

osvrti i mišljenja

Uređuje: dr. sc. Zvonko Benčić

Ocjenjivanje prema Gaussovoj razdiobi – optimiranje na minimum zahtjevanog znanja

UVOD

Bolonjskom reformom ili bolje rečeno Bolonjskim procesom (proces je tijekom međusobno povezanih i ovisnih pojava i zbivanja; *Rječnik hrvatskog jezika*, Leksikografski zavod 'Miroslav Krleža' i Školska knjiga, Zagreb, 2000.) uvedeno je ocjenjivanje studenata prema Gaussovoj razdiobi ili žargonski 'prema Gaussu'. Naziv 'Bolonjski proces' posebno mi se dopada, jer izražava njegov bitak: nakon svake promjene slijedi nova promjena koja prethodnu ili ispravlja ili poboljšava.

1. ALGORITAM OCJENJIVANJA PREMA GAUSSU

Algoritam je sljedeći. Redovitim se pohađanjem predavanja, kratkim testovima (tzv. blicevima, do četiri), domaćim zadaćama (do tri), laboratorijskim vježbama, međuispitima (dva) i završnim ispitom (jednim) može sakupiti najviše 100 bodova (v. npr. Statut FER-a od 29. lipnja 2005.). Prag prolaznosti je obično 50 bodova (definira se unaprijed, na početku kolegija). Od onih koji su prošli prag, pretpostavljajući Gaussovu razdiobu, 15 % najlošijih dobiva ocjenu dovoljan, sljedećih 35 % dobar, pa sljedećih 35 % vrlo dobar, a 15 % najboljih ocjenu izvrstan. Zanimljivo je primijetiti da je 70 % IQ (engl. *intelligence quotient*) rezultata u području IQ od 85 ... 115 % (<http://hr.wikipedia.org/wiki/Inteligencija>).

2. RELATIVNOST OCJENJIVANJA PREMA GAUSSU

U skupini koja je prešla prag prolaznosti uvijek 15 % najlošijih dobiva ocjenu dovoljan, a 15 % najboljih ocjenu izvrstan. Ako je skupina loša, može se dogoditi da je za ocjenu dovoljan potrebno postići najmanje 30 % bodova, slika 1; a da je za ocjenu izvrstan potrebno prosječno postići najmanje 70 % bodova, slika 2. To su razlozi zašto prosječna godišnja ocjena studija od 5,0 danas nije rijetkost.

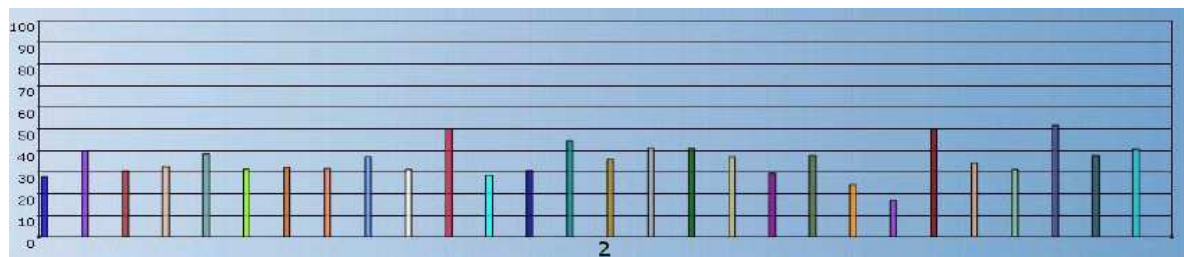
Nekada je bio *apsolutni sustav ocjenjivanja*. Bit sustava

bila je u tome što je za svaku ocjenu bio definiran prag. Za ocjenu 'odličan' (tada se nije govorilo 'izvrstan') trebalo je riješiti ili znati gotovo sve (čak nešto više od onoga što je profesor predavao). Sjećam se, mojoj generaciji koja je upisala studij akad. god. 1958./59. Fakultetska skupština akad. god. 1960./61. dodijelila je knjigu kao godišnju nagradu „... za naročiti uspjeh postignut na studiju ...“ svim studentima koji su imali prosječnu godišnju ocjenu studija veću od 4,0.

