tomo bosanac

TEORETSKA ELEKTROTEHNIKA 1

10124/9

0 000000 066310

TEHNIČKA KNJIGA – ZAGREB

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU 1669

Prof. dr ing. Tomo Bosanac

T E O R E T S K A ELEKTROTEHNIKA



UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

Životnom drugu

i požrtvovnom suradniku, Desi

Odobreno rješenjem Komisije za udžbenike i skripta
Sveučilišta u Zagrebu broj 08-1248/2 — 1970
od 24. studenog 1970.

Tisak: Grafički zavod Hrvatske — Zagreb, Frankopanska 26.

Dr ing. TOMO BOSANAC
redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

TEORETSKA ELEKTROTEHNIKA

I DIO

ELEKTROMAGNETSKO POLJE • STATIČKO POLJE • ELEKTRIČNI VOD
VALOVOD I REZONATOR • ENERGETSKI ODNOSI • RAVNI VAL

DODACI
Matematika - Mjerne jedinice - Fizičke konstante



TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

10124/9

0000000066310

PREDGOVOR

Teoretska elektrotehnika tumači osnovne teorijske odnose između fizikalnih zakona o elektromagnetizmu i njihove primjene u osnovama elektrotehnike, upotrebljavajući matematiku. Ona je nastala nakon dugogodišnjeg predavanja predmeta »Teoretska elektrotehnika« u drugom i trećem stupnju studija elektrotehnike, kao i istraživačkog i razvojnog rada u oblasti elektromehaničke konverzije energije, prijenosa energije i elektroničke energetike.

M. Faraday je uveo pojam elektromagnetskog polja prije 140 godina, i otada se sve pojave i svi procesi u elektromagnetizmu tumače uz pomoć toga polja. Tako je elektromagnetsko polje postalo osnova cjelokupne elektrotehnike, te je zato u svjetskoj literaturi toliko mnogo zastupana teorija elektromagnetskog polja. Ona se prikazuje sa stanovišta fizike ili elektrotehnike, a katkad i matematike, već prema autoru. Teorija elektromagnetskog polja prerasta u teoretsku elektrotehniku kad se pretpostavlja da bi ona pomogla u tumačenju osnovnih procesa, značajnih u elektrotehnici. Osnovni sadržaj teoretske elektrotehnike možda će najbolje pokazati kakva je njezina uloga. Evo toga sadržaja:

A. Opći odnosi u polju: 1. Elektromagnetsko polje, 2. Statičko polje, 3. Energetski odnosi,

B. Prijenosnici energije: 4. Ravni val, 5. Električni vod, 6. Valovod i rezonator,

C. Elektromagnetski krugovi: 7. Strujni krug, 8. Magnetski krug,

D. Magnetohidrodinamika: 9. Elektromehanička konverzija energije,

E. Izvori polja: 10. Vrtložne struje, 11. Emisija valova, 12. Raspršenje valova.

Prema tome je cijela teoretska elektrotehnika razdijeljena u 5 područja ili u 12 poglavlja. Svako od područja ili svako poglavlje mogla bi biti knjiga za sebe. Svrha ove knjige je da pokaže međusobnu vezu nabrojanih područja. Ona fizikalno i tehnički predstavljaju jednu cjelinu, usko vezanu osnovnim zakonima o elektromagnetizmu. Kad je Maxwell udario temelje teoriji polja, imao je već sve osnovne zakone: Coulombove i Kirchhoffove zakone, te Biot-Savartov, Ampèresov, Faradayev, Ohmov i Jouleov zakon, zakon o održanju električnog naboja, energije i impulsa. Maxwellove jednadžbe vode računa o svim tim zakonima. Zato su one i odigrale toliko značajnu ulogu u razvoju fizike. Pojedina područja su se razvijala samostalno, te bi se moglo činiti da mogu biti samostalna. Tipičan su primjer strujni krugovi koji se prikazuju samostalno pod istim imenom ili pod imenom električnih krugova, a prerasli su u cijele tehničke grane. Strujni krug je toliko važan, da je postao sinonim za elektrotehniku. Upravo zbog te važnosti je potrebno ispravno tumačenje pojava u njemu, što je pak moguće uzimajući u obzir postavke teorije elektromagnetskog polja. Drugi je primjer poglavlje elektromehaničke konverzije energije koja je osnova, među ostalim, teorije električnih strojeva, čak što više, teorija električnih strojeva se prije razvila nego teo-

rija elektromehaničke konverzije. No ipak je potreban prikaz ove teorije da bi se uspostavila veza s elektromagnetskim poljem i tako poopćila elektromehanička konverzija.

Područje općih odnosa u polju obuhvaća tri poglavlja knjige: elektromagnetsko polje, statičko polje i energetski odnosi. To je upravo najuža teorija polja. Daljnja područja i poglavlja su samo nadgradnja da se uspostavi veza s elektrotehnikom. Ovdje je usvojen princip da se definiraju osnovne veličine naboja i struja i osnovne veličine polja, jer je tako garantirana jednoobraznost u prikazivanju procesa u polju. Nešto više prostora je posvećeno ponašanju materijala u polju, a usvojena su jednostavna tumačenja samo zbog neophodnog uvida u utjecaj kakav vrši materijal u uspostavljanju nekog elektromagnetskog stanja.

Područje prijenosnika energije sadrži tri poglavlja: ravni val, električni vod i valovod i rezonator. Prikaz ravnog vala treba poslužiti kao uvod u prijenos energije, a pokazuje očito valni karakter rasprostiranja elektromagnetskog polja u prostoru. Ravni val je izabran kao najjednostavniji oblik vala, a omogućuje da se prikažu sva svojstva ponašanja valnog gibanja polja. Električni vod i valovod su već direktni prijenosnici energije, a pokazuju valna svojstva u rasprostiranju polja po svojoj duljini. Posebno se ističe prikaz višežičnog voda, što treba shvatiti samo kao uvod u tu oblast prijenosa. On pokazuje jedan od putova, kako bi se rješavao zadatak rasprostiranja valova u složenim sustavima vodiča, kao što su namoti transformatora. Ovdje je i rezonator kao posebno stanje prijenosnika energije. Zato su i prikazani primjeri gdje se vod upotrebljava kao rezonator. Ostala tri područja će biti prikazana u drugom dijelu knjige.

Kao dodatak prvom dijelu knjige dani su izvaci iz matematike u obliku priručnika. Izabrani su dijelovi matematičke analize, vektorske analize i matričnog računa koji se najčešće upotrebljavaju u elektrotehnici ili su iskorišteni u knjizi. Cijeli dodatak je popraćen primjerima iz rješavanja potencijalnih polja ili iz same teorije polja. Matematičkim dodatkom se željelo rasteretiti osnovni tekst knjige od matematičke analize.

Najveći dio knjige ulazi u program drugog stupnja studija elektrotehnike, a ostatak može poslužiti kao uvodna literatura za treći stupanj studija. Knjiga je rezultat dugogodišnjeg rada na zadacima iz elektrotehnike i predavanja održanih iz predmeta »Teoretska elektrotehnika« na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu.

Na kraju želim zahvaliti svima koji su omogućili, direktno ili indirektno, da se pojavi ova knjiga. Posebno bih izrazio zahvalnost prof. Hrvoju Požaru, čija je inicijativa bila da se takova knjiga napiše, a stalni interes u toku rada je pomagao da se ustraje do kraja. Zahvaljujem suradnicima mr. Branislavu Kuzmanoviću, koji je originalno obradio primjer 2.7. o magnetskim zaslonima feromagnetskim kuglama, prof. Svetozaru Kurepi, koji je pomogao u prikazu višežičnog voda primjenom matrica, te je pomogao svojim savjetom i čitanjem matematičkog zadatka. Zahvaljujem suradnicima Stevi Marčetiću i ing. Zvonimiru Pečeniću na pomoći u proračunu i crtanju slika polja, koje su egzaktno računate na elektronskom računalu. Zahvaljujem recenzentima prof. Danilu Blanuši i prof. Radenku Wolfu na savjetima i primjedbama, a posebno prof. Blanuši na ukazanoj pomoći pri sastavljanju matematičkog dodatka. Zahvaljujem mr. Josipu Matijanu na čitanju ispravaka. Posebno ističem stalnu podršku, pomoć i brigu oko pisanja, čitanja teksta i sastavljanja kazala, suradnika i supruge Dese Bosanac. Zahvaljujem Tehničkoj knjizi na podršci i razumijevanju pri izdavanju knjige, a posebno uredniku Ivanu Uremoviću, te Tomislavu Struiću, koji je uložio veliki trud u kvalitetnoj izradbi slika. Zahvaljujem također i Emanuelu Dragojeviću, meteru Grafičkog zavoda Hrvatske, koji se trudio i pokazao veliku umješnost u postavljanju sloga knjige.

Zagreb, siječnja 1973. *Tomo Bosanac*

SADRŽAJ

Strana

1. Elektromagnetsko polje 15

1.1. Način promatranja 15
1.2. Gustoća naboja 18
1.3. Električna struja 21
1.4. Jednadžba kontinuiteta struje 25
1.5. Jakost polja 27
1.6. Gustoća toka 29
1.7. Biotov i Savartov zakon 33
1.8. Faradayev zakon o elektromagnetskoj indukciji 36
1.9. Maxwellove jednadžbe 39
1.10. Utjecaj sredstva 41
1.11. Uvjeti na granici 48

2. Statičko polje 53

2.1. Definicija 53
2.2. Skalarni potencijal 55
2.2.1. Jednadžbe skalarnog potencijala 57
2.2.2. Skalarni magnetski potencijal 59
2.3. Silocijev 60
2.3.1. Provod i otpor silocijevi 60
2.3.2. Kapacitet, pločasti kondenzator 62
2.4. Točkasti naboj 68
2.4.1. Vodljiva kugla 68
2.4.2. Skupina točkastih naboja 69
2.5. Dva točkasta naboja. Odslikavanje na kugli 70
2.5.1. Točkasti naboj i vodljiva kugla 74
2.6. Električni dipol 77
2.7. Mnoštvo električnih dipola, polarizacija 80
2.7.1. Električna polarizacija 82
2.7.2. Magnetska polarizacija 86
2.8. Kugla u homogenu polju 88
2.9. Linijski naboj 97
2.10. Linijski naboj na pravcu 106
2.10.1. Koaksijalni okrugli cilindri 108
2.10.2. Linijski naboj na paralelnim pravcima 111
2.11. Vodljivi cilindar u homogenom polju 124

Strana

2.12. Vektorski potencijal 127
2.12.1. Ulančeni tok, induktivitet 129
2.13. Linijska struja 131
2.13.1. Dva paralelna pravca kao strujnica 134
2.14. Magnetski dipol 160
2.15. Točkasti naboj u poluprostoru 162
2.15.1. Točkasti izvor struje u poluprostoru 165
2.15.2. Magnetsko djelovanje u poluprostoru 166
2.16. Uzajamno odslikavanje 168
2.16.1. Paralelni vodiči u zračnom rasporu 169
2.16.2. Dvije kugle 171
2.16.3. Vodljivi ugao 176

3. Energetski odnosi 179
3.1. Lorentzova sila 179
3.1.1. Sila na strujnicu 182
3.1.2. Sila na površini vodiča 182
3.2. Sila na dipol 183
3.3. Naprezanja u polju 185
3.3.1. Sile u silocijevi 189
3.4. Elektromagnetski impuls 195
3.5. Energija elektrostatskog polja 197
3.5.1. Energija nabijenih vodiča 198
3.5.2. Energija prikazana veličinama polja 199
3.6. Energija magnetostatskog polja 201
3.6.1. Energija prikazana veličinama polja 203
3.7. Energija dipola 205
3.8. Sredstvo u polju 207
3.8.1. Histereza 208
3.8.2. Unošenje sredstva u polje 210
3.8.3. Sile u sredstvu 213
3.8.4. Sila na granici 218
3.9. Vodič u elektrostatskom polju 222
3.10. Parcijalni kapacitet 225
3.10.1. Energija sustava nabijenih vodiča 235
3.11. Vodič protjecan strujom 236
3.12. Tok energije — Poyntingov vektor 243
3.12.1. Poyntingov vektor 244
3.13. Sile u strujnom krugu 247

4. Ravni val 253
4.1. Rješenje Maxwellovih jednadžbi 253
4.1.1. Svojstva polja u ravnom valu 255
4.1.2. Rješenje telegrafskih jednadžbi 257
4.1.3. Sekundarne konstante prostora 258
4.1.4. Val u sredstvu bez gubitaka 259
4.1.5. Brzina čela vala 259

Strana

4.2. Retardirani potencijali 262
4.2.1. Retardirano vrijeme 263
4.2.2. Jednadžba potencijala 263
4.2.3. Retardiranje veličina 265
4.2.4. Hertzov vektor 266
4.2.5. Avansiranje veličina 267

4.3. Val u izotropnom sredstvu 267
4.3.1. Harmonički val 267
4.3.2. Fazna konstanta 269
4.3.3. Prigušna konstanta 272
4.3.4. Bilansa energije 273
4.3.5. Neharmonički val 274
4.3.6. Ovisnost valne konstante o frekvenciji 275
4.3.7. Grupna brzina 276
4.3.8. Gibanje impulsa 278

4.4. Polarizacija 283
4.4.1. Kružno polarizirani val 284
4.4.2. Eliptički polarizirani val 286

4.5. Izolatori i vodiči 289
4.5.1. Kut gubitaka 290
4.5.2. Kompleksne konstante 292
4.5.3. Titranje elementarnog oscilatora 293
4.5.4. Konstante metala 295
4.5.5. Konstante plinova 296
4.5.6. Konstante izolatora i elektrolita 297
4.5.7. Permeabilnost materijala 297
4.5.8. Sekundarne konstante 298
4.5.9. Izolatori 298
4.5.10. Vodiči 301

4.6. Val na granici 303
4.6.1. Snelliusovi zakoni 304
4.6.2. Fresnelove jednadžbe 306
4.6.3. Totalna polarizacija 309
4.6.4. Totalna refleksija 310
4.6.5. Bilansa energije 313
4.6.6. Sile na granici 316

4.7. Granica izolator — vodič 322
4.7.1. Bilansa energije 327
4.7.2. Vrtložne struje 330
4.7.3. Sile na vodič 332

4.8. Val u ploči 334
4.8.1. Ortogonalni upad vala 334
4.8.2. Ortogonalni upad vala na više ploča 337
4.8.3. Tangencijalni upad vala 339
4.8.4. Gubici u stijenkama ploče 343
4.8.5. Opći val u ploči 345

Strana

5. Električni vod 350

5.1. Uvod 350
5.1.1. Podjela vodova 355

5.2. Kratki vod 356
5.2.1. Dvožični vod 358
5.2.2. Naponska jednadžba 359
5.2.3. Strujna jednadžba 359
5.2.4. Bilansa energije 361
5.2.5. Konačni oblik jednadžbi voda 364
5.2.6. Stacionarni pogon 366

5.3. Konstante voda 372
5.3.1. Otpor voda 372
5.3.2. Odvod voda 373
5.3.3. Kapacitet voda 374
5.3.4. Induktivitet voda 375

5.4. Dugi vod 376
5.4.1. Sekundarne konstante voda 377
5.4.2. Karakteristične konstante vala 379
5.4.3. Vod bez distorzije 381
5.4.4. Pokus praznog hoda 382
5.4.5. Pokus kratkog spoja 384
5.4.6. Vod pod zadanim teretom 385
5.4.7. Vod na zadanom generatoru 387
5.4.8. Spoj dvaju vodova 388

5.5. Vod s mnogo vodiča 391
5.5.1. Naponske jednadžbe 394
5.5.2. Strujne jednadžbe 396
5.5.3. Vod sa n vodiča 397
5.5.4. Simetrični vod 400

5.6. Stacionarni val na vodu 410
5.6.1. Faktor refleksije 410
5.6.2. Valovi na vodu bez gubitaka 413
5.6.3. Vod kao transformator impedancije 415
5.6.4. Vod kao kompenzator reaktancije 415
5.6.5. Smithov dijagram 417

5.7. Putujući val na vodu 428
5.7.1. Oblici impulsa 430
5.7.2. Granični uvjeti 434
5.7.3. Val na čvorištu u vodu 435
5.7.4. Koncentrirana impedancija 437
5.7.5. Jednostavni prijelazi u vodu 437
5.7.6. Priključivanje transformatora preko zaštitne prigušnice 442
5.7.7. Priključivanje voda u praznom hodu 443
5.7.8. Shema refleksije 445

5.8. Nehomogeni vod 452

Strana

6. Valovod i rezonator 459

6.1. Uvod 459
6.2. Pravokutni valovod 463
6.2.1. Oblici valova 464
6.2.2. Kritična frekvencija 467
6.2.3. Valni otpor 467
6.2.4. Jednadžbe polja 469
6.2.5. Gibanja vala 474
6.3. Okrugli valovod 478
6.3.1. Kritična frekvencija 478
6.3.2. Jednadžbe polja 480
6.4. Energetski odnosi 485
6.4.1. Prenesena snaga 486
6.4.2. Gubici u stijenkama 490
6.5. Valovod kao električni vod 493
6.6. Prijelazi u valovodu 504
6.6.1. Zatvoreni valovod 505
6.6.2. Dijafragme 506
6.6.3. Spajanje valovoda 509
6.7. Kutija rezonator 511
6.7.1. Dobrota oscilatora 511
6.7.2. Pravokutna prizma — rezonator 512
6.7.3. Kružni cilindar — rezonator 516
6.7.4. LC — oscilator — kvazistatički rezonator 518
6.7.5. Koaksijalni vod — rezonator 520
6.7.6. Torusni rezonator 522

D. Matematički prilog 531

D. 1. Redovi 531
D. 2. Diferenciranje 548
D. 3. Integriranje 551
D. 4. Posebni integrali 563
D. 5. Vektorska analiza 574
D. 6. Matrice 590
D. 7. Ortogonalni koordinatni sustavi 603
D. 8. Pravokutni koordinatni sustav 606
D. 9. Cilindrički koordinatni sustav 672
D. 10. Sferni koordinatni sustav 698
D. 11. Elipsoidni koordinatni sustav 714
D. 12. Laplaceova transformacija 727

Mjerne jedinice 735
Fizičke konstante 741
Popis oznaka 743
Važnija literatura 747
Kazalo 749

1. ELEKTROMAGNETSKO POLJE

1.1. NAČIN PROMATRANJA

Elektrotehnika iskorištava svojstva električnog naboja da bi odgovorila na postavljene zadatke u oblasti prijenosa energije, pogona postrojenja, komunikacija, regulacije procesa itd. Nema tehničke grane u koju nije uključena elektrotehnika. Upoznavanje svojstava električnog naboja od primarnog je značenja za elemente od kojih je izgrađena zgrada elektrotehnike. Električni naboj je uvijek vezan uz elementarne čestice od kojih su izgrađeni atomi svih materijala.

Osnovna građa atoma se sastoji od jezgre i elektronskog »oblaka« u gibanju oko jezgre. Jezgra je sastavljena od elementarnih čestica, protona i neutrona. Elektronski oblak sadrži stanoviti broj elektrona. Protoni, neutroni i elektroni su osnovne elementarne čestice koje ulaze u građu atoma. Protoni su nosioci *pozitivnog* električnog naboja, a elektroni, naprotiv, nose *negativni* električni naboj. Neutron nema električnog naboja, te djeluje *neutralno*. Iznosi naboja protona i elektrona su međusobno jednaki, samo su suprotna predznaka. Njihov se naboj zove *elementarni naboj*. Time se hoće reći da ne postoji uopće naboj manjeg iznosa, a naboji većeg iznosa su samo njegovi mnogokratnici. Elementarni naboj ima iznos

$$e = 0{,}16 \cdot 10^{-18} \text{ kulona}$$

Jezgra atoma sadrži Z protona, što je ujedno redni broj atoma kemijskog elementa u tablici Mendeljejeva. Prema tome je ukupni naboj jezgre atoma $+Ze$. Kad je atom u neutralnom stanju, njegov elektronski oblak ima točno isti negativni naboj, tj. $-Ze$, a sadrži Z elektrona. Osnovne elementarne čestice imaju određenu masu, kao što i svaki atom ima određenu masu. Masa atoma se izražava relativno prema masi izotopa ugljika C12, za koju se uzima da iznosi 12. Takvi relativni iznosi mase atoma zovu se *atomske težine*, a one se uvijek navode uz kemijske elemente u tablici Mendeljejeva. Jedan *mol* nekog kemijskog elementa ima masu toliko grama, kolika je njegova molekularna težina. Također jedan mol nekog kemijskog spoja ima masu toliko grama, kolika je njegova molekularna težina. Uz to se još upotrebljava i veličina *gramatom*. Gramatom nekog kemijskog elementa ima toliko grama, kolika je njegova atomska težina.

Avogadrov broj je broj molekula u jednom molu, a isti je za sve vrste molekula i iznosi

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol} = 6{,}02 \cdot 10^{26} \text{ 1/kmol}$$

Toliki je broj atoma u jednom gramatomu. Isti broj elektrona ima naboj

$$F = e\,N_A = 9{,}65 \cdot 10^4 \text{ kulona}$$

Konstanta F se zove Faradayeva konstanta, a predstavlja naboj broja elektrona jednakih Avogadrovu broju. Masa jednog elektrona mnogo puta je manja od mase atomske jezgre. Ona je u mirnom stanju

$$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Masa atomske jezgre slijedi iz atomske težine A i Avogadrova broja

$$m_A = \frac{A}{N_A} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot A \text{ kg}$$

Masa atoma je sadržana uglavnom u masi jezgre, te se masa elektronskog oblaka smije zanemariti. Masa elektrona je tek 1836-ti dio mase protona.

Važnu ulogu imaju sile među nabojima u samom atomu, odnosno između atoma u molekulama ili kristalima. One sudjeluju također u držanju molekula na okupu. Električna sila je osnovna sila u oblikovanju materijala. Materijali zahvaljuju svoja fizička svojstva rasporedu električnih sila među nabojima. Kako se te sile podvrgavaju Coulombovu zakonu, zovu se još *Coulombove* sile. Struktura atoma se ne može rastumačiti samo električnim silama. Tek kvantna mehanika pomaže da se struktura rastumači. Električna sila i kvantno mehanički efekti drže atom na okupu i daju mu svojstva kakva su poznata. Isto tako je u svijetu molekula i kristala koji su sastavljeni od atoma. Opet, električna sila i kvantnomehanički efekti su razlog da materijali imaju svojstva mehanička, toplinska, električna i ostala, kakva su poznata inače i iskorištavaju se. Osnovno pravilo električnih sila kaže da se *istoimeni* naboji odbijaju, a »raznoimeni« privlače. Atomska jezgra privlači električki elektrone, dok se elektroni međusobno odbijaju. Promjer atoma je reda veličine oko 10^{-10} m ili 100 pm, dok je jezgra mnogo manja i iznosi 10^{-15} do 10^{-14} m. Po tome izgleda da su elektroni vrlo daleko od jezgre, odnosno da je prostor atoma razmjerno prazan. Ipak je Coulombova sila vrlo velika. Vodikov atom ima jedan proton i jedan elektron. Coulombova sila među njima iznosi $2{,}0 \cdot \cdot 10^{-8}$ njutna, koliko se dobije iz ionizacionog potencijala za vodik, a uz pretpostavku Bohrova modela atoma. Odatle se još ne vidi kolika je to golema sila. Tek treba uzeti u obzir da ta sila daje elektronu akceleraciju u iznosu $2{,}0 \cdot 10^{-8}/9{,}11 \cdot \cdot 10^{-31} = 2{,}2 \cdot 10^{22}$ m/s^2 $= 2{,}2 \cdot 10^{21}\,g$. Ta je akceleracija neusporedivo veća od gravitacije. Ljudska tehnika nije u stanju proizvesti takve akceleracije, kakve se postižu u svijetu nabijenih čestica.

Da bi se odveo jedan elektron iz atoma, izvan njegova utjecaja, treba izvršiti rad koji se zove *ionizacioni* rad ili *ionizacioni* potencijal, ako se izražava potencijalom. On iznosi za vodik 13,5 volta, odnosno izražen radom 13,5 elektronvolta. Da bi se odvela masa elektrona s površine Zemlje u kozmički prostor, mora imati početnu brzinu od 11,2 km/s, čemu odgovara energija od $3{,}56 \cdot 10^{-4}$ elektronvolta. Ta je energija tek 38000-ti dio ionizacionog rada za vodik. Taj primjer pokazuje koliko su velike sile u atomu, a ujedno pokazuje da se gravitacione sile mogu zanemariti prema Coulombovim silama. Ionizacioni potencijal je karakteristična veličina za

svaki kemijski element. Obično se daje za odvođenje jednog elektrona iz vanjske elektronske ljuske. On je najmanji za cezij: 3,87 volta, a najveći je za helij: 24,46 volta. Svi ostali ionizacioni potencijali su između tih iznosa. Odvođenje slijedećeg elektrona je već utrošak mnogo veće radnje. Litij je treći po redu element, tj. on ima u jezgri tri protona, a tri elektrona su u gibanju oko jezgre. Odvođenje njegova prvog elektrona traži rad od 5,36 elektronvolta, već slijedeći elektron traži 75,3 elektronvolta i konačno treći — 121,8 elektronvolta. Bor je peti element. Ionizacioni rad za prvi elektron je 8,26 elektronvolta, a za posljednji, peti elektron, potrebno je 338,5 elektronvolta. Ovi primjeri također pokazuju koliko je kompaktna električna struktura atoma. I ne samo atomi, već su i molekule kompaktne strukture.

Vodik se pojavljuje obično u molekularnom stanju, kao H_2. Da bi se rastavila dva atoma vodika u molekuli, bio bi potreban rad od 4,5 elektronvolta. Taj rad je jednak *energiji vezanja* atoma u molekuli ili u kristalu. Kisikova molekula, O_2, traži 5,1 elektronvolta. Bio bi potreban rad od 2,5 elektronvolta da se molekula vode H_2O rastavi na kisik i vodik u molekularnom stanju. Tako bi se redom moglo analizirati svaku molekulu. Molekule na okupu drže sile vezanja. One su najveće u krutom tijelu, neznatne su u tekućinama, a potpuno iščezavaju u plinovima.

Materijali se dijele na *izolatore* i *vodiče* sa stanovišta električne struje. Pojava električne struje moguća je ako postoje slobodni naboji. Ovdje ne treba ulaziti u fiziku vođenja električne struje, ali se može napomenuti da su ti slobodni naboji vrlo često slobodni elektroni, kao što je to u *metalima*. *Elektroliti* raspolažu slobodnim ionima. Izolatori nemaju slobodnih naboja. Bakar je odlični vodič električne struje. U njemu postoji $8{,}5 \cdot 10^{22}$ slobodnih elektrona po cm^3 ili 13500 kulona naboja po cm^3 koji je sposoban da se giba. To nisu svi elektroni u bakru, niti sav naboj. Bakar ima u jezgri 29 protona, odnosno 29 pozitivnih elementarnih naboja, a oko jezgre se nalazi 29 elektrona u 4 ljuske. Četvrta ljuska ima samo jedan elektron, koji vrlo lako postaje *slobodan* elektron. Bakreni vodič je električki neutralan ako nije izvrgnut elektromagnetskom djelovanju. Ipak je ionizacioni potencijal bakra visok. Bakar raspolaže slobodnim elektronima u krutom stanju kad su atomi dovoljno blizu, te se jedan vanjski elektron lako seli od atoma do atoma kao slobodni elektron. S druge strane, nije jednostavno dobiti elektron izvan bakrenog tijela.

Ovaj kratki uvod bi trebao samo odškrinuti vrata koja vode u svijet atoma, gdje se direktno susreću električni naboji. Oni neposredno sudjeluju u građi materijala. Kad se materijal gleda kroz njegovu atomsku strukturu, mora se ući u njegovu *mikrostrukturu*. Katkad je potrebno takvo gledanje da bi se moglo razjasniti pojedine pojave. To će se odnositi na ponašanje materijala u elektromagnetskom polju.

Takvo gledanje ne može zadovoljiti tehničara. On primjenjuje električnu struju, električni napon. Njemu je poznato da nije svejedno kroz kakav vodič protječe struja. On razlikuje materijale u odnosu na vođenje struje. Dijeli ih na vodiče i izolatore. Tehničara interesira to da ima materijala koji pokazuju izvanredno ponašanje prema magnetskim manifestacijama električne struje. Predaleko bi se otišlo ulazeći u detaljno opisivanje u tome smislu. Treba ići putem kakav je uobičajen u tehnici.

Tehničar ne promatra materijale kroz međuatomska djelovanja. On je uveo pojmove za materijale, kao što su gustoća, čvrstoća, boja i ostala fizička svojstva.

To je tzv. *makroskopski* način gledanja. Takav način gledanja ne poznaje diskontinuiteta u građi materijala. Uvedene i primijenjene veličine odgovaraju takvu načinu gledanja. Mogu se pojaviti problemi koji traže mikroskopski način gledanja, ali se odmah traže putevi za prelazak na makroskopsko gledanje. Osnovni je razlog takvu prilaženju, što tehnika radi s materijalima koji su njezina tvorevina.

Elektrotehnika također gleda makroskopski na manifestacije električnog naboja. Zbog takva gledanja električni naboj nije mnogokratnik elementarnog naboja, već je to količina naboja mjerena uobičajenim mjernim jedinicama, kao što postoje jedinice za masu, silu i slično. Jednako naboj u gibanju predstavlja električnu struju naboja. To je neprekinuta struja, kao što je neprekinuta struja vode u nekoj cijevi. Gibanje elementarnog naboja ili neke čestice, električki nabijene, nije električna struja. To je samo gibanje naelektrizirane čestice, te se kao takva promatra. Ne smije se miješati gibanje naelektrizirane čestice i električnu struju. Slično bi se učinilo da se izjednači kapanje vode sa strujanjem vode. Katkad je moguće naći neke sličnosti koje mogu pomoći u tumačenju nekih pojava, ali to ne smije postati pravilo.

Makroskopski način gledanja zahtijeva da se uvedu veličine koje tome najbolje odgovaraju. Sve te veličine na jedan ili drugi način ovise o električnom naboju, bilo direktno ili indirektno. Moglo bi se pomisliti da se tada treba zadržati na tumačenju električnog naboja. To valja prepustiti fizici. Nije zadatak elektrotehnike da interpretira električni naboj. Ona iskorištava njegove manifestacije. Za elektrotehniku je dovoljno da on postoji i da ima određena svojstva koja se mogu iskoristiti. Na manifestacijama svojstava električnog naboja izgrađena je cjelokupna elektrotehnika.

Može se dogoditi da nije moguće izbjeći mikrogledanje. No i takva gledanja će biti prilagođena makroskopskom načinu. Takvo je gibanje nabijene čestice. Mnogi se problemi rješavaju uz pomoć tumačenja dobivenih iz promatranja *točkastog* naboja. Zamišlja se da je točkasti naboj koncentriran u geometrijskoj točki. Promatranje točkastog naboja dovodi do vrlo korisnih rezultata. Prema tome će sve definirane i izvedene veličine biti prilagođene makroskopskom načinu gledanja, koji pretpostavlja da naboj jednoliko ispunja promatrani prostor, te da se može mjeriti kao što se mjere količine materijala koji nas okružuje. Zato se može i uvesti veličina koja se zove gustoća naboja, kao što postoji i gustoća materijala.

1.2. GUSTOĆA NABOJA

Naboj može biti raspoređen prostorno ili po površinama vodiča. U prostoru raspoređeni naboj ne mora biti istog predznaka, nego je najčešće u oba predznaka istovremeno. U ovome trenutku nije značajno da su prisutni naboji obaju predznaka, pozitivni i negativni, već da jednoliko ispunjavaju prostor. Ako je nabijena površina na nekom izduženom vodiču, kao što se susreće kod prijenosnih vodova, malog promjera u odnosu na dužinu, mogao bi se takav naboj promatrati kao linijski naboj. Linijski naboj nema fizikalnog smisla kao ni točkasti, jer bi trebao da bude na geometrijskoj crti, ali odlično pomaže u razmatranju polja izduženih vodiča.

Prostorni naboj se mnogo susreće. Njegovu gustoću bi se odredilo tako, da se odabere dovoljno malen prostor volumena ΔV da bi u njemu gustoća

bila konstantna. S druge strane, prostor mora biti dovoljno velik da se može pretpostaviti da ga naboj ispunja jednoliko. Mali volumen ΔV može biti 1 mm^3, što ovisi o promatranim uvjetima. Ali je već sada moguće reći da ne može biti jedan kubni angstrem, jer je razmak među atomima u molekuli ili kristalu oko jednog angstrema. O tome se mora voditi računa ako se želi zadržati makropromatranje. U malom volumenu ΔV nalazi se naboj ΔQ jednoliko po njemu raspoređen. Tada je *prostorna gustoća naboja* definirana sa

$$\varrho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{1.1}$$

Tako se mora definirati prostorna gustoća ako se želi voditi računa o stvarnoj strukturi naboja. Kad se tako definira gustoća, može se govoriti o njezinoj funkcionalnoj ovisnosti o mjestu u prostoru, $\varrho = \varrho(x, y, z)$. To dozvoljava pretpostavka o jednoličnoj ispunjenosti nabojem. U tome slučaju se smije računati ukupni naboj u promatranom prostoru zadanog volumena V preko prostornog integrala gustoće, tj.

$$Q = \int_V \varrho \, \mathrm{d}V \tag{1.2}$$

Plošni naboj treba razmatrati slično kao i prostorni. Ovdje se zamišlja da je naboj raspoređen jednolično po geometrijskoj plohi. Na plohi se odabere dovoljno malen element površine ΔS da se može uzeti po njoj konstantna gustoća. Na tome elementu se nalazi naboj ΔQ. *Plošna gustoća naboja* iznosi, prema tome

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{1.3}$$

Ta je gustoća ovisna o mjestu na plohi. Slično prostornom naboju, ukupni naboj plohe površine S može se odrediti plošnim integralom gustoće, tj.

$$Q = \int_S \sigma \, \mathrm{d}S \tag{1.4}$$

Preostaje još **linijski naboj**. Taj je naboj skupljen na geometrijskoj crti. Odabere se dovoljno malena duiljna Δl crte da je gustoća na njoj konstantna. Na toj maloj duljini ima ukupno ΔQ naboja. Sada se definira *linijska gustoća naboja*

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \tag{1.5}$$

Sličnim kriterijima kao za prostorni i plošni naboj računa se ukupni naboj na nekoj crti duljine l

$$Q = \int_l \lambda \, \mathrm{d}l \tag{1.6}$$

U promatranom prostoru mogu biti zastupana sva tri oblika raspodjele naboja. To nije novi problem. Djelovanja naboja se superponiraju. Kad se posebno ne naglasi, misli se prostorni naboj, ali jednako bi to mogao biti i plošni ili linijski naboj. U suštini se uvijek može naboj $\varrho \, \mathrm{d}V$ ili $\sigma \, \mathrm{d}S$ ili $\lambda \, \mathrm{d}l$ promatrati kao točkasti naboj. Odatle se vidi veliko značenje poznavanja točkastog naboja.

Velike koncentracije naboja postižu se u električnim kondenzatorima. Teško se dosiže naboj od jednog kulona. U trofaznom dalekovodu prijenosnog napona 110 kV koncentrira se na površini vodiča jedne faze maksimalno oko 0,8 milikulona po kilometru duljine voda. Potrebno je dakle, 1000 km voda da bi na vodiču jedne faze bio najveći naboj oko 0,8 kulona. U uzduhu normalnog tlaka može se postići plošna gustoća naboja najviše oko 20 mikrokulona po kvadratnom metru. Ta gustoća, uz primjenu dobrih izolatora kao što je kremen, može biti i oko 100 puta veća, a to je već oko 2 milikulona po kvadratnom metru.

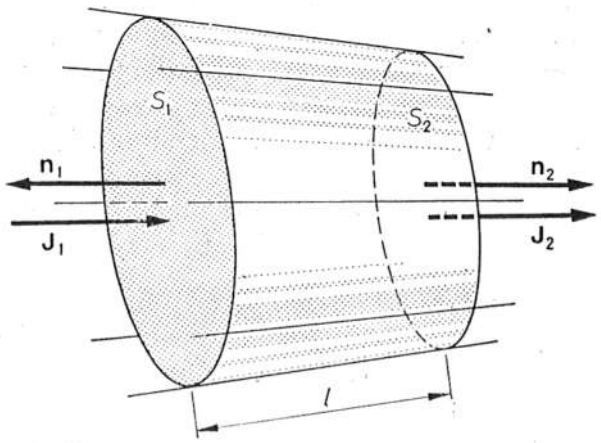
Mnogo veće gustoće naboja se postižu u materijalima, samo su tamo zastupani naboji obaju predznaka. Zato su oni neutralni prema okolini. Velike su i u njih razlike, ovisno o agregatnom stanju. Faradayeva konstanta, $F = 96500$ kulona, jest ukupni naboj broja elektrona jednakog Avogadrovu broju. To je već velik naboj. Osnovni vodič je bakar. On sadrži $8{,}5 \cdot 10^{22}$ atoma po cm^3, a ima slobodni elektron po atomu koji sudjeluje u vođenju električne struje. Ukupni naboj slobodnih elektrona tada iznosi 13500 kulona po cm^3. Najveće su koncentracije naboja u krutim tijelima, a one se u metalima kao vodičima direktno iskorištavaju.

Velika koncentracija naboja u materijalu se ne može direktno iskoristiti. Taj naboj sudjeluje u oblikovanju elektromagnetskih svojstava materijala. Najizrazitije svojstvo je vođenje električne struje. Elektromagnetskim djelovanjem na vodič poremeti se njegova neutralnost. Na njegovoj površini pojavi se naboj određene plošne gustoće, koliko dozvoljava izolaciona sposobnost okolnog sredstva. Naboj na površini je nastao raspoređivanjem slobodnih elektrona ili pak dovođenjem ili odvođenjem slobodnih elektrona. To se događa s metalnim vodičima koji su postavljeni izolirano u prostoru. Dovođenjem elektrona na vodič gotovo da se ne poremećuje raspored slobodnih elektrona koji već postoje u vodiču. Oni se održavaju na površini vodiča, a plošna gustoća naboja je ograničena izolacionom sposobnošću okolnog izolatora.

Opet bakar može poslužiti kao primjer. Da bi se dobio razmještaj atoma u njegovoj strukturi, treba uzeti u obzir da se on kristalizira kubno, a sredina strana kocke ima atom. To je vrlo zgusnuta kristalna struktura. Po elementarnoj kocki mora se računati sa četiri atoma, što daje sa $8{,}5 \cdot 10^{22}$ atoma po cm^3 brid elementarne kocke od 361 pm. Sad je najmanji razmak među atomima 255 pm. Kad bi na površini bakrenog vodiča bile poredane kocke jedna do druge, bio bi po jedan atom u kvadratu stranice 255 pm. To odgovara plošnoj gustoći slobodnih elektrona od 2,5 $\mathrm{C/m}^2$. Takav vodič se može naelektrizirati upotrebom najboljih izolatora tek do naboja 2 $\mathrm{mC/m}^2$. Ovaj bi primjer trebao pokazati da se dovođenjem naboja na izolirani vodič praktički ne poremećuje raspored slobodnih naboja koji već postoje u vodiču. Ovdje je uzet u obzir samo jedan sloj atoma. Barem dva sloja atoma sudjeluju u oblikovanju vanjskih električnih efekata.

1.3. ELEKTRIČNA STRUJA

Električni naboji se gibaju, ako na njih djeluje sila. Električna struja je neprekinuta struja naboja. Ona se smije predstaviti *strujnicama*. Uvijek se nalazi skupina strujnica koja formira **strujnu cijev.** Izvodnice plašta strujne cijevi su strujnice.



Sl. 1.1. Strujna cijev. Osnove S_1 i S_2 su dijelovi ekvipotencijalnih ploha, a izvodnice su strujnice polja.

Time se postiže da nijedna strujnica ne probija plašt, nego sve one prolaze bazama strujne cijevi. Na sl. 1.1. prikazana je takva strujna cijev. Naboji ulaze na jednu bazu cijevi, a izlaze na drugu. Cijeli prostor strujanja naboja može se predstaviti samim strujnim cijevima koje slijede jedna iza druge i jedna uz drugu.

Električna struja je struja *pozitivnih* naboja. Na taj se način postiže ispravno označavanje predznaka u svim jednadžbama. Jakost električne struje u strujnoj cijevi predstavlja naboj koji je njome protekao u jedinici vremena. Zato se odabere kratak interval vremena Δt, dovoljno kratak da je unutar njega jakost struje konstantna. Za to vrijeme je strujna cijev na miru u odnosu na promatrača, a giba se samo naboj. Ako za to vrijeme proteče ΔQ naboj, *jakost struje* iznosi

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{1.7}$$

Vremenski interval ne smije biti suviše kratak, da se može primijeniti makroskopsko promatranje.

Na taj se način dobiva jakost struje kroz strujnu cijev u ovisnosti o vremenu. To je neprekinuta funkcionalna ovisnost. U nekom vremenskom intervalu od vre-

mena t_1 do t_2 proteče ukupno naboja koji je jednak vremenskom integralu jakosti struje, tj.

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt \tag{1.8}$$

Jakost električne struje je veličina koja je sinonim za elektrotehniku. Ona se susreće na svakom koraku. Susrećemo se vrlo različite jakosti struje, od pikoampera do nekoliko stotina kiloampera. Ne može se ići na suviše male jakosti struje, jer se dolazi u područje elementarnog naboja. U atmosferskim izbijanjima se susreću jakosti struja do nekoliko stotina kiloampera. Veće jakosti struja se susreću u eksperimentima s plazmom. Tamo se postižu kratkotrajno jakosti struja i do jednog megaampera. Pojam električne struje je bliži elektrotehnici nego pojam električnog naboja. Zato bi promatranje moglo početi od struje i njezinih manifestacija. Samo je običaj odlučio da se počinje od naboja.

Vrlo korisna je veličina *plošna gustoća struje*, ili samo *gustoća struje*. To je jakost struje na jedinicu površine. Postupak je sličan kao kod dosadašnjih veličina gustoće. Treba odabrati strujnu cijev dovoljno malog presjeka ΔS. Ovdje je potrebno učiniti još jednu primjedbu: nije svejedno kako stoji ΔS u odnosu na smjer strujanja naboja. Budući da je svako strujanje, pa i strujanje naboja, vezano za određeni smjer, dakle ima vektorski karakter, mora se ΔS, presjek strujne cijevi, postaviti okomito na smjer strujanja. Tada će kroz ΔS prolaziti najveći tok naboja, najveća struja Δi. Sada je iznos gustoće struje

$$J = \frac{\Delta i}{\Delta S} \tag{1.9}$$

Gustoća struje **J** *jest vektor koji odmah pokazuje smjer strujanja naboja.*

Da se dobije bolji uvid u njegov značaj, treba ga dovesti u vezu s gustoćom naboja. Naboj koji se giba u strujnoj cijevi na sl. 1.1. iznosi $\varrho S l$, ako se promatra dovoljno mala dužina strujne cijevi l, površina baza također malih i približno međusobno jednakih, $S_1 = S_2 = S$. Gustoća naboja ϱ je konstantna u malom volumenu $S\,l$ strujne cijevi. Brzina naboja na malom putu l iznosi $v = l/t_0$ po definiciji brzine. Duljina l ima smjer strujanja, a brzina v također. Osim toga je dužina l normalna na bazu S strujne cijevi. Brzina strujanja naboja v također je normalna na bazu S strujne cijevi. Sad je mala struja i iz (1.7)

$$i = \frac{\varrho S l}{t_0} = \varrho v S$$

a gustoća struje iz (1.9)

$$\mathbf{J} = \varrho \mathbf{v} \tag{1.10}$$

Ovdje su i gustoća struje i brzina pisani vektorski. Ti su vektori kolinearni. Potrebno je naglasiti da naboj ispunja jednolično promatrani prostor.

Primarne su veličine naboj, odnosno njegova gustoća i njegova brzina. Gustoća struje je iz njih izvedena. Promjenu gustoće struje može se postići samo utjecajem na gustoću naboja ili na njegovu brzinu. Slobodni elektroni su nosioci električne struje u nekom sredstvu. Da bi se postigle dovoljne gustoće struje, mora biti dovoljno slobodnih elektrona u sredstvu. Neka posluži primjer bakra, da se vidi o kakvim se veličinama radi. Bakar sadrži $8{,}5 \cdot 10^{22}$ atoma po kubnom centimetru. Uzima se da je po svakom atomu jedan slobodni elektron, čiji je naboj $0{,}16 \cdot 10^{-18}$ kulona. Prema tome je ukupni slobodni naboj u bakru 13500 kulona po kubnom centimetru ili 13,5 kulona po mm^3. Neka kao primjer posluži gustoća struje od 1 A/mm^2, koju treba postići u bakru kao vodiču. Tolikoj gustoći struje odgovara dakle, $1/13{,}5 = 0{,}075$ mm/s brzina naboja.

Stvarne brzine slobodnih elektrona su neuporedivo veće. Kvantna mehanika je usvojila teoriju po kojoj N elektrona osnovnog energetskog stanja zauzima Fermijevu kuglu. Svi oni na kugli imaju istu energiju gibanja, tzv. Fermijevu energiju. Njihova je koncentracija N/V karakteristična za svaki metal. Ona je u bakru $8{,}5 \cdot 10^{22}$ slobodnih elektrona po cm^3. Brzina elektrona na površini Fermijeve kugle se dobiva iz energije, a ona iznosi

$$v_F = \frac{\hbar}{m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

Elektroni malih brzina imaju $\hbar/m = 1{,}16$ cm^2/s. Kako je u bakru $N/V = 8{,}5 \cdot 10^{22}$ el/cm^3, Fermijeva brzina elektrona je $1{,}56 \cdot 10^8$ cm/s = 1560 km/s. Fermijeva kugla osnovnog energetskog stanja elektrona se giba translatorno brzinom tek 0,075 mm/s pri gustoći struje u vodiču od 1 A/mm^2. Elektroni na površini iste kugle imaju brzinu 1560 km/s. To je tolika razlika u brzini, da pokazuje da struja u vodiču ne utječe na raspodjelu slobodnih elektrona u strukturi vodiča.

Gustoća struje je značajna veličina, koja vrlo korisno služi pri projektiranju različitih uređaja. S njome su vrlo često povezane osnovne dimenzije uređaja. U tablici gustoća struje navedeni su neki iznosi karakteristični u pojedinim slučajevima.

Gustoće struje
(prosječni iznosi)

TABLICA 1.1.

1.	Namoti električnih strojeva i transformatora	4	A/mm^2
2.	Namoti magneta hlađeni tekućim vodikom	100	A/mm^2
3.	Otporna žica u pećima	15	A/mm^2
4.	Volframova nit u žaruljama	400	A/mm^2
5.	Tekućinski otpori	15	A/dm^2
6.	Elektroliza bakra	25	A/dm^2
7.	Vrtložne struje u dinamo-limu u električnih strojeva	1,5	A/mm^2
8.	Električni luk pri svarivanju	15	A/mm^2
9.	Električni luk u lučnoj peći	30	A/mm^2
10.	Električni luk u plazmi	200	A/mm^2

Gustoća struje je funkcija mjesta u strujnom području, $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, y, z)$. Njezin plošni integral jest jakost struje koja prolazi kroz promatranu plohu. Da bi se mogla izvršiti ova integracija, mora se diferencijalnom elementu plohe dati vektorski

karakter. Element plohe kao vektor ima smjer normale na tome mjestu plohe. Vektor normale gleda uvijek iz promatranog prostora. Element plohe kao vektor se označava sa $\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, a tu je $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale.

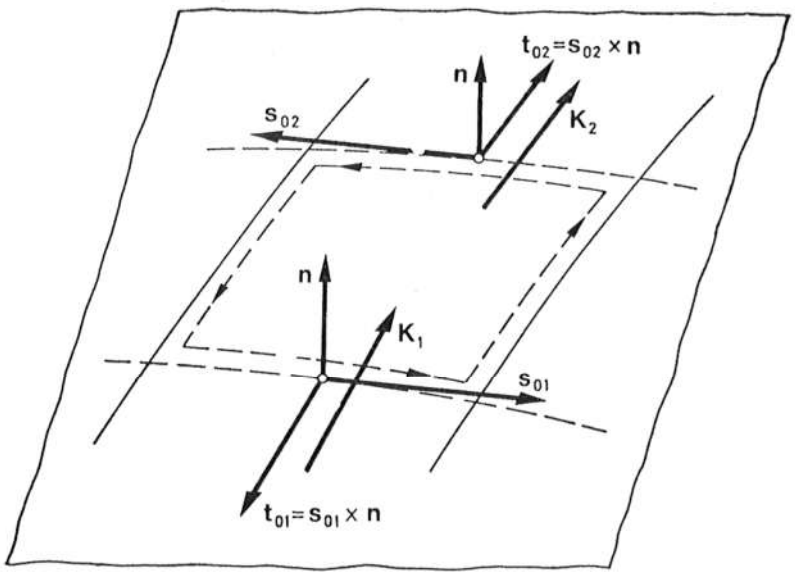
Jakost struje koja prolazi nekom plohom S dobiva se, prema tome, iz plošnog integrala

$$i = \int_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.11}$$

Na sl. 1.1. prikazana je strujna cijev. U presjeku S_1 struja ulazi, a u presjeku S_2 izlazi. Volumen strujne cijevi je promatrani prostor, te normale presjeka S_1 i S_2 gledaju kao što je na slici označeno. Skalarni produkt vektora $\mathbf{J}_1$ i $\mathbf{n}$ na ulaznom presjeku S_1 daje negativan iznos, a isti je produkt u presjeku S_2 pozitivan. Prema tome, struju koja *ulazi* u promatrani prostor treba računati *negativno*, a *izlaznu* struju *pozitivno*.

Može se govoriti o još jednom tipu gustoće struje. Kad struje teku geometrijskom plohom, treba uvesti veličinu *linijske gustoće struje* $\mathbf{K}$. To je također vektorska veličina koja ima smjer tangente na plohu u promatranoj točki. Odabere se dovoljno mala duljina luka Δs na plohi protjecanoj strujom. Mali luk se namjesti tako da ga strujnice prolaze ortogonalno, a preko njega prolazi struja Δi. Tada je linijska gustoća struje

$$K = \frac{\Delta i}{\Delta s} \tag{1.12}$$



Sl. 1.2. Pravokutnik plošnog strujanja. Na vodljivoj plohi S postoji električna struja, a dvije strujnice su označene kao pune linije. Okomito na njih su crtkano označene dvije ekvipotencijalne linije. One čine zajedno sa strujnicama pravokutnik plošnog strujanja. Unutar njega je crtkano označen smjer obilaženja.

Kao što se za promatranje prostornog strujanja primjenjuje strujna cijev, tako se za plošno strujanje može primijeniti **strujni pravokutnik** prema sl. 1.2.

Zapravo, on je krivolinijski pravokutnik i leži potpuno na plohi. Njegove dvije suprotne stranice su strujnice, a druge dvije suprotne stranice su dijelovi luka koje strujnice ortogonalno presijecaju.

Plošna struja, koja prolazi preko nekog luka s plohe, slijedi iz linijskog integrala linijske gustoće struje. Kako ova ima vektorski karakter, mora imati i element luka, kao vektor, vektorsku oznaku — **ds**

Obilazak elementarnog strujnog pravokutnika i normala **n** pokoravaju se *pravilu desnog vijka*. Obilazak i okretanje vijka se podudaraju, a tada je njegovo napredovanje u smjeru normale. To je općenito usvojeno pravilo. Jakost plošne struje koja prolazi preko takvog strujnog pravokutnika jedne osnove **ds** iznosi

$$i = \int_s \mathbf{K}\,(\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \tag{1.13}$$

Slično prostornim strujama, plošna struja je *pozitivna* ako *izlazi* iz strujnog pravokutnika.

Plošne struje i njihova teorija nalaze primjenu u električnim strojevima. Tamo je uobičajeno da se linijska gustoća struje zove *strujni oblog*. Strujni oblog jedna je od osnovnih veličina koja je ušla u teoriju električnih strojeva. Pojavu plošnih struja može se očekivati na granici između dva sredstva. Katkada se takve struje zovu *puzave* struje. One mogu biti razlog električnom proboju između dvije elektrode

1.4. JEDNADŽBA KONTINUITETA STRUJE

Električna struja nastaje gibanjem naboja. Vektor gustoće **J** doveden je u vezu s gibanjem naboja jednadžbom (1.10). Pri tome se uzima u obzir brzina gibanja naboja **v** relativno prema promatraču. Promatrana strujna cijev sa sl. 1.1. je mjesto promatrača. Promatrač se postavlja u bazu S_1 ili S_2, te tamo mjeri jakost struje. Kolika struja ulazi u S_1, tolika izlazi iz S_2. Ovo vrijedi uz jednu pretpotavku: ukupni iznos naboja u strujnoj cijevi ostaje konstantan. To znači, koliko naboja dotječe, toliko i otječe. Ovdje pomaže **zakon o održanju električnog naboja,** koji je jedan od osnovnih zakona fizike. Naboj ne može nastati niti nestati u izoliranom prostoru. Električno nabijanje nekog tijela znači odvođenje ili dovođenje nekog određenog naboja.

Iznos ulaznih struja u ograničeni prostor jednak je iznosu izlaznih struja iz njega. To je **Kirchhoffov zakon za struje.**

Takvo razmatranje vrijedi dok je naboj u prostoru V konstantna iznosa. Čim se iznos naboja mijenja, suma je svih struja različita od ništice. Ukupna struja koja izlazi iz zatvorenog, ograničenog prostora, jednaka je smanjenju naboja u jedinici vremena, koji se nalazi u promatranu prostoru. To se izražava jednadžbom

$$\oint \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

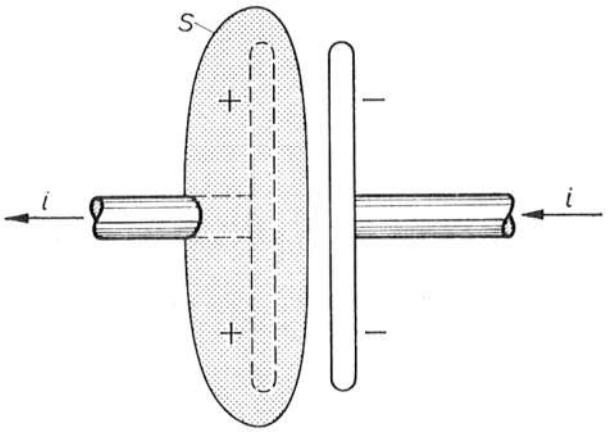
Naboj Q je raspoređen po prostoru V, te je ukupna struja

$$\oint_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\,\mathrm{d}V \tag{1.14}$$

Ploha S zatvara prostor V. To je *jednadžba kontinuiteta* u integralnom obliku za električnu struju.

Za prijelaz u diferencijalni oblik treba naglasiti da je prostor stalna oblika i ne giba se u odnosu na promatrača. Tada je $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}t = \partial\varrho/\partial t$. Primjenom Gaussova stavka na (1.14) dobiva se diferencijalni oblik jednadžbe kontinuiteta

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial\varrho}{\partial t} \tag{1.15}$$



Sl. 1.3. Pločasti kondenzator. Zatvorena ploha S obuhvaća jednu elektrodu, a služi u bilansi struje kondenzatora.

Kao primjer neka posluži proračun struje električnog kondenzatora skiciranog na sl. 1.3. Električni kondenzator ima na jednoj elektrodi pozitivni naboj $+Q$, a na drugoj negativni naboj $-Q$. Zatvorena ploha S obuhvaća samo jednu elektrodu, npr. sa $+Q$, a nju probada vodič kojim se priključuje elektroda u strujni krug. Plošni integral gustoće struje ima neki iznos samo pri integraciji preko presjeka vodiča, a jednak je jakosti struje i koja izlazi s elektrode. Jednadžba (1.14) daje tada jakost struje

$$i = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Budući da je naboj uvijek razmjeran naponu među elektrodama, $Q = Cu$, gdje je C kapacitet kondenzatora, jakost struje iznosi

$$i = -C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Takav rezultat ne bi se dobio kad bi ploha S obuhvaćala obje elektrode. U tome slučaju obuhvaćeni naboj je nula. Kao rezultat se dobiva da je izlazna struja jedne elektrode jednaka ulaznoj struji na drugu elektrodu.

Kirchhoffov zakon za struje primjenjuje se u teoriji strujnih krugova i odnosi se samo na struje. Kao što je rečeno, on kazuje da je suma izlaznih struja iz zatvorenog prostora jednaka sumi ulaznih struja u njega. Da bi se to primijenilo na električni kondenzator sa sl. 1.3., kad ploha S obuhvaća samo jednu elektrodu, bilo je potrebno uvesti još jedan tip električne struje, tzv. *pomačnu struju.* Treba pogledati još jednom jednadžbu (1.14).

Kirchhoffov zakon za struje se odnosi na struje nekog čvorišta. On govori da je suma svih struja u čvorištu jednaka nuli. On se izražava jednadžbom $\oint \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0$, gdje ploha S obuhvaća promatrano čvorište S. Jednadžba (1.14) se ne slaže s Kirchhoffovim zakonom. Ona se može uskladiti sa spomenutim zakonom ako se veličina $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \varrho\,\mathrm{d}V$ uključi u kategoriju struja. Tada je gustoća struje koja prolazi plohom S sastavljena od dvije vrsti struja

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathrm{pr}} + \mathbf{J}_{\mathrm{pom}}$$

$\mathbf{J}_{\mathrm{pr}}$ predstavlja *provodne struje* koje nastaju gibanjem naboja kroz promatrani prostor, ne zadržavajući se u njemu. Koliko naboja dolazi u promatrani prostor, toliko iz njega izlazi. $\mathbf{J}_{\mathrm{pom}}$ predstavlja *pomačne struje* koje su nastale vremenskom promjenom količine naboja u promatranom prostoru. Kad se tako definira struja, jednadžba kontinuiteta se izjednačuje s Kirchhoffovim zakonom za struje, tj. vrijede odnosi

$$\oint \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0$$

1.5. JAKOST POLJA

Dosad je bilo govora samo o naboju i o naboju u gibanju. Veličine polja nisu dotaknute. Električni naboj je stvaralac polja. U okolišu električnog naboja stvara se napeto stanje. Električni naboj djeluje na drugi električni naboj nekom silom. Djelovanje naboja na naboj prva je primijećena manifestacija naboja. Sile među nabojima prve su manifestacije koje su istraživane i analizirane. Paralelno se istraživalo djelovanje magneta na magnet. Ne postoji magnetski naboj, ali se slično ponašaju polovi dugih štapastih magneta. Pol magneta se promatralo kao magnetski naboj. Na tome je radila plejada istraživača s početkom u polovini osamnaestog

stoljeća. U vremenskom intervalu od sto godina praktički je bila riješena osnovna teorija elektromagnetskog polja. Naročito se pri tome ističu Volta, Faraday, Ampere i Maxwell. Uz njih je najveće ime Nikola Tesla, koji je zaslužan za tehničku primjenu.

Ne bi trebalo ići putem historijskog razvoja. Neke pojave povezane s električnim nabojem treba uzeti kao gotove činjenice. Danas se radi s veličinama za koje se ne mora pitati kako su i zašto nastale. Tako je naboj činjenica o kojoj ne treba raspravljati. Zato su uvedene veličine količine naboja, gustoće naboja i struje. Osnovna je manifestacija naboja sila.

Faraday je uveo u život pojam polja i silnica polja. Smatrao je da je to potrebno za tumačenje zakona o elektromagnetskoj indukciji. Do njega se govorilo samo o nabojima i silama. Bila je već ustanovljena sila kojom djeluje vodič protjecan strujom na magnet ili na drugi vodič protjecan strujom. Time je bila zaključena *elektrodinamika*. Ona je pokazala da nije potrebno uvoditi pojam magneta. Dovoljno je govoriti o silama među električnim nabojima koji se, najopćenitije uzeto, međusobno giblju jedan prema drugome.

Kasniji razvoj je pokazao da je potrebno uvesti pojam *elektromagnetskog polja*. Zahvaljujući tome, razjašnjeni su *elektromagnetski valovi*. Oni su pomogli da se rastumači prijenos djelovanja na daljinu. Pokazalo se da se sveukupna djelovanja naboja mogu rastumačiti elektromagnetskim poljem. Da bi se ono rastumačilo, uvedene su dvije kategorije polja, *električno* i *magnetsko polje*. Njihovo zbirno djelovanje predstavlja elektromagnetsko polje. Jedno i drugo je predstavljeno nekim veličinama koje treba da nadomjeste veličine naboja i sile među njima. Veličine električnog i magnetskog polja moraju biti *analogne jedne drugima*, da bi se izašlo sa što manje definicija. Prvi je korak, prema tome, da se uvede pojam *magnetskog naboja*, iako on ne postoji. Kao što se govori o sili između električnih naboja kad su u mirovanju, govori se i o sili između magnetskih naboja, također u mirovanju.

Najbliža je ideja da se uvede veličina koja predstavlja silu na jedinični naboj. Ta se veličina zove *jakost polja*. Prema tome je po definiciji *jakost električnog polja jednaka sili na jedinični električni naboj*, a po smjeru se podudara sa smjerom sile. Jakost električnog polja se označava sa **E**. U apsolutnom MKS-sustavu mjera **E** ima dimenziju njutn po kulonu, tj.

$$[\mathbf{E}] = 1\ \mathrm{N/C} = 1\ \mathrm{VAs/m} \cdot 1/\mathrm{As} = 1\ \mathrm{V/m}$$

Jakost polja se ne bi moralo definirati kao silu na jedinični naboj. Postoji i formacija naboja koja se zove *električni dipol*. Električni dipol se sastoji od dva jednaka točkasta naboja, samo suprotna predznaka, čvrsto vezana međusobno na udaljenosti dovoljno maloj u odnosu na udaljenost točke promatranja. Na električni dipol djeluje moment vrtnje u električnom polju. Jakost polja bi se tada moglo definirati kao moment vrtnje na dipol jediničnog dipolnog momenta. Dipolni moment dipola jednak je produktu naboja i razmaka među nabojima. Prema tome je jakost polja jednaka jediničnoj sili ili jediničnom momentu vrtnje.

Magnetski naboj je uveden po analogiji, te se *jakost magnetskog polja definira kao sila na jedinični magnetski naboj*. Na taj se način uspostavlja puna analogija s električnim poljem. Iako ne postoji magnetski naboj, postoji magnetski dipol. Magnetski dipol se realizira strujnom petljom čije su dimenzije dovoljno malene

prema udaljenosti točke promatranja. Tada je jakost magnetskog polja jednaka momentu vrtnje dipola jediničnog dipolnog momenta. Jakost magnetskog polja se označava sa **H**, a ima smjer sile na naboj. Magnetski naboj se mjeri veberima, te je dimenzija jakosti magnetskog polja u MKS-sustavu

$$[\mathbf{H}] = 1\ \mathrm{N/Wb} = 1\ \mathrm{VAs/m} \cdot 1/\mathrm{Vs} = 1\ \mathrm{A/m}$$

Jakosti polja
(prosječni iznosi)

TABLICA 1.2

1.	Električno polje visokonaponskog voda	1,5 kV/mm
2.	Kaskadni generator u dušiku pod tlakom 15 bara	20 kV/mm
3.	D-elektroda u ciklotronu	20 kV/mm
4.	Izolacija namota sinhronog generatora pri ispitnom naponu	18 kV/mm
5.	Elektrolitski kondenzator	15 kV/mm
6.	Unutarnjost vodikova atoma na putanji elektrona	125 000 kV/mm
7.	Koercitivna sila permanentnog magneta od R_5Co, legure s rijetkim zemljama	2,5 MA/m
8.	Koercitivna sila ALNICO permanentnog magneta	50 kA/m
9.	Zračni raspor električnih strojeva	700 kA/m
10.	Zračni raspor ciklotrona	1,1 MA/m
11.	Volframova nit u spirali žarulje u trenutku ukapčanja struje, njezina površina	30 kA/m
12.	Električni luk u plazmi	60 MA/m
13.	Zemljino polje, Zagreb	36,5 A/m

1.6. GUSTOĆA TOKA

U prethodnom poglavlju je uvedena prva veličina polja, jakost polja, koja je izvedena iz sile među nabojima. Druga osnovna veličina izvodi se iz samog naboja. U tome pomažu *silnice* polja, koje su uvedene zbog lakše predodžbe polja. Silnice su takve crte, čija tangenta u svakoj točki pokazuje sile na jedinični naboj. One počinju ili svršavaju na nabojima. Njihov broj je mjerilo za iznos naboja. To upućuje da se uvede vektorska veličina, koja se također po smjeru podudara s tangentom na silnicu, a čiji je *plošni integral po zatvorenoj plohi jednak ukupnom naboju unutar te plohe*. To se može izraziti za električni naboj i polje jednadžbom

$$Q = \oint \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.16}$$

Tu je **D** dotična vektorska veličina za električno polje. S takvom definicijom je **D** veličina toka. Plošni integral neke vektorske veličine daje ukupni iznos toka te veličine kroz plohu preko koje se integrira. Zato bi se naboj mogao prikazati tokom. Električni naboj proizvodi tok koji je numerički jednak naboju. To je tok električnog polja. Električni tok ima svoj izvor i ponor na nabojima. Zatvorena ploha ne mora sadržavati naboja. Tada je ukupni tok kroz zatvorenu plohu jednak nuli. Takav se slučaj pojavljuje katkad u električnom polju. Međutim, takav slučaj nastupa uvijek u magnetskom polju, jer ne postoji magnetski naboj.

Analogna veličina za magnetsko polje integrirana preko zatvorene plohe daje iznos nula, tj.

$$0 = \oint_S \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.17}$$

Tu je **B** vektorska veličina magnetskog polja, analogna vektorskoj veličini **D** električnog polja.

Obje veličine dovode na iznos toka, te se zato zovu *vektorske veličine gustoće toka*. One predstavljaju iznos toka na jedinicu površine postavljene okomito na smjer polja. Smjer polja je smjer sile na jedinični naboj, tj. smjer veličine jakosti polja. *Prema tome se vektori jakosti polja i gustoće toka podudaraju u smjeru, oni su kolinearni*. Govori se i o toku vektora gustoće toka **D** i **B** prema matematičkoj formulaciji. Prema tome, električni, odnosno magnetski tok kroz neku plohu S iznosi

$$\begin{aligned} \Phi_\mathrm{e} &= \int_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \\ \Phi_\mathrm{m} &= \int_S \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{1.18}$$

Vektori gustoće toka, **D** i **B**, zovu se još i *vektori indukcije*. Električni tok inducira naboj na vodiču koji je smješten u električnom polju. Promjena magnetskog toka inducira električnu struju, odnosno dovodi električni naboj u gibanje, u vodiču koji se nalazi u polju. Zato se ti vektori toka zovu još i vektori indukcije, električne, odnosno magnetske.

Jednadžba (1.16) govori da vektor električnog toka, odnosno električne indukcije, ima svoj izvor i ponor na nabojima. Taj je vektor izvorni. Uzevši u obzir definiciju gustoće naboja, može se jednadžba (1.16) pisati u obliku

$$\int_V \varrho\,\mathrm{d}V = \oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.19}$$

Plošni integral se proteže po plohi S, koja zatvara volumen V po kojemu treba provesti prostornu integraciju gustoće naboja. To je jedna od Maxwellovih jednadžbi u integralnom obliku. Ona objašnjava karakter vektora **D**.

Jednadžba (1.17) je odmah i jedna od Maxwellovih jednadžbi u integralnom obliku, koja objašnjava karakter vektora **B** za magnetsko polje. Vektor **B** je bez izvora i ponora, jer se zatvara sam u sebe.

Obje jednadžbe, (1.17) i (1.19), mogu se prikazati u diferencijalnom obliku iskoristivši Gaussov stavak. Gaussov stavak omogućuje da se plošni integral po zatvorenoj plohi neke veličine pretvori u prostorni integral po relaciji

$$\oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div}\mathbf{D}\,\mathrm{d}V$$

Plošna integracija se provodi po plohi S koja zatvara prostor volumena V po kojemu se provodi prostorna integracija. Uz pomoć toga stavka jednadžba (1.19) piše se u diferencijalnom obliku

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \tag{1.20}$$

a jednadžba (1.17) postaje

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{1.21}$$

Tako su dobivena četiri osnovna vektora polja, **E**, **H**, **D** i **B**. Prva dva su vektori sile, a druga dva su vektori toka. U definiciji vektora električnog polja ima i fizikalnog smisla, dok su veličine magnetskog polja uvedene u prvom redu po analogiji s električnim poljem. Jakosti električnog polja analogna je jakost magnetskog polja, a obje su izvedene iz sile među nabojima, odnosno iz momenta vrtnje dipola. Električnoj indukciji analogna je magnetska indukcija, odnosno gustoći električnog toka analogna je gustoća magnetskog toka. Na taj se način dobiva puna analogija u odnosima u električnom i magnetskom polju. O analogiji se može govoriti dotle dok se posebno promatra električno polje, a posebno — magnetsko. Smatra se da je elektromagnetsko polje nastalo superpozicijom pojava električnog i magnetskog polja. Kasnija će razmatranja unijeti više svjetla u opravdanost uvođenja ove analogije.

Gustoća električne struje je također vektor toka, te se može matematički uključiti u istu kategoriju. Ipak, ta se veličina ne može nazivati veličinom polja. Električna struja nastaje djelovanjem električnog polja na naboje. Tek to znači da će jakost struje ovisiti o jakosti električnog polja u vodljivu sredstvu. Jednadžba kontinuiteta

$$\oint_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\,\mathrm{d}V$$

o kojoj se govorilo u posebnom poglavlju 1.4., stavlja se u istu kategoriju kao i jednadžbe (1.17) i (1.19). I te jednadžbe bi se mogle nazivati jednadžbama kontinuiteta, ako se uzme u obzir kako su definirani vektori toka **D** i **B**. Ako se uspostavi takva analogija, nužno se mora uvesti i *strujno električno polje*, uz dosadašnje električno i magnetsko polje.

Prema tome se pojavljuju tri jednadžbe koje karakteriziraju vektore toka **D**, **B** i **J** i dovode ih u vezu s nabojem gustoće ϱ. Evo tih jednadžbi u integralnom obliku

III: $$\oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \varrho\,\mathrm{d}V$$

IV: $$\oint_S \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

V: $$\oint_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\,\mathrm{d}V$$

Potpuna vremenska promjena naboja u promatranom prostoru volumena V može nastati sama po sebi vremenskom promjenom iznosa naboja, zatim gibanjem naboja ili promatrača, a gustoća naboja je pri tome, ovisna o mjestu u prostoru. To se izražava jednadžbom

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\nabla)\,\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,\varrho$$

koja direktno pokazuje kakva se očekuje promjenljivost gustoće naboja. Neka je promatrač na miru u odnosu na naboj. Tada je diferencijalni oblik istih jednadžbi

$$\begin{aligned} &\text{III:} && \operatorname{div}\mathbf{D} = \varrho \\ &\text{IV:} && \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \\ &\text{V:} && \operatorname{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial\varrho}{\partial t} \end{aligned} \qquad (1.23)$$

Te jednadžbe bi mogle nositi naziv jednadžbi kontinuiteta, jer su sva tri vektora, **D**, **B** i **J**, vektori gustoće toka. One se ubrajaju često u Maxwellove jednadžbe i nose redne brojeve III, IV i V.

Kirchhoffov zakon za struje govori da je suma svih struja koje se sastaju u jednom čvorištu jednaka nuli. Razumije se, to vrijedi sve dotle dok u čvorištu nema naboja koji se mijenja. Taj zakon pretpostavlja da je vektor gustoće struje, **J**, bez izvora i ponora. Međutim, jednadžbe (1.22) i (1.23) pokazuju da je vektor

$$\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

bez izvora i ponora. Zato su uvedene dvije kategorije struja. *Provodne struje* su posljedica gibanja naboja u prostoru, što omogućuju materijali sposobni da vode struju, vodiči. Za njih je karakteristična gustoća struje **J**. *Pomačne struje* nastaju vremenskom promjenom električnog toka

$$i_{\mathrm{pom}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

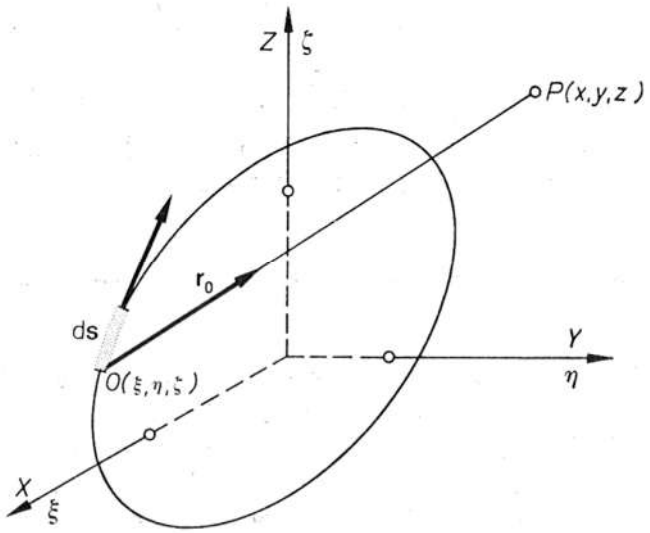
te se superponiraju na provodne struje. Njih karakterizira gustoća pomačne struje $\partial\mathbf{D}/\partial t$. Obje struje treba uzeti u obzir kad se primjenjuje Kirchhoffov zakon za struje. Suma svih provodnih i pomačnih struja nekog čvorišta jednaka je nuli. To znači da je

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (1.24)$$

Zbog takvog odnosa se jednadžba V u (1.22) i (1.23) nije ubrajala među Maxwellove jednadžbe. Ona je ovdje navedena samo da se održi analogija među tri tipa polja, električnim, magnetskim i strujno električnim. Takva analogija pomaže mnogo pri rješavanju problema.

1.7. BIOTOV I SAVARTOV ZAKON

Biot i Savart su 1820. godine objelodanili kakvom silom djeluje vodič protjecan strujom na magnetski pol, odnosno magnetski naboj. To je dovelo na određivanje jakosti magnetskog polja što proizvodi vodič protjecan strujom. Umjesto vodiča



Sl. 1.4. Strujnica s i točka promatranja P $(x, y, z,)$. Točka izvora O (ξ, η, ζ) se nalazi na strujnici i pripada koordinatnom sustavu ξ, η, ζ. Točka promatranja P (x, y, z) pripada koordinatnom sustavu X, Y, Z. Radijusvektor $r\,\mathbf{r}_0$ povezuje točke izvora i točke promatranja.

protjecanog strujom uzima se strujnica kojom teče struja jakosti i. Strujnica je zatvorena u sebe. Traži se jakost polja u nekoj točki P (x, y, z), prema sl. 1.4. Jakost polja strujnice s u točki P (x, y, z) iznosi

$$\mathbf{H} = \frac{i}{4\pi} \oint_s \frac{\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{r}_0}{r^2} \tag{1.25}$$

u racionaliziranom MKS-sustavu mjera. Strujni element ds je vektor koji gleda u smjeru struje, a nalazi se u točki O (ξ, η, ζ). Točka O (ξ, η, ζ) se zove točka *izvora*, a točka P (x, y, z) se zove točka *promatranja*. One su razmaknute na udaljenost r, a jedinični radijusvektor $\mathbf{r}_0$ gleda od točke izvora prema točki promatranja. Jednadžba (1.25) je **Biotov** i **Savartov zakon.** Nema potrebe da se ulazi u tumačenje kako je do njega došlo. On je gotova činjenica s kojom treba računati.

Elementarni oblik toga zakona je značajniji za teoriju polja. Do njega se dolazi primjenom strujne cijevi umjesto strujnice. Oko strujnice se formira strujna cijev dovoljno malog presjeka $\mathrm{d}S$ da je gustoća struje preko njega konstantna. Normala presjeka **n**, gustoća struje **J** i element strujnice ds su svi kolinearni vektori.

Tada se mjesto struje i stavlja $\int \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, te spomenuta jednadžba (1.25) prelazi u elementarni oblik

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times\mathbf{r}_0}{r^2}\,\mathrm{d}V \tag{1.26}$$

Sada je prostorni element $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}S = \mathrm{d}\xi \cdot \mathrm{d}\eta \cdot \mathrm{d}\zeta$ smješten u točku O izvora. Jakost polja $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z)$ traži se u točki P (x, y, z) promatranja. Mjerodavna je gustoća struje $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\xi, \eta\ \zeta)$ u točki izvora. Integracija se provodi po cijelom promatranom prostoru. Gustoća struje $\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)$ je neovisna o položaju točke promatranja. Jedina je veza između obje točke radijusvektor $\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{r}_0$. On iznosi u pravokutnom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{r} = (x - \xi)\,\mathbf{x}_0 + (y - \eta)\,\mathbf{y}_0 + (z - \zeta)\,\mathbf{z}_0$$

Coulombov zakon je pomogao da se definira veličina jakosti polja. On govori o silama među nabojima. To je bilo dovoljno za električno polje, ali nije bilo dovoljno za magnetsko polje. Tek otkriće magnetskog djelovanja vodiča protjecanog strujom omogućilo je formulaciju Biotova i Savartova zakona. Time su ujedno dovedeni u vezu električna struja i magnetsko polje, odnosno električno i magnetsko polje. Tako je došlo do pojma elektromagnetskog polja. Jednadžba (1.26) može se prikazati elementernije u obliku

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right)\mathrm{d}V \tag{1.27}$$

Operacija rot se odnosi na koordinatni sustav XYZ, te je zato $\mathrm{rot}\,\mathbf{J} = 0$, a $\mathrm{grad}\,(1/r) = -\mathbf{r}_0/r^2$. Biotov i Savartov zakon dovodi u vezu magnetsko polje i električnu struju. U tome je njegovo veliko značenje. Iz njega je nastala prva Maxwellova jednadžba. Ovdje ne treba ulaziti u dugački put istraživanja koji je doveo do konačnog oblika te jednadžbe. Može se reći da je taj put bio veoma dug i mučan. Ako se potraži iznos rot $\mathbf{H}$ iz jednadžbe (1.27), dobiva se da je

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Kako je $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$, znači da mora biti i $\mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0$, a to nije tako. To je bio problem koji nije bilo lako riješiti. Budući da je $\mathrm{div}\,(\mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t) = 0$, mora prva Maxwellova jednadžba glasiti

I: $$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.28}$$

za promatrača koji je na miru u odnosu na promatrani sustav.

Ta jednadžba govori da je magnetsko polje tzv. *vrtložno* polje, jer je rot $\mathbf{H} \neq 0$. Silnice magnetskog polja obuhvaćaju struje. Magnetska silnica je zatvorena krivulja, jer je div $\mathbf{B} = 0$. Ako se snop zatvorenih silnica promatra kao vrtlog, on mora obuhvaćati električnu struju. Treba imati u vidu da je ovdje mišljena ukupna električna struja, sastavljena od provodne i pomačne struje. Ako materijal u prostoru ne dopušta da teku provodne struje, jer je izolator, još uvijek postoje pomačne struje. Zato su i u tome slučaju mogući vrtlozi magnetskog polja. Dovoljne su samo pomačne struje da se uspostavi magnetsko polje. Tu je Maxwell odigrao revolucionarnu ulogu. On je pokazao da je moguća uzbuda magnetskog polja iako ne postoje struje u klasičnom smislu, tj. u obliku gibanja naboja u vodiču. Takva Maxwellova jednadžba je u suštini Biotov i Savartov zakon, samo prikazan tako da je lakša analiza polja. Tamo gdje se pojavljuje jakost struje treba stavljati ukupnu struju, $(i_{pr} + i_{pom})$, provodnu i pomačnu. Tako se dobiju ispravni odnosi. Zasluga je Maxwella što je rekao da i promjena vektora **D** izaziva pojavu magnetskog polja, a ne samo egzistencija gustoće struje **J**.

Jednadžba (1.28) je diferencijalni oblik. Prijelaz u integralni oblik se vrši primjenom Stokesova stavka. Taj, drugi oblik, izgleda tada ovako

$$\oint_s \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.29}$$

To je integralni oblik prve Maxwellove jednadžbe. On ima i veliku praktičnu primjenu u teoriji magnetskih krugova. Zato je uključen u kategoriju zakona, te se još zove i **zakon protjecanja.** Magnetske silnice formiraju same petlje koje su protjecane strujom. Nema snopa magnetskih petlji koje ne bi bile protjecane strujama, bilo samo provodnim, bilo pomačnim ili objema zajedno.

Postoji Coulombov zakon koji govori o sili među magnetskim nabojima. Osim toga postoji i Ampèreov zakon koji govori o sili vodiča protjecanog strujom na vodič protjecan strujom. Ovdje je opisan treći zakon, Biotov i Savartov, koji govori o sili vodiča protjecanog strujom na magnetski naboj. Budući da ne postoji magnetski naboj, već električna struja izaziva magnetske efekte, spomenuti zakoni su dobili drugi karakter. Ampèreov zakon ostao je u istom obliku. Biot-Savartov zakon se promjenio utoliko, što on govori kakvu jakost polja proizvodi neki vodič protjecan strujom. Coulombov zakon za silu među magnetskim nabojima ne treba uzeti u obzir, jer ne postoje magnetski naboji. Ostala ga dva zakona zamjenjuju.

Električni naboji djeluju jedan na drugi električnom silom koju regulira Coulombov zakon za naboje. Čim naboji dođu u gibanje ili se mijenjaju iznosom, pojavljuje se dodatna sila kojoj smo dali magnetski karakter, po tradiciji. Zato smo uveli magnetsko polje. Na taj način je znatno pojednostavljeno promatranje. Teorija elektrotehnike ne bi se mogla zamisliti bez pojma magnetskog polja. Kad se tako promatra problem, nalazi se opravdanje da se veličine magnetskog polja uvedu naprosto po analogiji s električnim poljem. Tako se dobivaju najjednostavniji odnosi.

1.8. FARADAYEV ZAKON O ELEKTROMAGNETSKOJ INDUKCIJI

U prošlom je poglavlju prikazano kako električna struja proizvodi magnetsko polje. M. Faraday je istraživao pod kojim uvjetima magnetsko polje može proizvesti električnu struju u vodiču. Da bi potekla struja u petlji formiranoj vodičem, mora postojati električni napon, mora postojati elektromotorna sila. Promjena magnetskog toka, koji obuhvaća petlja vodiča, inducira u njoj elektromotornu silu, pa prema tome i struju. *Inducirana elektromotorna sila u strujnoj petlji razmjerna je promjeni obuhvaćenog magnetskog toka u jedinici vremena.* To je **Faradayev zakon** *o elektromagnetskoj indukciji.* Prilagođen je teoriji polja, što je već Maxwell učinio. Umjesto inducirane elektromotorne sile pojavljuje se linijski integral jakosti električnog polja po zatvorenoj petlji, koja obuhvaća promatrani tok. Prema tome je

$$\oint_s \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.30}$$

To je ujedno **druga Maxwellova jednadžba** u integralnom obliku. Krivuljni integral se provodi po konturi plohe S kroz koju se promatra magnetski tok. Predznak minus ispred promjene toka odgovara **Lenzovu zakonu.** *Inducirana električna struja bi proizvela magnetski tok koji bi se suprotstavio promjeni toka zbog kojeg je nastala.* Taj predznak odgovara i silama koje vladaju u eletromagnetskom polju.

Prijelaz u diferencijalni oblik se vrši uz pomoć Stokesova stavka. Treba razlikovati mirne sustave i sustave u gibanju prema promatraču. Maxwellova jednadžba u diferencijalnom obliku za mirnog promatrača glasi

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.31}$$

Obuhvaćeni magnetski tok Φ nekom petljom **s** može se mijenjati zbog proste vremenske promjene polja ili pak zbog gibanja promatrača, odnosno petlje prema promatraču. Moguća je i promjena veličine petlje, tj. gibanje pojedinih dijelova petlje prema promatraču. Totalna promjena magnetskog toka može se prikazati jednadžbom

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\nabla)\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,\Phi \tag{1.32}$$

Prostorna promjena daje doprinos promjeni toka obuhvaćenog ili »ulančenog« petljom, samo ako postoji gradijent istog toka. Prosto gibanje petlje u homogenom polju ne daje doprinos promjeni toka.

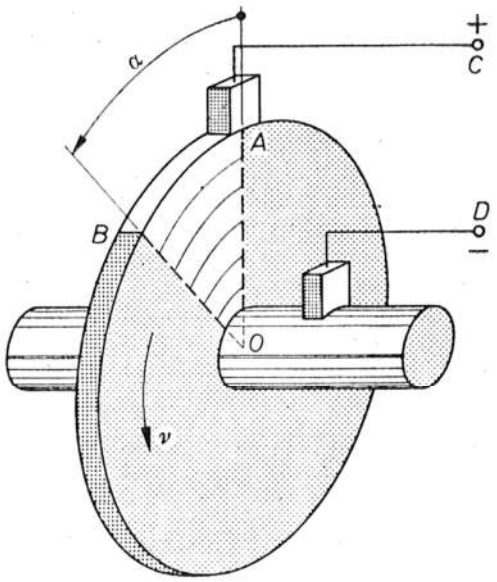
Drukčija situacija nastaje ako se promatra samo promjena indukcije. Tada je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\nabla)\,\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1.33}$$

Obje posljednje jednadžbe vode k istom cilju, ali svaka na svoj način doprinosi tumačenju promjene ulančenog toka. Prva jednadžba daje rezultat za petlju u cjelini, a druga govori o elementima petlje koji »režu« silnice magnetskog polja. Jedna i druga jednadžba se upotrebljavaju u praksi. Primjena Faradayeva zakona unijela je mnoge pomutnje. Pomutnje su nastale oko sagledavanja toka obuhvaćenog integracionom petljom, te oko utvrđivanja gibanja sustava u odnosu na promatrača. Kao što se vidi iz jednadžbe, jedan dio induciranog električnog polja nastaje zbog vremenske promjene magnetske indukcije, a drugi je dio zbog relativnog gibanja sustava. Čak su uvedena i dva naziva za inducirane napone, napon *transformacije* i napon *gibanja*. Bilo je autora koji su tvrdili da su to dva zakona, te treba biti oprezan kad se koji primjenjuje. Navodi se serija primjera gdje se može griješiti ako se krivo primijeni pojedini zakon induciranja. Lijep je primjer unipolarnog stroja. Uvijek je bila želja tehničara da učine generator istosmjerne struje bez komutatora, unipolarni stroj, povoljnog napona. Taj je problem sličan problemu perpetuum mobilea. Sve dolazi od pogrešne interpretacije Faradayeva zakona.

Dok u prvoj Maxwellovoj jednadžbi nije bitno da se uzme u obzir gibanje sustava, u drugoj jednadžbi to ima vrlo veliko značenje. Tipičan su primjer električni strojevi. Teorija plazme, koja je danas već veoma razvijena, zasniva se na gibanju sustava. Obično se primjenjuje druga jednadžba za mirne sustave, a samo kad je potrebno uzima se u obzir gibanje sustava.

PRIMJER 1.1. Faradayev disk, prema sl. 1.5., vrlo je poučan primjer kako treba primjenjivati drugu Maxwellovu jednadžbu, odnosno Faradayev zakon o elektromagnetskoj indukciji. To je metalna okrugla ploča ili disk na osovini, a vrti se konstantnom kutnom brzinom ν. Disk



Sl. 1.5. Faradayev disk. On je okrugla metalna ploča na osovini. Silnice magnetskog polja prolaze pločom u smjeru osovine. Inducirani napon i struja se oduzimaju četkicama. To je najjednostavniji oblik unipolarnog, električnog stroja.

se vrti u homogenom magnetskom polju indukcije B, koje je usmjereno paralelno osovini. Inducirani napon u disku se priključuje preko dviju četkica na neki teret. Jedna je četkica na obodu diska, a druga na jednom kliznom kolutu na osovini. Vrtnjom diska se inducira napon koji se mjeri

na četkicama O i A, odnosno na stezaljkama C i D. Ovdje se postavlja zadatak da se odredi inducirani napon, ako su zadani promjer diska d, njegova kutna brzina ν i indukcija B.

Taj se zadatak rješavao uvijek pravilom za napon gibanja. Na svakom elementu polumjera diska inducira se električno polje jakosti $E = r\,\nu\,B$. To daje na cijelom polumjeru diska inducirani napon

$$u = \nu B \int_0^{d/2} r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{8}\nu B d^2$$

Takav bi se napon dobio kad bi mjesto diska postojao samo vodljivi štap O B, koji bi kod B klizio po metalnom obruču, a kod O bi bio učvršćen na osovinu. U tome slučaju bi bila jasna integraciona petlja C A B O D C, od koje se nalazi u gibanju samo stranica O B. Ulančeni tok iznosi

$$\Phi = \frac{1}{8} d^2\,\alpha\,B$$

ako se zanemari ulančenje odvodima sa četkica, a uzima se samo površina O A B O. Gradijent ulančenog toka gleda samo tangencijalno na smjer rotacije, te je mjerodavna samo kutna brzina, tj.

$$\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,\Phi = \nu \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \frac{1}{8} d^2\,B\,\nu$$

To je ujedno inducirani napon na štapu OB. Zadatak je jednostavan kad štap rotira. Disk u rotiranju nema jasno postavljenu integracionu petlju, te je to osnovni problem Faradayeva diska. Priključci na četkice predstavljaju jasan dio petlje. Međutim, prijelaz od jedne četkice do druge preko diska nema jasnog integracionog puta. Nema sumnje da se disk nalazi u rotaciji prema promatraču, koji ujedno mjeri inducirani napon. Promatrač ustanovljava vrtnju diska fiksirajući na njemu neku značku. Ta značka je zamišljena krivulja koja spaja točke O i B. Ta je krivulja ujedno jedan dio integracione petlje, koji se upravo nalazi u gibanju, dok svi ostali dijelovi stoje. Spoj točaka O i B može biti bilo kakva krivulja, samo je važno da se točka B giba kutnom brzinom ν diska. Najjednostavnije je da je spoj tih točaka polumjer diska.

PRIMJER 1.2. Ovdje se navodi primjer koji je unosio smutnju u primjenu Faradayeva zakona o elektromagnetskoj indukciji. Na sl. 1.6. skicirana je pravokutna zavojnica, koja se njiše oko stranice O u homogenom magnetskom polju. Stranica njoj paralelna njiše se između mrtvih položaja B i C preko A. U smjeru osi X djeluje homogeno magnetsko polje, koje se mijenja harmonički frekvencijom ω. Njihanje zavojnice se odvija harmonički istom frekvencijom ω. Njihanje je sinhronizirano s promjenom polja tako, da upravo u mrtvim položajima B i C polje mijenja predznak. Napon gibanja stranice u njihanju mora zato imati inducirani napon uvijek istog smjera. Bukvalno tumačeno, na taj način mogao bi se postići istosmjerni napon u zavojnici povoljna iznosa prostim mijenjanjem broja zavoja. Tako bi se ostvario generator istosmjerne struje bez kolektora, što je bio san mnogih elektrotehničara.

Tako bi se dobio rezultat bukvalnom primjenom Faradayeva zakona. Situacija je ipak drukčija. Ako je površina zavojnice S, ulančeni tok iznosi

$$\Phi = S\,B \sin\alpha = S\,B_\mathrm{m} \cos(\omega t) \sin\alpha$$

Promjena ulančenog toka iznosi, ako je $S\,B_\mathrm{m} = \Phi_\mathrm{m}$

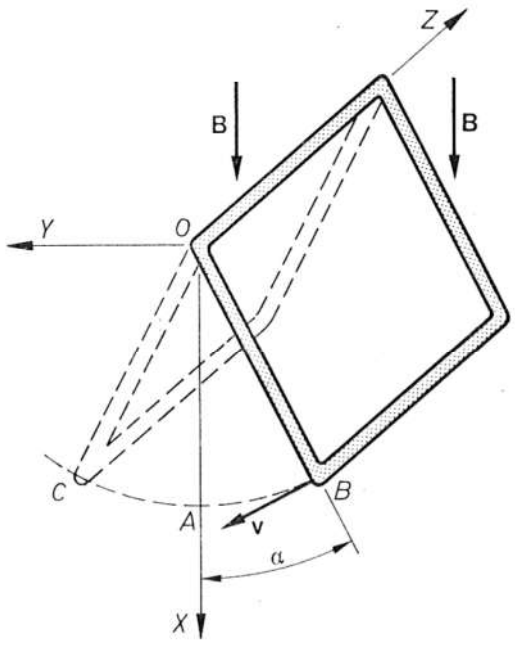
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\,\omega\,\Phi_\mathrm{m} \sin(\omega t) \sin\alpha + \nu\,\Phi_\mathrm{m} \cos(\omega t) \cos\alpha$$

Tu je $\nu = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ kutna brzina njihanja zavojnice. Promjena ulančenog toka nastaje zbog vremenske promjene polja i zbog gibanja zavojnice, što je uzeto u obzir pri derivaciji. Budući da je otklonski kut zavojnice harmonička funkcija

$$\alpha = \alpha_\mathrm{m} \sin(\omega t)$$

i mijenja se istom frekvencijom ω kao i polje, inducirani napon postaje složena funkcija od vremena. Kutna brzina iznosi

$$v = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega\, \alpha_{\mathrm{m}} \cos(\omega t)$$



Sl. 1.6. Pravokutna zavojnica u njihanju. Os jedne stranice u O je na miru, a okomita je na smjer magnetskog polja indukcije **B**. Njihanje je harmoničko, a polje se također mijenja harmonički. Obje su frekvencije jednake.

U ovom zadatku nije interesantan oblik induciranog napona, već eventualna pojava istosmjerne komponente. Istosmjerna komponenta je jednaka srednjoj vrijednosti induciranog napona. Međutim, traženje srednje vrijednosti induciranog napona pokazuje da je ona nula. Prema tome ne postoji uopće istosmjerna komponenta, te takav stroj ne bi ušao u kategoriju strojeva istosmjerne struje.

1.9. MAXWELLOVE JEDNADŽBE

U dosadašnjim poglavljima su definirane osnovne veličine polja, vektori jakosti polja

E i H

za električno i magnetsko polje i vektori indukcije ili gustoće toka

D i B

za električno i magnetsko polje. Osim toga su primijenjeni kao uzbudne veličine polja naboj Q i jakost električne struje i, kao integralne veličine. Kao diferencijalne veličine služe gustoća naboja ϱ, odnosno gustoća struje **J**, koja ulazi u kategoriju

vektora gustoće toka. Plošni integral vektora indukcije ili vektora gustoće toka predstavlja tok kroz promatranu plohu

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,dS \quad \text{električni tok}$$

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dS \quad \text{magnetski tok} \tag{1.34}$$

$$\Phi_s = \int_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,dS \quad \text{strujni tok}$$

Odnosi među osnovnim veličinama su regulirani Maxwellovim jednadžbama. One glase u integralnom obliku za mirne sustave

$$\text{I:} \quad \oint_s \mathbf{H}\,d\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\mathbf{n}\,dS$$

$$\text{II:} \quad \oint_s \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,\mathbf{n}\,dS$$

$$\text{III:} \quad \oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,dS = \int_V \varrho\,dV \tag{1.35}$$

$$\text{IV:} \quad \oint_S \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dS = 0$$

$$\text{V:} \quad \oint_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,dS = -\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dV$$

Iste jednadžbe glase u diferencijalnom obliku

$$\text{I:} \quad \text{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{II:} \quad \text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{III:} \quad \text{div}\,\mathbf{D} = \varrho \tag{1.36}$$

$$\text{IV:} \quad \text{div}\,\mathbf{B} = 0$$

$$\text{V:} \quad \text{div}\,\mathbf{J} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

Ima ih koji treću, četvrtu i petu jednadžbu ne ubrajaju u Maxwellove jednadžbe. One sačinjavaju tu skupinu, jer pomažu pri rješavanju polja, a ne slijede iz prve i druge jednadžbe.

Maxwellove su jednadžbe osnova za sva rješavanja elektromagnetskih polja. One su sinteza svega rada, kroz niz godina, plejade fizičara. U teoriji elektromagnetskog polja one su polazna osnova. Ima autora koji naprosto postave Maxwellove jednadžbe i smatraju ih postulatima o kojima ne treba diskutirati. Teorija polja, teorija strujnih i magnetskih krugova, te teorija vodova samo su primjena Maxwellovih jednadžbi, prilagođenih potrebi.

Tako postavljene jednadžbe se odnose na promatrača koji miruje prema sustavu. One služe analizi ponajbolje u tome obliku. Kad je potrebno, a to je posebno u teoriji konverzije energije, dodaju im se članovi koji uzimaju u obzir gibanje.

1.10. UTJECAJ SREDSTVA

Bilo koje sredstvo, kao određena formacija materije, uvijek je elektromagnetski aktivno. Ono se sastoji u osnovi od električki nabijenih čestica u gibanju, koje zato vrše elektromagnetske utjecaje. Na narinuto elektromagnetsko polje superponira se polje čestica sredstva. Rezultantno se polje razlikuje od narinutog. Utjecaji sredstva na narinuto polje su vrlo raznovrsni.

Postoji i obrnuto djelovanje. Narinuto polje djeluje na sredstvo, na njegova svojstva. Pod utjecajem polja sredstvo se deformira, zgusne, postaje kemijski aktivno, zagrije se itd. Oba djelovanja ulaze u široko područje proučavanja, u područje međudjelovanja elektromagnetskog polja i sredstva koje ispunjava prostor polja. Tu postoji velika šarolikost pojava kao posljedica međudjelovanja. U najnovije vrijeme poluvodiči su izazvali cijelu revoluciju u tehnici. Ulažu se veliki napori da se plazma iskoristi u kontroli termonuklearnih fuzionih procesa za dobivanje energije. Cijeli niz kemijskih procesa i metoda zasniva se na tim pojavama.

U ovome poglavlju prikazan je samo mali dio međudjelovanja sredstva i polja. Ta su međudjelovanja obuhvaćena pojmovima dielektričnosti, permeabilnosti i vodljivosti. Tim pojmovima se dobivaju dodatni odnosi među veličinama polja. Novi, dodatni odnosi, pojednostavnjuju razmatranja o elektromagnetskom polju. Smatra se da se svako sredstvo sastoji od električnih i magnetskih dipola i slobodnih električnih naboja. Oni će sudjelovati u konačnom formiranju polja. Pri tome je vođenje električne struje, koje je obuhvaćeno Ohmovim zakonom, poseban problem i postavlja se sasvim drukčije od problema dieelektričnosti, odnosno permeabilnosti. Neka su zasada u pitanju samo vektori **E**, **H**, **D** i **B**.

Prazan prostor ne sadrži nikakvo sredstvo. Tehnički se ono naziva *vakuum*. Po definiciji su **E** i **D**, odnosno **H** i **B**, međusobno kolinearni vektori. S druge strane, oni su suštinski različiti. Dok su prvi vektori sile, drugi su vektori gustoće toka. Sva četiri vektora se pojavljuju u Maxwellovim jednadžbama. Rješavanje se može pojednostavniti tako da se zanemare provodne struje, koje su i tako problem za sebe. Neka se pretpostavi da postoji linearni odnos između **E** i **D** i između **H** i **B**.

Neka je taj odnos za prazan prostor

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{1.37}$$

Uz ovu pretpostavku se mogu rješavati Maxwellove jednadžbe. Dobiju se valne jednadžbe. Dolazi se do neočekivanog rezultata, da je brzina rasprostiranja vala jednaka

$$c_0 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} \tag{1.38}$$

Ustanovljeno je da je to brzina svjetlosti u praznom prostoru. Konstante μ_0 i ε_0 su stvarne konstante za prazni prostor. Obje se ne mogu po volji odabrati. Ako se jedna odabere po volji, druga slijedi iz brzine svjetla. Danas je međunarodno usvojen MKS mjerni sustav. U njemu je odabran

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

da bi što bolje odgovarao dosadašnjem praktičkom sustavu mjera. U tome je slučaju ε_0 izveden i točan je koliko je točno određena brzina svjetla. Ona iznosi

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0} \approx \frac{10^9}{36\pi} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

Ne bi se moglo reći da su μ_0 i ε_0 fizikalne konstante, tj. da im se pridaje neko fizikalno značenje. One su nastale zbog usvojene definicije osnovnih veličina polja. Njih se može naprosto zvati *dimenzionim konstantama*. Dok nije poznata stvarna priroda električnog naboja, ne može se niti ovim konstantama dati fizikalno značenje. Mjerna dimenzija konstanti slijedi iz odnosa indukcije i jakosti polja, što je u MKS-sustavu

$$[\varepsilon_0] = \frac{[D]}{[E]} = 1 \text{ C/m}^2 \cdot 1 \text{ C/N} = 1 \text{ F/m}$$

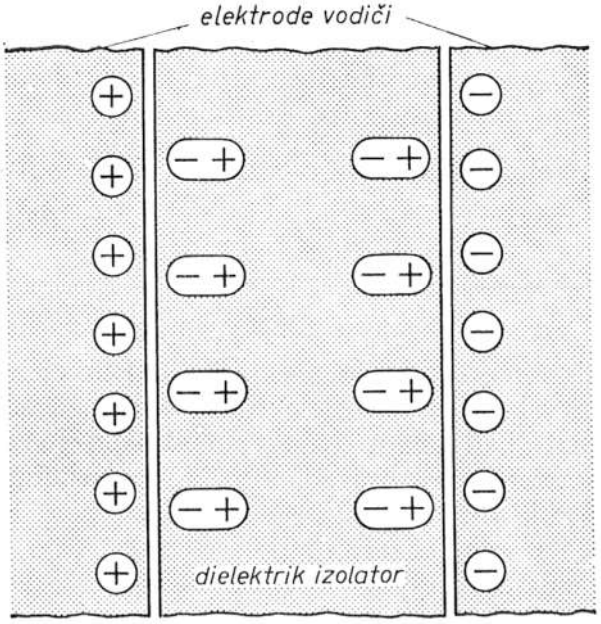
Slično je i za μ_0. U drugom mjernom sustavu bio bi iznos dimenzionih konstanti drukčiji. U Gaussovu sustavu mjera obje su konstante jednake jedinici, ali se zato pojavila konstanta c u Maxwellovim jednadžbama.

Provodne struje ne postoje u praznom prostoru. Kad se usvoje odnosi prema (1.37), Maxwellove jednadžbe poprimaju jednostavan oblik. Prve dvije glase

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.39}$$

To su dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice koje se jednostavno rješavaju. One imaju valni karakter.

Drukčija situacija nastupa kad se u prostoru polja nađe neko sredstvo koje sadrži dipole. *Sredstvo aktivno u električnom polju zove se* **dielektrik**. Neka posluži za razmatranje dielektrika pločasti kondenzator. Na njegove se elektrode dovede naboj prema skici na sl. 1.7. Plošna gustoća je dovedenog naboja σ, na lijevoj elektrodi pozitivna, a na desnoj — negativna. Nabijene elektrode proizvode u prostoru



Sl. 1.7. Dio pločastog kondenzatora. Između njegovih elektroda je dielektrik koji se polarizira pod utjecajem polja naboja na elektrodama.

među njima homogeno električno polje. Dielektrik se stavlja među elektrode. Pod utjecajem polja njegovi se dipoli postavljaju u smjer polja, *polariziraju* se. Dipoli se poredaju jedan iza drugog u lanac, kao na sl. 1.7. Na površini dielektrika pojavljuje se negativni naboj prema pozitivnoj elektrodi i obratno kod negativne elektrode. Plošna gustoća toga naboja je σ_p, a suprotna je predznaka prema naboju na elektrodi.

Polje u dielektriku nastaje superpozicijom polja naboja na elektrodama i polja polariziranih dipola. Više ne vrijedi odnos $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. U pločastom kondenzatoru je indukcija upravo jednaka plošnoj gustoći naboja na elektrodi $D = \sigma$, a upravljena je od pozitivne na negativnu elektrodu. Teorija polja dipola pokazuje da se u ovom slučaju njihov utjecaj može uzeti u obzir dodatnim plošnim nabojem na površini dielektrika, prema elektrodama, u suprotnom predznaku. Plošna gustoća polariziranog naboja na dielektriku, σ_p, ima manji iznos od plošne gustoće na elektrodi σ.

Polje u dielektriku proizvodi sad naboj plošne gustoće $(\sigma - \sigma_p)$. Jakost polja će imati smanjen iznos, tj. sila na jedinični naboj će se smanjiti. Ako je jakost polja prije unošenja dielektrika bila $\mathbf{E}_0$, neka je ona nakon unošenja dielektrika $\mathbf{E}$, *pri čemu elektrode zadržavaju isti naboj plošne gustoće* σ. Iznos jakosti polja se smanji u odnosu

$$\frac{E_0}{E} = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_p} = \varepsilon_r \tag{1.40}$$

Taj se odnos, ε_r, zove **dielektričnost** dielektrika. Mjesto odnosa $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ dolazi novi odnos između indukcije i jakosti polja za polje u dielektriku

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{1.41}$$

gdje je

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tag{1.42}$$

nova dimenziona konstanta, koja u sebi sadrži dielektričnost ε_r. Vrlo često se ε naprosto naziva dielektričnost, što nije točno, jer je ona definirana prema (1.40), ali to pojednostavnjuje način izražavanja, a ne dovodi u zabludu.

Plošni naboj na površini dielektrika računa se primjenom definicije dielektričnosti i on iznosi

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma \tag{1.43}$$

Po tome bi on bio u linearnom odnosu prema naboju na elektrodama, odnosno u linearnom odnosu prema jakosti polja u dielektriku. Ovdje treba nešto reći o dipolima u materijalu. Realni materijali imaju dvije vrste dipola. Jedni dipoli tek nastaju djelovanjem polja, *induciraju se*, a oni su odmah i polarizirani. To su *inducirani dipoli*. Drugi dipoli postoje u materijalu, *permanentni dipoli*. Na njih polje djeluje tako, da ih samo okreće u svoj smjer, tj. polarizira ih. Oba procesa, induciranje dipola i okretanje permanentnih dipola, zove se polarizacija dielektrika.

Polarizacija dielektrika se manifestira na njegovoj površini u pločastom kondenzatoru kao plošni naboj čije se djelovanje suprotstavlja djelovanju naboja elektroda. Polarizirani plošni naboj stoji u stanovitoj vezi s brojem dipola u dielektriku. On je u prvom redu ovisan o broju polariziranih dipola. Osim toga je ovisan o karakteru dipola. Broj dipola i karakter dipola su osnovna svojstva materijala koja pokazuju kako se materijal ponaša u električnom polju.

Različito se ponašaju plinoviti, tekući i kruti dielektrici. Uglavnom svi dielektrici pokazuju ovisnost o temperaturi. Veličina $(\varepsilon_r - 1)$ u plinova pokazuje približno linearnu ovisnost o tlaku. Ako je tlak plina dvostruk, tada i veličina $(\varepsilon_r - 1)$ postaje dvostruka. Ima materijala u kojih je moguća spontana polarizacija. Oni pokazuju na površini naboj bez prisustva narinutog polja. To su Seignetteova sol i barijev titanat. Oni imaju visoku dielektričnost od nekoliko hiljada, ali pokazuju i dielektričnu histerezu.

Svi materijali su dielektrici koji pokazuju svojstvo električne polarizacije. Isti materijali imaju i ostala elektromagnetska svojstva. Ne smiju se zamjenjivati *izolatori* s dielektricima. Izilatori su dobili svoje ime zbog njihova odnosa prema vođenju električne struje, a ne zbog svojstva polarizacije. Oni su samo *izraziti* dielektrici, jer je u njih naročito izražena polarizacija u odnosu na ostala svojstva. Dok je za dielektrik karakteristična samo dielektričnost, izolatori moraju imati nekoliko svojstava da se može ocijeniti njihov kvalitet. Obično se daju tri osnovna podatka:

1. dielektričnost,
2. vodljivost i
3. električna čvrstoća.

Između njih, *električna čvrstoća* je granična jakost električnog polja kad dolazi do *proboja* izolatora, tj. kad više ne može služiti kao izolator, jer je počeo voditi električnu struju u velikoj mjeri. Materijali ne dozvoljavaju da se na njih primjenjuju polja povoljne jakosti.

Dielektričnost je stanovito svojstvo materijala koje pokazuje kako se on odnosi prema djelovanju električnog polja. Ovom se teorijom pretpostavlja »pasivan« odnos ili »jednostrani«. Pretpostavlja se da materijal utječe na polje, dok se obrnuti utjecaj zanemaruje.

Slično se ponaša sredstvo u magnetskom polju. Ono sadrži magnetske dipole koji se usmjeravaju, polariziraju, pod utjecajem narinutog polja. Po analogiji s električnim poljem piše se odnos između indukcije i jakosti polja

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \tag{1.44}$$

Sada se μ_r zove **permeabilnost** dotičnog sredstva. Sredstvo aktivno u magnetskom polju zove se još i *magnetik*. Veliku polarizaciju pokazuju željezo i njegove legure, te se svi takvi materijali nazivaju *feromagnetici*. Polarizacija u magnetskom polju je vrlo složena pojava i još nije sasvim razjašnjena. To naročito vrijedi za feromagnetike. Permeabilnosti mogu biti znatno veće od dielektričnosti. One katkad iznose i po nekoliko desetaka hiljada. Svi feromagnetici imaju izraženo zasićenje kad su svi dipoli polarizirani. Odatle dalje permeabilnost opada. Feromagnetici pokazuju tipično nelinearan odnos između indukcije i jakosti polja.

Permeabilnost magnetika neferomagnetskih materijala pokazuje slično ponašanje kao i dielektričnost. Ona je konstantna pri konstantnim uvjetima kad polje nije jako, te pri srednjim frekvencijama. Opet se zbog jasnoće teorije uzima da je permeabilnost konstantna.

Vođenje električne struje je sasvim drukčiji problem od dielektričnosti i permeabilnosti. U teoriji polja pretpostavlja se da vođenje električne struje slijedi **Ohmov zakon.** On govori da je jakost struje kroz neki vodič razmjerna narinutom eletričnom naponu na vodiču. U elementarnom obliku to se izražava kao

$$\mathbf{J} = \varkappa \mathbf{E} \tag{1.45}$$

Ako u vodiču postoji električno polje jakosti **E**, u njemu teče struja gustoće **J** koja je razmjerna postojećoj jakosti električnog polja. Faktor razmjernosti zove se **specifična vodljivost** sredstva, ili naprosto **vodljivost.**

Vođenje električne struje se odvija drukčije u plinovima, drukčije u tekućinama, a drukčije u krutim sredstvima. Prema tome će ono različito ovisiti o uvjetima. Uvjeta ima mnogo koji utječu na vođenje. Oni su fizički, kemijski, elektromagnetski. I opet se oni u prvi mah ne uzimaju u obzir, te se pretpostavlja da je vodljivost sredstva konstantna.

Kao što je rečeno, svi izolatori vode u stanovitoj mjeri struju. Neka posluži kao primjer kondenzator skiciran na sl. 1.7. Ako je upotrijebljeni izolator vodljiv, ne može se održati naboj na elektrodama kondenzatora. Pri tome je mišljeno da kondenzator nije priključen na izvor napona koji bi održavao naboj na elektrodama

Provodna struja pločastog kondenzatora iznosi prema jednadžbi kontinuiteta

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = J\,S = i$$

Budući da je gustoća struje $J = \varkappa E$, a naboj elektrode slijedi iz indukcije, $Q = D\,S = \varepsilon\,E\,S$, onda je dalje

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\varkappa}{\varepsilon}\,Q$$

Neka je

$$\frac{\varepsilon}{\varkappa} = T \tag{1.46}$$

U tome slučaju naboj elektroda kondenzatora nestaje po zakonu

$$Q = Q_0\,e^{-t/T} \tag{1.47}$$

Ta se pojava zove *relaksacija naboja*, a vrijeme T-*vremenska konstanta* relaksacije naboja.

Ta je pojava sasvim općenita. Neka u nekom vodljivu prostoru postoji akumulirani naboj gustoće ϱ. Prema jednadžbi kontinuiteta, uz uvjet da je $\operatorname{div}\mathbf{D} = \varrho$, dolazi se na jednadžbu

$$\varrho + T\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = 0$$

a njezino rješenje je

$$\varrho = \varrho_0\,e^{-t/T} \tag{1.48}$$

To je identično sa (1.47). U vodljivu prostoru ne može se održati naboj. Sredstva se razvrstavaju prema relaksacionoj vremenskoj konstanti. Kao primjer neka posluže nekoliko materijala. Često se *voda* navodi kao dielektrik dielektričnosti 80. Dobro destilirana voda ima još uvijek vodljivost 10^{-4} S/m, te ne ulazi u kategoriju izolatora. Nitko neće doći na ideju da vodu tretira kao izolator. Tome odgovara vremenska konstanta relaksacije naboja oko 10^{-4} sekunda. Ne može se načiniti kondenzator koji bi imao destiliranu vodu kao dielektrik. Transformatorsko ulje ima dielektričnost oko 2, vodljivost oko 10^{-13} S/m, čemu odgovara relaksaciona vremenska konstanta oko 200 s. To je već dobar izolator, iako nema tako veliko relaksaciono vrijeme. Među odlične izolatore spada lijevani kremen, čija je vodljivost oko 10^{-16} S/m, a dielektričnost oko 5, čemu odgovara vremenska konstanta oko 5 dana. Jedan od najboljih izolatora uopće je politetrafluoretilen, čija je vodljivost oko 10^{-17} S/m, a dielektričnost oko 2, čemu odgovara vremenska konstanta oko 20 dana. Izolatori se ne mogu ocjenjivati na ovaj način. To bi bila samo najgrublja ocjena. Konačna ocjena im se daje tek u konstrukciji, gdje se primjenjuju. Posebno kod vodljivosti izolatora veliku ulogu ima vođenje električne struje po površini, što se ne može obuhvatiti na ovaj način. Upravo su površine izolatora kritične za sigurnost pojedinih konstrukcija. Najčešće dolazi do električnih proboja po površini izolatora.

Vodiči imaju izrazito svojstvo vođenja električne struje. Takvi materijali raspolažu slobodnim nabojima koji se mogu gibati njegovim interatomarnim prostorom. Metali su tako dobri vodiči, da zahtijevaju posebno mjesto. Prva teorija o električnom vođenju metala primijenila je *elektronski plin*. Metalima je potrebno električno polje da bi se pokrenula struja. Polje je toliko slabo, da polarizacija atoma nema uopće značaja. Ako se bukvalno računa vremenska konstanta relaksacije, vidi se da je toliko malena da se metali nikako ne mogu ubrajati među dielektrike. Vodiči, posebno metali, toliko su vezani za elektrotehniku da se smatraju sinonimom elektrotehnike. Zato je posebno značajno proučavanje vodiča.

Kad se vodič nađe u električnom polju, na njemu se pojave naboji. Oni su na njegovoj površini. Plošna gustoća naboja na vodiču jednaka je $\sigma_v = \varepsilon E$, tj. jednaka je iznosu vektora **D** na tome mjestu. Površina vodiča je ekvipotencijalna ploha, tj. silnice dolaze normalno na nju. Tamo gdje silnice ulaze na površinu nalazi se negativni naboj, a gdje izlaze s vodiča smješten je pozitivni naboj. Iako je površina vodiča ekvipotencijalna ploha, na njoj se mogu nalaziti skupine i jednih i drugih naboja. To je moguće samo uz utjecaj vanjskih sila. Naboj se održava na izoliranom vodiču, ako je tamo jednom doveden. Ovo opisano stanje postoji samo ako nema gibanja naboja po vodiču, tj. održava se statičko stanje. U tome slučaju električno polje se ne može razviti u unutarnjosti vodiča. Silnice polja počinju i svršavaju na površini vodiča.

Time je uspostavljena veza između vektora gustoće toka i vektora jakosti polja. Dielektričnost, permeabilnost i vodljivost su konstante koje predstavljaju utjecaj sredstva na polje. One su u prvom približenju prave konstante. Realni materijali su daleko od toga da bi dopustili linearne odnose. Na njih utječu, više-manje, fizičke veličine koje i inače utječu na svojstva materijala. To su temperatura, tlak, mehanički naponi, kristalna i molekularna struktura i sl. Čak određivanje elektromagnetskih konstanti služi utvrđivanju mehaničkog stanja materijala. Poznata je klasična primjena *otpornih* termometara kod kojih se određuje temperatura iz promjene njihova električnog otpora.

Posebno mjesto zauzimaju *anizotropni* materijali. U njih odnos među vektorima polja ovisi o smjeru polja. Po tome svaka komponenta vektora gustoće toka ovisi o svim komponentama jakosti polja. To se izražava na primjeru električnog polja

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3 \\ D_2 &= \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3 \\ D_3 &= \varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3 \end{aligned} \tag{1.49}$$

To se jednostavno piše

$$D_i = \sum_{k=0}^{3} \varepsilon_{ik} E_k \tag{1.50}$$

ili naprosto $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, kao i prije. Ovdje je ε_{ik} postao tenzor, te ovu operaciju treba shvatiti kao množenje tenzora i vektora. U sva tri slučaja materijali pokazuju anizotropiju, te treba očekivati da su sve tri konstante, dielektričnost, permeabilnost i vodljivost, tenzori.

To su simetrični tenzori, tj. mora biti zadovoljena jednakost

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \qquad \mu_{ik} = \mu_{ki}, \qquad \varkappa_{ik} = \varkappa_{ki}$$

Množenje vektora simetričnim tenzorom daje ponovno vektor. Prema tome, vektori polja ostaju vektori i u anizotropnom sredstvu. Međutim, kolinearnost vektora gustoće toka i vektora jakosti polja više ne postoji, što ima značajne posljedice. Primjerice, dvolomnost elektromagnetskog vala je posljedica anizotropije. Anizotropija je posljedica u prvom redu kristalne strukture materijala.

Obično se anizotropnost zanemaruje. Ona se mora uzeti u obzir samo kad je naročito izražena. To je u današnje vrijeme u slučaju primjene feromagnetskih materijala. Već se mnogo iskorištavaju magnetski limovi »orijentirane« teksture, koja im daje preferirani smjer magnetiziranja.

1.11. UVJETI NA GRANICI

U prethodnom poglavlju prikazan je utjecaj sredstva na elektromagnetsko polje. Sredstvo je jednolično ispunjavalo promatrani prostor. Kratko je ukazano na poteškoće koje se pojavljuju kod primjene realnih materijala. Konstante sredstva, dielektričnost, permeabilnost i vodljivost smatraju se najčešće konstatnim. Iznošenjem teorije polja na taj način, opisi pojava postaju pregledniji i jasniji. Promjenljivost konstanti sredstva unosi velike teškoće u teoriju.

Neophodno je potrebno da se uzme u obzir i mogućnost upotrebe nekoliko vrsta sredstava. Promatrani prostor ispunjen je, primjerice, sa dva sredstva. Ona nisu međusobno pomiješana, već svako sredstvo zauzima svoj dio prostora, nekom plohom odijeljen od drugog dijela. Postavlja se pitanje kako je s valjanošću Maxwellovih jednadžbi na prijelazu iz jednog sredstva u drugo. U svakom sredstvu za sebe vrijede Maxwellove jednadžbe. Njihovo ispitivanje na samoj granici mora dati uvjete za prijelaz iz jednog sredstva u drugo. Primjenjuje se integralni oblik jednadžbi. Prva Maxwellova jednadžba glasi

$$\oint_s \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.51}$$

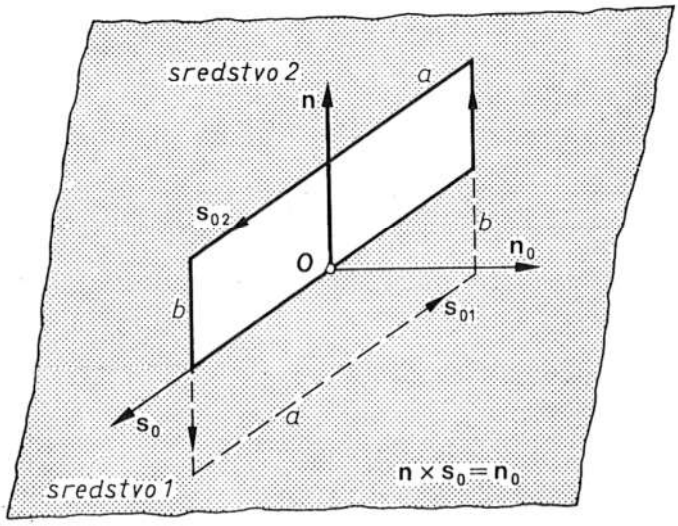
Nju treba primijeniti na pravokutnik 1 2 3 4 1 na sl. 1.8. Sredstvo 1 odijeljeno je od sredstva 2 nekom plohom koja ima normalu $\mathbf{n}$ u točki O. Oko te točke opisan je pravokutnik 1 2 3 4 1 stranica a i b, dovoljno malenih da se veličine polja mogu smatrati konstantnima u njegovim dimenzijama. Ravnina pravokutnika je okomita na graničnu plohu u točki O, a normala na nju jednaka je $\mathbf{n}_0$. Ona je ujedno i tangenta na graničnu plohu. Osim toga u točki O tangenta $\mathbf{s}_0$ na graničnu plohu leži u ravnini pravokutnika. Smjerovi $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_0$ i $\mathbf{s}_0$ tvore pravokutni koordinatni sustav, a oni su svi jedinični vektori. Za njih vrijedi

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{s}_0 \tag{1.52}$$

Stranice a pravokutnika su paralelne sa $\mathbf{s}_0$, a njihovi jedinični vektori smjera su $\mathbf{s}_{01}$ i $\mathbf{s}_{02}$, takvi da je $\mathbf{s}_{02} = \mathbf{s}_0 = -\mathbf{s}_{01}$.

Veličine polja u sredstvu 1 nose indeks 1, a u sredstvu 2 — indeks 2. Jednadžba (1.51) primijenjena na pravokutnik na sl. 1.8. glasi

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{s}_{01} a + \mathbf{H}_2 \mathbf{s}_{02} a + \text{dodatak na } b = \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \mathbf{n}_0 a b \tag{1.53}$$



Sl. 1.8. Pravokutnik na granici između dva sredstva. On ima stranice a i b, a njegova je normala $\mathbf{n}_0$. Granična ploha S dijeli sredstvo 1 od sredstva 2, a ima normalu $\mathbf{n}$ u točki O. Ravnina pravokutnika siječe graničnu plohu u presječnici koja ima tangentu $\mathbf{s}_0$ u točki O.

Treba pogledati što se događa kad stranica b teži k ništici. Površina pravokutnika $a\,b$ teži također k ništici. Električni tok $\mathbf{D}\,\mathbf{n}_0\,a\,b$ teži isto tako k ništici. Drukčije je sa strujom. Prostorna struja $\mathbf{J}\,\mathbf{n}_0\,a\,b$ prelazi u plošnu struju $\mathbf{K}\,\mathbf{n}_0\,a$

$$\lim_{b \to 0} (\mathbf{J}\,\mathbf{n}_0\,a\,b) = \mathbf{K}\,\mathbf{n}_0\,a$$

Linijska gustoća struje $\mathbf{K}$ definirana je u poglavlju 1.3. Dodatak na b u (1.53) teži isto tako k ništici. Dijeljenjem cijele jednadžbe (1.53) sa a slijedi

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\,\mathbf{s}_0 = \mathbf{K}\,\mathbf{n}_0$$

Ovdje treba uvrstiti $\mathbf{s}_0$ iz (1.52), čime se dobiva

$$\mathbf{n}_0\,[\mathbf{K} - \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = 0$$

Da bi taj skalarni produkt bio uvijek ništica, mora drugi faktor biti ništica, što konačno daje

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \tag{1.54}$$

Prema tome prva Maxwellova jednadžba vrijedi u jednom i drugom sredstvu, ako je na granici zadovoljen dobiveni uvjet za jakost magnetskog polja. Taj se uvjet izriče i riječima. *Tangencijalna komponenta jakosti magnetskog polja pravi skok za iznos linijske gustoće struje na prijelazu iz jednog sredstva u drugo.* Kad ne postoje plošne struje, tangencijalne su komponente naprosto jednake.

Druga Maxwellova jednadžba glasi

$$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.55}$$

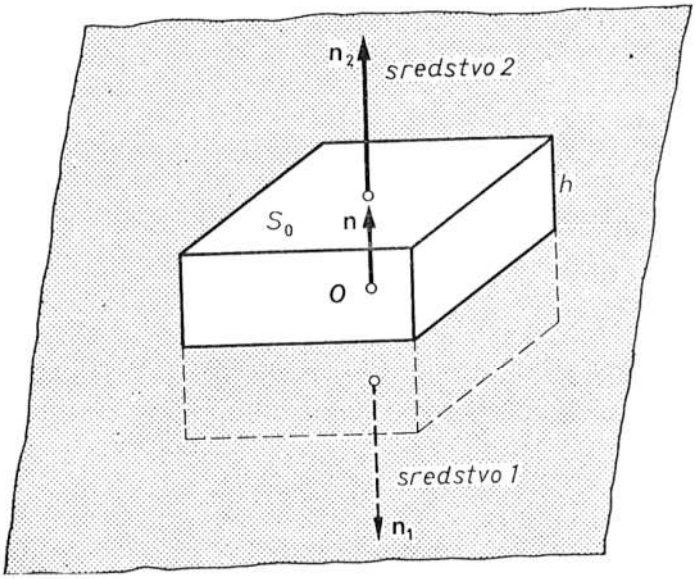
Konturni integral se primjenjuje na isti pravokutnik sa sl. 1.8. Ova je jednadžba slična prvoj, samo ne postoji nešto slično provodnoj struji. Zbog toga uvjet na granici naprosto glasi

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \tag{1.56}$$

Na granici između dva sredstva tangencijalne komponente jakosti električnog polja su međusobno jednake.

Treća Maxwellova jednadžba glasi

$$\oint \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \varrho\,\mathrm{d}V \tag{1.57}$$



Sl. 1.9. Cilindar na granici između dva sredstva. On ima osnove S_0 paralelne s graničnom plohom S, a visina mu je h. Normale njegovih baza su $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$, a normala granične plohe je $\mathbf{n}$ u središtu cilindra O. Sve su normale kolinearne.

Da bi se mogao provesti plošni integral na lijevoj strani, treba na granici odabrati prostor dovoljno malena volumena da su veličine polja u njemu konstante. Na sl. 1.9. je odabran na granici cilindar baze S i visine h, dovoljno malih dimenzija, odnosno

dovoljno malena volumena ($S_0 h$). Baza u sredstvu 1 ima normalu $\mathbf{n}_1$, a u sredstvu 2 — normalu $\mathbf{n}_2$. Normala na graničnu plohu u točki O u cilindru ide u smjeru $\mathbf{n}$, te je $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$. Maxwellova jednadžba se primijeni na prikazani cilindar na sl. 1.9., te ona glasi

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_1 S_0 + \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2 S_0 + \text{tok plašta} = \varrho S_0 h$$

Važno je promatrati ponašanje jednadžbe na granici kada $h \to 0$. U tome slučaju tok plašta iščezava. Prostorni naboj $\varrho S_0 h$ prelazi u plošni naboj σS_0. Konačno uvjet na granici za treću Maxwellovu jednadžbu glasi

$$\mathbf{n}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \tag{1.58}$$

Normalna komponenta električne indukcije čini skok za iznos plošne gustoće naboja na granici između dva sredstva.

Četvrta Maxwellova jednadžba glasi

$$\oint \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{1.59}$$

te je slično formirana kao (1.57), samo ne postoji nešto slično prostornom naboju. Primjenjuje se na isti cilindar sa sl. 1.9., te se dobiva uvjet

$$\mathbf{n}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \tag{1.60}$$

Na granici dvaju sredstava su normalne komponente magnetske indukcije međusobno jednake. Ako ne postoji naboj niti struja na graničnoj plohi između dva sredstva, normalne komponente indukcije su međusobno jednake, a također i tangencijalne komponente jakosti polja.

Preostaje još da se potraži uvjet za valjanost pete Maxwellove jednadžbe, koja glasi

$$\oint \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}V \tag{1.61}$$

Ova se jednadžba primjenjuje na isti cilindar sa sl. 1.9.

$$S_0(\mathbf{J}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{n}_2) + \text{struja plašta} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} S_0 h$$

Kad se pusti da h teži k ništici, struja plašta također teži k ništici, a prostorni naboj $\varrho S_0 h$ teži ka plošnom naboju σS_0. Uz odnos $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ konačno slijedi uvjet za valjanost jednadžbe kontinuiteta ili pete Maxwellove jednadžbe

$$\mathbf{n}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{1.62}$$

Ovaj rezultat treba gledati zajedno s uvjetom za **D**. Treba uzeti u obzir da je $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, a $\mathbf{J} = \varkappa \mathbf{E}$. I vektor električne indukcije i vektor gustoće struje vezani su na vektor jakosti polja. Ne može postojati prolaz polja i struje kroz granicu između dva sredstva, a da ne postoji plošni naboj. Ako su oba sredstva vodljiva, mora postojati plošni naboj na granici.

Neka su vremenske konstante relaksacije naboja $T_2 = \varepsilon_2/\varkappa_2$ i $T_1 = \varepsilon_1/\varkappa_1$. Tada iz oba uvjeta slijedi diferencijalna jednadžba

$$\sigma + T_1 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = (T_2 - T_1)\, \mathbf{n}\, \mathbf{J}_2 \tag{1.63}$$

ako je zadana gustoća struje u sredstvu 2. Plošnog naboja ne bi trebalo biti, ako bi relaksacione konstante bile jednake $T_2 = T_1$. To je rjeđi slučaj, a češće taj uvjet nije zadovoljen, te će se javiti plošni naboj. Rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$\sigma = \mathbf{n}\, \mathbf{J}_2\, (T_2 - T_1)\, (1 - e)^{-t/T_1} \tag{1.64}$$

Tu je predpostavljeno da prije narinuća polja nije bilo naboja na granici, tj. za $t = 0$, $\sigma = 0$. Nakon dovoljno dugog vremena ostaje stalan naboj na granici

$$\sigma = \sigma_\infty = \mathbf{n}\, \mathbf{J}_2\, (T_2 - T_1) \tag{1.65}$$

Toga naboja ne bi bilo kad bi relaksacione konstante bile jednake.

Kao primjer neka posluži granica između transformatorskog ulja i porculana. Prvo sredstvo ima vremensku konstantu oko 200 sekunda, a drugo oko 50 sekunda. Ovdje je već znatna razlika među vremenskim konstantama. Vodljivost porculana je oko 10^{-12} S/m, a narinuto polje u njemu neka je 2 kV/mm. Uz normalan upad polja pojavit će se naboj plošne gustoće oko 0,3 mC/m^2. Sam po sebi iznos plošnog naboja nije interesantan, interesantna je njegova pojava. Taj je naboj slobodan. Ako postoji tangencijalna komponenta polja, po površini teku struje. Čim su površinske struje dovoljno velike, pojavljuje se površinski proboj izolacije. Konstrukcija izolacije je sigurnija, ako električno polje nema tangencijalne komponente na prijelazu iz sredstva u sredstvo. Proces je nešto zamršeniji kad se polje vremenski mijenja. Ta se pojava treba razmatrati u vezi sa pojavom valova. Praksa pokazuje da su slojevite izolacije slabe na površini u izoliranju napona. Njihovu izolacionu sposobnost ograničava kvalitet površine.

Maxwellove jednadžbe vrijede u svim slučajevima. One moraju biti valjane na granici između dva sredstva. Da bi one bile zadovoljene na granici, polje doživljava stanovite promjene, kako je prikazano u ovom poglavlju. Primjena Maxwellovih jednadžbi na granici između dva sredstva dovela je do uvjeta koje moraju zadovoljiti vektori polja. Uvjeti polja na granici zovu se katkad i *Maxwellove jednadžbe na granici*.

2. STATIČKO POLJE

2.1. DEFINICIJA

Vrlo lako je matematički definirati statičko polje. *Statičko polje se vremenski ne mijenja.* To je vrlo jednostavna definicija, a ipak se dolazi u teškoće u primjeni. Strogo uzevši, nema polja koje se vremenski ne mijenja. Treba samo imati dovoljno vremena na raspolaganju i dovoljno točne instrumente da se ustanovi vremenska promjenljivost. Pitanje je kako postupati kad se ustanovi vremenska promjenljivost.

Potrebno je unijeti nešto dodatnoga u definiciju statičnosti. Redovita je težnja da se svi zadaci svedu na statičke. Oni postaju pregledniji, lakše matematički rješivi. Sva statička polja postaju slična. Za sva polja upotrebljava se isti matematički aparat. Samo su granični uvjeti različiti za pojedino polje.

Vremenska promjenljivost se ustanovljava prema nekoj referentnoj veličini. Promjena položaja nekog tijela u jedinici vremena zove se brzina. Tijelo mijenja svoj položaj brže, što mu je veća brzina. Ipak, za Mjesec se kaže da praktički stoji na nebeskom svodu, iako oko Zemlje obilazi brzinom oko 1 km/s. U isto vrijeme, tijelo koje se giba tek s nekoliko metara u sekundi, ali u blizini promatrača, izgleda da ima veliku brzinu. Ili primjer iz elektrotehničke prakse. Neka su to napon i struja koji se mijenjaju vremenski harmonički, tj. po zakonu sinusa, frekvencijom 50 Hz. Te će se veličine i njihovi efekti, dakle polje, promijeniti fazno za 180° u stotinki sekunde. Neka se smatra da je 5° zanemariva promjena faze. To odgovara vremenu $2{,}8 \cdot 10^{-4}$ s. Prema tome, ako se veličine promatraju u tako kratkom vremenu, neće se tehnički ustanoviti njihova vremenska promjenljivost. Promatrač je odabrao to vrijeme kao referentno, te je svaka pojava statična za promatrača u kome se zamijeti promjena, npr. za 1%, u referentnom vremenu. Elektromagnetske pojave se rasprostiru brzinom svjetla, tj. sa $3 \cdot 10^5$ km/s. U vremenu $2{,}8 \cdot 10^{-4}$ sekunda pomenuta pojava će se rasprostrijeti do udaljenosti oko 80 km. Prema tome, u kugli promjera 80 km mogu se promatrati statičke pojave, koje se mijenjaju harmonički sa 50 Hz, a dopušta se najveća promjena faze od 5°. U ovoj kugli ne treba uzimati konačnu brzinu rasprostiranja za citiranu pojavu.

Drukčije bi bilo za televizijsku frekvenciju. Neka ona iznosi 200 MHz. Raspoloživa kugla je promjera 21 mm za isti dozvoljeni fazni pomak od 5°. Teško će se naći mogućnost da se pojave televizijske frekvencije promatraju kao statičke.

Neka posluži kao daljnji primjer nabijanje kondenzatora preko otpora. Kondenzator ima kapacitet C, a otpor je R. Istosmjerni napon izvora ima iznos u. Po znato je da se uzima da se struja nabijanja mijenja po zakonu $i = (u/R) \cdot e^{-t/T}$.

U trenutku ukopčanja struja odmah poprimi jakost u/R, a tada opada eksponencijalno vremenskom konstantom $T = R\,C$. Sada treba pogledati realno stanje. Kondenzator je vodičima neke duljine spojen na otpor, pa na izvor struje. Ako vremenska konstanta T dođe u red veličine vremena potrebnog da se pojava rasprostre po sustavu, na može se struja nabijanja promatrati na uobičajen način. Neka je $C = 2000$ pF, a $R = 50$ oma, tj. $T = 10^{-7}$ sekunda. Za to vrijeme pojava se rasprostre u uzduhu do udaljenosti 30 m. Spojni vodovi mogu biti dugi u tome redu veličine. Ovdje se ne smije struja nabijanja promatrati da se odvija po gore citiranom eksponencijalnom zakonu. Nabijanje kondenzatora postaje vrlo složen zadatak kad treba uzeti u obzir konačnu brzinu rasprostiranja struje.

Harmoničke veličine se mijenjaju vremenski po zakonu sinusa određenom frekvencijom. Svakoj frekvenciji odgovara određena duljina vala po relaciji $\lambda = c/f$. Brzina rasprostiranja c pojave ovisi o sredstvu. U uzduhu ona iznosi približno 300.000 km/s. Tehničkoj frekvenciji od 50 Hz odgovara u uzduhu duljina vala od 6000 km. Prostor dimenzija od 60 km, što je stotinka duljine vala, dovoljno je malen da se u njemu pojave odvijaju *istodobno*, a vremenski se mijenjaju sa 50 Hz. Taj je prostor dovoljno malen da ne treba uzeti u obzir konačnu brzinu rasprostiranja pojave, ako se ona vremenski mijenja sa 50 Hz.

Uvjet za statičnost se izražava u odnosu na prostor i vrijeme. *Ako promatrani prostor ima dimenzije mnogo manje od duljine vala promatrane veličine, ona se smatra statičnom.* Kad veličina nije harmonična, zamišlja se rastavljena na harmoničke članove, te se harmonicima provjeri njezina statičnost.

Drugi način provjere se odnosi na vrijeme. *Ako se veličina promatra u vremenu mnogo kraćem od trajanja jedne periode, smatra se statičnom.* Taj je uvjet isti kao i prvi, samo je izražen vremenski, a ne prostorno. Ne mora to biti trajanje periode, nego vremenska konstanta kao pri izbijanju kondenzatora. Provjeru treba učiniti od slučaja do slučaja.

Postoji i treći način provjere statičnosti. Vremenske derivacije treba gledati u odnosu na druge veličine. U prvoj Maxwellovoj jednadžbi pomačna je struja vremenska derivacija električnog toka. Naprosto treba vidjeti kolika je pomačna struja u odnosu na provodnu. Ako je ona zanemarivo malena, zanemaruje se i ostaje samo provodna struja. Uzevši rečeno u obzir, u *statičkim poljima se zanemaruju pomačne struje.*

U drugoj Maxwellovoj jednadžbi je inducirani napon u petlji jednak vremenskoj derivaciji magnetskog toka. To se iskorištava u strujnim krugovima. *Ako su zadovoljena gornja dva uvjeta o statičnosti, zanemaruje se vremenska derivacija magnetskog toka u teoriji polja.*

Na taj se način znatno pojednostavnjuju Maxwellove jednadžbe za *statička polja*, kako slijedi

$$\text{I:} \quad \oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \qquad (2.1)$$

$$\text{II:} \quad \oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

$$\begin{aligned} &\text{III:} && \oint \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \varrho\,\mathrm{d}V \\ &\text{IV:} && \oint \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0 \\ &\text{V:} && \oint \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

To su jednadžbe u integralnom obliku, a u diferencijalnom obliku glase

$$\begin{aligned} &\text{I:} && \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \\ &\text{II:} && \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \\ &\text{III:} && \operatorname{div}\mathbf{D} = \varrho \\ &\text{IV:} && \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \\ &\text{V:} && \operatorname{div}\mathbf{J} = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Elektrostatsko polje je bez vrtloga, jer je rot $\mathbf{E} = 0$. Zato ono postaje **potencijalno polje.** Magnetostatsko polje je vrtložno u prostoru protjecanom strujama. U prostoru bez struja magnetostatsko polje postaje također bezvrtložno, tj. potencijalno. Strujno statičko polje je kao elektrostatsko polje bezvrtložno, tj. potencijalno.

Mjesto prve Maxwellove jednadžbe katkad se upotrebljava Biotov i Savartov zakon.

Ovdje će biti prikazano elektrostatsko, magnetostatsko i strujno električno polje. Ima vrlo sličnih statičkih polja koja vrlo slično izgledaju. To je u prvom redu strujno toplinsko, a zatim strujno tekućinsko. Za njih se uvode slične veličine kao u elektromagnetskom polju. Strujanje topline je vrlo slično električnoj struji. Jedno može nadomjestiti drugo u rješavanju zadataka. Gravitaciono polje je također slično. Bitna je razlika prema ostalima što ne postoje mase koje se odbijaju. Sve se mase privlače.

2.2. SKALARNI POTENCIJAL

Prikazivanje polja vektorskim veličinama unosi stanovitu neudobnost, karakterističnu u numeričkoj interpretaciji vektora. Numerička interpretacija traži jednostavnije puteve rješavanja, a to su, besumnje, skalari. Električni naboj se giba u polju, jer na njega djeluje sila. Kad ne bi bilo zapreka, on bi se gibao ubrzano. Naboj, gibajući se, sposoban je da vrši radnju. Isto tako treba trošiti energiju ako se naboj želi gibati protiv polja. Ako se naboj pomakne iz jedne točke u drugu protiv polja, poraste njegova potencijalna energija. Ta se energija vraća u obliku rada, čim se naboj vrati u polaznu točku. Budući da je izvršeni rad, odnosno akumulirana potencijalna energija, ovisna o iznosu naboja, pokusi se vrše s *jediničnim* nabojem.

Tada izvršeni rad ovisi samo o veličinama polja, odnosno o jakosti polja i prijeđenom putu. Umjesto o potencijalnoj energiji, govori se o **potencijalu.** On je skalarna veličina, jer fizikalno predstavlja energiju koja je skalar.

