

**S V E U Č I L I Š T E U Z A G R E B U**  
**ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET - ZAGREB**

Dr VLADIMIR NAGLIČ

**OSNOVI TEORIJE MREŽA**



SRE\_32569



ZAGREB, 1988.



Dajnović Mamić

**S V E U Č I L I Š T E U Z A G R E B U**  
**ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET - ZAGREB**

Dr VLADIMIR NAGLIĆ

**OSNOVI TEORIJE MREŽA**



**ZAGREB, 1988.**

Odobrenje Odbora za nastavu i izdavačku djelatnost Sveučilišta u Zagrebu  
Broj 02-206/1-88 od 5. travnja 1988.

SREDIŠNJA KNJIŽNICA  
FAKULTETA ELEKTROTEHNIKE  
I RAČUNARSTVA - ZAGREB

Inv. br. SRE-32563

Sign: LF-1289

Cijena za studente Sveučilišta u Zagrebu  
Din 8.800.—

Tisak: Sveučilišna naklada Liber Zagreb, Trg Maršala Tita 14  
Broj 1640/SL

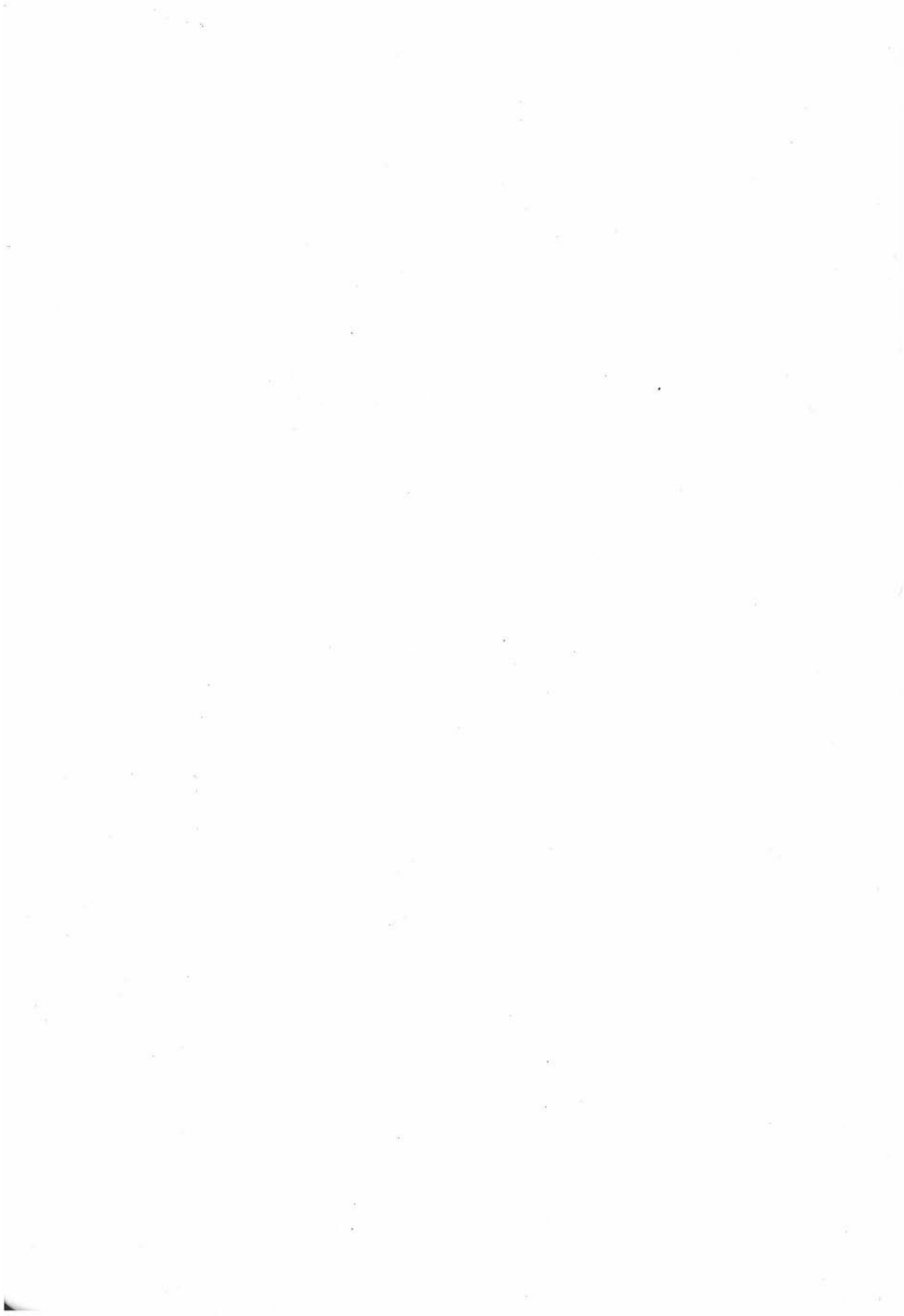


## P R E D G O V O R

Ova su skripta namijenjena da posluže kao udžbenik iz istoimenog predmeta za studente treće godine smjera "Elektrostrojarstvo i automatizacija" na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu. Sadržaj im je zato koncipiran prema važećem nastavnom programu (ETF-3) tako, da se na njih može prema potrebi nadovezivati gradivo iz postojećih skripata V. predl. ing. Miroslava Plohla: "Teorija četveropola". Procjenu, u kolikom stupnju mogu skripta "Osnovi teorije mreža" poslužiti studentima ostalih smjerova za savladjivanje gradiva iz predmeta istog ili djelomično bliskog područja, prepuštam čitaocima.

Budući da na našem jezičnom području ne postoji udžbenik odgovarajuće tematike, smatrao sam potrebnim, da iz didaktičkih razloga detaljnije i preciznije obrazlažem, primjerima potkrepljujem i neke naizgled osnovnije pojmove i postupke, iako bih mogao smatrati da su studentima već poznati. Mislim da je na taj način uz više teksta, a na uštrb suhe sažetosti, s jedne strane sačuvana cjelovitost discipline koju pokriva ovaj naslov, a s druge omogućeno studentima laganije čitanje i usvajanje većeg broja novih koncepcija.

Ovom prilikom moram odati puno priznanje Ljubici Surać za pažljivost i veliki trud, koje je iziskivalo prekućavanje veoma kompliciranog sloga. Isto tako rado ističem i kvalitetnu izvedbu crteža ing. Vesne Štambuk. Čestu stručnu razmjenu mišljenja sa svojim asistentom ing. Vladimirom Čosićem bilježim svakako kao pozitivan doprinos ovom izdanju. Svima im se zahvaljujem na suradnji.



## S A D R Ž A J

|                                                      | Str. |
|------------------------------------------------------|------|
| 1. UVOD .....                                        | 1    |
| 1.1. Osnovne koncepcije .....                        | 1    |
| 1.2. Idealizacija (modeliranje) električkih mreža .. | 5    |
| 1.3. Klasifikacija električkih mreža .....           | 8    |
| 1.3.1. Koncentriranost (zbijenost) električ-         |      |
| kih mreža .....                                      | 9    |
| 1.3.2. Linearnost električkih mreža .....            | 9    |
| 1.3.3. Vremenska invarijabilnost (nepromjen-         |      |
| ljivost) električkih mreža .....                     | 13   |
| 1.3.4. Pasivnost električkih mreža .....             | 16   |
| 1.3.5. Recipročnost električkih mreža .....          | 18   |
| 1.4. Varijable električkih mreža .....               | 20   |
| 1.5. Referentna usmjerenja (referencije) .....       | 21   |
| 1.6. Kirchhoffovi zakoni .....                       | 24   |
| 1.6.1. Kirchhoffov zakon struje (KZS) .....          | 24   |
| 1.6.2. Kirchhoffov zakon napona (KZN) .....          | 26   |
| 1.7. Valni oblici .....                              | 29   |
| 2. ELEMENTI ELEKTRIČKIH MREŽA .....                  | 47   |
| 2.1. Dvopolni elementi .....                         | 47   |
| 2.1.1. Otpor .....                                   | 47   |
| 2.1.2. Induktivitet .....                            | 50   |
| 2.1.3. Kapacitet .....                               | 51   |
| 2.2. Sposobnost memoriranja nekih elemenata .....    | 53   |
| 2.3. Višepolni elementi mreža .....                  | 57   |
| 2.3.1. Vezani induktiviteti (transformator) ..       | 57   |
| 2.3.2. Idealni transformator .....                   | 64   |
| 2.3.3. Girator .....                                 | 67   |
| 2.3.4. Negativni konvertor .....                     | 69   |
| 2.3.5. Operaciono pojačalo .....                     | 71   |
| 2.4. Nezavisni izvori .....                          | 74   |
| 2.4.1. Naponski izvor .....                          | 75   |
| 2.4.2. Strujni izvor .....                           | 76   |
| 2.5. Ekvivalentni dvopoli .....                      | 77   |

|                                                                    | Str. |
|--------------------------------------------------------------------|------|
| 2.6. Zavisni izvori .....                                          | 83   |
| 2.6.1. Strujno zavisni strujni izvor .....                         | 84   |
| 2.6.2. Naponski zavisni strujni izvor .....                        | 84   |
| 2.6.3. Naponski zavisni naponski izvor .....                       | 84   |
| 2.6.4. Strujno zavisni naponski izvor .....                        | 85   |
| 2.6.5. Mreže sa zavisnim izvorima .....                            | 85   |
| 2.7. Snaga i energija .....                                        | 87   |
| 3. JEDNADŽBE PETLJI, JEDNADŽBE ČVOROVA I JEDNADŽBE<br>STANJA ..... | 93   |
| 3.1. Jednadžbe petlji .....                                        | 95   |
| 3.2. Jednadžbe čvorova .....                                       | 101  |
| 3.3. Jednadžbe stanja .....                                        | 106  |
| 4. OSNOVI TOPOLOGIJE ELEKTRIČKIH MREŽA .....                       | 115  |
| 4.1. Linearni graf mreže .....                                     | 115  |
| 4.2. Osnovni pojmovi iz teorije grafova .....                      | 117  |
| 4.3. Matrični prikaz sistema linearnih jednadžbi ...               | 126  |
| 4.4. Topološke matrice grafova .....                               | 129  |
| 4.4.1. Matrica incidencije (matrica čvorova) ..                    | 129  |
| 4.4.2. Spojna matrica (matrica krugova, matri-<br>ca petlji) ..... | 130  |
| 4.4.3. Rastavna matrica (matrica rezova) .....                     | 132  |
| 4.5. Reducirane matrice grafa .....                                | 134  |
| 4.5.1. Medjusobni odnosi matrica grafa .....                       | 139  |
| 4.6. Tellegenov teorem .....                                       | 141  |
| 5. JEDNADŽBE ELEKTRIČKIH MREŽA U MATRIČNOM OBLIKU .....            | 145  |
| 5.1. Matrične jednadžbe petlji .....                               | 146  |
| 5.2. Matrične jednadžbe čvorova .....                              | 161  |
| 5.3. Transformacije izvora .....                                   | 164  |
| 5.4. Tipična (opća) grana mreže .....                              | 166  |
| 5.5. Dualnost .....                                                | 169  |
| 6. RJEŠENJA JEDNADŽBI MREŽA .....                                  | 175  |
| 6.1. Klasično rješavanje diferencijalnih jednadžbi .               | 176  |
| 6.1.1. Komplementarno rješenje i slobodni odziv                    | 180  |
| 6.1.2. Partikularni integral i prisilni odziv .                    | 189  |
| 6.1.3. Potpuni odziv, prelazno i stacionarno<br>stanje .....       | 196  |

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.2. Odziv na jedinični impuls .....                                       | 201 |
| 6.2.1 Odnos skokovnog i impulsnog odziva .                                 | 202 |
| 6.2.2. Impulsni odziv iz diferencijalnih<br>jednadžbi .....                | 206 |
| 6.2.3. Odnos impulsnog i slobodnog odziva .                                | 213 |
| 6.3. Konvolucija .....                                                     | 216 |
| 6.3.1. Konvolucionni integral .....                                        | 216 |
| 6.3.2. Grafički prikaz konvolucije .....                                   | 221 |
| 6.4. Laplaceova transformacija .....                                       | 225 |
| 6.4.1. Definicija Laplaceove transformacije                                | 225 |
| 6.4.2. Transformacije karakterističnih<br>valnih oblika .....              | 227 |
| 6.4.3. Transformacije integrodiferencijal-<br>nih jednadžbi .....          | 228 |
| 6.4.4. Razvoj na parcijalne razlomke .....                                 | 235 |
| 6.4.5. Analiza mreža metodom Laplaceove<br>transformacije .....            | 242 |
| 6.4.6. Transformacija konvolucionog inte-<br>grala .....                   | 248 |
| 6.5. Prirodne frekvencije .....                                            | 249 |
| 6.5.1. Prirodne frekvencije varijabli mreže                                | 249 |
| 6.5.2. Prirodne frekvencije mreže .....                                    | 251 |
| 6.6. Stabilnost mreže .....                                                | 252 |
| 6.7. Ravnina kompleksnih frekvencija .....                                 | 253 |
| 7. FUNKCIJE MREŽA .....                                                    | 262 |
| 7.1. Definicija funkcija mreža .....                                       | 262 |
| 7.2. Funkcije mreža i sinusoidalno stacionarno<br>stanje .....             | 263 |
| 7.3. Karakteristične funkcije mreža .....                                  | 267 |
| 7.3.1. Ulazne funkcije mreža .....                                         | 268 |
| 7.3.2. Prijenosne funkcije mreža .....                                     | 270 |
| 7.4. Općenita svojstva funkcija mreža .....                                | 272 |
| 7.5. Izražavanje funkcija mreža logaritamskom<br>mjerom .....              | 273 |
| 7.6. Frekvencijski odziv .....                                             | 275 |
| 7.6.1. Dobivanje frekvencijskog odziva iz<br>dijagrama polova i nula ..... | 277 |
| 7.7. Svojstvo simetričnosti funkcija mreža .....                           | 280 |

## VIII

|                                     | Str. |
|-------------------------------------|------|
| 8. TEOREMI MREZA .....              | 283  |
| 8.1. Teorem supstitucije .....      | 283  |
| 8.2. Teorem superpozicije .....     | 285  |
| 8.3. Thévenin-Nortonov teorem ..... | 289  |
| 8.4. Teorem recipročnosti .....     | 297  |
| VAŽNIJA LITERATURA .....            | 305  |

## 1. U V O D

### 1.1. OSNOVNE KONCEPCIJE

Teorija električkih mreža je grana elektrotehnike kojoj su objekti proučavanja električke mreže.

Pojam *električka mreža*, odnosno *električki krug* nije stran polaznicima stručnog dijela studija elektrotehnike. Iako ova dva naziva ne moraju nužno biti sinonimi, u okviru ove knjige oba će se upotrebljavati alternativno, jer je tako u modernijoj literaturi uobičajeno. Nastojat će se međjutim, pod naziv električkih krugova svrstavati jednostavnije električke mreže, koliko to bude moguće, obzirom da ne postoje oštre granice. Tako ćemo npr. zvati one mreže, koje tvore samo jedan zatvoreni strujni tok. Naprotiv, pojam "mreža" nositi će u sebi kompleksniji karakter.

Skup električkih naprava, koje su preko svojih priključnica električkim vodičima medju sobom spojene, općenito se naziva električkom mrežom. U elektrotehnici međjutim, ne bira se takav skup nasumce, niti se naprave medjusobno spajaju na bilo kakav način i bez stanovitog razloga. Naprotiv, to se radi svrsishodno s odredjenom namjerom, da bi ta električka mreža obavljala izvjesnu funkciju.

Iz toga proizlazi, da električka mreža u tehničkim objektima ima ulogu nekog električkog sistema. Samim tim, može se mrežu i promatrati kao dio velike familije, poznate pod zajedničkim imenom *sistemi*. Taj se pojam nameće sam po sebi, a obuhvaća široki spektar problematike s kojom se inženjeri susreću. Navodeći primjerice fizikalne sisteme kao: hidraulič-

ke, mehaničkog upravljanja, komunikacijske, računarske, radarsko-navigacione, kontrolne, kao i mnoštvo ostalih, u širem se smislu ne smiju izostaviti niti ekonomski sistemi, biološki, itd. Iako su ti u većini slučajeva veoma složeni, ipak se mnogi od njih mogu aproksimativno i simbolički prikazati kao osnovni jednodimenzionalni sistem prema sl.1.1.1. U najmanju ruku, svaki od njih ima takav elementarni sistem kao komponentni dio.



Sl.1.1.1

*Analiza i sinteza* takvog osnovnog sistema, kada se on može predstaviti ekvivalentnom mrežom, sadržaj su ovog teksta u širem smislu. Kod toga se, kao što vidimo, operira s tri ključna pojma: *poticaj* (pobuda, ulaz, signal), *sistem* (ekvivalentna mreža) i *odziv* (izlaz). Upravo zbog već naglašene funkcionalnosti, korisno je sistem prema ovom prikazu smatrati cjelinom. To znači, da ne treba na strelice poticaja i odziva gledati kao na nešto sasvim izvanjsko, što nema veze sa sistemom. Isto tako, promatranje svega onoga što sadržava pravokutna "kutija" nazvana (uže) sistemom, kao nešto izolirano od odziva i poticaja, moglo bi dovesti do krivih zaključaka. Takovom stavu prema cjelovitosti sistema ništa, međutim, ne protivrječimo, ako teoretski pretpostavimo sistem bez vanjskih poticaja i odziva, ali s nekim unutrašnjim energetskim stanjem. Pokazat će se naime, da je to stanje ekvivalentno poticaju, pa zato "ulazi u strelicu" poticajne funkcije.



Mreža, međutim, kako ćemo ju naknadno definirati, može biti i ono što simboliziraju strelice i ono što simbolizira kutija - svaka za sebe, ali i sve zajedno. Prema tome, mi ćemo mrežu katkada istovremeno nazivati i sistemom, ali samo onda kada će biti razmatrana kao jedinstvena cjelina, tj. sa stanovišta odziva na poticaj.

*Analiza sistema, bavi se određivanjem odziva, uz poznavanje funkcija poticaja i sistema. Naprotiv, problem je sinteze konstruirati sistem, uz zadane funkcije poticaja i željenog odziva.*

Zapravo, tehnika je u svom najutilitarnijem aspektu više okrenuta ka konstrukciji, odnosno sintezi fizikalnog sistema, od kojeg očekujemo da "vrši određeni posao", nego ka analizi već postojećih sistema. Međutim, dublje razumijevanje metoda za analiziranje postojećih sistema, očigledno je preduvjet za sposobnost sintetiziranja novog sistema, ili poboljšavanje konstrukcije već izvedenog. Ova će knjiga uglavnom tretirati probleme analize, dok će sinteza biti zastupljena samo sporadično.

Postoji više načina analiziranja različitih tipova fizikalnih sistema, ali ovaj već najavljeni pristup preko ekvivalentne mreže, provoditi će se u svakoj prilici, jer je jednostavan i općenit. Taj se pristup sastoji od predstavljanja sistema ekvivalentnom mrežom povezanih idealiziranih elemenata, koji su u određenom odnosu s parametrima stvarnog fizikalnog sistema. Uvidom u tako kreiranu ekvivalentnu mrežu, mogu joj se izravno pridružiti jednadžbe odgovarajućih varijabli, koje u matematičkoj formi karakteriziraju i time reprezentiraju originalni fizikalni sistem. Rješenje ovih jednadžbi daje odziv sistema na dane uvjete i poticaje.

Prikazujući to korak po korak, dolazimo do slijedeće sheme: (1) izvesti odgovarajuću ekvivalentnu mrežu; (2) napisati jednadžbe mreže; (3) riješiti te jednadžbe; (4) primijeniti rješenje na stvarni fizikalni sistem. Kod toga treba napomenuti, da se točke (1) i (4) kod električkih sistema, najčešće prepuštaju drugim disciplinama elektrotehnike, a ne tretiraju se u okviru teorije električkih mreža.

Pristup preko ekvivalentne mreže za rješavanje fizikalnih sistema, prvotno je bio razvijen za analizu upravo električkih krugova. U toj se namjeni pokazao naročito prikladnim. Međutim, danas je već dobro poznata općenitost ove metode, tako da se isto tako primjenjuje i na mnoge različite tipove fizikalnih sistema, Fizikalni sistem karakterizira postojanje određenih jednadžbi sistema, koje ga jednoznačno opisuju tj. predviđaju njegov odziv na neki poznati poticaj. Naprotiv, biološki ili ekonomski sistemi uključuju u sebi i stanovite elemente slučajnih procesa, pa su im time i odzivi predvidivi samo s izvjesnim stupnjem vjerojatnosti. To ipak ne znači, da se i takvi tipovi sistema ne mogu rastaviti na svoje komponente, kojih bi ponašanje bilo analogno fizikalnim sistemima, pa se tako parcijalno i oni mogu analizirati metodom mreže.

Upravo zato, treba studirati tehniku analize mreža sa vrlo generalnog stanovišta, te postupno sticati sposobnost prepoznavanja osnovnih zajedničkih značajki unutar problematike naoko nesrodnih područja.

Ovaj tekst nema pretenzije da ustanovljava neku općenitu i sveobuhvatnu definiciju mreže, a koja bi bila prihvatljiva za sve sisteme bez obzira na područje. Štaviše, ovdje se nećemo upuštati niti u diskutiranje definicija poznatih iz literature. Ipak, držeći se preuzete koncepcije opredijelit ćemo se za jednu pojednostavljenu i osebujniju definiciju po kojoj ... *mreža je geometrijska struktura međusobno povezanih idealiziranih elemenata od kojih svaki reprezentira određeni matematički odnos između dvije zavisne varijable.*

Između korica ove knjige pridržavat ćemo se tako izloženog tumačenja mreže. Uz to, da bi precizirali granice područja našeg užeg interesa, dodavat ćemo u toj definiciji mreži atribut "električka". U tom slučaju zavisne varijable bit će konkretno: napon i struja.

Okako prihvaćena definicija električke mreže, očigledno je prvi korak ka idealizaciji konkretne (realne) mreže električkih naprava, opisane u samom početku ovog poglavlja.

Aksiomatski zasnovana teorija mreža služi se još apstraktnijom definicijom mreže, koristeći topološki pojam linearnog grafa.<sup>†</sup>

## 1.2. IDEALIZACIJA (MODELIRANJE) ELEKTRIČKIH MREŽA

Već u ovim uvodnim razmatranjima o koncepciji mreže susrećemo se s pojmovima idealizacije, idealiziranih elemenata, ekvivalentne mreže i sl., pa je i tome potrebno odrediti uže značenje u okvirima teorije električkih mreža. Kao i svaka tehnička disciplina, i teorija strujnih krugova temelji se na koncepciji idealizacije ili modeliranja. Rečeno je, da za analiziranje nekog fizikalnog sistema moramo biti u stanju da sistem opišemo kao idealizirani model, sastavljen od međusobno povezanih idealiziranih elemenata.

Realne električke mreže u praksi, načinjene su od žica, svitaka, kondenzatora, dioda, prekidača i ostalih brojnih električkih naprava, koje jednim imenom možemo nazivati *komponente* električkih mreža.

Teško da je ikada moguće pokazati na jednu komponentu i reći: ovdje je otpor i ništa drugo, ili induktivitet i ništa drugo, kapacitet i ništa drugo, itd. Neku takvu tvrdnju, ne bi se moglo postaviti čak niti za ravan komad žice, jer i on ima raspođijeljenu induktivnost i kapacitivnost. Ili drugi primjer: čak i vrlo dobar kondenzator ima malo otpornosti i induktivnosti. I.t.d.

Medjutim, prije nego bi matematički metodi mogli biti primijenjeni na takove mreže, nužno je "prevesti" mrežu iz svijeta materijalnih stvari u jedan idealizirani i jednostavniji svijet. Srećom, gotovo je uvijek moguće pretpostaviti da su komponente sastavljene ili iz čistih otpora ili čistih kapaciteta, ili čistih induktiviteta, ili idealnih energetskih izvora, itd. Naravno, to se smije učiniti ako je dopustivo zanemariti razlike (za koje vjerujemo da su za anali-

---

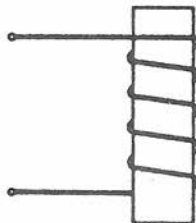
<sup>†</sup> Da bi o tome saznao više, zainteresirani čitalac upućuje se na literaturu koncipiranu u tom smislu (41,42).

zu male), između praktičkih i idealiziranih električkih mreža.

Prelazeći iz svijeta realnosti u idealizirani svijet odbacujemo sve primjese sporednog i nevažnog, a preostaju esencijalna, električka svojstva. Proces *idealizacije* ili *modeliranja* je redovno potreban u rješavanju bilo kojeg problema u nauci ili tehnici. Elektrotehnika ima sreću da zahiti jeva relativno mali stupanj idealizacije.

Suprotan proces, *realizacija* vraća nas nazad u svijet realnosti. Nakon što je problem riješen, mreža konstruirana, sve se mora opet sastaviti od materijalnih dijelova. Matematički se simboli moraju prevesti u bakar, poluvodiče, odnosno u konkretne komponente mreža. To katkada može, ali i ne mora biti jednostavno. Štaviše, nije uvijek i moguće.

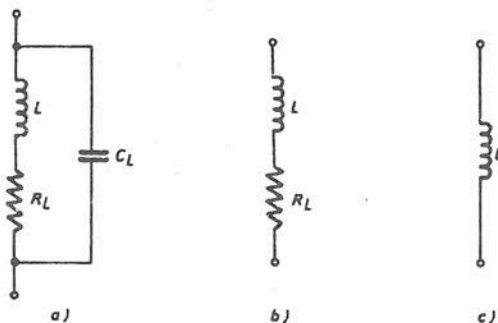
Pokušajmo npr. modelirati jednostavni svitak iz električkog zvonca, kod kojega je bakrena žica namotana u mnogo navoja oko stupčaste željezne jezgre (sl. 1.2.1).



Sl. 1.2.1

Znamo da ovakav svitak s jezgrom visokog permeabilite-  
ta ima induktivnost kao primarno električko svojstvo. Može-  
mo li smatrati da je ta induktivnost konstantna usprkos  
mogućnosti magnetskog zasićavanja željezne jezgre? Vjerojat-  
no možemo, jer daleko veći dio magnetskog polja prolazi kroz  
zrak! Nadalje, takav svitak pokazuje i svojstvo električne  
otpornosti. Tome nije jedini uzrok "istosmjerna" otpornost  
bakrene žice, nego i energetske gubici u jezgri, dielektri-  
kumu, i uslijed skin-efekta. Sve to u našem procesu ideali-  
zacije možemo zamijeniti jedinstvenim ekvivalentnim otporom  
 $R_L$  serijski pridodanim induktivitetu  $L$  kao sigurno najsig-

nifikantnijem elementu. Za volju veće točnosti trebalo bi uzeti u obzir i kapacitivnost od zavoja do zavoja svitka, koja time ulazi kao paralelni element  $C_L$  u naš model svitka. Sve ostale karakteristike svitka, kao njegov fizikalni oblik, armatura, i sl., za nas su od sporednog značaja. One ne doprinose vjerojatno ništa mogućnosti matematičke analize svitka, na temelju dobivenog modela (sl. 1.2.2.a).



Sl. 1.2.2

Medjutim, standardni uvjeti upotrebe ovakovog svitka (npr. niska frekvencija) dopušta odbacivanje zanemarivo male kapacitivnosti iz sklopa utjecaja na ponašanje svitka, pa idealizacija dovodi do pojednostavljenog modela (sl. 1.2.2.b).

Idući u procesu modeliranja svitka ka odbacivanju svega nebitnog, a zadržavajući samo osnovne, neizbježne karakteristike, može se u daljnjem koraku zanemariti otpornost namotane žice. Čitav se model svitka time svodi na samo jedan idealizirani element, tj. induktivitet  $L$  (sl. 1.2.2.c).

Iz prikazanog se vidi da niti jedan od ovog sugeriranog niza modela nije savršen, ili čak da je jednako dobar pod svim okolnostima. Ipak, vodeći računa o tome kod svakog od njih, oni su podesni za matematički tretman.

Ovo je samo jedan veoma jednostavan primjer procesa idealizacije realnih fizikalnih naprava, a čitaoci su već upoznati s time posredno, analizirajući nadomjesne sheme (tj. upravo modele) transformatora, električkog motora, i niza drugih

uredjaja. Modeli u teoriji mreža su sasvim analogni poznatim modelima klasične mehanike, kao što su npr. čestica ili čvrsto tijelo.

Idealizirani *elementi mreža*, koje ćemo pobliže upoznati u kasnijim poglavljima, su krajnje pojednostavljeni modeli kojima aproksimativno prikazujemo svojstva praktičkih komponenata. Iako fizikalni fenomeni tih naprava mogu biti samo aproksimativno prikazani, idealizirani elementi su po definiciji precizno matematički karakterizirani. U teoriji električnih mreža mi se nećemo baviti izgradnjom adekvatnog modela konkretnih naprava, već ćemo studirati opća svojstva već predloženih mreža sačinjenih od idealiziranih elemenata. Pri tome ćemo imati na umu, da je za neku fizikalnu mrežu, moguće dobiti takav sukcesivni niz idealiziranih modela te mreže, da ponašanje modela odgovara sve bolje i bolje ponašanje fizikalne mreže. Analizom pak modela mreže, može se predvidjeti ponašanje fizikalne mreže pod drugačijim uvjetima, i time konačno, konstruirati bolje električne naprave.

### 1.3. KLASIFIKACIJA ELEKTRIČNIH MREŽA

Nakon što smo na odredjeni način definirali mrežu i njezine sastojke, a prije nego krenemo na prikazivanje metoda analize mreža, potrebno je specificirati one tipove mreža koje će biti predmet analize. U ovom poglavlju pokušat ćemo dati izvjesne karakterizacije po kojima možemo svrstati mreže u neke razrede. Dakako, ovo ne može biti niti potpuna, niti jest jedinstvena klasifikacija mreža. Ona će jednim svojim dijelom biti bazirana prema svojstvima elemenata u mreži, ali će glavnina kriterija upućivati na općenitije promatranje mreže kao cjeline. Zato će u centru pažnje biti klasifikacija mreža u smislu odnosa odziv-poticaaj na različitim prilazima mreže.

### 1.3.1. Koncentriranost (zbiženost) električkih mreža

U prethodnom smo odjeljku prešutjeli još jedno učinjeno zanemarenje. Stvarno, ako se prisjetimo navedenog primjera, onda je sigurno svaki milimetar žice namotane u svitak, doprinosio induktivnosti i otpornosti. Slično je s kapacitivnosti koja postoji između svakog pojedinog navoja mnogostruko namotanog svitka.

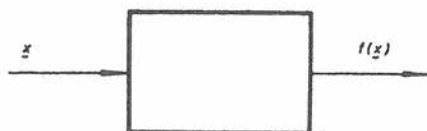
Prema tome, otpor, induktivitet i kapacitet su *kontinuirano raspoređeni* uzduž žice, a mi smo ih kod kreiranja modela svitka smatrali *koncentriranim*, zbijenim u posebne elemente mreže. Na sreću, mi možemo i nadalje u ostalim primjerima ta svojstva mreža smatrati koncentriranim, a da time u naše predočavanje električkih mreža ne unosimo značajniju pogrešku. Prvi razlog za to jest činjenica, da su mreže sa zbijenim elementima jednostavnije za razumijevanje i analizu, a drugi, da se teorija mreža s raspoređenim elementima zasniva upravo na onoj sa zbijenim. Naime, *raspodijeljene mreže* mogu se smatrati graničnim prelazom beskonačnog niza *zbijenih mreža*, kojih dimenzije teže k nuli. U ovoj tvrdnji skriva se međjutim, i granica, do koje je proces sabijanja dopušten. Očigledno je, kada se radi o veoma dugim linijama, pri vrlo visokim frekvencijama prijenosa, dimenzije nadomjesnih elemenata se relativno povećavaju, pa aproksimacija učinjena koncentriranjem nije više korektna. Za električne mreže takvog karaktera kažemo da su *s raspodijeljenim (ili distribuiranim) elementima*. U preostalom dijelu ove knjige, ti će slučajevi biti isključeni iz promatranja. Predmet analize biti će samo *električke mreže sa zbijenim (ili koncentriranim) elementima*, dakle one, kojih su fizičke dimenzije zanemarivo male u poredjenju s valnom dužinom primjenjenog električnog signala.

### 1.3.2. Linearnost električkih mreža

Jedna od najčešće susretanih i najosnovnijih kategorija po kojima svrstavamo električke mreže jest njihova *linearnost*, i protivno *nelinearnost*. Iako strogo gledano, u svi-

jetu realnosti i ne postoji savršeno linearan element ili linearan sistem, sa stanovišta idealizacije mi možemo zamisliti njihov linearan model. Tim više to smijemo učiniti, jer se većina elemenata ili mreža i ponaša linearno u granicama iskoristivog područja promjene svojih definicionih varijabli.

U tvrdnju da je neki sistem, mreža ili element (prema prikazu na sl. 1.3.1) linearan, bit ćemo najsigurniji, ako kažemo da  $f$  mora biti linearna funkcija. Pri tome mislimo na sasvim preciznu matematičku odredenost pojma linearne funkcije.†



Sl. 1.3.1

Ovdje treba posebno naglasiti što se sve "krije" u ulaznom vektoru  $x$  i izlaznom  $f(x)$ , ako je prikazani sistem upravo električna mreža prema dođe usvojenim postavkama. U tom slu-

---

† Ne ulazeći u detalje tumačenja i izvodjenja, ovdje ćemo samo ustvrditi da je funkcija  $f$  linearna:

1. ako su njezina domena i kodomena linearni prostori preko istog skalarnog polja
2. ako je *homogena* |znači za svako  $x$  u njezinoj domeni i za svaki skalar  $\alpha$  vrijedi  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$  |.
3. ako je *aditivna* |znači za svaki par elemenata  $x_1, x_2$  iz njezine domene vrijedi  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  |.

Posljednja dva uvjeta mogu se zamijeniti jednim ekvivalentnim uvjetom - svojstvom *superpozicije*, koje je zadovoljeno ako za svaki par skalara  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  i za svaki par vektora  $x_1$  i  $x_2$  u domeni vrijedi

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$



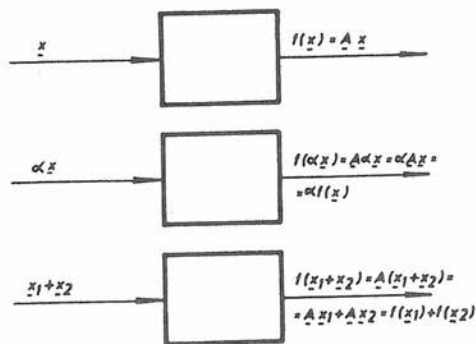
čaju vektor  $x = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_a(0), x_b(0), \dots]^T$ , mora u sebi sadržavati sve poticajne funkcije u mreži, u koje spadaju pored aktivnih  $x(t)$ , još i početna stanja  $x(0)$ . Isto tako u izlaznom vektoru  $f(x)$ , moraju biti sve tražene odzivne funkcije. Ako uz takvo gledanje funkcija  $f$  položi ispit linearnosti prema matematičkim kriterijima za linearnu funkciju, onda je ta mreža linearna. U protivnom ona je nelinearna.

Uzmimo npr. sistem odnosno mrežu kojoj je izlazna funkcija definirana posve jednostavno

$$f(x) = A x$$

Domena i kodomena funkcije  $f$ , neka je skup svih realnih  $n$ -tupla kao što je i ulazni vektor  $x$  sa svima gore navedenim svojstvima. Neka je  $A$  određena  $n \times n$  matrica, koje su elementi realni brojevi.<sup>†</sup>

Test provjere linearnosti ove mreže proveden je sukcesivno na sl. 1.3.2. prema kriterijima za linearnu funkciju. Iz tog prikaza slijedi da je navedena mreža linearna.



Sl. 1.3.2

<sup>†</sup> Da bi se razlikovali od skalara, simboli za matrice i vektore bit će u ovom tekstu tiskani kurzivnim (kosim) slovima ili, gdje to ne bude moguće, podvučenim standardnim slovima.

U praksi je ta provjera obično jednostavnija jer nam je najčešće poznat sastav mreže, tj. karakter njezinih elemenata. Nadalje, u najvećem broju slučajeva, mreža je jednodimenzionalna, odnosno prijenos je signala kroz mrežu od samo jednog ulaza na samo jedan izlaz. Osim toga za takovu mrežu možemo lako zamisliti, da nema u početku promatranja nikakvu energiju u sebi, ili kako to drugačije kažemo, da je njezino početno stanje nula. Na taj se način ulazni vektor  $x$  svodi na samo jedan član - poticajnu funkciju  $x(t)$ , a izlaz postaje takodjer jedan skalar - odzivna funkcija  $y(t)$ . Naravno, u tom je slučaju lakše procijeniti da li je odziv proporcionalan poticaju, pa prema tome i dobiti odgovor na pitanje da li je mreža linearna ili ne. Na takovu ćemo situaciju naići kod definiranja linearnih elemenata mreža. Tada će već koristiti slijedeći zaključak, koji se nazire iz gornjih veoma općenitih postavki.

Funkcija, čija je domena i kodomena skup svih realnih brojeva, jest linearna funkcija, ako i samo ako je u obliku  $y=f(x) = kx$ , gdje je  $k$  konstanta (tj.  $k$  nije ovisno o  $x$ ). Drugim riječima, funkcija je linearna, ako i samo ako je njezin graf pravac kroz ishodište  $xy$  ravnine. (Treba uočiti da funkcija oblika  $y=f(x) = kx+b$ , gdje je  $b$  konstanta različita od nule, nije linearna funkcija!).

Glavnina naše pažnje u okviru ovog teksta bit će posvećena analizi linearnih mreža, dakle onih kod kojih je odziv linearna funkcija poticaja. Mora se priznati, da je njihov tretman ipak daleko jednostavniji nego onaj kod nelinearnih mreža, koje ćemo ponegdje izložiti samo u osnovnim crtama. Budući da se većina sistema odnosno mreža, čak i kod širokog dijapazona promjena signala, ponaša približno linearno, onda su i rezultati dobiveni iz lineariziranog modela dovoljno bliski stvarnom stanju. To su razlozi, da u okvirima opće teorije mreža i sistema, stavljamo težište na studiranje upravo linearnih mreža.

### 1.3.3. Vremenska invarijabilnost (nepromjenljivost) električkih mreža

Započetu klasifikaciju nastaviti ćemo prema karakterizaciji, koja električke mreže i sisteme dijeli na *vremenski nepromjenljive* (ili *invarijabilne*) i *vremenski promjenljive* (ili *varijabilne*).

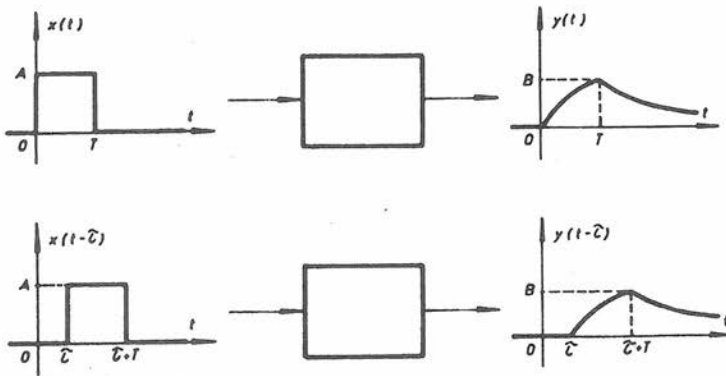
Ova karakterizacija počiva dobrim dijelom (ali ne bez iznimke!) na određenom svojstvu elemenata od kojih je sastavljena mreža. Budući da će o tome svojstvu biti kasnije više rečeno za sada ustvrdimo, da elementi kojih parametri ne mijenjaju veličinu tokom vremena jesu vremenski nepromjenljivi. U stvari, slično kao kod linearnih elemenata, u fizikalnom svijetu ne postoje potpuno vremenski invarijabilni elementi. Nakon dovoljno velikog vremenskog razdoblja parametri svake fizikalne komponente moraju se promijeniti, u većoj ili manjoj mjeri. Međutim, za svrhu analize, ove se komponente najčešće mogu modelirati kao vremenski nepromjenljivi elementi kojima parametri ostaju konstante, bar do one vremenske granice, koja nas zanima. Nasuprot tome, elemente ćemo smatrati vremenski promjenljivima, ako je promjena njihovih parametara dovoljno brza, da utječe na ishod analize unutar tog promatranog vremenskog razdoblja.

Kao što je već gore upozoreno, za definiranje vremenske invarijabilnosti čitave mreže odnosno sistema, ne smijemo se zadovoljiti samo određivanjem, da li su sastavni elementi vremenski invarijabilni ili vremenski varijabilni. Zato ćemo to sada postaviti u općenitijem obliku pozivajući se na prikaz sistema, tj. preko poticaja i odziva.

*Sistem je vremenski nepromjenljiv, ako uvijek daje jednaki odziv na zadani poticaj bez obzira kada je taj poticaj primjenjen.*

Primjer na slijedećoj slici 1.3.3. ilustrira ponašanje jedne vremenski nepromjenljive mreže u skladu s gornjom definicijom.

Pretpostavimo da ako na sistem (ili električku mrežu) s nekim unutrašnjim početnim stanjem  $x(0)$  djeluje poticaj  $x(t)$ , dobiva se odziv  $y(t)$ . Taj sistem ćemo nazivati vremenski ne-



Sl. 1.3.3

promjenljivim ako poticaj  $x(t-\tau)$ , uz isto početno stanje sistema kao prije  $x(0)$ , prouzroči odziv  $y(t-\tau)$  za svaki  $\tau \geq 0$ .

Dakle, kod takvih sistema, izvjesno kašnjenje istog ulaza, jedino prouzroči jednako zakašnjenje istog izlaza, bez promjene valnog oblika. Treba međjutim, naglasiti, da i ono isto početno stanje sistema kakvo je bilo u  $t=0$ , za slučaj zakašnjelog ulaza, postoji tek od trenutka nastupa tog ulaza, tj. od  $\tau$  vremenskih jedinica poslije  $t=0$ .

Definicija vremenski nepromjenljivog sistema, kako je gore "opisno" izložena, može se još više matematički poopćiti po analogiji s definicijom linearnog sistema. To će biti naročito korisno u slučaju kompleksnijeg unutrašnjeg stanja sistema, dakle s više različito lociranih početnih energija, te s više poticajnih funkcija na ulazu, odnosno više odzivnih na izlazu sistema. Kako iz ovoga jasno slijedi primjena matrične notacije, to će procjena o vremenskoj invarijabilnosti sistema ići slijedećim koracima.

Treba, naime, i ovdje pod pojam ulaza svrstati sve poticajne funkcije, bilo da su to neki stvarno postojeći vanjski ili unutrašnji aktivni izvori, bilo ekvivalentni izvori zbog početnog stanja sistema (sl. 1.3.4.).



Sl.1.3.4

Prema tome, vektor će poticaja u sebi sadržavati kako  $x(t)$ , tako i  $x(0)$  elemente, pa ga možemo prikazati kao

$$\begin{aligned} X(t) &= S(t) \left[ x_1(t), x_2(t), \dots, x_a(0), x_b(0), \dots \right]^T = \\ &= S(t)x(t) \end{aligned} \quad /1.3.1/$$

gdje je  $S(t)$  jedinična funkcija.<sup>†</sup>

Neka taj poticaj prouzroči odziv sistema

$$\begin{aligned} Y(t) &= f[X(t)] = S(t) \left[ y_1(t), y_2(t), \dots \right]^T = \\ &= S(t)y(t) \end{aligned} \quad /1.3.2/$$

Razmatrani sistem bit će vremenski nepromijenljiv, ako za  $\tau(\geq 0)$  vremenskih jedinica pomaknuti poticaj  $X$

$$X_\tau(t) = X(t-\tau) = S(t-\tau)x(t-\tau) \quad /1.3.3/$$

prouzroči isto  $\tau$  vremenskih jedinica pomaknuti odziv  $Y$ , tj. prouzroči odziv

$$Y_\tau(t) = Y(t-\tau) = S(t-\tau)y(t-\tau) \quad /1.3.4/$$

---

<sup>†</sup> Prikaz te funkcije biti će dat kasnije u poglavlju o tipičnim valnim oblicima.

Sistem koji ne zadovoljava ovaj uvjet jest vremenski promjenljivi sistem. Treba napomenuti da linearne mreže ne moraju nužno biti i vremenski nepromjenljive, kao i obrnuto. Glavnina razmatranja u ovoj knjizi biti će pod pretpostavkom vremenske invarijabilnosti, osim u slučajevima kada će to biti posebno naglašeno.

#### 1.3.4. Pasivnost električkih mreža

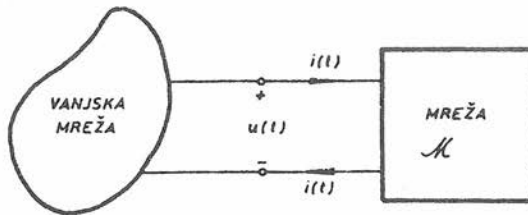
Podjela električkih mreža na *pasivne* i *aktivne*, vrši se prema svojstvu kojega karakterizacija nije istog tipa kao kod linearosti i vremenske invarijabilnosti. Tamo je opredjeljivanje bilo na bazi stanovitih relacija između odzivne i poticajne funkcije, koje su obje morale biti izražene definicionim električkim veličinama sistema, dakle ili kao naponi ili kao struje. Pri odlučivanju međjutim, da li je neka mreža pasivna ili aktivna, nije uobičajeno mrežu promatrati "sistemske" (poticaj-odziv), jer je ovdje relevantna električka veličina izvedena i od napona i od struje, odnosno procjena se vrši na bazi električne energije.

*Mreže koje mogu vraćati svoju prethodno primljenu električnu energiju vanjskom svijetu, ali nikad u većem iznosu nego što su primile, nazivaju se pasivne električne mreže.*

Jedno od svojstava električkih mreža jest da mogu ili upijati, ili uskladištavati električnu energiju. Pri tome izraz "upijati", treba značiti da je energija definitivno preuzeta odnosno apsorbirana od mreže, te da više ne može biti raspoloživa u svom električkom obliku. Naprotiv, uskladištena električka energija u mreži, može biti ili zadržana u onim elementima mreže koji su neka vrsta energetske rezervoara, ili u slučaju potrebe vraćena nekoj drugoj vanjskoj mreži. Time ona ostaje iskoristiva u svom električkom obliku.

Zamislamo električku mrežu sačinjenu od proizvoljno povezanih različitih zbijenih elemenata. Neka je ta mreža (simbolički) smještena u tzv. crnu kutiju, sa dvije priključ-

nice izvučene izvan kutije.<sup>†</sup> Te dvije priključnice predstavljaju jedini prilaz mreži, i sva električka mjerenja kao i priključivanja na ostale mreže, mogu se vršiti samo na tom prilazu. Stoga se može govoriti jedino o naponu između tih priključnica i struji preko tih priključnica, ako je na njih priključena bilo kakva vanjska mreža. Da bi postavili formalnu definiciju pasivne mreže, neka su polariteti napona ( $u$ ) i smjerovi struje ( $i$ ) na prilazu promatrane mreže ( $M$ ) upravo kao na prikazu sl.1.3.5.



Sl.1.3.5

Ako sa  $E(t)$  označimo sveukupnu mreži izvana isporučenu energiju do nekog vremena  $t$ ,  $M$  će biti *pasivna mreža* ako vrijedi:

$$E(t) = \int_{-\infty}^t u(t') i(t') dt' \geq 0 \quad /1.3.5/$$

ili

$$E(t) = \int_{t_0}^t u(t') i(t') dt' + E(t_0) = W(t_0, t) + E(t_0) \geq 0$$

za svaki početni trenutak  $t_0$ , za sako vrijeme  $t \geq t_0$ , te za bilo kakve valne oblike napona i struje na prilazu.

<sup>†</sup> Za kutiju kažemo da je crna, da naglasimo nemogućnost uvida što se nalazi unutra i šta se u njoj događa.

Kao što je vidljivo, u drugom obliku gornje definicije, sa  $E(t_0)$  označili smo energiju uskladištenu u mreži u trenutku  $t_0$ , a sa  $W(t_0, t)$  energiju predanu mreži od vremena  $t_0$  do vremena  $t$ .

Mreža koja ne zadovoljava taj uvjet, tj. za koju je  $E(t) < 0$ , naziva se *aktivna mreža*.

Da bi ovu definiciju pasivnosti poopćili na mreže sa više prilaza (parova priključnica) preko kojih se energija može mreži izvana dostavljati, uvest ćemo matrični prikaz za napone i struje. Kao što smo već u dosadašnjem izlaganju činili, bit će za  $n$  prilaza mreže

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T, \text{ a}$$
$$i(t) = [i_1(t), i_2(t), \dots, i_n(t)]^T.$$

Po analogiji sa gornjom definicijom za jedan prilaz, mreža sa  $n$  prilaza bit će pasivna ako vrijedi

$$E(t) = \int_{-\infty}^t u^T(t') i(t') dt' \geq 0 \quad /1.3.6/$$

Iz jednakosti /1.3.5/ odnosno /1.3.6/ za pasivnu mrežu, suma uskladištene energije u  $t_0$  i energije isporučene mreži od  $t_0$  do  $t$ , ne smije biti negativna.

U ovoj će knjizi biti analizirane kako pasivne tako i aktivne mreže.

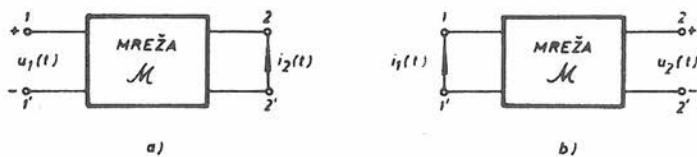
### 1.3.5. Recipročnost električkih mreža

Posljednje svojstvo koje ćemo spomenuti u ovoj klasifikaciji, a po kojem se još mogu dijeliti električke mreže, jest njihova *recipročnost* odnosno *nerecipročnost*. Budući da će ovo svojstvo, kasnije kod izlaganja teorema mreža biti precizno definirano, ovdje ćemo se zadovoljiti samo s opisnom karakterizacijom.

Za mrežu se kaže da je *recipročna*, ako u slučaju međusobne zamjene prilaza poticaja i odziva, odnos između poticaja i odziva ostaje nepromijenjen.



Tako npr. prema slici 1.3.6.a) pretpostavimo mrežu u crnoj kutiji s početnim stanjem nula. To će značiti, da u trenutku početka promatranja, u mreži nema uskladištene energije. Neka je poticaj napona  $u_1(t)$  na prilazu 1-1', a odziv struja  $i_2(t)$  na kratko spojenom prilazu 2-2' ove mreže. Na sl. 1.3.6.b), na istu je mrežu sada primijenjen poticaj u obliku napona na prilazu 2-2', koji je u prethodnom slučaju bio kratko spojen. Odziv će biti struja na kratko spojenom prilazu 1-1', na kojem je u prethodnom slučaju bio primijenjen poticaj. Uz smjerove struja i napona prema slici, promatrana mreža bit će recipročna, ako uz  $u_2(t) = u_1(t)$  slijedi  $i_1(t) = i_2(t)$ . To mora vrijediti za bilo koji par prilaza mreže (ovdje specifično označenih s 1-1' i 2-2').



Sl. 1.3.6

Ako mreža ne zadovoljava ovaj uvjet ona je nerekipročna. Nas će u analizi mreža zanimati kako recipročne, tako i nerekipročne mreže.

#### 1.4. VARIJABLE ELEKTRIČKIH MREŽA

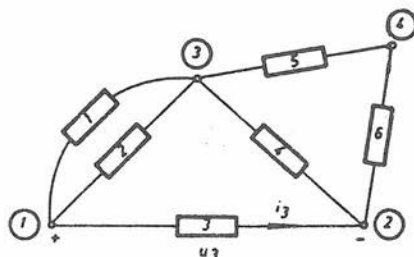
Prema dosad izloženim stavovima, električke mreže dobivaju se međjusobnim povezivanjem zbijenih elemenata. Tipični elementi su otpori, kapaciteti, induktiviteti i transformatori. To znači da elementi mogu imati dvije priključnice (dvopolni element kao npr. otpor) ili više od dvije priključnice ( $n$ -teropolni element kao npr. transformator ili tranzistor). U skladu s iznesenim svojstvom zbijenosti, slijedi da je kod elemenata s dvije priključnice struja koja ulazi u jednu od priključnica jednaka u svakom trenutku onoj koja izlazi iz druge priključnice.

Zato ćemo smatrati, da su definicione varijable mreža struja  $i(t)$  koja prolazi kroz dvopolni element mreže i napon na njemu  $u(t)$ . Analogno kod  $n$ -teropolnih elemenata, biti će to struja koja prolazi svakom priključnicom i napon na svakom paru priključnica.

Izuzetno će u nekim slučajevima biti potrebno poslužiti se i s drugim varijablama, koje su u određenom fizikalno-matematičkom odnosu s naponom i strujom, kao što su električki naboj, magnetski tok, energija i snaga. Sve ćemo ih zajedno smatrati *osnovnim* (zavisnim) *električkim varijablama mreže*, a svaka će od njih biti funkcija (nezavisne) varijable vremena.

Oslanjajući se ponovno na usvojenu definiciju električne mreže, odredimo značenja još nekih pojmova s kojima opisujemo mrežu, ali koji se za razliku od električkih varijabli mogu smatrati topološkim varijablama mreže. Tako će dvopolni elementi kao sastavni dijelovi električne mreže biti nazivani *grane mreže*, a priključnice tih elemenata *čvorovi* (*čvorišta*) *mreže*. Termin "grana" i "čvor" su zapravo nešto općenitiji pojmovi od "element" i "priključnica", kao što će se kasnije pokazati. Ipak, poznavajući njihovu suštinu mogu se često i naizmjenično upotrebljavati. Slika 1.4.1. je shematski prikaz jednog primjera električne mreže. Ova ima četiri čvora (označena su ①, ②, ③ i ④) i šest gra-

na (označenih s 1, 2, 3, 4, 5 i 6).



Sl.1.4.1

Treba napomenuti, da sa stanovišta oblika mreže, nije pogrešno smatrati grane 5 i 6 jednom granom u kojem slučaju otpada iz prikaza čvor (4). Kasnije ćemo vidjeti, da se pojam čvora u općenitijem smislu, upravo pridružuje priključnici koja je zajednička skupu više od dva elementa.

Ako se sad vratimo na električne varijable kojima ćemo najčešće opisivati mrežu, onda će to biti *napon grane* i *struja grane*. Tako je na primjer  $i_3$ , struja grane u grani 3, a  $u_3$  napon grane na grani 3.

## 1.5. REFERENTNA USMJERENJA (REFERENCIJE)

Ako se ponovno pozovemo na primjer mreže sa sl.1.4.1. vidi se da smo uz navedene električke varijable ucrtali izvjesne smjerove odnosno polaritete. Budući da smo sasvim proizvoljno struji  $i_3$  dali smjer od čvora (1) do čvora (2), a naponu  $u_3$  dodijelili pozitivni polaritet uz čvor (1), ovo se stanje može podudarati sa stvarnim stanjem u grani 3, ali istim pravom može biti i obrnuto. Štaviše, to se stanje može u istoj mreži u jednom trenutku vremena poklapati s pretpostavljenim smjerovima, a u drugom biti upravo obrnuto.

Da bi dobili ispravne rezultate u analizi mreže, mi moramo neprestano slijediti trag stvarnog stanja u mreži, pa stoga moramo imati jedan čvrst oslonac, prema kojemu će se to stanje odredjivati.

To drugim riječima znači da mi dogovorno pridružujemo granama mreže određene *referentne smjerove za struje i referentne polaritete za napone*, pa s tima uspoređujemo stvarne smjerove i polaritete. Stvarni su smjerovi ili prethodno poznati odnosno zadani, ili su to oni koji proizlaze kao rezultat analize mreže.

Biti precizan u tumačenju ovih konvencija o referentnim usmjerenjima od vrhunske je važnosti za svakog inženjera elektrotehnike, jer je bez toga nemoguće pratiti ponašanje čak i veoma jednostavnih električkih mreža. Upravo zbog toga definirat ćemo referencije na primjeru prema sl. 1.5.1.



Sl. 1.5.1

Na ovoj je slici prikazan samo jedan dvopolni element mreže bez obzira na prirodu njegova ponašanja. Prema tome on može biti otpor, kapacitet, dioda, ili bilo koji drugi element sa dvije priključnice ovdje označene s A i B. Upravo zato možemo ga općenito nazivati granom. Referentni su smjerovi isto označeni na slici: s plus i minus simbolima uz priključnice A odnosno B za napon, a sa strelicom usmjerenom od A prema B za struju.

Uz tako odabrana referentna usmjerenja smatrat će se po već ustaljenom pravilu, da je napon grane "u" pozitivan u vremenu t, tj.  $u(t) > 0$  kada je električni potencijal  $u_A(t)$  od A u času t, veći od potencijala  $u_B(t)$  od B u času t.

Kod toga trebaju oba ova potencijala biti mjerena u odnosu na istu referentnu točku, pa vrijedi

$$u(t) = u_A(t) - u_B(t) > 0$$

Nadalje, smatrat će se da je struja grane "i" pozitivna u vremenu t, tj.  $i(t) > 0$ , kada isti tok pozitivnih naboja u času t ulazi u granu kod A i izlazi kod B.

Pri analizi mreže mi referentna usmjerenja stavljamo proizvoljno, pa stoga oni ne mogu biti pokazatelj stvarnih smjerova fizikalnih veličina u granama. Tek zajednička postavka  $u(t) > 0$  ili  $i(t) > 0$ , skupa s referentnim usmjerenjima, znači podudarnost stvarnog stanja i referencija.

Iako su u principu, referentni smjerovi za struju grane neovisni o referentnim polaritetima za napon grane, uobičajeno je da oni budu povezani na način kako je to učinjeno na sl.1.5.1. U tom slučaju vidimo da pozitivna struja ulazi u granu kod priključnice označene s plus predznakom, a napušta granu kod priključnice s minus predznakom. Tako odabrane referencije nazivaju se *pridružena referentna usmjerenja*, i taj će princip označavanja biti provodjen kroz čitavu ovu knjigu, ukoliko prethodno ne bude drugačije naglašeno. Zato je katkada dovoljno dati npr. samo referentne smjerove struje, pa da se uz poštivanje pridruženosti, referentni naponski polariteti automatski znaju.

Kasnije ćemo vidjeti, da se toj konvenciji nećemo priklanjati, ako ne postoji takav izraz za identifikaciju dvo-polnog elementa, koji stavlja u odnos obje definicione varijable. Ta će situacija npr. nastupiti kod idealnih izvora.

## 1.6. KIRCHHOFFOVI ZAKONI

Električne varijable (struje, naponi, ...) i topološke varijable (čvorišta, grane, ....) električnih mreža, kako smo ih skupnim imenom nazvali u poglavlju 1.4., povezuju međusobno osnovni postulati električnih mreža - Kirchhoffovi zakoni. Studentima viših godišta dobro su poznata dva Kirchhoffova zakona, koja će ovdje biti postavljena na uobičajeno pojednostavljeni način. Kasnije u tekstu, proširit ćemo te postavke do mnogo općenitije formulacije.

### 1.6.1. Kirchhoffov zakon struje (KZS)

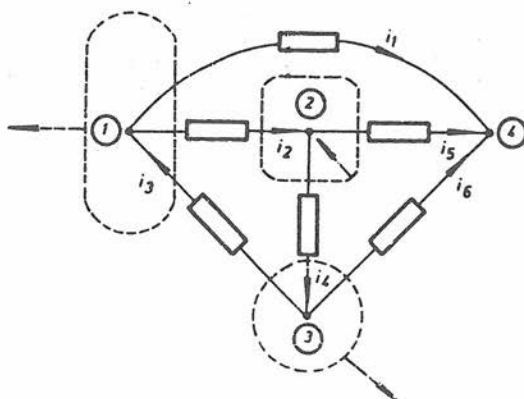
Kirchhoffov zakon struje (u daljnjem tekstu skraćeno KZS), odnosno katkada u literaturi zvan i prvi Kirchhoffov zakon, razmatra strujne prilike u mrežama za koje tvrdi slijedeće:

*Algebarska suma svih struja grana, koje se sastaju u bilo kojem čvorištu neke električne mreže sa zbijenim elementima, jednaka je nuli u svakom trenutku.*

Pri tome izraz "algebarska" znači, da moramo sve struje kojima je referentni smjer prema čvorištu uzeti s jednim predznakom, a one kojima je referencija usmjerena od čvorišta treba uzeti u sumiranju s protivnim predznakom.

Kojem od ovih smjerova dati pozitivan predznak, a time onom protivnom negativan, ponovno je stvar dogovora, slično kao kod dodijeljivanja predznaka smjerovima struja grana. Drugim riječima, pri analizi neke mreže potrebno je pridružiti promatranom čvorištu jednu *referentnu orijentaciju čvorišta*, koja može biti "uperena" alternativno ili prema čvorištu ili od čvorišta. Te su referentne orijentacije crtkano označene samo uz čvorove ①, ②, i ③ odabranog primjera strujnog kruga na sl.1.6.1. Dalje kod pisanja jednadžbi Kirchhoffovog zakona struje slijedimo uobičajenu logiku - slaganje je "pozitivna" pojava, a neslaganje "negativna". Prema tome, struje grana kojih se referentni smjerovi podudaraju s referentnom orijentacijom čvorišta na kojeg su priključene, ulazi u jed-

nadžbe KZS sa predznakom "plus". Obrnuto, struje grana kojih su referencije protivne od odabrane orijentacije čvoru, ulaze u jednažbe s predznakom "minus".



Sl.1.6.1

Tako npr. za električki krug prema sl.1.6.1. KZS primijenjen na čvor ① tvrdi da je za svaki  $t$

$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0 \quad /1.6.1/$$

budući da se referentni smjerovi struja  $i_1$  i  $i_2$  podudaraju s odabranim referentnom orijentacijom čvorišta ①, dok se referentni smjer struje  $i_3$  ne slaže s tom orijentacijom. Analogno, pišući jednažbu KZS za čvorište ② dobiva se

$$i_2(t) - i_4(t) - i_5(t) = 0 \quad /1.6.2/$$

Jednažbe kao što su /1.6.1/ ili /1.6.2/, dobivene na osnovi KZS za različite čvorove, nazivat će se i jednažbama čvorova.

Ovdje treba napomenuti, da se referentne orijentacije čvorišta kod analize mreža uglavnom ne ucrtavaju već se "drže u glavi". Nepotrebno je, naime, ugrožavati preglednost sheme suvišnim crtežima, kad se može jednostavno zamisliti da su sve orijentacije čvorova usmjerene npr. od čvora!

Tada će u svakoj jednađbi KZS, struje koje odlaze od čvora biti zastupljene s pozitivnim predznakom, a one koje dolaze u čvor s negativnim predznakom. Taj će princip, da je "prava", "pozitivna" orijentacija ona od čvorišta, biti gotovo dosljedno provodjen u daljnjem tekstu.

Prema tome bi i jednađba /1.6.2/ onda izgledala ovako:

$$-i_2(t) + i_4(t) + i_5(t) = 0 \quad /1.6.3/^\dagger$$

Na kraju treba naglasiti da su jednađbe KZS *linearne* *homogene algebarske jednađbe s konstantnim koeficijentima*. Nadalje KZS je u potpunosti rezultat konfiguracije mreže, tj. načina na koji su najrazličitiji elementi mreže međusobno povezani, ili kako se to u teoriji mreža kaže, on je baziran na *topologiji* mreže. Iz toga slijedi da je KZS *neovisan o prirodi elemenata mreže*, tj. on se može primjenjivati na sve mreže s koncentriranim elementima, bilo da su oni linearni ili nelinearni, vremenski konstantni ili vremenski varijabilni. Konkretno, može se reći, da KZS izražava fizikalnu činjenicu *održanja naboja u svakom čvorištu*. Naime, iz tog zakona proizlazi da strujanje elektriciteta u električkoj mreži ima karakter *nestlačivog strujanja*, tj. da u svakom trenutku mora iz promatranog čvora toliko električnog naboja otići, koliko ga je u taj čvor ušlo.

#### 1.6.2. Kirchhoffov zakon napona (KZN)

Prije nego predstavimo ovaj zakon, potrebno je opisati pojam *put*, odnosno njegovo značenje u okviru teorije električnih mreža. Ako promatramo električnu mrežu kao skup grana povezanih u čvorištima, onda put tvori onaj dio grana i čvorišta, koji se dobiva polazeći od jednog čvorišta, nizajući redom jednu ili više grana, i na kraju završavajući u dru-

---

<sup>†</sup> Iz ovoga je proizvoljnost odabiranja orijentacije čvorišta očigledna, jer ako vrijedi jednađba /1.6.2/, mora vrijediti i kad ju pomnožimo s (-1), pa dobijemo jednađbu /1.6.3/.



gom čvorištu. Put kod kojega je polazno čvorište ujedno i završno čvorište, naziva se *zatvoreni put*. Iskusniji čitalac vjerojatno već intuitivno osjeća bliskost pojma zatvoreni put, s onim što je navikao susretati pod nazivom petlja. Ovo potonje, međutim, bit će kasnije preciznije definirano.

Kirchhoffov zakon napona (u daljnjem tekstu skraćeno KZN) odnosno katkada u literaturi zvan i drugi Kirchhoffov zakon, razmatra naponske prilike u mrežama za koje tvrdi slijedeće:

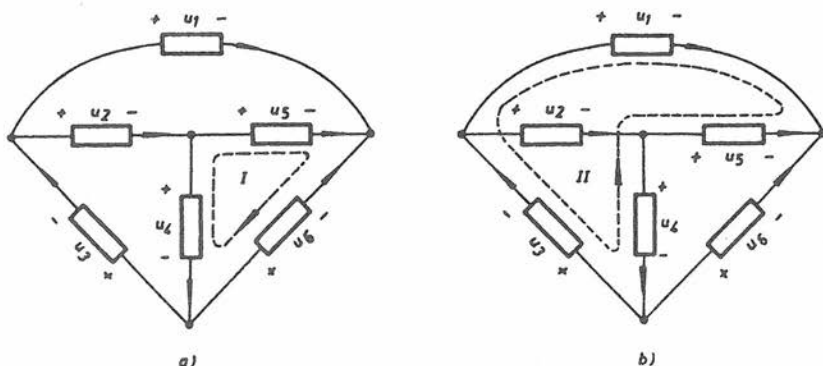
*Algebarska suma svih napona grana, koje se nalaze duž bilo kojeg zatvorenog puta neke električke mreže sa zbijenim elementima, jednaka je nuli u svakom trenutku.*

Nije potrebno ponavljati ono već rečeno kod izlaganja KZS, na ovom istom mjestu. Po analogiji s tim, kod primjene KZN u analizi mreže, potrebno je pridružiti promatranom zatvorenom putu jednu *referentnu orijentaciju zatvorenog puta*. Očigledno, ova orijentacija može biti alternativno ili u smislu okretanja kazaljke na satu, ili protivno od smisla okretanja kazaljke na satu. Te su referentne orijentacije crtkano označene samo uz zatvorene puteve I i II odabranog primjera strujnog kruga na sl.1.6.2. Pišući algebarsku sumu koja izražava KZN, pridružujemo plus-predznak onim naponima grana kojima su se pozitivni referentni polariteti našli uz rep strelice referentne orijentacije promatranog zatvorenog puta. Obrnuto, naponi grana kojima se pozitivni referentni polariteti nalaze uz vrh strelice referentne orijentacije zatvorenog puta, ulaze u jednadžbu KZN s predznakom "minus". Logika ovakovog postupka naročito je evidentna, ako je prikaz mreže dat s pridruženim referencijama.

Tako npr. za električki krug prema sl.1.6.2.a), KZN primijenjen na zatvoreni put I tvrdi da je za svaki t

$$-u_4(t) + u_5(t) - u_6(t) = 0 \quad /1.6.4/$$

budući da su pozitivni referentni polariteti grana 4 i 6 uz vrh strelice referentne orijentacije zatvorenog puta I,



Sl. 1.6.2

a pozitivni referentni polaritet grane 5 nalazi se uz rep strelice referentne orijentacije tog zatvorenog puta.

Analogno pišući jednadžbu KZN za zatvoreni put II prema sl.1.6.2.b), dobiva se

$$-u_1(t) - u_3(t) - u_4(t) + u_5(t) = 0 \quad /1.6.5/$$

Jednadžbe kao što su /1.6.4/ ili /1.6.5/, dobivene na osnovi KZN za različite zatvorene puteve, nazivat će se i *jednadžbama petlji*.

Izbor smisla okretanja referentne orijentacije nekog zatvorenog puta, u principu je posve proizvoljan. Međutim, jednostavnije je pretpostaviti da svi promatrani zatvoreni putevi imaju referentne orijentacije u istom smislu, npr. kao okretanje kazaljke na satu. Po analogiji s onim što je o sličnom izboru rečeno kod KZS, može se takova orijentacija (uvjetno) smatrati "pravom", odnosno "pozitivnom". Vidjet će se kasnije (naročito kod razmatranja dualnosti), da je spomenuto opredjeljenje u nekim slučajevima korisno. Odlučivši se za to, svi bi članovi u jednadžbi /1.6.5/ promijenili predznak, pa bi dobili za zatvoreni put II, s protivnom

referentnom orijentacijom, jednadžbu KZN u obliku

$$u_1(t) + u_3(t) + u_4(t) - u_5(t) = 0 \quad /1.6.6/$$

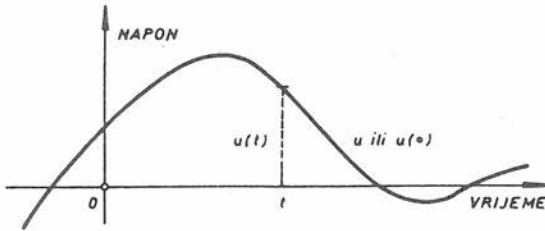
Bez ponavljanja posebnih objašnjenja, i za jednadžbe KZN se može reći, da su to *linearne homogene jednadžbe s konstantnim koeficijentima*, te da su *neovisne o prirodi elemenata mreže*.

### 1.7. VALNI OBLICI

Električke varijable mreža napon ( $u$ ) i struja ( $i$ ) kao funkcije vremena ( $t$ ), redovno će u analizi mreža biti predstavljene u obliku matematičkih formulacija. Ove su formule upravo aproksimativni modeli stvarnih valnih oblika tih električkih veličina, u istom smislu, kao što su elementi idealizacija stvarnih komponenata mreža. Kompletan matematički opis nekog napona ili struje zahtijeva specifikaciju čitave vremenske funkcije, tj.  $u(t)$  za svaki  $t$ , odnosno  $i(t)$  za svaki  $t$ . Drugim riječima, potrebno je ili tu funkciju imati prikazanu tabelarno (pored svake moguće vrijednosti za  $t$ , njoj odgovarajuća vrijednost npr.  $u(t)$ ), ili imati pravilo koje omogućava izračunavanje  $u(t)$  za svaki mogući  $t$ . Ovdje se susrećemo s potrebom dvostruke notacije kada je riječ o valnim oblicima, već prema tome, kako taj pojam shvaćamo.

Naime, ako pod tim podrazumijevamo čitavu funkciju napona  $u$ , dakle primjerice ono što kao kompletan valni oblik vidimo na ekranu osciloskopa, onda ćemo to nazivati *valnim oblikom* napona, i označavati kao  $u$  ili  $u(\cdot)$ . Ako, pak, mislimo samo na određenu (momentalnu) vrijednost napona za neko posebno vrijeme  $t$ , onda ćemo to označavati kao  $u(t)$ . Vratimo li se na gore spomenutu tabelu, tada bi  $u(\cdot)$  odgovaralo čitavoj tabeli, a  $u(t)$  jednom njezinom retku. Razlika između te dvije koncepcije označavanja, biti će možda uočljivija na primjeru iz sl. 1.7.1.

Iako je važno usvojiti postojanje ove distinkcije, mi se nećemo toga striktno pridržavati. Doslovno naglašavanje



Sl. 1.7.1

te razlike u svakoj prilici, dovelo bi do veoma dugih i zamršenih rečenica, a često je iz teksta lako zaključiti na koju se varijantu konkretno misli. Na mjestima gdje bi se mogla očekivati dvojba u tom zaključivanju, nastojat ćemo istaći pravilan oblik.

U ovom ćemo poglavlju definirati samo neke važnije valne oblike, koji se češće susreću u elektrotehničkim problemima.

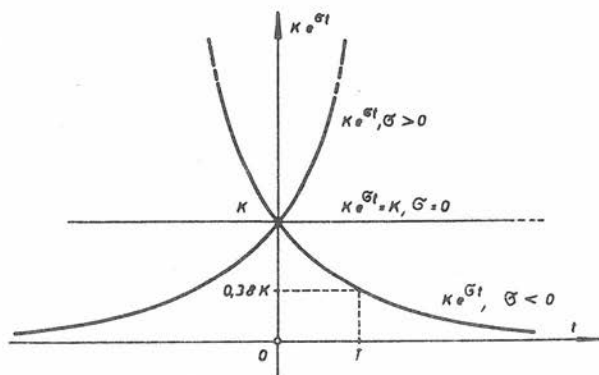
Kao prvi primjer navest ćemo *eksponencijalni valni oblik*. Pridržavajući se uvodno iznesenih razlika između valnog oblika i vrijednosti funkcije u nekom trenutku  $t$ , morali bi za ovaj primjer definiciju postaviti na slijedeći način.

Valni oblik  $f(\cdot)$  kojega ćemo nazivati eksponencijalnim definiran je kao

$$f(t) = K e^{\sigma t} \quad \text{za svaki } t \quad /1.7.1/$$

$K$  i  $\sigma$  u tom izrazu predstavljaju neke konstantne brojeve.

Uz  $\sigma$  realno i negativno taj je valni oblik - opadajuća, a uz  $\sigma$  realno i pozitivno - rastuća funkcija vremena. Ako je  $\sigma = 0$ , postaje  $f(t) = K$  što je najjednostavniji valni oblik tj. konstanta. Primjer eksponencijalnog valnog oblika prikazan je na slici 1.7.2.



Sl.1.7.2

Definirajmo nadalje veličinu  $T = 1/|\sigma|$ . Uz  $\sigma < 0$  ovu veličinu zovemo *vremenska konstanta* eksponencijalno opadajućeg valnog oblika. U tom je slučaju prema izrazu /1.7.1/,  $f(T) = K/e$ , što približno iznosi 0,377 K. Drugim riječima, po isteku vremena jednakog jednoj vremenskoj konstanti, eksponencijalno opadajuća krivulja dosiže otprilike 38% svoje početne vrijednosti (u  $t=0$ ). Budući da već nakon četverostruke vremenske konstante ordinata te krivulje pada na ispod 2% polazne vrijednosti, zaključujemo da je taj valni oblik nakon vrlo kratkog vremena praktički jednak nuli. Najčešće je, naime, veličina vremenske konstante tek mali dio sekunde.

Ne samo da eksponencijalni valni oblik vrlo često susrećemo u prirodi, nego je i za nas veoma interesantan zbog niza korisnih svojstava. Ako, naime, deriviramo izraz /1.7.1/ po vremenu dobivamo

$$\frac{d}{dt} (Ke^{\sigma t}) = \sigma Ke^{\sigma t} \quad /1.7.2/$$

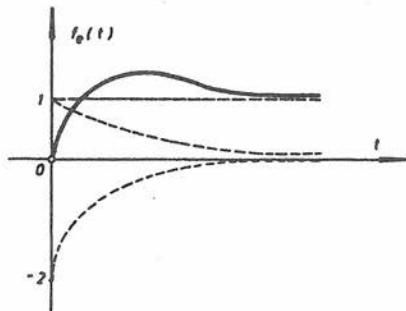
što je opet isti valni oblik kao i prije deriviranja, osim razlike u mjerilu. Slično, ako integriramo eksponencijalni valni oblik u granicama od nekog  $t_0$  do  $t$ , dobivamo

$$\int_{t_0}^t K e^{\sigma t'} dt' = \frac{K}{\sigma} e^{\sigma t} + K_0 \quad /1.7.3/$$

što se grafički, prema prvotnom obliku, razlikuje samo za konstantu. S elektrotehničke točke gledišta to znači, da eksponencijalni signal prolazeći kroz pojačalo, derivator ili integrator zadržava u suštini isti valni oblik. Posebno u električkim krugovima, često ćemo se susretati s linearnom kombinacijom eksponencijalnih valnih oblika različitih parametara, primjerice kao

$$f_e(t) = 1 - 2e^{-4t} + e^{-t} \quad \text{za } t \geq 0$$

Treba uočiti da takav valni oblik (sl.1.7.3) ako  $t \rightarrow \infty$  ne teži ka nuli.



