

Udžbenik Sveučilišta u Zagrebu



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Autori:

Bruno Blašković
Martin Dadić
Damir Pintar

Mirko Randić
Bojan Trkulja
Mihaela Vranić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja

Recenzenti:

prof. dr. sc. Sead Berberović

Sveučilište u Zagrebu - Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja

prof. dr. sc. Zoran Skočir

Sveučilište u Zagrebu - Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja

doc. dr. sc. Ladislav Havaš

Sveučilište Sjever - Sveučilišni centar Varaždin
Odjelu za elektrotehniku

“... izuzetan i iscrpan prikaz sveobuhvatne problematike nužno potreban studentima za usvajanje znanja iz Osnova elektrotehnike ... svakako preporučam!”

“Djelo je izneseno pregledno i jasno... ima svoje mjesto u nastavi, ali i kao priručnik za inženjere.”

“... ovaj udžbenik ima odlike izvornog prikaza i interpretacije dobro poznate materije.... ”

Sadržaj

1. OSNOVNI ELEKTRIČNI KONCEPTI	1
1.1. Električni naboj	2
1.2. Električna struja	3
1.3. Električni potencijal i električni napon	5
1.4. Električna snaga	7
Zadaci za vježbu 1.	9
2. OSNOVNI ELEMENTI STRUJNIH KRUGOVA	11
2.1. Aktivni elementi strujnih krugova	12
2.1.1. Idealni istosmjerni naponski izvor	12
2.1.2. Idealni istosmjerni strujni izvor	13
2.1.3. Naponsko-strujni izvor	14
2.2. Pasivni elementi strujnih krugova	15
2.2.1. Otpornik	15
2.2.2. Kondenzator	16
2.2.3. Zavojnica	17
Zadaci za vježbu 2.	18
3. TOPOLOGIJA STRUJNIH KRUGOVA	19
3.1. Idealizirani elementi i mreže	19
3.2. Fizička reprezentacija	20
3.3. Osnovna grada mreže	21
3.4. Referentni smjerovi i polja	22
3.4.1. Referentni polja	22
3.4.2. Referentni smjerovi	23
3.4.3. Referentni polja	24
3.4.4. Smjer energije	25
3.4.5. Referentni smjerovi	26
3.4.6. Referentni smjerovi	27
3.4.7. Primjena potencijala	28
3.5. Serijski i paralelni spojevi	29
4. REALNI IZVORI, SNAGA I IDEALNI MJERNI INSTRUMENTI	30
4.1. Realni naponski i strujni izvor	30
4.1.1. Modeli realnih izvora	31
4.1.2. Transformacija realnih izvora	32
4.2. Snaga u istosmjernim strujnim krugovima	33
4.2.1. Snaga na aktivnim i pasivnim elementima	33
4.2.2. Snaga na realnim izvorima i stupanj korisnosti	34
4.2.3. Teorem maksimalne snage	35
4.3. Idealni mjerni instrumenti	36
Zadaci za vježbu 4.	37
5. IZMJENIČNE (SINUSNE) VELIČINE I FAZORI	38
5.1. Vremenski promjenjive veličine	38
5.1.1. Efektivne vrijednosti struja i napona	39
5.2. Elementi i idealni dvopoli	40
5.3. Dvopoli	41
5.3.1. Omski otpor R	41
5.3.2. Induktivitet L	42
5.3.3. Kapacitet C	43
5.3.4. Idealni sinusni naponski izvor	44
5.3.5. Idealni sinusni strujni izvor	45
5.3.6. Što dalje?	46
5.4. Rješavanje mreža sa sinusnim izvorima	47
5.4.1. Pokus: serija RL s istosmjernim i sinusnim izvorom	48
5.4.2. Pokus: serija RC s istosmjernim i sinusnim izvorom	49
5.4.3. Sinusni izvor i serija RLC – analiza u vremenskom području	50
5.5. Prikaz sinusnih veličina u kompleksnoj domeni	51
5.5.1. Sustav rotirajućih vektora	52
5.5.2. Fazori, transformacija sinusnih funkcija u kompleksnu domenu i obratno	53
5.5.3. Mjerenje struje i napona kod sinusnih izvora	54
5.5.4. Otpor R	55
5.5.5. Induktivitet L	56
5.5.6. Kapacitet C	57

5.6. Kirchhoffovi zakoni i fazori	108
5.6.1. Kirchhoffov zakon za struje	109
5.6.2. Kirchhoffov zakon za napone	110
Zadaci za vježbu 5.	113

6. IMPEDANCIJA, ADMITANCIJA, KIRCHHOFFOVI ZAKONI U SINUSNIM STRUJNIM KRUGOVIMA	117
6.1. Uvod	118
6.2. Impedancija i admitancija	118
6.2.1. Impedancija	118
6.2.2. Trokut impedancije	120
6.2.3. Admitancija	121
6.2.4. Trokut admitancije	122
6.2.5. Naponi i potencijali u kompleksnoj ravni	123
6.3. Kirchhoffovi zakoni u matricnom obliku	124
6.3.1. Kirchhoffov zakon za struje	124
6.3.2. Kirchhoffov zakon za napone	125
6.3.3. Impedancija Z	129
6.3.4. Serijski spoj admitancija Y	129
6.3.5. Paralelni spoj impedancija Z	129
6.3.6. Paralelni spoj admitancija Y	130
6.4. Fazorski (vektorski) dijagram	131
6.5. Topografski dijagram	132
6.5.1. Dinamički prikaz – mjesni prikaz	133
Zadaci za vježbu 6.	134
7. SNAGA U IZMJENIČNIM STRUJNIM KRUGOVIMA	135
7.1. Snaga i energija u krugovima iz istosmjernih izvora	135
7.2. Trenutačna snaga $p(t)$ u mreži s istosmjernim izvorima	136
7.2.1. Trenutačna snaga $p(t)$ na otporniku	136
7.2.2. Trenutačna snaga $p(t)$ na induktivu	137
7.2.3. Trenutačna snaga $p(t)$ na kapacitetu	138
7.2.4. Trenutačna snaga $p(t)$ na reaktivnom otporu X_L	139
7.2.5. Trenutačna snaga $p(t)$ na reaktivnom otporu X_C	140
7.3. Izračun snage u kompleksnom području	141
7.4. Trokut snage	142
7.5. Faktor snage	143
7.6. Kompenzacija reaktivne snage	144
7.7. Ukupna radna, reaktivna i prividna snaga	145
8. EKVIVALENTNE TRANSFORMACIJE, NAPONSKO I STRUJNO DJELILO	146
8.1. Serijski i paralelni spoj elemenata	146
8.1.1. Serijski i paralelni spoj otpornika	146
8.1.2. Serijski i paralelni spoj kondenzatora i zavojica	147
8.1.3. Serijski i paralelni spoj impedancija	148
8.1.4. Ulazni otpor (impedancija)	149
8.2. Transformacije spojeva u zvijezdu i trokut	150
8.3. Transformacije realnih izvora	151
8.4. Naponsko i strujno djelilo	152
8.4.1. Naponsko djelilo	153
8.4.2. Strujno djelilo	154
9. FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE ELEKTRIČNIH KRUGOVA I REZONANCIJA	155
9.1. Periodični nesinusni naponi i struje	155
9.2. Periodični nizovi impulsa	156
9.3. Složeni valni oblici	157
9.4. Omjerni faktori	158
9.5. Harmonički složeni valni oblici	159
9.6. Efektivne vrijednosti i radna snaga harmonički složenih valnih oblika	160
9.7. Frekvencijske karakteristike RC i RL krugova	161
9.8. Frekvencijske karakteristike serijskog RLC kruga	162
9.9. Frekvencijske karakteristike paralelnog RLC kruga	163
Zadaci za vježbu 9.	164
10. METODE ANALIZE ELEKTRIČNIH MREŽA	165
10.1. Uvod	165
10.2. Metoda konturnih struja	166
10.3. Metoda napona čvorova	167
10.4. Primjena metoda za analizu mreža u praksi – SPICE i EMTP programski paketi	168
10.5. Metode analize električnih mreža i primjena na probleme u praksi	169
Zadaci za vježbu 10.	170

11. METODA SUPERPOZICIJE, THÉVENINOV I NORTONOV TEOREM	329
11.1. Linearnost elementa i linearnost mreže	330
11.2. Metoda superpozicije	336
11.2.1. Primjena metode superpozicije	337
11.3. Théveninov teorem	347
11.3.1. Dokaz Théveninova teorema	353
11.3.2. Théveninov teorem i nelinearni element u krugovima	358
11.4. Nortonov teorem	361
12. TROFAZNI SUSTAVI	365
12.1. Uvod	366
12.2. Trofazni izvori	366
12.3. Trofazna trošila i trofazni sustavi	369
12.3.1. Trofazni spoj u zvijezdu	369
12.3.2. Trofazni spoj u trokut	373
12.4. Snaga u simetričnim trofaznim sustavima	376
12.4.1. Snaga u simetričnom spoju u zvijezdu	376
12.4.2. Snaga u simetričnom spoju u trokut	377
12.4.3. Trenutačna snaga u simetričnom spoju	377
12.5. Riješeni primjeri	379
Zadaci za vježbu 12.	383
13. MEĐUINDUKTIVNO POVEZANI ELEKTRIČNI KRUGOVI I TRANSFORMATOR	389
13.1. Međuinduktivitet u električnim krugovima	390
13.2. Transformacije krugova s međuinduktivitetima	392
13.3. Načelo rada transformatora	398
13.4. Idealni transformator	400
Zadaci za vježbu 13.	401
14. PRIJELAZNE POJAVE U KRUGOVIMA PRVOG I DRUGOGA REDA	402
14.1. Uvod	402
14.2. Prijelazne pojave u krugovima prvog reda po uključanju na izvor stalnog napona	403
14.3. Prijelazne pojave u krugovima prvog reda po isključenju izvora napona	404
14.4. Prijelazne pojave u krugovima prvog reda po uključanju na izvor stalnog napona	405
15. DODATAK	439
15.1. Izvod frekvencije maksimuma kod rezonantnog nadvišenja u serijskom RLC krugu	440
15.2. Nadomjesne sheme realnih pasivnih elemenata	442
15.2.1. Realne zavojnice	442
15.2.2. Realni otpornici	444
15.2.3. Realni kondenzatori	445
15.3. Realni transformator	446
15.4. Ispravljački spojevi s diodom	447
15.5. Operacijska pojačala	451
16. MATEMATIČKI DODATAK	457
Rješenja zadataka	461
Literatura	473
Kazalo pojmova	475

Osnovni električni koncepti



1. Osnovni električni koncepti

1.1. Električni naboj

Razgovor o elektrici i električnim pojavama mora se započeti definicijom pojma *naboja*. Ovdje se može odmah naići na poteškoće – budući da se radi o temeljnoj fizikalnoj veličini, pojam naboja nije jednostavno definirati. Jedna od mogućih definicija jest da je naboj **temeljno svojstvo materije koje se između ostaloga manifestira pojavom elektromagnetske interakcije**. Drugim riječima, to je svojstvo koje se koristi kako bi se mogle objasniti električne i magnetske pojave.

Promatrajući gradnju tvari, može se uvidjeti da se one sastoje od atoma, čija struktura ima jezgru (sastavljenu od protona i neutrona) te elektronski omotač u kojem se nalaze elektroni. Od triju navedenih elementarnih čestica za elektrone se kaže da nose *negativan* naboj, dok protoni nose *pozitivan* naboj.

Za **električni naboj** koristi se slovo Q ili q^1 (od engleskog izraza *quantity of electricity*, tj. količina elektriciteta). Prema Međunarodnom sustavu jedinica (franc. SI)², **mjerna jedinica električnog naboja je kulon** (prema francuskom fizičaru Coulombu), uz oznaku **C**.

$$[q] = \text{C} \quad (1.1)$$

Mjera od 1 C prilično je velika u usporedbi s nabojem protona q_p , odnosno elektrona q_e , koji je tzv. *elementaran naboj* i iznosi:

$$q_p = -q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (1.2)$$

Svi naboji u prirodi višekratnici su ovog elementarnog naboja.

U električnim krugovima često su predmet interesa **pojave koje nastaju kretanjem naboja** jer ovakvo kretanje rezultira **izmjenama energije** koje se na izvjesni način mogu iskoristiti. Osobito je zanimljiv slučaj kada se kretanje naboja može na određeni način ograničiti unutar strogo određene staze gibanja, konstruirane uz pomoć **materijala čija fizikalna svojstva omogućuju lako kretanje naboja (vodiči)**, za razliku od **materijala gdje je takvo gibanje otežano (izolatori)**. Električni krug tako predstavlja svojevrsni “cjevovod” kroz koji kolaju naboji.

