

Znak: 9405 Sv

Izdanje:

Prof. inž. Viktor Pinter

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE, knjiga druga

VI. izdanje

Stručna recenzija:

Prof. dr. inž. Radenko Wolf

Izdavač:

Izdavačko trgovačko poduzeće

TEHNIČKA KNJIGA, dioničko društvo

Zagreb, Jurišićeva 10

Za izdavača:

Franjo Nemeček

Urednik izdanja:

Slavko Vlahov

Tisak:

"Tiskara" d.d., Nova Gradiška

Tiskano u 1000 primjeraka

Tisak dovršen:

U prosincu 1994.

© V. Pinter, 1970.

ISBN 953-172-005-3

ISBN 953-172-007-X

Ranije objavljeno kao:

ISBN 963-7059-179-0

67.3 6.5
VIKTOR PINTER

redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta, Sveučilišta u Zagrebu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

KNJIGA DRUGA



ITP "TEHNIČKA KNJIGA" D.D. – ZAGREB
1994.

Odobreno rješenjem Komisije za udžbenike i skripta
Sveučilišta u Zagrebu broj 08-1337/2 – 1975
od 20. listopada 1975.

S A D R Ź A J

	Strana
12. Osnovna razmatranja o promjenljivim strujama	11
12.1. Općenito o promjenljivim veličinama	11
12.1.1. Značenje referentnog smjera	11
12.1.2. Označivanje dvostrukim indeksom	13
12.1.3. Količina protjecanog elektriciteta	15
12.1.4. Primjena referentnih smjerova pri analizi mreža	16
12.2. Periodički promjenljive struje	16
12.2.1. Izmjenične struje	17
12.2.2. Sinusoidalne promjenljive struje	18
12.2.3. Fazni kut i fazni pomak izmjeničnih veličina	20
12.3. Učinci (osnovni) izmjenične struje	21
12.3.1. Mjerenje promjenljivih električnih veličina	28
12.3.2. Srednja vrijednost	28
12.3.3. Efektivna vrijednost	30
12.3.4. Elektrolitska srednja vrijednost	32
12.3.5. Omjerni faktori	33
12.4. Princip generatora izmjeničnog napona	34
13. Strujni i naponski odnosi u krugovima izmjenične struje	40
13.1. Utjecaj promjenljivog elektromagnetskog polja na prilike u linearnim mrežama izmjenične struje	40
13.1.1. Priključak omskog otpora	41
13.1.2. Priključak induktivnog svitka	43
13.1.3. Priključak kondenzatora	46
13.2. Snaga i energija izmjenične struje	49
13.2.1. O kutu faznog pomaka struje i napona	49
13.2.2. Snaga izmjenične struje i faktor snage	50
13.2.3. Grafički prikaz snage izmjenične struje	53
13.2.4. Trokut snaga. Prividna snaga	59
13.2.5. Grafički prikaz energije u vremenskoj domeni	61
14. Vektorsko predočavanje sinusoidalnih veličina	63
14.1. Matematičke osnove vektorskog predočavanja	63
14.1.1. Konstrukcija sinusoide pomoću rotirajućeg radijus-vektora i primjena na sinusoidalne električne veličine	63
14.1.2. Mirujući vektorski dijagram i rotirajuća vremenska os	65
14.1.3. Zbrajanje (i odbijanje) izmjeničnih veličina	67

	Strana
14.2. Složeniji strujni krugovi i izmjenične struje	73
14.2.1. Serijski spojevi	74
14.2.2. Paralelni spojevi	82
14.3. Ekvivalentni serijski i paralelni spojevi	85
14.3.1. Djelatna i jalova komponenta napona i struje	88
14.3.2. Više impedancija u paralelnom, odnosno serijskom spoju	90
14.4. Realni svici i kondenzatori	95
15. Simbolički način rješavanja mreža izmjenične struje	100
15.1. Matematičke osnove kompleksnog računa	101
15.2. Primjena kompleksnog računa na izmjenične struje i napone	105
15.3. Analiza izmjeničnih mreža primjenom kompleksnog računa	112
15.3.1. Serijski spoj R, L, C. Kompleksna impedancija	113
15.3.2. Paralelni spoj R, L, C. Kompleksna vodljivost	116
15.3.3. Ohmovi i Kirchhoffovi zakoni u kompleksnom obliku	118
15.4. Primjeri simboličkog računa u mrežama izmjenične struje	120
15.5. Snaga predočena u kompleksnom području	130
15.5.1. Proračunavanje snage	131
15.5.2. Teorem maksimalne korisne snage u mrežama izmjenične struje	134
15.6. Rezonancija u strujnim krugovima izmjenične struje	136
15.6.1. Općenita razmatranja o rezonanciji	136
15.6.2. Serijska rezonancija	136
15.6.3. Paralelna rezonancija	143
15.6.4. Paralelna rezonancija realnog svitka i kondenzatora	146
16. Mjesni dijagrami u elektrotehnici	148
16.1. Jednadžbe mjesnih krivulja	148
16.1.1. Jednadžba pravca	149
16.1.2. Jednadžba kružnice	149
16.1.3. Pravac kao mjesni dijagram promjenljive impedancije	152
16.1.4. Inverzija. Jedinična kružnica	154
16.1.5. Invertiranje mjesnih dijagrama	157
16.1.6. Kružnica kao inverzija pravca	158
16.1.7. Kružnica u općenitom položaju	160
17. Višefazne struje	162
17.1. Trofazna struja	162
17.1.1. Općeniti prikaz trofazne struje (ili napona)	162
17.1.2. Princip konstrukcije trofaznog generatora	164
17.1.3. Nevezani trofazni sustav	168
17.1.4. Simetrični trofazni sustav u spoju zvijezda	169
17.1.5. Odnos faznih i linijskih vrijednosti	172
17.1.6. Trokutni spoj	175
17.1.7. Općenite jednadžbe 3-faznog zvijezda spoja	179
17.1.8. Redosljed faza 3-faznog sustava	181
17.1.9. Umjetna nultočka	182
17.1.10. Rotaciono magnetsko-polje trofazne struje	183
17.1.11. Simetrične komponente nesimetričnog trofaznog sustava	187

	Strana
17.2. Općenito o višefaznim sustavima	190
17.2.1. Dvofazni i četverofazni sustav	190
17.3. Snaga višefaznih sustava	191
17.3.1. Snaga trofazne struje	191
17.3.2. Općenito o balansiranim sustavima	193
18. Međuinduktivitet u mrežana izmjenične struje	195
18.1. Općenita razmatranja o smjerovima induciranih napona uz primjenu koeficijenta L i M	195
18.2. Primjena magnetskih tokova na proračun napona	200
18.3. Rezultantni induktivitet serijski vezanih svitaka	202
18.4. Analiza mreže izmjenične struje pri pojavi međuinduktiviteta	205
18.5. Proračun primjenom konturnih struja	206
18.6. Zračni transformator. Općenita jednačba i nadomjesna shema	207
18.7. Reduciranje sekundarnih veličina transformatora	211
19. Nesinusoidalne izmjenične struje	215
19.1. Proračun mreža primjenom Fourierova reda	215
19.2. Efektivne vrijednosti struje i napona	219
19.3. Srednja snaga nesinusoidalne struje	221
20. Svitak sa željeznom jezgrom	223
20.1. Oblik struje kod priključka svitka na sinusoidalni napon	223
20.2. Nesinusoidalna struja i njena ekvivalentna sinusoida	225
20.3. Jalova i djelatna komponenta struje magnetiziranja	226
20.4. Proračun snage gubitka zbog histereze i vrtložnih struja	227
20.5. Potpuni vektorski dijagram svitka sa željeznom jezgrom	229
21. Transformator sa željeznom jezgrom	231
21.1. Struja magnetiziranja	232
21.2. Naponi na primaru i sekundaru	233
21.3. Vektorski dijagram idealnog transformatora u praznom hodu	235
21.4. Idealni transformator pod opterećenjem	236
21.5. Energetski odnosi u idealnom transformatoru	239
21.6. Reducirani vektorski dijagram idealnog transformatora pod opterećenjem	240
21.7. Realni transformator pod opterećenjem	242
21.8. Reducirani vektorski dijagram realnog transformatora pod opterećenjem	244
21.9. Kappov trokut	245
21.10. Promjena sekundarnog napona pri opterećenju	247
Literatura	251
Kazalo	253

12. OSNOVNA RAZMATRANJA O PROMJENLJIVIM STRUJAMA

12.1. OPĆENITO O PROMJENLJIVIM VELIČINAMA

12.1.1. Značenje referentnog smjera

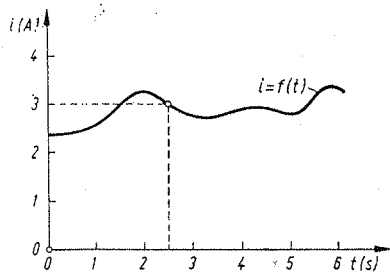
U uvodnim razmatranjima o električnoj struji bilo je rečeno da se promjenljivom smatra ona struja, čija se jakost mijenja tijekom vremena. Kažemo da je ta struja funkcija vremena, što se matematički može predložiti ovim analitičkim izrazom:

$$i = f(t)$$

Isto se tako i promjenljivi naponi predložuju kao funkcije vremena jednadžbama:

$$e = f(t); \quad u = f(t)$$

Sve promjenljive veličine možemo, osim analitičkim načinom, prikazati i grafički krivuljom u pravokutnom koordinatnom sustavu. Pri tome apscisa točke na krivulji predložuje u sekundama izraženo vrijeme koje je prošlo od trenutka kada se počelo računati vrijeme, dok nam ordinata — u odabranom mjerilu — predložuje vrijednost te promjenljive veličine u tom promatranom trenutku. Zato i nazivamo tu vrijednost *trenutnom* (momentanom) *vrijednošću*.



Sl. 12.1 Vremenski promjenljiva struja $i = f(t)$ prikazana u vremenskom dijagramu

Ako dakle na slici 12.1 nacrtana krivulja predložuje promjenljivu struju: $i = f(t)$, onda je npr. u trenutku $t = 2,5$ s trenutna vrijednost te struje $i = 3$ A.

Pri promjenljivim električnim strujama može se mijenjati ne samo njihova jakost izražena brojem ampera, nego se često susrećemo i s takvim strujama, kojima se u strujnom krugu mijenja i smjer strujanja.

Da bismo, dakle, pri računskoj analizi promjenljivih struja imali potpunu predodžbu o tome kako se mijenja jakost struje, moramo još nekom dodatnom oznakom istaknuti kojim smjerom u strujnom krugu prolazi struja u promatranom trenutku. Budući da u obzir dolaze samo dva međusobno suprotna smjera, najjednostavnije je tu razliku označiti predznacima plus i minus.

Prema tome, struje koje teku strujnim krugom u jednom smjeru imaju predznak (+) i one se u grafičkom načinu predočuju ordinatama iznad vremenske osi apscisa, dok će struje suprotna smjera imati predznak (--), a njihove su ordinate ispod osi apscisa.

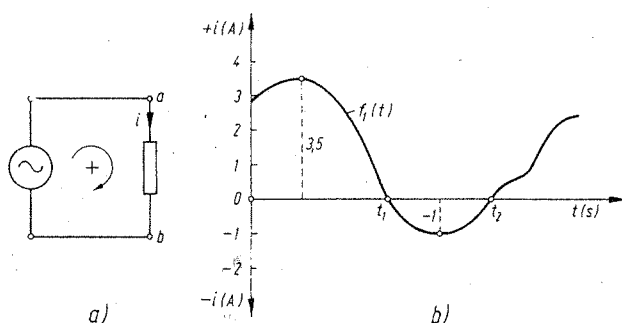
Tim samim, međutim, još nije rečeno kojemu od ta dva moguća smjera u strujnom krugu pripadaju pozitivne, a kojemu negativne vrijednosti jakosti struje. I to, dakako, moramo još točno odrediti ako želimo da nam računi uopće imaju neki smisao.

Očito je, dakle, da se uz jednadžbu ili graf promjenljive struje mora uvijek u spojnoj shemi zadanog strujnog kruga naznačiti i onaj smjer kojemu će pripadati vrijednosti struje s pozitivnim predznakom.

To se u spojnoj shemi može jednostavno označiti ucrtanom strelicom, koja još dodatno ima oznaku struje: i . Istaknuti treba da ovakva oznaka smjera struje ne znači da promjenljiva struja prolazi strujnim krugom *uvijek* u naznačenom smjeru, nego je to, kako je rečeno, samo oznaka u kojem će smjeru teći struja pozitivnog predznaka, dok će struje koje teku u suprotnom smjeru imati negativan predznak.

Budući da se predznaci koje struja doista ima u pojedinim trenucima odnose na taj odabrani smjer, nazivamo ga *referentnim smjerom*.

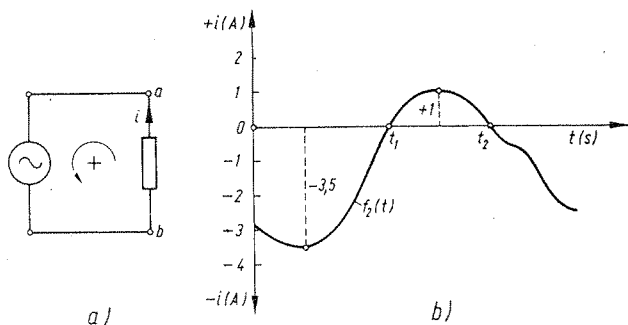
Za objašnjenje ovog osnovnog pravila kojeg se moramo pridržavati kad računamo s promjenljivim strujama, neka nam posluži slika 12.2. Na slici 12.2a prikazana je spojna shema strujnog kruga u kojem teče promjenljiva struja, a promjene njezine jakosti predočene su grafički u vremenskom dijagramu na slici 12.2b.



Sl. 12.2. a) Strujni krug izmjenične struje s po volji odabranim referentnim smjerom struje; b) Vremenski dijagram struje uz spojnu shemu

Uz pretpostavku da su nam promjene jakosti struje potpuno zadane, znamo da, na primjer, u intervalu od 0 do t_1 , struja teče u vanjskom dijelu strujnog kruga od stezaljke a prema stezaljci b . Taj smjer možemo odabrati kao pozitivan i zato je označen ucrtanom strelicom, a u vremenskom dijagramu na slici 12.2b imaju u tom vremenskom intervalu ordinate jakosti struje pozitivan predznak. Naprotiv, u intervalu od t_1 do t_2 ordinate jakosti struje su negativne, jer promatrana zadana struja teče u strujnom krugu suprotno odabranom referentnom smjeru.

To isto zbivanje u promatranom strujnom krugu može se u računima prikazati i na drugi način. Umjesto da smatramo pozitivnim one trenutne vrijednosti kad struja teče od a prema b , možemo baš struje suprotnog smjera (od b prema a) smatrati pozitivnim, pa će strelica referentnog smjera biti suprotno usmjerena, slika 12.3a. No istovremeno treba promijeniti i pripadni vremenski dijagram struje, jer sada moraju ordinate vrijednosti struje u intervalu 0 do t_1 biti negativne, a one u intervalu t_1 do t_2 pozitivne, slika 12.3b.



Sl. 12.3. a) Promijenjeni referentni smjer struje; b) Vremenski dijagram struje uz spojnu shemu

Ove razlike u predznacima električne struje ne smiju nekoga zavesti na misao da se fizikalni proces gibanja električnih naboja zbiva pri negativnoj struji drugačije nego pri pozitivnoj struji.

Poznato je, naime, da je prvim osnovnim pravilom o smjerovima u elektrotehnici definiran kao smjer struje onaj u kojem se gibaju (ili bi se gibali) pozitivni električni naboji. To pravilo ne vrijedi, dakako, samo za konstantnu istosmjernu struju, nego i općenito pri promjenljivim strujama.

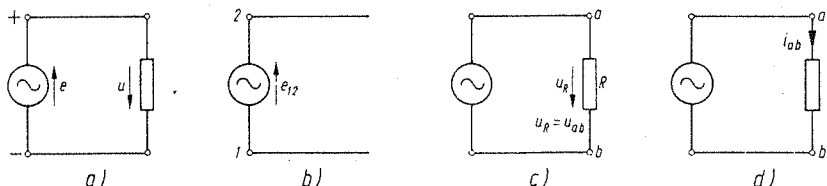
12.1.2. Označivanje dvostrukim indeksom

Na osnovi spomenutih izvoda vidimo da se referentni smjer u računima promjenljivih struja može po volji odabrati, no ne smijemo pri tom zaboraviti da promjena referentnog smjera zahtijeva i promjenu grafa, odnosno funkcije kojom su zadane vremenske promjene jakosti struje:

$$f_2(t) = -f_1(t)$$

Isto tako kao što smo promjenljivim strujama ucrtanom strelicom u strujnom krugu definirali njihov pozitivni predznak, moramo i promjenljivim naponima u spojnim shemama naznačiti koji smjer treba smatrati pozitivnim. Tek onda će se moći s promjenljivim naponima ispravno računati. Ta oznaka u vidu strelice može i ovdje biti vezana ili uz unutarnje proizvedene napone e ili uz vanjske napone u , kao što je bilo i kod strujnih krugova istosmjerne struje.

Ne moguće je i drugi način označivanja, koji slijedi iz same definicije napona. Budući da unutarnji napon djeluje u smjeru porasta potencijala, a vanjski od višeg prema nižem potencijalu, možemo i ovdje umjesto strelice za oznaku smjera djelovanja napona uzeti samo oznaku plus (+) kojom označujemo po volji odabranu točku višeg potencijala, slika 12.4a.



Sl. 12.4. a) Oznake referentnog smjera djelovanja napona; b) Referentni smjer unutarnjeg napona označen dvostrukim indeksom; c) Vanjski napon označen dvostrukim indeksom; d) Referentni smjer struje označen dvostrukim indeksom

I ove oznake imaju ovdje pri promjenljivim naponima samo referentno značenje: trenutna vrijednost napona imaće pozitivan predznak ako djeluje u smjeru odabrane strelice, odnosno ako njegov viši potencijal ima točka označena znakom plus (+). Protivno usmjereni naponi imajuće predznak minus (—).

Ima još jedan način označivanja odabranih referentnih smjerova struja i napona, koji je osobito prikladan ako se analiziraju strujne i naponske prilike jednog dijela od kojeg je sastavljen strujni krug. To se, dakle, odnosi na pojedine otpore, induktivne svitke i kondenzatore, ali i na same električne izvore. Pri tom označujemo promjenljivu veličinu dvostrukim indeksom, to jest sa dva slova ili dvije brojke. Ove oznake (slova ili brojke) naznačene su i na odgovarajućim točkama u spojnoj shemi.

Tako, na primjer, u skladu s oznakama na slici 12.4b možemo referentni smjer djelovanja unutarnjeg napona izvora e umjesto strelicom, prikazati dvostrukim indeksom e_{12} koji je pridružen veličini e :

$$e_{12}$$

To znači da će one trenutne vrijednosti unutarnjeg napona koje djeluju u smjeru od točke (stezaljke) 1 prema točki 2, imati predznak plus.

Isto tako smatramo, prema slici 12.4c, otporu R privedeni vanjski napon $u_R = u_{ab}$ pozitivnim, ako djeluje od stezaljke a prema stezaljci b .

I struja kroz priključno trošilo na slici 12.4d, kojoj je referentni smjer označen strelicom, može se označiti dvostrukim indeksom i_{ab} , pri čemu se smatra da će pozitivni predznak imati struja ako teče kroz trošilo od stezaljke a prema stezaljci b .

Ovaj način označivanja električnih veličina dvostrukim indeksom ima pri računskoj analizi električnih mreža još i naročitu osobinu da se promjenom redoslijeda indeksa mijenja i predznak promatrane veličine. Vrijedi, dakle, općenito za cijelu funkciju promjenljivog napona:

$$e_{12} = f(t); \quad e_{21} = -e_{12} = -f(t)$$

Isti odnos vrijedi i za trenutne vrijednosti, pa ako je npr. prema slici 12.2a na osnovi odabranog referentnog smjera u nekom trenutku struja od 3,5 A kroz otpor pozitivna kad prolazi od stezaljke *a* prema stezaljci *b*, onda će ta ista struja gledana u suprotnom smjeru od *b* prema *a* imati negativan predznak:

$$i_{ab} = 3,5 \text{ A}; \quad i_{ba} = -3,5 \text{ A}$$

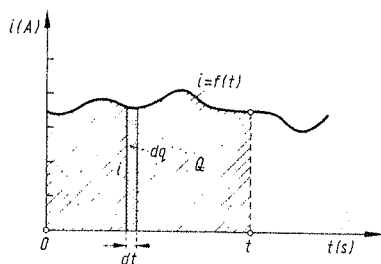
12.1.3. Količina protjecanog elektriciteta

U vezi s grafičkom predodžbom promjenljivih struja pogledajmo još što nam u vremenskom dijagramu promjenljive struje označuje površina omeđena krivuljom $i = f(t)$ i apscisnom osi t , dakle:

$$\int_0^t i \cdot dt$$

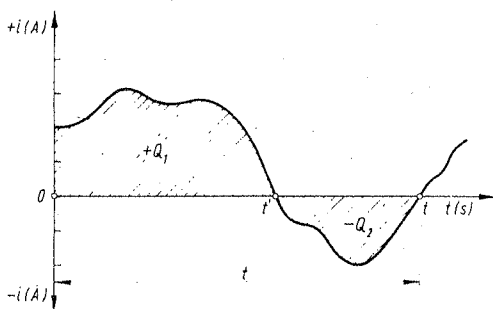
Lako se može vidjeti s obzirom na osnovnu relaciju $i = dq/dt$, koju je moguće napisati i u obliku $i \cdot dt = dq$, da je ta površina (sl. 12.5) brojčano jednaka ukupnoj količini pozitivnog elektriciteta, koja je u odabranom referentnom smjeru prošla kroz presjek vodiča u vremenu t , jer je:

$$\int_0^t i \cdot dt = \int_0^Q dq = Q$$



Sl. 12.5. Količina protjecanog pozitivnog elektriciteta Q

Ako struja mijenja smjer bit će površine ispod apscisne osi negativne, što znači da se odgovarajuća količina pozitivnog elektriciteta vraća u suprotnom smjeru,



Sl. 12.6. Rezultantna količina protjecanog elektriciteta: $Q = Q_1 - Q_2$

tako da je Q samo preostala rezultantna količina pozitivnog elektriciteta koja je prošla kroz presjek vodiča u vrijeme t u jednom smjeru, slika 12.6.

12.1.4. Primjena referentnih smjerova pri analizi mreža

U prijašnjim izvodima upoznali smo kako treba prikazati promjenljive veličine da bi one bile potpuno točno definirane. U ovim uvodnim teoretskim tumačenjima redovno samo promatrali samo jednu *poznatu*, zadanu, veličinu: bilo promjenljivi napon bilo struju. Međutim, kad se u praksi govori o samo jednoj promjenljivoj veličini, onda se ipak redovno ne služimo ovim načinom označivanja njihovih vrijednosti, nego je dovoljno naznačiti samo jednom brojkom njihovu prosječnu vrijednost.

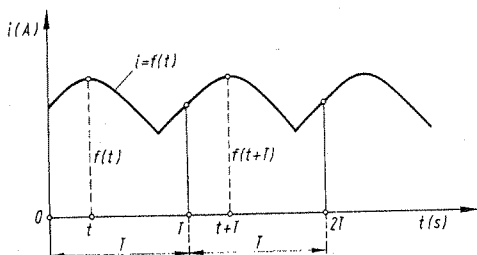
Kad analiziramo kompliciranije električne uređaje i predočujemo ih složеним shemama, moramo računati s više različitih napona i struja, međusobno povezanih fizikalnim zakonima. U tom slučaju bit će neophodno potrebno prikazati sve veličine na prije navedeni način, uz primjenu odabranih referentnih smjerova.

Budući da se u ovim računima redovno traže neke *nepoznate* veličine na osnovi zadanih poznatih veličina, to pri postavljanju jednadžbi fizikalnih odnosa koji vladaju među njima moramo i nepoznate veličine prikazati ne samo (kao što nam je već iz matematike poznato) općim brojem, nego i *pretpostavljenim* referentnim smjerom djelovanja. U rješenju ne ćemo onda dobiti samo podatak o iznosu tražene veličine, nego i njezin smjer djelovanja. Ako npr. za nepoznatu struju nakon izvršenog proračuna dobijemo izraz $i = 5 \text{ A}$, znači da tražena struja od 5 A teče u pretpostavljenom referentnom smjeru, no ako nam je rješenje dalo da je $i = -5 \text{ A}$, to znači da struja od 5 A teče u smjeru suprotnom od prvotno pretpostavljenog smjera.

12.2.

PERIODIČKI PROMJENLJIVE STRUJE

Promjenljivost električnih struja i napona prouzročit će u strujnim krugovima promjenljivih struja još dodatne pojave s kojima se nismo susreli u mrežama istosmjerne struje. Zato će biti potrebno da ove dodatne utjecaje, koji nastaju u biti zbog promjenljivosti električnih i magnetskih polja, detaljnije upoznamo kako u pogledu veličinskih odnosa među strujama i naponima, tako i u pogledu smjerova njihova djelovanja.



Sl. 12.7. Veličinski odnosi periodički promjenljive funkcije

To će biti objašnjeno u nekim od slijedećih izlaganja, ali prije toga treba još razmotriti kakvih sve vrsta promjenljivih struja iskoristujemo u elektrotehnici i kako ih možemo matematički prikazati.

Od svih promjenljivih veličina u elektrotehnici osobito su važne one, čije se promjene trenutnih vrijednosti tijekom vremena periodički ponavljaju. Takve promjenljive veličine zovu se *periodički promjenljive*.

U grafičkom prikazu očituje se periodičnost neke veličine time da se nakon vremenskog intervala T , koji nazivamo *periodom* promjenljive veličine, ponavlja graf koji predočuje tu veličinu, sl. 12.7. Matematički se pak ta periodičnost izražava jednadžbom:

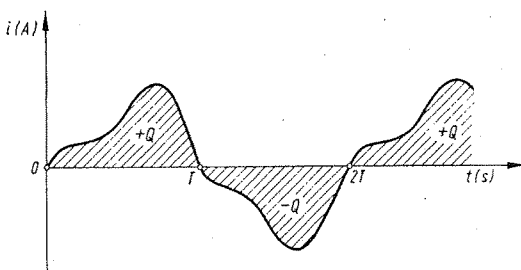
$$f(t) = f(t + T) = f(t + kT)$$

gdje je „ k “ bilo koji cijeli broj.

12.2.1.

Izmjenične struje

Mnoge periodički promjenljive struje mijenjaju u vremenu jedne periode i smjer strujanja, a od tih su kako za praksu tako i za teoriju naročito interesantne one, čije su pozitivne i negativne površine u vremenskom dijagramu međusobno jednake, tako da je rezultatna količina protjecanog elektriciteta za vrijeme T jednaka nuli: $Q = 0$. Takve struje nazivamo *izmjeničnim strujama*, sl. 12.8.



Sl. 12.8. Čista periodički promjenljiva izmjenična struja

Vrijeme trajanja jedne periode T mjeri se sekundama. Promjenljivost takvih periodički promjenljivih struja možemo, osim vremenom trajanja jedne periode, označiti još i tako da kažemo koliko je punih promjena, tj. perioda, izvršila ta struja tijekom jedne sekunde. Tako npr. vrijeme jedne periode gradske izmjenične struje iznosi: $T = 1/50$ s. U jednoj će sekundi, dakle, struja izvršiti 50 punih perioda. Taj iznos broja perioda u jednoj sekundi nazivamo *frekvencijom* izmjenične struje i označujemo slovom: f .

Vidimo da su numerički frekvencija i vrijeme jedne periode povezani jednadžbom:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ i } \quad T = \frac{1}{f}$$

Umjesto da govorimo: frekvencija izmjenične struje gradske mreže jeste 50 perioda u 1 sekundi, izražavamo se kraće: frekvencija je 50 herca, što se označuje:

$$f = 50 \text{ Hz}$$

Jedinica za mjerenje frekvencije zove se, naime, *herc* i označuje slovima Hz. Taj naziv prihvaćen je u počast znamenitom fizičaru H. Hertzu, koji se mnogo bavio istraživanjem izmjeničnih struja vrlo visokih frekvencija. 1 herc = 1 Hz predstavlja, dakle, jednu periodu u 1 s. Dimenzija za frekvenciju izlazi iz gornje jednadžbe i to je $s^{-1} = 1/s$.

Izmjenične struje s kojima se u praksi susrećemo često su u pogledu vremenske ovisnosti veoma različite, pa se u vremenskom dijagramu prikazuju najrazličitijim periodičnim krivuljama.

12.2.2.

Sinusoidalne promjenljive struje

Ipak u teoretskim razmatranjima, a dapače i u praktičkoj primjeni, osobito veliku važnost imaju baš sinusoidalno promjenljive izmjenične struje i naponi.

To možemo lako shvatiti ako se sjetimo da se idealni titrajni procesi i u prirodi zbivaju prema sinusoidalnom zakonu. Zato se takve promjene nazivaju *harmoničkim promjenama*. Osim toga znamo da se općenito prema Fourierovom pravilu, poznatom iz matematičke analize, svaka periodička funkcija koja nije sinusoidalna može rastaviti u red čiji su članovi sinusoidalne funkcije sa sve kraćim vremenom T (ili sa sve većom frekvencijom), a — obično — sa sve manjom amplitudom. Ako, dakle, znamo rješavati probleme sinusoidalne struje, moći ćemo prijeći i na izučavanje nesinusoidalnih izmjeničnih struja.

U tehnici jakih struja, osobito u uređajima za proizvodnju, prijenos i upotrebu električne energije, nastoji se po mogućnosti primjenjivati što pravilnija sinusoidalna struja, dakle samo jedan sinusoidalni član. To je zato jer bi pri nesinusoidalnoj izmjeničnoj struji zbog njenog složenog sastava mogli njeni viši harmonički članovi eventualno smetati u radu postrojenja jake struje. U Evropi je općenito prihvaćena frekvencija sinusoidalne izmjenične struje za javnu upotrebu od 50 Hz, dok se Amerika služi frekvencijom 60 Hz.

Naprotiv su telekomunikacioni, elektroakustički, radio i razni regulacioni aparati (a ti su se uređaji svrstavali u područje slabe struje), svojim funkcioniranjem upravo vezani na iskorišćavanje izmjeničnih struja svih mogućih frekvencija, pa se tako u tom području radi sa strujama od najmanjih do najviših frekvencija koje je moguće proizvesti.

Kako vidimo, bitna je karakteristična oznaka sinusoidalno promjenljive izmjenične struje također i njena frekvencija. Neke pojave ističu se mnogo jače na višim frekvencijama nego na niskim, no ima slučajeva kad moramo pažnju obratiti i niskim frekvencijama.

Ipak se sva osnovna razmatranja o izmjeničnim strujama mogu provesti na jednoj sinusoidalnoj izmjeničnoj struji, neovisno o tome kolika je frekvencija i to tako, da se za frekvenciju uzme jednostavno opći broj f i taj se u daljnjim izvodima smatra stalnom veličinom. U uređajima čija funkcija bitno ovisi o veličini f bit će utjecaj frekvencije detaljnije objašnjen.

Budući da su sinusoidalne promjene harmoničke promjene koje se mogu i računski lako interpretirati, bit će nam moguće i pojave pri sinusoidalnim strujama razmatrati uz pomoć poznatih relacija za goniometrijske funkcije.

Pogledajmo sada najprije kako se može formulirati izlaz za jednu sinusoidalno promjenljivu veličinu, npr. za sinusoidalnu struju. Da nađemo eksplicitni izraz $i = f(t)$ iskoristit ćemo sličnost koja treba da postoji između vremenske funkcije naše izmjenične struje i sinusoide kao goniometrijske funkcije. Na osnovi slike 12.9 vidimo da u slučaju tražene sličnosti postoje slijedeći odnosi među veličinama:

$$i : I_{\max} = \sin \alpha : 1$$

gdje nam znače:

i . . . trenutnu vrijednost struje za vrijeme t

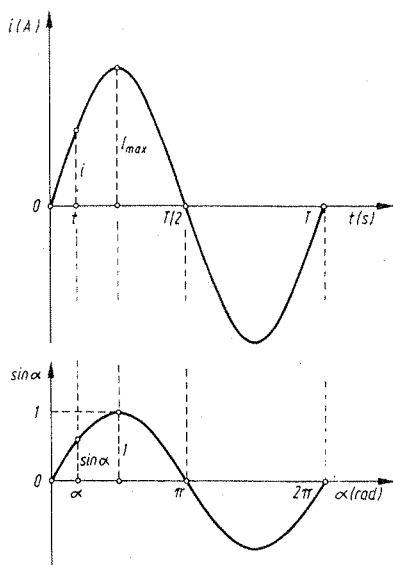
$I_{\max}$. . . maksimalnu vrijednost struje ili amplitudu

$\sin \alpha$. . . ordinatu sinusoide za kut α

1 . . . maksimalnu vrijednost ili amplitudu sinusoide.

Iz ovog razmjera slijedi:

$$i = I_{\max} \sin \alpha.$$



Sl. 12.9. Izvod analitičkog izraza za sinusoidalno promjenljivu izmjeničnu struju

No budući da je naša struja funkcija vremena, treba varijablu α izraziti odgovarajuće vremenom, i to opet na osnovi sličnih odnosa na apscisi, koje možemo također naći na slici 12.9. Vidimo da periodi sinusoide 2π odgovara puno vrijeme jedne periode izmjenične struje T , pa možemo napisati i ovaj razmjer:

$$t : T = \alpha : 2\pi$$

odakle dobivamo:

$$\alpha = \frac{t \cdot 2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t = 2\pi \cdot f \cdot t.$$

Umnožak $2\pi \cdot f$ nazivamo *kružnom frekvencijom* i označujemo slovom ω , dakle:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

pa možemo jednadžbu izmjenične struje prikazati u obliku:

$$i = I_{\max} \sin \omega t$$

i analognu napone:

$$u = U_{\max} \sin \omega t$$

$$e = E_{\max} \sin \omega t$$

Ukoliko promatramo pojave pri izmjeničnoj struji konstantne frekvencije, bit će i ω konstanta — dakle faktor kojim varijablu vrijeme pretvaramo u kutnu mjeru, da možemo izračunati vrijednost sinusa. Veličina ω mjeri se u rad/s.

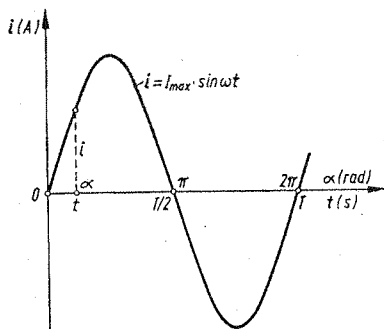
Iako su naše sinusoidalne električne veličine doista funkcije vremena, možemo ipak u grafičkom prikazu — a i u računima — kao varijablu uzeti također umjesto vremena t kut α , ali moramo imati na umu da je onda taj kut funkcija vremena, kako to izražava jednadžba:

$$\alpha = \omega \cdot t = 2\pi \cdot f \cdot t$$

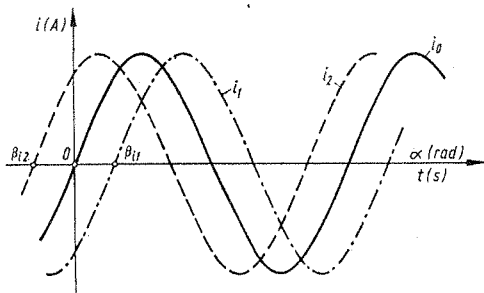
U koordinatnom sustavu, slika 12.10, gdje je grafički predočena sinusoidalna struja, imamo dakle na apscisnoj osi osim vrijednosti t naznačene i odgovarajuće vrijednosti kuta α .

Dakako da i svakom kutu α pripada određeno vrijeme t , koje možemo izračunati jednadžbom:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{2\pi \cdot f}$$



Sl. 12.10. Sinusoidalna struja prikazana kao funkcija kuta α i vremena t



Sl. 12.11. Različito fazno pomaknute struje i_1 i i_2 u odnosu na osnovnu (referentnu) struju i_0

12.2.3. Fazni kut i fazni pomak izmjeničnih veličina

Prije izvedene jednadžbe koje prikazuju sinusoidalne struje i napone vrijede samo onda ako vrijeme t počinjemo mjeriti od onog trenutka kad promatrana veličina počinje rasti od vrijednosti nula u pozitivnom smjeru.

Ako bi promatrana sinusoidalna veličina, npr. struja, slika 12.11, u trenutku $t = 0$ imala već neku vrijednost različitu od nule, onda bi jednadžba glasila:

$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_1)$$

gdje nam β_1 predstavlja kut (odnosno pripadno vrijeme) za koje osnovna referentna krivulja:

$$i_0 = I_{\max} \sin \omega t$$

postizava upravo onu vrijednost, koju ima promatrana krivulja u vrijeme $t = 0$.

Na slici 12.11 se vidi da prema položaju pomaknute krivulje u odnosu na osnovnu može kut β_1 biti pozitivan ili negativan i to: ako struja i_1 maksimalnu vrijednost postizava kasnije nego referentna struja i_0 onda je kut β_{11} negativan, dok je β_{12} pozitivan ako struja i_2 ima maksimalnu vrijednost prije nego struja i_0 .

Ovi kutovi mogu se očitati u svojoj apsolutnoj vrijednosti i na apscisnoj osi, gdje mjerimo vrijeme ili odgovarajuće kutove. Po iznosu su ovi kutovi upravo toliko za koliko je prema ishodištu koordinatnog sustava pomaknuta nultočka promatrane struje kad ova počinje rasti u pozitivnom smislu, slika 12.11.

Predznak im je (+) ako je ta nultočka pomaknuta od ishodišta nasuprot vremenskoj osi (nalijevo), odnosno (−) ako je nultočka pomaknuta nadesno.

Vidimo da je za sinusoidalne struje i napone kut β naročito karakteristična veličina, jer osim o vremenu, bitno o tome kutu ovisi i to kolika će biti njihova *trenutna vrijednost*.

U tehničkoj i naučnoj terminologiji se za trenutna stanja promjenljivih veličina upotrebljava naziv »faza«, pa se zato kut β zove: *fazni kut izmjenične veličine*. Na osnovi toga možemo dalje međusobni pomak dviju sinusoidalnih veličina jednake frekvencije, koje su jedna prema drugoj pomaknute, okarakterizirati razlikom njihovih faznih kutova.

Ako, dakle, struja i_2 ima fazni kut β_{12} i ako je ona vremenski pred strujom i_1 čiji je fazni kut β_{11} , onda među njima postoji fazna razlika ili *fazni pomak* koji predočen kutnom mjerom iznosi:

$$\gamma = \beta_{12} - \beta_{11}$$

To znači da će maksimalnu vrijednost imati struja i_2 za t' sekunda prije nego struja i_1 , a pri tome je:

$$t' = \frac{\gamma}{\omega} = \frac{\gamma}{2\pi \cdot f}$$

12.3.

UČINCI (OSNOVNI) IZMJENIČNE STRUJE

Nakon što smo prijašnjim izvodima upoznali uglavnom što su izmjenične električne veličine i kako se one matematički formuliraju, sada nam se nameće pitanje:

Da li se ovakve izmjenične struje mogu isto kao i istosmjerne iskoristiti za neki rad, ili drugim riječima, kakvi su osnovni učinci pri izmjeničnoj struji? Nadalje:

Kako ćemo mjeriti te izmjenične struje i napone kad im se vrijednost, a i smjer, svakog trenutka mijenjaju?

Kako se mogu proizvesti ovakve, baš po sinusoidalnom zakonu, promjenljive struje i naponi te konačno:

Potrebno je pobliže razmotriti da li osnovni zakoni električnog strujanja, koje smo upoznali kod istosmjerne struje, vrijede i u strujnim krugovima izmjenične struje, i da li tu treba još što dodati, zbog neprestane promjene izmjeničnih struja i napona.

Pogledajmo najprije kako je s osnovnim učincima kod izmjenične struje, a oni su: *elektroliza, električna toplina i elektromagnetizam.*

Elektroliza ili kemijski učinak. Izlučena količina materije pri prolazu struje ovisna je prema I Faradajevu zakonu o jakosti struje i vremenu, a ovisi i o vrsti iona koji se izlučuju:

$$m = aIt$$

Pri konstantnoj istosmjernoj struji jakost I je konstantna tijekom vremena t cijelog procesa, pa se m lako izračuna. No pri promjenljivim i izmjeničnim strujama vrijednost i se tijekom vremena t trajno mijenja, pa treba najprije u proračunu uzeti tako mali vremenski interval u kojem će struja biti konstantna, jer tek onda možemo upotrijebiti gornju jednadžbu koja nije drugo nego zakon proporcionalnosti.

Postupamo, dakle, tako da npr. pri posrebrivanju kojeg predmeta odredimo najprije količinu dm izlučena srebra elektrolizom u infinitezimalno malo vrijeme dt :

$$dm = a i dt$$

Za cijelo konačno vrijeme t ukupna količina bit će:

$$m = \int_0^t a i dt = a \int_0^t i dt = a \cdot Q_{el}$$

Vrijednost integrala $\int_0^t i dt$ predstavlja nam u koordinatnom sustavu (i, t) površinu omeđenu krivuljom $i = f(t)$ i apscisnom osi, dakle ukupnu količinu protjecanog pozitivnog elektriciteta kroz elektrolit u vrijeme t , što se slaže s rezultatom koji smo dobili pri konstantnoj istosmjernoj struji, a koji kaže, da je količina izlučene materije proporcionalna količini protjecanog elektriciteta.

Ako pak imamo izmjeničnu struju koja tijekom jedne periode ima jednake pozitivne i negativne površine u koordinatnom sustavu (i, t) , onda je za vrijeme jedne periode, a i za vrijeme bilo kojeg broja cijelih perioda: nT ukupna količina pozitivnog protjecanog elektriciteta jednaka nuli, pa je $m = 0$. Zaključujemo da se čista izmjenična struja ne može iskoristiti za elektrolizu.

To se fizikalno objašnjava time što se za vrijeme jedne polovice periode izlučuje iz elektrolita izvjesna količina metala na negativnoj katodi, dok se u drugoj polovici periode ta količina zbog promjene smjera struje vraća natrag u elektrolit.

Električna toplina. Prema Jouleovu zakonu je količina proizvedene topline Q , kad struja I prolazi kroz otpor R , proporcionalna kvadratu jakosti struje, otporu R i vremenu t :

$$Q = I^2 R \cdot t$$

Da bismo taj zakon proporcionalnosti mogli primijeniti i na izmjeničnu struju, moramo opet uzeti beskonačno malo vrijeme dt , no onda dobivamo tek infinitezimalno malu količinu topline:

$$dQ = i^2 R \cdot dt$$

Za neki konačni interval t ukupna toplina Q jednaka je:

$$Q = \int_0^t i^2 R \cdot dt$$

Pretpostavimo li da je otpor R konstantna veličina, možemo gornju jednadžbu napisati u obliku:

$$Q = R \int_0^t i^2 \cdot dt$$

Integral $\int_0^t i^2 dt$ predodređuje nam površinu koju zatvara krivulja kvadrata jakosti struje s apscisnom osi t , pa kažemo da je proizvedena količina topline proporcionalna toj površini. Budući da će kod izmjeničnih struja, koje imaju i negativnih vrijednosti, kvadrati svih ordinata biti pozitivni, bit će vrijednost integrala uvijek pozitivna, tj. veća od nule, a to znači da će i izmjenična struja proizvoditi uvijek u otporu izvjesnu količinu topline.

Fizikalno se to objašnjava činjenicom da se proizvodnja topline u otporu vodiča pripisuje odavanju energije gibajućih električnih naboja česticama kristalne strukture vodiča. Pri tome ne utječe smjer gibanja elektriciteta, tj. električne struje, jer će se toplina proizvoditi teče li struja u jednom ili drugom smjeru.

Treći osnovni učinak električne struje je **stvaranje magnetskog polja**. Jednadžba $\Phi = IN/R_m$ nam kaže da je tok Φ uz konstantno N i R_m direktno proporcionalan jakosti struje. Uz pretpostavku da je $\mu =$ konstantno, pratit će tok Φ sve promjene jakosti struje, pa ako je struja sinusoidalno promjenljiva, bit će tok Φ , a i gustoća B , vremenski sinusoidalno promjenljive veličine.

Uspoređivanjem triju osnovnih jednadžbi kojima su matematički formulirani osnovni učinci električne struje, vidimo da toplinski, a i kemijski učinak, imaju u svojim jednadžbama faktor vremena t , dok je magnetski učinak električne struje, a to je samo stvaranje magnetskog toka Φ , bez toga faktora. To znači da se pri stvaranju topline i pri elektrolizi učinci izvršeni od električne struje u pojedinim trenucima tijekom vremena sakupljaju, što je matematički formulirano operacijom integriranja, dok pri stvaranju magnetskog polja nema nekog sabiranja, jer je ukupni proizvedeni magnetski tok u svakom trenutku ovisan samo o trenutnoj vrijednosti jakosti struje koja stvara taj tok.

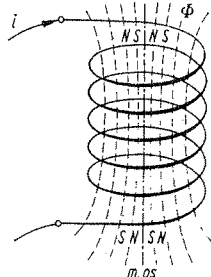
Kad govorimo o učincima električne struje imamo u vidu korist koju možemo dobiti od električne struje da bi nam ona obavljala neki rad. No kako se rad vrši tijekom vremena, njegov je iznos ovisan o vremenu trajanja rada. Prema tome, samo stvaranje magnetskog toka ne bismo mogli tretirati kao treći *učinak* električne struje, nego samo kao nedjeljivu popratnu pojavu, a o magnetskom učinku električne struje možemo govoriti tek istražujući učinke što ih tijekom vremena može stvoriti električna struja posredstvom proizvedenog magnetskog polja.

Analizirajući sada u daljnjem učinke sinusoidalno promjenljivog magnetskog polja, moramo se sjetiti da smo uvodno objasnili dva osnovna učinka magnetskog polja i to: elektromagnetsku indukciju i učinak sila. Pogledajmo kako će se odnositi ove pojave pri vremenski sinusoidalno promjenljivom magnetskom polju.

Odmah možemo reći da su za stvaranje *induciranog napona* primjenom pojave *elektromagnetske indukcije* upravo dobrodošle promjenljive, a dakako i sinusoidalno promjenljive struje, jer se za induciranje napona baš traži da je od svitka obuhvaćeni magnetski tok vremenski promjenljiv. To se vidi uvidom u osnovnu jednadžbu Faradayeva zakona elektromagnetske indukcije:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt}.$$

Taj način dobivanja napona bio je uvodno objašnjen, a bit će još pobliže razrađen kad bude riječi o generatorima i transformatorima.



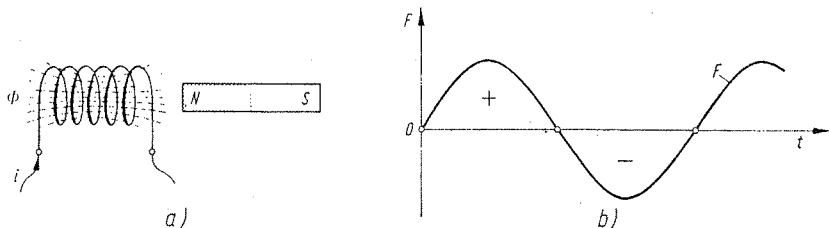
Sl. 12.12. Pulzirajuće ili izmjenično magnetsko polje

Prije nego što prijedemo na promatranje magnetskih sila vremenski promjenljivog magnetskog polja, potrebno je objasniti kakvo je magnetsko polje što ga proizvodi izmjenična struja. Zbog promjene jakosti struje mijenjaju se u vremenu magnetski tok i gustoća silnica, ali raspored silnica u prostoru ostaje isti kao i pri konstantnoj uzbudi istosmjerne struje. Promjena smjera struje prouzročit će promjenu smjera magnetskog polja, što znači da će se pol N nalaziti za vrijeme jedne polovice periode na jednoj strani svitka, dok će u drugoj polovici periode biti pol N na suprotnoj strani svitka. Međutim, položaj magnetske osi nepromijenjeno se poklapa s geometrijskom osi svitka, slika 12.12. Takvo magnetsko polje nazivamo *izmjeničnim* ili *pulzirajućim magnetskim poljem*. Dobro je zapamtiti da je karakteristika izmjeničnog polja: u prostoru nepomičan položaj magnetske osi, a vremenski promjenljiva vrijednost toka Φ .

Da bismo odredili kakav učinak sile može proizvesti ovo izmjenično magnetsko polje, moramo se sjetiti da prema Coulombovu zakonu do pojave magnetskih sila dolazi međusobnim djelovanjem dvaju magneta. Zato ćemo u blizini ovog izmjeničnog magneta staviti još neki magnet i promatrati stvorenu silu od koje možemo onda očekivati neki učinak, tj. obavljanje rada tijekom vremena t .

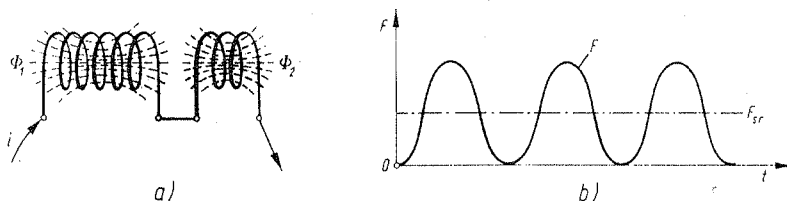
Najprije stavimo uz naš izmjenični magnet jedan permanentni magnet ili elektromagnet uzbuđen konstantnom istosmjernom strujom. Prema Coulombovu zakonu sila F ovisi o umnošku magnetskih tokova obaju magneta i ona je privlačna ako su magnetski polovi okrenuti jedan prema drugome različiti, a odbojna ako su ti polovi istoimeni, slika 12.13a. Budući da permanentni magnet zadržava svoj magnetski polaritet tijekom vremena nepromijenjen, sila će se mijenjati proporcionalno promjenljivom magnetskom toku izmjeničnog elektromagneta. U vremenskom dijagramu, slika 12.13b, predložena je, dakle, ta sila sinusoidalnom krivuljom.

Ova vremenski promjenljiva sila vršila bi tijekom jedne polovice periode privlačenje, a tijekom druge polovice periode odbijanje obaju magneta. Ukoliko se svitak drži čvrsto na miru, a permanentni je magnet pokretljiv i veoma male mase da može pratiti brze promjene sile, on će izvoditi gibanje amo-tamo oko jednog srednjeg položaja; dobivamo, dakle, vibraciju magneta. To će se isto dogoditi ako je permanentni magnet na miru, a svitak izmjeničnog elektromagneta



Sl. 12.13. a) Medusobno djelovanje izmjeničnog i permanentnog magnetskog polja; b) Grafički prikaz promjenljive sile F za uređaj prikazan na slici

male mase i pomičan. Ako su pak oba magneta veoma masivne konstrukcije, a frekvencija izmjeničnog polja dovoljno visoka, neće promjenljiva sila moći magnete ubrzavati u kratkom vremenu jedne polovice periode, pa magneti neće moći izvoditi vibracije, nego će biti izvrgnuti srednjoj vrijednosti sile F . Budući da je ta srednja vrijednost — kako se iz dijagrama vidi — jednaka nuli, neće se magneti uopće pomicati jedan prema drugome, nego će ostati na miru.



Sl. 12.14. a) Elektrodinamičko djelovanje dvaju elektromagneta, koji su protjecani istom izmjeničnom strujom; b) Pulzirajuća sila i njena srednja vrijednost za uređaj prikazan na slici

Drugačija sila nastaje ako su oba magneta izrađena kao elektromagneti, sl. 12.14a, i protjecani jednom te istom izmjeničnom strujom: $i = I_{\max} \sin \omega t$. U tom su slučaju oba magnetska polja sinusoidalno izmjenična, i njihovi tokovi pulziraju istom frekvencijom:

$$\Phi_1 = k_1 \cdot \sin \omega t \quad \Phi_2 = k_2 \cdot \sin \omega t$$

Stvorena magnetska sila ovisi o umnošku ovih tokova i može se prikazati jednakzbrojnom:

$$F \propto k_1 k_2 \sin \omega t \sin \omega t = k_1 k_2 \sin^2 \omega t$$

dakle je proporcionalna kvadratu sinusa od ωt . Budući da je $\sin^2 \omega t = 1/2 \cdot (1 - \cos 2\omega t)$, možemo silu prikazati u obliku:

$$F = K_1 \cdot K_2 (1 - \cos 2\omega t)$$

ili

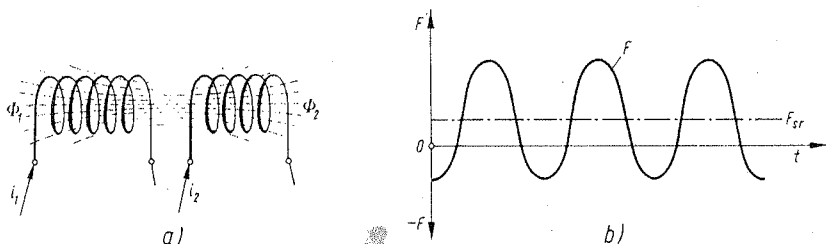
$$F = K_1 \cdot K_2 [1 - \cos 2 \cdot (2\pi f)t]$$

Vidimo da je sila opet vremenski promjenljiva, ali pulzira dva puta većom frekvencijom nego uzbudna struja. Što se tiče smjera, stvorena sila djeluje uvijek u istom smislu: ili je privlačna ili odbojna, što ovisi o tome koje su strane elektromagneta okrenute jedna prema drugoj. To se lako može vidjeti već i na prvi pogled, jer zbog iste frekvencije mijenjat će se istovremeno polaritet magnetskih tokova jednog i drugog elektromagneta, pa je njihov odnos uvijek isti. A i formalno matematički se vidi da je sila uvijek po smjeru ista, jer je kvadrat od sinusa uvijek pozitivan.

Iz grafičkog prikaza se vidi da će ta pulzirajuća sila moći obavljati tijekom vremena koristan rad, jer će na pokretnu masu djelovati sila uvijek u istom smjeru, no do izražaja će doći srednja vrijednost sile koja je jednaka:

$$F_{sr} = K_1 \cdot K_2$$

Oko ove srednje vrijednosti sila pulzira od vrijednosti nula do maksimalne vrijednosti $2 K_1 \cdot K_2$, slika 12.14b.



Sl. 12.15. a) Elektrodinamička sila dvaju elektromagneta koji su protjecani fazno pomaknutim izmjeničnim strujama iste frekvencije; b) Grafički prikaz sile za uređaj prikazan na slici

Ako su struje kroz dva elektromagneta iste frekvencije, ali vremenski fazno pomaknute jedna prema drugoj, opet će proizvedena sila pulzirati dvostrukom frekvencijom, ali će njezina srednja vrijednost bitno ovisiti o kutu γ , koji karakterizira faznu razliku obiju struja, slika 12.15a.

To se vidi iz slijedećeg razmatranja. Neka je struja prvog svitka: $i_1 = I_{1\max} \sin \omega t$, a struja drugog svitka $i_2 = I_{2\max} \sin (\omega t - \gamma)$. Magnetski tokovi elektromagneta su:

$$\Phi_1 = k_1 \sin \omega t \quad \text{i} \quad \Phi_2 = k_2 \sin (\omega t - \gamma)$$

a sila, proporcionalna umnošku $\Phi_1 \Phi_2$, može se prikazati jednačbom:

$$F \propto k_1 \cdot k_2 \sin \omega t \sin (\omega t - \gamma)$$

no jer je $\sin \omega t \sin (\omega t - \gamma) = 1/2 [\cos \gamma - \cos (2\omega t - \gamma)]$, možemo dalje pisati:

$$F = K_1 K_2 [\cos \gamma - \cos (2\omega t - \gamma)]$$

Vidimo da sila doista tijekom vremena pulzira dvostrukom frekvencijom, ali oko srednje vrijednosti $F_{sr} = K_1 K_2 \cos \gamma$, što znači da je pri fazno pomaknutim strujama srednja sila manja nego u prijašnjem primjeru kad su struje bile bez faznog pomaka. Faktor $\cos \gamma$ je, naime, uvijek manji od 1, sl. 12.15b.

Time je prikazan općenito slučaj elektrodinamičkog djelovanja dviju izmjeničnih struja, budući da je u obzir uzet i njihov međusobni fazni pomak. I prijašnji slučaj obuhvaćen je općenitom jednačbom, jer ako su struje u specijalnom slučaju istofazne, onda je $\gamma = 0$, pa je $\cos 0 = 1$, a srednja vrijednost sile:

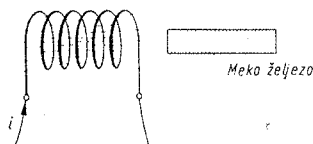
$$F_{sr} = K_1 \cdot K_2,$$

kako je i prije bilo izvedeno.

Iz vremenskog dijagrama sile vidimo da i u općenitom slučaju ($\gamma \neq 0$) sila oscilira oko srednje vrijednosti ali sada, jer je F_{sr} manje od $K_1 \cdot K_2$, sila ima u nekim trenucima i negativne ordinate. To znači da postoji djelomice privlačenje ali djelomice i odbijanje među magnetima, zbog čega je upravo i došlo do smanjivanja srednje vrijednosti sile.

Ekstremni slučaj međusobnog faznog pomaka, kad je $\gamma = 90^\circ$ i $\cos \gamma = 0$, prouzrokuje da je $F_{sr} = 0$, jer sila ima isto toliko pozitivnih vrijednosti koliko i negativnih.

Sl. 12.16. Djelovanje izmjeničnog magnetskog polja na meko željezo



Kao treću varijantu međusobnog djelovanja dvaju magneta treba još objasniti kombinaciju prema sl. 12.16, gdje je jedan kao elektromagnet napajan izmjeničnom strujom, a drugi je meko željezo. U izmjeničnom polju elektromagneta postat će i meko željezo magnet, pa tako imamo opet dva magneta koji će djelovati jedan na drugog silom. Za razliku od prvog slučaja gdje je permanentni magnet trajno posjedovao svoj konstantni magnetski tok, meko željezo (ako pretpostavimo da nema histereze) bit će ovdje magnetizirano točno u ritmu promjena magnetskog polja elektromagneta i uvijek će prema magnetskom polju elektromagneta biti okrenut suprotan pol magnetiziranog mekog željeza.

U rezultatu bit će, dakle, stvorena sila uvijek privlačna, ali zbog vremenske promjene jakosti struje ta će sila pulzirati opet dvostrukom frekvencijom kao i u drugom slučaju, kad smo promatrali elektrodinamičko djelovanje dviju struja, slika 12.14b.

12.3.1. Mjerenje promjenljivih električnih veličina

Pogledajmo sada kako ćemo mjeriti promjenljive i napose izmjenične veličine. U daljnjim izvodima promatrat ćemo uglavnom izmjenične struje, no rezultati tih izvoda moći će se primijeniti i na ostale veličine.

Budući da danas imamo gotovo svagdje u upotrebi osciloskope, možemo mjerenjem lako dobiti oscilogramе struje i napona, kao i drugih promjenljivih veličina. Takvi oscilogrami zapravo su vremenski dijagrami u kojima su prikazane trenutne vrijednosti promatranih veličina. Da bismo ove dijagrame mogli iskoristiti, treba na koordinatnim osima naznačiti mjerila kako je bilo objašnjeno pri tumačenju slike 12.1.

Ovakvi dijagrami mogu nam često dobro poslužiti pri analiziranju električnih prilika u strujnim krugovima promjenljivih struja. No oni su u biti beskonačan broj različitih trenutnih vrijednosti, a u većini slučajeva poželjno bi bilo da i pri promjenljivim izmjeničnim strujama na neki način jednom brojkom okarakteriziramo izmjeničnu struju u pogledu njene jakosti — kao što smo i kod istosmjerne struje imali za oznaku jakosti struje samo jednu brojku.

Pri tome najprije pomišljamo na onaj način označivanja koji se upotrebljava i inače u raznim promjenljivim procesima, također u drugim područjima tehnike, a i u svakodnevnom životu, a to je da sve trenutne vrijednosti reprezentiramo njihovom srednjom vrijednošću.

12.3.2. Srednja vrijednost

Određivanje srednje vrijednosti od više brojeva bilo je objašnjeno u elementarnoj matematici, pa je u prijašnjim razmatranjima pretpostavljeno da je pojam srednje vrijednosti u biti poznat.

Ipak, zbog velike važnosti koju ima srednja vrijednost pri mjerenju promjenljivih veličina u elektrotehnici, bit će ovdje detaljnije objašnjena srednja vrijednost ponovno kao prva u sklopu ostalih prosječnih vrijednosti promjenljivih veličina.

Pri objašnjavanju srednje vrijednosti služit ćemo se poznatom matematičkom definicijom koja kaže da se od više različitih vrijednosti: $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ dobiva aritmetička srednja vrijednost tako da se njihova suma podijeli s brojem n koliko ima tih različitih vrijednosti. Dakle:

$$Y_{sr} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

Ako imamo jednu vremenski promjenljivu veličinu, npr. struju predočenu vremenskim dijagramom (sl. 12.17), pa želimo naći srednju vrijednost koju ima struja u vremenskom intervalu T , uzet ćemo od svih trenutnih vrijednosti, a tih ima beskonačno mnogo, dakako samo konačan broj. Cijeli interval T razdijelimo, dakle, na n jednakih sitnih dijelova i vrijednost struje i u svakom tom intervalu Δt uzmemo u račun za određivanje srednje vrijednosti, pa tako dobivamo:

$$I_{sr} = \frac{i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n}{n}$$

Na slici 12.17 vidimo da je $\Delta t = T/n$ i $n = T/\Delta t$, pa je:

$$I_{sr} = \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n) \Delta t}{T} = \frac{1}{T} (i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n) \Delta t.$$

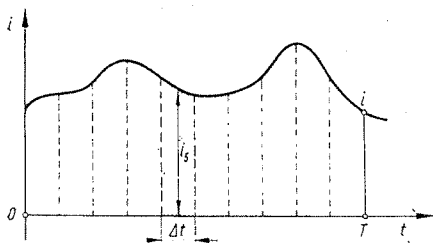
Da što točnije izračunamo tu srednju vrijednost uzet ćemo po mogućnosti što više pojedinačnih vrijednosti, a to znači da ćemo podijeliti promatrani interval na što više dijelova. Ako bismo u mislima podijelili na beskonačno mnogo dijelova, dobili bismo potpuno točan iznos srednje vrijednosti, dakle:

$$I_{sr} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n) \Delta t}{T}$$

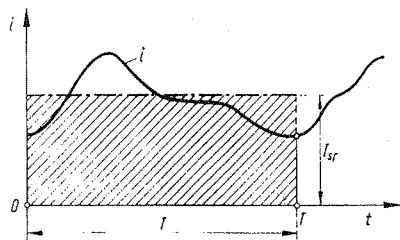
Limes te sume prelazi onda u integral, pa tako konačna formula za izračunavanje srednje vrijednosti promjenljive struje, čiji analitički izraz poznamo, poprima oblik:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot dt$$

Ako pogledamo što nam ta jednadžba geometrijski predočuje, vidimo da je u vremenskom intervalu T srednja vrijednost izmjenične struje i jednaka visini pravokutnika koji nad bazom T ima površinu jednaku površini što je upravo s osi apscise zatvara u tom intervalu krivulja i , slika 12.18.



Sl. 12.17. Grafički prikaz određivanja srednje vrijednosti promjenljive struje



Sl. 12.18. Geometrijsko značenje aritmetičke srednje vrijednosti

Imaju li neke od pojedinih vrijednosti koje ulaze u sumu negativan predznak, njih treba u gornjoj sumi oduzeti od ostalih pozitivnih vrijednosti. To znači da je suma u brojniku razlomka *algebarska suma*. To je međutim automatski uzeto u račun ako određujemo srednju vrijednost neke funkcije koja je dana analitičkim izrazom $i = f(t)$.

Izračunamo li ovim načinom srednju vrijednost sinusoidalno promjenljive struje za vremenski interval koji je jednak jednoj, ili cijelom broju perioda, dobivamo da je:

$$I_{sr} = 0.$$

To vidimo iz dijagrama, jer za cio broj perioda zatvara krivulja s apscisnom osi upravo toliko pozitivnih, koliko i negativnih potpuno jednakih površina koje zajedno daju nulu. Isti rezultat dobivamo dakako, ako računamo po jednadžbi:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_{\max} \sin \omega t \, dt = \frac{I_{\max}}{T} \int_0^T \sin \omega t \, dt = -\frac{I_{\max}}{\omega T} \cos \omega t \Big|_0^T = 0$$

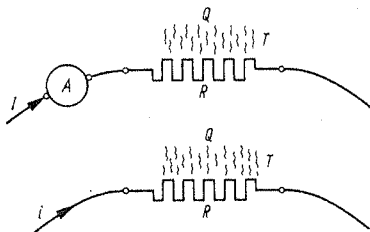
Zbog toga što je srednja vrijednost sinusoidalne struje jednaka nuli, zaključujemo da sinusoidalno izmjenična struja ne može vršiti one učinke koji ovise o srednjoj vrijednosti struje, a to su učinci koji su izravno proporcionalni jakosti struje u prvoj potenciji.

12.3.3.

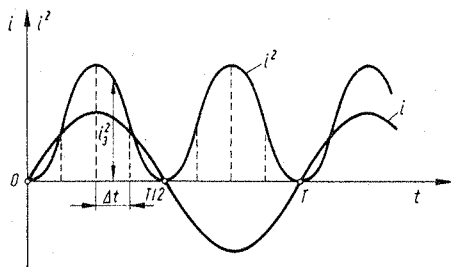
Efektivna vrijednost

Iz svakodnevnog života nam je poznato da izmjenična struja može ipak obavljati koristan rad, pa smo i vidjeli da npr. izmjenična struja u električnim pećima proizvodi toplinu, a pomoću elektromotora obavlja razne mehaničke poslove.

Iako je, dakle, sinusoidalna struja svakog trenutka druge jakosti, mi ćemo je nastojati u pogledu onih učinaka ili efekata koje ona može proizvesti okarakterizirati jednom brojkom, a toj prosječnoj vrijednosti dajemo naziv: *efektivna vrijednost izmjenične struje*.



Sl. 12.19. Uz definiciju efektivne vrijednosti izmjenične veličine



Sl. 12.20. Grafički prikaz određivanja efektivne vrijednosti izmjenične struje

Pri tome ćemo tu efektivnu vrijednost odrediti tako da usporedimo toplinski učinak izmjenične struje s toplinskim učinkom konstantne istosmjerne struje pa kažemo:

Efektivna vrijednost izmjenične struje jednaka je onoj vrijednosti konstantne istosmjerne struje I koja u otporu R za vrijeme T proizvede istu količinu topline Q kao i naša promatrana izmjenična struja i u istom otporu i u isto vrijeme, slika 12.19.

Izjednačujemo, dakle, toplinu izmjenične struje:

$Q = \int_0^T i^2 R \, dt$ s toplinom istosmjerne struje $Q = I^2 R T$, pa dobivamo relaciju:

$$I^2 R T = \int_0^T i^2 R \, dt = R \int_0^T i^2 \, dt,$$

odakle možemo izračunati efektivnu vrijednost:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Efektivne vrijednosti označujemo velikim slovima bez ikakvih indeksa, kao i istosmjerne veličine, pa tako imamo analogne jednačbe i za napone:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} \quad \text{i} \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$$

Prema toj formuli napisanoj u obliku $I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$ možemo izvesti i metodu

za grafičko određivanje efektivne vrijednosti neke promjenljive veličine, ako nam je zadana krivulja te promjenljive veličine. Na slici 12.20 vidimo da se interval T opet razdijeli na n dijelova, ali sada je u brojniku suma kvadrata trenutnih vrijednosti, pa je dalje:

$$I^2 = \frac{i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2}{n} = \frac{(i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2) \Delta t}{T}$$

ili:

$$I = \sqrt{\frac{(i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2) \Delta t}{T}}$$

Zbog toga se efektivna vrijednost naziva *srednja kvadratna vrijednost*.

Ako prema ovoj jednačbi izračunamo sada efektivnu vrijednost sinusoidalno promjenljive izmjenične struje, dobivamo:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_{\max}^2 \sin^2 \omega t dt = \\ &= \frac{I_{\max}^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{I_{\max}^2}{2T} \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right], \end{aligned}$$

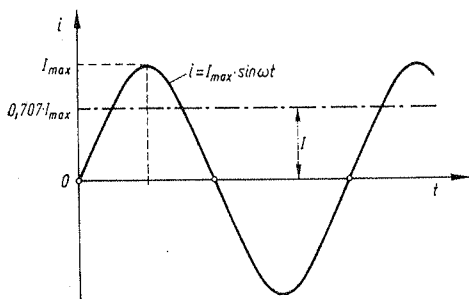
a budući da je drugi član u zagradi jednak nuli, to je:

$$I^2 = \frac{I_{\max}^2}{2T} T = \frac{I_{\max}^2}{2}$$

ili:

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \quad I = 0,707 I_{\max} \quad (\text{Sl. 12.21})$$

Analogne jednačbe dobili bismo i za efektivne vrijednosti sinusoidalnih napona:



$$E = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} \quad E = 0,707 E_{\max}$$

$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \quad U = 0,707 U_{\max}$$

(Sl. 12.21)

Sl. 12.21. Međusobni odnos karakterističnih vrijednosti izmjenične struje

Obrnuto možemo izračunati maksimalne vrijednosti ako su nam poznate efektivne vrijednosti, a za sinusoidalne veličine imamo slijedeće jednačbe:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \sqrt{2} I & I_{\max} &= 1,414 I \\ U_{\max} &= \sqrt{2} U & U_{\max} &= 1,414 U \\ E_{\max} &= \sqrt{2} E & E_{\max} &= 1,414 E \end{aligned}$$

12.3.4.

Elektrolitska srednja vrijednost

Ima još jedna prosječna vrijednost koja dolazi u mnogim problemima izmjeničnih struja do izražaja, a to je *elektrolitska srednja vrijednost*.

Vidjeli smo da je aritmetička srednja vrijednost sinusoidalne struje jednaka nuli i zato se ta struja ne može iskoristiti za one učinke u kojima do izražaja dolazi srednja vrijednost. Jedan od tih učinaka je i elektroliza. Da bi se ipak iskoristila za elektrolizu i električna energija izmjenične struje (kao i za ostale učinke gdje se zahtijeva baš struja trajno istog smjera), može se izmjenična struja pretvoriti u istosmjernu pomoću posebnih naprava koje nazivamo ispravljačima.

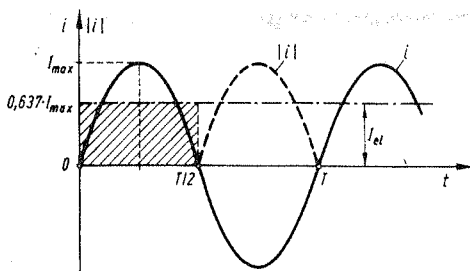
To znači da se u vremenskom dijagramu negativni dijelovi izmjenične struje prebace na pozitivnu stranu. Tako dobivamo od sinusoidalne struje ispravljenu istosmjernu, koja se sastoji od samih pozitivnih polovica sinusoidalne krivulje. U tom slučaju ima struja i neku srednju vrijednost ali nju sada, za razliku od aritmetičke srednje vrijednosti sinusoidalne struje, zovemo elektrolitska srednja vrijednost.

I ova elektrolitska srednja vrijednost izračunava se općenito prema istoj jednačbi za srednje vrijednosti, samo sad treba sve negativne trenutne vrijednosti uzeti kao da su pozitivne, a to znači da u sumi trenutnih vrijednosti uzimamo uvijek samo apsolutne vrijednosti:

$$I_{cl} = \frac{|i_1| + |i_2| + \dots + |i_n|}{n}$$

odakle izlazi konačni izraz:

$$I_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt$$



Za ispravljenu sinusoidalnu struju, slika 12.22, vidimo da je dovoljno u račun uzeti samo jednu polovicu periode:

Sl. 12.22. Elektrolitska srednja vrijednost izmjenične struje

$$I_{el} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_{max} \sin \omega t dt = -\frac{2 I_{max}}{T \omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = \frac{I_{max}}{\pi} (1 + 1)$$

$$I_{el} = I_{max} \frac{2}{\pi} = 0,637 I_{max}$$

12.3.5.

Omjerni faktori

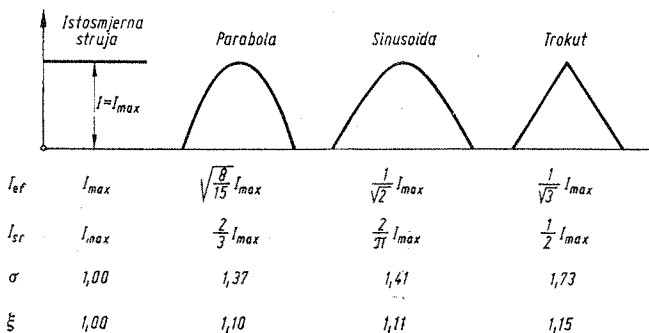
Među ovako uvedenim prosječnim vrijednostima električnih veličina postoje, kako vidimo, točni odnosi koji slijede iz definicionih jednadžbi.

Možemo, dakle, napisati slijedeće omjerne brojeve, koji se zovu:

tjemeni faktor $\sigma = \frac{I_{max}}{I}$ za sinusoidalne struje: $\sigma = \frac{I_{max}}{I_{max}/\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,414$

faktor oblika: $\xi = \frac{I}{I_{el}}$ „ $\xi = \frac{I_{max}/\sqrt{2}}{I_{max}(2/\pi)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$

srednji faktor: $\zeta = \frac{I_{el}}{I_{max}}$ „ $\zeta = \frac{I_{max}(2/\pi)}{I_{max}} = \frac{2}{\pi} = 0,637$



Sl. 12.23. Faktor oblika i tjemeni faktor za promjenljive struje različitog oblika

Za izmjenične struje koje nisu sinusoidalne nego imaju neki drugi zakon vremenske promjene, bit će ovi faktori drukčiji od gore navedenih vrijednosti, a slika 12.23 daje nam neki uvid u to kako ovisi npr. tjemeni faktor o obliku vala izmjenične struje. Vidimo da što je krivulja šiljastija, to je σ veći, dok je pri plosnatijem obliku krivulje taj faktor sve bliži jedinici.

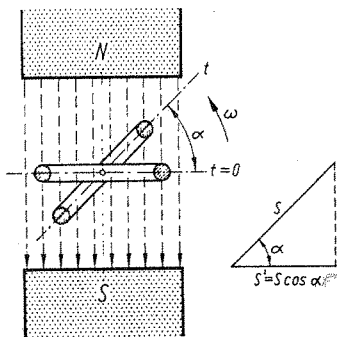
12.4. PRINCIP GENERATORA IZMJENIČNOG NAPONA

Dobivanje sinusoidalno promjenljivih napona. Izmjenične struje teku u strujnim krugovima pod utjecajem izmjeničnih napona, a ove možemo dobiti proizvedene u različito konstruiranim generatorima. Ovdje je prikazan samo jedan način i to pomoću elektromagnetske indukcije, a tako dobiveni inducirani napon vremenski je promjenljiv baš po sinusoidalnom zakonu. Slika 12.24 prikazuje u principu sastav i rad generatora.

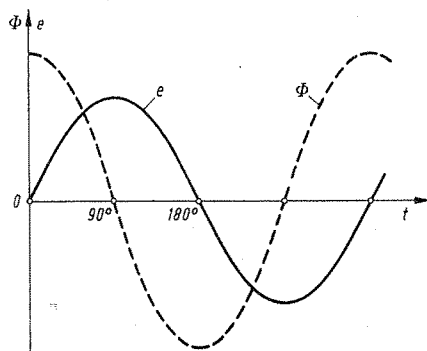
Svitak sa N zavoja rotira konstantnom kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju gustoće B . Na slici 12.24 prikazani svitak nalazi se u vrijeme $t = 0$ u početnom položaju gdje obuhvaća maksimalni broj silnica, pa je i vrijednost obuhvaćenog toka maksimalna:

$$\Phi_{\max} = B \cdot S$$

jer silnice magnetskog polja ulaze okomito na plohu svitka S .



Sl. 12.24. Induciranje sinusoidalnog napona u homogenom magnetskom polju



Sl. 12.25. Inducirana elektromotorna sila zaostaje fazno iza promjenljivog magnetskog polja za 90°

U trenutku t svitak će pri rotaciji zatvarati sa početnim položajem kut $\alpha = \omega \cdot t$, a tok što ga sada obuhvaća svitak je:

$$\Phi = B \cdot S'$$

jer je sada efektivna površina kroz koju prolaze silnice samo:

$$S' = S \cdot \cos \alpha$$

Magnetski tok u bilo kojem trenutku jednak je, dakle:

$$\Phi = B \cdot S \cos \alpha = \Phi_{\max} \cos \alpha = \Phi_{\max} \cos \omega t$$

pa vidimo da se od svitka obuhvaćeni tok vremenski mijenja po zakonu cosinusa, a zbog te promjenljivosti toka inducira se napon:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \Phi_{\max} \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = N \omega \Phi_{\max} \sin \omega t$$

Veličine N , ω , $\Phi_{\max}$ su konstante, pa će napon e postići najveću vrijednost kad sinus ωt postane jednak jedinici. Onda je:

$$E_{\max} = N \omega \Phi_{\max}$$

Možemo, dakle, za inducirani napon e napisati jednadžbu:

$$e = E_{\max} \sin \omega t$$

Vidimo da je inducirani napon doista sinusoidalno promjenljiv, a njegova amplituda je $E_{\max}$.