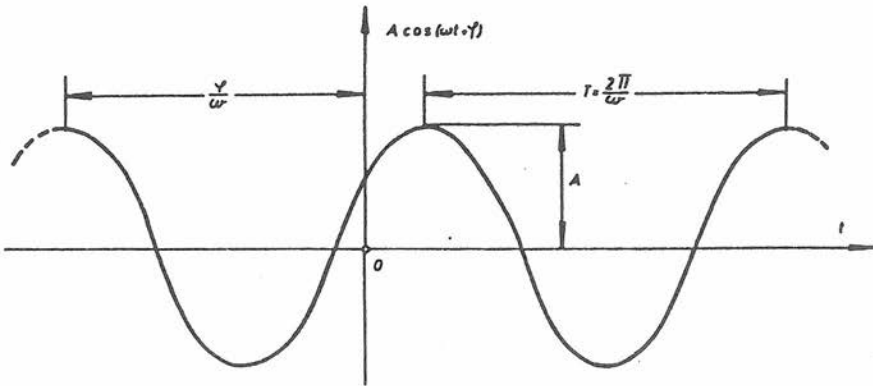
Sl.1.7.3

Kružne funkcije sinus i kosinus bliske su nam iz trigonometrije. Izražavaju vertikalnu i horizontalnu projekciju gibanja točke po jediničnoj kružnici, u ovisnosti kutne promjene pravca koji spaja tu točku i ishodište. Valni oblik karakteriziran tim funkcijama zovemo jednim imenom *sinusoide*, i definiran je kao

$$f(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{za svaki } t \quad /1.7.4/$$

Konstanta  $A$  naziva se *amplituda* sinusoide. Konstanta  $\omega$  naziva se (kutna) *frekvencija* a mjeri se radijanima u sekundi. Konstanta  $\phi$ , mjerena u nekim od kutnih jedinica naziva

se *faza* sinusoide. Sinusoidalni valni oblik prikazan je na slici 1.7.4.



Sl. 1.7.4

Budući da se sinus i kosinus međusobno odnose prema relacijama  $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin \alpha$  i  $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$ , očito je da se valni oblik izražen kosinusnom funkcijom prema /1.7.4/ može izraziti i ekvivalentnom sinusnom funkcijom, ali s drugačijom fazom. Naravno, vrijedi i obrnuto! Upravo zato, opravdano je obje forme nazivati jednim imenom - sinusoida.

Sinusoida i (prethodno izložena) eksponencijalka u bliskom su "srodstvu", budući da pripadaju skupini funkcija, po kojima se odvijaju mnogi procesi u prirodi! Tako uz pomoć poznate Eulerove formule  $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$  slijedi:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad \text{i}$$

/1.7.5/

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Ovi će nam izrazi biti često potrebni u analizi mreža.

Potražimo sada najmanji pozitivni broj T takav, da bude  $\cos \omega(t+T) = \cos \omega t$  za svaki t. Ako si pomognemo grafič-

kim prikazom to znači, da pomičući sinusoidu iz svog osnovnog položaja duž vremenske osi, treba odrediti broj vremenskih jedinica, koji je ta sinusoida prešla do svog prvog potpunog preklapanja s onom osnovnom. Za analitičko dobivanje rezultata treba gornji zahtjev rastaviti po adicijonom teoremu, pa dobivamo:

$$\cos \omega t \cos \omega T - \sin \omega t \sin \omega T = \cos \omega t$$

Ova će jednadžba biti zadovoljena za svaku vrijednost  $t$ , samo ako je:  $\cos \omega T = 1$  i  $\sin \omega T = 0$ . Odatle slijedi da mora biti  $\omega T = k \times 2\pi$ , odnosno  $T = k \times 2\pi / \omega$ , gdje je  $k$  bilo koji cjelobrojni višekratnik. No, budući da tražimo najmanju pozitivnu vrijednost za  $T$ , mora biti  $k$  upravo jednak jedinici. Zato je:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad /1.7.6/$$

Ova je veličina poznata pod imenom *period sinusoide*. Za vrijeme  $T$  sekundi sinusoidalni val prodje kompletan jedan ciklus svih svojih vrijednosti, pa zatim drugi ciklus opiše za slijedećih  $T$  sekundi, itd. Broj tih ciklusa u jednoj sekundi je prema tome  $1/T$ , što s pomoću /1.7.6/ iznosi

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \triangleq f \quad /1.7.7/$$

Veličina  $f$  poznata je kao (numerička) frekvencija sinusoide, u suštini isti pojam kao i  $\omega$ , od koje se razlikuje samo za faktor  $2\pi$ . Jedinice s kojima se mjeri  $f$  su periodi/sekundi, odnosno "herci" (Hz).

Već spomenuta srodnost sinusoide i eksponencijalke, očituje se i u sličnosti ponašanja pri prolazu takvih signala kroz idealni derivator ili integrator.

Budući da vrijedi

$$\frac{d}{dt} (\cos \omega t) = -\omega \sin \omega t = \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad /1.7.8/$$



$$\int_{t_0}^t \cos \omega t' dt' = \frac{1}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t_0 = \frac{1}{\omega} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + K_0$$

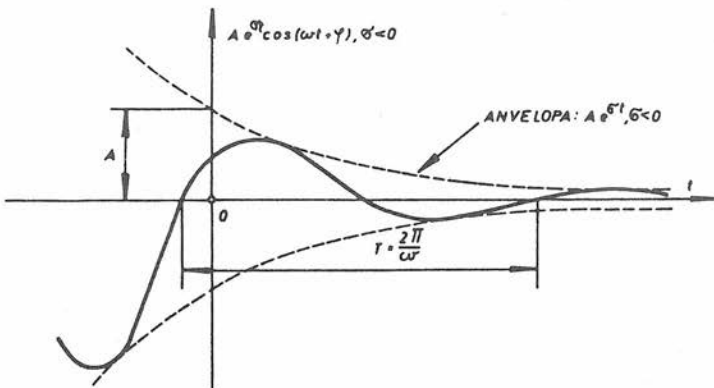
/1.7.9/

vidimo da deriviranjem ili integriranjem sinusoidalnog valnog oblika, dobivamo opet sinusoidu iste frekvencije. Ta je činjenica jedan od bitnih razloga široke primjene sinusoidalnog valnog oblika u elektrotehnici, a posebno u električkim mrežama.

Daljnji valni oblik, važan u električkim mrežama, karakterizira određena kombinacija eksponencijalke i sinusoida. To je tzv. *prigušena sinusoida*, koju definiramo izrazom

$$f(t) = A e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{za svaki } t \quad /1.7.10/$$

U ovom su izrazu  $A$ ,  $\sigma$  i  $\phi$  realne konstante, s tim da još mora biti  $\sigma < 0$ . (Općenito gledano, može postojati i valni oblik  $f(\cdot)$  ako je  $\sigma \geq 0$ , no tada on nije prigušena sinusoida). Prigušena sinusoida prikazana je na sl. 1.7.5. Treba zapaziti da funkcija  $\pm A e^{\sigma t}$  stalno ograničava prostor osciliranja, te se naziva *anvelopa* prigušene sinusoida.



Sl. 1.7.5

Nije teško ustanoviti da se i ovaj valni oblik može prikazati kao linearna kombinacija eksponencijalki, ali s kompleksnim eksponentima. Tako dobivamo slijedeću formu izraza /1.7.10/.

$$f(t) = \frac{A}{2} \left[ e^{\sigma t + j(\omega t + \phi)} + e^{\sigma t - j(\omega t + \phi)} \right] \quad /1.7.11/$$

Za sve do sada nabrojene valne oblike daće se naslutiti da logički proizlaze jedan iz drugoga, te da se svi mogu obuhvatiti jednim jedinstvenim matematičkim izrazom. Ovdje, međjutim, to nije bila svrha. Zato su ti valni oblici izlagani parcijalno, na način kako se s njima najčešće susrećemo u analizi električkih mreža.

U ovu grupu valnih oblika, mogu se svrstati i neke druge kombinacije, kao npr. produkt sinusoida različitih frekvencija

$$f(t) = A \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \quad /1.7.12/$$

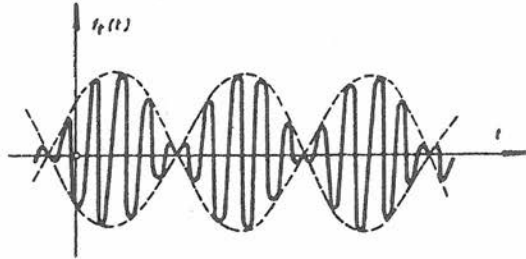
Valni oblici takove funkcionalne ovisnosti nastaju u električkim mrežama gdje je zastupljena modulacija.

Ne ulazeći u detalje može se reći, da su ti uglavnom ekvivalentni određenoj sumi sinusoida koje nemaju iste frekvencije, a to se naziva *treptaj*. Valni oblik prema /1.7.12/ identičan je tako slijedećem treptaju

$$f(t) = \frac{A}{2} \cos (\omega_1 - \omega_2) t + \frac{A}{2} \cos (\omega_1 + \omega_2) t \quad /1.7.13/$$

Jedan takav treptaj skiciran je na slici 1.7.6. Iz njega je vidljivo da i taj valni oblik ima anvelopu, koja na neki način oblikuje - "modulira" oscilacije.

U nastavku izlaganja tipičnih valnih oblika, bit će zastupljeni oni, za koje je karakteristično ponašanje baš oko vremena  $t = 0$ . U analizi mreža, taj je trenutak najčešće referentan, jer s njim obično identificiramo početak nama interesantnog zbivanja u mreži.\* (Npr. trenutak priključivanja mreže na energetske izvor, preklapanje neke sklopke u mreži, i sl.). Druga je osobenost predstojećih valnih oblika da su sa-



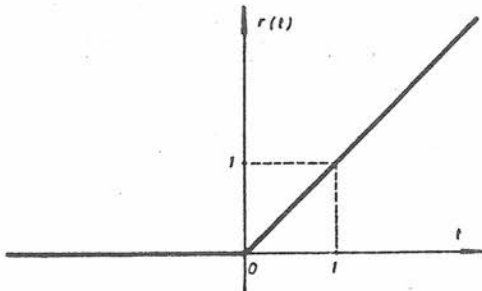
Sl. 1.7.6

mi po sebi jednoznačni, odnosno nisu zavisni o parametrima, kao što je to bio slučaj kod prethodnih. Zato će svaki od njih nositi pored imena i vlastiti simbol.

Kao prvog iz te grupe valnih oblika izabrali smo *jedinični uspon* (jedinična "rampa" funkcija). Njegov će simbol biti  $r(\cdot)$ , a opisat ćemo ga izrazom:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ t & \text{za } t \geq 0 \end{cases} \quad /1.7.14/$$

Kao što se vidi (sl.1.7.7) kod tog valnog oblika, poslije vremena  $t = 0$  uspinje se pravac s nagibom od  $45^\circ$  prema pozitivnoj vremenskoj osi. Koeficijent smjera jednak mu je jedinici, po čemu je i čitav valni oblik dobio ime.



Sl. 1.7.7

S pomoću funkcije jediničnog uspona mogu se opisati i slični valni oblici, kod kojih se pravci nakon "koljena" u  $t = 0$  uzdižu s nekim drugim koeficijentom smjera  $K \neq 1$ . U tu svrhu dovoljno je jedinični uspon pomnožiti s odgovarajućom konstantom  $K$ , koja može biti i negativna, pa dobivamo

$$f(t) = K r(t) \quad /1.7.15/$$

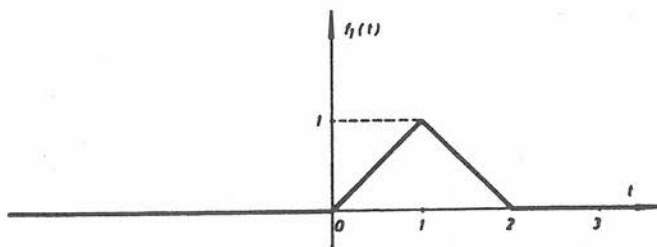
Jednako prikladno možemo izraziti i valni oblik, koji ima isti tok kao jedinični uspon, ali kojemu koljeno nije u  $t=0$  već u nekom drugom trenutku  $t = \tau$ . Drugim riječima, tražimo izraz za isti valni oblik  $r_{\tau}(\cdot)$ , samo koji stalno zakašnjava za  $\tau$  vremenskih jedinica iza  $r(\cdot)$ . Nije teško ustanoviti da je međusobni odnos između takva dva valna oblika prema jednadžbi

$$r_{\tau}(t) = r(t - \tau) \quad /1.7.16/$$

Ako je  $\tau > 0$ , onda  $r_{\tau}$  zaostaje, kasni iza  $r$ , dok u slučaju  $\tau < 0$ ,  $r_{\tau}$  prethodi, nastupa prije  $r$ .

Navedene činjenice često koristimo u situacijama, kada moramo matematički formulirati neki složeni valni oblik, ako je on određena kompozicija poznatih valnih oblika. Tako npr. čitalac može provjeriti, da je trokutasti valni oblik  $f_1$  prema slici 1.7.8, ekvivalentan kombinaciji jediničnih uspona prema slijedećem analitičkom izrazu

$$f_1(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)$$



Sl.1.7. 8

Razmotrimo svojstva valnog oblika, nazovimo ga za sada  $S(\cdot)$ , koji bi se dobio jednostrukim deriviranjem po vremenu funkcije jediničnog uspona  $r$ . Postavljamo zato slijedeće

$$\frac{d}{dt} r(t) = S(t) \quad /1.7.17/$$

i inverzno

$$r(t) = \int_{-\infty}^t S(t') dt' \quad /1.7.18/$$

Treba zapaziti da smo u izrazu /1.7.18/ uzeli simbol  $-\infty$  za donju granicu, da bi naglasili integraciju preko čitave prošlosti signala.

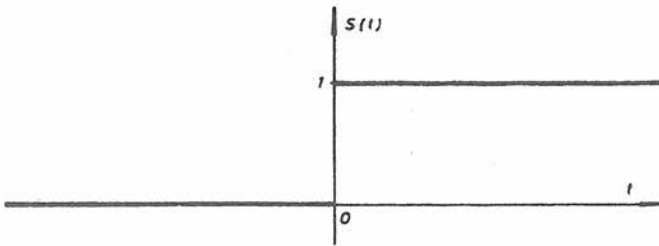
Rezultat navedenog matematičkog postupka postaje jasan, već vizuelnim grafičkim deriviranjem jediničnog uspona. Do  $t=0$ , naime, nagib od  $r(\cdot)$  jednak je nuli, a za svaki  $t > 0$  jednak je jedinici.

Prema tome, definirat ćemo valni oblik kojega zovemo *jedinični skok* (jedinična funkcija, step-funkcija), a kojega ćemo pisati sa  $S(\cdot)$  slijedećim izrazom

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ 1 & \text{za } t > 0 \end{cases} \quad /1.7.19/$$

U raspravljanje o vrijednosti funkcije jediničnog skoka baš u trenutku  $t=0$ , nije potrebno ulaziti, jer to premašuje svrhu ove knjige. Za daljnju primjenu u analizi mreža, slobodno je smatrati da  $S(\cdot)$  ima vrijednost 0, 1 ili nešto treće između 0 i 1, već prema potrebi konkretnog problema. Jedinični skok prikazan je grafički na sl. 1.7.9.

Jedinični skok od izuzetne je važnosti u teoriji električkih mreža, i to ne samo kao konkretan valni oblik nekog signala. Naime, množenjem sa  $S(t)$  neke funkcije, kojoj se kontinuitet njezinog djelovanja produžuje i preko  $t = 0$  u negativno područje vremena, "brišemo" postojanje te funkcije za svaki  $t < 0$ . Za  $t > 0$ , međjutim, ona ostaje netaknuta u svojem izvornom obliku. To svojstvo znatno uprošćava rješavanje problema iz električkih mreža, jer omogućava primjenu prikladnih



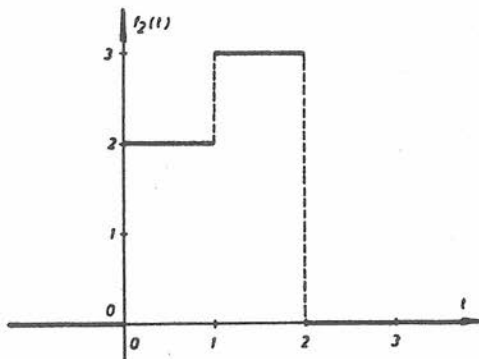
Sl. 1.7.9

operatorskih metoda.

Slično kao kod jediničnog uspona, množenje jediničnog skoka s nekom konstantom  $K \geq 0$ , ne mijenja mu valni oblik za  $t < 0$ , ali fiksira konstantnu vrijednost valnog oblika na veličinu  $K$ , za svaki  $t > 0$ . Naravno, i translatiranje valnog oblika  $S$  uzduž vremenske osi, provodi se posve analogno izrazu /1.7.16/ kod jediničnog uspona.

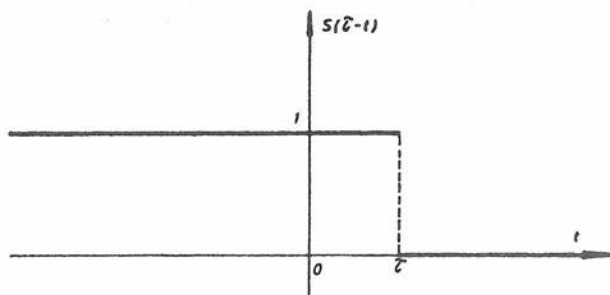
Grafički prikazi nekih valnih oblika, ukazuju već na prvi pogled, da ih je moguće raščlaniti na sastavne dijelove, koji su izraženi funkcijom jediničnog skoka. Tako npr. valni oblik prema sl.1.7.10 predstavlja sintezu funkcija jediničnog skoka, za koju vrijedi slijedeća jednačba

$$f_2(t) = 2S(t) + S(t-1) - 3S(t-2)$$



Sl. 1.7.10

Sasvim teoretska analiza mreža zahtijeva katkada primjenu funkcije, koja je aksijalno simetrična slika jediničnog skoka  $S(t)$  oko ordinatne osi, dakle funkcije  $S(-t)$ . Slika 1.7.11 grafički prikazuje tu funkciju, kojoj je radi općenitosti pridodat eventualni vremenski pomak za neki  $\tau > 0$ .



Sl. 1.7.11

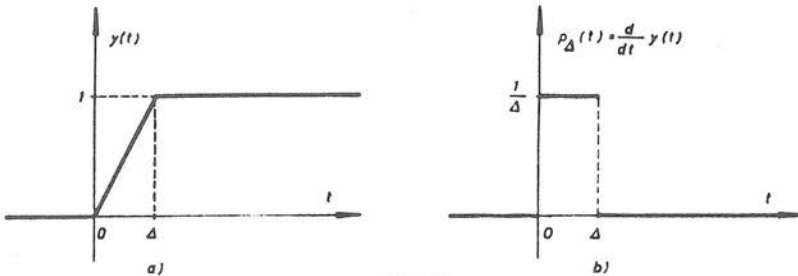
Prisjetimo se da smo razmatranje funkcije jediničnog skoka započeli deriviranjem funkcije jediničnog uspona. Krenimo sada istim putem dalje, pa potražimo vremensku derivaciju jediničnog skoka. To, međjutim, neće biti onako jednostavno kao u prethodnom slučaju. Naime, funkcija jediničnog skoka ima diskontinuitet u  $t = 0$ , pa joj derivacija u toj točki nije na uobičajeni način definirana. Zamislimo, za prvi čas, valni oblik koji bi tim postupkom trebali dobiti, i nazovimo ga  $\delta(\cdot)$ . Postavljamo zato slijedeće

$$\frac{d}{dt} S(t) = \delta(t) \quad /1.7.20/$$

i inverzno

$$S(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' \quad /1.7.21/$$

Ovim izrazima jedino tvrdimo, da kada deriviramo a zatim integriramo, dolazimo nazad na polaznu točku. Razmotrimo nadalje, vjerodostojnost ovih jednadžbi, na primjeru sl. 1.7.12.



Sl. 1.7.12

Crtež na sl. 1.7.12.a) prikazuje valni oblik, donekle sličan jediničnom skoku, ali s "kosim čelom". To znači, da ta funkcija ima i konačne derivacije u svakom vremenskom intervalu. Slika 1.7.12.b) prikaz je diferencijalnog kvocijenta tako modificiranog jediničnog skoka. Vidimo, da smo dobili kao rezultat valni oblik u formi pravokutnog impulsa, sa širinom  $\Delta$  i visinom  $1/\Delta$ . Površina ispod impulsa iznosi tako  $\Delta \times 1/\Delta = 1$ . Ovaj valni oblik često se javlja u analizi mreža, pa ćemo ga posebno nazivati: *pravokutni jedinični impuls*. Oznakaćavati ćemo ga s  $p_{\Delta}(t)$ , a definirati slijedećom jednačinom

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & \text{za } 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{za } t > \Delta \end{cases} \quad /1.7.22/$$

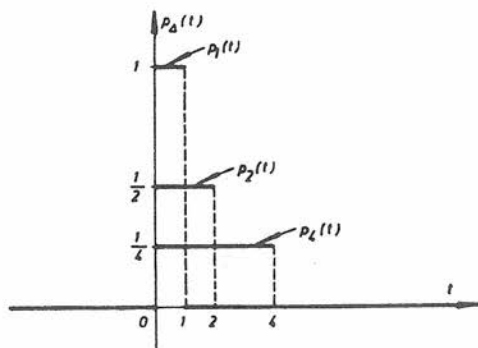
Treba zapaziti da se  $p_{\Delta}(t)$  izražava s pomoću jediničnog skoka na slijedeći način

$$p_{\Delta}(t) = \frac{S(t) - S(t-\Delta)}{\Delta} \quad \text{za svaki } t \quad /1.7.23/$$

Provedemo li granični prelaz pod uvjetom da se  $\Delta$  od čela polazne funkcije približava nuli, tada će visina izvedenog pravokutnog impulsa težiti u beskonačnost, a njegova širina prema nuli. Površina mu, međjutim, ostaje stalno jedna-



ka jedinici. Nekoliko sekvencijalnih koraka tog procesa graničnog približavanja, prikazuje sl.1.7.13.



Sl.1.7.13

U kontinuitetu takvog sužavanja impulsa i rasta njegove visine, možemo na kraju prihvatiti zamisao, o postojanju impulsnog valnog oblika u  $t=0$  beskonačne visine a bez širine, kojemu je površina jednaka jedinici.<sup>†</sup>

Tako uvodimo valni oblik kojega zovemo *jedinični impuls* (jedinična impulsna funkcija, Diracova delta funkcija), označavamo ga s  $\delta(\cdot)$ , i prikazujemo prema sl.1.7.14 Za naše potrebe dovoljno je, ako ustvrdimo da  $\delta$  ima slijedeća definirajuća svojstva:

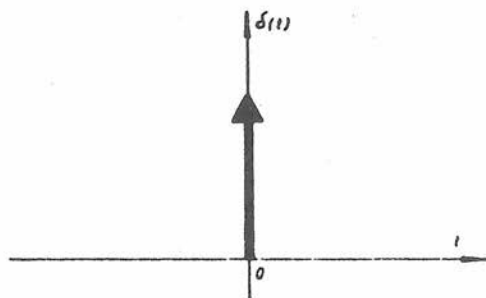
$$\delta(t) = 0 \quad \text{za } t \neq 0 \quad /1.7.24/$$

$$\int_{-\xi}^{+\xi} \delta(t) dt = 1 \quad \text{za svaki } \xi > 0 \quad /1.7.25/$$

Za svaku funkciju  $f(t)$  koja je kontinuirana u  $t=0$  vrijedi:

<sup>†</sup> Diracova delta funkcija je anomalija u strogo matematičkom smislu tog pojma. Gornji, "slikoviti" pristup nije stoga u potpunosti matematički rigorozan. Potvrda njegovih argumenata međjutim, može se naći u naprednijim raspravama na bazi svojstava Schwarzove distribucije.

$$\int_{-\xi}^{+\xi} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad \text{za svaki } \xi > 0 \quad /1.7.26/$$



Sl. 1.7.14

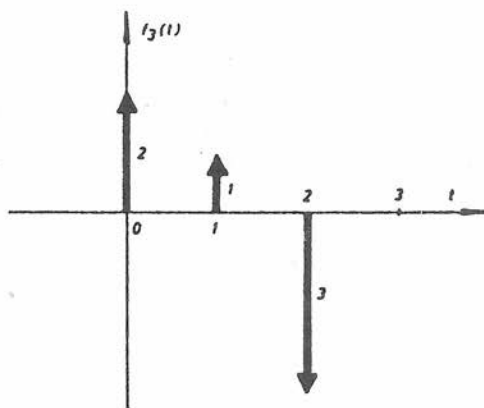
Svojstvo funkcije jediničnog impulsa navedeno izrazom /1.7.24/ tvrdi, da ako bilo koju kontinuiranu funkciju  $f(t)$  pomnožimo s  $\delta(t)$  i to sve integriramo preko područja koje sadržava  $t = 0$ , onda je vrijednost tog integrala "uzorak" funkcije  $f(t)$  u trenutku  $t=0$ , tj.  $f(0)$ . Tako npr. ako je  $f(t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$ , onda je vrijednost integrala /1.7.24/ jednaka  $f(0) = \sin(\pi/4) = 0,707$ . Ovim svojstvom "uzimanja uzoraka" neke funkcije s pomoću jediničnog impulsa, često se služimo u teoriji električkih mreža.

Ako deriviramo valni oblik  $K S(t)$  umjesto jediničnog skoka  $S(t)$ , tada dobivamo rezultat  $K \delta(t)$ . Oblik te funkcije, ne treba zamišljati drugačijim nego same  $\delta$  funkcije, jedino treba znati da je sad površina ispod te krivulje impulsa  $K \times 1$ . U grafičkom prikazu korisno je tada, brojem pored strelice i dužinom strelice, naglasiti veličinu  $K$ . Upravo kao i kod ostalih valnih oblika, jedinični se impuls može po volji pomicati izvan ishodišta duž vremenske osi. Tako npr. derivirajući valni oblik prema sl. 1.7.10, dobivamo niz impulsa prema slijedećem izrazu

$$f_3(t) = 2\delta(t) + \delta(t-1) - 3\delta(t-2)$$

Taj valni oblik prikazan je na sl. 1.7.15.

Ovaj primjer vrijedi zapamtiti, jer se lako primjenjuje na svaku funkciju koja ima konačne skokovite diskontinuitete, ali je u ostalim područjima derivabilna.



Sl. 1.7.15

Nastavljajući istom logikom kao u dosadašnjem postupku, možemo zamisliti i valni oblik koji nastaje kao rezultat deriviranja jediničnog impulsa. Postavljamo zato slijedeće

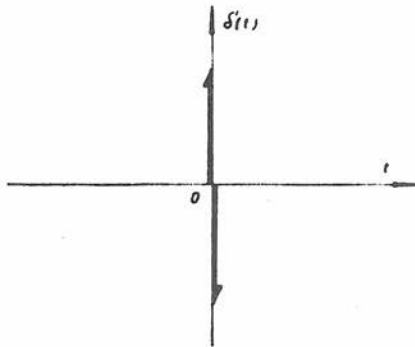
$$\frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t) \quad /1.7.27/$$

i inverzno

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta'(\tau) d\tau \quad /1.7.28/$$

Tako dobiveni valni oblik možemo uvjetno nazvati *dublet*. Označavati ćemo ga s  $\delta'(\cdot)$ , a prikazivati prema sl. 1.7.16.

Nakon ovoga više nije teško zaključiti da se daljnjim uzastopnim deriviranjem jediničnog impulsa dobivaju triplet, kvadruplet, itd., koji se katkada zajednički nazivaju *singularne funkcije*. Naravno, svi oni imaju uglavnom teoretski značaj, pa se u potanje analiziranje njihovih svojstava nećemo upuštati.



Sl. 1.7.16

Svi ovi valni oblici (jedinični uspon, skok i impuls), isto su samo apstrakcije, modeli signala koje proizvode fizički generatori u praksi. Tako je primjerice jedinični impuls, aproksimacija za impuls kratkog trajanja i velike veličine. Često primjenjivani (u instrumentima naročito) "pilasti" generator, u stvari proizvodi sukcesivni niz funkcija jediničnog uspona, itd.

Osim navedenih valnih oblika, ne treba zaboraviti, da postoji još velik broj koje nismo spomenuli, a koje isto tako možemo u elektrotehnici susresti. Posebnu važnost zadobivaju sve više tzv. diskretni signali, no njihova obrada zahtijeva poseban tretman.

## 2. ELEMENTI ELEKTRIČKIH MREŽA

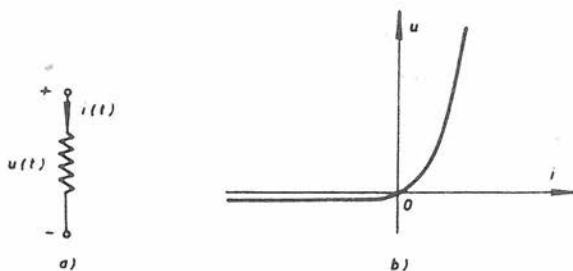
U dosadašnjim razmatranjima, nije nas se ticalo što se nalazi u granama neke mreže. Da bi kompletirali opis modela električkih mreža kojega izgradjujemo, moramo još "ozakoniti" postojanje izvjesnih elemenata s takvim svojstvima koji uzimaju u račun glavninu poznatih električkih fenomena.

### 2.1. DVOPOLNI ELEMENTI

#### 2.1.1. Otpor

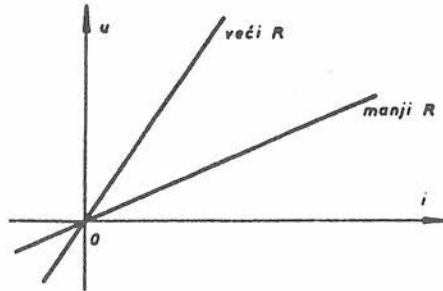
Dvopolni element mreže nazivamo *otporom*, ako se u svakom trenutku  $t$ , napon na njegovim priključnicama  $u(t)$  i struja kroz njega  $i(t)$ , nalaze u međusobnom odnosu koji je određen krivuljom u ravnini  $i$ - $u$ . Tu krivulju nazivamo *karakteristikom otpora* u času  $t$ .

Simbol za otpor, koji ćemo nadalje koristiti, dat je na slici 2.1.1.a), a jedan općeniti primjer karakteristike otpora na slici 2.1.1.b).



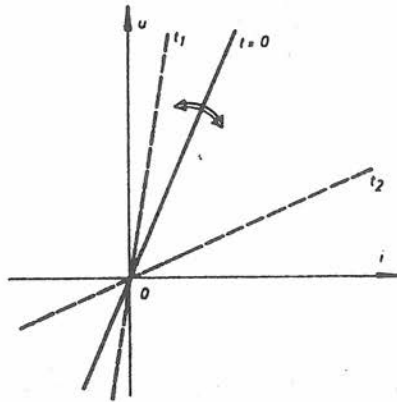
Sl. 2.1.1

Ako je, međutim, otpor linearan, onda je njegova karakteristika pravac kroz ishodište dotične ravnine. Ovo izravno slijedi iz diskusije o linearnosti mreža provedene u prvoj glavi ovog teksta. Nagib pravca karakteristike u toj ravnini, mjera je veličine linearnog otpora, tj. parametra *otpornosti*  $R$ . Prema tome, sl. 2.1.2 prikazuje karakteristike dva veličinom različita linearna otpora.



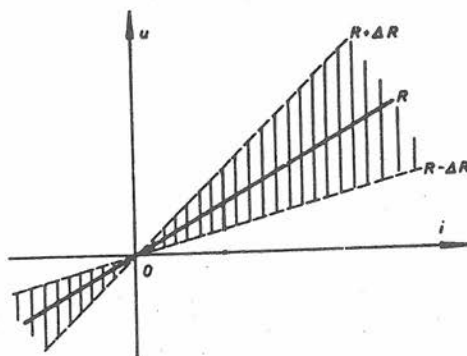
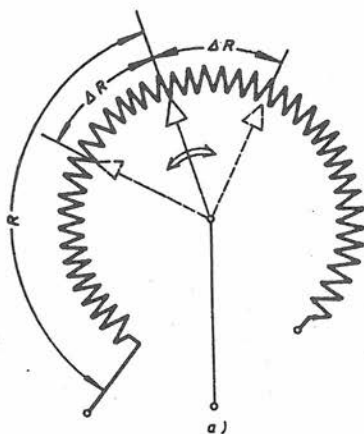
Sl. 2.1.2

Ako je pak otpor linearan, no uz to i vremenski promjenljiv, onda mu je karakteristika pravac kroz ishodište  $i$ - $u$  ravnine, koji u različitim trenucima vremena ima različiti nagib (Sl.2.1.3).



Sl. 2.1.3

Tipičan primjer vremenski promjenljivog linearnog otpora je model rotacionog potencijometra s kliznim kontaktom (Sl.2.1.4.a)). Okretanjem npr. kliznog kontakta konačnom brzinom lijevo-desno od nekog srednjeg položaja za isti kut, mijenja se tokom vremena otpornost  $R$  izmedju vrijednosti  $R-\Delta R$  i  $R+\Delta R$ . Područje promjene karakteristike kod toga, prikazuje slika 2.1.4.b).



Sl. 2.1.4

b)

Budući da ćemo u ovom tekstu, gotovo isključivo, razmatrati mreže s *linearnim vremenski nepromjenljivim otporima*, ustanovit ćemo i matematičku definiciju takvog otpora prema slijedećim izrazima:

$$u(t) = R i(t) \quad /2.1.1/$$

$$i(t) = G u(t) \quad /2.1.2/$$

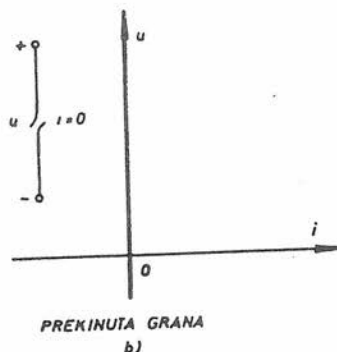
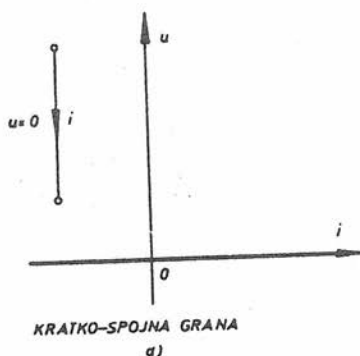
gdje je

$$G \triangleq \frac{1}{R}$$

$$/2.1.3/$$

Novouvedeni parametar  $G$  nazivamo *električkom vodljivošću*.

Dva vrlo karakteristična primjera ekstremnih veličina otpornosti ( $R = 0$  i  $R = \infty$ ) ovog tipa otpora, su tzv. *kratkospojna grana* i *prekinuta (otvorena, "u praznom hodu") grana*. Shematski prikaz i karakteristika za svaki od ovih slučajeva dati su na sl.2.1.5.

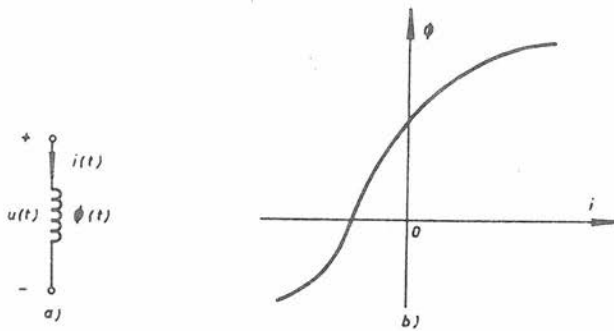


Sl. 2.1.5

### 2.1.2. Induktivitet

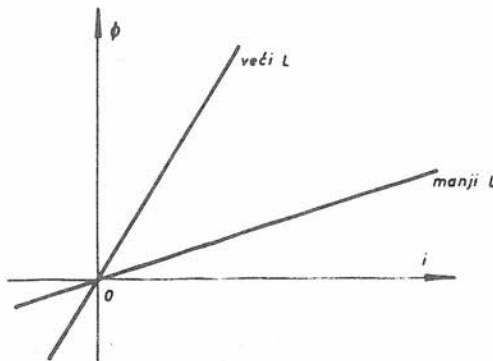
Dvopolni element mreže nazivamo *induktivitetom*, ako se u svakom trenutku  $t$ , njegov magnetski tok  $\Phi(t)$  i struja kroz njega  $i(t)$ , nalaze u međusobnom odnosu koji je određen krivuljom u ravnini  $i-\Phi$ . Tu krivulju nazivamo *karakteristikom induktiviteta* u trenutku  $t$ .

Simbol za induktivitet, koji ćemo nadalje koristiti, dat je na sl.2.1.6.a), a jedan općeniti primjer karakteristike induktiviteta na sl.2.1.6.b).



Sl. 2.1.6

Ako je, međutim, induktivitet linearan, onda je njegova karakteristika pravac kroz ishodište dotične ravnine. Nagib pravca karakteristike u toj ravnini, mjera je veličine linearnog induktiviteta tj. parametra *induktivnoeti*  $L$ . Prema tome, sl.2.1.7 prikazuje karakteristike dva veličinom različita linearna induktiviteta.



Sl. 2.1.7



Ako je pak induktivitet linearan, no uz to i vremenski promjenljiv, onda mu je karakteristika pravac kroz ishodište  $i$ - $\Phi$  ravnine, koji u različitim trenucima vremena ima različit nagib.

Budući da ćemo uglavnom analizirati mreže s *linearnim* vremenski nepromjenljivim induktivitetima, definirat ćemo takav induktivitet na slijedeći način.

Iz karakteristike slijedi

$$\Phi(t) = L i(t) \quad /2.1.4/$$

Diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobiva se

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \frac{d}{dt} L i(t)$$

Budući da je  $u(t) = d\Phi(t)/dt$ , a  $L$  konstanta, ostaje

$$u(t) = L \frac{d i(t)}{dt} \quad /2.1.5/$$

a iz toga

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(t') dt' \quad /2.1.6/$$

Katkada je korisno u analizi uvesti novi parametar sa značenjem po definiciji

$$\Gamma \triangleq L^{-1} \quad /2.1.7/$$

kojega nazivamo *recipročnom induktivnosti*.

Time izraz /2.1.6/ prelazi u

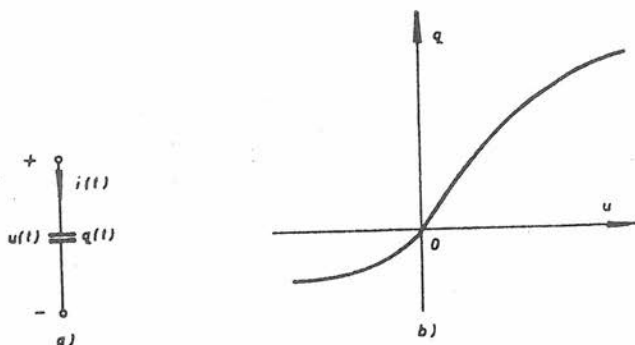
$$i(t) = i(0) + \Gamma \int_0^t u(t') dt' \quad /2.1.8/$$

### 2.1.3. Kapacitet

Dvopolni element mreže nazivamo *kapacitetom*, ako se u svakom trenutku  $t$ , njegov uskladišteni naboj  $q(t)$  i napon na njegovim priključnicama  $u(t)$ , nalaze u međusobnom odnosu koji je određen krivuljom u ravnini  $u$ - $q$ . Tu krivulju nazivamo

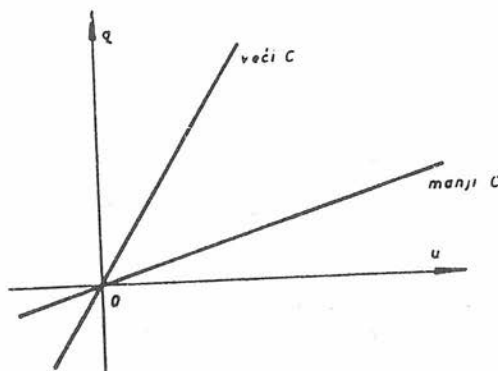
karakteristikom kapaciteta u trenutku  $t$ .

Simbol za kapacitet, koji ćemo nadalje koristiti, dat je na slici 2.1.8.a), a jedan općeniti primjer karakteristike kapaciteta na sl.2.1.8.b).



Sl. 2.1.8

Ako je, međjutim, kapacitet linearan, onda je njegova karakteristika pravac kroz ishodište dotične ravnine. Nagib pravca karakteristike u toj ravnini, mjera je veličine linearnog kapaciteta tj. parametra *kapacitivnosti*  $C$ . Prema tome, sl. 2.1.9 prikazuje karakteristike dva veličinom različita linearna kapaciteta.



Sl. 2.1.9

Ako je pak kapacitet linearan, no uz to i vremenski promjenljiv, onda mu je karakteristika pravac kroz ishodište u-q ravnine, koji u različitim trenucima vremena ima različit nagib.

Budući da ćemo uglavnom analizirati mreže s *linearnim vremenski nepromjenljivim kapacitetima*, definirat ćemo takav kapacitet na slijedeći način.

Iz karakteristike slijedi

$$q(t) = C u(t) \quad /2.1.9/$$

Diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobiva se

$$\frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} C u(t)$$

Budući da je  $i(t) = dq(t)/dt$ , a C konstanta, ostaje

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad /2.1.10/$$

a iz toga

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' \quad /2.1.11/$$

Katkada je korisno u analizi uvesti novi parametar za koji po definiciji vrijedi

$$S \triangleq C^{-1} \quad /2.1.12/$$

Ovaj parametar S koji je recipročna kapacitivnost, naziva se često i *elastancija*. Time izraz /2.1.11/ prelazi u

$$u(t) = u(0) + S \int_0^t i(t') dt' \quad /2.1.13/$$

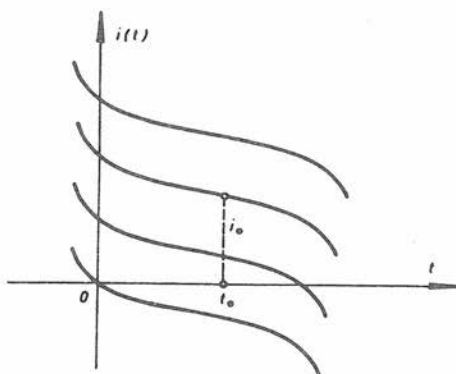
## 2.2. SPOSOBNOST MEMORIRANJA NEKIH ELEMENATA

Treba podvući da navedene definicije elemenata vrijede jedino uz naponske i strujne referencije kako su date na shemama elemenata.

Promjenivši bilo strujnu bilo naponsku referenciju nužno se mijenja i predznak u odgovarajućem izrazu.

Kao što vidimo, lako je konvergirati odnose napon-struja za jedan element (otpor), dok za ostala dva to ne mora biti

tako jednostavno. Pogledajmo npr. kako to izgleda kod induktiviteta. Napon na njemu ovisi o derivaciji struje. Međutim, slijedeći dijagram pokazuje familiju krivulja struje, od kojih svaka može biti struja u induktivitetu. Naime, prema svakoj od tih krivulja dobili bi isti napon na induktivitetu, jer u svakom trenutku sve imaju istu derivaciju (sl.2.2.1).



Sl. 2.2.1

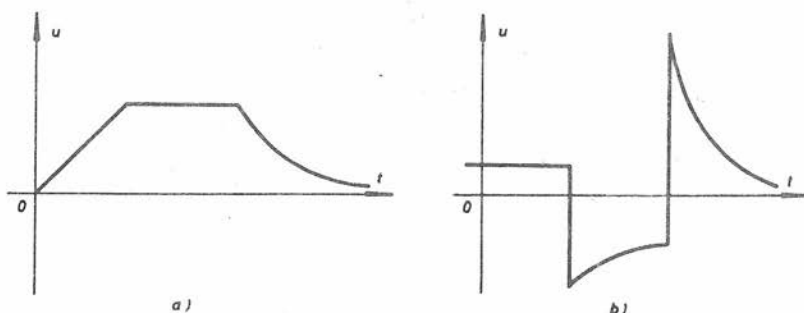
Prema tome, uz određeni napon, mi ne možemo sigurno reći koja od ovih krivulja predstavlja struju u induktivitetu sve dok nije zadana i veličina struje u jednom određenom trenutku. Tek će to odrediti točku ( $i_0$  u  $t_0$ ) na odgovarajućoj krivulji i tako fiksirati struju. Nije bitno koja je ta odabrana veličina struje. Međutim, nas obično interesira stanje u mreži poslije nekog naročitog događaja, npr. nekog otvaranja ili zatvaranja sklopke. Budući da je vremenski početak promatranja nama proizvoljan, mi obično izabiremo da taj početak koincidira sa specficiranom veličinom struje. Proglašavamo dakle da se taj početak zbije u  $t=0$ , te da je tada bila struja u induktivitetu  $i(0)$ . Držeći se takve konvencije obrat  $u$ - $i$  ovisnosti kod induktiviteta daje iz  $u(t) = L di(t)/dt$  izraz

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t') dt' + i(0)$$

Kako se u ovom izrazu granični prijelaz vrši približavanjem od pozitivnih vrijednosti vremena trebali bi možda pisati umjesto  $i(0) \rightarrow i(0+)$ , što se često i čini.

Ponegdje netko ovu vrijednost u  $t=0$  ne napiše u tim inverznim relacijama, pa ostavlja samo integral. Takav izraz je nekompletan i može dovesti u zabludu. Tako neki, kad im je zadana eksplicitno funkcija napona kao npr.  $u(t) = \sin \omega t$ , oni integrirajući dobivaju samo  $-\frac{1}{\omega} \cos \omega t$ , što sigurno nije točno jer manjka konstanta integracije, koju određuje upravo ovaj član  $i(0)$ .

Štaviše, u mnogim slučajevima neće nam napon biti zadan na tako jednostavan način, za sve  $t$  od 0 do  $\infty$ . Možda će analitički izraz za  $u(t)$  biti u svakom intervalu vremena drugačija funkcija, kao na primjerima sl.2.2.2.



Sl. 2.2.2

U svim tim slučajevima, za točnost je neophodno uzimati u obzir i struju na rubovima tih intervala.

Još je nešto, s tim u vezi, važno zapaziti. Relacije

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{i} \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

definiraju - prva funkciju koja izražava  $u(t)$  u ovisnosti o derivaciji struje  $i$ , tj.  $u(t) = f_1\left(\frac{di}{dt}\right)$

- druga funkciju koja izražava  $i(t)$  u ovisnosti o derivaciji napona  $u$ , tj.  $i(t) = f_2\left(\frac{du}{dt}\right)$ .

Osnovno je ustanoviti da su obe te funkcije linearne! To se da strogo matematičkim metodama dokazati, ali je i očigledno,

Medjutim, izrazi

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(t') dt'$$

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

koji definiraju -  $i(t)$  kao funkciju  $i(0)$  i valnog oblika  $u(t)$  u intervalu  $[0, t]$  , te  
-  $u(t)$  kao funkciju  $u(0)$  i valnog oblika  $i(t)$  u intervalu  $[0, t]$  ,

jesu linearne funkcije samo ako su  $i(0)$  odnosno  $u(0)$  jednake nuli!

Dakle, ako je u prvom slučaju  $i(0) = 0$ , onda je  $i(t) = f\left[\int_0^t u(t) dt\right]$  linearna funkcija, a analogno je i u drugom slučaju.

To će postati naročito važno kasnije, kad ćemo vidjeti da će se neke definicije ograničavati na uvjet da promatrana mreža ne sadrži početnih energetske stanja. Zato kažemo da su induktivitet i kapacitet elementi s memorijom. Struja i napon na njihovim priključnicama ovise i o valnim oblicima i o početnim stanjima.

Još nešto slijedi iz gornjih jednažbi. Dok je struja kontinuirana, tj. dok skokovito ne mijenja svoju vrijednost, napon na induktivitetu ima konačnu vrijednost. Ili gledajući obrnuto, struja u induktivitetu bit će kontinuirana, sve dok napon ostane u konačnim granicama. To znači da će veličina struje u trenutku "nula plus" biti iste vrijednosti kao u trenutku "nula minus" sve dok imamo posla s konačnim vrijednostima napona.

To se obično izražava postavkom: *ako je napon ograničen, struja u induktivitetu ne može se momentalno promijeniti.*

Kako ta postavka vrijedi samo dok je napon konačne vrijednosti, što je slučaj u najvećem broju problema, to ćemo drukčije slučajeve diskutirati kad do njih dodjemo.

Ovo što smo govorili za induktivitet vrijedi posve analogno za kapacitet samo zamjenom riječi struja ↔ napon. Bu-

dući da se radi o istim matematičkim operacijama, sada će napon na kapacitetu biti kontinuiran, sve dok struja ostaje u konačnim vrijednostima. To se obično izražava postavkom: *ako je struja ograničena, napon (ili naboj) na kapacitetu ne može se momentalno promijeniti*. Slučajeve kad se radi o neograničenim, dakle, beskonačnim promjenama napona ili struje, ostavljamo za kasnije.

### 2.3. VIŠEPOLNI ELEMENTI MREŽA

Pod pojam višepolnih elemenata mreža stavljat ćemo one koje imaju više od dvije priključnice. Broj priključnica onih elemenata koje ćemo mi obuhvatiti u ovom tekstu, ne prelazi nikada četiri. Treba napomenuti, da smo u ovoj podjeli izostavili izravne energetske izvore, iako su i oni elementi mreža s dvije odnosno četiri priključnice. Oni će, međutim, biti prikazani u zasebnom poglavlju.

#### 2.3.1. Vezani induktiviteti (transformator)

Taj je element kombinacija induktiviteta koji su povezani djelomično zajedničkim magnetskim tokom. Inače, taj je element u stvari pojednostavljeni model fizikalnog transformatora, dakle, bliskih magnetski spregnutih svitaka. Zato se vezani induktiviteti katkada jednostavnije i nazivaju transformatorom, iako kao linearan element ne smije nikako biti brkan s fizikalnim transformatorom, pogotovo onim sa željeznom jezgrom.

*Svojstvo je tog elementa, da se pojavljuje napon na jednom paru njegovih priključnica, ako varira struja u vremenu, kroz drugi par priključnica.* Ovaj se efekt ne može opisati ni s jednim od onih spomenutih dvopolnih elemenata, pa niti s njihovim kombinacijama.

Polazna postavka za dobivanje naponsko-strujnih ovisnosti, kojima ćemo analitički definirati vezane induktivitete, bit će proporcionalnost magnetskog toka svakog od induktiviteta sa strujama kroz te induktivitete.

Upravo analogno kao kod jednog induktiviteta, za dva linearna i vremenski nepromjenljiva induktiviteta, koji su

na spomenuti način magnetski vezani, treba da vrijedi u svakom trenutku:

$$\phi_1(t) = L_{11} i_1(t) + M_{12} i_2(t) \quad /2.3.1/$$

$$\phi_2(t) = M_{21} i_1(t) + L_{22} i_2(t) \quad /2.3.2/$$

U ovim su relacijama  $\phi_1$  i  $\phi_2$  magnetski tokovi jednog i drugog induktiviteta, kroz koje protiču struje  $i_1$  odnosno  $i_2$ . Ne ulazeći u fizikalna razmatranja, zbog linearnosti treba  $L_{11}$ ,  $L_{22}$ ,  $M_{12}$  i  $M_{21}$ , prihvatiti kao konstante proporcionalnosti između odnosnih veličina.

Ako primijenimo Faradayev zakon na ove jednadžbe tj. deriviramo li po vremenu oba toka, moramo dobiti napone na priključnicama oba induktiviteta

$$u_1(t) = \frac{d\phi_1(t)}{dt} = L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad /2.3.3/$$

$$u_2(t) = \frac{d\phi_2(t)}{dt} = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{di_2(t)}{dt} \quad /2.3.4/$$

Ako bi se poslužili energetske odnose, moglo bi se dokazati da uvijek mora biti

$$M_{12} = M_{21} = M \quad /2.3.5/$$

Zbog lakšeg označavanja pojednostavnimo i indekse L-konstanti, pa pišemo nadalje

$$L_{11} = L_1; \quad L_{22} = L_2$$

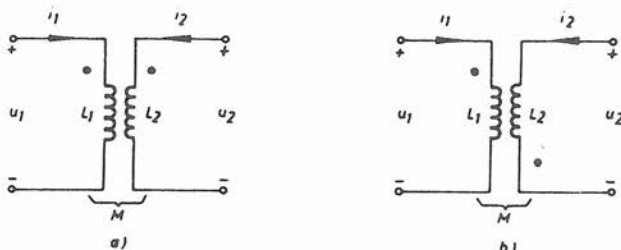
Odbacimo li naglašavanje samih po sebi razumljivih ovisnosti o vremenu, ostaju na kraju definicione jednadžbe vezanih induktiviteta (ili jednostavnije rečeno - transformatora)



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad /2.3.6/$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad /2.3.7/$$

Ove jednadžbe smatrat ćemo nadalje postulatima, koji određuju ponašanje napona i struja u slučaju dva magnetski vezana induktiviteta. Takva definicija tog elementa mreže vrijedi samo za referencije prema shemi transformatora koja je prikazana na sl.2.3.1. Ove smo referencije, naime, imali prečutno u vidu kod provedbe gornjeg izvoda jednadžbi transformatora.



Sl. 2.3.1

Kao i kod prije opisanih elemenata mreža, i ovdje će promjena naponske ili strujne referencije na bilo kojem od induktiviteta, imati za posljedicu promjenu predznaka u odgovarajućim članovima jednadžbi /2.3.6/ i /2.3.7/.

Vidimo da je ovaj element karakteriziran sa tri parametra umjesto s jednim kao što je do sada bio slučaj. Ti su parametri dvije samoindukcije  $L_1$  i  $L_2$ , te jedna međui indukcija  $M$ . Parametar samoindukcije je isto što i prije definirani induktivitet pa je prema tome uvijek pozitivna veličina. Međui indukcija je međjutim, mjera napona koji se može proizvesti na jednom paru priključnica, zbog strujnih promjena na drugom paru. Nasuprot samoindukciji, to je algebarska veličina, koja može imati pozitivnu ili negativnu vrijednost.

Pravi predznak od  $M$ , određuje oznaka točke na shemi koja se stavlja uz jednu od priključnica svakog para. Stoga jednostavno utvrdimo:

*M će biti pozitivan ako su i jedna i druga strujna referencija okrenute ili obje prema točkama ili obje od točaka svojih induktiviteta.*

*M će biti negativan ako je jedna strujna referencija okrenuta prema točki, a druga od točke svoga induktiviteta.*

Dok općenito pišemo samo medjuovisnosti struja i napona transformatora, nije potrebno poznavati položaj točke na priključnicama u shemi. To postaje aktuelno tek kada uvrštavamo numeričke vrijednosti. Zato jednačbe /2.3.6/ i /2.3.7/ vrijede uz strujne i naponske referencije prema sl.2.3.1.a) bez obzira na položaje točaka uz krajeve induktiviteta. Medjutim, uz točke kao što su ucrtane baš na toj slici, a prema gornjem pravilu slijedi da je  $M > 0$ , pa bi jednačbe upravo izgledale ovako:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + |M| \frac{di_2}{dt} \quad /2.3.8/$$

$$u_2 = |M| \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad /2.3.9/$$

Ukoliko bi npr. položaj točaka bio kao na shemi slike 2.3.1.b), vidimo da je referentni smjer struje  $i_1$  prema točki, dok je smjer struje  $i_2$  upravljen od točke ("izlazi" iz točkom označenog kraja induktiviteta). Koristeći gornje pravilo slijedi da je u ovom primjeru  $M < 0$ , pa jednačbe transformatora pišemo ovako:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - |M| \frac{di_2}{dt} \quad /2.3.10/$$

$$u_2 = - |M| \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad /2.3.11/$$

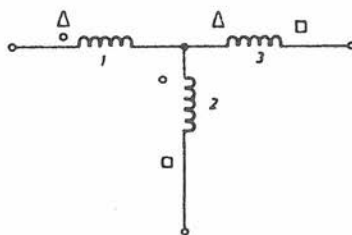
Moramo medjutim, spomenuti i drugi uobičajeni način označavanja. Kod toga je  $M$  uvijek pozitivan kao i  $L$ . Medjutim, predznak ispred člana sa  $M$  u jednačbama mora biti prilagodjen u ovisnosti o smjeru strujnih referencija prema točkama.

Očigledno je medjutim, da su obe konvencije ekvivalentne, samo ova druga zahtijeva poznavanje položaja točaka još kod pisanja općenitih u-i jednačbi. Kod uvrštavanja numeričkih vrijednosti, uvrštavaju se tada samo pozitivni brojevi.

U dokazivanju ispravnosti ovako postavljenog modela fizikalnom transformatoru dalje ne ćemo ulaziti.

Poznavanjem osnovnih elektromagnetskih zakona iz teoretske elektrotehnike, i smjerova namatanja određuje se položaj točaka. Iz ovoga, te iz odnosa točaka prema smjerovima struja može se sve navedeno verificirati.

U složenijim situacijama magnetskog vezanja induktiviteta, katkada je potrebno upotrebiti ne jedan nego više parova točaka. Tada smo prisiljeni tim "točkama" dati različite oblike radi sigurnog identificiranja odgovarajućih parova. Tako npr. u sl.2.3.2 kružni simboli ukazuju na vezu između induktiviteta 1 i 2, trokutasti između 1 i 3, a kvadratični simboli određuju vezu između 2 i 3.



Sl. 2.3.2

Ovu magnetsku vezu definirale bi jednadžbe oblika

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + L_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$u_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{23} \frac{di_3}{dt}$$

/2.3.12/

$$u_3 = L_{31} \frac{di_1}{dt} + L_{32} \frac{di_2}{dt} + L_{33} \frac{di_3}{dt}$$

Za odredjivanje predznaka članova u ovim jednažbama morali bi poznavati, pored gornjeg rasporeda simbola magnetskih veza, i referentne smjerove struja i napona, koje si čitalac može za vježbu sam zadati. Dalje se postupa shodno usvojenim pravilima.

Treba zapaziti da naponsko-strujni odnosi za veći broj magnetski vezanih induktiviteta, postaju donekle pregledniji ako se pišu u matričnoj formi. Tada npr. izrazi /2.3.12/ postaju

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad /2.3.13/$$

Skraćeno to pišemo kao

$$u = L \frac{d}{dt} i \quad /2.3.14/$$

gdje je

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad /2.3.15/$$

tzv. *matrica induktivnosti*, koja je uvijek simetrična, jer je  $L_{12} = L_{21}$ , itd. Iz toga slijedi, da će trostruko vezani induktiviteti biti određeni za šest umjesto s devet parametara.

Katkada će u analizi zatrebati i invertirana matrica  $L$

$$\Gamma \triangleq L^{-1} \quad /2.3.16/$$

koju onda nazivamo *recipročnom matricom induktivnosti*.

Vratimo se sada na linearne vremenski invarijabilne dvostruko vezane induktivitete, da bi odredili mjeru jačine utjecaja magnetske veze.

Za to će nam poslužiti omjer apsolutne vrijednosti me-

djuinduktiviteta i geometrijske sredine dva samoinduktiviteta. Tako ćemo definirati *koeficijent vezanja* jednadžbom

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad /2.3.17/$$

Taj koeficijent ne može biti negativan, i ne zavisi o odabranim referencijama induktiviteta.

Ako su dva induktiviteta veoma udaljeni u prostoru, medjuinduktivitet je veoma malen te je veličina  $k$  blizu nule. Ako su pak induktiviteti tijesno jedan uz drugoga (kad su npr. dva svitka namotana oko iste jezgre), veći dio magnetskog toka zajednički je za oba, te se  $k$  približava jedinici. Analizirajući energetske uvjete može se pokazati, da je koeficijent veze  $k$  prema gornjoj definiciji, uvijek manji ili maksimalno jednak jedinici

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1 \quad /2.3.18/$$

Ova se konstatacija piše ekvivalentno i na slijedeći način:

$$L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \quad /2.3.19/$$

Nema zapravo fizikalnog transformatora, koji bi bio tako gradjen da mu je koeficijent veze jednak jedinici, iako se je toj vrijednosti već vrlo približilo. Medjutim, u teoretskom modelu mi dopuštamo mogućnost postojanja takvog transformatora, pa ga tada nazivamo *savršenim (perfektnim) transformatorom*.

Treba naglasiti, da je savršeni transformator istovrstan element mreže kao (nesavršeni) transformator odnosno dvostruko vezani induktiviteti, s jedinom razlikom da njegovi samoinduktiviteti i medjuinduktivitet zadovoljavaju uvjet

$$L_1 L_2 - M^2 = 0 \quad \text{ili} \quad k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1 \quad /2.3.20/$$

Energetska razmatranja pokazuju, da su vezani induktiviteti (pa i ovi s  $k=1$ ), linearan element u kojem se doduše ne gubi ništa od primljene električne energije, ali koji može uskladištavati električnu energiju. Drugim riječima, analogno induktivitetu, i transformator je bez disipacije (rasipanja) energije, ali je element s memorijom.

### 2.3.2. Idealni transformator

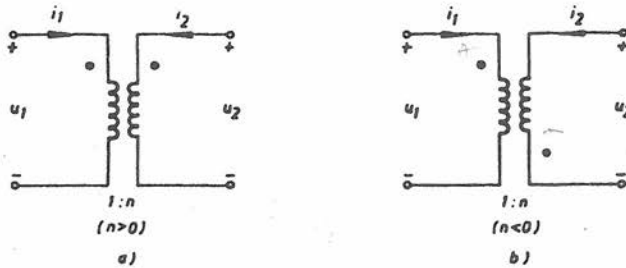
Iako bi sličnost naziva mogla unositi zabunu, *idealni transformator* nije istovrstan element mreže kao upravo navedeni transformator (kojega je zato bolje zvati - vezani induktiviteti). To će se ubrzo pokazati kod iznošenja definicije. Može se ipak reći da oba imaju isto porijeklo. Naime, i idealni transformator i vezani induktiviteti su dva različita modela istog fizikalnog transformatora, kojeg primjenjujemo u energetici i komunikacijama, jedino su kao osnovna obilježja karakterizacije svakog od tih modela, uzeta dva različita svojstva fizikalnog transformatora. Oba, inače, imaju dva para priključnica, ali idealni transformator po ponašanju ima još i svojstva idealnih konvertora, na što će kasnije biti posebno ukazano. Osim toga, u teoriji električnih mreža idealni transformator koristimo prema potrebi za odjeljivanje pojedinih strujnih krugova.

Ponašanje elementa mreža kojeg zovemo idealni transformator, definiramo slijedećim jednažbama između dva napona na parovima priključnica i dvije struje kroz njih. Pri tome treba smatrati da im referencije odgovaraju onim, ucrtanim na simbolu idealnog transformatora, koji je dat na slici 2.3.3.a)

$$u_2(t) = n u_1(t) \quad /2.3.21/$$

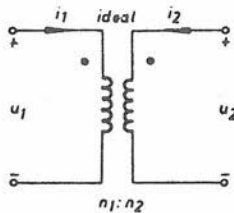
$$i_2(t) = -\frac{1}{n} i_1(t) \quad /2.3.22/$$

gdje je  $n$  realan broj, a nazivat ćemo ga *omjerom transformiranja*. Za referencije i raspored točaka prema sl.2.3.3.a)  $n$  je ujedno i pozitivan broj, dok je za referencije i raspored točaka na shemi 2.3.3.b)  $n$  negativan broj.



Sl. 2.3.3

Ovo će biti definicione jednačbe i simboli koje ćemo upotrebljavati u okviru ovog teksta. Inače se katkada upotrebljava i alternativna shema prema slici 2.3.4, koja više asocira na fizikalni transformator. Naime, ovdje je broj  $n$  prikazan kao omjer, što navodi na pomisao o omjeru broja za-voja.



Sl. 2.3.4

Ako je dakle

$$1 : n = n_1 : n_2$$

/2.3.23/

vrijede uz referencije i raspored točaka prema sl.2.3.4 jed-

nadžbe koje određuju odnose napona i struja

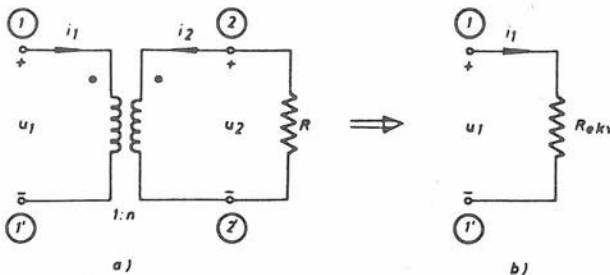
$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{n_1}{n_2} \quad /2.3.24/$$

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = - \frac{n_2}{n_1} \quad /2.3.25/$$

Nije potrebno naglašavati da su ta dva načina prikazivanja idealnog transformatora potpuno ekvivalentna. Iako nije neophodno, na simbol se katkada stavlja i oznaka "ideal".

Idealizacija realnog transformatora s pomoću ovakovog modela, korisna je ne samo zbog svoje zadovoljavajuće točnosti za izvjesne svrhe. Idealni transformator u određenoj kombinaciji s elementima otpora, induktiviteta i kapaciteta ulazi u nadomjesnu shemu kojom cjelovitije modeliramo realni.

Razmotrimo već spomenuto svojstvo konverzije. Pretpostavimo, da je linearni otpor  $R$  priključen na prilaz  $\textcircled{2}-\textcircled{2'}$  idealnog transformatora kao na sl.2.3.5.a).



Sl. 2.3.5

Uz pretpostavljene referentne smjerove struja i referentne polaritete napona vrijedi za napon  $u_2$

$$u_2 = -R i_2 \quad /2.3.26/$$



Ako supstituiramo ovaj izraz u jednažbe /2.3.21/ i /2.3.22/, i potražimo  $u_1$  u ovisnosti od  $i_1$  imamo

$$u_1 = \frac{1}{n} u_2 = - \frac{1}{n} R i_2 = \frac{1}{n^2} R i_1 \quad /2.3.27/$$

Vidimo da je jednažba /2.3.27/ definirajuća karakteristika linearnog otpora. To znači da se na priključnicama (1) - (1') ove mreže, "osjeća" otpor s parametrom

$$R_{\text{ekv}} = \frac{1}{n^2} R \quad /2.3.28/$$

Prema tome, mreža na sl. 2.3.5.b) ekvivalentan je prikaz mreže na sl. 2.3.5.a) sa stanovišta priključnica (1) - (1'). Ovim sklopom idealni transformator prilagođava veličinu otpora, na vrijednost koju želimo imati na ulaznim priključnicama.

Za razliku od vezanih induktiviteta, idealni transformator niti rasipa (disipira) energiju niti ju uskladištava. To je dakle linearan vremenski nepromjenljiv element, ali bez memorije.

### 2.3.3. Girator

Druzi element mreže koji ima svojstvo konverzije, ili neke vrsti "pretvorbe", jest tzv. *girator*. I on je u stvari model za određenu mrežu fizikalnih komponenata, koja kao cjelovita naprava, uglavnom pokazuje ista električka svojstva. Slično se ponašaju i neke mikrovalne strukture.

Girator predstavljamo u električkim mrežama simbolom prema sl. 2.3.6. Za napone i struje giratora, vrijede slijedeće definicione jednažbe

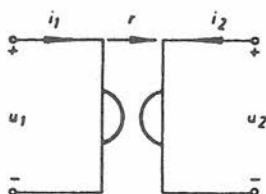
$$u_1(t) = r i_2(t) \quad /2.3.29/$$

i

$$u_2(t) = -r i_1(t) \quad /2.3.30/$$

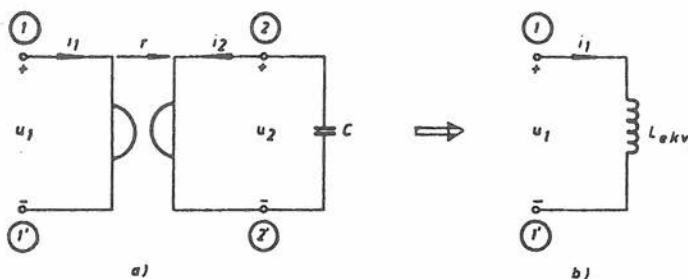
gdje je  $r$  realna konstanta, koja može biti ili pozitivna ili negativna. Možemo ju nazivati *omjerom zakretanja*. Iz tih je

jednadžbi vidljivo, da girator stavlja u međusobni odnos struju koja pripada jednom paru priključnica, i napon na drugom paru priključnica.



Sl. 2.3.6

Interesantno ponašanje pokazuje girator promatran kao dvopol na prilazu (1)-(1'), ako je na prilazu (2)-(2') zatvoren linearnim kapacitetom, kao što prikazuje sl.2.3.7.a).



Sl. 2.3.7

Uz pomoć jednadžbi giratora i linearnog kapaciteta za ovu mrežu vrijedi da je

$$u_1 = r i_2 = r \left( -C \frac{du_2}{dt} \right) \quad /2.3.31/$$

Budući da je  $u_2 = -r i_1$ , slijedi

$$u_1 = - r C \frac{d}{dt} (- r i_1) = r^2 C \frac{di_1}{dt} = L_{ekv} \frac{di_1}{dt} \quad /2.3.32/$$

Vidimo, da je girator u spoju s linearnim kapacitetom kao dvopol na priključnicama (1) - (1') ekvivalentan linearnom induktivitetu, kojemu je veličina

$$L_{ekv} = r^2 C \quad /2.3.33/$$

Prema toj teoriji, ako nismo u stanju realizirati odgovarajući svitak (što se često može dogoditi!), treba ga nadomjestiti kondenzatorom u spoju s giratorom.

Iz jednadžbi giratora slijedi, da je on linearan vremenski nepromjenljivi element mreže. Linearan je, jer su mu naponi grana linearne funkcije struja grana.

Nadalje, energetska bilanca pokazuje, da girator niti apsorbira niti predaje energiju vanjskom svijetu, Za razliku od idealnog transformatora, girator nije recipročan u smislu onoga što je rečeno u prvoj glavi.

#### 2.3.4. Negativni konvertor

Slijedeći element mreže kojega ćemo uvesti u tu familiju jest *negativni konvertor*. To je model naprave koja je dosta uobičajena u telekomunikacijama, a realizirana je obično sklopom tranzistora, te R i C komponenata.

Definirat ćemo negativni konvertor slijedećim izrazima:

$$u_1(t) = k u_2(t) \quad /2.3.34/$$

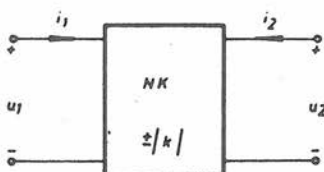
i

$$i_2(t) = k i_1(t) \quad /2.3.35/$$

Ovdje je k realna konstanta koju nazivamo *omjer konvertiranja*. Interna je još podjela negativnih konvertora prema tome, da li je k pozitivan ili negativan broj. Ako je k pozitivan radi se o *strujno invertivnom* tipu negativnog konvertora. Naime, kao što se vidi iz jednadžbi, ako se  $i_1$  poklapa sa svojim referentnim smjerom, onda je i  $i_2$  u ovom referentnom smjeru.

Znači, struja je "invertirana" nakon prolaza kroz negativni konvertor. Napon se, međutim, nije invertirao.

Ako je naprotiv  $k$  negativan radi se o *naponski invertivnom* tipu negativnog konvertora. Tada se, naime, napon "invertira", a struja ne! Negativni konvertor obično se ne označava u mrežama simbolom nekog posebnog oblika. Zato ćemo kao općeniti simbol koristiti shemu četveropola prema sl.2.3.8.



Sl. 2.3.8

Kada ovaj element zaključimo na jednom paru priključnica s nekim drugim pasivnim elementom, događa se nešto vrlo interesantno na drugom paru priključnica. Ako npr. priključimo induktivitet  $L$  na "izlaz" (2)-(2') negativnog konvertora (sl.2.3.9.a)) onda imamo

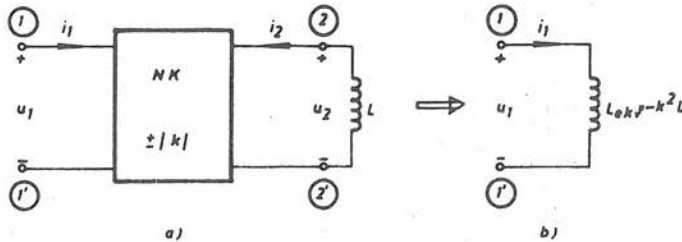
$$u_2 = -L \frac{di_2}{dt} \quad /2.3.36/$$

Prema jednadžbama za negativni konvertor slijedi

$$\begin{aligned} u_1 &= \pm |k| u_2 = \pm |k| \left( -L \frac{di_2}{dt} \right) = \pm |k| (-L) \left( \pm |k| \frac{di_1}{dt} \right) = \\ &= -k^2 L \frac{di_1}{dt} \quad /2.3.37/ \end{aligned}$$

Dobili smo na "ulaznim" priključnicama (1)-(1') ekvivalentni induktivitet ( $L_{\text{ekv}} = -k^2 L$ ) koji je *negativan* prema onom kojim je konvertor zaključen. Odatle i naziv.

Slično ponašanje slijedilo bi, ako bi zaključni element bio umjesto induktiviteta - otpor ili kapacitet. Negativni



Sl. 2.3.9

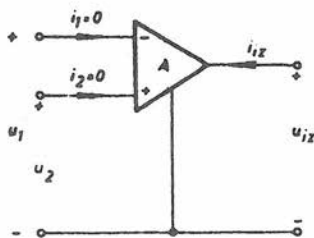
konvertor zaključen s R ekvivalentan je otporu  $-R$  ako je  $k=1$ , itd.

Prema tome, uvođenje negativnog konvertora znatno proširuje izbor elemenata koje ugradjujemo u električke mreže, jer je sada moguće računati i s negativnim R, L i C elementima. Provođenje dokaza, da je negativni konvertor linearan i aktivan element, preporuča se čitaocu za vježbu.

### 2.3.5. Operaciono pojačalo

Kao posljednjeg iz ove grupe višepolnih elemenata mreža za opisat ćemo *operaciono pojačalo*. Napredak u tehnologiji integriranih krugova omogućio je proizvodnju komercijalne verzije tog elementa, koja je našla primjenu u velikom broju elektroničkih uređaja. Pouzdana i jeftina, operaciona pojačala, neizbježna su komponenta u analognim računarima, aktivnim filtrima i brojnim drugim mrežama posebne namjene. To je svakako jedan od razloga da se i u teoriji mreža sve češće tretiraju kao poseban element mreža.

Ovdje ćemo ga definirati u standardnoj tipizaciji, kao tzv. *operaciono pojačalo s diferencijalnim ulazom*, za kojega su simbol i referencije dati na sl. 2.3.10.



Sl. 2.3.10

Vidimo da ovaj element određuju dva ulazna napona  $u_1$  i  $u_2$ , te jedan izlazni napon  $u_{iz}$ . Treba još zapaziti, da su sva ta tri napona mjerena u odnosu na zajedničku ("negativnu") referentnu priključnicu.

Naponsko-strujne ovisnosti koje definiraju operaciono pojačalo izražene su jednačbama

$$i_1(t) = 0 ; \quad i_2(t) = 0 \quad /2.3.38/$$

$$u_{iz}(t) = A [u_2(t) - u_1(t)] \quad /2.3.39/$$

U ovom izrazu,  $A$  je pozitivna konstanta koja teži beskonačnoj veličini, (u praksi je to iznad 20000), što znači da razlika napona na ulazu treba konvergirati ka nuli. Iz toga slijedi, da je to posebno upotrebljiv element za postizavanje visoke osjetljivosti, a uz određenu povratnu vezu između ulaza i izlaza, pokazuje visoku stabilnost rada.

Budući da prema definiciji, ne teku struje preko ulaznih priključnica, možemo smatrati da taj element ima beskonačni ulazni otpor. Izlazni je napon, međutim, neovisan o izlaznoj struji, pa zato možemo reći da ima izlazni otpor jednak nuli.