Kao što postoje energetski nivoi, postoje i potencijalni nivoi. Cijeli prostor ispunjen poljem može se izbaždariti potencijalima. Postoje plohe u prostoru istog potencijalnog stanja. Gibanjem naboja po njima ne troši se radnja, niti se dobiva. Za njih se kaže da su plohe istoga potencijala ili **ekvipotencijalne plohe.** Na tim plohama ne postoje potencijalne razlike. Tangencijalna sila ne djeluje na naboj ako se nalazi na ekvipotencijalnoj plohi, već samo normalna sila. To znači da silnica polja stoji normalno na nju. *Silnice su ortogonalne trajektorije ekvipotencijalnih ploha.* Sustav silnica i ekvipotencijalnih ploha je odlično pomagalo u analizi polja. Ekvipotencijalne plohe su nešto kao izoterme u toplinskom polju, izobare u tlačnom polju ili izohipse na površini Zemlje. Između pojedinih ploha postoji *razlika potencijala.*

Razlika potencijala između dviju točaka jednaka je radnji koju treba da izvrši jedinični naboj koji se giba protiv polja. Uzevši u obzir definiciju jakosti polja, razliku potencijala se izražava jednadžbom

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = \varphi_{21} \tag{2.3}$$

Redoslijed indeksa ($\varphi_2 - \varphi_1$) vodi računa o definiciji potencijala kao energije, koja se akumulira izvršenim radom. Linijski integral jakosti polja po zatvorenoj krivulji mora biti jednak nuli zbog energetskih razloga u statičkom polju, tj.

$$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = 0$$

To je neposredno vidljivo iz Maxwellovih jenadžbi. Isto se izražava odnosom

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$$

Zato je elektrostatsko polje *bezvrtložno.* To je ujedno razlog da postoje ekvipotencijalne plohe. Između njih je na svim mjestima ista razlika potencijala. To ujedno govori da se ne može raditi s ekvipotencijalnim plohama ako je polje vrtložno, tj. rot $\mathbf{E} \neq 0$.

Svaka od ekvipotencijalnih ploha može se smatrati *referentnom.* Njoj se pripisuje potencijal iznosa nula. Razlika potencijala prema referentnoj ekvipotencijalnoj plohi naziva se naprosto *potencijal.* Kad se govori o potencijalu, u nekoj točki prostora, treba ga zamišljati kao razliku potencijala prema referentnoj ekvipotencijalnoj plohi. Bilo bi vrlo teško odlučiti se za »apsolutni« iznos potencijala. Međutim, vrlo je važno koja je ploha referentna, koju se ujedno nazove plohom nultog potencijala.

2.2.1. Jednadžbe skalarnog potencijala

Sad je moguće napisati diferencijalni oblik definicije potencijala u statičkom stanju, tj.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{2.3}$$

Ta jednadžba ukazuje također na bezvrtložnost elektrostatskog polja. Iznos jakosti polja na nekom mjestu jednak je najvećoj prostornoj promjeni potencijala na tome mjestu, što je u skladu s definicijom vektorske operacije gradijenta. S druge strane, iznos neke komponente jakosti polja jednak je promjeni potencijala u istom smjeru, tj.

$$E_s = -\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

Ovako postavljena jednadžba potencijala karakteristična je za sva potencijalna polja. Ona neposredno omogućuje da se rješavanje polja svede na rješavanje potencijala. Treba uzeti u obzir odnose $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$ i $\operatorname{div}\mathbf{D} = \varrho$, pa se odmah dolazi na **Poissonovu jednadžbu**

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

Ona neposredno služi pri rješavanju polja. U njoj se ne pojavljuju više vektori polja, nego se potencijal dovodi u neposrednu vezu s nabojem. Ako naboja nema u promatranom prostoru, jednadžba poprima vrlo jednostavan oblik i kao takva se zove **Laplaceova jednadžba**

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.6}$$

To je čuvena jednadžba u svim potencijalnim poljima. Ona se rješava razmjerno jednostavno, naročito ako se upotrijebe elektronička računala. Takav oblik diferencijalne jednadžbe je već Laplaceova jednadžba, te nije vezana na potencijalna polja.

Potencijal se može dovesti u vezu s nabojem i integralnim putem. Primjenjujući Coulombov zakon, dolazi se na jakost polja naboja raspoređenog po prostoru. Sila između dva točkasta naboja iznosi prema Coulombovu zakonu

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon\,r_{12}^2}\,\mathbf{r}_0 \tag{2.7}$$

gdje je $\mathbf{r}_0$ jedinični radijusvektor koji gleda od Q_1 prema Q_2.

Po definiciji jakosti polja ista sila iznosi

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{E}_{12}\, Q_2$$

a $\mathbf{E}_{12}$ je jakost polja što proizvodi naboj Q_1 na mjestu naboja Q_2. Prema tome je ta jakost polja

$$\mathbf{E}_{12} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r_{12}^2}\,\mathbf{r}_0$$

Dobijena jednadžba je neposredna posljedica Coulombova zakona i definicije jakosti polja. Sad je jasna jednadžba jakosti polja raspoređenog naboja

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho\,\mathbf{r}_0}{r^2}\,\mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\varrho\,\mathrm{d}V \tag{2.8}$$

Jedinični radijusvektor $\mathbf{r}_0$ gleda od elementa volumena $\mathrm{d}V$ ili malog naboja $\varrho\,\mathrm{d}V$ prema točki promatranja polja. Takav odnos jakosti polja prema rasporedu naboja u prostoru vodi neposredno na potencijal koji glasi

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho\,\mathrm{d}V}{r} \tag{2.9}$$

To je integralni oblik jednadžbe skalarnog potencijala. Poissonova jednadžba slijedi neposredno iz integralnog oblika, ali je taj put matematički zamršeniji. Poissonova, odnosno Laplaceova jednadžba su diferencijalni oblik jednadžbe skalarnog potencijala.

Raspored naboja ne mora biti samo prostorni, već ga ima po površinama i krivuljama ili je točkasti naboj. Najopćenitija jednadžba potencijala glasi

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho\,\mathrm{d}V}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum \frac{Q_i}{r_i} \tag{2.10}$$

Ona uzima u obzir sve moguće rasporede naboja. Sad se tek vidi golema prednost primjene skalarnog potencijala u rješavanju polja. Jakost polja slijedi jednostavno iz potencijala po relaciji $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Potencijal definira polje u potpunosti.

Razlika potencijala se zove **električni napon.** To je uobičajen naziv u elektrotehnici. Električni napon i jakost struje su osnovne veličine elektrotehnike. Predznak električnog napona određen je razlikom potencijala, a prema tome se mijenja po potrebi.

Silnice ulaze okomito na površinu vodiča. Ne može postojati tangencijalna komponenta polja, inače bi postojalo gibanje naboja na površini. Ako su silnice okomite na površinu vodiča, onda je ona ekvipotencijalna ploha. *Površina vodiča je u elektrostatskom polju ekvipotencijalna ploha.* Budući da je takva situacija s poljem na površini vodiča, može se svaka ekvipotencijalna ploha nadomjestiti *vodljivom* plohom, razumije se, bez debljine, a da se u polju ništa ne promijeni. To je također jedan od načina rješavanja polja. Točkasti naboj ima kugline plohe kao ekvipotencijalne. Kugla može biti nadomještena vodljivom kuglom, a da se ništa ne mijenja. Prema tome, vodljiva, nabijena kugla, proizvodi isto polje kao i točkasti naboj na mjestu njezina središta.

Što je rečeno o potencijalu, vrijedi i za strujna električna polja. Jedina je razlika da umjesto odnosa $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ dolazi odnos $\mathbf{J} = \varkappa \mathbf{E}$. Strujnice se poklapaju sa silnicama, a ekvipotencijalne plohe ostaju iste.

2.2.2. Skalarni magnetski potencijal

Magnetostatsko polje nije bezvrtložno, te se ne može primijeniti skalarni potencijal. Ipak se po analogiji upotrebljava skalarni magnetski potencijal, koji je naročito opravdan u područjima bez struje, gdje je polje bezvrtložno, tj. gdje je rot $\mathbf{H} = 0$. To je opet

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi$$

$$\varphi_{21} = -\int_1^2 \mathbf{H}\,\mathrm{ds} \tag{2.11}$$

Linijski integral jakosti magnetskog polja po konturi plohe jednak je ukupnoj struji kroz plohu. Tada je

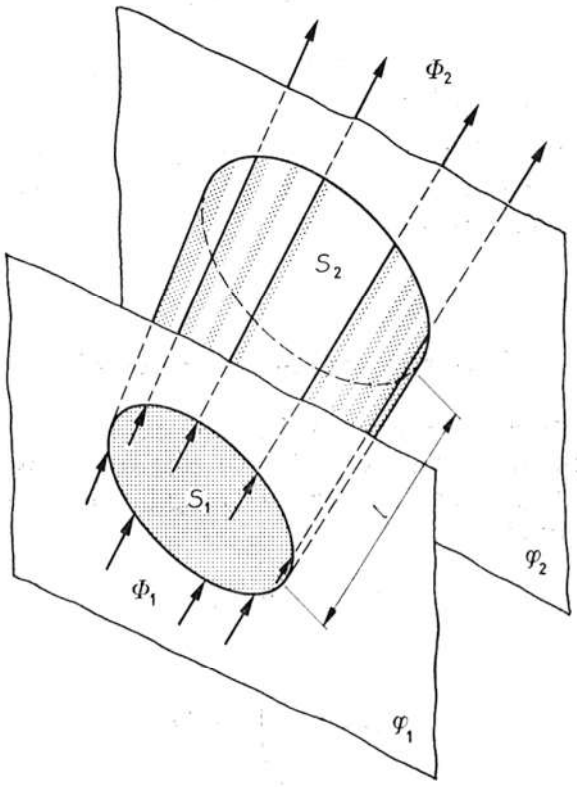
$$\sum \varphi_i = \int_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = i_u \tag{2.12}$$

i_u je ukupna struja koja prolazi plohom S. Ovo je na drugi način prikazana druga Maxwellova jednadžba ili zakon protjecanja. Razlika magnetskog skalarnog potencijala ili magnetski napon je uveden po prostoj analogiji s električnim naponom. Kad bi postojao magnetski naboj, primijenjena definicija bi imala fizikalni smisao. Ipak se ona upotrebljava mnogo u teoriji magnetskih krugova. Ukupna struja i_u kroz plohu S zove se još i *uzbuda* magnetskog polja. Zato se spomenuti odnos riječima izražava ovako: *suma magnetskih napona na zatvorenoj krivulji jednaka je obuhvaćenoj uzbudi.* Skalarni magnetski potencijal se ne upotrebljava u teoriji elektromagnetskog polja, ali se primjenjuje u rješavanju potencijalnih polja, pa tako i magnetostatskog polja.

Laplaceova jednadžba se odnosi i na magnetski skalarni potencijal. Primjenjuje se sustav ekvipotenijalnih ploha i silnica.

2.3. SILOCIJEV

Sustav silnica i ekvipotencijalnih ploha treba iskoristiti u analizi i rješavanju polja. Treba formirati cilindar dovoljno malen da se veličine polja mogu smatrati konstantnima unutar njega. U tu svrhu se odaberu dvije ekvipotencijalne plohe



Sl. 2.1. Silocijev. Ona je krnji stožac baza S_1 i S_2 koje su dijelovi ekvipotencijalnih ploha. Izvodnice plašta su silnice.

kao na sl. 2.1., u kojima leže baze cilindra. Izvodnice plašta su silnice. Na taj način je postignuto da silnice ulaze i izlaze samo na bazama, dok ni jedna ne probada plašt. Cilindar ne sadrži u sebi izvor polja, tj. naboje i struje. Takav se cilindar zove **silocijev.** Nekad joj se dodaje atribut elementarna, ali to nije nužno, ako ne treba istaći.

2.3.1. Provod i otpor silocijevi

Svakom silocijevi prolazi tok polja Φ, a između njezinih baza postoji razlika potencijala $\varphi_{12} = u$. Silnice probadaju baze ortogonalno, te je jednostavan proračun toka

$$\Phi = D\,S$$
$$\Phi = B\,S$$
$$\Phi = J\,S = i$$

ako je S srednja površina baza.

Neka je srednja duljina silocijevi l, a tada je napon između baza

$$u = E\,l \text{ u električnom i strujnom polju}$$
$$u = H\,l \text{ u magnetskom polju}$$

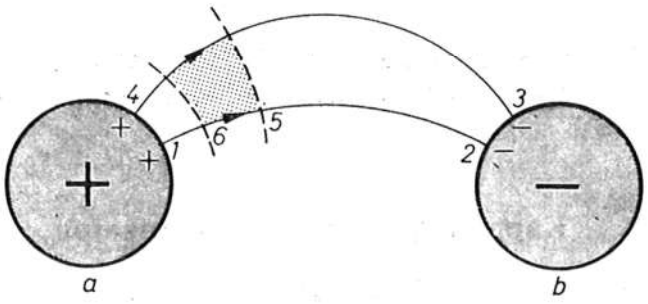
Ovdje nije uzet u obzir predznak napona. Isto tako je ispuštena vektorska oznaka. Jednadžbe su napisane za sva tri tipa statičkog polja. Odnos između toka i napona silocijevi je karakterističan za nju i ovisan samo o geometrijskim razmjerima i elektromagnetskim konstantama materijala, koji ispunja silocijev. **Provod** G silocijevi je definiran omjerom toka i napona $G = \Phi/u$, te iznosi

$$G = \varepsilon \frac{S}{l} \quad \text{elektrostatsko polje}$$
$$G = \mu \frac{S}{l} \quad \text{magnetostatsko polje} \qquad (2.13)$$
$$G = \varkappa \frac{S}{l} \quad \text{strujno električno polje}$$

Otpor R silocijevi jednak je omjeru napona i toka, tj. jednak je recipročnoj vrijednosti provoda, $R = 1/G = u/\Phi$, te iznosi

$$R = \frac{1}{\varepsilon} \frac{l}{S} \quad \text{elektrostatsko polje}$$
$$R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} \quad \text{magnetostatsko polje} \qquad (2.14)$$
$$R = \frac{1}{\varkappa} \frac{l}{S} \quad \text{strujno električno polje}$$

Na sl. 2.2. je prikazano polje silnicama i ekvipotencijalnim plohama između dva nabijena vodiča a i b. Površina vodiča je ekvipotencijalna, a silnice su na nju oko-



Sl. 2.2. Silocijevi između dvaju nabijenih vodiča a i b. Tragovi ekvipotencijalnih ploha ili ekvipotencijalne »linije« i silnice čine ortogonalnu mrežu.

mite. Takva se slika susreće u sva tri tipa polja, samo je pitanje što znači »nabijeni vodič« u magnetostatskom i strujno električnom polju. Feromagnetik ima mnogo

puta veću permeabilnost nego neferomagnetici, te on može imati ulogu »nabijenog vodiča« u magnetostatskom polju. Površina feromagnetika je ekvipotencijalna ploha s dovoljno točnosti. Strujno električno polje ima svoj »nabijeni vodič«. To je metalna elektroda opkoljena slabo vodljivim sredstvom, kao što je vlažno tlo ili elektrolit. Vodljivost metala toliko je veća od vodljivosti okolnog elektrolita, da je površina metalne elektrode ekvipotencijalna ploha s dovoljno točnosti. Opće ime za *nabijeni vodič* je *elektroda*, koja je izvor toka polja. Elektrode a i b na sl. 2.2. su jedna pozitivna, i tako izvor toka, a druga negativna, te tako ponor toka. Površine elektroda su ekvipotencijalne plohe, te se govori o razlici potencijala među elektrodama ili o naponu među njima. Također stanoviti tok prolazi s jedne elektrode na drugu, a on je određen provodom prostora između elektroda i naponom među njima.

Prostor među elektrodama na sl. 2.2. razdijeli se u sustav silocijevi. Nekima od njih protječe isti tok, a neke imaju isti napon među bazama. Silnice 1 - 2 i 4 - 3 ograničuju silocijevi kojima protječe isti tok. Za njih se kaže da su složene u *seriji*. S druge strane, ekvipotencijalne plohe 5 i 6 služe kao baze silocijevi koje sve imaju isti napon. Takve su silocijevi složene *paralelno*. *Silocijevi u seriji imaju isti tok*, a naponi im se zbrajaju. Ukupni napon iznosi

$$u = \sum_{1}^{m} u_k = \Phi \sum_{1}^{m} R_k = \Phi R$$

Odatle je njihov ukupni otpor

$$R = \sum_{1}^{m} R_k \quad \text{silocijevi u seriji} \tag{2.15}$$

Silocijevi paralelno imaju isti napon, a tokovi se zbrajaju. Ukupni tok iznosi

$$\Phi = \sum_{1}^{m} \Phi_k = u \sum_{1}^{m} G_k = u G$$

Odatle je njihov ukupni provod

$$G = \sum_{1}^{m} G_k \quad \text{silocijevi paralelno} \tag{2.16}$$

Iskorištavajući prikazana pravila slaganja silocijevi, serijski i paralelno, dolazi se na ukupni provod ili otpor prostora među zadanim elektrodama a i b.

2.3.2. Kapacitet, pločasti kondenzator

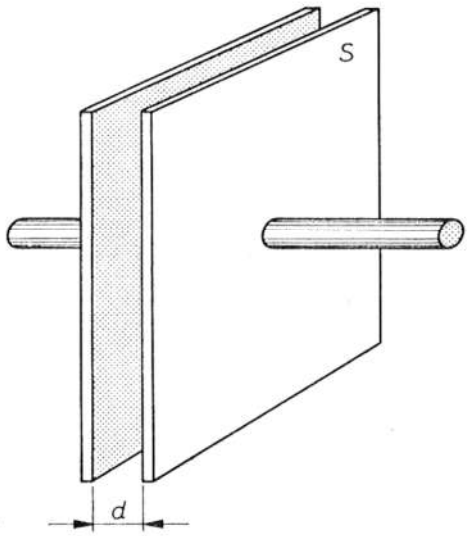
Mnogi se problemi mogu riješiti uz pomoć silocijevi. Vrlo često se silnice ili ekvipotencijalne plohe aproksimiraju da bi se došlo do rješenja. Provod i otpor u strujno električnom polju su potrebni da bi se imao odnos između napona i jakosti struje. Iste veličine imaju svoje značenje u teoriji magnetskih krugova. One su značajne u elektrostatskom polju kad se radi o nabijenim vodičima. Posebno, kad su u pitanju dva vodiča, ukupni električni tok jednog vodiča jednak je naboju na njemu. Prema tome, u tom slučaju omjer toka i napona među vodičima ujedno

je omjer naboja na vodiču i napona među njima. Ta se veličina sada zove **kapacitet,** a ne više — provod. Kapacitet između dva vodiča iznosi stoga

$$C = \frac{Q}{u} \tag{2.17}$$

a ima karakter provoda prostora između dva zadana vodiča. Q je naboj na jednom od vodiča, dok je na drugome isto toliki naboj, samo je suprotna predznaka. Dok se o provodu govori misleći na silocijevi, kapacitet se primjenjuje samo u vezi s vodičima. Provod je sposobnost prostora ispunjenog nekim materijalom da provede zadani tok. Kapacitet među vodičima pokazuje sposobnost skupljanja naboja na svojoj površini međusobnim djelovanjem. Tako se pokazuje stanovita fizikalna razlika provoda i kapaciteta.

Pločasti kondenzator se sastoji od dvije ravne paralelne ploče od metala kao na sl. 2.3. Među njima se nalazi izolator u ulozi dielektrika. Izolator treba da ima što manju vodljivost. Naboj je skupljen uglavnom na unutarnjim stranama



Sl. 2.3. Pločasti kondenzator. Razmak među elektrodama d je mnogo manji od njihovih dimenzija.

ploča, na jednoj — pozitivni, a na drugoj — negativni. Polje je homogeno među pločama, tj. jakost polja je konstantna. Utjecaj rubova ploča ne treba uzeti u obzir u prvom razmatranju. Ako su ploče razmaknute za d i imaju površinu S, iznosi kapacitet takvog pločastog kondenzatora

$$C = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \frac{S}{d} \tag{2.18}$$

ε_r je dielektričnost upotrijebljenog izolatora. Neka je površina ploče $S = 1\ \mathrm{m}^2$, a razmak između ploča $d = 1$ mm. Taj bi kondenzator imao kapacitet u uzduhu

($\varepsilon_r = 1$) $C = 8850$ pF. Jakost polja smije iznositi 1 kV/mm u uzduhu, da pogon kondenzatora bude siguran. Dakle napon između ploča smije iznositi 1 kV, a naboj na ploči iznosi $Q = C \cdot u = 8{,}85$ mikrokulona. To su razmjerno mali naboji.

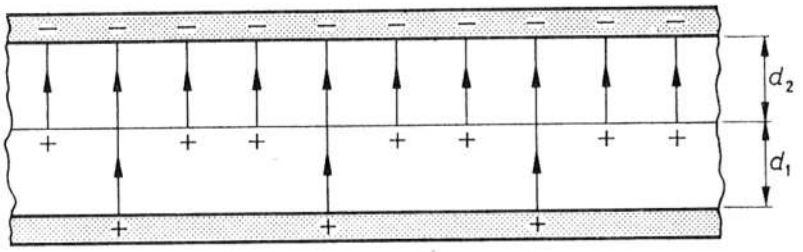
Pločasti kondenzator sa dva sloja izolacije debljine d_1 i d_2 i dielektričnosti ε_{r1} i ε_{r2} su električki dvije silocijevi u seriji, te im se otpori zbrajaju. Zato je kapacitet

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}$$

Neka je opet $S = 1$ m^2, a debljine iznose $d_1 = 0{,}2$ mm, $d_2 = 0{,}8$ mm. Dielektričnosti su $\varepsilon_{r1} = 2$, $\varepsilon_{r2} = 6$. Zato je kapacitet $C = 38000$ pF. Isti bi se kapacitet dobio jednim izolatorom dielektričnosti 4,3 i debljine 1 mm. Kad bi ovi izolatori imali vodljivosti $\varkappa_1 = 10^{-8}$ S/m i $\varkappa_2 = 10^{-12}$ S/m, a kako se otpori zbrajaju zbog serijskog slaganja silocijevi, iznosio bi ukupni otpor

$$R = \frac{1}{\varkappa_1}\frac{d_1}{S} + \frac{1}{\varkappa_2}\frac{d_2}{S} = 800 \text{ megoma}$$

Dozvoljene jakosti polja, koje ograničavaju iznos napona na kondenzatoru, neka iznose $E_1 = 20$ kV/mm i $E_2 = 30$ kV/mm.



Sl. 2.4. Isječak pločastog kondenzatora koji ima izolaciju među elektrodama, sastavljenu od dva sloja dielektrika.

Zadani kondenzator je skiciran na sl. 2.4. jednim svojim isječkom. Donja elektroda je priključena na pozitivni pol izvora, a gornja elektroda ima negativni predznak. Izvor održava konstantni napon na elektrodama. Budući da su izolatori vodljivi, njima teče struja koja je dana naponom i otporom R, koji je malo prije izračunat. Ako se uzmu u obzir uvjeti na granici između dva sredstva, moraju gustoće struje u oba sredstva biti jednake, jer je $d\sigma/dt = 0$, tj. mora biti

$$J_1 = J_2 = J$$

Kako je napon kondenzatora zadan sa

$$u = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

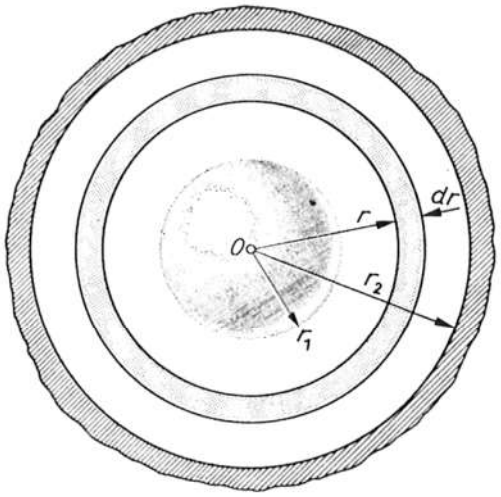
a uzevši u obzir dozvoljene jakosti polja, dobiva se napon od 24 kV. S tim naponom jakost polja iznosi 30 kV/mm u izolatoru 2, a samo 3 V/m u izolatoru 1. Izolatori su toliko različiti po vodljivosti, da samo jedan od njih preuzima sav napon. To je u ovom slučaju izolator 2, koji ima mnogo puta manju vodljivost, dakle je bolji izolator. S druge strane mora biti zadovoljen drugi uvjet na granici, da je

$$D_2 - D_1 = \sigma$$

kako su označeni predznaci na sl. 2.4. Naboj plošne gustoće σ javlja se na granici između izolatora. Budući da je $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2 = 1{,}8 \cdot 10^8 \varepsilon_0$ i $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = 6{,}0 \varepsilon_0$, iznosi plošna gustoća naboja na granici $\sigma = 1{,}8 \cdot 10^8 \varepsilon_0 = 1{,}59$ mC/m². Taj je naboj pozitivan kao i naboj na lijevoj elektrodi. To također govori da nema praktički polja u izolatoru 1, a da je polje pojačano u izolatoru 2. Naboji na elektrodama nisu jednaki kao što se pretpostavlja u kondenzatorima, zbog vodljivosti izolatora. Međutim, suma pozitivnih naboja jednaka je negativnom naboju. Kad izolatori ne bi bili vodljivi, mogao bi napon kondenzatora biti samo 9,3 kV, što je bitno manje nego prije. Sada veći dio napona preuzima prvi izolator, jer je njegova dielektričnost manja.

Ovaj primjer pokazuje kakav je složen problem kondenzatora koji ima slojeviti izolator, čiji su pojedini slojevi različite voljivosti. Teorija strujnih krugova pomaže da se lakše sagleda cijeli problem koji je bio načet u poglavlju o uvjetima na granici između dva sredstva.

PRIMJER 2.1. Neka posluži kao primjer određivanje **kapaciteta među koncentričnim vodljivim kuglama** polumjera r_1 i r_2 kao na sl. 2.5. Ekvipotencijalne plohe su koncentrične kugle, a silnice su radijusi. Na nekoj ekvipotencijalnoj plohi, r = konst., **E** i **D** su konstantni. Prema



Sl. 2.5. Kuglasti kondenzator. Njegove su elektrode od dvije koncentrične kugle.

tome, baza elementarne silocijevi je cijela kugla površine $4\pi r^2$, a duljina dr, dovoljno mala da zadovolji zahtjeve elementarne silocijevi. One su postavljene u seriju u odnosu na električni tok, dakle im se zbrajaju otpori.

Otpor elementarne silocijevi iznosi

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2}$$

a ukupni je otpor

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}R = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Prema tome je kapacitet među koncentričnim vodljivim kuglama

$$C = \frac{1}{R} = 4\pi\varepsilon \cdot \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{2.19}$$

Ovdje se uz pomoć silocijevi rješava i složeniji zadatak. Neka su među kuglama tri dielektrikuma umjesto jednoga. Oni su međusobno odijeljeni koncentričnim kuglama. Neka sada vodljive kugle imaju polumjere r_1 i r_4, kugla između prvog i drugog dielektrika — r_2, a između drugog i trećeg — r_3. Otpor prostora jednog dielektrika dobiva se kao prije, uz adekvatnu primjenu polumjera. Ukupni otpor među elektrodama iznosi

$$R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_3}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)$$

Odatle je kapacitet takvog kondenzatora jednak $C = 1/R$

PRIMJER 2.2. Linijski naboj na pravcu konstantne linijske gustoće ima ekvipotencijalne plohe koaksijalne, kružne cilindre, a silnice su radijalne. Isto polje ostaje ako se dvije ekvipotencijalne plohe nadomjeste vodljivim plohama, te nastane **cilindrički kondenzator.** Može se upotrijebiti sl. 2.5. Unutarnji vodič ima polumjer r_1, a vanjski r_2. Duljina cilindra l mnogo puta je veća od polumjera vanjskog cilindra. Elementarna silocijev je cilindrična ljuska dovoljno male debljine $\mathrm{d}r$, polumjera r i duljine l. Elementarne silocijevi su postavljene u seriju u odnosu na tok, te se zbrajaju otpori, tj.

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{2\pi r l}$$

Ukupni otpor iznosi

$$R = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

a kapacitet je jednak recipročnoj vrijednosti otpora, tj.

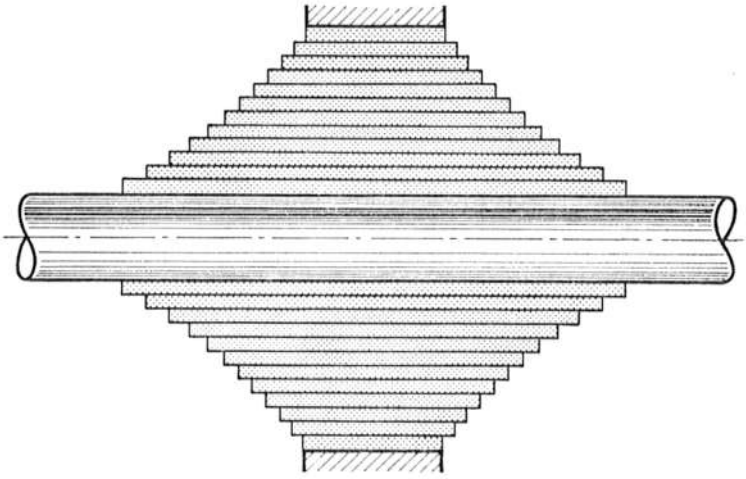
$$C = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{2.20}$$

To je kapacitet cilindričnog kondenzatora. Najveća jakost polja, koja nastaje na unutarnjoj elektrodi uz zadanu razliku potencijala $\varphi_{12} = u$ između elektroda, iznosi

$$E_{max} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r_1 l} = \frac{u C}{2\pi\varepsilon r_1 l} = \frac{u}{r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{2.21}$$

Ako je to kabel, zadana je razlika potencijala, odnosno napon i polumjer unutarnjeg vodiča. Upotrijebljena izolacija omogućuje određenu, najveću jakost polja E_{max}. Polumjer vanjske elektrode se u tome slučaju određuje iz (2.21). Za napon 70 kV, unutarnji polumjer od 8 mm i dozvoljenu jakost polja od 5 kV/mm iznosi vanjski polumjer $r_2 = 46$ mm.

PRIMJER 2.3. Postoje **kapacitivni provodnici.** Presjek je skiciran na sl. 2.6. Kružni vodič pod naponom treba provesti kroz neki nosač i prema njemu ga treba izolirati. Takvi su provodnici na transformatorima. Potrebno je da je vanjski polumjer r_2 što manji. To se postiže stavljanjem vodljivih cilindara među ljuske izolacije. Na unutarnji vodič stavlja se cilindar izolacije, a preko njega vrlo tanki vodljivi cilindar, metalna folija. Na vodljivi cilindar dolazi opet tanki sloj izolacije, a na ovaj vodljivi cilindar folija, ali kraći od predhodnog. Tako to ide redom do vanjskog nosača. Sloj izolacije između dva metalna cilindra je dovoljno tanak da se to može gledati kao pločasti kondenzator koji ima svuda iste uvjete polja. Duljina pojedinog metalnog



Sl. 2.6. Presjek kapacitivnog provodnika. Vodič je na visokom potencijalu, a metalni je nosač na nultom potencijalu. Između njih se stavlja slojevita izolacija, a između slojeva izolacije su metalne folije. Folije pomažu da je izolacija jednako električki napregnuta. Svi slojevi izolacije moraju imati podjednaki kvalitet.

cilindra je tolika, da se zadržava isti kapacitet među susjednim cilindrima. Prema tome mora biti izvršen uvjet $r_k l_k = \text{konst.}$ gdje je r_k polumjer vanjskog vodljivog cilindra, a l_k njegova duljina. U tome slučaju se održava jakost polja E_{max} u cijelom prostoru izolacije, koja je sada maksimalno iskorištena. Neka kao primjer posluži usporedba s običnim cilindričkim kondenzatorom, malo prije opisanim. Opet je napon na njemu 70 kV, a dozvoljena jakost polja iznosi 5 kV/mm. Ukupna debljina izolacije sada je jednaka $d = u/E_{max} = 70/5 = 14$ mm, te je vanjski polumjer $r_2 = r_1 + d = 8 + 14 = 22$ mm. U običnom cilindru vanjski polumjer je bio 46 mm. To je tolika razlika, da se isplati upotrijebiti kapacitivni provodnik umjesto običnog cilindričnog.

2.4. TOČKASTI NABOJ

Točkasti naboj je osnovna formacija naboja i polja koji služi direktno ili indirektno za rješavanje polja uopće. Ovdje se pretpostavlja da je naboj u geometrijskoj točki. Točkasti je naboj povoljan, jer je njegovo polje sferno simetrično, te se jednostavno dolazi na veličine polja. Ako je točkasti naboj Q, električna indukcija iznosi na nekoj udaljenosti r

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{r}_0 \tag{2.22}$$

a odatle je jakost polja $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$. Razlika potencijala između dvije točke u polju točkastog naboja slijedi iz njezine definicije

$$\varphi_{12} = -\int_{r_2}^{r_1} E\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.23}$$

Ako je r_2 mnogo puta veći od r_1, zanemaruje se $(1/r_2)$ prema $(1/r_1)$, te se govori o potencijalu polja točkastog naboja. Ako je sada $r_1 = r$ općenito

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \tag{2.24}$$

U tome se obliku upotrebljava jednadžba za potencijal polja točkastog naboja. On je u stvari razlika potencijala prema vrlo udaljenoj točki. Taj je potencijal već poznat iz definicije skalarnog potencijala kad se pošlo od Coulombova zakona. Kugla dovoljno velikog polumjera r_1 iskorištena je kao referentna ekvipotencijalna ploha nultog potencijala.

2.4.1. Vodljiva kugla

Ekvipotencijalne plohe polja točkastog naboja su kugle, r = konst. Silnice su radijalne. Bilo koja ekvipotencijalna ploha smije se nadomjestiti vodljivom plohom, a da se u polju ništa ne mijenja. Vodljiva ploha ne smije imati debljinu. S njezine unutarnje strane se inducira naboj suprotna predznaka točkastom naboju Q, a na vanjskoj strani on je istog predznaka. Inducirani naboj je istog iznosa kao i točkasti naboj u središtu kugle. Odatle slijedi zaključak da se polje nabijene kugle dobiva tako, da se cijeli njezin naboj u istom iznosu odslika u njezino središte, te se traži polje točkastog naboja, koji je smješten u središte kugle. Polje odslikanog naboja u središte kugle traži se samo u prostoru izvan kugle, dakle za $r \geqslant r_0$. r_0 je polumjer vodljive kugle. Polja unutar kugle nema, tj. $E = 0$ za $r < r_0$ ili φ = konst. Vodljiva kugla ima potencijal kao i ekvipotencijalna ploha istog polumjera r_0 za isti točkasti naboj Q u njezinu središtu. Prema tome, potencijal kugle iznosi $\varphi_0 = Q/(4\pi\varepsilon r_0)$ ili njezin je kapacitet

$$C = 4\pi\varepsilon r_0 \tag{2.25}$$

Zadaje se potencijal kugle φ_0 i njezin polumjer, a onda je naboj $Q = 4\pi\varepsilon r_0 \varphi_0$ i najveća jakost polja koja je upravo na njezinoj površini $E_{max} = \varphi_0/r_0$.

Ako dozvolimo u uzduhu najveću jakost polja 1 kV/mm, za potencijal 100 kV kugla mora imati promjer 200 mm. Za 1 MV kugla je već 2 m promjera, da bi sa sigurnošću izdržala zadani potencijal u uzduhu. Praktički, pri trostruko jakom polju počinje električki proboj uzduha uz normalne uvjete tlaka i temperature.

Kugla u uzduhu polumjera 1 m ima kapacitet 111 pF. Kad je njezin polumjer 1 cm, kapacitet joj iznosi 1,11 pF. Kapacitet **kuglastog kondenzatora,** tj. između dvije koncentrične kugle polumjera r_1 i r_2, iznosi prema prije iznesenom

$$C = 4\pi\varepsilon r_1 \cdot \frac{r_2}{r_2 - r_1}$$

Vanjska kugla utječe znatno na kapacitet još pri omjeru $r_2/r_1 = 10$. Ona djeluje u smislu povećanja kapaciteta. Najveća jakost polja nastupa na unutarnjoj kugli i ona iznosi

$$E_{max} = \frac{\varphi_0}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_2 - r_1}$$

Ona se povećava djelovanjem vanjske kugle prema iznosu kad je kugla usamljena. Ona ima svoju najmanju vrijednost, ako se polumjer vanjske kugle drži konstantnim, a mijenja se polumjer unutarnje kugle. Minimum nastupa za

$$r_1 = r_{10} = \frac{1}{2} r_2$$

i iznosi $E_{0\,max} = 2\,\varphi_0/r_{10}$, što je upravo dvostruko prema iznosu za jednu kuglu istoga polumjera r_{10}.

2.4.2. Skupina točkastih naboja

Polje skupine točkastih naboja određuje se primjenom principa superpozicije. Pretpostavka je da se svojstva sredstva u prostoru ne mijenjaju, ako se mijenja iznos naboja i njihov razmještaj, tj. dielektričnost ostaje konstantna. Potencijal se dobiva prostim zbrajanjem potencijala pojedinih točkastih naboja

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{1}^{n} \frac{Q_k}{r_k} \tag{2.26}$$

Jakost polja je negativan gradijent potencijala. Odatle se jednostavnim putem prelazi na potencijal raspoređenog naboja, što je već prikazano u poglavlju o skalarnom potencijalu.

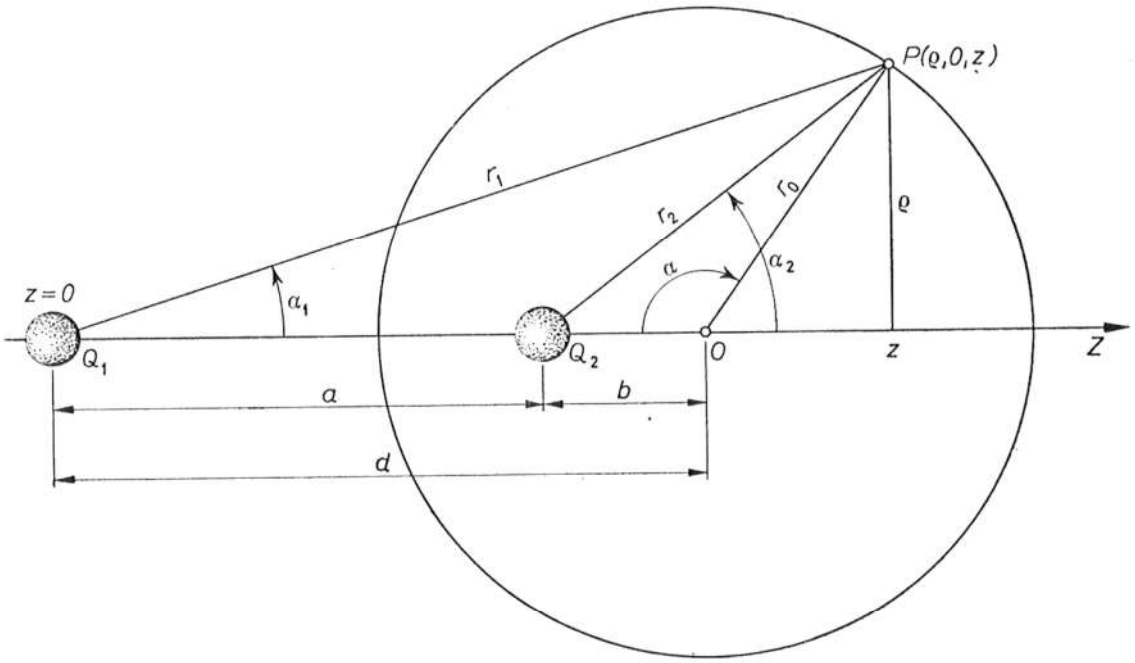
Ovo je osnova u rješavanju polja bilo kakvog rasporeda naboja. Ista je jednadžba za polje mnoštva točkastih izvora struje. Umjesto naboja pojavljuje se struja, a umjesto dielektričnosti dolazi vodljivost. Tada je potencijal u strujnom polju

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varkappa} \sum_{1}^{n} \frac{i_k}{r_k} \tag{2.27}$$

Budući da ne postoje magnetski naboji, ne može se navesti slična jednadžba za magnetsko polje.

2.5. DVA TOČKASTA NABOJA. ODSLIKAVANJE NA KUGLI

Formacija od dva točkasta naboja ne bi zaslužila da se na nju posebno osvrće, već bi trebalo naprosto postupiti po pravilima za skupinu točkastih naboja, da ona



Sl. 2.7. Dva točkasta naboja Q_1 i Q_2 su smješteni na os Z na međusobnoj udaljenosti a. Oni tvore polje koje ima jednu ekvipotencijalnu plohu kuglu. Kugla je nultog potencijala, obuhvaća naboj manjeg iznosa, a središte joj je u O na osi Z izvan spojnice među nabojima.

ne dovodi do vrlo korisnih zaključaka i ne uvodi jednu od metoda rješavanja polja To je ovdje metoda odslikavanja naboja na kugli i kasnije rješenje polja dipola

Potencijal polja u točki P dvaju točkastih naboja iznosi

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right) \tag{2.28}$$

Točka P je udaljena od naboja za r_1, odnosno r_2. Naboji Q_1 i Q_2 su razmaknuti na udaljenost a prema sl. 2.7. Jednadžba ekvipotencijalne plohe se dobiva iz $\varphi = \text{konst.}$, odnosno

$$\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} = \text{konst.}$$

Za svaki konstantni potencijal i zadane Q_1 i Q_2 dobiva se r_2 kao funkcija od r_1 ili obrnuto. Posebno je interesantna ekvipotencijalna ploha potencijala $\varphi = 0$. U tome je slučaju i konstanta jednaka ništici. Sada omjer radijusvektora iznosi

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{Q_1}{Q_2} = k \tag{2.29}$$

i on je konstantan. On ima smisla ako je $k > 0$, tj. naboji Q_1 i Q_2 su različita predznaka. Njihovi se indeksi odabiru tako da je $k > 1$, tj. uvijek je $|Q_1| > |Q_2|$. Poznato je i lako je dokazati, da je geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju uvjet (2.29), **kugla**. Njezin je trag u ravnini crtanja Apolonijeva kružnica. Svejedno je da li se govori o kugli ili kružnici, jer obje imaju isti polumjer. Polje je rotaciono simetrično oko spojnice $Q_1 - Q_2$. Dakle, *ekvipotencijalna ploha $\varphi = 0$ je kugla.* Ostale ekvipotencijalne plohe nisu kugle, nego neke složene geometrijske plohe.

Kugla obuhvaća naboj manji po iznosu. Njezino je središte na produžetku spojnice $Q_1 - Q_2$ preko Q_2 i nalazi se od njega na udaljenosti

$$b = \frac{a}{k^2 - 1} \tag{2.30}$$

Polumjer kugle iznosi

$$r_0 = \frac{k\,a}{k^2 - 1} = k\,b \tag{2.31}$$

Razmak između vanjskog naboja Q_1 i središta kugle iznosi

$$d = a + b = \frac{k^2\,a}{k^2 - 1} = k^2\,b = k\,r_0 \tag{2.32}$$

Na taj je način zadatak riješen. Kugla kao ekvipotencijalna ploha se pojavljuje u polju dvaju točkastih naboja suprotna predznaka, a ona ima potencijal $\varphi = 0$. Posebno, kad naboji postaju jednaki, ali suprotna predznaka, tada $k \to 1$, $b \to \infty$ i $r_0 \to \infty$, ali zato je $(d - r_0) = a\,(k^2 - k)/(k^2 - 1) \to 1/2\,a$. Ta je kugla degenerirala u ravninu, koja upravo raspolavlja udaljenost među nabojima. I ona je nultog potencijala.

Jakost polja se određuje iz potencijala $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Polje je aksijalno simetrično, te se mogu primijeniti cilindričke koordinate. Naboji Q_1 i Q_2 se nalaze na osi Z prema sl. 2.7. Od njih je naboj Q_1 u $z = 0$, a naboj Q_2 ima koordinate $z = a$. Promatrana točka P ima koordinate P $(\varrho, 0, z)$. Polje je ovisno samo o radijalnoj koordinati ϱ i aksijalnoj koordinati z, a neovisno je o tangencijalnoj koordinati ϑ.

Koordinate jakosti polja iznose

$$E_\varrho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1^3}\varrho + \frac{Q_2}{r_2^3}\varrho\right) \tag{2.33}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{Q_1}{r_1^3}z + \frac{Q_2}{r_2^3}(z-a)\right]$$

Da bi se odredile silnice polja, treba misliti na njihovu definiciju. Tangenta na njih uvijek pokazuje smjer polja, tj. mora vrijediti za ovaj slučaj

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{E_\varrho} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z}$$

Taj se odnos iskorištava da bi se odredile jednadžbe silnica. Kad se iskoriste veličine pojedinih komponenata i urede odnosi, slijedi jednadžba

$$\frac{Q_1}{r_1^3}(\varrho\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}\varrho) - \frac{Q_2}{r_2^3}[\varrho\,\mathrm{d}z - (z-a)\,\mathrm{d}\varrho] = 0 \tag{2.34}$$

Ovdje treba uzeti u obzir da je

$$\varrho\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}\varrho = \varrho^2\,\mathrm{d}\left(\frac{z}{\varrho}\right)$$

$$\varrho\,\mathrm{d}z - (z-a)\,\mathrm{d}\varrho = \varrho^2\,\mathrm{d}\left(\frac{z-a}{\varrho}\right)$$

Osim toga se jednadžba (2.34) množi cijela sa ϱ. Tako se dobiju faktori uz naboje, koji se svode na jednostavne totalne diferencijale. Ti su faktori

$$\frac{\varrho^3}{r_1^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{z}{\varrho}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{z}{r_1}\right)$$

$$\frac{\varrho^3}{r_2^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{z-a}{\varrho}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{z-a}{r_2}\right)$$

Sada se može integrirati jednadžbu (2.34), te je rezultat

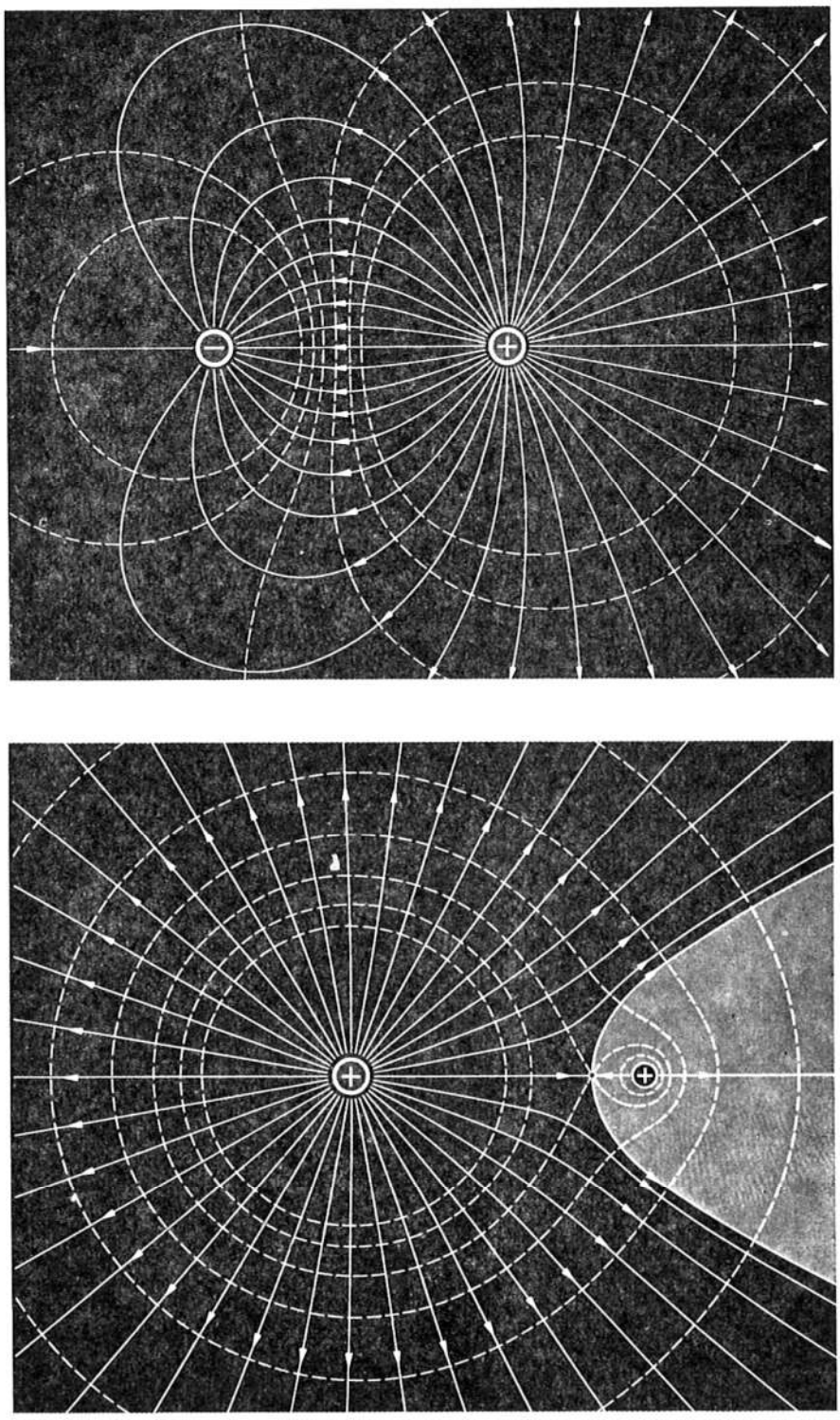
$$Q_1 \cdot \frac{z}{r_1} + Q_2 \cdot \frac{z-a}{r_2} = \text{konst.} \tag{2.35}$$

To je jednadžba silnica polja dvaju točkastih naboja Q_1 i Q_2. Ona se može pisati i na drugi način, jer je $z/r_1 = \cos\alpha_1$, a $(z-a)/r_2 = \cos\alpha_2$, prema sl. 2.7.

$$Q_1\cos\alpha_1 + Q_2\cos\alpha_2 = \text{konst.} \tag{2.36}$$

Ta se jednadžba iskorištava u crtanju silnica polja.

Na sl. 2.8. prikazano je polje dvaju točkastih naboja, čiji je odnos $(-Q_1/Q_2) = k = 2$. Takav odnos dovodi na slučaj kad je ekvipotencijalna ploha $\varphi = 0$ kugla, čiji je polumjer $r_0 = (2/3)\cdot a$, a središte joj je na osi Z, u $z_0 = (4/3)\cdot a$.



Sl. 2.8. Silnice i ekvipotencijalne linije polja dvaju točkastih naboja. Na gornjoj slici su dva naboja različitog predznaka, a njihovi se iznosi odnose kao 2 : 1. Polumjer kugle nultog potencijala je 2/3 razmaka naboja. Središte iste kugle je odmaknuto od naboja manjeg iznosa za 1/3 razmaka naboja. Donja slika prikazuje polje dvaju naboja istog predznaka čiji je omjer naboja 20 : 1. Točka »nulte sile« se nalazi na spojnici naboja, a udaljena je od manjeg naboja za $(1 + \sqrt{20})$-ti dio razmaka među nabojima. Udaljenosti do točke nulte sile od pojedinog naboja se odnose kao drugi korijeni iz istih naboja.

Zadatak se može obrnuti. Zadaje se naboj Q_1 i kugla polumjera r_0 sa središtem na udaljenosti d od Q_1. Traži se koliki je naboj Q_2 i gdje se nalazi, ako zadana kugla treba da bude ekvipotencijalna ploha sa $\varphi = 0$. Iz (2.32) sa zadanim d i r_0 računa se $k = d/r_0$. Omjer k daje naboj Q_2 iz izvedenih jednadžbi, a jednako i njegovu udaljenost b od središta kugle. Ako se radi o naboju Q_1 i ravnini na udaljenosti a od naboja, drugi je naboj $-Q_1$, na istoj udaljenosti na suprotnoj strani ravnine.

2.5.1. Točkasti naboj i vodljiva kugla

Kao što se postupalo u prethodnom poglavlju, može se ekvipotencijalna ploha nadomjestiti vodljivom plohom, zanemarive debljine, a da se u polju ništa ne promijeni. Ovdje se kugla kao ekvipotencijalna ploha $\varphi = 0$ može nadomjestiti vodljivom kuglom. Neka je Q_1 pozitivan, a Q_2 negativan. Na kugli se inducira s vanjske strane negativni naboj, a s unutarnje strane isto toliki pozitivni naboj. Inducirani naboj na kugli mora biti jednak po iznosu Q_2, što slijedi iz treće Maxwellove jednadžbe.

Sve silnice iz Q_2, koji se nalazi unutar kugle, svršavaju na kugli. Zato je inducirani naboj jednak Q_2. Plošna gustoća induciranog naboja na kugli izlazi iz iznosa indukcije na kugli. Račun je olakšan okolnošću da ukupna indukcija na kugli ima smjer njezina radijusa. Zato se odmah odabere ishodište koordinatnog sustava u O prema sl. 2.7. Polarni se kut računa od spojnice među nabojima. Plošna gustoća naboja iznosi

$$\sigma = \sigma_0 \frac{k^2 - 1}{(k^2 + 1 - 2k\cos\alpha)^{3/2}} \tag{2.37}$$

$$\sigma_0 = \frac{Q_1}{4\pi r_0^2}$$

Najveća gustoća naboja nastaje na strani bližoj Q_1, za $\alpha = 0$, a najmanja gustoća naboja je na daljoj strani kugle, u $\alpha = \pi$. Odnos između najveće i najmanje gustoće naboja je

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^3$$

Ako se umjesto omjera naboja k uvede omjer $(d - r_0)/r_0$, tj. omjer udaljenosti vanjskog naboja do površine kugle i polumjera kugle, dano je u slijedećoj tablici nekoliko vrijednosti $\sigma_{max}/\sigma_{min}$.

Odnos plošnih gustoća u ovisnosti o proporcijama naboja i kugle

prema sl. 2.7.

TABLICA 2.1.

$\frac{d - r_0}{r_0}$	0,05	0,5	1	2	10	100
$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$	69 000	125	27	8	1,73	1,06

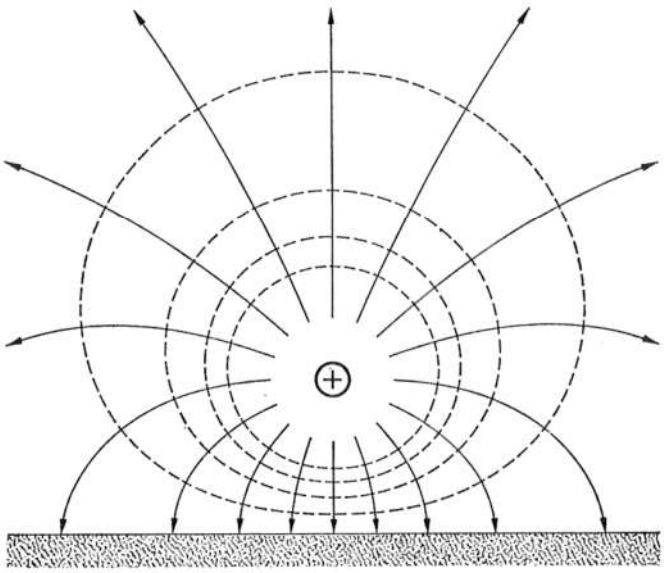
Kad je vanjski naboj na udaljenosti 5% polumjera od površine kugle, praktički kao da se nalazi ispred ravnine. Na velikim udaljenostima naboja od kugle, sto polumjera, još je uvijek znatna nejednolikost gustoće naboja. Eventualno, tek na udaljenostima većim od sto promjera kugle može se smatrati da je kugla sama u prostoru.

Najveća jakost polja se pojavljuje na spojnici naboja na površini kugle i ona iznosi

$$E_{max} = \frac{1}{2}(k + 1) E_0$$

$$E_0 = \frac{Q_1}{2 \pi \varepsilon (d - r_0)^2} \tag{2.38}$$

Sad se može prijeći na zadatak određivanja polja točkastog naboja Q_1 i vodljive kugle, koja je na potencijalu $\varphi = 0$, tj. *uzemljena* je. U teoriji se pretpostavlja da je potencijal »zemlje« jednak ništici. Na kugli će se inducirati naboj suprotan predznaku od Q_1, a manjeg iznosa, ako je Q_1 izvan kugle. Sve silnice Q_1 ne svršavaju



Sl. 2.9. Silnice i ekvipotencijalne linije polja točkastog naboja ispred vodljive ravnine. Vodljivi poluprostor je na nultom potencijalu.

na kugli. Inducirani naboj na kugli može se predstaviti točkastim nabojem Q_2 u kugli, istog iznosa, da bi se riješilo polje u prostoru izvan kugle. U kugli polja nema. To slijedi iz dosadašnjih razmatranja problema dvaju naboja. Iz zadanih Q_1, d i r_0 slijedi konstanta k i veličine položaja naboja b i naboj Q_2. Sad se zadatak svodi na određivanje polja dvaju točkastih naboja Q_1 i Q_2. Ova metoda rješavanja polja zove se **metoda odslikavanja naboja.** Naboj Q_1 se odslikava na kugli u točkasti naboj Q_2 prema sl. 2.7. Kugla može degenerirati u vodljivu ravninu, a tada se Q_1 odslikava kao $-Q_1$ na suprotnu stranu na istu udaljenost prema sl. 2.9. Upravo se ovo mnogo pojavljuje u praksi rješavanja polja, tj. *točkasti naboj ispred vodljive ravnine.*

Ako se ide korak dalje, uzima se *nabijena* kugla, dakle na nekom potencijalu $\varphi = \varphi_0 \neq 0$. Formacija dvaju točkastih naboja drži kuglu na potencijalu ništica. Da bi se ona podigla na neki potencijal $\varphi_0 \neq 0$, treba joj dovesti naboj u središte $Q_3 = 4\pi\varepsilon r_0 \varphi_0$. Za određivanje polja nabijene kugle njezin se naboj odslika u njezino središte, te se traži polje točkastog naboja za $r > r_0$. Prema tome, zadatak se svodi na određivanje polja triju točkastih naboja Q_1, Q_2 i Q_3 za vanjski prostor. Unutar kugle polja nema.

Ako bi se zadani naboj nalazio u kugli, tj. zadan je Q_2, rješava se na isti način. Q_2 se odslikava na vanjski prostor kugle, a polje se traži samo u kugli. Polja nema u vanjskom prostoru kad je potencijal kugle $\varphi = 0$. Polje postoji u vanjskom prostoru od nabijene kugle, ali samo od njezina naboja Q_3. Q_2 ne daje nikakav doprinos vanjskom polju. No zato Q_3 ne daje nikakav doprinos polju u unutarnjosti kugle.

Slučaj nabijene kugle iskorištava se za rješenje zadatka polja točkastog naboja i *izolirane* vodljive kugle. Kad se nađe izolirana vodljiva kugla u blizini točkastog naboja Q_1, na njoj se induciraju pozitivni i negativni naboj u istom iznosu, ali manjem od Q_1. Kuglina ploha ostaje ekvipotencijalna ploha. Prema tome, u vanjskom prostoru mora biti ista slika polja kao kod polja točkastog naboja i nabijene kugle. Ukupni inducirani naboj je ništica, dakle je $Q_3 = -Q_2$. Sada se zadatak svodi na određivanje polja triju točkastih naboja, Q_1 i odslikanih Q_2 i $Q_3 = -Q_2$. Izolirana vodljiva kugla poprima potencijal prema dosadašnjem razmatranju

$$\varphi_0 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon r_0} = -\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon r_0} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon d}$$

Njezin je potencijal jednak potencijalu točke O središta kugle sa sl. 2.7. koji proizvodi Q_1 kad nema kugle. Razmak između odslikanih naboja Q_2 i Q_3 iznosi $b = r_0^2/d$, i on postaje sve manji kako se kugla udaljava od zadanog naboja Q_1. Kada je $r_0 \ll d$, polje naboja Q_1 je homogeno u prvom približenju i ono iznosi $E_0 = Q_1/(4\pi\varepsilon d^2)$. Homogenost se može pretpostaviti u prostoru koji je otprilike kao zadana kugla. Tada je razmak među odslikanim nabojima vrlo malen, $b \ll r_0$, ali još uvijek postoji. Neka se produkt između razmaka i odslikanog naboja označi sa p. On će iznositi u svakom slučaju

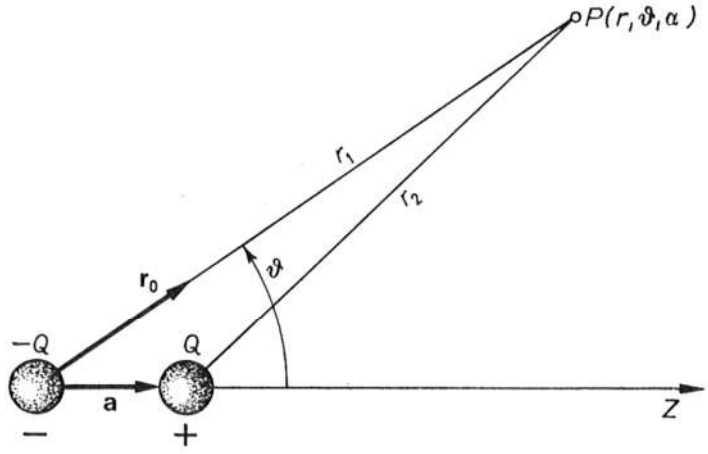
$$p = -Q_2 b = 4\pi\varepsilon r_0^3 E_0 = 3 V_0 D_0$$
$$D_0 = \frac{Q_1}{4\pi d^2} \qquad (2.39)$$

Tu je V_0 volumen zadane vodljive kugle, a D_0 električna indukcija naboja Q_1 na mjestu središta kugle kad nje tamo nema. Produkt p se zove **dipolni moment** vodljive kugle. On je ovisan o volumenu kugle i električnoj indukciji polja koje je bilo na mjestu središta kugle. Utjecaj izolirane vodljive kugle se svodi na određivanje polja električnog dipola, ako se radi o njezinu utjecaju na velikim udaljenostima. Jednadžba (2.39) vrijedi u svim slučajevima izolirane kugle bez obzira koliko je ona udaljena od zadanog naboja.

Ovdje je uvedena jedna od metoda rješavanja polja. To je metoda odslikavanja naboja. Ona će biti iskorištena kad ne pomažu direktne metode. Ona se može uvesti i čisto matematički, pretpostavljajući odslikani naboj. Njegov iznos i mjesto utvrđuju se iz graničnih uvjeta na kugli.

2.6. ELEKTRIČNI DIPOL

Električni je dipol posebna formacija dvaju točkastih naboja. Oba naboja su istog iznosa, a različita predznaka. Njihova je međusobna udaljenost a čvrsta i kruta. Udaljenost do točke promatranja r mnogo puta je veća od razmaka među nabojima a, $r \gg a$. Na sl. 2.10. prikazan je dipol s oznakama. Nije značajno koliki



Sl. 2.10. Električni dipol u sfernom koordinatnom sustavu. Negativni naboj je postavljen u ishodište sustava, a dipolni moment je usmjeren u pozitivnom smjeru osi Z.

je razmak a. Negativni naboj $-Q$ stavljen je u ishodište koordinatnog sustava. Pozitivni naboj $+Q$ se nalazi na osi Z u točki $z = +a$. Udaljenost r do točke promatranja neka se računa od ishodišta. Čim je zadovoljen uvjet $r \gg a$, formacija od dva jednaka naboja suprotna predznaka zove se električni dipol.

Potencijal dipola u točki P određuje se prema sl. 2.10. On iznosi

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Odnosi među radijusvektorima regulirani su jednadžbom $r_2^2 = r_1^2 + a^2 - 2\,a\,r_1 \cos\vartheta$. Budući da je $r_1 \gg a$, približno se dobiva recipročna vrijednost drugog radijusvektora $1/r_2 = 1/r_1 \cdot (1 + a\cos\vartheta/r_1)$. Treba uzeti u obzir da je $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$.

Radijusvektor $\mathbf{r}$ gleda prema točki promatranja, odnosno njegov jedinični vektor $\mathbf{r}_0$ gleda prema istoj točki. Spojnica među nabojima ima također vektorski karakter i ona gleda od negativnog naboja prema pozitivnom naboju, odnosno u smjeru osi Z. U teoriji električnog dipola veličina

$$\mathbf{p} = Q\,\mathbf{a} \tag{2.40}$$

definira se kao **dipolni moment** po analogiji s momentom vrtnje para sila.

Uzevši u obzir napomene, slijedi konačno potencijal električnog dipola

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}\,\mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathbf{p}\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.41}$$

Iako se naboji nalaze vrlo blizu jedan drugome, potencijal dipola ne iščezava, nego samo opada s kvadratom udaljenosti, umjesto linearno kao u točkastog naboja.

Jakost polja iznosi

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\mathbf{p}\,\mathbf{r}_0}{r^2}\right) \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left[3\,(\mathbf{p}\,\mathbf{r}_0)\,\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}\right] \end{aligned} \tag{2.42}$$

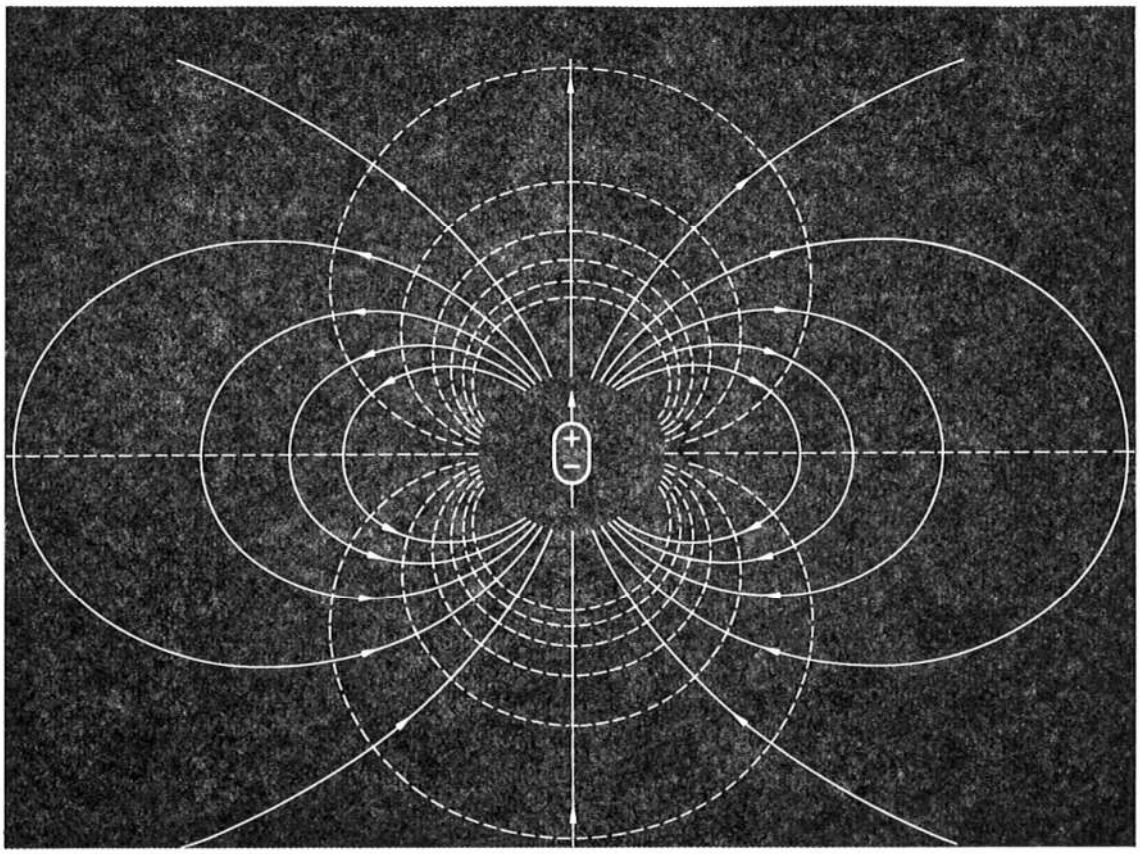
Ona opada s trećom potencijom udaljenosti.

Teorija dipola nalazi široku primjenu. Često pojedina tijela nose jedan i drugi predznak naboja u istom iznosu. Ona se smiju prikazati kao dipol, ako se želi istražiti njihov utjecaj na udaljenim mjestima.

Polje električnog dipola prikazano je na sl. 2.11. Iako su naboji vrlo blizu jedan drugome i suprotnog su predznaka, ne poništava se njihovo djelovanje u prostoru, već ono samo brže opada nego u točkastog naboja. Jakost polja opada s trećom potencijom udaljenosti, a u točkastog naboja opada s drugom potencijom. Pojedine komponente polja dobiju se iz (2.42) u sfernim koordinatama

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{p\cos\vartheta}{2\pi\varepsilon r^3} \\ E_\vartheta &= -\frac{p\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon r^3} \\ E_\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

U prethodnom poglavlju se pokazalo da metalna kugla postaje dipol, ako je smještena izolirano u polje nekog točkastog naboja. Dipolni moment kugle iznosi $p = 3\ V_0\ D_0$, ako je V_0 volumen kugle, a D_0 električna indukcija polja prije unošenja kugle. Neka je u uzduhu jakost polja 1 kV/mm, čemu odgovara indukcija $D_0 = \varepsilon_0 E_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-6}$ C/m^2. Metalna kugla ima promjer od 1 cm, a to je volumen $V_0 = 0{,}524$ cm^3 i dipolni moment $p = 13{,}9 \cdot 10^{-12}$ C m. Najjače polje



Sl. 2.11. Silnice i ekvipotencijalne linije električnog dipola.

proizvodi dipol za $\vartheta = 0$, dakle u smjeru izvornog polja. Neka se ispita njegovo polje na udaljenosti $r = 10$ cm, koja je jed ka deseterostrukom promjeru kugle. Tu je $E_r = p/(2\ \pi\ \varepsilon_0\ r^3) = 250$ V/m, a to je tek 4000-ti dio izvornog polja u uzduhu od 1 kV/mm. Utjecaj polja dipola je zanemarivo malen već na malim udaljenostima.

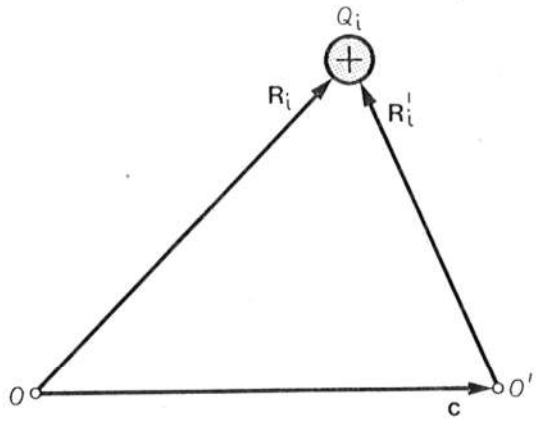
Brže opadanje polja postiže se tzv. multipolima. Ono opada brže nego što je to u dipola. Primjerice, aksijalni kvadrupol je kombinacija dvaju jednakih dipola koji su smješteni protusmjerno na osi Z, a razmaknuti su na malu udaljenost. Jakost polja aksijalnog kvadrupola opada sa četvrtom potencijom udaljenosti. Teorija multipola je interesantna u nuklearnoj fizici. Nasuprot tome, teorija dipola nalazi primjenu u elektrotehnici, naročito u emisiji elektromagnetskih valova. Ostale vrste statičkih polja imaju također svoje dipole, koji su jednako definirani.

2.7. MNOŠTVO ELEKTRIČNIH DIPOLA, POLARIZACIJA

Prostor je ispunjen točkastim nabojima, različita iznosa i predznaka. Suma svih naboja jednaka je ništici, tj. prostor djeluje neutralno. To nastaje u jednoj molekuli. Dipolni moment svih naboja neka je

$$\mathbf{p} = \sum Q_i \mathbf{R}_i \tag{2.44}$$

ako se usvoje oznake prema sl. 2.12. Cijelome sustavu naboja se odabere središte O. Od njega prema i-tom naboju Q_i gleda radijusvektor R_i. Svejedno je za dipolni



Sl. 2.12. Radijusvektori nekog točkastog naboja iz mnoštva naboja od središta sustava O i pomaknutog istog središta u O'. Slika služi u definiciji dipolnog momenta mnoštva točkastih naboja.

moment sustava gdje je njegovo središte. Neka se ono pomakne prividno u O' za konstantni vektor **c**. Time nastaje novi dipolni moment

$$\mathbf{p}' = \sum Q_i \mathbf{R}'_i = \sum Q_i \mathbf{R}_i - \mathbf{c} \sum Q_i$$

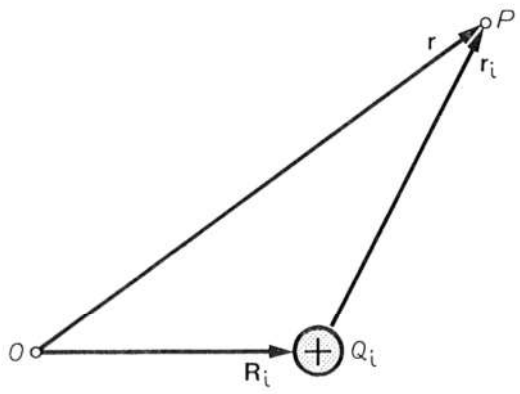
tj. $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, jer je po pretpostavci $\sum Q_i = 0$. To je dokaz da je dipolni moment neovisan o središtu sustava. Po tome bi dipolni moment dipola bio $\mathbf{p} = Q\mathbf{R}_+ - Q\mathbf{R}_- = Q(\mathbf{R}_+ - \mathbf{R}_-)$. Budući da je $\mathbf{R}_+ - \mathbf{R}_- = \mathbf{a}$, dobiva se poznati dipolni moment iz prethodnog poglavlja.

Potencijal takve skupine naboja se određuje prema sl. 2.13. Točka promatranja P udaljena je od središta sustava za **r**, koji gleda prema P. Jednako radijusvektor r_i gleda od naboja Q_i prema P. Potencijal iznosi

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{Q_i}{r_i} \tag{2.45}$$

Naboji se nalaze u praznom prostoru. Radijusvektori su međusobno vezani odnosom

$$r_i^2 = r^2 + R_i^2 - 2\,\mathbf{R}_i\,\mathbf{r}$$



Sl. 2.13. Ustanovljenje potencijala u točki P koja je definirana radijusvektorom **r** od središta sustava naboja.

Točka promatranja vrlo je daleko od sustava, tj. $r \gg R_i$, te je u prvom približenju

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{R}_i\,\mathbf{r}}{r^2}\right)$$

Time je sad potencijal skupine naboja

$$\varphi = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \sum\left(\frac{Q_i}{r} + \frac{Q_i\,\mathbf{R}_i\,\mathbf{r}}{r^3}\right)$$

Kako je r konstantno u odnosu na iznos i položaj naboja Q_i, a prostor je neutralan, tj. $\sum Q_i = 0$, uz definiciju dipolnog momenta potencijal je konačno

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}\,\mathbf{r}}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^3} \tag{2.46}$$

što je u potpunosti jednako potencijalu običnog dipola. Ako su ispunjeni pretpostavljeni uvjeti, cijeli se sustav naboja prikazuje dipolnim momentom kojim se određuje polje.

2.7.1. Električna polarizacija

Sredstvo koje ispunjava prostor sastavljeno je od mnoštva naboja. Jedni su naboji *slobodni*, te se mogu kretati po prostoru čim se narine polje. Drugi su naboji *vezani*, samo se polariziraju. Oni tvore dipole različitog dipolnog momenta. Jedni dipoli tek nastaju pod utjecajem polja, *inducirani dipoli*, a drugi već postoje, *permanentni dipoli*, samo se orijentiraju pod utjecajem polja. Jedan i drugi proces se zove *polarizacija*. Budući da je bez vanjskog polja neuredno stanje u sredstvu, teško bi bilo govoriti o dipolnom momentu cijelog prostora ispunjenog sredstvom bez utjecaja vanjskog polja. Bolje je utvrditi dipolni moment **p** po manjoj skupini naboja, npr. po molekuli, pa zbrojiti dipolne momente. Tako nastaje potreba uvođenja *dipolnog momenta po jedinici volumena*, **P**. Ako skupina dipola zauzima mali prostor volumena ΔV, dipolni moment po jedinici volumena iznosi

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i \tag{2.47}$$

Potencijal takva prostora, ispunjenog sredstvom koje sadrži slobodne naboje gustoće ϱ i σ i vezane naboje koji čine dipolni moment po jedinici volumena **P**, iznosi

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\varrho \, \mathrm{d}V}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S_0} \frac{\sigma \, \mathrm{d}S}{r}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}\,\mathbf{r}}{r^3} \, \mathrm{d}V$$

Potencijal φ_1 se odnosi na slobodne naboje, a φ_2 se odnosi na vezane naboje. U njima je radijusvektor funkcija položaja elementa $\mathrm{d}V$ koji se nalazi u točki izvora. Zbog toga je

$$\frac{\mathbf{P}\,\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{P} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{P}}{r}\right) - \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{P}$$

Potencijal φ_2 vezanog naboja iznosi, ako je $-\operatorname{div}\mathbf{P} = +\varrho_v$,

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\mathbf{P}}{r}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\varrho_v \, \mathrm{d}V}{r}$$

Prvi pribrojnik, plošni integral po plohi što zatvara prostor V, dijeli se na integral po plohi S koja obuhvaća cijeli prostor i koja prolazi točkama gdje taj integral iščezava i zatim plohama S_0, gdje vektor **P** čini skok od $\mathbf{P}_1$ na $\mathbf{P}_2$, te se može prikazati plošnom gustoćom vezanog naboja, $-\mathbf{n}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = \sigma_v$.

Konačno je potencijal u nekoj točki promatranog prostora

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho + \varrho_v}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_0} \frac{\sigma + \sigma_v}{r}\,dS \tag{2.48}$$

U općem razmatranju mogu se ispustiti plošni naboji, jer ne postoje nabijene plohe. Sav je naboj prostorno raspoređen, gustoćom $(\varrho + \varrho_v)$ slobodnog i vezanog naboja. Iz integralnog oblika slijedi diferencijalni oblik jednadžbe potencijala

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho + \varrho_v}{\varepsilon_0} = -\operatorname{div}\mathbf{E}$$

Uz treću Maxwellovu jednadžbu $\operatorname{div}\mathbf{D} = \varrho$ i ovdje učinjenu pretpostavku $\operatorname{div}\mathbf{P} = -\varrho_v$, iz potencijalne jednadžbe se pojavljuje odnos

$$\mathbf{D} - \mathbf{P} = \varepsilon_0\mathbf{E} \tag{2.49}$$

U poglavlju 1.10. je prikazan utjecaj sredstva na polje. Tamo je upotrijebljen pločasti kondenzator, zbog jednostavnosti, kao primjer na kojemu su objašnjene pojave u sredstvu zbog djelovanja polja. Rečeno je da se pojavljuje na površini dielektrika vezani plošni naboj suprotna predznaka naboja na elektrodi. Taj je slučaj obuhvaćen drugim pribrojnikom u (2.48). U pločastom kondenzatoru ne postoje prostorni naboji, već samo plošni. I opet se dolazi na (2.49), jer je na vodiču $\sigma = D$, a $\sigma_v = -P$, a jakost polja je dana sa $E = (\sigma + \sigma_v)/\varepsilon_0$. Ova su razmatranja pokazala da se polarizirani vezani naboj manifestira na površini dielektrika kao plnšni vezani naboj, a u unutarnjosti dielektrika kao prostorni vezani naboj gustoće ϱ_v samo ako je polarizacija nejednolika, tj. $\operatorname{div}\mathbf{P} \neq 0$. *Vektor polarizacije* $\mathbf{P}$ *je dipolni moment po jedinici volumena vezanog naboja.* Polarizacija je razmjerna jakosti polja koja vlada u dielektriku. Prema jednadžbi (2.49) taj odnos odmah slijedi

$$\mathbf{P} = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\mathbf{E} \tag{2.50}$$

Konstanta $(\varepsilon_r - 1)$ je značajna, jer direktno mjerilo za polarizaciju ili dipolni moment po jedinici volumena. Ona se zove **susceptibilnost,** a pokazuje koliko je neki materijal sposoban za polarizaciju. Množena sa ε_0 ona je dipolni moment po jedinici volumena i po jedinici jakosti polja. Fizikalna tumačenja susceptibilnosti dovela su do njezinih različitih iznosa, ovisno o tome kako se predstavlja polarizacija. Ona može biti dipolni moment po jedinici volumena, po jedinici mase i konačno, najčešće, po molu. Vrlo često se daje *molarna* susceptibilnost, jer se polarizacija prikazuje kao dipolni moment po molu. Jedan mol ima M grama, koliko je molekularna težina dotičnog materijala. Ako je γ gustoća materijala, njegov jedan mol zauzima volumen M/γ. Prema tome, polarizaciju po molu treba dijeliti sa M/γ da se dobije polarizacija po jedinici volumena, tj. vrijedi odnos

$$P = \frac{\gamma P_M}{M} \tag{2.51}$$

Volumna polarizacija se upotrebljava u elektrotehnici, te ona ima dimenziju Cm/m^3. Molarna polarizacija se primjenjuje u kemiji i fizici, a ima dimenziju Cm/mol. Jednako se izražava susceptibilnost, jer je ona razmjerna polarizaciji.

Neka kao primjer posluži benzol, koji se smatra standardnim dielektrikom. On ima dielektričnost 2,28 između 10°C i 60°C temperaturnog intervala. Njegova je gustoća 0,88 g/cm^3, a molekularna je težina 78,1. Ako se dozvoli jakost polja 10 kV/mm bez opasnosti od proboja, dobiva se pri tome polju polarizacija od $1{,}13 \cdot 10^{-4}$ Cm/m^3. Molarna polarizacija bi iznosila

$$P_M = \frac{M}{\gamma} \cdot P = \frac{78{,}1}{0{,}88 \cdot 10^6} \cdot 1{,}13 \cdot 10^{-4} = 1{,}0 \cdot 10^{-8} \text{ Cm/mol}$$

Volumna susceptibilnost se kratko zove susceptibilnost, a ona je za benzol

$$\chi = \varepsilon_r - 1 = 1{,}28$$

Molarna susceptibilnost izlazi iz molarne polarizacije

$$\mathbf{P}_M = \chi_M \varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\chi_M}{\chi} \mathbf{P}$$

Odatle ona iznosi

$$\chi_M = \frac{P_M}{P} \chi = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-8}}{1{,}13 \cdot 10^{-4}} 1{,}28 = 1{,}13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$$

Molarna susceptibilnost ima dimenziju m^3/mol.

Tablica 2.2. prikazuje podatke o dielektričnosti nekih materijala. Ti su materijali uglavnom dobri izolatori, osim vode.

Dielektričnosti materijala

Prema: Handbook of chemistry and physics, The chemical rubber company, 1966

TABLICA 2.2.

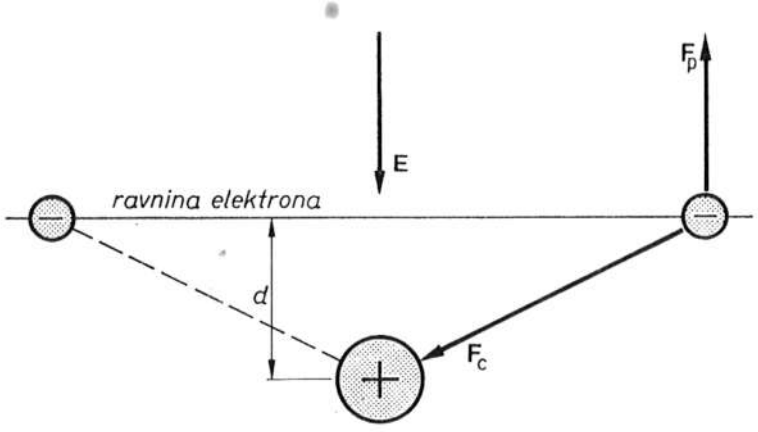
	ε_r				ε_r	
Tekućine						
Benzol	2,3	pri 20° C		Transformatorsko ulje	2,1-2,4	pri 20° C
Amonijak	10	pri 5° C		Voda	88	pri 0° C
Hidrazin	53	pri 20° C			80,4	pri 20° C
Aceton	21	pri 25° C			73,3	pri 40° C
Vodik (tekući)	1,23	pri −253° C				
Kisik (tekući)	1,51	pri −193° C		Uzduh	1,00134	pri 0° C
Kruti materijali						
Kremen (liven)	3,75-4,1	pri 1 MHz		Triacetat celuloza	4,0-5,5	pri 1 MHz
Staklo, corning	6,3 -6,8			Mica	7,4-7,85	pri 1 MHz
Porculan	6 -7			Guma, tvrda	2,8	pri 1 MHz
Steatit	5,5 -7,5			Polietilen	2,3	pri 1 MHz
Titanati				Polivinil, fleksibilni	3,5-4,5	pri 1 MHz
(Ba, Sr, Ca, Mg, Pb)	15 -12000			Asfalt	2,7	pri 1 MHz
Titandioksid	14 -110					

Odavde jasno izlazi da se *vektor* **D** *odnosi samo na slobodni naboj*. Njegov plošni integral po zatvorenoj plohi daje ukupni naboj u prostoru unutar te plohe. To je, uostalom, treća Maxwellova jednadžba, samo što je ovdje jasno rečeno da je to slobodni naboj. Dielektrikom se unose u prostor vezani naboji koji formiraju dipole usmjeravane pod utjecajem polja. Vektor polarizacije **P** uzima u obzir utjecaj polariziranih dipola vezanog naboja. Jednadžba (2.49) pokazuje kakvo je aktivno djelovanje sredstva na polje. Ona upućuje na određivanje dipolnog momenta induciranih i permanentnih dipola u sredstvu. U jednostavnim slučajevima se računa iznos polarizacije **P**.

PRIMJER 2.4. Jednostavni plinovi imaju samo inducirane dipole. Njihov je dipolni moment razmjeran jakosti polja

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$$

Onda je polarizacija naprosto $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$, gdje je N poznati broj molekula u jedinici volumena. Ako se uvede Avogadrov broj N_A, masa jednog mola M i gustoća plina γ iznosi broj molekula u jedinici volumena $N = (\gamma N_A/M)$. Primjerice, za vodik u normalnim uvjetima, tj. pri tlaku 760 mm stupca žive i temperaturi 0°C, iznosi $M = 2$ grama, a $\gamma = 89$ g/m^3. Avogadrov broj je prirodna konstanta i on iznosi $N_A = 6{,}025 \cdot 10^{23}$ molekula po molu. Sad je $N = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ molekula po m^3.



Sl. 2.14. Pomak elektrona u atomu pod utjecajem vanjskog električnog polja.

Clausius i Mossotti su molekulu predstavili kuglom dielektričnosti ε_r. Ako se dielektrična kugla stavi u polje jakosti **E**, ona postaje dipol. Teorija pokazuje da je njezin dipolni moment po jedinici volumena, odnosno polarizacija

$$\mathbf{P} = 3\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\,\varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Po prijašnjem je polarizacija $\mathbf{P} = N\alpha\mathbf{E}$ i po Mossottiju jednaka polarizaciji kugle, tj.

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}$$

Faktor razmjernosti α je karakterističan za svaki pojedini plin. $(\varepsilon_r - 1)$ još se naziva *susceptibilnost*. Ona je u plinu koji sadrži samo inducirane dipole razmjerna gustoći plina, jer je takva razmjernost broja N dipola u jedinici volumena. Ako se poveća tlak plina dvostruko, susceptibilnost se poveća dvostruko. Vodik ima susceptibilnost $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ u normalnim uvjetima. Kad bi bio pod tlakom od 150 bara, susceptibilnost vodika bi bila $4{,}05 \cdot 10^{-2}$.

Faktor razmjernosti α može se približno odrediti za vodikov atom koji sadrži samo jedan elektron. Elektron kruži oko jezgre prema Bohrovu modelu po kružnici polumjera r_0. Ravnina kruženja je okomita na smjer polja. Kad se narine polje $\mathbf{E}$, ravnina kruženja elektrona se pomakne protiv polja, odnosno jezgra se pomakne u smjeru polja. Taj pomak iznosi d prema sl. 2.14. Sila na elektron je $e\,\mathbf{E}$, a centripetalna sila je po Coulombovu zakonu $e^2/(4\pi\,\varepsilon_0\,r_0^2)$. Iz ravnoteže sila i iz dipolnog momenta $\mathbf{p} = \alpha\,\mathbf{E} = e\,d$ slijedi konstanta razmjernosti

$$\alpha = 4\pi\,r_0^3\,\varepsilon_0 = 3\,V_a\,\varepsilon_0$$

Tu je uveden volumen atoma vodika $V_a = (4/3)\,\pi\,r_0^3$. Prema tome dielektričnost atomarnog vodikova plina slijedi iz izraza

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = N\,V_a = N_A\,V_a\,\frac{\gamma}{M}$$

$N_A\,V_a$ predstavlja volumen svih atoma ili molekula u jednom molu. Ovo, najelementarnije tumačenje, pokazuje da određivanje dielektričnosti može poslužiti za određivanje dimenzija atoma, odnosno molekula.

Polarizacija induciranih dipola pokazuje izrazitu razmjernost prema jakosti polja u materijalu i razmjernost prema tlaku, odnosno broju molekula u jedinici volumena. Inducirani dipoli nastaju posmakom elektrona u polju i posmakom iona vezanih u molekulama. Tu se susceptibilnost sastoji u osnovi od dva dijela. To su elektronska i ionska susceptibilnost.

Permanentni dipoli već postoje u materijalu, a polje ih samo orijentira. To su polarne molekule, koje su dipoli. Termičko gibanje se suprotstavlja orijentiranju permanentnih dipola. Također jak utjecaj imaju susjedne molekule, odnosno cjelokupna molekularna struktura materijala. Ovi dipoli doprinose trećem dijelu susceptibilnosti dielektrika. Taj dio je ovisan o temperaturi. Kako je broj permanentnih dipola ograničen, može se očekivati da se dosegne zasićenje u polarizaciji. Preostaje polarizacija samo induciranih dipola.

2.7.2. Magnetska polarizacija

Slično se razmatranje može provesti o utjecaju sredstva na magnetsko polje. Ono se predstavlja sada magnetskim dipolima kojima se pripisuje dipolni moment po jedinici volumena, te je

$$\mathbf{B} - \mathbf{P} = \mu_0\,\mathbf{H} \tag{2.52}$$

Sada je $\mathbf{P}$ *magnetska polarizacija*, koja je opet dipolni moment magnetskih dipola po jedinici volumena.

Većina pisaca o teoriji polja ili teoriji magnetskih krugova uvodi veličinu *intenzitet magnetiziranja* $\mathbf{M}$ ili $\mathbf{I}$, koja se uključuje uz $\mathbf{H}$, te bi odnos (2.52) glasio $\mathbf{B} = \mu_0\,(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Po tome bi $\mathbf{M}$ imao isti karakter kao jakost magnetskog polja. Tu bi se djelovanje dipola manifestiralo kao povećanje sile na jedinični naboj. To

ne odgovara stvarnosti. Zato se **H** tako ne definira, već kao uzbuda magnetiziranja. Tada bi se nekako moglo tolerirati kao pomoć vektoru **H**. Nema potrebe da se uvodi analogija **M** sa **H**, već treba ostati pri analogiji s električnim poljem. Prema tome se utjecaj sredstva na magnetsko polje prikazuje vektorom polarizacije **P** po jednadžbi (2.52).

Magnetska susceptibilnost, $(\mu_r - 1)$, jednako je definirana kao i električna. Magnetska polarizacija se jednako uvodi kao i električna, jer je $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, a zato je

$$\mathbf{P} = (\mu_r - 1)\, \mu_0 \mathbf{H} \tag{2.53}$$

Magnetska susceptibilnost ima istu ulogu kao i električna, tj. ona predstavlja reagiranje materijala na narinuto polje. Ona govori opet koliko je materijal spreman da prihvati polje. Polarizacija opet znači dipolni moment po jedinici volumena, što je ovdje usvojena definicija. Naime, opet postoje polarizacije koje se odnose na jedinicu mase, odnosno na mol, koje se upotrebljavaju u fizici ili kemiji.

Situacija nije sasvim ista kao u dielektrika. Kakvu ulogu imaju naboji u dielektricima, takvu ovdje imaju električne struje u magneticima. One se predstavljaju magnetskim dipolima, te se po tome problem svodi na isti put kao u dielektrika. Poseban slučaj je opiranje materijala da primi magnetsko polje. Lenzov zakon govori da se u strujnom krugu inducira struja upravo takva, da nastoji spriječiti promjenu magnetskog polja. Približava li se neki magnet strujnom krugu, u ovome se inducira struja koja proizvodi magnetsko polje upravo suprotna djelovanja djelovanju magneta. Dapače, među njima će se pojaviti odbojne sile. Sličnu pojavu imamo u materijalu. Elektroni u atomima materijala predstavljaju električne struje oko jezgri, a elektronske putanje treba gledati kao strujne krugove. Uz to, ti su strujni krugovi u supravodljivu stanju. Pojavom vanjskog magnetskog polja induciraju se u *elektronskim strujnim krugovima* dodatne struje koje hoće da spriječe ulazak vanjskog magnetskog polja. Realno to znači da elektroni povećaju naprosto brzinu obilaska, tj. svoju frekvenciju. To povećanje frekvencije obilaska zove se Larmorova precesija. Ove inducirane struje se prikazuju opet dipolima, samo što se oni postavljaju *protiv polja*, dakle ne pomažu polje, već sprečavaju njegov ulazak u materijal. Ta se pojava zove **dijamagnetizam,** a odgovarajuća susceptibilnost mora biti *negativna*, jer se materijal suprotstavlja polju. Svi materijali su u stanovitom stepenu dijamagnetički.

Nasuprot tome postoje magnetski dipoli u materijalu koji se postavljaju s poljem i pomažu njegov prolaz, dakle djeluju kao kod dielektrika. To su najvećim dijelom elektronski spinovi. Ova se pojava zove **paramagnetizam,** za razliku od prijašnje pojave. On se izražava susceptibilnošću, koja je pozitivna kao u dielektrika. U materijalima se nalaze uvijek obje pojave, samo je pitanje koja je od njih dominantna. Materijali se svrstavaju prema predznaku susceptibilnosti, te su za

$$\mu_r - 1 < 0 \quad \text{dijamagnetski materijali}$$

$$\mu_r - 1 > 0 \quad \text{paramagnetski materijali}$$

U tablici 2.3. navedeni su neki materijali da se vidi red veličine susceptibilnosti.

Magnetske susceptibilnosti nekih materijala

prema Handbook of chemistry and physica, The chemical rubber Co, 1966.

TABLICA 2.3.

Dijamagnetici		*Paramagnetici*	
Materijal	$-(\mu_r-1)$	Materijal	$+(\mu_r-1)$
Bizmut	$13{,}1 \cdot 10^{-6}$	Gadolinij	$38200 \cdot 10^{-6}$
Germanij	$5{,}66 \cdot 10^{-6}$	Terbij	$7600 \cdot 10^{-6}$
Antimon	$5{,}42 \cdot 10^{-6}$	Disprozij	$5450 \cdot 10^{-6}$
Antimonjodid (SbI_3)	$1{,}44 \cdot 10^{-6}$	Manganov klorid ($MnCl_2$)	$343 \cdot 10^{-6}$
Kalcijev karbonat	$1{,}03 \cdot 10^{-6}$	Kisik (tek. — 183°C)	$276 \cdot 10^{-6}$
Cinkov sulfat	$0{,}98 \cdot 10^{-6}$	Cer	$118 \cdot 10^{-6}$
Bakar	$0{,}77 \cdot 10^{-6}$	Mangan	$69 \cdot 10^{-6}$
Voda (tek, 20°C)	$0{,}72 \cdot 10^{-6}$	Krom	$25 \cdot 10^{-6}$
Etilalkohol	$0{,}575 \cdot 10^{-6}$	Kromov sulfat [$Cr_2(SO_4)_3$]	$91 \cdot 10^{-6}$
Glikol	$0{,}698 \cdot 10^{-6}$		
Benzol	$0{,}611 \cdot 10^{-6}$		

Posebno mjesto zauzimaju paramagnetici vrlo velike susceptibilnosti. Oni se posebno nazivaju **feromagnetici,** jer se najviše ističe željezo. Među čistim metalima samo su željezo, nikalj i kobalt feromagnetici. Susceptibilnost neferomagnetskih materijala je vrlo malena, te se u prvom približenju može zanemariti. Među paramagneticima posebno mjesto zauzimaju rijetke zemlje, kao gadolinij, terbij i disprozij, koji imaju najveću susceptibilnost, ali još uvijek malenu, tako da je njihov utjecaj zanemariv. Bizmut je najbolji dijamagnetik. Dijamagnetici su prilično rašireni među materijalima, ali njihova susceptibilnost dolazi još manje do izražaja.

2.8. KUGLA U HOMOGENU POLJU

Prostor ispunjava sredstvo dielektričnosti ε_2 i u njemu vlada homogeno elektrostatsko polje jakosti $\mathbf{E}_0$. Upotrebljavaju se polarne koordinate za ravninu, jer je polje aksijalno simetrično. Ekvipotencijalne plohe su ravnine $z = \text{konst.}$, a ploha nultog potencijala prolazi kroz ishodište O koordinatnog sustava. Prema tome, potencijal homogenog polja iznosi

$$\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta$$

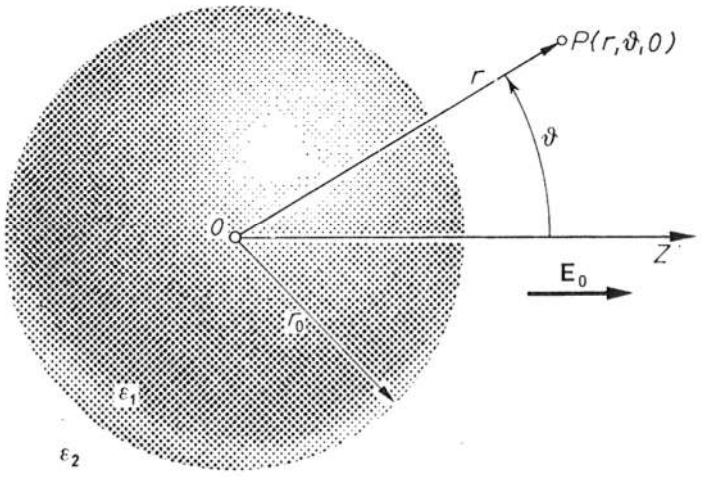
U polje se unosi kugla, prema sl. 2.15., polumjera r_0, od dielektrika dielektričnosti ε_1. Kugla se pod utjecajem polja polarizira, te se njezin utjecaj u vanjskom prostoru može prikazati dipolom. U vanjskom se prostoru na potencijal φ_0 homogena polja superponira potencijal dipola dipolnog momenta $\mathbf{p}$ koji ima isti smjer kao i $\mathbf{E}_0$. Ukupni potencijal u vanjskom prostoru je

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \vartheta + \frac{p \cos \vartheta}{4 \pi \varepsilon_2 r^2}, \quad r \geqslant r_0 \tag{2.54}$$

Unutarnjost kugle ostaje homogeno naelektrizirana, u njoj i dalje vlada homogeno polje nove jakosti $(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1')$. Ta se pretpostavka kasnije dokazuje. S njome je potencijal u unutarnjosti kugle

$$\varphi_1 = -(E_0 + E_1') r \cos \vartheta, \qquad r \leqslant r_0 \tag{2.55}$$

Obje pretpostavljene veličine, p i E_1', određuju se iz uvjeta na granici između oba dielektrika na površini kugle. Površina kugle ne nosi nikakve slobodne naboje, te



Sl. 2.15. Dielektrična kugla u homogenom električnom polju jakosti $\mathbf{E}_0$. Kuglino središte je u ishodištu sfernog koordinatnog sustava. Ravnina nultog potencijala homogenog polja prolazi ishodištem.

su tamo normalne komponente indukcije međusobno jednake i tangencijalne komponente jakosti polja također su jednake. Mora biti zadovoljena jednakost

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta}\right)_{r=r_0} = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta}\right)_{r=r_0}$$

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)_{r=r_0} = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right)_{r=r_0}$$

Iskoristivši postavljenu jednakost dobivaju se nepoznate veličine

$$p = 4\pi r_0^3 \frac{\varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 = 3 V_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \varepsilon_2 E_0$$

$$E_1' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \tag{2.56}$$

One su neovisne o mjestu na površini kugle. Zato je pretpostavka bila točna. Dipolni moment kugle je ovisan direktno o njezinu volumenu. Budući da u kugli

ostaje homogeno polje, polarizacija **P** dielektrika je konstantna po cijelom prostoru i ima smjer od $\mathbf{E}_0$, tj.

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V_0} = 3\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\,\varepsilon_2\,\mathbf{E}_0 \tag{2.57}$$

Vodljiva kugla se slično ponaša, samo se za nju uzima dielektričnost $\varepsilon_1 = \infty$. Sada je $\mathbf{p} = 3\,V_0\,\varepsilon_2\,\mathbf{E}_0$ i $\mathbf{E}_1' = -\,\mathbf{E}_0$. Ovaj je dipolni moment već dobiven u poglavlju 2.5. To je dokaz više da je pretpostavka bila točna. Jednadžba (2.57) je iskorištena u prethodnom poglavlju o polarizaciji. Smatra se da polarizirana molekula ima upravo dipolni moment po jedinici volumena iz (2.57)

Jednadžbe za potencijal konačno glase

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\,\frac{3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\,E_0\,r\cos\vartheta, \qquad r \leqslant r_0 \\ \varphi_2 &= -\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\right] E_0\,r\cos\vartheta, \qquad r \geqslant r_0 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Polje je u kugli homogeno i ima iznos

$$E_1 = \frac{3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\,E_0 \tag{2.59}$$

Jednadžbe potencijala omogućuju potpun uvid u formaciju dielektrične kugle u homogenu polju. Jednadžbe se mogu iskoristiti za sva tri tipa statičkih polja, elektrostatsko, magnetostatsko i strujno. U magnetostatskom polju nadomješta se E_0 sa H_0, a dielektričnost sa permeabilnošću. U strujnom polju je mjesto dielektričnosti vodljivost.

Kad se usporedi (2.59) i (2.57), vidi se da je polarizacija kugle dana sa $P = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,E_1$ ili $D_1 - P = \varepsilon_2\,E_1$, što je već jednom ustanovljeno u vezi s polarizacijom.

Jakost polja na površini kugle na vanjskoj strani iznosi

$$E_{r2} = +\,\frac{3\,\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\,E_0\cos\vartheta$$

$$E_{\vartheta 2} = -\,\frac{3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\,E_0\sin\vartheta$$

Radijalna je komponenta najveća za $\vartheta = 0$. Tangencijalna je komponenta najveća za $\vartheta = \pi/2$ i jednaka je jakosti polja E_1 u kugli. U tablici je navedeno nekoliko iznosa E_1/E_0 i $E_{r2\,\max}/E_0$ za različite odnose dielektričnosti $\varepsilon_1/\varepsilon_2$.

TABLICA 2.4.

$\varepsilon_1/\varepsilon_2$	0	0,2	0,5	2	10	∞
E_1/E_0	1,5	1,36	1,2	0,75	0,25	0
E_{r2max}/E_0	0	0,27	0,6	1,5	2,5	3

Uopće najveći iznos jakosti polja u kugli je 1,5 E_0, a na površini kugle izvana on je 3 E_0, ovisno o promjeni dielektričnosti kugle.

Primjer dielektrične kugle u homogenu polju je vrlo poučan. Već je u prethodnom poglavlju iskorišten za proračun polarizacije. On pomaže da se lakše istraži utjecaj nečistoća u izolacijama. Neka kao primjer posluži transformatorsko ulje, čija je dielektričnost oko 2,3, a električna čvrstoća oko 18 kv/mm efektivnih. U konstrukcijama s uljem dozvoljava se jakost električnog polja do 1/5 od čvrstoće, tj. oko 4 kV/mm. Ulje se onečisti vodom, koja se po njemu rasporedi u obliku kuglastih kapljica. Voda je praktički vodič, te je za nju $\varepsilon_1 = \infty$. Na površini kapljice pojavit će se najveća jakost polja od 3 E_0, tj. oko 12 kV/mm. Narinuto električno polje će probiti ulje manje probojne čvrstoće.

Obrnut slučaj s uljem nastaje kad su u njemu mjehurići uzduha. Najveća jakost polja nastaje u mjehuriću i ona iznosi oko 1,2 E_0. To je daleko iznad probojne čvrstoće uzduha. Mjehurići u ulju se ioniziraju pod utjecajem polja, što olakšava proboj ulja kao izolacije. Na ovom je primjeru prikazan ukratko utjecaj nečistoće na električnu čvrstoću izolacija.

Još se neki utjecaji mogu istražiti ovim primjerom. Polarizacija kugle ne ovisi o njezinu polumjeru. Isto tako o njemu ne ovise ni jakosti polja na njezinoj površini. Zato je prikladna primjena dielektrične kugle u homogenu polju. Evo nekih primjera gdje će biti prikazana primjena.

PRIMJER 2.5. Nečistoće u izolaciji mogu se predstaviti kuglama. Izolacija ima dielektričnost ε_2. Dielektričnost nečistoće 'e ε_1. Kuglica nečistoće postaje dipol momenta

$$p = 3\, V_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2} \varepsilon_2 E$$

Prostor ispunjen izolatorom volumena V sadrži N kuglica. Polarizacija je dipolni moment po jedinici volumena, tj.

$$P = \frac{N p}{V} = \frac{N V_0}{V} 3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2} \varepsilon_2 E$$

Udio nečistoće u izolatoru iznosi

$$\frac{N V_0}{V} = n$$

Prije unošenja nečistoće bila je jakost polja E_0, odnosno indukcija $D = \varepsilon_2 E_0$.

Nakon unošenja nečistoće jakost polja slijedi iz odnosa

$$D - P = \varepsilon_2 E$$

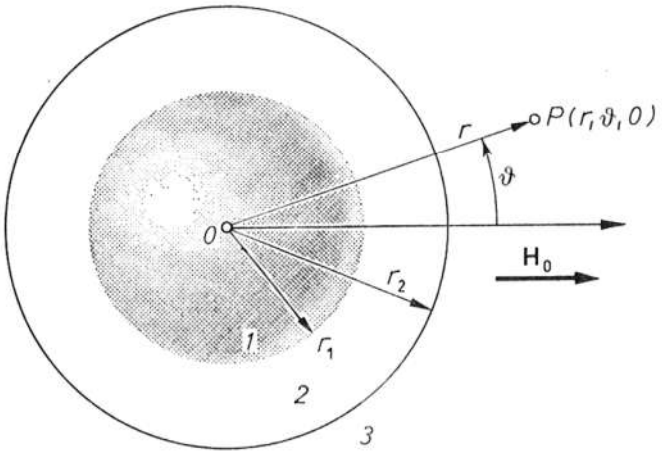
$$\varepsilon_2 E_0 - 3n \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \varepsilon_2 E = \varepsilon_2 E$$

Prema tome je promjena dielektričnosti izolatora zbog nečistoće n-tog dijela

$$\varepsilon_r = \frac{E_0}{E} = 1 + 3n \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

Ona se sada računa u odnosu na ε_2. Dakle, dielektričnost osnovnog sredstva ima umjesto ε_2 novi iznos koji uzima u obzir nečistoće, $\varepsilon_2' = \varepsilon_r \varepsilon_2$, tj. ona se mijenja ε_r puta. Neka je prostor ispunjen vodljivim kuglicama i one zauzimaju 10% volumena. Promjena dielektričnosti iznosi $\varepsilon_r = 1{,}3$. Prema tome, nova dielektričnost će biti $1{,}3\,\varepsilon_2$. Uz 1% vodljivih nečistoća nova bi dielektričnost bila $1{,}03\,\varepsilon_2$, tj. 3% povećana. Da su mjehurići uzduha u transformatorskom ulju dielektričnosti 2,3 i sadržaj mjehurića u ulju 1%, nova bi dielektričnost bila $0{,}993 \cdot 2{,}3 = 2{,}28$. Promjena dielektričnosti može poslužiti za utvrđivanje stupnja nečistoća u izolaciji.

PRIMJER 2.6. Koji puta je potrebno da se pojedini aparati zaštite od djelovanja magnetskih polja. **Zaštita** se postiže **feromagnetskim oklopom** koji se stavlja oko aparata. U proračunu zaštite može poslužiti kao prvo približenje promatranje polja u šupljoj feromagnetskoj kugli prema sl. 2.16. Šuplja se kugla nalazi u uzduhu gdje je vladalo polje jakosti H_0. Šuplju kuglu treba zamisliti kao dvije koncentrične kugle, a njezino djelovanje kao superpoziciju djelo-



Sl. 2.16. Šuplja feromagnetska kugla u homogenom magnetskom polju.

vanja dviju kugli. Da se dobije opći odnos, neka svaki prostor ima sredstvo svoje permeabilnosti, μ_1, μ_2, μ_3. Obje kugle postaju dipol pod utjecajem vanjskog polja H_0. Dipolni momenti iznose p_1 i p_2 za kuglu 1 i 2. U prostoru 1 za $r \leqslant r_1$ vlada homogeno polje jakosti $(H_0 + H_1' + H_2')$. U prostoru 2 za $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ vlada homogeno polje $(H_0 + H_2')$ na koje se superponira polje dipola p_1 unutarnje kugle. U prostoru 3 za $r \geqslant r_2$ superponira se na H_0 polje obaju dipola, p_1 i p_2. Prema rečenome, potencijali za pojedine prostore iznose

$$\varphi_1 = -(H_0 + H_1' + H_2')\, r \cos\vartheta, \qquad r \leqslant r_1$$

$$\varphi_2 = -(H_0 + H_2')\, r \cos\vartheta + \frac{p_1 \cos\vartheta}{4\pi\mu_2 r^2}, \qquad r_1 \leqslant r \leqslant r_2$$

$$\varphi_3 = -H_0\, r \cos\vartheta + \frac{(p_1 + p_2)\cos\vartheta}{4\pi\mu_3 r^2}, \qquad r \geqslant r_2$$

Uvjeti na granici $r = r_1$ i $r = r_2$ omogućuju da se odrede pretpostavljene veličine H_1', H_2', p_1, i p_2. Uvjeti kažu da su normalne komponente indukcije međusobno jednake, a isto tako i tangen-

cijalne komponente jakosti polja na granici između dva sredstva. Normalna komponenta indukcije jednaka je $\mu\,(\partial\varphi)/(\partial r)$, a tangencijalne komponente jakosti polja iznosi $(\partial\varphi)/(r\,\partial\vartheta)$. Pretpostavljene veličine iznose

$$p_1 = -\,9\,V_2\,H_0\,\frac{\mu_2\,\mu_3\,(\mu_2-\mu_1)}{D}$$

$$p_2 = 3\,V_2\,H_0\,\frac{\mu_3\,(\mu_2-\mu_3)\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3(\mu_1+2\,\mu_2)+(\mu_2-\mu_1)\right]}{D}$$

$$H_1' = 3\,H_0\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3\frac{\mu_3\,(\mu_2-\mu_1)}{D}$$

$$H' = -\,H_0\,\frac{(\mu_2-\mu_3)\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3(\mu_1+2\,\mu_2)-2\,(\mu_2-\mu_1)\right]}{D}$$

$$D = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3(\mu_1+2\,\mu_2)(\mu_2+2\,\mu_3)-2\,(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)$$

Volumen vanjske kugle je $V_2 = (4\pi/3)\,r_2^3$. Kad se pusti da iščezne unutarnja kugla, $r_1 \to 0$, veličine p_2 i H_2 teže k vrijednostima iz (2.56) za jednu kuglu, samo tamo treba zamijeniti dielektričnost s permeabilnošću. Treba naglasiti da su ovdje primijenjeni odnosi za elektrostatsko polje prostom zamjenom oznaka veličina za magnetostatsko polje. To je prednost potpune analogije za oba polja.

Ovaj je primjer interesantan zbog odnosa jakosti homogenog polja u unutarnjoj kugli i jakosti zadanog homogenog polja H_0. Taj odnos se zove faktor zaštite i iznosi

$$z = \frac{H_0 + H_1' + H_2'}{H_0} = 9\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3\frac{\mu_2\,\mu_3}{D}$$

U konkretnom je slučaju šuplja kugla u uzduhu, te su $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$, $\mu_2 = \mu\,\mu_0$. Osim toga je ljuska kugle od visokopermeabilnog materijala, te je $\mu \gg 1$. Faktor zaštite je uz takve uvjete približno jednak

$$z = \frac{4{,}5}{\mu}\,\frac{1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3} \tag{2.60}$$

Faktor zaštite je uvijek manji od jedinice, $z < 1$. Zato mora biti permeabilnost materijala kugle

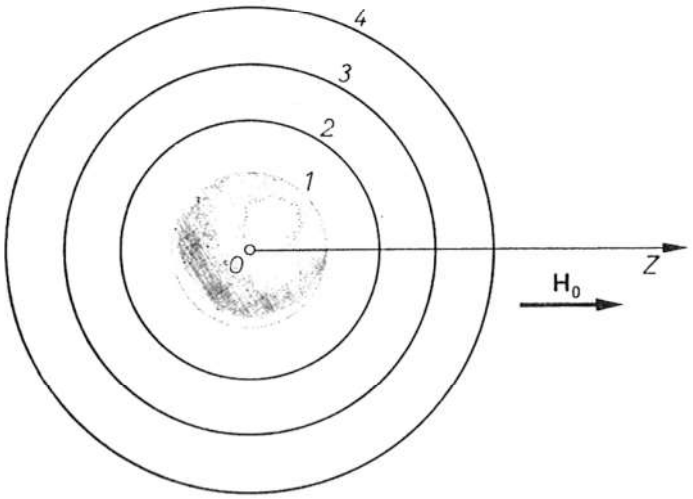
$$\mu > \frac{4{,}5}{z}$$

da bi se uopće postigao željeni faktor zaštite. Da bi se postigao neki faktor zaštite, potreban je materijal permeabilnosti nekog najmanjeg iznosa. Ako nema takvog materijala, ne može se uopće postići željeni faktor zaštite. Primjerice, za svođenje vanjskog polja na 1% iznosa, tj. $z = 0{,}01$, mora biti na raspolaganju feromagnetski materijal koji ima $\mu > 450$. Takav je transformatorski lim. S druge strane, tehnologija je uspjela dobiti materijal neke određene najveće permeabilnosti s kojim se postizava neki određeni, najmanji faktor zaštite. Manji faktor se ne može uopće postići. Kvalitet feromagnetskog materijala ima odlučnu ulogu u zaštiti od prejakih statičkih, magnetskih polja. Debljina stijenke šuplje kugle ima određenu ulogu. Vrijedi pravilo da se mora upotrijebiti materijal što veće permeabilnosti.

Za zaštitu jednog uređaja potrebna je šuplja kugla unutarnjeg promjera 500 mm ili polumjera 250 mm. Vanjsko polje treba svesti na 1% iznosa. Ako se upotrijebi materijal velike permeabilnosti od 10000, kugla treba da ima stijenku 3,8 mm debljine. Isti zahtjevi se postižu s materijalom permeabilnosti 1000, sa stijenkom debljine 55 mm, praktički 15 puta većom. Težina je također približno 15 puta veća i zbog nje će se upotrijebiti materijal veće permeabilnosti, naročito ako je aparat prenosiv.

Proračun elektromagnetske zaštite je drukčiji za promjenljivo polje i to je češći slučaj.

PRIMJER 2.7. Magnetski zasloni imaju značajnu ulogu u zaštiti instrumenata i aparata od prejakih magnetskih polja. Efikasna zaštita od statičkog polja postiže se oklopima koji imaju slojevite stijenke. Efikasnost takve zaštite bit će provjerena primjenom koncentričnih kugli kao na sl. 2.17. Kugline plohe 1, 2, 3, ... predstavljaju granice među feromagnetskim ljuskama.



Sl. 2.17. Sustav koncentričnih kugli u homogenom magnetskom polju. Na slici su označene 4 kugline plohe kao granične plohe. One dijele 5 prostora jedan od drugoga.

Skupina koncentričnih kugli se nalazi u homogenom magnetskom polju jakosti H_0. Kugle se pod utjecajem polja polariziraju, tj. one postaju magnetski dipoli. Polje dipola se superponira na homogeno polje izvan kugle, a unutar nje ostaje polje homogeno. Unutar neke granične kugle postoji homogeno polje i polje dipola svih kugli koje se nalaze unutar promatrane kugle. Neka kao primjer posluži ljuska između kugli 2 i 3 na sl. 2.17. U promatranoj ljusci postoji polje dipola kugle 1 i 2 i homogeno polje kugli 3 i 4, i konačno još postoji homogeno polje H_0. Potencijal polja promatrane ljuske iznosi

$$\varphi_3 = -(H_0 + H_3 + H_4)\, r \cos\vartheta + \frac{(p_1 + p_2)\cos\vartheta}{4\pi\mu_3 r^2}, \qquad r_2 < r < r_3$$

Tako bi se formirao potencijal u svim ljuskama. Permeabilnosti pojedinih ljuski su međusobno različite, a nose indeks vanjske granične kugle. Vanjska k-ta granična kugla ograničuje ljusku permeabilnosti μ_k. Tako se uspostavljaju potencijali u svim ograničenim prostorima, a granični uvjeti pomažu da se dode do nepoznatih veličina homogenog, superponiranog polja H_k i dipolnih momenata p_k. Ako je n graničnih kugli, pojavi se $2n$ nepoznatih veličina, a toliko mora biti i graničnih uvjeta.

Granični uvjeti se opet odnose na tangencijalne komponente jakosti polja i na normalne komponente indukcije. Ti se uvjeti postavljaju za svaku graničnu kuglu

$$\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\vartheta}\right)_u = \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\vartheta}\right)_v, \qquad r = r_k$$

$$\mu_u \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}\right)_u = \mu_v \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}\right)_v, \qquad r = r_k$$

Na taj se način dolazi na $2n$ linearnih jednadžbi. One se mogu prikazati matrično u obliku

$$\left|\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \widetilde{\mathbf{B}} & \mathbf{C} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{p} \end{array}\right| = -H_0 \left|\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} \end{array}\right|$$

Tu su **A**, **B**, $\widetilde{\mathbf{B}}$ i **C** sve kvadratne matrice istog n-tog reda, koliko ima i graničnih kugli.

Matrica **A** je dijagonalna matrica kojoj su članovi u dijagonali

$$A_k = \frac{3\,V_k\,\mu_k\,\mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}$$

$$\mathbf{A} = [A_k]_n^n$$

V_k je volumen k-te kugle, μ_k je permeabilnost ljuske unutar k-te kugle, a μ_{k+1} je permeabilnost ljuske izvan iste kugle. Matrica **C** je također dijagonalna matrica čiji su članovi u dijagonali

$$C_k = -\frac{2}{3\,V_k\,(\mu_k - \mu_{k+1})}$$

$$\mathbf{C} = [C_k]_n^n$$

Matrica **B** je kvadratna, trokutna matrica čiji su članovi

$$B_{kk} = \frac{\mu_k}{\mu_k - \mu_{k+1}} \qquad B_{jk} = 1,\ j > k$$

$$B_{jk} = 0,\ j < k$$

Matrica $\widetilde{\mathbf{B}}$ je transponirana matrica **B**. Matrica **H** je stupčana matrica

$$\mathbf{H} = [H_k]_n^1$$

čiji su članovi superponirana homogena polja $H_1, H_2, H_3, \ldots H_n$. Matrica **p** je također stupčana matrica istog oblika, a pojedini članovi su joj nepoznati dipolni momenti p_k. Matrice **0** i **1** su također stupčane matrice s n članova, od kojih su u prvoj matrici svi članovi nula, a u drugoj su jedinica. Eliminira se **p**, a preostaje jednadžba

$$(\widetilde{\mathbf{B}} - \mathbf{C}\,\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A})\,\mathbf{H} = \mathbf{S}\,\mathbf{H} = -H_0 \cdot \mathbf{1}$$

Pomoćna kvadratna matrica

$$\mathbf{S} = \widetilde{\mathbf{B}} - \mathbf{C}\,\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}$$

je n-tog reda, koliko ima graničnih kugli, a njezini se članovi dobiju nakon supstitucije. Oni su naročito jednostavni ako se primijene feromagnetske šuplje kugle od istog materijala, a među njima je uzduh. Na taj način se izmjenjuju ljuske od feromagneta i uzduha. Unutarnji i vanjski prostor je ispunjen uzduhom. Unutarnji prostor je onaj koji treba zaštititi od prejakog utjecaja statičkog magnetskog polja. To je na sl. 2.17. prostor unutar kugle 1. Između kugli 1 i 2, te 3 i 4 su feromagnetske ljuske, a ostali je prostor ispunjen uzduhom.

Kad se tako postave kugline ljuske, iznose članovi pomoćne matrice

$$s_{jk} = -\frac{2\,V_k}{V_j}, \qquad j > k, \qquad V_k, V_j \text{ - volumeni kugli}$$

$$s_{jk} = 1, \qquad j < k$$

$$s_{2k-1} = \frac{1 + 2\,\mu}{1 - \mu}, \quad s_{2k} = \frac{\mu + 2}{\mu - 1}, \text{ članovi dijagonale}$$

Tu je μ relativna premeabilnost feromagnetske ljuske.

Faktor zaštite se definira kao u prethodnom primjeru

$$z = 1 + \frac{1}{H_0}\sum_1^n H_k$$

Kad bi postojala samo jedna feromagnetska ljuska, bile bi dvije granične kugle volumena V_1 i V_2, a potrebne jakosti polja slijede iz jednadžbe

$$\begin{vmatrix} \frac{1+2\mu}{1-\mu} & 1 \\ -\frac{2V_1}{V_2} & \frac{\mu+2}{\mu-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix} = -H_0 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Kad se uzme u obzir velik iznos permeabilnosti, $\mu \gg 1$, dobije se faktor zaštite iz prethodnog primjera.

S matrica omogućuje da se riješi zaštita od bilo kojeg broja koncentričnih kugli. Kao numerički primjer neka posluži dvostruka feromagnetska kugla od jednakog materijala. Ona ima četiri granične kugle, te je njezina **S** matrica

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \frac{1-2\mu}{1-\mu} & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{2V_1}{V_2} & \frac{\mu+2}{\mu-1} & 1 & 1 \\ -\frac{2V_1}{V_3} & -\frac{2V_2}{V_3} & \frac{1-2\mu}{1-\mu} & 1 \\ -\frac{2V_1}{V_4} & -\frac{2V_2}{V_4} & -\frac{2V_3}{V_4} & \frac{\mu+2}{\mu-1} \end{vmatrix}$$

Treba uzeti u obzir da je $\mu \gg 1$. Kad se izračunaju sve jakosti polja H_1, H_2, H_3 i H_4, dobija se faktor zaštite

$$z = 1 + \frac{1}{H_0}(H_1 + H_2 + H_3 + H_4)$$

On se preglednije izražava u recipročnom iznosu koji iznosi za ovaj slučaj

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{2\mu}{9}\right)^2 \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)\left(1 - \frac{V_2}{V_3}\right)\left(1 - \frac{V_3}{V_4}\right)$$

Kao što se vidi, dobijeni izraz je razmjerno jednostavan. Slično izražena recipročna vrijednost faktora zaštite jedne feromagnetske kugle iznosi iz prethodnog primjera

$$\frac{1}{z} = \frac{2\mu}{9}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)$$

Numerički proračun je najlakši, ako su omjeri polumjera susjednih kugli međusobno jednaki, tj.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_3}{r_4}$$

Zato je faktor zaštite

$$z = \left(\frac{9}{2\mu}\right)^2 \frac{1}{d^3}$$

$$d = 1 - \frac{V_1}{V_2} = 1 - \frac{V_2}{V_3} = 1 - \frac{V_3}{V_4}$$

U prethodnom primjeru je trebalo zaštititi kuglasti prostor promjera 500 mm željezom permeabilnosti 1000. Faktor zaštite je trebao biti 0,01. Za isti faktor zaštite i isti materijal iznosi omjerna konstanta

$$d = 0{,}1266$$

Odatle je

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1} = 0{,}0462$$

a debljina nutarnje feromagnetske ljuske iznosi

$$r_2 - r_1 = 11{,}6 \text{ mm}$$

za nutarnji polumjer 250 mm. Prema tome, druga granična kugla ima polumjer $r_2 = 261{,}6$ mm. Debljine ostalih dviju ljuski iznose

$$r_3 - r_2 = 12{,}1 \text{ mm - uzduh}$$

$$r_4 - r_3 = 12{,}6 \text{ mm - željezo}$$

Kad se ovaj rezultat usporedi s rezultatom iz prethodnog primjera, vidi se da se postiže vrlo velika ušteda primjenom dviju koncentričnih feromagnetskih kugli koje razdvaja jedna zračna kuglina ljuska. Dok je tamo debljina ljuske 55 mm, obje željezne ljuske imaju ovdje debljinu 24,2 mm, a za isti stupanj zaštite.

2.9. LINIJSKI NABOJ

Linijski naboj i njegova gustoća su definirani u poglavlju 1.3. Linijski element $\mathrm{d}l$ ima naboj $\lambda\,\mathrm{d}l$, koji se smatra točkastim nabojem. Njegov je potencijal

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon r}$$

Potencijal cijele nabijene krivulje iznosi

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{r} \tag{2.61}$$

Jakost polja je naprosto $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Mjesto diskontinuiteta je $r = 0$, te se za njega polje ne računa.

PRIMJER 2.8. Kružnica polumjera r_0 je **nabijena** konstantnom linijskom gustoćom λ. Traži se polje u nekoj točki P prema sl. 2.18. Polje je aksijalno simetrično. Treba primijeniti cilindrični sustav (r, ϑ, z). Točka promatranja ima koordinate P $(r, 0, z)$. Kružni naboj je postavljen u ravninu $z = 0$. Polje se određuje preko potencijala

$$\varphi = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{\pi} \frac{\lambda r_0\,\mathrm{d}\vartheta}{\varrho} = \frac{\lambda r_0}{2\pi\varepsilon}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\varrho}$$

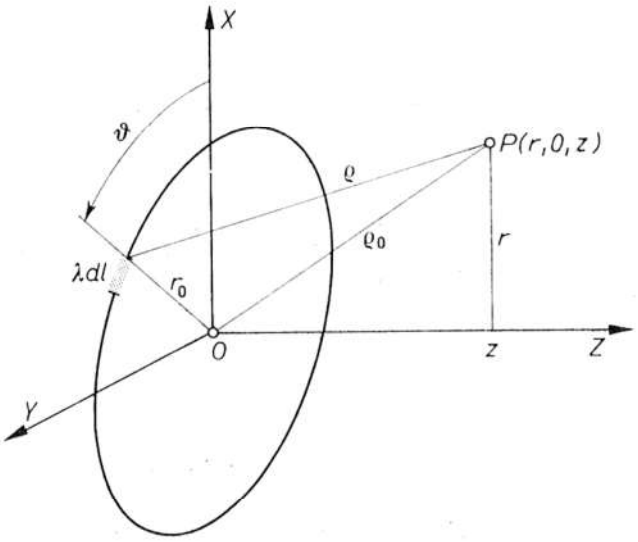
ϱ je udaljenost između elementa koji ima koordinate $(r_0, \vartheta, 0)$ i točke promatranja P $(r, 0, z)$. Ta je udaljenost dana sa

$$\varrho^2 = (r_0 \cos \vartheta - r)^2 + (r_0 \sin \vartheta)^2 + z^2$$

$$\varrho^2 = r_0^2 + \varrho_0^2 - 2\, r_0\, r \cos \vartheta$$

Prema tome je potencijal

$$\varphi = \frac{\lambda\, r_0}{2\, \pi\, \varepsilon} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{(r_0^2 + \varrho_0^2 - 2\, r_0\, r \cos \vartheta)^{1/2}}$$



Sl. 2.18. Kružni linijski naboj. Središte njegove kružnice je u ishodištu cilindričnog koordinatnog sustava.

Ovdje se može uvrstiti $\vartheta = \pi + 2\,\beta$ ili $\mathrm{d}\vartheta = 2\,\mathrm{d}\beta$, sa novim odgovarajućim granicama, te je

$$\varphi = \frac{\lambda\, r_0\, k}{2\, \pi\, \varepsilon\, (r_0\, r)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\beta}{(1 - k^2 \sin^2 \beta)^{1/2}}$$

$$k^2 = \frac{4\, r_0\, r}{(r_0 + r)^2 + z^2}$$

Ovaj integral je eliptički integral prve vrsti $F(\varphi, k)$, a posebno, kad je $\varphi = \pi/2$, tada je $K(k)$ potpun integral, gdje je k modul integrala. Prema tome je konačno potencijal

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\pi} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} k\, K(k)$$

Ovdje je

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{2\,\varepsilon} = \frac{Q}{4\, \pi\, \varepsilon\, r_0}$$

potencijal u središtu kružnice, ako je njezin ukupni naboj $Q = 2\, \pi\, r_0\, \lambda$.

Jakost polja se dobije iz gradijenta potencijala, a ima samo dvije komponente, radijalnu i aksijalnu. Polje je aksijalno simetrično, te nema tangencijalne komponente. Pojedine komponente iznose tada

$$E_r = \frac{\varphi_0}{2\pi r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\frac{k^3}{1-k^2}\left[\frac{K(k)-E(k)}{k^2}+\frac{r_0+r}{2r_0}E(k)-K(k)\right]$$

$$E_z = \frac{\varphi_0}{2\pi r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\frac{z}{2r_0}\frac{k^3}{1-k^2}E(k)$$

$E(k)$ je potpuni eliptički integral druge vrste, uz modul k. Zadani kružni naboj smije se promatrati kao točkasti naboj Q, smješten u središtu kružnice, na dovoljnoj udaljenosti. Pogreška je manja od 1%, ako je udaljenost oko stotinu polumjera kružnice ili više.

U neposrednoj blizini kružnice polje ima oblik kao u linijskog naboja na pravcu, a ekvipotencijalne plohe su torusi kružnog presjeka. Tako se ponaša polje u okolišu kružnice do udaljenosti $0{,}15\ r_0$ od nje. Ako se udaljenost od kružnice označi sa a, jakost polja u toj zoni iznosi naprosto $E = \lambda/(2\pi\varepsilon a)$. Potencijal iznosi u istoj zoni približno

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon r_0}\left(\frac{r_0}{r_0-a}\right)^{1/2}\ln\left(\frac{8r_0}{a}\right)$$

U istoj zoni vrijedi $1-k^2 \ll 1$, tj. modul k se nalazi vrlo blizu jedinici. Tada su potpuni eliptični integrali približno jednaki $K(k) = \ln(4/\sqrt{1-k^2}) = \ln(8\,r_0/a)$, $E(k) = 1$. Ovo razmatranje o polju kružnog naboja iskorištava se u određivanju polja kružnog torusa. Uvjet je da promjer njegova presjeka bude manji od 15% njegova promjera. Tada se može govoriti i o kapacitetu takva torusa. On bi iznosio iz gornje formule za potencijal

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon r_0\left(\frac{r_0-a}{r_0}\right)^{1/2}\cdot\frac{\pi}{\ln\left(\frac{8r_0}{a}\right)} = 4\pi\varepsilon r_0\cdot C_t$$

$$C_t = \left(\frac{r_0-a}{r_0}\right)^{1/2}\cdot\frac{\pi}{\ln\left(\frac{8r_0}{a}\right)}\,;\quad \frac{a}{r_0} < 0{,}15$$

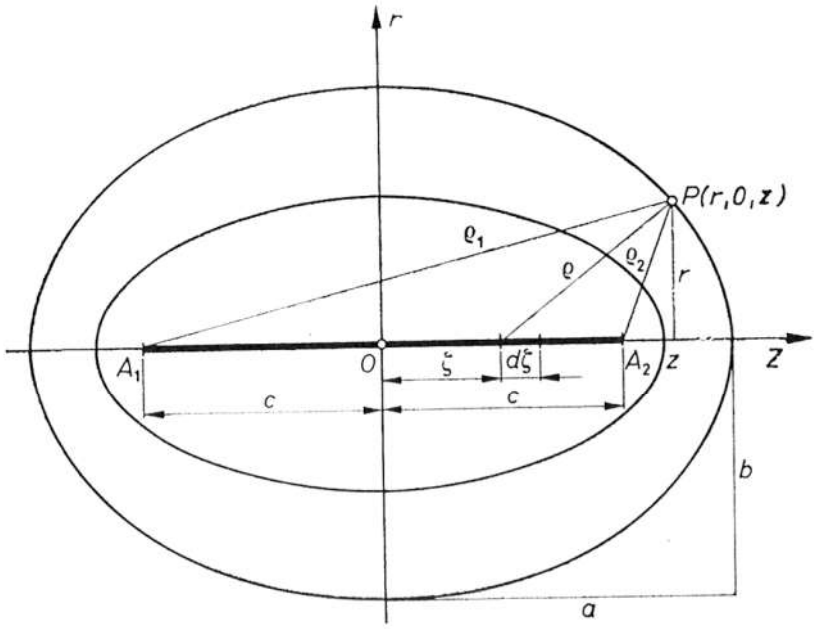
Konstanta C_t ovisi sada samo o omjeru a/r_0, a predstavlja faktor kojim se množi kapacitet kugle istog promjera kao torus, da bi se dobio njegov kapacitet. Ta konstanta iznosi za nekoliko vrijednosti omjera a/r_0 prema slijedećoj tablici

TABLICA 2.5.

a/r_0	0,01	0,02	0,05	0,1	0,15
C_t	0,47	0,52	0,60	0,70	0,73

Takvi se torusi upotrebljavaju pri zaštiti porculanskih lanaca od električnog luka kod električnih vodova. Neka je torus promjera 500 mm, tj. $r_0 = 250$ mm, a promjer njegova presjeka 50 mm, tj. $a = 25$ mm. U uzduhu njegov kapacitet iznosi $C = 111 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 19{,}4$ pF. Ako je torus na potencijalu od 85 kV, njegov naboj mora biti $Q = C\varphi = 19{,}4 \cdot 85 \cdot 10^{-9}$, $Q = 1{,}65 \cdot 10^{-6}$ kulona. Linijska gustoća naboja iznosi $\lambda = Q/(2\pi r_0) = 1.05 \cdot 10^{-5}$ C/m, a onda je jakost polja na površini torusa $E_0 = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 a) = 0{,}76$ kV/mm.

PRIMJER 2.9. Linijski naboj konstantne gustoće λ nalazi se **na dužini** $2c$ prema sl. 2.19. Treba upotrijebiti cilindričke koordinate, jer je polje aksijalno simetrično. Ishodište koordinatnog sustava se postavi u sredinu dužine, a sama nabijena dužina se postavi u aksijalnu os Z.



Sl. 2.19. Linijski naboj na dužini $2c$. Gustoća naboja je konstantna. Središte dužine je u ishodištu cilindričnog koordinatnog sustava. Ekvipotencijalne plohe su izduženi, konfokalni sferoidi. Fokusi se nalaze na krajevima dužine u A_1 i A_2.

Naboj ima svoj koordinatni sustav, ali se mijenja samo u smjeru koji se poklapa s osi Z. Promatrač je u točki $P(r, 0, z)$. Element naboja $\lambda\, d\zeta$ udaljen je od točke promatranja za ϱ, a ona slijedi iz

$$\varrho^2 = (z - \zeta)^2 + r^2$$

Sada je potencijal u točki promatranja

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-c}^{+c} \frac{\lambda\, d\zeta}{\varrho} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{z + c + [(z+c)^2 + r^2]^{1/2}}{z - c + [(z-c)^2 + r^2]^{1/2}} \tag{2.62}$$

Neka je $\overline{A_1P} = \varrho_1$, a $\overline{A_2P} = \varrho_2$, tj. $(z + c)^2 + r^2 = \varrho_1^2$ i $(z - c)^2 + r^2 = \varrho_2^2$. Iz toga odnosa slijedi $\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = 4\, c\, z$. Jednadžba ekvipotencijalne plohe dobije se iz $\varphi = \text{konst.}$ To znači da je

$$\frac{z + c + \varrho_1}{z - c + \varrho_2} = k$$

Iz odnosa $4\, c\, z = \varrho_1^2 - \varrho_2^2$ uvrsti se z u jednadžbu za k, te se dobiva da za ekvipotencijalnu plohu mora vrijediti odnos

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2\, c\, \frac{k + 1}{k - 1}$$

Suma radijusvektora je konstantna, što po definiciji odgovara elipsi koja ima fokuse u A_1 i A_2, na krajevima naboja. Fokalna udaljenost dotične elipse neovisna je o konstanti k i iznosi $e = c$. Promatrana ekvipotencijalna ploha konstante k je *rotacioni elipsoid* ili *sferoid*. Budući da je fokaln a

udaljenost neovisna o konstanti k, sve su ekvipotencijalne plohe *konfokalni* sferoidi. Os rotacije pada u dužinu naboja, a u istom smjeru je i velika poluos a, koja iznosi za pojedinu ekvipotencijalnu plohu

$$a = c\,\frac{k+1}{k-1}$$

Mala poluos tada iznosi

$$b = 2c\,\frac{\sqrt{k}}{k-1}$$

Polje je aksijalno simetrično. Ukupni naboj na dužini iznosi $Q = 2c\lambda$. Potencijal pojedinog sferoida zadanog sa jednom poluosi, npr. a, određuje se iz $k = (a + c)/(a - c)$. Odatle je potencijal sferoida

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\ln k = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)$$

Ako se bilo koja ekvipotencijalna ploha nadomjesti vodljivim sferoidom, ništa se ne mijenja u polju. Istim postupkom kao kod kugle promatra se i polje rotacionog, vodljivog elipsoida. Sferoid je zadan poluosima a i b. Udaljenost fokusa izlazi iz odnosa $c^2 = e^2 = a^2 - b^2$, a ujedno i dužina $2c$ koja nosi naboj. Sferoid je na potencijalu φ_0 prema beskonačnosti. Naboj se nalazi na sferoidu, a u njegovoj unutarnjosti nema polja. Da bi se dobilo njegovo polje, naboj se odslika na dužinu $2c$, a linijska gustoća naboja je $\lambda = 4\pi\varepsilon\varphi_0/\ln k$. Sad je moguće odrediti potencijal u bilo kojoj točki prostora izvan sferoida.

Jakost polja se utvrđuje iz gradijenta potencijala. Karakteristične su jakosti polja u točkama gdje poluosi probadaju sferoid. Jakost polja na površini sferoida kod $z = a$, $r = 0$

$$E_c = E_a = \frac{2c}{b^2\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)}\varphi_0 \tag{2.63}$$

a kod $z = 0$, $r = b$

$$E_r = E_b = \frac{b}{a}E_a$$

Može se govoriti o kapacitetu sferoida kao kondenzatora

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{8\pi\varepsilon c}{\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)} \tag{2.64}$$

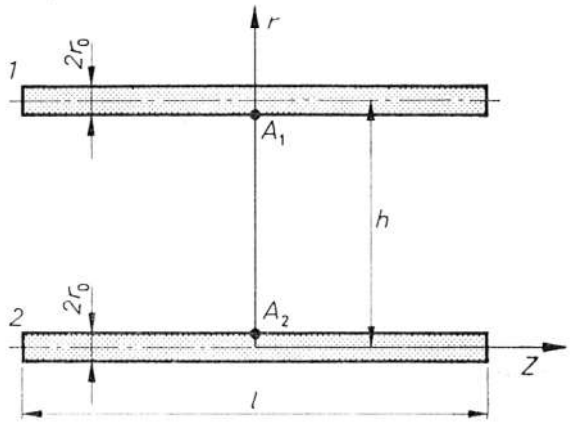
Neka sferoid ima poluosi $a = 250$ mm, $b = 62{,}5$ mm, a na potencijalu je od 70 kV. Udaljenost fokusa iznosi $e = 242$ mm $= c$, konstanta sferoida $k = (a + c)/(a - c) = 63$. Linijska gustoća jednaka je $\lambda = 4\pi\varepsilon_0\varphi_0\ln k = 1{,}87$ μC/m ili ukupni naboj $Q = 1{,}87 \cdot 0{,}484 = 0{,}9$ μC. Kapacitet je $C = Q/\varphi_0 = 12{,}9$ pF. Najveća jakost polja $E_a = 2{,}13$ kV/mm a najmanja $E_b = 0{,}53$ kV/mm.