U prikazanom primjeru gdje magnetsko polje ima jedan par polova, frekvencija induiranog napona jednaka je broju izvršenih okretaja u jednoj sekundi, jer se jedna perioda sinusoidalnog napona inducira za vrijeme jedne pune promjene magnetskog toka, a za to je potreban jedan puni okretaj svitka.

U strojarskoj tehnici uobičajeno je da se brzina vrtnje n izražava brojem izvršenih okretaja u jednoj minuti, pa će zato broj izvršenih okretaja u jednoj sekundi biti $n/60$, a to je onda i iznos frekvencije:

$$f = \frac{n}{60} \quad \text{za} \quad p = 1 \quad (\text{jedan par polova})$$

Kutnu brzinu (kut opisan u 1 sekundi) možemo izračunati iz odnosa da je za vrijeme jedne sekunde izvršeno $n/60$ okretaja ili opisan kut $(n/60)2\pi$, pa je:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2\pi \cdot \frac{n}{60} = 2\pi f$$

U našem je primjeru, dakle, kutna brzina ω upravo jednaka kružnoj frekvenciji, pa možemo u jednadžbi za inducirani napon supstituirati $\omega = 2\pi f$ te konačno dobivamo:

$$E_{\max} = N 2\pi f \Phi_{\max}$$

a efektivna vrijednost:

$$E = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N f \Phi_{\max} = 4,44 N f \Phi_{\max}$$

Nakon ovih izvoda dobro je zapamtiti da je sinusoidalni inducirani napon dobiven od cosinusoidalno promjenljivog magnetskog toka. Na slici 12.25 je, dakle, krivulja inducirano napona e za 90° (što odgovara $T/4$) fazno pomaknuta iza krivulje magnetskog toka Φ . Taj fazni pomak može se vidjeti i iz jednadžbe, ako funkciju cosinus izrazimo funkcijom sinus, pa onda dobivamo za tok Φ jednadžbu:

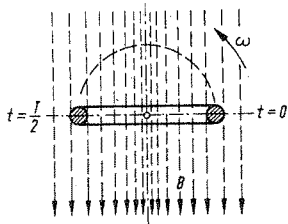
$$\Phi = \Phi_{\max} \cos \omega t = \Phi_{\max} \sin(\omega t + 90^\circ)$$

a to uz jednadžbu inducirano napona:

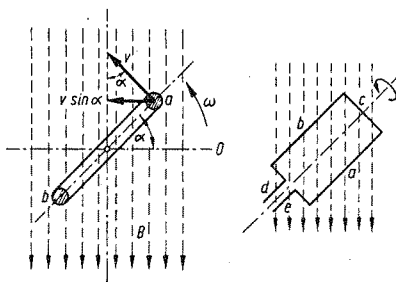
$$e = E_{\max} \sin \omega t$$

znači, da magnetski tok Φ prethodi za 90° ispred napona e .

Moguće je također odrediti efektivnu vrijednost inducirano napona i ako svitak rotira u nekom nehomogenom magnetskom polju, slika 12.26, gdje, dakle, taj napon neće biti sinusoidalan.



Sl. 12.26. Induciranje napona u nehomogenom magnetskom polju



Sl. 12.27. Proračun inducirano napona na osnovi jednadžbe: $e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha$

Ovdje ćemo najprije izračunati srednju vrijednost inducirano napona za vrijeme jedne polovice okretaja svitka, jer će se u drugoj polovici inducirati isti promjenljivi napon samo, dakako, suprotna predznaka. To je, dakle, elektrolitska srednja vrijednost:

$$E_{ei} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} e \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e \, dt$$

Nakon supstitucije $e = -N(d\Phi/dt)$ mijenja se varijabla pa umjesto t dolazi varijabla Φ . Treba, dakle, promijeniti i granice integracije:

$$\text{za } t = 0 \dots \Phi = \Phi_{\max}$$

$$\text{za } t = T/2 \dots \Phi = -\Phi_{\max}$$

jer nakon polovice okretaja svitka tok Φ prolazi kroz plohu svitka u suprotnom smjeru. Imamo, dakle:

$$E_{e1} = \frac{2}{T} \int_{+\Phi_{\max}}^{-\Phi_{\max}} -N \frac{d\Phi}{dt} dt = + \frac{2N}{T} \int_{-\Phi_{\max}}^{+\Phi_{\max}} d\Phi = 2N \frac{1}{T} (\Phi_{\max} + \Phi_{\max})$$

$$E_{e1} = 4Nf\Phi_{\max}$$

a efektivna je vrijednost prema: $\xi = E/E_{e1}$ jednaka:

$$E = \xi E_{e1} = \xi 4Nf\Phi_{\max}$$

To je dakle općenitija jednadžba za efektivnu vrijednost induciranog napona, a za sinusoidalni napon za koji je $\xi = 1,11$ i $4\xi = 4,44$ izlazi:

$$E = 4,44fN\Phi_{\max}$$

kao što smo i prije izračunali.

U prije izvedenim proračunima induciranog napona u rotirajućem svitku polazili smo od osnovne jednadžbe elektromagnetske indukcije koja uzima u obzir brzinu promjene magnetskog toka: $e = -N \cdot d\Phi/dt$. Isti se rezultat dobiva, dakako, ako se primijeni druga varijanta zakona elektromagnetske indukcije, gdje se nastajanje induciranog napona shvaća kao posljedica relativnog presijecanja vodiča zavoja i magnetskih silnica.

Taj način tumačenja induciranog napona osobito je podesan za proračunavanje veličine induciranog napona u praktički izvedenim rotacionim generatorima, gdje zavoji svitka u kojem se inducira napon imaju oblik pravokutnika. Na slici 12.27 se vidi da pri rotaciji zavoja u homogenom magnetskom polju stranice zavoja a i b presijecaju silnice i u njima se inducira napon dok se stranice c i d nalaze izvan polja i služe samo da se zavoj vodljivo zatvori.

Jednadžbu $e = Blv$ za proračun induciranog napona u jednom vodiču zavoja možemo upotrijebiti (uz pravilo desne ruke) samo onda ako vodič okomito presijeca magnetske silnice. Ako pak brzina v kojom vodič siječe silnice zatvara sa silnicama kut $\alpha < 90^\circ$, treba još dodati u gornjoj jednadžbi faktor $\sin \alpha$. Time se zapravo u račun uzima od cijele brzine v samo njena okomita komponenta $v \sin \alpha$, slika 12.27. Jednadžba za taj slučaj glasi:

$$e = Blv \sin \alpha$$

Na slici se nadalje vidi da je pri rotaciji zavoja konstantnom kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju komponenta brzine s kojom vodič zavoja presijeca okomito magnetske silnice baš jednaka $v \sin \alpha$, gdje je $\alpha = \omega t$ kut što ga zatvara površina zavoja u bilo kojem trenutku t s položajem zavoja u vrijeme $t = 0$. Uvrstimo li vrijednost za kut α u gornju jednadžbu, dobivamo za inducirani napon jednog vodiča novi izraz:

$$e = Blv \sin \omega t$$

odakle vidimo da je taj napon vremenski sinusoidalno promjenljiva veličina.

Na slici 12.27 koja prikazuje elementarni generator s jednim zavojem nalaze se stranice a i b na promjeru $2r$ i dok se jedna (a) nalazi pred polom N pomičući se zdesna nalijevo, druga stranica (b) presijeca silnice istog toka u protivnom smjeru: slijeva nadesno. Budući da su obje stranice jednake duljine i presijecaju istom brzinom tok iste gustoće, bit će inducirani naponi istog apsolutnog iznosa, samo su im smjerovi suprotni. Međutim, unutar konture zavoja obje inducirane elektromotorne sile se sumiraju u resultantni napon zavoja koji je jednak:

$$e_z = 2Blv \sin \omega t$$

Maksimalna vrijednost je $2Blv$, što nakon supstitucije $v = r\omega$ daje $E_{z\max} = Bl2r\omega$, a jer je $2r \cdot l = S$, slijedi da je $BS = \Phi_{\max}$, pa za svitak sa N zavoja dobivamo već poznatu jednadžbu:

$$E_{\max} = N\omega \Phi_{\max}$$

odnosno:

$$e = E_{\max} \sin \omega t$$

Faktor $\sin \alpha$ pridružili smo konstantnoj obodnoj brzini v pa smo dobili okomitu komponentu brzine kojom se presijecaju silnice konstantne gustoće B . Ako pak u osnovnoj formuli uzmemo $\sin \alpha$ uz gustoću B , dobivamo novu interpretaciju induciranja napona:

$$e = B \sin \alpha l v$$

$B \sin \alpha = B_n$ označuje kako se na slici 12.28 vidi, okomitu komponentu magnetske gustoće na smjer obodne brzine v , pa možemo jednadžbu inducirano napona u vodiču prikazati u obliku:

$$e = B_n l v$$

Ova jednadžba nam kazuje da je uz konstantnu obodnu brzinu v trenutna vrijednost inducirano napona u vodiču upravo razmjerna normalnoj komponenti magnetske gustoće koju na pripadnom mjestu presijeca vodič pri rotaciji u tom trenutku.

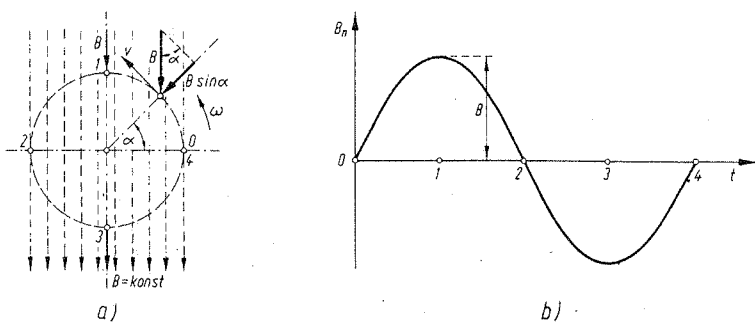
Ako želimo izračunati inducirani napon ovim načinom, mora nam biti poznata prostorna razdioba normalne gustoće B_n duž cijelog puta na kojem vodič presijeca magnetske silnice. Tako imamo npr. za naš generator prikazan na slici 12.28a dijagram prostorne razdiobe veličine B_n po obodu rotora predložen sinusoidalnom krivuljom na slici 12.28b, jer je na svakom mjestu uz $B = \text{konst.}$:

$$B_n = B \sin \alpha$$

što se lako uočava na slici.

Budući da su pri konstantnoj obodnoj brzini vrtnje prevaljeni putovi proporcionalni vremenu ($s = vt$), možemo na apscisnoj osi umjesto udaljenosti naznačiti i vrijeme koje je prošlo od početka računanja. Zato nam dijagram prostorne razdiobe gustoće B_n može u odgovarajućem mjerilu predložiti i vremensku promjenu inducirano napona:

Ovaj način može se općenito primijeniti na proračun induciranog napona i u drukčije konstruiranim generatorima, a i takvim konstrukcijama, gdje su svici uloženi u stator pa stoje na miru, a magnetsko polje se okreće, jer su magneti smješ-



Sl. 12.28. a) Normalna komponenta magnetske gustoće; b) Razdioba normalne komponente $B_n = B \cdot \sin \alpha$ po obodu rotora na smjer brzine vrtnje v

teni na rotoru. Oblikovanjem *polnih nastavaka* može se postići sinusoidalna raspodjela normalne gustoće magnetskog toka B_n po obodu statora, pa će se tako pri rotaciji rotora dobiti u svicima statora sinusoidalni inducirani napon.

13. STRUJNI I NAPONSKI ODNOSI U KRUGOVIMA IZMJENIČNE STRUJE

13.1. UTJECAJ PROMJENLJIVOG ELEKTROMAGNETSKOG POLJA NA PRILIKE U LINEARNIM MREŽAMA IZMJENIČNE STRUJE

Kao pasivni elementi u strujnim krugovima električnih mreža istosmjerne struje ulazili su u račun samo omski otpori. Vidjeli smo, naime, da prijelazne pojave koje nastaju zbog induktivnosti i kapacitivnosti strujnih krugova u trenutku priključka na konstantne napone izvora redovno traju vrlo kratko vrijeme, pa se mogu zanemariti pri razmatranjima prilika u trajnom pogonu. Ove prijelazne pojave prouzročene su zbog toga što u prijelaznom stanju struje i naponi mijenjaju svoju vrijednost, pa se dodatno pojavljuju promjenljiva električna i promjenljiva magnetska polja. No kako nakon kratkog vremena struje i naponi postižu konstantne vrijednosti, nestaju ovi dodatni utjecaji promjenljivog elektromagnetskog polja.

Budući da ćemo u slijedećim poglavljima razmatrati električne mreže izmjenične struje, moramo imati na umu činjenicu da su u tim mrežama struje i naponi trajno promjenljivi, pa zato nećemo računati samo s omskim otporima, nego moramo uzeti u račun i one pojave koje su vezane uz trajno promjenljiva električna i magnetska polja.

Kako je magnetsko polje vezano uz induktivitet strujnog kruga, a električno polje uz kapacitet, treba u strujnim krugovima izmjenične struje uzeti u račun sva tri karakteristična parametra strujnog kruga: R , L i C .

Iako je u stvarnosti otpor R porazdijeljen po cijeloj duljini strujnog kruga, a induktivitet isto tako sačinjava cijela zamka strujnog kruga, pa i kapacitet svi vodiči pod naponom, ipak se u mnogim slučajevima mogu ovi parametri smatrati koncentriranim veličinama, i to otpor R kao *otpornik*, induktivitet L kao *svitak*, a kapacitet C kao *kondenzator*. Slijedeća razmatranja provest ćemo sa tako sastavljenim strujnim krugovima.

Da možemo u sastavljenim strujnim krugovima izmjenične struje, gdje dolaze u obzir sva tri parametra, shvatiti odnose koji vladaju među strujama i naponima, moramo najprije zasebno za svaki od ta tri karakteristična pasivna elementa, R , L i C , odrediti kako se međusobno odnose struja i i izmjenični napon u što ga dovodimo tom elementu.

Primatrat ćemo, dakle, uvodno idealizirane strujne krugove, pri čemu je na izvor sinusoidalnog napona u priključen samo jedan od ta tri elementa, a pretpostavljamo da su drugi zanemariivo maleni.

Kao prvo, na slici 13.1a prikazan je priključak čistog omskog otpora R , pri čemu uzimamo $L = 0$ i $C = 0$. Budući da želimo saznati kakav odnos postoji među strujom i naponom, primijenit ćemo Ohmov zakon koji kaže da je jakost struje pri konstantnoj vrijednosti otpora R uvijek proporcionalna naponu, a obrnuto proporcionalna otporu. Za konstantnu istosmjernu struju taj zakon glasi $I = U/R$, no jer taj zakon vrijedi općenito i u svakom trenutku, to pri promjenljivim i izmjeničnim strujama možemo napisati jednadžbu za trenutne vrijednosti, pa dobivamo:

$$i = \frac{u}{R}$$

Što se tiče smjerova ovih električkih veličina, poznato nam je otprije da se kao smjer struje i uzima onaj u kojem se giba pozitivni električni naboj, a taj kroz otpor ide od pozitivne stezaljke prema negativnoj stezaljci priključenog otpora, slika 13.1a. Taj smjer je, dakle, ujedno i smjer djelovanja vanjskog, privedenog napona u .

Označimo li, dakle, za trenutak kad je stezaljka a pozitivna ove međusobno povezane smjerove pomoću ucrtanih strelica, mogu nam te strelice i ubuduće uvijek služiti kao referentni smjerovi za napon i struju na omskom otporu R .

Pogledajmo sada odnose između struje i napona za sinusoidalno promjenljivi napon: $u = U_{\max} \sin \omega t$. Prema jednadžbi $i = u/R$ imamo da je:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_{\max} \sin \omega t}{R} = \frac{U_{\max}}{R} \sin \omega t$$

Zbog proporcionalnosti struje i napona očito je da će maksimalni napon potjerati i maksimalnu jakost struje, pa je:

$$\frac{U_{\max}}{R} = I_{\max}$$

a jednadžba za struju dobiva konačni oblik:

$$i = I_{\max} \sin \omega t$$

Vidimo da se i struja mijenja sinusoidalno kao i napon, te da je frekvencija struje ista kao i napona ($\omega = \omega$), a da su konačno i obje veličine u i i istog faznog stanja, jer u izrazu za struju kao i za napon nema nekog dodatnog faznog kuta uz ωt .

Kažemo, dakle, da je kod priključka omskog otpora na izvor izmjeničnog napona fazni pomak među strujom i naponom jednak nuli:

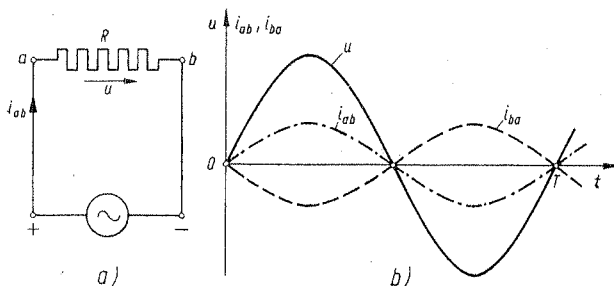
$$\varphi = \beta_u - \beta_i = 0$$

Vremenski dijagram napona i struje prikazan je na slici 13.1b.

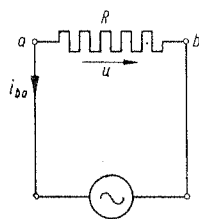
Ako izraz za maksimalnu vrijednost ili amplitudu jakosti struje $I_{\max} = U_{\max}/R$ podijelimo sa $\sigma = 1/\sqrt{2}$ dobivamo jednadžbu Ohmova zakona za efektivne vrijednosti izmjenične struje:

$$I = \frac{U}{R}$$

dakle, formalno potpuno istog oblika kao i kod istosmjerne struje. Već ovdje vidimo veliku korist što je u račune sa izmjeničnom strujom uvedena efektivna vrijednost, jer se npr. proračuni elektrotermičkih aparata, koji nisu drugo već omski otpornici, vrše pri izmjeničnoj struji uz pomoć efektivnih vrijednosti isto kao i pri istosmjernoj struji.



Sl. 13.1. a) Priključak omskog otpora R na izvor sinusoidalnog napona; b) Grafički prikaz vremenske promjene napona i struje za strujni krug prikazan na slici



Sl. 13.2. Promjena referentnog smjera za struju u odnosu na sliku 13.1

Istaknimo na kraju još važnost svojevoljnog odabiranja referentnih smjerova pri proračunu struje kod priključka omskog otpora na sinusoidalni napon. Oda-
branim referentnim smjerovima prema slici 13.1a pridružena jednadžba Ohmova zakona glasi:

$$i = \frac{u}{R}; \quad u = iR \quad \text{ili} \quad i_{ab} = \frac{u_{ab}}{R}; \quad u_{ab} = i_{ab}R$$

što znači da će veličina na lijevoj strani biti istog predznaka kao i veličina na desnoj strani.

Ako za struju odaberemo protivno usmjereni referentni smjer računanja, slika 13.2, imamo da je $i_{ba} = -i_{ab}$ pa nakon uvrštenja u gornju jednadžbu Ohmov zakon sada glasi:

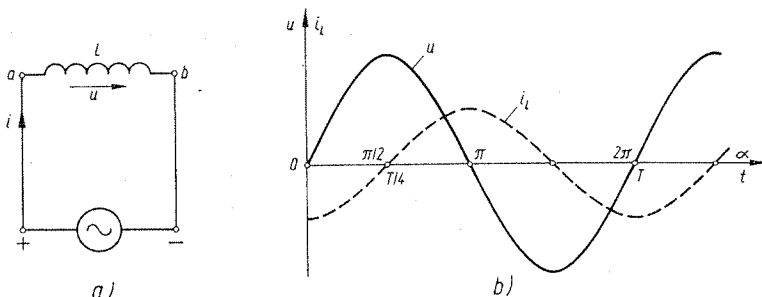
$$i_{ba} = -i_{ab} = -\frac{u_{ab}}{R}$$

što znači da će struja biti suprotnog predznaka nego što je zadani napon u_{ab} , slika 13.1b.

13.1.2.

Priključak induktivnog svitka

Drugi posebni slučaj koji razmatramo, prikazan na slici 13.3, je priključak induktivnog svitka na izvor sinusoidalnog napona u . U tom strujnom krugu dolazi do izražaja samo utjecaj vlastitog induktiviteta svitka L , jer ostale parametre zanemarujemo. Taj utjecaj očituje se time, da će izmjenični napon izvora sigurno potjerati neku promjenljivu struju i , a ova će u svitku inducirati napon samoindukcije: e_s .



Sl. 13.3. a) Priključak induktiviteta L na sinusoidalni napon; b) Induktivna struja zaostaje za jednu četvrtinu periode iza napona

Da bismo odredili jednadžbu kojom je definirana struja i što prolazi kroz svitak pod utjecajem napona u , moramo prethodno odabrati referentne smjerove za napon i struju. Te smjerove naznačili smo strelicama na slici 13.3, gdje vidimo da je napon izvora u priveden na stezaljke svitka pa je $u = u_{ab}$. Umjesto s vanjskim naponom izvora možemo računati i s unutarnjim naponom izvora (elektromotornom silom) e .

U smjeru pozitivne struje i računamo također kao pozitivan i prirast struje di .

Prema Lenzovu zakonu u svitku inducirani napon samoindukcije jednak je:

$$e_s = -L \frac{di}{dt}$$

te kao stvoreni unutarnji napon djeluje unutar konture strujnog kruga u svitku od stezaljke b prema stezaljci a . Točka a je na višem potencijalu nego točka b , pa se ta razlika potencijala pojavljuje na svitku kao vanjski napon u_L koji djeluje u smjeru od a prema b , dakle suprotno nego e_s , i zato možemo napisati za taj napon jednadžbu:

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

Analizirajući prilike u ovom strujnom krugu moramo, dakle, primijeniti onaj osnovni zakon kojim se obrađuju odnosi električkih veličina u strujnim krugovima s više djelujućih napona, a to je drugi Kirchhoffov zakon koji općenito glasi:

suma svih napona u zatvorenom krugu jednaka je sumi umnožaka struja puta otpor. Budući da je u ovom slučaju pretpostavljeno da nema omskih otpora, izlazi da je suma svih napona jednaka nuli.

Taj drugi Kirchhoffov zakon možemo za promatrani strujni krug primijeniti na unutarnje proizvedene napone (*ems*) ili na vanjske napone.

Ako se odlučimo za unutarnje napone, jednadžba glasi:

$$e - e_s = 0 \quad \text{ili} \quad e_s = e$$

To isto dobivamo i primjenom vanjskih napona:

$$u - u_L = 0 \quad \text{ili} \quad u_L = u$$

Ove jednadžbe matematički prikazuju osnovni zakon ravnoteže napona u promatranom strujnom krugu. Vidimo da inducirani napon samoindukcije proizročen prolaskom struje kroz svitak induktiviteta L drži ravnotežu naponu izvora koji je priveden stezaljkama svitka. Zato nazivamo e_s također induktivnim protunaponom. Ravnoteža je dinamička, jer protunapon e_s (odnosno u_L) nastaje tek kad struja prolazi kroz svitak, a struja i će poprimiti takav tijek, da se inducira napon čije su vrijednosti u svakom trenutku jednake vrijednostima napona izvora.

Upravo iz ovog možemo dobiti podatak kako će se mijenjati struja i koju napon u potjera kroz svitak L . Iz jednadžbe:

$$u = u_L = L \frac{di}{dt}$$

slijedi:

$$di = \frac{1}{L} u \cdot dt = \frac{U_{\max}}{L} \sin \omega t \cdot dt$$

pa je:

$$i = \int \frac{U_{\max}}{L} \sin \omega t \cdot dt = \frac{U_{\max}}{L} (-\cos \omega t) \frac{1}{\omega}$$

ili:

$$i = \frac{U_{\max}}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2)$$

jer je:

$$-\cos \omega t = \sin(\omega t - \pi/2)$$

Nadalje se struja može prikazati u obliku:

$$i = I_{\max} \sin(\omega t - \pi/2)$$

gdje je:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\omega L}$$

a efektivna vrijednost:

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L}$$

Gornji računi pokazuju da je struja i također sinusoidalna funkcija vremena t iste frekvencije kao i napon, jer je uz varijablu t isti faktor $\omega = 2\pi f$. Međutim je krivulja struje pomaknuta iza krivulje napona za $\pi/2$ ili $T/4$, slika 13.3b, pa kažemo da struja zakašnjava za vrijeme jedne četvrtine periode iza napona.

Fazni pomak između struje i napona označuje se općenito kao diferencija faznih kutova:

$$\beta_u - \beta_i$$

pa jer je kod čistog induktiviteta L taj kut:

$$\varphi = \beta_u - \beta_i = 0 - (-\pi/2) = +\pi/2$$

općenito ćemo pozitivne kutove φ označiti kao induktivne fazne pomake.

Pogledamo li još jednadžbu za proračun struje I vidimo da i u ovom slučaju jednadžba pisana efektivnim vrijednostima ima oblik sličan Ohmovu zakonu. Opet je, naime, efektivna vrijednost struje I prikazana kao kvocijent efektivne vrijednosti napona U i jedne veličine u nazivniku: ωL , koju možemo smatrati nekim otporom.

Da je to opravdano vidi se odatle, što taj umnožak ima upravo dimenziju oma:

$$[\omega L] = \text{s}^{-1} \text{H} = \text{s}^{-1} \Omega \text{s} = \Omega$$

Zbog toga što to nije otpor u smislu kako je objašnjen omski otpor R , nego što ta veličina:

$$X_L = \omega L$$

fizikalno gledano, ima svoj otporni utjecaj zbog protudjelovanja induciranog napona, zove se:

$$X_L - \text{induktivni otpor svitka}$$

Iz definicije jednadžbe induktivnog otpora vidimo da on ovisi o induktivitetu L i o frekvenciji f , jer možemo napisati:

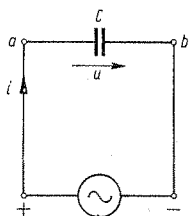
$$X_L = 2\pi f L$$

U mnogim računima može se pretpostaviti da su L i f konstantne veličine, pa je onda i X_L konstantno.

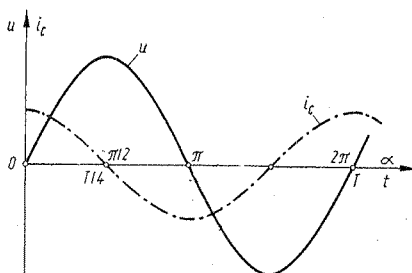
13.1.3.

Priključak kondenzatora

Treći idealizirani slučaj imamo ako je na izvor sinusoidalnog napona $u = U_{\max} \sin \omega t$ priključen idealni kondenzator kapaciteta C ; pretpostavljamo, dakle, da je $R = 0$ i $L = 0$, slika 13.4.



a)



b)

Sl. 13.4. a) Priključak kapaciteta C na sinusoidalni napon; b) Kapacitivna struja prethodi naponu za jednu četvrtinu periode

Pod utjecajem promjenljivog napona izvora, kojem se tijekom vremena mijenja polaritet stezaljka, nabijati će se ploče kondenzatoru, naizmjenice sad pozitivnim, a sad negativnim promjenljivim nabojem q . Zbog toga kroz dovodne žice od izvora do kondenzatora imamo trajno gibanje elektriciteta u jednom i u drugom smjeru. Dakako da ova provodna struja ne prolazi kroz izolaciju kondenzatora, ali je u priključnim vodičima možemo konstatirati i izmjeriti ampermetrom (za izmjeničnu struju).

Pogledajmo još što se događa u izolaciji prostora među metalnim pločama kondenzatora. Budući da je napon priveden na ploče promjenljiv, mijenjat će se i jakost električnog polja u izolatoru istom frekvencijom, pa zbog toga dolazi do izmjeničnog premještanja naboja vezanih unutar čestica materije izolatora. Eksperimenti pokazuju da i to izmjenično pomicanje električnih naboja u dielektrikumu (kao i općenito svako gibanje električnih naboja) stvara također oko sebe magnetsko polje. Budući da je stvoreno magnetsko polje, glavni kriterij na osnovi kojeg zaključujemo da li negdje postoji struja, smatramo i ovo izmjenično premještanje naboja električnom strujom i nazivamo *pomaćnom strujom*.

Zaključujemo, dakle, da provodna izmjenična struja u metalnim vodičima strujnog kruga ima u prostoru između metalnih ploča kondenzatora svoj nastavak kao *struja dielektričnog pomaka*.

Da bismo odredili funkcionalnu ovisnost struje i o vremenu: $i = f(t)$ ako nam je zadan sinusoidalni napon, moramo imati u vidu zakone proporcionalnosti prema kojima su određeni odnosi električnih veličina kod priključka kondenzatora na izvor napona.

U uvodnim razmatranjima vidjeli smo da pri konstantnom priključenom naponu i konstantnoj struji postoje slijedeći odnosi:

$$Q = C \cdot U \quad \text{i} \quad I = \frac{Q}{t}$$

Ove jednadžbe, sada za promjenljive i izmjenične napone, možemo upotrijebiti ako ih napišemo za trenutne vrijednosti promjenljivih veličina, pa imamo:

$$q = C \cdot u; \quad i = \frac{dq}{dt}$$

U pogledu smjerova ovih promjenljivih veličina možemo reći da će napon izvora u , čiji je smjer djelovanja na slici naznačen strelicom priveden na stezaljke kondenzatora, nabiti lijevu ploču kondenzatora (a) količinom elektriciteta $+q$, dok će naboj desne ploče (b) biti $-q$.

Uz ovakve odnose prirast pozitivnog naboja na gornjoj ploči $+dq$ ostvarit će pozitivna struja, koju u spojnoj shemi predstavlja ucrtana strelica. Znamo, naime, da je električna struja gibanje pozitivnog elektriciteta.

Okako smo na osnovi fizikalnih zbivanja pri nabijanju kondenzatora dobili međusobno povezane smjerove kojima su pridružene gore navedene jednadžbe. Ove ćemo smjerove u daljnjem prihvatiti kao referentne za napon i struju kod priključka kondenzatora na izvor napona.

Polazeći od zadane jednadžbe za sinusoidalni napon:

$$u = U_{\max} \sin \omega t$$

možemo dalje izvesti jednadžbu za struju i . Iz: $q = C \cdot u$ slijedi $dq = C \cdot du$ pa je:

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_{\max} \sin \omega t)$$

Nakon diferenciranja izlazi da je:

$$i = C U_{\max} \omega \cos \omega t$$

Prikažemo li cosinus funkciju pomoću sinus funkcije dobivamo:

$$i = U_{\max} C \cdot \omega \sin(\omega t + \pi/2) \quad (\text{Sl. 13.4b})$$

Vidimo, dakle, da je struja opet sinusoidalna iste frekvencije kao i napon, samo sada struja prethodi pred naponom za jednu četvrtinu periode, što odgovara kutu od $\pi/2$. Ako opet kao kut faznog pomaka definiramo razliku faznog kuta napona i faznog kuta struje, dobivamo da je:

$$\varphi = 0 - (+\pi/2) = -\pi/2 = -90^\circ$$

Prema tome kažemo: ako je kut φ negativan, fazni pomak je kapacitivan.

Kao i u prijašnjem slučaju, vidimo da će struja imati maksimalnu vrijednost kad je $\sin(\omega t + \pi/2)$ jednak jedinici, pa je:

$$I_{\max} = U_{\max} \omega C$$

tako da jednadžba struje glasi:

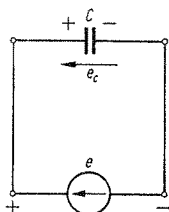
$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \pi/2)$$

Izraz za amplitudu struje možemo prikazati u obliku:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{1/\omega C}$$

odakle dijeljenjem jednadžbe sa $\sqrt{2}$ dobivamo odnos efektivnih vrijednosti:

$$I = \frac{U}{1/\omega C}$$



Sl. 13.5. Ravnoteža elektromotorne sile kondenzatora s elektromotornom silom generatora

Izraz $1/\omega C$ ima dimenziju oma:

$$\left[\frac{1}{\omega C} \right] = \frac{1}{s^{-1}} \cdot \frac{1}{\frac{As}{V}} = \frac{V}{A} = \Omega$$

pa možemo $1/\omega C = X_C$ nazvati *kapacitivnim otporom kondenzatora*. Jednadžba napisana u obliku:

$$I = \frac{U}{X_C}$$

predočuje nam, dakle, Ohmov zakon za promatrani slučaj.

Vidimo da je kapacitivni otpor obrnuto proporcionalan frekvenciji i kapacitetu kondenzatora:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

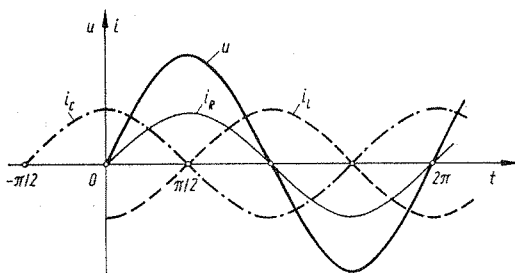
U ovim izvodima računali smo s naponom izvora koji je u punom iznosu prenesen na stezaljke (ploče) kondenzatora, pa je to bio vanjski napon u . No mogli bismo pojavu pozitivnog i negativnog naboja na pločama kondenzatora smatrati unutar konture strujnog kruga unutarnjim proizvedenim naponom (*ems*) kondenzatora: e_c . Taj napon ima, međutim, unutar strujnog kruga — kako se na slici 13.5 vidi — smjer suprotan unutarnjem naponu izvora e , pa je tako i u ovom slučaju uspostavljena ravnoteža aktivnog napona izvora e i stvorenog kapacitivnog protunapona e_c , kako zahtijeva drugi Kirchhoffov zakon.

13.2.1.

O kutu faznog pomaka struje i napona

Razmatranja obavljena u prethodnom poglavlju pokazala su da u strujnim krugovima izmjenične struje moramo računati s time da se zbog promjenljivosti elektromagnetskog polja ne poklapaju vremenske promjene jakosti struje s promjenama napona.

Razlike u trenutnim stanjima karakterizirane su kutom faznog pomaka φ , za koji smo vidjeli da u tri idealna slučaja opterećenja poprima vrijednosti -90° ; 0° i $+90^\circ$, slika 13.6. Na slici, gdje su uz krivulju napona u prikazane ujedno i krivulje struja za sva tri slučaja opterećenja, vidljivo je da se utjecaj kapaciteta očituje time što promjenljivo električno polje pomiče krivulju i_C u odnosu na krivulju struje i_R na lijevu stranu, dok je utjecaj induktivnog svitka zbog promjenljivog magnetskog polja baš suprotan i zbog njega se krivulja struje i_L pomiče nadesno. Utjecaji kapaciteta i induktiviteta su, dakle, jedan drugome suprotni, pa se može očekivati da će se oni međusobno poništavati ako negdje djeluju zajedno u isto vrijeme.



Sl. 13.6. Fazno pomaknute induktivna i kapacitivna struja u odnosu na napon izvora

Budući da u realno izrađenim aparatima i uređajima moramo računati s time da će pri izmjeničnoj struji do izražaja doći utjecaji svih triju otpora: R , X_L i X_C , imat će kut faznog pomaka φ vrijednost negdje u intervalu između -90° i $+90^\circ$. Matematski se to može prikazati relacijom:

$$-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$$

pri čemu znakovi jednakosti vrijede za idealne slučajeve: čisti kapacitet i čisti induktivitet.

U grafičkoj predodžbi vremenske promjene napona i struje možemo na slici 13.7 prikazati jedan općenit slučaj kad je npr. struja prema naponu fazno pomaknuta za kut:

$$0 < \varphi < 90^\circ$$

što odgovara opterećenju izvora izmjeničnog napona u trošilom u kojem do izražaja dolazi nešto veći utjecaj promjenljivog magnetskog polja.

13.2.2. Snaga izmjenične struje i faktor snage

Ovakav neskladan odnos trenutnih vrijednosti napona i struje najviše će se ispoljiti tamo gdje obje veličine djeluju istovremeno, a to je pri korisnom radu što ga može obaviti energija izmjenične struje. Treba, dakle, razmotriti kako će se — posve općenito — odrediti energija ili rad, te snaga izmjenične struje. Pri tome polazimo od osnovnih jednadžbi kojima su definirane snage i energija, a koje su dobivene kao zakoni proporcionalnosti za konstantnu istosmjernu struju:

$$P = UI = \frac{W}{t} \quad \text{i} \quad W = UI t = Pt.$$

Ako su izmjenični napon i struja zadani općenito jednadžbama:

$$u = U_{\max} \sin \omega t \quad \text{i} \quad i = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi)$$

dobivamo množenjem njihovih trenutnih vrijednosti trenutnu vrijednost snage, koju označujemo malim slovom p :

$$p = ui = U_{\max} \sin \omega t I_{\max} \sin(\omega t - \varphi) = 2 UI \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi)$$

što se dalje poznatom relacijom:

$$\sin a \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)]$$

može konačno prikazati u obliku:

$$p = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$$

Dobivena jednadžba pokazuje da je snaga izmjenične struje također periodički promjenljiva harmonička funkcija, samo je njezina frekvencija dvostruko veća nego frekvencija izmjenične struje, što se vidi ako faktor 2ω uz varijablu t napišemo u obliku:

$$2\omega = 2 \cdot 2\pi f$$

Računa li se sada količina električne energije tijekom vremena t pomoću snage, treba imati na umu činjenicu da je snaga promjenljiva i zato treba najprije odrediti diferencijal energije u vrijeme dt , koji je jednak: $dW = p dt$, a ukupna se količina energije za konačno vrijeme t dobiva sumiranjem svih diferencijala, dakle integriranjem:

$$W = \int_0^t p dt$$

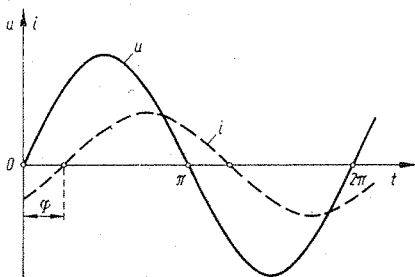
Želimo li i pri izmjeničnoj struji izraziti količinu energije tijekom konačnog vremena t jednostavno kao umnožak tog vremena s nekom prosječnom vrijednošću snage: P , analogno jednadžbi $W = P \cdot t$ koja vrijedi za istosmjernu struju, moramo ispuniti uvjet jednakosti:

$$Pt = \int_0^t p dt$$

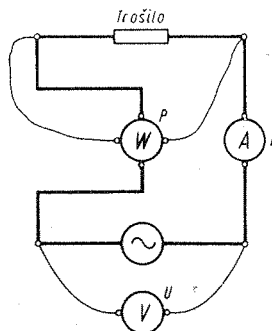
Oдавде slijedi da je ta prosječna vrijednost jednaka:

$$P = \frac{1}{t} \int_0^t p dt$$

a to je srednja (aritmetička) vrijednost snage.



Sl. 13.7. Struja i fazno pomaknuta za kut φ prema naponu u



Sl. 13.8. Određivanje faktora snage $\cos \varphi$ pomoću mjernih instrumenata

U računima najčešćim u praksi redovno će nas zanimati energija ili obavljen rad za vrijeme cijele periode T , pa tako iz gornje jednadžbe dobivamo konačni izraz za snagu P za sinusoidalno promjenljivu — izmjeničnu struju:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] dt = \frac{UI}{T} (\cos \varphi) T$$

$$P = UI \cos \varphi$$

Energija ili rad za vrijeme T je:

$$W = PT$$

Vidimo da je srednja vrijednost snage izmjenične struje za vrijeme jedne periode (a to vrijedi i za bilo koji cio broj perioda) jednaka umnošku efektivnih vrijednosti napona i struje, pomnoženo još s kosinusom kuta faznog pomaka φ struje i napona. Budući da ta snaga ne ovisi samo o naponu i struji nego i o $\cos \varphi$, nazivamo taj faktor *faktorom snage*.

Treba istaći da u gornjoj jednadžbi za snagu imamo međusobno povezane različite vrijednosti električnih veličina. Dok su napon i struja dani u efektivnim vrijednostima, snaga je izražena kao srednja vrijednost zbog toga, što u jednadžbi za proračun energije ulazi snaga kao faktor u prvoj potenciji, a to u vezi s prijašnjom diskusijom o prosječnim vrijednostima daje u rezultatu srednju vrijednost. Efektivna vrijednost snage nema uopće neku primjenu, jer se u energetskim računima snaga ne pojavljuje u drugoj potenciji.

Kut faznog pomaka, kako je spomenuto, može imati, ovisno o konstrukciji električnog uređaja, vrijednost između -90° i $+90^\circ$, pa tako faktor snage može varirati između 0 i 1. To nas navodi na zaključak da umnožak UI makar imao i veliku vrijednost, ipak sam tek prividno predodžuje snagu, jer sve ovisi još i o tome koliki je faktor snage $\cos \varphi$. Baš zbog toga se umnožak efektivnih vrijednosti napona i struje naziva *prividna snaga*, a označuje se slovom S :

$$S = UI$$

Uz ostale nominalne vrijednosti redovno se na trošilima i postrojenjima izmjenične struje označuje i vrijednost faktora $\cos \varphi$ kao važan nominalni podatak. To se ne čini samo zbog toga što on služi izravno za proračun snage i energije, nego i zato jer time ujedno dobivamo iz tablica i podatak o veličini faznog pomaka između struje i napona.

Koliki je fazni pomak za tipična trošila: R , L i C upoznali smo, već prije, a u slijedećim poglavljima je objašnjeno kako se za najrazličitije sastavljene strujne krugove može odrediti pripadni kut faznog pomaka. Za sada već ovdje možemo pokazati kako se pomoću instrumenata može izmjeriti vrijednost faktora $\cos \varphi$ nekog trošila.

Iz jednadžbe $P = UI \cos \varphi$ slijedi, naime, $\cos \varphi = P/UI$, a iz trigonometrijskih tablica očitamo vrijednost kuta φ .

Iako naoko izgleda da je kut faznog pomaka neka teoretska veličina koju možemo vidjeti tek na oscilogramu napona i struje, ipak nas gornja jednadžba upućuje kako ga možemo jednostavno odrediti. Kako vidimo, treba samo voltmetrom i ampermetrom izmjeriti efektivne vrijednosti napona i struje, a vatmetrom snagu trošila. Traženi faktor snage jednak je, dakle, kvocijentu srednje vrijednosti snage P i umnoška UI (odnosno prividne snage S). Slika 13.8 prikazuje (već poznati) način priključivanja instrumenata.

Spomenimo ovdje još i to da nam instrumenti pokazuju baš one vrijednosti mjerenih veličina koje zahtjeva gornja jednadžba. Voltmetar i ampermetar konstruirani su tako da mjere efektivne vrijednosti, dok vatmetar pokazuje srednju vri-

jednost snage, jer je u njegovoj konstrukciji za stvaranje sile koja će pomaknuti kazaljku iskorišteno elektrodinamičko djelovanje dviju izmjeničnih struja, koje su fazno pomaknute, a imaju istu frekvenciju. U tom je, naime, slučaju ta sila osim o umnošku jakosti obiju struja ovisna — kako je to bilo prije izvedeno — još i o kosinusu kuta njihovog faznog pomaka. U našem primjeru jednu struju predstavlja struja trošila I , a drugu nam daje napon U sa faznim pomakom φ .

13.2.3. Grafički prikaz snage izmjenične struje

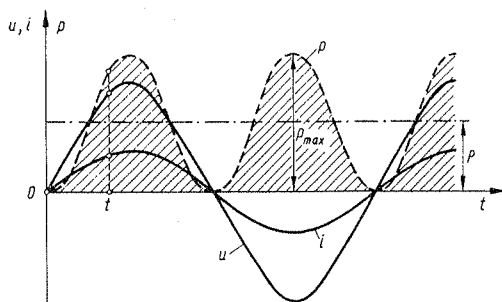
Da bismo što bolje upoznali promjenljivost snage izmjenične struje, predočit ćemo slijedećim slikama njene trenutne vrijednosti u vremenskom dijagramu za nekoliko različitih vrijednosti kuta faznog pomaka φ . U tom dijagramu možemo odmah ucrtati i srednju vrijednost snage, a površina omeđena krivuljom snage i apscisnom osi t predstavlja ujedno i električnu energiju, odnosno obavljen rad.

Kao prvi primjer pogledat ćemo priključak **omskog otpora** R na izvor napona $u = U_{\max} \sin \omega t$. Uz pretpostavku da su induktivitet L i kapacitet C zanemarivo mali, bit će struja u fazi s naponom predočena jednadžbom $i = I_{\max} \sin \omega t$.

Jednadžba trenutnih vrijednosti snage za ovaj primjer dobiva se kao umnožak trenutnih vrijednosti napona i trenutnih vrijednosti struje:

$$p = ui = U_{\max} \sin \omega t I_{\max} \sin \omega t = U_{\max} I_{\max} \sin^2 \omega t$$

Odatle slijedi da je krivulja snage p u (p, t) dijagramu (sl. 13.9) slična goniometrijskoj sinuskvadrat-krivulji, za čiji je prolazak karakteristično da ima samo pozitivne vrijednosti.



Sl. 13.9. Prikaz vremenske promjene snage izmjenične struje kod priključka omskog otpora R

Konačni oblik jednadžbe trenutnih vrijednosti snage p može se izvesti iz općenitog izraza $p = UI[\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$ ako se za kut φ uvrsti njegova vrijednost $\varphi = 0$, pa se dobiva:

$$p = UI[1 - \cos(2\omega t)]$$

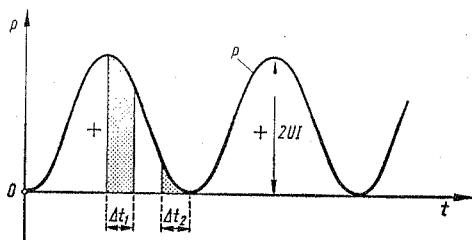
Osim toga se može i grafički nacrtati krivulja snage u (p, t) koordinatnom sustavu, tako da se za pojedine točke na apscisnoj vremenskoj osi izračuna ordinata snage kao umnožak pripadnih vrijednosti napona i struje. Dobivena krivulja $p(t)$ ima samo pozitivne ordinate, jer su struja i napon uvijek istog predznaka, a iz dijagrama se također vidi da snaga oscilira frekvencijom $2f$ između maksimalne vrijednosti $p_{\max} = U_{\max} I_{\max}$ i minimalne vrijednosti $p_{\min} = 0$. Njezina srednja vrijednost jednaka je:

$$P = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} = \frac{p_{\max}}{2} = \frac{U_{\max} I_{\max}}{2}$$

a to zamjenom maksimalnih vrijednosti s efektivnim vrijednostima daje konačni izraz za srednju snagu P :

$$P = \frac{\sqrt{2} U \cdot \sqrt{2} I}{2} = UI$$

Isti rezultat dobivamo dakako i onda ako u općenitu jednadžbu za srednju vrijednost snage uvrstimo vrijednost koju ima faktor snage za promatrano opterećenje i to: $\cos \varphi = \cos 0 = 1$, pa je:



Sl. 13.10. Pulzirajući privod energije pri izmjeničnoj struji uz $\varphi = 0$

$$P = UI$$

Količina energije koju izvor daje trošilu predočena je ispruganom površinom (sl. 13.9) što je zatvara krivulja trenutnih vrijednosti snage p s apscisnom osi t :

$$W = \int_0^t p \, dt$$

Na slici se mogu opaziti dvije karakteristike tog prijenosa energije. Najprije vidimo da su sve površine u dijagramu iznad apscisne osi, dakle su pozitivne, pa je i energija pozitivna, što znači da je cijelo vrijeme priključka trošila na izvor strujanje energije usmjereno od izvora ka trošilu. Zbog toga što je ovdje sva energija koju izvor predaje strujnom krugu potpuno iskorištena u trošilu za koristan rad, nazivamo je djelatnom ili radnom energijom. A srednju vrijednost snage P , kojom možemo izračunati iznos ove korisno upotrebene energije, prema jednadžbi: $W = Pt$, zovemo zato *djelatna* ili *radna snaga*, a uobičajen je i naziv *aktivna snaga*.

Ipak vidimo da privod energije trošilu nije jednoličan, jer se zbog promjenljivosti snage, na primjer u vremenskom intervalu Δt_1 , predaje trošilu veća količina energije nego u jednakom vremenskom intervalu Δt_2 , sl. 13.10.

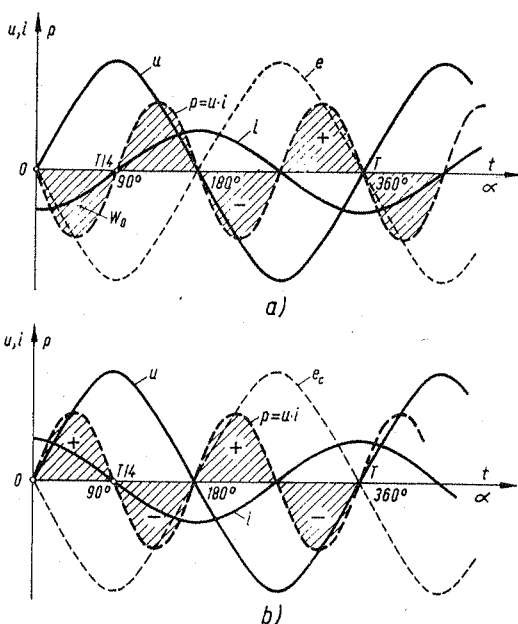
Budući da privođenje energije pulzira kao i snaga, može se ovo pulziranje osjetiti i na obavljanju rada trošila, ako element koji prima energiju može pratiti brze promjene snage. Tako se, na primjer, žarulja male snage s veoma tankom otpornom žicom zagrije i opet ohladi, pa će se zbog toga, ako frekvencija nije dovoljno

velika, moći opaziti treperenje svjetla u ritmu promjene snage. Spirale rešoa izrađene su od deblje otporne žice pa se neće moći tako brzo zagrijati i opet ohladiti kako se mijenja snaga, nego će se zagrijati na neku srednju temperaturu odgovarajuću srednjoj vrijednosti snage.

U drugom primjeru, kad na izvor sinusoidalnog napona priključimo čisti induktivitet L ($R = 0$; $C = 0$), struja će zaostati u fazi iza napona za $1/4$ periode, što odgovara faznom kutu od 90° . Naponska i strujna jednadžba glase:

$$u = U_{\max} \sin \omega t \quad i = I_{\max} \sin(\omega t - \pi/2)$$

i one su u vremenskom dijagramu predložene sinusoidalnim krivuljama pomaknutim za $1/4$ periode, slika 13.11a.



Sl. 13.11. Vremenska promjena snage kod priključka: a) Induktiviteta L ; b) Kapaciteta C

U istom vremenskom dijagramu ucrtat ćemo i krivulju trenutnih vrijednosti snage p . Za to može poslužiti grafički postupak kojim za svaku vrijednost apscise određujemo ordinatu snage kao umnožak ordinata napona i struje u skladu s jednadžbom $p = ui$.

Odmah vidimo da će vrijednost snage biti nula u onim trenucima kad su napon ili struja jednaki nuli. Osim toga, za razliku od prijašnjeg slučaja, krivulja snage ima ovdje i pozitivnih i negativnih ordinata. To slijedi iz činjenice da ordinate napona i struje nisu uvijek jednakog predznaka.

U intervalu 0 do $\pi/2$ ovi su predznaci različiti i zato je snaga negativna, dok su u intervalu $\pi/2$ do π predznaci jednaki (pozitivni), pa je snaga pozitivna. Tako se mogu i za ostale intervale odrediti pripadni predznaci snage.

Krivulja p je periodički promjenljiva harmonička krivulja, čija je frekvencija dvaput veća nego frekvencija struje, a simetrično je položena s obzirom na apscisnu os, pa su tako pozitivne i negativne grane krivulje potpuno jednake.

To isto daje i analitički izraz za snagu, ako u općenitu jednadžbu:

$$p = UI[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$$

uvrstimo: $\varphi = 90^\circ$ pa dobivamo: $p = UI[-\cos(2\omega t - 90^\circ)]$, što je jednako:

$$p = -UI\sin 2\omega t$$

Trenutne vrijednosti snage osciliraju dvostrukom frekvencijom između maksimalne vrijednosti $p_{\max} = +UI$ i minimalne vrijednosti $p_{\min} = -UI$, pa je srednja vrijednost za vrijeme jedne periode ili cijelog broja perioda:

$$P = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \text{ jednaka nuli} \quad P = 0$$

što izlazi i iz relacije $P = -\frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$, te primjenom relacije $P = UI \cos\varphi$, ako stavimo $\cos\varphi = \cos 90^\circ = 0$.

I površine koje predstavljaju energiju ili rad izmjenične struje imaju u ovom primjeru također pozitivne i negativne predznake, što znači da se tijekom vremena mijenja smjer strujanja energije. Pozitivne površine predstavljaju količinu energije koja iz izvora ide u svitak, a negativne površine energiju koju svitak vraća natrag u strujni krug i izvor. Budući da su površine obaju predznaka jednake, znači da se onoliko energije vratilo iz svitka koliko je energije tijekom cijelog broja perioda svitak primio iz izvora. U rezultatu je, dakle, ukupna energija jednaka nuli, što pokazuje i jednadžba:

$$W = PT = 0T = 0$$

Vidimo, dakle, da ovdje jedna te ista količina energije oscilira između izvora i svitka i ništa se od elektromagnetske energije ne iskorišćuje u strujnom krugu za obavljanje korisnog rada ili za pretvorbu u koji drugi oblik energije.

Ovo osciliranje energije može se objasniti na slijedeći način. Kad struja npr. u trenutku $\pi/2$ počinje rasti od vrijednosti nula u pozitivnom smislu — uz pozitivni predznak napona u — počinje također rasti i količina električne energije što je izvor predaje svitku, gdje se ona kao magnetska energija sakuplja sve dok struja ne postigne maksimalnu vrijednost. Od tog trenutka (π) dalje magnetska se energija smanjuje, jer se zbog promjene predznaka snage energija svitka počinje predavati izvoru, a potpuno će nestati sva energija magnetskog polja u trenutku $3\pi/2$ kad je sva predana izvoru. Odavanje energije magnetskog polja svitka natrag u strujni krug zbiva se zbog toga što se u svitku zbog promjene struje inducira

elektromotorna sila ili napon samoindukcije e , koji kao aktivni napon ima u tom intervalu isti smjer (predznak) kao i struja i , pa oboje predstavlja pozitivnu snagu — gledano od strane svitka — koji sad preuzima ulogu izvora i daje energiju natrag u strujni krug.

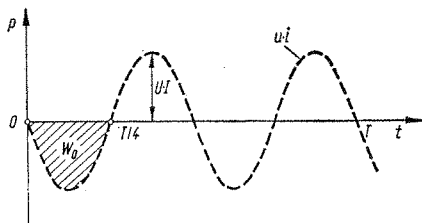
U trećem primjeru možemo provesti slična razmatranja kad na izvor sinusoidalnog napona u priključimo **idealni kondenzator** kapaciteta C ($R = 0$; $L = 0$). Struja u tom slučaju prethodi pred naponom u za $1/4 T$, što odgovara faznom kutu -90° , pa su opet krivulje napona i struje međusobno pomaknute za 90° . Razlika je u tome da je sada krivulja struje pomaknuta za 90° nalijevo prema krivulji napona, dakle na suprotnu stranu nego u prijašnjem primjeru čistog induktiviteta, slika 13.11b.

Na slici je uz krivulje u i i prikazana i krivulja trenutnih vrijednosti snage p , koja se grafički dobiva slično kao što je objašnjeno u prijašnjem primjeru. Analitička jednadžba za snagu p kod priključaka kondenzatora glasi:

$$p = UI \sin 2\omega t$$

a srednja vrijednost snage P opet je jednaka nuli:

$$P = 0$$



Sl. 13.12. Jalova energija ovisna o amplitudi promjenljive jalove snage

Energija predočena ispruganom površinom i ovdje oscilira između izvora i priključenog kondenzatora. Razlika je prema prijašnjem slučaju u tome da se energija izvora predaje sada kondenzatoru, gdje se ona kao energija električnog polja sakuplja za vrijeme dok napon u i struja i imaju isti, npr. pozitivni predznak, a u intervalima kad je protunapon e_c na kondenzatoru istog predznaka kao i struja i , onda kondenzator vraća energiju u strujni krug. Opet je, dakle, za vrijeme jedne ili više perioda T :

$$W = 0$$

Prijašnji izvodi pokazali su da u oba posljednja primjera, kad je na sinusoidalni napon bio priključen čisti induktivitet ili idealni kondenzator, dolazi samo do osciliranja energije između izvora i priključenog trošila. Ukupna količina energije W za vrijeme cijelog broja perioda jednaka je nuli, jer se kompenziraju pozitivne i negativne površine koje u vremenskom dijagramu predočuju elektromagnetsku energiju. Budući da u tom slučaju ta *energija ne obavlja koristan rad*, nazivamo je *jalovom energijom*.

Količina energije koja pri tom samo oscilira predočena je na slici 13.12 ispruganom površinom polovice vala sinusoidalne krivulje snage. Koliki će biti iznos ove površine ovisi prema jednadžbi:

$$W_0 = \int_0^{T/4} UI \sin 2\omega t \, dt = \frac{1}{\omega} UI$$

samo o amplitudi krivulje snage, jer je pri konstantnoj frekvenciji veličina $1/\omega$ konstantan faktor. Radi toga se amplituda snage jalove energije kao važan energetski podatak naziva jalova snaga, a označuje se slovom Q .

Budući da u ovom primjeru energija predana trošilu biva u punom iznosu vraćena natrag izvoru, često se jalova energija naziva *reaktivna energija*, a i jalova snaga Q se naziva *reaktivna snaga*.

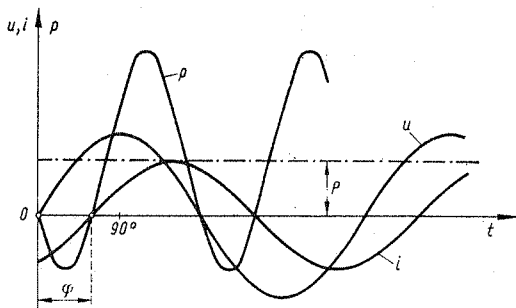
Energetski odnosi bit će nešto složeniji ako je na izvor napona $u = U_{\max} \sin \omega t$ priključeno trošilo koje uzima iz izvora struju i , vremenski fazno pomaknutu prema naponu odgovarajuće kutu φ , koji je manji od 90° :

$$0 < \varphi < 90^\circ$$

Analitički izraz za snagu p poznamo već otprije:

$$p = UI[\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$$

a sada možemo opet poznatim grafičkim postupkom u vremenskom dijagramu zajedno sa krivuljama u i i nacrtati i krivulju snage p , slika 13.13.



Sl. 13.13. Struja i fazno pomaknuta prema naponu za kut $\varphi < 90^\circ$

U ovom primjeru ima snaga i pozitivnih, a i negativnih ordinata, no pozitivne vrijednosti vezane su na dulje vremenske intervale nego negativne vrijednosti. Zbog toga su također veće i pozitivne površine, koje predstavljaju onu količinu energije koju izvor predaje priključenom trošilu, nego što su negativne površine a koje prikazuju energiju vraćenu od trošila izvoru. U rezultatu će, dakle, razlika obiju energija ostati u trošilu i bit će iskorištena za neki koristan rad.

Da bismo pri tom dobili podatak o tome kolika je korisna ili djelatna snaga u odnosu prema jalovoj snazi, preoblikovat ćemo drugi član jednadžbe za trenutnu vrijednost snage:

$$p = UI[\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)$$

upotrebom goniometrijske jednadžbe:

$$\cos(a - \beta) = \cos a \cos \beta + \sin a \sin \beta$$

pa dobivamo:

$$\begin{aligned} p &= UI \cos \varphi - UI [\cos 2\omega t \cos \varphi + \sin 2\omega t \sin \varphi] = \\ &= UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) - UI \sin \varphi \sin 2\omega t \end{aligned}$$

Konačni oblik jednačbe:

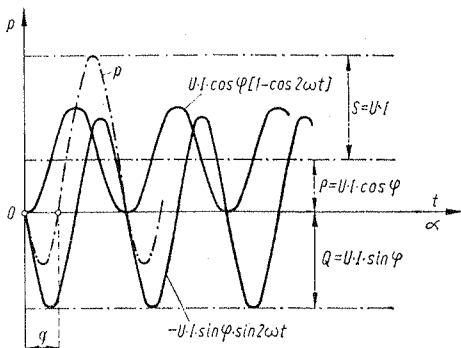
$$p = (UI \cos \varphi) (1 - \cos 2\omega t) - (UI \sin \varphi) \sin 2\omega t$$

pokazuje da se trenutna snaga p može rastaviti na dva pribrojnika od kojih prvi član $(UI \cos \varphi) (1 - \cos 2\omega t)$ predložuje harmoničku krivulju koja dvostrukom frekvencijom titra oko srednje vrijednosti $UI \cos \varphi$, pa prema prijašnjim spoznajama predstavlja korisnu ili djelatnu snagu, a faktor $UI \cos \varphi$ je, dakako, i u ovom primjeru srednja snaga P , sl. 13.14.

Naprotiv, druga harmonička krivulja $(UI \sin \varphi) \cdot \sin 2\omega t$ oscilira dvostrukom frekvencijom oko srednje vrijednosti nula, a njena amplituda je $UI \sin \varphi$. Prema tome, ovdje se radi o jalovoj komponenti, a amplituda $UI \sin \varphi$ označuje za taj slučaj jalovu snagu Q .

Uspoređujući krivulje trenutnih vrijednosti snage p za sva tri prikazana primjera opterećenja, vidi se da se povećanjem kuta faznog pomaka od vrijednosti 0° do 90° , uz nepromijenjene efektivne vrijednosti napona i struje, cijela krivulja snage potiskuje u dijagramu prema dolje, tako da se time srednja vrijednost P smanjuje od vrijednosti UI na vrijednost 0. Pri tome harmonička krivulja p ima s obzirom na odgovarajuću srednju vrijednost uvijek nepromijenjenu amplitudu UI , što se može vidjeti uvidom u općenitu jednačbu:

$$p = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$$



Sl. 13.14. Djelatna i jalova komponenta snage p

13.2.4.

Trokut snaga. Prividna snaga

Za prikazano opterećenje dobili smo time tri karakteristična energetska podatka, koji su i na slici 13.14 označeni, i to:

prividna snaga $S = UI$

djelatna snaga $P = UI \cos \varphi$

jalova snaga $Q = UI \sin \varphi$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Slikovito se ove tri veličine mogu zajedno predložiti u trokutu snaga prikazanom na slici 13.15.

Iako je za proračunavanje izvršenog rada mjerodavna djelatna snaga P , te samo ona ima pravo značenje snage u smislu njene definicije, ipak se i veličinama S i Q pridaje (uz dodatnu oznaku) naziv snaga, jer i te dvije veličine kao umnošci napona i struje iste su dimenzije kao i snaga P . Faktori $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$ su, naime, bezdimenzionalne veličine.

Da bi se te tri veličine pri mjerenju ipak nekako međusobno razlikovale, primjenjuju se na njih različito imenovane jedinice:

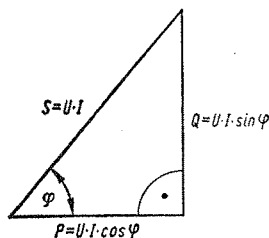
jedinica za djelatnu snagu P zadržala je, dakako, naziv *wat* (W),

jedinica za prividnu snagu S zove se *voltamper* (VA),

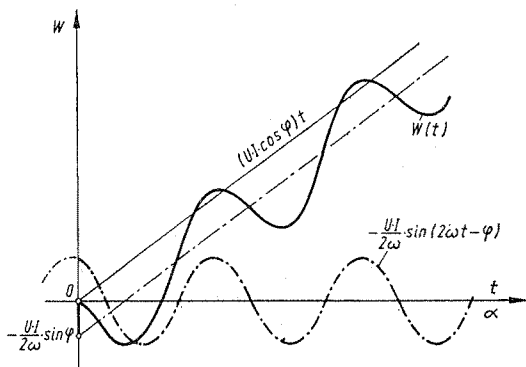
jedinica jalove ili reaktivne snage Q zove se *reaktivni voltamper* (VAR).

Veće i manje jedinice od ovih osnovnih imaju uobičajene prefikse, npr.:

$$10^3 \text{ VAR} = 1 \text{ kVAR} \quad 10^6 \text{ VA} = 1 \text{ MVA}$$



Sl. 13.15. Trokut snaga P , Q i S



Sl. 13.16. Energija izmjenične struje prikazana u (w, t) dijagramu

Prividna a i jalova snaga ne služe doduše izravno za proračun korisne energije, no ipak svaka od njih ima kao važan energetski podatak određeno značenje pri proračunu električnih uređaja.

Tako je prividna snaga S veličina prema kojoj se vrši proračun električnih generatora i transformatora. Generator, naime, kao izvor izmjenične struje mora biti tako konstruiran, da može trošilima, uz traženi napon dobavljati traženu struju, dakle izvjesni U i I .

Da bi se pak u generatoru inducirao traženi napon, mora njegov namot imati određeni broj zavoja, a da taj namot može izdržati termičko opterećenje tražene struje, mora njegova žica imati određeni poprečni presjek. Vidi se, dakle, da su samo napon i struja mjerodavni za dimenzioniranje namota generatora, neovisno o $\cos \varphi$ trošila. Zato se prividna snaga smatra osnovnim nominalnim podatkom o generatoru.

U pogledu jalove snage Q može se ovdje spomenuti slijedeće. Želimo li da nam trošilo obavlja koji korisni rad, mora mu izvor dovoditi djelatnu energiju odgovarajuću djelatnoj snazi P . Ako se pri tom dodatno još pojavi u radu i koja jalova energija odnosno jalova snaga Q , onda je zbog toga (prema trokutu snaga) povećana prividna snaga, a ta pri konstantnom naponu zahtijeva jaču struju, koja će jače opteretiti vodiče prijenosnog voda i konstrukciju generatora. Zato se u energetskim uređajima gdje se iskorišćuje energija izmjenične struje za koristan rad nastoji što je više moguće smanjiti jalovu snagu trošila.

13.2.5. Grafički prikaz energije u vremenskoj domeni

Energiju izmjenične struje moguće je prikazati i u vremenskom dijagramu. U tom nam slučaju *ordinate* u (W, t) koordinatnom sustavu predočuju ukupnu energiju koja je iz izvora predana trošilu, od njegovog priključka ($t = 0$) pa sve do bilo kojeg trenutka t . Da dobijemo analitički izraz za $W = f(t)$ uvrstit ćemo u jednadžbu za energiju $W = \int_0^t p \, dt$ vrijednost snage p , koju smo izveli za općeniti slučaj opterećenja:

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)$$

pa dobivamo:

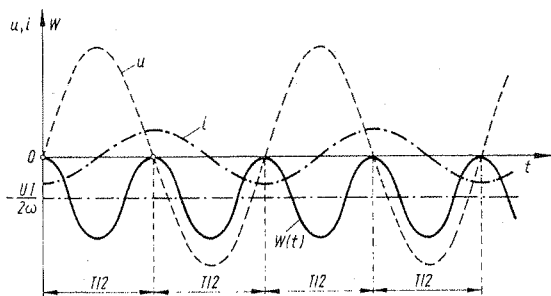
$$W = \int_0^t [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)] \, dt$$

$$W = UI \cos \varphi \int_0^t dt - UI \int_0^t \cos(2\omega t - \varphi) \, dt$$

i konačno:

$$W = UI (\cos \varphi) t - \frac{UI}{2\omega} \sin(2\omega t - \varphi) - \frac{UI}{2\omega} \sin \varphi$$

Na slici 13.16 prikazano je zbrajanje tih triju komponenata, koje zajedno daju $W(t)$.



Sl. 13.17. Oscilirajuća energija između svitka L i izvora napona u

Iz ove općenite jednadžbe može se izvesti i prikaz energije za specijalni slučaj ako je opterećenje čisto induktivno, pa je $\varphi = 90^\circ$. Tada je $\cos \varphi = 0$, a $\sin \varphi = 1$,

pa imamo:

$$W = -\frac{UI}{2\omega} + \frac{UI}{2\omega} \cos 2\omega t$$

a na slici 13.17 grafički prikaz.

Iz ovih dijagrama još se jednom jasno vidi da privod energije i obavljanje rada oscilira frekvencijom $2f$ i da pri $\varphi \neq 90^\circ$ postoji neki koristan rad, dok ako je $\varphi = 90^\circ$ ukupna energija, koja je od početka ($t = 0$) predana trošilu — idealnom induktivitetu, nakon svake poluperiode $T/2$ postaje opet jednaka nuli, jer se sakupljena energija magnetskog polja vratila natrag izvoru.

14. VEKTORSKO PREDOČAVANJE SINUSOIDALNIH VELIČINA

14.1. MATEMATIČKE OSNOVE VEKTORSKOG PREDOČAVANJA

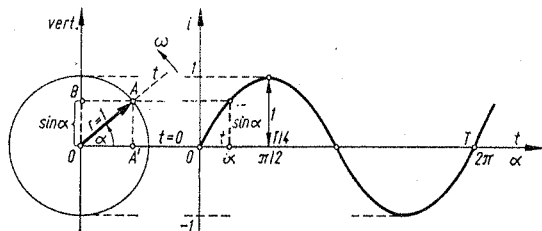
U prijašnjim razmatranjima vidjeli smo da je za određivanje međusobnih odnosa struja i napona u strujnim krugovima izmjenične struje, kao i za proračun snage i energije izmjenične struje, dovoljno poznavati samo efektivne vrijednosti struja i napona i njihove međusobne fazne pomake.

U vezi s time bit će pokazano da se mnogi proračuni strujnih krugova izmjenične struje mogu riješiti simboličkim metodama mnogo brže i jednostavnije nego ako se računi provode goniometrijskim jednadžbama napona i struje.

Tu se u prvom redu primjenjuje grafoanalitički način, pri čemu se sinusoidalno promjenljive veličine reprezentiraju planarnim radijus-vektorima. Nadalje, ta se metoda može još usavršiti čistim analitičkim računanjem u Gaussovu kompleksnom području.

14.1.1. Konstrukcija sinusoide pomoću rotirajućeg radijus-vektora i primjena na sinusoidalne električne veličine

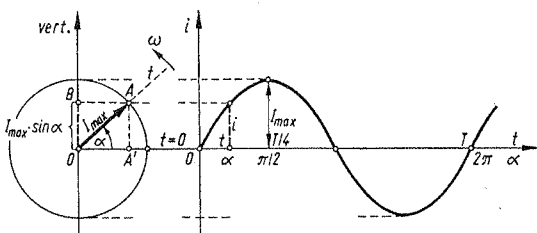
Vektorski način osniva se na poznatoj grafičkoj konstrukciji sinusoide, koja je prikazana na slici 14.1. Ako, naime, jedinični radijus-vektor rotira jednoličnom kutnom brzinom ω iz početnog horizontalnog položaja, onda je u svakom trenutnom položaju tog vektora njegova projekcija OB na vertikalnu os jednaka sinusu kuta $\alpha = \omega t$ što ga vektor OA tvori s početnim horizontalnim položajem.



Sl. 14.1. Konstrukcija sinusoide uz pomoć rotirajućeg radijus-vektora

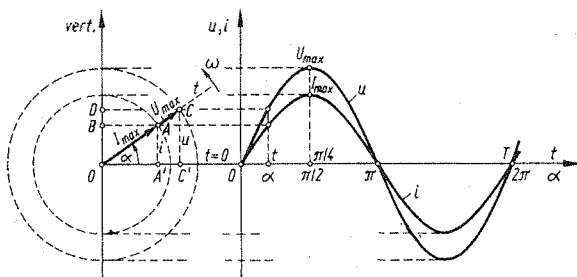
Može se, dakle, na apscisnoj osi za svaki vremenski trenutak t ucrtati kao pripadna ordinata dužina $OB = \sin \alpha$ i tako nacrtati cijela sinusoidea.

Dužine OB u pozitivnom smjeru ordinatne osi imaju pozitivni predznak, a one u suprotnom smjeru su negativne.



Sl. 14.2. Rotirajući radius-vektor $I_{\max}$ opisuje krivulju sinusoidalne struje

Da bismo na taj način reprezentirali sinusoidalno promjenljivu struju, mora duljina rotirajućeg radius-vektora biti jednaka amplitudi jakosti struje. Tako je na slici 14.2 prikazana krivulja struje i što je pri rotaciji kutnom brzinom $\omega = 2\pi f$ opisuje radius-vektor duljine $I_{\max}$. Na slici se vidi da je doista $i = OB = I_{\max} \sin \alpha = I_{\max} \sin \omega t$, što znači da smo i ovim simboličkim načinom predočavanja dobili za trenutne vrijednosti struje formalno matematički istu jednadžbu, samo nam ovdje kutna brzina radius-vektora ω predstavlja kružnu frekvenciju $2\pi f$. Da je to ispravno i da je kružna frekvencija jednaka kutnoj brzini vidi se iz slijedećih razmatranja.



Sl. 14.3. Radius-vektori u istom pravcu opisuju sinusoidalne krivulje bez faznog pomaka: $\varphi = 0$

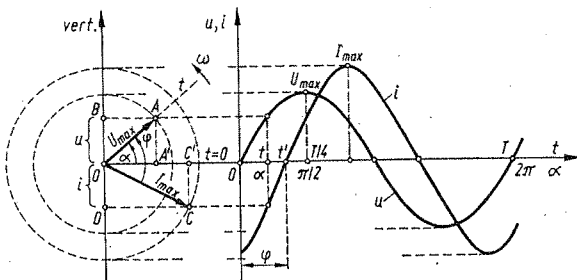
Za vrijeme jednog okreta, čemu odgovara kut 2π , opisuje radius-vektor jednu periodu sinusoidalnog vala izmjenične struje, a kako u 1 sekundi struja ima f perioda, opisat će radius-vektor u 1 sekundi kut $f \cdot 2\pi$. No budući da je prema definiciji kutna brzina jednaka prevaljenom kutu u 1 sekundi, slijedi da je:

$$\omega = 2\pi f$$

Ako želimo da se u istom vremenskom dijagramu prikažu krivulje struje i napona istih frekvencija, moraju pripadni radius-vektori $I_{\max}$ i $U_{\max}$ rotirati istom kutnom brzinom ω .

Padaju li pri tome radijus-vектори $I_{\max}$ i $U_{\max}$ u isti pravac, tada među strujom i naponom nema faznog pomaka jer njihove projekcije, a to su trenutne vrijednosti, postizavaju istovremeno sva karakteristična stanja svojih promjena, $u = U_{\max} \sin \omega t$; $i = I_{\max} \sin \omega t$, slika 14.3.

Zaostaje li struja vremenski iza napona, mora radijus-vektor $I_{\max}$ biti geometrijski pomaknut prema radijus-vektoru $U_{\max}$ u negativnom smjeru odgovarajuće faznog kutu $\varphi = \omega t'$, slika 14.4, jer će pri rotaciji istom brzinom vektor $I_{\max}$ doći za t' sekunda kasnije u iste položaje koje je vektor $U_{\max}$ već prije prošao.



Sl. 14.4. Geometrijski pomaknuti radijus-vektori opisuju sinusoidalne krivulje napona i struje koji su fazno vremenski pomaknuti

Iz te slike može se uočiti važno pravilo koje se odnosi na harmonijske veličine iste frekvencije kada ih predočavamo pomoću radijus-vektora, a to je: vremenskim faznim razlikama pripadaju odgovarajući geometrijski pomaci radijus-vektora:

$$u = U_{\max} \sin \omega t$$

$$i = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi)$$

14.1.2. Mirujući vektorski dijagram i rotirajuća vremenska os

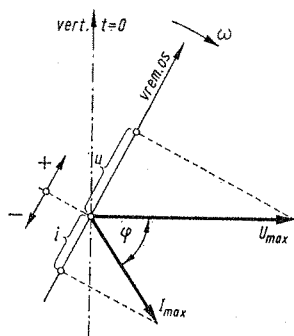
Umjesto da radijus-vektori rotiraju i da na mirujućoj vertikalnoj osi očitavamo trenutne vrijednosti kao projekcije tih vektora, možemo ostaviti radijus-vektore na miru, a zamišljamo da vertikalna os iz svog početnog položaja rotir kutnom brzinom ω u suprotnom smjeru, slika 15.5, pa projiciramo vektore na tu takozvanu vremensku os.