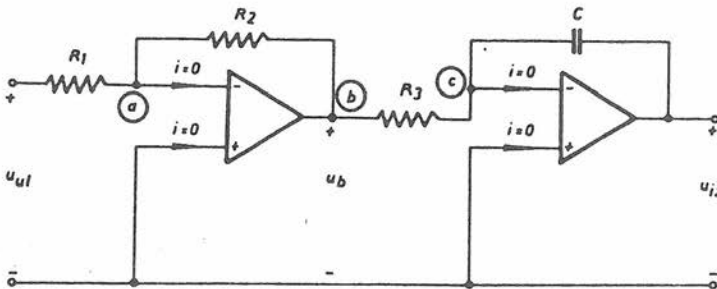
Vidimo nadalje, da izlazna struja nije ograničena u ovom modelu operacionog pojačala. Naravno, struja se mora pokoravati naponsko-strujnim odnosima, koje nameće priključak na izlazu. Tako npr., uz navedene referencije i uz linearan otpor

R priključen na izlazu, slijedi relacija

$$i_{iz} = - \frac{1}{R} u_{iz} \quad /2.3.40/$$

Osnovno je, međutim, svojstvo operacionog pojačala da primjenom odgovarajućih krugova u povratnoj vezi, može oblikovati svoj odziv. Odatle potječe i naziv "operaciono", jer mu izlaz može biti prema potrebi derivacija ili integral ulaza, a izvode su i neke druge operacije.

Tako npr.sl.2.3.11 pokazuje realizaciju jednog *integratora* upotrebom operacionog pojačala. Analiza se te sheme pojednostavnjuje aproksimacijom da su naponi na ulaznim priključnicama operacionih pojačala jednaki nuli.



Sl. 2.3.11

Primjenjujući KZS na čvorišta (a) i (c), imamo

$$\frac{u_{ul}}{R_1} + \frac{u_b}{R_2} = 0 \quad /2.3.41/$$

$$i \quad \frac{u_b}{R_3} + C \frac{du_{iz}}{dt} = 0 \quad /2.3.42/$$

Eliminirajući  $u_b$  iz jednačbe /2.3.41/ i uvrštavajući to u /2.3.42/ slijedi

$$-\frac{R_2}{R_1 R_3} u_{ul} + C \frac{du_{iz}}{dt} = 0 \quad /2.3.43/$$

i konačno

$$u_{iz}(t) = u_{iz}(0) + \frac{R_2}{R_1 R_3 C} \int_0^t u_{ul}(t') dt' \quad /2.3.44/$$

Odabiranjem takvih vrijednosti parametara da bude  $R_2/R_1 R_3 C = 1$ , dolazimo do krajnje jednostavnog izraza, koji opisuje integrirajuću funkciju prikazanog sklopa.

U svjetlu uvodno iznesenih definicija o linearnosti i pasivnosti mreža, možemo konstatirati, da je operaciono pojačalo linearan i aktivan element mreža.

## 2.4. NEZAVISNI IZVORI

U dosadašnjem prikazivanju elemenata mreža, većina ih je bila pasivna. Oni koji to nisu bili, bili su aktivni na jedan prividno skriven način; osnovno im ponašanje nije bilo isključivo u smislu predavanja snage svijetu izvan njihovih priključnica. U ovom poglavlju uvodimo nove elemente - izvore - koje ćemo prema tom načelu smatrati aktivnim, jer su oni sposobni da snabdijevaju vanjski svijet s energijom. Treba, međjutim, imati u vidu, da u određenoj situaciji, takvi izvori mogu i primati energiju od ostalog dijela mreže.

Najprije ćemo izložiti *nezavisne izvore*, za razliku od *zavisnih izvora*, koje ćemo kasnije spomenuti. Ovaj atribut nezavisnosti često ćemo izostavljati kao izlišan, upravo zato, što ćemo izričito naglašavati zavisnost kad o njoj bude riječ.

Tip izvora koje ćemo ovdje najprije razmatrati bit će nezavisni izvori, budući da njihova izlazna karakteristika nije zavisna o obje električke varijable mreža. S obzirom na broj priključnica, nezavisni izvori su dvopoli.



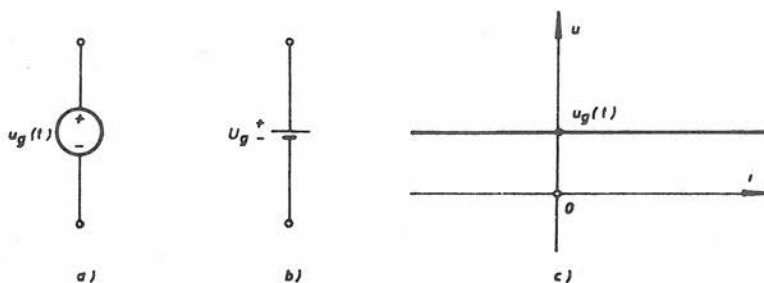
### 2.4.1. Naponski izvor

Dvopolni element mreže nazivamo *nezavisnim naponskim izvorom*, ako taj na svojim priključnicama održava napon odredjenog valnog oblika  $u_g(\cdot)$ , nezavisno od njemu priključene vanjske mreže. Znači, bez obzira na struju  $i(t)$  koja teče kroz taj izvor (koja jeste zavisna o vanjskoj mreži) napon na njegovim priključnicama ostaje  $u_g(t)$ .

Simbol za naponski izvor, koji ćemo nadalje koristiti, dat je na slici 2.4.1.a). Vidimo da na tom simbolu nije ucrtan referentni smjer struje, jer naponski izvor i nije definiran strujom. Ako je specificirani valni oblik  $u_g(\cdot)$  naponskog izvora konstantan (t.j. ne zavisi od vremena), onda se naziva *konstantnim ("istosmjernim") naponskim izvorom* i označavamo ga simbolom prema sl. 2.4.1.b).

Prema gornjoj definiciji, naponski izvor ima karakteristiku u ravnini  $i$ - $u$ , koja je u trenutku  $t$  pravac paralelan sa  $i$ -osi uz ordinatu veličine  $u_g(t)$  (Sl.2.4.1.c)). Upravo zato, naponski izvor možemo općenito smatrati nelinearnim otporom, budući da za bilo koji  $u_g(t) \neq 0$ , pravac karakteristike ne prolazi kroz ishodište. Naponski izvor je vremenski varijabilan ukoliko  $u_g$  nije konstanta, odnosno vremenski invarijabilan ako je  $u_g$  konstantan.

Ako je napon  $u_g$  naponskog izvora identički jednak nuli, onda je taj element efektivno jednak kratkospojnoj grani. Ovu činjenicu potvrđuje istovetnost njihovih karakteristika (Sl.2.1.5.a)).



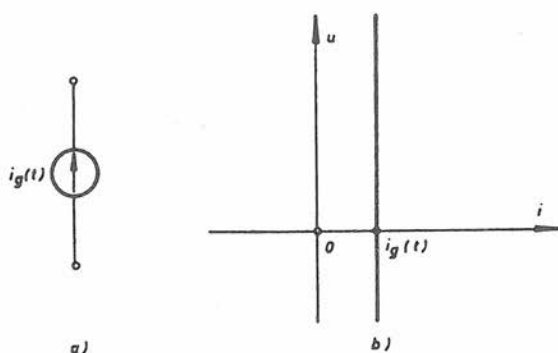
Sl. 2.4.1

U fizikalnom svijetu, kao i kod ostalih elemenata mreža, ne postoji stopostotan pandan naponskom izvoru. Međutim, neki se uređaji (npr. elektroenergetski generatori, akumulatorske baterije) do izvjesnog stupnja strujnog opterećenja pokoravaju prilično dobro njegovoj karakteristici.

#### 2.4.2. Strujni izvor

Dvopolni element mreže nazivamo *nezavisnim strujnim izvorom*, ako taj održava struju odredjenog valnog oblika  $i_g(\cdot)$  preko svojih priključnica, nezavisno od njemu priključene vanjske mreže. Znači, bez obzira na napon  $u(t)$  na njegovim priključnicama (koji jeste zavisan o vanjskoj mreži), struja koja teče kroz taj izvor ostaje  $i_g(t)$ .

Simbol za strujni izvor, koji ćemo nadalje koristiti, dat je na slici 2.4.2.a). Vidimo da na tom simbolu nije ucrtan referentni polaritet napona na priključnicama, jer strujni izvor  $i$  nije definiran naponom. Karakteristika strujnog izvora u trenutku  $t$  u ravnini  $i$ - $u$ , je pravac paralelan s  $u$ -osi uz apscisu veličine  $i_g(t)$  (Sl.2.4.2.b)).



Sl. 2.4.2

Prema tome, strujni izvor možemo općenito smatrati nelinearnim otporom, koji je i vremenski promjenljiv ako  $i_g$  nije konstantan.

Ako je struja  $i_g$  strujnog izvora identički jednaka nuli, onda je taj element efektivno jednak prekinutoj grani. Ovu činjenicu potvrđuje istovetnost njihovih karakteristika (sl.2.1.5.b)).

## 2.5. EKVIVALENTNI DVOPOLI

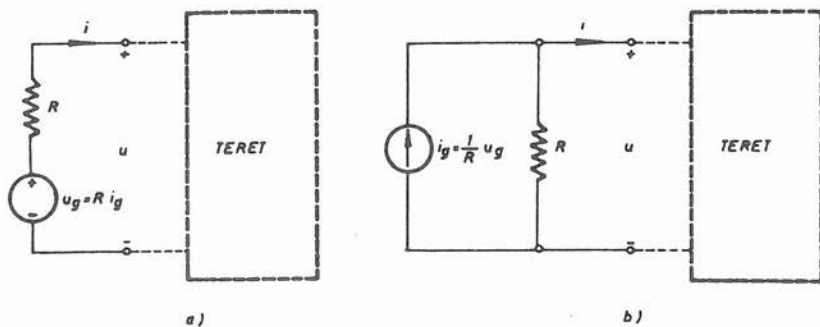
S prethodnim poglavljem zaključili smo prikaz dvopolnih elemenata i ukazali na njihova elementarna svojstva. Prije smo već utvrdili, da svaku granu u zadanoj mreži određuju karakteristike elemenata u grani, što se konačno svodi na odnos između napona grane i struje grane. Ove napone i struje nazvali smo električkim varijablama mreža.

S obzirom na sve ove do sada upoznate pojmove iz teorije mreža, ovdje ih je prikladno proširiti s pojmom *ekvivalentnosti dvopola*.

*Dvopole ćemo smatrati ekvivalentnima, ako su im identične karakteristike u smislu napona i struja na prilazima (parovima priključnica).*

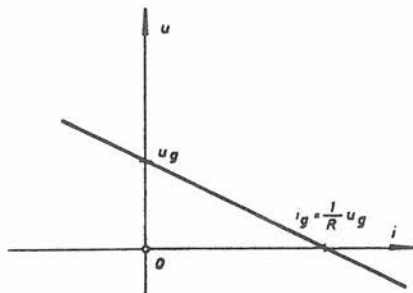
Ovdje ćemo prikazati najjednostavnije i zato najviše upotrebljavane forme ekvivalentnih strujnih krugova. To će biti tzv. *Théveninov i Nortonov ekvivalentni strujni krug*, koji su posebni primjeri ekvivalentnih dvopola. Inače termin *ekvivalentan*, često se upotrebljava za naznaku činjenice, da različite mreže imaju istu električku karakterizaciju u odnosu na pripadne naponske i strujne varijable.

Pogledajmo npr. slučaj kombinacije idealnog nezavisnog naponskog izvora i idealnog linearnog vremenski nepromjenljivog otpora  $R$ . Mnogi fizikalni izvori, kao primjerice akumulatorska baterija, može biti prikazana serijskim spojem tih elemenata. Pokazuje se ponekad prikladnim, uvođenje jedne drukčije ali ekvivalentne predodžbe za tu napravu, gdje će funkcionirati nezavisni strujni izvor. Oba su prikaza shematski data na sl. 2.5.1.



Sl. 2.5.1

Ako potražimo karakteristike za te dvopole, naravno, uz neki priključeni "teret", dobit ćemo da za oba izgleda prema slici 2.5.2.



Sl. 2.5.2

Kažemo, da su ova dva kruga ekvivalentna jer imaju jednake karakteristike. Ako pišemo Kirchhoffov zakon napona za unutrašnju konturu kruga prema sl.2.5.1.a) imamo jednadžbu

$$u = u_g - R i \quad /2.5.1/$$

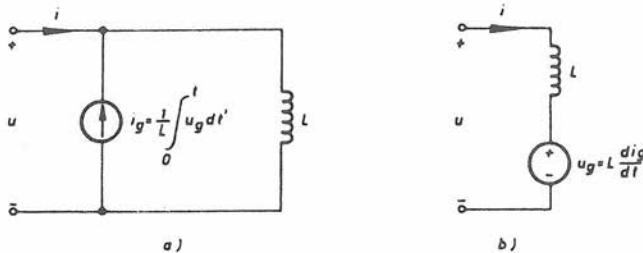
Analogno, pišući Kirchhoffov zakon struja za čvorište na krugu prema sl.2.5.2 imamo jednadžbu

$$i = i_g - \frac{1}{R} u \quad /2.5.2/$$

Budući da je  $i_g \triangleq u_g/R$ , obje su jednačbe iste, pa su zato i predstavljene istom karakteristikom u  $i$ - $u$  ravnini.

Serijski spoj naponskog izvora i otpora  $R$  prema sl.2.5.1.a) naziva se Théveninov ekvivalentni krug. Paralelni spoj strujnog izvora i otpora  $R$  prema sl.2.5.1.b) naziva se Nortonov ekvivalentni krug.

Razmotrimo sada linearni vremenski nepromjenljivi induktivitet, s početnom strujom  $i(0) = 0$ . Neka je tome induktivitetu paralelno priključen nezavisni strujni izvor, kao što je prikazano na sl. 2.5.3.a). Potražimo ovom spoju ekvivalentan krug sa stanovišta ekvivalencije dvopola.



Sl. 2.5.3

Primjenjujući KZS na paralelni spoj induktiviteta i strujnog izvora, slijedi da je struja kroz induktivitet  $L$  jednaka

$$i_L = i + i_g \quad /2.5.3/$$

Napon na priključnicama ovog spoja  $u(t)$  jednak je naponu na induktivitetu  $L$ , odnosno

$$u = L \frac{di_L}{dt} \quad /2.5.4/$$

Uvrštavajući jednačbu /2.5.3/ u /2.5.4/ imamo

$$u = L \frac{di}{dt} + L \frac{di_g}{dt} = u_L + u_g \quad /2.5.5/$$

Dobiveni rezultat pokazuje, da je napon na priključnicama  $u(t)$  jednak sumi napona na istom induktivitetu  $L$  kroz kojega bi prolazila struja  $i(t)$ , i napona  $u_g(t)$  kojega bi npr. proizvodio naponski izvor takav, da je uvijek

$$u_g \triangleq L \frac{di_g}{dt} \quad /2.5.6/$$

To drugim riječima znači, da se paralelni spoj prema sl. 2.5.3.a) može nadomjestiti s ekvivalentnim serijskim spojem istog induktiviteta  $L$  i nezavisnog naponskog izvora  $u_g$ , prema sl.2.5.3.b).

Iz /2.5.6/ slijedi i inverzija, tj. da bi ovi spojevi bili ekvivalentni, mora i strujni izvor  $i_g(t)$  (sl.2.5.3.a)) u ovisnosti od naponskog izvora  $u_g(t)$  (sl.2.5.3.b)) biti jednak

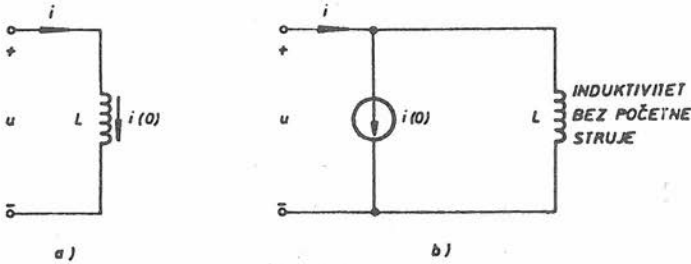
$$i_g \triangleq \frac{1}{L} \int_0^t u_g(t') dt' \quad /2.5.7/$$

I ovi se spojevi na sl.2.5.3 nazivaju Nortonovim (a) odnosno Théveninovim (b), jednakopravno kao analogne kombinacije otpora i izvora u primjeru na sl. 2.5.1.

Razmotrimo jednadžbu /2.1.6/ koja tvrdi da je za svaki  $t \geq 0$ , struja u grani s linearnim vremenski nepromjenljivim induktivitetom  $L$  suma od dva člana. Prvi je struja te grane  $i(0)$  u  $t = 0$ , tj. početna struja u induktivitetu. Drugi je član struja grane s induktivitetom  $L$  u nekom vremenu  $t$ , ako u  $t=0$ , taj induktivitet ima početnu struju jednaku nuli.

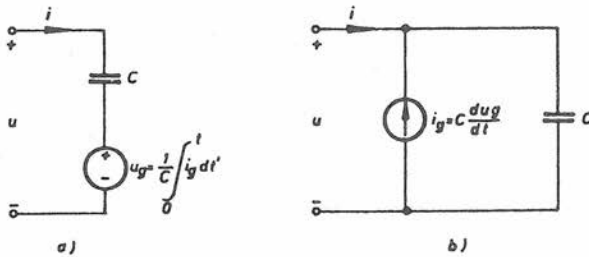
Ako slijedimo razmišljanja iz prošlog primjera, dolazimo do zaključka. *Induktivitet s početnom strujom  $i(0)$  ekvivalentan je paralelnom spoju istog induktiviteta s početnom strujom jednakom nuli i izvora konstantne struje veličine  $i(0)$  (Sl.2.5.4).*

Ovaj se vrlo koristan rezultat često koristi u metodama analize mreža koje ćemo kasnije upoznati.



Sl. 2.5.4

Za slijedeći primjer uzmimo linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet, s početnim naponom  $u(0) = 0$ . Ako je tome kapacitetu serijski priključen nezavisni naponski izvor, imamo spoj prema sl. 2.5.5.a). Potražimo ovom spoju ekvivalentan krug sa stanovišta ekvivalencije dvopola.



Sl. 2.5.5

Primjenjujući KZN na serijski spoj kapaciteta i naponskog izvora, slijedi da je napon na kapacitetu C jednak

$$u_C = u - u_g \quad /2.5.8/$$

Kroz ovaj serijski spoj teče ista struja  $i(t)$  kao i kroz kapacitet C, odnosno

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad /2.5.9/$$

Iz jednadžbi /2.5.8/ i /2.5.9/ slijedi

$$i = C \frac{du}{dt} - C \frac{du_g}{dt} = i_C - i_g \quad /2.5.10/$$

Dobiveni rezultat pokazuje, da je struja  $i(t)$  jednaka razlici između struje kroz isti kapacitet  $C$  koji bi bio pod naponom  $u(t)$ , i struje  $i_g(t)$  koju bi npr. proizvodio strujni izvor takav, da je uvijek

$$i_g \triangleq C \frac{du_g}{dt} \quad /2.5.11/$$

To drugim riječima znači, da se serijski spoj prema sl.2.5.5.a) može nadomjestiti ekvivalentnim paralelnim spojem istog kapaciteta  $C$  i nezavisnog strujnog izvora  $i_g$  prema sl. 2.5.5.b).

Iz /2.5.11/ slijedi i inverzija, tj. da bi ovi spojevi bili ekvivalentni, mora i naponski izvor  $u_g(t)$  (sl.2.5.5.a)) u ovisnosti od strujnog izvora  $i_g(t)$  (sl.2.5.5.b)) biti jednak

$$u_g \triangleq \frac{1}{C} \int_0^t i_g(t') dt' \quad /2.5.12/$$

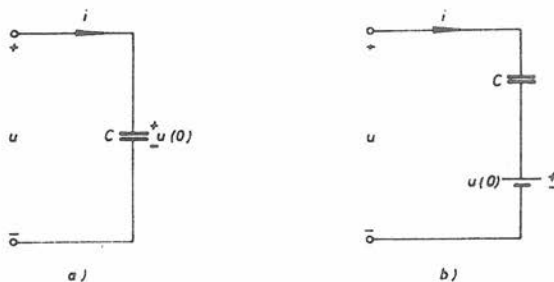
I ovi se spojevi na sl.2.5.5 nazivaju Théveninovim (a), odnosno Nortonovim (b), jednakopravno kao analogne kombinacije u prošlim primjerima.

Razmotrimo još jednadžbu /2.1.11/ koja tvrdi da je za svaki  $t \geq 0$ , napon grane s linearnim vremenski nepromjenljivim kapacitetom  $C$  suma od dva člana. Prvi je napon te grane  $u(0)$  u  $t=0$ , tj. početni napon na kapacitetu. Drugi je član napon grane s kapacitetom  $C$  u nekom vremenu  $t$ , ako u  $t=0$ , taj kapacitet ima početni napon jednak nuli.

Primjenjujući prethodno izloženo u ovom poglavlju, dolazimo do zaključka. *Kapacitet s početnim naponom  $u(0)$  ekvivalentan je serijskom spoju istog kapaciteta s početnim naponom jednakim nuli i*



izvorom konstantnog napona veličine  $u(0)$  (Sl.2.5.6).



Sl. 2.5.6

Ekvivalencija u svim ovim primjerima, specijalan je slučaj Thévenin - Nortonovog teorema ekvivalencije mreža, koji će kasnije biti općenitije izložen.

## 2.6. ZAVISNI IZVORI

U elektrotehnici postoje i naprave, koje niti približno ne mogu biti nadomještavane modelima, sastavljenim isključivo od elemenata mreža, koje smo do ovog mjesta prikazali. Zato je potrebno uvesti jedan novi tip elemenata koji je nezamjenjiv kod modeliranja takvih elektroničkih komponenata kao što su npr. vakuumske cijevi ili tranzistori.

Te ćemo elemente nazvati *zavisnim izvorima*, a negdje se nazivaju i upravljanim izvorima. S obzirom na broj priključnica, zavisni izvori su četveropoli. Zato pokazuju slična svojstva s do sada upoznatim četveropolnim elementima mreža, koje čak mogu u odredjenim kombinacijama i nadomještavati.

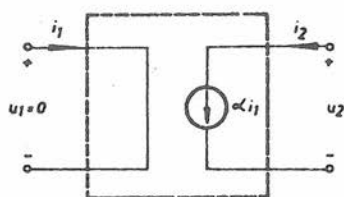
Po definiciji je zavisni izvor element mreže koji ima dvije grane, gdje je uvijek grana 2 ili naponski ili strujni izvor, dok je grana 1 kratkospojna grana ili prekinuta grana. Valni oblik izvora u grani 2 je funkcija ili napona prekinute grane 1 ili struje kratkospojne grane 1. Drugim riječima, izvor u grani 2 je zavisan (ili upravljan) od napona ili struje

je druge grane, tj. grane 1.

Iz ovog se može lako ustanoviti, da imamo četiri moguće kombinacije, iz koje slijede četiri glavna tipa zavisnih izvora.

Karakterizacija svakog od tih, bit će data na slijedećim slikama 2.6.1 do 2.6.4.

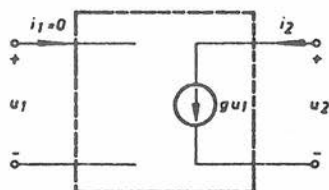
### 2.6.1. Strujno zavisni strujni izvor



Sl. 2.6.1

$$\alpha = \frac{i_2}{i_1} \dots \text{prijenosni omjer struja}$$

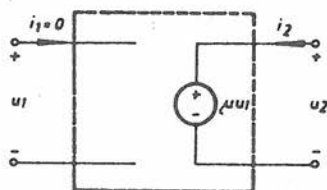
### 2.6.2. Naponski zavisni strujni izvor



Sl. 2.6.2

$$g = \frac{i_2}{u_1} \dots \text{prijenosna vodljivost}$$

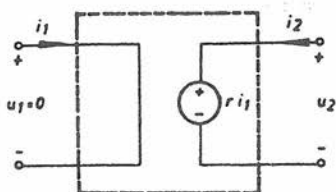
### 2.6.3. Naponski zavisni naponski izvor



Sl. 2.6.3

$$\mu = \frac{u_2}{u_1} \dots \text{prijenosni omjer napona}$$

#### 2.6.4. Strujno zavisni naponski izvor

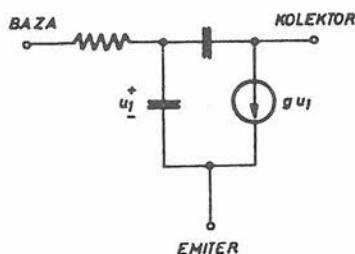


Sl. 2.6.4

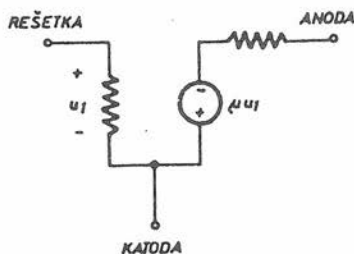
$$r = \frac{u_2}{i_1} \dots \text{prijenosna otpornost}$$

#### 2.6.5. Mreže sa zavisnim izvorima

Ove četiri vrste zavisnih izvora bit će linearni vremenski nepromjenljivi elementi, ako su koeficijenti  $\alpha, g, \mu, r$  konstante. Takvi će samo biti razmatrani u ovom tekstu, budući da se većina elektroničkih komponenata (naročito pri malim promjenama signala) daje s njima zadovoljavajuće modelirati. Ne odstupajući znatno od takvih uvjeta rada i uz relativno nisko frekvencijsko područje poticajnog signala, mogu se tranzistor i vakuumaska trioda nadomjestiti mrežama prema sl. 2.6.5 i 2.6.6.



Sl. 2.6.5

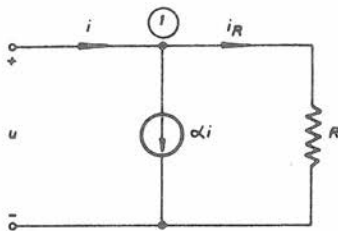


Sl. 2.6.6

Ovi su primjeri znatno pojednostavnjeni, jer im je prvenstvena svrha prikaz modeliranja uređaja upravo sa zavisnim izvorima, zbog čega su ti elementi i uvedeni u teoriju

električkih mreža. Ta se uloga zavisnih izvora veoma razlikuje od uloge nezavisnih izvora, koji reprezentiraju generatore signala - ulazne poticaje u mreže.

Uvodjenje zavisnih izvora omogućava simuliranje nekih pojava, što se s drugim elementima ne bi moglo postići. Tako npr. razmatrajmo krug prema slici 2.6.7.



Sl. 2.6.7

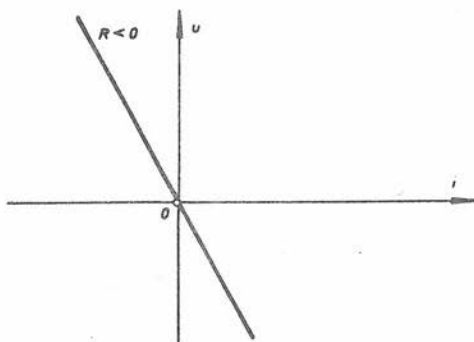
Primjenimo li KZS na čvor ① imamo

$$i_R = (1 - \alpha) i \quad /2.6.1/$$

Odnos napona i struje na ulazu tog dvopola je prema tome

$$u = R i_R = (1 - \alpha) R i \quad /2.6.2/$$

Zavisni izvor (uz  $\alpha > 0$ ) uzrokuje dakle, da se ovakav dvopol ponaša kao negativan, a u ovom primjeru i linearan otpor. U vezi s usvojenom definicijom za otpore, ovaj bi u ravnnini i-u imao karakteristiku prema sl. 2.6.8.



Sl. 2.6.8

## 2.7. SNAGA I ENERGIJA

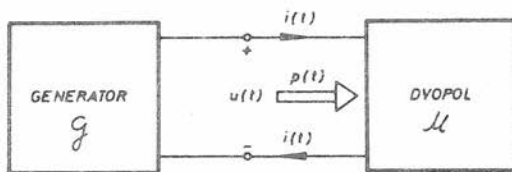
Koncepcija energije odnosno snage, nalazi se u najosnovnijim postulatima fizikalne znanosti. Ovdje ćemo se ukratko osvrnuti samo na one aspekte tih pojmova, koji su u vezi s linearnim elementima električnih mreža.

Opće definicije koje se odnose na energiju u električkim mrežama već smo (uzgred) spomenuli u odjeljku 1.3.4 o pasivnosti električnih mreža. Preglednosti radi, mi ih ovdje ipak eksplicitno navodimo.

Osnovnu fizikalnu činjenicu u ovom razmatranju o snazi i energiji u električkim mrežama interpretirat ćemo slijedećim riječima.

*Trenutna snaga koja ulazi u dvopol jednaka je produktu napona i struje na prilazu tog dvopola, s tim da su im referentna usmjerenja pridružena.*

To je shematski prikazano na sl. 2.7.1.



Sl. 2.7.1

Ako s  $p(t)$  označimo ovu, u svakom trenutku  $t$  dodjeljivanu snagu od generatora (ili ostalog "vanjskog" dijela mreže) dvopolu, onda vrijedi izraz

$$p(t) = u(t) i(t)$$

/2.7.1/

Očigledno je, da se promjenom bilo koje od referencija napona ili struje, mijenja i predznak odnosno referencija snage  $p(t)$ .

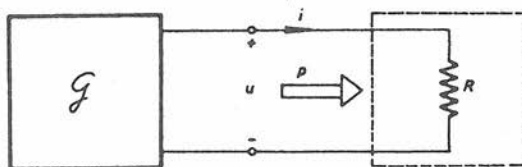
Trenutna snaga  $p(t)$  bit će izražena u vatima, ako je napon  $u(t)$  izražen u voltima, a struja  $i(t)$  u amperima.

Budući da je energija (u džaulima) integral snage, to je energija koju je generator dostavio dvopolu od trenutka  $t_0$  do trenutka  $t$  (ili koja je u tom vremenskom intervalu ušla u dvopol), jednaka po definiciji

$$W(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t p(t') dt' = \int_{t_0}^t u(t') i(t') dt' \quad /2.7.2/$$

Vratimo se sada s ovih općenitih tvrdnji na elemente mreža i odredimo njihovo ponašanje u odnosu na snagu i energiju.

Razmotrimo najprije slučaj, da je ovaj dvopol grana u kojoj se nalazi samo linearan vremenski nepromjenljivi otpor  $R$  (sl.2.7.2).



Sl.2.7.2

Budući da je karakteristika tog elementa u dvopolu data s  $u=Ri$ , onda je dodijeljena energija dvopolu u intervalu od  $t_0$  do  $t$ , jednaka prema /2.7.2/

$$W_R(t_0, t) = \int_{t_0}^t R i^2(t') dt' \quad /2.7.3/$$

Budući da je  $i(t)$  realna funkcija vremena, integrand je uvijek pozitivan, što znači da je energija stalno u tom intervalu ( $t - t_0 > 0$ ) ulazila u dvopol. Smjer snage se dakle uvijek poklapa s referentnim. Drugim riječima, otpor je apsorbirao, "potrošio" tu količinu energije, jer smjer toka snage nikad ne može biti obrnut. Po zakonu o održanju energije ona ne može biti nikad uništena, pa bi bilo pravilnije reći da je ona "električki izgubljena". To treba interpretirati tako, da je električka energija transformirana u neki neelektrički oblik, odnosno u ovom konkretnom slučaju - u toplinsku energiju.

Pretpostavimo sada, da je grana u ovom dvopolu sastavljena (umjesto od otpora), od linearnog vremenski nepromjenljivog induktiviteta  $L$  ili linearnog vremenski nepromjenljivog kapaciteta  $C$ . Uz standardne referencije kao prije vrijedi, da je dostavljena energija induktivitetu odnosno kapacitetu prema izrazu /2.7.2/ jednaka

$$\begin{aligned} W_L(t_0, t) &= \int_{t_0}^t \left( L \frac{di}{dt'} \right) i dt' = \int_{i_0}^i L i' di' = \\ &= \frac{1}{2} L (i^2 - i_0^2) \end{aligned} \quad /2.7.4/$$

odnosno

$$\begin{aligned} W_C(t_0, t) &= \int_{t_0}^t u \left( C \frac{du}{dt'} \right) dt' = \int_{u_0}^u C u' du' = \\ &= \frac{1}{2} C (u^2 - u_0^2) \end{aligned} \quad /2.7.5/$$

Kod toga su  $i$  i  $i_0$  struje kroz induktivitet  $L$  u trenucima  $t$  i  $t_0$ , odnosno  $u$  i  $u_0$  naponi na kapacitetu  $C$  u trenucima  $t$  i  $t_0$ .

Dobili smo rezultat, da u toku nekog vremenskog intervala dostavljena energija ovim elementima može biti pozitivna ili negativna, već prema veličinama struja odnosno napona

na krajevima tog intervala. Prema tome smjer stvarnog toka snage u odnosu na taj dvopol, može biti u smjeru referentnog, ili protivno od referentnog usmjerenja snage. Možemo reći, da ovi elementi (induktivitet i kapacitet) mogu energiju i primiti od vanjskog svijeta, i vratiti ju nazad. Ovi elementi dakle, *uskladištavaju ili spremaju električnu energiju*. Oni su *električni rezervoari ili spremnici električne energije*.

Ako se trenutak  $t_0$  upravo poklapa s početkom promatranja i priključenja induktiviteta, koji je u tom  $t_0=0$  bez početne struje ( $i_0(0) = 0$ ), onda iz /2.7.4/ slijedi da je

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad /2.7.6/$$

energija induktiviteta  $L$  u bilo kojem trenutku  $t$ . Bez obzira na smjer struje,  $W_L(t) > 0$  ako je  $i(t) \neq 0$ .

Isto tako, ako se trenutak  $t_0$  upravo poklapa s početkom promatranja i priključenja kapaciteta, koji je u tom  $t_0=0$  bez početnog napona ( $u_0(0) = 0$ ), onda iz /2.7.5/ slijedi da je

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) \quad /2.7.7/$$

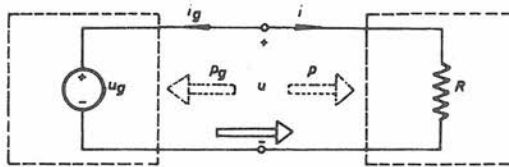
energija kapaciteta  $C$  u bilo kojem trenutku  $t$ . Bez obzira na polaritet napona,  $W_C(t) > 0$  ako je  $u(t) \neq 0$ .

Nakon ovih pasivnih elemenata mreža, razmotrimo energetske raspodjelu prema sl. 2.7.3, da bi utvrdili smjer toka snage za nezavisni izvor (ovdje npr. naponski). Iako to može biti vidljivo i iz sl. 2.7.2, ovdje ćemo izvod dosljedno provesti.

U jedan dio mreže stavljamo samo naponski izvor  $u_g(t)$ , a u ostali "vanjski svijet" linearni vremenski nepromjenljivi otpor ( $R > 0$ ).

Time je ovaj sistem zatvoren, i nekog trećeg "vanjskog svijeta" u električkom smislu više nema!





Sl. 2.7.3

Za oba dvopola, prema referencijama njihovih napona i struja stavljene su (crtkano) i referencije ulaznih snaga prema definiciji datoj u početku poglavlja. Te snage iznose

$$\text{za izvor } \dots p_g = u_g i_g \quad /2.7.8/$$

$$\text{za otpor } \dots p = u i \quad /2.7.9/$$

Suma ovih snaga mora biti jednaka nuli, jer po zakonu o održanju energije, ne možemo imati ni višak ni manjak energije u zatvorenom sistemu

$$p_g + p = 0 \quad /2.7.10/$$

Budući da je  $u = Ri$ , onda uz /2.7.9/ imamo

$$p_g + u i = p_g + (Ri) i = 0 \quad /2.7.11/$$

a iz toga na kraju

$$p_g = - Ri^2 \quad /2.7.12/$$

Rezultat da je ulazna snaga za dvopol s izvorom negativna znači, da je stvarni smjer toka snage izlazni, odnosno ka-

ko se moglo i očekivati, u smjeru pune strelice na slici 2.7.3.

Prema tome, možemo (slikovito) reći da izvor "prima negativnu energiju" iznosa

$$W(t_0, t) = - \int_{t_0}^t R i^2(t') dt' \quad /2.7.13/$$

To je isto, kao kad kažemo da "predaje pozitivnu energiju"  $W_R(t_0, t)$  otporu  $R$  prema /2.7.3/. Po apsolutnim iznosima obje su dakako jednake.

Čitaocu se ostavlja za vježbu da sličan račun provede za dvopol prema primjeru na slici 2.6.7.

### 3. J E D N A D Ź B E     P E T L J I , J E D N A D Ź B E Č V O R O V A     I     J E D N A D Ź B E     S T A N J A

Već se je iz dosadašnjeg toka analize mreža moglo zaključiti, da postoje dva skupa osnovnih postulata. Jedan se sastojao od utvrđenih naponsko-strujnih odnosa u različitim granama mreže. To je sistem jednađbi kojeg određuje ponašanje elemenata na priključnicama, te se mogu smatrati karakteristikama grana. One mogu biti linearne ili nelinearne, a prodiskutirane su u drugoj glavi ovog teksta. Drugi skup osnovnih postulata proističe iz primjene Kirchhoffovih zakona struje i napona. Kao što je već u prvoj glavi rečeno, oni se mogu svesti na dva sistema jednostavnih linearnih algebarskih jednađbi. U jednom od njih varijable su struje u granama, dok su u drugom to naponi na granama.

Metodičnost kod primjene ova dva skupa osnovnih postulata u analizi mreža, evidentna je kod rješavanja dosta jednostavnih mreža s malobrojnim varijablama, a naročito ako su karakteristike grana linearne i vremenski invarijabilne. U slučajevima mreža kompleksnije topološke konfiguracije s velikim brojem varijabli, jednađbe osnovnih postulata treba upotrijebiti s novim saznanjima, da bi put ka rješenju mreže bio što izravniji i sigurniji.

Naš je krajnji cilj, da uspijemo odrediti za sve grane neke mreže valne oblike napona i struja. Katkada se to ukratko naziva - riješiti mrežu. Za to nam treba biti poznato:

- topološka konfiguracija mreže, tj. sve grane i čvorišta, kao i način njihove međusobne povezanosti
- "sadržaj" grana, tj. vrsta i parametri idealiziranih elemenata u granama
- eventualno postojanje ili nepostojanje (u trenutku  $t=0$  početka našeg promatranja mreže) početnog stanja mreže. To se stanje odnosi na skup struja u granama s induktivitetima, te napona na granama s kapacitetima, sve u času  $t=0$ .

Ovime bi mreža bila definirana i dalje preostaje "rješavanje" mreže po tom modelu metodama koje su prikazane u predstojećem tekstu.

Pretpostavimo da analiziramo mrežu s ukupno  $N_b$  grana. To znači da treba odrediti  $N_b$  napona grana i  $N_b$  struja grana. Karakteristike grana ("sadržaj grana", skup elemenata u granama) snabdijevaju nas s ukupno  $N_b$  jednažbi. S druge strane postoji više nego  $N_b$  petlji (zatvorenih putova, zatvorenih kontura) i više nego  $N_b$  čvorišta. Na taj način, primjena KZS i KZN na sve čvorove i petlje dat će nam više nego  $N_b$  jednažbi. Budući da imamo samo  $2N_b$  varijabli, neke od ovih jednažbi moraju biti redundantne.

To znači da su suvišne, da nam ne daju nikakvu novu informaciju o mreži, odnosno da su *linearno zavisne* o onim preostalim neredundantnim jednažbama.

Da bi se kod svake analize odmah mogao napisati skup upravo onoliko neredundantnih jednažbi koliko ima varijabli odnosno nepoznanica, potrebno je najprije obnoviti iz matematike pojam linearne ovisnosti sistema simultanih jednažbi. Prisjetimo se: *jedan skup jednažbi bit će linearno zavisan, ako najmanje jedna od ovih jednažbi može biti izražena kao linearna kombinacija ostalih.*

Primijenimo li ovo načelo (ne provodeći ovdje čitav matematički dokaz), na skup linearnih jednažbi KZS napisanih za sve čvorove, te na skup linearnih jednažbi KZN napisanih za sve petlje, dolazimo do slijedećih rezultata.

- Za mrežu koja ima ukupno  $N_b$  grana i ukupno  $N_v$  čvorova najveći broj linearno nezavisnih jednažbi Kirchhoffovog zakona struja iznosi  $N_v - 1$ .
- Za mrežu koja ima ukupno  $N_b$  grana i ukupno  $N_v$  čvorova najmanji broj linearno nezavisnih jednažbi Kirchhoffovog zakona napona iznosi  $N_b - (N_v - 1)$ .

Proceduru, po kojoj se sistematično odabiru čvorišta i petlje da bi se na njih primijenili KZS i KZN, postupno ćemo otkrivati u tekstu koji predstoji.

### 3.1. JEDNADŽBE PETLJI

Razmotrimo najprije Kirchhoffov zakon struja (KZS). Našli smo da ima  $N_V - 1$  nezavisnih jednadžbi od ukupno  $N_b$  strujnih varijabli.

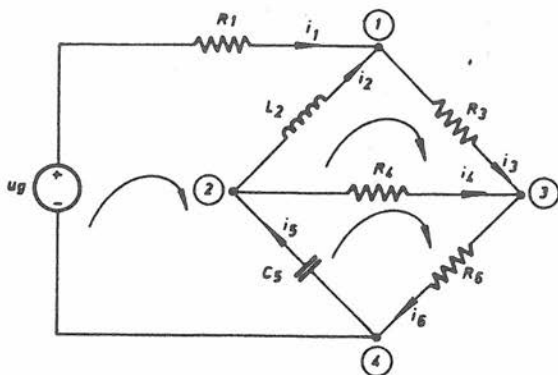
Budući da je obično  $N_b \gg N_V$ , te ima više nepoznanica nego jednadžbi, takav sistem ne bi bio jednoznačno rješiv. Ako mi, međjutim, znamo vrijednosti  $N_b - (N_V - 1)$  struja u granama (po volji odabranima), onda sve preostale struje mogu biti jednoznačno određene u ovisnosti od ovih poznatih.

No, sjetimo se, da je broj  $N_b - (N_V - 1)$ , upravo broj nezavisnih jednadžbi Kirchhoffovog zakona napona (KZN).

Doduše, ove jednadžbe imaju za varijable napone na granama, kojih je isto  $N_b$  - koliko ima i grana.

Ako mi uspijemo izraziti ove varijable napona na granama u ovisnosti od  $N_b - (N_V - 1)$  strujnih varijabli onda imamo isti broj nepoznanica i jednadžbi, pa je rješenje sistema moguće. To je u osnovi put rješavanja koji slijedimo.

Proceduru ćemo ilustrirati pomoću primjera na sl.3.1.1. Ukupno je  $N_V = 4$  čvora i  $N_b = 6$  grana na toj mreži.



Sl. 3.1.1

Prema poznatom ima  $N_V - 1 = 4 - 1 = 3$  nezavisne jednađžbe KZS i  $N_b - (N_V - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$  nezavisne jednađžbe KZN.

Naponski izvor u seriji s  $R_1$  računa se kao jedna grana. Ako ih računamo kao dvije grane tad je  $N_b = 7$ , ali sad će biti i još jedan čvor na spojištu izvora sa  $R_1$ . U tom je slučaju  $N_V = 5$ , iz čega slijedi opet isti broj  $N_b - (N_V - 1) = 7 - (5 - 1) = 3$ , kao broj nezavisnih jednađžbi KZN.

Primijenimo li Kirchhoffov zakon struja na čvorove ①, ③ i ④, dobivamo da se sve struje u granama 2, 4 i 5, mogu izraziti u ovisnosti od struja grana 1, 3 i 6.

Imamo za čvorove

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} & -i_1 - i_2 + i_3 = 0 & + & i_2 = i_3 - i_1 & /3.1.1/ \\ \textcircled{3} & -i_3 - i_4 + i_6 = 0 & + & i_4 = i_6 - i_3 & /3.1.2/ \\ \textcircled{4} & i_1 + i_5 - i_6 = 0 & + & i_5 = i_6 - i_1 & /3.1.3/ \end{array}$$

Na slici 3.1.1. tri kružne strelice u oknima, pokazuju orijentaciju petlji koje smo izabrali za pisanje jednađžbi petlja po KZN. No, zamislimo mi sada, da su ove strelice kružne struje petlji, sa referencijama istim kao obilazni smjerovi petlja - dakle tzv. *konturne struje*.

Usporedjenje sa slikom pokazuje, da su te struje petlja identične sa strujama grana 1, 3 i 6. Sve dakle ostale struje u granama mogu biti izražene u ovisnosti od ovih struja petlji, odnosno konturnih struja. Ovaj skup jednađžbi, koji povezuje struje u granama sa strujama petlji, nazivaju se negdje mrežnim transformacijama.

Napišimo sada jednađžbe KZN za ova tri okna, koja su označena na slici. Pretpostavivši da su naponske referencije uz repove referencija struja u granama (pridruženi referentni smjerovi) dobivamo:

$$\begin{array}{llll} u_1 - u_2 & & - u_5 & = 0 & /3.1.4/ \\ & u_2 + u_3 & - u_4 & = 0 & /3.1.5/ \\ & & u_4 + u_5 & + u_6 = 0 & /3.1.6/ \end{array}$$

Kao slijedeći korak, treba uvrstiti odnose struja-napon prema elementima grana, da bi se izrazili naponi na granama u ovisnosti o strujama u granama. Ako upotrebimo još jednađžbe mrežnih transformacija, ostaju kao nepoznanice jedino struje petlji.

Tako dolazimo do slijedećeg sistema jednađžbi:

$$i_1 R_1 - u_g + L_2 \frac{d}{dt} (i_3 - i_1) - \frac{1}{C_5} \int_0^t (i_6 - i_1) dt' - u_5(0) = 0 \quad /3.1.7/$$

$$L_2 \frac{d}{dt} (i_3 - i_1) + R_3 i_3 - R_4 (i_6 - i_3) = 0 \quad /3.1.8/$$

$$R_4 (i_6 - i_3) + \frac{1}{C_5} \int_0^t (i_6 - i_1) dt' + u_5(0) + R_6 i_6 = 0 \quad /3.1.9/$$

Ako skupimo poznate članove na desnu stranu i malo sredimo, ostaje

$$\begin{aligned} i_1 R_1 + L_2 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_5} \int_0^t i_1 dt' - L_2 \frac{di_3}{dt} - \frac{1}{C_5} \int_0^t i_6 dt' = \\ = u_g + u_5(0) \end{aligned} \quad /3.1.10/$$

$$- L_2 \frac{di_1}{dt} + (R_3 + R_4) i_3 + L_2 \frac{di_3}{dt} - R_4 i_6 = 0 \quad /3.1.11/$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{C_5} \int_0^t i_1 dt' - R_4 i_3 + (R_4 + R_6) i_6 + \frac{1}{C_5} \int_0^t i_6 dt' = \\ = - u_5(0) \end{aligned} \quad /3.1.12/$$

Razmotrimo oblik ovih jednađžbi. To su obične linearne diferencijalne jednađžbe s tri nepoznate struje petlji. Ako su na ovaj način poredani članovi, onda kažemo da je jednađžba u standardnom obliku. Rješavanje ovakovih jednađžbi može se provoditi na više načina, no obično to zahtijeva dosta vremena. U ovom momentu, mi pretpostavljamo da se rješenje može naći. Iz toga slijedi, da će te tri struje petlji biti poznate za svako

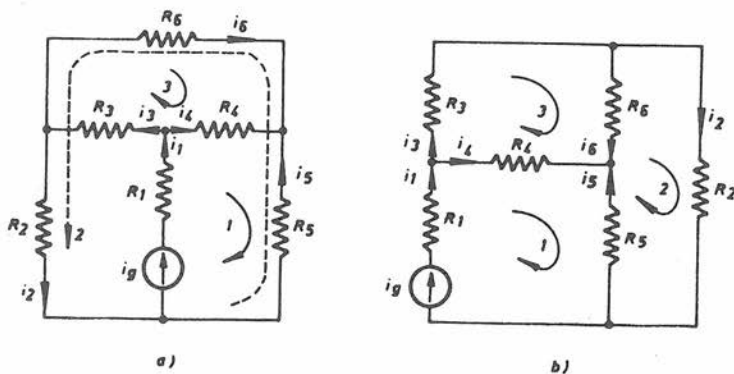
vrijeme  $t$ . Budući da se ove struje u granama mogu izraziti u ovisnosti o strujama petlji, to i one postaju sada poznate. Karakteristike grana, omogućavaju tada odredjivanje i napona na granama, te je tako rješavanje mreže sada kompletirano.

Potpuno je svejedno, koje smo tri struje u granama izabrali, da bi izrazili preostale tri pomoću njih. Međutim, zbog postojanja izvjesne simetrije u jednadžbama, obično se odlučujemo za one konturne struje, koje se podudaraju s petljama po kojima pišemo jednadžbe KZN. Toga ćemo se obično i ubuduće držati.

Opisani put rješavanja (naziva se i analiza petlje), je općenita procedura koju možemo slijediti za svaku mrežu. Međutim, mora se obratiti pažnja na dvije specifične situacije. To su slučajevi prisustva strujnih izvora u mreži, i prisustva zavisnih izvora u mreži.

Iako niti jedan od ovih slučajeva, ne komplicira situaciju do te mjere da stvara nepremostive poteškoće, mi ćemo s pomoću primjera dati ilustraciju tih slučajeva da bi se uočile posebnosti koje iz njih ipak proizlaze.

Izabrat ćemo jednu mrežu kojoj, samo zbog jednostavnosti, stavljamo otpore u sve grane. Naime, ono što želimo pokazati, ne ovisi o sastavu elemenata u granama (Sl.3.1.2.a).



Sl.3.1.2



Ovdje je opet 6 grana i 4 čvora, što znači da preostaju 3 nezavisne jednačbe KZN.

Izaberimo struje petlji tako, da je struja od strujnog izvora identična s jednom od struja petlji.

To uvijek može biti urađeno za svaki rješivi problem. Da bi to učinili vidljivijim, možemo ovu mrežu nacrtati i prema sl.3.2.1.b).

Sa ovakvim izborom petlji, struje petlji su identične sa strujama u granama  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ . Ako napišemo naponske jednačbe i u isto vrijeme uvrstimo naponsko-strujne relacije od pojedinih grana, možemo pisati

$$R_1 i_1 + R_4 (i_1 - i_3) + R_5 (i_1 - i_2) + u_g = 0 \quad /3.1.13/$$

$$R_5 (i_2 - i_1) + R_2 i_2 + R_6 (i_2 - i_3) = 0 \quad /3.1.14/$$

$$R_4 (i_3 - i_1) + R_6 (i_3 - i_2) + R_3 i_3 = 0 \quad /3.1.15/$$

Ovdje imamo 3 jednačbe, u kojima izgleda da ima 4 nepoznanice, i to tri struje petlji i jedan napon preko strujnog izvora kojega smo označili s  $u_g$ . Međutim, sjetimo se da je  $i_1$  identična s  $i_g$  koja je poznata, što ostavlja samo tri nepoznanice. Nadalje, posljednje dvije jednačbe ne sadržavaju  $u_g$ , samo  $i_2$  i  $i_3$  su nepoznate u tim jednačbama. Napišemo li ih u standardnom obliku, rezultat će biti

$$(R_2 + R_5 + R_6) i_2 - R_6 i_3 = R_5 i_1 = R_5 i_g \quad /3.1.16/$$

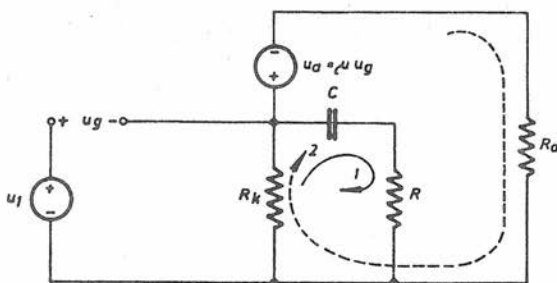
$$-R_6 i_2 + (R_3 + R_4 + R_6) i_3 = R_4 i_1 = R_4 i_g \quad /3.1.17/$$

Ovo su dvije jednačbe sa dvije nepoznanice i mi ih možemo riješiti. Kad jednom imamo rješenja za  $i_2$  i  $i_3$ , treba ih substituirati u prvu jednačbu, i dobiti napon na strujnom izvoru.

Kad ne bi izabrali petlje na taj način, da se strujni izvor pojavljuje u samo jednoj petlji, onda se nepoznati  $u_g$  pojavljuje u više nego jednoj jednačbi. To ne bi dopustilo ovo gornje pojednostavnjenje.

Dakle, kada je strujni izvor u mreži, rješenje se pojednostavnjuje time, što se smanjuje broj jednačbi koje treba riješiti, za količinu prisutnih izvora struje.

Razmotrimo sada modifikacije jednačbi petlja, kada su prisutni zavisni izvori. Primjer prema slici 3.1.3 je katodno sljedilo s dodatnim elementima u katodnom krugu.



SI. 3.1.3

U ovoj mreži ima  $N_b = 4$  grane, dok je broj čvorova  $N_v = 3$ , tako da preostaju dvije nezavisne jednačbe KZN.

Izabравši za struje petlja one koje su na slici naznačene sa strelicama, možemo za njih napisati jednačbe KZN, i istovremeno "u glavi" substituirati relacije u-i od pojedinih grana.

Rezultat će biti

$$R i_1 + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt' + u_C(0) + R_k(i_1 + i_2) = 0 \quad /3.1.18/$$

$$R_a i_2 + R_k(i_1 + i_2) + u_a = 0 \quad /3.1.19/$$

Sada treba izraziti napon zavisnog izvora, koji je zadan kao  $u_a = \mu u_g$ , u ovisnosti od struja  $i_1$  i  $i_2$ . Iz slike vidimo da je

$$-u_1 + u_g - R_k(i_1 + i_2) = 0 \quad /3.1.20/$$

odakle imamo

$$u_g = u_1 + R_k(i_1 + i_2) \quad /3.1.21/$$

odnosno napon na priključnicama zavisnog izvora

$$u_a = \mu [u_1 + R_k(i_1 + i_2)] \quad /3.1.22/$$

Uvrštavajući /3.1.22/ u /3.1.19/ i malo sredjujući dobiva se konačno

$$(R + R_k)i_1 + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt' + R_k i_2 = -u_C(0) \quad /3.1.23/$$

$$R_k(\mu + 1)i_1 + [R_k(\mu + 1) + R_a]i_2 = -\mu u_1 \quad /3.1.24/$$

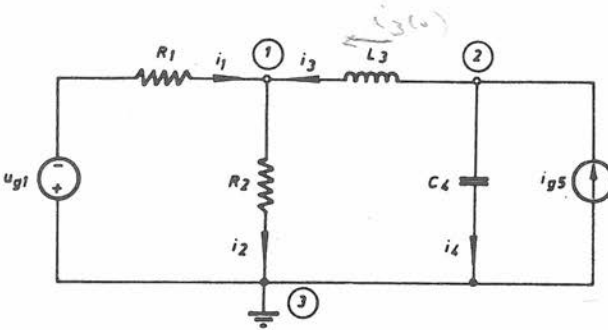
Ovo je traženi skup jednažbi. Vidimo da prisutnost zavisnog izvora ne poremećuje znatno proceduru kod pisanja jednažbi petlja. Postoji samo jedan dodatni zahtjev za izražavanjem napona (ili struje) zavisnog izvora u ovisnosti o strujama petlja, što se najčešće jednostavno izvodi.

### 3.2. JEDNADŽBE ČVOROVA

Vratimo se opet na razmatranje jednažbi Kirchhoffovog zakona napona. Rekli smo da ima ukupno  $N_b - (N_v - 1)$  nezavisnih jednažbi KZN, za  $N_b$  varijabli uz  $N_v$  čvorova. Ako znamo vrijednosti za  $N_b - [N_b - (N_v - 1)] = N_v - 1$  varijabli, preostale mogu biti jednoznačno određene u ovisnosti od ovih poznatih. Sjetimo se da je  $N_v - 1$  broj nezavisnih jednažbi Kirchhoffovog zakona struja.

No, ove jednažbe KZS same po sebi uključuju  $N_b$  varijabli, ali kao struje grana. Ako bude moguće izraziti ovih  $N_b$  strujnih varijabli u ovisnosti od  $N_v - 1$  naponskih varijabli bit će isti broj i nepoznanica i jednažbi.

Procedura je dakle posve slična onoj, koju smo proveli za dobivanje sistema jednačbi petlja. Tada smo substituirali jednačbe KZS (pisane kao mrežne transformacije) zajedno s odnosima napon-struja u granama u jednačbe KZN. Sada za dobivanje sistema jednačbi čvorova obrćemo postupak, i substituiramo jednačbe KZN zajedno s odnosima napon-struja u granama, u jednačbe KZS. Ilustrirat ćemo problem na slijedećem primjeru (sl.3.2.1).



Sl. 3.2.1

Brojeći  $u_{g1}$  u seriji s  $R_1$  kao jednu granu imamo pet grana i tri čvora. Izaberimo jedan od čvorova (bilo koji) kao referentni čvor. Razmatrajmo zatim napone između referentnog čvora i svakog od onih ostalih tako, da je pozitivna naponska referencija uvijek na drugoj strani od referentnog čvora. Ove napone nazvat ćemo naponima čvorova.

Bilo koji napon grane može se tada napisati kao razlika između dva napona čvora. Jedan od ova dva može biti i referentni čvor, tako da napon grane postaje jednak naponu čvora (osim možda po predznaku). U gornjem primjeru, uzevši kao referentni čvor, ③ imamo:

$$\text{napon grane 2} = - \text{napon grane 1} = \text{napon čvora } \textcircled{1}$$

$$\text{napon grane 4} = - \text{napon grane 5} = \text{napon čvora } \textcircled{2}$$

$$\text{napon grane 3} = \text{napon čvora } \textcircled{2} - \text{napon čvora } \textcircled{1}$$

Ovi izrazi, koji povezuju napone grana i napone čvorova nazivaju se katkada čvorne transformacije.

Napišimo sada jednadžbe KZS, kojih treba biti  $N_V - 1 = 3 - 1 = 2$  nezavisnih. Mi sada možemo izabrati bilo koja dva (od tri) čvorova za pisanje KZS. Čvor kojega ispuštamo ne mora u principu biti onaj, izabran kao referentni. Međutim, ako baš njega ispuštimo dobivamo jednadžbe u standardnoj formi i simetričnom rasporedu (ako nema zavisnih izvora). Zato se redovno odlučujemo za takav izbor. Prema tome, u našem primjeru, jednadžbe KZS za čvorove ① i ② bit će

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad /3.2.1/$$

$$i_3 + i_4 - i_{g5} = 0 \quad /3.2.2/$$

Ako najprije uvrstimo odnose struja-napon u ove izraze, dobivamo rezultat koji sadržava napone grana. Ove napone grana treba još pretvoriti u napone čvorova, prema prethodno izvedenim međjusobnim odnosima. Tako iz /3.2.1/ i /3.2.2/ dobivamo

$$\frac{u_1 + u_{g1}}{R_1} + \frac{u_1}{R_2} - \frac{1}{L_3} \int_0^t (u_2 - u_1) dt' - i_3(o) = 0 \quad /3.2.3/$$

$$\frac{1}{L_3} \int_0^t (u_2 - u_1) dt' + i_3(o) + C_4 \frac{du_2}{dt} - i_{g5} = 0 \quad /3.2.4/$$

gdje su  $u_1$  i  $u_2$  naponi čvorova ① odnosno ②. Ako transformiramo ove jednadžbe tako da saberemo neke članove, a ostale prebacimo na desnu stranu ostaje

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_1 + \frac{1}{R_3} \int_0^t u_1 dt' - \frac{1}{L_3} \int_0^t u_2 dt' = \\ = - \frac{u_{g1}}{R_1} + i_3(o) \end{aligned} \quad /3.2.5/$$

$$- \frac{1}{L_3} \int_0^t u_1 dt' + C_4 \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L_3} \int_0^t u_2 dt' = i_{g5} - i_3(o) \quad /3.2.6/$$

Ove su jednadžbe, baš kao i jednadžbe petlja, diferencijalne jednačbe. Izvori struje i napona su poznate veličine,

kao i početni uvjeti, a nepoznati su naponi čvorova. Pretpostavimo sada da riješimo te jednačbe i dobijemo napone čvorova. Čvorne transformacije dat će nam onda rješenja za napone grana. Struje grana takodjer će biti poznate iz naponsko-strujnih odnosa pojedinih grana. Analiza mreže metodom čvorova bila bi time kompletna. Procedura koja je opisana naziva se negdje i analizom čvorova.

Postoji jedna situacija, koja može dovesti do poteškoća kod primjene analize čvorova. Razmatrajmo npr. mrežu koja uključuje transformator. Jednačbe za KZS mogu se napisati bez problema. Drugi korak u analizi je substituiranje u-i odnosa pojedinih grana u jednačbe KZS, gdje nailazimo na poteškoću. Za dva vezana induktiviteta odnosi napona i struje su dati izrazima /2.3.6/ i /2.3.7/.

Ovi izrazi daju napone u ovisnostima od struja, a za jednačbe KZS treba ih invertirati. Ako integriramo obe strane u granicama od 0 do t imamo

$$\int_0^t u_1 dt' = L_1 i_1' - L_1 i_1(0) + M i_2 - M i_2(0) \quad /3.2.7/$$

$$\int_0^t u_2 dt' = M i_1 - M i_1(0) + L_2 i_2 - L_2 i_2(0) \quad /3.2.8/$$

ili sredivši

$$L_1 i_1 + M i_2 = \int_0^t u_1 dt' + L_1 i_1(0) + M i_2(0) \quad /3.2.9/$$

$$M i_1 + L_2 i_2 = \int_0^t u_2 dt' + M i_1(0) + L_2 i_2(0) \quad /3.2.10/$$

Obe od ovih jednačbi sadržavaju  $i_1$  i  $i_2$ . Da bi ih riješili za  $i_1$  moramo pomnožiti prvu jednačbu s  $L_2$ , a drugu s  $M$  i međjusobno ih odbiti. Ovo će eliminirati  $i_2$ . Slično će  $i_1$  biti eliminiran, ako prvu jednačbu pomnožimo s  $M$ , a drugu s  $L_1$ , i opet te dvije jednačbe odbijemo. Rezultat ovih operacija jest

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_1 dt' - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_2 dt' +$$

$$+ i_1(0) \quad /3.2.11/$$

$$i_2 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_2 dt' - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_1 dt' +$$

$$+ i_2(0) \quad /3.2.12/$$

Očito ove jednadžbe vrijede samo za nesavršeni transformator, jer bi za savršeni transformator nazivnici na desnoj strani bili jednaki nuli, što ne daje jednoznačno rješenje.

Uglavnom vidi se, da je analiza čvorova moguća i u slučajevima kada je induktivna veza prisutna u mreži. Onda su, vidimo, izrazi nešto složeniji.

Zaključit ćemo prikaz metoda analizom petlja i analizom čvorova sa slijedećim opaskama.

Oba ova pristupa rješavanju električkih mreža dovela su nas do sistema linearnih diferencijalnih jednadžbi. Za linearne vremenski invarijabilne mreže s jednim ulazom i jednim izlazom, ovaj se sistem svodi na jednu diferencijalnu jednadžbu n-tog reda s konstantnim koeficijentima po izlaznoj varijabli. Njihovo je rješenje standardnim analitičkim postupcima, bez primjene numeričkih metoda i elektroنيčkog računara, često nemoguće dobiti. To je redovan slučaj kada se radi o kompleksnijim mrežama, s relativno većim brojem elemenata, koje su k tome dosta isprepletene konfiguracije. Tada obično red te diferencijalne jednadžbe premašuje brojku dva i time je njeno rješavanje veoma otežano. Ako se još radi o poticajnoj funkciji složenijeg valnog oblika rješavanjem mreže smo nekad dovedeni do nepremostivih poteškoća.

Medjutim, u najvećem broju slučajeva susrećemo se s jednostavnijim primjerima. Kod njih se već na prvi pogled (s malo iskustva i uvježbavanja), može zaključiti o rezultatu i bez formalnog rješavanja bilo sistema jednadžbi petlja, bilo sistema jednadžbi čvorova. Osim toga, često je u jednostavnim krugovima i nepotrebno čisto formalno provoditi čitavu proceduru, recimo, jednadžbi petlja. To znači da ne moramo baš uvijek i odredjivati koje petlje dovode do nezavisnih jednadžbi, uvrštavati odnose izmedju struja petlji i struja u granama, itd. Često se čak pogodnije i brže dolazi do rezultata, ako se uopće ne primjenjuju isključivo jednadžbe petlja ili isključivo jednadžbe čvorova, nego se istovremeno upotrebe obje vrste jednadžbi. To tada dovodi do mješanih varijabli struja i napona. Katkada sistem jednadžbi, uz malo vježbe postaje evidentan, već na temelju jednog pogleda na shemu zadane mreže, pa se izravno i piše.

Prema tome, niti jedna od ovih prikazanih općenitih metoda nije uvijek i najjednostavnija za sve probleme. Na temelju svakog individualnog zadatka, treba izabrati pristup ili sistem rješavanja, koji najbolje odgovara.

### 3.3. JEDNADŽBE STANJA

U analizi petlja kod pisanja jednadžbe KZN, upotrebili smo kao varijable struje petlja, dok smo u analizi čvorova kod pisanja jednadžbi KZS izabrali kao varijable napone čvorova. U oba su se slučaja pojavljivali članovi s derivacijama i članovi s integralima tih varijabli, a sve je rezultiralo sistemom linearnih integro-diferencijalnih jednadžbi. Ako bi se tražio stacionarni odziv na sinusoidalni poticaj, najadekvatniji bi pristup tim jednadžbama bio u primjeni simboličkog ("jw") računa. Studentima viših godina je ta metoda dobro poznata, pa se u okviru ovog teksta neće ponavljati.

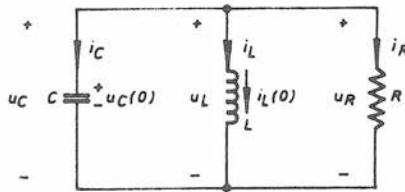


U slučajevima drugačijih valnih oblika poticaja, ove integro-diferencijalne jednačbe u sistemu (ili petlja ili čvorova), moraju biti najprije pretvorene u diferencijalne jednačbe drugog reda, jednostavnim deriviranjem svake koja sadržava integral. Budući da obično želimo znati odziv za jednu odredjenu varijablu, ostale varijable moramo eliminirati. Rezultat te eliminacije je  $n$ -tog reda diferencijalna jednačba po toj varijabli. Za ukupni odziv nužno je poznavati početne uvjete, dakle  $y(0)$ ,  $y'(0)$ , ...,  $y^{(n-1)}(0)$ , gdje je  $y$  dotična varijabla bilo iz jednačbi petlja, bilo iz jednačbi čvorova. Kao što smo već prije izložili, ti su uvjeti rezultat početnog stanja u mreži, a ono je obično poznato u ovisnosti od početnih napona na kapacitetima i početnih struja kroz induktivitete.

Najčešće je potrebno provesti prethodnu analizu mreže, da bi se iz tih poznatih veličina odredili početni uvjeti. Ta se prethodna analiza mora ponoviti za svaku pojedinu varijablu kojoj tražimo analitički izraz. Imajući prema tome diferencijalnu jednačbu i početne uvjete po jednoj od varijabli, tu jednačbu treba riješiti nekom od prikladnih metoda. Pod pretpostavkom da je riješimo, preostale varijable se lakše iznalaze uvrštavanjem dobivenog rezultata nazad u prvotne jednačbe iz sistema.

Budući da smo zaključili da se moraju uzeti u obzir i početni uvjeti, logično se nameće prednost izbora napona na kapacitetima i struja kroz induktivitete kao varijabla mreža, s tim da se niti jedna druga varijabla ne pojavljuje u jednačbama (osim eventualno poticajnih). Tako izabrane varijable nazivamo onda *varijablama stanja*. Jednačbe u koje su uključene varijable stanja, proizlaze iz primjene KZS i KZN na jedan sistematski način. Kao što ćemo vidjeti, standardni je oblik *jednačbi stanja* skup diferencijalnih jednačbi prvog reda, u kojima je izražena derivacija svake varijable stanja kao funkcija varijabli stanja, poticaja i eventualno njegovih derivacija. Za linearne je mreže ova funkcija linearna.

Razmotrimo paralelni RLC krug prema sl.3.3.1, sa ciljem da odredimo ponašanje kruga pod utjecajem isključivo početnog stanja u krugu.



Sl.3.3.1

Ako su elementi u ovoj mreži linearni i vremenski nepromjenljivi onda KZS primjenom na jedino čvorište daje jedna-džbu

$$C \frac{du_C}{dt} + Gu_R + i_L = 0 \quad /3.3.1/$$

Primjena KZN na bilo koju petlju daje jedna-džbu

$$u_C = u_R = u_L \quad /3.3.2/$$

Budući da vrijedi  $u_L = L di_L/dt$  možemo ove jedna-džbe pre-urediti u slijedeći sistem jedna-džbi za  $t \geq 0$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_C \quad /3.3.3/$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{G}{C} u_C \quad /3.3.4/$$

Kao što smo već uvodno najavili, ove simultane dife-rencijalne jedna-džbe prvog reda nazivaju se *jedna-džbe stanja* kruga prema sl.3.3.1. Par veličina  $(i_L(t), u_C(t))$  naziva se *stanje kruga u trenutku t*. Par veličina  $(i_L(0), u_C(0))$  naziva se *početno stanje* (kruga u  $t=0$ ).

Iz teorije diferencijalnih jedna-džbi poznato nam je, da to početno stanje zajedno s jedna-džbama /3.3.3/ i /3.3.4/, jednoznačno određuje vrijednosti  $(i_L(t), u_C(t))$  za svaki  $t \geq 0$ .

Zato možemo smatrati parove vrijednosti  $(i_L(t), u_C(t))$  koordinatama jedne točke u ravnini  $i_L$ - $u_C$ . Ako  $t$  raste od 0 prema  $\infty$ , točka  $(i_L(t), u_C(t))$  iscrtava krivulju koja počinje u točki  $(i_L(0), u_C(0))$ . Ova krivulja naziva se *trajektorija prostornog stanja*, a ravnina  $i_L$ - $u_C$  *prostorno stanje* tog kruga.

Primijenimo li matričnu notaciju, možemo promatrati par veličina  $(i_L(t), u_C(t))$  kao komponente vektora  $x(t)$ , koji ima hvatište u ishodištu koordinatnog sistema.

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} \quad /3.3.5/$$

Vektor  $x(t)$  naziva se *vektor stanja* ili ukratko *stanje*. Taj je vektor definiran za svaki  $t \geq 0$  u prostornom stanju. Njegove komponente, struja  $i_L$  kroz induktivitet i napon  $u_C$  na kapacitetu, nazivaju se *varijable stanja*.

Uzmimo da su npr. parametri ovog kruga  $R = 1\Omega$ ,  $L = 1H$  i  $C = 1F$ , a početno stanje  $i_L(0) = 1A$  i  $u_C(0) = 1V$ . Rješavanje diferencijalne jednadžbe po varijablama  $i_L$  odnosno  $u_C$  dalo bi odzive za svaki  $t \geq 0$  oblika

$$i_L(t) = 2 e^{-\frac{t}{2}} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t - 60^\circ \right)$$

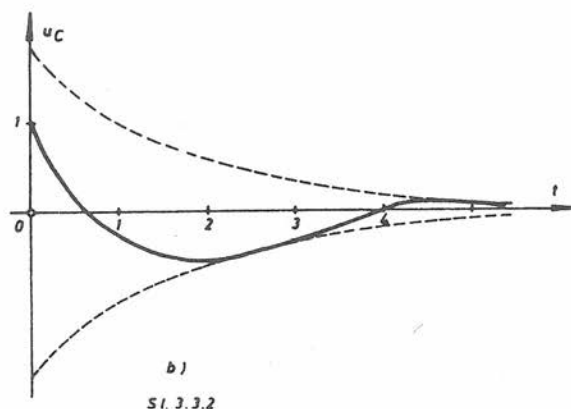
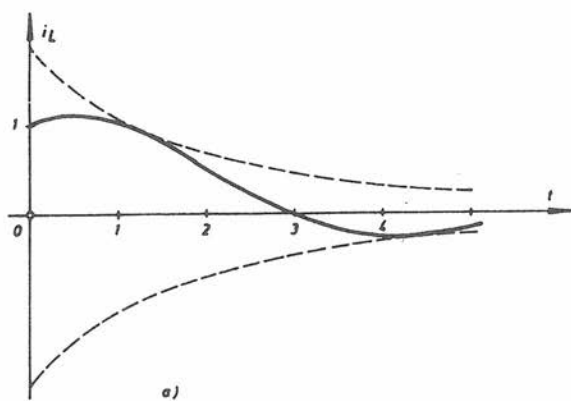
$$u_C(t) = 2 e^{-\frac{t}{2}} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t + 60^\circ \right)$$

Ovi su odzivi prikazani na sl.3.3.2 u ravnini  $i_L$ - $t$  odnosno  $u_C$ - $t$ . Na osnovi toga dobivena je trajektorija stanja prema sl.3.3.3.

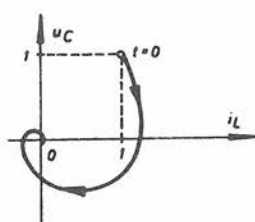
Jednadžbe stanja /3.3.3/ i /3.3.4/ mogu se napisati u matričnoj formi kao funkcije vektora stanja prema izrazu

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad /3.3.6/$$

gdje su



SI. 3.3.2



SI. 3.3.3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix}$$

/3.3.7/

$$i \quad x(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix} \quad /3.3.8/$$

Matrična jednačina /3.3.6/ slična je skalarnoj  $dx/dt = Ax$ , koja ima poznato rješenje  $x(t) = x(0)e^{At}$ . Po analogiji s tim rješenjem je matrične jednačine

$$x(t) = x(0) e^{At} \quad /3.3.9/$$

gdje je  $e^{At}$  matrica koja ovisi o  $t$  i  $A$ . U ovom je slučaju treba shvaćati kao funkciju kojom preslikavamo vektor početnog stanja  $x(0)$  u vektor stanja  $x(t)$  u vremenu  $t$ .

Kao što skalarnu eksponencijalnu funkciju možemo prikazati redom potencija, predlažemo i matricu  $e^{At}$  slijedećim redom

$$e^{At} = 1 + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad /3.3.10/$$

Svaki je član ovog reda matrica, pa je prema tome  $e^{At}$  također matrica.

Da bi približno mogli izračunati trajektoriju služimo se jednom jednostavnom metodom računanja točku po točku. Ta metoda je zasnovana na pretpostavci, da je za vrijeme dovoljno malog intervala vremena  $\Delta t$ , brzina  $dx/dt$  vrha vektora stanja  $x(t)$  približno konstantna. Iz toga slijedi da je trajektorija u tom intervalu dio pravca. Ako počnemo od početnog stanja  $x(0)$  u  $t=0$  imamo najprije

$$\frac{dx}{dt}(0) = Ax(0) \quad /3.3.11/$$

Budući pretpostavljamo, da je brzina tokom daljnjeg intervala  $(0, \Delta t)$  konstantna, možemo pisati razvoj u Taylorov red za prva dva člana

$$x(\Delta t) \approx x(0) + \frac{dx}{dt}(0) \Delta t = x(0) + Ax(0) \Delta t \quad /3.3.12/$$

Za slijedeći intervala ( $\Delta t$ ,  $2\Delta t$ ) opet pretpostavljamo konstantnu brzinu i računamo je na bazi približne vrijednosti  $x(\Delta t)$

$$\frac{dx}{dt}(\Delta t) = Ax(\Delta t) \quad /3.3.13/$$

Odavde opet analogno koraku /3.3.12/ slijedi

$$x(2\Delta t) \approx x(\Delta t) + Ax(\Delta t) \Delta t \quad /3.3.14/$$

odnosno nastavljajući postepeno računanje približnih vrijednosti, dolazimo do općeg izraza

$$x[(k+1)\Delta t] \approx x(k\Delta t) + Ax(k\Delta t) \Delta t = (1 + \Delta t A) x(k\Delta t) \quad /3.3.15/$$

gdje je  $k=0,1,2,\dots,N$

Ovo računanje stanja korak po korak bilo bi prilično mučno i sporo, kad ne bi bilo programirano za digitalno računalo. Jasno je da sukcesivne približne vrijednosti  $x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x(N\Delta t)$ , računate na ovaj način, teže ka točkama točne trajektorije ako  $\Delta t \rightarrow 0$ , Koliko ćemo se tome približiti ovisi o zahtijevanoj točnosti, "vremenskoj" duljini trajektorije, itd.