¹U udžbeniku će se koristiti konvencija prema kojoj će se konstantne veličine označavati velikim slovom, dok malo slovo može, ali ne mora značiti da se opisana veličina mijenja (npr. kroz vrijeme).

²franc. *Système international d'unités*, Međunarodni sustav jedinica.

1.2. Električna struja

Električna struja jest usmjereno gibanje naboja. Za matematički opis gibanja naboja koristi se pojam **jakost električne struje**³. Jakost električne struje odgovara na pitanje *Koja količina naboja u jedinici vremena proteče kroz gledanu površinu (npr. presjek vodiča)?* Uz pretpostavku da se naboj mijenja u vremenu prema funkciji $q(t)$, definicijska relacija za jakost električne struje $i(t)$ glasi:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (1.3)$$

odnosno

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(t') dt', \quad (1.4)$$

gdje je i odabrani simbol za jakost električne struje (od francuskog izraza *intensité de courant*, intenzitet strujanja). **Mjerna je jedinica za struju amper** (prema fizičaru Ampéru, **simbol A**), a iz gornje se formule može uočiti da je kulon ekvivalentan jedinici “ampersekunda” (simbol As).

$$[i] = \text{A}; [q] = \text{C} = \text{As} \quad (1.5)$$

Danas je poznato da izmjena količine naboja u metalnim vodičima nastaje kao rezultat gibanja *negativnog naboja*, tj. elektrona. Elektron kao elementarna čestica otkrivena je tek 1897., iako su se elektricitet i pojave vezane za nj istraživale stoljećima prije toga. Sva istraživanja zasnivala su se na pretpostavci da je električna struja rezultat gibanja *pozitivnih naboja* i ta konvencija se zadržala i do danas. U praksi nema neke razlike između ovih dviju konvencija, tj. struja od 2 A koju stvaraju pozitivni naboji gibajući se u jednom smjeru, istovjetna je struji od –2 A koju stvaraju negativni naboji gibajući se u suprotnom smjeru; bitno je samo da se **kod prikaza toka struje kroz vodič uz iznos struje uvijek naznačava i njezin smjer**, a samo pitanje prirode naboja koji stvara struju za izračune je nebitno.

$$\xrightarrow{2 \text{ A}} \quad \equiv \quad \xleftarrow{-2 \text{ A}}$$

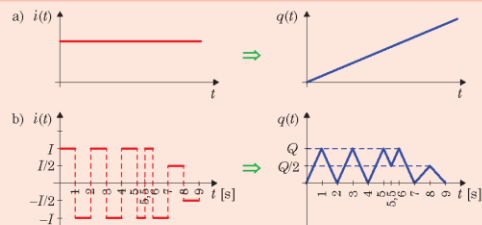
Slika 1.1. Označavanje smjera struje kroz vodič

³Jakost električne struje često se skraćeno naziva *jakost struje* ili još kraće *struja*.

Primjer 1.1.

Skicirajte:

- a) Kako izgleda funkcija izmjene naboja u vremenu ako je struja konstantna (slika 1.2a), uz pretpostavku $q(0) = 0$?
- b) Kako izgleda funkcija izmjene naboja u vremenu ako struja ima oblik prikazan na slici 1.2b, uz pretpostavku $q(0) = 0$?

Slika 1.2. Zadani valni oblici struje $i(t)$ te odgovarajuće funkcije naboja $q(t)$

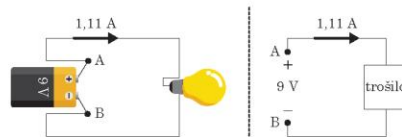
Struja konstantnog iznosa i smjera naziva se **istosmjernom strujom** (DC – engl. *direct current*)⁴. Primjer istosmjerne struje može se vidjeti tijekom korištenja baterije (npr. standardna AAA baterija), gdje će kroz krug teći približno konstantna struja dok god baterija u sebi ima dovoljno reaktanata. **Struja čiji se iznos i smjer mijenjaju u vremenu naziva se izmjeničnom strujom** (AC – engl. *alternating current*). Najčešći oblik izmjenične struje jest sinusna izmjenična struja koja se mijenja zadanom frekvencijom određenom standardom (nacionalnim ili globalnim). Primjer sinusne struje jest standardna gradska električna mreža, dostupna u svakom kućanstvu.

Već je spomenuto da kretanje naboja, tj. **električno strujanje rezultira prijenosom energije**. **Električna energija** je posebno zanimljiva jer ju je relativno

⁴Ovdje je bitno napomenuti da u općenitom slučaju pojam *istosmjerne struje* nominalno označava struju koja zadržava isti smjer, ali ne mora imati konstantan iznos, no uobičajeno se zbog jednostavnosti i preglednosti koristiti konvencija da pojam "istosmjerno" znači "konstantan iznos i smjer", iako se referencira samo podskup svih istosmjernih struja. Ista konvencija primijenit će se na napon u sljedećem poglavlju.

Polovi baterije uz pomoć dvaju vodiča i žaruljice spajaju se u strujni krug pri čemu se omogućuje slobodno gibanje naboja. Električna struja prolazi kroz žaruljicu (koja je u ovom slučaju trošilo), u kojoj se električna energija pretvara u toplinsku i svjetlosnu energiju.

Slika 1.4 s desne strane prikazuje pojednostavljeni prikaz *električnog* ili *strujnog kruga*. Točke A i B predstavljaju mjesta pozitivnog i negativnog električnog potencijala čija se razlika očituje u definiranoj veličini električnog napona (u ovom slučaju 9 V). Ravne linije predstavljaju *električni vodič*, žicu od vodljivog materijala kojom naboji slobodno prolaze. Gibanje naboja reprezentirano je električnom strujom navedenog smjera i iznosa (u primjeru 1,11 A). Konačno, pravokutnik prikazuje element strujnog kruga koji iskorištava protok struje (element koji troši električnu energiju, tj. trošilo).



Slika 1.4. Jednostavni strujni krug

Kao što struja može biti negativna, tako i napon može imati negativni iznos. Analogna je interpretacija i kod struje – ako napon ima predznak – (minus) to jednostavno znači da je prikazani polaritet napona zapravo obrnut od "stvarnog", a zamjenom referentnih točaka dobili bismo istovjetni prikaz, samo s pozitivnom vrijednosti napona ($U_{AB} = -U_{BA}$).

1.4. Električna snaga

Već je rečeno da se na žaruljici sa slike 1.4 troši električna energija. Može li se na neki način izračunati koliko se energije troši na žaruljici, obzirom na navedene veličine električne struje i napona? Izvod **formule izmjene energije u jedinici vremena** glasi:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u(t) \cdot i(t). \quad (1.11)$$

PONAVLJANJE

- Naboj je temeljno svojstvo materije koje se manifestira pojavom elektromagnetske interakcije.
- Kontrolirano kretanje naboja zanimljivo je zbog izmjena energije.
- Električna struja opisuje kretanje naboja u jedinici vremena.
- Električni napon opisuje koliko energije treba uložiti za pomicanje naboja između dviju točaka, odnosno koliko se energije pritom dobije.
- Električna snaga opisuje izmjenu energije u jedinici vremena.
- Umnoškom napona na nekom elementu kruga i struje kroz taj element dobiva se vrijednost električne snage.

ZADATCI ZA VJEŽBU 1.

Zadatak 1.1.

Kako se definira električna struja, a kako napon?

Zadatak 1.2.

Koja količina naboja prođe kroz električni element u intervalu od točno sat vremena ako je jakost električne struje kroz njega konstantna i iznosi 1 A?

Zadatak 1.3.

Može li jakost električne struje biti negativna?

Zadatak 1.4.

Žarulja je priključena na konstantni napon od 6 V i troši snagu od 8 W. Koliki je iznos jakosti električne struje koja prolazi kroz žarulju?

2. Osnovni elementi strujnih krugova

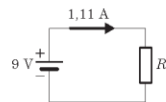
U prethodnom poglavlju rečeno je da gibanje naboja ima zanimljive i važne zame za razmjenu energije koja se može na različite načine iskoristiti. Stručni ili strujni krugovi zatvorene su vodljive petlje ciljano dizajnirane omogućile ovakvo kontrolirano gibanje naboja.

U općenitom smislu elementi strujnih krugova dijele se na aktivne elemente. Aktivni elementi unose energiju u strujni krug, a tipični aktivni elementa jesu naponski i strujni izvori. S druge strane, pasivni elementi troše ili pohranjuju energiju u strujnom krugu (i mogu je vratiti u krug), a najčešći pasivni elementi jesu otpornici, zavojnice i kondenzatori. Strujni krug smatra se idealnim sustavom bez gubitaka energije, tj. sva energija proizvedena na aktivnim elementima troši ili pohranjuje na pasivnim elementima. Također, vodiči se smatraju idealnim elementima jer provode struju bez gubitaka, tako da se često zanemaruju s aspekta energije koja se pojavljuje u krugu.

2.1. Aktivni elementi strujnih krugova

2.1.1. Idealni istosmjerni naponski izvor

Na slici 1.4 prikazan je pojednostavljeni prikaz jednostavnog strujnog kruga koji čine baterija, žaruljica i vodič. Slika 2.1 prikazuje isti krug prirodnim shematskim prikazom.



Slika 2.1. Shema jednostavnog strujnog kruga

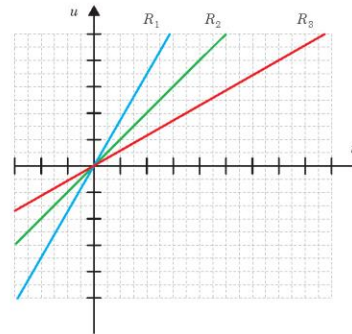
Baterija je zamijenjena simbolom za idealni istosmjerni naponski izvor. Idealni istosmjerni naponski izvor aktivni je element strujnog kruga koji uvijek održava isti iznos napona na priključnicama, dok struja koja prolazi kroz njega ovisi o priključenom trošilu.

2. Osnovni elementi strujnih krugova

Mjerna jedinica za električni otpor je om (prema njemačkom fizičaru Ohmu), simbol Ω :

$$[R] = \Omega = \text{V/A}. \quad (2.3)$$

Grafički prikaz naponsko-strujne karakteristike linearnog otpornika jest pravac koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava, gdje nagib pravca (koeficijent smjera) ovisi o iznosu električnog otpora navedenog otpornika. Slika 2.7 prikazuje naponsko-strujne karakteristike triju različitih linearnih otpornika.



Slika 2.7. Naponsko-strujne karakteristike linearnih otpornika

Primjer 2.1.

Koji od otpornika čije su naponsko-strujne karakteristike prikazane na slici 2.7 ima najveći, a koji najmanji električni otpor?

Odgovor se lako može naći ako se postavi pitanje: Kolika je struja na pojedinom otporniku za odabrani isti iznos napona?

Ako se na odabranoj točki U osi u povuče pravac paralelan s osi i , može se zaključiti da za isti napon U kroz otpornik R_1 ide najmanja, a kroz otpornik R_3 najveća struja. Budući da prema Ohmovu zakonu otpor predstavlja omjer napona i struje, lako se zaključuje da R_1 ima najveći, a R_3 najmanji iznos otpora.

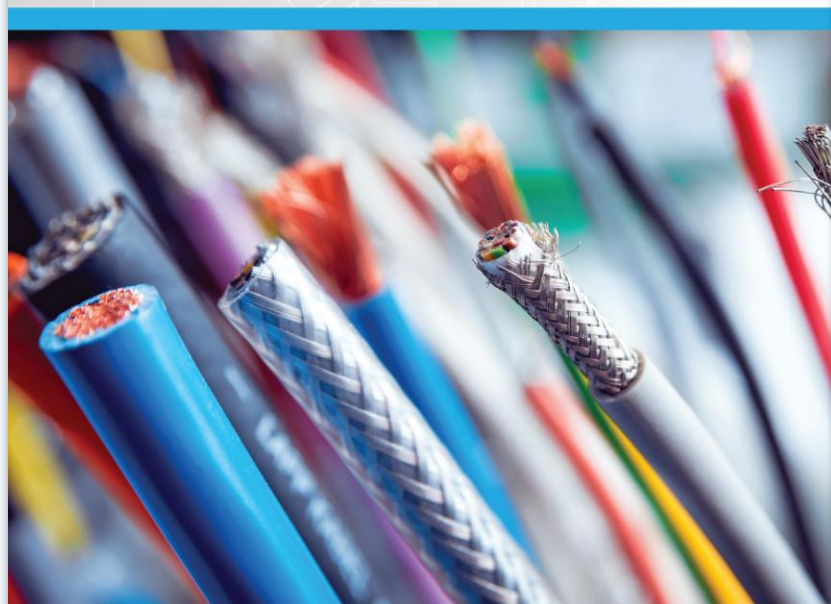
2

Osnovni elementi strujnih krugova



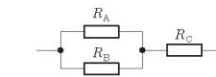
3

Topologija strujnih krugova i Kirchhoffovi zakoni



3.6. Kirchhoffovi zakoni

Kombinacijama serijskog i paralelnog spajanja različitih elemenata mogu se predstaviti složeni strujni krugovi. Primjer takvog spoja je na slici 3.27. Ovdje su elementi R_A i R_B spojeni paralelno, a zajedno su spojeni u seriju s elementom R_C .