Duljine radijus-vektora mogu biti nacrtane i kao efektivne vrijednosti električnih veličina, slika 14.6 ali da bismo u tom slučaju dobili trenutne vrijednosti, moramo njihove projekcije množiti sa $\sqrt{2}$:

$$u = \sqrt{2} U \sin \omega t$$

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi)$$

Budući da nas ionako neće zanimati sve te harmonički promjenljive trenutne vrijednosti, nego samo efektivne vrijednosti električnih veličina i njihovi međusobni fazni pomaci, ne trebamo se uopće obazirati na tu rotirajuću vremensku os, nego posvetiti pažnju mirujućim radius-vektorima, koji su već na slici 14.6 nacrtani kao efektivne vrijednosti. Tako prikazane vektore koji reprezentiraju više električkih veličina zovemo *vektorski dijagram*, i iz njega vidimo sve karakteristične podatke pomoću kojih ćemo moći provoditi daljnje proračune.



Sl. 14.5. Umjesto da rotiraju radius-vektori, rotira tzv. vremenska os u suprotnom smjeru



Sl. 14.6. Mirujući vektorski dijagram napona i struje

Vektorski dijagrami složenijih strujnih krugova izmjenične struje u kojima će biti prikazano više napona i struja crtaju se tako, da se vektor jedne veličine uzme kao *početni*, a onda se dalje crtaju vektori ostalih veličina, uzimajući pri tom u obzir pripadne fazne pomake među pojedinim veličinama.

Koja će se veličina uzeti kao početna ovisi o konkretno zadanom problemu, a redovno se radius-vektor te veličine ili crta u horizontalnom ili u vertikalnom položaju, kako bi dijagram bio što pregledniji.

U linearnim električnim mrežama izmjenične struje uključeni su — slično kao i u linearnim mrežama istosmjerne struje — na više izvora različito povezani pasivni elementi, koji su kod izmjenične struje, osim omskog otpora, još induktivni svici i kondenzatori.

I ovdje imamo pri analizi strujnih i naponskih prilika posla sa prvim i drugim Kirchhoffovim zakonom pomoću kojih se mogu na osnovi zadanih veličina odrediti nepoznate tražene veličine.

Budući da ćemo u tim računima morati zbrajati istovrsne izmjenične veličine i to: prvim Kirchhoffovim zakonom izmjenične struje, a drugim Kirchhoffovim zakonom napone, potrebno je objasniti kako se zbrajaju sinusoidalne veličine. Pretpostavlja se, dakle, da je frekvencija svih veličina ista.

14.1.3. Zbrajanje (i odbijanje) izmjeničnih veličina

U slijedećim razmatranjima pokazat ćemo općeniti slučaj: zbrajanje dvaju sinusoidalnih napona međusobno fazno pomaknutih za kut α .

Ako su jednačbe ovih napona:

$$u_1 = U_{1\max} \sin \omega t \quad \text{i} \quad u_2 = U_{2\max} \sin(\omega t - \alpha)$$

onda je njihov zbroj:

$$u = u_1 + u_2 = U_{1\max} \sin \omega t + U_{2\max} \sin(\omega t - \alpha)$$

što se može uz pomoć jednačbe:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

prikazati u obliku:

$$u = U_{1\max} \sin \omega t + U_{2\max} [\sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \sin \alpha]$$

I nadalje:

$$u = [U_{1\max} + U_{2\max} \cos \alpha] \sin \omega t - U_{2\max} \sin \alpha \cos \omega t$$

U tom su izrazu veličine:

$$U_{1\max} + U_{2\max} \cos \alpha = A \quad \text{i} \quad U_{2\max} \sin \alpha = B$$

konstante koje možemo prikazati pomoću zajedničkog faktora C :

$$A = C \cos \gamma \quad B = C \sin \gamma$$

pa je:

$$U_{1\max} + U_{2\max} \cos \alpha = C \cos \gamma$$

$$U_{2\max} \sin \alpha = C \sin \gamma$$

Kvadriranjem ovih jednačbi i njihovim zbrajanjem dobiva se:

$$U_{1\max}^2 + 2 U_{1\max} U_{2\max} \cos \alpha + U_{2\max}^2 \cos^2 \alpha + U_{2\max}^2 \sin^2 \alpha = C^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$\text{ili:} \quad U_{1\max}^2 + U_{2\max}^2 + 2 U_{1\max} U_{2\max} \cos \alpha = C^2$$

Odatle slijedi da je pomoćna veličina C jednaka:

$$C = \sqrt{U_{1\max}^2 + U_{2\max}^2 + 2 U_{1\max} U_{2\max} \cos \alpha}$$

Uvrstimo li u prvu jednačbu za u vrijednosti veličina A i B , dobivamo:

$$u = C \cos \gamma \sin \omega t - C \sin \gamma \cos \omega t$$

što je jednako:

$$u = C \sin(\omega t - \gamma)$$

Vidimo da je suma u dvaju sinusoidalnih napona u_1 i u_2 opet sinusoidalni napon iste frekvencije: $f = \omega/2\pi$, a amplituda je baš veličina C , pa je njena vrijednost:

$$U_{\max} = \sqrt{U_{1\max}^2 + U_{2\max}^2 + 2 U_{1\max} U_{2\max} \cos \alpha}$$

Sada se može konačno napisati jednadžba rezultantnog napona:

$$u = U_{\max} \sin(\omega t - \gamma)$$

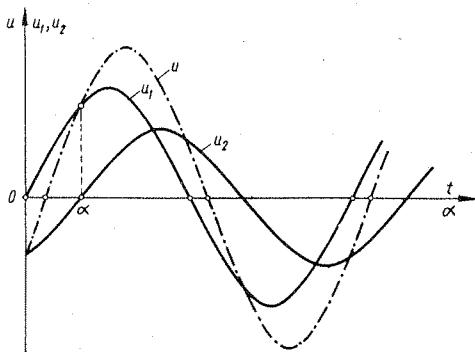
U odnosu na napon u_1 (koji uzimamo kao referentni) rezultantni napon u fazno je pomaknut za kut γ , koji se može izračunati iz relacije: $B = C \sin \gamma$, odakle slijedi:

$$\sin \gamma = \frac{B}{C} = \frac{U_{2\max}}{U_{\max}} \sin \alpha \quad \text{ili} \quad \sin \gamma = \frac{U_2}{U} \sin \alpha$$

Efektivna vrijednost rezultantnog napona jednaka je:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2 U_1 U_2 \cos \alpha}$$

Time smo dobili oba karakteristična podatka za rezultantni sinusoidalni napon u .

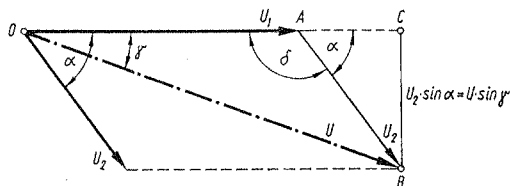


Sl. 14.7. Zbrajanje trenutnih vrijednosti dvaju sinusoidalnih napona

I grafički u vremenskom dijagramu možemo provesti zbrajanje dvaju sinusoidalnih napona ako za svaku pojedinu točku na apscisnoj osi sumiramo ordinate pojedinih napona, kako je prikazano na slici 14.7.

Pogledajmo sada još kako se to zbrajanje obavlja ako su sinusoidalne veličine prikazane simbolički u vektorskom dijagramu.

Na slici 14.8 su tako nacrtani vektori napona u_1 i u_2 , pri čemu se vektor U_1 postavlja u horizontalan položaj tako da je vektor U_2 pomaknut u negativnom smjeru za kut α , kako to traži jednačba: $u_2 = U_{\max} \sin(\omega t - \alpha)$



Sl. 14.8. Vektorsko zbrajanje efektivnih vrijednosti dvaju napona

Na osnovi prije dobivenih odnosa: $U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2 U_1 U_2 \cos \alpha}$ i na slici 14.8 se vidi da je moguće ovu jednačbu napisati i u obliku:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 2 U_1 U_2 \cos \delta}$$

pri čemu je $\alpha + \delta = 180^\circ$ pa je $\cos \delta = -\cos \alpha$.

Ovaj nas rezultat upućuje na to da se efektivna vrijednost resultantnog napona dobiva kao treća stranica trokuta OAB , dakle kao geometrijska suma efektivnih vrijednosti pojedinih komponenata. Također se vidi da će ovim vektorskim, geometrijskim zbrajanjem, resultantni vektor imati odmah i ispravan fazni položaj jer je, kako se na slici vidi: $U \sin \gamma = U_2 \sin \alpha$, što se slaže i s rezultatom dobivenim analitički, a koji za fazni kut γ traži odnos:

$$\sin \gamma = \frac{U_2}{U} \sin \alpha$$

Iz ovoga se jasno vidi velika prednost predočavanja harmonijskih promjenljivih veličina vektorskim načinom, jer se algebarska operacija zbrajanja trenutnih vrijednosti svodi na geometrijsko, vektorsko sumiranje.

Pri tome je potrebno uočiti važnu činjenicu, što se vidi i na slici 14.8, da broj volta resultantnog efektivnog napona nije brojčano jednak zbroju efektivnih volta pojedinih pribrojnika, pa dok za trenutne vrijednosti vrijedi jednačba:

$$u = u_1 + u_2$$

za efektivne vrijednosti imamo općenito slijedeću relaciju:

$$U \neq U_1 + U_2$$

Ipak se može zadržati znak jednakosti i u jednačbama sumiranja efektivnih vrijednosti, samo treba pri tome posebno naznačiti da se sumiranje efektivnih vrijednosti mora obaviti vektorski. To ćemo u daljnjim izvodima provesti tako, da vektore efektivnih vrijednosti električnih veličina označimo velikim pisanim

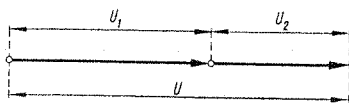
slovima. Vektorska jednadžba za proračun rezultantnog napona u promatranom primjeru glasi dakle:

$$u = u_1 + u_2$$

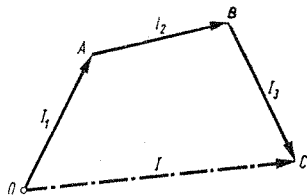
Jedino ako su sinusoidalne veličine istofazne, vrijedi i za efektivne vrijednosti jednadžba:

$$U = U_1 + U_2$$

jer oba vektora padaju u isti pravac, što se vidi na sl. 14.9.



Sl. 14.9. Zbroj istofaznih napona



Sl. 14.10. Vektorski zbroj efektivnih vrijednosti triju struja

Isto tako se na prikazani način postupa i onda ako treba zbrojiti više sinusoidalnih veličina, a na slici 14.10 je prikazano zbrajanje triju struja:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Treba li od jedne sinusoidalne veličine oduzeti drugu istovrsnu veličinu, to se općenito radi tako da se druga veličina s promijenjenim predznakom pribroji prvoj:

$$u = u_1 - u_2 = u_1 + (-u_2)$$

U vektorskom načinu predočavanja sinusoidalnih veličina (sl. 14.11) računa se, dakle, diferencija tako da se vektoru u_1 pribroji suprotno usmjeren vektor u_2 , dakle:

$$u = u_1 - u_2 = u_1 + (-u_2)$$

Pri postavljanju strujnih i naponskih jednadžbi prvog i drugog Kirchhoffovog zakona moramo osobito paziti na to da li u nekom konkretnom slučaju treba npr. od dva napona (ili dvije struje) načiniti njihovu sumu ili diferenciju. Očito je da bi krivi način računanja dao konačno i posve krive rezultate, pa je zato u nekoliko sljedećih primjera prikazano kako treba ispravno računati.

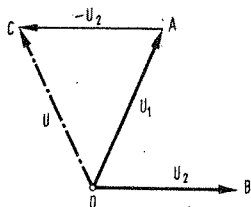
Da bismo odredili rezultantni napon što ga daju dva serijski spojena generatora, moraju nam biti točno zadani njihovi naponi, a osim toga moramo znati kako su povezane stezaljke generatora. Pri tome ćemo se, dakako, uvijek držati prije postavljenih pravila o računanju smjerova izmjeničnih veličina.

Neka su nam naponi generatora poznati i uz ucrtane referentne smjerove na slici 14.12 zadani relacijama:

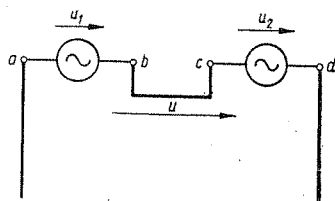
$$u_1 = \varphi_a - \varphi_b \quad u_2 = \varphi_c - \varphi_d$$

Ako za rezultatni napon u po volji odabrana strelica pokazuje referentni smjer, možemo i napon u prikazati jednadžbom:

$$u = \varphi_a - \varphi_d$$



Sl. 14.11. Vektorska diferencija efektivnih vrijednosti dvaju napona



Sl. 14.12. Rezultantni napon kao zbroj dvaju napona

Primijenimo li poznato pravilo o računanju potencijala neke točke strujnog kruga, možemo za potencijal φ_a napisati jednadžbu:

$$\varphi_a = \varphi_d + u_2 + u_1$$

odakle slijedi:

$$\varphi_a - \varphi_d = u_2 + u_1$$

ili:

$$u = u_1 + u_2$$

Rezultantni napon može se u ovom primjeru izračunati, dakle, bilo da su naponi zadani kao sinusoidalne funkcije ili simbolički kao vektorski zbroj pripadnih radijus-vektora njihovih efektivnih vrijednosti

$$u = u_1 + u_2$$

Time smo za izračunavanje rezultatnog napona pri izmjeničnoj struji dobili slično pravilo kao i pri istosmjernoj struji, tj. da je u serijskom spoju rezultatni napon jednak sumi komponenata ako pojedini naponi djeluju u smjeru sumiranja. Razlika je samo u tome što pri zbrajanju istosmjernih napona moramo uzeti u obzir njihove stvarne smjerove djelovanja koji su trajno vremenski konstantni, dok pri izmjeničnim naponima, iako se oni vremenski stalno mijenjaju, računamo s referentnim smjerovima.

Drugačije prilike imamo ako se pri sumiranju komponenata njihovi referentni smjerovi ne poklapaju. Na slici 14.13 to je prikazano spojnomo shemom. Za taj primjer imamo slijedeće jednadžbe:

$$u_1 = \varphi_a - \varphi_b \quad u_2 = \varphi_c - \varphi_d$$

$$u = \varphi_a - \varphi_c$$

Za potencijal stezaljke a imamo sada jednadžbu:

$$\varphi_a = \varphi_c - u_2 + u_1$$

pa je:

$$\varphi_a - \varphi_c = u_1 - u_2$$

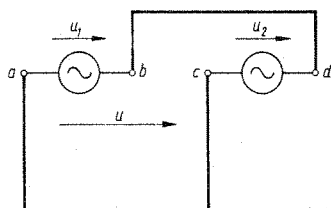
ili:

$$u = u_1 - u_2$$

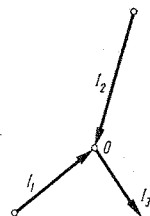
U vektorskom prikazu je:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2$$

Ovaj primjer odgovara serijskom protuspoju dvaju izvora i zato umjesto zbroja dolazi diferencija pojedinih komponenata.



Sl. 14.13. Rezultantni napon kao diferencija dvaju napona



Sl. 14.14. Prvi Kirchhoffov zakon o tri struje u jednom čvoru

Na isti način rješavamo i strujne jednadžbe koje se odnose na pojedine čvorove električnih mreža, slika 14.14.

Ako se npr. u jednom čvoru sastaju tri vodiča, pri čemu su nam struje dvaju vodiča i_1 i i_2 uz nacrtane referentne smjerove poznate, onda možemo izračunati i treću struju i_3 .

Pri tome moramo prethodno odabrati referentni smjer i te treće struje, pa ako ga uzmemo kako je nacrtano na slici 14.14, možemo za trenutne vrijednosti struja napisati prema prvom Kirchhoffovu zakonu jednadžbu:

$$i_3 = i_1 + i_2$$

a za efektivne vrijednosti vektorska jednadžba glasi:

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Ako je zadatak drugačije postavljen, npr. da su zadane struje i_1 i i_3 , a traži se struja i_2 , imali bismo uz nacrtane referentne smjerove slijedeću jednadžbu:

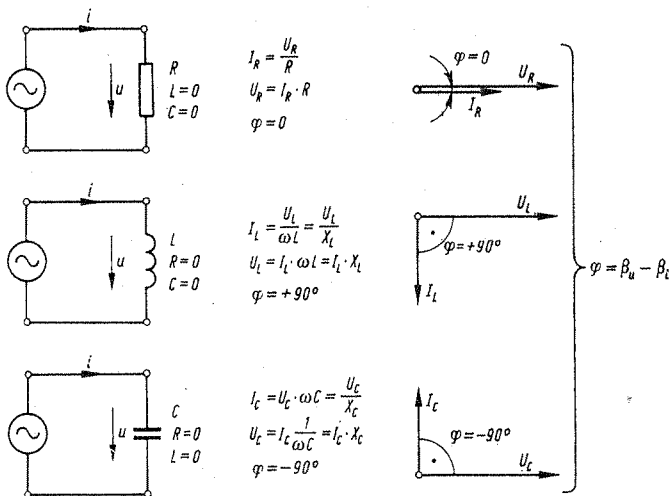
$$i_2 = i_3 - i_1$$

i vektorski:

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_1.$$

14.2. SLOŽENIJI STRUJNI KRUGOVI IZMJENIČNE STRUJE

Prelazeći sada na razmatranje složenijih strujnih krugova izmjenične struje, u kojima je uključeno na jedan izvor napona više pasivnih elemenata, a to su koncentrirani otpor R , koncentrirani induktivitet L i koncentrirani kapacitet C , moramo uvijek imati na umu kako su u svakom elementu povezani međusobno napon koji vlada na njegovim stezaljkama i struja što kroz njega prolazi. Te međusobne odnose znamo već otprije, a ovdje su ponovo prikazani tabelarno, jednadžbama i vektorskim dijagramima.

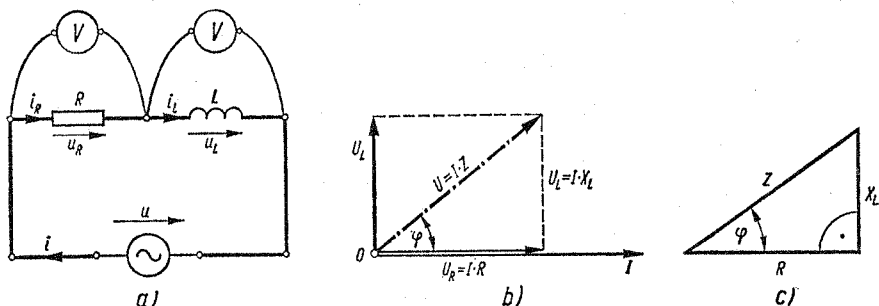


Kad na izvor napona priključimo induktivni svitak ili kondenzator, onda se u svitku zbog prolaska struje stvara magnetsko polje, a u kondenzatoru se zbog prisustva napona stvara električno polje. Budući da se u ovim poljima sakuplja izvjesna količina energije, a ova se ne može trenutno stvoriti, potrebno je neko vrijeme da se od stanja praznog hoda dođe u ustaljen pogon, tj. u *stacionarno stanje*.

Prilike u ovom prijelaznom periodu mogu u nekim slučajevima biti od izvesnog značenja za prosuđivanje međusobnih odnosa struje i napona u strujnom krugu, a njihova analiza zahtijeva posebne proračune. No jer ta prijelazna stanja redovno traju vrlo kratko vrijeme, možemo sada u *našim* razmatranjima prijeći odmah na stacionarna stanja u promatranim strujnim krugovima.

14.2.1. Serijski spojevi

Serijski spoj R i L . Kao prvi primjer uzet ćemo priključak serijskog spoja otpora R i induktiviteta L na izvor sinusoidalnog napona $u = U_{\max} \sin \omega t$, slika 14.15a. Da bismo dobili podatke o tome kako je u ovom sklopu jakost struje ovisna o naponu i o priključenim otporima R i X_L , moramo najprije postaviti jednadžbe kojima su na osnovi fizikalnih zakona definirane strujne i naponske prilike zadane spojne sheme.



Sl. 14.15. a) Serijski spoj omskog i induktivnog otpora; b) Vektorski dijagram napona serijskog spoja; c) Trokut otpora za serijski spoj R i X_L .

Kao u svakom računanju, moramo i ovdje za struje i napone ucrtati u spojnoj shemi referentne smjerove uz koje će onda vrijediti napisane jednadžbe.

Na slici se vidi da je ovaj spoj s obzirom na tijek struje jednostruko zatvorena kontura u kojoj će zbog nestlačivog strujanja struja biti na svakom mjestu jednake jakosti. Zato možemo napisati jednadžbu:

$$i = i_R = i_L$$

gdje nam znače:

- i — jakost struje izvora
- i_R — jakost struje kroz otpor R
- i_L — jakost struje kroz induktivni svitak L

U pogledu napona vrijedi za zatvorenu konturu drugi Kirchhoffov zakon koji kaže da je napon izvora jednak zbroju potrošenih napona u priključenim otporima. Naponska jednadžba glasi, dakle:

$$u = u_R + u_L$$

Ovdje, kako se vidi na slici, znače:

- u — napon izvora
- u_R — napon na otporu R
- u_L — napon na induktivnom otporu X_L

Ako od trenutnih vrijednosti prijedemo na efektivne vrijednosti, moramo ove jednadžbe pisati u vektorskom obliku:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_R = \mathcal{I}_L$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{I} R + \mathcal{I} X_L$$

To možemo prikazati i u vektorskom dijagramu, slika 14.15b, u kojem postavljamo vektor struje, koja je zajednička veličina u svim dijelovima sheme, u horizontalan položaj i prema njemu crtamo vektore pojedinih napona. Vektor napona U_R pada u smjer vektora struje, dok vektor napona U_L prethodi za 90° pred vektorom struje. Vektor rezultantnog napona U dobiva se geometrijskim sumiranjem, odnosno po pravilu paralelograma:

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2$$

Prema tome je efektivna vrijednost napona izvora:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 X_L^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

Ovisnost jakosti struje o naponu i o priključenim otporima dana je, dakle, jednadžbom:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

koja nas po obliku podsjeća na Ohmov zakon, pa je zato i nazivamo Ohmovim zakonom za prikazani sklop.

Budući da se nazivnik ovog razlomka naziva *ukupni* ili *rezultantni otpor*, u ovom slučaju možemo kazati da se u serijskom spoju omskog i induktivnog otpora dobiva rezultantni otpor — označimo ga slovom Z — kao geometrijska suma obiju komponenta:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Taj rezultantni otpor Z naziva se također *impedancija* cijelog sklopa, pa je:

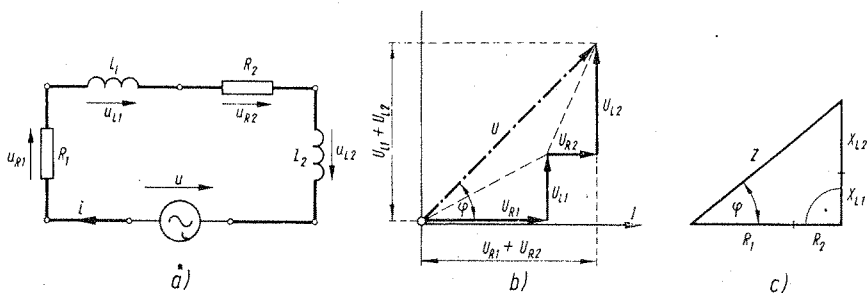
$$I = \frac{U}{Z} \quad \text{ili} \quad U = I \cdot Z \quad \text{i} \quad Z = \frac{U}{I}$$

Slično kao što u vektorskom dijagramu imamo trokut napona, možemo i za otpore nacrtati trokut otpora, koji je sličan trokutu napona, slika 14.15c.

Iz ovih slika može se ujedno odrediti i fazni pomak između napona izvora U i struje I jer je:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{I \cdot X_L}{I \cdot R} = \frac{X_L}{R} \quad \varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$$

Ako bismo umjesto jednog omskog otpora i jednog induktiviteta imali u serijskom spoju više otpora, npr. R_1 i R_2 , X_{L1} i X_{L2} (sl. 14.16a), dobili bismo na slični



Sl. 14.16. a) Serijski spoj više omskih i induktivnih otpora; b) Vektorski dijagram napona spojne sheme; c) Trokut otpora dvaju omskih i dvaju induktivnih otpora

način uz zajedničku struju I naponsku jednadžbu: $U = U_{R1} + U_{R2} + U_{L1} + U_{L2}$, a prema vektorskom dijagramu na slici 14.16b

$$U = \sqrt{(U_{R1} + U_{R2})^2 + (U_{L1} + U_{L2})^2}$$

i dalje:

$$U = I \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L1} + X_{L2})^2}$$

ili za još više uključenih otpora općenito:

$$U = I \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X_L)^2}$$

Dakle je:

$$I = \frac{U}{\sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X_L)^2}} = \frac{U}{Z}$$

gdje je impedancija:

$$Z = \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X_L)^2}$$

i:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum X_L}{\sum R}$$

Vidimo da se istovrsni otpori u serijskom spoju zbrajaju, a impedancija Z dobiva se opet kao geometrijska suma ovih zbrojenih istovrsnih otpora, sl. 14.16c.

Serijski spoj R i C . Na sličan način razmatrat ćemo i priključak serijskog spoja omskog otpora R i kapacitivnog otpora X_C na sinusoidalni napon u , slika 14.17a. U tom slučaju imamo na osnovi oznaka na slici slijedeću strujnu i naponsku jednadžbu za trenutne vrijednosti:

$$i = i_R = i_C$$

$$u = u_R + u_C$$

gdje se veličine s indeksom R odnose na omksi otpor, a one s indeksom C na kapacitivni otpor. Vektorske jednačbe za efektivne vrijednosti jesu:

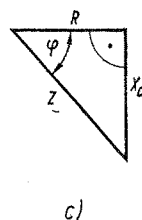
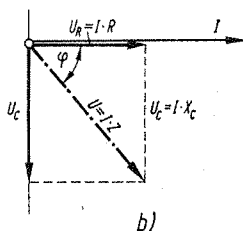
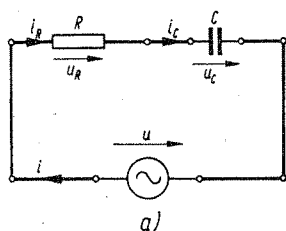
$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_R = \mathcal{I}_C$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_R + \mathcal{U}_C$$

Pojedine napone prikazuju nam jednačbe $U_R = I \cdot R$ i $U_C = I \cdot X_C$ pa je:

$$\mathcal{U} = \mathcal{I} \cdot R + \mathcal{I} \cdot X_C$$

a na osnovi ove jednačbe možemo nacrtati vektorski dijagram sa slike 14.17b. Tu opet stavljamo vektor struje u horizontalan položaj, a s njime je u fazi vektor napona $U_R = I \cdot R$, dok vektor napona $U_C = I \cdot X_C$ zaostaje iza vektora struje za 90° .



Sl. 14.17. a) Serijski spoj omskog i kapacitivnog otpora; b) Vektorski dijagram napona serijskog spoja omskog i kapacitivnog otpora; c) Trokut otpora, omskog i kapacitivnog otpora

Rezultantni napon U određuje se vektorskim sumiranjem, pa je:

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2$$

ili:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 X_C^2} = I \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

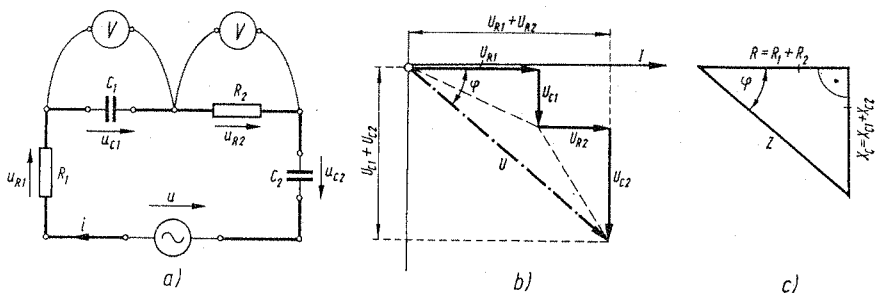
Tu je impedancija $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$, sl. 14.17c, pa je opet moguće napisati jednačbu Ohmova zakona za taj spoj:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Ako stranice trokuta napona podijelimo sa strujom, dobivamo trokut otpora, a iz njega dobivamo i fazni pomak φ između napona U i struje I :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{I \cdot X_C}{I \cdot R} = \frac{X_C}{R}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_C}{R}$$



Sl. 14.18. a) Serijski spoj dvaju omskih i dvaju kapacitivnih otpora; b) Vektorski dijagram napona; c) Trokut otpora

I za više serijski spojenih omskih i kapacitivnih otpora, na slici 14.18a, dobivamo opet jednakžbe:

$$I = I_{R1} = I_{R2} = I_{C1} = I_{C2}$$

$$U = U_{R1} + U_{R2} + U_{C1} + U_{C2} \quad (\text{Sl. 14.18b})$$

pa konačno izlazi:

$$U = |(\overline{U_{R1}} + \overline{U_{R2}})^2 + (\overline{U_{C1}} + \overline{U_{C2}})^2|$$

To vrijedi i općenito za više omskih i kapacitivnih otpora:

$$U = I \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X_C)^2}$$

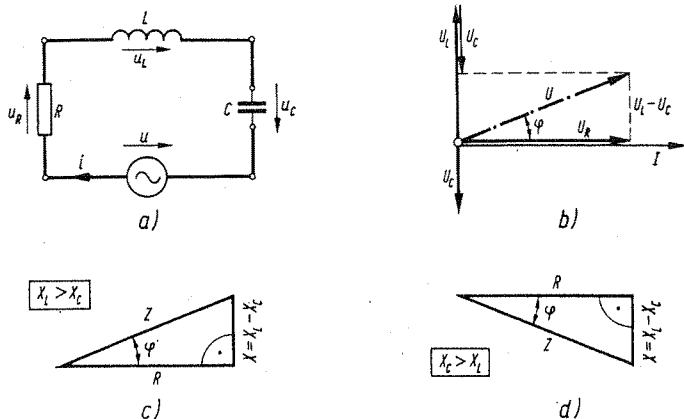
ili:

$$I = \frac{U}{\sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X_C)^2}} = \frac{U}{Z}$$

pa je u ovom slučaju impedancija:

$$Z = \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X_C)^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum X_C}{\sum R} \quad (\text{Sl. 14.18c})$$

U ovim jednadžbama je kut φ dan samo u apsolutnom iznosu, ali se iz vektorskog dijagrama vidi da je u slučaju priključaka induktivnih svitaka kut φ pozitivan, a u primjeru kad su priključeni kondenzatori kut φ je negativan, kako je to objašnjeno i u uvodnom tumačenju o utjecaju magnetskog i električnog polja.



Sl. 14.19. a) Serijski spoj R, L, C ; b) Vektorski dijagram napona; c) Trokut otpora serijskog spoja R, L, C ; d) Trokut otpora R, L, C uz pretpostavku $X_C > X_L$.

Serijski spoj R, L i C . U slijedećem najopćenitijem primjeru priključena su u serijskom spoju sva tri karakteristična otpora R, X_L i X_C na izvor napona $u = U_{\max} \sin \omega t$. Na spojnoj shemi (slika 14.19a), ucrtani su i referentni smjerovi pridruženi pojedinim električnim veličinama, pa se na osnovi poznatih zakona može za trenutne vrijednosti napisati slijedeća strujna i naponska jednadžba:

$$i = i_R = i_L = i_C$$

$$u = u_R + u_L + u_C$$

koje se za efektivne vrijednosti pišu u obliku:

$$I = I_R = I_L = I_C$$

$$U = U_R + U_L + U_C$$

Vektorski dijagram počinjemo crtati (na slici 14.19b) opet sa zajedničkom strujom I , čiji vektor stavljamo u horizontalan položaj, pa prema njemu nanosimo vektore naponskih komponentata:

$$U_R = I \cdot R \quad \text{u smjeru vektora } I$$

$$U_L = I \cdot X_L \quad \text{za } +90^\circ \text{ pomaknuto prema vektoru } I$$

$$U_C = I \cdot X_C \quad \text{za } -90^\circ \text{ pomaknuto prema vektoru } I$$

Ovdje se prvi put susrećemo sa dva vektora i to U_L i U_C koji padaju u isti pravac, ali kako su im smjerovi suprotni, njihova je vektorska suma jednaka diferenciji njihovih dužina koja, dakako, ima smjer veće komponente.

Ako je to — kako je u ovom primjeru prikazano — induktivni napon, onda nakon kompenzacije kapacitivnog napona preostaje samo:

$$|u_L + u_C| = U_L - U_C$$

kao induktivni napon, koji s omskim naponom U_R daje rezultantni napon U .

Iz naponskog trokuta slijedi prema Pitagorinu poučku:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$$

i

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{I^2 R^2 + (IX_L - IX_C)^2} = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

pa je:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{Z}$$

a iz ovog Ohmova zakona za nacrtani spoj slijedi da je sada impedancija:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (\text{Sl. 14.19c})$$

pa se može za ovaj primjer nacrtati i trokut otpora, iz kojega, kao i iz trokuta napona, slijedi:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I(X_L - X_C)}{I R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Zbog jednostavnosti označujemo diferenciju induktivnog i kapacitivnog otpora slovom X :

$$X = X_L - X_C$$

a nazivamo je *reaktivnim otporom*, dok smo omski otpor već prije označili kao aktivni otpor. Prema tome je (sl. 14.19c):

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}$$

Iz vektorskog dijagrama se vidi da je induktivni napon prema omskom fazno pomaknut za 90° u pozitivnom smjeru računanja, dok je kapacitivni napon u odnosu na omski pomaknut za $\varphi = -90^\circ$. Predznak diferencije $U_L - U_C$, a isto tako i predznak diferencije $X = X_L - X_C$, ovisit će, dakle, o apsolutnim iznosima ovih

komponentata. Prevladava li induktivna komponenta X_L tj. $X_L > X_C$ bit će rezultatni reaktivni otpor X pozitivan, a kako je R uvijek pozitivno, bit će kut faznog pomaka φ pozitivan, što znači da izvor osjeća ukupno opterećenje kao induktivno. Ako pak prevladava kapacitivna komponenta X_C predznak reaktivnog otpora X je negativan, kut φ je također negativan, pa opterećenje ima kapacitivan karakter, slika 14.19d.

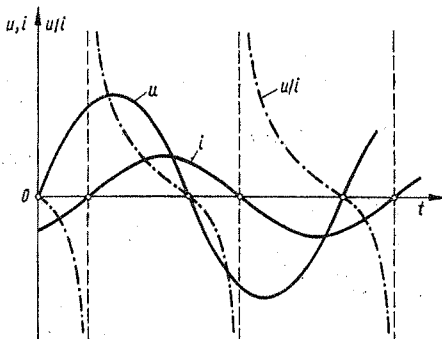
Ovdje se, dakle, iz same jednadžbe za proračun kuta φ može odrediti kakvo je rezultatno opterećenje, a to izlazi baš iz činjenice da smo vektorima reaktivnih napona dali određene predznake.

U prijašnjim primjerima, gdje su u račun dolazili samo induktivni ili samo kapacitivni otpori, promatrali smo tek apsolutne iznose njihovih napona, iako se i tamo mogu komponentama U_L i U_C dati odgovarajući predznaci i to: U_L - pozitivno, U_C - negativno, pa će prema tome biti:

X_L - pozitivno,
a X_C - negativno

Uvrštenjem u jednadžbu za izračunavanje faznog kuta, time bismo dobili odmah i predznak toga kuta:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1/\omega C}{R}$$



Sl. 14.20. Značenje kvocijenta u/i

Još jedna napomena o impedanciji Z . Rezultantni otpor R , koji je priključen na stezaljke izvora, mogli smo kod istosmjernje struje odrediti iz jednadžbe: $R = U/I$. Ako bismo sada i kod izmjenične struje izračunavali vrijednost kvocijenta u/i trenutnih vrijednosti napona i struje, mogli bismo lako konstatirati da taj kvocijent jedino pri čistom omskom opterećenju predodžuje rezultatni otpor, i to omski otpor. Ako pak osim omskog ima u strujnom krugu još i reaktivnih otpora; pa je zato struja fazno pomaknuta prema naponu, neće taj kvocijent imati neko realno značenje. Svakog trenutka ima on drugu vrijednost, a u trenucima kad je struja jednaka nuli a napon ima konačnu vrijednost, postaje taj kvocijent dapače beskonačno velik, slika 14.20. No ipak nam prema prijašnjim jednadžbama kvocijent efektivnih vrijednosti napona i struje predodžuje impedanciju Z :

$$Z = U/I$$

koju smatramo rezultatnim otporom.

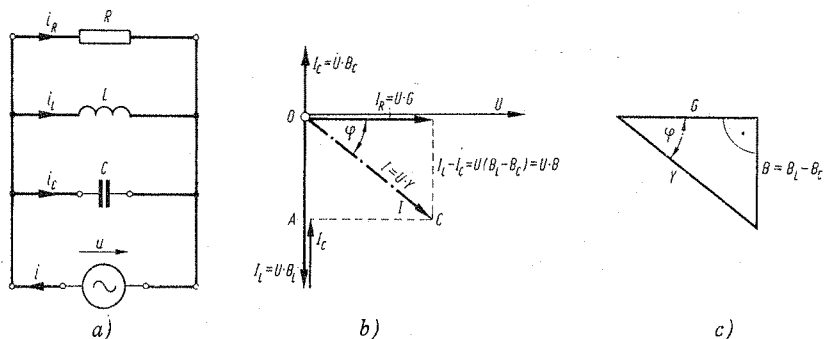
To zahvaljujemo baš uvođenju simboličkog načina računanja, jer su u ovom otporu Z , uz omski otpor R , sadržana i protivljenja protunapona samoindukcije i protunapona na kondenzatoru kao neki simbolički otpori. Zbog toga se ne smije s veličinom Z računati kao s otporom u jednadžbama gdje su struje i naponi prikazani u trenutnim vrijednostima, Bilo bi, dakle, potpuno krivo kad bi se pad napona računao kao umnožak:

$$u = i Z$$

14.2.2.

Paralelni spojevi

Pri razmatranju paralelnog spajanja više raznih otpora na jedan izvor napona možemo odmah prijeći na najopćenitiji spoj, gdje su sva tri karakteristična otpora paralelno vezana na napon $u = U_{\max} \sin \omega t$. Za to imamo na slici 14.21a prikazanu spojnu shemu s ucrtanim referentnim smjerovima napona i struja, pa možemo odmah napisati strujnu i naponsku jednadžbu za trenutne vrijednosti.



Sl. 14.21. a) Paralelni spoj R , L , C ; b) Vektorski dijagram struja paralelnog spoja R , L , C ; c) Trokut vodljivosti paralelnog spoja R , L , C

Naponi privedeni svim otporima jednaki su naponu izvora, a struja izvora je prema prvom Kirchhoffovu zakonu jednaka sumi svih struja tih pojedinih otpora:

$$u = u_R = u_L = u_C$$

$$i = i_R + i_L + i_C$$

Prijedemo li na efektivne vrijednosti, treba pisati vektorske jednadžbe:

$$U = U_R = U_L = U_C$$

$$I = I_R + I_L + I_C$$

Dalje bismo mogli za pojedine strujne komponente uvrstiti jednadžbe:

$$I_R = \frac{U}{R} \text{ u fazi s naponom } U \quad \varphi = 0$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} \text{ za } 90^\circ \text{ iza napona } U \quad \varphi = +90^\circ$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} \text{ za } 90^\circ \text{ ispred napona } U \quad \varphi = -90^\circ$$

Da bi nam računi bili jednostavniji, uzet ćemo umjesto otpora njihove recipročne vrijednosti, tj. *vodljivosti*, jer time izbjegavamo računanje s razlomcima:

$$G = \frac{1}{R}; \quad B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}; \quad B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$$

Pri tome se naziva:

- G - *omska vodljivost*
- B_L - *induktivna vodljivost*
- B_C - *kapacitivna vodljivost*

Dakle je:

$$I_R = U \cdot G \quad I_L = U \cdot B_L \quad I_C = U \cdot B_C$$

pa strujna jednadžba glasi:

$$I = U \cdot G + U \cdot B_L + U \cdot B_C$$

Pri crtanju vektorskog dijagrama postavimo najprije vektor zajedničkog napona, na primjer u horizontalan položaj, pa je u fazi s naponom vektor struje I_R , dok je I_C za 90° pred naponom, a I_L za 90° iza napona. Iz trokuta OAC , slika 14.21b, dobivamo:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$$

ili:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{(UG)^2 + (UB_L - UB_C)^2} = U \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

Budući da se općenito prema Ohmovu zakonu može struja izračunati kao umnožak napona i vodljivosti, veličinu:

$$\sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = Y$$

nazivamo *ukupnom vodljivošću* nacrtane spojne sheme, sl. 14.21a.

Zbog jednostavnosti označimo diferenciju $B_L - B_C = B$ reaktivnom vodljivošću. Jednadžba, dakle, glasi:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

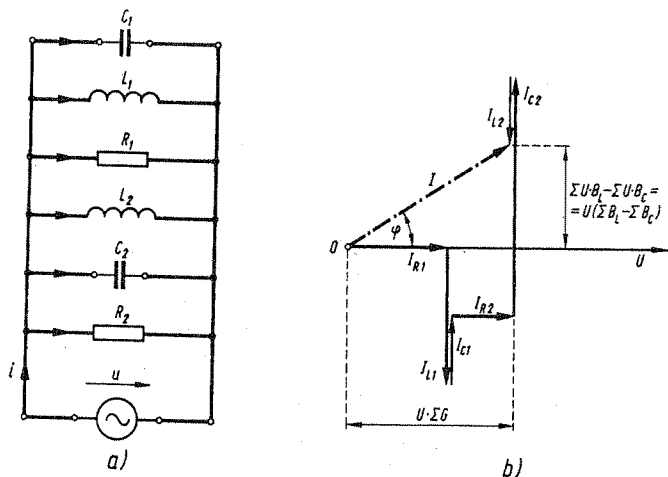
pa je:

$$I = U \cdot Y \quad \text{ i } \quad U = I/Y; \quad Y = I/U$$

Iz trokuta struja može se dijeljenjem stranica sa strujom dobiti *trokut vodljivosti*, slika 14.21c, a iz ovih trokuta slijedi da je fazni pomak dan jednadžbom:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{B_L - B_C}{G} = \frac{B}{G}$$

Uz veličinske odnose koji su prikazani na slici 14.21b izlazi da je kut φ kao diferencija $\beta_u - \beta_i$ pozitivan, što znači da opterećenje u cjelini ima induktivan karakter, što je očito, jer je vodljivost B_L uzeta veća pa je i struja I_L veća nego kapacitivna struja.



Sl. 14.22. a) Više omskih, induktivnih i kapacitivnih otpora u paralelnom spoju; b) Vektorski dijagram struja

Ako bi kapacitivna vodljivost bila veća od induktivne, bio bi brojnik u razlomku:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_L - B_C}{G}$$

negativan, kut faznog pomaka tada je negativan, što znači da je opterećenje u cjelini kapacitivno.

Analogno prije izvedenim jednadžbama imamo iste izraze za proračun jakosti struje i kuta faznog pomaka φ , i za više paralelno vezanih otpora, sl. 14.22a, pri čemu ćemo paralelno vezane istovrsne vodljivosti prethodno zbrojiti, pa dobivamo:

$$I = U \sqrt{(\Sigma G)^2 + (\Sigma B_L - \Sigma B_C)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Sigma B_L - \Sigma B_C}{G}$$

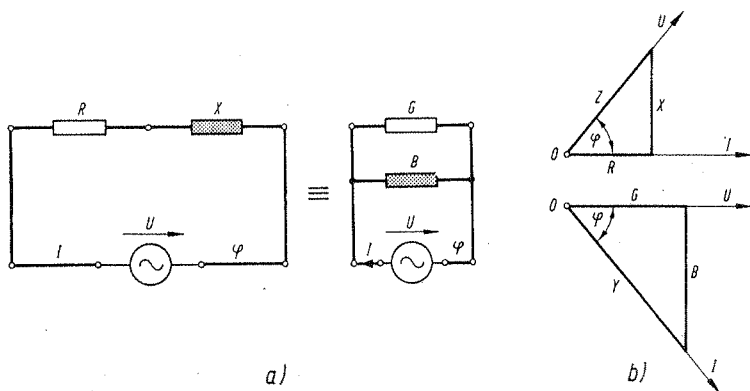
$$I = U \cdot Y \quad Y = \sqrt{(\Sigma G)^2 + (\Sigma B_L - \Sigma B_C)^2} \quad (\text{Sl. 14.22b})$$

14.3.

EKVIVALENTNI SERIJSKI I PARALELNI SPOJEVI

U prijašnjim izvodima vidjeli smo da se kao konačni rezultat pri proračunu serijskog spoja aktivnog otpora R i reaktivnog otpora X dobiva dijagram u kojem su dani vektori napona izvora U i struje izvora I , te njihov međusobni fazni pomak φ .

Vektorski dijagram isto takva oblika dobije se konačno također i pri analizi paralelnog spoja omske vodljivosti G i reaktivne vodljivosti B koje su priključene na izvor sinusoidalnog napona. Iz toga zaključujemo da se u pogledu napona izvora i struje izvora, te njihovog faznog pomaka može serijski spoj R, X zamijeniti nekim ekvivalentnim paralelnim spojem G, B . To isto vrijedi i obrnuto: svaki paralelni spoj G, B može biti (gledano sa priključka napona) nadomješten jednim ekvivalentnim serijskim spojem R, X .



Sl. 14.23. a) Ekvivalentni spojevi R, X i G, B ; b) Vektorski dijagrami ekvivalentnih spojeva za induktivno opterećenje

Jednadžbe koje pri tom pretvaranju služe za proračunavanje ekvivalentnih veličina dobiju se iz sljedećih zahtjeva:

- 1) efektivne vrijednosti napona i struje izvora moraju u jednom i u drugom spoju biti jednake;
- 2) fazni pomak φ mora pri prijelazu od jednog spoja na drugi zadržati istu vrijednost, sl. 14.23.

Budući da prema prvom zahtjevu moraju efektivne vrijednosti napona i struje biti u oba spoja jednake, slijedi da su impedancija serijskog spoja Z i ukupna vodljivost paralelnog spoja Y međusobno recipročne vrijednosti, pa na osnovi toga imamo sljedeće jednadžbe:

$$\text{za serijski spoj: } \frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad Y = \frac{1}{Z}$$

$$\text{za paralelni spoj: } \frac{I}{U} = Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad Z = \frac{1}{Y}$$

Da bude ispunjen zahtjev jednakosti kuta faznog pomaka, mora $\cos \varphi$ za jedan i drugi spoj imati istu vrijednost, a to se, dakako, zahtijeva i za sinus faznog pomaka φ .

Podatke o tome dobivamo iz vektorskih dijagrama, koji su za oba spoja nacrtani na slici 14.23b, a vrijede za induktivno opterećenje.

$$\text{za serijski spoj:} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}$$

$$\text{za paralelni spoj:} \quad \cos \varphi = \frac{G}{Y}, \quad \sin \varphi = \frac{B}{Y}$$

Izjednačenjem obaju izraza za $\cos \varphi$ dobivamo:

$$\frac{R}{Z} = \frac{G}{Y} = G \cdot Z \quad \text{pa je:} \quad G = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

Provedemo li to isto sa sinusima ($\sin \varphi = \sin \varphi$) dobivamo:

$$\frac{X}{Z} = \frac{B}{Y} = B \cdot Z \quad \text{pa je:} \quad B = \frac{X}{Z^2} = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Time smo dobili jednadžbe za pretvorbu zadanog serijskog spoja R, X u paralelni spoj G, B . Iz ovih relacija dobit ćemo i jednadžbe za prijelaz iz paralelnog u serijski spoj:

jednadžba $R \cdot Y = \frac{G}{Y}$ daje nam:

$$R = \frac{G}{Y^2} = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

a iz $X \cdot Y = \frac{B}{Y}$ slijedi:

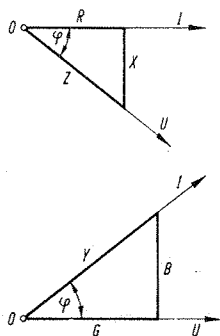
$$X = \frac{B}{Y^2} = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

Na slici 14.24 imamo još i vektorski prikaz kapacitivnog opterećenja, za koji opet dobivamo iste relacije, samo su u ovom slučaju X i B negativnog predznaka:

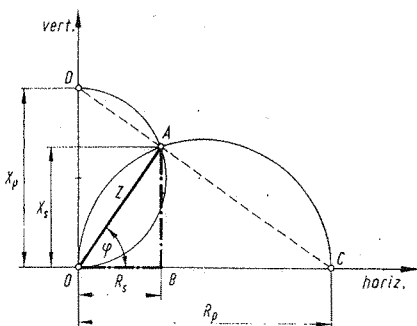
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad \text{i} \quad R = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

Pri ovom pretvaranju kombinirano sastavljenih spojeva različitih otpora vidimo da su jedino ukupni otpor Z i ukupna vodljivost Y ekvivalentnih spojeva međusobno recipročne veličine: $Z = 1/Y$; $Y = 1/Z$. Međutim, pojedine kompo-

nente ekvivalentnog spoja, a to su R , X , G , i B , uvijek su funkcije svih parametara zadane sheme. Ne vrijede, dakle, relacije $G = 1/R$ ili $B = 1/X$, nego treba računati prema prije izvedenim jednadžbama.



Sl. 14.24. Vektorski dijagrami ekvivalentnih spojeva za kapacitivno opterećenje



Sl. 14.25. Grafičko određivanje ekvivalentnih otpora

Ako bi i u paralelnom spoju umjesto vodljivosti bili zadani otpori, računali bismo ekvivalentne otpore pri prijelazu od paralelnog spoja na serijski (i obrnuto) prema niže izvedenim jednadžbama, u kojima indeks s označuje serijske, a indeks p paralelno vezane otpore:

$$R_s = \frac{G_p}{G_p^2 + B_p^2} = \frac{1}{\frac{R_p}{R_p^2 + X_p^2}} = R_p \frac{X_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

i analogno:

$$X_s = X_p \frac{R_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

Za prijelaz od serijskog na paralelni spoj dobivamo slijedeće jednadžbe:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad \text{i} \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

Ove analitičkim načinom izvedene jednadžbe mogu se napisati i u obliku:

$$R_s^2 + X_s^2 = R_s \cdot R_p \quad R_s^2 + X_s^2 = X_s \cdot X_p$$

odnosno:

$$Z^2 = R_s \cdot R_p \quad \text{i} \quad Z^2 = X_s \cdot X_p$$

Ove izraze možemo iskoristiti i za grafički način određivanja traženih ekvivalentnih paralelnih otpora R_p i X_p ako su zadani serijski R_s i X_s , a i za određivanje serijskih, ako su zadani paralelni otpori.

To je prikazano na slici 14.25, gdje je pod kutom φ nacrtana prema horizontali impedancija Z .

Kao rezultatni otpor serijskog spoja prema slici 14.25 impedancija Z ima komponentu R_s u horizontalnoj osi, a komponentu X_s u vertikalnoj osi. Daljnja konstrukcija je slijedeća: na dužinu $OA = Z$ povučemo okomicu koja siječe horizontalu u točki C , a vertikalnu u točki D .

Time dobivamo da je:

odrezak $\overline{OC}$ jednak R_p

a odrezak $\overline{OD}$ jednak X_p

Ispravnost ovih odnosa slijedi iz poznatog pravila elementarne geometrije, da je kvadrat nad jednom katetom pravokutnog trokuta jednak umnošku hipotenuze i priležućeg odsječka na hipotenuzi.

Tako dobivamo za:

$\triangle OAC \dots Z^2 = R_s R_p$ i također za

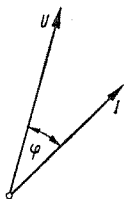
$\triangle OAD \dots Z^2 = X_s X_p$ što je u skladu sa prije dobivenim jednadžbama.

Na istoj slici 14.25 može se vidjeti i obrnuti postupak, tj. određivanje ekvivalentnih serijskih otpora R_s i X_s ako su zadani paralelni otpori R_p i X_p .

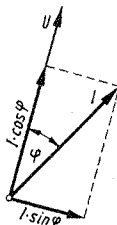
Tada se na horizontalnu os nanese R_p a na vertikalnu os X_p i nad njima se ucrtaju polukružnice. Spojnica točke O sa sjecištem kružnica serijska je impedancija Z , a njene komponente u horizontalnom i vertikalnom smjeru su R_s i X_s .

14.3.1 Djelatna i jalova komponenta napona i struje

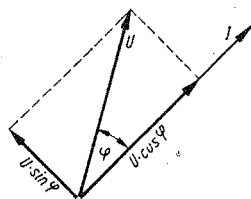
U prijašnjim izvodima pokazano je da će struja koju sinusoidalni napon daje iz izvora u ma kakvu kombinaciju linearnih elemenata R , L i C biti također sinusoidalna ali će, općenito gledano, među strujom i naponom izvora postojati neka fazna razlika, koja se u vektorskom dijagramu predodžuje kutom faznog pomaka φ . Tako imamo na slici 14.26 prikazan kao primjer vektorski dijagram za neko induktivno opterećenje Z_{tr} .



Sl. 14.26. Vektorski dijagram napona i struje za neko induktivno opterećenje izvora



Sl. 14.27. Rastavljanje struje na djelatnu i jalovu komponentu



Sl. 14.28. Djelatna i jalova komponenta napona

Pogledajmo sada taj vektorski dijagram u vezi s prije izvedenim energetskim odnosima u strujnim krugovima izmjenične struje. Pri tome ćemo osnovnu jednadžbu za djelatnu snagu:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

prikazati na dva malo preoblikovana načina i to tako, da faktor snage $\cos \varphi$ pridružimo jedanput struji izvora I , a drugi put naponu izvora U .

U prvom slučaju imamo, dakle, za snagu P izraz:

$$P = U \cdot (I \cos \varphi)$$

što znači da se sva djelatna snaga može izračunati kao umnožak efektivne vrijednosti cijelog napona U sa samo jednom komponentom vektora struje $I \cos \varphi$ koja pada u smjer vektora napona, sl. 14.27.

Tu, dakle, zamišljamo struju rastavljenu u dvije komponente. Jedna: $I \cos \varphi$ u fazi je s naponom i ona jedina s naponom stvara djelatnu snagu, pa je zato nazivamo *djelatnom* ili *aktivnom komponentom*.

Druga komponenta $I \sin \varphi$ zaostaje u fazi prema naponu za 90° , pa ta komponenta ne može obavljati koristan rad nego prouzročuje samo jalovo osciliranje energije i zato je nazivamo *jalovom*, odnosno *reaktivnom komponentom*.

Ako pak faktor snage pridružimo naponu U dobivamo za snagu P jednadžbu:

$$P = (U \cos \varphi) \cdot I$$

U tom slučaju djelatnu snagu određuje cijela struja I i samo komponenta napona $U \cos \varphi$ koja je u fazi sa strujom, sl. 14.28.

Ovdje je, dakle, izvršeno rastavljanje cijelog privedenog napona na dvije komponente, od kojih može samo $U \cos \varphi$ stvarati djelatnu snagu, pa je zato nazivamo *djelatnom komponentom napona*. Druga komponenta $U \sin \varphi$ pomaknuta je fazno prema struji I za 90° , a kako prema prijašnjim izvodima ne sudjeluje u stvaranju djelatne energije, zovemo je *jalova* ili *reaktivna komponenta*.

Analogno nam jalovu snagu Q daje umnožak cijelog napona s jalovom komponentom struje, odnosno ukupna struja s jalovom komponentom napona:

$$Q = U \cdot (I \sin \varphi) \quad \text{i} \quad Q = I \cdot (U \sin \varphi)$$

Pri proračunavanju djelatne, odnosno jalove snage dolazi, dakle, u produktu uvijek jedna veličina (napon ili struja) u punom iznosu, a od druge veličine (struje ili napona) samo odgovarajuća komponenta, dok umnožak punog napona sa cijelom strujom daje — kako znano — prividnu snagu. Korisno je ovdje ipak još napomenuti da umnošci samih komponenata nemaju neki smisao.

U zaključku ovih razmatranja možemo reći slijedeće: Iako su ukupnoj impedanciji Z_{tr} privedeni cio napon U i ukupna struja I , možemo ipak u vezi s prikazanim rastavljanjem struje ili napona na djelatnu i jalovu komponentu zamišljati da u prvom slučaju impedancija Z_{tr} dobiva na svojim stezaljkama sav napon U , ali da kroz priključni vod teku dvije struje $I_d = I \cos \varphi$ i $I_l = I \sin \varphi$, dok u drugom slučaju kroz Z_{tr} prolazi samo cijela struja, ali se napon u trošilu dijeli na dva dijela: $U_d = U \cos \varphi$ i $U_l = U \sin \varphi$. To nas upućuje na to da se Z_{tr} u prvom slučaju može prikazati kao paralelan spoj R_p i X_p , a u drugom kao serijski spoj

R , i X . To je u biti postupak obrnut proračunu kojim smo proračunavali rezultatni napon ili rezultatnu struju pri zadanom serijskom, odnosno paralelnom vezanju djelatnog i jalovog otpora.

Slijedi, dakle, da se djelatne komponente napona ili struje odnose na omske otpore, a jalove komponente na reaktivne otpore, pa možemo napisati:

$$U \cos \varphi = I \cdot R \quad I \cos \varphi = U/R = U \cdot G$$

$$U \sin \varphi = I \cdot X \quad I \sin \varphi = U/X = U \cdot B$$

tako da su:

$$P = I^2 R \quad P = U^2/R = U^2 G$$

$$Q = I^2 X \quad Q = U^2/X = U^2 B$$

i konačno:

$$S = I^2 \sqrt{R^2 + X^2} = I^2 Z$$

$$S = U^2 \sqrt{G^2 + B^2} = U^2 Y$$

Na osnovi ovih jednadžbi može se postaviti, općenito, slijedeće pravilo za proračunavanje snaga pri izmjeničnoj struji:

Kao što se djelatna snaga proračunava množenjem djelatnog otpora s kvadratom jakosti struje što kroza nj prolazi, tako se i jalova, a i prividna snaga, računaju množenjem kvadrata jakosti struje s odgovarajućim otporom kroz koji ta struja prolazi.

Odnosno, umjesto da otpore množimo s kvadratom jakosti struje koja kroz njih prolazi, može se svaka od tih snaga dobiti kao umnožak kvadrata napona s pripadnom vodljivošću.

14.3.2. Više impedancija u paralelnom, odnosno serijskom spoju

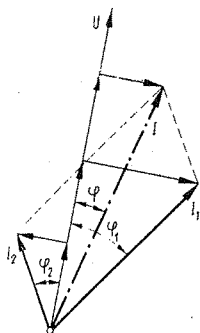
Ako pod utjecajem zajedničkog napona izvor daje u više paralelno priključenih impedancija struje pod raznim faznim kutovima, bit će aktivni dio rezultatne struje jednak sumi aktivnih komponenata pojedinih struja, a isto tako će i reaktivna komponenta ukupne struje biti jednaka sumi reaktivnih komponenata pojedinih struja, slika 14.29.

To vrijedi i ako promatramo rezultatni napon pri serijskom spoju više različitih impedancija kroz koje prolazi — dakako — jedna te ista struja. Rezultatni aktivni napon izvora mora biti jednak sumi pojedinih aktivnih napona na impedancijama, a rezultatni reaktivni napon bit će opet jednak sumi svih reaktivnih napona na pojedinim impedancijama, slika 14.30.

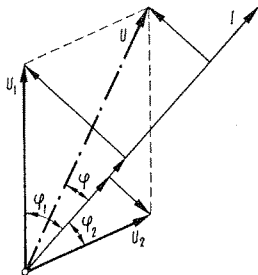
Slična razmatranja vrijede i za snage.

U spojnim shemama gdje je više djelatnih i jalovih otpora različito uključeno na izvor izmjeničnog napona, možemo reći sa posve energetskog stajališta da će ukupna djelatna energija biti jednaka sumi svih djelatnih energija, neovisno o tome na kojem se mjestu troši ta energija u spojnoj shemi. I ukupna jalova energija

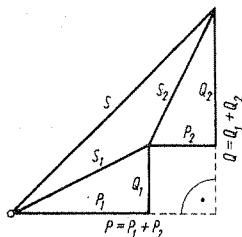
koja oscilira između izvora i pojedinih jalovih otpora jednaka je algebarskoj sumi svih pojedinih jalovih energija. Zbog toga se i ukupna djelatna snaga dobiva jednostavnim sumiranjem pojedinih djelatnih snaga, a i ukupna jalova snaga jednaka je algebarskoj sumi svih jalovih snaga reaktivnih otpora, slika 14.31.



Sl. 14.29. Zbrajanje djelatnih i jalovih komponenta dviju struja



Sl. 14.30. Zbrajanje djelatnih i jalovih komponenta dvaju napona



Sl. 14.31. Sumiranje više snaga

Međutim, ukupna prividna snaga ne dobiva se algebarskim, nego geometrijskim zbrajanjem pojedinih prividnih snaga, jer kako se na slici 14.31 vidi, prividne snage pojedinih uključenih impedancija neće — općenito — biti uvijek u trokutima snaga istog smjera. Dakako da za ukupnu prividnu snagu vrijedi opet pravilo da je ona jednaka geometrijskoj sumi ukupne djelatne i ukupne jalove snage.

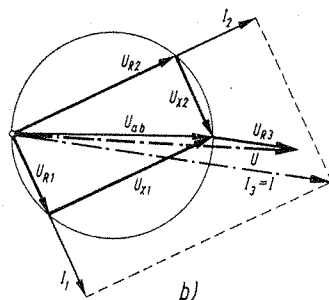
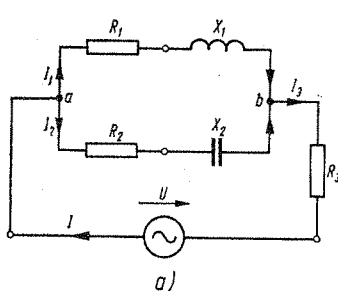
Mnogo složeniji sklopovi raznovrsnih otpora priključeni na izmjenični napon rješavaju se također primjenom osnovnih pravila, kojima su za pojedine vrste otpora određeni odnosi napona i struje. Pri tom će se često zadatak moći jednostavnije riješiti ako se iskoriste prije izvedena pravila o ekvivalentnosti serijskog i paralelnog spoja otpora.

Koji put nam dobar uvid u strujne i naponske prilike u sastavnim dijelovima od kojih je složena spojna shema mogu dati vektorski dijagrami, koje crtamo uzevši u obzir samo karakter priključenih otpora, neovisno o njihovom brojčanom iznosu.

Kao primjer nacrtan je na slici 14.32b takav »općeniti« vektorski dijagram za sklop prikazan na slici 14.32a. Pri tome smo vektor napona U_{ab} , koji je zajednički objema paralelnim granama, postavili kao početni vektor u horizontalan položaj. S obzirom na taj referentni vektor nacrtat ćemo nadalje za paralelne grane 1 i 2 obje komponente napona U_{R1} i U_{X1} kao i U_{R2} i U_{X2} . Ove napone možemo nacrtati neovisno o njihovim iznosima, jer znamo da te komponente stvorene od zajedničke struje I_1 odnosno I_2 moraju međusobno zatvarati kut od 90° , budući da predstavljaju omski i reaktivni pad napona. A kako je njihov vektorski zbroj jednak naponu U_{ab} , znači da će se U_{R1} i U_{X1} , a također i U_{R2} i U_{X2} , nalaziti kao katete pravokutnog trokuta povrh hipotenuze U_{ab} .

U spojenoj shemi odabran je X_1 kao induktivni otpor, pa će U_{X1} prethoditi za 90° pred naponom U_{R1} , a jer je X_2 kapacitivni otpor, to U_{X2} zaostaje za 90° iza U_{R2} , kako je u vektorskom dijagramu i naznačeno.

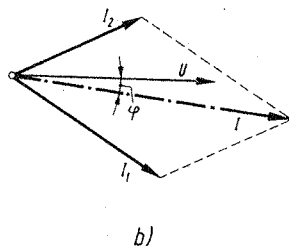
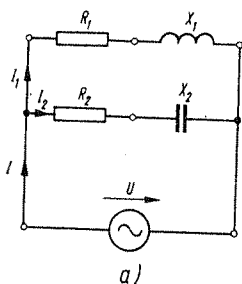
Nadalje znamo da je struja I_1 u fazi s naponom U_{R1} , a struja I_2 u fazi s U_{R2} , pa ako odaberemo (po volji) njihove veličine, onda možemo struju I_3 odrediti kao vektorsku sumu struja I_1 i I_2 .



Sl. 14.32. a) Sklop raznovrsnih otpora za koji je nacrtan vektorski dijagram; b) Principijelni vektorski dijagram

Time je, nadalje, određen i napon U_{R3} na otporu R_3 , za koji znamo da je u fazi sa strujom I_3 , pa ako i njegov iznos odaberemo po volji, možemo konačno odrediti napon izvora U kao vektorsku sumu:

$$U = U_{ab} + U_{R3}$$



Sl. 14.33. a) Sklop za koji treba odrediti rezultantnu struju I ; b) Vektorski dijagram napona i struja sklopa na slici

Iz vektorskog dijagrama doznaje se konačno koliki je i kut faznog pomaka φ između napona izvora i struje izvora I , za koju iz spojne sheme možemo lako vidjeti da je jednaka struji I_3 :

$$I = I_3$$

U slijedećem primjeru pokazana je primjena ekvivalentnih spojeva pri rješavanju jednog složenijeg sklopa prema slici 14.33a. Pretpostavljeno je da su zadani svi otpori i napon izvora.

Da bismo odredili jakost struje I koju daje izvor u prikazani sklop, upotrijebit ćemo jednadžbu prvog Kirchhoffovog zakona, pa je prema slici:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

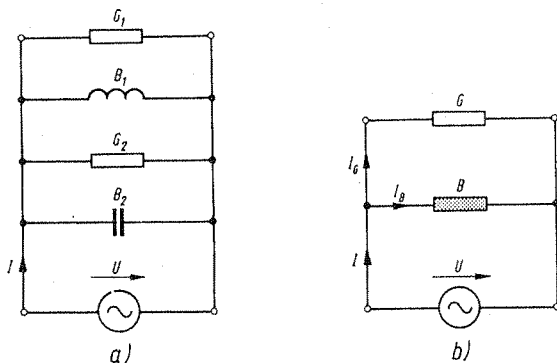
Pojedine strujne komponente odredimo Ohmovim zakonom:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{uz} \quad \varphi_1 = \arctg \frac{\omega L}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (1/\omega C)^2}} \quad \text{uz} \quad \varphi_2 = -\arctg \frac{1/\omega C}{R_2}$$

Pri crtanju vektorskog dijagrama uzimamo kao referentnu veličinu zajednički napon U i njegov vektor stavimo u horizontalan položaj, slika 14.33b. Vektore struja I_1 i I_2 crtamo prema gore izračunatim podacima.

Veličinu i fazni položaj vektora ukupne struje $\mathcal{I}$ dobivamo vektorskim zbrajanjem vektora $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$. Iz dijagrama možemo očitati i kut faznog pomaka φ između struje I i napona izvora U .



Sl. 14.34. a) Ekvivalentni spoj vodljivosti prikazanog sklopa na slici 14.33; b) Reducirana spojna shema sklopa

Mjerenjem dužine vektora I u vektorskom dijagramu mogli bismo sada odrediti traženu jakost resultantne struje izvora, no pri tom moramo biti svjesni da su grafičke metode računanja manje točne od analitičkih. Zato ćemo u slijedećem prikazati kako se npr. primjenom ekvivalentnih spojeva može dobiti analitički izraz za proračun struje I . U tu svrhu pretvorimo ovaj serijsko-paralelni spoj u čisti paralelni spoj, pa spojna shema sa slike 14.33a prelazi (gledano od stezaljki izvora) u ekvivalentni spoj, slika 14.34a.

Pri tom su:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} \quad \text{i} \quad B_1 = \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2};$$

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} \quad \text{i} \quad B_2 = \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2}$$

Istovrsne vodljivosti možemo zbrojiti, pa dobivamo (sl. 14.34b):

$$G = G_1 + G_2 = \frac{R_1 (R_2^2 + X_2^2) + R_2 (R_1^2 + X_1^2)}{(R_1^2 + X_1^2) (R_2^2 + X_2^2)}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{X_1 (R_2^2 + X_2^2) + X_2 (R_1^2 + X_1^2)}{(R_1^2 + X_1^2) (R_2^2 + X_2^2)}$$

Tako je moguće izračunati aktivnu komponentu $I_G = UG$ i reaktivnu komponentu $I_B = UB$ ukupne struje I , koja je:

$$I = U \sqrt{G^2 + B^2} = UY$$

Pri tome je ukupna vodljivost jednaka:

$$Y = \sqrt{\frac{\text{brojnik}}{(R_1^2 + X_1^2)^2 (R_2^2 + X_2^2)^2}}$$

a brojnik je jednak:

$$R_1^2 (R_2^2 + X_2^2)^2 + R_2^2 (R_1^2 + X_1^2)^2 + 2 R_1 R_2 (R_1^2 + X_1^2) (R_2^2 + X_2^2) + \\ + X_1^2 (R_2^2 + X_2^2)^2 + X_2^2 (R_1^2 + X_1^2)^2 + 2 X_1 X_2 (R_1^2 + X_1^2) (R_2^2 + X_2^2)$$

Nakon sređivanja izlazi da je:

$$Y = \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}{(R_1^2 + X_1^2) (R_2^2 + X_2^2)}} = \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}{Z_1^2 \cdot Z_2^2}} = \\ = \sqrt{\frac{R^2 + X^2}{Z_1^2 Z_2^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{Z_1 Z_2}$$

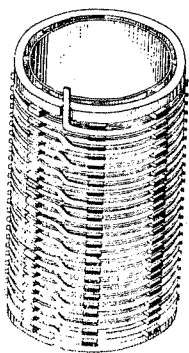
a impedancija:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}, \quad \text{i struja} \quad I = \frac{U}{Z}$$

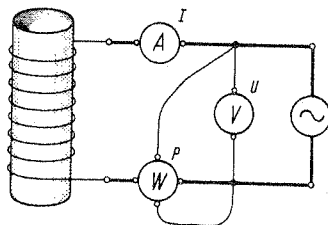
Pasivni elementi s kojima su bili sastavljeni sklopovi za koje smo u prijašnjim izlaganjima određivali strujne i naponske odnose bili su omski otpor R , induktivni otpor X_L i kapacitivni otpor X_C .

Zamišljali smo da je ove otpore moguće ostvariti idealnim otpornikom, idealnim svitkom i idealnim kondenzatorom. Pri tome smo vidjeli da kod priključka idealnog svitka i idealnog kondenzatora na izvor izmjeničnog napona dolazi samo do osciliranja energije između izvora i priključenog elementa, a da je pri tome djelatna snaga jednaka nuli. Naprotiv, u idealnom otporu R sva se električna energija izvora nepovratno pretvara u toplinu, pa tako nema osciliranja energije između izvora i priključenog otpora R .

Dakako da takvih idealnih elemenata u zbilji nema, oni su samo pomoćne fizikalne veličine s kojima možemo onda prikazati realne elemente, a to su omski otpornik, induktivni svitak i realni kondenzator.



Sl. 14.35. Vanjski izgled svitka transformatora



Sl. 14.36. Priključak mjernih instrumenata pri ispitivanju realnog svitka

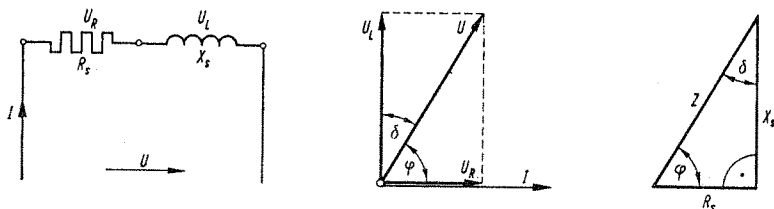
Naša je daljnja zadaća da primjenjujući rezultate prijašnjih teoretskih izlaganja pokažemo kako ćemo odrediti parametre pojedinih sastavnih dijelova od kojih su doista sastavljeni u praksi električni uređaji izmjenične struje.

Kao prvo uzmimo u razmatranje induktivni svitak bez željezne jezgre, dakle svitak gdje struja prolazeći kroz zavoje stvara magnetski tok u zraku. U posebnoj poglavlju bit će poslije objašnjen još i utjecaj feromagnetskog materijala jezgre na karakteristične osobine svitka.

Zavoji induktivnog svitka izrađeni su od vodiča koji na normalnoj temperaturi imaju uvijek neki omski otpor, pa i njega treba, uz koeficijent samoindukcije, uzeti u obzir pri točnijim proračunima svih realnih uređaja.

Pogledamo li pobliže realno izrađen induktivni svitak, kao što je na primjer na slici 14.35 prikazan primarni namot transformatora (ili svitak elektromagneta), upada u oči da je električni otpor zapravo jednolično raspodijeljen od jednog kraja

svitka do drugog po cijeloj dužini vodiča. Isto tako možemo i ukupni induktivitet zamišljati od prvog do zadnjeg zavoja jednoliko razdijeljen po cijeloj dužini namota. Tako vidimo da u svakom djeliću vodiča imamo istovremeno element električnog otpora i element induktiviteta. Prema tome, kad priključimo realni svitak na izmjenični izvor moglo bi nam se činiti da su oba parametra, i to ukupni električni otpor i ukupni induktivitet svitka, pod utjecajem punog napona izvora U , ali možemo isto tako vidjeti da je oboje također istovremeno protjecano istom zajedničkom strujom, jer kroz presjek vodiča prolazi samo jedna struja: I .

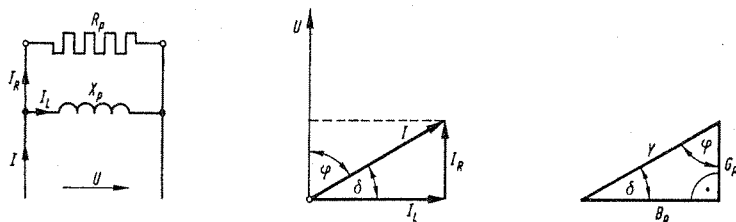


Sl. 14.37. Nadomjesna spojna shema u serijskom spoju za realni svitak

Da bismo mogli iskoristiti rezultate simboličkog vektorskog računanja nadomjestit ćemo intimno povezani, a prostorno raspodijeljeni, otpor i induktivitet nekim ekvivalentnim vrijednostima koncentriranog otpora R i koncentriranog induktiviteta L , kojem uz zadanu frekvenciju pripada induktivni otpor X_L .

Osnovne podatke pomoću kojih ćemo moći vršiti daljnje izvode dobivamo mjerenjem svih električkih veličina na svitku kad ga priključimo na izmjenični napon i kad kroz njegove zavojice prolazi izmjenična struja.

Spojna shema za vršenje mjerenja prikazana je na slici 14.36 (koja je identična sa slikom 13.8), pa na temelju sada poznatih vrijednosti U , I i P možemo najprije odrediti kut φ i onda nacrtati vektorski dijagram svitka. Vidimo da će zbog potroška energije u otporu svitka struja prema naponu biti fazno pomaknuta za kut φ koji je manji od 90° .



Sl. 14.38. Nadomjesna spojna shema u paralelnom spoju za realni svitak

Iz ovih podataka može se izračunati ukupna impedancija $Z = U/I$, odnosno rezultantna vodljivost $Y = I/U$, a uz pomoć poznatog faznog kuta φ može se dalje taj realni svitak prikazati kao serijski spoj omskog i induktivnog otpora ili kao paralelni spoj omske i induktivne vodljivosti.

Ako se odlučimo za serijski spoj, imamo slijedeće relacije za komponente R_s i X_s :

$$R_s = Z \cdot \cos \varphi \quad \text{i} \quad X_s = Z \cdot \sin \varphi$$

dok su za paralelni spoj komponente G_p i B_p jednake:

$$G_p = Y \cdot \cos \varphi \quad \text{i} \quad B_p = Y \cdot \sin \varphi$$

Ako umjesto s vodljivostima računamo i u paralelnoj vezi s otporima, imamo za te otpore slijedeće izraze:

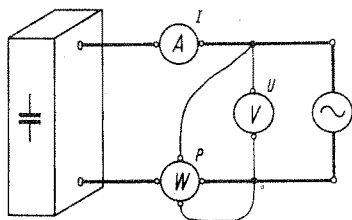
$$R_p = \frac{Z}{\cos \varphi} \quad \text{i} \quad X_p = \frac{Z}{\sin \varphi}$$

Nacrtamo li vektorske dijagrame realnog svitka za serijski (slika 14.37) i za paralelni (slika 14.38) nadomjesni spoj, vidimo da je za potrošak djelatne energije, koja se pretvara u toplinu, mjerodavna vatna komponenta napona, odnosno vatna komponenta struje. Iz ovih se slika nadalje vidi da ove obje komponente ovise o faznom kutu φ , odnosno o njegovu komplementu δ .

