardi rendgenskog i gama-zračenja služe ionizacijske ćelije, a kao standardi izvora neutrona upotrijebljeni su preparati Ra-Be,

koji odašilju alfa-čestice i neutrone. [Podrobnosti mogu se npr. naći u članku *V. Naggiar*: Comparaison Internationale des Mesures de Taux d'Emission de la Source de Neutrons Ra-Be (α, n) n° 200-1 du Conseil National de Recherches, objavljen u časopisu »Metrologia« *3* (1967), No 2, str. 51; vidi i druge rasprave citirane u popisu literature na kraju knjige.] U laboratorijima BIPM (sl. H.1,2) povremeno se uspoređuju nacionalni standardi ionizirajućih zračenja pojedinih država sa standardima BIPM; to su tzv. međunarodne interkomparacije.



Sl. H.2. Uređaj za proučavanje neutrona proizvedenih u akceleratoru. (Foto: BIPM)

Posljedice djelovanja tih međunarodnih organizacija već se osjećaju. Od godine 1962. imamo definirani sistem fizikalnih veličina uz čiju se pomoć mogu znatno preciznije negoli ranije jednoznačno interpretirati *fizikalne pojave* koje prethode ili su posljedica ionizirajućih zračenja. Te *veličine* razmotrene su u narednih pet odsječaka ovog poglavlja (vidi i odsječak 2.2). S obzirom na to da je tu riječ o relativno novoj grani znanosti, koja je do sada skupila daleko premalo eksperimentalnih iskustava, ona će se u pogledu definicija veličina, njihovih jedinica, terminologije itd. sigurno usavršavati još dugi niz godina. To će morati pratiti i odgovarajuće metrološke promjene.

U poglavlju 2 ove glave H razmatraju se *mjerne jedinice* veličina u vezi s ionizirajućim zračenjima. Pri njihovoj obradi stavljali smo podjednaku težinu kako na (nove) jedinice Međunarodnog sistema jedinica (SI), tako i na jedinice koje su definirane prije sveopćeg prihvaćanja SI u svim granama prirodoslovnih i tehničkih znanosti (o SI vidi poglavlja B.7, D.4 i E.2). U nekim slučajevima morali smo prikazati i historijski razvoj nekih jedinica (npr. röntgen), jer da to nismo učinili, možda bismo doveli u zabludu one čitatelje koji nisu detaljno upoznati s najnovijim odlukama mjerodavnih međunarodnih organizacija.

1.2. Aktivnost raspadanja atomskih jezgara

1.2.1. Osnova teorije radioaktivnosti, tj. teorije koja razmatra radioaktivno raspadanje (pretvorbe) atomskih jezgara, jesu dvije provjerene pretpostavke: 1. proces raspadanja nastaje i odvija se spontano kao posljedica nestabilnosti jezgara; 2. proces se pokorava statističkim zakonima. Pri radioaktivnim preobrazbama nastaje promjena strukture i sastava matičnih (polaznih, ishodišnih) jezgara, koja se matematički može obuhvatiti zakonima velikih brojeva, a nikako za pojedinačne raspade (na primjer od 10^{12} atoma radija svake sekunde se raspada približno 14 atoma, ali se ne zna kojih).

Prilikom radioaktivnog raspadanja iz matične (polazne) tvari nastaje čitav niz novih elemenata koji čine radioaktivni rod. Tvari s prirodnom radioaktivnošću svrstavamo u tri velika roda: 1. uran-radijev rod, 2. uran-aktinijev rod i 3. torijev rod. Matična tvar prvog roda je uran relativne atomske mase 238 (o njoj vidi odlomak D.1.2.1), od kojeg preobrazbama Uran I (238) → Uran X_1(234) → Uran X_2 (234) → Uran II (234) → Ionij (230) → Radij (226) nastaje radij (Ra), koji je iz historijskih razloga teoriji preobrazbi atomskih jezgara dao pečat terminologije i načina interpretacije preobrazbi uopće. Krajnji rezultat preobrazbi svih triju rodova je olovo (^{208}Pb).

1.2.2. Zakoni radioaktivnih preobrazbi. Brzinu radioaktivne preobrazbe karakterizira vrijeme u kojem se preobrazi polovica broja atoma neke radioaktivne tvari. To vrijeme $T_{1/2}$ naziva se trajanje poluraspada (vrijeme poluraspada, period poluraspada). Na primjer, za radij je $T_{1/2}$ (^{226}Ra) = 1590 godina, a za radon (radijeva emanacija, tvar nastala radioaktivnom preobrazbom radija) $T_{1/2}$ (^{222}Rn) = = 3,8 dana; to znači da se radon preobrazuje oko 150000 puta brže od radija.

Vjerojatnost preobrazbe λ pojedinih nestabilnih atoma u jedinici vremena ne mijenja se u toku vremena t, ali je različita za razne radioaktivne izotope. Veličina λ zove se »konstanta preobrazbe« (konstanta raspadanja, konstanta radioaktivnog raspada). Od N istovrsnih radioaktivnih jezgara u jedinici vremena preobrazit će se dakle λN jezgara, što se može zabilježiti u obliku $\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t$ ili

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N. \tag{1.2-1}$$

Predznak minus opisuje činjenicu da je $\mathrm{d}N$ uvijek negativan broj, jer broj neraspadnutih atoma neprekidno opada. Integracijom izraza (1.2-1) od $t = 0$ (kada broj čestica iznosi $N = N_0$) do trenutka t (kada iznosi N) dobivamo *statistički zakon radioaktivne preobrazbe*

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}. \tag{1.2-2}$$

Ovdje je $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$ baza prirodnog logaritma, a veličina

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0{,}693} \tag{1.2-3}$$

prosječna životna dob radioaktivnih atoma. Iz jednadžbe (1.2-3) vidi se da je $\tau = = 1/\lambda$ ono vrijeme nakon kojega e-ti dio prvotno postojećih jezgara još nije preobražen.

U mnogim slučajevima postoji za stanovitu vrstu jezgara više mogućnosti radioaktivne preobrazbe, npr. alfa-raspad i beta-raspad, pa tako u slučaju dviju

mogućnosti govorimo o »dualnoj (dvojnoj) preobrazbi«. Za svaki od procesa možemo upotrijebiti vlastitu konstantu raspadanja (λ_1, λ_2 . . .). Ukupna konstanta raspadanja u tom je slučaju jednaka sumi $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, a srednja životna dob jezgre iznosi $\tau = 1/\lambda$.

Primjer. Dokažimo valjanost jednadžbe (1.2-3)! Veličina »trajanje poluraspada« $T_{1/2}$ definirana je omjerom $N/N_0 = 1/2$. Ako taj omjer uvrstimo u jednadžbu (1.2-2) i logaritmiramo je, dobivamo

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\frac{1}{2}, \qquad t = T_{1/2} = \tau \ln 2,$$

čime je dokazana ispravnost jednadžbe (1.2-3).

1.2.3. Radioaktivna ravnoteža. U radioaktivnim izvorima (preparatima) u pravilu se ne nalazi samo jedan radioaktivni element, već čitav niz radioaktivnih elemenata koji su međusobno genetički povezani u kvazistatičkoj ravnoteži. Tako se, na primjer, u radijevim preparatima uz radij (Ra) uvijek nalaze radon (Rn), radij A, radij B i svi daljnji produkti radioaktivnog raspadanja. Pri tom se u starijim preparatima produkti raspadanja obično nalaze u takozvanoj *radioaktivnoj ravnoteži* s matičnim (polaznim) radioaktivnim elementom duge životne dobi. To znači da je za dani proizvod radioaktivnog raspada broj atoma nastao iz matične tvari u stanovitom vremenu jednak broju raspadajućih atoma u toku istog vremena. Na primjer, radon se uvijek nalazi u radioaktivnoj ravnoteži s radijem.

Pretpostavimo da se stanovita količina radioaktivne tvari *a* nalazi u zatvorenoj posudi i da pri svom raspadanju proizvodi tvar *b* koja je također radioaktivna. Količina tvari *b* (broj atoma) u posudi nakon vremena *t* iznosi

$$N_b = N_a \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}(e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}), \tag{1.2-4}$$

gdje je N_a broj atoma tvari *a* u trenutku $t = 0$, kad započinje naše promatranje. Veličine λ_a i λ_b su konstante raspadanja tvari *a* i *b*.

Ako je trajanje poluraspada $T_{a\,1/2}$ tvari *a* znatno veće od trajanja poluraspada $T_{b\,1/2}$ tvari *b*, izraz (1.2-4) prelazi u oblik

$$N_b = N_a \frac{\lambda_a}{\lambda_b}(1 - e^{-\lambda_b t}),$$

a u slučaju *radioaktivne ravnoteže* vrijedi jednadžba

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{\lambda_a}{\lambda_b} = \frac{T_{b\,1/2}}{T_{a\,1/2}}. \tag{1.2-5}$$

Prema tome broj atoma dvaju elemenata koji se nalaze u radioaktivnoj ravnoteži obrnuto je proporcionalan s njihovim konstantama preobrazbe (raspada) te direktno proporcionalan s njihovim trajanjima (periodima) poluraspada. Stoga će pri radioaktivnoj ravnoteži dvaju elemenata postojati veća količina radioaktivnog elementa koji se sporo raspada negoli elementa koji se brzo raspada.

1.2.4. Aktivnost i specifične aktivnosti. Broj aktivnih jezgara N vrlo je teško mjeriti. Stoga se u pravilu mjeri veličina dN/dt (fizikalno je ispravnije baratati sa $\Delta N/\Delta t$, jer se ne može govoriti o diferencijalu broja čestica dN, već jedino

o konačnom broju čestica ΔN). Ta veličina naziva se *aktivnost* (»aktivnost radioaktivnog elementa« ili »radioaktivnost«) i definira jednadžbom

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}. \tag{1.2-6}$$

Primjena definicije (1.2-6) na jednadžbu (1.2-2) daje

$$A(t) = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda N(t). \tag{1.2-7}$$

Predznak minus uvršten je zato da bi vrijednost aktivnosti $A(t)$ bila pozitivna kad se broj jezgara izvora $N(t)$ u toku vremena t smanjuje.

U nekim slučajevima aktivnost A izvora drukčije ovisi o vremenu, na primjer u obliku

$$A(t) = A_{01}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + A_{02}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \ldots$$

što znači da u izvoru radioaktivnih zračenja postoji nekoliko različitih radioaktivnih elemenata s različitim konstantama raspadanja.

Pod *specifičnom aktivnošću* ili *koncentracijom* obično se razumijeva omjer aktivnosti A radioaktivne tvari i mase m te tvari, dakle

$$\frac{A}{m} = -\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{m}N(t). \tag{1.2-8}$$

U pojedinim slučajevima pod specifičnom aktivnošću (koncentracijom) razumijeva se omjer aktivnosti A radioaktivne tvari i *volumena* V te tvari, dakle

$$\frac{A}{V} = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{V}N(t). \tag{1.2-9}$$

Budući da postoji veza $m = \rho V$, gdje je ρ gustoća tvari, između navedene dvije specifične aktivnosti vlada odnos

$$\frac{A}{m} = \frac{1}{\rho}\frac{A}{V}.$$

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina aktivnost A mjeri se jedinicom »broj raspada u sekundi« = 1/s, dakle recipročnom sekundom. Ta jedinica neposredno slijedi iz jednadžbe (1.2-6), ako se na nju primijeni načelo građenja sistema jedinica (vidi odsječak A.5.1):

$$[A]_{\mathrm{M}} = \frac{[N]_{\mathrm{M}}}{[t]_{\mathrm{M}}} = \frac{\text{čestica}}{\text{sekunda}} = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1}.$$

»Čestica« je, naime, tzv. »opisna jedinica«, kao što je, na primjer, »okretaj«, »radijan« itd. Prema tome je čestica $\equiv 1$ (vidi odlomak 2.2.2 i odlomak D.1.3.2).

Uz jedinicu SI $[A]_{\mathrm{M}} = 1/\mathrm{s}$ najčešće se upotrebljava vansistemska jedinica curie = Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$/s (vidi odlomak 2.3.1).

Primjer 1. Radij (Ra) mase 2 grama nalazi se pri *normiranim uvjetima* (vidi odlomak D.1.5.1) u radioaktivnoj ravnoteži s radonom (Rn). Izračunajmo koliki je volumen V_{Rn} radona, ako trajanje poluraspada ($T_{1/2}$) radija iznosi $T_{\mathrm{Ra}} = 1590$ godina, radona $T_{\mathrm{Rn}} = 3{,}82$ dana, a relativna atomska masa radija je $M_{\mathrm{Ra}} = 226$!

Uvjet radioaktivne ravnoteže opisuje jednadžba (1.2-5), koja za naš slučaj glasi $N_{Rn}/N_{Ra} = T_{Rn}/T_{Ra}$, odakle slijedi $N_{Rn} = N_{Ra}T_{Rn}/T_{Ra}$. Volumen radona V_{Rn} izračunat ćemo pomoću jednadžbe stanja idealnog plina $pV_{Rn} = R_0 N_{Rn}\Theta$ (vidi odlomak D.2.1.2), u kojoj smo termodinamičku temperaturu označili slovom Θ (uobičajen je simbol T). Iz ove jednadžbe stanja slijedi

$$V_{Rn} = N_{Rn}R_0\Theta/p = \nu N_{Rn},$$

gdje je $\nu = R_0\Theta/p = 22{,}41$ m³/kmol »normirani molni volumen« (odlomak D.1.5.3). Na početku ovog primjera naglašeno je, naime, da je riječ o (fizikalnom) normiranom stanju. Prema tome gornji izraz možemo pisati dalje

$$V_{Rn} = \nu N_{Rn} = \nu N_{Ra} T_{Rn}/T_{Ra}.$$

Još nam je nepoznat broj atoma radija N_{Ra}; izračunat ćemo ga pomoću poznate mase radija $m_{Ra} = 2$ g i njegove relativne atomske mase $M_{Ra} = 226$. Pri tom ćemo se poslužiti jednadžbom $N = m \cdot \text{kmol}/(M \cdot \text{kg})$, koja povezuje »količinu tvari« N s masom m (vidi odlomak D.1.3.4). Na taj način konačno dobivamo

$$V_{Rn} = \nu\, m_{Ra} \frac{\text{kmol}}{M_{Ra} \cdot \text{kg}} \frac{T_{Rn}}{T_{Ra}}$$

$$V_{Rn} = 22{,}41 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} 2\,\text{g} \frac{\text{kmol}}{226\,\text{kg}} \frac{3{,}82\,\text{d}}{5{,}75 \cdot 10^5\,\text{d}} = 1{,}32 \cdot 10^{-9}\,\text{m}^3,$$

jer je $T_{Ra} = 1590$ godina $= 1590 \cdot 365$ dana $= 5{,}75 \cdot 10^5$ d (d = dan, lat. dies). Volumen plina radona, dakle, iznosi 1,32 kubna milimetra.

Primjer 2. Radioaktivna tvar sadrži 3 miligrama ^{234}U. Izračunajmo: koliko će urana ostati nakon 150000 godina i kolika će tada biti njegova aktivnost (trajanje poluraspada iznosi $T = 2{,}5 \cdot 10^5$ godina)? Budući da je masa m tvari proporcionalna broju N čestica od koje se tvar sastoji, umjesto jednadžbe (1.2-2) možemo napisati

$$m = m_0 e^{-\lambda t} = m_0 \exp(-\lambda t).$$

Ovdje je $m_0 = 3\,\text{mg} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{g} = 3 \cdot 10^{-6}$ kg masa urana u sadašnjem trenutku, a m masa urana nakon vremena $t = 150000$ godina. Vrijednost konstante raspadanja λ izračunat ćemo pomoću izraza (1.2-3)

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{0{,}693}{T} = \frac{0{,}693}{2{,}5 \cdot 10^5\,\text{god}} = 2{,}78 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{god}}.$$

S dobivenom vrijednošću veličine λ možemo izračunati masu ^{234}U nakon $t = 1{,}5 \cdot 10^5$ godina:

$$m = 3\,\text{mg} \cdot \exp(-1{,}5 \cdot 10^5\,\text{god} \cdot 2{,}78 \cdot 10^{-6}/\text{god}) = 3\,\text{mg} \cdot \exp(-0{,}416)$$

$$m = 3\,\text{mg}/1{,}516 = 1{,}98\,\text{mg} = 1{,}98 \cdot 10^{-6}\,\text{kg}.$$

Odgovor na drugo pitanje daje nam jednadžba (1.2-1), tj. $A = -\text{d}N/\text{d}t = \lambda N$, gdje je N broj čestica u trenutku $t = 1{,}5 \cdot 10^5$ god. Budući da je $N = m \cdot \text{kmol}/(M \cdot \text{kg})$, a kmol $= 6{,}023 \cdot 10^{26}$ (vidi primjer 1 ili odlomak D.1.3.4 u kojem umjesto slova N za »količinu tvari« upotrebljavamo simbol Z), lako saznajemo broj čestica N nakon 150000 godina:

$$N = \frac{m \cdot 6{,}023 \cdot 10^{26}}{M \cdot \text{kg}} = \frac{1{,}98 \cdot 10^{-6}\,\text{kg} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{26}}{234\,\text{kg}} = 5{,}1 \cdot 10^{18},$$

jer je $M = 234$ relativna atomska masa urana ^{234}U. Prema tome aktivnost u trenutku $t = 1{,}5 \cdot 10^5$ godina iznosi

$$A = \lambda N = 2{,}78 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{god}}\, 5{,}1 \cdot 10^{18} = 1{,}42 \cdot 10^{13} \frac{1}{\text{god}}.$$

Budući da se u SI aktivnost A izražava jedinicom »jedan raspad u sekundi« = 1/s, dobiveni rezultat preračunat ćemo na tu jedinicu pomoću približnog odnosa

$$\text{god} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s} = 3{,}15 \cdot 10^7\,\text{s}.$$

Na taj način dobivamo vrijednost aktivnosti nakon 150000 godina

$$A = 1{,}42 \cdot 10^{13} \frac{1}{\text{god}} = \frac{1{,}42 \cdot 10^{13}}{3{,}15 \cdot 10^{7}\,\text{s}} = 4{,}5 \cdot 10^{5}\,\frac{1}{\text{s}},$$

tj. aktivnost 1,98 mg urana iznosit će oko 450000 raspada u sekundi. Budući da je curie = Ci = $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$/s (odlomak 2.3.1), aktivnost izražena tom jedinicom iznosit će $A = 4{,}5 \cdot 10^{5}$ Ci/$3{,}7 \cdot 10^{10} =$ $= 1{,}22 \cdot 10^{-5}$ Ci = 12,2 mikrocurie (o jedinicama vidi u odsječku 2.3).

1.3. Predana energija, doza zračenja i njena snaga

1.3.1. Predana energija E_D definirana je na zasjedanju Međunarodne komisije za radiološke jedinice i mjerenja (ICRU, International Commission on Radiological Units and Measurements) godine 1962. kao ona energija koju ionizirajuće zračenje predaje ozračenoj tvari. Prije godine 1962. veličina E_D obično se nazivala »integralna apsorbirana doza«.

Pod »predanom energijom« E_D razumijeva se *razlika* energija $E_u - E_i$. Pri tom je E_u suma energija svih direktno i indirektno ionizirajućih čestica koje se nalaze u promatranom volumenu tvari, a E_i suma energija onih čestica koje su napustile promatrani volumen, umanjena za energiju mase mirovanja (δmc^2) ako je unutar volumena došlo do povećanja mase mirovanja δm pri eventualnim nuklearnim reakcijama. Pod »direktno ionizirajućim česticama« razumijevaju se nabijene čestice (elektroni, protoni, alfa-čestice itd.) koje imaju dovoljnu kinetičku energiju da bi mogle sudarom ostvariti ionizaciju. Pod »indirektno ionizirajućim česticama« razumijevaju se one nenabijene čestice i kvanti (neutroni, fotoni itd.) koji mogu osloboditi »direktno ionizirajuće čestice« ili izazvati nuklearne preobrazbe. Izraz »ionizirajuće zračenje« opisuje zračenje koje se sastoji od direktno ili indirektno ionizirajućeg zračenja ili od smjese jednih i drugih.

Predana energija neće uvijek biti jednaka proizvedenoj toplini, iako se normalno veći dio predane energije preobrazuje u toplinsku, jer stanoviti dio toplinske energije može nastati zbog promjene energije veze unutar atoma. Osim toga, u toku preobrazbe energija se može rasipati, pa će se razdioba topline razlikovati od razdiobe predane energije.

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina predana energija mjeri se jedinicom joule = J (vidi odlomak B.5.2.1), a u primjeni sistema CGS (o tom sistemu vidi odsječak B.8.2) jedinicom erg = 10^{-7} J.

1.3.2. Doza zračenja (stariji naziv je »apsorbirana doza zračenja«) definirana je *omjerom* predane energije $\Delta E_D = E_u - E_i - \delta mc^2$ (vidi odlomak 1.3.1) i mase elementa tvari Δm kojoj je energija ΔE_D dozračena. U diferencijalnom obliku definicija »doze zračenja« D glasi

$$D = \frac{\mathrm{d}E_D}{\mathrm{d}m},$$

dok je pri stvarnim mjerenjima $D = \Delta E_D/\Delta m$, gdje znakovi Δ upućuju na konačnost energije predane elementu ozračene tvari mase Δm.

Iako veličinu D većina autora danas još naziva »apsorbiranom dozom«, ovaj se izraz nastoji zamijeniti »dozom zračenja«, jer je »apsorbirana doza« pleonazam. »Doza«, naime, već u sebi uključuje činjenicu da je energija ΔE_D predana elementu tvari mase Δm, tj. da je u tvari apsorbirana.

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina doza zračenja D mjeri se jedinicom joule/kilogram = J/kg. Upotrebljavaju se i druge jedinice (vidi tablicu H-1).

1.3.3. Snaga doze zračenja (stariji naziv je »snaga apsorbirane doze«) definirana je omjerom »doze zračenja« D i vremena t kroz koje je doza ostvarena. Takva definicija vrijedi samo u slučaju ako je »snaga doze zračenja« konstantna. Općenito vrijedi definicija u diferencijalnom obliku

$$\dot{D} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}.$$

Budući da je u SI jedinica »doze zračenja« $[D]_{\mathrm{M}} = \mathrm{J/kg}$, a jedinica vremena $[t]_{\mathrm{M}} =$ = sekunda = s, to je jedinica »snage doze zračenja«

$$[\dot{D}]_{\mathrm{M}} = \frac{[D]_{\mathrm{M}}}{[t]_{\mathrm{M}}} = \frac{\mathrm{J/kg}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}} = \frac{\text{watt}}{\text{kilogram}},$$

jer je jedinica snage SI W = J/s. Ostale jedinice »snage doze zračenja« navedene su u tablici H-1.

1.4. Tok čestica i tok energije

1.4.1. Tok čestica (ili tok kvanata) definiran je omjerom broja čestica (ili kvanata) N koje prolaze kroz poprečni presjek površine S. U diferencijalnom obliku definicija toka čestica Φ glasi

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S},$$

dok je pri stvarnim mjerenjima $\Phi = \Delta N/\Delta S$.

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina Φ mjeri se jedinicom

$$[\Phi]_{\mathrm{M}} = \frac{[N]_{\mathrm{M}}}{[S]_{\mathrm{M}}} = \frac{\text{čestica}}{\text{metar}^2} = \frac{1}{\mathrm{m}^2},$$

a u primjeni sistema CGS jedinicom $1/\mathrm{cm}^2$ (vidi tablicu H-1).

1.4.2. Gustoća toka čestica (ili gustoća toka kvanata) naziva se i »snaga toka čestica«, a definirana je omjerom toka čestica Φ s trajanjem t prolaženja čestica. U diferencijalnom obliku »gustoća toka čestica« φ definirana je kvocijentom

$$\varphi = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

koji pri stvarnim mjerenjima glasi $\varphi = \Delta\Phi/\Delta t$. U primjeni SI veličina φ mjeri se jedinicom

$$[\varphi]_{\mathrm{M}} = \frac{[\Phi]_{\mathrm{M}}}{[t]_{\mathrm{M}}} = \frac{\text{čestica/m}^2}{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{s\,m}^2},$$

a u primjeni sistema CGS jedinicom $1/(\mathrm{s\,cm}^2) = 10^4\ 1/(\mathrm{s\,m}^2)$.

1.4.3. Tok energije čestica definiran je omjerom $\Delta E_F/\Delta S$, gdje je ΔE_F suma energija (osim energije mirovanja mc^2) svih čestica koje ulaze u područje površine poprečnog presjeka ΔS. U diferencijalnom obliku definicija glasi

$$F = \frac{dE_F}{dS}.$$

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina F mjeri se jedinicom

$$[F]_M = \frac{[E_F]_M}{[S]_M} = \frac{\text{joule}}{\text{metar}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2},$$

a u primjeni sistema CGS jedinicom

$$\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2} = \frac{10^{-7}\,\text{J}}{10^{-4}\,\text{m}^2} = 10^{-3}\frac{\text{J}}{\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{mJ}}{\text{m}^2}.$$

Ovdje je mJ = milijoule = 10^{-3} joule = 10^{-3} J (vidi tablicu A-1).

1.4.4. Gustoća toka energije (upotrebljavaju se i nazivi »jakost zračenja« i »snaga toka energije«) definirana je diferencijalnim kvocijentom

$$I = \frac{dF}{dt}.$$

U primjeni SI veličina »gustoća toka energije« I mjeri se jedinicom

$$[I]_M = \frac{[F]_M}{[t]_M} = \frac{\text{J/m}^2}{\text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{\text{watt}}{\text{metar}^2},$$

jer je W = J/s. U primjeni sistema CGS upotrebljava se jedinica

$$\frac{\text{erg}}{\text{s cm}^2} = \frac{10^{-7}\,\text{J}}{\text{s}\,10^{-4}\,\text{m}^2} = 10^{-3}\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2},$$

gdje je mW = miliwatt = 10^{-3} W.

1.5. Kerma i snaga kerme

1.5.1. Kerma je skraćenica engleskog naziva Kinetic energy released in material, tj. »kinetička energija oslobođena u tvari«, a označuje se slovom K. Veličinu »kerma« uvela je godine 1962. Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja (ICRU). Naziv se, međutim, ne smije shvatiti doslovno, jer je »kerma« definirana relacijom

$$K = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta E_K}{\Delta m} = \frac{dE_K}{dm}, \qquad (1.5\text{-}1)$$

tj. *omjerom* energija/masa. Pri tom je ΔE_K suma početnih kinetičkih energija svih nabijenih čestica stvorenih »česticama koje indirektno ioniziraju« (vidi odlomak

Tablica **H-1**

Pregled veličina i jedinica s područja ionizirajućih zračenja

Red. br.	Naziv veličine	Oznaka	Jednadžba	Mjerna jedinica		
				SI	CGS	Specijalna
1	Aktivnost (aktivnost izotopa u radioaktivnom izvoru)	A	$A=-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	Ci
2	Predana energija (integralna apsorbirana doza)	E_{D}	–	J	erg	g·rad
3	Doza zračenja (apsorbirana doza zračenja)	D	$D=\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}m}$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{g}}$	rad
4	Snaga doze zračenja (snaga apsorbirane doze)	$\dot{D}$	$\dot{D}=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{g\,s}}$	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
5	Tok čestica (ili kvanata)	Φ	$\Phi=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}$	$\frac{1}{\mathrm{m}^2}$	$\frac{1}{\mathrm{cm}^2}$	–
6	Gustoća toka čestica (ili kvanata)	φ	$\varphi=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	$\frac{1}{\mathrm{s\,m}^2}$	$\frac{1}{\mathrm{s\,cm}^2}$	–
7	Tok energije	F	$F=\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{F}}}{\mathrm{d}S}$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^2}$	–
8	Gustoća toka energije (jakost zračenja)	I	$I=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s\,cm}^2}$	–
9	Kerma (Kinetic energy released in material)	K	$K=\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{K}}}{\mathrm{d}m}$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{g}}$	–
10	Snaga kerme	$\dot{K}$	$\dot{K}=\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{g\,s}}$	–

Red. br.	Naziv veličine	Oznaka	Jednadžba	Mjerna jedinica		
				SI	CGS	Specijalna
11	Ekspozicija (ekspozicijska doza zračenja)	X	$X=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}m}$	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$	$\frac{[Q]_\mathrm{e}}{\mathrm{g}}$	r
12	Snaga ekspozicije (snaga ekspozicijske doze zračenja)	$\dot{X}$	$\dot{X}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{kg}}$	$\frac{[I]_\mathrm{e}}{\mathrm{g}}$	$\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}, \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{min}}, \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{h}}$
13	Maseni koeficijent slabljenja	$\frac{\mu}{\rho}$	$\frac{\mu}{\rho}=\frac{1}{\rho N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}$	$\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}$	–
14	Maseni koeficijent preobrazbe energije	$\frac{\mu_\mathrm{K}}{\rho}$	$\frac{\mu_\mathrm{K}}{\rho}=\frac{\rho}{E_\mathrm{p}}\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{K}}{\mathrm{d}l}$	$\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}$	$\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}$	–
15	Maseni koeficijent apsorpcije	$\frac{\mu_\mathrm{en}}{\rho}$	$\frac{\mu_\mathrm{en}}{\rho}=\frac{\mu_\mathrm{K}}{\rho}(1-f)$	$\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}$	$\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}$	–
16	Masena sposobnost kočenja	–	$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{s}}{\mathrm{d}l}$	$\frac{\mathrm{Jm}^2}{\mathrm{kg}}$	$\frac{\mathrm{erg\ cm}^2}{\mathrm{g}}$	–
17	Specifična konstanta zračenja gama	Γ	$\Gamma=\frac{l}{A}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\mathrm{C\,m}^2}{\mathrm{kg}}$	$\frac{[Q]_\mathrm{e}\ \mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}$	$\frac{\mathrm{r\,m}^2}{\mathrm{h\ Ci}}$
18	Linearna preobrazba energije	L	$L=\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{L}}{\mathrm{d}l}$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}}$	$\frac{\mathrm{keV}}{\mu\mathrm{m}}$
19	Srednja energija stvaranja para iona	w	$w=\frac{E}{N}$	J	erg	–

1.3.1). ΔE_K ne uključuje samo kinetičku energiju tih nabijenih čestica, utrošenu pri sudarima, već i energiju koju one odašilju pri kočnoj emisiji (njem. Bremsstrahlung). Važno je da pri *mjerenju* prema jednadžbi (1.5-1) masa elementa tvari Δm bude toliko mala da njeno uvođenje u polje zračenja ne uzrokuje zamjetno narušavanje postojećeg stanja. To je naročito važno u slučaju ako se tvar za koju se utvrđuje »kerma« K razlikuje od okolne tvari.

Pri opisivanju polja zračenja najčešće se upotrebljava veličina »gustoća toka energije« I (»jakost zračenja«; vidi tablicu H-1 i odlomak 1.4.4), tj. njena vrijednost u pojedinim tačkama. U dozimetriji je, međutim, prikladnije polje »kerme« indirektno ionizirajućih čestica opisivati za specijalno odabranu tvar. Za zračenja srednjih energija najprikladniji je *zrak*, a u medicini i biologiji je za sve vrste zračenja odabrano ljudsko *tkivo*. Naročito korisna može biti »kerma« u dozimetriji onda kad se uspostavlja ravnoteža nabijenih čestica, pa se mogu zanemariti gubici pri kočnom zračenju. U tom slučaju kerma K je jednaka »dozi zračenja« D (»apsorbirana doza zračenja«; vidi tablicu H-1 i odlomak 1.3.2) u istoj tački. U snopovima rendgenskog zračenja, gama-zračenja ili neutrona, čija je energija relativno velika, može, međutim, doći samo do prijelazne ravnoteže nabijenih čestica; u tom slučaju je K manja od D, a pri vrlo velikoj energiji razlika je znatna. Općenito vrijedi: do ravnoteže neće doći ako se putovi direktno ionizirajućih čestica mogu usporediti s prosječnim slobodnim putovima indirektno ionizirajućih čestica.

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina kerma mjeri se jedinicom

$$[K]_M = \frac{[E_K]_M}{[m]_M} = \frac{\text{joule}}{\text{kilogram}} = \frac{\text{J}}{\text{kg}},$$

što neposredno slijedi iz definicijske jednadžbe (1.5-1). To je, dakle, ista jedinica SI kakva se upotrebljava za mjerenje veličine »doza zračenja« D (odlomak 1.3.2). U primjeni sistema CGS upotrebljava se jedinica

$$\frac{\text{erg}}{\text{g}} = \frac{10^{-7}\,\text{J}}{10^{-3}\,\text{kg}} = 10^{-4}\,\frac{\text{J}}{\text{kg}} = 0{,}1\,\frac{\text{mJ}}{\text{kg}}.$$

Ovdje je mJ = milijoule = 10^{-3} J. Mogu se dakako upotrijebiti i drugi decimalni višekratnici jedinica, npr. μ = mikro = 10^{-6} itd. (vidi tablicu A-1).

1.5.2. Snaga kerme (upotrebljava se i naziv »brzina kerme«) definirana je diferencijalnim kvocijentom

$$\dot{K} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}.$$

U primjeni jedinica SI veličina »snaga kerme« mjeri se jedinicom

$$[\dot{K}]_M = \frac{[K]_M}{[t]_M} = \frac{\text{J/kg}}{\text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{kg}} = \frac{\text{watt}}{\text{kilogram}},$$

jer je W = J/s. U primjeni sistema CGS upotrebljava se jedinica

$$\frac{\text{erg}}{\text{g s}} = 10^{-4}\,\frac{\text{W}}{\text{kg}} = 0{,}1\,\frac{\text{mW}}{\text{kg}}.$$

1.6. Ekspozicija, snaga ekspozicije i specifična konstanta gama

1.6.1. Ekspozicija (stariji naziv je »ekspozicijska doza zračenja«) definirana je jednadžbom

$$X = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta m} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}m}. \qquad (1.6\text{-}1)$$

Ovdje je ΔQ suma električnih naboja iona jednakog predznaka, nastalih u zraku, kada se potpuno zakoče svi elektroni (negatroni i pozitroni) oslobođeni fotonima u elementu volumena *zraka* mase Δm. Takvu definiciju veličine »ekspozicija« preporučila je godine 1962. Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja (ICRU).

Pri tom se u ΔQ ne uključuje ionizacija nastala kočnim zračenjem sekundarnih elektrona. Ako se zanemari mala razlika, koja je bitna samo za velike energije, ekspozicija definirana jednadžbom (1.6-1) ekvivalentna je kermi (vidi odlomak 1.5.1) u zraku.

U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina ekspozicija X mjeri se jedinicom

$$[X]_{\mathrm{M}} = \frac{[Q]_{\mathrm{M}}}{[m]_{\mathrm{M}}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{kilogram}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}.$$

Ostale jedinice ekspozicije (röntgen i njegove izvedenice) razmotrene su u odsječku 2.4.

1.6.2. Snaga ekspozicije definirana je prema preporuci Međunarodne komisije za radiološke jedinice i mjerenja jednadžbom

$$\dot{X} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t},$$

gdje je ΔX povećanje ekspozicije u toku vremenskog intervala Δt.

U primjeni SI za mjerenje »snage ekspozicije« $\Delta X/\Delta t$ upotrebljava se jedinica

$$[\dot{X}]_{\mathrm{M}} = \frac{[X]_{\mathrm{M}}}{[t]_{\mathrm{M}}} = \frac{\mathrm{C/kg}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{kg}} = \frac{\text{amper}}{\text{kilogram}}.$$

Ostale jedinice snage ekspozicije navedene su u tablici H-1 i u poglavlju 2.