Ako bi krug na sl.3.3.1 bio napajan iz strujnog izvora koji je paralelan svim ostalim elementima, mogli bi na sličan način napisati jednadžbe stanja. Prva /3.3.3/ se ništa neće mijenjati jer napon na paralelnom krugu ostaje isti kao kad nije bilo strujnog izvora. U drugoj /3.3.4/ zbog priključenja nove grane jednadžba KZS dobiva jedan član više, pa imamo

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_C \quad /3.3.16/$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{G}{C} u_C + \frac{i_g}{C} \quad /3.3.17/$$

Uz isto početno stanje ( $i_L(0)$ ,  $u_C(0)$ ) kao prije, jednadžba stanja u matričnom obliku postaje slijedećeg općeg oblika

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bw \quad /3.3.18/$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad /3.3.19/$$

$$bw = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} i_g \quad /3.3.20/$$

Matrice  $A$  i  $b$  ovise o elementima kruga, a poticaj je od izvora označen s  $w$ . Jednadžba /3.3.18/ je nehomogena matrična diferencijalna jednadžba prvog reda. Slično kao i skalar-na jednadžba ovog oblika, ova matrična ima opće rješenje

$$x = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-t')} bw(t')dt' \quad /3.3.21/$$

Dokaz da je to stvarno rješenje za trajektoriju ovdje nećemo provoditi. Vrijedno je ipak naglasiti da izraz /3.3.21/ ovisi isto o vrijednosti matrice  $e^{At}$ , kao i u prošlom primjeru. Aproximativna metoda za računanje  $x$  korak po korak koju smo izložili, može se i ovdje primijeniti.

Nije, međjutim, uvijek moguće ovako izravno napisati jednadžbe stanja, gdje se odmah pojavljuju samo varijable stanja i varijable ulaznih električkih veličina. Katkada je nužno da se prethodno eliminiraju ostale varijable. Zato postoji razradjen algoritam za sistematsku proceduru pisanja jednadžbi stanja. Taj je predviđen za određenu klasu električkih mreža. Da bi ga mogli primjenjivati, često je potrebno izvršiti izvjesne modifikacije mreže tako, da upotrebimo

Nortonove odnosno Théveninove ekvivalentne krugove za pojedine grane, ali i da izbjegnemo niz ostalih ograničenja. Iznošenje spomenutog "vodiča" za pisanje jednadžbi stanja kod složenijih mreža, premašuje potrebni opseg ovog teksta.

Na kraju ćemo osnovne ideje iz ovog poglavlja napisati sažeto na slijedeći način.

Kažemo, da su diferencijalne jednadžbe neke mreže napisane u obliku jednadžbi stanja, i da  $x$  predstavlja stanje mreže, ako je taj oblik

$$\dot{x} = f(x, w, t) \quad /3.3.22/$$

Kod toga je  $x$  vektor od npr.  $n$  elemenata;  $w$  predstavlja skup ulaznih veličina, a  $t$  je vrijeme.

Osnovni su razlozi za pisanje jednadžbi mreža u toj formi slijedeći: (1) ovaj oblik daje najveće mogućnosti programiranja za analogno ili digitalno računalo, (2) posve je lagano proširenje analize na nelinearne i vremenski promjenljive mreže (što nije bio slučaj kod analize petlji ili čvorova), i (3) kao jednadžbe stanja, određeni pojmovi iz teorije sistema najbolje korespondiraju s teorijom mreža.



#### 4. O S N O V I   T O P O L O G I J E E L E K T R I Č K I H   M R E Ž A

##### 4.1. LINEARNI GRAF MREŽE

Razmotrit ćemo i upoznati neke termine, s kojima se u teoriji mreža dalje susrećemo. *Topologija* je inače posebna grana primjenjene matematike, koja je prilično opsežna, i za nje no bolje upoznavanje, trebao bi i poseban predmet. Zato naglašavamo, da ćemo ovdje ukratko obraditi samo onaj dio topologije, koji će nam dalje trebati u cilju iznalaženja jedne sistematične procedure za određivanje naponsko-strujnih odnosa neke električke mreže.

Uobičajeno je u nauci i tehnici, da je prvi korak uvijek stanoviti proces apstrahiranja, zanemarivanja nečeg, u cilju izvlačenja na vidjelo bitnih svojstava.

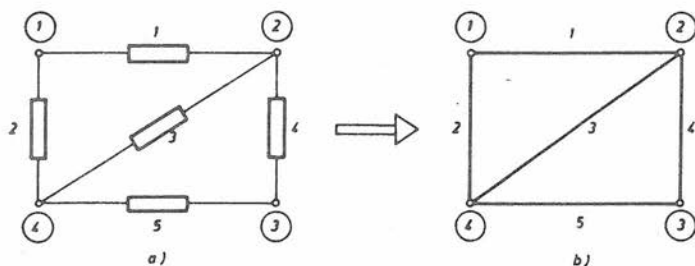
Prije smo vidjeli, da oba Kirchhoffova zakona ne vode računa o prirodi elemenata neke mreže. Kod KZS trebali smo voditi računa samo o sumi svih struja koje ulaze ili izlaze u neki čvor, te da ta suma bude jednaka nuli, a da nijednom riječju nismo spominjali kakav je element u bilo kojoj grani koje čine taj čvor. (Da li je to induktivitet, dioda, itd?). Slično je KZN bio izrečen kao suma svih napona unutar jedne zatvorene konture mreže, suma koja je isto morala biti nula, bez obzira kakvi su elementi (otpori, kapaciteti, i sl.) nanižani duž te konture.

Za Kirchhoffove zakone dakle, bitna je samo konfiguracija, međupovezanost grana, odnosno uobičajeno rečeno topologija mreže.

Prirodno je stoga očekivati, da prvi korak u prikazivanju mreže, dakle prva apstrakcija, bude zanemarivanje prirode elemenata koji čine mrežu, te da tako reduciramo mrežu na tzv. *graf*.

Pretpostavimo da imamo bilo kakav fizikalni sistem, te da se pod određenim uvjetima promatranja, recimo kod frekven-

cijskog opsega koji baš nas zanima, taj sistem reducira na model od pet koncentriranih elemenata. Nas se u prvoj aproksimaciji elementi ne tiču, te ih sve crtamo u shemi kao pravokutnik u grani. To prikazuje sl.4.1.1.a).



Sl. 4.1.1

No, budući da Kirchhoffovi zakoni vrijede bez obzira na karakter ovih pravokutnika, možemo i njih izbaciti iz promatranja. Iz ovog modela s koncentriranim elementima, zamijeniti ćemo svaki element s granom (koja je sad predstavljena sa segmentom linije), a svaku priključnicu tih elemenata s čvorištem (kojega sad predstavljamo točkom). Rezultat toga procesa je tzv. linearni graf mreže.

Prikaz električke mreže u kojem nisu uneseni elementi mreže, nego su unijeta samo njezina čvorišta i grane, predstavlja *linearni graf mreže*. Ili preciznije, *pod grafom smatramo skup čvorova zajedno sa skupom grana sa takovim svojstvima, da svaka grana završava na svakom kraju s čvorom*.

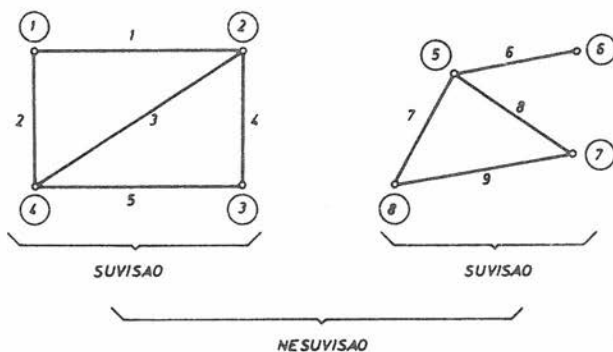
Linearni graf mreže prikazuje samo njezin geometrijski aspekt tj. međusobnu povezanost grana i čvorišta mreže (prema sl.4.1.1.b)). Podaci koji su sadržani u tom linearnom grafu mreže, važni su u analizi i sintezi mreža. Tako se na osnovi linearnog grafa mreže, mogu odrediti i po broju i po sadržaju one nezavisne jednačbe Kirchhoffovih zakona, koje nedvojbeno određuju sve struje i napone u mreži.

Topološka svojstva tih tvorevina, proučava i razmatra posebna grana teorije električkih mreža - *teorija linearnih grafova*.

Od svega toga mi ćemo se upoznati samo s osnovnim definicijama i terminima, koje će poslužiti za preciziranje pojmova s kojima ćemo se u daljnjem razmatranju susretati.

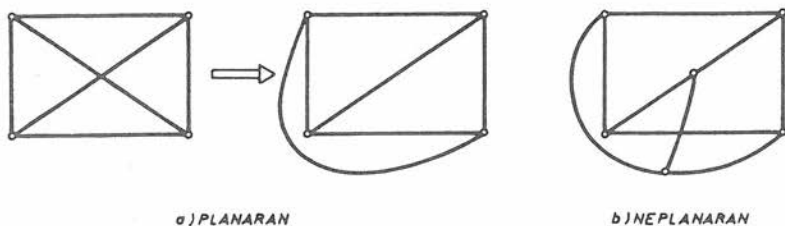
#### 4.2. OSNOVNI POJMOVI IZ TEORIJE GRAFOVA

Linearni graf mreže je *suvisao* ili *povezan*, ako se svakom paru čvorišta grafa koja nisu identična, može pridružiti otvoren put tako da je jedno čvorište toga para početno, a drugo završno čvorište puta. Graf koji nije suvisao zove se *nesuvisao* ili *nepovezan*. Ili, drugačije rečeno, graf je povezan ako postoji najmanje jedan put (uzduž grana grafa) između bilo koja dva čvorišta grafa (Sl.4.2.1).



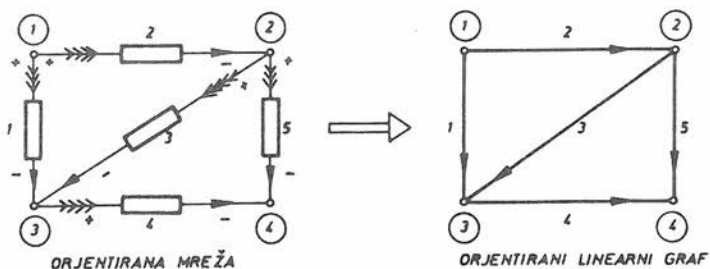
Sl. 4.2.1

Graf je *planaran*, ako se može prikazati u ravnini, tako da se izvan čvorišta ni jedna grana ne ukrštava s drugom. Ako to nije moguće, graf je *neplanaran*. Tako je npr. graf prema sl. 4.2.2.a) ipak planaran, a onaj prema sl.4.2.2.b) neplanaran.



Sl. 4.2.2

Uz danu mrežu, koja ima specificirane referentne smjerove svojih grana, opisani proces apstrahiranja sadržaja grana (elemenata u granama), ne znači i apstrahiranje referentnih smjerova u granama. Dolazimo dakle, do grafa, čije grane imaju referentne smjerove. Takav se graf zove *orjentirani graf* (Sl.4.2.3).



Sl. 4.2.3

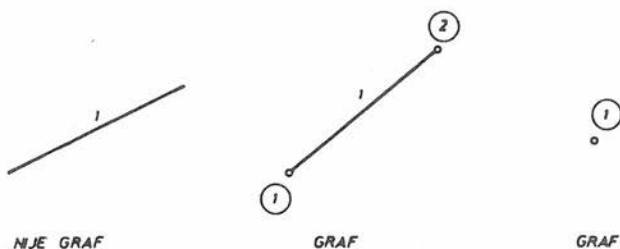
Orjentirani graf je skup čvorova zajedno sa skupom orjentiranih grana, s takvim svojstvima da svaka grana završava na svakom kraju s čvorištem.

Ova usmjerenost ostaje nadalje čvrsto svojstvo grafa. Da bi se izbjegla potreba za dvostrukim obilježavanjem referencija (tj. posebno strujnih, a posebno naponskih), smatrat ćemo vrh strelice smjerom strujne referencije, a rep strelice

(koji se neće posebno obilježavati) plusom naponske referencije. To je u skladu s već poznatim pridruženim referencijama, a znatno pojednostavljuje promatranje. Kao što smo slobodni u izboru referentnih smjerova, slobodni smo primijeniti i ovaj način označavanja. To je stvar dogovora u početku promatranja, a jedino smo dužni da se tog dogovora naknadno striktno pridržavamo.

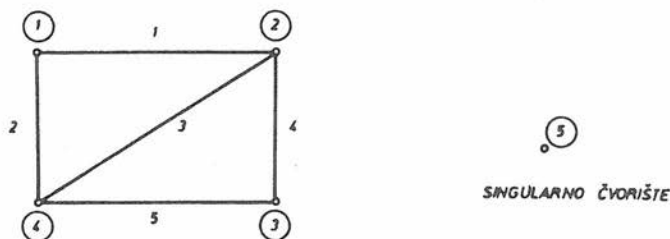
Iz gornjih definicija slijedi, da jedna grana ne može biti bez čvorova na svakom od svojih krajeva. Dakle grana bez čvorova nije graf.

Čvor bez grane, međjutim, može biti smatran grafom. To je onda degenerirani graf (sl.4.2.4).



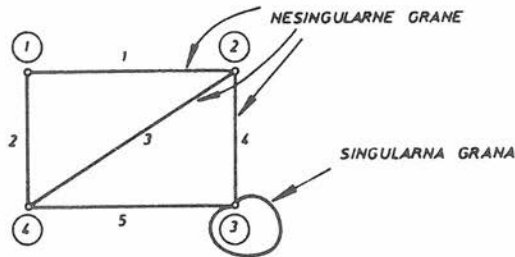
Sl. 4.2.4

Broj grana koji veže par čvorišta može biti bilo koji, uključujući i nulu. Zato jedno čvorište predstavlja najjednostavniji graf. Čvorište koje nije povezano s nijednom granom, naziva se *izolirano* ili *singularno čvorište* (Sl.4.2.5).



Sl. 4.2.5

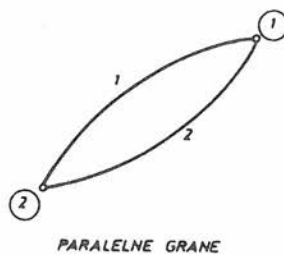
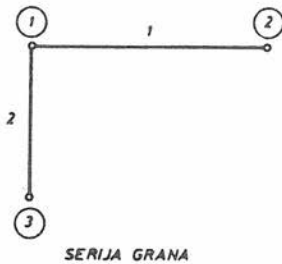
Grana kojoj oba kraja leže u istom čvorištu naziva se *singularna grana*, a grana koja povezuje par različitih čvorišta *nesingularna grana* (Sl.4.2.6 ).



Sl.4.2.6

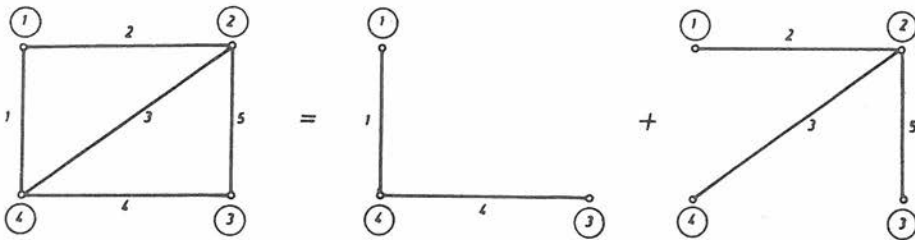
Čvorište i grana koja spaja to čvorište *incidentni* su jedan s drugim. Broj koji kaže, koliko je grana incidentno s nekim čvorištem, naziva se *red čvorišta*. Singularna grana povećava red čvorišta s kojim je incidentna za dva.

Dvije su grane u *seriji*, ako imaju točno jedno zajedničko čvorište, koje nije incidentno ni s jednom daljnjom granom. Dvije su grane *paralelne*, ako su incidentne s istim parom čvorišta (Sl.4.2.6.a)).



Sl.4.2.6 a)

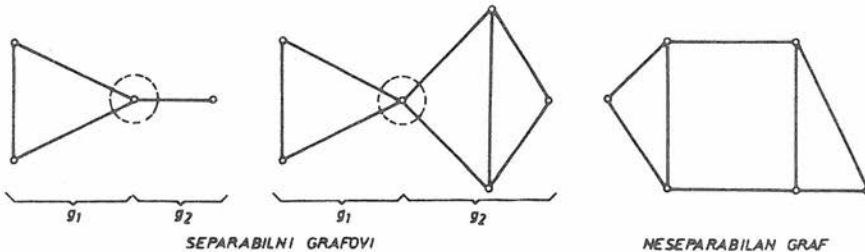
Dio grafa, koji sadrži samo jedan dio njegovih grana zove se *subgraf*. Dva subgrafa jednog te istog grafa, od kojih jedan sadrži sve grane koje nisu sadržane u drugom zovu se *komplementarni*; jedan subgraf je tada komplement drugom. Jedan od mogućih primjera podjele na komplementarne subgrafe prikazuje sl.4.2.7.



Sl. 4.2.7

Grafovi koji imaju svojstvo da se mogu separirati u dva nedegenerirana subgrafa, a koji imaju samo jedan zajednički čvor zovu se *separabilni* ili *rasklopivi* grafovi.

Grafovi koji nisu separabilni zovu se *neseparabilni* ili *nerasklopni* grafovi. Neseparabilni graf ima dakle svojstvo, da rasklopljen u dva povezana nedegenerirana subgrafa, ti subgraffovi imaju međusobno najmanje dva zajednička čvorišta (Sl.4.2.8).



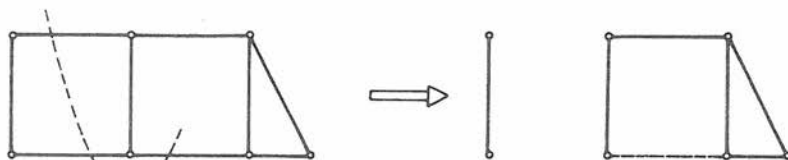
Sl. 4.2.8

Skup grana povezanog grafa nazivamo *rezom* grafa, ako:

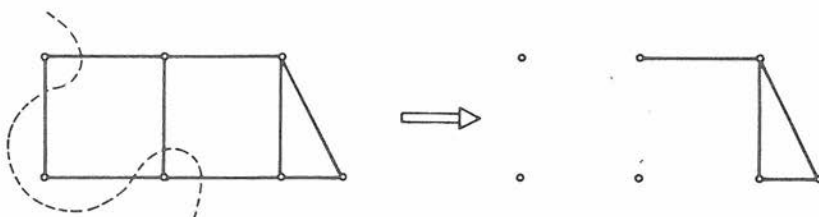
- (1) uklanjanje iz grafa svih grana toga skupa uzrokuje da preostali graf ima točno dva separata dijela, i (2) ako uklanjanje iz grafa svih grana osim jedne (bilo koje) iz tog skupa, ostavlja graf povezan (Sl.4.2.9).



REZ JER SU ZADOVOLJENI (1) I (2)



NIJE REZ JER NIJE ZADOVOLJEN (2)



NIJE REZ JER NISU ZADOVOLJENI (1) I (2)

Sl. 4.2.9

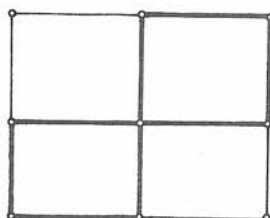
Subgraf nekog grafa naziva se *petljom* grafa, ako je:  
(1) taj subgraf povezan i (2) točno dvije grane od tog subgrafa su incidentne sa svakim čvorištem (Sl.4.2.10).

Prema usvojenoj definiciji linearnog grafa, on se najčešće može nacrtati na nekoliko različitih načina. Tako na primjeru sl.4.2.11, imamo isti graf prikazan kao tri različita *topološka* grafa. Ako unutar neke petlje nema niti jedne grane, onda takva petlja ima i poseban naziv - *okno*. Ako pak izvan neke petlje nema niti jedne grane, onda se naziva *vanjskim oknom*.



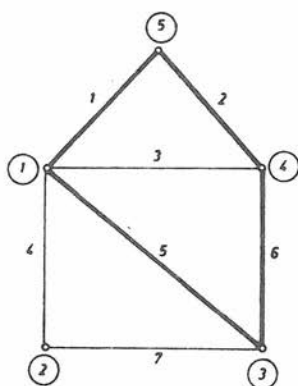


PETLJA

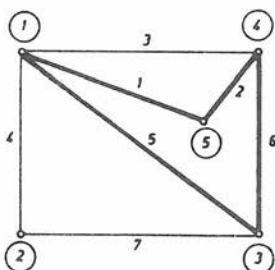


NIJE PETLJA

Sl. 4.2.10

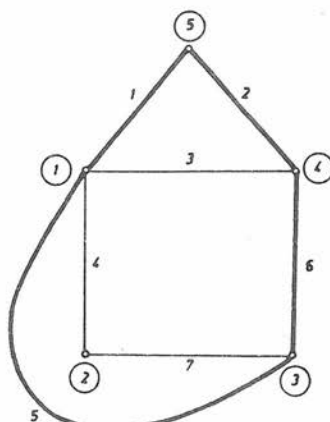


PETLJA



OKNO

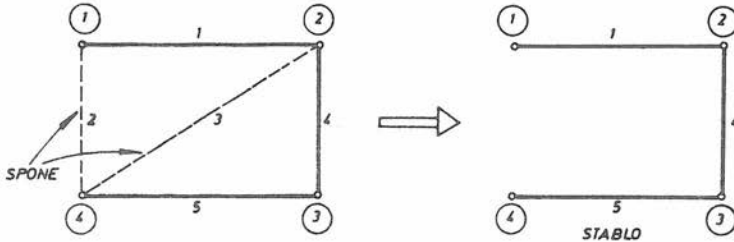
Sl. 4.2.11



VANJSKO OKNO

Suvisao subgraf odabran u suvislom grafu tako da sadrži sva čvorišta grafa, ali ne sadrži petlje, naziva se *stablo* grafa. Svakom suvislom grafu, može se odrediti bar jedno stablo. Grane subgrafa, koji je jedno stablo grafa, zovu se *grane stabla*.

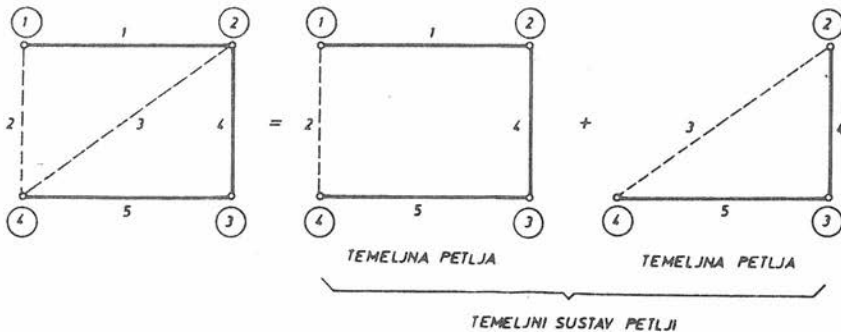
Komplement stablu grafa, zove se *sustav nezavisnih grana*, *spona* ili *spojnica* (Sl. 4.2.12).



Sl. 4.2.12

Petlja koju u suvislom grafu tvori jedna spojnica s granama stabla zove se *temeljna petlja*.

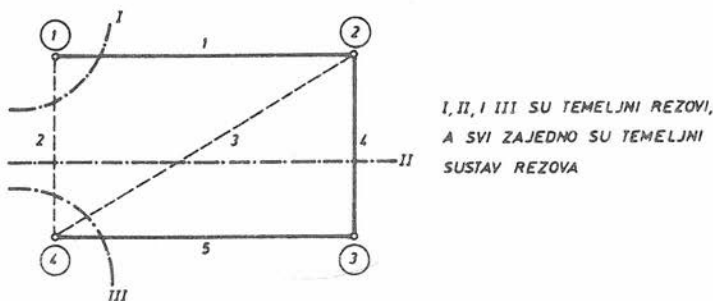
Svakoj grani sustava spojnica pripada samo jedna temeljna petlja. Sve temeljne petlje u suvislom grafu stvorene na bazi jednog stabla čine *temeljni sustav petlji* (Sl. 4.2.13).



Sl. 4.2.13

*Temeljni rez* u suvislom grafu, u odnosu na jedno stablo, tvori skup grana od kojih jedna pripada stablu, a druge sustavu spona, a odabrane su tako da se odstranjenjem toga skupa grana, graf raspada u dva međusobno nesuvizla subgrafa. Svaka grana

stabla pripada samo jednom temeljnom rezu. *Temeljni sustav rezova* tvore svi temeljni rezovi koji se odnose na jedno stablo grafa (Sl.4.2.14).



Sl. 4.2.14

Očigledno je da ima uvijek za jedan manje grana u stablu od broja čvorova ( $N_v$ ), pa je prema tome i broj temeljnih rezova  $N_v - 1$ . Broj spona je razlika između ukupnog broja grana ( $N_b$ ) suvislog grafa i broja grana odabranog stabla. Prema tome je  $N_b - (N_v - 1)$  ujedno i broj temeljnih petlji.

Sličnost ovih brojeva s brojevima nezavisnih jednadžbi KZS i KZN vrlo je indikativna. Ako pišemo jednadžbu KZS za svaki temeljni rez, napisali smo ju ili za jedan čvor ili kao linearnu kombinaciju za više čvorova. Budući da svaki temeljni rez, "reže" samo jednu granu stabla, znači da smo pišući KZS po svim temeljnim rezovima obuhvatili i sve čvorove osim jednog. Toga i ne trebamo, jer jednadžba KZS napisana za njega, mora biti linearna kombinacija jednadžbi svih ostalih temeljnih rezova. Prema tome, ako znamo jednadžbe KZS za sve temeljne rezove, znamo i za taj posljednji čvor, pa ju je izlišno pisati. Ova je dakle  $N_v$ -ta jednadžba za posljednji čvor, zavisna od preostalih  $N_v - 1$  nezavisnih jednadžbi pisanih za sve temeljne rezove.

Isto tako, ako pišemo jednadžbe KZN za svaku temeljnu petlju, onda se napon svake spojnice pojavljuje samo u po jednoj jednadžbi. Samim tim je jasno, da nismo uključili niti jednu izlišnu jednadžbu. Drugim riječima, budući da ima



Ako promatrana mreža ima  $N_b$  grana i  $N_v$  čvorišta, ovaj sistem /4.3.1/ linearnih jednažbi KZS sažima se u izraz

$$\sum_{j=1}^{j=N_b} a_{ij} i_j(t) = 0 \quad /4.3.2/$$

gdje je  $i = 1, 2, \dots, N_v$

Slijedeći potpuno jednaku logiku, može se napisati i sistem linearnih jednažbi KZN. Ako promatrana mreža ima  $N_b$  grana i  $N_m$  petlja imamo

$$\begin{aligned} \text{petlja } 1 &\rightarrow b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \dots + b_{1N_b}u_{N_b}(t) = 0 \\ \text{petlja } 2 &\rightarrow b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) + \dots + b_{2N_b}u_{N_b}(t) = 0 \\ \dots &\dots \rightarrow \dots \dots \dots /4.3.3/ \\ \text{petlja } N_m &\rightarrow b_{N_m 1}u_1(t) + b_{N_m 2}u_2(t) + \dots + b_{N_m N_b}u_{N_b}(t) = 0 \end{aligned}$$

Lako je zaključiti da i koeficijent  $b_{ij}$  ima vrijednosti +1, -1 ili 0, već prema slaganju ili neslaganju referentnih orijentacija grana i petlji, odnosno pripadnosti grana pojedinim petljama.

I ovaj se sistem /4.3.3/ može sažeti u izraz

$$\sum_{j=1}^{j=N_b} b_{ij} u_j(t) = 0 \quad /4.3.4/$$

gdje je  $i = 1, 2, \dots, N_m$

Iz matematike je poznato, da se sistem linearnih jednažbi kao na primjer slijedeći

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\
 \dots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}
 \tag{4.3.5}$$

može napisati u matricnoj formi ovako:

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 x_j \\
 \cdot \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 b_i \\
 \cdot \\
 b_m
 \end{bmatrix}
 \tag{4.3.6}$$

Lako je provjeriti, da množenjem matrica prema /4.3.6/ dobivamo gornji sistem linearnih jednačbi /4.3.5/.

Ovo se sve, međjutim, piše konciznije kao jedna matična jednačba

$$A \cdot x = b \tag{4.3.7}$$

Nameće se samo po sebi, da bi slične sisteme jednačbi KZS i KZN prema /4.3.1/ i /4.3.3/, mogli po istoj logici transformirati u matični oblik. Prije nego to i učinimo, definirat ćemo neke karakteristične matrice, svojstvene upravo orijentiranom grafu mreže.

#### 4.4. TOPOLOŠKE MATRICE GRAFOVA

##### 4.4.1. Matrica incidencije (matrica čvorova)

Po definiciji je *matrica incidencije* povezanog orijentiranog grafa s  $N_v$  čvorova i  $N_b$  grana, matrica

$$A_a = [a_{ij}]_{N_v \times N_b} \quad /4.4.1/$$

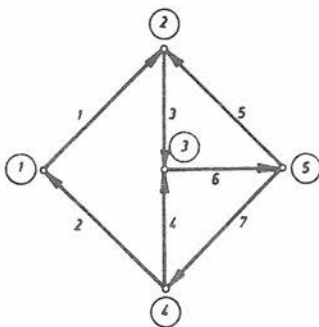
koj svaki red odgovara jednom čvorištu, a svaki stupac jednoj grani tako da je:

$a_{ij} = 1$  ... ako je grana  $j$  incidentna s čvorištem  $(i)$   
i ima referentnu orijentaciju usmjerenu od  
čvora

$a_{ij} = -1$  ... ako je grana  $j$  incidentna s čvorištem  $(i)$   
i ima referentnu orijentaciju usmjerenu  
prema čvoru

$a_{ij} = 0$  ... ako grana  $j$  nije incidentna s čvorištem  $(i)$

Razmatrajmo npr. orijentirani graf prema slijedećoj slici 4.4.1.



Sl. 4.4.1

Matrica incidencije za taj graf prema prethodnoj definiciji izgleda ovako:

|         |    | grane |    |    |    |    |    |   |   |
|---------|----|-------|----|----|----|----|----|---|---|
|         |    | 1     | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7 |   |
| $A_a =$ | 1  | -1    | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1 |
|         | -1 | 0     | 1  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0 | 2 |
|         | 0  | 0     | -1 | -1 | 0  | 1  | 0  | 0 | 3 |
|         | 0  | 1     | 0  | 1  | 0  | 0  | -1 | 0 | 4 |
|         | 0  | 0     | 0  | 0  | 1  | -1 | 1  | 0 | 5 |

čvorovi /4.4.2/

Treba zapaziti jednu karakterističnost matrice incidencije. U svakom stupcu ima samo jedan element vrijednosti 1, a samo jedan -1. To je važno svojstvo te matrice, što logično slijedi iz činjenice, da svaka grana pripada samo dvjema čvorištima, a orijentacija je te grane usmjerena prema jednom, a od drugog čvorišta. Kod ostalih matrica grafa ovakove pravilnosti nažalost nema.

#### 4.4.2. Spojna matrica (matrica krugova, matrica petlji)

Po definiciji je *spojna matrica* povezanog, orijentiranog grafa s  $N_v$  čvorišta i  $N_b$  grana, matrica

$$B_a = [b_{ij}]_{N_m \times N_b} \quad /4.4.3/$$

koj svakom redu odgovara jedna orijentirana petlja, a svakom stupcu jedna grana, s tim da se odabrana referentna orijentacija petlje smatra pozitivnom. (Bez obzira da li je usmjerena u smislu kretanja kazaljke na satu, ili protivno smislu kretanja kazaljke na satu).

Elementi  $b_{ij}$  spojne matrice imaju značenje i vrijednost:

$b_{ij} = 1$  ... ako je grana  $j$  u sastavu petlje  $m_i$ , a orijentacija joj se podudara s odabranom referentnom orijentacijom petlje  $m_i$

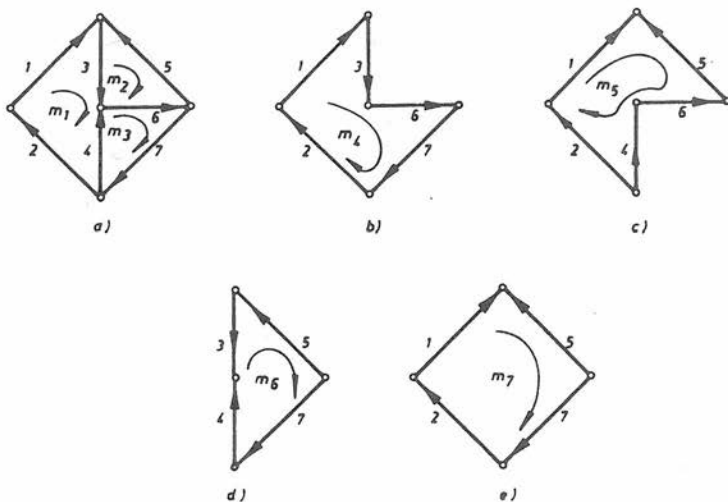


$b_{ij} = -1$  ... ako je grana  $j$  u sastavu petlje  $m_i$ , ali  
joj je orijentacija protivna referentnoj  
orijentaciji petlje  $m_i$

$b_{ij} = 0$  ... ako grana  $j$  nije u sastavu petlje  $m_i$ .

Ukupni broj svih petlji u promatranom grafu neka je  $N_m$ .

Kao primjer uzmimo isti graf kao na prošloj slici 4.4.1  
i potražimo mu spojnu matricu. Prvo je potrebno pronaći sve  
moguće petlje (Sl.4.4.2).



Sl.4.4.2

Oznake čvorova nisu ovdje od važnosti, pa ih ne navodi-  
mo ponovno na ovim subgrafovima, koji služe samo boljem pri-  
kazu odabranih petlji. Uzevši referentne orijentacije u ob-  
zir, dobivamo spojnu matricu ovog grafa:

|         |  | grane |   |    |    |    |    |   |       |        |
|---------|--|-------|---|----|----|----|----|---|-------|--------|
|         |  | 1     | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7 |       |        |
| $B_a =$ |  | 1     | 1 | 1  | -1 | 0  | 0  | 0 | $m_1$ | petlje |
|         |  | 0     | 0 | -1 | 0  | -1 | -1 | 0 | $m_2$ |        |
|         |  | 0     | 0 | 0  | 1  | 0  | 1  | 1 | $m_3$ |        |
|         |  | 1     | 1 | 1  | 0  | 0  | 1  | 1 | $m_4$ |        |
|         |  | 1     | 1 | 0  | -1 | -1 | -1 | 0 | $m_5$ |        |
|         |  | 0     | 0 | -1 | 1  | -1 | 0  | 1 | $m_6$ |        |
|         |  | 1     | 1 | 0  | 0  | -1 | 0  | 1 | $m_7$ |        |

/4.4.4/

#### 4.4.3. Rastavna matrica (matrica rezova)

Po definiciji je *rastavna matrica* povezanog, orijentiranog grafa s  $N_v$  čvorova i  $N_b$  grana, matrica

$$Q_a = [q_{ij}]_{N_k \times N_b} \quad /4.4.5/$$

koj kod koje svaki red odgovara jednom orijentiranom rezu, a svaki stupac jednoj grani, s tim da referentnu orijentaciju svakog reza smatramo pozitivnom, ako je (npr) upravljena od lijeva na desno. (Istim pravom mogla je biti smatrana pozitivnom ona, koja je suprotno - od desna na lijevo - upravljena).

Elementi  $q_{ij}$  rastavne matrice imaju značenje i vrijednost

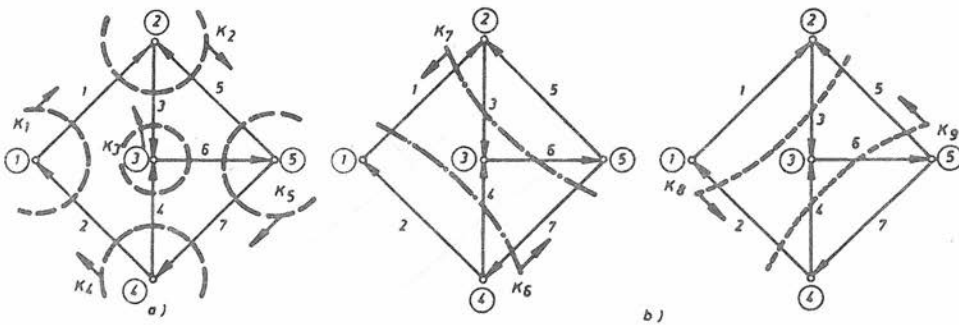
$q_{ij} = 1$  ... ako je grana  $j$  u rezu  $k_i$ , ("presječena" tim rezom), a orijentacija te grane  $j$  podudara se s odabranom referentnom orijentacijom reza  $k_i$

$q_{ij} = -1$  ... ako je grana  $j$  u rezu  $k_i$ , a orijentacija joj je protivna referentnoj orijentaciji reza  $k_i$

$q_{ij} = 0$  ... ako grana  $j$  nije u sastavu reza  $k_i$ .

Ukupan broj svih rezova u promatranom grafu neka je  $N_k$ .

Primjer neka bude opet isti graf kao prije (sl.4.4.1) kojem najprije treba odrediti sve rezove. Da bi to učinili, a da niti jedan rez ne ispustimo iz vida, najbolje je najprije "odrezati" samo po jedan čvor (sl.4.4.3.a)), zatim po dva čvora, (sl.4.4.3.b)), itd.



Sl.4.4.3

Rastavna matrica za ovaj primjer izgleda ovako:

|         |  | grane |    |    |    |    |    |    |       |        |
|---------|--|-------|----|----|----|----|----|----|-------|--------|
|         |  | 1     | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |       |        |
| $Q_a =$ |  | 1     | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $k_1$ | rezovi |
|         |  | -1    | 0  | 1  | 0  | -1 | 0  | 0  | $k_2$ |        |
|         |  | 0     | 0  | -1 | -1 | 0  | 1  | 0  | $k_3$ |        |
|         |  | 0     | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | -1 | $k_4$ |        |
|         |  | 0     | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | 1  | $k_5$ |        |
|         |  | 1     | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | -1 | $k_6$ |        |
|         |  | -1    | 0  | 1  | 0  | 0  | -1 | 1  | $k_7$ |        |
|         |  | 0     | -1 | 1  | 0  | -1 | 0  | 0  | $k_8$ |        |
|         |  | 0     | 1  | 0  | 1  | 1  | -1 | 0  | $k_9$ |        |

/4.4.6/

Kao što se vidi iz slike, nismo odabrali referentne orijentacije rezova prema spomenutom principu (sve prema desno, ili sve prema lijevo). Budući da u tom odabiranju imamo potpunu slobodu, ovdje smo se odlučili da referentne orijentacije rezova uvijek "gledaju" prema van od "odrezanih" čvorova.

#### 4.5. REDUCIRANE MATRICE GRAFA

Vidjeli smo u prethodnom poglavlju, da nije baš jednostavno pronaći sve petlje ili sve rezove, a da se niti jedan ne ispusti iz promatranja. Na sreću, to nam nije niti potrebno jer ispisivanje svih redova u tim matricama ima samo teoretski značaj. Za svrhu koja je nama bitna, a to je analiza grafa u cilju postavljanja jednadžbi mreže, sasvim je dovoljan odredjeni manji broj redaka svake od ovih matrica. To je upravo onaj broj koji predstavlja linearno nezavisne redove.

Ostali se, ako treba - a uglavnom ne treba - mogu uvijek dobiti uz pomoć triju operacija, koje su poznate pod imenom *elementarne transformacije matrica*. Te operacije su: međjusobna zamjena redova ili stupaca, množenje redova ili stupaca s konstantom koja nije nula, i zbrajanje elemenata reda ili stupca množenih s konstantom koja nije nula. U slučaju kompliciranih grafova to je isto posao za elektroničko računalo!

Drugim riječima, potrebno je svakoj od ovih matrica koje smo spomenuli prvenstveno odrediti submatrice, koje će sadržavati samo nezavisne redove.

To će biti najlakše za matricu incidencije. Zbog činjenice postojanja samo dva elementa u svakom stupcu koji nisu nula, a od tih je jedan +1 i drugi -1, broj nezavisnih redova za jedan je manji od ukupnog broja redova  $N_v$ . Zato, ukoliko znamo sve redove matrice incidencije osim jednog, onda znamo i taj red. Naime, ako u nekom stupcu ima već jedan +1, onda u posljednjem redku tog stupca mora biti -1. (Ili obrnuto). Ako su pak +1 i -1 već "potrošeni", mora biti u posljednjem redku nula.

Budući da samo nezavisni redovi mogu sačinjavati jednu nesingularnu kvadratnu submatricu, to je njima i određen rang matrice incidencije. To ujedno određuje i dovoljan broj redova submatrice (odnosno broj čvorova za koje treba određivati incidenciju), da bi se uvijek znala čitava matrica incidencije.

Prema tome, broj nezavisnih redova jednak je rang matrice incidencije, i taj iznosi

$$R(A_a) = N_v - 1 \quad /4.5.1/$$

To dalje znači da takvu submatricu incidencije dobivamo pisanjem incidencija za sve čvorove osim jednoga, ili odbacivanjem bilo kojeg reda iz matrice incidencije, ako ju već imamo napisanu. Nazovimo ju zato *reduciranom matricom incidencije* i označimo ju sa simbolom

$$A = [a_{ij}]_{N_v - 1 \times N_b} \quad /4.5.2/$$

Iz činjenice da reducirana matrica incidencije sadržava samo nezavisne redove, može se zaključiti da ona ima isti rang kao i  $A_a$ , tj.

$$R(A) = N_v - 1 \quad /4.5.3/$$

Ako u onom primjeru koji smo radili /4.4.2/ odbacimo iz matrice incidencije  $A_a$  bilo koji red, preostala (bilo koja) submatrica je reducirana matrica incidencije  $A$ .

Odredjivanje submatrice sa nezavisnim redovima za spojnu i rastavnu matricu provodi se na posve analogan način.

Znamo naime, da redove spojne matrice sačinjavaju sve petlje grafa. Isto tako znamo od prije, da nezavisnih petlji ima toliko, koliko i spojnica prema jednom izabranom stablu, te da taj broj iznosi upravo  $N_b - (N_v - 1)$ . To dalje znači, da samo oni redovi spojne matrice koji odgovaraju nezavisnim petljama, sačinjavaju uz isti broj stupaca, jednu kvadratičnu submatricu koja je nesingularna. Iz toga slijedi, da je i rang spojne matrice upravo

$$R(B_a) = N_b - (N_v - 1) \quad /4.5.4/$$

Možemo zaključiti da ćemo nezavisnu spojnu submatricu

$$E = [b_{ij}]_{N_b - (N_v - 1) \times N_b} \quad /4.5.5/$$

dobiti pisanjem  $B$  za  $N_b - (N_v - 1)$  nezavisnih petlji. Nazivat ćemo ju i *reduciranom spojnou matricom*.

Iz spomenutog proizlazi da je rang reducirane spojne matrice jednak rangu  $B_a$

$$R(B) = N_b - (N_v - 1) \quad /4.5.6/$$

Vidjeli smo prije da rastavnu matricu sačinjavaju redovi od rezova grana, a da nezavisnih grana ima toliko koliko i grana jednog odabranog stabla grafa tj.  $N_v - 1$ . To nadalje znači, da baš toliko broj redova sačinjava jednu kvadratičnu submatricu koja je nesingularna, odnosno da je i rang rastavne matrice upravo jednak tom broju nezavisnih redova

$$R(Q_a) = N_v - 1 \quad /4.5.7/$$

Možemo zaključiti, da ćemo nezavisnu rastavnu submatricu

$$Q = [q_{ij}]_{N_v - 1 \times N_b} \quad /4.5.8/$$

dobiti odabiranjem  $N_v - 1$  nezavisnih redova iz rastavne matrice  $Q_a$ , ili pisanjem  $Q$  samo za  $N_v - 1$  nezavisnih rezova. Nazivat ćemo ju i *reduciranom rastavnom matricom*.

Iz spomenutog proizlazi, da je i rang reducirane rastavne matrice jednak rangu rastavne matrice  $Q_a$

$$R(Q) = N_v - 1 \quad /4.5.9/$$

Pisanje submatrice incidencije, koja nam je dovoljna za analizu mreža, ne predstavlja poseban problem, jer se izostavlja samo jedan (bilo koji!) čvor. Međutim, kod određivanja spojne, a pogotovo rastavne matrice, to nije posve jednostavno.

Razlog je u činjenici, da unatoč poznavanju dovoljnog broja petlji odnosno rezova, može se lako dogoditi, da pojedinu istu petlju ili isti rez uzmemo više puta u kalkulaciju. To bi značilo, da nismo pravilno odredili dotične submatrice jer njezini redovi ne bi bili nezavisni, pa se s njima ne bi smjelo dalje računati.

Da bi se tome izbjeglo, najbolje je spojnu i rastavnu submatricu odabrati tako, da to budu tzv. temeljna (fundamentalna) spojna matrica  $B_f$  i temeljna (fundamentalna) rastavna matrica  $Q_f$ .

Definirat ćemo ih slijedećim tvrdnjama.

*Temeljna spojna matrica* u odnosu na jedno stablo orijentiranog povezanog grafa od  $N_v$  čvorova i  $N_b$  grana, je matrica

$$B_f = [b_{ij}]_{N_b - (N_v - 1) \times N_b} \quad /4.5.10/$$

kod koje svaki red predstavlja jednu temeljnu petlju prema odabranom stablu, a svaki stupac jednu granu.

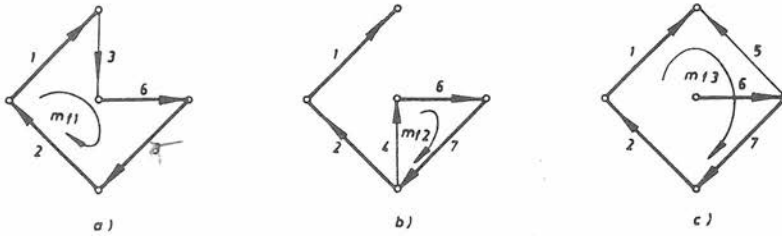
Elementi  $b_{ij}$  definirani su jednako kao kod spojne matrice  $B$ .

*Temeljna rastavna matrica* u odnosu na jedno stablo orijentiranog povezanog grafa od  $N_v$  čvorova i  $N_b$  grana, je matrica

$$Q_f = [q_{ij}]_{N_v - 1 \times N_b} \quad /4.5.11/$$

kod koje svaki red predstavlja jedan temeljni rez prema odabranom stablu, a svaki stupac jednu granu. Elementi  $q_{ij}$  definirani su jednako kao kod rastavne matrice  $Q$ .

U našem primjeru iz sl.4.4.1, ako je odabrano stablo prema slici 4.5.1, imamo tri temeljne petlje. Na svakom od nacrtanih subgrafova, eliminirane su spone koje ne pripadaju dotičnoj temeljnoj petlji.

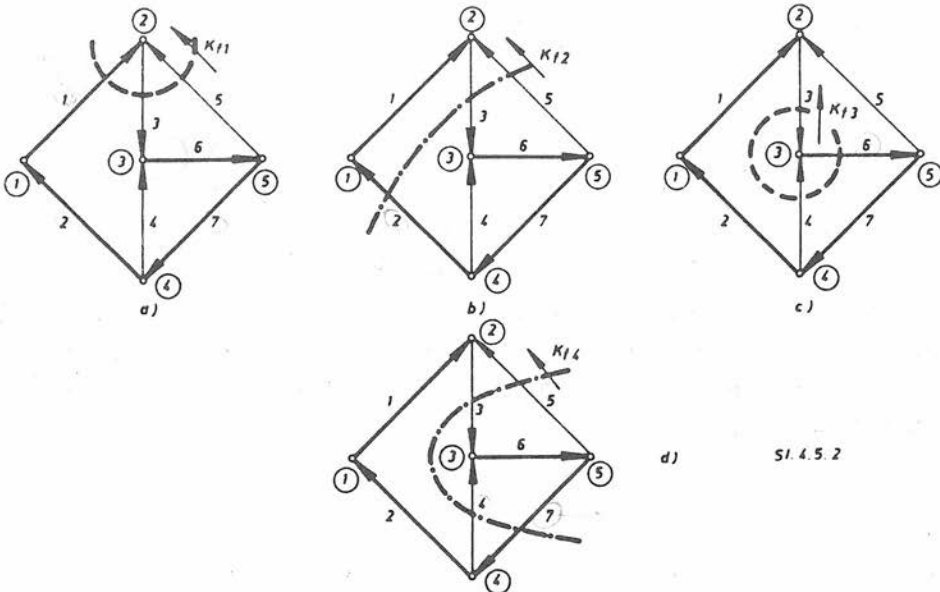


Sl. 4.5.1

U odnosu na to stablo temeljna je spojna matrica  
grane

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_{f1} \\ m_{f2} \\ m_{f3} \end{matrix} \begin{matrix} \text{temeljne} \\ \text{petlje} \end{matrix} \quad /4.5.12/$$

Temeljni rezovi za isto odabrano stablo bit će prema  
slijedećoj slici 4.5.2. (Ostavlja se čitaocu za vježbu dokaz,  
zašto grana 5 ne pripada temeljnom rezu  $k_{f3}$ ?)



Sl. 4.5.2



Prema tom primjeru temeljna je rastavna matrica:

$$Q_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{grane} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} k_{f1} \\ k_{f2} \\ k_{f3} \\ k_{f4} \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{temeljni} \\ \text{rezovi} \end{matrix} \quad /4.5.13/$$

#### 4.5.1. Medjusobni odnosi matrica grafa

Postoji još jedno, veoma važno svojstvo, koje se tiče međusobnog odnosa ovih do sada definiranih matrica. Utvrdimo slijedeće.

Ako su  $A_a$  i  $B_a$  incidentna odnosno spojna matrica povezanog orijentiranog grafa i ako su stupci obje ove matrice poređani po istom redoslijedu grana, vrijedi:

$$A_a \cdot B_a^T = 0 \quad /4.5.14/$$

$$B_a \cdot A_a^T = 0 \quad /4.5.16/$$

Točnost tog teorema može se provjeriti, ako se prisjetimo da mogu postojati samo dvije mogućnosti odnosa petlja i čvorišta, tj. ili

- a) čvor  $\textcircled{i}$  nije u petlji  $i$   
 ili b) čvor  $\textcircled{i}$  jest u petlji  $j$

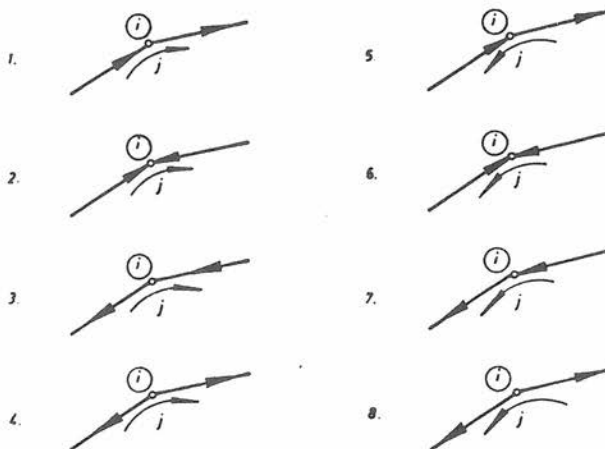
U slučaju a) produkt  $i$ -tog reda od incidentne matrice  $A_a$  i  $j$ -tog stupca od transponirane spojne matrice  $B_a$  dobiva oblik:

$$0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 1 + \dots + 1 \cdot 0 + \dots = 0 \quad /4.5.16/$$

jer čvor  $\textcircled{i}$  i petlja  $j$  nemaju zajedničku granu.

U slučaju b) točno su dvije grane petlje  $j$  incidentne s čvorištem  $\textcircled{i}$ , pa prema referentnim orijentacijama mogu na-

stupiti ovih 8 eventualnih kombinacija (Sl.4.5.3).



Sl. 4.5.3

Množeći  $i$ -ti red od  $A_a$  sa  $j$ -tim stupcem od  $B_a^T$ , dobivamo za bilo koji slučaj od ovih mogućih 8, sumu produkata elemenata matrica u obliku:

$$0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 1 + \dots + 1 \cdot -1 + \dots + 1 \cdot 1 + \dots + 1 \cdot 0 = 0 \quad /4.5.17/$$

Od svih mogućih  $N_p$  članova ove sume, produkti  $1 \cdot -1$  i  $1 \cdot 1$  javljaju se samo po jednom. Budući da su svi ostali članovi produkti vrijednosti 0, to je i ukupna suma jednaka nuli.

Posve analogno moglo bi se dokazati da vrijedi uz iste uvjete kao prije

$$Q_a \cdot B_a^T = 0 \quad /4.5.18/$$

i

$$B_a \cdot Q_a^T = 0 \quad /4.5.19/$$

#### 4.6. TELLEGENOV TFOREM

Zakon o održanju energije, o kojem smo već diskutirali u prethodnim poglavljima, nije nikakav dodatni postulat u teoriji mreža. On proizlazi iz ispunjavanja zahtjeva koje nameću Kirchhoffovi zakoni. Štaviše, on je u tijesnoj uzročnoj vezi s Tellegenovim teoremom, kojega ćemo i dokazati primjenom Kirchhoffovih zakona.

Tellegenov teorem odnosi se na mreže, koje mogu biti sastavljene od međusobno proizvoljno povezanih  $n_k$ -teropola, gdje je broj prilaza od  $k$ -tog kao i broj tih elemenata isto proizvoljan. Dopušteno međusobno povezivanje tih  $n_k$ -teropola ograničeno je samo na njihove prilaze.

Neka ukupan broj prilaza za sve iznosi  $N$ . Odaberimo referentne smjerove za struje na prilazima, kao i referentne polaritete na prilazima tako, da su te referencije u pridruženom smislu.<sup>†</sup>

Neka su  $i_1, i_2, \dots, i_N$  struje pripadajuće svakom od  $N$  prilaza tako da zadovoljavaju KZS. Neka su  $u_1, u_2, \dots, u_N$  naponi koji pripadaju svakom od  $N$  prilaza tako da zadovoljavaju KZN. Uz te uvjete *Tellegenov teorem* tvrdi da je

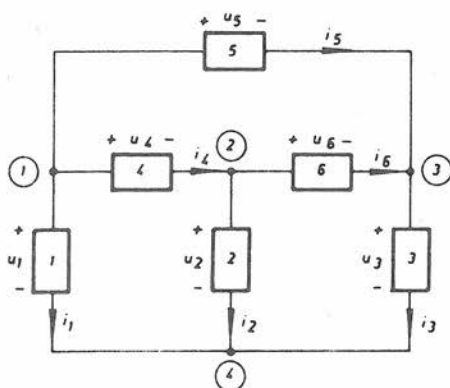
$$\sum_{k=1}^N u_k i_k = 0 \quad /4.6.1/$$

Treba zapaziti da nema ni spomena o karakteristikama grana. Zato  $u_k$  i  $i_k$  ne moraju čak ni biti u odnosu koji određuje karakteristika  $k$ -te grane. Skup  $u_1, u_2, \dots, u_N$  je skup bilo kojih napona koji zadovoljavaju KZN za datu mrežu. Isto tako,  $i_1, i_2, \dots, i_N$  je skup bilo kojih struja koje zadovoljavaju KZS za datu mrežu.

Razmotrimo jednostavni primjer prema sl.4.6.1.

---

<sup>†</sup> Pretpostavka pridruženih referencija nije nužna za dokaz Tellegenovog teorema. Ovdje su prihvaćene samo radi veće jednostavnosti pri izvođenju.



Sl. 4.6.1

Ova mreža može biti smatrana kao da su međusobno povezanih 6 dvopola. Priroda grana je irelevantna pa neke od grana mogu biti i izvori ili nelinearni elementi. U nekom trenutku vremena odaberimo vrijednosti za  $i_1, i_2, \dots, i_6$  tako da se pokoravaju KZS. Na pr. neka bude  $i_1=3$ , i  $i_2=4$ . Budući da KZS mora biti zadovoljen u čvoru ④, to  $i_3$  mora biti  $-(3+4)$ , odnosno  $i_3=-7$ .

Neka dalje bude  $i_4=5$ . KZS za čvor ① određuje  $i_5=-(i_1+i_4) = -8$ . KZS u čvoru ③ daje  $i_6=i_3-i_5=1$ . KZS je zadovoljen u čvoru ② jer je  $i_4-i_2-i_6=5-4-1=0$ . Prema tome, ovih šest vrijednosti za struje (makar smo ih djelomično "izmislili!") zadovoljavaju uvjete Tellegenovog teorema. Slično možemo postupiti s bilo kojim vrijednostima za napone  $u_1, u_2, \dots, u_6$ , sve dok se nismo ogrješili o KZN. Npr.  $u_1=1, u_4=4$  i  $u_2=-3$  zadovoljavaju KZN uokolo petlje ① 2 4 1. Stavimo dalje  $u_6=6$ . Tada, da bi bio zadovoljen KZN u petlji ② 3 4 2,  $u_3$  mora biti  $-9$ . Konačno, da bi bio zadovoljen KZN u petlji ① 2 3 1, mora biti  $u_4+u_6-u_5 = 0$  iz čega slijedi  $u_5=10$ . Može se provjeriti da je KZN zadovoljen i za ostale petlje, odnosno ove vrijednosti napona zadovoljavaju uvjete Tellegenovog teorema. Ako za ovaj primjer izvršimo sumaciju prema /4.6.1/ imamo

$$(1)(3) + (-3)(4) + (-9)(-7) + (4)(5) + (10)(-8) + (6)(1) = 0$$

kao što je i teoremom predviđeno.

Za dokaz teroema, imenujmo priključnice prilaza  $n_k$ -teropola u mreži sa  $a, b, c, \dots$ , i označimo napone između  $a, b, c, \dots$ , i fiksnog referentnog čvora sa  $u_a, u_b, u_c, \dots$ . Budući da naponi na prilazima  $u_k$  za  $k=1, \dots, N$  zadovoljavaju KZN, možemo izraziti  $u_k$  kao razliku između dva napona prema referentnom čvoru. Npr. ako  $u_1$  ima pozitivni referentni polaritet u  $a$ , a negativni u  $b$ , onda je  $u_1 = u_a - u_b$  iz čega slijedi

$$u_1 i_1 = u_a i_1 - u_b i_1 \quad /4.6.2/$$

Prema tome, svaki  $u_k i_k$  može biti napisan kao razlika slična ovoj u /4.6.2/. Načinimo  $\sum u_k i_k$  i saberimo članove kao što slijedi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N u_k i_k &= u_a (\text{članovi koji sadržavaju struju koja ulazi u, ili izlazi iz čvora a}) + \\ &+ u_b (\text{članovi koji sadržavaju struju koja ulazi u, ili izlazi iz čvora b}) + \\ &+ u_c (\text{članovi koji sadržavaju struju koja ulazi u, ili izlazi iz čvora c}) + \\ &+ \dots \dots \dots \quad /4.6.3/ \end{aligned}$$

Svaki izraz u zagradi, recimo onaj koji množi  $u_a$ , jest suma struja koje izlaze iz čvora  $a$ , minus suma struja koje ulaze u čvor  $a$ . No po KZS svaka je ta zagrada jednaka nuli.

Zato imamo  $\sum_{k=1}^N u_k i_k = 0$ , što dokazuje Tellegenov teorem.

Pretpostavimo sad, ne samo da  $u_k$  odnosno  $i_k$  zadovoljavaju KZN odnosno KZS, nego da zadovoljavaju ujedno i karakteristike grana (odnose  $u$ -i u granama). To znači da su  $u_k$  i  $i_k$  rješenja mreže. Tada je  $u_k i_k$  trenutna snaga na  $k$ -tom prilazu, a iz toga slijedi uz pomoću Tellegenovog teorema da je

$$\sum_{k=1}^N u_k i_k = \text{suma trenutnih snaga na svim prilazima mreže} = 0 \quad /4.6.4/$$

Budući da je mreža čitav sistem, jednadžba /4.6.4/ kad ju integriramo u vremenu daje jedan oblik zakona o održanju energije. On tvrdi da se totalna energija sistema ne mijenja. Ili drugačije rečeno, *momentalna snaga koja izlazi iz jednog dijela mreže jednaka je momentalnoj snazi koja ulazi u preostali dio mreže*. Ovaj smo zaključak već prije imali u vidu i primjenjivali ga.

## 5. JEDNADŽBE ELEKTRIČKIH MREŽA U MATRIČNOM OBLIKU

Jednadžbe mreža u vremenskoj domeni i analitičkoj formi upoznali smo u toku dosadašnjeg izlaganja.

Sadržaj ove glave biti će izvođenje dvaju sistema jednadžbi - jednadžbi petlji i jednadžbi čvorova - u matričnoj formi. Kod toga, primjenjivat će se u prošloj glavi obradjeni pojmovi, iz topologije mreža. Iskoristit ćemo za gradnju tih spomenutih jednadžbi, sada poznate i definirane matrice mreža: matricu incidencije, spojnu i rastavnu matricu, kao i utvrdjene međusobne odnose tih matrica.

O svrsi predstojećeg postupka možemo reći slijedeće.

Vidjeli smo da analiza mreže metodom petlje i čvora u vremenskoj domeni, već kod relativno jednostavnijih primjera, dovodi do složenih sistema integrodiferencijalnih jednadžbi, s kojima je teško baratati. Postupak dobivanja diferencijalne jednadžbe po samo jednoj varijabli, često je nepremostiva prepreka rješenju, a da se i ne govori o teškoćama rješavanja ako je ta jednadžba višeg reda. Zato je teorija mreža morala krenuti dalje, da iznadje metode i procedure, koje bi olakšale i omogućile analizu za što veći broj slučajeva. Ta bi metoda trebala izbrisati sve posebnosti i dati maksimalno općeniti postupak kod rješavanja električkih mreža.

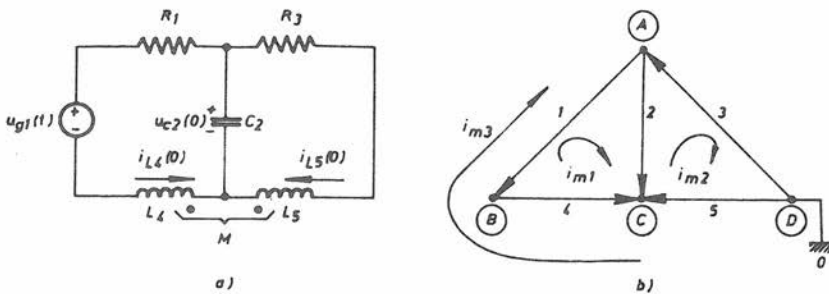
Vidjet ćemo, da tim postupkom opet dolazimo do dva osnovna tipa algebarskih jednadžbi mreža, ali ovaj put u matričnoj formi i u domeni kompleksne frekvencije  $s$ . Zvat ćemo ih matričnim ili općim jednadžbama petlja odnosno čvorova.

Vrijednost ovih matričnih jednadžbi mreža, koje namjeravamo upoznati, nalazi se u njihovoj općenitosti i univerzalnosti. One nikad ne zakazuju, ako se pravilno služimo naznačenom procedurom, za bilo kakovu električku mrežu s koncentriranim elementima. Osim toga, držeći se strogo propisane procedure, one mogu pomoći u svakoj dilemi oko pravog odgovora i kod problema jednostavnijeg karaktera.

Posebno treba naglasiti, da su te predstojeće jednačbe polazna točka, odnosno one ukazuju gotovo na čitav algoritam za programsku podršku za analizu mreža na elektroničkom računaru. Jasno je, naime, da u slučajevima veoma složenih mreža, mi ove matrične jednačbe možemo eventualno postaviti, ali ih se ne može "olovkom i papirom" riješiti. Međutim, upravo te nepregledne operacije s glomaznim izrazima prepuštamo računaru. Da bi dakle dobili kompletan uvid u problematiku rješavanja mreža, moramo obraditi i ovo područje matričnog prikazivanja jednačbi električkih mreža.

### 5.1. MATRIČNE JEDNADŽBE PETLJI

Čitav izvod matričnih jednačbi provest ćemo kroz izradu jednog primjera, kojega su shema mreže i njezin orijentirani graf prikazani na sl. 5.1.1.



Sl. 5.1.1

Naravno da su i u ovom primjeru orijentacije grana i izbor grana i čvorova uzeti potpuno proizvoljno. Moglo se je i drugačije usmjeriti referentne smjerove za struje, odnosno referentne polaritete za napone, ili npr. staviti koji čvor više ili manje. No mi ćemo prihvatiti ovako kako smo izabrali.

Podsjetimo se da pišući KZS za neku mrežu, pišemo u stvari sistem linearnih jednačbi za sve čvorove sa strujama u granama kao varijablama i koeficijentima +1, -1 ili 0, već



prema odnosima grana i čvorova. Isto smo ustanovili, da pišući KZN za neku mrežu, pišemo drugi sistem linearnih jednačbi za svaku petlju, a sa naponima grana kao varijablama i istim koeficijentima (+1, -1, 0) prema odnosima grana i petlja.

Nadalje smo vidjeli u glavi 4, da se svaki takav sistem linearnih jednačbi dađe prikazati u matričnoj formi, kao produkt neke koeficijentne matrice s jednostupčanom matricom - vektorom - s varijablama, što na desnoj strani matrične jednačbe daje vektor s odgovarajućim elementima.

U ovako konkretnom primjeru ako pišemo KZS za sve čvorove imamo

$$\begin{aligned}
 \textcircled{A} &+ i_1 + i_2 - i_3 + 0 + 0 = 0 \\
 \textcircled{B} &+ -i_1 + 0 + 0 + i_4 + 0 = 0 \\
 \textcircled{C} &+ 0 - i_2 + 0 - i_4 - i_5 = 0 \\
 \textcircled{D} &+ 0 + 0 + i_3 + 0 + i_5 = 0
 \end{aligned}
 \quad /5.1.1/$$

Ove jednačbe napisane u matričnoj formi izgledaju ovako

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \quad /5.1.2/$$

Ako pišemo KZN prema odabranim petljama imamo u ovom primjeru

$$\begin{aligned}
 i_{m_1} &+ -u_1 + u_2 + 0 - u_4 + 0 = 0 \\
 i_{m_2} &+ 0 - u_2 - u_3 + 0 + u_5 = 0 \\
 i_{m_3} &+ -u_1 + 0 - u_3 - u_4 + u_5 = 0
 \end{aligned}
 \quad /5.1.3/$$

Te su jednačbe u matričnoj formi prema slijedećem

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad /5.1.4/$$

Ako se prisjetimo značenja ovih koeficijentnih matrica iz prošle glave i zapamtimo šta koji simbol definira, onda se ove jednačbe KZS i KZN kao matrice mogu koncizno pisati ovako

$$A_a \cdot i_b(t) = 0 \quad /5.1.5/$$

$$B_a \cdot u_b(t) = 0 \quad /5.1.6/$$

No, o tim smo matricama već puno saznali. Primjenjujući to na ovaj zadatak, imamo rang matrice incidencije  $A_a$  jednak  $N_v - 1 = 4 - 1 = 3$ , a rang od spojne matrice  $B_a$  jednak  $N_b - (N_v - 1) = 5 - 3 = 2$ . Drugim riječima dovoljne su nam samo tri od četiri jednačbe KZS, odnosno dvije od tri jednačbe KZN, da u potpunosti predstavljaju zadani graf. Ostale su jednačbe, odnosno redovi matrica, linearno ovisne, i ne mogu nam dati nikakvu dodatnu informaciju o mreži.

Zato brišemo po jedan red u gornjim jednačbama, odnosno odgovarajućim matricama, a tako dobivene koeficijentne submatrice na lijevoj strani su upravo reducirana matrica incidencije  $A$  i reducirana spojna matrica  $B$ .

Matrične jednačbe KZS i KZN ovime postaju

$$A \cdot i_b(t) = 0 \quad /5.1.7/$$

$$B \cdot u_b(t) = 0 \quad /5.1.8/$$

Očigledno je, da smo dobili pet jednačbi, a imamo ukupno deset nepoznanica  $i_1(t), \dots, i_5(t)$  i  $u_1(t), \dots, u_5(t)$ .

To je samo prividno nerješivo, jer kad poznamo sadržaj grana tj. elemente mreža, onda znamo i naponsko-strujne ovisnosti u granama, iz kojih dobivamo pet preostalih jednažbi za konačno rješenje.

U slučaju ovog primjera te su jednažbe

$$u_1(t) = u_{g_1}(t) + R_1 i_1(t) \quad /5.1.9/$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(t') dt' + u_{C_2}(0) \quad /5.1.10/$$

$$u_3(t) = R_3 i_3(t) \quad /5.1.11/$$

$$u_4(t) = L_4 \frac{di_4(t)}{dt} + M \frac{di_5(t)}{dt} \quad /5.1.12/$$

$$u_5(t) = M \frac{di_4(t)}{dt} + L_5 \frac{di_5(t)}{dt} \quad /5.1.13/$$

Budući da trebamo sve prikazati u matričnoj formi, onda to treba učiniti i s ovim sistemom jednažbi, koji predstavlja ovisnosti napona i struje u svakoj od grana.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix}}_{u_b(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{g_1}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_g(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_b} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \end{bmatrix}}_{i_b(t)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & M \\ 0 & 0 & 0 & M & L_5 \end{bmatrix}}_{L_b} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \end{bmatrix}}_{i_b(t)} + \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_b} \int_0^t \underbrace{\begin{bmatrix} i_1(t') \\ i_2(t') \\ i_3(t') \\ i_4(t') \\ i_5(t') \end{bmatrix}}_{i_b(t')} dt' + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u_{C_2}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_C(0)} \quad /5.1.14/
 \end{aligned}$$

Sve ovo sada pišemo koncizno kao:

$$\begin{aligned}
 u_b(t) = & u_g(t) + R_b i_b(t) + L_b \frac{d}{dt} i_b(t) + D_b \int_0^t i_b(t') dt' + \\
 & + u_C(0) \quad /5.1.15/
 \end{aligned}$$

Dokazivati da su ova dva sistema jednačbi (matrični i onaj prije analitički) posve ekvivalentni, nije potrebno.

Iz ovog je izraza za posebni primjer moguće zaključiti i na oblik matričnog prikaza odnosa napona i struja za bilo koju mrežu, koja se neće sastojati od 5 grana nego općenito od nekog broja  $N_b$  grana! I u tom općem slučaju te jednačbe moraju imati isti sustav. Zato možemo utvrditi slijedeće definicije:

$u_b(t)$  ... je vektor reda  $N_b$ , koji prikazuje napone grana tako, da napon  $u_j(t)$  grane  $j$  jest element u  $j$ -tom redu tog vektora;

$u_g(t)$  ... je vektor reda  $N_b$ , koji prikazuje naponske izvore u mreži tako, da mu je element u  $j$ -tom redu jednak naponu izvora  $u_{g_j}$  u  $j$ -toj grani mreže. Taj je element jednak nuli ako nema naponskog izvora u toj grani;

$i_b(t)$  ... je vektor reda  $N_b$ , koji prikazuje struje grana tako, da struja  $i_j(t)$  kroz granu  $j$  jest element u  $j$ -tom redu tog vektora;

$u_C(0)$  ... je vektor početnih napona na kapacitetima takav, da  $j$ -ti element vektora odgovara početnom naponu  $u_{C_j}(0)$  na kapacitetu u  $j$ -toj grani mreže. Taj je element jednak nuli ako u toj grani nema kapaciteta, ili je kapacitet bez početnog napona u  $t=0$ ;

$R_b$  ... je dijagonalna matrica reda  $N_b$  takva, da  $R_j$  otporu u  $j$ -toj grani odgovara  $(j, j)$  element dijagonale te matrice;

$L_b$  ... je simetrična matrica reda  $N_b$  takva, da je samoinduktivitet  $L_j$  u grani  $j$  mreže dijagonalni  $(j, j)$  element te matrice, a međjuinduktivitet između grana  $i$  i  $j$ , dakle  $M_{ij}$ , element na mjestu  $(i, j)$  te matrice;

$D_b$  ... je dijagonalna matrica reda  $N_b$  takva, da  $C_j$  kapacitetu u  $j$ -toj grani, odgovara na mjestu  $(j, j)$  dijagonalne matrice element  $1/C_j$ .

Ove tri matrične jednačbe /5.1.7/, /5.1.8/ i /5.1.15/ primijenit ćemo u daljnjem izvodu matrične analize petlji i matrične analize čvorova. One predstavljaju tzv. primarni sistem jednačbi mreža.

Treba naglasiti, da su do ovog trenutka sva ova tri postulata u vremenskoj domeni, tj. sve varijable u ove tri matrične jednačbe su funkcije vremena  $t$ .

Prisjetimo se sada Laplaceovih transformacija.<sup>†</sup> Znamo da svaka funkcija vremena  $f(t)$  koja može biti transformabilna po Laplaceu ima Laplaceov transformat  $F(s)$ . Prema tome pišemo

$$f(t) \rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad /5.1.16/$$

Spomenimo još slijedeće poznate odnose

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s F(s) - f(0) \quad /5.1.17/$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t') dt'\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad /5.1.18/$$

$$\mathcal{L}[u_C(0)] = \frac{1}{s} u_C(0) \quad /5.1.19/$$

Prebacujući ovako po Laplaceu u "donje područje" ovaj naš matrični oblik primarnih jednažbi, dobivamo

$$A \cdot I_b(s) = 0 \quad /5.1.20/$$

$$B \cdot U_b(s) = 0 \quad /5.1.21/$$

$$U_b(s) = U_g(s) + R_b I_b(s) + L_b \left[ s I_b(s) - i_b(0) \right] + D_b \left[ \frac{1}{s} I_b(s) \right] + \frac{1}{s} u_C(0) \quad /5.1.22/$$

Treba držati na umu da je  $i_b(0)$  vektor reda  $N_b$  početnih struja u induktivitetima s elementom  $i_j(0)$  u  $j$ -tom redu, samo ako  $j$ -ta grana u mreži ima induktivitet s početnom strujom  $i_j(0)$ . Ta je pozitivna ako je u istom smjeru s orijentacijom te  $j$ -te grane u grafu, a negativna ako je protivna.

Ako pak ovi uvjeti nisu zadovoljeni, onda je element  $j$ -tog reda vektora  $i_b(0)$  jednak nuli.

Analogno,  $u_C(0)$ , je vektor reda  $N_b$  početnih napona na kapacitetima koji ima elemente različite od nule  $u_{C_j}(0)$  u  $j$ -tom

<sup>†</sup> Više i potpunije o Laplaceovoj transformaciji navedeno je u glavi 6.

redu, samo ako j-ta grana u mreži sadrži kapacitet sa početnim naponom  $u_{C_j}(0)$ . Taj je pozitivan ako se njegov polaritet podudara s referentnim polaritetom grane j, a negativan ako je protivan tom polaritetu.

Ovu posljednju jednadžbu možemo malo pojednostavniti ako izdvojimo članove koje množi vektor  $I_b(s)$ .

Tako dobivamo

$$U_b(s) = U_g(s) + \left[ R_b + sL_b + \frac{1}{s} D_b \right] I_b(s) + \frac{1}{s} u_{C_j}(0) - L_b i_b(0) \quad /5.1.22/$$

Zbrojimo matrice u uglastoj zagradi i to označimo sa

$$Z_b(s) = R_b + sL_b + \frac{1}{s} D_b \quad /5.1.23/$$

Vidimo da to više nije funkcija vremena, već funkcija kompleksne frekvencije, pa taj izraz možemo nazvati *matričnom impedancijom grana*.

S tim skraćenjem imamo

$$U_b(s) = U_g(s) + Z_b(s) I_b(s) + \frac{1}{s} u_{C_j}(0) - L_b i_b(0) \quad /5.1.24/$$

Jednadžba /5.1.24/ za započeti primjer izgleda po pojedinim matricama ovako

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \\ U_4(s) \\ U_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{g1}(s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sL_4 & sM \\ 0 & 0 & 0 & sM & sL_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ I_4(s) \\ I_5(s) \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{C_2}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & M \\ 0 & 0 & 0 & M & L_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_{L_4}(0) \\ i_{L_5}(0) \end{bmatrix} \quad /5.1.25/$$

Ove tri primarne matrične jednačbe točno pokrivaju broj nepoznanica, i s tog stanovišta, one mogu biti konačne u analizi. Međutim, mi ćemo taj izvod ipak produžiti i izvesti još neke pomoćne relacije, koje upotpunjuju matričnu analizu petlja i matričnu analizu čvorova.

Prisjetimo se odnosa matrice incidencije i spojne matrice

$$A \cdot B^T = 0 \quad /5.1.26/$$

$$B \cdot A^T = 0 \quad /5.1.27/$$

a po KZS i KZN imamo još

$$A \cdot i_b(t) = 0 \quad /5.1.28/$$

$$B \cdot u_b(t) = 0 \quad /5.1.29/$$

Upoređujući relacije /5.1.27/ i /5.1.29/ razumno bi bilo očekivati linearnu ovisnost između  $A^T$  i  $u_b(t)$ , odnosno relaciju  $u_b(t) = K A^T s K$  kao matricom transformacije, koja preslikava matricu  $A^T$  u vektor  $u_b(t)$ . Međutim, ako ispitamo redove ovih dviju matrica, odmah se uvidja da je ta relacija nekorektna.