Očito je da induktivne svitke uključujemo u strujne krugove sa željom da bi nam stvorili magnetsko polje, pa je zato svako trošenje energije za zagrijavanje u otporu svitka nepoželjno i to ne samo zbog opasnosti izgaranja izolacije, već prvenstveno zbog nepotrebnog potroška energije, koja se u konačnom obliku kao toplina izgubi u okolišnom zraku.

Kut δ koji ovisi o količini te izgubljene energije (odnosno snage) nazivamo *kutom gubitka*.

Analognu razmatranja možemo provesti i za realne kondenzatore. Kod idealnog kondenzatora bilo je pretpostavljeno da izolacija između ploča ima beskonačno veliki omski otpor, pa izmjenični napon priveden pločama kondenzatora nije mogao potjerati provodnu struju kroz izolaciju, nego je sva struja bila reaktivna (struja dielektričnog pomaka). U naravi, međutim, otpor izolacije ima uvijek neku konačnu vrijednost, pa će privedeni izmjenični napon moći potjerati — iako vrlo malu — ali ipak neku djelatnu struju. Zato će od izvora privedena struja, osim reaktivne, imati i djelatnu komponentu.

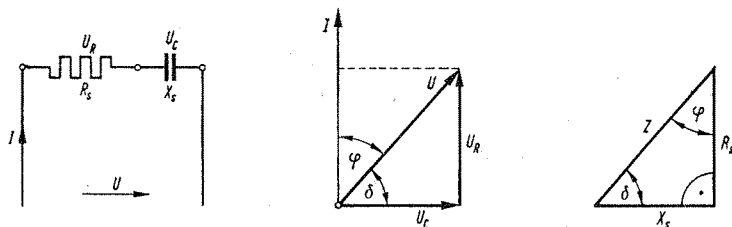


Sl. 14.39. Priključak mjernih instrumenata pri ispitivanju realnog kondenzatora

Mjerenja koja će nam dati brojčane podatke za daljnju analizu izvode se za realni kondenzator prema slici 14.39, isto onako kao što je bilo prikazano na slici 14.36 za realni induktivni svitak.

U vektorskom prikazu izmjerenih veličina bit će razlika samo u tome što ovdje kod priključka kondenzatora struja prethodi pred naponom za kut φ koji je manji od 90° .

I ovaj realni kondenzator možemo sada nadomjestiti ili serijskim ili paralelnim spojem idealnog kapacitivnog i omskog otpora, kako je to prikazano na slikama 14.40 i 14.41.



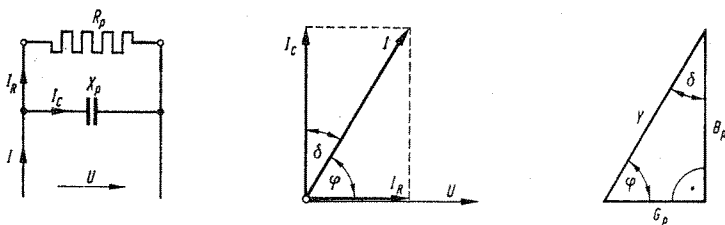
Sl. 14.40. Nadomjesna spojna shema u serijskom spoju za realni kondenzator

Iz podataka dobivenih mjerenjem izračunamo ukupnu impedanciju $Z = U/I$ i rezultatnu ukupnu vodljivost $Y = I/U$, a vrijednosti nadomjesnih otpora izračunamo onda prema slijedećim jednadžbama:

za serijski spoj: $R_s = Z \cdot \cos \varphi$ $X_s = Z \cdot \sin \varphi$

a za paralelni spoj: $G_p = Y \cdot \cos \varphi$ $B_p = Y \cdot \sin \varphi$

odnosno: $R_p = \frac{Z}{\cos \varphi}$ $X_p = \frac{Z}{\sin \varphi}$



Sl. 14.41. Nadomjesna spojna shema u paralelnom spoju za realni kondenzator

I ovdje nazivamo kut δ , koji je komplement kuta faznog pomaka φ , *kutom gubitaka*. U praksi se za oznaku gubitaka snage u otporu kondenzatora obično navodi tangens kuta δ koji je

za serijski nadomjesni spoj: $\operatorname{tg} \delta = \frac{R_s}{1/\omega C_s} = \omega R_s C_s$

za paralelni nadomjesni spoj: $\operatorname{tg} \delta = \frac{1/R_p}{\omega C_p} = \frac{1}{\omega R_p C_p}$

Iz prijašnjih općenitih izvoda poznato je da su vrijednosti serijskih nadomjesnih otpora različite od onih u paralelnom ekvivalentnom spoju. Ipak se za realne kondenzatore, koji imaju među pločama visokokvalitetnu izolaciju, može pokazati da se vrijednosti C_s i C_p vrlo malo razlikuju. To se vidi iz slijedećih razmatranja.

Predložimo li (iz trokuta otpora) sinus i cosinus kuta gubitaka, dobivamo:

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \frac{R_s}{Z}; & \sin \delta &= \frac{1/R_p}{Y} = \frac{Z}{R_p} \\ \cos \delta &= \frac{1/\omega C_s}{Z} = \frac{1}{\omega C_s Z}; & \cos \delta &= \frac{\omega C_p}{Y} = \omega C_p Z\end{aligned}$$

odakle dobivamo množenjem:

$$\sin^2 \delta = \frac{R_s}{R_p} \quad \text{i} \quad \cos^2 \delta = \frac{C_p}{C_s}$$

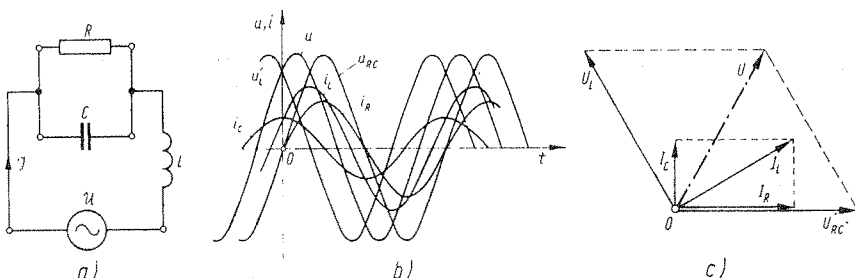
Uz pretpostavku da su gubici u izolaciji zanemarivi, bit će kut δ veoma malen, pa je:

$$\sin^2 \delta \approx 0 \quad \text{odakle je:} \quad R_p > R_s$$

$$\cos^2 \delta \approx 1 \quad \text{odakle je:} \quad C_p \approx C_s.$$

15. SIMBOLIČKI NAČIN RJEŠAVANJA MREŽA IZMJENIČNE STRUJE

Vektorski način kojim smo u prijašnjim poglavljima rješavali mreže izmjenične struje omogućuje nam da možemo međusobne odnose električnih veličina pojedinih dijelova mreža vidjeti mnogo zornije nego kad su te veličine predložene u svom izvornom obliku kao harmoničke funkcije vremena. To možemo najbolje uočiti ako usporedimo preglednost slike 15.1b i c, gdje su na oba načina prikazane sve električne veličine jednog te istog sklopa (slika 15.1a).



Sl. 15.1. a) Mješoviti spoj R , L , C ; b) Vremenski prikaz pojedinih veličina: u , u_L , u_{RC} , i_R , i_L , i_C za elemente spojne sheme; c) Vektorski dijagram veličina

Osim toga, primjenjujući taj simbolički vektorski način dolazimo brže do konačnog rezultata nego ako bismo za kompliciranije sklopove — primijenivši Kirchhoffove zakone — sav račun provodili dalje analitički.

Pri tome, međutim, ne smijemo zaboraviti da smo polazne podatke o odnosu struje i napona za pojedine elemente mreža: R , L i C , s kojima dalje pri složenijim sklopovima vršimo grafički račun, mogli dobiti samo na temelju proračuna prirodnim analitičkim načinom.

Vektorski način analize izmjeničnih mreža pokazuje ipak izvjesne nedostatke, što se očituje osobito u tome da njime ne možemo uvijek izvesti neke zaključke općenitog značenja, a osim toga točnost dobivenih rezultata ovisi — kao i kod svakog grafičkog postupka — o preciznosti crtanja dijagrama.

Da bi se dobio što bolji uvid u rad električnih uređaja, postupka se danas gotovo općenito u svim granama elektrotehnike tako da se ti uređaji prikazuju nadomjesnim sklopom raznih otpora i izvora, što predstavlja električnu mrežu. Rješavanjem te mreže dobivaju se važni numerički podaci, na osnovi kojih se onda može zaključiti kakva je karakteristika promatranog uređaja.

Budući da grafički vektorski način rješavanja mreža izmjenične struje ne može udovoljiti sve većim zahtjevima koji se stavljaju na teoriju mreža u pogledu potpunosti i točnosti, upotrebljavaju se pri analizi ovih mreža razni postupci matematičke teorije. Tako je već Steinmetz uveo takozvanu kompleksnu simboličku metodu za proračun mreža izmjenične struje.

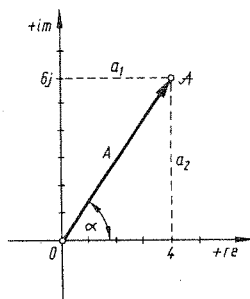
Električne veličine koje smo prije prikazivali vektorima, predložuju se ovdje u *kompleksnoj ravnini kompleksnim brojevima*. Time se sve geometrijske operacije koje treba izvršiti nad vektorima grafički i uz pomoć Pitagorina poučka pretvaraju u algebarske operacije s kompleksnim brojevima, pa je računanje znatno pojednostavnjeno.

Zbog velike važnosti kompleksnog računa u elektrotehnici objašnjene su u sljedećem poglavlju osnove tog računa.

15.1. MATEMATIČKE OSNOVE KOMPLEKSNOG RAČUNA

Kompleksnom nazivamo ravninu u kojoj su ucrtane dvije međusobno okomite osi, a njihovo sjecište smatramo ishodištem od kojeg su na horizontalnu os nanoseni realni, a na vertikalnu os imaginarni brojevi, slika 15.2. Imaginarna jedinica je $j = \sqrt{-1}$.

Sl. 15.2. Kompleksni broj predločen u kompleksnoj ravnini



Slično kao i u Descartesovu koordinatnom sustavu, može se svaka točka ove ravnine jednoznačno odrediti pripadnim *realnim* i pripadnim *imaginarnim brojem*, dakle jednim *kompleksnim brojem*.

Na slici 15.2 točka A ima kao koordinate 4 realne jedinice i 6 imaginarnih jedinica, pa je njen položaj određen kompleksnim brojem $A = 4 + j6$.

Spojimo li ishodište O s točkom A dobivamo planarni vektor dužine A , a njegove su komponente u smjeru *realne* osi: $a_1 = 4$ i u smjeru *imaginarne* osi: $a_2 = 6$. Možemo, dakle, i vektor $\overrightarrow{OA}$ u ovom primjeru prikazati kompleksnim brojem $A = 4 + j6$.

Kompleksni broj može se prikazati u tri razna oblika. Algebarski oblik je upravo predloženi način s realnim dijelom a_1 i imaginarnim dijelom a_2 , dakle općenito:

$$A = a_1 + j \cdot a_2$$

Na slici se nadalje vidi da su:

$$a_1 = A \cdot \cos a$$

$$a_2 = A \cdot \sin a$$

pa je moguće isti kompleksni broj $\mathcal{A}$ prikazati i na slijedeći način:

$$\mathcal{A} = A \cdot \cos a + j \cdot A \cdot \sin a$$

ili:

$$\mathcal{A} = A [\cos a + j \cdot \sin a],$$

a to nazivamo trigonometrijskim oblikom.

Treći oblik dobit ćemo uz pomoć poznatih matematičkih relacija:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Stavimo li, naime, za x vrijednost $x = ja$, možemo eksponencijalnu funkciju s imaginarnim eksponentom ja prikazati u slijedećem obliku:

$$e^{ja} = 1 + ja - \frac{a^2}{2!} - j \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + j \frac{a^5}{5!} - \frac{a^6}{6!} - j \frac{a^7}{7!} + \dots$$

a to je dalje jednako:

$$e^{ja} = \left(1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \dots\right) + j \cdot \left(a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \dots\right)$$

i konačno:

$$e^{ja} = \cos a + j \cdot \sin a$$

Za $x = -ja$ dobivamo:

$$e^{-ja} = \cos a - j \cdot \sin a$$

Supstituirajući dobivenu vrijednost za $\cos a + j \sin a$ u prijašnju jednadžbu dobivamo kompleksni broj $\mathcal{A}$ prikazan u eksponencijalnom obliku:

$$\mathcal{A} = A \cdot e^{ja}$$

Iako sva tri oblika kompleksnog broja imaju u biti isto matematičko značenje, ipak se (kao što ćemo vidjeti) u izvjesnim slučajevima računati lakše provode primjenom baš samo jednog od njih.

Parametri ovih triju oblika matematički su točno određeni i međusobno povezani, pa možemo od jednog oblika lako prijeći na drugi primjenom slijedećih jednadžbi:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{a_2}{a_1}; \quad a_1 = A \cdot \cos \alpha$$

$$a_2 = A \cdot \sin \alpha$$

Apsolutni iznos kompleksnog broja A (što odgovara duljini pripadnog vektora) naziva se modul kompleksnog broja, a kut α njegovim argumentom.

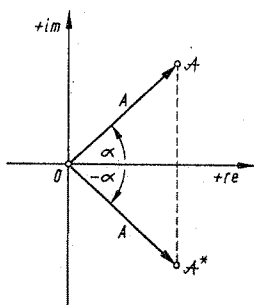
Potrebno je još spomenuti i tzv. konjugirano kompleksne brojeve, koji se često pojavljuju pri računanju s kompleksnim brojevima.

Dva kompleksna broja nazivamo *konjugirano kompleksnim* ako imaju iste module, a argumenti su im po iznosu jednaki ali suprotnih predznaka. Broju $A = A \cdot e^{j\alpha}$ konjugirano kompleksni označujemo zvjezdicom i on je jednak:

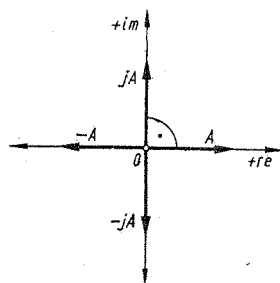
$$A^* = A \cdot e^{-j\alpha}$$

$$A^* = A (\cos \alpha - j \cdot \sin \alpha)$$

$$A^* = a_1 - j \cdot a_2 \quad (\text{Sl. 15.3})$$



Sl. 15.3. Konjugirano kompleksni brojevi A i A^*



Sl. 14.4. Množenje kompleksnog broja imaginarnom jedinicom

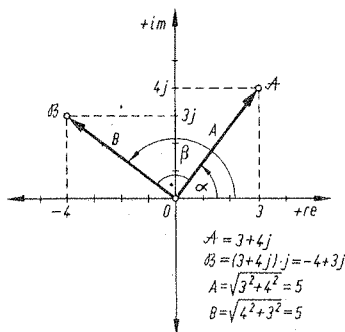
Nakon što smo upoznali što su kompleksni brojevi s kojima ćemo (simboličkim načinom) vršiti analizu električnih mreža, potrebno je ukratko objasniti još neka svojstva tih brojeva.

Nalazi li se vektor u horizontalnoj realnoj osi, njegov je pripadni kut $\alpha = 0$, pa se kompleksni broj s kojim ga predložujemo svodi na čisti realni broj: $A_1 = A$. Ako se pak taj vektor nalazi u vertikalnoj imaginarnoj osi, kompleksni broj koji ga reprezentira ima samo imaginarni dio, dakle: $A_2 = j \cdot A$.

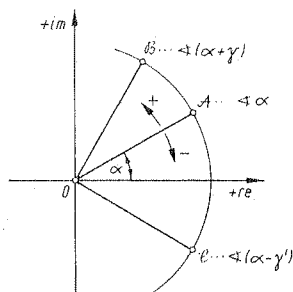
Prema slici 15.4 na kojoj su prikazana oba vektora zajedno, možemo zaključiti da se množenjem kompleksnog broja A_1 s imaginarnom jedinicom $j = \sqrt{-1}$ taj isti vektor zakreće u pozitivnom smjeru vrtnje za kut $\pi/2 = 90^\circ$.

Taj postupak možemo još i nastaviti, pa je tako na slici 15.4 prikazano da množenje kompleksnog broja sa $j^2 = -1$ zakreće pripadni vektor za $\pi = 180^\circ$, a množenje sa $j^3 = -j$ za $3\pi/2 = 270^\circ$, te konačno da faktor $j^4 = 1$ vrši zakret za $2\pi = 360^\circ$ ili što je isto: ostavlja vektor u prvotnom položaju.

To ne vrijedi, dakako, samo za prikazani primjer kad je prvotni vektor bio položen u realnoj osi, nego i za vektore bilo kako položene u kompleksnoj ravнини. Tako na slici 15.5 vektor A , čiji je kompleksni broj $A = 3 + j4$, pomnožen sa j daje novi broj $B = -4 + j3$, kojem pripada vektor B pomaknut za $+90^\circ$ prema vektoru A , kako se vidi na slici.



Sl. 15.5. Pomak radijus-vektora za $+90^\circ$



Sl. 15.6. Pomak radijus-vektora u (+) i (-) smjeru

I u samim izrazima za kompleksne brojeve možemo taj pomak vektora rinnogo zornije vidjeti ako te brojeve umjesto u algebarskom, napišemo u eksponencijalnom ili u trigonometrijskom obliku.

Tako vektore A i B iz prijašnjeg primjera možemo predložiti slijedećim kompleksnim brojevima:

$$A = 5 \cdot e^{ja} = 5 \cdot (\cos a + j \cdot \sin a)$$

$$B = 5 \cdot e^{jb} = 5 \cdot (\cos \beta + j \cdot \sin \beta)$$

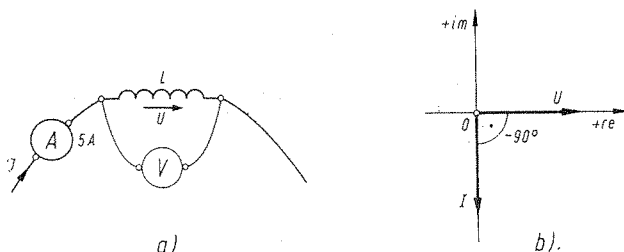
a kako je prema prije rečenom $\beta = a + 90^\circ$, izlazi da je

$$B = 5 \cdot e^{j(a+90^\circ)} = 5 \cdot [\cos(a + 90^\circ) + j \cdot \sin(a + 90^\circ)]$$

To isto vrijedi i za pomak vektora za bilo koji kut γ , pa ako je kut pozitivan ($\gamma > 0$) pomak je usmjeren protivno gibanju kazaljke na satu, a ako je γ negativan, pomaknut je vektor u smjeru gibanja kazaljke na satu, sl. 15.6.

15.2. PRIMJENA KOMPLEKSNOG RAČUNA NA IZMJENIČNE STRUJE I NAPONE

Na osnovi prijašnjih razmatranja možemo izvesti slijedeći zaključak: da bi nam kompleksni brojevi mogli reprezentirati vektore koji u vektorskom dijagramu označuju sinusoidalne struje i napone neke mreže, moraju moduli tih brojeva biti jednaki efektivnim vrijednostima struja i napona, a njihovi argumenti moraju odgovarati međusobnim faznim pomacima promatranih električnih veličina.



Sl. 15.7. Primjer simboličkog predočavanja induktivne struje i priključenog napona

Svakom, naime, kompleksnom broju pripada u kompleksnoj ravnini jedna i samo jedna točka ravnine, a pripadni vektori su spojnice ishodišta s tim fiksnim točkama, pa su prema tome to nepomični vektori, što se baš i zahtijeva za njihovu upotrebu u vektorskom dijagramu, gdje računamo samo s efektivnim vrijednostima električnih veličina.

Tako, na primjer, znamo da je struja kod priključka idealnog induktivnog svitka na sinusoidalni napon fazno pomaknuta za -90° , a njena efektivna vrijednost jednaka je $I = U/X_L$. To možemo prikazati u vektorskom dijagramu, slika 15.7, a nacrtanim vektorima pripadaju kompleksni brojevi:

$$U = U \cdot e^{j0} \quad I = I \cdot e^{-j90^\circ}$$

Budući da u mnogim problemima do izražaja dolaze također i trenutne vrijednosti sinusoidalnih struja i napona, a budući da ih dobivamo tek kao projekcije na vertikalnu os od rotirajućih radijus-vektora, potrebno je objasniti kako se kompleksnim brojevima predočuju rotirajući radijus-vektori.

Vidjeli smo u prijašnjim izvodima da se povećanjem argumenta kompleksnog broja za iznos γ prvotni vektor uz nepromijenjenu duljinu zakrene za kut γ . Takve diskretne zakrete radijus-vektora prikazuju slike 15.4 i 15.5. Da bismo, međutim, dobili jednoličnu rotaciju radijus-vektora konstantnom kutnom brzinom ω mora se argument od vrijednosti što je ima u trenutku $t = 0$ jednolično povećavati tijekom vremena za iznos ωt .

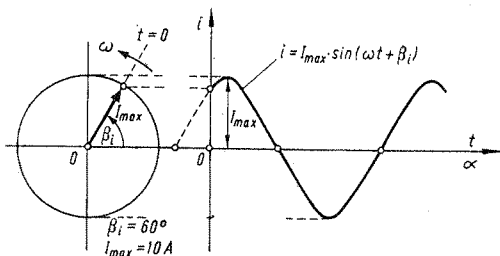
Vidimo da će trenutne vrijednosti izmjenične struje koje su dane jednadžbom:

$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_1)$$

predočene biti projekcijom na j -os rotirajućeg radijus-vektora kojem pripada kompleksni broj:

$$I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_i)}$$

Tu smo kao modul kompleksnog broja morali uzeti dužinu rotirajućeg radijus-vektora, a ta je jednaka amplitudi struje $I_{\max}$, dok je argument jednak početnom kutu β_i uvećanom zbog rotacije za iznos ωt , slika 15.8.



Sl. 15.8. Harmonička funkcija predočena kao sinusoidalna struja

Upoznali smo, dakle, da se jedan te isti harmonički proces (i to u našem primjeru izmjenična struja) može predočiti na dva bitno različita načina, ili kako se to kaže, u dva različita područja, ili dvije domene:

u realnom području: $i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i)$

i u kompleksnom području: $\dot{i} = I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_i)}$

Međusobno ne možemo, dakako, jednostavno izjednačiti oba izraza, jer primjenjujući Moivreov stavak dobivamo da je:

$$I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_i)} = I_{\max} \cos(\omega t + \beta_i) + j \cdot I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i)$$

što je različito od izraza za struju: $i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i)$ u realnom području.

Želimo li ipak istaknuti da oba izraza:

$I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i)$ i $I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_i)}$ označuju jednu te istu harmoničku veličinu, dakako u različitim domenama, upotrebljavamo u takvim slučajevima poseban znak $\doteq$ pa možemo napisati:

$$I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i) \doteq I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_i)}$$

Analogno bismo i za sinusoidalni napon mogli napisati sličnu relaciju:

$$U_{\max} \sin(\omega t + \beta_u) \doteq U_{\max} e^{j(\omega t + \beta_u)}$$

Ako je harmonička veličina zadana u jednom području (domeni), možemo na osnovi prije pokazanog odnosa lako odrediti njen izraz u drugom području.

Tako vidimo da ćemo prelazeći iz kompleksnog područja u realno jednadžbu sinusoidalno promjenljive struje dobiti kao koeficijent uz imaginarnu jedinicu, ako je kompleksni broj koji reprezentira tu sinusoidalnu struju prikazan u trigonometrijskom obliku:

$$i = I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_i)} = I_{\max} \cos(\omega t + \beta_i) + j \cdot I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i)$$

$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i)$$

Pri obrnutom prijelazu iz realnog u kompleksno područje pretpostavit ćemo da je zadana struja prikazana kao sinusoidalna funkcija, a ukoliko je ona dana kao cosinus funkcija, pretvorit ćemo je u sinusoidalnu prema relaciji $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$. Tada će biti modul kompleksnog broja rotirajućeg radijus-vektora jednak amplitudi struje $I_{\max}$, a argument toga broja jednak je varijabli sinus funkcije $(\omega t + \beta_i)$.

Kompleksne brojeve rotirajućih radijus-vektora označili smo malim masnim slovima, kako bismo ih razlikovali od malih slova koja označuju vremenski promjenljive veličine u realnom području:

$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i) \quad \mathbf{i} = I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_i)} = I_{\max} e^{j\beta} e^{j\omega t}$$

$$u = U_{\max} \sin(\omega t + \beta_u) \quad \mathbf{u} = U_{\max} e^{j(\omega t + \beta_u)} = U_{\max} e^{j\beta_u} e^{j\omega t}$$

I u ovom slučaju, kad računamo s rotirajućim radijus-vektorima čije su dužine jednake amplitudama struja i napona, možemo te radijus-vektore u početnom položaju ($t = 0$) označiti kao kompleksne brojeve s pisanim slovom koje označuju amplitudu promatrane veličine, pa tako imamo da su:

$$\mathbf{i} = I_{\max} e^{j\beta_i} e^{j\omega t} = \mathcal{I}_{\max} e^{j\omega t} \quad \text{pri čemu je} \quad \mathcal{I}_{\max} = I_{\max} e^{j\beta_i}$$

$$\mathbf{u} = U_{\max} e^{j\beta_u} e^{j\omega t} = \mathcal{U}_{\max} e^{j\omega t} \quad \text{pri čemu je} \quad \mathcal{U}_{\max} = U_{\max} e^{j\beta_u}$$

Uzme li se u obzir činjenica da struje i naponi jedne promatrane mreže imaju istu frekvenciju f , moguće je još dalje pojednostavniti označavanje kompleksnih brojeva rotirajućih radijus-vektora koji reprezentiraju električne veličine predložene u realnom području kao harmoničke funkcije vremena.

Vidimo, naime, da ovi kompleksni brojevi svih električnih veličina jedne mreže imaju isti zajednički faktor $e^{j\omega t}$, koji označuje rotaciju radijus-vektora, pa njega možemo u svim brojevima izostaviti. Rotacija radijus-vektora uzeta je ipak u obzir već time što kao moduli u tim kompleksnim brojevima dolaze amplitude sinusoidalnih veličina, dok mirujućim radijus-vektorima, s kojima crtamo vektorske dijagrame, pripadaju efektivne vrijednosti.

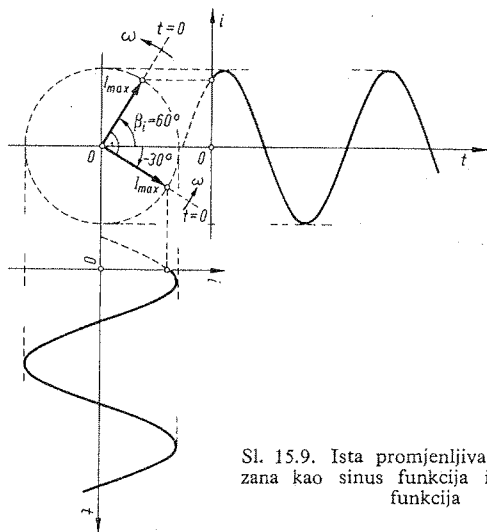
Uz ove napomene možemo, dakle, prijašnje odnose napisati ovako:

$$I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i) \doteq \mathcal{I}_{\max}$$

$$U_{\max} \sin(\omega t + \beta_u) \doteq \mathcal{U}_{\max}$$

Konačno ćemo još spomenuti da se kompleksni brojevi planarnih radijus-vektora mogu prikazati najjednostavnije u tzv. polarnom obliku, gdje su naznačeni samo *modul* odgovarajuće duljini vektora i *argument* kao pripadni početni kut.

Tako je, na primjer, vektor struje na slici 15.7 određen oznakom: $\mathcal{I} = 5 \angle -90^\circ$, a rotirajući radijus-vektor sa slike 15.8 bit će prikazan kao $\mathcal{I}_{\max} = 10 \angle 60^\circ$.



Sl. 15.9. Ista promjenljiva struja prikazana kao sinus funkcija i kao kosinus funkcija

U prijašnjim izvodima pretpostavljali smo da su izmjenične struje i naponi sinusoidalno promjenljive veličine, no poznato je da ih možemo prikazati i kao kosinusoidalne funkcije vremena t .

Da bismo saznali kako se može jedna te ista harmonička funkcija, npr. izmjenična struja i simbolički predočiti kompleksnim brojem kad je tretiramo kao kosinusoidalnu funkciju, moramo poći od osnovne relacije:

$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_1) = I_{\max} \cos(\omega t + \beta_1 - 90^\circ)$$

To znači da će trenutne vrijednosti iste zadane struje i u tom drugom slučaju biti jednake ortogonalnim projekcijama na realnu — horizontalnu os rotirajućeg radijus-vektora $I_{\max}$, čiji je početni položaj sada pomaknut u smjeru kazaljke na satu za 90° u odnosu na početni položaj β_1 što ga je imao u prijašnjem načinu predočavanja.

Grafički postupci pomoću kojih se u oba slučaja dobiva ista harmonička krivulja struje i vide se na slici 15.9.

Simbolički možemo, dakle, zadanu struju $i = f(t)$ predočiti je kompleksnim brojem:

$$i \doteq I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_1)}$$

ili kompleksnim brojem:

$$i \doteq I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_1 - 90^\circ)}$$

samo moramo naznačiti da se u prvom slučaju vrši projiciranje radijus-vektora na vertikalnu — imaginarnu os, a u drugom na horizontalnu — realnu os.

Predočimo li te kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku imamo slijedeće jednačbe:

$$I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_1)} = I_{\max} \cos(\omega t + \beta_1) + j \cdot I_{\max} \sin(\omega t + \beta_1)$$

i:

$$I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_1 - 90^\circ)} = I_{\max} \cos(\omega t + \beta_1 - 90^\circ) + j \cdot I_{\max} \sin(\omega t + \beta_1 - 90^\circ)$$

Odatle slijedi da je zadana struja $i = f(t)$ jednaka:

$$i = \text{Im} \{ I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_1)} \}$$

odnosno:

$$i = \text{Re} \{ I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_1 - 90^\circ)} \}$$

Pri tome nam novo uvedeni simboli znače:

Im - imaginarni dio } trigonometrijskog oblika zadanog kompleksnog broja.
Re - realni dio

Na slici je uzeto kao primjer: $\beta_1 = 60^\circ$, dakle je $\beta_1 - 90^\circ = -30^\circ$.

Budući da ćemo odsada nadalje pri analizi električnih mreža izmjenične struje redovito upotrebljavati simbolički način računanja, potrebno je ukratko prikazati kako se vrše algebarske operacije s kompleksnim brojevima.

Zbrajanje će se najjednostavnije provoditi ako su kompleksni brojevi zadani u algebarskom obliku, jer se realna komponenta sume dobiva kao suma realnih komponenta pojedinih pribrojnika, a isto tako će imaginarna komponenta sume biti jednaka sumi imaginarnih komponentata svih pribrojnika.

Ako su nam npr. zadani pribrojnici

$$\mathcal{A} = a_1 + j \cdot a_2 \quad \text{ i } \quad \mathcal{B} = b_1 + j \cdot b_2$$

bit će njihova suma $\mathcal{C}$ jednaka:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_1 + j \cdot a_2) + (b_1 + j \cdot b_2) = (a_1 + b_1) + j \cdot (a_2 + b_2)$$

$$\mathcal{C} = c_1 + j \cdot c_2$$

pri čemu je: $c_1 = a_1 + b_1$ - realni dio, a

$c_2 = a_2 + b_2$ - imaginarni dio sume.

Odbijanje se vrši tako da se suptrahend s protivnim predznakom pribroji minuendu:

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} = (a_1 + j \cdot a_2) + (-b_1 - j \cdot b_2)$$

$$\mathcal{D} = (a_1 - b_1) + j \cdot (a_2 - b_2)$$

$$\mathcal{D} = d_1 + j \cdot d_2$$

Množenje kompleksnih brojeva vrši se najjednostavnije ako su ti brojevi dani u eksponencijalnom obliku. Produkt brojeva $\mathcal{A} = A e^{j\alpha}$ i $\mathcal{B} = B e^{j\beta}$ jednak je:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = A e^{j\alpha} \cdot B e^{j\beta} = A \cdot B e^{j(\alpha+\beta)} = C e^{j\gamma}$$

pri čemu je modul produkta $C = A \cdot B$ jednak umnošku modula pojedinih faktora, a argument produkta jednak zbroju argumenata tih faktora: $\gamma = \alpha + \beta$.

Dakako da se pri množenju mogu upotrijebiti i drugi oblici zadanih faktora, na primjer:

$$\mathcal{A} = a_1 + j \cdot a_2 \quad ; \quad \mathcal{B} = b_1 + j \cdot b_2$$

pa je

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (a_1 + j a_2) (b_1 + j b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + j (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Pri operaciji množenja treba naročito istaknuti svojstvo konjugirano-kompleksnih brojeva da je njihov umnožak jednak kvadratu njihova modula — dakle, realan broj, na primjer:

$$(a_1 + j a_2) \cdot (a_1 - j a_2) = a_1^2 + a_2^2 = A^2$$

Općenito, dakle, vrijedi: $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = A^2$

Eksponencijalni oblik upotrebljava se i pri dijeljenju dvaju kompleksnih brojeva. Kvocijent $\mathcal{C}$ brojeva $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ računa se preme jednadžbi:

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{A e^{j\alpha}}{B e^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)} = C e^{j\delta}$$

pri čemu je:

$$C = \frac{A}{B} \quad \text{a} \quad \delta = \alpha - \beta$$

Često su pri dijeljenju dividend i divizor prikazani u algebarskom obliku, a onda je kvocijent dan razlomkom:

$$\mathcal{C} = \frac{a_1 + j \cdot a_2}{b_1 + j \cdot b_2}$$

čija se vrijednost izračunava primjenom spomenutog svojstva konjugirano-kompleksnih brojeva da je njihov umnožak jednak kvadratu modula. Tako se npr. kvocijent brojeva $\mathcal{A} = 6 + 2 \cdot j$ i $\mathcal{B} = 2 - j$:

$$\mathcal{Q} = \frac{6 + 2j}{2 - j}$$

pomnoži u brojniku i nazivniku sa konjugirano-kompleksnim brojem $\mathcal{B}^* = 2 + j$ pa se dobiva:

$$\mathcal{Q} = \frac{6 + 2j}{2 - j} \cdot \frac{2 + j}{2 + j} = \frac{(6 + 2j)(2 + j)}{4 + 1} = \frac{10 + 10j}{5} = 2 + j$$

$$\mathcal{Q} = 2 + j \cdot 2$$

Da bismo odredili kakve izraze dobivamo u kompleksnom području pri diferenciranju i integriranju vremenski promjenljive sinusoidalne funkcije, potražićemo vezu između zadane funkcije i njenog diferencijalnog kvocijenta, odnosno integrala.

Ako je, dakle, zadana struja:

$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i) \doteq I_{\max} e^{j\omega t}$$

njezin je diferencijalni kvocijent jednak:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d[I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i)]}{dt} = \omega I_{\max} \cos(\omega t + \beta_i) = \omega I_{\max} \sin\left(\omega t + \beta_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

Posljednji dobiveni izraz možemo predočiti kompleksnim brojem:

$$\omega I_{\max} e^{j(\omega t + \beta_i + \frac{\pi}{2})} = \omega I_{\max} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\beta_i} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega I_{\max} \cdot e^{j\beta_i} \cdot e^{j\omega t} = j\omega \cdot I_{\max} e^{j\omega t}$$

pa na osnovi toga zaključujemo: pri deriviranju sinusoidalne funkcije dobivamo kompleksni broj koji će predočavati derivaciju tako, da sa $j\omega$ pomnožimo onaj kompleksni broj kojim je predočena zadana sinusoidalna funkcija.

Na sličan način postupit ćemo i pri integriranju. Ako nam je, dakle, zadan napon:

$$u = U_{\max} \sin(\omega t + \beta_u) \doteq U_{\max} e^{j\omega t}$$

njegov će integral biti:

$$\begin{aligned} \int u \cdot dt &= \int U_{\max} \sin(\omega t + \beta_u) \cdot dt = -\frac{U_{\max}}{\omega} \cos(\omega t + \beta_u) = \\ &= \frac{U_{\max}}{\omega} \sin\left(\omega t + \beta_u - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

što se može predočiti kompleksnim brojem:

$$\frac{U_{\max}}{\omega} e^{j(\omega t + \beta_u - \frac{\pi}{2})} = \frac{U_{\max}}{\omega} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\beta_u} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \cdot \frac{1}{\omega} U_{\max} \cdot e^{j\beta_u} \cdot e^{j\omega t}$$

a to je dalje jednako:

$$\frac{1}{j\omega} \mathcal{U}_{\max} \cdot e^{j\omega t}$$

U simboličkom kompleksnom načinu dobiva se, dakle, kompleksni broj koji će predočiti integral sinusoidalne funkcije tako da se kompleksni broj kojim je predočena zadana sinusoidalna funkcija podijeli sa $j\omega$.

$$\int U_{\max} \sin(\omega t + \beta_u) \cdot dt \doteq \frac{\mathcal{U}_{\max} \cdot e^{j\omega t}}{j\omega}$$

Ista pravila za diferenciranje i integriranje vrijede i onda ako je harmonička funkcija zadana kao kosinusoidalna funkcija vremena.

15.3. ANALIZA IZMJENIČNIH MREŽA PRIMJENOM KOMPLEKSNOG RAČUNA

Pri simboličkom rješavanju izmjeničnih mreža kompleksnim brojevima treba imati na umu slijedeće:

I ovdje vrijedi općenito matematičko pravilo da se zbrajati (i odbijati) mogu samo istovrsne veličine, na primjer naponi ako su oni svi prikazani u efektivnim vrijednostima kao mirujući radijus-vektori, pa će i suma (odnosno diferencija) biti efektivna vrijednost napona predočenog mirujućim radijus-vektorom. Međusobno mogu se zbrajati i odbijati i amplitude koje predočuju rotirajuće radijus-vektore istovrsnih električnih veličina, ali se ne mogu zbrajati efektivne vrijednosti (mirujući radijus-vektori) s amplitudama (rotirajući vektor).

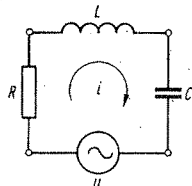
Množiti i dijeliti mogu se i veličine različitih dimenzija, no onda se dobivaju, dakako, veličine novih dimenzija. Tako nam dijeljenje napona sa strujom daje otpor, a kvocijent struje i napona vodljivost. Pri tom opet oba broja koja dijelimo ili množimo moraju predočavati ili samo mirujuće ili pak samo rotirajuće radijus-vektore.

Množenje struje i napona daje snagu, a sam postupak proračuna snage simboličkim načinom bit će još detaljnije prikazan.

15.3.1. Serijski spoj R , L , C . Kompleksna impedancija

Prelazeći ovdje na rješavanje električnih mreža izmjenične struje simboličkim kompleksnim načinom uzet ćemo kao prvi primjer: serijski spoj R , L , C , priključen na izvor sinusoidalnog napona, slika 15.10. Pri tom opet razmatramo stacionarno stanje, koje se ustaljuje nakon kraćeg prolaznog stanja.

Sl. 15.10. Serijski spoj R , L , C priključen na izvor sinusoidalnog napona



Za serijski spoj znamo da se u svakom trenutku zadani sinusoidalni napon izvora:

$$u = U_{\max} \sin(\omega t + \beta_u) \doteq U_{\max} e^{j\omega t}$$

troši za savladavanje svih uključenih otpora. Prema tome je napon u jednak sumi u otporima potrošenih napona.

Pojedine komponente napona ovise prema prije izvedenim jednadžbama o jakosti struje i , koja je zajednička svim elementima strujnog kruga.

$$u_R = i \cdot R \quad u_L = L \frac{di}{dt} \quad u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

pa se i ukupni napon izvora može predočiti kao funkcija jakosti struje:

$$u = i \cdot R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

Rješavanjem ove diferencijalno-integralne jednadžbe dobivamo jednadžbu struje i , a ona je za stacionarno stanje također harmonička, sinusoidalna funkcija iste frekvencije kao i napon, samo u općenitom slučaju drugačijeg faznog stanja napon.

Možemo, dakle, za struju napisati jednadžbu:

$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_i)$$

što se u kompleksnom području predočuje kompleksnim brojem:

$$I_{\max} e^{j\omega t} \quad \text{pri čemu je} \quad I_{\max} = I_{\max} e^{j\beta_i}$$

Pri prijelazu iz realnog područja u kompleksno moramo svaki član gornje osnovne jednačbe zamijeniti prema prije izvedenim pravilima odgovarajućim kompleksnim brojem, pa dobivamo:

$$u_{\max} e^{j\omega t} = \mathcal{I}_{\max} e^{j\omega t} R + L j \omega \mathcal{I}_{\max} e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \frac{1}{j \omega} \mathcal{I}_{\max} e^{j\omega t}$$

Struja i napon predloženi su u gornjoj jednačbi u svojim maksimalnim vrijednostima, što se odnosi na rotirajuće radijus-vektore. Budući da ćemo normalno računati s efektivnim vrijednostima koje predložujemo u mirujućem vektorskom dijagramu, podijeliti ćemo tu jednačbu sa $\sqrt{2}$ i sa $e^{j\omega t}$ pa dobivamo:

$$u = \mathcal{I} \cdot R + j \omega L \cdot \mathcal{I} + \frac{1}{j \omega C} \mathcal{I} = \mathcal{I} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

Primijenimo li otprije poznatu relaciju da je $\omega L - 1/\omega C = X$, možemo prikazati napon izvora kao umnožak:

$$u = \mathcal{I} \cdot [R + j(X_L - X_C)]$$

$$u = \mathcal{I} \cdot (R + jX) = \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z}$$

a struju kao kvocijent:

$$\mathcal{I} = \frac{u}{R + jX} = \frac{u}{\mathcal{Z}}$$

gdje je: $\mathcal{Z} = R + jX$ kompleksna impedancija.

Ako je u strujnom krugu (sl. 15.11) uključeno serijski više omskih, induktivnih i kapacitivnih otpora, bit će rezultatna impedancija:

$$\mathcal{Z} = \sum_{k=1}^n \mathcal{Z}_k = \sum_{k=1}^n R_k + j \cdot \left[\sum_{k=1}^n X_{L_k} - \sum_{k=1}^n X_{C_k} \right]$$

a uz supstituciju:

$$\sum_{k=1}^n R_k = R \quad \text{i} \quad \left[\sum_{k=1}^n X_{L_k} - \sum_{k=1}^n X_{C_k} \right] = X$$

konačno je:

$$\mathcal{Z} = R + jX$$

Kompleksni broj impedancije $\mathcal{Z}$ možemo i grafički predložiti u kompleksnoj ravnini, kao što su simbolički predloženi i struja i napon. No ipak postoji bitna razlika u tretiranju vektora, koji nam pokazuje u kompleksnoj ravnini otpore $\mathcal{Z}$ u odnosu na vektore napona i struje.

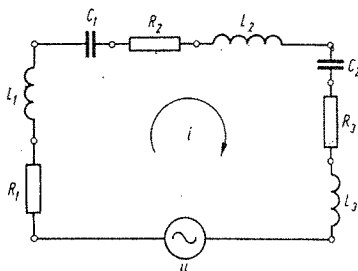
Kao vremenski sinusoidalno promjenljive veličine, napon i struja predložuju se rotirajućim radijus-vektorima, a tek kad se crtaju vektorski dijagrami s efektivnim vrijednostima onda su to mirujući vektori, dok je vektor otpora Z uvijek

mirujući vektor. To izlazi iz činjenice da je impedancija definirana kao kvocijent napona i struje, pa se faktor $e^{j\omega t}$, koji je vršio rotaciju vektora, skraćuje u brojniku i nazivniku razlomka.

Impedancija $\mathcal{Z}$ jednaka je, dakle:

$$\mathcal{Z} = \frac{\sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j\beta_u} \cdot e^{j\omega t}}{\sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\beta_i} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\beta_u - \beta_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Sl. 15.11. Serijski spoj više omskih, induktivnih i kapacitivnih otpora

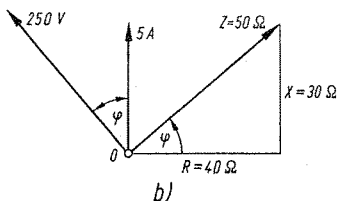
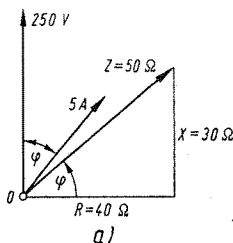


Pri tome je modul Z jednak omjeru efektivnih vrijednosti napona i struje, dok je argument φ jednak razlici kutova napona i struje:

$$Z = \frac{U}{I} \quad \varphi = \beta_u - \beta_i \quad \mathcal{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Primjer u kojem se vidi prije istaknuta konstantnost kompleksnog broja impedancije $\mathcal{Z}$ neovisno o trenutnom položaju rotirajućih radijus-vektora napona i struje prikazuje slika 15.12(a i b). Na slici a) su nacrtani vektori struje i napona:

$$\mathcal{U} = j 250 \text{ V} \quad \mathcal{I} = (3 + j 4) \text{ A}$$



Sl. 15.12. a) i b) Vektorski dijagrami napona i struje impedancije $\mathcal{Z} = 40 + j 30$ u različitim vremenskim trenucima

dok su na slici b), nakon nekog vremena nešto pomaknuti, ti isti vektori predloženi kompleksnim brojevima:

$$\mathcal{U} = (-150 + j 200) \text{ V} \quad \mathcal{I} = j 5 \text{ A}$$

U prvom slučaju je:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{j250}{3 + j4} = 40 + j30$$

a u drugom slučaju:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{-150 + j200}{j5} = 40 + j30$$

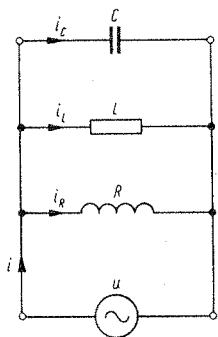
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \quad \varphi = 36^\circ 50'$$

Na obje slike ucrtan je, uz vektore struje i napona, i kompleksni broj impedancije: Z .

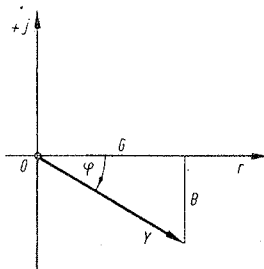
15.3.2. Paralelni spoj R , L , C . Kompleksna vodljivost

Na slici 15.13 prikazana je spojna shema paralelnog spoja omskog, induktivnog i kapacitivnog otpora, priključenih na izvor sinusoidalnog napona U .

U sljedećim izvodima razmatrat će se strujne i naponske prilike, uz pretpostavku da je kraće vrijeme nakon priključka na izvor nastupilo već nakon prijelaznog, stacionarno stanje.



Sl. 15.13. Paralelni spoj R , L , C priključen na izvor napona U



Sl. 15.14. Trokut vodljivosti

Zbog paralelnog spoja svaki će otpor imati isti napon, i to napon izvora, a kako struju svakom otporu dobavlja izvor — bit će prema prvom Kirchhoffovu zakonu struja izvora jednaka sumi struja svih triju otpora.

Naponska i strujna jednadžba ovog spoja — pisane za trenutne vrijednosti — glase, dakle:

$$U = U_R = U_L = U_C \quad i = i_R + i_L + i_C$$

Ako se za pojedine struje uvrste otprije dobiveni izrazi:

$$i_R = G \cdot u \quad i_L = \frac{1}{L} \int u \cdot dt \quad i_C = C \cdot \frac{du}{dt}$$

dobiva strujna jednadžba oblik:

$$i = G \cdot u + \frac{1}{L} \int u \, dt + C \cdot \frac{du}{dt}$$

Ova jednadžba potpuno je analogna integralno-diferencijalnoj jednadžbi koja je bila prije izvedena za napone u serijskom spoju R , L , C , pa se prema istim pravilima može prevesti u kompleksno područje. Pri tome ćemo odmah struje i napon predočiti u efektivnim vrijednostima, što odgovara mirujućim vektorima u vektorskom dijagramu. Dakle je:

$$\mathcal{I} = G \cdot \mathcal{U} + \frac{1}{L} \frac{\mathcal{U}}{j\omega} + C \cdot j\omega \cdot \mathcal{U}$$

Zamijeni li se $1/j\omega L$ sa $(-j 1/\omega L)$ može se jednadžba za struju napisati u obliku:

$$\mathcal{I} = \mathcal{U} \cdot \left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] = \mathcal{U} \cdot \left[G - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right]$$

Uvođenjem vodljivosti: $1/\omega L = B_L$ i $\omega C = B_C$ jednadžba glasi:

$$\mathcal{I} = \mathcal{U} \cdot [G - j(B_L - B_C)]$$

pri čemu (prema definiciji) je $B_L - B_C = B$ ukupna reaktivna vodljivost, pa je konačni oblik jednadžbe:

$$\mathcal{I} = \mathcal{U} \cdot (G - jB)$$

Predznak pred imaginarnim dijelom u zagradi gornje jednadžbe bit će negativan ako prevladava induktivna vodljivost, jer je onda $B > 0$, a ako prevladava kapacitivna vodljivost (pa je $B < 0$) bit će predznak imaginarnog dijela pozitivan.

Kvocijent struje i napona, koji su predočeni kompleksnim brojevima, daje kompleksnu vodljivost $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{Y} = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{U}} = \frac{I \cdot e^{j\beta_I}}{U \cdot e^{j\beta_U}} = \frac{I}{U} e^{j(\beta_I - \beta_U)} = Y \cdot e^{-j(\beta_U - \beta_I)}$$

$$\mathcal{Y} = Y \cdot e^{-j\varphi}$$

Nadalje je: $\mathcal{Y} = Y \cdot (\cos \varphi - j \sin \varphi)$ pri čemu je:

$$Y \cos \varphi = G \quad Y \sin \varphi = B \quad \mathcal{Y} = G - jB$$

pa je:

$$\mathcal{I} = u \cdot \mathcal{Y} \quad \text{ i } \quad u = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{Y}}$$

I za vodljivost može se nacrtati pripadni pravokutni trokut, sl. 15.14, pri čemu su aktivna i reaktivna vodljivost katete, a ukupna vodljivost hipotenuza.

Ako je na izvor priključeno u paralelnom spoju više omskih, induktivnih i kapacitivnih otpora, rezultatna se vodljivost dobije algebarskim zbrajanjem svih pojedinih vodljivosti:

$$\mathcal{Y} = \sum_{k=1}^n \mathcal{Y}_k = \sum_{k=1}^n G_k - j \cdot \left[\sum_{k=1}^n B_{L_k} - \sum_{k=1}^n B_{C_k} \right]$$

što uz supstituciju:

$$\sum_{k=1}^n G_k = G \quad \text{ i } \quad \left[\sum_{k=1}^n B_{L_k} - \sum_{k=1}^n B_{C_k} \right] = B$$

daje kompleksnu vodljivost:

$$\mathcal{Y} = G - jB$$

15.3.3. Ohmovi i Kirchhoffovi zakoni u kompleksnom obliku

Simboličkim kompleksnim načinom predočavanja izmjeničnih veličina dobivene su za serijski i paralelni spoj otpora jednadžbe potpuno slične onima pri proračunu strujnih krugova istosmjerne struje sa serijski, odnosno paralelno ukopčanim otporima. Tako se u izmjeničnim strujnim krugovima rezultatni otpor serijski ukopčanih otpora predočuje kompleksnim brojem kao algebarska suma pojedinih otpora, pri čemu je realni dio jednak omskom otporu R , a imaginarni dio reaktivnom otporu X .

U paralelnom spoju je ukupna vodljivost jednaka algebarskoj sumi pojedinih vodljivosti, pri čemu je realni dio omska vodljivost G , a imaginarni dio reaktivna vodljivost B .

Također i jednadžbe Ohmova zakona, pisane kompleksnim brojevima za strujne krugove izmjenične struje, jednakog su oblika kao one istosmjerne struje:

$$\mathcal{I} = \frac{u}{\mathcal{Z}} \quad u = \mathcal{I} \cdot \mathcal{Z} \quad \mathcal{I} = u \cdot \mathcal{Y} \quad u = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{Y}}$$

Analiza složenijih linearnih mreža izmjenične struje za stacionarno stanje vrši se u kompleksnom području primjenom Kirchhoffovih zakona ili pomoću metoda (teorema) kako je bilo prikazano pri rješavanju mreža istosmjerne struje, samo se u upotrijebljenim jednadžbama moraju sve električne veličine predočiti simbolički kompleksnim brojevima.

Prvi Kirchhoffov zakon, koji kaže da je algebarska suma struja jednog čvora jednaka nuli, predočuje se jednačbom:

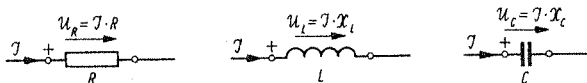
$$\sum_{k=1}^n \mathcal{I}_k = 0$$

Prema drugom Kirchhoffovu zakonu suma aktivnih napona u_k svih izvora jednog zatvorenog strujnog kruga jednaka je sumi potrošenih napona u otporima tog strujnog kruga. Osim potrošenih napona na aktivnim omskim otporima ovdje treba uzeti u račun i reaktivne potrošene napone na induktivnim i kapacitivnim otporima, odnosno na ukupnoj impedanciji $\mathcal{Z}$. Općenito je, dakle, drugi Kirchhoffov zakon predločen jednačbom:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \mathcal{I}_k \cdot \mathcal{Z}_k$$

Da bi se ispravno postavile jednačbe Kirchhoffovih zakona, odnosno primijenjenih teorema, potrebno je uzeti u obzir referentne smjerove svih električnih veličina.

Pri analizi mreža redovno su zadani izvori i otpori, a traže se nepoznate struje u granama.



Sl. 15.15. Povezanost referentnih smjerova struja i napona na prikazanim otporima

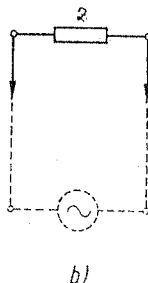
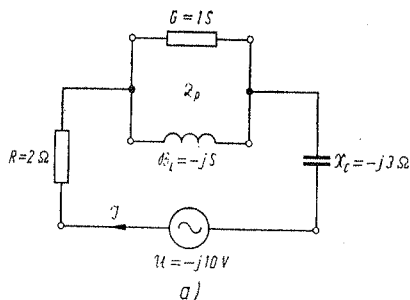
Naponski izvori potpuno su definirani ako je uz kompleksni broj (odnosno njegov vektor) koji predočuje iznos napona ili elektromotorne sile zadan i pripadni referentni smjer. Isto tako će i strujni izvori biti potpuno zadani ako je uz zadani iznos jakosti struje ucrtan i zadani referentni smjer struje.

Nepoznatim strujama u pojedinim granama, koje treba tek izračunati, pridodat će se po volji odabrani referentni smjerovi. Proračunom dobiveni kompleksni broj koji predočuje pojedinu struju vezan je uz prije odabrani referentni smjer za tu struju.

Potrošeni naponi koji dolaze na desnoj strani jednačbe drugog Kirchhoffovog zakona računaju se kao umnošci struje i otpora, a uz odabrani smjer struje imaju ti naponi referentne smjerove prikazane na slici 15.15. Ovi međusobno povezani smjerovi napona sa smjerom struje u skladu su s prije objašnjenim fizikalnim zbivanjima u promatranim otporima.

15.4. PRIMJERI SIMBOLIČKOG RAČUNA U MREŽAMA IZMJENIČNE STRUJE

1. Rezultantni otpor serijsko-paralelne kombinacije, odnosno paralelno-serijske kombinacije otpora, računa se isto kao i s omskim otporima pri istosmjernoj struji, tako da se cijeli spoj reducira na serijski, odnosno na paralelni spoj.



Sl. 15.16. a) Primjer serijsko-paralelne kombinacije otpora; b) Rezultantna impedancija spoja

U primjeru na slici 15.16a nadomjestit će se najprije paralelni spoj vodljivosti G i B_L impedancijom Z_p , pa će ekvivalentni spoj prvotne sheme biti sastavljen od serijskog spoja otpora R , Z_p , X_c , čiji je rezultantni otpor Z jednak:

$$Z = R + Z_p - jX_c$$

Vodljivost zadanog paralelnog spoja $G = 1$ i $B_L = -j$ jednaka je $Y_p = 1 - j$, a ekvivalentna impedancija:

$$Z_p = \frac{1}{Y_p} = \frac{1}{1 - j} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

pa je:

$$Z = 2 + \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} - j3 = \frac{5}{2}(1 - j)$$

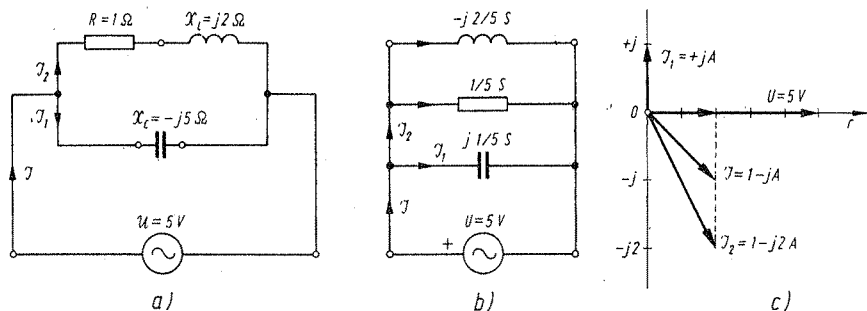
Struja izvora je:

$$i = \frac{u}{Z} = \frac{-j10}{\frac{5}{2}(1 - j)} = 2 - j2 \text{ A}$$

Kao što se pri rješavanju mreža istosmjerne struje mogu kompliciranije povezani omski otpori nadomjestiti samo jednim, rezultantnim otporom, tako je i u ovom primjeru prikazani sklop četiriju različitih otpora predložen samo jednom impedancijom Z , koja ima samo dvije priključnice, slika 15.16b. Zato se općenito i naziva *pasivnim dvopolom* bilo kakav sklop otpora koji se samo sa dvije vanjske stezaljke priključuje na izvor ili na ostali dio električne mreže.

Pasivnim dvopolom naziva se ovakav sklop otpora ako u njemu nema električnih izvora, dok će se *aktivnim dvopolom* nazivati onaj sklop sa dvije vanjske priključnice u kojem, osim otpora, ima uključenih izvora električne energije.

Najjednostavniji pasivni dvopol je bilo kakav otpor sam, a najjednostavniji aktivni dvopol je bilo naponski bilo strujni izvor.



Sl. 15.17. a) Paralelno-serijska kombinacija otpora; b) Rezultantna vodljivost spoja; c) Vektorski dijagram

2. U slijedećem primjeru, na slici 15.17a prikazan je sklop sa dvije paralelne grane priključen na izvor. Budući da je jedna grana sastavljena od serijski povezanih otpora R i X_L nadomjestit će se ona ekvivalentnom vodljivošću, a onda se rezultatna vodljivost cijelog sklopa određuje kao suma svih vodljivosti (sl. 15.17b).

Za prvu granu u kojoj je otpor $X_C = 5 \Omega$ vodljivost je:

$$B_c = \frac{1}{-j5} = j \frac{1}{5} S$$

Otpor druge grane $Z_2 = R + jX_L = 1 + j2$, a vodljivost je:

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{1 + j2} = \frac{1 - j2}{5} = \frac{1}{5} - j \frac{2}{5} S$$

Rezultantna vodljivost obiju paralelnih grana je:

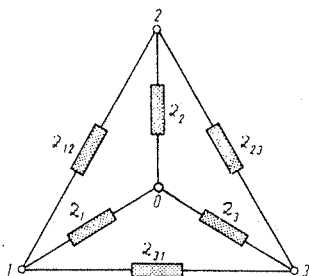
$$Y = Y_c + Y_2 = j \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - j \frac{2}{5} = \frac{1}{5} - j \frac{1}{5} = \frac{1}{5} (1 - j) S$$

Izvor napona $U = 5 V$ daje u sklop struju $I = U \cdot Y$

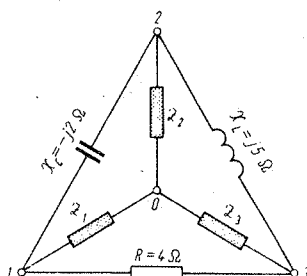
$$I = 5 \cdot \frac{1}{5} (1 - j) = 1 - j A$$

Na slici 15.17c prikazan je i pripadni vektorski dijagram.

3. U električnim mrežama izmjenične struje i u raznim električnim mjernim uređajima često se susreću tri otpora vezana u trokutnom spoju ili spoju zvijezda. Budući da se mnogi proračuni mogu znatno pojednostavniti ako se s jednog od tih spojeva priđe na ekvivalentni drugi, potrebno je i ovdje u strujnim krugovima izmjenične struje poznavati jednadžbe za transformaciju trokuta u zvijezdu i obrnuto.



Sl. 15.18. Pretvorba zadanog trokutnog spoja u ekvivalentnu zvijezdu



Sl. 15.19. Zadan trokut impedancija

Pri analizi mreža istosmjerne struje izvedene su bile jednadžbe za transformaciju trokutnog spoja triju otpora u ekvivalentnu zvijezdu, kao i za obrnuti postupak kad se zvijezda triju otpora želi nadomjestiti ekvivalentnim trokutnim spojem.

Iste jednadžbe upotrijebit će se i pri izmjeničnoj struji ako se u jednadžbama impedancije označe kompleksnim brojevima.

Transformacija zadanog trokuta u ekvivalentnu zvijezdu, slika 15.18, vrši se dakle pomoću jednadžbi:

$$Z_1 = \frac{Z_{31} \cdot Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12} \cdot Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_3 = \frac{Z_{23} \cdot Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

a za obrnutu transformaciju zvijezde u ekvivalentni trokut služe jednadžbe:

$$Z_{12} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} = \dots \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}$$

$$Z_{23} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} = \dots \frac{Z_2 Z_3}{Z_0}$$

$$Z_{31} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} = \dots \frac{Z_3 Z_1}{Z_0}$$

gdje je $\mathcal{Z}_0$ definiran jednažbom:

$$\frac{1}{\mathcal{Z}_0} = \frac{1}{\mathcal{Z}_1} + \frac{1}{\mathcal{Z}_2} + \frac{1}{\mathcal{Z}_3}$$

Primjer: Zadan je trokut impedancija, slika 15.19, i treba odrediti ekvivalentnu zvijezdu.

U jednažbama za impedancije zvijezde dolazi u nazivniku suma:

$$\Sigma \mathcal{Z}_{\Delta} = \mathcal{Z}_{12} + \mathcal{Z}_{23} + \mathcal{Z}_{31} = -j2 + j5 + 4 = 4 + j3$$

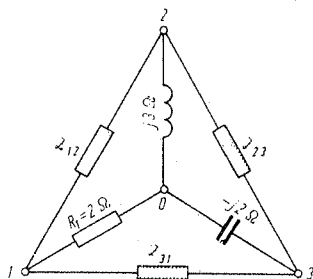
pa je:

$$\mathcal{Z}_1 = \frac{\mathcal{Z}_{31} \mathcal{Z}_{12}}{\Sigma \mathcal{Z}_{\Delta}} = \frac{4 \cdot (-j2)}{4 + j3} = \frac{-j8 \cdot (4 - j3)}{25} = -\frac{24}{25} - j\frac{32}{25} \Omega$$

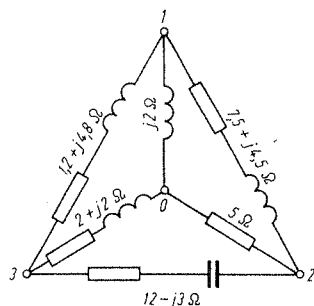
$$\mathcal{Z}_2 = \frac{\mathcal{Z}_{12} \mathcal{Z}_{23}}{\Sigma \mathcal{Z}_{\Delta}} = \frac{-j2 \cdot j5}{4 + j3} = \frac{10 \cdot (4 - j3)}{25} = \frac{40}{25} - j\frac{30}{25} \Omega$$

$$\mathcal{Z}_3 = \frac{\mathcal{Z}_{23} \mathcal{Z}_{31}}{\Sigma \mathcal{Z}_{\Delta}} = \frac{j5 \cdot 4}{4 + j3} = \frac{j20 \cdot (4 - j3)}{25} = \frac{60}{25} + j\frac{80}{25} \Omega$$

Račun pokazuje da ekvivalentna impedancija $\mathcal{Z}_1$ ima negativni omski otpor: $R_1 = -24/25$ što se u zbilji ne može ostvariti. No to ipak u daljnjem računu s ovim spojem ne smeta, jer se sada u jednažbi drugog Kirchhoffova zakona kao pripadni napon u smjeru pozitivne struje umjesto $+IR$ mora uzeti $-IR$.



Sl. 15.20. Zadana zvijezda impedancija



Sl. 15.21. Zadana zvijezda impedancija

Budući da umnožak $+IR$ u smjeru pozitivne struje I predstavlja pad potencijala, tj. potrošak napona u otporu R , može se obrnuto smatrati da umnožak $-IR$ označuje porast potencijala ili stvaranje napona. Tako je moguće negativni otpor shvatiti kao naponski izvor čija je elektromotorna sila proporcionalna jakosti struje, a djeluje u smjeru pozitivne struje.

Primjer: Na slici 15.20 su zadane impedancije zvijezde:

$$\mathcal{Z}_1 = 2 + j0, \quad \mathcal{Z}_2 = 0 + j3, \quad \mathcal{Z}_3 = 0 - j2$$

a traže se impedancije ekvivalentnog trokuta. Brojnik svih traženih impedancija edn ak je:

$$\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_2 \mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_3 \mathcal{Z}_1 = 2 \cdot j3 + j3 \cdot (-j2) + (-j2) \cdot 2 = 6 + j2$$

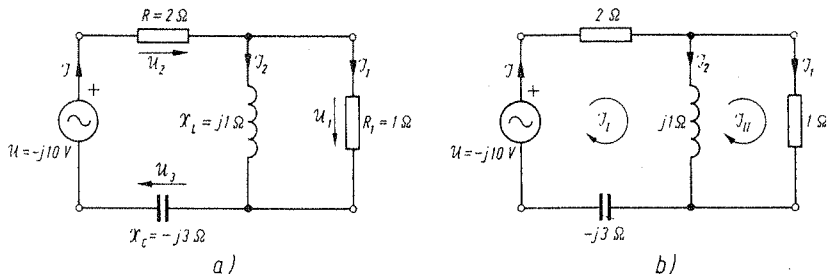
pa su tražene impedancije:

$$\mathcal{Z}_{12} = \frac{6 + j2}{-j2} = \frac{(6 + j2) \cdot j}{2} = -1 + j3$$

$$\mathcal{Z}_{23} = \frac{6 + j2}{2} = 3 + j$$

$$\mathcal{Z}_{31} = \frac{6 + j2}{j3} = \frac{(6 + j2) \cdot (-j)}{3} = \frac{2}{3} - j2$$

Ovaj primjer pokazuje da se negativni otpor ($-R$) kao računska veličina može dobiti i pri pretvorbi zvijezde u ekvivalentni trokut, što ne znači da se uvijek pri ovim transformacijama mora negdje pojaviti otpor R s negativnim predznakom. Tako će npr. u zvijezdi prikazanoj na slici 15.21 ekvivalentni trokut imati sve aktivne otpore sa predznakom (+).



Sl. 15.22. a) Primjer rješavanja mreže primjenom Kirchhoffovih zakona; b) Rješavanje mreže metodom konturnih struja

4. Primjenom Kirchhoffovih zakona određuju se nepoznate struje u zadanoj mreži, slika 15.22a, tako da se za čvor ($\mathcal{C} - 1$) = 1 postavi strujna jednačba, a za konture $n = 2$ naponske jednačbe.

Uz ucrtane pretpostavljene referentne smjerove za nepoznate struje i uz zadani referentni smjer zadanog napona izvora $\mathcal{U} = -j10 \text{ V}$ ove jednačbe glase:

$$\mathcal{C} \dots \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

$$n \dots \quad -j10 = 2\mathcal{I} + j\mathcal{I}_2 - j3\mathcal{I}$$

$$0 = \mathcal{I}_1 - j\mathcal{I}_2$$

Rješenjem ovih triju jednađbi dobivaju se vrijednosti za struje:

$$I_1 = 2 \text{ A} \quad I_2 = -j2 \text{ A} \quad I = 2 - j2 \text{ A}$$

Naponi na pojedinim otporima su:

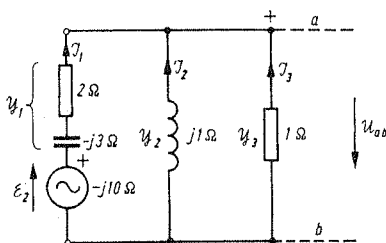
$$U_1 = 2 \text{ V} \quad U_2 = 4 - j4 \text{ V} \quad U_3 = -6 - j6 \text{ V}$$

a suma tih potrošenih napona jednaka je naponu izvora:

$$U = 2 + 4 - j4 - 6 - j6 = -j10 \text{ V}$$

5. Metodom konturnih struja mogu se nepoznate struje u granama izračunati brže nego primjenom Kirchhoffovih zakona, jer je u ovoj metodi manje jednađbi koje treba simultano riješiti.

Sl. 15.23. Rješavanje mreže metodom dvaju čvorova (Millmanov teorem)



Ako, dakle, struje u ovom istom sklopu, slika 15.22b, određujemo metodom konturnih struja, onda sustav jednađbi koje treba simultano riješiti sadrži samo dvije naponske jednađbe.:

$$I_I \cdot (2 + j - j3) + I_{II} (-j) = -j10$$

$$I_I \cdot (-j) + I_{II} \cdot (1 + j) = 0$$

Rješenjem ovih jednađbi dobiju se za konturne struje vrijednosti:

$$I_I = 2 - j2 \text{ A} \quad I_{II} = 2 \text{ A}$$

Struje u pojedinim granama izračunaju se ovako: ako je promatrana grana u mreži periferna, onda je struja te grane jednaka pripadnoj konturnoj struji, a struje u granici između kontura jednake su algebarskom zbroju konturnih struja.

Tako je u ovom primjeru:

$$I = I_I = 2 - j2 \text{ A}, \quad I_1 = I_{II} = 2 \text{ A},$$

$$I_2 = I_I - I_{II} = -j2 \text{ A}$$

6. Pri izračunavanju struja u ovom zadatku može se primijeniti i Millmanov teorem dvaju čvorova, jer se zadana shema, slika 15.22a, može prikazati i onako kako je prikazana na slici 15.23.

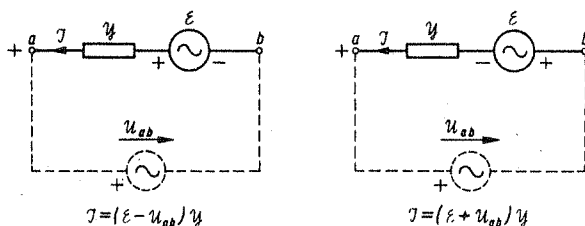
Pri tome se najprije na osnovi zadanih napona i otpora (odnosno vodljivosti) u granama odredi napon čvorova:

$$u_{ab} = \frac{\sum \varepsilon y}{\sum y}$$

U našem je primjeru:

$$u_{ab} = \frac{-j10 \frac{2+3j}{13}}{\frac{2+j3}{13} - j + 1} = +2 \text{ V}$$

Tu, dakle, treba izračunati struje u granama na čijim krajevima vlada poznati napon U_{ab} , a te grane osim otpora $Z = 1/y$ mogu imati u sebi još uključen izvor napona ε .



Sl. 15.24. Nadomjesna shema jedne grane mreže

Taj proračun može se u svakom slučaju lako provesti uz pomoć nadomjesne sheme prikazane na slici 15.24, na kojoj je napon priključnica a i b nadomješten naponskim izvorom U_{ab} , koji sa ε predstavlja serijski spoj dvaju izvora, pa je uz naznačene referentne smjerove za naš primjer struja u grani jednaka:

$$I = (\varepsilon - u_{ab}) \cdot y$$

Tako su za struje u pojedinim granama našeg primjera dobivene slijedeće vrijednosti:

$$I_1 = (\varepsilon_1 - u_{ab}) \cdot y_1 = (-j10 - 2) \cdot \frac{1}{2 - j3} = 2 - j2 \text{ A}$$

$$I_2 = -u_{ab} y_2 = -2 \cdot (-j) = +j2$$

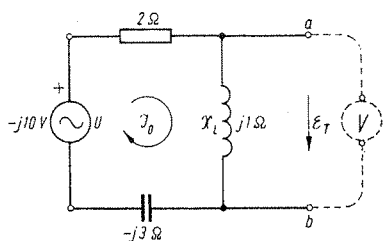
$$I_3 = -u_{ab} y_3 = -2 \cdot (1) = -2 \text{ A}$$

Prema prijašnjem primjeru ovdje su za struje I_2 i I_3 (iste spojne sheme) pretpostavljeni suprotni referentni smjerovi, pa zato ove struje imaju ovdje suprotne predznake. Struja I_1 ima ovdje kao i prije isti referentni smjer, pa zato i isti predznak.

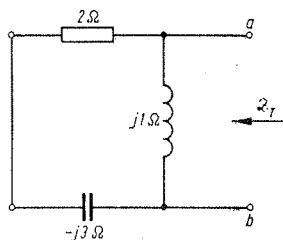
7. Ako u zadanoj mreži treba odrediti struju samo u jednoj grani, mogu se primijeniti metode nadomjesnih izvora. Pri tome se sva preostala mreža gledana od stezaljki a i b na koje je priključena promatrana grana nadomjesti jednim ekvivalentnim izvorom, a taj je prema Theveninovoj metodi naponski, a prema Nortonovoj metodi strujni izvor.

Potrebno je, dakle, odrediti parametre ovih nadomjesnih izvora.

Prema Theveninovu teoremu unutarnji napon $\mathcal{E}_T$ nadomjesnog naponskog izvora jednak je naponu na stezaljkama a i b (slika 15.25) kad se promatrana grana odstrani, a unutarnji otpor tog izvora $\mathcal{Z}_T$ jednak impedanciji gledanoj od neopterećenih stezaljki a i b , kad se sve elektromotorne sile naponskih izvora u preostaloj mreži premoste, ali se zadrže unutarnje impedancije tih izvora.



Sl. 15.25. Primjena Theveninova teorema (određivanje napona $\mathcal{E}_T$)



Sl. 15.26. Određivanje otpora $\mathcal{Z}_T$

Kao primjer za primjenu Theveninova teorema izračunat ćemo struju u otporu R_1 naše prijašnje spojne sheme, slika 15.22.

Napon $\mathcal{E}_T$ jednak je naponu na priključnicama a i b kad se taj otpor odstrani, i on je jednak padu napona na induktivnom otporu X_L , slika 15.25:

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{I}_0 X_L = \frac{-j10}{2-j2} (1+j) = \frac{10}{4} (1+j) \text{ V}$$

Iz spojne sheme na slici 15.26 vidi se da je:

$$\mathcal{Z}_T = \frac{j \cdot (2-j3)}{2-j2} = \frac{1}{4} (1+j5)$$

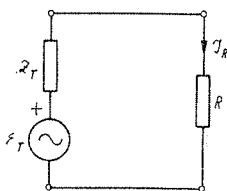
Struja u promatranom otporu R_1 jednaka je (sl. 15.22):

$$\mathcal{I}_R = \frac{\mathcal{E}_T}{\mathcal{Z}_T + R_1} = \frac{\frac{10}{4} (1+j)}{\frac{1}{4} (1+j5) + \frac{4}{4}} = 2 \text{ A}$$

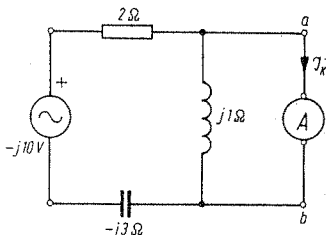
Proračun se može nastaviti i dalje, te odrediti sve ostale nepoznate veličine.

Napon na otporu $R_1 = 1 \Omega$ jednak je $\mathcal{U}_R R_1 = 2 \text{ V}$, a to je i napon na paralelno vezanom induktivnom otporu $\mathcal{X}_L = j$, pa se lako određuje i struja kroz svitak $\mathcal{I}_L = 2/j = -j2 \text{ A}$. Primjenom prvog Kirchhoffova zakona odredit će se i struja izvora:

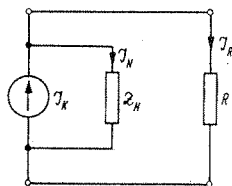
$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_R + \mathcal{I}_L = 2 - j2 \text{ A}.$$



Sl. 15.27. Struja u jednoj grani mreže prema Theveninu



Sl. 15.28. Primjena Nortonova teorema



Sl. 15.29. Određivanje struje jedne grane prema Nortonovu teoremu

8. Želimo li se za proračun struje $\mathcal{I}_R$ kroz otpor R_1 u ovom istom primjeru koristiti Nortonovim teoremom, potrebno je najprije odrediti koliki su struja $\mathcal{I}_k$ i paralelni otpor $\mathcal{Z}_N$ nadomjesnog strujnog izvora.