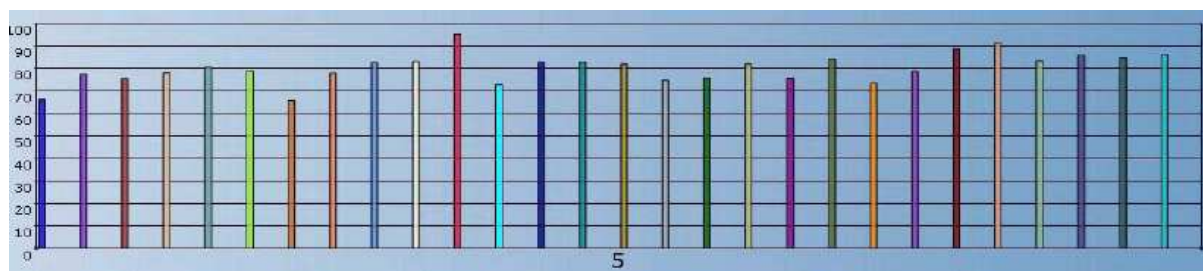
3. PRIMJER RAZDIOBE BODOVA

Slika 3 prikazuje histogram frekvencija nakon završnog ispita (pohađanje predavanja, 5 blica, 3 domaće zadaće, 2 međuispita, laboratorijske vježbe i završni ispit, ali uključujući i eventualne ponovljene međuispite) za kolegij u kojemu sam sudjelovao akad. god. 2008./09. Razredi (tzv. bodovni intervali) su širine 5 bodova, zatvoreni su s lijeve strane, a otvoreni s desne strane (to npr. znači da se promatra interval od 50,00 bodova do 54,99 bodova); jedino je zadnji razred zatvoren s obje strane.

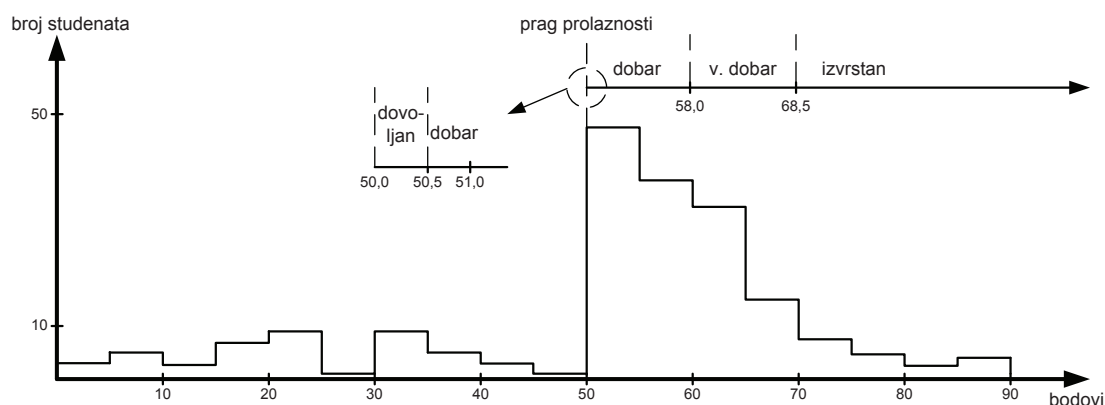
Iz slike se vidi da broj studenata u bodovnom intervalu 30,0 ... 49,9 opada (u intervalu 45,0 ... 49,9 je svega jedan student) te da je broj studenata u bodovnom intervalu 50,0 ... 54,9 najveći (kao da je bodovna granica usisna granica). Oдавde slijedi *prvi* zaključak da je neposredno do praga prolaznosti smanjen kriterij bodovanja. *Drugi* je zaključak da je bodovna razlika između ocjene dovoljan i ocjene dobar svega 0,5 boda. *Treći* je zaključak da 68,5 % bodova potrebnih za ocjenu izvrstan znači manje od 68,5 % traženog znanja, jer ti bodovi obuhvaćaju i bodove pohađanja predavanja i bodove domaćih zadaća koje se obično izrađuju u međusobnoj konzultaciji studenata. *Četvrti* je zaključak, najvažniji: u bodovnom intervalu 50,0 ... 59,9 bodova nalaze se 83 od 142 studenata koja su dosegla prag prolaznosti, dakle **59 % studenata se uspjelo optimirati na minimum znanja** (neki od njih čak su uspjeli dobiti ocjenu vrlo dobar).