Prema njoj bi rezultantna matrica trebala imati  $N_v - 1$  stupaca, a dobivamo vektor! To dalje znači, da je nemoguće pronaći takvu koeficijentnu matricu  $K$ , koja bi dala odgovarajući rezultat. Ta relacija dakle ne može postojati, ali ako mi napišemo ovako,



$$u_b(t) = A^T K \quad /5.1.30/$$

onda, uz pretpostavku da je  $K$  vektor reda  $(N_V-1) \times 1$ , vidimo da je  $A^T$  konformabilna s  $K$ , pa ovakav produkt može egzistirati.

Treba još odgovoriti kakvu fizikalnu dimenziju mora imati matrica  $K$ , da bi i s te strane sve odgovaralo. Očigledno, budući da je transponirana incidentna matrica  $A^T$  bez dimenzija, -  $K$  mora biti neki vektor napona, tako da volti budu jednaki voltima. Iz toga slijedi, da relacija /5.1.30/ mora biti ovako građena

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{N_b}(t) \end{bmatrix}_{N_b \times 1} = \begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix}_{N_b \times R} \begin{bmatrix} u_{n_1}(t) \\ u_{n_2}(t) \\ \vdots \\ u_{n_R}(t) \end{bmatrix}_{R \times 1} \quad /5.1.31/$$

gdje je  $R = N_V - 1$ , a naziva se *rangom grafa*.

Nije teško iz ovoga zaključiti, a dalo bi se i dokazati, da elementi  $u_{n_1}(t)$  do  $u_{n_R}$  predstavljaju upravo napone čvorova prema jednom odabranom referentnom čvoru.

Ova relacija pisana skraćeno

$$u_b(t) = A^T u_N(t) \quad /5.1.32/$$

predstavlja preslikavanje napona grana u napone čvorova, što smo već imali i u analitičkom obliku, a zvali smo čvornim transformacijama.

Ovdje je upravo to isto, ali u matričnom obliku, pa nema razloga nazivati drugačije.

Da se ne bi suviše opterećivali, i na isti način dokazivali vezu između druge dvije relacije /5.1.26/ i /5.1.28/, napisati ćemo rezultat koji se može očekivati

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_{N_b}(t) \end{bmatrix}_{N_b \times 1} = \begin{bmatrix} B^T \end{bmatrix}_{N_b \times N} \begin{bmatrix} i_{m_1}(t) \\ i_{m_2}(t) \\ \vdots \\ i_{m_N}(t) \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad /5.1.33/$$

gdje broj  $N=N_b-(N_v-1)$  zovemo *nulitet grafa* koji promatramo.

Skraćeno napisan gornji izraz izgleda

$$i_b(t) = B^T i_m(t) \quad /5.1.34/$$

Posve analogno iz analitičkih jednadžbi petlja, ovo su mrežne transformacije jer preslikavaju struje grana u struje petlji.

Za razliku od one prve tri izvedene jednadžbe koje su nazvane primarnim sistemom ove dvije su tzv. sekundarni sistem jednadžbi mreža.

Vratimo se sada sa saznanjem o mrežnim odnosno čvornim transformacijama na naš primjer, gdje smo izveli za odnos napona i struja u granama izraz /5.1.24/. Ako prema KZN u matricnoj formi /5.1.21/ pomnožimo obje strane tog izraza s  $B$  slijedi

$$B U_b(s) = B \left[ U_g(s) + Z_b(s) I_b(s) + \frac{1}{s} u_C(o) - L_b i_b(o) \right] = 0 \quad /5.1.35/$$

To dalje pregrupiramo prema slijedećem

$$B Z_b(s) I_b(s) = - B \left[ U_g(s) + \frac{1}{s} u_C(o) - L_b i_b(o) \right] \quad /5.1.36/$$

Uvrštavajući mrežne transformacije /5.1.34/ slijedi

$$B Z_b(s) B^T I_m(s) = - B \left[ U_g + \frac{1}{s} u_C(o) - L_b i_b(o) \right] \quad /5.1.37/$$

Ako član

$$Z_m(s) = B Z_b(s) B^T \quad /5.1.38/$$

izdvojimo i nazovemo jednim imenom *matrična impedancija petlji*, dobivamo izraz

$$Z_m(s) I_m(s) = - B U_g(s) - B \frac{1}{s} u_C(o) + B L_b i_b(o) \quad /5.1.39/$$

Ovdje je odmah vidljivo, da na lijevoj strani imamo produkt impedancija svih petlji na strujama tih petlji. Na desnoj strani trebali bi biti svi naponski prirasti u petlji. Uvedimo zato nove simbole:

$E_g(s)$  ... doprinos naponima u petljama uslijed izvora

$\frac{1}{s} E_C(o)$  ... doprinos naponima u petljama uslijed početnih napona na kapacitetima

$E_L(o)$  ... doprinos naponima u petljama uslijed početnih struja u induktivitetima.

Imamo dakle konačnu relaciju

$$Z_m(s) I_m(s) = E_g(s) + \frac{1}{s} E_C(o) + E_L(o) \quad /5.1.40/$$

koju smo u početku najavljivali kao *opću jednadžbu petlji u matričnom obliku*.

Nije na odmet ispitati ispravnost relacije prema dimenzijama, jer to na prvi pogled može izazvati zabunu. Treba se sjetiti da Laplaceov transformat svake vremenske funkcije  $u(t)$  u voltima i  $i(t)$  u amperima ima dimenziju  $\{V_s\}$  odnosno  $\{A_s\}$ .

$$u(t) \{V\} \leftrightarrow U(s) \{V_s\}$$

$$i(t) \{A\} \leftrightarrow I(s) \{A_s\}$$

Njihov kvocijent  $Z(s)$  je prema tome s dimenzijom:

$$\left\{ \frac{Vs}{As} \right\} = \left\{ \frac{V}{A} \right\} = \{\Omega\}$$

Lijeva strana matrične jednadžbe petlji je:

$$Z_m(s) I_m(s) \text{ ili po dimenzijama } + \left\{ \frac{V}{A} \right\} \{As\} = \{Vs\}$$

Na desnoj strani je prvi član:

$$E_g(s) = -B U_g(s) \text{ ili po dimenzijama } + \{\text{bez dimenzija}\} \{Vs\} = \{Vs\}$$

Drugi član na desnoj strani:

$$\frac{1}{s} E_C(o) = -B \frac{1}{s} u_C(o) \text{ ili po dimenzijama } + \{\text{bez dimenzija}\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} \{V\} = \{Vs\}$$

Treći član na desnoj strani:

$$E_L(o) = B L_b i_b(o) \text{ ili po dimenzijama } + \{\text{bez dimenzija}\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{Vs}{A} \right\} \{A\} = \{Vs\}$$

To pokazuje da su dobiveni izrazi za opće jednadžbe petlji dimenziono korektni.

Ako prema općoj jednadžbi petlji pišemo pojedine njene članove, onda za ovaj započeti primjer imamo kao prvo impedanciju petlji.

$$Z_m(s) = B Z_b(s) B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sL_4 & sM \\ 0 & 0 & 0 & sM & sL_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} R_1 + sL_4 + \frac{1}{sC_2} & -(\frac{1}{sC_2} + sM) \\ -(\frac{1}{sC_2} + sM) & R_3 + sL_5 + \frac{1}{sC_2} \end{bmatrix} \quad /5.1.41/
 \end{aligned}$$

Desna strana matrične jednačbe petlja za ovaj primjer izgleda:

$$\begin{aligned}
 & -B \left[ U_g(s) + \frac{1}{s} u_C(o) - L_b i_b(o) \right] = \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{g_1}(s) \\ \frac{1}{s} u_{C_2}(o) \\ 0 \\ -L_4 i_{L_4}(o) - M i_{L_5}(o) \\ -M i_{L_4}(o) - L_5 i_{L_5}(o) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} U_{g_1}(s) - \frac{1}{s} u_{C_2}(o) - L_4 i_{L_4}(o) - M i_{L_5}(o) \\ \frac{1}{s} u_{C_2}(o) + M i_{L_4}(o) + L_5 i_{L_5}(o) \end{bmatrix} \quad /5.1.42/
 \end{aligned}$$

Izjednačavanjem matrica na lijevoj strani s matricom na desnoj strani dobivamo matričnu formu jednačbi petlji za naš odabrani primjer. Ako bi ovaj sistem matrica razvili, opet

bi dobili dvije linearne jednačbe kao funkcije kompleksne varijable  $s$ . Iste bi bile, kao kad bi pisali jednačbe petlji na tradicionalan način za prvo i za drugo "okno" zadane mreže.

$$\begin{bmatrix} (R_1 + sL_4 + \frac{1}{sC_2}) & -(\frac{1}{sC_2} + sM) \\ -(\frac{1}{sC_2} + sM) & (R_3 + sL_5 + \frac{1}{sC_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1}(s) \\ I_{m_2}(s) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U_{g_1}(s) - \frac{1}{s} u_{C_2}(o) - L_4 i_{L_4}(o) - M i_{L_5}(o) \\ \frac{1}{s} u_{C_2}(o) + M i_{L_4}(o) + L_5 i_{L_5}(o) \end{bmatrix} \quad /5.1.43/$$

Vratimo se do izraza /5.1.40/ koji vrijedi općenito bez obzira na konkretnu mrežu. Ako tri matrice na desnoj strani zbrojimo u jednu (kao što smo to već učinili za naš primjer), i nazovemo ju s  $E_m(s)$  imamo

$$Z_m(s) I_m(s) = E_m(s) \quad /5.1.44/$$

Očigledno je da ovaj konačni oblik matrične jednačbe petlji jasno asocira na Ohmov zakon.

Razlog za razvoj ovakove formacije matričnih jednačbi, leži u činjenici, da to daje rigoroznu matematičku bazu za računanje svake, ma kako komplicirane mreže. Na temelju tog postupka automatski je određen nuždan i dovoljan broj jednačbi da bi se saznalo sve o mreži.

Naravno, kada se jednom dovoljno uvježba, nije potrebno prolaziti sve ove korake, koje smo mi činili tokom izvoda. Uz izvjesno uvježbavanje, moći će se na prvi pogled dobiti ove matrice jednačbi petlji, uz određeni sistem ubacivanja elemenata u te matrice. Kod takvog "izravnog" pisanja jed-

nadžbi, treba ipak biti prilično oprezan, naročito u slučajevima postojanja neregipročnih elemenata u mreži.

## 5.2. MATRIČNE JEDNADŽBE ČVOROVA

Izvod ovih jednažbi provest ćemo u skraćenom obliku, jer je glavnina polaznih izraza već detaljno prikazana u prethodnom poglavlju, a čitav daljnji postupak je potpuno analogan onom za izvod matričnih jednažbi petlji.

Polazimo od primarnog sistema jednažbi mreža

$$A \ I_b(s) = 0 \quad /5.2.1/$$

$$B \ U_b(s) = 0 \quad /5.2.2/$$

$$U_b(s) = U_g(s) + Z_b(s)I_b(s) + \frac{1}{s} u_C(o) - L_b i_b(o) \quad /5.2.3/$$

Rješavajući ovu zadnju jednažbu eksplicitno za  $I_b(s)$  dobivamo

$$Z_b(s)I_b(s) = U_b(s) - U_g(s) + L_b i_b(o) - \frac{1}{s} u_C(o) \quad /5.2.4/$$

Množeći obje strane s inverznom matricom impedancija grana  $Z_b^{-1}(s)$  slijedi

$$I_b(s) = Z_b^{-1}(s) \left[ U_b(s) - U_g(s) + L_b i_b(o) - \frac{1}{s} u_C(o) \right] \quad /5.2.5/$$

Ponovnim množenjem ove jednažbe s matricom incidencije  $A$  imamo

$$A \ I_b(s) = A Z_b^{-1}(s) \left[ U_b(s) - U_g(s) + L_b i_b(s) - \frac{1}{s} u_C(o) \right] \quad /5.2.6/$$

Lijeva strana ove jednažbe nije ništa drugo, nego lijeva strana KZS u matričnoj formi prema /5.2.1/. Iz toga slijedi

da i desna strana mora biti jednaka vektoru nula. Ostaje dakle

$$A Z_b^{-1}(s) U_b(s) - A Z_b^{-1}(s) U_g(s) + A Z_b^{-1}(s) L_b i_b(o) - \\ - \frac{1}{s} A Z_b^{-1}(s) u_C(o) = 0 \quad /5.2.7/$$

Pregrupiranjem članova ove jednadžbe slijedi

$$A Z_b^{-1}(s) U_b(s) = A Z_b^{-1}(s) \left[ U_g(s) - L_b i_b(o) + \frac{1}{s} u_C(o) \right] /5.2.8/$$

Ako se sada prisjetimo da postoje i sekundarne jednadžbe mreža izvedene u prošlom poglavlju, pa od njih upotrebimo čvorne transformacije

$$U_b(s) = A^T U_n(s) \quad /5.2.9/$$

Uvrstivši taj izraz umjesto matrice  $U_b(s)$  na lijevoj strani /5.2.8/ dobiva se

$$A Z_b^{-1}(s) A^T U_n(s) = A Z_b^{-1}(s) \left[ U_g(s) - L_b i_b(o) + \right. \\ \left. + \frac{1}{s} u_C(o) \right] \quad /5.2.10/$$

Izdvojimo na lijevoj strani član

$$A Z_b^{-1}(s) A^T = Y_n(s) \quad /5.2.11/$$

i nazovimo ga *matrična admitancija čvorova*.

Uvrstimo li to u /5.2.10/ i riješimo se zagrade na desnoj strani imamo



$$Y_n(s) U_n(s) = A Z_b^{-1}(s) U_g(s) - A Z_b^{-1}(s) L_b i_b(o) + \\ + \frac{1}{s} A Z_b^{-1}(s) u_C(o) \quad /5.2.12/$$

Ovaj se izraz sažeto piše kao definitivni oblik *općih jednažbi čvorova u matričnom obliku*.

$$Y_n(s) U_n(s) = I_g(s) + \frac{1}{s} I_L(o) + Q_C(o) \quad /5.2.13/$$

Ovdje smo već uveli nove simbole koji imaju slijedeća značenja:

$$I_g(s) = A Z_b^{-1}(s) U_g(s) \dots \text{strujni doprinosi od izvora koji vode ka čvorovima}$$

$$\frac{1}{s} I_L(o) = -A Z_b^{-1}(s) L_b i_b(o) \dots \text{strujni doprinosi u čvorovima uslijed početnih struja u induktivitetima}$$

$$Q_C(o) = \frac{1}{s} A Z_b^{-1}(s) u_C(o) \dots \text{početni naboj na kapacitetima.}$$

Da to sve i dimenziono odgovara, odnosno da je to stvarno značenje svakog od članova možemo se uvjeriti ako pozovemo u pomoć osnovne matrice od kojih su sastavljeni. To se ostavlja zainteresiranom čitaocu za vježbu.

Analogno kao kod matrične jednažbe petlji, ova posljednja jednažba mogla bi se simbolički izraziti kao jedinstvena relacija. Ako se sve matrice na desnoj strani zbroje u jednu  $I_n(s)$  imamo

$$Y_n(s) U_n(s) = I_n(s) \quad /5.2.14/$$

Po značenju svojih članova i ova matrična jednažba čvorova podsjeća na Ohmov zakon.

### 5.3. TRANSFORMACIJE IZVORA

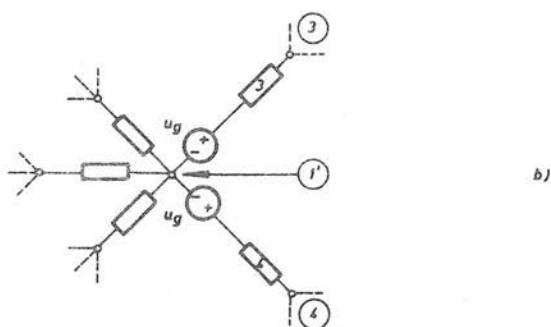
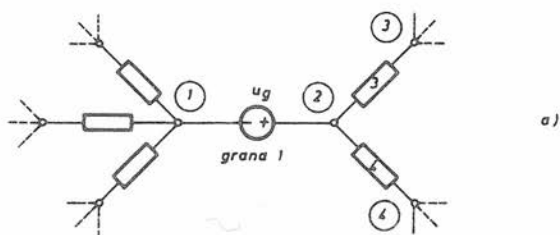
Kod ovog izvoda, koji smo upravo proveli, može ali i ne mora postojati jedna poteškoća, zbog koje ne bi baš tako glatko mogli doći do gornjih rezultata.

To se događa u slučajevima, kad neke od grana sadržavaju samo naponski ili strujni izvor. To znači, da uz taj izvor nema niti jednog pasivnog elementa u toj grani. Činjenica je, da tada matrica grana  $Z_b(s)$  ima jedan ili više redova samih nula, već prema tome koliko je takvih "čistih" grana s izvorima. Iz toga nadalje slijedi, da je matrica  $Z_b(s)$  singularna, odnosno da inverzna matrica  $Z_b^{-1}(s)$  ne postoji! Naime, determinanta sustava te matrice bit će jednaka nuli.

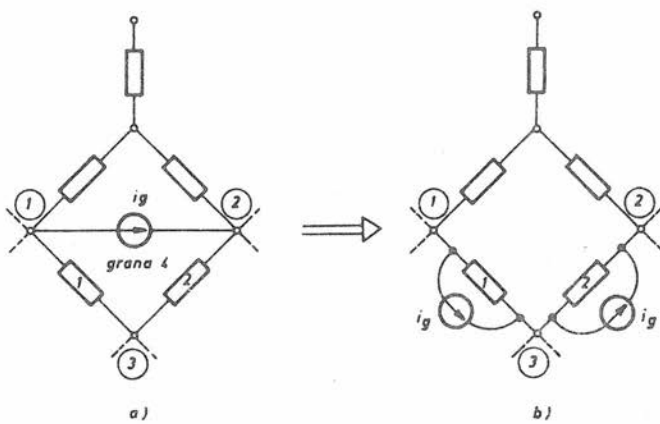
Kao što smo u upravo dovršenom izvodu vidjeli, s tom je  $Z_b^{-1}(s)$  matricom računato, kao da ona uvijek postoji. To bi značilo, da mi ne možemo za sve slučajeve pisati opće matrične jednačbe čvorova, odnosno da taj postupak nije univerzalan, kao što smo u početku najavljivali. Pokazat će se međjutim, da uz određene dopustive modifikacije mreže, ta sumnja nije opravdana.

Općenito razmatrajući problem analize mreža mi pretpostavljamo, da je broj i smještaj nezavisnih izvora u mreži proizvoljan sve dok to nije u protivrječju s Kirchhoffovim zakonima. To preciznije znači, da ako nezavisni naponski izvori čine sami jednu petlju, onda valni oblici tih izvora moraju zadovoljavati ograničenja koja nameće KZN. Analogno, ako nezavisni strujni izvori sami pripadaju jednom rezu, njihovi valni oblici ne smiju narušiti KZS.

Da bi izbjegli takve "zamke" u analizi, korisno je uvesti modifikacije mreža, koje nam dopuštaju da promijenimo pozicije izvora u mreži, a da to ostane bez utjecaja na postavljeni zadatak. Te transformacije mogu se odnositi kako na nezavisne tako i na zavisne izvore, a svrha im je likvidacija grana koje se sastoje samo od izvora. Postupak je ilustriran na slikama 5.3.1. i 5.3.2.



Sl. 5.3.1



Sl. 5.3.2

Ako nas ne zanima struja u grani 1, mi možemo zamijeniti mrežu na sl.5.3.1.a) s njoj ekvivalentnom mrežom prema sl. 5.3.1.b). U toj je novoj mreži grana 1 odbačena, a uveden je novi čvor (1'). Taj novi čvor je rezultat fuzije čvorova (1) i (2) originalne mreže. Da bi postojala ekvivalencija, dva izvora  $u_g$  moraju biti "utisnuta" u grane 3 i 4 nove mreže.

Dokaz ekvivalencije u ovom slučaju, provodimo pišući jednadžbe KZN za sve petlje (obje mreže) koje obuhvaćaju grane 3 i 4. Lako bi se pokazalo, da su dobivene odgovarajuće jednadžbe za obje mreže jednake. Nadalje, primjenom KZS za čvorište (1'), slijedi identičan rezultat, kao kod primjene KZS na čvorišta (1) i (2) originalne mreže.

Na slici 5.3.2 prikazana je transformacija mreže, kojom odbacujemo samostalni strujni izvor  $i_g$  u grani 4. Umjesto nje, dva su nova strujna izvora  $i_g$  priključena paralelno granama 1 i 2. Da niti ta modifikacija ne utječe na rješenje zadatka, svjedoči pisanje jednadžbe KZS za čvorišta (1), (2) i (3) u oba tipa ekvivalentnih mreža. Dobiva se rezultat, da su odgovarajuće jednadžbe jednake.

Zaključujemo: primjenom ovih transformacija izvora, modificiramo bilo kakvu zadanu mrežu na taj način, da je u njoj svaki naponski izvor vezan serijski s elementom koji nije izvor, odnosno svaki strujni izvor vezan paralelno s elementom koji nije izvor.

#### 5.4. TIPIČNA (OPĆA) GRANA MREŽE

Može se pretpostavljati, a da ne narušavamo princip općenitosti, da je svaka mreža sastavljena od tipičnih grana "k", koje imaju oblik prema sl.5.4.1. Lako je ustanoviti da su sva četiri oblika ekvivalentni obzirom na priključnice, i da jedan proistječe iz drugoga, kako je to shematski prikazano. Na tim je shemama  $u_{gk}$  naponski izvor,  $i_{gk}$  strujni izvor, a pravokutnik predstavlja element koji nije izvor. Napon na

priključnicama grane "k" označen je s  $u_k$ , a struja kroz priključnice  $i_k$ . Ako grana neke mreže nema naponskog izvora, u njenom prikazu općom granom stavljamo  $u_{gk}=0$ ; slično, ako nema strujnog izvora stavljamo  $i_{gk}=0$ .

U slučaju da je dvopolni element koji nije izvor, linearan i vremenski invarijabilan, onda vrijedi ekvivalencija opće grane sa sl.5.4.1, sa shemom opće grane prema slici 5.4.2. U tom je slučaju korisno primjeniti frekvencijsku, umjesto vremenske domene, da bi se računalo sa slijedećim izrazima

$$U_k(s) = U_{gk}(s) - Z_k(s) I_{gk}(s) + Z_k(s) I_k(s) \quad /5.4.1/$$

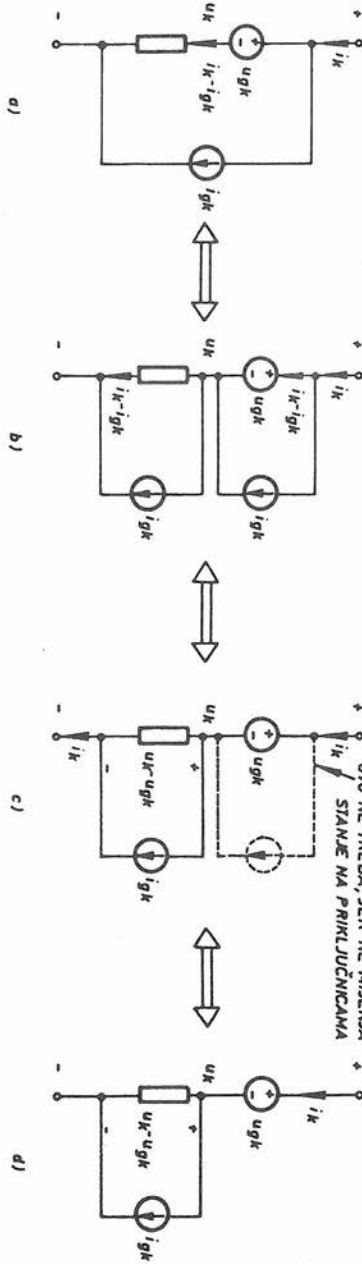
$$I_k(s) = I_{gk}(s) - Y_k(s) U_{gk}(s) + Y_k(s) U_k(s) \quad /5.4.2/$$

Ove ekvivalencije postaju posebno jednostavne za slučaj linearnog, vremenski nepromjenljivog otpora  $R$  kao pasivnog elementa u općoj grani. Ako se radi o elementima s memorijom, ne smije se zaboraviti doprinos izvorima uslijed eventualnih početnih stanja.

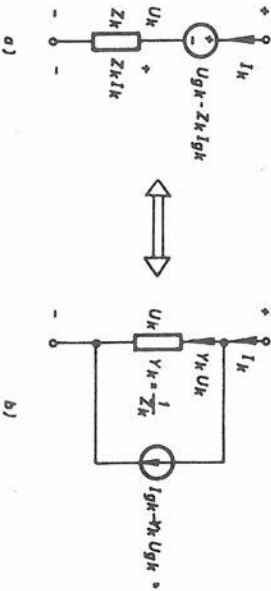
Vrijedi upozoriti, da je prikladno iako ne i nužno, da su kod analize čvorova svi nezavisni izvori u mreži u formi strujnih izvora. Analogno, kod analize petlji može biti korisno transformirati mrežu da u njoj budu samo nezavisni naponski izvori.

U zaključku ove glave, prirodno se postavlja pitanje, da li je bolja analiza petlji ili analiza čvorova kao metoda rješavanja mreža? Odgovor na to ovisi o zadanoj mreži. U analizi čvorova treba ukupno odrediti  $N_v-1$  varijablu, dok u analizi čvorova imamo  $N_b-(N_v-1)$  varijablu.

Zato je razumno preporučiti analizu čvorova, ako je kod zadanog grafa broj čvorova  $N_v$  mnogo manji od broja petlji  $N_b-(N_v-1)$ . U obrnutom slučaju, analiza petlji ima prednosti. Treba međjutim, razmotriti i ostale faktore koji odlučuju. U prvom redu to su broj i vrsta izvora u mreži. Ako su svi za-



Sl. 5.4.1



Sl. 5.4.2

dani izvori (zavisni i nezavisni) strujni, analiza čvorova je vjerojatno prikladnija, jer se mogu često izravno pisati jednadžbe čvorova. Obrnuto, ako su izvori naponski, lakše je upotrebiti analizu petlji. Inače, sigurno je da veće iskustvo u teoriji mreža, olakšava ovo opredjeljivanje.

## 5.5. DUALNOST

Već pri izvodu sistema jednadžbi petlji i sistema jednadžbi čvorova neke mreže, moglo se uočiti postojanje nekog paralelizma izmedju tih jednadžbi.

Zbog toga nam se nameće pitanje, da li je moguće izkonstruirati dvije mreže tako, da su jednadžbe petlji jedne mreže formalno iste kao jednadžbe čvorova druge mreže. Odnosno drugim riječim, mi bi željeli znati, da li jednadžbe petlji napisane za jednu mrežu mogu postati jednadžbe čvorova za jednu drugu mrežu (ili obrnuto!), samo medjusobnom zamjenom simbola "u" i "i", tamo gdje se oni u jednadžbama pojavljuju.

Pokazuje se, da je moguće pronaći takve dvije mreže, ako su zadovoljena ova dva uvjeta:

1) Jednadžbe Kirchhoffovog zakona struja za mrežu  $M_1$  moraju postati jednadžbe Kirchhoffovog zakona napona za mrežu  $M_2$ , ako zamijenimo svaki član  $i_j$  (u KZS) s  $u_j$ .

2) Izrazi za napone grana  $u_j$  u ovisnosti od struja grana  $i_j$  u mreži  $M_2$  moraju postati izrazi za struje grana  $i_j$  u ovisnosti o naponima grana  $u_j$  u mreži  $M_1$  - ako izvršimo zamjenu  $i_j \leftrightarrow u_j$ .

Mreže  $M_1$  i  $M_2$  koje ispunjavaju ova dva uvjeta nazivamo dualnim mrežama.

Strogo uzevši rekli bi -  $M_1$  je "dual" od  $M_2$ . Medjutim, ako su uvjeti 1) i 2) zadovoljeni, tada mi možemo zamijeniti oznake  $M_1 \leftrightarrow M_2$ , pa će uvjeti 1) i 2) biti opet zadovoljeni. To znači: ako je  $M_2$  dual od  $M_1$  onda je i  $M_1$  dual od  $M_2$ . Dualnost je simetričan odnos.

Umjesto riječima, kako je iznesen, uvjet broj 1) može se postaviti na slijedeći način u matricnom obliku.

Označimo s  $A_1 = [a_{ij}]$  ... matricu incidencije u kojoj su  $a_{ij}$  elementi definirani s jednažbama KZS za mrežu  $M_1$

Označimo s  $B_2 = [b_{ij}]$  .. spojnu matricu u kojoj su  $b_{ij}$  elementi definirani s jednažbama KZN za mrežu  $M_2$ .

Da bi se zadovoljio prvi uvjet dualnosti mora biti

$$A_1 = B_2 \quad /5.5.1/$$

Kao prvo, ova postavka implicira da broj grana od obje mreže mora biti jednak. Nadalje, da broj nezavisnih jednažbi KZS (koji određuje redove  $A_1$ ) za prvu mrežu, mora biti jednak broju nezavisnih jednažbi KZN (koji određuje redove  $B_2$ ) za drugu mrežu.

Pisani prema uvedenoj simbolici ovi su uvjeti

$$N_{b_1} = N_{b_2} \quad /5.5.2/$$

$$N_{v_1} - 1 = N_{b_2} - (N_{v_2} - 1) \quad /5.5.3/$$

Očigledno je, da ovi uvjeti određuju strukturu dualnih mreža. Prema /5.5.1/ slijedi, da mora postojati još i neki korespondentni odnos:

- između grana obih mreža, kao što je definirano, stavljanjem u isti poredak stupaca matrica  $A_1$  i  $B_2$  da bi se zadovoljilo  $A_1 = B_2$ .
- između poredka čvorova u  $M_1$  (redovi matrica  $A_1$ ), i petlja u  $M_2$  (redovi matrica  $B_2$ ).

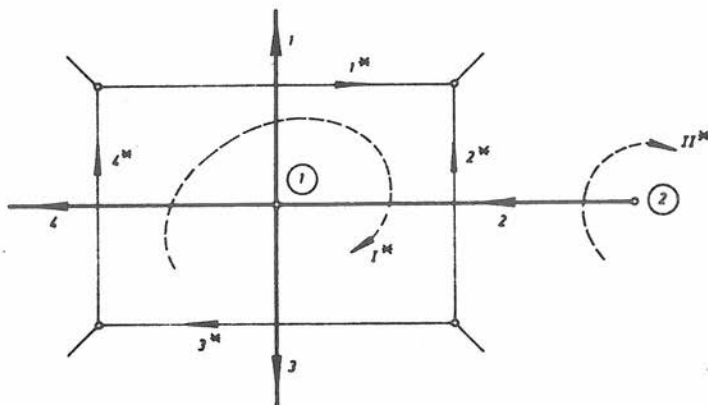
Grafovi mreža koji tako korespondiraju da zadovoljavaju  $A_1 = B_2$  zovu se *dualni grafovi*.

Detaljna studija svih svojstava i karakteristika dualnih grafova je šire područje topologije, u koje se ovdje nećemo upuštati. Bez suvišnog dokazivanja, prikazat ćemo metodu određivanja dualnih grafova na slijedeći način.



Ako dvije mreže preklopimo jednu na drugu tako, da svako čvorište mreže  $M_1$  za kojega pišemo jednadžbu struja (KZS) bude unutar petlje od  $M_2$ , a (pridružene) referentne orijentacije korespondentnih topoloških varijabli na odredjeni način podešene, onda će elementi matrice  $A_1$  i elementi matrice  $B_2$  biti identični.

Takova jedna petlja i čvor, koji na taj način korespondiraju, prikazani su na slijedećim grafovima (sl.5.5.1).



Sl. 5.5.1

Deblje izvučeni dio grafa pripada mreži  $M_1$ , a grane koje su incidentne s čvorištem ① toga grafa označene su sa 1, 2, 3 i 4. Tanje izvučeni dio grafa pripada mreži  $M_2$ , a grane koje pripadaju petlji  $I^*$  označene su sa  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$  i  $4^*$ . Neka grana 1 iz  $M_1$  korespondira s granom  $1^*$  iz  $M_2$ , 2 sa  $2^*$ , itd. Čvorište ① iz  $M_1$  neka korespondira s petljom  $I^*$ , ② sa  $II^*$ , itd.

Jednadžba struja za čvor ① i jednadžba napona za petlju  $I^*$  morala bi imati iste koeficijente, ako su referencije dobro postavljene. Incidentna, odnosno spojna matrica za te dijelove mreže izgledaju ovako

$$A_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad B_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1^* & 2^* & 3^* & 4^* & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} I^* \\ II^* \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad /5.5.4/$$

U čvorištu ② koeficijent od  $i_2$  za KZS ima veličinu  $a_{22}=1$ . Da bi i koeficijent od  $u^*_2$  u  $B_2$  (dakle u jednadžbi KZN) bio  $b_{22}=1$  onda mora orijentacija petlje  $II^*$  biti kako je nacrtana tj. isto u smjeru okretanja kazaljki na satu. Nastavljajući dalje tom logikom, može se vidjeti da onda sve petlje u  $M_2$  moraju biti orijentirane u smjeru okretanja kazaljke na satu.

Sada možemo dati odgovor i na osnovno pitanje o egzistenciji dualnih struktura. *Mreža ima svoj geometrijsko-strukturni dual onda i samo onda ako joj je graf povezan, planaran i neseparabilan.* Takvoj se mreži dualni graf konstruira točno kao na ovom prijašnjem primjeru.

Unutar svakog okna zadanog grafa stavljamo čvorište njemu dualnog grafa. Tomu još dodamo čvor izvan zadanog grafa, koji će biti referentni čvor. Presjecajući sada svaku granu zadanog grafa dobivamo korespondentnu granu dualnog grafa. Referencije se tada izaberu tako, da spojna matrica za zadani graf, sa svim petljama orijentiranim u smjeru okretanja kazaljki na satu, bude jednaka matrici incidencije traženog dualnog grafa.

Ovo je bilo zadovoljenje uvjeta 1) - dakle topološkog uvjeta za dualne mreže. Ostaje da se ustanovi način za zadovoljenje uvjeta 2) - odnosa sadržaja grana kod dualnih mreža.

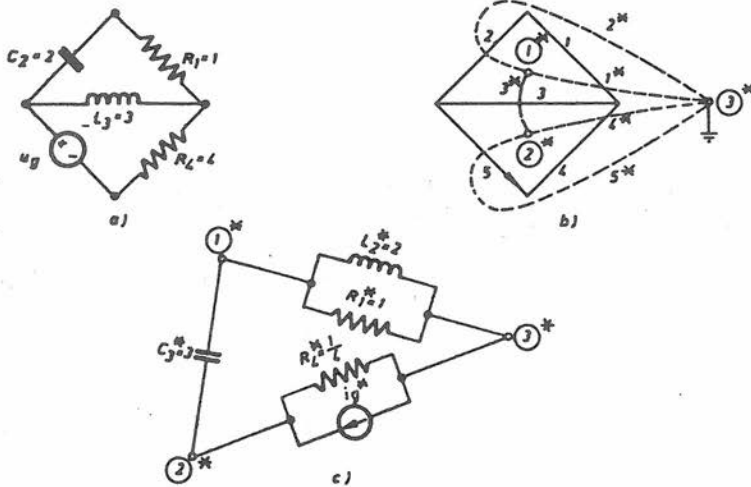
Pored ograničenja s obzirom na vrstu grafa, postoji još i ograničenje koje se odnosi na vrstu elemenata u granama, a da bi se svakoj mreži mogla naći dualna. *Mreža, kojoj su svi elementi dvopolni elementi može imati svoj dual.* Drugim riječima, kod razmatranja dualnosti isključujemo one mreže koje sadržavaju vezane induktivitete, idealne transformatore, zavisne izvore, itd. Ako su zastupljeni samo otpori, induktiviteti, kapaciteti, nezavisni naponski izvor i nezavisni strujni izvor, mreža ima svoj dual, ako je naravno ispunjen i topološki uvjet. Značajno je zabilježiti, da ne postoji ograničenje obzirom na linearnost i vremensku nepromjenjivost elemenata u mreži.

Uvjet sadržaja grana dualnih grafova, kako smo ga opisali u točki 2) definicije u uvodu, svodi se na slijedeće. Otpor u mreži  $M_1$  odgovara otporu u njoj dualnoj mreži  $M_2$ . Štaviše, linearni otpor u  $M_1$  s otpornosti  $R$  oma odgovara linearnom otporu u  $M_2$  s vodljivošću  $R$  simensa. Slično, induktivitet u  $M_1$  korespondira s kapacitetom iste numeričke vrijednosti u  $M_2$ . Kapacitet u  $M_1$ , odgovara induktivitetu iste numeričke vrijednosti u  $M_2$ . Naponski izvor kojemu je valni oblik napona funkcija  $f(\cdot)$ , odgovara strujnom izvoru kojem struja ima istu funkciju  $f(\cdot)$ , i obrnuto. Takodjer je dual od kratkospojne grane prekinuta grana, itd. Da bi se lakše snalazili, parove dualnih pojmova prikazat ćemo tabelarno na Tabeli 5.5.1.

TABELA 5.5.1.

| Svojstva                        | Zadana mreža $M_1$                                                                                                                                     | Dualna mreža $M_2$                                                                                                                                        |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Topološka svojstva              | Čvorište<br>Rez<br>Referentno čvorište<br>Grana stabla<br>Temeljni rez<br>Serijske grane<br>Reducirana matrica incidencije<br>Matrica temeljnih rezova | Okno<br>Petlja<br>Izvanjsko okno<br>Spona<br>Temeljna petlja<br>Paralelne grane<br>Reducirana spojna matrica<br>Matrica temeljnih petlji                  |
| Topološka i električka svojstva | Naponi čvorova<br>Naponi grana stabla<br>KZS                                                                                                           | Konturne (prema oknima) struje<br>Struje spona<br>KZN                                                                                                     |
| Električka svojstva             | Napon<br>Naboj<br>Otpor<br>Induktivitet<br>Otpornost<br>Induktivnost<br>Strujni izvor<br>Kratki spoj<br>Admitancija<br>Matrična admitancija<br>Čvorova | Struja<br>Magnetski tok<br>Otpor<br>Kapacitet<br>Vodljivost<br>Kapacitivnost<br>Naponski izvor<br>Prekid<br>Impedancija<br>Matrična impedancija<br>petlji |

Koristeći se tim odnosima, promotrimo konstrukciju dualne mreže na slijedećem primjeru (sl.5.5.2).



Sl. 5.5.2

Važnost dualnosti ne treba prenaplaćavati. Dovoljno je voditi računa o slijedećem.

Neka je  $T_1$  bilo koja istinita tvrdnja koja se tiče ponašanja mreže  $M_1$ . Neka je  $T_2$  tvrdnja dobivena iz  $T_1$  zamjenom svakog topološkog pojma (čvor, petlja, itd.) sa svojim dualom, i svake električke veličine (napon, struja, impedancija, itd.) sa svojim dualom. Tada slijedi, da je  $T_2$  istinita tvrdnja koja se tiče ponašanja dualne mreže  $M_2$ .

## 6. RJEŠENJA JEDNADŽBI MREŽA

U 1.glavi izdvojili smo neka obilježja električkih mreža i prihvatili ih kao pokazatelje određene klasifikacije. U daljnjem smo izlaganju kao osnovu te klasifikacije zadržali uglavnom samo ova četiri razreda: linearnost ili nelinearnost, te vremensku nepromjenljivost ili vremensku promjenljivost. Da bi lakše odredili u koji od ovih razreda treba smjestiti neku mrežu, ovdje ćemo u uvodu formulirane karakteristike izraziti manje općenito, ali ipak jednako valjano. Tako ćemo reći:

- (1) linearna mreža ima obilježje, da je svaki njezin element ili linearan element ili nezavisan izvor,
- (2) vremenski nepromjenljiva mreža ima obilježje da je svaki njezin element ili vremenski nepromjenljiv ili nezavisan izvor.

Prema tome, linearna vremenski nepromjenljiva mreža ima obilježje da je svaki njezin element ili linearan i vremenski nepromjenljiv ili nezavisan izvor. Jasno, mreže koje nemaju obilježja izražena pod (1) i (2) nazivaju se nelinearne, odnosno vremenski promjenljive. Da se u ovim karakterizacijama moraju separatno tretirati nezavisni izvori od ostalih elemenata, "kriva" su posebna svojstva izvora. Sjetimo se samo, da izvori nisu definirani s obje električke varijable, kao ostali elementi mreža. Treba naglasiti, da ćemo skup svih napona na nezavisnim naponskim izvorima, kao i skup svih struja kroz nezavisne strujne izvore smatrati skupom ulaza u mrežu. Ovdje ćemo uglavnom razmatrati mreže koje imaju samo jedan ulaz.

Rezultati do kojih smo dolazili pri analizi mreža u 3. i 5.glavi, bili su redovno u obliku skupa diferencijalnih jednadžbi po jednoj ili više električkih varijabli mreža. Uz pretpostavku razmatranja linearnih električkih mreža, i te su jednadžbe bile linearne. Takve će biti rješavane i u ovoj glavi.

U analizi mreža mi smo gotovo uvijek zainteresirani za ponašanje samo jedne specificirane varijable mreža, koju onda nazivamo *odzivom* (ili katkada *izlazom*). Upravo tu traženu vari-

jablu izdvajali smo pravilnom primjenom opisanih metoda analize. U daljem postupku, eliminacijom jedne po jedne od ostalih varijabli u sistemu diferencijalnih jednačbi, došli smo do jedne linearne diferencijalne jednačbe, po ovoj traženoj varijabli. Ova može biti napon grane, struja grane ili linearna kombinacija obaju ovih varijabli.

Iz prethodnog izlaganja već smo saznali, da su odzivi posljedica, bilo nezavisnih izvora koje smatramo *poticajima* (ili *ulazima*) mreže, bilo *početnih uvjeta* u mreži, ili najopćenitije i jednog i drugog od ovih uzroka. Da bi mogli jedznačno odrediti rješenje diferencijalne jednačbe, mi moramo poznavati kako ulaze tako i početne uvjete. Poseban način na koji će ovi početni uvjeti biti izraženi, ovisi o metodi analize po kojoj smo došli do diferencijalne jednačbe.

Preostaje nam, dakle, prikaz glavnih matematičkih metoda iznalaženja odziva kao rješenja diferencijalne jednačbe mreže.

#### 6.1. KLASIČNO RJEŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČBI

Ovaj naslov moramo odmah suziti, ograničavajući naše razmatranje na linearni vremenski invarijabilni sistem prema uvodno izloženoj klasifikaciji tih pojmova. Ako je  $y$  odziv a  $x$  poticaj, linearnost i vremenska nepromjenljivost zahtijeva da uobičajena diferencijalna jednačba ima slijedeći oblik.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_0 x \quad /6.1.1/$$

gdje su  $a$  i  $b$  konstante.

Impozantni dio rješenja u analizi mreža su upravo osnovi ove klase diferencijalnih jednačbi, pa ćemo zato tome posvetiti dosta prostora u preostatku ovog teksta.

Recimo odmah, da se svaki  $y(t)$  koji zadovoljava jednadžbu /6.1.1/ smatra *rješenjem* ove diferencijalne jednadžbe. Općenito međjutim, mi ne tražimo svako rješenje pojedinačno, već nam je od interesa poznavati sva rješenja. Tu sumu svih rješenja nazivamo *općim rješenjem*. Ako opće rješenje zadovoljava još takodjer i dodatne uvjete, tada to opće rješenje postaje jedno *partikularno rješenje*. U smislu značenja tog pridjeva ono jest "partikularno" obzirom na specifični skup ograničenja.

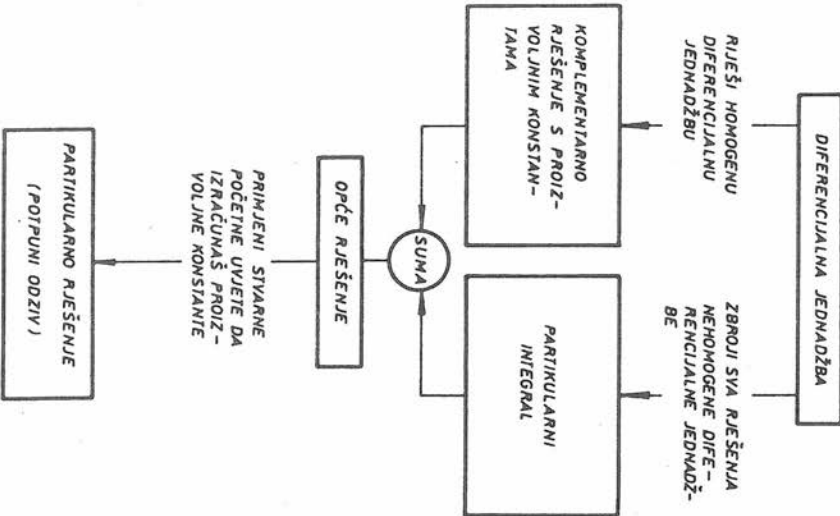
Prije nego predjemo na izlaganje tehnike rješavanja, prikladno je porazdijeliti rješenja na više načina. To je proizvoljna podjela, koja može olakšati matematičko rješavanje jednadžbi. Inače, ta podjela nije jedinstvena, pa ćemo i mi ukazati na nekoliko različitih pristupa.

Vratimo se na jednadžbu /6.1.1/ i zapitajmo se koji sve mogući  $y(t)$  može zadovoljiti tu jednadžbu za određeni  $x(t)$ . Postoje vrijednosti za  $y(t)$  koje zadovoljavaju homogenu jednadžbu u tom smislu, da kada im nadjemo sve derivacije i pomnožimo s (jedadžbom) propisanim konstantnim koeficijentima, lijeva će strana /6.1.1/ dati sumu jednaku nuli. Ovo rješenje nazivamo *komplementarnim (integralom, funkcijom)*, a čini ga onaj dio  $y(t)$  koji zadovoljava *homogenu diferencijalnu jednadžbu*, koja se dobiva izjednačivanjem lijeve strane jednadžbe /6.1.1/ s nulom. Radi te bliže veze s homogenom jednadžbom bilježiti ćemo to rješenje s  $y_h(t)$ .

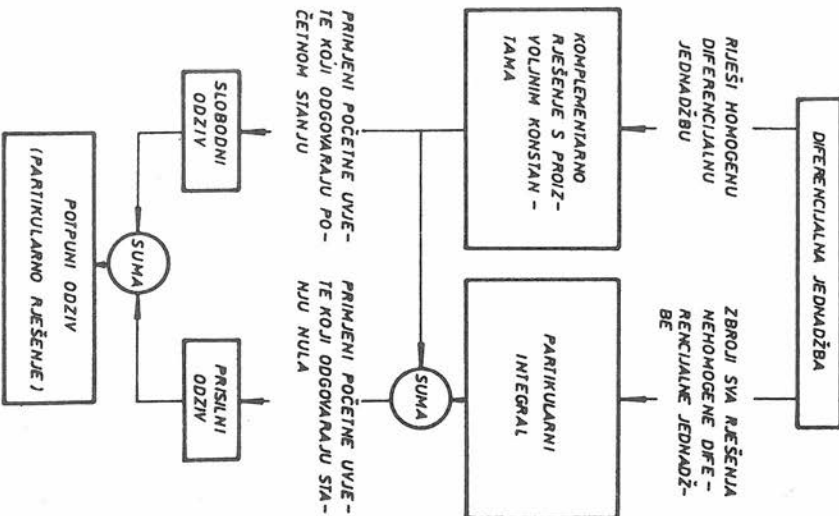
Postoji međjutim, bar još jedna druga vrijednost  $y(t)$  koja zadovoljava jednadžbu /6.1.1/. Nazvat ćemo ju *partikularni integral*, a bilježiti s  $y_n(t)$  (radi veze s nehomogenom jednadžbom). Sada možemo napisati opće rješenje kao sumu

$$y(t) = y_h(t) + y_n(t) \quad /6.1.2/$$

Ovo rješenje  $y(t)$  takodjer zadovoljava jednadžbu /6.1.1/. Kao što ćemo kasnije vidjeti,  $y_h(t)$  sadrži onoliko prethodno nedefiniranih konstanata, koliko iznosi red diferencijalne jednadžbe. Ove se konstante mogu naknadno odrediti tako da zadovoljavaju pretpostavljene početne uvjete. Iako partikularni



SI 6.1.1



SI 6.1.2



integral zadovoljava jednadžbu /6.1.1/, ne znači da zadovoljava i početne uvjete. Zapravo, tek nakon zbrajanja  $y_h(t)$  i  $y_n(t)$  možemo  $y(t)$  suočiti s početnim uvjetima u cilju utvrđivanja konstanti.

Ovaj upravo opisani postupak ilustriran je na dijagramu toka prema sl.6.1.1. Alternativni postupak rješavanja iste diferencijalne jednadžbe dat je na dijagramu toka prema slici 6.1.2.

Da bi ga mogli pratiti, moramo prethodno utvrditi značenja nekih pojmova od kojih neke sada prvi put susrećemo.

*Stanje mreža u trenutku  $t_0$*  (najčešće izjednačavamo taj  $t_0$  sa nulom!) nazvat ćemo svaki skup početnih uvjeta, koji zajedno s poticajima, jednoznačno određuju sve varijable mreže za svaki  $t \geq t_0$ . Stanje mreže u  $t=t_0$  najčešće se kraće naziva *početnim stanjem*. Shodno gornjoj definiciji riječ početno odnosi se na činjenicu, da je to stanje mreže baš u trenutku primjene poticaja na mrežu.

Iz prethodnih postavki znamo, da tim stanjem mreže u  $t=t_0$ , možemo smatrati skup napona na svim kapacitetima i struja kroz sve induktivitete u času  $t=t_0$ .

Stanje mreže kojeg karakterizira činjenica da su joj svi početni uvjeti jednaki nuli naziva se *stanje nula*. Nulto stanje mreže znači da je mreža u  $t=t_0$  prazna, "mrtva", da nema nikakvu početnu energiju u sebi. Zato za linearne mreže, ako svi ulazi ostaju jednaki nuli te ako je mreža u stanju nula, sve varijable mreže ostaju zauvijek jednake nuli.

*Prisilnim odzivom nazivat ćemo odziv (izlaz) mreže na poticaj (ulaz) primijenjen u nekom proizvoljnom trenutku  $t_0$ , pod uvjetom da je ta mreža bila u stanju nula upravo prije trenutka primjene poticaja (tj. u  $t_{0-}$ ).*

*Slobodnim odzivom nazivat ćemo odziv mreže kada je poticaj identički jednak nuli.*

Jasno je, da je prisilni odziv prouzrokovan jedino s poticajem; slično, slobodni je odziv prouzrokovan jedino s početnim stanjem.

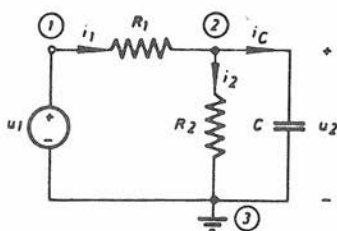
Potpunim (totalnim, kompletnim, pravim) odzivom nazivat ćemo odziv mreže prouzrokovani poticajem i početnim uvjetima.

Treba još naglasiti slijedeća svojstva linearnih (vremenski invarijabilnih ili varijabilnih) mreža:

- (1) Potpuni odziv je suma slobodnog odziva i prisilnog odziva
- (2) Prisilni odziv je linearna funkcija poticaja
- (3) Slobodni odziv je linearna funkcija početnog stanja.

#### 6.1.1. Komplementarno rješenje i slobodni odziv

Razmotrimo najprije dobivanje komplementarnog integrala i slobodnog odziva. Primjer prema sl. 6.1.3 ilustrira prvi korak, tj. dobivanje homogene diferencijalne jednačbe iz jednačbe tipa (6.1.1), na krugu s linearnim vremenski invarijabilnim elementima, kod kojega je naponski izvor  $u_1$  ulaz, a napon na kondenzatoru  $u_2$  izlaz.



Sl. 6.1.3

Da bi dobili diferencijalnu jednačbu koja definira odnos  $u_1$  i  $u_2$ , primijeniti ćemo KZS na čvorište ②. Uz pretpostavljene referentne smjerove napon je između čvorišta ① i ② jednak  $u_1 - u_2$ .

Uz čvor ③ izabran kao referentni imamo

$$\frac{u_2 - u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + C \frac{du_2}{dt} = 0 \quad /6.1.3/$$

a iz toga

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{RC} u_2 = \frac{1}{R_1 C} u_1 \quad /6.1.4/$$

gdje je  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ . Ovo je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima. Da bi je napravili homogenom treba postaviti  $u_1=0$ , pa će pod tim uvjetom  $u_2(t)$  biti odziv isključivo uslijed početnog napona na kapacitetu. Učinimo li to, imamo slijedeću homogenu diferencijalnu jednadžbu za ovaj primjer

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{RC} u_2 = 0 \quad /6.1.5/$$

Opći je oblik homogene diferencijalne jednadžbe n-tog reda prema tome ovakav

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \quad /6.1.6/$$

ili ako to pišemo kompaktnije

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = 0 \quad /6.1.7/$$

Standardno se pristupa rješavanju jednadžbi tog tipa pretpostavljanjem jednog probnog rješenja, i zatim provjeri točnost te pretpostavke. Zato nagadjajmo da je rješenje  $y = e^{st}$ . Ako to jeste rješenje, onda ono mora zadovoljavati jednadžbu /6.1.6/. Uvrstimo li  $y = e^{st}$  u jednadžbu /6.1.6/ imamo za lijevu stranu

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} (e^{st}) &= \sum_{k=0}^n a_k s^k e^{st} = \\ &= e^{st} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) \quad /6.1.8/ \end{aligned}$$

Budući da je  $e^{st} \neq 0$  za svaki konačni  $s$  i  $t$ , izraz prema jednadžbi /6.1.8/ može biti jednak nuli samo ako vrijedi relacija

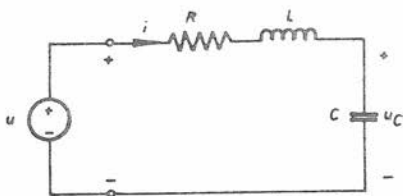
$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad /6.1.9/$$

Ova je jednađžba poznata pod imenom *karakteristična jednađžba*. Vrlo je značajna u teoriji mreža i općenito u sistemima. Iz matematike je poznato da algebarska jednađžba  $n$ -tog reda poput /6.1.9/ ima  $n$  korjena, tj.  $n$  vrijednosti za  $s$  koji uvršteni u jednađžbu uzrokuju anuliranje lijeve strane. Ovih  $n$  korjena mogu biti (ali ne moraju) različiti odnosno jednostruki. Za svaku vrijednost od  $s$  koje zadovoljava karakterističnu jednađžbu,  $e^{st}$  je rješenje diferencijalne jednađžbe /6.1.6/. Ako je  $s_1$  jedan od tih korjena, onda je  $e^{s_1 t}$  jedno rješenje. Međjutim, isto je jedno od rješenja i  $c_1 e^{s_1 t}$ , gdje  $c_1$  označava neku proizvoljnu konstantu. To se lako dokazuje uvrštavanjem u jednađžbu /6.1.6/.

Pretpostavimo najprije da su svi korjeni jednađžbe /6.1.9/ jednostruki, tj. svaki je različit od drugoga. Tada će, za  $s_1, s_2, \dots, s_n$  jednostrukih korjena jednađžbe /6.1.9/, rješenja jednađžbe /6.1.6/ biti  $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}$ . Isto će biti rješenja i  $c_1 e^{s_1 t}, c_2 e^{s_2 t}, \dots, c_n e^{s_n t}$ , ali i svaka linearna kombinacija tih rješenja. Najopćenitije komplementarno rješenje je (za jednostruke korjene) oblika

$$y_h = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \dots + c_n e^{s_n t} \quad /6.1.10/$$

gdje su  $c_1, c_2, \dots, c_n$  proizvoljne konstante. Ovo opće komplementarno rješenje isto zadovoljava jednađžbu /6.1.6/. Da bi se, međjutim, zadovoljili i uvjeti u početnom trenutku,  $c_k$  mora biti odgovarajuće izabran. Ako imamo  $n$  linearno nezavisnih početnih uvjeta, onda je i  $c_k$  jednoznačno određen.



Pretpostavimo da imamo serijski titrajni krug priključen na naponski izvor prema sl.6.1.4. Uz pretpostavku da su elementi titrajnog kruga linearni i vremenski nepromjenljivi imamo za svaki  $t \geq t_{0-}$  jednadžbu KZN

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_{0-}}^t i(t') dt' + u_c(t_{0-}) = u(t) \quad /6.1.11/$$

Derivirajući ovu jednadžbu dobivamo

$$L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t) = \frac{d}{dt} u(t) \quad /6.1.12/$$

Smatrat ćemo da je  $u(t)$  poticaj, a  $i(t)$  odziv. Diferencijalna jednadžba /6.1.12/ pokazuje međusobni odnos između  $i(t)$  i  $u(t)$ , ako je  $t_0$  trenutak primjene poticaja na titrajni krug. Početno stanje ili početni uvjeti utvrđeni su za  $t=t_{0-}$ . Ovi se uvjeti mogu sastojati od napona na kapacitetu  $u_c(t_{0-})$  i struje kroz induktivitet  $i(t_{0-})$ . Budući da je struja varijabla u jednadžbi /6.1.12/ pogodnije je izraziti  $u_c(t_{0-})$  kao funkciju od  $i$ . U trenutku  $t_{0-}$  koji je bio baš prije primjene ulaza, jednadžba KZN ima na lijevoj strani članove istog oblika kao /6.1.11/, a na desnoj strani nulu jer je  $u(t_{0-})=0$ . Budući da je integral između  $t_{0-}$  i  $t_{0-}$  jednak nuli, a struja se u tom istom intervalu nije mogla promijeniti zbog induktiviteta, imamo u  $t=t_{0-}$ :

$$Ri(t_{0-}) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=t_{0-}} + 0 + u_c(t_{0-}) = 0 \quad /6.1.13/$$

Iz toga slijedi

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=t_{0-}} = \frac{-u_c(t_{0-}) - Ri(t_{0-})}{L} \quad /6.1.14/$$

Tako smo postigli da su početni uvjeti izraženi kao funkcije struje i derivacije struje u tom trenutku neposredno prije nastupa poticaja.

Da bi potrebu ovog "cijepanja" trenutka primjene ulaza  $t_0$  na tri dijela  $t_{0-}$ ,  $t_0$  i  $t_{0+}$  pravilno shvatili, treba razmotriti slijedeću opasku.

Potražimo početne uvjete istih varijabli, ali tik nakon što je u trenutku  $t=t_0$  priključen  $u(\cdot)$  dakle u nekom  $t=t_{0+}$ . Jednadžbe KZN /6.1.11/ za taj krug mora vrijediti za svaki  $t \geq t_{0-}$ , pa prema tome u  $t=t_{0+}$  poprima slijedeću vrijednost

$$Ri(t_{0+}) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=t_{0+}} + \frac{1}{C} \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} i(t') dt' + u_C(t_{0+}) = u(t_{0+}) \quad /6.1.13*/$$

Valni oblik poticaja  $u(\cdot)$  može biti takav, da odmah u trenutku  $t_0$  primjene na krug ima neku vrijednost, npr.  $u(t_0) = U_0$ . Ta se u "intervalu" od  $t_0$  do  $t_{0+}$  nije mogla promijeniti, jer je to u stvari isti trenutak  $t_0$ , pa je  $u(t_{0+}) = u(t_0) = U_0$ . Isti je trenutak i "interval"  $t_{0-}$  do  $t_{0+}$ , pa se nisu mogli promijeniti niti struja niti napon na kapacitetu što znači da je  $i(t_{0+}) = i(t_{0-})$  odnosno  $u_C(t_{0+}) = u_C(t_{0-})$ . Iz istih je razloga integral u jednadžbi /6.1.13\*/ jednak nuli, pa ~~os~~ je rezultat za derivaciju struje u  $t=t_{0+}$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=t_{0+}} = \frac{U_0 - u_C(t_{0-}) - Ri(t_{0-})}{L} \quad /6.1.14*/$$

Widimo da se je u  $t=t_0$ , derivacija struje promijenila, iako je, naravno, početna vrijednost struje ostala ista. To je prouzrokovao početni napon izvora u tom trenutku. Budući da se početni uvjeti primjenjuju na opće rješenje diferencijalne jednadžbe, u koje ulazi i partikularno rješenje od poticaja, to bi u ovom primjeru bilo pogrešno upotrebiti /6.1.14/ umjesto /6.1.14\*/, za dobivanje potpunog odziva.

Ova opaska nalaže oprez kod računanja početnih uvjeta, koji je pogotovo na mjestu, ako je poticaj jedinični impuls ili neka slična singularna funkcija. U tom se slučaju, naime, mogu promijeniti ne samo početne derivacije nego i početne struje kroz induktivitete ili početni naponi na kapacitetima.

Potražimo najprije komplementarno rješenje. Izjednačavajući lijevu stranu jednadžbe /6.1.12/ s nulom i dijeleći ju s L dobivamo

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad /6.1.15/$$

Uvedimo slijedeće konstante

$$\alpha \triangleq \frac{R}{2L} \quad \dots \quad \text{konstanta gušenja} \quad /6.1.16/$$

$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \dots \quad \text{vlastita nepriгуšena frekvencija} \quad /6.1.17/$$

S ovim izrazima jednadžba /6.1.15/ postaje

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0 \quad /6.1.18/$$

Pretpostavivši prema /6.1.8/ rješenje  $i(t) = e^{st}$  dolazimo do karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \quad /6.1.19/$$

Korjeni ove karakteristične jednadžbe su:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \right\} \quad /6.1.20/$$

Ako je  $\alpha \neq \omega_0$ , korjeni su jednostruki pa za opće komplementarno rješenje imamo

$$i_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad /6.1.21/$$

Radi jednostavnosti daljeg računanja uvest ćemo u ovaj primjer numeričke vrijednosti. Pretpostavimo da je  $2\alpha = 3s^{-1}$ ,  $\omega_0^2 = 2 s^{-2}$ ,  $L = 0,1 H$ ,  $i(t_{0-}) = 1A$  i  $u_C(t_{0-}) = -0,5V$ . Uvrstimo li ove vrijednosti u /6.1.20/ dobivamo  $s_1 = -1s^{-1}$  i  $s_2 = -2s^{-1}$ , a komplementarno rješenje jednadžbe /6.1.12/ postaje

$$i_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad /6.1.22/$$

Potražimo sada slobodni odziv. Primjenimo li definiciju za slobodni odziv na ovaj primjer onda će to biti rješenje iste homogene jednadžbe /6.1.15/ uz početne uvjete  $i(t_{0-})$  i  $di/dt$  u  $t=t_{0-}$  prema /6.1.14/. Kako se radi o slobodnom odzivu, nema bojazni od promjene početnih uvjeta koji bi mogao uzrokovati poticaj u  $t=t_0$ , jer je u tom slučaju poticaj po definiciji odbačen. To znači, da je nepotrebno i cijepanje početnog trenutka, pa je za daljnje računanje najpodesnije smatrati  $t_{0-} = t_0 = t_{0+} = 0$ . Za pretpostavljene numeričke vrijednosti rješenje homogene jednadžbe /6.1.22/ postaje

$$i(0) = c_1 + c_2 = 1 \quad /6.1.23/$$

Derivirajući izraz /6.1.22/ dobivamo

$$\frac{di(t)}{dt} = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \quad /6.1.24/$$

U  $t=0$  izraz /6.1.14/ daje

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{-(-0,5) - 0,3 \cdot 1}{0,1} = 2 \quad /6.1.25/$$

s kojom vrijednosti treba izjednačiti izraz /6.1.24/ napisan za  $t=0$ . Prema tome imamo



$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -c_1 - 2c_2 = 2 \quad /6.1.26/$$

Iz sistema jednađbi /6.1.23/ i /6.1.26/ dobivaju se  $c_1=4$  i  $c_2=-3$ . Tako je konačno, slobodni odziv kruga prema sl. 6.1.4, uz specificirane vrijednosti parametara i početne uvjete jednak

$$i_s(t) = 4 e^{-t} - 3e^{-2t} \quad /6.1.27/$$

Razmatrajmo nadalje slučaj u kojem korjeni karakteristične jednađbe nisu svi jednostruki. Pretpostavimo npr. da je korjen  $s_1$  dvostruki korjen. U tom slučaju nije samo  $e^{s_1 t}$  rješenje jednađbe /6.1.7/ kao što je to bilo prije, nego je isto tako rješenje i  $te^{s_1 t}$ . To možemo uvidjeti iz slijedeće diskusije, ako upotrebimo operatorsku notaciju  $p=d/dt$ , i napišemo jednađbu /6.1.7/ ovako

$$\sum_{k=0}^n a_k p^k y = 0 \quad /6.1.28/$$

gdje je  $p^k y = \frac{d^k y}{dt^k}$ .

Razvijemo li jednađbu /6.1.28/ slijedi

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) y = 0 \quad /6.1.29/$$

Polinom na lijevoj strani ove jednađbe možemo pisati kao produkt faktora koji imaju oblik prema slijedećem izrazu

$$a_n (p-s_n) (p-s_{n-1}) \dots (p-s_1) y = 0 \quad /6.1.30/$$

Pretpostavimo sad da su  $s_2$  i  $s_1$  jednaki, pa je  $s_1$  dvostruki korjen karakteristične jednađbe. Ispitajmo da li  $te^{s_1 t}$  može biti rješenje diferencijalne jednađbe /6.1.30/ na taj način da ga uvrstimo u tu jednađbu.

$$\begin{aligned}
 a_n (p-s_n) (p-s_{n-1}) \dots (p-s_1) (p-s_1) t e^{s_1 t} &= \\
 = \left[ a_n (p-s_n) (p-s_{n-1}) \dots (p-s_3) \right] (p-s_1) \left( \frac{d}{dt} t e^{s_1 t} - s_1 t e^{s_1 t} \right) &= \\
 = \left[ a_n (p-s_n) (p-s_{n-1}) \dots (p-s_3) \right] (p-s_1) (s_1 t e^{s_1 t} + e^{s_1 t} - s_1 t e^{s_1 t}) &= \\
 = \left[ a_n (p-s_n) (p-s_{n-1}) \dots (p-s_3) \right] \left( \frac{d}{dt} e^{s_1 t} - s_1 e^{s_1 t} \right) &= \\
 = \left[ a_n (p-s_n) (p-s_{n-1}) \dots (p-s_3) \right] (s_1 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_1 t}) &= \\
 = \left[ a_n (p-s_n) (p-s_{n-1}) \dots (p-s_3) \right] 0 = 0 & \quad /6.1.31/
 \end{aligned}$$

Ovime smo dokazali da i  $t e^{s_1 t}$  jeste jedno rješenje, ako je  $s_1$  dvostruki korjen karakteristične jednadžbe. Sličnom bi se procedurom moglo pokazati, da ako je  $s_1$  trostruki korjen karakteristične jednadžbe, tada su pored rješenja  $e^{s_1 t}$ , još  $t e^{s_1 t}$  i  $t^2 e^{s_1 t}$  takodjer rješenja koja zadovoljavaju homogenu diferencijalnu jednadžbu gornjeg tipa. Općenito, ako je  $s_1$  korjen  $r_1$ -tog reda, tada su  $e^{s_1 t}$ ,  $t e^{s_1 t}$ ,  $t^2 e^{s_1 t}$ , ...,  $t^{r_1-1} e^{s_1 t}$  sva rješenja, odnosno rješenje će biti i linearna kombinacija

$$y_h = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} + c_3 t^2 e^{s_1 t} + \dots + c_{r_1} t^{r_1-1} e^{s_1 t} \quad /6.1.32/$$

To znači, da za diferencijalnu jednadžbu  $n$ -tog reda tipa poput /6.1.30/, mi uvijek možemo napisati komplementarno rješenje koje će sadržavati  $n$  linearno nezavisnih konstanti.

Ako npr. imamo zadanu diferencijalnu jednadžbu

$$(p+1)^3 (p+2) (p+3)^2 y = 0 \quad /6.1.33/$$

tada su rješenja  $e^{-3t}$ ,  $t e^{-3t}$ ,  $e^{-2t}$ ,  $e^{-t}$ ,  $t e^{-t}$ ,  $t^2 e^{-t}$ , a najopćenitije komplementarno rješenje je

$$y_h = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{-t} + c_5 t e^{-t} + c_6 t^2 e^{-t} \quad /6.1.34/$$

koje sadržava šest proizvoljnih konstanta. Diferencijalna jednačina je, naravno, šestog reda, i potrebno je poznavati šest nezavisnih početnih uvjeta.

### 6.1.2. Partikularni integral i prisilni odziv

U primjerima rješavanja, gdje analizirana mreža ima samo jedan poticaj, te ako je valni oblik tog ulaznog signala jednostavan (npr. konstanta, eksponencijala, sinusoida), određivanje partikularnog integrala može biti vrlo lagano.

Pretpostavimo da je linearna vremenski nepromjenljiva mreža ili sistem, čiji je ulaz  $x(t)$ , a izlaz  $y(t)$ , opisana jednačinom

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_0 x \quad /6.1.35/$$

Ovo je ista jednačina kao /6.1.1/ osim što je zbog jednostavnosti uzeto da je  $a_n=1$  (ukoliko on nije jednak jedinici, može se uvijek dobiti oblik jednačine prema /6.1.35/, dijeljenjem obje strane jednačine /6.1.1/ s  $a_n$ , i redefiniranjem koeficijenata). Kao što smo već ustanovili za specificirani  $x(t)$ , funkcija  $y_n(t)$  koja zadovoljava jednačinu /6.1.35/ naziva se partikularni integral.

Ako npr. imamo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 2 \frac{dx}{dt} + 5x \quad /6.1.36/$$

gdje je  $x=4$ .

U tom slučaju izraz

$$y_n = 10 \quad /6.1.37/$$

zadovoljava jednačinu /6.1.36/, pa je to onda i partikularni integral.

Općenito kada je  $x$  neka konstanta  $K$  i  $a_0 \neq 0$ , onda je partikularni integral jednadžbe /6.1.35/ jednak

$$y_n(t) = \frac{b_0 K}{a_0} \quad /6.1.38/$$

To se lako provjerava vraćanjem izraza /6.1.38/ u opću jednadžbu /6.1.35/, budući su sve derivacije jednake nuli. Ako je  $a_0=0$ , ali  $a_1 \neq 0$ , onda je partikularni integral za  $x=K$  jednak

$$y_n(t) = \frac{b_0 K}{a_1} t \quad /6.1.39/$$

Sličnim zaključivanjem dobili bi partikularni integral, ako je  $a_0=a_1=0$  ali  $a_2 \neq 0$ , itd.

Drugi osnovni oblik signala je eksponencijala

$$x(t) = e^{st} \quad /6.1.40/$$

Partikularni integral za takav poticaj jest

$$y_n(t) = H e^{st} \quad /6.1.41/$$

gdje je  $H$  odgovarajuća konstanta, koja se može odrediti iz koeficijenata jednadžbe /6.1.35/.

Neka je npr. u mreži koju opisuje diferencijalna jednadžba /6.1.36/ poticaj  $x = e^{2t}$ . Prema /6.1.41/ partikularni je integral

$$y_n(t) = H e^{2t} \quad /6.1.42/$$

Supstitucijom /6.1.42/ u /6.1.36/ dobivamo

$$\left[ 2^2 + 3(2) + 2 \right] H e^{2t} = (2 \cdot 2 + 5) e^{2t} \quad /6.1.43/$$

Iz ovog slijedi da mora biti  $H=9/12$ , pa je partikularni integral

$$y_n(t) = \frac{9}{12} e^{2t} \quad /6.1.44/$$

Prema tome, ako je  $x(t) = e^{s_1 t}$  gdje je  $s_1$  proizvoljna konstanta, onda je  $y_n(t) = H e^{s_1 t}$  partikularni integral, a  $H$  treba odrediti iz diferencijalne jednačbe.

Za upravo provedeni primjer bio je  $s_1=2$ , a iz /6.1.43/ vidimo da je  $H$  dobiven iz izraza

$$H = \frac{2s_1 + 5}{s_1^2 + 3s_1 + 2} \quad /6.1.45/$$

Iz ovoga je lako zaključiti na općeniti oblik od  $H$ , ako je poticaj oblika /6.1.40/

$$H = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad /6.1.46/$$

Nazivnik ovog izraza ne bi smio biti jednak nuli. To nadalje znači, da gornja procedura vrijedi samo ako  $s$  nije jedan od korjena karakteristične jednačbe.

Treći valni oblik ulaza koji ćemo razmotriti je sinusoida.

$$x(t) = \cos \omega t \quad /6.1.47/$$

Partikularni integral koji odgovara tom ulazu jest

$$y_n(t) = A \cos (\omega t + \phi) \quad /6.1.48/$$

gdje su  $A$  i  $\phi$  konstante koje treba odrediti.

Uzmimo da je poticaj na mrežu opisan diferencijalnom jednačbom /6.1.36/ upravo ovaj /6.1.47/, i uvrstimo u nju pokusno rješenje /6.1.48/

$$A \left[ -\omega^2 \cos(\omega t + \phi) - 3\omega \sin(\omega t + \phi) + 2 \cos(\omega t + \phi) \right] =$$

$$= 5 \cos \omega t - 2\omega \sin \omega t \quad /6.1.49/$$

Da bi pojednostavnili postupak treba sinusoidalne članove razviti prema adicijom teoremu, a zatim izjednačiti odgovarajuće koeficijente uz  $\cos \omega t$ , odnosno uz  $\sin \omega t$ . Rezultat ovih operacija su slijedeće dvije jednačbe:

$$A(-\omega^2 \cos \phi - 3\omega \sin \phi + 2 \cos \phi) = 5 \quad i \quad /6.1.50/$$

$$A(\omega^2 \sin \phi - 3\omega \cos \phi - \sin \phi) = -2\omega$$

Dvije su nepoznanice u ove dvije jednačbe  $A$  i  $\phi$ . Uz primjenu poznatih trigonometrijskih relacija, dobivamo rezultat

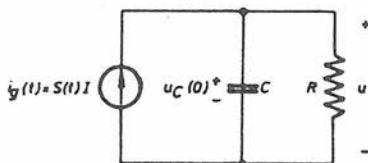
$$\operatorname{tg} \phi = \frac{-\omega(2\omega^2 + 11)}{\omega^2 + 10} \quad /6.1.51/$$

$$i \quad A = \frac{5}{(2 - \omega^2) \cos \phi - 3\omega \sin \phi} \quad /6.1.52/$$

Pretpostavljeno je da nazivnik u ovoj jednačbi nije jednak nuli, što ujedno znači da  $j\omega$  nije korjen karakteristične jednačbe. Ovaj se postupak računanja  $A$  i  $\phi$  znatno pojednostavljuje s pomoću simboličkog pisanja sinusoidalnih veličina, kojeg smatramo dobro poznatim.

Razmotrimo sada prisilni odziv na primjeru kruga prema sl. 6.1.5.

Pretpostavimo da se izvor konstantne struje priključuje u  $t=0$  na paralelni spoj (linearnih i vremenski nepromjenljivih) otpora i kapaciteta. Prema KZN vidimo da je napon u preko sva tri elementa jednak. Smatrajmo nadalje da nam je napon u odziv kojega tražimo, a  $i_g(t) = S(t)I$  poticaj. Ako napišemo



Sl. 6.1.5

jednadžbu KZS uz  $u$  kao varijablu imamo za svaki  $t \geq 0$

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} u = i_g(t) = S(t)I \quad /6.1.53/$$

Opće rješenje ove linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe jednako je sumi rješenja homogene-komplementarne funkcije, i rješenja nehomogene-partikularnog integrala.

$$u = u_h + u_n \quad /6.1.54/$$

Prema /6.1.10/ opće je rješenje homogene jednadžbe

$$u_h = K_1 e^{s_1 t} \quad /6.1.55/$$

jer karakteristična jednadžba

$$C s + \frac{1}{R} = 0 \quad /6.1.56/$$

ima samo jedan korjen

$$s_1 = - \frac{1}{RC} \quad /6.1.57/$$

Prema /6.1.38/ partikularni je integral nehomogene jednadžbe

$$u_n = \frac{\frac{1}{C} I}{\frac{1}{RC}} = RI \quad /6.1.58/$$

Supstitucijom /6.1.55/ i /6.1.58/ u /6.1.54/ dobivamo opće rješenje jednadžbe /6.1.53/ za  $t \geq 0$

$$u(t) = K_1 e^{-\frac{1}{RC} t} + RI \quad /6.1.59/$$

gdje je  $K_1$  konstanta, koju trebamo izračunati iz početnih uvjeta.