Tada je struja:

$$\mathcal{I}_R = \mathcal{I}_k \frac{\mathcal{Z}_N}{\mathcal{Z}_N + R_1}$$

Struja $\mathcal{I}_k$ jednaka je struji koja prolazi kroz vodič bez otpora s kojim se kratko spoje priključnice a i b na koje je bio priključen promatrani otpor R_1 , a otpor $\mathcal{Z}_N$ jednak je impedanciji mjerenoj sa stezaljki a i b nakon što je od stranjen otpor R_1 (a sve EMS u mreži premoštene). Taj otpor:

$$\mathcal{Z}_N = \mathcal{Z}_T = \frac{1 + j5}{4}$$

Uvidom u spojnu shemu, slika 15.28 vidi se da je $\mathcal{I}_k$ jednaka struji što pod utjecajem napona $\mathcal{E} = -j10 \text{ V}$ prolazi kroz serijski spoj otpora R i $\mathcal{X}_C$, dakle:

$$\mathcal{I}_k = \frac{\mathcal{E}}{R + \mathcal{X}_C} = \frac{-j10}{2 - j3} = \frac{30 - j20}{13}$$

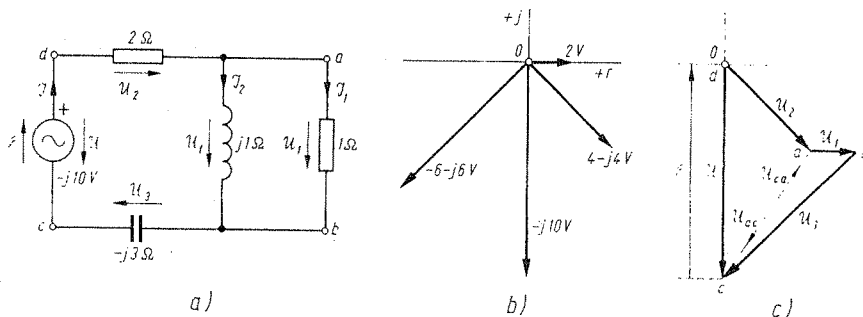
Na osnovi nadomjesne sheme koja predložuje ovu metodu, slika 15.29, tražena je struja u otporu R_1 jednaka:

$$\mathcal{I}_R = \mathcal{I}_k \frac{\mathcal{Z}_N}{\mathcal{Z}_N + R_1}$$

pa je:

$$I_R = \frac{30 - j20}{13} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot (1 + j5)}{\frac{1}{4} \cdot (1 + j5) + \frac{4}{4}} = 2 \text{ A.}$$

9. Topografski dijagram je vektorski dijagram napona električne mreže u kojem su vektori napona svih elemenata mreže nanizani jedan na drugog onako kako su u spojnoj shemi ti elementi spojeni jedan do drugoga.



Sl. 15.30. a) Spojna shema mreže za objašnjenje topografskog dijagrama; b) Vektori napona i struja zadane mreže; c) Topografski dijagram zadane mreže

Za objašnjenje neka posluži opet mreža čiju spojnu shemu predodčuje slika 15.30a.

U prijašnjim izvodima izračunani su svi naponi na otporima i sve struje u granama mreže, a oni su bili izraženi kompleksnim brojevima:

$$I_1 = 2 \text{ A} \quad I_2 = -j2 \text{ A} \quad I_3 = 2 - j2 \text{ A}$$

$$U = -j10 \text{ V} \quad U_1 = 2 \text{ V} \quad U_2 = 4 - j4 \text{ V} \quad U_3 = -6 - j6 \text{ V}$$

koji se mogu u kompleksnoj ravнини predočiti vektorima sa slike 15.30b.

Ovo bi, dakle, bio vektorski prikaz električnih veličina zadane mreže.

Topografski se dijagram dobije tako da se jedan element odabere kao početni i njegov se vektor napona nacrtava iz ishodišta 0 kompleksne ravnine, a vektor napona slijedećeg elementa spojne sheme ne crta se opet iz ishodišta kao u prijašnjoj slici, nego se nadovezuje na prethodni, što znači da se početak narednog vektora crta na svršetak prethodnog. To se nastavlja sve dok se po istom principu ne priđe cijela mreža.

Tako je na slici 15.30c dobiven topografski dijagram sheme, iz kojeg se vidi da takvo crtanje predodčuje zapravo zbrajanje svih napona potrošenih u ot-

porima mreže, i razumljivo je da suma tih potrošenih napona na pasivnim elementima mreže mora biti u našem primjeru jednaka aktivnom naponu izvora:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

No napon izvora može se smatrati i elektromotornom silom kojoj prema referentnom smjeru od c prema d potencijal raste. Kako na otporima postoji pad potencijala, idući od točke c kroz cijeli topografski dijagram dolazi se opet do točke c , što znači da je porast potencijala jednak padu potencijala, a to je smisao drugog Kirchhoffova zakona. Praktička korist što je pruža crtanje topografskog dijagrama (osim zornog uvida u odnose aktivnih i potrošenih napona) uglavnom je u tome što se, slično kao u potencijalnom dijagramu mreža istosmjerne struje, može odmah iz dijagrama odrediti još nepoznati napon između bilo kojih dvaju čvorova promatrane mreže.

Tako npr. naponu između c i a pripada vektor povučen od c prema a , pa je:

$$U_{ca} = 4 + j6 \text{ V}$$

Ako bi se tražio napon od a prema c , on je predodčen vektorom:

$$U_{ac} = -U_{ca} = -4 - j6 \text{ V}$$

Topografski dijagram se naročito upotrebljava u mrežama trofazne struje, jer se pomoću njega vrlo jednostavno mogu riješiti mnogi zadaci.

15.5. SNAGA PREDODČENA U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

Snaga nekog elementa električnog strujnog kruga proporcionalna je naponu i jakosti struje tog elementa.

Iz prijašnjih razmatranja o snazi izmjenične struje poznato je da se srednje vrijednosti djelatne i jalove snage dobiju množenjem produkta efektivnih vrijednosti napona i struje s cosinusom, odnosno sinusom kuta φ , koji predodčuje vremenski fazni pomak struje u odnosu na napon:

$$\varphi = \beta_u - \beta_i$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Ako bismo htjeli na osnovi poznatih kompleksnih brojeva kojima su definirani napon i struja odrediti snagu, te ako bismo postupili po istom pravilu kao u realnom području gdje snagu definira umnožak napona i struje, dobili bismo u kompleksnom području kao umnožak napona i struje izraz:

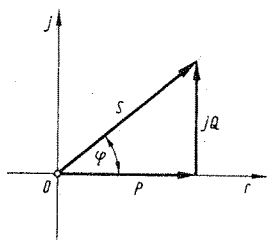
$$U \cdot I = U \cdot e^{j\beta_u} \cdot I \cdot e^{j\beta_i} = U \cdot I \cdot e^{j(\beta_u + \beta_i)}$$

To predodčeno u trigonometrijskom obliku daje relaciju:

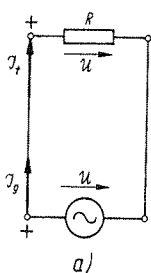
$$U \cdot I = UI \cdot \cos(\beta_u + \beta_i) + jUI \cdot \sin(\beta_u + \beta_i)$$

15.5.1. Proračunavanje snage

Odavde se vidi da jednostavnim množenjem napona i struje u kompleksnom području ne dobivamo izraz iz kojeg bismo mogli saznati snagu, jer ovim množenjem nigdje ne dobivamo karakteristični kut φ koji predodžuje fazni pomak između struje i napona.



Sl. 15.31. Kompleksna snaga S u trokutu snaga



Sl. 15.32. a) Priključak otpora R na zadani napon izvora; b) Vektorski dijagram za prikazani sklop

Da dobijemo u argumentu diferenciju $\beta_u - \beta_i$ potrebno je učiniti umnožak napona u s konjugirano kompleksnim brojem struje: I^* , pa onda se dobiva:

$$u \cdot I^* = U \cdot e^{j\beta_u} \cdot I \cdot e^{-j\beta_i} = U \cdot I \cdot e^{j(\beta_u - \beta_i)} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi}$$

$$u I^* = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi$$

Uz primjenu prije navedenih izraza slijedi:

$$u \cdot I^* = P + jQ$$

Množenjem kompleksnog broja napona s konjugirano kompleksnim brojem struje dobiva se tzv. *kompleksna snaga*:

$$S = P + jQ$$

čiji je realni dio djelatna snaga:

$$P = \operatorname{Re}(u \cdot I^*)$$

dok je koeficijent uz imaginarnu jedinicu jednak jalovoj snazi:

$$Q = \operatorname{Im}(u \cdot I^*)$$

Prema tome je moguće i kompleksnu snagu prikazati grafički u kompleksnoj ravnini, njezin modul jednak je prividnoj snazi, njena realna komponenta jednaka je djelatnoj, a imaginarna jalovoj snazi, slika 15.31.

Osim proračuna iznosa snage potrebno je i pri analizi mreža izmjenične struje odrediti još i predznak snage, jer se prema njemu može saznati smjer strujanja energije, a time vidjeti da li je promatrani element mreže izvor ili trošilo energije.

Pri tumačenju energije i snage istosmjerne struje bilo je, naime, objašnjeno da se trošilom smatra onaj element mreže u koji struja ulazi na pozitivnoj stezaljci, dok pri izvoru iz pozitivne stezaljke struja izlazi.

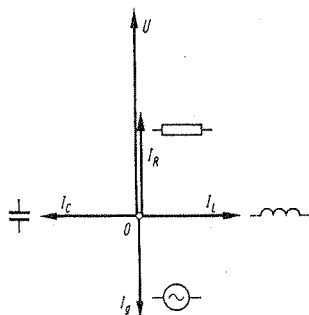
Nadalje je općenito prihvaćeno da se snazi potrošenoj u trošilu pripisuje pozitivni predznak, a od izvora predana snaga ima negativni predznak.

Napon U je i za izvor i za trošilo pozitivan kad djeluje u smjeru od pozitivne stezaljke prema negativnoj. Prema tome se pri proračunavanju snage nekog elementa mreže uz pozitivni napon U uzima struja I koja ulazi na pozitivnu stezaljku s pozitivnim predznakom, a struja koja iz pozitivne stezaljke izlazi, s negativnim predznakom.

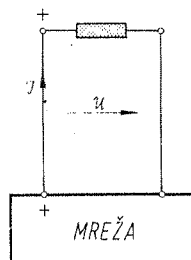
Ova pravila o snazi vrijede i za mreže izmjenične struje ako ucrtane strelice uz izvor i trošilo predočavaju referentne smjerove za izmjenični napon i struju.

Tako će npr. uz zadani napon izvora $U = j100$ V kroz otpor trošila $R = 10 \Omega$ (slika 15.32a,) struja biti jednaka $I = j10$ A. Pri određivanju snage uzima se, dakle, struja trošila s pozitivnim predznakom $I_t = j10$ A, a struja generatora s negativnim $I_g = -j10$ A. Račun pokazuje da je snaga trošila:

$P_t = \operatorname{Re}(U \cdot I_t^*) = j100 \cdot (-j10) = 1000$ W pozitivna, a snaga generatora $P_g = \operatorname{Re}(U \cdot I_g^*) = j100 \cdot j10 = -1000$ W negativna.



Sl. 15.33. Fazni pomaci struje s obzirom na zadani napon



Sl. 15.34. Izdvojeni element mreže

Na slici 15.32b je prikazan za taj primjer i vektorski dijagram iz kojeg se vidi da je vektor struje trošila u fazi s naponom, a vektor struje generatora je u protufazi s naponom.

Ovim primjerom je računski dobiveno ono što je općenito prihvaćeno, tj. da se potrošena energija od predane razlikuje samo po predznaku.

Ako bi se, dakle, negdje proračunom za trošenu snagu dobio negativan predznak, to znači da se energija u tom elementu mreže ne troši nego se od njega predaje. I obrnuto, ako bi predana snaga imala pozitivan predznak, energija se od tog elementa mreže ne predaje nego se u njemu troši.

U strujnim krugovima izmjenične struje pojavljuje se osim djelatne snage P još i jalova snaga, koja je definirana jednačbom $Q = UI \cdot \sin \varphi$, pa njezin predznak osim o predznaku umnoška UI ovisi još i o kutu faznog pomaka φ .

Uz pozitivni umnožak UI bit će jalova snaga za kut $\varphi = +90^\circ$ pozitivna jer je $\sin 90^\circ = 1$, a to znači da se *pozitivnom jalovom snagom* smatra ona jalova snaga koja se troši u *induktivnom* otporu. Negativni predznak imat će jalova snaga, koja se troši u *kapacitivnom* otporu, jer je za $\varphi = -90^\circ$ $\sin \varphi = -1$.

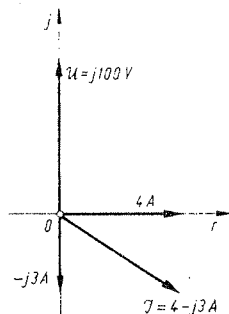
Primjenjujući i ovdje pravilo o predznacima snage i energije može se reći: element mreže koji troši negativnu jalovu energiju smatra se elementom koji predaje u mrežu jalovu energiju. *Kondenzator* je dakle *izvor*, a *induktivitet* *trošilo* *jalove energije*.

Navedena četiri karakteristična fazna stanja struje u odnosu na zajednički napon prikazana su u vektorskom dijagramu na slici 15.33.

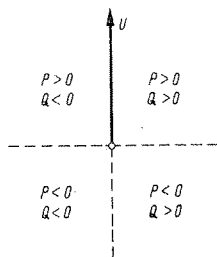
Te struje su:

- za $\varphi = 0^\circ$ djelatna struja trošila I_R
- $\varphi = 90^\circ$ jalova struja trošila I_L
- $\varphi = 180^\circ$ djelatna struja izvora I_g
- $\varphi = 270^\circ$ jalova struja izvora I_C

a uz svaku struju je naznačen i njezin računski idealni element mreže.



Sl. 15.35. Primjer računanja snage



Sl. 15.36. Predznaci snaga u kvadrantima kompleksne ravnine pri zadanom naponu U

Realno izrađeni elementi mreže nadomještaju se odgovarajuće elektromagnetskim zbivanjima u njima nekom impedancijom Z , pa će jakost struje, a i njezin fazni pomak prema naponu U , ovisiti o Z .

Vektor struje I promatranog elementa mreže može se, dakle, nalaziti u bilo kojem kvadrantu prikazane kompleksne ravnine, pa se u odnosu na napon U može rastaviti u djelatnu i jalovu komponentu.

I prividna snaga imat će djelatnu i jalovu komponentu, a u pojedinim kvadrantima imat će djelatna i jalova snaga predznake kako su naznačeni na slici 15.36, gdje je napon U prikazan vertikalno položenim vektorom.

Ako se izdvoji jedan elemenat mreže i promatra kao »trošilo«, sva ostala mreža može se uzeti kao izvor koji napaja to trošilo. Poznavajući napon U i struju I mogu se odrediti djelatna i jalova snaga, pa time saznati i smjer tijeka energije slika 15.34.

Na slici 15.35 je prikazan primjer gdje su mjerenjem (na osciloskopu) dobiveni podaci napona i struje uz pripadne referentne smjerove: $U = j100$ V i $I = 4 - j3$ A.

Za »trošilo« se dobiva prividna snaga S

$$S = U \cdot I^* = j100 \cdot (4 + j3) = -300 + j400 \text{ VA}$$

Vidi se da je $P = -300$ W, $Q = +400$ VAR što znači da promatrani element djelatnu snagu 300 W predaje u ostalu mrežu, a iz nje uzima (troši) jalovu snagu 400 VAR.

U pogledu smjera tijeka električne energije za neki promatrani priključni aparat čiji se vektor struje u odnosu na napon nalazi u nekom od četiriju kvadranta (slika 16.36), mogu se općenito dati ovi podaci (s primjerom):

Za I kvadrant: priključeni aparat troši i djelatnu i jalovu energiju, kao npr.: asinhroni elektromotor

II kvadrant: aparat troši djelatnu energiju iz mreže, ali odaje mreži jalovu energiju, npr. preuzbuđeni sinhroni motor

III kvadrant: priključeni aparat predaje i djelatnu i jalovu energiju ostalom dijelu mreže, npr. sinhroni generator

IV kvadrant: priključeni aparat troši jalovu energiju, ali u mrežu predaje djelatnu energiju, npr. asinhroni generator.

15.5.2. Teorem maksimalne korisne snage u mrežama izmjenične struje

Trošilo će od izvora primiti maksimalnu korisnu snagu ako je izvoru prilagođeno. Kao pri istosmjernoj struji, to će prilagođenoje ovisiti i u uređajima izmjenične struje, o odnosu otpora trošila i otpora izvora.

Budući da u uređajima izmjenične struje osim aktivnog otpora djeluju i reaktivni otpori, potrebno je pobliže razmotriti uvjete prilagođenja.

Na slici 15.37 je prikazan realni naponski izvor predložen elektromotornom silom $\mathcal{E}$ i unutarnjim otporom $\mathcal{Z}_i$, na koji je priključeno trošilo impedancije $\mathcal{Z}_t$.

Efektivna vrijednost struje određena je Ohmovim zakonom:

$$I = \frac{E}{Z}$$

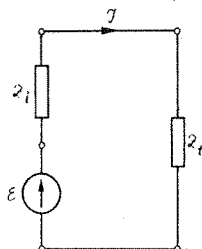
pri čemu je Z rezultanтни otpor strujnog kruga:

$$Z = \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X)^2} = \sqrt{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}$$

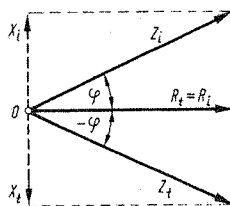
Korisna snaga trošila P_t jednaka je: $I^2 \cdot R_t$

$$P_t = \frac{R_t \cdot E^2}{(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2}$$

Snaga P_t je, dakle, pri zadanim parametrima izvora (E , R_i , X_i) funkcija otpora trošila: $P_t = f(R_t, X_t)$.



Sl. 15.37. Shema spoja trošila na izvor za tumačenje prilagođenja



Sl. 15.38. Otpor trošila konjugirano-kompleksan s otporom izvora

Maksimalnu vrijednost postiže snaga P_t kad je

$$dP_t = 0.$$

Budući da je $dP_t = (\partial P_t / \partial R_t) dR_t + (\partial P_t / \partial X_t) dX_t$ to će dP_t biti jednako nuli onda kad $\partial P_t / \partial R_t$ i $\partial P_t / \partial X_t$ budu zajedno jednaki nuli. Iz dobivenih izraza:

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t} = \frac{[(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2] \cdot E^2 - R_t E^2 \cdot 2(R_i + R_t)}{[(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2]^2} = 0$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial X_t} = \frac{[(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2] \cdot 0 - R_t E^2 \cdot 2(X_i + X_t)}{[(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2]^2} = 0$$

Slijedi da mora biti:

$$(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2 - 2 R_t \cdot (R_i + R_t) = 0$$

i:

$$- 2 \cdot R_t \cdot (X_i + X_t) = 0$$

$R_t \cdot (X_i + X_t)$ bit će jednako nuli ako je $X_i + X_t = 0$, jer R_t mora biti različito od nule da bi se u trošilu dobila korisna snaga. Dakle, jedan je od uvjeta za maksimum snage da je:

$$X_t = -X_i$$

Nadalje mora biti $(R_i + R_t)^2 = 2 R_t (R_i + R_t)$, a to će se ispuniti ako je:

$$R_t = R_i$$

Da bi se postigla maksimalna snaga u priključenom trošilu moraju u uređajima izmjenične struje biti ispunjena dva uvjeta. Kao i pri istosmjernoj struji mora aktivni otpor trošila biti jednak aktivnom otporu izvora, no ovdje mora biti ispunjen još i drugi uvjet, da su reaktivni otpori jednaki ali suprotnih predznaka, što znači da je otpor trošila konjugirano kompleksan s otporom izvora, slika 15.38.

Osim zahtjeva da se u trošilu dobije maksimalna raspoloživa snaga izvora, mogu se prigodom prilagođivanja za trošilo priključeno na izvor izmjenične struje postaviti i drugačiji zahtjevi. U tom će se slučaju proračun otpora, što ga mora imati trošilo provesti na osnovi postavljenih zahtjeva.

15.6. REZONANCIJA U STRUJNIM KRUGOVIMA IZMJENIČNE STRUJE

15.6.1. Općenita razmatranja o rezonanciji

Mreža koja je sastavljena od omskih, induktivnih i kapacitivnih otpora (ili vodljivosti), priključena na izvor izmjeničnog napona, može iz izvora pod određenim uvjetima uzimati struju koja je u fazi s naponom izvora.

To će se dogoditi onda ako je u rezultatnoj impedanciji (ili vodljivosti) kojom se nadomještava cijela mreža reaktivna komponenta jednaka nuli.

U tom će, dakle, slučaju cijela mreža djelovati kao čisti omski otpor i pri tom je: $\varphi = 0$.

Ova pojava naziva se *rezonancija*.

U složenijim mrežama može doći do rezonancije i na kojem dijelu mreže, a tada će samo tom dijelu privedena struja biti u fazi s naponom tog dijela mreže.

U daljnjem ćemo razmatrati pojavu rezonancije za dva osnovna karakteristična spoja otpora, tj. za serijski spoj R , X_L , X_C i za paralelni spoj G , B_L , B_C .

15.6.2. Serijska rezonancija

Za serijski spoj R , L , C , slika 15.39a, impedancija je općenito dana jednadžbom:

$$\mathcal{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad \text{a kut} \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Kod rezonancije je $\omega L = 1/\omega C$ pa je

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{i} \quad \mathcal{Z} = R \quad \text{a} \quad \varphi = 0.$$

Na slici 15.39b prikazan je vektorski dijagram struje i napona za serijsku rezonanciju. Prema Ohmovu zakonu je struja $\mathcal{I} = \mathcal{U}/R$, pa ako uzmemo (kako je prikazano u vektorskom dijagramu): $\mathcal{U} = U$ bit će $\mathcal{I} = I = U/R$, a naponi na pojedinim otporima:

$$U_R = I \cdot R \quad U_L = jIX_L \quad U_C = -jIX_C$$

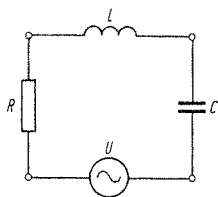
Budući da je $X_L = X_C$ slijedi da je $U_L = -U_C$ što znači da se induktivni i kapacitivni naponi poništavaju, pa sada jednadžba drugog Kirchhoffova zakona:

$$\mathcal{U} = IR + jIX_L - jIX_C$$

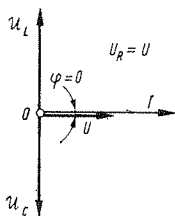
glasi:

$$U = U_R$$

Pri rezonanciji je impedancija strujnog kruga jednaka samo omskom otporu R , pa može struja $I = U/R$ postati vrlo jaka ako je taj otpor malen. Ako su pak otpori X_L i X_C veći od otpora R , bit će i naponi na njima veći od napona izvora U , koji se troši samo za svladavanje protunapona U_R .



a)



b)

Sl. 15.39. a) Serijski spoj R , L , C ; b) Vektorski dijagram pri rezonanciji spoja

Reaktivni naponi U_L i U_C mogu, dakle, biti pri rezonanciji vrlo veliki, pa iako se oni unutar strujnog kruga međusobno kompenziraju i ne opažaju na priključnim stezaljkama cijelog strujnog kruga, oni ipak svaki za se pojedinačno postoje na induktivnom, odnosno kapacitivnom otporu.

Ovi naponi namjerno proizvedeni pri rezonanciji iskorišćuju se u viskofrekventnim uređajima, no oni mogu kao neželjeni eventualno oštetiti izolacije svitka i kondenzatora.

Budući da pri serijskoj rezonanciji dolazi do kompenzacije napona U_L i U_C , serijska se rezonancija naziva i *naponska rezonancija*.

Odnos električkih veličina pri rezonanciji. Iz uvjeta $\omega L = 1/\omega C$ slijedi $\omega^2 LC = 1$, pa je kod rezonancije međusobni odnos veličina ω, L, C dan jednadžbom:

$$\omega^2 = 1/LC \quad \text{gdje je} \quad \omega = 2\pi f.$$

Do rezonancije će, dakle, doći ako uz zadane vrijednosti L i C izvor struje ima frekvenciju:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ili ako se pri zadanoj frekvenciji ω i uz zadani C naravna induktivitet na vrijednost:

$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}$$

a i onda, ako uz zadanu frekvenciju ω i induktivitet L kondenzator ima kapacitet:

$$C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}$$

Kad je kod rezonancije $\omega = \omega_0$ mogu se reaktivni otpori uz supstituciju $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ prikazati slijedećim izrazima:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

dakle je

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C} = \varrho.$$

Pri tome, dakako, veličina ϱ , jer predočuje otpore, ima dimenziju otpora, što se vidi i iz izraza $\sqrt{L/C}$, jer je:

$$\left[\sqrt{\frac{L}{C}} \right] = \sqrt{\frac{Vs}{A} : \frac{As}{V}} = \sqrt{\frac{V^2}{A^2}} = \Omega$$

Zato i nazivaju ϱ *valnim otporom*.

Reaktivni naponi U_L i U_C mogu se pri rezonanciji prikazati i pomoću ove novouvedene veličine ϱ pa iznose:

$$U_L = U_C = I\varrho \quad \text{a to je uz} \quad I = \frac{U}{R}$$

dalje jednako:

$$U_L = U_C = U \frac{\varrho}{R}$$

Odnos napona na induktivnom odnosno na kapacitivnom otporu, pri rezonanciji prema naponu izvora U koji je priveden cijelom serijskom spoju, naziva se *dobrotom strujnog kruga* i označuje slovom Q , pa je:

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\varrho}{R} = Q$$

dok se recipročna vrijednost dobrote naziva *prigušenjem strujnog kruga*:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\varrho}$$

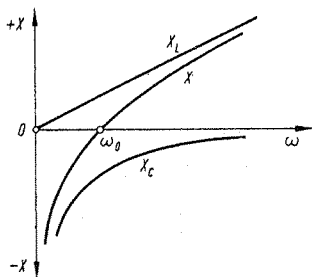
Frekventne karakteristike. Ako se frekvencija od vrijednosti ω_0 , koja odgovara rezonanciji, promijeni i postane veća ili manja od ω_0 , promijenit će se i električne veličine strujnog kruga koje ovise o frekvenciji.

Iz jednadžbi kojima su za serijski spoj definirani reaktivni otpori $X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$, $X = \omega L - 1/\omega C$ te impedancija $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ i $\operatorname{tg} \varphi = (X_L - X_C)/R$, slijedi da pri frekvencijama manjim od ω_0 prevladava u strujnom krugu kapacitivni otpor, pa je $\varphi < 0$, dok će pri frekvencijama većim od ω_0 prevladavati induktivni otpor i $\varphi > 0$. U rezonanciji je $Z = R$, $\varphi = 0$ i u tom trenutku, dolazi, dakle, do promjene predznaka faznog kuta φ . Ekstremne vrijednosti su:

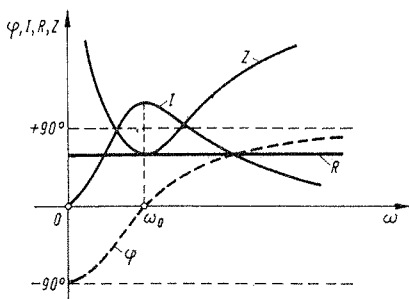
$$\text{za } \omega = 0 \quad X_C = \infty \quad X_L = 0 \quad \varphi = -90^\circ$$

$$\text{a za } \omega = \infty \quad X_L = \infty \quad X_C = 0 \quad \varphi = +90^\circ$$

Krivulje koje predočuju promjene tih veličina u ovisnosti o frekvenciji nazivaju se frekventne karakteristike i prikazane su na slikama 15.40 i 15.41, uz pretpostavku da je omski otpor R konstantan i neovisan o frekvenciji.



Sl. 15.40. Frekventne karakteristike serijskog spoja



Sl. 15.41. Frekventne karakteristike struje u zavisnosti od ω

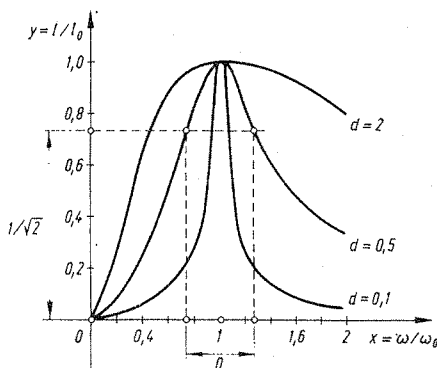
I frekventne karakteristike za struju I i napone U_L i U_C uz konstantnu vrijednost U napona izvora i konstantne parametre strujnog kruga $R = \text{konst.}$, $L = \text{konst.}$ i $C = \text{konst.}$ određuju se također na osnovi jednadžbi kojima su te veličine definirane:

$$I(\omega) = \frac{U}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$U_L(\omega) = I(\omega) \cdot \omega L \quad \text{i} \quad U_C(\omega) = I(\omega) \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Pri tom će — kako se iz ovih jednažbi vidi — te karakteristike ovisiti još i o tome kakve vrijednosti imaju konstantni parametri R , L , C .

Budući da u rezonanciji impedancija ima najmanju vrijednost, imat će struja za $\omega = \omega_0$ najveću vrijednost I_0 a za frekvencije veće i manje od ω_0 jakost struje će se smanjivati da za $\omega = 0$ i $\omega = \infty$ postigne vrijednost nula. Na slici 15.41 je



Sl. 15.42. Frekventne karakteristike reducirane struje I/I_0 u zavisnosti od reducirane frekvencije ω/ω_0

prikazana frekventna karakteristika za struju I u ovisnosti od ω , a uz konstantne vrijednosti R , L , C .

Da bi se dobio što bolji uvid o tome kako na frekventnu karakteristiku struje utječu parametri R , L , C , prikazane su na sl. 15.42 ordinate y te karakteristike u reduciranim vrijednostima I/I_0 , a kao variabla uzete su vrijednosti $x = \omega/\omega_0$.

Dakle je:

$$y = \frac{I}{I_0} = \frac{U}{Z} : \frac{U}{R} = \frac{R}{Z}$$

Impedanciju $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ preoblikovat ćemo primjenom veličine $\varrho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$ u oblik $Z = \sqrt{R^2 + \varrho^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}$ a dalje je uvođenjem dobrote $Q = \varrho/R$ impedancija jednaka:

$$Z = R \cdot \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

Time dobivamo za $y = I/I_0$ jednažbu:

$$y = \frac{R}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Struja, dakle, bitno ovisi o dobroti Q i na slici su prikazane karakteristike I/I_0 za nekoliko raznih $d = 1/Q$.

Pri većim vrijednostima Q (što odgovara manjim prigušenjima $d = 1/Q$) imaju ove karakteristike zvonast oblik, te su to uže, što je Q veće.

Povećanje jakosti struje na rezonantnoj frekvenciji pokazuje da strujni krug može iz skupa raznih frekvencija naročito istaknuti i time odvojiti struju određene frekvencije. To svojstvo selekcije iskorišćuje se u uređajima visoke frekvencije.

Nadalje se iz gornje jednadžbe vidi da istu vrijednost y dobivamo za neku vrijednost apscise x kao i za njenu recipročnu vrijednost $1/x$. Prema tome nam razmak $x - 1/x$ označuje širinu između dvije grane zvonaste karakteristike za pripadnu vrijednost $y = I/I_0$. Ta širina $D = x - 1/x$ može se izračunati za bilo koju zadanu vrijednost y ako poznamo dobrotu strujnog kruga Q .

Tako npr. za jakost struje I koja odgovara n -tom dijelu maksimalne vrijednosti I_0 jednadžba glasi:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 D^2}}$$

odakle slijedi:

$$D = \frac{1}{Q} \sqrt{n^2 - 1} = d \sqrt{n^2 - 1}$$

I obrnuto, ako je zadana krivulja frekventne karakteristike struje: $y = f(x)$ može se iz dijagrama odrediti prigušenje (ili dobrotu) strujnog kruga. Iz jednadžbe $D = d \sqrt{n^2 - 1}$ slijedi da će d biti upravo jednako širini D ako je $\sqrt{n^2 - 1} = 1$, dakle za $n = \sqrt{2}$. To znači: ako odaberemo $y = I/I_0 = 1/\sqrt{2} = 0,707$ pripadna širina jednaka je prigušenju d , slika 15.42.

Selektivno svojstvo strujnog kruga bit će to veće, što je širina D manja, dakle što je dobrotu veća ili što je prigušenje manje.

Frekventne karakteristike napona U_R , U_L i U_C . Uz pretpostavku da je $R = \text{konst.}$ i neovisno o frekvenciji, mijenjat će se napon $U_R = IR$ pri promjeni frekvencije isto kao i struja I , pa je frekventna karakteristika U_R slična frekventnoj karakteristici I , slika 15.43.

Naponi na induktivitetu i kondenzatoru pri frekvencijama različitim od ω_0 dobiju se množenjem struje I s pripadnim otporom:

$$U_L = I \cdot \omega L \quad \text{ i } \quad U_C = I \frac{1}{\omega C}$$

Zbog toga što su struja i otpori ovisni o frekvenciji, dobit će se za ove napone preglednije jednadžbe ako se ti naponi uz uvođenje dobrote Q , odnosno prigušenja strujnog kruga d , predoče opet kao funkcije reducirane frekvencije:

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Struju $I = U / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ možemo, naime, prikazati u obliku:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \varrho^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{U}{\varrho \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

pa za napone U_L i U_C dobivamo slijedeće jednačbe:

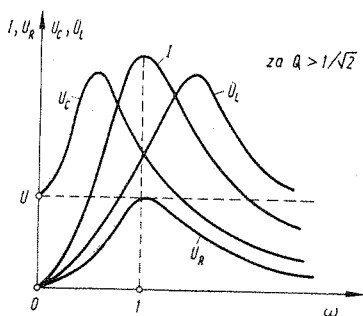
$$U_L = I\omega L = I \cdot x\omega_0 L = I\varrho \cdot x \quad U_C = I \frac{1}{\omega C} = I \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{x} = I\varrho \frac{1}{x}$$

Uvođenjem gornjeg izraza za struju slijedi da je:

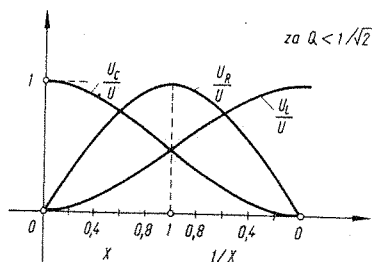
$$I\varrho = \frac{U}{\sqrt{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

pa je:

$$U_L = I\varrho x = \frac{U \cdot x}{\sqrt{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad \text{a} \quad U_C = I\varrho \frac{1}{x} = \frac{U}{x \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$



Sl. 15.43. Frekventne karakteristike za struju i za napone U_L i U_C



Sl. 15.44. Frekventne karakteristike za napone U_L i U_C , uz pretpostavku da je $Q < 1/\sqrt{2}$

Kut faznog pomaka među strujom i naponom za variablu x dan je jednačbom

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \arctg \frac{x\varrho - \frac{1}{x}\varrho}{R} = \arctg Q \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Na osnovi ovih jednačbi mogu se na slici 15.43 nacrtati uz frekventnu karakteristiku struje i frekventne karakteristike za napone.

Iz dobivenih jednadžbi može se saznati da će U_L počev od vrijednosti nula pri $\omega = 0$ s porastom frekvencije rasti, te će pri frekvenciji $x_L = 1/\sqrt{1 - (d^2/2)}$ postići maksimum, da se pri daljnjem povećanju frekvencije smanjuje i za $x = \omega = \infty$ postigne vrijednost $U_L = U$.

Napon na kondenzatoru U_C je za $\omega = 0$ jednak naponu izvora $U_C = U$, a onda će s povećanjem frekvencije i U_C moći postići maksimum pri frekvenciji $x_C = \sqrt{1 - (d^2/2)}$, no pri daljnjem povećanju frekvencije biva postepeno sve manji, da za $\omega = \infty$ postane jednak nuli $U_C = 0$.

Iz izraza x_L i x_C vidi se da će maksimumi $U_{L\max}$ i $U_{C\max}$ doista postojati ako x_L i x_C imaju realne vrijednosti. To će, međutim, biti ispunjeno samo onda ako je izraz pod korijenom pozitivan, tj.:

$$1 - \frac{d^2}{2} > 0 \quad \text{ili ako je} \quad \frac{d^2}{2} < 1$$

dakle za vrijednosti:

$$d < \sqrt{2} \quad \text{ili} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pri tome će realne vrijednosti x_L biti nešto veće od $x = 1$, što znači da U_L postizava maksimalnu vrijednost $U_{L\max} > U$ za frekvencije nešto veće od rezonante frekvencije. Naprotiv će U_C postići maksimum $U_{C\max} > U$ za frekvenciju x_C nešto manju od rezonantne. Pri tome je $U_{L\max} = U_{C\max}$.

Ako je pak $Q < 1/\sqrt{2}$ naponi U_L i U_C nemaju istaknutih maksimuma, nego će U_L monotono od 0 rasti do vrijednosti U , a U_C će monotono padati od U do nule, slika 15.44.

15.6.3.

Paralelna rezonancija

Pri paralelnom spoju G , L , C (slika 15.45) smatramo također rezonancijom ono pogonsko stanje u kojem je kut faznog pomaka između struje i napona na priključnicama spoja jednak nuli.

Iz općenitih jednadžbi kojima su za taj spoj definirani vodljivost Y i kut φ :

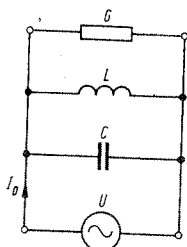
$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} \quad \text{arc tg } \varphi = \frac{B_L - B_C}{G}$$

slijedi da će do rezonancije doći ako je $B_L = B_C$, dakle ako je:

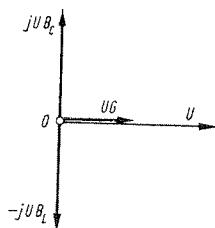
$$\frac{1}{\omega L} = \omega C \quad \text{ili} \quad \omega^2 L C = 1$$

Prema tome i ovdje za paralelnu rezonanciju mora biti ispunjen jedan od triju uvjeta kojim su povezane frekvencija, induktivitet i kapacitet:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ili} \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C} \quad \text{ili} \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}$$



Sl. 15.45. Paralelni spoj R, L, C



Sl. 15.46. Vektorski dijagram pri rezonanciji spoja sa slike 15.45

U ovom idealiziranom paralelnom spoju G, L, C (jer nisu uzeti u obzir omski otpori induktivne i kapacitivne grane) bit će u slučaju rezonancije ukupna reaktivna vodljivost $B = B_L - B_C$ jednaka nuli, pa će ukupna vodljivost biti najmanja i jednaka samo omskoj vodljivosti: $Y = G$.

U vektorskom dijagramu (sl. 15.46) prikazane su uz zadani napon izvora U struje u pojedinim granama:

$$I_R = UG \quad I_L = -jUB_L \quad \text{i} \quad I_C = jUB_C$$

Budući da induktivna i kapacitivna struja imaju u odnosu na napon fazne pomake $+90^\circ$ i -90° one su međusobno suprotne, $I_L = -I_C$ i u ukupnoj se struji izvora pri rezonanciji poništavaju, pa je: $I_0 = I_R + I_L + I_C$:

$$I_0 = U \cdot G$$

Zbog kompenzacije reaktivnih struja naziva se paralelna rezonancija također strujnom rezonancijom.

Struja izvora postizava u rezonanciji svoju minimalnu vrijednost I_0 i ona je jednaka samo struji koja prolazi kroz omsku vodljivost.

Ipak, pod utjecajem zajedničkog napona U struje I_L i I_C postoje i one označavaju struju koja kruži u zatvorenom krugu što ga tvore svitak i kondenzator (slika 15.45), a da se ta struja na priključnicama izvora i ne opaža.

Uz određenu vrijednost napona U bit će za male vrijednosti omske vodljivosti struja I_0 mala, no ako su vodljivosti B_L i B_C veće od G , bit će i struje $I_L = -I_C$ već od I_0 .

Pri rezonanciji bit će, dakle, reaktivna struja veća od ukupne struje ako je:

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma > G$$

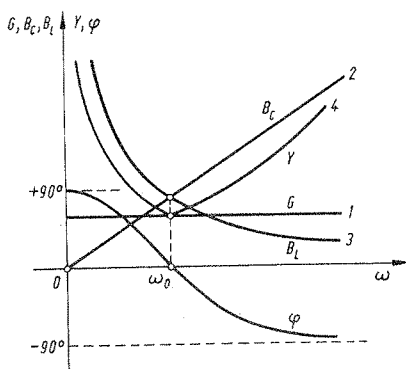
Veličina γ ima dimenziju vodljivosti, pa bi se mogla nazvati valnom vodljivošću prikazanog spoja. Kao dobrota Q ovdje je definiran omjer reaktivne struje pri rezonanciji u odnosu na ukupnu struju I_0 , pa imamo:

$$Q = \frac{I_L}{I_0} = \frac{I_C}{I_0} = \frac{U \omega_0 C}{UG} = \frac{\gamma}{G}$$

a prigušenje kao recipročna vrijednost dobrote jednako je:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{G}{\gamma}$$

Frekventne karakteristike (u ovisnosti o frekvenciji ω) za ovaj spoj prikazane su na slici 15.47. Pravac paralelan s apscisnom osi predočuje konstantnu omsku vodljivost G . Kapacitivna vodljivost $B_C = \omega C$ predočena je pravcem 2 iz ishodišta, dok je induktivna vodljivost $B_L = 1/\omega L$ grana hiperbole 3. Pri konstantnoj efektivnoj vrijednosti U to su i karakteristike pripadnih struja.



Sl. 15.47. Frekventne karakteristike za spoj na slici 15.45

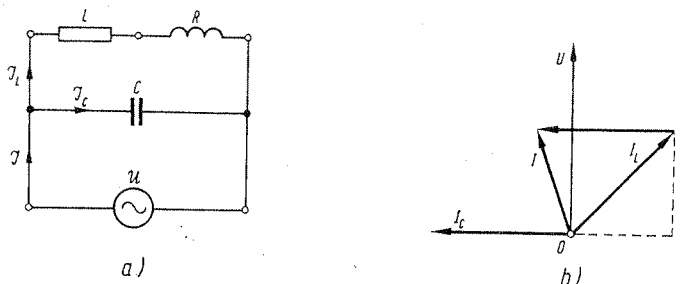
Ukupna vodljivost Y prikazana je krivuljom 4 i ona uz $U = \text{konst.}$ predočuje i karakteristiku ukupne struje: I .

Ukupna reaktivna vodljivost B ima u području frekvencija od 0 do ω_0 induktivan karakter, a za frekvencije veće od ω_0 kapacitivan karakter. Pri rezonantnoj frekvenciji ω_0 mijenja se, dakle, predznak kuta faznog pomaka i tu je $\varphi = 0$.

Za $\omega = \omega_0$ je B jednako nuli, a ukupna vodljivost Y ima minimalnu vrijednost jednaku omskoj vodljivosti G , pa je tu i struja I minimalna.

15.6.4. Paralelna rezonancija realnog svitka i kondenzatora

Prikazani spoj G, L, C (sl. 15.45) ima dakako samo teoretsko značenje, jer se u zbilji ne može normalno izraditi svitak bez omskog otpora. Zato će u daljnjem biti razmatran u rezonanciji paralelni spoj realnog svitka s kondenzatorom, pri čemu se uzima da je R omski otpor svitka koji je u spojnoj shemi (slika 15.48a) serijski spojen s induktivitetom svitka L . Za kondenzator može se odabrati zrak kao izolator, pa se mogu zanemariti dielektrični gubici i zato u kondenzatorskoj grani ne računamo s omskim otporom.



Sl. 15.48. a) Paralelni spoj realnog svitka i kondenzatora bez gubitaka; b) Vektorski dijagram spoja

Vektorski dijagram tog spoja prikazan je za općeniti slučaj na slici 14.48b. U je napon izvora, I_L struja svitka, I_C struja kondenzatora, a I je ukupna struja izvora.

Da se postigne rezonancija u paralelnom spoju mora biti ispunjen uvjet da je $B = B_L - B_C = 0$, odakle:

$$B_L = B_C$$

i tada će se u promatranom spoju kompenzirati jalova komponenta struje I_L i struja I_C .

Za kapacitivnu granu je jalova vodljivost $B_C = \omega C$, a za induktivnu granu se B_L zbog prisustva omskog otpora računa prema jednadžbi:

$$B_L = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Pri rezonantnoj frekvenciji ω_0 bit će $B_{L_0} = B_{C_0}$ ili:

$$\frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C$$

odakle slijedi dalje:

$$\frac{L}{C} = R^2 + \omega_0^2 L^2$$

pa je:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$

i konačno:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{\varrho^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - d^2}$$

Ovdje su za zatvorenu konturu što je tvore svitak i kondenzator upotrijebljene prije izvedene veličine:

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \varrho \quad \text{i} \quad \frac{R}{\varrho} = d.$$

Vidi se da u ovom spoju rezonantnu frekvenciju, osim L i C , određuje i neizbježan omski otpor svitka R .

Prikazani paralelni spoj svitka i kondenzatora označuje za izvor struje impedanciju koja je jednaka:

$$Z = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Pri rezonanciji je struja iz izvora u fazi s naponom, što znači da ova impedancija za rezonantnu frekvenciju ω_0 ima karakter čistog omskog otpora: $R_0 = Z_0$.

Uvrštenjem vrijednosti:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

dobiva se za R_0 jednadžba:

$$R_0 = \frac{\frac{L}{C}}{R} = \frac{\varrho^2}{R}$$

Taj takozvani *rezonantni otpor* R_0 paralelnog spoja svitka i kondenzatora je u realnim izvedbama vrlo velik, jer je otpor svitka R redovno vrlo malen u odnosu na L/C . Zato se kaže da taj spoj predočava za struju rezonantne frekvencije zaporni krug.

U teoretski idealnom slučaju, ako je $R = 0$, bit će $R_0 = \infty$, što znači da će pri rezonanciji struja izvora biti jednaka nuli, a to slijedi i iz razmatranja prijašnjeg spoja G, L, C . Odbacimo li treću granu, tj. G , imamo isti paralelni spoj idealnog svitka s idealnim kondenzatorom, a za taj slučaj pokazuje izvedena jednadžba da je $Y_0 = 0$ ili $R_0 = \infty$.

16.

MJESNI DIJAGRAMI U ELEKTROTEHNICI

16.1.

JEDNADŽBE MJESNIH KRIVULJA

U prijašnjim izvodima su objašnjeni načini kako se mogu odrediti nepoznate struje u granama neke mreže čiji je sastav zadan konstantnim vrijednostima parametara svih izvora i otpora.

Pознаvajući, dakle, i sve struje, lako će se odrediti još ostale tražene veličine: padovi napona, snage i dr.

Poznato je, nadalje, da se najrazličitiji električni uređaji u pogledu njihova djelovanja mogu prikazati sklopom različitih otpora i izvora, a ta se mreža naziva nadomjesnom shemom tog uređaja.

U praksi, međutim, mnogi od tih uređaja ne rade uvijek u istim okolnostima pogona, nego im se tijekom vremena pogonske prilike mijenjaju. To će se u nadomjesnoj shemi odraziti time da će se u shemi mijenjati onaj element (redovno jedna impedancija), o kojem ovisi karakter promjene pogona.

Zbog promjenljivosti samo ove jedne impedancije, iako su parametri svih ostalih električnih veličina nepromijenjeni, mijenjat će se strujne i naponske prilike u granama sheme.

Budući da se sinusoidalne struje i naponi simbolički predočuju kompleksnim brojevima, mijenjat će se u kompleksnoj ravnini i vektor one veličine koja nas konkretno zanima. Ako je to, na primjer, struja I u nekoj grani, moći će se sve promjene vektora te struje zorno prikazati tako, da se u kompleksnoj ravnini nacrtaju krivulja koja predočuje geometrijsko mjesto niza krajnjih točaka vektora struje. Te krivulje geometrijskih mjesta zovu se i *mjesni dijagrami* (Locus diagram).

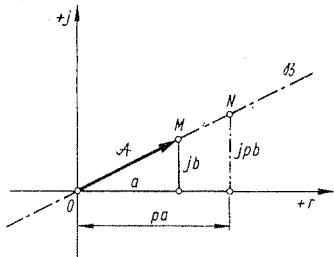
Najjednostavniji mjesni dijagram je pravac, ali moguće su — posve općenito — i bilo kakve krivulje. Posebno su pak važni u elektrotehnici *kružni dijagrami*.

Da bi se prilike u promjenljivim okolnostima pogona električnih uređaja mogle pobliže i matematički analizirati uz primjenu mjesnih dijagrama, potrebno je znati kako u kompleksnom području glase jednadžbe tih krivulja koje predočuju mjesne dijagrame.

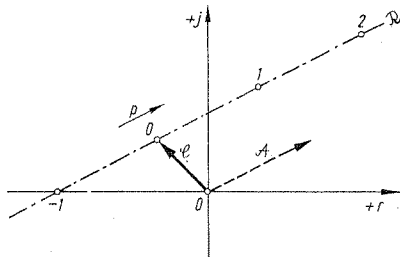
16.1.1.

Jednadžba pravca

Otprije je poznato da je kompleksnim brojem $\mathcal{A} = a + jb$ predločen planarni vektor povučen iz ishodišta kompleksne ravnine, a njegove komponente a i b mogu se smatrati ujedno i koordinatama s kojima je određen položaj točke M u kompleksnoj ravnini, slika 16.1.



Sl. 16.1. Točka i pravac koji prolazi ishodištem u kompleksnoj ravnini



Sl. 16.2. Općeniti položaj pravca u kompleksnoj ravnini

Pomnože li se te koordinate istim parametrom p dobivaju se koordinate ap i bp neke nove točke N , slika 16.1. Budući da su ove koordinate proporcionalne s koordinatama a i b točke M , to točke M i N leže na istom pravcu koji prolazi kroz ishodište.

Mijenjanjem vrijednosti parametra p od $-\infty$ do $+\infty$ dobiva se beskonačan niz točaka, pa tako kompleksni broj $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = pa + jpb = p(a + jb)$$

ili

$$\mathcal{B} = p \cdot \mathcal{A}$$

predočava uz $-\infty < p < +\infty$ jednadžbu pravca $\mathcal{B}$ koji prolazi kroz ishodište kompleksne ravnine, slika 16.1.

Da se dobije pravac koji u kompleksnoj ravnini prolazi bilo kako, a ne baš kroz ishodište, dovoljno je prvotni pravac $\mathcal{B}$ pomaknuti, a to se može jednostavno postići tako da se svakoj točki pravca $\mathcal{B}$ doda još npr. konstantni kompleksni broj $\mathcal{C}$, slika 16.2. Time se dobiva jednadžba pravca u općenitom položaju $\mathcal{R} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ ili:

$$\mathcal{R} = p\mathcal{A} + \mathcal{C}$$

16.1.2.

Jednadžba kružnice

Jednadžba kružnice u kompleksnoj ravnini dobije se primjenom geometrijskih pravila koja se odnose na tetivu u kružnici.

Na slici 16.3 prikazana je kružnica koja prolazi ishodištem O kompleksne ravnine, a ucrtanu tetivu $\overline{OK}$ predočuje konstantni vektor $\mathcal{T}$, koji možemo zamisliti da je sastavljen od vektora $\overline{OP} = \mathcal{T}_0$ i vektora $\overline{PK} = \mathcal{T}_k$.

Pomicanjem točke P na kružnici mijenjat će se obje komponente po smjeru i veličini, ali će uvijek vektor $\mathcal{T}_k$ prethoditi ispred vektora $\mathcal{T}_0$ za konstantni kut β .

To, naime, određuje poznato pravilo geometrije da je u kružnici nad tetivom periferni kut α isti za svaku točku na promatranom kružnom luku. Budući da je $\beta = 180^\circ - \alpha$, bit će i kut β konstantan.

Omjer dužina modula obiju komponenata mijenja se u ovisnosti o položaju točke P na kružnom luku, pa zato smatramo ovdje taj omjer promjenljivim parametrom i označujemo ga slovom p :

$$p = \frac{PK}{OP}$$

Dužina vektora $\mathcal{T}_k$ jednaka je, dakle $PK = p \cdot OP$, a kako je vektor $\mathcal{T}_k$ prema vektoru $\mathcal{T}_0$ pomaknut za kut β u pozitivnom smjeru, slijedi da je:

$$\mathcal{T}_k = p \cdot \mathcal{T}_0 \cdot e^{j\beta}$$

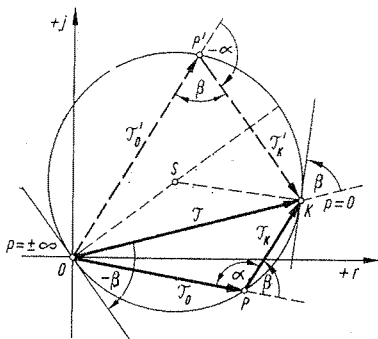
Moguće je, dakle, tetivu $\mathcal{T}$ prikazati sumom:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_k = \mathcal{T}_0 \cdot (1 + p \cdot e^{j\beta})$$

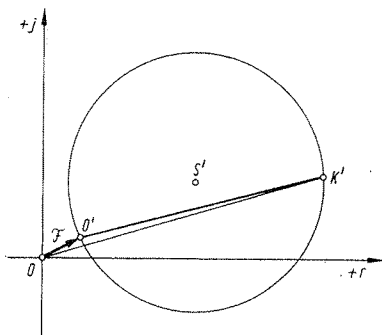
a odavde je:

$$\mathcal{T}_0 = \frac{\mathcal{T}}{1 + p \cdot e^{j\beta}}$$

Uz konstantne vrijednosti $\mathcal{T}$ i β , a pri promjenljivim vrijednostima parametra p , definira kompleksni broj $\mathcal{T}_0$ položaj svih točaka na kružnom luku, pa zaključujemo da izraz $\mathcal{T}_0$ predočuje jednadžbu promatranog luka kružnice koja prolazi ishodištem O kompleksne ravnine.



Sl. 16.3. Kružnica koja prolazi ishodištem kompleksne ravnine



Sl. 16.4. Kružnica u općenitom položaju u kompleksnoj ravnini

Na tom kružnom luku pomicanjem točke P od ishodišta O do točke K mijenja se vektor $\mathcal{T}_0$ od vrijednosti $\mathcal{T}_0 = 0$ do $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, pri čemu parametar p ima sve pozitivne vrijednosti od $+\infty$ do 0. Te se vrijednosti parametra mogu kao karakteristični podaci naznačiti na samoj kružnici.

Pogledajmo sada gornji luk te iste kružnice, slika 16.3. I tamo je periferni kut nad tetivom $\mathcal{T}$ isti za svaku točku tog luka, ali se on razlikuje od kuta α koji smo imali za točke donjeg dijela kružnice.

Međutim, općenito vrijedi pravilo da je zbroj perifernih kutova jednog i drugog dijela kružnice nad istom tetivom jednak točno 180° . Zato je, uz oznake na slici 16.3, taj kut gornjeg luka upravo jednak kutu β za koji smo imali prijašnju relaciju: $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Ako se sada i ovdje provedu slična razmatranja kao prije, može se tetiva $\mathcal{T}$ prikazati kao suma vektora: $\overline{OP'} = \mathcal{T}'_0$ i vektora $\overline{P'K} = \mathcal{T}'_k$ pri čemu je:

$$\mathcal{T}'_k = p \cdot \mathcal{T}'_0 \cdot e^{-ja}$$

jer je sada vektor $\mathcal{T}'_k$ u negativnom smjeru pomaknut od vektora $\mathcal{T}'_0$ za kut α .

Dakle je:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}'_0 + \mathcal{T}'_k = \mathcal{T}'_0 \cdot (1 + p \cdot e^{-ja})$$

ili:

$$\mathcal{T}'_0 = \frac{\mathcal{T}}{1 + p \cdot e^{-ja}}$$

Budući da je $(-\alpha) = (\beta - 180^\circ)$ izlazi da je $e^{-ja} = -e^{j\beta}$ pa je:

$$\mathcal{T}'_0 = \frac{\mathcal{T}}{1 - p \cdot e^{j\beta}}$$

što znači da za točke gornjeg dijela kružnog luka vrijedi ista jednadžba kao i za donji dio, s tom razlikom, da ovdje parametar poprima negativne vrijednosti.

Na cijelu kružnicu koja prolazi ishodištem može se, dakle, primijeniti jedinstvena jednadžba:

$$\mathcal{T}_0 = \frac{\mathcal{T}}{1 + p \cdot e^{j\beta}}$$

ako pustimo da se promjenljivi parametar mijenja od $+\infty$ preko nule do $-\infty$.

Razlomak na desnoj strani jednadžbe može se proširiti konstantnim vektorom $\mathcal{Q}$ a da pri tom jednadžba zadrži svoju vrijednost, pa se time dobiva općenitiji oblik jednadžbe kružnice koja prolazi kroz ishodište kompleksne ravnine:

$$\mathcal{T}_0 = \frac{\mathcal{Q}\mathcal{T}}{\mathcal{Q} + p\mathcal{Q}e^{j\beta}} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{Q} + p \cdot \mathcal{Q}}$$

pri čemu je: $\mathcal{E} = \mathcal{Q}\mathcal{T}$, a $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}e^{j\beta}$.

Kružnicu u bilo kojem položaju, koja dakle ne prolazi ishodištem kompleksne ravnine, dobivamo ako kružnicu $\mathcal{T}_0$ pomaknemo iz ishodišta time, što svakoj njenoj točki dodamo neki vektor $\mathcal{F}$, slika 16.4.

Tako se dobiva općeniti oblik jednadžbe kružnice u kompleksnoj ravnini:

$$\mathcal{K} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{F} = \mathcal{F} + \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{C} + p\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{F}\mathcal{C} + p \cdot \mathcal{F}\mathcal{D}}{\mathcal{C} + p\mathcal{D}}$$

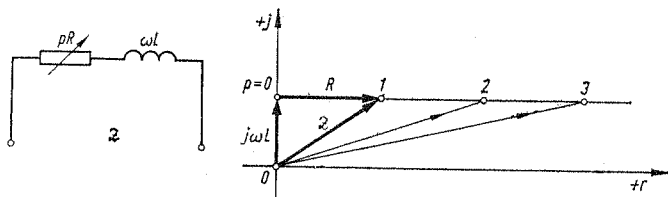
i konačno:

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{A} + p\mathcal{B}}{\mathcal{C} + p\mathcal{D}}$$

pri čemu je $\mathcal{A} = \mathcal{E} + \mathcal{F}\mathcal{C}$ i $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{D}$.

16.1.3. Pravac kao mjesni dijagram promjenljive impedancije

Ako se u serijskom spoju omskog i induktivnog otpora pri konstantnom induktivitetu L i konstantnoj frekvenciji mijenja vrijednost omskog otpora, imat će impedancija $\mathcal{Z} = pR + j\omega L$ različite vrijednosti, ovisno o promjenljivom parametru p . Budući da omski otpor ima samo pozitivne vrijednosti, može se parametar p mijenjati samo od 0 do $+\infty$. Na slici 16.5 su prikazani spojna shema i pravac kao dijagram promjenljive impedancije, a na njemu su posebno istaknute točke kojima pripadaju označene vrijednosti parametra p .



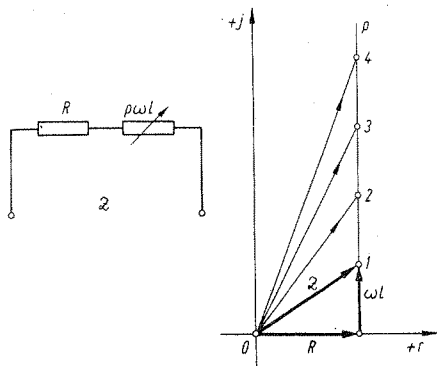
Sl. 16.5. Pravac impedancije $\mathcal{Z} = pR + j\omega L$

I da je otpor R konstantan, a mijenja se induktivni otpor X_L , dobiva se također pravac kao geometrijsko mjesto za impedanciju $\mathcal{Z}$, čija je jednadžba sada: $\mathcal{Z} = R + jp\omega L$. Sad je taj pravac drugačije smješten u kompleksnoj ravnini, kako to prikazuje slika 16.6. Pri tome možemo zamisliti da do promjene X_L dolazi uz $L = \text{konst.}$ zbog promjene frekvencije f .

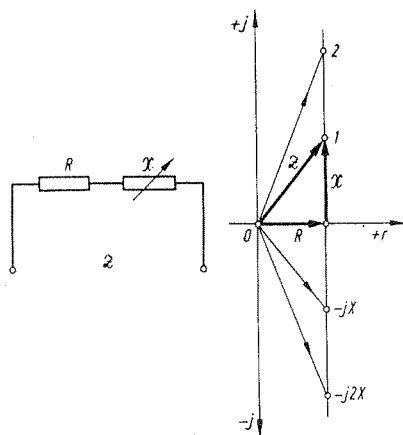
Pravac kao geometrijsko mjesto promjenljive impedancije dobiva se i u općenitijem slučaju kad se impedancija $\mathcal{Z}$ sastoji od konstantnog omskog otpora R i serijski povezanog reaktivnog otpora $\mathcal{X}$ koji se ne mijenja samo brojem oma, nego i po predznaku, pa je jednadžba dana izrazom:

$$\mathcal{Z} = R + p\mathcal{X}$$

Promjena predznaka veličine X dobiva se tako da se ovdje parametar p mijenja od $+\infty$ preko nule do $-\infty$. Za pozitivne vrijednosti reaktancija je induktivna karaktera, a negativnim vrijednostima p pripadaju kapacitivne reaktancije, slika 16.7.



Sl. 16.6. Pramac impedancije $Z = R + jp\omega L$

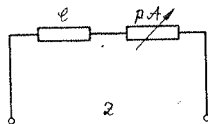


Sl. 16.7. Pramac impedancije $Z = R + p \cdot X$

Pravac u potpuno općenitom položaju, kao onaj na slici 16.2, označavat će mjesni dijagram za impedanciju, koju dobivamo kao rezultantu serijskog spoja konstantne impedancije $\mathcal{C}$ s promjenljivom impedancijom $p \cdot \mathcal{A}$, slika 16.8.

Poznavajući mjesne dijagrame impedancije Z mogu se odrediti promjene, pa i dijagrami, ostalih električnih veličina promatrane spojne sheme.

Sl. 16.8. Pramac impedancije $Z = \mathcal{C} + p \cdot \mathcal{A}$



Ako je npr. promjenljiva impedancija Z priključena na izvor konstantne struje bit će napon na impedanciji $\mathcal{U} = I \cdot Z$ proporcionalan impedanciji, pa će mjesni dijagram napona $\mathcal{U}$ biti isti — samo u drugom mjerilu — kao i dijagram impedancije.

Budući da se električni uređaji napajaju redovno od izvora konstantnog napona, mijenjat će se u tom slučaju zbog promjene impedancije jakost struje, pa je s time u vezi potrebno odrediti mjesni dijagram struje.

Iz jednadžbe $\mathcal{I} = \mathcal{U}/Z = \mathcal{U}\mathcal{Y}$ vidi se da je pri stalnom naponu struja ovisna o recipročnoj vrijednosti impedancije, ili izravno proporcionalna vodljivosti.

Da se nađe mjesni dijagram struje potrebno je, dakle, iz zadanog dijagrama impedancije prethodno odrediti dijagram promjenljive vodljivosti.

Budući da je vodljivost recipročna vrijednost impedancije, može se za svako $\mathcal{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$ izračunati:

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}$$

pa svakoj točki dijagrama $\mathcal{Z}$ naći pripadnu vrijednost $\mathcal{Y}$ i tako cijeli dijagram vodljivosti.

16.1.4.

Inverzija. Jedinična kružnica

Inverzija je postupak kojim se određuje recipročna vrijednost neke zadane veličine.

U elektrotehnici zanimaju nas problemi inverzije električnih veličina, koje su simbolički predočene kompleksnim brojevima, pa će u slijedećim razmatranjima biti objašnjena osnovna pravila invertiranja kompleksnih brojeva, a zatim će biti prikazano i invertiranje mjesnih krivulja.

Neka npr. kompleksni broj $5 \cdot e^{ja}$ predočen na slici 16.9 vektorom $\overline{OA}$ reprezentira impedanciju $\mathcal{Z} = 5 \cdot e^{ja} \Omega$ nekog elementa mreže. Vodljivost $\mathcal{Y}$ tog elementa jednaka je recipročnoj vrijednosti otpora, a dobiva se invertiranjem vektora $\mathcal{Z}$:

Na osnovi jednadžbe: $\mathcal{Y} = 1/\mathcal{Z} = 1/Z \cdot e^{-ja}$ slijedi da je:

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{5} \cdot e^{-ja} \text{ S}$$

što znači da se kompleksni broj invertira tako da se najprije izračuna modul $Y = \overline{OB'} = 1/5$ invertirane veličine, a onda se ta dužina prenese na zraku koja prema realnoj osi zatvara kut $(-a)$ i time se dobiva vektor:

$$\mathcal{Y} = \overline{OB}$$

Na slici 16.9 je pretpostavljeno bilo da su za grafičko predočavanje otpora i vodljivosti primijenjena ista mjerila, što znači da ista dužina predočuje 1Ω kao i 1 S .

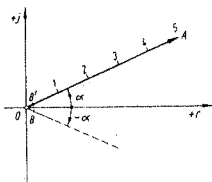
U ovom je primjeru uzeto: $m_1 = 5 \text{ mm}/\Omega$ i $m_2 = 5 \text{ mm}/\text{S}$, pa je zbog toga dužina vektora otpora $\overline{OA} = 25 \text{ mm}$, dok je vektor vodljivosti $\mathcal{Y}$ dug tek 1 mm .

Budući da su recipročne vrijednosti velikih brojeva mali brojevi (i obrnuto, malih brojeva veliki brojevi), primjenjuju se za grafičko predočavanje pri inverziji redovno različita mjerila za osnovnu i invertiranu veličinu. Na taj način crtani dijagrami omogućuju da se sve veličine mogu očitati mnogo točnije.

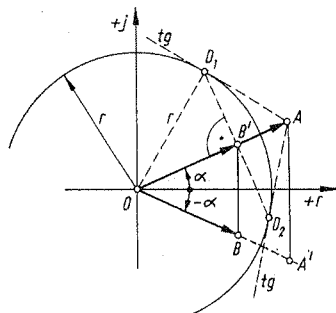
Da bi se u prijašnjem primjeru invertiranjem dobila veća duljina vektora vodljivosti $\mathcal{Y}$ uzet će se za vodljivost drugo mjerilo i to npr. $m_2 = 80 \text{ mm/S}$. Tako se dobiva na slici 16.10 da je dužina vektora vodljivosti jednaka:

$$OB = \frac{1}{5} S \cdot 80 \text{ mm/S} = 16 \text{ mm}$$

Mjerila m_1 i m_2 mogu se, dakako, odabrati po volji, pa je potrebno još vidjeti kako njihov izbor i inače utječe na postupak inverzije.



Sl. 16.9. Inverzija impedancije $Z = 5 \cdot e^{-j\alpha}$ uz ista mjerila za Z i $\mathcal{Y}$



Sl. 16.10. Inverzija uz promijenjena mjerila za Z i $\mathcal{Y}$ i kružnica inverzije

Budući da su otpor i vodljivost kao fizikalne veličine međusobno recipročne, njihov će umnožak uvijek biti jednak: 1.

$$Z \cdot Y = 1$$

Međutim, umnožak dužina kojima su te veličine predložene kao vektori, jednak je:

$$OA \cdot OB' = Z m_1 \cdot Y m_2 = ZY \cdot m_1 m_2$$

dakle:

$$OA \cdot OB' = m_1 \cdot m_2$$

Taj umnožak obaju mjerila naziva se potencija inverzije i označuje sa r^2 :

$$m_1 \cdot m_2 = r^2$$

a odavde slijedi da je umnožak obaju modula jednak potenciji inverzije:

$$OA \cdot OB' = r^2$$

Ova jednadžba upućuje kako se grafički geometrijskim postupkom može obaviti inverzija zadanog vektora. Ako se, naime, oko ishodišta O opiše kružnica ra-

dijusa r , a s vrha A vektora Z povuku tangente na kružnicu, spojnica dirališta D_1, D_2 presijeca zraku vektora Z u točki B' , pa je $Y = OB'$, slika 16.10.

Dokaz ispravnosti ove konstrukcije daje poznato pravilo geometrije koje kaže da je kvadrat nad katetom pravokutnog trokuta jednak umnošku hipotenuze s pripadnim odreskom na hipotenuzi, a to je prema slici:

$$OA \cdot OB' = r^2$$

Kružnica radijusa $r = m_1 \cdot m_2$ pomoću koje se vrši inverzija naziva se kružnica inverzije.

Budući da su obje veličine, Z i Y , međusobno recipročne, postupak inverzije može se izvršiti i u obrnutom smislu.

Ako je, dakle, zadana veličina koju je trebalo invertirati veća od radijusa: $OA > r$, primjenjuje se gore prikazani postupak, a ako je zadana veličina manja od radijusa, kao npr. $OB' < r$, inverzija se vrši obrnutim redoslijedom, što znači da se u točki B' povuče okomica na smjer OB' koja siječe kružnicu inverzije u točkama D_1, D_2 . Tangente na kružnicu u tim točkama sijeku zraku OB' u točki A , tako da je:

$$OA = \frac{1}{OB'}$$

Da se dobije ispravan položaj vektora invertirane veličine, koja ima negativan argument, već se u početku postupka nacrtaju zrake OB pod kutom $(-\alpha)$ i na njoj označi zadanoj točki A zrcalna slika A' . Iz nje se povuku tangente i dalje nastavi postupak kako je prije navedeno.

U našem primjeru, slika 16.10 bila su odabrana mjerila $m_1 = 5 \text{ mm}/\Omega$ i $m_2 = 80 \text{ mm}/S$, pa je potencija inverzije:

$$r^2 = m_1 \cdot m_2 = 5 \cdot 80 = 400 \text{ mm}^2$$

a radijus kružnice inverzije $r = \sqrt{400} = 20 \text{ mm}$.

Za zadanu impedanciju $Z = 5 \cdot e^{j\alpha}$ pripadna je vodljivost $Y = 1/5 e^{-j\alpha} S$, a grafičkim je postupkom dobivena za Y dužina $OB = 16 \text{ mm}$, što daje:

$$Y = OB : m_2 = 16 : 80 = \frac{1}{5} S$$

Jedinična kružnica. Budući da se mjerila m_1 i m_2 mogu po volji odabrati, radijus kružnice inverzije r može prema jednadžbi:

$$m_1 \cdot m_2 = r^2$$

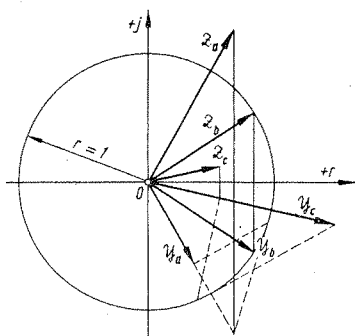
postići bilo koju vrijednost. Ako pak svojevoljno uzmemo da je radijus jednak jedinici dužine, $r = 1$, bit će mjerila m_1 i m_2 međusobno recipročne veličine, jer je tada:

$$m_1 \cdot m_2 = 1^2 = 1$$

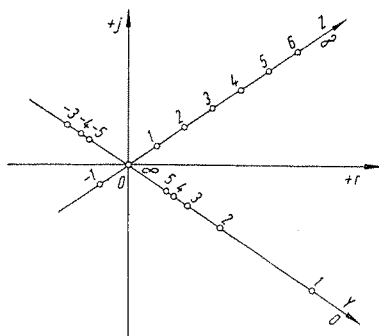
U tom će slučaju onda i dužine vektora Z i Y , tj. njihovi moduli, biti brojčano recipročni, što pokazuje jednačina:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = Zm_1 \cdot Zm_2 = ZY \cdot m_1 m_2 = 1$$

To znači: ako je dužina vektora otpora jednaka, npr. dvije jedinice dužine: $2r$, vektor vodljivosti bit će samo $r/2$, dok otporu koji je predložen baš jedinicom dužine: r , pripadna vodljivost ima također dužinu jednaku jedinici r , slika 16.11.



Sl. 16.11. Inverzija pomoću jedinične kružnice



Sl. 16.12. Inverzija pravca koji prolazi ishodištem je opet pravac kroz ishodište

Grafički postupak inverzije pomoću takve kružnice, koja se sada naziva jedinična kružnica, vrši se dakle tako da se u kompleksnoj ravнини po volji odabere jedinica za mjerenje dužina, a to će ujedno biti radijus kružnice inverzije r , slika 16.11. Isto se tako pretpostavi da ta jedinična dužina predločuje neki (u ovisnosti o otporima zadane sheme) po volji odabrani broj oma Z' .

Ta ista dužina sada će zbog recipročnosti predstavljati vodljivost iznosa:

$$Y' = \frac{1}{Z'}$$

Time su određena mjerila za osnovnu i invertiranu veličinu, pa se invertiranje može provesti na prije prikazani način.

16.1.5.

Invertiranje mjesnih dijagrama

Ako bi se prikazanim načinom invertirale pojedine točke ma kakve krivulje koja predločuje mjesni dijagram promatrane veličine zadane spojne sheme, mogao bi se konstruirati kompletni *mjesni dijagram inverzne veličine*.

Međutim, za pravac i kružnicu koji predločuju mjesni dijagram zadane veličine mogu se dobiti mjesni dijagrami inverzne veličine posebnim grafičkim postupcima.

Pogledajmo kako izgleda **inverzija pravca**. Ako pravac prolazi ishodištem kompleksne ravnine bit će i njegova inverzija pravac kroz ishodište, samo će njegov prikloni kut prema realnoj osi biti negativan. Točke označenih vrijednosti promjenljivog parametra bit će raspoređene po recipročnom zakonu, slika 16.12. Jednadžba zadanog pravca je $\mathcal{B} = p A e^{ja}$, a njegova inverzija je:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1}{p A} e^{-ja} = C(p) \cdot e^{-ja}$$

dakle opet jednadžba pravca.

Pravac koji ne prolazi ishodištem ima jednadžbu:

$$\mathcal{R} = \mathcal{C} + p A$$

a njoj recipročna jednadžba:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{C} + p A}$$

predočuje kružnicu koja prolazi ishodištem.

Položaj te kružnice u kompleksnoj ravnini može se odrediti na temelju slijedećih razmatranja.

16.1.6.

Kružnica kao inverzija pravca

Budući da je kružnica inverzija pravca, to su ordinate točke na kružnici i ordinate pravca međusobno recipročne veličine. Tako je moguće lako naći dvije točke kružnice koje pripadaju naročito karakterističnim točkama pravca.

To je prvenstveno, kao što je poznato, ishodište O kao jedna točka kružnice koja je inverzija beskonačno udaljene točke pravca, jer je za:

$$p = \infty \quad R_{\max} = \infty \quad \text{pa je} \quad K = \frac{1}{R} = 0$$

Drugu karakterističnu točku kružnice dobivamo kao inverziju minimalne vrijednosti vektora $R_{\min}$. Ta najmanja vrijednost modula R je, dakle, normala n povučena iz ishodišta O na pravac, a njena inverzija je (zbog recipročnosti) najveći vektor kružnice: Od , slika 16.13.

Točka d je, prema tome, najudaljenija od O , pa je tako Od dijametar kružnice čije se središte S nalazi na polovici Od . Dijametar Od je dakle inverzija normale n .

Uz po volji odabrana mjerila m_1 i m_2 za osnovnu i invertiranu veličinu dobiva se slijedeća relacija, koja je već prije izvedena kao općenito valjani odnos pri inverziji:

$$d = Y \cdot m_2 \quad n = Z \cdot m_1$$

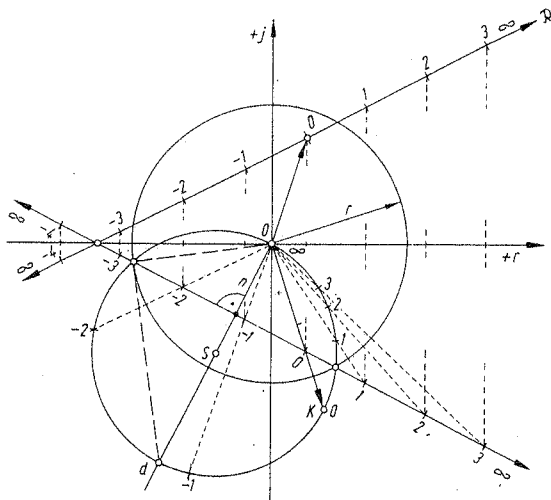
pa je:

$$d \cdot n = YZ \cdot m_1 m_2 = m_1 \cdot m_2$$

i konačno:

$$d = \frac{m_1 \cdot m_2}{n}$$

Da se dobije odmah ispravan položaj kružnice u kompleksnoj ravnini, navedeni postupak invertiranja vrši se na zrcalnoj slici pravca $\mathcal{D}$. Konstrukcija je izvedena pomoću jediničnog kruga.