Slika 3.27. Kombinacija paralelnog i serijskog spajanja

Ponekad se složena električna mreža ne može dekomponirati na kombinaciju paralelnih i serijskih spojeva. U narednim poglavljima ovog udžbenika analizirat će se takvi složeniji spojevi, poput mosnih spojeva, odnosno spojeva u zvijezdi ili trokutu.

3.6. Kirchhoffovi zakoni

Odnose u električnoj mreži s obzirom na njezinu topologiju opisuju Kirchhoffovi zakoni koji su dobili ime po njemačkom znanstveniku Gustavu Robertu Kirchhoffu. Ova su dva zakona vrlo jednostavna, ali i temeljna za određivanje struja i napona u mreži.

3.6.1. Prvi Kirchhoffov zakon

Prvi Kirchhoffov zakon ili Kirchhoffov zakon za struje (KZS) primjenjuje se na čvorove u mreži, a temelji se na postulatu o očuvanju električnog naboja.

Kirchhoffov zakon za struje (KZS)

Zbroj svih struja koje u čvor ulaze jednak je zbroju struja koje iz čvora izlaze.

Ako se strujama koje u čvor ulaze postavi predznak +, a onima koje iz čvora izlaze postavi predznak -, tada se može pisati:

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0 \quad (3.3)$$

gdje je n broj grana koje se u čvoru spajaju te struja I_j pripadajuća određenoj grani.

Ako je n_{ul} broj ulaznih struja I_{ul} u čvor, a n_{iz} broj izlaznih struja I_{iz} iz čvora, KZS se može također pisati na sljedeći način:

$$\sum_{j=1}^{n_{ul}} I_{ul} = \sum_{k=1}^{n_{iz}} I_{iz}. \quad (3.4)$$

3.6.3. Rješavanje istosmjernih mreža primjenom Kirchhoffovih zakona

Neka je zadana električna shema neke mreže uz poznate veličine otpora te napona izvora uključenih u mrežu. U općenitoj mreži je g grana s nepoznatim strujama grana po iznosu i smjeru. Kada bi se znali iznosi i smjerovi struja pojedinih grana, mogli bi se odrediti naponi na svim elementima, odnosno sve relevantne veličine bi bile poznate.

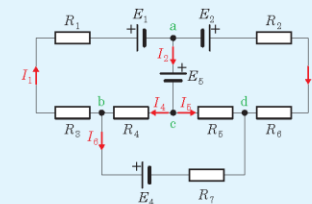
Ako je dakle g nepoznanica, potrebno je postaviti g nezavisnih jednadžbi KZS-a i KZN-a.

Ako mreža ima $\check{c}$ čvorova, onda se može postaviti $\check{c}-1$ nezavisna jednadžba KZS-a (za $\check{c}$ -ti čvor jednadžba nije nezavisna; jednaka je zbroju svih prethodnih $\check{c}-1$ jednadžbi). Za preostali broj potrebnih jednadžbi $g-(\check{c}-1)$ postavljaju se jednadžbe KZN-a za nezavisne konture. Smjerovi obilaska po nezavisnim konturama su proizvoljni. Rješenje sustava jednadžbi daje struje grana. Za struje grana koje imaju pozitivne vrijednosti, stvarni smjer struje identičan je referentnom dok je kod struja s negativnim predznakom stvarni smjer struje suprotan referentnom.

Primjer 3.6.

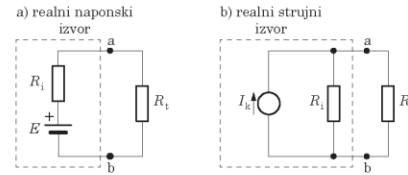
Neka je zadana shema prikazana na slici 3.34 i neka su poznate veličine: $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $R_5 = 2 \Omega$, $R_6 = 10 \Omega$, $R_7 = 3 \Omega$, $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 4 \text{ V}$, $E_4 = 12 \text{ V}$, $E_5 = 10 \text{ V}$.

Potrebno je odrediti struje kroz sve elemente mreže.



Slika 3.34. Zadana električna shema

priključenom unutarnjem otporu, a isto će tako struja kroz otpor trošila R_t u slučaju realnog strujnog izvora biti manja od struje I_k zbog toka dijela struje u granu s unutarnjim otporom R_i .



Slika 4.1. Modeli realnih izvora u strujnom krugu

Primjer 4.1.

Odgovore: Za koje vrijednosti unutarnjih otpora realni izvori postaju idealni?

Uz pomoć modela realnih izvora lako se može zaključiti da realni izvori postaju idealni u sljedećim slučajevima:

Realni naponski izvor: $R_i = 0$

Realni strujni izvor: $R_i \rightarrow \infty$.

Zanimljivo je promatrati strujno-naponske prilike kod realnih izvora u nastoji o veličini otpora trošila R_t spojenog na njihove priključnice.

Ako se pretpostavi postojanje promjenljivog otpornika R_t čija vrijednost ići od 0 do ∞^1 , što se događa s naponom na priključnicama realnog naponskog izvora U_{ab} (slika 4.1a)?

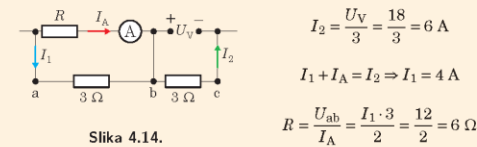
Do rješenja se može doći algebarski:

$$U_{ab} = I \cdot R_t = \frac{E}{R_i + R_t} \cdot R_t = \frac{E \cdot R_t}{R_i + R_t}$$

$$I_{ab} = I = \frac{U_{ab}}{R_t} = \frac{E}{R_i + R_t}$$

¹U slučaju kada je $R_t = 0$, radi se o kratkom spoju izvora, a kada je $R_t = \infty$, riječ je o otvorenoj priključnici izvora.

poni i struje označe proizvoljnim oznakama te konačno uz pomoć Ohmovih i Kirchhoffovih zakona slijedno se pronalaze nepoznate veličine dok se ne riješi krug i pronađe nepoznata veličina.



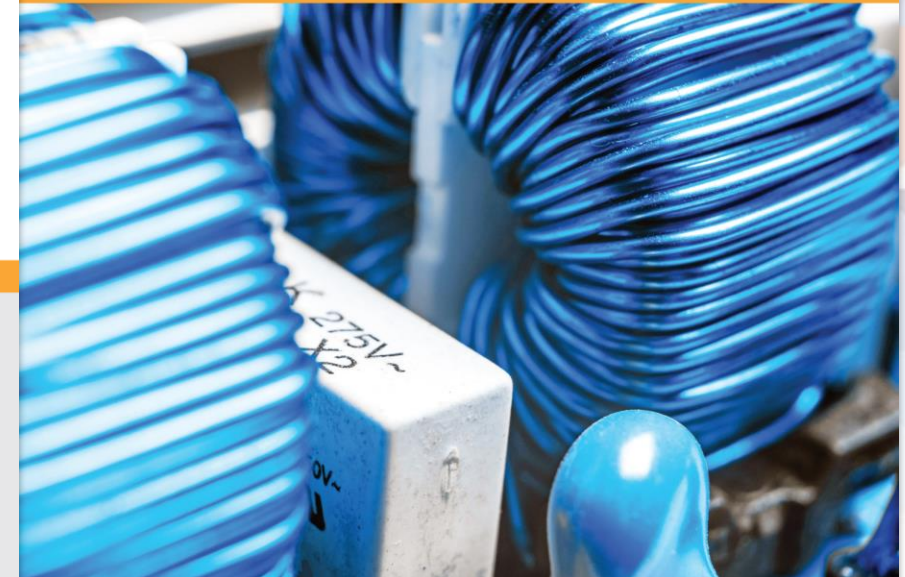
Slika 4.14.

Struja I_A prolazi kroz ampermetar, a struje I_1 i I_2 prolaze kroz grane mreže kao na slici 4.14. Isto tako, napon U_V predstavlja napon voltmetra, a U_{ab} napon između točaka a i b , što je ujedno i napon na nepoznatom otporniku. Budući da vrijedi $R = U_{ab}/I_A$, zadatak se svodi na računanje ovih dviju veličina kombinacijom poznatih veličina te Ohmovih i Kirchhoffovih zakona.

PONAVLJANJE

- Realni naponski i strujni izvori modeliraju se kao spojevi idealnih izvora i unutarnjih otpora.
- Kod realnog naponskog izvora unutarnji otpor izvora spojen je u seriju, kod strujnog u paralelu.
- Uz poznate veličine napona praznog hoda i struje kratkog spoja realnih izvora lako se računaju njihove karakteristike.
- S gledišta ostatka mreže, realni naponski izvor može se korištenjem jednostavnih transformacijskih formula zamijeniti ekvivalentnim realnim strujnim izvorom (i obrnuto).
- Snaga koju izvor daje u krug jednaka je umnošku napona na priključnicama izvora i struje izvora; ukupna snaga koju svi izvori daju u krug jednaka je ukupnoj snazi koja se razvija na pasivnim elementima kruga.
- Snaga na trošilu spojenom na realni naponski ili realni strujni izvor je maksimalna kada je iznos otpora trošila jednak iznosu unutarnjeg otpora izvora.

Realni izvori, snaga i idealni mjerni instrumenti

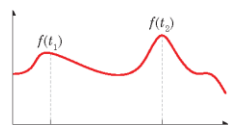


5

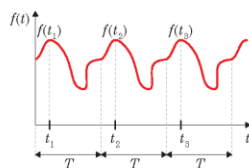
Izmjenične (sinusne) veličine i fazori

5. Izmjenične (sinusne) veličine i fazori

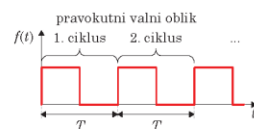
5.1. Vremenski promjenjive veličine



Slika 5.1. Grafički prikaz vremenski promjenjive veličine $f(t)$



Slika 5.2. Grafički prikaz periodično promjenjive veličine $f(t)$



Slika 5.3. Periodični valni oblici – određivanje ciklusa i periode

Vremenski promjenjiva veličina (npr. jakost struje ili napon) je ona kojoj se tijekom vremena mijenja vrijednost. Može se prikazati analitički kao funkcija vremena $f(t)$ i grafički u koordinatnom sustavu gdje apcisa predstavlja vrijeme t , a ordinata vremenski promjenjivu veličinu $f(t)$. Njezina vrijednost u određenom promatranom trenutku naziva se **trenutačna vrijednost**. Maksimalna ili vršna vrijednost funkcije promjenjive veličine $f(t)$ naziva se **amplituda**. Primjer vremenski promjenjive veličine prikazan je na slici 5.1. Sa slike se vidi kako su trenutačne vrijednosti u trenucima t_1 i t_2 različite, $f(t_1) \neq f(t_2)$. Isto tako, vidi se kako promjenjiva veličina na slici 5.1 postiže maksimalnu vrijednost u trenutku t_2 .

Periodično promjenjive veličine su one koje se tijekom vremena periodično ponavljaju, odnosno imaju sljedeće svojstvo:

$$f(t + kT) = f(t), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.1)$$

U izrazu (5.1) T je vremenski interval ponavljanja koji se naziva **perioda**. Na slici 5.2 dan je primjer valnog oblika periodično promjenjive veličine koji se neprekidno ponavlja s istom periodom T .

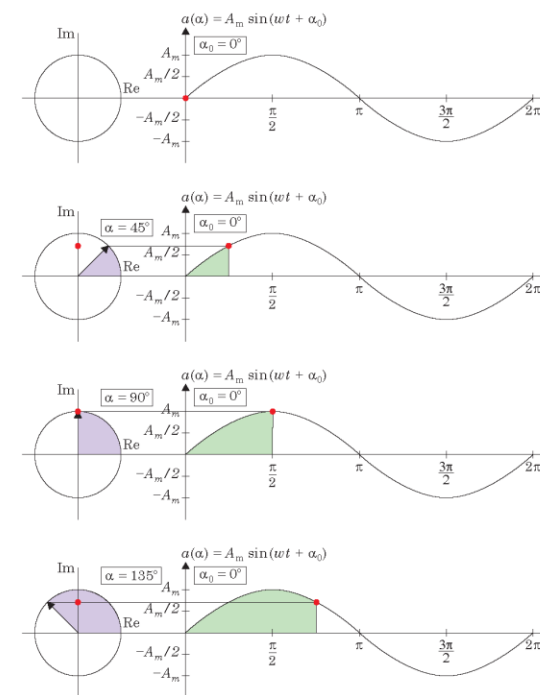
Ciklus je najmanji neponovljivi dio periodičkog vala, a trajanje jednog ciklusa odgovara periodu T . Na slici 5.3 prikazani su pravokutni i trokutni valni oblici te su naznačeni njihovi ciklusi – najmanji uzorci periodičnog valnog oblika koji se neprekidno ponavljaju.