1.6.3. Specifična konstanta gama. Ova veličina se u starijoj terminologiji naziva »specifična snaga doze gama-zračenja« ili »konstanta doze« (njem. Dosiskonstante). Ta je konstanta karakteristična za gama-zračenje radioaktivnih tvari. Uz pomoć »specifične konstante gama« (Γ) proračunava se snaga ekspozicije $\dot{X} = \mathrm{d}X/\mathrm{d}t$ tačkastog izvora gama-zračenja (radioaktivnog izotopa) na mjestu udaljenom l od izvora pomoću jednadžbe

$$\dot{X} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{\Gamma \cdot A}{l^2}. \qquad (1.6\text{-}2)$$

Ovdje je A aktivnost izvora. Jednadžba (1.6-2) odnosi se na širenje gama-zračenja u *zraku*; pretpostavljeno je pri tom da zrak nimalo ne apsorbira gama-zračenje (vakuum). Vrijednost konstante Γ nekih izvora u zraku sadrži tablica H-2.

koje se upotrebljavaju za mjerenje veličina ajućih zračenja

Jedinica	Omjer jedinica	
CGS	SI/CGS	CGS/SI
erg	10^{7}	10^{-7}
$\frac{\text{erg}}{\text{g}}$	10^{4}	10^{-4}
$\frac{\text{erg}}{\text{g s}}$	10^{4}	10^{-4}
$\frac{1}{\text{cm}^2}$	10^{-4}	10^{4}
$\frac{1}{\text{s cm}^2}$	10^{-4}	10^{4}
$\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$	10^{3}	10^{-3}
$\frac{\text{erg}}{\text{s cm}^2}$	10^{3}	10^{-3}
$\frac{[Q]_e}{\text{g}}$	$2{,}998 \cdot 10^{6}$	$3{,}3356 \cdot 10^{-7}$
$\frac{[I]_e}{\text{g}}$	$2{,}998 \cdot 10^{6}$	$3{,}3356 \cdot 10^{-7}$
$\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$	10	10^{-1}
$\frac{\text{erg cm}^2}{\text{g}}$	10^{8}	10^{-8}
$\frac{[Q]_e \text{ cm}^2}{\text{g}}$	$2{,}998 \cdot 10^{10}$	$3{,}3356 \cdot 10^{-11}$
$\frac{\text{erg}}{\text{cm}}$	10^{5}	10^{-5}

ıica SI i CGS. Da bi stručnjaci mogli sis-g sistema jedinica (SI) u područje ionizira-pomagalo za preračunavanje odgovarajućih ı jedinice SI. U tu svrhu sastavili smo tablicu ıktori s kojima se preračunavanja mogu oba-. s tablicom H-1: redni broj veličine iz tab-

nekih radioizotopa u zraku

Vrijednost konstante Γ u zraku	
$\frac{\text{C m}^2}{\text{kg}}$	$\frac{\text{r}}{\text{h}} \frac{\text{m}^2}{\text{Ci}}$
3	4
$,63 \cdot 10^{-18}$	0,84
$,52 \cdot 10^{-18}$	1,3
$,58 \cdot 10^{-19}$	0,34
$,18 \cdot 10^{-18}$	0,61
$,23 \cdot 10^{-19}$	0,27
$,72 \cdot 10^{-18}$	1,92
$,8 \cdot 10^{-19}$	~0,3
$4{,}45 \cdot 10^{-19}$	0,23
$1{,}26 \cdot 10^{-18}$	0,65
$2{,}91 \cdot 10^{-18}$	1,5

ante Γ navedene su u jedinicama SI, ama. Pri tom je C = coulomb, r = , Ci = curie = $3{,}7 \cdot 10^{10}$/s (vidi odlo- 10^{-4} C/kg. U stupcu 2 tablice H-2 ı, d = dan, h = sat.

udaljenosti 305 centimetara od nezaštićene ı treba obaviti u jedinicama SI, a zatim re-ı.

konstante gama $\Gamma = 2{,}52 \cdot 10^{-18}$ C m²/kg unanjem uz pomoć jednadžbe (1.6-2) dobi-

$$\frac{3{,}7 \cdot 10^{10}/\text{s}}{} = 5{,}01 \cdot 10^{-7} \frac{\text{A}}{\text{kg}}.$$

sto da dobiveni rezultat preračunavamo na i $\Gamma = 1{,}3$ r m²/(h Ci) iz stupca 3 tablice H-2:

$$\text{i} \frac{1}{9{,}3\ \text{m}^2} = 6{,}99 \frac{\text{r}}{\text{h}},$$

ena na sat.
rezultata. Izjednačimo li $5{,}01 \cdot 10^{-7}$ A/kg =

$$\frac{00\ \text{s}}{} = 2{,}58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{kg}},$$

dinice SI coulomb/kilogram.

lice H-1 stavljen je u zagradu u tablici H-3, npr. u tablici H-1 »tok čestica« Φ nosi redni broj 5, a jedinica SI te veličine je $1/m^2$. U tablici H-3 nalazimo veličinu Φ označenu sa (5), a uz nju jedinicu SI $1/m^2$ i jedinicu CGS $1/cm^2$. Itd.

Primjenu tablice H-3 možemo objasniti na *primjeru*. Treba ustanoviti koliko jedinica SI sadrži jedinica CGS erg cm^2/g. U tablici H-3 nalazimo odgovor

$$\frac{\text{jedinica CGS}}{\text{jedinica SI}} = \frac{\text{erg cm}^2/\text{g}}{\text{J m}^2/\text{kg}} = 10^{-8},$$

tj. jedinica CGS je 100 milijuna puta manja od jedinice SI. Provjerimo to računanjem! Budući da je J = joule $= 10^7$ erg, $m^2 = 10^4$ cm^2, kg $= 10^3$ g, uvrštenjem slijedi

$$\frac{\text{jedinica CGS}}{\text{jedinica SI}} = \frac{\text{erg cm}^2/\text{g}}{10^7\,\text{erg}\,10^4\,\text{cm}^2/10^3\,\text{g}} = \frac{1}{10^7 \cdot 10^4/10^3} = 10^{-8},$$

dakle erg $cm^2/g = 10^{-8}$ Jm^2/kg, odnosno $Jm^2/kg = 10^8$ erg cm^2/g.

2.1.3. Primjer mjerenja ekspozicije i snage ekspozicije. Za mjerenje ekspozicije rendgenskog zračenja može se upotrijebiti ionizacijska komora izrađena u obliku cilindričkog kondenzatora unutarnjeg polumjera R_1 i vanjskoga R_2. Prostor između obaju cilindara ispunjen je suhim *zrakom* pod normiranim uvjetima (vidi odsječak D.1.5). Prije mjerenja cilindrički kondenzator se nabije, tako da između njegovih metalnih cilindara djeluje napon U. Ako se komora izloži djelovanju rendgenskog zračenja, ono će ionizirati zrak između vanjskog i unutarnjeg cilindra, pa će se u toku vremena t napon smanjiti na vrijednost $U' < U$.

Izračunajmo kolike su bile vrijednosti ekspozicije X i snage ekspozicije dX/dt za slučaj opisane ionizacijske komore sa $R_1 = 5$ mm i $R_2 = 2$ cm. Neposredno prije mjerenja napon je iznosio $U = 500$ V, a na vrijednost $U' = 200$ V spao je u toku ozračivanja ionizacijske komore rendgenskim zrakama u trajanju $t = 2$ sekunde.

Količina elektrike na svakom cilindru smanjila se za $\Delta Q = C\Delta U$, gdje je $\Delta U = U - U'$, a C kapacitet kondenzatora — komore. Stoga će prema jednadžbi (1.6-1) vrijednost ekspozicije iznositi

$$X = \frac{\Delta Q}{m} = \frac{C\Delta U}{\rho V},$$

gdje je $m = \rho V$ masa zraka, normirane gustoće $\rho = 1{,}293$ kg/m³, koji se nalazi u prostoru između cilindara čiji je volumen $V = \pi l(R_2^2 - R_1^2)$; ovdje je l duljina komore — cilindričkog kondenzatora. Uvrstimo li u gornju jednadžbu izraz za kapacitet cilindričkog kondenzatora i izraz za volumen zraka, dobivamo

$$X = \frac{\Delta U}{\rho} \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(R_2/R_1) \cdot \pi l(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{\Delta U}{\rho} \frac{2\epsilon_0}{(R_2^2 - R_1^2)\ln R_2/R_1},$$

gdje je $\epsilon = \epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m dielektričnost zraka, koja je praktički jednaka dielektričnosti vakuuma (vidi odsječak E.1.2).

Uvrstimo li u gornju jednadžbu podatke za naš primjer $\Delta U = U - U' =$ $= 500$ V $- 200$ V $= 300$ V, $\rho = 1{,}293$ kg/m³, $R_2^2 - R_1^2 = (2\text{ cm})^2 - (0{,}5\text{ cm})^2 = 3{,}75 \cdot$ $\cdot 10^{-4}$ m² i $\ln R_2/R_1 = \ln(2\text{ cm}/0{,}5\text{ cm}) = \ln 4 = 1{,}3863$, računanjem slijedi

$$X = \frac{300\,\mathrm{V}}{1{,}293\,\mathrm{kg/m^3}} \frac{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}}{3{,}75 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} \cdot 1{,}3863} = 7{,}9 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}},$$

tj. ekspozicija iznosi 7,9 mikrocoulomba po kilogramu = 7,9 μC/kg.

Snaga ekspozicije definirana je u odlomku 1.6.2 omjerom promjene ekspozicije i vremena u toku kojega je do te promjene došlo. U našem je slučaju ta promjena $X = 7{,}9 \cdot 10^{-6}$ C/kg, a trajanje $t = 2$ s (pretpostavljamo da je snaga ekspozicije konstantna, tj. $X/t = \mathrm{d}X/\mathrm{d}t = \mathrm{const}$), pa dakle snaga ekspozicije iznosi

$$\dot{X} = \frac{X}{t} = \frac{7{,}9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/kg}}{2\,\mathrm{s}} = 3{,}95 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{kg}} = 3{,}95 \frac{\mu\mathrm{A}}{\mathrm{kg}}.$$

Radi usporedbe korisno je rezultate preračunati na staru jedinicu röntgen = = r = 258 μC/kg (vidi odlomke 2.2.3 i 2.4.1), odnosno r/s = 258 μA/kg, jer je A = = C/s. Računanjem dobivamo

$$X = 7{,}9\ \mu\mathrm{C/kg} = 7{,}9 \cdot \mathrm{r}/258 = 0{,}0306\ \mathrm{r} = 30{,}6\ \mathrm{mr},$$

$$\dot{X} = 3{,}95 \frac{\mu\mathrm{A}}{\mathrm{kg}} = 3{,}95 \frac{\mathrm{r/s}}{258} = 0{,}0153\ \mathrm{r/s} = 15{,}3\ \mathrm{mr/s}.$$

Ovdje je m = mili = 10^{-3}, dakle mr = miliröntgen = 0,001 r.

2.2. Standardizacija jedinica na području aktivnosti i ionizirajućih zračenja

Reguliranje javne primjene mjernih jedinica s tog područja (zakonima ili drugim državnim propisima) danas se razvija u smislu sve dosljednije uporabe Međunarodnog sistema jedinica (SI). U Jugoslaviji još nemamo zakonodavnog akta koji bi propisivao koje se jedinice smiju javno upotrebljavati za fizikalne veličine što opisuju ionizirajuća zračenja. Stoga ćemo u narednim odlomcima letimično razmotriti odgovarajući sovjetski državni standard »Jedinice radioaktivnosti i ionizirajućih zračenja«, koji je pod oznakom GOST 8848-63 objavljen godine 1963, a na snazi je od 1. jula 1964. Tim standardom ujedno je stavljen van snage istoimeni standard, pod istim brojem, od godine 1958. Razlika između njih je u tome što GOST 8848-63 favorizira primjenu jedinica SI i što je terminologija usavršena. Standard se odnosi na mjerne jedinice sedam veličina koje ćemo razmotriti u daljnjem tekstu ovog odsječka.

2.2.1. Jedinica SI aktivnosti. U originalnom tekstu standarda GOST 8848-63 veličina »aktivnosti« A (vidi odlomak 1.2.4) naziva se »aktivnost izotopa u radioaktivnom izvoru« (»aktivnost nuklida«). Standard propisuje primjenu jedinice »jedan raspad u sekundi«, tj.

$$[A]_{\mathrm{M}} = \frac{1\ \mathrm{raspad}}{1\ \mathrm{sekunda}} = \frac{1}{\mathrm{s}}. \qquad (2.2\text{-}1)$$

Uz jedinicu SI $[A]_M = 1/s$ standard dopušta i primjenu vansistemske (»specijalne«) jedinice

$$\text{curie} = \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ 1/\text{s}.$$

O porijeklu jedinice aktivnosti curie raspravlja se u odlomku 2.3.1, a ostale vansistemske jedinice aktivnosti i specifične aktivnosti navedene su u ostalim odlomcima odsječka 2.3 (vidi i tablicu H-4).

2.2.2. Jedinice SI gustoće toka čestica i gustoće toka energije. Naziv »gustoća toka čestica« φ je skraćenica naziva »gustoća toka ionizirajućih čestica ili kvanata« φ (usporedi s tablicom H-1, redni broj 6). Za tu veličinu GOST 8848-63 propisuje javnu upotrebu jedinice SI »jedna čestica danog ionizirajućeg zračenja na kvadratni metar u sekundi«, tj.

$$[\varphi]_M = \frac{1\ \text{čestica}}{1\ \text{metar}^2 \times 1\ \text{sekunda}} = \frac{1}{\text{m}^2\text{s}}. \tag{2.2-2}$$

Srednji dio jednadžbe (2.2-2) zapravo nismo korektno napisali. U jednadžbe koje povezuju fizikalne veličine, a time i u »jednadžbe među jedinicama« ne možemo, naime, stavljati konkretne stvari (vidi odsječak 1.3 u glavi D, gdje se razmatra pojam »količina tvari«), već jedino atribute pojava i svojstava (vidi odsječak A.1.2). To znači da je u jednadžbi (2.2-2) »čestica« $\equiv 1$, tj. »čestica« je »opisna jedinica« kao što je, na primjer, »okretaj« (vidi odsječak B.2.5). Unatoč tome u praksi se takvo označivanje često upotrebljava, a naročito pri opisivanju ionizirajućih zračenja. Tako, na primjer, GOST 8848-63 dopušta primjenu oznaka

$$\frac{\text{alfa-čestica}}{\text{s m}^2} = \frac{\alpha}{\text{s m}^2}, \quad \frac{\text{beta-čestica}}{\text{s m}^2} = \frac{\beta}{\text{s m}^2},$$

$$\frac{\text{neutron}}{\text{s m}^2} = \frac{\text{n}}{\text{s m}^2}, \quad \frac{\text{gama-kvant}}{\text{s m}^2} = \frac{\gamma}{\text{s m}^2},$$

čime se »dopunski« opisuje jedinica SI $[\varphi]_M = \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$. U smislu formalistike računanja je dakako

$$\text{alfa-čestica} = \alpha \equiv 1, \quad \text{gama-kvant} = \gamma \equiv 1 \text{ itd.},$$

tj. slično kao što imamo raspad $\equiv 1$ (vidi jednadžbu 2.1-1), radijan $\equiv 1$, steradijan $\equiv 1$, okretaj $\equiv 1$ itd.

Za veličinu *gustoća toka energije* I, koja se naziva i »jakost zračenja«, sovjetski standard propisuje javnu primjenu jedinice SI

$$[I]_M = \frac{\text{watt}}{\text{metar}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2},$$

što neposredno slijedi iz odlomka 1.4.4 i tablice H-1.

2.2.3. Jedinice SI doze zračenja i snage doze zračenja. Veličinu »doza zračenja« D, koja se naziva i »apsorbirana doza zračenja« (vidi odlomak 1.3.2), standard GOST 8848-63 mjeri jedinicom

$$[D]_M = \frac{\text{joule}}{\text{kilogram}} = \frac{\text{J}}{\text{kg}},$$

ali dopušta i primjenu vansistemske jedinice

$$\text{rad} = 10^{-2}\frac{\text{J}}{\text{kg}} = 0{,}01\frac{\text{J}}{\text{kg}} = 10\frac{\text{mJ}}{\text{kg}} = 100\frac{\text{erg}}{\text{g}}.$$

Tu jedinicu doze zračenja predložila je Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja (ICRU) godine 1954. Jedinica »rad« može se upotrebljavati za mjerenje doze bilo koje vrste zračenja. Naziv rad skraćenica je engleskog naziva **r**adiation **a**bsorbed **d**osis, tj. »doza apsorbiranog zračenja«.

Za veličinu *snaga doze zračenja* $\dot{D} = \mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ (stariji naziv je »snaga apsorbirane doze«), koja je u tablici H-1 navedena pod rednim brojem 4, sovjetski standard propisuje javnu upotrebu jedinice SI

$$[\dot{D}]_{\text{M}} = \frac{\text{watt}}{\text{kilogram}} = \frac{\text{W}}{\text{kg}},$$

ali dopušta i javnu primjenu specijalne (vansistemske) jedinice

$$\frac{\text{rad}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0{,}01\frac{\text{W}}{\text{kg}} = 10\frac{\text{mW}}{\text{kg}} = 100\frac{\text{erg}}{\text{s g}}.$$

Veličina snaga doze zračenja razmotrena je u odlomku 1.3.3.

2.2.4. Jedinice SI ekspozicije i snage ekspozicije. Za veličinu »ekspozicija« (»ekspozicijska doza rendgenskog i gama-zračenja«; vidi odsječak 1.6) GOST 8848-63 propisuje primjenu jedinice SI

$$[X]_{\text{M}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{kilogram (zraka)}} = \frac{\text{C}}{\text{kg}},$$

koja je u citiranom standardu definirana ovako:

> Coulomb po kilogramu je ekspozicija rendgenskog i gama-zračenja pri kojoj s njom povezana korpuskularna emisija proizvede u svakom kilogramu suhog atmosferskog zraka toliko iona da oni nose količinu elektrike jedan coulomb.

Pri tom se pod »atmosferskim zrakom« razumijeva suhi zrak u normiranom stanju (vidi odlomak D.1.5.1): temperatura 0 °C, tlak 1,01325 bar (= 760 mm Hg = = 1 atm; o jedinicama tlaka vidi odsječak B.4.3), gustoća zraka $\rho = 1{,}293$ kg/m³.

Zbog uvriježenosti starijih jedinica ekspozicije (vidi odsječak 2.4), sovjetski standard dopušta da se uz jedinicu ekspozicije SI $[X]_{\text{M}} = \text{C/kg}$ upotrebljava i vansistemska jedinica röntgen = r, definirana ovako

$$\text{r} = \text{röntgen} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{C/kg}.$$

Za veličinu *snaga ekspozicije* (»snaga ekspozicijske doze rendgenskog i gama-zračenja«), koja je opisana u našem odlomku 1.6.2 i navedena u tablici H-1 pod brojem 12, sovjetski standard propisuje javnu primjenu jedinice SI

$$[\dot{X}]_{\text{M}} = \frac{[X]_{\text{M}}}{[t]_{\text{M}}} = \frac{\text{C/kg}}{\text{s}} = \frac{\text{A}}{\text{kg}} = \frac{\text{amper}}{\text{kilogram}}.$$

Sovjetski standard dopušta i javnu primjenu starije jedinice

$$\frac{\text{röntgen}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{r}}{\text{s}} = 2{,}579\,76 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{A}}{\text{kg}} \approx 2{,}58 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{A}}{\text{kg}}.$$

Jedinica ekspozicije röntgen podrobno se razmatra u našem odlomku 2.4.1.

Primjer. U nekom laboratoriju osoblje je izloženo opasnom djelovanju rendgenskog zračenja. Da bi se nadzirala dopuštena vrijednost snage doze zračenja, među ostalim zaštitnim uređajima upotrijebljena je cilindrička ionizacijska komora dugačka 1 metar; polumjeri vanjskog i unutrašnjeg cilindra iznose 20 cm i 1 cm. Izračunajmo vrijednost ionizacijske struje komore na koju će proraditi zaštitni uređaji (alarm, prekid djelovanja izvora zračenja itd.), ako je u laboratoriju propisano da ni jedan čovjek ne smije u toku jedne godine primiti ekspoziciju veću od 5 röntgena. U laboratoriju stručnjaci provedu najviše 6 sati dnevno, a radni tjedan traje 5 dana.

Stručnjaci su, dakle, u toku 1 godine izloženi rentgenskom zračenju u trajanju $t = 52 \cdot 6 \cdot 5\ \text{h} = 1560\ \text{h}$ (1 godina ima 52 tjedna). Budući da je dopuštena ekspozicija $X = 5\ \text{r}$ (godišnje), ljudi će smjeti biti izloženi maksimalnoj snazi ekspozicije

$$\dot{X} = \frac{X}{t} = \frac{5\ \text{r}}{1560\ \text{h}} = \frac{5 \cdot 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{C/kg}}{1560 \cdot 3600\ \text{s}} = 2{,}3 \cdot 10^{-10}\,\frac{\text{A}}{\text{kg}}.$$

Toj istoj snazi ekspozicije izložena je i ionizacijska komora koja sadrži zrak (pod normiranim uvjetima) mase $m = \rho V$, gdje su $\rho = 1{,}293\ \text{kg/m}^3$ (vidi odlomak 2.1.3) i $V = \pi l(R_2^2 - R_1^2)$ gustoća i volumen zraka u komori.

Poslužimo li se definicijama ekspozicije i snage ekspozicije (vidi odlomke 1.6.1, 2), te definicijom jakosti električne struje $i = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, dobivamo formulu za proračunavanje maksimalne struje ionizacijske komore

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{m\,\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = m\dot{X} = \rho V \dot{X}.$$

Volumen komore izračunat ćemo uz pomoć poznatih podataka $l = 1\ \text{m}$, $R_2 = 0{,}2\ \text{m}$, $R_1 = 0{,}01\ \text{m}$

$$V = \pi l(R_2^2 - R_1^2) = \pi \cdot 1\ \text{m}(0{,}2^2 - 0{,}01^2)\ \text{m}^2 = 0{,}125\ \text{m}^3.$$

Budući da su nam sada poznati svi podaci, pomoću izvedenog izraza možemo izračunati jakost proradne struje zaštitnog uređaja

$$i = 1{,}293\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ 0{,}125\ \text{m}^3 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-10}\,\frac{\text{A}}{\text{kg}} = 3{,}72 \cdot 10^{-11}\ \text{A}.$$

Uređaj će, dakle, proraditi pri $i = 3{,}72 \cdot 10^{-11}\ \text{A} = 37{,}2$ pikoampera.

2.3. Vansistemske jedinice aktivnosti i specifične aktivnosti

2.3.1. Jedinica aktivnosti curie (kratica: Ci). U odlomku 2.1.3 smo naveli da je u Međunarodnom sistemu jedinica (SI, Système International d'Unités) jedinica fizikalne veličine »aktivnost« A

$$[A]_{\text{M}} = \frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1},$$

što smo jednadžbom (2.2-1) zabilježili u obliku $[A]_{\text{M}} = 1$ raspad/1 sekunda $= 1/\text{s}$ (o veličini »aktivnost« vidi odlomak 1.2.4).

Na ovu jedinicu aktivnosti SI oslanja se vansistemska jedinica aktivnosti

$$\text{curie} = \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\,\frac{1}{\text{s}}\ \text{(tačno)}, \qquad (2.3\text{-}1)$$

prozvana tako po slavnom bračnom paru *Curie* (*Marie Curie-Sklodowska*, 1867—1934, i *Pierre Curie*, 1859—1906). Definicija jedinice curie (2.3-1) prihvaćena je godine 1964. na dvanaestom zasjedanju Generalne konferencije za mjere i utege, a odgovarajući tekst objavljen je u rezoluciji broj 7:

La Douzième Conférence Générale des Poids et Mesures,

considérant que depuis longtemps le curie est utilisé dans beaucoup de pays comme unité pour l'activité des radionucléides,

reconnaissant que dans le Système International d'Unités (SI), l'unité de cette activité est la seconde à la puissance moins un (s^{-1}),

admet que le curie soit encore retenu comme unité en dehors du SI pour l'activité, avec la valeur $3{,}7 \cdot 10^{10}\ s^{-1}$. Le symbole de cette unité est Ci.

Iz teksta rezolucije se vidi da je Generalna konferencija definirala jedinicu aktivnosti curie = Ci kao *tačan* višekratnik $3{,}7 \cdot 10^{10}$ jedinice SI zato što se ona već dugo vremena upotrebljava u mnogim zemljama. No pri tom je naglasila da je curie *izvan* (dehors!) Međunarodnog sistema jedinica (SI).

Uz ovakvu definiciju jedinice curie korisno je navesti tri opaske. Prva se odnosi na njenu oznaku (kraticu). Uvedena je kratica Ci, dakle veliko slovo C ispred malog slova i u istoj liniji. Prije godine 1964. neki su autori upotrebljavali ili malo slovo c ili pak veliko slovo C. Upotrebljavajući slovo C, dolazili su u koliziju s kraticom za jedinicu elektrike SI coulomb = C. Takva kolizija je opasna, jer se u području ionizirajućih zračenja jedinice Ci = curie i C = coulomb često pojavljuju zajedno.

Druga opaska odnosi se na riječ »nuklid« (franc. nucléide, engl. nuclide, njem. Nuklid). Riječ nuklid uvela je godine 1951. International Union of Pure and Applied Physics. Pod »nuklidom« razumijevaju se atomi jednakog atomskog broja i jednakog masenog broja (vidi odlomak D.1.2.1). Za razliku od nuklida, pod »izotopom« se i dalje razumijevaju atomi koji imaju jednak atomski broj, ali različit maseni broj.

Trećom opaskom želimo upozoriti na *bitnu razliku* između današnje definicije jedinice curie (2.3-1) i one koja je postojala prije godine 1964. Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja (ICRU) definirala je, naime, godine 1956. jedinicu curie ovako: »Curie je jedinica radioaktivnosti definirana kao količina nekog radioaktivnog nuklida u kojem broj raspada iznosi $3{,}700 \cdot 10^{10}$ u sekundi«. To znači da je tom definicijom aktivnost izražena veličinom »količina tvari«, čija je jedna jedinica »mol« (vidi odlomak D.1.3.3). Naravno da curie ne može nipošto biti višekratnik jedinice količine tvari (vidi odlomak 1.2.4). To nam pokazuje čak vrlo primitivna ilustracija: 1 gram radija (Ra) ima aktivnost 1 Ci, 0,87 miligrama kobalta (^{60}Co) ima aktivnost 1 Ci, a da bi se dobila aktivnost 1 Ci plutonija (^{239}Pu), treba ga biti oko 16 grama. Uvidjevši da je citirana definicija neodrživa, ICRU je godine 1962. od nje odustala i preporučila (2.3-1), koju je godine 1964. prihvatila i Generalna konferencija za mjere i utege rezolucijom broj 7, što smo je u cijelosti naveli na početku odlomka.

Pri kraju raspravljanja o jedinici aktivnosti curie razmotrimo kako je došlo do definicije curie = Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ raspada u sekundi. U tu svrhu izračunat ćemo pomoću izraza (1.2-8) specifičnu aktivnost A/m (»koncentraciju«) *radija* (Ra), čija relativna atomska masa iznosi $M = 226$, a pripadno trajanje poluraspada (period poluraspada; vidi odlomak 1.2.2) $T_{1/2}$ (Ra) = 1590 godina = $5 \cdot 10^{10}$ sekundi.

Između mase m stanovite tvari i broja čestica N od kojih se sastoji ta tvar postoji veza $m/N = M \cdot$ kg/kmol (vidi odlomak D.1.3.4, u kojem je umjesto simbola

N upotrijebljeno slovo Z kao oznaka za »količinu tvari«). Budući da u trenutku $t=0$ vrijedi $N=N(t)$, uvrštenje omjera $m/N=M\cdot\mathrm{kg/kmol}$ u jednadžbu (1.2-8) daje uz pomoć (1.2-3)

$$\frac{A}{m}=\lambda\frac{\mathrm{kmol}}{M\cdot\mathrm{kg}}=\frac{0{,}693}{T_{1/2}}\frac{\mathrm{kmol}}{M\cdot\mathrm{kg}}. \tag{2.3-2}$$

Za radij je $T_{1/2}=5\cdot10^{10}\,\mathrm{s}$, $M=226$. U odlomku D.1.3.4 (jednadžba 1.3-6) imamo zabilježen odnos $\mathrm{kmol}=6{,}023\cdot10^{26}$ (čestica). Uvrštenjem tih vrijednosti u izraz (2.3-2) konačno dobivamo

$$\left(\frac{A}{m}\right)_{\mathrm{Ra}}=\frac{0{,}693\cdot6{,}023\cdot10^{26}}{5\cdot10^{10}\,\mathrm{s}\cdot226\,\mathrm{kg}}=3{,}69\cdot10^{13}\frac{1}{\mathrm{s\,kg}}=3{,}69\cdot10^{10}\frac{1}{\mathrm{s\,g}}.$$

Ponovo naglašavamo da ovaj rezultat vrijedi samo za radij (Ra).

2.3.2. Višekratnici jedinice curie. Mnogi autori primjenjuju dekadske i decimalne višekratnike (o njima vidi tablicu A-1) jedinice curie. U reaktorskoj tehnici upotrebljavaju dekadske višekratnike, tj. veće od 1:

$$\text{kilocurie} = \mathrm{kCi} = 10^{3}\ \mathrm{Ci} = 3{,}7\cdot10^{13}/\mathrm{s},$$

$$\text{megacurie} = \mathrm{MCi} = 10^{6}\ \mathrm{Ci} = 3{,}7\cdot10^{16}/\mathrm{s},$$

a u ostalim djelatnostima decimalne višekratnike, tj. manje od 1:

$$\text{milicurie} = \mathrm{mCi} = 10^{-3}\ \mathrm{Ci} = 3{,}7\cdot10^{7}/\mathrm{s},$$

$$\text{mikrocurie} = \mu\mathrm{Ci} = 10^{-6}\ \mathrm{Ci} = 3{,}7\cdot10^{4}/\mathrm{s},$$

$$\text{nanocurie} = \mathrm{nCi} = 10^{-9}\ \mathrm{Ci} = 3{,}7\cdot10/\mathrm{s}\ \text{itd.}$$

Dvostrane odnose među različitim jedinicama aktivnosti sadrži tablica H-4.

Primjer. U primjeni radioaktivnih izotopa često se rabe formule za brzo proračunavanje mase radioaktivne tvari po jedinici aktivnosti. Pri tom se masa m preparata (bez neaktivnog dijela) obično izražava gramima (g), a aktivnost A jedinicom curie = Ci = $3{,}7\cdot10^{10}$ raspada u sekundi = $3{,}7\cdot10^{10}$/s. Izvedimo prilagođenu veličinsku jednadžbu i brojčanu jednadžbu (o tim jednadžbama vidi odsječke A.1.4.6) za tu svrhu!

Polazimo od veličinske jednadžbe (2.3-2) koju ćemo napisati u obliku

$$\frac{m}{A}=\frac{T}{0{,}693}\frac{M\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}, \tag{2.3-3}$$

gdje je $T=T_{1/2}$ trajanje poluraspada, a $\mathrm{mol}=6{,}023\cdot10^{23}$ (vidi odlomak D.1.3.4). Omjer m/A pokazuje kolika je masa m radioaktivnog elementa potrebna da bi se dobila aktivnost A. Veličine m, A i T razlažemo po osnovnom načelu metrologije »veličina G = brojčani iznos $\{G\}\times$ jedinica $[G]$« (vidi odlomak A.1.3.3) na umnožak brojčanog iznosa i pripadne jedinice

$$m=\{m\}_{\mathrm{g}}\cdot\mathrm{g},\qquad A=\{A\}_{\mathrm{Ci}}\cdot\mathrm{Ci},\qquad T=\{T\}_{[t]}\cdot[t]. \tag{2.3-4}$$

Veličini T za sada ne pripisujemo konkretnu jedinicu, već privremeno stavljamo posve općenito jedinicu vremena $[t]$. Kasnije ćemo vidjeti da to može biti sekunda (s), sat (h), dan, godina itd. Uvrstimo li odnose (2.3-4) u jednadžbu (2.3-3), dobivamo

$$\frac{\{m\}_{\mathrm{g}}\cdot\mathrm{g}}{\{A\}_{\mathrm{Ci}}\cdot\mathrm{Ci}}=\frac{\{T\}_{[t]}\cdot[t]\cdot M\cdot\mathrm{kg}}{0{,}693\cdot6{,}023\cdot10^{26}}=\frac{M\cdot\{T\}_{[t]}\cdot[t]\cdot\mathrm{g}}{0{,}693\cdot6{,}023\cdot10^{23}}, \tag{2.3-5}$$

Tablica **H-4**

Dvostrani odnosi među jedinicama aktivnosti

Jedinica	Kratica	s^{-1}	rd	Ci	MCi	kCi	mCi	μCi	nCi	mSt
raspad u sekundi =	s^{-1}	1	10^{-6}	$2{,}7027 \cdot 10^{-11}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-17}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-14}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-8}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-5}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-2}$	$7{,}425 \cdot 10^{-2}$
rutherford =	rd	10^{6}	1	$2{,}7027 \cdot 10^{-5}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-11}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-8}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-2}$	$2{,}7027 \cdot 10$	$2{,}7027 \cdot 10^{4}$	$7{,}425 \cdot 10^{4}$
curie =	Ci	$3{,}7 \cdot 10^{10}$	$3{,}7 \cdot 10^{4}$	1	10^{-6}	10^{-3}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	$2{,}7478 \cdot 10^{9}$
megacurie =	MCi	$3{,}7 \cdot 10^{16}$	$3{,}7 \cdot 10^{10}$	10^{6}	1	10^{3}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	$2{,}7478 \cdot 10^{15}$
kilocurie =	kCi	$3{,}7 \cdot 10^{13}$	$3{,}7 \cdot 10^{7}$	10^{3}	10^{-3}	1	10^{6}	10^{9}	10^{12}	$2{,}7478 \cdot 10^{12}$
milicurie =	mCi	$3{,}7 \cdot 10^{7}$	$3{,}7 \cdot 10$	10^{-3}	10^{-9}	10^{-6}	1	10^{3}	10^{6}	$2{,}7478 \cdot 10^{6}$
mikrocurie =	μCi	$3{,}7 \cdot 10^{4}$	$3{,}7 \cdot 10^{-2}$	10^{-6}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-3}	1	10^{3}	$2{,}7478 \cdot 10^{3}$
nanocurie =	nCi	$3{,}7 \cdot 10$	$3{,}7 \cdot 10^{-5}$	10^{-9}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-6}	10^{-3}	1	2,7478
milistat =	mSt	$1{,}3468 \cdot 10$	$1{,}3468 \cdot 10^{-5}$	$3{,}64 \cdot 10^{-10}$	$3{,}64 \cdot 10^{-16}$	$3{,}64 \cdot 10^{-13}$	$3{,}64 \cdot 10^{-7}$	$3{,}64 \cdot 10^{-4}$	$3{,}64 \cdot 10^{-1}$	1

jer je kmol = 10^3 mol. Ovdje je M relativna atomska masa radioaktivne tvari. Preuređenjem i računanjem od gornje jednadžbe slijedi (uz Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$/s) *brojčana jednadžba* (vidi odsječak A.1.4)

$$\frac{\{m\}_g}{\{A\}_{Ci}} = KM\{T\}_{[t]}. \tag{2.3-6}$$

Vrijednost konstante K ovisi o upotrijebljenoj jedinici vremena $[t]$ kojom izražavamo trajanje poluraspada. Na primjer za $[t] = 1$ sekunda = s, iz (2.3-5, 6) računanjem slijedi

$$K = \frac{\text{Ci} \cdot [t] \cdot \text{g}}{\text{g} \cdot 0{,}693 \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23}} = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{s}^{-1} \cdot \text{s}}{0{,}693 \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23}} = 8{,}85 \cdot 10^{-14}.$$

Za druge jedinice vremena dobili bismo na isti način ove vrijednosti konstante K:

$[t] =$	s	h	dan	godina
$K =$	$8{,}85 \cdot 10^{-14}$	$3{,}18 \cdot 10^{-10}$	$7{,}65 \cdot 10^{-9}$	$2{,}79 \cdot 10^{-6}$

Primijenimo jednadžbu (2.3-6) na slučaj kada je $T = 1590$ god, a $M = 226$, tj. kada je riječ o radiju (Ra). U tom slučaju je $[t]$ = god, pa iz tablice dobivamo $K = 2{,}79 \cdot 10^{-6}$. Prema tome izraz (2.3-6) daje

$$\frac{\{m\}_g}{\{A\}_{Ci}} = 2{,}79 \cdot 10^{-6} \cdot 226 \cdot 1590 = 1.$$

To znači da aktivnost 1 grama radija iznosi 1 curie.

Prilagođenu veličinsku jednadžbu lako izvodimo iz brojčane jednadžbe (2.2-6). Jednostavno uvrstimo $\{m\}_g = m/\text{g}$, $\{A\}_{Ci} = A/\text{Ci}$, $\{T\}_{[t]} = T/[t]$, pa slijedi

$$\frac{m/\text{g}}{A/\text{Ci}} = KMT/[t].$$

O računanju s veličinskim, brojčanim i prilagođenim veličinskim jednadžbama čitatelj se može podrobnije informirati u poglavljima A.1, 2, B.10, D.6 i E.6.

2.3.3. Jedinice rutherford i milistat. Američki metrološki institut National Bureau of Standards predložio je godine 1946. uvođenje jedinice aktivnosti

$$\text{rutherford} = \text{rd} = 10^6/\text{s},$$

dakle milijun raspada u sekundi. Na taj korak Amerikance je uglavnom potakla činjenica što je tadašnja jedinica curie (C) bila definirana u odnosu na raspadanje *radija*, tj. slično definiciji koju je ICRU objavila godine 1956. (vidi odlomak 2.3.1). Stoga se ona na druge rodove radioaktivnih raspada (vidi odlomak 1.2.1) mogla primjenjivati samo preko zakona radioaktivne ravnoteže (1.2-5).

Kompetentne međunarodne stručne organizacije (Joint Commission on Radioactivity of the International Unions of Pure and Applied Physics and Chemistry, 1951) nisu prihvatile američki prijedlog, već su predložile definiciju koju smo naveli u odlomku 2.3.1 (ICRU 1956): »Curie je jedinica radioaktivnosti definirana kao količina nekog radioaktivnog nuklida u kojem broj raspada iznosi $3{,}700 \cdot 10^{10}$ u sekundi.« Zatim je godine 1964. Generalna konferencija za mjere i utege korjenito promijenila tu definiciju i objavila novu koju smo naveli na početku odlomka 2.3.1 i koja je danas na snazi. Ovdje smo jedinicu rutherford = 10^6 $[A]_M$ = = 10^6/s naveli zato što su je u vrijeme predlaganja mnogi autori prihvatili, pa je i danas možemo zateći u starijoj literaturi.