Sl. 16.13. Inverzija pravca koji ne prolazi ishodištem je kružnica koja prolazi kroz ishodište

Iz ovih razmatranja možemo navesti nekoliko pravila za inverziju pravca:

1) Inverzija pravca u općenitom položaju bit će kružnica koja prolazi ishodištem, a njeno središte nalazi se na okomici povučenoj iz ishodišta O na zrcalnu sliku pravca. Veličina dijametra ovisna je o odabranim mjerilima i jednaka je:

$$d = \frac{m_1 \cdot m_2}{n}$$

2) Inverzija pravca koji prolazi kroz ishodište O je krug beskonačnog dijametra koji također prolazi ishodištem, a to je pravac. Tu je, naime, $n = 0$ pa je $d = \infty$.

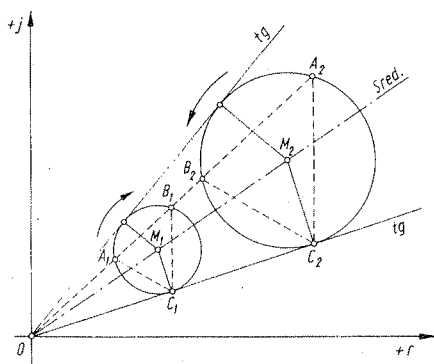
3) Obrnuto je također inverzija kružnice koja prolazi ishodištem pravac koji je okomit na dijametar koji prolazi ishodištem, a udaljenost pravca n od ishodišta određuje se također pomoću gornje jednadžbe:

$$n = \frac{m_1 \cdot m_2}{d}$$

16.1.7.

Kružnica u općenitom položaju

Inverzijom zadane kružnice, koja se u kompleksnoj ravнини nalazi u općenitom položaju (tj. ne prolazi ishodištem niti ne obaviја ishodište), dobiva se kružnica koja sa zadanom ima zajedničke tangente povučene iz ishodišta.



Sl. 16.14. Inverzija kružnice u općenitom položaju

Geometrijski gledano, to znači da su obje kružnice u sličnom položaju s obzirom na ishodište O .

Kao dokaz za to služi slijedeći matematički izvod u vezi s oznakama na slici 16.14:

$$\triangle OA_1 C_1 \approx \triangle OB_2 C_2 \quad \text{ i } \quad \triangle OB_1 C_1 \approx \triangle OA_2 C_2$$

Iz ovih relacija dobivaju se dva razmjera:

$$OA_1 : OB_2 = OC_1 : OC_2$$

$$OB_1 : OA_2 = OC_1 : OC_2$$

Budući da su desne strane obaju razmjera jednake, izlazi dalje da je:

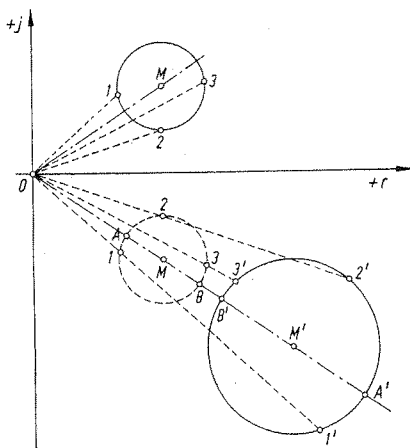
$$OA_1 : OB_2 = OB_1 : OA_2$$

a odavde dobivamo relaciju da je.

$$OA_1 \cdot OA_2 = OB_1 \cdot OB_2 = K = \text{konst.}$$

Vidimo da je umnožak modula za dvije točke osnovne i inverzne kružnice na jednoj zruci iz ishodišta konstantan, a time je ispunjen zahtjev koji se traži pri inverziji. Konstanta K je potencija inverzije i predočuje i ovdje umnožak mjerila.

Od zadane točke A_1 na jednoj kružnici, njezina inverzija je točka A_2 na drugoj kružnici. To isto vrijedi i za točke B_1 i B_2 . Pri tom je karakteristično slijedeće: ako se promjenom parametra pomiče točka po kružnici od A_1 prema B_1 u smjeru označene strelice, pomicat će se na drugoj kružnici odgovarajuća točka A_2 prema B_2 u obrnutom smjeru.



Sl. 16.15. Ispravan položaj invertiranih kružnica

Grafički se inverzija općenito položene kružnice vrši najjednostavnije tako da se svojevolumno odabranim mjerilima invertiraju one dvije točke kojima na zruci OM pripadaju najmanja i najveća vrijednost modula vektora zadane kružnice. Time se na zruci OM dobiju točke najveće i najkraće udaljenosti od O i za invertiranu kružnicu, pa je tako određen njen dijametar. U sredini među tim točkama je središte invertirane kružnice i ona će dodirivati obje tangente.

Da se dobije ispravan položaj svih invertiranih vektora najprije će se nacrtati, s obzirom na realnu os, zrcalna slika zadane kružnice i na njoj izvršiti prikazani postupak, slika 16.15.

17.

VIŠEFAZNE STRUJE

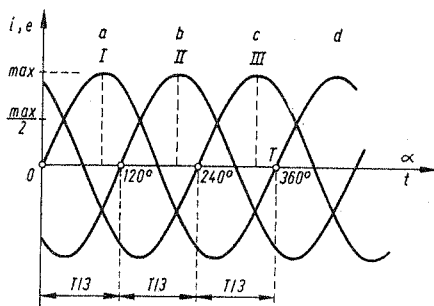
17.1.

TROFAZNA STRUJA

17.1.1. Općeniti prikaz trofazne struje (ili napona)

Trofazna struja skraćeni je naziv za sustav triju izmjeničnih struja koje su međusobno vremenski fazno pomaknute za jednu trećinu periode, što odgovara faznom kutu od 120° .

Ako su, osim toga, amplitude svih triju sinusoidalnih struja jednake, takav je sustav simetričan, pa se može u vremenskom dijagramu prikazati sa tri potpuno jednake sinusoidalne krivulje koje su međusobno pomaknute za $T/3$, slika 17.1.



Sl. 17.1. Vremenski prikaz struja simetričnog trofaznog sustava

Analitički izrazi ovih triju struja simetričnog trofaznog sustava dani su jednadžbama:

$$\begin{aligned} i_I &= I_{\max} \sin \omega t \\ i_{II} &= I_{\max} \sin (\omega t - 120^\circ) \\ i_{III} &= I_{\max} \sin (\omega t - 240^\circ) \end{aligned}$$

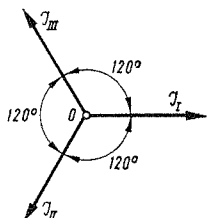
U vektorskom dijagramu predložene su te struje u efektivnim vrijednostima sa tri jednaka vektora koji su geometrijski razmaknuti za 120° , slika 17.2, a pri simboličkom računanju pripadaju tim vektorima kompleksni brojevi:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_I &= I \\ \mathcal{I}_{II} &= I \cdot e^{-j120^\circ} \\ \mathcal{I}_{III} &= I \cdot e^{-j240^\circ} \end{aligned} \quad I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

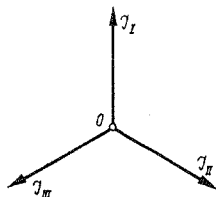
U prikazanom trofaznom sustavu pretpostavili smo da jakost prve (referentne) struje počinje rasti od vrijednosti nula u pozitivnom smjeru u trenutku:

$$t = 0$$

pa je zato vektor te struje položen u horizontalnu realnu os brojčane ravnine.



Sl. 17.2. Vektorski prikaz struja trofaznog sustava sa slike 17.1



Sl. 17.3. Vektorski dijagram trofaznog sustava struja uz pretpostavku $\beta_{II} = 90^\circ$

Budući da pri crtanju vektorskog dijagrama možemo vektor referentne veličine kojom počinjemo crtati dijagram postaviti po volji u ma koji položaj, možemo posve općenito struji i_I pripisati bilo koje početno fazno stanje, kojem odgovara fazni kut β_I , pa će sustav strujnih jednadžbi glasiti:

$$i_I = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_I)$$

$$i_{II} = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_I - 120^\circ)$$

$$i_{III} = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_I - 240^\circ)$$

Pripadni kompleksni brojevi ovih struja su:

$$\mathcal{I}_I = I \cdot e^{j\beta_I} = \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I}_{II} = I \cdot e^{j\beta_I} \cdot e^{-j120^\circ} = \mathcal{I} \cdot e^{-j120^\circ}$$

$$\mathcal{I}_{III} = I \cdot e^{j\beta_I} \cdot e^{-j240^\circ} = \mathcal{I} \cdot e^{-j240^\circ}$$

Ako bismo, kako to često biva, postavili vektorski dijagram tako da je vektor referentne struje i_I crtan u vertikalnom položaju, slika 17.3, imali bismo za pojedine struje slijedeće kompleksne brojeve:

$$\mathcal{I}_I = I \cdot e^{j90^\circ}$$

$$\mathcal{I}_{II} = I \cdot e^{-j30^\circ}$$

$$\mathcal{I}_{III} = I \cdot e^{-j150^\circ}$$

Faktor e^{j120° koji zakreće vektor za 120° u pozitivnom smjeru (suprotno od kazaljke na satu) nazivamo *operatorom rotacije* i označujemo slovom a :

$$a = e^{j120^\circ}$$

Potencije tog broja imaju slijedeće vrijednosti:

$$a^0 = e^0 = 1$$

$$a = e^{j120^\circ} = e^{-j240^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 = e^{j360^\circ} = e^0 = 1$$

$$a^4 = a \text{ itd.}$$

pa možemo kompleksne brojeve struja simetričnog trofaznog sustava prikazati i ovako:

$$I_I = I$$

$$I_{II} = a^2 \cdot I$$

$$I_{III} = a \cdot I$$

Spomenimo još i karakteristično svojstvo ovog operatora da je:

$$a^0 + a + a^2 = 1 + a + a^2 = 0$$

Na isti način kao za struje, mogu se i za simetrični sustav napona ili sustav magnetskih tokova izvesti slične jednadžbe pa tako imamo, na primjer, za simetrični skup induciranih napona (*EMS*) slijedeće jednadžbe:

$$\mathcal{E}_I = \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E}_{II} = \mathcal{E} \cdot e^{-j120^\circ} = a^2 \cdot \mathcal{E}$$

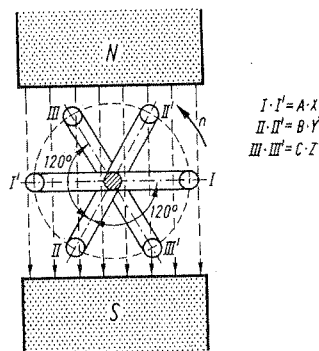
$$\mathcal{E}_{III} = \mathcal{E} \cdot e^{-j240^\circ} = a \cdot \mathcal{E}$$

17.1.2. Princip konstrukcije trofaznog generatora

Nakon što smo upoznali što je trofazna struja, potrebno je objasniti kako se te struje proizvode, kako se prenose i u trošilima iskorišćuju za obavljanje rada.

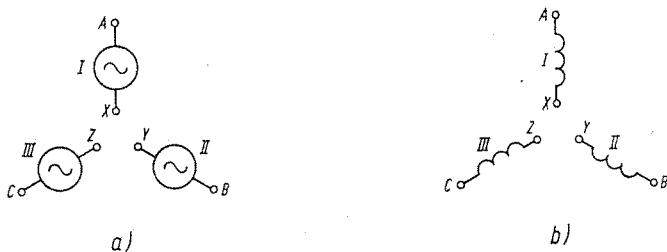
Znamo da je za stvaranje struje potreban napon, pa će tako i trofazna struja teći tek pod utjecajem trofaznog napona, a taj možemo najjednostavnije dobiti u trima svicima primjenom zakona elektromagnetske indukcije. Svaki od ovih svitaka zapravo je izvor za jednu struju trofaznog sistema.

Sl. 17.4. Principijelni sastav trofaznog generatora



Sl. 17.4. Principijelni sastav trofaznog generatora

Pri vrtnji rotora u svakom će se svitku zbivati doduše ista promjena toka, ali će u magnetskom polju statora svaki slijedeći svitak doći u iste položaje, koje je već prošao prethodni svitak, sa zakašnjenjem koje odgovara vremenu jedne trećine punog okreta, tj. trećini periode.



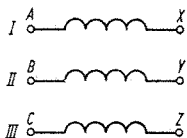
Sl. 17.5. a) Shematski prikaz trofaznog generatora kao skup triju generatora izmjenične struje;
b) Shematski prikaz trofaznog generatora pomoću tri svitka prostorno razmaknuta za 120°

Efektivna vrijednost induciranog napona u jednom svitku izračunava se prema već poznatoj jednadžbi:

$$E = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi_{\max}.$$

Trofazni generator predložuje se shematski kao skup triju izmjeničnih generatora, slika 17.5a, ili sa tri svitka u kojima se induciraju naponi, slika 17.5b.

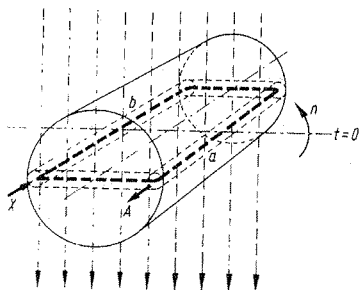
Neovisno o položaju što ga ovi svici doista zauzimaju u konstrukciji generatora, mogu se oni u spojnim shemama nacrtati u bilo kojem položaju. Tako su na slici 17.6 nacrtani usporedno jedan uz drugoga, a na slici 17.5b su razmaknuti za 120° , da bi nas podsjetili na fazni pomak od 120° .



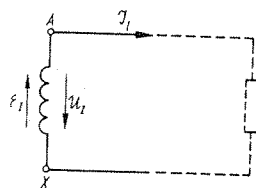
Sl. 17.6. Općeniti shematski prikaz trofaznog generatora

Da bismo pri analizi električnih mreža trofazne struje mogli ispravno računati, potrebno je, kao što je već u uvodu istaknuto, sve napone potpuno točno definirati. To znači da osim zadane jednačbe ili simboličke predodžbe promjene napona, moramo u spojnoj shemi uz sam izvor naznačiti još i referentni smjer s kojim je povezan zadani napon.

Zbog velike važnosti ove međusobne povezanosti pokazat ćemo na primjeru trofaznog generatora, prikazanog na slici 17.4 kako se mogu induciranim naponima E_I , E_{II} i E_{III} , čije su vremenske promjene zadane trima sinusoidalnim krivuljama na slici 17.1, odrediti pripadni referentni smjerovi. Pri tome će biti po-



Sl. 17.7. Zavoj svitka prve faze trofaznog generatora u kome se inducira napon $\mathcal{U}_I$



Sl. 17.8. Smjer unutarnjeg napona (EMS) vanjskog napona na stezaljkama svitka

trebno nekako označiti krajeve zavoja (odnosno krajeve svitaka) u kojima se induciraju naponi. Prije su se za to upotrebljavale razne oznake no danas se općenito upotrebljavaju početna i krajnja slova abecede. Tako imamo slijedeće oznake:

Svitak br.	Početak svitka	Svršetak svitka
I	A	X
II	B	Y
III	C	Z

Najprije ćemo promotriti svitak I, čiji zavoji imaju aktivne strane a i b , slika 17.7. Da bi se u tom svitku inducirao doista zadani sinusoidalni napon (I na slici 17.1), mora se svitak u vrijeme $t = 0$ nalaziti baš u nacrtanom horizontalnom položaju i od tog trenutka dalje okretati s konstantnom brzinom n u naznačenom smjeru.

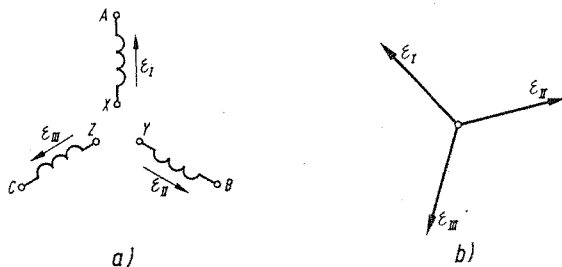
Primjenom pravila desne ruke odredimo u stranama a i b inducirane napone i ucrtanim strelicama označimo njihove smjerove. Vidimo da će u vremenskom intervalu od $t = 0$ do $t = T/2$ inducirani sinusoidalni napon unutar svitka imati smjer od X prema A . Budući da je u tom intervalu sinusoidalna krivulja I zadana s pozitivnim ordinatama, taj smjer od X prema A ujedno je i referentni smjer za unutarnji proizvedeni napon (EMS): $\mathcal{E}_I$.

Možemo dakle na shematskoj slici 17.8 prvog izvora trofaznog generatora, predloženog svitkom, strelicom označiti referentne smjerove i to:

za unutarnji napon	$\mathcal{E}_I$	od	X prema A
a za vanjski napon	$\mathcal{U}_I$	od	A prema X .

Poznato je, naime, da unutarnji napon djeluje u smjeru porasta potencijala, dok vanjski napon djeluje u smjeru pada potencijala: slika 17.8.

Potpuno jednakim razmatranjem možemo i za svitak II i njemu pripadni sinusoidalni napon $\mathcal{E}_{II}$ odrediti referentni smjer. Ordinate napona e_{II} počinju od vrijednosti nula rasti u pozitivnom smjeru nakon vremena $T/3$ (slika 17.1),



Sl. 17.9. a) i b) Općeniti prikaz sheme trofaznog generatora s pridruženim referentnim smjerovima napona

a u to se vrijeme rotor pomaknuo za 120° i svitak II došao je baš u horizontalan položaj. Odatle dalje sve se u svitku II odvija isto kao što je prije objašnjeno za svitak I, pa zaključujemo da će referentni smjerovi drugog svitka trofaznog generatora biti:

za unutarnji napon	$\mathcal{E}_{II}$	od	Y prema B
a za vanjski napon	$\mathcal{U}_{II}$	od	B prema Y .

Isto se tako dobiju i trećem svitku generatora pripadni referentni smjerovi, i to:

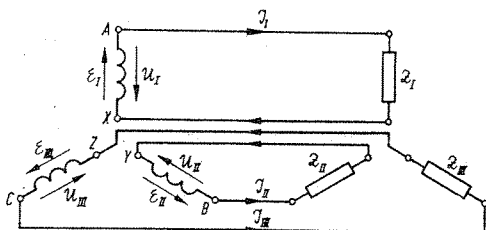
za unutarnji napon	$\mathcal{E}_{III}$	od	Z prema C
a za vanjski napon	$\mathcal{U}_{III}$	od	C prema Z .

U zaključku možemo reći da će i napon trofaznog generatora u cjelini biti potpuno zadan ako uz analitičke izraze ili vektorski prikaz promjena svih triju napona naznačimo još uz svitke generatora i pripadne referentne smjerove, kako je to, na primjer, za posve općeniti slučaj prikazano na slici 17.9 a i b.

17.1.3.

Nevezani trofazni sustav

Sve tri struje trofaznog sustava tjerane svaka kroz trošilo svojim naponom predstavljaju uvijek tri strujna kruga. U najjednostavnijem prikazu prema slici 17.10 zamišljamo da su ti strujni krugovi jedan od drugog izolirani, da nisu, dakle, međusobno električki povezani, pa zato takav sustav nazivamo *nevezanim*.



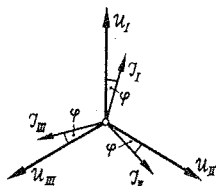
Sl. 17.10. Shema nevezanog trofaznog sustava (generator i trošila)

Uz pretpostavku da su svi priključeni otpori jednaki:

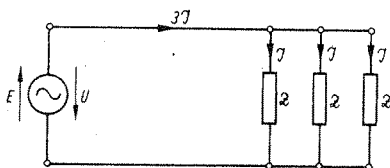
$$Z_I = Z_{II} = Z_{III} = Z$$

bit će fazni pomak φ svake struje prema svom naponu isti u sva tri strujna kruga, pa ako je sustav napona simetričan, bit će i sustav struja simetričan, slika 17.11.

Svaki otpor u prikazanoj spojnoj shemi predodžuje jedno trošilo koje nazivamo jednofaznim trošilom, jer kroz njega teče iz trofaznog generatora struja samo jednog izvora. To su npr. električne žarulje, električni rešoi, radio-aparati i slično.



Sl. 17.11. Vektorski dijagram simetričnog trofaznog sustava struja



Sl. 17.12. Jednofazni sustav opterećen sa tri jednaka otpora

Ima, međutim, i takvih trošila gdje se za rad iskorišćuje električna energija svih triju struja, od kojih svaka prolazi kroz jedan od tri otpora uključena u jedin-

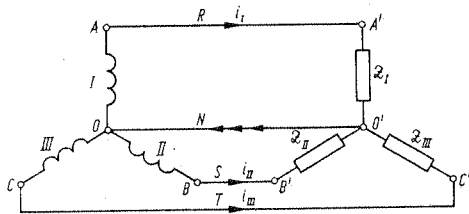
stvenoj konstrukciji. To su takozvana trofazna trošila kao npr.: trofazni motori, trofazne električne peći itd.

Poznato je da se u općoj elektrifikaciji iskorišćuje uvijek energija trofazne struje ne samo za trofazna trošila, nego i za rad jednofaznih trošila. No već prvim pogledom na spojnu shemu na slici 17.10 vidimo da bi za napajanje jednofaznih trošila bio takav nevezani trofazni sustav u pogledu izvedbe instalacija mnogo kompliciraniji nego što je jednofazni strujni krug napajan jednim naponom, gdje su sva trošila povezana paralelno, slika 17.12. Pretpostavimo li, naime, da u nevezanom trofaznom sustavu, simetrično opterećenom jednofaznim trošilima, imamo u vodičima istu gustoću struje kao i pri jednofaznom napajanju tih trošila, bit će za izradbu vodiča u oba slučaja potrebna ista količina bakra. Očito je, međutim, da je mnogo kompliciranije postavljanje prijenosnog voda sa 6 žica nego vod sa samo 2 žice.

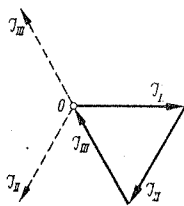
Prema tome, u pogledu prijenosa električne energije jednofaznim trošilima nema nevezani trofazni sustav neke prednosti pred jednofaznim sustavom.

17.1.4. Simetrični trofazni sustav u spoju zvijezda

Prilike se, međutim, bitno mijenjaju ako od nevezanog sustava prijedemo na vezane trofazne sustave. Pri tome pod nazivom *vezani* sustav mislimo na električki vodljivu povezanost triju strujnih krugova, koje smo prvotno razmatrali kao da su međusobno izolirani. To električko povezivanje strujnih krugova može se izvesti na više načina, a osnovna dva spoja su: spoj zvijezda i trokutni spoj.



Sl. 17.13. Povezivanje triju faza trofaznog sustava u spoj zvijezda



Sl. 17.14. Suma struja simetričnog trofaznog sustava jednaka je nuli

Spoj zvijezda nastaje tako da se sva tri povratna vodiča povežu električki vodljivo u jedan zajednički povratni vod, pa se tako dobiva spojna shema prikazana na slici 17.13. Time su u samom namotu generatora sva tri svršetka svitaka, X, Y i Z, povezana u zajedničko zvjezdisto generatora O, a isto tako su i na strani trošila sva tri otpora svojim krajnjim priključcima povezana u zajedničko zvjezdisto trošila O'.

Da je ovim spajanjem pojedinih strujnih krugova u jednu mrežu postignuta doista neka prednost u odnosu na nevezani sustav, slijedi iz činjenice što pri simetričnom opterećenju kroz zajednički povratni vod uopće ne teče struja, jer za simetrični trofazni sustav vrijedi općenito pravilo da je suma svih struja u svakom trenutku jednaka nuli.

To se može dokazati sumiranjem triju jednakžbi kojima su definirane te struje kao funkcije vremena:

$$i_I + i_{II} + i_{III} = I_{\max} \cdot [\sin \omega t + \sin (\omega t - 120^\circ) + \sin (\omega t - 240^\circ)] = 0$$

a također i na drugi način, ako struje prikažemo simbolički, pa prema slici 17.14 provedeno grafičko sumiranje vektora:

$$\mathcal{I}_I + \mathcal{I}_{II} + \mathcal{I}_{III} = 0$$

ili sumiramo pripadne kompleksne brojeve:

$$\mathcal{I}_I + \mathcal{I}_{II} + \mathcal{I}_{III} = \mathcal{I} \cdot (1 + a^2 + a) = 0$$

jer u svakom slučaju dobivamo da je ta suma jednaka nuli.

Budući da kroz povratni vod ne teče struja pri simetričnom opterećenju ne treba taj vod ni postavljati, a jer je on u biti skup triju povratnih vodiča, postignuta je u promatranom vezanom sustavu ušteda triju vodiča, odnosno polovica od ukupne količine bakra potrebnog u nevezanom sustavu.

Treba, međutim, imati stalno na umu da je ta ušteda moguća samo uz uvjet da je opterećenje simetrično, jer onda nema povratne struje. Ako je pak generator jednofaznim otporima nesimetrično opterećen, suma struja neće biti jednaka nuli, pa je za nju potrebno priključiti povratni vod, koji se naziva nulvod i označuje slovom N .

Taj naziv baš i dolazi otuda što će struja u tom vodu biti jednaka nuli ako je opterećenje simetrično, a jer u tom slučaju zvjezdišta O i O' imaju isti potencijal, napon među njima jednak je nuli, pa zvjezdišta nazivamo također *nultočkama*: slika 17.13.

Vodiči s kojima se od generatora dovode struje priključenim otporima vežu se na početke svitaka generatora A, B, C i na priključnice otpora A', B', C' . Te vodiče označujemo slovima R, S, T i nazivamo *faznim vodičima* ili ukratko *fazama*. Skup svih triju faznih vodiča, R, S, T , nazivamo *trofaznom linijom*.

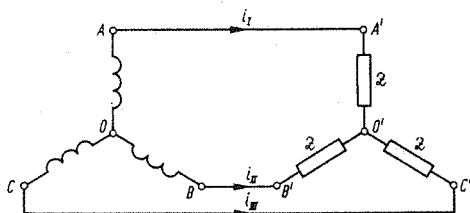
Naziv *faza* ne upotrebljava se, međutim, u praksi samo kao oznaka za dovodne žice, nego i za pojedine cijele strujne krugove trofaznog sustava, pa dapače i za pojedine dijelove tih strujnih krugova. Tako npr. prvi svitak generatora I nazivamo prvom fazom generatora, a slično možemo i otpor $\mathcal{Z}_1$ nazvati prvom fazom trošila.

Pogledajmo sada поближе spoj zvijezda.

Vidjeli smo da pri simetričnom opterećenju nije potreban nulvod, pa su za prijenos energije od generatora do trošila dovoljna samo tri fazna vodiča, dakle samo trovodna linija. Takav spoj upotrebljava se kod priključka trofaznih trošila uvijek sastavljena od tri potpuno jednaka elementa, koji predstavljaju jedinstvenu simetričnu konstrukciju. Slika 17.15 prikazuje takav priključak trofaznog trošila, a u spojnoj shemi označeni su referentni smjerovi napona i struja pojedinih faza, dok je njihov pripadni vektorski dijagram prikazan već na slici 17.2.

Iako u tom slučaju pojedine struje nemaju svoj posebni povratni vod, one se ipak mogu zatvoriti nekako unutar cijele trofazne mreže.

Tako će — kako se i iz spojne sheme vidi — struja svake faze nakon što je prošla kroz svoj otpor za povratak generatoru iskoristiti fazne vodiče drugih dviju faza.



Sl. 17.15. Priključak simetričnog trofaznog trošila na trofazni generator u spoju zvijezda

Da pri tome ta povratna struja prolazeći kroz žice drugih faza neće smetati tim dvjema strujama i pokvariti simetriju cijelog sustava, možemo vidjeti iz slijedećih razmatranja, koja se odnose na struju prve faze, no sličnim postupkom može se to isto pokazati i za struje drugih dviju faza.

Iz jednadžbe:

$$i_I + i_{II} + i_{III} = 0$$

koja vrijedi općenito za sustav struja bez nulvoda, slijedi da je:

$$-i_I = i_{II} + i_{III}$$

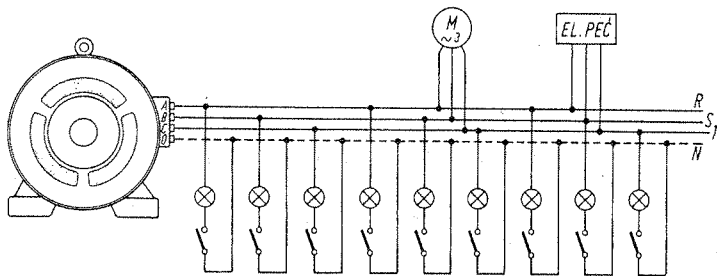
U spojnoj shemi ucrtani referentni smjerovi pokazuju da struje svih triju faza (onako kako su zadane) smatramo pozitivnim ako kroz fazne vodiče R , S , T teku od generatora ka trošilu.

Negativni predznak uz struju i_I znači, dakle, da je to sada povratna struja prve faze i ona je, prema gornjoj jednadžbi jednaka zbroju ($i_{II} + i_{III}$).

Možemo, dakle, struju prve faze na povratku ka generatoru smatrati rastavljenu na dvije komponente koje teku kroz vodiče S i T , a kako su te komponente upravo identički jednake dovodnim strujama u tim vodičima (kako su one prvotno dane), zaključujemo da će se pri simetričnom opterećenju zadržati simetrija struja pa makar i odbacili povratni nulvod.

Jednofazna trošila, koja tvore pretežan dio trošila široke potrošnje, uključuju potrošači u rad prema svojim potrebama, ne obazirući se pri tome da li je zbog toga narušena simetrija opterećenja ili ne. Da bi se ipak u pogonu postigla što manja nesimetrija, nastoji se već samim instaliranjem trošila razdijeliti ukupni jednofazni teret što jednoličnije na sve tri faze. To se postizava time da se jednofazna trošila priključuju na četverovodnu trofaznu mrežu naizmjenice redom na faze $R S T R S T$...itd., kako je prikazano na slici 17.16.

Dok se, dakle, simetrična trofazna trošila priključuju samo na tri fazna vodiča bez priključka na nulvod, za jednofazne priključke iskoristit će se po jedan fazni vodič i nulvod. Pri tome će u pogonu kroz nulvod prolaziti ipak neka struja prouzročena nesimetrijom opterećenja, a u praksi se pokazalo da je za tu struju dovoljno odabrati nulvodič poprečnog presjeka npr. samo polovice presjeka faznih vodiča.



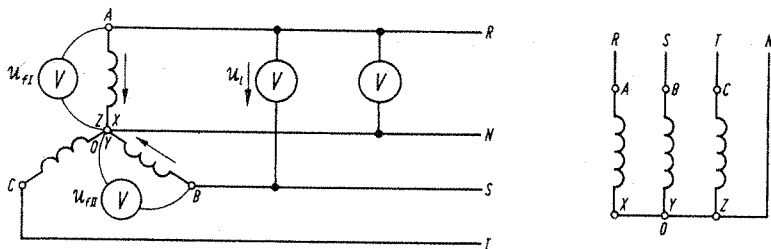
Sl. 17.16. Priključak jednofaznih i trofaznih trošila na četverovodnu trofaznu mrežu

I tako, uz još dodani nulvod, ima dakle četverovodni vezani sustav pri prijenosu energije jednofaznim trošilima prednost pred nevezanim trofaznim ili jednofaznim sustavom.

17.1.5. Odnos faznih i linijskih vrijednosti

Neke definicije o naponskim i strujnim prilikama u trofaznim sustavima.

Fazni napon je napon jedne faze generatora, odnosno napon na jednoj fazi trošila.



Sl. 17.17. Fazni i linijski naponi simetričnog trofaznog sustava u spoju zvijezda

Fazna struja je struja koja prolazi kroz namot jedne faze generatora, odnosno kroz otpor jedne faze trošila.

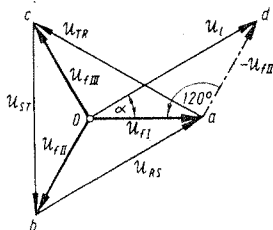
Linijski napon je napon između dva voda trofazne linije (Linijski napon naziva se i »međufazni napon«).

Linijska struja je struja koja prolazi jednim vodičem trofazne linije.

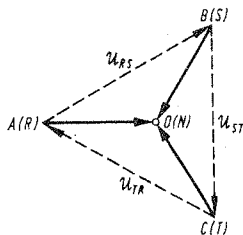
Prema tome, fazni napon U_1 generatora može se voltmetrom izmjeriti na priključnim krajevima jednog svitka $A-X$ ili $B-Y$ ili $C-Z$, slika 17.17, a u četverovodnom spoju zvijezda imamo taj fazni napon i na liniji između generatora i trošila, ako voltmetar priključimo na jedan fazni vodič i nulvod, jer je nulvod priključen na nultočku generatora u kojoj su sjedinjeni svršeci svitaka X, Y, Z .

Isto tako se i fazni napon trošila može izmjeriti priključkom voltmetra na stezaljke jedne faze (jednog otpora) trošila.

Linijski napon U_1 u spoju zvijezda generatora jednak je, kako se na slici 17.17 vidi, rezultantom naponu što ga tvore inducirani naponi dvaju u seriji spojenih svitaka. Ove napone treba, dakle, zbrojiti, ali se pri izračunavanju rezultante moraju, dakako, uzeti u obzir referentni smjerovi koji omogućuju pozitivno uračunavanje svakog faznog napona.



Sl. 17.18. Odnos faznih i linijskih napona pri simetričnom spoju zvijezda



Sl. 17.19. Topografski dijagram napona u spoju zvijezda

Tako vidimo da će npr. linijski napon $U_1 = U_{RS}$ kao rezultanta napona: $U_{fI} = U_{RO}$ i $U_{fIII} = U_{SO}$ biti jednak njihovoj diferenciji, jer su pri sumiranju duž zatvorene konture referentni smjerovi tih napona međusobno suprotno usmjereni, što odgovara serijskom protuspoju.

Ako su zadani fazni naponi, možemo veličinu i fazno stanje linijskog napona u spoju zvijezda najjednostavnije odrediti iz odnosa u vektorskom dijagramu, slika 17.18.

Uz odabrane referentne smjerove za pojedine napone, koji su naznačeni na slici spojne sheme (sl. 17.17), slijedi da je:

$$U_{RS} = U_{RO} - U_{SO} = U_{RO} + (-U_{SO}),$$

a to je zbrajanje dano u vektorskom dijagramu trokutom Oad , pri čemu nam dobiveni vektor $\vec{Oa}$ predodređuje linijski napon U_{RS} .

Efektivna vrijednost tog linijskog napona jednaka je modulu Od , a fazno stanje s obzirom na referentni fazni napon U_{RO} dano je kutom α .

Nadalje vidimo da taj linijski napon U_{RS} predočuje i vektor koji povezuje vrhove vektora faznih napona U_S i U_R . To isto možemo izvesti i za druga dva linijska napona, pa su tako uz zvijezdu vektora faznih napona ucrtani na slici i vektori svih triju linijskih napona: U_{RS} , U_{ST} , U_{TR} . Linijske napone možemo odrediti i metodom topografskog dijagrama, kako je to za spojnu shemu generatorskog namota na slici 17.17 prikazano u pripadnom topografskom dijagramu, sl. 17.19.

Poznavajući efektivnu vrijednost faznog napona može se za simetrični spoj zvijezda odrediti efektivna vrijednost linijskog napona iz geometrijskih odnosa na slici 17.18.

Vidi se da je:

$$U_l^2 = 2 U_f^2 (1 - \cos 120^\circ)$$

pa je:

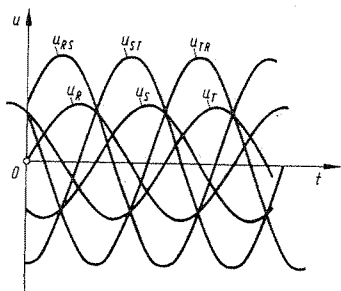
$$U_l = \sqrt{3} \cdot U_f$$

ili riječima: u simetričnom trofaznom sustavu vezanom u spoju zvijezda linijski je napon $\sqrt{3}$ puta veći od faznog napona.

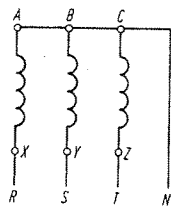
Tako je npr. u gradskoj razdjelnoj mreži pri faznom naponu od 220 V linijski napon jednak:

$$U_l = 220 \cdot \sqrt{3} = 380 \text{ V}$$

Na osnovi podataka iz vektorskog dijagrama (sl. 17.18) možemo i linijske napone zajedno s faznim naponima prikazati također sinusoidalnim krivuljama u vremenskom dijagramu, slika 17.20.



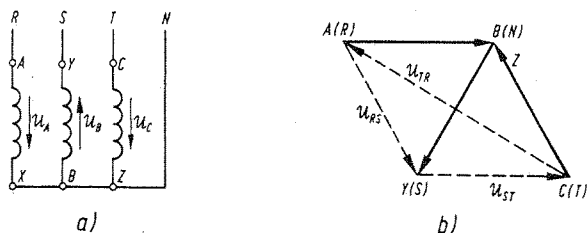
Sl. 17.20. Vremenski dijagram faznih i linijskih napona simetričnog trofaznog sustava u spoju zvijezda



Sl. 17.21. Druga varijanta spoja zvijezda

Ova razmatranja o naponskim odnosima u simetričnom trofaznom sustavu vezanom u spoju zvijezda vrijede za tzv. ispravni spoj zvijezda u kojem su u zajedničko zvjezdište ili nultočku generatora povezani istoimeni krajevi faznih svitaka generatora, dakle: ili X , Y , Z ili A , B , C , slike 17.17 i 17.21.

Ako bi jedan svitak bio obrnuto spojen nego što su druga dva (slika 17.22a), imali bismo među vodičima trofazne linije RST drugačije odnose napona. Ako



Sl. 17.22. a) Krivi spoj jednog svitka generatora u spoju zvijezda; b) Pripadni vektorski dijagram spoja

je, na primjer, svitak druge faze spojen obrnuto nego svici prve i treće faze dobili bismo, primjenjujuću topografski dijagram, slijedeće vrijednosti linijskih napona:

$$\begin{aligned} U_{RS} &= U_l \\ U_{ST} &= U_l \\ U_{TR} &= \sqrt{3} \cdot U_l \end{aligned} \quad (\text{Sl. 17.22b})$$

17.1.6.

Trokutni spoj

Drugi osnovni vezani spoj trofaznog sustava je trokutni spoj. Prijelaz od triju međusobno izoliranih strujnih krugova na vezani trokutni spoj možemo zamisliti, prema slici 17.23, da nastaje spajanjem svih triju svitaka generatora u zatvoren krug, a isto tako da se i na strani trošila sva tri otpora povežu u zatvoren strujni krug.

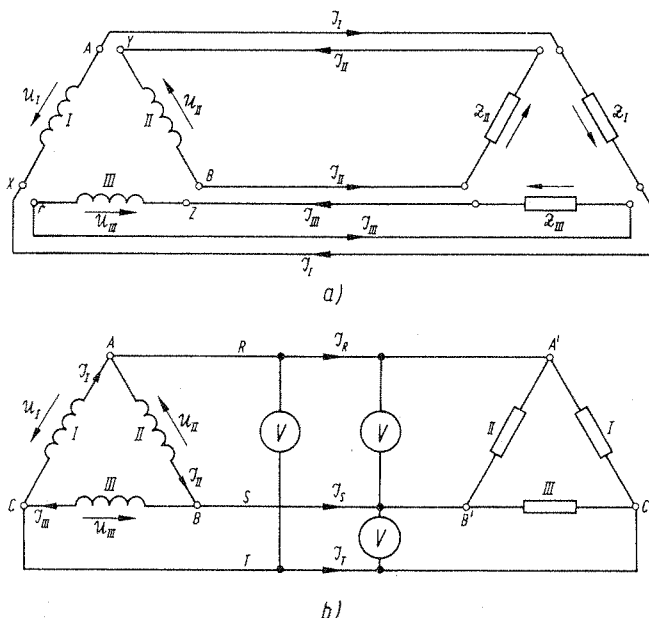
Spojne točke između dva svitka na generatorskoj strani, kao i spojne točke dvaju otpora na strani trošila, sada su priključne stezaljke za vodove R, S, T , slika 17.23b.

Vidimo da ovim načinom povezivanja svaki vodič trofazne linije služi za dovod struje jedne faze, a istovremeno i kao povratni vodič za struju susjedne faze. Očito je, nadalje, da u trokutnom spoju nema nulvodiča i da se prijenos energije vrši samo trofaznom linijom RST .

Ako svitke generatora u spojnoj shemi (kao i otpore trošila) crtamo geometrijski razmaknute za 120° , onda nam spojne sheme generatora i trošila izgledaju kao istostranični trokuti, pa se zato taj spoj i naziva *trokutnim*.

Pogledajmo sada strujne i naponske prilike u trokutnom spoju simetričnog trofaznog sustava. Na prvi pogled vidi se da su u zatvorenom strujnom krugu što ga tvore svici generatora u serijskom spoju uključena tri izvora napona, a jer osim malog otpora namota nema nikakvih dodatnih otpora, taj spoj je u izvjesnom smislu kratki spoj triju generatora.

Međutim, iako su u praktički izvedenim konstrukcijama ovi fazni naponi vrlo veliki — a otpori svitaka mali — ne treba se bojati tog kratkog spajanja ako je samo rezultanta tih napona jednaka nuli, jer tada unutar namota generatora dok trošila nisu priključena ne teče struja. To će uz pretpostavku simetričnog



Sl. 17.23. a) Povezivanje faza u spoj trokut; b) Trokutni spoj svitaka trofaznog generatora

trofaznog napona biti ispunjeno samo onda ako su sva tri svitka povezana u zatvoreni strujni krug ispravnim serijskim spojem. Mora se, dakle, početak namota jedne faze vezati sa svršetkom namota susjedne faze. Pri sumiranju su onda referentni smjerovi svih faznih napona istog smjera, pa je rezultanta:

$$U_I + U_{II} + U_{III} = 0 \quad (\text{Sl. 17.24})$$

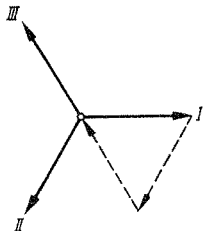
Budući da su na krajeve svakog svitka u trokutnom spoju priključena dva vodiča trofazne linije, bit će linijski napon jednak faznom naponu, pa zato u trokutnom spoju imamo za napone slijedeću jednadžbu:

$$U_l = U_f$$

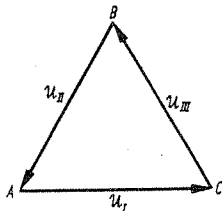
Iz spojne sheme trokutnog spoja (slika 17.23b) vidi se da su na svaki svitak unutar generatora paralelno priključena druga dva serijski povezana svitka. Svaki fazni napon jednak je, dakle, rezultanti drugih dvaju faznih napona, što se vidi i iz topografskog dijagrama za ucrtani trokutni spoj, slika 17.25.

Međusobni odnos fazne i linijske struje u trokutnom spoju dobiva se iz sli-
jedećih razmatranja.

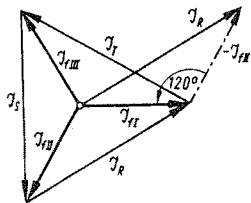
Prema slici 17.23 nastao je svaki vodič trofazne linije u tom spoju sjedinje-
njem dvaju vodiča prvotno nevezanog sustava, od kojih je jedan služio za dovod
struje jedne faze, a drugi kao povratni vodič struje susjedne faze. To se vidi i na



Sl. 17.24. Suma simetričnih trofaznih napona unutar zatvorenog trokutnog spoja u generatoru jednaka je nuli



Sl. 17.25. Topografski dijagram napona spoja trokut



Sl. 17.26. Proračun linijske struje simetričnog spoja trokut

slici 17.23, odakle slijedi da je linijska struja rezultanta tih dviju struja i ona je jednaka njihovoj diferenciji, jer su u simboličkom predočavanju struje svojim vektorima ili kompleksnim brojevima zadane kao dovodne struje (ili što je isto: kao referentni smjer za struje pretpostavili smo smjer od generatora do trošila):

$$I_R = I_{II} - I_{III}.$$

Efektivna vrijednost linijske struje u simetričnom sustavu faznih struja iz-
računava se prema slici 17.26 na osnovi istih geometrijskih odnosa kao onih pri
izračunavanju linijskog napona u spoju zvijezda.

Slijedi da je:

$$I_l = \sqrt{3} \cdot I_f$$

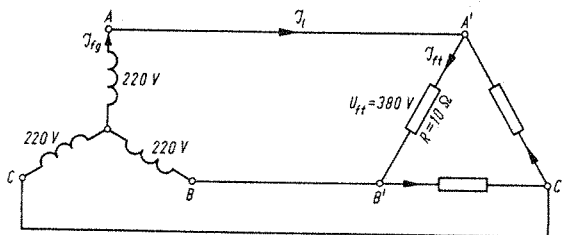
ili riječima: linijska struja u simetričnom trofaznom sustavu u trokutnom spoju
 $\sqrt{3}$ puta je veća nego fazna struja.

Osim efektivne vrijednosti, možemo iz vektorskog dijagrama struja odrediti
i fazno stanje promatrane linijske struje u odnosu na zadani sustav faznih struja,
pa za trokutni spoj nacrtati sve struje simetričnog sustava kao vremenske funkcije.
Taj vremenski dijagram izgleda potpuno jednak dijagramu napona simetričnog
spoja zvijezda, prikazanog na slici 17.20.

Pri tumačenju zvjezdastog i trokutnog spoja pretpostavili smo u prijašnjim
razmatranjima da su svici generatora, kao i priključeni otpori trošila, povezani
istim načinom spajanja. Mogući su, međutim, i miješani spojevi, pa ćemo tako
kao prvi primjer uzeti generator u spoju zvijezda, a trošilo u trokutnom spoju,
slika 17.27.

Uz pretpostavku da je u generatoru induciran simetrični sustav napona efek-
tivne vrijednosti $U_{fgen} = 220$ V i da su sva tri otpora trošila jednaka, npr. $R = 10$

oma, bit će i sustav struja simetričan, pa možemo u proračunu upotrijebiti prije izvedene formule.



Sl. 17.27. Trošilo u spoju trokut priključeno na generator u spoju zvijezda

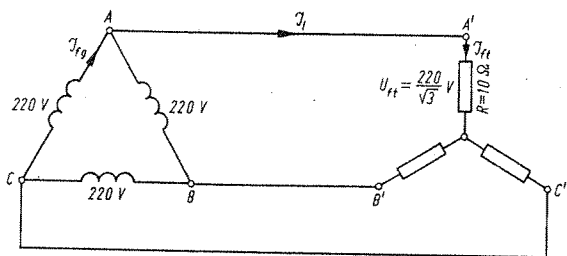
Na prijenosnom vodu imamo linijski napon koji je jednak: $U_l = \sqrt{3} \cdot U_{t_{\text{gen}}} = \sqrt{3} \cdot 220 = 380 \text{ V}$, a taj napon je za trokutno povezane otpore ujedno i fazni napon, dakle je struja jedne faze trošila:

$$I_{t_{\text{troš}}} = \frac{U_{t_{\text{troš}}}}{R} = \frac{380}{10} = 38 \text{ A}$$

Prema prije izvedenim jednadžbama linijska struja jednaka je:

$$I_l = \sqrt{3} \cdot I_t$$

$$I_l = \sqrt{3} \cdot 38 = 66 \text{ A}$$



Sl. 17.28. Generator u spoju trokut, a trošilo u simetričnom spoju zvijezda

a to je ujedno struja jedne faze generatora, jer za spoj zvijezda generatora imamo da je fazna struja jednaka linijskoj struji. Dakle je:

$$I_{t_{\text{gen}}} = I_l = 66 \text{ A}$$

Drugi primjer mješovitog spoja generatora s trošilima prikazan je na slici 17.28. Tu je namot generatora vezan u trokutnom spoju, a otpori trošila u spoju

zvijezda. Promatramo opet simetrični sustav induciranih napona i simetrično opterećenje otporima trošila: $R = 10 \Omega$.

Ako je fazni napon generatora npr. 220 V, onda je to zbog trokutnog spoja svitaka u generatoru također i linijski napon na vodu i taj napon priveden je kao linijski napon priključenim otporima: $U_l = 220 \text{ V}$.

Budući da smo pretpostavili simetriju opterećenja, bit će na svakom otporu djelotvoran fazni napon koji je za spoj zvijezda $\sqrt{3}$ puta manji nego linijski napon:

$$U_{t_{\text{troš}}} = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} \text{ V}$$

Struja kroz otpor od 10Ω je fazna struja trošila:

$$I_{t_{\text{troš}}} = \frac{U_{t_{\text{troš}}}}{R} = \frac{22}{\sqrt{3}} \text{ A}$$

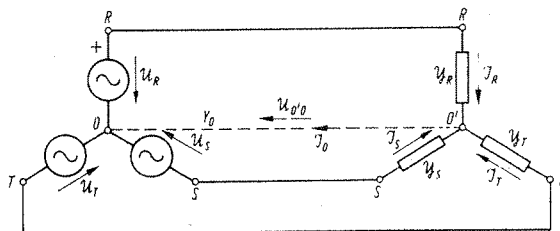
a to je ujedno i jakost linijske struje $I_l = 22/\sqrt{3} \text{ A}$.

Zbog simetrije opterećenja bit će struja u jednom namotu (svitku) generatora:

$$I_{t_{\text{gen}}} = \frac{I_l}{\sqrt{3}} = \frac{22}{3} \text{ A}$$

17.1.7. Općenite jednadžbe 3-faznog spoja zvijezda

Budući da su strujni krugovi trofazne struje u biti električne mreže izmjenične struje, možemo — općenito gledano — proračun struja i napona u njihovim granama provesti bilo kojim načinom što smo ga upoznali pri analizi električnih mreža.



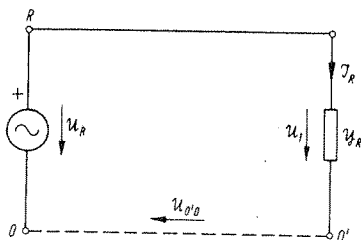
Sl. 17.29. Trofazni sustav u spoju zvijezda prikazan kao mreža sa dva čvora

U prijašnjim razmatranjima, gdje smo pretpostavili simetrične trofazne sustave, bilo nam je ipak omogućeno da zbog pravilnih odnosa među naponima i otporima izvršimo proračune napona i struja mnogo jednostavnije, a njihove odnose predočimo jednostavnim formulama. Ako pak promatrani trofazni sustav

nije simetričan, (jer su otpori trošila, a i naponi generatora, nesimetrični), moramo onda, dakako struje i napone računati već poznatim metodama proračuna mreže.

Ako su svi generatori kao i otpori trošila povezani u spoju zvijezda, primjenjuje se Millmanov teorem, jer takav trofazni sustav je mreža u kojoj su sve grane vezane na dva zajednička čvora, a to su zvjezdište generatora i zvjezdište trošila: O i O' .

Takav općeniti trofazni sustav prikazan je na slici 17.29 i za nj ćemo odrediti napone i struje u pojedinim granama, a pretpostavljamo da su nam zadani naponi generatora U_R, U_S, U_T i otpori trošila Z_R, Z_S, Z_T , odnosno vodljivosti Y_R, Y_S, Y_T .



Sl. 17.30. Određivanje napona na priključenim otporima

Proračun struja i napona u faznim otporima vrši se spomenutom metodom tako da se najprije izračuna napon $U_{O'O}$ između oba čvora što ih označuju zvjezdište otpora trošila i zvjezdište svitaka generatora:

$$U_{O'O} = \frac{U_R Y_R + U_S Y_S + U_T Y_T}{Y_R + Y_S + Y_T + Y_0}$$

a zatim se u vezi s oznakama na slici 17.30 odrede naponi na priključenim otporima i pojedine struje, prema jednadžbama:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_R - U_{O'O} & I_R &= U_1 Y_R \\ U_2 &= U_S - U_{O'O} & I_S &= U_2 Y_S \\ U_3 &= U_T - U_{O'O} & I_T &= U_3 Y_T \end{aligned} \quad I_0 = U_{O'O} Y_0$$

Ako je trofazna mreža bez nulvoda: $Y_0 = 0$, poprima jednadžba napona između nultočaka oblik:

$$U_{O'O} = \frac{U_R Y_R + U_S Y_S + U_T Y_T}{Y_R + Y_S + Y_T}$$

pa za napone na pojedinim otporima možemo dobiti i slijedeće izraze:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_R - \frac{U_R Y_R + U_S Y_S + U_T Y_T}{Y_R + Y_S + Y_T} = \frac{Y_S (U_R - U_S) - Y_T (U_T - U_R)}{Y_R + Y_S + Y_T} \\ &= \frac{Y_S U_{RS} - Y_T U_{TR}}{Y_R + Y_S + Y_T} \end{aligned}$$

i analogno:

$$u_2 = \frac{y_T u_{ST} - y_R u_{RS}}{y_R + y_S + y_T} \quad u_3 = \frac{y_R u_{TR} - y_S u_{ST}}{y_R + y_S + y_T}$$

Fazne struje su opet umnošci ovih napona sa pripadnim vodljivostima, a kako nema nulvoda, njihova suma je prema I Kirchhoffovom zakonu jednaka nuli:

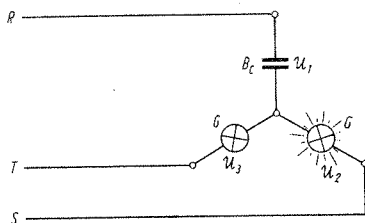
$$I_R + I_S + I_T = 0$$

Budući da u trofaznim mrežama koje služe za razdiobu električne energije imamo, prema propisima, simetrični sustav napona, nesimetriju struja prouzročit će nejednakost priključenih otpora.

17.1.8. Redoslijed faza 3-faznog sustava

Kao primjer ovako nesimetrično opterećene trofazne mreže napona 220/380 V i $f = 50$ Hz neka nam posluži takozvani indikator redoslijeda faza.

Sl. 17.31. Shema spoja uređaja za određivanje redoslijeda faza



Shema spoja prikazana je na slici 17.31, gdje su u pojedine faze (na strani trošila) u spoju zvijezda bez priključka nulvoda uključeni različiti otpori, i to u jednu fazu kondenzator, a u druge dvije faze jednake sijalice, koje su čisti omski otpor.

Osim toga su za kapacitivnu i omsku vodljivost odabrane vrijednosti:

$$B_C = G$$

što se uz zadani napon mreže može postići time da je npr. kapacitet kondenzatora $C \approx 2 \mu\text{F}$, a snaga sijalice $P \approx 30 \text{ W}$.

Naponi na pojedinim fazama trošila i struje određuju se izvedenim općenitim jednadžbama, a za to je potrebno poznavati napon $U_{0'0}$ između zvjezdista uključених otpora i zvjezdista generatora:

$$U_{0'0} = \frac{B_C u_R + G u_S + G u_T}{B_C + G + G} = \frac{B_C u_R + G(u_S + u_T)}{B_C + 2G}$$

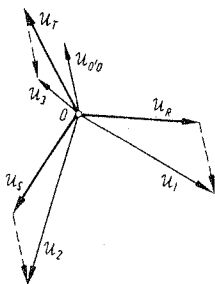
Budući da je za simetrični napon mreže $u_s + u_T = -u_R$, izlazi da je:

$$u_{o'o} = \frac{\beta_C u_R - G u_R}{\beta_C + 2G} = u_R \frac{\beta_C - G}{\beta_C + 2G}$$

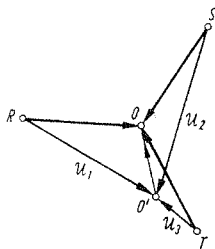
Ako se prema zadatku uvrsti $\beta_C = jG$, dobiva se da je:

$$u_{o'o} = u_R \frac{jG - G}{jG + 2G} = u_R \frac{j-1}{j+2} = u_R \left(-\frac{1}{5} + j\frac{3}{5} \right)$$

U kompleksnoj ravnini možemo na slici 17.32 uz napone u_R , u_s i u_T ucrtati i napon $u_{o'o}$ i grafičkim postupkom odrediti napone na pojedinim priključenim otporima: u_1 , u_2 , u_3 , što je prikazano i u topografskom dijagramu, slika 17.33.



Sl. 17.32. Vektorski dijagram sklopa sa slike 17.31



Sl. 17.33. Topografski dijagram sklopa sa slike 17.31

Površnim gledanjem ove sheme moglo bi se krivo pomisliti da će zbog simetrije napona oba jednaka otpora sijalica dobiti isti napon, no račun pokazuje da i ova nepotpuna, dakle bilo kakva nesimetrija, prouzročuje nesimetričnu razdiobu napona na priključene otpore.

Vidi se da će ona sijalica u fazi S koja je na višem naponu svijetliti, dok se zbog premalog napona sijalica u fazi T neće uopće zažariti. To nam može poslužiti da na vodičima trofazne mreže, ako još ne znamo, odredimo redoslijed faza.

Polazeći, dakle, od faze gdje je priključen kondenzator, vremenski iza nje slijedi ona faza u kojoj je uključena sijalica koja jače svijetli.

17.1.9.

Umjetna nultočka

Prije izvedena razmatranja vrijede općenito za trofazni sustav izmjeničnih struja, a ako ih primijenimo na simetrični sustav, treba osim gornjih, općenitih jednadžbi, uzeti u obzir još i jednadžbe:

$$u_R + u_s + u_T = 0$$

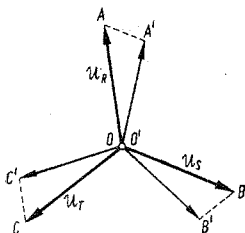
$$y_R = y_s = y_T = y$$

koje dodatno karakteriziraju simetričnost sustava napona i simetriju trošila.

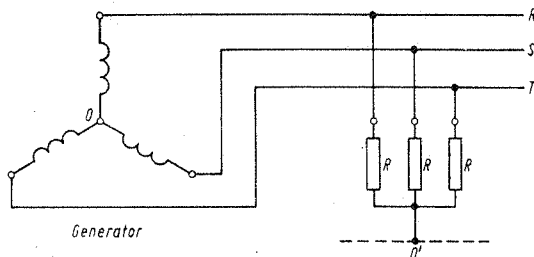
Dobivamo; dakle, da je napon između zvijezdišta O' i O :

$$U_{O'O} = \frac{\mathcal{U}(\mathcal{U}_R + \mathcal{U}_S + \mathcal{U}_T)}{3\mathcal{U} + \mathcal{U}_0} = 0$$

jednak nuli, odakle možemo izvesti neke važne zaključke za simetrični trofazni sustav u spoju zvijezda.



Sl. 17.34. Vektorski dijagram simetrično opterećenog spoja zvijezda



Sl. 17.35. Umjetna nultočka simetričnog trofaznog sustava napona

Najprije, vidi se da kroz eventualno priključeni nulvod ne teče struja, jer je napon na njegovim krajevima jednak nuli:

$$\mathcal{I}_0 = \frac{U_{O'O}}{\mathcal{U}_0} = 0$$

Nadalje zaključujemo da nultočke O' i O imaju jednake potencijale:

$$\varphi_{O'} = \varphi_O$$

pa u vektorskom (topografskom) dijagramu oba zvijezdišta padaju u istu točku, slika 17.34.

To se može iskoristiti u mrežama simetričnog trofaznog napona ako je pri nekom mjerenju potreban priključak instrumenta i na nultučku sistema, no mreža je izvedena bez nulvoda ili bez pristupačne nultočke. Priključivanjem triju jednakih otpora spojenih u spoju zvijezda na trofaznu liniju RST možemo stvoriti umjetnu nultočku trofaznog sustava, slika 17.35.

17.1.10. Rotaciono magnetsko polje trofazne struje

U prijašnjim je poglavljima objašnjeno kako se u generatorima proizvodi trofazna struja i kako se trofaznim vodom prenosi do trošila.

U pogledu njene upotrebe u trofaznim trošilima potrebno je još razmotriti kakvo magnetsko polje možemo dobiti od trofazne struje.

Najprije pogledajmo kakav magnetski tok stvaraju tri struje simetričnog trofaznog sustava prolazeći kroz tri jednaka svitka koji su prostorno smješteni jedan

uz drugoga tako, da se uz svaki zavoj jednog svitka nalazi jedan zavoj drugog i jedan zavoj trećeg svitka, kao što je prikazano na slici 17.36.

U tom promatranom primjeru moramo u jednadžbu za proračun toka:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m}$$

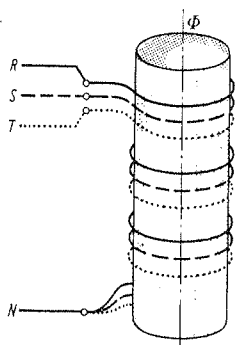
kao uzбудu uvrstiti ukupne amperzavoje svih triju struja:

$$\Theta = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3$$

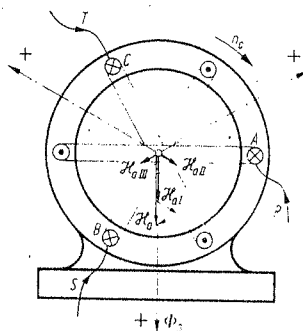
Uz pretpostavku da su svici jednaki i da imaju jednak broj zavoja N bit će: $\Theta = N(i_1 + i_2 + i_3)$, a kako je suma struja simetričnog trofaznog sustava jednaka nuli, bit će ukupna uzbuđena jednaka nuli, pa je stvoreni magnetski tok jednak nuli:

$$\Phi = 0$$

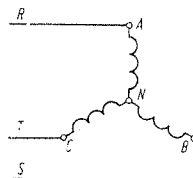
Prilike će se bitno promijeniti ako se svici jedan od drugog prostorno razmaknu, jer će tada svaki svitak za sebe svojom uzbuđom moći stvoriti u prostoru svoje polje, a u svakoj točki prostora nastaje onda neko rezultantno magnetsko polje koje se dobije vektorskim zbrajanjem svih triju komponentata.



Sl. 17.36. Tri svitka smještena prostorno jedan uz drugog protjecana trofaznom strujom



Sl. 17.37. Svi svitci pojedinih faza razmaknuti su u trofaznim rotacionim strojevima prostorno jedan od drugog za 120°



Od svih mogućih smještaja svitaka u prostoru osobito je interesantan onaj gdje su svici pojedinih faza prostorno jedan od drugog razmaknuti za 120°, za koliko su baš struje pojedinih faza međusobno vremenski fazno pomaknute. Takav smještaj svitaka imamo u strojevima trofazne struje, slika 17.37, gdje je u prerezu prikazan stator stroja.

Zbog što preglednijeg razmatranja pretpostavimo da svaka faza ima samo jedan svitak sa N zavoja i da se vodičima R, S, T privode fазne struje na ulazne priključnice A, B, C , označene sa (+).

Stvoreni rezultatni tok Φ odredit ćemo tako da najprije izračunamo rezultatnu uzbudu H .

Budući da su struje koje stvaraju uzbudu vremenski promjenljive i rezultatna će uzbuda ovisiti o tome u kojem je trenutku promatramo. Tako ćemo izračunati uzbudu za one karakteristične trenutke kad struje u pojedinim fazama postizavaju maksimalnu vrijednost. Ti su trenuci na slici 17.1 označeni sa $a, b, c, d, \dots$

Iz tog vremenskog dijagrama struja vidi se da u trenutku a struja prve faze ima maksimalnu vrijednost $I_{\max}$, dok struje ostalih dviju faza imaju vrijednost polovice amplitude $I_{\max}/2$, a osim toga zbog negativnog predznaka imaju u svitku protivan smjer.

Na slici 17.37 su (prema pravilu desnog vijka) naznačeni za svaku pozitivnu struju smjerovi magnetske uzbuđene $\mathcal{H}$ u osi svitka oznakom (+). Prema tome će u trenutku a od amperzavoja $I_{\max}N$ prve faze biti vektor $\mathcal{H}_{aI}$ u pozitivnom smjeru, dok će od amperzavoja $(-I_{\max}/2) \cdot N$, što ih proizvode struje druge i treće faze, vektori uzbuđene $\mathcal{H}_{aII}$ i $\mathcal{H}_{aIII}$ biti samo polovica od $\mathcal{H}_{aI}$. Osim toga, bit će oni orijentirani u negativnom smjeru, sl. 17.37.

Vektor rezultatne uzbuđene $\mathcal{H}_a$ u tom trenutku dobiva se vektorskim zbrajanjem svih komponenta:

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{H}_{aI} + \mathcal{H}_{aII} + \mathcal{H}_{aIII}$$

Na slici se vidi da je vektor $\mathcal{H}_a = 1,5 \mathcal{H}_{aI}$, i da pada u smjer geometrijske osi prvog svitka. Oдавде zaključujemo da će rezultatni magnetski tok Φ_0 što ga stvaraju sve tri struje trofaznog sustava u trenutku a biti za 50% veći nego magnetski tok $\Phi_{\max}$ što bi ga u prvom svitku stvorila sama struja prve faze svojom maksimalnom jakošću $I_{\max}$.

$$\Phi_0 = 1,5 \Phi_{\max}$$

Magnetska os rezultatnog toka Φ_0 u smjeru je geometrijske osi prvog svitka.

Potpuno jednake prilike imamo i u trenutku b . Samo sada struja druge faze ima maksimalnu vrijednost $I_{\max}$ dok su struje prve i treće faze negativne i polovične vrijednosti $(-I_{\max}/2)$.

Analogno prijašnjem izvođenju dobivamo da je sada:

$$\mathcal{H}_b = 1,5 \mathcal{H}_{bII}$$

pa je rezultatni magnetski tok opet jednak:

$$\Phi_0 = 1,5 \Phi_{\max}$$

a njegova je magnetska os zajednička s geometrijskom osi drugog svitka.

To isto vrijedi i za trenutak c kad treća faza ima struju maksimalne jakosti, a prva i druga struja su $(-I_{\max}/2)$.

Tada je, dakle:

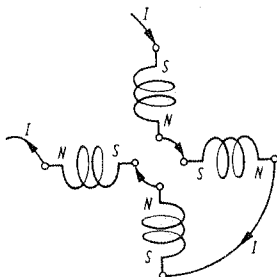
$$\mathcal{H}_c = 1,5 \mathcal{H}_{cIII}$$

i:

$$\Phi_0 = 1,5 \Phi_{\max}$$

a magnetska os rezultatnog toka je u smjeru geometrijske osi trećeg svitka.

Vidimo, dakle, da rezultatni magnetski tok što ga u trofaznom namotu stvara trofazna struja tijekom vremena zadržava konstantnu vrijednost $\Phi_0 = 1/5 \Phi_{\max}$, dok njegova magnetska os rotira u prostoru. Zbog toga se to magnetsko polje naziva *okretno* ili *rotaciono polje*.



Sl. 17.38. Razmještajem četiriju dijelova namota jedne faze, dobiva se četveropolno magnetsko polje (izmjenično!)

Jedan pun okret izvršit će magnetsko polje kad u trenutku d struja prve faze ponovno postigne maksimalnu vrijednost $I_{\max}$. Znamo da je za to potrebno vrijeme jednako vremenu jedne periode T .

Broj izvršenih okreta u jedinici vremena karakterističan je podatak o rotaciji i naziva se *brzina vrtnje*, a označuje se sa n_0 .

U našem primjeru magnetsko polje izvršava u jednoj sekundi toliko okretaja kolika je frekvencija f privedene izmjenične struje. No kako se u tehnici redovno za brzinu vrtnje uzima kao jedinica za vrijeme jedna minuta, iznosi brzina vrtnje promatranog magnetskog polja:

$$n_0 = 60 f.$$

Ovdje smo promatrali takav raspored zavoja svitka jedne faze da je magnetsko polje svake pojedine struje imalo samo jedan par polova. Zato je i rezultatno okretno polje imalo jedan par polova. Moguće je, međutim, zavoj svake faze razmjestiti po obodu statora tako da se dobije od svake struje više pari polova magnetskog polja, kao na primjer na sl. 17.38, gdje su dva para. U tom će slučaju i rezultatno okretno magnetsko polje imati dva para polova, ali će njegova brzina vrtnje biti samo polovica od $60 f$. Općenito će pri bilo kojem broju pari polova p brzina vrtnje biti:

$$n_0 = \frac{60 f}{p} \text{ o/min.}$$

Stavimo li u šupljinu statora (slika 17.37) gdje je stvoreno rotaciono magnetsko polje magnet, na primjer malu magnetsku iglu, pa je zavrtimo u smjeru vrtnje rotacionog polja, zahvatit će to polje Coulombovim silama iglu i dalje držati u rotaciji brzinom n_0 .

Kažemo da se magnet okreće *sinhrono* s okretnim magnetskim poljem.

Na tome principu osniva se rad motora trofazne struje, za što je osobito zaslužan svojim istraživačkim radovima i otkrićima Nikola Tesla.

Smjer vrtnje okretnog magnetskog polja određen je redoslijedom kojim tijekom vremena struje pojedinih faza postizavaju maksimalnu vrijednost.

U našem izlaganju bili su svici A , B , C trofaznog namota protjecani strujama, tako da su maksimalne vrijednosti imale struje redom u svicima A , B , C . Dakle, smjer vrtnje okretnog magnetskog polja je u smjeru vrtnje kazaljke na satu.

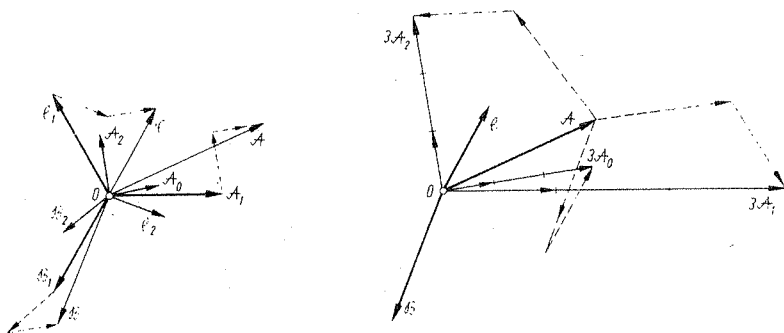
Da bi se promijenio smjer vrtnje, dovoljno je zamijeniti bilo koja dva priključka mreže RST sa stezaljkama A , B , C .

Budući da se rotori tih motora okreću u smjeru vrtnje okretnog magnetskog polja potrebno je katkada još prije priključka odrediti redoslijed faza trofazne mreže. Za tu svrhu služi uređaj prikazan na slici 17.31.

17.1.11. Simetrične komponente nesimetričnog trofaznog sustava

Iz prijašnjih razmatranja nam je poznato da i u mrežama simetričnog trofaznog napona može nastati nesimetrija sustava struja. Uzrok tome su priključena nesimetrična trošila, te razne smetnje i eventualni kvarovi u samoj trofaznoj mreži.

Proračuni, pa i detaljnija analiza takvih nesimetričnih sustava trofaznih struja i napona, mogu se katkada izvršiti jednostavnije ako se promatrani nesimetrični sustav zamijeni s tzv. *simetričnim komponentama*.



Sl. 17.39. Simetrične komponente nesimetričnog trofaznog sustava

Svaki, naime, nesimetrični trofazni sustav A , B , C može se rastaviti na tri simetrične komponente, od kojih je:

prva ili *direktna komponenta* trofazni sustav A_1 , B_1 , C_1 čiji je redoslijed faza jednak redoslijedu faza zadanog nesimetričnog sustava;

druga ili *inverzna komponenta* također je jedan simetričan trofazni sustav A_2 , B_2 , C_2 , no kod njega je redoslijed faza obrnut od onoga u zadanom nesimetričnom sustavu;

treća komponenta su tri izmjenične istofazne veličine, među kojima, dakle, nema faznog pomaka, pa se zato taj sustav zove *nulta komponenta*: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0 = \mathcal{C}_0$.

Na slici 17.39 su kao primjer pokazane, uz zadani nesimetrični trofazni sustav, njegove tri komponente i to: direktna, inverzna i nulta komponenta.

Nesimetrični sustav i njegove komponente povezani su, dakle, jednadžbama:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \quad \text{I}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \quad \text{II}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \quad \text{III}$$

pa ako su komponente poznate, može se odrediti nesimetrični sustav.

Međutim, ove nam jednadžbe omogućuju da, obrnuto, za zadani nesimetrični sustav izračunamo njegove simetrične komponente, pa ćemo u tu svrhu gornje jednadžbe nešto preobličiti.

S obzirom na fazne pomake pojedinih vektora direktnog i inverznog sustava, možemo vektore ovih simetričnih komponenta prikazati operatorom rotacije, pa imamo:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \mathcal{A}_1 \cdot a^0 \\ \mathcal{B}_1 &= \mathcal{A}_1 \cdot a^2 \\ \mathcal{C}_1 &= \mathcal{A}_1 \cdot a \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{za direktni} \\ \text{sustav} \end{array} \quad \left. \begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}_2 \cdot a^0 \\ \mathcal{B}_2 &= \mathcal{A}_2 \cdot a \\ \mathcal{C}_2 &= \mathcal{A}_2 \cdot a^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{za inverzni} \\ \text{sustav} \end{array}$$

i za nultu komponentu: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0 = \mathcal{C}_0$.

Jednadžbe I, II, III mogu se, dakle, prikazati ovako:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \cdot a^2 + \mathcal{A}_2 \cdot a$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \cdot a + \mathcal{A}_2 \cdot a^2$$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe dobivamo:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 3\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1(1 + a + a^2) + \mathcal{A}_2(1 + a + a^2)$$

a kako je $1 + a + a^2 = 0$ izlazi da je:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 3\mathcal{A}_0$$

jer otpadaju druga dva pribrojnika.

Oдавде slijedi da je nulta komponenta jednaka:

$$\mathcal{A}_0 = \frac{1}{3}(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C})$$

To znači da je vektor nulte komponente $\mathcal{A}_0$ po veličini i faznom stanju jednak jednoj trećini zbroja svih triju vektora zadanog nesimetričnog sustava.

Da bismo odredili direktnu komponentu, pomnožimo drugu jednadžbu sa a , a treću jednadžbu sa a^2 i pribrojimo ih nepromijenjenoj prvoj jednadžbi:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \\ a \cdot \mathcal{B} &= \mathcal{A}_0 \cdot a + \mathcal{A}_1 \cdot 1 + \mathcal{A}_2 \cdot a^2 \\ a^2 \cdot \mathcal{C} &= \mathcal{A}_0 \cdot a^2 + \mathcal{A}_1 \cdot 1 + \mathcal{A}_2 \cdot a \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{tu je} \\ a^3 = a^0 = 1 \\ a^4 = a \end{array}$$

pa dobivamo:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \cdot a + \mathcal{C} \cdot a^2 = \mathcal{A}_0(1 + a + a^2) + 3 \cdot \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2(1 + a + a^2)$$

što je jednako:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \cdot a + \mathcal{C} \cdot a^2 = 3 \cdot \mathcal{A}_1$$

odatle je:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{3}(\mathcal{A} + \mathcal{B} \cdot a + \mathcal{C} \cdot a^2)$$

Vidimo, dakle, da je vektor $\mathcal{A}_1$ direktnog sustava jednak po smjeru i veličini jednoj trećini rezultatnog vektora što ga dobivamo kao zbroj zadanog vektora $\mathcal{A}$ s pomaknutim vektorima $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, pri čemu se vektor $\mathcal{B}$ mora zakrenuti za 120° , a vektor $\mathcal{C}$ za 240° u pozitivnom smjeru.

Pri određivanju osnovnog vektora $\mathcal{A}_2$ inverzne komponente množimo II jednadžbu sa a^2 i III jednadžbu sa a i pribrojimo ih nepromijenjenoj prvoj jednadžbi. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \\ a^2 \cdot \mathcal{B} &= \mathcal{A}_0 \cdot a^2 + \mathcal{A}_1 \cdot a + \mathcal{A}_2 \cdot 1 \\ a \cdot \mathcal{C} &= \mathcal{A}_0 \cdot a + \mathcal{A}_1 \cdot a^2 + \mathcal{A}_2 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \cdot a^2 + \mathcal{C} \cdot a = 3 \cdot \mathcal{A}_2$$

odakle je:

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{3}(\mathcal{A} + \mathcal{B} \cdot a^2 + \mathcal{C} \cdot a)$$

$\mathcal{A}_2$ je prema tome po veličini i smjeru jednako jednoj trećini zbroja koji dobivamo ako osnovnom vektoru $\mathcal{A}$ zadanog sustava pridodamo za 240° u pozitivnom smjeru zarotirani vektor $\mathcal{B}$ i još za 120° rotirani vektor $\mathcal{C}$.