5.5. Prikaz sinusnih veličina u kompleksnoj domeni

Funkcije koje definiraju oba dijagrama opisane su sljedećom jednačicom :

$$\underline{A} = A_m e^{j\alpha_0} \cdot e^{j\omega t} = A_m \cos(\omega t + \alpha_0) + j A_m \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (5.43)$$

Sljedi primjer dinamičkog prikaza sinusne veličine i rotirajućeg vektora za sekvencu vremenskih trenutaka. Fazni kut α_0 jednak je nuli, a pomaci su definirani za korake od 45° :

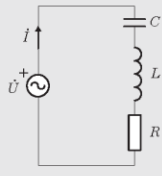


ZADATCI ZA VJEŽBU 6.

Zadatak 6.1.

Na izvor napona $\dot{U} = 20\angle 0^\circ$ V serijski su spojeni radni otpor $R = 10\ \Omega$, induktivitet reaktivnog otpora $X_L = 20\ \Omega$ i kapacitet reaktivnog otpora $X_C = 10\ \Omega$ (slika 6.45). Odredite:

- impedanciju kruga
- iznos struje izvora
- kut impedancije φ
- fazore napona na pojedinim elementima ($\dot{U}_R$, $\dot{U}_L$ i $\dot{U}_C$).



Slika 6.45.

Zadatak 6.2.

Na napon gradske mreže (230 V, 50 Hz) serijski su spojeni otpor R , induktivitet L i kapacitet C . Na induktivitetu je napon $U_L = 660$ V, a na kapacitetu $U_C = 500$ V. Odredite R , L i C ako je struja u krugu $I = 11$ A.

Zadatak 6.3.

Na izvor napona U i kružne frekvencije ω paralelno su spojeni otpor R , induktivitet L i kapacitet C . Odredite struju izvora I . Zadano je: $R = 12,5\ \Omega$, $L = 100$ mH, $C = 200\ \mu\text{F}$, $\dot{U} = 25\angle 0^\circ$ V, $\omega = 100\ \text{s}^{-1}$.

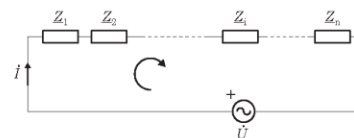
Zadatak 6.4.

Na izvor napona $\dot{U}$ serijski su spojeni kapacitet C i nepoznata impedancija Z_1 . Uz struju izvora $I = 10$ A iznosi napon na impedanciji Z_1 , kapacitetu C i izvoru $\dot{U}$ su jednaki: $U_{Z1} = U_C = U = 100$ V. Odredite iznos i kut impedancije Z_1 .

6.3. Kirchhoffovi zakoni u matričnom obliku

3. Impedancija $\underline{Z}$

Imamo je n impedancija $\underline{Z}$ spojenih u seriju. Svaka impedancija u seriji ima isti fazor struje.

Slika 6.8. Serijski spoj impedancija $\underline{Z}$

Primjenom Kirchhoffova zakona za jednu (KZN) za konturu prema Slika 6.8 dobiva se napon izvora:

$$\dot{U} = \underline{Z}_1 \dot{I} + \underline{Z}_2 \dot{I} + \dots + \underline{Z}_i \dot{I} + \dots + \underline{Z}_n \dot{I} \quad (6.21a)$$

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_i + \dots + \underline{Z}_n) \quad (6.21b)$$

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_i + \dots + \underline{Z}_n \quad (6.21c)$$

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i \quad (6.21d)$$

Ukupna ili ekvivalentna impedancija $\underline{Z}$ u seriju spojenih impedancija jednaka je sumi pojedinačnih impedancija.

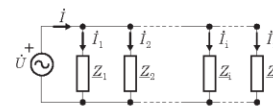
4. Serijski spoj admitancija $\underline{Y}$

Serijski spoj admitancija dobije ako se relacija $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$ uvrsti u jednadžbu (6.21d):

$$\frac{1}{\underline{Y}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Y}_i} = \frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Y}_i} + \dots + \frac{1}{\underline{Y}_n} \quad (6.22)$$

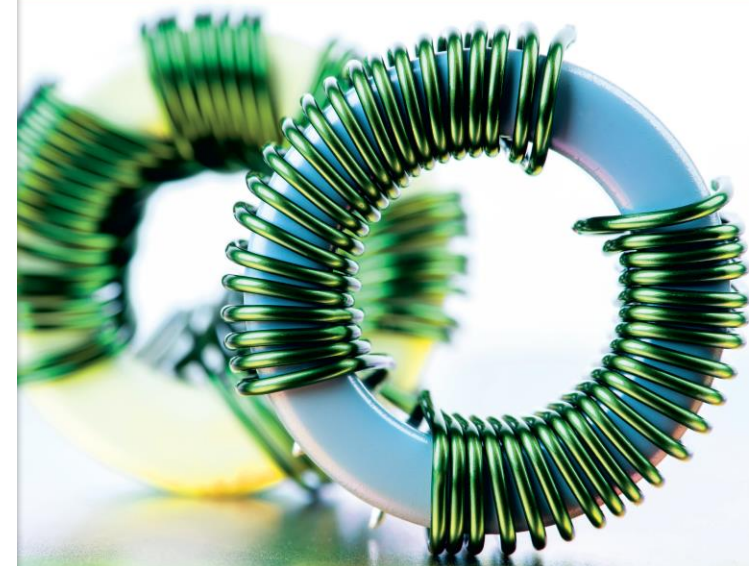
5. Paralelni spoj impedancija $\underline{Z}$

Zadano je n impedancija $\underline{Z}$ spojenih u paralelu. Paralelno spojene impedancije imaju jednak fazor napona na svakoj paralelnoj grani.

Slika 6.9. Paralelni spoj impedancija $\underline{Z}$

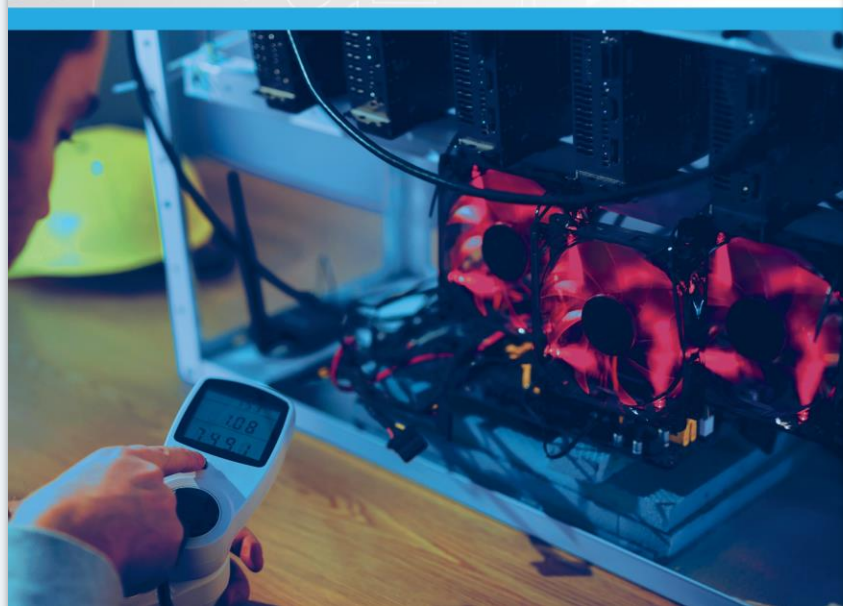
6

Impedancija, admitancija, Kirchhoffovi zakoni u sinusnim strujnim krugovima



7

Snaga u izmjeničnim strujnim krugovima



7. Snaga u izmjeničnim strujnim krugovima

Nadalje, iznos prividne snage može se prikazati i uz pomoć modula prividne snage u kompleksnom obliku (7.31b):

$$S = |\underline{S}| = |\underline{P} + j\underline{Q}| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (7.33)$$

Iz kompleksne prividne snage $\underline{S} = UI \cos(\varphi) + jUI \sin(\varphi)$ mogu se odrediti sljedeći izrazi:

$$S = |\underline{S}| = UI = I \cdot Z \cdot I \rightarrow S = I^2 Z \quad (7.34)$$

$$P = UI \cos(\varphi) = I \cdot Z \cdot I \cos(\varphi) = I^2 Z \cos(\varphi) \rightarrow P = I^2 R \quad (7.35)$$

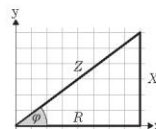
$$Q = UI \sin(\varphi) = I \cdot Z \cdot I \sin(\varphi) = I^2 Z \sin(\varphi) \rightarrow Q = I^2 X \quad (7.36)$$

Komentari:

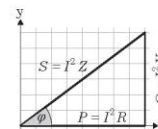
- U izrazu $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$ potrebno je uzeti konjugirani oblik fazora struje $\underline{I}^* = I \angle -\alpha_i$ jer je za određivanje snage potreban fazni kut $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$.
- Iznos prividne snage S predstavlja duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta gdje su katete $P = S \cos \varphi$ i $Q = S \sin \varphi$.

7.4. Trokut snage

Ranije uvedeni izrazi za radnu snagu P , reaktivnu snagu Q i prividnu snagu S mogu se prikazati uz pomoć trokuta snage. Polazi se od trokuta impedancija na slici 7.12.



Slika 7.12. Trokut impedancija



Slika 7.13. Trokut snaga

Njemu sličan trokut dobijemo ako pomnožimo svaku od stranica u trokutu impedancija s konstantom (faktorom proporcionalnosti) I^2 kao što je prikazano na slici 7.13.

Tako dobiveni trokut nazivamo *trokut snage*. Osim u pravokutnom koordinatnom sustavu *trokut snage* može se nalaziti i u kompleksnoj ravnini (slika 7.14).

7.10. Prilagođenje na maksimalnu snagu

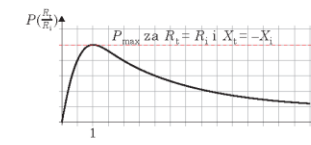
A nakon uvrštavanja uvjeta $X_t = -X_l$ u (7.49) i izjednačavanja brojnika s nulom dobije se i drugi uvjet za maksimum snage na $\underline{Z}_t$:

$$R_t = R_l. \quad (7.52)$$

Konačno, uvjet za maksimum snage na impedanciji $\underline{Z}_t$ s promjenjivim realnim i imaginarnim dijelom zapisuje se kao $\underline{Z}_t = R_l - jX_l$ ili kraće kao:

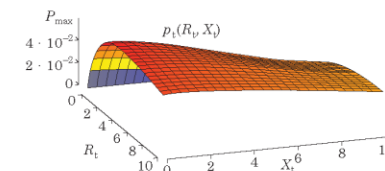
$$\underline{Z}_t = \underline{Z}_l^*. \quad (7.53)$$

Maksimum snage na trošilu nastupa uz uvjet da je impedancija trošila jednaka konjugirano kompleksnoj impedanciji izvora. Na slici 7.28 normalizirana je funkcija snage. Iako u krugu postoje reaktivni elementi, uz ispunjen uvjet $X_t = -X_l$ izvor se ponaša kao da je na njega spojen čisti omski otpor.



Slika 7.28. Radna snaga P na impedanciji $\underline{Z}_t$ u ovisnosti o normaliziranom omskom otporu trošila $\frac{R_t}{R_l}$ i uz $X_t = -X_l$

Na slici 7.29 prostorni je (P_t kao funkcija dviju varijabli) prikaz ovisnosti $P_t(R_t, X_t)$. U matematičkom smislu to je funkcija dviju varijabli $P(R_t, X_t)$ koja definira trodimenzionalnu plohu.



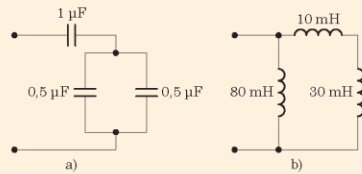
Slika 7.29. Snaga P kao funkcija dviju varijabli: R_t i X_t

Ako je na impedanciji $\underline{Z}_t$ promjenjiv samo realni dio R_t , a imaginarni dio X_t je fiksiran onda je maksimum snage na takvoj impedanciji funkcija jedne varijable $P_t(R_t)$. U tom slučaju se maksimum funkcije traži deriviranjem po R_t i izjednačavanjem s nulom:

$$\frac{dP_t}{dR_t} = \frac{U^2 [(R_l + R_t)^2 + (X_l + X_t)^2] - U^2 R_t 2(R_l + R_t)}{[(R_l + R_t)^2 + (X_l + X_t)^2]^2} = 0. \quad (7.54)$$

Primjer 8.6.