Godine 1929. uveo je *St. Meyer* jedinicu radioaktivnosti milistat (kratica: mSt). To je u stvari umnožak *Mache*ove jedinice specifične volumne aktivnosti (koncentracije) A/V »mache« (vidi odlomak 2.3.4) i jedinice volumena litar:

$$\text{milistat} = \text{mSt} = \text{mache} \times \text{litar} = 3{,}64 \cdot 10^{-10}\ \text{Ci}.$$

Praktički se danas jedinica milistat upotrebljava još jedino u balneologiji.

2.3.4. Jedinice specifične aktivnosti eman i mache. Volumnu specifičnu aktivnost A/V (vidi odlomak 1.2.4) balneolozi mjere od godine 1921. jedinicom

$$\text{eman} = 10^{-10}\,\frac{\text{curie}}{\text{litar}} = 10^{-10}\,\frac{\text{Ci}}{\text{l}}.$$

Njome mjere radiološke koncentracije prirodnih izvora vode, plinova, lječilišnih kupki, sadržaja radona u atmosferi itd.

Godine 1912. *H. Mache* i *L. Flamm* uveli su prvu mjernu jedinicu specifične aktivnosti A/V (koncentracije). Ta jedinica, koja je kasnije prozvana »mache« ili »Macheova jedinica«, odnosi se na sadržaj radona u jednom litru vode ili plina (litar = l = dm^3 = kubni decimetar). Jedinica mache odgovara prema originalnoj definiciji onolikoj količini radona (Rn) koja sama, bez svojih produkata raspadanja, može pri potpunom iskorištenju svog alfa-zračenja ionizacijom održavati struju zasićenja $3{,}336 \cdot 10^{-13}$ A ($= 10^{-3}\,[I]_e$, gdje je $[I]_e$ tzv. CGSE jedinica jakosti električne struje; vidi odsječak E.4.1). Budući da pod navedenim uvjetima aktivnosti radona 1 Ci odgovara jakost struje 0,92 miliampera, to vrijedi odnos

$$\text{mache} = 3{,}64\ \text{eman} = 3{,}64 \cdot 10^{-10}\ \text{Ci/l}.$$

Dvostrane odnose među nekim jedinicama volumne specifične aktivnosti sadrži tablica H-5.

Tablica **H-5**

Dvostrani odnosi među jedinicama volumne specifične aktivnosti (koncentracije)

Jedinica		Kratica	$\frac{1}{s\,m^3}$	$\frac{Ci}{m^3}$	$\frac{\mu Ci}{dm^3}$	eman	mache
raspad u sekundi po kubnom metru	=	$\frac{1}{s\,m^3}$	1	$2{,}7027 \cdot 10^{-11}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-8}$	$2{,}7027 \cdot 10^{-4}$	$7{,}425 \cdot 10^{-5}$
curie po kubnom metru	=	$\frac{Ci}{m^3}$	$3{,}7 \cdot 10^{10}$	1	10^{3}	10^{7}	$2{,}7478 \cdot 10^{6}$
mikrocurie po kubnom decimetru	=	$\frac{\mu Ci}{dm^3}$	$3{,}7 \cdot 10^{7}$	10^{-3}	1	10^{4}	$2{,}7478 \cdot 10^{3}$
eman	=	—	$3{,}7 \cdot 10^{3}$	10^{-7}	10^{-4}	1	$2{,}7478 \cdot 10^{-1}$
mache	=	—	$1{,}3468 \cdot 10^{4}$	$3{,}64 \cdot 10^{-7}$	$3{,}64 \cdot 10^{-4}$	3,64	1

Primjer. U inhalatoriju nekog lječilišta koncentracija (volumna specifična radioaktivnost) radona iznosi $A/V = 50$ mache, dok je volumen prostorije $V = 200\ \mathrm{m^3}$. Izračunajmo kolika je masa radija koji se u prostoriji nalazi u radioaktivnoj ravnoteži s radonom! Iz tablice H-5 razabiremo da je mache $= 3{,}64 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Ci/m^3}$. Prema tome je aktivnost radona

$$A = \frac{A}{V} V = 50 \cdot 3{,}64 \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Ci}}{\mathrm{m^3}} \cdot 200\ \mathrm{m^3} = 3{,}64 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Ci}.$$

Masu m radija možemo utvrditi zaključivanjem. U primjeru na kraju odlomka 2.3.2 ustanovili smo da aktivnost 1 grama radija iznosi 1 Ci ($A/m = 1$ Ci/g). Budući da je u našem slučaju aktivnost $A = 3{,}64 \cdot 10^{-3}$ Ci, tome odgovara masa radija $m = A \cdot \mathrm{g/Ci} = 3{,}64 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{Ci} \cdot \mathrm{g/Ci} = 3{,}64 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g} = 3{,}64$ miligrama.

2.4. Vansistemske jedinice ekspozicije (ekspozicijske doze) i snage ekspozicije

2.4.1. Jedinica ekspozicije röntgen (kratica: r). U odlomku 1.6.1 naveli smo *današnju* definiciju veličine »ekspozicija« $X = \Delta Q/\Delta m$ i naglasili da je stariji naziv te veličine »ekspozicijska doza zračenja«. U istom smo odlomku napisali da je jedinica SI tako definirane ekspozicije $[X]_{\mathrm{M}} = \mathrm{coulomb/kilogram} = \mathrm{C/kg}$, a u odlomku 2.2.4 smo citirali definiciju jedinice ekspozicije SI. Upotrebu jedinice ekspozicije SI $[X]_{\mathrm{M}} = \mathrm{C/kg}$ preporučila je godine 1962. i Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja (International Commission on Radiological Units and Measurements, ICRU). Komisija je tom prilikom raspravljala i o tome da li treba primjenu specijalnih jedinica (röntgen, rad, curie) proširiti i na druge istorodne veličine (vidi tablicu H-1) ili ih treba posve odbaciti. Konstatirano je da primjena specijalnih radioloških jedinica ili čak uvođenje novih specijalnih jedinica u dozimetriju nisu poželjni, ali da komisija priznaje postojeće specijalne (vansistemske) jedinice. Pri tom ICRU preporučuje da se te specijalne jedinice primjenjuju ovako:

curie (Ci) — samo za veličinu »aktivnost«,

rad — samo za veličinu »doza zračenja« (»apsorbirana doza zračenja«; vidi odlomak 1.3.2),

röntgen — samo za veličinu »ekspozicija« (»ekspozicijska doza zračenja«; vidi odlomak 1.6.1).

U ovom odlomku zadržat ćemo se na vansistemskoj jedinici veličine ekspozicija X röntgen = r, za koju smo u odlomku 2.2.4 naveli da se ovako odnosi prema jedinici SI C/kg:

$$\mathrm{r} = \mathrm{röntgen} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C/kg}. \qquad (2.4\text{-}1)$$

Odatle se vidi da je *danas* röntgen nedekadski višekratnik jedinice ekspozicije SI C/kg. Prema tome bismo röntgen mogli jednostavno definirati ovako: »Jedinica ekspozicije röntgen jednaka je $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C/kg«.

Još nedavno bila je jedinica röntgen definirana posve drukčije, u skladu s prijašnjim shvaćanjem što se razumijeva pod veličinom »ekspozicija« (»ekspozicijska doza zračenja«). Godine 1928. Međunarodna komisija za jedinicu rendgenskog zračenja definirala je u Stockholmu röntgen ovako:

> Međunarodna jedinica rendgenskog zračenja predstavljena je onom količinom rendgenskog zračenja koja pri potpunom iskorištenju sekundarnih elektrona i pri eliminaciji rubnih djelovanja u ionizacijskoj komori u jednom kubnom centimetru atmosferskog zraka pri temperaturi

0°C i tlaku 76 centimetara žive stvara takvu vodljivost da naboj pri struji zasićenja iznosi jednu elektrostatsku jedinicu. Međunarodna jedinica rengdenskog zračenja naziva se »röntgen«, a kratica joj je »r«.

Nakon niza kritičkih razmatranja ICRU je godine 1953. u Københavenu uvela novu definiciju (navodimo i originalni engleski tekst):

Röntgen je onolika količina rendgenskog ili gama-zračenja da s njom povezana korpuskularna emisija proizvede u zraku mase 0,001 293 grama toliko iona da oni nose elektrike svakog predznaka u iznosu jedne elektrostatske jedinice.

The roentgen shall be the quantity of X- or γ-radiation such that the associated corpuscular emission per 0,001 293 gram of air produces, in air, ions carrying 1 electrostatic unit of quantity of electricity of either sign.

U definiciji se spominje masa zraka 1,293 miligrama. To je u stvari masa 1 kubnog centimetra suhog atmosferskog zraka pri normiranom stanju (0 °C, 760 mm Hg).

Budući da jedna elektrostatska (CGSE) jedinica elektrike $[Q]_e$ predstavlja $3{,}3356 \cdot 10^{-10}$ jedinica SI coulomb = C (vidi tablicu **40** u prilogu knjige), to je prema gornjoj definiciji vrijedila jednadžba

$$\text{röntgen} = \text{r} \mathrel{\widehat{=}} \frac{[Q]_e}{1{,}293\ \text{mg(z)}} = \frac{3{,}3356 \cdot 10^{-10}\,\text{C}}{1{,}293 \cdot 10^{-6}\,\text{kg(z)}} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{C}}{\text{kg(z)}}.$$

Ovdje smo u zagradi uz jedinice mase miligram i kilogram stavili slovo z da bismo time naglasili da je riječ o *zraku* (pod navedenim uvjetima). Osim toga, upotrijebili smo znak $\mathrel{\widehat{=}}$, što znači *odgovara* (vidi npr. odlomak A.2.5), dakle r $\mathrel{\widehat{=}}$ (odgovara) $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C/kg(z). Iz teksta definicija od 1928. i 1953. vidi se naime da röntgen nije predstavljao jedinicu veličine Q/m, pa se dakle *nije* mogla postaviti *jednakost* $\text{r} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C/kg.

Možemo se upitati: ako röntgen (1928, 1953) nije predstavljao jedinicu veličine Q/m, koju je onda veličinu predstavljao? Odgovor nam može dati samo tekst definicije. Onaj od 1953. navodi da je to »rendgensko ili gama-zračenje«! Naravno da to nije u redu, jer fizikalna veličina je »atribut, čovjekova predodžba o prirodnoj pojavi«, kako smo naveli na početku knjige u odsječku A.1.2. Zbog toga je ICRU godine 1962. definirala veličinu ekspozicija $X = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}m$ kao jedan od atributa rendgenskog i gama-zračenja, te za tu veličinu uz jedinicu SI $[X]_M = \text{C/kg}$ prihvatila i vansistemsku jedinicu $\text{r} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C/kg (znak jednakosti!). Korisno je još jednom naglasiti da se jedinica röntgen = r danas upotrebljava samo za mjerenje ekspozicije *rendgenskog i gama*-zračenja.

2.4.2. Višekratnici jedinice röntgen. Na jedinicu veličine »ekspozicija« X (»ekspozicijska doza zračenja«) vrlo se često primjenjuju decimalni višekratnici (vidi odsječak A.2.4 i tablicu A-1), a naročito decimalni višekratnici $\text{m} = \text{mili} = 10^{-3}$ i $\mu = \text{mikro} = 10^{-6}$, dakle

$$\text{miliröntgen} = \text{mr} = 10^{-3}\,\text{r}; \quad \text{r} = 10^{3}\,\text{mr},$$

$$\text{mikroröntgen} = \mu\text{r} = 10^{-6}\,\text{r}; \quad \text{r} = 10^{6}\,\mu\text{r}.$$

Vezu između mr i μr lako uspostavljamo računanjem $\text{mr}/\mu\text{r} = 10^{-3}\,\text{r}/(10^{-6}\,\text{r}) = 10^{3}$, dakle

$$\text{mr} = 10^{3}\,\mu\text{r}; \quad \mu\text{r} = 10^{-3}\,\text{mr}.$$

Posve je prirodno da autori primjenjuju decimalne višekratnike i na jedinicu ekspozicije SI. Budući da je ta jedinica coulomb/kg = C/kg (vidi odlomak 2.2.4), decimalni višekratnik se primjenjuje na jedinicu elektrike coulomb = C. Tako imamo, na primjer,

$$\text{mC/kg} = 10^{-3}\ \text{C/kg}, \quad \mu\text{C/kg} = 10^{-6}\ \text{C/kg} \quad \text{itd.}$$

Dvostrane odnose među svim nabrojenim i još nekim drugim jedinicama ekspozicije sadrži tablica H-6.

Primjer. Izračunajmo koliko miliröntgena (mr) sadrži decimalni višekratnik jedinice SI mikrocoulomb po kilogramu (μC/kg)! Budući da je $\text{mr} = 10^{-3}\ \text{r}$, a $\mu\text{C/kg} = 10^{-6}\ \text{C/kg}$, lako uz pomoć jednadžbe (2.4-1) $\text{r} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{C/kg}$ izračunamo

$$\frac{\mu\text{C}}{\text{kg}} = 10^{-6}\,\frac{\text{C}}{\text{kg}} = 10^{-6}\,\frac{\text{r}}{2{,}58 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^{-6} \cdot 10^{3}\ \text{mr}}{2{,}58 \cdot 10^{-4}} = 3{,}876\ \text{mr}.$$

Ovaj odnos imamo zabilježen i u tablici H-6. Obrnuto vrijedi $\text{mr} = 2{,}58 \cdot 10^{-1}\ \mu\text{C/kg} = 0{,}258\ \mu\text{C/kg}$.

2.4.3. Jedinice snage ekspozicije. U primjeni Međunarodnog sistema jedinica (SI) veličina »snaga ekspozicije« $\dot{X} = dX/dt$ (stariji naziv je »snaga ekspozicijske doze«) mjeri se jedinicom amper/kilogram = A/kg (vidi odlomak 2.2.4). Na tu jedinicu primjenjuju se mnogi decimalni višekratnici, na primjer

$$\text{m} = \text{mili} = 10^{-3},\ \mu = \text{mikro} = 10^{-6},\ \text{n} = \text{nano} = 10^{-9},\ \text{p} = \text{piko} = 10^{-12}.$$

Na taj način u literaturi se u novije vrijeme pojavljuju izvedenice jedinice SI A/kg:

$$\text{mA/kg} = 10^{-3}\ \text{A/kg}, \quad \mu\text{A/kg} = 10^{-6}\ \text{A/kg} \ \text{itd.}$$

S druge strane većina dosadašnje stručne literature objavljena je uz upotrebu jedinice röntgen u satu, röntgen u minuti, röntgen u sekundi. Između ovih triju jedinica vladaju dvostrani odnosi:

Jedinica	Kratica	r/s	r/min	r/h
röntgen u sekundi =	r/s	1	$6 \cdot 10$	$3{,}6 \cdot 10^{3}$
röntgen u minuti =	r/min	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1	$6 \cdot 10$
röntgen u satu =	r/h	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1

Dvostrane odnose između jedinica snage ekspozicije osnovanih na jedinici SI A/kg s jedne strane, a na jedinici röntgen/jedinica vremena s druge strane, sadrži tablica H-7.

Primjer. Izračunajmo koliko μA/kg sadrži jedinica snage ekspozicije röntgen u satu (r/h)! Do rezultata ćemo doći tako da međusobno podijelimo ove dvije jedinice. Najprije stavljamo $\mu\text{A/kg} = 10^{-6}\ \text{A/kg}$ i $\text{r/h} = \text{r}/(3600\ \text{s})$. Računanjem slijedi

$$\frac{\mu\text{A/kg}}{\text{r/h}} = \frac{10^{-6}\ \text{A/kg}}{\text{r}/(3600\ \text{s})} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{As/kg}}{2{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{C/kg}} = 13{,}95.$$

Pri računanju uzeli smo u obzir da je $\text{h} = 3600\ \text{s}$, $\text{r} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{C/kg}$ (vidi jednadžbu 2.4-1) i coulomb (C) = amper (A) × sekunda (s).

Tablica **H-6**

Dvostrani odnosi među jedinicama ekspozicije (ekspozicijske doze zračenja)

Jedinica		Kratica	$\frac{C}{kg}$	$\frac{mC}{kg}$	$\frac{\mu C}{kg}$	$\frac{nC}{kg}$	$\frac{pC}{g}$	r	mr	μr
coulomb po kilogramu	=	$\frac{C}{kg}$	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{9}	$3{,}876 \cdot 10^{3}$	$3{,}876 \cdot 10^{6}$	$3{,}876 \cdot 10^{9}$
milicoulomb po kilogramu	=	$\frac{mC}{kg}$	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{6}	3,876	$3{,}876 \cdot 10^{3}$	$3{,}876 \cdot 10^{6}$
mikrocoulomb po kilogramu	=	$\frac{\mu C}{kg}$	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{3}	$3{,}876 \cdot 10^{-3}$	3,876	$3{,}876 \cdot 10^{3}$
nanocoulomb po kilogramu	=	$\frac{nC}{kg}$	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	1	$3{,}876 \cdot 10^{-6}$	$3{,}876 \cdot 10^{-3}$	3,876
pikocoulomb po gramu	=	$\frac{pC}{g}$	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	1	$3{,}876 \cdot 10^{-6}$	$3{,}876 \cdot 10^{-3}$	3,876
röntgen	=	r	$2{,}58 \cdot 10^{-4}$	$2{,}58 \cdot 10^{-1}$	$2{,}58 \cdot 10^{2}$	$2{,}58 \cdot 10^{5}$	$2{,}58 \cdot 10^{5}$	1	10^{3}	10^{6}
miliröntgen	=	mr	$2{,}58 \cdot 10^{-7}$	$2{,}58 \cdot 10^{-4}$	$2{,}58 \cdot 10^{-1}$	$2{,}58 \cdot 10^{2}$	$2{,}58 \cdot 10^{2}$	10^{-3}	1	10^{3}
mikroröntgen	=	μr	$2{,}58 \cdot 10^{-10}$	$2{,}58 \cdot 10^{-7}$	$2{,}58 \cdot 10^{-4}$	$2{,}58 \cdot 10^{-1}$	$2{,}58 \cdot 10^{-1}$	10^{-6}	10^{-3}	1

Tablica **H-7**

Dvostrani odnosi među jedinicama snage ekspozicije (snage ekspozicijske doze zračenja)

Jedinica		Kratica	$\frac{A}{kg}$	$\frac{mA}{kg}$	$\frac{\mu A}{kg}$	$\frac{nA}{kg}$	$\frac{pA}{g}$	$\frac{r}{h}$	$\frac{mr}{min}$	$\frac{\mu r}{s}$
amper po kilogramu	=	$\frac{A}{kg}$	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{9}	$1{,}395 \cdot 10^{7}$	$2{,}326 \cdot 10^{8}$	$3{,}876 \cdot 10^{9}$
miliamper po kilogramu	=	$\frac{mA}{kg}$	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{6}	$1{,}395 \cdot 10^{4}$	$2{,}326 \cdot 10^{5}$	$3{,}876 \cdot 10^{6}$
mikroamper po kilogramu	=	$\frac{\mu A}{kg}$	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{3}	$1{,}395 \cdot 10$	$2{,}326 \cdot 10^{2}$	$3{,}876 \cdot 10^{3}$
nanoamper po kilogramu	=	$\frac{nA}{kg}$	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	1	$1{,}395 \cdot 10^{-2}$	$2{,}326 \cdot 10^{-1}$	3,876
pikoamper po gramu	=	$\frac{pA}{g}$	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	1	$1{,}395 \cdot 10^{-2}$	$2{,}326 \cdot 10^{-1}$	3,876
röntgen u satu	=	$\frac{r}{h}$	$7{,}167 \cdot 10^{-8}$	$7{,}167 \cdot 10^{-5}$	$7{,}167 \cdot 10^{-2}$	$7{,}167 \cdot 10$	$7{,}167 \cdot 10$	1	$1{,}667 \cdot 10$	$2{,}778 \cdot 10^{2}$
miliröntgen u minuti	=	$\frac{mr}{min}$	$4{,}3 \cdot 10^{-9}$	$4{,}3 \cdot 10^{-6}$	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	4,3	4,3	$6 \cdot 10^{-2}$	1	$1{,}667 \cdot 10$
mikroröntgen u sekundi	=	$\frac{\mu r}{s}$	$2{,}58 \cdot 10^{-10}$	$2{,}58 \cdot 10^{-7}$	$2{,}58 \cdot 10^{-4}$	$2{,}58 \cdot 10^{-1}$	$2{,}58 \cdot 10^{-1}$	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-2}$	1

2.5. Fizikalni i biološki ekvivalenti röntgena

Istraživanje djelovanja ionizirajućih zračenja na žive organizme prisililo je biologe i liječnike da sebi stvore uporišta pomoću kojih mogu uspoređivati biološke posljedice djelovanja zračenja. U ovom odsječku letimično ćemo nabrojiti samo neke takve pojmove. Pri tom se nećemo upuštati u dokumentirana obrazlaganja, jer to područje (engl. health physics) u cijelosti izlazi iz okvira ove knjige.

2.5.1. Fizikalni ekvivalent röntgena (rep). Vansistemska jedinica veličine ekspozicija $X = \Delta Q/\Delta m$ röntgen (vidi odlomak 1.6.1) iznosi $\mathrm{r} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C/kg. Pri tom se kilogram odnosi na suhi atmosferski *zrak* u normiranim uvjetima. Budući da elementarni naboj iznosi $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, to količini elektrike $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C odgovara $2{,}58 \cdot 10^{-4}/(1{,}6 \cdot 10^{-19}) = 1{,}61 \cdot 10^{15}$ istoimeno nabijenih elementarnih čestica. Stoga možemo reći da jedan röntgen »odgovara« ($\triangleq$) broju $1{,}61 \cdot 10^{15}$ ionskih parova u jednom kilogramu zraka. Taj opis bilježimo u obliku

$$\mathrm{r} \triangleq 1{,}61 \cdot 10^{15} \frac{\mathrm{par}}{\mathrm{kg}}.$$

Budući da jedan kubni metar zraka ima masu 1,293 kg, to možemo reći da 1 röntgen »odgovara« $1{,}61 \cdot 10^{15} \cdot 1{,}293 = 2{,}08 \cdot 10^{15}$ ionskih parova po kubnom metru zraka. Tu tvrdnju opisujemo ovako

$$\mathrm{r} \triangleq 2{,}08 \cdot 10^{15} \frac{\mathrm{par}}{\mathrm{m}^3}.$$

Djelovanje jednog röntgena možemo opisati i energijom zračenja W koja je potrebna za ionizaciju. Ta energija iznosi $W = Nw$, gdje je N broj ionskih parova po jedinici mase (ili volumena) zraka, a w energija potrebna za stvaranje jednog ionskog para, tj. za odjeljivanje jednog elektrona od molekula u zraku. Srednja vrijednost energije w potrebne za stvaranje jednog ionskog para u zraku kreće se između $5{,}28 \cdot 10^{-18}$ J i $5{,}6 \cdot 10^{-18}$ J (33...35 eV). Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja (ICRU) preporučila je godine 1956. da se za rendgensko i gama-zračenje (energija kvanta iznad 20 keV) upotrebljava vrijednost $w = 5{,}44 \cdot 10^{-18}$ J (= 34 eV). Prije te preporuke obično se računalo sa $5{,}2 \cdot 10^{-18}$ J (32,5 eV).

Budući da 1 röntgen stvara, kako smo izračunali, $N = 1{,}61 \cdot 10^{15}$ ionskih parova po kilogramu zraka, lako ćemo izračunati da odgovarajuća energija W iznosi

$$W = Nw = 1{,}61 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}44 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J/kg} = 8{,}77 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J/kg}.$$

Ovaj rezultat obično se zapisuje u obliku

$$\mathrm{r} \triangleq 8{,}77 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J/kg} = 8{,}77\ \mathrm{mJ/kg} = 87{,}7\ \mathrm{erg/g},$$

jer je $\mathrm{erg} = 10^{-7}$ J i kg = 1000 grama. Riječima se gornja jednadžba obično opisuje ovako: jedan kilogram zraka u normiranim uvjetima apsorbirat će 8,77 mJ energije rendgenskog ili gama-zračenja, ako ekspozicija iznosi 1 röntgen.

Svi navedeni odnosi vrijede za *zrak*. Biolozi, radiolozi, kancerolozi i drugi bave se međutim *tkivom*, koje ponešto drukčije apsorbira energiju prilikom ozračivanja ionizirajućim zračenjima. Meko tkivo sastoji se približno od 73% kisika, 12% ugljika, 10% vodika i 4% dušika (maseni udjeli). Takvo tkivo apsorbirat će po jedinici svoje mase energiju

$$8{,}77 \frac{\mathrm{mJ}}{\mathrm{kg}} \frac{\Sigma(fZ/A)_{\mathrm{tkivo}}}{\Sigma(fZ/A)_{\mathrm{zrak}}},$$

gdje slovo f predstavlja masene udjele elemenata od kojih se sastoji tkivo ili zrak, Z atomski broj, te A relativnu atomsku masu. Pri tom je pretpostavljeno da je specifična apsorbirana energija (W/m) razmjerna gustoći elektrona, tj. broju elektrona u jedinici mase. Ako u navedenu jednadžbu uvrstimo odgovarajuće podatke, dobivamo

$$8{,}77\,\frac{\text{mJ}}{\text{kg}} \cdot 1{,}11 = 9{,}8\,\frac{\text{mJ}}{\text{kg}} = 9{,}8\,\frac{\mu\text{J}}{\text{g}} = 98\,\frac{\text{erg}}{\text{g}},$$

tj. *tkivo* apsorbira 9,8 μJ/g. U starijoj literaturi nalazimo podatak 9,3 μJ/g = 93 erg/g, što odgovara starijoj vrijednosti $w = 32{,}5$ V. U skladu s takvim premišljanjem biolozi su uveli jedinicu

fizikalni ekvivalent röntgena = rep.

Kratica rep dolazi od engleskog naziva **r**oentgen **e**quivalent **p**hysical. Ta jedinica bila je definirana kao ona količina (doza) bilo koje vrste ionizirajućeg zračenja koja odgovara apsorbiranoj energiji 9,8 μJ po gramu tkiva (9,8 μJ/g = 9,8 mJ/kg = 98 erg/g).

U novije vrijeme jedinicu rep nadomjestila je jedinica doze zračenja

rad = 10 mJ/kg = 10 μJ/g = 100 erg/g,

koju smo spomenuli u odlomku 2.2.3. Međunarodna komisija za radiološke jedinice i mjerenja preporučila je godine 1962. da se jedinica rad isključivo upotrebljava za mjerenje doze zračenja (vidi odlomak 2.4.1). Drugim riječima: Komisija je preporučila da se rep nadomjesti sa rad (rep = 0,98 rad).

2.5.2. Relativna biološka djelotvornost RBE. Postoji nekoliko definicija veličine RBE (to je kratica od engleskog naziva **r**elative **b**iological **e**ffectiveness). *K. Z. Morgan*, direktor Health Physics Division u institutu Oak Ridge Laboratory, USA, smatra da je najbolja definicija

$$\text{RBE} = \frac{\text{doza gama-zračenja iz izvora } {}^{60}\text{Co koja proizvodi biološke promjene}}{\text{doza uspoređivanog zračenja koja proizvodi iste biološke promjene}}$$

Pri tom se, dakako, obje doze zračenja mjere istom jedinicom (rad, μJ/g, J/kg itd.).

2.5.3. Jedinica rem. U vezi sa RBE definirana je »RBE doza« (engleski RBE dose ili relative biological effective dose) ovako: »RBE doza je doza zračenja, izražena jedinicom rad, pomnožena sa RBE«. Za izražavanje RBE doze upotrebljava se jedinica rem, što je skraćenica engleskog naziva

roentgen **e**quivalent **m**an = rem.

Pod jedinicom rem razumijeva se ona doza zračenja (izražena jedinicom rad) bilo kakvog ionizirajućeg zračenja koja pod jednakim uvjetima proizvodi isto biološko djelovanje kao i 1 rad rendgenskog ili gama-zračenja. Već citirani *K. Z. Morgan* navodi ovu vezu između rem i rad:

broj jedinica rem = RBE × broj jedinica rad.

Jedinica rem naročito je od koristi biolozima pri proučavanju utjecaja *mješovitih zračenja* na žive organizme.

Upotrijebljena literatura

Abianc V. H.: Teorija gazovih turbin reaktivnih dvigateljej, 2. izdanje, Mašinostrojenije, Moskva 1965

Ačerkan N. S.: Spravočnik mašinostroitelja, tom 2, Mašgiz, Moskva 1960

Agaljeckij P. N., O sozdanij otečestvenih majatnikovih astronomičeskih časov, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 8, str. 3

Aglincev K. K., Izmjerenija ionizirajuščih izljučenij (Obzor metodov), EIKA (Enciklopedija izmjerenij, kontrolja, avtomatizacij), No 4 (60-2), 1965, str. 17

Albert von H. J.: Mass und Gewicht, Akademie Verlag, Berlin 1957

Aleksandrov V. L.: Tehničeskaja gidromehanika, 3. izdanje, Ogiz, Moskva 1946

Aleksjejev A. E., O novoj sisteme jedinic izmjerenija elektromagnitnih veličin, Električestvo 1949, No 2, str. 84

Aljtšulj A. D., Kiseljev P. G.: Gidravlika i aerodinamika, Izdateljstvo literaturi po strojiteljstvu, Moskva 1965

Allan D. W., Statistics of Atomic Frequency Standards, Proceedings IEEE *54* (1966), No 2, str. 221

Allisy A., Contribution à la Mesure de l'Exposition Produite par les Photons Émis par le ^{60}Co, Metrologia *3* (1967), No 2, str. 41

Altschuler H. M., The Role of the NBS Standards Laboratory, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 778

Altschuler H. M., The Conference on Precision Electromagnetic Measurements, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 783

Andrew E. R.: Nuclear Magnetic Resonance, University Press, Cambridge 1955

Antonova I. A. i dr.: Praktikum po jadernoj fizike, Moskovskij universitet, Moskva 1965

Appleyard A., Lineweaver F. P. Jr., The McIlroy Fluid Analyzer in Water Works Practice, Journal of the American Water Works Association *49* (1957), str. 15

Arndt W.: Praktische Lichttechnik, Roth & Co, Berlin 1938

Arutjunov V. O., Boguslavskij M. G., Glavnij metrologičeskij centr SSSR, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 9, str. 11

Arutjunov V. O., Balašov M. E., VNIIM im. D. I. Mendjeljejeva i pavjeročnaja dejateljnost (k 75-letiju sozdanija instituta), Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 11, str. 3

Arutjunov V. O., i dr., Lenjingradskij zavod „Etalon" — eksperimentaljnaja baza VNIIM, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 11, str. 6

Astin A. V., Measurement Accuracy at Radio Frequencies, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 741

Avčin F., Ob uvedbi novih enot v elektrotehniki, Elektrotehniški vestnik *16* (1948), str. 1, 73, 169

Avčin F., Deveta generalna konferenca za mere in uteži, Elektrotehniški vestnik *16* (1948), str. 243

Avčin F., Važni zaključci na zasjedanju Međunarodne elektrotehničke komisije (CEI) u mjesecu srpnju 1950. u Parizu, Elektrotehnički vjesnik *19* (1951), str. 191, 257

Avčin F., L'Unité à cohérence dimensionnelle de la température, Revue Scientifique *90* (1952), str. 235

Avčin F., Zasedanje mednarodne elektrotehniške komisije 3. do 13. septembra 1952 v Scheveningenu pri Haagu, Nizozemska, Elektrotehniški vestnik *20* (1952), str. 318

Avčin F.: Osnove metrologije, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1952

Avčin F., O vpeljavi Giorgijevega merskega sistema, Obzornik za matematiko in fiziko *2* (1952), str. 50

Avčin F., Ali je Giorgijev sistem enot tro- ali štiridimenzionalen? Elektrotehniški vestnik *22* (1954), str. 209

Avčin F., Note concernant la définition de l'Ampère absolu, 1954

Avčin F., Deseta generalna konferenca za mere in uteži, Elektrotehniški vestnik *23* (1955), str. 65

Avčin F., K novi definiciji enote časa, Elektrotehniški vestnik *23* (1955), str. 115

Avčin F., Veličina, oersted in načini racionalizacije jakosti magnetskega polja, Elektrotehniški vestnik *25* (1957), str. 2

Avčin F., Najpreciznejša ura, Elektrotehniški vestnik *25* (1957), str. 294

Avčin F., Some Multi-horned Dilemas in the Magnetic Field, AIEE, Paper No. 59—1187, 1959

Avčin F., Predlog za ustanovitev Zveznega metrološkega zavoda FLRJ, Elektrotehniški vestnik *28* (1960), str. 159

Avčin F., Mlakar F., Strojnik A.: Splošna električna in magnetna merjenja, 2. izdanje, Univerzitetna založba, Ljubljana 1961

Avčin F., Metrologija v merilni tehniki, Zbornik radova I jugoslavenskog simpozija o električnim mjerenjima i mjernoj opremi (Ljubljana, 1961), str. 7

Avčin F., Metrologija v merilni tehniki, Elektrotehniški vestnik *30* (1962/63), str. 90

Babić S., Kemijska unifikacija, »Vjesnik« (Zagreb), 22. 1. 1967.