Ovdje se govorilo o *izduženom* sferoidu koji ima $a > b$, a os rotacije se poklapa s poluosi a. Njegova površina je bitna za njegov kapacitet. To se odmah opaža ako se potraži kugla iste površine, te se potraži njezin kapacitet. Takva ekvivalentna kugla ima uvijek manji kapacitet od pripadnog izduženog sferoida. Vrlo izduženi sferoid sa $b/a = 0{,}1$ ima 1,22-struki kapacitet ekvivalentne kugle. Kapaciteti su praktički jednaki čim je $b/a \geqslant 0{,}5$

Sferoid degenerira u štap i ploču disk. Za **okrugli štap** je karakteristično da mu je promjer mnogo manji od duljine, $d \ll l$. On je ekvivalentan sferoidu koji ima $b \approx d/2 = r_0$, $a \approx l/2 = e = c$. Prema tome je kapacitet štapa iz (2.64)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon c}{\ln\left(\frac{2c}{r_0}\right)} \tag{2.65}$$

PRIMJER 2.10. Dva potpuno jednaka okrugla **štapa** smještena su **paralelno** kao na sl.2.20. Duljina im je l, a promjer $2\,r_0$. Razmaknuti su na udaljenost h. Oni se upotrebljavaju kao elektrode kondenzatora. Traži se kapacitet takvog kondenzatora. Jedan štap je na potencijalu φ_1, a drugi na potencijalu φ_2. Pretpostavlja se da su potencijali istog iznosa φ_0, samo različitog predznaka,



Sl. 2.20. Dva paralelna jednaka štapa naelektrizirana na potencijale φ_1 i φ_2. Njihov je promjer mnogo manji od duljine i mnogo je manji od njihova međusobnog razmaka. Oni se električki nadomještaju vrlo izduženim sferoidima.

$\varphi_1 = \varphi_0 = -\varphi_2$. Oba nose isti naboj Q, samo suprotna predznaka. Određuje se potencijal na površini štapa u točki A_1, odnosno A_2. Površina štapa je ekvipotencijalna ploha, te je svejedno u kojoj se točki određuje potencijal. A_1 i A_2 se odabiru u sredini štapova zbog preglednosti. Potencijal u A_1 sastoji se od dva dijela, od naboja štapa 1 i od naboja štapa 2. To se izražava jednadžbom

$$\varphi_1 = a_{11}\,Q_1 + a_{12}\,Q_2$$
$$\varphi_2 = a_{21}\,Q_1 + a_{22}\,Q_2$$

Budući da su oba štapa jednaka, mora biti zadovoljena jednakost $a_{11} = a_{22}$ i $a_{12} = a_{21}$. Koeficijenti a_{11} i a_{22} označavaju doprinos vlastitih naboja vlastitom potencijalu, a za njih su koordinate u formuli (2.62) potencijala $z = 0$ i $r = r_0$. Ti koeficijenti iznose sa duljinom štapa $l = 2\,c$

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{8\,\pi\,\varepsilon\,c}\ln\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + r_0^2}}{-c + \sqrt{c^2 + r_0^2}}\right) \approx \frac{1}{8\,\pi\,\varepsilon\,c}\ln\left(\frac{2\,c}{r_0}\right)^2$$

Koeficijenti $a_{12} = a_{21}$ označavaju uzajamni doprinos naboja potencijalu, a za njih su koordinate $z = 0$ i $r = h - r_0 \approx h$. Oni iznose

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{8\,\pi\,\varepsilon\,c}\ln\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + h^2}}{-c + \sqrt{c^2 + h^2}}\right)$$

U daljnjem razmatranju zadatka potrebno se odlučiti za potencijale vodljivih štapova. Kao što je rečeno, štapovi su na istom potencijalu, samo suprotna predznaka. Tada su naboji također jednaki, ali su suprotna predznaka. Zato je napon među štapovima

$$u = 2\,\varphi_0 = 2\,(a_{11} - a_{12})\,Q$$

Sada je kapacitet takve kombinacije štapova

$$C = \frac{Q}{u} = \frac{1}{2\,(a_{11} - a_{12})}$$

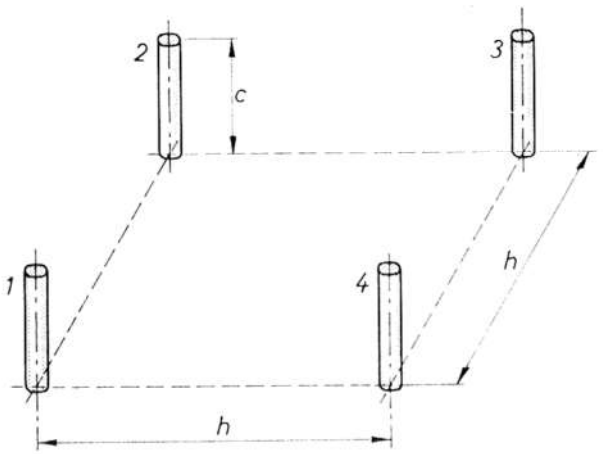
$$C = \frac{2\,\pi\,\varepsilon\,c}{\ln\left[\dfrac{2\,c}{r_0}\left(\sqrt{1 + \dfrac{c^2}{h^2}} - \dfrac{c}{h}\right)\right]} \qquad (2.66)$$

Neka su štapovi duljine 2 m, smješteni u uzduhu na razmaku od 500 mm. Njihov je promjer 50 mm. Kapacitet iznosi

$$C = \frac{55{,}5 \cdot 1{,}0}{\ln (80 \cdot 0{,}236)} = 18{,}87 \text{ pF}$$

Ovdje je još uvijek značajan međusobni utjecaj štapova kojim se povećava kapacitet.

PRIMJER 2.11. Uzemljenje je izvršeno **sa 4 okrugla metalna štapa,** koji su vertikalno zabodeni u tlo do određene dubine. Štapovi su paralelni i smješteni na vrhovima kvadrata, a nalaze se na istom potencijalu. Tlo je jednolično i konstantne vodljivosti. Treba odrediti otpor uzemljenja. Na sl. 2.21. skicirana su 4 štapa. Oni su do dubine c zabodeni u tlo, promjera su $2\,r_0$, a međusobno



Sl. 2.21. Uzemljenje sa 4 okrugla, jednaka štapa. Štapovi su paralelni i postavljeni u vrhove kvadrata. Njihov je promjer mnogo manji od međusobnog razmaka i njihove duljine.

su razmaknuti za h. Ovo treba promatrati kao štapove iz prethodnog primjera, dakle duljine $2\,c$, samo što se promatrana struja štapa odnosi na duljinu c. Umjesto naboja treba stavljati jakosti struje, a umjesto dielektričnosti ε se pojavljuje vodljivost $\varkappa$. Potencijali pojedinih štapova iznose

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= a_{11}\,i_1 + a_{12}\,i_2 + \cdots + a_{1n}\,i_n \\
\varphi_2 &= a_{21}\,i_1 + a_{22}\,i_2 + \cdots + a_{2n}\,i_n \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\varphi_n &= a_{n1}\,i_1 + a_{n2}\,i_2 + \cdots + a_{nn}\,i_n
\end{aligned}$$

Budući da su svi štapovi međusobno jednaki, koeficijenti a_{kk} su po prethodnom primjeru

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = \frac{1}{2\,\pi\,\varkappa\,c} \ln\left(\frac{2\,c}{r_0}\right)$$

Tu je odmah uzeto u obzir da samo duljina c vodi cijelu struju i_k. Međukoeficijenti a_{ik} uzimaju u obzir međudjelovanje štapova, a oni iznose po istom kriteriju

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{2\,\pi\,\varkappa\,c} \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{c}{h_{ik}}\right)^2} + \frac{c}{h_{ik}}\right]$$

Dalje bi se moglo rješavati zadatak za bilo koji razmještaj štapova. Ovdje postavljeni zadatak pojednostavnjuje znatno rješavanje. Četiri štapa su postavljena međusobno simetrično tako, da im se otpori smiju smatrati simetričnima. Budući da su na istom potencijalu, tj. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_0$, oni vode istu struju koja je četvrtina od ukupne struje i.

Zato je

$$\varphi_0 = (a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14})\frac{i}{4}$$

Međukoeficijenti iznose za ovaj primjer

$$a_{12} = a_{14} = \frac{1}{2\pi\varkappa c}\ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2} + \frac{c}{h}\right]$$

$$a_{13} = \frac{1}{2\pi\varkappa c}\ln\left[\sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{h}\right)^2} + \frac{c}{\sqrt{2}\,h}\right]$$

Prema tome je otpor uzemljenja konačno

$$R = \frac{\varphi_0}{i} = \frac{1}{8\pi\varkappa c}\ln\left(\frac{2c}{r_0}x_3\right)$$

$$x_3 = \left(\sqrt{1 + \frac{c}{2h}} + \frac{c^2}{\sqrt{2}h^2}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{c^2}{h^2}} + \frac{c}{h}\right)^2$$

Faktor x_3 se pojavljuje zbog utjecaja triju štapova na preostali jedan štap. Uvijek je $x_3 > 1$, te on djeluje u smislu povećanja otpora uzemljenja. Težnja je da x_3 bude što manji, da bi otpor uzemljenja bio što manji. Njegovih nekoliko iznosa je navedeno u tablici za različite odnose c/h

TABLICA 2.6.

c/h	2	1	0,5	0,2	0,1
x_3	56,7	11,2	3,7	1,7	1,3

Kako je omjer $2c/r_0$ vrlo velik prema x_3 i nalazi se iznad iznosa 100, nema značajnijeg smanjenja otpora za $c/h < 0{,}2$. Bitan utjecaj ima broj pobodenih štapova. Bilo koji broj N pobodenih štapova ima otpor uzemljenja

$$R = \frac{1}{2\pi\varkappa c N}\ln\left(\frac{2c}{r_0}x_n\right)$$

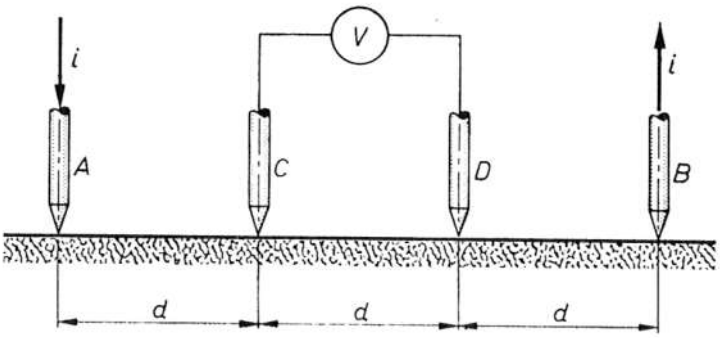
Istina, faktor x_n raste donekle s brojem štapova, ali je ipak mnogo veći direktni utjecaj broja štapova.

Neka je u ovom primjeru štap promjera 50 mm zaboden u tlo do dubine 2 m. Tlo je vodljivosti 10^{-2} S/m. Četiri štapa su u vrhovima kvadrata stranice 5 m. Otpor uzemljenja iznosi

$$R = \frac{1}{8\pi \cdot 10^{-2} \cdot 2}\ln(160 \cdot 2{,}9) = 12{,}2 \text{ oma}$$

Daljnje sniženje otpora postiže se u prvom redu povećanjem broja štapova.

PRIMJER 2.12. Mjerenje električne vodljivosti može se provesti i tako, da se mjeri razlika potencijala na površini vodiča kojim teče poznata struja. Pokus je skiciran na sl. 2.22. Kontaktima A i B na površini vodiča se dovodi poznata struja jakosti i. Kontaktima C i D se mjeri razlika potencijala instrumentom čiji je potrošak vrlo malen. Kontakti se nalaze u pravcu, a jed-



Sl. 2.22. Elektrode u mjerenju električne vodljivosti materijala što ispunjava poluprostor. Elektrode A i B služe za dovod struje, a elektrode C i D su naponske na koje se priključi voltmetar.

nako su međusobno razmaknuti za d. Površina vodiča je ravna, a njegova je debljina dovoljna, da ne treba uzeti u obzir utjecaj suprotne površine. Strujne kontakte A i B treba promatrati kao diskove položene na površini vodiča, malog promjera $2r_0$. Polje diska se izvodi iz polja kratkog linijskog naboja, čiji je potencijal predstavljen izrazom (2.62). Disk je degeneracija sferoida. Promjer diska je $2r_0$, a debljina mu je $d \ll 2r_0$. Prema tome su poluosi sferoida

$$b = r_0, \qquad a = \frac{d}{2}$$

a tada je fokusna udaljenost imaginarna i približno iznosi

$$e = j r_0 = c$$

Umjesto linijske gustoće naboja λ uvodi se gustoća struje po jedinici duljine ekvivalentnog izvora struje, jer se radi o strujnom polju umjesto elektrostatskog polja.

Ekvivalentna linijska gustoća struje je imaginarna i iznosi, uzevši da polovica vodi struju,

$$\lambda = \frac{i}{c} = \frac{i}{j r_0}$$

Potencijal se određuje za $z = 0$ u (2.62)

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varkappa} \ln\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + r^2}}{-c + \sqrt{c^2 + r^2}}\right)$$

Treba voditi računa da je c imaginaran, a iznosi $c = j r_0$. Nakon sređivanja iznosi potencijal na površini vodiča

$$\varphi = \frac{i}{\pi\varkappa r_0} \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Koordinata r se mjeri na površini vodiča, a k tome je $r > r_0$. U ovom slučaju je polumjer diska mnogo manji od promatranih udaljenosti, tj. $r_0/r \ll 1$. Zato je potencijal na površini s dovoljno točnosti

$$\varphi = \frac{i}{\pi \varkappa r}$$

Sada razlika potencijala iznosi između kontakta C i D

$$u = \varphi_C - \varphi_D = \frac{i}{\pi \varkappa d}$$

Mjereći napon između C i D i jakost struje kontakta A i B dobiva se vodljivost materijala $\varkappa = i/(\pi d u)$. Ako su to metali, mjereni naponi su vrlo maleni pri umjerenim strujama.

Neka je jakost struje $i = 30$ A, a razmak elektroda $d = 15$ mm. Mjereni napon bi iznosio $u = 11{,}0$ mikrovolta za bakreni vodič vodljivosti $\varkappa = 58$ MS/m.

2.10. LINIJSKI NABOJ NA PRAVCU

Nabijeni pravac je daljnja konfiguracija naboja koja nalazi široku primjenu, naročito u električnih vodova. Osim toga ona unosi daljnje proširenje poznavanja polja. Ne treba doslovno shvatiti pravac koji se rasprostire do beskonačnosti. Ovu konfiguraciju naboja treba shvatiti tako, da ona omogućuje formiranje polja koje se mijenja samo u dvije dimenzije. *Linijska gustoća naboja je konstantna.* Polje nabijenog pravca mora biti cilindrički simetrično. Ono se mijenja samo u ovisnosti o radijusu, a o drugim koordinatama je neovisno. Silnice polja su radijalne, a ekvipotencijalne plohe su koaksijalni kružni cilindri. Budući da je ukupni naboj beskonačno velik, promatra se samo jedinica duljine. Zato su sve veličine, geometrijske i elektromagnetske, u odnosu na jedinicu duljine. Jakost polja iznosi

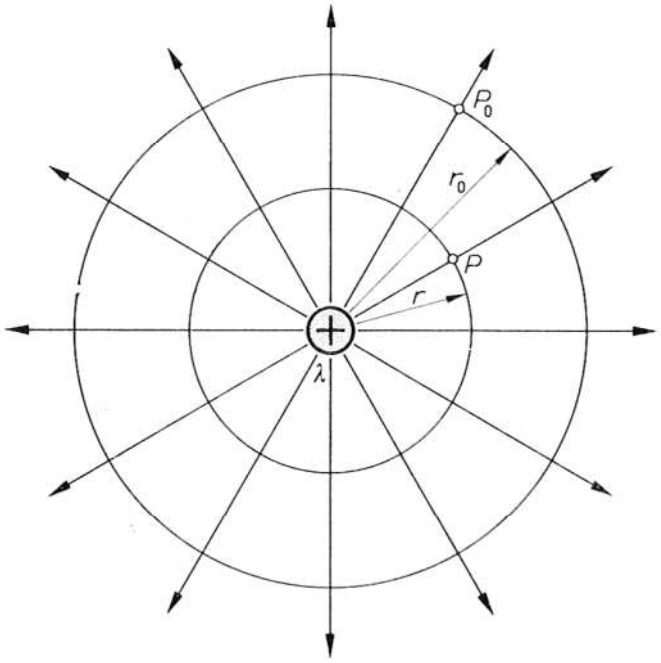
$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r} \mathbf{r}_0 \tag{2.68}$$

Jedinični radijusvektor $\mathbf{r}_0$ gleda u smjeru radijusa prema promatraču u cilindričkom koordinatnom sustavu.

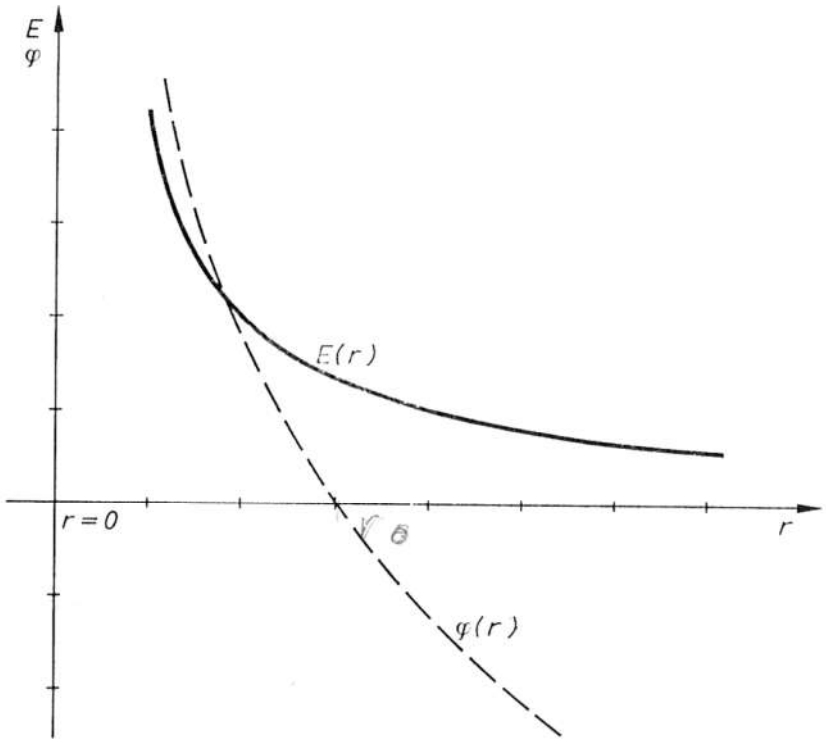
Razlika potencijala između dviju ekvipotencijalnih ploha iznosi po definiciji

$$\varphi - \varphi_0 = -\int_{r_0}^{r} E \, dr = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \tag{2.69}$$

Slika polja je prikazana na sl. 2.23. Ekvipotencijalna ploha φ_0 služi kao referentna, te se potencijali računaju prema njoj. Na sl. 2.24. prikazana je ovisnost razlike potencijala $\varphi - \varphi_0$ o radijusu za pozitivni linijski naboj. Ona je pozitivna u prostoru $r < r_0$, a negativna je u vanjskom prostoru. Ona teži k negativnoj bes-



Sl. 2.23. Silnice i ekvipotencijalne linije polja linijskog naboja na pravcu.



Sl. 2.24. Dijagram potencijala i jakosti polja linijskog naboja na pravcu. Na nekoj udaljenosti r_0 od pravca odabran je povoljni potencijal φ_0. U dijagramu je unesena razlika potencijala prema φ_0 u ovisnosti o udaljenosti od pravca. Isto tako je prikazana ovisnost jakosti polja.

konačnosti u beskonačnim udaljenostima. Ne može se očekivati da linijski naboj na pravcu ima konačan potencijal u beskonačnosti, jer se sam rasprostire do beskonačnosti.

2.10.1. Koaksijalni okrugli cilindri

Na istoj slici 2.24. prikazana je i jakost polja u ovisnosti o radijusu. Promjena potencijala je logaritmička, a promjena jakosti polja je hiperbolna ili recipročna promjeni radijusa. Polje linijskog naboja na pravcu mijenja se sporije nego u točkasta naboja.

Jednako kao u točkasta naboja, ekvipotencijalne plohe nadomještaju se vodljivim cilindrima, te se tako dobiva polje nabijenih vodljivih cilindara. Najrealnije je promatrati koaksijalne vodljive cilindre radijusa r_1 i r_2 zadane razlike potencijala među njima, tj. zadana napona među njima. Polje u prostoru među njima, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, ima isti oblik kao da se naboj nalazi na osi cilindra. Taj naboj iznosi pri zadanu naponu prema dosad izvedenome

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon u}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{2.70}$$

Prema tome, kapacitet među koaksijalnim vodljivim cilindrima ili kapacitet cilindričkog kondenzatora iznosi odatle

$$C = \frac{\lambda}{u} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{2.71}$$

Taj je kapacitet već dobiven u poglavlju o silocijevima 2.3. Naboj λ, tako određen služi pri određivanju polja među cilindrima. Jakost polja iznosi

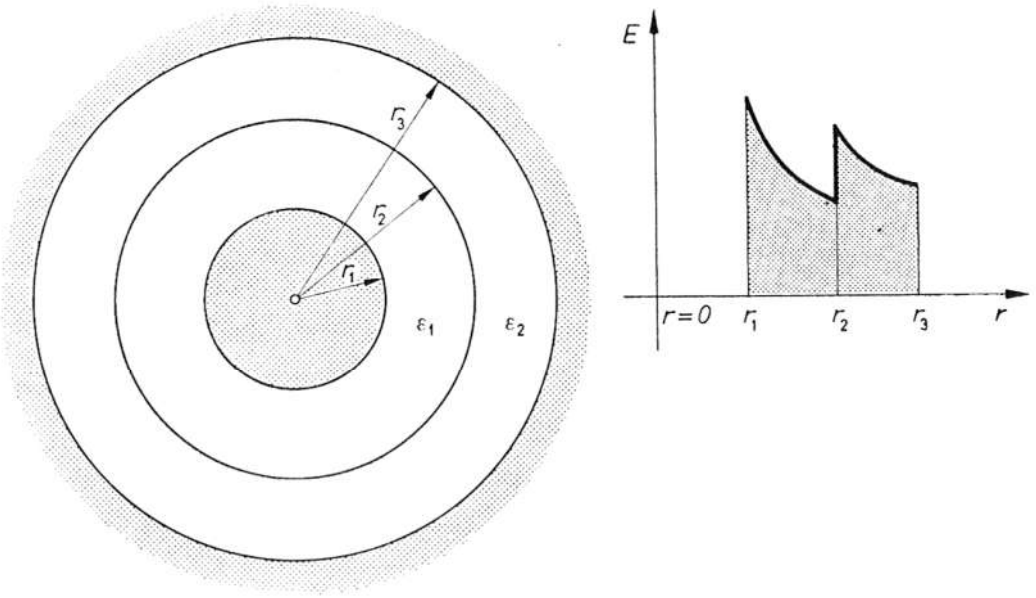
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}, \qquad r_1 \leqslant r \leqslant r_2$$

Polje ne postoji izvan cilindara. Naboj λ se nalazi na cilindrima, samo je suprotna predznaka. Najveća jakost polja nastaje na površini unutarnjeg cilindra, a jednaka je

$$E_{max} = E_1 = \frac{u}{r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

To je osnova za konstrukciju **koaksijalnog kabela.** Njegov vanjski promjer $2r_2$ je ograničen i obično zadan, a tada je jakost polja na unutarnjem vodiču minimalnog iznosa pri omjeru $r_2/r_1 = e$. Tako je zadan promjer unutarnjeg vodiča. Ovakav, jednostavan, koaksijalni kabel ima neekonomično opterećenu izolaciju. Jako polje je na unutarnjem vodiču i ono ograničuje napon, a tada je ostala izolacija neiskorištena.

PRIMJER 2.13. Zadan je **koaksijalni kabel s međucilindrom,** kao što je skicirano na sl. 2.25. Unutarnji vodič je promjera $2\,r_1$, a vanjski $2\,r_3$. Vodljivi, koaksijalni međucilindar, je promjera $2\,r_2$. Međucilindar ujedno dijeli dvije vrste izolacije dielektričnosti ε_1 i ε_2 prema slici.



Sl. 2.25. Presjek koaksijalnog kabela s dvije vrste izolatora. Obično je vanjski vodič na nultom potencijalu. Na desnoj slici je dijagram ovisnosti jakosti polja u izolatorima o udaljenosti od osi kabela.

On se ujedno održava na propisanom potencijalu tako, da je propisana razlika potencijala $\varphi_1 - \varphi_2$ i razlika potencijala $\varphi_2 - \varphi_3$. Nutarnji cilindar nosi naboj λ_1, a vanjski $-\lambda_2$.

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \text{nutarnji cilindar}$$

$$-\lambda_2 = \frac{2\pi\varepsilon_2}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}(\varphi_2 - \varphi_3) \qquad \text{vanjski cilindar}$$

Srednji cilindar ima ukupni naboj $(\lambda_2 - \lambda_1)$. Taj bi naboj bio nula, kad se potencijal φ_2 ne bi održavao, nego bi poprimio iznos koji se dobiva iz jednakosti $\lambda_2 = \lambda_1$ i zadanog napona $u = \varphi_1 - \varphi_3$.

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{\varepsilon_1 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\varepsilon_1 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \varepsilon_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} u = u_{230}$$

Jakost polja u pojedinom dielektriku sada naprosto iznosi

$$E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_1 r} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}, \qquad r_1 \leqslant r \leqslant r_2$$

$$E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_2 r} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{r \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}, \qquad r_2 \leqslant r \leqslant r_3$$

Ona je mjerodavna kako se određuju dimenzije kabela. Da je srednji cilindar izoliran, jakost polja bi pravila skok na prijelazu iz dielektrika 1 u dielektik 2, obrnuto razmjerno dielektričnosti na $E_{1v}/E_{2u} = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Jakost polja se povećava u drugom dielektriku, ako je njegova dielektričnost manja.

Najveće jakosti polja nastaju s unutarnje strane svakog dielektrika, tj.

$$E_{1u} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad \text{unutarnja strana dielektrika 1}$$

$$E_{2u} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{r_2 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} \qquad \text{unutarnja strana dielektrika 2}$$

Odatle je omjer razlike potencijala jednak

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{E_{2u}}{E_{1u}} \cdot \frac{r_2 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Budući da je ukupni napon $u = \varphi_1 - \varphi_3$ zadan, može se odrediti utjecaj položaja srednjeg cilindra na njegov napon. Neka su $r_3/r_1 = 5$ i $r_3/r_2 = 2$, tj. zadane su proporcije. Odabrana su oba jednaka dielektrika, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, i jednake jakosti polja, $E_{1u} = E_{2u}$. Tada je omjer potencijalnih razlika

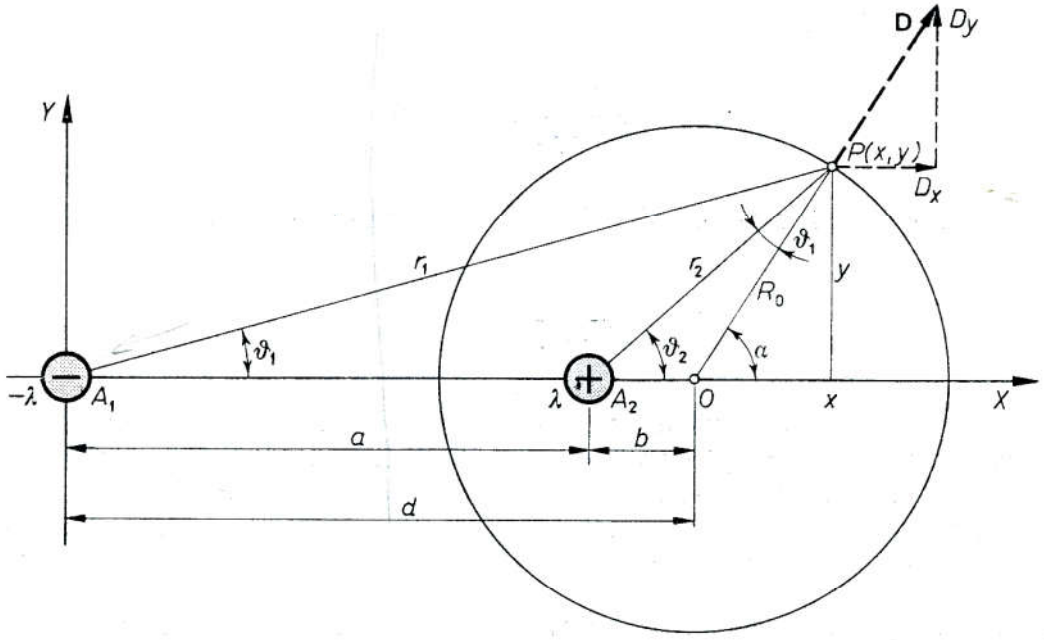
$$\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_1 - \varphi_2} = 1 \cdot \frac{2{,}5 \ln 2}{\ln 2{,}5} = 1{,}89$$

Kako je $\varphi_1 - \varphi_2 = u - (\varphi_2 - \varphi_3)$, potrebna je potencijalna razlika $(\varphi_2 - \varphi_3)/u = 0{,}655$ da bi se održale jednake jakosti polja $E_{1u} = E_{2u}$. Kad bi bio izoliran srednji cilindar, on bi postigao isti omjer napona $u_{230}/u = 0{,}43$. Prema tome, njegov potencijal treba podići 0,655/0,43 = 1,22 puta da bi se zadovoljilo zahtjevu.

Drugo je pitanje kolike su jakosti polja postignute na pojedinim mjestima. Zato su potrebni napon i dimenzije vodiča. Neka je dozvoljena jakost polja $E_{10} = 8$ kV/mm, a promjer unutarnjeg vodiča $2r_1 = 12$ mm. Prema tome vanjski cilindar je promjera $2r_3 = 60$ mm, a srednji cilindar $2r_2 = 30$ mm. Kad ne bi bilo srednjeg cilindra, iznosio bi dozvoljeni napon $u = 8 \cdot 6 \cdot \ln 2{,}5 = 44{,}0$ kV. To je isto kao da je srednji cilindar izoliran. Pri istom ukupnom naponu iznose dioni naponi $\varphi_2 - \varphi_3 = 28{,}8$ kV i $\varphi_1 - \varphi_2 = 15{,}2$ kV. Zato su jakosti polja $E_{1u} = E_{2u} = 2{,}8$ kV/mm. Te su jakosti polja znatno ispod dopuštenog iznosa. Dozvoljeni napon se smije podići 8/2,8 = 2,85 puta, tj. na iznos 125 kV iskorištenjem srednjeg cilindra. Takve nove mogućnosti nastaju zahvaljujući jednoličnijem opterećenju dielektrika. Raspodjela polja je prikazana u dijagramu na sl. 2.25.

2.10.2. Linijski naboj na paralelnim pravcima

Skupina linijskih naboja na paralelnim pravcima proizvodi polje koje se rješava primjenom principa superpozicije s pojedinim linijskim nabojima. Takvi se linijski naboji nalaze kod električnih vodova. Prema tome se prilagođava i rješavanje zadatka. Da bi se izbjeglo odabiranje referentne ekvipotencijalne plohe, izabiru se



Sl. 2.26. Linijski naboji na paralelnim pravcima. Oni su jednake gustoće, a suprotna predznaka. Negativni je naboj smješten u os Z. Ekvipotencijalne su plohe kružni cilindri.

samo *dva linijska naboja* na paralelnim pravcima. Oni imaju jednake naboje λ, a suprotna su predznaka. Tragovi pravaca su u točkama A_1 i A_2 na osi X, kao na sl. 2.26. Ishodište koordinatnog sustava nalazilo se u A_1, a tu je ujedno i naboj $-\lambda$. Pravci se protežu u smjeru osi Z. Naboji su razmaknuti za duljinu a jedan od drugoga. Simetralna ravnina $x = a/2$ je ujedno ekvipotencijalna ploha za koju se odabire nulti potencijal, $\varphi_0 = 0$. Prema njoj se računaju potencijali u cijelom prostoru. Za ovaj slučaj odabire se točka P_0 koja je udaljena od oba naboja za r_0. Potencijal se promatra u točki P, koja ima koordinate x i y, a udaljena je od naboja za r_1, odnosno r_2. Radijusvektori su vezani na koordinate odnosom

$$r_1^2 = x^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x - a)^2 + y^2$$

Potencijal točke P iznosi, prema tome

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[-\ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right) + \ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right)\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \qquad (2.72)$$

Prema sl. 2.26. potencijali su negativni u lijevom poluprostoru od simetralne ravnine, jer je tamo $r_2 > r_1$. Potencijal je pozitivan u desnom poluprostoru. Ekvipotencijalne plohe su definirane sa $\varphi =$ konst., što vodi na odnos

$$\frac{r_1}{r_2} = k = \exp\left[\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda}\varphi\right] > 1 \tag{2.73}$$

Takav se odnos pojavio već u određivanju polja dvaju točkastih naboja u poglavlju 2.5. To su Apolonijeve kružnice, koje imaju polumjer

$$R_0 = \frac{k\,a}{k^2 - 1}, \qquad k > 1 \tag{2.74}$$

a središte im je pomaknuto po osi X izvan spojnice naboja za duljinu

$$b = \frac{a}{k^2 - 1}, \qquad k > 1 \tag{2.75}$$

Uvjet $k > 1$ mora biti garantiran, a to se postiže odabiranjem istoga predznaka za φ i λ. *Sve ekvipotencijalne plohe su kružni cilindri* koji imaju osi u ravnini $y = 0$. Os ima koordinate u desnoj poluravnini u $x = d = a + b = k^2 a/(k^2 - 1) = k R_0$ i $y = 0$. Koordinate su u lijevoj poluravnini u $x = -b$, $y = 0$. Slika polja je simetrična u odnosu na simetralnu ravninu.

Silnice su po definiciji takve krivulje, čija tangenta se podudara sa smjerom polja. Polje zadanog naboja se mijenja samo u dvije dimenzije, tj. u ovisnosti o x i y, prema sl. 2.26. Jednadžba silnica slijedi po definiciji iz odnosa

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} \tag{2.76}$$

Komponente jakosti polja iznose iz potencijala i iznosa radijusvektora

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1 r_2}\left(r_2\frac{x}{r_1} - r_1\frac{x-a}{r_2}\right) \\ E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1 r_2}\left(r_2\frac{y}{r_1} - r_1\frac{y}{r_2}\right) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Iznos ukupne jakosti polja određuje se iz komponenti po relaciji $E^2 = E_x^2 + E_y^2$. Ove se komponente iskorišćuju u definicionoj jednadžbi silnica, te se nakon kraćenja dobiva jednadžba

$$\left(r_2\frac{y}{r_1} - r_1\frac{y}{r_2}\right)\mathrm{d}x - \left(r_2\frac{x}{r_1} - r_1\frac{x-a}{r_2}\right)\mathrm{d}y = 0$$

Budući da je $y\,dx - x\,dy = y^2\,d(x/y)$ i $y\,dx - (x - a)\,dy = y^2\,d[(x - a)/y]$, ova jednadžba poprima oblik nakon kraćenja sa y^2

$$\frac{r_2}{r_1}\,d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{r_1}{r_2}\,d\left(\frac{x-a}{y}\right) = 0$$

Treba uvesti nove nepoznanice $x/y = u$ i $(x - a)/y = v$, te se nakon uređenja jednadžbe svodi na jednostavan oblik

$$\frac{du}{1+u^2} - \frac{dv}{1+v^2} = 0$$

To je isto kao i

$$d\,(\text{arc tg}\,u - \text{arc tg}\,v) = 0$$

Kako je ovaj totalni diferencijal jednak nuli, mora dobivena funkcija biti konstantna, tj.

$$\text{arc tg}\,u - \text{arc tg}\,v = \text{konst.}$$

Treba zbrojiti arkustangense i izvršiti supstituciju za u i v, pa je konačno jednadžba silnica

$$\frac{x\,(x-a) + y^2}{y} = c$$

Nakon uređenja dobiva se jednadžba kružnica

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = R_s^2 \qquad (2.78)$$

One imaju središte u simetralnoj ravnini $x = a/2$, a sve prolaze točkama A_1 i A_2, gdje su tragovi linijskih naboja. Na sl. 2.27. je prikazana slika polja konkretnih naboja razmaknutih na zadani razmak a.

Posebno je interesantno poznavanje iznosa vektora **D** na kružnici prikazanoj na sl. 2.26. Treba iskoristiti izraze za komponente jakosti polja u (2.77) uz neke supstitucije. Prema sl. 2.26. omjeri koordinata i radijusvektora iznose $x/r_1 = \cos\vartheta_1$ $(x - a)/r_2 = \cos\vartheta_2$, $y/r_1 = \sin\vartheta_1$ i $y/r_2 = \sin\vartheta_2$. Osim toga je $\alpha = \vartheta_1 + \vartheta_2$. Kad se to uzme u obzir, gustoća električnog toka na zadanoj kružnici iznosi

$$D = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{k\,a}{x^2 + y^2}$$

Budući da su $x = d + R_0 \cos\alpha$ i $y = R_0 \sin\alpha$, konačno je gustoća toka

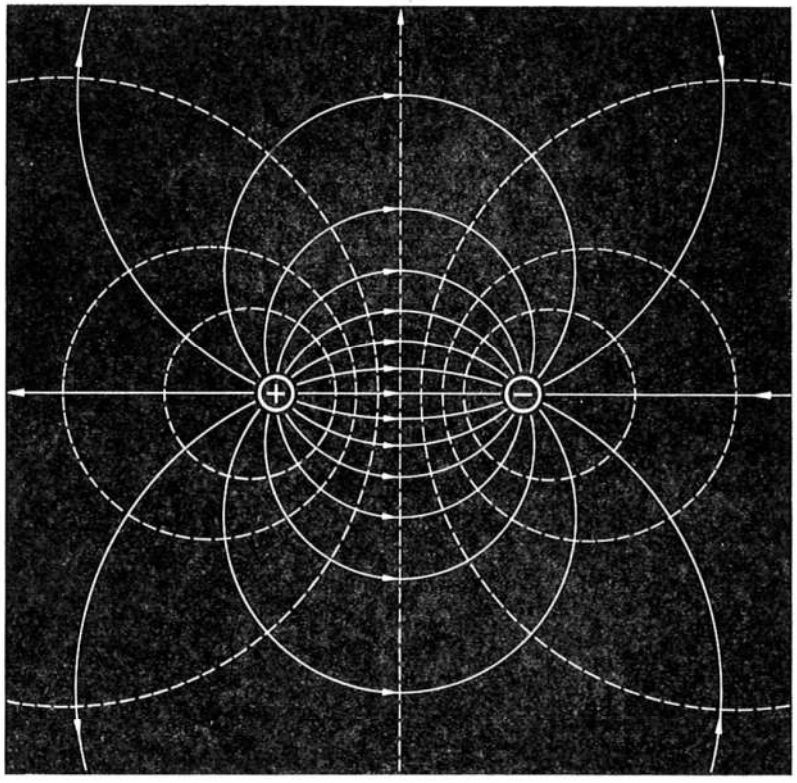
$$D = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{k\,a}{d^2 + R_0^2 + 2\,d\,R_0\cos\alpha}$$

Nju treba pisati u preglednijem obliku

$$D = \frac{\lambda}{2\pi R_0} c_k$$

$$c_k = \frac{k^2 - 1}{1 + k^2 + 2k \cos \alpha} \tag{2.78}$$

Konstanta c_k predstavlja na neki način utjecaj drugog naboja. Kad se drugi naboj udaljava, tj. $a \to \infty$, a R_0 ostaje konstantan, konstanta kružnice k postaje vrlo velika, tj. $k \to \infty$. Zato konstanta c_k teži k jedinici, a gustoća toka postaje jednaka onoj za jedan linijski naboj.



Sl. 2.27. Silnice i ekvipotencijalne linije polja linijskih naboja na paralelnim pravcima. Gustoće naboja su jednake, a suprotnih predznaka. Obje skupine linija su kružnice.

Na sl. 2.26. iznose pojedine duljine $a = 100$, $R_0 = 50$ i $b = 20{,}7$, čemu odgovara konstanta kružnice $k = 2{,}414$. Zato je konstanta c_k jednaka

$$c_k = \frac{4{,}83}{6{,}83 + 4{,}83 \cos \alpha} = \frac{1}{1{,}414 + \cos \alpha}$$

Evo nekoliko vrijednosti u tablici:

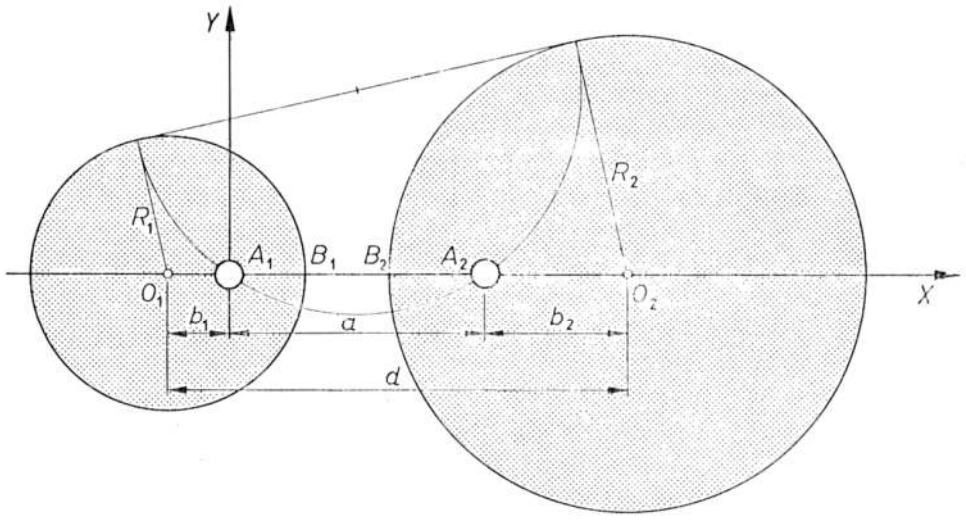
TABLICA 2.7.

α	0°	45°	90°	135°	180°
c_k	0,414	0,472	0,707	1,414	2,414

Ovdje se najveći i najmanji iznos konstante c_k odnose gotovo kao 6 : 1. Točan je odnos $(k + 1)^2/(k - 1)^2$. On bi se smio zvati *faktor nejednolikosti raspodjele električnog toka.* Tek pri velikim konstantama kružnice k on je približno jednak jedinici s dovoljno točnosti. Takve se konstante susreću kod električnih zračnih vodova.

Prikazana teorija polja dvaju linijskih paralelnih naboja služi da se jednostavno riješe mnogi zadaci iz oblasti električnih vodova. Ekvipotencijalne plohe se smiju nadomjestiti vodljivim cilindrima a da se ništa ne mijenja u polju. Oni imaju potencijal koji odgovara pripadnoj ekvipotencijalnoj plohi. Ako je njihov potencijal pozitivan, onda obuhvaćaju pozitivni naboj. I simetralna ravnina se smije nadomjestiti vodljivom ravninom nultoga potencijala. Primjena teorije je prikazana na nekoliko primjera.

PRIMJER 2.14. Zadana su **dva vodljiva cilindra** paralelnih osi, jedan *izvan* drugoga, zadanih promjera $2R_1$, odnosno $2R_2$. Njihovi tragovi su skicirani na sl. 2.28. Zadana je razlika potencijala u među njima, a njihove su osi razmaknute za d. Naboji se nalaze na njihovim površi-



Sl. 2.28. Presjek dvaju vodljivih cilindara paralelnih osi, jedan izvan drugoga, a različitih promjera. Slike njihovih naboja se nalaze u A_1 i A_2.

nama, a u njihovoj unutarnjosti nema polja. Polje između njih se dobiva tako, da se naboj s njihovih površina odslika u unutrašnjost, u pravce čiji su tragovi u točkama A_1 i A_2 na sl. 2.28. Neka je u tragu A_1 negativni naboj $-\lambda$, a u tragu A_2 pozitivni naboj λ. Tako je zadatak sveden na određivanje polja dvaju linijskih naboja. Samo je potrebno ustanoviti njihove položaje A_1 i A_2.

Zato je potrebno poznavanje njihovih udaljenosti od osi valjaka, b_1 i b_2. Svakom valjku odgovara vlastiti potencijal, a prema tome i vlastita konstanta k_1, odnosno k_2. Treba voditi računa o tome da te konstante moraju biti veće od jedinice. Kako je već dobiveno, polumjeri valjaka su vezani na pripadne udaljenosti naboja odnosom

$$R_1 = k_1 b_1 \quad \text{i} \quad R_2 = k_2 b_2$$

Razmak između osi jednog valjka i naboja drugog valjka nalazi se u čvrstom odnosu prema polumjeru prvog valjka, tj.

$$\text{udaljenost } A_2 O_1 = d_1 = k_1 R_1$$
$$\text{udaljenost } A_1 O_2 = d_2 = k_2 R_2$$

Uz pomoć tih odnosa ustanovljava se položaj točaka A_1 i A_2. Naime, zadana udaljenost d između osi valjaka jednaka je

$$d = d_1 + b_2 = d_2 + b_1$$

što daje dvije jednadžbe s nepoznanicama b_1 i b_2. Slijedi dalje sa supstitucijom da je udaljenost

$$d = b_2 + \frac{R_1^2}{b_1} = b_1 + \frac{R_2^2}{b_2}$$

Iz tih su jednadžbi udaljenosti naboja prema sl. 2.28.

$$b_1 = x_1 - (x_1^2 - R_1^2)^{1/2}, \qquad x_1 = \frac{1}{2d}(d^2 + R_1^2 - R_2^2)$$

$$b_2 = x_2 - (x_2^2 - R_2^2)^{1/2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2d}(d^2 + R_2^2 - R_1^2) \tag{2.79}$$

$$a = d - (b_1 + b_2) = 2(x_1^2 - R_1^2)^{1/2} = 2(x_2^2 - R_2^2)^{1/2}$$

Sada se naboj valjaka određuje iz napona među njima. Zato je najbolje ustanoviti razliku potencijala točaka B_2 i B_1, $\varphi_2 - \varphi_1 = u$. Ona iznosi

$$u = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{a + b_2 - R_2}{R_2 - b_2}\right) - \left[-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{a + b_1 - R_1}{R_1 - b_1}\right)\right]$$
$$u = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln(k_1 k_2) \tag{2.80}$$

gdje su konstante $k_1 = R_1/b_1$ i $k_2 = R_2/b_2$. Prema tome je kapacitet takvih dvaju valjaka po jedinici duljine

$$C = \frac{\lambda}{u} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(k_1 k_2)} \tag{2.81}$$

Najveća jakost polja nastaje u točkama B_1 i B_2, ovisno o tome koji je promjer cilindra manji. Te jakosti iznose prema (2.77), uzevši u obzir prikazane odnose

$$E_{1x} = -\frac{u}{R_1} \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \frac{1}{\ln(k_1 k_2)} \qquad \text{u } B_1$$
$$E_{2x} = -\frac{u}{R_2} \frac{k_2 + 1}{k_2 - 1} \frac{1}{\ln(k_1 k_2)} \qquad \text{u } B_2 \tag{2.82}$$

Jakost polja je negativna, jer je naboj u A_1 negativan.

Neka za ilustraciju posluži numerički primjer. Vodljivi cilindri imaju promjere $2R_1 = 20$ mm i $2R_2 = 40$ mm, a njihove su osi razmaknute na udaljenost $d = 40$ mm. Ovdje iznose u (2.79)

$$x_1 = \frac{1}{80}(1600 + 100 - 400) = 16{,}25 \text{ mm}$$

$$x_2 = \frac{1}{80}(1600 + 400 - 100) = 23{,}75 \text{ mm}$$

Zato je u (2.79)

$$b_1 = 16{,}25 - (264{,}1 - 100)^{1/2} = 3{,}44 \text{ mm}$$

$$b_2 = 23{,}75 - (564{,}1 - 400)^{1/2} = 10{,}94 \text{ mm}$$

$$a = 2(264{,}1 - 100)^{1/2} = 25{,}62 \text{ mm}$$

$$k_1 = \frac{10}{3{,}44} = 2{,}91, \qquad k_2 = \frac{20}{10{,}94} = 1{,}83$$

Kapacitet iznosi pri $2\pi\varepsilon = 55{,}5$ pF/m

$$C = \frac{55{,}5}{\ln 5{,}32} = 33{,}2 \text{ pF/m}$$

Neka je napon cilindara $u = 10$ kV. Tada su jakosti polja iz (2.82)

$$E_{1x} = \frac{10}{10} \cdot \frac{3{,}91}{1{,}91} \cdot \frac{1}{1{,}671} = 1{,}22 \text{ kV/mm}$$

$$E_{2x} = \frac{10}{20} \cdot \frac{2{,}83}{0{,}83} \cdot \frac{1}{1{,}671} = 1{,}02 \text{ kV/mm}$$

Najveća jakost polja je u B_1 i ona iznosi 1,22 kV/mm

Na sl. 2.28. je prikazana geometrijska konstrukcija kojom se dolazi do položaja naboja. Povuče se zajednička tangenta na kružnice kao tragove cilindara. Tada se opiše kružnica nad zajedničkom tangentom kao njezinim promjerom. Gdje ta kružnica siječe spojnicu među osima cilindara, nalaze se točke A_1 i A_2, tragovi »odslikanih« naboja.

Isti zadatak smije se rješavati s odslikavanjem naboja u osi cilindara. To je dopušteno kad su cilindri dovoljno međusobno razmaknuti. Da bi greška bila manja od 1%, morao bi razmak osi vodiča biti $d > 20R_1$ i $d > 20R_2$. Tada su $b_1 \approx b_2 \approx 0$ i $a \approx d$. Konstante kružnica iznose približno

$$k_1 = \frac{d}{R_1}, \quad k_2 = \frac{d}{R_2}, \quad d \gg R_1, \quad d \gg R_2, \tag{2.83}$$

S ovim konstantama se računa kapacitet i jakosti polja u (2.81) i 2.82)

PRIMJER 2.15. Zadana su **dva vodljiva cilindra** paralelnih osi, jedan *unutar* drugoga zadanih promjera $2R_1$ i $2R_2 > 2R_1$. Njihovi su tragovi skicirani na sl. 2.29. Njihove su osi razmaknute na udaljenost d. Između cilindara je napon u. Naboj se nalazi na njihovoj površini. Naboj je na vanjskoj površini na manjem cilindru, a na unutarnjoj površini na većem cilindru. Naboj manjeg cilindra se odslikava u pravac u njegovoj unutarnjosti, a njegov je trag u točki A_1. Taj je naboj negativan $-\lambda$. Isto toliki naboj suprotna predznaka λ nalazi se s unutarnje strane većeg cilindra. On se odslikava izvan njega u pravac čiji je trag u točki A_2. Tako odslikani naboji su valjani za polje samo u prostoru među cilindrima.

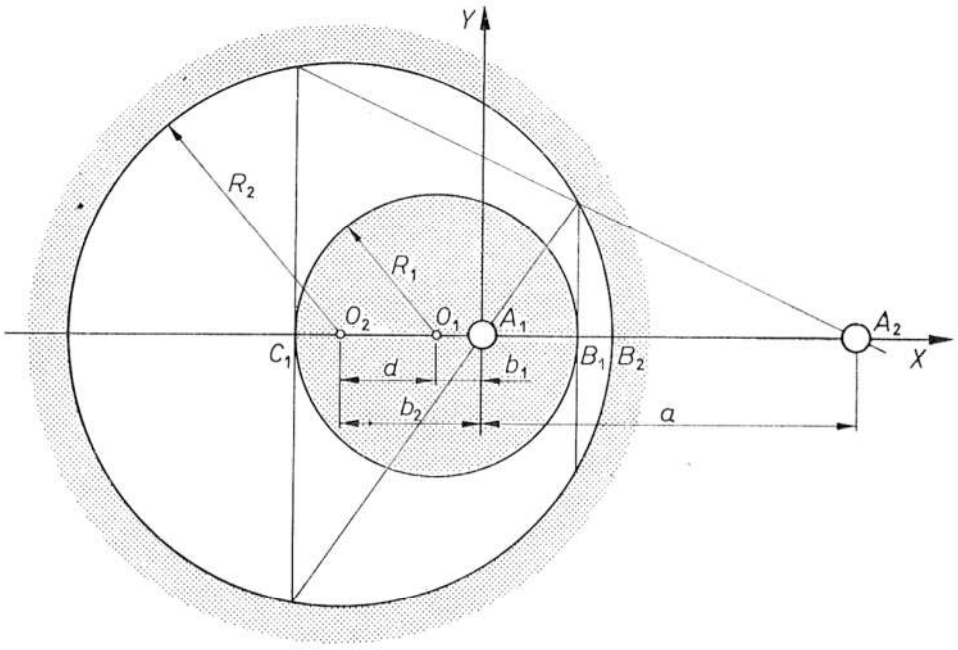
Ovaj je zadatak jednak prethodnom, samo što oba cilindra obuhvaćaju isti naboj, koji je ovdje $-\lambda$. Ono što se odnosilo u prethodnom zadatku samo na lijevi cilindar na sl. 2.28., to se ovdje odnosi na oba cilindra, jer oba obuhvaćaju lijevi, negativni naboj.

Sada je iz slike

$$\text{duljina } A_2 O_1 = d_1 = R_1 k_1$$
$$\text{duljina } A_2 O_2 = d_2 = R_2 k_2$$

Zadani razmak osi cilindara iznosi

$$d = d_2 - (a + b_1) = d_2 - b_1 k_1^2 = b_2 - b_1$$



Sl. 2.29. Presjek dvaju vodljivih cilindara paralelnih osi, jedan u drugom. Slike njihovih naboja se nalaze u A_1 i A_2.

Kad se uzme u obzir da je $k_1 = R_1/b_1$ i $k_2 = R_2/b_2$, dobiju se nepoznate duljine

$$b_1 = x_1 - (x_1^2 - R_1^2)^{1/2}, \quad x_1 = -\frac{1}{2d}(d^2 + R_1^2 - R_2^2)$$
$$b_2 = x_2 - (x_2^2 - R_2^2)^{1/2}, \quad x_2 = \frac{1}{2d}(d^2 + R_2^2 - R_1^2) \tag{2.84}$$
$$a = d_2 - b_2 = 2(x_1^2 - R_1^2)^{1/2} = 2(x_2^2 - R_2^2)^{1/2}$$

Naboj cilindara slijedi iz zadanog napona, odnosno razlike potencijala $\varphi_2 - \varphi_1 = u$ točaka B_2 i B_1. Prema sl. 2.29. ta razlika potencijala iznosi

$$u = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{d_2 - R_2}{R_2 - b_2}\right) - \left[-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d_1 - R_1}{R_1 - b_1}\right]$$

$$u = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \tag{2.85}$$

Na taj način kapacitet zadane formacije cilindara iznosi po jedinici duljine

$$C = \frac{\lambda}{u} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)} \tag{2.86}$$

Ekstremne jakosti polja pojavljuju se u točkama B_1 i B_2 i jednake su

$$E_{1x} = -\frac{u}{R_1}\cdot\frac{k_1+1}{k_1-1}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)} \quad \text{u točki } B_1$$

$$E_{2x} = -\frac{u}{R_2}\cdot\frac{k_2+1}{k_2-1}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)} \quad \text{u točki } B_2 \tag{2.87}$$

Neka posluži kao ilustracija numerički primjer. Promjeri cilindara iznose $2R_1 = 16$ mm i $2R_2 = 50$ mm, a razmak osi je $d = 7$ mm. Tada su nepoznate dimenzije

$$x_1 = -\frac{1}{14}(49 + 64 - 625) = 36{,}6 \text{ mm}$$

$$x_2 = \frac{1}{14}(49 + 625 - 64) = 43{,}6 \text{ mm}$$

$$b_1 = 36{,}6 - (1339{,}56 - 64)^{1/2} = 0{,}87 \text{ mm}$$

$$b_2 = 43{,}6 - (1901{,}0 - 625)^{1/2} = 7{,}9 \text{ mm}$$

$$a = 2\,(1901{,}0 - 625)^{1/2} = 71{,}4 \text{ mm}$$

Konstante kružnica iznose $k_1 = 8/0{,}87 = 9{,}2$ i $k_2 = 25/7{,}9 = 3{,}16$. Kapacitet je pri $2\pi\varepsilon = 55{,}5$ pF/m

$$C = \frac{55{,}5}{\ln 2{,}9} = 52{,}0 \text{ pF/m}$$

Jakosti polja iznose u točkama B_1 i B_2 za napon $u = -10$ kV

$$E_{1x} = \frac{10}{8}\cdot\frac{10{,}2}{8{,}2}\cdot\frac{1}{\ln 2{,}9} = 1{,}46 \text{ kV/mm}$$

$$E_{2x} = \frac{10}{25}\cdot\frac{4{,}16}{2{,}16}\cdot\frac{1}{\ln 2{,}9} = 0{,}72 \text{ kV/mm}$$

Opet je moguća geometrijska konstrukcija da bi se došlo do položaja odslikanih naboja. Tangente se povuku na manji cilindar u točkama B_1 i C_1. One sijeku kružnicu većeg cilindra, te se tako dobije trapez. Dijagonala trapeza siječe os X u točki A_1, gdje je naboj $-\lambda$, a produžetak stranice trapeza siječe istu os u A_2, gdje je naboj λ.

Vrlo često je duljina b_1 veoma malena prema polumjeru R_1, pa se smije zanemariti. To znači da se naboj manjeg cilindra odslikava naprosto u njegovu os. Da bi greška bila ispod 1%, mora biti $R_2 > 20\,R_1\,d$. Tada se naboj manjeg cilindra stavlja u njegovu os.

PRIMJER 2.16. Zadana su **dva vodljiva cilindra** *jednakog promjera* $2R_0$, a osi razmaknutih na udaljenost $d > 2R_0$. Rješenje toga zadatka se izvodi iz primjera dvaju cilindara različita promjera. Neka je

$$\frac{d}{2R_0} = m$$

Tada je iz (2.79) $b = R_0[m - (m^2 - 1)^{1/2}]$, a razmak među nabojima $a = d - 2b = 2R_0(m^2 - 1)^{1/2}$. Iz (2.77) slijedi kapacitet zadane kombinacije

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln[m + (m^2 - 1)^{1/2}]} \tag{2.88}$$

Najveća jakost polja nastaje na spojnici O_1O_2 u točkama B_1 i B_2, a ona iznosi

$$E_m = k_E E_0, \qquad E_0 = \frac{u}{d - 2R_0}$$
$$k_E = \frac{(m^2 - 1)^{1/2}}{\ln[m + (m^2 - 1)^{1/2}]} \tag{2.89}$$

U tablici je nekoliko vrijednosti kapaciteta C pri $\pi\varepsilon = 27{,}8$ pF/m i faktora polja k_E

TABLICA 2.8.

$m = d/(2R_0)$	1,02	1,05	1,2	2	2,95	4	6	10
C (pF/m)	139	88	45	21	16	13,5	11,2	9
k_E	1,00	1,02	1,07	1,32	1,59	1,87	2,39	3,33

Jakost polja E_0 odgovara polju u pločastom kondenzatoru čije su elektrode razmaknute upravo koliko su razmaknute stijenke cilindara. Analiza pokazuje da je za $m \leqslant 1{,}1$ pogreška manja od 3%, ako se računa jakost polja kao u pločastom kondenzatoru, dakle kao da je polje homogeno.

Kapacitet dovoljno razmaknutih cilindara, $m \gg 1$, se računa jednostavnije po jednadžbi $C = \pi\varepsilon/\ln(d/R_0)$. Tako je dozvoljeno računati već za $m \geqslant 6$ s dovoljnom točnošću. Ovdje ne djeluju cilindri jedan na drugi u pogledu raspodjele naboja po njihovoj površini. Naboj je raspoređen jednako po površini cilindara kao da je svaki od njih usamljen.

Najveća jakost polja ima svoj minimum. Treba zadati razmak vodiča d, a mijenjati promjer vodiča $2R_0$. Prema tome, izražena jakost polja glasi

$$E_m = \frac{u}{d}\,\frac{m(m + 1)^{1/2}}{(m - 1)^{1/2}\ln[m + (m^2 - 1)^{1/2}]} = \frac{u}{d}\,\frac{m}{m - 1}\,k_E$$

To je minimalno za $m = m_0 = 2{,}95$, koji je iznos unesen i u tablicu 2.8. Tada je jakost polja $E_m = 2{,}4\,u/d$. Najmanja jakost polja nastaje kad je razmak d približno jednak trostrukom promjeru vodiča. Zračni električni vodovi imaju razmak vodiča mnogo veći. Primjerice, u električnom prijenosu pri međufaznom naponu 110 kV upotrebljavaju se užeta od aluminija pojačanog čeličnom žicom, tzv. alučela. Neka su upotrijebljena užeta oznake Alučel 240/40, čiji je vanjski promjer 21,7 mm, a postavljeni su razmaknuto na udaljenost $4m$. Ovdje je $m = d/(2R_0) = 184$ toliko veliko, da se proračun vrši približnim formulama. Kapacitet iznosi

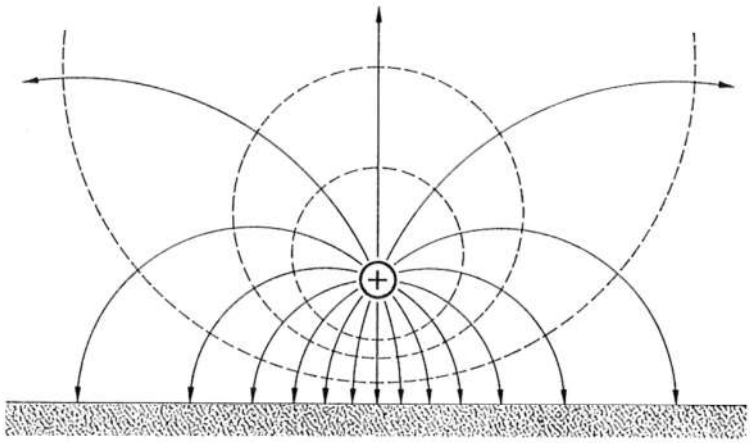
$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(2m)} = \frac{27{,}8}{\ln 368} = 4{,}71 \text{ pF/m}$$

Najveća je jakost polja pri naponu 110 kV

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{u}{d}\,\frac{m}{\ln(2\,m)} = \frac{110 \cdot 184}{4000 \cdot 5{,}91} = 0{,}86\ \mathrm{kV/mm}$$

Kad bi se promjer vodiča povećao peterostruko, tj. omjerni broj bi se smanjio na $m = 36{,}8$, što je još uvijek velik iznos, jakost polja bi se spustila na iznos 0,24 kV/mm. To je znatno smanjenje jakosti polja. Ono ima značajnu ulogu u izolacionoj tehnici.

PRIMJER 2.17. Zadani su **vodljivi cilindar i vodljiva ravnina.** Cilindar je promjera $2\,R_0$, a njegova je os udaljena od ravnine za $h > R_0$. Ravnina je na nultom potencijalu. Na sl. 2.30. je prikazan zadani vodič smješten paralelno zadanoj ravnini. Trag osi cilindra se nalazi kao na sl. 2.28. u točki O_2. Naboj cilindra λ se odslikava u pravac, čiji je trag u točki A_2. Ucrtane silnice i ekvipotencijalne plohe dočaravaju sliku polja zadane formacije vodiča.



Sl. 2.30. Silnice i ekvipotencijalne linije nabijenog vodljivog cilindra iznad vodljivog poluprostora. Vodljivi poluprostor je na nultom potencijalu.

Rješenje zadatka se izvodi iz rješenja u prethodnom primjeru, gdje su prikazana dva jednaka cilindra. Treba uzeti u obzir da je $d = 2\,h$, te je omjerni broj $m = d/(2\,R_0) = h/R_0$. Jedina razlika je što je ovdje zadani napon u jednak razlici potencijala između cilindra i ravnine, a to je upravo polovica razlike potencijala iz prethodnog zadatka. Zato je ovdje kapacitet dvostrukog iznosa prema kapacitetu dvaju jednakih cilindara. On iznosi iz kapaciteta u (2.88)

$$C = \frac{2\,\pi\,\varepsilon}{\ln\left[m + (m^2 - 1)^{1/2}\right]}, \qquad m = \frac{h}{R_0} \tag{2.90}$$

Jednako je najveća jakost polja u točki B_2, a iznosi prema sličnoj vrijednosti u (2.89) za dva cilindra, jednako izražena

$$E_{\mathrm{m}} = k_{\mathrm{E}}\,E_0, \qquad E_0 = \frac{u}{h - R_0}$$
$$k_{\mathrm{E}} = \frac{(m^2 - 1)^{1/2}}{\ln\left[m + (m^2 - 1)^{1/2}\right]} \tag{2.91}$$

Odslikani naboj se nalazi u A_2, a on je udaljen od osi cilindra za duljinu

$$b = h - (h^2 - R_0)^{1/2} = R_0\left[m - (m^2 - 1)^{1/2}\right]$$

Njegova udaljenost do zadane ravnine jednaka je duljini

$$OA_2 = \frac{a}{2} = (h^2 - R_0^2)^{1/2} = R_0 (m^2 - 1)^{1/2}$$

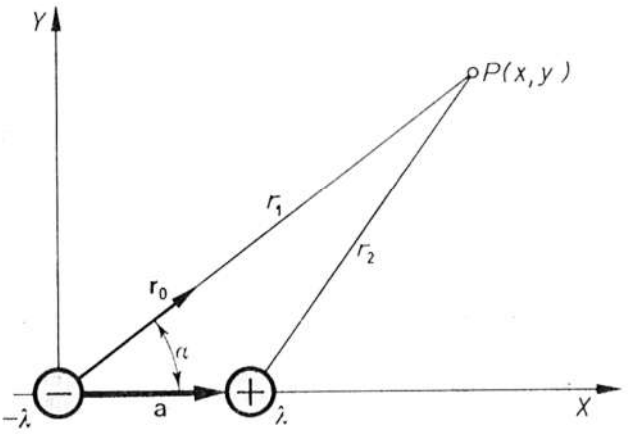
Konstanta kružnice iznosi, dakle

$$k = \frac{R_0}{b} = m + (m^2 - 1)^{1/2}$$

Neka je zadan cilindar promjera 60 mm, s osi udaljenom od ravnine za 50 mm. Napon cilindra je 20 kV. Omjerni broj cilindra je $m = 50/30 = 1{,}67$. Zato je slika naboja udaljena od osi za $b = 30\,[1{,}67 - (2{,}78 - 1)^{1/2}] = 10$ mm. Konstanta kružnice je $k = 30/10 = 3$, a kapacitet iznosi $C = 2\pi\varepsilon_0/\ln k = 55{,}5/\ln 3 = 50{,}6$ pF/m. Najveća jakost polja je

$$E_m = \frac{20}{20}\,\frac{1{,}33}{\ln 3} = 1{,}21 \text{ kV/mm}$$

PRIMJER 2.18. Linijski električni dipol nastaje od dva linijska naboja kakvi su dosada promatrani, samo je njihov razmak a mnogo puta manji od udaljenosti točke promatranja. Poten-



Sl. 2.31. Linijski električni dipol. Razmak naboja je mnogo manji od udaljenosti točke promatranja.

cijal njegova polja izlazi iz potencijala polja dvaju linijskih naboja, kako je već izvedeno, a dano je jednadžbom (2.72). Budući da je radijusvektor $r_2 \gg a$, on je približno jednak onome sa sl. 2.31.

$$r_2 = r_1 \left(1 - \frac{a}{r_1} \cos \alpha\right)$$

Neka je radijusvektor r_1 označen prosto sa r. Prema tome bi potencijal iznosio

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \approx \frac{\lambda a \cos \alpha}{2\pi\varepsilon r}$$

Kao kod »točkastog« električnog dipola, treba uvesti dipolni moment $p = \lambda a$ koji je usmjeren od negativnog prema pozitivnom naboju ili u smjeru osi X. Jedinični radijusvektor $\mathbf{r}_0$ gleda od

ishodišta koordinatnog sustava, tj. od dipola prema promatraču. Sada je potencijal linijskog dipola

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}\,\mathbf{r}_0}{2\pi\varepsilon r} \tag{2.92}$$

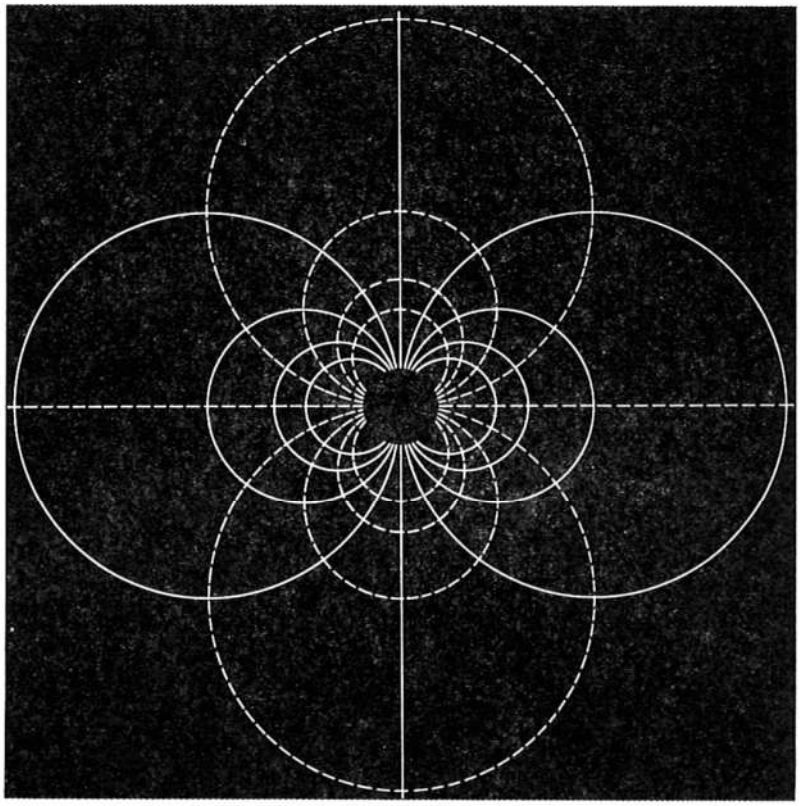
Jakost polja u istoj točki se dobiva iz

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon r^2}\left[2\,(\mathbf{p}\,\mathbf{r}_0)\,\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}\right] \tag{2.93}$$

a pojedine komponente su

$$E_r = \frac{p\cos\alpha}{2\pi\varepsilon r^2}, \qquad E_\alpha = \frac{p\sin\alpha}{2\pi\varepsilon r^2}$$

Polje linijskog dipola se mijenja s radijusom kao kod točkastog naboja. Dapače, ukupni iznos jakosti polja ovisan je samo o radijusu, a neovisan o kutu.



Sl. 2.32. Silnice i ekvipotencijalne linije polja linijskog dipola. Obje skupine krivulja su kružnice koje prolaze ishodištem koordinatnog sustava.

Slika polja je prikazana na sl. 2.32. Jednadžba ekvipotencijalnih ploha se dobiva iz izraza za potencijal, tj. ona glasi

$$\frac{\cos\alpha}{r} = \frac{x}{r^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{2\pi\varepsilon\varphi}{p} = \text{konst.}$$

Ekvipotencijalne plohe su kružni cilindri, a njihovi tragovi su kružnice

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2$$

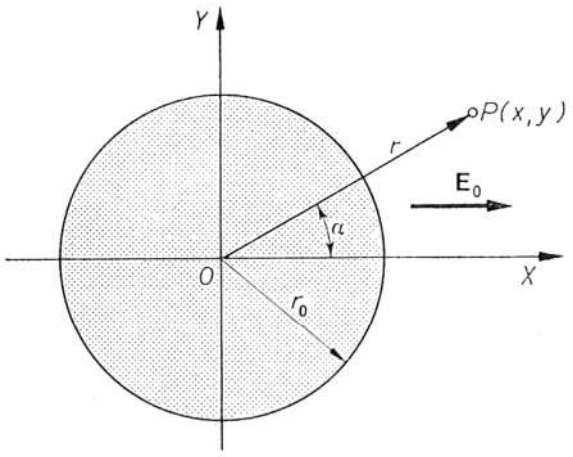
Sve kružnice prolaze ishodištem koordinatnog sustava, a središta im se nalaze na osi X. Polumjer kružnice iznosi $R = p/(4\pi\varepsilon\varphi)$. Jednadžba silnica je jednaka onoj za dva linijska naboja, samo je razmak među nabojima $a = 0$. Zato ona glasi

$$x^2 + (y-c)^2 = c^2$$

Te su jednadžbe iskorištene u crtanju polja na sl. 2.32.

2.11. VODLJIVI CILINDAR U HOMOGENOM POLJU

Vodljivi cilindar u homogenom polju se ponaša slično kugli, što je opisano u poglavlju 2.8. Os cilindra se postavlja okomito na smjer polja. Duljina cilindra je



Sl. 2.33. Presjek vodljivog cilindra koji se nalazi u homogenom polju.

beskonačna. Pod utjecajem polja on postaje linijski dipol. U prostoru izvan cilindra polje se određuje iz međusobnog djelovanja homogenog polja i polja linijskog dipola. U cilindru nema polja. Sl. 2.33. može se iskoristiti za proračun polja.

Potencijal polja u vanjskom prostoru iznosi

$$\varphi = - E_0 r \cos \alpha + \frac{p \cos \alpha}{2 \pi \varepsilon r}, \qquad r \geqslant r_0 \tag{2.94}$$

Na cilindru nema tangencijalne komponente polja, tj.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{r=r_0} = E_0 r_0 - \frac{p}{2 \pi \varepsilon r_0} = 0$$

Odatle je linijski dipolni moment cilindra

$$p = 2 \pi r_0^2 \varepsilon E_0 = 2 S_0 \varepsilon E_0 \tag{2.95}$$

Time se polje određuje u svakoj točki prostora. Najveća jakost polja nastaje za $\alpha = 0$ na površini cilindra i ona iznosi $2 E_0$.

Interesantan slučaj vodljivog cilindra u homogenom polju nastaje kad *okrugli vodič prolazi u uzduhu paralelno s vodljivom ravninom* na kojoj svršava homogeno polje potencijala.

$$\varphi_0 = - E_0 x$$

Može se upotrijebiti sl. 2.28. Zbog jednostavnosti neka je $h \gg R_0$, te točke O_2 i A_2 padaju zajedno. Vodič postaje dipol, te se kao takav odslikava na vodljivoj ravnini. Odslikani dipol ostaje istog smjera i istog dipolnog momenta. Potencijal u točki P promatranja iznosi prema (2.94), uzevši u obzir pomak koordinata

$$\varphi = - E_0 x + \frac{p \cos a_1}{2 \pi \varepsilon_0 r_1} + \frac{p \cos a_2}{2 \pi \varepsilon_0 r_2}$$

Radijusvektori r_2 i r_1 su udaljenosti dipola i njegove slike do točke promatranja, a a_2 i a_1 su pripadni kutovi prema osi X. Međusobni utjecaj dipola se zanemaruje, jer je $h \gg R_0$, te je dipolni moment isti kao da je jedan dipol sam.

Drukčije je kad se okrugli vodič spoji na vodljivu ravninu. On je tada na istom potencijalu s njome, tj. na $\varphi = 0$. Vodič nije više dipol, jer nema dva naboja, već ima samo jedan naboj linijske gustoće λ. Sada je potencijal u bilo kojoj točki P

$$\varphi = - E_0 x + \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0} \ln \left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Pozitivni je naboj na vodiču, jer je polje usmjereno s osi X. Radijusvektori r_2 i r_1 se računaju od naboja vodiča i njegove slike do točke promatranja. Vodič je na potencijalu $\varphi = 0$, a to vrijedi i za točku B_2 na vodiču, tj.

$$\varphi_{B2} = - E_0 h + \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0} \ln \left(\frac{2h}{R_0}\right) = 0$$

Odatle je inducirani naboj na vodiču

$$\lambda = \frac{2 \pi \varepsilon_0 E_0 h}{\ln \left(\frac{2h}{R_0}\right)}$$

Najveća jakost polja na vodiču iznosi u odnosu na jakost homogenog polja

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{\frac{h}{R_0}}{\ln \left(\frac{2h}{R_0}\right)}$$

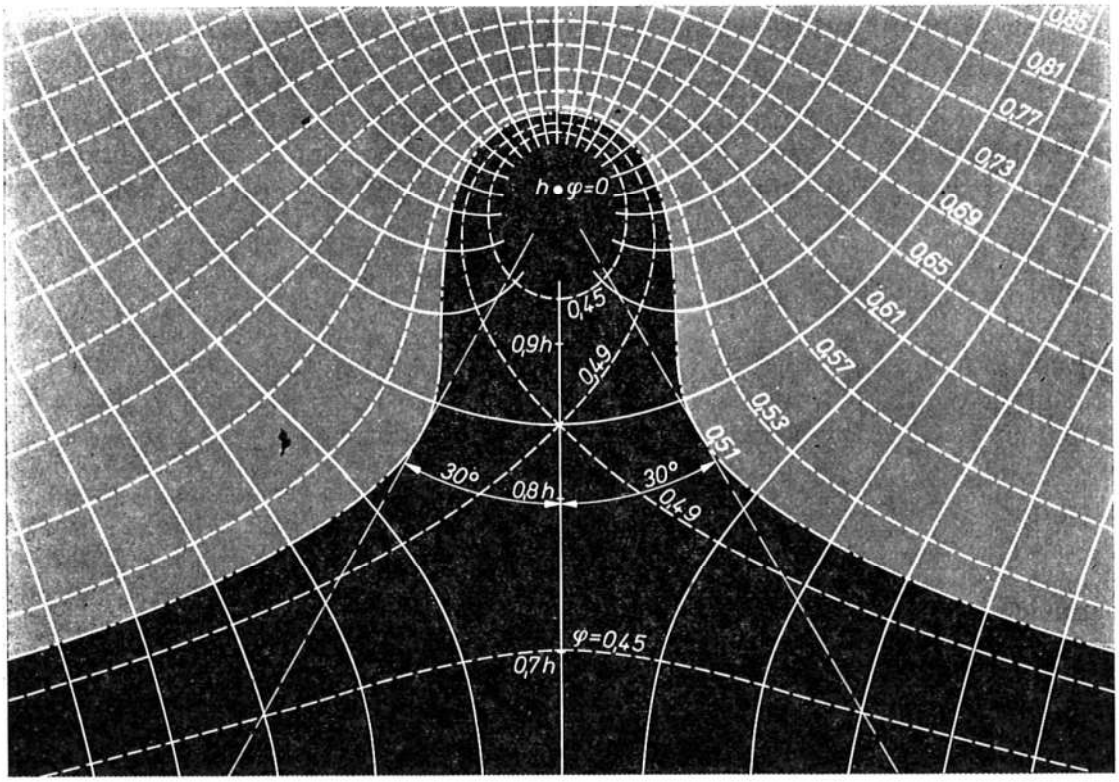
U slijedećoj tablici navedeno je nekoliko omjera jakosti polja pri različitim iznosima h/R_0

TABLICA 2.9.

h/R_0	50	100	200	500	1000	5000
E/E_0	12	20	34	73	133	545

Ovdje najveće jakosti polja na okruglom vodiču poprimaju mnogo puta veće iznose od jakosti homogenog polja.

Električni vodovi visokog napona imaju često tzv. **zaštitno uže** koje se stavlja iznad vodiča voda. U prostoru ispod njega potencijal polja se smanjuje, pa je to njegovo zaštitno djelovanje. No, zato se na njemu pojavljuje velika jakost polja. U atmosferi se znaju pojaviti jakosti polja i 100 kV/m = 0,1 kV/mm. Za maksimalne odnose h/R_0 dosižu se jakosti polja 50 kV/mm na zaštitnom užetu. Ta je jakost polja daleko iznad probojne čvrstoće uzduha. Zato će se na užetu pojaviti *korona* koja umjetno povećava polumjer vodiča. Odnos E/E_0 bi morao pasti na iznos 20, da bi prestala ionizacija uzduha, a to odgovara za $h/R_0 = 100$.



Sl. 2.34. Silnice i ekvipotencijalne linije polja zaštitnog užeta. Okrugli vodič u ulozi zaštitnog užeta se nalazi u homogenom polju iznad vodljivog poluprostora. Vodič i vodljivi poluprostor su na nultom potencijalu. Ispod vodiča je prostor sniženog potencijala. Ugao 30° ispod vodiča je označen crtkanim zrakama, a on obuhvaća uglavnom prostor sniženog potencijala, kako se vidi iz toka ekvipotencijalnih linija. Na slici je primjenjen takav odnos visine vodiča h i njegova polumjera R_0, da je karakteristična konstanta $\ln(2h/R_0) = 7$.

Faktor zaštite zaštitnog užeta označava procent na koji pada potencijal ispod užeta prema iznosu kad nema užeta. Potencijal ispod užeta dobiva se za iznose radijusvektora $r_2 = h - x$ i $r_1 = h + x$. Faktor zaštite iznosi

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 - \frac{h}{x} \frac{\ln\left(\frac{h+x}{h-x}\right)}{\ln\left(\frac{2h}{R_0}\right)}$$

jako je $\varphi_0 = E_0 h$.

Za $h/R_0 = 500$ i $x/h = 0{,}75$ iznosi $\varphi/\varphi_0 = 0{,}62$. To je približno srednja vrijednost faktora zaštite.

Često se postavljaju dva zaštitna užeta. Proračun polja je sličan onome jednog užeta. Može se napomenuti da je djelovanje efikasno ako je teren kuda prolazi električni vod dobro vodljiv, tako da je električno odslikavanje ispravno. Na sl. 2.34. prikazana je slika polja jednog takvog zaštitnog užeta.

2.12. VEKTORSKI POTENCIJAL

Vektorski potencijal se odnosi na magnetsko polje, pa se koji puta govori i o *magnetskom* vektorskom potencijalu. Svojstvo magnetskog polja da je bez izvora i ponora, tj. div $\mathbf{B} = 0$, navodi na misao da se uvede veličina koja bi bila naprosto izvedena iz

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{2.96}$$

jer je div rot $\mathbf{A} = 0$, ili operacija div rot dovodi uvijek na nulu. *Veličina* $\mathbf{A}$ *je nazvana vektorski potencijal.*

Iz druge Maxwellove jednadžbe je poznato da konturni integral $\oint \mathbf{E}\,\mathrm{ds}$ daje induciranu elektromotornu silu u konturi koja okružuje plohu kroz koju se promatra magnetski tok. Budući da je ista elektromotorna sila također jednaka $-\int (\partial \mathbf{B}/\partial t)\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ preko Stokesova stavka, ta je elektromotorna sila jednaka i $\oint (\partial \mathbf{A}/\partial t)\,\mathrm{ds}$. To drugim riječima znači da je

$$\Phi = \oint_s \mathbf{A}\,\mathrm{ds} \tag{2.97}$$

tok kroz neku plohu S zadan linijskim integralom vektorskog potencijala po konturi iste plohe. Ovaj način traženja magnetskog toka često je udobniji i pregledniji, jer je jasnije definirana kontura plohe nego sama ploha.

U poglavlju 1.7. prikazan je Biot-Savartov zakon. Po njemu je jakost magnetskog polja u nekoj točki P, kad je poznato strujanje u prostoru

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right) \mathrm{d}V$$

Ako se usporedi ova jednadžba s definicijom vektorpotencijala, slijedi njegova jednadžba u *integralnom* obliku

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\,\mathrm{d}V}{r} \tag{2.98}$$

Ta je jednadžba potpuno slična istovrsnoj jednadžbi skalarnog potencijala. Zato se i jednakim putem prelazi na *diferencijalni* oblik

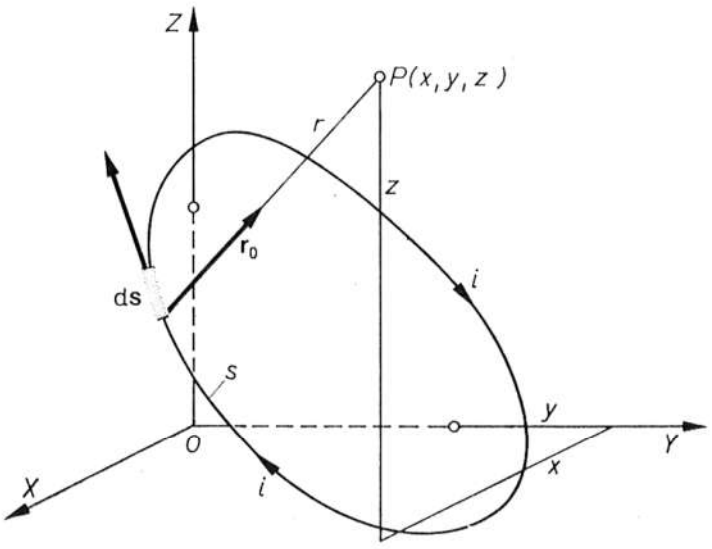
$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \tag{2.99}$$

To je Poissonova jednadžba vektorskog potencijala. Ona je moguća, jer je za statička polja $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ i $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Jakost magnetskog polja može se izraziti i strujom neke zadane strujne petlje. Sasvim analogno dobiva se vektorpotencijal neke strujne petlje u točki promatranja P

$$\mathbf{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_s \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{r} \tag{2.100}$$

Na sl. 2.35. prikazana je strujnica kojom teče struja jakosti i. Element strujnice $\mathbf{ds}$ ima isti smjer kao i struja. Integracija se provodi po cijeloj strujnici s da bi se ustanovio vektorpotencijal $\mathbf{A}(x, y, z)$ u točki promatranja $\mathrm{P}(x, y, z)$.

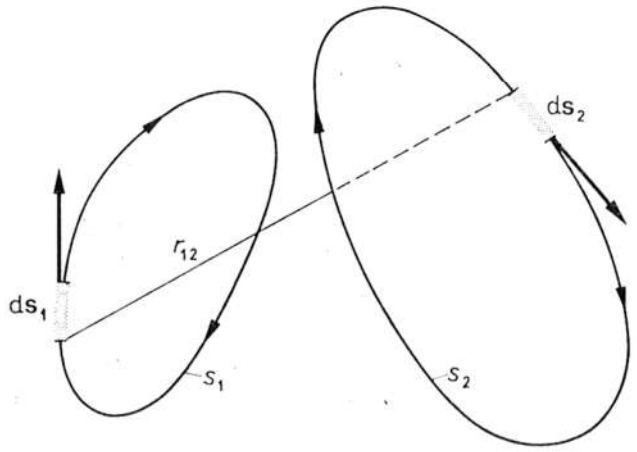


Sl. 2.35. Strujnica s u pravokutnom koordinatnom sustavu. Traži se vektorpotencijal u točki $\mathrm{P}(x, y, z)$.

Vektorpotencijal je dobio svoje ime samo zahvaljujući sličnosti jednadžbi sa skalarnim električnim potencijalom. On nema veze s potencijalnom energijom, kao skalarni potencijal. Nije značajno kako je dobio ime, već kako se primjenjuje. On je neophodan u rješavanju polja. Iako je vektor, jednostavnije je položen nego vektori polja. On ima *smjer strujnice* na koju se odnosi, a to znatno olakšava određivanje njegova smjera.

2.12.1. Ulančeni tok, induktivitet

Vektorpotencijal naročito olakšava određivanje *ulančenog* magnetskog toka, tj. toka što ga obuhvaća neka zadana petlja s, kao u jednadžbi (2.97). Ta petlja smije biti po volji odabrana. Potrebno je poznavanje vektorpotencijala u svakoj točki petlje. Pri tome nije važno koja je struja proizvela polje čiji tok se želi ustanoviti. Kad je jednom potencijal poznat, lako se prelazi na jakost magnetskog polja po relaciji $\mathbf{H} = \text{rot}\, \mathbf{A}/\mu$. Ako je raspored struja u prostoru zamršen, vektorpotencijal se ustanovljava uz primjenu principa superpozicije, dok vrijede linearni odnosi.



Sl. 2.36. Dvije nezavisne strujnice s_1 i s_2. Određivanje ulančenog magnetskog toka, odn. međuinduktiviteta.

Najjednostavnije je ilustrirati iskorištenje vektorpotencijala na primjeru dviju petlji kao na sl. 2.36. Neka petljom s_1 teče struja jakosti i_1, a treba ustanoviti magnetski tok ulančen petljom s_2. Taj tok iznosi

$$\Phi_{12} = \oint_{s_2} \mathbf{A}_{12}\, \mathrm{d}\mathbf{s}_2$$

Budući da je potencijal struje i_1 na mjestu petlje s_2 jednak

$$\mathbf{A}_{12} = \frac{\mu\, i_1}{4\pi} \oint_{s_1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}_1}{r_{12}}$$

konačno iznosi tok ulančen petljom s_2, a proizveden strujom i_1 u petlji s_1

$$\Phi_{12} = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_{s_1} \oint_{s_2} \frac{\mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2}{r_{12}}$$

Ulančeni tok Φ_{12} je razmjeran jakosti struje i_1. Faktor razmjernosti iznosi

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{s_1} \oint_{s_2} \frac{\mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2}{r_{12}} \tag{2.101}$$

te se tok izražava naprosto sa $\Phi_{12} = L_{12} i_1$. Faktor razmjernosti se zove **induktivitet.** Posebno, on se naziva **međuinduktivitet,** ako su dvije petlje. Izraz (2.101) pokazuje da je svejedno koja struja stvara polje, tj. $L_{21} = L_{12}$. Dakle, međuinduktiviteti su simetrični. Kut α_{12} između elemenata luka ustanovljava se tako, da se jedan element pomakne paralelno sebi do drugoga i tada ustanovi kut. Induktivitet je ovisan samo o geometrijskim odnosima petlji, te o permeabilnosti materijala koji ispunja prostor.

Strujnica proizvodi polje čiji tok sama ulančava. No, javlja se teškoća ako se bukvalno računa polje strujnice, a prema tome i njezin tok. Strujnica je geometrijska crta, te funkcije polja imaju pol za $r = 0$, tj. na samoj crti. Treba uzeti u obzir da se stvarno nikad ne radi o strujnicama, već o vodičima protjecanim strujom. Nutarnjost vodiča predstavlja prostor protjecan strujom, a tamo se vektorpotencijal određuje jednadžbom (2.98), gdje je primijenjena veličina gustoće struje. Vodič je zatvoren sam u sebe, u obliku nekog prstena, kao što je strujnica zatvorena krivulja. On tvori strujni krug. Duž vodiča, u njegovoj unutarnjosti, postoji uvijek zatvorena crta u kojoj je jakost magnetskog polja nula. To se zaključuje iz prve Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku ili iz zakona protjecanja. Dok na strujnici jakost polja poprima beskonačnu vrijednost, u vodiču postoji crta na kojoj je polje nula. To je bitna razlika između strujnice i vodiča protjecanog strujom. Zato vodič ulančava konačan magnetski tok, te se smije govoriti o toku strujnog kruga proizvedenog i ulančenog njim samim.

Kako postoji problem toka, odnosno induktiviteta strujnog kruga, primijenjuje se princip superpozicije, te se odvojeno promatra tok kroz sam vodič i tok čije silnice prolaze izvan vodiča. Najjednostavnije je cijelu struju vodiča postaviti u crtu gdje je polje nula, dakle treba je predstaviti jednom strujnicom. Tok se računa ulančen crtom koja prolazi površinom vodiča. Posebno se računa ulančeni tok, čije silnice prolaze vodičem. Na taj način nastaju dva induktiviteta, *unutarnji* i *vanjski.* Unutarnji induktivitet se odnosi na tok silnica u vodiču, a vanjski uzima u obzir silnice izvan vodiča.

2.13. LINIJSKA STRUJA

Biot-Savartov zakon osnova je rješavanja polja struja koje teku strujnicama. Polja strujnica se međusobno superponiraju. Tako je prikazivan Biot-Savartov zakon i u poglavlju 1.7.

Polje *linijske struje na pravcu* rješava se mnogo jednostavnije iz prve Maxwellove jednadžbe. Magnetske silnice su koncentrične kružnice. Jakost polja ovisi samo o udaljenosti r od pravca struje. Ono ima samo tangencijalnu komponentu, gledano sa stanovišta cilindričkih koordinata. Neka je jedna silnica ujedno kontura plohe kojom protječe struja i. Na cijeloj konturi jakost polja je konstantna, te je ona po prvoj Maxwellovoj jednadžbi

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r}(\mathbf{s}_0 \times \mathbf{r}_0) \qquad (2.102)$$

Jedinični vektor pravca $\mathbf{s}_0$ gleda u smjeru struje, a jedinični radijusvektor $\mathbf{r}_0$ gleda prema točki promatranja, okomito na pravac struje.

Budući da su silnice koncentrične kružnice, takvo će polje imati ravni okrugli vodič protjecan strujom. Za udaljenosti veće od polumjera vodiča $r \geqslant r_0$, polje se određuje po istoj jednadžbi, a struja i je ukupna struja vodiča. Nije čak važno kako je raspoređena gustoća struje po presjeku vodiča, samo njezin raspored mora biti cilindrički simetričan. Polje postoji i u vodiču. Gustoća struje je jednaka u cijelom presjeku za statičko polje. Nema razloga da silnice ne bi bile koncentrične kružnice. One, kao konture, sve ne obuhvaćaju istu struju. Jakost struje se mijenja u ovisnosti o polumjeru silnice — konture. Obuhvaćena jakost struje iznosi $i(r/r_0)^2$, te je jakost polja u vodiču

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2(\mathbf{s}_0 \times \mathbf{r}_0) = \frac{ir}{2\pi r_0^2}(\mathbf{s}_0 \times \mathbf{r}_0) \qquad (2.103)$$

U središtu vodiča, $r = 0$ jakost polja je nula. Ona se razmjerno polumjeru povećava do površine vodiča. Dalje opada obrnuto razmjerno udaljenosti od osi vodiča.

Vektorpotencijal ravne strujnice određuje se najbolje iz njegove Laplaceove jednadžbe. Ravna strujnica proizvodi polje čiji vektorpotencijal ima samo jednu komponentu, onu koja gleda u smjeru pravca kojim teče struja. U cilindričkom sustavu pravac je položen aksijalno, tj. u smjeru osi Z. Vektorpotencijal ima samo aksijalnu komponentu, a ovisan je samo o radijusu. Zato je njegova Laplaceova jednadžba

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = 0$$

Ispušten je indeks od A, jer postoji samo jedna komponenta. Rješenje ove diferencijalne jednadžbe uvodi dvije konstante integracije. Ono glasi

$$A = A_1 \ln r + A_2$$

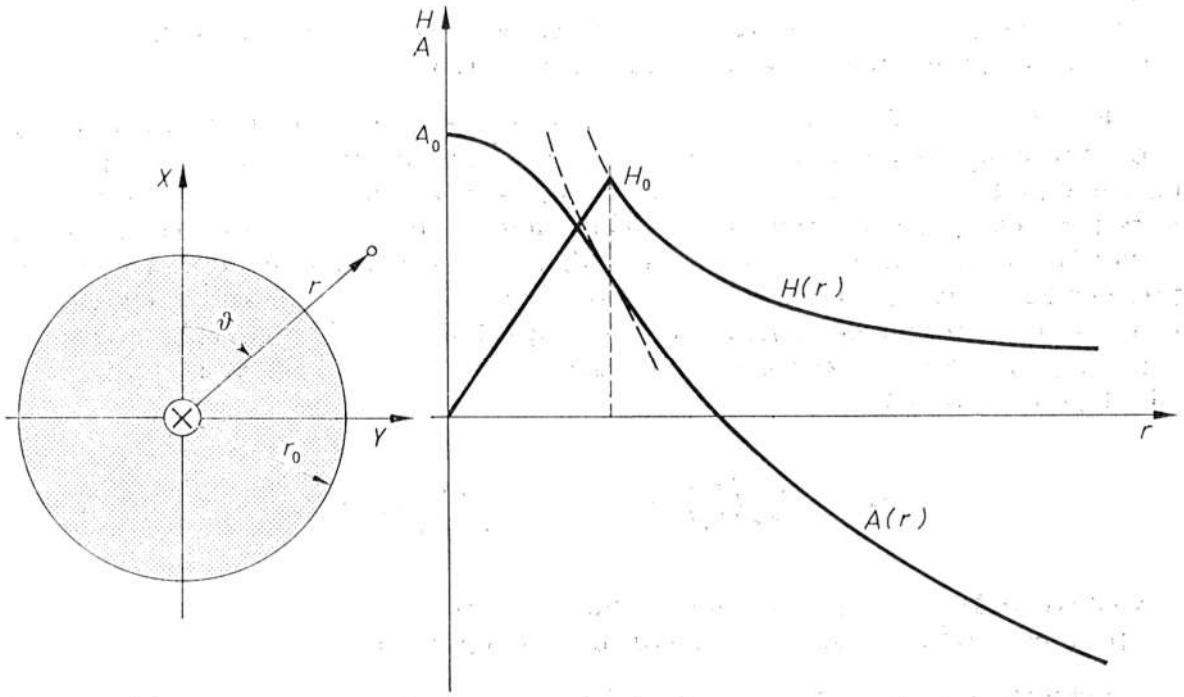
Ovakvo se rješenje moglo očekivati, jer je rješavano polje ravne strujnice. Strujnica je zatvorena krivulja, a pravac nije zatvoren, te se ne mogu odrediti obje integracione konstante. Nužno je odabrati po volji iznos potencijala na nekoj udaljenosti r_1 od pravca strujnice. Budući da je svejedno koji iznos ima odabrani potencijal, treba mu dati iznos nula, tj. za

$$r = r_1, \qquad A = 0$$

Nešto slično je bilo i s potencijalom linijskog naboja na pravcu kad je također odabran nivo potencijala.

Drugi se granični uvjet postavlja iz poznate jakosti polja po izrazu (2.102). Po definiciji se jakost polja dobiva iz potencijala iz

$$\mu H = -\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{A_1}{r}$$



Sl. 2.37. Presjek ravnog, okruglog vodiča protjecanog strujom. Na desnoj slici je dijagram ovisnosti vektorpotencijala i jakosti polja o udaljenosti od osi vodiča. Vektorpotencijal $\mathbf{A}_0$ je proizvoljan.

Indeks jakosti polja se ispušta, jer postoji samo jedna njegova komponenta, tj. tangencijalna komponenta. Kako jakost polja iznosi $H = i/(2\pi r)$, to je integraciona konstanta $A_1 = -\mu i/(2\pi)$. Konačno je vektorpotencijal strujnice-pravca jednak

$$A = \frac{\mu i}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) \tag{2.104}$$

Treba voditi računa da struja teče u smjeru osi Z cilindričkog koordinatnog sustava.

Na sl. 2.37. prikazan je u presjeku okrugli, ravni vodič, polumjera r_0. Njegova os leži u osi Z, a njegova struja teče u istom smjeru. Da bi se ustanovilo polje takva vodiča protjecanog strujom, potrebno je poznavanje raspodjele gustoće struje po njegovu presjeku. Opće rješenje ovog zadatka spada među najzamršenije teorijske zadatke elektrotehnike. Kako se radi o statičkom polju, tj. o statičkom strujanju naboja, raspodjela struje po presjeku vodiča je jednolična, a *gustoća struje je konstantna po presjeku.* Polje izvan vodiča je formirano kao da sva struja vodiča teče njegovom osi. Polje u vodiču ima silnice koncentrične kružnice, a njegova jakost je dana izrazom (2.103). Vektorpotencijal slijedi iz rješenja Poissonove jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = -\mu J$$

Gustoća struje J je konstantna po presjeku. Jednadžba vrijedi za unutarnjost vodiča.

Njezino rješenje glasi

$$A = A_1 \ln r + A_2 - \frac{\mu}{4} J r^2$$

Opet se pojavljuju dvije integracione konstante A_1 i A_2. Jedan od graničnih uvjeta je polje u osi vodiča. Jakost polja u osi vodiča mora iščezavati, tj. $H = 0$ za $r = 0$. Zato je $A_1 = 0$. Vektorpotencijal je jednak na površini vodiča s jedne i druge strane. Prema tome je za $r = r_0$

$$\frac{\mu i}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) = A_2 - \frac{\mu}{4} J r_0^2$$

odakle se dobiva konstanta $A_2 = A_0$. Budući da je gustoća struje dana sa $J = i/(\pi r_0^2)$, konačno je potencijal u vodiču

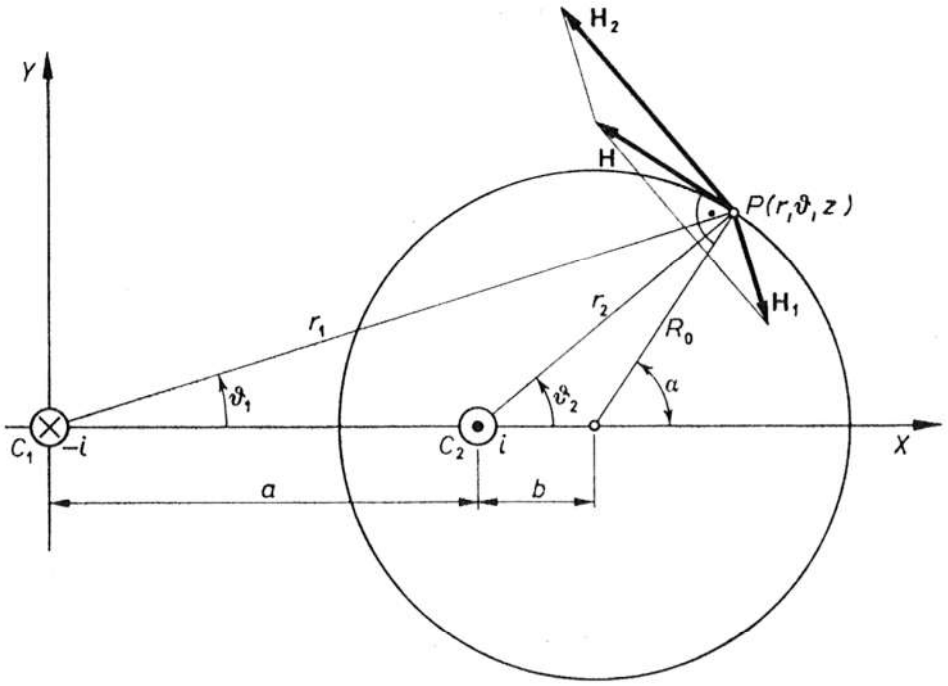
$$A = A_0 - \frac{\mu i}{4\pi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2, \qquad r \leqslant r_0 \tag{2.105}$$

$$A_0 = \frac{\mu i}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + \frac{\mu i}{4\pi} = \frac{\mu i}{2\pi} \ln\left(\frac{1{,}65\, r_1}{r_0}\right)$$

Potencijal A_0 je potencijal u središtu vodiča. On ima tamo najveći iznos, te opada prema površini vodiča, da nastavi opadanje izvan njega. Na sl. 2.37. je prikazan ujedno dijagram promjene jakosti polja i potencijala u ovisnosti o radijusu, odnosno o udaljenosti od osi vodiča.

2.13.1. Dva paralelna pravca kao strujnica

Struja na pravcu ne može se realizirati. Struja uvijek sačinjava zatvorenu petlju. Vektorpotencijal se može računati samo kad je potpuno jasna strujna petlja. Strujnica od dva paralelna pravca već sačinjava petlju kojom teče struja i. Na sl. 2.38. prikazani su tragovi C_1 i C_2 dvaju paralelnih pravaca kojima teku struje $-i$



Sl. 2.38. Dvije strujnice C_1 i C_2 na paralelnim pravcima. One su razmaknute na udaljenost a, a protjecane su jednakim strujama protivna smjera. Silnice polja su ovdje linije konstantnog vektorpotencijala, a to su u ovom slučaju kružnice. Jedna takva kružnica je nacrtana.

i i. Ishodište koordinatnog sustava postavljeno je u C_1. Struja u C_1 teče suprotno smjeru osi Z, te je zbog toga negativna. Te dvije struje tvore strujnicu, koja je sada zatvorena krivulja. Vektorpotencijal u točki P promatranja nastaje superpozicijom potencijala struja - pravaca C_1 i C_2. One obje imaju referentni pravac u P_0 na simetralnoj ravnini između zadanih struja. Potencijal iznosi u točki P prema oznakama na sl. 2.38.

$$A = -\frac{\mu i}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + \frac{\mu i}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right) = \frac{\mu i}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \tag{2.106}$$

On opet ima smjer osi Z. Taj je smjer pozitivan u poluprostoru $x > a/2$, a negativan je za $x < a/2$. Vektorpotencijal je potpuno jednako formiran kao i skalarni potencijal za dva linijska naboja. U oba slučaja su ekvipotencijalne linije kružnice. Jakost magnetskog polja u istoj točki slijedi iz odnosa $\mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Ona se jednostavnije računa u pravokutnom koordinatnom sustavu. U njemu je $r_1^2 = x^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - a)^2 + y^2$.

Sada je

$$H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}, \quad H_z = 0$$

tako da slijede konačno komponente jakosti polja i ukupni iznos

$$H_x = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{y}{r^2} - \frac{y}{r_2^2}\right)$$

$$H_y = -\frac{i}{2\pi}\left(\frac{x}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2}\right) \tag{2.107}$$

$$H = H_x \sin \alpha_0 + H_x \cos \alpha_0 = \frac{i}{2\pi}\frac{a}{r_1 r_2}$$

Na spojnici između struja nema H_x komponente. Te se komponente polja dobiju i direktno superpozicijom obiju struja na pravcima. Put preko vektorpotencijala je elegantniji.

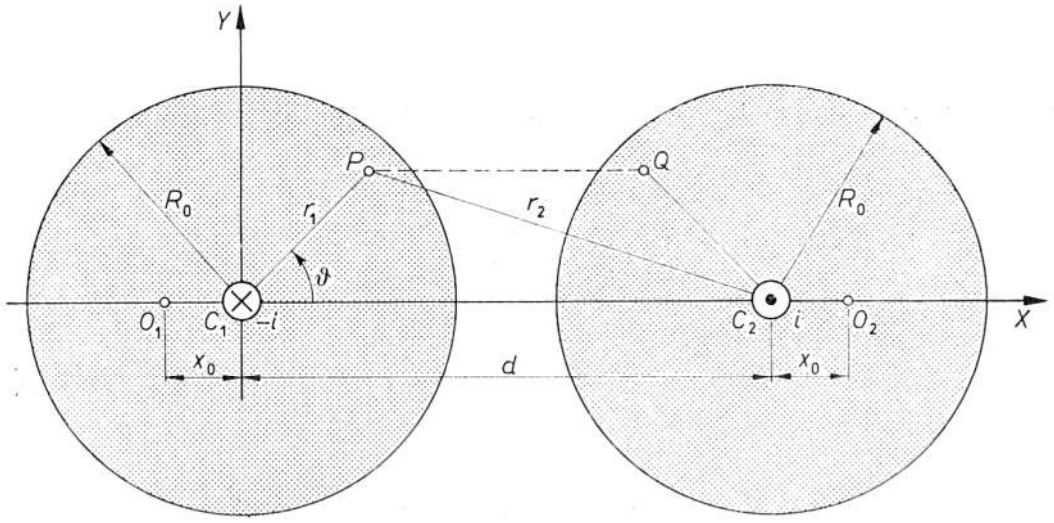
Silnice polja dviju paralelnih strujnica slijede iz definicije silnica, tj. tangenta na silnicu se poklapa sa smjerom djelovanja polja. To je izraženo jednadžbom $dy/dx = H_y/H_x$. Upotrijebivši odnos jakosti polja prema vektorpotencijalu dobiva se jednadžba

$$\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = 0$$

To daje uvjet za silnice $dA = 0$ ili $A = \text{konst}$. Silnice se poklapaju s krivuljama konstantnog vektorpotencijala. S druge strane, to znači da je odnos radijusvektora konstantan, $r_1/r_2 = \text{konst}$. Takav isti uvjet je dobiven za ekvipotencijalne linije dvaju paralelnih linijskih naboja, razmaknutih na istu udaljenost. Dvije ravne paralelne strujnice i dva ravna paralelna linijska naboja, jednako razmaknuti, daju istu sliku silnica i ekvipotencijalnih linija, samo su te dvije skupine krivulja zamijenile svoja mjesta. Sl. 2.27. vrijedi i ovdje.

Jednostavno se rješava polje dvaju ravnih paralelnih vodiča čiji je polumjer presjeka mnogo puta manji od njihove međusobne udaljenosti. Uz spomenutu pretpostavku *uzima se da ukupna struja protječe osi vodiča*, a polje se računa na taj način za prostor izvan vodiča. Polje u vodiču potječe samo od struje samoga vodiča. Drugi vodič ne utječe na polje u vodiču. Prema tome se proračun provodi kao za struje na pravcu.

PRIMJER 2.19. Zadana su **dva okrugla ravna vodiča,** međusobno paralelna, kao što su im presjeci prikazani na sl. 2.39. Njihovi su promjeri jednaki i iznose $2R_0$, a osi su im razmaknute na udaljenosti d. Budući da se promatra statičko strujanje, gustoća struje je jednako raspoređena



Sl. 2.39. Presjek dvaju paralelnih, okruglih vodiča. Njima teku jednake struje suprotna smjera. Gustoća struje je konstantna po presjeku. Određuje se njihovo magnetsko polje.

po presjeku. Potencijal u vodiču nastaje superpozicijom potencijala obaju vodiča, kao da je svaki sam za sebe. Zato su potencijali obaju vodiča

$$A = -\frac{\mu i}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{r_2}{R_0}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2\right] \qquad \text{lijevi vodič } r_1 \leqslant R_0$$

$$A = +\frac{\mu i}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{r_1}{R_0}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{R_0}\right)^2\right] \qquad \text{desni vodič } r_2 \leqslant R_0$$

Jakost polja slijedi iz dobivenih potencijala.

Da bi se ustanovio ukupni tok, potrebno je naći konturu s na kojoj jakost polja iščezava, te po njoj izvršiti integraciju vektorpotencijala. Takva integracija pruža garanciju da je obuhvaćen cjelokupni magnetski tok. Dijelovi ove konture su opet pravci. Polje iščezava u pravcima čiji su tragovi u točkama O_1 i O_2 na osi X, što znatno olakšava njihovo nalaženje. Na osi X postoji samo H_y komponenta polja, a ona iznosi

$$H_y = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x-d} - \frac{x}{R_0^2}\right), \qquad H_x = 0, \qquad \text{za } y = 0$$

Mjesto nule te komponente polja nalazi se za x_0 udaljeno od osi vodiča, kao što je označeno na sl. 2.39. Duljina x_0 iznosi tada

$$x_0 = \left[R_0^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{1/2} - \frac{d}{2}$$

Ona može poprimiti najveću vrijednost $x_0 = (\sqrt{2} - 1)\,R_0 = 0{,}414\,R_0$ kad je $d/2 = R_0$ upravo na donjoj svojoj vrijednosti. Kako se povećava razmak osi vodiča d, smanjuje se x_0 i teži k nuli. Za velike d, tj. $d \gg R_0$, x_0 iznosi približno $x_0 = R_0^2/d$.

Radijusvektori iznose na pravcu O_1 $r_1 = x_0$ i $r_2 = d + x_0$, te je vektorpotencijal na njemu

$$A_1 = -\frac{\mu i}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{d + x_0}{R_0}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{R_0}\right)^2\right]$$

Radijusvektori su $r_1 = d + x_0$ i $r_2 = x_0$ na pravcu O_2, a vektorpotencijal iznosi

$$A_2 = +\frac{\mu i}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{d + x_0}{R_0}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{R_0}\right)^2\right]$$

Ta su oba vektorpotencijala međusobno jednaka, samo su suprotna predznaka. Ukupni tok treba izračunati po izrazu

$$\Phi = \oint \mathbf{A}\,\mathrm{ds}$$

Kako se potencijal ne mijenja aksijalno, već samo radijalno, treba odabrati jediničnu aksijalnu duljinu konture. Druge dvije stranice konture prolaze radijalno, te je na njima $\mathbf{A}\,\mathrm{ds} = 0$, jer su $\mathbf{A}$ i ds tamo međusobno okomiti. Preostaje samo aksijalni dio produkta. Element konture ds ima smjer struje, te je ona na pravcu O_1 negativna, a na pravcu O_2 pozitivna. Konačno je ukupni tok po jedinici aksijalne duljine

$$\Phi = -A_1 + A_2 = -2A_1 = \frac{\mu i}{\pi}\left[\ln\left(\frac{d + x_0}{R_0}\right) + \frac{d\,x_0}{2R_0^2}\right]$$

Ukupni tok Φ nije mjerodavan za induktivitet voda, već treba odrediti *ulančeni tok*. Integraciona petlja je prolazila tragovima O_1 i O_2 na sl. 2.39. kad je računat ukupni magnetski tok. On je ujedno najveći tok. Svaka druga petlja iste aksijalne duljine imala bi samo manji tok. Strujna petlja sastavljena od dva paralelna vodiča obuhvaća samo manji tok od ukupnog toka. Petlja P - Q na sl. 2.39. ima dvije stranice unutar površine vodiča, a ona obuhvaća tok $\Phi = -2A_1$ koji je manji od ukupnog, jer je potencijal A_1 manji od iznosa u tragu O_1. Promatrana petlja P - Q leži simetrično prema simetralnoj ravnini između vodiča. Zato je $A_P = -A_Q = A_1 = -A_2$. *Ulančeni tok* strujnog kruga dobiva se integracijom pojedinačnih tokova preko cijele površine vodiča. U tu svrhu stavlja se u tragove P i Q element površine $\mathrm{d}S = r_1\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r_1$ presjeka vodiča, te se ustanovljava ulančeni tok

$$\Psi = \int \Phi\,\frac{\mathrm{d}S}{S_0} = -2\int_{r_1}\int_{\vartheta} A_1\,\frac{r_1\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r_1}{\pi R_0^2} \tag{2.108}$$

Tok Φ prolazi petljom koja je smještena gdje i element površine $\mathrm{d}S$. Površina $S_0 = \pi R_0^2$ je površina presjeka vodiča.

Potencijal u lijevom vodiču iznosi

$$A_1 = -\frac{\mu i}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{r_2}{R_0}\right)^2 + 1 - \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2\right]$$

Radijusvektor r_2 se dobiva iz odnosa

$$\left(\frac{r_2}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{d}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2 - 2\,\frac{d\,r_1}{R_0^2}\cos\vartheta$$

Integracija po kutu ϑ provodi se u granicama $\vartheta = 0$ i $\vartheta = 2\pi$, te je ulančeni tok

$$\Psi = \frac{\mu i}{2\pi^2}\int_{r_1}\left[4\pi\ln\left(\frac{d}{R_0}\right) + 2\pi - 2\pi\left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2\right]\frac{r_1\,\mathrm{d}r_1}{R_0^2}$$

Integracija po radijusvektoru r_1 se provodi u granicama $r_1 = 0$ i $r_1 = R_0$. Konačno je ulančeni tok jednak po jedinici duljine zadanog strujnog kruga

$$\psi = \frac{\mu i}{\pi}\left[\ln\left(\frac{d}{R_0}\right) + \frac{1}{4}\right]$$

On je mjerodavan za induktivitet prema odnosu $\psi = L i$. Sada induktivitet strujnog kruga iznosi po jedinici duljine

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{\mu}{\pi}\left[\ln\left(\frac{d}{R_0}\right) + \frac{1}{4}\right]$$

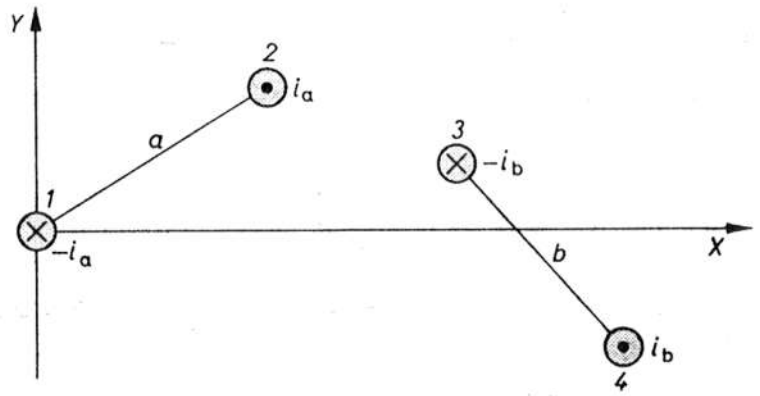
Treba podsjetiti da ovaj induktivitet vrijedi za statičko stanje, tj. jednaku razdiobu struje po presjeku vodiča. On ima iznose kao u tablici 2.10. za nekoliko omjera d/R_0 i $\mu = \mu_0$.

TABLICA 2.10.

d/R_0	2	5	10	100	1000
L (μH/m)	0,38	0,74	1,02	1,94	2,86

Induktivitet L sadrži odmah unutarnji i vanjski dio, koji bi se svaki za sebe mogao odrediti po svojoj definiciji. Ulančeni tok ψ iznosi 73% ukupnog toka pri $d/R_0 = 2$, a on je već 97% ukupnog toka pri omjeru $d/R_0 = 1000$. Pri omjeru $d/R_0 = 2$ vodiči se dotiču.

PRIMJER 2.20. Zadana su **četiri okrugla, ravna vodiča** razmještena prema sl. 2.40. Vodiči 1 i 2 sačinjavaju jedan strujni krug, a vodiči 3 i 4 — drugi strujni krug. Treba ustanoviti koliki je induktivitet između ta dva strujna kruga. Prvim strujnim krugom a teče struja i_a kao što



Sl. 2.40. Presjeci četiriju paralelnih, okruglih vodiča. Vodiči 1 i 2 pripadaju jednom strujnom krugu struje i_a, a vodiči 3 i 4 su drugog strujnog kruga struje i_b. Određuje se ulančeni tok i međuinduktivitet strujnih krugova.

je označeno na slici. Drugim strujnim krugom b protječe struja i_b. Neka su pojedini razmaci među vodičima mnogo puta veći od promjera vodiča. Tako se zanemaruje utjecaj polja u unutarnjosti vodiča.

Strujni krug struje i_a proizvodi polje čiji tok ulančava jednim dijelom strujni krug struje i_b. Budući da se ne mijenjaju pojedine veličine aksijalno, računa se tok po jedinici duljine. Ulančeni tok se računa po izrazu

$$\Phi_{ab} = \oint \mathbf{A}_{ab}\, \mathrm{d}\mathbf{s}_b$$

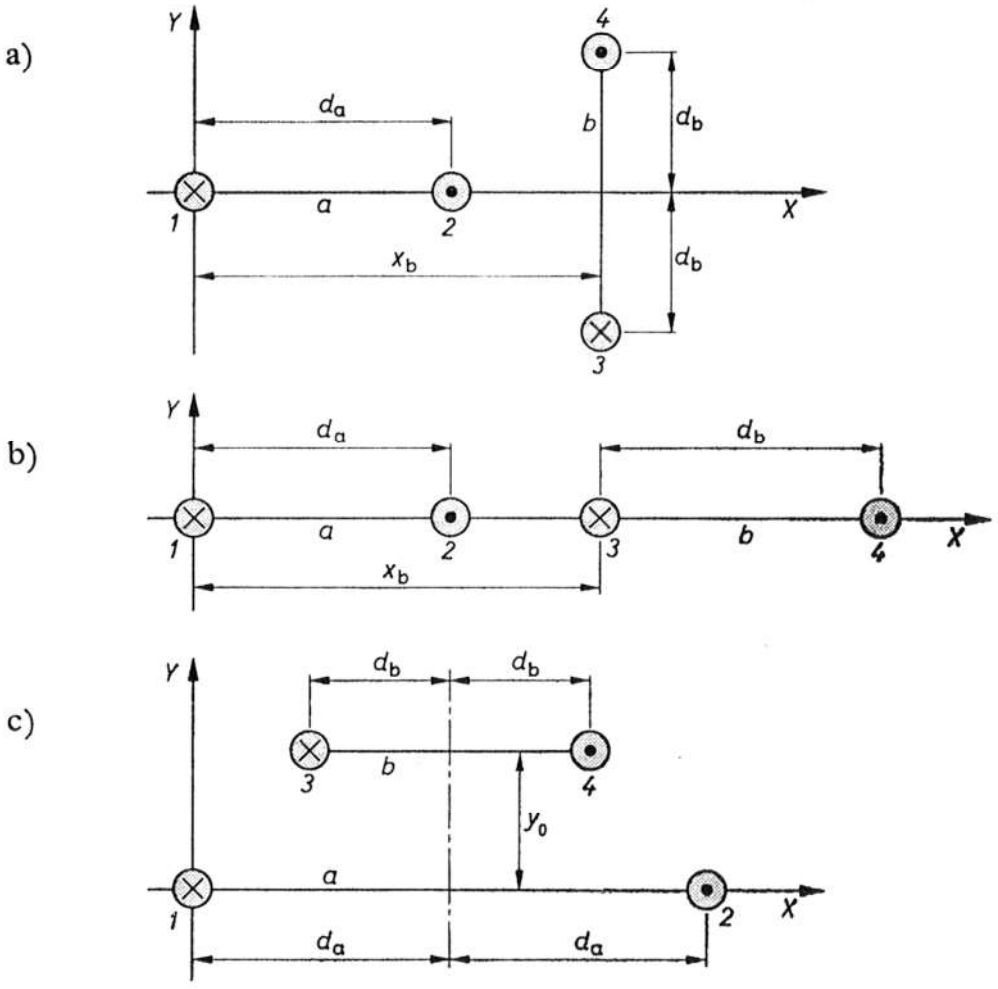
a on se ovdje izjednačava s ukupnim tokom. Petlja s_b je pravokutnik, čije dvije stranice prolaze osima vodiča 3 i 4, a druge dvije stranice su radijusi između istih vodiča. Na radijalnim stranicama je produkt $\mathbf{A}_{ab}\, d\mathbf{s}_b = 0$, te preostaju samo aksijalne stranice. Zato je ulančeni tok

$$\Phi_{ab} = \frac{\mu i_a}{2\pi}\left[-\ln\left(\frac{r_{13}}{r_{23}}\right) + \ln\left(\frac{r_{14}}{r_{24}}\right)\right] = L_{ab}\, i_a$$

Međuinduktivitet L_{ab} između strujnog kruga struje i_a i strujnog kruga struje i_b iznosi prema tome

$$L_{ab} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{14}\, r_{23}}{r_{13}\, r_{24}}\right) = L_{ba}$$

Pojedini r_{jk} su razmaci među osima vodiča j i k.



Sl. 2.41. Presjeci dvaju parova paralelnih, okruglih vodiča. Parovi su smješteni međusobno u tri karakteristična položaja. Oni su na gornjoj slici svojim ravninama međusobno okomiti, na srednjoj su slici komplanarni, a na donjoj su slici paralelni i sa zajedničkom simetralom. Određuje se njihov međuinduktivitet.

Postoje tri karakteristična međusobna položaja strujnih krugova a i b. Oni su skicirani na sl. 2.41. a, b i c. Ravnine strujnih krugova su međusobno okomite na sl. 2.41. a, a krugovi su jedan prema drugome simetrični. Zato su razmaci $r_{13} = r_{14}$ i $r_{23} = r_{24}$, a međuinduktivitet $L_{ab} = 0$ iščezava.

Svaki strujni krug ulančava vlastiti tok zadan induktivitetom

$$L_a = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d_a}{R_0}\right), \qquad L_b = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d_b}{R_0}\right)$$

gdje je zanemaren konstantni član $\mu/(4\pi)$. Svi vodiči imaju isti promjer $2R_0$, koji je neznatan prema razmacima.

Drugi karakteristični položaj je prikazan na sl. 2.41. b. Tamo su razmaci

$$r_{13} = x_b, \qquad r_{14} = x_b + d_b$$
$$r_{23} = x_b - d_a, \qquad r_{24} = x_b - d_a + d_b$$

a međuinduktivitet iznosi

$$L_{ab} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left[\frac{(x_b + d_b)(x_b - d_a)}{x_b (x_b + d_b - d_a)}\right]$$

Kad bi oba strujna kruga bila jednaka, tj. $d_a = d_b$, iznosio bi međuinduktivitet

$$L_{ab} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{x_b^2 - d_a^2}{x_b^2}\right)$$

Nekoliko vrijednosti je navedeno u slijedećoj tablici za $\mu = \mu_0$.

TABLICA 2.11.

x_b/d_a	2	10	50	100
$-L_{ab}$ (pH/m)	57500	2000	80	20

Međuinduktivitet izlazi računski negativan, jer je izabran takav obilazak strujnih krugova, a pokazuje da se magnetski tokovi strujnih krugova međusobno ne pomažu, već djeluju jedan nasuprot drugome. To se moglo očekivati u primjeru navedenom u tablici, kako su označeni smjerovi struja u slici. Primjer u tablici pokazuje da međuinduktivitet vrlo brzo opada kako se više razmiču strujni krugovi. Pri većim udaljenostima, $x_b/d_a > 10$, međuinduktivitet opada s kvadratom razmaka.

Treći karakteristični primjer na sl. 2.41. c omogućuje najveće ulančenje zajedničkog toka. Oba strujna kruga imaju istu simetralnu ravninu. Sada su razmaci među vodičima $r_{13} = r_{24}$ i $r_{14} = r_{23}$, a mogu se izraziti veličinama d_a, d_b i y_0. Međuinduktivitet iznosi

$$L_{ab} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left[\frac{(d_a + d_b)^2 + 4y_0^2}{(d_a - d_b)^2 + 4y_0^2}\right]$$

Neka su razmaci $d_a = 4$ m, $d_b = 3$ m, $y_0 = 1$ m, promjer vodiča $2R_0 = 20$ mm. Induktiviteti iznose za $\mu = \mu_0$ strujnog kruga a i b

$$L_a = 0{,}4 \ln\left(\frac{4000}{10}\right) = 2{,}40 \ \mu\text{H/m}$$

$$L_b = 0{,}4 \ln\left(\frac{3000}{10}\right) = 2{,}28 \ \mu\text{H/m}$$

Međuinduktivitet iznosi

$$L_{ab} = 0{,}2 \ln\left(\frac{49 + 4}{1 + 4}\right) = 0{,}472 \ \mu\text{H/m}$$

Karakteristična je veličina *faktor sprege*, koji je definiran odnosom

$$s^2 = \frac{L_{ab}^2}{L_a L_b} = 0{,}041$$

On iznosi u ovom primjeru 20,3%, tj. mali dio magnetskog toka je zajednički za oba strujna kruga.

Interesantna varijanta ovog primjera nastaje kad ista struja protječe kroz oba strujna kruga, a njihovi se magnetski tokovi pomažu, tj. $i_a = i_b = i$. Na taj način nastaje jedan strujni krug. Njegov ulančeni tok mogao bi se odrediti po općoj formuli

$$\Phi = \oint \mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$$

Cijela petlja integracije smije se zamisliti sastavljena od dviju petlji, a i b, te je i ulančeni tok tako sastavljen, $\Phi = \Phi_a + \Phi_b$. Dionim tokovima Φ_a i Φ_b doprinose obje struje, odnosno oba vektor-potencijala. Tokovi se izražavaju induktivitetima najjednostavnije, te oni iznose

$$\Phi_a = L_a i + L_{ab} i = (L_a + L_{ab})\, i$$

$$\Phi_b = (L_b + L_{ab})\, i$$

Konačno je ukupni tok

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_b = (L_a + L_b + 2L_{ab})\, i$$

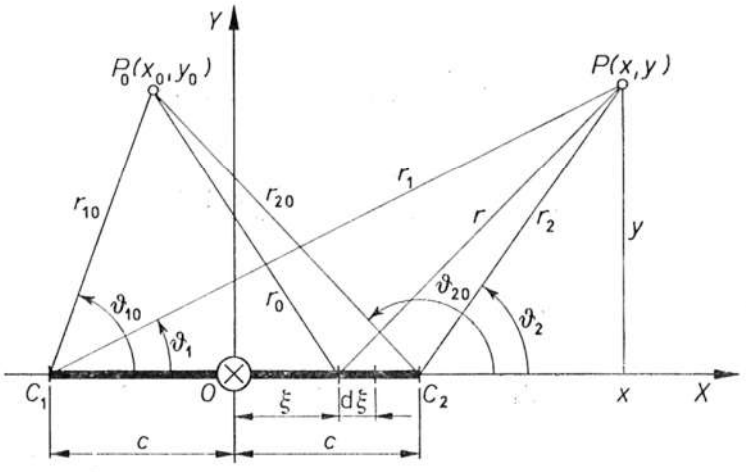
On se izražava ukupnim induktivitetom

$$L = \frac{\Phi}{i} = L_a + L_b + 2L_{ab}$$

$$L = \frac{\mu}{\pi}\left[2\ln\left(\frac{d}{R_0}\right) + \ln\left(\frac{d^2 + y_0^2}{y_0^2}\right)\right] = \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{d^2\,(d^2 + y_0^2)}{R_0^2\, y_0^2}$$

Ovdje je pretpostavljeno da su oba strujna kruga jednaka, tj. $d_a = d_b = d$. Zajednički induktivitet L je veći od sume pojedinačnih induktiviteta $(L_a + L_b)$ zbog međusobnog pomaganja strujnih krugova.

PRIMJER 2.21. Strujna traka proizvodi polje koje je nastalo superpozicijom linijskih struja. Njezin trag je prikazan u ravnini X - Y na sl. 2.42. Traka je protjecana strujom konstantne



Sl. 2.42. Presjek strujne trake širine $2c$. Njezina je središnjica smještena u os Z. Linijska gustoća struje je konstantna.

linijske gustoće K. Ona je široka $2c$, te je ukupna jakost struje trake $i = 2cK$. Element trake $\mathrm{d}\xi$ vodi struju $K\,\mathrm{d}\xi$, a smije se promatrati kao linijska struja na pravcu.

Njezin vektorpotencijal iznosi prema (2.105)

$$\mathrm{d}A = -\frac{\mu K \,\mathrm{d}\xi}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Pravac referentnog potencijala ima trag u točki $P_0\,(x_0, y_0)$ koja se nalazi na osi Y. Ona je udaljena od promatranog elementa trake za r_0, što slijedi iz $r_0^2 = (x_0 - \xi)^2 + y_0^2$. Točka promatranja $P\,(x, y)$ je udaljena od istog elementa za r, koji pak izlazi iz izraza

$$r^2 = (x - \xi)^2 + y^2$$

Ukupni potencijal se dobiva integracijom preko cijele širine trake, tj.

$$A = -\frac{\mu K}{4\pi} \int_{-c}^{c} \ln\left[\frac{(x_0 - \xi)^2 + y_0^2}{(x - \xi)^2 + y^2}\right] \mathrm{d}\xi$$

Ovaj se integral svodi na osnovni oblik

$$\int \ln(a^2 + u^2)\,\mathrm{d}u = u \ln(a^2 + u^2) - 2u + 2a \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{u}{a}\right).$$

Konačni izraz vektorpotencijala izgleda za $K = i/(2c)$

$$A = -\frac{\mu i}{4\pi c}[(x - c)\ln r_2 - (x + c)\ln r_1 + y(\vartheta_1 - \vartheta_2)] + A_0 \qquad (2.109)$$

Predznak minusa se pojavio u potencijalu, jer je smjer struje negativan u odnosu na smjer osi Z. Referentni potencijal je takav, da ukupni potencijal A iščezava u točki P_0. Jakost magnetskog polja je regulirana jednadžbom $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Vektorpotencijal ima samo jednu komponentu, a to je aksijalna A_z. Zato su jakosti polja

$$H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{i}{4\pi c}(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x} = +\frac{i}{4\pi c}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \qquad (2.110)$$

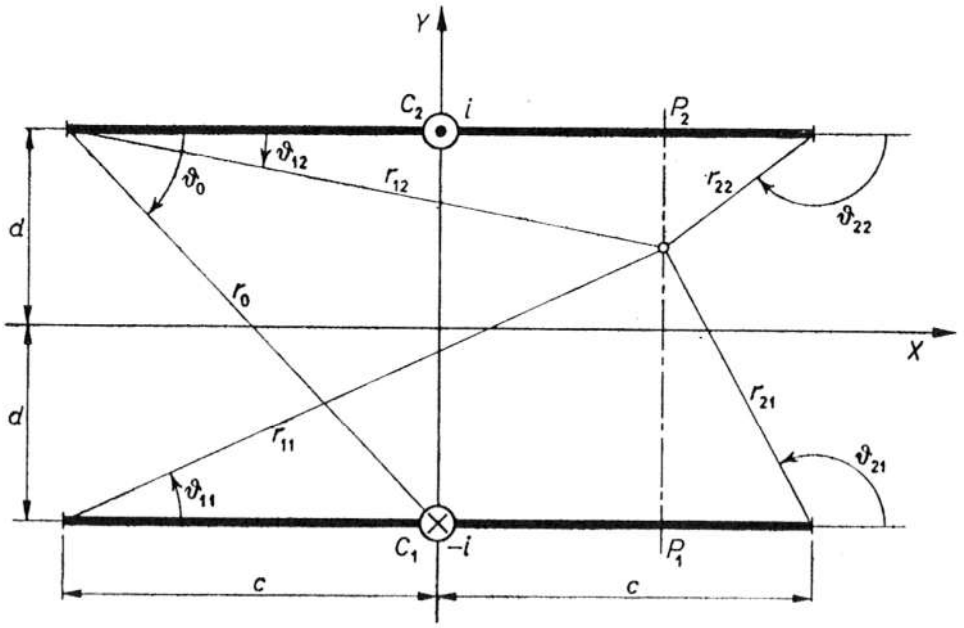
One iznose u neposrednoj blizini trake, kad je približno

$$\vartheta_1 = 0, \qquad \vartheta_2 = \pi, \qquad y > 0 \qquad \text{i} \qquad r_2 = 2c - r_1$$

$$H_x = \frac{i}{4c} = \frac{K}{2}, \qquad H_y = \frac{i}{4\pi c}\ln\left(\frac{2c}{r_1} - 1\right)$$

H_x je jednak polovici strujnog obloga. To odgovara graničnim uvjetima, jer je H_x tangencijalna komponenta polja u odnosu na traku. Ona pravi skok za iznos strujnog obloga. Ona je na strani $y < 0$ $H_x = -K/2$, te je ukupni skok za K.

PRIMJER 2.22. Paralelne strujne trake postavljene su na sl. 2.43., te su po tome slične formaciji od dva ravna, paralelna, okrugla vodiča. One su protjecane suprotnim strujama. Ravnina



Sl. 2.43. Presjek dviju paralelnih strujnih traka. One su jednake širine 2 c, a protjecane su strujom jednake linijske gustoće, ali suprotna smjera. Njihove su središnjice u ravnini Y-Z, a simetralna ravnina je u ravnini X-Z.

X-Z je ujedno ravnina nultog potencijala. Točka P_0 referentnog potencijala iz prethodnog primjera se stavlja na os X. Trakom 1 teče struja $-i$, te je njezin potencijal

$$A_1 = -\frac{\mu i}{4\pi c}[(x-c)\ln r_{21} - (x+c)\ln r_{11} + (y+d)(\vartheta_{11} - \vartheta_{21})]$$

Trakom 2 teče struja i, a njezin je potencijal slično

$$A_2 = +\frac{\mu i}{4\pi c}[(x-c)\ln r_{22} - (x+c)\ln r_{12} + (y-d)(\vartheta_{12} - \vartheta_{22})]$$

Ukupni potencijal iznosi $A = A_1 + A_2$. Jakost polja nastaje također superpozicijom polja obiju traka, te se odmah može napisati iznos pojedinih komponenti, uzevši u obzir predznak struja

$$H_x = -\frac{i}{4\pi c}[(\vartheta_{11} - \vartheta_{21}) - (\vartheta_{12} - \vartheta_{22})]$$

$$H_y = +\frac{i}{4\pi c}\ln\left(\frac{r_{21}\, r_{12}}{r_{11}\, r_{22}}\right)$$

Na osi X ne postoji Y-komponenta polja, $H_y = 0$. Tu je $\vartheta_{12} = -\vartheta_{11}$ i $\vartheta_{22} = -\vartheta_{21}$, a X-komponenta polja iznosi

$$H_{x0} = -\frac{i}{2\pi c}(\vartheta_{11} - \vartheta_{21}), \quad \text{za} \quad y = 0$$

Ako je traka vrlo široka, $c \gg d$, u ishodištu koordinatnog sustava, $x = 0$, kutovi degeneriraju u iznose $\vartheta_{11} = 0$ i $\vartheta_{21} = \pi$, te je tamo jakost polja približno jednaka $H_0 = i/(2c) = \mathrm{K}$.

Jakost polja na osi X iznosi

$$\frac{H_{x0}}{H_0} = \frac{\vartheta_{21} - \vartheta_{11}}{\pi}, \quad y = 0$$

Neke vrijednosti H_{x0}/H_0 su navedene u tablici 2.12. za različite omjere d/c i x/c.

TABLICA 2.12.

$\frac{H_{x0}}{H_0}$ \ x/c	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	5
2	0,295	0,294	0,287	0,278	0,265	0,250	0,166	0,045
1	0,500	0,494	0,475	0,469	0,402	0,352	0,148	0,026
0,5	0,705	0,698	0,670	0,620	0,562	0,422	0,095	0,013
0,1	0,937	0,935	0,926	0,904	0,837	0,484	0,022	0,003

X-komponenta polja postoji u ravnini $x = 0$. Za taj slučaj su kutovi $\vartheta_{21} = \pi - \vartheta_{11}$ i $\vartheta_{22} = \pi - \vartheta_{12}$, a jakost polja slijedi iz izraza

$$\frac{H_x}{H_0} = \frac{\vartheta_{12} - \vartheta_{11}}{\pi}, \quad x = 0$$

U tablici 2.13. navedeni su neki iznosi H_x/H_0 za $x = 0$, pri različitim omjerima d/c i y/d.

TABLICA 2.13.

$\frac{H_x}{H_0}$ \ y/d	0	0,5	1
2	0,295	0,353	0,579
1	0,500	0,540	0,648
0,5	0,705	0,718	0,750
0,1	0,937	0,937	0,937

Vrlo široka traka postiže se kad je razmak među njima manji od 10 % njihove širine. Tada se postiže homogeno polje u njihovoj središnjoj ravnini $x = 0$.

Takav razmještaj struja se postiže u sabirnica, gdje se smiju zanemariti vrtložne struje, ili pak kod plosnatih zavojnica, vrlo izduženih. Ukupni tok se dobije iskorištavajući vektorpotencijal kao za dva paralelna okrugla vodiča. Najprije treba ustanoviti mjesta gdje magnetsko polje iščezava. U ovom primjeru to su pravci koji leže u trakama. Oni su na sl. 2.43. u $x = 0$ i $y = \pm d$, tj. njihovi su tragovi u točkama C_1 i C_2. Kutovi i dužine iznose u točki C_1 $\vartheta_{11} = 0$, $\vartheta_{21} = \pi$, $\vartheta_{12} = -\vartheta_0$, $\vartheta_{22} = -(\pi - \vartheta_0)$, $r_{11} = r_{21} = c$, $r_{12} = r_{22} = r_0$. Vektorpotencijal u istoj točki iznosi

$$A_1 = A_{11} + A_{21} = -\frac{\mu i}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{r_0}{c}\right) + \frac{d}{c}(\pi - 2\vartheta_0)\right]$$

Vektorpotencijal u točki C_2 iznosi isto toliko, samo je suprotnog predznaka, $A_2 = -A_1$. Uzevši u obzir predznake integracione petlje, iznosi ukupni tok

$$\Phi = \frac{\mu i}{\pi}\left[\ln\left(\frac{r_0}{c}\right) + \frac{d}{c}(\pi - 2\vartheta_0)\right]$$

Ovdje iznose s oznakama sa sl. 2.43.

$$r_0^2 = c^2 + (2d)^2, \qquad \vartheta_0 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2d}{c}\right)$$

Ovaj ukupni tok je ujedno najveći tok što ga proizvode zadane dvije strujne trake.