Odredite ekvivalentni kapacitet, odnosno induktivitet za serijsko-paralelne spojeve prikazane na slikama 8.22a i 8.22b.

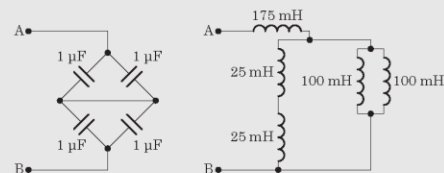


Slika 8.22. Zadani spojevi kondenzatora i zavojnica

- a) Ekvivalentni kapacitet paralelnog spoja dvaju kondenzatora jednak je $0,5 + 0,5 = 1 \mu\text{F}$. Dalje, ekvivalentni kapacitet dvaju serijski spojenih kondenzatora od $1 \mu\text{F}$ jednak je $C_{\text{eq}} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = 0,5 \mu\text{F}$.
- b) Ekvivalentni induktivitet serijski spojenih zavojnica od 10 mH i 30 mH jednak je 40 mH . Taj induktivitet spojen paralelno induktivitetu od 80 mH daje ukupni ekvivalentni induktivitet od $L_{\text{eq}} = \frac{40 \cdot 80}{40 + 80} = 26,67 \text{ mH}$.

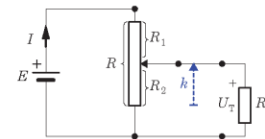
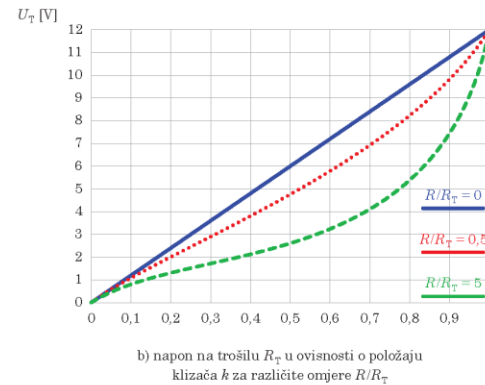
Zadatak 8.6.

Odredite ekvivalentni element s obzirom na stezaljke A i B za pasivne mreže prikazane na slici 8.23.



Slika 8.23. Složeniji spojevi kondenzatora i zavojnica

Ako na potenciometar spojimo trošilo (slika 8.59a), možemo analizirati utjecaj otpora trošila R_T na napon trošila U_T , a u ovisnosti o položaju klizača k potenciometra.

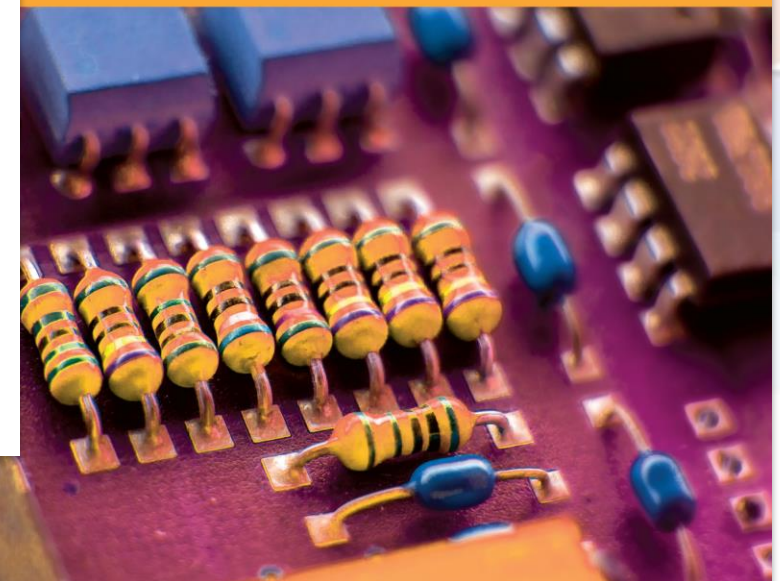
a) shema trošila R_T u potenciometrijskom spojub) napon na trošilu R_T u ovisnosti o položaju klizača k za različite omjere R/R_T

Slika 8.59. Trošilo priključeno na potenciometar

Pretpostavljamo da se vrijednost parametra k koji opisuje položaj klizača može mijenjati u granicama $0 \leq k \leq 1$ i vrijedi $R_1 = (1-k)R$, $R_2 = kR$. Struja koju daje izvor jednaka je:

$$I = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_T}{R_2 + R_T}} = \frac{E}{(1-k)R + \frac{kR R_T}{kR + R_T}} = \frac{E(kR + R_T)}{R[R_T + k(1-k)R]} \quad (8.96)$$

Ekvivalentne transformacije, naponsko i strujno djelilo





9

Frekvencijske karakteristike električnih krugova i rezonancija



gdje je ρ valni otpor:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9.119)$$

Reaktancija induktiviteta, odnosno kapaciteta pri rezonanciji jednaka je **valnom otporu** ρ :

$$\rho = X_{L0} = \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9.120)$$

$$\rho = X_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9.121)$$

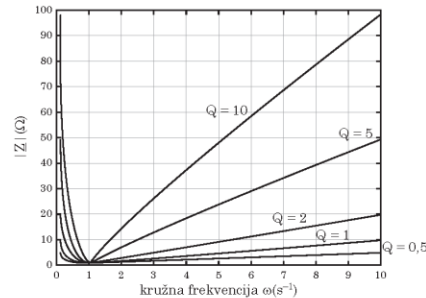
Vidimo da je valni otpor neovisan o frekvenciji, te ga izražavamo u omima, kao i svaku reaktanciju:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\Omega] \quad (9.122)$$

Valna vodljivost γ recipročna je vrijednost valnog otpora:

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \quad (9.123)$$

i izražavamo je u simensima (S) kao svaku vodljivost.



Slika 9.35. Modul impedancije u ovisnosti o Q -faktoru

9.8. Frekvencijske karakteristike serijskog RLC kruga

Zadatci za vježbu 9.

ZADATCI ZA VJEZBU 9.

Zadatak 9.1.

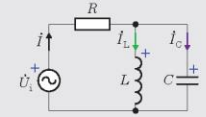
Serijski su spojeni kondenzator (kapaciteta C) i svitak (otpora R i induktiviteta L) te priključeni na napon U . Ako je na kondenzatoru izmjeren napon U_C , a struja je u fazi s naponom izvora, odredite napon na svitku. Zadano je: $U = 120$ V, $U_C = 160$ V. Model realne zavojnice objašnjen je u Dodatku 15.2.

Zadatak 9.2.

Paralelno su spojeni realna zavojnica (svitak) koja ima induktivitet 1 mH i otpor zavoja 7 Ω i kondenzator kapaciteta 20 μ F. Izračunajte rezonantnu frekvenciju tog spoja. Model realne zavojnice objašnjen je u Dodatku 15.2.

Zadatak 9.3.

Elementi R , L i C spojeni su kako je zadano slikom 9.54. Naponski izvor ima promjenjivu frekvenciju. Zadano je: $U_i = 120$ V, $R = 100$ Ω , $L = 0,1$ H, $C = 40$ μ F.

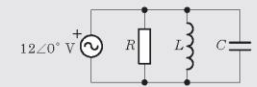


Slika 9.54.

- Odredite rezonantnu frekvenciju.
- Odredite napon na otporniku i na paraleli LC u rezonanciji.

Zadatak 9.4.

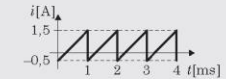
U krugu prema slici 9.55 frekvencija je odabrana tako da admitancija ima minimalan iznos. Odredite struju izvora. Zadano je: $R = 15$ Ω , $L = 20$ mH i $C = 24$ μ F.



Slika 9.55.

Zadatak 9.5.

Odredite efektivnu vrijednost struje valnog oblika prema slici 9.56.



Slika 9.56.

10.1. Uvod

U prijašnjim poglavljima prikazana je mogućnost primjene Kirchhoffovih zakona i Ohmova zakona u analizi jednostavnih istosmjernih i izmjeničnih strujnih krugova. Primjenom Kirchhoffovih zakona i Ohmova zakona moguće je odrediti struje u svim granama i napone na svim elementima strujnog kruga. Ovakav pristup moguće je koristiti za sve strujne krugove, međutim praktična upotreba u analizi složenijih strujnih krugova zahtijeva smanjenje sustava nadžbi kojim su opisane prilike u strujnom krugu. U ovom će poglavlju uvedene dvije metode koje su efikasne za rješavanje složenih strujnih krugova: metoda napona čvorova i metoda konturnih struja.

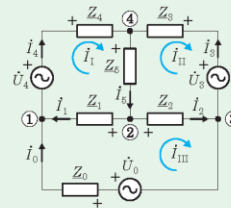
10.2. Metoda konturnih struja

Metoda konturnih struja temelji se na primjeni II. Kirchhoffova zakona na zavisne konture u mreži. Pri tom je I. Kirchhoffov zakon za struje u čvorovima indirektno uključen u jednadžbe II. Kirchhoffova zakona za konturne struje. Postupak će se ilustrirati na sljedećem primjeru.

Primjer 10.1.

Razmatramo strujni krug prema slici 10.1, pri čemu je: $\dot{U}_0 = 10 \angle 0^\circ$ V, $\dot{U}_3 = 20 \angle 0^\circ$ V, $\dot{U}_4 = 5 \angle 45^\circ$ V, $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 10 \angle 0^\circ \Omega$, $Z_4 = Z_5 = 10 \angle 45^\circ \Omega$.

U prvom koraku primjenjujemo sustav jednadžbi Kirchhoffovih zakona.



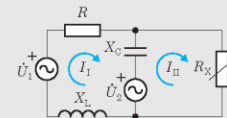
Slika 10.1. Analiza strujnog kruga primjenom konturnih struja

Zadatci za vježbu 10.

ZADATCI ZA VJEŽBU 10.

Zadatak 10.1.

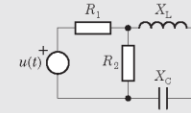
U mreži prema slici 10.5 odredite konturne struje I_I i I_{II} , ako je $R_x = 20 \Omega$. Zadano je: $\dot{U}_1 = 20 \angle 90^\circ$ V, $\dot{U}_2 = 20 \angle 180^\circ$ V, $R = 10 \Omega$, $X_L = 10 \Omega$, $X_C = 20 \Omega$.



Slika 10.5.

Zadatak 10.2.

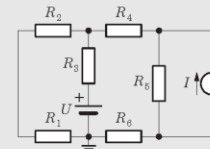
U mreži prema slici 10.6 odredite primjenom metode konturnih struja efektivnu vrijednost napona na otporniku R_2 ako je zadano: $u(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t)$ V, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$, $X_L = 10 \Omega$, $X_C = 40 \Omega$.



Slika 10.6.

Zadatak 10.3.

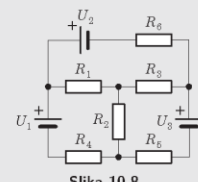
U mreži prema slici 10.7 odredite iznos napona na otporniku R_3 . Zadano je: $I = 7$ A, $U = 10$ V, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 80 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 8 \Omega$, $R_6 = 4 \Omega$.



Slika 10.7.

Zadatak 10.4.

Ako je zadano $U_1 = 120$ V, $U_2 = 40$ V, $U_3 = 80$ V, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = 7 \Omega$, $R_5 = 12 \Omega$, $R_6 = 6 \Omega$, odredite iznos struje kroz otpornike R_4 i R_5 (slika 10.8).



Slika 10.8.