Baerg A. P., Measurement of Radioactive Disintegration Rate by the Coincidence Method, Metrologia *2* (1966), No 1, str. 23

Baerg A. P., Absolute Measurement of Radioactivity, Metrologia *3* (1967), No 4, str. 105

Baird K. M., The Role of Interferometry in Long Distance Measurement, Metrologia *4* (1968), No 3, str. 135

Baird R. C., RF Measurements of the Speed of Light, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 1032

Balon Z. P., Izmjerenija ekspozicionnih doz i intensivnostjej rentgenovoskovo i gamma--izljučenij, EIKA, No 4 (611-1), 1965, str. 23

Barber C. R., Horsford A., Differences between the Thermodinamic scale and the International Practical scale of Temperature from 0 °C to −183 °C, Metrologia *1* (1965), str. 75

Barnes J. A., Atomic Timekeeping and the Statistics of Precision Signal Generators, Proceedings IEEE *54* (1966), No 2, str. 207

Barnes J. A., The Development of an International Atomic Time Scale, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 822

Baudyš M., Barevné souřadnice MKO, Elektrotechnicky Obzor *40* (1951), str. 5

Bazakuca V. A.: Meždunarodnaja sistema jedinic, Harkov 1963

Beatty R. W., The System of Electromagnetic Quantities at Frequencies Above 1 GHz, Metrologia *2* (1966), No 1, str. 46

Beck K., Friedrichs K. H., Erfahrungen mit dem elektrischen Analogierechner für die Wasserrohrnetz-Berechnung, Gas- und Wasserfach *99* (1958), str. 1

Becker R.: Theorie der Elektrizität I, 12—13. izdanje, Teubner, Leipzig 1944

Bedford R. E., Ma C. K., International Comparison of Measurements of Irradiance, Metrologia *4* (1968), No 3, str. 111

Bedford R. E., Preston-Thomas H., Derivation of the CCT-68 Reference Function of the International Practical Temperature Scale of 1968, Metrologia *5* (1969), No 2, str. 45

Bedjanič V., Iz zgodovine merilnih sistemov elektrotehnike, Elektrotehniški vestnik *10* (1942), str. 1, 33

Beehler R. i dr., An Intercomparison of Atomic Standards, Proceedings IEEE *54* (1966), No 2, str. 301

Beehler R. E., A Historical Review of Atomic Frequency Standards, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 792

Beehler R. E. i dr., Cesium Beam Atomic Time and Frequency Standards, Metrologia *1* (1965), str. 114

Bego V., Referat o metrološkim mjerenjima na III simpozijumu o električnim mjerenjima i mjernoj opremi (osobno saopćenje), Ljubljana 1966

Bego V.: Mjerna tehnika (Pogreške električnih mjerenja), Sveučilište, Zagreb 1966

Begunov B. N.: Geometričeskaja optika, Izdateljstvo Moskovskovo Universiteta, Moskva 1966

Beljajev N. M.: Soprotivljenije materijalov, 11. izdanje, GITTL, Moskva 1958

Beljers H. G., Snoek J. L., Gyromagnetische Erscheinungen bei Ferriten, Philips' tech. Rundschau *11* (1950), str. 317

Bender P. L., Laser Measurements of Long Distances, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 1039

Berkeš B., Über eine Berechnungsmethode des magnetischen Feldes, Glasnik mat.-fiz. i astr., serija II, *7* (1952), str. 36

Berry R. J., Platinum Resistance Thermometry in the Range 630—900 °C, Metrologia *2* (1966), str. 80

Berry R. J., Platinum Resistance Thermometry Below 10 °K, Metrologia *3* (1967), No 3, str. 53

Betts D. B., Gillham E. J., An International Comparison of Radiometric Scales, Metrologia *4* (1968), No 3, str. 101

Binko J.: Fyzikálni a technické veličiny, SNTL, Praha 1964

Birnbaum G., Frequency Stabilization of Gas Lasers, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 1015

Blažewski S.: Najważniejsze jednostki miar, PWT, Warszawa 1960

Blinova L. L., Etaloni i jedinici izmjerenij akustičeskih veličin, EIKA, No 1 (II M 50-2), 1962, str. 93

Boast W. B.: Illumination Engineering, 2. izdanje, McGraw-Hill Co, New York 1953

Bodea E., Cohérence dimensionelle entre unités theoretiques et pratiques, Bull. Schweiz. elektr. Ver. *38* (1947), str. 217

Bodea E.: Giorgis rationales MKS-Massystem, 2. izdanje, Birkhäuser, Basel 1949

Boer J. de, Temperature as a Basic Physical Quantity, Metrologia *1* (1965), No 4, str. 158

Boer J. de, Short History of Prefixes, Metrologia *2* (1966), No 4, str. 127

Boncelj J., Jožef Stefan i njegovo djelovanje na području elektrotehnike, Elektrotehnički vjesnik *26* (1958), str. 41

Bonhoure A., La conservation des prototypes de masse, Mesures *27* (1962), str. 677

Bonhoure A., Le Kilogramme étalon, Mesures *29* (1964), str. 85

Bonhoure J., Terrien J., The New Standard Manobarometer of the Bureau International des Poids et Mesures, Metrologia *4* (1968), No 2, str. 59

Born M.: Einsteinova teorija relativnosti (preveo D. Blanuša), Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb 1948

Bošnjaković F.: Nauka o toplini I, 3. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1962

Bošnjaković F.: Nauka o toplini II, Tehnička knjiga, Zagreb 1950

Bouma P. J., Über den Begriff der Helligkeit im Zusammenhang mit Verdunklungsproblemen, Philips' technische Rundschau *6* (1941) str. 161

Bouma P. J.: Farbe und Farbwahrnehmung, Philips, Eindhoven 1951

Bourdoun G., Travaux métrologiques internationaux d'actualité dans le domaine de l'électricité, Metrologia *2* (1966), No 1, str. 32

Božić D., Problematika etalona napona sa Zenerovim diodama i usporedba s Westonovim elementima, referat na 4. simpoziju JUKEM, Beograd 1969

Bradshaw E., Rationalized M.K.S. Units in Electrical Engineering Education, Proc. I.E.E. *97* (1950), Part I, str. 252, 272

Braun S.: Elementarnije procesi v plazme gazovogo razrjada, Gosatomizdat, Moskva 1961

Brezinščak M., Racionalni i neracionalni oblik jednadžbi elektromagnetskog polja, Elektrotehničar *3* (1949), str. 186, 214

Brezinščak M., Iz povijesti mjernih sistema elektrotehnike, Elektrotehničar *3* (1949), str. 288

Brezinščak M., Diskusija u vezi s člancima V. Polhovskog o pitanju mjernih sistema elektrotehnike, Elektroprivreda *2* (1949), str. 512

Brezinščak M., Povodom jedne dvogodišnjice (Iz problematike mjernih sistema elektrotehnike), Elektrotehničar *4* (1950), str. 2, 63

Brezinščak M., Borba oko jedinica, Elektrotehničar *4* (1950), str. 94

Brezinščak M., *Uremović I.*, O prijedlogu termina i oznaka za fizikalne veličine, Elektrotehničar *4* (1950), str. 105

Brezinščak M., Još nešto iz problematike mjernih sistema elektrotehnike, Elektrotehničar *4* (1950), str. 134

Brezinščak M., Jedan izvod pravila koherencije razmjernosti, Elektrotehničar *4* (1950), str. 181

Brezinščak M., Problematika mjernih sistema nauke o toplini s obzirom na novouvedeni Giorgijev sistem jedinica, Elektrotehnički vjesnik *13* (1950), str. 177

Brezinščak M., Razmjernosna analiza, Elektrotehničar *4* (1950), str. 294

Brezinščak M., Veličinske i količinske jednadžbe, Elektrotehničar *5* (1951), str. 7

Brezinščak M.: Mjerni sistemi elektrotehnike, Tehnička knjiga, Beograd 1951

Brezinščak M., Nekoliko riječi u vezi s mehaničkim dijelom Giorgijeva sistema jedinica, Elektrotehnički vjesnik *19* (1951), str. 137

Brezinščak M., Dva kilograma, Strojarsko-tehnički vjesnik *6* (1951), str. 269

Brezinščak M., Pegel i dijagrami za određivanje pojačanja u neperima i decibelima, Radioamater *6* (1952), str. 32, 66, 92

Brezinščak M., Nesporazum v pojmih, Obzornik za matematiko in fiziko *2* (1952), str. 137

Brezinščak M., Sličnost dielektrika i feromagnetika, Elektrotehničar *6* (1952), str. 186

Brezinščak M., Racionalizacija u svjetlu veličinskih jednadžbi, Elektrotehnički vjesnik *21* (1953), str. 81

Brezinščak M., Rationalization in the Light of Quantity Equations, Physica *19* (1953), str. 599

Brezinščak M., O značajkama turbostrojeva, Tehnika (Mašinstvo i elektrotehnika) *10* (1953), str. ME 57

Brezinščak M., O svjetlosnom ekvivalentu, Elektrotehnički vjesnik *22* (1954), str. 7

Brezinščak M., O heterogenosti jedinica i koncepcija fotometrije, Prvo posvetovanje o razsvetljavi in ustanovitev Jugoslovanskega komiteja za razsvetljavo, Ljubljana 1955

Brezinščak M., Određivanje ekonomskog presjeka vodiča dalekovoda, Elektrotehničar *9* (1955), str. 113, 134

Brezinščak M., Računska prijenosna snaga dalekovoda, Elektroprivreda *8* (1955), str. 358

Brezinščak M., Definicija i realizacija ampera, Elektrotehničar *14* (1960), str. 33

Brezinščak M., Brzina elektromagnetskog polja, Elektrotehničar *14* (1960), str. 97

Brezinščak M., Najprecizniji standardi električkog otpora, Elektrotehničar *14* (1960), str. 129

Brezinščak M., Temperatura kao zavisna veličina i posljedice takvog shvaćanja, Tehnika (Mašinstvo) *15* (1960), str. M 263

Brezinščak M., Protonski rezonator kao pramjerilo jedinice jakosti električne struje, Automacija *1* (1960), str. 56, *2* (1961), str. 2

Brezinščak M., Veličine, enote in enačbe, Strojniški vestnik *7* (1961), str. 153

Brezinščak M.: Mjere i sistemi jedinica, Tehnička knjiga, Zagreb 1961

Brezinščak M., Fizikalne veličine i veličinske jednadžbe, Informacije Rade Končar 1961, str. 32

Brezinščak M., Protonski rezonator umjesto strujne vage kao pramjerilo jedinice jakosti električne struje, Zbornik radova I jugoslavenskog simpozijuma o električnim mjerenjima i mjernoj opremi, Ljubljana 1961, str. 31

Brezinščak M., Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi, Elektrotehnički vjesnik *29* (1961), str. 69, 133, 153

Brezinščak M., Nova definicija i realizacija metra, Automacija *2* (1962), str. 38

Brezinščak M., Proračun sastavljene mjerne pogreške, Avtomatika *3* (1962), str. 313

Brezinščak M., O mjernoj pogrešci i proračunu složene pogreške, Zbornik radova Jurema 1962, str. 57

Brezinščak M., Ozakonjeni međunarodni sistem mjernih jedinica i način njegove primjene, Zbornik radova Jurema 1963, knjiga I, str. 22

Brezinščak M., Obavezna primjena Međunarodnog sistema jedinica, Zbornik radova II jugoslavenskog simpozijuma o električnim mjerenjima i mjernoj opremi, Ljubljana 1963, str. I-41

Brezinščak M., O temperaturama i jedinicama temperatura, Tehnika *19* (1964), str. 1387

Brezinščak M., Međunarodna empirička temperaturna skala, Tehnika *22* (1967), str. 741

Brezinščak M., Mezinárodní praktická teplotní stupnice, Měrová technika *6* (1967), str. 49

Brezinščak M., Unifikacija temeljnih pojmova mjerne tehnike, Zbornik radova 4. simpozija JUKEM, Beograd 1969, knjiga 1, str. 7

Brezinščak M., Stanje vrhunske metrologije elektromagnetizma u svijetu i Jugoslaviji, Zbornik radova 4. simpozija JUKEM, Beograd 1969, knjiga 1, str. 21

Brezinščak M., Međunarodna empirička temperaturna skala 1968. Tehnika *24* (1969), No 11, str. 1745

Brezinščak M.: Veličiny a jednotky v technické praxi, Nakladatelství technické literatury, Praha 1970

Bridgman P. W.: Theorie der physikalischen Dimensionen, Teubner, Berlin 1932

Briggs G. H., Standard Resistors with Small Load Corrections, Metrologia *5* (1969), No 2, str. 61

Brkić Z., Služba tačnog vremena i promena geografske dužine, njeni radovi i izgledi za dalji razvoj, Publikacija 12 Astronomske opservatorije, str. 57, Beograd 1968

Brodskij A. D., Akustičeskije metodi izmjerenija temperatur, EIKA, No 2 (166-1), 1964, str. 23

Broglie L. de, A propos du nouveau décret sur les unités de mesure, Mesures et Controle industriel *25* (1960), str. 1139

Bronštejn I. N., Semendjajev K. A.: Matematički priručnik, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964

Brun Ed. A., Sur une nouvelle unité pratique de perméabilité, Mesures *27* (1962), str. 678

Brylinski E., Sur les systèmes d'unités électriques, Revue Générale de l'Électricité *57* (1948), str. 200

Burdun G. D., Sovremennoe sastojanije osuščestvlenija ishodnih jedinic izmerenija, Izmeriteljnaja tehnika 1963, No 1, str. 51, No 2, str. 60

Burdun G. D. i dr.: Meždunarodnaja sistema jedinic, Višaja škola, Moskva 1964

Burdun G. D., Mirovoje rasprostranjenije metričeskoj sistemi, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 9, str. 7

Busse E., International Festgelegte Begriffe für Kernforschung und Kerntechnik, Atomwirtschaft *8* (1963), str. 177

Butigan Z., Marić M. i Turajlić R., Merenje Zemljinog magnetskog polja metodama protonske precesije i optičkog pumpanja, Zbornik radova 4. simpozija JUKEM, Beograd 1969, knjiga 1, str. 149

Cambel A. B. Jennings B. H.: Gas Dynamics, McGraw-Hill, New York 1958

Campbell G. A., A System of »Definitive Units« Proposed for Universal Use, Science *61* (1925), str. 353

Campbell G. A., Three Superfluous Systems of Electromagnetic Units, Physics *3* (1932), str. 230

Campbell G. A., Shop Units for Universal Use, Transactions AIEE 1933, June (Reprint)

Campbell G. A., A Definitive System of Units, Bulletin of the National Research Council 1933, No 93, str. 48

Carić D. M.: Tehnička hidraulika, Građevinska knjiga, Beograd 1952

Carr L. H. A., The M.K.S. or Giorgi System of Units, Proceedings IEE *97* (1950), Part I, str. 235, 270

Carré P., Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures, Metrologia *2* (1966), No 1, str. 13

Chvátal J., Základní měrove jednotky, Elektrotechnicky Obzor *52* (1962), str. T 51

Chwolson O. D.: Lehrbuch der Physik I, Vieweg und Sohn, Braunschweig 1902

Ciddor P. E., Bruce C. F., Design and Performance of the 1-Metre Line-Standard Interferometer at the National Standards Laboratory, Sydney, Metrologia *3* (1967), No 4, str. 109

Clothier W. K., A Calculable Standard of Capacitance, Metrologia *1* (1965), str. 35

Clothier W. K., A Proposal for an Absolute Liquid Electrometer, Metrologia *1* (1965), No 4, str. 181; *2* (1966), No 2, str. 93

Cook A. H., The Absolute Determination of the Acceleration Due to Gravity, Metrologia *1* (1965), str. 84

Cook A. H., A New Determination of the Acceleration due to Gravity at the NPL, Metrologia *1* (1965), No 4, str. 184

Cornelius P., Das Rationalisierte Giorgi-System mit absolutem Volt und Ampere in der Elektrotechnik, Philips' technische Rundschau *10* (1948), str. 79

Cornelius P.: Korte Sammenvatting der Electriciteitsleer, Muelenhof, Amsterdam 1948

Cornelius P., Proposals and Recommendations Concerning the Definitions and Units of Electromagnetic Quantities, Philips Research Reports *4* (1949), str. 232

Cornelius P., The Rationalized Giorgi System and its Consequences, Philips Res. Rep. *4* (1949), str. 123

Cornelius P., Can *H* and *D* be Measured Directly, Wireless Engineer *27* (1950), str. 216

Cotellessa R., Report on the 1964 Conference on Precision Electromagnetic Measurements, IEEE Spectrum *2* (1965), str. 103

Coulson C. A.: Electricity, Oliver and Boyd, Edinburgh 1948

Curtis D. J., Thomas G. J., Long Term Stability and Performance of Platinum Resistance Thermometers for Use to 1063 °C, Metrologia *4* (1968), No 4, str. 184

Curtis H. L.: Electrical Measurements (Precise Comparisons of Standards and Absolute Determinations of the Units), McGraw-Hill, New York 1937

Cutler L. S., Searle C. L., Some Aspects of the Theory and Measurement of Frequency Fluctuations in Frequency Standards, Proceedings IEEE *54* (1969), No 2, str. 136

Čabrian M.: Željeznička vozila i vozna dinamika, Tehnička knjiga, Zagreb 1950

Čečurina E. N., Meždunarodnaja sistema jedinice v praktike električeskih i magnitnjih izmerenij, Izmeriteljnaja tehnika 1964, No 10, str. 54

Černe B., Brezinšćak M.: Nauka o toplini, 4. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1969

Čubranić N.: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Tehnička knjiga, Zagreb 1967

Čudakov E. A. (redaktor): Mašinostrojenije, enciklopedičeskij spravočnik, 1—1, 2, Gosudarstvjenoje naučno-tehničeskoje izdateljstvo, Moskva 1947

Dabac V.: Elektrotehnički rječnik (njemačko-hrvatski i hrvatsko-njemački), Školska knjiga, Zagreb 1952

Dabac V.: Tehnički rječnik (njemačko-hrvatskosrpski i hrvatskosrpsko-njemački), Tehnička knjiga, Zagreb 1969/1970

Dahlgren F., The Rationalization in Electromagnetism and Electrostatics, Kungl. Tekniska Högskolans handlingar, No 109, 1957

Danjon A., New Astronomical Definition of Unit of Time, Metric Measures *2* (1959), str. 3

Danjon A., Cassinis G., Convocation la Onzième Conférence Générale des Poids et Mesures 11.—20. Oct. 1960, CIPM, Sèvres, febr. 1960

Danloux-Dumesnils M., Système métrique. Les unités de la mécanique, Mesures *21* (1956), No 232

Dayre J., Cassan M.: Guide graphique pour la conversion des unités, Eyrolles, Paris 1954

Dejč M. E.: Tehničeskaja gazodinamika, 2. izdanje, Gosenergoizdat 1961

Demusjak A. G., Vaprosi metrologij v meždunarodnoj standardizacij, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 11, str. 85

Denis-Papin M., Vallot J.: Métrologie générale (grandeurs et unités), Dunod, Paris 1948

Denis-Papin M., Vallot J.: Métrologie applique, Dunod, Paris 1948

Denis-Papin M., Kaufmann A.: Memento des Unités Giorgi (M.K.S.A.), Desforges, Paris 1949

Dick J.: Praktische Astronomie an visuellen Instrumenten, Barth Verlag, Leipzig 1963

Dimić G. L.: Jedinice i konstante u fizici, Građevinska knjiga, Beograd 1964

Dobrinin E. M., Pan Čžun-Čžen: Vaprosi dinamičeskoj točnosti priborov automatičeskovo kontrolja razmerov, GNTI Mašinostroiteljnoj literaturi, Moskva 1964

Dolinskij E. F., Pilipčuk B. I., Estestvenije sistemi jedinic, EIKA, No 4 (I V 3-2), 1965, str. 3

Donovan J. C., Capacitance Measuring Techniques, Instruments and Control Systems *40* (1967), No 3, str. 111

Döring H., Anschluss eines 100-t-Normals bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Archiv für technisches Messen L 286 (1959), str. 221

Dunn A. F., Rayner G. H., International Comparison of Standards of Mutual Inductance, Metrologia *4* (1968), No 2, str. 78

Dunn A. F., Primary Electrical Units at the National Research Council of Canada, Metrologia *4* (1968), No 4, str. 180

Durieux M., Muijlwijk R., Relationship Between the International Practical Temperature Scale of 1968 and the NBS-55, NPL-61, PRMI-61, PRMI-54, and PSU-54 Temperature Scales in the Range from 13,81 to 90,188 K, Metrologia *5* (1969), No 2, str. 47

Đurković P. M., Sedamdesetpet godina rada Astronomske opservatorije u Beogradu, Publikacija 12 Astronomske opservatorije, str. 15, Beograd 1968

Eckert E.: Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch, 2. izdanje, Springer, Berlin 1959

Edlén B., The Refractive Index of Air, Metrologia *2* (1966), No 2, str. 71

Elliott L. P.: Physics, MacMillan, New York 1962

Ellis R. H.: Jadernaja tehnika dlja inženjerov, Gosatomizdat, Moskva 1961

Emrović B., Brezinščak M., Sistemi mjernih jedinica i standardni brojevi; poglavlje u »Drvarskom priručniku«, Tehnička knjiga, Zagreb 1967

Emschermann H. H., Die Darstellung von Messwerten in Zahlenform, ATM 1956, Lg. 246, str. 161

Emschermann H. H., Kraftmessung, Archiv für technisches Messen 1961, Lieferung 306, V 1310-F 1, str. 163

Essen L., Atomic Clocks, Journal I.E.E. *4* (1958), str. 647

Essen L., Time Scales, Metrologia *4* (1968), No 4, str. 161

Etherington H.: Nuclear Engineering Handbook, McGraw-Hill Co., New York 1958

Fajnerman I. D., Vaprosi točnosti v metrologij, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 2, str. 65

Feith E., Elektrische Netzmodelle für Bewetterungsaufgaben, Archiv für Technisches Messen, Lg. 252, 1957, Januar, str. R 1

Fermi E.: Thermodynamics, Dover Publications Inc., New York 1936

Ferrari F., Geordnete Zusammenfassung von Messergebnissen, ATM 1955, Lg. 234, str. 149

Ferry A., Expression des grandeurs, formules aux dimensions, equations physiques, Mesures *24* (1959), str. 769

Ferry A., Le système d'unités anglosaxonnes et le système métrique, Mesures et Controle industriel *25* (1960), str. 1141

Feynman R. P. i dr.: Fejmanovskije lekcij po fizike (1), Mir, Moskva 1965

Filipović I., Sabioncello P.: Laboratorijski priručnik I/1, 2, 3, Tehnička knjiga, Zagreb 1960, 1962, 1965

Fischer J., Neuere Fragen und Anschauungen über Dimensionen, Einheiten und Massysteme der elektromagnetischer Grössen, Zeitschrift für Physik *100* (1936), str. 360

Fischer J.: Einführung in die klassische Elektrodynamik, Springer, Berlin 1936

Fischer J., ϵ_0 und μ_0, Archiv für Elektrotechnik *39* (1950), str. 711

Fischer J., Grössen und Einheiten in der Elektrizitätslehre, Archiv für Elektrotechnik *40* (1951), str. 257

Fischer J., Massysteme und Einheiten der Elektrizitätslehre und Elektrotechnik, ATM, L. 208 (1953), str. 99

Fischer J., Einheiten elektrischer und magnetischer Grössen, ETZ-A *77* (1956), str. 280

Fischer J., Über die Anzahl der voneinander unabhängigen Grössen in der Elektrizitätslehre, Archiv für Elektrotechnik *45* (1960), str. 77

Fjedorov B. F.: Obščij kurs svjetotehniki, Gosenergoizdat, Moskva 1944

Fleger E., Beispiele für Zugeschnittene Grössengleichungen, ZVDI *94* (1952), str. 1009

Fleischmann R., Die Struktur des physikalischen Begriffsystems, Zeitschrift für Physik *129* (1951), str. 377

Fominih V. I., Etaloni v oblasti izmjerenij nejtronnih izljučenij, EIKA, No 4 (620-2), 1965, str. 27

Fortuin G. J., Visual power and visibility, Philips Research Reports *6* (1951), str. 251, 347

Franke O., Die Massysteme und Masseinheiten der elektrischen und magnetischen Grössen, EuM *68* (1951), str. 280

Fuchs I., Der Sinn des Wirkungsquantums, EuM *70* (1953), str. 77

Fuchs I., Wirkungsquantum und physikalisches Begriffsystem, EuM *71* (1954), str. 345

Gauss C. F.: Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Mass zurückgeführt, Ostwald's Klassiker, No 53, Engelmann, Leipzig 1894

Geisler K. W., Gleichungssysteme und Einheitensysteme, Wärme *63* (1961), str. 102

Gerber E. A., *Sykes R. A.*, State of the Art-Quartz Crystal Units and Oscillators, Proceedings IEEE *54* (1966), No 2, str. 103

Gerber E. A., *Sykes R. A.*, Quartz Frequency Standards, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 783

Gershun A.: The Light Field (preveli *Moon P.* i *Timoschenko G.*), Massachusetts Institute of Technology, Ser. No 164, 1939

Geršun A. A., Teorija svetovoga polja, Električestvo 1947, No 10, str. 5

Gillilland K. E. i dr., Use of a Laser for Length Measurement by Fringe Counting, Metrologia *2* (1966), str. 95

Giorgi G., Electrical and Physical Units (Reprint from papers read before the International Electrical Congress at St. Louis), September 1904

Giorgi G., Memorandum sur le système M.K.S. d'unités pratiques, Commission Electrotechnique Internationale, London 1934

Giorgi G., Klasična električna metrologija i sistemi jedinica, koji iz nje proizlaze. Kritična razmatranja (preveo *V. V. Petrović*), Tehnički list *20* (1938), str. 227, 249

Giorgi G., Nova električna metrologija i konstrukcija apsolutnog električnog sistema MKS (preveo *V. V. Petrović*), Tehnički list *20* (1938), str. 268, 299

Giorgi G.: La nozione e la misura del tempo dall' antichità fino ad oggi, Società editrice riviste industrie elettriche, Milano 1940

Giorgi G., Unità naturali o unità campionate, Tecnica e Didattica *3* (1942), No 21

Giorgi G., Ancora sui sistemi di unità elettriche, L'energia elettrica *25* (1948), str. 443

Giorgi G., L'Origine del sistema metrico-decimale, Archimede 1949, fasc. 4, str. 133

Giorgi G., I prototipi del sistema metrico, Archimede 1949, fasc. 6, str. 199

Giorgi G.: Verso l'Elettrotecnica moderna, Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano 1949

Giorgi G.: Dati e valori per la fisica e l'elettrotecnica, Società editrice internazionale, Milano 1949

Giorgi G., Systèmes d'unités et nomenclature, Rev. Gén. d'Electricité *59* (1950), str. 278

Glinka N. L.: Zadači i upražnenija po obščej himij, Himija, Moskva 1965

Gluško V. P. (redaktor): Termičeskije konstanti veščestv I, AN SSSR, Moskva 1965

Gnedenko B. V., *Hinčin A. J.* (s ruskog preveo *V. Štengl*): Uvod u teoriju vjerojatnosti, Tehnička knjiga, Zagreb 1968

Goldberg J. L., *Brockman R. H.*, Interferometry in Length Measurement, Electronic Technology *39* (1962), str. 186, 238

Golding E. W.: Electrical Measurements and Measuring Instruments, Pitman & Sons, London, 4. izdanje, 1955

Goldštejn G.: Osnovi zaščiti reaktorov, Gosatomizdat, Moskva 1961

Goljbrajh Z. E.: Sbornik zadač i uprjažnjenij po himij, Višśaja škola, Moskva 1965

Gorbacevič S. V., Etaloni osnovnih jedinic SI i obespečenije jedinstva izmerenij v SSSR, Izmjeriteljnaja tehnika 1964, No 10, str. 50

Gorcum A. H. Van, Van Der Wall B. J., Automatic photometer with digital recording for checking quality of incandescent lamps, Control *11* (1967), str. 236

Greene F. M., NBS Field-Strength Standards and Measurements (30 Hz to 1000 MHz), Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 970

Gregora O., Absolutni soustava jednotek MKS zavedena, Elektrotechnicky Obzor *36* (1947), str. 329

Grejm I. A., Optičeskije daljnomeri (II. Pribori geometričeskova tipa), EIKA, No 4 (21252-2), 1965, str. 37

Gresky A. T., New Physical Constants from Dimensional Analysis, Journal of the Franklin Institute *265* (1958), str. 85

Grigorov K. V., Šipkov S. N., Diskusija o članku Kalantarova i Nejmana, Električestvo 1949, No 11, str. 88

Grigull U.: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, 3. izdanje, Springer, Berlin 1955

Grigull U., Sollen wir beim technischen Mass-System bleiben? BWK *9* (1957), str. 219

Grivet P., Le système d'unités Giorgi dans ses rapports avec la tradition, la pratique et l'enseignement, Bulletin de la Société française des Electriciens *7* (1947), No 75

Grivet P., Champs et particules dans le système Giorgi rationalisé, Bulletin de la Société française des Electriciens *9* (1949), No 98

Groot W. de, The Origin of the Giorgi System of Electrical Units, Philips Technical Review *10* (1948), str. 55

Groot W. de, Die neue Kerze, Philips' technische Rundschau *10* (1948), str. 152

Groot W. de, The radiation constants and the light-equivalent of energy, Physica *16* (1950), str. 419

Groot W. de, On the definition of standard illuminant A, Physica *17* (1951), str. 111

Groot W. de, A Graphical Method for Solving Problems of Low-level Photometry, Applied Scientific Research *2 B* (1951), str. 131

Groot W. de, Some remarks about the so-called Crova wavelength, Philips Research Reports *8* (1953), str. 401

Gundlach F. W.: Grundlagen der Höchstfrequenztechnik, Springer, Berlin 1950

Gusev N. G. i dr.: Zaščita ot izključenija protjaženih istočnikov, Gosatomizdat, Moskva 1961

Häberli F., Physikalische Grössen. Eine Klarstellung der Begriffe, Schweiz. Arch. angew. Wiss. u. Technik *13* (1947), str. 65, 113, 136

Haeder W., Zoll, Pfund und Grad Fahrenheit, Haustechnische Rundschau *59* (1960), str. 248, 268; *60* (1961), str. 8, 32

Hahnemann H. W.: Die Umstellung auf das Internationale Einheitensystem, VDI Verlag Düsseldorf 1959

Haikin S. E.: Mehanika, Ogiz—Gostehizdat, Moskva—Lenjingrad 1947

Hald A.: Statistical Theory with Engineering Applications, sixth printing, J. Wiley, New York 1965

Hall J. A., The Radiation Scale of Temperature between 175 °C and 1063 °C, Metrologia *1*, (1965), str. 140

Hall J. A., The Early History of the International Practical Scale of Temperature, Metrologia *3* (1967), str. 25

Hall J. A., Barber C. R., The Evolution of the International Practical Temperature Scale, Metrologia *3* (1967), No 3, str. 78

Hallen E., Some Units in the Giorgi System and the C.G.S. System, Trans. Roy. Inst. Technology Stockholm, No 6, 1947

Hallert B., Fundamental Concepts and Terminology for the Quality of Measurement, Metrologia *2* (1966), No 1, str. 58

Halliday D., Resnick R.: Physics for Students of Science and Engineering, Combined Edition, Sixth Printing, John Wiley & Sons, New York 1965

Hamon B. V., A 1-100 Ω build-up resistor for the calibration of standard resistors, Journal of Scientific Instruments *31* (1954), No 12

Hannum W., Jedinici vigoranija jadernovo gorjučevo, Atomnaja tehnika za rubežom *11* (1967), No 6, str. 42

Harnwell G. P.: Principles of Electricity and Electromagnetism, McGraw-Hill Co, New York 1938

Harris K. D., Lasers, Review of recent Developments, Electronic Technology *39* (1962), str. 86

Harrison P. W., Rayner G. H., A Primary Standard of Mutual Inductance, Metrologia *3* (1967), str. 1

Hart K. H., Sawabe M., Recent Measurements of Metre-Bars on the N.R.C. (Canada) Interference Comparator, Metrologia *4* (1968), No 4, str. 154

Hartshorn L., Units and Standards of Electrical Measurement, Proceedings IEE *99* (1952), Part I, str. 271

Havliček F. I., O problemu promjenljive konstante gravitacije, Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, knjiga 276, Zagreb 1949

Hellwig H., The Hidrogen Storage Beam Tube, a Proposal for a New Frequnncy Standard, Metrologija *6* (1970), No 2, str. 56

Henning F.: Temperaturmessung, 2. izdanje, Barth Verlag, Leipzig 1955

Heusinkveld W. A., Determination of the Differences between the Thermodynamic and the Practical Temperature Scale in the Range 630 to 1063 °C from Radiation Measurements, Metrologia *2* (1966), str. 61

Hochrainer A., Grössen und Grössengleichungen, Elektrotechnik und Maschinenbau *62* (1944), str. 350

Hochrainer A., Die Problematik der Formelzeichen, ETZ-A *78* (1957), str. 280

Hochrainer A., Schreibweise physikalischer Gleichungen (Entwurf, DIN 1313), Elektronorm *51* (1961), str. 31

Hoffmann F., Die optische Temperaturskala und die Strahlungskonstanten, Zeitschrift für angewandte Physik *2* (1950), str. 88

Hoffrogge Chr., Rummert H., Ein Strichmasskomparator mit photoelektrischen Messmikroskopen, Metrologia *4* (1968), No 2, str. 68

Hofman J., Mezinarodni poravnani jednotek elektrickeho otporu a napeti mezi staty RVHP, Měrova technika *6* (1967), No 4, str. 54

Hoisington D. B.: Nucleonics Fundamentals, McGraw-Hill Co, New York 1959

Holcomb L. A., Calibration of Kinematic Viscometers, Instruments and Control Systems *37* (1964), No 2, str. 109

Horák Z.: Praktická fysika, Státni nakladatelstvi technické literatury, Praha 1958

Hrdlička J., Fotometrické názvoslovi, Elektrotechnický Obzor *39* (1950), str. 33

Hristijanovič S. A., O sozdanij otečestvenih majatnikovih astronomičeskih časov, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 8, str. 3

Hudson G. E., Some Characteristics of Commonly Used Time Scales, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 815

Hudson P. A., Measurement of RF Peak Pulse Power, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 851

Huntoon R. D., Wildhack W. A., The NBS role in plans for better measurement accuracy, 19th Annual ISA Conf. Proc. (New York 1964) *11* (1964), Part 1

Iliovici A., Justification de la rationalisation, Revue Générale de l'Electricité *74* (1965), str. 299

Isačenko V. P., Osipova V. A., Sukomel A. S.: Teplopjeredača, Energija, Moskva 1965

Ivankov P. T.: Tehničeskije izmjerenija s osnovami metrologij, Goslesbumizdat, Moskva 1963

Ivlev A. I., Vnedrenije meždunarodnoj sistemi jedinic — zadača boljšovo narodnohozjajstvenovo značenija, Izmeriteljnaja tehnika 1964, No 9, str. 1

Jacob M. M., Origine et développement historique du Système métrique, Mesures et Controle industriel *28* (1963), str. 1243

Jacob M., Réflexions sur l'unité de volume et les unités du système international, Mesures *30* (1965), str. 87

Jakovlev K. P. (redaktor): Kratkij fiziko-tehničeskij spravočnik, GI fiziko-matematičeskoj literaturi, Moskva 1950

Jakowlew K. P.: Mathematische Auswertung von Messergebnissen, Verlag Technik, Berlin 1952

Janko-Trinickij A. A. i dr., Diskusija o članku Kalantarova i Nejmana, Električestvo 1949, No 9, str. 82

Jánossy L. (s engleskog preveo na ruski *N. P. Klepikov*): Teorija i praktika obrabotki rezuljtatov izmjerenij, 2. izdanje, Mir, Moskva 1968

Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Spravočnik po fizike, Nauka, Moskva 1964

Javorskij B. M. i dr.: Kurs fiziki (1), 3. izdanje, Višśaja škola, Moskva 1965

Jones T. P., The Accuracies of Calibration and Use of I.P.T.S. Thermocouples, Metrologia *4* (1968), No 1, str. 80

Jovanović V. Đ.: Osnovni zakoni elektriciteta, 2. izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1947

Jovanović V. Đ.: Električno osvetljenje, Naučna knjiga, Beograd 1949

Jovanović V., Treće plenarno zasedanje tehničkog komiteta (TSO/TC 12) za veličine i jedinice, simbole i preobratne činioce i tablice međunarodne organizacije za standardizaciju, Tehnika *11* (1956), str. 561

Judin M. F. i dr., Novije standarti na metodi pavjerki dozimetričeskoj aparaturi, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 1, str. 62

Jürgens B. F. i dr., Drei Methoden zur Messung magnetostatischer Felder, Philips' tech. Rundschau *14* (1953), str. 349

Juščenko A. P., Leskov M. M.: Navigacija, Transport, Moskva 1965

Kaiser D.: Elektrotehnički priručnik, 3. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1964

Kajak L. K., Etaloni jedinic izmjerenij dlini, massi i vremeni, EIKA, No 1, (I F 3-2), 1962, str. 27

Kalantarov P. L., O sistemah jedinic električeskih i magnjitnih veličin, Električestvo 1948, No 1, str. 17

Kalantarov P. L., Nejman L. P., Opredjelenija panjatij, otnosjaščihsja k oblasti elektromagnitnih javljenij, Električestvo 1949, No 1, str. 16

Karavajev F. M. i *Judin M. F.*, O novom GOST 8848-63 »Jedinici radioaktivnosti i ionizirajuščih izlučenij«, Izmeriteljnaja tehnika 1964, No 6, str. 51

Karo D.: Electrical Measurements, Part I, Second Edition, Mac Donald, London 1961

Karsa B. E. F.: Electrical Measuring, Instruments and Measurements, Akadémiai Kiadó, Budapest 1967

Kartaschoff P., Die Messung der Frequenzen von NH_3-Maser-Oszillatoren und Cs-Strahl-Resonatoren, Bulletin SEV *51* (1960), str. 1080

Katz M. J.: Vacuum Microbalance Techniques, Vol. I, Plenum Press, New York 1961

Keitz H. A. E.: Lichtberechnungen und Lichtmessungen, Philips, Eindhoven 1951

Kemnitz W., Untersuchungen über die Bestimmung der absoluten elektrischen Widerstandseinheit mit Hilfe eines von Tuttle angegebenen überbrückten *T*-Gliedes, Elektrotechnik und Maschinenbau *79* (1962), str. 305

Kendall D. B., Horsepower measurement via force, Instruments and Control Systems *37* (1964), No 2, str. 102

Kennelly A. E., Die Annahme des Giorgischen Massystems durch die Internationale elektrotechnische Kommission (preveo *M. Landolt*), Bulletin SEV *28* (1937), str. 17

Kibble B. P., A Proposed Method for Measuring the Gyromagnetic Ratio of the Proton, Metrologija *5* (1969), No 4, str. 124

King R. W. P.: Electromagnetic Engineering I (Fundamentals), McGraw-Hill Co, New York 1945

Kirejev V. A.: Kratkij kurs fizičeskoj himij, Gos. nauč.-tehn. izd. him. lit., Moskva 1963

Knežević V., Laboratorija za standarde Elektrotehničkog instituta Nikola Tesla u Beogradu, Zbornik radova II jugoslavenskog simpozija o električkim mjerenjima i mjernoj opremi (Ljubljana, 1963), str. I-35

Knežević V., Uspoređivanje snage naizmenične struje sa jednosmernim naponom pomoću kvadrantnog elektrometra, referat na 4. simpoziju JUKEM, Beograd 1969

Knowlton A. E.: Standard Handbook for Electrical Engineers, McGraw-Hill Co, New York 1949

Kohlrausch F.: Leitfaden der praktischen Physik (mit einem Anhange: Das absolute Mass-System), 6. izdanje, Teubner, Leipzig 1887

Kohlrausch F.: Praktische Physik, 20. izdanje, B. G. Teubner, Stuttgart 1956

Kollmar A., Liese W.: Die Strahlungsheizung, 4. izdanje, R. Oldenbourg, München 1957

Koludrović R.: Tehnologija auto-materijala, Tehnička knjiga, Zagreb 1965

König H., Krondl M., Landolt M., Zur Einführung des Giorgi-Systems, Bulletin SEV *40* (1949), str. 462

König H., Über die Mehrdeutigkeit des Grössenbegriffs, Bull. Schweiz. elektr. Vereins *41* (1950), str. 625

Kostkowski H. J., Lack of Uniqueness in the International Practical Temperature Scale above the Gold Point, Metrologia *3* (1967), str. 28

Kostrzewa S., Der Forschungs- und Messreaktor der PTB, Atomwirtschaft *11* (1966), str. 504

Kovačević B., Merenje vremena i frekvencije, Zbornik radova 4. simpozija JUKEM, Beograd 1969, knjiga 2, str. 7

Kovačević B. i dr., Neki rezultati rada grupe kvarcnih časovnika pri Astronomskoj opservatoriji u Beogradu, referat na 4. simpoziju JUKEM, Beograd 1969

Kovalevsky J., Astronomical Time, Metrologia *1* (1965), No 4, str. 169

Koželj V., Merski sistemi elektrotehnike, Elektrotehniški vestnik *14* (1946), str. 2

Koželj V., Avčin F., Predlog termina i oznaka za fizikalne veličine, Elektrotehničar *4* (1950), str. 110

Koželj V. A., Preprosta razlaga širenja elektromagnetnega polja, Elektrotehniški vestnik *20* (1952), str. 224