Budući da želimo odrediti prisilni odziv, moramo se prisjetiti definicije date u početku ove glave. Prema toj definiciji za prisilni odziv, početno stanje kruga upravo prije primjene poticaja mora biti jednako nuli. To znači, da su i poticaj i prisilni odziv identički jednaki nuli za svaki  $t$ , koji je manji od trenutka nastupa poticaja.

U našem je primjeru poticaj zadan kao produkt jediničnog skoka  $S(t)$  i konstante  $I$ . To znači, da je za svaki  $t < 0$  strujni izvor ekvivalentan prekinutoj grani, dok za svaki  $t \geq 0$  napaja paralelni RC krug s konstantnom strujom  $I$ . Nadalje, za određivanje prisilnog odziva, mora napon na kapacitetu biti jednak nuli u  $t=0^-$ , baš prije primjene poticaja. Budući znamo, da napon na kapacitetu ne može bez beskonačne struje momentalno skočiti, onda nema promjene tog početnog uvjeta od  $t=0^-$  do  $t=0^+$ , pa je dovoljno računati samo s  $t=0$ . Postavljajući dakle  $u_C(0) = u(0) = 0$  u jednadžbi /6.1.59/ za  $t=0$ , imamo

$$u(0) = K_1 + RI = 0$$

a iz toga je

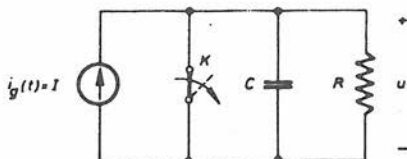
$$K_1 = -RI \quad /6.1.60/$$

Prisilni odziv kruga prema sl.6.1.5 je prema tome jednak slijedećem izrazu

$$u_p(t) = RI \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC} t} \right) \quad /6.1.61/$$

Krug prema sl.6.1.6 imao bi potpuni odziv za svaki  $t \geq 0$  identičan izrazu na desnoj strani jednadžbe /6.1.61/, ako se u  $t=0$  otvara sklopka  $k$ .





Sl. 6.1.6

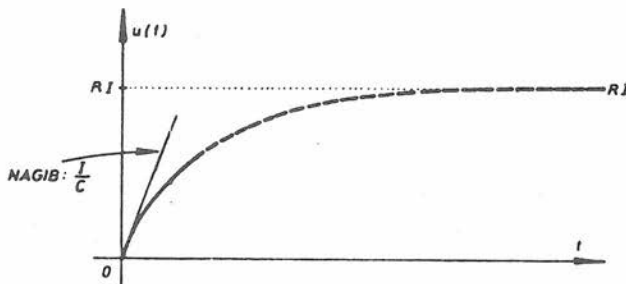
Prije otvaranja sklopke  $k$ , struja  $I$  kruži kroz kratko spojeni izvor. Budući da je sve do  $t=0$ , sklopka  $k$  bila zatvorena, možemo s pravom smatrati da je kapacitet u tom trenutku prazan, odnosno da je  $u(0)=0$ .

Pogledajmo što će se dogoditi nakon otvaranja sklopke. U  $t=0+$ , tj. odmah nakon otvaranja sklopke, napon na kapacitetu ostaje jednak nuli, jer ne može trenutno promijeniti vrijednost, ako mu struja nije beskonačna. (To je objašnjeno u glavi 2). Budući da je napon  $u(0+)$  još uvijek nula, ne može biti niti struje kroz otpor. Prema tome, sva struja iz izvora u  $t=0$  ulazi u kapacitet, pa je brzina porasta napona  $u$  skladu s jednadžbom /6.1.53/ jednaka

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{I}{C} \quad /6.1.62/$$

Ova struja nabija kapacitet, što znači da tokom vremena raste  $u$ , pa takodjer raste i struja  $u/R$  kroz otpor. Kako izvor daje konstantnu struju, mora sve manji dio te struje nabijati kapacitet, iz čega slijedi sve sporiji porast napona na kapacitetu. Nakon što prođe dovoljno mnogo vremena od otvaranja sklopke, kapacitet je potpuno nabijen, a napon na njemu postaje i ostaje praktički konstantan, odnosno  $du/dt \approx 0$ . Dalje možemo smatrati da sva struja iz izvora teče kroz otpor, a kapacitet se ponaša kao prekinuta grana. Jednadžba /6.1.53/ daje

tada odziv  $u \approx RI$ . Mi kažemo, da je krug dosegao *stacionarno stanje* (sl.6.1.7).



Sl 6.1.7

Graf na slici 6.1.7 ujedno prikazuje i prisilni odziv prema jednadžbi /6.1.61/.

### 6.1.3. Potpuni odziv, prelazno i stacionarno stanje

Treba zapaziti, da smo u prošlom odjeljku, za izračunavanje prisilnog ozdiva upotrebili i komplementarni i partikularni integral. Štaviše, upotrebili smo i tvrdnju o općem rješenju kao sumi komplementarnog i partikularnog. Jedino ograničenje kojeg smo se kod toga morali držati, bilo je u postavljanju vrijednosti svih početnih napona na kapacitetima, i svih početnih struja u induktivitetima na nulu.

Za odredjivanje potpunog odziva, treba se poslužiti postavkama navedenim u uvodu ovog poglavlja, odnosno dijagramima toka na slikama 6.1.1 i 6.1.2.

Prema tome, da bi našli potpuni odziv treba komplementarno rješenje  $y_h(t)$  zbrojiti s partikularnim  $y_n(t)$ , a konstante u  $y_h(t)$  odrediti tako, da  $y_h(t) + y_n(t)$  zadovolji postavljene početne uvjete:  $y(0+)$ ,  $y'(0+)$ , ..., itd.

Ovi se početni uvjeti pronalaze iz poznatih početnih napona na kapacitetima, struja kroz induktivitete i vrijednosti poticaja u tom početnom trenutku.

Vratimo se ponovno na primjer prema sl.6.1.5 i potražimo ovaj put, ne više prisilni nego potpuni odziv ako je sada početni napon na kapacitetu  $u_c(o-) = u_c(o+) = u(o) = U$ . Budući smo već našli zbroj komplementarnog i partikularnog rješenja /6.1.59/, treba samo odrediti  $K_1$  tako, da odgovara specificiranom početnom uvjetu. Postavljajući  $t=0$  u /6.1.59/ imamo

$$u(o) = K_1 + RI = U \quad /6.1.63/$$

a iz toga

$$K_1 = U - RI \quad /6.1.64/$$

Uvrštavajući dobivenu vrijednost za  $K_1$  natrag u jednadžbu /6.1.59/ dobivamo potpuni odziv

$$u(t) = U e^{-\frac{1}{RC} t} + RI (1 - e^{-\frac{1}{RC} t}) \quad /6.1.65/$$

Treba se prisjetiti, da smo prisilni odziv /6.1.61/ dobili na isti način, tj. tražeći potpuni odziv uz početne uvjete (specifično za prisilni odziv) jednake nuli.

Potpuni odziv može se, međjutim, odrediti i na drugi način. U uvodu smo ovog poglavlja spomenuli, navodeći svojstva linearnih mreža, da je potpuni odziv zbroj slobodnog i prisilnog odziva

$$y(t) = y_s(t) + y_p(t) \quad /6.1.66/$$

Ovdje je  $y_s(t)$  slobodni odziv, a  $y_p(t)$  prisilni odziv. U odjeljku 6.1.1 prodiskutirali smo metodu izračunavanja  $y_s(t)$  preko komplementarnog rješenja  $y_h(t)$  diferencijalne jednadžbe, koje ograničimo specificiranim početnim uvjetima  $y(o)$ ,  $y'(o)$ , ...,  $y^{(n-1)}(o)$ , koji su u mreži u trenutku neposredno prije

primjene poticaja. Vidjeli smo nadalje, da katkada moramo provesti pomoćnu analizu mreže, da bi te početne uvjete odredili iz zadanih početnih napona na kapacitetima i početnih struja kroz induktivitete. U odjeljku 6.1.2 prođiskutirali smo metodu izračunavanja  $y_p(t)$  preko općeg rješenja  $y_h(t) + y_n(t)$  diferencijalne jednadžbe, koje ograničimo početnim stanjem nula, u trenutku neposredno prije primjene poticaja.

Sada ćemo na istom primjeru (sl.6.1.5) odrediti potpuni odziv, ali prema izrazu /6.1.66/. To znači da mora biti

$$u(t) = u_s(t) + u_p(t) \quad /6.1.67/$$

Primijenimo li na komplementarno rješenje /6.1.55/ u  $t=0$  početni uvjet  $u_c(0) = u(0) = U$ , odmah dobivamo slobodni odziv za svaki  $t \geq 0$

$$u_s(t) = U e^{-\frac{1}{RC} t} \quad /6.1.68/$$

Prisilni smo odziv za ovaj primjer izračunali u prošlom odjeljku, i dobili smo izraz /6.1.61/

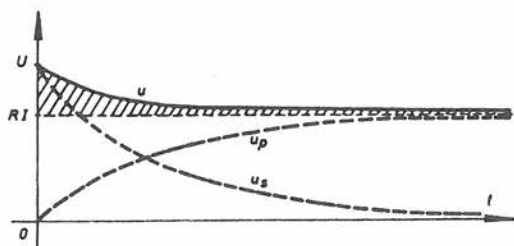
To znači da je potpuni odziv za svaki  $t \geq 0$

$$u(t) = \underbrace{U e^{-\frac{1}{RC} t}}_{\text{Potpuni odziv}} + \underbrace{RI (1 - e^{-\frac{1}{RC} t})}_{\text{Slobodni odziv}} \quad /6.1.69/$$

Prisilni odziv

Ovi odzivi prikazani su grafički na sl.6.1.8.

Vidimo, da smo isti rezultat za potpuni odziv dobili rješavanjem nehomogene diferencijalne jednadžbe sa zadanim početnim uvjetima /6.1.65/, kao i zbrajanjem slobodnog i prisilnog odziva /6.1.69/. Svejedno je dakle, sa stanovišta računanja, koju ćemo od ovih metoda općenito primjenjivati.



Sl. 6.1.8

S fizikalne točke gledišta, međjutim, neobično je važno stalno imati na umu, da je potpuni odziv suma slobodnog odziva (nastalog isključivo zbog početnih uvjeta) i prisilnog odziva (nastalog isključivo zbog poticaja). Ovo je raščlanjivanje jedna od fundamentalnih činjenica u teoriji linearnih mreža i teoriji linearnih sistema.

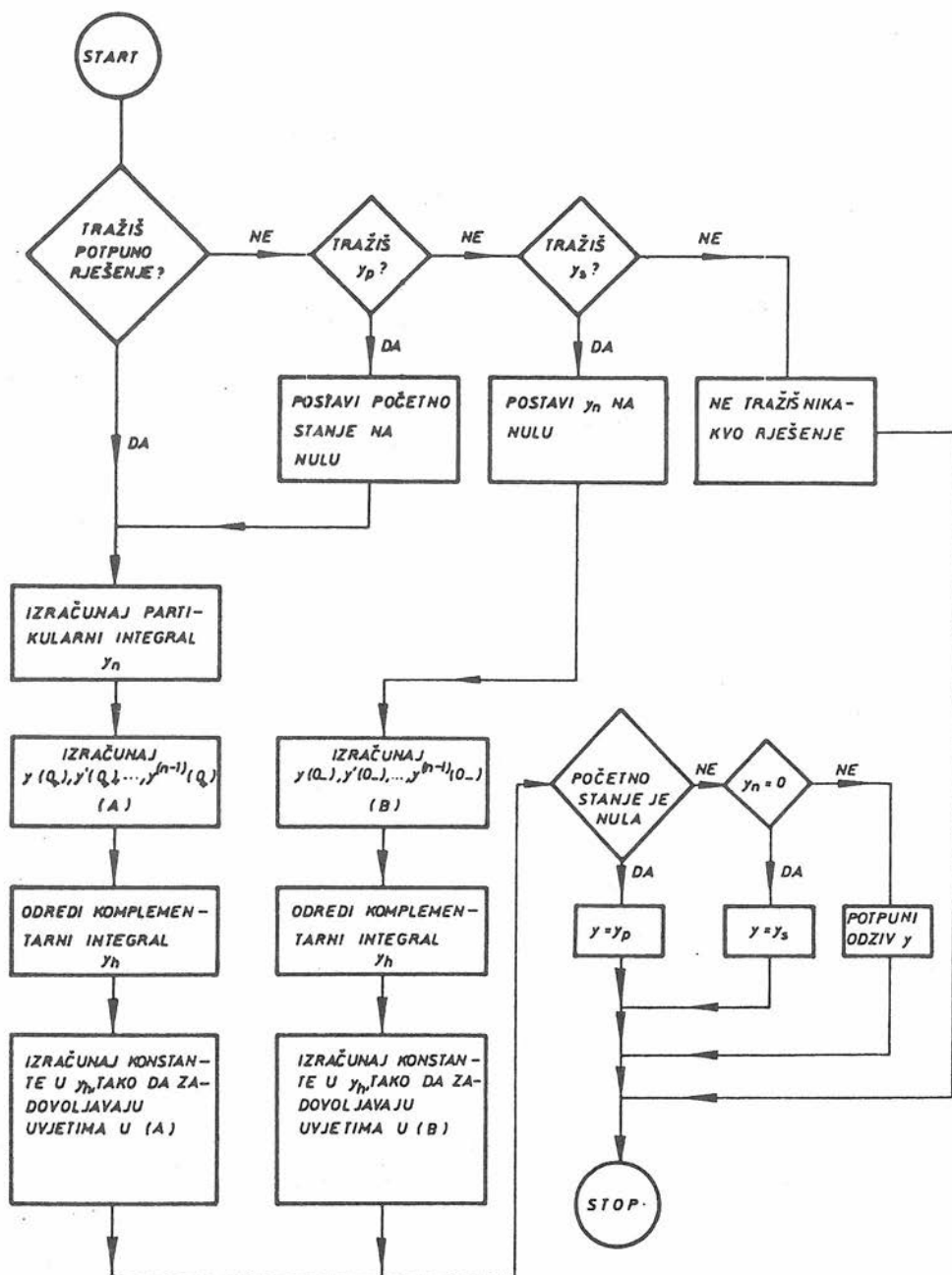
U prethodnom smo primjeru mogli takodjer drugačije raščlaniti potpuni odziv. Prestrojimo zato članove izraza /6.1.69/ za potpuni odziv uslijed početnog stanja  $U$ , i poticaja konstantne struje  $I$  kruga prema sl.6.1.5, na slijedeći način

$$u(t) = \underbrace{(U-RI)}_{\text{Potpuni odziv}} e^{-\frac{1}{RC}t} + \underbrace{RI}_{\text{Stacionarno stanje}} \quad \text{za } t \geq 0 \quad /6.1.70/$$

Lako se možemo uvjeriti da je izraz /6.1.70/ ekvivalentan izrazu /6.1.69/. Prvi je član na desnoj strani opadajuća eksponencijala, a na sl.6.1.8 istaknuta je šrafurom površina koja se nalazi između valnog oblika  $u(\cdot)$  i konstante  $RI$ .

Za vrlo veliki  $t$ , ovaj prvi član postaje zanemariv i preostaje jedino drugi konstantni član. Iz tog razloga i nazivamo prvi član *prelaznim stanjem*, a drugi član *stacionarnim stanjem*.

U ovom primjeru je vidljivo, da prelaznom stanju doprinosi kako slobodni, tako i prisilni odziv, dok je stacionarno



stanje dio samog prisilnog odziva. Fizikalno gledajući, prelazno je stanje posljedica dva uzročnika - početnog stanja u mreži i nagle primjene poticaja. Kako vrijeme sve više protiče, tako i prelazno stanje (u pravilu) sve više odumire. Stacionarno stanje je isključivo rezultat ulaza pa mu je valni oblik u tijesnoj vezi s ulaznim valnim oblikom.

Npr. ako je poticaj konstanta, stacionarno stanje je također konstanta; ako je poticaj sinusoida kutne frekvencije  $\omega$ , stacionarno stanje je također sinusoida iste frekvencije, itd.

U ovom smo poglavlju utvrdili, prodiskutirali i primjerima pokazali klasični pristup rješavanja diferencijalnih jednačbi linearnih mreža. Na dijagramu toka (sl.6.1.9) skraćeno su i preglednije ilustrirani pojedini koraci i odluke u okviru ove metode rješavanja.

## 6.2. ODZIV NA JEDINIČNI IMPULS

I u ovom ćemo poglavlju još uvijek na klasičan način rješavati diferencijalne jednačbe, kao što smo u nekoliko varijanti upravo izložili. Razlika će, međjutim, biti u sastavu jednačbi, koje će sad imati na desnoj strani pobudnu funkciju u formi diskontinuiranih valnih oblika. Preciznije rečeno, analizirat ćemo mrežu sa samo jednim poticajem, kod koje nas zanima samo jedan odziv. Nastojat ćemo ustanoviti metodu za dobivanje tog odziva pod pretpostavkom, da je poticaj jedinični skok, jedinični impuls, derivacije jediničnog impulsa ili neke linearne kombinacije tih valnih oblika. Kod toga ćemo upoznati neke nove pojmove i prodiskutirati novouočena svojstva promatranih mreža.

Kao fizikalne veličine, odzivi na takove poticaje, vrlo su značajni za definiranje ponašanja linearnih sistema. Upravo se zato precizni matematički opis mreže, katkada i izražava s pomoću odziva na jedinični impuls.

Prethodno moramo ukazati na neke nove aspekte linearnosti i vremenske invarijabilnosti.

#### 6.2.1. Odnos skokovnog i impulsnog odziva

Pretpostavimo da je  $y(t)$  prisilni odziv linearne vremenski nepromjenljive mreže na poticaj  $x(t)$ , koji nastupa u  $t=0$ . Ako se prisjetimo karakterizacije vremenske nepromjenljivosti iz prve glave, to znači, da je odziv na  $x(t-\Delta)$ , jednak  $y(t-\Delta)$  za svaki  $\Delta > 0$ . Drugim riječima, ako je poticaj zakasnio za  $\Delta$ , onda je i odziv zakasnio isto za  $\Delta$ .

Iz definicije pojma linearnosti (uvjet aditivnosti) slijedi nadalje, da kombinacija od dva poticaja

$$x_1 = x(t) - x(t-\Delta) \quad /6.2.1/$$

daje odziv

$$y_1 = y(t) - y(t-\Delta) \quad /6.2.2/$$

Princip homogenosti kod linearnih mreža uvjetuje, da množenje ulaza s konstantom npr.  $1/\Delta$ , rezultira s  $1/\Delta$  pomnoženim izlazom.

Ako je dakle poticaj

$$x_2 = \frac{1}{\Delta} [x(t) - x(t-\Delta)] \quad /6.2.3/$$

onda je odziv

$$y_2 = \frac{1}{\Delta} [y(t) - y(t-\Delta)] \quad /6.2.4/$$

Graničnim prelazom, kod kojega po volji smanjujemo  $\Delta$ , poticaj se  $x_2$  prema izrazu /6.2.3/ približava vremenskoj derivaciji od  $x(t)$ . Na isti se način odziv  $y_2$ , prema /6.2.4/ približava tada derivaciji od  $y(t)$ . Uz uvjet postojanja tih derivacija, dolazimo do vrlo korisnog zaključka.



Ako je  $y(t)$  prisilni odziv linearne vremenski nepromjenljive mreže na poticaj  $x(t)$ , onda će prisilni odziv iste mreže na poticaj  $dx/dt$  biti  $dy/dt$ .

Ovaj zaključak vrijedi i tada, kada  $x$  i  $y$  ne sadržavaju samo obične derivacije. Ako npr.  $x(t)$  ima skokoviti diskontinuitet u  $t=t_1$ , onda će  $dx(t)/dt$  sadržavati impuls u tom  $t=t_1$ . Prema tome, mora se kod primjene tog principa dobro otvoriti oči na funkciju  $x(t)$ , i ustanoviti ima li ona singularitet u  $t=0$ , da bi se ispravno odredio  $dx(t)/dt$ .

Ilustrirat ćemo to jednim primjerom (sl.6.2.1.a)). Neka je na ulaz linearne vremenski invarijabilne mreže primijenjen poticaj iz naponskog izvora u obliku  $u_{ul}(t)=S(t)$ . Poznato je već, da će uz prethodno nenabijeni kapacitet  $C$ , odziv kao napon na otporu  $R$  imati oblik  $u_{iz}(t)=e^{-t}S(t)$  (sl.6.2.1.b)). Budući da nas interesira ponašanje mreže samo sa stanovišta valnih oblika, sve su veličine uzete bez dimenzija.

Želimo li odrediti odziv na  $du_{ul}/dt=\delta(t)$ , treba prema gornjem principu derivirati  $u_{iz}(t)$ . Taj je odziv složena funkcija pa ju deriviramo kao produkt

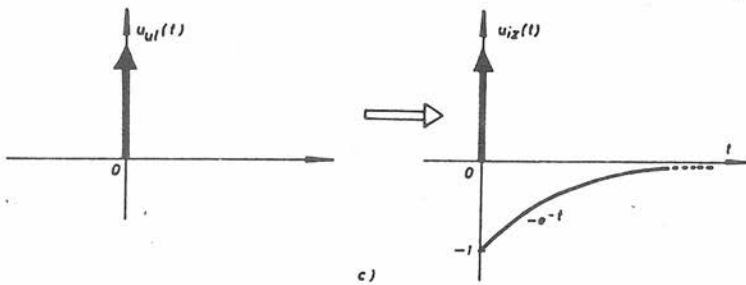
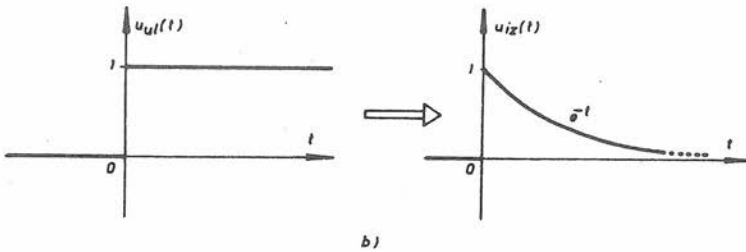
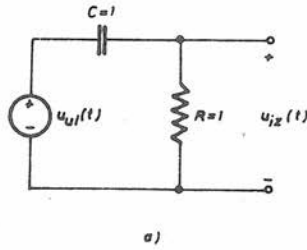
$$\frac{du_{iz}}{dt} = \delta(t)e^{-t} - e^{-t}S(t) \quad /6.2.5/$$

Budući da je  $\delta(t)$  jednak nuli u svakom trenutku osim u  $t=0$ , to možemo i u faktoru koji ga množi staviti  $t=0$ . Tako imamo

$$\frac{du_{iz}}{dt} = \delta(t) - e^{-t}S(t) \quad /6.2.6/$$

što je odziv ove mreže na jedinični impuls  $\delta(t)$ , a grafički je prikazan na sl.6.2.1.c).

Da je oblik odziva upravo takav, može se zaključiti i fizikalnim razmišljanjem promatrajući shemu zadanog kruga. U  $t=0$  kapacitet nije pod naponom i ponaša se kao kratkospojna grana ( $u_C=0$ ). Prema tome, primjena jediničnog impulsa na



Sl. 6.2.1

ulazu, uzrokuje da se takav isti jedinični impuls pojavi smješta na izlazu, kao napon na otporu  $R$ . Strujni impuls trenutno nabije kapacitet, koji se tada od trenutka  $t=0+$  izbija po eksponencijali, dakle strujom naboja koja je protivnog smjera. Zato i odziv  $u_{i2}(t)$  mora za svaki  $t>0$  biti protivnog polariteta od odabranog referentnog.

Sličnim razmatranjem možemo doći i do inverzije gornjeg principa. Ako je, naime, prisilni odziv  $y(t)$  neke linearne vre-

menski nepromjenljive mreže uzrokovan poticajem  $x(t)$  koji započinje u  $t=0$ , onda će ista ta mreža reagirati na poticaj

$$x_1(t) = \int_0^t x(t') dt' \quad /6.2.7/$$

s odzivom

$$y_1(t) = \int_0^t y(t') dt' \quad /6.2.8/$$

Uzmimo npr. isti krug iz sl.6.2.1.a) kojem je poticaj bio jedinični skok, a odziv eksponencijala kao što pokazuje sl. 6.2.1.b). Ako umjesto  $S(t)$  imamo sad jedinični uspon kao poticaj,

$$u_{ul}(t) = r(t) = \int_0^t S(t') dt' \quad \text{za } t \geq 0 \quad /6.2.9/$$

onda će prisilni odziv uslijed jediničnog uspona prema /6.2.8/ biti

$$u_{iz}(t) = \int_0^t e^{-t'} dt' = 1 - e^{-t} \quad \text{za } t \geq 0 \quad /6.2.10/$$

Budući da smo već dobro utvrdili pojam prisilnog odziva, definirat ćemo sada s pomoću njega dva specifična tipa odziva, s kojima analiza linearnih vremenski nepromjenljivih mreža mnogo operira.

*Skokovnim odzivom  $s(t)$  mreže nazivat ćemo njezin prisilni odziv na poticaj oblika jediničnog skoka  $S(t)$ .*

*Impulsnim odzivom  $h(t)$  mreže nazivat ćemo njezin prisilni odziv na poticaj oblika jediničnog impulsa  $\delta(t)$ .*

S obzirom na invedene tvrdnje u ovom odjeljku, sad možemo uspostaviti vrlo važan odnos između skokovnog i impulsnog odziva u linearnim vremenski nepromjenljivim mrežama.

*Impulsn je odziv linearne vremenski nepromjenljive mreže vremenska derivacija njezinog skokovnog odziva.*

Simbolički pisano to izgleda ovako:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad /6.2.11/$$

ili ekvivalentno

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt' \quad /6.2.12/$$

### 6.2.2. Impulsni odziv iz diferencijalnih jednačbi.

Pretpostavimo da smo analizirajući linearnu vremenski nepromjenljivu mrežu dobili diferencijalnu jednačbu općeg oblika kako slijedi:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x \quad /6.2.13/$$

gdje je  $y$  vremenska funkcija odziva, koji može biti neki napon ili struja, a  $x$  vremenska funkcija poticaja koji isto može biti napon ili struja.

Pitanje koje nam se sada postavlja jest: kako dobiti impulsni odziv  $h(t)$ ? Traži se dakle prisilni odziv, ako je u ovoj diferencijalnoj jednačbi  $x(t)$  jednak jediničnom impulsu  $\delta(t)$ . Da bi to postigli, razmatrat ćemo u prvom koraku prisilni odziv, ako je na desnoj strani ove diferencijalne jednačbe pobudna funkcija samo jedan jedinični skok. Drugim riječima potražiti ćemo najprije skokovni odziv ovako modificirane jednačbe /6.2.13/:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = x = s(t) \quad /6.2.14/$$

Neka je prisilni odziv, prema ovoj pomoćnoj diferencijalnoj jednačbi /6.2.14/, neka vremenska funkcija koju ćemo označiti s  $y_0(t)$ .

Prisilni odziv koji bi slijedio iz diferencijalne jednačbe s identičnom lijevom stranom, ali s poticajem  $x$  na desnoj strani jednakim jediničnom impulsu  $\delta(t)$ , bio bi tada

$$y_1(t) = \frac{dy_0(t)}{dt} \quad /6.2.15/$$

Taj zaključak slijedi iz činjenice, da je  $\delta(t)$  derivacija od  $S(t)$ , i da je jednačba /6.2.14/ linearna i vremenski nepromjenljiva, a upoznali smo ga u prošlom odjeljku. Analognom primjenom iste konstatacije, onoliko puta koliko zahtijeva desna strana polazne diferencijalne jednačbe, dolazimo do traženog rezultata za impulsni odziv  $h(t)$ . Prema tome, ako je u jednačbi /6.2.13/  $x$  jednak jediničnom impulsu  $\delta(t)$ , onda je prisilni odziv mreže koju takva diferencijalna jednačba opisuje jednak

$$h(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} [y_1(t)] + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} [y_1(t)] + \dots + b_0 y_1(t) \quad /6.2.16/$$

Ovo je procedura za dobivanje konačnog rezultata, ali je ključni problem ostao, a to je pronaći prisilni odziv  $y_0(t)$  prema jednačbi /6.2.14/. Prisjetimo se pri tom, da se prisilni odziv dobiva stavljanjem svih početnih vrijednosti napona na kapacitetima i svih početnih vrijednosti struja u induktivitetima na nulu, u trenutku  $t=0^-$  upravo prije primjene poticaja. U slučaju jednačbe /6.2.14/ poticaj je  $S(t)$ , a taj valni oblik ima po definiciji diskontinuitet u  $t=0$ . Iz toga slijedi, što se tiče početnih uvjeta, da  $y_0(t)$  kao i derivacije  $y_0'(t)$ ,  $y_0''(t)$ , ..., itd., mogu i ne biti kontinuirani u  $t=0$ ! Drugim riječima može biti

$$\begin{aligned} y_0^{(n)}(0^-) &\neq y_0^{(n)}(0^+) \\ y_0^{(n-1)}(0^-) &\neq y_0^{(n-1)}(0^+) \\ &\dots\dots\dots \\ y_0(0^-) &\neq y_0(0^+) \end{aligned} \quad /6.2.17/$$

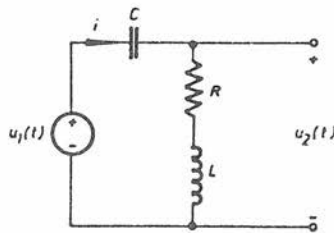


Da bi konačno dobili  $y_o(t)$  za svaki  $t \geq 0$  treba zamijeniti u jednadžbi /6.2.14/  $S(t)$  s 1, pa imamo

$$a_n \frac{d^n y_o}{dt^n} + \dots + a_o y_o = 1 \quad /6.2.19/$$

Potpuno rješenje  $y_o$  ove jednadžbe /6.2.19/ uz početne uvjete /6.2.18/ može se pronaći na bilo koji od načina opisanih u prethodnom poglavlju. Daljnji postupak slijedi uvrštavanjem u /6.2.15/, a potom u /6.2.16/, kako je već opisano.

Za primjer određivanja impulsnog odziva uzet ćemo krug prema sl.6.2.2 kod kojega su  $R$ ,  $L$  i  $C$  konstantni parametri, napon izvora  $u_1$  je poticaj, a pretpostavimo da nas zanima kao odziv napon  $u_2$  na serijskom spoju otpora i induktiviteta.



Sl. 6.2.2

Primijenimo li KZN duž jedine zatvorene konture imamo

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + u_c(o) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = u_1(t) \quad /6.2.20/$$

Derivirajući ovu jednadžbu po vremenu dobivamo

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du_1}{dt} \quad /6.2.21/$$

Napon  $u_2(t)$  na izlazu je prema KZN

$$u_2(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad /6.2.22/$$

Budući da želimo eliminirati  $i(t)$  iz ovih jednačbi, tako da bi dobili ovisnost po varijabli  $u_2(t)$ , derivirat ćemo najprije jednačbu /6.2.21/ i zatim ju pomnožiti s  $L/R$

$$\frac{L^2}{R} \frac{d^3 i}{dt^3} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{L}{RC} \frac{di}{dt} = \frac{L}{R} \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad /6.2.23/$$

Zbrajanjem jednačbi /6.2.21/ i /6.2.23/ dolazimo do sljedeće jednačbe

$$\begin{aligned} \frac{L}{R} \frac{d^2}{dt^2} (L \frac{di}{dt} + Ri) + \frac{d}{dt} (L \frac{di}{dt} + Ri) + \frac{1}{RC} (L \frac{di}{dt} + Ri) = \\ = \frac{L}{R} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{du_1}{dt} \end{aligned} \quad /6.2.24/$$

Prema /6.2.22/ izrazi u zagradama jednaki su  $u_2$ , pa slijedi

$$\frac{L}{R} \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{RC} u_2 = \frac{L}{R} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{du_1}{dt} \quad /6.2.25/$$

Ovo je polazna diferencijalna jednačba za računanje impulsnog odziva koja po svom obliku odgovara onoj općenitoj /6.2.13/. Budući da nas (za ovu svrhu) interesiraju samo valni oblici, a ne i električke veličine, ovu ćemo jednačbu numerički pojednostavniti uzimajući da je  $L/R=1$  i  $1/(RC) = 1$ . Prema /6.2.14/ prvi korak u rješavanju diferencijalne jednačbe /6.2.25/, jest iznalaženje njezinog prisilnog odziva, ako je na desnoj strani samo jedinični skok  $S(t)$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{du_2}{dt} + u_2 = S(t) \quad /6.2.26/$$



Prisilni odziv implicitno nameće početne uvjete  $u_2(0-) = 0$  i  $u_2'(0-) = 0$ . Karakteristična jednačba koja odgovara homogenoj diferencijalnoj jednačbi prema /6.2.26/ je  $s^2 + s + 1 = 0$ , i ima korjene  $s_1 = -1/2 + j\sqrt{3}/2$  i  $s_2 = -1/2 - j\sqrt{3}/2$ . Opće rješenje jednačbe /6.2.26/, kao suma partikularnog integrala i komplementarnog rješenja, izgleda za  $t \geq 0$  ovako

$$u_2 = 1 + c_1 e^{(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})t} + c_2 e^{(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})t} \quad /6.2.27/$$

Prema /6.2.18/ početni uvjeti neposredno nakon primjene pobudne funkcije  $S(t)$  su isto jednaki nuli

$$\begin{aligned} u_2(0+) &= u_2(0-) = 0 \\ u_2'(0+) &= u_2'(0-) = 0 \end{aligned} \quad /6.2.28/$$

Uskladjujući rješenje /6.2.27/ s početnim uvjetima /6.2.28/ imamo

$$\begin{aligned} u_2(0+) &= 1 + c_1 + c_2 = 0 \\ u_2'(0+) &= (-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})c_1 + (-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})c_2 = 0 \end{aligned} \quad /6.2.29/$$

Iz ove dvije algebarske jednačbe dobivamo dvije nepoznate konstante  $c_1$  i  $c_2$

$$c_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad ; \quad c_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad /6.2.30/$$

Nakon uvrštavanja ovih konstanta u /6.2.27/, te uz neke dodatne matematičke operacije dobivamo rješenje jednačbe /6.2.26/ u nešto jednostavnijem obliku

$$u_2(t) = \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\pi}{6}\right) \right] S(t) \quad /6.2.31/$$

Ovaj odziv  $u_2(t)$  odgovara onom  $y_0(t)$  iz općenite jednačbe /6.2.19/. Primijenimo li dalje izraz /6.2.15/ dobit ćemo pri-

silni odziv, ako bi u jednađbi /6.2.26/ na desnoj strani bio samo jedan jedinični impuls  $\delta(t)$ .

Ovim korakom slijedi izraz

$$y_1(t) = \frac{du_2(t)}{dt} = \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\pi}{6}\right) - e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\pi}{6}\right) \right] S(t) =$$

$$= \left( \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) S(t) \quad /6.2.32/$$

Impulsni odziv za originalnu mrežu dobivamo primjenom jednađbe /6.2.16/, koja u našem primjeru glasi

$$h(t) = \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} \quad /6.2.33/$$

Potražimo zato članove ovog izraza

$$\frac{dy_1}{dt} = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) S(t) +$$

$$+ \left( \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \delta(t) \quad /6.2.34/$$

Drugi adend ove jednađbe na desnoj strani ima oblik  $f(t)\delta(t)$ . Budući da je  $\delta(t)$  nula za svaki  $t \neq 0$ , mi možemo staviti  $t=0$  u faktor  $f(t)$  pa dobivamo  $f(0)\delta(t)$ . Medjutim  $f(0) = 0$ , što znači da je i taj adend jednak nuli. Tako ostaje

$$\frac{dy_1}{dt} = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) S(t) \quad /6.2.35/$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) S(t) +$$

$$+ \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \delta(t) \quad /6.2.36/$$

Drugi adend ovog izraza na desnoj strani, možemo prema upravo provedenoj diskusiji dovesti na oblik  $f(0)\delta(t)$ . Ovdje je međutim,  $f(0) = 1$ , pa ostaje

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \left( -e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) S(t) + \delta(t) \quad /6.2.37/$$

Zbrajajući /6.2.37/ i /6.2.35/ prema izrazu /6.2.33/ dobivamo impulsni odziv kruga prema začanom primjeru

$$h(t) = \delta(t) - \left( \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) S(t) \quad /6.2.38/$$

Iz ovog rezultata slijedi, da će napon  $u_2(t)$  imati u svom odzivu kao komponentu jedinični impuls  $\delta(t)$  u  $t=0$ , ako je naponski izvor  $u_1(t) = \delta(t)$ .

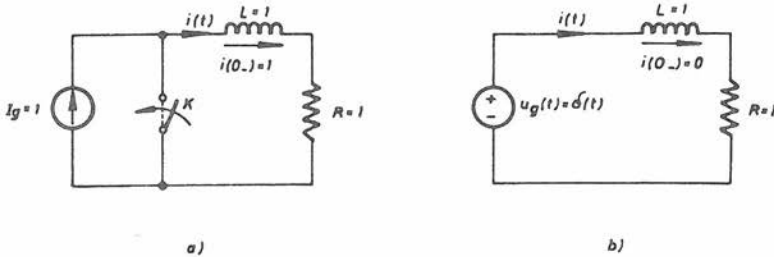
### 6.2.3. Odnos impulsnog i slobodnog odziva

Razmotrimo primjer električkog kruga prema sl.6.2.3.a) kod kojega su induktivitet  $L$  i otpor  $R$  linearni i vremenski invarijabilni, a napajan je strujom iz konstantnog strujnog izvora  $I_g$  premoštenog s granom u kojoj se nalazi otvorena sklopka  $K$ .

Pretpostavimo da se sklopka  $K$  zatvara u trenutku  $t=0$ , a zanima nas odziv u formi struje zatvorenog RL kruga. Budući da nas interesira ponašanje samo sa stanovišta valnih oblika, sve su veličine uzete bez dimenzije.

Diferencijalna jednačba ovog kruga (sl.6.2.3.a)) nakon zatvaranja sklopke glasi

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad /6.2.39/$$



Sl. 6.2.3

a početni uvjet

$$i(0-) = I_g \quad /6.2.40/$$

Odaberemo li radi jednostavnosti (na shemi) naznačene vrijednosti parametara, preostaje nam iznalaženje odziva kruga, opisanog diferencijalnom jednačbom i početnim uvjetom kako slijedi

$$\frac{di}{dt} + i = 0 \quad ; \quad i(0-) = 1 \quad /6.2.41/$$

Iz prethodnih je razmatranja već poznato, da je traženi odziv ujedno i slobodni odziv, pa je početni uvjet prije i nakon zatvaranja sklopke isti, tj.  $i(0-) = i(0) = i(0+) = 1$ . Također je već dobro poznat put rješavanja ove jednačbe, pa odmah zaključujemo da je za  $t > 0$  slobodni odziv (sl.6.2.4.a)) jednak

$$i(t) = e^{-t} \quad /6.2.42/$$

Razmotrimo sada serijski krug sastavljen od istih elemenata, samo s poticajem iz naponskog izvora valnog oblika jediničnog impulsa  $u_g(t) = \delta(t)$ . Želimo li odrediti impulsni odziv  $h(t) = i(t)$  moramo riješiti diferencijalnu jednačbu

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \delta \quad /6.2.43/$$

s početnim uvjetom

$$i(o-) = 0 \quad /6.2.44/$$

Nakon uvrštavanja zadanih vrijednosti parametara, postupkom koji smo već provodili u ovom poglavlju lako bi se dobio traženi impulsni odziv za svaki  $t$  (sl.6.2.4.b)).

$$i(t) = h(t) = S(t)e^{-t} \quad /6.2.45/$$

Ovime se htjelo pokazati da su za vrijednosti  $t > 0$  oba problema ekvivalentna. Impulsni odziv kruga prema sl.6.2.3.b) jednak je slobodnom odzivu zatvorenog kruga prema sl.6.2.3.a), koji bi imao početni uvjet  $i(o+) = 1$ .

Integriramo li obje strane jednadžbe /6.2.43/ s uvrštenim konkretnim vrijednostima parametara, u granicama od  $t=0-$  do  $t=0+$ , dobivamo

$$i(o+) - i(o-) + \int_{o-}^{o+} i(t')dt' = 1 \quad /6.2.46/$$

Budući da  $i$  mora biti konačan (jer bi u protivnom jednadžba /6.2.43/ sadržavala dublet!), onda je

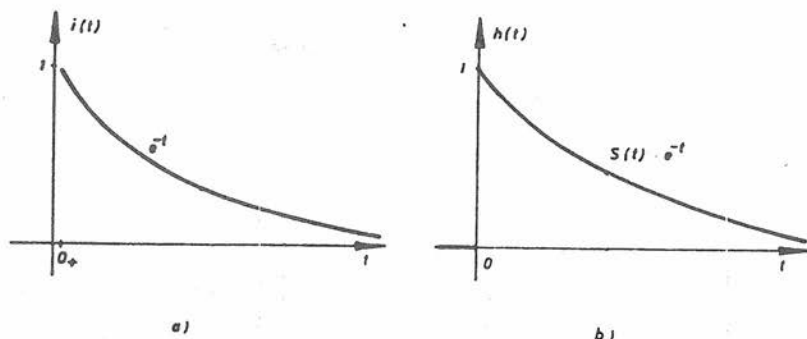
$$\int_{o-}^{o+} i(t')dt' = 0$$

Kako je  $i(o-) = 0$  preostaje iz jednadžbe /6.2.46/

$$i(o+) = 1 \quad /6.2.47/$$

Konačno možemo zaključiti, da je sa stanovišta odziva u području  $t > 0$ , efekt jediničnog impulsa u  $t=0$  ekvivalentan postavljanju odredjenog početnog uvjeta u  $t=0+$ .

Analogni zaključci za ostale primjere električkih krugova ostavljaju se čitaocima za diskusiju.



Sl. 6.2.4

### 6.3. KONVOLUCIJA

U proteklim smo poglavljima upoznali različite tipove odziva, prodiskutirali metode njihovog određivanja i nizom primjera ukazali na neke karakteristične slučajeve.

Pored toga, posebno su bile naglašene prednosti raščlanjivanja potpunog odziva na slobodni i prisilni. Korisnost uvođenja tih pojmova u teoriji mreža, očitovat će se još negdje u predstojećim razmatranjima. Do sada smo prisilni odziv neke mreže određivali, rješavajući na standardni način pripadnu diferencijalnu jednačbu. U narednim odjeljcima upoznat ćemo još jednu veoma značajnu, i nadasve slikovitu metodu za dobivanje prisilnog odziva.

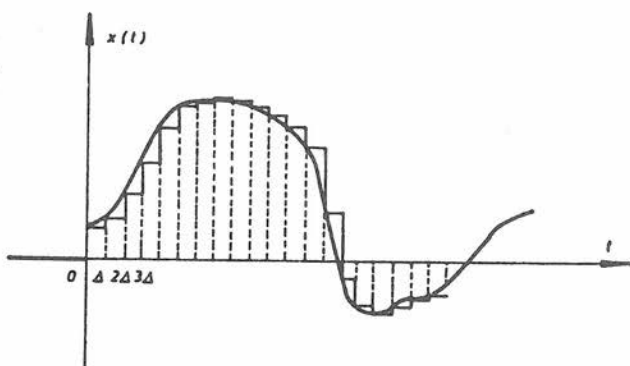
#### 6.3.1. Konvolucionni integral

Nakon što smo saznali kako treba računati impulsni odziv linearne vremenski invarijabilne mreže, u ovom ćemo poglavlju taj impulsni odziv takve mreže upotrebiti za izračunavanje prisilnog odziva na svaki poticaj proizvoljnog oblika.

Kontinuiranu funkciju  $x(t)$  za  $t > 0$ , koja je jednaka nuli za svaki  $t < 0$ , smatrat ćemo poticajem na ulazu linearne vremen-

ski nepromjenljive mreže. Kao što smo već navikli, označavat ćemo sa  $s(t)$  skokovni odziv, a sa  $h(t)$  impulsni odziv. Budući da  $s(t)$  i  $h(t)$  pripadaju klasi prisilnih odziva, oba su po definiciji identički jednaki nuli za svaki  $t < 0$ , pod uvjetom da su im poticaji  $S(t)$  odnosno  $\delta(t)$  nastupili u  $t=0$ .

Aproksimirajmo funkciju  $x(t)$  sa stepeničastom krivuljom, koju opet možemo smatrati sumom pravokutnih impulsa, kao što se viđi na sl.6.3.1.



Sl. 6.3.1

Ovako aproksimirani  $x(t)$  označiti ćemo sa  $x^*(t)$  i izraziti analitički spomenutu sumu s pomoću funkcija jediničnog skoka

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\lceil t/\Delta \rceil} x(k\Delta) \frac{s(t-k\Delta) - s(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta} \Delta \quad /6.3.1/$$

Znak  $\lceil t/\Delta \rceil$  označava prvi cijeli broj koji je veći od vrijednosti  $t/\Delta$ . Iz principa linearnosti i vremenske invarijabilnosti slijedi, da je prisilni odziv  $y^*(t)$  na poticaj  $x^*(t)$  jednak slijedećoj sumi

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\lceil t/\Delta \rceil} x(k\Delta) \frac{s(t-k\Delta) - s(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta} \Delta \quad /6.3.2/$$

Ako postupno smanjujemo  $\Delta$  tako da postaje po volji malen vremenski interval, onda  $k\Delta$  može poprimiti bilo koju vrijed-

nost na vremenskoj osi, pa pišemo

$$k\Delta = t' \quad /6.3.3/$$

Provedemo li konačno granični prijelaz po kojemu  $\Delta \rightarrow dt'$  dolazi do slijedećih transformacija

$$\frac{S(t-k\Delta) - S(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta} \Delta \rightarrow \delta(t-t')dt' \quad /6.3.4/$$

$$\frac{s(t-k\Delta) - s(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta} \rightarrow h(t-t') \quad /6.3.5/$$

Ovime stepeničasta aproksimacija  $x^*(t)$  prelazi u svoj original  $x(t)$

$$x^*(t) \rightarrow \int_0^t x(t')\delta(t-t')dt' = x(t) \quad /6.3.6/$$

a aproksimativni odziv  $y^*(t)$  u stvarni  $y(t)$

$$y^*(t) \rightarrow \int_0^t x(t')h(t-t')dt' = y(t) \quad /6.3.7/$$

Tako smo dobili, da je prisilni odziv linearne vremenski nepromjenljive mreže na poticaj kontinuirane funkcije  $x(t)$ , koja započinje u  $t=0$  jednak

$$y(t) = \int_0^t x(t')h(t-t')dt' \quad /6.3.8/$$

Ovaj izraz /6.3.8/ poznat je kao *konvolucionni integral*, i ima vrlo veliku važnost u teoriji električkih mreža.

Kod izvoda konvolucionog integrala, ograničavali smo se na kontinuiranu funkciju poticaja  $x(t)$ . Ako, međjutim,  $x(t)$  nije kontinuirana, ali se može izraziti kao suma članova kontinuiranih funkcija, konačnog broja funkcija jediničnog skoka, funkcija jediničnog impulsa i eventualno funkcija višeg reda singulariteta, princip superpozicije omogućava ipak primjenu konvolucionog integrala, ali član po član.



Pod pretpostavkom da signal poticaja ne počinje u  $t=0$  već u nekom drugom trenutku  $t=t_1$ , onda u izrazu /6.3.8/ donju granicu integracije treba promijeniti u  $t_1$ . Gornju granicu integracije  $t$  možemo u načelu zamijeniti s  $\infty$ , jer je  $h(t-t')=0$  za svaki  $t' > t$ , pa je i dio konvolucionog integrala od  $t$  do  $\infty$  jednak nuli i s time ništa ne doprinosi ukupnoj vrijednosti integrala.

Izvršimo li zamjenu varijabli u konvolucionom integralu prema izrazu /6.3.8/, može ga se pisati i u drugačijem obliku.

Ako npr. izvršimo supstituciju  $t'=t-\xi$  onda je  $dt'=-d\xi$ ; tada na granicama kod  $t'=0$  mora biti  $\xi=t$ , odnosno kod  $t'=t$  mora biti  $\xi=0$ . Tako dobivamo iz /6.3.8/ .

$$\int_0^t x(t')h(t-t')dt' = -\int_t^0 x(t-\xi)h(\xi)d\xi = \int_0^t x(t-\xi)h(\xi)d\xi \quad /6.3.9/$$

Budući da je  $\xi$  varijabla isto vremenskog karaktera, možemo joj promijeniti simbol kako god želimo, pa tako i ponovno upotrebiti  $t'$ !

Dobivamo da je

$$\int_0^t x(t')h(t-t')dt' = \int_0^t x(t-t')h(t')dt' \quad /6.3.10/$$

Ako su zadovoljeni početni uvjeti u vezi s  $x(t)$  i  $h(t)$ , obje ove forme konvolucionog integrala dovode do istog rezultata.

Konvolucionni integral može se dakle upotrebiti u analizi linearnih vremenski nepromjenljivih mreža, za dobivanje prisilnog odziva na poticaj proizvoljnog valnog oblika  $x(t)$ , iz poznatog impulsnog odziva  $h(t)$ .

Iz svojstva vremenske nepromjenljivosti slijedi, da je prisilni odziv na  $\delta(t-t')$  gdje je  $t$  parametar, jednak  $h(t-t')$ . Svojstvo linearnosti pak jamči, da s  $x(t')dt'$  pomnoženi poticaj, daje odziv pomnožen s istim faktorom. Zato poticaj

$x(t')\delta(t-t')dt'$  kao funkcija od  $t$ , uzrokuje prisilni odziv  $x(t')h(t-t')dt'$  koji je isto funkcija od  $t$ . Međutim, funkcija  $x(t)$  može biti raščlanjena u sumu pravokutnih impulsa kao u jednadžbi /6.3.1/ (ili integral jediničnih impulsa kao u jednadžbi /6.3.6/). Primjenjujući princip linearnosti još jednom, dobivamo prisilni odziv zbrajanjem (ili integriranjem) pojedinačnih doprinosa svakog  $x(t')h(t-t')dt'$  za sve vrijednosti od  $t'$ , kao što tvrdi jednadžba /6.3.7/. U tome je sukus konvolucije.

Razmotrimo jedan primjer računanja konvolucionog integrala. Neka je impulsni odziv neke linearne vremenski nepromjenljive mreže  $h(t) = 1$  za  $t \geq 0$ , a  $h(t) = 0$  za  $t < 0$ . To znači da je u ovom slučaju  $h(t) = S(t)$ . Potražimo prisilni odziv preko konvolucionog integrala, ako je poticaj  $x(t) = S(t) - S(t-1)$ .

Drugim riječima,  $x(t)$  je pravokutni jedinični impuls visine 1 i trajanja 1.

Primjenom /6.3.8/ imamo za svaki  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(t')h(t-t')dt' = \\ &= \int_0^t [S(t') - S(t'-1)] S(t-t')dt' \end{aligned} \quad /6.3.11/$$

Može se lako ustanoviti da je za  $t < 1$  podintegralna funkcija jednaka jedinici, pa je rezultat integracije  $y(t) = t$ . Ako je  $t \geq 1$  podintegralna funkcija jednaka je jedinici za  $t' \leq 1$ , dok je za  $t'$  veće od 1 pa sve do  $t$ , jednaka nuli. Zato je vrijednost integrala u tom području

$$y(t) = \int_0^1 1 \cdot dt' + \int_1^t 0 \cdot dt' = 1 \quad /6.3.12/$$

Za čitavo područje integracije možemo ustvrditi da je prisilni odziv na zadani pravokutni impuls jednak

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ t & \text{za } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{za } t \geq 1 \end{cases} \quad /6.3.13/$$

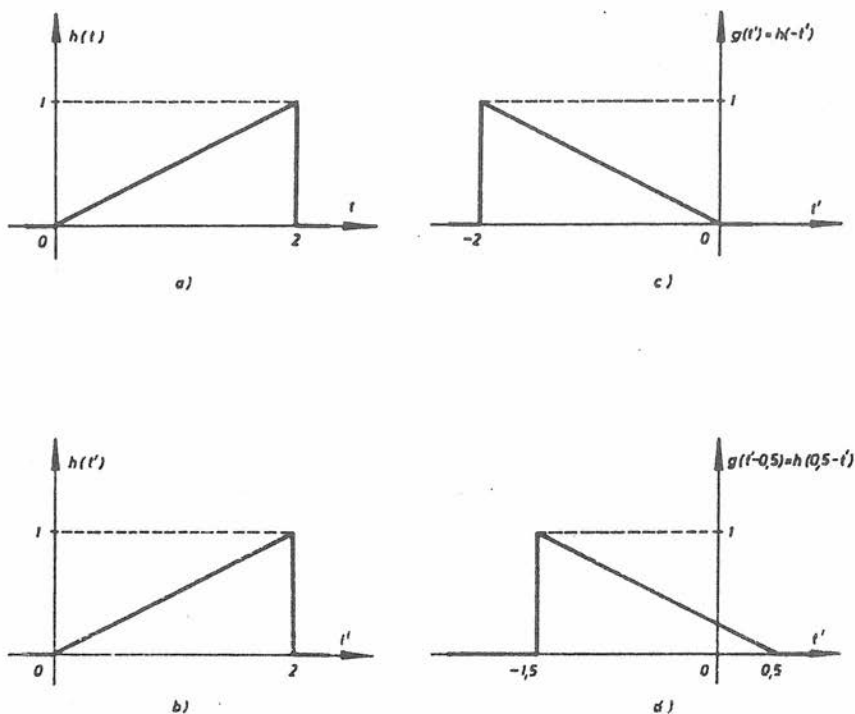
### 6.3.2. Grafički prikaz konvolucije

U ovom ćemo odjeljku provesti grafičkim putem proceduru kako ju nalaže konvolucionni integral prema jednačbi /6.3.8/. Koraci su pri tome slijedeći. Najprije treba iz zadanih funkcija  $x(t)$  i  $h(t)$ , za koje smatramo da su nula za svaki  $t < 0$ , formirati  $x(t')$  i  $h(t-t')$  kao funkcije od  $t'$ , a za specifičnu vrijednost parametara  $t$ . Potom se iz dobivenog formira krivulja produkta  $x(t')h(t-t')$ , a površina ispod te krivulje crtana u ovisnosti od  $t'$  (od  $t'=0$  do  $t'=t$ ) jednaka je traženom  $y(t)$  za svaku vrijednost od  $t$ .

Analitički treba funkciju  $h(t-t')$ , "čitati" iz izraza za  $h(t)$  tako, da je svaki  $t$  zamijenjen s  $t-t'$ .

Poteškoća koja može katkada zbunjivati, jeste u grafičkoj interpretaciji funkcije  $h(t-t')$  crtane u ovisnosti od  $t'$ .

Iako je čitalac već djelomično upoznat s tim problemom u poglavlju o karakterističnim valnim oblicima, ponovit ćemo malo detaljnije čitav postupak ove jednostavne zamjene varijabli. Sve potrebne faze ove pretvorbe ilustrirane su na jednom primjeru valnog oblika impulsnog odziva  $h(t)$  prema sl.6.3.2.



Najprije se treba prisjetiti da je dijagram  $h(t')$  u ovisnosti od  $t'$ , točno isti kao dijagram  $h(t)$  u ovisnosti od  $t$ . Tako je  $h(t)$  prikazan na sl.6.3.2.a) , a  $h(t')$  na sl. 6.3.2.b).

Dalje trebamo odrediti funkciju  $g(t')$  iz  $h(t')$ , zamjenom  $t'$  sa  $-t'$ , tako da bude  $g(t') = h(-t')$ . Dijagram funkcije  $g(t')$  u ovisnosti od  $t'$ , prema tome je zrcalno simetrična slika funkcije  $h(t')$  u ovisnosti od  $t'$  oko vertikalne osi koordinatnog sistema. To je prikazano na sl.6.3.2.c). Potražimo konačno funkciju  $g(t'-t)$ , gdje je  $t$  neka pozitivna konstanta. Već smo prije saznali da dijagram  $g(t'-t)$  u ovisnosti od  $t'$ , mora biti po vremenskoj osi pomaknuta verzija krivulje  $g(t')$  u ovisnosti od  $t'$ . Budući da je  $t$  baš pozitivna konstanta, to znači da je  $g(t'-t)$  u uspoređenju s  $g(t')$  pomaknut za  $t$  u desno. To ilustrira sl.6.3.2.d) kod koje je izabrani  $t = 0,5$ . Iz u početku utvrđenog odnosa za  $g(t') = h(-t')$  slijedi, da je  $g(t'-t) = h[-(t'-t)] = h(t-t')$ . To znači, da uz zadani  $h(t)$  u ovisnosti od  $t$ , dobivamo dijagram  $h(t-t')$  u ovisnosti od  $t'$  za pozitivne vrijednosti  $t$  tako , da aksijalno simetrično preslikamo  $h(t)$  oko vertikalne osi, damo apscisi novi natpis  $t'$ , i pomaknemo graf u desno za iznos  $t$  (odnosno u lijevo, ako je  $t < 0$ ).

Iz zadanih funkcija  $x(t)$  i  $h(t)$  matematička operacija konvolucije postaje na taj način "vidljiva". Treba zapaziti da je  $x(t')h(t-t')$  u ovisnosti od  $t'$ , produkt točku po točku od  $x(t')$  i  $h(t-t')$  za različite vrijednosti od  $t'$  i za fiksnu vrijednost od  $t$ . Zato, ako su ili  $x(t')$  ili  $h(t-t')$  jednaki nuli za neku vrijednost od  $t'$ , onda je i njihov produkt jednak nuli za istu vrijednost od  $t'$ .

Pretpostavimo da želimo grafičkom konvolucijom odrediti prisilni odziv  $y(t)$ , neke linearne vremenski nepromjenljive mreže, ako je zadan poticaj  $x(t)$  prema sl.6.3.3.a) i impulсни odziv iste mreže  $h(t)$  prema sl. 6.3.2.a). Uočimo najprije činjenicu da je za negativni  $t$ , produkt  $x(t')h(t-t')$  jednak nuli za svaki  $t'$ . Površine dakle, ispod krivulje nema, kao što je bilo i za očekivati.

Razmotrimo nadalje što se događa ako je  $t$  neka vrijednost između 0 i 1. Za taj je slučaj prikazan  $h(t-t')$  na sl.6.3.3.b). Produkt  $x(t')h(t-t')$  lako se očitava iz prva dva dijagrama, a krivulja mu je na sl.6.3.3.c). Površina ispod tako dobivene krivulje između 0 i  $t$  je vrijednost konvolucionog integrala za specifičnu vrijednost od  $t$ , a šrafirano je označena na sl.6.3.3.c). Nagib hipotenuze tog trokuta je  $-\frac{1}{2}$ , pa je zato ordinata  $x(t')h(t-t')$  u  $t'=0$  jednaka  $\frac{1}{2}t$ .

Površina je tog trokuta onda  $\frac{1}{2}(t)(\frac{1}{2}t) = \frac{1}{4}t^2$ . Iz toga možemo zaključiti, da s porastom vrijednosti  $t$  od 0 do 1, vrijednost konvolucionog integrala raste s kvadratom od  $t$ . Možemo napisati

$$y(t) = \int_0^t x(t')h(t-t')dt' = \frac{1}{4}t^2, \text{ za } 0 \leq t \leq 1 \quad /6.3.14/$$

Za daljnji porast  $t$ , kada je  $t$  između 1 i 2, prikazan je  $h(t-t')$  na sl.6.3.3.d), a produkt  $x(t')h(t-t')$  na sl. 6.3.3.e). Vrijednost konvolucionog integrala je površina ispod tog trapeza

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}t + \left( \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot 1 = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}, \text{ za } 1 \leq t \leq 2 \quad /6.3.15/$$

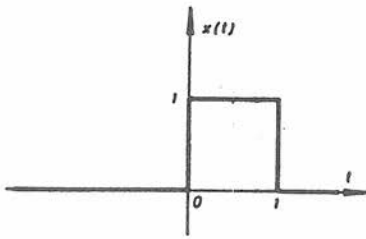
Ako dakle raste  $t$  između 1 i 2,  $y(t)$  raste po pravcu proporcionalno s  $t$ . Za  $t > 2$ ,  $h(t-t')$  je prikazan na sl. 6.3.3.f), a produkt  $x(t')h(t-t')$  za  $2 < t < 3$  na sl.6.3.3.g). Površina je ispod krivulje produkta

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \right) \right] \left[ 1 - (t-2) \right] = \frac{1}{4} (t+1)(3-t),$$

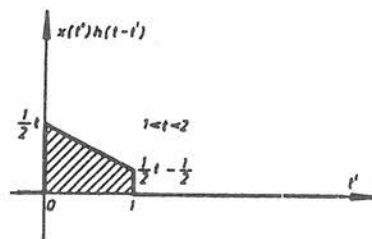
za  $2 \leq t \leq 3 \quad /6.3.16/$

Dijagram vrijednosti ove površine, s porastom vrijednosti  $t$  u tom intervalu, opada parabolično i u  $t=3$  dostiže nulu.

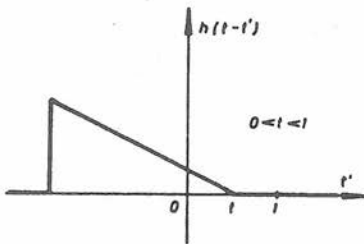
Za  $t > 0$  više se nigdje ne prekrivaju  $x(t')$  i  $h(t-t')$  pa im je produkt jednak nuli, a time i površina ispod krivulje



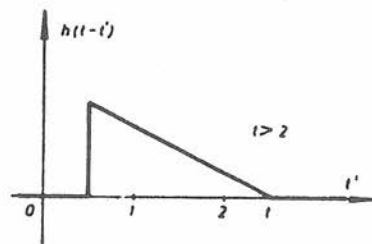
a)



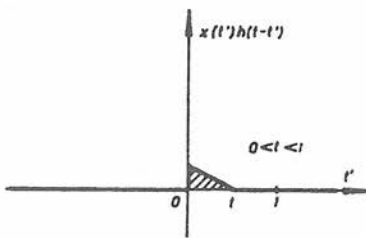
e)



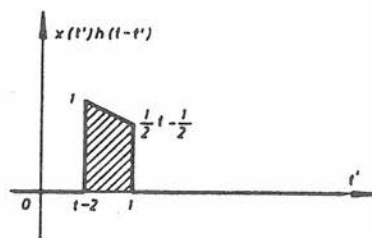
b)



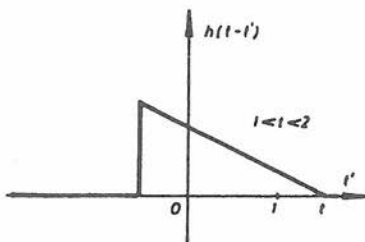
f)



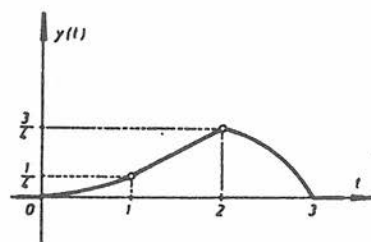
c)



g)



d)



h)

produkta. Cjelokupni tok prisilnog odziva  $y(t)$  u ovisnosti od  $t$  za ovaj primjer nacrtan je na sl. 6.3.3.h).

#### 6.4. LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Kao slijedeći način rješavanja jednadžbi mreža, kojega treba obuhvatiti u ovom kratkom pregledu analitičkih postupaka, bit će izložena jedna operatorska metoda poznata pod imenom *Laplaceova transformacija*. U ovom ćemo poglavlju prikazati samo ona svojstva Laplaceove transformacije, koja se izravno koriste u analizi električkih mreža. Pokazat će se, da *Laplaceova transformacija svodi rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi na jednostavniji put rješavanja linearnih algebarskih jednadžbi*. To je inače daleko šire područje za koje se pretpostavlja da su ga studenti već svladali u okviru tečaja "Matematika", ili su barem stekli dovoljnu sposobnost da pristupe opsežnijem razmatranju svih domaćaja ove teme.

Treba naglasiti, da je Laplaceova transformacija vrlo važno i vrlo efikasno oruđe za analizu linearnih vremenski nepromjenljivih mreža, ali je gotovo beskorisna za slučaj nelinearnih ili vremenski promjenljivih mreža. U današnjoj fazi razvoja teorije mreža, kada se sve više objedinjuje karakterizacija električkih mreža, to treba naročito imati u vidu.

##### 6.4.1. Definicija Laplaceove transformacije

U ovom ćemo odjeljku dati kratki uvod u jednostranu Laplaceovu transformaciju. Za razliku od dvostrane Laplaceove transformacije koja pokriva čitavu vremensku skalu od  $-\infty$  do  $+\infty$ , ova je ograničena na valne oblike koji su jednaki nuli za  $t < 0$ .

Osnovna je ideja Laplaceove transformacije da vremenskoj funkciji  $f$  definiranoj u području  $[0, \infty)$  pridružimo funk-

ciju  $F$  kompleksne frekvencije  $s$ , slijedećom matematičkom konstrukcijom

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \triangleq \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad /6.4.1/$$

Simbol  $\mathcal{L}$  čita se kao "Laplaceova transformacija od ...", a integral na desnoj strani gornjeg izraza naziva se *definicionim integralom Laplaceove transformacije*. Za razliku od  $f$  kao vremenske funkcije, mi kažemo  $F(s)$  je *Laplaceov transformat od  $f(t)$* .

Varijabla

$$s = \sigma + j\omega \quad /6.4.2/$$

naziva se *kompleksnom frekvencijom*.

Možemo ukratko reći da Laplaceov transformat postoji ako je

$$\int_{0-}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad /6.4.3/$$

Kod toga je  $\sigma_0$  najmanji  $\sigma$  za kojega je uvjet /6.4.3/ još zadovoljen. Taj se  $\sigma$  onda naziva: *apscisa apsolutne konvergencije*, a Laplaceova transformacija je prema tome definirana za sve  $\text{Re}(s) = \sigma \geq \sigma_0$ . Donja granica integracije uzeta kao  $0-$  omogućava uključivanje singularnih funkcija u  $t=0$ .

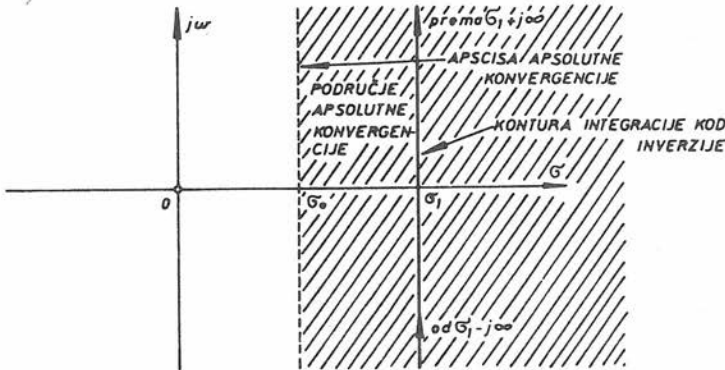
Laplaceova transformacija je reverzibilna operacija, pa je inverzija kojom se otkriva  $f(t)$  iz  $F(s)$  definirana izrazom

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\omega}^{\sigma_1 + j\omega} F(s)e^{st} ds \quad /6.4.4/$$

gdje je  $\sigma_1$  veće od  $\sigma_0$ . Simbol  $\mathcal{L}^{-1}$  čita se kao "inverzna Laplaceova transformacija od ...", a tako dobiveni  $f(t)$  naziva se *inverznim Laplaceovim transformatom od  $F(s)$* . Za slučaj jednostrane Laplaceove transformacije, inverzni je transfor-



mat od  $F(s)$  jednoznačan. Slika 6.4.1 pokazuje apscisu apsolutne konvergencije u odnosu na inverznu Laplaceovu transformaciju, u tzv.  $s$ -ravnini (o kojoj ćemo više čuti kasnije) određenoj koordinatnim sistemom  $(\sigma, j\omega)$ .



Sl. 6.4.1

U velikoj većini tehničkih problema, moguće je i daleko je jednostavnije, poslužiti se tabelom parova Laplaceovih transformata za određivanje  $f(t)$ , umjesto računanja integrala prema jednadžbi /6.4.4/.

#### 6.4.2. Transformacije karakterističnih valnih oblika

Svega se nekolicina valnih oblika češće pojavljuju u teoriji električnih mreža. Jedan od njih je i funkcija jediničnog skoka  $S(t)$ . S pomoću definicionog integrala, Laplaceov transformat od  $S(t)$  dobiva se na slijedeći način

$$\mathcal{L}[S(t)] = \int_{0^-}^{\infty} S(t)e^{-st}dt = - \left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_{0^-}^{\infty} = 0 - \left( \frac{-1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

$$\text{za } \operatorname{Re}(s) > 0$$

/6.4.5/

Laplaceov transformat funkcije  $Ae^{at}$  ( $A$  = konstanta,  $a$ =realan ili kompleksan broj) dobivamo isto definicionim integralom

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[Ae^{at}] &= \int_{0-}^{\infty} Ae^{at}e^{-st}dt = A \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt = \\ &= A \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_{0-}^{\infty} = \frac{A}{s-a} \quad \text{za } \operatorname{Re}(s-a) > 0 \quad /6.4.6/\end{aligned}$$

Laplaceov transformat sinusoide, ako je zadana kao  $\cos pt$ , dobiva se s pomoću već izvedenog na slijedeći način.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos pt] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{jpt} + e^{-jpt}}{2}\right] = \frac{1}{2} \int_{0-}^{\infty} e^{jpt}e^{-st}dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{0-}^{\infty} e^{-jpt}e^{-st}dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-jp} + \frac{1}{s+jp} \right) = \frac{s}{s^2 + p^2} \quad /6.4.7/\end{aligned}$$

Ako je  $f(t) = \delta(t)$ , onda je njegov Laplaceov transformat

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad /6.4.8/$$

Nastavljajući na isti način kako sugeriraju ovi izvedeni primjeri, došli bi i do transformata ostalih funkcija. Oni najkorisniji za analizu mreža tabelarno su navedeni u Tabeli 6.4.1.

### 6.4.3. Transformacije integrodiferencijalnih jednažbi

Iskoristit ćemo tri svojstva Laplaceove transformacije za dobivanje transformata integrodiferencijalnih jednažbi. Ta su.

1) Svojstvo linearnosti. Za linearnu kombinaciju dviju vremenskih funkcija  $f_1$  i  $f_2$  vrijedi

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \quad /6.4.9/$$

ako su  $c_1$  i  $c_2$  proizvoljne konstante.

Tabela 6.4.1

| $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$                                                      | $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $\delta(t)$                                                                          | 1                                                         |
| $\delta^{(n)}(t)$                                                                    | $s^n \quad (n=1,2,\dots)$                                 |
| $s(t)$                                                                               | $\frac{1}{s}$                                             |
| $t$                                                                                  | $\frac{1}{s^2}$                                           |
| $t^n$                                                                                | $\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n=1,2,\dots)$                  |
| $e^{-at}$ (realan ili kompleksan $a$ )                                               | $\frac{1}{s+a}$                                           |
| $te^{-at}$ (realan ili kompleksan $a$ )                                              | $\frac{1}{(s+a)^2}$                                       |
| $t^n e^{-at}$ (realan ili kompleksan $a$ )                                           | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \quad (n=1,2,\dots)$              |
| $\cos \beta t$                                                                       | $\frac{s}{s^2 + \beta^2}$                                 |
| $\sin \beta t$                                                                       | $\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$                             |
| $e^{-\alpha t} \cos \beta t$                                                         | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$                 |
| $e^{-\alpha t} \sin \beta t$                                                         | $\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$                    |
| $ae^{-\alpha t} \cos \beta t + \frac{(b-a\alpha)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$ | $\frac{as+b}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$                     |
| $2 K e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle K)$                                          | $\frac{K}{s-\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s-\alpha+j\beta}$ |

Ovaj se rezultat lako dokazuje supstitucijom linearne kombinacije  $f_1$  i  $f_2$  u jednadžbu /6.4.1/. Izraz /6.4.9/ može se poopćiti na linearnu kombinaciju bilo kojeg broja vremenskih funkcija.

2) Transformacija derivacije. Uvrštavajući u definicijonu jednadžbu derivaciju vremenske funkcije  $df/dt$  dobivamo

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Parcijalnom integracijom ( $\int uv = uv - \int vdu$ ) ove jednadžbe, dobivamo nadalje

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= e^{-st}f(t) \Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty} f(t)(-se^{-st}dt) = \\ &= e^{-s \cdot \infty}f(\infty) - e^{-s \cdot 0}f(0-) + s \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad /6.4.10/ \end{aligned}$$

Budući da mi razmatramo samo klasu funkcija za koju postaje  $e^{-st}f(t) = 0$  kada  $t \rightarrow \infty$ , to je prvi član jednak nuli, a treći je očigledno  $sF(s)$ . Tako imamo da se Laplaceov transformat derivacije vremenske funkcije  $f(t)$  dobiva prema slijedećem izrazu

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0-) \quad /6.4.11/$$

Ako uvedemo novu funkciju  $g_1(t) = df(t)/dt$ , i primijenimo upravo izvedeni rezultat na funkciju  $dg_1(t)/dt$ , može se lako izvesti da je

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0-} \quad /6.4.12/$$

Prema tome za višestruku derivaciju vrijedi općenito

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0-) - s^{n-2} \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0-} - s \left.\frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}\right|_{t=0-} - \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0-} \quad /6.4.13/$$

3) Transformacija integrala. Da bi uprostiti izvod uvest ćemo pomoćnu funkciju

$$g_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_2(s)] = \int_{0-}^{\infty} f(t') dt' \quad /6.4.14/$$

Iz ove jednadžbe slijedi da je  $g_2(0-) = 0$  i  $dg_2(t)/dt = f(t)$ . Primijenimo li rezultat /6.4.11/ dobiva se

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{dg_2}{dt}\right] = sG_2(s) - g_2(0-) = F(s)$$

Budući da je  $g_2(0-) = 0$  ostaje

$$G_2(s) = \mathcal{L}[g_2(t)] = \mathcal{L}\left[\int_{0-}^t f(t') dt'\right] = \frac{F(s)}{s} \quad /6.4.15/$$

Ako to napišemo bez pomoćne funkcije imamo konačan izraz za iznalaženje Laplaceovog transformata integrala vremenske funkcije  $f(t)$

$$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^t f(t') dt'\right] = \frac{F(s)}{s} \quad /6.4.16/$$

Pretpostavimo npr. da smo analizirajući mrežu došli do diferencijalne jednadžbe slijedećeg oblika

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 3 \frac{df}{dt} + 2f = S(t) + 2e^{-3t} \quad /6.4.17/$$

Pretpostavimo nadalje, da su i svi početni uvjeti jednaki nuli. Transformirajući ovu diferencijalnu jednadžbu po

Laplaceu član po član , i nakon izlučivanja zajedničkog faktora  $F(s)$ , imamo

$$F(s)(s^2+3s+2) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+3} \quad /6.4.18/$$

Rješavajući ovo za  $F(s)$  dobivamo

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)} + \frac{2}{(s+3)(s^2+3s+2)} \quad /6.4.19/$$

Razmotrimo drugi primjer, kod kojega želimo naći Laplaceov transformat integrodiferencijalne jednačbe, koja opisuje ponašanje serijskog FLC kruga sa sinusoidalnim poticajem. Oblik je takove jednačbe već dobro poznat

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(t')dt' + u_C(0^-) = U \cos \omega t \quad /6.4.20/$$

Pretpostavimo nadalje numeričke vrijednosti parametara:  $U=1$ ,  $\omega=2$ ,  $R=1$ ,  $L=1$  i  $C=1/2$ , te sve početne uvjete jednake nuli.

Ako član po član ove diferencijalne jednačbe prebacujemo u njihov Laplaceov transformat, dobivamo

$$I(s)(s+1+\frac{2}{s}) = \frac{s}{s^2+4} \quad /6.4.21/$$

Rješavajući ovu jednačbu po  $I(s)$  slijedi

$$I(s) = \frac{s^2}{(s^2+4)(s^2+s+2)} \quad /6.4.22/$$

Relacije istog tipa kao rezultati u ova dva primjera /6.4.19/ i /6.4.22/, razmatrat će se kasnije ponovno, nakon upoznavanja s razvojem na parcijalne razlomke.

Ova tri netom opisana osnovna svojstva Laplaceove transformacije dovoljna su za određivanje transformata linearnih

integro-diferencijalnih jednačbi, kakovima je u najvećem broju slučajeva opisano ponašanje mreža koje analiziramo. Izvjestan broj ostalih svojstava također nalazi primjenu u pojedinim problemima iz teorije mreža. Navest ćemo ih bez dokazivanja, koji se može uvijek provesti na bazi definicione jednačbe /6.4.1/.