Slika 1. Postotak iskazanog znanja na međuispitima i završnom ispitu (minimalna vrijednost) za ocjenu dovoljan za 28 kolegija na FER-u u zimskom semestru akad. god. 2007./08.



Slika 2. Postotak iskazanog znanja na međuispitima i završnom ispitu (srednja vrijednost) za ocjenu izvrstan za 28 kolegija na FER-u u zimskom semestru akad. god. 2007./08.



Slika 3. Primjer bodovnog uspjeha skupine od 184 studenta nakon završnog ispita (maksimalni broj bodova bio je 100, prag prolaznosti dosegla su 142 studenta)

4. PRIMJENJIVOST GAUSSOVE RAZDIOBE NA BODOVNI USPJEH STUDENATA

Iz slike 3 je očito da Gaussova razdioba gustoće vjerojatnosti ne vrijedi. Očito je da frekvencije nisu simetrično (normalno) raspoređene oko maksimalne. Ispitat ćemo da li možda vrijedi eksponencijalna razdioba gustoće vjerojatnosti u području od 50 do 100 bodova.

Eksponencijalna razdioba gustoće vjerojatnosti je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda e^{-\lambda x} & \text{za } x > 0 \\ f(x) &= 0 & \text{za } x \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gdje je λ parametar veći od nule. Eksponencijalna razdioba gustoće vjerojatnosti u elektrotehnici najčešće služi za opisivanje vijeka trajanja elektrotehničkih proizvoda (npr. žarulja). Pripadajuća eksponencijalna funkcija razdiobe vjerojatnosti je:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \quad (2)$$

Rezultati algoritma provjere da li se bodovni uspjeh studenata prikazan na slici 3 ravna po eksponencijalnoj funkciji razdiobe vjerojatnosti (2) s parametrom $\lambda = 0,1$ 1/bod

Tablica 1. Provjera χ^2 -testom da se bodovni uspjeh studenata prikazan na slici 3 ravna po eksponencijalnoj razdiobi

Bodovni interval	Frekvencija broja studenata f_i	Teorijska frekvencija $f_{ti} = N \cdot p_{ti}$	$\chi^2 = \sum_i \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
[50, 55)	48	55,87	1,11
[55, 60)	35	33,89	0,04
[60, 65)	29	20,56	3,47
[65, 70)	12	12,47	0,02
[70, 75)	8	7,56	0,03
[75, 100]	10	10,70	0,05
	N = 142	141,05	$\chi_0^2 = 4,72$

sažeti su u tablici 1. Intervali od 75 do 100 bodova spojeni su u jedan interval, jer algoritam provjere traži da je teorijska frekvencija $f_{ti} > 5$.

Sada treba provjeriti da je:

$$\chi_0^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2 \quad (3)$$

α je tzv. razina značajnosti (ili razina signifikantnosti ili koeficijent pouzdanosti). Za odabranu razinu značajnosti $\alpha = 0,10$ i broj stupnjeva slobode očita se $\chi_{0,9}^2$ iz tablice graničnih vrijednosti za χ^2 (v. npr. Vladimir Vranić, *Vjerojatnost i statistika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1958.). S obzirom da je broj razreda $n_r = 6$ i da je broj stupnjeva slobode $n_r - 1 = 5$:

$$\chi^2 \approx \Gamma(5) \quad (4)$$

očita se:

$$\chi_{0,9}^2 = 9,24 \quad (5)$$

Dakle, zadovoljena je nejednadžba (3) ($4,72 < 9,24$), pa se hipoteza prihvaća, tj. bodovni uspjeh studenata se ravna po eksponencijalnoj funkciji razdiobe vjerojatnosti (2) s parametrom $\lambda = 0,1$ 1/bod uz razinu značajnosti $\alpha = 0,10$.