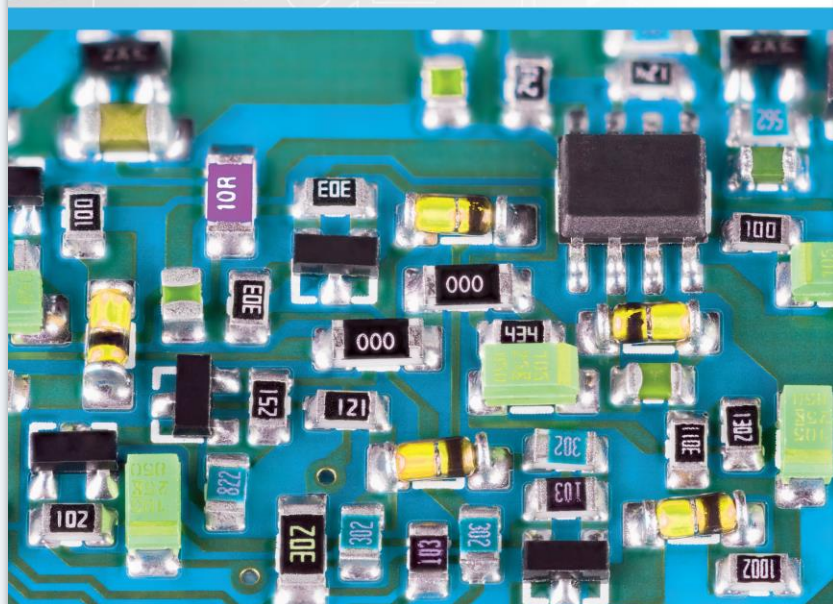
10

Metode analize električnih mreža



11

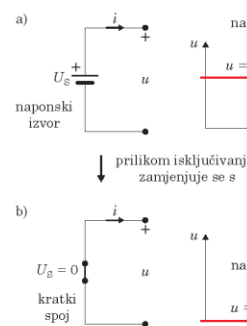
Metoda superpozicije, Théveninov i Nortonov teorem



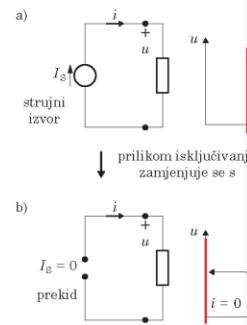
Naponski izvor se isključuje tako da mu se iznos napona smanji na nulu ($U_S \rightarrow 0$). Time se translira pravac karakteristike po u -osi, što je prikazano na slici 11.10b. Tako dobivena naponsko-strujna karakteristika odgovara otporniku čiji je otpor jednak nuli ($R = 0$), odnosno kratkospojniku. Dakle, isključivanje naponskog izvora znači zamjenu izvora s kratkim spojem. Unutarnji otpor izvora možemo očitati i iz njegove naponsko-strujne karakteristike. Ako vrijedi $R_i = \frac{\Delta u}{\Delta i}$, iz karakteristika koje su prikazane na slici 11.10 zaključujemo da se s promjenom struje Δi kroz izvor, napon na njegovim krajevima ne mijenja, tj. $\Delta u = 0$ iz čega proizlazi da je $R_i = 0$.

Naponsko-strujna karakteristika idealnog strujnog izvora prikazana je na slici 11.11a. Strujni izvor isključuje se tako da mu se iznos struje smanji na nulu ($I_S \rightarrow 0$). To znači transliranje pravca naponsko-strujne karakteristike po i -osi, što je prikazano na slici 11.11b. Tako dobivena naponsko-strujna karakteristika odgovara otporniku s beskonačnim oporom ($R = \infty$), odnosno prekidu. Dakle, isključiti strujni izvor znači zamijeniti ga s prekidom. Svojstvo idealnog strujnog izvora je da pruža jednaku struju $\Delta i = 0$ bez obzira kako se mijenja napon Δu na njegovim stezaljkama. Unutarnji otpor izvora možemo predstaviti kao $R_i = \frac{\Delta u}{\Delta i}$, što je u slučaju strujnog izvora beskonačna veličina.

Možemo zaključiti da isključiti naponski izvor znači zamijeniti ga s kratkim spojem, a isključiti strujni izvor znači zamijeniti ga s prekidom. To vrijedi za sve vrste naponskih i strujnih izvora – vremenski nepromjenjive, sinusne ili izvore drukčijeg valnog oblika.



Slika 11.10. Isključivanje naponskog izvora



Slika 11.11. Isključivanje strujnog izvora

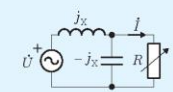
11.2. Metoda s

11.4. Nortonov teorem

Uzimajući u obzir određeni par stezaljki, nije moguće za sve aktivne linearne mreže odrediti parametre Théveninova nadomjesnog spoja. Pogledajmo sljedeći primjer kojim se opravdava postojanje Nortonova teorema.

Primjer 11.15.

Odredite kako se mijenja iznos struje I s porastom vrijednosti otpora R u mreži na slici 11.53. Pritom uzimamo da vrijednost R ne može biti beskonačna (prekid).



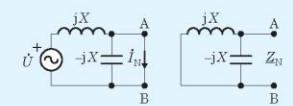
Slika 11.53.

Ako pokušamo problem pojednostavniti tako da dio sheme lijevo od otpornika s obzirom na stezaljke A i B probamo nadomjestiti prema Théveninovu teoremu, vidjet ćemo da ne možemo odrediti Théveninov napon zbog kratkog spoja koji je priključen na naponski izvor (slika 11.54).

Međutim, možemo odrediti Nortonovu struju $I_N = \frac{U}{jX}$ i impedanciju: $Z_N = \infty$ (slika 11.55).

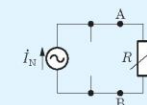


Slika 11.54.



Slika 11.55.

Nadomjesni spoj prema Nortonu idealni je strujni izvor, a prikazan je na slici 11.56. Možemo zaključiti da se s promjenom vrijednosti otpornika R , struja koja njime teče neće promijeniti.



Slika 11.56.

12.3. Trofazna trošila i trofazni sustavi

Trofazna trošila, slično kao i izvori sastoje se općenito od triju povezanih impedancija. Impedancije je, slično kao i izvore, moguće povezati spojem u trokut ili spojem u zvijezdu. U slučaju da se radi o trima impedancijama jednakog iznosa, riječ je o simetričnom trošilu. Impedancije sustava mogu se projektirati kao simetrične. Primjer za to su trofazni motori kao na slici 12.9 koji se konstruiraju kao simetrični sustav. U slučaju upotrebe jednofaznih trošila u kućanstvu, nije moguće osigurati jednake impedancije, a time ni jednake struje koje bi tekle u fazama trofaznog sustava. Na slici 12.10 prikazan je slučaj nesimetrije potrošača vidljiv kao tri značajno različite struje u fazama označenim s L1, L2 i L3.



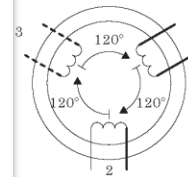
Slika 12.9. Trofazni asinkroni motor



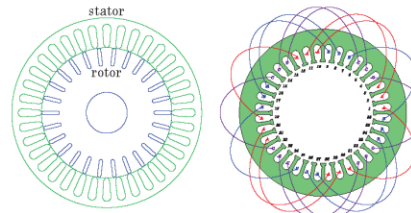
Slika 12.10. Prikaz nesimetričnosti trofaznog sustava kućnog napajanja na jednom katu FER-a

12.3.1. Trofazni spoj u zvijezdu

Trofazno trošilo spojeno u zvijezdu priključeno na generator spojem u zvijezdu prikazano je na slici 12.11. Faze izvora označene su brojkama 1, 2 i 3. Naponi između pojedinih faza izvora i nul-točke izvora 0 su fazni naponi izvora U_1 , U_2 i U_3 . Faze trošila su a , b i c . Naponi između pojedinih faza trošila i nul-točke trošila 0' su fazni naponi trošila U_a , U_b i U_c . U ovom je slučaju trošilo pri-



Slika 12.3. Osnovna shema namota trofaznog izvora



Slika 12.4. Primjer presjeka trofaznog stroja s načinom spajanja faza [36]

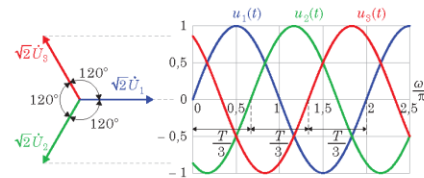
kladan primjer presjeka trofaznog stroja s prikazom statora i rotora i s načinom spajanja pojedinih faza u statoru koji osigurava potreban fazni potjec prikazan je na slici 12.4. Faze su na slici prikazane i označene različitim bojama.

Fazni napon trofaznog generatora, kao što je već navedeno, sastoji se od tri jednakomaknuta napona, inducirana u faznim namotima 1, 2 i 3 neovisno jedno od drugom. Faze 1, 2 i 3 mogu se spojiti u trokut ili u zvijezdu. Time se generator na sustav spaja s:

- tri vodiča – u slučaju spoja u trokut i spoja u zvijezdu bez nul-vodiča
- četiri vodiča – u slučaju spoja u zvijezdu s nul-vodičem.

Način spajanja u trokut i spoj u zvijezdu detaljnije su obrađeni u nastavku.

Fazni i fazorski prikaz trofaznog sustava napona ilustriran je slikom 12.5.



Slika 12.5. Prikaz trofaznog sustava napona s faznim pomacima

12.2. Trofazni izvori

12

Trofazni sustavi

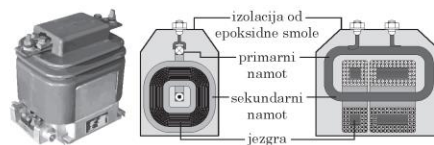


13

Međuinduktivno povezani električni krugovi i transformator



Osim za prijenos energije transformatori se koriste i kao mjerni transformatori. Mjerni transformatori svode mjerene napone i struje na vrijednosti prikladne za mjerenje – na sekundar se spaja voltmetar, odnosno ampermetar (slika 13.16).



Slika 13.16. Konstrukcija strujnog mjernog transformatora 50 A/5 A – Proizvodnja: Končar – Mjerni transformatori d. d. Zagreb



Slika 13.17. 1000 MVA, 420/300/10,5 kV, Ukupna masa 325 t – Proizvodnja: KONČAR KPT – Zagreb



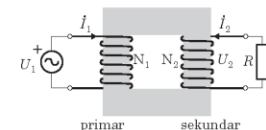
Slika 13.18. 90,8 MVA (za visokonaponsku istosmjernu mrežu) 332/√3 kV, Ukupna masa 155 t – Proizvodnja: KONČAR KPT – Zagreb

Za transformaciju naponskih razina u sustavima u kojima se prenosi energija koriste se transformatori s feromagnetskom jezgrom (slike 13.17 i 13.18). Zračni transformatori izrađuju se s jezgrom od neferomagnetskog materijala.

13.3. Načelo rada tra

13. Međuinduktivno povezani električni krugovi i transformator

13.4. Idealni transformator



Slika 13.19. Načelna konstrukcija transformatora

Idealni transformator možemo analizirati tako da krenemo od slike 13.19 koja prikazuje dva svitka međuinduktivno povezana preko feromagnetske jezgre te sljedećih pretpostavki:

- Gubici transformatora jednaki su nuli
- Nema rasipnog toka – magnetski tok se potpuno zatvara kroz jezgru i kroz oba svitka.

Pretpostavimo da su na jezgru transformatora namotane dvije zavojnice. Jedna od njih (primarna) neka ima N_1 zavoja, a druga (sekundarna) N_2 . Ako se kroz obje zavojnice zatvara isti magnetski tok Φ , prema Faradayevu zakonu vrijedit će za napone na zavojnicama

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (13.34)$$

$$u_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (13.35)$$

Promjenjivi magnetski tok možemo proizvesti tako da jednu zavojnicu, primarnu, spojimo na izvor sinusnoga napona u_1 . U tome slučaju u drugoj, sekundarnoj zavojnici inducirat će se napon koji možemo odrediti na temelju omjera

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1 \frac{d\Phi}{dt}}{N_2 \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (13.36)$$

Omjer $n = \frac{N_1}{N_2}$ nazivamo **prijenosni omjer transformatora**, a jednadžbu

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (13.37)$$

nazivamo **prvom transformatorskom jednadžbom**.

Kod idealnog transformatora nema gubitaka, pa će snage na primaru i na sekundaru biti jednake:

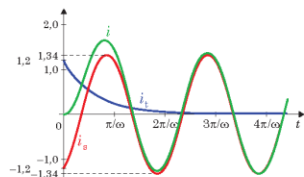
$$P_1 = P_2 \quad (13.38)$$

Dakle, ukupni odziv može se razdvojiti u dvije komponente: prijelazni član $i_t(t)$ koji se asimptotski smanjuje u nulu tijekom vremena te stacionarni član $i_s(t)$, koji daje trajan odziv kruga u stacionarnom stanju:

$$i_t(t) = e^{-(R/L)t} \left[\frac{-U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\alpha_u - \arctan \frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad (14.108)$$

$$i_s(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t + \alpha_u - \arctan \frac{\omega L}{R} \right). \quad (14.109)$$

Slika 14.28 prikazuje karakteristični ukupni odziv (zeleno) te posebno prikazane prijelaznu komponentu (plavo) i stacionarnu komponentu (crveno).