Ulančeni tok, Ψ, je manji po iznosu, a opet je mjerodavan pri određivanju induktiviteta. Točku P na sl. 2.43. treba postaviti na strujnu traku 1 u točku P_1 $(x, -d)$. Njoj je simetrično postavljena točka P_2 $(x, +d)$ na strujnoj traci 2. Tako nastala petlja $P_1 - P_2$ obuhvaća tok Φ koji je manji od ukupnog toka. On služi da se odredi ulančeni tok po definiciji sličnoj u primjeru dvaju okruglih, paralelnih vodiča. On je prema (2.108)

$$\Psi = \int_{-c}^{c} \Phi \frac{\mathrm{d}x}{2c} = -2\int_{-c}^{c} A_1 \frac{\mathrm{d}x}{2c}$$

Tok $\Phi = -2A_1 = -2(A_{11} + A_{21})$ je tok obuhvaćen petljom $P_1 - P_2$ po jedinici aksijalne duljine. Potencijali su u P_1 i P_2 međusobno jednaki, ali su suprotna predznaka, te je dovoljno računati samo s potencijalom A_1 u točki P_1. Koordinate u P_1 iznose prema sl. 2.43.

$$r_{11} = c + x, \quad r_{21} = c - x, \quad y = -d, \quad \vartheta_{11} = 0, \quad \vartheta_{21} = \pi$$

$$r_{12}^2 = (c + x)^2 + 4d^2, \quad r_{22}^2 = (c - x)^2 + 4d^2, \quad y = -d$$

$$\vartheta_{12} = -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2d}{c + x}\right), \quad \vartheta_{22} = -\left[\pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2d}{c - x}\right)\right]$$

Ukupni vektorpotencijal A_1 u točki P_1 slijedi prema tome iz

$$A_1 = A_{11} + A_{21} =$$

$$= -\frac{\mu i}{8\pi c}\left\{(c + x)\ln\left[\frac{(c + x)^2 + 4d^2}{(c + x)^2}\right] + (c - x)\ln\left[\frac{(c - x)^2 + 4d^2}{(c - x)^2}\right] + 4d(\vartheta_{12} - \vartheta_{22})\right\}$$

Razlika kutova $\vartheta_{12} - \vartheta_{22}$ iznosi

$$\vartheta_{12} - \vartheta_{22} = \pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2d}{c + x}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2d}{c - x}\right)$$

Sad je moguće izvršiti integraciju potencijala po cijeloj strujnoj traci da se dobije ulančeni tok $\Psi = L i$. Induktivitet zadanih dviju strujnih traka računa se iz omjera prema L_∞

$$\frac{L}{L_\infty} = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{d}{c}\right) - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{c}\ln\left(1 + \frac{c^2}{d^2}\right) - \frac{c}{d}\ln\left(1 + \frac{d^2}{c^2}\right)\right]$$

$$L_\infty = \mu\frac{d}{c}$$

Nekoliko iznosa L/L_∞ uneseno je u tablici 2.14. za različite razmjere c/d strujnih traka.

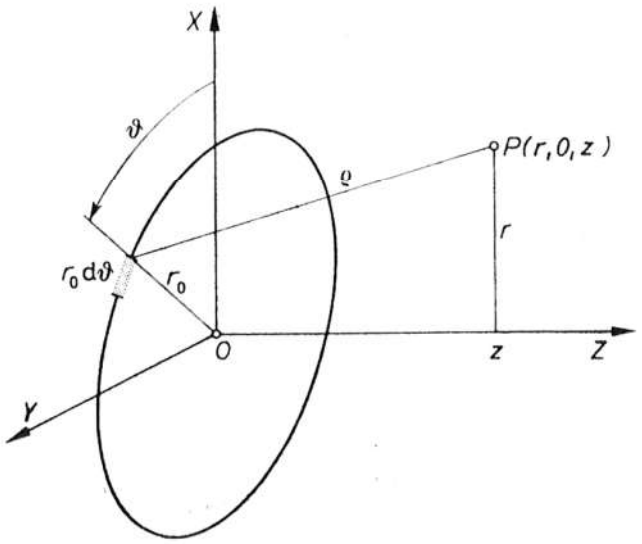
TABLICA 2.14.

c/d	0,5	1	2	5	10	100
L/L_∞	0,35	0,50	0,65	0,80	0,88	0,98

Induktivitet L_∞ se odnosi na zadane strujne trake čija je širina $2c$ beskonačno velika prema razmaku traka $2d$.

Ulančeni tok iznosi 92 % ukupnog toka pri razmjeru traka $c/d = 0{,}5$, odnosno, on je 94 % ukupnog toka pri razmjeru traka $c/d = 10$.

PRIMJER 2.23. Kružna strujnica je oblik strujnice koji nalazi veliku primjenu u teoriji potencijalnih polja. Vektorpotencijal njezina polja ima samo jednu komponentu, tangencijalnu u cilindričkom koordinatnom sustavu. To je opet potvrda opravdanosti primjene potencijala u rje-



Sl. 2.44. Kružna strujnica. Njezino je središte u ishodištu koordinatnog sustava. Primijenjen je cilindrički koordinatni sustav u proračunu magnetskog polja.

šavanju polja. Središte kružnice je smješteno u ishodište cilindričkog koordinatnog sustava kao na sl. 2.44. Strujnicom teče struja i, a njezin element $r_0\,\mathrm{d}\vartheta$ proizvodi dio potencijala istog smjera. Kako potencijal ima samo tangencijalnu komponentu, a točka promatranja je u X-Z ravnini, treba potencijal projicirati u os Y. Točka promatranja P $(r, 0, z)$ udaljena je od elementa strujnice $r_0\,\mathrm{d}\vartheta$ za dužinu ϱ koja slijedi iz iznosa

$$\varrho^2 = r_0^2 + r^2 + z^2 - 2\,r_0\,r\cos\vartheta$$

Potencijal se dobiva iz poznate integralne jednadžbe

$$A = 2\,\frac{\mu\, i}{4\,\pi}\int_0^{\pi}\frac{r_0\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{\varrho}$$

Da bi se dobio standardni oblik integrala, treba izvršiti supstituciju kuta $\vartheta = \pi + 2\,\beta$. Osim toga neka je

$$k^2 = \frac{4\,r_0\,r}{(r_0 + r)^2 + z^2}$$

Sada se potencijal transformira u oblik u kojem se vide potpuni eliptički integrali prve i druge vrste.

$$A = \frac{\mu\, i}{2\,\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} k\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin^2\beta - 1}{(1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}}\,\mathrm{d}\beta$$

Konačno potencijal iznosi

$$A = \frac{\mu\, i}{\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\frac{1}{k}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\,k^2\right)K(k) - E(k)\right] \tag{2.111}$$

Ovdje su $K(k)$ i $E(k)$ potpuni eliptički integrali prve i druge vrste modula k. Dobivena jednadžba potencijala vrijedi u svim točkama prostora osim na samoj strujnici. Os Z je pravac nultog potencijala.

Jednadžba $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ dovodi na komponente jakosti polja. One se dobiju nakon provedene derivacije i uređenja izraza

$$\begin{aligned}
H_r &= -\frac{1}{\mu}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial z}(r\,A) = \frac{i\,z\,k}{4\,r\,\pi\,\sqrt{r_0 r}}\left[-K(k) + \frac{r_0^2 + r^2 + z^2}{(r_0 - r)^2 + z^2}\,E(k)\right]\\
H_z &= \frac{1}{\mu}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,A) = \frac{i\,k}{4\,\pi\,\sqrt{r_0 r}}\left[K(k) + \frac{r_0^2 - r^2 - z^2}{(r_0 - r)^2 + z^2}\,E(k)\right]\\
H_\vartheta &= 0
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Radijalna komponenta polja ne postoji na osi Z, tj. $H_r = 0$ za $r = 0$. Također, tu je i modul $k = 0$, eliptički integrali su jednaki $K(0) = E(0) = \pi/2$. Aksijalna komponenta jakosti polja iznosi na osi Z

$$H_{z0} = \frac{H_0}{\left(1 + \dfrac{z^2}{r_0^2}\right)^{3/2}} \tag{2.113}$$

Ovdje je $H_0 = i/(2\,r_0)$ jakost polja u središtu kružne strujnice. Nekoliko vrijednosti H_r/H_0 i H_z/H_0 navedeno je u tablici 2.15. za različite omjere r/r_0 i z/r_0.

TABLICA 2.15.

$$\frac{z}{r_0} = 0, \qquad \frac{H_r}{H_0} = 0$$

r/r_0	0	0,2	0,5	0,9	1,2	2
H_z/H_0	1	1,032	1,241	3,94	— 1.07	— 0,085

$$\frac{z}{r_0} = 0{,}5$$

r/r_0	0	0,2	1	2
H_r/H_0	0	0,0913	0,525	0,0605
H_z/H_0	0,715	0,716	0,274	— 0,053

$$\frac{z}{r_0} = 5{,}0$$

r/r_0	0	1	2	5
H_r/H_0	0	0,0022	0,0033	0,0021
H_z/H_0	0,0075	0,0071	0,0050	0,0007

Izrazi (2.112) za komponente jakosti polja su valjani u cijelom prostoru s izuzetkom same strujnice. Modul k postaje na samoj strujnici jednak jedinici, a tada eliptički integral prve vrste $K(k)$ poprima beskonačan iznos. Dapače, teško je računati polje po navedenim izrazima čim se točka promatranja približava strujnici. Komplementarni modul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ postaje vrlo malen. Kad je $k' < 0{,}1$, eliptički integrali se izražavaju približno sa $E(k) = 1$ i $K(k) = \ln(4/k')$ uz grešku manju od 2 %.

Slika silnica se dobiva prema njihovoj definiciji, tj. mora biti

$$\frac{B_z}{B_r} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

To vodi na jednadžbu

$$B_z\,\mathrm{d}r - B_r\,\mathrm{d}z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)\,\mathrm{d}r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rA)\,\mathrm{d}z = 0$$

Prema tome mora biti zadovoljen totalni diferencijal

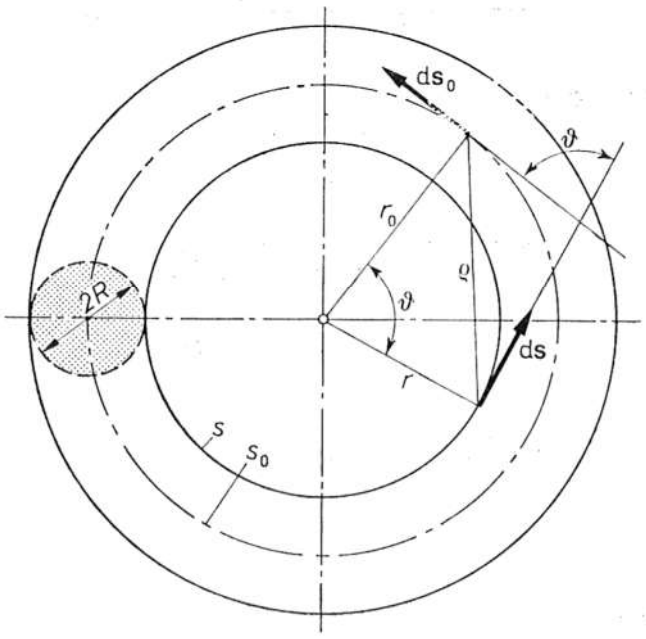
$$\mathrm{d}(rA) = 0$$

Jednadžba silnica, dakle, glasi

$$rA = \text{konst.}$$

Treba imati u vidu da vektorpotencijal ima samo tangencijalnu komponentu. Silnica polja postaje kružnica u blizini strujnice. Središte joj je na samoj strujnici. To je dovoljno točno čim je komplementarni modul $k' < 0{,}01$. Ravni, okrugli vodič, protjecan strujom, proizvodi magnetsko polje čije silnice su kružnice sa središtem u osi vodiča. Prema tome prstenasti vodič kružnog presjeka, protjecan strujom, proizvodi polje kao i kružna strujnica koja prolazi njegovom osi. Vodič ne smije

imati presjek suviše velikog promjera 2 R. Promjer 2 R njegova presjeka ne smije biti veći od 2 % promjera osi 2 r_0 prstena što ga čini vodič, tj. $R < 0{,}02\, r_0$. To zadovoljava uvjet veličine komplementarnog modula $k' < 0{,}01$, a tada silnice prolaze upravo površinom vodiča. Kad se povuče kružnica sa središtem na strujnici polumjera $R = 0{,}02\, r_0$, jakost polja varira na njoj od 0,94 $i/(2\pi R)$ do 1,06 $i/(2\pi R)$. To je još uvijek velika varijacija polja, ali je ipak greška malena, ako se na to mjesto postavi vodič promjera 2 R, a cijela struja protječe njegovom osi.



Sl. 2.45. Prsten kružnog presjeka protjecan strujom. Promjer presjeka prstena $2R$ je mnogo manji od promjera prstena. Određuje se induktivitet takvog strujnog kruga.

Ulančeni magnetski tok **prstenastog strujnog kruga** od okruglog vodiča ustanovljava se kao da struja teče njegovom osi kad je u pitanju tok čije silnice prolaze izvan vodiča. Tok unutar vodiča uzima se u račun kao kod ravna okrugla vodiča za dužinu $2\pi r_0$, koliko je opseg osi prstena. Tako se smije računati kad je polumjer vodiča mnogo manji od polumjera prstena $R \ll r_0$. Ovdje je ulančeni tok lakše odrediti uz pomoć induktiviteta. Strujni krug je skiciran na sl. 2.45. Vanjski induktivitet L_v se odnosi na tok silnica izvan vodiča. On iznosi

$$L_v = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{s_0} \oint_{s} \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}_0\, \mathrm{d}\mathbf{s}}{\varrho}$$

Integracija po konturi s_0 daje iznos $2\pi r_0$. Udaljenost između elemenata $\mathrm{d}s_0$ i $\mathrm{d}s$ slijedi iz $\varrho^2 = r_0^2 + r^2 - 2\, r_0\, r \cos\vartheta$. Zato je induktivitet

$$L_v = \mu \frac{r_0\, r}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta}{(r_0^2 + r^2 - 2\, r_0\, r \cos\vartheta)^{1/2}}$$

Treba uvesti novu varijablu, tako da je $\vartheta = \pi + 2\beta$ odnosno $\cos\vartheta = 2\sin^2\beta - 1$.

Sada je induktivitet

$$L_v = 2\,\mu\,\frac{r_0\,r}{r_0 + r}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin^2\beta - 1}{(1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}}\,\mathrm{d}\beta$$

On konačno iznosi

$$L_v = \mu\,(r_0 + r)\left[\frac{r_0^2 + r^2}{(r_0 + r)^2}\,K(k) - E(k)\right]$$

Tu je modul eliptičnih integrala

$$k = \frac{2\,(r_0\,r)^{1/2}}{r_0 + r}$$

Sada treba uzeti u obzir da se ovako smije računati samo ako je polumjer vodiča mnogo manji od polumjera prstena $R \ll r_0$. Time je vanjski induktivitet približno

$$L_v = \mu\,r_0\left[\ln\left(\frac{8\,r_0}{R}\right) - 2\right]$$

Unutarnji induktivitet se odnosi na tok silnica u vodiču. On se određuje kao u ravna, okrugla vodiča, samo se primjenjuje na duljinu $2\,\pi\,r_0$. Prema tome on iznosi

$$L_u = \frac{\mu}{4\,\pi}\cdot 2\,\pi\,r_0 = \frac{1}{2}\,\mu\,r_0$$

Sada je ukupni induktivitet

$$L = L_u + L_v = \mu\,r_0\left[\ln\left(\frac{8\,r_0}{R}\right) - \frac{3}{2}\right] \tag{2.114}$$

Jakost polja u središtu prstena iznosi $i/(2\,r_0)$. Kad bi to polje bilo po cijelom presjeku $\pi\,r_0^2$ prstena, iznosio bi njegov induktivitet

$$L_0 = \frac{\pi}{2}\,\mu\,r_0$$

Stvarni induktivitet se može prema njemu određivati iz omjera

$$\frac{L}{L_0} = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{8\,r_0}{R}\right) - \frac{3}{2}\right]$$

On iznosi za nekoliko omjera r_0/R.

TABLICA 2.16.

r_0/R	50	100	200	500
L/L_0	2,9	3,3	3,7	4,3

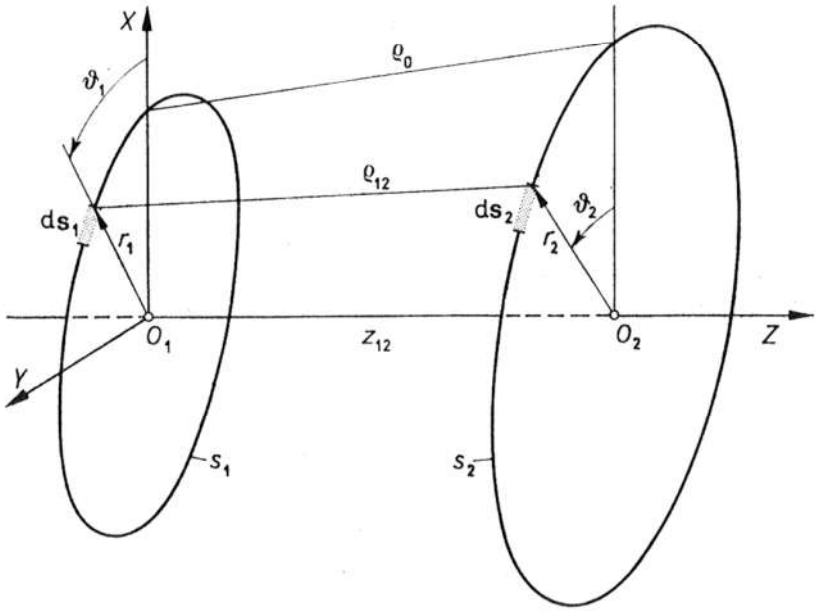
Umjesto jednog vodiča može biti načinjen namot sa N zavoja. Tako nastaje zavojnica prstenasta oblika. Ona zadržava kružni presjek, samo je u njemu smješteno N okruglih vodiča. Kružni presjek zavojnice ima nadalje promjer $2\,R$, koji je mnogo puta manji od polumjera zavojnice, tj. $2\,R \ll r_0$. Dvostruki konturni integral u induktivitetu ukazuje na kvadratnu ovisnost induktiviteta o broju zavoja.

Zato je

$$L = \mu r_0 \left[\ln\left(\frac{8 r_0}{R}\right) - \frac{3}{2}\right] N^2 \tag{2.115}$$

Neka je promjer zavojnice $2 r_0 = 1$ m, a promjer presjeka — $2 R = 10$ mm. U presjek stane $N = 7200$ zavoja okrugle žice promjera 0,1 mm, izolirane lakom. Induktivitet iznosi za $r_0/R = 100$ i permeabilnost $\mu = \mu_0$ $L = 0{,}4\,\pi \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 5{,}2 \cdot 51{,}8 \cdot 10^6 = 169$ henrija. Ako žicom protječe struja 20 mA, jakost polja u središtu zavojnice iznosi $H_0 = N\,i/(2\,r_0) = 144$ A/m. Jakost zemljinog magnetskog polja u Zagrebu iznosi 36 A/m. Jakost polja na površini presjeka zavojnice iznosi približno $H_1 = N\,i/(2\,\pi\,R) = 4580$ A/m. Takve su se zavojnice nekad iskorištavale kao »tangentne busole« u mjerenju jakosti električne struje.

PRIMJER 2.24. Zadane su **dvije kružne strujnice,** smještene kao na sl. 2.46. One su koaksijalne, ali su različitih promjera $2 r_1$, odnosno $2 r_2$. Njihove su osi Z, a središta su im razmak-



Sl. 2.46. Dvije koaksijalne, kružne strujnice. Njihove ravnine su međusobno paralelne i okomite na os Z.

nuta na udaljenost z_{12}. Polje dviju strujnica nastaje superpozicijom polja pojedinih strujnica. Ono nije interesantno u ovom primjeru, već samo *induktivitet među strujnicama.*

Međuinduktivitet je zadan dvostrukim konturnim integralom

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{s_1} \oint_{s_2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}_1\,\mathrm{d}\mathbf{s}_2}{\varrho_{12}}$$

Elementi luka na kružnici iznose $\mathrm{d}s_1 = r_1\,\mathrm{d}\vartheta_1$ i $\mathrm{d}s_2 = r_2\,\mathrm{d}\vartheta_2$, a kut među njima je $\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$. Oni su međusobno razmaknuti za z_{12}, tako da je

$$\varrho_{12}^2 = (r_2 \cos\vartheta_2 - r_1 \cos\vartheta_1)^2 + (r_2 \sin\vartheta_2 - r_2 \sin\vartheta_1)^2 + z_{12}^2$$

Kad se uredi, taj je odnos jednak

$$\varrho_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 + z_{12}^2 - 2\,r_1\,r_2 \cos\vartheta$$

Sad se integral svodi na oblik kao što je u prethodnom primjeru. Uz modul eliptičkih integrala

$$k^2 = \frac{4 r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 + z_{12}^2}$$

iznosi međuinduktivitet konačno

$$L_{12} = 2 \mu \frac{(r_1 r_2)^{1/2}}{k} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K(k) - E(k) \right] \tag{2.116}$$

Kao i prije, kad je modul k blizu jedinice, tj. $k'^2 = 1 - k^2 \ll 1$, upotrebljava se približni izraz za induktivitet

$$L_{12} = \mu \frac{(r_1 r_2)^{1/2}}{k} \left[\left(\ln \frac{4}{k'} \right) - 2 \right]$$

To je dovoljno točno čim je $k' < 0{,}1$. Komplementarni modul slijedi iz

$$k'^2 = \frac{(r_1 - r_2)^2 + z_{12}^2}{(r_1 + r_2)^2 + z_{12}^2} = \frac{\varrho_0^2}{4 r_1 r_2 + \varrho_0^2}$$

ϱ_0 je najmanja udaljenost između elemenata lukova strujnica. Uvjet za približni izraz $k' < 0{,}1$ sada postaje

$$\varrho_0 < 0{,}2 (r_1 r_2)^{1/2}, \qquad \varrho_0 \leqslant | r_1 - r_2 |$$

Neka su zadana dva prstenasta strujna kruga sastavljena od žice 4 mm promjera. Njihovi su promjeri $2 r_1 = 200$ mm i $2 r_2 = 220$ mm. Najmanja udaljenost lukova je $\varrho_0 = 20$ mm, što je unutar granice približnog izraza za induktivitet. Komplementarni modul iznosi $k' = 0{,}0953$. Međuinduktivitet iznosi približno za $\mu = \mu_0$

$$L_{12} = \mu_0 \cdot 0{,}21 (\ln 42{,}0 - 2) = 0{,}453 \ \mu\text{H}$$

Vlastiti induktiviteti L_{11} i L_{22} se računaju prema približnim izrazima za $R = 2$ mm

$$L_{11} = \mu_0 \cdot 0{,}1 (\ln 400 - 1{,}5) = 0{,}565 \ \mu\text{H}$$

$$L_{22} = \mu_0 \cdot 0{,}11 (\ln 440 - 1{,}5) = 0{,}635 \ \mu\text{H}$$

Faktor sprege iznosi iz

$$s^2 = \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}} = \frac{0{,}205}{0{,}565 \cdot 0{,}635} = 0{,}57, \qquad s = 75{,}5 \ \%$$

PRIMJER 2.25. Zadan je **strujni okrugli cilindar** prema sl. 2.47., promjera $2 r_0$, a duljine $2 c$. Plaštem cilindra teku struje u tangencijalnom smjeru, a linijska gustoća struje iznosi K. Ukupna struja plašta iznosi $i = 2 c K$. Ishodište cilindričkog koordinatnog sustava stavlja se u središte cilindra, a os Z pada u os cilindra. Polje strujnog cilindra nastaje superpozicijom polja elementarnih strujnih prstena, kojima teče struja $K \, \mathrm{d}\zeta$. Upotrebljavaju se jednadžbe polja kružne strujnice.

Vektorpotencijal ima samo tangencijalnu komponentu, a on slijedi prema primjeru za kružnu strujnicu iz diferencijala

$$\mathrm{d}A = \frac{\mu K \, \mathrm{d}\zeta}{2 \pi} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} k \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \beta - 1}{(1 - k^2 \sin^2 \beta)^{1/2}} \, \mathrm{d}\beta$$

gdje se modul dobiva iz izraza

$$k^2 = \frac{4 r_0 r}{(r_0 + r)^2 + (z - \zeta)^2}$$

Točka promatranja ima koordinate r, 0, z, a koordinate strujnog prstena su r_0, ζ. Ukupni potencijal slijedi iz

$$A = \int_{\zeta=-c}^{c} \mathrm{d}A$$

Najprije treba izvršiti integraciju po ζ, gdje valja uzeti u obzir da je modul k ovisan o koordinati ζ. Integracija vodi na elementarni integral oblika

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(a^2 + u^2)^{1/2}} = \ln\left[u - (a^2 + u^2)^{1/2}\right]$$

Tada je potencijal nakon prve integracije

$$A = -\frac{\mu K r_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\beta) \ln \frac{a_1 + (1 - k_1^2 \sin^2\beta)^{1/2}}{a_2 + (1 - k_2^2 \sin^2\beta)^{1/2}} \,\mathrm{d}\beta \tag{2.117}$$

Nove konstante iznose

$$a_1 = \frac{z + c}{[(z + c)^2 + (r_0 + r)^2]^{1/2}} = \cos\alpha_1$$

$$a_2 = \frac{z - c}{[(z - c)^2 + (r_0 + r)^2]^{1/2}} = \cos\alpha_2$$

$$k_1^2 = \frac{4 r_0 r}{(z + c)^2 + (r_0 + r)^2}$$

$$k_2^2 = \frac{4 r_0 r}{(z - c)^2 + (r_0 + r)^2}$$

Najprije se provodi parcijalna integracija, da bi se eliminirala funkcija ln. Tada se integral svodi na oblik

$$I = \frac{k^2}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(2\beta)}{(1 - k^2 \sin^2\beta)^{1/2}\,[a + (1 - k^2 \sin^2\beta)^{1/2}]} \,\mathrm{d}\beta$$

Taj integral sadrži u sebi i eliptički integral treće vrste. Njegovo je rješenje

$$I_{1,2} = a_{1,2}\left\{\frac{1 - n}{n}\left[\Pi(n, k_{1,2}) - K(k_{1,2})\right] - \frac{1}{k_{1,2}^2}\left[K(k_{1,2}) - E(k_{1,2})\right]\right\} + \frac{\pi}{4}\frac{r}{r_0}$$

Tu je $\Pi(n, k_{1,2})$ potpuni eliptički integral treće vrste modula $k_{1,2}$ i n koji je zadan sa

$$n = \frac{k^2}{1 - a^2} = \frac{4 r_0 r}{(r_0 + r)^2} < 1$$

a neovisan je o koordinati z. Potencijal se sastoji od dva pribrojnika

$$A = A_0 (I_2 - I_1) \tag{2.118}$$

$$A_0 = \frac{\mu K r_0}{\pi}$$

Indeksi 1,2 odnose se na konstante a_1, k_1 odnosno a_2, k_2.

Dobiveni izraz za potencijal dalje služi pri određivanju polja strujnog cilindra uz primjenu odnosa $\mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Izraz za potencijal je vrlo složen i nepregledan, a to bi bile i jakosti polja.

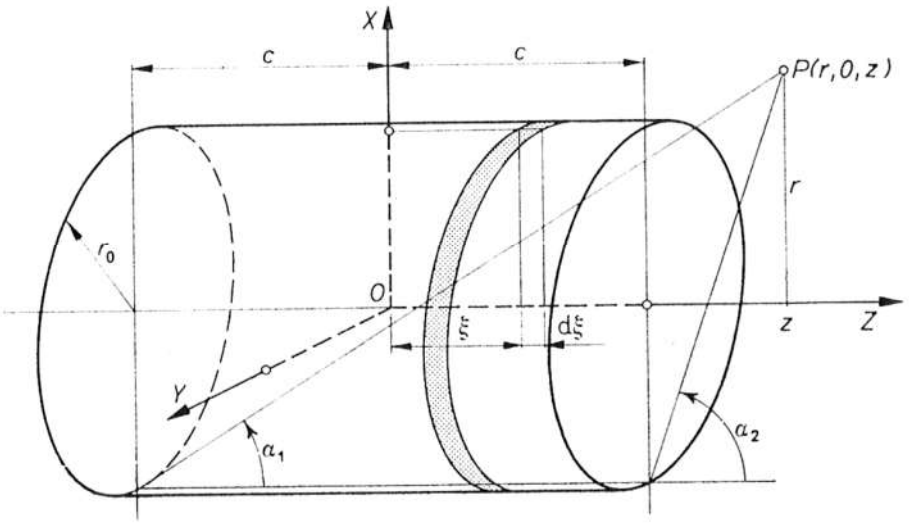
Jakost polja na osi cilindra lakše se određuje direktno, nego iz izraza za potencijal. Ona ima samo aksijalnu komponentu, tj. samo H_z. Ona je određena za kružnu strujnicu izrazom (2.113), koji se ovdje direktno primjenjuje, uzevši u obzir da je struja $K\,\mathrm{d}\zeta$. Prema tome se jakost polja na osi dobiva iz jednadžbe

$$\mathrm{d}H_{zo} = \frac{K}{2} \frac{r_0^2\,\mathrm{d}\zeta}{[r_0^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}$$

Kad se izvrši integracija u granicama $\zeta = -c$ i $\zeta = c$, dobiva se konačno jakost polja na osi cilindra.

$$H_{zo} = \frac{K}{2} \left\{ \frac{c + z}{[r_0^2 + (c + z)^2]^{1/2}} + \frac{c - z}{[r_0^2 + (c - z)^2]^{1/2}} \right\} \tag{2.119}$$

Točka promatranja $P(0, 0, z)$ nalazi se na osi Z na sl. 2.47., a njezini karakteristični kutovi su α_{10} i α_{20}. Ista jakost polja se može prikazati i izrazom $H_{zo} = (H_\infty/2)(\cos \alpha_{10} - \cos \alpha_{20})$. Jakost polja $H_\infty = K$ bila bi u središtu cilindra, $z = 0$, u vrlo dugog cilindra, tj. pri $c \gg r_0$.



Sl. 2.47. Strujni okrugli cilindar. Plaštem cilindra teku struje tangencijalno, a njihova linijska gustoća je konstantna po cijeloj duljini cilindra. Duljina cilindra je $2c$, a promjer je $2r_0$. Koordinatni sustav je stavljen u njegovo središte, a os Z se poklapa s njegovom osi.

Strujni okrugli cilindar se realizira dovoljno točno motanjem tanke, okrugle žice na okrugli cilindar. Na taj način nastaje **zavojnica** kojoj su zavoji gusto poredani. Ona se još naziva *solenoid.* Polje se ne mijenja mnogo u unutrašnjosti cilindra ako je cilindar dovoljno dug, tj. omjer c/r_0 je dovoljno velik. Koordinate točke promatranja zadovoljavaju odnos $r < r_0$ i $z < c$ u unutrašnjosti cilindra. Prostor promatranja treba svesti na prostor $|z| < r_0$, tj. na istostrani cilindar promjera $2r_0$ i dužine $2r_0$. Duljina strujnog cilindra $2c$ mnogo je veća od promjera cilindra $2r_0$. U tome slučaju smije se uzeti da je $k_1^2 \ll 1$ i $k_2^2 \ll 1$. Tada su odnosi među potpunim eliptičkim integralima približno

$$K(k) - E(k) = \frac{\pi}{4} k^2, \qquad k^2 \ll 1$$

$$\Pi(n, k) - K(k) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - n}} - 1 \right), \qquad k^2 \ll 1$$

Zato je potencijal približno

$$A = A_0 (I_2 - I_1) = A_0 \frac{\pi}{4} \frac{r}{r_0} (a_1 - a_2)$$

Budući da je u tome slučaju $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$, potencijal je približno

$$A = A_0 \frac{\pi}{2} \frac{r}{r_0} = \frac{1}{2} \mu K r, \quad |z| \ll c, \quad r_0 \ll c$$

Kako je aksijalna komponenta jakosti polja jednaka $H_z = 1/(\mu r) \cdot \partial(rA)/\partial r$, ona je ovdje jednaka K, tj. polje je homogeno. Polje je homogeno u kružnom, strujnom cilindru, u zoni gdje je zadovoljeno $z \ll c$ i $r_0 \ll c$. Ako bi modul k_2 smio doseći najviše iznos 0,15, tj. $k_2^2 < 0{,}0225$, morao bi biti zadovoljen odnos

$$\frac{c}{|z|} > \frac{\frac{c}{r_0}}{\frac{c}{r_0} - 13}, \quad k_2 < 0{,}15$$

Takva se točnost približnog rješenja postiže samo pri $c > 13\, r_0$. Što je duljina cilindra veća od trinaest njegovih promjera, to homogenost polja zauzima veći dio njegove duljine. Tako je, na primjer, pri $c/r_0 = 20$ polje homogeno u prostoru koji zauzima 35% duljine cilindra. Polje je homogeno uz točnost od 1%. To odgovara cilindru promjera 50 mm i duljine 1 m u prostoru $\pm$ 175 mm oko njegova središta.

Ukupni tok silnica strujnog cilindra može se ustanoviti čim je poznato mjesto gdje polje iščezava. To se mjesto nalazi na $r = r_0$ i $z = 0$, tj. u simetralnoj ravnini na njegovu plaštu. Tu su moduli k_1 i k_2 međusobno jednaki, a dobiju se iz

$$k_1^2 = k_2^2 = k^2 = \frac{4 r_0^2}{c^2 + 4 r_0^2}$$

Konstante a_1 i a_2 su također jednake, ali suprotna predznaka. One su

$$a_1 = a = -a_2 = \frac{c}{(c^2 + 4 r_0^2)^{1/2}}$$

Budući da je $n = 1$, to je na granici

$$\lim_{n \to 1} \{(1 - n) [\Pi (n, k) - K (k)]\} = 0$$

Konačno je potencijal

$$A = A_\infty \cdot \frac{4}{\pi} \frac{c}{2 r_0} \left[1 + \left(\frac{c}{2 r_0}\right)^2\right]^{1/2} [K (k) - E (k)]$$

$$\text{za } r = r_0, \; z = 0 \tag{2.120}$$

$$A_\infty = \frac{\pi}{2} A_0 = \frac{1}{2} \mu K r_0$$

Ukupni tok iznosi prema tome

$$\Phi = 2 \pi r_0 A$$

Kad bi cilindar bio beskonačno dug, pri konstantnoj linijskoj gustoći struje K, iznosio bi ukupni tok $\Phi_\infty = 2\pi r_0 \cdot A_\infty = \mu \pi r_0^2 K$. Iznosi ukupnog toka u odnosu na Φ_∞ su uneseni u tablici 2.17. za nekoliko omjernih veličina c/r_0.

TABLICA 2.17.

c/r_0	0,5	1	2	5	10
Φ/Φ_∞	0,58	0,76	0,905	0,985	0,993

Ulančeni tok strujnog cilindra određuje se kao u primjerima paralelnih okruglih vodiča i strujnih traka. Ravnina $z = \text{konst.}$ siječe strujni cilindar sa sl. 2.47. u kružnici polumjera r_0. Ta kružnica obuhvaća tok $\Phi = 2\pi r_0 A$ koji se mijenja u ovisnosti o z, a najveći je za $z = 0$. To je bio ukupni tok, koji je već izračunat. Ulančeni tok Ψ je prosječni obuhvaćeni tok Φ, tj. po definiciji

$$\Psi = \int_{-c}^{c} \Phi \frac{\mathrm{d}z}{2c} = \frac{\pi r_0}{c} \int_{-c}^{c} A \, \mathrm{d}z$$

Gotovi izraz (2.118) vektorpotencijala se ne upotrebljava, jer je složena integracija, već se upotrebljava integralni oblik (2.117). Treba izvršiti supstituciju konstanti a_1, a_2, k_1, k_2, te je ulančeni tok

$$\Psi = \frac{\mu K r_0^2}{c} \int_{-c}^{c} \int_{0}^{\pi/2} \cos(2\beta) \ln \left[\frac{z - c + ((z-c)^2 + 4r_0^2 - 4r_0^2 \sin^2\beta)^{1/2}}{z + c + ((z+c)^2 + 4r_0^2 - 4r_0^2 \sin^2\beta)^{1/2}} \right] \mathrm{d}\beta \, \mathrm{d}z$$

Najprije treba izvršiti integraciju po varijabli z, a tada po kutu β. Integracija vodi na potpune eliptičke integrale prve i druge vrste. Uvode se konstante

$$k^2 = \frac{r_0^2}{c^2 + r_0^2}, \qquad a^2 = \frac{c^2}{c^2 + r_0^2}$$

Konačno se ulančeni tok dobiva iz izraza

$$\Psi = \mu \pi r_0^2 C_\mathrm{L} K = \mu \frac{\pi r_0^2}{2c} C_\mathrm{L} \, i$$

$$C_\mathrm{L} = \frac{4}{3\pi} \frac{1}{a} \left[\frac{c^2}{r_0^2} K(k) + \left(1 - \frac{c^2}{r_0^2}\right) E(k) - k \right] \tag{2.121}$$

Konstanta C_L ovisi isključivo o razmjerima cilindra c/r_0. Ona je u granicama $0 < C_\mathrm{L} < 1$, ako se razmjer c/r_0 mijenja od nule do beskonačnosti. Ona iznosi za ekstremne razmjere c/r_0 približno

$$C_\mathrm{L} = \frac{2}{\pi} \frac{c}{r_0} \ln\left(\frac{2{,}4\, r_0}{c}\right) \qquad \text{za } \frac{c}{r_0} \leqslant 0{,}1$$

$$C_\mathrm{L} = 1 - \frac{4}{3\pi} \frac{r_0}{c} \qquad \text{za } \frac{c}{r_0} \geqslant 10$$

Neposredno slijedi induktivitet strujnog cilindra

$$L = \frac{\Psi}{i} = \mu \frac{\pi r_0^2}{2c} C_\mathrm{L} \tag{2.122}$$

Strujni cilindar se realizira kao zavojnica sa N zavoja, gusto poredanih, izvedenih od tanke okrugle žice kojom teče struja i. Konstanta C_L ostaje ista prema (2.121), samo treba biti zadržan isti razmjer c/r_0. Ona uzima u obzir raspored polja u prostoru, a ono je ovisno samo o linijskoj gustoći struje $K = N\,i/(2\,c)$ koja je konstantna duž cilindra. Vektorpotencijal je direktno razmjeran iznosu $A_0 = \mu\,K\,r_0/\pi$ prema (2.118). Ako se uvede jakost struje i kao varijabla, tada je vektorpotencijal razmjeran broju zavoja N. Ulančeni tok je po definiciji prosječni magnetski tok strujnog cilindra. Zavoje zavojnice — solenoida treba gledati kao kružne petlje kojih sada ima N. Zato je ulančeni tok zavojnice N-struki prosječni magnetski tok strujnog cilindra. Prema tome *ulančeni tok zavojnice — solenoida ovisan je o kvadratu broja zavoja*, ako se izražava s jakošću struje koja teče zavojima. Dakle, induktivitet zavojnice — solenoida iznosi

$$L = \mu\,\frac{\pi\,r_0^2}{2\,c}\,C_L\,N^2 \tag{2.123}$$

Treba imati u vidu da su zavoji gusto poredani, od vrlo tanke žice. Zavojnica treba da je što sličnija strujnom cilindru. Nekoliko vrijednosti konstante C_L navedeno je u tablici 2.18.

TABLICA 2.18.

c/r_0	0,5	1	2	5	10
C_L	0,52	0,69	0,82	0,92	0,96

Katkad se konstanta C_L zove i *Nagaokin faktor.*

Neka je zavojnica namotana žicom promjera 1 mm, lakom izolirana, na cilindru promjera 120 mm, u duljini 630 mm. Zavoji su jedan do drugoga, a ima ih 570. Razmjer cilindra je $c/r_0 = 5{,}25$, čemu odgovara faktor $C_L = 0{,}92$. Induktivitet iznosi pri $\mu = \mu_0$

$$L = \mu_0 \cdot \frac{0{,}0113}{0{,}63} \cdot 0{,}92 \cdot 570^2 = 6{,}7\ \text{m H}$$

Zavojima teče struja od 5 A, te je linijska gustoća struje $K = 570 \cdot 5/0{,}63 = 4530$ A/m. Jakost polja u središtu cilindra iznosi iz (2.119) u $z = 0$

$$H_0 = K\,a = 4530 \cdot 0{,}982 = 4440\ \text{A/m}$$

Jakost polja na izlazu iz cilindra, u $z = \pm\,c$

$$H_1 = K \cdot \frac{c}{(r_0^2 + 4\,c^2)^{1/2}} = 4530 \cdot \frac{5{,}25}{10{,}57} = 2250\ \text{A/m}$$

PRIMJER 2.26. Zadane su dvije **pravokutne petlje.** One su smještene kao na sl. 2.48., a sličnih su razmjera, tj. $a' - a'' = b' - b''$. Njihovo središte je na osi Z pravokutnog koordinatnog sustava, a leže u paralelnim ravninama na razmaku z_0. Po dvije stranice su paralelne s osi X, odnosno osi Y. Pravokutna petlja s' ima stranice $2\,a'$ i $2\,b'$, a druga petlja s'' je sa stranicama $2\,a''$ i $2\,b''$. Treba odrediti međuinduktivitet petlji L.

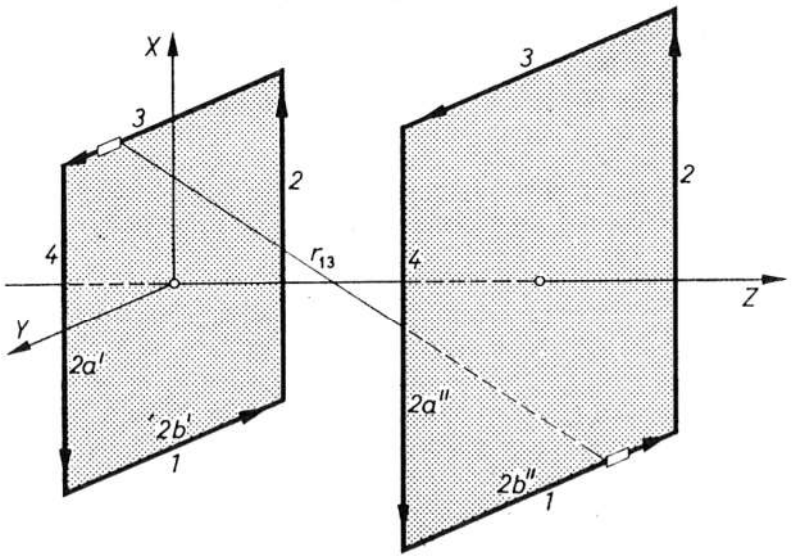
Međuinduktivitet se određuje neposredno primjenom izraza

$$L = \frac{\mu}{4\,\pi} \oint_{s'} \oint_{s''} \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}'\,\mathrm{d}\mathbf{s}''}{r}$$

Doprinos induktiviteta daju samo međusobno paralelne stranice. Svaka stranica petlje s' ima prema sebi jednu paralelnu i jednu antiparalelnu stranicu petlje s''. Prema tome se dvostruki konturni

integral pretvara u osam dvostrukih linijskih integrala. Budući da su po dva integrala međusobno jednaka, preostaju četiri integrala, te se induktivitet smije prikazati sumom

$$L = 2\,L_{11} - 2\,L_{13} + 2\,L_{22} - 2\,L_{24}$$



Sl. 2.48. Dvije pravokutne, koaksijalne strujnice. Njihove su ravnine međusobno paralelne, a središta su im na osi Z.

Pojedini dioni induktiviteti iznose

$$L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-b'}^{b'} \int_{-b''}^{b''} \frac{\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y''}{((y'-y'')^2 + (a'-a'')^2 + z_0^2)^{1/2}}$$

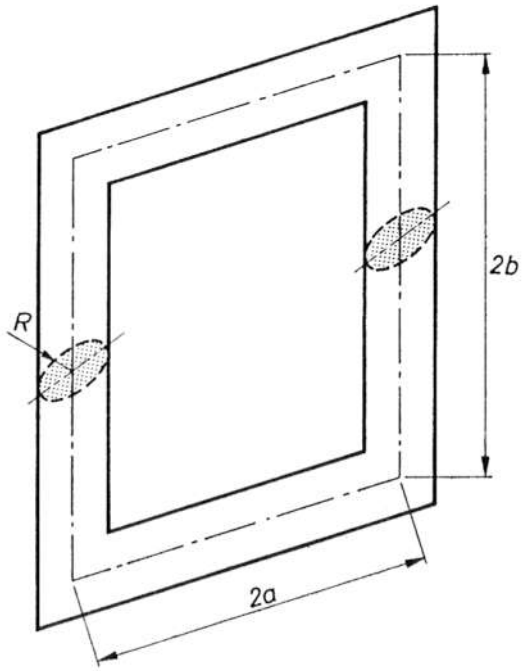
$$L_{13} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-b'}^{b'} \int_{-b''}^{b''} \frac{\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y''}{((y'-y'')^2 + (a'+a'')^2 + z_0^2)^{1/2}}$$

$$L_{22} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-a'}^{a'} \int_{-a''}^{a''} \frac{\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''}{((x'-x'')^2 + (b'-b'')^2 + z_0^2)^{1/2}}$$

$$L_{24} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-a'}^{a'} \int_{-a''}^{a''} \frac{\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''}{((x'-x'')^2 + (b'+b'')^2 + z_0^2)^{1/2}}$$

Integracija je jednostavna, ali opsežna, te je naveden samo jedan dioni induktivitet

$$L_{13} = \frac{\mu}{4\pi}\left[(b' + b'')\ln\left(\frac{d_{13} + (b' + b'')}{d_{13} - (b' + b'')}\right) + (b' - b'')\ln\left(\frac{d_{14} + (b' - b'')}{d_{14} - (b' - b'')}\right) + 2(d_{14} - d_{13})\right]$$



Sl. 2.49. Pravokutni prsten kružnog presjeka protjecan strujom. Promjer presjeka $2R$ je mnogo manji od stranica $2a$ i $2b$. Određuje se njegov induktivitet.

Ovdje su d_{13} i d_{14} udaljenosti vrha 1 na petlji s' do vrhova 3 i 4 na petlji s'', prema sl. 2.48. Postoje još dvije takve udaljenosti, d_{11} i d_{12}, koje su različite. Međusobne udaljenosti ostalih vrhova su jednake ovima.

Posebno je interesantno kad su *obje petlje u istoj ravnini*, tj. $z_0 = 0$. Neka je tada $b'' - b' = a'' - a' = R$, a osim toga su $a'' + a' = 2a - R$, $b'' + b' = 2b - R$. Dalje su $a \gg R$ i $b \gg R$. Na taj se način dobija približni iznos induktiviteta, koji sada nosi oznaku L_v

$$L_v = \frac{\mu}{\pi}\left[2a\ln\left(\frac{8ab}{R(d + 2a)}\right) + 2b\ln\left(\frac{8ab}{R(d + 2b)}\right) - 2(2a + 2b - d)\right]$$

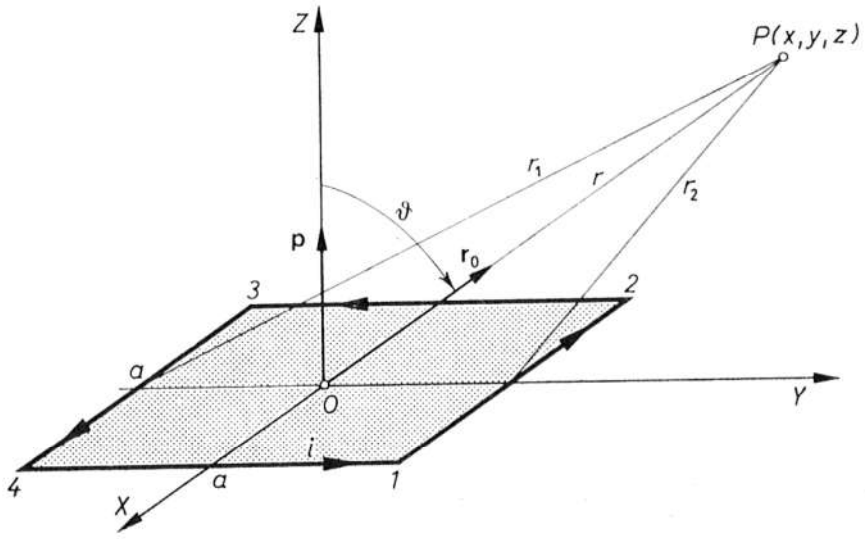
Greška ne prelazi 1%, ako su $a > 40R$ i $b > 40R$. To je vanjski induktivitet strujnog kruga prema sl. 2.49. Vodič kružnog presjeka oblikuje pravokutnik stranica $2a$ i $2b$. Polumjer vodiča je R, a dijagonala pravokutnika je d. Neka su stranice pravokutnika 400 mm i 600 mm, a vodič je promjera 10 mm. Dijagonala pravokutnika iznosi 722 m. Njegov vanjski induktivitet je 1,49 μH, pri $\mu = \mu_0$.

Zavojnica može biti pravokutna oblika sa N namotanih zavoja. Induktivitet se povećava N^2 puta prema iznosu za jedan vodič. R je polumjer kružnog presjeka, što ga zauzima N zavoja.

Unutarnji induktivitet se obračunava kao kod ravnog vodiča, što je dovoljno točno ako je vodič dovoljno tanak.

2.14. MAGNETSKI DIPOL

Strujna petlja, vrlo malih dimenzija prema udaljenosti točke promatranja, naziva se magnetski dipol. Pri tome nije važan oblik petlje, dovoljno je da je malena. U tehnici nema onakvo značenje kao u fizici. Teorija magnetskog dipola pomaže u razjašnjavanju utjecaja sredstva na polje. To je već istaknuto u poglavlju 1.10. Magnetski dipol bi trebalo formirati kao električni, ali to nije moguće, jer ne postoje magnetski naboji. Usvoji li se veličina dipolnog momenta, karakteristična za dipol, polje se jednako tretira za obje vrste dipola, samo se za magnetski upotrebljava permeabilnost umjesto dielektričnosti. Ta je jednakost već iskorištena u razmatranjima kugle u homogenu polju.



Sl. 2.50. Magnetski dipol. Predstavljen je kao kvadratna strujnica stranice a smještena u ravninu X - Y.

Ovdje bi trebalo prikazati magnetski dipol, formiran od strujne petlje. Svaka strujna petlja, bilo kojeg oblika, može se rastaviti na *elementarne kvadratične* strujne petlje iste struje. Na taj se način svodi problem na promatranje kvadratične strujne petlje. Stranica kvadrata mnogo je puta manja od udaljenosti točke promatranja. Na sl. 2.50. kvadrat je postavljen u ishodište koordinatnog sustava, u ravninu X - Y. Stranice 1 - 2 i 3 - 4 su paralelne s osi X, a druge dvije — s osi Y. Jedinični radijusvektor $\mathbf{r}_0$ gleda od ishodišta O prema točki promatranja P(x, y, z). Udaljenost točke P od ishodišta O iznosi r i ona je mnogo puta veća od stranice kvadrata a, tj. $r \gg a$.

Vektorpotencijal se određuje prema jednadžbi

$$\mathbf{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{ds}}{r}$$

Kako se integracija provodi po stranicama kvadrata, vektorpotencijal će imati samo X i Y komponentu, dok je $A_z = 0$. Stranice 1 - 2 i 3 - 4 doprinose komponenti

A_x, a stranice 2 - 3 i 4 - 1 mjerodavne su za komponentu A_y. Zbog $r_1 \gg a$ približno je $r_{13} = r_{14} = r_1$, a isto tako $r_{22} = r_{21} = r_2$. Prema tome je X komponenta

$$A_x = \frac{\mu i}{4\pi}\left(\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2}\right) = \frac{\mu i a}{4\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Tu je približno $r_1 r_2 = r^2$. Budući da je $r_1^2 = x^2 + (y + a/2)^2 + z^2$ i $r_2^2 = x^2 + (y - a/2)^2 + z^2$, iznosi $r_1^2 - r_2^2 = 2ay$. Kako je približno $r_1 + r_2 = 2r$, konačno je $r_1 - r_2 = ay/r$, čime je X komponenta vektorpotencijala

$$A_x = -\frac{\mu i a^2}{4\pi} \cdot \frac{y}{r^3}$$

Sličnim postupkom slijedi Y komponenta vektorpotencijala

$$A_y = \frac{\mu i a^2}{4\pi} \cdot \frac{x}{r^3}$$

Jedinični vektor normale **n** na kvadrat gleda u smjeru osi Z, te obilazak struje kvadrata zadovoljava pravilo desnog vijka. *Dipolni moment* kvadratne strujne petlje se definira kao

$$\mathbf{p} = \mu i a^2 \mathbf{n} \tag{2.125}$$

a kao vektor ima smjer normale kvadrata. U ovom slučaju dipolni moment ima samo Z komponentu, tj. $p_x = p_y = 0$. Budući da je $\mathbf{p} \times \mathbf{r} = -(p_z y)\,\mathbf{x}_0 + (p_z x)\,\mathbf{y}_0$, konačno je vektorpotencijal kvadratne strujne petlje

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}_0}{4\pi r^2} \tag{2.126}$$

Takav vektorpotencijal dovodi na jakost polja

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\mu r^3}\left[3(\mathbf{p}\,\mathbf{r}_0)\,\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}\right] \tag{2.127}$$

Ta jednadžba je ekvivalentna jednadžbi za jakost polja električnog dipola, samo se treba dielektričnost zamijeniti permeabilnošću. Da bi ekvivalencija bila zadovoljena, moraju biti oba dipolna momenta ekvivalentno definirana, tj. kao produkt naboja i razmaka među njima. Magnetski naboj, iako ne postoji, već je primjenjivan u teoriji, da se dođe do definicije osnovnih veličina polja. Stvarni magnetski dipol mora imati dipolni moment definiran prema (2.125). Ta se jednadžba poopćuje za bilo koji oblik strujne petlje. Treba imati u vidu da je ploha bilo kakve strujne petlje bila rastavljena na elementarne kvadrate. Dipolni moment bilo kakve strujne petlje jednak je naprosto sumi dipolnih momenata elementarnih kvadrata, tj.

$$\mathbf{p} = \mu i S \mathbf{n} \tag{2.128}$$

gdje je S površina petlje, a **n** jedinični vektor normale.

Treba napomenuti da ima autora koji definiraju dipolni moment nešto drukčije. Oni u (2.128) ispuštaju permeabilnost. U tome slučaju se gubi ekvivalencija u definiciji osnovnih veličina polja, a prema tome i prednost u prikazivanju teorije polja.

Kao što je poznato, otvoreni magneti imaju polove, sjeverni i južni ili pozitivni i negativni. Smatra se da su oni »sjedište« točkastog magnetskog naboja, čiji je iznos jednak upravo toku magnetske indukcije, a koji ulazi ili izlazi iz pola. Sjedište pola ne mora biti na površini magneta, već u njegovoj unutarnjosti. *Produkt između toka magneta i razmaka među polovima je dipolni moment magneta,* ako se magnet promatra kao dipol. Dipolni moment se može odrediti i mjeriti a da se ne mjeri magnetski tok ili razmak među polovima. To se svojstvo može iskoristiti u analizi elektromagneta ili permanentnih magneta koji imaju otvorenu jezgru.

Tipični elektromagnet je solenoid. Kad je on dovoljno dug, polje je u njemu približno homogeno. Svaki zavoj za sebe je jedna strujna petlja površine S, te je svaki zavoj jedan dipol dipolnog momenta ($\mu i S$). Ako solenoid ima N zavoja, ukupni je dipolni moment ($\mu i S N$), koji djeluje u smjeru osi solenoida. Solenoid kao magnet ima polove na svojim krajevima na razmaku a, koji je ujedno i dužina solenoida. Magnetski tok solenoida iznosi $\Phi = \mu H S = \mu S N i/a$, ili njegov dipolni moment $\Phi a = \mu i S N$, koji se iznos dobiva i zbrajanjem dipolnih momenata pojedinih zavoja.

2.15. TOČKASTI NABOJ U POLUPROSTORU

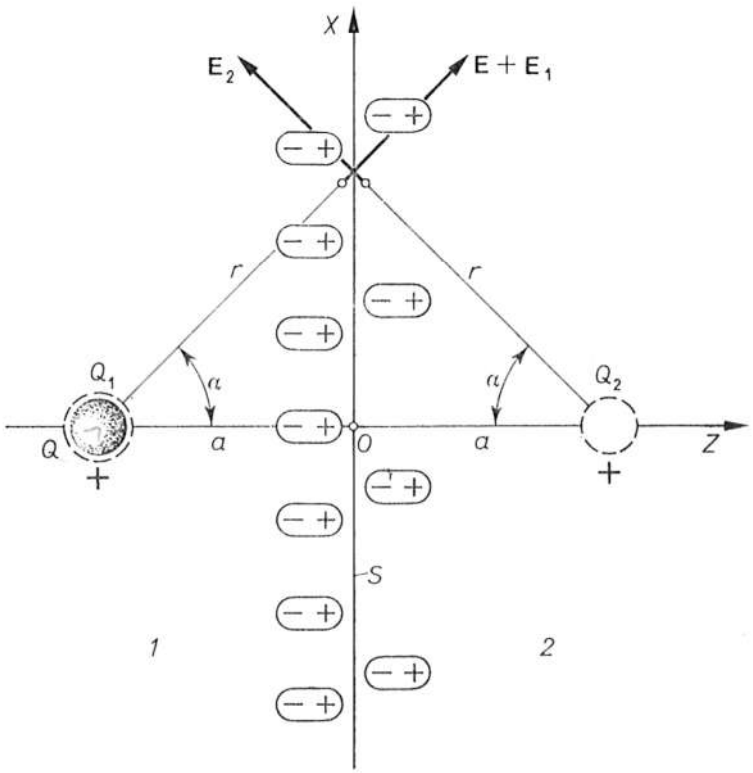
Ravnina S dijeli prostor na poluprostore. Jedan poluprostor je ispunjen sredstvom 1 koje ima dielektričnost ε_1, permeabilnost μ_1 i vodljivost $\varkappa_1$. Drugi poluprostor je ispunjen sredstvom 2 koje ima konstante ε_2, μ_2 i $\varkappa_2$. U sredstvu 1 smješten je točkasti naboj Q na odstojanju a od granične ravnine, prema sl. 2.51. Neka je Q pozitivan, a sredstva 1 i 2 su dielektrici.

Dielektrici 1 i 2 se polariziraju pod utjecajem zadanog naboja Q. Polarizacija se manifestira na graničnoj plohi kao plošna gustoća vezanog naboja. Na površini sredstva 1 plošna je gustoća σ_1 pozitivna, ako je Q pozitivan. Na površini sredstva 2 je druga gustoća σ_2 suprotna predznaka, tj. u konkretnom slučaju negativna. Gustoće σ_1 i σ_2 su uvijek međusobno suprotna predznaka. Ukupna gustoća $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)$ ima predznak ovisan o odnosu dielektričnosti $(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$. Što je veća dielektričnost, to je veća plošna gustoća vezanog naboja. Da se zadrži pozitivan predznak od Q, treba da bude $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Tada je ukupna gustoća σ na graničnoj ravnini pozitivna.

Kako je sad zadatak raščlanjen, realno postoji još plošni naboj σ na graničnoj ravnini uz zadani točkasti naboj Q. Najjednostavniji je postupak da se plošni vezani naboj zamišlja odslikanim u jednu točku, kao točkasti naboj. Kad se promatra polje u sredstvu 1, odslikavanje se izvrši u točkasti naboj Q_2 koji je na odstojanju a od granične ravnine u sredstvu 2. Kad se promatra polje u sredstvu 2, odslikavanje se izvrši u točku zadanog naboja Q u iznosu Q_1. Uvjeti na granici moraju pokazati da li je takav postupak dozvoljen i koliki su odslikani naboji Q_1 i Q_2.

Prema tome pravilo glasi

Polje u sredstvu	Mjerodavni naboji
1	Q i Q_2
2	$Q + Q_1$



Sl. 2.51. Točkasti naboj Q ispred poluprostora ispunjenog drukčijim sredstvom. Naboj se nalazi u sredstvu 1. Na granici se pojavi vezani naboj zbog polarizacije dielektrika. Njegovo se djelovanje uzima u obzir odslikanim točkastim nabojima Q_1 i Q_2.

Granični su uvjeti da su tangencijalne komponente jakosti polja međusobno jednake, a i normalne komponente indukcije su također međusobno jednake. Jednadžbama izraženo to glasi, uz oznake na sl. 2.51.

$$\frac{Q \sin \alpha}{4 \pi \varepsilon_1 r^2} + \frac{Q_2 \sin \alpha}{4 \pi \varepsilon_1 r^2} = \frac{Q + Q_1}{4 \pi \varepsilon_2 r^2} \sin \alpha$$

$$\frac{Q \cos \alpha}{4 \pi r^2} - \frac{Q_2 \cos \alpha}{4 \pi r^2} = \frac{Q + Q_1}{4 \pi r^2} \cos \alpha$$

Uređene jednadžbe glase

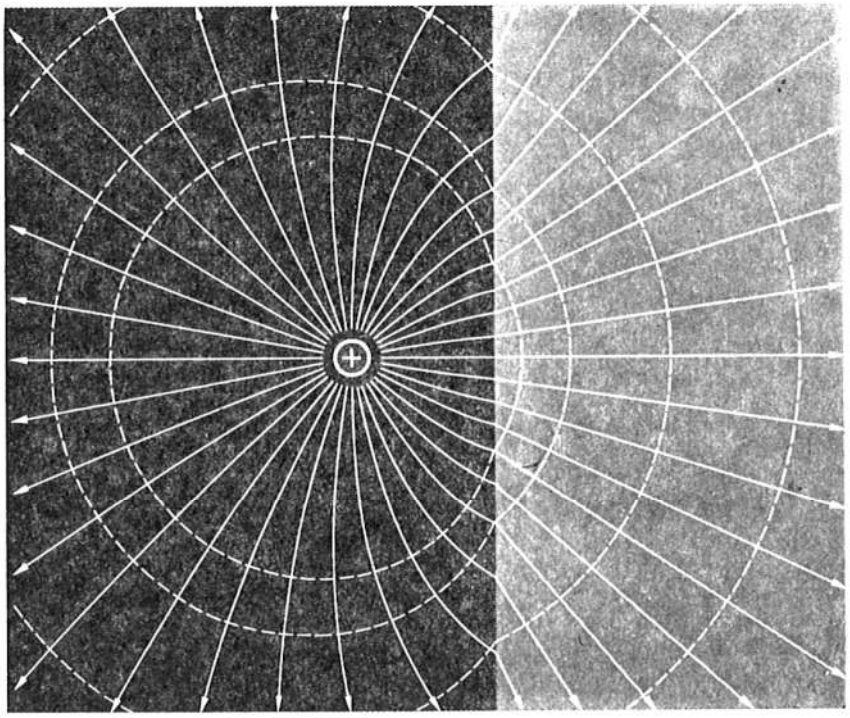
$$\frac{Q + Q_2}{\varepsilon_1} = \frac{Q + Q_1}{\varepsilon_2}$$

$$- Q_2 = Q_1$$

Konačno su odslikani naboji

$$Q_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q = - Q_1 \tag{1.129}$$

Iznos odslikanog plošnog naboja mora biti isti, samo je suprotna predznaka. Suprotan predznak slijedi iz same prirode djelovanja polarizacije. Na sl. 2.52. prikazano je polje za slučaj $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 3$. Za sredstvo 1 mjerodavna su dva točkasta naboja, Q i $Q_2 = -Q/2$, a za sredstvo 2 samo jedan točkasti naboj, $Q + Q_1 = (3/2)\,Q$. Zato su u 2 silnice radijalne.



Sl. 2.52. Silnice i ekvipotencijalne linije točkastog naboja ispred dielektričnog poluprostora. Odnos dielektričnosti sredstva 1 i 2 je $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 3$. Zato je $Q_2 = -Q/2$ i $Q_1 = Q/2$.

Potencijal ne čini skok na prolazu iz jednog sredstva u drugo. Međutim, ekvipotencijalne plohe ne prolaze kontinuirano kroz graničnu ravninu. One su u sredstvu 2 koncentrične kugle, a u sredstvu 1 to nisu.

I jednadžba (2.129) pokazuje da je Q_2 istog predznaka kao i Q, ako je $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Odnos $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ je mjerodavan kakvi su predznaci odslikanih naboja. Vodič se u statičkom polju ponaša kao dielektrik beskonačne dielektričnosti. Ako je Q ispred vodljive ravnine, dielektričnost ε_2 mora biti beskonačna. Tada je $Q_2 = -Q$, a u vodiču nema polja. Pored toga iznosi $Q_1 = Q$, tj. za polje u sredstvu 2 mjerodavan je naboj $Q + Q_1 = 2\,Q$. To odgovara u potpunosti definiciji vektora **D**. Ako se izvrši plošni integral vektora **D** po cijeloj graničnoj ravnini u sredstvu 2, dobiva se iznos Q, stvarni naboj obuhvaćen integracionom plohom.

Ako je $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$, izlazi da je $Q_2 \approx Q$. Odslikani naboj je približno jednak zadanom naboju. Za sredstvo 2 mjerodavni naboj praktički iščezava.

2.15.1. Točkasti izvor struje u poluprostoru

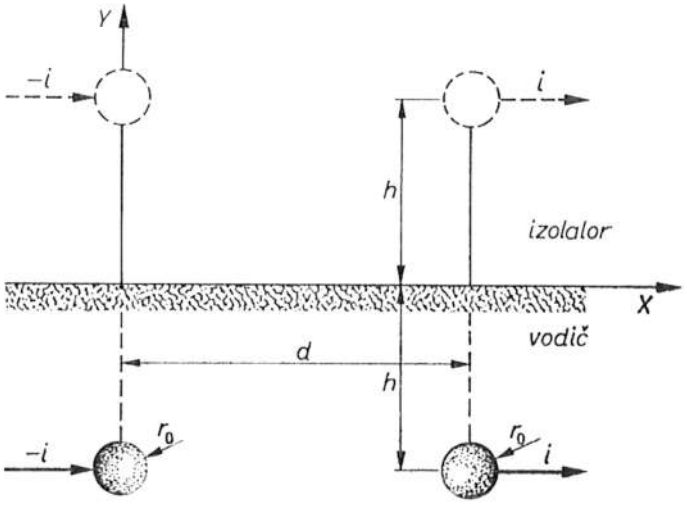
Ovo razmatranje pomaže da se riješe neke zadaće na jednostavniji način. Tako je u pitanju *strujno polje* točkastog izvora struje i, koji je smješten u sredstvu 1, vodljivosti $\varkappa_1$, a sredstvo 2 ima vodljivost $\varkappa_2$. Strujno polje se određuje u sredstvu 1 sa dva točkasta izvora struje i to izvor struje i i struje

$$i_2 = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}\, i \tag{2.130}$$

U sredstvu 2 mjerodavan je samo jedan točkasti izvor struje: $i + i_1 = i - i_2$. Slike izvora su smještene kao što su na sl. 2.51. smješteni naboji.

Interesantan je slučaj kad je sredstvo 2 izolator, tj. $\varkappa_2 = 0$. Tada je $i_2 = i$. U sredstvu 2 nema strujanja i tamo je $i - i_2 = 0$. Strujno polje točkastog izvora struje u vodljivu poluprostoru dobiva se odslikavanjem na graničnoj ravnini u poluprostor ispunjen izolatorom u istom iznosu i predznaku, na isto odstojanje.

PRIMJER 2.27. U vodljivu poluprostoru vodljivosti $\varkappa$ nalaze se **dvije** jednake **kugline elektrode** polumjera r_0. Njihova su središta na odstojanju h od granične ravnine, a međusobno su razmaknuta za d. Jednoj se kugli struja i dovodi, a od druge isto tolika struja odvodi. Razmještaj



Sl. 2.53. Dvije kugle kao uzemljenje. Kugle su jednakog promjera $2\,r_0$, a nalaze se na istoj dubini h ispod površine tla. Promjer kugli je mnogo manji od dubine h i razmaka d.

je u odnosu na polumjer kugli takav, da je $d \gg r_0$ i $2\,h \gg r_0$. U tome slučaju se kugle i njihove slike mogu promatrati kao točkasti izvori smješteni u središte kugli. Pri rješenju strujnog polja kugle se odslikaju kao točkasti izvori na stranu drugog poluprostora, kao što je to učinjeno na sl. 2.53.

Potencijal na površini kugle 1 iznosi

$$\varphi_{10} = \frac{1}{4\,\pi\,\varkappa}\left[-\frac{i}{r_0} - \frac{i}{2\,h} + \frac{i}{d} + \frac{i}{(d^2 + 4\,h^2)^{1/2}}\right]$$

Tu je svuda r_0 zanemaren prema 2 h, odnosno d. Taj je potencijal konačno

$$\varphi_{10} = -\frac{i}{4\pi\varkappa r_0}\left[1 + \frac{r_0}{2h} - \frac{r_0}{d} - \frac{r_0}{(d^2 + 4h^2)^{1/2}}\right]$$

Potencijal druge kugle je istog iznosa samo suprotna predznaka, te je razlika potencijala

$$u_0 = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \frac{ic}{2\pi\varkappa r_0}$$

Otpor između kugli iznosi

$$R = \frac{u_0}{i} = \frac{c}{2\pi\varkappa r_0}$$

Konkretno, neka su kugle polumjera 250 mm na dubini $h = 1{,}5$ m i razmaknute za $d = 2$ m, u sredstvu vodljivosti $\varkappa = 0{,}1$ S/m. Otpor među njima iznosi $R = 5{,}65$ oma.

Jakost polja na graničnoj ravnini slijedi iz

$$E_x = -\frac{i}{2\pi\varkappa}\left[\frac{x}{(h^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{d - x}{[h^2 + (d - x)^2]^{3/2}}\right]$$

Kad bi jakost struje bila 1000 A, bila bi jakost polja na površini 544 V/m na sredini udaljenosti između kugli, tj. za $x = d/2$, $y = 0$.

2.15.2. Magnetsko djelovanje u poluprostoru

U magnetskom polju magnetski se naboj jednako odslikava kao i električni, samo se mjesto dielektričnosti upotrijebi permeabilnost. Međutim, magnetski naboji ne postoje. Zato se magnetski dipoli mogu predstaviti i nabojem i strujom. Ako je $\mu_1 > \mu_2$, odslikani naboj u sredstvu 2 ima isti predznak kao zadani naboj. To znači da se *dipol odslikava* u sredstvo 2 *s protivnim smjerom*. Njegov se iznos dipolnog momenta dobiva iz izraza

$$p_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} p = -p_1 \tag{2.131}$$

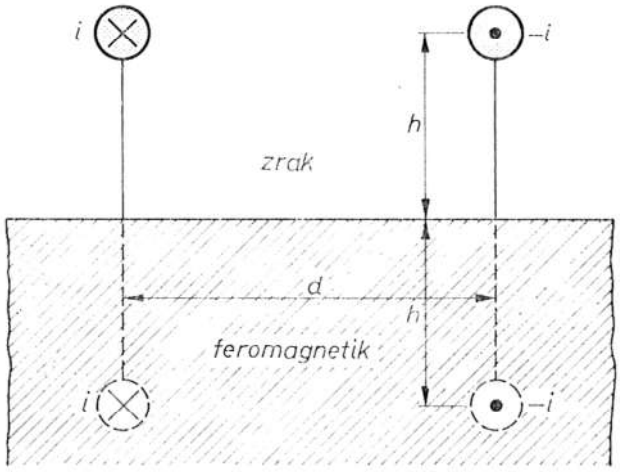
Treba zamisliti strujnu petlju. Ona se preslikava s istim dimenzijama, jer se ono vrši na isto odstojanje. Dakle, u slučaju $\mu_1 > \mu_2$ *strujna se petlja mora odslikati* u drugo sredstvo *s protivnim smjerom obilaženja.*

Dva ravna, paralelna vodiča protjecana strujom mogu se promatrati kao dipol. Neka su smješteni paralelno s graničnom ravninom. Oni se odslikavaju u drugo sredstvo s protivnim smjerom obilaženja, ako je $\mu_1 > \mu_2$. Ali to znači da je odslikana linijska struja

$$i_2 = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} i = -i_1 \tag{2.132}$$

Neka je $\mu_2 \gg \mu_1$. Odslikana struja je sada približno $i_2 = i$. Struja se odslikava s istim smjerom i istim iznosom. Primjerice, tak se odslikava vodič protjecan strujom u uzduhu na feromagnetski poluprosto.ro

PRIMJER 2.28. Na sl. 2.54. je skiciran **dvožični vod** koji prolazi **paralelno s feromagnetskim poluprostorom.** On se odslikava u cjelini istim smjerom obilaženja na isto odstojanje.



Sl. 2.54. Presjek dvožičnog voda ispred feromagnetskog poluprostora. Vodičima voda teku jednake struje, ali suprotna smjera. Feromagnetik ima permeabilnost mnogo veću od uzduha. Određuje se induktivitet takvog voda.

Tok između vodiča bit će povećan za istu jakost struje, jer sad jedan dio proizvodi slika strujne petlje. To, dalje, znači da će induktivitet voda po jedinici duljine biti povećan. Tok između vodiča po jedinici duljine voda iznosi

$$\Phi = \mu_1 \frac{i}{2\pi} \int_{r_0}^{d-r_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \mathrm{d}x + \mu_1 \frac{i}{2\pi} \int_{r_0}^{d-r_0} \left(\frac{x}{4h^2 + x^2} + \frac{d-x}{4h^2 + (d-x)^2}\right) \mathrm{d}x$$

Poslije izvršene integracije, uz zanemarenje r_0 prema d i prema $2h$, dobiva se

$$\Phi = \frac{\mu_1 i}{\pi} \ln\left(\frac{4h^2 d^2}{r_0^2 (d^2 + 4h^2)}\right)$$

Iz toga slijedi induktivitet $L = \Phi/i$. Induktivitet dvožičnog voda bez utjecaja feromagnetika iznosi

$$L_0 = \frac{\mu_1}{\pi} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$

Prema njemu je induktivitet pod utjecajem feromagnetika

$$\frac{L}{L_0} = 2 - \frac{\ln\left(1 + \frac{d^2}{4h^2}\right)}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}$$

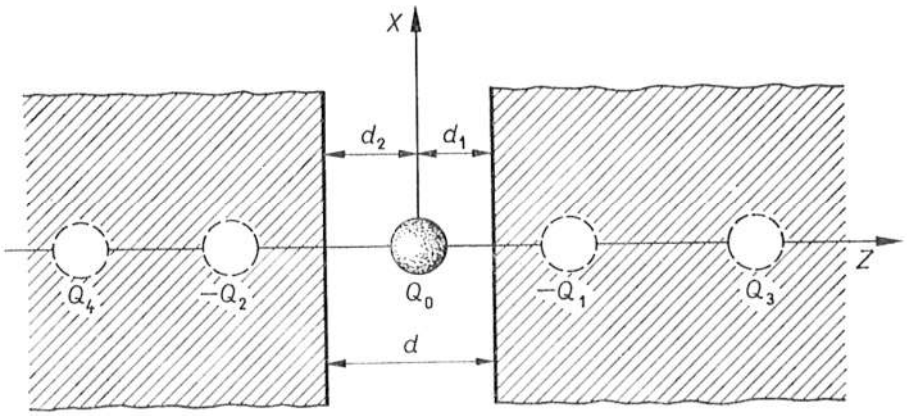
Neka su u konkretnom slučaju $r_0 = 5$ mm, $d = 100$ mm $= 2h$. Tada je $L/L_0 = 2 - 0{,}23 = 1{,}77$. Induktivitet voda se poveća za 77%, kad se k njemu približi feromagnetski poluprostor na odsto-

janje od 50 mm. Da se vod stavi upravo na feromagnetsku ravninu, induktivitet bi mu porastao na dvostruk iznos. To se može i tako zamisliti da feromagnetik ne predstavlja nikakav otpor za tok. Kad je vod upravo na njemu, magnetski otpor se smanji na polovicu. To znači za istu struju dvostruki magnetski tok.

Još može biti interesantno kad se naboj nađe upravo u samoj graničnoj ravnini. I dalje vrijede ista pravila odslikavanja, samo se naboj odslikava u samog sebe. Istina, tu ne bi trebalo odslikavati, već se promatra svaka polovica prostora za sebe za zadani naboj, a bez odslikavanja. Da ne nastane pomutnja, bolje je primijeniti odslikavanje.

2.16. UZAJAMNO ODSLIKAVANJE

Dosad je prikazano jednostavno odslikavanje naboja na ravnini, kugli, odnosno kružnom cilindru. Uzajamno ili višestruko odslikavanje nastaje kada se slika naboja iskorištava za daljnje odslikavanje. Takav je slučaj naboja između dvije paralelne, vodljive ravnine, kao na sl. 2.55. Točkasti naboj Q_0 nalazi se u zračnom rasporu između dvije vodljive ravnine. Ravnine su na potencijalu $\varphi = 0$. Točkasti naboj



Sl. 2.55. Točkasti naboj između dva vodljiva poluprostora. Vodljivi poluprostori su razdvojeni zračnim rasporom debljine d. Na ravninama poluprostora se naboji uzajamno odslikavaju.

se odslikava na vodljivoj ravnini u istom iznosu, ali suprotnom predznaku na istu udaljenost. Naboj Q_0 udaljen je od ravnine 1 za d_1, te se na njoj odslikava u Q_1 na istu daljinu d_1. Isti naboj Q_0 udaljen je od ravnine 2 za d_2, te se na njoj odslikava u Q_2 na istu daljinu d_2. Ta slika Q_2 odslikava se na ravnini 1 u Q_3 na udaljenost $(d_1 + 2\,d_2)$ od nje. Jednako se slika Q_1 odslikava na ravnini 2 u Q_4 na udaljenost $(2\,d_1 + d_2)$ od nje. Dalje, slike Q_3 i Q_4 služe za slikanje u Q_5 i Q_6. Tako se nastavlja slikanje u beskonačnost na jednu i drugu stranu, te se dobiva beskonačan niz naboja istog iznosa, a izmjenično promjenljiva predznaka. Svi naboji su mjerodavni za određivanje polja u zračnom rasporu. Potencijal u nekoj točki P u zračnom rasporu iznosi

$$\varphi = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon}\left[\frac{Q_0}{r_0} + \sum_{=0}^{\infty}\frac{Q_{2n+1}}{r_{2n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_{2n}}{r_{2n}}\right]$$

Uzme li se u obzir izmjeničnost predznaka naboja i njegova udaljenost do točke promatranja P (x, z), konačno je potencijal

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_0} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r_{1n}} - \frac{1}{r_{2n}} + \frac{1}{r_{3n}} - \frac{1}{r_{4n}}\right)\right]$$

$$r_{1n}^2 = x^2 + (2nd + 2d - z)^2$$
$$r_{2n}^2 = x^2 + (2nd + 2d_1 - z)^2$$
$$r_{3n}^2 = x^2 + (2nd + 2d + z)^2$$
$$r_{4n}^2 = x^2 + (2nd + 2d_2 + z)^2$$

Ova jednadžba potencijala je nepodesna za računanje bez računskog stroja. Kao primjer neka posluži proračun kapaciteta vodljive kugle polumjera r_0, koja se nalazi sa središtem točno u polovici raspora $2d$, između vodljivih ravnina. Treba odrediti potencijal na površini kugle, dakle za $x = 0$, $z = r_0$. Kugla ne smije biti velikog polumjera, da se njezin naboj može odslikati u njezino središte. Dovoljno je točno ako je $r_0/(2d) \leqslant 0{,}1$. Gornja jednadžba potencijala postaje

$$\varphi_0 = \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_0}\left(1 - \frac{r_0}{2d}\ln 2\right)$$

Ako se kugla nađe između dviju vodljivih ravnina, njezin se kapacitet poveća za 7%, ako je $r_0/(2d) = 0{,}1$.

2.16.1. Paralelni vodiči u zračnom rasporu

Interesantan se rezultat dobiva kad se *dva paralelna, okrugla, ravna vodiča* nađu između feromagnetskih ravnina. Vodiči su istog polumjera r_0, protjecani strujom i u suprotnim smjerovima, a razmaknuti su na međusobnu udaljenost a prema sl. 2.56. Feromagnetske ravnine su razmaknute na udaljenost $2d$. Vodiči su

log raspora. Magnetsko polje u nekoj točki P na osi X nastaje
vanja struja zadanih vodiča i svih njihovih slika koje su na-
ikavanjem na jednu i drugu stranu ravnina. Odslikavanje se
odslikavanja struja na feromagnetskoj ravnini koja ima per-
uta veću od uzduha. Vodiči su u uzduhu.

osi X ima samo Z-komponentu. X-komponente se poni-
netrično smještene slike struja. Neka k-ta slika struje ima
ti polja na osi X

superpozicijom djelo
stale uzajamnim ods
provodi po pravilim
meabilnost mnogo p

Jakost polja na
štavaju od dvije si
Z-komponentu jako

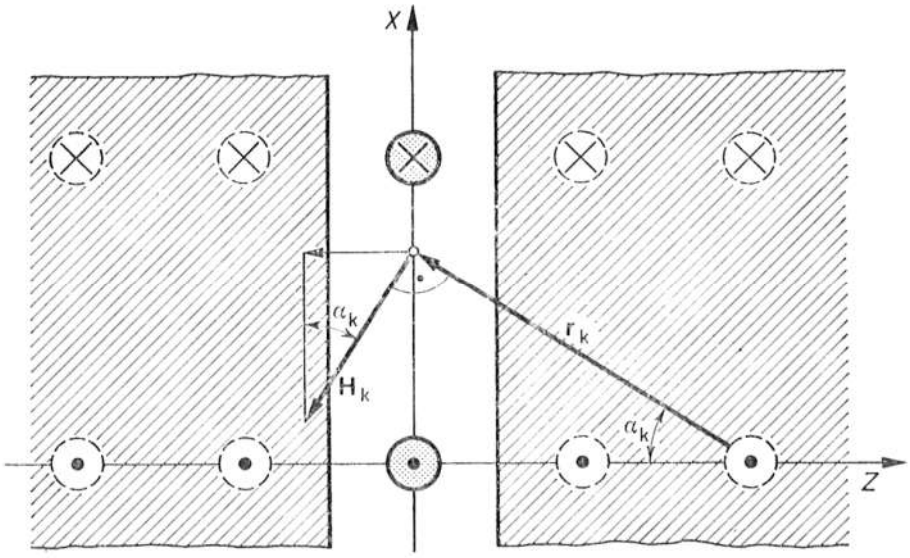
$$H_{zk} = \frac{i}{2\pi r_k}\,\frac{x}{r_k} = \frac{i\,x}{2\pi r_k^2}$$

Z-komponente svih slika se međusobno zbrajaju. Iznos radijusvektora slijedi iz $r_k^2 = x^2 + z_k^2$ za lijeve vodiče i $r_k^2 = (a - x)^2 + z_k^2$ za desne vodiče. Tu je $z_k = 2\,d \cdot k$. Prema tome je jakost polja na osi X između vodiča jednaka

$$H = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right) + 2\frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x^2 + 4d^2n^2} + \frac{a-x}{(a-x)^2 + 4d^2n^2}\right)$$

Treba uzeti u obzir da je suma beskonačnog reda koji se ovdje pojavljuje

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi^2 + n^2} = \frac{\pi}{2\xi}\operatorname{cth}(\pi\xi) - \frac{1}{2\xi^2}$$



Sl. 2.56. Dvožični vod u zračnom rasporu između feromagnetskih poluprostora. Feromagnetik ima vrlo veliku permeabilnost. Vod se uzajamno odslikava na paralelnim graničnim ravninama.

Kad se uzme u obzir navedena suma, konačno je jakost polja na spojnici između vodiča

$$H = \frac{i}{4\,d}\left[\operatorname{cth}\left(\pi\frac{x}{2\,d}\right) + \operatorname{cth}\left(\pi\frac{a-x}{2\,d}\right)\right] = \frac{i}{2\,d}\operatorname{cth}\left(\pi\frac{x}{2\,d}\right), \quad r_0 \leqslant x \leqslant (a - r_0)$$

Za argumente veće od 3, hiperbolni kotangens je jednak jedinici s dovoljno točnosti. To je udaljenost od vodiča koja je jednaka ili veća od širine zračnog raspora. Ako je razmak među vodičima $a \gg 2\,d$, praktički je magnetsko polje homogeno u zračnom rasporu. Ono je takvo, kao da je poteklo od beskonačno dugog solenoida.

Induktivitet po jedinici duljine takvog voda slijedi iz jednadžbe

$$L\,i = \int_{r_0}^{a-r_0} \mu_0 H \,\mathrm{d}x$$

Nakon izvršene integracije iznosi induktivitet

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left[\frac{\mathrm{sh}\left(\pi \frac{a - r_0}{2\,d}\right)}{\mathrm{sh}\left(\pi \frac{r_0}{2\,d}\right)} \right]$$

Ako je $a \gg r_0$, odnosno $a \gg 2\,d$, induktivitet se svodi na iznos $\mu_0\,(a - 2\,r_0)/(2\,d)$, koji odgovara homogenom polju u zračnom rasporu.

Neka je u konkretnom slučaju zračni raspor duljine $2\,d = 20$ mm, a okrugli vodiči polumjera 5 mm su razmaknuti na udaljenosti 600 mm. Vodičima teče struja od 500 A. Jakost homogenog polja iznosi $i/(2\,d) = 25$ A/mm. Na površini vodiča jakost polja iznosi $1{,}53 \cdot H_0 = 1{,}53 \cdot 25 = 38{,}2$ A/mm. To je polje jače od homogenog, te ono postepeno opada do udaljenosti 20 mm od vodiča, kad prelazi u homogeno. Induktivitet je zanemarivo veći od iznosa $L_0 = \mu_0\,(a - 2\,r_0)/(2\,d)$ koji odgovara homogenom polju. On iznosi $L_0 = 29{,}5\,\mu_0 = 37{,}1$ mikrohenrija po metru duljine vodiča.

Ovaj se zadatak jednostavnije rješava konformnim preslikavanjem za dvodimenzionalne sustave. Rješenje pokazuje da se magnetsko polje rješava s dovoljno točnosti na jednostavan način kod vodiča u zračnom rasporu između dviju feromagnetskih ravnina. Slično je kod električnih strojeva, te se ovo rješenje tamo iskorištava. Kratki svitak koji se nađe između dvije feromagnetske ravnine s osi okomitom na njih postaje beskonačno dug solenoid. Duljina silocijevi jednaka je duljini raspora. Mali utjecaj ima pomicanje vodiča izvan simetrale zračnog raspora.

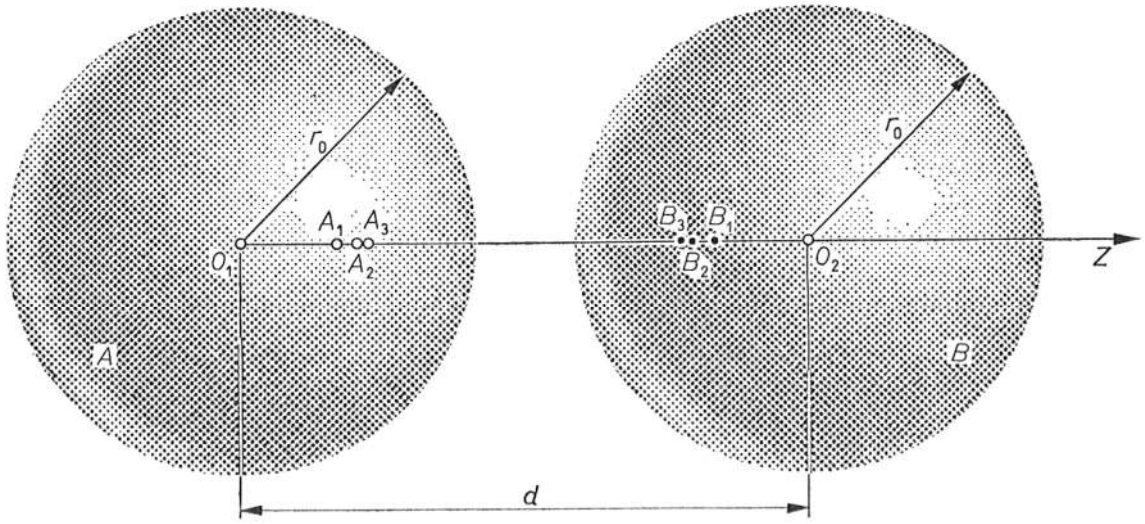
2.16.2. Dvije kugle

Uzajamno odslikavanje pomaže da se riješi polje dviju vodljivih kugli. Polje dviju vodljivih nabijenih kugli ne može se rješavati sa dva odslikana točkasta naboja. Raspored od dva točkasta naboja nema dvije ekvipotencijalne plohe koje bi bile kugle, već samo jednu. Slično je i s poljem naboja između dvije vodljive ravnine, koje se ne može rješavati samo sa dva točkasta naboja, već s beskonačno mnogo naboja. *Polje dviju kugli može se riješiti metodom uzajamnog odslikavanja.* Kad su kugle dovoljno međusobno razmaknute, njihov se naboj slika u središte, te se polje traži za dva točkasta naboja.

Neka su kugle jednaka polumjera r_0, a središta su im razmaknuta na udaljenost $d > 2\,r_0$, kao na sl. 2.57. Kugla A je na potencijalu φ_0, a kugla B je na potencijalu $-\varphi_0$. Potencijali kugli su jednaki i suprotna predznaka. To pojednostavnjuje pro-

račun polja. Zato su ukupni naboji kugli međusobno jednaki, ali suprotna predznaka. Ukupni je naboj kugle jednak sumi svih odslikanih naboja.

Kad bi kugla A bila sama u prostoru, ona bi nosila naboj $Q_0 = 4\pi\varepsilon r_0 \varphi_0$. Čim dođe u njezinu blizinu kugla B, ona na njoj inducira naboj suprotna predznaka, koji se odslika u točku B_1 u iznosu $-Q_1$. Taj odslikani naboj se odslikava na kugli



Sl. 2.57. Dvije nabijene kugle. Kugle su jednakog promjera, a nalaze se na jednakom potencijalu, samo suprotnog predznaka. Pojavljuje se uzajamno odslikavanje naboja jedne kugle na drugoj kugli i obratno.

A u točku A_2 kao naboj Q_2. Sad se Q_2 odslikava na kugli B u točku B_3 kao naboj $-Q_3$. Ovim postupkom, tj. držanjem kugle A na potencijalu φ_0 i dovođenjem kugle B u njezinu blizinu i držanjem na potencijalu nula, nastaju *na kugli* A odslikani točkasti naboji

$$Q_0, Q_2, Q_4, Q_6, \ldots$$

a *na kugli* B odslikani točkasti naboji

$$-Q_1, -Q_3, -Q_5, -Q_7, \ldots$$

Sad treba provesti isti postupak obrnuto. Kugla B se drži na potencijalu $-\varphi_0$. Kad je ona sama u prostoru, na njoj je naboj $-Q_0 = -4\pi\varepsilon r_0 \varphi_0$, koji se odslikava u njezino središte. Kad se u njezinu blizinu dovede kugla A, na njoj se odslika naboj $-Q_0$ u točku A_1 kao naboj Q_1. Ovaj se odslika na kugli B u točku B_2 kao naboj $-Q_2$. Tako se ponovno redom provodi uzajamno odslikavanje, te nastaje serija slika. *Na kugli* B sad su novi naboji

$$-Q_0, -Q_2, -Q_4, -Q_6, \ldots$$

a *na kugli* A su slike

$$Q_1, Q_3, Q_5, Q_7, \ldots$$

Ukupni naboj na kuglama se dobiva zbrajanjem svih odslikanih naboja, tj.

$$Q_A = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots = -Q_B$$

Treba slijediti postupak odslikavanja i pravila iz poglavlja o polju dvaju točkastih naboja, te će se dobiti polje zadanih dviju kugli. Ako je udaljenost točkastog naboja d_k do središta kugle na kojoj se odslikava, iznos odslikanog naboja jest

$$Q_{k+1} = -Q_k \frac{r_0}{d_k}$$

a njegova udaljenost od središta kugle iznosi

$$b_{k+1} = \frac{r_0^2}{d_k}$$

Te jednadžbe treba iskoristiti. Treba uzeti u obzir da je $d_k = d - b_k$. Neka je $d/r_0 = m > 2$. Sada su redom naboji, ne vodeći računa o predznaku

$$Q_1 = Q_0 \frac{r_0}{d} = Q_0 \frac{1}{m}, \qquad b_1 = \frac{r_0^2}{d} = r_0 \frac{1}{m}$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{r_0}{d_1} = Q_0 \frac{1}{m^2 - 1}, \qquad b_2 = \frac{r_0}{d_1} = r_0 \frac{m}{m^2 - 1}$$

$$Q_3 = Q_2 \frac{r_0}{d_2} = Q_2 \frac{r_0}{d - b_2} = Q_0 \frac{1}{m^3 - 2m}, \qquad b_3 = \frac{r_0^2}{d - b_2} = r_0 \frac{m^2 - 1}{m^3 - 2m}$$

Općenito se može pisati

$$Q_k = Q_0 \alpha_k, \qquad b_k = r_0 \frac{\alpha_k}{\alpha_k - 1}$$

Prema tome je naboj jedne kugle

$$Q_A = \sum_0^\infty Q_k = Q_0 \sum_0^\infty \alpha_k = -Q_B \tag{2.133}$$

$$Q_0 = 4\pi\varepsilon r_0 \varphi_0$$

Uzevši u obzir da je razlika potencijala među kuglama $u = 2\varphi_0$, iznosi kapacitet između kugli

$$C = \frac{Q_A}{u} = 2\pi\varepsilon r_0 \sum_0^\infty \alpha_k = C_\infty \sum_0^\infty \alpha_k \tag{2.134}$$

Preostaje da se prikažu faktori α_k. Oni se preglednije pišu u recipročnom obliku

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha_0} = 1, \qquad \frac{1}{\alpha_1} = m, \qquad \frac{1}{\alpha_2} = m^2 - 1 \\ &\frac{1}{\alpha_3} = m^3 - 2m \\ &\frac{1}{\alpha_k} = m \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_{k-2}}, \qquad m > 2 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Oblik koeficijenta $1/\alpha_k$ daje ideju da se on prikaže na drugi način. Treba ga prikazati u obliku

$$\frac{1}{\alpha_k} = e^{kx}$$

Prema tome iz (2.135) slijedi da mora biti zadovoljena jednakost

$$e^x = \frac{m}{2} \pm \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^{1/2}$$

Zbog dvoznačnosti dobivene jednakosti koeficijenti se moraju prikazati prošireno sa

$$\frac{1}{\alpha_k} = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}$$

Kad se uzmu vrijednosti za $k = 0$, $1/\alpha_0 = 1$ i za $k = 1$, $1/\alpha_1 = m$ dobiju se konstante A_1 i A_2 i konačni oblik koeficijenata

$$\alpha_k = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}(k+1)x}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{m}{2} \qquad m = \frac{d}{r_0} \tag{2.136}$$

Sad ne treba poznavati prethodne koeficijente da bi se odredio slijedeći kao u (2.135). Kad bi bilo $m = 2$, što znači da se kugle dotiču, beskonačni red $\Sigma\, \alpha_k$ prelazio bi u harmonički red, koji nije konvergentan. Red $\Sigma\, \alpha_k$ razmjerno brzo konvergira. Ako se usvoji točnost od 1%, dovoljno je ići sa brojem članova reda k do 5 za $m \geqslant 3$, do 3 za $m \geqslant 5$, do 2 za $m \geqslant 10$. Tek za velike udaljenosti među kuglama, koje prelaze sto polumjera, može se zanemariti utjecaj kugle na kuglu. Kapacitet među njima je sastavljen od serijske kombinacije kapaciteta dviju kugli, te zato iznosi $2\pi\varepsilon r_0$.

Lokacija svih odslikanih naboja dana je duljinom b_k. Prema tome je moguće odrediti polje u prostoru između kugli i na njihovoj površini. Najveća jakost polja nastaje na površini kugle na spojnici između njihovih središta.

Ona izlazi iz odnosa

$$4\pi\varepsilon E_{max} = \frac{Q_0}{r_0^2} + \frac{Q_0}{(r_0+\delta)^2} + \frac{Q_1}{(r_0-b_1)^2} + \frac{Q_1}{(r_0+\delta-b_1)^2} + \dots$$

Ovdje je $\delta = d - 2r_0 = r_0(m-2)$ odstojanje među površinama kugli na spojnici. Osim toga neka je

$$E_0 = \frac{2\varphi_0}{\delta} = \frac{2\varphi_0}{r_0(m-2)} \tag{2.137}$$

Treba uzeti u obzir iznos b_k, te je konačno

$$k_E = \frac{E_{max}}{E_0} = \frac{m-2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a_k}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)^2}\right]$$

$$E_{max} = k_E E_0 \tag{2.138}$$

U tablici je navedeno nekoliko vrijednosti k_E

TABLICA 2.19.

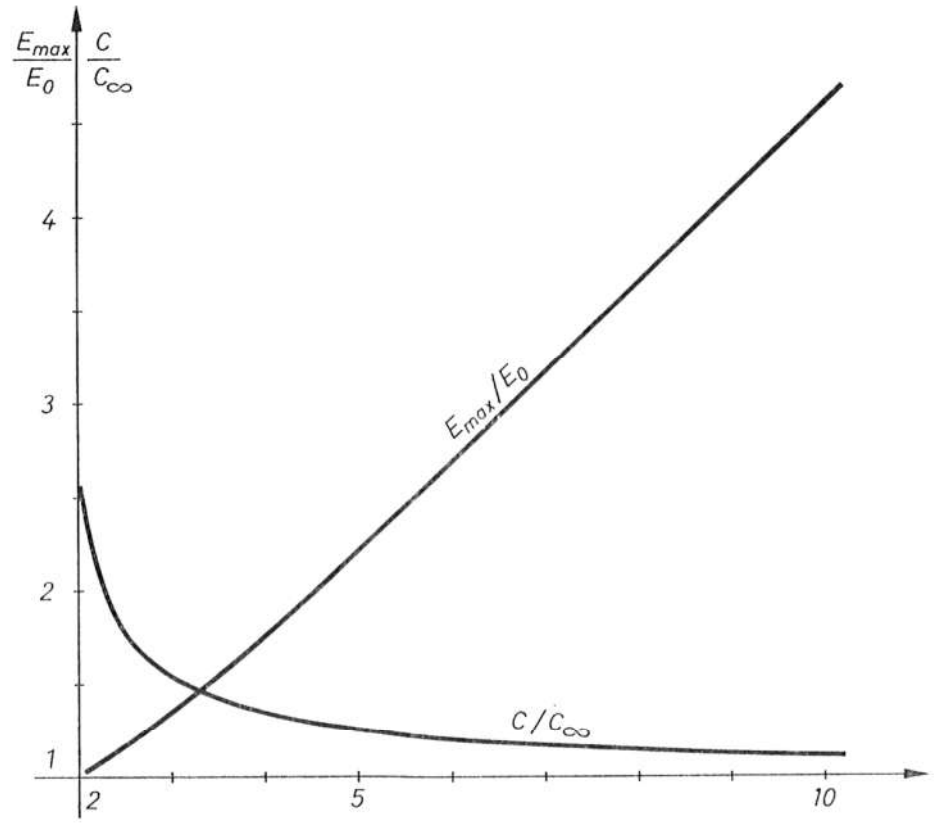
m	2,2	2,4	2,8	3,2	4,0	6,0	8,0	10,0
k_E	1,074	1,120	1,352	1,523	1,77	2,72	3,60	4,60
Σa_k	2,14	1,86	1,61	1,48	1,34	1,20	1,14	1,11

Kad su kugle vrlo blizu, jakost polja ima praktički iznos E_0, koji je karakterističan za polje u pločastom kondenzatoru čije su elektrode razmaknute za δ. Za vrlo velike iznose m, tj. vrlo razmaknute kugle, one ne utječu jedna na drugu i najveće polje iznosi φ_0/r_0, kao za osamljenu kuglu. Dijagram na sl. 2.58. prikazuje ovisnost faktora E_{max}/E_0 i C/C_∞ o omjeru $m = d/r_0$.

Ovdje je odabran najjednostavniji primjer dviju kugli. One imaju jednake polumjere i obje su na istom potencijalu, samo suprotna predznaka. U tome se slučaju dobiju najpregledniji odnosi. Put rješavanja je isti ako su kugle različita polumjera i na različitom potencijalu. Ovo razmatranje pokazuje da kugle imaju svaka za sebe čvrst potencijal. Nije svejedno za polje na kojem je potencijalu koja kugla.

Sustav dviju vodljivih kugli rješavao je već Poisson. Zatim je opširan prikaz i sva ova rješenja dao Maxwell. Njegov je pristup bio preko metode inverzije. Ovaj je sustav značajan u mjernoj tehnici. Kugle su bile dosad jedini točniji instrument za mjerenje vrlo visokih napona. Uzduh u standardnim okolnostima ima čvrst iznos probojnog polja. Jakost električnog polja na kuglama ustanovljava se toliko točno, koliko točno se mjeri napon i duljine. Tako je konkretno nastao proboj u

uzduhu kod 320 kV napona među kuglama promjera 1250 mm, kad su bile razmaknute na 125 mm. Konstanta kugli iznosi $m = 2{,}2$. Za proboja bila je jakost polja $1{,}074 \cdot 2{,}56 = 2{,}75$ kV/mm. To je maksimalna jakost polja. Standardno stanje



Sl. 2.58. Dijagram ovisnosti kapaciteta i najveće jakosti polja dviju kugli o razmaku među njima. Kapacitet je prikazan kao omjer C/C_∞, a jakost polja kao omjer E_{max}/E_0. Razmak središta kugli d se nanosi u odnosu prema polumjeru kugle r_0, dakle kao d/r_0.

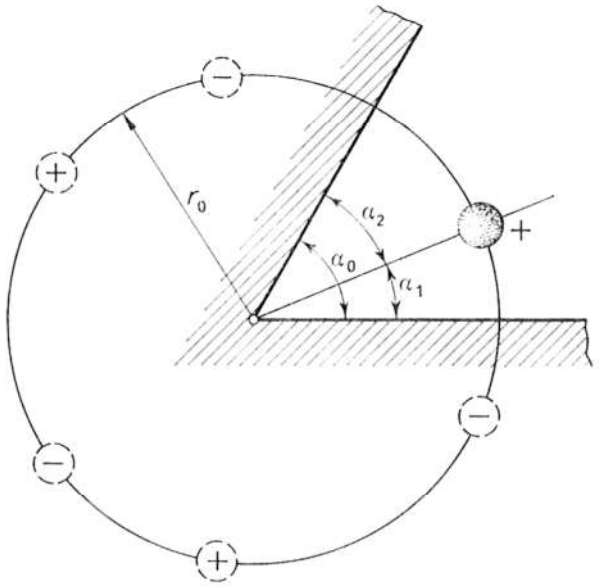
uzduha smatra se za tlak od 760 mm st. ž., temperaturu 20° C i parcijalni tlak vodene pare od 15 mm st. ž. Treba uzeti u obzir odstupanja od standardnog stanja. Propisi točno postavljaju uvjete pod kojima se vrši mjerenje napona. Najčešće je jedna kugla uzemljena.

2.16.3. Vodljivi ugao

Djelomično uzajamno odslikavanje se primjenjuje u nekim slučajevima kad se želi odrediti polje u uglu koji tvore dvije vodljive ravnine. Takve dvije ravnine su prikazane na sl. 2.59. One se sijeku pod kutom α_0, a njihov je potencijal nula. Naboj Q_1 se nalazi u uglu među njima. Njegove su koordinate zadane radijus-vektorom r_0 i kutom α_1 od osi X. Njegov je kut prema ravnini X_2 α_2, tako da je $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0$ kut ravnina. Zadani naboj Q_1 smije biti točkasti ili linijski naboj na pravcu. Polje zadane formacije rješava se Laplaceovom jednadžbom. Jedno-

stavnije je kad je zadani naboj Q_1 linijski naboj na pravcu koji je paralelan s osi Z. Os Z se postavlja u pravac sjecišta ravnina. Rješavajući Laplaceovu jednadžbu, potrebno je ustanoviti granične uvjete. Ravnine X_1 i X_2 su vodljive i na nultom potencijalu. Zato na njima postoji samo normalna komponenta polja. Osim toga, jakost polja je nula u osi Z.

Neki jednostavniji slučajevi rješavaju se direktno odslikavanjem naboja na ravninama. Naboj Q_1 odslikava se na ravninu X_1 u Q_2 s istim iznosom na istu udaljenost, a suprotnim predznakom. Slika naboja Q_2 služi kao objekt odslikavanja



Sl. 2.59. Točkasti naboj u uglu vodljivih ravnina. Ravnine su na nultom potencijalu.

na ravnini X_2. Ona se odslikava u Q_3 po istom pravilu. Naboj Q_3 se dalje odslikava na ravninu X_1 u Q_4. S druge strane, zadani naboj Q_1 se odslikava na ravninu X_2 u naboj Q_6, a ovaj se dalje slika na ravnini X_1 u Q_5. Naboj Q_5 se odslikava na ravninu X_2 u naboj Q_4, koji je već prije postignut s početkom slikanja na ravninu X_1. Tako se odslikavanje zaključuje, jer se daljnjim odslikavanjem dobiva samo ista slika. Da bi se odslikavanje moglo tako zaključiti, mora kut među ravninama α_0 biti parna mjera punog kuta, tj. $2\pi/\alpha_0 = n$, $n = 2, 4, 6, \ldots$ Broj svih naboja je paran. Oni se svi nalaze na kružnici polumjera r_0, koji pripada zadanom naboju Q_1. Njihov se predznak pravilno izmjenjuje, $+, -, +, \ldots$, a svi su inače istog iznosa. Među njima su kutovi $2\alpha_1$ i $2\alpha_2$. Kut α_0 među ravninama iznosi 60° na sl. 2.59. Zato je broj svih naboja $n = 6$. Suma svih naboja je nula, a njihov je razmještaj simetričan u odnosu na ishodište O i u odnosu na ravnine X_1 i X_2. Takav razmještaj zadovoljava granične uvjete. Polje među ravninama se računa sa svim nabojima. Neka je naboj $Q_1 = Q_0$ na vodljivoj kugli malog polumjera R_0. Zato se smije njezin naboj odslikati u središte kugle.

Potencijal kugle iznosi

$$\varphi_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{2r_0 \sin\alpha_1} - \frac{1}{2r_0 \sin\alpha_2} + \frac{1}{2r_0 \sin\alpha_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2r_0 \sin\alpha_0} - \frac{1}{2r_0 \sin(\alpha_0 + \alpha_1)}\right]$$

Konačno je potencijal kugle

$$\varphi_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon R_0} K$$

$$K = 1 - \left[\frac{1}{2\sin\alpha_1} + \frac{1}{2\sin\alpha_2} - \frac{1}{\sin\alpha_0} + \frac{1}{2\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}\right]\frac{R_0}{r_0}$$

Kapacitet zadane kugle iznosi

$$C = \frac{Q_0}{\varphi} = 4\pi\varepsilon R_0 \cdot \frac{1}{K} \tag{2.139}$$

Neka je $\alpha_1 = 20^0$ u konkretnom slučaju prikazanom na sl. 2.59. gdje je $\alpha_0 = 60^0$. Omjer polumjera iznosi $r_0/R_0 = 20$. Tada korekcioni faktor iznosi $K = 0{,}92$, odnosno $1/K = 1{,}087$. Kapacitet kugle se povećava za 8,7% zbog utjecaja vodljivih ravnina. Naboj kugle inducira na ravninama naboj suprotna predznaka, čiji je ukupni iznos upravo jednak naboju kugle.

3. ENERGETSKI ODNOSI

3.1. LORENTZOVA SILA

Maxwellove jednadžbe su jednadžbe stanja, koje su nastale iz promatranja sila u polju i induciranja procesa. Definicije osnovnih veličina jakosti polja pošle su od sile. Elektromagnetsko polje je polje sila. Potrebno je posebno promatranje sila da bi se istražile deformacije koje izazivaju sile. Elektromagnetsko polje je interesantno u velikom dijelu, jer se iskorištavaju sile na sredstvo koje ispunja prostor. Električni strojevi se osnivaju na djelovanju polja na sredstvo koje ispunja prostor. Već je Maxwell posvetio velik dio svoga rada istraživanju sila i naprezanja u polju i došao je do rezultata koji su imali velike posljedice na budući razvoj fizike. Među ostalim, došao je do zaključka da elektromagnetski val vrši tlak na graničnu plohu između dva sredstva, odnosno svjetlo vrši isto takav tlak. On je došao do zaključka da svjetlo ima karakter elektromagnetskog vala.

Egzaktno promatranje sila tražilo bi da se uzme u obzir prisustvo sredstva u prostoru ispunjenom poljem. Treba da budu zadovoljena pravila o ravnoteži sila, o održavanju energije, o održanju impulsa. Energetsko stanje je usko povezano sa stanjem sila. Mehanika i termodinamika pomažu mnogo da se lakše prikaže stanje sila i energije u elektromagnetskom polju.

Definicije osnovnih veličina jakosti polja pošle su od Coulombova zakona sila među nabojima. Električni naboj postoji, te nema teškoće da se s njime računa. Međutim, magnetski naboj ne postoji, već se mora govoriti o magnetskim silama na električni naboj u gibanju ili na vodič protjecan električnom strujom. Tako su nastali Biot-Savartov zakon i Ampèreov zakon. Električni naboj proizvodi elektromagnetsko polje čim se giba u odnosu na promatrača. Isto tako djeluje magnetsko polje nekom silom na naboj u gibanju. Suštinski je svejedno da li je taj naboj u nekom vodiču ili u slobodnom prostoru. Ovdje se čini pretpostavka koja se stalno provlači pri promatranju elektromagnetskog polja. Ostaje stalna pretpostavka da su *efekti elektromagnetskog polja sastavljeni od efekata električnog i magnetskog polja.* Ne postoje dokazi da je ta pretpostavka točna, niti postoji dokaz da nije točna. Iskustvo pokazuje da se može raditi s takvom pretpostavkom. Po njoj se *sila na električni naboj u elektromagnetskom polju sastoji od sile proizvedene električnim poljem i od sile proizvedene magnetskim poljem.* Tako je uvedena **Lorentzova sila** izražena jednadžbom

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3.1}$$

Električni naboj Q giba se brzinom $\mathbf{v}$ u odnosu na koordinatni sustav u kojem se promatra polje električne jakosti $\mathbf{E}$ i magnetske indukcije $\mathbf{B}$. Tu je $Q\mathbf{E}$ električna

sila na naboj, a $Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ je magnetska sila. Dovoljno je da postoji jedno polje pri statičkom stanju pa da postoji sila na naboj. Naboj djeluje električnom silom na drugi naboj ako su oni međusobno na miru. Naboj u mirovanju proizvodi električno polje uvjetovano Coulombovim zakonom

$$\mathbf{E} = \frac{Q\,\mathbf{r}_0}{4\pi\,\varepsilon\,r^2}$$

Naboj u gibanju proizvodi elektromagnetsko polje za mirnog promatrača, a njegova jakost električnog polja je sada

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Ona dobiva jedan dodatak kao posljedicu sudjelovanja magnetskog polja. Zato se i sila između dva naboja u relativnom gibanju sastoji od dvije komponente. Jedna je elektrostatska komponenta, a druga je nastala magnetskim djelovanjem, te bi se mogla zvati i magnetska komponenta.

U elektronskom snopu u katodnoj cijevi gibaju se elektroni istom brzinom, te među njima postoje samo električne sile koje su odbojne. Elektronski snop se raspršuje zbog tih sila. Isto tako između dva paralelna elektronska snopa djeluju samo električne sile. Vodič protjecan strujom djeluje na drugi vodič kojim protječe struja, magnetskom silom. Ako su struje istog smjera u paralelnim, ravnim vodičima, magnetske sile su privlačne. No ovdje bi se moglo reći da se naboji gibaju u istom smjeru kao u elektronskom snopu, te se ne bi smjele očekivati magnetske sile, već samo električne, i to odbojne. Međutim, ne smije se zaboraviti da je u vodiču isti iznos pozitivnih i negativnih naboja od kojih se jedni gibaju, a drugi su na miru. Na taj je način postignuta relativnost gibanja. Zato se i govori o magnetskoj sili među *vodičima protjecanim strujom*, a ne o magnetskoj sili među strujama naboja.

Naboj u prostoru može biti raspoređen na različite načine. Može biti koncentriran u točkasti naboj, raspoređen u prostoru na površinama ili linijama. Prema tome su bila prilagođena i promatranja, a uvedene su i pojedine gustoće naboja. Tako se uspostavlja sustav naboja. Ukupna elektromagnetska sila na sustav jednaka je sumi sila na pojedinačne naboje. Svi su naboji vezani na materiju, bez obzira u kojem obliku. To mogu biti elementarne čestice kao što su elektroni, protoni i slično ili naelektrizirana tijela. U takvoj situaciji djeluju indirektno i druge sile na naboje, a koje nisu elektromagnetskog karaktera. Odatle nastaje sve šarenilo pojava, što dovodi do zamršenosti zadatka. Ovdje se zasad treba zadržati na *elektromagnetskoj sili*. Neka promatrani sustav sadrži samo prostorno raspoređeni naboj gustoće ϱ. Ukupna elektromagnetska sila na sustav naboja iznosi prema definiciji Lorentzove sile

$$\mathbf{F} = \int_V \varrho\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}V \tag{3.2}$$

Diferencijalni iznos naboja $\varrho\,\mathrm{d}V$ giba se brzinom $\mathbf{v}$ u odnosu na koordinatni sustav u kojem je polje.

Električna sila iznosi

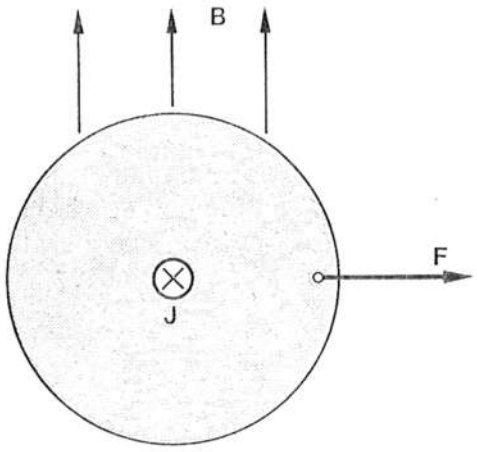
$$\mathbf{F}_e = \int_V \varrho \, \mathbf{E} \, \mathrm{d}V \tag{3.3}$$

Može se govoriti o prostornoj gustoći sile $\mathbf{f}_e = \varrho \, \mathbf{E}$.

Kad se prijeđe na prostorni naboj u gibanju, može se govoriti o konvektivnoj struji gustoće $\varrho \, \mathbf{v} = \mathbf{J}$. Zato je magnetska sila

$$\mathbf{F}_m = \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, \mathrm{d}V \tag{3.4}$$

Ova struja, gustoće **J**, može biti proizvedena u vodiču ili slobodnom prostoru, važno je da je ona gibanje naboja u odnosu na sustav u kojem je magnetsko polje indukcije **B**. I tu se može govoriti o prostornoj gustoći magnetske sile $\mathbf{f}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Na slici. 3.1. je okrugao vodič protjecan strujom jakosti i, koja je raspoređena po presjeku S vodiča jednolikom gustoćom $J = i/S$. Zadano magnetsko polje djeluje na vodič indukcijom **B** okomito na smjer gustoće struje silom $F = Bi$ po jedinici dužine vodiča.



Sl. 3.1. Ravni, okrugli vodič protjecan istosmjernom strujom. Vodič se nalazi u magnetskom polju indukcije **B**. Određivanje smjera magnetske sile **F**.

Da bi se održavala struja gustoće 10 A/mm² u čistom bakru, potrebno je održavati u njemu jakost električnog polja od 0,18 V/m. U njemu ima $8{,}5 \cdot 10^{22}$ slobodnih elektrona po cm³ koji održavaju zadanu struju. Gustoća naboja slobodnih elektrona iznosi prema tome 13,6 kulona po mm³ ili $13{,}6 \cdot 10^9$ kulona po m³. U zadanom primjeru prostorna gustoća sile iznosi $2{,}4 \cdot 10^9$ njutna po m³ ili 2,4 njutna po mm³. To je vrlo velika sila koja održava oblak slobodnih elektrona u jednolikom gibanju. »Trenje« je razlog da se oni ne ubrzavaju, već ostaju konstantne brzine. Zato se vodič zagrijava. Isto tolika sila djeluje na pozitivne naboje u vodiču koji su inače na miru. U cjelini su sile na vodiču u ravnoteži.

Gustoće struje u vodičima naprava dosižu i do 10 A/mm^2, a indukcija magnetskog polja do 1 tesla. Prema tome prostorna magnetska sila može doseći 10^7 njutna po m^3 ili 10 njutna po cm^3. U izvanrednim slučajevima gustoće struje dosižu i do 100 A/mm^2, pa su i magnetske sile toliko povećane. Bakreni vodič u prethodnom primjeru vodi struju iste gustoće 10 A/mm^2, a zadana je prostorna gustoća naboja 13,6 kulona po mm^3. Srednja brzina naboja iznosi zato 10/13,6 = 0,735 mm/s da bi se postigla zadana gustoća struje. Pojedini slobodni elektron napreduje tom brzinom suprotno smjeru električnog polja. Neka je vodič u magnetskom polju indukcije 1 tesla. Električna sila na slobodni elektron se odnosi približno kao 250 : 1 prema magnetskoj sili. Magnetski efekti su zanemarive veličine prema električnim efektima u vodiču kao što je bakar. Ovi numerički primjeri su trebali poslužiti da se dobije red veličine sila u normalnim elektrotehničkim uvjetima.

3.1.1. Sila na strujnicu

Sila na strujnicu može se izvesti iz istog zakona. Strujno polje treba razdijeliti u same strujne cijevi, presjeka S_0 dovoljno malena, da su preko njega gustoća struje i indukcija konstantni. Element volumena tada iznosi $\mathrm{d}V = S_0\,\mathbf{n}\,\mathrm{ds}$. Vektori **n** i ds su kolinearni s vektorom **J**. Magnetska sila prelazi sada u oblik

$$\mathbf{F}_m = i \oint \mathrm{ds} \times \mathbf{B} \tag{3.5}$$

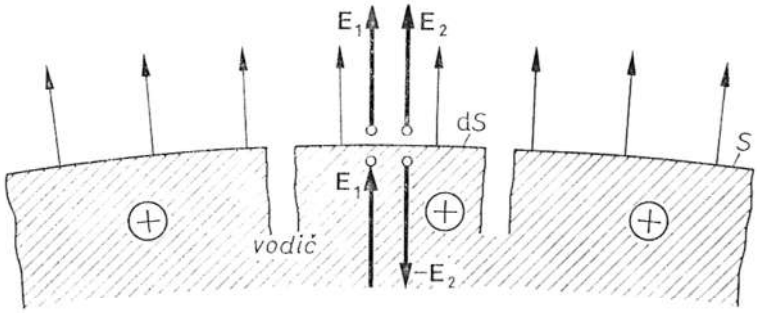
Ovdje je iskorištena strujna cijev dovoljno mala presjeka da bi se dobila sila na strujnicu kojom teče struja jakosti i. Dobivena jednadžba se iskorištava da se odredi i sila na vodič, ako se može uzeti da je magnetska indukcija po njegovu presjeku konstantna.

3.1.2. Sila na površini vodiča

Električna sila na površini nabijena vodiča postoji, jer djeluju naboji međusobno odbojnim silama. Kad bi vodič bio podatljiv, on bi se napuhnuo kao mjehur od sapunice. Površinske sile drže ravnotežu s električnim silama. Na sl. 3.2. je prikazan isječak površine nabijena vodiča. Jakost polja na površini je jednaka $\mathbf{E} = (\sigma/\varepsilon)\,\mathbf{n}$, ako je σ plošna gustoća naboja, a ε dielektričnost sredstva koje okružuje vodič. Polje ne postoji u unutarnjosti vodiča, a naboj je sav raspoređen na njegovoj površini. Element površine $\mathrm{d}S$ nosi naboj $\sigma\,\mathrm{d}S$. Sva ostala površina vodiča proizvodi na njegovu mjestu polje jakosti $\mathbf{E}_1$. Sam pak element sa svojim nabojem proizvodi polje s vanjske strane jakosti $\mathbf{E}_2$, a s nutarnje strane vodiča jakosti $-\mathbf{E}_2$. Budući da s unutarnje strane vodiča polja nema, mora biti $E_1 = E_2 = E/2$, a s vanjske strane je polje jakosti E. Na element $\mathrm{d}S$ s nabojem $\sigma\,\mathrm{d}S$ djeluje polje $E_1 = E/2$ silom $E_1\,\sigma\,\mathrm{d}S$.

Plošna sila na površini nabijena vodiča ima gustoću

$$\mathbf{f}_p = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_e}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{2} E \sigma \mathbf{n} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \mathbf{n} \tag{3.6}$$



Sl. 3.2. Diferencijalni isječak površine nabijenog vodiča. Određivanje sile na površinu nabijenog vodiča.

Sad se može računati sila između elektroda kondenzatora. Ta se sila iskorištava u elektrometrima. Motori još ne postoje na istom principu, jer nije uspjelo postići sile dovoljnih gustoća. U uzduhu pod tlakom 15 bara dozvoljena je jakost polja oko 20 kV/mm. Dielektričnost uzduha je približno $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85$ pF/m. Gustoća plošne sile iznosi približno 1 800 N/m^2. To je vrlo mala sila ako se usporedi s tlakom, jer je to samo 0,18 bara.

Razmatranja Lorentzove sile omogućuju da se odredi sila u bilo kojem sustavu. To je katkad skopčano s velikim teškoćama. Osnovna je teškoća što Lorentzova sila uključuje naboj i veličine polja. Potrebno bi bilo i naboj izraziti veličinama polja, što omogućuju Maxwellove jednadžbe.

3.2. SILA NA DIPOL

Električni dipol, opisan u poglavlju 2.6., jednostavniji je za promatranje, te njega treba prije prikazati. Na sl. 3.3. skiciran je električni dipol dipolnog momenta $p = Q\,a$. Na mjestu naboja $-Q$ ima polje jakost $\mathbf{E}_1$, te je na njega sila $\mathbf{F}_1 = -Q\,\mathbf{E}_1$. Jakost polja iznosi $\mathbf{E}_2$ na mjestu naboja Q, a na njega je sila $\mathbf{F}_2 = Q\,\mathbf{E}_2$. Ukupna sila na dipol iznosi zato

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = Q\,(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$$

Jakosti polja $\mathbf{E}_2$ i $\mathbf{E}_1$ su međusobno jednake u homogenu polju. Zato ukupna sila na dipol iščezava u homogenu polju. Razlika jakosti polja je diferencijalna karaktera, jer je razmak a među nabojima vrlo malen u odnosu na udaljenosti promatrača.

Neka koordinata s pada u neki srednji smjer polja. Razlika jakosti polja iznosi time

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} a \cos \alpha \tag{3.7}$$

a sila na dipol

$$\mathbf{F} = Q a \cos \alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} = p \cos \alpha \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} \tag{3.7a}$$

Taj se odnos piše u vektorskoj interpretaciji

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} \tag{3.8}$$

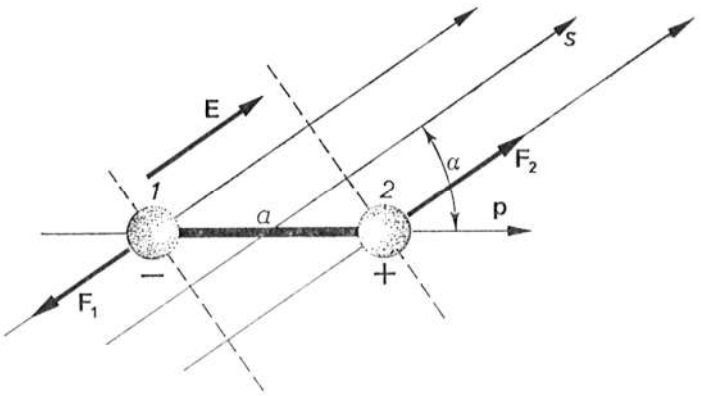
Vidljivo je iz sl. 3.3. da postoji i *moment vrtnje* na dipol pored *translatorne sile* po (3.8). Sile $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ su približno jednake, te na dipol djeluje par sila koje imaju moment vrtnje

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{3.9}$$

Općenito na svaki dipol djeluje translatorna sila po (3.8) i moment vrtnje po (3.9) koji nastoji okrenuti dipol u smjer polja.

Magnetski dipol je opisan u poglavlju 2.14. Tamo je utvrđeno da se magnetski dipol ponaša kao električni, ovisno samo o definiciji dipolnog momenta **p**. Sila i moment vrtnje na magnetski dipol izražavaju se točno kao sila i moment na električni dipol, samo se mjesto jakosti polja **E** pojavljuje **H**, te je zato

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{H} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{p} \times \mathbf{H} \end{aligned} \tag{3.10}$$



Sl. 3.3. Električni dipol u polju. Određivanje sile i momenta vrtnje na dipol.

Prema (3.7) promjena polja se mora projicirati u smjer dipola da se dobije sila. Ako je dipol slobodan, polje ga okreće u svoj smjer. Tada je dipol uvijek u smjeru polja. Ako polje opada u smjeru slobodnog dipola, sila je negativna, tj. ona je usmjerena *prema jačemu polju*. Obrnuto, kad polje raste u smjeru dipola, sila je pozitivna, tj. djeluje opet prema jačemu polju. *Sila na slobodni dipol je uvijek usmjerena prema*

jačemu polju. Takav karakter sile na slobodni dipol ima značajne posljedice. Sva tijela postaju slobodni dipoli pod utjecajem polja. To je pokazano na primjeru kugle u homogenu polju u poglavlju 2.8. Zato će slobodna tijela u prostoru nastojati da se gibaju prema zonama jačega polja. Svejedno je od kakvog sredstva je tijelo. Zone najjačeg polja se nalaze na nabijenim vodičima. Nečistoće u uzduhu postaju dipoli i putuju na površine vodiča i na površine izolatora koji podupiru vodiče. Površine izolatora postaju nečiste i vodljive, te se pojavljuju električni proboji po njihovoj površini. Ta je pojava poznata u metalurškim i sličnim pogonima. Takva se sila, s druge strane, iskorištava pri čišćenju plina od nečistoća. Ti su uređaji elektrofilteri.

Inducirani dipol ima dipolni moment direktno razmjeran jakosti polja, $\mathbf{p} = p_1 \mathbf{E}$. Prema tome sila na njega iznosi

$$\mathbf{F}_s = p_1 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} \tag{3.11}$$

Ona je razmjerna produktu $\mathbf{E}(\partial \mathbf{E}/\partial s)$ ili $\mathbf{H}(\partial \mathbf{H}/\partial s)$ kod magnetskog dipola. Taj je produkt mjerodavan za silu na inducirani dipol. Jedinični dipolni moment p_1 po jedinici jakosti polja razmjeran je volumenu tijela, a onda i materijalnim svojstvima tijela. Vodljiva kugla u sredstvu dielektričnosti ε ima jedinični dipolni moment $p_1 = 3 V_0 \varepsilon$. Dielektrična kugla ima manji p_1. Sila na inducirani dipol po (3.11) može poslužiti pri određivanju karakteristika dielektričnosti i permeabilnosti materijala.

Moment vrtnje na dipol može poslužiti pri određivanju karakteristika dipola ili polja u kojem se dipol nalazi. Moment vrtnje ima karakter direkcione sile na permanentni dipol. Permanentni dipol se ponaša kao njihalo u gravitacionom polju. I njihalo služi za istraživanje gravitacionog polja.

Elektroni i jezgra u atomu posjeduju također magnetski dipolni moment, te na njih djeluje magnetsko polje. Tako je nastala mjerna metoda koja se zove *nuklearna magnetska rezonancija*, a iskorištava utjecaj magnetskog polja na dipolni moment jezgre atoma.

3.3. NAPREZANJA U POLJU

Dosadašnja razmatranja sile na naboje nisu vodila računa o sredstvu u prostoru. Bilo je zadano polje svojim osnovnim veličinama, u ovisnosti o raspodjeli naboja u prostoru, a trebalo je odrediti sile kojima djeluje polje na naboje. Bile su zanemarene sve deformacije koje bi eventualno nastale pod djelovanjem sila. Strogo uzevši, ne može se zanemariti međudjelovanje sredstva u prostoru i naboja u polju. To može pokazati najprostiji primjer pločasta kondenzatora u uzduhu. Uzduh je sastavljen od molekula koje se pretvaraju u inducirane dipole pod utjecajem polja. Nabijeni pločasti kondenzator će inducirati dipole i istodobno ih uvlačiti u svoje polje. Tako nastaje kompresija uzduha između elektroda. Ako je nabijanje kondenzatora periodično, bit će i kompresija uzduha periodična. Komprimirani uzduh ima veću dielektričnost, te će i kondenzator imati veći kapacitet. Nastat će periodična

promjena kapaciteta. Ovdje ne treba ulaziti u detaljnu analizu, jer je i ovo dovoljno da se vidi kako točna interpretacija traži da se uzme u obzir djelovanje sredstva. Zato ovdje treba najprije promatrati sile u *praznu prostoru.*

Električna sila na naboj prikazana je sa (3.3). Da bi se ona prikazala veličinama polja, treba poći od odnosa ($\mathbf{D} \times \text{rot}\,\mathbf{E}$). Komponenta X toga produkta iznosi

$$(\mathbf{D} \times \text{rot}\,\mathbf{E})\,\mathbf{x}_0 = D_y\,\text{rot}_z\,\mathbf{E} - D_z\,\text{rot}_y\,\mathbf{E} = D_y\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - D_z\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

Prilagođena na prazan prostor komponenta X glasi

$$(\mathbf{D} \times \text{rot}\,\mathbf{E})\,\mathbf{x}_0 = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E_y^2}{\partial x} + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E_z^2}{\partial x} - \varepsilon_0 E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} - \varepsilon_0 E_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Kad se analogno učini i za ostale komponente, dobivaju se izrazi koji se mogu prikazati u jednostavnom obliku

$$\mathbf{D} \times \text{rot}\,\mathbf{E} = -\,\text{div}\,\mathbf{T} + \mathbf{E}\,\text{div}\,\mathbf{D} \tag{3.12}$$

Ovdje se pojavljuje operacija div primijenjena na veličinu **T**. div **T** mora biti vektor, jer je operacija na lijevoj strani vektor. Operacija div **T** ima simboličan karakter. Veličina **T** je simetrični tenzor koji se prikazuje kvadratnom, simetričnom matricom trećeg reda. Budući da je matrica simetrična, mora biti $T_{ik} = T_{ki}$. Taj se tenzor prikazuje na slijedeći način za električno polje

$$\mathbf{T} = [T_{ik}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \varepsilon_0\left(E_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2\right) & \varepsilon_0 E_x E_y & \varepsilon_0 E_x E_z \\ \hline \varepsilon_0 E_y E_x & \varepsilon_0\left(E_y^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2\right) & \varepsilon_0 E_y E_z \\ \hline \varepsilon_0 E_z E_x & \varepsilon_0 E_z E_y & \varepsilon_0\left(E_z^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2\right) \\ \hline \end{array} \tag{3.13}$$

Divergencija simetričnog tenzora je vektor koji ima komponentu — i

$$(\text{div}\,\mathbf{T})_i = \frac{\partial T_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial T_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{iz}}{\partial z}, \qquad i = x, y, z \tag{3.14}$$

Prema (3.13) pojedini članovi matrice iznose

$$T_{ik} = \varepsilon_0 E_i E_k - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \delta_{ik} \tag{3.15}$$

$$\delta_{ik} = 0, \quad i \neq k, \qquad \delta_{ii} = 1$$

Elektrostatsko polje je bezvrtložno, tj. rot $\mathbf{E} = 0$. Prema tome preostaje iz (3.12)

$$\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{T}$$

Sada je sila na naboj iz (3.3)

$$\mathbf{F}_e = \int_V \varrho \mathbf{E} \, \mathrm{d}V = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T} \, \mathrm{d}V \tag{3.16}$$

Ta jednadžba dobiva drugi oblik primjenom Gaussova stavka

$$\mathbf{F}_e = \oint_S \mathbf{T} \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \tag{3.17}$$

Plošni integral se odnosi na plohu S koja zatvara promatrani prostor volumena V. Taj je prostor ispunjen nabojem prostorne gustoće ϱ. Na taj naboj djeluje prostorna sila izražena sa (3.3). Ta se ista sila izražava plošnom silom po površini koja zatvara promatrani prostor. To je samo tako moguće, da se promatrani prostor V zamišlja sam, bez ostalog prostora koji je odbačen, a njegovo se djelovanje nadomješta plošnim silama na površini promatranog prostora. Prostorne sile na naboje drže ravnotežu s plošnim silama koje nadomještaju odbačeni dio prostora. Takve plošne sile, koje se mijenjaju od točke do točke, nazivlju se *naprezanje*, a tenzor $\mathbf{T}$ zove se *tenzor naprezanja*. Naprezanje je vektor prema (3.17)

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \tag{3.18}$$

a dano je produktom tenzora naprezanja i vektora normale. Kad se uredi (3.18), odnosno uvrste se vrijednosti iz (3.13), iznosi naprezanje u električnom polju

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_e = \mathbf{T} \mathbf{n} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} \mathbf{n}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \mathbf{n} \tag{3.19}$$

Sličan je postupak s magnetskim poljem. Promatra se vektor ($\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}$) koji ima iznos kao u (3.12), samo treba zamijeniti $\mathbf{E}$ sa $\mathbf{H}$ i $\mathbf{D}$ sa $\mathbf{B}$. Sada nastaje razlika. Magnetsko polje je bez izvora i ponora, a u praznom prostoru je zato $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. S druge strane, magnetsko je polje vrtložno, tj. $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$, te je zbog toga vektorski produkt

$$\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = - \operatorname{div} \mathbf{T} \tag{3.20}$$

Tenzor naprezanja $\mathbf{T}$ prikazuje se jednakom matricom kao u (3.13), samo treba svuda staviti $\mathbf{H}$ umjesto $\mathbf{E}$, a mjesto ε_0 staviti μ_0.

Prema tome matrica tenzora naprezanja u magnetskom polju ima oblik

$$\mathbf{T} = [T_{ik}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu_0 \left(H_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\right) & \mu_0 H_x H_y & \mu_0 H_x H_z \\ \hline \mu_0 H_y H_x & \mu_0 \left(H_y^2 - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\right) & \mu_0 H_y H_z \\ \hline \mu_0 H_z H_x & \mu_0 H_z H_y & \mu_0 \left(H_z^2 - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\right) \\ \hline \end{array}$$

Svaki član iznosi

$$T_{ik} = \mu_0 H_i H_k - \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H}^2 \delta_{ik}$$

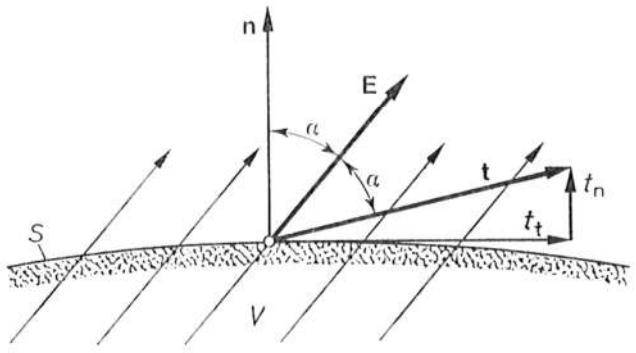
Prema tome se prostorna magnetska sila iz (3.4) može prikazati plošnom silom po relaciji

$$\mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, \mathrm{d}V = \oint_S \mathbf{T}\,\mathbf{n}\, \mathrm{d}S \tag{3.21}$$

Slično (3.19) magnetsko naprezanje iznosi

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_m = \mathbf{T}\,\mathbf{n} = \mu_0 (\mathbf{H}\,\mathbf{n})\,\mathbf{H} - \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H}^2\,\mathbf{n} \tag{3.22}$$

Naprezanja u električnom i magnetskom polju promatrao je već Maxwell primjenjujući teoriju elastičnosti, ali bez primjene tenzora. Primjena tenzora znatno pojednostavnjuje izvod naprezanja u polju. Na sl. 3.4. prikazan je dio granične plohe

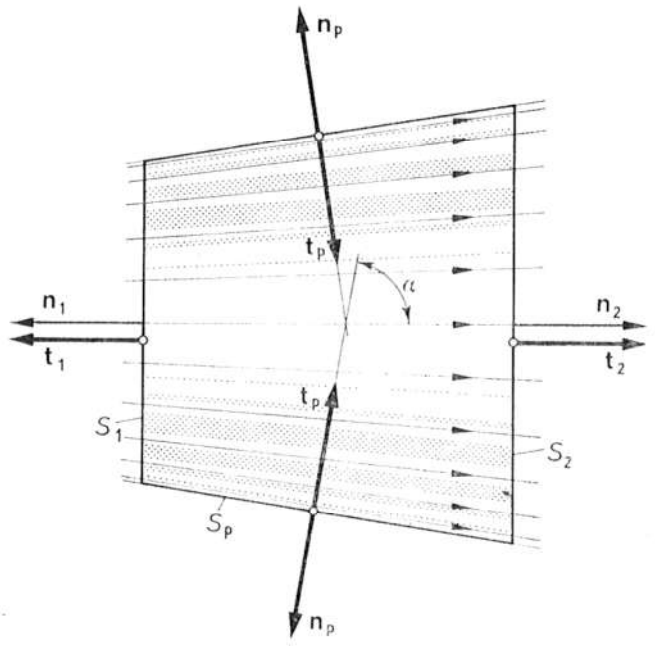


Sl. 3.4. Dio plohe koja zatvara promatrani prostor. Ustanovljenje naprezanja u polju.

S koja zatvara promatrani prostor V. Električno polje prolazi kroz plohu kao što pokazuje vektor **E**. Pokazuje se da je vektor naprezanja **t** tako usmjeren, da *vektor polja raspolavlja kut između vektora normale i naprezanja*. To olakšava snalaženje u određivanju smjera naprezanja.

3.3.1. Sile u silocijevi

Na sl. 3.5. prikazana je elementarna silocijev. Tok S_1E_1 ulazi u bazu S_1 i izlazi iz baze S_2. Ako se poštuje gornje pravilo, naprezanja na bazama gledaju iz silocijevi, a naprezanja na plaštu gledaju u silocijev. Budući da je takva situacija s naprezanjima, može se zaključiti da postoji tendencija da se *silocijev skrati*, a da joj se *presjek poveća*. To je osnova naprezanja u polju. To ujedno znači da postoji tendencija da se *otpor* silocijevi *smanji*, odnosno da joj se *provod poveća*. Silnice se



Sl. 3.5. Sile na silocijev polja. Sile i momenti vrtnje su u ravnoteži.

ponašaju u uzdužnom smislu kao pera, one su napregnute na vlak, a »htjele« bi postati kraće. One se u poprečnom smislu međusobno odbijaju. Takvo tumačenje naprezanja u polju pomaže da se lakše ustanovi smjer sila na nabijene vodiče ili na vodiče protjecane strujom. Na sl. 3.6. skiciran je vodič protjecan strujom u magnetskom polju zadane indukcije $\mathbf{B}_0$. Dobivena deformacija silnica zajedničkog polja govori da sila djeluje kao što je označeno na slici.

Sile na silocijev sa sl. 3.5. moraju biti u ravnoteži. To znači da je njihova suma jednaka nuli i suma njihovih momenata je također jednaka nuli. Silocijev ima oblik krnjeg kružnog stošca zbog jednostavnosti. Sila na baze iznosi

$$\boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,(E_2^2\,S_2 - E_1^2\,S_1) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_1^2\,S_1\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)$$

Silu na plašt se projicira u uzdužni smjer, a to je isto kao da tlak $\varepsilon_0 E_p^2/2$ na plašt djeluje na projekciju plašta u jednu bazu.

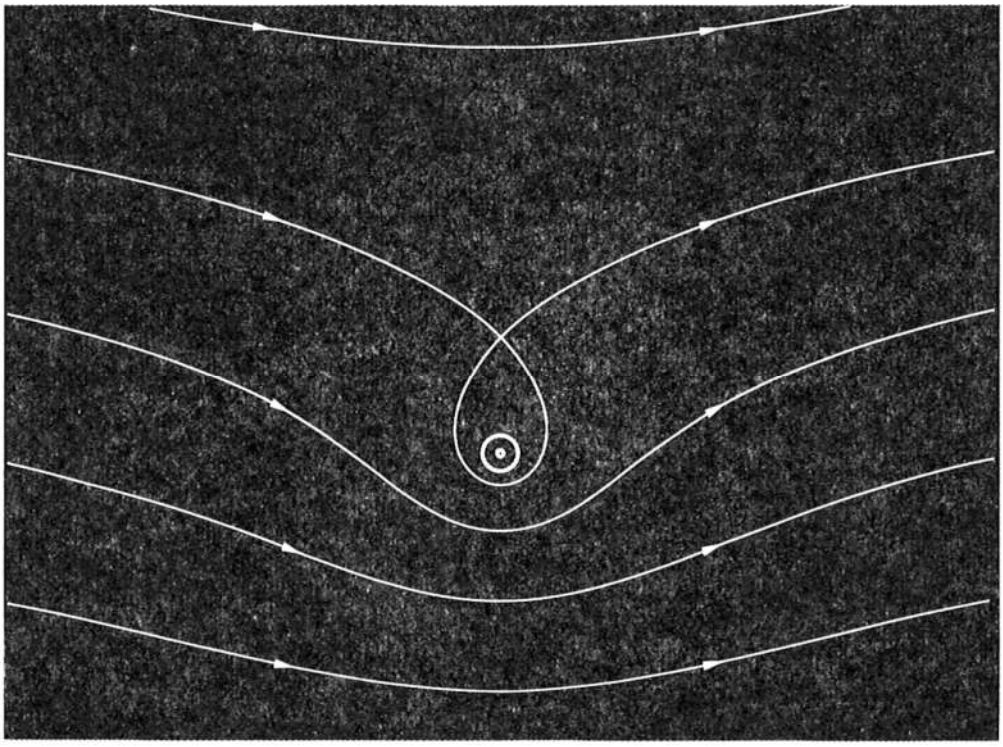
Iznos naprezanja ne ovisi o smjeru djelovanja, te uvijek iznosi za oba polja

$$t_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \qquad t_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \tag{3.23}$$

Sila na plašt F_p se dodaje sili na bazu S_2, a ona iznosi upravo

$$F_p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 S_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)$$

Zato je suma svih sila jednaka nuli. Suma svih momenata je očito jednaka nuli. Sile na silocijev se nalaze u ravnoteži.