4) Svojstvo vremenskog posmaka. Ako je valni oblik  $f(t)$  pomaknut po vremenskoj osi za  $t_0$  koji je pozitivan broj, onda je

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)S(t-t_0)] = F(s)e^{-st_0} \quad /6.4.23/$$

5) Svojstvo frekvencijskog posmaka. Slično upravo izvedenom imamo da je

$$\mathcal{L}[f(t)e^{s_0 t}] = F(s-s_0) \quad /6.4.24/$$

6) Svojstvo razmjere. Odnos između vremenskog mjerila i frekvencijskog mjerila izražava relacija

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad /6.4.25/$$

gdje je  $a$  realan pozitivan broj.

7) Laplaceova transformacija periodičkih valnih oblika. Ako je  $f(t)$  periodička funkcija s periodom  $T$ , onda se uz korištenje rezultata /6.4.23/ može dobiti slijedeći odnos

$$\mathcal{L}[f(t)S(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt \quad /6.4.26/$$

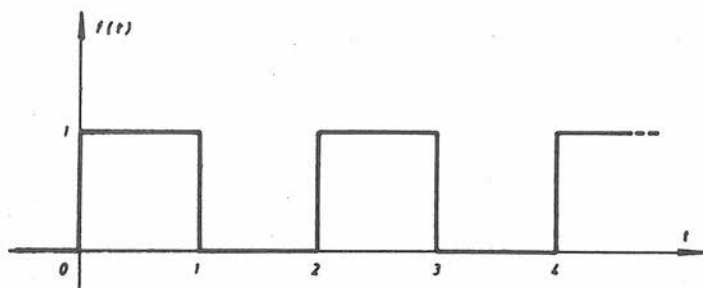
Pretpostavimo npr. da je vremenska funkcija jedinični pravokutni impuls

$$f(t) = S(t) - S(t-1) \quad /6.4.27/$$

Želimo li ovom valnom obliku naći Laplaceov transformat, upotrebiti ćemo jednadžbu /6.4.23/

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1}{s} (1 - e^{-s}) \quad /6.4.28/$$

Razmotrimo drugi primjer kod kojega je  $f(t)$  periodička funkcija  $f(t)$  valnog oblika prema sl.6.4.2.



Sl. 6.4.2

Već je dobro poznato, da se ovakav valni oblik može izraziti analitički kao beskonačni red funkcija jediničnog skoka

$$f(t) = S(t) - S(t-1) + S(t-2) - S(t-3) + S(t-4) - S(t-5) + \dots \quad /6.4.29/$$

Laplaceov transformat ovog valnog oblika možemo naći transformacijom njegovih pojedinačnih članova prema jednadžbi /6.4.23/. Međutim, mi možemo upotrebiti i jednadžbu /6.4.26/ i naći Laplaceov transformat za prvi period ovog valnog oblika. Taj je u intervalu od  $t=0$  do  $t=2$  opisan izrazom

$$f_1(t) = S(t) - S(t-1) \quad /6.4.30/$$

Laplaceov transformat ove funkcije izveli smo u prošlom primjeru i dobili rezultat /6.4.28/. Integral u izrazu /6.4.26/ je upravo Laplaceova transformacija za jedan period periodičnog signala, pa mu je vrijednost za ovaj primjer već dobivena u /6.4.28/. Kombinirajući ove dvije jednadžbe imamo konačno



$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2s}} \cdot \frac{1}{s} (1-e^{-s}) = \frac{1}{s(1+e^{-s})} \quad /6.4.31/$$

Ovim ćemo završiti skraćeni pregled svojstava Laplaceove transformacije. Postoji još mnogo drugih, koji ovdje nisu navedeni, a koji su u nekim područjima veoma korisni. Ovi, međutim, koji su nabrojeni, sasvim su dovoljni za obradu problema predviđenih opsegom ovog teksta.

#### 6.4.4. Razvoj na parcijalne razlomke

U odjeljku koji smo upravo dovršili, izvedeno je nekoliko primjera određivanja Laplaceovih transformata izvjesne varijable odziva, iz diferencijalnih jednadžbi koje opisuju ponašanje električkih mreža. Rezultat koji se je dobivao, redovito je imao oblik kvocijenata dvaju polinoma od  $s$ . Takav oblik funkcije  $F(s)$  naziva se *racionalna funkcija*. Što je složenija mreža koju rješavamo, biti će složeniji Laplaceov transform format odziva, odnosno viši stupanj polinoma u brojniku i nazivniku racionalne funkcije. Zbog toga se i većina rezultata ne nalazi u tabeli standardnih Laplaceovih transformata. Postoji, međutim, mogućnost raščlanjivanja racionalne funkcije na skup jednostavnijih elementarnih dijelova, od kojih se svaki za sebe pojavljuje u našoj tabeli.

Općenita metoda, koja do toga pojednostavnjenja dovodi, naziva se *razvojem na parcijalne razlomke*, a vrlo je važan korak u analizi mreža metodom Laplaceove transformacije. Razmotrimo slijedeću racionalnu funkciju

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n} \quad /6.4.32/$$

gdje su  $P(s)$  i  $Q(s)$  polinomi varijable kompleksne frekvencije  $s$ , a koeficijenti,  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$ , su realni brojevi. Ta dva skupa realnih koeficijenata u potpunosti odre-

djuju racionalnu funkciju. Poznato je već iz matematičke analize, da se ovi polinomi mogu izraziti kao produkti faktora u ovisnosti od korjena tih polinoma. Tako dolazimo do alternativne predodžbe racionalne funkcije  $F(s)$  u formi

$$F(s) = \frac{a_0 (s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_m)}{b_0 (s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s-n_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)} \quad /6.4.33/$$

gdje su  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) vrijednosti od  $s$  za koje je polinom brojnika  $P(s)$  jednak nuli, dok su  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) vrijednosti od  $s$  za koje je polinom nazivnika  $Q(s)$  jednak nuli. Drugim riječima,  $n_i$  su korjeni polinoma brojnika, za  $s=n_i$  ujedno je i  $F(s)$  jednak nuli, pa se zato nazivaju *nule* racionalne funkcije. Naprotiv,  $p_j$  se nazivaju *polovi* racionalne funkcije, jer su oni korjeni polinoma nazivnika, pa je za  $s=p_j$ ,  $Q(s) = 0$ , a  $F(s)$  beskonačan.

Ako je  $p_j$  jednostruki korjen, onda kažemo da racionalna funkcija  $F(s)$  ima *jednostruke polove*. Naprotiv, ako je  $p_k$  korjen reda  $r$ , onda kažemo da je on *višestruki pol reda  $r$* .

(1) Za metodu razvoja na parcijalne razlomke koju namjeravamo opisati, racionalna funkcija  $F(s)$  treba biti u tzv. prikladnom obliku. U ovom slučaju to znači, da stupanj polinoma u brojniku mora biti manji nego stupanj polinoma u nazivniku. Ako to nije slučaj, treba najprije podijeliti  $P(s)$  sa  $Q(s)$  da se dobije

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = P_1(s) + \frac{P_2(s)}{Q(s)} \quad /6.4.34/$$

Dobiveni dio kvocijenta  $P_1(s)$  u /6.4.34/ je polinom onog stupnja za koliko je stupanj  $P(s)$  veći od stupnja  $Q(s)$ . Ostatak  $P_2(s)$  je polinom koji ima sada manji stupanj od  $Q(s)$ , pa je nova racionalna funkcija  $P_2(s)/Q(s)$  u prikladnoj formi, s kojom se može dalje operirati. Lako je zaključiti iz Tabele 6.4.1 da je inverzni Laplaceov transformat za polinom  $P_1(s)$  linearna kombinacija singularnih funkcija  $\delta, \delta^{(1)}, \delta^{(2)}$ , itd.

U daljnjem tekstu, uvijek ćemo pretpostavljati da je racionalna funkcija  $F(s)=P(s)/Q(s)$  u prikladnom obliku.

(2) U drugom koraku ovog razvoja, potrebno je polinom u nazivniku  $Q(s)$  predočiti u faktoriziranom obliku prema njegovim korjenima. (Za ovu svrhu pogodnije je te korjene zadržati sa simbolom  $s_j$  umjesto  $p_j$ ).

$$Q(s) = b_0(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) \quad /6.4.35/$$

Budući da su koeficijenti polinoma  $Q(s)$  realni, postoji svega tri mogućnosti za karakter tih korjena. Oni mogu biti realni, konjugirano kompleksni i konjugirano imaginarni. U okviru te karakterizacije, oni mogu biti još jednostruki ili višestruki.

Razmotrit ćemo nadalje nekoliko najvažnijih mogućnosti.

Jednostruki realni korjeni. Da bi ilustrirali općenitu metodu razvoja na parcijalne razlomke za jednostruke realne korjene, razmotrit ćemo racionalnu funkciju kod koje je polinom nazivnika prema /6.4.35/ trećeg stupnja sa  $b_0=1$ .

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} \quad /6.4.36/$$

Kao što je već rečeno najviša potencija od  $s$  u  $P(s)$  manja je od 3, a  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  su međusobno različiti. Razvoj na parcijalne razlomke racionalne funkcije  $F(s)$  treba imati oblik

$$F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} \quad /6.4.37/$$

Naš je zadatak u odredjivanju vrijednosti za  $K_1$ ,  $K_2$  i  $K_3$ . Način na koji ćemo to izvršiti bit će prikazan za  $K_1$ . Najprije treba pomnožiti  $F(s)$  sa  $s-s_1$ , pa imamo

$$(s-s_1) F(s) = K_1 + K_2 \frac{s-s_1}{s-s_2} + K_3 \frac{s-s_1}{s-s_3} \quad /6.4.38/$$

Ako sada postavimo  $s=s_1$  odredili smo  $K_1$  kao

$$K_1 = (s-s_1)F(s) \Big|_{s=s_1} \quad /6.4.39/$$

Poopćavajući ovaj rezultat nalazimo da je

$$K_j = (s-s_j)F(s) \Big|_{s=s_j} \quad /6.4.40/$$

Koeficijenti  $K_j$  nazivaju se *reziduuma* funkcije  $F(s)$ .

Provedimo opisani postupak na jednom primjeru racionalne funkcije slijedećeg tipa

$$F(s) = \frac{s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 12s + s}{s^3 + 4s^2 + 3s} \quad /6.4.41/$$

Budući da stupanj brojnika nadvisuje stupanj nazivnika, prvo je potrebno dobiti jednadžbu /6.4.41/ u prikladnom obliku. Dižeći brojnik s nazivnikom dobivamo

$$F(s) = s + 1 + \frac{2s^2 + 9s + 3}{s^3 + 4s^2 + 3s} \quad /6.4.42/$$

Razvojem na parcijalne razlomke  $F(s)$  dolazimo na oblik

$$F(s) = s + 1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3} \quad /6.4.43/$$

Primjenom jednadžbe /6.4.40/ dobivamo koeficijente  $K_1$ ,  $K_2$  i  $K_3$

$$K_1 = \frac{2s^2 + 9s + 3}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = \frac{2s^2 + 9s + 3}{s(s+3)} \Big|_{s=-1} = 2 \quad /6.4.44/$$

$$K_3 = \frac{2s^2 + 9s + 3}{s(s+1)} \Big|_{s=-3} = -1$$

Prema tome, konačni rezultat razvoja na parcijalne razlomke racionalne funkcije  $F(s)$  kojoj je oblik prema /6.4.41/ je slijedeći

$$F(s) = s+1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+3} \quad /6.4.45/$$

Jednostruki kompleksni korjени. Jednadžba /6.4.40/ ostaje jednako važeća i za slučaj jednostrukih kompleksnih korjena, kao u slučaju jednostrukih realnih korjena. Postoji, međutim, dodatno pojednostavnjenje ako je nazivnik racionalne funkcije  $F(s)$  tipa

$$Q(s) = Q_1(s)(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta) \quad /6.4.46/$$

Razvoj na parcijalne razlomke racionalne funkcije  $F(s)$  je tada

$$F(s) = \frac{K_1}{s-\alpha-j\beta} + \frac{K_2}{s-\alpha+j\beta} + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} \quad /6.4.47/$$

Nije teško pokazati da mora biti  $K_2=K_1^*$ , tj. da su za konjugirano kompleksne korjene  $s_1 = \alpha+j\beta$  i  $s_2=s_1^* = \alpha-j\beta$ , koeficijenti  $K_1$  i  $K_2$  razvoja na parcijalne razlomke i sami konjugirano kompleksni.

Potražimo npr. razvoj na parcijalne razlomke za funkciju  $F(s)$  kod koje je nazivnik  $Q(s)$  tipa jednadžbe /6.4.46/

$$F(s) = \frac{1}{[(s+1)^2+1](s+2)} = \frac{K_1}{s+1-j1} + \frac{K_2}{s+1+j1} + \frac{K_3}{s+2} \quad /6.4.48/$$

Primjenjujući jednadžbu /6.4.40/ nalazimo da je

$$K_1 = F(s)(s+1-j1) \Big|_{s=-1+j1} = \frac{-1-j1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \angle 225^\circ \quad /6.4.49/$$

Naravno, da  $K_2=K_1^*$  ima isti modul  $\sqrt{2}/4$ , ali argument protivnog predznaka, tj.  $-225^\circ$ .

Višestruki korjени. Ako polinom nazivnika  $Q(s)$  ima korjen  $s_j$  koji se  $r$  puta ponavlja, može se pisati

$$Q(s) = Q_1(s)(s-s_j)^r \quad /6.4.50/$$

Razvoj na parcijalne razlomke funkcije  $F(s)$  s takvim nazivnikom je tada slijedeći

$$F(s) = \frac{K_1}{(s-s_j)^r} + \frac{K_2}{(s-s_j)^{r-1}} + \dots + \frac{K_r}{(s-s_j)} + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} \quad /6.4.51/$$

Ako taj izraz pomnožimo sa  $(s-s_j)^r$  dobivamo

$$(s-s_j)^r F(s) = K_1 + K_2(s-s_j) + K_3(s-s_j)^2 + \dots + K_k(s-s_j)^{k-1} + \dots$$

$$\dots + K_r(s-s_j)^{r-1} + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} (s-s_j)^r \quad /6.4.52/$$

Iz ove jednačbe, već po usvojenom pravilu iznalaženja reziduuma,  $K_1$  se izračunava postavljanjem  $s=s_j$  kao u jednačbi /6.4.40/. Da bi, međutim, pronašli  $K_2$  treba derivirati  $(s-s_j)^r F(s)$  po  $s$ , i zatim postaviti  $s=s_j$ .

$$\frac{d}{ds} \left[ (s-s_j)^r F(s) \right] = K_2 + 2K_3(s-s_j) + \dots + K_k(k-1)(s-s_j)^{k-2} + \dots$$

$$\dots + K_r(r-1)(s-s_j)^{r-2} + \frac{d}{ds} \left[ \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} (s-s_j)^r \right] \quad /6.4.53/$$

Iz ovoga uz  $s=s_j$  imamo odmah

$$K_2 = \frac{d}{ds} \left[ (s-s_j)^r F(s) \right] \Big|_{s=s_j} \quad /6.4.54/$$

Poopćavanjem ovog rezultata dobivamo izraz za određivanje bilo kojeg od koeficijenata za dio racionalne funkcije s višestrukim korjenima.

$$K_k = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[ (s-s_j)^r F(s) \right] \right|_{s=s_j} \quad /6.4.55/$$

gdje je  $k = 1, 2, \dots, r$

Pretpostavimo npr. da nam je zadana racionalna funkcija

$$F(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 5s + 1}{s(s+1)^3} \quad /6.4.56/$$

Oblik traženog razvoja ove funkcije na parcijalne razlomke jest prema jednadžbi /6.4.51/ slijedeći

$$F(s) = \frac{K_1}{(s+1)^3} + \frac{K_2}{(s+1)^2} + \frac{K_3}{(s+1)} + \frac{K_4}{s} \quad /6.4.57/$$

Množeći ovaj izraz sa  $(s+1)^3$  prema /6.4.52/ dobivamo

$$(s+1)^3 F(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 5s + 1}{s} \quad /6.4.58/$$

Postavljanjem u ovu jednadžbu  $s=-1$  dobivamo odmah  $K_1=2$ .  
Ako deriviramo /6.4.58/ po  $s$  imamo

$$\frac{d}{ds} \left[ (s+1)^3 F(s) \right] = \frac{4s^3 + 4s^2 - 1}{s^2} \quad /6.4.59/$$

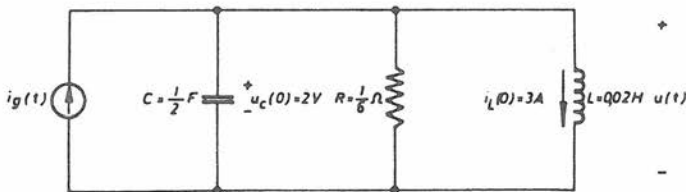
Postavljanjem u /6.4.59/  $s=-1$  slijedi  $K_2=-1$ . Ponovnim deriviranjem i upotrebom jednadžbe /6.4.55/ nalazimo da je  $K_3=1$  i  $K_4=1$ , pa je na kraju rezultat razvoja

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} \quad /6.4.60/$$

#### 6.4.5. Analiza mreža metodom Laplaceove transformacije

Pravila koja smo dovdje upoznali mogu korisno poslužiti za primjenu Laplaceove transformacije u analizi mreža. To ćemo ilustrirati slijedećim primjerom.

Razmotrimo linearni vremenski nepromjenjivi električki krug prema sl.6.4.3. Početno je stanje tog kruga zadano s  $u_C(o-) = 2 \text{ V}$  i  $i_L(o-) = 3 \text{ A}$ . Varijabla mreže koju ćemo smatrati odzivom je napon na paralelnom spoju RLC. Treba izračunati potpuni odziv ako je poticaj a)  $i_g(t) = 6 \cos 7t$ , b)  $i_g(t) = S(t)$ , c)  $i_g(t) = \delta(t)$ , d)  $i_g(t) = r(t)$ .



Sl. 6.4.3

Iz KZS dobivamo integrodiferencijalnu jednadžbu za  $t \geq 0$

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int_{o-}^t u(t') dt' + i_L(o-) = i_g(t) \quad /6.4.61/$$

Primjenom Laplaceove transformacije na obje strane ove jednadžbe imamo

$$C \left[ sU(s) - u_C(o-) \right] + \frac{1}{R} U(s) + \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{s} U(s) \right] + \frac{i_L(o-)}{s} = I(s) \quad /6.4.62/$$

Nakon sredjivanja ova jednadžba postaje

$$(sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL}) U(s) = I(s) + C u_C(o-) - \frac{i_L(o-)}{s} \quad /6.4.63/$$



odnosno

$$\frac{C}{s} (s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}) U(s) = I(s) + C u_C(0^-) - \frac{i_L(0^-)}{s} \quad /6.4.64/$$

Ako uvrstimo numeričke vrijednosti dobivamo

$$\frac{1}{2s} (s^2 + 12s + 100) U(s) = I(s) + 1 - \frac{3}{s} \quad /6.4.65/$$

a iz toga

$$U(s) = \frac{2s}{s^2 + 12s + 100} I(s) + \frac{2s - 6}{s^2 + 12s + 100} \quad /6.4.66/$$

Da bi naglasili fizikalno značenje potpunog odziva, razdvojili smo  $U(s)$  na dva člana, od kojih je prvi posljedica samo poticaja  $I(s)$ , a drugi je nastao samo zbog početnih uvjeta. Budući smo već izveli da Laplaceova transformacija ima linearna svojstva, očigledno je prvi član onda prisilni, a drugi član slobodni odziv. Za potrebe razvoja na parcijalne razlomke može se jednačba /6.4.66/ preurediti u

$$U(s) = \underbrace{\frac{2s}{(s+6)^2 + 8^2}}_{\text{Laplaceov transformat potpunog odziva}} I(s) + \underbrace{\frac{2s-6}{(s+6)^2 + 8^2}}_{\text{Laplaceov transformat slobodnog odziva}} \quad /6.4.67/$$

Laplaceov transformat prisilnog odziva
Laplaceov transformat slobodnog odziva

a)  $i_g(t) = 6 \cos 7t$ . Izračunat ćemo najprije prisilni odziv. Laplaceov transformat za ovakovu vremensku funkciju poticaja  $i_g(t)$  glasi prema tabeli 6.4.1.

$$I(s) = \frac{6s}{s^2 + 7^2} \quad /6.4.68/$$

Uvrstimo li /6.4.68/ u dio jednačbe /6.4.67/ koji odgovara Laplaceovu transformatu prisilnog odziva imamo

$$U_p(s) = \frac{12s}{[(s+6)^2 + 8^2](s^2 + 7^2)} \quad /6.4.69/$$

Nazivnik funkcije  $U_p(s)$  može se rastaviti prema slijedećem

$$Q(s) = [(s+6)^2 + 8^2](s^2 + 7^2) = (s+6-j8)(s+6+j8)(s-j7)(s+j7) \quad /6.4.70/$$

Iz ovoga slijedi da su korjeni  $Q(s)$

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha_1 + j\beta_1 = -6 + j8 \\ s_1^* &= \alpha_1 - j\beta_1 = -6 - j8 \\ s_2 &= \alpha_2 + j\beta_2 = 0 + j7 \\ s_2^* &= \alpha_2 - j\beta_2 = 0 - j7 \end{aligned} \quad /6.4.71/$$

a razvoj na parcijalne razlomke Laplaceovog transformata prisilnog odziva  $U_p(s)$  prema /6.4.47/ jest

$$U_p(s) = \frac{K_1}{s+6-j8} + \frac{K_1^*}{s+6+j8} + \frac{K_2}{s-j7} + \frac{K_2^*}{s+j7} \quad /6.4.72/$$

Tražeći reziduum  $K_1$  prema /6.4.40/ imamo

$$\begin{aligned} K_1 &= (s-s_1)U_p(s) \Big|_{s=s_1} = \frac{12s}{(s+6+j8)(s-j7)(s+j7)} \Big|_{s=-6+j8} = \\ &= 0,0763 \angle 114,53^\circ \quad /6.4.73/ \end{aligned}$$

Tražeći  $K_2$  prema istom pravilu imamo

$$\begin{aligned} K_2 &= (s-s_2)U_p(s) \Big|_{s=s_2} = \frac{12s}{(s+6-j8)(s+6+j8)(s+j7)} \Big|_{s=0+j7} = \\ &= 0,0611 \angle -58,73^\circ \quad /6.4.74/ \end{aligned}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom, za koju koristimo posljednji redak Tabele 6.4.1, dobivamo izravno prisilni odziv

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \mathcal{L}^{-1}[U_p(s)] = 2 \cdot 0,0763 e^{-6t} \cos(8t+114,53^\circ) + \\ &\quad + 2 \cdot 0,0611 e^{0 \cdot t} \cos(7t-58,73^\circ) = \\ &= 0,1526 e^{-6t} \cos(8t+114,53^\circ) + 0,1222 \cos(7t-58,73^\circ) \quad /6.4.75/ \end{aligned}$$

Za Laplaceov transformat slobodnog odziva /6.4.67/

$$U_s(s) = \frac{2s-6}{(s+6)^2+8^2} \quad /6.4.76/$$

izravno se iz Tabele 6.4.1 očitava inverzna transformacija

$$\begin{aligned} u_s(t) &= \mathcal{L}^{-1}[U_s(s)] = 2e^{-6t} \cos 8t + \frac{-6-2 \cdot 6}{8} e^{-6t} \sin 8t = \\ &= 3,01 e^{-6t} \cos(8t+48,37^\circ) \quad /6.4.77/ \end{aligned}$$

Potpuni je odziv suma prisilnog i slobodnog odziva, pa zbrajanjem /6.4.75/ i /6.4.77/ slijedi

$$u(t) = 3,075 e^{-6t} \cos(8t+50,97^\circ) + 0,1222 \cos(7t-58,73^\circ) \quad /6.4.78/$$

Očigledno je prvi član ovog rezultata prelazno stanje, a drugi stacionarno stanje. Nakon relativno kratkog vremena od trenutka primjene poticaja na krug, prelazno će se stanje pri-  
gušiti na praktički zanemarivu vrijednost, pa stacionarno stanje  $0,1222 \cos(7t-58,73^\circ)$  ostaje kao prisilni odziv zadano-  
nog kruga.

b)  $i_g(t) = S(t)$ . Laplaceov transformat jediničnog skoka je

$$I(s) = \frac{1}{s} \quad /6.4.79/$$

pa je transformacija prisilnog odziva sada

$$U_p(s) = \frac{2s}{(s+6)^2 + 8^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{(s+6)^2 + 8^2} = \frac{1}{4} \left[ \frac{8}{(s+6)^2 + 8^2} \right] \quad /6.4.80/$$

Izravno iz Tabele 6.4.1 očitavamo skokovni odziv

$$u_p(t) = s(t) = 0,25 e^{-6t} \sin 8t \quad /6.4.81/$$

Slobodni odziv je ostao isti /6.4.77/ kao što je izračunat u pitanju pod a), pa je potpuni odziv

$$\begin{aligned} u(t) &= 0,25 e^{-6t} \sin 8t + 3,01 e^{-6t} \cos (8t + 48,37^\circ) = \\ &= 2,83 e^{-6t} \cos (8t + 45^\circ) \end{aligned} \quad /6.4.82/$$

Vidimo iz rezultata, da za  $t \rightarrow \infty$  napon  $u(t) \rightarrow 0$ , jer je tada za konstantnu struju induktivitet ekvivalentan kratkospojnoj grani.

c)  $i_g(t) = \delta(t)$ . Laplaceov transformat jediničnog impulsa je

$$I(s) = 1 \quad /6.4.83/$$

pa je transformacija prisilnog odziva

$$U_p(s) = \frac{2s}{(s+6)^2 + 8^2} \quad /6.4.84/$$

Iz tabele je inverzna transformacija, odnosno impulsni odziv

$$\begin{aligned} u_p(t) = h(t) &= 2e^{-6t} \cos 8t - 1,5 e^{-6t} \sin 8t = \\ &= 2,5 e^{-6t} \cos (8t + 36,87^\circ) \end{aligned} \quad /6.4.85/$$

Slobodni odziv imamo već izračunat u a) pa je potpuni odziv

$$\begin{aligned} u(t) &= 2,5 e^{-6t} \cos (8t + 36,87^\circ) + 3,01 e^{-6t} \cos (8t + 48,37^\circ) = \\ &= 5,48 e^{-6t} \cos (8t + 43,15^\circ) \end{aligned} \quad /6.4.86/$$

Budući da postoji početno stanje u krugu, vremenska derivacija potpunog odziva /6.4.82/ za slučaj poticaja s jediničnim skokom, nije jednaka potpunom odzivu /6.4.86/ na poticaj jediničnim impulsom. Lako je međjutim, provjeriti da je  $h(t)$  prema /6.4.85/ jednak  $ds(t)/dt$ , gdje je  $s(t)$  dobiven u /6.4.81/.

d)  $i_g(t) = r(t)$ . Funkcija jediničnog uspona je za  $t \geq 0$  jednaka  $\frac{g}{r(t)} = t$ , pa joj je Laplaceov transformat

$$I(s) = \frac{1}{s^2} \quad /6.4.87/$$

Transformat prisilnog odziva je prema tome jednak

$$U_p(s) = \frac{2s}{(s+6)^2 + 8^2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{[(s+6)^2 + 8^2]s} \quad /6.4.88/$$

a razvojem na parcijalne razlomke dobivamo

$$U_p(s) = \frac{K_1}{s+6-j8} + \frac{K_1^*}{s+6+j8} + \frac{K_2}{s} \quad /6.4.89/$$

Tražeci reziduuum  $K_1$  prema /6.4.40/ imamo

$$\begin{aligned} K_1 &= (s-s_1)U_p(s) \Big|_{s=s_1} = \frac{2}{(s+6+j8)s} \Big|_{s=-6+j8} = \\ &= 0,0125 \angle 143,13^\circ \quad /6.4.90/ \end{aligned}$$

Tražeci  $K_2$  prema istom pravilu imamo

$$K_2 = (s-s_2)U_p(s) \Big|_{s=s_2} = \frac{2}{(s+6)^2 + 8^2} \Big|_{s=0} = 0,02 \quad /6.4.91/$$

Koristeći Tabelu 6.4.1 dobivamo izravno prisilni odziv

$$\begin{aligned} u_p(t) &= 2 \cdot 0,0125 e^{-6t} \cos(8t+143,13^\circ) + 0,02 S(t) = \\ &= 0,025 e^{-6t} \cos(8t+143,13^\circ) + 0,02 \quad \text{za } t \geq 0 \quad /6.4.92/ \end{aligned}$$

Slobodni odziv imamo već izračunat u a) pa je potpuni odziv na poticaj jediničnim usponom jednak

$$u(t) = 0,025 e^{-6t} \cos(8t+143,13^\circ) + 0,02 + \\ + 3,01 e^{-6t} \cos(8t+48,37^\circ) = 3 e^{-6t} \cos(8t+48,84^\circ) + \\ + 0,02 \quad /6.4.93/$$

#### 6.4.6. Transformacija konvolucionog integrala

U prethodnom smo poglavlju upoznali konvolucionni integral kao praktično sredstvo za određivanje prisilnog odziva iz poznavanja impulsnog odziva kod linearnih vremensko invarijabilnih mreža. Ovdje ćemo to svojstvo konvolucije poopćiti na funkcije koje ne moraju biti u direktnoj vezi s funkcijama odziva mreža, i ukazati na značajno pojednostavnjenje konvolucionog integrala u domeni Laplaceove transformacije.

Pretpostavimo da su dvije vremenske funkcije  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  transformabilne po Laplaceu, i da su im transformati  $F_1(s)$  i  $F_2(s)$ . Mi kažemo da vremenska funkcija  $f(t)$  predstavlja *konvoluciju*, ako funkcije  $f_1$  i  $f_2$  tvore slijedeću matematičku konstrukciju

$$f(t) \triangleq \int_0^t f_1(t') f_2(t-t') dt' = \int_0^t f_2(t') f_1(t-t') dt' \quad /6.4.94/$$

Ovaj je izraz posvema u skladu s konvolucionim integralom kako smo ga izveli u /6.3.8/ ili /6.3.10/, pa se i integrali u /6.4.94/ jednako nazivaju *konvolucionim integralima*. Ovako postavljena konvolucija najčešće se obilježava simbolički jednostavnije

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad /6.4.95/$$

Ako se međjutim, potraži Laplaceova transformacija konvolucionog integrala, onda se ova notacija još zgodnije transformira. Mi ćemo to ovdje samo postaviti kao teorem i tvrditi da je

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_2(t) * f_1(t)] = \\ = F_1(s)F_2(s) \quad /6.4.96/\dagger$$

Drugim riječima, Laplaceov transformat konvolucije je produkt Laplaceovih transformata funkcija koje se "konvoluiraju". Naravno, vrijedi i inverzija

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] \quad /6.4.97/$$

## 6.5. PRIRODNE FREKVENCIJE

### 6.5.1. Prirodne frekvencije varijabli mreže

Rješavanja jednadžbi mreža Laplaceovom transformacijom, koja smo provodili u prethodnom poglavlju, rezultirala su u prvom koraku transformatom traženog odziva u obliku racionalne funkcije. Kao što se vidi iz izradjenog primjera, razvoj na parcijalne razlomke te racionalne funkcije dovodi redovno do funkcionalnog oblika kao npr. /6.4.70/, kojega možemo pisati općenito na ovaj način

$$F(s) = \sum_i \frac{K_i}{s-s_i} + \sum_j \frac{K_j}{s-s_j} \quad /6.5.1/$$

Inverznom transformacijom vraćamo se u vremensku domenu i iz /6.5.1/ dobiva se odziv koji je u formi sume eksponencijalnih funkcija

---

† Dokaz za ovaj teorem zahtijevao bi dosta prostora, pa ga u okvirima ovog teksta nećemo provoditi. Zainteresirani čitalac može ga naći u specijalnoj literaturi.

$$f(t) = \sum_i K_i e^{s_i t} + \sum_j K_j e^{s_j t} \quad /6.5.2/$$

U oba ova izraza  $s_i$  predstavljaju polove racionalne funkcije  $F(s)$ , koji potječu od dijela te funkcije nastalog uslijed početnih uvjeta, a ovise o topologiji mreže i vrijednosti elemenata. Oni su dakle funkcija unutrašnjeg karaktera sistema koji je u razmatranju. Polovi  $s_j$  međutim, pripadaju nazivniku poticajne funkcije, kao što je npr.  $I(s)$  u /6.4.66/.

Iz tih razloga, polovi  $s_i$  koji su prirodna obilježja sistema, nazivaju se *prirodnim frekvencijama varijable mreže  $f(t)$* . Naprotiv, polovi  $s_j$  karakteriziraju poticaj, pa se nazivaju *prisilnim frekvencijama*.

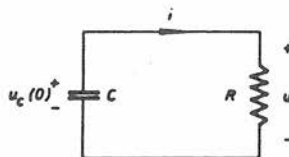
Poznato je već, da je slobodni odziv funkcija isključivo topologije i elemenata, a po svojoj je veličini ovisan o početnim uvjetima mreže. On je međutim, neovisan o poticaju. Prirodne frekvencije su prema tome, ujedno i korjeni karakteristične jednadžbe slobodnog odziva.

Možemo zaključiti konstatacijom, da je ...

...  $s_1$  prirodna frekvencija varijable mreže  $x$ , ako za neko početno stanje slobodni odziv  $x(t)$  sadržava član  $K_1 e^{s_1 t}$ .

Ili drugim riječima ..., ako je za neko početno stanje  $K_1 \neq 0$ , te se  $K_1 e^{s_1 t}$  pojavljuje u izrazu za slobodni odziv varijable  $x$ .

Uzmimo npr. krug prema sl.6.5.1, kod koje nas zanima kao varijabla mreže  $u$ .



Sl. 6.5.1

Već je dobro poznata diferencijalna jednadžba ovog kruga



$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} u = 0 \quad /6.5.3/$$

a znamo i slobodni odziv, ako je početno stanje  $u_c(0)$

$$u(t) = u_c(0) e^{-\frac{1}{RC} t} \quad /6.5.4/$$

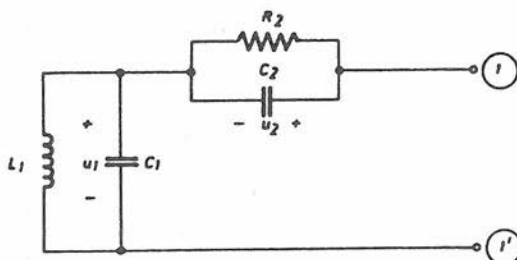
Prema gornjoj definiciji je  $s_1 = -\frac{1}{RC}$  prirodna frekvencija varijable  $u$ . Budući da je

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{u_c(0)}{R} e^{-\frac{1}{RC} t} \quad /6.5.5/$$

onda je  $s_1 = -\frac{1}{RC}$  ujedno i prirodna frekvencija varijable  $i$ .

## 6.5.2. Prirodne frekvencije mreže

Polazimo od primjera mreže prema sl. 6.5.2.



Sl. 6.5.2

Treba zapaziti da je u ovom primjeru prilaz (1) (1') ostavljen otvorenim. Upravo zato možemo zaključiti, da nikakva struja ne izlazi izvan paralelnih kombinacija elemenata pa varijabla  $u_1$  ima prirodne frekvencije  $j(1/\sqrt{LC})$  i  $-j(1/\sqrt{LC})$ , dok je  $-1/R_2C_2$  prirodna frekvencija varijable  $u_2$ . Iz tog primjera vidimo, da dvije varijable mreže ne moraju nužno imati isti skup

prirodnih frekvencija.

Zato ćemo ovdje ukratko proširiti koncepciju od prirodnih frekvencija pojedinih varijabli, na *prirodne frekvencije mreže* kao cjeline.

Kod toga ćemo smatrati da je broj ...  $s_k$  *prirodna frekvencija mreže*, ako je  $s_k$  *prirodna frekvencija nekog napona ili prirodna frekvencija neke struje u toj mreži*.

Vratimo li se na gornji primjer, onda su prirodne frekvencije mreže prema sl. 6.5.2 sve tri navedene prirodne frekvencije, tj.  $j(1/\sqrt{LC})$ ,  $-j(1/\sqrt{LC})$  i  $-1/R_2C_2$ .

## 6.6. STABILNOST MREŽE

Vrlo je značajno uočiti, da linearne vremenski nepromjenjive mreže koje sadrže samo elemente pozitivnih parametara, imaju slobodni odziv sastavljen isključivo od prigušenih eksponencijala i (ili) sinusoida konstantnih amplituda. Drugim riječima, svi korjeni karakteristične jednadžbe imaju ili negativne realne dijelove, ili su im realni dijelovi jednaki nuli. Ako je npr.  $s_1$  korjen karakteristične jednadžbe, a općenito smo mu pridjelili jednadžbu  $s_1 = \sigma + (-)j\omega$ , onda je kod takvih mreža  $\text{Re}(s_1) = \sigma \leq 0$ . Ova činjenica je intuitivno razumljiva, jer ako bi slobodni odziv eksponencijalno rastao s vremenom, to bi značilo da nije zadovoljen zakon o održanju energije, koja je jednokratno dodijeljena mreži samo u  $t=0$ .

Prema tome, ako karakteristična jednadžba ima korjene kojih su realni dijelovi isključivo jednaki nuli ili su negativni, te ako su korjeni na  $j\omega$ -osi jednostruki, tada za mrežu koju takvi korjeni opisuju kažemo da je *stabilna*. U protivnom, mreža je *nestabilna*. † Stabilnost je veoma važno svojstvo pasivnih mreža.

---

† Ovo je više opisna definicija stabilnosti. Za potpunu karakterizaciju treba zadovoljiti posebne matematičke kriterije kao npr. Routh-Hurwitzov koji se mogu naći u specijalnijoj literaturi.

## 6.7. RAVNINA KOMPLEKSNIH FREKVENCIJA

U ovom ćemo poglavlju načeti diskusiju o mnogim prednostima upotrebe pojmova pol i nula, za grafičko prikazivanje racionalne funkcije s realnim koeficijentima  $F(s)$ . Najprije treba obratiti pažnju na polove te funkcije i ukazati na odnos između njih i vremenskog odziva mreže.

Budući da ti polovi, kao prirodne frekvencije mogu biti realni, kompleksni ili imaginarni, uputno ih je locirati u kompleksnoj ravnini, koju nazivamo *ravninom kompleksnih frekvencija* ili kraće, *s-ravninom*. Ovu kompleksnu ravninu određuju horizontalna os s realnom skalom brojeva i vertikalna os s imaginarnom skalom brojeva. To nam omogućuje, da jednom točkom (ili gledano "kroz naočari" polarnog sistema - radijvektorom) fiksiramo neku kompleksnu frekvenciju  $s = \sigma + j\omega$  tako, da joj horizontalna koordinata predstavlja realni dio  $\sigma$ , a vertikalna koordinata imaginarni dio  $j\omega$ .

Jasno je, da možemo koristiti s-ravninu kako za prikazivanje nula, tako i za prikazivanje polova. Da bi se u toj ravnini jasno razlikovale točke koje se odnose na polove od onih koje potječu od nula, polovi su označavni s malim kosim križem, a nule s malom kružnicom.

Pretpostavimo npr. da nam je zadana racionalna funkcija

$$F(s) = \frac{s(s-1+j1)(s-1-j1)}{(s+1)^2(s+j2)(s-j2)} \quad /6.7.1/$$

Ova funkcija ima polove u

$$s = -1 \quad (\text{dvostruki})$$

$$s = -j2$$

$$s = +j2$$

i nule u

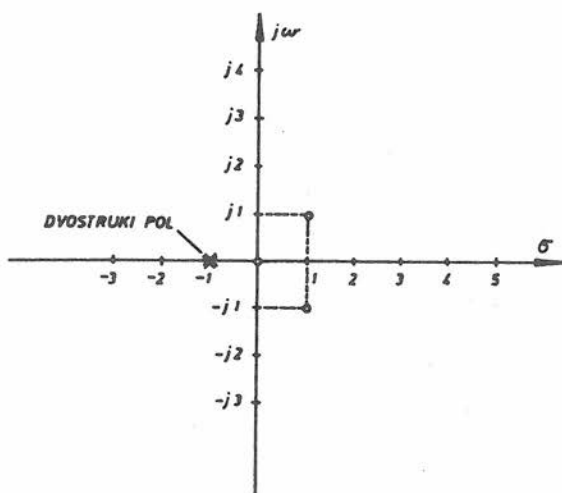
$$s = 0$$

$$s = 1-j1$$

$$s = 1+j1$$

$$s = \infty$$

Polovi i nule od  $F(s)$  prikazani su u s-ravnini na sl. 6.7.1.



Sl. 6.7.1

Razmotrimo sada položaje polova u s-ravnini, koji odgovaraju nekim karakterističnim valnim oblicima, odnosno odzivima nekih standardnih tipova električkih krugova.

Tako je npr. funkcija jediničnog skoka  $S(t)$  u domeni kompleksne frekvencije

$$\mathcal{L}[S(t)] = \frac{1}{s} \quad /6.7.2/$$

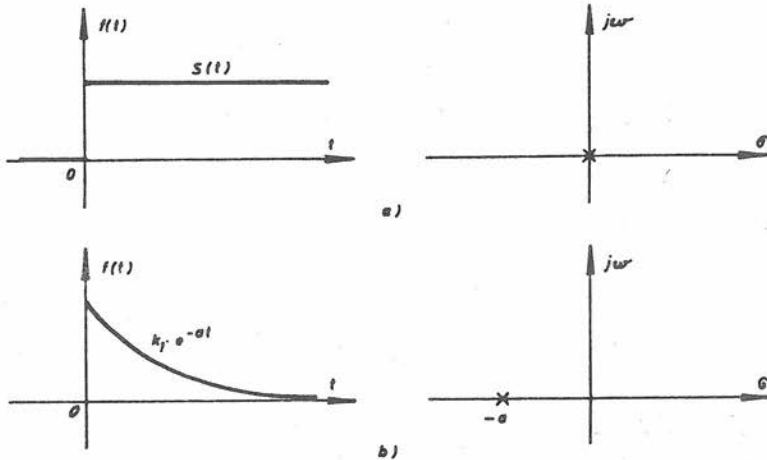
pa očigledno ima samo jedan pol u ishodištu s-ravnine kao što to prikazuje sl. 6.7.2.a).

Električki krug, kakav je bio obradjivan u primjeru na sl. 6.5.1 imao je odziv  $u(t) = u_c(0)e^{-\frac{t}{RC}}$ . Takove mreže opisuje po jednoj od varijabli diferencijalna jednačba prvog reda, pa se općenito i nazivaju mrežama prvog reda. Opći je oblik slobodnog odziva za mreže prvog reda  $f(t) = K_1 e^{s_1 t}$  gdje je  $s_1 = -a$ . (Budući da uzimamo za ove primjere samo karakteristične odzive, onda je najčešće  $a > 0$ .) U frekvencijskoj domeni takav odziv ima transformatu

$$\mathcal{L}[k_1 e^{-at}] = \frac{k_1}{s+a}$$

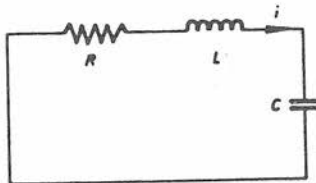
/6.7.3/

kojem je jednostruki pol na realnoj osi u  $\sigma = -a$ , kao što prikazuje sl.6.7.2.b).



Sl. 6.7.2

U analizi mreža vrlo su karakteristične mreže drugog reda, kakav je npr. i serijski RLC krug na sl. 6.7.3.



Sl. 6.7.3

Homogena diferencijalna jednačba koja opisuje ponašanje struje ovog kruga već je izvedena u poglavlju 6.1, odakle prenosimo samo njen završni oblik uz  $\alpha = R/2L$  i  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

/6.7.4/

Iz karakteristične jednadžbe  $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$  slijede kor-  
jeni

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha + \alpha_d = -a_1 \\ -\alpha - \alpha_d = -a_2 \end{cases} \quad /6.7.5/$$

gdje je

$$\alpha_d \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad /6.7.6/$$

Oblik slobodnog odziva ovakove mreže drugog reda ovisi o relativnim vrijednostima  $\alpha$  i  $\omega_0$ . Prema tim relativnim vrijednostima  $\alpha$  i  $\omega_0$  klasificiramo slobodni odziv u ova četiri slučaja:

(1) Natkritično prigušeni ( $\alpha > \omega_0$ ). Dvije su prirodne frekvencije  $s_1 = -a_1$  i  $s_2 = -a_2$  tada realne i negativne, pa je slobodni odziv suma dvije prigušene eksponencijale

$$i(t) = k_1 e^{-a_1 t} + k_2 e^{-a_2 t} \quad /6.7.7/$$

U frekvencijskoj domeni takav odziv ima transformat

$$\mathcal{L}[i(t)] = \frac{k_1}{s+a_1} + \frac{k_2}{s+a_2} \quad /6.7.8/$$

pa prema tome ima dva pola, kao što prikazuje sl.6.7.4.a).

(2) Kritično prigušeni ( $\alpha = \omega_0$ ). Dvije su prirodne frekvencije tada realne i jednake tj.  $s_1 = s_2 = -\alpha$ , pa je slobodni odziv oblika

$$i(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\alpha t} \quad /6.7.9/$$

U frekvencijskoj domeni takav odziv ima transformat

$$\mathcal{L}[i(t)] = \frac{k_1}{s+\alpha} + \frac{k_2}{(s+\alpha)^2} \quad /6.7.10/$$

pa prema tome ima dvostruki pol, kao što prikazuje sl.6.7.4.b).

(3) Potkritično prigušeni ( $\alpha < \omega_0$ ). Dvije su prirodne frekvencije tada konjugirano kompleksne tj.  $s_1 = -\alpha + j\omega_d$  i  $s_2 = -\alpha - j\omega_d$ , gdje je

$$\begin{array}{l} \text{vlastita prigušena} \\ \text{frekvencija ...} \end{array} \quad \omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad /6.7.11/$$

Slobodni odziv u ovom slučaju ima oblik eksponencijalne prigušene sinusoide

$$i(t) = ke^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varepsilon) \quad /6.7.12/$$

Ovaj valni oblik precizno prikazuje sl.1.7.5. U frekvencijskoj domeni takav odziv ima transformatu

$$\mathcal{L}[i(t)] = \frac{K}{s+\alpha-j\omega_d} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\omega_d} \quad /6.7.13/$$

pa su polovi locirani u s-ravnini kao što prikazuje sl. 6.7.4.c).

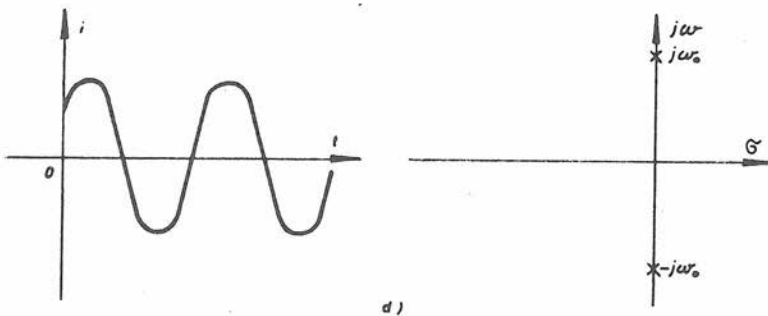
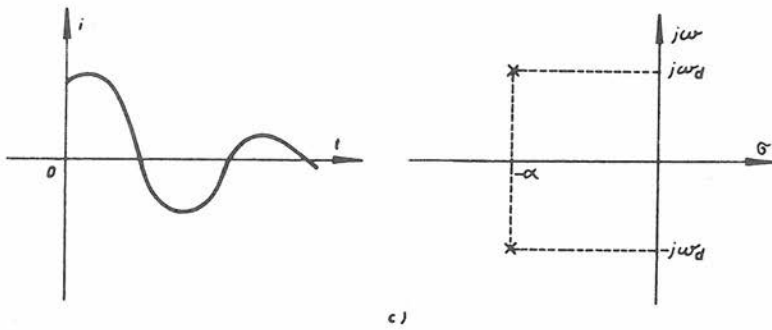
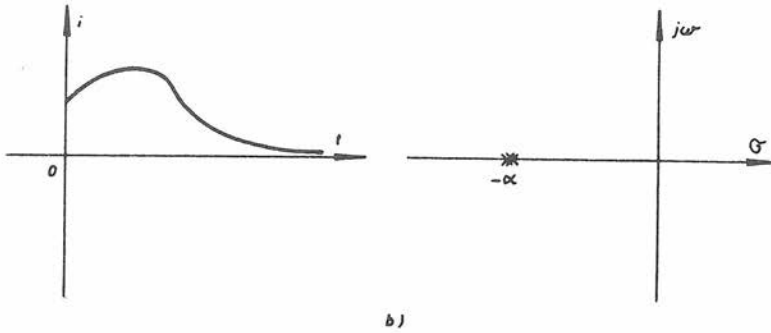
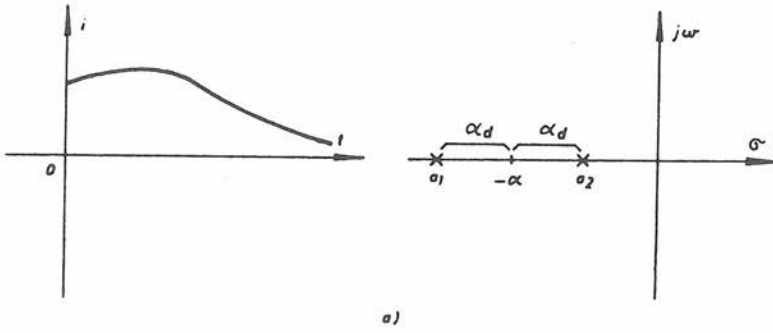
(4) Neprigušeni ( $\alpha=0$ , i zato  $R=0$ ). Dvije su prirodne frekvencije tada konjugirano imaginarne, tj.  $s_1 = j\omega_0$  i  $s_2 = -j\omega_0$ , pa je slobodni odziv neprigušena sinusoida

$$i(t) = k \cos(\omega_0 t + \varepsilon) \quad /6.7.14/$$

U frekvencijskoj domeni takav odziv ima transformatu

$$\mathcal{L}[i(t)] = \frac{K}{s-j\omega_0} + \frac{K^*}{s+j\omega_0} \quad /6.7.15/$$

Odziv i polovi skicirani su na sl. 6.7.4.d).





Ovih nekoliko primjera daju jasan odgovor na pitanje kako položaji prirodnih frekvencija u s-ravnini diktiraju oblik odziva.

Relativno gušenje oscilacija u podkritičnom slučaju često je karakterizirano bezdimenzionalnim brojem

$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} \quad /6.7.16/$$

koji je poznat pod imenom *faktor kvalitete* fizikalnih titrajnih krugova. Definiciju kako je data izrazom /6.7.16/ možemo primijeniti na sve mreže drugog reda bez obzira na topologiju i elemente u granama.

Prema tom izrazu, manje gušenje znači veći faktor kvalitete. U slučaju serijskog RLC kruga, kakav je bio slučaj u gore provedenom primjeru, manju konstantu gušenja postizavamo smanjenjem otpornosti  $R$ ; obrnuto kod paralelnog RLC kruga za istu svrhu treba povećati  $R$ . Idealni titrajni krug bez gubitaka ima gušenje jednako nuli, što rezultira beskonačnim faktorom  $Q$ .

Prema vrijednosti ovog faktora kvalitete, moguće je razvrstati i ova četiri slučaja odziva mreža drugog reda, koja smo u ovom poglavlju diskutirali. Lako je ustanoviti da u nadkritično prigušenom slučaju mora biti  $Q < 1/2$ ; u kritično prigušenom slučaju je  $Q = 1/2$ , u podkritično prigušenom slučaju  $Q > 1/2$ , dok neprigušeni slučaj znači  $Q = \infty$ .

Neprigušeni slučaj ( $\alpha = 0$ , odnosno  $R = 0$  za serijski RLC krug) je sasvim idealizirani slučaj, jer je induktivitet samo model svitka žice, koja uvijek ima bar malo gubitaka. Zato se u praksi ne može postići  $Q = \infty$  za neku pasivnu mrežu. To nadalje znači, da neprigušena sinusoida nije nikada slobodni odziv takve mreže. Vrijednost  $Q$  od nekoliko stotina, danas je ipak već dostizivo u praktičkim titrajnim krugovima sa zbijenim elementima.

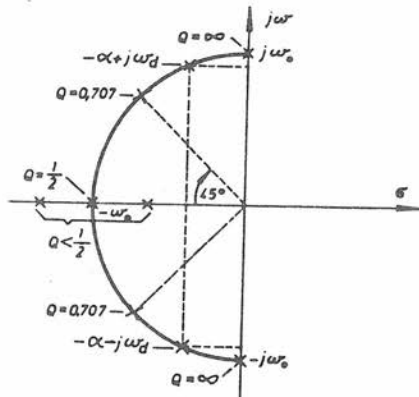
Ako karakterističnu jednadžbu drugog reda ( $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$ ) prikažemo s pomoću faktora  $Q$  dobivamo da je

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 = 0 \quad /6.7.17/$$

Pod pretpostavkom da mijenjamo  $Q$  od  $1/2$  do  $\infty$ , a  $\omega_0$  držimo konstantnim, može se analitički odrediti krivulja mjesta na kojoj se u tom slučaju nalaze sve prirodne frekvencije u  $s$ -ravnini. Rezultat takovog računa je jednačba kružnice

$$\sigma^2 + \omega^2 = \omega_0^2 \quad /6.7.18/$$

Budući da je za pasivne mreže  $\sigma$  uvijek negativan, to znači da će se polovi kretati po polukružnici radijusa  $\omega_0$ , koja se nalazi u drugom i trećem kvadrantu  $s$ -ravnine za  $Q < 1/2$ . polovi su izvan polukružnice na negativnom dijelu realne osi. Položaj prirodnih frekvencija u  $s$ -ravnini za različite vrijednosti faktora kvalitete  $Q$ , prikazuje dijagram sl.6.7.5, ako je mreža drugog reda.



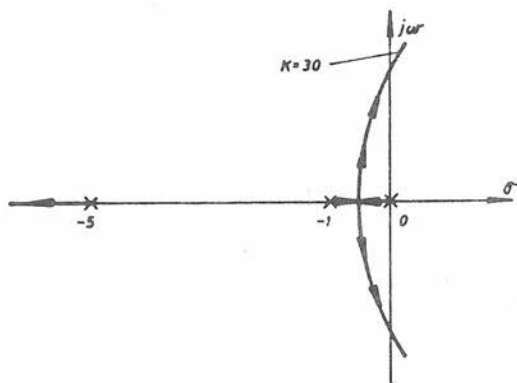
Sl. 6.7.5

Rezultati koje smo upravo dobili mogu na prvi pogled izgledati suviše specijalizirani, jer se odnose samo na mreže drugog reda kao što su jednostavni RLC krugovi. Zaključci su, međjutim, mnogo dalekosežniji. U prvom redu, mreže višeg reda imat će karakterističnu jednačbu koje su korjeni opet ili realni ili u konjugirano kompleksnim parovima. Za stabilne sisteme ovi korjeni moraju imati negativne realne dijelove. Isto tako, svaki se par korjena može opisati u ovisnosti od svojih  $\omega_0$  i  $\alpha$ , a oni su odlučujući za oblik odziva sistema.

Prema tome, koncepcija o krivulji mjesta može se primjeniti i na mreže koje opisuje karakteristična jednačba višeg reda od 2. I u tim ćemo slučajevima varirati samo jedan element ili parametar, a istraživati pomicanje korjenova u kompleksnoj ravnini. Nas zapravo zanima krivulja mjesta korjenova budući da time znamo sve o ponašanju mreže za neku posebnu vrijednost parametara. Pretpostavimo npr. da neki promatrani sistem ima karakterističnu jednačbu

$$s^3 + 6s^2 + 5s + k = 0 \quad /6.7.19/$$

gdje je  $k$  parametar kojega variramo. Najizravnija metoda za određivanje krivulje mjesta bila bi u mijenjanju vrijednosti za  $k$  korak po korak, i u svakom tom koraku određivanju vrijednosti za korjene jednačbe /6.7.19/. Taj je mukotrpan posao najbolje prepustiti elektroničkom računar. Rezultat za ovaj primjer dat je na sl. 6.7.6.



Sl. 6.7.6

Za male vrijednosti od  $k$ , svi su polovi realni i negativni; za veći  $k$ , dva pola izlaze iz realne osi i postaju konjugirano kompleksni par. Za  $k \geq 30$ , ovi polovi prelaze u desnu polovinu  $s$ -ravnine, pa je tada sistem nestabilan.

## 7. FUNKCIJE MREŽA

Laplaceovu transformaciju, kao jednu od metoda rješavanja jednadžbi električkih mreža, upoznali smo u prethodnoj glavi.

Pri tome smo istakli svojstva koja idu u prilog upotrebi te metode. Postoje, međutim, i neki drugi pokazatelji vrijednosti Laplaceove transformacije, koji ne moraju biti u izravnoj vezi s navedenom svrhom, tj. određivanjem rješenja za neku od varijabli mreže.

Tako na primjer, teorija Laplaceove transformacije omogućava uvođenje koncepcije o funkcijama mreža, koja će biti predmet diskusije u ovoj glavi. O nekim su elementima tog pojma studenti elektrotehnike već uzgred saznali, učeći o analizi sinusoidalnog stacionarnog stanja primjenom kompleksnog računa. Tu su se susreli s terminima kao što su ulazna impedancija, admitancija, itd. Vidjet će se u predstojećim izlaganjima, da su to u suštini bili samo specijalni slučajevi jednog šireg i sveobuhvatnijeg pojma, kojeg zbirnim imenom nazivamo *funkcije mreža*.

Činjenica, da one mogu biti dobivene eksperimentalno s dovoljno velikom preciznošću mjerenjima u sinusoidalnom stacionarnom stanju, pomaže nam da analiziramo svaki problem sa stanovišta konkretne funkcije mreže. To se obično pokazuje jednostavnijim od npr. zaključivanja na temelju impulsnog odziva. Nadalje ćemo vidjeti, da se upravo preko funkcija mreža zapaža tijesna veza, koja postoji između ponašanja mreže u smislu valnih oblika struja i napona, i ponašanja sa stanovišta karakterističnih parametara odziva mreže u njezinom sinusoidalnom stacionarnom stanju.

### 7.1. DEFINICIJA FUNKCIJA MREŽA

Razmatrajmo linearnu vremenski nepromjenjivu mrežu koja neka ima samo jedan nezavisni naponski izvor ili samo jedan nezavisni strujni izvor kao poticaj. Zbog tog poticaja mreža ima prisilni odziv koji može biti ili napon između bilo ko-

ja dva čvora, ili struja kroz bilo koju granu te mreže.<sup>†</sup>

Funkcija mreže, koju ćemo označavati s  $H(s)$ , definirana je tada slijedećim izrazom

$$\text{Funkcija mreže} \triangleq \frac{\mathcal{L} [\text{prisilni odziv}]}{\mathcal{L} [\text{poticaj}]} \quad /7.1.1/$$

Ova se definiciona jednažba može interpretirati i na ovaj način:

Laplaceov transformat prisilnog odziva jednak je produktu funkcije mreže i Laplaceovog transformata poticaja.

$$\mathcal{L} [\text{prisilni odziv}] = (\text{Funkcija mreže}) \mathcal{L} [\text{poticaj}] \quad /7.1.2/$$

Budući već znamo da je Laplaceova transformacija jediničnog impulsa jednaka jedinici i da je impulsni odziv prisilni odziv na jedinični impuls, primjenom jednažbe /7.1.2/ dolazimo do vrlo važne relacije

$$\mathcal{L} [h(t)] = H(s) \quad /7.1.3/$$

To znači, da je ... *Laplaceov transformat impulsnog odziva jednak funkciji mreže.*

## 7.2. FUNKCIJE MREŽA I SINUSOIDALNO STACIONARNO STANJE

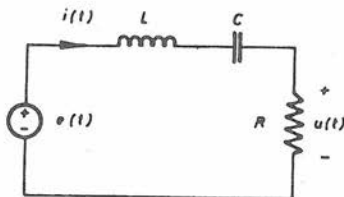
Prema gore izloženom, funkcije mreža definirane su kao odnosi dvaju Laplaceovih transformata. To dalje znači, da i one same moraju biti u općenitom slučaju funkcije kompleksne frekvencije  $s = \sigma + j\omega$ . Prisjetimo se, da je npr. funkcija impedancije u sinusoidalnom stacionarnom stanju bila slično definirana kao kvocijent fazora odziva (napona) i fazora poticaja (struje),

---

<sup>†</sup> Ova se ograničenja za definiciju izražavaju katkada drugačijim, ali ekvivalentnim uvjetima: (1) da mreža mora biti u stanju nula (bez početnih uvjeta), i da (2) ne smije imati unutrašnjih nezavisnih izvora.

a izražena u simboličkoj notaciji bila je funkcija čisto imaginarne frekvencije  $j\omega$ . Očigledno je prema gornjoj definiciji, da je funkcija mreže općenitija koncepcija, jer stavlja u odnos prisilni odziv prema bilo kakvom poticaju (a ne samo fazor odziva, prema fazoru poticaja!).

Razmotrimo npr. serijski RLC krug prikazan na sl.7.2.1.



Sl. 7.2.1.

(1) Naponski generator na ulazu neka pretstavlja poticaj sinusoidalnog valnog oblika  $e(t) = E \cos \omega t = \text{Re}[E(j\omega)e^{j\omega t}]$  napon  $u(t)$  na otporu  $R$  možemo smatrati odzivom u stacionarnom stanju. Smatrajmo nadalje, da su svi početni uvjeti jednaki nuli.

Diferencijalna jednačba ovog kruga tada glasi:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = e(t) \quad /7.2.1/$$

Nakon deriviranja ove jednačbe imamo

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de(t)}{dt} \quad /7.2.2/$$

a uvrštavajući  $u(t) = i(t)/R$  slijedi

$$\frac{L}{R} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u(t) = \frac{de(t)}{dt} \quad /7.2.3/$$

U poglavlju o rješavanju diferencijalnih jednačbi ovog tipa, vidjeli smo da partikularno rješenje (ovdje ujedno i stacionarni odziv) mora imati oblik

$$u(t) = U \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re} \left[ U(j\omega) e^{j\omega t} \right] \quad /7.2.4/$$

Stavljajući /7.2.4/ u jednačbu /7.2.3/ nakon kraćenja ostaje

$$\left[ \frac{L}{R}(j\omega)^2 + j\omega + \frac{1}{RC} \right] U(j\omega) = j\omega E(j\omega) \quad /7.2.5/$$

odnosno

$$U(j\omega) = \left[ \frac{R}{L} \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{1}{LC}} \right] E(j\omega) \quad /7.2.6/$$

Ako označimo

$$H(j\omega) = \frac{R}{L} \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{1}{LC}} \quad /7.2.7/$$

prelazi jednačba /7.2.6/ u

$$U(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega) \quad /7.2.8/$$

Iz ovoga izraza dobivamo stacionarni odziv u ovisnosti od vremena

$$u(t) = \operatorname{Re} \left[ U(j\omega) e^{j\omega t} \right] = |H(j\omega)| E \cos \left[ \omega t + \angle H(j\omega) \right] \quad /7.2.9/$$

(2) Razmotrimo isti primjer, ali neka je sada  $e(\cdot)$  posve proizvoljni valni oblik napona izvora. Transformirajući po Laplaceu diferencijalnu jednačbu /7.2.3/ uz sve početne uvjete jednake nuli imamo

$$\left[ \frac{L}{R} s^2 + s + \frac{1}{RC} \right] U(s) = sE(s) \quad /7.2.10/$$

odnosno

$$U(s) = \left[ \frac{R}{L} \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \right] E(s) \quad /7.2.11/$$

Ako označimo

$$H(s) = \frac{R}{L} \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad /7.2.12/$$

prelazi jednačba /7.2.11/ u

$$U(s) = H(s)E(s) \quad /7.2.13/$$

Prisjetimo li se kako smo definirali funkciju mreže, vidimo da je to upravo relacija /7.2.12/ jer iz /7.2.13/ slijedi

$$H(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \quad /7.2.14/$$

Uspoređujući analogne izraze rješavanja istog primjera za sinusoidalno stacionarno stanje (1) i u slučaju općenitog poticaja (2), možemo zaključiti slijedeće:

*Uvrštavajući  $s=j\omega$  u funkciju mreže  $H(s)$  dobiva se omjer fazora odziva naprama fazoru poticaja u sinusoidalnom stacionarnom stanju kod frekvencije  $\omega$ .*

Ovaj je zaključak izveden na temelju jednog specifičnog primjera, što se ne bi smjelo smatrati korektnom metodom dokazivanja. Treba naglasiti, da se do istog rezultata dolazi i posve općenitom analizom matričnih jednačbi mreža. Gornja konstatacija je međjutim, intuitivno očigledna, pa je za svrhu ovog teksta nepotrebno provoditi generalni dokaz.

Primjena ovog zaključka stavlja u odnos funkcije mreža s veličinama koje se relativno jednostavno mjere (amplitude i fazni kutevi). Tako npr. ako ništa nije poznato o topologiji i elementima neke linearne i vremenski invarijabilne mreže, mogu se mjeriti poticaj i odziv, pa je ipak moguće odrediti funkciju mreže.



### 7.3. KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE MREŽA

U primjeru iz prethodnog poglavlja, tražena funkcija mreža  $H(s)$  bila je omjer dviju istovrsnih električkih varijabli tj. napon kroz napon. Iako izgleda suviše ipak naglasimo da su ta dva napona "mjerena" na dva različita para priključnica mreže. U uvodu ove glave pozivali smo se na impedanciju kao specijalan slučaj funkcije mreža, a ta je bila omjer dviju raznorodnih varijabli, tj. napona i struje. Taj napon i ta struja se, međjutim, mjere na istom paru priključnica. Ova dva spomenuta slučaja, kao i ostale moguće kombinacije omjera odziva i poticaja, pripadaju zajedničkoj porodici funkcija mreža, ali su svaki za sebe specifični prema određenim obilježjima.

Prije nego upoznamo ostale članove ove porodice treba uočiti razliku između ulaznih i prijenosnih funkcija mreže.

Pretpostavimo npr. da je poticaj strujna varijabla a odziv naponska. Ako su sada i taj napon i ta struja identificirani na istom paru priključnica mreže kao na sl. 7.3.1.a), tada funkciju mreže koja je kvocijent Laplaceovih transformata tih varijabli, nazivamo *ulaznom funkcijom mreže*. Naravno, funkcija mreže bila bi isto ulazna, da je na tim priključnicama napon bio poticaj, a struja odziv. †

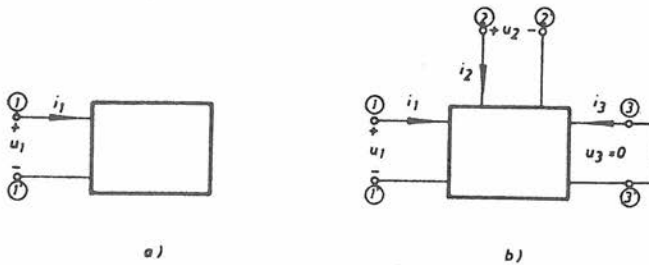
Smatra se naime, da je mreža pobudjivana strujnim odnosno naponskim izvorom na tim priključnicama; u tom smislu te su priključnice ulazni pristup mreži.

Na shemi prema sl. 7.3.1.b) uključeni su i drugi parovi priključnica. Kada su odziv i poticaj identificirani na dva različita para priključnica, za funkciju mreže kažemo da je *prijenosna* (transferna) po prirodi. To proizlazi iz činjenice, da poznavajući prijenosnu funkciju mreže i varijablu na jed-

---

† Radi kraćeg izražavanja u daljnjem tekstu, ponegdje se neće stalno naglašavati, da se radi o Laplaceovim transformatima prisilnog odziva i poticaja kod funkcija mreža. To treba smatrati samim po sebi razumljivim, kada se spominju samo odziv i poticaj.

nom prilazu mreži, možemo izračunati varijablu na drugom prilazu. U tom je smisao prijenosa od jednog na drugo mjesto mreže.



Sl. 7.3.1

### 7.3.1. Ulazne funkcije mreža

Na osnovi iznesenog lako je zaključiti na slijedeće specijalne slučajeve ulaznih funkcija mreža.

*Ulazna impedancija* je omjer Laplaceovog transformata napona prema Laplaceovom transformatu struje na ulaznim priključnicama (1)(1') promatranog dvopola

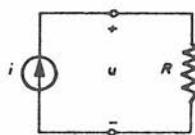
$$Z_{11}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \quad /7.3.1/$$

*Ulazna admitancija* je omjer Laplaceovog transformata struje prema Laplaceovom transformatu napona na ulaznim priključnicama (1)(1') promatranog dvopola

$$Y_{11}(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)} \quad /7.3.2/$$

Ulazne funkcije mogu se pisati i bez ovih indeksa ako promatrana mreža ima samo jedan prilaz. Da bi izbjegli učestalo pisanje "impedancija i admitancija" ove se dvije funkcije mreža katkada zajednički nazivaju jednim imenom: *imitancije*. Imitancija je zato impedancija ili admitancija.

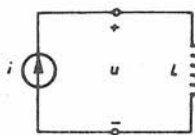
Sl. 7.3.2 prikazuje primjer ulaznih impedancija mreža za pojedinačne elemente  $R$ ,  $L$  i  $C$ .



$$u = Ri$$

$$Z = \frac{\mathcal{L}[u]}{\mathcal{L}[i]} = \frac{RI}{I}$$

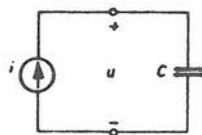
$$Z = R$$



$$u = \frac{di}{dt} L, \quad i_L(0_-) = 0$$

$$Z = \frac{\mathcal{L}[u]}{\mathcal{L}[i]} = \frac{LsI}{I}$$

$$Z = sL$$



$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt', \quad u_C(0_-) = 0$$

$$Z = \frac{\mathcal{L}[u]}{\mathcal{L}[i]} = \frac{\frac{1}{Cs}I}{I}$$

$$Z = \frac{1}{sC}$$

Sl. 7.3.2

Očigledno je da bi ulazne admitancije za  $R$ ,  $L$  i  $C$  elemente prema sl. 7.3.2 bile  $1/R$ ,  $1/sL$  i  $sC$ .

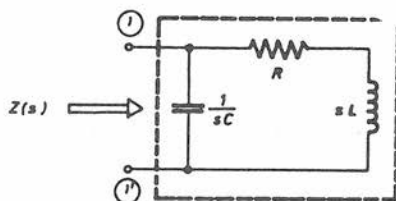
Lako je pokazati, da su pravila za kombiniranje impedancija i admitancija, identična s onim već dobro poznatim za sinusoidalno stacionarno stanje. Kod serijskog spajanja elemenata zbrajamo impedancije pojedinačnih elemenata, da bi dobili ukupnu ulaznu impedanciju. Kod paralelnog spajanja elemenata zbrajamo admitancije pojedinačnih elemenata, da bi dobili ukupnu ulaznu admitanciju. Na taj način možemo dobiti ulazne funkcije mreža i kompliciranijih spojeva, ako kombiniramo odgovarajuće zbrajanje impedancija i admitancija pojedinačnih elemenata. Općenite metode analize mreža (petlji, čvorova, itd.) mogu biti takodjer sprovedene izravno u ovisnosti od impedancija i admitancija, što tada dovodi do sistema linearnih algebarskih jednažbi.

Ove jednažbe mogu onda biti riješene po željenoj varijabli, da bi se dobila tražena funkcija mreže. Ovakav postupak omogućava nam da izbjegnemo pisanje integrodiferencijalnih jednažbi, ako nas zanima samo funkcija mreže.

Analiza, koja direktno upotrebljava transformirane varijable, često se naziva analizom u *frekvencijskoj domeni*. Naprotiv,

analiza s integrodiferencijalnim jednažbama, naziva se analizom u *vremenskoj domeni*. Ovim smo se terminima već "prikriveno" služili u dosadašnjem izlaganju, iako im zapravo tek ovdje otkrivamo puno značenje.

Pretpostavimo npr. da želimo odrediti ulaznu impedanciju mreže, koja se sastoji od serijskog spoja R i L, premoštenog s jednim kapacitetom prema sl.7.3.3.



Sl.7.3.3

Ulazna je impedancija ovog dvopola

$$Z(s) = \frac{1}{sC + \frac{1}{R+sL}} = \frac{1}{C} \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad /7.3.3/$$

### 7.3.2. Prijenosne funkcije mreža

Prijenosne funkcije mreža, za razliku od ulaznih, treba pisati s dvostrukim indeksima koji se odnose na promatrane parove priključnica. Ako su ta dva para priključnica označeni s ①①' i ②②' (sl. 7.3.1.b)), onda na njih gledamo kao na prilaz mreži 1 odnosno prilaz mreži 2, na kojima su identificirani poticaj odnosno odziv.

Prema tome možemo definirati četiri karakteristične prijenosne funkcije mreže.

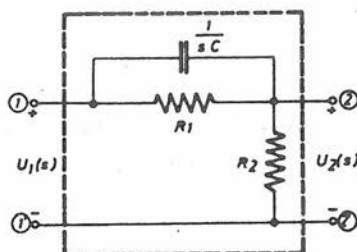
$$\text{Prijenosna impedancija} \dots\dots\dots Z_{21}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} \quad /7.3.4/$$

$$\text{Prijenosna admitancija} \dots\dots Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \quad /7.3.5/$$

$$\text{Prijenosni omjer napona} \dots\dots A_{21}(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \quad /7.3.6/$$

$$\text{Prijenosni omjer struja} \dots\dots \alpha_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \quad /7.3.7/$$

Kao primjer razmotrimo djelitelj napona prema shemi na sl. 7.3.4, i pretpostavimo da nas zanima prijenosni omjer napona kao funkcija mreže.



Sl. 7.3.4

Impedancije  $R_1$  i  $1/sC$  možemo najprije kombinirati u ekvivalentnu impedanciju koja će imati vrijednost

$$Z_{\text{ekv}}(s) = \frac{1}{sC + \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1}{R_1Cs + 1} \quad /7.3.8/$$

Prijenosni omjer napona ako je  $u_2(t)$  prisilni odziv dobivamo prema /7.3.6/

$$A_{21}(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 + Z_{\text{ekv}}(s)} \quad /7.3.9/$$

Ako u ovaj izraz uvrstimo  $Z_{\text{ekv}}(s)$  imamo

$$A_{21}(s) = \frac{R_2 R_1 Cs + R_2}{R_2 R_1 Cs + R_1 + R_2} \quad /7.3.10/$$

Nakon kraće razrade ovog izraza , dobivamo prijenosnu funkciju u uobičajenoj formi

$$A_{21}(s) = \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} \quad /7.3.11/$$

#### 7.4. OPĆENITA SVOJSTVA FUNKCIJA MREŽA

Iako svaka od funkcija mreža koje smo spomenuli u prethodnim poglavljima ima svojih posebnih svojstava, mi ćemo ovdje navesti samo neka veoma općenita i šireg značenja, a koja se odnose na sve funkcije mreža. Izlaganje specijalnijih svojstava ostavljamo za napredniji tečaj iz teorije električkih mreža.

Promatrajući rezultate primjera iz funkcija mreža, možemo uočiti da su i funkcije mreža racionalne funkcije s konstantnim koeficijentima, kompleksne frekvencije  $s$ . Takav zaključak slijedi i iz generalno postavljene analize u tom smislu, kojega nećemo ovdje provoditi. Navedena konstatacija vrijedi za bilo kakovu zbijenu linearnu i vremenski nepromjenjivu mrežu.

Prema tome možemo pisati opći oblik funkcije mreže kao

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n} \quad /7.4.1/$$

gdje su  $P(s)$  i  $Q(s)$  polinomi varijable kompleksne frekvencije  $s$ , a koeficijenti  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$  su realni brojevi. Ovi su koeficijenti realni zato, jer su gradjeni kao sume produkata parametara elemenata  $R, L, C$ , itd., a ti su parametri kao što znamo realni brojevi. Funkcije mreža su u potpunosti određene s ta dva skupa realnih koeficijenata

ta, koji definiraju polinom brojnika i nazivnika. Alternativni izraz za funkcije mreža u faktoriziranom obliku piše se kao

$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s-n_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)} \quad /7.4.2/$$

gdje je  $K$  realni faktor,  $n_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) su *nule* funkcije mreže, a  $p_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) *polovi* funkcije mreže.

Na taj način funkcija mreže može biti u potpunosti određena i sa zadanim nulama ( $n_1, n_2, \dots, n_m$ ), polovima ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) i faktorom  $K$ . Budući da i polinom brojnika  $P(s)$  i polinom nazivnika  $Q(s)$  imaju realne koeficijente, nule i polovi moraju biti ili realni brojevi, ili parovi konjugirano kompleksnih brojeva.