Kraushaar R. J., A Proposal for an Absolute Liquid Electrometer, Metrologia *2* (1966), No 2, str. 92

Kraut B., O enotah za temperaturo, Strojniški vestnik *5* (1959), str 2

Kraut B.: Džepni strojarski priručnik, 3. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1963

Kunajev I. P., Sredstva izmjerenija vremeni (Istoričeskij obzor razvitija, I), EIKA, No 3 (260-1), 1964, str. 17

Küpfmüller K., Einführung in die theoretische Elektrotechnik, 2. Auflage, Springer, Berlin 1939

Kuznecov N. I.: Meždunarodnaja sistema jedinic (SI), Višśaja škola, Minsk 1965

Kuzovlev V. A.: Tehničeskaja termodinamika, 5. izdanje, Transport, Moskva 1964

Lacey R. F. i dr., Short-Term Stability of Passive Atomic Frequency Standards, Proceedings IEEE *54* (1966), No 2, str. 170

Lacey R. F., Thallium Beam Frequency Standards, Metrologia *3* (1967), No 3, str. 70

Laissus J., Thermométrie et pyrométrie (Voyage dans le passé), Mesures *30* (1965), str. 82

Laissus Y., La mesure du temps en occident jusqu'à la fin du 18e siècle, Mesures *30* (1965), str. 95

Lampard D. G., A New Theorem in Electrostatics with Application to Calculable Standards of Capacitance, Proceedings IEE *104 C* (1957), str. 271

Landau L., Lifšic E.: Teorija polja (Teoretičeskaja fizika IV), Ogiz, Moskva—Lenjingrad 1948

Landau L. D., Lifšic E. M.: Statističeskaja fizika, 2. izdanje, Nauka, Moskva 1964

Landau L. D. i dr.: Kurs obščej fiziki (Mehanika i molekuljarnaja fizika), Nauka, Moskva 1965

Landau L. D., Kitajgorodskij A. I.: Fizika dlja vseh (Dviženje, teplota), 2. izdanje, Nauka, Moskva 1965

Landolt M.: Grösse, Masszahl und Einheit, Rascher Verlag, Zürich 1943

Landolt M., Zur Theorie der Dimension der physikalischen Grössen, Bull. Schweiz. elektr. Vereins *41* (1950), str. 474, 541

Landolt M., de Boer J., Quelle est la signification de la rationalisation totale? Rev. Gén. de l'Electricité *60* (1951), str. 449

Landsberg. G. S.: Elementarnij učebnik fiziki I, II, III, Nauka, Moskva 1964

Langdon-Davies J.: Jubilee Book of the National Physical Laboratory, H. M. Stationery Office, London 1951

Lange E., Prinzipien des Grössenkalküls; ihre Anwendung auf »Stoffmenge«, Chemiker-Zeitung *89* (1965), str. 408

Lax B., Progress in semiconductor lasers, IEEE Spectrum *2* (1965), str. 62

Leauté A., Grenzen des Messens, VDI Zeitschrift *102* (1960), str. 1406

Lejkin A. Ja., Molekuljarnije i atomnije etaloni častoti, EIKA, No 1 (4911-12), 1962, str. 189

Lejkin A. Ja., Molekuljarnije i atomnije etaloni častoti (II), EIKA, No 4 (4912-3), 1965, str. 47

Lejnveber P.: Spravočnik po tehnike linejnih izmjerenij, Mašgiz 1959

Levič V. G.: Kurs teoretičeskoj fiziki I, II, Gos. izd. fiz.-mat. lit., Moskva 1962

Levin B. I., Šubin E. P.: Teploobmjenije aparati sistem teplosnabženija, Energija, Moskva 1965

Lewis F. D., Soderman R. A., Radio-Frequency Standardization Activities, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 759

Linckh H. E., Brasack F., Eine Methode zur Bestimmung des Widerstandwertes aus der Induktivität, Metrologia *4* (1968), No 3, str. 94

List V.: Základy elektrotechnicky I, ČMT, Praha 1946

Löbl O., Memorandum über elektrische und magnetische Einheiten, Elektrotechnische Zeitschrift *72* (1951), str. 455

Löbl O., Randbemerkungen zu einigen AEF-Aufgaben, ETZ-A *78* (1957), str. 275

Lodge A., The Multiplication and Division of Concrete Quantities, Nature 1888, July, str. 281

Lončar J.: Osnovi elektrotehnike I, Hrvatska državna tiskara, Zagreb 1942

London F. H., Laser Interferometer, Instruments and Control Systems *37* (1964), str. 87

Lovreček I.: Kemijsko računanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1968

Macarol S.: Praktična geodezija, 2. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1968

Makow D. M., Precise Measurement of Length using Capacitance Ratio, Metrologia *2* (1966) No 3, str. 125

Makow D., A New Computable Capacitor, Metrologia *5* (1969), No 4, str. 126

Maksimov M. M., 500-letije russkovo desjatičnovo rublja, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 7, str. 55

Malić D. Lj.: Termodinamika i termotehnika, 3. izdanje, Građevinska knjiga, Beograd 1963

Malikov M. F., O vvedenij v SSSR absoljutnih električeskih i magnjitnih jedinic, Električestvo 1948, No 1, str. 10

Malikov M. F., Diskusija, Električestvo 1949, str. 59

Marburger W. G., Hoffman Ch. W.: Physics for Our Times, McGraw-Hill Book Company, New York 1958

Marinček Z., O tipizaciji vodnih turbin, Elektrotehniški vestnik *19* (1951), str. 185

Marković B., Mjerenje i mjere, Almanah Bošković Hrv. prirod. društva, Zagreb 1950, str. 239

Marriott H., Cullen A. L., The Rationalization of Electrical Theory and Units, Proceedings IEE *97* (1950), Part I, str. 245, 271

Matanović D.: Tehnika rasvjete, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1948

McCoubrey A. O., A Survey of Atomic Frequency Standards, Proceedings IEEE *54* (1966), No 2, str. 116

McCoubrey A. O., The Relative Merits of Atomic Frequency Standards, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 805

Menaché M., Du problème de la masse volumique de l'eau, Metrologia *3* (1967), No 3, str. 58

Merhaut J.: Příručka elektroakustiky, SNTL, Praha 1964

Mezzetti E., Misura della dilatazione termica dei solidi, La Ricerca Scientifica *34* (1964), str. 473

Mie G.: Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, F. Enke, Stuttgart 1941

Mielenz K. D., Laser Measures Length to .07 ppm, Instruments and Control Systems *38* (1965), str. 134

Mihjejev M. A.: Osnovi teplopjeredači, 3. izdanje, Gosenergoizdat 1956

Mikheyev M.: Fundamentals of Heat Transfer, Peace Publishers, Moscow 1965

Miller C. H., Limits of Accuracy in Resistance Measurement, The Institution of Electrical Engineers, Monograph No. 493 M, London 1961

Miller C. H., Precision resistance measurement using very low-frequency alternating current, Proceedings IEE *112* (1965), str. 557

Miller C. H., Accurate determination of resistor load corrections, Proceedings IEE *113* (1966), str. 203

Miller C. K. S. i dr., Noise Standards, Measurements, and Receiver Noise Definitions, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 865

Miljanić P. N., Adjustable Complex-Ratio Transformer, Transactions IEEE, *IM-14* (1965), No 3, str. 135

Miljanić P. N. i dr., The Application of Current Comparators to the Calibration of Current Transformers at Ratios up to 36 000/5 Amperes, Transactions IEEE, *IM-17* (1968), No 9, str. 196

Miljanić P., Novi pogledi na električna merenja stvoreni razvojem strujnih komparatora, referat na 4. simpoziju JUKEM, Beograd 1969

Mitkevič V. F.: Magnjitnij patok i ivo preobrazovanija, Akademija nauk SSSR, Moskva—Lenjingrad 1946

Mitrofanov P. P.: Fizičeskaja himija, Višaja škola, Moskva 1965

Mlodzejevskij A. B.: Termodinamika, Gosučpedizdat, Moskva 1948

Moon P., A System of Photometric Concepts, Journal of the Optical Society of America *32* (1942), str. 348

Moon P., International Names in Colorimetry, Journal of the Optical Society of America *36* (1946), str. 427

Moon P., Spencer D. E., Internationality in the Names of Scientific Concepts: A Method of Naming Concepts, American Journal of Physics *14* (1946), str. 285

Moon P., Spencer D. E., Internationality in the Names of Scientific Concepts: A Proposed International Photometric System, American Journal of Physics *14* (1946), str. 431

Moon P., Spencer D. E., A Study of Photometric Nomenclature, Journal of the Optical Society of America *36* (1946), str. 666

Moon P., Spencer D. E., Internationality in the Names of Scientific Concepts: Comparison of Photometric Systems, American Journal of Physics *15* (1947), str. 84

Moon P., A Table of Planckian Radiation, Journal of the Optical Society of America *38* (1948), str. 291

Moon P., Spencer D. E., Modern Terminology for Physics, American Journal of Physics *16* (1948), str. 100

Moon P., Spencer D. E., Language for Science, Journal of the Franklin Institute *246* (1948), No 1

Moreau H., The Twelfth General Conference of Weights and Mesures, Metrologia *1* (1965), str. 27

Moreau H., Litre et décimètre cube, Bull. Organisation Intern. Métrologie Légale, 1965, No 20, str. 46

Morgan A. H., Distribution of Standard Frequency and Time Signals, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 827

Morgan M. G., International Scientific Radio Union-URSI, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 742

Moser H., Gasthermometrie bei höheren Temperaturen, Metrologia *1* (1965), str. 68

Mungall A. G. i dr., The Canadian Cesium Beam Frequency Standard, Metrologia *2* (1966), No 3, str. 98

Mungall A. G. i dr., Atomic Hydrogen Maser Development at the National Research Council of Canada, Metrologia *4* (1968), No 3, str. 87

Mungall A. G. i dr., A Re-Evaluation of the N.R.C. Long Cesium Beam Frequency Standard, Metrologia *4* (1968), No 4, str. 165

Mungall A. G. i dr., Mass-Frequency Effect on VLF and Portable Clock Comparisons of Atomic Frequency Standards, Metrologia *5* (1969), No 1, str. 31

Najman L. P., Kalantarov P. L.: Teoretičeskiji osnovi elektrotehniki I, Gosenergoizdat, Lenjingrad—Moskva 1948

Nater I.: Prehl'ad fiziky, 2. izdanje, SVTL, Bratislava 1961

Nejman L. R., O sootnošenijah među jedinicami veličin pri racionalizovannih i neracionalizovannih sistemah uravnenij elektromagnitnova polja, Električestvo 1959, No 6, str. 13

Nichols L. W., Conversion of Inch and Metric Sizes on Engineering Drawings, Engineering *179* (1955), str. 409

Nusselt W.: Technische Thermodynamik I, W. de Gruyter, Berlin 1943

Oatley C. W., Yates J. G., Bridges with Coupled Inductive Ratio Arms as Precision Instruments for the Comparison of Laboratory Standards of Resistance of Capacitance, Proceedings IEE *101* (1954), Part III, str. 91

Oberdorfer G.: Lehrbuch der Elektrotechnik I, Oldenbourg, München—Berlin 1939

Oberdorfer G.: Das natürliche Massystem, Springer, Wien 1949

Oberdorfer G., Die natürlichen Grundlagen einer befriedigenden Massystembildung, ATM 1954, Lg. 225, str. 221

Oberdorfer G., Zum Oersted und den anderen magnetischen Dreiereinheiten, EuM *77* (1960), str. 288

Obradović N. M.: Osnovi mehanike fluida, Naučna knjiga, Beograd 1952

Ocheduszko S.: Termodynamika stosowana, WNT, Warszawa 1964

Ohlon R., An Electrostatic Method for the Absolute Measurement of Voltage, Metrologia *3* (1967), str. 33

Ohlon R., A New Type of Volt Box, Metrologia *5* (1969), No 1, str. 21

Olejnik B. N., Meždunarodnaja sistema jedinic v oblasti teplovih izmjerenij, Izmjeriteljnaja tehnika 1964, No 10, str. 56

Oprešnik M.: Naloge in rešitve iz termodinamike, Tehnička knjiga, Zagreb 1967

Orear J.: Populjarnaja fizika, Mir, Moskva 1966

Orlova A. I., Pavjerka hronometrov po sekundnim signalam točnovo vremeni, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 11, str. 75

Orlova M. P., Gazovaja termometrija, EIKA, No 2 (2112-2), 1964, str. 21

Orlova M. P. i dr., The Derivation of the Provisional Reference Table CCT 64, $T = f(W)$ for Platinum Resistance Thermometers for the Range from 12 to 273,15 °K, Metrologia *2* (1966), str. 6

Osial T. A., Industrial Laser Applications, Instruments and Control Systems *40* (1967), No 10, str. 101

Osipov P. E.: Gidravlika i gidravličeskije mašini, Lesnaja promišljenost, Moskva 1965

Oudin J., Application du laser à la mesure des longueurs par interférométrie, Mesures *31* (1966), str. 71

Ouziaux R., L'emploi du système M.K.S.A. dans l'enseignement de la mécanique, Mesures *24* (1959), str. 772

Padelt E., Laporte H.: Einheiten und Grössenarten der Naturwissenschaften, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1964

Paić M.: Fizička mjerenja (I), Sveučilište, Zagreb 1963

Papaleksi N. D.: Kurs fiziki I, II, Gostehizdat, Moskva—Lenjingrad 1947

Pauw L. J. van der, A Method of Measuring Specific Resistivity and Hall Effect of Disc of Arbitrary Shape, Philips Research Reports *13* (1958), str. 1

Pečornik M., Karakteristike turbomašina s osobitim obzirom na ventilatore, Tehnika *7* (1952), str. 70

Pérard A., La neuvième Conférence générale des Poids et Mesures, Revue Générale de l'Electricité *58* (1949), str. 44

Perry J.: The Story of Standards, Funk and Wagnalls, New York 1955

Pesočinskij Ja. M., Mikroanalitičeskije vesi, EIKA, No 3 (22113-1), 1964, str. 5

Peters J., Les mesures interférométriques, Mesures *27* (1962), str. 681

Petković S., Elektronski metodi registracije prolaza zvezde kroz meridijan, Zbornik radova 4. simpozija JUKEM, Beograd 1969, knjiga 1, str. 35

Petley B. W., Morris K., A Measurement of $2e/h$ by the ac Josephson Effect., Metrologia *6* (1970), No 2, str. 46

Petrović V. V., O građenju koherentnih sistema jedinica, Tehnički list *20* (1938), str. 165

Pigin S. M., Laboratornije elektrostatičeskije pribori, EIKA, No 1 (552-1), 1962

Planck M.: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 4. izdanje, Barth, Leipzig 1921

Pohl R. W.: Optik und Atomphysik, 11. izdanje, Springer, Berlin 1963

Pohl R. W.: Mechanik, Akustik und Wärmelehre, 16. izdanje, Springer, Berlin 1964

Pohl R. W.: Elektrizitätslehre, 19. izdanje, Springer, Berlin 1964

Polhovski V., Četvrta osnovna jedinica u apsolutnom sistemu MKS električnih i magnetskih jedinica za merenje, Elektroprivreda *2* (1949), str. 175

Polhovski V., Nove električne i magnetske jedinice, Elektroprivreda *2* (1949), str. 221

Pontius P. E., Lafayette K. I., Mass and Force Calibration at NBS, Instruments and Control Systems *39* (1966), str. 77

Pound R. V., Knight W. D., A Radiofrequency Spectrograph and Magnetic Field Meter, Rev. Sci. Instruments *21* (1950), str. 219

Preston-Thomas H., Bedford R. E., Practical Temperature Scales Between 11 K and 273 K, Metrologia *4* (1968), No 1, str. 14

Preston-Thomas H., Kirby C. G. M., Gas Thermometer Determinations of the Thermodynamic Temperature Scale in the Range −183 °C to 100 °C, Metrologia *4* (1968), No 1, str. 30

Prosen M., Astronomska enota, Proteus *28* (1965/66), str. 148

Putilov K. A., Fabrikant V. A.: Kurs fiziki (Optika, atomnaja fizika, jadernaja fizika), 2. izdanje, GIFML, Moskva 1963

Quade W., Mathematische Fragen aus der Arbeit des AFF, ETZ-A *78* (1957), str. 285

Quinn T. J., Barber C. R., A Lamp as a Reproducible Source of near Black-Body Radiation for Precise Pyrometry up to 2700 °C, Metrologia *3* (1967), No 1, str. 19

Ramsey N. F., The Atomic Hydrogen Maser, Metrologia *1* (1965), str. 7

Ranojević M. N.: Sistemi jedinica i rešeni zadaci iz osnova elektrotehnike, Centralno udruženje studenata tehnike, Beograd 1947

Ranojević M., Racionalizacija uravnjenij elektromagnitnova polja, Električestvo 1959, No 6, str. 18

Rant Z.: Termodinamika, Univerzitetna založba, Ljubljana 1963

Rant Z.: Isparivanje i uparivanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1965

Rawcliffe G. H., The Rationalization of Electrical Units and Its Effect on the M.K.S. System, Proceedings IEE *97* (1950), Part I, str. 241, 270

Rayner G. H., An Absolute Determination of Resistance by Campbell's Method, Metrologia *3* (1967), str. 12

Ražnjević K.: Toplinske tablice, Tehnička knjiga, Zagreb 1964

Remnjev V. F., Ješče k vaprosu ob elektromagnitnih jedinicah, Električestvo 1949, No 12, str. 76

Reynolds W. C.: Thermodynamics, McGraw-Hill, New York 1965

Richard-Foy R., Mesures électriques de haute précision, Mesures 31 (1966), No 4, str. 79; No 5, str.77; No 6, str. 93

Richardson J. M., Brockman J. F., The U.S. basis of electromagnetic measurements, IEEE Spectrum *1* (1964), str. 129

Richardson J. M., The Functions of Commission I of the International Scientific Radio Union, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 743

Richter A.: Beleuchtungstechnik, Schäfer, Leipzig 1943

Riezler W., Walcher W.: Kerntechnik, Teubner, Stuttgart 1958

Riley J. C., The accuracy of series and parallel connections of four-terminal resistors, IEEE Transactions, Instruments and Measurement, *16* (1967), No 3, str. 258

Rodenwald H. J., Die Planck'schen Masseinheiten, Zeitschr. f. Naturforschung *5a* (1950), str. 173

Rogers J. S. i dr., Comparison Between Gas Thermometer, Acoustic, and Platinum Resistance Temperature Scales Between 2 and 20 K, Metrologia *4* (1968), No 2, str. 47

Romanowski M., On the Mean of Repeated Observations, Metrologia *2* (1966), No 1, str. 59

Romanowski M., Generalized Theory of the Modified Normal Distributions, Metrologia *4* (1968), No 2, str. 84

Rovešnjak M.: Statistička kontrola kvalitete, Panorama, Zagreb 1966

Rowley W. R. C., Ward L., An Investigation of the 605.8 nm Line Emitted by a Microwave Excited Kr-86 Lamp, Metrologia *4* (1968), No 3, str. 146

Rudikin G. A.: Tehnika izmjerenija razmjerov v mašinostrojenij, GNTI Mašinostroiteljnoj literaturi, Moskva 1958

Rudo N. M., Vesi (Obščij obzor), EIKA, No 1 (220-1), 1962, str. 107

Rumfelt A. Y., Elwell L. B., Radio Frequency Power Measurements, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 837

Sačkov V. I., Fizičeskoje opredeljenije jedinici vremeni, Izmjeriteljnaja tehnika 1964, No 9, str. 26

Salisbury J. K.: Steam Turbines and their Cycles, Willey & Sons, New York 1950

Sanders C. L., Thermodynamic Considerations in Realizing the Primary Standard of Light, Metrologia *3* (1967), No 4, str. 119

Sanders J. H.: The Fundamental Atomic Constants, Oxford University Press 1961

Sarbacher R. I., Edson W. A.: Hyper and Ultrahigh Frequency Engineering, Willey and Sons, New York 1948

Saverin M. A. (redaktor): Enciklopedičeskij spravočnik Mašinostrojenije, Tom 1, GNTI Mašinostroiteljnoj literaturi, Moskva 1947

Schafer G. E., A Systems Concept of Electromagnetic Measurements in the U.S.A., Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 775

Scheibe A., Die Quartzuhr als Frequenz- und Zeitnormal, ETZ-A *76* (1955), str. 153

Schelkunoft S. A.: Electromagnetic Waves, 4. izdanje, Nostrand, New York 1945

Schmidt E.: Einführung in die Technische Thermodynamik, 10. izdanje, Springer, Berlin 1963

Schouten J. P., Grootheden, Eendheden, Rationalisata, De Ingenieur *64* (1952), str. 103

Selby M. C., The System of Electromagnetic Quantities at 30 kHz to 1 GHz, Metrologia *2* (1966), No 1, str. 37

Selby M. C., International Comparison of HF and Microwave Electromagnetic Quantities, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 745

Selby M. C., Voltage Measurement at High and Microwave Frequencies in Coaxial Systems, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 877

Sewig R.: Handbuch der Lichttechnik I, Springer, Berlin 1938

Silsbee F. B., Establishment and Maintenance of the Electrical Units, National Bureau of Standards Circular 475, Washington 1949

Sim P. J., Taylor R. J., The Precise Measurement of Rectangular Coils to be Used in a Determination of the Gyromagnetic Ratio of the Proton, Metrologia *4* (1968), No 4, str. 149

Simkin G. S., K vaprosu sozdanija jedinova etalona vremjeni i dljini, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 10, str. 6

Sjedov L. I.: Metodi padobija i razmjernosti v mehanike, Gostehizdat, Moskva 1957

Sjena L. A., O klasifikacij razmernostjej, Žurnal tehn. fiziki *19* (1949), str. 279

Sjena L. A., O sravniteljnih preimučestvah različnih sistem jedinic, Električestvo 1959, No 6, str. 23

Skalicky M., Die neuen elektrischen absoluten Masseinheiten, Siemens (Austria) Zeitschrift *1* (1949), str. 25

Skvorcov S. A.: Teplopjeredača, Energija, Moskva—Lenjingrad 1964

Sljusarev G. G.: Geometričeskaja Optika, Akademija Nauk SSSR, Moskva 1946

Smirnova N. A., Rudo N. M., Reorganizacija v oblasti ispolzovanija etalonov jedinic masi, Izmjeriteljnaja tehnika 1961, No 6, str. 10

Smirnova N. A., Metrologičeskije raboti v oblasti izmjerenij masi, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 6, str. 38

Smythe W. R.: Static and Dynamic Electricity, McGraw-Hill Co, New York 1950

Snelleman W., A Flame as a Primary Standard of Temperature, Metrologia *4* (1968), No 3, str. 117

Snelleman W., Smit J. A., A Flame as a Secondary Standard of Temperature, Metrologia *4* (1968), No 3, str. 123

Solovjev V. E., Zemskij V. A., Jahinson B. I., Polivanov K. M., Kalantarov P. L., Malikov V. F., Diskusija o člancima Malikova i Kalantarova, Električestvo 1949, No 1, str. 59

Solovjev V. E., Sistemi mehaničeskih jedinic, Električestvo 1949, No 7, str. 77

Sommerfeld A.: Vorlesungen über theoretische Physik, I—IV, Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1950

Spieser R., Grundlagen, Mittel und Ziele der Lichttechnik, Bulletin ASE *17* (1946), str. 499

Starling S. G.: Electricity and Magnetism, Longmans, Green & Co, London 1948

Stecher R., Präzisionsstandvergleich räumlicher weit entfernter Zeitnormale, Nachrichtentechnik *17* (1967), No 10, str. 404

Steele J. McA., The Standard Frequency Monitor at the National Physical Laboratory, Proceedings IEE *102* (1955), Part B, str. 155

Stille U., Umrechnungstafel für die Zahlenwerte elektrischer und Magnetischer Grössen, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1943

Stille U., Rationale und nicht-rationale Behandlung des elektromagnetischen Feldes, Abh. Braunschw. Wiss. Gess. *1* (1949), str. 38

Stille U., Drei-, Vier- und Fünf-Grundgrössen-Gleichungen in der Elektrodynamik, Abh. Braunsch. Wiss. Gess. *1* (1949), str. 56

Stille U., Grössendefinition und Einheitenverknüpfung in der Elektrodynamik, Archiv für Elektrotechnik *40* (1952), str. 249

Stille U.: Messen und Rechnen in der Physik, Vieweg und Sohn, Braunschweig 1955

Stille U., Mass und Messen im Spiegel physikalisch-technischer Entwicklung, EuM *74* (1957), str. 25, 57

Stille U., Technisches Komitee TC 24 Elektrische und magnetische Grössen und Einheiten der IEC. Sitzung 6. bis 8. Juli 1959 in Madrid, Elektronorm *13* (1959), str. 267

Stratton J. A.: Electromagnetic Theory, McGraw-Hill Co, New York 1941

Strojnik A., O nekaterih problemih na meji zmožnosti električke merilne tehnike, Zbornik radova II jugoslavenskog simpozija o električkim mjerenjima i mjernoj opremi (Ljubljana, 1963), str. I-3

Stubbings G. W.: Dimensions in Engineering Theory, Crosby Lockwood and Son, London 1948

Studencov N. V., Čečurina E. N., Mjeri naprjaženosti magnitnova polja, EIKA, No 1 (II M 3911-1), 1962, str. 53

Studencov N. V. i dr., Izmjerenije značenija giromagnjitnovo otnošenija protona v slabom magnjitnom polje, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 11, str. 29

Stulla-Götz J., Das geplante internationalle Einheitensystem, Elektrotechnik und Maschinenbau *68* (1951), str. 215

Stulla-Götz J., Die Tagung des ISO-Technischen Komitees 12 in Kopenhagen, EuM *70* (1953), str. 418

Stulla-Götz J., Die 10. Generalkonferenz für Mass und Gewicht (CGPM), EuM *72* (1955), str. 322

Supek I.: Teorijska fizika i struktura materije, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1949

Supek I.: Teorijska fizika II, Školska knjiga, Zagreb 1952

Suškov V. V.: Tehničeskaja termodinamika, 4. izdanje, Gosenergoizdat, Moskva 1946

Svensson A., New Electronic Time Meter, Ericsson Review *32* (1955), str. 16

Sydnor R. i dr., Frequency Stability Requirements for Space Communications and Tracking Systems, Proceedings IEEE *54* (1966), No 2, str. 231

Szymanski H.: Jednostki miar, PWT, Warszawa 1956

Šaletić D., Merenje, jedinice i etaloni vremena, Tehnika *21* (1966), No 9, str. 212 E

Širokov K. P., Jedinici izmjerenija, EIKA, No 1 (3-1), 1962, str. 13

Širokov K. P., Razvitije metričeskoj sistemi mer i puti pjerehoda v SSSR k Meždunarodnoj sisteme jedinic, Izmjeriteljnaja tehnika 1964, No 4, str. 13

Širokov K. P., Principi postrojenija Meždunarodnoj sistemi jedinic, Izmjeriteljnaja tehnika 1964, No 10, str. 44

Širokov K. P., 50-letije metričeskoj sistemi v SSSR, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 9, str. 3

Škreb S., Kritika osnovnih pojmova Newtonove mehanike, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, knjiga 267 (83), Zagreb 1940

Šostin N. A., D. I. Mendeljejev i metričeskaja sistema mer, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 4, str. 3

Špoljanskij V. A., Černjagin B. M.: Električeskije pribori vremeni, Mašinostrojenije, Moskva 1964

Štandelj A. E., Ob utočnjenij simboliki v teorij razmjernosti, Žurnalj tehničeskoj fiziki, 1948, sept., str. 1221

Štern I., Mol kao jedinica za količinu materije, Zbornik radova Jurema 1967, Zagreb, str. 177

Tamm I. E.: Osnovi teorij električestva, Gostehizdat, Moskva—Lenjingrad 1949

Taylor B. N., On the Use of the AC Josephson Effect to Mantain Standards of Electromotive Force, Metrologia *3* (1967), No 4, str. 89

Telesnin R. V.: Molekuljarnaja fizika, Višaja škola, Moskva 1965

Terrien J., Le rattachement du mètre à une longueur d'onde lumineuse, Mesures & Controle Industriel *25* (1960), str. 1131

Terrien J., La désignation des termes spectroscopiques du krypton, Mesures et Controle Industriel *26* (1961), str. 1297

Terrien J., Moreau H., La radiation orangée du krypton 86 remplace le Mètre en platine iridié, La Nature 1961, No 3311

Terrien J., L'échelle internationale pratique de température, Revue Générale de Thermique 1964, Décembre (separat)

Terrien J., Le temps et son unité la seconde, La Nature 1965, No 3357

Terrien J., Scientific Metrology on the International Plane and the Bureau International des Poids et Mesures, Metrologia *1* (1965), str. 15

Terrien J., The Definition of the Second and the Atomic Frequency Standard, Metric Measures *8* (1965), str. 3

Terrien J., An air refractometer for interference length metrology, Metrologia *1* (1965), str. 80

Terrien J., News from the International Bureau of Weights and Measures, Metrologia *3* (1967), str. 23

Terrien J., The 54th Meeting of the Comité International des Poids et Mesures, Metrologia *2* (1966), str. 55

Terrien J., Preston-Thomas H., Progress in the Definition and in the Measurement of Temperature, Metrologia *3* (1967), str. 29

Terrien J., News from the International Bureau of Weights and Measures, Metrologia *4* (1968), No 1, str. 41

Terrien J., The Manner in which Progress is Made in the Standards for Physical Measurement, Metrologia *4* (1968), No 4, str. 190

Terrien J., News from the Bureau International des Poids et Mesures, Metrologia *5*, (1969), No 2, str. 68

Thiessen G. J., Progress in Measurements in Acoustics, Metrologia *3* (1967), No 3, str. 64

Thompson A. M., The Cylindrical Cross-Capacitor as a Calculable Standard, Proceedings IEE *106* (1959), Part B, str. 307

Thompson A. M., An Absolute Determination of Resistance Based on a Calculable Standard of Capacitance, Metrologia *4* (1968), No 1, str. 1

Thorževskij O. A., Pjezokvarcevije etaloni častoti, EIKA, No 4 (4911-1), 1965, str. 43

Thurlov G., Lee A. B.: Engineering Thermodynamics, The English Universities Press, London 1964

Tihodjejev P. M., Pjeresmotr svjetovih jedinic, Električestvo 1947, No 10, str. 41

Tjutikova M. I., Krutiljnije vesi, EIKA, No 3 (22121-1), 1964, str. 9

Tomaschek R.: Grimsehl's Lehrbuch der Physik II, 10. izdanje, Teubner, Leipzig—Berlin 1942

Tovčigrečko S. S., Vremja i ivo izmjerenije, EIKA, No 1 (1420-1), 1962, str. 35

Tripalo A., O sistemima jedinica u elektrotehnici, Nauka i tehnika *7* (1951), str. 340

Tripalo A., Za jedinstveni sistem jedinica za mere u nauci i tehnici, Nauka i tehnika *8* (1952), str. 82

Trnka Z.: Uvod do theoretické elektrotechniky, ESČ, Praha 1946

Truxal J. G.: Control Engineers' Handbook, McGraw-Hill Book Co., New York 1958

Ulich H.: Kratak udžbenik fizikalne kemije (preveo *R. Podhorsky*), Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1947

Utton D. B., Nuclear Quadropole Resonance Thermometry, Metrologia *3* (1967), No 4, str. 98

Vaisala Y., Oterma L., System of Quartmetres and the Absolute Length of its Gauges, Metrologia *3* (1967), No 2, str. 37

Vanier J., Nuclear Quadrupole Resonance Thermometry, Metrologia *1* (1965), str. 135

Vanovič J.: Kilogram—kilopond? (Sustava SI v praxi), SVTL, Bratislava 1964

Vargaftik N. B.: Spravočnik za teplofizičeskim svojstvam gazov i židkostjej, Gosfizizdat, Moskva 1963

Verejn E. L., Ob utočnjenij panjatija »gruzopodjemnost«, Izmjeriteljnaja tehnika 1964, No 10, str. 62

Vermeulen R., Dimensional Analysis, Units and Rationalization, Philips Research Reports *7* (1952), str. 432

Viaud M. F., L'intervention de l'État dans le domaine de la métrologie, Mesures *30* (1965), No 10, str. 75

Vieweg R., Merjenje—normiranje—produciranje (preveo *F. Avčin*), Elektrotehnišk i vestnik *27* (1959), str. 128, 187, 277

Vigoureux P., Electrical Units and Standards, Proceedings IEE *107 B* (1960), No 33, May, str. 235

Vigoureux P., Electric Units and Atomic Constants, Contemporary Physics *6* (1964), str. 15

Vigoureux P., A Determination of the Ampere, Metrologia *1* (1965), str. 3

Vitt P.: Gazovije turbini, Mašinostrojenije, Moskva 1965

Vivié J., Change Over to Metric System, Mesures *24* (1959), str. 853

Vivié J., Contre le »rideau de fer« des mesures! Mesures et Controle industriel *26* (1961), str. 1305

Vivié J., A propos du système international et du nouveau système français d'unités, Mesures *27* (1962), str. 669

Volkova E. A., O novom opredeljenij metra, Izmjeriteljnaja tehnika 1963, No 8, str. 5

Volkova E. A., Jedinici ugla i uglovije mjeri, EIKA, No 6 (114-1), 1966, str. 3

Vonsovski S. V., Šur Ja. S.: Ferromagnetism, Ogiz, Moskva—Lenjingrad 1948

Vranić V.: Vjerojatnost i statistika, 2. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1965

Vučić V. M.: Osnovna merenja u fizici, 8. izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1965

Wallot J., Zur Theorie der Dimensionen, Zeitschrift für Physik *10* (1922), str. 329

Wallot J., Die physikalischen und technischen Einheiten, Elektrotechnische Zeitschrift *43* (1922), str. 1329, 1381

Wallot J., Über den Wert der »Grössengleichungen« und über die Definition der magnetischen Polstärke, Elektrotechnische Zeitschrift *48* (1927), str. 430

Wallot J., Remarques sur le système d'unités Giorgi, Proc. Verb. CIPM 1935, str. 352

Wallot J., Grundeinheiten und Massysteme, Die Physik *10* (1942), No 1

Wallot J., Zur Definition der Grössen des elektromagnetischen Feldes und zur Theorie der Massysteme, Physikalische Zeitschrift *44* (1943), str. 17

Wallot J., Grössengleichungen und Zahlenwertgleichungen, Elektrotechnische Zeitschrift *64* (1943), str. 13

Wallot J., Elektrische Massysteme, Elektrotechnische Zeitschrift *64* (1943), str. 299

Wallot J., Massenkilogram und Kraftkilogram, Zeitschrift VDI *90* (1948), str. 213

Wallot J. (u ime AEF), Neufassung der Normblatts DIN 1301, Elektrotechnische Zeitschrift *73* (1952), str. 275

Wallot J., Grössendefinition und Einheitenverknüpfung in der Elektrodynamik, Archiv für Elektrotechnik *40* (1952), str. 256

Wallot J., Rationalisierung und Kohärenz, Archiv für Elektrotechnik *40* (1952), str. 325

Wallot J.: Grössengleichungen, Einheiten und Dimensionen, Barth Verlag, Leipzig 1953

Walsh J. W. T. i dr., Units and Standards of Light Maintained at the National Physical Laboratory, 1915—1960, Proceedings IEE *108* (1961), Part A, str. 173

Webb J. K., Chairman's Address, Proceedings I.E.E. *106 A* (1959), str. 11

Weber E.: Electromagnetic Fields (Theory and Applications), Willey and Sons, New York 1950

Wehr M. R., Richards J. A.: Fizika atoma, Gosatomizdat, Moskva 1961

Weigl R. G.: Grundzüge der Lichttechnik, Girardet, Essen 1952

Weitbrecht W.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Auflage (Sammlung Göschen, 641), de Gruyter, Berlin—Leipzig 1920

Weyl H.: Raum, Zeit, Materie, 2. izdanje, Springer, Berlin 1919

White C. E., World-Wide Control of Industrial Radio-Electronic Measurement Accuracy, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 748

Whitrow G. J., An Elementary Derivation of Eddington's Number 10^{78}, Nature *169* (1952), str. 611

Wieringen J. S. van, Paramagnetische Resonanz, Philips' techn. Rundschau *19* (1957/58), str. 341

Wildhack W. A. i dr., Accuracy Charts for RF Measurements, Proceedings IEEE *55* (1967), No 6, str. 1056

Winterhoff H., Genaue Magnetfeldmessungen mit dem Kernresonanz-Magnetfeldmesser, AEG-Mitteilungen *50* (1960), str. 382

Wyszecki G., The Measurement of Brightness and Color, Metrologia *2* (1966), No 3, str. 111

Yasunami K., On a New Method of Pressure Calibration up to 10 000 Bars, Metrologia *4* (1968), No 4, str. 168

Young H. D.: Fundamentals of Mechanics and Heat, McGraw-Hill, New York 1964

Young L., Electrical Units and Dimensions (sa diskusijom), Transactions AIEE *75* (1956), Part I, str. 767

Zagrebin D. V.: Vvedenije v astrometriju, Nauka, Moskva 1966

Zaveljskij F. S.: Vremja i ivo izmjerenije, Gos. izd. tehn. teoret. literaturi, Moskva 1955

Zavidonova S. A., Meždunarodnaja organizacija po zakonodateljnoj metrologij, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 11, str. 90

Zimmerman O. T., Lavine I.: Conversion Factors and Tables, Industrial Research Service Inc., New Hampshire 1955