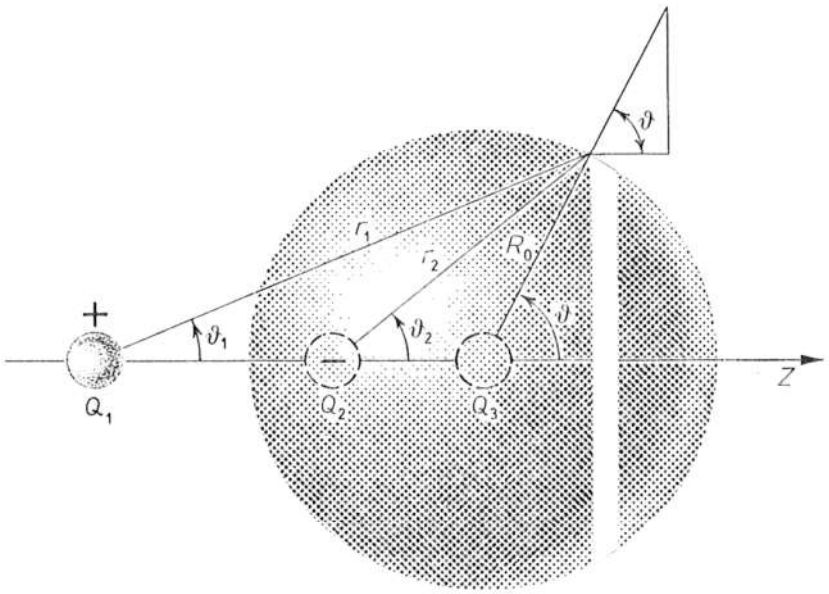


Sl. 3.6. Silnice polja ravnog, okruglog vodiča protjecanog strujom. Vodič se nalazi u vanjskom homogenom polju koje je okomito na os vodiča.

Ova razmatranja pokazuju da se sile na naboje i struje mogu izraziti i veličinama polja, odnosno plošnim silama na plohi koja obuhvaća promatrane naboje i struje. Promatranje plošnih sila često pomaže u analizi sila u elektromagnetskim sustavima. Naprezanje je intenzitet sile koja se prenosi u sustavu. Jakosti polja su tehnički ograničene. Jakost električnog polja je ograničena izolacionom sposobnošću izolatora, a jakost magnetskog polja je ograničena uzbudnim sustavom. Polje u uzduhu je kao polje u praznom prostoru. Jakost polja je dozvoljena 20 kV/mm, ako je uzduh pod tlakom od 15 bara. Naprezanje u polju dosiže tada 1800 N/m^2 = = 0,18 N/cm^2. Drukčija je situacija s magnetskom silom. Jakost magnetskog polja od 0,8 MA/m postiže se u električnih strojeva bez daljnjega. Tu je naprezanje u

polju 40 N/cm^2. To je osnovni razlog da su električni strojevi razvijeni na iskorištenju magnetske sile. Kad bi uspjelo postići vrlo visok vakuum, koji bi omogućio jakosti električnog polja od nekoliko stotina kV/mm, moglo bi se graditi strojeve iskorištavajući električne sile.

PRIMJER 3.1. Zadani su **točkasti naboj** Q_1 i **vodljiva kugla** polumjera R_0, čije je središte na udaljenosti d od naboja kao na sl. 3.7. Neka je kugla na zadanom potencijalu φ_0. Sila između naboja Q_1 i kugle se određuje iskorištavajući dosadašnja razmatranja. Budući da se prostorne sile smiju nadomjestiti plošnim silama, pokazuje se da naboj djeluje istom silom na kuglu kao i kugla na naboj. Integracija naprezanja po kugli daje traženu silu. Kugla je ekvipotencijalna ploha,



Sl. 3.7. Točkasti naboj i vodljiva nabijena kugla. Određivanje međusobne sile. Središte kugle je u ishodištu sfernog koordinatnog sustava.

te je vektor polja na nju okomit. Naprezanje je usmjereno normalno na kuglinu plohu, dakle je radijalno. Interesantna je sila koja djeluje u smjeru spojnice zadanog naboja i središta kugle. Na kugli se inducira naboj zbog djelovanja zadanog točkastog naboja u iznosu σ_1 i vlastitog naboja gustoće $\sigma_2 = \varepsilon_0 \varphi_0 / R_0$. Naprezanje na površini kugle proizvedeno je ukupnom plošnom gustoćom i iznosi $\sigma^2/(2\,\varepsilon_0) = (\sigma_1 + \sigma_2)^2/(2\varepsilon_0)$. Sila na elementarni vijenac prema sl. 3.7. iznosi u smjeru osi Z

$$\mathrm{d}F = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0} \cos\vartheta \,\mathrm{d}S$$

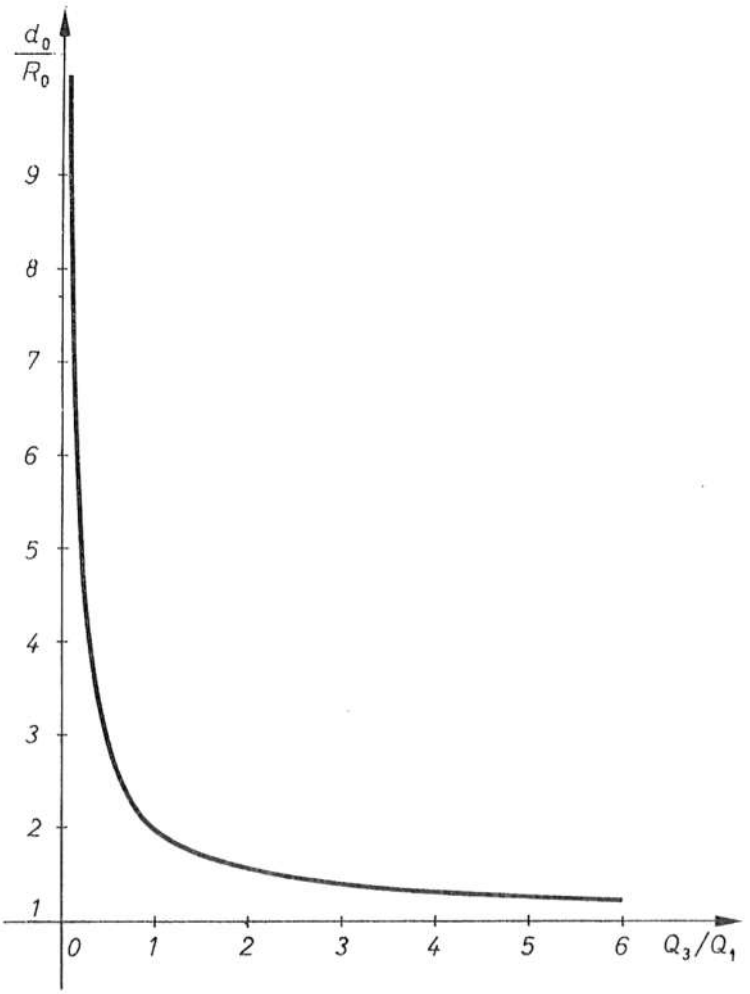
Budući da je površina vijenca $\mathrm{d}S = 2\,\pi\,R_0^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$, iznosi ukupna sila na kuglu

$$F = 2\,\pi\,R_0^2 \int_0^{\pi} \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0} \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$$

U poglavlju o dva točkasta naboja prikazan je izraz za plošnu gustoću naboja na kugli pri zadanom točkastom naboju Q_1.

Ona iznosi

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_0^2} \frac{1 - k^2}{(1 + k^2 + 2k\cos\vartheta)^{3/2}}$$



Sl. 3.8. Dijagram ovisnosti omjera d_0/R_0 o omjeru Q_3/Q_1 koji su karakteristični za silu između točkastog naboja Q_1 i nabijene kugle naboja Q_3. Sila između naboja iščezava ako su oni istog predznaka, a naboj Q_1 je na daljini d_0 od središta kugle.

ako je omjerni faktor $k = d/R_0$. Uzevši u obzir da je gustoća σ_2 konstantna po površini, sila na kuglu se sastoji od dvije komponente

$$F = F_1 + F_2$$

Tu su

$$F_1 = \frac{\pi R_0^2}{\varepsilon_0} \int_0^\pi \sigma_1^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$F_2 = \frac{2\pi R_0^2 \sigma_2}{\varepsilon_0} \int_0^\pi \sigma_1 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta$$

Integracija dovodi do iznosa sila

$$F_1 = -\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2}\frac{k}{(k^2-1)^2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$F_2 = \frac{Q_1\sigma_2}{\varepsilon_0 k^2} = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Sila F_1 je uvijek negativna, tj. ona gleda od kugle prema točkastom naboju. Sila F_2 je pozitivna ako su Q_1 i σ_2 istog predznaka. U poglavlju o dva točkasta naboja obrađeno je polje točkastog naboja i nabijene kugle, te je ustanovljeno da polje postoji samo izvan kugle, a nastalo je superpozicijom triju naboja, Q_1, Q_2 i Q_3. Naboj Q_1 je zadani točkasti naboj, naboj Q_2 je odslikani naboj Q_1 na udaljenosti a od njega, naboj Q_3 je odslikani naboj kugle u središte, a iznosi $Q_3 = 4\pi\varepsilon_0 R_0 \cdot \varphi_0$. Inače, rezultat odgovara u potpunosti osnovnom pravilu za određivanje sile po kojemu je definirana jakost polja. Sila na zadani naboj iznesi $\mathbf{F} = Q_1\mathbf{E} = Q_1(\mathbf{E}_{21} + \mathbf{E}_{31})$. Jakost polja $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{21} + \mathbf{E}_{31}$ proizvode naboji Q_2 i Q_3 na mjestu naboja Q_1. Ovime se ujedno dokazuje da je sila na kuglu jednaka sili na naboj, samo je suprotna predznaka.

Ovdje je potrebno upozoriti na interesantnu pojavu u djelovanju između točkastog naboja i nabijene kugle. Ukupna sila između točkastog naboja Q_1 i nabijene kugle na potencijalu φ_0, kojemu odgovara naboj Q_3, može se izraziti u preglednijem obliku

$$F = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[1 - \frac{Q_1}{Q_3}\frac{k^3}{(k^2-1)^2}\right] \tag{3.25}$$

Ako su naboji Q_1 i Q_3 različita predznaka, faktor u uglatoj zagradi je pozitivan, a sila među nabojima je privlačna. Situacija je posve drukčija čim su naboji istog predznaka. Tada je moguće da sila bude odbojna i privlačna, što je ovisno o predznaku uglate zagrade. Nikakva sila ne postoji ako je zadovoljena jednakost

$$\frac{k^3}{(k^2-1)^2} = \frac{Q_3}{Q_1}, \qquad \operatorname{sign} Q_1 = \operatorname{sign} Q_3, \qquad F = 0$$

Na sl. 3.8. prikazana je grafički ovisnost omjera $k = d_0/R_0$ o omjeru naboja Q_3/Q_1. Zadana kugla polumjera R_0 uvjetuje mjesto naboja Q_1 na udaljenosti d_0 od njezina središta, tako da nema sile između naboja Q_1 i Q_3. Ako se naboj Q_1 nalazi na bližoj udaljenosti od ove kritične d_0, nastaje privlačna sila, iako su naboji Q_1 i Q_3 istog predznaka. Oni se odbijaju čim je udaljenost naboja Q_1 od središta kugle veća od kritične.

PRIMJER 3.2. Zadan je **linijski naboj** na pravcu gustoće λ. On se nalazi **u uglu** između dviju vodljivih ravnina, koje su okomite jedna na drugu, prema sl. 3.9. Polje u uglu među ravninama se dobiva uzajamnim odslikavanjem naboja λ u 1 u pravce 2, 3 i 4, poštivajući pravila odslikavanja naboja na vodljivoj ravnini. Ravnine su na nultom potencijalu. **Sila na** zadani **naboj** dobiva se iz jakosti polja što ga proizvode ostala tri naboja na mjestu zadanog naboja. Komponente jakosti polja iznose na mjestu naboja 1

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

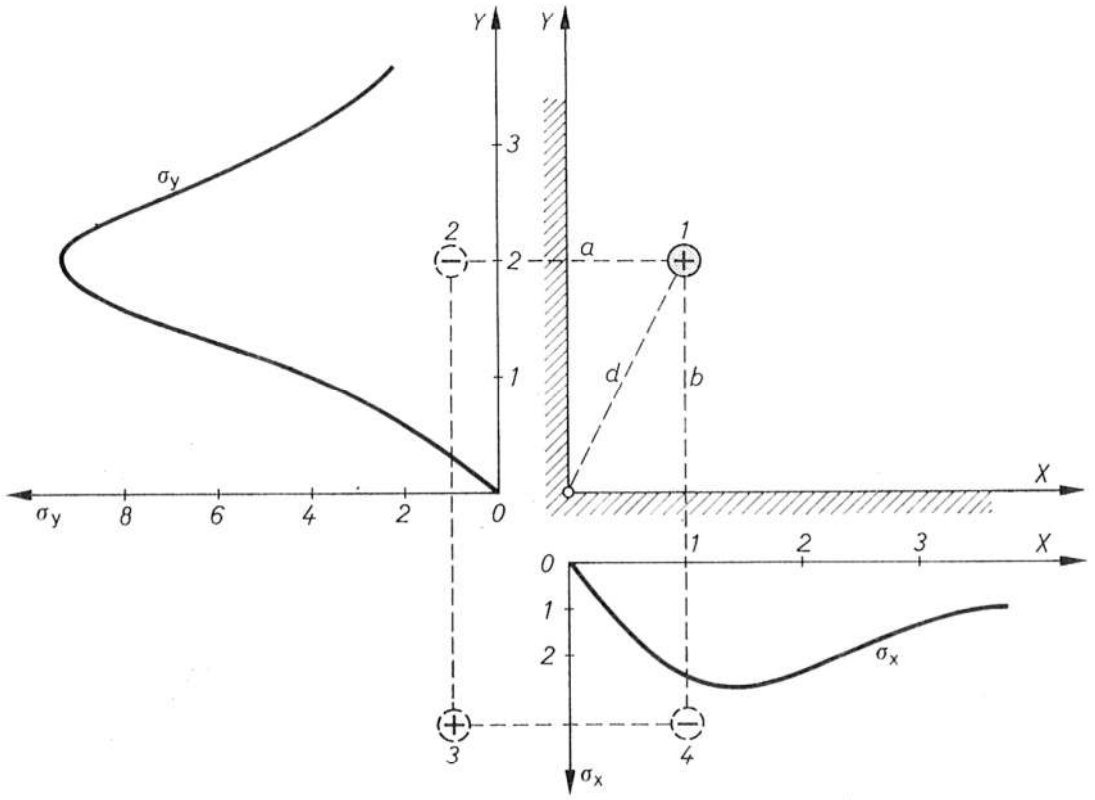
$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

a komponente sile na isti naboj iznose

$$F_x = \lambda E_x, \qquad F_y = \lambda E_y$$

Ukupna sila slijedi iz izraza $F^2 = F_x^2 + F_y^2$. Komponente sile pokazuju da postoji uvijek privlačenje između zadanog naboja i ravnina.

Silnice polja svršavaju ortogonalno na vodljivim ravninama. Sila na ravnine je okomita na njih i gleda u ugao među njima. To opet govori da je sila privlačna između naboja i ravnina. Zbog



Sl. 3.9. Naboj na pravcu u pravom uglu među ravninama koje su na nultom potencijalu. Na ravninama se inducira naboj plošne gustoće σ_x i σ_y. Odmah su prikazani dijagrami ovisnosti gustoće naboja o odgovarajućim koordinatama x i y.

ravnoteže mora biti ukupna sila na ravninu X jednaka F_y kao i na naboj, odnosno ona je na ravninu Y jednaka F_x. Iste sile se dobiju iz plošnog integrala naprezanja na pojedinoj plohi, tj.

$$F_x = \int_0^\infty \frac{\sigma_y^2}{2\,\varepsilon_0}\,\mathrm{d}y, \qquad F_y = \int_0^\infty \frac{\sigma_x^2}{2\,\varepsilon_0}\,\mathrm{d}x$$

Gustoće plošnog naboja na ravninama X i Y iznose

$$\sigma_x = -\frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{b}{(x-a)^2+b^2} - \frac{b}{(x+a)^2+b^2}\right]$$

$$\sigma_y = -\frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{a}{a^2+(y-b)^2} - \frac{a}{a^2+(y+b)^2}\right]$$

Nakon provedene integracije dobiju se iste sile kao na naboj, samo su suprotna predznaka. Na sl. 3.9. su odmah unesene gustoće naboja

3.4. ELEKTROMAGNETSKI IMPULS

Naprezanje u polju je promatrano u praznu prostoru i u statičkom stanju. Proučavanje naprezanja u praznu prostoru nema pravog smisla, jer se ne mogu promatrati njegove posljedice. Naprezanje ima smisla u prostoru ispunjenu sredstvom, jer se ono manifestira u deformaciji sredstva. Međutim, promatranje u praznu prostoru služi korisno kao prvo približenje k stanju u prostoru ispunjenu sredstvom, samo sredstvo mora biti potpuno pasivan faktor. Tenzori naprezanja ostaju jednako formirani kao u praznu prostoru, samo se mjesto ε_0 stavlja dielektričnost ε, odnosno mjesto μ_0 dolazi permeabilnost μ. Pasivno sredstvo ne mijenja svoja svojstva pod utjecajem polja niti se deformira. Potpuno sudjelovanje sredstva mora se promatrati na drugi način.

Promatranje naprezanja u statičkom polju koristi da se rezultati primijene na mnoge slučajeve gdje se zbog jednostavnosti usvaja statičko stanje. Elektromagnetsko polje je dinamičko stanje. Jednadžbe (3.12) i (3.20) moraju se ispraviti dinamičkim članovima. U tim jednadžbama valja upotrijebiti Maxwellove jednadžbe u potpunosti, te one sada glase

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{T}_e + \varrho \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{T}_m \end{aligned} \tag{3.26}$$

Odatle se dobiva prostorna Lorentzova sila

$$\mathbf{f} = \varrho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{T} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \tag{3.27}$$

Ovdje je $\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_m$ tenzor naprezanja u elektromagnetskom polju, koji je jednak zbroju električnog i magnetskog tenzora. Ukupna sila na naboje i struje uključuje jedan član koji je jednak vremenskoj derivaciji produkta $(\mathbf{D} \times \mathbf{B})$. Vremenska derivacija *impulsa sile* jednaka je sili. Prema tome se veličina

$$\mathbf{I} = \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \, \mathrm{d}V \tag{3.28}$$

mora interpretirati kao **elektromagnetski impuls.** Sila na naboje i struje prikazuje se, dakle, na slijedeći način

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \oint_S \mathbf{T}\,\mathbf{n} \, \mathrm{d}S - \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} \tag{3.29}$$

Na taj se način dobiva rezultat koji je imao velikih posljedica u kasnijem razvoju fizike. Elektromagnetsko polje posjeduje impuls. Dotada je vrijedilo da impuls posjeduju samo tijela određene mase, $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$. Elektromagnetski impuls mora imati sve karakteristike impulsa sile. *Zakon o održanju impulsa* mora vrijediti i za elektromagnetski impuls. Upravo zbog održanja impulsa nastaju sile pri njegovoj promjeni. Taj je zakon i izveden iz Newtonova zakona o jednakosti sila akcije i reakcije.

Elektromagnetski impuls ima prostorni karakter. Može se govoriti o njegovoj *prostornoj gustoći*

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \tag{3.30}$$

Može se dogoditi da u promatranom prostoru V nema niti naboja niti struja. I pored toga, prostorne sile postoje u elektromagnetskom polju zahvaljujući impulsu sila. Niti impuls nema značenja u praznu prostoru kao niti naprezanje. Svrha je ovog prikaza da se pokaže njegovo postojanje. No zato će se na granici između dva sredstva pokazati djelovanje impulsa. Polje doživljava promjenu na granici između dva sredstva, zato se mijenja i impuls. Promjena impulsa znači silu. Silu na naboje i struje može se prikazati također impulsom, *mehaničkim impulsom* $\mathbf{I}_{meh}$, tako da je

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \int_S (\varrho\,\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}V = \frac{\partial \mathbf{I}_{meh}}{\partial t} \tag{3.31}$$

Prema tome su plošne sile iz (3.29) jednake

$$\oint_S \mathbf{T}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{I}_{em} + \mathbf{I}_{meh})$$

Plošnu integraciju treba protegnuti po plohi S koja prolazi kroz područje gdje već nema polja, a time ujedno obuhvaća sve postojeće naboje i struje. Tada se promatra izolirani sustav naboja i struja. Zbog toga je plošni integral $\oint \mathbf{T}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0$, a to znači da je ukupni impuls sustava konstantan

$$\mathbf{I}_{em} + \mathbf{I}_{meh} = \text{konst.}$$

To upravo govori zakon o održanju impulsa i on se odnosi na izolirani sustav. On pokazuje da je elektromagnetsko polje *tromo* i u praznu prostoru. Ono se ne može stvoriti odjednom, niti uništiti odjednom. Potrebno je neko vrijeme za oba procesa, što će ovisiti o tome kakav će biti ulog sila u procesima.

3.5. ENERGIJA ELEKTROSTATSKOG POLJA

Energija elektrostatskog polja je u stvarnosti energija sustava električnih naboja. Sustav naboja u prostoru treba na neki način formirati. Proces formiranja sustava naboja je značajan u određivanju energije sustava. Termodinamika govori o *reverzibilnim* i *ireverzibilnim* procesima. Uloženi rad u formiranju sustava prelazi u akumuliranu energiju koja se ponovo može iskoristiti u obliku iste količine rada. To je reverzibilni proces. Entropija sustava ostaje konstantna u takovom procesu. Upravo takav se proces pretpostavlja u formiranju elektrostatskog polja sustava naboja.

Situacija je olakšana ako se isključi sredstvo u prostoru. Sustav se formira od naboja u praznu prostoru. Pri tome se izbjegavaju bilo kakvi gubitci. Najjednostavnije je, sigurno, ako se u neku točku promatranog prostora donosi zadani naboj, a polje već postoji u prostoru. U promatranoj točki vlada potencijal φ. Točkasti naboj Q donosi se iz prostora gdje nema polja, dakle s nultog potencijala. Po definiciji skalarnog potencijala izvršeni rad iznosi

$$R = -Q\varphi$$

kad se naboj Q donese *protiv* polja u točku potencijala φ. Uz pretpostavljeni reverzibilni proces energija sustava jednog točkastog naboja u polju zadana potencijala iznosi

$$W = -R = Q\varphi \tag{3.32}$$

Taj bi naboj bio sposoban da energiju iz (3.32) vrati natrag u obliku rada. Također, on bi tu energiju mogao dati u drugom obliku, npr. u obliku kinetičke energije, kad je naboj vezan na neku česticu. Jednadžba (3.32) slijedi naprosto iz definicije skalarnog potencijala. Ona je valjana koliko je valjana i definicija.

Slijedeći korak bi se sastojao u formiranju *sustava* od *dva točkasta naboja* Q_1 i Q_2. Postupak bi mogao biti da se jedan naboj drži čvrsto, a drugi se dovodi u njegovu blizinu. Neka su oba naboja pozitivna. Zato će trebati vršiti rad da bi se oni približili. Odmah se može poći od energije. Neka se čvrsto drži naboj Q_1, a donosi se naboj Q_2 u točku gdje je potencijal prvog naboja φ_{12}. Prema (3.32) energija takvog sustava mora biti $W_{12} = Q_2\varphi_{12}$. Budući da je svejedno koji se naboj drži čvrsto, može se sada držati naboj Q_2, a dovesti naboj Q_1 u točku gdje drugi naboj ima potencijal φ_{21}. Sada je energija $Q_{21} = Q_1\varphi_{21}$. Obje energije moraju biti međusobno jednake, tj. $W_{12} = W_{21}$, a energija sustava može se izraziti s obje energije

$$W = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2}(Q_1\varphi_{21} + Q_2\varphi_{12}) \tag{3.33}$$

Ovaj način prikazivanja energije dvaju naboja ne daje prednost nijednom postupku u formiranju sustava tih naboja. Svejedno je koji se naboj drži, a koji se dovodi, jer će se isti postupak izvršiti s oba naboja, ali se zato pojavljuje faktor 1/2. Postupak je sličan kad su tri naboja. Jedan se naboj drži čvrsto, a dovode se redom drugi i treći. Uzajamna energija bilo kojih dvaju naboja određuje se po (3.33). Njihova parcijalna energija iznosi $(Q_i\varphi_{ki} + Q_k\varphi_{ik})/2$. Skupina naboja se formira

dovlačeći naboj po naboj do njegova mjesta u skupini. Zato je energija skupine točkastih naboja

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{k} Q_i \varphi_{ki}, \qquad i \neq k \tag{3.34}$$

Skupina sadrži n točkastih naboja. Faktor 1/2 se pojavio, jer se sustav formirao postepeno dovlačeći naboj po naboj, svejedno kojim redom. $\sum_k \varphi_{ki} = \varphi_i$ je potencijal $(n - 1)$ naboja na mjestu i-tog naboja. Energija skupine n naboja izražava se jednostavnije umjesto (3.34)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i \tag{3.35}$$

Potencijal φ_i je potencijal svih ostalih $(n - 1)$ naboja na mjestu Q_i naboja. Jednadžba (3.35) je osnovna jednadžba za određivanje energije elektrostatskog polja. Bilo koja formacija naboja može se prikazati točkastim nabojima. Jednadžba (3.35) se razlikuje od (3.32) za faktor 1/2. Da bi se došlo do (3.32), postojeći naboj Q donesen je reverzibilnim procesom u točku postojećeg polja potencijala φ. Odnos (3.35) nastao je postepenim formiranjem sustava, a otuda faktor 1/2.

Prostorni naboj se razdijeli na elementarne iznose $\varrho \, \mathrm{d}V$, ako je ϱ prostorna gustoća naboja. Tako raspoređeni naboj ima onda energiju prema (3.35)

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varrho \varphi \, \mathrm{d}V \tag{3.36}$$

Potencijal φ je potencijal cjelokupnog naboja promatrana sustava na mjestu elementarnog volumena $\mathrm{d}V$. Volumni integral se proteže po cijelom prostoru u kojem se nalazi naboj. Na taj je način obuhvaćen cjelokupni sustav sa svim nabojima. Naboji mogu biti bilo kako raspoređeni. Oni se mogu nalaziti kao točkasti naboji i kao naboji prostorno, plošno ili linijski raspoređeni. U posljednjem slučaju će se pojaviti umjesto $\varrho \, \mathrm{d}V$ naboj $\sigma \, \mathrm{d}S$, odnosno $\lambda \, \mathrm{d}l$. Na taj se način određuje energija bilo kakvog sustava naboja.

3.5.1. Energija nabijenih vodiča

Nabijeni vodiči imaju naboj na svojoj površini. Taj se naboj promatra kao plošni, gustoće σ. Neka je vodič krut, tj. ne deformira se pod utjecajem naboja. Dva nabijena vodiča prema poglavlju 2.3. proizvode električni tok razmjeran razlici potencijala među njima. Električni tok je numerički jednak naboju Q na vodičima. Na jednom je vodiču naboj pozitivan Q, a na drugom negativan $-Q$, ali u istom iznosu. Ako je razlika potencijala među vodičima u, onda je naboj zadan sa $Q = C u$. Konstanta C je kapacitet među promatranim vodičima. Takav se uređaj zove elek-

trični kondenzator, a pojedini vodiči — elektrode. Svaka je elektroda ekvipotencijalna ploha. Zbog toga je energija električnog kondenzatora prema (3.35)

$$W = \frac{1}{2} Q u = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \tag{3.37}$$

3.5.2. Energija prikazana veličinama polja

Na primjeru prostornog naboja bit će prikazano kako se energija sustava naboja može prikazati veličinama polja. Da bi se izbjeglo sudjelovanje sredstva, neka je prostor prazan. U (3.36) prostorni naboj je vezan Maxwellovom jednadžbom za električnu indukciju div $\mathbf{D} = \varrho$. Treba uzeti u obzir da je div $(\varphi D) = \varphi$ div $\mathbf{D} +$ $+ \mathbf{D}$ grad φ. Kad se uzme u obzir da je za statička polja $\mathbf{E} = -$ grad φ, može se jednadžba (3.36) izraziti na drugi način

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}\,\mathbf{E}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2} \int_V \mathrm{div}\,(\varphi\,\mathbf{D})\,\mathrm{d}V \tag{3.38}$$

Drugi integral prelazi primjenom Gaussova stavka u plošni integral $\oint \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ po plohi koja zatvara promatrani prostor. Budući da se radi o energiji cjelokupnog sustava naboja, mora se plošni integral uzeti po području gdje polja više nema ili je zanemariva iznosa. Zbog toga iznos plošnog integrala iščezava. Prema tome se energija sustava naboja izražava veličinama polja

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}\,\mathbf{E}\,\mathrm{d}V \tag{3.39}$$

Tu je (**DE**)/2 prostorna gustoća energije. Po ovome je energija sustava naboja akumulirana u polju naboja u prostoru. To je značajan rezultat koji pokazuje da se može govoriti o energiji polja kao da ne postoje naboji. Svejedno je kako je polje nastalo. Ovdje se pošlo od prostornog naboja. Suštinski se ništa ne mijenja ako se polazi i od točkastih ili plošnih naboja. Energija električnog kondenzatora izražena sa (3.37) prikazuje se i sa (3.39). Jakost polja u uzduhu neka je 2 kV/mm. U tome se slučaju postiže gustoća energije od 17,7 džula po m^3. Ta je energija vrlo malena kad se uzme u obzir da je specifična toplina uzduha uz konstantni tlak i normalne uvjete oko 1300 džula po m^3 i po °C. Uzduh praktički niti ne osjeti energiju polja. Uzduh pod tlakom oko 15 bara podnosi mnogo jača polja, oko 15 puta više, čime se dobiva akumulirana energija preko 200 puta veća. To je već značajan iznos energije koji se termički osjeća.

Električni kondenzatori se upotrebljavaju kao energetski akumulatori. Da bi se proizveli svjetlosni bljeskovi jakog svjetlosnog intenziteta, izbija se električni kondenzator na žarulju. U novije vrijeme se upotrebljavaju kondenzatorske baterije u proizvodnji vrlo intenzivnih magnetskih polja pri ispitivanju plazme. U tehnici visokih napona proizvode se visoki naponi za ispitivanje izolacije da se kondenzatori paralelno nabijaju, a u serijskom spoju izbijaju. Tako bi se našlo još primjera primjene električnih kondenzatora kao akumulatora energije.

PRIMJER 3.3. Ubrzavanje nabijenih električnih čestica vrši se u električnom polju. Nabijene čestice su najčešće elektroni, a zatim — protoni i deuteroni, te katkad — ioni. Elektronske cijevi zasnivaju svoje funkcioniranje na ubrzavanju elektrona. Ovaj primjer ne služi da prikaže detaljnije ubrzavanje spomenutih čestica, već da ilustrira na najjednostavniji način iskorištavanje energije električnog polja. Brzina čestica ne prelazi 10 % brzine svjetla, te ne treba uzeti u obzir relativističke efekte. Energija nabijene čestice u polju pretvara se u kinetičku energiju, ako se pretpostavi da nema gubitaka energije. Čestica ima masu mirovanja m, te se njezina konačna brzina v dobiva iz jednadžbe

$$\frac{1}{2} m v^2 = Q \varphi$$

Relativistički efekti se smiju zanemariti, ako najveća brzina ne prijeđe 10 % brzine svjetla, tj. $v < 0{,}1\ c$. Akceleracija naboja ne smije biti prevelika, inače nastaje »kočno« zračenje, što treba provjeriti od slučaja do slučaja.

Karakteristična je veličina Q/m, omjer naboja čestice i njezine mase. Ona označava iznos naboja po jedinici mase. Zato je ona odsudna u ubrzavanju čestice. Akceleracija je to veća što je veći omjer Q/m. On bi se mogao zvati i *nabijenost* čestice, a pojavljuje se uvijek kad se promatra gibanje čestice u polju. Evo nekoliko vrijednosti nabijenosti

elektron	$Q/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg
proton	$Q/m = 0{,}957 \cdot 10^{8}$ C/kg
deuteron	$Q/m = 0{,}478 \cdot 10^{8}$ C/kg

Nabijenost elektrona bitno odskače od ostalih čestica. Njegova brzina iznosi

$$v = 5{,}93 \cdot 10^5 \varphi^{1/2} \text{ m/sek.}$$

Pri razlici potencijala 500 V postiže se brzina od $13{,}3 \cdot 10^6$ m/sek, što je samo 4,4 % brzine svjetla.

PRIMJER 3.4. Zadana je **kugla jednoliko ispunjena nabojem** konstantne gustoće ϱ. Polumjer kugle iznosi r_0. Energija polja takve kugle ustanovljava se iz izraza (3.36). Volumni integral produkta se provede po cijelom volumenu kugle, samo se prethodno ustanovljava potencijal polja u kugli. Ovaj put nije pregledan, a zahtijeva još k tome da se prethodno odredi potencijal u kugli. Lakši je put primjenom izraza za energiju polja (3.38). Integracija se opet provodi po volumenu kugle, a plošni integral po kuglinoj plohi, te je energija polja

$$W = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_V \mathbf{D}^2 \, \mathrm{d}V + \frac{1}{2} \varphi_0 Q_0 = W_1 + W_0$$

Na površini kugle je svuda isti potencijal $\varphi_0 = Q_0/(4\pi\varepsilon_0 r_0)$ i ista gustoća toka $D_0 = Q_0/(4\pi r_0^2)$. Plošni integral veličine $\varphi_0 D_0$ daje energiju W_0 naelektrizirane metalne kugle na potencijalu φ_0. Energija W_1 se odnosi na polje u samoj kugli gdje je raspoređeni naboj. Gustoća toka u kugli iznosi

$$D = \frac{1}{3} \varrho r = D_0 \frac{r}{r_0}, \qquad r \leqslant r_0$$

Energija polja u kugli iznosi tada za $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r$

$$W_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^{r_0} D^2 \cdot 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{Q_0}{40\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{1}{5} W_0$$

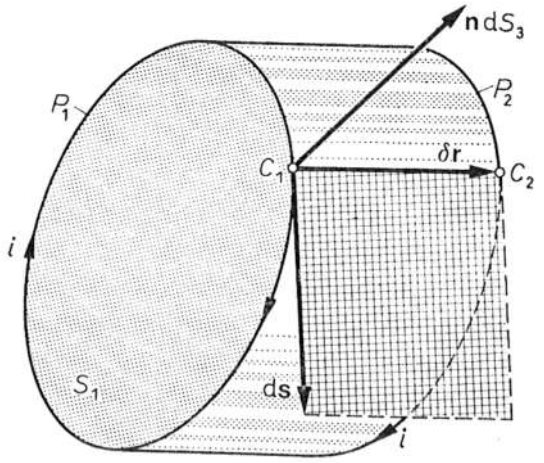
Ako se umjesto naelektrizirane metalne kugle upotrijebi kugla ispunjena nabojem konstantne gustoće naboja

$$\varrho = \frac{Q_0}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

a istog ukupnog naboja Q_0, povećava se njezina energija za 1/5 prvotne energije. To je povećanje neovisno o dimenziji kugle.

3.6. ENERGIJA MAGNETOSTATSKOG POLJA

Magnetski naboji ne postoje, te se ne može provesti isti postupak u traženju energije magnetskog polja u statičkom stanju. Treba poći od *sile na strujnu petlju* u magnetskom polju. Strujnom petljom P teče struja jakosti i. Ona se najprije ne nalazi u magnetskom polju. Zato se nju postepeno unosi u polje. Na sl. 3.10. petlja se nalazi u položaju P_1. S petljom se učini virtuelni pomak u položaj P_2.



Sl. 3.10. Strujnica se dovodi u magnetsko polje pri nepromjenljivoj struji i nepromjenljivom magnetskom polju. Strujnica se pomakne virtuelno iz položaja P_1 u položaj P_2.

Da bi se izvršio pomak, potrebno je utrošiti rad. Treba promatrati element petlje ds u točki C_1. Točka C_1 se pomakne u C_2, a element petlje ds opiše površinu $\mathbf{n}\,dS_3$. Točka C_1 prevali put $\delta\mathbf{r}$, te je opisana površina $\mathbf{n}\,dS_3 = \delta\,\mathbf{r} \times \mathrm{ds}$. Površina petlje iznosi S_1. Ona opiše prostorno cilindar koji ima baze S_1 i S_2 i plašt S_3, čiji je element dS_3. Magnetski tok kroz bazu S_2 iznosi Φ_2. Taj je tok sastavljen od tokova koji su ušli u cilindar kroz S_1 i plašt S_3. Prema tome je tok $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$. Budući da se petlja donosi iz područja bez polja, tamo je bio $\Phi_1 = 0$. Prema tome, konačni ukupni tok petlje u položaju P_2 jednak je ukupnom toku kroz plašt.

Sila na element petlje iznosi

$$d\mathbf{F} = i\,(\mathrm{ds} \times \mathbf{B})$$

Izvršeni rad iznosi za virtuelni pomak $\delta\mathbf{r}$

$$\delta\,(dR) = -\,i\,(\mathrm{ds} \times \mathbf{B})\,\delta\mathbf{r} = -\,i\,(\delta\mathbf{r} \times \mathrm{ds})\,\mathbf{B}$$

Sad se dobiva iznos virtuelnog izvršenog rada, da bi se izvršio pomak strujne petlje iz P_1 u P_2

$$\delta R = -\,i\,\delta\Phi_3$$

On je ovisan samo o virtuelnoj promjeni toka Φ_3 kroz plašt cilindra. Kad se petlja donosi iz područja gdje nije bilo polja, a njezina je *struja bila konstantna*, izvršeni rad iznosi $R = -i\Phi$, tj. energija takve petlje je

$$W = i\Phi \tag{3.40}$$

Magnetski tok Φ je tok što prolazi kroz plohu petlje u promatranom položaju, a proizvodi ga polje koje je postojalo prije nego što je petlja unesena. Jednadžba (3.40) je analogna jednadžbi (3.32) za energiju naboja u električnom polju.

Polje može biti proizvedeno od neke druge strujne petlje. Treba promatrati energiju *sustava* od *dvije strujne petlje* s_1 i s_2, kojima teku struje i_1 i i_2. Slično kao za naboje, čvrsto se drži jedna petlja, a donosi druga ili obrnuto. Kad se čvrsto drži prva petlja, a donosi druga u njezino polje, iznosi uzajamna energija

$$W_{12} = i_2 \Phi_{12}$$

U obratnom slučaju bila bi uzajamna energija $W_{21} = i_1 \Phi_{21}$. Obje energije moraju biti međusobno jednake, $W_{21} = W_{12} = W$, a uzajamna se energija izražava neovisno o redoslijedu

$$W = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2}(i_1 \Phi_{21} + i_2 \Phi_{12}) \tag{3.41}$$

Energija sustava od mnoštva strujnica se formira postepenim donošenjem strujnice iza strujnice. Ako se usvaja princip superpozicije, energija cjelokupnog sustava je

$$W = \frac{1}{2}\sum_k i_k \sum_j \Phi_{jk} = \frac{1}{2}\sum_k \sum_j i_k \Phi_{jk}, \qquad k \neq j \tag{3.42}$$

Magnetski tok $\Sigma \Phi_{jk} = \Phi_k$ je tok što ga proizvode sve ostale petlje kroz petlju k. Zato se energija sustava mnoštva strujnica prikazuje izrazom

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \Phi_k \tag{3.43}$$

Taj je izraz sličan izrazu za energiju mnoštva točkastih naboja, samo se mjesto naboja Q_k pojavljuje magnetski tok Φ_k, a mjesto potencijala φ_k — struja i_k.

Neka prostorom teku struje gustoće $\mathbf{J}$. Prostor je ispunjen strujanjem. Tok kroz neku petlju treba prikazati vektorpotencijalom, tj.

$$\Phi_k = \oint_{s_k} \mathbf{A}_k \, \mathrm{d}\mathbf{s}_k$$

a vektorpotencijal $\mathbf{A}_k$ se ustanovljava na strujnici s_k. Strujnica s_k je u stvarnosti strujna cijev kojom teče struja

$$\mathrm{d}i_k = \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_k$$

Kako su **J** i $\mathrm{d}\mathbf{s}_k$ kolinearni vektori, energija sustava kojim teku struje gustoće **J**, iznosi

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}V \tag{3.44}$$

Ova se jednadžba odnosi na prostorno strujanje. Ako se radi o plošnom strujanju linijske gustoće **K**, stavlja se umjesto produkta $\mathbf{J}\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}V$ produkt $\mathbf{K}\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}S$. Na taj se način može odrediti energija sustava električnih struja bilo kako formiranih, u obliku strujnica, prostornog ili plošnog strujanja.

3.6.1. Energija prikazana veličinama polja

Sad je moguće energiju sustava prikazati veličinama polja. Treba iskoristiti prvu Maxwellovu jednadžbu za statičko polje, rot $\mathbf{H} = \mathbf{J}$. Uzevši u obzir da su $\operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ i $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, iznosi

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A})\,\mathrm{d}V$$

Drugi integral prelazi u plošni integral po plohi koja zatvara promatrani volumen, te je energija sustava

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A})\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{3.45}$$

Da bi ovaj izraz dao energiju cjelokupnog sustava struja, mora integracioni prostor zauzeti cjelokupni prostor ispunjen poljem sustava struja. Zato plošni integral iščezava, a energija sustava se prikazuje samo prvim integralom, tj.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}V \tag{3.46}$$

a integracija se provodi po cijelom prostoru gdje postoji polje.

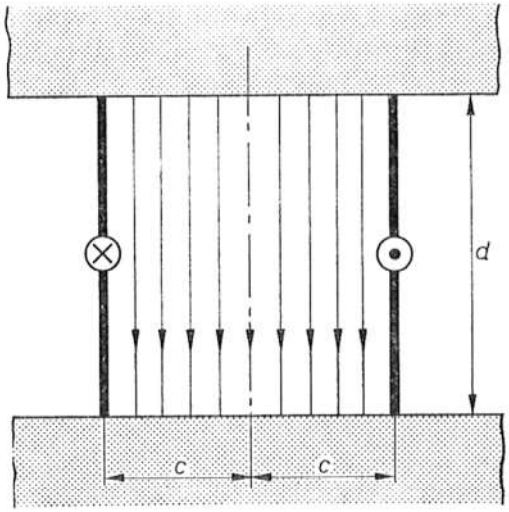
Prikazivanje energije sustava struja i naboja veličinama polja ukazuje na svojstvo polja da akumulira energiju. Ako se usvoji takvo svojstvo polja, smije se govoriti o gustoći akumulirane energije. Gustoća magnetske energije iznosi

$$w_1 = \frac{1}{2}\,\mathbf{H}\,\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0\,\mathbf{H}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \tag{3.47}$$

Čim je polje zadano svojim veličinama **B** i **H**, smije se govoriti o njegovoj energiji. Dapače, dozvoljeno je govoriti o energiji samo jednog dijela prostora, ako nije in-

teresantna energija cjelokupnog sustava. Kod električnih strojeva dosiže magnetska indukcija iznose do 1 tesla, što predstavlja gustoću energije od $0{,}4 \cdot 10^6$ J/m^3 = = 0,11 kWh/m^3. To je već značajna gustoća energije, koja još nije tehnički realizirana u električnom polju. Međutim, energije kemijskog vezanja su znatno veće, obračunate na jedinicu volumena. Na primjer, dvije molekule vodika i jedna molekula kisika daju dvije molekule vode. Energija formiranja vode u obliku vodene pare iz plina praskavca na temperaturi 25°C iznosi 2,47 eV po molekuli vodika. To iznosi 1,97 kWh po kubnom metru plina praskavca u kojem je 2/3 volumena = = 667 litara vodika na normalnom tlaku. Kubni metar praskavca na normalnom tlaku sadrži $179 \cdot 10^{23}$ molekula vodika. Energija vezanja atoma vodika u molekuli iznosi daljnjih 4,5 eV po molekuli, odnosno 3,6 kWh po m^3 praskavca. To predstavlja daljnju akumulaciju energije, a još nije obračunat kisik. Ovo je samo ilustracija u usporedbi energija kakve se tehnički postižu magnetskim poljem i energija vezanja u kemijskim procesima.

PRIMJER 3.5. Formacija *analogna pločastom kondenzatoru* postiže se stavljanjem **struja u zračni raspor** između dva feromagnetska poluprostora, kao na sl. 3.11. Feromagnetik je beskonačne permeabilnosti, te djeluje u magnetostatskom polju kao i vodič u eletrostatskom polju. Feromagnetski poluprostori su razmaknuti na udaljenost d. Struje teku u smjeru osi Z u obliku strujnog obloga na ravnom listu širine d, postavljenom paralelno ravnini X — Z. Postavljena su



Sl. 3.11. Strujni listovi u zračnom rasporu između dva feromagnetska poluprostora. Strujni listovi su paralelni i razmaknuti na daljinu $2c$. Feromagnetski poluprostori su beskonačne permeabilnosti.

dva paralelna lista na razmaku $2c$, a protjecani su strujom u suprotnom smislu. Linijska gustoća struje K je konstantna po širini lista. Magnetsko polje među listovima je homogeno i iznos mu je K, jednak linijskoj gustoći struje. Kako su označeni smjerovi struje na sl. 3.11., jakost polja iznosi $H = H_x = -K$. Budući da vektorpotencijal iščezava u $y = 0$, on iznosi $A = -\mu_0 K y$, a ima samo komponentu Z. Energija zadanog sustava slijedi iz osnovne jednadžbe (3.44) prilagođene na plošnu struju. Kako su vektorpotencijal i plošna struja jednako usmjereni, produkt je uvijek pozitivan, a uz to je i konstantan po plohi.

Zato energija iznosi po jedinici duljine

$$W = 2 \cdot \frac{1}{2} K A_0 d = \mu_0 K^2 c d$$

Ista se energija dobiva i po (3.46), jer je volumen promatranog prostora $V = 2 c d$, a polje je homogeno. To pokazuje da ne treba računati s poljem izvan promatrane prizme presjeka $2 c d$. Kako e jakost struje trake $i = K d$, a tok među trakama $\Phi = \mu_0 K \cdot 2 c$, energija je jednaka također

$$W = \frac{1}{2} i \Phi$$

PRIMJER 3.6. Polje i tok **paralelnih strujnih traka** kao na sl. 2.42. prikazani su u poglavlju 2. o statičkom polju. Poznat je vektorpotencijal na samim trakama, a linijska gustoća struje je konstantna. Produkti $K A$ su jednaki na obje trake, te je **energija** dana integralom

$$W = -2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-c}^{c} K A_1 \, dx = -K \int_{-c}^{c} A_1 \, dx$$

Isti integral se pojavljuje u proračunu ulančenog toka istih strujnih traka. Zato se energija može izraziti ulančenim tokom

$$W = c K \Psi = \frac{1}{2} i \Psi$$

Jakost struje trake jednaka je $i = 2 c K$, a Ψ je ulančeni tok zadanih strujnih traka, koji se također izražava induktivitetom u citiranom primjeru iz poglavlja o statičkom polju. Ovaj primjer ukazuje na povezanost energije i ulančenog toka, odnosno induktiviteta.

3.7. ENERGIJA DIPOLA

Električni dipol je jednostavniji za promatranje. Naboji $-Q$ i Q su smješteni na osi Z u elektrostatskom polju, kao na sl. 3.12. Naboj $-Q$ nalazi se na ekvipotencijalnoj plohi potencijala φ_1, a naboj Q je na drugoj plohi potencijala φ_2. Energija dipola iznosi tada

$$W = -Q \varphi_1 + Q \varphi_2 = Q (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Promjena potencijala $(\varphi_1 - \varphi_2)$ je diferencijalnog karaktera zbog malog razmaka a među nabojima. Zato se ona može prikazati u obliku

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial a} \cdot a$$

Budući da je $(-\partial\varphi/\partial a) = E_a$ jakost polja u smjeru dipola, a $Q a = p$ dipolni moment, energija dipola unesena u polje jakosti **E** iznosi

$$W = -\mathbf{p}\,\mathbf{E} \tag{3.48}$$

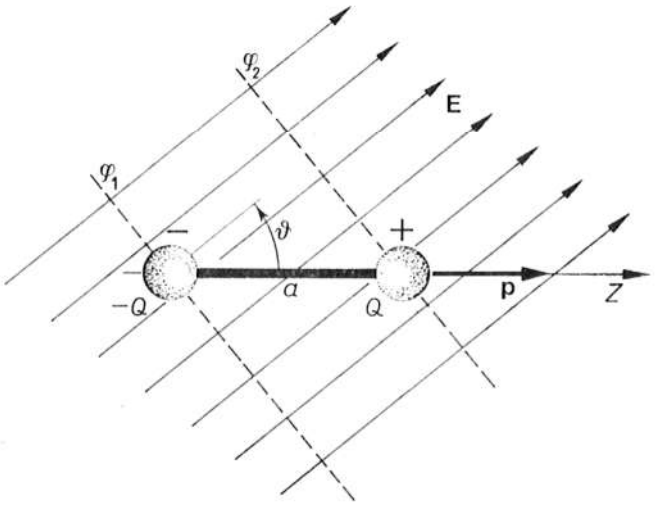
Ovdje se ne računa međusobna energija naboja u dipolu, jer se razmak a među nabojima održava stalnim. Ista energija slijedi i iz sile na dipol, koja iznosi po (3.8) $(\mathbf{p}\,\nabla)\,\mathbf{E}$. Ako se dipol pomakne virtuelno vršeći rad za $\delta\mathbf{s}$, nastaje prirast na njegovoj energiji za

$$W = -\,(\mathbf{p}\,\nabla)\,\mathbf{E}\,\delta\mathbf{s}$$

Tada je ukupna energija

$$W = (\mathbf{p}\,\nabla)\,\varphi = \mathbf{p}\,(\nabla\,\varphi) = -\,\mathbf{p}\,\mathbf{E}$$

To je isti rezultat kao u (3.48). Negativni predznak energije lakše se tumači na primjeru slobodnog dipola. Takav dipol se nastoji gibati u jače polje, bez obzira



Sl. 3.12. Električni dipol unesen u električno polje. Dipol je polariziran u smjeru osi Z.

na predznak polja, kako je bilo ustanovljeno u poglavlju 3.2. Prema tome, da bi slobodni dipol došao iz područja gdje nema polja, u točku gdje je jakost polja $\mathbf{E}$, *on vrši rad*, a ne da treba vršiti rad. Zato je rad pozitivan, a *energija je negativna.*

Energija magnetskog dipola iznosi po analogiji polja

$$W = -\,\mathbf{p}\,\mathbf{H} \tag{3.49}$$

Ona se izvodi uz pomoć sile koja djeluje na dipol ili pak na strujnu petlju.

Energija sustava skupine dipola, odnosno polja nastalog od skupine dipola, dobiva se sličnim postupkom kao i energija sustava skupine naboja. Taj slučaj nije interesantan s tehničkog stanovišta. Najjednostavnije je pogledati samo uzajamnu energiju dvaju dipola. Neka su dipoli u praznu prostoru, a imaju različite dipolne momente $\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{p}_2$. Razmaknuti su na udaljenost r, a $\mathbf{r}_0$, jedinični radijus-vektor, gleda od prvoga prema drugome dipolu. Jednadžbom za jakost polja električnog dipola, energija sustava dvaju električnih dipola iznosi

$$W = -\,\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^3}\,[3\,(\mathbf{p}_1\,\mathbf{r}_0)\,(\mathbf{p}_2\,\mathbf{r}_0) - \mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2] \tag{3.50}$$

Slična je jednadžba za magnetske dipole, samo se mjesto ε_0 stavlja μ_0.

Drugačije se promatra energija sustava koji nastaju kad se skupina dipola u cjelini unosi u polje. Takva se skupina izražava jedinstvenim dipolnim momentom kao u poglavlju 2.7. Energija takvog sustava je prikazana jednadžbom (3.48), odnosno (3.49). Skupina dipola se svodi u suštini na skupinu točkastih naboja za koje vrijedi rečeno u prethodnim poglavljima.

3.8. SREDSTVO U POLJU

Sile i energije bile su promatrane u praznu prostoru da ne bi trebalo govoriti o utjecaju sredstva koje ispunjava promatrani prostor. Sredstva se dijele na vodiče i izolatore. Ona se drukčije ponašaju u elektrostatskom, a drukčije u magnetostatskom polju. Vodič je sposoban da vodi električnu struju. Elektrostatsko polje ne može postojati u njemu, a magnetostatsko polje može postojati. Izolator nije sposoban da vodi struju. Elektrostatsko polje može postojati u njemu, ali ne može voditi struju. Pored toga postoje materijali, feromagnetici, koji imaju naročito izraženu permeabilnost. Oni zato omogućuju postizavanje velikih magnetskih tokova, uz male jakosti polja. U osnovi, svi se materijali jednako ponašaju prema magnetskom polju. Osnovna podjela na vodiče i izolatore odnosi se na električno polje.

Ako se izuzme vođenje struje, materijale treba promatrati sastavljene od dipola, električnih i magnetskih. Utjecaj sredstva na polje ili obrnuto svodi se na međusobno djelovanje polja i dipola. Unošenje sredstva u polje jednako je unošenju dipola u polje. Energetsko stanje sustava se mijenja unošenjem sredstva u polje. Ovdje se nužno nameće potreba da se uzmu u obzir termodinamičke zakonitosti.

Termičko stanje sredstva zadano je tlakom, gustoćom ili volumenom i temperaturom. Ono se izražava *jednadžbom stanja* $f(p, V, T) = 0$. Ova jednadžba stanja pokazuje da su dovoljne *dvije neovisne varijable* da bi se izrazilo termičko stanje sredstva. *Temperatura* T je jedna od neovisnih varijabli. Druga neovisna varijabla najčešće je *volumen* V, mjesto koga se često upotrebljava *specifični volumen* po jedinici mase sredstva. Specifični volumen je recipročna vrijednost gustoće sredstva. Treća veličina, tlak p, je tada ovisna veličina, jer se on može odrediti iz jednadžbe stanja $f(p, V, T) = 0$. Ako se u odabranom procesu promjene stanja ne mijenjaju volumen niti temperatura, onda sredstvo ne sudjeluje u procesu termodinamički. Međudjelovanje sredstva i polja pokazuje se samo elektromagnetski. To se može reći i za termički izolirani sustav. Njegova se energija može mijenjati samo ulogom rada u dovođenju naboja i njegovoj deformaciji.

Jednadžba (3.36) daje energiju sustava prostorno raspoređenog naboja. Varijacija energije iznosi na račun varijacije gustoće naboja

$$\delta W = \int_V \varphi \, \delta\varrho \, \mathrm{d}V \tag{3.51}$$

Maxwellova jednadžba vrijedi i za varijaciju naboja $\operatorname{div} \delta\mathbf{D} = \delta\varrho$.

Ako se obuhvati cjelokupno polje, varijacija energije sustava iznosi

$$\delta W = \int_V \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}\,\mathrm{d}V$$

Ako se promjena indukcije **D** vrši postepeno od ništice do nekog konačnog iznosa, energija sustava je

$$W = \int_V \mathrm{d}V \int_{\mathbf{D}} \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D} \tag{3.52}$$

Kad je linearni odnos između jakosti polja i indukcije, $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$, energija polja dobiva oblik

$$W = \int_V \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\mathbf{E}^2\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\,\mathbf{E}\mathbf{D}\,\mathrm{d}V \tag{3.53}$$

To je isti oblik kao u (3.39). Gustoća energije iznosi sada $\varepsilon\,\mathbf{E}^2/2 = \mathbf{E}\,\mathbf{D}/2$, što neposredno slijedi jedno iz drugoga. Ta se energija superponira na toplinsko stanje sredstva, a ne postoji toplinsko međudjelovanje.

Sličan je postupak u dobivanju jednadžbe energije sustava struja, odnosno magnetskog polja. Ona je slična (3.52), te glasi

$$W = \int_V \mathrm{d}V \int_{\mathbf{B}} \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B} \tag{3.54}$$

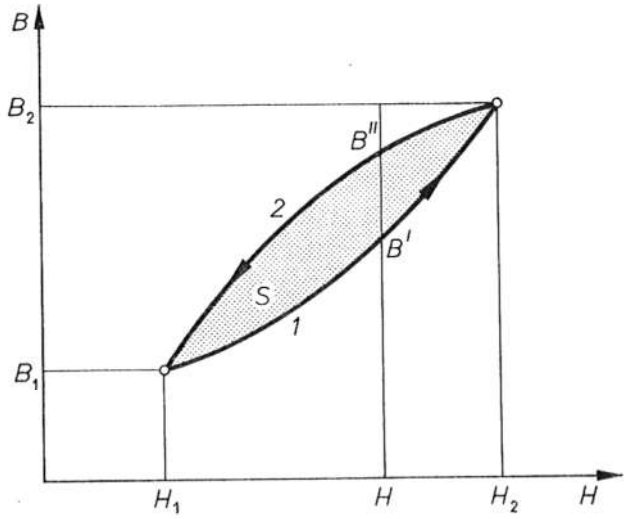
Kad je linearni odnos između jakosti polja i indukcije $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$, gustoća energije glasi kao prije u (3.47), tj. ona iznosi

$$w_1 = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,\mu\,\mathbf{H}^2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{H}\,\mathbf{B} \tag{3.55}$$

3.8.1. Histereza

Posebno je interesantan proces promjene u sustavu kad dolazi do pojava histereze, koja stalno prati *feromagnetike*. Na sl. 3.13. prikazana je funkcionalna ovisnost **B**(**H**) u jednom ciklusu. Indukcija **B** se mijenja od iznosa $\mathbf{B}_1$ do iznosa $\mathbf{B}_2$, a zatim natrag od $\mathbf{B}_2$ do $\mathbf{B}_1$. Feromagnetici imaju svojstvo da nije svejedno da li se promjena vrši od $\mathbf{B}_1$ prema $\mathbf{B}_2$ ili od $\mathbf{B}_2$ prema $\mathbf{B}_1$. Indukciji $\mathbf{B}_1$ odgovara jakost polja $\mathbf{H}_1$, a indukciji $\mathbf{B}_2$ — jakost polja $\mathbf{H}_2$. Međutim, jakosti polja **H** koja je $\mathbf{H}_1 < \mathbf{H} < \mathbf{H}_2$, ne odgovara određena indukcija. Indukcija ima vrijednosti $\mathbf{B}'$ i $\mathbf{B}''$ prema grani ciklusa magnetiziranja. U stvarnosti je moguće da se postignu sve

indukcije između $\mathbf{B}'$ i $\mathbf{B}''$, ako se usvoji neki drugi ciklus koji mora biti unutar prvobitnog. Ne treba ulaziti u fizikalne osnove histereze, nego se samo utvrđuje njezino postojanje, a treba pogledati kakve ona ima energetske posljedice.



Sl. 3.13. Petlja histereze feromagnetskog materijala pri malim promjenama magnetskog polja.

Prvi zakon termodinamike je u suštini zakon o održavanju energije. On govori da se unutrašnja energija U sustava sastoji od privedene topline Q i utrošenog rada R. To se izražava jednadžbom

$$U = Q + R \tag{3.56}$$

Ta jednadžba ima čisto termodinamički karakter. Magnetska energija povećava unutarnju energiju sustava i ona se dodaje na privedenu toplinu i izvršeni rad. Prema tome jednadžba stanja je

$$U = Q + R + W_{\mathrm{m}}$$

ako je W_{m} magnetska energija sustava. Prilikom cikličkog magnetiziranja neka se ne vrši nikakav rad, $R = 0$. Tada se unutarnja energija sustava sastoji od privedene topline i magnetske energije.

Kako se promjena unutarnje energije vrši samo promjenom temperature sustava, treba proces cikličkog magnetiziranja izvršiti na konstantnoj temperaturi. U tome slučaju ostaje unutarnja energija nepromijenjena. Unutarnja energija po jedinici volumena sada iznosi, ako je q toplina po jedinici volumena

$$u = q + \int_{\mathbf{B}} \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B}$$

Procesom magnetiziranja se dolazi u isto polazno stanje, a unutarnja se energija ne mijenja. Integracija po cijelom ciklusu se svodi na

$$u = 0 = q + \int_{B_1}^{B_2} \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B} + \int_{B_2}^{B_1} \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B} = q + \int_{B_1}^{B_2} [(\mathbf{H}\,\delta\mathbf{B})_1 - (\mathbf{H}\,\delta\mathbf{B})_2]$$

Integral predstavlja površinu petlje histereze, a predznak mu je negativan, jer je većeg iznosa dio integrala po grani 2. *Sustav prima toplinu zbog histereze.* Prostorna gustoća primljene topline jednaka je površini petlje histereze u koordinatnom sustavu **B** (**H**). Ta je toplina po jedinici volumena

$$q = \int_{B_1}^{B_2} [(\mathbf{H}\,\delta\mathbf{B})_2 - (\mathbf{H}\,\delta\mathbf{B})_1] \tag{3.57}$$

Budući da se zadržava konstantna temperatura, ta se toplina dobiva od sustava, te je zato pozitivna. U ovom slučaju se histerezom dobiva toplina, jer je odabran najjednostavniji proces. Zbog histereze nastaju gubici energije koji su karakteristični za sve feromagnetike. Histereza je poznata i u dielektrika, a ima isti karakter. Određuje se na isti način, samo se mjesto **H** i **B** u (3.57) stavlja **E** i **D** za električno polje. Histereza je pojava poznata i u mehaničkom, cikličkom naprezanju materijala. I u tom slučaju ima isti karakter i posljedice.

Magnetski utjecaj sredstva se prikazuje veličinom koja se zove polarizacija **P**, pa je indukcija jednaka $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}$. Sada se integral $\int \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B}$ svodi na dva integrala. Kad je magnetiziranje ciklično, preostaje samo dio koji se odnosi na polarizaciju, te je sada (3.57)

$$q = \int_{H_1}^{H_2} [(\mathbf{H}\,\delta\mathbf{P})_2 - (\mathbf{H}\,\delta\mathbf{P})_1]$$

Takav se rezultat mogao i očekivati jer je histereza posljedica isključivo ponašanja materijala.

Pokazuje se da se u svakom slučaju električna i magnetska energija dodaje unutarnjoj energiji sustava k ostalim oblicima energije. Ona ima karakter potencijalne energije.

3.8.2. Unošenje sredstva u polje

Unošenje sredstva u polje mijenja energetsko stanje sustava. Ono ne pretpostavlja ispunjavanje sredstvom kompletnog promatranog prostora, već samo jednog njegova dijela. Kako se sredstvo sastoji od dipola, može se očekivati da će sile biti usmjerene na uvlačenje sredstva u polje. Posljedica takvog usmjerenja sila je smanjenje energije sustava. Treba uzeti u obzir da se sustav naboja ne mijenja unošenjem sredstva u promatrani prostor. Ova se pojava razlikuje od unošenja dipola u polje. Polje troši energiju na uvlačenje sredstva u svoj prostor i uz to još i na formiranje dipola i njihovo usmjeravanje. Neka je promatrani prostor V ispunjen

nabojem raspoređenim po zadanom sustavu. *Sustav naboja se ne mijenja unošenjem sredstva u prostor V.* Ovo će razmatranje biti izvršeno na primjeru unošenja dielektrika u električno polje. Prostor V je prvobitno ispunjen dielektrikom dielektričnosti ε_1. Prema tome vrijedi odnos $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1$ u cijelom prostoru V, a akumulirana energija je zadana sa (3.53) $W_1 = 1/2 \int \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1 \, dV$. U prostor se unese neki drugi dielektrik dielektričnosti ε_2, volumena V_2. Polje se mijenja skokom na granici između oba dielektrika po pravilima ponašanja polja na granici. Neka se u prvi trenutak dielektričnost mijenja postepeno od ε_1 na ε_2, a ne skokom. Na taj način je dozvoljeno uvesti dielektričnost ε koja se mijenja ovisno o mjestu u prostoru, a krajnje su joj granice ε_1 i ε_2. Sada je energija novog stanja $W_2 = 1/2 \int \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_2 \, dV$. Razlika u energiji oba sustava iznosi

$$W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}_2 \mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1) \, dV$$

Podintegralna funkcija se prikazuje na drugi način u obliku

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1 = (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1)(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) + \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_1 - \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2.$$

Prvi pribrojnik na desnoj strani iznosi za statička polja

$$(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1)(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = -\operatorname{grad}\varphi \, (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \varphi \operatorname{div}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) - \operatorname{div}[\varphi(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)]$$

Tu je naprosto uzeto da je $\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 = -\operatorname{grad}\varphi$. Budući da se raspored naboja nije mijenjao, tj. $\operatorname{div}\mathbf{D}_1 = \operatorname{div}\mathbf{D}_2 = \varrho$, to je $\operatorname{div}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0$. Sad se prostorni integral toga pribrojnika svodi na plošni integral vektora $\varphi(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)$ po plohi koja zatvara cijeli prostor V. Ploha se odabire tako, da obuhvaća cjelokupno polje, a tada plošni integral iščezava. Razlika u energiji poprima sada nešto drukčiji oblik

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}_2 \mathbf{D}_1 - \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2) \, dV = W_2 - W_1 \qquad (3.58)$$

Stvarno je stanje da dielektrik 2 ispunja dio prostora volumena V_2, a oba su dielektrika oštro odijeljeni jedan od drugoga. Prostorni integral u (3.58) treba razdijeliti na dio prostora s dielektrikom 1 i na dio prostora V_2 koji je ispunjen dielektrikom 2. Odnos indukcije i jakosti polja jednak je $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_2$ i $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1$ u dielektriku 1. Zato prostorni integral (3.58) u tom dijelu prostora iščezava. Odnos $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1$ ostaje u prostoru V_2, jer to odgovara prvobitnom polju, ali je zato sada $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2$. Razlika u energiji konačno iznosi

$$W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \int_{V_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \, dV \qquad (3.59)$$

Ona je pozitivna ili negativna, ovisno o razlici dielektričnosti. Neka posluži kao primjer dielektrična kugla opisana u poglavlju 2.8. Ona se polarizira u homogenu

polju jakosti $\mathbf{E}_1$, a u njoj polje ostaje homogeno i ima jakost $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot 3\varepsilon_1/(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. $\mathbf{E}_2$ je jednako usmjereno kao $\mathbf{E}_1$, te predznak razlike u energiji W ovisi isključivo o predznaku razlike dielektričnosti $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Kapljica vode u transformatorskom ulju smanjuje energiju električnog polja u ulju. Ona biva uvučena u ulje. Obrnuta je situacija s mjehurićem uzduha u transformatorskom ulju. On povećava energiju polja.

Posebno je važno stanje kad se neki dielektrik dielektričnosti ε unosi u prazan prostor. Tada je $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0$, a $\varepsilon_2 = \varepsilon$ i $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}_2$. Promjena energije, nastala unošenjem dielektrika u prazni prostor, iznosi

$$W = -\frac{1}{2}\int_{V_2} \mathbf{P}\,\mathbf{E}_0\,\mathrm{d}V \tag{3.60}$$

Energija sustava naboja u praznu prostoru se smanjuje unošenjem dielektrika. Energija dipola bila je po (3.48) $-\mathbf{p}\,\mathbf{E}$. Ovdje se pojavljuje faktor 1/2 koji je posljedica formiranja i usmjeravanja dipola u polju. Moglo bi se reći za (3.60) da predstavlja također energiju dielektrika volumena V_2 unesenog u polje jakosti $\mathbf{E}_0$.

Dielektrična kugla ima konstantnu polarizaciju po svome volumenu ako se unese u homogeno polje jakosti $\mathbf{E}_0$. Dipolni moment takve kugle iznosi

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}\,V_0 = 3\,V_0\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_0}\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}_0$$

Energija dielektrične kugle unesene u prazan prostor ispunjen poljem $\mathbf{E}_0$ iznosi

$$W = -\frac{3}{2}\,V_0\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_0}\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}_0^2$$

Ako pločasti kondenzator volumena V ima energiju $W_0 = \varepsilon_0\,\mathbf{E}_0^2\,V/2$, odnos energija iznosi

$$\frac{W}{W_0} = -3\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_0}\,\frac{V_0}{V}$$

Prostor među elektrodama pločastog kondenzatora ispunjen je kapljicama vode u količini $V_0/V = 0{,}01$. Dielektričnost vode je $\varepsilon_1 = 81\,\varepsilon_0$, te je smanjenje energije pločastog kondenzatora za 2,9 %.

Sasvim je ista situacija s energijom koja nastaje unošenjem sredstva u magnetsko polje, a jednadžba glasi

$$W = -\frac{1}{2}\int_{V} \mathbf{P}\,\mathbf{H}_0\,\mathrm{d}V \tag{3.61}$$

Tu je $\mathbf{P}$ magnetska polarizacija. Neka posluži kao primjer *feromagnetska kugla* konstantne permeabilnosti $\mu = \mu_0\,\mu_r$. Polje je u kugli homogeno, jakosti

$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 \cdot 3\,\mu_0/(2\,\mu_0 + \mu)$. Polarizacija kugle je konstantna i iznosi $\mathbf{P} = (\mu - \mu_0)\,\mathbf{H}_0 \cdot 3\,\mu_0/(2\,\mu_0 + \mu)$. Dakle, energija feromagnetske kugle unesene u homogeno polje $\mathbf{H}_0$ iznosi

$$W = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \cdot 3\,V_0\,w_0, \qquad w_0 = \frac{1}{2}\mu_0\,\mathbf{H}_0^2 \tag{3.62}$$

Obično je $\mu_r \gg 1$, te je energija kugle približno $W = -3\,V_0\,w_0$. V_0 je volumen kugle. Feromagnetik je razdijeljen u obliku kuglica i zauzima 5% cjelokupnog prostora. Zato je 15% smanjenje prvobitne energije cijelog prostora.

3.8.3. Sile u sredstvu

Sile u sredstvu se utvrđuju najjednostavnije iz promjene energetskog stanja, ako se izvrši virtuelna deformacija sredstva koje ispunjava promatrani prostor. Kad se vrši deformacija sredstva, npr. ekspanzija, mijenja se i njegovo termičko stanje, a time se mijenjaju i osnovne termičke veličine, temperatura, gustoća, tlak. Dielektričnost i permeabilnost ovise o gustoći i temperaturi. Može se očekivati da će naprezanje biti ovisno također o gustoći i temperaturi. Na taj se način tumače piezoelektričnost i magnetostrikcija. Strogo uzevši, treba uzeti u obzir zakone termodinamike, da bi se moglo utvrditi pravo stanje sila u materijalu u polju. Ovdje neće biti primijenjen takav postupak.

U poglavlju 3.3. prikazana su naprezanja u polju u odsustvu sredstva, dakle u praznu prostoru. Kad se unese sredstvo, pojavljuju se dodatne sile koje se u stvarnosti odnose na sile na dipole. Sila na naboj u električnom polju iznosila je $\varrho\,\mathbf{E}$ po jedinici volumena. Na tu silu se superponira sila na dipole $(\mathbf{P}\,\nabla)\,\mathbf{E}$ po jedinici volumena. Polarizacija $\mathbf{P}$ je dipolni moment po jedinici volumena. Budući da je $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}$, a grad $\mathbf{E}^2 = 2\,(\mathbf{E}\,\nabla)\,\mathbf{E}$, iznosi sila na dielektrik po jedinici volumena $(\mathbf{P}\,\nabla)\,\mathbf{E} = 1/2\,(\varepsilon - \varepsilon_0)$ grad $\mathbf{E}^2$. Prema tome je ukupna prostorna sila

$$\mathbf{f} = \varrho\,\mathbf{E} + \frac{1}{2}\,(\varepsilon - \varepsilon_0)\,\text{grad}\,\mathbf{E}^2 \tag{3.63}$$

Ovdje je uzeto u obzir da se dielektričnost izotropno mijenja od točke do točke.

Ako se zanemari utjecaj gustoće i temperature na dielektričnost, ali se dozvoli prostorna promjenljivost, ostaje tenzor naprezanja kao u (3.13), odnosno (3.15), samo treba uvesti mjesto ε_0, dielektričnost sredstva ε. Prema tome su pojedini elementi tenzora naprezanja kao u (3.15), tj.

$$T_{ik} = \varepsilon\,E_i\,E_k - \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\mathbf{E}^2\,\delta_{ik} \tag{3.64}$$

Odatle je pojedina komponenta f_i prostorne sile dana sa

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial k}, \qquad \begin{matrix} i = x, y, z \\ k = x, y, z \end{matrix} \tag{3.65}$$

Točno jednaki izrazi su za magnetsko polje, samo se mjesto dielektričnosti uvrštava permeabilnost, a umjesto **E** pojavljuje se **H**. Postupak je dalje kao u poglavlju 3.3., a vrijede isti zaključci kao tamo. Jednadžba (3.64) vrijedi dok god se smatra da su dielektričnost i permabilnost neovisni o temperaturi i gustoći. Ovisnost o temperaturi i gustoći je interesantna samo ukoliko se odnosi na polje, a ne na vanjske termičke utjecaje. Statički vanjski utjecaji se uzimaju u obzir uzimanjem druge vrijednosti dielektričnosti, odnosno permeabilnosti.

Sila na dielektrik po jedinici volumena prikazuje se također sa

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} w, \qquad w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \tag{3.66}$$

Gustoća energije se postiže u pogonu oko 5 džula po m^3 u uzduhu u normalnim okolnostima. Gradijenti energije postižu se u uzduhu do 2500 džula po m^3 i po m. Ako se radi o kapljicama vode dielektričnosti 81, postižu se elektrostatske sile i do 200.000 $N/m^3 = 0{,}2$ N/cm^3. Specifična težina vode iznosi 9810 N/m^3, što je znatno manje od elektrostatske sile na kapljice vode. Ovi gradijenti energije postižu se u blizini vodiča visokonaponskih vodova. Elektrostatske sile djeluju tako, da se vlaga skuplja na vodovima pod naponom.

Sila na feromagnetik po jedinici volumena slično se prikazuje kao sila u elektrostatskom polju, tj.

$$\mathbf{f} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \operatorname{grad} w, \qquad w = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}^2 \tag{3.67}$$

Gradijent energije ovisi o iznosu jakosti polja i o njezinu gradijentu. Tehnički se postižu velike jakosti polja, tako da gradijenti energije postižu velike iznose. Primjerima se ilustrira koliki se gradijenti mogu očekivati.

PRIMJER 3.7. U poglavlju 2 je prikazan primjer polja **prstenaste struje.** Na osi prstena jakost polja je dana jednadžbom (2.113), koja glasi

$$\frac{H_{z0}}{H_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{r_0}\right)^{3/2}}, \qquad H_0 = \frac{i}{2 r_0}$$

Koordinata Z je ujedno os prstena kojim teče struja i. Referentna energija odgovara polju u središtu prstena i ona iznosi

$$w_0 = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 = \frac{1}{8} \mu_0 \frac{i^2}{r_0^2}$$

Energija polja na osi Z iznosi relativno prema w_0

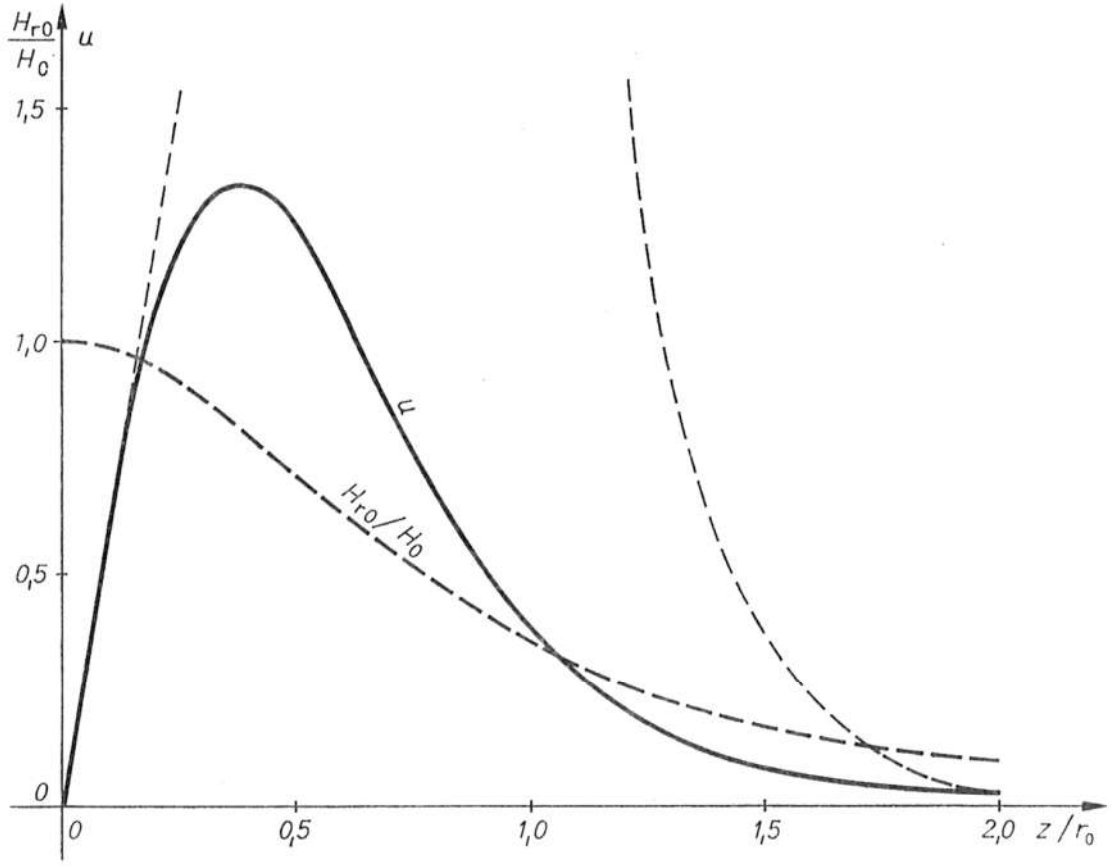
$$\frac{w}{w_0} = \left(\frac{H_{z0}}{H_0}\right)^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{r_0^2}\right)^3}$$

Prema tome je odatle **gradijent energije** u smjeru osi Z

$$\text{grad}_z\, w = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{w_0}{r_0} u$$

$$u = 6 \cdot \frac{\frac{z}{r_0}}{\left(1 + \frac{z^2}{r_0^2}\right)^4}$$

Konstanta u je prikazana na sl. 3.14. u ovisnosti o omjeru z/r_0. Ona postiže svoj maksimum na mjestu $z/r_0 = 0{,}378$, a iznosi $u_{max} = 1{,}33$. Ona razmjerno naglo opada s udaljenošću z od središta prstena struje. Na istom dijagramu je prikazana jakost polja u ovisnosti o koordinati z.



Sl. 3.14. Dijagrami ovisnosti konstante sile u i jedinične jakosti magnetskog polja H_{z0}/H_0 o relativnoj udaljenosti z/r_0 na osi kružne strujnice. Kružna strujnica ima polumjer r_0.

Prsten promjera 200 mm može doseći jakost polja u središtu $H_0 = 5000$ A/m bez posebnih tehničkih pomagala. Njoj odgovara energija po jedinici volumena od 157 J/m³. Maksimalni gradijent energije iznosi $-157 \cdot 1{,}33/0{,}2 = -1040$ J/m³/m. On je negativan, te je sila usmjerena prema središtu prstenaste struje. Taj je gradijent znatno manji nego što se postiže električkim poljem. Razlog treba tražiti u malom iznosu jakosti polja H_0.

PRIMJER 3.8. Strujni cilindar, solenoid, prikazan je također u poglavlju 2. Os cilindra se poklapa s osi Z cilindričkog koordinatnog sustava, a jakost polja iznosi tamo prema jednadžbi (2.119)

$$H_{z0} = \frac{K}{2}\left[\frac{c+z}{[r_0^2+(c+z)^2]^{1/2}} + \frac{c-z}{[r_0^2+(c-z)^2]^{1/2}}\right]$$

Tu je K linijska gustoća struje cilindra koja slijedi iz ukupne struje po relaciji $K = i/(2\,c)$, gdje je $2\,c$ duljina cilindra. Jakost polja u središtu cilindra iznosi

$$H_0 = K\frac{c}{(r_0^2+c^2)^{1/2}}$$

a ona može poslužiti kao referentna veličina, odnosno njezina energija $w_0 = \mu_0 H_0^2/2$. Odnos energija na osi Z ustanovljava se iz jakosti polja i glasi

$$\frac{w}{w_0} = \left(\frac{H_{z0}}{H_0}\right)^2 =$$

$$= \frac{r_0^2+c^2}{4\,c^2}\left[\frac{(c+z)^2}{r_0^2+(c+z)^2} + 2\,\frac{(c+z)(c-z)}{[r_0^2+(c+z)^2]^{1/2}[r_0^2+(c-z)^2]^{1/2}} + \frac{(c-z)^2}{r_0^2+(c-z)^2}\right]$$

Gradijent energije u smjeru osi Z se opet prikazuje jednadžbom

$$\operatorname{grad}_z w = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{w_0}{r_0}u$$

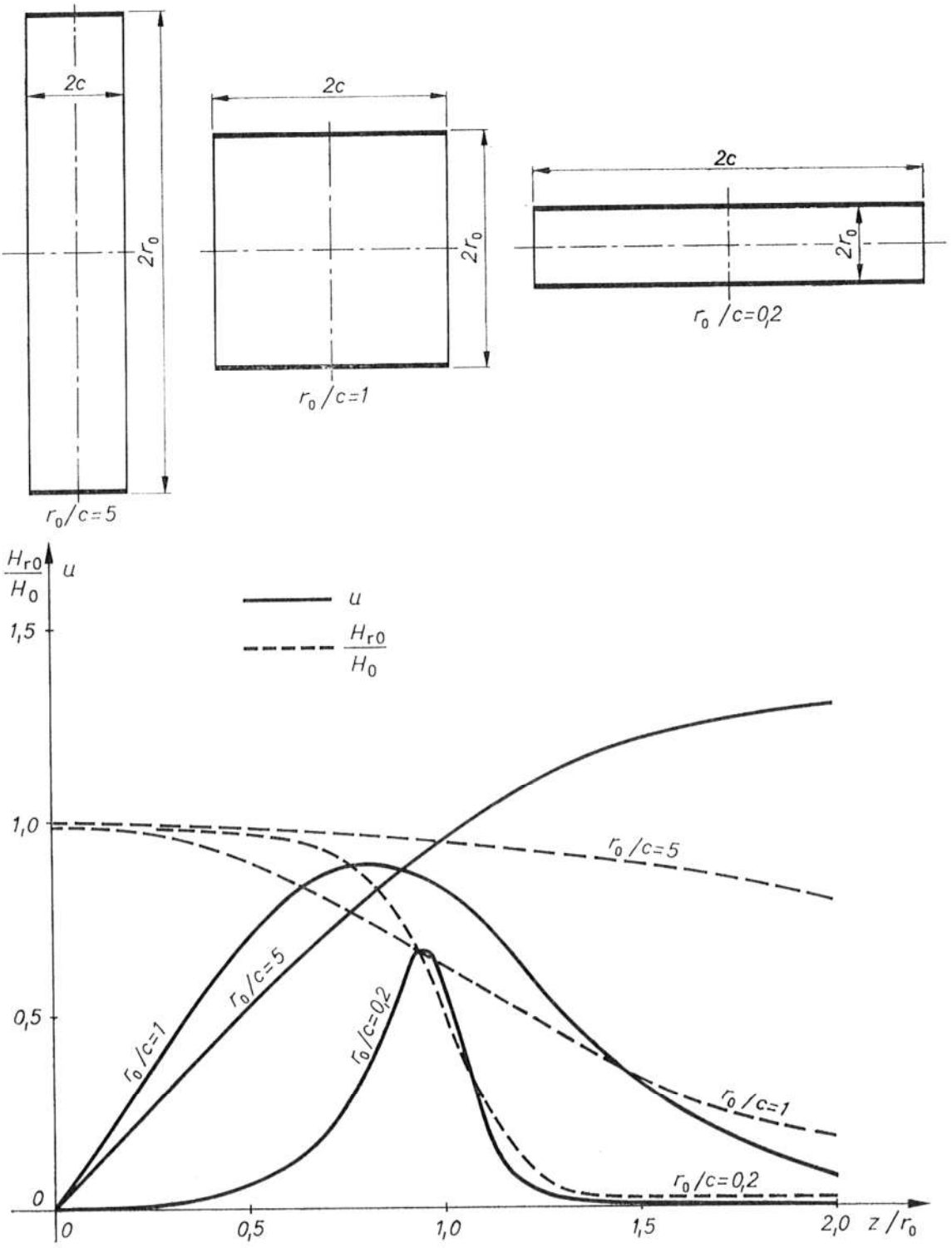
$$u = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r_0^2}{c^2}\right)f(\alpha)$$

$$f(\alpha) = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)(\sin^3\alpha_2 - \sin^3\alpha_1) \qquad (4.68)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{z+c}{r_0}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{z-c}{r_0}$$

Gradijent energije je zamršen izraz, te je donekle nepregledan. Ipak se može zaključiti da je sila usmjerena prema središtu strujnog cilindra — solenoida. Na sl. 3.15. je prikazan dijagram ovisnosti konstante u o udaljenosti na osi cilindra z/c, a za različite odnose dimenzija r_0/c. Interesantno je da su tri prikazane krivulje znatno različite po svome obliku. Ista slika 3.15. prikazuje dijagram iznosa jakosti polja na osi cilindra H_{z0}/H_0 u relativnom iznosu, a u ovisnosti o udaljenosti na osi z/c, relativno prema duljini cilindra. Duži cilindar, manjeg omjera r_0/c, ima izrazitiju promjenu polja kod izlaska iz cilindra. Zato je jače izražen maksimum gradijenta energije i sile. Kratki cilindar, velikog omjera r_0/c, ima relativno blaže opadanje polja. To je razlog da gradijent energije nema naročito izražen maksimum, a on se nalazi daleko izvan cilindra. Navedeni primjer cilindra, omjera $r_0/c = 5$, pokazuje da se maksimum gradijenta energije nalazi na udaljenosti $z/c = 1{,}9$. Konstanta u iznosi u tome primjeru 1,31. Iako ona nadmašuje znatno maksimum $u = 0{,}56$ cilindra s omjerom $r_0/c = 0{,}2$, ipak kratki cilindar ima znatno manji gradijent energije, odnosno silu. Neka oba cilindra imaju istu linijsku gustoću struje K i jednak promjer $2\,r_0$. Omjer prvog cilindra $r_0/c = 5$, a drugog $r_0/c = 0{,}2$. Prvi je cilindar izrazito kratak, a drugi je izrazito dug. Kad se uzme u obzir iznos energije $w_0 = \mu_0 H_0^2/2$, najveći gradijenti energije kratkog i dugog cilindra se odnose kao 1 : 10,7. Navedeni dugi cilindar je u stanju da proizvodi gotovo jedanaest puta veću magnetsku silu nego kratki cilindar iste linijske gustoće struje i istog promjera. Dugi cilindar je 25 puta duži od kratkog cilindra u ovom slučaju. Dijagram na sl. 3.15. daje krivu sliku apsolutnih iznosa. On je koristan pri ocjenjivanju ovisnosti sile i jakosti polja o položaju na osi Z.

Neka je zadan solenoid promjera 80 mm i duljine 400 mm. Njegova linijska gustoća struje iznosi 30 A/mm. Kako je $r_0/c = 0{,}2$, iznosi jakost polja u središtu $H_0 = 30/1{,}02 = 29{,}4$ A/mm. Njoj odgovara gustoća energije $w_0 = 545$ J/m^3. Najveći gradijent energije iznosi 17 850 J/m^3/m, a usmjeren je prema središtu solenoida. Čestice feromagnetika imaju permeabilnost 200. Gustoća magnetske sile je konačno $f = (200-1)\,17\,850 = 3{,}57\cdot 10^6$ N/m^3 = 3,57 N/cm^3. Težina



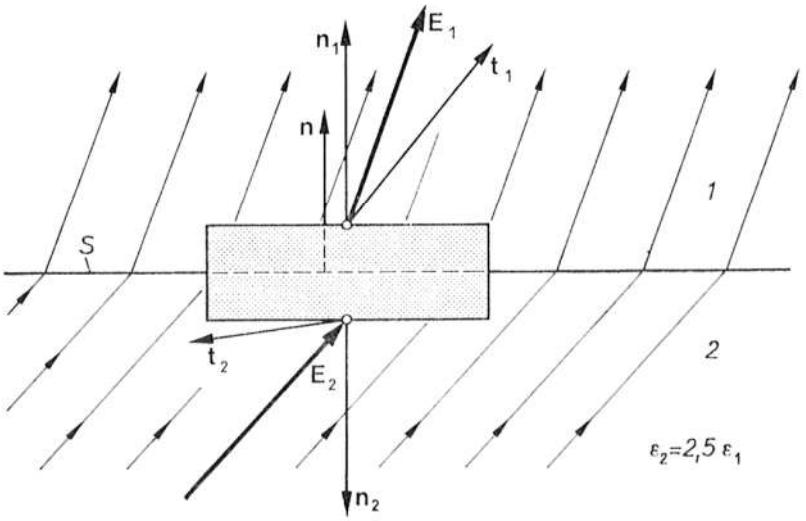
Sl. 3.15. Dijagrami ovisnosti konstante sile u i jedinične jakosti magnetskog polja $H_{z0}/H_0 = h$ o relativnoj udaljenosti z/c na osi strujnog cilindra od njegova središta. Gornja slika su presjeci triju strujnih cilindara. Odabrane su tri proporcije promjera cilindra prema njegovoj duljini $r_0/c = 5, 1, 0{,}2$. Dijagrami se odnose na te proporcije po redu $u(5)$, $u(1)$, $u(0{,}2)$ i $h(5)$, $h(1)$, $h(0{,}2)$.

željeza iznosi 0,077 N/cm^3, što je tek 46-ti dio magnetske sile. Čestice feromagnetika smiju imati dimenzije koliko dozvoljava stupanj homogenosti polja. Gustoća sile se odnosi na neku točku u polju, a čestica zauzima prostor. Ako se želi računati silu na taj način, potrebno je prethodno provjeriti stupanj homogenosti polja u prostoru što ga zauzima čestica. Polje ne bi smjelo biti suviše promjenljivo u prostoru što ga zauzima čestica.

3.8.4. Sila na granici

Sile na granici između dva dielektrika slijede iz dosadašnjih razmatranja Naprezanje iznosi po (3.19), uzevši u obzir »pasivni« odnos dielektrika prema polju

$$\mathbf{t} = \varepsilon\,(\mathbf{E}\,\mathbf{n})\,\mathbf{E} - \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\mathbf{E}^2\,\mathbf{n} \tag{3.69}$$



Sl. 3.16. Mali cilindar na granici između dva sredstva. Granicu prolazi električno polje. Određivanje električnog tlaka na granici između dva sredstva.

Na sl. 3.16. prikazan je cilindar, dovoljno malen da se može uzeti da je u njemu polje konstantno. Silu na plašt treba zanemariti. Tada ukupna sila na jedinicu površine iznosi

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$$

Uzevši u obzir da je $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ sa sl. 3.16., te da nema naboja na granici, $\sigma = 0$, mora biti prema poglavlju 1.11. $D_{n1} = D_{n2} = D_n$ i $E_{t1} = E_{t2} = E_t$. Zato je tlak na granici

$$\mathbf{t} = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\,D_n - \frac{1}{2}\,(\mathbf{E}_1\,\mathbf{D}_1 - \mathbf{E}_2\,\mathbf{D}_2)\,\mathbf{n} \tag{3.70}$$

Tangencijalna komponenta iščezava, jer je $E_{t1} = E_{t2}$, i postoji samo normalna komponenta, a ona iznosi

$$t_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) D_n^2 + \frac{1}{2}\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,E_t^2 \tag{3.71}$$

Budući da normala $\mathbf{n}$ na graničnu plohu gleda u sredstvo 1, pozitivni tlak t_n gleda također u sredstvo 1. Tlak je pozitivan iz (3.71), ako je $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. *U statičkom električnom polju tlak između dva dielektrika gleda iz sredstva veće dielektričnosti u sredstvo*

manje dielektričnosti. Sredstvo veće dielektričnosti nastoji da ispuni prostor u kojem je sredstvo manje dielektričnosti. Tlak kao sila na jedinicu površine uvijek je usmjeren *normalno* na graničnu plohu. Transformatorsko ulje u polju nastoji ispuniti prostor u kojem je uzduh. Tangencijalna komponenta sile ne smije postojati, jer bi nastalo gibanje dielektrika pod utjecajem takve sile. Čim je samo normalna komponenta sila, ona djeluje kao *tlak na granici*, tj. uvijek normalno na plohu. Tlak postoji uvijek, bez obzira kojim smjerom polje prolazi granicu.

Sila na granici u magnetskom polju slijedi sličnim postupkom kao i za električno polje, samo što se uvrste adekvatne veličine. Tlak na granici između dva sredstva iznosi u magnetskom polju prema (3.71)

$$t_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) B_n^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) H_t^2 \tag{3.72}$$

Ovdje se pretpostavlja da nema struja na granici, tj. linijska gustoća struje je $\mathbf{K} = 0$. Tada su uvjeti na granici $B_{n1} = B_{n2} = B_n$ i $H_{t1} = H_{t2} = H_t$. I u magnetskom statičkom polju nastoji sredstvo veće permeabilnosti da prodre u prostor ispunjen sredstvom manje permeabilnosti. Sile na granici između dva sredstva pojavljuju se zapravo kao posljedica sile na dipole. Sredstvo je elektromagnetski sastavljeno od slobodnih dipola. Slobodni dipol nastoji doći u jače polje. Sredstvo veće dielektričnosti, odnosno permeabilnosti, ima veću polarizaciju **P**, tj. ima veći dipolni moment po jedinici volumena. Zato ono nastoji ispuniti prostor u kojem je polje. Ovakav odnos sila, odnosno tlakova na granici, postoji samo u statičkom polju. Dinamičko polje, tj. elektromagnetsko polje, uzrokuje drukčije odnose sila, jer raspolaže elektromagnetskim impulsom sile. Nova sila se superponira na statičku, te čak mijenja njezin predznak.

PRIMJER 3.9. Tlak na dielektričnu kuglu koja se nalazi u homogenu polju se određuje uz pomoć relacije (3.71) za tlak između dva dielektrika. Homogeno polje ima jakost E_0, a djeluje u smjeru osi Z. Kugla ima dielektričnost ε_1, a okolno sredstvo — ε_2. Jakost polja na površini kugle u sredstvu 2 određena je u poglavlju 2.8. i ona iznosi

$$E_{r2} = + \frac{3\,\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2} E_0 \cos\vartheta$$

$$E_{\vartheta 2} = - \frac{3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2} E_0 \sin\vartheta$$

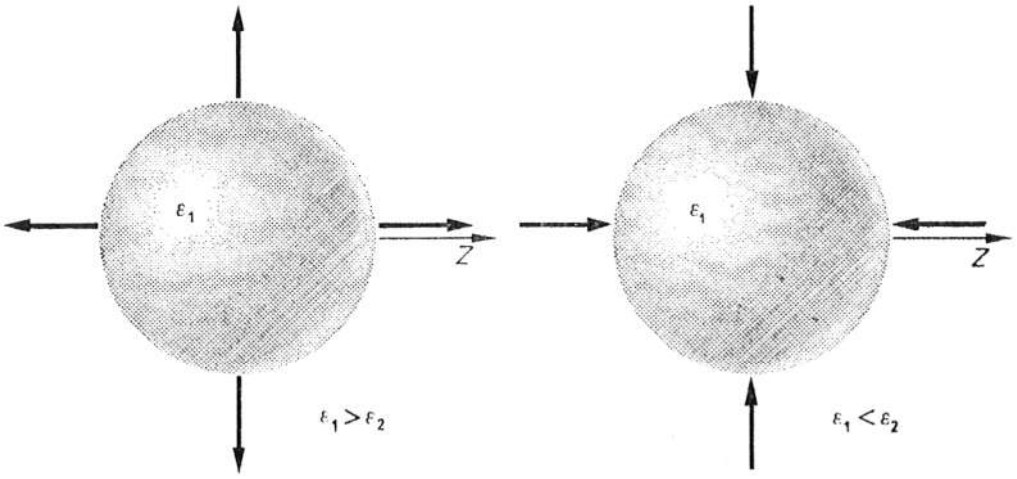
Budući da u ovom zadatku normala gleda u sredstvo 2, ε_1 i ε_2 moraju zamijeniti svoja mjesta u (3.71). Isto tako je $D_n = \varepsilon_2 E_{r2}$, a $E_t = E_{\vartheta 2}$. Tlak na kuglu s time iznosi

$$t_n = t_0 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + \cos^2\vartheta\right)$$

$$t_0 = \frac{9}{2}\,\varepsilon_2 E_0^2 \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\right)^2 \tag{3.73}$$

Tlak t_0 je uvijek pozitivan. Predznak tlaka t_n ovisi o odnosu dielektričnosti. Ako je $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, tlak t_n na kuglu je pozitivan po cijeloj njezinoj površini, a veći je u smjeru osi Z. Na sl. 3.17. prikazan je taj slučaj. Kugla teži da se deformira u sferoid izdužen u smjeru polja. Ako je $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$,

tlak je kao na sl. 3.17., tj. on je negativan, a veći je u smjeru okomitom na os Z. Kugla se opet teži deformirati u sferoid izdužen u smjeru polja. Kugla se nastoji deformirati jednako u oba slučaja i ako tlak promijeni predznak.



Sl. 3.17. Dielektrična kugla u homogenom polju. Lijeva se slika odnosi na kuglu veće dielektričnosti od okoline, a desna slika pripada kugli manje dielektričnosti od okoline.

Ako se kugla prereže ravninom okomitom na smjer polja, indukcija polja u procjepu jednaka je indukciji u kugli

$$\mathbf{D}_1 = \frac{3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\,\mathbf{E}_0$$

Taj odnos slijedi iz poglavlja 2.8. Polje u procjepu je homogeno. Tlak u procjepu iznosi iz (3.71), uz $E_{t1} = 0$ i $D_n = D_1$

$$t_{n1} = t_0\,\frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \tag{3.74}$$

Njegov predznak ovisi o odnosu dielektričnosti kugle ε_1 i vanjskog prostora ε_2. t_0 je veličina iz (3.73). Sad se može odrediti ukupna sila na polukugle, koja djeluje u smjeru polja. Ona je jednaka razlici sile u procjepu i sile na vanjsku površinu polukugle projicirane u smjer polja. Sila u procjepu se dobiva integriranjem tlaka (3.74) po presjeku kugle. Sila na vanjsku površinu polukugle slije li integriranjem tlaka (3.73) po cijeloj njezinoj površini i projiciranoj u smjer polja. Sila među polukuglama iznosi

$$F = \frac{1}{2}\,\pi\,r_0^2\,t_0 = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2}\right)^2 \varepsilon_2\,E_0^2\,\pi\,r_0^2 \tag{3.75}$$

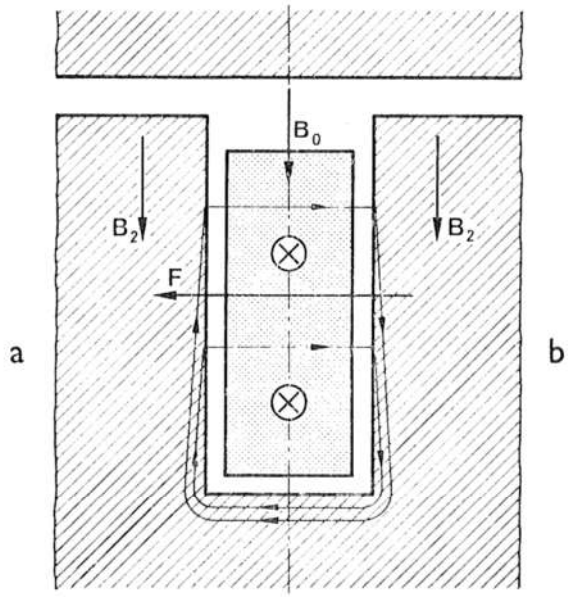
Ona je uvijek pozitivna, bez obzira na odnos dielektričnosti. To znači da se polukugle uvijek privlače, bez obzira na odnos dielektričnosti. Sila u procjepu je $F_1 = F_0\,\varepsilon_1/(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, a sila na vanjskoj površini polukugle

$$F_2 = F_0\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

Ukupna je sila $F = F_1 - F_2 = F_0/2$. To je kao u (3.75), ako je $F_0 = \pi\,r_0^2\,t_0$. Prethodna razmatranja smiju se primijeniti i na vodljivu kuglu. Njezina je dielektričnost $\varepsilon_1 = \infty$ u statičkom polju. Dobiveni odnosi vrijede i za kugiu u magnetskom polju, samo se moraju uključiti u jednadžbe magnetske veličine.

Neka je homogeno polje jakosti $H_0 = 100$ kA/m u uzduhu, tj. $\mu_2 = \mu_0$. U njega se unosi željezna kugla vrlo velike permeabilnosti $\mu_1 \gg \mu_2$. Tada je $t_0 = 5{,}65$ njutna po cm^2. Privlačna sila među polukuglama je 2,83 njutna po cm^2 presjeka kugle.

PRIMJER 3.10. Sila na vodič u utoru električnog stroja utvrđuje se preko tlaka na granici željezo-uzduh. Profil utora je pravokutan zbog jednostavnosti kao na sl. 3.18. Vodič je pravokutan, a njime protječe struja jakosti i. Gustoća struje je konstantna po cijelom presjeku vodiča. Narinuto polje je homogeno u zoni utora, a njegova je jakost u oba zuba H_0. Isto tolika je jakost polja u utoru, ako vodičem ne teče struja. Uvjeti za prolaz polja su isti na obje strane utora, a isto tako su i veličine polja iste. Tlak na površini zuba gleda u utor, on je jednak s obje strane, te je i sila ista. To je slučaj stroja u praznu hodu, a kao takav nije interesantan.



Sl. 3.18. Presjek pravokutnog utora u električnom stroju. U utoru je vodič protjecan strujom. Određivanje magnetske sile na vodiču u utoru.

Kad vodičem teče struja, ona proizvede svoje magnetsko polje, koje se superponira na narinuto polje. Slika polja se poremeti, a polje nije isto s obje strane utora. Na sl. 3.18. nacrtana je jedna silnica koju proizvodi struja vodiča. Ona praktički normalno ulazi iz utora u zub, a prolazi gotovo tangencijalno zubom. Prema slici, polje vodiča i narinuto polje se pomažu u zubu b, a protivni su u zubu a. Može se očekivati da će biti veći tlak na površini zuba b, nego zuba a. Zato će i ukupno sila gledati od zuba b prema zubu a. Toga smjera bila bi i sila na vodič protjecan strujom kao na sl. 3.18. kad bi se nalazio u magnetskom polju H_0.

Mikrostruktura sila je vrlo složena, jer je magnetsko polje vrlo složeno. Ovdje ne treba ulaziti u stvarnu konstrukciju električnog stroja. Naprotiv, treba uvesti pojednostavnjenja, koja ipak ne sakrivaju pravu fizikalnu sliku. Utor je vrlo dubok u odnosu na njegovu širinu. Zračni raspor između statora i rotora stroja je malen prema širini utora. Zbog toga se smije uzeti da se indukcija polja u zračnom rasporu mijenja skokovito. Ona je u zoni utora $\mu_0 H_0$, a u zoni zuba iznosi $\mu_2 H_0$. Jednadžba (3.72) pokazuje da se tlak na granici sastoji od dva člana. Prvi je ovisan o normalnoj komponenti indukcije, a drugi o tangencijalnoj komponenti jakosti polja. Normalna komponenta polja je ista s obje strane utora, samo je suprotna predznaka. Zato ona ne doprinosi ukupnoj sili, jer su odnosni dijelovi tlaka jednaki i suprotna predznaka. Tangencijalna komponenta jedina doprinosi rezultantnoj sili na strane utora. Djelovanjem struje vodiča pojavljuje se tangencijalna komponenta koja se superponira na narinuto polje H_0. Ukupne tangencijalne komponente polja iznose $H_a = H_0 - H_1$ i $H_b = H_0 + H_1$.

Zbroj tlaka na istoj dubini s jedne i druge strane iznosi iz (3.78)

$$t = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_0)(H_b^2 - H_a^2) = 2(\mu_2 - \mu_0) H_0 H_1$$

Struja vodiča se zamišlja da teče stranama utora, na svakoj strani $i/2$. U tome slučaju može se govoriti o linijskoj gustoći struje. Ona iznosi $i/(2h)$, ako je h dubina utora. Tangencijalna komponenta polja H_1 jednaka je linijskoj gustoći struje, tj. $H_1 = i/(2h)$. Magnetska sila na strane utora zato iznosi $F = t h$ po jedinici aksijalne duljine. Prema tome je sila

$$F = (\mu_2 - \mu_0) H_0 i$$

Ona se sastoji od razlike sila $F_2 = \mu_2 H_0 i = B_2 i$ i $F_0 = \mu_0 H_0 i = B_0 i$. Sila na vodič u utoru protjecan strujom iznosi upravo $F_0 = B_0 i$ po jedinici aksijalne duljine. Prema tome je ukupna sila na vodič i strane utora jednaka $F_2 = B_2 i$.

Ovaj rezultat pokazuje da je magnetska sila na strane utora znatno veća od sile na vodič. Ona je toliko veća, koliko je permeabilnost materijala zuba veća od μ_0. Numerički odnosi nisu toliko značajni koliko fizikalni. Narinuto polje u utoru je uvijek maleno, te je sila, tangencijalna na vodič, uvijek vrlo malena. Moment vrtnje u električnom stroju djeluje praktički preko magnetske sile na strane utora. Sila na vodič je zanemariva.

Struja u utoru iznosi oko 5000 A u većim sinhronim generatorima, a efektivni iznos magnetske indukcije u zračnom rasporu je 0,64 tesla. Tada je srednja sila po utoru 3200 N po metru duljine vodiča, ako nema faznog pomaka izmedu struje i indukcije.

3.9. VODIČ U ELEKTROSTATSKOM POLJU

Vodič u polju pokazuje neke karakteristike koje se ne mogu naći kod dielektrika. Bitna je osobina vodiča da polje ne može postojati u njegovoj unutarnjosti. Električni naboj se skuplja na površini vodiča. Njegova je plošna gustoća razmjerna jakosti polja, $\sigma = \varepsilon E$, ako je ε dielektričnost okolnog sredstva. Površina vodiča je ekvipotencijalna ploha, a polje ima samo normalnu komponentu. Neka svojstva se mogu vidjeti, ako se vodič promatra kao dielektrik beskonačne dielektričnosti. Slično vodiču u električnom polju ponaša se magnetski materijal u magnetskom polju, koji ima vrlo veliku permeabilnost prema okolnom sredstvu. Isto tako se ponaša vodič u strujnom polju, čija je vodljivost mnogo puta veća od okolnog sredstva.

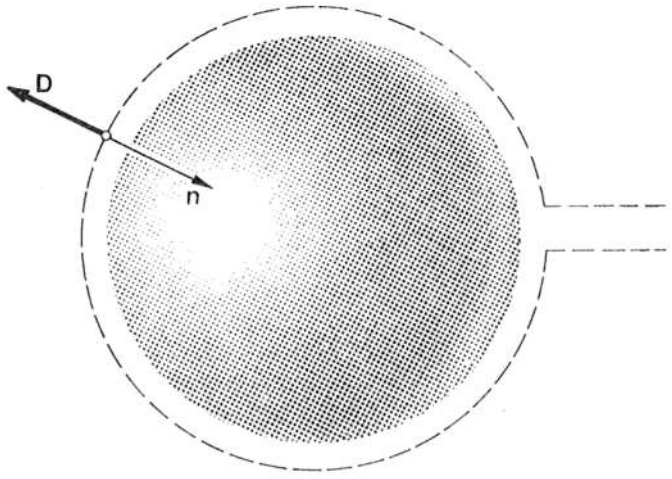
Vodič u električnom polju sudjeluje *aktivno* ili *pasivno*. Aktivni vodič je nosilac nekog naboja, on je električki nabijen. Pasivni vodič nalazi se izolirano u polju, a električki je neutralan. Indukcijom su nastali na njemu naboji, ali su u istoj količini pozitivni i negativni. Pasivni vodič može imati na svojoj površini više nakupina pozitivnih i negativnih naboja, ali je uvijek njihov zbroj nula.

Energija polja nabijena vodiča izlazi iz jednadžbe (3.36). Ona se može pisati u obliku

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\,\mathbf{D}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,\varrho\,\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\oint_S \varphi\,\mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \qquad (3.76)$$

Plošni integral se vrši po plohi koja zatvara promatrani volumen koji obuhvaća cjelokupno polje. On se dijeli na plohu koja zatvara prostor u beskonačnosti i na površine vodiča prema sl. 3.19. Ako se gleda samo jedan vodič, a u prostoru nema naboja, već samo na vodiču, tj. $\varrho = 0$, (3.76) poprima oblik

$$W = -\frac{1}{2}\oint_{S_\infty} \varphi\, \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\oint_{S_v} \varphi\, \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$



Sl. 3.19. Nabijeni vodič s označenom plohom integracije S. Određivanje energije polja nabijenog vodiča.

Prvi integral iščezava po definiciji. Površina vodiča je ekvipotencijalna, te je $\varphi = \varphi_0 =$ konst. Osim toga je na površini vodiča prema sl. 3.19. $\mathbf{D}\,\mathbf{n} = -\sigma$. Konačno je energija nabijenog vodiča uz $\oint \sigma\,\mathrm{d}S = Q$

$$W = \frac{1}{2}\varphi_0 Q \tag{3.77}$$

Energija nabijenog vodiča je slično izražena kao energija točkastog naboja unesenog u polje. Ipak je bitna razlika. Pojavljuje se opet faktor 1/2 koji ukazuje na to, da je utrošen rad za formiranje polja. Zatim φ_0 je potencijal vodiča, a Q njegov naboj.

Plošni integral u (3.76) provodi se po površinama svih vodiča po sustavu kao na sl. 3.19., a za svaki se dolazi do rezultata kao u (3.77). Prema tome će sustav od n nabijenih vodiča imati energiju

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varphi_i Q_i \tag{3.78}$$

Potencijali i naboji pojedinih vodiča su međusobno vezani. Ne može se proizvoljno postaviti potencijal nekog vodiča, a da se ne vodi računa o nabojima svih vodiča.

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} Q_k \tag{3.79}$$

Koeficijenti a_{ik} se zovu **potencijalni koeficijenti**. Ne mora se potencijal i-tog vodiča izraziti u ovisnosti o svim nabojima. To može biti naboj i-tog vodiča u ovisnosti o svim potencijalima, što izgleda ovako

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \varphi_k \tag{3.80}$$

$$[b_{ik}] = [a_{ik}]^{-1}$$

Koeficijenti b_{ik} su članovi recipročne matrice potencijalnih koeficijenata. Oni se zovu **kapacitivni koeficijenti**. Energija sustava vodiča se može izraziti uz pomoć (3.79) i (3.80).

Varijacija energije može biti izazvana varijacijom naboja ili varijacijom potencijala, tj.

$$\delta W = \sum_i \varphi_i \, \delta Q_i = \sum_i \delta\varphi_i \, Q_i \tag{3.81}$$

Obje su varijacije ekvivalentne. Ali to znači da se potencijal i-tog vodiča dobiva kao promjena energije sustava na jedinicu naboja istog vodiča. Slično je naboj i-tog vodiča jednak promjeni energije cijelog sustava na jedinicu potencijala istog vodiča. To se jednadžbom izražava ovako

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \tag{3.82}$$

Jednadžba (3.79) pokazuje da vrijedi odnos $a_{ik} = \partial\varphi_i/\partial Q_k$, a iz (3.82) je tada

$$a_{ik} = \frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\frac{\partial W}{\partial Q_i}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial Q_i \, \partial Q_k}$$

To pokazuje da mora postojati odnos $a_{ik} = a_{ki}$. Jednako se dokazuje iz (3.80) i (3.82) da je također $b_{ik} = b_{ki}$.

Pojedini koeficijenti a_{ik} se definiraju prema (3.79). Koeficijenti jednakog indeksa a_{ii} predstavljaju potencijal i-tog vodiča φ_i, ako je njegov naboj $Q_i = 1$, a svi ostali vodiči su bez naboja, tj. $Q_k = 0$, $k \neq i$. Koeficijenti nejednakog indeksa a_{ik}, $i \neq k$ predstavljaju potencijal i-tog vodiča, ako k-ti ima naboj $Q_k = 1$, a svi ostali su bez naboja, tj. $Q_i = 0$, $i \neq k$. Potencijali promatranih vodiča nose isti predznak kao i naboji upotrijebljenih vodiča. Zato su svi potencijalni koeficijenti pozitivni, $a_{ik} > 0$.

Definicije kapacitivnih koeficijenata slijede iz (3.80), ali se oni češće računaju iz iste jednadžbe. Treba naći recipročnu vrijednost matrice a_{ik}. Budući da je b_{ii} naboj i-tog vodiča ako je njegov potencijal $\varphi_i = 1$, a svi ostali imaju $\varphi_k = 0$, $k \neq i$, i naboj istog predznaka kao i potencijal, vrijedi nejednakost $b_{ii} > 0$. S druge strane vrijedi nejednakost $b_{ik} < 0$. Naboj i-tog vodiča je suprotna predznaka od potencijala k-tog vodiča.

Pasivni vodič u polju, tj. vodič koji ostaje električki neutralan, polarizira se. On postaje dipol koji se izražava nekim dipolnim momentom **p**. Najjednostavnije je promatrati vodič kao dielektrik beskonačne dielektričnosti. Prema rečenome u prethodnom poglavlju i (3.60) energija polja se mijenja za

$$W = -\frac{1}{2}\mathbf{p}\,\mathbf{E} \tag{3.83}$$

ako se u polje unese izolirani nenabijeni vodič. Polje je na tome mjestu imalo jakost **E**. Vektori **p** i **E** su kolinearni, a **p** ovisi direktno o **E**. Ta je ovisnost linearna, $\mathbf{p} = p_1\,\mathbf{E}$. Veličina p_1 je inducirani dipolni moment po jedinici jakosti električnog polja. On iznosi za vodljivu kuglu $p_1 = 3\,\varepsilon\,V_0$, prema rečenom u poglavlju 2.8. Zato je promjena energije polja zbog unošenja vodiča $W = -\,p_1\,\mathbf{E}^2/2$. Kaže se također da je tolika energija izoliranog neutralnog vodiča unesenog u polje jakosti **E**. Kako je ona negativna, zaključuje se da polje nastoji uvući vodič u svoj prostor.

3.10. PARCIJALNI KAPACITET

Prethodno poglavlje je bilo posvećeno ponašanju vodiča u elektrostatskom polju. Vodič je nosilac električnog naboja, odnosno on se nalazi na nekom potencijalu. Svi vodiči sačinjavaju zajedno sustav vodiča koji su svi međusobno povezani električki. Električka povezanost vodiča se sastoji u tome, da je naboj svakog vodiča nastao utjecajem svih ostalih vodiča. Električno polje u prostoru nastaje djelovanjem naboja svih vodiča. Jedna od ekvipotencijalnih ploha odabire se kao *referentna*, a ona je obično ploha *nultog potencijala*. Prema njoj su ustanovljene razlike potencijala svih vodiča. One se sada naprosto zovu potencijalima, jer je referentna ploha nultog potencijala. Potencijali svih vodiča ovise jedan o drugom. Dovoljno je da su poznati naboji vodiča, pa se ustanovljava polje, a prema tome i potencijal. Takav je put odabran u prethodnom poglavlju, te je određen potencijal svakog od vodiča odnosom

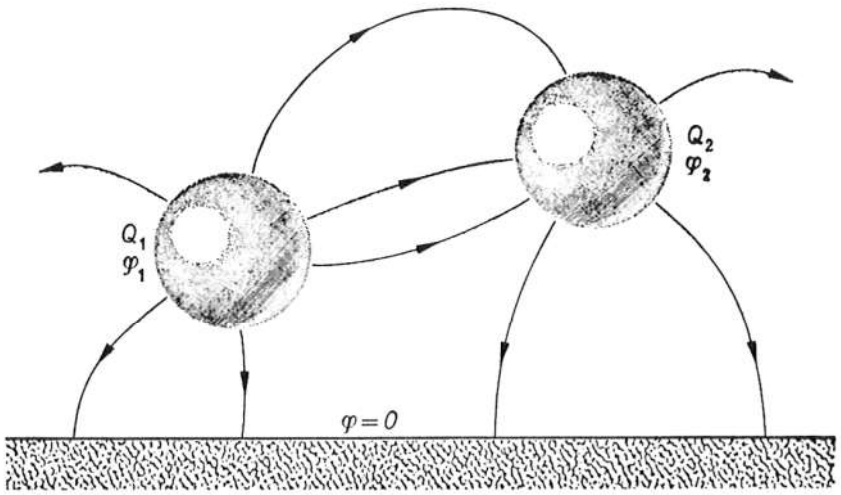
$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,Q_k$$

Potencijalni koeficijenti a_{ik} pomažu da se odrede potencijali. Ta je jednadžba polazna da bi se odredili naboji, ako su poznati potencijali. Tako nastaju kapacitivni koeficijenti b_{ik}. Oni pokazuju kakav doprinos daje pojedini vodič naboju na promatranom vodiču po spomenutoj relaciji

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\,\varphi_k$$

Ova relacija pokazuje da se naboj nekog vodiča sastoji od *parcijalnih* naboja koji su nastali utjecajem ostalih vodiča. Sretna je okolnost da je uveden pojam *električnog toka*, koji je numerički jednak naboju. Ima više smisla da se umjesto parcijalnih

naboja govori o *parcijalnim tokovima*. Tok između dvaju vodiča je mjerilo njihova međusobnog utjecaja. Jednostavan su primjer dva vodiča, kao što su skicirani na sl. 3.20. Referentna ekvipotencijalna ploha nultog potencijala, $\varphi = 0$, može se promatrati kao treći vodič. Prema njoj su vodiči na potencijalima φ_1 i φ_2. Slika polja



Sl. 3.20. Dva nabijena vodiča iznad vodljiva poluprostora. Definiranje parcijalnih kapaciteta.

pokazuje da neke silnice prolaze između vodiča 1 i 2. Opet neke silnice idu od vodiča 1 prema plohi nultog potencijala, a neke to čine od vodiča 2. Ukupni naboj jednog vodiča mora biti jednak sumi svih električnih tokova koji na njemu svršavaju ili počinju. To bi se moglo izraziti na dva vodiča kakvi su prikazani na sl. 3.20.

$$Q_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$
$$Q_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$$

Električni tokovi Φ_{11} i Φ_{12} idu prema referentnoj plohi nultog potencijala od vodiča 1, odnosno 2. Tokovi Φ_{12} i Φ_{21} su međusobno jednaki, ali su suprotna predznaka, tj.

$$\Phi_{12} = -\Phi_{21}$$

Naboj nekog i-tog vodiča izražava se tada sumom tokova

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ik} \tag{3.84}$$

Tok Φ_{ii} ide od i-tog vodiča na referentnu ekvipotencijalnu plohu nultog potencijala.

Tok Φ_{ik} između i-tog i k-tog vodiča, općenito, razmjeran je razlici potencijala između istih vodiča, što se izražava odnosom

$$\Phi_{ik} = C_{ik}(\varphi_i - \varphi_k) = C_{ik} u_{ik}$$

To je fundamentalni odnos kojim se definira **parcijalni kapacitet.** Parcijalni kapacitet C_{ik} je električni tok između i-tog i k-tog vodiča pri jediničnoj razlici potencijala među njima. Razlika potencijala $\varphi_i - \varphi_k = u_{ik}$ češće se naziva električni napon između i-tog i k-tog vodiča. Kad sav tok jednog vodiča svršava na drugom vodiču, tada je on ujedno jednak naboju, te se pojavljuje prosti odnos

$$Q = C \cdot u$$

koji se upotrebljava također u definiciji kapaciteta. Sad je vidljivo kad je takva definicija upotrebljiva. Tokovi između i-tog i k-tog vodiča i k-tog i i-tog vodiča su međusobno jednaki, ali su suprotna predznaka. Isto vrijedi i za napone, te je

$$\Phi_{ki} = -\Phi_{ik}, \qquad \varphi_k - \varphi_i = -(\varphi_i - \varphi_k)$$

$$u_{ki} = -u_{ik}$$

Zbog toga je svejedno za parcijalni kapacitet s koje se strane promatra, tj.

$$C_{ki} = C_{ik}$$

Sada je moguće dovesti u vezu kapacitivne koeficijente i parcijalne kapacitete. Naboj i-tog vodiča se izražava upotrebom kapacitivnih koeficijenata

$$Q_i = \sum_k b_{ik}\varphi_k = \sum_k b_{ik}(\varphi_k - \varphi_i) + \sum_k b_{ik}\varphi_i \tag{3.86}$$

Prvi pribrojnik predstavlja sumu tokova što idu od ostalih vodiča na promatrani vodič, te je

$$b_{ik}(\varphi_k - \varphi_i) = \Phi_{ik} = C_{ik}u_{ik}$$

Zbog toga je parcijalni kapacitet

$$C_{ik} = -b_{ik} \tag{3.87}$$

Drugi pribrojnik predstavlja tok i-tog vodiča prema referentnoj ekvipotencijalnoj plohi, tj.

$$\sum_k b_{ik}\varphi_i = \varphi_i \sum_k b_{ik} = \Phi_{ii} = C_{ii}u_{ii}$$

Odatle slijedi iznos ovog parcijalnog kapaciteta

$$C_{ii} = \sum_k b_{ik} \tag{3.88}$$

Sada se naboj i-tog vodiča izražava parcijalnim kapacitetima

$$Q_i = \sum_k C_{ik}u_{ik} \tag{3.89}$$

Ako su svi vodiči na istom potencijalu φ_i, naboj i-toga vodiča iznosi naprosto

$$\Phi_i = C_{ii}\, u_{ii}$$

Na taj se način može ustanoviti »vlastiti« kapacitet vodiča C_{ii}. Vodiči će imati različite naboje Q_i, već prema tome koliki im je vlastiti kapacitet C_{ii}, koji je u ovom slučaju jedini mjerodavan u raspodjeli naboja. Drugi pokus predviđa dovođenje svih vodiča na nulti potencijal, osim i-tog vodiča. Sad je naboj i-toga vodiča $Q_i = u_{ii} \sum C_{ik}$, ali je naboj k-toga vodiča $Q_k = - C_{ik}\, u_{ii}$, gdje se pojavljuje parcijalni kapacitet C_{ik}. Takvim i sličnim postupkom moglo bi se ustanoviti sve parcijalne kapacitete.

Svi su parcijalni kapaciteti pozitivni. Kapacitivni koeficijenti su po predznaku

$$b_{ii} > 0, \qquad b_{ik} < 0$$

Zato mora biti zadovoljen odnos

$$b_{ii} > \sum_{k \neq i} | b_{ik} |$$

Ovdje je bilo govora o skupini vodiča međusobno izoliranih, među kojima postoji razlika potencijala. Da bi se regulirali električki odnosi među njima, primijenjeni su parcijalni kapaciteti. Ako između dva vodiča nema razlike potencijala, nema potrebe da se primjenjuje odgovarajući kapacitet. On kao da ne postoji. S druge strane, smije se govoriti o parcijalnom kapacitetu među pojedinim dijelovima jednog te istog vodiča. Dovoljno je da postoji razlika potencijala među dotičnim dijelovima vodiča. Električni vod je lijep primjer za ovaj slučaj. On je na početku priključen na generator, a na njegovu je kraju priključen neki žičani otpornik. Vod se sastoji od dva okrugla, duga vodiča, paralelno smještena. To je u cjelini jedan vodič, a ipak se govori o kapacitetu voda, jer postoji razlika potencijala između vodiča voda. Dapače, ne može se cijeli vod prikazati jednim kapacitetom, ako je dovoljno dug. Opet nastaju razlike potencijala. Isto je s namotima transformatora ili električnih strojeva.

Značaj parcijalnih kapaciteta se vidi u teoriji strujnih krugova i teoriji vodova. Navodi se nekoliko primjera koji treba da ilustriraju postupak njihova proračuna.

PRIMJER 3.11. Zadane su **dvije kugle** međusobno razmaknute na *veliku udaljenost*. Njihovi su polumjeri r_1 i r_2, a središta su razmaknuta na udaljenost d. Ako je zadovoljen uvjet $d \gg r_1$ i $d \gg r_2$, naboj kugle se odslikava u njezino središte. Kugle se ponašaju kao točkasti naboji. Zato su potencijali kugli

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\varepsilon\, r_1} + \frac{Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon\, d}$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\varepsilon\, d} + \frac{Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon\, r_2}$$

Prema tome su potencijalni koeficijenti napisani u matrici

$$\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\begin{vmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{r_2} \end{vmatrix}$$

To je kvadratna simetrična matrica, čija inverzija daje kapacitivne koeficijente pisane u matrici, koja je opet kvadratna i simetrična

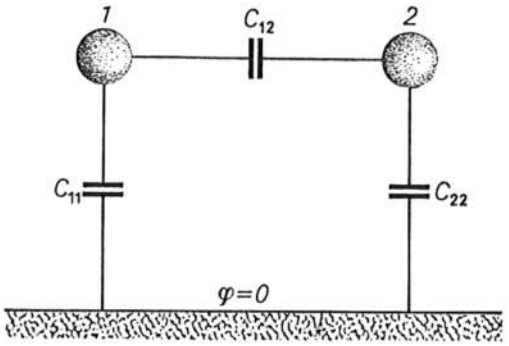
$$\mathbf{b} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}}\begin{vmatrix} \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{r_1} \end{vmatrix}$$

Parcijalni kapaciteti sad iznose, pisani u matrici, a vodeći računa da je

$$C_{11} = b_{11} + b_{12}, \qquad C_{12} = C_{21} = -b_{21}, \qquad C_{22} = b_{21} + b_{22}$$

$$\mathbf{C} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{d^2}}\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{d}\right) & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{d}\right) \end{vmatrix}$$

Neka su kugle promjera $2r_1 = 250$ mm i $2r_2 = 160$ mm, središta razmaknutih na $d = 4000$ mm. One se nalaze u uzduhu, te je $4\pi\varepsilon_0 = 111$ pF/m. Parcijalni kapaciteti iznose $C_{11} = 1{,}36$ pF, $C_{12} = C_{21} = 0{,}028$ pF, $C_{22} = 0{,}416$ pF. Shema kapaciteta je prikazana na sl. 3.21. Međukapaciteti



Sl. 3.21. Shema spoja parcijalnih kapaciteta između dviju kugli iznad vodljiva poluprostora.

$C_{12} = C_{21}$ su vrlo maleni prema vlastitim kapacitetima. Djelovanje jedne kugle na drugu je maleno, jer su razmjerno na velikoj udaljenosti jedna od druge. Pogonski su moguća tri slučaja. Prvi predviđa priključivanje električnog napona između kugli 1 i 2. Prema tome naponu stoji kapacitet, gdje je kapacitetu C_{12} paralelan serijski sklop od C_{11} i C_{22}, tj.

$$C = C_{12} + \frac{C_{11} C_{22}}{C_{11} + C_{22}} = 0{,}028 + 0{,}318 = 0{,}346 \text{ pF}$$

Drugi i treći slučaj predviđaju dovođenje jedne od kugli na nulti potencijal. Odgovarajući pogonski kapaciteti iznose

$$C_1 = C_{11} + C_{12} = 1{,}388 \text{ pF}, \quad \varphi_2 = 0$$

$$C_2 = C_{22} + C_{21} = 0{,}444 \text{ pF}, \quad \varphi_1 = 0$$

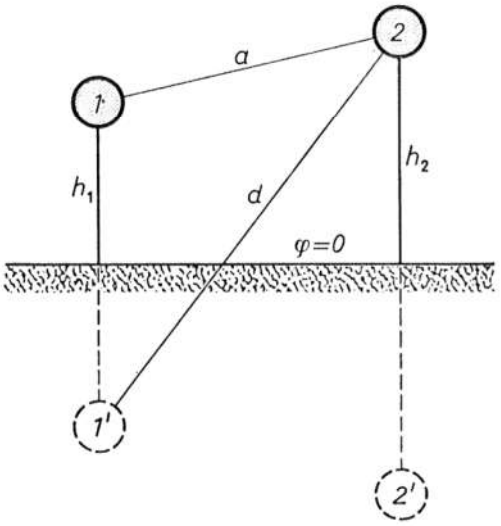
Pogonski kapaciteti se određuju prema trenutačnom pogonskom stanju, tj. održavanju kugli na određenom potencijalu. U ovom primjeru su moguća samo tri pogonska stanja, koliko ima i parcijalnih kapaciteta. Pogonski kapaciteti su važni u teoriji strujnih krugova. Elektrostatičko stanje je određeno parcijalnim kapacitetima.

Broj parcijalnih kapaciteta jednak je kvadratu broja vodiča, tj. n^2, ako je n broj vodiča. Broj nejednakih parcijalnih kapaciteta jednak je $n(n+1)/2$. To je ujedno i broj mogućih pogonskih kapaciteta. Kad bi bila zadana 3 vodiča, bilo bi $3 \cdot 4/2 = 6$ parcijalnih kapaciteta, a isto toliko i pogonskih kapaciteta. Različita pojednostavnjenja smanjuju broj pogonskih kapaciteta.

PRIMJER 3.12. Ravni, paralelni vodiči, kružnog presjeka, formiraju vod kao što je skicirano na sl. 3.22. Neka su vodiči toliko razmaknuti, da se smije računati s vlastitim nabojem u osi vodiča. Prema tome je $R_0 \ll a$, $R_0 \ll h_1$, $R_0 \ll h_2$. Potencijal linijskog naboja na pravcu iznosi prema (2.69)

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Pravac r_0 ima referentni potencijal φ_0. On je u ovom slučaju $\varphi_0 = 0$. Vodljiva ravnina ima nulti potencijal, te se pravac stavlja bilo gdje na nju. Djelovanje vodljive ravnine se uzima u obzir od-



Sl. 3.22. Presjek vodiča dvožičnog voda iznad vodljiva poluprostora. Proračun parcijalnih kapaciteta.

slikanim nabojima u 1′ i 2′. Zbog jednostavnosti se pretpostavlja da su odslikani naboji jednaki i suprotna predznaka. To je ovdje $\lambda_2' = -\lambda_1$ i $\lambda_1' = -\lambda_2$. Na taj se način problem svodi na određivanje kapaciteta dvaju vodiča. Citirana jednadžba potencijala daje iznos potencijala vodiča

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left[\lambda_1 \ln\left(\frac{2h_1}{R_0}\right) + \lambda_2 \ln\left(\frac{d}{a}\right)\right]$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left[\lambda_1 \ln\left(\frac{d}{a}\right) + \lambda_2 \ln\left(\frac{2h_2}{R_0}\right)\right] \qquad (3.90)$$

Ove su jednadžbe osnova određivanja parcijalnih kapaciteta u vodovima. Potencijalni koeficijenti su vidljivi, a njihova je matrica

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \begin{vmatrix} \ln\left(\frac{2h_1}{R_0}\right) & \ln\left(\frac{d}{a}\right) \\ \ln\left(\frac{d}{a}\right) & \ln\left(\frac{2h_2}{R_0}\right) \end{vmatrix}$$

Recipročna vrijednost daje matricu kapacitivnih koeficijenata

$$\mathbf{b} = \frac{2\pi\varepsilon}{A} \begin{vmatrix} \ln\left(\frac{2h_2}{R_0}\right) & \ln\left(\frac{a}{d}\right) \\ \ln\left(\frac{a}{d}\right) & \ln\left(\frac{2h_1}{R_0}\right) \end{vmatrix}$$

$$A = \ln\left(\frac{2h_1}{R_0}\right)\ln\left(\frac{2h_2}{R_0}\right) - \ln^2\left(\frac{d}{a}\right)$$

Prema tome su parcijalni kapaciteti

$$\begin{aligned} C_{12} &= C_{21} = -b_{12} = \frac{2\pi\varepsilon}{A}\ln\left(\frac{d}{a}\right) \\ C_{11} &= b_{11} + b_{12} = \frac{2\pi\varepsilon}{A}\ln\left(\frac{2h_2}{R_0}\cdot\frac{a}{d}\right) \\ C_{22} &= b_{12} + b_{22} = \frac{2\pi\varepsilon}{A}\ln\left(\frac{2h_1}{R_0}\cdot\frac{a}{d}\right) \end{aligned} \tag{3.91}$$

Sada su to kapaciteti po jedinici duljine voda. Oni su spojeni kao na sl. 3.21. Konstanta $2\pi\varepsilon = K_0$ ima karakter kapaciteta po jedinici duljine, a u uzduhu iznosi približno

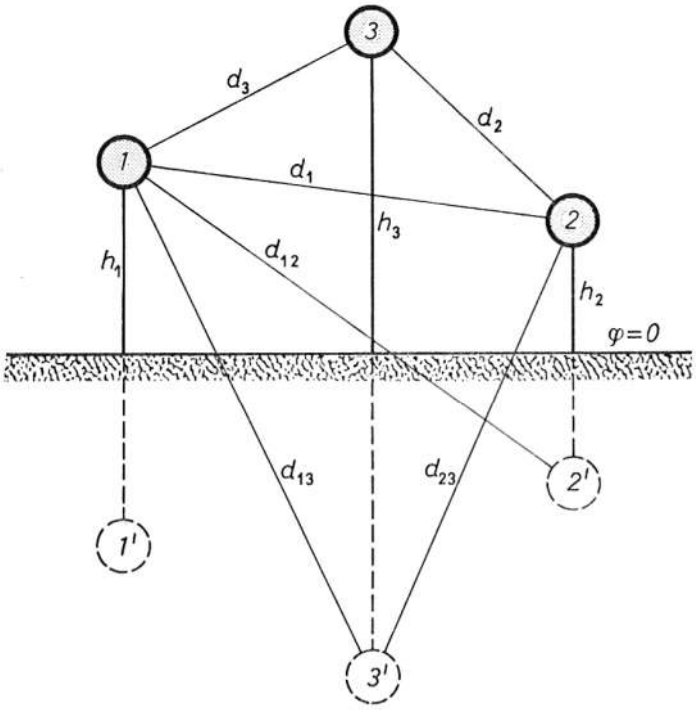
$$K_0 = \frac{1000}{18}\ \text{pF/m} = 55{,}6\ \text{pF/m}$$

Neka su u konkretnom slučaju $R_0 = 4$ mm, $h_1 = 5$ m, $h_2 = 5{,}5$ m, $a = 1$ m, $d = 10{,}55$ m. Tada su kapaciteti $C_{12} = C_{21} = 0{,}042 \cdot K_0 = 2{,}33$ pF/m, $C_{11} = 5{,}5$ pF/m, $C_{22} = 5{,}4$ pF/m

PRIMJER 3.13. Zadan je **vod sa tri** okrugla, paralelna **vodiča,** jednakih polumjera R_0. Oni su paralelni s vodljivom ravninom na kojoj se njihovi naboji odslikavaju. Postupak mora biti sličan onome sa dva vodiča. Prema sl. 3.23. su udaljenosti vodiča od vodljive ravnine h_1, h_2 i h_3, a razmaci među vodičima su d_1, d_2 i d_3. Razmaci vodiča prema slikama iznose d_{12}, d_{13} i d_{23}. Sada je matrica potencijalnih koeficijenata

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \begin{vmatrix} \ln\left(\frac{2h_1}{R_0}\right) & \ln\left(\frac{d_{12}}{d_1}\right) & \ln\left(\frac{d_{13}}{d_3}\right) \\ \ln\left(\frac{d_{12}}{d_1}\right) & \ln\left(\frac{2h_2}{R_0}\right) & \ln\left(\frac{d_{23}}{d_2}\right) \\ \ln\left(\frac{d_{13}}{d_3}\right) & \ln\left(\frac{d_{23}}{d_2}\right) & \ln\left(\frac{2h_3}{R_0}\right) \end{vmatrix}$$

Matrica kapacitivnih koeficijenata jednaka je $\mathbf{a}^{-1}$. U ovom primjeru izrazi postaju vrlo zamršeni, iako se radi samo o tri vodiča. Numerički je pristup jednostavniji. Neka su dimenzije prema sl.



Sl. 3.23. Presjek vodiča trožičnog voda iznad vodljiva poluprostora. Proračun parcijalnih kapaciteta.

3.23. $R_0 = 6$ mm, $h_1 = 5{,}7$ m, $h_2 = 5$ m, $h_3 = 6{,}2$ m, $d_1 = 1{,}5$ m, $d_2 = 1{,}2$ m, $d_3 = 1{,}0$ m, $d_{12} = 10{,}7$ m, $d_{13} = 11{,}9$ m, $d_{23} = 11{,}2$ m. Matrica potencijalnih koeficijenata iznosi

$$\mathbf{a} = \frac{1}{K_0}\begin{vmatrix} 7.57 & 1{,}97 & 2{,}48 \\ 1{,}97 & 7{,}43 & 2{,}24 \\ 2{,}48 & 2{,}24 & 7{,}65 \end{vmatrix}$$

Kapacitivni koeficijenti u recipročnoj matrici su

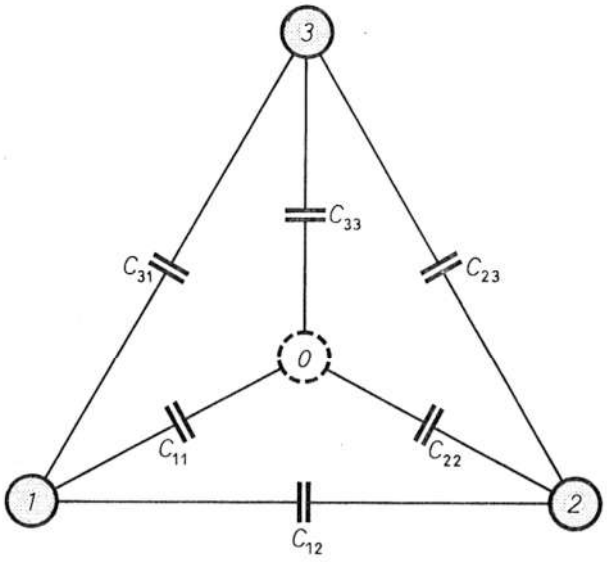
$$\mathbf{b} = K_0\begin{vmatrix} 0{.}1525 & -0{,}0266 & -0{.}0413 \\ -0{,}0266 & 0{,}1522 & -0{,}0356 \\ -0{,}0413 & -0{,}0356 & 0{,}1541 \end{vmatrix}$$

Parcijalni kapaciteti iznose iz (3.87) i (3.88)

$$C_{12} = 0{,}0266 \cdot K_0, \quad C_{13} = 0{,}0413 \cdot K_0, \quad C_{23} = 0{,}0356 \cdot K_0$$

$$C_{11} = 0{,}0846 \cdot K_0, \quad C_{22} = 0{,}090 \cdot K_0, \quad C_{33} = 0{,}0772 \cdot K_0$$

Parcijalni kapaciteti se međusobno razlikuju zbog nesimetričnog rasporeda vodiča. Shema kapaciteta je prikazana na sl. 3.24. Takva tri vodiča se susreću kod trofaznih vodova. Svaki vodič odgovara jednoj »fazi«. Obično su zadane razlike potencijala između vodiča ili naponi među njima u_{12}, u_{23}, u_{31}. Treba voditi računa o tome da je vodljiva ravnina na nultom potencijalu, a vodiči 1, 2, 3 imaju potencijal različit od nule.



Sl. 3.24. Shema spoja parcijalnih kapaciteta trožičnog voda iznad vodljiva poluprostora.

Razlozi proračuna mogu zahtijevati da se shema kapaciteta na sl. 3.24. pojednostavni. Dva tipična spoja kapaciteta se naziru u slici. Kapaciteti C_{11}, C_{22} i C_{33} spojeni su u *zvijezdu* u odnosu na vodiče 1, 2, 3. S druge strane, kapaciteti C_{12}, C_{23} i C_{31} su spojeni u *trokut* u odnosu na zadane vodiče. Zvijezda kapaciteta smije se pretvoriti u trokut kapaciteta, a da se potencijali i naboji vodiča ne promijene. Kapacitet između dva vodiča jednak je u suštini provodu silocijevi između njih. Prema tome se paralelno spojeni kapaciteti zbrajaju, a njihovi recipročni iznosi se zbrajaju kad su u seriju spojeni kapaciteti. Neka je zadana zvijezda kapaciteta C_{11}, C_{22} i C_{33} nadomještena trokutom kapaciteta C'_{12}, C'_{23} i C'_{31}.