To je posljedica činjenice, da svaki polinom  $F(s)$  s realnim koeficijentima, ima svojstvo  $F^*(s) = F(s^*)$  za svaki  $s$ .

## 7.5. IZRAŽAVANJE FUNKCIJA MREŽA LOGARITAMSKOM MJEROM

Ustanovili smo u poglavlju 7.2., da supstitucijom  $j\omega$  umjesto  $s$  u funkciji mreže  $H(s)$  dolazimo do  $H(j\omega)$ , koji je omjer fazora odziva u sinusoidalnom stacionarnom stanju i fazora odgovarajućeg sinusoidalnog poticaja.

Elektrotehnička praksa pridaje naročitu važnost poznavanju i razumijevanju ponašanja funkcije mreže  $H(j\omega)$ , ako se  $\omega$  mijenja od 0 do  $\infty$ . Tako je posebno korisno, imati vizuelno predloženo ponašanje mreže u sinusoidalnom stacionarnom stanju, od sasvim niskih do veoma visokih frekvencija.

Za svaki stalni  $\omega$ ,  $H(j\omega)$  općenito je kompleksan broj. Prema tome, možemo ga pisati u pravokutnim koordinatama

$$H(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad /7.5.1/$$

ili u polarnim

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi H(j\omega)} \quad /7.5.2/$$

U izrazu /7.5.2/ veličinu  $|H(j\omega)|$  nazivamo *apsolutna vrijednost*, a  $\varphi H(j\omega)$  *faza* funkcije mreže kod frekvencije  $\omega$ .

Ako funkcija mreže predstavlja prijenosnu funkciju, prikladno je uvesti logaritamsku mjeru. U načelu međjutim, logaritamska mjera može se uvesti i ako funkcija mreže nije prijenosna.

$$\Theta(j\omega) \triangleq \ln H(j\omega) = \ln |H(j\omega)| + j \varphi H(j\omega) \quad /7.5.3/$$

Realni dio ovog izraza obično se u praksi naziva *pojačanjem*, a mjeri jedinicama koje se zovu *neperi*. Naziv pojačanje ne treba doslovno shvaćati jer rezultatski on može izražavati i slabljenje ulaznog signala. Označimo li pojačanje s  $\alpha(\omega)$  imamo

$$\alpha(\omega) \triangleq \ln |H(j\omega)| \quad \text{nepera (N)} \quad /7.5.4/$$

U ovim su formulama za logaritamsko izražavanje upotrebljeni prirodni logaritmi. Ako međjutim, definiramo pojačanje s dekadskim logaritmom, dolazimo do jedinica koje nazivamo *decibelima*. Pojačanje u toj alternativni računa se prema slijedećem izrazu

$$\alpha(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| \quad \text{decibela (db)} \quad /7.5.5/$$

Konverzija između tih dviju jedinica, može se provesti s pomoću relacije

$$\text{Broj decibela} = 8,68 \cdot \text{broj nepera} \quad /7.5.6/$$



## 7.6. FREKVENCIJSKI ODZIV

Poznavanje apsolutne vrijednosti i faze funkcije mreža ne koristi se samo za dobivanje odziva u sinusoidalnom stacionarnom stanju, nego je u tim podacima takodjer sadržana informacija o ponašanju prisilnog odziva na bilo kakav poticaj. Krivulja apsolutnih vrijednosti i faza funkcije mreže u ovisnosti o frekvenciji, snima se na temelju mjerenja laboratorijskim instrumentima relativno jednostavno. Štaviše, ova se mjerenja mogu izvesti s dovoljno visokim stupnjem preciznosti.

Zajednička informacija o apsolutnoj vrijednosti i fazi funkcije mreže za svaki  $\omega$ , obično se naziva *frekvencijski odziv* mreže.

Razmotrimo npr. paralelni RC krug (sl.7.6.1) kojemu je funkcija mreže (ulazna impedancija)

$$H(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{G+sC} = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{1}{RC}} \quad /7.6.1/$$

Polinom brojnika je konstantan za svaki  $s$ , pa se zato kaže da  $H(s)$  nema konačnih nula. Polinom nazivnika jednak je nuli kada je  $s = -1/RC$ . To znači da  $H(s)$  ima pol u  $s = -1/RC$ . Da bi dobili frekvencijski odziv odredimo najprije  $H(j\omega)$ .

$$H(j\omega) = \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega - (-\frac{1}{RC})} \quad /7.6.2/$$

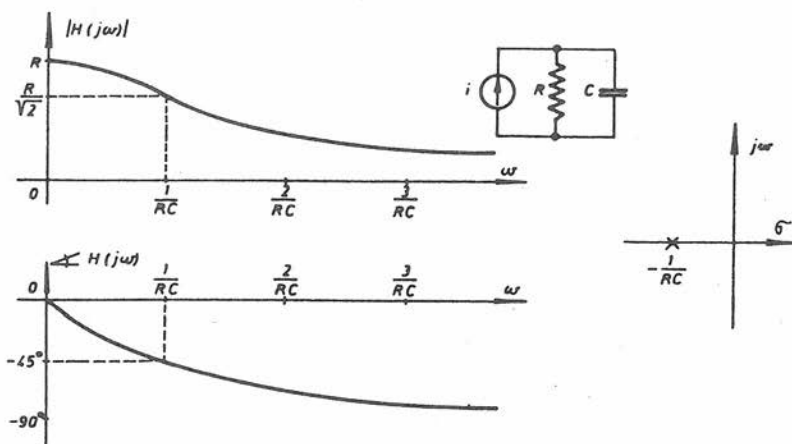
Iz ove jednadžbe dobivamo apsolutnu vrijednost

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{C} \frac{1}{|j\omega - (-\frac{1}{RC})|} = \frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + (\frac{1}{RC})^2}} \quad /7.6.3/$$

i fazu

$$\angle H(j\omega) = -\arctan \omega RC \quad /7.6.4/$$

Iz jednadžbe /7.6.3/ možemo zaključiti, da se  $|H(j\omega)|$  monotono smanjuje kada  $\omega$  raste. Ako je struja istosmjerna ( $\omega=0$ ) funkcija mreže je  $H(0)=R$ , a za vrlo visoke frekvencije  $|H(j\omega)| \approx 1/\omega C$ . Za fazu imamo iz /7.6.4/ iznos  $\angle H(0)=0$  kod istosmjerne struje; za  $\omega>0$  faza monotono pada, a kada  $\omega \rightarrow \infty$  dobiva se da  $\angle H(j\omega) \rightarrow -90^\circ$ . Frekvencijski odziv za ovaj krug, kao i prikaz funkcije mreže u s-ravnini, nacrtani su na sl. 7.6.1.



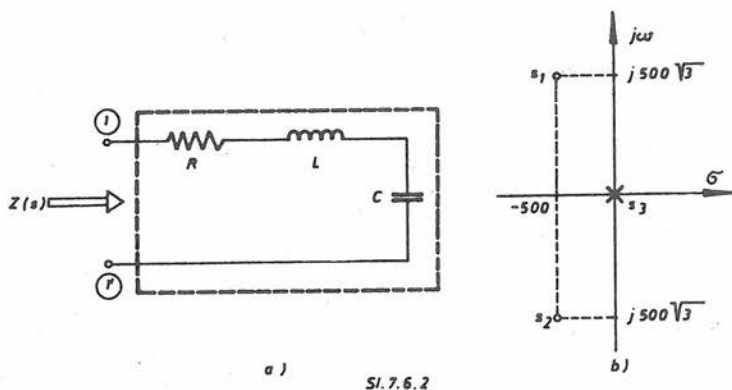
Sl. 7.6.1

Pokušajmo analizirati frekvencijski odziv sa stanovišta položaja pola u s-ravnini, za različite vrijednosti produkta  $RC$ . Pretpostavimo da je mjerilo na sl. 7.6.1. prilagođeno upravo veličini  $RC=1$ . Ako je pak  $RC$  dva puta manji, tj.  $RC=0,5$ , pol se u s-ravnini udaljuje od  $j\omega$ -osi na dvostruki razmak, a frekvencija kod koje pada apsolutna vrijednost za  $\sqrt{2}$  (ili za 3 db) je dva puta veća. To znači da krivulja apsolutnih vrijednosti blaže i polaganije opada. Slično bi se moglo zaključivati i o krivulji faze. Prema tome što je pol bliže  $j\omega$ -osi, to je krivulja apsolutnih vrijednosti funkcije mreža "uža".

### 7.6.1. Dobivanje frekvencijskog odziva iz dijagrama polova i nula

Provedeni primjer ukazao je na vezu koja postoji između prikaza funkcije mreže u s-ravnini i frekvencijskog odziva. To nam daje pravo naslućivanja, da se na temelju poznavanja lokacija polova i nula funkcije mreže u ravnini kompleksnih frekvencija, može i konkretnije zaključivati o oblicima krivulja apsolutnih vrijednosti i faze, odnosno općenito o ponašanju mreže.

Razmotrimo to na primjeru serijskog RLC kruga prema sl. 7.6.2.a).



Sl. 7.6.2

Ulazna impedancija ovog kruga jednaka je

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs} = L \frac{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s} \quad /7.6.5/$$

Ova funkcija mreže ima pol u  $s_3=0$ , i dvije nule koje su korijeni jednadžbe

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad /7.6.6/$$

Radi jednostavnosti zadajmo još numeričke vrijednosti parametara:  $R = 100\Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$  i  $C = 10 \mu\text{F}$ . U tom slučaju nule funkcije  $Z(s)$  imaju vrijednosti:

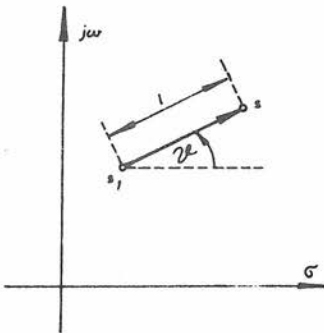
$$\begin{aligned}s_1 &= -500 + j500\sqrt{3} \\ s_2 &= -500 - j500\sqrt{3}\end{aligned}$$

/7.6.7/

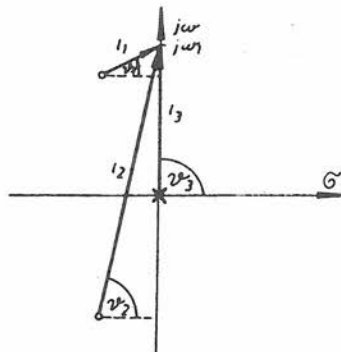
Položaj polova i nula u s-ravnini za ovu funkciju mreže prikazuje sl. 7.6.2.b). Funkciju impedancije možemo napisati u faktoriziranoj formi

$$Z(s) = 0,1 \frac{(s-s_1)(s-s_2)}{s} = 0,1 \frac{(s+500-j500\sqrt{3})(s+500+j500\sqrt{3})}{s} \quad /7.6.8/$$

Ako želimo izračunati  $Z(s)$  za neku vrijednost od  $s$ , treba samo uvrstiti tu vrijednost u /7.6.8/. Nas međjutim, prvenstveno zanima frekvencijski odziv, pa treba uvrstiti  $s=j\omega$ . Grafičko računanje u tom slučaju, daje se vizuelno lako predočiti. Prvo treba upozoriti da kompleksni broj  $s$  minus kompleksni broj  $s_1$ , jednak je opet kompleksnom broju  $s-s_1$ . Apsolutna vrijednost i kut kompleksnog broja  $s-s_1$  prikazuje u s-ravnini sl.7.6.3.



Sl. 7.6.3



Sl. 7.6.4

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja  $s-s_1$  je prema tome razmak izmedju točaka  $s$  i  $s_1$ , a fazni kut  $\theta$  se mjeri izmedju pozitivnog dijela realne osi i spojnice točaka  $s$  i  $s_1$ . Primjetimo li tu ideju na izračunavanje funkcije impedancije  $Z(j\omega_1)$  kod neke frekvencije  $\omega_1$ , dobivamo prema sl. 7.6.4.

$$Z(j\omega_1) = 0,1 \frac{(j\omega_1 - s_1)(j\omega_1 - s_2)}{j\omega_1} = 0,1 \frac{l_1 / \theta_1 \cdot l_2 / \theta_2}{l_3 / \theta_3} =$$

$$= 0,1 \frac{l_1 l_2}{l_3} \frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3}{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \quad /7.6.9/$$

Da bi izračunali impedanciju  $Z(j\omega)$  za čitav niz vrijednosti od  $\omega$ , procedura prema sl. 7.6.4. ponavlja se za svaku vrijednost od  $\omega$ . Međutim, približna slika o određenim svojstvima frekvencijskog odziva može se dobiti jednostavnim promatranjem dijagrama polova i nula. U našem primjeru zapažamo, da krivulja apsolutnih vrijednosti impedancije u ovisnosti o frekvenciji ima vrlo velike vrijednosti za male  $\omega$ , jer je duljina( $l_3$ ) fazora koji ide od pola u ishodištu veoma mala. Slično, za veoma velike  $\omega$ , postaju  $l_1$ ,  $l_2$  i  $l_3$  veoma veliki. Budući su oni tada otprilike istog reda veličine, apsolutna vrijednost impedancije je približno jednaka  $|Z(j\omega)| \approx 0,1 \times 1$ . Istim načinom razmišljanja zaključujemo, da negdje u blizini vlastite prigušene frekvencije  $\omega_d$  (imaginarni dio od  $s_1$ ), tj. kada je  $j\omega$  u susjedstvu najveće nule,  $l_1$  postaje veoma kratak što rezultira najmanjim  $|Z(j\omega)|$ . Kada bi na temelju ovoga postupka crtali graf ovisnosti apsolutnih vrijednosti impedancije o frekvenciji, dobili bi poznatu konkavnu krivulju, što smo mogli i očekivati s obzirom da se radi o serijskom rezonantnom krugu.

Opisana tehnika može se primijeniti na svaku funkciju mreže

$$H(s) = K \frac{(s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad /7.6.10/$$

Da bi izračunali  $H(s)$  za neki  $s=j\omega_1$ , treba najprije prikazati polove i nule u  $s$ -ravnini, zatim ucrtati fazore od svake nule i svakog pola do točke  $s=j\omega_1$ . Apsolutna je vrijednost od  $H(j\omega_1)$  s  $K$  pomnoženi produkt dužina fazora od nula do  $j\omega_1$ , podijeljeno s produktom dužina fazora od polova do  $j\omega_1$ .

Ukoliko su nule ili polovi višestruki, tj. dva ili više ih se nalazi u istoj točki s-ravnine, treba to uzeti u obzir kod računanja ovim postupkom. Ako npr. postoji dvostruka nula u točki  $s_1$ , mi tada zamišljamo da imamo dva fazora povučena od  $s_1$  do  $j\omega_1$ . Zato treba kvadrirati duljinu 1 fazora, a udvostručiti kut  $\theta$ .

S malo prakse, gore opisana grafička tehnika omogućava brzo skiciranje frekvencijskog odziva. Tako možemo zaključiti s nekim općim konstatacijama, koje povezuju lokacije polova i nula s apsolutnom vrijednosti i fazom promatrane funkcije mreže:

(1) u susjedstvu pola koji je u blizini  $j\omega$ -osi, može se očekivati lokalni maksimum apsolutne vrijednosti i nagla promjena faze;

(2) u susjedstvu nule koja je u blizini  $j\omega$ -osi, može se očekivati lokalni minimum apsolutne vrijednosti nagla promjena faze.

To nam daje korisnu ideju za konstruiranje mreža odredjenih karakteristika (sintezu), tj. da "usadjujemo" polove tamo gdje želimo da apsolutna vrijednost bude velika, odnosno nule tamo gdje apsolutna vrijednost treba biti mala. Zapazimo takodjer: što je pol bliže  $j\omega$ -osi, to je oštriji vrh krivulje apsolutnih vrijednosti; kažemo da je mreža selektivnija, jer jako ističe frekvencije koje su u blizini vlastite.

## 7.7. SVOJSTVO SIMETRIČNOSTI FUNKCIJA MREŽA

Već smo ustanovili, da dobivamo funkciju mreže kod frekvencije  $\omega$ , ako u izraz  $H(s)$  kao racionalne funkcije stavimo  $s=j\omega$ . Tako imamo

$$H(j\omega) = \frac{a_0(j\omega)^m + a_1(j\omega)^{m-1} + \dots + a_{m-1}(j\omega) + a_m}{b_0(j\omega)^n + b_1(j\omega)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(j\omega) + b_n} \quad /7.7.1/$$

Budući su svi koeficijenti ovih polinoma realni, to ćemo članove sabrati na slijedeći način

$$H(j\omega) = \frac{(a_m - a_{m-2}\omega^2 + a_{m-4}\omega^4 + \dots) + j\omega(a_{m-1} - a_{m-3}\omega^2 + \dots)}{(b_n - b_{n-2}\omega^2 + b_{n-4}\omega^4 + \dots) + j\omega(b_{n-1} - b_{n-3}\omega^2 + \dots)} \quad /7.7.2/$$

Sada je  $H(j\omega)$  u ovoj formi

$$H(j\omega) = \frac{(\text{polinom od } \omega^2) + j\omega(\text{polinom od } \omega^2)}{(\text{polinom od } \omega^2) + j\omega(\text{polinom od } \omega^2)} \quad /7.7.3/$$

Ako potražimo izraz koji bi ovome bio konjugirano kompleksan, dobili bi da je

$$H^*(j\omega) = \frac{(\text{polinom od } \omega^2) - j\omega(\text{polinom od } \omega^2)}{(\text{polinom od } \omega^2) - j\omega(\text{polinom od } \omega^2)} \quad /7.7.4/$$

Treba napomenuti, da bi točno isti rezultat dobili zamjenjujući varijablu  $\omega$  u /7.7.3/ s  $-\omega$ . Budući da je  $\omega^{2k} = (-\omega)^{2k}$ , polinomi od  $\omega^2$  ne mijenjaju svoju vrijednost zamjenom  $\omega$  sa  $-\omega$ . To znači, da za sve realne  $\omega$  vrijedi

$$H^*(j\omega) = H(-j\omega) \quad /7.7.5/$$

Ako se pozovemo na svojstvo konjugirano kompleksnih veličina, dobivamo iz izvedenih relacija ove jednakosti:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[H^*(j\omega)] &= \operatorname{Re}[H(j\omega)] & |H^*(j\omega)| &= |H(j\omega)| \\ \operatorname{Im}[H^*(j\omega)] &= -\operatorname{Im}[H(j\omega)] & \angle H^*(j\omega) &= -\angle H(j\omega) \end{aligned} \quad /7.7.6/$$

a iz ovoga

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \operatorname{Re}[H(-j\omega)] & |H(j\omega)| &= |H(-j\omega)| \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= -\operatorname{Im}[H(-j\omega)] & \angle H(j\omega) &= -\angle H(-j\omega) \end{aligned} \quad /7.7.7/$$

Došli smo do zaključka, da su realni dio funkcije mreže  $\operatorname{Re}[H(j\omega)]$  i apsolutna vrijednost  $|H(j\omega)|$  parne funkcije od  $\omega$ ; imaginarni dio  $\operatorname{Im}[H(j\omega)]$  i faza funkcije mreže  $\angle H(j\omega)$  su neparne funkcije od  $\omega$ .

Praktička je vrijednost ovoga, da za prikaz čitavog frekvencijskog odziva treba poznavati ponašanje  $\operatorname{Re}[H(j\omega)]$  i  $\operatorname{Im}[H(j\omega)]$ , ili  $|H(j\omega)|$  i  $\angle H(j\omega)$  za  $\omega \geq 0$ . Za negativni dio frekvencijske osi primjenjuje se gornji zaključak o simetričnosti.



## 8. TEOREMI MREŽA

U ovoj glavi izložit ćemo četiri veoma korisna teorema mreža. Upotreba tih teorema često pomaže da se dodje do jednostavnijih rješenja. Kod njihove primjene treba ipak biti oprezan, i voditi računa o ograničenjima koja svaki od tih teorema postavlja, s obzirom na karakter mreže.

Ova četiri teorema: *teorem supstitucije*, *teorem superpozicije*, *Thévenin-Nortonov teorem* i *teorem recipročnosti*, bit će prezentirana u ovom tekstu bez izvodjenja općenitih dokaza. Čitaoc će, međjutim, ipak biti u mogućnosti da uoči bitna svojstva i intuitivno prihvati njihovu valjanost. Obradjeni primjeri mogu biti osnovni putokaz za tehniku primjene ovih teorema.

### 8.1. TEOREM SUPSTITUCIJE

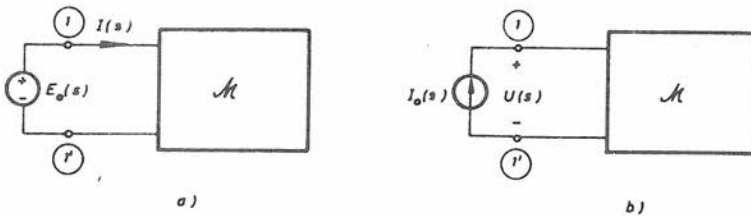
Ovaj se teorem može primjenjivati pod uvjetom da mreža ima jednoznačno rješenje. Uz zadovoljenje tog uvjeta on vrijedi u slučaju linearnih i nelinearnih, vremenski nepromjenjivih i vremenski promjenjivih mreža. Linearne mreže općenito, (osim degeneriranih slučajeva, kada model nema svoj fizikalni realitet), imaju jednoznačno rješenje. Mi smo već ustanovili, da mreže koje se sastoje od otpora, induktiviteta i kapaciteta koji su linearni, vremenski nepromjenjivi i pasivni imaju jednoznačna rješenja za sve varijable mreža. Ta su rješenja određena poticajem, početnim strujama u induktivitetima i početnim naponima na kapacitetima. Sve ovo vrijedi i u slučaju postojanja vezanih induktiviteta u mreži, ako im je matrica induktivnosti pozitivno definitna.

Teorem supstitucije ukazuje na mogućnost zamjene svake grane električke mreže s odgovarajuće odabranim izvorom, a da to ne prouzroči promjenu neke struje u grani ili nekog napona grane. Takva nam zamjena može katkada olakšati rješenje, ako nadomjesna mreža ispadne jednostavnija. Teorem supstitucije postaviti ćemo riječima na slijedeći način.

*Razmotrimo neku granu  $k$  bilo kakve mreže koja zadovoljava gore postavljene uvjet. Ova grana ne smije biti grana vezanih induktiviteta,*

niti grana zavisnog izvora. Neka su nadalje  $i_k(\cdot)$  i  $u_k(\cdot)$  valni oblici struje i napona grane  $k$ . Pretpostavimo sad da tu granu  $k$  zamijenimo, bilo s nezavisnim izvorom struje kojega je valni oblik  $i_k(\cdot)$ , bilo s nezavisnim izvorom napona koji ima valni oblik  $u_k(\cdot)$ . Ako tako modificirana mreža ima opet jednoznačno rješenje za sve svoje napone grana i struje grana, onda su ti naponi grana i te struje grana identični s onima u originalnoj mreži.

Uzmimo npr. linearni vremenski nepromjenjivi dvopol, koji u sebi nema nezavisnih izvora i kojemu je početno stanje nula. Neka je na prilaz tog dvopola u  $t=0$  priključen naponski izvor proizvoljnog valnog oblika  $e_o(\cdot)$  uslijed čega dvopol reagira strujom  $i(\cdot)$  na istom prilazu (Sl.8.1.1.a)).



Sl.8.1.1

Funkcija mreže za taj primjer je ulazna admitancija

$$Y(s) = \frac{I(s)}{E_o(s)} \quad /8.1.1/$$

Ako na isti dvopol priključimo nakon toga strujni izvor valnog oblika  $i_o(\cdot)$ , na njegovom će prilazu biti napon  $u(\cdot)$  kao odziv (sl.8.1.1.b)). Sada je funkcija mreže ulazna impedancija

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I_o(s)} \quad /8.1.2/$$

U izlaganju o funkcijama mreža saznali smo, da je ulazna impedancija recipročna ulaznoj admitanciji, tj.

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} \quad /8.1.3/$$

Ova se recipročnost obično dokazuje dugotrajnom analizom preko jednadžbi čvorova, odnosno jednadžbi petlja. Primjenjujući, međutim, teorem supstitucije dokaz za /8.1.3/ postaje jednostavan.

Smatrajmo da je naponski izvor  $E_0$  na sl.8.1.1.a) u onoj specifičnoj grani  $k$ , o kojoj govori teorem. Prema tom teoremu treba element u toj grani zamijeniti sa strujnim izvorom  $I_0(s) = I(s)$ , gdje je  $I(s)$  Laplaceov transformat struje  $i(t)$  koja ulazi u dvopol prema sl.8.1.1.a). Ovom zamjenom originalna mreža prelazi u nadomjesnu prema sl. 8.1.1.b). Teorem supstitucije kaže, da napon na priključnicama (1)-(1') u sl.8.1.1.b) mora biti isti kao napon na istim priključnicama u sl.8.1.1.a). To znači da je  $U(s) = E_0(s)$ . Uvrštavajući sve to u /8.1.1/ i /8.1.2/ dobivamo  $Z(s) = 1/Y(s)$ , što smo i željeli dokazati.

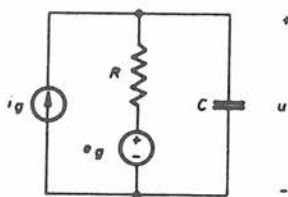
## 8.2. TEOREM SUPERPOZICIJE

Teorem superpozicije je u osnovi većine tehničkih sistema, a da često puta nismo niti svjesni da ga primjenjujemo. On se zasniva na svojstvu aditivnosti i homogenosti linearnih mreža.

Razmotrimo linearnu mrežu  $M$ , koja može biti i vremenski promjenljiva. Neka ta mreža ima jednoznačan prisilni odziv na poticaj od svakog nezavisnog izvora bilo kakovog valnog oblika. Taj odziv može biti struja u nekoj odredjenoj grani ili napon na odredenom paru čvorišta mreže  $M$ , a može biti i svaka linearna kombinacija tih struja i napona. Pod tim uvjetima, prisilni odziv mreže  $M$  koji je posljedica istovremenog djelovanja svih nezavisnih izvora, jednak je sumi prisilnih odziva koje bi prouzrokovao svaki nezavisni izvor sam za sebe, ako bi djelovao u mreži za to vrijeme. (Drugim riječima, zaredom izjednačujemo s nulom

sve nezavisne izvore osim jednoga).

Ovaj ćemo teorem ilustrirati na primjeru linearne mreže prema sl. 8.2.1. Pretpostavimo da je mreža prije primjene poticaja bila u stanju nula, tj.  $u_C(0^-) = 0$ . (Iako teorem superpozicije to ne zahtijeva, ako sve početne uvjete predstavimo nadomjesnim izvorima). Napon na kapacitetu smatrat ćemo odzivom ove mreže. Valni oblici nezavisnih izvora zadani su s  $i_g(t) = IS(t)$  i  $e_g(t) = E\delta(t)$ , a  $I$  i  $E$  su konstantni.



Sl. 8.2.1

Neka je  $u_i(\cdot)$  prisilni odziv uzrokovan djelovanjem samog strujnog izvora u mreži, tj. kada je  $e_g=0$ , što znači da je naponski izvor zamijenjen kratkospojnom granom. U tom je slučaju prisilni odziv za  $t \geq 0$

$$u_i(u) = IR(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \quad /8.2.1/$$

Neka je  $u_e(\cdot)$  prisilni odziv uzrokovan djelovanjem samog naponskog izvora u mreži, tj. kada je  $i_g=0$ , što znači da je strujni izvor zamijenjen prekinutom granom. U tom je slučaju prisilni odziv za  $t \geq 0$

$$u_e(t) = \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad /8.2.2/$$

Diferencijalna jednadžba ove mreže ako su u djelovanju oba izvora glasi

$$i_g = \frac{u - e_g}{R} + C \frac{du}{dt} \quad /8.2.3/$$

ili

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = i_g + \frac{e_g}{R} = IS(t) + \frac{E}{R} \delta(t) \quad /8.2.4/$$

Prisilni je odziv u ovom slučaju prisustva i naponskog i strujnog izvora u mreži jednak za svaki  $t \geq 0$

$$u(t) = IR + \left( \frac{E}{RC} - IR \right) e^{-\frac{1}{RC} t} \quad /8.2.5/$$

Iz /8.2.1/, /8.2.2/ i /8.2.5/ slijedi da je

$$u(t) = u_i(t) + u_e(t) \quad /8.2.6/$$

kao što zahtijeva teorem superpozicije.

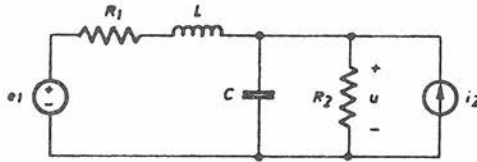
Upotrebom funkcije mreža može se teorem superpozicije izraziti i na drugi način.

Ako je  $X(s)$  Laplaceov transformat prisilnog odziva uzrokovanog istovremenim djelovanjem svih nezavisnih izvora u mreži, vrijedi

$$X(s) = \sum_{k=1}^m H_k(s) I_k(s) \quad /8.2.7/$$

gdje je  $I_k(s)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , Laplaceov transformat od  $m$  poticaja, a  $H_k(s)$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , odgovarajuće funkcije mreže od  $m$  poticaja na određeni odziv.

Za primjer ovakovog gledanja na teorem superpozicije poslužiti će mreža prema sl.8.2.2. Poticaji su dva nezavisna izvora  $e_1$  i  $e_2$ , a prisilni odziv neka bude napon  $u$  na otporu  $R_2$  ako oba izvora djeluju u mreži istovremeno.



Sl. 8.2.2

Prema izrazu /8.2.7/ za teorem superpozicije u ovom primjeru imamo

$$U(s) = H_1(s) E_1(s) + H_2(s) I_2(s) \quad /8.2.8/$$

Za dobivanje funkcije mreže  $H_1(s)$  strujni izvor  $i_2$  mora biti izjednačen s nulom

$$H_1(s) = \left. \frac{U(s)}{E_1(s)} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{1 + (R_1 + sL)(G_2 + sC)} \quad /8.2.9/$$

Za dobivanje funkcije mreže  $H_2(s)$  naponski izvor  $e_1$  mora biti izjednačen s nulom

$$H_2(s) = \left. \frac{U(s)}{I_2(s)} \right|_{E_1=0} = \frac{R_1 + sL}{1 + (R_1 + sL)(G_2 + sC)} \quad /8.2.10/$$

Uvrštavanjem /8.2.9/ i /8.2.10/ u /8.2.8/ dobiva se prisilni odziv

$$U(s) = \frac{E_1(s) + (R_1 + sL) I_2(s)}{1 + (R_1 + sL)(G_2 + sC)} \quad /8.2.11/$$

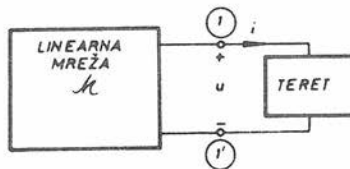
Čitalac može lako provjeriti da se isti rezultat dobiva i iz jednadžbe KZS za ovu mrežu

$$-\frac{E_1(s) - U(s)}{R + sL} + (G_2 + sC)U(s) - I_2(s) = 0 \quad /8.2.12/$$

### 8.3. THÉVENIN-NORTONOV TEOREM

Thévenin-Nortonov teorem daje nam u ruke veoma korisnu "šablonu" za pojednostavnjenje analize električkih mreža putem konstrukcije ekvivalentne mreže. Primjenjuje se na veoma raznolike tipove mreža, a sve se po tom teoremu prikazuje ekvivalentnom mrežom istog oblika.

Uvjeti koji se postavljaju na karakter mreže, da bi se mogao primjenjivati Thévenin-Nortonov teorem mogu se opisati na slijedeći način. Na linearnu (vremenski nepromjenjivu ili vremenski promjenjivu) mrežu  $M$  priključen je preko priključnica ① i ①' bilo kakav "teret" u obliku dvopola koji može u sebi sadržavati posve proizvoljnu mrežu (sl.8.3.1). Kod razdvajanja mreže  $M$  od tereta, jedino se moramo držati ograničenja, da ne smije biti veznih elemenata (transformatori, zavisni izvori) koji bi imali jedan od svojih prilaza u mreži  $M$ , a drugi u teretu. Drugim riječima, međusobno električko djelovanje između  $M$  i tereta, može se provoditi jedino preko zajedničkih struje i napona na priključnicama ① i ①'.



Sl. 8.3.1

Treba naglasiti, da inače teret može biti linearan ili nelinearan, vremenski nepromjenjiv, ili vremenski promjenjiv. Mreža  $M$ , međutim, mora biti linearna, a može sadržavati i nezavisne i linearne zavisne izvore. Nadalje pretpostavljamo, da  $M$  ima jednoznačno rješenje, kada je zaključena s teretom ili kada je taj teret zamijenjen s jednim nezavisnim izvorom.

Uz ove uvjete Thévenin-Nortonov teorem tvrdi, da se zamjenom mreže  $M$  lijevo od priključnica  $\textcircled{1}$  i  $\textcircled{1'}$  s Théveninovom ekvivalentnom mrežom ili s Nortonovom ekvivalentnom mrežom, ne mijenjaju ni valni oblik struje  $i(\cdot)$  niti valni oblik napona  $u(\cdot)$ , bez obzira na teret.

Théveninova ekvivalentna mreža, sastoji se od dvopola  $M_0$  u serijskom spoju s naponskim izvorom  $e_p$ . Valni oblik  $e_p(\cdot)$  naponskog izvora je napon na otvorenim priključnicama  $\textcircled{1}$  i  $\textcircled{1'}$ , tj. kada je teret odspojen, odnosno zamijenjen prekinutom granom.

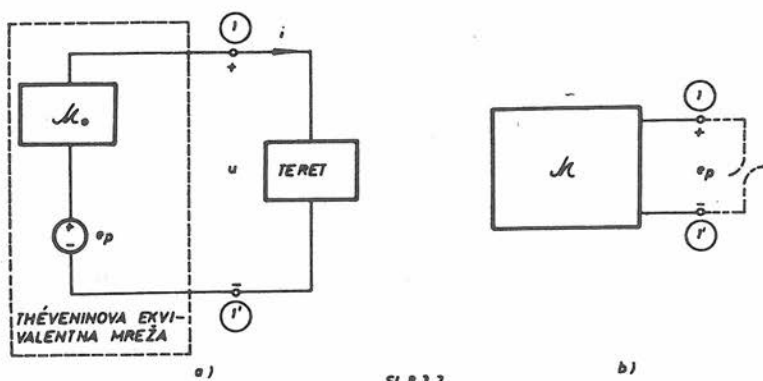
Prema tome napon  $e_p$  nastaje uslijed svih nezavisnih izvora i početnog stanja u  $M$ . Dvopol  $M_0$  u nadomjesnoj mreži dobiva se iz originalne mreže  $M$ , postavljajući sve nezavisne izvore jednakim nuli (tj. zamjenjujući svaki nezavisni naponski izvor s kratkospojnom granom, a svaki nezavisni strujni izvor s prekinutom granom), i izjednačujući s nulom sve početne uvjete. U tom nadomještavanju svi zavisni izvori ostaju neizmjenjeni.

Sl.8.3.2.a) prikazuje Théveninovu ekvivalentnu mrežu, a slika 8.3.2.b) mrežu koja definira naponski izvor  $e_p$  Théveninove ekvivalentne mreže. Indeks "p" naglašava da se radi o naponu prekinute grane.

Nortonova ekvivalentna mreža, sastoji se od dvopola  $M_0$  u paralelnom spoju sa strujnim izvorom  $i_k$ . Valni oblik  $i_k(\cdot)$  strujnog izvora je struja preko kratkospojenih priključnica  $\textcircled{1}$  i  $\textcircled{1'}$  mreže  $M$ , tj. kada je teret zamijenjen kratkospojnom granom. Prema tome struja  $i_k$  nastaje uslijed svih nezavisnih izvora i početnog stanja u  $M$ .

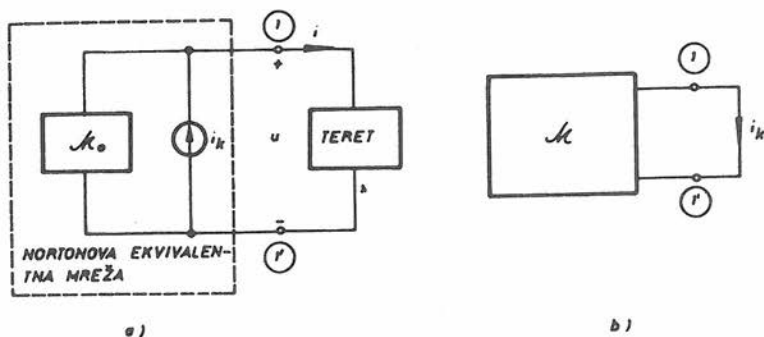
Sl.8.3.3.a) prikazuje Nortonovu ekvivalentnu mrežu, a sl. 8.3.3.b) mrežu koja definira strujni izvor  $i_k$  Nortonove





Sl. 8.3.2

ekvivalentne mreže. Indeks "k" naglašava da se radi o struji kratkospojne grane.



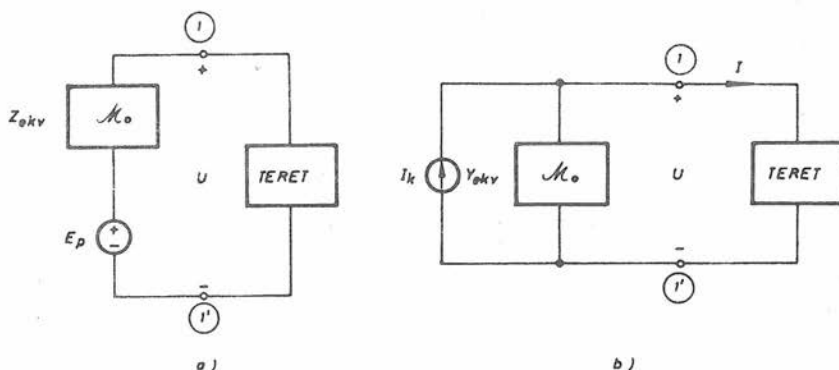
Sl. 8.3.3

Thévenin-Nortonov teorem, ne samo da nas šteti od suvišnih koraka u nekim izračunavanjima odziva mreže, nego nam sugerira i vrlo koristan sistem promatranja mreža. On naime tvrdi, da se svaka linearna mreža  $M$  sa stajališta para priključnica ① - ①', ponaša kao da je sastavljena od naponskog izvora  $e_p$  u seriji s "praznom" ("mrtvom", "opuštenom", bez energije) mrežom  $M_0$ , ili ekvivalentno, od strujnog izvora  $i_k$  u paraleli s "praznom" mrežom  $M_0$ . Budući je ta prazna mreža  $M_0$  dobivena reduciranjem  $M$  tako, da su svi nezavisni izvori i početni uvjeti postavljeni jednakim nuli, to se  $M_0$  može smatrati u stanju nula i s poticajem nula.

Ako je linearna mreža  $M$  ujedno i vremenski nepromjenjiva, mnogo je prikladnije kod primjene Thévenin-Nortonovog teorema, poslužiti se koncepcijom funkcija mreža.

Neka je  $Z_{ekv}(s) = 1/Y_{ekv}(s)$  ulazna impedancija na priključnicama 1 - 1' mreže  $M_0$  dobivene iz linearne vremenski nepromjenjive mreže  $M$  izjednačavanjem svih nezavisnih izvora i početnih uvjeta s nulom.

Uz ista opća ograničenja, koja smo u početku naveli, napon  $U(s)$  i struja  $I(s)$  na priključnicama ① - ①' ostat će nepromjenjeni uz bilo kakav teret, ako mrežu  $M$  zamjenimo ili s Théveninovom ekvivalentnom mrežom ili s Nortonovom ekvivalentnom mrežom, kako to prikazuje sl.8.3.4.a) i b).



Sl. 8.3.4

Kod toga vrijedi da je

$$E_p(s) = Z_{ekv}(s)I_k(s) \quad /8.3.1/$$

odnosno

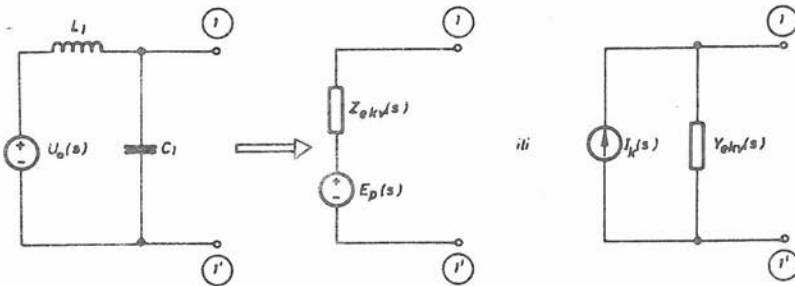
$$I_k(s) = Y_{ekv}(s)E_p(s) \quad /8.3.2/$$

Ovi se izrazi lako dokazuju na osnovi definicije za  $E_p$  i  $I_k$ . Ako npr. zamijenimo teret u sl.8.3.4.a) s kratkospojnom granom, struja  $I$  postaje struja  $I_k$  kratkospojene Théveninove ekvivalentne mreže i /8.3.1/ slijedi iz primjene KZN. Analogno, ako zamijenimo teret u sl.8.3.4.b) s prekinutom granom,

napon  $U$  postaje napon  $E_p$  otvorene Nortonove ekvivalentne mreže i iz KZS slijedi /8.3.2/.

Ovakav pristup je naročito koristan kod računanja Théveninove ili Nortonove ekvivalentne mreže u krugovima koji imaju zavisne izvore.

Pretpostavimo npr. da treba odrediti Théveninovu i Nortonovu ekvivalentnu mrežu za spoj naponskog izvora, induktivteta i kapaciteta prema sl.8.3.5, koji je u stanju nula u  $t=0$ .



Sl. 8.3.5

Za svrhu dobivanja  $E_p$  promatramo zadanu mrežu s otvorenim priključnicama ① - ①'. U tom je slučaju struja  $I_O$  koja teče u konturi  $U_O-L_1-C_1$

$$I_O(s) = \frac{U_O(s)}{sL_1 + \frac{1}{sC_1}} \quad /8.3.3/$$

a napon  $U_1$  na priključnicama 1 - 1'

$$U_1(s) = I_O(s) \frac{1}{sC_1} = \frac{\frac{1}{sC_1} U_O(s)}{sL_1 + \frac{1}{sC_1}} \quad /8.3.4/$$

Budući da je po definiciji Théveninove ekvivalentne mreže  $U_1 = E_p$  imamo

$$E_p(s) = \frac{1}{1 + s^2 L_1 C_1} U_O(s) \quad /8.3.5/$$

Za svrhu dobivanja  $I_k$  promatramo zadanu mrežu s kratko-spojenim priključnicama  $\textcircled{1}$  -  $\textcircled{1'}$ . U tom slučaju ne teče struja kroz  $C_1$ , jer je premošten kratkospojnom granom, pa je

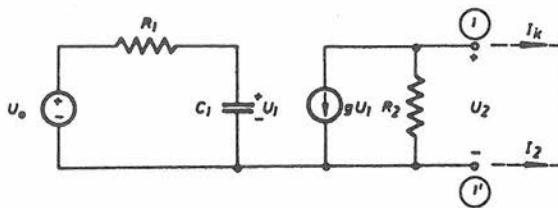
$$I_k(s) = \frac{1}{sL_1} U_O(s) \quad /8.3.6/$$

Iz ovih podataka primjenom /8.3.1/ odnosno /8.3.2/ slijede ekvivalentna ulazna impedandja  $Z_{ekv}$  u Théveninovoj, i ekvivalentna ulazna admitancija  $Y_{ekv}$  u Nortonovoj ekvivalentnoj mreži

$$Z_{ekv}(s) = \frac{E_p(s)}{I_k(s)} = \frac{sL_1}{1+s^2L_1C_1} \quad /8.3.7/$$

$$Y_{ekv}(s) = \frac{1}{Z_{ekv}(s)} = \frac{1+s^2L_1C_1}{sL_1} \quad /8.3.8/$$

Razmotrimo drugi primjer s istim zadatkom kao gore, ali za mrežu prema sl.8.3.6.



Sl. 8.3.6

Primjenom KZN na petlju  $U_O$ - $R_1$ - $C_1$  dobivamo napon  $U_1$

$$U_1(s) = \frac{U_O(s)}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{1}{sC_1} = \frac{1}{1+sR_1C_1} U_O(s) \quad /8.3.9/$$

Napon  $U_2(s)$  na otvorenim priključnicama ①-①' uz referentna usmjerenja prena slici, jednak je

$$U_2(s) = -gU_1(s) R_2 \quad /8.3.10/$$

Budući da je  $U_2 = E_p$  imamo za napon izvora Théveninove ekvivalentne mreže

$$E_p(s) = -\frac{gR_2}{1+sR_1C_1} U_o(s) \quad /8.3.11/$$

Ako su priključnice ①-①' kratko spojene, ne teče struja kroz  $R_2$  pa je struja kroz kratkospojnu granu

$$I_2(s) = gU_1(s) = \frac{gU_o(s)}{1+sR_1C_1} \quad /8.3.12/$$

a struja izvora Nortonove ekvivalentne mreže

$$I_k(s) = -I_2(s) = -\frac{g}{1+sR_1C_1} U_o(s) \quad /8.3.13/$$

Ako primjenimo izraz  $Z_{ekv} = E_p/I_k$  dobivamo impedanciju Théveninove ekvivalentne mreže

$$Z_{ekv}(s) = R_2 \quad /8.3.14/$$

i admitanciju Nortonove ekvivalentne mreže

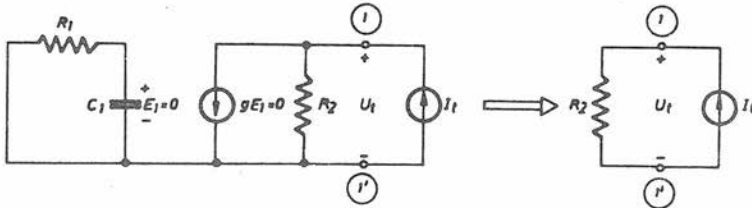
$$Y_{ekv}(s) = \frac{1}{R_2} = G_2 \quad /8.3.15/$$

Ekvivalentna se impedancija može odrediti i na drugi način, koji se katkada pokazuje kraćim.

Treba najprije odrediti praznu mrežu  $M_o$  tako, da sve nezavisne izvore i početne uvjete izjednačimo s nulom; zatim stavljamo zamišljeni "ispitni" izvor struje  $I_t(s)$  na priključnice te mreže i izračunavamo odziv u obliku napona  $U_t(s)$  na

tim priključnicama. Ekvivalentna impedancija dobiva se tada iz izraza  $U_t(s) = Z_{ekv}(s)I_t(s)$ .

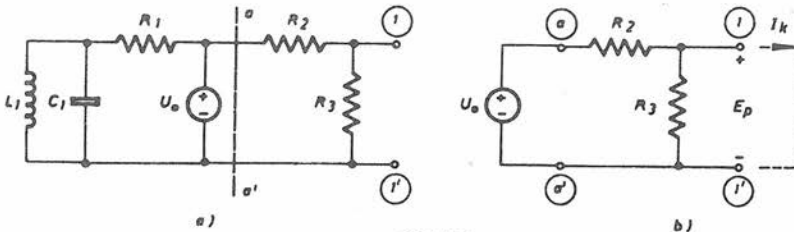
Provedemo li to za ovaj prosljednji primjer, imamo ispraznjenu mrežu prema sl.8.3.7.



Sl. 8.3.7

Budući da je  $U_t = R_2 I_t$  slijedi  $Z_{ekv} = R_2$ , rezultat koji smo već dobili u /8.3.14/.

Ako je npr. zadana mreža prema sl.8.3.8.a), preglednije je odrediti najprije Théveninovu ekvivalentnu mrežu za dio lijevo od presjeka a - a', a zatim toj ekvivalentnoj dodati ostatak mreže na desno od presjeka. Tako dobivamo mrežu prema sl.8.3.8.b).



Sl. 8.3.8

Oдавде одмах сlijеде еlеmеntи Théveninove оdnosно Nortоnove еkvivalentne mreže

$$E_p(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_0(s); \quad I_k(s) = \frac{1}{R_2} U_0(s); \quad Z_{ekv}(s) = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad /8.3.16/$$

#### 8.4. TEOREM RECIPROČNOSTI

S pojmom recipročnosti vrlo se često susrećemo u tehnici, a posebno u elektrotehnici. Recipročnost ima zato veliku važnost ne samo u analizi i sintezi električkih mreža, nego isto tako i u mjernoj tehnici.

Grubo rečeno, kada je recipročnost svojstvo nekog linearnog sistema, ulaz i izlaz mogu mu se međusobno zamijeniti, a da se time nije promijenio odziv sistema na zadani valni oblik poticaja.

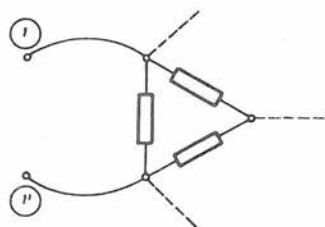
U teoriji mreža, svojstvo recipročnosti ima jedna podgrupa linearnih vremenski invarijabilnih mreža. Te mreže mogu sadržavati linearne otpore, induktivitete, kapacitete, vezane induktivitete i idealne transformatore, dok giratori, zavisni i nezavisni izvori, ne mogu biti u sastavu recipročnih mreža. Mrežu koja odgovara ovim uvjetima obilježavat ćemo simbolom  $M_R$  (indeks R treba podsjećati na recipročnost).

Neka je  $M_R$  bilo kakva električka mreža koju sačinjavaju elementi sa liste dopuštenih. Teorem recipročnosti uvijek se izražava preko prisilnog odziva mreže  $M_R$  na poticaj, ili nezavisnog strujnog izvora, ili nezavisnog naponskog izvora.

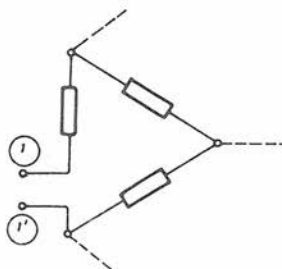
U pogledu mjesta gdje će taj nezavisni izvor biti priključen na mrežu, kao i načina na koji će se odziv registrirati, teorem recipročnosti ostavlja široku slobodu.

Tako možemo žice s priključnicama ① i ①', koje predstavljaju ulaz sistema i na njih se zato priključuje nezavisni izvor kao poticaj, "zalemiti" na bilo koja dva postojeća čvorišta mreže, ili "presjeći" jednu od grana i nezavisni izvor spojiti između dva slobodna kraja presječenog grane. Na ista ta dva načina mogu se spojiti u mreži  $M_R$  i priključnice ② i ②' izlaza sistema, između kojih dolazi mjerni instrument koji registrira odziv.

Prvi način spajanja - spajanje na čvorišta - može se slikovito nazvati "spoj limilicom"; drugi način - spajanje u granu - može se slikovito nazvati "spoj sječicama". Oba su ilustrirana na primjeru dijela mreže  $M_R$  na sl. 8.4.1.



SPAJANJE NA ČVORIŠTA



SPAJANJE U GRANU

SI 8.4.1

Prije nego postavimo teorem recipročnosti treba još napomenuti slijedeće. Razmatrati ćemo strujne i naponske valne oblike na jednom od prilaza mreži, koji nastaju uslijed dva različita skupa poticaja. To je razlog da pored indeksa uz slovo dotične varijable koji označava redni broj prilaza, moramo uvesti i simbol "kape"  $\wedge$  na slovo, koji će označavati da se radi o drugom skupu poticaja. Prema tome je npr.  $i_2$  struja na prilazu  $\textcircled{2}$ - $\textcircled{2'}$  za prvi skup poticaja, a  $\hat{i}_2$  struja na istom prilazu, za drugi skup poticaja.

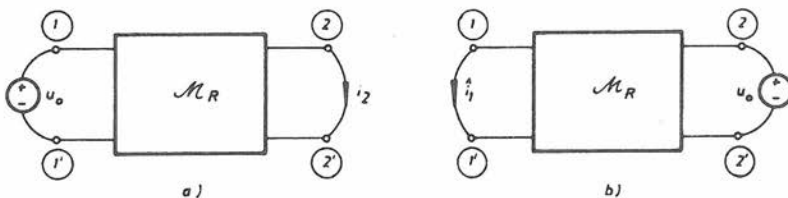
Prikazat ćemo teorem recipročnosti na osnovi tri postavke.<sup>†</sup>

Mreža  $M_R$  treba ispunjavati spomenute uvjete o sastavu elemenata, mora biti u stanju nula i ne smije biti degenerirana. Pretpostavljamo da mreža ima dva prilaza  $\textcircled{1}$ - $\textcircled{1'}$  i  $\textcircled{2}$ - $\textcircled{2'}$ , koji su dobiveni spajanjem priključnica na bilo koji od navedenih načina.

Postavka (1). Najprije priključimo naponski izvor  $u_0$  na prilaz  $\textcircled{1}$ - $\textcircled{1'}$  i promatrajmo prisilni odziv kao struju  $i_2(\cdot)$  na kratkospojenom prilazu  $\textcircled{2}$ - $\textcircled{2'}$  (sl.8.4.2.a)). Priključimo zatim isti naponski izvor  $u_0$  na prilaz  $\textcircled{2}$ - $\textcircled{2'}$  i promatrajmo prisilni odziv kao struju  $\hat{i}_1(\cdot)$  na kratkospojenom prilazu  $\textcircled{1}$ - $\textcircled{1'}$  (sl.8.4.2.b)).

<sup>†</sup> U ovom poglavlju, kurzivom pisane simbole ne treba nužno smatrati matricama ili vektorima. Taj je način pisanja ovdje izabran samo da bi se istakli zaključci pojedinih postavki teorema recipročnosti.



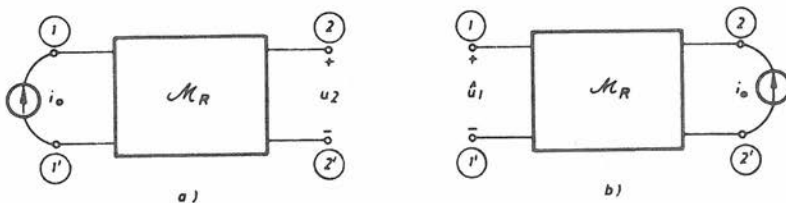


Sl. 8.4.2

Teorem recipročnosti tvrdi, da će uz bilo kakovu topologiju i vrijednosti elemenata mreže  $M_R$ , te uz bilo kakav valni oblik  $u_0(\cdot)$  izvora, biti za svaki  $t$

$$i_2(t) = \hat{i}_1(t)$$

Postavka(2). Priključimo najprije strujni izvor  $i_0$  na prilaz  $(1)-(1')$  i promatrajmo prisilni odziv kao napon  $u_2(\cdot)$  na otvorenom prilazu  $(2)-(2')$  (sl.8.4.3.a)). Priključimo zatim isti strujni izvor  $i_0$  na prilaz  $(2)-(2')$  i promatrajmo prisilni odziv kao napon  $\hat{u}_1(\cdot)$  na otvorenom prilazu  $(1)-(1')$  (sl.8.4.3.b)).

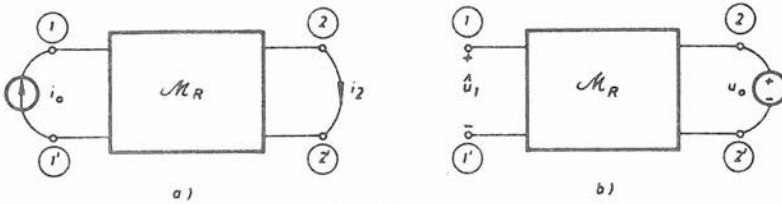


Sl. 8.4.3

Teorem recipročnosti tvrdi, da će uz bilo kakovu topologiju i vrijednosti elemenata mreže  $M_R$ , te uz bilo kakav valni oblik  $i_0(\cdot)$  izvora, biti za svaki  $t$

$$u_2(t) = \hat{u}_1(t)$$

Postavka (3). Priključimo najprije strujni izvor  $i_o$  na prilaz  $(1)-(1')$  i promatrajmo prisilni odziv kao struju  $i_2(\cdot)$  na kratkospojenom prilazu  $(2)-(2')$  (sl.8.4.4.a)). Priključimo zatim naponski izvor  $u_o$  na prilaz  $(2)-(2')$  i promatrajmo prisilni odziv kao napon  $\hat{u}_1(\cdot)$  na otvorenom prilazu  $(1)-(1')$  (sl.8.4.4.b)).



Sl.8.4.4

*Teorem recipročnosti* tvrdi, da će uz bilo kakovu topologiju i vrijednosti elemenata mreže  $M_R$ , te uz bilo kakve ali međusobno jednake valne oblike izvora (tj.  $i_o(\cdot) = u_o(\cdot)$ ), biti za svaki  $t$

$$i_2(t) = \hat{u}_1(t)$$

Budući da teorem recipročnosti isključivo razmatra prisilni odziv (ujedno i stacionarni odziv ako  $t \rightarrow \infty$ ) linearnih vremenski nepromjenjivih mreža, prikladno je prikazati ga preko funkcija mreža. Ekvivalentne postavke tog teorema izražene s pomoću funkcija mreža su sljedeće.

Postavka (1). Za prijenos od  $(1)-(1')$  na  $(2)-(2')$  prema sl.8.4.2.a) prijenosna je admitancija definirana kao

$$Y_{21}(s) \triangleq \frac{I_2(s)}{U_o(s)}$$

Za prijenos od  $(2)-(2')$  na  $(1)-(1')$  prema sl. 8.4.2.b) prijenosna je admitancija definirana kao

$$Y_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{I}_1(s)}{U_o(s)}$$

Teorem recipročnosti tvrdi da je za svaki s

$$Y_{21}(s) = Y_{12}(s)$$

Postavka (2). Za prijenos od (1)-(1') na (2)-(2') prema sl.8.4.3.a) prijenosna je impedancija definirana kao

$$Z_{21}(s) \triangleq \frac{U_2(s)}{I_0(s)}$$

Za prijenos od (2)-(2') na (1)-(1') prema sl.8.4.3.b) prijenosna je impedancija definirana kao

$$Z_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{U}_1(s)}{I_0(s)}$$

Teorem recipročnosti tvrdi da je za svaki s

$$Z_{21}(s) = Z_{12}(s)$$

Postavka (3). Za prijenos od (1)-(1') na (2)-(2') prema sl.8.4.4.a) prijenosni omjer struja definiran je kao

$$\alpha_{21}(s) \triangleq \frac{I_2(s)}{I_0(s)}$$

Za prijenos od (2)-(2') na (1)-(1') prema sl.8.4.4.b) prijenosni omjer napona definiran je kao

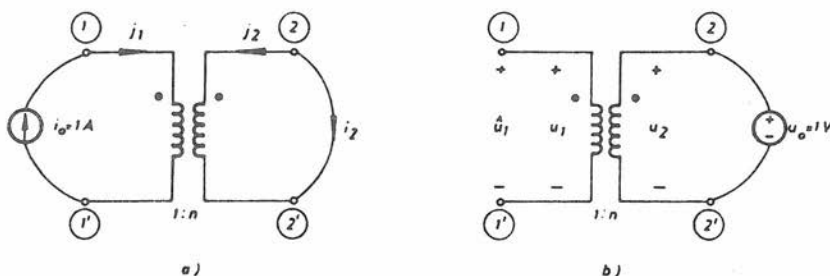
$$A_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{U}_1(s)}{U_0(s)}$$

Teorem recipročnosti tvrdi da je za svaki s

$$\alpha_{21}(s) = A_{12}(s)$$

Svaka mreža koja zadovoljava teorem recipročnosti naziva se *recipročna mreža*. Prihvaćajući taj pojam, teorem recipročnosti jamči, da svaka mreža sastavljena od linearnih vremenski nepromjenjivih otpora, induktiviteta, kapaciteta, vezanih induktiviteta i idealnih transformatora, (neki od njih mogu biti i aktivni) jeste recipročna mreža. Moglo bi se također pokazati, da neke linearne vremenski nepromjenjive mreže koje sadrže zavisne izvore jesu recipročne, dok druge nisu. Slično, mreže koje sadrže vremenski promjenjive elemente općenito nisu recipročne, ali neke posebne, mogu biti recipročne.

Kao primjere za provjeru recipročnosti uzmimo radi jednostavnosti dva elementa mreža: idealni transformator i girator. Idealni transformator, kako smo ga definirali u poglavlju 2.3.2. određuju jednačbe  $u_2 = nu_1$  za odnos napona, te  $j_2 = (-1/n)j_1$  za odnos struja na prilazima 1 - 1' i 2 - 2'. Recipročnost idealnog transformatora ispitat ćemo primjenom postavke (3) teorema recipročnosti električkih mreža (sl.8.4.5).



Sl. 8.4.5

Ako priključimo istosmjerni strujni izvor  $i_0 = 1 \text{ A}$  na prilaz (1) - (1') idealnog transformatora prema shemi na sl. 8.4.5.a) uz kratkospojeni prilaz (2) - (2') imamo

$$j_1 = i_0 = 1$$

$$j_2 = -i_2$$

/8.4.1/

Primijenimo li izraz za odnos struja na prilazima idealnog transformatora (pridržavajući se referencija koje zahti-

jeva teorem recipročnosti) dobivamo za struju kroz kratkospojnu granu na prilazu (2)-(2')

$$i_2 = -j_2 = -(-\frac{1}{n})j_1 = \frac{1}{n} i_0 = \frac{1}{n} \quad /8.4.2/$$

Ako priključimo istosmjerni naponski izvor  $u_0 = 1\{V\}$  na prilaz (2)-(2') idealnog transformatora prema shemi na sl. 8.4.5.b) uz otvoreni prilaz (1)-(1') imamo

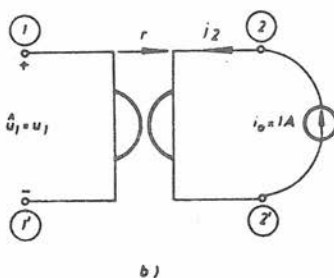
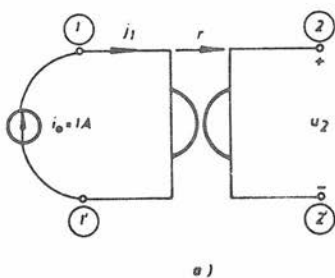
$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 = 1 \\ u_1 &= \hat{u}_1 \end{aligned} \quad /8.4.3/$$

Primijenimo li izraz za odnos napona na prilazima idealnog transformatora, dobivamo za napon između otvorenih priključnica (1) i (1')

$$\hat{u}_1 = u_1 = \frac{1}{n} u_2 = \frac{1}{n} u_0 = \frac{1}{n} \quad /8.4.4/$$

Budući smo dobili rezultat  $i_2 = \hat{u}_1 = 1/n$ , to znači da idealni transformator udovoljava postavci (3) teorema recipročnosti, pa je on prema tome i recipročan element mreže.

Girator, kako smo ga definirali u poglavlju 2.3.3 određuju jednačbe  $u_1 = rj_2$  i  $u_2 = -rj_1$ . Primjenom postavke (2) teorema recipročnosti (sl.8.4.6) ispitat ćemo recipročnost giratora posve analogno kao gore u primjeru za idealni transformator.



Za strujni izvor na prvom prilazu giratora imamo

$$u_2 = -rj_1 = -ri_0 = -r \quad /8.4.5/$$

a za strujni izvor na drugom prilazu

$$\hat{u}_1 = u_1 = rj_2 = ri_0 = r \quad /8.4.6/$$

Dobili smo da  $u_2 \neq \hat{u}_1$ , što je u protivnosti s postavkom (2) teorema recipročnosti. Prema tome girator nije recipročan element mreže.

VAŽNIJA LITERATURA

1. A.A. Andronov, A.A. Vitt, S.E. Hajkin: "Teorija Kaljebanii", Fizmatgiz, 1959.
2. B.P. Aseejev: "Kaljebateljni Cjepi", Svjasizdat, 1955.
3. N. Balabanian and T.A. Bickart: "Electrical Network Theory", John Wiley and Sons, 1969.
4. N. Balabanian and W. Le Page: "Electrical Science", Book 1 and 2, McGraw-Hill Book Co., 1973.
5. T. Bödefeld and H. Seuenz: "Electrische Maschinen", Springer Verlag, Wien
6. E. Brenner and M. Javid: "Analysis of Electric Circuits", McGraw-Hill Book Co., 1959.
7. Cauer: "Synthesis of Linear Communication Networks", McGraw-Hill Book Co., 1967.
8. W.L. Cassell: "Linear Electric Circuits", McGraw-Hill Book Co., 1970.
9. W.H. Chen: "The Analysis of Linear Systems", John Wiley and Sons, 1968.
10. P.M. Chirlian: "Basic Network Theory", McGraw-Hill Book Co., 1969.
11. L.O. Chua: "Introduction to Nonlinear Network Theory", McGraw-Hill Book Co., 1969.
12. W.J. Creamer: "Communication Networks and Lines", Harper and Brothers, 1951.
13. C.L. Cuccia: "Harmonics, Sidebands, and Transients in Communication Engineering", McGraw-Hill Book Co., 1952.
14. W.J. Cunningham: "Introduction to Nonlinear Analysis", McGraw-Hill Book Co., 1958.
15. T.W. Davis and R.W. Palmer: "Computer-Aided Analysis of Electrical Networks", McGraw-Hill Book Co., 1971.
16. C.A. Desoer and E.S. Kuh: "Basic Circuit Theory", McGraw Hill Book Company, 1969.
17. J.A. Edminister: "Theory and Problems of Electric Circuits", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1965.
18. W.L. Everitt and G.E. Anner: "Communication Engineering" McGraw-Hill Book Co., 1956.
19. R.B. Faber: "Linear Circuits", Discreate and Integrated, C.E. Mervill Publishing Co., 1974.
20. D.K. Frederick and A.B. Carlson: "Linear Systems in Communication and Control", John Wiley and Sons, 1971.
21. J.E. Gibson and F.B. Tuteur: "Control System Components", McGraw-Hill Book Co., 1958.
22. E.A. Guillemin: "Introductory Circuit Theory", John Wiley and Sons, 1953.

23. E.A.Guillemin: "Communication Networks" , I, II and III, John Wiley and Sons, 1953.
24. E.A.Guillemin: "The Mathematics of Circuit Analysis", John Wiley and Sons
25. W.W. Harman and D.W.Lytle: "Electrical and Mechanical Networks", McGraw-Hill Book Co., 1962.
26. W.H.Hayt Jr., and George W. Hughes: "Introduction to Electrical Engineering", McGraw-Hill Book Co., 1968.
27. R.Horvat: "Specijalna električna kola", Univerzitet u Beogradu, 1965.
28. R.Horvat: "Teorija električnih kola", Gradjevinska knjiga, Beograd, 1958.
29. L.P.Huelsman: "Basic Circuit Theory with Digital Computations", Prentice Hall, N.Y., 1972.
30. W.H.Kim and H.E.Meadows, Jr.: "Modern Network Analysis", John Wiley and Sons, 1971.
31. E.S.Kuh and D.O.Pederson: "Principles of Circuit Synthesis", McGraw-Hill Book Co., 1959.
32. F.F.Kuo: "Network Analysis and Synthesis", John Wiley and Sons, 1966.
33. W.R.Le Page: "Analysis of Alternating-Current Circuits", McGraw-Hill Book Co., 1952.
34. W.R.Le Page and S.Seely: "General Network Analysis", McGraw-Hill Book Co., 1952.
35. B.P.Lathi: "Signals, Systems and Communication", John Wiley and Sons, 1965.
36. K.Lunze: "Berechnung elektrischer stromkreise", VEB Verlag Technik , Berlin, 1970.
37. W.A.Lynch and J.G.Truxal: "Signals and Systems in Electrical Engineering", McGraw-Hill Book Co., 1962.
38. S.J.Mason and H.J.Zimmermann: "Electronic Circuits, Signals and Systems", John Wiley and Sons, 1960.
39. J.Millman and C.C.Halkias: "Electronic Devices and Circuits", McGraw-Hill, Book Co., 1970.
40. J.B.Murdoch: "Network Theory", McGraw-Hill Book Co., 1970.
41. M.Plohl: "Električki krugovi", Tehnička enciklopedija 4., Jug.leksikografski zavod, 1973.
42. M.Plohl: "Opća teorija linearnih mreža", ZEMS-ETF, 1975.
43. M.Plohl: "Teorija prijenosnih sistema" I, Sveučilište u Zagrebu, 1967.
44. M.Plohl: "Terminologija pojmova iz grafova", Elektrotehnika br. 1 i 3 , 1974.
45. R.S.Sanford: "Physical Networks", Prentice Hall, 1965.
46. R.E.Scott: "Linear Circuits", Addison-Wesley Publishing Co., 1960.



47. S.Seshu and N.Balabanian: "Linear Network Analysis", John Wiley and Sons, New York, Chapman and Hall, London, 1959.
48. Shu-Park Chan: "Introductory Topological Analysis of Electrical Networks", Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1969.
49. H.H.Skilling: "Electrical Engineering Circuits", John Wiley and Sons, 1974.
50. M.R.Spiegel: "Theory and Problems of Complex Variables", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1964.
51. M.R.Spiegel: "Theory and Problems of Laplace Transforms", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1965.
52. J.L.Stewart: "Circuit Theory and Design", John Wiley and Sons, 1956.
53. Dj.Švarc: "Električni titrajni krugovi", I , Tehnička knjiga, Zagreb, 1959.
54. H.M.Tremaine and G.K.Teffeaus: "Attenuators, Equalizers and Filters", Howard W.Sams and Co., 1959.
55. M.E.Van Valkenburg: "Network Analysis", Prentice Hall, 1974.
56. H.C.Veatch: "Transistor Circuit Action", McGraw-Hill Book Co., 1968.
57. J.B.Walsh and K.S.Miller: "Introductory Electric Circuits", McGraw-Hill Book Co., 1960.
58. A.N.Wilson, Jr.: "Nonlinear Networks; Theory and Analysis", IEEE Press, 1975.
59. H.J.Zimmermann and S.J.Mason: "Electronic Circuit Theory", John Wiley and Sons, 1959.

Prijepis:

Ljubica SURAC

Grafička obrada:

Ing. Vesna ŠTAMBUK

VAŽNIJA LITERATURA

1. A.A. Andronov, A.A. Vitt, S.E. Haikin: "Teorija Kaljebanii", Fizmatgiz, 1959.
2. B.P. Aseejev: "Kaljebateljni Cjepi", Svjasizdat, 1955.
3. N. Balabanian and T.A. Bickart: "Electrical Network Theory", John Wiley and Sons, 1969.
4. N. Balabanian and W. Le Page: "Electrical Science", Book 1 and 2, McGraw-Hill Book Co., 1973.
5. T. Bödefeld and H. Sequenz: "Electrische Maschinen", Springer Verlag, Wien
6. E. Brenner and M. Javid: "Analysis of Electric Circuits", McGraw-Hill Book Co., 1959.
7. Cauer: "Synthesis of Linear Communication Networks", McGraw-Hill Book Co., 1967.
8. W.L. Cassell: "Linear Electric Circuits", McGraw-Hill Book Co., 1970.
9. W.H. Chen: "The Analysis of Linear Systems", John Wiley and Sons, 1968.
10. P.M. Chirlian: "Basic Network Theory", McGraw-Hill Book Co., 1969.
11. L.O. Chua: "Introduction to Nonlinear Network Theory", McGraw-Hill Book Co., 1969.
12. W.J. Creamer: "Communication Networks and Lines", Harper and Brothers, 1951.
13. C.L. Cuccia: "Harmonics, Sidebands, and Transients in Communication Engineering", McGraw-Hill Book Co., 1952.
14. W.J. Cunningham: "Introduction to Nonlinear Analysis", McGraw-Hill Book Co., 1958.
15. T.W. Davis and R.W. Palmer: "Computer-Aided Analysis of Electrical Networks", McGraw-Hill Book Co., 1971.
16. C.A. Desoer and E.S. Kuh: "Basic Circuit Theory", McGraw Hill Book Company, 1969.
17. J.A. Edminister: "Theory and Problems of Electric Circuits", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1965.
18. W.L. Everitt and G.E. Anner: "Communication Engineering", McGraw-Hill Book Co., 1956.
19. R.B. Faber: "Linear Circuits", Discreate and Integrated, C.E. Mervill Publishing Co., 1974.
20. D.K. Frederick and A.B. Carlson: "Linear Systems in Communication and Control", John Wiley and Sons, 1971.
21. J.E. Gibson and F.B. Tuteur: "Control System Components", McGraw-Hill Book Co., 1958.
22. E.A. Guillemin: "Introductory Circuit Theory", John Wiley and Sons, 1953.

23. E.A.Guillemain: "Communication Networks" , I, II and III, John Wiley and Sons, 1953.
24. E.A.Guillemain: "The Mathematics of Circuit Analysis", John Wiley and Sons
25. W.W. Harman and D.W.Lytle: "Electrical and Mechanical Networks", McGraw-Hill Book Co., 1962.
26. W.H.Hayt Jr., and George W. Hughes: "Introduction to Electrical Engineering", McGraw-Hill Book Co., 1968.
27. R.Horvat: "Specijalna električna kola", Univerzitet u Beogradu, 1965.
28. R.Horvat: "Teorija električnih kola", Gradjevinska knjiga, Beograd, 1958.
29. L.P.Huelsman: "Basic Circuit Theory with Digital Computations", Prentice Hall, N.Y., 1972.
30. W.H.Kim and H.E.Meadows, Jr.: "Modern Network Analysis", John Wiley and Sons, 1971.
31. E.S.Kuh and D.O.Pederson: "Principles of Circuit Synthesis", McGraw-Hill Book Co., 1959.
32. F.F.Kuo: "Network Analysis and Synthesis", John Wiley and Sons, 1966.
33. W.R.Le Page: "Analysis of Alternating-Current Circuits", McGraw-Hill Book Co., 1952.
34. W.R.Le Page and S.Seely: "General Network Analysis", McGraw-Hill Book Co., 1952.
35. B.P.Lathi: "Signals, Systems and Communication", John Wiley and Sons, 1965.
36. K.Lunze: "Berechnung elektrischer stromkreise", VEB Verlag Technik , Berlin, 1970.
37. W.A.Lynch and J.G.Truxal: "Signals and Systems in Electrical Engineering", McGraw-Hill Book Co., 1962.
38. S.J.Mason and H.J.Zimmermann: "Electronic Circuits, Signals and Systems", John Wiley and Sons, 1960.
39. J.Millman and C.C.Halkias: "Electronic Devices and Circuits", McGraw-Hill, Book Co., 1970.
40. J.B.Murdoch: "Network Theory", McGraw-Hill Book Co., 1970.
41. M.Plohl: "Električki krugovi", Tehnička enciklopedija 4., Jug.leksikografski zavod, 1973.
42. M.Plohl: "Opća teorija linearnih mreža", ZEMS-ETF, 1975.
43. M.Plohl: "Teorija prijenosnih sistema" I, Sveučilište u Zagrebu, 1967.
44. M.Plohl: "Terminologija pojmova iz grafova", Elektrotehnika br. 1 i 3 , 1974.
45. R.S.Sanford: "Physical Networks", Prentice Hall, 1965.
46. R.E.Scott: "Linear Circuits", Addison-Wesley Publishing Co., 1960.

47. S.Seshu and N.Balabanian: "Linear Network Analysis", John Wiley and Sons, New York, Chapman and Hall, London, 1959.
48. Shu-Park Chan: "Introductory Topological Analysis of Electrical Networks", Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1969.
49. H.H.Skilling: "Electrical Engineering Circuits", John Wiley and Sons, 1974.
50. M.R.Spiegel: "Theory and Problems of Complex Variables", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1964.
51. M.R.Spiegel: "Theory and Problems of Laplace Transforms", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1965.
52. J.L.Stewart: "Circuit Theory and Design", John Wiley and Sons, 1956.
53. Dj.Švarc: "Električni titrajni krugovi", I , Tehnička knjiga, Zagreb, 1959.
54. H.M.Tremaine and G.K.Teffeaus: "Attenuators, Equalizers and Filters", Howard W.Sams and Co., 1959.
55. M.E.Van Valkenburg: "Network Analysis", Prentice Hall, 1974.
56. H.C.Veatch: "Transistor Circuit Action", McGraw-Hill Book Co., 1968.
57. J.B.Walsh and K.S.Miller: "Introductory Electric Circuits", McGraw-Hill Book Co., 1960.
58. A.N.Wilson, Jr.: "Nonlinear Networks; Theory and Analysis", IEEE Press, 1975.
59. H.J.Zimmermann and S.J.Mason: "Electronic Circuit Theory", John Wiley and Sons, 1959.

Prijepis:

Ljubica SURAC

Grafička obrada:

Ing. Vesna ŠTAMBUK