Zinna N.: La metrologia di officina, Manuali technici Del Bianco, Udine 1965

Zubarev V. N., Aleksandrov A. A.: Praktikum po tehničeskoj termodinamike, Energija, Moskva 1965

Ženišek L., Mezinarodni soustava jednotek a technicka literatura, Elektrotechnicky Obzor *51* (1962), str. 59

Žilić S., Greške i statističke metode u kemijskoj analizi, poglavlje u knjizi *Filipović I.* i *Sabioncello P.*: Laboratorijski priručnik, I dio, 3. knjiga, Tehnička knjiga, Zagreb 1965

Žukovskaja L. K., Černiševa N. G., Ustanovka dlja graduirovki i pavjerki izmeritelej naprjaženosti slabih magnitnih paljej, EIKA, No 1 (II I 594-1), 1962, str. 185

Anonimni autori

Amendment No. 1 to British Standard 350: Part 1: 1959, Conversion factors and tables, Part 1. Basis of tables. Conversion factors (April 18, 1963)

Amendment No. 2 to British Standard 350: Part 1: 1959, Conversion factors and tables, Part 1. Basis of tables. Conversion factors (October 7, 1963)

American Petroleum Institute: Manual on Installation of Refinery Instruments and Control Systems (Part II: Process Stream Analyzers), Second edition (API RP 550), New York 1965

Annual Report 1966-67, Division of Applied Physics, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Sydney

Astronomičeskij ježegodnik SSSR na 1966 god, Akademija nauk SSSR, Moskva 1963

British Standard 350: Conversion factors and tables. Part 1: Basis of tables Conversion factors (1959), Part 2: Detailed conversion tables (1962)

British Standard 1991: Recommendations for Letter Symbols, Signs and Abbreviations. Part 6: Electrical Science and Engineerig (1963)

CCIR(International Radio Consultative Committee), Doc. VII/7-F, 1968 (V. Britanija): Emissions de signaux horaires (Diffusion du temps universel coordonné, TUC, et du temps atomique avec sauts, TAS, dans une émission unique)

CCIR, Doc. VII/14-F, 1968 (USA): Statistiques comparatives concernant les proprietes des signaux de temps universel et de temps atomique

CCIR, Doc. VII/17-F, 1968 (USA): Systèmes de temps coordonnés

CCIR, Doc. VII/32-F, 1968 (USA): Notation à employer pour les indications lues sur les horloges et pour les valeurs fourniers par les générateurs de fréquence

CCIR, Doc. VII/34-F, 1968 (Japan): Emissions de fréquences étalon et de signaux horaires en ondes kilométriques

CCIR, Doc. VII/39-F, 1968 (BIH): Réalisation d'une échelle internationale de temps atomique

CCIR, Doc. VII/40-F, 1968 (BIH): Intercomparaison des étalons de fréquence par l'intermediaire des émissions de fréquences étalon sur ondes très longues

CCIR, Doc. VII/70-E, 1968: Creation of an International Working Party (VII/1) on the UTC System

Comité International des Poids et Mesures, Échelle Internationale Pratique de Température de 1948 (Édition amendée de 1960), Gauthier-Villars, Paris 1960

Comité International des Poids et Mesures, The International Practical Temperature Scale of 1968, Metrologia *5* (1969), No 2, str. 35

Commission Électrotechnique Internationale: Symboles littéraux internationaux utilisées en électricité, 3. izdanje, Bureau Central de la CEI, Geneve 1953

Commission Électrotechnique Internationale: Vocabulaire Électrotechnique International, Groupe 08: Électroacoustique (1960); Groupe 15: Tableaux et Appareils de Couplage et de Réglage (1957); Groupe 35: Applications Électromécaniques (1950); Groupe 50: Électrochimie et Électrométallurgie (1960)

Commission Électrotechnique Internationale: Recommandations dans le domaine des grandeurs et unités utilisées en électricité, Publication 164, 1964

Commission Électrotechnique Internationale: Dénomination des grandeurs caractérisant les propriétés magnétiques et électriques du vide et d'une substance, Publication 206, 1966

Commission internationale de l'éclairage: Compte rendu des séances 1948, Clowes and Sons, London 1950

Commission internationale de l'éclairage: Compte rendu des séances 1951, Vol. III, Bureau Central de la CIE, New York 1951

Compte Rendus des Séances de la Douzième Conférence Générale des Poids et Mesures (6.—13. octobre 1964), Gauthier-Villars, Paris 1964

ČSN 01 1300: Zakonne měrove jednotky, 3. 1. 1963

DIN-Norme 1304 (1955): Allgemeine Formelzeichen

DIN-Norme 1349 (1955): Lichtabsorption in optisch klaren Stoffen (Grössen und Bezeichnungen)

DIN-Norme 1314 (1956): Druck (Begriffe, Einheiten)

DIN-Norme 1332 (1957): Formelzeichen der Akustik

DIN-Norme 1342 (1957): Viskosität bei Newtonschen Flüssigkeiten

DIN-Norme 1306 (1958): Dichte (Begriffe)

DIN-Norme 1339 (1958): Einheiten magnetischer Grössen

DIN-Norme 1357 (1958): Einheiten elektrischer Grössen

DIN-Norme 1318 (1959): Lautstärke (Begriffbestimmung)

DIN-Norme 1320 (1959): Allgemeine Benennungen in der Akustik

DIN-Norme 1341 (1959): Wärmeübertragung (Grundbegriffe, Einheiten, Kenngrössen)

DIN-Norme 1344 (1959): Formelzeichen der elektrischen Nachrichtentechnik

DIN-Norme 1345 (1959): Technische Thermodynamik (Grössen, Formelzeichen, Einheiten)

DIN-Norme 40110 (1959): Wechselstromgrössen

DIN-Norme 1338 (1961): Buchstaben, Ziffern und Zeichen im Formelsatz

DIN-Norme 1301 (1962): Einheiten (Kurzzeichen)

DIN-Norme 1313 (1962): Schreibweise physikalischer Gleichungen in Naturwissenschaft und Technik

DIN-Norme 1319 (1963): Grundbegriffe der Messtechnik

DIN-Norme 1305 (1964): Masse, Gewicht (Begriffe)

DIN-Norme 1343 (1964): Normzustand, Normvolumen

Eidg. Amt für Mass und Gewicht (Bern), Zur Einführung neuer elektrischer, magnetischer und photometrischer Einheiten, Bull. SEV *41* (1950), str. 1

Elastic Devices as Comparators for Large Weight Calibration, Technical News from U. S. Dpt. of Commerce, Washington 1964

GOST 7663 (1955): Obrazovanije kratkih i doljnih jedinic izmjerenija. Sokraščenije oboznačenija jedinic izmjerenij

GOST 7932 (1956): Svjetovije jedinici

GOST 8033 (1956): Električeskije i magnjitnije jedinici

GOST 8849 (1958): Akustičeskije jedinici

GOST 8550 (1961): Teplovije jedinici

GOST 7664 (1961): Mehaničeskije jedinici

GOST 8848 (1963): Jedinici rentgenovskovo i gamma-izlučenija i radioaktivnosti

Gosudarstvenij komitet standartov, mjer i izmjeriteljnih priborov SSSR, Metodičeskoje pismo No 1, Izmjeriteljnaja tehnika 1964, No 10, str. 22

ISO Recommandation R 31/I: Grandeurs et unités de base du SI, 2. izdanje, 1965

ISO Recommandation R 31/III: Grandeurs et unités de mécanique, 1960

ISO Recommandation R 31/IV: Grandeurs et unités de chaleur, 1960

ISO Recommandation R 31/V: Grandeurs et unités d'électricité et de magnétisme, 1965

ISO Recommandation R 31/VII: Grandeurs et unités d'acoustique, 1965

ISO Recommandation R 31/XI: Signes et symboles mathématiques employer dans les sciences physiques et dans la technique, 1961

JUS U.C9.100 (1962): Dnevno i električno osvetljenje prostorija u zgradama

Konzuljtacije o SI, Izmjeriteljnaja tehnika, 1963, No 7, str. 60

Microsecond Timekeeping Accuracy, Instruments and Control Systems *40* (1967), No 6, str. 79

National Bureau of Standards, Announcement of Changes in Electrical and Photometric Units, NBS Circular C 459, Washington 1948

NBS, Standard Frequency and Time Notices, Proceedings IEEE *53* (1965), No 1, str. 108

NBS (Radio Standards Laboratory), Standard Frequency and Time Notices, Proceedings IEEE *55* (1967), No 3, str. 479

New NBS Force-Calibration Facilities in Operation (Capacity Increased to One Million Pounds), Technical News from U. S. Dpt. of Commerce, Washington 1965

New Values for the Physical Constants, Instruments and Control Systems *37* (1964), str. 85

Novaja rekomendacija MKRE po veličinam i jedinicam ionizirujuščih izljučenij, Izmjeriteljnaja tehnika 1963, No 10, str. 54

Pjervaja vsesojuznaja tehničeskaja konferencija po metrologij i tehnike točnih izmjerenij, Izmjeriteljnaja tehnika 1968, No 11, str. 95

Rugged Fast-operating balance for Weighing 50-Pound Loads, Technical News from U. S. Dpt. of Commerce, Washington 1964

Terminološka komisija Elektrotehniškega društva Slovenije: Slovenski elektrotehniški slovar; skupina 05: Osnovne definicije (1957); skupina 07: Elektronika (1959); skupina 10: Stroji in transformatorji (1959)

The National Standards Laboratory, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Melbourne 1966

Time Interval Measurement, Instruments and Control Systems *35* (1962), No 9, str. 125

Time Standards, Instruments and Control Systems *38* (1965), str. 87

Zakon o merove službe, Sbirka zakonu ČSSR, Praha 1962, str. 209

Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima, Službeni list FNRJ, 1961, br. 45, str. 941



Do koje je mjere vaš laboratorij automatiziran?

Mnogo je još neistraženih stvari koje su vam potrebne da biste potpuno automatizirali svoj laboratorij. Stotinu dvadeset istraživača u našem laboratoriju misle da će tako biti još nekoliko godina.

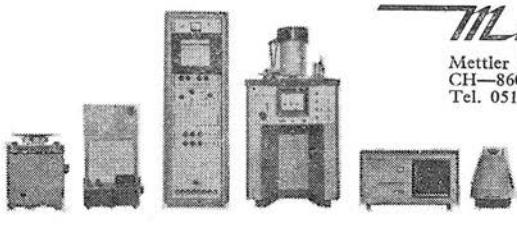
Prvi prilog automatizaciji dali smo 1946. prvom vagom koja je vagala uzorke deset do dvadeset puta brže od stare vage s dvije zdjelice. Mettlerove su vage stalno usavršavane. Na primjer Mettlerova vaga level-matic automatski kompenzira pogreške razine, digitalni je indikator ubrzao čitanje rezultata, a sustav za tariranje skraćuje vaganje.

Ako je vaše vrijeme još uviiek preskupo za čitanje i upisivanje rezultata, možete kupiti našu vagu s tiskaljkom. Ona ispisuje rezultate na traci do pet mjesta tačno. Ili pak možete kombinirati Mettlerovu vagu s nekom zapisnom spravom ili računalom.

Neke od Mettlerovih mjernih sprava još su više automatizirane. Termoanalizator može izdvoditi TGA/ /DTG/DTA mjerenja simultano. Sve veličine i mjerene vrijednosti crtaju se krivuljama u boji.

Mettler FP1 automatski određuje talište i vrelište s brzinom većom od 30 uzoraka na sat, a mjerne vrijednosti pamti digitalno. FP2 je namijenjen za mikrotermijska istraživanja, a FP3 automatski određuje kapljivost. (Dobra vijest za industriju masnoća.)

U toku su nam istraživanja na nekoliko sasvim novih termičkih i volumetrijskih mjernih sprava. Neke su već u komori za testiranje, gdje ispitujemo svaku novu mjernu spravu pomoću teških testova o izdržljivosti. Konačno, kad se postupci mjerenja jednom automatiziraju, tada automatizirana mjerna sprava može zaista raditi nezavisnije od čovjeka.



Mettler

Mettler Instrumente AG
CH—8606 Greifensee-Zürich, Switzerland
Tel. 051 87 63 11

ATM

PODUZEĆE ZA AUTOMATIZACIJU I TEHNIKU MJERENJA U INDUSTRIJI

MJERENJE I REGULIRANJE

TEMPERATURA

TLAK

PROTOK

RAZINA

ANALIZA

VLAŽNOST

GUSTOĆA

KONZULTACIJE

PROJEKTIRANJE

PROIZVODNJA

MONTAŽA

PUŠTANJE U POGON

SERVIS I

ODRŽAVANJE

ATM ▲ ZAGREB ▲ Heinzelova 70a ▲ Telefoni: 514-122, 515-713 ▲ Telex: 21364

sartorius

Izrađujemo najosjetljivije precizne i analitičke vage. Svaki proizvod naše tvornice podvrgnut je izvanredno strogim kontrolama, a povezuje gotovo stogodišnja iskustva u izradi vaga s najmodernijim tekovinama u tehnici vaganja. Naše mehaničke i elektroničke vage svakodnevno služe napretku u znanosti, industriji i istraživanju u više od stotinu zemalja svijeta.

Vrhunski proizvodi našeg proizvodnog programa jesu precizne i analitičke vage tipa 3300 i tipa 3400. One imaju digitalni izlaz za priključak na sustav za obradu podataka (tiskaljku, računalo, bušilicu) ili indikator (na primjer daljinsko otčitavanje).

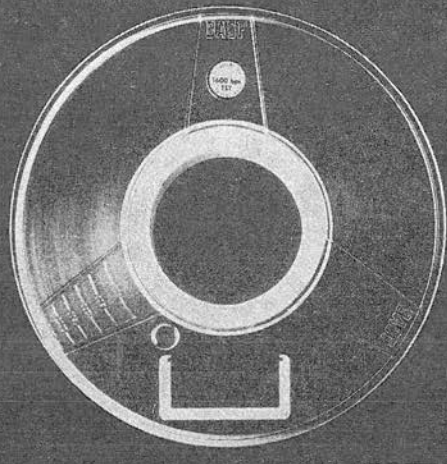
Program Sartorius-Membranfilter GMBH služi narodnom zdravlju. Dobavljamo filtere i aparate za ispitivanje zagađenosti zraka klicama (higijena zraka), kao i za bakteriološku kontrolu pića i živežnih namirnica. Sartoriusova metoda membranskih filtera čini potpunu cjelinu koja je, pošto je obrađena na temelju najmodernijih postavki, višestruko standardizirana.

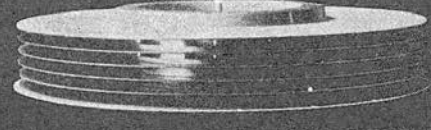
Pojedinačno dobavljamo, uz raznovrsne membranske filtere, filtracijske aparate, hranjive podloge i folije za elektroforezu te opsežan pribor. Iscrpne informacije, naputak za rad i upute na literaturu dajemo besplatno na raspolaganje u obliku priručnika.

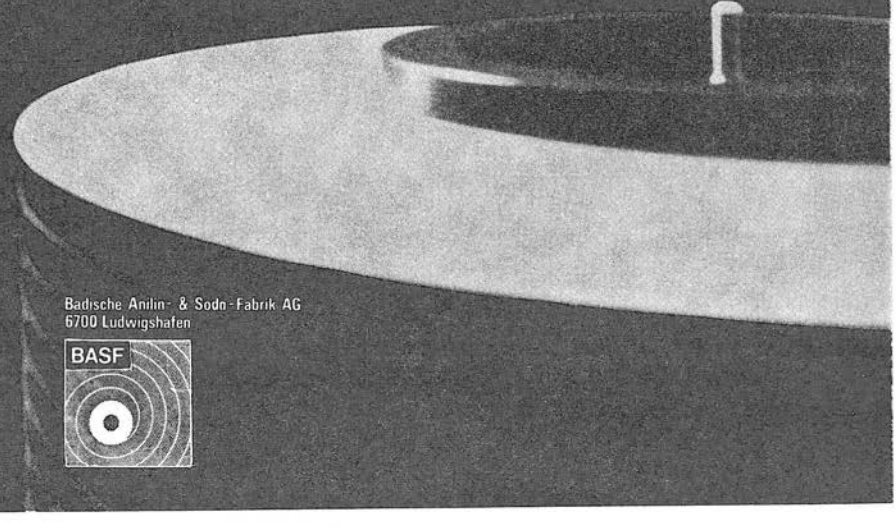
Ako imate pitanja tehničke prirode ili želite pobliže informacije, molimo da nam se javite. Uvijek smo vam na raspolaganju i rado ćemo vam dostaviti opširne prospekte.

SARTORIUS-WERKE GMBH • D-34 GÖTTINGEN • POSTFACH 19
Weender Landstr. 96-102 • Telefon (05 51) 310 31-34 • Telex 096 830

BASF složaj magnetskih ploča
BASF magnetske trake za računala -
pratilac računala u cijelom svijetu







Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG
6700 Ludwigshafen

BASF

U cijelom svijetu
su
precizni mjerni instrumenti
opremljeni
našim pouzdanim sastavnim
elementima

Naša specijalizacija
— Vaša korist!
Dobavljamo vam pojedinačno
ili sastavljeno:

krute ili gipke kamene ležaje
šiljke za ležaje
osovine za pomično željezo
okvire svitaka — željezne jezgre
nosače mjernih sistema
željezne prstene itd.

Nadalje dobavljamo i druge vrlo vrijedne precizne sastavne dijelove prema vašim nacrtima

PREFAG

CARL RIVOIR & CO. 7519 WÖSSINGEN/BRP DEUTSCHLAND
Prefagstr. 4 • Telefon 07203-281/282/106 • Telex D-07 826531

Dobavljam

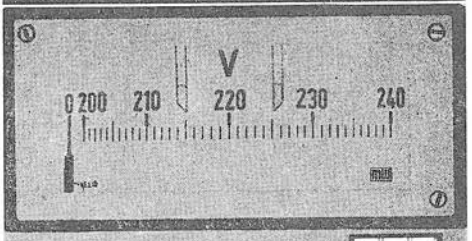
MJERNE, REGULACIJSKE I NADZORNE SPRAVE ZA PROTOČNE TVARI

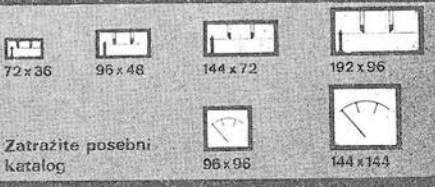
i to za:

PROTOK	brojila mjerila trenutnih vrijednosti žlijebna mjerila regulatore količine pokaznike protoka dojavnike strujanja itd.
RAZINU	pokaznike zapisne sprave sklopne dojavnike razine sprave za upravljanje pumpama itd.
TLAK PODTLAK RAZLIKU TLAKA	pokaznike zapisne sprave sklopne dojavnike tlaka redukcijske ventile sigurnosne ventile
TEMPERATURU	regulatore temperature sklopne dojavnike temperature itd.
POSEBNI UREĐAJI	mjerila vodljivosti mjerila gustoće
ARMATURE	raznovrsne

ING. GÜNTHER WUTZELHOFER
A-3400 Klosterneuburg - Postfach 81
Österreich

m&w REGULATOR
induktivni dvopoložajni za sve električne mjerne veličine
Mjere u skladu sa DIN 43700
Pravokutni oblik 72 x 36, 96 x 48, 144 x 72, 192 x 96 mm
Četverokutni oblik 96 x 96, 144 x 144 mm
Struja, napon, otpor, temperatura, frekvencija, snaga





Zatražite posebni katalog

MÜLLER & WEIGERT · NÜRNBERG

Knjige i časopise

iz svih oblasti
znanosti i književnosti
iz svih zemalja svijeta
možete naručiti
preko našeg odjela

UVOZ - IZVOZ

TEHNIČKA KNJIGA - ZAGREB
Jurišićeva 10 - Tel. 35 097

Elektroničke mjerne sprave MOVIPORT za brzinu vrtnje, brzinu i protok

s mjerenjem bez neposrednog dodira,
bez utjecaja na mjerenu veličinu,
fotoelektrično i induktivno,
1 okr/min . . . 1 000 000 okr/min

kontinuirana i digitalna:
ručna mjerila brzine vrtnje
stolne sprave s mogućnošću zapisivanja
uređaji za ugradnju na strojevima

za upotrebu u:
industriji tekstila i papira
(također za rastezanje i stezanje)
elektranama
strojogradnji i elektrotehnici
kemijskoj industriji

u pogonu i u razvoju

IES
INDUSTRIE-ELEKTRONIK STUTTGART
J. & A. BRAUN KG

D 7012 Schmiden bei Stuttgart
Postfach 170, Tel. (0711) 586575

Kazalo imena

A

Agaleckij 319, 322
Allan 374
Amontons 820
Ampère 912, 1073, 1093
Arago 1092
Arhimed 470
Aristarh 423
Arndt 1179
Astbury 993, 1054
Avčin 210, 416, 418, 502, 823, 1106, 1131
Avogadro 737
Ayrton 1000

B

Babinet 231
Bahrami 340
Barber 817
Barus 1008
Bego 1049
Behler 398
Bell 694
Benoit 213, 232
Berkeš 972
Bernoulli 503, 558, 601
Berroth 297
Berry 818
Bessel 317
Bird 278
Bloch 901
Blondel 1179, 1186
Bock 428
Bodea 506, 823
Bohr 92, 898
Bokšan 502
Boltzmann 1145
Borda 184, 305
Bošković 98
Bošnjaković 1133
Bouguer 297
Bouma 1150
Božić 1039
Bright 1094
Broek 743
Brouwer 385
Brown 92, 339
Brylinski 1127
Brežezinski 253
Burgess 1210
Busemann 416

C

Cady 1151
Campbell 994, 987, 1101
Cannon 550, 552
Carcel 1207
Cassini 363
Cavendish 290
Celsius 791, 800
Cerrato 319
Cezar 359
Ciolkovskij 286
Ciscar 184
Clark 319, 1094
Clausius 774
Clothier 982, 1005
Coblentz 1151
Cook 318
Cotter 993
Coulomb 921
Critchfield 956
Curtis 956, 986, 993
Cutkosky 1054

Č

Čubranić 94

D

Dabac 866
Daniell 1092
Danjon 345, 351
Darcy 601
Delambre 183
Dionizij Mali 360
Doppler 260, 272, 277
Driscol 956

E

Eddington 455
Edlén 239, 241
Eingelhardt 278
Emde 880
Emerson 1151
Eötvös 298
Essen 393, 341
Euler 299, 996

F

Fabroni 184
Fabry 208, 232
Fahrenheit 798
Faraday 880, 922, 1109
Favre 859
Fenske 550, 552
Filipović 467
Fischer 1091
Flamm 1242
Fleischmann 416
Flemming 355, 455
Fletcher 706
Forsythe 1151
Fortin 184
Fourier 765
Froome 1055
Furtwängler 317

G

Galilei 33, 456
Galvani 1092
Gauss 98, 115, 119, 215, 303, 880, 1075, 1090
Gay-Lussac 737
Geršun 1178
Gibbs 820
Gibson 1150
Giorgi 501, 1098, 1099
Goethe 1150
Gosset 130
Green 696
Grover 973
Guillaume 204
Guillet 321

H

Hall 341, 818
Hallert 91
Harcour 1207
Harriss 1008
Hartshorn 993, 999, 1054
Hauy 184
Hayford 424
Heaviside 1086, 1098, 1106
Hefner-Alteneck 1207
Heisenberg 92
Helland-Hansen 619
Helmberger 1055
Helmholtz 692, 965, 1079
Helmert 317
Hertz 449
Heusinkveld 818
Heyl 318
Hoffmann 608
Höppler 549
Horsford 817
Houghton 211
Howlett 302
Humboldt 737
Humtoon 210
Huygens 183
Hyde 1151

I

Ives 1151, 1178

J

Jakob 858
Jeans 1144
Jeffreys 319
Jegorov 319
Jewel 279
Jones 1178
Jones-Viriamu 995
Josephson 1017
Joule 519, 774

K

Kalantarov 1125
Karolus 1055
Kater 316
Kayan 197
Kayser 279
Kelvin 774, 1008, 1013, 1094
Kennelly 1127
Kepler 290, 347, 424
Kingsburry 706
Kirchhoff 1141, 1142
Knežević 209
Kohlrausch 1091, 1110
Kopfermann 337
Kösters 257
Kotter 993
Kovačević 407
Krasovski 422
Krüss 1186
Kühnen 317
Kukkamäki 319

L

Ladenburg 549
Lambert 1134, 1137, 1179
Lampard 1000
Lampe 257
Lande 368
Landolt 416
Langlois 183
Laplace 184
Larmor 900
Lavoisier 184
Leclanché 1092
Lefevre-Geneau 184
Legendre 115, 184
Lenoir 183
Lorentz 1086
Louis 455
Louis de Broglie 204
Lowel 1054
Lummer 1210

Lj

Ljubimov 589

M

Mach 453
Mache 1242
Manning 643
Marcinjak 322
Markowitz 341
Mattauch 725
Maxwell 880, 965, 1063
Méchain 183
Meggers 265
Mendeljejev 204, 502, 743
Meunier 183
Meyer 1242
Michelson 204, 213, 231, 279, 1055
Mie 1125
Miljanić 212, 442, 445
Mon 986
Monge 183
Moon 993, 1179, 1181
Morgan 398, 1249
Moser 780, 818
Mouton 183
Mungall 374, 404
Munsell 1150
Munson 706

N

Naggiar 1218
Napier 710
Napoleon 362
Newcomb 332, 352
Newton 168, 284, 289, 548, 769
Nicholson 385
Nutting 1151

O

Oberdorfer 1125
Oersted 1092
Ogawa 981
Ohlon 1013
Ohm 922, 1095
Oldham 35
Oprešnik 784
Orlando 182
Ostwald 550, 741

P

Page 1044
Parry 341
Paschen 269
Pauli 744, 901
Perot 208, 232
Perry 1000, 1098, 1125
Peterlin 208
Peterson 993
Planck 455, 1142, 1143
Planté 1092
Platon 32
Pohl 757, 881
Poiseuille 504, 546
Poisson 62, 119
Preston-Thomas 321
Priest 1151
Purcell 901
Purkyně 1209

R

Rabi 372, 901
Racah 270
Ramsey 372, 901
Rankine 839
Ravner 1054
Rayleigh 1100, 1103, 1110, 1144
Repsold 317
Revers 1151
Richards 291, 1110
Richardson 62
Riley 1044
Rogers 1098
Romanowski 1054

Röntgen 1215
Rosa 973, 1044
Rossini 862
Rowland 213, 279

S

Sabioncello 467
Sadler 385
Sakuma 322
Saleh 403
Sandström 619
Scalinger 362
Schrödinger 1150
Searles 998
Shortt 318
Siegbahn 204
Siemens 922, 1094
Silbermann 859
Sinstenden 1092
Smith 813, 991, 1110
Snow 986
So 1151
Sokrat 32
Sommerfeld 882
Sozigen 359
Sparks 986, 993
Spencer Jones 337, 339
Stefan 822 1145
Stevens 703
Stille 455
Stokes 317, 549
Stratton 881
Strömer 800
Student 130
Swiden 184

Š

Šaletić 407

T

Talleyrand 183
Tate 323
Taylor 1017
Terrien 253, 282
Tesla 502
Thalén 279
Thomas 993, 1045, 1054
Thompson 319, 774, 1001, 1054, 1094
Thulin 321
Torricelli 504
Townes 259
Tralles 184
Tresca 189
Tyndall 1150

U

Ubbelohde 553
Ulbricht 1186

V

Verrier 332
Vieweg 33
Vigoureux 905, 956, 959, 993
Vinci 1150
Volet 321
Volta 921, 1092
Volter 204

W

Waidner 1210
Wallot 416, 608
Watt 168, 536
Watts 341
Weber 922, 1091, 1093
Weston 1022
Wheatstone 1094
Wien 1144
Wolff 1044

Z

Zeeman 204, 260, 367

Kazalo stvari

A

a *vidi* ar 433, P9
a *vidi* atto 65
A *ili* ac *vidi* acre 661, 663, P9
A *vidi* amper 921, 926, 1096
Å *vidi* ångström 213, 278, 420
aberacija 337
acre 661, 663, P9
adijabata 750, 775
admitancija 987
afel 347
agregatno stanje 777
aksiomska fizikalna veličina 225
aktivno pramjerilo 366
aktivnost raspadanja 1219
—, specifična 1220
akustička energija 693
— —, gustoća 687
— impedancija 690, 693
— masa 694
— snaga 686, 693
akustički kapacitet 693
— otpor 689, 693
— protok 693
akustičko normirano stanje 735
akustika, objektivna 683
alkohol, maseni udio 485
—, volumni udio 485
alkoholometrijska skala, centezimalna 485
am *vidi* attometar 420
American commercial ton of refrigeration, CTR (US) 542
— Petroleum Institute, skala 484
američke jedinice volumena 666
amper (A) 503, 919, 921, 926, 1096
—, definicija 914
—, internacionalni 1109
—, pramjerilo 912
—, —, nuklearno 963
—, reproduciranje 963
—, srebrni 1102
analogija akustičkih pojava 692
angloameričke jedinice duljine 648, 658, 661
— — —, pomorske 661
— — energije 528
— — mase 649, 671, 675
— — —, opća primjena 671
angloameričke jedinice mase (*nastavak*)
— — — u draguljarstvu 675
— — — u farmaciji 672
— — površine 661
— — protoka 486
— — topline 863
— — volumena 663, 670
— — —, pomorske 669
— — za drvo 669
angloamerički koherentni sistem jedinica mehanike 677
— tehnički sistem jedinica 678, 857
ångström (Å) 213, 278, 420, 503
antena, otpor 1119
apogej 348
apostilb (asb) 1196
apothecaries' dram (dr ap) 674
— ounce (oz ap) 674
— pound (lb ap) 674
— scruple (s ap) 674
apothecaries-system 672
apsolutna jedinica 1095
— nula 792
— razina snage 710, 711
— susceptibilnost 891
— temperatura 777
— vrijednost 1050
apsolutne jedinice 1105
apsolutni tlak 490, 491
apsolutno mjerenje 1050, 1093
apsorpcija, koeficijent 1141
ar (a) 433, P9
areometar 470, 480
areometarska gustoća 481
— skala American Petroleum Institute 484
— —, Ballingova 484
— —, Bauméova 481, 484
— —, Beckova 484
— —, Brixova 484
— —, Cartierova 484
— —, Stopanova 484
— —, Twaddelova 482, 484
areometarske skale gustoće 479, 484
arhivski metar 184
aritmetička sredina 98
— —, srednja kvadratna pogreška 103
artiljerijska hiljadita 430
asb *vidi* apostilb 1196

astronomska jedinica 422, 426
— oznaka trenutka 362
astronomski godišnjaci 332
atmosfera, normalna 508
—, tehnička 509
atmosferski tlak 491
atmosphere, british (br atm) 514
atom, elektronska konfiguracija 267, 744, 745
—, označivanje 83
atomi, radioaktivni, životna dob 1219
atomska masa, relativna 720
— (fizikalna) sekunda 327
— ura, glavna 392
— vremenska skala 376
— — —, diskontinuirana 388
atomski broj 744
— etalon 366
— rezonator 370
atomsko pramjerilo frekvencije 365
— — sekunde 364
— vrijeme 376
— —, diskontinuirano 390
— —, međunarodno 381
atto ($a=10^{-18}$) 65, 223
attojoule (aJ) 522
automatski fotometar 1189
Avogadro-Loschmidtova konstanta 75
Avogadrov zakon 754
Avogadrova konstanta P3
Ayrton-Jonesova strujna vaga 949

B

B (b) *vidi* bel 694, 696
BAAS 1094
bag 670
balističko mjerenje 320
Ballingova skala 484
bar 504, 507, 619
Barbeyeva viskoznost 573
barleycorn 661
barn 433
barrel 648, 666, 667
—, brewers' 667
—, cranberry 667
—, dry (bbl) 666
—, imperial 667
—, liquid 667
— of cement 667
—, petroleum 667
barretter 1058
barye 508, 618
Bauméov stupanj (°Be) 481
Bauméova skala, američka 484
— —, holandska 484
— —, racionalna 484
— —, starija 484
baždarenje, interferencijsko 259
— mjernih prstena 314
—, postrojenje 312
— solenoida, shema 969
baždarna granična pogreška 140
bbl *vidi* dry barrel 666
°Be *vidi* Bauméov stupanj 481
beaufort 455
Beaufortova skala brzina 455
Beckova skala 484
bečki četvorni hvat 434
bel (B) 503, 694, 696
bernoulli (B) 503, 557
Besselova godina 335
b ft *vidi* board foot 669
bilijun 652
BIML 205
biološka djelotvornost, relativna 1249
biot (Bi) 503, P43
BIPM 187, 201, 212, 213
Blindwatt (bW) 933
blondel 1197
board foot (b ft) 669
bofor 455
Bohrov magneton P4
boja, temperatura 220, 1181, 1211
bolometar 1058, 1060
bolometrička metoda 1058
bolt of cloth 661
Boltzmannova konstanta 753, 758, P3
bougie décimale 1208
brewers' barrel 667
Britansko udruženje za unapređenje znanosti 1094
british atmosphere (br atm) 514
British commercial ton of refrigeration, CTR 542
— thermal unit (Btu) 530, 863
— thermal unit per hour (Btu/h) 542
Brixova skala 484
brodska ura 397
— tona 438
brojčana jednadžba 43, 45, 47, 49, 636, 796, 875, 1071, 1083, 1116
— veličina 694
brojčani iznos 39
brojenje dana 347
— —, kontinuirano 362
brzina 440
—, kutna (rotancija) 441, 443, 445, 458
— polja 893
— svjetla 1055, P3
— —, nepouzdanost 1054
— vjetra, beaufort 455
— vrtnje (frekvencija vrtnje) 442 . . . 445, 457, 458
— zvuka 683
brzohodnost 603
Btu *vidi* British thermal unit 530, 863
Btu/h *vidi* British thermal unit per hour 542
bucket 670
burnup, specific 865, 866
bushel 651, 666, 657, P12
butt 670
bW *vidi* Blindwatt 933

C

c *vidi* centi 65
c *i* C *vidi* curie (Ci) 1238
C *vidi* coulomb 921, 1096

°C *vidi* Celzijev stupanj 791
cable length 661
Campbellov most 988
Campbellovo pramjerilo 987, 988
candela (cd) 224, 921, 1175, 1193, 1210
—, definicija 1194
candle/inch² (cd/in²) 1200
candle, pentane 1207
—, sperm 1207
Cannon-Fenskeov viskozimetar 550
carat 676
carcel 1207
carnot 823
Carnotov proces 774
Cartierova skala 484
cbar *vidi* centibar 508
cd *vidi* candela 1193
cd/in² *vidi* candle/inch² 1200
cel 451
celzij 793
Celzijev stupanj (°C) 791
Celzijeva termodinamička temperatura 791
cent 197, 701
centa, metrička (q) 433, 473
cental 672
centenarium 181
centezimalna alkoholometrijska skala 485
— jedinica 428
centi ($c=10^{-2}$) 65
centibar (cbar) 508
centifermi 420
centigrade heat unit (CHU) 865
— thermal unit (CTU) 865
centilitar (cl) 437
centimetar (cm) 419
—, kubni (cm^3) 436
—, kvadratni (cm^2) 431
centimetar^{-1} (cm^{-1}) 533
centipoise (cP) 560
cezij 133
cezijev rezonator 369
cezijevo pramjerilo 367
CGSE jedinica elektrike 1064
— sistem jedinica 1063, 1085
CGSM i CGSE sistem jedinica, postanak 1089
— jedinica elektrike 1074
— sistem jedinica 1073, 1085
CGS (fizikalni) sistem jedinica mehanike 616
— — — elektromagnetizma 1063, 1073
— — — —, nepotpuni 1086
— — — ionizirajućih zračenja 1231
ch *vidi* konjska snaga 539
chain 659, P5
chaldron 664, 670
CHU *vidi* centigrade heat unit 865
Ci *vidi* curie 1221
cijena robe 595
ciklotron 936
c in *vidi* circular inch 662
CIPM 187, 201
circular inch 662, P11
— mil 51, 662, P11
cl *vidi* centilitar 437
Clarkov element 1029
clausius 823
Clausiusova značajka 846
clove 676
cm *vidi* centimetar 419
cml *vidi* circular mil 662
Commercial Ton of Refrigeration 542, 870
Comptonova duljina vala P4
coomb 670
cord 670
coulomb (C) 503, 921, 926, 1096
cP *vidi* centipoise 560
cranberry barrel 667
crna temperatura 1181
crno tijelo 1142
crown 197
crtica, nautička 431
c/s *vidi* cycle per second 450
CTR (US) *vidi* American commercial ton of refrigeration 542, 870
CTR *vidi* British commercial ton of refrigeration 542, 870
CTU *vidi* centigrade thermal unit 865
cu *vidi* cubic
cubic foot (ft³, cu ft) 663, P12
— inch (in³, cu in) 663, P12
— yard (yd³, cu yd) 663, P12
cubit 661
cunit 669
cup 670
curie (Ci) 223, 503, 1221, 1237
—, definicija 1238
Curtisova strujna vaga 953
cust. stone 676
cwt *vidi* hundredweight 672, P18
cycle per second (c/s) 450