Pretvorba zvijezde kapaciteta u trokut kapaciteta se olakšava prikladnim izborom potencijala pojedinih vodiča 1, 2 i 3. Svejedno je koliki su ti potencijali. Oni moraju samo biti zadržani prilikom pretvorbe.

Treba zamišljati da po dva vodiča imaju jednake potencijale. Tada među njima kao da nema kapaciteta. Kad bi to bili vodiči 2 i 3 na sl. 3.24., tj. $\varphi_2 = \varphi_3$, bila bi u zvijezdi serijska kombinacija C_{11} s paralelnom kombinacijom kapaciteta C_{22} i C_{33}, čiji je iznos $C_{22} + C_{33}$. Ta kombinacija ima kapacitet

$$\frac{C_{11}\,(C_{22} + C_{33})}{C_0}$$

S druge strane u trokutu ostaje paralelna kombinacija kapaciteta C'_{12} i C'_{31}, koja iznosi

$$C'_{12} + C'_{31}$$

Obje ove kombinacije imaju jednake iznose kapaciteta, odakle slijedi jedna jednadžba. Isti postupak se provodi i s vodičima 1 i 3, te 1 i 2, tj. učine se jednaki potencijali $\varphi_3 = \varphi_1$ i $\varphi_1 = \varphi_2$. Na taj način se dobiju još dvije jednadžbe odnosa kapaciteta.

Sad su sve tri jednadžbe odnosa kapaciteta

$$C'_{12} + C'_{31} = \frac{C_{11}(C_{22} + C_{33})}{C_0}$$

$$C'_{12} + C'_{23} = \frac{C_{22}(C_{11} + C_{33})}{C_0}$$

$$C'_{23} + C'_{31} = \frac{C_{33}(C_{11} + C_{22})}{C_0}$$

Kapaciteti trokuta slijede iz navedenih jednadžbi

$$C'_{12} = \frac{C_{11} C_{22}}{C_0}, \qquad C'_{23} = \frac{C_{22} C_{33}}{C_0}, \qquad C'_{31} = \frac{C_{11} C_{33}}{C_0} \tag{3.92}$$

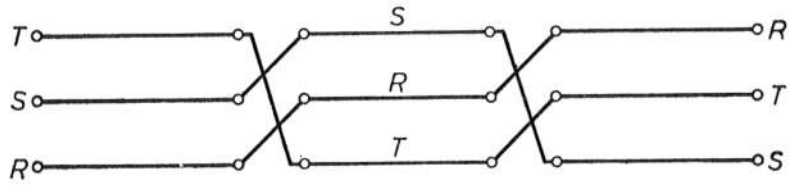
$$C_0 = C_{11} + C_{22} + C_{33}$$

Jednadžba (3.92) omogućuje *pretvorbu zvijezde kapaciteta u trokut kapaciteta.* Ti su iznosi u ovom primjeru $C_0 = 0{,}252 \cdot K_0$ i $C'_{12} = 0{,}0302 \cdot K_0$, $C'_{23} = 0{,}0276\, K_0$, $C'_{31} = 0{,}0258 \cdot K_0$. Sada su dva trokuta kapaciteta paralelni jedan drugome, a predstavljaju se jednim trokutom prostim zbrajanjem odgovarajućih kapaciteta. Ukupni kapaciteti među vodičima su

$$C_{12u} = C_{12} + C'_{12} = 0{,}0568 \cdot K_0, \qquad C_{23u} = C_{23} + C'_{23} = 0{,}0632 \cdot K_0,$$

$$C_{31u} = C_{31} + C'_{31} = 0{,}0671 \cdot K_0$$

To su ujedno pogonski kapaciteti, kad su zadani naponi u_{12}, u_{23} i u_{31} među vodičima.



Sl. 3.25. Shema prepleta trožičnog voda.

Ukupni međufazni kapaciteti razlikuju se međusobno, pa to može smetati u prijenosu električne energije. Bilo bi potrebno da su potencijalni koeficijenti međusobno jednaki. Treba postići da vodiči zauzmu sva tri položaja, što se postiže *prepletom* vodiča. Budući da se radi o tri vodiča, dovoljna su dva prepleta. Vodiči R, S, T zauzimaju sva tri položaja 1, 2, 3, kao na sl. 3.25. u jednoj trećini svoje duljine. Proračun se provodi prosječnim potencijalnim faktorima. To ovdje znači

$$a_0 = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{2h}{R_0}\right)$$

$$h^3 = h_1 h_2 h_3 \tag{3.93}$$

$$a_t = \frac{1}{3}(a_{12} + a_{13} + a_{23}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{d}{a}\right)$$

$$d^3 = d_{12} d_{13} d_{23} \tag{3.94}$$

$$a^3 = d_1 d_2 d_3$$

Ovdje su uvedene prosječne dimenzije koje su u stvarnosti geometrijske sredine pravih dimenzija. Sad se znatno pojednostavnjuje proračun parcijalnih kapaciteta. Njih su samo dva u različitom iznosu, tj.

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{00} = \frac{1}{a_0 + 2\,a_f}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = C_f = \frac{a_f}{a_0 - a_f}\,C_{00}$$

Međufazni pogonski kapacitet sada je jednak za sve tri faze i iznosi

$$C = \left(\frac{1}{3} + \frac{a_f}{a_0 - a_f}\right) C_{00} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_0 - a_f} = \frac{2\,\pi\,\varepsilon}{3 \ln\left(\frac{2\,h}{R_0} \cdot \frac{a}{d}\right)} \tag{3.94}$$

Srednje dimenzije u numeričkom primjeru iznose $2\,h = 11240$ mm, $a = 1217$ mm, $d = 11260$ mm, a od prije je polumjer $R_0 = 6$ mm. Pogonski međufazni kapacitet oznosi $C = 0{,}0628 \cdot K_0$. On je srednja vrijednost pogonskih međufaznih kapaciteta, koji su izračunati prije prepleta.

3.10.1. Energija sustava nabijenih vodiča

Energija sustava nabijenih vodiča izražava se parcijalnim kapacitetima, jednadžbom (3.78)

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i\,Q_i$$

S druge strane je naboj i-tog vodiča po (3.89)

$$Q_i = \sum_k C_{ik}\,u_{ik}$$

Kako je $u_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$, a potencijal i-tog vodiča $\varphi_i = u_{ii}$, energija sustava se dobiva iz izraza

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k C_{ik}\,u_{ii}\,u_{ik} \tag{3.95}$$

To je jednako za sustav od dva vodiča

$$W = \frac{1}{2}(C_{11}\,u_{11}^2 + C_{12}\,u_{11}\,u_{12} + C_{22}\,u_{22}^2 + C_{21}\,u_{22}\,u_{21})$$

Budući da su $C_{21} = C_{12}$ i $u_{21} = -u_{12}$, $u_{11} - u_{22} = u_{12}$, iznosi energija dvaju vodiča

$$W = \frac{1}{2}\,(C_{11}\,u_{11}^2 + C_{22}\,u_{22}^2 + C_{12}\,u_{12}^2)$$

Energija sustava *triju vodiča* kao na sl. 3.23. iznosi

$$W = \frac{1}{2}\,(C_{11}\,u_{11}^2 + C_{22}\,u_{22}^2 + C_{33}\,u_{33}^2 + C_{12}\,u_{12}^2 + C_{13}\,u_{13}^2 + C_{23}\,u_{23}^2)$$

Isprepleteni sustav vodiča ima međufazni pogonski kapacitet $C = C_{00}/3 + C_t$. Osim toga, neka se radi o simetričnom sustavu, tj. međufazni naponi su jednake amplitude, a $\sqrt{3}$ puta veći od faznih napona. Vremenski srednja energija iznosi

$$W_{sr.} = \frac{3}{2}\,C\,U^2$$

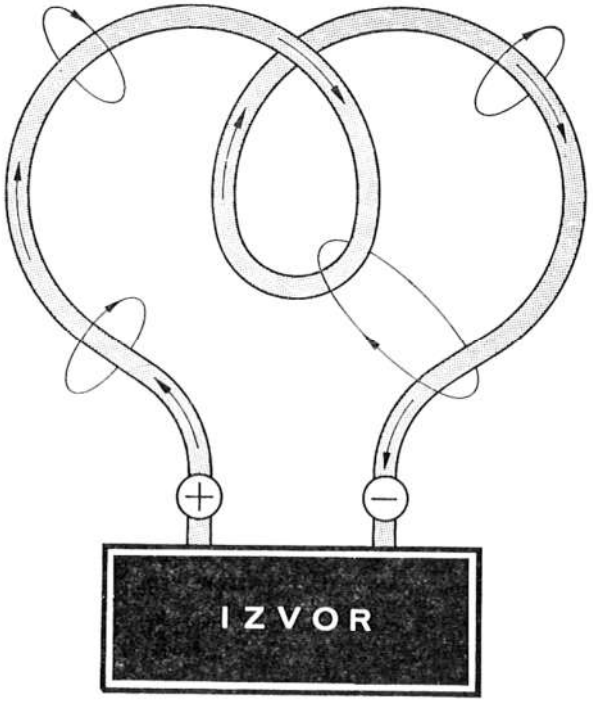
ako je U efektivni iznos međufaznog napona.

3.11. VODIČ PROTJECAN STRUJOM

Vodič zauzima posebno mjesto u teoriji elektromagnetskog polja. Elektrostatsko polje ne može postojati u njegovoj unutarnjosti. On je nosilac kapacitivnih efekata. Vodič zahvaljuje svoje ime svojstvu vođenja električne struje. On pruža otpor prolazu struje. Potrebno je trošiti energiju da bi struja tekla vodičem. Mora postojati u njemu električno polje da bi uopće bio moguć tok struje ili gibanje naboja. Otpor vodiča je razlog da se struja naboja raspoređuje jednoliko po presjeku. Time vodič protjecan strujom ne ulazi u kategoriju vodiča u elektrostatskom polju. On se ipak obrađuje u statičkom polju, odnosno zamišlja se kao da je polje statičko, tj. ono je *kvazistatičko*. Čim protječe struja vodičem, stvara se u okolišu magnetsko polje. Prema tome je vodič protjecan strujom *izvor* pravog *elektromagnetskog polja*. To dalje kazuje da se ne bi smjela primjenjivati pravila statičkog polja.

Sustav vodiča protjecanih strujom je osnova cjelokupne elektrotehnike. On je »utjelovljenje« elektrotehnike. Efekt električne struje u vodiču je bliži elektrotehničaru, nego efekt elektromagnetskog polja. Teoretičar, fizičar, govori da je osnova svih pojava elektromagnetsko polje. Po njemu u vodiču teče struja zbog djelovanja polja. S druge strane, elektrotehničar zna da mora imati »izvor« struje, *elektromotornu silu*, koji tjera struju vodičima, a njima se dovodi struja kamogod se želi. Ona proizvodi termičke, kemijske i magnetske efekte, koji se iskorištavaju prema potrebi. Vodič je bitan da se dovede električnu struju gdje je ona potrebna zbog svojih osnovnih efekata. Stvarno, elektrotehnika je tehnika električnih vodiča i struje koja njima teče. Tako je nastao pojam *strujnog kruga*. Vodič, metalna žica, priključuje se na izvor struje i vodi prema potrebi, da se opet vrati na izvor. Tako je nešto skicirano na sl. 3.26. Jednostavan strujni krug je žarulja priključena na električni akumulator kao izvor struje. Bakrena, izolirana žica, polazi od jednog pola akumulatora na prekidač. Dalje, ona ide do grla žarulje. Nešto zamršenija struktura je u žarulji, ali je njezin osnovni element — žarna nit od volframa, koja se užari prolazom struje. Bakrena žica se nastavlja od grla žarulje i vraća na drugi pol aku-

mulatora. Time je strujni krug zatvoren. Elektrotehnika se sastoji od samih strujnih krugova, jednostavnih kao ovaj i vrlo složenih kao u visokofrekventnim uređajima. Time je samo kratko istaknut značaj strujnog kruga.



Sl. 3.26. Strujni krug sastavljen od vodiča, proizvoljno oblikovanog, i izvora struje.

Strujni krug skiciran na sl. 3.26. proizvodi magnetsko polje. On »ulančava« stanoviti magnetski tok koji dalje proizvodi, mijenjajući se, protuelektromotornu silu. Njegovo je djelovanje uvijek takvo po Lenzovu zakonu da se suprotstavlja promjeni stanja. Ulančeni tok unosi »tromost« u promjenljivost struje koja teče strujnim krugom. Razlog treba tražiti u energiji akumuliranoj u magnetskom polju, ona se može mijenjati samo strujom u strujnom krugu. Kolika je tromost, ovisi o ukupnoj akumuliranoj energiji. Potrebno je najprije analizirati *magnetsku energiju sustava strujnih krugova.*

Energija magnetskog polja prikazana je u poglavlju 3.6. primjenom veličina polja. Polje formirano sustavom petlji ima energiju danu jednadžbom (3.43)

$$W = \frac{1}{2} \sum_k i_k \Phi_k$$

Ta se jednadžba može primijeniti na sustav strujnih krugova. Tok Φ_k proizvode sve postojeće strujnice, a ulančava ga k-ta strujnica. Ulančeni tok se prikazuje induktivitetom i strujom koja ga je proizvela. Na taj se način postiže da se isključe veličine polja, a radi se samo s jakostima struje. Induktivitet je već opisivan u poglavlju 2.12. o vektorpotencijalu, a izračunavan je za pojedine primjere u po-

glavlju 2.13. o linijskoj struji. On ovisi samo o geometrijskom obliku strujnog kruga i o magnetskom materijalu. Ako su odnosi linearni, on ne ovisi o veličinama polja. Zato je primjena induktiviteta korisna pri rješavanju zadataka vezanih za strujne krugove.

Ulančeni tok nekog strujnog kruga iznosi po definiciji

$$\Phi_k = \sum_j L_{jk} i_j \tag{3.96}$$

L_{jk} je međuinduktivitet između strujnog kruga j i k. Jednadžbom (2.102) je pokazano da je svejedno s koje se strane promatra. Naime, ona glasi

$$L_{jk} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{s_j} \oint_{s_k} \frac{\mathrm{d}s_j \, \mathrm{d}s_k}{r_{jk}} = L_{kj} \tag{3.97}$$

a iz nje se vidi da je svejedno kojim se redom množi i integrira. Ovo je u načelu jednostavna jednadžba, ali njezina primjena može biti zamršena kad se radi o sustavu vodiča. Postavlja se pitanje, što je ulančeni tok strujnog kruga sastavljenog od vodiča čiji je presjek konačnih dimenzija. Postupak proračuna ulančenog toka je prikazan već u poglavlju 2.13. o linijskoj struji. Neophodno je vodič rastaviti na strujne cijevi diferencijalnog presjeka $\mathrm{d}S$. Takvu strujnu cijev treba promatrati kao jednu petlju koja ima svoj ulančeni tok, točno definiran. Prosječni iznos svih takvih tokova preko cijelog presjeka vodiča jednak je ulančenom toku. To je kao u jednadžbi (2.108) za presjek vodiča S_0

$$\Psi = \int \Phi \frac{\mathrm{d}S}{S_0} \tag{3.98}$$

Ovdje je upotrijebljena oznaka Ψ za ulančeni tok, da bi se pokazala razlika prema toku Φ što ga obuhvaća točno definirana petlja. Tok Φ je funkcija položaja diferencijalnog presjeka $\mathrm{d}S$. Tako se određuje ulančeni tok nekog strujnog kruga bez obzira koji strujni krug ga je proizveo. Dovoljno je poznavanje toka Φ što ga obuhvaća diferencijalna cijev. Poznavanje raspodjele struje po presjeku vodiča je osnovno za poznavanje polja, a prema tome i tokova.

Sada se energija sustava strujnih krugova izražava pomoću induktiviteta

$$W = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k L_{jk} i_j i_k \tag{3.99}$$

Ovo je također i energija polja što ga proizvode svi strujni krugovi. Energija polja je već prikazana u poglavlju 3.6. Ona se izražava veličinama vektorpotencijala i gustoće struje ili pak veličinama polja. To su tamo dobiveni izrazi

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \mathbf{A} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} \, \mathrm{d}V$$

Svi izrazi za energiju su međusobno jednaki, a oni svi daju energiju cjelokupnog polja. Prema tome, mora biti ispunjena jednakost

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k L_{jk}\,i_j\,i_k \tag{3.100}$$

Svaki od izraza ima svoju prednost i nedostatak. Oni pokazuju ulogu pojedine veličine. Prvi izraz zahtijeva integraciju po volumenu vodiča, jer samo njime teče struja. Drugi je izraz neugodan pri određivanju energije, jer se njegova integracija proteže po cijelom prostoru gdje postoji polje. Treći je izraz tipičan za strujne krugove, ali pretpostavlja poznavanje induktiviteta.

Jednadžba (3.100) pomaže pri određivanju induktiviteta. U tu svrhu se iskorištava prvi izraz za energiju. Integracija produkta **J A** se provodi redom po volumenima vodiča. Tada se energija sustava točnije izražava sa

$$W = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k\int_{V_k} \mathbf{J}_k\,\mathbf{A}_{jk}\,\mathrm{d}V_k = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k\int_{V_j} \mathbf{J}_j\,\mathbf{A}_{kj}\,\mathrm{d}V_j \tag{3.101}$$

Zbog jednakosti energija izraženih na bilo koji od ovih načina induktiviteti se određuju iz odnosa

$$L_{jk}\,i_j\,i_k = \int_{V_k} \mathbf{J}_k\,\mathbf{A}_{jk}\,\mathrm{d}V_k = \int_{V_j} \mathbf{J}_j\,\mathbf{A}_{kj}\,\mathrm{d}V_j \tag{3.102}$$

Ovdje je $\mathbf{A}_{jk}$ vektorpotencijal što ga proizvodi strujni krug j u vodiču strujnog kruga k. Jednadžba (3.102) može se dalje prilagoditi za proračun induktiviteta. Vektorpotencijal se izražava u obliku

$$\mathbf{A}_{jk} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V_j} \frac{\mathbf{J}_j\,\mathrm{d}V_j}{r_{jk}}$$

Sada se induktivitet dobiva iz odnosa

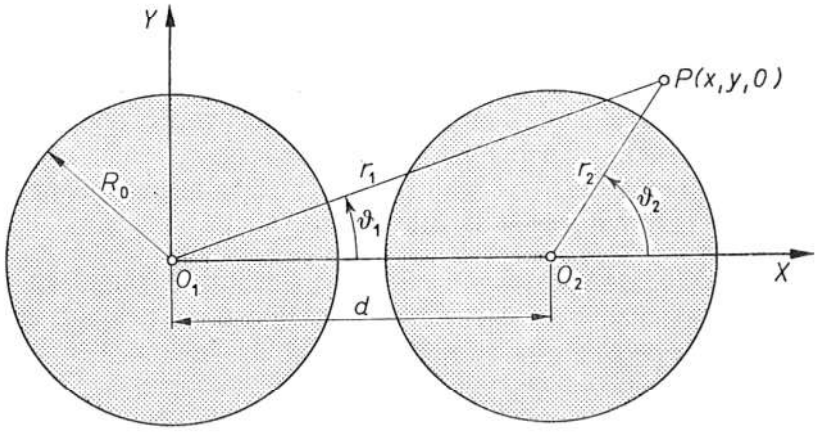
$$L_{jk} = \frac{1}{i_j\,i_k}\cdot\frac{\mu}{4\pi}\int_{V_j}\int_{V_k} \frac{\mathbf{J}_j\,\mathbf{J}_k\,\mathrm{d}V_j\,\mathrm{d}V_k}{r_{jk}} \tag{3.103}$$

Radijusvektor r_{jk} predstavlja udaljenost između elementa volumena $\mathrm{d}V_j$ i $\mathrm{d}V_k$. Posebno je važan slučaj kad su gustoće struje konstantne po volumenu integracije, a jakost struje naprosto je dana sa $i = SJ$. Induktivitet je tada jednak

$$L_{jk} = \frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{1}{S_j\,S_k}\int_{V_j}\int_{V_k} \frac{\mathrm{d}V_j\,\mathrm{d}V_k}{r_{jk}} \tag{3.104}$$

Kojim će se putem prići proračunu induktiviteta strujnih krugova ovisi o zadatku. Može se računati direktno ulančeni tok, pa induktivitet ili pak energiju, pa induktivitet.

PRIMJER 3.14. Zadane su **dvije okrugle, metalne cijevi,** paralelnih osi i vrlo dugačke. One su smještene kao na sl. 3.27. Polumjeri su im jednaki i iznose R_0, a stijenke su vrlo male debljine u odnosu prema polumjerima. Zato se primjenjuje linijska gustoća struje K, umjesto plošne gustoće J. Njihove osi su razmaknute na udaljenost d. Struja teče u smjeru osi Z u lijevoj cijevi,



Sl. 3.27. Presjek dviju okruglih, metalnih cijevi jednakog promjera i vrlo tanke stijenke. Stijenkom cijevi teku jednake struje suprotna smjera. Linijska gustoća struje je konstantna duž oboda cijevi.

a istoga je iznosa i suprotna predznaka u desnoj cijevi. One tvore strujni krug kojem treba odrediti **induktivitet.** Kako je sustav aksijalno simetričan, treba odrediti induktivitet po jedinici duljine. Ovdje se induktivitet određuje po jednadžbi (3.102), jer su veličine gustoće struje i vektorpotencijala konstantne duž osi Z. Tada je integracija najjednostavnija. Zadatak se znatno pojednostavnjuje, ako se pretpostavi da je gustoća struje konstantna po presjeku cijevi. Jednadžba (3.102) glasi pojednostavnjena

$$L\,i^2 = (2\,\pi\,R_0\,K)^2\,L = 2\,K \int_0^{2\pi} A\,R_0\,\mathrm{d}\alpha_1$$

Vektorpotencijal i gustoća struje imaju samo aksijalni smjer, a volumni integral ima isti iznos za obje cijevi. Dovoljna je integracija samo po jednoj cijevi. Treba odrediti vektorpotencijal u stijenki cijevi.

Gustoća struje je konstantna po stijenki cijevi. Magnetsko polje takve strujne cijevi ovisi samo o radijusu, a neovisno je o kutu. Ono je jednako polju strujnice iste jakosti struje smještene u os cijevi. Prema tome, vektorpotencijal takvih strujnih cijevi jednak je vektorpotencijalu paralelnih strujnica smještenih u osi cijevi, tj.

$$A = \mu\,K\,R_0 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad r_1 > R_0, \quad r_2 > R_0$$

Njegov je iznos u stijenki lijeve cijevi za $r_1 = R_0$ i $r_2^2 = d^2 + R_0^2 - 2\,d\,R_0 \cos\alpha_1$

$$A = \frac{1}{2}\,\mu\,K\,R_0 \ln\left(1 + \frac{d^2}{R_0^2} - 2\,\frac{d}{R_0}\cos\alpha_1\right)$$

Induktivitet po jedinici duljine slijedi iz jednostavnije jednadžbe nakon supstitucije vektorpotencijala

$$L = \frac{\mu}{4\,\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln\left(1 + \frac{d^2}{R_0^2} - 2\,\frac{d}{R_0}\cos\alpha_1\right) \mathrm{d}\alpha_1$$

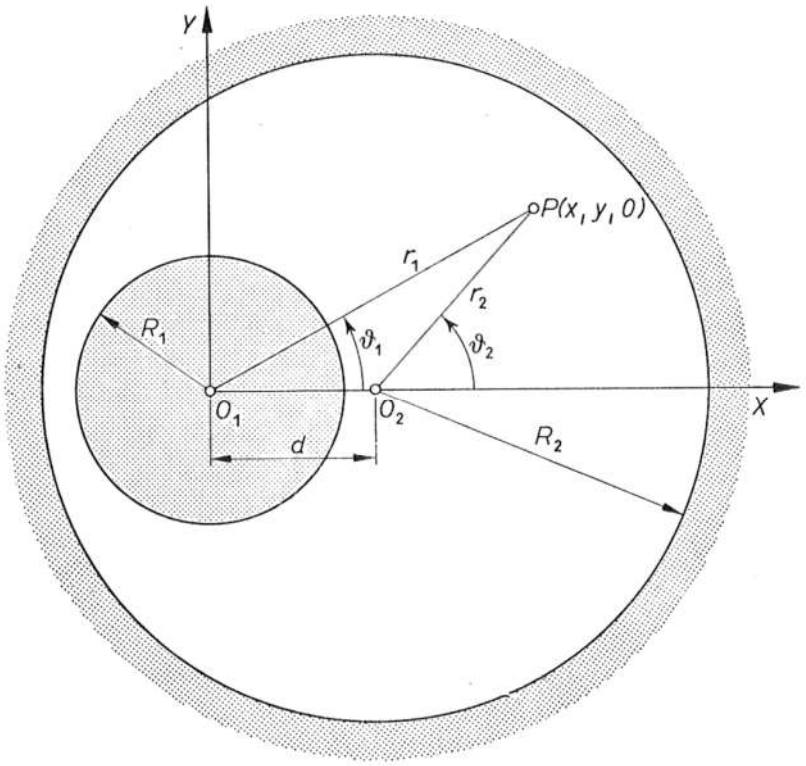
Provedena integracija daje iznos induktiviteta zadanog strujnog kruga, odnosno voda

$$L = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d}{R_0}\right) \tag{3.105}$$

Ako se cijevi dotiču, $d = 2\,R_0$, induktivitet iznosi u uzduhu $L = 0{,}28$ μH/m.

Primjer dvaju paralelnih, okruglih vodiča naveden je u poglavlju 2.13. o polju linijske struje. Tamo se induktivitet razlikuje samo za iznos $\mu/(4\,\pi)$ koji se odnosi na unutarnjost vodiča. Vod od punih vodiča ima veći induktivitet za iznos $\mu/(4\,\pi)$ po jedinici duljine.

PRIMJER 3.15. Okrugli **metalni vodič** nalazi se **u kružnom metalnom cilindru** kao na sl. 3.28. Njihove su osi paralelne i razmaknute na udaljenost d. Unutarnji vodič je pun i ima polumjer R_1. Struja teče njime u smjeru osi Z. Vanjski cilindar je metalna cijev polumjera R_2



Sl. 3.28. Presjek okruglog vodiča u metalnoj, okrugloj cijevi. Vodičem i cijevi teku jednake istosmjerne struje suprotna smjera. Cijev ima vrlo tanku stijenku.

zanemarive debljine stijenke. Njihove su struje jednake i suprotna predznaka. Da bi zadatak bio jednostavniji, pretpostavljaju se konstantne gustoće struje. Unutarnji vodič ima plošnu gustoću struje $J = i/(\pi\,R_1^2)$. Vanjski vodič, cijev, ima linijsku gustoću struje $K = -\,i/(2\,\pi\,R_2)$. **Induktivitet** se dobiva opet iz jednadžbe (3.102). Prilagođena na ovaj zadatak ona glasi:

$$L\,i^2 = J \int_{V_1} A_1\,\mathrm{d}V_1 + K \int_{S_2} A_2\,\mathrm{d}S_2$$

Prvi integral se odnosi na volumen unutarnjeg vodiča, a A_1 je vektorpotencijal što ga proizvode obje struje u njemu. Drugi integral se odnosi na površinu vanjske cijevi, a A_2 je vektorpotencijal obiju struja na istoj površini.

Svaki od vodiča ima polje aksijalno simetrično, ovisno samo o radijusu od njegove osi. To je polje analizirano već u poglavlju 2.13. o linijskoj struji. Budući da se radi o dvije jednake struje, a suprotna predznaka, smije se pretpostaviti da je referentni potencijal nula. Unutarnji vodič ima potencijal u svojoj unutarnjosti zadan sa

$$A' = \frac{\mu i}{4\pi}\left(1 - \frac{r_1^2}{R_1^2} - 2\ln R_1\right), \qquad r_1 < R_1$$

Isti potencijal se izražava u prostoru izvan vodiča sa

$$A' = -\frac{\mu i}{2\pi}\ln r_1, \qquad r_1 \geqslant R_1$$

Vanjski vodič ima potencijal u vanjskom prostoru, koji iznosi

$$A'' = +\frac{\mu i}{2\pi}\ln r_2, \qquad r_2 \geqslant R_2$$

Isti potencijal je u unutarnjosti cijevi konstantan i jednak je iznosu na njezinoj površini, tj.

$$A'' = +\frac{\mu i}{2\pi}\ln R_2, \qquad r_2 \leqslant R_2$$

To odgovara uvjetu da nema polja u unutarnjosti cijevi od njezine vlastite struje. Ukupni potencijal jednak je zbroju obaju potencijala, a traženi iznosi u proračunu induktiviteta su

$$A_1 = \frac{\mu i}{4\pi}\left[1 - \frac{r_1^2}{R_1^2} + 2\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right], \qquad \text{unutarnji vodič}$$

$$A_2 = -\frac{\mu i}{4\pi}\ln\left(1 + \frac{d^2}{R_2^2} + 2\frac{d}{R_2}\cos\alpha_2\right), \quad \text{vanjski vodič}$$

Induktivitet se računa po jedinici aksijalne duljine. Prema tome diferencijalni volumen iznosi $\mathrm{d}V_1 = 2\pi r_1\,\mathrm{d}r_1$, a diferencijalna je površina $\mathrm{d}S_2 = R_2\,\mathrm{d}\alpha_2$. Drugi integral daje nulu, a preostaje samo prvi integral, te je induktivitet konačno nakon uređenja

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{4}\right] \tag{3.106}$$

Induktivitet zadanog strujnog kruga, voda, neovisan je o položaju unutarnjeg vodiča. Zadani sustav ima polje u vanjskom prostoru, ako vodiči nisu koaksijalni. Samo koaksijalni vodiči nemaju polja u vanjskom prostoru.

3.12. TOK ENERGIJE — POYNTINGOV VEKTOR

Energija elektromagnetskog polja ne mora biti isto što i energija statičkih polja. Energija statičkih polja bila je prikazana u prethodnim poglavljima. Maxwellove jednadžbe definiraju elektromagnetsko polje u potpunosti. One moraju dati podatak i o njegovoj energiji. Energija električnog i magnetskog polja izražena je osnovnim veličinama polja. Pretpostavlja se da je *energija elektromagnetskog polja jednaka zbroju energija električnog i magnetskog polja*. To je prema poglavljima 3.5. i 3.6.

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}\,\mathbf{D} + \mathbf{H}\,\mathbf{B})\,\mathrm{d}V \tag{3.107}$$

Ta pretpostavka nije dokazana, ali isto tako nije dokazano suprotno. Nije se našao primjer gdje ne bi zadovoljila takva pretpostavka.

Da bi se moglo uključiti Maxwellove jednadžbe, treba gledati vremensku promjenu energije. Tako se očekuje da se vidi u što se troši akumulirana energija. Neka je promatrani sustav na miru, te se vremenska promjena odnosi samo na osnovne veličine polja, tj.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\,\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\,\mathbf{B}\right)\mathrm{d}V$$

Ako su dielektričnost i permeabilnost konstantni, onda je

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\,\mathbf{D}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}^2) = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Slično je sa $\partial/\partial t\ (1/2\,\mathbf{H}\,\mathbf{B}) = \mathbf{H}\ \partial\mathbf{B}/\partial t$. Sada je promjena energije jednaka

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \int_V \left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\partial V \tag{3.108}$$

Iz Maxwellovih jednadžbi dobiva se promjena indukcija

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{J}, \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}$$

S time je promjena energije

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \int_V (-\mathbf{E}\,\mathbf{J} + \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E})\,\mathrm{d}V$$

Kako je $\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\,\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$, upotrebom Gaussova stavka *smanjenje energije* elektromagnetskog polja iznosi

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \mathbf{E}\,\mathbf{J}\,\mathrm{d}V + \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{3.109}$$

Ako se želi obuhvatiti cjelokupno polje, plošni integral se mora protegnuti po području gdje polja više nema, te on iščezava. U tome slučaju se sva energija troši na račun gubitaka.

Veličina

$$P_g = \int_V \mathbf{E}\,\mathbf{J}\,\mathrm{d}V = \int_V \varkappa\,\mathbf{E}^2\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\varkappa}\,\mathrm{d}V \tag{3.110}$$

predstavlja **Jouleove gubitke.** Ona je izvedena iz Jouleova zakona koji definira stvorenu toplinu u otporu protjecanom strujom, $\int R\,i^2\,\mathrm{d}t$. Kad promatrani prostor V obuhvaća cjelokupno polje, sva energija polja se potroši na toplinu. Uvjet je, razumije se, da sredstvo u prostoru bude vodljivo. Ako sredstvo nije vodljivo, energija polja drži se stalnom.

3.12.1. Poyntingov vektor

Mnogo je interesantnije uzeti u obzir drugi pribrojnik u (3.109), tj. plošni integral. Taj integral predstavlja *strujanje energije* iz promatranog prostora. Po tome bi se moglo reći da se energija polja u nekom promatranom prostoru troši na Jouleove gubitke u njemu i strujanje energije iz njega. Karakterističan je vektor

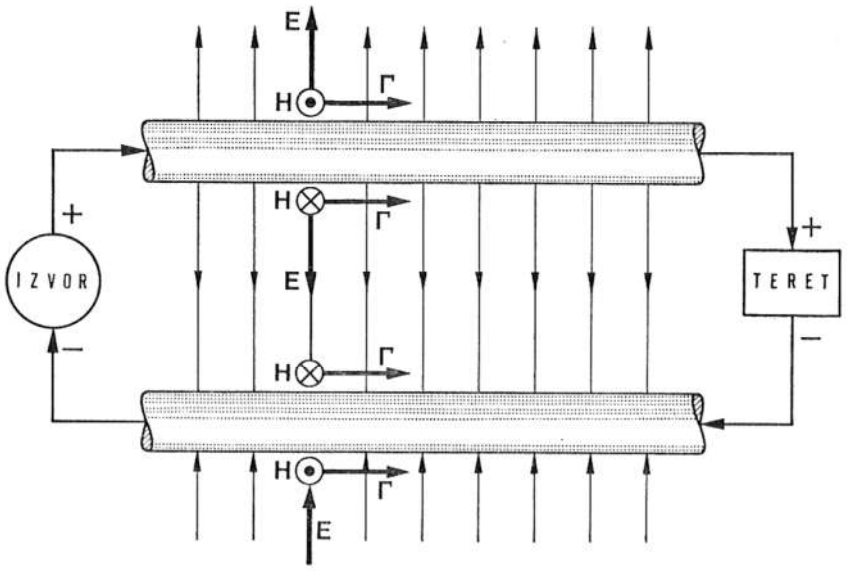
$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{3.111}$$

koji se zove *Poyntingov vektor*. On je usmjeren okomito na ravninu koju tvore vektor **E** i **H**, a pokazuje *smjer strujanja* energije. Poyntingov vektor je nerazdvojan od pojma elektromagnetskog polja. On direktno ukazuje na dinamiku polja. On je po tome sličan, a i slično je građen, gustoći elektromagnetskog impulsa $\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}$, koji također ukazuje na dinamiku polja. Oba su vektora međusobno vezana odnosom

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = \varepsilon\,\mu\,\boldsymbol{\Gamma} \tag{3.112}$$

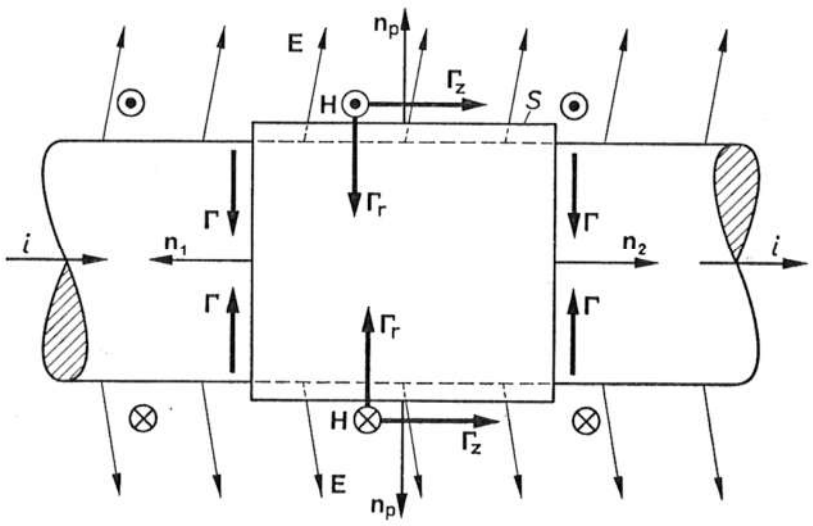
Upravo su oni izazvali dalekosežne posljedice u ulozi koju je odigrala elektromagnetska energija. Neka kao primjer posluži električni vod sa sl. 3.29. Da se lakše dobije prva gruba slika strujanja energije, vodiči nemaju gubitaka. Izvor se nalazi s lijeve strane i ima označen polaritet. Potrošač je na desnoj strani slike. Silnice električnog polja izlaze iz pozitivnog vodiča, a ulaze u negativni vodič. Silnice magnetskog polja cirkularno obilaze vodiče. Na taj se način dobiva Poyntingov

vektor $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ u ravnini okomitoj na vodiče, kao što je označeno na sl. 3.29. On gleda u cijeloj ravnini od izvora prema potrošaču. Njegov plošni integral po toj cijeloj ravnini mora dati ukupnu prenesenu snagu od izvora prema potrošaču. Kako



Sl. 3.29. Shema strujanja energije duž dvožičnog voda od izvora prema potrošaču.

u vodiču nema polja, jer nema gubitaka, ne postoji niti strujanje energije u vodiču. Sva energija struji u okolišu vodiča, koji je ispunjen dielektrikom. Izvor može biti i izvor izmjenične struje, pa će energija opet strujati od izvora prema potrošaču, jer se s polaritetom izvora mijenja i smjer struje.



Sl. 3.30. Shema strujanja energije na površini okruglog vodiča protjecanog istosmjernom strujom.

Da bi se detaljnije vidjela uloga vodiča, prikazan je na sl. 3.30. detalj vodiča, ali sada su predviđeni gubici. U vodiču mora postojati aksijalna komponenta električnog polja $E_z = J/\varkappa$, ako je J gustoća struje u njemu. Smjer magnetskog polja

je tangencijalan u vodiču kao i u okolišu. Aksijalna komponenta električnog polja E_z ostaje i u okolišu, samo se još pojavljuje i radijalna komponenta. Poyntingov vektor ima u vodiču jednu komponentu Γ_r - radijalnu, a koja gleda prema osi vodiča. Strujanje energije u vodiču je prema njegovoj unutarnjosti. Jakosti polja na površini vodiča iznose $H_0 = i/(2\,\pi\,r_0)$ i $E_0 = J_0/\varkappa$. Polumjer vodiča je r_0. Gustoća struje je jednaka po cijelom presjeku vodiča i iznosi $J_0 = i/(\pi\,r_0^2)$. Prema tome je radijalna komponenta Poyntingova vektora na površini vodiča

$$\Gamma_r = \frac{i}{2\,\pi\,r_0} \cdot \frac{i}{\pi\,r_0^2\,\varkappa} = \frac{i^2}{2\,\pi^2\,r_0^3\,\varkappa}$$

Na nekoj duljini z_0 vodiča iznosi ukupna snaga koja ulazi u vodič

$$P = 2\,\pi\,r_0\,z_0\,\Gamma_r = i^2\,\frac{z_0}{\pi\,r_0^2\,\varkappa} = i^2\,R$$

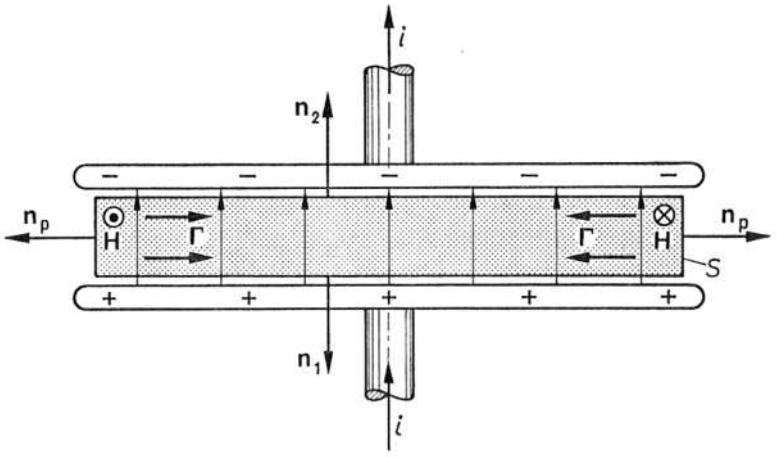
Iz okoliša u vodič struji energija, koja upravo pokriva Jouleove gubitke u njemu. Veličina $R = z_0/(\pi\,r_0^2\,\varkappa)$ nije ništa drugo do otpor vodiča u duljini z_0 za istosmjernu struju. Plošni integral iz (3.109) po plohi S_1 sa sl. 3.30. predstavlja strujanje energije iz okolnog, promatranog prostora kroz tu plohu da bi se pokrili gubici unutar nje. Plošni integral Poytingova vektora po bazama plohe S_1 iščezava, jer su normale $\mathbf{n}$ i Γ_r međusobno okomiti.

Na površini vodiča postoji još jedna komponenta Poyntingova vektora, aksijalna komponenta $\Gamma_z = E_r\,H_\alpha$, koja je prikazana i na sl. 3.29. Ona doprinosi prijenosu energije od izvora do potrošača. Pojava gubitaka u vodiču uvjetuje pojavu još jedne komponente Poyntingova vektora koji je usmjeren u unutarnjost vodiča. Preko njega se pokrivaju gubici u vodiču na račun energije elektromagnetskog polja u okolišu vodiča. Energija se prenosi prostorom ispunjenim izolatorom, a vodiči služe samo njezinu usmjeravanju. Kako tok energije napreduje prema potrošaču, njezina se gustoća smanjuje, jer treba pokriti Jouleove gubitke u vodičima. Kad se gustoća energije smanjuje, smanjuju se stvarno osnovne veličine polja, jakost polja i indukcija.

Na sl. 3.31. prikazan je pločasti kondenzator. On je upravo u fazi nabijanja. Na slici je lijeva elektroda pozitivna, što propisuje smjer električnog polja kao što je označeno. Smjer magnetskog polja se utvrđuje iz prve Maxwellove jednadžbe $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t$. Vremenska derivacija električne indukcije je pozitivna u fazi nabijanja. rot $\mathbf{H}$ je, dakle, pozitivan, a tada smjer magnetskog polja i smjer električnog polja moraju zadovoljiti pravilo desnog vijka. Prema tome je označen smjer od $\mathbf{H}$. Poyntingov vektor je usmjeren radijalno i gleda u unutarnjost kondenzatora. Strujanje se odvija iz okolnog prostora u prostor među elektrodama kondenzatora. Izbijanje kondenzatora uvjetuje promjenu smjera magnetskog polja, a smjer električnog ostaje isti. Poyntingov vektor ostaje radijalan, ali gleda prema okolnom prostoru. Tok energije mijenja svoj smjer. Energija nabijenog kondenzatora odlazi u okolni prostor njegovim izbijanjem. Detaljna slika elektromagnetskog polja kondenzatora pokazala bi točno tokove energije.

Koji puta se postavlja pitanje kako pristupiti analizi energije, ako se superponira na elektrostatsko polje neko neovisno magnetostatsko polje. Može se zami-

sliti uređaj koji će u promatranom prostoru proizvesti statično električno i magnetsko polje, neovisno jedno o drugom. Prostor je ispunjen izolatorom. Oba su polja bezvrtložna. Akumulirana energija se ne mijenja, tj. $\partial W/\partial t = 0$. Jednako je



Sl. 3.31. Shema strujanja energije u pločastom kondenzatoru koji se nabija.

$\mathbf{J} = 0$, jer je sredstvo u polju izolator. Jednadžba (3.109) pokazuje da je tok Poyntingova vektora iz promatranog prostora također nula. Prema tome ne postoji prijenos energije u promatranom prostoru. Ovdje se ne može govoriti o elektromagnetskom polju.

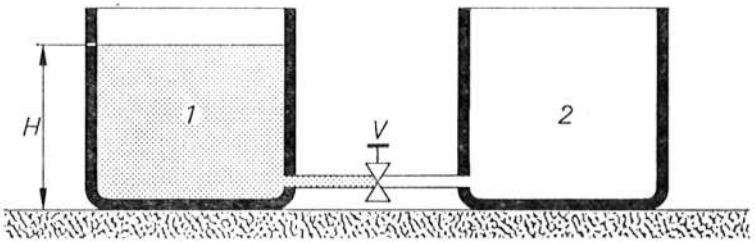
3.13. SILE U STRUJNOM KRUGU

Strujni krug se sastoji od sustava vodiča kojima protječe struja. Stvaraju se razlike potencijala između pojedinih dijelova vodiča. Takva pojava se zove *kapacitivno djelovanje*. Struja vodiča stvara magnetsko polje, što je posljedica *induktivnog djelovanja*. U svakom strujnom krugu postoji kapacitivno i induktivno djelovanje. Predstavnici kapacitivnog djelovanja su parcijalni kapaciteti između pojedinih dijelova vodiča. Predstavnici induktivnog djelovanja su induktiviteti strujnog kruga. Energija strujnog kruga se prikazuje kapacitetima i induktivitetima.

Sile u strujnom krugu pokoravaju se zakonitostima i pravilima koja su već dosad prikazana. Vodiči se deformiraju pod utjecajem sila i zauzimaju nov položaj. Kapaciteti i induktiviteti se mijenjaju. Konačno se mijenja energetsko stanje. Jedan dio energije troši se nepovratno u otporima u vodičima i u okolišu. To su *gubici* strujnog kruga, koje treba nadoknaditi. Oni su ovdje shvaćeni široko, kao dio energije koja se gubi *nepovratno*. Vodič sadrži otpor u kojem postoje Jouleovi gubici. Polje se mijenja u okolišu, te se mijenja elektromagnetsko stanje u sredstvu koje ispunjava okoliš. Zato u sredstvu nastaju gubici, *dielektrički* i *feromagnetski*. Vodič u gibanju dovodi u gibanje okolno sredstvo, te izaziva *mehaničke gubitke*. Oni neće

biti specificirani, te se zasad, ubrajaju u cjelini u gubitke strujnog kruga. To ne moraju biti svi oblici gubitaka. Zasad je dovoljno da su neki nabrojani, da se prikaže samo njihov značaj.

Strujni krug mora pokriti gubitke koji su nastali kao posljedica njegove deformacije pod utjecajem sila. Postoje dva tipična stanja sustava vodiča koji sačinjavaju strujni krug. Promatrani sustav je jednom *izoliran sustav*, a drugi put *neizoliran sustav*. Izolirani sustav troši svoju akumuliranu energiju da bi pokrio gubitke. Kad se postigne novo stacionarno stanje, sustav ima manje akumulirane energije u elektromagnetskom polju nego prije početka procesa. Kad bi se gledalo najopćenitije, energetsko stanje izoliranog sustava se ne mijenja. Proces se mora pridržavati zakona o održanju energije. Međutim, ovdje se promatra energija akumulirana u elektromagnetskom polju. Ta će se energija smanjiti, ali će se toplinsko stanje promijeniti, te će se toplinska energija povećati. Detaljna analiza traži uzimanje u obzir cjelokupne energije. Neizolirani sustav omogućuje izmjenu energije s vanjskim svijetom.



Sl. 3.32. Dvije jednake posude spojene sa cijevi i ventilom. Posuda 1 je napunjena vodom, a 2 je prazna. Posude su na horizontalnoj podlozi, te imaju isti potencijalni nivo.

Mehanika uči da se *izolirani sustav postavlja u ravnotežu, tako da je njegova potencijalna energija minimalna.* To pravilo vrijedi za sve vrste energija koje se uključuju u kategoriju potencijalne energije. Njihalo se zaustavlja s težištem u najnižoj točki u odnosu na zavjesište, jer mu je tamo potencijalna energija najmanja. Ovo se pravilo lijepo ilustrira primjerom spojenih posuda. Na sl. 3.32. su skicirane dvije posve jednake posude cilindričkog oblika. Lijeva posuda 1 sadrži vodu do visine H u odnosu na podlogu, a desna posuda 2 je prazna. Potencijalna energija vode u posudi 1 iznosi $G\,H/2$, ako je G ukupna težina vode. Kad se ventilom V spoje posude, polovica količine vode će prijeći u drugu posudu. Voda će biti do iste visine u obje posude, a ona će biti $H/2$ iznad podloge. Potencijalna energija vode u jednoj posudi bit će $G\,H/8$, a u obje zajedno ona će biti $G\,H/4$. Ovaj pokus pokazuje interesantan rezultat. Običnim prijelazom vode u drugu posudu i izjednačenjem njihovih visina izgubila se polovica potencijalne energije, odnosno ona je opala na polovicu. Tu nije bilo čak rečeno kako se odvijao proces, samo je uspoređeno početno i konačno stanje ravnoteže.

Energija nabijenog električnog kondenzatora iznosi $Q^2/(2\,C)$. Njegova energija ima karakter potencijalne energije. On se izbija na isti takav kondenzator, istog kapaciteta C. Sada svaki kondenzator sadrži polovicu naboja, tj. $Q/2$, a svaki od njih sadrži energiju $Q^2/(8\,C)$. Oba kondenzatora zajedno sadrže, dakle, energiju $Q^2/(4\,C)$. To je opet polovica početnog iznosa. Ukupna energija postala je manja.

I opet, neovisno o procesu izgubljena je polovica. Takvih se primjera nalazi mnogo, a oni pokazuju na jednostavan način da mogu nastati ozbiljni gubici u prijenosu energije. U tim primjerima bio je uvijek izoliran sustav.

Električni izolirani sustav zadržava naboj na vodičima konstantnim. Električni naboj je konzerviran, te ne može nikamo pobjeći. Pojedini vodič zadržava naboj konstantnim u statičkom stanju dok god je izoliran. Promjena dielektrika u prostoru ispunjenom nabijenim vodičima izaziva samo promjenu razlike potencijala među njima. Promjena dielektrika u pločastu kondenzatoru, ako je on izoliran, povlači za sobom promjenu njegova napona. Ako se dielektričnost udvostruči, napon pada na polovicu. No isto tako i njegova energija pada na polovicu, jer se kapacitet udvostručio. To je u skladu s pravilom o minimumu potencijalne energije.

Teže je zamisliti *izolirani magnetski sustav.* Trebao bi postojati strujni krug kojim teče struja, a da nije priključen na izvor. To je moguće postići ako se vodiči dovedu u supravodljivo stanje. Nešto slično električnom kondenzatoru ne postoji u magnetskom sustavu, te se ne može govoriti o izbijanju jednog sustava na drugi. Ali zato postoji strujni krug sa svojim magnetskim tokom. Njegova je magnetska energija $i\Phi/2 = L\,i^2/2 = \Phi^2/(2\,L)$. Treba pogledati što se događa kad se prostor, koji sadrži vodiče, ispuni novim magnetskim sredstvom. Induktiviteti se promijene za isti iznos kao i permeabilnost magnetskog sredstva, ako se položaj vodiča pri tome ne promijeni. Ako se permeabilnost podvostruči, induktivitet se također podvostruči. No energija sustava mora opasti, jer je sustav izoliran. Energija će opasti samo ako magnetski tok ostane konstantan. Zato opada struja strujnog kruga. *U izoliranom magnetskom sustavu ostaje magnetski tok konstantan.* Ne moraju biti vodiči u suprovodljivu stanju da se primijeni to pravilo. Struja teče realno strujnim krugom dok je on priključen na izvor struje. Ako se izvor struje premosti vodičem, odnosno kratko spoji, magnetski tok nastoji ostati konstantan, bez obzira kakve se promjene dešavale u sustavu. Tako se tumače veliki iznosi struja kratkog spoja električnih generatora. To je pravilo potvrdila i fizika plazme, jer je plazma vrlo blizu supravodljivu stanju. Tok se ponaša slično naboju, te je analogija očevidna. Vektori toka su indukcije **B** i **D**. *Vektori indukcije zadržavaju konstantan iznos u izoliranom sustavu.* Među njima postoji puna analogija.

Potencijalna energija izoliranog sustava nastoji se smanjiti. Sile u njemu djeluju da bi mu se energija smanjila. Sila je jednaka promjeni energije, ako se vodič u cjelini pomjeri za mali dio puta u istom smjeru. Neka je to put s, pa je *sila* u tom smjeru *u izoliranom sustavu*

$$F_s = -\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)_{Q,\Phi} \tag{3.113}$$

Pri tome se drže konstantnima naboj Q ako je u pitanju električni sustav, ili tok Φ ako je u pitanju magnetski sustav. Sila u električnom kondenzatoru iznosi, ako je njegova energija $Q^2/(2\,C)$

$$F_s = -\frac{1}{2}\,Q^2\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{C}\right) \tag{3.114}$$

Isto tako je sila u strujnom krugu, induktiviteta L, ako je energija $\Phi^2/(2\,L)$

$$F_s = -\frac{1}{2}\,\Phi^2\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{L}\right) \tag{3.115}$$

Sila između dva strujna kruga međuinduktiviteta M iznosi slično

$$F_s = - \Phi_{12} \Phi_{21} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{M}\right) \tag{3.116}$$

Dobivene jednadžbe se osnivaju na pravilu da pozitivne sile djeluju u smislu smanjenja energija u izoliranom sustavu. One pokazuju kako je posljedica toga da *sustav nastoji povećati svoj kapacitet i da nastoji povećati svoje induktivitete.*

Drugačije je u *neizoliranom* sustavu. Neizolirani sustav izmjenjuje energiju s vanjskim prostorom. Sustav vodiča priključenog na energetski izvor je slučaj neizoliranog sustava. Izvor snabdijeva energijom promatrani sustav. Ako je izvor dovoljno izdašan, on održava u sustavu vodiča *razlike potencijala konstantnim i struje vodiča konstantnim.* Sile djeluju u smislu povećanja energije sustava. Jednadžba (3.113) ostaje slična, samo se mijenja predznak, a promjena se vrši pri konstantnom naponu, odnosno konstantnoj struji. Sile u strujnom krugu se dobiju iz odnosa

$$F_s = \left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)_{u,i} \tag{3.117}$$

Sada su i jednadžbe (3.114) do (3.116) nešto drukčije, a slijede iz (3.117)

$$\begin{aligned} F_s &= + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial C}{\partial s} && \text{sila u kondenzatoru} \\ F_s &= + \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial s} && \text{sila u strujnom krugu} \\ F_s &= + i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial s} && \text{sile među dva strujna kruga} \end{aligned} \tag{3.118}$$

Sile u neizoliranom sustavu su opet takve, da se nastoje povećati kapaciteti i induktiviteti. Prema tome, *opće je pravilo da su sile u bilo kakvom sustavu takve, da se kapaciteti i induktiviteti nastoje povećati.* To često pomaže da se otkrije pravo djelovanje sila u strujnim krugovima, a da se ne mora voditi računa o izolaciji sustava. Ovdje dobivena pravila iskorištavaju se naročito u analizi sila i momenta vrtnje električnih strojeva.

Induktivitet voda s dva vodiča određen je u poglavlju 2.13., a iznosi

$$L = \frac{\mu}{\pi} \left[\ln\left(\frac{d}{R_0}\right) + \frac{1}{4}\right]$$

za konstantnu gustoću struje po presjeku vodiča. Razmještaj vodiča je vidljiv na sl. 2.38. Osi su razmaknute na udaljenost d, a polumjer vodiča iznosi R_0. Sila među vodičima slijedi iz varijacije razmaka među vodičima, tj. u smjeru osi X, jer su osi

u ravnini X-Z. Pri varijaciji razmaka d održava se struja i konstantnom, te je sila po jednadžbi (3.118)

$$F_d = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{\mu}{\pi} \ln \left(\frac{d}{R_0} \right) + \frac{\mu}{4\pi} \right] = \frac{\mu i^2}{2\pi d} \tag{3.119}$$

To je poznata formula kojom se određuje sila po jedinici duljine između paralelnih vodiča protjecanih strujom. Sila iznosi $0{,}2 \cdot 10^{-6}\ i^2/d$ njutna po metru duljine u praznu prostoru, u sustavu jedinica MKS. Ona je iskorištena u definiciji ampera, jedinice za jakost struje. Tu je usvojena konstanta praznog prostora $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Ako vodom teče struja od 1000 ampera, a vodiči su razmaknuti na udaljenost $a = 100$ mm, sila među vodičima iznosi 2 njutna po metru duljine voda.

Sila između dva prstenasta strujna kruga prema sl. 2.45. određuje se opet upotrebom jednadžbe (3.118) i formule za međuinduktivitet po (2.116). Zbog jednostavnosti neka je $i_1 = -i_2 = i$, tj. struje vodiča su jednake, a suprotna predznaka. Neka su također promjeri prstena međusobno jednaki, $2r_1 = 2r_2 = 2r_0$. a mijenja se odnos $2r_0/z_{12}$. Prema tome je induktivitet među takvim prstenima

$$L_{12} = 2\mu \frac{r_0}{k} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K(k) - E(k) \right]$$

a modul ima iznos koji se dobiva iz

$$k^2 = \frac{4 r_0^2}{z_{12}^2 + 4 r_0^2}$$

Promjena međuinduktiviteta zbog malog pomjeranja jednog prstena u smjeru osi Z iznosi, prema tome

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial z} = -\frac{\mu}{2} \frac{z_{12}^2 k}{r_0} \left[\frac{1}{2} \frac{2 - k^2}{1 - k^2} E(k) - K(k) \right]$$

Prema tome je sila iz (3.118)

$$F_z = F_0 \cdot C_F, \qquad C_F = \frac{z_{12}^2 k}{2 r_0^2} \left[\frac{1}{2} \frac{2 - k^2}{1 - k^2} E(k) - K(k) \right] \tag{3.120}$$

$$F_0 = \mu i^2 \frac{r_0}{z_{12}} = \frac{\mu i^2}{2\pi z_{12}} 2\pi r_0$$

Sila F_0, koja se ovdje pojavljuje, je sila izražena na sličan način kao u vodova od dva paralelna ravna vodiča, duljine jednake upravo opsegu $2\pi r_0$ prstenasta vodiča u ovom primjeru. Tako se proračun sile u ovom primjeru dovodi u vezu s proračunom sile dvožičnog voda, koji je mnogo jednostavniji, potreban je samo korekcioni faktor C_F.

Kad se odnos $z_{12}/(2\,r_0)$ mnogo smanjuje, te postane $z_{12}/(2\,r_0) \ll 1$, konstanta C_F teži k jedinici. To je slučaj voda dvaju paralelnih vodiča. Prikazivanje sile na ovaj način omogućuje, da se preko konstante C_F vidi iznos odstupanja od voda. S druge strane, kad $z_{12}/(2\,r_0)$ postane vrlo veliko, sila prelazi u silu između dva kolinearna dipola suprotna smjera. Evo nekoliko vrijednosti konstante C_F za pojedine omjere $z_{12}/(2\,r_0)$.

TABLICA 3.1.

$z_{12}/(2\,r_0)$	0,1	0,2	0,5	1,0
C_F	0,926	0,887	0,562	0,242

Vodiči moraju biti vrlo blizu da bi se mogli promatrati kao dva paralelna ravna vodiča.

4. RAVNI VAL

4.1. RJEŠENJE MAXWELLOVIH JEDNADŽBI

Električni naboj je izvor elektromagnetskog polja. On proizvodi električno polje, a u gibanju i magnetsko polje. Dva naboja djeluju jedan na drugi električnom silom u skladu sa Coulombovim zakonom. Čim su oni u gibanju jedan prema drugome, pojavljuje se dodatna sila, kojoj se daje magnetski karakter. To se djelovanje prenosi kroz prostor konačnom brzinom kao elektromagnetsko polje. Elektromagnetsko polje u gibanju naziva se *elektromagnetski val*. Djelovanje među nabojima ne bi se moralo prikazivati poljem. Veličine polja se ne vide u Coulombovu zakonu. Može se nastaviti u smislu Coulombova zakona u prikazivanju sila, a da se ne upotrijebe veličine polja. Međutim, čim se ulazi u problem prijenosa sile kroz prostor, u djelovanje na daljinu, jednostavna tumačenja su moguća uz pomoć pojma polja.

Prijenos sila uz pomoć polja tumači se razmjerno na jednostavan način. Prostor dolazi u napeto stanje pod utjecajem polja, a to se napeto stanje prenosi i na predmete na koje polje naiđe. Govori se o djelovanju polja na predmete. Napeto stanje se prenosi kroz prostor konačnom brzinom. Brzina je uvjetovana vremenskim promjenama u polju. Naboj stvara električno polje. Samo vremenska promjena električnog polja stvara magnetsko polje. Vremenska promjena magnetskog polja stvara električno polje. Tako dolazi do uzajamnog induciranja polja, pojavljuje se elektromagnetsko polje. Čim se dozvoljava induciranje jednog polja vremenskom promjenom drugog polja, to mora dovesti do konačne brzine rasprostiranja pojave. To ujedno ukazuje i na tromost polja ili na tromost prostora. Svako tromo polje zahtijeva konačnu brzinu rasprostiranja.

Maxwellove jednadžbe iz poglavlja 1.9. napisane su za miran sustav. Promatrač se nalazi u istom sustavu u kome su i jednadžbe. One glase

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \varrho \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ & & \operatorname{div} \mathbf{J} &= -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ovako napisane, one su još daleko od rješenja. Raspored naboja i struja je zadan. Još uvijek preostaju četiri nepoznanice, vektori polja. Veliko pojednostavnjenje

se postiže promatranjem polja u prostoru bez naboja, dakle uz $\varrho = 0$. Zato se uzima da je div $\mathbf{D} = 0$ i div $\mathbf{J} = 0$. Naboj u prostoru znatno otežava rješavanje jednadžbi.

Vektori polja su u međusobnom odnosu. Vektori toka **D**, **B** i **J** su razmjerni vektorima jakosti polja **E** i **H**. Taj je odnos

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \varkappa \mathbf{E} \tag{4.2}$$

Konstante ε, μ i $\varkappa$, dielektričnosti, permeabilnosti i vodljivosti, su mjerilo za utjecaj sredstva na odnose u polju. One su općenito prostorno i vremenski promjenljive. Prostorna ovisnost nije skalarnog karaktera u anizotropnim sredstvima, već tenzorskog. Promjenljive konstante unose veliku složenost u Maxwellove jednadžbe, te se vrlo teško dolazi do rješenja i ono, osim toga, postaje nepregledno. Prvo promatranje polja zahtijeva da se konstante sredstva uzmu kao stvarne konstante. *Dielektričnost, permeabilnost i vodljivost sredstva su konstantne.* Maxwellove jednadžbe dobivaju jednostavan oblik

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varkappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

One su se svele na dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice. Uzevši u obzir da je rotrot $\mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$ i rotrot $\mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$, dobiju se slijedeće diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &= \mu \varkappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t} \\ \Delta \mathbf{H} &= \mu \varkappa \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.4}$$

To bi još uvijek bilo šest jednadžbi sa šest nepoznatih komponenata polja. Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog stepena zahtijeva složen matematički aparat. To je bitni razlog da se osnovno promatranje elektromagnetskih valova vrši na ravnom valu. *Veličine polja u ravnom valu su ovisne samo o jednoj koordinati u kartezijevu sustavu. Postoji uvijek jedna ravnina u prostoru u kojoj su veličine polja konstantne.* Njezina je jednadžba

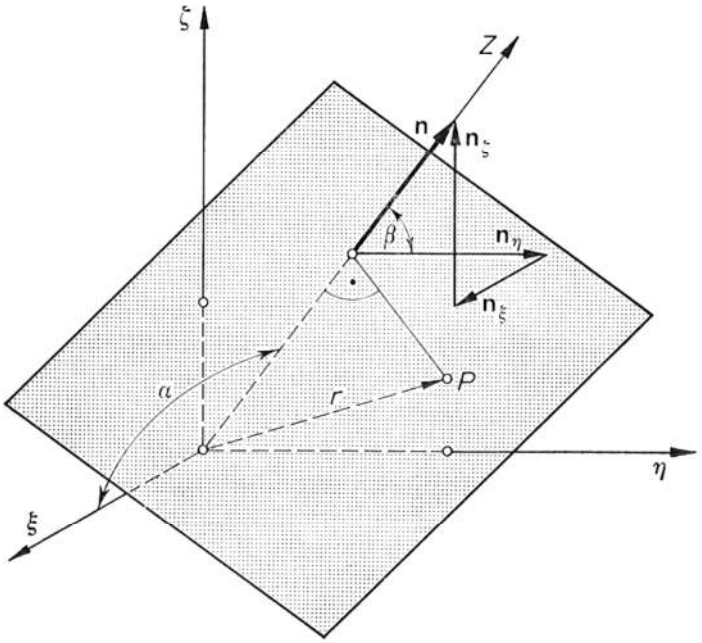
$$\mathbf{r}\,\mathbf{n} = \text{konst.}$$

r je radijusvektor od ishodišta kartezijeva koordinatnog sustava do jedne točke karakteristične ravnine, čija je jedinična normala **n**. Veličine polja se mijenjaju samo u smjeru **n**. To je definicija ravnog vala. Jednadžbe (4.4) pokazuju valni karakter. One se susreću i u mehanici i nisu novost. Sličan oblik imaju u prikazu stanja na rij enosnim, električnim vodovima, te su tamo dobile naziv **telegrafske jednadžbe.**

4.1.1. Svojstva polja u ravnom valu

Neka je zadani koordinatni sustav koordinata ξ, η, ζ. Nova koordinata z je u smjeru normale **n** na karakterističnu ravninu $\mathbf{r}\,\mathbf{n} = \text{konst.}$ u kojoj su veličine polja konstantne. Veličine polja ovise samo o koordinati z, tj. vrijedi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{E}(z) \quad \text{i} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{H}(z).$$



Sl. 4.1. Karakteristična ravnina ravnog vala. Postavljenje koordinatnog sustava s osi **Z** u normalu **n** na ravninu.

Ovisnost veličina o ξ, η, ζ treba svesti na ovisnost o z. Na taj se način uvodi novi koordinatni sustav x, y, z, u kojem su veličine polja ovisne samo o z, a neovisne o ostale dvije koordinate, x i y. Na sl. 4.1. je prikazana karakteristična ravnina. Promjena neke veličine po jednoj od koordinata ξ, η, ζ jednaka je promjeni iste veličine u smjeru normale projicirane u smjer dotične koordinate. Prema tome je odnos derivacija

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = n_\xi \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = n_\eta \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} = n_\zeta \frac{\partial}{\partial z}$$

Zato *nabla* operator dobiva jednostavan oblik

$$\nabla = \xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z}$$

Maxwellove jednadžbe (4.3) poprimaju jednostavan oblik za ravni val gdje postoji ovisnost samo o jednoj koordinati z i taj glasi

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} &= \varkappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = 0 \\ \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sada je moguće istražiti neke karakteristike ravnog vala. Budući da je $\mathbf{n}\,(\mathbf{n} \times \partial\mathbf{E}/\partial z) = \mathbf{n}\,(\mathbf{n} \times \partial\mathbf{H}/\partial z) = 0$, znači da su također $\mathbf{n}\,\partial\mathbf{H}/\partial t = 0$ i $\mathbf{n}\,(\varkappa \mathbf{E} + \varepsilon\,\partial\mathbf{E}/\partial t) = 0$. To daje, s ostale dvije jednadžbe

$$\mathbf{n}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathbf{n}\,\mathrm{d}\mathbf{H} \equiv 0$$

$$\mathbf{n}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{\varkappa}{\varepsilon}\,\mathbf{n}\,\mathbf{E} = \mathbf{n}\left(\mathrm{d}\mathbf{E} + \frac{\varkappa}{\varepsilon}\,\mathbf{E}\right) \equiv 0$$

Takvi odnosi upućuju na to da mora biti zadovoljen uvjet

$$\mathbf{n}\,\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n}\,\mathbf{H} = 0$$

Vektori jakosti polja su okomiti na normalu, tj. oni *leže u karakterističnoj ravnini.* To je prvo svojstvo ravnog vala.

Drugo svojstvo ravnog vala se dobiva iskoristivši produkt $\mathbf{E}\,(\mathbf{n} \times \partial\mathbf{E}/\partial z) = \mathbf{H}\,(\mathbf{n} \times \partial\mathbf{H}/\partial z) \equiv 0$. Zato je $\mathbf{E}\,\partial\mathbf{H}/\partial t = \mathbf{H}\,(\varkappa \mathbf{E} + \varepsilon\,\partial\mathbf{E}/\partial t) \equiv 0$. Suma obaju izraza dovodi na jednadžbu

$$\mathbf{H}\,\mathbf{E} + T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{H}\,\mathbf{E}) = 0$$

$T = \varepsilon/\varkappa$ je vremenska konstanta relaksacije naboja u vodljivu sredstvu. Rješenje jednadžbe vodi na uvjet

$$\mathbf{H}\,\mathbf{E} = 0$$

nakon stanovitog vremena ovisnog o vremenskoj konstanti T, odnosno ovisno o početnim uvjetima. Drugo svojstvo ravnog vala govori da su *vektori jakosti polja međusobno okomiti.*

4.1.2. Rješenje telegrafskih jednadžbi

Definicija ravnog vala i njegova svojstva znatno olakšavaju rješavanje jednadžbi i daljnju analizu njegova ponašanja. Svaki se oblik vala može svesti na ravni val, ako se promatra u dovoljno malenu prostoru. Tako se svojstva ravnog vala mogu primijeniti na bilo koji oblik vala. Koordinatni sustav može se uvijek tako postaviti da karakteristična ravnina padne u ravninu X-Y, a vektori jakosti polja padnu svaki u jednu od osi X ili Y. Korisno je da se Poyntingov vektor $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ poklopi sa smjerom osi Z. Kako se radi o desnom koordinatnom sustavu, mora **E** pasti u os X, a **H** u os Y. Sada se mogu ispustiti oznake koordinata, jedino treba voditi računa da postoje samo E_x i H_y. Konačno su polazne jednadžbe polja iz (4.3) i (4.4) za ravni val

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial H}{\partial z} &= \varkappa E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \\
\frac{\partial E}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 E}{\partial z} &= \mu \varkappa \frac{\partial E}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} &= \mu \varkappa \frac{\partial H}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Druge dvije jednadžbe slijede iz prvih dviju. One su sasvim jednako formirane, te je dovoljno promatrati samo jednu od njih.

Laplaceova transformacija pomaže znatno da se lakše rješavaju i analiziraju jednadžbe (4.6). Treba pretpostaviti da je za $t = 0$, $E = H = 0$. Tada je jednostavniji oblik jednadžbi u Laplaceovu području. Početni iznosi polja različiti od ništice doprinose samo u smislu jednog konstantnog iznosa, koji se superponira na prolazno stanje. Uz ovu pretpostavku se smije staviti operator p umjesto vremenske derivacije. Jednadžbe (4.6) glase u Laplaceovu području

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} = -Y E, \qquad Y = \varkappa + \varepsilon p \\
&\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = -Z H, \qquad Z = \mu p \\
&\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}^2 z} = \gamma^2 E, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}z^2} = \gamma^2 H, \qquad \gamma = +(ZY)^{1/2} = +(\mu \varepsilon p^2 + \mu \varkappa p)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Rješenje jednadžbi je jednostavno i prikazuje se eksponencijalnim funkcijama

$$E = E_1 e^{\gamma z} + E_2 e^{-\gamma z}$$
$$H = H_1 e^{\gamma z} + H_2 e^{-\gamma z} \tag{4.8}$$

To je rješenje u Laplaceovu području, a u njemu se pojavljuju četiri integracione konstante: E_1, E_2 i H_1 H_2. Dvije od njih se eliminiraju upotrebom odnosa veličina polja u (4.7) i rješenja (4.8)

$$H = -\frac{1}{Z}\frac{dE}{dz} = -\frac{\gamma}{Z}(E_1 e^{\gamma z} - E_2 e^{-\gamma z})$$

4.1.3. Sekundarne konstante prostora

Usporedi li se to rješenje sa (4.8), dobiva se odnos konstanti

$$\frac{E_2}{H_2} = -\frac{E_1}{H_1} = \left(\frac{Z}{Y}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mu p}{\varkappa + \varepsilon p}\right)^{1/2} = Z_v(p) \tag{4.9}$$

Dobivene konstante imaju posebna imena u teoriji elektromagnetskih valova. Konstanta γ se zove **valna konstanta**, a konstanta $Z_v(p)$ **valna impedancija**. Ona se katdada zove *valni otpor*, a i *karakteristična impedancija*. Sad su preostale još samo dvije konstante integracije koje ovise o početnim uvjetima. Konstante treba pisati u preglednijem obliku

$$\gamma = \frac{p}{c}\left(1 + \frac{1}{Tp}\right)^{1/2}, \quad c = \frac{1}{(\mu\varepsilon)^{1/2}}, \quad T = \frac{\varepsilon}{\varkappa}$$
$$Z_v(p) = Z_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{Tp}\right)^{1/2}}, \quad Z_0 = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \tag{4.10}$$

Vidljiva je značajna uloga vremenske konstante relaksacije $T = \varepsilon/\varkappa$. O njoj ovisi koliko će se faktor $[1 + 1/(Tp)]^{1/2}$ razlikovati od jedinice. *Sredstvu bez gubitaka* odgovara beskonačno velika vremenska konstanta relaksacije. *Konstante prostora* poprimaju jednostavan oblik $\gamma = p/c$ i $Z_v(p) = Z_0$. Valna impedancija postaje pravi valni otpor vremenski neovisan.

4.1.4. Val u sredstvu bez gubitaka

Jednadžba (4.8) glasi za jakost električnog polja

$$E = E_1 e^{pz/c} + E_2 e^{-pz/c}$$

Eksponencijalni član u Laplaceovu području znači u originalu pomjeranje po vremenskoj osi za vrijeme $\pm z/c$, kad se počinje brojati vrijeme. Prije vremena $\pm z/c$ nije bilo polja na mjestu z u prostoru. Polje glasi u originalu

$$\begin{aligned} E &= f_1\left(t + \frac{z}{c}\right) + f_2\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ H &= -\frac{1}{Z_0} f_1\left(t + \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{Z_0} f_2\left(t - \frac{z}{c}\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Potpuno je jasan valni karakter polja. Oba se polja sastoje od dva vala, *pozitivnog vala* f_2 i *negativnog vala* f_1. Prema pravilima Laplaceove transformacije mora biti $f_2 = 0$ za $t \leqslant z/c$, a isto tako $f_1 = 0$ za $t \leqslant -z/c$. To se može samo tako razumjeti, da je polje sastavljeno od dva vala koji se gibaju u *suprotnim smjerovima*. Pozitivni val giba se u pozitivnom smjeru osi Z *brzinom čela vala jednakom* $c = 1/(\mu\varepsilon)^{1/2}$, a negativni val giba se čelom istom brzinom u *suprotnom* ili *negativnom smjeru*. Negativni val ima svojstvo da mu je valna impedancija negativna, što se ujedno vidi iz definicionog izraza (4.9).

Takvo rješenje Maxwellovih jednadžbi značilo je nekad revoluciju u fizici. Revolucionarni značaj nije bio u valnom karakteru polja, jer to nije bilo novo, već u dobivenoj brzini čela vala $c = (\mu\varepsilon)^{-1/2}$. Brzina je ovisna o permeabilnosti i dielektričnosti. Ona iznosi u praznu prostoru $c_0 = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$. Konstante μ_0 i ε_0 za prazan prostor su bile poznate neovisno o brzini. Kad su one bile uvrštene, dobivena je *brzina čela vala jednaka brzini svjetla* u praznu prostoru. To je ponukalo Maxwella da postavi hipotezu o elektromagnetskoj prirodi svjetla. To je ujedno udarilo temelje valnoj teoriji svjetla, koja je dominirala dosta dugo vremena.

4.1.5. Brzina čela vala

Promatranje funkcije u Laplaceovu području omogućuje stanovitu analizu. Poznato je da je

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} [p\,F(p)]$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} [p\,F(p)]$$

Ovo se pravilo iskorištava da se ustanovi ponašanje čela vala općenito u bilo kojem sredstvu. Treba pogledati kako se ponašaju funkcije $p\,E(p)$ i $p\,H(p)$, ako $p\to\infty$.

U tom slučaju valna konstanta teži k vrijednosti $\gamma = p/c$, a valna impedancija postaje jednaka Z_0. Takve su vrijednosti kod sredstva bez gubitaka. *Čelo vala se ponaša uvijek kao da sredstvo nema gubitaka.*

Ono se uvijek giba brzinom koja je jednaka brzini svjetla. Elektromagnetski impuls se rasprostire kroz prostor brzinom svjetla.

PRIMJER 4.1. Zadana je **jakost električnog polja** E_0 **pozitivnog vala** u ishodištu koordinatnog sustava. Ona je vremenski konstantna u $z = 0$, tj. predstavljena je odreznom funkcijom. Sad je val predstavljen u Laplaceovu području

$$E = \frac{E_0}{p} e^{-\gamma z}, \qquad H = \frac{E_0}{p Z_v} e^{-\gamma z}$$

Valnu konstantu i valnu impedanciju iz (4.10) treba prikazati kao binomni red

$$\gamma = \frac{p}{c}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{1}{Tp} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{1}{T^2p^2} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{T^3p^3} - + \cdots\right]$$

$$Z_v = Z_0\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{Tp} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{T^2p^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{T^3p^3} + - \cdots\right]$$

Veličina Tp je mjerodavna kako se razvija val napredujući duž osi Z. Ako je Tp dovoljno veliko, tj. $Tp \gg 1$, konstante se približno prikazuju kao

$$\gamma = \frac{p}{c}, \qquad Z_v = Z_0 \quad \text{pri} \quad Tp \gg 1$$

To je rasprostiranje vala u prostoru bez gubitaka. Čelo vala napreduje brzinom c.

Slijedeća faza promatranja uzima u obzir dva člana reda valne konstante, tj.

$$\gamma = \frac{p}{c} + \frac{1}{2Tc}, \qquad Z_v = Z_0$$

Član $1/(2\,T\,c)$ ima ulogu *prigušne konstante*

$$\alpha = \frac{1}{2Tc} = \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \tag{4.12}$$

Rješenje za veličine polja glasi

$$E = E_0 e^{-\alpha z}, \quad H = \frac{E_0}{Z_0} e^{-\alpha z}, \quad t > t_0 = \frac{z}{c}$$

Čelo vala opet putuje brzinom c, ali se njegov iznos smanji na vrijednost uvjetovanu prigušnom konstantom α. Neka je to prostor ispunjen vodom vodljivosti $\varkappa = 10^{-2}$ S/m. Voda ima dielektričnost $\varepsilon = 81\ \varepsilon_0$ i permeabilnost $\mu = \mu_0$. Takvim iznosima odgovara prigušna konstanta $\alpha = 0{,}21$ Np/m. Čelo vala poprima iznos $E_0/e = 0{,}368\ E_0$ nakon prevaljenoga puta $z = d = 1/\alpha = 4{,}8$ m. Brzina čela vala iznosi $c = 0{,}33 \cdot 10^8$ m/s, a potrebno vrijeme za put d iznosi $d/c = 2\,T = 143$ nsek. To je tako dugo vrijeme, da nije dozvoljeno upotrijebljeno pojednostavnjenje. Ipak, ponašanje čela vala ostaje isto, tj. njegovo prigušenje i brzina.

Daljnje približenje se postiže dodavanjem još jednog člana valnoj konstanti, koja je sada

$$\gamma = \frac{p}{c} + \alpha - \frac{\alpha}{4Tp}$$

Jakost električnog polja iznosi u originalu

$$E = E_0^{-\alpha z} I_0(u)$$

$$u^2 = \frac{\alpha z}{T}(t - t_0)$$

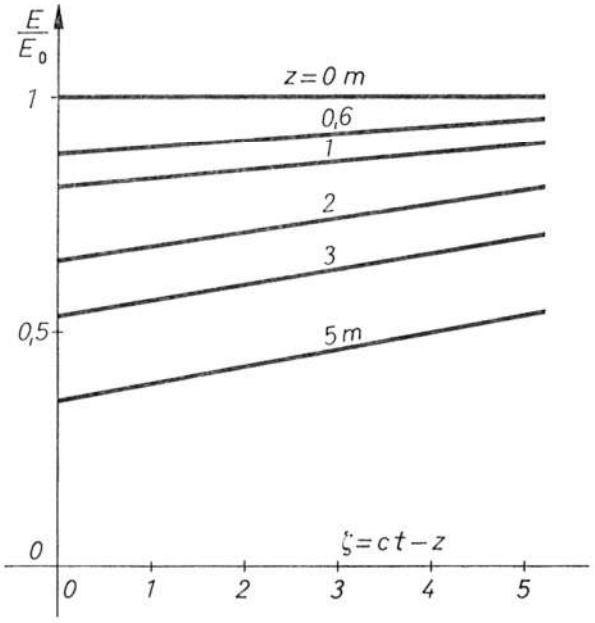
Funkcija $I_0(u)$ je modificirana Besselova funkcija nultoga reda, prve vrste. Ona se može prikazati sa prva dva člana reda, jer su argumenti manji od jedan, tj.

$$I_0(u) = 1 + \frac{u^2}{4} = 1 + \frac{\alpha z}{4T}(t - t_0), \qquad \begin{matrix} u < 0{,}8 \\ t > t_0 \end{matrix}$$

Ovo je rješenje valjano za vremena $t > t_0 = z/c$, ako je to vrijeme kad čelo vala treba da stigne do daljine z od ishodišta. Ako se promatrač postavi u točku koordinate z, do njega stigne val za vrijeme $t_0 = z/c$. Tada promatrač smije početi brojati vrijeme. Njegovo je vrijeme $\tau = t - t_0$. Val dosegne daljinu $\zeta = c\tau$ u tome vremenu, a promatrač registrira jakost polja u ovisnosti o τ ili o ζ, po volji. Neka se uvrsti daljina ζ, pa jakost polja iznosi približno

$$E = E_0 e^{-\alpha z}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 z\,\zeta\right)$$

Krivulje E/E_0 su prikazane na sl. 4.2. u ovisnosti o ζ, udaljenosti od točke promatranja. Upotrijebljen je primjer s vodom vodljivosti 10^{-2} S/m. Ovaj primjer pokazuje kako je iznos čela vala sve manji kako val napreduje. Kako val prolazi, promatrač registrira sve veći iznos jakosti polja. Odrezani val se »spljoštava« kako napreduje u prostoru, koji je ispunjen sredstvom s gubicima.



Sl. 4.2. Dijagram oblika čela »udarnog« vala nakon prevaljenog puta u sredstvu s gubicima. Sredstvo je voda dielektričnosti 81 i vodljivosti 10 mS/m. Prikazan je oblik čela vala E/F_0 u relativnom iznosu nakon što je prevalilo put 0, 0,6 1, 2, 3, i 5 m. Kao apscisa je izabran prevaljeni put vala $c\,t - z$, $t > t_0 = z/c$ za promatrača koji se nalazi na mjestu z.

Jakost magnetskog polja iznosi na svakom mjestu $H = E/Z_v$, jer se radi samo o pozitivnom valu. Valna impedancija se izražava približno s dva člana binomnog reda, odmah u recipročnom obliku

$$\frac{1}{Z_v} = \frac{1}{Z_0}\left(1 + \frac{1}{2Tp}\right)$$

Prema tome je jakost magnetskog polja u Laplaceovu području

$$H = \frac{E_0}{Z_0 p}\left(1 + \frac{1}{2Tp}\right) e^{-\gamma z}$$

Ona ima prvi pribrojnik kao u jakosti električnog polja, a drugi je pribrojnik nešto drukčiji i u originalu iznosi

$$H_2 = \frac{E_0}{Z_0} e^{-az}\left(\frac{2\zeta}{z}\right)^{1/2} I_1(u)$$

Tu je $I_1(u)$ modificirana Besselova funkcija prvog reda, prve vrste, a u je argument kao i prije. Jakost magnetskog polja iznosi približno

$$H = \frac{E_0}{Z_0} e^{-az}\left[1 + a\zeta + \frac{1}{2}a^2 z\zeta\left(1 + \frac{1}{2}a\zeta\right)\right]$$

Ona je nešto drukčije formirana. Budući da je u ishodištu propisana jakost električnog polja E_0 konstanta, jakost magnetskog polja u ishodištu H_0 postepeno raste kako čelo vala napreduje, tj. ona iznosi

$$H_0 = \frac{E_0}{Z_0}(1 + a\zeta)$$

To se moglo očekivati, jer nije definiran izvor ravnog vala. Zbog toga, za mirnog promatrača magnetsko polje jače raste od električnog polja.

4.2. RETARDIRANI POTENCIJALI

Potencijali se mnogo upotrebljavaju u rješavanju statičkih polja. Posebno, skalarni električni potencijal ima stanoviti fizikalni smisao. On predstavlja izvršenu radnju da bi se jedinični naboj pomjerio u polju. Vektorski magnetski potencijal je uveden po analogiji sa skalarnim. Tako su nastale jednadžbe potencijala u integralnom obliku

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho\,\mathrm{d}V}{r}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\,\mathrm{d}V}{r} \tag{4.13}$$

Potencijali su iskorišteni u određivanju vektora polja preko odnosa $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ i $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Skalarni potencijal je poslužio da se ustanovi energija elektrostatskog polja. Po njemu se sva takva polja zovu potencijalna polja. Veličina skalarnog potencijala upravo je postala značajna u definiciji energije polja. Vektorski potencijal je značajan također u energetskim razmatranjima. Sve govori da su oni značajni u rješavanju statičkih polja.

Nije posve jasno kakva je njihova uloga u dinamičkom polju. Dinamičko polje je karakteristično po pojavi valova. Stanje u polju se određuje direktno vektorima polja. Razlike potencijala ili električni naponi nisu interesantni. Ne postoji nužnost da se upotrijebe veličine potencijala. Problem nastaje kad se traži polje određena izvora polja. Takav je izvor polja dipol kojemu se mijenja dipolni moment. Tako se unosi element vremenske promjene. Prednost je potencijala u matematičkoj interpretaciji polja. Rješavanje Maxwellovih jednadžbi vodi na rješavanje šest diferencijalnih jednadžbi koje pripadaju k šest komponenata polja. Rad s potencijalima svodi broj jednadžbi na četiri. To bi moralo pojednostaviti analizu polja. Tako se može pravdati potreba uvođenja potencijala.

4.2.1. Retardirano vrijeme

Prethodno je poglavlje pokazalo da se elektromagnetska promjena rasprostire u prostoru konačnom brzinom c, koja je jednaka brzini svjetla. Promjena točkastog naboja registrira se u nekoj udaljenoj točki tek nakon vremena r/c, ako je ona na udaljenosti r od naboja. S tim je usko vezan relativistički način promatranja, jer se postavlja pitanje istodobnosti. Potencijali (4.13) se utvrđuju u koordinatnom sustavu 1, te su oni neka funkcija koordinata x_1, y_1 i z_1 i vremena t_1. Izvori polja, gustoća naboja i gustoća struje **J** su funkcije koordinata x_2, y_2 i z_2 i vremena t_2. Koordinatni sustavi su mirni jedan prema drugome, a veza među njima dana je radijusvektorom koji se dobiva iz odnosa $r_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$. Vrijeme t_2 se zove **retardirano vrijeme**, a njegov je odnos prema t_1 zadan sa $t_2 = t_1 - r_{12}/c$. Brzina c je brzina čela vala iz (4.10).

4.2.2. Jednadžba potencijala

Vektorski potencijal je uveden u poglavju 2.12. Tamo je iskorištena bezizvornost vektora **B**, da bi se on izjednačio s rotacijom nekog drugog vektora **A**, koji je prozvan vektorpotencijal. Taj je odnos $\mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A}$. Taj odnos ostaje i onda, ako bi vektorpotencijal bio

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\,\psi \tag{4.14}$$

Sada druga Maxwellova jednadžba pokazuje da je vektor $(\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t)$ bezvrtložan, te se može prikazati kao gradijent nekog skalarnog potencijala φ, tj.

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\,\text{grad}\,\varphi \tag{4.15}$$

ako je polje statičko, (4.15) prelazi u odnos za statički skalarni potencijal. Vektorpotencijalu (4.14) odgovara skalarni potencijal φ' koji se dobije iz (4.15). Jednadžba novog skalarnog potencijala glasi

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\,\text{grad}\,\varphi' \tag{4.16}$$

Uzevši u obzir (4.14), slijedi da je

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{4.17}$$

Treća Maxwellova jednadžba daje $\text{div}\,\mathbf{E} = \varrho/\varepsilon$, te se primjenom operacija divergencije na (4.15) dobiva

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\mathbf{A}) = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{4.18}$$

Prva Maxwellova jednadžba dovodi veličine električnog polja u vezu s vrtlozima magnetskog polja. Veličina rot **H** se nadomješta sa

$$\frac{1}{\mu}\,\text{rotrot}\,\mathbf{A} = \frac{1}{\mu}\,\text{grad div}\,\mathbf{A} - \frac{1}{\mu}\,\Delta\mathbf{A}$$

Nadalje se $\partial\mathbf{D}/\partial t$ nadomješta uz pomoć odnosa (4.15) sa

$$-\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\,\text{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

Sada prva Maxwellova jednadžba glasi

$$\Delta\mathbf{A} - \mu\,\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad}\left(\text{div}\,\mathbf{A} + \mu\,\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\,\mathbf{J} \tag{4.19}$$

Jednadžbe (4.18) i (4.19) ostaju nepromijenjene, ako se upotrijebe potencijali $\mathbf{A}'$ i φ' iz (4.14) i (4.17). One nadomještaju u osnovi prvu i drugu Maxwellovu jednadžbu. Obje sadrže i oba potencijala. Da bi ih se svelo na po jedan potencijal, potreban je još jedan uvjet.

Vektori polja su međusobno vezani Maxwellovim jednadžbama. Ako se želi polje prikazati potencijalima, moraju i oni biti međusobno vezani. Teškoće nastaju zbog neodređenosti potencijala, kao što se vidi iz (4.14) i (4.17). Potencijali se ispravljaju veličinom koja se izvodi iz funkcije ψ. Da bi se odredilo potencijale, potrebno je prethodno odrediti funkciju ψ.

Gustoća struje **J** u (4.19) ovisi o jakosti električnog polja u skladu s Ohmovim zakonom $\mathbf{J} = \varkappa\,\mathbf{E}$. Zato je desna strana u istoj jednadžbi $\mu\,\mathbf{J} = \mu\varkappa\,\mathbf{E} = -\mu\,\varkappa\,\partial\mathbf{A}/\partial t - \mu\,\varkappa\,\text{grad}\,\varphi$. Sada jednadžba (4.19) poprima oblik

$$\Delta\mathbf{A} - \mu\,\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\,\varkappa\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\left(\text{div}\,\mathbf{A} + \mu\,\varkappa\,\varphi + \mu\,\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0$$

Traženi odnos među potencijalima pokazuje se u ovoj jednadžbi. On glasi

$$\text{div}\,\mathbf{A} = -\mu\,\varkappa\,\varphi - \mu\,\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{4.21}$$

Ako se u ovaj odnos uvrste potencijali (4.14) i (4.17), slijedi da mora biti zadovoljena jednadžba funkcije ψ

$$\Delta\psi = \mu\,\varkappa\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mu\,\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{4.22}$$

Diferencijalna jednadžba (4.22) daje funkciju ψ iz koje se dobiju veličine prema (4.14) i (4.17), koje ne mijenjaju jednadžbe potencijala.

Uz odnos (4.21) one glase

$$\Delta\varphi = \mu\,\varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\,\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\varrho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\mathbf{A} = \mu\,\varkappa\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu\,\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \tag{4.23}$$

Lorentz je došao do sličnog odnosa (4.21) na primjeru polja točkastog naboja za polje u izolatoru. Zato se taj odnos zove **Lorentzov odnos invarijantnosti.** Pomoću njega dobiva se veličina ψ koja, ako se dodaje potencijalu, nema utjecaja koliki će biti vektori polja. Jednadžbe (4.22) i (4.23) su sve jednako građene, naročito kad nema naboja u prostoru, tj. za $\varrho = 0$. Dapače, takve su jednadžbe i za vektore polja. Svuda se pojavljuje isti operator

$$\gamma^2 = \mu\,\varkappa\frac{\partial}{\partial t} + \mu\,\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4.24}$$

γ je *valni operator*. On se zove i valna konstanta. Međutim, ovdje ima karakter operatora.

4.2.3. Retardiranje veličina

Razmatranja ravnog vala u prethodnom poglavlju su pokazala da se čelo vala giba brzinom svjetla, c. Tako je nastalo retardirano vrijeme $(t_1 - r_{12}/c) = t_2$. Neka je $\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \mathbf{A}_1$ a $\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2, t_2) = \mathbf{J}_2$, tj. jednadžba vektorpotencijala u (4.13) jest

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}_2\,\mathrm{d}V_2}{r_{12}}$$

Kad se na tu jednadžbu primijeni operacija divergencije, dobije se Lorentzov odnos, samo za prostor bez gubitaka, $\varkappa = 0$, tj.

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_1 = -\,\mu\,\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$$

Zato su ovi potencijali nazvani *retardirani potencijali.*

4.2.4. Hertzov vektor

Lorentzov odnos (4.21) dovodi u vezu oba potencijala. Na taj način se broj potrebnih jednadžbi svodi na tri, da bi se odredilo stanje u polju. Vrlo blizu je ideja da se uvede kao pomoćna veličina neki vektor koji bi u sebi objedinio oba potencijala. Tada bi se iz njega mogli odrediti i vektori polja. Novi vektor $\mathbf{\Pi}$ je takav, da je njegov odnos prema skalarnom potencijalu

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi} \tag{4.25}$$

Lorentzov odnos (4.21) daje vezu s vektorpotencijalom

$$\mathbf{A} = \mu \varkappa \mathbf{\Pi} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \tag{4.26}$$

Vektor $\mathbf{\Pi}$ se zove **Hertzov vektor,** jer se primjenjuje pri određivanju polja Hertzova oscilatora. I on se dobiva iz standardne valne jednadžbe

$$\Delta \mathbf{\Pi} = \mu \varkappa \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t} = \gamma^2 \mathbf{\Pi} \tag{4.27}$$

Vektori polja se dobiju iskorištavajući definicionu jednadžbu (4.25) i poznate odnose među potencijalima i vektorima polja. Oni glase

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{graddiv} \mathbf{\Pi} - \gamma^2 \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \varkappa \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{\Pi}) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Rad s Hertzovim vektorom $\mathbf{\Pi}$ zahtijeva poznavanje njegovih triju komponenata. Ima zadataka gdje se jednostavno nalazi polje zahvaljujući tome vektoru. Ipak, njegova upotreba nije toliko raširena kao ona retardiranih potencijala. Praktički je neophodna primjena retardiranih potencijala, odnosno Hertzova vektora, čim je potrebno odrediti polje nekog izvora, struje, naboja u gibanju ili promjenljivog naboja.

Hertzov vektor, $\mathbf{\Pi}$, nema fizikalno značenje, već on služi u matematičkoj interpretaciji odnosa u polju. Ovdje je prikazana njegova primjena u prostoru ispunjenom električki vodljivim materijalom. Odnosi se pojednostavnjuju ako je prostor ispunjen materijalom bez gubitaka. Maxwellove jednadžbe su simetrično oblikovane u prostoru bez gubitaka i naboja

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

Skalarni potencijal se odnosi na električno polje, a vektorski potencijal uzima u obzir magnetsko polje. Nema zapreke da se postupi i obrnuto. Neka se skalarni potencijal odnosi na magnetsko polje, a vektorski na električno polje. Lorentzov odnos ostaje nadalje u važnosti, samo treba uzeti u obzir da su

$$\varepsilon \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \qquad \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Tako postavljeni odnosi omogućuju uvođenje *magnetskog* Hertzova vektora $\mathbf{\Pi}_m$. Potencijali slijede opet iz jednadžbi (4.25) i (4.26), samo što je vodljivost $\varkappa = 0$. Jednako je i njegova diferencijalna jednadžba kao i (4.27) uz isti uvjet $\varkappa = 0$. Vektori polja izlaze iz njega drukčijim redoslijedom

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_m - \gamma^2 \mathbf{\Pi}_m$$

$$\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_m)$$

Magnetski Hertzov vektor pomaže katkad u proračunu polja.

4.2.5. Avansiranje veličina

Bitnu ulogu u svim ovim razmatrajima ima *retardirano vrijeme* $(t - r/c)$. Ono pokazuje da se promjene u prostoru rasprostiru konačnom brzinom c, koja je jednaka brzini svjetla. Da bi se postigla općenitost u rješavanju pojedinih zadataka, govori se i o *avansiranom vremenu*, $(t + r/c)$. Njime se uzima u obzir smjer rasprostiranja promjene. Ako se promjena rasprostire u negativnom smjeru radijusvektora, treba raditi s avansiranim vremenom. Ono ne utječe na odnose među potencijalima i vektorima polja. Maxwellovim jednadžbama i potencijalima dana je potpuna mogućnost rješavanja pojedinih zadataka elektromagnetskog polja.

4.3. VAL U IZOTROPNOM SREDSTVU

Poglavlje 4.1. je poslužilo da se prikaže osnova ravnog vala, a dobivena rješenja su sadržana u jednadžbama (4.8) do (4.10). Početni uvjeti su mjerodavni kakva će se metoda primijeniti u prikazivanju ravnog vala. Početni uvjeti ovise o izvoru ravnog vala, koji se ovdje ne uzima u obzir.

4.3.1. Harmonički val

Najlakša je analiza **harmoničkog vala.** On pruža mogućnost da se dobije najviše podataka o ravnom valu. On traži da se govori o frekvenciji i duljini vala. Retardirano vrijeme dobiva konkretniji oblik, jer se dovodi u vezu s trajanjem jedne periode. Sam pojam vala nekako odmah upućuje na harmonički ili sinusni val. Harmonički val omogućuje da se primijene pravila kompleksnih brojeva pri rješavanju jednadžbi polja.

Sve se veličine pišu u *kompleksnoj vremenskoj ravnini*. Zadržava se isti način pisanja, a razlika je samo u tome što se pojavljuje imaginarna jedinica $\sqrt{-1} = j$. Stvarna vrijednost veličine ili *veličina u originalu* jednaka je realnoj vrijednosti kompleksne veličine. Zato se harmoničke veličine pokazuju kosinusom. Maxwellove jednadžbe se prevedu u kompleksno područje da se vremenske derivacije predstave faktorom $j\omega$. Rješenje jednadžbi ostaje kao u (4.8), samo su *konstante prostora*

$$\gamma = j\,\frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{j\,\omega\,T}\right)^{1/2} = \alpha + j\,\beta, \qquad \text{valna konstanta}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\omega}{c}\left[\left(1 + \frac{1}{\omega^2\,T^2}\right)^{1/2} - 1\right]^{1/2}, \qquad \text{prigušna konstanta}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\omega}{c}\left[\left(1 + \frac{1}{\omega^2\,T^2}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2}, \qquad \text{fazna konstanta}$$

$$Z_v = Z_0\,\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j\,\omega\,T}\right)^{1/2}} = |\,Z_v\,|\,e^{j\varphi}, \qquad \text{valna impedancija}$$

$$|\,Z_v\,| = \frac{Z_0}{\left(1 + \frac{1}{\omega^2\,T^2}\right)^{1/4}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\beta} = (1 + \omega^2\,T^2)^{1/2} - \omega\,T < 1$$

$$T = \frac{\varepsilon}{\varkappa} \qquad \text{vremenska konstanta relaksacije naboja}$$

Tu se pojavljuje vremenska kružna frekvencija $\omega = 2\,\pi f$ ravnog vala. Valna konstanta ima kompleksan karakter, te se rastavlja na realni i imaginarni dio, na *prigušnu i faznu konstantu*. One su dobile takva imena, kako sudjeluju u veličini polja. Vodljivost sredstva je zastupana u relaksacionoj konstanti $T = \varepsilon/\varkappa$, a prema tome značajnu ulogu ima konsnata $\omega\,T = \omega\,\varepsilon/\varkappa$. Njezina veličina pokazuje koliko vodljivost djeluje na prigušnu i faznu konstantu, te na valnu impedanciju. Tangens faznog kuta φ je ujedno omjer između prigušne i fazne konstante. Ona se mijenja između krajnjih granica ništice i jedinice. To znači da prigušna konstanta iščezava u sredstvu bez gubitaka, a postaje jednaka faznoj konstanti kad je $\omega\,T \ll 1$. Prigušna konstanta ne može biti nikad veća od fazne. Iznos valne impedancije samo je manji od valnog otpora $Z_0 = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$, ovisno o konstanti $\omega\,T$. Valni otpor iznosi za prazni prostor $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 377$ oma, a valna impedancija za bakar kod 50 herca je oko 2,6 mikrooma. Vidi se kako je velik interval vrijednosti valnih impedancija. Fazni kut φ je ujedno fazni kut između vektora električnog i magnetskog polja koji pripadaju jednom valu, pozitivnom ili negativnom.

Dovoljno je promatrati samo jedan *val*, a to je *pozitivni*. Jednažba (4.8) izgleda u originalu, vraćena iz kompleksnog područja

$$\begin{aligned} E &= E_m\,e^{-\alpha z}\cos(\omega\,t - \beta\,z) \\ H &= \frac{E_m}{|\,Z_v\,|}\,e^{-\alpha z}\cos(\omega\,t - \beta\,z - \varphi) \end{aligned} \qquad (4.30)$$

E_m je tjemena vrijednost jakosti električnog polja na mjestu $z = 0$, odakle počinje promatranje polja. Jednadžbe jakosti polja pisane na taj način pokazuju puno značenje pojedinih konstanti. Valna impedancija dovodi u vezu vektore jednog i drugog polja istoga vala. Magnetsko polje zaostaje fazno iza električnog polja zbog gubitaka u prostoru. Fazni kut φ valne impedancije okreće vremensku fazu polja.

4.3.2. Fazna konstanta

Fazna konstanta β okreće *prostornu fazu* polja. Faza električnog polja je $(\omega t - \beta z)$, koja se pojavljuje i u magnetskom polju. Polje se vremenski mijenja po zakonu sinusa na nekom određenom mjestu u prostoru $z = \text{konst}$. Isto tako se polje mijenja po zakonu sinusa po osi Z za neko konstantno vrijeme $t = \text{konst}$. Prostorna harmoničnost polja navodi da se govori o valnom karakteru polja, o valovima polja. Sad se govori i o **duljini vala** λ. Prostorna faza βz se promijeni za 2π radijana ili 360° na duljini koja je jednaka duljini vala. Zato se ona dobiva iz odnosa $\beta \lambda = 2\pi$, te iznosi

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{4.31}$$

Duljina vala je obrnuto razmjerna faznoj konstanti i ovisi samo o njoj. Da se vidi utjecaj sredstva, neka posluži primjer duljine vala u praznu prostoru i u bakru. Ona iznosi 6000 km u praznu prostoru, a 58 mm u bakru, ako se polje mijenja frekvencijom 50 Hz. Razlike u duljini vala mogu biti vrlo različite za iste frekvencije u različitim sredstvima.

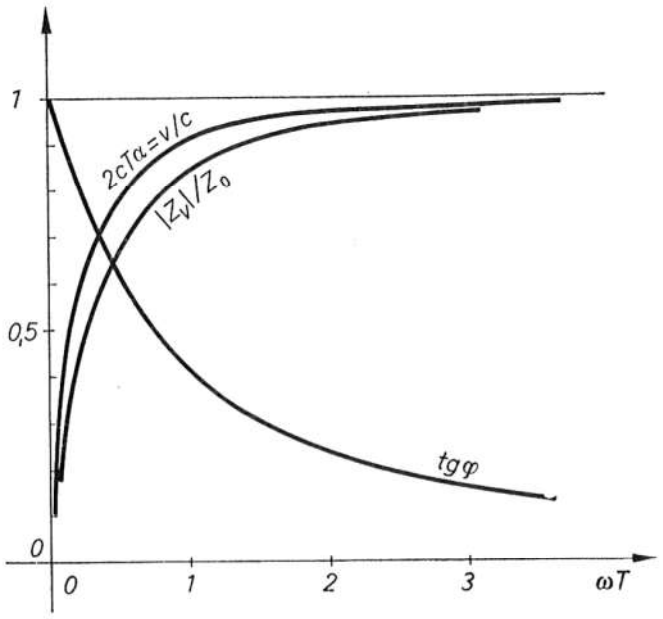
Faza polja $(\omega t - \beta z)$ ukazuje na gibanje valnog efekta. Valni efekt se primjećuje, jer se za vrijeme promatranja fiksira jedno mjesto vala, npr. tjeme vala. To odgovara održanju uvjeta konstantne faze, $\omega t - \beta z = \text{konst}$. Da bi se održala faza konstantnom, potrebno je gibati se brzinom

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{4.32}$$

Ta se brzina zato zove brzina konstantne faze ili kratko **fazna brzina.** Valni efekt ili impresija vala se rasprostire faznom brzinom. To nije brzina kojom se polje rasprostire prostorom. Fazna brzina ima računski karakter. Ona dobiva svoj fizikalni smisao kod neharmoničkih veličina. Pojedini harmonici imaju različite fazne brzine, te se sadržaj harmonika mijenja kako val napreduje prostorom. Nastaje *distorzija vala*. Odnos fazne brzine prema brzini c iznosi

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{2}}{\left[\left(1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2}} \tag{4.33}$$

Fazna brzina je ovdje uvijek manja od brzine svjetla. Odnos ovisi isključivo o konstanti ωT koja karakterizira gubitke u prostoru. Na sl. 4.3. prikazana je ovisnost o $\omega\ T$, odnosno o frekvenciji. Kako frekvencija raste, tako se fazna brzina približava brzini svjetla. Treba voditi računa o tome da je v/c funkcija konstante $\omega\ T$, a ne samo frekvencije. Najveća promjena fazne brzine je za $\omega\ T < 5$, a iznad toga iznosa ona je već s velikom točnošću jednaka brzini svjetla.



Sl. 4.3. Dijagram ovisnosti karakterističnih veličina prostora ispunjenog sredstvom s gubicima u ovisnosti o $\omega\ T$, tj. o omjeru pomačnih i provodnih struja. Karakteristične veličine su fazna brzina v, prigušna konstanta α i valna impedancija sa svojim faznim kutom. Kao referentne veličine su poslužile brzina c i valni otpor Z_0.

Duljina vala i fazna brzina su ovisne o faznoj konstanti, te se njih može dovesti u vezu. To je najčešći odnos koji se pojavljuje. Treba podijeliti (4.31) sa (4.32) da se dobije

$$\lambda = \frac{v}{f} \tag{4.34}$$

Duljina vala se dobiva iz odnosa fazne brzine i frekvencije f vremenske promjene polja. Taj je odnos u praznu prostoru c_0/f, a on se često koristi da bi se frekvencija upotrijebila mjesto duljine elektromagnetskog vala.

Spektar elektromagnetskih valova je vrlo širok i obuhvata duljine od desetaka hiljada kilometara do dijelova milimetra. Taj je spektar naveden u tablici 4.1.

Frekvencije elektromagnetskih valova i njihove duljine u praznu prostoru

TABLICA 4.1.

Frekvencija vala	Duljina vala		Primjedba
50 Hz	6000 km		Frekvencija u primjeni električne energije u industriji, općoj potrošnji i prijenosu. Sjeverna Amerika upotrebljava 60 Hz.
60 Hz	5000 km		
16 Hz do	18 750 km		Tonske frekvencije, posebna primjena u industriji, energetski izvori i pogoni u regulacionoj tehnici.
20 000 Hz	do 15 km		
300 Hz do	1000 km		Pojas govornih frekvencija u telefoniji.
3400 Hz	do 88 km		
12— 60 kHz	25—5 km	A grupa	CCIT je preporučio frekventna područja u multipleksnim telefonskim sustavima. Supergrupe su od kanala po 4 kHz, a velike grupe su od supergrupa koje su razmaknute za 8 kHz.
60— 108 kHz	5—2,8 km	B grupa	
312— 552 kHz	961—543 m	supergrupa	
812—2044 kHz	369—146,8 m	tercijarna grupa	
8516— 12388 kHz	35,2—24,2 m	kvartna grupa	
100— 375 kHz	3000—800 m	dugi valovi	Njemačka podjela valova primijenjenih u radiofoniji, televiziji, radaru, telemetriji
375—2000 kHz	800—150 m	srednji valovi	
2— 30 MHz	150— 10 m	kratki valovi	
30— 300 MHz	10— 1 m	ultrakratki valovi	
300—3000 MHz	10— 1 dm	decimetarski	
3— 30 GHz	10— 1 cm	centimetarski valovi	
30— 300 GHz	10— 1 mm	milimetarski valovi	
41— 68 MHz	7,32—4,41 m	I pojas — 4 kanala	CCIR usvojio pojaseve frekvencija u televiziji. Širina kanala 7 MHz.
174— 223 MHz	1,72—1,34 m	II pojas — 7 kanala	
470— 606 MHz	6,38—4,95 dm	III pojas	
606— 790 MHz	4,95—3,80 dm	IV pojas	

Navedene duljine valova odgovaraju dimenzijama kad je dozvoljeno makroskopsko promatranje. To je ujedno područje klasične elektrodinamike. Dalje se već nastavlja *kvantna* elektrodinamika. Svjetlosne, rentgenske i sl. zrake ponašaju se slično elektromagnetskim valovima samo u nekim pojavama. Ima pojava u kojima one pokazuju svoju kvantnu prirodu. Zrake se klasificira također u duljine valova, odnosno frekvencije. Dapače, kod njih frekvencija ima vrlo značajnu ulogu.

4.3.3. Prigušna konstanta

Prigušna konstanta α utječe na smanjenje amplitude polja. Ona se može usporediti s faznom konstantom, jer postoji cdnos

$$\alpha \beta = \frac{1}{2} \omega \mu \varkappa \tag{4.35}$$

Prigušna konstanta se mijenja s frekvencijom kao i fazna brzina. Kako ona utječe na smanjenje amplitude polja, nameće se potreba uvođenja neke standardne duljine, kao što je duljina vala pri karakteriziranju fazne konstante. Standardna duljina koja karakterizira prigušnu konstantu zove se **dubina prodiranja vala.** Uobičajeno je da se uzme $\alpha z_0 = 1$ za definiciju dubine prodiranja vala, te je

$$z_0 = d = \frac{1}{\alpha} \tag{4.36}$$

Amplituda polja opadne na iznos $1/e = 0{,}368$ na udaljenosti $z_0 = d$, koja je jednaka dubini prodiranja vala. Ona dosegne 5 % početne vrijednosti na udaljenosti 3 d, a iznos od 0,7% na udaljenosti od 5 d. Prigušenje polja ukazuje da se ne može razviti polje u prostoru ispunjenom sredstvom s gubicima. Dubine prodiranja vala navedene su za nekoliko materijala, u ovisnosti o frekvenciji, u tablici 4.2.

Dubina prodiranja vala se dovodi u vezu s duljinom vala, te se na taj način vidi red veličine. Taj odnos glasi

$$d = \frac{\lambda}{2\pi} [(1 + \omega^2 T^2)^{1/2} + \omega T] \tag{4.37}$$

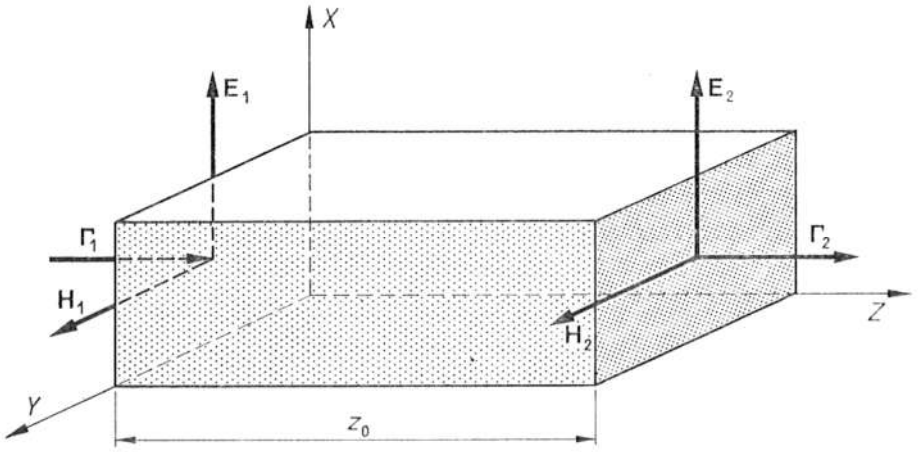
Dubine prodiranja vala nekih vodiča na 20 °C

TABLICA 4.2.

Vodič / Frekvencija	Bakar 58 MS/m	Aluminij 34 MS/m	Konstantan 2,08 MS/m	Dinamo-lim 10 MS/m $\mu_r = 500$	Grafitna četkica 30 kS/m	Morska voda 5 S/m
50 Hz	9,35 mm	12,2 mm	49,4 mm	1,0 mm	411 mm	32 m
800 Hz	2,34 mm	3,05 mm	12,3 mm	250 μm	103 mm	8 m
5000 Hz	935 μm	1220 μm	4,94 mm	100 μm	41 mm	3,2 m
100 kHz	209 μm	273 μm	1,10 mm	23 μm	9,2 mm	710 mm
5 MHz	29,6 μm	38,6 μm	156 μm	3,2 μm	1,3 mm	100 mm
200 MHz	4,7 μm	6,1 μm	—	—	206 μm	16 mm
10 GHz	661 nm	864 nm	—	—	—	2,3 mm
300 GHz	121 nm	158 nm	—	—	—	410 μm

4.3.4. Bilansa energije

Ravni val je nosilac energije. Intenzitet strujanja energije je predstavljen Poyntingovim vektorom. *On gleda uvijek u smjeru rasprostiranja polja.* Već je naglašeno u poglavlju 4.1. da je odabran desni koordinatni sustav. Vektor električnog polja je u osi X, a magnetskog u osi Y, te Poyntingov vektor leži u osi Z. Pozitivnom valu Poyntingov vektor gleda u *pozitivnom* smjeru osi Z, a negativnom valu pokazuje



Sl. 4.4. Kratka pravokutna prizma dužinom postavljena u smjer gibanja vala. Služi u bilansi energije ravnog vala.

suprotno. Bilansu energije najzgodnije je provesti u pravokutnom paralelopipedu čije su baze paralelne sa ravninom X-Y, a visina mu je z_0, kao na sl. 4.4. Baze imaju jediničnu površinu, npr. 1 m^2, a nalaze se u ravninama $z_1 = 0$ i $z_2 = z_0$. Nikakva energija ne struji kroz strane paralelopipeda. Na bazu 1 ulazi energija $\Gamma_1 = E_1 H_1$, a na bazu 2 izlazi energija $\Gamma_2 = E_2 H_2$. Razlika među njima predstavlja gubitke u paralelopipedu. Njegova visina neka ima diferencijalan karakter dz, pa bi u njemu gubici bili $(\partial\Gamma/\partial z)\,dz$, gdje su $(\partial\Gamma/\partial z)$ gubici po jedinici njegove visine. Kako je njegova baza 1 m^2, gubici po jedinici visine ujedno su i gubici po jedinici volumena. Poyntingov vektor iznosi

$$\Gamma = \frac{1}{2}\,\frac{E_m^2}{|Z_v|}\,e^{-\gamma\alpha z}\,[\cos\varphi + \cos(2\,\omega\,t - 2\,\beta\,z - \varphi)]$$

Prosječna vrijednost Poyntingova vektora iznosi

$$\Gamma_{sr} = \frac{1}{2}\,\frac{E_m^2}{|Z_v|}\,e^{-2\alpha z}\cos\varphi \qquad (4.38)$$

Gubici u jedinici volumena iznose prema tome $P_1 = (\partial\Gamma_{sr}/\partial z)$.

Ako se iskoriste iznosi konstanti, gubici iznose

$$P_1 = \frac{\partial \Gamma_{sr}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \varkappa E_m^2 e^{-2\alpha z} \tag{4.39}$$

To su Jouleovi gubici u jedinici prostora, što se moglo i očekivati.

Prigušenje se često mjeri *neperima*, odnosno *decibelima*. Tu je 1 neper = $20 \cdot \log e \approx 8{,}7$ decibela. Prigušenje u neperima jednako je polovici prirodnog logaritma iz odnosa snaga. Odnos snaga između početka i kraja paralelopipeda na sl. 4.4. jednak je odnosu srednjih Poyntingovih vektora. Zato je prigušenje u neperima

$$a = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \right) = \alpha z_0 \text{ nepera} \tag{4.40}$$

Prema tome se prigušna konstanta α mjeri neperima po jedinici duljine napredovanja vala.

Sadržaj energije u paralelopipedu na sl. 4.4. dobiva se prostornom integracijom gustoće energije. Ona se sastoji od električne i magnetske energije. Gustoća energije električnog polja iznosi $\varepsilon E^2/2$, a magnetskog polja je $\mu H^2/2$. Kad se uvrste vrijednosti za E i H, dobiva se omjer srednjih iznosa energije

$$\frac{W_e}{W_m} = \frac{\varepsilon}{\mu} |Z_v|^2 = \frac{\omega T}{(1 + \omega^2 T^2)^{1/2}} \tag{4.41}$$

Obje su energije međusobno jednake u sredstvu bez gubitaka, te je ukupna gustoća energija $\varepsilon E^2 = \mu H^2$. Kako se konstanta ωT umanjuje, sve više prevladava magnetska energija nad električnom.

4.3.5. Neharmonički val

Neharmonički val se rastavlja na harmoničke članove. Tada se promatraju odnosi za svaki harmonik posebno. Rasprostiranje valova u sredstvu bez gubitaka nije neki posebni problem, jer ono ne ovisi o frekvenciji polja. Konstante prostora, valna konstanta i valna impedancija ovise o frekvenciji u sredstvu s gubicima.

Superpozicija se primjenjuje na pojedine harmoničke članove, ako se primijeni Fourierova analiza. Neka se promatraju samo pozitivni valovi. Tada su jakosti polja za harmonički val $E_0 e^{j\omega t - \gamma z}$, odnosno $H_0 e^{j\omega t - \gamma z}$. Tako izgledaju jednadžbe polja i za ostale harmonike, samo se mijenjaju amplitude polja i valne konstante. Stvarna vrijednost polja slijedi iz realnog iznosa sume polja svih harmonika, tj.

$$E(z, t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{\infty} E_k e^{j\omega_k t - \gamma_k z} \right] \tag{4.42}$$

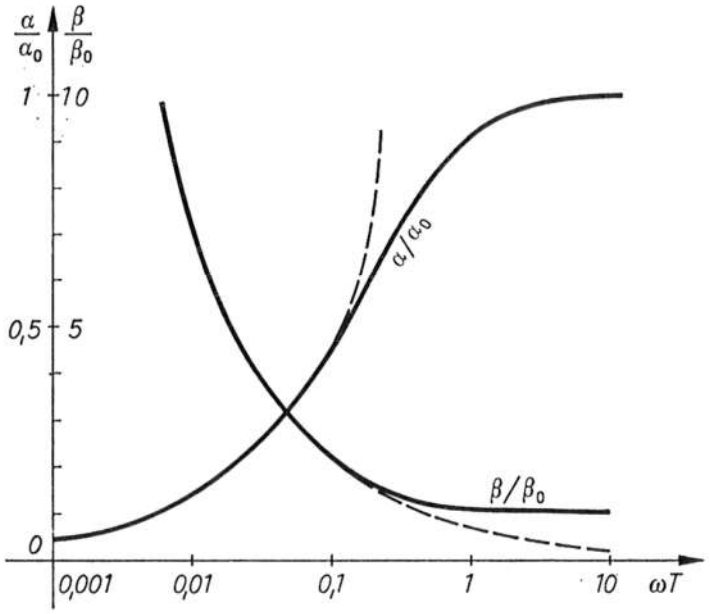
Ista je jednadžba i za magnetsko polje.

Kad se jednom usvoji postupak iskorištavanja kompleksnih brojeva, smije se ispustiti u pisanju oznaka Re. Osim toga se smije primijeniti opća oznaka funkcijom $\psi(z, t)$ za sve veličine koje su karakteristične za ravni val. Cijeli se spektar uzima u obzir zbrajajući sve članove od $-\infty$ do $+\infty$. Sada se funkcija ravnog vala prikazuje izrazom

$$\psi(z, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_k \, e^{j\omega_k t - \gamma_k z} \tag{4.43}$$

4.3.6. Ovisnost valne konstante o frekvenciji

Valna konstanta $\gamma_k = \alpha_k + j\,\beta_k$ ovisna je o frekvenciji. Različitu ovisnost pokazuju prigušna konstanta i fazna konstanta. Prigušna konstanta postaje neovisna o frekvenciji čim je frekvencija dovoljno visoka. To se događa praktički čim je



Sl. 4.5. Dijagram ovisnosti fazne i prigušne konstante o frekvenciji vala. Crtkano je označena ovisnost karakteristična za male frekvencije, odn. za vodiče.

$\omega T = \omega \varepsilon/\varkappa > 1$. Drukčije je s faznom konstantom. Ona je direktno razmjerna frekvenciji, ako se radi o sredstvu bez gubitaka ili pak pri $\omega T \gg 1$. Kako je fazna brzina k-tog harmonika

$$v_k = \frac{\omega_k}{\beta_k}$$

ona je neovisna o frekvenciji u sredstvu bez gubitaka, a jednaka je brzini svjetla c. Neka su referentni iznosi fazne i prigušne konstante

$$\beta_0 = \frac{\omega}{c}, \qquad \alpha_0 = \frac{1}{2\,c\,T} = \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \tag{4.44}$$

Oni su ujedno njihovi iznosi pri $\omega T \gg 1$, dakle pri visokim frekvencijama, a inače u sredstvu s gubicima. Dijagrami $\beta/\beta_0\,(\omega T)$ i $\alpha/\alpha_0\,(\omega T)$ su prikazani na sl. 4.5. Fazna konstanta prestaje biti linearno ovisna o frekvenciji u zoni $\omega T \ll 1$. Jednako, fazna konstanta počinje biti ovisna o frekvenciji u istoj zoni, $\omega T \ll 1$. Prijelazna zona se nalazi u okolišu $\omega T = 1$, a ona je razmjerno uska. Crtkani dio krivulje na sl. 4.5. pokazuje kako bi se mijenjale konstante kad bi vrijedila ovisnost kao za male ωT. Naime, tada su konstante

$$\frac{\beta}{\beta_0} = (2\,\omega\,T)^{-1/2}, \qquad \frac{\alpha}{\alpha_0} = (2\,\omega\,T)^{1/2}, \qquad \omega T \ll 1$$

Fazna konstanta β se katkad zove i valni broj, a upotrebljava se u teoriji valova i oscilacija. Onakva ovisnost o frekvenciji kakva je prikazana na sl. 4.5. pretpostavlja konstantno vrijeme relaksacije T. Realni materijali ne pokazuju takvu konstantnost vremenske konstante T, već se ona mijenja, više ili manje, u ovisnosti o frekvenciji. Praktički, vremenska konstanta T opada s porastom frekvencije. To je razlog da se fazna konstanta mijenja drukčije nego što je prikazano na sl. 4.5. Ovisnost $\beta\,(\omega)$ je karakteristična za svaki materijal. Njezino je poznavanje potrebno, ako se promatra rasprostiranje neharmoničke veličine.

4.3.7. Grupna brzina

Treba prikazati valnu funkciju iz (4.43) u okolišu referentne frekvencije ω_0, pri čemu se prigušna konstanta održava neovisnom o frekvenciji. Tada je valna funkcija

$$\psi\,(z, t) = \psi_0\, e^{j\omega_0 t - \gamma_0 z} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_k \exp\left[j\,(\beta_k - \beta_0)\left(\frac{\omega_k - \omega_0}{\beta_k - \beta_0}\,t - z\right)\right] \qquad k \neq 0$$

Viši harmonici imaju faznu brzinu

$$u_k = \frac{\omega_k - \omega_0}{\beta_k - \beta_0}$$

Referentnu frekvenciju ω_0 treba tako odabrati, da su razlike $\omega_k - \omega_0$ i $\beta_k - \beta_0$ diferencijalnog karaktera. Na taj način se definira **grupna brzina.**

$$u = \lim_{\omega_k \to \omega_0} \left(\frac{\omega_k - \omega_0}{\beta_k - \beta_0}\right) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} \tag{4.46}$$

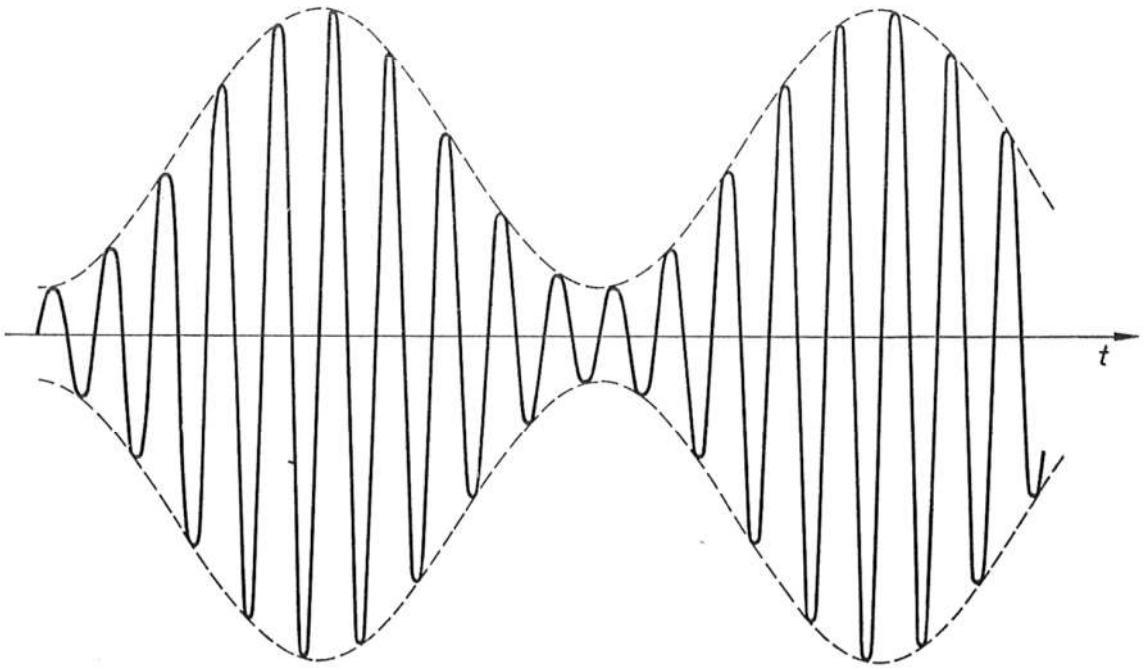
Ona je jednaka faznoj brzini u sredstvu bez gubitaka, jer je fazna konstanta linearno ovisna o frekvenciji. Grupna brzina se primjenjuje kad može biti zadovoljen ovdje postavljeni uvjet.

Grupna brzina može se lijepo vidjeti na primjeru dvaju sinusnih valova

$$\psi_1 = \psi_0 \cos(\omega_1 t - \beta_1 z)$$
$$\psi_2 = \psi_0 \cos(\omega_2 t - \beta_2 z)$$

Njihova je suma

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2\psi_0 \cos\left[\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2} t - z\right)\right] \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} z\right]$$



Sl. 4.6. Amplitudno modulirani val. Prikazana je sinusna modulacija. Odnos frekvencija je 1:10.

Razlike $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$ i $\beta_1 - \beta_2 = \Delta\beta$ su dovoljno malene da se dobije val kao na sl. 4.6. Amplitude se mijenjaju opet harmonički, a njihova je anvelopa opet sinusoida. Njezina fazna brzina se zove grupna brzina, a slijedi iz prvog faktora

$$\cos\left[\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} t - z\right)\right] = \text{konst.}$$

Grupna brzina iznosi

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

a to je brzina kojom se giba anvelopa sinusoida.

Zbroj dviju sinusoida, vrlo blizih frekvencija, dovodi do *modulirane sinusoide*, koja se prikazuje izrazom

$$\psi = 2\,\psi_0 \cos \Omega \left(t - \frac{z}{u}\right) \cos\left(\omega\, t - \beta\, z\right)$$

Njezina se amplituda mijenja harmonički frekvencijom Ω koja je mnogo puta manja od frekvencije *vala nosioca*

$$\Omega \ll \omega$$

Val nosilac se giba faznom brzinom v, a njegova anvelopa se giba grupnom brzinom u. Grupna brzina dolazi do izražaja čim postoji amplitudna modulacija vala nosioca.

Kad je $\omega\, T \geqslant 10$, fazna konstanta se prikazuje s takvom ovisnošću o frekvenciji, da je grupna brzina približno

$$u = c\left(1 + \frac{1}{8\,\omega^2\, T^2}\right)$$

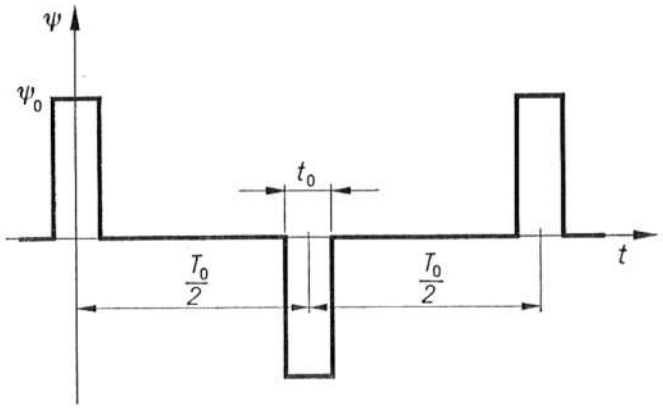
Po tome je ona veća od brzine svjetla, što nema neko fizikalno značenje. Fazna brzina iznosi istodobno približno

$$v = c\left(1 - \frac{1}{8\,\omega^2\, T^2}\right)$$

Neka je $\omega\, T = 11$ pri frekvenciji vala nosioca 600 kHz, što odgovara razmjerno velikim gubicima. Fazna brzina vala nosioca iznosi 0,999 c, a grupna brzina anvelopa je 1,001 c.

4.3.8. Gibanje impulsa

Grupna brzina dolazi do izražaja pri istraživanju rasprostiranja impulsa polja. Takav se impuls giba brzinom jednakom grupnoj brzini. Kad je prostor ispunjen



Sl. 4.7. Pravokutni impulsi u ishodištu koordinatnog sustava. Oni su periodični.

sredstvom bez gubitaka, impuls se giba brzinom svjetla, a ne mijenja svoj oblik. Čim postoje gubici u prostoru, dolazi do izražaja grupna brzina, koja se razlikuje

od brzine svjetla, a oblik impulsa se mijenja. Početak impulsa kao čelo vala giba se brzinom svjetla, a ostali elementi su sporiji u gibanju. Prema tome se može očekivati da će pravokutni impuls postati postepeno razvučen i smanjene amplitude.

Rasprostiranje impulsa će biti prikazano na primjeru *periodičkih, pravokutnih* impulsa u sredstvu velikih gubitaka, kao što je morska voda. Takvi impulsi su prikazani na sl. 4.7., na mjestu $z = 0$. Zadan je njihov vremenski slijed, kako se upućuju u promatrani prostor. Vremenska perioda impulsa iznosi T_0, čemu odgovara osnovna frekvencija

$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Svi impulsi imaju jednako trajanje t_0 i amplitudu ψ_0. Karakterističan je vremenski omjer trajanja impulsa i njihove periode

$$\tau_0 = \frac{t_0}{T_0}$$

ili *relativna širina impulsa* mjerena vremenom. Primjenom harmoničke analize dobiju se amplitude pojedinih harmoničkih članova

$$\psi_n = \frac{4}{\pi}\psi_0 \frac{\sin[\pi\tau_0(2n-1)]}{2n-1}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Sad se smije svaki harmonik promatrati posebno. Njegovo gibanje se pridržava pravila mjerodavnih za gibanje harmoničkih veličina. Svaki od harmonika ima iznos u gibanju

$$\psi_n(z, t) = \psi_n e^{-\alpha_n z} \cos[(2n-1)\omega_0 t - \beta_n z] \tag{4.48}$$

Ukupni iznos promatrane veličine je naprosto jednak zbroju svih pojedinačnih valova. Daljnje promatranje zahtijeva poznavanje ovisnosti valne konstante o frekvenciji. Ta je ovisnost razmjerno jednostavna, kako je dosad prikazana. Ona je u praksi mnogo složenija, a ne može se prikazati analitički. U ovom prikazu rasprostiranja impulsa nije značajan odnos valne konstante prema frekvenciji vala, već je interesantan utjecaj gubitaka u prostoru na oblik impulsa.

Naročito jak utjecaj imaju sredstva velikih gubitaka, koja se ubrajaju u vodiče. Prigušna i valna konstanta su međusobno jednake, a razmjerne su drugom korijenu frekvencije vala

$$\alpha_n = \beta_n = \beta_1 (2n-1)^{1/2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\beta_1 = \left(\frac{1}{2}\omega_0 \mu \varkappa\right)^{1/2}$$

Ovakav odnos prigušne i fazne konstante smije se upotrijebiti do vrlo visokog rednog broja harmonika, a da se još uvijek zadrži kriterij vodiča. Zbog lakšeg prikaza oda-

bralo se rasprostiranje impulsa u morskoj vodi, koja ima vodljivost 5 S/m, što odgovara Jadranskom moru. Osnovna frekvencija impulsa iznosi $\omega_0 = 2 \cdot 10^4$ rad/sek. Zato je osnovna fazna konstanta $\beta_1 = 0{,}25$ rad/m. Odnos pomačne i provodne struje iznosi $\omega_0 \varepsilon/\varkappa = 2{,}86 \cdot 10^{-4}$. On smije doseći iznos 10^{-2} da se sredstvo ubraja u vodiče. To se ovdje postiže za $2n - 1 = 3500$ ili 1750-ti harmonik. Toliki broj harmonika nije potreban da se vidi ponašanje impulsa. Prema tome se prigušnu i faznu konstantu smije izraziti onako, kako se to radi kod vodiča.

Sad se već može vidjeti ponašanje pojedinog harmonika. Iznos njegove amplitude prema izrazu (4.47) vrlo sporo opada s rednim brojem. Ona se može prikazati nešto promijenjenim izrazom

$$\psi_n = 4 \tau_0 \psi_0 \frac{\sin x_n}{x_n}, \qquad x_n = \pi \tau_0 (2n - 1)$$

u kojem se pojavljuje funkcija $\sin x_n/x_n$. Ako je x_n dovoljno malen, ona je jednaka približno jedinici. Budući da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = \psi_0$$

slijedi da je potrebno uzeti u obzir veći broj harmonika, ako je relativna širina impulsa τ_0 manja pri istoj osnovnoj frekvenciji ω_0. Funkcija $\sin x_n/x_n$ je približno jednaka jedinici, ako je $x_n < \pi/12$. Toj granici odgovara harmonik za širinu impulsa

$\tau_0 = 0{,}001$	0,01
$n = 42$	4

Sad se vidi utjecaj širine impulsa na njegovo ponašanje pri gibanju u prostoru. Prigušenje dolazi jače do izražaja kad ima više harmonika. Jednako se jače ispoljava fazni pomak $\beta_n z$ kad je više harmonika. To sve govori da se jače deformira uži, nego širi impuls. Viši harmonici imaju veću faznu brzinu od nižih harmonika

$$v_n = \frac{\omega_n}{\beta_n} = \frac{\omega_0}{\beta_1} (2n - 1)^{1/2} = 80 (2n - 1)^{1/2} \text{ km/sek}$$

Mjerenje vremena treba započeti kad je faza iz izraza (4.48) jednaka nuli, te je početak zadan sa

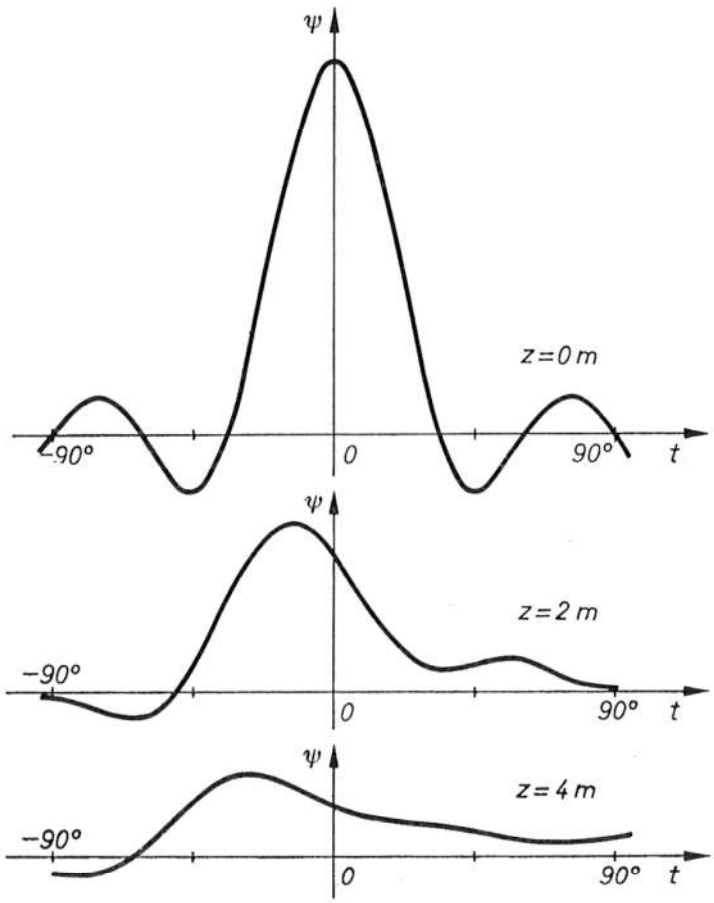
$$\omega_0 t_n = \frac{\beta_n z}{2n - 1} = \frac{\omega_0 t_1}{(2n - 1)^{1/2}}$$

Više harmonike treba početi brojati prije. U početku svi harmonici imaju tjeme u isto vrijeme, tj. svi su harmonici u tjemenu za $t = 0$, $z = 0$. Čim je $z \neq 0$, tjemena harmonika se ne pojavljuju u isto vrijeme, već su vremenski međusobno razmaknuta. Da bi se izbjegle razlike u početku mjerenja vremena, neka se faza počinje mjeriti

u odnosu na osnovni član. Onda se faza iz (4.48) prikazuje novim izrazom, koji vodi računa o koordinati z u prostoru, te je

$$(2n-1)\,\omega_0 t - \beta_n z = (2n-1)\left[\varphi + \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^{1/2}}\right)\beta_1 z\right] =$$

$$= (2n-1)(\varphi + \varphi_n)$$



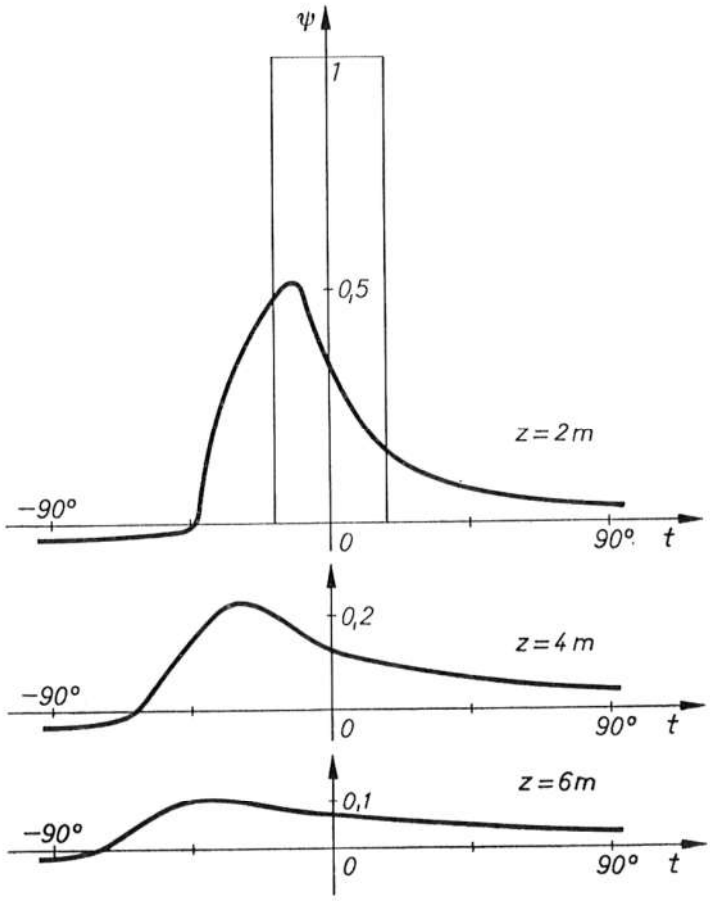
Sl. 4.8. Vremenski oblik pravokutnih periodičnih impulsa nakon što su prevalili put od 2 m i 4 m u sredstvu s gubicima. Sredstvo je voda dielektričnosti 81 i vodljivosti 5 S/m. Osnovna kružna frekvencija impulsa iznosi 20000 rad/s, a širina impulsa je 10 % periode impulsa. U prikazu su upotrijebljena samo prva tri harmonika.