Slika 14.28. Struja u serijskom RL krugu tijekom priključenja na izvor sinusnog napona – ukupni odziv (zeleno) te prijelazna (plavo) i stacionarna komponenta (crveno)

Primjena modela – uključanje transformatora: Navedeni model vrijedan je pri opisivanju struje po priključenju transformatora bez sekundarnog opterećenja na mrežu. Općenito, struja kod transformatora pri priključivanju na mrežu može poprimiti velike iznose u odnosu na struje u stacionarnom stanju. Za model transformatora s konstantnim induktivitetom primjenjiv je stoga u praznom hodu (bez sekundarnog tereta) ranije izvedeni model odziva RL kruga pri priključenju na izvor sinusnog napona. Kako je kod transformatora $x_L \gg R$ (radni otpor primarnog namota mnogo je manji od njegove induktivne reaktancije), vrijedi za fazni kut impedancije

$$\varphi_0 = \arctan \frac{\omega L}{R} \approx 90^\circ, \quad (14.110)$$

što nakon uvrštenja u izraze za struju daje

$$i_t(t) = e^{-(R/L)t} \left[\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\alpha_u) \right] \quad (14.111)$$

$$i_s(t) = \frac{-U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \alpha_u). \quad (14.112)$$

prijelazne pojave u krugovima prvog reda s kapacitetom po uključanju na izvor stalnog napona

osno vidimo da vrijedi

$$i_0 = i(0) = c \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = c = \frac{U}{R}. \quad (14.34)$$

načino se dobiva:

$$i(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-t/\tau}. \quad (14.35)$$

na u krugu prilikom nabijanja kondenzatora prikazana je slikom 14.10.

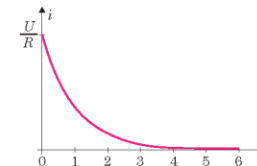
on na otporniku bit će pritom jednak

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = U \cdot e^{-t/\tau} \quad (14.36)$$

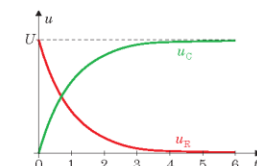
će napon na kondenzatoru biti

$$u_C(t) = U - u_R(t) = U(1 - e^{-t/\tau}). \quad (14.37)$$

on na kondenzatoru asimptotski za $t \rightarrow \infty$ prema naponu izvora U . Naponi na kondenzatoru i otporniku tijekom nabijanja kondenzatora prikazani su slikom 14.11.



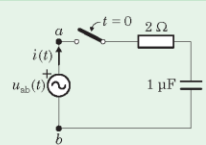
Slika 14.10. Struja u serijskom RC krugu po uključanju na izvor stalnog napona



Slika 14.11. Naponi u serijskom RC krugu po uključanju na izvor stalnog napona

Primer 14.2.

U krugu prema slici 14.12 sklopka se zatvara u trenutku kada je napon izvora $u_{ab}(t) = -5$ V. Odredite struju i i napon na otporniku u trenutku $t = 0^+$ neposredno nakon zatvaranja sklopke. Prije zatvaranja sklopke kondenzator je bio nenabijen.

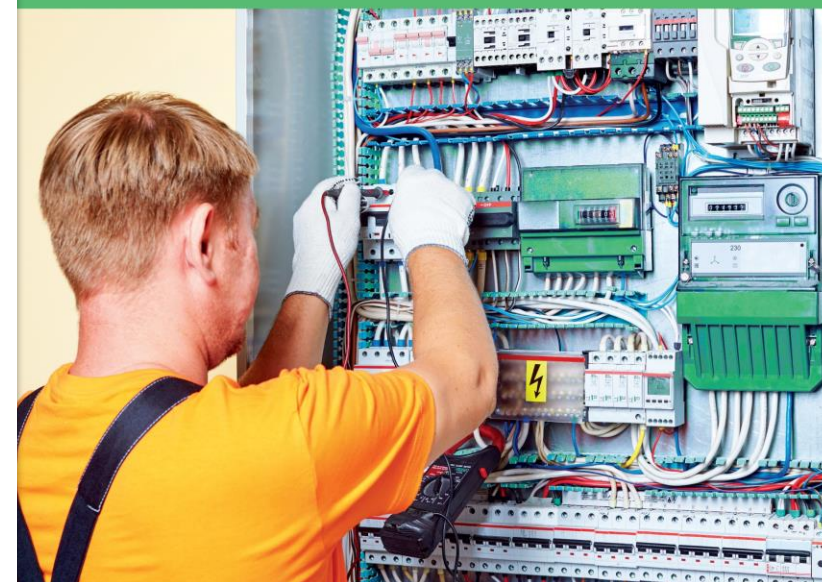


Slika 14.12.

U ovom primjeru ne radi se o analizi uključanja RC kruga na izmjenični izvor nego samo treba odrediti početne uvjete. Budući da je kondenzator prije zatvaranja sklopke bio nenabijen, početni napon na njemu bio je nula. Kako na kondenzatoru ne može doći do skokovite promjene napona, napon na kondenzatoru ostaje jednak $u_C(t = 0^+) = 0$ i neposredno nakon zatvaranja sklopke. Postavimo li jednadžbu drugoga Kirchhoffova

14

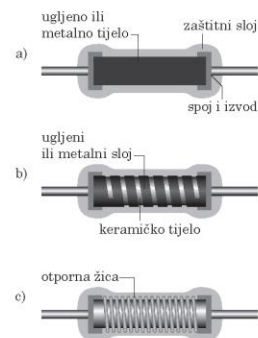
Prijelazne pojave u krugovima prvoga i drugoga reda



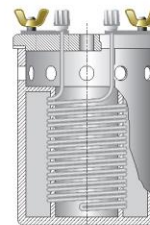


15. Dodatak

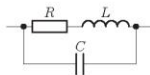
15.2.2. Realni otpornici



Slika 15.5. Konstrukcija nekoliko karakterističnih tipova otpornika kakvi se koriste u elektroničkim krugovima



Slika 15.6. Konstrukcija preciznog etalonskog žičanog otpornika



Slika 15.7. Nadomjesna shema realnog otpornika

Slike 15.5 i 15.6 prikazuju konstrukciju nekoliko karakterističnih tipova otpornika kakvi se koriste u elektroničkim i u preciznom mjeriteljstvu. Analogno konstrukciji zavojnice možemo zaključiti da će takvi otpornici također imati i određeni vlastiti induktivitet i kapacitet, pa ih također možemo prikazati istom nadomjesnom shemom kao i realnu zavojnicu (slika 15.7). Kod zavojnice je u predviđenim radnim uvjetima dominantan induktivitet, za razliku od otpornika u kojem je dominantan otpor.

Kao i kod zavojnice, nadomjesni model otpornika prikazan slikom 15.7 određuje ekvivalentnu impedanciju otpornika koja je frekvencijski ovisna. Ona će ovisiti o nazivnom otporu otpornika, te vrijednostima parazitnog kapaciteta i induktiviteta koje su definirane konstrukcijom. Krenuvši od nulte frekvencije, s porastom frekvencije pojavljuje se dominantan kapacitivni ili induktivni karakter. Kod "običnih" elektroničkih komponenata, za otpornike nazivnog otpora 1 M Ω i opteretljivosti $\frac{1}{4}$ W ekvivalentna impedancija dobiva značajan kapacitivni ka-

15.2. Nadomjesne sheme realnih pasivnih elemenata

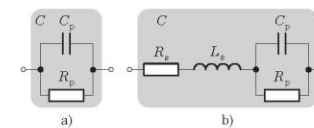
rakter već na oko 100 kHz. Isti takav otpornik nazivne vrijednosti 10 k Ω imat će sličan fazni kut tek na oko 2 MHz, a impedancija će također imati kapacitivni karakter. Konačno, otpornik nazivne vrijednosti 1 Ω imat će na istih 2 MHz sumjerljiv fazni kut po apsolutnom iznosu, ali induktivnog karaktera. Kod otpornika izrađenih u tehnici tankog metalnog sloja i namijenjenih upotrebi u sklopovima radijskih frekvencija rezonantne frekvencije mogu biti na desecima GHz, a ekvivalentna impedancija dominantno radnog karaktera sve do stotina MHz ili više od 1 GHz.

15.2.3. Realni kondenzatori



Slika 15.8. Konstrukcija kondenzatora

Slika 15.8 prikazuje konstrukciju kondenzatora. Zbog postojanja određene električne provodnosti izolacijskog sloja između ploča (folija), u nadomjesnoj se shemi paralelno kondenzatoru spaja i otpornik (slika 15.9a). U području viših frekvencija dolazi do izražaja i utjecaj vanjskih izvoda, koje u nadomjesnoj shemi prikazujemo serijskim spojem induktiviteta i električnog otpora (slika 15.9b).



Slika 15.9. Nadomjesne sheme realnog kondenzatora

Trigonometrijske transformacije

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Sinusne veličine

Operacije sa sinusnim veličinama proizlaze iz svojstava sinusnih funkcija. Zbroj ili suma sinusnih veličina iste frekvencije sinusna je veličina.

$$A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) = A_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$$

gdje je:

$$A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\tan(\alpha_0) = \frac{A_1\sin(\alpha_1) + A_2\sin(\alpha_2)}{A_1\cos(\alpha_1) + A_2\cos(\alpha_2)}$$

Derivacija sinusne veličine jest sinusna veličina:

$$\frac{d}{dt} A \sin(\omega t) = \omega A \cos(\omega t) = \omega A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Integral sinusne veličine jest sinusna veličina:

$$\int A \sin(\omega t) dt = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t) = \frac{A}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (16.5)$$

Eulerova formula

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (16.6)$$

Kompleksni brojevi

Prikazi kompleksnog broja:

pravokutni oblik:

$$\underline{A} = a_x + ja_y \quad (16.7)$$

gdje je:

a_x - realni dio

a_y - imaginarni dio

eksponencijalni oblik:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} \quad (16.8)$$

gdje je:

A - modul kompleksnog broja

α - argument (kut)

polarni oblik:

$$\underline{A} = A \angle \alpha \quad (16.9)$$

gdje je:

A - modul kompleksnog broja

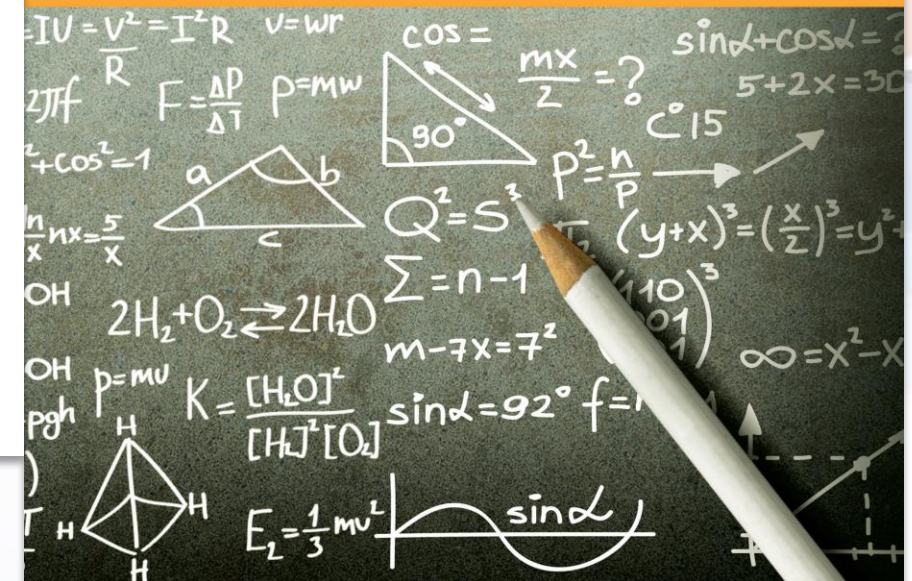
α - argument (kut).