Na slici 17.39 prikazan je opisani postupak određivanja simetričnih komponenta za zadani nesimetrični sustav: $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Razmatrali smo trofazni sustav struja koji je jedan od najčešćih višefaznih sustava u praksi. Općenito je, naime, simetrični m -fazni sustav skup od m izmjeničnih veličina, koje su jedna prema drugoj vremenski fazno pomaknute za T/m sekunda, što odgovara faznom kutu $2\pi/m$. Tako će jednadžbe simetričnog m -faznog sustava struja glasniti:

$$i_1 = I_{\max} \cdot \sin \omega t$$

$$i_2 = I_{\max} \cdot \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{m} \right)$$

$$i_3 = I_{\max} \cdot \sin \left(\omega t - 2 \cdot \frac{2\pi}{m} \right)$$

$$i_4 = I_{\max} \cdot \sin \left(\omega t - 3 \frac{2\pi}{m} \right)$$

.....

$$i_m = I_{\max} \cdot \sin \left[\omega t - (m-1) \frac{2\pi}{m} \right]$$

Naš trofazni sustav dobiva se iz ovih općenitih jednadžbi uvrštenjem: $m = 3$.

17.2.1.

Dvofazni i četverofazni sustav

Prema ovako postavljenoj definiciji višefaznih sustava bili bi naponi simetričnog dvofaznog sustava dani jednadžbama:

$$u_1 = U_{\max} \cdot \sin \omega t$$

$$u_{11} = U_{\max} \cdot \sin (\omega t - 180^\circ)$$

a u vektorskom dijagramu to su dva suprotno usmjerena vektora napona, koji padaju u isti pravac.

Ove napone možemo dobiti inducirane u jednom svitku sa srednjim odvojkom pri harmoničkoj promjeni toka Φ , slika 17.40. Možemo, dakle, dio svitka I smatrati prvom fazom, a dio II drugom fazom generatora.

Na slici su ujedno nacrtani vremenski i vektorski dijagram napona.

Da bismo otkrili kakvo magnetsko polje dobivamo od takvog simetričnog dvofaznog sustava, priključimo na naš dvofazni generator odgovarajući dvofazni namot (svitak) kao trošilo u koje će naponi u_1 i u_{11} potjerati struje i_1 i i_{11} , sl. 17.40.

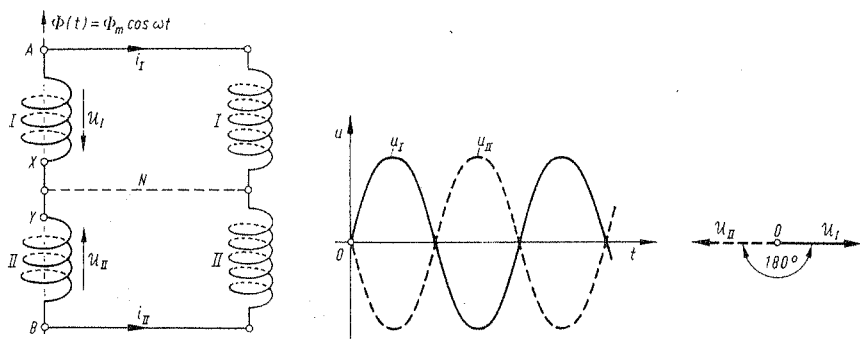
Lako se možemo uvjeriti da je cijeli taj sklop identičan priključku jednog svitka sa $2N$ zavoja na jedan izmjenični napon $2U_1$, te da će tu stvoreni magnetski tok biti izmjeničan, dakle pulzirajući i da je magnetska os identična s geometrijskom osi svitka; ona, dakle, miruje.

Zaključujemo da simetrična dvofazna struja ne može stvoriti okretno magnetsko polje, već samo simetrični višefazni sustavi struja s $m \geq 3$.

U tehničkoj praksi se kao dvofazni sustav izmjeničnih struja uzima polovica simetričnog četverofaznog sustava, čije su struje predložene jednadžbama:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_{\max} \cdot \sin \omega t \\ i_2 &= I_{\max} \cdot \sin (\omega t - 90^\circ) \\ i_3 &= I_{\max} \cdot \sin (\omega t - 180^\circ) \\ i_4 &= I_{\max} \cdot \sin (\omega t - 270^\circ) \end{aligned}$$

Na slici 17.41 je prikazan i vektorski dijagram struja koje su fazno pomaknute za $2\pi/4 = 90^\circ$.



Sl. 17.40. Svitak sa srednjim odvojkom kao izvor dvaju napona fazno pomaknutih za 180°

Ako, dakle, kao dvofazni sustav uzmemo struje i_1 i i_2 one će, prolazeći kroz dva svitka koji su prostorno razmaknuti za 90° , stvoriti okretno magnetsko polje, koje je u biti identično s onim što bi ga u četverofaznom namotu stvorio cijeli četverofazni sustav struja. Razlika je u tome da je u tom dvofaznom sustavu za stvaranje toka aktivna samo polovica amperzavoja, slika 17.41.

17.3.

SNAGA VIŠEFAZNIH SUSTAVA

17.3.1.

Snaga trofazne struje

Snaga trofaznog sustava jednaka je zbroju snaga pojedinih faza, pa općenito vrijedi jednadžba:

$$P = P_I + P_{II} + P_{III}$$

gdje su:

P - ukupna snaga trofaznog sustava,

P_I, P_{II}, P_{III} - snaga pojedinih faza.

Gornja jednađba upotrijebit će se za proračun snage pri nesimetričnom opterećenju, a za simetrično opterećenje može se ona pojednostavniti, jer su u tom slučaju sve tri snage jednake:

$$P_I = P_{II} = P_{III}$$

pa je:

$$P = 3 \cdot P_I$$

što znači da je ukupna snaga u tom slučaju jednaka trostrukoj vrijednosti snage jedne faze.

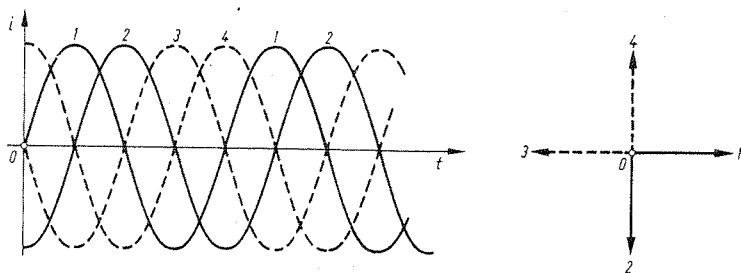
Snaga jedne faze računa se poznatom jednađbom:

$$P_I = U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi$$

pa je:

$$P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi$$

Ovom jednađbom prikazana je snaga simetričnog trofaznog sustava pomoću faznih vrijednosti napona i struje, a ona se može preoblikovati tako da se snaga P izrazi linijskim vrijednostima: U_l i I_l .



Sl. 17.41. Vremenski i vektorski dijagram simetričnog četverofaznog sustava napona

To je osobito važno kad je zbog simetrije opterećenja trofazno trošilo vezano na generator samo trofaznom linijom RST bez nulvoda. U spoju zvijezda ne postoji onda mogućnost priključka na nulvod (i na nultočku), pa su mjerenju pristupačne samo linijske vrijednosti napona i struje. To isto vrijedi i za simetrično opterećenje u trokutnom spoju, gdje je instalacija također izvedena samo trofaznom linijom RST .

Za prijelaz od faznih na linijske vrijednosti napona i struje u simetričnom trofaznom sustavu služe prije izvedene jednađbe, pa je za:

$$\text{spoj } \star; \quad P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi = 3 \frac{U_l}{\sqrt{3}} I_l \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos \varphi$$

a za

$$\text{spoj } \Delta; \quad P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi = 3 \cdot U_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cos \varphi$$

Neovisno, dakle, o tome da li je trošilo vezano u zvijezdu ili trokut, snaga simetričnog opterećenja jednaka je:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos \varphi$$

Ta se jednadžba često piše jednostavno: $P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$.

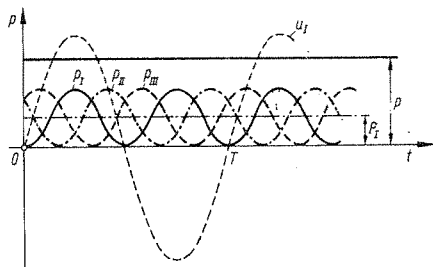
17.3.2. Općenito o balansiranim sustavima

Naročita je osobina simetrično opterećenog trofaznog sustava da se snaga tijekom vremena ne mijenja, iako su struje pojedinih faza izmjenične. Simetrični trofazni sustav ubraja se, prema tome, u takozvane *balansirane sustave*, za koje je karakteristično da je

$$p(t) = \text{konst.}$$

To se može lako vidjeti ako se sve tri krivulje koje predočuju vremenske promjene snaga pojedinih faza grafički sumiraju:

$$p = p_I + p_{II} + p_{III}$$



Sl. 17.42. Prikaz vremenske promjene snaga triju faza simetričnog omskog opterećenja trofaznog sustava i ukupna njihova suma kao balansirana snaga

kako je to (za simetrično opterećenje omskim otporima) prikazano na slici 17.42, gdje izlazi da je:

$$p = 3 \cdot U_f \cdot I_f = 3 \cdot P_f$$

Analitički se može pokazati da se svi simetrični višefazni sustavi čiji je broj faza m veći od 2 ubraja u balansirane sustave, pa to vrijedi i za simetrični trofazni sustav. Općenito se, naime, snaga m -faznog simetričnog sustava računa po jednadžbi:

$$p = \sum_{k=1}^m p_k$$

gdje je $p_k = u_k \cdot i_k$ snaga k -te faze simetričnog m -faznog sustava.

Ako među u_k i i_k postoji fazni pomak φ bit će:

$$u_k = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m} \right]$$

$$i_k = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right]$$

U, I fazne vrijednosti

pa je:

$$p_k = u_k \cdot i_k =$$

$$= 2 \cdot U \cdot I \cdot \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \cdot \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right]$$

To je dalje jednako:

$$p_k = U \cdot I \cdot \cos \varphi - \cos \left[2\omega t - 2(k-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right]$$

ili:

$$p_k = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos \left[2\omega t - 2(k-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right]$$

a ukupna snaga:

$$p(t) = \sum_{k=1}^m U \cdot I \cdot \cos \varphi - \sum_{k=1}^m U \cdot I \cdot \cos \left[2\omega t - 2(k-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right]$$

Na desnoj strani ove jednadžbe prikazuje druga suma:

$$\sum_{k=1}^m U \cdot I \cdot \cos \left[2\omega t - 2(k-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right]$$

simetričan m -fazni sustav harmoničkih funkcija, čiji se članovi mogu predložiti vektorima. Za vrijednosti $m > 2$ (dakle već za simetrični trofazni sustav) predstavljaju ovi vektori simetričnu zvijezdu, a njihova je suma jednaka nuli. Preostaje, dakle, da je:

$$p(t) = m \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

a za trofazni simetrični sustav:

$$p = 3 \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi = \text{konst.}$$

18. MEĐUINDUKTIVITET U MREŽAMA IZMJENIČNE STRUJE

18.1. OPĆENITA RAZMATRANJA O SMJEROVIMA INDUCIRANIH NAPONA UZ PRIMJENU KOEFICIJENATA L I M

Za mreže izmjenične struje koje smo do sada razmatrali, i za koje su bile izvedene strujne i naponske jednačbe, bilo je pretpostavljeno da su u njima osim omskog i kapacitivnog otpora uključeni još samo induktivni otpori samoindukcije.

Budući da među svicima odijeljenih strujnih krugova mreže, pa i među pojedinim svicima jednog te istog strujnog kruga, može doći i do međuinduktivnog djelovanja, mora se u tom slučaju pri postavljanju jednačbi mreže uračunati još i utjecaj međuindukcije.

Iako je međuindukcija bila već pri općem tumačenju zakona elektromagnetske indukcije uvodno objašnjena, potrebno je ovdje tu pojavu posebno objasniti u vezi s izradbom i različitim smještajem svitaka u strujnim krugovima izmjenične struje.

Prema osnovnoj jednačbi Faradayeva zakona elektromagnetske indukcije bit će od promjenljivog magnetskog toka Φ u svakom zavoju koji je obuhvaćen ovim tokom inducirana elektromotorna sila, koja je jednaka:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Predznak $(-)$ određuje prema Lenzovu zakonu smjer elektromotorne sile stvorene u zavoju. To odgovara negativnom geometrijskom orijentiranju smjera e unutar zavoja u odnosu na pozitivni smjer promjene toka $d\Phi$.

Ako je tok Φ umjesto jednim zavojem ulančen sa svim zavojima nekog svitka, bit će u tom svitku inducirana elektromotorna sila:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

gdje je N broj zavoja svitka.

Kad je promjenljivi magnetski tok stvoren izmjeničnom strujom i , može se jednačba za proračun inducirane elektromotorne sile preobličiti tako da se umjesto magnetskog toka Φ supstituira u jednačbu promjenljiva struja i .

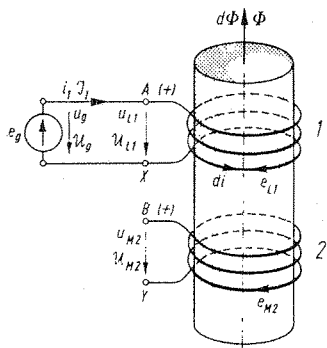
Pri tome se u svitku 1, (slika 18.1), koji prolaskom struje i_1 , sam stvara tok Φ , inducirana elektromotorna sila samoindukcije računa koeficijentom samoindukcije L_1^* :

$$e_{L1} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

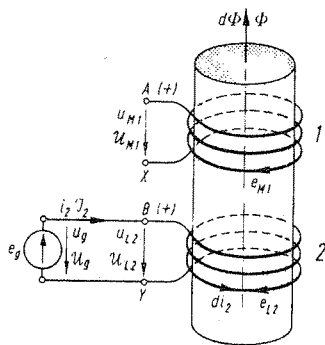
U svitku 2, koji je silnicama toka Φ međusobno povezan sa svitkom 1, inducirana elektromotorna sila međuindukcije računat će se prema jednadžbi:

$$e_{M2} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

a pri tome je M_{12} koeficijent međuindukcije, slika 18.1.



Sl. 18.1. Od struje i_1 inducirani naponi U_{L1} i U_{M2}



Sl. 18.2. Od struje i_2 inducirani naponi U_{L2} i U_{M1}

Isto tako bi se inducirala u svitku 1 elektromotorna sila međuindukcije e_{M1} , ako kroz svitak 2 prolazi promjenljiva struja i_2 , pa je (slika 18.2):

$$e_{M1} = -M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

Dakako da će struja i_2 u vlastitom svitku 2 inducirati i elektromotornu silu samoindukcije:

$$e_{L2} = -L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Koeficijenti međuindukcije bit će u oba slučaja jednaki ako je magnetska permeabilnost prostora u kojem se zatvaraju silnice toka Φ neovisna o jakosti struje.

* Koeficijent samoindukcije (ili kraće rečeno induktivitet) svitka L određen je jednadžbom:

$$L = N^2/R_m = N^2\lambda_m$$

gdje su N broj zavoja svitka, R_m magnetski otpor, a λ_m magnetska vodljivost prostora u kojem se zatvaraju silnice magnetskog toka za koje pretpostavljamo da sve obavijaju sve zavoje svitka.

Možemo uzeti:

$$M_{12} = M_{21} = M^*$$

Na stezaljkama svitaka ove inducirane elektromotorne sile pojavljuju se kao vanjski naponi u_L i u_M , a strelice smjerova tih napona suprotne su smjeru odgovarajuće elektromotorne sile, što se može zaključiti iz ovih razmatranja:

Označimo li na slici 18.1 krajeve svitaka sa $A-X$ i $B-Y$, tada prema upravo određenim smjerovima, ove elektromotorne sile djeluju unutar svitaka od X prema A i od Y prema B tako, da su priključnice A i B na višem potencijalu pa imaju (+) referentni polaritet. Zato djeluju vanjski naponi od A prema X , odnosno od B prema Y .

Jednadžbe ovih induciranih napona, kao funkcije vremena glase, dakle:

$$\begin{aligned} u_{L1} &= +L_1 \frac{di_1}{dt} & u_{M1} &= +M \frac{di_2}{dt} \\ u_{L2} &= +L_2 \frac{di_2}{dt} & u_{M2} &= +M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Budući da se u proračunima izmjeničnih mreža služimo simboličkim predočavanjem struja i napona, imamo za ove elektromotorne sile i napone slijedeće kompleksne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{L1} &= -j\omega L_1 \mathcal{I}_1 & \mathcal{E}_{M1} &= -j\omega M \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{U}_{L1} &= +j\omega L_1 \mathcal{I}_1 & \mathcal{U}_{M1} &= +j\omega M \mathcal{I}_2 \end{aligned}$$

i analogno za drugi svitak:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{L2} &= -j\omega L_2 \mathcal{I}_2 & \mathcal{E}_{M2} &= -j\omega M \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{U}_{L2} &= +j\omega L_2 \mathcal{I}_2 & \mathcal{U}_{M2} &= +j\omega M \mathcal{I}_1 \end{aligned}$$

Slično kao što je umnožak $\omega L = X_L$ označen kao induktivni otpor samoindukcije, nazivamo umnožak $\omega M = X_M$ *induktivnim otporom međuindukcije*, pa se s time u vezi može $\mathcal{U}_{M1}$ shvatiti kao napon prouzročen strujom $\mathcal{I}_2$ na otporu X_M , dakle:

$$\mathcal{U}_{M1} = j X_M \mathcal{I}_2$$

i analogno:

$$\mathcal{U}_{M2} = j X_M \mathcal{I}_1$$

* Koeficijent međuindukcije ili međuinduktivitet dvaju svitaka M definiran je jednadžbom $M = k \sqrt{L_1 L_2}$, gdje su L_1 i L_2 induktiviteti svitaka, a faktor k , koji je u praksi uvijek manji od 1, karakterizira stupanj magnetske povezanosti svitaka magnetskim silnicama. Ako je postignuta idealna veza $k = 1$, onda je:

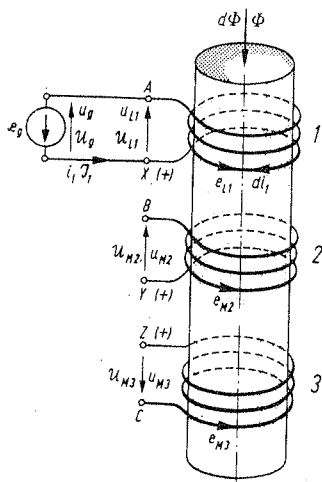
$$M = N_1 N_2 / R_m = N_1 N_2 A_m$$

gdje su R_m magnetski otpor, a A_m magnetska vodljivost prostora u kojem se zatvaraju silnice zajedničkog magnetskog toka. N_1 i N_2 su brojevi zavoja obaju svitaka.

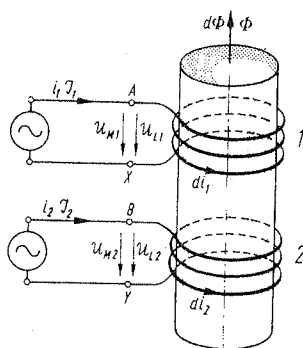
Promijenimo li priključak struje i_1 na svitku 1, ili što je isto, ako promijenimo referentni smjer struje i_1 , promijenit će se u skladu s Lenzovim zakonom i referentni smjerovi induciranih napona na oba svitka, slika 18.3.

Uspoređujući jedan i drugi način priključka struje i_1 (slike 18.1 i 18.3) vidjet ćemo da će u oba slučaja referentni pozitivni polaritet imati inducirani napon samoindukcije na primarnom svitku ona stezaljka na koju struja ulazi.

Na sekundarnom svitku pozitivni polaritet napona međuindukcije pripadat će stezaljci od koje idući obilazimo magnetski tok međuindukcije u istom smjeru kojim struja i_1 prolazi kroz primarni svitak, slika 18.3.



Sl. 18.3. Promjena smjera struje i_1 u svitku 1



Sl. 18.4. Inducirani naponi pri prolazu struje i_1 i i_2

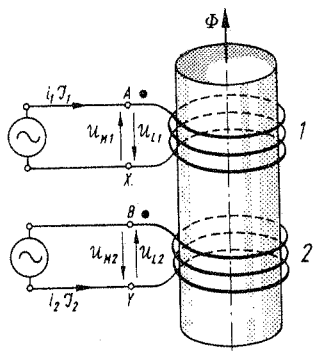
Pogledajmo sada kakvi će naponi biti inducirani na svicima ako kroz svitak 1 prolazi struja i_1 , a istovremeno i kroz svitak 2 struja i_2 . Očito je da će na svakom svitku biti inducirani od vlastite struje osim napona samoindukcije, još i napon međuindukcije od struje drugog svitka, slika 18.4.

Promatrajući oba inducirana napona jednog svitka možemo na osnovi prije izvedenih pravila reći da će napon samoindukcije biti uvijek usmjeren od stezaljke na koju vlastita struja ulazi u svitak, a da će taj isti smjer na tom svitku imati i napon međuindukcije, ako struja drugog svitka ima isti smjer obilaženja kao i vlastita struja promatranog svitka, slika 18.4.

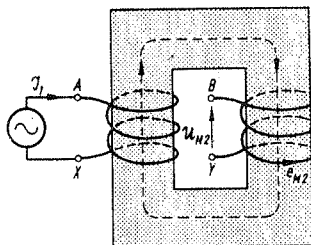
Ako su smjerovi obilaženja obiju struja različiti, imat će naponi međuindukcije smjer suprotan naponu samoindukcije, slika 18.5.

Istom postupkom odredit će se smjer induciranih napona međuindukcije i onda ako je razmještaj svitaka u magnetskom polju bilo kakav, dakle drugačiji nego onaj koji smo do sada razmatrali.

Za ilustraciju ćemo uzeti opet ista dva svitka, AX i BY , koja smo prije imali prikazana na slici 18.1 ali ćemo ih sada smjestiti u magnetskom polju toka Φ , prema slici 18.6, na dva stupa zatvorene željezne jezgre, pa ćemo pri istoj zadanoj struji $\mathcal{I}_1$ odrediti inducirani napon međuindukcije U_{M2} .

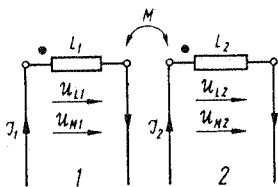


Sl. 18.5. Smjerovi napona međuindukcije, ako su smjerovi struja i_1 i i_2 različiti

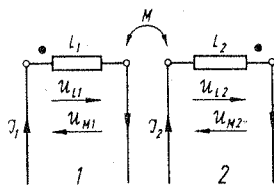


Sl. 18.6. Promijenjeni razmještaj svitaka s obzirom na smjer magnetskog toka u odnosu na sliku 18.1

Na slici se vidi da silnice magnetskog toka Φ , koji se zatvara u prikazanoj željeznoj jezgri, prolaze sada zbog promijenjenog smještaja svitka BY kroz njeovu šupljinu u protivnom smjeru nego na slici 18.1. Zato je sada smjer inducirano napona U_{M2} usmjeren od Y prema B , dakle protivno nego na slici 18.1.



Sl. 18.7. Znakovi: točkice (ili zvjezdice) uz priključne stezaljke svitaka određuju smjerove (predznake) napona međuindukcije



Sl. 18.8. Suprotno usmjereni naponi

Na sl. 18.1 do 18.5 bili su svici nacrtani tako da se vide smjerovi namatanja zavoja oko magnetskog toka, pa su se mogli odrediti i ucrtati referentni smjerovi induciranih napona. Budući da se u spojnim shemama mreže predočuju svici simbolima iz kojih se ne može vidjeti smjer namatanja zavoja, potrebno je međusobni raspored svitaka dodatno označiti. To se radi tako da se na jedan kraj magnetski povezanih svitaka stavi točka (ili zvjezdica), čime se naznačuje da će naponi međuindukcije imati isti smjer kao i naponi samoindukcije, ako struje i_1 i i_2 ulaze, ili obje izlaze, na isto označenim krajevima svitaka, slika 18.7.

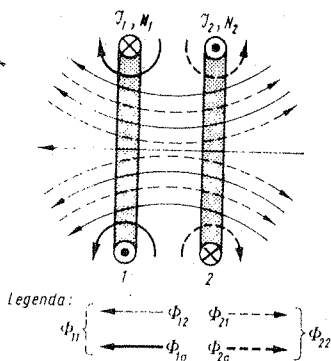
U protivnom, ako jedna struja ulazi u svitak na označenom kraju, a druga na označenom kraju izlazi, onda su naponi međuindukcije usmjereni suprotno naponima samoindukcije, slika 18.8.

U pogledu magnetskih tokova može se značenje ovog simbola točke uz svitak opisati tako da struje koje ulaze na isto označene krajeve svitaka stvaraju jednako usmjerene magnetske tokove samoindukcije i međuindukcije. Ako pak jedna struja ulazi na označenom kraju u svitak, a druga struja na neoznačenom kraju, smjerovi tih magnetskih tokova međusobno su suprotni, slika 18.5.

18.2. PRIMJENA MAGNETSKIH TOKOVA NA PRORAČUN NAPONA

Inducirane napone računali smo u prijašnjim izvodima primjenom indukcioni koeficijenata L i M , no moguće je za te proračune upotrijebiti i odgovarajuće promjenljive magnetske tokove što ih stvaraju izmjenične struje u svicima.

Razmotrit ćemo zato pobliže raspored silnica dvaju magnetski povezanih svitaka protjecanih strujama koji su prikazani na slici 18.9. Pri tome zbog pojednostavnjenja pretpostavljamo da silnice obuhvaćaju sve zavoje svitka kroz koji prolaze.



Sl. 18.9. Prostorni raspored magnetskih silnica dvaju magnetski povezanih svitaka

Na slici se vidi da ukupni magnetski tok Φ_{11} , što ga stvara struja I_1 prolazeći kroz zavoje N_1 svitka 1, možemo zamisliti rastavljen na dva dijela. Jedan dio su silnice koje ne obuhvaćaju samo zavoje N_1 svitka 1, nego i zavoje N_2 svitka 2. To je, dakle, dio toka koji sudjeluje u pojavi međuindukcije, a označujemo ga Φ_{12} .

Drugi dio ukupnog toka Φ_{11} označuju one silnice koje obuhvaćaju samo zavoje N_1 svitka 1. Budući da te silnice ne sudjeluju u procesu međuindukcije, nazivamo taj dio rasipnim tokom struje I_1 i označujemo ga $\Phi_{1\sigma}$.

Može se, dakle, postaviti jednadžba:

$$\Phi_{11} = \Phi_{12} + \Phi_{1\sigma}$$

Slično se i ukupni magnetski tok Φ_{22} što ga prolaskom kroz zavoje N_2 drugog svitka stvara struja I_2 može rastaviti na dio Φ_{21} koji je zajednički za oba svitka i na dio čije silnice zahvaćaju samo zavoje vlastitog svitka, a to je rasipni tok struje I_2 i označujemo ga $\Phi_{2\sigma}$.

I za magnetski tok struje I_2 može se postaviti jednadžba:

$$\Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{2\sigma}$$

U uvodnim razmatranjima o magnetskom polju i elektromagnetskoj indukciji rečeno je da se ukupnim ili ulančenim magnetskim tokom cijelog svitka naziva umnožak magnetskog toka Φ s brojem zavoja svitka N . Općenito je, dakle:

$$\Psi = N\Phi$$

Budući da se ulančeni tok može predočiti i kao umnožak jakosti struje s induktivitetom svitka, za promatrano magnetsko polje (slika 18.9) postoje slijedeće relacije:

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= N_1 \Phi_{11} = L_1 I_1 & \Psi_{22} &= N_2 \Phi_{22} = L_2 I_2 \\ \Psi_{12} &= N_2 \Phi_{12} = M_{12} I_1 & \Psi_{21} &= N_1 \Phi_{21} = M_{21} I_2 \end{aligned}$$

Pri tome je, uz našu pretpostavku da je $\mu = \text{konst.}$:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

I rasipnim magnetskim tokovima pripadaju odgovarajući rasipni induktiviteti $L_{1\sigma}$ i $L_{2\sigma}$, pa i za njih vrijede jednadžbe:

$$\Psi_{1\sigma} = N_1 \Phi_{1\sigma} = L_{1\sigma} I_1 \quad \Psi_{2\sigma} = N_2 \Phi_{2\sigma} = L_{2\sigma} I_2$$

odakle se mogu izračunati i ovi novouvedeni rasipni induktiviteti $L_{1\sigma}$ i $L_{2\sigma}$, ako za pripadne rasipne tokove uvrstimo u gornje jednadžbe izraze:

$$\Phi_{1\sigma} = \Phi_{11} - \Phi_{12} \quad \text{i} \quad \Phi_{2\sigma} = \Phi_{22} - \Phi_{21}$$

Imamo, dakle:

$$L_{1\sigma} = \frac{N_1 \Phi_{1\sigma}}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} (\Phi_{11} - \Phi_{12}) = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} - \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_1}$$

pa ako uvrstimo:

$$\frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} = L_1 \quad \text{i} \quad \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_1} = N_1 \frac{M}{N_2}$$

dobivamo konačno da je primarni rasipni induktivitet jednak:

$$L_{1\sigma} = L_1 - \frac{N_1}{N_2} M$$

Sličnim postupkom dobiva se i sekundarni rasipni induktivitet:

$$L_{2\sigma} = L_2 - \frac{N_2}{N_1} M$$

Značenje suptrahenda u ovim jednadžbama možemo saznati uvidom u raspored magnetskih silnica ukupnog toka jednog svitka, slika 18.9.

U svakom svitku koji je sam protjecan strujom predstavlja taj suptrahend koeficijent samoindukcije za onaj dio ukupnog toka, čije silnice obuhvaćaju oba svitka. Na slici je taj dio označen sa Φ_{12} .

Ako, naime, supstituiramo $M = N_1 N_2 \cdot I_{12}$, dobivamo — za prvi svitak — da je:

$$\frac{N_1}{N_2} M = \frac{N_1}{N_2} N_1 N_2 \cdot I_{12} = N_1^2 \cdot I_{12}$$

a to je doista induktivitet $L_{12} = N_1^2 \cdot I_{12}$, pri čemu je I_{12} magnetska vodljivost za silnice koje obuhvaćaju oba svitka: Φ_{12} .

Sličnim računskim postupkom dobivamo za drugi svitak:

$$\frac{N_2}{N_1} M = \frac{N_2}{N_1} N_1 N_2 \cdot I_{21} = N_2^2 \cdot I_{21} = L_{21}$$

A_{21} je magnetska vodljivost za tok Φ_{21} .

(Za linearne odnose znamo da je $A_{12} = A_{21}$)

18.3. REZULTANTNI INDUKTIVITET SERIJSKI VEZANIH SVITAKA

Pogledajmo sada strujne krugove izmjenične struje u kojima nastaje i pojava međuindukcije.

Najjednostavniji primjer takvog strujnog kruga je serijski spoj dvaju svitaka priključenih na izvor izmjeničnog napona U , slika 18.10.

Općenito za serijski spoj vrijede jednadžbe:

$$I_1 = I_2 = I$$

$$U = U_1 + U_2$$

Napon svakog svitka ima aktivnu komponentu zbog omskog otpora namota i induktivnu komponentu zbog samoindukcije i međuindukcije. Pri određivanju napona međuindukcije treba uzeti u obzir način kako su svici međuinduktivno povezani.

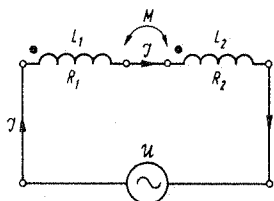
Ako su svici s obzirom na međuinduktivnu vezu spojeni kako je točkama naznačeno na slici 18.10, naponska će jednadžba glasiti:

$$\mathcal{U} = \mathcal{I} R_1 + \mathcal{I} j \omega L_1 + \mathcal{I} j \omega M + \mathcal{I} R_2 + \mathcal{I} j \omega L_2 + \mathcal{I} j \omega M$$

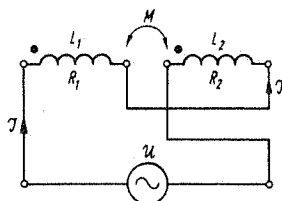
ili:
$$\mathcal{U} = \mathcal{I} [R_1 + R_2 + j \omega (L_1 + L_2 + 2 M)]$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{I} (R + j \omega L')$$

Ovdje su $R = R_1 + R_2$ rezultatni omski otpor, a $L' = L_1 + L_2 + 2 M$ rezultatni induktivitet obaju svitaka.



Sl. 18.10. Serijski spoj dvaju svitaka na izvor napona uz magnetski suglasno spajanje



Sl. 18.11. Serijski spoj dvaju svitaka na izvor napona pri magnetski suprotnom spajanju

Takav serijski spoj svitaka gdje se njihovi naponi međuindukcije pribrajaju naponima samoindukcije nazivamo *suglasnim spajanjem*.

Ako su svici s obzirom na njihovu međuinduktivnu vezu spojeni prema slici 18.11, oblik naponske jednadžbe je:

$$\mathcal{U} = \mathcal{I} R_1 + \mathcal{I} j \omega L_1 - \mathcal{I} j \omega M + \mathcal{I} R_2 + \mathcal{I} j \omega L_2 - \mathcal{I} j \omega M$$

ili:
$$\mathcal{U} = \mathcal{I} [R_1 + R_2 + j \omega (L_1 + L_2 - 2 M)]$$

pri čemu se sada kao rezultatni induktivitet tog spoja dobiva izraz:

$$L'' = L_1 + L_2 - 2 M$$

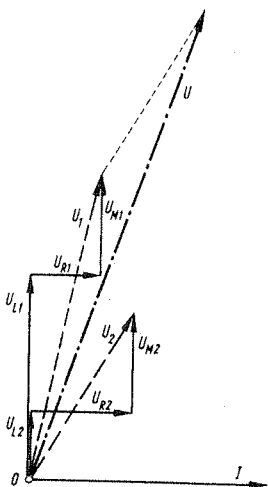
Povezivanje svitaka gdje naponi međuindukcije imaju protivan smjer od smjera napona samoindukcije zove se *suprotno spajanje*.

Na slikama 18.12 i 18.13 prikazani su vektorski dijagrami za oba načina međuinduktivnog vezanja.

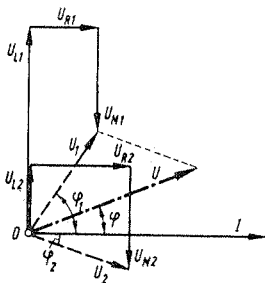
Budući da je pri realno izvedenim svicima uvijek $L_1 + L_2 > 2 M$, to će i uz protivno međuinduktivno vezanje svitaka rezultatni induktivitet L'' biti uvijek pozitivan. U dijagramu se to očituje time da je kut φ između struje i napona izvora pozitivan, ima dakle induktivan karakter, iako se može dogoditi da je fazni pomak struje i napona na jednom svitku negativan, tj. ima kapacitivan karakter.

To će biti na svitku čiji je induktivitet manji, ako pri suprotnom spajanju postoji odnos induktiviteta dan slijedećom relacijom:

$$L_1 \approx |M| \approx L_2$$



Sl. 18.12. Vektorski dijagram magnetski suglasno spojenih svitaka



Sl. 18.13. Vektorski dijagram pri magnetski suprotno spojenim svicima

Rezultantni induktiviteti dvaju serijski spojenih svitaka pri suglasnom i suprotnom spajanju mogu se odrediti mjerenjem, a onda se lako izračuna i vrijednost koeficijenta M .

Diferencija ovih induktiviteta jednaka je, naime:

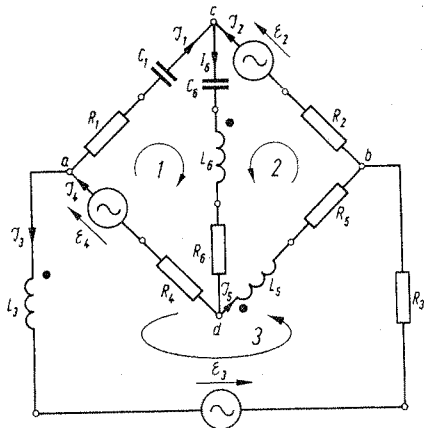
$$L' - L'' = 4 \cdot |M| \quad \text{pa je} \quad M = \frac{L' - L''}{4}$$

Vidimo, dakle, da se na osnovi gore dobivenih rezultata može sada dati općenitija jednačba za proračunavanje rezultantnog induktiviteta serijski povezanih svitaka, među kojima postoje i međuinduktivne veze. Ta jednačba glasi:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Predznak (+) za suglasno, a predznak (−) za suprotno induktivno spajanje.

Poznavajući pravila kako se određuju naponi međuindukcije, možemo rješavati i kompliciranije mreže izmjenične struje u kojima su svi i međuinduktivno povezani, jer nam je sada omogućeno da u naponskim jednadžbama drugog Kirchhoffova zakona uračunamo i inducirane napone međuindukcije, kao što je prikazano na primjeru mreže predočene na slici 18.14. Tu su zadani svi naponi i otpori (R , ωL , $1/\omega C$, ωM), a na svicima su označene i točkice pomoću kojih se određuju smjerovi induciranih napona međuindukcije.



Sl. 18.14. Primjer mreže u kojoj dolazi i do međuinduktivnih veza među svicima u granama

Za nepoznate struje u granama koje želimo odrediti pretpostavljeni su referentni (pozitivni) smjerovi, pa na osnovi toga možemo napisati jednadžbe prvog i drugog Kirchhoffovog zakona.

Za čvorove a , b , c jednadžbe struja prvog Kirchhoffovog zakona glase:

$$\text{a) } I_1 + I_3 = I_4 \quad \text{b) } I_2 = I_3 + I_5 \quad \text{c) } I_6 = I_1 + I_2$$

Za konture 1, 2, 3 naponske jednadžbe drugog Kirchhoffovog zakona glase:

$$I_1 R_1 - I_1 j \frac{1}{\omega C_1} - I_6 j \frac{1}{\omega C_6} + I_6 j \omega L_6 + I_6 R_6 + I_4 R_4 + I_3 j \omega M_{36} + I_5 j \omega M_{56} = \mathcal{E}_4$$

$$I_2 R_2 - I_6 j \frac{1}{\omega C_6} + I_6 j \omega L_6 + I_6 R_6 + I_5 j \omega L_5 + I_5 R_5 + I_6 j \omega M_{65} + I_3 j \omega M_{35} + I_5 j \omega M_{56} + I_3 j \omega M_{36} = \mathcal{E}_2$$

$$I_3 R_3 + I_3 j \omega L_3 - I_5 R_5 - I_5 j \omega L_5 + I_4 R_4 + I_5 j \omega M_{53} + I_6 j \omega M_{63} - I_3 j \omega M_{35} - I_6 j \omega M_{65} = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$$

Simultanim rješavanjem ovih šest jednadžbi dobiju se vrijednosti svih šest nepoznatih struja, a dalje se mogu onda odrediti i sve ostale tražene veličine, tj. padovi napona i snage na pojedinim otporima.

18.5.

PRORAČUN PRIMJENOM KONTURNIH STRUJA

Želimo li i ovdje računati mrežu metodom konturnih struja, moramo struje u granama koje su na granici između odabranih kontura izraziti konturnim strujama.

U našem primjeru odabrane su prema slici 18.14 kao konturne struje $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, i $\mathcal{I}_3$, pa su na osnovi prvog Kirchhoffovog zakona međašne struje jednake:

$$\mathcal{I}_4 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_3 \quad \mathcal{I}_5 = \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3 \quad \mathcal{I}_6 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Nakon uvrštenja ovih izraza u naponske jednadžbe drugog Kirchhoffovog zakona dobivamo novi sustav naponskih jednadžbi, gdje su svi padovi napona izraženi konturnim strujama:

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_1 \left[R_1 + R_4 + R_6 + j\omega L_6 - j\frac{1}{\omega C_1} - j\frac{1}{\omega C_6} \right] + \\ & + \mathcal{I}_2 \left[R_6 + j\omega L_6 - j\frac{1}{\omega C_6} + j\omega M_{56} \right] + \mathcal{I}_3 [R_4 + j\omega M_{36} - j\omega M_{56}] = \mathcal{E}_4 \\ & \mathcal{I}_1 \left[R_6 + j\omega L_6 - j\frac{1}{\omega C_6} + j\omega M_{65} \right] + \\ & + \mathcal{I}_2 \left[R_2 + R_5 + R_6 + j\omega L_5 + j\omega L_6 - j\frac{1}{\omega C_6} + j\omega M_{65} + j\omega M_{56} \right] + \\ & + \mathcal{I}_3 [-R_5 - j\omega L_5 + j\omega M_{35} + j\omega M_{36} - j\omega M_{56}] = \mathcal{E}_2 \\ & \mathcal{I}_1 [R_4 + j\omega M_{63} - j\omega M_{65}] + \mathcal{I}_2 [-R_5 - j\omega L_5 + j\omega M_{63} - j\omega M_{65} + j\omega M_{53}] + \\ & + \mathcal{I}_3 [R_3 + R_4 + R_5 + j\omega L_3 + j\omega L_5 - j\omega M_{35} - j\omega M_{53}] = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 \end{aligned}$$

Jednostavniji prikaz ovih naponskih jednadžbi za računanje s konturnim strujama dobiva se supstitucijom:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{11} &= R_1 + R_4 + R_6 + j \cdot \left(\omega L_6 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_6} \right) \\ \mathcal{Z}_{22} &= R_2 + R_5 + R_6 + j \cdot \left(\omega L_5 + \omega L_6 - \frac{1}{\omega C_6} + 2\omega M_{56} \right) \\ \mathcal{Z}_{33} &= R_3 + R_4 + R_5 + j \cdot (\omega L_3 + \omega L_5 - 2\omega M_{35}) \\ \mathcal{Z}_{12} = \mathcal{Z}_{21} &= R_6 + j \cdot \left(\omega L_6 - \frac{1}{\omega C_6} + \omega M_{56} \right) \\ \mathcal{Z}_{13} = \mathcal{Z}_{31} &= R_4 + j \cdot (\omega M_{36} - \omega M_{56}) \\ \mathcal{Z}_{23} = \mathcal{Z}_{32} &= -R_5 + j \cdot (-\omega L_5 + \omega M_{35} + \omega M_{36} - \omega M_{56}) \\ \text{i} \quad \mathcal{E}_{11} &= \mathcal{E}_4 \quad \mathcal{E}_{22} = \mathcal{E}_2 \quad \mathcal{E}_{33} = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 \end{aligned}$$

pri čemu je zbog pretpostavljenih linearnih odnosa uzeto općenito:

$$M_{ij} = M_{ji}$$

Otpori Z_{11} , Z_{22} i Z_{33} su ukupni vlastiti otpori odgovarajuće konture, dok su $Z_{12} = Z_{21}$, $Z_{13} = Z_{31}$ i $Z_{23} = Z_{32}$ otpori međašnih grana. $\mathcal{E}_{11}$, $\mathcal{E}_{22}$ i $\mathcal{E}_{33}$ su resultantne elektromotorne sile pojedinih nezavisnih kontura. Time dobivamo naponske jednadžbe u općenitom obliku:

$$\mathcal{I}_1 Z_{11} + \mathcal{I}_2 Z_{12} + \mathcal{I}_3 Z_{13} = \mathcal{E}_{11}$$

$$\mathcal{I}_1 Z_{21} + \mathcal{I}_2 Z_{22} + \mathcal{I}_3 Z_{23} = \mathcal{E}_{22}$$

$$\mathcal{I}_1 Z_{31} + \mathcal{I}_2 Z_{32} + \mathcal{I}_3 Z_{33} = \mathcal{E}_{33}$$

Rješenjem ovih jednadžbi dobivaju se tražene konturne struje, a to su u našem primjeru $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ i $\mathcal{I}_3$.

I na ovom se primjeru ponovno vidi prednost metode konturnih struja u odnosu na izravnu primjenu Kirchhoffovih zakona pri rješavanju linearnih električnih mreža. Dok je za određivanje svih šest nepoznatih struja metodom Kirchhoffovih zakona bilo potrebno simultano riješiti sustav od šest jednadžbi (3 strujne i 3 naponske), sada se primjenom konturnih struja simultano mora riješiti sustav od samo tri jednadžbe, a to je znatno jednostavniji zadatak.

Pomoću tako dobivenih triju konturnih struja, koje su ujedno struje u perifernim granama, izračunaju se još sve preostale struje u granama mreže jednostavnim sumiranjem prema jednadžbama prvog Kirchhoffovog zakona.

Važno je spomenuti slijedeće.

Pri postavljanju naponskih jednadžbi metodom konturnih struja za mreže u kojima postoje među svicima i međuinduktivne veze, moraju se uz ostale napone i međuinduktivni naponi svake konture računati za svaku konturnu struju prema prije postavljenim pravilima. To je i samo po sebi razumljivo, jer su stvarne struje u granama predočene sada konturnim strujama kao komponentama, pa u proračunu treba uzeti u obzir sve komponente.

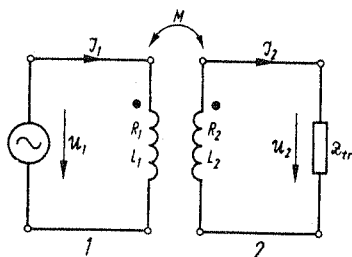
18.6. ZRAČNI TRANSFORMATORI. OPĆENITA JEDNADŽBA I NADOMJESNA SHEMA

Upoznali smo pojavu međuindukcije do koje dolazi gdje god su magnetski povezana dva ili više strujnih krugova. Tako se može dogoditi da se u nekim uređajima zbog prostornog smještaja pojedinih njihovih dijelova induciraju u nekima od njih i neželjeni naponi međuindukcije, kao što je to npr. »preslušavanje« kod paralelno postavljenih telefonskih vodova.

Međutim, međuindukcija se mnogo i namjerno iskorišćuje u posebno sastavljenim konstrukcijama, koje služe za točno određene svrhe.

Kao najčešći uređaj koji funkcionira na principu međuindukcije bit će prikazan transformator.

Za primjer konstruktivne izradbe transformatora mogu poslužiti slike 18.1 i 18.15. To su u biti dva svitka električki međusobno izolirana, ali su povezani zajedničkim magnetskim tokom. Pri tome se jedan svitak priključuje na izvor izmjeničnog napona, dok se na drugi svitak, u kojemu je induciran napon međuin- dukcije, priključuju trošila koja su u spojnim shemama reprezentirana odgovara- jućom impedancijom: Z_{tr} .



Sl. 18.15. Spojna shema zračnog transformatora

Energija izvora ne prenosi se dakle trošilu električki vodljivim putem, nego posredstvom izmjeničnog magnetskog toka kojim su povezana oba svitka.

S obzirom na smjer tijeka energije od izvora do trošila nazivamo svitak koji je priključen na izvor primarnim, a svitak na koji je priključeno trošilo sekundarnim. Sve električne veličine primarne strane označujemo indeksom 1, a indeksom 2 veličine sekundarne strane.

Transformatori se u električnim uređajima mogu različito upotrijebiti, no ipak im je prvenstvena zadaća, da izmjenični primarni napon izvora od U_1 volta promijene u sekundarni napon U_2 volta, na koji će se priključiti trošilo.

Iako je u ovom poglavlju rad transformatora detaljno razmatran, može se već na osnovi dobivenih spoznaja o induciranju napona vidjeti da će se inducirani naponi primara i sekundara odnositi kao brojevi zavoja primarnog i sekundarnog svitka.

Matematički formulirano, to je prva glavna jednadžba transformatora:

$$U_1 : U_2 = N_1 : N_2$$

Budući da transformator samo mijenja parametre energije, a ne stvara energiju, bit će u idealnom transformatoru pri opterećenju snaga potrošena u trošilu jednaka snazi što je izvor predaje transformatoru, pa tu vrijedi jednadžba $P_1 = P_2$, a jer je $P_1 = U_1 I_1$ i $P_2 = U_2 I_2$, dobiva se za struje pri opterećenom transformatoru druga glavna jednadžba:

$$I_1 : I_2 = N_2 : N_1$$

Rad transformatora može se još mnogo točnije analizirati primjenjujući fizi- kalne zakonitosti i jednadžbe koje smo o međuin- dukciji upoznali u prijašnjem izlaganju.

Budući da u spomenutim jednadžbama dolaze kao važni parametri koeficijenti samoindukcije L i međuindukcije M , mogu se te jednadžbe pri analizi rada transformatora u promjenljivim okolnostima pogona iskoristiti samo onda ako su ti koeficijenti konstantne veličine.

To će biti ispunjeno ako su silnice magnetskog toka, kojim su povezani primarni i sekundarni svitak, smještene u prostoru konstantne magnetske permeabilnosti. Zato ćemo prva razmatranja o radu transformatora obaviti na takozvanom *zračnom transformatoru*, gdje se magnetski tok zatvara u zraku, čija je magnetska permeabilnost konstantna: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

Na slici 18.15 prikazana je spojna shema zračnog transformatora, čiji je primarni svitak induktiviteta L_1 i omskog otpora R_1 priključen na izvor napona U_1 frekvencije f , dok je na sekundarni svitak induktiviteta L_2 i otpora R_2 priključeno trošilo impedancije Z_{tr} . Međuinduktivitet svitaka je M , a zadane su i označene točkice na svicima, pomoću kojih su definirani smjerovi magnetskih tokova i induciranih napona.

Uz zadani napon izvora U_1 , te ako odaberemo referentne smjerove struja I_1 i I_2 , možemo za primarni i za sekundarni strujni krug napisati slijedeće naponske jednadžbe:

$$\begin{aligned} 1 \quad & U_1 = \mathcal{I}_1 R_1 + \mathcal{I}_1 j\omega L_1 - \mathcal{I}_2 j\omega M \\ 2 \quad & 0 = \mathcal{I}_2 R_2 + \mathcal{I}_2 j\omega L_2 - \mathcal{I}_1 j\omega M + \mathcal{I}_2 Z_{tr} \end{aligned}$$

Budući je $\mathcal{I}_2 Z_{tr}$ napon sekundarnih stezaljki na koje je priključeno trošilo:

$$U_2 = \mathcal{I}_2 Z_{tr}$$

može se naponska jednadžba sekundara napisati u obliku:

$$2 \quad U_2 = \mathcal{I}_1 j\omega M - \mathcal{I}_2 R_2 - \mathcal{I}_2 j\omega L_2$$

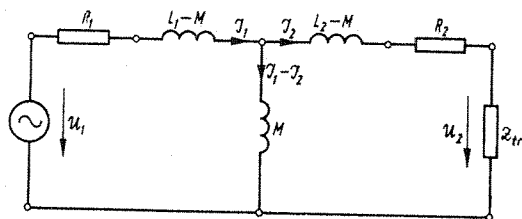
Dodamo li i odbijemo istovremeno u prvoj jednadžbi izraz $\mathcal{I}_1 \cdot j\omega M$, a u drugoj izraz $\mathcal{I}_2 \cdot j\omega M$, valjanost se ovih jednadžbi dakako neće promijeniti, one će poprimiti samo novi oblik i to:

$$\begin{aligned} \text{primarna strana:} \quad & U_1 = \mathcal{I}_1 R_1 + \mathcal{I}_1 j\omega(L_1 - M) + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2)j\omega M \\ \text{a sekundarna strana:} \quad & U_2 = (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2)j\omega M - \mathcal{I}_2 R_2 - \mathcal{I}_2 j\omega(L_2 - M) \end{aligned}$$

Ove jednadžbe vrijede općenito za zračni transformator neovisno o njegovu sastavu i mogu poslužiti za daljnju analizu rada transformatora. Može se, naime, vidjeti da su te jednadžbe ujedno i naponske jednadžbe za mrežu sa dvije konture, čiji je spoj prikazan na slici 18.16, pa se zato ta mreža i naziva nadomjesnom shemom zračnog transformatora.

Iako su, dakle, primarna i sekundarna strana transformatora međusobno električki izolirane, moguće je rad transformatora analizirati primjenjujući pravila o rješavanju mreža izmjenične struje, jer su sada obje strane transformatora prikazane dvjema konturama, koje su električki vodljivo povezane u mrežu.

Ako su nam zadane karakteristične veličine transformatora L_1, L_2, M, R_1, R_2 možemo uz poznati napon izvora U_1 upotrijebiti za analizu nadomjesnu shemu, pa odrediti za priključeno trošilo Z_{tr} napon U_2 i struju trošila I_2 , te struju izvora I_1 . Najjednostavnije je primijeniti ovdje Millmanov teorem čvorova.



Sl. 18.16. Nadomjesna shema zračnog transformatora s pravim vrijednostima sekundarnih veličina

Ova nadomjesna shema mogla bi se i realno izraditi tako, da se na svako mjesto sheme stavi odgovarajući element zadanog iznosa. Budući da je kod realno izvedenih transformatora faktor $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ uvijek manji od 1 može se, kada je $L_1 = L_2$, konstatirati da će obje diferencije $(L_1 - M)$ i $(L_2 - M)$ biti pozitivne i one će označavati neke induktivitete.

Ako je pak odnos induktiviteta takav da je:

$$L_1 \geq M \geq L_2$$

bit će ili $(L_1 - M) < 0$ ili $(L_2 - M) < 0$ — dakle negativno, što pri analitičkom rješavanju ove sheme, dakako, ne znači računsku poteškoću, ali pri sastavljanju spojne sheme morao bi se na mjesto negativnog induktiviteta staviti kondenzator odgovarajućeg reaktivnog otpora.

Oba izraza u zagradama $(L_1 - M)$ i $(L_2 - M)$ ne predstavljaju induktivitete koji bi imali neko fizikalno značenje u radu transformatora. Svojim sastavom slični su rasipnim induktivitetima:

$$L_{1\sigma} = \left(L_1 - \frac{N_1}{N_2} M \right) \quad \text{i} \quad L_{2\sigma} = \left(L_2 - \frac{N_2}{N_1} M \right)$$

pa će to dapače i biti, ali samo ako je omjer broja zavoja $N_1/N_2 = 1$ (i $N_2/N_1 = 1$), tj. ako transformator ima na sekundarnoj strani isto toliko zavoja kao i na primaru: $N_1 = N_2$.

Ako je, dakle, omjer broja zavoja $k = N_1/N_2$ transformatora različit od 1, neće u nadomjesnoj shemi tog transformatora serijski induktiviteti predstavljati rasipanje, jer uz veličinu M manjka faktor N_1/N_2 odnosno N_2/N_1 .

18.7. REDUCIRANJE SEKUNDARNIH VELIČINA TRANSFORMATORA

Želimo li ipak iskoristiti nadomjesnu shemu i njene jednadžbe za analizu rada transformatora i onda ako brojevi zavoja primara i sekundara nisu jednaki, a da nam serijski induktiviteti predstavljaju rasipanje, morat ćemo u osnovnim jednadžbama transformatora međuinaktivitetu M svojevoljno dodati faktor $N_1/N_2 = k$.

Da se pri tome sačuva valjanost ovih jednadžbi potrebno je istovremeno još uvesti neke korekcije. Lako se može vidjeti da dodatno treba pomnožiti:

$$I_2 \text{ sa } N_2/N_1 = 1/k$$

$$U_2 \text{ sa } N_1/N_2 = k$$

$$R_2 \text{ sa } (N_1/N_2)^2 = k^2$$

$$L_2 \text{ sa } (N_1/N_2)^2 = k^2$$

Tako dobivamo novi sustav osnovnih jednadžbi transformatora:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{I}_1 (R_1 + j\omega L_1) - \frac{1}{k} \mathcal{I}_2 j\omega k M$$

$$k \mathcal{U}_2 = \mathcal{I}_1 j\omega k M - \frac{1}{k} \mathcal{I}_2 k^2 (R_2 + j\omega L_2)$$

Pri tome vidimo da su vrijednosti svih primarnih veličina ostale nepromijenjene, ali su sekundarne zbog množenja s navedenim faktorima promijenjene. Ove novodobivene sekundarne veličine, kao i novu zajedničku veličinu međuinukcije, nazivamo reduciranim veličinama, a označujemo ih dodatnom crticom:

$$M' = k \cdot M$$

$$U'_2 = k \cdot U_2$$

$$I'_2 = (1/k) \cdot I_2$$

$$R'_2 = k^2 \cdot R_2$$

$$L'_2 = k^2 \cdot L_2$$

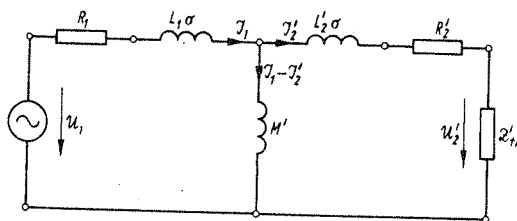
Ovdje smo to reduciranje sekundarnih veličina prikazali množenjem s faktorom redukcije k koji može imati i bilo kakvu vrijednost, kako bismo imali općenito valjane odnose.

Ako ove naponske jednadžbe s reduciranim sekundarnim veličinama proširimo slično kao i prije i to: prvu sa $\mathcal{I}_1 \cdot j\omega k M$, a drugu sa $(1/k) \mathcal{I}_2 \cdot j\omega k M$, te ako

ujedno supstituiramo za faktor k već odabranu vrijednost $k = N_1/N_2$, dobivamo nov sustav jednadžbi:

$$u_1 = \mathcal{I}_1 \cdot \left[R_1 + j\omega \cdot \left(L_1 - \frac{N_1}{N_2} M \right) \right] + \left(\mathcal{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \mathcal{I}_2 \right) \cdot j\omega \frac{N_1}{N_2} M$$

$$\frac{N_1}{N_2} u_2 = \left(\mathcal{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \mathcal{I}_2 \right) \cdot j\omega \frac{N_1}{N_2} M - \frac{N_2}{N_1} \mathcal{I}_2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \cdot \left[R_2 + j\omega \cdot \left(L_2 - \frac{N_2}{N_1} M \right) \right]$$



Sl. 18.17. Nadomjesna shema zračnog transformatora s reduciranim vrijednostima sekundarnih veličina

koje vrijede i za nadomjesnu shemu, slika 18.17 u kojoj onda umjesto pravih veličina sekundarne strane dolaze njihove reducirane vrijednosti:

$$u_1 = \mathcal{I}_1 \cdot [R_1 + j\omega L_{1\sigma}] + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}'_2) \cdot j\omega M'$$

$$u'_2 = (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}'_2) j\omega M' - \mathcal{I}'_2 [R'_2 + j\omega L'_{2\sigma}]$$

Tu smo, dakle, mogli uvrstiti:

$$\left(L_1 - \frac{N_1}{N_2} M \right) = L_{1\sigma} \quad \text{i} \quad \left(L_2 - \frac{N_2}{N_1} M \right) = L_{2\sigma}.$$

Nakon što smo faktor redukcije k odabrali jednak omjeru broja zavoja, pogledajmo još kako se ta redukcija očituje na sekundarnim veličinama.

Uzmimo najprije reducirani sekundarni napon U'_2 .

Iz odnosa $U'_2 = (N_1/N_2) U_2$ slijedi:

$$U'_2 : U_2 = N_1 : N_2$$

Prema prvoj glavnoj jednadžbi transformatora znamo da se u svicima od zajedničkog magnetskog toka inducirani naponi odnose izravno proporcionalno pripadnim brojevima zavoja. Zaključujemo, dakle, da je reducirani sekundarni napon U'_2 onaj napon koji bismo dobili na sekundarnoj strani, kad bi sekundarni svitak imao isto toliko zavoja N_1 kao primarni svitak.

Slično možemo saznati i za sekundarnu reduciranu struju I'_2 , jer iz relacije $I'_2 = (N_2/N_1) I_2$ slijedi:

$$I'_2 : I_2 = N_2 : N_1$$

Primijenimo li ovdje pravilo druge jednadžbe transformatora, koje kaže da su od zajedničkog magnetskog toka struje u svicima obrnuto proporcionalne brojevima zavoja, zaključujemo da je reducirana jakost sekundarne struje I'_2 ona jakost, koju bi transformator imao na sekundarnoj strani kad bi sekundarni svitak imao isto toliko zavoja N_1 kao primarni svitak.

Na osnovi ovih podataka možemo reći da su uz odabrani faktor redukcije $k = N_1/N_2$ sekundarne veličine transformatora svedene ili reducirane na primarnu stranu, tj. na primarni broj zavoja.

Meduinduktivitet, koji prema definiciji $M = N_1 N_2 / R_m$ pokazuje zajednički utjecaj primarnih i sekundarnih zavoja na induciranje napona, ovim je reduciranjem na primarnu stranu postao:

$$M' = k M \text{ pa uz } k = \frac{N_1}{N_2} \text{ izlazi: } M' = \frac{N_1}{N_2} \frac{N_1 N_2}{R_m} = \frac{N_1^2}{R_m} = L_{12}$$

tj. poprima vrijednost koeficijenta samoindukcije za silnice zajedničkog toka Φ_{12} .

Što nam u bitnosti predstavlja reducirana vrijednost sekundarnog otpora $R'_2 = R_2 \cdot (N_1/N_2)^2$ najbolje se može vidjeti ako izračunamo snagu (ili energiju) koju daje izvor posredstvom transformatora sekundarno priključenom otporu R_2 . Pretpostavimo pri tom idealni transformator kod kojeg je, jer nema gubitaka energije, $P_1 = P_2$.

Reduciranim vrijednostima izračunata snaga P'_2 iznosi:

$$P'_2 = I_2'^2 \cdot R'_2 = I_2'^2 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 R_2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 = I_2'^2 R_2 = P_2$$

Vidi se da je sekundarna snaga ista bilo da je izračunamo reduciranim ili stvarnim vrijednostima veličina sekundarne strane, a to znači da se tim reduciranjem sekundarnih veličina ne mijenjaju energetske proračuni u transformatoru.

Nadalje možemo prema drugoj glavnoj jednadžbi transformatora uvrstiti $(I_2 \cdot N_2/N_1)^2 = I_2'^2$, pa je snaga:

$$P_2 = I_1^2 \left[R_2 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \right] = I_1^2 \cdot R'_2$$

a to je dalje zbog $P_1 = P_2$ jednako:

$$P_1 = I_1^2 R_1$$

Možemo, dakle, reći da izvor preko transformatora priključeni sekundarni otpor R_2 »osjeća« kao da je na njegove stezaljke priključen otpor R_1 koji je jednak reduciranom sekundarnom otporu R_2' .

Isto kao što se reducira na primarnu stranu omski otpor sekundara, vrši se i reduciranje reaktivnih, pa i kompleksnih otpora tako, da se stvarna njihova vrijednost sekundarne strane pomnoži s faktorom $(N_1/N_2)^2$.

Općenito je, naime, impedancija omjer napona i struje, pa je $\mathcal{Z}_2' = \mathcal{U}_2'/\mathcal{I}_2'$ a to je dalje jednako:

$$\mathcal{Z}_2' = \frac{\frac{N_1}{N_2} \mathcal{U}_2}{\frac{N_1}{N_2} \mathcal{I}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{I}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \mathcal{Z}_2$$

Nakon što smo upoznali značenje elemenata od kojih je sastavljena nadomjesna shema transformatora, možemo uz pomoć te sheme i njenih naponskih jednadžbi stvoriti neku sliku o radu transformatora.

Iz spojne sheme vidi se da utjecaj rasipnog magnetskog polja kvantitativno uzimaju u račun induktivni otpori rasipanja $\mathcal{X}_{1\sigma} = j\omega L_{1\sigma}$ i $\mathcal{X}_2' = j\omega L_{2\sigma}'$ koji su serijski povezani s omskim otporima namota R_1 i R_2' , slika 18.17.

Zbog tih otpora (koje možemo shvatiti kao unutarnje otpore transformatora) dolazi pri opterećenom transformatoru do pada napona, pa se zato reducirani sekundarni napon $\mathcal{U}_2'$ razlikuje od napona $\mathcal{U}_1$ koji je od izvora priveden primarnoj strani transformatora $\mathcal{U}_2' \neq \mathcal{U}_1$.

Kod idealnog transformatora, za koji pretpostavljamo da njegovi namoti nemaju otpor i da nema rasipanja silnica magnetskog toka, neće se pojaviti padovi napona i ne dolazi do promjene obaju napona, pa je $\mathcal{U}_2' = \mathcal{U}_1$.

Paralelna grana predstavlja u shemi svitak induktiviteta M' u kojem se od zajedničke uzbude $(\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2')$ inducira napon međuindukcije $(\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2') \cdot \mathcal{X}_M = \mathcal{U}_M$.

Taj napon i padovi napona serijskih otpora $\mathcal{I}_1 R_1$ i $\mathcal{I}_1 \mathcal{X}_{1\sigma}$ uravnoteženi su primarnim narinutim naponom:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{I}_1 (R_1 + \mathcal{X}_{1\sigma}) + \mathcal{U}_M$$

S druge strane taj napon međuindukcije $\mathcal{U}_M$ predstavlja za sekundarnu stranu napon koji će kroz trošilo potjerati struju $\mathcal{I}_2'$. Međutim će reducirani napon na sekundarnim priključnicama, na koje je priključeno trošilo, biti od napona međuindukcije manji za iznos pada napona u serijskim otporima R_2' i $\mathcal{X}_{2\sigma}'$:

$$\mathcal{U}_2' = \mathcal{U}_M - \mathcal{I}_2' (R_2' + \mathcal{X}_{2\sigma}')$$

19.

NESINUSOIDALNE IZMJENIČNE STRUJE

Sva razmatranja koja smo do sada proveli na mrežama izmjenične struje bila su izvršena uz pretpostavku da su naponi, struje i magnetski tokovi harmoničke, dakle, sinusoidalne promjenljive veličine. Ta pretpostavka omogućila je da kompleksnim simboličkim načinom matematički jednostavno analiziramo mreže izmjenične struje, a primjena vektorskih dijagrama pružila je dodatno još i zorni prikaz međusobnih odnosa električkih veličina promatrane mreže.

U elektrotehničkoj se praksi, međutim, vrlo često susrećemo s periodički promjenljivim naponima i strujama koje nisu harmoničke veličine, a kako one grafički predložene u vremenskoj domeni nisu sinusoidalne, nazivamo ih nesinusoidalnim veličinama.

Očito je da se pri rješavanju mreža nesinusoidalnih struja ne možemo *izravno* služiti simboličkim računom i vektorskim dijagramima, jer su te metode, kao što je spomenuto, izvedene baš uz uvjet da su mreže napajane sinusoidalnim naponima i strujama.

19.1.

PRORAČUN MREŽA PRIMJENOM FOURIEROVA REDA

U ovom je poglavlju prikazano da je ipak moguće navedene metode iskoristiti i pri nesinusoidalnim strujama ako se prema Fourierovu pravilu periodički promjenljive nesinusoidalne veličine rastave u niz sinusoidalnih članova.

Poznato je da se svaka periodički promjenljiva nesinusoidalna funkcija $u(t)$ može, uz izvjesne pretpostavke, rastaviti u beskonačan red koji se, osim konstantnog, nultog član $u_0 = U_0$, sastoji od samih sinusoidalnih članova, koje nazivamo harmoničkim komponentama Fourierova reda.

Osnovni harmonički član $u_1 = U_{1\max} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1)$ ima istu frekvenciju $\omega = 2\pi/T$ kao i zadana nesinusoidalna funkcija, čiji je period T , dok su frekvencije ostalih, viših harmoničkih članova, višekratnici osnovne frekvencije $\omega_k = k \cdot \omega$, pri čemu je $k =$ cijeli broj.

Možemo, dakle, napisati da je:

$$u(t) = u_0 + u_1(\omega t) + u_2(2\omega t) + \dots$$

ili:

$$u(t) = U_0 + U_{1\max} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1) + U_{2\max} \cdot \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots \\ \dots + U_{k\max} \cdot \sin(k\omega t + \alpha_k) + \dots$$

pri čemu je općenito k -ti član reda $u_k = U_{k \max} \cdot \sin(k\omega t + \alpha_k)$, dok se nulti član: $u_0 = U_0$ dobiva za $k = 0$ i $\alpha_k = \alpha_0 = 0$.

Amplitude pojedinih harmoničkih članova bivaju redovno s povećanom frekvencijom sve manje, pa se tako zadana nesinusoidalna funkcija koji puta može dovoljno točno aproksimirati već sa samo nekoliko prvih članova reda.

Sinus svakog harmoničkog člana može se rastaviti prema trigonometrijskom pravilu:

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$$

pa se gornji beskonačni red sinusoidalnih članova može prikazati kao suma sinusoidalnih i cosinusoidalnih članova. Imamo, dakle:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{k \max} \cdot \sin k\omega t + B_{k \max} \cdot \cos k\omega t)$$

pri čemu nam koeficijenti A i B znače:

$$A_{k \max} = U_{k \max} \cdot \cos \alpha_k \quad \text{i} \quad B_{k \max} = U_{k \max} \cdot \sin \alpha_k$$

Ove konstantne veličine izračunavaju se za zadanu nesinusoidalnu funkciju $u(t)$ pomoću jednadžbi:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

$$A_{k \max} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \sin k\omega t \cdot dt$$

$$B_{k \max} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \cos k\omega t \cdot dt$$

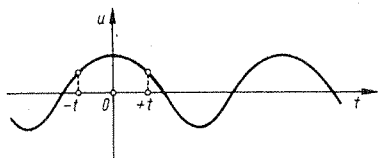
Vidi se da je konstantni član U_0 srednja vrijednost zadane funkcije $u(t)$ za vrijeme cijelog perioda $T = 2\pi/\omega$. Osim toga, među ovim veličinama vrijede i slijedeći odnosi:

$$U_{k \max} = \sqrt{A_{k \max}^2 + B_{k \max}^2} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{B_{k \max}}{A_{k \max}}$$

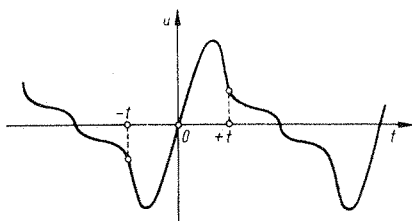
Razvoj nesinusoidalnih veličina na niz sinusoidalnih i cosinusoidalnih članova omogućuje da se Fourierov red katkada prikaže i jednostavnije.

U radu nekih elektrotehničkih uređaja pojavljuju se, naime, i takve nesinusoidalne veličine (struje, naponi i dr.) koje, grafički predložene, posjeduju izvjesnu simetriju, pa će zbog toga u Fourierovu redu, koji reprezentira tu veličinu, neki članovi reda biti jednaki nuli.

Tako će za krivulju koja je simetrična s obzirom na ordinatnu os: $u(-t) = u(t)$ manjkati sinusoidalni članovi, sl. 19.1 dok će veličina koja je simetrična s obzirom na ishodište: sl. 19.2 $u(-t) = -u(t)$ imati samo sinusoidalne članove u Fourierovu redu.



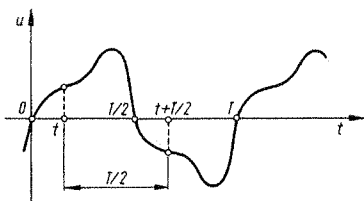
Sl. 19.1. Grafički prikaz krivulje
 $u(-t) = u(t)$



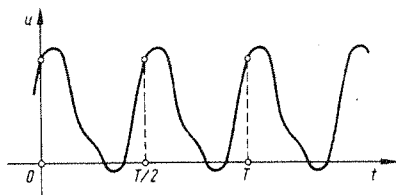
Sl. 19.2. Grafički prikaz krivulje
 $u(-t) = -u(t)$

Ako se nakon polovice perioda $T/2$ zadana nesinusoidalna funkcija ponavlja s protivnim predznakom, bit će u Fourierovu redu samo prisutni lihi (neparni) članovi, dakle za $u(t + T/2) = -u(t)$ postoje samo $k = 1, 3, 5, \dots$ (slika 19.3).

U nesinusoidalnoj funkciji, gdje se njene vrijednosti nakon polovice perioda $T/2$ pozitivno ponavljaju, postoje u Fourierovu redu samo taki (parni) članovi, za $u(t + T/2) = u(t)$ imamo $k = 2, 4, 6 \dots$, slika 19.4.



Sl. 19.3. Grafički prikaz krivulje
 $u(t + T/2) = -u(t)$



Sl. 19.4. Grafički prikaz krivulje
 $u(t + T/2) = u(t)$

Dakako da će tzv. prave izmjenične veličine, kojima je srednja vrijednost jednaka nuli, biti bez konstantnog (nultog), člana, jer kao što je spomenuto, taj član baš i predstavlja srednju vrijednost funkcije.

Da bismo saznali kakva će biti struja $i(t)$ u grani mreže napajane nesinusoidalnim naponom izvora $u(t)$, pogledat ćemo najprije najjednostavniji primjer, priključak impedancije Z na nesinusoidalni napon:

$$u(t) = U_0 + u_1(\omega t) + u_2(2\omega t) + \dots + u_k(k\omega t) + \dots$$

Uz pretpostavku da je impedancija sastavljena od linearnih elemenata, možemo ovdje upotrijebiti metodu superpozicije, te za svaku harmoničku komponentu napona izračunati bilo kojim poznatim načinom pripadnu struju, a ukupna će struja $i(t)$ biti jednaka sumi svih harmoničkih komponentata:

$$i(t) = I_0 + i_1(\omega t) + i_2(2\omega t) + i_3(3\omega t) + \dots$$

Vidi se da će i struja biti nesinusoidalna jer je sastavljena od niza harmoničkih komponentata.

Prikazanim načinom izračunat će se i u kompliciranije sastavljenim mrežama, s više izvora za svaku promatranu granu, struja što je prouzrokuje svaki izvor, a superponiranjem pojedinih komponentata dobiva se opet da je ukupna struja grane nesinusoidalna.

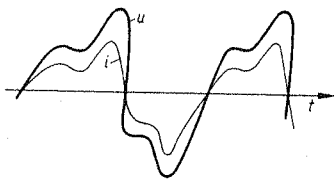
Pogledajmo još kako na oblik vremenskog dijagrama struje utječe sama vrst otpora priključenog na izvor nesinusoidalnog napona $u(t)$. Misli se, naime, na one tri karakteristične vrste otpora u strujnim krugovima izmjenične struje, na omski, induktivni i kapacitivni otpor.

Budući da je (uz zanemarenje skin-efekta) omski otpor R konstantan i neovisan o frekvenciji, u priključenom će otporu struja:

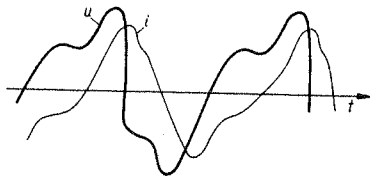
$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

vjerno pratiti sve promjene napona, pa će sve više harmoničke komponente biti jednako sadržane i u nesinusoidalnoj struji. To znači da će obje krivulje $u(t)$ i $i(t)$ imati u vremenskom dijagramu sličan oblik, slika 19.5.

Drugačije prilike imamo kod priključka induktivnog svitka L a i kod priključka kondenzatora C , na izvor nesinusoidalnog napona.



Sl. 19.5. Krivulje napona i struje pri omskom opterećenju (R)



Sl. 19.6. Krivulje napona i struje pri induktivnom opterećenju (L)

Induktivni otpor svitka s povećanom frekvencijom biva sve veći $X_{Lk} = k\omega L$, pa će struja harmoničke komponente napona biti to jače prigušena, što je viša frekvencija harmoničkog člana napona:

$$I_k = \frac{U_k}{X_{Lk}} = \frac{1}{k} \frac{U_k}{\omega L}$$

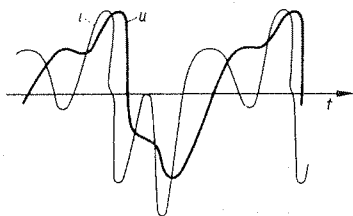
U ukupnoj struji $i(t)$ bit će, dakle, relativno jače istaknut osnovni član, pa je krivulja struje kroz induktivni svitak manje izobličena nego krivulja napona, slika 19.6.

Zato se induktivni svitak iskorišćuje i kao *prigušnica* da bi se izgladio nesinusoidalni oblik struje.

Kapacitivni otpor kondenzatora X_C bit će na povišenoj frekvenciji manji od tog otpora za osnovnu frekvenciju, jer u jednadžbi:

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}$$

faktor k , koji označuje red višeg harmoničkog člana napona, dolazi u nazivniku.



Sl. 19.7. Krivulje napona i struje pri kapacitivnom opterećenju (C)

Više harmoničke komponente struje $I_k = U_k \cdot k\omega C$ bit će, dakle, u ukupnoj struji naročito istaknute, pa će u vremenskom dijagramu krivulja struje $i(t)$ biti mnogo izobličena nego krivulja napona $u(t)$, slika 19.7.

Ovo svojstvo kapacitivnog otpora može se iskoristiti u praksi ako se želi (npr. u svrhe mjerenja) odgovarajuće odabranim kapacitivnim otporom izdvojiti jedna komponenta struje prouzročena nesinusoidalnim naponom.