Kako viši harmonici imaju veću faznu brzinu, oni svojim tjemenom prethode osnovnom članu za kut

$$\varphi_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)\beta_1 z$$

U ovom primjeru je $\beta_1 = 0{,}25$ rad/m, te je fazni pomak na udaljenosti 2 m i 4 m za drugi i treći harmonik

z	2 m	4 m
φ_2	12,1°	24,2°
φ_3	15,8°	31,6°
φ_∞	28,7°	57,3°



Sl. 4.9. Vremenski oblik impulsa iz sl. 4.7. nakon prevaljenog puta 2m, 4m i 6 m, kako ih vidi promatrač koji ih mjeri na tom istom mjestu. Pretpostavljene su fazna i prigušna konstanta ovisne samo o frekvenciji kao na sl. 4.5.

Odmah su označeni i najveći mogući fazni pomaci. Na sl. 4.8. je prikazana vremenska promjena impulsa iskorištenjem samo triju harmonika i to na mjestima $z = 0$, 2 m, 4 m. Vrijeme se mjeri fazom

$$\varphi = \omega_0 t - \omega_0 t_1$$

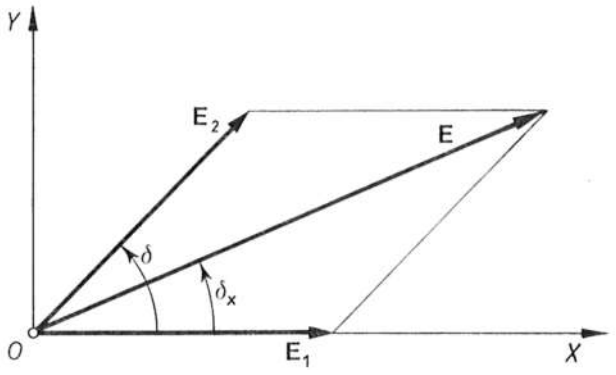
Impuls ima iznos $\psi_0 = 1$ i širinu $\tau_0 = 0{,}1$. Slika pokazuje ponašanje pojedinog harmonika. Osnovni član se najmanje prigušuje. On opadne na iznos 37% na 4 m udaljenosti. Na istoj udaljenosti padne drugi harmonik na 18 %, a treći harmonik dospije do 11% svoga početnog iznosa.

Slično se ponašaju i ostali harmonici, te početni pravokutni impuls postaje sasvim spljošten nakon stanovitog puta u prostoru s gubicima. Ovdje se pokazuje kao najznačajniji faktor ovisnost valne konstante o frekvenciji. Ta ovisnost diktira uglavnom ponašanje impulsa za gibanja u prostoru.

Na sl. 4.9. je prikazan isti impuls koji se rasprostire pod istim uvjetima. Vidi se njegov oblik nakon 2 m, 4 m i 6 m prevaljena puta, kako ga mjeri promatrač u ovisnosti o vremenu. Na sl. 4.8. su iskorištena samo tri harmonika, a na ovoj slici je pravi oblik impulsa.

4.4. POLARIZACIJA

Polarizirani val ima vektore polja postavljene u prostoru po nekom određenom propisu. Vektor električnog polja služi za utvrđivanje polarizacije elektromagnetskog vala. To je u optici vektor magnetskog polja. *Ravnina polarizacije je utvrđena smjerovima električnog polja* i *Poyntingova vektora*. Vektor magnetskog polja je okomit na ravninu polarizacije. Vektor magnetskog polja utvrđuje ravninu polarizacije u optici. Ako ravnina polarizacije ostaje nepokretna, govori se o *linearno polariziranom*

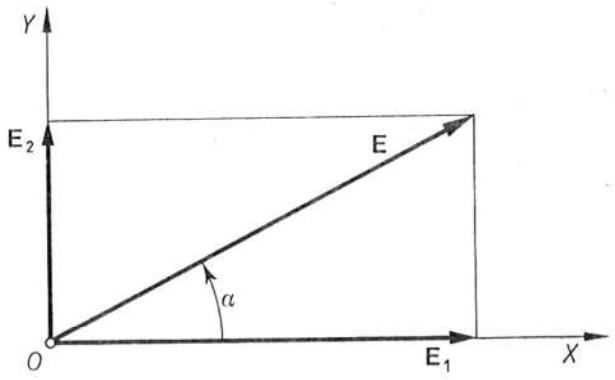


Sl. 4.10. Vektori električnog polja dvaju linearno polariziranih valova.

valu. Takav je val upotrijebljen u prikazu ponašanja ravnog vala. Pretpostavljena je samo komponenta X električnog polja, te je ravnina X-Z bila ravnina polarizacije. Posebno se nema što reći o linearno polariziranom valu.

Drugi oblici polarizacije su mogući samo superpozicijom dvaju ili više linearno polariziranih valova. Neka je sredstvo koje ispunjava prostor bez gubitaka. Najjednostavniji je slučaj dvaju linearno polariziranih valova, koji se pozitivno gibaju. Njihove ravnine polarizacije se sijeku u osi Z, kao na sl. 4.10., a zatvaraju kut δ. Linearno polarizirani valovi imaju istu duljinu vala i međusobno su fazno pomaknuti, a različite su amplitude.

Da bi se mogao riješiti postavljeni zadatak jednostavnijim putem, treba pogledati kako nastaje linearno polarizirani val superpozicijom više valova. Valovi iste faze se zbrajaju vektorski i daju ponovno linearno polarizirani val. Svi se valovi smiju promatrati u ishodištu za $z = 0$, dok su im polja iste frekvencije. Prema tome, dva vala $E_1 = E_{m1} \cos(\omega t) = E_x$ i $E_2 = E_{m2} \cos(\omega t) = E_y$, čiji su vektori elek-



Sl. 4.11. Rastavljanje linearno polariziranog vala na dva nova vala međusobno okomite polarizacije.

tričnog polja u osi X, odnosno Y, daju linearno polarizirani val. Iznos električnog polja slijedi iz $E_m^2 = E_{m1}^2 + E_{m2}^2$, odnosno $E = E_m \cos(\omega t)$. Ravnina polarizacije je nagnuta prema osi X pod kutom čiji je $\operatorname{tg} \alpha = E_{m2}/E_{m1}$. Taj je slučaj prikazan na sl. 4.11. To pokazuje kako se neki vektor **E** rastavlja na vektore u pojedinim osima. To također pokazuje kako se neki polarizirani val u nekoj ravnini pod kutom α prema ravnini X-Z rastavlja na dva polarizirana vala u ravninama X-Z i Y-Z. Svi vektori moraju imati istu fazu.

4.4.1. Kružno polarizirani val

Kružno polarizirani val nastaje iz dva linearno polarizirana vala

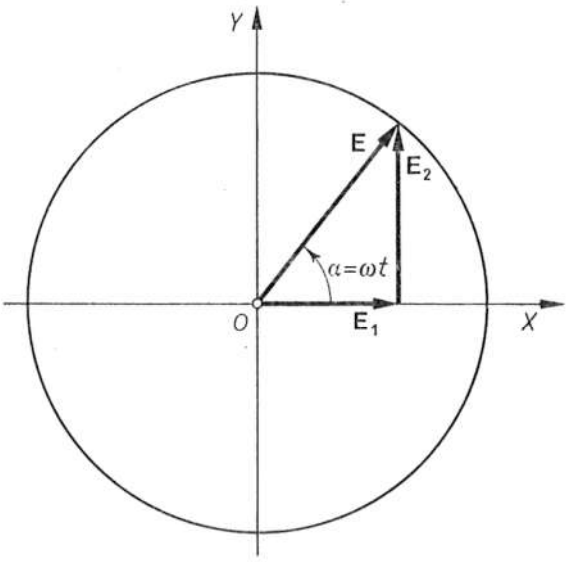
$$E_x = E_m \cos(\omega t), \qquad E_y = E_m \cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.49}$$

Budući da je $E_y = \mp E_m \sin(\omega t)$, ukupni je iznos polja konstantan u svakom trenutku i slijedi iz odnosa

$$E_x^2 + E_y^2 = E_m^2$$

On je konstantan i jednak je tjemenoj vrijednosti zadanog polja E_m. To je ujedno jednadžba kružnice. Ukupno polje zatvara kut s osi X, čiji je $\operatorname{tg} \alpha = E_y/E_x = \mp \operatorname{tg}(\omega t)$, tj. $\alpha = \mp \omega t$. Vektor **E** ukupnog polja zatvara s osi X kut koji se mijenja razmjerno vremenu t. Ukupno polje ima konstantni vektor električnog polja iznosa E_m, koji *rotira pozitivno ili negativno* konstantnom brzinom, prema tome da li E_y zaostaje ili prethodi za $\pi/2$ prema E_x. Takav je val nazvan *kružno polarizirani*.

Na sl. 4.12. je prikazan takav slučaj dvaju valova. Magnetsko polje se mijenja u fazi s električnim poljem. Vektori polja zajedno rotiraju, a imaju konstantni iznos E_m i H_m. Prema tome je Poyntingov vektor konstantnog iznosa $E_m H_m$. Kružno polarizirani val prenosi energiju u konstantnom iznosu. To je njegova prednost prema linearno polariziranom valu.



Sl. 4.12. Sastavljanje dvaju linearno polariziranih valova, međusobno okomitih, u kružno polarizirani val.

Kružno polarizirani val nastaje od višefaznog sustava linearno polariziranih valova. k-ti vektor električnog polja ima iznos

$$E_k = E_m \cos\left(\omega t + 2\pi \frac{k}{m}\right) \tag{4.50}$$

On se nalazi u ravnini X - Y, a nagnut je prema osi X pod kutom $\alpha_k = 2\pi k/m$. Sustav se sastoji ukupno od m valova koji imaju svi istu amplitudu E_m, samo im se mijenja faza prema (4.50) i nagib vektora prema osi X. Komponente X i Y ukupnog polja iznose

$$E_x = E_m \sum_{k=0}^{m-1} \cos\left(\omega t + 2\pi \frac{k}{m}\right) \cos\left(2\pi \frac{k}{m}\right)$$

$$E_y = E_m \sum_{k=0}^{m-1} \cos\left(\omega t + 2\pi \frac{k}{m}\right) \sin\left(2\pi \frac{k}{m}\right) \tag{4.51}$$

Kad se urede sume trigonometrijskih funkcija, dobiju se jednostavni izrazi za komponente

$$E_x = \frac{m}{2} E_m \cos(\omega t)$$
$$E_y = -\frac{m}{2} E_m \sin(\omega t) \tag{4.52}$$

Takav rezultat pokazuje da se dobiva kružno polarizirani val *višefaznog sustava.* Iznos vektora polja je konstantan $(m/2)\, E_m$, a on rotira također konstantnom kutnom brzinom ω. Brzina je desnog smjera, ako je slijed faza lijevog smjera u odnosu na koordinatni sustav, koji je desni. U navedenom primjeru slijed faza je desni, pa je brzina vektora polja lijevog smjera. Vektor magnetskog polja se ponaša točno na isti način. Prema tome, Poyntingov vektor ima izraz $(m^2/4)\, E_m\, H_m$. Dok u monofaznoj emisiji valova iznosi srednji iznos Poyntingova vektora $(1/2)\, E_m\, H_m$, on je u polifaznoj emisiji znatno povećan uz iste jakosti polja. On ima, osim toga, konstantan iznos. Trofazna emisija ima Poyntingov vektor $2{,}25\, E_m\, H_m$, što je 4,5 puta veće, nego u monofaznoj emisiji za iste jakosti polja. Prednost polifazne emisije je u usmjerenoj emisiji valova.

4.4.2. Eliptički polarizirani val

Kružno polarizirani desni val ima X i Y komponentu općenito

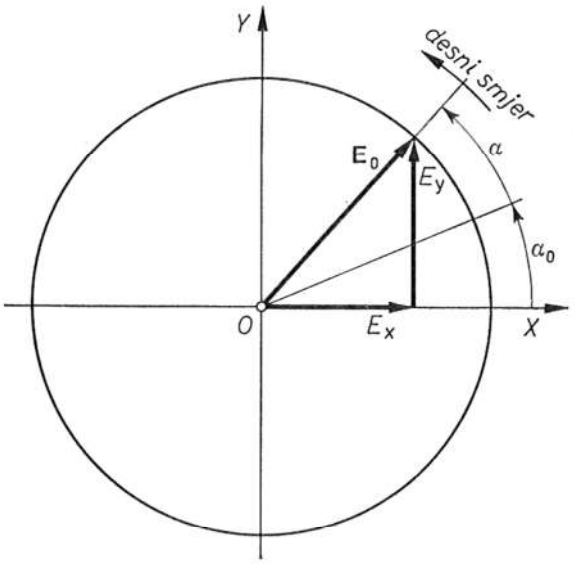
$$E_x = E_0 \cos(\alpha + \alpha_0),$$
$$E_y = E_0 \sin(\alpha + \alpha_0) \tag{4.53}$$

Oznake su prema sl. 4.13. Kut prema osi X iznosi $\alpha = \omega t$, a α_0 određuje samo početak brojenja vremena. Vektor $\mathbf{E}_0$ rotira konstantnom kutnom brzinom ω. *Dva kružno polarizirana vala, istog smjera rotacije i iste brzine rotacije, daju opet kružno polariziran val.* Zato taj slučaj nije interesantan. Drugi slučaj nastaje kad se zadržava ista brzina rotacije, ali su im *smjerovi suprotni. Tada se dobiva eliptički polarizirani val.* Takva su dva vala slijedećih komponenata

$$E_{x1} = E_1 \cos(\alpha + \alpha_1), \qquad E_{y1} = E_1 \sin(\alpha + \alpha_1)$$
$$E_{x2} = E_2 \cos(\alpha + \alpha_2), \qquad E_{y2} = -E_2 \sin(\alpha + \alpha_2) \tag{4.54}$$

Zbog jednostavnosti treba zaokrenuti osi X i Y u nov položaj, da bi brojenje vremena počelo od istog kuta $\alpha_0 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$. Os X dolazi u novi položaj koji je prema X zaokrenut za kut $(\alpha_1 - \alpha_0)$. Sada se u (4.54) stavlja α_0 mjesto α_1 i α_2. Ukupne komponente polja iznose

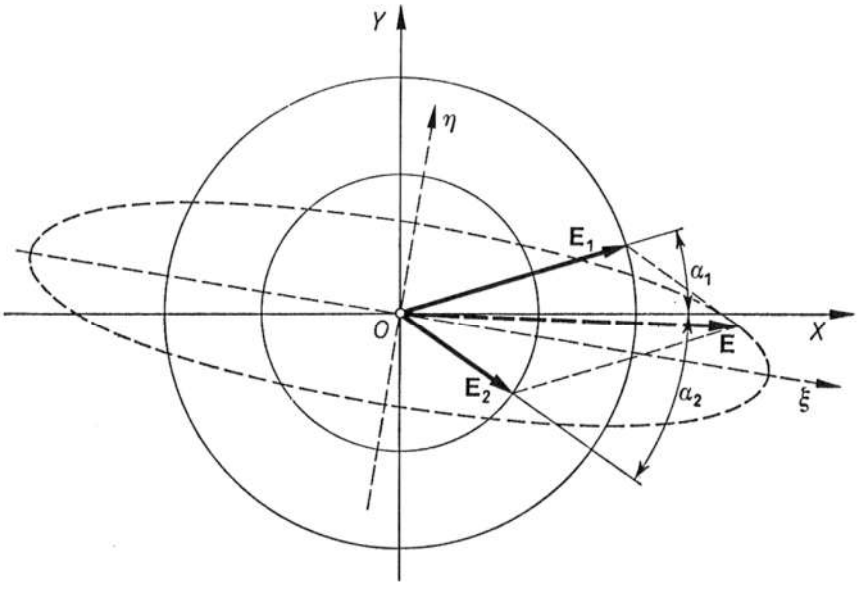
$$E_\xi = (E_1 + E_2) \cos(\alpha + \alpha_0)$$
$$E_\eta = (E_1 - E_2) \sin(\alpha + \alpha_0) \tag{4.55}$$



Sl. 4.13. Rastavljanje kružno polariziranog vala na komponente. Kut α_0 označava početak brojenja vremena.

Odatle slijedi da je odnos među komponentama reguliran jednadžbom elipse

$$\left(\frac{E_\xi}{E_1 + E_2}\right)^2 + \left(\frac{E_\eta}{E_1 - E_2}\right)^2 = 1 \tag{4.56}$$



Sl. 4.14. Nastajanje eliptički polariziranog vala iz dvaju kružno polariziranih valova suprotne rotacije.

Velika poluos elipse iznosi $(E_1 + E_2)$ i leži u osi ξ, a mala poluos je $(E_1 - E_2)$ i leži u osi η, prema sl. 4.14. Vektor ukupnog polja ima iznos $(E_\xi^2 + E_\eta^2)^{1/2}$. Vrh

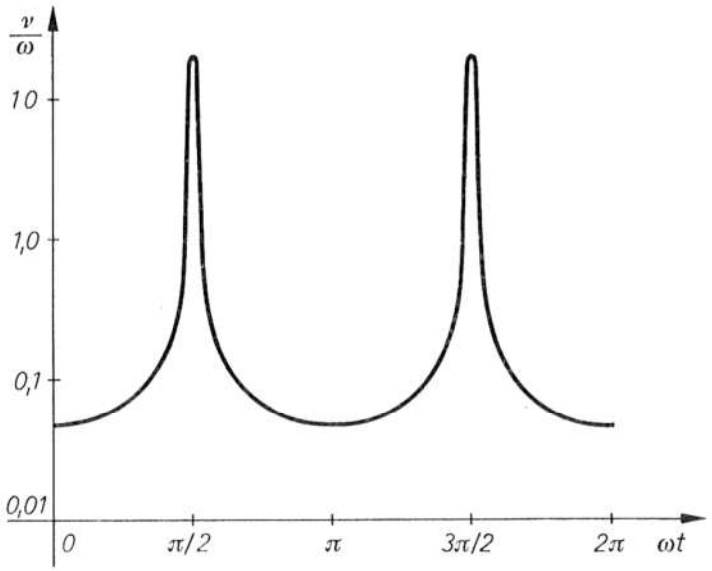
vektora polja ide po dobivenoj elipsi (4.56), a sam vektor zatvara kut β s osi ξ, koji se dobiva iz (4.55) prema odnosu

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_\eta}{E_\xi} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \operatorname{tg} (\alpha + \alpha_0) \tag{4.57}$$

Treba uzeti u obzir da je $(\alpha + \alpha_0) = \omega t$, gdje je kutna brzina ω konstantna. Kutna brzina vektora polja iznosi iz (4.52)

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{k\,\omega}{(1 - k^2)\cos^2(\omega t) + k^2} \\ k &= \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \end{aligned} \tag{4.58}$$

Kutna brzina se mijenja između najveće vrijednosti ω/k i najmanje vrijednosti ωk. Ta je razlika to veća, što je k manji. Ona je prikazana na dijagramu sl. 4.15. kao



Sl. 4.15. Dijagram ovisnosti kutne brzine vektora električnog polja u eliptički polariziranom valu o vremenu. Konstanta c iznosi 4,76%.

omjer ν/ω u ovisnosti o kutu ωt. Što je manja razlika između E_1 i E_2, to je veća varijacija kutne brzine vektora ukupnog polja. Pri $E_1/E_2 = 1{,}1$ iznosi $k = 0{,}0476$, a tada su $(\nu/\omega)\,\max = 21$, $(\nu/\omega)\,\min = 0{,}0476$. To su već vrlo velike varijacije kutne brzine.

Eliptički polarizirani val je opći slučaj polarizacije. Elipsa degenerira u kružnicu ili u duljinu. Takav val prikazuje kružno i linearno polarizirani val. S druge strane, eliptički polarizirani val se rastavlja na dva kružno polarizirana vala, koji su jedan desni, a jedan lijevi val. Kombinacija bilo kakvih valova ne ulazi u kategoriju polariziranih valova. Kombinacijom se postižu katkad polarizirani valovi, ali ne uvijek. Kad se govori o polariziranom valu, misli se obično na eliptički polarizirani val s njegovim degeneracijama. Pravila polarizacije, kako su ovdje dobivena, nisu ovisna o gubicima sredstva u prostoru.

4.5. IZOLATORI I VODIČI

Materijali u prostoru imaju različita svojstva. Teško ih je svrstati, strogo uzevši, u dvije kategorije. Međutim, elektrotehnika je već davno usvojila dvije velike kategorije materijala: izolatore i vodiče. Svojstvo vodljivosti u njih je toliko izrazito, da nitko niti ne pomišlja da odustane od takve podjele. Vodljivosti metala se kreću između 16^6 i 10^8 simensa po metru, na temperaturi oko 20°C. Vodljivosti izolatora su između 10^{-10} i 10^{-15} simensa po metru. Razlika u vodljivosti između te dvije kategorije je golema, sa faktorom reda veličine 10^{20}. U tehnici su poznati elektroliti, čija je vodljivost znatno ispod vodljivosti metala, ali je znatno veća od vodljivosti izolatora. Vodljivost elektrolita je između 1 i 100 simensa po metru. Morska voda je također u toj kategoriji.

Vodljivost je naročito ovisna o temperaturi. Metali imaju lošiju vodljivost kako temperatura raste. Nasuprot tome, imaju vrlo veliku vodljivost na niskim temperaturama, a neki prelaze i u supravodljivo stanje. Izolatori imaju veću vodljivost na povišenim temperaturama. Vodljivost se bitno ne mijenja dodavanjem primjesa, da bi materijal prešao u drugu kategoriju. To su već takve specifičnosti, da traže posebni prikaz. Vodljivost plinova je povezana s fizikom vođenja električne struje u plinovima, što je usko vezano s ionizacijom. Plinovi su odlični izolatori dok nema ionizacije. Oni mogu postati odlični vodiči, ako se postigne visok stupanj ionizacije.

Dosadanja razmatranja o ravnom valu su pretpostavljala konstantnu dielektričnost, permeabilnost i vodljivost materijala koji ispunjava promatrani prostor. Da to nije tako, zadatak bi postao vrlo zamršen i nepregledan, odnosno rješenje ne bi bilo niti moguće. Utjecaj materijala na polje prikazan je u poglavljima 1.10. i 2.7. Materijal sadrži mnoštvo dipola, električnih i magnetskih, koji omogućuju međudjelovanje polja i materijala. Osim toga posjeduje slobodne naboje, zbog kojih dolazi do vođenja električne struje. Tamo se nije vodilo računa o karakteru utjecaja. Dinamika polja traži dodatne podatke o materijalu, da se može uzeti u obzir njegov utjecaj u potpunosti. Treba zadržati konstante dielektričnosti, permeabilnosti i vodljivosti, te voditi računa o njihovim definicijama u poglavljima 1.10. i 2.7. Dielektričnost i permeabilnost su definirani ukupnom polarizacijom dipola u polju zadane jakosti, što je pokazano jednadžbama (2.50) i (2.53), koje glase

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e &= (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\,\mathbf{E} \\ \mathbf{P}_m &= (\mu_r - 1)\,\mu_0\,\mathbf{H} \end{aligned} \tag{4.59}$$

Konstante $\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)$ i $\mu_0 (\mu_r - 1)$ su *susceptibilnosti* materijala ili *polarizabilnost* materijala, kako ih zovu neki autori. One govore koliki se dipolni moment polarizira po jedinici volumena materijala pri određenoj jakosti narinutog polja.

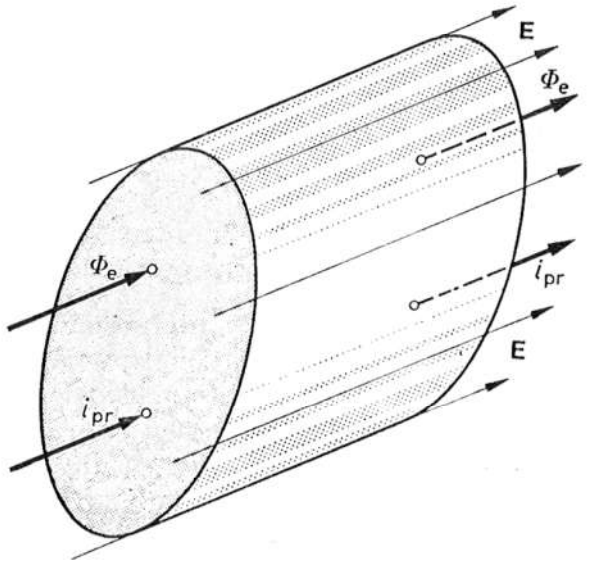
Odmah treba podsjetiti i na definiciju vodljivosti materijala po Ohmovu zakonu, tj.

$$\mathbf{J} = \varkappa \mathbf{E}$$

Definicija pretpostavlja slobodne naboje, koji su samo jedno vrijeme slobodni kad se ubrzavaju pod utjecajem polja, a dalje su ponovno vezani za atome. Trajanje slobodnog puta, što neki zovu i relaksirano vrijeme, i slobodni put naboja su direktno mjerodavni za iznos vodljivosti materijala. Naboji, inače elastično vezani u strukturi, doživljavaju u gibanju »viskozno trenje« zbog kojeg materijal kao da pruža otpor prolazu struje. Tako se specifični otpor $1/\varkappa$ dovodi u vezu s viskoznim trenjem.

4.5.1. Kut gubitaka

Da bi se pobliže vidio fizikalni značaj dielektričnosti i vodljivosti, koje se obje zasnivaju na sili električnog polja na naboj, neka se prostor predstavi silocijevima, dovoljno malenim da je u njima kvazistatično stanje. Njihove su dimenzije mnogo



Sl. 4.16. Silocijev u prostoru ravnog vala. Njome prolaze provodna i pomačna struja, koja se još zove »kapacitivna« struja.

manje od duljine vala. Takva elementarna silocijev je prikazana na sl. 4.16. Njome prolaze električni tok i provodna električna struja. Oni su razmjerni provodu silocijevi i naponu između njezinih baza. Električni tok iznosi

$$\Phi_e = G_e u$$

a provodna električna struja je

$$i_{pr} = G_p u$$

Električni tok je bio definiran kapacitetom, a mjesto njega je uvedena pomačna struja, odnosno *kapacitivna* struja u skladu s terminologijom uobičajenom kod strujnih krugova. Obje struje iznose pri primjeni harmoničkih veličina

$$I_c = \omega C U \qquad \text{kapacitivna struja silocijevi}$$

$$I_{pr} = G U \qquad \text{provodna struja silocijevi}$$

Snage koje se troše u silocijevi po Jouleovu zakonu iznose

$$P_c = U I_c = \omega C U^2 \qquad \text{kapacitivna snaga}$$

$$P_g = U I_{pr} = G U^2 \qquad \text{snaga gubitaka}$$

Omjer snage gubitaka i kapacitivne snage definira **kut gubitaka** materijala koji ispunja silocijev, odnosno koji je upotrijebljen u kondenzatoru iste silocijevi. On slijedi iz

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{P_g}{P_c} = \frac{G}{\omega C} = \frac{\varkappa}{\omega \varepsilon} = \frac{1}{\omega T} \tag{4.60}$$

Sad se vidi pravo značenje konstante ωT, koja je dosad iskorištena pri određivanju konstanti vala. Kutom gubitaka se dovodi u vezu vodljivost i dielektričnost s energetskim stanjem u materijalu. *Svi gubici u polju, koji su nepovratni, manifestiraju se u vodljivosti materijala.*

Konstante vala se prikazuju jednostavnije primjenom kuta gubitaka. One glase

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\left(\frac{1 - \cos\delta}{2\cos\delta}\right)^{1/2} \qquad \text{prigušna konstanta}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c}\left(\frac{1 + \cos\delta}{2\cos\delta}\right)^{1/2} \qquad \text{fazna konstanta} \tag{4.61}$$

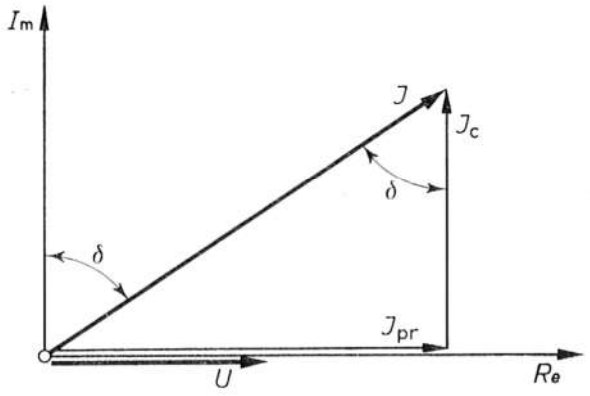
$$|Z_v| = Z_0 \sqrt{\cos\delta} \qquad \text{valna impedancija}$$

$$\varphi = \frac{\delta}{2} \qquad \text{fazni kut valne impedancije}$$

4.5.2. Kompleksne konstante

Provodna i kapacitivna struja su prikazane u kompleksnoj ravnini na sl. 4.17. Ukupna struja I prethodi fazno naponu U za kut $(\pi/2 - \delta)$, a kut gubitaka se dobija iz

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_{pr}}{I_c} = \frac{G}{\omega C} \tag{4.62}$$



Sl. 4.17. Vektori provodne i kapacitivne struje u kompleksnoj ravnini.

što je opet jednako iznosu u (4.60). Prividna snaga koja se troši u silocijevi izražava se kompleksnim brojem

$$P = P_g + j P_c = U J^* = (G + j \omega C) U^2 \tag{4.63}$$

Njezin realni dio je snaga gubitaka, a imaginarni dio je kapacitivna snaga.

Ovdje se pojavljuje admitancija

$$Y = G + j \omega C$$

koja bi se mogla zvati *kompleksni provod* ili *kompleksna, kapacitivna susceptancija*. Jednako pravo imaju oba termina, a potreba analize odlučuje koji je termin u prednosti. Izbor termina utječe na prikazivanje vodljivosti i dielektričnosti. One postaju kompleksne veličine. Ako se govori o kompleksnom provodu, treba uvesti *kompleksnu vodljivost*

$$\varkappa_k = \varkappa_g + j \varkappa_c \tag{4.64}$$

Njezin realni dio vodi na provod silocijevi, a imaginarni dio daje kapacitivni provod. Admitancija silocijevi je jednaka

$$Y = \varkappa_k \frac{S}{d} \tag{4.65}$$

ako je S presjek silocijevi, a d je njezina duljina. Ako se govori o kapacitivnoj, kompleksnoj susceptanciji, treba uvesti *kompleksnu dielektričnost*

$$\varepsilon_k = \varepsilon_c - j\,\varepsilon_g \tag{4.66}$$

a admitancija je naprosto jednaka

$$Y = j\,\omega\,\varepsilon_k \frac{S}{d} \tag{4.67}$$

Oba su puta jednako valjana, a primjenjuju se prema potrebama analize. Prva Maxwellova jednadžba se zbog toga mijenja i glasi

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \varkappa_k\,\mathbf{E} = j\,\omega\,\varepsilon_k\,\mathbf{E} \tag{4.68}$$

4.5.3. Titranje elementarnog oscilatora

Postoje i fizikalna objašnjenja za koji put se treba odlučiti. Dosadašnje razmatranje to ne pokazuje, jer se pošlo od gubitaka i kapacitivne snage. Međutim, kad se želi bliže prići problemu, treba pogledati fizikalnu sliku vođenja struje ili polarizacije dipola. Osnovnu ulogu u oba slučaja igra naboj. Kad je polje harmonički promjenljivo zadanom frekvencijom, sila na naboj se mijenja po istom zakonu, bez obzira da li naboj pripada skupini slobodnih naboja ili skupini dipola. U svakom slučaju silu na naboj ne proizvodi samo narinuto polje. Ostali naboji u materijalu djeluju silama na promatrani naboj. Ravnoteža sila dovodi do jednadžbe

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + k\,z = Q\,E_z \tag{4.69}$$

Naboj Q pripada čestici mase m. Narinuto polje djeluje silom $Q\,E_z$. Ravnotežu s njom održavaju sila tromosti $m\ddot{z}$, sila viskoznog trenja $r\dot{z}$ i elastična sila $k\,z$. Sila viskoznog trenja je razlog da se primjenjuje Ohmov zakon, odnosno da se naboji gibaju kroz vodič u prosjeku konstantnom brzinom. Elastična sila je Coulombova sila između promatranog naboja i susjednih naboja.

Konstanta elastičnosti k se zadaje indirektno vlastitom frekvencijom titranja sustava dvaju naboja između kojih se promatra Coulombova sila. Vlastita frekvencija ω_0 slijedi iz odnosa

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{4.70}$$

Konstanta otpora r zbog viskoznog trenja izražava se energetski. Kinetička energija nabijene čestice se utroši na viskozno trenje. Vremenska konstanta retardacije čestice zbog trenja iznosi

$$\tau = \frac{m}{r} \tag{4.71}$$

odnosno njezina konstanta gušenja gibanja iznosi

$$g = \frac{1}{\tau} = \frac{r}{m} \tag{4.72}$$

Običaj je da se uvodi vlastita frekvencija ω_0 elastične veze umjesto konstantne elastičnosti, a konstanta gušenja gibanja g nadomješta viskozni otpor po izrazima

$$k = m\,\omega_0^2, \qquad r = m\,g \tag{4.73}$$

Kad se uzme u obzir da se promatra stacionarno titranje frekvencijom ω pod utjecajem harmoničke, narinute sile, jednadžba (4.69) gibanja glasi

$$m\,(-\,\omega^2 + j\,\omega\,g + \omega_0^2)\,Z = Q\,E_z$$

Dipolni moment je po definiciji jednak $Q\,Z$, tj. on iznosi

$$p_z = Q\,Z = \frac{Q^2}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2 + j\,\omega\,g)}\,E_z \tag{4.74}$$

Dipolni moment po jedinici volumena, tj. polarizacija, se mijenja po istom pravilu u (4.74). Susceptibilnost iz (4.59) izražava se po Strattonu

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\,\omega\,g} \tag{4.75}$$

Nova konstanta a^2 uzima u obzir naboj i njegovu masu, te njihov broj u jedinici volumena. Kad se ne bi promatralo kvantnomehanički proces polarizacije, bila bi ta konstanta

$$a^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{N_0\,Q^2}{m} \tag{4.76}$$

gdje je N_0 broj naboja po jedinici volumena. Frekvencija ω_0 je prosječna frekvencija dobivena kvantnomehanički. Ona predstavlja elastične sile koje vladaju među nabojima.

Da se ne bi išlo u generalnu analizu dielektričnosti, treba promatrati materijale u kategorijama. Kompleksna dielektričnost iznosi iz (4.75)

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\,a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\,\omega\,g} \tag{4.77}$$

Kapacitivna dielektričnost i vodljivost gubitaka slijede prema jednadžbama (4.64) do (4.67)

$$\varepsilon_c = \mathrm{Re}\,[\varepsilon_k], \qquad \varkappa_g = \omega\,\mathrm{Im}\,[\varepsilon_k] \tag{4.78}$$

To su dielektričnost i vodljivost s kojima se obično radi u teoriji polja.

4.5.4. Konstante metala

Metali su tipična kategorija materijala dobrih električnih vodiča. Oni zahvaljuju vođenje električne struje slobodnim elektronima, elektronskom plinu. Slobodni elektroni nemaju elastične veze, te je elastičnost nula, $k = 0$, a odgovarajuća frekvencija također iščezava, tj. $\omega_0 = 0$. Elektroni vezani u atomima metala imaju visok stupanj elastičnosti, jer je sila na njih vrlo velika, a tada je i pripadna frekvencija vrlo visoka. Pripadna frekvencija je reda veličine 10^{15} herca. *Elektroni vezani u atomu ne daju nikakav doprinos dielektričnosti materijala.* Jednadžbu (4.77) se pojednostavnjuje kod metala na oblik

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 - j \frac{\varepsilon_0 a^2}{\omega g} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{g}} \tag{4.79}$$

Ako je frekvencija narinutog polja vrlo niska, tj. $\omega/g \ll 1$, dalje se pojednostavnjuje kompleksna dielektričnost. Kod niskih frekvencija realna dielektričnost metala je približno jednaka ε_0, a njegova je realna vodljivost prema (4.78)

$$\varkappa_g = \frac{\varepsilon_0 a^2}{g} \tag{4.80}$$

koja se obično navodi kao vodljivost metala. Ona nije više ovisna o frekvenciji narinutog polja. Da se dobije red veličina navedenih konstanti, navodi se kao primjer bakar, koji ima vodljivost 58 MS/m na temperaturi 20°C ili 293 K u apsolutnoj skali. Dovoljno je točno uzeti da se javlja jedan slobodni elektron po atomu kod metala, pa prema tome i bakra. To je za bakar $N_0 = 8{,}5 \cdot 10^{28}$ slobodnih elektrona po m^3. Zato je $\varepsilon_0 a^2 = 2{,}4 \cdot 10^{21}$ F/(m s^2). Sada se odredi konstanta prigušenja gibanja elektrona u bakru g iz (4.80) $g = 4{,}13 \cdot 10^{13}$ 1/s. Kao što se vidi, ona je oko 10^{13} 1/s, te je to njezin red veličine za metale. Da bi bio zadovoljen uvjet $\omega/g \ll 1$, mora biti zadovoljeno barem $\omega/g < 0{,}01$. To znači da frekvencija polja ne utječe na vodljivost metala, ako je kružna frekvencija

$$\omega < 10^{11} \text{ r/s}$$

tj. ako je frekvencija manja od 10^{10} Hz. Frekvencija 10^{10} Hz susreće se već u radarskoj tehnici, a naročito u tehnici MASER-a. Tada se već mora voditi računa o vodljivosti metala.

Bakar ima vodljivost povećanu 10^5 puta ako se ohladi na temperaturu tekućeg helija, tj. na 4 K. Zato konstanta prigušenja padne na iznos $g = 4 \cdot 10^8$. Problem njegove vodljivosti postavlja se sada na znatno nižim frekvencijama.

4.5.5. Konstante plinova

Plinovi su kategorija materijala koji imaju svojstva dijametralno oprečna svojstvima metala. Molekule plinova ne djeluju međusobno Coulombovim silama pri umjerenim tlakovima. Viskozno trenje ne dolazi u obzir, te je prigušna konstanta $g = 0$. Kompleksna dielektričnost poprima oblik

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 a^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{4.81}$$

Ona je realna u cjelini. Ne postoji vođenje električne struje. Međutim, dielektričnost može postati beskonačna u slučaju rezonancije pri $\omega = \omega_0$. Osim toga ona postaje negativna, kad frekvencija narinutog polja prijeđe iznos koji slijedi iz izraza

$$\omega^2 > \omega_0^2 + a^2, \qquad \varepsilon_k < 0$$

To su sve anormalne pojave koje su moguće u kategoriji plinova. Budući da se radi o molekulama u kojima su atomi vezani elastično, vlasite frekvencije ω_0 su znatno niže nego u metala. Smatra se da je kritična frekvencija, koja je jednaka

$$\omega = \omega_p = a$$

Ako je plin ioniziran, pojavljuju se slobodni elektroni, te se zanemaruje i frekvencija ω_0. Tada je dielektričnost samo manja od ε_0, ili pak negativna pri $\omega > \omega_p$. Frekvencija ω_p se još zove *frekvencija plazme*. Posljedica je takvog stanja, da fazna brzina vala postaje *veća* od brzine svjetla, dok je frekvencija manja od ω_p. Kad dielektričnost postane negativna, fazna je brzina *imaginarna*, tj. val se ne može rasprostirati u takvoj ioniziranoj sredini, već dolazi do *totalne refleksije*. Tablica 4.3. pokazuje kako se mijenja frekvencija plazme u ovisnosti o gustoći slobodnih elektrona u ioniziranu plinu.

TABLICA 4.3.

N_0 (1/m³)	$8{,}5 \cdot 10^{28}$	10^{22}	10^{12}	10^{10}
$a = \omega_p$ (r/s)	10^{16}	$6 \cdot 10^{12}$	$6 \cdot 10^{7}$	$6 \cdot 10^{6}$

Gustoće elektrona 10^{10} do 10^{12} po m³ se susreću u visokim slojevima atmosfere, u ionosferi.

4.5.6. Konstante izolatora i elektrolita

Ostali materijali nalaze se između metala i plinova, bez obzira bili u čvrstom ili tekućem stanju. To je kategorija izolatora i elektrolita. Oni se ponašaju u polju tako, da se mora upotrijebiti kompletni izraz za kompleksnu dielektričnost (4.77). Vođenje struje kod njih je zamršen proces, a isto su tako neobični i dielektrični efekti. Ovi su materijali bili osnovni razlog da je uvedena kompleksna dielektričnost. Izolatori su materijali koji svi vode električnu struju u većem ili manjem stupnju. Njihova vodljivost se ustanovljava isključivo preko gubitaka, kao što je ovdje prikazano. Jedna od njihovih osnovnih karakteristika je kut gubitaka, tg δ. Imaginarni dio kompleksne dielektričnosti iznosi

$$\varepsilon_g = \varepsilon_c \operatorname{tg} \delta \tag{4.82}$$

Može se zadržati dosadašnji oblik valne konstante i impedancije, samo treba voditi računa o ovome što je rečeno o utjecaju frekvencija.

Evo još jednom rezimea o utjecaju frekvencije polja na ponašanje materijala.

1. *Metali*, tipični vodiči, dielektričnost kao u praznu prostoru, vodljivost neovisna o frekvenciji do 10^{10} Hz na sobnoj temperaturi
2. *Plin — neutralan*, bez gubitaka, ne utječe na dielektričnost do 10^{12} Hz.
3. *Plin — ioniziran*, plazma, vrlo jak utjecaj na dielektričnost na više od 10^6 Hz, ovisno o gustoći elektrona, pojava fazne brzine veće od brzine svjetla i imaginarne fazne brzine.
4. *Izolatori*, postoji utjecaj frekvencije na dielektričnost i kut gubitaka već u oblasti niskih frekvencija.
5. *Elektroliti*, ponašaju se slično izolatorima, samo su gubici mnogostruko veći.

4.5.7. Permeabilnost materijala

Ovim nije dotaknuta permeabilnost materijala. Ona je odraz postojanja magnetskih dipola u materijalu, a osnovu sačinjavaju elektronski spinovi. Njihova je vlastita frekvencija titranja toliko visoka, da polje frekvencije do 10^{12} Hz ne utječe na permeabilnost. Ovdje nije dotaknut drugi problem. Feromagnetizam, tehnički interesantan, vezan je uz metale, a oni su odlični vodiči. *Vrtložne* struje prate uvijek promjene magnetskog polja u feromagneticima. Nečistoće u materijalu su razlog pojavi gubitaka, koji imaju svoj izvor u premagnetiziranju »domena spontanog magnetiziranja« u feromagnetika. Ta se pojava zove *histereza*. Ona se uzima u obzir također *kompleksnom permeabilnošću*.

4.5.8. Sekundarne konstante

Utjecaj materijala na rasprostiranje elektromagnetskog vala uzima se u obzir, nadalje, valnom konstantom i impedancijom. Konstante materijala, dielektričnost, permeabilnost i vodljivost, služe kao *primarne konstante*. One se preglednije grupiraju u tri nove konstante koje imaju i fizikalno značenje. One su

$$c = (\mu\,\varepsilon)^{-1/2} \qquad \text{brzina svjetla u sredstvu bez gubitaka}$$

$$Z_0 = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \qquad \text{valni otpor sredstva bez gubitaka}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\omega\,T} = \frac{\varkappa}{\omega\,\varepsilon} \qquad \text{tangens kuta dielektričnih gubitaka}$$

Gubici histereze u feromagneticima nisu ni čim uzeti u obzir, te oni zahtijevaju posebni prikaz

4.5.9. Izolatori

Materijali se dijele na dvije velike skupine, *izolatore* i *vodiče*, prema iznosu kuta gubitaka, i to

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\varkappa}{\omega\,\varepsilon} \ll 1 \qquad \text{izolatori}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\varkappa}{\omega\,\varepsilon} \gg 1 \qquad \text{vodiči}$$

Kriterij za *izolatore* se primjenjuje na izraze za konstante vala. One iznose pojednostavnjene

$$\alpha = \frac{\omega}{2\,c}\operatorname{tg}\delta = \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \qquad \beta = \frac{\omega}{c} = \omega\,(\mu\varepsilon)^{1/2}$$

$$|Z_v| = Z_0 = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \qquad \varphi = \frac{\delta}{2} = \frac{\varkappa}{2\,\omega\,\varepsilon} \tag{4.84}$$

Permeabilnost izolatora je uvijek $\mu = \mu_0$. Prema tome ostaje utjecaj promjenljivosti, dielektričnosti i vodljivosti. Prigušna konstanta se mora izraziti i dubinom prodiranja vala $d = 1/\alpha$.

Neka za ilustraciju posluži materijal *tvrdi porculan*, koji se mnogo upotrebljava kao kvalitetan izolator u visokonaponskoj tehnici. Njegova je dielektričnost 5,0, pri frekvenciji od 50 Hz, a ona iznosi 6,5, pri 1 MHz. Njegova »prostorna« vodljivost je oko 10^{-15} S/m. Naglašava se prostorna vodljivost za razliku od »površinske« vodljivosti. Dosadašnja vodljivost je mišljena kao prostorna vodljivost. Faktor gubitaka, tg δ, iznosi 0,020, pri frekvenciji 50 Hz, a on je 0,010, pri frekvenciji 1 MHz. Interesantno je da tangens kuta gubitaka ili faktor gubitaka ostaje praktički konstantan kad se frekvencija promijeni 10^5 puta. Kako dielektričnost ostaje gotovo konstantna, mora se vodljivost znatno promijeniti povećanjem frekvencije polja. Brzina svjetla iznosi $c = 1{,}34 \cdot 10^8$ m/s, pri 50 Hz i $c = 1{,}18 \cdot 10^8$ m/s pri 1 MHz. Fazna brzina iznosi isto toliko. Prigušna konstanta iznosi $\alpha = 2{,}35 \cdot 10^{-8}$ 1/m, odnosno dubina prodiranja vala $d = 42500$ km, pri frekvenciji 50 Hz. Iste veličine iznose pri frekvenciji 1 MHz $\alpha = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ 1/m, $d = 3750$ m. Bukvalno interpretirano, prigušna konstanta ne ovisi o frekvenciji, a u stvarnosti ona je ovisna u velikoj mjeri o njoj kod tvrdog porculana.

Jedan od najboljih izolacionih materijala je *politetrafluoretilen*, komercijalno nazvan *teflon*. Njegova je dielektričnost 2,0, pri frekvenciji 1 MHz. Faktor gubitaka iznosi tg $\delta = 0{,}0002$, pri istoj frekvenciji. Pripadna brzina svjetla iznosi $c = 2{,}12 \cdot 10^8$ m/s. Tada je prigušna konstanta $\alpha = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ 1/m, što odgovara dubini prodiranja vala $d = 330$ km.

Većina izolatora ima faktor gubitaka, tg δ, približno konstantan za veliki spektar frekvencija. Njegova je upotreba korisnija nego primarnih konstanti materijala. On je praktički uvijek manji od 0,1, a takvi materijali ulaze još u kategoriju izolatora, tj.

$$\operatorname{tg}\delta < 0{,}1 \qquad \text{izolatori}$$

Fazna brzina je uvijek jednaka brzini svjetla, a tada je i pripadna duljina vala $\lambda = c/f$.

Prigušnu konstantu se prikazuje preglednije duljinom vala izrazom

$$\alpha\lambda = \pi \operatorname{tg}\delta = \frac{\lambda}{d} \tag{4.85}$$

Kako je faktor gubitaka približno konstantan, dubina prodiranja vala ostaje u jednakom odnosu prema duljini vala.

Neki izolatori su nabrojani u tablici 4.4.

Dielektričnost i faktor gubitaka izolatora na temperaturi 20°C

Podaci prema knjizi A. F. Harvey, Microwave Engineering 1963

TABLICA 4.4.

Izolator	Dielektričnost ε_r	Faktor gubitaka $10^4 \cdot \operatorname{tg} \delta$	Pri frekvenciji
Parafin, vosak	2,30	1,0	$< 10^{11}$ Hz
Polistiren	2,55	1,5	$< 10^{11}$ Hz
Corning 707, staklo	4,00	24	$< 10^{11}$ Hz
Lijevani kremen	3,85	1,0	$< 10^{11}$ Hz
Steatit	6,20	1,0	$< 10^{11}$ Hz
Politetrafluoretilen	2,10	1,0	$< 10^{11}$ Hz
Polietilen	2,25	2,0	$< 10^{11}$ Hz
Acetat celuloza	4,0—5,5	400—600	10^6 Hz
Epoxy smola	3,62	190	10^6 Hz
Polivinil klorid, flex.	3,5—4,5	900—1000	10^6 Hz
Porculan	6,0—8,0	30—200	10^6 Hz
Transformatorsko ulje	2,1—2,4	6—10	50 Hz
Tekstolit	5—6	600—2000	50 Hz
Tinjac	6,5—7,2	4—48	50 Hz
Benzen	2,28	3,0	9 GHz
Metilni alkohol	31,8 18,7 5,7	1 700 7 500 5 600	0,58 GHz 3,03 GHz 37,5 GHz
Voda	80,3 79,3 77,2 76,3 61,5 30,8 24,0	342 1 000 1 700 2 050 5 100 11 400 12 500	0,58 GHz 1,74 GHz 3,0 GHz 3,65 GHz 9,30 GHz 23,8 GHz 35,0 GHz
Uzduh, 0° C, 760 mm Hg	$1 + 576{,}2 \cdot 10^{-6}$	—	3,36 GHz
CO_2, 0° C, 760 mm Hg	$1 + 989 \cdot 10^{-6}$	—	3,36 GHz
Vodena para, 20° C, 10 mm Hg	$1 + 61{,}3 \cdot 10^{-6}$	—	3,36 GHz
Ba Ti O_3	1 500 1 350 300 270	150 2 000 5 300 7 000	1,5 MHz 1,25 GHz 9,5 GHz 24 GHz

4.5.10. Vodiči

Kriterij za vodiče se primjenjuje na konstante vala. One iznose iz (4.61)

$$\alpha = \beta = \left(\frac{1}{2}\,\omega\,\mu\,\varkappa\right)^{1/2}$$
$$|Z_v| = \left(\frac{\omega\,\mu}{\varkappa}\right)^{1/2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \tag{4.86}$$

Da bi materijal bio u kategoriji vodiča, dovoljno je da je

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\omega\,T} = \frac{\varkappa}{\omega\,\varepsilon} > 100 \qquad \text{vodiči}$$

Metali kao vodiči zadovoljavaju do najviših frekvencija. Njihova vodljivost počinje ovisiti o frekvenciji iznad 10^{10}Hz. Elektroliti kao vodiči zadovoljavaju s ograničenjem, te se oni provjeravaju od slučaja do slučaja. Kategorija materijala pod imenom elektrolita je vrlo široka. Tu se ubrajaju voda i vlažno tlo, pored pravih elektrolita kao što su otopine različitih soli u vodi, lužine ili kiseline u vodi. Vodljivosti elektrolita se kreću od 10^{-4} S/m do 100 S/m. Oni zahvaljuju vođenje struje postojanju iona koji se mogu gibati. Vodljivost elektrolita neznatno raste s frekvencijom, a dielektričnost se također malo mijenja. Takvo je stanje do frekvencija od 100 MHz, kad se počinje osjećati jači utjecaj frekvencije kao i u ostalih materijala.

Voda ima dielektričnost 81, na temperaturi 20°C. Njezina vodljivost se mijenja u širokim granicama, od kišnice 10^{-4} S/m, do mora oko 1 S/m. Da bi ona ušla u kategoriju vodiča, frekvencija ne smije prijeći 230 Hz kod kišnice i 2,3 MHz kod mora. Voda je materijal koji se ne može posve uključiti u vodiče ni u izolatore. Tako je također s tlom koje je višemanje vlažno, te se slično ponaša kao voda. Pravi elektroliti su najčešće u kategoriji vodiča.

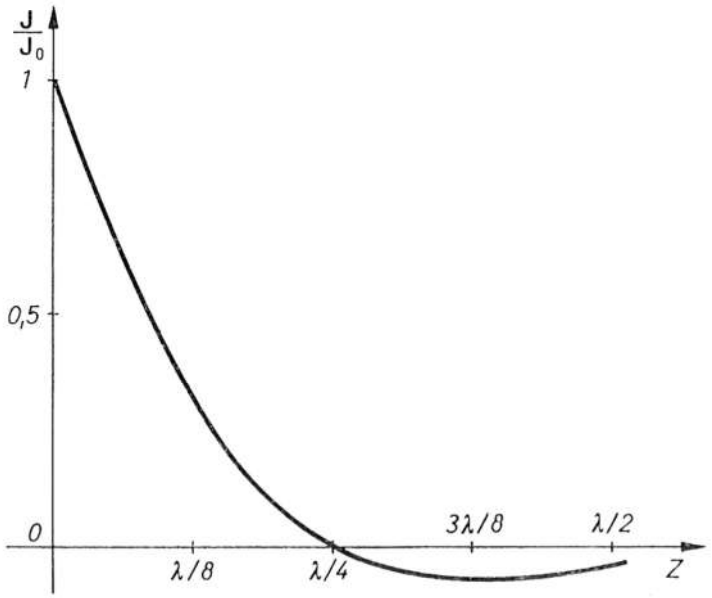
Duljina vala je definirana faznom konstantom kao $\lambda = 2\,\pi/\beta$, a dubina prodiranja vala prigušnom konstantom, tj. $d = 1/\alpha$. Prema tome je čvrst odnos između duljine vala i dubine prodiranja u vodiča

$$\lambda = 2\,\pi\,d \tag{4.87}$$

Val se priguši na 0,2 % početnog iznosa jakosti polja na putu koji je jednak točno duljini vala. Kad val prevali put 3,7 λ, iznosi jakosti polja se smanjuju na 10^{-10} početnih iznosa. Tablica 4.2. daje pregled dubina prodiranja vala i duljina vala u ovisnosti o frekvenciji za nekoliko karakterističnih vodiča.

Posebno treba spomenuti dubinu prodiranja vala u metalu pri vrlo visokoj frekvenciji polja. Dubina prodiranja vala u bakru vodljivosti 58 MS/m iznosi 660 nanometara, pri frekvenciji 10^{10} Hz ili ona je 66 nanometara za 10^{12} Hz. Srednji slobodni put elektrona u bakru na temperaturi od 20° C iznosi oko 42 nanometra. Frekvencije polja veće od 10^{10} Hz su toliko visoke, da se dubina prodiranja vala mjeri srednjim slobodnim putem elektrona u metalu. To ponovo pokazuje da se vodljivost metala mora posebno promatrati ako frekvencija polja prelazi iznos 10^{10}Hz.

Dubina prodiranja vala u vodičima je toliko malena, da je vrlo često neznatna prema dimenzijama vodiča. Neka je *površina vodiča ravnina*, $z = 0$. Postoji samo pozitivni val koji se rasprostire u vodič. Jakost električnog polja ima samo kom-



Sl. 4.18. Dijagram gustoće struje u vodiču u ovisnosti o udaljenosti od površine vodiča. Gustoća je u relativnom iznosu prema J_0 na površini vodiča, a udaljenost je prema duljini vala u vodiču $\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi d$.

ponentu X. Gustoća struje $\mathbf{J} = \varkappa \mathbf{E}$. ima istu komponentu, a mijenja se jednako kao i jakost električnog polja. Magnetsko polje ima samo komponentu Y. Gustoća struje se mijenja po zakonu

$$J = J_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z) \tag{4.88}$$

a njezini su iznosi prikazani u dijagramu na sl. 4.18., pri $\omega t = 0$. Taj je dijagram neovisan o duljini vala, odnosno o dubini prodiranja vala. Struje teku ortogonalno na ravninu Y - Z. Ukupna jakost struje K koja protiče kroz traku širine $y_0 = 1$ m i dubine $0 \leqslant z < \infty$ iznosi

$$K = \int_0^\infty J \, dz = \frac{1}{\sqrt{2}} J_0 d \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \tag{4.89}$$

Tjemeni iznos te struje je prema tome

$$K_m = \frac{1}{\sqrt{2}} J_0 d \tag{4.90}$$

Struja K teče vodičem čija je širina 1 m, a debljina je beskonačna. Duljina je također beskonačna u smjeru osi X.

Prosječni iznos Poyntingova vektora na mjestu $z = 0$ iznosi

$$\Gamma_{sr} = \frac{1}{2} E_0 H_0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{d}{4\varkappa} J_0^2 = \frac{1}{2} K_m^2 \frac{1}{\varkappa d} \tag{4.91}$$

Energija koja struji u ravnini $z = 0$, pokriva gubitke u vodiču. Gubici u vodiču su jednaki, kao da sva struja teče u sloju koji je debeo kolika je dubina prodiranja vala. Veličina $1/(\varkappa d)$ je otpor vodiča presjeka d m^2 i dužine 1 m. Tanki sloj vodiča protjecan strujom je razlog da elektromagnetsko polje ne može egzistirati u njegovoj unutarnjosti.

Feromagnetski materijali su također vodiči. Njihova permeabilnost je mnogo puta veća od μ_0, te se dubina prodiranja vala adekvatno smanjuje. Permeabilnost dinamo-lima je 500 μ_0 za male promjene polja. Njegova vodljivost je do 10 MS/m. Dubina prodiranja vala pri frekvenciji 50 Hz iznosi 1,0 mm. Bakar vodljivosti 58 MS/m ima istu dubinu 9,35 mm. Feromagnetski materijal »opire« se u većoj mjeri prodiranju elektromagnetskog polja. Neka je isti tjemeni iznos magnetskog polja $H_0 = 100$ A/m u dinamo-limu i bakru. Pripadni tjemeni iznos gustoće struje je $J_0 = \sqrt{2}\, H_0/d = 0{,}109$ A/mm^2 u dinamo-limu i 0,0152 A/mm^2 u bakru. Gubici induciranih struja iznose po 1 m^2 ravnine $z = 0$ u dinamo-limu 385 mW/m^2 i u bakru 9,2 mW/m^2. Dubina prodiranja vala je znatno manja nego u bakru, ali su zato gubici u njemu mnogostruko veći, ako je jakost magnetskog polja na ulazu u materijal ista.

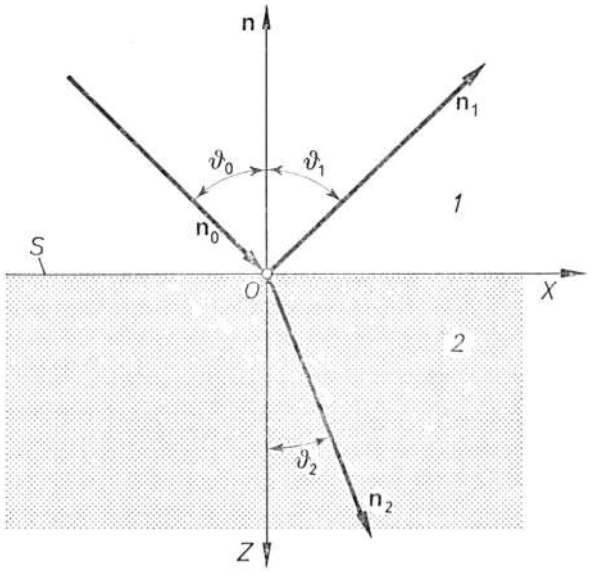
4.6. VAL NA GRANICI

Dosadašnje promatranje je obuhvatilo ravni val u slobodnom, neograničenom prostoru. Sada treba prikazati ponašanje ravnog vala kad naiđe na granicu između dva sredstva. Granica je ravnina koja dijeli dva poluprostora. Svaki poluprostor je ispunjen drugim sredstvom. Sredstva su homogena i izotropna, konstantnih svojstava, tj. dielektričnost, permeabilnost i vodljivost su konstantni.

Kad val naiđe iz jednog sredstva na granicu, on izazove polarizaciju drugog sredstva i u njemu inducira struje. Drugo se sredstvo »opire« nadiranju elektromagnetskog polja polarizacijom i induciranim strujama. Njegova se opozicija manifestira pojavom *refleksije* i *refrakcije vala*. Elektromagnetsko polje polariziranih dipola i induciranih struja superponira se na nadošlo polje. Njihov zbroj je reflektirani val u prvom sredstvu i lomljeni val u drugom sredstvu. Analiza ponašanja vala na granici između dvaju sredstava je najvažnija za tumačenje pojava u elektrotehničkim uređajima i spravama. Strujni krugovi, kao osnovni element elektrotehnike, sastoje se od samih vodiča, makar se u njima ne može razviti elektromagnetsko polje, nego samo u izolatoru, te se njime ne prenosi energija. Svoju ulogu vodič zahvaljuje pojavama na svojoj površini. To također ukazuje na velik značaj promatranja vala na granici.

4.6.1. Snelliusovi zakoni

Granična ravnina S dijeli poluprostor 1 od poluprostora 2 kao na sl. 4.19. Sredstvo u poluprostoru 1 ima konstante ε_1, μ_1 i $\varkappa_1$, odnosno valnu konstantu γ_1 i impedanciju Z_1. Sredstvo u poluprostoru 2 ima konstante ε_2, μ_2 i $\varkappa_2$, odnosno valnu konstantu γ_2 i impedanciju Z_2. Normala $\mathbf{n}$ na graničnu ravninu gleda iz sredstva



Sl. 4.19. Vektori smjera gibanja ravnog vala na granici izmedu dva sredstva. Granična ravnina je je ujedno X-Y ravnina koordinatnog sustava.

2 u sredstvo 1. Val nailazi iz sredstva 1 smjerom $\mathbf{n}_0$. Smjer vala je smjer Poyntingova vektora. *Reflektirani val* napreduje smjerom $\mathbf{n}_1$ natrag u sredstvo 1. *Prolazni val* nastavlja smjerom $\mathbf{n}_2$ u sredstvu 2. Smjerovi vala $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ zatvaraju s normalom $\mathbf{n}$ kutove ϑ_0, ϑ_1 i ϑ_2. Ishodište koordinatnog sustava nalazi se u O. Bilo koja točka u graničnoj ravnini S određena je radijusvektorom $\mathbf{r}$ od ishodišta. Jednadžba granične ravnine glasi

$$\mathbf{r}\,\mathbf{n} = 0$$

Upadni val ima vektore $\mathbf{E}_u$ i $\mathbf{H}_u$ koji su okomiti na $\mathbf{n}_0$, a mijenjaju se samo u smjeru $\mathbf{n}_0$. Udaljenost u smjeru $\mathbf{n}_0$ iznosi $\mathbf{r}\,\mathbf{n}_0$. Jednako su udaljenosti u smjeru reflektiranog vala $\mathbf{n}_1$ zadane sa $\mathbf{r}\,\mathbf{n}_1$, a u smjeru $\mathbf{n}_2$ prolaznog vala sa $\mathbf{r}\,\mathbf{n}_2$. Poyntingov vektor upadnog vala iznosi $\mathbf{\Gamma}_u = \mathbf{E}_u \times \mathbf{H}_u$, a on ima isti smjer kao i $\mathbf{n}_0$. Sada se mogu napisati jednadžbe *upadnog*, *reflektiranog* i *prolaznog vala*. One glase

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_u = \mathbf{E}_0\, e^{j\omega t - \gamma_1 \mathbf{r}\mathbf{n}_0}, && \mathbf{H}_u = \frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_u}{Z_1} && \text{upadni val}\\
&\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_1\, e^{j\omega t - \gamma_1 \mathbf{r}\mathbf{n}_1}, && \mathbf{H}_r = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_r}{Z_1} && \text{reflektirani val} \qquad (4.92)\\
&\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_2\, e^{j\omega t - \gamma_2 \mathbf{r}\mathbf{n}_2}, && \mathbf{H}_p = \frac{\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_p}{Z_2} && \text{prolazni val}
\end{aligned}$$

Smjerovi $\mathbf{n}_0$ i $\mathbf{n}$ definiraju ravninu koja se zove ravnina upadnog vala. Prema tome se definiraju i ostale ravnine, tj.

$\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}$ definira ravninu upadnog vala

$\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}$ definira ravninu reflektiranog vala

$\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}$ definira ravninu prolaznog vala

Poyntingov vektor leži uvijek u pripadnoj ravnini. Sada treba primijeniti granične uvjete kako su opisani u poglavlju 1.11. Neka nema naboja i struja na granici. Tada je uvjet za granicu da su tangencijalne komponente jakosti polja jednake s jedne i s druge strane granice. Taj je uvjet dovoljan, jer su oba polja vezana Maxwellovim jednadžbama. Prema tome je

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_u + \mathbf{E}_r) &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}_p \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_u + \mathbf{H}_r) &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}_p \end{aligned} \tag{4.93}$$

Da bi ta jednakost bila zadovoljena, moraju biti međusobno jednaki eksponenti u (4.92). Prema tome

$$\gamma_1 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_0 = \gamma_1 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_1 = \gamma_2 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_2$$

Budući da je $\mathbf{r}\,\mathbf{n} = 0$ jednadžba granične ravnine, smije se za radijusvektor staviti $\mathbf{r} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})$. Tada jednakost $\mathbf{r}\,\mathbf{n}_0 = \mathbf{r}\,\mathbf{n}_1$ prelazi u oblik

$$\mathbf{n}_0 [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})] = \mathbf{n}_1 [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})]$$

što se transformira u oblik

$$(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \times \mathbf{r})$$

Da bi ovi produkti bili međusobno jednaki, moraju biti jednaki $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}$, što vodi na jednakost $\sin(\pi - \vartheta_0) = \sin \vartheta_1$ iz sl. 4.19. Tako se dobiva prvi uvjet

$$\vartheta_0 = \vartheta_1 \tag{4.94}$$

Istim se postupkom dobiva

$$\gamma_1 (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = \gamma_2 (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \times \mathbf{r})$$

iz uvjeta jednakosti

$$\gamma_1 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_1 = \gamma_2 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_2$$

Sada je odatle

$$\gamma_1 \sin(\pi - \vartheta_0) = \gamma_2 \sin \vartheta_2$$

ili drugi uvjet glasi

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{4.95}$$

Slijedeći važni zaključak dolazi iz iskorištenih jednakosti $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}$ i $\gamma_1 (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}) = \gamma_2 (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n})$. Vektor $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}$ je okomit na ravninu upadnog vala, vektor $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}$ je okomit na ravninu reflektiranog vala, a vektor $\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}$ je okomit na ravninu prolaznog vala. Sva tri vektora su kolinearni iz uvjeta jednakosti. To znači da sve tri ravnine padaju zajedno, tj. *ravnine upadnog, reflektiranog i prolaznog vala padaju zajedno.* Vektori smjerova $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ i normale $\mathbf{n}$ na graničnu ravninu padaju svi u jednu ravninu. To je već pretpostavljeno na sl. 4.19., jer je granična ravnina X - Y, a ravnina upadnog vala je X - Z ravnina.

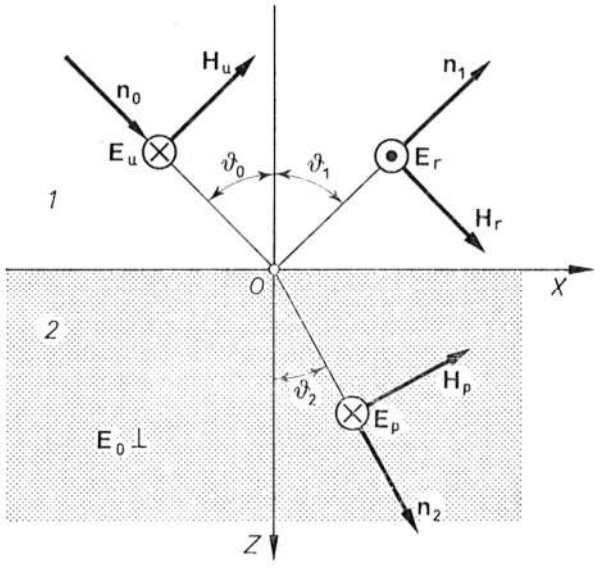
Taj se rezultat slaže sa zakonima geometrijske optike. Zakoni (4.94) i (4.95) se zovu *Snelliusovi zakoni refleksije i refrakcije vala.*

4.6.2. Fresnelove jednadžbe

Sad se može konačno prijeći na amplitude vektora polja iz (4.92) prema jednadžbama (4.93)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0}{Z_1} + \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1}{Z_1} \right) = \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2}{Z_2} \right) \tag{4.96}$$



Sl. 4.20. Vektori polja ravnog vala, ako je ravnina polarizacije upadnog vala okomita na upadnu ravninu. Takav val ima simboličnu oznaku $\mathbf{E}_0 \perp$.

To su dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice, $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$, te se mogu riješiti. One se zovu u geometrijskoj optici Fresnelove jednadžbe. Rješavanje tih jednadžbi bilo bi

prilično nepregledno. Zato treba ići drugim putem koji unosi veći pregled. Svaki val se smije rastaviti u dva linearno polarizirana vala, kako je bilo prikazano u poglavlju 4.4. Njihove ravnine polarizacije su međusobno okomite. Jedna ravnina polarizacije je *okomita na ravninu upadnog vala*, a druga pada upravo *u ravninu upadnog vala.*

Neka je $\mathbf{E}_u$ *okomit na upadnu ravninu*, kao na sl. 4.20. Tada je

$$\mathbf{n}\,\mathbf{E}_u = \mathbf{n}\,\mathbf{E}_0 = 0$$

Vektori $\mathbf{E}_u$, $\mathbf{E}_r$ i $\mathbf{E}_p$ su kolinearni i imaju samo jednu komponentu, tj. komponentu Y. Vektorske oznake smiju se ispustiti za jakost električnog polja. Treba uzeti u obzir Fresnelove jednadžbe da je $\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0) = \mathbf{n}_0\,(\mathbf{n}\,\mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0\,(\mathbf{n}\,\mathbf{n}_0) = \mathbf{E}_0 \cos \vartheta_0$. Slično se prikazuju i ostali produkti istih jednadžbi. Konačno jednadžbe (4.96) se mijenjaju za *prvi oblik polarizacije*

$$\begin{gathered} E_0 + E_1 = E_2 \\ \frac{E_0 \cos \vartheta_0}{Z_1} - \frac{E_1 \cos \vartheta_1}{Z_1} = \frac{E_2 \cos \vartheta_2}{Z_2} \end{gathered} \tag{4.97}$$

Nepoznati iznosi jakosti električnog polja reflektiranog i prolaznog vala iznose tada

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{2 \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \dfrac{Z_1}{Z_2} \cos \vartheta_2}\, E_0 \\ E_1 &= \frac{\cos \vartheta_0 - \dfrac{Z_1}{Z_2} \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_0 + \dfrac{Z_1}{Z_2} \cos \vartheta_2}\, E_0 \end{aligned} \qquad \mathbf{E}_0 \perp \tag{4.98}$$

Drugi oblik polarizacije stavlja ravninu polarizacije u upadnu ravninu. Sada je *vektor magnetskog polja okomit na upadnu ravninu*, kao na sl. 4.21., tj.

$$\mathbf{n}\,\mathbf{H}_u = \mathbf{n}\,\mathbf{H}_0 = 0$$

Sada je isto s vektorom magnetskog polja, što je u prethodnom primjeru bilo s vektorom električnog polja. Analogno obliku jednadžbi (4.96) glase jednadžbe magnetskog polja

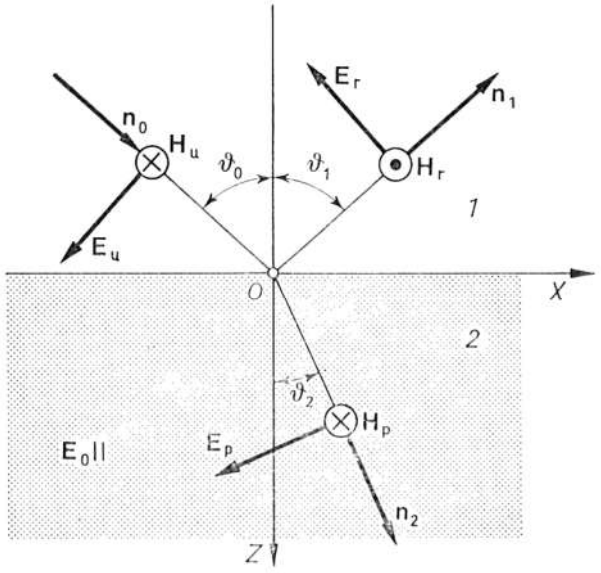
$$\begin{gathered} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{n} \times (Z_1\,\mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}_0 + Z_1\,\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1) = \mathbf{n} \times (Z_2\,\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2) \end{gathered} \tag{4.99}$$

Vektori $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$ i $\mathbf{H}_2$ su kolinearni, a vrijedi odnos

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}_0) = \mathbf{H}_0\,(\mathbf{n}\,\mathbf{n}_0) - \mathbf{n}_0\,(\mathbf{n}\,\mathbf{H}_0) = -\,\mathbf{H}_0 \cos \vartheta_0.$$

Ako se to uzme u obzir, dobiju se jednadžbe

$$\begin{aligned} H_0 + H_1 &= H_2 \\ -Z_1 H_0 \cos\vartheta_0 + Z_1 H_1 \cos\vartheta_1 &= -Z_2 H_2 \cos\vartheta_2 \end{aligned} \tag{4.100}$$



Sl. 4.21. Vektori polja ravnog vala, ako je ravnina polarizacije upadnog vala u upadnoj ravnini. Takav val ima simboličnu oznaku $\mathbf{E}_0 \parallel$.

Nepoznati iznosi jakosti magnetskog polja reflektiranog i prolaznog vala slijede odatle i glase

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\cos\vartheta_0 - \dfrac{Z_2}{Z_1}\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_0 + \dfrac{Z_2}{Z_1}\cos\vartheta_2} H_0 \\ H_2 &= \frac{2\cos\vartheta_0}{\cos\vartheta_0 + \dfrac{Z_2}{Z_1}\cos\vartheta_2} H_0 \end{aligned} \qquad \mathbf{E}_0 \parallel \tag{4.101}$$

Iznosi jakosti električnog polja jednaki su za pojedini val $E_0 = Z_1 H_0$, $E_1 = Z_1 H_1$ i $E_2 = Z_2 H_2$. Da bi dobiveni izrazi postali pregledniji, pretpostave se jednake permeabilnosti obaju sredstava, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Zato je

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_0}$$

Sada jakosti polja dobivaju pregledniji oblik

$$E_1 = -\frac{\sin(\vartheta_0 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_0 + \vartheta_2)} E_0, \qquad \mathbf{E}_0 \perp$$

$$E_1 = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_0 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_0 + \vartheta_2)} E_0, \qquad \mathbf{E}_0 \parallel \tag{4.102}$$

$$E_2 = \frac{2\cos\vartheta_0 \sin\vartheta_2}{\sin(\vartheta_0 + \vartheta_2)} E_0, \qquad \mathbf{E}_0 \perp$$

$$E_2 = \frac{2\cos\vartheta_0 \sin\vartheta_2}{\sin(\vartheta_0 + \vartheta_2)\cos(\vartheta_0 - \vartheta_2)} E_0, \qquad \mathbf{E}_0 \parallel$$

Ovdje su upotrijebljene oznake polarizacije $\mathbf{E}_0 \perp$ i $\mathbf{E}_0 \parallel$. Oznaka $\mathbf{E}_0 \perp$ znači da je ravnina polarizacije okomita na ravninu upadnog vala, prema slici 4.20. Oznaka $\mathbf{E}_0 \parallel$ je za drugu polarizaciju, kad je ravnina polarizacije paralelna s ravninom upadnog vala, kao na sl. 4.21.

Ne postoji istovjetnost u ponašanju vala na granici između dva sredstva. Nije svejedno kako je polariziran upadni val. Kako je rečeno, upadni val treba zamisliti uvijek rastavljen u oba oblika polarizacije. Reflektirani val izgleda drukčije, jer je drukčija refleksija jednog i drugog oblika polarizacije.

Ovdje se uvode *faktori refleksije* i *refrakcije*. Oni su po definiciji

$$R = \frac{E_r}{E_u} \qquad \text{faktor refleksije}$$

$$P = \frac{E_p}{E_u} \qquad \text{faktor refrakcije}$$

Jakost polja reflektiranog vala dobiva se množenjem jakosti polja upadnog vala faktorom refleksije.

4.6.3. Totalna polarizacija

Poseban je slučaj kad je

$$\vartheta_0 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Tada iščezava reflektirani val E_1 pri $\mathbf{E}_0 \parallel$ polarizaciji. Da bi se to dogodilo, upadni kut mora biti $\vartheta_0 = \vartheta_B = \pi/2 - \vartheta_2$. Upotrebom (4.95) kut ϑ_B se dobiva iz odnosa

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \operatorname{tg}\vartheta_B = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \tag{4.103}$$

Upadni kut ϑ_B se zove **Brewsterov kut**. Kad upadni val nailazi pod Brewsterovim kutom, reflektirani val je uvijek polariziran $\mathbf{E}_1 \perp$. Taj se kut još zove i *kut totalne polarizacije*. Situacija nije jednostavna. Upadni kut može biti *samo realan*. Međutim, jednadžba (4.103) pokazuje da je ϑ_B kompleksan, ako se izaberu bilo kakva sredstva u poluprostorima. Totalna je polarizacija moguća samo kad su *oba sredstva bez gubitaka*. Dakle, odnos valnih konstanti svodi se na odnos dielektričnosti

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{1/2}$$

Ako samo jedno sredstvo ima gubitke, ne može se dobiti realni Brewsterov kut, odnosno nije moguća totalna polarizacija.

Kut prolaznog vala, ϑ_2, je sasvim općenito kompleksan, ako se ima u vidu Snelliusov zakon. Omjer valnih konstanti je kompleksan. Kut ϑ_0 upadnog vala je uvijek realan. Amplituda prolaznog vala iz (4.102) dobiva fazni pomak prema E_0. Faza prolaznog vala se vidi iz (4.92), te ona iznosi za električni val $(j\,\omega\,t - \gamma_2\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_2)$. Koordinata u smjeru $\mathbf{n}_2$ iznosi iz sl. 4.19.

$$\mathbf{r}\,\mathbf{n}_2 = z\cos\vartheta_2 + x\sin\vartheta_2$$

Zato je faza prolaznog vala

$$j\,\omega\,t - \gamma_2\,z\cos\vartheta_2 - \gamma_2\,x\sin\vartheta_2$$

Faza neophodno sadrži realni dio, koji predstavlja prigušenje prolaznog vala, te imaginarni dio, koji je realna faza prolaznog vala. Zbog toga analiza prolaznog vala postaje zamršena, pa se treba pozabaviti specifičnim slučajevima.

4.6.4. Totalna refleksija

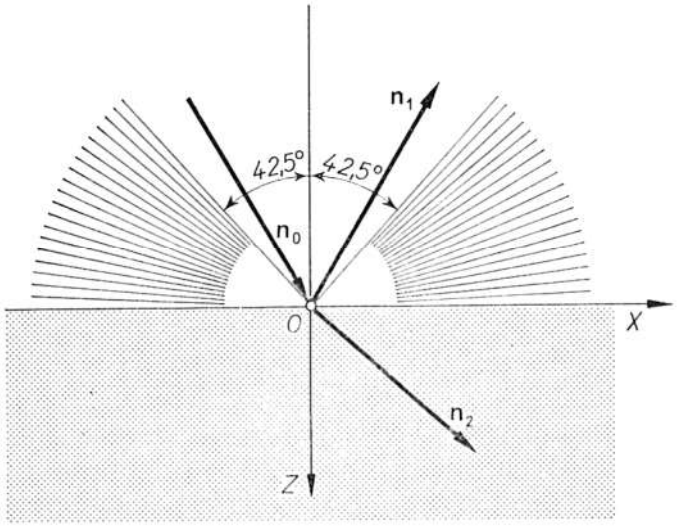
Jedan od specifičnih slučajeva je granica *izolator — izolator*. Valne konstante su na toj granici imaginarne, tj. $\gamma_1 = j\,\beta_1$, $\gamma_2 = j\,\beta_2$. Valne impedancije su realne, tj. one su valni otpori. Jednadžbe (4.102) ostaju u važnosti i sada, ako su permeabilnosti jednake u oba sredstva, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Snelliusov zakon sada glasi

$$\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_0} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{1/2} \tag{4.104}$$

Ako je $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, kut prolaznog vala mora biti $\vartheta_2 < \vartheta_0$. Međutim, kad je $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, moguće je da je $\sin\vartheta_2 > 1$. Granični slučaj $\vartheta_2 = \pi/2$ odgovara kutu kad nastupa **totalna refleksija** vala. Iznos polja reflektiranog vala jest $E_1 = E_0$ za obje polarizacije. To znači da se sva energija reflektira natrag u poluprostor 1. *Granični kut* upadnog vala, kad nastupa totalna refleksija, dobiva se iz izraza

$$\sin\vartheta_0 = \sin\vartheta_g = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \tag{4.105}$$

Dva su karakteristična slučaja u ponašanju vala na granici izolator — izolator. To su *totalna polarizacija* i *totalna refleksija*. Karakteristični kutovi upadnog vala izlaze iz (4.103) i (4.105). Isti omjer $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{1/2}$ je mjerodavan u oba slučaja. Tangens upadnog kuta, jednak spomenutom omjeru, mjerodavan je u totalnoj polarizaciji, sinus istog kuta je pak mjerodavan u totalnoj refleksiji. Neki val treba da prijeđe iz polietilena dielektričnosti 2,2 u uzduh dielektričnosti 1,0. Brewsterov kut totalne polarizacije iznosi 34,1°, a granični kut za totalnu refleksiju je 42,5°. Ako je upadni kut veći od



Sl. 4.22. Granični kut za totalnu refleksiju. Upad vala unutar šrafirane površine dovodi do totalne refleksije. Granični kut 42,5° odgovara polietilenu.

42,5°, nema prolaza vala u uzduh, a stalno postoji totalna refleksija. Taj je primjer prikazan na sl. 4.22. Upad vala u šrafiranoj zoni ne dopušta prijelaz energije iz polietilena u uzduh. Totalna refleksija je značajna pojava u rasprostiranju valova u prostoru. Tako nije s totalnom polarizacijom, koja je vezana na točan kut, karakterističan za svaka dva materijala. Odstupanje od Brewsterova kuta vodi samo ka većoj ili manjoj promjeni u polarizaciji. Totalna refleksija je moguća samo kad val nailazi iz dielektrički »gušćeg« sredstva u dielektrički »rjeđe« sredstvo, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Kad je $\vartheta_0 > \vartheta_g$, postaje sinus kuta prolaznog vala veći od jedinice, $\sin \vartheta_2 > 1$. To je moguće samo tako, ako je $\vartheta_2 = \pi/2 + j\,\delta$, tj. $\sin \vartheta_2 = \operatorname{ch} \delta$ i $\cos \vartheta_2 = -j \operatorname{sh} \delta$. Budući da je

$$\mathbf{r}\,\mathbf{n}_2 = x \sin \vartheta_2 + z \cos \vartheta_2$$

iznosi faza prolaznog vala

$$\omega t - \beta_2\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_2 = \omega t - \beta_1 \sin \vartheta_0\, x + j\,(\beta_1^2 \sin^2 \vartheta_0 - \beta_2^2)^{1/2}\, z$$

Prolazni val iznosi u originalu

$$E_p = E_2\, e^{-\alpha_p z} \cos\,(\omega t - \beta_p x)$$

$$\alpha_p = \frac{2\pi}{\lambda_2}\left[\left(\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_g}\right)^2 - 1\right]^{1/2}. \qquad \beta_p = \frac{2\pi}{\lambda_2}\,\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_g} \tag{4.106}$$

Iako je došlo do totalne refleksije, postoji polje u drugom sredstvu. Ono se tamo ponaša nekako »čudno«. Polje se prigušuje u smjeru osi Z, dakle u smjeru normale na graničnu ravninu. Međutim, val se giba duž osi X, tj. paralelno graničnoj ravnini. Faznoj konstanti β_p odgovara duljina vala λ_p koja je uvijek manja od λ_2, stvarne duljine vala u sredstvu 2. Neka je prvo sredstvo polietilen dielektričnosti 2,2, kao u već spomenutom primjeru. Njegov je granični kut 42,5°. Duljine vala $\lambda_p = 2\pi/\beta_p$ i dubine prodiranja vala $d_p = 1/\alpha_p$ navedene su u tablici 4.5. za različite kutove upadnog vala ϑ_0.

TABLICA 4.5.

ϑ_0	45°	60°	75°	90°
λ_p/λ_2	0,955	0,78	0,70	0,675
d_p/λ_2	0,503	0,198	0,155	0,145

Prigušenje vala ne nastaje zbog gubitaka u sredstvu 2. Ono nema karakter ponašanja ravnog vala u sredstvu s gubicima. Prigušenje vala može se fizikalno tumačiti samo u smjeru gibanja vala. Takva pojava se susreće kod elektromagnetskih valova. Gibanje vala se odvija u jednom smjeru, a prigušenje je u drugom smjeru. Da ne bi bilo pomutnje u definicijama, uvode se novi pojmovi u rasprostiranju valova. *Ravnina konstantne faze* je ravnina u kojoj promatrana veličina ima svuda konstantnu fazu. Gibanje vala se odvija u smjeru normale na tu ravninu. Fazna brzina gleda u istom smjeru. *Ravnina konstantne amplitude* je ravnina u kojoj su amplitude promatrane veličine svuda konstantne. Prigušenje se odvija u smjeru normale na ovu ravninu. Ravnina konstantne faze prolaznog vala je okomita na graničnu ravninu i ravninu vala pri totalnoj refleksiji vala. Ravnina konstantne amplitude je paralelna s graničnom ravninom, tj. ona je okomita na ravninu konstantne faze. Ovo prigušenje ima, u osnovi, statički karakter. Energija polja u sredstvu 2 ne mijenja se vremenski u smjeru osi Z, te zato nema niti prijenosa energije u tom smjeru. To se vidi iz Poyntingova vektora, koji za prolazni val glasi

$$\mathbf{\Gamma}_p = \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p = \mathbf{E}_p \times (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_p)\frac{1}{Z_2} = \frac{\mathbf{E}_p^2}{Z_2}\mathbf{n}_2$$

Prema tome, Poyntingov vektor je usmjeren s normalom n_2 smjera prolaznog vala. Njegova normalna i tangencijalna komponenta iznosi

$$\Gamma_{pn} = \frac{E_p^2}{Z_2}\cos\vartheta_2 = -j\frac{E_p^2}{Z_2}\operatorname{sh}\delta$$

$$\Gamma_{pt} = \frac{E^2}{Z_2}\sin\vartheta_2 = \frac{E_p^2}{Z_2}\operatorname{ch}\delta = \frac{E_p^2}{Z_2}\frac{\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta_g}$$

Normalna komponenta je imaginarna, te ne postoji transport energije u tome smislu. Strujanje energije postoji samo tangencijalno, tj. paralelno s graničnom ravninom.

Električno polje prolaznog vala slijedi iz jednadžbi (4.102) za pojedini tip polarizacije. Ono iznosi

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{2\cos\vartheta_0}{\cos\vartheta_g} E_0 e^{j\varphi}, && \mathbf{E}_0 \perp \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{1}{\cos\vartheta_0}(\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta_g)^{1/2} \\ E_2 &= \frac{2\operatorname{ctg}\vartheta_0}{\cos\vartheta_g} E_0 e^{j\varphi}, && \mathbf{E}_0 \parallel \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{(\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta_g)^{1/2}}{\cos\vartheta_0 \sin\vartheta_g} \end{aligned} \tag{4.107}$$

Kut φ je fazni pomak jakosti električnog polja prolaznog vala prema upadnom valu. Jakost magnetskog polja je u fazi s električnim poljem. Prosječni iznos Poyntingova vektora na graničnoj ravnini u sredstvu 2, tj. za $z = 0$, iznosi

$$\begin{aligned} \Gamma_{20} &= \frac{4\cos^2\vartheta_0 \sin\vartheta_0}{\cos^2\vartheta_g} \Gamma_0, && \mathbf{E}_0 \perp \\ \Gamma_{20} &= \frac{4\operatorname{ctg}^2\vartheta_0 \sin\vartheta_0}{\cos^2\vartheta_g} \Gamma_0, && \mathbf{E}_0 \parallel \end{aligned} \tag{4.108}$$

Γ_0 je Poyntingov vektor upadnog vala. U primjeru polietilena iznosi Poyntingov vektor prolaznog vala pri graničnoj ravnini $\Gamma_{20}/\Gamma_0 = 1{,}59$ za polarizaciju $\mathbf{E}_0 \perp$, odnosno on je $\Gamma_{20}/\Gamma_0 = 2{,}12$ za drugu polarizaciju $\mathbf{E}_0 \parallel$.

4.6.5. Bilansa energije

Bilansa energije na graničnoj ravnini rješava koliki dio energije prelazi iz jednog sredstva u drugo. Kao osnova služi energetska jednadžba stanja

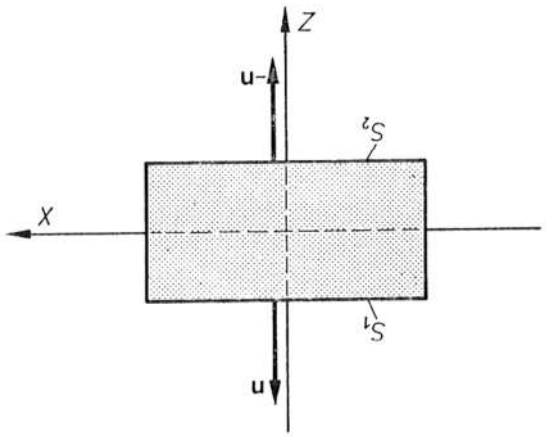
$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{V_0} \varkappa \mathbf{E}^2 \, \mathrm{d}V + \oint_{S_0} \boldsymbol{\Gamma}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{4.109}$$

a primjenjuje se na mali cilindar volumena V_0, ukupne površine S_0. Ako je stanje stacionirano, prosječna promjena akumulirane energije je nula, $\partial W/\partial t = 0$. Cilindar se smjesti na granicu između dva sredstva, prema sl. 4.23., a dovoljno je malen da su veličine polja u njemu konstantne. Kako na graničnoj ravnini nema naboja niti

struja, gubici u malom cilindru se svode na nulu kad visina cilindra ode na nulu. Tada preostaje samo iznos koji se odnosi na strujanje energije, tj. mora biti zadovoljen odnos

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{n} - \boldsymbol{\Gamma}_2 \mathbf{n} = 0 \tag{4.110}$$

Normalne komponente Poyntingova vektora moraju biti međusobno jednake u oba sredstva. One daju direktno iznos energije koja prelazi iz jednog sredstva u drugo.



Sl. 4.23. Elementarni cilindar na granici između dva sredstva. Cilindar služi u utvrđivanju sile na granici djelovanjem ravnog vala.

Poyntingov vektor u sredstvu 1 i 2 dobiva se u kompleksnom području tako. da se uzme realni dio iz kompleksnog izraza

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_u + \mathbf{E}_r) \times (\mathbf{H}_u^* + \mathbf{H}_r^*) \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^* \end{aligned} \tag{4.111}$$

Zvjezdice označavaju konjugirano kompleksnu vrijednost. Vektori se promatraju na samoj granici, odnosno u ishodištu koordinatnog sustava, tj. za $r = 0$. Poytingov vektor upadnog vala iznosi

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} E_0 H_0^* = \frac{1}{2} Z_1 H_0 H_0^* \tag{4.112}$$

Valja upotrijebiti faktore refleksije $R = E_1/E_0$ i $R^* = E_1^*/E_0^*$.

Sada se vektori izražavaju jednostavnije za oba tipa polarizacije

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{\Gamma}_1}{\Gamma_0} &= (\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_1 R^*)(1 + R), \quad \mathbf{E}_0 \perp \\ \frac{\mathbf{\Gamma}_1}{\Gamma_0} &= (\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_1 R)(1 + R^*), \quad \mathbf{E}_0 \parallel \end{aligned} \tag{4.113}$$

Faktori refleksije imaju bitnu ulogu u raspodjeli strujanja energije. Trebalo bi potražiti normalnu i tangencijalnu komponentu. Ako su poluprostori ispunjeni izolatorima zanemarivih gubitaka, faktori refleksije su realni, a zadovoljen je i uvjet $R = R^*$. Sada normalna i tangencijalna komponenta Poyntingova vektora glase za granicu *izolator-izolator* i *oba oblika polarizacije*

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_0} &= \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{n}\,\mathbf{\Gamma}_1}{\Gamma_0}\right] = -(1 - R^2)\cos\vartheta_0 \\ \frac{\Gamma_t}{\Gamma_0} &= \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{\Gamma}_1}{\Gamma_0}\right] = (1 + R)^2 \sin\vartheta_0 \end{aligned} \tag{4.114}$$

Normalna komponenta gleda uvijek u drugo sredstvo, tj. suprotno normali $\mathbf{n}$ na graničnu ravninu, jer je uvijek $R^2 < 1$. Ona je, osim toga, jednaka razlici normalnih komponenti upadnog i reflektiranog vala kod granice izolator — izolator. Takvo prosto zbrajanje Poyntingovih vektora nije dozvoljeno za tangencijalne komponente. Energetsko stanje u polju je zadano ukupnim veličinama polja, te se ne smije primijeniti princip superpozicije.

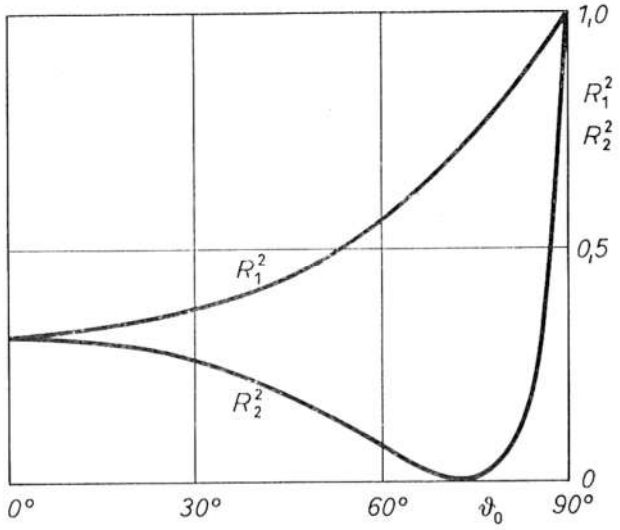
Faktori refleksije se razlikuju prema obliku polarizacije upadnog vala. Oni iznose prema (4.102) za jednake permeabilnosti izolatora

$$\begin{aligned} R = R_1 &= -\frac{\sin(\vartheta_0 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_0 + \vartheta_2)}, \quad \mathbf{E}_0 \perp \\ R = R_2 &= \frac{\mathrm{tg}(\vartheta_0 - \vartheta_2)}{\mathrm{tg}(\vartheta_0 + \vartheta_2)}, \qquad \mathbf{E}_0 \parallel \end{aligned}$$

Faktori refleksije R_1 i R_2 imaju bitnu ulogu u rasporedu snaga na pojedine valove. Valovi prve i druge polarizacije ne ponašaju se jednako. Budući da je $R_2^2 \leqslant R_1^2$, veća snaga se reflektira u valova prve polarizacije. Bilo kakav upadni val ima reflektirani val bliži prvoj polarizaciji. Kad kut upadnog vala dosegne Brewsterov kut, tj. $\vartheta_0 = \pi/2 - \vartheta_2$, reflektirani val je linearno polariziran prema prvoj polarizaciji, $\mathbf{E}_r \perp$. Kružno polarizirani val postaje eliptički polariziran refleksijom na graničnoj ravnini. Da se vide približni odnosi pri refleksiji, prikazan je na sl. 4.24. dijagram energetskih faktora refleksije R_1^2 i R_2^2 u ovisnosti o kutu upada ϑ_0 za odnos dielektričnosti izolatora $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 1/12{,}5$, kakav se susreće na granici uzduh — tlo. Brewsterov kut iznosi 74,2° kad je $R_2^2 = 0$, ti. nema refleksije vala $\mathbf{E}_0 \parallel$.

Oba se oblika polarizacije izjednačavaju pri normalnom upadu vala na graničnu ravninu. Tada je

$$R_1^2 = R_2^2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 \tag{5.115}$$



Sl. 4.24. Dijagram kvadrata faktora refleksije R_1^2 i R_2^2 u ovisnosti o upadnom kutu vala. R_1 odgovara valu $\mathbf{E}_0 \perp$, a R_2 pripada valu $\mathbf{E}_0 \parallel$. Izabran je odnos dielektričnosti 1 : 12,5 u smjeru upada vala.

Energetski faktor refleksije je uvijek pozitivan i manji od jedinice. On je neovisan o redoslijedu materijala. Svejedno je da li val nailazi iz *rjeđeg* sredstva u *gušće* ili obrnuto.

4.6.6. Sile na granici

Kao što je izvršena bilansa energije na granici dvaju sredstava, treba pogledati također kakav je odnos sila na istoj granici. Neka nadalje ostaje granica izolator — izolator. Bilansa prostornih sila daje jednadžbu ravnoteže sila prema prethodnom poglavlju

$$\mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{T} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} \tag{4.116}$$

Kao što je rečeno, $\mathbf{f}$ su gustoće sila na naboje i struje u prostoru. Veličina $\mathbf{T}$ je elektromagnetski tenzor naprezanja, a $\mathbf{\Gamma}$ je već spomenuti Poyntingov vektor. Opet treba iskoristi sl. 4.23. na kojoj je prikazan mali cilindar upravo na granici između dva sredstva. Njegov je volumen dovoljno malen da se veličine polja smiju smatrati konstantnima. Ne postoje naboji niti struje u cilindru, te je sila $\mathbf{f} = 0$.

Prema tome se stanje sila dobiva iz jednadžbe

$$\oint_{S_0} \mathbf{T}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \frac{1}{c^2}\int_{V_0} \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial t}\,\mathrm{d}V = 0$$

Srednja vrijednost vremenske promjene Poyntingova vektora jednaka je nuli, jer se polje mijenja harmonički. Odatle ostaje da su jedine sile na cilindar od tenzora naprezanja

$$\oint_{S_0} \mathbf{T}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

a površina integracije S_0 je površina cilindra, koja se svodi na dvije baze, S_1 i S_2, jer je visina zanemarivo malena. Ovdje je zanemarena *mehanička sila* koja drži ravnotežu s elektromagnetskom silom, a djeluje na granici između dva sredstva. Ona je potrebna da drži graničnu ravninu na predviđenom položaju. Zato je konačno potrebna sila na granici

$$\mathbf{F} = \oint_{S_0} \mathbf{T}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{4.117}$$

koja djeluje na površini S_0 jednakoj bazi cilindra na sl. 4.23.

Ovaj rezultat pokazuje da je sila na granici između dva sredstva jednaka statičkoj sili. Budući da je tenzor naprezanja $\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_m$ jednak zbroju električnog i magnetskog tenzora, ukupna sila jednaka je zbroju električne i magnetske sile. Treba naglasiti da su oba sredstva izolatori zanemarivih gubitaka. Ako su permeabilnosti međusobno jednake, ne postoji magnetska sila na granici, već samo djeluje električna sila. Ona je takva, da sredstvo veće dielektričnosti nastoji prijeći u prostor ispunjen sredstvom manje dielektričnosti.

PRIMJER 4.2. Na granici između dva sredstva nalazi se **ploča** zadane debljine a. Ploča dijeli dva poluprostora kao na sl. 4.25. Svi su materijali izolatori zanemarivih gubitaka i jednakih permabilnosti. Val nailazi iz poluprostora 1 ispunjenog sredstvom dielektričnosti ε_1. On nailazi na ploču koja je od sredstva dielektričnosti ε_2. Val nakon toga prelazi u poluprostor 3 ispunjen sredstvom dielektričnosti ε_3. Ploča je razlog da se susreću dvije granice. Val se ponaša na svakoj od granica kao što je već prikazano.

Val upada na granici S_{12} pod kutom ϑ_0, te se na njoj reflektira pod istim kutom i prolazi u ploču pod kutom ϑ_2, koji je zadan Snelliusovim zakonom

$$\sin \vartheta_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin \vartheta_0$$

Isti kut ϑ_2 je upadni kut vala na drugoj granici S_{23}, na kojoj se val ponovo reflektira pod istim kutom i prelazi u sredstvo 3, pod kutom ϑ_3 zadanim s odnosom

$$\sin \vartheta_3 = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \sin \vartheta_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \sin \vartheta_0 \tag{4.118}$$

Ravnine svih valova leže u ravnini X-Z. Val u ploči doživljava uzajamnu refleksiju od jedne i druge granične ravnine, S_{12} i S_{23}. Pri tome se stalno jedan dio njegove energije gubi prelazeći u sredstvo 1, odnosno sredstvo 3. Karakteristični su ovi smjerovi valova

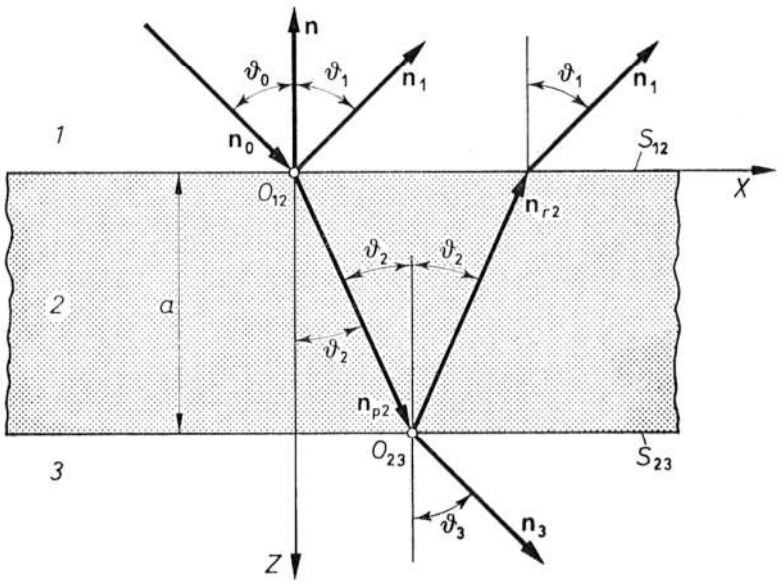
$\mathbf{n}_0$ smjer upadnog vala u sredstvu 1

$\mathbf{n}_1$ smjer reflektiranog vala u sredstvu 1
smjer prolaznog vala iz ploče u sredstvo 1

$\mathbf{n}_{p2}$ smjer prolaznog vala iz sredstva 1 u ploču
smjer reflektiranog vala u ploču na S_{12}

$\mathbf{n}_{r2}$ smjer reflektiranog vala u ploču na S_{23}
smjer upadnog vala u ploči na S_{12}

$\mathbf{n}_3$ smjer prolaznog vala u sredstvo 3



Sl. 4.25. Presjek ravne ploče koja dijeli dva poluprostora. Odmah su označeni smjerovi ravnog vala.

Slijedeći valovi postoje

$$\mathbf{E}_u = \mathbf{E}_0 \exp [j\omega t - \gamma_1 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_0], \qquad \mathbf{H}_u = \frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_u}{Z_1}$$ upadni val iz sredstva 1

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_1 \exp [j\omega t - \gamma_1 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_1], \qquad \mathbf{H}_r = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_r}{Z_1}$$ reflektirani val u sredstvo 1

$$\mathbf{E}_{sp} = \mathbf{E}_{2p} \exp [j\omega t - \gamma_2 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_{2p}], \qquad \mathbf{H}_{sp} = \frac{\mathbf{n}_{2p} \times \mathbf{E}_{sp}}{Z_2}$$ prolazni val u ploču

$$\mathbf{E}_{sr} = \mathbf{E}_{2r} \exp [j\omega t - \gamma_2 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_{2r}], \qquad \mathbf{H}_{sr} = \frac{\mathbf{n}_{2r} \times \mathbf{E}_{sr}}{Z_2}$$ reflektirani val u ploči

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{sp} + \mathbf{E}_{sr}, \qquad \mathbf{H}_s = \mathbf{H}_{sp} + \mathbf{H}_{sr}$$ veličina polja u ploči

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_3 \exp [j\omega t - \gamma_3 \mathbf{r}\,\mathbf{n}_3], \qquad \mathbf{H}_p = \frac{\mathbf{n}_3 \times \mathbf{E}_p}{Z_3}$$ prolazni val u sredstvo 3

Jednakost svih eksponenata vodi opet ka Snelliusovim zakonima. Jednakost tangencijalnih komponenti jakosti polja vodi ka Fresnelovim zakonima i daje rješenje nepoznatih veličina.

Da se vidi postupak proračuna, promatra se kao primjer samo prvi oblik polarizacije upadnog vala u sredstvu 1, tj. $\mathbf{E}_0 \perp$. Tada uvjeti na granici S_{12} vode na jednadžbe

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_{2p} + E_{2r} \\ \frac{E_0}{Z_2} \cos \vartheta_0 - \frac{E_1}{Z_1} \cos \vartheta_1 &= \frac{E_{2p} - E_{2r}}{Z_2} \cos \vartheta_2 \end{aligned} \tag{4.119}$$

Granica S_{23} pada u ravninu $z = a$. Val prevali put a_2 od granične ravnine S_{12} do granične ravnine S_{23}, tako da je

$$\mathbf{r}\,\mathbf{n}_{2p} = a_2 = -\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_{2r} = \frac{a}{\cos \vartheta_2}$$

Prolazni val u sredstvu 3 počinje na ravnini $z = a$. On se počinje računati tek nakon udaljenosti a_3 od ravnine S_{12}, tako da je

$$\mathbf{r}\,\mathbf{n}_3 = a_3 = \frac{a}{\cos \vartheta_3}$$

Sad su granični uvjeti na granici S_{23}

$$\begin{aligned} E_{2p}\, e^{-\gamma_2 a_2} + E_{2r}\, e^{\gamma_2 a_2} &= E_3\, e^{-\gamma_3 a_3} \\ \frac{E_{2p}}{Z_2} \cos \vartheta_0\, e^{-\gamma_2 a_2} - \frac{E_{2r}}{Z_2} \cos \vartheta_1\, e^{\gamma_2 a_2} &= \frac{E_3}{Z_3} \cos \vartheta_3\, e^{-\gamma_3 a_3} \end{aligned} \tag{4.120}$$

Jednadžbe (4.119) i (4.120) daju rješenja nepoznatih jakosti električnog polja. One iznose

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_0} &= \frac{(1 - A\,B)\,\mathrm{ch}\,(\gamma_2 a_2) - (A - B)\,\mathrm{sh}\,(\gamma_2 a_2)}{(1 + A\,B)\,\mathrm{ch}\,(\gamma_2 a_2) + (A - B)\,\mathrm{sh}\,(\gamma_2 a_2)}, \qquad \mathbf{E}_0 \perp \\ \frac{E_3}{E_0} &= \frac{2\,[\mathrm{ch}\,(\gamma_3 a_3) + \mathrm{sh}\,(\gamma_3 a_3)]}{(1 + A\,B)\,\mathrm{ch}\,(\gamma_2 a_2) + (A + B)\,\mathrm{sh}\,(\gamma_2 a_2)} \\ \frac{E_{2p}}{E_0} &= \frac{(1 + B)\,[\mathrm{ch}\,(\gamma_2 a_2) + \mathrm{sh}\,(\gamma_2 a_2)]}{(1 + A\,B)\,\mathrm{ch}\,(\gamma_2 a_2) + (A + B)\,\mathrm{sh}\,(\gamma_2 a_2)} \\ \frac{E_{2r}}{E_0} &= \frac{(1 - B)\,[\mathrm{ch}\,(\gamma_2 a_2) - \mathrm{sh}\,(\gamma_2 a_2)]}{(1 + A\,B)\,\mathrm{ch}\,(\gamma_2 a_2) + (A + B)\,\mathrm{sh}\,(\gamma_2 a_2)} \\ A &= \frac{Z_1 \cos \vartheta_2}{Z_2 \cos \vartheta_0}, \qquad B = \frac{Z_2 \cos \vartheta_3}{Z_3 \cos \vartheta_0} \end{aligned} \tag{4.121}$$

Ovdje su dva slučaja posebno interesantna, a u oba prostor ispunjavaju izolatori zanemarivih gubitaka. U prvom slučaju se radi o tri različita izolatora različitih dielektričnosti, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ i jednakih permeabilnosti. Tada su valne konstante imaginarne, $\gamma_2 = j\,\beta_2$ i $\gamma_3 = j\,\beta_3$, a duljine a_2 i a_3 su realne. Refleksije vala nema u sredstvu 1, tj. $E_1 = 0$, ako je

$$A = B, \qquad \beta_2 a_2 = (2n - 1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Taj se uvjet mijenja prema kutu prolaznog vala, jer je duljina $a_2 = a/\cos \vartheta_2$. Pri ortogonalnom upadu vala nema refleksije sa ploče kad je odnos njezine debljine prema njezinoj duljini vala

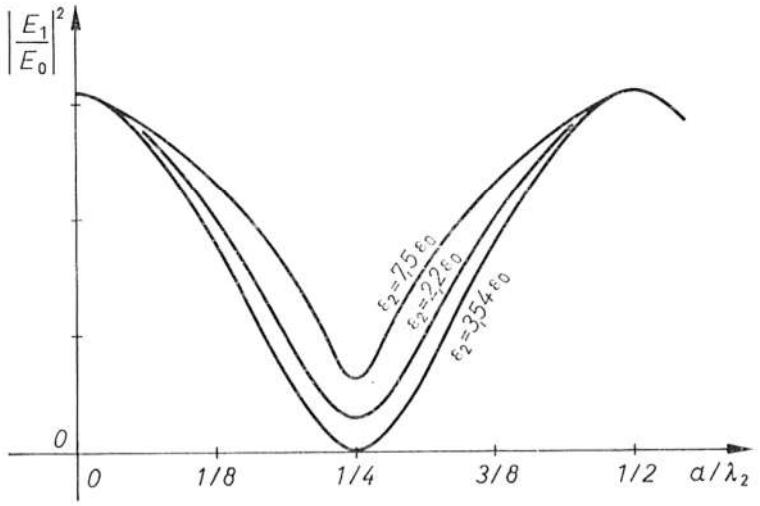
$$\frac{a}{\lambda_2} = \frac{2n - 1}{4}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

a njezina je dielektričnost srednja geometrijska vrijednost dviju ostalih

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_3$$

Refleksija postoji čim upad vala nije ortogonalan, a ploča se ne mijenja. Ovaj slučaj nije moguć ako su poluprostori ispunjeni materijalom iste dielektričnosti, a razlikuje se samo ploča.

Odabrani su materijali dielektričnosti $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ i $\varepsilon_3 = 12{,}5\ \varepsilon_0$ u poluprostorima 1 i 3. Ploča je uzeta od tri materijala dielektričnosti $\varepsilon_2 = 2{,}2\ \varepsilon_0$ $3{,}54\ \varepsilon_0$ i $7{,}5\ \varepsilon_0$. Nacrtani su dijagrami ovisnosti $|E_1/E_0|^2$ o odnosu debljine ploče prema duljini vala u njoj a/λ_2 i prikazani na sl. 4.26. Sve krivulje



Sl. 4.26. Dijagram ovisnosti električnog polja reflektiranog vala na ploči o debljini ploče za dielektričnost ploče 2,2, 3,54 i 7,5. Jakost električnog polja reflektiranog vala prikazuje se relativno prema upadnom valu u kvadratu, $|E_1/E_0|^2$. Debljina ploče je u odnosu na duljinu vala u njoj, a/λ_2. Dielektričnosti su 1 i 12,5 poluprostora upadnog i prolaznog vala.

pokazuju izrazit minimum refleksije za debljinu ploče jednaku četvrtini duljine vala u njoj. Izraziti maksimum refleksije se pojavljuje na ploči debljine jednake polovici duljine vala. Ta se pojava iskorištava mnogostruko u optici.

Drugi interesantni slučaj nastaje kad su poluprostori ispunjeni jednakim izolatorom, a ploča e izolator manje dielektričnosti. Tada postoje uvjeti za totalnu refleksiju na granici poluprostora 1 ija pločom. Dielektričnosti, dakle, iznose $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Granični kut za totalnu refleksiju slijedi sz odnosa

$$\sin \vartheta_g = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{1/2}$$

Osim toga je kut prolaznog vala $\vartheta_3 = \vartheta_0$, dok je u ploči

$$\sin \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_g}, \qquad \cos \vartheta_2 = j \left[\left(\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_g}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

Predznak (+) od $\cos \vartheta_2$ je potreban zbog iznosa prolaznog vala E_3. Valne konstante su imaginarne, jer su izolatori zanemarivih gubitaka. Ovdje je

$$\gamma_2 a_2 = r\, j\, \beta_2 \frac{a}{\cos \vartheta_2} = \frac{\sin \vartheta_g}{(\sin^2 \vartheta_0 - \sin^2 \vartheta_g)^{1/2}} 2\pi \frac{a}{\lambda_2} = \Theta$$

potpuno realna veličina, dok je drugi argument

$$\gamma_3 a_3 = j \frac{\beta_1 a}{\cos \vartheta_0}$$

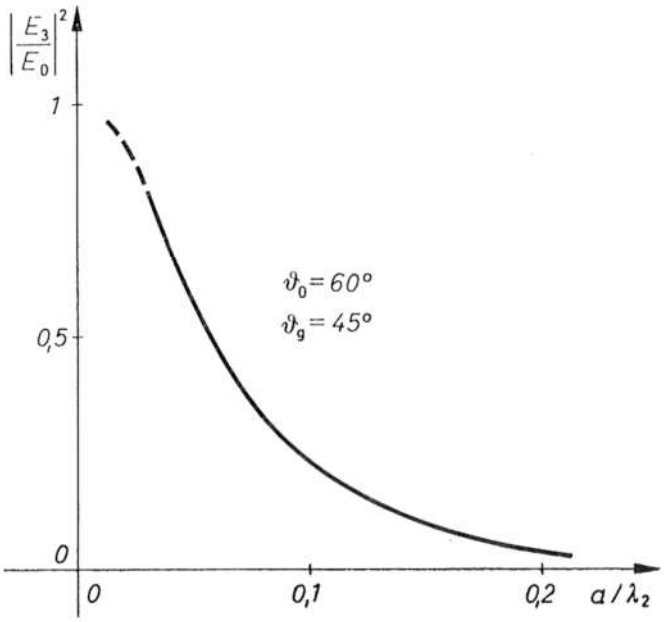
uvijek imaginaran. To je razlog da postoji potpuno normalan prolazni val u poluprostoru 3. On izlazi pod kutom ϑ_0 iz ploče, pod istim kutom pod kojim je upao na ploču iz poluprostora 1. Amplituda vala E_3 je vrlo prigušena, a prigušena je to više, što je ploča deblja. Pomoćne konstante u proračunu pojedinih valova u (4.121) iznose za ovaj primjer pri jednakim permeabilnostima

$$A = j \frac{(\sin^2 \vartheta_0 - \sin^2 \vartheta_g)^{1/2}}{\cos \vartheta_0} = j x_0, \qquad B = \frac{1}{\sin \vartheta_g}$$

Sad se amplituda prolaznog vala dobiva prema jednadžbi u (4.121) iz izraza

$$\left| \frac{E_0}{E_3} \right|^2 = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \Theta + B \operatorname{sh} \Theta)^2 + \left(\frac{x_0}{2} \right)^2 (B \operatorname{ch} \Theta + \operatorname{sh} \Theta)^2 \tag{4.122}$$

Amplituda prolaznog vala se umanjuje eksponencijalno s debljinom ploče. Promjena amplitude je prikazana dijagramom na sl. 4.27. u ovisnosti o debljini ploče. Odabran je materijal ploče tako da je granični kut za totalnu refleksiju $\vartheta_g = 45°$. Kut upadnog vala iznosi $\vartheta_0 = 60°$. Amplituda



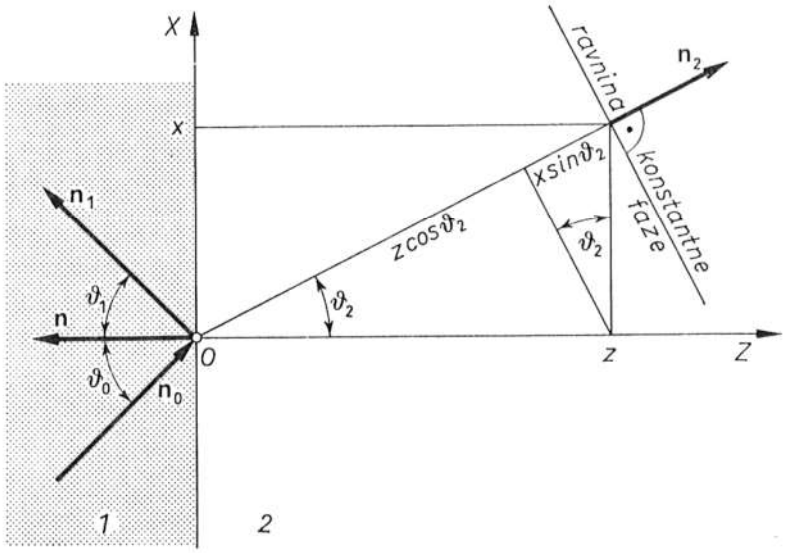
Sl. 4.27. Dijagram ovisnosti električnog polja prolaznog vala kroz ravnu ploču o debljini ploče. Jakost električnog polja je u kvadratu odnosa prema upadnom valu, $|E_3/E_0|^2$, a debljina ploče je u odnosu prema duljini vala u njoj, a/λ_2. Ploča dijeli poluprostore dielektričnosti 1, a ona ima takvu dielektričnost, da je granični kut 45° za totalnu refleksiju. Val upada na nju pod kutem 60°.

prolaznog vala opada vrlo brzo kako se povećava debljina ploče. Debljina ploče 10 % od duljine vala u ploči omogućuje da prođe val koji ima oko 50 % amplitude upadnog vala. Ovaj primjer će poslužiti da se prikaže osnovno djelovanje ploče na rasprostiranje ravnog vala. Točan proračun bi tražio da se vodi računa o momentalnoj vrijednosti pojedinih veličina polja. Granični uvjeti se odnose na momentalne vrijednosti polja, a ne na amplitude. To nije potrebno naglašavati ako su raspoložive duljine mnogo veće od duljine vala ili su promatrane veličine polja međusobno u fazi. Ovo posljednje je baš primjer kad veličine nisu u fazi, a debljina ploče je dapače mnogo manja od duljine vala. Zato ovaj primjer treba gledati samo kao ilustraciju pojave za vrijeme prolaza vala kroz neku pukotinu — ploču, kad bi inače postojala totalna refleksija vala.

Pojava totalne refleksije traži još proučavanja. Ovdje je djelomično prikazano stacionarno stanje rasprostiranja harmoničkog vala. Ova pravila ne vrijede za gibanje čela vala ili gibanje pulseva. To se odnosi i na prolaz vala kroz tanke slojeve. Osim toga je granična ravnina bila beskonačno rasprostranjena u odnosu na duljinu vala. Ponašanje vala na plohi konačnih dimenzija posebna je zadaća i ne ulazi u kategoriju ponašanja vala na ravnini.

4.7. GRANICA IZOLATOR — VODIČ

Ponašanje vala na granici između dva sredstva još je uvijek predmet intenzivnog istraživanja u teoriji elektromagnetskog polja. S druge strane, materijalni objekti u polju su osnova elektrotehnike, te je nužno potrebno poznavanje njihova ponašanja u polju. Ovdje su prikazani najelementarniji slučajevi u vezi s ponašanjem ravnog vala na granici koja je ravnina beskonačnih dimenzija. Tako se dobiva samo fizikalni uvid u to što se događa s elektromagnetskim valom kad naiđe na zapreku.



Sl. 4.28. Smjerovi vala na granici izolator — vodič. Granična ravnina je ravnina X-Y.

Posebno je interesantno ponašanje vala kad izolator zanemarivih gubitaka ispunjava jedan poluprostor, a drugi poluprostor je ispunjen vodičem. Oba materijala se ponašaju ekstremno u polju. Dobar izolator ne dozvoljava provodne struje. S druge strane, vodič ne dozvoljava nikakve pomačne struje. Silnice vektora **D** svršavaju na površini vodiča i ne nastavljaju se u njegovoj unutarnjosti. To slijedi neposredno iz definicije vodiča. Silnice električnog polja svršavaju samo na nabojima. Znači, *naboj se mora nalaziti na površini vodiča* čim se on nađe u elektromagnetskom polju, bez obzira kakvog je karaktera polje. Vodič reagira na polje pojavom naboja na svojoj površini. Postoji još jedna reakcija vodiča na polje: induciraju se struje u njegovoj unutarnjosti. Gustoća struje ima ispod površine samo tangencijalnu komponentu, pa se prema tome i jakost električnog polja jednako odnosi.

Nadalje preostaju veličine potencijala kao glavno sredstvo pri rješavanju kompletnog polja, uz sudjelovanje vodiča. Prema tome su i jedini granični uvjeti potencijali i njihove prostorne derivacije.

Jednostavan slučaj prikazan je u ovom poglavlju. Ravnina dijeli dva poluprostora, kao na sl. 4.28. Ona je smještena u ravninu X - Y koordinatnog sustava, a njezina normala pada u os Z. Poluprostor 1 je ispunjen izolatorom zanemarivih gubitaka. Poluprostor 2 je ispunjen vodičem, a sam vodič je na nultom potencijalu. Ravni val nailazi iz poluprostora 1 u smjeru normale $\mathbf{n}_0$. On se reflektira na granici u smjer $\mathbf{n}_1$, a jedan dio prodire u vodič u smjeru $\mathbf{n}_2$. Sad je moguće rješavanje ovog zadatka.

Izolator ima konstante

$$\gamma_1 = j\,\beta_1 \qquad \text{valna konstanta}$$

$$Z_1 = \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\right)^{1/2} \qquad \text{valni otpor}$$

$$\beta_1 = \omega\,(\mu_1\,\varepsilon_1)^{1/2} \qquad \text{fazna konstanta}$$

Karakteristike *vodiča* su

$$\gamma_2 = (1 + j)\,\alpha_2 \qquad \text{valna konstanta}$$

$$Z_2 = |\,Z_2\,|\,e^{j\pi/4} \qquad \text{valna impedancija}$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = \left(\frac{1}{2}\,\omega\,\mu_2\,\varkappa_2\right)^{1/2} \qquad \text{prigušna konstanta}$$

$$|\,Z_2\,| = \left(\frac{\omega\,\mu_2}{\varkappa_2}\right)^{1/2} \qquad \text{valna impedancija, iznos}$$

Te su konstante dovoljne da se riješi stanje valova na granici primjenom poznatih jednadžbi iz prethodnog poglavlja. Kut ϑ_1 reflektiranog vala jednak je kutu ϑ_0 upadnog vala neovisno o materijalu na granici. Kut prolaznog vala ϑ_2 je postao kompleksan i dobiva se iz izraza

$$\sin\vartheta_2 = \frac{j\,\beta_1}{(1+j)\,\alpha_2}\sin\vartheta_0 = (1+j)\,\frac{\beta_1}{2\,\alpha_2}\sin\vartheta_0 \tag{4.123}$$

Ovdje se pojavljuje konstanta koja je

$$\frac{\beta_1}{2\,\alpha_2} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\,\frac{\omega\,\varepsilon_1}{2\,\varkappa_2}\right)^{1/2} \ll 1 \tag{4.124}$$

Ona je mnogo manja od jedinice po definiciji vodiča. Ona je u redu veličine oko 1 %, ako su permeabilnosti jednake, a ostale su konstante $\omega = 10^{13}$ rad/s $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ F/m, $\varkappa_2 = 10^7$ S/m, što su sasvim ekstremne vrijednosti.

Jednadžba prolaznog vala iznosi

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_2 \exp [j\,\omega\,t - \gamma_2\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_2], \qquad \mathbf{H}_p = \frac{\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_p}{Z_2}$$

bez obzira na polarizaciju upadnog vala. Njegova faza iznosi dovoljno točno

$$j\,\omega\,t - \gamma_2\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_2 = j\,(\omega\,t - \alpha_2\,z - x\,\beta_1 \sin\vartheta_0) - \alpha_2\,z \tag{4.125}$$

Ona pokazuje da se prolazni val rasprostire u jednom smjeru, a njegova se amplituda prigušuje u smjeru osi Z. Jednadžba ravnine konstantne faze glasi

$$\alpha_2\,z + x\,\beta_1 \sin\vartheta_0 = \text{konst.}$$

a to je ujedno jednadžba pravca u ravnini X - Z. On je nagnut prema osi X pod kutom ψ, čiji je tangens

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\beta_1}{\alpha_2}\sin\vartheta_0 \ll 1 \tag{4.126}$$

Praktički, taj kut je približno nula, a ravnina konstantne faze je okomita na os Z, uz dovoljnu točnost. Kao što pokazuje analiza konstante $\beta_1/(2\,\alpha_2)$ da je ona dovoljno malena u cijelom području frekvencija do 10^{12} Hz i za sve metale, može se tvrditi da se *prolazni val rasprostire u vodiču okomito na graničnu ravninu*, a u istom smjeru se i prigušuje. Nemetalni vodiči mogu imati konstantu $\beta_1/(2\,\alpha_2)$ takvu, da se ne može zanemariti prema jedinici, ali se zanemaruje njezin kvadrat. U tome slučaju ostaje ista jednadžba ravnine konstantne faze i isti njezin nagib prema ravnini X - Y kut ψ, koji je sad ipak zamjetljiva iznosa. On je još uvijek dovoljno malen, da se smije pretpostaviti da se val u vodiču rasprostire u smjeru normale na graničnu ravninu. Naime, prigušenje vala u vodiču je toliko, da se ne mogu zamijetiti razlike koje bi nastale stavljanjem zajedno ravnina konstantne faze i konstantne amplitude. Sada bi jednadžba prolaznog vala bila u svakom slučaju

$$\begin{aligned} E_p &= E_2\,e^{j\omega t - \gamma_2 z} \\ H_p &= \frac{E_2}{Z_2}\,e^{j\omega t - \gamma_2 z} \end{aligned} \tag{4.127}$$

Vektori polja su međusobno okomiti i okomiti na os Z. *U vodiču postoje samo tangencijalne komponente polja.* Iste komponente polja prolaze nepromijenjene kroz graničnu ravninu. Prema tome, one postoje u istom iznosu i u izolatoru.

Iznosi amplituda vektora polja slijede iz Fresnelovih jednadžbi (4.98) i (4.101), ako se uzme u obzir da je $\vartheta_2 \approx 0$.

Oni su

$$E_1 = \frac{Z_2 \cos\vartheta_0 - Z_1}{Z_2 \cos\vartheta_0 + Z_1} E_0, \qquad \mathbf{E}_0 \perp$$

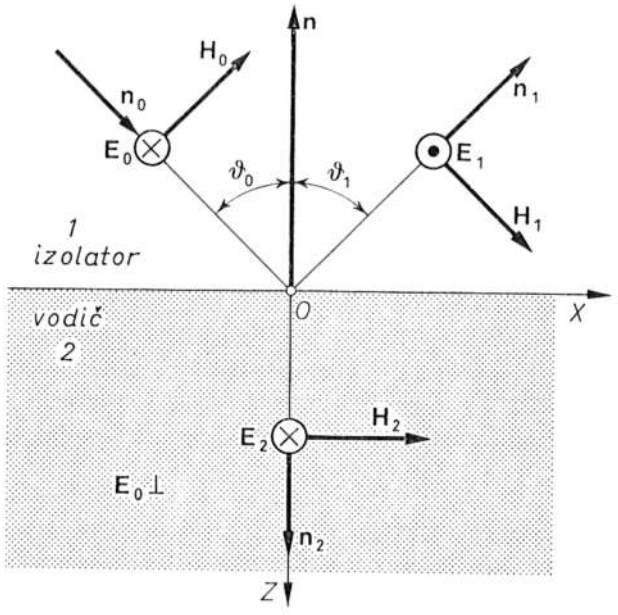
$$E_2 = \frac{2 Z_2 \cos\vartheta_0}{Z_2 \cos\vartheta_0 + Z_1} E_0, \qquad \mathbf{E}_0 \perp$$

$$H_1 = \frac{Z_1 \cos\vartheta_0 - Z_2}{Z_1 \cos\vartheta_0 + Z_2} H_0, \qquad \mathbf{E}_0 \parallel \tag{4.128}$$

$$H_2 = \frac{2 Z_1 \cos\vartheta_0}{Z_1 \cos\vartheta_0 + Z_2} H_0, \qquad \mathbf{E}_0 \parallel$$

Ovdje se pojavljuje omjer Z_1/Z_2 koji upravlja odnosom reflektiranog i prolaznog vala prema upadnom valu. Omjer valnih impedancija iznosi

$$\frac{Z_1}{Z_2} = (1 + j)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\varkappa_2}{2\,\omega\,\varepsilon_1}\right)^{1/2} = (1 + j)\,z_{12} \tag{4.129}$$



Sl. 4.29. Vektori polja vala, polariziranog $\mathbf{E}_0 \perp$, na granici izolator — vodič.

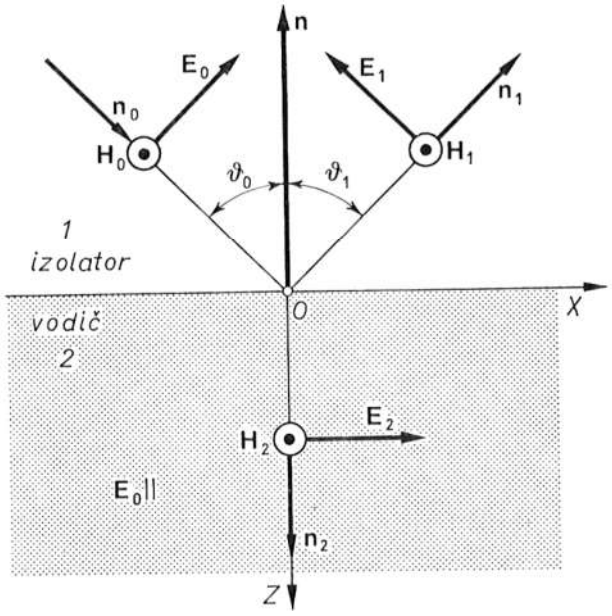
a njegov je iznos mnogo puta veći od jedinice. Valna impedancija izolatora je mnogo puta veća od valne impedancije vodiča. To je razlog da se znatno pojednostavnjuju iznosi vektora polja.

Ako je upadni val polariziran $\mathbf{E}_0 \perp$, vektori polja su kao na sl. 4.29., a iznose

$$E_1 = -E_0, \qquad E_2 = \frac{2 Z_2 \cos \vartheta_0}{Z_1} E_0, \qquad \mathbf{E}_0 \perp$$

$$H_1 = \frac{E_1}{Z_1} = H_0, \qquad H_2 = \frac{E_2}{Z_2}, \qquad \mathbf{E}_0 \perp \qquad (4.130)$$

Vektori jakosti električnog polja upadnog i reflektiranog vala su međusobno jednaki, a suprotno usmjereni. Stvarno, oni se razlikuju za mali iznos jakosti električnog polja u vodiču, jer mora biti zadovoljen uvjet da je $E_0 + E_1 = E_2$. Vektori magnetskog polja su tako postavljeni, da se njihove normalne komponente poništavaju, tj. $H_{n1} = -H_{n0}$. Tangencijalne komponente magnetskog polja upadnog i reflektiranog vala su međusobno jednake i jednako usmjerene, tako da je $2 H_{t0} = H_2$.



Sl. 4.30. Vektori polja vala, polariziranog $\mathbf{E}_0 \parallel$, na granici izolator — vodič.

Stanje valova pri drugom obliku polarizacije upadnog vala, $\mathbf{E}_0 \parallel$, prikazano je na sl. 4.30. Vektori **H** su paralelni s graničnom ravninom, te tako ne postoji njihova normalna komponenta. Tangencijalna komponenta magnetskog polja iznosi naprosto $H_t = H_2$ prema izrazu u (4.128). Vektori električnog polja su tako postavljeni da se poništavaju tangencijalne komponente upadnog i reflektiranog vala, $E_{t0} = E_{t1}$. Stvarno je njihova razlika jednaka jakosti polja u vodiču, $E_{t0} - E_{t1} = E_2$. Normalne komponente električnog polja se zbrajaju, jer su jednako usmjerene, $E_n = E_{n0} + E_{n1} = 2 E_{n0}$, a one ne postoje u vodiču. To se može samo tako rastumačiti, da postoji naboj na površini vodiča plošne gustoće $\sigma = \varepsilon_1 E_n$. Tu je razlika u djelovanju vala prvog i drugog oblika polarizacije.

Jakost električnog polja u vodiču iznosi iz (4.128)

$$E_2 = Z_2 H_2 = \frac{2 Z_2 \cos \vartheta_0}{Z_1 \cos \vartheta_0 + Z_2} E_0, \qquad \mathbf{E}_0 \parallel$$

Prema prikazanom može se ustanoviti općenito pravilo za ponašanje vala na granici izolator — vodič. Djelovanjem poluprostora ispunjenog vodičem jedino je moguće da postoji

u *izolatoru*: normalna komponenta električnog polja i tangencijalna komponenta magnetskog polja;

u *vodiču*: oba polja imaju samo tangencijalnu komponentu.

Treba reći da električno polje ima u izolatoru još i dodatnu tangencijalnu komponentu kao i u vodiču zbog otpora vodiča. Da je vodič beskonačne vodljivosti, ne bi postojala tangencijalna komponenta.

4.7.1. Bilansa energije

Bilansa energije pokazuje kako se rasprostire energija koju donosi upadni val na granicu s vodljivim poluprostorom. Akumulirana elektromagnetska energija se ne mijenja u stacionarnom strujanju, a strujanjem energije se pokrivaju gubici u vodljivu poluprostoru. Treba promatrati Poyntingov vektor, čiji smjer pokazuje kuda struji energija upadnog vala. Opet je potrebno razlučiti oblike polarizacije upadnog vala.

Poyntingov vektor u izolatoru za prvi oblik polarizacije treba pisati na slijedeći način u kompleksnoj ravnini

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{2 Z_1} (\mathbf{E}_u + \mathbf{E}_r) \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_u^* + \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_r^*), \qquad \mathbf{E}_u \perp$$

Treba uzeti u obzir da je $\mathbf{n}_0 \mathbf{E}_u = \mathbf{n}_1 \mathbf{E}_r = 0$. Faktori refleksije su po definiciji

$$R = \frac{E_r}{E_u} \quad \text{i} \quad R^* = \frac{E_r^*}{E_u^*}$$

a Poyntingov vektor upadnog vala iznosi

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} \frac{E_u E_u^*}{Z_1} = \frac{|E_0|^2}{2 Z_1} \tag{4.132}$$

S tim veličinama iznosi Poyntingov vektor u izolatoru, u odnosu na njegov iznos za upadni val

$$\frac{\mathbf{\Gamma}}{\Gamma_0} = (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1 R^*)(1 + R), \qquad \mathbf{E}_0 \perp \tag{4.133}$$

Supstitucija faktora refleksije R i njegove konjugirano kompleksne vrijednosti R^* pokazuje da su normalna i tangencijalna komponenta Poyntingova vektora, vodeći računa da je $z_{12} \gg 1$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{n}\,\mathbf{\Gamma}}{\Gamma_0}\right] = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_0} = -\frac{2\cos^2\vartheta_0}{z_{12}}, \qquad \mathbf{E}_0 \perp \tag{4.134}$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{\Gamma}}{\Gamma_0}\right] = \frac{\Gamma_t}{\Gamma_0} = \frac{2\cos^2\vartheta_0 \sin\vartheta_0}{z_{12}^2} = -\frac{\sin\vartheta_0}{z_{12}}\frac{\Gamma_n}{\Gamma_0}$$

Obje komponente postoje. Normalna komponenta gleda u vodljivi poluprostor i pokriva gubitke u njemu. Ona se određuje i direktno iz veličina polja u vodiču. Tangencijalna komponenta je znatno manja od normalne, a gleda u smjeru napredovanja vala po površini.

Poyntingov vektor u izolatoru za drugi oblik polarizacije upadnog vala prikazuje se veličinama magnetskog polja, jer je $\mathbf{n}\,\mathbf{H}_u = \mathbf{n}\,\mathbf{H}_r = 0$, a glasi

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{2} Z_1 (\mathbf{H}_u \times \mathbf{n}_0 + \mathbf{H}_r \times \mathbf{n}_1) \times (\mathbf{H}_u^* + \mathbf{H}_r^*), \qquad \mathbf{E}_u \parallel$$

Dalje on glasi nakon supstitucije faktora refleksije u odnosu na Γ_0

$$\frac{\mathbf{\Gamma}}{\Gamma_0} = (\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_1 R)(1 + R^*), \qquad \mathbf{E}_0 \parallel \tag{4.135}$$

Taj je izraz donekle drukčiji nego u prvom obliku polarizacije. Sada normalna i tangencijalna komponenta iznose

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{n}\,\mathbf{\Gamma}}{\Gamma_0}\right] &= \frac{\Gamma_n}{\Gamma_0} = -\frac{4 z_{12}\cos^2\vartheta_0}{2 z_{12}^2\cos^2\vartheta_0 + 2 z_{12}\cos\vartheta_0 + 1}, \qquad \mathbf{E}_0 \parallel \\ \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{\Gamma}}{\Gamma_0}\right] &= \frac{\Gamma_t}{\Gamma_0} = -2 z_{12}\sin\vartheta_0 \cdot \frac{\Gamma_n}{\Gamma_0} \end{aligned} \tag{4.136}$$

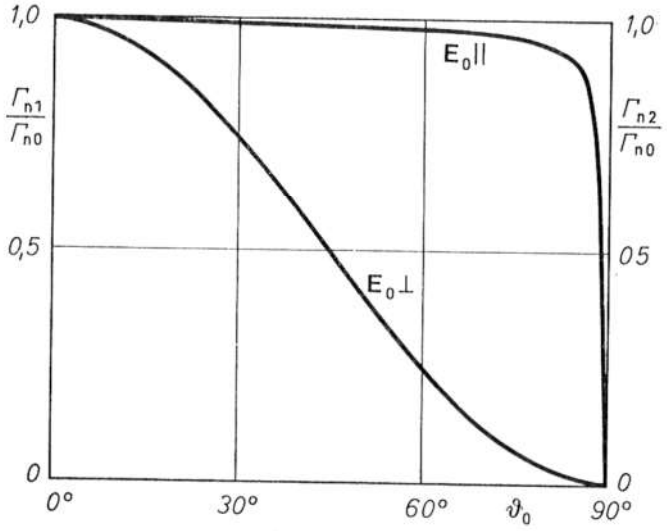
Opet postoje obje komponente. Također normalna komponenta gleda u vodič i pokriva njegove gubitke. Tangencijalna komponenta je znatno veća nego u prvom obliku polarizacije i opet gleda u smjeru napredovanja vala po površini vodiča.

Normalne komponente Poyntingova vektora obaju oblika polarizacije su međusobno jednake pri ortogonalnom upadu vala, $\vartheta_0 = 0$. One su tada naprosto za $z_{12} \gg 1$

$$\frac{\Gamma_n}{\Gamma_0} = \frac{\Gamma_{n0}}{\Gamma_0} = -\frac{2}{z_{12}} = -2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{2\omega\varepsilon_1}{\varkappa_2}\right)^{1/2}, \quad \vartheta_0 = 0° \tag{4.137}$$

Neka se radi o upadu vala iz uzduha, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, u bakar, $\varkappa_2 = 58$ MS/m, pri frekvenciji $f = 1$ MHz. Omjer valnih impedancija iznosi $z_{12} = 0{,}72 \cdot 10^6$, a od energije upadnog vala $2{,}76 \cdot 10^{-6}$-ti dio prelazi u bakar pri ortogonalnom upadu vala.

Čim val ne upada ortogonalno na graničnu ravninu, razlikuju se normalne komponente Poyntingova vektora prema obliku polarizacije upadnog vala. Normalna komponenta druge polarizacije, $\mathbf{E}_0 \parallel$, veća je od normalne komponente prve polarizacije, $\mathbf{E}_0 \perp$. Više energije prelazi u vodič ako je vektor električnog polja upadnog vala u ravnini upada. Kružno polarizirani upadni val postaje refleksijom na vodiču eliptički polarizirani val. Normalna komponenta Poyntingova vektora prvog i drugog oblika polarizacije prikazana je dijagramom na sl. 4.31. u odnosu na istu kom-



Sl. 4.31. Dijagram normalne komponente Poyntingova vektora u ovisnosti o kutu upada vala na granici izolator — vodič. Poyntingov vektor je u odnosu na isti iznos pri normalnom upadu vala. Dijagram sadrži krivulje za oba tipa polarizacije upadnog vala, $E_0 \perp$ i $E_0 \parallel$. Omjer valnih impedancija izolator — vodič je 100 : 1.

ponentu pri ortogonalnom upadu vala za omjer valnih impedancija $z_{12} = 100$. Omjer $\Gamma_{n1}/\Gamma_{n0} = \cos^2 \vartheta_0$ mijenja se jednostavno u ovisnosti o kutu upadnog vala. Omjer Γ_{n2}/Γ_{n0}, koji pripada drugom obliku polarizacije, praktički je konstantan i gotovo neovisan o kutu upada ϑ_0. On se naglo smanjuje na nulu za kutove $\vartheta_0 > 85°$. On doseže iznos 0,5 za ku: 89,2°. Što je veći omjer valnih impedancija z_{12}, to je veća konstantnost omjera Γ_{n2}/Γ_{n0}. Omjer $z_{12} = 100$ u primjeru prikazanom na sl. 4.31. je na donjoj granici kod granica u kategoriji izolator — vodič. To bi značilo da je prijenos energije na vodič praktički neovisan o upadnom kutu pri drugom obliku polarizacije.