Č

čestica 726
četvorni hvat, bečki 434
čujnost, granica 694
—, prag 703
čvrstoća, ispitivanje 313
—, preračunavanje 631

D

d *vidi* deci 65
da *vidi* deka 65
dag *vidi* dekagram 473
dalm *vidi* dekalumen 1192
dalton 503
dan 448
—, brojenje 347
—, efemeridni 334
—, kontinuirano brojenje 362
—, pravi sunčev 346
—, srednji 349
datum, linija promjene 357

datum (*nastavak*)
—, promjena 346
dB *vidi* decibel 695
dBvg *vidi* decibel voltage gain 714
deci ($d=10^{-1}$) 65
decibel (dB) 695, 710, 712
— voltage gain (dBvg) 714
decilitar (dl) 437
decimalna svijeća 1208
decimalni višekratnici 63, 65
— zarez 76
decimetar (dm) 419
—, kubni (dm^3) 223, 436
—, kvadratni (dm^2) 432
definicija metra 226
definicijska sekunda 327
definirajuća fiksna tačka 801
definiranje izvedenih jedinica 915
degree Rankine (°R) 784
deka (da=10) 65
dekada 449
dekadski mol, Ulichov 822
— višekratnici 63, 65, 631
dekafermi 420
dekagram (dag) 473
dekalumen (dalm) 1192
deklinacija Sunca 337
dekretno vrijeme 354, 357
demarkacijska linija 358
depolarizacija 887, 888, 891
desetljeće (decenij) 449
detekcija rezonancije 372
detektor rezonancije 369
devijacija, standardna 100
Dez 431
dielektričnost 884, 1061
—, relativna 884
— vakuuma 884
digitalni kronograf 398
dijamagnetičnost 891
dijamagnetizam 961
dime 197
dimenzija 169
—, sistem 1126
dinamička viskoznost 543
— —, jedinice 556, 561
diskontinuirana atomska skala vremena 388
diskontinuirano atomsko vrijeme 390
disperzija 100
distribucija frekvencije 394
— signala vremena 395, 404
— vremena 379, 398
— vremena u Jugoslaviji 407
djelatna snaga 930
dkg *vidi* dekagram 473
dl *vidi* decilitar 437
dollar 197
Dopplerov efekt 260, 272, 277
dotok 840
doza, ekspozicijska 1229
— zračenja 1223
— —, snaga 1224
drachm 672, P17
dram (dr) 671, 674, P17
dr ap *vidi* apothecaries' dram 674
druga konstanta zračenja P3
dry barrel 666
— pint (dry pt) 666, P12
— quart (dry qt) 666
državno *ili* zakonsko vrijeme 355
Dulongova značajka 846
duljina 226, 416
—, angloameričke jedinice 658
—, astronomske jedinice 422
—, geografska 344, 352
—, mjerenje, interferencijsko 233
—, —, komparacijsko 243
—, —, neposredno 253
—, nebeska 332
dunum 434
dvojno vaganje 304
dyn 495, 524, 618, 1065

Dž

džul (J) *vidi i* joule 522

E

°E *vidi* Englerov stupanj 566
efektivna akustička snaga 686
— struja 929
efektivni zvučni tlak 685
efemerida 331
efemeridna sekunda 328, 334, 336
— —, definicija 330
efemeridni dan 334
efemeridno vrijeme 331, 332, 340
— —, utvrđivanje 337
ekliptika 333, 337, 343
eksergija 770
eksponencijalna funkcija 62
eksponent 83
ekspozicija 1204, 1229, 1233
—, snaga 1229, 1233, 1245
ekspozicijska doza 1229
ekvator 343
—, nebeski 333
ekvinocij 343
ekvinocijska tačka 333
ekvivalent, električki 837
—, fotometrijski 1161, 1162
—, svjetlosni 1162
—, toplinski 837
ekvivalenti röntgena 1248, 1249
električka indukcija 883, 1067
— konstanta 884, 935
— polarizacija 885, 1067
— susceptibilnost 886
električki kapacitet 883
električki napon, reproduciranje 1000
— otpor, pramjerilo 979
— —, reproduciranje 979
električko polje, jakost 883, 1063

elektrika, CGSE jedinica 1064
—, CGSM jedinica 1074
elektromagnet 918
elektromagnetizam, fizikalni (CGS) sistemi jedinica 1063, 1073
—, Međunarodni sistem jedinica (SI) 909
—, nepotpuni CGS sistemi jedinica 1086
elektromagnetske jedinice, reproduciranje 947
— veličine 880, 881
elektromagnetsko polje 897
— —, gustoća energije 895
— —, širenje 892
elektrometar, tekućinski 1008
elektron, masa P3
elektronska konfiguracija atoma 267, 744, 745
elektronvolt 532
elektrostatski (CGSE) sistem jedinica 1063, 1072, 1085
— — —, primjeri upotrebe 1070
Elektrotehnički kongres 1096
element, Clarkov 1029
—, Westonov 945
—, —, zasićeni normalni 123
elementarni naboj P3
elipsoid, rotacijski 887
ell 661
eman 1242
emisijska moć 1136
emisijski spektar 264
— — zračenja 1147
emitiranje vremenskih signala 389
empirička temperatura 773
— temperaturna skala 798, 800
energetske razine 368
— veličine 586
energetski nivo 267
energija 517
—, akustička 693
—, angloameričke jedinice 528
—, gustoća 520, 895
— ionizacije 747
—, metričke jedinice 522
—, predana 1223
—, prijelazna 519
—, računanje 627
—, slobodna 770
—, tok 1225
—, unutarnja 759
— veze 745
—, volumna gustoća 520
Englerov stupanj 566
Englerova skala 566, 569
— sekundna skala 569
— viskoznost 566
engleske jedinice volumena 663
entalpija 760
entropija 757, 825
epoha 359, 377
—, pomak 387
erg 524, 618
etalon 172
—, atomski 366
Eulerova značajka 846

F

f *vidi* femto 65
Fahrenheitov stupanj (°F) 795
Fahrenheitova termodinamička temperatura 794
faktor 75
— depolarizacije 887, 888, 891
— jalovosti 932
— nelinearnog izobličenja 930
— refleksije 897
— snage 932
— utjecaja 109, 378, 959
farad 503, 922, 926, 1096
Faradayeva konstanta P3
farthing 197
fathom 660, 670, P6
fazna promjena 401
— ravnoteža 779
— razlika 384
fazni dijagram 778
FBM *vidi* foot board measure 669
femto ($f=10^{-15}$) 65, 223
femtometar (fm) 420
fermi 420
—, kvadratni 434
FHM *vidi* foot hoppus measure 670
fiksna tačka temperature 781
— — —, definirajuća 801
fiktivna godina 335
— temperatura 781
fiktivno srednje Sunce 347
firkin 670
fisija/cm^3 867
fizikalna skala relativnih masa 724
— veličina 37
— —, aksiomska 225
fizikalni ekvivalent röntgena (rep) 1248, 1249
— (CGS) sistem jedinica elektromagnetizma 1063, 1073
— — — mehanike 616
fizikalno normirano stanje 734
— njihalo 315
fluid drachm (fl dr) 664, P14
— dram 666
— ounce (fl oz) P14
— scruple 664
fluidnost 545
fluktuacija duljine Mjeseca 339
fm *vidi* femtometar 420
fon *vidi* phon (ph) 706
fonometrija 683, 703
fonometrijska skala 705
fonometrijske veličine 700
foot (ft) 660, P5
— board measure (FBM) 669
— hoppus measure (FHM) *vidi* hoppus foot 670
— of water (ft H_2O) 515, P28
— per hour (ft/h) 453
— per minute (ft/min) 453
— per second (ft/s) 453
— poundal per second (ft pdl/s) 541

foot (*nastavak*)
— pound-force (ft lbf, ft Lb) 528
— pound-force per minute (ft lbf/min) 541
— pound-force per second (ft lbf/s) 541
footcandle (ft cd) 1203
footlambert (ft la) 1199
Fordova viskoznost 572
fot vidi phot (ph) 1202
fotoelektrički mikroskop 248, 250
fotometar, automatski 1189
—, Lummer-Brodhunov 1185
fotometrija 1147, 1171
—, heterokromna 149
—, objektivna 1164
—, temelj 1148
—, višebojna 1149
—, vizuelna 1183
fotometrijska kocka 1185
fotometrijske veličine 1170, 1176
fotometrijski ekvivalent 1161, 1162
fotometrijsko pramjerilo 1163
Fourierova značajka 846
fr *vidi* frigorie 861
franklin (Fr) 503, P43
frekvencija 115, 366, 440
—, atomsko pramjerilo 365, 371, 377
—, distribucija 394
—, mehanička 444
—, pramjerila 402
—, promjena 385
—, —, relativna 383, 386, 390
—, relativna 116
— vrtnje (brzina vrtnje) 442 . . . 445, 457, 458, 637
— Zemlje, promjena 383
frekventni interval 700
frigorie (fr) 861
Froudova značajka 846
ft *vidi* foot 660, P5
ft^3 *vidi* cubic foot 663, P12
ft cd *vidi* footcandle 1203
ft H_2O *vidi* foot of water 515, P28
ft la *vidi* footlambert 1199
ft lbf (ft Lb) *vidi* foot pound-force 528
ft pdl/s *vidi* foot poundal per second 541
funkcija, eksponencijalna 62
—, referentna 802
furlong 659, P5

G

g *vidi* gram 473
G *vidi* gauss 1075, 1097
G *vidi* giga 65
gal 503
gallon (gal) 648, 650, 663, 664, 666, P13
gama ($\gamma = 10^{-6}$ grama) 68, 475
garantirana granična pogreška 140, 141
Gardner-Holtova viskoznost 572
gatom *vidi* gramatom 743
gauss (G) 503, 1075, 1097, P43
Gaussov sistem jedinica 1079, 1082
Gaussovo pramjerilo 1093
Gay-Lussacova značajka 846
Gb *vidi* gilbert 1076, 1097
geepound 676
General Assembly of the International Union of Pure and Applied Physics 65
Generalna konferencija za mjere i utege 188, 201, 204, 1105
geografska duljina 344, 352
geometrijska konstanta solenoida 969
gibanje, nutacijsko 333
giga ($G = 10^9$) 65
gigahertz (GHz) 450
gigavatsat (GWh) 523
gilbert (Gb) 503, 1076, 1097, P43
gill 664
giorgi 501
Giorgijev sistem jedinica 940
glasnoća 708
—, mjerenje razine 705
— zvuka 703
godina, Besselova 335
—, fiktivna 335
—, svjetlosna 426
—, tropska 335
gon (1^g) 428, P8
—, kvadratni 435
gr *vidi* grain 650, 671, P17
grad 428, P8
gradus 428
građansko vrijeme 355
grain (gr) 650, 671, P17
gram (g) 473
gramatom (gatom) 743
gramekvivalent (gval, val) 743
grammol 742
grammolekula 742
gram-sila 497
granica čujnosti 694
— pouzdanosti 103, 131, 134, 958
granična pogreška 139, 160
— —, baždarna 140
— —, garantirana 140, 141
— —, relativna sigurna 161
— —, statistička 160
Grashofova značajka 847
gravimetrijski sistem, Potsdamski 317
graviranje crtica 250
gravitacija 289
gravitacijska konstanta 290, P3
— sila 918
gravitacijsko polje 291
gregorijanski kalendar 360
griničko zvjezdano vrijeme 344
grupna normala 1028
guinea 197
gustoća 460, 465, 835
— akustičke energije 687
—, areometarska 481
— energije 520, 895
— — elektromagnetskog polja 895
— —, volumna 520
—, jedinice 477

gustoća (*nastavak*)
— magnetskog toka 889
—, mjerenje 466, 469
—, plošna 464
—, primjena 625
—, relativna 461, 485
— relativne frekvencije 116
— snage, površinska 766
— — zračenja 1134, 1138
— svjetlosnog toka 1179
— toka čestica 1224
— — energije 1225
— toplinskog toka 766
— vjerojatnosti 117, 121, 130
— vode 462
— zraka 468
gval *vidi* gramekvivalent 743
GWh *vidi* gigawattsat 523

H

h *vidi* hekto 65
h *vidi* sat 346, 448
H *vidi* henry 924, 926, 1096
ha *vidi* hektar 433, P9
hand 661
harmonički oscilator 820
Hefnerova svijeća 503, 1207
hektar (ha) 433, P9
hekto ($h=10^2$) 65
hektogal (hgal) 456
hektogram (hg) 475
hektolitar (hl) 437
hektometar (hm) 419
helios 1179
heliosent 1180
henry (H) 503, 924, 926, 1096
hertz (Hz) 503, 581
hertz^{-1} (Hz^{-1}) 533
heterokromna fotometrija 1149
H ft *vidi* hoppus foot 670
hg *vidi* hektogram 475
hidrostatsko mjerenje tlakova 491
hiljadita 430
—, artiljerijska 430
hiperfino cijepanje 367
histogram 376
hitac, vertikalni 323
hl *vidi* hektolitar 437
hm *vidi* hektometar 419
hogshead 670
Hookeova značajka 847
hoppus foot (H ft) 670
horsepower (hp) P40
horse power hour (hp h) 258, 530
hp (HP) *vidi* horsepower P40
hp h (HPh) *vidi* horse power hour 528, 530
hundredweight (cwt) 672, P18
hvat, bečki četvorni 434
—, prostorni (metrički) 438
hyl 476, 608, P16
Hz *vidi* hertz 581

I

idealni plin 749
impedancija 932
—, akustička 690, 693
imperial barrel 667
— standard yard 655
impuls 284
—, moment 464
— vrtnje 898
—, zakon o održanju 285
in^3 (cu in) *vidi* cubic inch 663, P12
in^2 (sq in) *vidi* square inch 662, P10
inch (in) 196, 649, P5
— of mercury (in Hg) 515
— of water (in H_2O) 515, P28
— ounce-force (in ozf) 528
— ounce-force per second (in ozf/s) 541
— per minute (in/min) 453
— per second (in/s) 453
indeks 83
— prelamanja 238
individualna jedinica mase 741
— plinska konstanta 750
inducirani napon 894, 923
indukcija, električka 883, 1067
—, magnetska 889, 1068
indukcijska konstanta 889
induktivitet 888, 889, 894, 937, 848, 1061
industrijsko normirano stanje 735
influencijska konstanta 884
in Hg *vidi* inch of mercury 515
in H_2O *vidi* inch of water 515, P28
in/min *vidi* inch per minute 453
in ozf *vidi* inch ounce-force 528
in/s *vidi* inch per second 453
integral pogreške 122, 126
interferencija svjetla 233
interferencijska korekcija 252
— pruga 236
interferencijski komparator 245
— —, laserski 261
— krugovi 271
— refraktometar 257
— zračni klin 237
interferencijsko baždarenje 259
interferometar 245, 249
—, Michelsonov 246
—, mikrovalni 1056
interkomparacija 1032, 1035, 1045, 1047, 1048, 1052, 1059
— normala 1027
internacionalne jedinice elektromagnetizma 1102, 1109
internacionalni ohm 993, 1111
— volt 1025
international corn bushel 667
— knot 452, P15
— nautical mile 420, 660, P6
International Standardizing Organisation, ISO 68
international nautical mile 660
interpolacija temperature 802, 807

interval, frekventni 700
ionizacija, prva 746
ionizirajuća zračenja, CGS sistem jedinica 1231
— —, veličine 1215
ISO 68
ISO krivulje 706
ispitivanje čvrstoće 313
ispunjenost 466
IUPAC 722
IUPAP 722, 1104
izdavačka djelatnost 623
izmjenična struja 929
izmjenične veličine, mješovite 929
izobara 750
izohora 750
izolacijski otpor 934
izoterma 750
izotop 720, 780
— kisika 723
izotopija 1114
— kisika 724

J

J *vidi* joule (džul) 522
jakost električkog polja 883, 1063
—, svjetlosna 1173, 1184
— zračenja 1132, 1137
— zvuka 687, 688
jalova snaga 932
jalovi watt 933
jalovost, faktor 932
jedinica 172
—, apsolutna 1095
—, astronomska 422, 426
—, centezimalna 428
— elektrike CGSE 1064
— — CGSM 1074
— energije, jedinstvena masena 535, P36
— količine tvari 726
— mase, individualna 741
— —, mol 741
—, mjerna 38, 172
—, —, specijalna 40
— napona, praktična 1095
— —, teoretska 1095
—, opisna (brojčana) 446
—, seksagezimalna 427
— temperature stefan (S) 821, 822, 826
—, washingtonska 1046, 1050
— X, metrička 420
jedinice akustike 683
—, angloameričke 648
—, apsolutne 1105
— CGS, zabrana upotrebe 946
— dinamičke viskoznosti 556
— — —, angloameričke 561
— — —, metričke 561
— duljine, angloameričke 658
— —, astronomske 422
— elektrostatskog (CGSE) sistema 1063, 1085
— — —, primjeri upotrebe 1070
— energije, angloameričke 528
— —, masene 534
— —, metričke 522
— gustoće 477
— — snage 871
—, internacionalne 1102
— kinematičke viskoznosti 562
— koeficijenta prolaza topline 873
— magnetostatskog (CGSM) sistema 1073, 1085
— mase 583, 835
— —, angloameričke 671
— masenog protoka 485
— nauke o toplini angloameričkog tehničkog sistema 857
— — — koherentnog sistema 852
— — — Međunarodnog sistema (SI) 830
— — — tehničkog sistema 855
— — —, vansistemske 849
— — —, —, dopuštene 850
— — —, —, preračunavanje 869
—, novčane 55
— nuklearne energetike 865
— protoka, angloameričke 486
— —, metričke 486
— radioaktivnosti i ionizirajućih zračenja SI i CGS 1231
— sile 493
— snage, metričke 536
— specifične toplinske vodljivosti 872
— specifičnih veličina 869
— Tehničkog sistema 942
— tlaka 501
— topline, angloameričke 863
— volumena, američke 666
— —, engleske 663
— vremena 326, 365
jedinični kapacitet 893
jedinstvena masena jedinica energije 535, P36
— služba vremena 395
jednadžba, brojčana 43, 45 47, 49, 636, 796, 875, 1071, 1083, 1116
— među jedinicama 54
—, prilagođena veličinska 874
—, racionalizacija 1108
— stanja 748
— titrajnog kruga 1120
—, veličinska 42, 44, 636, 873, 1115
— vremena 346
jednokilogramska vaga 303
joule (J) 503, 522, 581, 926, 1096, P34
Josephsonov efekt 1017
jugoslavenska normala napona 1038
— — otpora 1049
— služba vremena 408
julijanska prijestupnost 360
julijanski kalendar 359
julijansko stoljeće 333
jutro 434
—, madžarsko 434

K

k *vidi* karat 472, 473
k *vidi* kilo 65
K *vidi* kelvin 222, 534
kadmij 114
kadmijeva linija 232
kalendar 358
— francuske revolucije 361
—, gregorijanski 360
—, julijanski 359
—, mjesečev 359
—, sunčev 359
kalibar 133
kalorija 524
— parnih tablica 858
— petnaestog stupnja 859
—, Rossinijeva 862
—, srednja 861
—, termokemijska 862
kalorimetar 1057, 1060
kalorimetrička metoda 1057
kandela *vidi* candela 1193
kapacitet, akustički 693
—, električki 883
—, jedinični 893
—, računski standard 1000, 1001
—, supstitucijsko mjerenje 983
kapacitivni standard, konstrukcija 1005
kapacitivno pramjerilo otpora 980, 1051
kapilarni viskozimetar 547
karat (k) 472, 473, 475
kcal *vidi* kilokalorija 524, 860
kCi *vidi* kilocurie 1239
kelvin (K) 222, 503, 534, 831, 921
—, definicija 782
Kelvinov stupanj 783
Kelvinova temperatura 777
kemija, temeljni pojmovi 718
kemijska formula 737
— reakcija 737, 738
— skala relativnih masa 724
kerma 1225
—, snaga 1228
kg *vidi* kilogram 471
kG *vidi* kilogauss 1075
kgmol *vidi* kilogrammol 742
kHz *vidi* kilohertz 450
kilderkin 670
kilo ($k=10^3$) 65
kilocurie (kCi) 1239
kilogauss (kG) 1075
kilogram (kg) 471, 473, 580, 921, 926
—, arhivski 184
—, definicija 306
kilogrammol (kgmol) 742
kilogrammolekula 742
kilogram-sila 497
kilogramval (kgval) 743
kilohertz (kHz) 450
kilokalorija (kcal) 524, 860
kilolux (klx) 1193, 1202
kiloluxsekunda 1205
kilometar (km) 419
—, kvadratni (km^2) 432
kilomol (kmol) 730, 731, 753
kilonewton (kN) 493
kilonit (knt) 1191
kilonjutn *vidi* kilonewton (kN) 493
kiloparsec (kpc) 425
kilopond (kp) 495, 607, 629
kilopondmetar (kpm) 523, 629
kilostefan (kS) 823
kilovatsat (kWh) 523, P34
kilowatt (kW) P40
kin 451, 617
kinematička viskoznost 544
— —, jedinice 562
— —, skale 564
kinetička temperatura 820
kinetičke teorije topline 754
kip 676
kiri *vidi* curie 1237
kisik, izotop 723, 724
—, trojna tačka 806, 810
—, vrelište 806
klx *vidi* kilolux 1192, 1202
klxs *vidi* kiloluxsekunda 1205
km *vidi* kilometar 419
kM *vidi* konjska snaga 539
kmol *vidi* kilomol 730, 753
kn *vidi* knot 452, P15
kN *vidi* kilonewton 493
knot (kn) 452, P15
knt *vidi* kilonit 1191
koeficijent 75
— apsorpcije 1141
— prijelaza topline 771, 873
— prolaza topline 772, 873
— propusnosti 1141
— refleksije 1141
— temperaturne vodljivosti 767
— toplinske vodljivosti 765, 872
koherencija 577, 1231
koherentni sistem jedinica nauke o toplini 852
količina tvari 719, 725, 738
komercijalno pramjerilo 375
komparator, interferencijski 245
—, —, laserski 261
komutacijsko pramjerilo otpora 985
koncentracija 463, 1221
koncepcijski standard 175
konfiguracija atoma, elektronska 267, 744, 745
konstanta 75
—, Avogadro-Loschmidtova 75
—, Avogadrova P3
—, Boltzmannova 753, 758, P3
— doze 1229
—, električka 884, 935
— fine strukture P4
— gravitacije 290
—, indukciiska 889
—, influencijska 884
—, magnetska 889, 966
—, Planckova P3

konstanta (*nastavak*)
—, plinska 56, 750, P3
—, —, individualna 750
—, —, molna 733
—, —, opća 752
— pomaka, Wienova P3
— preobrazbe 1219
— protona, žiromagnetska 904, 961, 964
— raspadanja 1219
—, Rydbergova P4
— solenoida, geometrijska 969
—, Stefan-Boltzmannova P3
—, Zeemanova P4
— zračenja, prva P3
— —, druga P3
—, žiromagnetska 223, 899, P4
kontinuirani nosač 630
kontinuirano brojenje dana 362
— svjetsko vrijeme 384
Konvencija o metru 186, 193
konjska snaga (KS) 538, P40
koordinirano svjetsko vrijeme 387
korekcija usporedbenih viskozimetara 555
korektura plinskog termometra 788
kp *vidi* kilopond 495, 607, 629
kpc *vidi* kiloparsec 425
kpm *vidi* kilopondmetar 523, 629
krajnja mjera 189, 228, 244
kremena ura 365, 407
kremeni oscilator 366, 377
kriostat 275, 786
kripton 86, 264, 270
kriptonska izbojna žarulja 274
kritična tačka 778
krivulja raspodjele, normalna 119
— spektralne osjetljivosti 1151
krivulje ISO 706
kronograf 396
—, digitalni 398
kruženje satelita 447
kS *vidi* kilostefan 823
KS *vidi* konjska snaga 538, 539
kubni centimetar (cm^3) 436
— decimetar (dm^3) 436
— (metrički) hvat 438
— metar (m^3) 435, 436, 581
— —, normirani 736
— milimetar (mm^3) 436
kulminacija 337, 344
kurzivno pismo 74
kut 417
—, pravi 427
—, prostorni 418
—, puni 427
—, racionalni 418
—, satni 344
kutna brzina (rotancija) 441, 443, 445, 458
— — Sunca 334
— minuta 427, P7
— sekunda 427, P7
kutni stupanj 427, P7
kutno ubrzanje 457
kvadrant 420
kvadratni centimetar (cm^2) 431
— decimetar (dm^2) 432
— fermi 434
— gon 435
— kilometar (km^2) 432
— metar (m^2) 431
— milimetar (mm^2) 432
— stupanj, stari 435
kvadrilijun 652
kvaliteta, razred 416
kvantiteta, razred 416
kvantni broj 367
kvantno pramjerilo 366
kvarta 702
kvinta 702
kvintal 433, 472, 473, 475
kWh *vidi* kilovatsat 523, P34

L

l *vidi* litar 223, 437
lambert 1199
Lampardov teorem 1000
lanac 434
laser 215, 260, 262, 263
laserski interferencijski komparator 261
last 670
latm *vidi* litar-atmosfera 525
lb *vidi* pound 671, P16
lb ap *vidi* apothecaries' pound 674
lbf *vidi* pound-force 497, 678, P27
lb t *vidi* troy pound 675
ledište vode 780, 810
line 661
linija 184
—, demarkacijska 358
—, kadmijeva 232
— promjene datuma 357, 358
link 661
liquid barrel 667
— pint P13
— quart 666
litar (l) 223, 437
litar-atmosfera (latm) 525
lm *vidi* lumen 1191, 1195
load 676
load hoppus measure (load H/M) 670
lokalna *ili* mjesna težina 590
— vremenska skala 379
lomonosov 560
long quintal 676
Lorenz-Smithovo pramjerilo otpora 991
luk 417
lumen (lm) 1191, 1195
lumen/inch² (lm/in²) 1203
luminancija 1158, 1163
—, tamna 1200
Lummer-Brodhunov fotometar 1185
lux (lx) 1192, 1195, 1202
luxsat (lxh) 1206
luxsekunda (lxs) 1205

M

m *vidi* metar 184, 190, 217, 418
m *vidi* mili 65
M *vidi* maxwell 1074, 1097
M *vidi* mega 65
mache 1242
Machova značajka 847
madžarsko jutro 434
magnetizacija 1078
magnetometar 1093
magneton, Bohrov P4
magneton, nuklearni P4
magnetostatski (CGSM) sistem jedinica 1072, 1073, 1085
magnetska indukcija 889, 1068
— konstanta 889, 966
— polarizacija 890, 1070
— susceptibilnost 891, 1062
— uzbuda 889, 1082
magnetski moment 369, 898
— — protona P4
— tok 923
— —, gustoća 889
maksimalna pogreška 129
mala seksta 702
— septima 702
— terca 702
masa 283, 460
—, akustička 693
—, angloameričke jedinice 671
—, atomska 720
— elektrona P3
—, individualna jedinica 741
—, mjerenje 283, 298
—, mol kao jedinica 741
—, molekulska 721
—, molna 732
— neutrona P3
—, primjena 587, 624, 834, 941
— protona P3
—, relativna molekularna 721
—, —, ugljikova skala 722
—, robe 593
— u svemiru 591
— uspoređivanje 301
—, zakon o održanju 737
masena jedinica energije, jedinstvena 535, P36
masene veličine i jedinice 583, 835
maseni broj 83
— protok 462, 626, 842
— —, jedinični 464
— udio alkohola 485
maser 366, 381
—, vodikov 373
maxwell (M) 503, 1076, 1097, P43
Maxwellov most 985
Maxwell-Wienov most 986
M b ft *vidi* mille board foot 669
MCi *vidi* megacurie 1239
Mean British thermal unit 864
međuinduktivitet, mjerenje 990
—, računski standard 994, 996
Međunarodna astronomska unija 280, 331, 353, 424
— distribucija signala 404
— elektrotehnička komisija 697
— empirička temperaturna skala 800
— geodetska konferencija 186
— komisija za metar 186
— — za radiološke jedinice i mjerenja 1217, 1225, 1238
— — za rasvjetu 220, 1151
— konferencija o električkim standardima 945
— — o svojstvima vodene pare 858
— — za zakonodavnu metrologiju 205
— organizacija za zakonodavnu metrologiju 204
— pramjera 173
— služba vremena 353
— svijeća 1208, 1209
— unija za čistu i primijenjenu fiziku 722, 1104
— unija za čistu i primijenjenu kemiju 722
— znanstvena radio-unija 386, 408
Međunarodni elektrotehnički kongres 1029, 1096, 1208
— komitet za mjere i utege (CIPM) 187, 201, 779, 817, 860, 905, 1057, 1152, 1210
— meridijan 343
— prakilogram 306, 307, 308
— sistem jedinica (SI) 168, 575, 830, 909, 1103, 1189, 1231
— — — elektromagnetizma 909
— — — nauke o toplini 830
— ured za mjere i utege (BIPM) 187, 201, 204, 212, 1026, 1217
— — za zakonodavnu metrologiju 205
međunarodno atomsko vrijeme 381
mega ($M=10^6$) 65
megacurie (MCi) 1239
megahertz (MHz) 450
meganewton (MN) 494
megaparsec (Mpc) 425
megapond (Mp) 497
megapondmetar (Mpm) 523
megatona (Mt) 475
megavatdan (MWd) 866
megavatsat (MWh) 523
mehanička frekvencija 444
mehanički ohm 689
— rad, specifični 876
mehanika, CGS sistem jedinica 616
—, MTS sistem jedinica 619
mel-skala 701
mend 504
mendel (M) 504
mendeljejev (M) 501, 919, 926
meridijan, međunarodni 343
— Sunca 332
meridijanski krug 343
metar (m) 184, 190, 217, 222, 226, 274, 419, 534, 580, 920
—, arhivski 184
—, definicija 226

metar (*nastavak*)
— kubni (m^3) 435, 436, 581
—, kvadratni (m^2) 431
—, optički 226
—, prostorni (prm) 438
—, valni 226
metar^{-1} (m^{-1}) 533
Metenov ciklus 362
meteorološki rumb 431
metrička centa (q) 433, 473
— jedinica X 420
— minuta 428
metričke jedinice energije 522
— — protoka 486
— — snage 536
metrički sistem 193
metrolog 1020
metrologija 1020
—, jugoslavenska 1039
metrološki zavod 206, 207, 979, 1020
— —, državni 206
— —, Jugoslavenski 208, 977
— —, nacionalni 206
metron 184
MHz *vidi* megahertz 450
Michelsonov interferometar 246
mikro ($\mu=10^{-6}$) 65
mikrobar (μbar) 619
mikrobarn (μbarn) 433
mikrobernoulli (μB) 558
mikrogama ($\gamma\gamma\gamma=10^{-12}$ grama) 474, 475
mikrogram (μg) 473, 475
mikrolitar (μl) 437
mikrometar (μm) 419, 420
mikromikron ($\mu\mu$) *vidi* pikometar 420
mikron (μ) *vidi* mikrometar
mikropoise (μP) 560
mikroröntgen (μr) 1244
mikrosekunda (μs) 448
mikroskop 248
—, fotoelektrički 248, 250
mikrovalni interferometar 1056
mil 197, 652, 661
mile 660, P5
— per hour (mile/h) 452, 453, P15
— per second (mile/s) 453
mili ($m=10^{-3}$) 65
milibar (mbar) 619, 433
milibernoulli (mB) 558
milicurie (mCi) 1239
miligal (mgal) 456
miligama ($\gamma\gamma=10^{-9}$ grama) 474, 475
miligon (1^{mg}) 430
miligram (mg) 473
miligramval (milival) 743
milijarda 653
milijun 652
mililambert (mla) 1199
mililitar (ml) 437
milimetar (mm) 419
—, kubni (mm^3) 436
—, kvadratni (mm^2) 432
milimikron ($m\mu$) *vidi* nanometar 420
milimol (mmol) 730
milinewton (mN) 494
milioktava (mok) 701
miliphot (mph) 1203
miliphotsat (mphh) 1206
miliphotsekunda (mphs) 1205
milipoise (mP) 560
milipond (mp) 495
miliröntgen (mr) 1244
milimetar stupca vode (mm H_2O) 512
— — žive (mm Hg) 510
milisekunda (ms) 448
milistat (mSt) 1242
milistilb (msb) 1196
milival 743
mille board foot (Mb ft) 669
millier 475
milli-inch 652
milja, morska 421
minim (min) P14
minuta (min) 448
—, kutna 427, P7
—, metrička 428
mirija 66
mirijagram 475
mirijametar 420
mjera 86, 172
—, krajnja 189, 228, 244
—, nacionalna 172
—, prirodna 174
— sa crticama 189, 228, 248
mjerenje, apsolutno 1050, 1093
—, balističko 320
— duljine, neposredno 253
— —, interferencijsko 233
— —, komparacijsko 243
— gustoće 466, 469
— — snage zračenja 1154
— indeksa prelamanja zraka 226
— kapaciteta, supstitucijsko 983
— mase 283, 298
— međuinduktiviteta 990
— planarnosti 242
— razine glasnoće 705
— razmaka, apsolutno 251
—, relativno 1093, 1103
— sile 310
— tlaka 490, 811
— temperature 718, 790
— u fotometriji 1183
— viskoznosti, direktno 545
— —, usporedbeno 549
— visokofrekventnih veličina 1056
mjerilo 71
mjerka 172
mjerna jedinica 38, 172
— —, specijalna 40
— nesigurnost 137, 156
— —, relativna 139
— pogreška 84
— prizma 244
mjerni blok 228
— broj 39

mjerni (*nastavak*)
— prsten 311
— —, baždarenje 314
— sistemi elektromagnetizma, povijest 1092
Mjesec 337, 338, 341, 449
—, fluktuacija duljine 339
mjesečev kalendar 359
mjesna *ili* lokalna težina 590
mjesno *ili* lokalno vrijeme 344, 352
mješovite izmjenične veličine 929
mm Hg 510
mm H_2O 512
MN *vidi* meganewton 494
modeliranje toplinskih krugova 768
mol, definicija 728
— kao jedinica mase 741
—, Ulichov dekadski 822
mold 822, 825
molekula 721
molekularna količina tvari 726
— masa, relativna 721
molekulska masa 721
— težina 721
molna masa 732
— plinska konstanta 733
— toplina 733
molne veličine 732
molni volumen 732
— —, normirani 735
moment impulsa 464
—, magnetski 369, 898
—, orbitalni 266
— protona, magnetski P4
—, spinski 266
— tromosti 464
monokromatičnost 270
monokromatsko svjetlo 237
— zračenje 264, 273, 1155, 1156
morska milja 421
morski rumb 431
most, Campbellov 988
—, Maxwellov 985
—, Ogawin 981
—, Wheatstoneov 1058
mph *vidi* mile per hour 452, 453, P15
mph *vidi* miliphot 1203
mrtvi teret 310
msb *vidi* milistilb 1196
Mt *vidi* megatona 475
MTS sistem jedinica mehanike 619
MWd *vidi* megavatdan 866
MWh *vidi* megavatsat 523
myria 66

N

n *vidi* nano 65
N *vidi* newton 167, 493, 581, 926
nacionalna mjera 172
nacionalni ohm 1046, 1047
— prakilogram 173
— volt 1025, 1033
nadtlak 492
nail 661
nano (n=10^{-9}) 65
nanocurie (nCi) 1239
nanogram (ng) 475
nanometar (nm) 420
nanosekunda (ns) 448
napon, električki, reproduciranje 1000
—, inducirani 894, 923
—, pohranjivanje 1020, 1029
—, praktična jedinica 1095
—, pramjerilo 101, 1008
—, supravodljivo pramjerilo 1017
—, Taylorovo pramjerilo 1017
—, teoretska jedinica 1095
naponska normala 951, 1022, 1040
— —, Zenerova 1040
— vaga 1012
nauka o toplini, angloamerički tehnički sistem jedinica 857
— —, fizikalne veličine 748
— —, koherentni sistem jedinica 852
— —, Međunarodni sistem jedinica (SI) 830
— —, tehnički sistem jedinica 855
— —, temeljni pojmovi 718
nautical mile (n mile) P6
— mile (UK) 660
— —, international 660
nautička crtica 431
nebeska duljina 332
nebeski ekvator 333
neodređenost 90
neon, vrelište 806
neper (Np) 710, 712
nepotpuni CGS sistemi jedinica elektromagnetizma 1086
nepouzdanost 107, 128, 777
— brzine svjetla 1054
—, relativna 104, 107, 128, 131, 145, 149, 958, 968
— srednje vrijednosti 102, 144
nepovratljivost 756
nepreciznost 89
neracionalna susceptibilnost 888, 891
nesigurnost 138, 956, 960
—, mjerna 137, 156
—, relativna 960, 991, 1061
—, — mjerna 139
— reprodukcije 1053
netačnost 87
neutron, masa P3
newton (N) 167, 493, 503, 581, 926
Newtonova značajka 847
nit (nt) 1190, 1195
—, definicija 1160
nickel 197
nivo, energetski 267
noggin 670
normala 173
—, grupna 1028
—, —, pohranjivanje 1028
—, interkomparacija 1027
— napona, jugoslavenska 1038

normala (*nastavak*)
—, naponska 951, 1022, 1040
—, —, Zenerova 1040
— otpora, jugoslavenska 1049
— —, stupac žive 1095
— —, vrijednost 1050
—, otpornička 945, 951, 1041
—, —, usporedba 1048
—, putujuća 1026, 1033
—, složiva 1043
—, stvarna vrijednost 1037, 1049
—, žičana 1095
—, živina 1111
normalna atmosfera 508
— raspodjela 119
— —, krivulja 119
— težina 591
normalni ton 704
— vodik 809
— Westonov element, zasićeni 1023
— zvuk 704
normirana stanja 734
normirani kubni metar 736
— molni volumen 735
— specifični volumen 736
normirano stanje, akustičko 735
— —, industrijsko 735
— —, tehničko 735
nosač, kontinuirani 630
nosivost 596
nova svijeća 1210
novčane jedinice 55
novine, pogreške 623
nox (nx) 1204
Np *vidi* neper 710, 712
nt *vidi* nit 1190, 1195
nuklearna energetika, jedinice 865
— rezonancija 901, 906
— —, uvjet 902
nuklearni magneton P4
nuklearno pramjerilo ampera 963
— —, jugoslavensko 977
— —, posljedica 973
nuklid 720
nula, apsolutna 792
Nusseltova značajka 847
nutacijsko gibanje 333
nx *vidi* nox 1204