19.2.

EFEKTIVNE VRIJEDNOSTI STRUJE I NAPONA

Na ekranu osciloskopa mogu se registrirati nesinusoidalni naponi i struje kao vremenske funkcije, ali se u praksi ipak i nesinusoidalne veličine žele isto kao i sinusoidalne označiti njihovim efektivnim vrijednostima.

Ako je poznat razvoj nesinusoidalne funkcije u Fourierov red harmoničkih članova, može se efektivna vrijednost nesinusoidalne veličine prikazati pomoću efektivnih vrijednosti poznatih članova reda, što se vidi iz slijedećeg izvoda.

Općenito je, naime, efektivna vrijednost periodički promjenljive veličine, npr. struje $i(t)$, jednaka:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt}$$

odnosno:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt$$

T je vrijeme jedne periode osnovnog harmoničkog člana. Prikažemo li $i(t)$ kao sumu:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k(t)$$

bit će:

$$i^2(t) = \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k(t) \right]^2 = I_0^2 + 2 I_0 \sum_{k=1}^{\infty} i_k(t) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} i_k(t) \right)^2$$

Treći pribrojnik je kvadrat beskonačnog polinoma:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} i_k(t) \right)^2 = [i_1(\omega t) + i_2(2\omega t) + i_3(3\omega t) + \dots]^2$$

a to je jednako:

$$\sum_{k=1}^{\infty} i_k^2(t) + 2 \sum_{k \neq l}^{\infty} i_k(t) \cdot i_l(t)$$

Integriranjem unutar granica jedne periode T bit će vrijednosti integrala za pojedine pribrojnike:

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2 \quad \frac{1}{T} \int_0^T 2 I_0 \sum_{k=1}^{\infty} i_k(t) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} i_k^2(t) \cdot dt = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots \quad \frac{1}{T} \int_0^T 2 \sum_{k \neq l}^{\infty} i_k(t) \cdot i_l(t) \cdot dt = 0$$

pa je kvadrat efektivne vrijednosti nesinusoidalne struje jednak:

$$I^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots$$

a njena efektivna vrijednost je drugi korijen iz sume kvadrata efektivnih vrijednosti pojedinih komponenata:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}$$

Analogno je i efektivna vrijednost nesinusoidalnih napona:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}$$

i elektromotornih sila:

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \dots}$$

19.3. SREDNJA SNAGA NESINUSOIDALNE STRUJE

Dok se izmjenične struje i naponi označuju i mjere njihovim efektivnim vrijednostima, snaga izmjenične struje izražava se, kako je uvodno objašnjeno, srednjom vrijednošću.

Općenito se trenutna vrijednost snage određuje jednačbom:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

a srednja vrijednost:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

ili:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

Želimo li, dakle, izračunati snagu trošila ili izvora protjecanog nesinusoidalnom strujom, na čijim priključnicama vlada nesinusoidalni napon, moramo u gornju jednačbu uvrstiti:

$$u(t) = U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

$$i(t) = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} i_k$$

Dakle je:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} i_k \cdot dt$$

Množenjem obaju polinoma dobivamo da je:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[U_0 I_0 + U_0 \sum_1^{\infty} i_k + I_0 \sum_1^{\infty} u_k + \sum_1^{\infty} u_k \cdot \sum_1^{\infty} i_k \right] dt$$

Pojedini integrali imaju vrijednost:

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0 ; \quad \frac{U_0}{T} \int_0^T \sum_1^{\infty} i_k dt = 0 ; \quad \frac{I_0}{T} \int_0^T \sum_1^{\infty} u_k dt = 0$$

dok se podintegralna funkcija zadnjeg integrala može prikazati sumom umnožaka napona i struje iste harmoničke frekvencije i dvostrukom sumom umnožaka napona i struje različitih frekvencija. Nakon integriranja unutar granica 0-T bit će

integral svih umnožaka napona i struje različitih frekvencija jednak nuli, a preostaje samo integral sume umnožaka napona i struje iste frekvencije:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_1^{\infty} u_k i_k dt = \sum_1^{\infty} U_k I_k \cos (a_{uk} - a_{ik}) = \sum_1^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

Konačni izraz za snagu nesinusoidalne struje je:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots$$

ili:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

To znači da je snaga nesinusoidalne struje jednaka sumi snaga što je daju struja i napon iste harmoničke frekvencije pojedinih Fourierovih komponenata, i još snaga istosmjernog člana.

Vidi se da struja jedne frekvencije s naponom koje druge različite frekvencije ne doprinose ukupnoj snazi P .

20.

SVITAK SA ŽELJEZNOJ JEZGROM

U prijašnjim razmatranjima upoznali smo da će nesinusoidalni napon u linearnom otporu potjerati struju koja je također nesinusoidalna.

Međutim, do pojave nesinusoidalnih struja može doći i pri sinusoidalnom naponu izvora, ako je mreža sastavljena od nelinearnih elemenata.

Takav jedan nelinearni element je i induktivni svitak sa željeznom jezgrom, koji se mnogo upotrebljava u raznim elektrotehničkim uređajima.

Uzrok nelinearnoj karakteristici svitka sa željeznom jezgrom je nelinearnost krivulje magnetiziranja željeza, do čega dolazi zato što permeabilnost željeza μ nije konstantna veličina, nego ovisi o trenutnoj vrijednosti magnetske gustoće, odnosno magnetske uzbude.

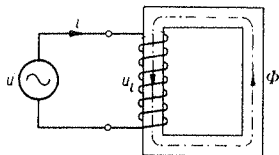
Prema tome i induktivitet L svitka sa željeznom jezgrom nije pri izmjeničnom magnetiziranju konstantna veličina jer ovisi o trenutnoj vrijednosti permeabilnosti μ , što pokazuje definicijska jednadžba.

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 S}{l} \mu$$

A budući da μ ovisi o uzbudi, i koeficijent L će ovisiti o trenutačnoj vrijednosti struje.

20.1. OBLIK STRUJE KOD PRIKLJUČKA SVITKA NA SINUSOIDALNI NAPON

Da se što jasnije vidi baš sam utjecaj željezne jezgre na strujno-naponske odnose kod priključka induktivnog svitka sa željeznom jezgrom na sinusoidalni napon izvora, zanemarit ćemo u prvim razmatranjima omski otpor namota svitka,



Sl. 20.1. Priključak induktivnog svitka sa željeznom jezgrom na izvor sinusoidalnog napona

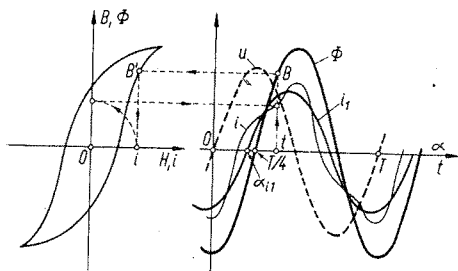
a zamišljamo sav magnetski tok Φ smješten u željezu jezgre i ulančen sa svim zavojima svitka. Uz ove pretpostavke naponu izvora $u = U_{\max} \cdot \sin \omega t$ držat će prema drugom Kirchhoffovom zakonu ravnotežu samo inducirani napon samoin-

dukcije $u_L = L di/dt$ (odnosno elektromotorna sila samoindukcije $e = -L di/dt$), što je prikazano na slici 20.1.

Oдавде slijedi da je struja dana relacijom:

$$i = \int \frac{1}{L} u \cdot dt$$

a jer L nije konstantna veličina neće struja i biti sinusoidalna, iako je napon u sinusoidalan.



Sl. 20.2. Grafički postupak za određivanje $i(t)$ u spoju prikazanom na slici 20.1, uz pretpostavku $R = 0$

Ovisnost induktiviteta o jakosti struje ili o vremenu ne može se ovdje analitički formulirati i zato je nemoguće gornju jednadžbu upotrijebiti da bi se integriranjem matematički izračunala promjenljiva struja $i(t)$, nego će se ona odrediti grafičkim postupkom. U tu svrhu prikazan je na slici 20.2 sinusoidalan napon izvora $u(t)$ kao funkcija vremena, a u istom koordinatnom sustavu ucrtamo još promjenljivi magnetski tok Φ , koji će inducirati elektromotornu silu samoindukcije e , potrebnu za ravnotežu napona.

Magnetski tok Φ zaostaje iza napona u u fazi za četvrtinu periode $T/4$, a amplituda njegove sinusoide $\Phi_{\max}$ odredit će se iz relacije:

$$E = 4,44 f N \Phi_{\max}$$

Ta krivulja toka može u odgovarajućem mjerilu predočiti i promjene magnetske gustoće B .

Da bismo sada odredili struju i , trebamo još za zadanu vrst željeza poznavati krivulju magnetiziranja, a to je petlja histereze $B = f(H)$.

Krivulju histereze ucrtamo na slici 20.2 lijevo od vremenskog koordinatnog sustava, pri čemu na ordinatnoj osi mjerimo B u teslama, a na apscisnoj osi umjesto uzbude H [A/m] naznačimo odmah odgovarajuće vrijednosti struje i u amperima.

Na slici je crtkano naznačen taj grafički postupak. Za bilo koji po volji odabrani trenutak vremena na apscisnoj osi t pripadnu vrijednost magnetske gustoće B predočuje ordinata do točke B. U tom trenutku — kako se iz prolaska krivulje vidi — ima gustoća B pozitivan gradijent, što znači da treba toj gustoći pripadnu točku na krivulji histereze potražiti na onoj grani petlje gdje B ima također tendenciju porasta.

Ta točka je B', a njena apscisa je struja i u našem odabranom trenutku t . Tu vrijednost struje konstruktivno prenesemo crtkanom linijom na ordinatu u t ; pa time dobivamo jednu točku krivulje struje $i(t)$.

Ako taj postupak ponovimo za više različitih vremenskih trenutaka dobivamo niz točaka, pa možemo nacrtati krivulju struje $i(t)$, slika 20.2. Vidi se da je ona periodički promjenljiva nesinusoidalna iste frekvencije kao i sinusoidalni napon, a njen oblik je karakterističan, prema slici 19.3 na str. 217.

Razvijena u Fourierov red, ta struja nema konstantni nulti član, a osim osnovnog harmoničkog člana posjeduje samo neparne više harmoničke članove.

Od viših harmoničkih članova osobito je istaknut treći član, slika 20.2, dok su harmonički članovi ostalih frekvencija to slabije izraženi, što je veća frekvencija.

20.2. NESINUSIODALNA STRUJA I NJENA EKVIVALENTNA SINUSOIDA

Katkada se ta nesinusoidalna struja $i(t)$ može približno aproksimirati već samo osnovnim sinusoidalnim članom $i_1 = I_{1\max} \cdot \sin(\omega t + \alpha_{11})$; tada kažemo, da smo nesinusoidalnu struju nadomjestili *ekvivalentnom* sinusoidalnom strujom i_1 .

Ako smo, dakle, zadovoljni u pogledu točnosti ovakvim približenjem, imamo osim sinusoidalnog napona izvora $u(t)$ također i sinusoidalnu struju $i(t) \approx i_1$ pa možemo i na svitak sa željeznom jezgrom primijeniti računске metode koje su izvedene za harmoničke veličine. Na primjer, možemo nacrtati vektorski dijagram u kojem su moduli napona i struje predočeni u efektivnim vrijednostima, slika 20.3.

Iako taj dijagram ne predočuje električne prilike svitka sa željeznom jezgrom kakve su one doista u zbilji, ipak nam pokazuje bit odnosa napona i struje.

Dok je kod induktivnog svitka *bez* željezne jezgre, čiji omski otpor zanemarujemo, struja čisto induktivna, tj. u odnosu na napon izvora fazno pomaknuta za 90° , ovdje vidimo da struja zaostaje fazno za kut $\varphi = \alpha_u - \alpha_{i1}$ koji je manji od 90° , pa je sada $\cos \varphi \neq 0$.

To znači da izvor za održavanje izmjeničnog magnetskog toka mora svitku dobavljati djelatnu snagu $P = U \cdot I_1 \cdot \cos \varphi$. Toj snazi odgovarajuća potrošena električna energija posljedica je histereze pa, kao što je u uvodnim razmatranjima o histerezi spomenuto, smatramo je gubitkom energije pri izmjeničnom magnetiziranju, jer se ta energija beskorisno pretvara u toplinu zbog »trenja« elemenarnih magnetiča u željezu.

U želji da u takvom vektorskom dijagramu svitka sa željeznom jezgrom vektor nadomjesne sinusoidalne struje što vjernije reprezentira postojeću nesinusoidalnu struju, tj. da se u obzir uzmu i sve ostale više harmoničke komponente, mora modul vektora te ekvivalentne sinusoidalne struje I biti jednak efektivnoj vrijednosti nesinusoidalne struje. A u praksi bi se ta nesinusoidalna struja mogla doista i izmjeriti ampermetrom u njenoj efektivnoj vrijednosti: $I = \sqrt{\sum I_i^2}$.

Argument te ekvivalentne struje I mora, dakako, biti takav da struja s naponom i cosinusom kuta njihovog faznog pomaka φ daje točno snagu koja se troši pri izmjeničnom magnetiziranju željezne jezgre zbog pojave histereze.

20.3. JALOVA I DJELATNA KOMPONENTA STRUJE MAGNETIZIRANJA

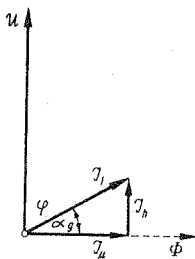
U vektorskom dijagramu, slika 20.3, možemo sada struju I_1 rastaviti na dvije komponente: $I_h = I_1 \cdot \cos \varphi$ i $I_\mu = I_1 \cdot \sin \varphi$.

I_h je vatna komponenta, a prouzročena je gubicima energije zbog histereze, dok je:

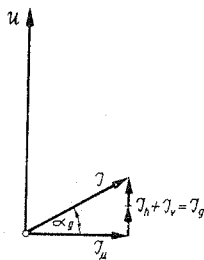
I_μ jalova komponenta za koju uzimamo da će postojati i onda ako ne bude gubitaka histereze, jer ona mora održavati izmjenični magnetski tok Φ . Zato je nazivamo čistom strujom magnetiziranja i ona je, kao i struja u svitku bez željezne jezgre, u fazi zajedno s magnetskim tokom Φ .

Pri izmjeničnom magnetiziranju željezne jezgre postoje, međutim, osim gubitaka zbog histereze, još i gubici energije zbog tzv. *virtložnih struja u jezgri*.

Vrtložne struje nastaju općenito u svakom električki vodljivom tijelu kad kroz njega prolaze silnice promjenljivog magnetskog toka.



Sl. 20.3. Vektorski dijagram sklopa sa slike 20.1 s nadomjesnom ekvivalentnom sinusoidalnom strujom I_1



Sl. 20.4. U vektorskom dijagramu svitka sa željeznom jezgrom ima struja vatnu komponentu zbog gubitaka histereze i virtložnih struja

To možemo lako shvatiti jer znamo da se i u unutrašnjosti tijela oko silnica promjenljivog magnetskog toka u svakoj zamišljenoj zatvorenoj konturi (vrtlogu) induciraju elektromotorne sile, a one će u električki vodljivom tijelu prouzročiti struje koje prema Jouleovu zakonu zagrijavaju tijelo.

Ovako *indukcionog* zagrijavanje metalnih predmeta iskorišćuje se mnogo u strojarstvu, a tako dobivena toplota može dapače služiti i za taljenje metala u šamotnim loncima.

Međutim, zagrijavanje pri izmjeničnom magnetiziranju željeznih jezgri električnih uređaja veoma je nepoželjno i nastoji ga se što više smanjiti. To se postiže time da se željezne jezgre ne izrađuju od masivnog komada željeza, nego se sastoje od željeznih tankih limenih pločica, koje su međusobno izolirane papirirom ili lakom. Ta izolacija sprečava da se vrtložne struje stvore u tolikoj mjeri da bi

se jezgra mogla prejako zagrijati. No ipak se i u samim limovima još uvijek stvaraju, ali znatno oslabljene, vrtložne struje, pa i pri izmjeničnom magnetiziranju lameliranih željeznih jezgara treba računati sa zagrijavanjem jezgre.

Toplini prouzročenoj zbog tih vrtložnih struja mora ekvivalentnu električnu energiju dobiti izvor dodatnom vatnom komponentom struje I_v .

Zajedno sa strujom gubitaka zbog histereze I_h ova će struja I_v predstavljati ukupnu vatnu komponentu gubitaka I_g :

$$I_g = I_h + I_v$$

Sada će, dakle, ekvivalentnu sinusoidalnu struju koja nadomještava nesinusoidalnu struju svitka sa željeznom jezgrom reprezentirati vektor I jalovom komponentom I_μ i vatnom komponentom I_g , slika 20.4.

$$I = \sqrt{I_\mu^2 + I_g^2}$$

Iz vektorskog se dijagrama vidi da što je veći ukupni gubitak energije bit će I_g veće, a to se očituje povećanjem kuta α_g između vektora struje I i vektora toka Φ . Zato se taj kut naziva kutom gubitaka u jezgri.

U ovom promatranom primjeru gdje smo zanemarili otpor svitka očito je da je $\alpha_g = 90^\circ - \varphi$.

Za jedan konkretno izrađeni svitak sa željeznom jezgrom može se nacrtati vektorski dijagram ako se, osim zadanog sinusoidalnog napona U , pozna i vrijednost ekvivalentne struje I , koju određuju dvije njene komponente: I_μ i I_g .

Efektivna vrijednost jalove komponente I_μ izračuna se primjenom zakona protjecanja za zadanu vrstu željeza prema dimenzijama jezgre, a na osnovi potrebnog magnetskog toka, čiju amplitudu daje relacija $E = 4,44 f N \Phi_{\max}$.

20.4. PRORAČUN SNAGE GUBITAKA ZBOG HISTEREZE I VRTLOŽNIH STRUJA

Djelatna ili vatna komponenta, koja je mjerilo za gubitke energije zbog izmjeničnog magnetiziranja jezgre, mora uzeti u obzir oba gubitka energije nastala zbog pojave histereze i vrtložnih struja.

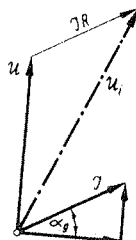
Za svaki od ovih gubitaka postoje formule po kojima se može za praksu dovoljno točno izračunati iznos djelatne snage koju mora izvor predati svitku za jedan kilogram željeza jezgre: zbog histereze p_h i zbog vrtložnih struja p_v , a one su:

$$p_h = \varepsilon \frac{f}{100} B_{\max}^2$$

$$p_v = \sigma \left(\frac{f}{100} \right)^2 B_{\max}^2$$

Pri tome dobivamo iznose p_h i p_v u vatima za 1 kg željeznog lima uz frekvenciju f u hercima, a pri izmjeničnom magnetiziranju s maksimalnom indukcijom $B_{\max}$ izraženom u teslama.

Faktori ε i σ ovise o vrsti upotrijebljenog željeznog lima. Tako npr. za limove od kojih se izrađuju jezgre transformatora i električni strojevi ε ima vrijednosti od 2,5 od 4,5, ovisno o vrsti lima.



Sl. 20.5. Uračunavanje gubitka napona u omskom otporu svitka

Budući da zagrijavanje zbog vrtložnih struja ovisi, kako je spomenuto, o specifičnom otporu željeza, ali i o debljini lima, vrijednosti faktora σ su npr. 0,6 za visokolegirani lim sa 4% Si, debljine 0,35 mm, a 5,5, za dinamolimove debljine 0,5 mm.

Ukupni gubitak snage u željeznoj jezgri mase m kg bit će, dakle:

$$P_g = \left[\varepsilon \frac{f}{100} + \sigma \left(\frac{f}{100} \right)^2 \right] B_{\max}^2 m$$

Iz jednadžbe:

$$P_g = U I \cos \varphi = U I_g$$

može se sada pri zadanom naponu izračunati vatna komponenta struje:

$$I_g = \frac{P_g}{U}$$

pa se uz poznato I_μ može nacrtati u vektorskom dijagramu, slika 20.4, trokut struja u kojem je kut gubitaka:

$$\alpha_g = \arctg \frac{I_g}{I_\mu} \quad \text{a struja} \quad I = \sqrt{I_\mu^2 + I_g^2}$$

Ako je omski otpor namota svitka toliki da ga ne smijemo zanemariti, morat će napon U_1 priveden od izvora svitku biti toliki da osim napona samoindukcije savlada još i pad napona IR na otporu svitka, pa će sada jednadžba drugog Krichhoffovog zakona glasniti:

$$U_1 = U + IR$$

I u tom ćemo slučaju pri crtanju vektorskog dijagrama poći od magnetskog toka u željeznoj jezgri, čiji ćemo vektor postaviti u horizontalan položaj. Vektor struje bit će pomaknut od vektora toka za kut α_g , slika 20.5.

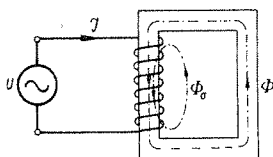
Vektor induciranog napona U okomit je na vektor toka, a vektor pada napona IR crtamo u smjeru struje I .

Ukupni napon izvora U_i je suma $U + IR$, pa vidimo da je sada fazni kut φ među U_i i I manji nego kut φ dok nismo uzeli u račun otpor svitka. Uzrok tome je baš otpor R u kojem se također troši dio snage izvora. Budući da je svitak obično izrađen od bakra, nazivamo taj dio snage gubitkom u bakru, $P_{Cu} = I^2 R$.

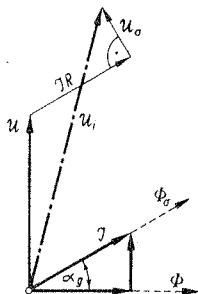
Ukupni gubitak snage $P_{Fe} + P_{Cu}$ sada je veći, pa je veći i $\cos \varphi$, dok je fazni kut između struje i napona izvora smanjen.

20.5. POTPUNI VEKTORSKI DIJAGRAM SVITKA SA ŽELJEZNOJ JEZGROM

Točnijim promatranjem slike magnetskog polja svitka sa željeznom jezgrom vidjeli bismo da će magnetska uzbuda svitka IN , osim magnetskog toka Φ kroz željeznu jezgru, stvoriti i neki tok Φ_o koji se zatvara oko svitka u zraku izvan željezne jezgre, slika 20.6, jer i okolišni zrak ima, doduše malu, ali ipak neku magnetsku vodljivost.



Sl. 20.6. Osim glavnog toka Φ u željezu postoji i rasipni tok Φ_o u zraku



Sl. 20.7. Vektorski dijagram svitka sa željeznom jezgrom pri računanju gubitaka u željezu i u bakru

Važno je pri tom istaknuti da amperzavoji IN koji nastaju prolazom struje I kroz zavoje svitka stvaraju u željeznoj jezgri Φ , koji je (kako je prije pokazano) u fazi s jalovom komponentom I_μ struje I , dok će naprotiv tok Φ_o u zraku gdje nema vrtložnih struja niti histereze biti u fazi sa cijelom strujom, kakva je ona doista.

Ako uzmemo u analizi svitka sa željeznom jezgrom u obzir osim glavnog toka Φ još i tok Φ_o , koji nazivamo *rasipnim tokom*, moramo računati i sa *rasipnim naponom* U_o , što ga u svitku inducira taj tok.

Budući da je Φ_o u fazi sa strujom I , bit će vektor napona U_o za 90° ispred vektora struje.

Ukupni inducirani napon samoindukcije jednak je, dakle, sumi $u + u_0$, a napon izvora bit će:

$$u_1 = u + u_0 + \mathcal{I} R$$

Iz vektorskog dijagrama, slika 20.7, vidi se da rasipni magnetski tok povećava kod priključka svitka fazni kut između struje i napona izvora u odnosu na prijašnji primjer, kad smo računali samo s tokom u jezgri. Uzrok tome je taj što je rasipnim tokom povećan ukupni magnetski tok svitka, pa je time povećan i njegov induktivitet.

Da bi se u transformatoru postigla što bolja magnetska povezanost među primarnim i sekundarnim svitkom, upotrebljava se za smještaj magnetskog toka međuindukcije zatvorena željezna jezgra. Time se smanjuje rasipavanje magnetskih silnica, ali se ujedno zbog znatno bolje magnetske vodljivosti željeza smanjuju i amperzavoji potrebni za magnetsku uzbuđu.

Budući da je magnetski tok transformatora vremenski promjenljiv, mora se željezna jezgra transformatora izraditi od međusobno izoliranih limenih pločica kako bi se spriječilo prejako stvaranje vrtložnih struja i time u vezi preveliko zagrijavanje jezgre.

U realno izrađenim transformatorima, s lameliranom željeznom jezgrom, moramo još uvijek računati s time da se zbog izmjeničnog magnetskog toka gubi dio energije radi histereze i vrtložnih struja, te da osim glavnog magnetskog toka u željeznoj jezgri, postoji i u okolišnom zraku neki rasipni tok, koji je u odnosu na glavni tok ovdje znatno manji nego kod transformatora bez željeza.

Princip rada transformatora sa željezom isti je kao i rad zračnog transformatora, ali kako zbog prisustva željeza koeficijenti L i M nisu konstante, vršit će se analiza rada i proračuni uz primjenu magnetskog toka u željeznoj jezgri.

Tumačenje rada transformatora sa željezom početi ćemo na idealnom transformatoru, a to znači da ćemo razmatrati najprije transformator za koji pretpostavljamo da u njemu nema gubitaka energije i da je željezo idealno vodljivo za magnetske silnice.

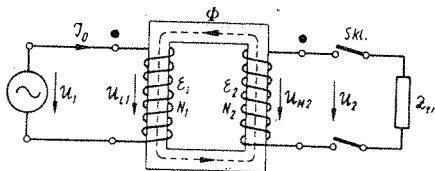
Ovim pojednostavnjenjima eliminiramo zagrijavanje željeza i bakra te rasipavanje magnetskih silnica, što sve kao neizbježna popratna pojava samo zama-gluje osnovnu sliku funkcije transformatora, čija je zadaća da prenosi energiju izmjenične struje od izvora do priključenog trošila na principu međuindukcije posredstvom magnetskog toka.

Dakako da ćemo u daljnjim razmatranjima korigirati ovu idealiziranu sliku transformatora, te postepenim uvođenjem u račun zanemarenih veličina dobiti konačno sliku realnog transformatora sa željeznom jezgrom.

21.1.

STRUJA MAGNETIZIRANJA

Na slici 21.1 zamišljamo jedan idealan transformator na čijoj željeznoj jezgri su smještena dva svitka. Jedan od njih, *primarni*, priključen je trajno na izmjenični napon izvora U_1 frekvencije f , dok se na drugi svitak, *sekundarni*, može sklopkom priključiti neko trošilo, koje u općenitim razmatranjima reprezentira impedancija Z_{tr} .



Sl. 21.1. Idealni transformator sa željeznom jezgrom

Za idealni transformator pretpostavljamo, dakle, da su svici bez omskog otpora $R_1 = 0$ i $R_2 = 0$, te da je željezo jezgre idealno magnetski vodljivo: $R_m = 0$ i bez gubitaka zbog histereze i vrtložnih struja.

U *praznom hodu*, dok je sklopka otvorena i trošilo još nije uključeno, pa sekundarnim krugom ne teče struja, vlada se transformator u pogledu strujnih prilika kao svitak sa željeznom jezgrom priključen na izvor sinusoidalnog napona. Iz izvora će u primarni svitak teći izmjenična struja I_0 i ona će sa zavojima N_1 predstavljati magnetsku uzбудu $I_0 N_1$, koja će u željeznoj jezgri stvoriti izmjenični magnetski tok Φ frekvencije f , pa će se u svicima inducirati elektromotorne sile E_1 i E_2 . Zato ovu struju praznog hoda I_0 nazivamo i *strujom magnetiziranja transformatora*.

Iznos amplitude toka $\Phi_{\max}$ bit će takav da se u primarnom svitku inducira tolika elektromotorna sila E_1 , odnosno toliki napon samoindukcije U_{L1} , koji će nadirnutom naponu U_1 sam držati ravnotežu, jer uz pretpostavku da je $R_1 = 0$, otpada u naponskoj jednadžbi drugog Kirchhoffovog zakona za primarni strujni krug član $I_0 R_1$.

Što se pak tiče jakosti struje praznog hoda, nju određuje jednadžba:

$$I_0 = \frac{U_1}{\omega L_1}.$$

Uz pretpostavku da je u idealnom transformatoru željezna jezgra idealno vodljiva ($\mu = \infty$) bio bi magnetski otpor jezgre R_m jednak nuli, a koeficijent L_1 imao bi beskonačnu vrijednost. Izlazi, da bi struja teoretski trebala da ima vrijednost nula, što se u zbilji ne može dogoditi, jer za induciranje protunapona U_{L1} , koji će držati ravnotežu naponu U_1 , mora u jezgri postojati magnetski tok Φ , a njega stvara baš struja I_0 prolazeći kroz zavoj N_1 .

Zato će iz izvora primarni svitak uvijek dobivati neku struju I_0 i ona će, ma kako mala bila, stvoriti za induciranje protunapona potreban magnetski tok Φ .

I formalno matematički se vidi da traženi magnetski tok možemo dobiti u idealnom transformatoru i uz granične vrijednosti R_m i I_0 , jer kvocijent:

$$\Phi = \frac{I_0 N_1}{R_m}$$

može poprimiti i kod $\lim I_0 = 0$ i kod $\lim R_m = 0$ neku konačnu vrijednost.

Tako i u našim razmatranjima o idealnom transformatoru računamo sa strujom I_0 , koja je znatno manja u usporedbi sa strujama koje se javljaju u transformatoru pri normalnom (nominalnom) opterećenju.

21.2.

NAPONI NA PRIMARU I SEKUNDARU

Tok Φ inducirat će na sekundarnoj strani elektromotornu silu E_2 , odnosno napon međuindukcije U_{M2} , koji se može upotrijebiti da priveden trošilu kao napon U_2 potjera struju kroz njega.

Vidimo, dakle, da od istog magnetskog toka inducirani napon U_{L1} ima u primarnom strujnom krugu reaktivan karakter, dok u sekundaru inducirani napon $U_{M2} = U_2$ treba smatrati aktivnim naponom.

Da bi se sada postavile jednadžbe drugog Kirchhoffovog zakona i prema njima nacrtao vektorski dijagram idealnog transformatora u praznom hodu, potrebno je za razmatrane električne veličine odabrati referentne smjerove i ucrtati ih u spojnu shemu. Osim toga su na priključnicama primarnog i sekundarnog svitka (slika 21.1) naznačene točkice koje karakteriziraju međuinduktivnu vezu primara i sekundara u pogledu smjerova magnetskog toka međuindukcije i samoindukcije.

Naponska jednadžba za primarni strujni krug glasi:

$$u_1 - u_{L1} = 0$$

odakle dobivamo da je:

$$u_{L1} = u_1$$

Za sekundarni krug u praznom hodu imamo da je:

$$u_{M2} = u_2$$

a sekundarna struja jednaka je nuli $I_2 = 0$.

Prva glavna jednadžba. Osnovna jednadžba elektromagnetske indukcije $e = -N(d\Phi/dt)$ primijenjena na naš transformator, daje inducirane elektromotorne sile:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad e_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

Iz ovih relacija slijedi da je omjer trenutnih vrijednosti induciranih elektromotornih sila jednak:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{-N_1 \frac{d\Phi}{dt}}{-N_2 \frac{d\Phi}{dt}}$$

odakle dobivamo razmjer:

$$e_1 : e_2 = N_1 : N_2$$

Pri harmoničkim veličinama ta se jednadžba može napisati i za njihove efektivne vrijednosti, pa tako dobivamo prvu glavnu jednadžbu transformatora:

$$E_1 : E_2 = N_1 : N_2$$

koja kaže da je omjer od glavnog toka Φ induciranih elektromotornih sila primara i sekundara u transformatoru jednak omjeru broja zavoja primarnog i sekundarnog svitka.

Kod idealnog transformatora ovaj odnos vrijedi i za napone na priključnicama primarnog i sekundarnog svitka, pa dobivamo da je:

$$U_1 : U_2 = N_1 : N_2$$

Omjer broja zavoja primarnog i sekundarnog svitka, dakle kvocijent N_1/N_2 , naziva se *omjer prenošenja u transformatoru* ili *koficijent transformacije* i označuje sa $k_{12} = N_1/N_2$, a njegova recipročna vrijednost je $k_{21} = N_2/N_1$.

Gornja jednadžba može se napisati i u obliku:

$$U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1} = U_1 k_{21}$$

Prema tome se transformatori upotrebljavaju u električnim uređajima izmjenične struje zato da se primarni napon izvora promijeni pri nepromijenjenoj frekvenciji na viši ili niži napon, prema tome kakav je omjer zavoja odabran.

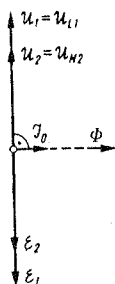
Želimo li, dakle, dobiti na sekundaru viši napon, sekundarni svitak treba da ima više zavoja nego primarni svitak, a obrnuto, da se sekundarno dobije niži napon, mora sekundarni svitak imati manje zavoja nego primarni.

U našem primjeru, slika 21.1, odabran je omjer zavoja $N_1/N_2 = 4/3$, pa je sekundarni napon tri četvrtine broja volta primarnog napona.

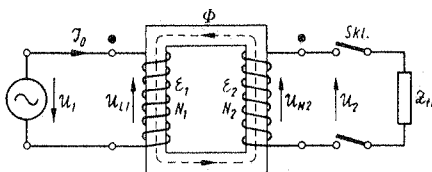
21.3. VEKTORSKI DIJAGRAM IDEALNOG TRANSFORMATORA U PRAZONOM HODU

Međusobni odnos navedenih veličina prikazuje na slici 21.2 vektorski dijagram, gdje počev od vektora napona U_1 , koji je od izvora priveden primarnom svitku, crtamo vektor struje praznog hoda I_0 za 90° pomaknut iza vektora napona U_1 . U idealnom transformatoru je, dakle, struja I_0 samo čista struja magnetiziranja $I_0 = I_\mu$.

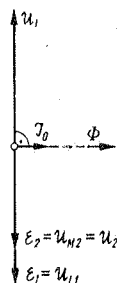
Vektor magnetskog toka Φ , uz pretpostavku idealne željezne jezgre, u fazi je s vektorom struje I_0 , a za 90° iza vektora toka zaostaje vektor primarno inducirane elektromotorne sile E_1 , kao i vektor sekundarne elektromotorne sile E_2 .



Sl. 21.2. Vektorski dijagram idealnog transformatora u praznom hodu



Sl. 21.3. Referentni smjerovi induciranih napona pretpostavljeni su suprotno nego na slici 21.1



Sl. 21.4. Vektorski dijagram idealnog transformatora u praznom hodu prikazanog na slici 21.3

Naponi U_{L1} i U_{M2} (koji na priključnicama svitaka reprezentiraju elektromotorne sile) inducirani su, dakle, od istog toka Φ , pa zato i njihovi vektori padaju zajedno, a kako se iz naponskih jednačbi vidi, ti se vektori poklapaju po smjeru zajedno s vektorom napona U_1 .

U idealnom transformatoru gdje nema otpora, pa nema ni gubitaka napona, bit će ovi inducirani naponi jednaki po iznosu svojim elektromotornim silama, samo su za naš primjer smjerovi njihovih vektora suprotni zbog svojevoljno odabranih referentnih smjerova napona, koji su prikazani na slici 21.1.

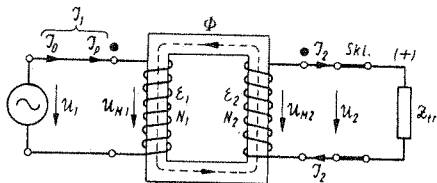
Ako bismo referentne smjerove napona U_{L1} i U_{M2} pretpostavili kao na slici 21.3, dakle protivno nego na slici 21.1, dobili bismo novi vektorski dijagram, sl. 21.4, u kojem vektori induciranih napona U_{L1} i U_{M2} padaju zajedno s vektorima odgovarajućih elektromotornih sila, dakle suprotno vektoru napona U_1 .

U daljnjim analizama transformatora uz pomoć vektorskih dijagrama zadržati ćemo prvotno odabrane referentne smjerove za inducirane napone, prema slici 21.1.

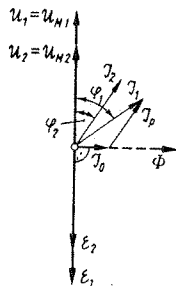
21.4.

IDEALNI TRANSFORMATOR POD OPTEREĆENJEM

Kad se sklopkom zatvori sekundarni strujni krug poteći će pod djelovanjem napona U_2 kroz priključeni otpor Z_{tr} , slika 21.5, struja I_2 . Njena efektivna vrijednost jednaka je $I_2 = U_2/Z_{tr}$, a u općenitom slučaju ona je prema naponu U_2 fazno pomaknuta za neki kut φ_2 .



Sl. 21.5. Idealni transformator sa željeznom jezgrom pri opterećenju



Sl. 21.6. Vektorski dijagram idealnog transformatora pri opterećenju

U vektorskom dijagramu, slika 21.6, pretpostavili smo da trošilo ima induktivni karakter, pa zato vektor struje I_2 zaostaje za kut φ_2 iza vektora napona U_2 .

Struja trošila I_2 ne prolazi, međutim, samo kroz trošilo, nego i kroz zavoj sekundarnog svitka N_2 , pa se tako u opterećenom transformatoru osim amperzavoja struje praznog hoda $I_0 N_1$ pojavljuju i amperzavoji sekundarne struje opterećenja $I_2 N_2$. Zbog toga bi se promijenili prvotna magnetska uzbuda i magnetski tok Φ , što bi prouzročilo i promjenu inducirane elektromotorne sile E_1 , odnosno napona U_{L1} , koji mora držati ravnotežu napona primarnog strujnog kruga prema drugom Kirchhoffovom zakonu. No budući da se ta ravnoteža ne može narušiti, ravnoteža će se ponovno uspostaviti onako kako je to ovdje jedino moguće, naime, sada će iz izvora u primarni svitak osim struje I_0 poteći zbog opterećenja još i struja I_p , takvog iznosa, da se stvore dodatni amperzavoji u primaru $I_p N_1$ koji će poništiti magnetsko djelovanje sekundarnih amperzavoja $I_2 N_2$.

Struju I_p možemo, dakle, nazvati primarnom strujom opterećenja.

Vidimo da ravnoteža napona primarne strane zahtijeva u transformatoru tzv. *magnetsku ravnotežu*, što znači da i pri opterećenom idealnom transformatoru ostaju magnetska uzbuda i magnetski tok jednaki onima u praznom hodu. Upravo se tim mehanizmom magnetske ravnoteže sekundarni teret prenosi na primarnu stranu i tako opterećuje izvor.

Jednakost amperzavoja pri opterećenju s onima u praznom hodu izražava se matematički jednadžbom:

$$I_0 N_1 + I_p N_1 + I_2 N_2 = I_0 N_1$$

odakle slijedi da mora biti:

$$\mathcal{I}_p \cdot N_1 = -\mathcal{I}_2 N_2$$

To znači da struja $\mathcal{I}_p$ mora magnetski suprotno djelovati nego što djeluje struja $\mathcal{I}_2$, a da je pri tom efektivna vrijednost struje $\mathcal{I}_p$ jednaka:

$$I_p = I_2 \frac{N_2}{N_1}$$

Vektorski dijagram opterećenog idealnog transformatora prikazan je na slici 21.6. Tu se polazi od vektorskog dijagrama idealnog transformatora u praznom hodu, gdje treba još dodatno ucrtati i struje koje se pojavljuju zbog opterećenja.

Prije toga potrebno je još jedno objašnjenje o naponu što ga inducira tok Φ u primarnom svitku.

U praznom hodu stvorila je tok Φ samo struja primarnog svitka, pa smo tada taj napon, kao napon samoindukcije, označili sa U_{L1} .

Pri opterećenom transformatoru isti tok Φ nastaje od zajedničke uzbude primarne i sekundarne struje, pa od njega induciranim naponima pripisujemo međuinduktivni karakter. Zato sada pri opterećenom transformatoru od istog toka Φ inducirani napon u primarnom svitku nazivamo naponom međuindukcije i označujemo sa U_{M1} .

Struju I_2 crtamo fazno pomaknutu pod kutom φ_2 iza napona U_2 , a u spojnoj shemi odabran je pri tome referentni smjer struje I_2 kao za struju trošila, koja kao pozitivna ulazi na referentno pozitivnu priključnicu trošila.

Ta struja I_2 prolazeći strujnim krugom ulazit će u sekundarni svitak na neoznačenoj priključnici svitka.

Struja opterećenja na primarnoj strani je $I_p = I_2 N_2/N_1$, a kako ona mora magnetski djelovati suprotno sekundarnoj struji I_2 , moramo njen referentni smjer u spojnoj shemi odabrati tako da I_p ulazi u primarni svitak na točkom označenoj priključnici svitka.

Prema prvom Kirchhoffovom zakonu bit će, dakle, ukupna primarna struja što je transformator pri opterećenju uzima iz izvora jednaka:

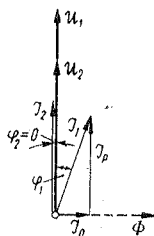
$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_p = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_2 \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

pa je možemo u vektorskom dijagramu i nacrtati, uzevši u obzir da je u našem primjeru $N_2/N_1 = 3/4$ i prema tome modul vektora I_p je tri četvrtine modula I_2 .

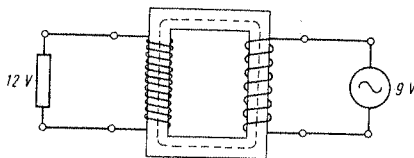
Iz vektorskog se dijagrama vidi da je vektor primarne struje I_1 fazno pomaknut prema vektoru napona U_1 za kut φ_1 koji je u našem primjeru veći od φ_2 , čemu je uzrok struja magnetiziranja I_0 koja, gledano na primarnoj strani, svojim induktivnim djelovanjem povećava induktivni karakter trošila.

Osobito nepovoljno opaža se loš utjecaj struje praznog hoda kad je transformator na sekundarnoj strani opterećen omskim otporom, jer će tada zbog komponente I_0 i pri čisto djelatnoj snazi trošila primarna struja imati induktivni fazni pomak prema svom naponu i time lošiji faktor snage, slika 21.7.

Dakako da smo pri crtanju vektorskog dijagrama struju praznog hoda idealnog transformatora predložili pretjerano velikim vektorom u odnosu na struje opterećenja, da bismo uopće mogli postići neku predodžbu o međusobnim odnosima sviju struja. Pa i u realno izrađenim transformatorima nastoji se konstrukcija izvesti tako da struja praznog hoda bude što manja. To je moguće učiniti, jer se prema jednadžbi $I_0 = U_1/\omega L_1$ može struja praznog hoda odabrati po volji malom ako se samo izvede konstrukcija primarnog svitka s odgovarajuće velikim induktivitetom L_1 . Pri tom se, međutim, neće ići do ekstremno malih jakosti struje I_0 , jer bi to zahtijevalo i u upotrebi željezne jezgre pretjerano mnogo zavoja primarnog svitka, što bi bilo neekonomično. Zato je npr. za energetske transformatore uobičajeno da je jakost struje praznog hoda oko 4 do 6% od struje primara u nominalnom opterećenju.



Sl. 21.7. Vektorski dijagram idealnog transformatora pri čistom djelatnom (omskom) opterećenju



Sl. 21.8. Obratni priključak razmatranog transformatora

Za transformator (kao i općenito za električne strojeve) vrijedi zakon obratnosti, tj. transformator može obavljati transformaciju napona u jednom i u drugom smjeru.

Prema tome, ako je naš transformator, prikazan na slici 21.5, konstruiran da napon izvora od npr. 12 V transformira na sekundarni napon od 9 V, on će se isto tako moći iskoristiti da transformira napon od 9 V na 12 V, sl. 21.8. Pri tome se izvor od 9 V mora priključiti na svitak predviđen za 9 V, a to je onaj na koji je u prijašnjoj slici bilo priključeno trošilo, dok će se sada trošilo konstruirano za 12 V priključiti na svitak predviđen za 12 V.

Vidi se da su sada strane transformatora, tj. njegovi svici, promijenili funkciju, pa se prema tome o nazivu *primar* i *sekundar* može govoriti tek onda kad se zna kako su na transformator priključeni izvor i trošilo. Dok to još nije poznato radije se svici transformatora označuju prema veličini napona i zovu svitak višeg, odnosno svitak nižeg napona.

U prijašnjim je izvodima kao glavna karakteristika rada transformatora bila istaknuta mogućnost promjene napona od jednog broja volta na viši ili niži napon. Ima, međutim, transformatora u kojima su primarni i sekundarni napon istog broja volta, a nazivamo ih *izolacionim transformatorima*. Oni se, naime, upotrebljavaju ako je nazivni napon trošila jednak naponu izvora, ali se strujni krug trošila želi izolirano odvojiti od izvora.

21.6. REDUCIRANI VEKTORSKI DIJAGRAM IDEALNOG TRANSFORMATORA POD OPTEREĆENJEM

U teoretskim razmatranjima, a i za crtanje vektorskih dijagrama transformatora sa željeznom jezgrom, upotrebljavaju se umjesto stvarnih sekundarnih veličina reducirane sekundarne veličine, kako je to bilo već uvedeno i pri analizi rada zračnog transformatora. Opravdanost za to je u činjenici da iako se transformatori izrađuju za sve moguće omjere prenošenja, moguće je sve te naoko različite transformatore razmatrati jedinstveno ako se općenito analizira rad transformatora s omjerom prenošenja jednakim jedinici. Takav transformator ima, dakle, sekundarni svitak s isto toliko zavoja kao i primarni.

Sekundarni napon i ostale veličine tako zamišljenog transformatora bit će dakako, različite od onih što ih u stvarnosti doista ima transformator čiji je omjer broja zavoja $k_{12} = N_1/N_2$.

Sekundarne veličine transformatora s pretpostavljenim omjerom prenošenja jednakim jedinici nazivamo reduciranim sekundarnim veličinama na primarni broj zavoja i označujemo ih dodatnom crticom.

Međusobni odnos stvarnih i reduciranih sekundarnih veličina dobiva se jednostavno primjenom prve i druge glavne jednadžbe. Ako U_2 označuje stvarni napon pri broju zavoja N_2 , a U'_2 reducirani napon pri broju zavoja N_1 , onda vrijedi relacija:

$$U'_2 : U_2 = N_1 : N_2$$

a iz nje slijedi da je:

$$U'_2 = U_2 \frac{N_1}{N_2}$$

Analogno označimo sa I_2 stvarnu sekundarnu struju pri N_2 zavoja, a sa I'_2 reduciranu sekundarnu struju pri N_1 zavoja, pa imamo:

$$I'_2 : I_2 = N_2 : N_1$$

ili:

$$I'_2 = I_2 \frac{N_2}{N_1}$$

Iz gornjih se izvoda vidi da je za naš »jedinstveni« transformator faktor redukcije jednak omjeru prenošenja:

$$k = \frac{N_1}{N_2}$$

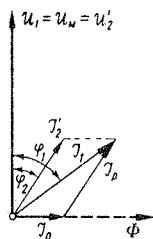
kao što smo imali pri analizi zračnog transformatora, pa i za reduciranje sekundarnih otpora možemo iskoristiti ovdje izvedene jednadžbe.

U sljedećoj tablici su pregledni podaci o tome kako se uz ovaj faktor redukcije od stvarnih vrijednosti sekundarne strane prelazi na reducirane vrijednosti, a i obratni postupak.

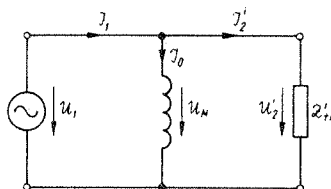
Dobivene jednačbe pokazuju da je reducirani sekundarni napon (i *ems*) brojčano jednak primarnom naponu (*ems*), a da je reducirana vrijednost sekundarne struje jednaka baš primarnoj struji opterećenja:

$$I'_2 = I_2 \frac{N_2}{N_1} = I_p.$$

Računajući, dakle, s reduciranim sekundarnim veličinama postaje vektorski dijagram idealnog transformatora znatno pojednostavnjen, jer se sada, slika 21.10, dužina vektora sekundarnog induciranog napona izjednačuje s vektorom pri-



Sl. 21.10. Vektorski dijagram opterećenog idealnog transformatora (slika 21.5) s reduciranim sekundarnim veličinama



Sl. 21.11. Nadomjesna shema idealnog transformatora s reduciranim sekundarnim veličinama

marnog induciranog napona, pa oba napona možemo jednostavno smatrati naponom U_M međuindukcije; jer kao što je bilo prije objašnjeno, oba napona inducira tok Φ stvoren zajedničkom uzbudom primarnih i sekundarnih amperzavoja.

TABLICA

Sekundarne veličine		Sekundarne veličine	
Stvarne	Reducirane	Reducirane	Stvarne
U_2	$U'_2 = U_2 (N_1/N_2)$	U'_2	$U_2 = U'_2 (N_2/N_1)$
E_2	$E'_2 = E_2 (N_1/N_2)$	E'_2	$E_2 = E'_2 (N_2/N_1)$
I_2	$I'_2 = I_2 (N_2/N_1)$	I'_2	$I_2 = I'_2 (N_1/N_2)$
R_2	$R'_2 = R_2 (N_1/N_2)^2$	R'_2	$R_2 = R'_2 (N_2/N_1)^2$
X_2	$X'_2 = X_2 (N_1/N_2)^2$	X'_2	$X_2 = X'_2 (N_2/N_1)^2$

Na osnovi međusobnih odnosa, kako su oni prikazani u vektorskom dijagramu (sl. 21.10), može se nacrtati i mreža, koju nazivamo *nadomjesnom shemom idealnog transformatora*, slika 21.11. Vidi se da je ta shema veoma jednostavna zahvaljujući baš uvođenju reduciranih sekundarnih veličina u analizu transformatora.

Prelazeći na razmatranje realnog transformatora moramo uzeti u račun promjene koje prouzročuju omski otpori svitaka, te realno vladanje željeza jezgre pri izmjeničnom magnetiziranju.

Označimo li sa R_1 omski otpor primarnog svitka, sa R_2 omski otpor sekundarnog svitka, a sa R'_2 njegovu reduciranu vrijednost, imamo pri opterećenju realnog transformatora u primarnom svitku pad napona $U_{R1} = I_1 R_1$, a u sekundarnom svitku pad napona $U_{R2} = I_2 R_2$, čija je vrijednost reducirana na primarnu stranu jednaka $U'_{R2} = I'_2 \cdot R'_2$.

Vektori tih padova napona bit će u vektorskom dijagramu paralelni s vektorima odgovarajućih struja.

Nadalje se zbog otpora u svicima pri prolazu struje gubi u primaru snaga $P_{Cu1} = I_1^2 R_1$, a u sekundaru snaga $P_{Cu2} = I_2^2 R_2$. Budući da su svici transformatora redovno namotani bakrenom žicom, ukupni gubitak snage zbog Jouleove topline označuje se kao gubitak u bakru i on je $P_{Cu} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$.

Kod realno izrađenih transformatora moramo još računati i s gubicima u željezu zbog histereze i vrtložnih struja. Znamo da će zato vektor struje magnetiziranja I_0 biti prema vektoru glavnog magnetskog toka Φ fazno pomaknut za kut gubitaka α_g . Gubitke snage izmjenično magnetizirane željezne jezgre označujemo sa P_{Fe} , a računamo ih kao što je već objašnjeno kod svitka sa željeznom jezgrom.

Osim glavnog toka Φ u željezu, stvorit će amperzavoji primara i sekundara u realnom transformatoru još svaki za se oko svojeg svitka magnetski tok, koji se zatvara u okolišnom zraku. Ovi tokovi ne sudjeluju u procesu transformacije, pa ih zato nazivamo rasipnim magnetskim tokovima. Budući da u zraku nema pojave histereze i vrtložnih struja, bit će vektori tih rasipnih tokova u fazi s vektorima svojih struja.

Rasipni tok $\Phi_{\sigma 1}$ u fazi je sa strujom I_1 , a od toga toka inducirani napon $U_{\sigma 1}$ prethodi pred strujom za $T/4$, što odgovara faznom kutu $+90^\circ$.

Isto je tako na sekundarnoj strani rasipni tok $\Phi_{\sigma 2}$ u fazi sa sekundarnom strujom I_2 , a od toga toka inducirani napon $U_{\sigma 2}$ prethodi za 90° pred strujom.

Kao što je istaknuto, rasipni magnetski tokovi obavijaju samo zavoje vlastitog svitka, a ne obuhvaćaju oba svitka, pa svaki rasipni tok smatramo tokom samoindukcije, a od njih inducirani »rasipni« naponi mogu se kao naponi samoindukcije predočiti jednadžbama:

$$U_{\sigma 1} = I_1 X_{\sigma 1} \quad \text{i} \quad U_{\sigma 2} = I_2 X_{\sigma 2} \quad \text{odnosno} \quad U'_{\sigma 2} = I'_2 X'_{\sigma 2}.$$

Ovdje uvedene veličine $X_{\sigma 1}$ i $X_{\sigma 2}$ nazivamo *induktivnim otporima rasipnog toka*, a oni su: $X_{\sigma 1} = \omega L_{\sigma 1}$ i $X_{\sigma 2} = \omega L_{\sigma 2}$, gdje su $L_{\sigma 1}$ i $L_{\sigma 2}$ koeficijenti samoindukcije pridruženi šilnicama svog rasipnog toka i računaju se prema definicionoj jednadžbi:

$$L_{\sigma} = \frac{N\Phi_{\sigma}}{I}$$

Za razliku od idealnog transformatora imamo u spojnoj shemi (slika 21.12) opterećenog realnog transformatora nacrtane još omske otpore R_1 i R_2 svitaka, koji

su serijski povezani s pripadnim svicima, a osim glavnog toka Φ u željeznoj jezgri pojavili su se i rasipni tokovi $\Phi_{\sigma 1}$ i $\Phi_{\sigma 2}$.

Referentne smjerove struja, tokova i napona odabrali smo prema prije dogovorenom načinu (strana 235), pa se tako mogu za primarni i za sekundarni strujni krug napisati naponske jednačbe:

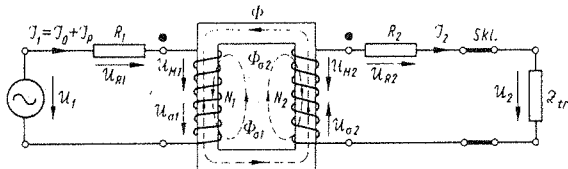
$$U_1 = U_{M1} + U_{R1} + U_{\sigma 1}$$

$$U_2 = U_{M2} - U_{R2} - U_{\sigma 2}$$

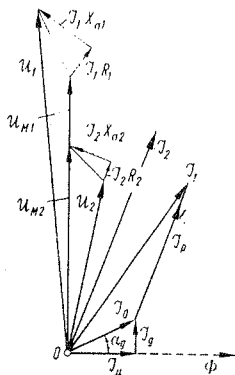
Budući da će izvor i u realnom transformatoru sa željeznom jezgrom primarnom svitku dobavljati ne samo struju magnetiziranja I_0 , nego i struju opterećenja I_p , to i za realni transformator sa željeznom jezgrom strujna jednačba glasi:

$$I_1 = I_0 + I_p$$

Vektorski dijagram opterećenog realnog transformatora sa željeznom jezgrom dobivamo tako da počev od jednog nanižemo ostale vektore prema podacima gornjih jednačbi. Koji ćemo vektor pri crtanju dijagrama uzeti kao početni ovisit će o tome što je zadano, a što se traži.



Sl. 21.12. Spojna shema opterećenog realnog transformatora sa željeznom jezgrom



Sl. 21.13. Vektorski dijagram realnog opterećenog transformatora sa željeznom jezgrom

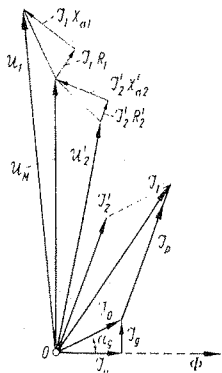
Ako, na primjer, na slici 21.13 polazimo od zadanog magnetskog toka Φ u željeznoj jezgri, bit će vektor struje I_0 pred vektorom toka pomaknut za kut α_g zbog gubitaka P_{Fe} u željezu, dok će za 90° pred tokom biti vektor od toka Φ induciranih napona U_{M1} i U_{M2} . Poznavajući sve otpore transformatora može se dalje za zadanu struju tereta I_2 odrediti prema naponskoj jednačbi sekundarnog strujnog kruga napon sekundarnih stezaljki U_2 na koji je priključeno trošilo Z_{tr} .

Strujnom jednačbom odredi se vektor primarne struje kao suma $I_1 = I_0 + I_2 \cdot N_2/N_1$, pa se dalje prema naponskoj jednačbi primarne strane može odrediti koliki mora biti primarni napon U_1 da se trošilu doista dobavi iz izvora preko transformatora struja I_2 s naponom U_2 (slika 21.13).

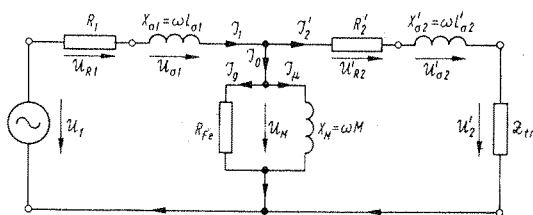
21.8. REDUCIRANI VEKTORSKI DIJAGRAM REALNOG TRANSFORMATORA POD OPTEREĆENJEM

Kao što je već bilo objašnjeno, reduciranjem sekundarnih veličina dobit ćemo vektorski dijagram koji vrijedi za sve transformatore, pa ćemo na osnovi tog dijagrama izvoditi daljnja razmatranja.

Pri tome reduciranju sekundarnih veličina ostaje tok Φ nepromijenjen, pa će napon U'_{M2} biti jednak U_{M1} , a oba ta napona već smo prije zajednički označili sa U_M i njegov vektor crtamo za 90° pred vektorom toka Φ , slika 21.14.



Sl. 21.14. Vektorski dijagram realnog opterećenog transformatora sa željeznom jezgrom i reduciranim sekundarnim veličinama



Sl. 21.15. Nadomjesna shema za »reducirani« realni transformator sa željeznom jezgrom, prema slici 21.12

Reducirana sekundarna struja I_2 ujedno je jednaka primarnoj struji opterećenja I_p , a ukupnu primarnu struju daje zbroj: $I_1 = I_0 + I_2'$ pri čemu u realnom transformatoru struja I_0 ima komponente I_μ i I_g .

U reduciranom vektorskom dijagramu ostaje primarna strana nepromijenjena kao na slici 21.13, a da bi se na sekundarnoj strani dobio sekundarni reducirani napon U'_2 , treba prema naponskoj jednadžbi:

$$U'_2 = U_M - U'_{\sigma 2} - U'_{R2}$$

od induciranog napona međuindukcije odbiti reducirane padove napona zbog rasipanja i omskog otpora.

Iz dobivenog dijagrama (slika 21.14) vidi se da će pri realnim transformatorima reducirani sekundarni napon U'_2 biti različit od primarnog napona U_1 , dok su pri idealnom transformatoru (slika 21.10) ta dva napona bila jednaka. Uzrok toj razlici su padovi napona nastali zbog unutarnjih otpora u transformatoru: R_1 , R_2 , $X_{\sigma 1}$ i $X_{\sigma 2}$.

Na temelju vektorskog dijagrama prikazanog na slici 21.14 može se sastaviti za reducirani realni transformator sa željeznom jezgrom *nadomjesna shema* prema slici 21.15.

Omski i induktivni otpori rasipanja uključeni su u nadomjesnoj shemi serijski, dok se u paralelnoj grani osim induktivnog otpora međuindukcije X_M nalazi još omski otpor R_{Fe} koji reprezentira gubitke histereze i vrtložnih struja zbog izmjeničnog magnetiziranja željezne jezgre.

Struja magnetiziranja transformatora koji se upotrebljavaju u praksi, kao što je spomenuto, vrlo je mala u usporedbi s jakošću struje nominalnog opterećenja, pa zato se može u daljnjim izvodima pretpostaviti da je računski struja magnetiziranja jednaka nuli: $I_0 = 0$, a time postaje:

$$I_1 = I_2$$

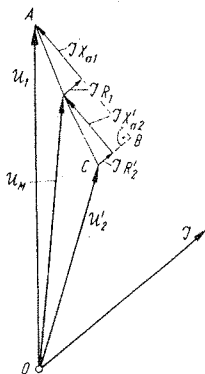
Ovom pretpostavkom znatno se pojednostavnjuje reducirani vektorski dijagram, jer u primaru i sekundaru računamo samo s jednom zajedničkom strujom i nju označujemo kao struju opterećenja I :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2'$$

21.9.

KAPPOV TROKUT

U novonastalom vektorskom dijagramu, slika 21.16, vidi se da vektori omskih padova napona $\mathcal{I}R_1$ i $\mathcal{I}R_2'$ padaju sada zajedno sa smjerom vektora struje $\mathcal{I}$, dok su vektori obaju induktivnih padova napona $\mathcal{I}X_{\sigma 1}$ i $\mathcal{I}X_{\sigma 2}'$ okomiti na vektor zajedničke struje $\mathcal{I}$.



Sl. 21.16. Reducirani pojednostavnjeni vektorski dijagram realnog transformatora (uz zanemarenje struje magnetiziranja)

Trokuti padova napona primarne i sekundarne strane transformatora mogu se sada združiti u zajednički trokut pada napona objiju strana: ABC.

U tom je pravokutnom trokutu svih padova napona jedna kateta ukupni omski pad napona:

$$U_R = I \cdot (R_1 + R_2') = I \cdot R_k$$

dok je druga kateta ukupni induktivni pad napona zbog rasipanja silnica:

$$U_\sigma = I(X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2}') = I \cdot X_k$$

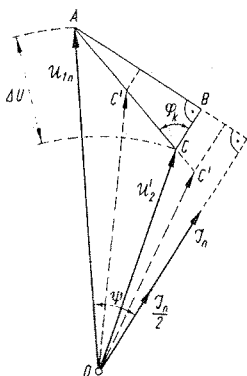
Ukupni unutarnji pad napona u reduciranom transformatoru, predložen hipotenzom toga trokuta, jednak je:

$$U_k = \sqrt{U_R^2 + U_G^2} = I \sqrt{R_k^2 + X_k^2} = I \cdot Z_k$$

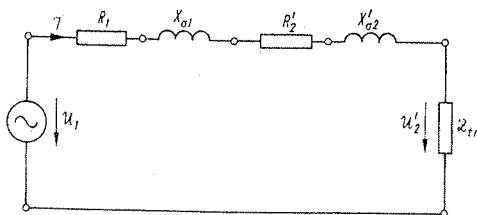
pri čemu kao unutarnju impedanciju transformatora označujemo

$$Z_k = \sqrt{R_k^2 + X_k^2}$$

Stranice trokuta pada napona ovise, osim o parametrima samog transformatora R_k , X_k , Z_k , i o jakosti struje opterećenja I . Ako smo u vektorskom dijagramu razmatrali transformator pri nominalnom opterećenju strujom I_n , onda taj trokut pada napona nazivamo *Kappovim trokutom*, slika 21.17.



Sl. 21.17. Vektorski dijagram s Kappovim trokutom, ΔU je numerička promjena reduciranog sekundarnog napona



Sl. 21.18. Nadomjesna shema realnog transformatora, uz zanemarivanje struje praznog hoda

Stranice Kappova trokuta predločuju, dakle, padove napona:

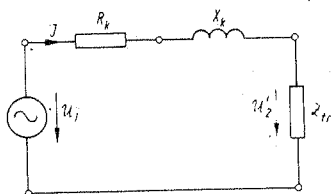
$$CB = U_{Rn} = I_n R_k \quad BA = U_{\sigma n} = I_n X_k \quad CA = U_{kn} = I_n Z_k$$

Vektorski dijagram transformatora s Kappovim trokutom predločuje veoma zorno odnos primarnog i sekundarnog napona realnog transformatora. Tu imamo povezane s Kappovim trokutom samo vektore primarnog i reduciranog sekundarnog napona, jer nas pri radu transformatora oni i najviše zanimaju, a u praksi ih možemo i izmjeriti. Unutarnji napon međuindukcije, koji nije pristupačan mjerenju (možemo ga samo računski odrediti), nije ni ucrtan u dijagramu.

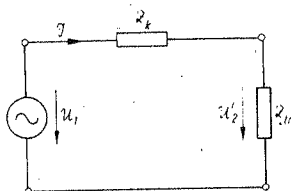
Nadomjesna shema koja pripada ovom pojednostavnjenom transformatoru prikazana je na slici 21.18.

Zbog pretpostavke da je $I_0 = 0$ nema u toj shemi paralelne grane, nego su samo u serijskom spoju nanizani od primarnog izvora do sekundarno priključenog trošila omski i induktivni otpori primarne i reducirane strane transformatora:

$$R_1 \quad X_{\sigma 1} \quad R'_2 \quad X'_{\sigma 2}$$



Sl. 21.19. Nadomjesna shema realnog transformatora prema vektorskom dijagramu na slici 21.17



Sl. 21.20. Unutarnji otpor (impedancija) realnog transformatora

$$Z_k = \sqrt{R_k^2 + X_k^2}$$

Nadomjestite li se oba omska otpora rezultatnim R_k i oba induktivna sa X_k , dobiva se još jednostavniji prikaz nadomjesne sheme sa slike 21.19 ili konačno onaj sa slike 21.20, gdje su svi unutrašnji otpori nadomješteni unutarnjom impedancijom Z_k .

21.10. PROMJENA SEKUNDARNOG NAPONA PRI OPTEREĆENJU

Pomoću nadomjesne sheme (slika 21.20) može se računskim putem, a pomoću Kappova dijagrama (slika 21.17) grafičkim postupkom, saznati kako se pri zadanom konstantnom primarnom naponu U_1 i uz poznate unutarnje otpore transformatora, mijenja s promjenom struje opterećenja I reducirani sekundarni napon U'_2 .

Poznavajući pak U'_2 može se za neki konkretni transformator, čiji je omjer prenošenja zadan, odrediti stvarni sekundarni napon $U_2 = U'_2 \cdot N_2/N_1$.

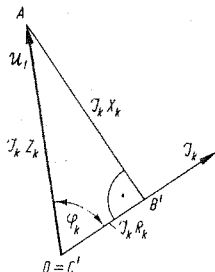
Najjednostavnija razmatranja u tom smjeru pomoću vektorskog dijagrama možemo obaviti pretpostavljajući, da se struja I mijenja samo po iznosu broja ampera, a da pri tom vektor struje u odnosu na vektor primarnog napona zadrži uvijek isti fazni pomak ψ (slika 21.17).

Uz ove uvjete bit će pri polovičnoj nominalnoj struji $I = I_n/2$ sve stranice u trokutu pada napona samo polovica onih stranica što ih ima trokut pri punoj nominalnoj struji. Ukupni pad napona $I \cdot Z_k$ predočen je, dakle, polovicom hipotenuze Kappova trokuta, a vektor sekundarnog reduciranog napona sada je spojnica OC' .

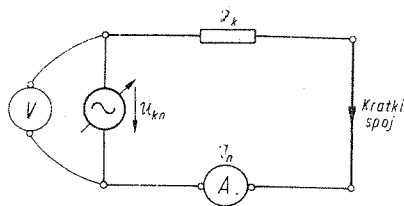
Ako bi se struja dalje smanjivala, pomicala bi se točka C' po hipotenuzi CA prema A , i u praznom hodu, gdje je $I = 0$, trokut ABC degenerirao bi u točku A , pa je $C' = A$. Reducirani sekundarni napon u praznom hodu postaje jednak primarnom naponu $U'_{20} = U_1$.

Obrnuto će pri bilo kojem opterećenju većem od nominalnoga biti trokut pada napona veći od Kappova, pa će prema slici 21.17 i reducirani sekundarni napon biti ponovno drugačiji nego pri bilo kojem drugom opterećenju, a u našem primjeru zbog pada napona u transformatoru napon U'_2 će se smanjivati.

Najveće moguće opterećenje koje može nastati na transformatoru je kratki spoj sekundarnih stezaljki. Tada je napon $U'_2 = 0$, pa u vektorskom dijagramu postaje vektor OC' jednak nuli, što znači da se trokut pada napona toliko povećao da je točka C' pala u O .



Sl. 21.21. Vektorski dijagram realnog transformatora sa željeznom jezgrom u kratkom spoju



Sl. 21.22. Mjerenje napona kratkog spoja u_k

Struja u kratkom spoju I_k , a time i cijeli trokut pada napona, narasli su na najveću moguću vrijednost. Iz vektorskog dijagrama za kratki spoj, slika 21.21, vidi se da hipotenuza koja predodžuje ukupni unutarnji pad napona postaje jednaka primarnom naponu U_1 . To znači da se u kratkom spoju sav napon primarnog izvora utroši u samom transformatoru za savladavanje unutarnjeg otpora transformatora Z_k .

Jakost struje I_k izračuna se uvidom u nadomjesnu shemu, koja za kratki spoj dobiva izgled kao na slici 21.22, pa izlazi da je:

$$I_k = \frac{U_1}{Z_k}$$

Argument ili smjer vektora struje I_k u odnosu na vektor primarnog napona određen je kutom φ_k , koji je karakterističan za Kappov trokut:

$$\varphi_k = \arctg \frac{X_k}{R_k}$$

Taj smjer u vektorskom dijagramu kratkog spoja (slika 21.21) ujedno je i smjer vektora katete omskog pada napona.

Što se tiče praktičkih podataka koji se daju kao parametri nekog transformatora, treba istaknuti da se bolji uvid u gubitke napona u transformatoru dobije ako se pad napona ne navodi brojem volta, nego se naznači koliko iznosi taj pad napona u odnosu na zadani primarni nominalni napon U_{1n} . Zato se za energetske transfor-

matore svi padovi napona pri nominalnoj struji opterećenja daju u procentnom iznosu prema U_{1n} . Imamo, dakle:

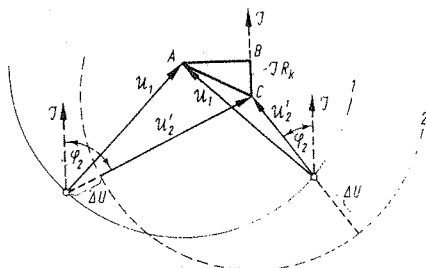
$$u_R = \frac{I_n R_k}{U_{1n}} \cdot 100\% \quad u_G = \frac{I_n X_k}{U_{1n}} \cdot 100\% \quad u_k = \frac{I_n Z_k}{U_{1n}} \cdot 100\%$$

I za ove postotne padove napona vrijedi jednadžba:

$$u_k = \sqrt{u_R^2 + u_G^2}$$

Ovi podaci mogu se o konkretnom transformatoru lako saznati, jer se mjerenjem omskih otpora primarnog i sekundarnog svitka odredi $R_k = R_1 + R_2 \cdot (N_1/N_2)^2$ pa se izračuna u_R .

Od druga dva karakteristična podatka mjerenju je pristupačna veličina u_k . Iz prijašnjih je, naime, izveda poznato da se ukupni pad napona U_k pojavljuje kao primarni napon priveden iz izvora kratko spojenom transformatoru.



Sl. 21.23. Utjecaj faznog pomaka φ_2 struje trošila na numeričku promjenu sekundarnog napona ΔU

Želimo li, dakle, saznati koliki je ukupni potrošeni napon u transformatoru pri nominalnoj struji, mjerit ćemo privedeni primarni napon kad uz kratko spojene sekundarne stezaljke izvor daje transformatoru nominalnu struju I_n . Zato taj napon nazivamo *naponom kratkog spoja*; izražen u voltima on je $U_{kn} = I_n Z_k$, a u postocima:

$$u_k = \frac{U_{kn}}{U_{1n}} \cdot 100\%$$

Budući da je postotni iznos u_k za energetske transformatore tek oko 4 do 6%, to je pri mjerenju (slika 21.22) potrebno pažljivo povećavati napon izvora od nule dok se postigne nominalna struja, jer bi zbog kratkog spoja mogla pri prevelikom naponu struja opasno narasti.

Pomoću ta dva podatka koja smo dobili mjerenjem izračunavamo:

$$u_G = \sqrt{u_k^2 - u_R^2}$$

Iz vektorskog dijagrama na slici 21.17 vidi se da sekundarni reducirani napon pri opterećenju U'_2 nije samo po iznosu različit od sekundarnog reduciranog napona u praznom hodu U'_{20} (a taj je jednak primarnom naponu U_1), nego su ti naponi i međusobno fazno pomaknuti. Zato njihova vektorska razlika, a to je vektor ukupnog pada napona $AC = u_{kn}$, nije podatak o tome koliko je po iznosu broja volta reducirani sekundarni napon smanjen (ili općenito promijenjen) pri opterećenju u odnosu na napon u praznom hodu.

Taj podatak, koji je baš za praksu od interesa i predstavlja tzv. numeričku promjenu napona pri opterećenju, dobivamo, kako se iz dijagrama vidi, kao razliku modula obaju vektora:

$$\Delta U = U_{20} - U'_2 = U_{1n} - U'_2$$

a i ona se izražava u postocima prema naponu praznog hoda.

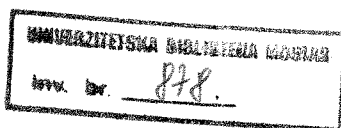
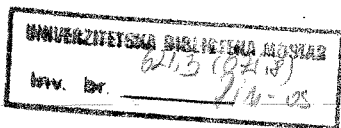
Kako pak na promjenu reduciranog sekundarnog napona utječe fazni pomak struje trošila pokazuje slika 21.23, gdje su uz konstantnu jakost struje i konstantni napon U_1 nacrtana dva vektorska dijagrama i to jedan za induktivni, a drugi za kapacitivni φ_2 .

Vidi se da numerička promjena napona za kapacitivna trošila može biti i pozitivna, što znači da je tada reducirani sekundarni napon U'_2 veći od primarnog U_1 .

Na osnovi dijagrama na slikama 21.17 i 21.23 zaključujemo da će u realnim transformatorima reducirani sekundarni napon, a time i stvarni napon na sekundarnim stezaljkama U_2 , bitno ovisiti o tome kakvo je trošilo priključeno na transformator, makar je primarno transformator priključen na stalni napon U_1 .

Za realne transformatore ne može se, dakle, dati neki točno određeni omjer napona primarnih i sekundarnih stezaljki, jer se za svako konkretno opterećenje može sekundarni napon odrediti tek pomoću Kappova trokuta. Zato se kao nominalni podatak o naponima primara i sekundara za realno izvedene transformatore daje omjer napona u praznom hodu, jer kao što je bilo na slici 21.17 prikazano, svaki će transformator u praznom hodu (uz zanemarenje I_0) imati U'_{20} jednako U_1 , pa je:

$$U_1 : U_{20} = N_1 : N_2$$



LITERATURA

- Dr Josip Lončar:* Osnovi elektrotehnike I i II, Tehnička knjiga, Zagreb 1969.
- Dr Tomo Bosanac:* Teoretska elektrotehnika, Tehnička knjiga, Zagreb 1974.
- Dr Vojislav Bego:* Mjerjenja u elektrotehnici, Tehnička knjiga, Zagreb 1977.
- Ing. Miodrag Ranojević:* Osnovi elektrotehnike, Građevinska knjiga, Beograd 1964.
- Ing. Miodrag Ranojević:* Osnovi elektrotehnike, izmjenične struje, Građevinska knjiga, Beograd 1961.
- Mr. Branislav Kuzmanović:* Osnove elektrotehnike, Tehnički školski centar KOV JNA, Zagreb 1972.
- Ing. K. Verč:* Osnove elektrotehnike, predavanja V.A. Koželja, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1955.
- L.R. Neiman i P.L. Kalantarov:* Teoretičeskie osnovi elektrotehniki, Čast I i II, 1972.
- L.A. Bessonov:* Teoretičeskie osnovi elektrotehniki, Moskva 1964.
- George F. Corcoran & Henry R. Reed:* Introductory Electrical Engineering, John Wiley & Sons, London 1967.
- Joseph A. Edminister:* Electric Circuits, Schaum Publishing Co, New York 1965.
- H. Alex Romanowitz:* Electrical Fundamentals and Circuit Analysis, John Wiley, New York 1966.
- Preston R. Clement & Walter C. Johnson:* Electrical Engineering Science, McGraw - Hill, New York 1960.
- James M. Ham & Gordon R. Slemon:* Scientific Basis of Electrical Engineering, John Wiley, New York 1961.
- Dr. Ing. Eugen Phillippow:* Grundlagen der Elektrotechnik, Geest & Portig, Leipzig 1959.
- Dr. Ing. Klaus Lunze & Dr. Ing. Eberhard Wagner:* Einführung in die Elektrotechnik. Teil I i II, VEB Verlag Technik, Berlin 1962.
- Dr. Ing. Klaus Lunze:* Theorie der Wechselstromschaltungen. VEB Verlag Technik, Berlin 1974.