5. ZAŠTO BODOVNI USPJEH STUDENATA NE SLIJEDI GAUSSOVU RAZDIOBU?

I pod pretpostavkom da su osnovni osobni uvjeti studiranja (npr. zdravlje, novčane prilike, radinost, inteligencija) nasumice raspodijeljeni među studentima, razdioba bodova skupine nakon završnog ispita ne može slijediti Gaussovu razdiobu. Razlog je u tome što do praga prolaznosti vlada tzv. *bodovna svijest* (i kod studenata i kod nastavnika), a od praga prolaznosti tzv. *natjecateljska svijest* (kod studenata). Bodovna svijest u blizini praga prolaznosti raste, a natjecateljska svijest varira ovisno o bodovima postignutim na drugim paralelnim kolegijima

(studenti se ponekad opravdavaju: „... nismo stigli naučiti, jer smo jučer imali drugi međuispit“). Zato se bodovni uspjeh skupine ne može opisati Gaussovom razdiobom.

Nisam mogao saznati tko je tu metodu ocjenjivanja nazvao *ocjenjivanje prema Gaussu*.

6. ŠTO JE GAUSS MISLIO O SVOJOJ RAZDIOBI?

Daniel Kehlmann (r. 1975.), austrijski književnik, u romansiranoj biografiji prirodoslovca Alexandra von Humboldta (brat Wilhelmov, utemeljitelja Sveučilišta Friedricha Wilhelma u Berlinu, danas Humboldt-Universität) i matematičara Carla Friedricha Gaussa naslova *Mjerenje svijeta* (Zagreb, Fraktura, 2007.) piše:

„Gauss je stao govoriti o slučajnosti, tom neprijatelju svega znanja kojega je uvijek htio pobijediti. Promatra li se izbliza, iza svakog se događaja vidi beskonačna finoća kauzalnoga tkanja. Udaljimo li se dovoljno daleko, pojave se veliki uzorci. Sloboda i slučajnost pitanje su srednje udaljenosti, stvar razmaka. Razumijete li?

...

Međutim, nastavio je Gauss pritišćući dlanovima bolna leđa, pravila vjerojatnosti nisu ropska. To nisu prirodni zakoni, iznimke su moguće. Na primjer, intelekt poput njegova ili one nagrade na igrama sreće koje bez sumnje stalno osvajaju nekakvi šupljoglavci. Katkad čak predmnijeva da i zakoni fizike djeluju čisto statistički, dakle dopuštaju iznimke: duhove i telepatiju.

...

Eugen (Gaussov sin, opaska ZB-a) je upitao šali li se on to. Ni sam to ne zna, rekao je Gauss, sklopio oči, i utonuo u dubok san.“

ZAKLJUČAK

Nedostaci *ocjenjivanja prema Gaussu* su: (a) većina studenata optimira znanje na dosezanje praga prolaznosti;

(b) ocjena pojedinca ovisi o uspjehu skupine; (c) ocjena dovoljan postiže se već od $\sim 30\%$ iskazanog znanja, a ocjena izvrstan već od $\sim 70\%$ iskazanog znanja i (d) ne postoji obvezno znanje (znanje bez kojega nema prolaza ispita).

Prednosti *ocjenjivanja prema Gaussu* su: (a) nadzor i poticanje rada studenata tijekom semestra, (b) nadzor rada nastavnog osoblja, (c) ujednačavanje kriterija ocjenjivanja studenata glede različitih kolegija i (d) nadzor opsega i težine sadržaja kolegija.

No, ipak, uzimanjem u obzir i svih prednosti i svih nedostataka ocjenjivanja prema Gaussu, usuđujem se tvrditi da se *ocjenjivanjem prema Gaussu* ne ide prema društvu znanja, obrazovanosti i izvrsnosti, već da se srlja u svijet

računalske kontrole, i studenata i nastavnika.

I na kraju: metoda koja se žargonski naziva *ocjenjivanje prema Gaussu* nema veze s Gaussovom razdiobom gustoće vjerojatnosti. Ali ima veze s Bolonjskim procesom, pa se može nazvati *ocjenjivanje prema Bolonji*.

Zvonko BENČIĆ
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Unska 3
10000 Zagreb
e-pošta: zvonko.bencic@fer.hr