Nj

njihalo, fizikalno 315
—, reverzibilno 316, 319
—, sekundno 317
njihanje, period 316

O

objekt 113
objektivna akustika 683
— fotometrija 1164
oceanska voda 779
odgor, relativni 866
—, specifični 865
održanje impulsa, zakon 285
— mase, zakon 737
održavajući standard 175, 1028
odstupanje, standardno 100, 105, 107, 119, 144, 148, 373, 958, 1011
—, —, procjena 113, 114
—, —, relativno 100, 102, 957
—, —, višekratnik 121
oersted (Oe) 503, 1076, 1097, P43
Ogawin most 981
ogrjevna moć 839
ohm 503, 926, 1096
— (BIPM) 1048
—, internacionalni 993, 1111
—, mehanički 689
—, nacionalni 1046, 1047
—, živin 1102
OIML 204
oko, spektralna osjetljivost 1150
—, zapažanje 1148
okretaj (okr) 446, 457
oktava 700, 702
opća plinska konstanta 752
— srednja vrijednost 108, 959
opisna (brojčana) jedinica 446
optički metar 226
orbital 744
orbitalni moment 266
ortovodik 809
oscilator, harmonički 820
—, kremeni 366, 377
osjetljivost 89
— oka, spektralna 1150
— uha, spektralna 706
osnovna veličina 880
osvijetljenost 1169
otpor, akustički 689, 693
— antene 1119
—, Campbellovo pramjerilo 987, 988
—, električki, pramjerilo 979
—, —, reproduciranje 979
—, izolacijski 934
—, kapacitivno pramjerilo 980, 1051
—, komutacijsko pramjerilo 985
—, Lorenz-Smithovo pramjerilo 991
—, pohranjivanje 1041
—, pramjerilo 1054
—, specifični 602
— strujanju 601
—, valni 689, 895, 1119
—, Wennerovo pramjerilo 993
otpornička normala 945, 951, 1041
— —, jugoslavenska 1049
— —, usporedba 1048
— —, washingtonska jedinica 1045
otpornički termometar, platinski 801
ounce (oz) 181, 648, 674, P17
— (avoir) P17
— (troy; apoth) P17
ounce-force (ozf) 498, P27

oz *vidi* ounce 674
oz ap *vidi* apothecaries' ounce 674
ozf *vidi* ounce-force 498, P27
oz in (in ozf) *vidi* inch ounce-force 528
označivanje atoma 83
— trenutaka 362, 363
ozračenost 1131
oz t *vidi* troy ounce 675

P

p *vidi* peck 666
p *vidi* piko 65
P *vidi* poise 560, P32
Pa *ili* P *vidi* pascal 501, 507
pace 661
palm 661
para, specifični potrošak 875
parafinska svijeća 1207
paralaksa, sunčeva 423
paramagnetičnost 891
paravodik 809
Parlinova viskoznost, 572
parsec (pc) 424, 426
pascal (Pa, P) 501, 507
pasivno pramjerilo 366
pc *vidi* parsec 424, 426
pdl *vidi* poundal 497, 678, P27
peck (p) 664, 666
Pécletova značajka 847
peG *vidi* pentagiorgi 506
pen 670
penny 197
pentagiorgi (peG) 506
pentane candle 1207
pentanska svijeća 1207
perch 659
perche (masonry) 670
perigej 348
perihel 347
period 365
—, definicija 439
— njihanja 316
— titranja 438, 439
— vrtnje 442
periodičnost, osobina 746
periodni zakon 743
permeabilnost 890
—, relativna 890, 1076
— vakuuma 889, 890
petrogradski standard 670
petroleum barrel 667
ph *vidi* phon 706
ph *vidi* phot 1202
pharos 1179
pharosage 1179
phh *vidi* photsat 1206
phon (ph) 706
—, stari 707
phos 1181
phosage 1181
phot (ph) 1202
photsat (phh) 1206
photsekunda (phs) 1205
phs *vidi* photsekunda 1205
picas 661
pièze (pz) 506, 620
piko ($p=10^{-12}$) 65
pikogram (pg) 474, 475
pikometar (pm) 420, 467
pint (pt) 664, P13
pismo, kurzivno 74
—, uspravno 74
planarnost, mjerenje 242
Planckova konstanta P3
platinski otpornički termometar 801
plin, idealni 749
—, realni 749
plinska konstanta 56, 750, P3
— —, individualna 750
— —, molna 733
— —, opća 752
— termometrija 784
plinski termometar 785, 820
— —, korektura 788
plošna gustoća 464
podgrupa 744
podljuska 744
područje pouzdanosti 103
podtlak 492
pogreška 84
—, garantirana granična 140, 141
—, granična 139, 160
—, gruba 95
—, maksimalna 129
— mjere 86
—, mjerna 84
— pokaznog mjerila 87
—, prividna 85
—, prosječna 129
—, relativna 85
—, — sigurna granična 161
—, sistematska 93, 151, 153, 959
—, slučajna 93, 96
—, srednja 129
—, srednja kvadratna 100
—, stvarna 84
—, vjerojatna 129
pogreške u novinama 623
— u udžbenicima 622
pohranjivanje grupnom normalom 1028
— napona 1020, 1029
— otpora 1041
— vrijednosti struje 950
point 661
poise (P) 503, 560, 618, 851, P32
pojačanje 714
pojasno vrijeme i dekretno vrijeme 354, 357
pol, srednji 353
polarizacija, električka 885, 1067
—, magnetska 890, 1070
pole 659
poluraspad, trajanje 1219
polje, gravitacijsko 291
— sila 291

pomak epohe 387
poncelet 538
pondcentimetar (pcm) 523
pondus 181
populacija 113, 119, 134
poroznost 466
postanak CGSM i CGSE sistema jedinica 1089
postotak 86
postrojenje za baždarenje 312
potencijal 60
—, razred 416
potrošak pare, specifični 875
— topline, specifični 875
Potsdamski sistem, gravimetrijski 317
— sistem, pogreška 318
pottle 670
pound (lb) 197, 649, 657, 671, 674, P16
— avoirdupois (US) 658
— per cubic foot (lb/ft³) 479
— — — inch (lb/in³) 479
poundal (pdl) 497, 678, P27
— per square foot (pdl/ft²) 512
— — — inch (pdl/in²) 512
pound-force (lbf) 497, 678, P27
— per square foot (lbf/ft², psf) 513
— — — inch (lbf/in², psi) 513
pouzdanost, granica 103, 131, 134, 958
—, područje 103
povratna snaga 930
površinska gustoća snage 766
Poyntingov vektor 895, 1068
prag čujnosti 703
prakilogram 173, 189, 191
—, međunarodni 306, 307, 308
—, nacionalni 173
—, svjedok 307
—, USA 308
praktična jedinica napona 1095
prametar 190, 191
pramjera 172
—, prirodna 174
—, spremišta 309
pramjerilo 918
—, aktivno 366
— ampera 912
— —, nuklearno 963
—, cezijevo 367
— električkog otpora 979
—, fotometrijsko 1163
— frekvencije 365, 371, 377
—, Gaussovo 1093
—, komercijalno 375
—, kvantno 366
— napona 101, 1008
— —, supravodljivo 1017
— —, Taylorovo 1017
— otpora 1054
— —, Campbellovo 987, 988
— —, kapacitivno 980, 1051
— —, komutacijsko 985
— —, Lorenz-Smithovo 991
— —, Wennerovo 993
—, pasivno 366
—, reproducibilnost 375
— sekunde, atomsko 364
—, stabilnost 373
—, svjetlosno 1206
—, tačnost 375
Prandtlova značajka 848
pravi kut 427, P7
— sunčev dan 346
pravo sunčevo vrijeme 346
precesija 333, 337, 900
preciznost 88, 957, 967, 1011, 1059
— visokofrekventnih veličina 1059
predana energija 1223
prednosti SI 909, 924
prefiks 66
prelamanje svjetla 234
preračunavanje čvrstoće 631
— tlaka 633
— vansistemskih jedinica nauke o toplini 869
prigušenje 714, 1062
prijelaz na SI 621
prijelazna energija 519
prijestupnost, julijanska 360
prilagođena veličinska jednadžba 51, 639, 874
prima 702
primjena mase 587, 624, 834, 941
primjeri upotrebe jedinica CGSE sistema 1070
prirodna mjera 174
— pramjera 174
prividna pogreška 85
— snaga 930
prizma, mjerna 244
procjena 119
— standardnog odstupanja 113, 114
promil 86
promjena datuma 346
— —, linija 357, 358
— faze 401
— frekvencije (frequency offset) 385
— —, relativna 383, 386, 390
— — Zemlje 383
prony 538
prosječna pogreška 129
prostorne veličine 582
prostorni kut 418
prostorni metar (prm) 438
protok 462, 521
—, akustički 693
—, angloameričke jedinice 486
—, maseni 462, 626, 842
—, metričke jedinice 486
—, težinski 842, 843
—, volumni 462
proton, masa P3
—, žiromagnetska konstanta 904, 961, 964
protonska rezonancija 902
prototipski standard 175
prsten, mjerni 311
—, standardni 133
prva ionizacija 746
— konstanta zračenja P3
PS *vidi* konjska snaga 539

psf (psfa, psfg) *vidi* pound-force per square foot 513
psi (psia, psig) *vidi* pound-force per square inch 513
pt *vidi* pint 664, P13
PTR 207
puncheon 670
puni kut 427
putujuća normala 1026, 1033
— ura 402
pz *vidi* pièze 506, 620

Q

q *vidi* metrička centa 433, 473
quarter 197, 664
quartern 670
quintal, long 676

R

r *vidi* röntgen 1236, 1243
°R *vidi* Rankineov stupanj 784, 794
°R *vidi* Réaumurov stupanj 799
racionalizacija 1106
— jednadžbi 1108
racionalni kut 418
računanje energije 627
računski standard kapaciteta 1000, 1001
— — međuinduktiviteta 994, 996
rad 428, 517, 1249
—, specifični 841
—, specifični mehanički 876
radijan (rad) 426, 580, P7
radioaktivna preobrazba 1219
— ravnoteža 1220
radioaktivni atomi, životna dob 1219
radioaktivnost 1219
radio-signal vremena 389
radio-signali, sekundni 396
radio-stanice 399
raketa 599
ral 434
Rankineov stupanj (°R) 784, 794
raspad u sekundi 1221, 1234
raspodjela, Studentova 130, 132, 133
rasvijetljenost, tamna 1203
rasvijetljenosti 1169, 1184
ravnoteža, fazna 779
ravnotežna stanja 810
ravnotežni vodik 809
Rayleighova strujna vaga 948
— značajka 848
razina glasnoće zvuka 703, 705
— jakosti zvuka 694
— snage 710, 711
— —, apsolutna 711
— —, relativna 713
— zvučnog tlaka 696
razine, energetske 368
razred kvaliteta 416
— kvantiteta 416
— potencijala 416
rd *vidi* rutherford 1241
reaktancija 932
realni plin 749
Réaumurov stupanj (°R) 503, 799
Réaumurova temperaturna skala 799
Redwood Admirality 571
— Commercial 571
Redwoodova skala 571
referentna funkcija 802
— tačka, sekundarna 804
— temperaturna tačka 784
— termodinamička temperatura 776
referentni zvučni tlak 704
refleksija, faktor 897
refraktometar interferencijski 257
register ton 438, 669
rektascenzija 344, 348
relativna atomska masa 720
— — —, fizikalna skala 724
— — —, kemijska skala 724
— — —, ugljikova skala 722
— biološka djelotvornost 1249
— dielektričnost 884
— frekvencija 116
— gustoća 461, 485
— magnetska susceptibilnost 891
— mjerna nesigurnost 139
— molekularna masa 721
— nepouzdanost 104, 107, 128, 131, 145, 149, 958, 968
— nesigurnost 960, 991, 1061
— permeabilnost 890, 1076
— pogreška 85
— promjena frekvencije 383, 386, 390
— razina snage 713
— sigurna granična pogreška 161
— stabilnost pramjerila 374
— svjetlosna korisnost 1152
— termodinamička temperatura 791
— vidljivost svjetla 1152
relativni odgor 866
relativno standardno odstupanje 100, 102, 957
rem 1249
rendgen *vidi i* röntgen 1236, 1243
rep 1249
reproducibilnost pamjerila 375
—, vlastita 375
reproduciranje 952
— ampera 963
— električkog napona 1000
— — otpora 979
reprodukcija elektromagnetskih jedinica 947
reprodukcija trojne tačke 779
reverzibilno njihalo 316, 319
reyn 561
Reynoldsova značajka 843, 848
rezonancija, detekcija 372
—, detektor 369
—, nuklearna 901, 906
—, protonska 902

rezonator, atomski 370
—, cezijev 369
rod 196, 659, 670, P5
— veličine 416
roentgen equivalent physical (rep) 1249
— — man (rem) 1249
röntgen (r) 503, 1236, 1243
—, definicija 1243, 1244
—, ekvivalenti 1248
rood 662, P9
rope 661
Rossinijeva kalorija 862
rotacijski elipsoid 887
— viskozimetar 548
rotancija (kutna brzina) 441, 443, 445, 458
rumb, morski 431
—, meteorološki 431
rutherford (rd) 1241
rydberg (Ry) 534
Rydbergova konstanta P4

S

s *viai* sekunda 216, 222, 448, 580, 920
s *vidi* stère 438
sack 670
saharoza 574
samoinduktivitet 888
s ap *vidi* apothecaries' scruple 674
sat *vidi i* ura 346, 448
SAT 388
satelit, kruženje 447
satni kut 344
Savezni zavod za mjere i dragocjene metale 208, 977, 1040, 1048
Savjetodavni odbor za definiciju metra 203
— — — — sekunde 203
— — za elektromagnetizam 203, 905, 1038
— — za fotometriju 203
— — za jedinice 203
— — za standarde mjerenja ionizirajućih zračenja 203, 1217
— — za termometriju 817
savršeno zračilo 1142, 1160
Saybolt-Furol, viskoznost 571
Saybolt Universal, viskoznost 569
sb *vidi* stilb 1196
scruple 674
seam 670
seksagezimalna jedinica 427
seksta 702
—, mala 702
—, velika 702
sekunda 216, 222, 448, 580, 920
—, atomska ili fizikalna 327
—, definicijska 327
—, efemeridna 328, 334, 336
—, —, definicija 330
—, kutna 427, P7
—, srednja 349
—, tonski interval 702
sekunda^{-1} 533
sekundarna referentna tačka 804
sekundni signal 389
— radio-signali 396
sekundno njihalo 317
semestar 449
septima 702
—, mala 702
—, velika 702
shema baždarenja solenoida 969
sh cwt *vidi* short hundredweight P18
shilling 197
shipping ton 669
short hundredweight (sh cwt) P18
— ton (sh ton) 671, P18
SI *vidi* Međunarodni sistem jedinica
SI, prednosti 909, 924
SI, prijelaz 621
siderijsko vrijeme 343
siemens 503, 922
sigma 129
signal vremena 395, 404
sigurnosni ventil 599
sigurnost, statistička 104, 124, 126, 135, 957
sila 287, 934, 1063, 1117
—, gravitacijska 918
—, jedinice 493
—, mjerenje 310
—, noseća 596
—, polje 291
simboli 75
sinhronizacija vremenskih skala 402
sintezor 366
sinusne veličine 931
siriometar 424, 426
sirius 425
sistem dimenzija 170, 644, 1125
— — elektromagnetizma 1126
sistem jedinica 164, 166
— — CGSM i CGSE, postanak 1089
— — elektromagnetizma, fizikalni (CGS) 1063, 1073
— — —, Međunarodni (SI) 909, 1102
— —, elektrostatski (CGSE) 1063, 1085
— —, —, primjeri upotrebe 1070
— —, Gaussov 1079, 1082
— —, Giorgijev 940
— — ionizirajućih zračenja, CGS 1231
— —, magnetostatski (CGSM) 1073, 1085
— —, Međunarodni (SI) 168, 575, 830, 1103, 1189, 1231
— — mehanike, fizikalni (CGS) 616
— — — MTS 619
— — nauke o toplini, angloamerički tehnički 857
— — — —, koherentni 852
— — — —, Međunarodni (SI) 830
— — — —, tehnički 855
— —, tehnički 607, 855, 1100, 1102, 1109
— —, univerzalni 168
—, metrički 193
sistematska pogreška 93, 151, 153, 959
sistemi jedinica elektromagnetizma, nepotpuni CGS 1086

skala American Petroleum Institute 484
—, atomska diskontinuirana 388
—, atomska vremenska 376
—, Ballingova 484
—, Barbeyeva 573
—, Beaufortova 455
—, Beckova 484
—, Brixova 484
—, Cartierova 484
—, empirička temperaturna 798
—, Englerova 566, 569
—, fonometrijska 705
—, Fordova 572
—, Gardner-Holtova 572
—, Parlinova 572
—, Redwoodova 571
— relativnih masa, fizikalna 724
— Saybolt Universal 569
— Saybolt-Furol 571
— svjetskog vremena 393
— Westinghouse 572
skale, areometarske 479
— kinematičke viskoznosti 564
—, temperaturne 800
skein 661
skot 1201
sličnost, teorija 603
slobodna energija 770
slobodni pad 321
složiva normala 1043
slučajna pogreška 93, 96
slug 476, 679, P16
služba vremena 353, 389, 395
— —, jedinstvena 395
— —, jugoslavenska 408
Smythov faktor 724
sn *vidi* sthène 495, 506, 620
snaga 521, 930
—, akustička 686, 693
—, djelatna 930
— doze zračenja 1224
— ekspozicije 1229, 1233, 1245
—, faktor 932
—, gustoća 766
—, jalova 932
—, jedinice gustoće 871
— kerme 1228
—, metričke jedinice 536
—, povratna 930
—, površinska gustoća 766
—, prividna 930
—, toplinska 765, 840, 870
—, visokofrekventna 1057
— zračenja 1131
solenoid 964, 965
—, geometrijska konstanta 969
—, shema baždarenja 969
son 708
span 661
specific burnup 865, 866
specifična aktivnost 1220
— električka susceptibilnost 886
— konstanta gama 1229
— magnetska susceptibilnost 891
— toplina 761, 823, 834
— —, izobarna 762
— — vode 861
— toplinska vodljivost 765
— — —, jedinice 872
— vodljivost temperature 767
specifični mehanički rad 876
— odgor 865
— otpor 602
— potrošak pare 875
— — topline 875
— rad 841
— volumen, normirani 736
specijalna mjerna jedinica 40
spektar, emisijski 264
—, vidljivi 1148
— zračenja, emisijski 1147
spektralna gustoća snage zračenja 1142, 1143
— linija 272
— osjetljivost, krivulja 1151
— — oka 1150
— — uha 706
spektroradiometar 1155
spektroskopski termi 265
— zrak 239
sperm candle 1207
sphere 434
spinski moment 266
sq *vidi* square
square foot (ft^2, sq ft) 512, 513, 652, P10
— inch (in^2, sq in) 662, P10
— mile (sq ml) 662, P9
— pole (sq po) 661, 663
— rod P9
— yard (yd^2, sq yd) 661, P9
sr *vidi* steradijan 434, 580
srebrni amper 1102
srednja kalorija 861
— kvadratna pogreška 100
— — — aritmetičke sredine 103
— pogreška 129
— sekunda 349
— sunčeva duljina 334
— vrijednost 97, 105, 107, 144, 958
— —, nepouzdanost 102, 144
— —, opća 108, 959
srednje ekliptičko Sunce 348
— ekvatorsko Sunce 348
— Sunce, fiktivno 347
— zvjezdano vrijeme 344
— sunčevo vrijeme 347, 350
srednji dan 349
— pol 353
St *vidi* stokes 564, 618, 851, P33
stabilnost pramjerila 373
— —, relativna 374
stack 670
standard 175
— kapaciteta, računski 1000, 1001
—, koncepcijski 175
— međuinduktiviteta 994, 996
—, održavajući 175, 1028

standard (*nastavak*)
—, petrogradski 670
—, prototipski 175
standardizacija 35, 199, 1232
standardna devijacija 100
standardni prsten 133
— termometar, otpornički 812
— termopar 809
standardno odstupanje 100, 105, 107, 119, 144, 148, 373, 958, 1011
— —, procjena 113, 114
— —, relativno 100, 102, 957
— —, višekratnik 121
Stantonova značajka 848
stanja, normirana 734
stari phon 707
— kvadratni stupanj 435
statistička granična pogreška 160
— sigurnost 104, 124, 126, 135, 957
stefan (S) 821, 822, 826
Stefan-Boltzmannova konstanta P3
stehiometrijski broj 83
steradijan (sr) 434, 580
stère (s) 438
sthène (sn) 495, 506, 620
stigma *vidi* pikometar 420
stilb (sb) 1196
stokes (St) 503, 564, 618, 851, P33
stoljeće (vijek) 449
—, julijansko 333
stone 672
—, cust. 676
stopa 184
Stoppanova skala 484
stricke 670
Strouhalova značajka 848
struja, efektivna 929
—, izmjenična 929
—, pohranjivanje vrijednosti 950
strujanje, otpor 601
strujna vaga 952, 961, 1102
— —, Ayrton-Jonesova 949
— —, Curtisova 953
— —, izvedbe 955
— —, Rayleighova 948
— —, zamjena 973
Studentova raspodjela 130, 132, 133
stupac žive, normala otpora 1095
stupanj Barbeya 573
— Bauméa 481
— Celsiusa 503, 791
— Englera 566
— Fahrenheita 503, 795
— Kelvina 783
—, kutni 427, P7
— Rankinea 784, 794
— Réaumura 503
—, stari kvadratni 435
stvarna pogreška 84
— težina 590
— vrijednost normale 1037, 1049
subjektivna visina tona 701
su ft *vidi* superficial foot 669
Sunce 346
—, deklinacija 337
—, fiktivno srednje 347
—, kutna brzina 334
—, meridijan 332
—, srednje ekvatorsko 348
sunčev dan, pravi 346
— kalendar 359
sunčeva duljina, srednja 334
— paralaksa 423
sunčevo vrijeme 349
— —, pravo 346
superficial foot (su ft) 669
supravodljivo pramjerilo napona 1017
survey foot 653
susceptancija 932
susceptibilnost, električka 886
—, magnetska 891, 1062
—, neracionalna 888, 891
svijeća, decimalna 1208
—, Hefnerova 503, 1207
—, međunarodna 1208, 1209
—, nova 1210
—, parafinska 1207
—, pentanska 1207
—, Violleova 1208
svjetlo 1147
—, brzina 1055, P3
—, interferencija 233
—, monokromatsko 237
—, nepouzdanost brzine 1054
—, prelamanje 234
—, relativna vidljivost 1152
—, zapažanje 1150
svjetlosna godina 425, 426
— jakost 1173, 1184
— korisnost 1151, 1167
— —, relativna 1152
svjetlosni ekvivalent 1162
— tok 1168
— —, gustoća 1179
svjetlosno pramjerilo 1206
svjetsko (svemirsko) vrijeme 340 351, 355
— —, kolebanje 354
— —, koordinirano 384
system avoirdupois 671
— troy 675

T

t *vidi* tona 473, 619
T *vidi* tera 65
T *vidi* Tesla 924, 1069
tablespoonful 670
tačka (kao znak množenja) 76
—, kritična 778
tačnost 87
— pramjerila 375
tamna luminancija 1200
— rasvijetljenost 1203
Taylorovo pramjerilo napona 1017
teaspoonful 670

techma 476, 608, P16
tehnička atmosfera 509
Tehnički sistem jedinica 607, 855, 1100, 1102, 1109
— — —, angloamerički 678, 857
tehničko normirano stanje 735
tekućinski elektrometar 1008
televizija, distribucija signala 404
temperatura, apsolutna 777
— boje 220, 1181, 1211
—, Celzijeva termodinamička 791
—, crna 1181
—, empirička 773
—, Fahrenheitova termodinamička 794
—, fiksna tačka 781
—, — —, definirajuća 801
—, fiktivna 781
—, interpolacija 802, 807
— kao zavisna veličina 819
—, Kelvinova 777
—, kinetička 820
—, mjerenje 718, 790
—, referentna termodinamička 776
—, relativna termodinamička 791
—, specifična vodljivost 767
— stefan, jedinica 821, 822, 826
—, termodinamička 774
temperaturna skala, empirička 798
— —, Réaumurova 799
— —, termodinamička 777
— tačka, fiksna 781
— —, referentna 784
— vodljivost, koeficijent 767
teoretska jedinica napona 1095
teorija sličnosti 603
— zračenja, veličine 1131
tera ($T=10^{12}$) 65
terajoule 522
terca 702
—, mala 702
—, velika 702
teret, mrtvi 310
term 266
termi, označivanje 266
—, spektroskopski 265
termistor 1058
termočlanak 1060
termodinamička temperatura 774
— —, Celzijeva 791
— —, Fahrenheitova 794
— —, referentna 776
— —, relativna 791
— temperaturna skala 777
temokemijska kalorija 862
termometar, platinski otpornički 801
—, plinski 785, 820
—, standardni otpornički 812
termometrija, plinska 784
termopar 913
— platina-platinrodij 808
—, standardni 809
tesla (T) 502, 503, 924, 926, 1069
težina 293, 296, 587, 591
—, mjesna ili lokalna 590
—, molekulska 721
—, normalna 591
—, stvarna 590
— u svemiru 591
težinska veličina 835
težinski protok 842, 843
th *vidi* thermie 861, P34
therm *ili* therme 865
thermie (th) 861, P34
thou 652
tisućljeće (milenij) 449
titrajni krug, jednadžba 1120
titranje, period 438, 439
—, jedinice 501
—, mjerenje 490, 811
—, —, hidrostatsko 491
tjedan 449
tlak 490
—, apsolutni 490, 491
—, atmosferski 491
—, preračunavanje 633
—, zvučni 685
tmol *vidi* tonamol 743
tok čestica 1224
— energije 1225
—, svjetlosni 1168
—, toplinski 766
ton 672, P18
—, normalni 704
—, subjektivna visina 701
tona (t) 66, 473, 619
—, brodska 438
tonamol (tmol) 743
tona-sila 497
ton-force (tonf) 498, 513, P27
ton of refrigeration 865
toplina, angloameričke jedinice 863
—, koeficijent prijelaza 771
—, — prolaza 772
—, molna 733
—, specifična 761, 823, 834
—, — izobarna 762
—, specifični potrošak 875
—, vođenje 764
toplinska snaga 765, 840, 870
— vodljivost, koeficijent 765
— —, specifična 765
toplinski ekvivalent 837
— kapacitet 770
— krugovi, modeliranje 768
— mlaz 765
— proračuni 839
— tok 766
torr 502, 509, P30
trajanje poluraspada 1219
trenutna vrijednost 929
trilijun 652, 653
trimestar 449
trojna tačka kisika 806, 810
— — ravnotežnog vodika 802
— —, reprodukcija 779
— — vode 775, 777

tropska godina 335
troy ounce (oz t) 675
— pound (lb t) 675
Twaddelova (engleska) skala 484

U

u *vidi* jedinstvena masena jedinica 535, P36
Ubbelohdeov viskozimetar 551
ubrzanje 441
—, kutno 457
— zemljine teže 295, 842
— — —, reducirano 317
učestalost 115
Udruženje američkih elektrotehničara 1103
udžbenici, pogrešni 622
ugljikova skala relativnih masa 722
uho, sprektralna osjetljivost 706
Ulbricht-Helwigova kugla 1189
Ulbrichtova kugla 1184, 1186
Ulichov dekadski mol 822
uljni standard 553
unified atomic mass unit 535, P36
Universal Time (UT) 351
univerzalna plinska konstanta 752
univerzalni sistem jedinica 168
unutarnja energija 759
upojnost 466
uprosječivanje 374
ura, brodska 397
—, glavna atomska 392
—, kremena 365, 407
—, putujuća 402
urania *vidi i* svjetlosna godina 425, 426
usporedba otporničkih normala 1048
usporedbeni viskozimetar, korekcija 555
uspoređivanje masa 301
uspravno pismo 74
UT *vidi* Universal Time 351
uzbuda, magnetska 889, 1082
uzgon 467, 470, 1111
— zraka 305
uzorak 113, 135

V

V *vidi* volt 926, 1096
vaga 299
—, jednokilogramska 303
—, naponska 1012
—, strujna 952, 961, 1102
—, —, Ayrton-Jonesova 949
—, —, Curtisova 953
—, —, izvedbe 955
—, —, Rayleighova 948
—, —, zamjena 973
vaganje, dvojno 304
vakuum 492
—, dielektričnost 884
—, permeabilnost 889, 890
vakuumska komora 321
val *vidi* gramekvivalent 743
valni metar 226
— otpor 689, 895, 1119
valovitost 930
var (Var, VAr) 933
varas 661
varijacija 100, 106, 107
vat *vidi* wat (W) 168, 536, 581, 926, P40
veličina, aksiomska fizikalna 225
—, brojčana 694
—, fizikalna 37
—, osnovna 880
—, rod 416
—, težinska 835
—, vrijednost 38
veličine, elektromagnetske 880, 881
—, energetske 586
—, fotometrijske 1170, 1176
—, ionizirajućih zračenja 1215
— mase 583, 835
—, molne 732
— nauke o toplini 748
—, prostorne 582
—, sinusne 931
— teorije zračenja 1131
—, vremenske 582
veličinska jednadžba 42, 44, 636, 873, 1115
— —, prilagođena 51, 639, 874
velika terca 702
— seksta 702
— septima 702
ventil, sigurnosni 599
vertikalni hitac 323
vidljivi spektar 1148
vidljivost svjetla, relativna 1152
Violleova svijeća 1208
visina tona, subjektivna 701
viskozimetar 547, 552
—, Cannon-Fenskeov 550
—, kapilarni 547
—, korekcija 555
—, Ostwaldov 551
—, rotacijski 548
—, usporedbeni 552
—, Ubbelohdeov 551
viskoznost 543
—, Barbeyeva 573
— destilirane vode 554
—, dinamička 543
—, direktno mjerenje 545
—, Englerova 566
—, kinematička 544
—, —, skale 564
—, usporedbeno mjerenje 549
visokofrekventna snaga 1057
visokofrekventne veličine, mjerenje 1056
— —, preciznost 1059
višebojna fotometrija 1149
višekratnici jedinica 63, 66, 578
— —, primjena 604
višekratnik, decimalni 64
—, dekadski 64
— standardnog odstupanja 121

vizuelna fotometrija 1183
vjerojatna pogreška 129
vjerojatnost 118, 121, 757
—, gustoća 117, 121, 130
vlastita reproducibilnost 375
voda, destilirana, viskoznost 554
—, gustoća 462
—, kontinentalna 780
—, ledište 780, 810
—, oceanska 779
—, specifična toplina 861
—, trojna tačka 775, 777
—, vrelište 807
vodik, normalni 809
—, ravnotežni 809
—, trojna tačka 802
—, vrelište 806
vodikov maser 373
vodljivost 932
— temperature, specifična 767
—, toplinska, specifična, 765
vođenje topline 764
volt (V) 503, 926, 1096
— (BIPM) 1026, 1037
—, internacionalni 1025
—, nacionalni 1025, 1034
voltametar 1110
volumen, engleske jedinice 663
—, molni 732
—, normirani molni 735
—, — specifični 736
volumna gustoća energije 520
volumni protok 462
— udio alkohola 485
vratilo 599
vrelište kisika 806
— neona 806
— vode 807
— vodika 806
vremenska skala 326
— —, atomska 376
— —, diskontinuirana 388
— —, lokalna 379
— —, sinhronizacija 402
vremenske skale UT 352
— veličine 582
vremenski signali, emitiranje 389
vrijednost normale, apsolutna 1050
— —, stvarna 1037, 1049
—, opća srednja 108, 959
—, srednja 97, 105, 107, 144, 958
—, trenutna 929
— veličine 38
vrijeme 325, 439
—, atomsko 376
—, —, diskontinuirano 390
—, —, međunarodno 381
—, dekretno 357
—, distribucija 379, 395, 398, 404, 407
—, državno *ili* zakonsko 355
—, efemeridno 331, 340
—, građansko 355
—, jedinstvena služba 395
—, koordinirano svjetsko 387
—, mjesno *ili* lokalno 344, 352
—, označivanje trenutaka 362, 363
—, pojasno 355
—, siderijsko 343
—, sunčevo 349
—, —, pravo 346
—, —, srednje 347, 350
—, svjetsko *ili* svemirsko 340, 351, 355
—, zvjezdano 343
—, —, srednje 344
vrsta veličine 416
vrtnja, brzina (frekvencija) 442, 443, 445, 457, 458, 637
—, impuls 898
—, period 442
W *vidi* watt (vat) 168, 536, P40
washingtonska jedinica 1046, 1050
watt (W) 168, 503, 536, 537, 581, 926, 1096, P40
watt, jalovi 933
Wb *vidi* weber 922, 926
Wb *vidi* weisbach 602
weber (Wb) 502, 922, 926
weisbach (Wb) 602
Wennerovo pramjerilo otpora 993
Westonov element 945
— —, zasićeni normalni 1023
wey 670, 676
Wheatstoneov most 1058
Whitehead 885
Wienova konstanta pomaka P3

Y

yd³ *vidi* cubic yard 663, P12
yd² *vidi* square yard 661, P9
yard (yd) 196, 419, 649, 660, P5
— per hour (yd/h) 453
— per minute (yd/min) 453
— per second (yd/s) 453
—, US 656

Z

zagrada 77, 82
Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima 221
— o održanju impulsa 285
— o održanju mase 737
—, periodni 743
zakoni sličnosti 845
zakonsko *ili* državno vrijeme 355
zapažanje oka 1148
— svjetla 1150
zarez, decimalni 76
zasićeni normalni Westonov element 1023
Zeemanov efekt 1121
Zeemanova konstanta P4
Zemlja, promjena frekvencije 383
zemljina teža, ubrzanje 295, 842
— —, — reducirano 317

Zenerova naponska normala 1040
značajka, Clausiusova 846
—, Dulongova 846
—, Eulerova 846
—, Fourierova 846
—, Froudova 846
—, Gay-Lussacova 846
—, Grashofova 847
—, Hookeova 847
—, Machova 847
—, Newtonova 847
—, Nusseltova 847
—, Pécletova 847
—, Prandtlova 848
—, Rayleighova 848
—, Reynoldsova 843, 848
—, Stantonova 848
—, Strouhalova 848
značajke SI 834
zračenje 1131
—, doza 1223
—, druga konstanta P3
—, emisijski spektar 1147
—, gustoća snage 1134, 1138
—, — —, mjerenje 1154
—, ionizirajuće 1216
—, jakost 1132, 1137
—, monokromatsko 264, 273, 1155, 1156
—, prva konstanta P3
—, snaga 1131
—, — doze 1224
—, spektralna gustoća snage 1142, 1143
—, veličine teorije 1131
zračilo, savršeno 1142, 1160
zračni klin, interferencijski 237
zrak, gustoća 468
—, mjerenje indeksa prelamanja 226
—, spektroskopski 239
—, uzgon 305
zrcalo 247
zvjezdano vrijeme 344, 349
— —, srednje 344
zvučni tlak 685, 693
— —, razina 696
— —, referentni 704
zvuk, brzina 683
—, glasnoća 703
—, jakost 687, 688
—, normalni 704
—, razina jakosti 694

Ž

žarulja, kriptonska izbojna 274
žičana normala 1095
žiromagnetska konstanta 223, 899, P4
— — protona 904, 961, 964
živa (Hg 198) 271, 811, 1011, 1114
živin ohm 1102
živina normala 1111
životna dob radioaktivnih atoma 1219

Znak: 7115 Sv

Izdanje:

Dipl. ing. *Marijan Brezinščak*

Mjerenje i računanje u tehnici i znanosti

Stručni recenzent

prof. dr *Francè Avčin*

Izdavač

»Tehnička knjiga«, izdavačko poduzeće
41 000 Zagreb, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara

dipl. ing. *Kuzman Ražnjević*

Uredništvo sveučilišnih udžbenika:

Glavni urednik

ing. *Zvonko Vistrička*

Lektorirali

prof. *Ante Rojnić*

i *Josip Živković*

Urednik izdanja

Josip Živković

Crteže izradio

Žarko Pavunić

Grafički uredio i korigirao

Josip Živković

Tisak:

Birografika, Subotica

Tisak dovršen u veljači 1971.