Vrijede sljedeći izrazi za pretvorbe pravokutnog u polarni ili eksponencijalni oblik i obratno:

$$A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (16.10a)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a_y}{a_x} \quad (16.10b)$$

$$a_x = A \cos \alpha \quad (16.10c)$$



5. Izmjenične (sinusne) veličine i fazori

- $\tilde{U} = 10\sqrt{2} \angle 60^\circ \text{ V}$
- $u(t) = 100\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ V}$
- $i(t) = 5 \sin\left(2000t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}$
- $u(t) = 24 \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ V}$
- $i(t = 0,01 \text{ s}) = -5 \text{ A}$
- $\varphi = \alpha_u - \alpha_i = -15^\circ$
- $u(t = 0) = 141,42 \text{ V}$
- a) $i(t) = 5 \sin\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)$
b) $i(0) = -3,535 \text{ A}$ c) $35,355 \text{ A/s}$
- $u(t) = 7,07 \sin(\omega t) + 7,07 \cos(\omega t) \text{ V}$
- $u(t) = 223,675 \sin(1000t - 1,233) \text{ V}$
- $u_R(t) = 169,71 \sin\left(1000t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ V}$
 $u_L(t) = 282,84 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ V}$
 $u_C(t) = 428,55 \sin\left(1000t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ V}$
 $\tilde{U} = 158,162 \angle -70,649^\circ \text{ V}$
 $\tilde{U}_R = 120 \angle -30^\circ \text{ V}$
 $\tilde{U}_L = 200 \angle 60^\circ \text{ V}$, $\tilde{U}_C = 303,03 \angle -120^\circ \text{ V}$
- $i(t) = 12,806 \sin(100t + 0,373) \text{ A}$
 $i_R(t) = 10 \sin\left(100t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}$
 $i_L(t) = 10 \sin\left(100t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ A}$
 $i_C(t) = 2 \sin\left(100t + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ A}$
 $\tilde{I} = 9,055 \angle 21,34^\circ \text{ A}$, $\tilde{I}_R = 7,071 \angle 60^\circ \text{ A}$
 $\tilde{I}_L = 7,071 \angle -30^\circ \text{ A}$, $\tilde{I}_C = \sqrt{2} \angle 150^\circ \text{ A}$

- $u(t) = 1060,66 \sin(314t - 0,0023) \text{ V}$
 $u_R(t) = 848,53 \sin(314t - 0,646) \text{ V}$
 $u_L(t) = 848,53 \sin(314t + 0,925) \text{ V}$
 $u_C(t) = 212,13 \sin(314t - 2,217) \text{ V}$
 $\tilde{U} = 750 \angle -0,13^\circ \text{ V}$, $\tilde{U}_R = 600 \angle -37^\circ \text{ V}$
 $\tilde{U}_L = 600 \angle 53^\circ \text{ V}$, $\tilde{U}_C = 150 \angle -127^\circ \text{ V}$
- $i(t) = 0,255 \sin(314t + 1,768) \text{ A}$
 $i_R(t) = 0,1414 \sin\left(314t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}$
 $i_L(t) = 0,0707 \sin\left(314t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}$
 $i_C(t) = 0,2828 \sin\left(314t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ A}$
 $\tilde{I} = 180,3 \angle 101,31^\circ \text{ mA}$, $\tilde{I}_R = 100 \angle 45^\circ \text{ mA}$
 $\tilde{I}_L = 50 \angle -45^\circ \text{ mA}$, $\tilde{I}_C = 200 \angle 135^\circ \text{ mA}$
- $\tilde{I}_3 = 8,61 \angle -7,5^\circ \text{ A}$

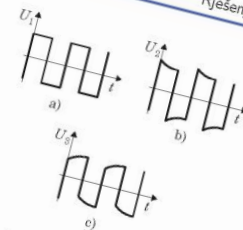
6. Impedancija, admitancija, Kirchhoffovi zakoni u sinusnim strujnim krugovima

- 1) $\tilde{Z} = 10 + j10 \Omega = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega$
2) $\tilde{I} = \sqrt{2} \text{ A}$
3) $\varphi = 45^\circ$
4) $\tilde{U}_R = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V}$, $\tilde{U}_L = 20\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$
 $\tilde{U}_C = 10\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ V}$
- $R = 15,02 \Omega$, $L = 0,191 \text{ H}$, $C = 70,03 \mu\text{F}$
- $\tilde{I} = 2 - j2 \text{ A} = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$
- $\tilde{Z}_1 = 10 \angle 30^\circ \Omega$
- $\varphi_a = 8^\circ$, $\varphi_b = 4^\circ$, $\varphi_c = 4 + j4 \text{ V}$,
 $\varphi_d = 4 - j4 \text{ V}$

Rješenja zadataka

Rješenja zadataka

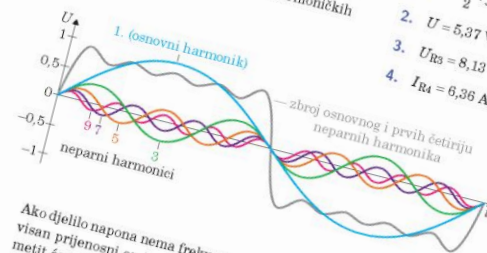
20 pF. Za tipljene vrijednosti ulazne impedancije osciloskopa, kod osciloskopske sonde s omjerom napona 10 : 1 vrijeme-dnost R_1 treba biti 9 MΩ. Taj je otpor od 9 MΩ ugrađen u samu sondu jer se kod osciloskopskih ne dodaje posebni vanjski sondi se nalazi i promjenjivi kondenzator, R_2C_2 kojemu kapacitet treba ugoditi na $C_1 = \frac{R_1}{R_2}$. Otpornik i kondenzator obično su integrirani ili u tijelo konektora kojim se sonda priključuje na osciloskop ili u tijelo udada se hvatajtkama. Kapacitet C_1 udada se zakretanjem malog vijka u tijelu konektora, uz korištenje izvora pravokutnog napona koji se u tu svrhu nalazi na prednjoj ploči osciloskopa. Naime, ako se provede Fourierova analiza pravokutnog napona, on se može prikazati zbrojem sinuznog napona osnovne frekvencije i njenih višekratnika. Donja slika prikazuje pravokutni napon prikazan zbrojem osnovnog i prvih četiriju viših harmoničkih članova:



Zakretanjem vijka i podešenjem kondenzatora ugadamo sondu tako da na zaslonu osciloskopa postignemo pravokutni valni oblik prikazan slikom a).

10. Metode analize električnih mreža

- $\tilde{I}_1 = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2} \text{ A}$, $\tilde{I}_{II} = \frac{1}{2} \text{ A}$
- $U = 5,37 \text{ V}$
- $U_{R3} = 8,13 \text{ V}$
- $\tilde{I}_{R4} = 6,36 \text{ A}$, $\tilde{I}_{R5} = -3,15 \text{ A}$



Ako djelio napona nema frekvencijski neovisan prijenosni omjer, u naponu $\tilde{U}_2$ poređenih harmoničkih članova i faza pojedinih harmoničkih članova te će doći do vidljivog izobličenja osciloskopiranog napona u odnosu na pravokutni valni oblik. Takvi su izobličeni valni oblici dani slikama b) i c) u nižem prikazu:

- $\tilde{I}_{R1} = 1,18 \text{ A}$
- $\tilde{U}_{C1} = 5,93 \text{ V}$
- $\tilde{I}_C = 6,06 \text{ A}$, $\tilde{U}_2 = 36,14 \text{ V}$
- $\tilde{I}_{Z3} = 1,04 \text{ A}$, $\tilde{I}_{Z4} = 0,50 \text{ A}$
- $\tilde{U}_{R1} = 25 \text{ V}$

Literatura

- [1] Alexander C. K., Sadiku M.N.O.: *Fundamentals of Electric Circuits*, McGraw-Hill Higher Education, 2009.
- [2] Apsen, Boris: *Repetitorij više matematike 2. dio : diferencijali, zakrivljenost krivulja, integrali, primjena integralnog računa, diferencijalne jednačbe, Fourierovi redovi*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.
- [3] Bego, Vojislav: *Mjerenja u elektrotehnici*, Graphis, Zagreb, 2003.
- [4] Bosanac, Tomo: *Teoretska elektrotehnika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- [5] Cassell, Wallace L.: *Linear electric circuits*, John Wiley & Sons, London, 1964.
- [6] Chua, Leon O.; Desoer, Charles A.; Kuh, Ernest S.: *Linear and nonlinear circuits*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [7] Domitrović, Hrvoje; Jambrošić, Kristian; Petošić, Antonio: *Prijenos zvuka*, Element, Zagreb, 2015.
- [8] Edminister, Joseph A.: *Schaum's outline of theory and problems of electric circuits*, McGraw-Hill, 1965.
- [9] Elezović, Neven: *Diferencijalne jednačbe*, Element, 2014.
- [10] Haznadar, Z.; Štuh, Ž.: *Elektromagnetizam I i II*, Školska knjiga, 1997.
- [11] Ivanšić, Ivan: *Fourierovi redovi. Diferencijalne jednačbe*, Sveučilište J.J. Strossmayer, Osijek, 2000.
- [12] Jajac, Branislav: *Teorijske osnove elektrotehnike*, svezak III, Graphis, Zagreb, 1998.
- [13] James, J. F.: *A student's guide to Fourier transforms with applications in physics and engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [14] Jelaković, Tihomil: *Transformatori i prigušnice*, Tehnička knjiga, 1966.
- [15] Jelenčić, Ivan: *Zvučnici*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- [16] Lončar, Josip: *Osnovi elektrotehnike I.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1958.
- [17] Lončar, Josip: *Osnovi elektrotehnike II.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.

Kazalo pojmova

ampermetar, 73
amplitudna karakteristika, 266
analiza električne mreže, 32
anoda, 447
autotransformator, 398

četverpolni instrument, 73
čvor mreže, 31

dinamički električni otpor, 17
Dirichletovi uvjeti, 258
donja granična frekvencija, 278
druga transformatorska jednačba, 401
dugi ravni vodič, 17
dvopolni instrument, 73

ekvivalentne transformacije, 200
električna mreža, 30
električna snaga, 8, 67
električna vodljivost, 17
električni naboj, 2
električni napon, 6
električni otpor, 15
električni potencijal, 5
električno odvajanje, 393
energija, 4, 5

faktor dobrote, 275
faktor oblika, 256
faktor prigušenja, 426
farad, 21
fazna karakteristika, 266
fazni kut, 80
fazor, 99
filar, 267
Fourierov red, 258
Fourierova analiza, 258
frekvencijska karakteristika, 266

grana mreže, 31
granična frekvencija, 267

henri, 22

idealni istosmjerni naponski izvor, 12
idealni istosmjerni strujni izvor, 13
idealni sustav, 12
impedancija, 118, 289, 290, 291
inducirani napon, 22, 23
induktivitet zavojnice, 22
istosmjerna struja, 4
izmjenična struja, 4
izmjenični strujni krugovi, 23
izolatori, 2

jakost električne struje, 3
jednostavna električna mreža, 30
Jouleov zakon, 20

karakteristična jednačba, 426
katoda, 447
kondenzator, 20, 21
kondenzatorske mreže, 22
konstantni član, 101
kontura, 32
kritično prigušeni titrajni krug, 428
kružna frekvencija, 80
KZN, 125
KZS, 124

linearni otpornici, 15
linijski spektar, 259
masa, 452
metoda superpozicije, 336
Millmanov teorem, 322
mjerna jedinica električnog napon
mjerna jedinica za struju, 3
mosni spoj, 219

Kazalo pojmova

nadkritično prigušeni titrajni krug, 428
napon praznog hoda, 62
napon, 6, 15
naponsko djelilo, 234
naponska rezonancija, 273
naponski i strujni izvori, 12
naponsko-strujna karakteristika, 14
nelinearni otpornici, 17
nezavisna kontura, 32
Nortonov teorem, 361
Ohmov zakon, 15
omjerni faktori, 256
otpor, 119
otpornici, 12
otpornik, 15
otvorene stezaljke, 22
paralelna rezonancija, 289
paralelni spoj, 42
pohranjivanje električne energije, 21
pojas zapiranja, 268
pojave koje nastaju izmjenama energije, 2
pojave koje nastaju kretanjem naboja, 2
polaritet, 33
poluvolni ispravljač, 448
potkritično prigušeni titrajni krug, 427
prijelazne pojave, 23
prijenosni omjer transformatora, 400
primar, 398
prividna snaga, 167
promjenjivi otpornik, 236
propusni pojas, 267, 278
prva transformatorska jednačba, 400
punovalni ispravljač, 448
radna snaga, 172
radna točka, 62
reaktancija, 119
realni naponski izvor, 60
realni strujni izvor, 60
referentni smjer, 33
rezonancija, 273
rezonantna frekvencija, 273, 286
sekundar, 398
serijska rezonancija, 273
serijski spoj, 42
simens, 17, 121
sinteza električne mreže, 32
statički električni otpor, 17
struja kratkog spoja, 62
strujna rezonancija, 289
strujni krugovi, 12, 30
stupanj korisnog djelovanja izvora, 69
superčvor, 31
susceptibilnost, 121
temeljno svojstvo materije, 2
Théveninov teorem, 347
tjemeni faktor, 256
transformatorska jednačba, 401
valna vodljivost, 277
valni otpor, 277
varijable istoga tipa, 33
varijable različitoga tipa, 33
vat, 8, 166
vatmetar, 73
visokopropusni filtar, 267
vodiči, 2
vodljivost, 121
volt, 5
voltamper reaktivni, 167
voltamper, 167
voltmetar, 73
vremenski promjenjivi član, 101
zasićenje, 453
zavojnica, 20, 22

Zagreb, srpanj 2022.