4.7.2. Vrtložne struje

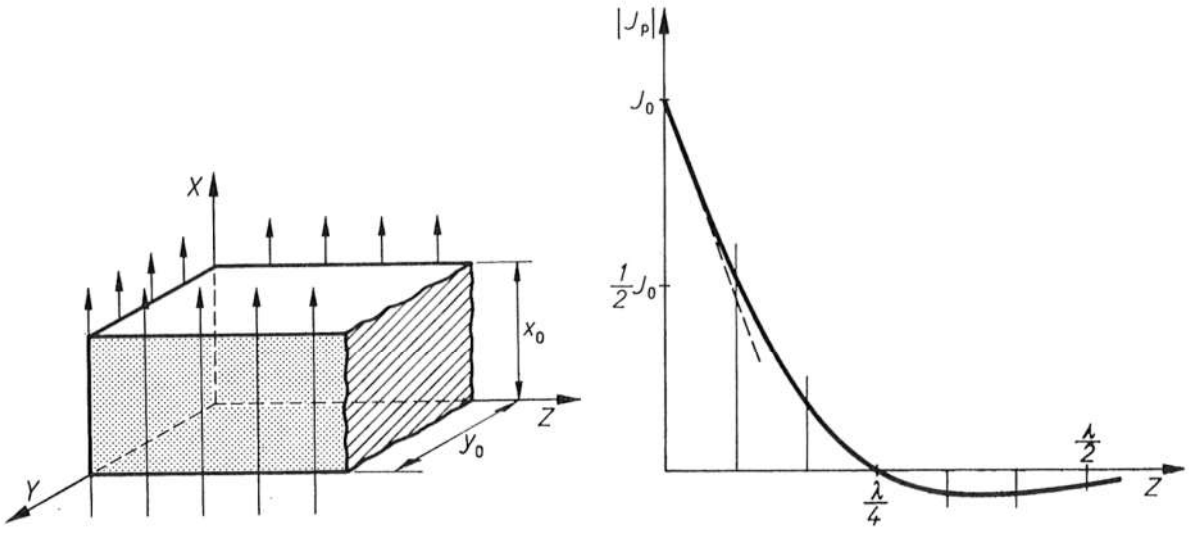
Prolazni val u vodiču inducira struje u njemu, koje se još zovu **vrtložne struje.** Gustoća struje ima smjer električnog polja, a najveći je iznos na površini vodiča, da bi naglo opadala kako se ulazi u dubinu vodiča. Dubina prodiranja vala je mjerodavna dotle, dokle uopće dosiže polje u vodiču, tj. dokle još teku inducirane struje. Polje padne na iznos manji od 1 % iznosa na površini vodiča, do peterostruke dubine prodiranja vala. Omjer dubine prodiranja vala u vodiču i valne duljine u izolatoru bitan je pri ocjenivanju prikazivanja ponašanja vala na granici izolator — vodič. Konstanta

$$\frac{\beta_1}{2\,\alpha_2} = \pi \frac{d_2}{\lambda_1}$$

je služila u određivanju rasprostiranja valova na spomenutoj granici, a sadrži omjer d_2/λ_1. I konstanta omjera valnih impedancija

$$z_{12} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\lambda_1}{\pi d_2}$$

sadrži isti omjer d_2/λ_1. Omjer d_2/λ_1 mora biti uvijek mnogo manji od jedinice. Tako je za $z_{12} = 100$ i $\mu_1 = \mu_2$ omjer $d_2/\lambda_1 = 0{,}001\,6$. Obično je z_{12} veći od toga iznosa, pa je omjer d_2/λ_1 još manji nego u ovom primjeru.



Sl. 4.32. Strujnice vrtložnih struja u vodiču debljine y_0 i duljine x_0. Strujnice su paralelne s osi X.

Strujnice inducirane struje teku paralelno s površinom vodiča, koja je postavljena u ravnini X-Y na sl. 4.32. Na istoj slici su strujnice paralelne s osi X, te su prema tome okomite na ravninu Y-Z. Gustoća strujnica je sve manja kako se napreduje u dubinu vodiča, tj. u pozitivnom smjeru osi Z. Da bi se lakše promatrali gubici u vodljivu poluprostoru, isječen je iz njega vodič duljine x_0 u smjeru strujanja indu-

ciranih struja. Debljina vodiča je y_0, a njegova je širina beskonačna u smjeru osi Z. Prema tome vodič je stvarno ploča. Dimenzije x_0 i y_0 vodljive ploče su tako odabrane, da su mnogo manje od duljine vala λ_1 u sredstvu — izolatoru 1. Gustoća J_p u ploči je najveća na površini vodljiva poluprostora za $z = 0$ i iznosi J_2. Ona opada eksponencijalno kako se napreduje u dubinu poluprostora, što je prikazano na sl. 4.32. Smije se govoriti o jakosti struje I_2 u izabranoj ploči, koja je jednaka plošnom integralu gustoće struje po bazi ploče konstantne debljine y_0, a širina joj je beskonačna u smjeru osi Z. Jakost struje u strujnoj ploči iznosi

$$I_2 = y_0 \int_0^\infty J_p \, dz = y_0 J_2 \int_0^\infty e^{j\omega t - \gamma_2 z} \, dz = \frac{y_0 J_2}{\gamma_2} e^{j\omega t}$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_0 d_2 J_2 e^{j(\omega t - \pi/4)}$$

Ukupna jakost struje inducirane u ploči ima iznos kao da je površinska gustoća struje J_2 konstantna po njezinu presjeku, čija je širina jednaka $d_2/\sqrt{2}$. S druge strane, dobivena jakost struje naprosto izlazi iz jakosti magnetskog polja na površini vodiča, tj.

$$I_2 = y_0 H_2 e^{j\omega t}$$

To dokazuje da se vrtložne struje smiju prikazati *linijskom gustoćom struje* na površini vodiča

$$\frac{I_2}{y_0} = K_2 = H_2 e^{j\omega t} \tag{4.138}$$

koja nužno mora biti jednaka tangencijalnoj komponenti jakosti magnetskog polja.

Gubici vrtložnih struja u ploči se dobiju iskorištenjem Poyntingova vektora. Energija struji iz poluprostora izolatora u vodljivi poluprostor kroz graničnu ravninu X-Y. Ona pokriva isključivo gubitke u vodljivu poluprostoru. Iznos Poyntingova vektora na površini poluprostora, za $z = 0$, predstavlja gubitke u cijelom stupu čija je baza 1 m^2, a beskonačno je visok. Zato su gubici vrtložnih struja u izabranoj ploči jednaki produktu Poyntingova vektora

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} |E_2| \, |H_2|$$

na površini poluprostora i bočne površine ploče $x_0 y_0$. Prema tome su gubici u ploči

$$P_g = x_0 y_0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} |E_2| \, |H_2| = \frac{x_0}{\varkappa d_2 y_0} \frac{1}{2} |I_2|^2$$

Gubici u ploči su toliki, koliko bi proizvela ista struja, koja bi tekla u sloju vodiča debljine d_2, jednake dubini prodiranja vala.

4.7.3. Sile na vodič

Sile na granici između izolatora i vodiča su nešto zamršenijeg karaktera nego na granici između izolatora i izolatora, što je prikazano u prethodnom poglavlju. Treba odabrati prostor kao na sl. 4.32. u obliku prizme kojoj je baza na graničnoj ravnini. Prizma je okrenuta u vodič. Sila na prizmu se sastoji od sile na inducirane struje u njoj, a ona se može prikazati silom tenzora naprezanja na njezinoj površini i silom zbog promjene elektromagnetskog impulsa. Elektromagnetski impuls uopće ne postoji u vodiču, jer tamo ne može postojati vektor **D** električnog polja. Osim toga, prosječna promjena elektromagnetskog impulsa je nula u stacionarnom polju harmonički promjenljivom. Prema tome preostaje jednadžba elektromagnetskih sila izražena sa

$$\int_{V_0} \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, \mathrm{d}V = \oint_{S_0} \mathbf{T}\,\mathbf{n}\, \mathrm{d}S \tag{4.139}$$

Volumen integriranja V_0 je volumen promatrane prizme na sl. 4.32., a S_0 je ukupna njezina površina. Bazu prizme treba staviti u vodič, te se ukupnu silu tada određuje upotrijebivši samo lijevu stranu jednadžbe sila (4.139). Gustoća struje **J** i indukcija **B** su međusobno okomiti vektori, a zadani su veličinama polja prolaznog vala $\mathbf{E}_p$ i H_p, koji se postavljaju tako, da prvi ima X-komponentu, a drugi Y-komponentu. Oni se mijenjaju samo u ovisnosti o Z-koordinati. Prema vektorskom produktu vektora **J** i **B**, sila je usmjerena u pozitivnom smislu osi Z. Prema tome je prosječni iznos sile na prizmu baze $x_0\, y_0$

$$F_{z0} = x_0\, y_0\, \frac{\varepsilon_2\, \mu_2}{2} \int_0^\infty \mathrm{Re}\, [E_p\, H_p^*]\, \mathrm{d}z$$

Poyntingov vektor na graničnoj ravnini iznosi

$$\Gamma_{n0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} |\, Z_2\, |\, |\, H_2\, |^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\omega\, \mu_2}{\varkappa_2}\right)^{1/2} |\, H_2\, |^2 \tag{4.140}$$

Nakon provedene integracije dobiva se vremenski prosječna sila na bazu prizme

$$F_{z0} = x_0\, y_0\, \frac{\Gamma_{n0}}{\omega\, d_2} \tag{4.141}$$

Elektromagnetski val *gura vodič pred sobom*, u smjeru suprotnom normali, tj. u smjeru osi Z. To odgovara Lenzovu zakonu da se vodič bori induciranim strujama protiv polja koje ih je proizvelo, a pri tome se uspostavljaju odbojne sile. Sila na jedinicu površine baze $\Gamma_{n0}/(\omega\, d_2)$ razmjerna je Poyntingovu vektoru na bazi i dubini prodiranja vala d_2.

Ovdje nisu uzeti u obzir plošni naboji koji nastaju djelovanjem normalne komponente električnog polja. Sila na plošni naboj djeluje suprotno magnetskoj

sili na inducirane struje u vodiču. Ona nastaje samo kad postoji normalna komponenta električnog polja, a to je za drugog oblika polarizacije. Ona ne postoji za ortogonalnog upada vala. Ako se uvede pojam *tlaka upadnog vala*

$$p_0 = \frac{\Gamma_0}{c_1} \tag{4.142}$$

onda su električni i magnetski tlak na graničnu ravninu, odnosno na vodič za $\mathbf{E}_0 \parallel$

$$\begin{aligned} p_e &= 4\, p_0 \sin^2 \vartheta_0 \\ p_m &= -\frac{\mu_2}{\mu_1} p_0 \frac{4\, z_{12}^2 \cos^2 \vartheta_0}{2\, z_{12}^2 \cos^2 \vartheta_0 + 2\, z_{12} \cos \vartheta_0 + 1} \end{aligned} \tag{4.143}$$

Magnetski tlak je suprotna predznaka od električnog tlaka, a uz to je praktički konstantan za sve kutove ϑ_0 upada vala, jer je $z_{12} \gg 1$. Za ortogonalnog upada vala i jednake permeabilnosti magnetski tlak je naprosto jednak

$$p_{m0} = -2\, p_0$$

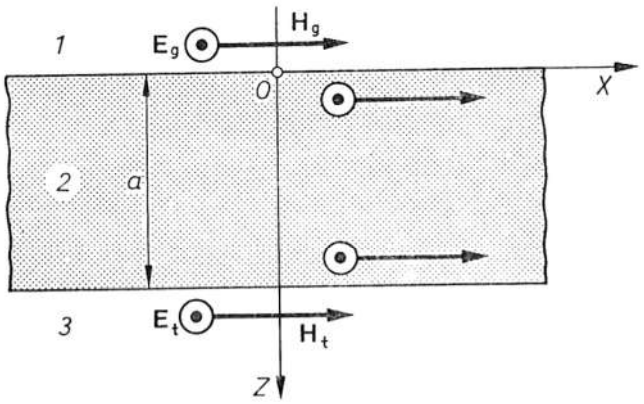
Predznak (—) upozorava da je usmjeren suprotno normali $\mathbf{n}$ na graničnu ravninu. Za upada vala pod kutom 45° izjednačavaju se približno oba tlaka.

Općenito je magnetski tlak malen. Da bi on iznosio u uzduhu 1 bar, morao bi Poyntingov vektor upadnog vala iznositi $\Gamma_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}5 \cdot 10^5 = 15 \cdot 10^{12}$ W/m². To je intenzitet strujanja energije od 1500 MW/cm². Iako to izgleda vrlo velik iznos, može se zamisliti da se tehnički postigne. Efektivni iznosi jakosti polja bili bi potrebni 750 kV/cm, odnosno 2 kA/cm. Intenzitet strujanja energije je obično mnogo manji u tehničkoj praksi. Jakost električnog polja u uzduhu ne prelazi 20 kV/cm efektivne vrijednosti, a tome odgovara Poyntingov vektor okruglo 10 kW/cm². Takav val bi proizveo magnetski tlak od 0,007 milibara, što je već vrlo malen iznos.

Dosada je prikazano ponašanje vala koji nailazi iz izolatora na vodič. Obrnut slučaj bi se teško rješavao. Prema prikazanome, u vodiču postoji samo val koji ima tangencijalne komponente polja u odnosu na graničnu ravninu. Osim toga je moguće da se skupi naboj na vodiču. Kombinacijom struja u vodiču i naboja na njegovoj površini nastaje izvor polja u njegovu okolišu, koji je izolator. Takva se zadaća postavlja i ona se rješava u oblasti električnih vodova ili pak raspršenja valova na vodičima. U svakom slučaju zadane gustoće struje na površini vodiča određuju ujedno tangencijalnu komponentu električnog polja. Zadani plošni naboj na vodiču definira normalnu komponentu električnog polja. Magnetsko polje ovisi već o obliku vodiča i ukupnoj struji koja teče vodičem. Ako je vodič stvarno poluprostor ograničen ravninom, kao u ovome poglavlju, postoji samo tangencijalna komponenta magnetskog polja koja je jednaka linijskoj gustoći struje u vodljivu poluprostoru. Pri tome je dubina prodiranja vala u vodič odlučujuća. Pokazalo se da se ukupna inducirana struja dobiva, kao da je gustoća struje pri površini raspoređena jednoliko do dubine, koja je $(1/\sqrt{2})$-ti dio dubine prodiranja vala. Gubici induciranih struja iznose toliko, kao da sva struja teče u sloju koji je debeo koliko i dubina prodiranja vala. Ova pravila vrijede bez obzira na oblik vodiča. Čim je dubina prodiranja vala mnogo puta manja od dimenzija promatranog vodiča, smiju se primijeniti spomenuta pravila.

4.8. VAL U PLOČI

Dva posljednja poglavlja su poslužila da se prikaže ponašanje ravnog vala na ravnini, koja je granica između dva poluprostora ispunjena različitim materijalima. Ovo je poglavlje posvećeno istom problemu, samo su poluprostori razmaknuti na



Sl. 4.33. Presjek ravne ploče koja dijeli dva poluprostora ispunjena istim materijalom. Označeni vektori polja na upadnoj strani, »generatorskoj« i prolaznoj strani, »teretnoj«.

neku udaljenost paralelnim ravninama. Na taj način nastaje između njih ploča paralelnih stijenki, debljine a, kao na sl. 4.33. Poluprostori su ispunjeni jednakim materijalima, a ploča je od drukčijeg materijala.

4.8.1. Ortogonalni upad vala

Najjednostavniji je ortogonalni upad vala, kad su svi kutovi jednaki nuli. Vektori polja su smješteni tangencijalno u odnosu na granične ravnine. Val se uzajamno reflektira od strane ploče, pa je stanje polja u ploči nastalo superpozicijom pozitivnog i negativnog vala, kao što je opće rješenje ravnog vala. Uvjeti na stranama ploče pomažu da se nađu nepoznate veličine. Stanje valova u ploči je prikazano jakostima polja

$$E_2 = E_{2p}\, e^{-\gamma_2 z} + E_{2r}\, e^{\gamma_2 z}, \qquad 0 \leqslant z \leqslant a$$

$$H_2 = \frac{E_{2p}}{Z_2}\, e^{-\gamma_2 z} - \frac{E_{2r}}{Z_2}\, e^{\gamma_2 z}$$

Val nailazi iz sredstva 1, te se ta strana zove *generatorska*, a sve veličine na toj strani nose indeks g. Strana prema sredstvu 3 naziva se *teret*, a veličine imaju indeks t.

Prema tome su veličine polja na pojedinim stranama ploče

$$\begin{aligned} z = 0, \quad & E_2 = E_g = E_0 + E_1, \quad & H_2 = H_g = H_0 + H_1 \\ z = a, \quad & E_2 = E_t = E_3, & H_2 = H_t = H_3 \end{aligned} \tag{4.144}$$

Stanje u ploči se sad jednostavnije prikazuje s pomoću zadanih veličina na stranama ploče, te je uz zadane veličine tereta

$$\begin{aligned} E_g &= E_t \operatorname{ch}(\gamma_2 a) + Z_2 H_t \operatorname{sh}(\gamma_2 a) \\ H_g &= H_t \operatorname{ch}(\gamma_2 a) + \frac{E_t}{Z_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 a) \end{aligned} \tag{4.145}$$

Obrnuto je za zadane generatorske veličine

$$\begin{aligned} E_t &= E_g \operatorname{ch}(\gamma_2 a) - Z_2 H_g \operatorname{sh}(\gamma_2 a) \\ H_t &= H_g \operatorname{ch}(\gamma_2 a) - \frac{E_g}{Z_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 a) \end{aligned} \tag{4.146}$$

Ove jednadžbe služe da se odredi cjelokupno stanje valova prema zadanim veličinama. Treba uzeti u obzir da su iz graničnih uvjeta (4.144) generatorske veličine

$$\begin{aligned} E_g + Z_1 H_g &= 2 E_0 \\ E_g - Z_1 H_g &= 2 E_1 \end{aligned} \tag{4.147}$$

a sredstvo u prostoru 3 definira direktno veličine tereta.

Stanje valova na upadnoj i prolaznoj strani ploče je slično izraženo stanju napona i struja na početku i kraju električnog voda. Ovdje se pojavljuju jakosti električnog i magnetskog polja, a tamo su napon i struja voda. Zato se smiju primijeniti isti postupci analize kao u električnih vodova. *Ulazna* impedancija se definira na upadnoj strani ploče iz jednadžbi (4.145) kao

$$Z_g = \frac{\operatorname{ch}(\gamma_2 a) + \dfrac{Z_2}{Z_t} \operatorname{sh}(\gamma_2 a)}{\operatorname{ch}(\gamma_2 a) + \dfrac{Z_t}{Z_2} \operatorname{sh}(\gamma_2 a)} Z_t \tag{4.148}$$

ako je *izlazna* impedancija zadana materijalom u prostoru 3 kao $Z_t = Z_3 = E_t/H_t$. Općenito su impedancije Z_2 i $Z_t = Z_3$ proizvoljne, a jednake su valnim impedancijama materijala ploče i prostora 3. Valna konstanta γ_2 ploče je također proizvoljna. Ploča djeluje kao transformator impedancije sredstva u prostoru 3. Karakteristika ulazne impedancije Z_g je mjerodavna kako se ponaša upadni val za upada na ploču iz prostora 1. Ako bi ulazna impedancija bila jednaka valnoj impedanciji Z_1 sredstva u prostoru 1, ne bi bilo refleksije na ploči.

Analiza je jednostavnija čim su sva sredstva bez gubitaka, o čemu je bilo govora pri promatranju vala na granici izolator — izolator. Prijenosni omjer impedancije na ulazu i izlazu iz ploče iznosi za sredstva bez gubitaka

$$\frac{Z_g}{Z_t} = \frac{1 + j\frac{1}{2}\left(\frac{Z_2}{Z_t} - \frac{Z_t}{Z_2}\right)\sin(2\beta_2 a)}{\cos^2(\beta_2 a) + \left(\frac{Z_t}{Z_2}\right)^2 \sin^2(\beta_2 a)} \tag{4.149}$$

Da bi bilo moguće da je $Z_g = Z_1$, mora biti u prvom redu zadovoljen odnos

$$2\beta_2 a = n\pi \quad \text{ili} \quad a = n\frac{\lambda_2}{4}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Tada je

$$Z_g = Z_1 = \frac{Z_2^2}{Z_t} \quad \text{ili} \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_3$$

Taj je rezultat već dobiven, kao što je spomenuto. Debljina ploče mora biti mnogokratnik od četvrtine duljine vala u njoj. Kad bi mnogokratnik n bio paran broj, $n = 2, 4, 6, \ldots$, tj. debljina ploče bi bila mnogokratnik polovice duljine vala u njoj, bila bi ulazna impedancija jednaka izlaznoj impedanciji, $Z_g = Z_t$. Sad se val ponaša kao da ploča ne postoji, već su samo poluprostori 1 i 3. Da bi bilo moguće takvo ponašanje vala, ploča mora biti od materijala zanemarivih gubitaka. Ako su gubici ploče maleni, tako da ona ulazi u kategoriju izolatora, još uvijek se može postići stanje bez refleksije, samo ploča mora imati neznatno promijenjenu dielektričnost.

Totalna refleksija vala nije moguća ni na koji način, dok god postoje gubici u materijalima. Ona nije moguća niti u primjeni materijala bez gubitaka ako je upad vala ortogonalan. Treba razlikovati dva tipa totalne refleksije. Električna totalna refleksija nastaje kad je ulazna impedancija beskonačno velika. Magnetska totalna refleksija nastaje kad je ulazna impedancija nula. Ovaj drugi tip totalne refleksije nastaje na vodičima. Idealan vodič, beskonačne vodljivosti, izaziva pravu totalnu refleksiju drugog tipa, jer je njegova ulazna impedancija nula.

Neka je ploča opet od izolatora, a prostor 3 je ispunjen vodičem. Tada vrijedi odnos $|Z_t/Z_2| \ll 1$, a ulazna je impedancija iz (4.148)

$$Z_g = Z_t + j Z_2 \operatorname{tg}\left(2\pi\frac{a}{\lambda_2}\right) \tag{4.150}$$

Vrlo mala debljina ploče ne utječe na ulaznu impedanciju vodiča Z_t. Isto tako ploča nema utjecaja ako joj je debljina

$$a = n\frac{\lambda_2}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad Z_g = Z_t$$

Drukčije je kad je zadovoljen odnos za debljinu ploče

$$a = n\frac{\lambda_2}{4}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Čim je zadovoljen taj odnos, ne smije se upotrebljavati približni iznos ulazne impedancije iz (4.150), već treba točnije računati po (4.148). Tako se dobiva ulazna impedancija

$$Z_g = \frac{Z_2^2}{Z_t}$$

čiji je iznos vrlo velik, te se mijenja tip totalne refleksije. Ploča djeluje kao transformator koji ovdje samo okreće faze veličine polja.

Neka je ploča od polietilena dielektričnosti 2,25, na bakru vodljivosti 58 MS/m. Val upada iz uzduha na ploču, a frekvencija mu je 10 GHz. Valna impedancija bakra iznosi $Z_t = \sqrt{\omega\mu_0/\varkappa_3} = 0{,}037\ \Omega$, a ploče $Z_2 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2} = 250\ \Omega$. Duljina vala u ploči iznosi $\lambda_2 = 2$ cm. Prema tome, kod ploče debljine 5 mm ulazna impedancija iz uzduha na ploču bi iznosila

$$|Z_g| = \frac{Z_2^2}{|Z_t|} = 1{,}69\ \text{M}\Omega$$

Treći slučaj ploče nastaje kad je ona od vodiča, a oba poluprostora su ispunjena izolatorima. Drugi poluprostor nema praktičnog utjecaja čim je ploča dovoljne debljine, što bi značilo da je deblja od nekoliko dubina prodiranja vala. Sad se ne mogu očekivati efekti kao kad je ploča od izolatora. Valni efekti elektromagnetskog polja se manifestiraju u izolatorima, dok se u vodiča susreće »difuzija« elektromagnetskog polja. U mehanici se valni efekti susreću u elastičnoj sredini, a difuzija je karakteristična za sredine velikog unutarnjeg otpora trenja. Zato ploča od vodiča ne može proizvesti efekte kao izolator, već je ona samo izvor gubitaka.

4.8.2. Ortogonalni upad vala na više ploča

Ovaj način pristupa problemu ploče između dva poluprostora iskorištava se u prikazu ponašanja vala kad su poluprostori razdijeljeni skupinom od nekoliko ploča. Tri ploče jedna na drugoj dijele poluprostore g i t kako je skicirano na sl. 4.34. Val nailazi ortogonalno na ploče. Njihova bi debljina mogla biti povoljna i općenito različita jedna od druge. Što je rečeno dosada o jednoj ploči, vrijedi i ovdje za svaku pojedinu ploču. Ono što je izlazna veličina jedne ploče, ujedno je ulazna veličina za slijedeću ploču. Opći proračun je prilično nepregledan. Preglednost se postiže matričnim računom.

Jednadžbe jedne ploče (4.145) pišu se matrično uz pomoć *transmisione matrice* **T**

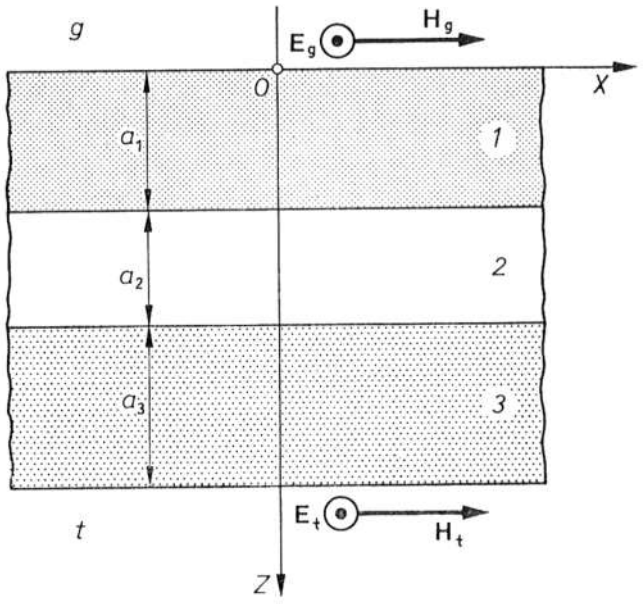
$$\mathbf{T}_k = \begin{array}{|c|c|} \hline \operatorname{ch}(\gamma_k a_k) & Z_k \operatorname{sh}(\gamma_k a_k) \\ \hline \dfrac{\operatorname{sh}(\gamma_k a_k)}{Z_k} & \operatorname{ch}(\gamma_k a_k) \\ \hline \end{array} \tag{4.151}$$

$$\begin{vmatrix} E_g \\ \hline H_g \end{vmatrix} = \mathbf{X}_u = \mathbf{T} \begin{vmatrix} E_t \\ \hline H_t \end{vmatrix} = \mathbf{T}\,\mathbf{X}_t$$

Transmisiona matrica skupine ploča je naprosto jednaka produktu transmisionih matrica pojedinih ploča

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_3 \ldots = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{T}_k$$

Ovime je pokazano kako se može odrediti stanje polja kad val prolazi ortogonalno na skupinu ploča. Vektori polja su tangencijalni u odnosu na površinu ploče. Takvo



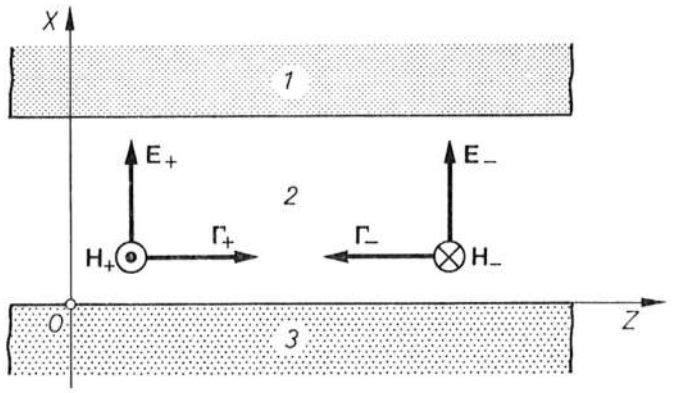
Sl. 4.34. Presjek triju ravnih ploča koje dijele generatorsku i teretnu stranu.

polje se susreće u magnetskim jezgrama sastavljenim od limova. Limovi su međusobno izolirani, te se naizmjenično pojavljuje ploča od vodiča i ploča od izolatora, izraženo dosadašnjom terminologijom.

Ova i slična rješenja moraju voditi računa o uvjetima na granici između dva sredstva i to je postavka u svim slučajevima. Vodiči i izolatori se toliko razlikuju, da se razlika među njima pokazuje korisnom pri rješavanju različitih zadataka. Utjecaj ploče izolatora ovisi prvenstveno o odnosu njezine debljine prema duljini vala, određenoj konstantama materijala ploče. S druge strane, utjecaj ploče vodiča dolazi do izražaja ovisno o odnosu njezine debljine prema dubini prodiranja polja u materijalu ploče. Posebice, ploča od vodiča neće propustiti polje, ako je dovoljno debela prema dubini prodiranja polja. Pločama izolatora može se značajno utjecati na to koji će dio energije proći, a koji će se reflektirati. Sličnost s električnim vodom dolazi korisno u analizi i prikazivanju pojava rasprostiranja valova ortogonalno na granične ravnine među pojedinim sredstvima.

4.8.3. Tangencijalni upad vala

Dosada je prikazan ortogonalni upad vala na ploču. Drugi krajnji položaj upada vala je tangencijalni, koji je skiciran na sl. 4.35. Ploča ima neku debljinu a, a promatraju se oba oblika polarizacije vala. Teško bi bilo primijeniti postojeće izraze koji se odnose na reflektirani i prolazni val, već je lakše razviti nove izraze



Sl. 4.35. Presjek ravne ploče — valovoda. Ravni val upada tangencijalno u ploču.

prilagođene rasprostiranju vala paralelno graničnim ravninama. Kod *prvog oblika polarizacije* $\mathbf{E}_0 \perp$, vektor električnog polja je paralelan s graničnom ravninom, a vektor magnetskog polja je okomit na istu ravninu. Uvjeti na granici zahtijevaju da su tangencijalne komponente jakosti polja i normalne komponente indukcije međusobno jednake u oba sredstva na graničnoj ravnini, ako nema naboja niti struja na granici. Da bi se mogli zadovoljiti spomenuti uvjeti i odnosi u ravnom valu, moraju postojati po dva vala jednake polarizacije, koji se gibaju u suprotnim smjerovima. Val drugog oblika polarizacije, $\mathbf{E}_0 \parallel$, je prikazan na sl. 4.35. Tamo je električno polje okomito na granične ravnine, a magnetsko polje je paralelno s njima. Jakost magnetskog polja je tangencijalna na granicu i ista u sva tri sredstva u prostorima 1 i 3 i u ploči 2. Jakost električnog polja je normalna na granicu, te mora praviti skok u odnosu dielektričnosti.

Ovdje se prikazuje primjer kad je ploča — izolator zanemarivih gubitaka, kao što je uzduh, a poluprostori su ispunjeni vodičem. Neka je i vodič u prvi mah idealan, tj. beskonačne vodljivosti. Zato se ne pojavljuje nikakva tangencijalna komponenta polja izazvana gubicima u vodiču. Elektromagnetski val u ploči je pravi ravni val, koji općenito ima pozitivni i negativni val. Val u ploči se ne razlikuje ni u čemu od ravnog vala, već opisanog u poglavlju 4.3. Dapače, ako bi izolator ploče imao i neke gubitke, ostale bi valjane jednadžbe ravnog vala. Neka je ploča od materijala zanemarivih gubitaka, pa su jednadžbe vala

$$E = E_+ e^{-j\beta z} + E_- e^{j\beta z}$$

$$H = \frac{E_+}{Z} e^{-j\beta z} - \frac{E_-}{Z} e^{j\beta z}$$

Indeks (+) označava pozitivni val, a indeks (—) označava negativni val. Valna impedancija materijala ploče iznosi naprosto $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Fazna konstanta materijala ploče jednaka je $\beta = \omega/c$, ako je $c = (\mu\varepsilon)^{-1/2}$ fazna brzina, a ujedno i brzina svjetla.

Formacija sa sl. 4.35. je u suštini električni vod, koji ima vodiče metalne trake vrlo velike širine prema njihovu razmaku a. Razmak a je mnogo manji od duljine vala, $a \ll \lambda$. Tada je napon među trakama $U = a\,E$, a njima teče struja po jedinici njihove širine $K = H$. Struje u trakama su suprotno usmjerene. Budući da su napon i struja direktno razmjerni jakostima polja, može se ostati, kao i dosada, na veličinama polja.

Promatrani put rasprostiranja vala duž osi Z neka iznosi l. Upadna ili *generatorska* strana ima indeks g, a nalazi se kod $z = 0$. Prolazna strana ili strana *tereta* nosi indeks t, a nalazi se na mjestu $z = l$. Položaj točke promatranja određuje se od strane tereta, a nova koordinata se odnosi prema staroj koordinati po relaciji $s = l - z$. Neka su

$$E_{+s} = E_+ e^{-j\beta l}$$

$$E_{-s} = E_- e^{j\beta l} \tag{4.152}$$

Faktor refleksije se definira kao

$$R = \frac{E_{-s}}{E_{+s}} = |R|\, e^{j\varphi} \tag{4.153}$$

S pomoću tih veličina jakost električnog i magnetskog polja se mijenja duž ploče prema jednadžbama

$$E = E_{+s}\, e^{j\beta s}\,(1 + R\, e^{-2j\beta s})$$

$$H = \frac{E_{+s}}{Z} e^{j\beta s}\,(1 - R\, e^{-2j\beta s}) \tag{4.154}$$

Vremenska ovisnost veličina polja nalazi se u veličini E_{+s}. Veličina u zagradi ovisi samo o mjestu u ploči. Njezin apsolutni iznos je direktno mjerilo amplitude jakosti polja.

Ona je za električno polje

$$K_E = 1 + |R| e^{j(\psi - 2\beta s)} = |K_E| e^{j\varphi_E}$$
$$|K_E|^2 = 1 + |R|^2 + 2|R| \cos(\psi - 2\beta s) \tag{4.155}$$

Najmanja amplituda električnog polja nastaje za $s = s_0$, koji se dobiva iz

$$\psi - 2\beta s_0 = (2n - 1)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Najveća amplituda istog polja nastaje na mjestu $s = s_1$, koje se dobiva iz odnosa

$$\psi - 2\beta s_1 = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mjesta minimuma i maksimuma su razmaknuta za iznos

$$s_0 - s_1 = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4}$$

odnosno četvrtinu duljine vala. Svake četvrtine duljine vala se izmjenjuje minimum i maksimum jakosti polja. Magnetsko polje se točno jednako ponaša, samo ono ima maksimum gdje je minimum električnog polja. Odnos maksimuma i minimuma jakosti polja je karakteristična veličina, a ona je

$$M = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{H_{max}}{H_{min}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|} \tag{4.156}$$

Također je karakteristična veličina mjesto prvog minimuma jakosti električnog polja, koje se nalazi na udaljenosti od prolazne strane ploče ili od tereta

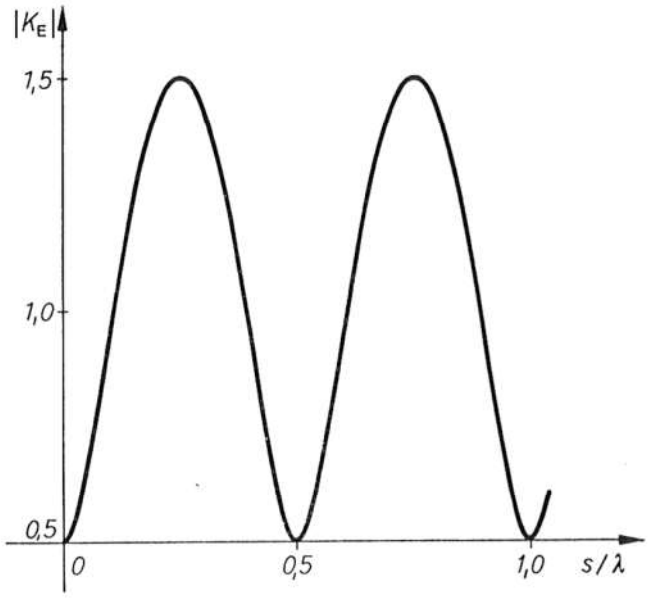
$$d = \frac{\psi - \pi}{2\beta} = \left(\frac{\psi}{\pi} - 1\right)\frac{\lambda}{4} \tag{4.157}$$

Dovoljno je da su zadane veličine M i d, pa da je polje određeno po cijeloj duljini ploče. Polje ne dosiže isti iznos duž cijele ploče, nego se formira *stojni val* kao na sl. 4.36. Prikazani stojni val je anvelopa valova koji putuju pozitivno i negativno. Taj stojni val nije stvaran stojni val, koji energetski znači da nema transporta energije duž ploče. On se pojavljuje samo kad je negativni val istog iznosa kao pozitivni val, tj. kolika energija putuje u pozitivnom smislu, tolika se vraća u negativnom smislu. Val na sl. 4.36. se ipak naziva stojni, jer mirni promatrač registrira da iznosi polja dosižu vrijednosti koje se očitavaju iz označenih krivulja na slici.

Impedancija tereta, odnosno valna impedancija materijala koji ispunjava prostor na izlazu iz ploče, određuje konstante M i d. Impedancija tereta u odnosu prema valnoj impedanciji ploče slijedi iz jednadžbi (4.154) za $s = 0$

$$\frac{Z_t}{Z} = \frac{1 + R}{1 - R} \tag{4.158}$$

Dobiveni izraz služi da se odredi faktor refleksije ploče, a iz njega dalje slijede konstante M i d.



Sl. 4.36. Dijagram konstante stojnog vala $|K_E|$ u ovisnosti o mjestu na vodu s/λ. Odabran je valni omjer $M = 3$, a prvi minimum se nalazi na kraju voda, $d = 0$.

PRIMJER 4.3. Ploča je uzduh valnog otpora $Z = 377\,\Omega$. Ona je zaključena na izlazu izolatorom valnog otpora $Z_t = 126\ \Omega$ zanemarivih gubitaka. Faktor refleksije iznosi iz (4.158)

$$R = \frac{Z_t - Z}{Z_t + Z} = 0{,}5\, e^{j\pi} = -\,0{,}5$$

Karakteristične konstante valova iznose iz (4.156) i (5.157)

$$M = \frac{1 + R}{1 - R} = 3{,}0, \qquad d = 0$$

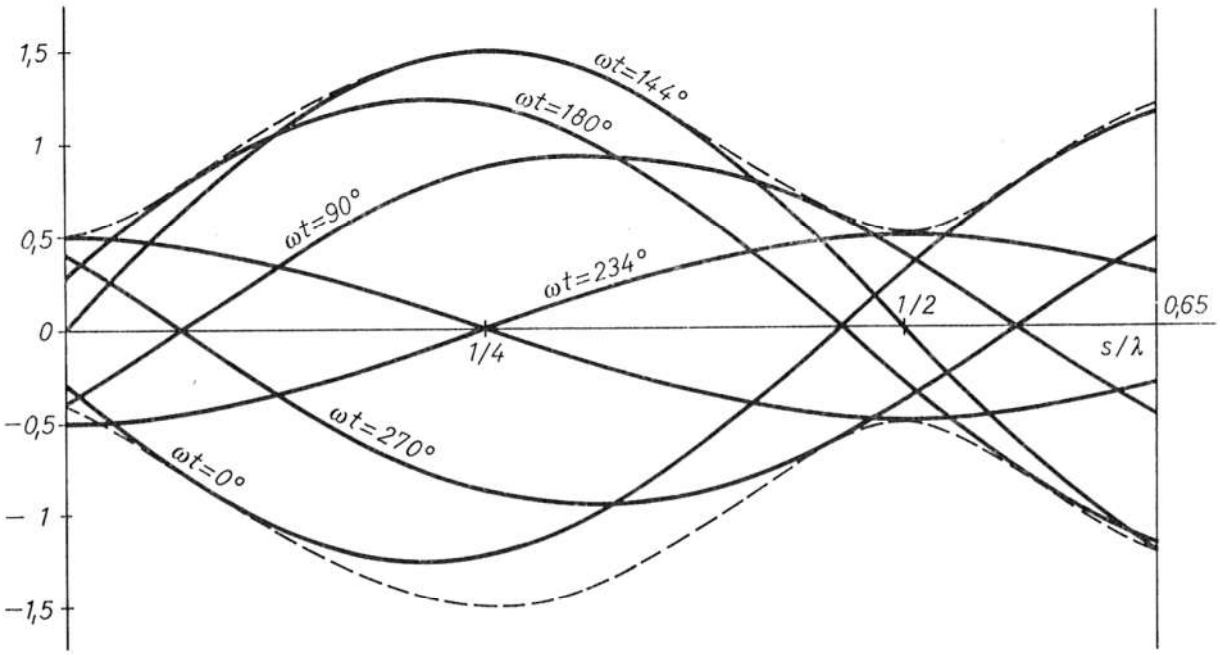
Minimum električnog vala nastaje na izlazu iz ploče. Takva je situacija uvijek kad je valni otpor izolatora na kraju ploče manji od valnog otpora ploče. Magnetski val ima maksimum tamo gdje je minimum električnog vala. Jakost električnog polja duž ploče iznosi iz (4.154), ako je njezina amplituda E_0 pozitivnog vala

$$E = |\,K_E\,|\,E_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{l - s}{\lambda} + \varphi_E\right)$$

Ovdje navedene konstante iz (4.155) slijede iz izraza

$$|K_E|^2 = 1 + |R|^2 - 2|R| \cos\left(4\pi\frac{s}{\lambda}\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_E = \frac{|R| \sin\left(4\pi\frac{s}{\lambda}\right)}{1 - |R| \cos\left(4\pi\frac{s}{\lambda}\right)}$$



Sl. 4.37. Raspodjela jakosti električnog polja u ploči u smjeru napredovanja vala u različitim vremenima. Ona je sinusoidalna. Anvelopa sinusoida je »stojni val«.

Ovaj je primjer prikazan na sl. 4.37. Na njoj je prikazano nekoliko krivulja $E = E(s)$ za nekoliko vrijednosti vremena, odnosno faznih kutova ωt. Na slici se vidi također da je stojni val stvarno anvelopa sinusoida polja. Duljina ploče je jednaka $l = 0{,}65\ \lambda$.

4.8.4. Gubici u stijenkama ploče

Gubici u stijenkama ploče uzimaju se u obzir približno. Oni izazivaju *longitudinalnu* komponentu električnog polja, koja je usmjerena duž ploče kako se i val giba. Magnetsko polje je tangencijalno na stijenku i jednako je u ploči i u stijenki ploče. Poznavanje njegova iznosa je dovoljno da se ustanove gubici u stijenkama. Longitudinalna komponenta električnog polja se zanemaruje. Ona i tako ne doprinosi transportu energije duž ploče. Prenesena energija se umanjuje za iznos gubitaka u stijenkama. Kad ne bi bilo gubitaka, Poyntingov vektor vala u ploči bio bi jednak razlici istih vektora pozitivnog i negativnog vala, a iznosi za pozitivni val

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z} \tag{4.159}$$

On je neovisan o mjestu u ploči, jer nema u njoj gubitaka. Poyntingov vektor gubitaka u stijenkama je ovisan o magnetskom polju i iz njega se dobiva, te iznosi

$$\Gamma_g = \frac{\sqrt{2}}{4} \mid Z_s \mid \frac{E_0^2}{Z^2} \tag{4.160}$$

Budući da se prikazuje Poyntingov vektor u sredstvu s gubicima s prigušnom konstantom

$$\Gamma = \Gamma_0 \, e^{-2\alpha z}$$

iskorištava se navedeni odnos pri određivanju utjecaja gubitaka u stijenkama na prigušenje putujućih valova. Kako gubici moraju biti jednaki smanjenju prenesene energije, vrijedi jednadžba

$$-\frac{\partial}{\partial z}(a\,\Gamma) = 2\,\Gamma_g$$

Ona uzima u obzir da postoje dvije stijenke. Nije dobro prikazivati gubitke u odnosu prema prenesenoj energiji, jer prijenosa energije nema za totalne refleksije, te se pojavljuje beskonačno prigušenje. Zato se prigušenje prikazuje u odnosu na pozitivni val. Kad se to uzme u obzir, dobiva se prigušna konstanta iz odnosa

$$a\,a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{Z_s}{Z} \right| \tag{4.161}$$

Z_s je valna impedancija stijenke, a Z je valna impedancija ploče. Ova prigušna konstanta se upotrebljava u valnim jednadžbama kao što je to učinjeno za ravni val u slobodnom prostoru. Prema tome su jednadžbe valova u ploči

$$E = E_+ \, e^{-\gamma z} + E_- \, e^{\gamma z}$$

$$H = \frac{E_+}{Z} \, e^{-\gamma z} - \frac{E_-}{Z} \, e^{\gamma z}$$

$$\gamma = \alpha + j\,\beta$$

Elektromagnetski val u navedenom primjeru 4.3. ima frekvenciju 300 MHz, a stijenka je od bakra vodljivosti 56 MS/m. Njezina je valna impedancija $Z_s = 6{,}5$ milioma. Prema tome je konstanta prigušenja zadana sa

$$a\,a = 12{,}2 \cdot 10^{-6}$$

Ako je *doseg* vala u ploči zadan sa $l_0 = 1/a$, u ovome primjeru on bi iznosio $l_0 = 82000\,a$. Doseg vala je mnogostruko veći od debljine ploče. Debljina ploče se zadaje u odnosu na duljinu vala. Neka je ona u ovome primjeru $a = \lambda/16$, dakle mnogo manja od duljine vala. Tada je doseg vala oko 5100 valnih duljina. Ovaj primjer pokazuje da ne treba uzimati u obzir prigušenje vala, ako je duljina ploče tek nekoliko valnih duljina.

4.8.5. Opći val u ploči

Poseban oblik rasprostiranja vala u ploči je rasprostiranje u *cikcak crti*. Ploča je postavljena kao na sl. 4.35., tj. jedna joj strana leži u ravnini Y - Z. Opet je to širenje ravnog vala, samo što mu se smjer gibanja ne podudara s osi Z, nego je negdje između osi X i Z. To znači da se veličine polja mijenjaju u ovisnosti o koordinatama x i z, a neovisne su o koordinati y. *Strane ploče* su takve, da se na njima događa *totalna refleksija*. One su savršeni vodiči, dakle beskonačne su vodljivosti, jer je tada uvijek totalna refleksija vala bez obzira na kut upada vala. Rezultat uzajamne totalne refleksije vala na stranama ploče je gibanje vala u cikcak crti i njegovo napredovanje duž osi Z nekom valnom konstantom $\gamma_z = j\,\beta_z$ bez prigušenja. Prema tome preostaje da su veličine polja ovisne još o koordinati x, tj. one su

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}\,(x)\; e^{j(\omega t - \beta_z z)} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}\,(x)\; e^{j(\omega t - \beta_z z)} \end{aligned} \tag{4.162}$$

Ploča je od izolatora zanemarivih gubitaka. Ravnina valova podudara se s ravninom X - Z, a granične ravnine su strane ploče. Mogući su valovi obaju tipova polarizacije, te je zato bolje opet analizirati odvojeno, svaki tip za sebe.

Prvi oblik polarizacije, kad je vektor električnog polja okomit na ravninu upadnog vala, odgovara valu koji se zove još i *transverzalni električni val*, a označava se sa TE. On nema komponente električnog polja duž ploče, odnosno u smjeru osi Z. Nema niti komponente X električnog polja, već samo postoji komponenta Y. Zbog toga magnetsko polje ima samo dvije komponente i to su komponente X i Z. Sad je olakšano rješavanje valne jednadžbe.

Valna jednadžba je prikazana u poglavlju 4.2. o retardiranim potencijalima. Njezin se oblik piše operatorski

$$(\Delta - \gamma^2)\,\psi = 0$$

gdje je veličina ψ bilo koja veličina što se pojavljuje pri rješavanju polja. Ako se uzme u obzir funkcionalna ovisnost (4.162) i izolator bez gubitaka, onda je D'Alembertov operator

$$\Delta - \gamma^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \beta_z^2 + \omega^2\,\mu\,\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + p^2$$

Nova valna konstanta dobiva se iz odnosa

$$p^2 = \omega^2\,\mu\,\varepsilon - \beta_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 \tag{4.163}$$

Rješenje valne jednadžbe sada glasi

$$\psi = \psi_1 \cos(p\,x) + \psi_2 \sin(p\,x)$$

Ovo je rješenje neovisno o obliku polarizacije. Daljnja interpretacija zahtijeva da se odabere oblik polarizacije vala.

Val *oblika* TE ima samo komponentu Y električnog polja, te je rješenje za nju

$$E_y = A_1 \cos(p\,x) + A_2 \sin(p\,x)$$

Moraju biti zadovoljeni granični uvjeti za

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = a, \qquad E_y = 0$$

To je samo tako moguće, da je $A_1 = 0$ i

$$p\,a = m\,\pi \quad \text{ili} \quad p = m\frac{\pi}{a}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.164}$$

Prema tome je konačno rješenje za električno polje

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \cos(\omega\,t - \beta_z\,z) \sin\left(m\,\pi\frac{x}{a}\right), \\ E_x &= E_z = 0 \end{aligned} \tag{4.165}$$

Pojedine komponente magnetskog polja se dobiju iz Maxwellovih jednadžbi, te je

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{\beta_z}{\omega\,\mu} E_y, \qquad H_y = 0 \\ H_z &= -\frac{m\,\pi\,E_0}{\omega\,\mu\,a} \sin(\omega\,t - \beta_z\,z) \cos\left(m\,\pi\frac{x}{a}\right) \end{aligned} \tag{4.166}$$

Drugi oblik polarizacije upadnog vala predviđa da je vektor električnog polja u ravnini upadnog vala. Taj se oblik zove još i *transverzalni magnetski val*, a označava ga se sa TM. On ima samo komponentu Y magnetskog polja, a ostale dvije su nula, dakle $H_x = H_z = 0$. Zato postoje samo dvije komponente električnog polja, a treća je nula, $E_y = 0$. Rješenje valne jednadžbe glasi za magnetsko polje

$$H_y = A_1 \cos(p\,x) + A_2 \sin(p\,x)$$

Budući da je na granici $x = 0$ i $x = a$, $E_z = 0$, Maxwellove jednadžbe daju da su integracione konstante $A_2 = 0$ i

$$p\,a = m\,\pi \quad \text{ili} \quad p = m\frac{\pi}{a}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

kao i prije u TE vala.

Zato su pojedine komponente polja u valu TM

$$H_y = H_0 \cos(\omega t - \beta_z z) \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right), \qquad H_x = H_z = 0$$

$$E_x = \frac{\beta_z}{\omega \varepsilon} H_y, \qquad E_y = 0 \tag{4.167}$$

$$E_z = -\frac{m\pi}{\omega \varepsilon a} H_0 \sin(\omega t - \beta_z z) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right)$$

Oba oblika vala moraju zadovoljiti uvjet

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} \tag{4.168}$$

Duljina vala λ_z je duljina vala u smjeru osi Z. Ona mora biti konačna i realna, a za to je potreban uvjet

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 > 0$$

Sve jakosti polja sadrže produkte sinusa i kosinusa, što se svodi na sume sinusa od sume i razlike kutova. Tako se dobiju po dva vala, čije ravnine konstantne faze imaju jednadžbu

$$\omega t - \beta_z z \pm m\pi \frac{x}{a} = \text{konst.}$$

Upadni kut ϑ_{0m} vala dobiva se iz

$$\operatorname{tg} \vartheta_{0m} = \frac{\beta_z a}{m\pi} = \left[\left(\frac{2a}{m\lambda}\right)^2 - 1\right]^{1/2} \tag{4.169}$$

Kut ϑ_{0m} je isti za oba oblika vala, TE i TM. Jednadžba (4.169) za tangens upadnog kuta je ujedno kriterij da je moguće gibanje vala kroz ploču u cikcaku. Upadni kut mora biti realan. Gibanje vala se realizira duž ploče gibanjem ravnog vala u cikcaku. Na sl. 4.38. je prikazan upad ravnog vala na ravninu Y-Z pod kutom ϑ_0 u smjeru $\mathbf{n}_0$. On se totalno reflektira u smjeru $\mathbf{n}_1$ pod istim kutom. Ravnina upadnog i reflektiranog vala je ravnina X-Z.

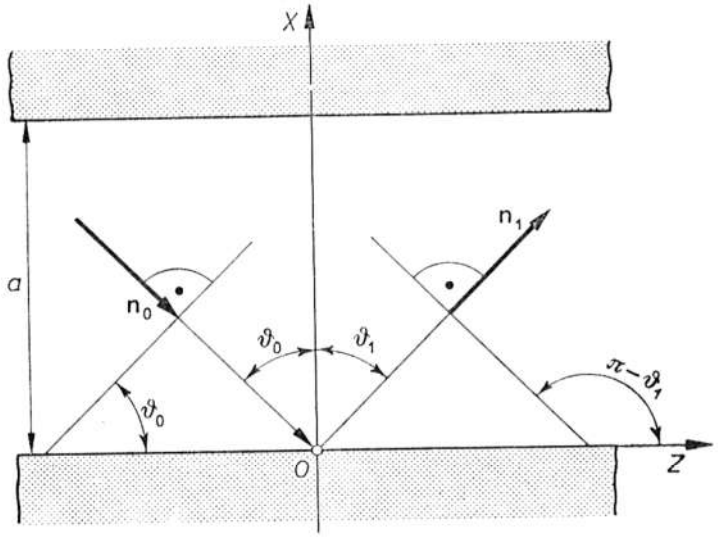
Da bi se uzeo u obzir višekratnik m, on se stavlja uz oznaku oblika vala, te se piše TE_m ili TM_m. Prema tome postoje oblici valova: *transverzalni električni* TE_1, TE_2, TE_3, ... i *transverzalni magnetski* TM_1, TM_2, TM_3, ... Kako višekratnik m raste, faktor $2a/(m\lambda)$ opada i konačno postaje manji od jedinice. To znači da se taj oblik vala ne može rasprostirati pločom. Ploča debljine 130 mm propušta valove duljine 30 mm do $m = 8$. Val $m = 9$ više ne prolazi dotičnom pločom. Isti valovi duljine 30 mm prolaze pločom debljine 20 mm samo u obliku TE_1 ili TM_1.

Kritična duljina vala λ_k je ona, kad je omjer

$$\frac{2a}{m\lambda_k} = 1 \quad \text{ili} \quad \lambda_k = \frac{2a}{m} \tag{4.170}$$

Kad nije zadovoljen uvjet rasprostiranja vala pločom, postaje fazna konstanta β_z imaginarna, odnosno ona se pretvara u prigušnu konstantu α_z. Ona je iz jednadžbe (4.163)

$$\alpha_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_k}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{4.171}$$



Sl. 4.38. Smjerovi ravnog vala prilikom refleksije na stijenki ploče. Val se giblje u ploči u cikcak liniji.

Ploča debljine 20 mm ne propušta više val $m = 2$, ako je njegova duljina 30 mm. Taj se val prigušuje prigušnom konstantom

$$\alpha_{z2}^2 = \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 5{,}5, \qquad \alpha_{z2} = 2{,}35 \text{ 1/cm}$$

To znači da je dubina prodiranja 1/2,35 = 0,426 cm vala TE_2 ili TM_2 za predloženu ploču i zadani val. Prigušenje viših oblika valova se naglo povećava. Ploča je svojom debljinom filter za više oblike valova.

Takva ploča je također jedan oblik valovoda. Val u njoj ne može nikamo pobjeći, već je primoran da se giba po njezinoj duljini. Njegova fazna brzina se dobija iz fazne konstante β_z

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2\right]^{1/2}} > c \tag{4.172}$$

Fazna brzina u smjeru osi Z je uvijek veća od brzine svjetla c za materijal ploče. Postoji mogućnost da su te dvije brzine međusobno jednake kad kritična dužina vala λ_k poprimi beskonačan iznos. To je moguće, ako je valni višekratnik $m = 0$. Iznos $m = 0$ je ispušten dosada, jer val TE_0 ne može postojati. Međutim, val TM_0 može postojati, a to je slučaj koji je ovdje prikazan. On prikazuje ravni val koji se rasprostire duž ploče, a vektor električnog polja stoji normalno na graničnu ravninu. Već je ustanovljeno da se takav val giba pločom bez obzira na njezinu debljinu. Kritična duljina vala λ_k za oblik TM_0 je beskonačna, a to znači da se u tome obliku gibaju pločom svi valovi neovisno o njihovoj duljini.

Poyntingov vektor Γ_z u smjeru osi Z je mjerilo za iznos energije koja se transportira duž ploče. Njegov integral po presjeku ploče daje ukupnu snagu koja se prenosi pločom. Sve komponente polja ne sudjeluju u prijenosu energije, već su to samo X i Y komponente polja. To su E_y i H_x u TE-obliku vala, a komponente E_x i H_y sudjeluju u TM-obliku vala u prijenosu energije. Da bi se mogle usporediti mogućnosti prijenosa energije jednim i drugim oblikom vala, treba postaviti kao graničnu vrijednost tjemeni iznos jakosti električnog polja u oba oblika. Oblik TE ima tjemeni iznos jakosti električnog polja E_0 u komponenti E_y. Oblik vala TM ima najveći iznos jakosti električnog polja u komponenti E_x. Kad se oba oblika vala svedu na istu najveću jakost električnog polja, njihovi Poyntingovi vektori se odnose kao

$$\frac{\Gamma_{zM}}{\Gamma_{zE}} = \left(\frac{v_z}{c}\right)^2 = \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \lambda^2} > 1 \tag{4.173}$$

Valom TM prenosi se veća energija nego valom TE. Omjer prenesenih snaga je to veći, što je kritična duljina vala bliže pravoj duljini vala koja odgovara materijalu ploče. Prosječni iznos Poyntingova vektora se utvrđuje u vremenskom i prostornom prosjeku, a on je za zadani tjemeni iznos jakosti električnog polja E_0 vala TM

$$\Gamma_z = \frac{1}{4} v_z \varepsilon E_0^2 \tag{4.174}$$

Kako se E_0 drži konstantnim, Poyntingov vektor raste zajedno s porastom fazne brzine u smjeru osi Z. S druge strane ta brzina raste prema beskonačnosti, kako se odrezna duljina vala približava pravoj duljini vala. To bi značilo da Poyntingov vektor u smjeru osi Z poprima vrlo velike vrijednosti. To se može razumjeti tako, da se upadni kut ϑ_0 približava nuli, a ravnina konstantne faze sve se više približava ravnini Z - Y. Drugo je pitanje kako bi se takvo stanje moglo realizirati.

5. ELEKTRIČNI VOD

5.1. UVOD

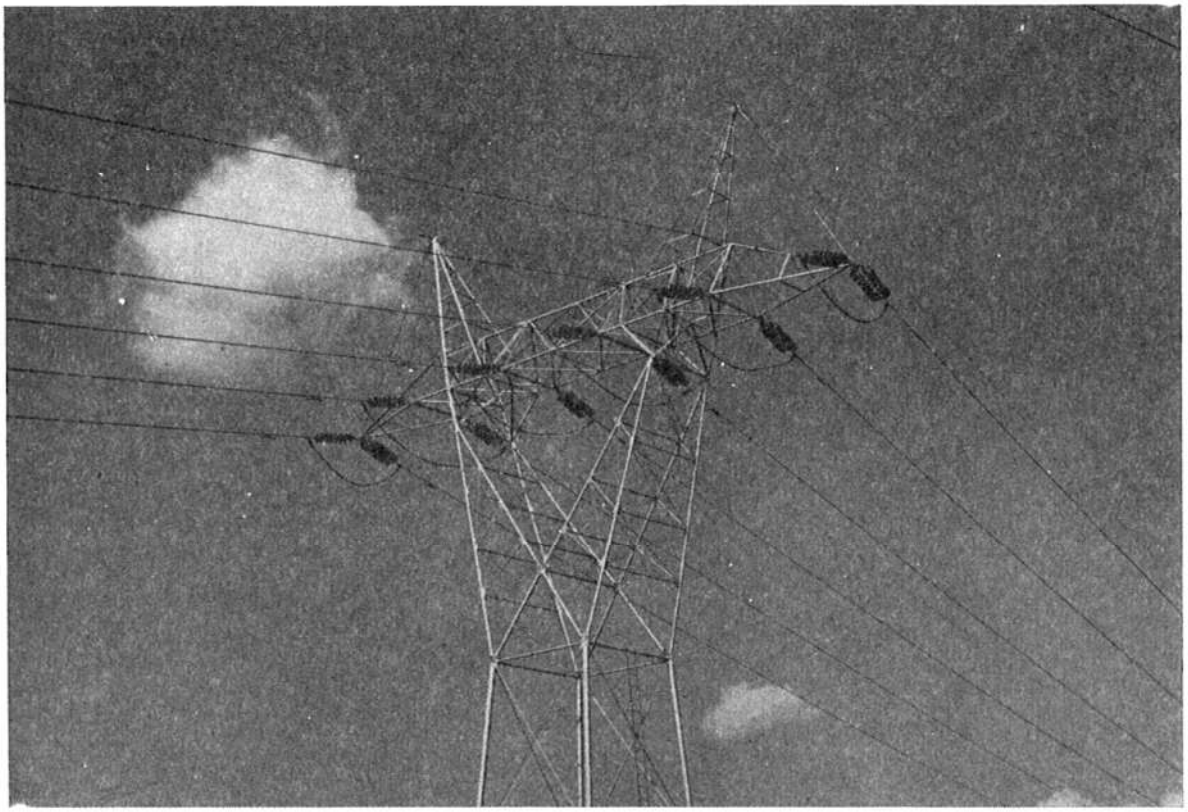
Električni vodovi su kategorija elektrotehničkih uređaja ili njihovih elemenata koja se najčešće pojavljuje. Oni služe u prijenosu energije od jednog mjesta na drugo, od izvora energije do potrošača, te od aparata do aparata. Oni su u samim aparatima, da bi vodili energiju od elementa do elementa. Električni vodič u obliku metalne žice ili užeta vodi električnu struju, te se u tome obliku upotrebljava od prvih početaka razvoja elektrotehnike. Mi smo trebali električnu struju zbog njezinih efekata, toplinskih, kemijskih i magnetskih. Osnovna upotreba električne struje je bila u oblasti topline, elektrokemije i elektromehanike. Električni izvori su proizvodili elektromotornu silu, koja je tjerala struju vodovima do mjesta primjene. Zato je vod bio prijenosnik električne energije.

Kasniji razvoj teorije postavio je vodove na pravo mjesto. Oni ostaju metalni vodiči u jednoj dimenziji, vrlo izduženoj, kao što su žice, užeta, cijevi i slično. Metalni vodič ima izuzetno mjesto u ponašanju materijala u elektromagnetskom polju. U njemu ne postoje pomačne struje u cijelom spektru tehničkih frekvencija, već samo provodne struje. Zato u njemu nema rasprostiranja elektromagnetskog polja u obliku valova, već se govori o difuziji polja, kao što se govori o difuziji topline u vodičima. Električno polje se ponaša na površini vodiča kao u statičkom stanju. Magnetskim poljem upravljaju inducirane struje koje su nastale pošto je elektromagnetsko polje prodrlo u vodič iz vanjskog prostora. U prethodnom poglavlju je pokazano, kako je vodič razlog da se prijenos energije odvija izolatorom u njegovu okolišu, *paralelno njegovoj površini*, a vodič je samo izvor gubitaka i nije prijenosnik energije.

Prema tome ostaje i nadalje osnovna zadaća voda u prijenosu energije. Na sl. 5.1. do 5.4. su prikazane različite vrste vodova. To su energetski vodovi visokog napona u uzduhu i kabeli. Zatim dolaze sve vrste vodova u razvodu energije i u instalacijama po stanovima, tvornicama i slično. Dalje je golema skupina telekomunikacionih zračnih vodova i kabela. Posebno značenje imaju koaksijalni kabeli u komunikacionoj tehnici. Električi vodovi su i *ožičenje* u različitim aparatima komunikacione tehnike i mjerne tehnike. To su sve vodovi u klasičnom smislu.

Vodovi u prijenosu energije i komunikacijama su jednostavniji u svojoj teoriji. Namoti električnih strojeva i transformatora ulaze također u kategoriju vodova. Njihova teorija je mnogo složenija od teorije običnih vodova. Oni se tretiraju kao vodovi samo za putujuće valove. U normalnom radu električnih strojeva i transformatora primjenjuje se posebna teorija prilagođena toj grupi električnih aparata.

Antene ulaze također u kategoriju električnih vodova, iako one služe u proizvodnji elektromagnetskih valova, a ne povezuju direktno izvor i potrošača električne energije. Ima autora koji valovode ubrajaju u električne vodove, što odgovara ako se uzme u obzir osnovna namjena vodova, a pri tome se iskorištavaju metalni vodiči. U prethodnom poglavlju je prikazano rasprostiranje vala kroz ploču od izolatora, ograničenu idealnim vodičima. U njoj se može rasprostirati TEM-val i tada je to vod, a rasprostire se također TE- i TM-val, što odgovara valovodu. Teorija valovoda je donekle drukčija nego voda, te se često posebno prikazuje. Kad se želi detaljnije prikazati električne vodove, treba u njih ubrojati i valovode.

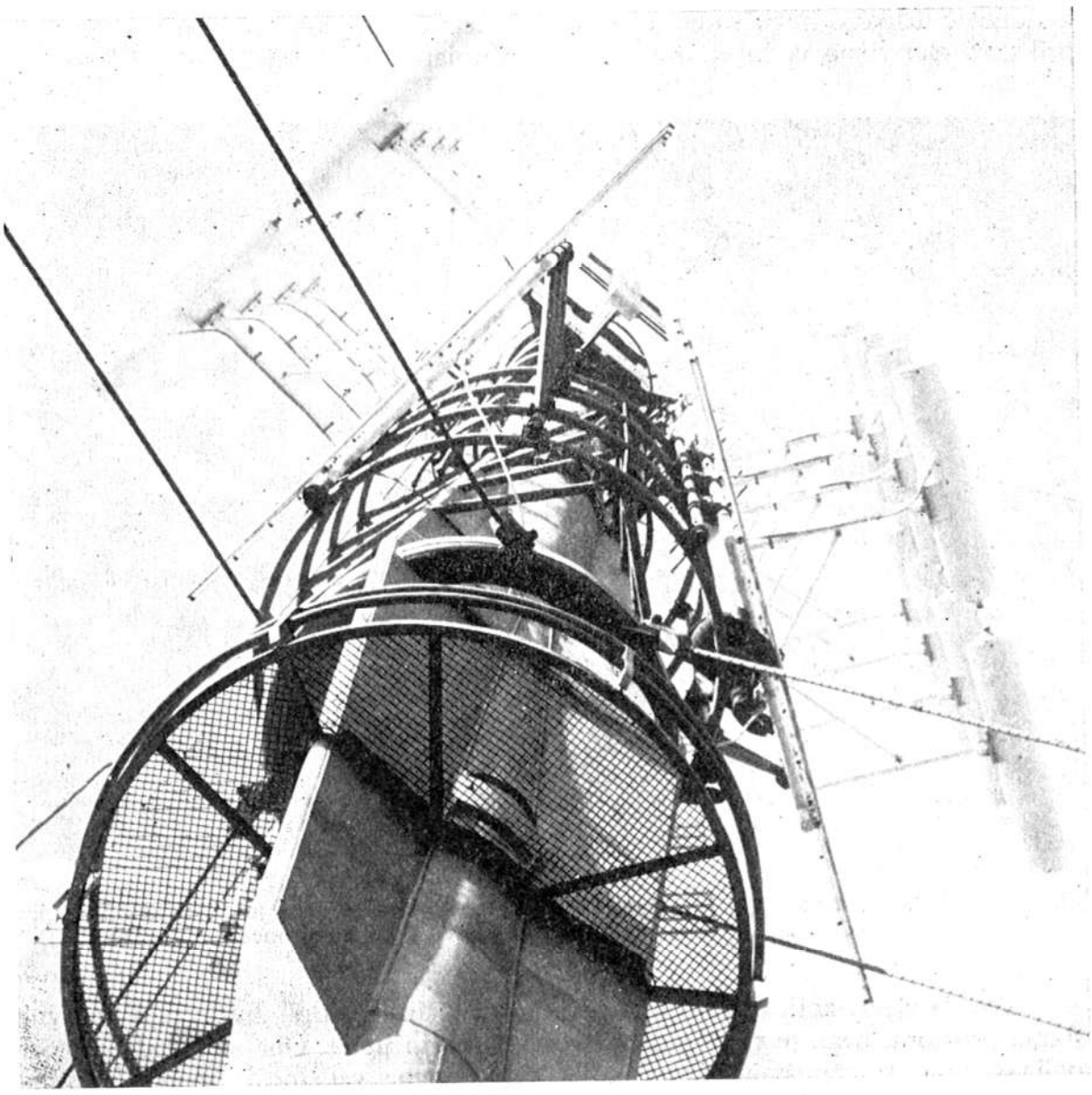


Sl. 5.1. Električni dalekovod Jajce - Zagreb za prijenos energije. Vod je dvostruki trofazni sa zaštitnim užetima, međufaznog napona 110 kV. Foto Elektroprenos, Zagreb.

Teorija električnih vodova ima ponešto drukčiji pristup određivanju osnovnog stanja prostora, nego je to dosada učinjeno u teoriji polja. Ona se izvodi iz teorije polja, a u njoj se napuštaju vektori polja kao osnovne veličine i upotrebljavaju se integralne veličine jakosti struje u vodičima i napona među vodičima. Egzaktni prijelaz sa veličina polja na jakost struje i napon bio bi vrlo zamršen zadatak. Takav pristup nije potreban. Već je ustanovljeno da se polje smije promatrati kao statičko polje, ako je promatrani prostor mnogo manji od duljine vala koja je karakteristična za promatrani prostor. To se iskorištava da bi se odredilo stanje na vodu.

Vodiči električnih vodova su izduženi u jednom smjeru, a njihovi presjeci su malih dimenzija u ravnini okomitoj na uzdužni smjer. To je karakterističan oblik žice, užeta, tračnice i sl. Presjek profila vodiča je različitog oblika, ali je najčešći kružni i pravokutni. Cijev se također često susreće.

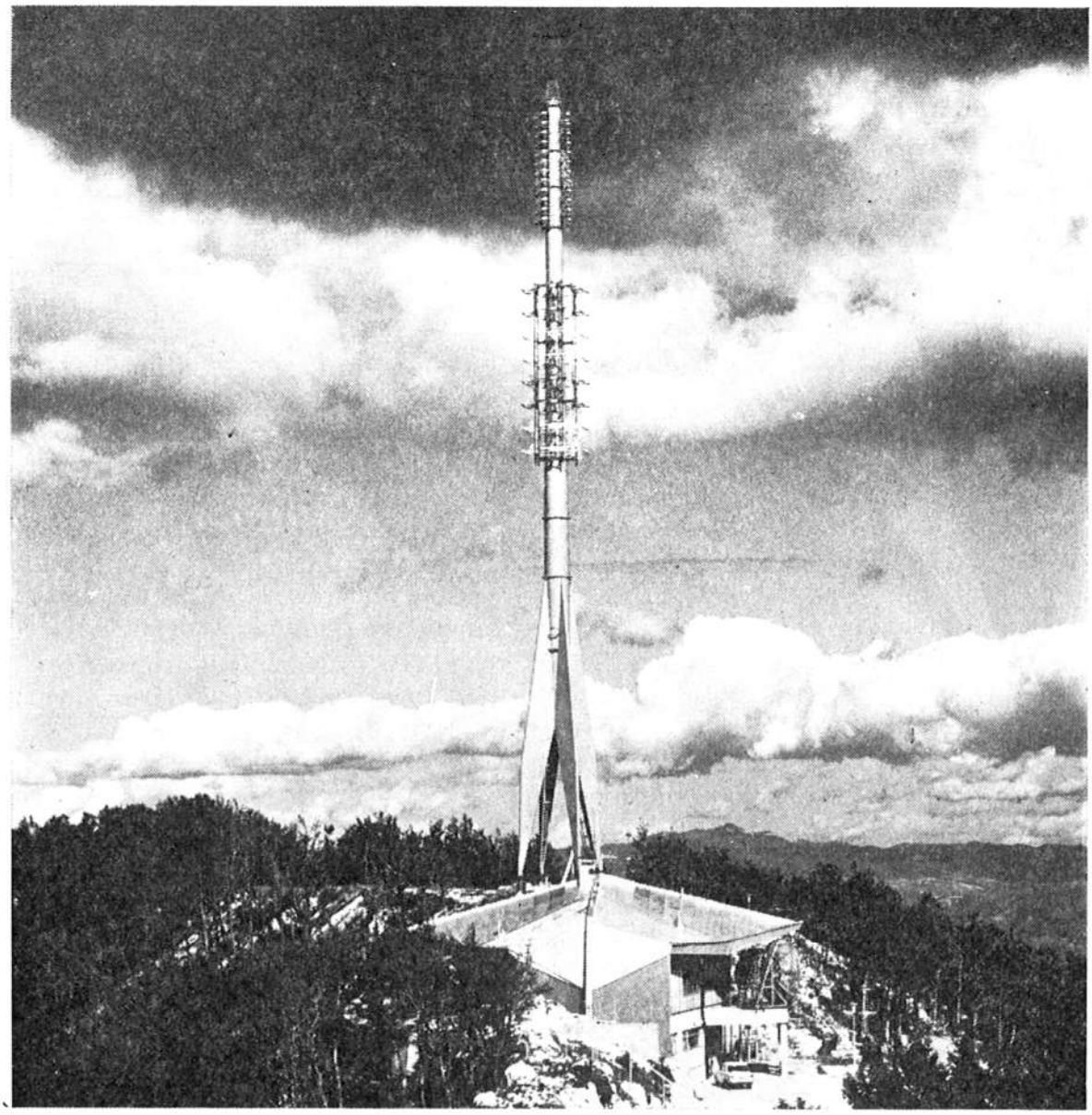
Klasični vodovi imaju vodiče položene u paralelnim pravcima. To su energetski i telekomunikacioni vodovi. Oni sadrže dva i više vodiča smještenih paralelno. Njihove međusobne udaljenosti su vrlo malene prema odgovarajućoj duljini vala. Najveći međusobni razmaci se susreću u visokonaponskih, energetskih vodova u uzduhu. Kad se uzme u obzir da se u upotrebi električne energije primjenjuje stalna frekvencija od 50 Hz ili 60 Hz, kojima odgovara duljina vala u uzduhu od 6000 km,



Sl. 5.2. Skupina televizijskih antena za emisiju na četvrtom frekventnom kanalu. Na istom stupu su antene za emisiju na ultrakratkim valovima. Foto RT Zagreb.

odnosno 5000 km, vidi se da su razmaci među vodičima stvarno mnogo manji od duljine vala. Čak i viši harmonici do visokog reda imaju još uvijek duljinu vala koja je mnogo veća od razmaka među vodičima. Frekvencije u telekomunikacijama su mnogo veće, nego u iskorištavanju elektromagnetske energije. Tonska frekvencija doseže i do 20 kHz, čemu odgovara 15 km duljine vala u uzduhu. Opet su razmaci među vodičima mnogo manji od duljine vala.

Duljine vala postaju malene kad se s frekvencijom prelazi iznos od 1 MHz. Problem razmaka među vodičima počinje se postavljati kad frekvencija prelazi 100 MHz. Takve frekvencije upotrebljava televizija. Odgovarajuće duljine vala se kreću oko jednog metra u uzduhu. Ako se smatra vrlo malenim ono što iznosi 1%, onda razmak među vodičima od jednog centimetra može još zadovoljiti uvjet za mali razmak prema duljini vala. Tek je televizijska frekvencija dovoljno visoka

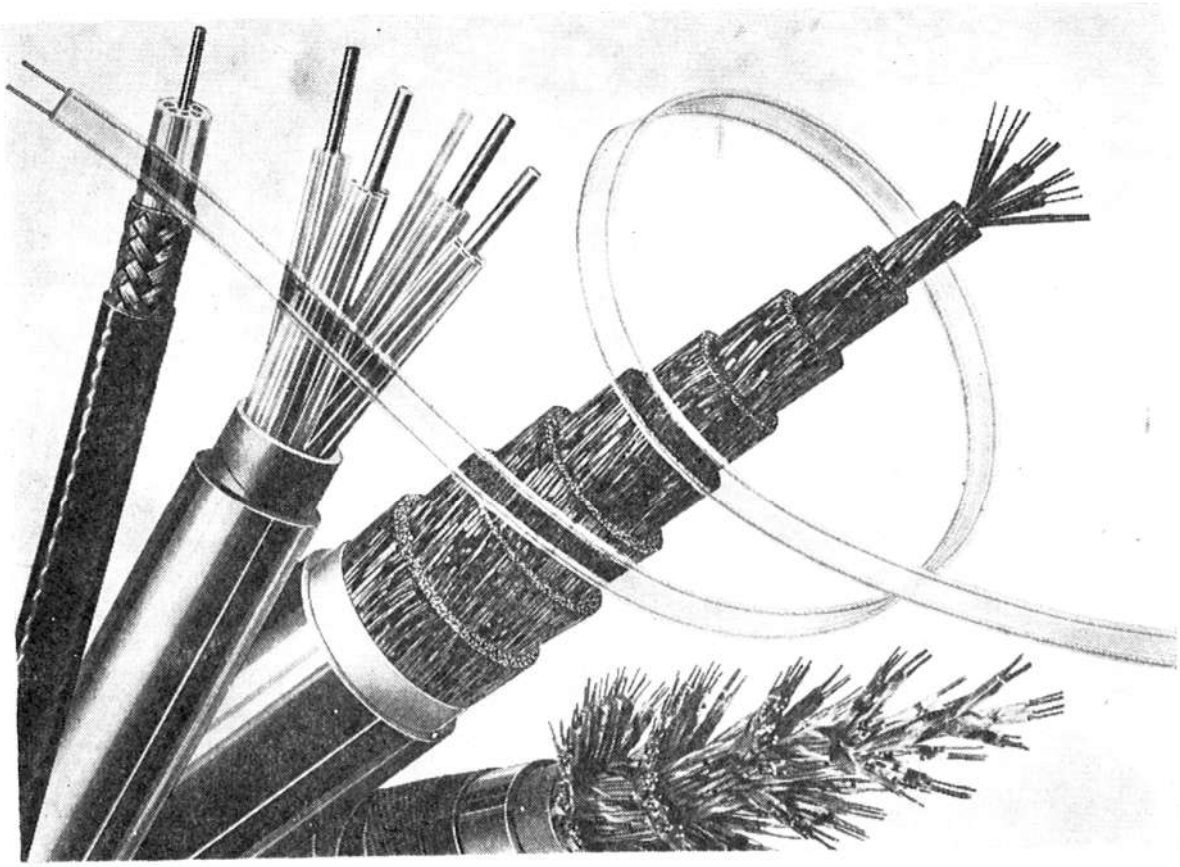


Sl. 5.3. Stupna antena za emisiju srednjeg vala. Cijeli stup je na izolatorima. Foto RT Zagreb.

da treba paziti na razmak među vodičima, da li ulaze u kategoriju električnog voda.

Pogon energetskih vodova se bitno razlikuje od pogona komunikacionih vodova. U prijenosu energije održava se frekvencija konstantnom prilično točno na 50 Hz, odnosno 60 Hz. Uz frekvenciju se održava pogonski napon konstantnim koliko

je to moguće. Tipično je za energetske vodove da se napon i frekvencija održavaju konstantnima. Dapače, izbjegavaju se viši harmonici u naponu i struji. Tako je u stacionarnom pogonu. No suprotno je u komunikacionoj tehnici. Tamo su napon i frekvencija tipično promjenljivi. Vrlo često je pogon impulsni. Osnovni je zadatak komunikacionog voda da omogućuje prijenos signala i mjernih veličina što boljega kvaliteta. Kvalitet i sigurnost pogona postavljaju se na prvo mjesto u komunikacionoj tehnici. Teorija komunikacionih vodova je zamršenija od teorije energetskih vodova. Ti se vodovi razlikuju i po svojoj duljini. Energetski vodovi ne dosižu



Sl. 5.4. Kabeli u komunikacionoj tehnici.

duljinom niti približno svoju duljinu vala u uzduhu, tj. 6000 km ili 5000 km. Tek mreže vodova imaju ukupne duljine koje prelaze duljinu vala. Ali ta duljina nije mjerodavna, već samo duljina između dvije čvorne točke gdje su uključene transformatorske stanice ili se vodovi račvaju. Duljina komunikacionih vodova dolazi u red veličine duljine vala, a može je i mnogostruko prijeći. Dapače, duljina voda se ne može uspoređivati s duljinom vala, jer je pogon impulsni. Zato se smije govoriti o duljini impulsa, koja je mnogo manja od duljine voda. Dok se duljina impulsa mjeri centimetrima ili metrima, duljina voda se mjeri kilometrima ili stotinama kilometara. To je također jedna od razlika između energetskih i komunikacionih vodova.

5.1.1. Podjela vodova

Energetski vodovi nemaju mnogo vodiča paralelno. Vodovi visokog napona su najčešće jednostruki trofazni i dvostruki trofazni, sa zaštitnim užetima. Oni, dakle, mogu imati najviše osam vodiča paralelno. Naročito visoki naponi od 400 kV i više zahtijevaju pojedine vodiče u *snopu*, te se u tom slučaju pojavljuje više vodiča koji idu paralelno u vodu. Snop sadrži obično samo dva ili tri vodiča. U novije vrijeme se prelazi na prijenos električne energije jednosmjernom strujom visokog napona. U takvom slučaju su eventualno samo dva vodiča. Posebna kategorija energetskih vodova su vodovi u električnoj vuči. Tamo se pojavljuje samo jedan vodič po kojem klizi oduzimač struje, a nalazi se na lokomotivi ili tramvaju. Povratni vodič su tračnice po kojima se vozilo kreće. Energetski vodovi u razvodu električne energije su toliko raznoliki, da bi bilo vrlo teško dati njihov prikaz u ovako kratkom obliku. Oni svi idu u kategoriju kratkih vodova, koji imaju najjednostavniju teoriju. Energetski kabeli visokog napona imaju svaku fazu za sebe izoliranu i oklopljenu, dapače se izvodi kao zasebni jednožilni kabel. Oklopi djeluju kao pasivni vodiči, te oni unose nov element u analizu stanja na vodu koji je sastavljen od kabela.

Najstariji tip **komunikacionih vodova** je sastavljen od vodiča smještenih na stupovima u uzduhu. Vodiči su razmaknuti međusobno na malu udaljenost, 10 do 20 cm, a ima ih čak i nekoliko desetaka paralelno. Komunikacioni kabel sve više istiskuje vod u uzduhu. Vodiči u kabelu su u parovima ili po dva para u četvorkama. Takvih parova ima u kabelu na stotine. Cijeli snop vodiča je oklopljen metalnim oklopom zbog zaštite, a on je ujedno dodatni vodič u elektromagnetskom smislu. U novije vrijeme se sve više upotrebljava koaksijalni kabel u telekomunikacijama, jer su gubici u njemu manji nego u običnih vodova, a o njima se mora voditi više računa prelaskom na visoku frekvenciju i impulsni pogon.

Namoti električnih strojeva i transformatora ulaze u kategoriju električnih vodova kad se želi analizirati ponašanje putujućih valova u tim aparatima. Stacionarni pogon ne zahtijeva da se namot promatra kao vod. Za to je dovoljna teorija strojeva i transformatora. U stacionarnom pogonu duljina vala je mnogo veća od duljine vodiča u namotu, te se namot u cjelini smije promatrati kao sustav u statičkom stanju. Frekvencija napona i struja u električnih strojeva je općenito 50 Hz ili 60 Hz, a samo u posebnim slučajevima može doseći i do 10 kHz. U svakom slučaju, čak i kod viših harmonika najvišeg reda, duljina je vala tolika, da je duljina vodiča u namotu znatno ispod nje. Energetski transformatori potpadaju pod iste kriterije kao i energetski vodovi. Komunikacioni transformatori idu zajedno s komunikacionim vodovima. Klasični vodovi imaju vodiče u pravcu. Vodiči u transformatorima su namotani na cilindru, najčešće kružnog presjeka. Može se desiti da su dimenzije namota mnogo manje od duljine vala, ali je duljina vodiča u redu veličine duljine vala ili čak mnogo veća od duljine vala. Međutim, svi namoti strojeva i transformatora se ponašaju kao vodovi, ako se promatra ponašanje putujućeg vala nakon ulaska u namot.

Sasvim posebna vrsta vodova su **antene,** koje služe kao izvor elektromagnetskih valova u telekomunikacionoj tehnici. Antena je vod gledan iz emisionog uređaja. Ona je izvor elektromagnetskih valova gledana iz okolnog prostora. Teorija vodova se samo djelomično primjenjuje na antene. S druge strane, njezine emisione sposobnosti se ne mogu istražiti bez pomoći teorije vodova. Strogo uzeto, teorija antena je samostalna teorija, koja se izvodi iz teorije vodova i teorije emisije elektromagnetskih valova.

Vodiči vodova su od bakra, zatim od aluminija i bronce. U energetskoj primjeni pojavljuju se kombinirani vodiči od aluminija i čelika. Katkad se pojavljuju posrebreni bakreni vodiči u komunikacionoj tehnici. Materijal vodiča ne utječe na teoriju vodova.

Električni vodovi su jedan od najznačajnijih konstruktivnih elemenata elektrotehnike. Oni zaslužuju da ih se posebno prikaže. Duljina vala upotrebljene veličine, napona ili struje, osnovni je kriterij po kojem se odabire pristup analizi i utvrđivanju stanja na vodu. Mjerodavna je duljina vala, karakteristična za materijal koji okružuje vodiče voda. Na taj način se ustanovljavaju dvije velike grupe vodova: *kratki* i *dugi* vodovi. U osnovi je teorija obiju grupa vodova ista, samo se ona znatno pojednostavnjuje u kratkih vodova. Druga je velika podjela vodova na *homogene* i *nehomogene* vodove. Vodove se karakterizira *konstantama* voda. Prema tome, ako su konstante voda nepromjenljive duž voda, vod je u grupi homogenih vodova, a inače se nalazi među nehomogenim vodovima. Svi dosada prikazani vodovi nalaze se među kratkim i dugim vodovima, a uz to su i među homogenim ili nehomogenim vodovima. Tipični nehomogeni vod je antena. Ako se posebno ne istakne, vod se smatra homogenim.

5.2. KRATKI VOD

Vod se sastoji od više vodiča smještenih paralelno. Presjek vodiča se ne mijenja po njegovoj duljini. Među vodičima postoje razlike potencijala ili naponi, a njima teku struje uvjetovane elektromotornom silom izvora i impedancijom tereta na kraju voda. Energija se prenosi duž voda kroz izolator koji ispunjava prostor u okolišu vodiča. Jedan dio prenesene energije se potroši u vodičima voda za pokriće gubitaka. *Generatorska* ili *ulazna* strana voda je ona gdje se energija dovodi vodu, da bi se njime prenijela na drugi njegov kraj gdje se nalazi potrošač energije zbog kojeg se vrši prijenos. Strana potrošača neka se zove *teretna* ili *izlazna* strana voda. Duljina voda između njegova ulaza i izlaza je dovoljno malena da se napone i struje smije smatrati konstantnim u prvom približenju. To bi ujedno bila i definicija kratkog voda. Dovođenjem vodiča na određeni potencijal stvara se u njihovu okolišu električno polje, a prolaskom struje kroz vodiče nastaje magnetsko polje. Prolaz struje kroz vodiče pokorava se Ohmovu zakonu. U vodiču postoji stanovito longitudinalno električno polje, koje je potrebno da bi struja svladala otpor što ga pruža vodič njezinu prolazu. Ono je tangencijalno u odnosu na površinu vodiča, a konstantno je duž vodiča u prvom približenju.

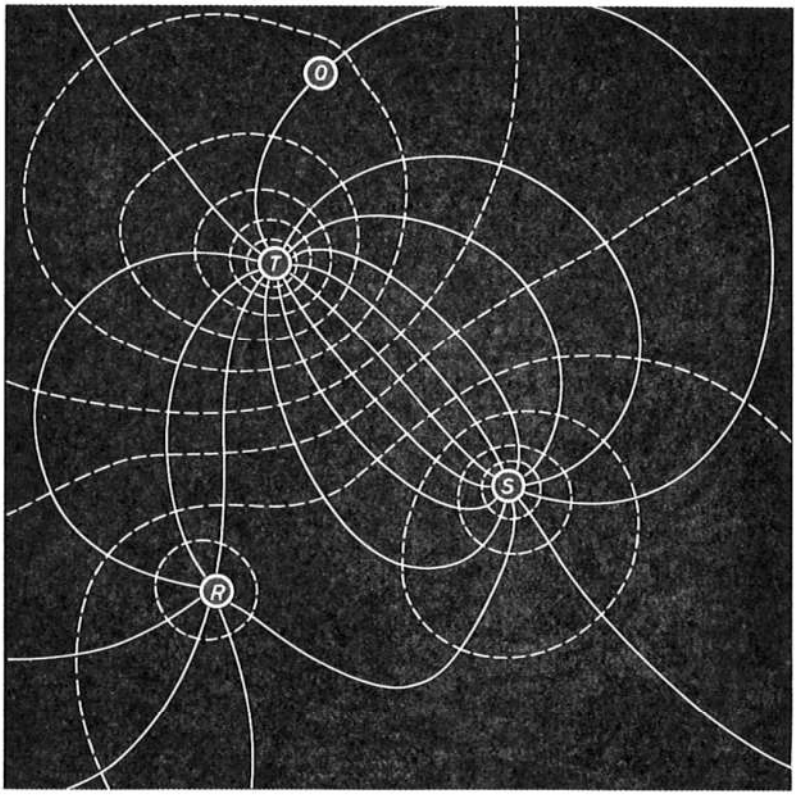
Slika polja je karakteristična za statička polja, jer su vodiči na malom međusobnom odstojanju, a vod je male duljine. Polje se smije prikazati silnicama, a silocijevi mogu pomoći pri određivanju električnog ili magnetskog toka. Električne silnice svršavaju ortogonalno na površinama vodiča, ako se zanemari tangencijalna komponenta zbog otpora vodiča. Na sl. 5.5. prikazano je silnicama elektromagnetsko polje voda od četiri vodiča protjecana strujom, kako je označeno na slici. Suma svih struja u jednom presjeku voda jednaka je nuli. Budući da su vodiči u pravcu, magnetske silnice svih vodiča su u zajedničkoj ravnini. Magnetsko polje nema longitudinalne komponente. Zato je i suma svih napona među vodičima jednaka nuli u jednoj ravnini presjeka voda. Ravnina presjeka voda je također ravnina crtanja na sl. 5.5.

Prema tome, u toj ravnini mora biti zadovoljen uvjet

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$u_{12} + u_{23} + u_{34} + u_{41} = 0$$

Prvi uvjet slijedi iz jednadžbe kontinuiteta, koja kaže da je suma svih struja iz nekog zatvorenog prostora jednaka nuli, ako u tome prostoru nema razgradnje naboja. Promatrani prostor je poluprostor koji je nastao presjekom voda ravninom. Stanje ukupnog naboja se ne mijenja u promatranom poluprostoru. Prema tome, suma svih struja koje teku u njega vodičima mora biti nula.

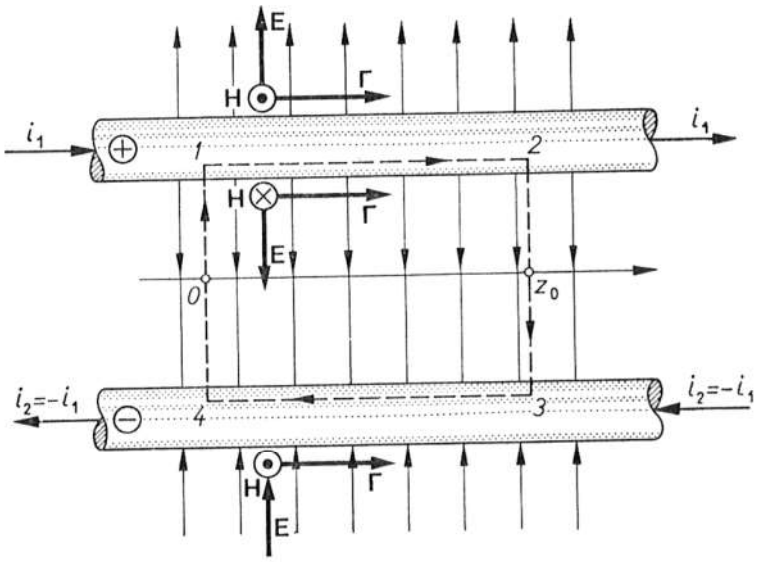


Sl. 5.5. Električne i magnetske silnice električnog voda sastavljenog od četiri ravna, paralelna vodiča.

Drugi uvjet se izvodi iz druge Maxwellove jednadžbe, koja kaže da je ukupni obilazni napon po nekoj petlji jednak smanjenju u jedinici vremena magnetskog toka ulančenog istom petljom. Petlja se postavi tako, da prolazi od jednog vodiča do drugog u ravnini crtanja. Budući da nema longitudinalne komponente magnetskog polja, nema niti ulančenog toka petljom, te je ukupni obilazni napon jednak nuli. To je isto kao da se kaže da je suma svih napona među vodičima — nula.

5.2.1. Dvožični vod

Najjednostavniji je vod s dva vodiča, međusobno paralelna, kako je to skicirano na sl. 5.6. Svaki od vodiča je na određenom potencijalu, koji određuju raspored električnog polja u okolnom prostoru. Kada su dva vodiča, nisu važni pojedini potencijali, već samo razlika potencijala među njima, odnosno napon među njima. Tako nije kad ima više vodiča, jer je tada potrebno poznavanje pojedinih potencijala. Magnetsko polje je određeno strujama pojedinih vodiča. Budući da su dva vodiča, njima moraju teći jednake struje, ali suprotna smjera. To također olakšava analizu



Sl. 5.6. Naponska integraciona petlja na dvožičnom vodu. Na njoj se izvodi naponska jednadžba voda.

dvožičnog voda. To su razlozi zašto se teoriji vodova pristupa preko prikaza *dvožičnog voda*. Duljina voda iznosi l, a tolika je i duljina vodiča na sl. 5.6. Početak koordinatnog sustava $z = 0$ postavlja se na ulazu u vod, a izlaz voda se nalazi na mjestu $z = z_0 = l$. Vodič 1 je na pozitivnom potencijalu, a njime teče struja u pozitivnom smjeru osi Z. Prema tome je elektromagnetsko polje tako formirano, da je prijenos energije u pozitivnom smjeru osi Z, kako pokazuje Poyntingov vektor. Cjelokupno elektromagnetsko polje zadovoljava Maxwellove jednadžbe.

Treba voditi računa o tome da su električni naponi i struje osnovne veličine u vodova. Zato valja upotrebljavati integralni oblik Maxwellovih jednadžbi. Direktno stanje napona i struja se vidi primjenom druge i pete jednadžbe ili Faradayeva zakona o elektromagnetskoj indukciji i jednadžbe kontinuiteta, koje glase

$$\oint_s \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \oint_S \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

5.2.2. Naponska jednadžba

Prva se jednadžba primjenjuje na petlju 1 2 3 4 1 na sl. 5.6. Ta petlja ima četiri stranice, od kojih stranica 12 prolazi vodičem 1 neposredno ispod površine, a stranica 34 prolazi vodičem 2. Stranice 23 i 41 su okomite na druge dvije i spajaju vodič 1 i vodič 2. Linijski integral jakosti električnog polja po vodiču od 1 do 2 daje *pad napona u vodiču* 1

$$\int_1^2 \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = E_0\, z_0 = u_{v1} \tag{5.2}$$

Tu je E_0 jakost električnog polja u vodiču na njegovoj površini, a ona je konstantna duž vodiča. Isti linijski integral od 3 do 4 daje pad napona u_{v2} u vodiču 2. Ostala dva linijska integrala daju napone između vodiča na kraju voda i na njegovu početku

$$\begin{aligned} &\int_2^3 \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = u_t && \text{teretna strana} \\ &\int_4^1 \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = -u_g && \text{generatorska strana} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Naponska jednadžba u (5.1) sada glasi

$$-(u_t - u_g) = u_v + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{5.4}$$

Magnetski tok Φ, ulančen zadanom petljom 1 2 3 4 1, proizvode struje obaju vodiča u vodu, a on se izražava odgovarajućom strujom i induktivitetom. Pad napona $u_v = u_{v1} + u_{v2}$ je ukupni pad napona u vodičima voda.

5.2.3. Strujna jednadžba

Druga jednadžba u (5.1) mora se primijeniti na zatvorenu plohu, kao što je prikazano na sl. 5.7., na bilo kojem od dva vodiča. Vodič kružnog presjeka obuhvaćen je kružnim cilindrom baze S_g i S_t, čiji je plašt S_p rasprostrt po površini vodiča. Volumen cilindra je koliki i volumen vodiča. Integral gustoće struje po plohi cilindra razbija se na plošne integrale po njegovim bazama i po njegovu plaštu. Plošni integrali po bazama daju struje vodiča na generatorskoj i teretnoj strani

$$\begin{aligned} &\int_{S_g} \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -i_g && \text{generatorska strana} \\ &\int_{S_t} \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = i_t && \text{teretna strana} \end{aligned} \tag{5.5}$$

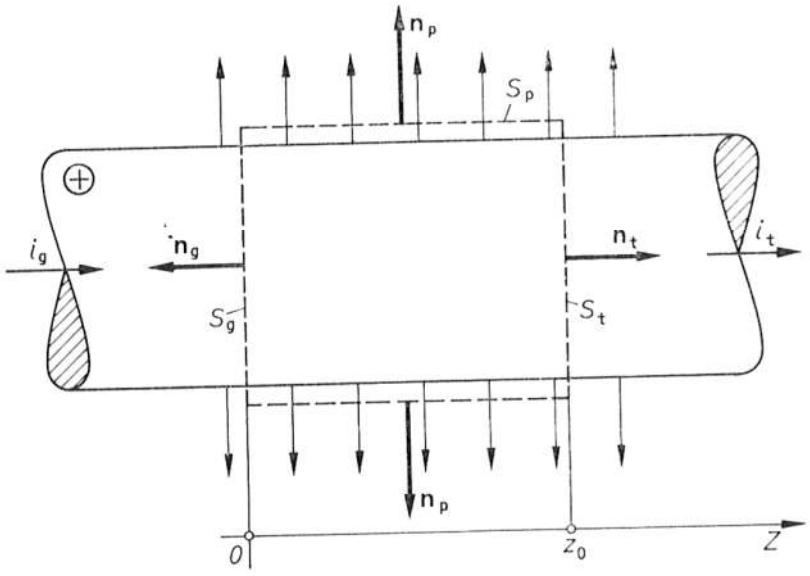
Plošni integral po plaštu cilindra daje *struju odvoda* zbog loše izolacije

$$\int_{S_p} \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = i_p \tag{5.6}$$

Strujna jednadžba u (5.1) dobiva sada oblik

$$-(i_t - i_g) = i_p + \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.7}$$

Naboj na vodiču Q treba gledati kao električni tok Q koji svršava na vodiču, a prikazuje se naponom prema drugom vodiču voda i odgovarajućim kapacitetom

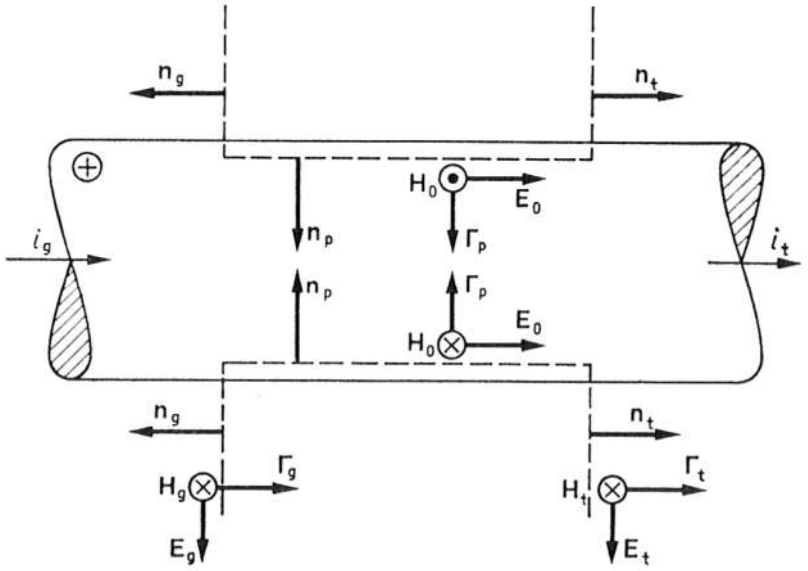


Sl. 5.7. Integracioni cilindar oko jednog vodiča dvožičnog voda. Na njemu se izvodi strujna jednadžba voda.

Naponska i strujna jednadžba su slično građene. Prva govori o gubitku ili *padu napona vodiča*, a druga daje gubitak ili *odvod struje* s vodiča. Obje jednadžbe su osnovne jednadžbe vodova. Iz njih se izvode sve ostale jednadžbe najzamršenijih električnih vodova. U njima postoje na desnoj strani četiri veličine: u_v, i_p, Φ i Q, od kojih svaka za sebe zaslužuje da se analizira. Prve dvije, u_v, i_p, postoje, jer postoje gubici u vodiču i u okolnom izolatoru. Da nema gubitaka, ne bi bilo niti njih. Druge dvije veličine, Φ i Q, predstavljaju elektromagnetsku *spregu* promatranog vodiča i susjednih vodiča u vodu. Među njima magnetski tok Φ proizvodi *magnetsku* ili *induktivnu spregu* među vodičima, a električni tok Q je mjerodavan za *električnu* ili *kapacitivnu spregu* među vodičima voda.

5.2.4. Bilansa energije

Energetska analiza bolje objašnjava dobivene veličine. Treba izvršiti bilansu elektromagnetske energije u prostoru prikazanom na sl. 5.8. Mjerodavni prostor je ograničen plaštem S_p koji ide po površini oba vodiča, ali u samom vodiču. Zatim



Sl. 5.8. Integracioni prostor, u kome se vrši energetska bilansa u okolišu dvožičnog voda.

plohama S_g na generatorskoj strani i S_t na teretnoj strani, a one su dijelovi ravnina $z = 0$ i $z = z_0$. Na plohama su označene pripadne normale $\mathbf{n}_p$, $\mathbf{n}_g$ i $\mathbf{n}_t$. Električna i magnetska energija, akumulirana u promatranom prostoru, troši se na gubitke u njemu i na strujanje energije iz njega. Akumulirane energije, električna i magnetska, iznose

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon\,\mathbf{E}^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}Q\,u$$
$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \mu\,\mathbf{H}^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\Phi\,i \qquad (5.8)$$

Napon u i struja i vodiča su *prosječni* iznosi između generatorske i teretne strane

$$u = \frac{1}{2}(u_g + u_t)$$
$$i = \frac{1}{2}(i_g + i_t) \qquad (5.9)$$

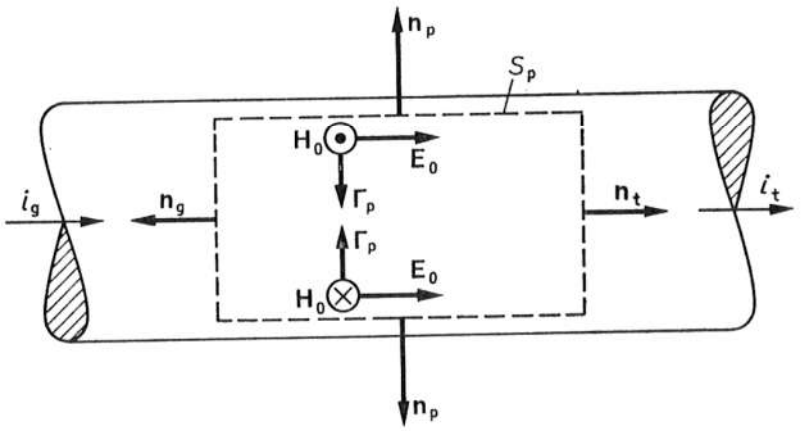
Ako se vodi računa o označenim smjerovima normala i Poyntingovih vektora, bilansa energije se izražava jednadžbom

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_\mathrm{e}+W_\mathrm{m})=\int_V \varkappa\,\mathbf{E}^2\,\mathrm{d}V+\int_{S_\mathrm{p}}\boldsymbol{\Gamma}_\mathrm{p}\,\mathbf{n}_\mathrm{p}\,\mathrm{d}S_\mathrm{p}+\int_{S_\mathrm{g}}\boldsymbol{\Gamma}_\mathrm{g}\,\mathbf{n}_\mathrm{g}\,\mathrm{d}S_\mathrm{g}+\int_{S_\mathrm{t}}\boldsymbol{\Gamma}_\mathrm{t}\,\mathbf{n}_\mathrm{t}\,\mathrm{d}S_\mathrm{t} \tag{5.10}$$

Kroz *plašt vodiča* struji u njega energija izražena snagom

$$P_\mathrm{v}=\int_{S_{\mathrm{p}1}+S_{\mathrm{p}2}}\boldsymbol{\Gamma}_\mathrm{p}\,\mathbf{n}_\mathrm{p}\,\mathrm{d}S_\mathrm{p}=\int_{S_{\mathrm{p}1}+S_{\mathrm{p}2}}(\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0)\,\mathbf{n}_\mathrm{p}\,\mathrm{d}S_\mathrm{p}=u_\mathrm{v}\,i \tag{5.11}$$

gdje su $\mathbf{E}_0$ i $\mathbf{H}_0$ jakosti polja na površini vodiča. Ona pokriva gubitke u vodiču i promjenu magnetske energije u njemu. Da se vidi točno od čega se ona sastoji, obuhvaćen je jednim cilindrom samo vodič, kako je prikazano na sl. 5.9. Cilindar



Sl. 5.9. Integracioni cilindar, u kome se vrši energetska bilansa oko jednog vodiča dvožičnog voda.

ima isti plašt S_p kao obuhvaćeni prostor na sl. 5.8. U vodiču se zanemaruje energija električnog polja, a postoji samo magnetska energija. Prema tome, snaga P_v koja struji u vodič troši se na gubitke u vodiču i na povećanje magnetske energije u njemu, što se izražava jednadžbom

$$P_\mathrm{v}=-\int_{S_\mathrm{p}}\boldsymbol{\Gamma}_\mathrm{p}\,\mathbf{n}_\mathrm{p}\,\mathrm{d}S_\mathrm{p}=-\int_{S_\mathrm{p}}(\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0)\,\mathbf{n}_\mathrm{p}\,\mathrm{d}S_\mathrm{p}=\int_V\frac{\mathbf{J}^2}{\varkappa}\,\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}W_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} \tag{5.12}$$

Gubitke u vodiču treba prikazati otporom, a magnetsku energiju — induktivitetom. Otpor i induktivitet vodiča izražavaju se po jedinici njegove duljine.

Prema tome, energija koja struji u vodiče prikazuje se jednadžbom

$$P_v = l R i^2 + l L_u i \frac{di}{dt} \tag{5.13}$$

Konačno je pad napona u vodičima po jedinici duljine voda iz usporedbe jednadžbi (5.11) i (5.13)

$$\frac{u_v}{l} = R i + L_u \frac{di}{dt} \tag{5.14}$$

Ovdje su se pojavile nove *konstante, otpor voda* R i *unutarnji induktivitet* L_u po jedinici njegove duljine, koje omogućuju da se pad napona u vodičima voda izrazi slično kao što se to radi kod strujnih krugova. One su definirane postupkom kakav je ovdje prikazan u jednadžbama (5.11) do (5.13). Konstante R i L_u su određene isključivo energijom koja struji u vodiče iz okolnog prostora. Neophodno je prethodno poznavanje energije koja struji u vodič kroz njegov plašt, da bi se mogli ustanoviti otpor vodiča i njegov unutarnji induktivitet. Ovdje su $R = R_1 + R_2$ i $L_u = L_{u1} + L_{u2}$ nastali sumom istih veličina za pojedine vodiče. Takvo postavljanje definicije otpora vodiča ima dalekosežne posljedice. Definicija pokazuje da je otpor vodiča u vodu ovisan o elektromagnetskom stanju cjelokupnog voda, a ne samo pojedinog vodiča. To postavlja vrlo teške uvjete pri analizi stanja na vodu. S druge strane, uvođenje otpora i unutarnjeg induktiviteta znatno olakšava promatranje ponašanja napona i struja na vodu.

Gubici u izolatoru dani su prvim pribrojnikom u jednadžbi (5.10)

$$P_i = \int_V \varkappa \mathbf{E}^2 \, dV = u i_p \tag{5.15}$$

Prikazana jednakost sa $u i_p$ slijedi neposredno čim se zamisli cijelo strujno polje u izolaciji, prikazano strujnim cijevima. Strujne cijevi imaju provod kao što je definirano u poglavlju o statičkim poljima. Ovdje se ukupnom provodu daje naziv *odvod*, jer sudjeluje u odvodu struje s vodiča u vodu, a daje se također po jedinici duljine voda. Kad se usporede jednadžbe (5.6) i (5.15), pokazuje se da se struja odvoda i_p smije prikazati izrazom

$$i_p = l G u \tag{5.16}$$

jer se odvod G odnosi na jedinicu duljine voda.

Snage na generatorskoj i teretnoj strani, P_g i P_t, koje ulaze u obuhvaćeni prostor oko vodiča prema sl. 5.8., suprotna su predznaka, jer su normale $\mathbf{n}_g$ i $\mathbf{n}_t$ suprotno usmjerene. Prema smjerovima na sl. 5.8. generatorska snaga je negativna, a teretna snaga je pozitivna. Tako mora biti kad su generator i teret *izvan* promatranog prostora. Ako se tako postave obje snage, onda bilansa energije u obuhvaćenom prostoru pokazuje da smanjenje snage prenesene vodom ide na račun gubitaka u vodiču i izolaciji, te na povećanje električne i magnetske energije.

To se izražava jednadžbom

$$-(P_t - P_g) = l\,G\,u^2 + l\,R\,i^2 + \frac{dW_e}{dt} + \frac{dW_m}{dt} \tag{5.17}$$

Sada je u magnetskoj energiji sadržano i magnetsko polje u vodičima, obuhvaćeno unutarnjim induktivitetom vodiča.

Energija sustava vodiča kao u električnog voda prikazana je u trećem poglavlju. Tamo su uvedeni kapaciteti i induktiviteti. Električna i magnetska energija se izražavaju sa

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}\,C\,u^2\,l = \frac{1}{2}\,Q\,u \\ W_m &= \frac{1}{2}\,L\,i^2\,l = \frac{1}{2}\,\Phi\,i \end{aligned} \tag{5.18}$$

ako je C kapacitet voda od dva vodiča po jedinici duljine, a L je ukupni induktivitet po jedinici duljine voda, s uključenim unutarnjim induktivitetima. Prirast električne energije sustava od dva vodiča se postiže jednako zadržavanjem naboja i povećanjem potencijala ili zadržavanjem potencijala, a povećavanjem naboja. Slično rezoniranje je i s magnetskom energijom u vezi s tokom i strujom. Zbog toga je

$$\begin{aligned} \frac{dW_e}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,Q\,u\right) = \frac{1}{2}\,Q\,\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}\,u\,\frac{dQ}{dt} = u\frac{dQ}{dt} \\ \frac{dW_m}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\Phi\,i\right) = \frac{1}{2}\,\Phi\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{2}\,i\,\frac{d\Phi}{dt} = i\,\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \tag{5.19}$$

5.2.5. Konačni oblik jednadžbi voda

Može se pokazati da se na bilansu energije u (5.17) dolazi iz jednadžbi napona i struje (5.4) i (5.7) tako, da se prva množi prosječnom strujom, a druga — prosječnim naponom iz (5.9), te da se takve jednadžbe zbroje. Generatorska i teretna snaga iznose $P_g = u_g\,i_g$ i $P_t = u_t\,i_t$. Prema tome su *naponska i strujna jednadžba voda od dva* vodiča

$$\begin{aligned} -(u_t - u_g) &= l\,R\,i + \frac{d\Phi}{dt} \\ -(i_t - i_g) &= l\,G\,u + \frac{dQ}{dt} \end{aligned} \tag{5.20}$$

Treba uzeti u obzir da je u magnetskom toku Φ sadržan cjelokupni tok silnica što ga proizvode struje vodiča 1 i 2. On sadrži u vodičima tok koji je bio predstavljen unutarnjim induktivitetom $L_u = L_{u1} + L_{u2}$ i tok izvan vodiča koji se predstavlja

»vanjskim« induktivitetom L_v. Budući da se induktiviteti daju po jedinici duljine voda, magnetski tok se prikazuje odnosom

$$\Phi = l\,(L_u + L_v)\,i = l\,L\,i \tag{5.21}$$

Sad je $L = L_u + L_v = L_{u1} + L_{u2} + L_v$ induktivitet voda po jedinici njegove duljine.

Električni tok među vodičima se predstavlja kapacitetom, tj. $Q = C\,u$. Kapacitet C među vodičima voda daje se opet po jedinici njegove duljine.

Takva interpretacija tokova pomaže da se znatno pojednostavne jednadžbe voda. Stanje na vodu se sada prikazuje samo naponom i strujom, a jednadžbe konačno glase

$$\begin{aligned} -(u_t - u_g) &= l\left(R\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) \\ -(i_t - i_g) &= l\left(G\,u + C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

Konstante R, L, C i G, otpora, induktiviteta, kapaciteta i odvoda, zovu se **primarne konstante voda,** a odnose se na njegovu jedinicu duljine.

Jednadžbe kratkog voda (5.22) nisu podesne pri rješavanju na vodu. Struje i naponi na desnoj strani su prosječni iznosi prema (5.9), tj. oni su matematička sredina iznosa na generatorskoj i teretnoj strani. Treba uvesti nove konstante

$$\begin{aligned} Z &= R + L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \\ Y &= G + C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Upotrijebivši nove konstante, odnosi među naponima i strujama na ulazu u vod i na izlazu iz njega prikazuju se sa

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{4}\,Z\,Y\,l^2\right) U_g &= \left(1 + \frac{1}{4}\,Z\,Y\,l^2\right) U_t + l\,Z\,I_t \\ \left(1 - \frac{1}{4}\,Z\,Y\,l^2\right) I_g &= \left(1 + \frac{1}{4}\,Z\,Y\,l^2\right) I_t + l\,Y\,U_t \end{aligned} \tag{5.24}$$

To su konačne jednadžbe stanja na kratkom vodu. One se smiju još više pojednostavniti, što je u skladu s definicijom kratkog voda. Kratki vod mora imati takve konstante i duljinu, da je

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\,|\,Z\,Y\,|\,l^2 &= \left(\frac{l\,|\,\gamma\,|}{2}\right)^2 \ll 1 \\ \gamma^2 = Z\,Y &= \left(R + L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(G + C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned} \tag{5.25}$$

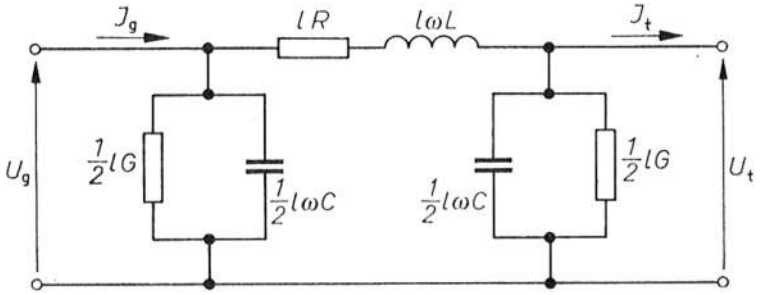
Tada su jednadžbe kratkog voda jednostavne, te se naprosto pišu

$$\begin{aligned} U_g &= U_t + l\,Z\,I_t \\ I_g &= I_t + l\,Y\,U_t \end{aligned} \tag{5.26}$$

One se upotrebljavaju u tome obliku, jer kratki vod mora zadovoljiti uvjet (5.25)

5.2.6. Stacionarni pogon

Stacionarni pogon je osobito jednostavan kad su veličine harmoničke. Tada se primjenjuje način prikazivanja usvojen u strujnim krugovima. Na sl. 5.10. prika-



Sl. 5.10. Električna shema kratkog dvožičnog voda.

zana je shema kratkog voda ako su primijenjene harmoničke veličine. Prikazana shema je ujedno shema *simetričnog četveropola* oblika D, tj. oblika trokuta. Impedancija

$$l\,Z = l\,(R + j\,\omega\,L) \tag{5.27}$$

se još zove *uzdužna* impedancija. Ona sadrži u sebi otpor voda i induktivnu reaktanciju. Da bi četveropol na sl. 5.10. točno odslikao jednadžbu (5.24), morala bi uzdužna impedancija biti

$$Z_0 = \frac{l\,Z}{1 - \frac{1}{4}\,Z\,Y\,l^2} = \frac{l\,(R + j\,\omega\,L)}{1 - \frac{1}{4}\,\gamma^2\,l^2}$$

Budući da je vod kratak, zanemaruje se $(\gamma\,l/2)^2$ prema jedinici, te se dobiva kao što je prikazano na sl. 5.10. Admitancija

$$l\,Y = l\,(G + j\,\omega\,C) \tag{5.28}$$

se još zove i *poprečna* admitancija. Ona sadrži odvod voda i kapacitivnu susceptanciju. Ona se u simetričnom četveropolu na sl. 5.10. dijeli na polovice, od kojih je jedna polovica na ulazu, a druga na izlazu. To je ujedno točan iznos poprečne admitancije prema jednadžbi (5.24).

Definicija kratkog voda prema (5.25) traži da je $(l\,|\,\gamma\,|)^2 \ll 1$, a konstanta γ iznosi kod harmoničkih veličina

$$\gamma = [(R + j\,\omega\,L)\,(G + j\,\omega\,C)]^{1/2} \tag{5.29}$$

Ova konstanta se naziva **valna konstanta.** Ona ima bitnu ulogu u kategoriziranju vodova. O njoj ovisi da li je neki vod kratki uz svoju zadanu duljinu. Kad su veličine harmoničke, treba rastaviti valnu konstantu na realni i imaginarni dio, tj. u oblik

$$\gamma = \alpha + j\,\beta \tag{5.30}$$

kakav je već primijenjen u teoriji ravnih valova. Ako se uvedu pomoćne konstante

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \omega\,(L\,C)^{1/2} \\ \operatorname{tg}\delta &= \frac{G}{\omega\,C}, \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{R}{\omega\,L} \end{aligned} \tag{5.31}$$

dobiva se iznos konstanti α i β u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta_0} &= \left[\frac{1 + \cos(\delta + \varepsilon)}{2\cos\delta\cos\varepsilon}\right]^{1/2} \\ \frac{\alpha}{\beta_0} &= \left[\frac{1 - \cos(\delta + \varepsilon)}{2\cos\delta\cos\varepsilon}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{5.32}$$

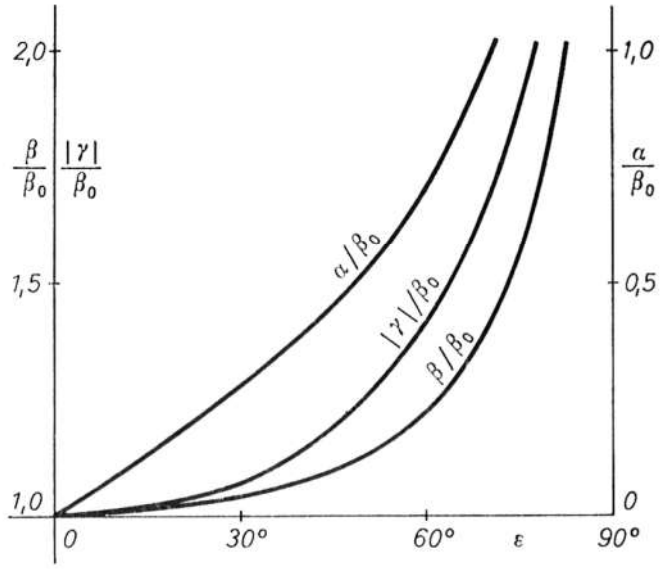
Apsolutni iznos valne konstante slijedi također iz odnosa prema β_0, te je

$$\frac{|\gamma|}{\beta_0} = (\cos\delta\cos\varepsilon)^{-1/2} \tag{5.33}$$

Kutovi δ i ε, uvedeni sa jednadžbom (5.31), su **kutovi gubitaka** u električnom vodu. Prvi kut definira *gubitke u izolaciji* između vodiča, a drugi kut je vezan za *gubitke u vodičima voda.* Oni ispravljaju iznos valne konstante γ, odnosno iznose konstanti α i β. Sve spomenute konstante su najmanje kad u vodu nema gubitaka, tj. $\delta = \varepsilon = 0$. Tada je naprosto $\gamma = j\beta = j\beta_0$, $\alpha = 0$. Čim su kutovi gubitaka različiti od nule, iznosi konstanti γ, α i β se povećavaju. Na sl. 5.11. su prikazane krivulje ovisnosti konstanti $|\gamma|/\beta_0$, α/β_0 i β/β_0 o kutu ε, pri čemu su zanemareni gubici u izolaciji, tj. $\delta = 0$. Naglo povećavanje konstanti nastaje kad *kut gubitaka u vodičima* ε prelazi 75°.

Ovdje je interesantan apsolutni iznos valne konstante, jer on određuje granicu kratkog voda prema jednadžbi (5.25). Prema rečenom se zaključuje da se granična duljina kratkog voda smanjuje čim se gubici u vodu povećavaju. Ona je najveća u vodu bez gubitaka. Nejednakost u (5.25) se zadovoljava kad je

$$l\,|\gamma| < 0{,}2 \tag{5.34}$$



Sl. 5.11. Dijagram valne, prigušne i fazne konstante voda u ovisnosti o kutu gubitaka. Konstante su prikazane u relativnom iznosu prema valnoj, odn. faznoj konstanti β_0 voda bez gubitaka. Gubici u izolatoru su zanemareni.

To je u voda bez gubitaka zadovoljeno kad je duljina voda $l < 0{,}03\ \lambda$, ako je λ duljina vala u izolatoru koji opkoljava vodiče voda. Tablica 5.1. pokazuje nekoliko graničnih duljina vodova

TABLICA 5.1.

Energetski, visokonaponski, zračni vod, 50 Hz	180 km
Energetski, visokonaponski, kabel, 50 Hz	90 km
Telefonski, zračni vod, 20 kHz	450 m
Telefonski kabel, papirom izoliran, 20 kHz	250 m
Koaksijalni kabel, 1 MHz	9 m
Antenski kabel za televiziju, 200 MHz	45 mm

Pri velikim gubicima su iznosi kutova gubitaka, δ i ε, blizu 90°, a njihovi tangensi poprimaju vrlo velike iznose. I valna konstanta poprima velik iznos. Zato je granična duljina kratkih vodova znatno umanjena u odnosu na vod iste frekven-

cije, ali zanemarivih gubitaka. Uvjet za vod velikih gubitaka glasi $\operatorname{tg}^2 \delta \gg 1$ ili $\operatorname{tg}^2 \varepsilon \gg 1$, što je zadovoljeno odnosom

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta > 10 \quad &\text{ili} \quad \operatorname{tg} \varepsilon > 10 \\ \delta > 84° \quad &\text{ili} \quad \varepsilon > 84° \end{aligned} \tag{5.35}$$

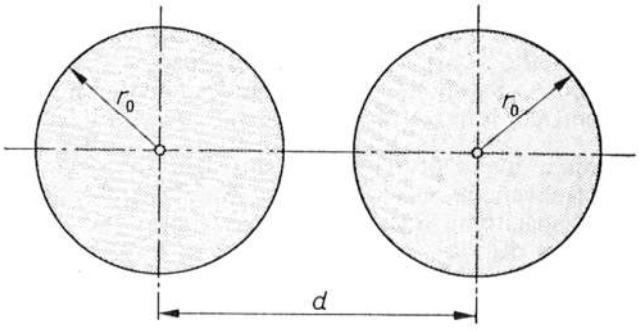
Obje nejednakosti smiju nastupiti i istovremeno. Najčešći je slučaj kad su gubici u izolatoru zanemarivi, a postoje samo veliki gubici u vodičima voda, tj. $\delta = 0$, $\varepsilon > 84°$ ili $R > 10\ \omega L$. Iznos valne konstante se naprosto izražava sa

$$|\gamma| = \beta_0 \sqrt{\operatorname{tg} \varepsilon} = \sqrt{\omega C R}, \qquad \varepsilon > 84°, \quad \delta = 0 \tag{5.36}$$

Takav je dvožični vod kad su vodiči vrlo blizu jedan drugome, a pogon je pri niskoj frekvenciji. Vodovi kućnih instalacija ulaze u kategoriju vodova velikih gubitaka.

Poprečnom admitancijom se odvija odvod struje iz vodiča. Ona je ujedno *poprečna sprega* među vodičima voda. Prikazani vod ima *kapacitivnu* poprečnu spregu. Uzdužna impedancija izaziva osnovni pad napona u vodu. Vod ima dva karakteristična pogona: **pogon praznog hoda** se uspostavlja kad nema nikakvog opterećenja na teretnoj strani. Za njega je karakteristično da je struja tereta nula, tj. $I_t = 0$. **Pogon kratkog spoja** se uspostavlja kratkim spajanjem teretne strane, a za njega je karakteristično da je napon tereta nula, tj. $U_t = 0$. Ta dva pogona su krajnji slučajevi, a upotrebljavaju se u mjerenju impedancija voda. Praznim hodom se mjeri poprečna admitancija $l\,Y$, a kratkim spojem se mjeri uzdužna impedancija $l\,Z$. To pokazuju i jednadžbe voda (5.26).

PRIMJER 5.1. Izolirani dvožični vod, PP/R, se upotrebljava za instalacije u zgradama za pogonske napone do 380 V. Vod u ovom primjeru ima bakrene vodiče standardnog presjeka od 2,5 mm², čije su osi razmaknute na udaljenost 3,8 mm, a uliveni su u polivinilklorid. Vod-



Sl. 5.12. Presjek dvožičnog voda s vodičima kružnog presjeka.

ljivost bakrenih vodiča iznosi 46 MS/m, pri temperaturi od 75° C, i to je obračunska vodljivost. Raspored vodiča se vidi na sl. 5.12. Induktivitet i kapacitet su bili određeni u drugom poglavlju i to u 2.13 i 2.10.

Dva paralelna okrugla vodiča imaju induktivitet prema jednadžbi (2.108).

$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\left[\ln\left(\frac{d}{R_0}\right) + \frac{1}{4}\right] = 0{,}68\ \mu\text{H/m}$$

a kapacitet je prema jednadžbi (2.88)

$$C = \frac{\pi\,\varepsilon}{\ln\left\{\frac{d}{2R_0} + \left[\left(\frac{d}{2R_0}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\right\}} = 60\ \text{pF/m}$$

Kod zadanog voda iznosi $d/R_0 = 4{,}26$, a dielektričnost 3,0. Otpor voda iznosi

$$R = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{2}{S_v} = 17{,}4\ \text{m}\Omega\text{/m}$$

Pogon voda je pri frekvenciji 50 Hz, te su induktivna reaktancija $\omega L = 0{,}214$ mΩ/m i kapacitivna susceptancija $\omega C = 19$ nS/m.

Odvod voda je zanemaren. Induktivna reaktancija je tek 1,2 % otpora voda, te je njezin utjecaj zanemariv u uzdužnoj reaktanciji. Apsolutni iznos konstante iz (5.36) jednak je

$$|\gamma| = \sqrt{\omega C R} = 1{,}81 \cdot 10^{-5}\ \text{1/m}$$

a traži se da je $\left|\frac{\gamma l}{2}\right| \ll 1$. Taj je uvjet zadovoljen kad je

$$l < \frac{0{,}2}{|\gamma|} = 11{,}0\ \text{km}$$

Zadani vod ulazi u grupu kratkih vodova kad je kraći od 11 km okruglo. Za toliku duljinu iznosi poprečna admitancija $l\,Y = 210\ \mu$S, a struja odvoda je $l\,Y\,U_t = 46$ mA. To je suviše malena struja da bi je trebalo uzeti u obzir pri proračunu mreže. Ona je tolika kad je vod dug 11000 m, što se nikad ne izrađuje u jednoj duljini, jer bi pad napona bio suviše velik. Otpor voda za toliku duljinu iznosi 191 Ω, što se ne može niti zamisliti kao otpor nekoga voda za prijenos energije. Ako se dozvoli pad napona od 5 %, tj. 11 V, pri 220 V pogonskog napona, duljina voda smije biti 63 m za struju tereta od 10 A. Stanje napona i struja u vodovima instalacija u zgradama određuje se samo njihovim otporom, ako je pogonska frekvencija 50 Hz, a niski pogonski napon do 500 V.

Tek malo se mijenjaju uvjeti prijenosa ako se prijeđe na pogonsku frekvenciju od 800 Hz, čemu odgovara kružna frekvencija $\omega = 5\,000$ r/s. Induktivna reaktancija se poveća adekvatno na $\omega L = 3{,}4$ mΩ/m, a kapacitivna susceptancija na iznos $\omega C = 0{,}30\ \mu$S/m. Granična duljina voda je nešto manja nego za 50 Hz i iznosi 2800 m. Poprečna admitancija za graničnu duljinu voda iznosi 0,84 mS. Ovisi o pogonskim uvjetima da li treba uzeti u obzir poprečnu admitanciju.

PRIMJER 5.2. Energetski vod pogonskog napona 10 kV, 50 Hz, ima **dva vodiča** kao na sl. 5.12. Razmak među osima vodiča iznosi 1200 mm. Vodiči su bakreni, vodljivosti bakra od 56 MS/m, pri temperaturi 20°C, a imaju površinu presjeka 93,2 mm². Oni su standardna užeta minimalnog presjeka 95 mm², a vanjski promjer im je 12,5 mm. Vod se nalazi u uzduhu. Otpor voda iznosi

$$R = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{2}{S_v} = 0{,}384\ \text{m}\Omega\text{/m}$$

Induktivitet i kapacitet se računaju istim izrazima kao u prethodnom primjeru, tj.

$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\left[\ln\left(\frac{d}{R_0}\right) + \frac{1}{4}\right] = 2{,}2\ \mu\text{H/m}$$

$$C = \frac{\pi\,\varepsilon_0}{\ln\left\{\frac{d}{2R_0} + \left[\left(\frac{d}{2R_0}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\right\}} = 5{,}3\ \text{pF/m}$$

Odvod se smije zanemariti. Induktivna reaktancija i kapacitivna susceptancija iznose za frekvenciju 50 Hz

$$\omega L = 0{,}69\ \text{m}\Omega\text{/m}$$

$$\omega C = 1{,}67\ \text{nS/m}$$

Kutovi gubitaka iz (5.31) iznose

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\omega L}\right) = 28{,}3°, \qquad \delta = 0$$

Karakteristična konstanta iz (5.31) iznosi

$$\beta_0 = \omega\sqrt{L\,C} = 1{,}08 \cdot 10^{-6}\ \text{1/m}$$

Iznos valne konstante slijedi iz (5.33)

$$|\gamma| = \frac{\beta_0}{(\cos\delta\cos\varepsilon)^{1/2}} = 1{,}14 \cdot 10^{-6}\ \text{1/m}$$

Da bi se zadani vod smio promatrati kao kratki vod, mora biti zadovoljena nejednakost u (5.34), odakle slijedi granična duljina voda

$$l = \frac{0{,}2}{|\gamma|} = 175\ \text{km}$$

Uzdužna impedancija iznosi pri graničnoj duljini voda

$$l\,Z = l\,(R + j\,\omega\,L) = 139\,\exp(j\,61{,}7°)\ \text{oma}$$

a poprečna admitancija je

$$l\,Y = l\,j\,\omega\,C = 0{,}29\,\exp(j\,90°)\ \text{milisimensa}$$

Kako je to energetski vod, ne smije se dozvoliti velik pad napona. On smije iznositi do 5 %. Da b. se mogla prenositi značajnija snaga, vod mora biti znatno kraći od svoje granične duljine. U o[1]me slučaju obično je struja odvoda zanemariva prema struji tereta, te se stanje na vodu računa samo s uzdužnom impedancijom.

5.3. KONSTANTE VODA

Kratki vod je poslužio da se ustanove **konstante voda** R, G, L, C. Otpor, odvod, induktivitet i kapacitet po jedinici duljine voda su konstante voda koje nadomještaju konstante materijala: vodljivost, permeabilnost i dielektričnost. One su potrebne čim se stanje predstavlja integralnim veličinama, naponom i strujom, a karakteristične su za statičko stanje. Konstante voda nisu konstantne ako se strogo gleda na njih. One nisu toliko konstantne kao što su to konstante materijala, već ovise o pogonskom stanju, pa čak ne mijenjajući pogonsku frekvenciju u stacionarnom pogonu. To se vidjelo iz prikaza u prethodnom poglavlju. Energetski pristup njihovu prikazivanju pokazuje najjasnije njihovu ulogu. Dok su otpor i odvod čisti potrošači energije u vodičima, odnosno u izolaciji, induktivitet i kapacitet su akumulatori elektromagnetske energije. Strogo uzevši, svi vodovi imaju sve četiri konstante, samo što one različito dolaze do izražaja. Primjer u prethodnom poglavlju je pokazao da se u kućnim instalacijama sa 50 Hz uzima u obzir samo otpor, a sve ostalo se smije znemariti. Vrlo često se u vodova zanemaruje odvod, a tada i otpor može imati zanemariv iznos. Što se smije zanemariti, zaključuje se prema konkretnom zadatku. Na isti način se određivanje pojedinih konstanti prilagođava zadatku.

5.3.1. Otpor voda

Otpor, R, po jedinici duljine voda ili vodiča dobiven je iz gubitaka u vodiču. Gubici u vodiču nastaju prolazom njegove struje i induciranjem struja u njemu djelovanjem struja susjednih vodiča. Električni vodovi imaju konstruktivne elemente koji su vodljivi. To su armature za učvršćenje vodova, vodljivi predmeti u okolišu, plaštevi kabela i sl. U njima se induciraju struje zbog kojih nastaju gubici energije, a oni se manifestiraju kao povećanje otpora vodiča. Prema tome je veličina otpora voda vrlo složena, te će se vrlo teško naći način da se analitički obuhvati. Zadatak određivanja otpora je naročito složen kad se radi o utjecaju »pasivnih« vodiča u okolišu voda. Svi vodiči voda induciraju struje u pasivnim vodičima, te izazivaju tako gubitke u njima. Ovi gubici daju doprinos povećanju otpora svih vodiča u vodu. Tipičan je primjer trofazni kabel čija su sva tri vodiča u zajedničkom metalnom plaštu. U tome plaštu se induciraju vrtložne struje, te zbog njih nastaju gubici koji se moraju obračunati na sve tri faze.

Osnova određivanja otpora je otpor vodiča za istosmjernu struju, R_0. To je otpor strujne cijevi kao što je prikazano u drugom poglavlju o statičkom polju. Stvarni otpor se uzima u obzir odgovarajućim koeficijentima. Ukupni koeficijent otpora

$$k_R = k_s + k_b + k_k \tag{5.29}$$

sastavljen je od koeficijenta *skinefekta* vodiča, k_s, koeficijenta *blizinskog efekta*, k_b, koji uzima u obzir utjecaj susjednih vodiča, te koeficijenta utjecaja *konstruktivnih elemenata*, k_k, u kojima nastaju gubici vrtložnih struja. Iznos koeficijenata ovisi o materijalu, frekvenciji, obliku vodiča i obliku voda. Frekventna ovisnost unosi

teškoće u određivanje otpora voda, te se lako događa da se ne može egzaktno uzeti u obzir. To se naročito pokazuje pri rasprostiranju impulsa po vodu.

Neka posluži kao primjer *zvjezdasta četvorka* u telefonskom kabelu. U njoj je bakrena žica promjera 0,9 mm. Standardna telefonska frekvencija je 800 Hz. Pri toj je frekvenciji zanemariv utjecaj vrtložnih struja, te se smije računati s otporom za istosmjernu struju. Granica tonskih frekvencija smije se uzeti kod 10 kHz, a i pri toj frekvenciji je još zanemariv utjecaj vrtložnih struja. Međutim, u prijenosu s frekvencijom od 100 kHz postaje utjecaj vrtložnih struja zamjetljiv. Osi žica su razmaknute na udaljenost od 1,4 mm u spomenutoj četvorki. Koeficijenti skinefekta i blizinskog efekta iznose 1,27, odnosno 0,68, te je koeficijent otpora 1,95. Kad bi frekvencija bila 1 MHz, iznosio bi koeficijent otpora već 6,14. Dubina prodiranja vala bi iznosila 67 μm pri toj frekvenciji, te struja već teče praktički po površini vodiča. Žica u telefonskom kabelu je odabrana tako, da vrtložne struje ne dolaze u obzir pri tonskim frekvencijama. To znatno olakšava promatranje utjecaja otpora za prijenosa tonskih frekvencija kabelom.

Kad se promatraju klasični električni vodovi, energetski zračni vodovi i kabeli i komunikacioni zračni vodovi i kabeli, može se reći da je u zračnih vodova mjerodavan samo skinefekt, a ostali su efekti zanemarivo maleni. Ostali efekti dolaze do izražaja u kabelu, tj. i blizinski i konstruktivni efekt, te se oni ne smiju zanemarivati.

5.3.2. Odvod voda

Odvod, G, postoji u vodova zbog loše izolacije među vodičima. On se manifestira direktno zbog strujnog vođenja izolacije, i indirektno — zbog dielektričnih gubitaka pri izmjeničnom električnom polju. Zato se odvod prikazuje sastavljen od dva dijela

$$G = G_0 + G_d \tag{5.30}$$

Odvod G_0 pokazuje koliko je *strujno vođenje* izolacije. Ono u sebi uključuje samu izolacionu sposobnost izolatora i odvod nastao djelovanjem korone. Često se navodi izolacioni otpor, R_{iz}, umjesto izolacionog odvoda G_0. On sadrži također dva dijela. Jedan se dio odnosi na *prostorno vođenje*, a drugi dio uzima u obzir *vođenje* struje *po površini* izolatora. Prostorno vođenje struje se znatno povećava pojavom *korone*, koja je posljedica elektronske ionizacije plina što okružuje vodiče. Ona neposredno prethodi *proboju* izolacije, a sijelo je razmjerno velikih gubitaka koji mogu doseći i do 50 kW/km u električnih vodova visokog napona. Ona je jako izražena kad jakost električnog polja prijeđe stanoviti kritični iznos, a inače je zanemariva iznosa. Vođenje struje po površini krutih izolatora može poprimiti značajne razmjere kad je njihova površina nečista. Izolacioni otpor kabela ima tako veliki iznos, da je pripadni odvod zanemariv. On iznosi oko 10 gigaoma po km, što odgovara odvodu od 10^{-13} simensa po metru duljine voda.

Dodatni odvod, G_d, nastaje zbog pojave gubitaka u izolaciji pri izmjeničnoj polarizaciji. Taj odvod se može rastumačiti energetski. On je dominantan pri primjeni visokih frekvencija. Cjelokupni odvod G uzima u obzir sve tipove odvoda,

a izražava se kutom gubitaka ili faktorom gubitaka tg δ, koji je već spomenut u poglavlju o ravnom valu. Faktor gubitaka je odnos snage potrošene u izolatoru i kapacitivne snage

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{G\,U^2}{\omega\,C\,U^2} = \frac{G}{\omega\,C} \tag{5.31}$$

On služi da se odredi odvod iz poznatog kapaciteta pri zadanoj frekvenciji.

Vrlo često je odvod zanemariv. Loš faktor gubitaka se mjeri s nekoliko postotaka, a tada se odvod smije još uvijek zanemariti. Telefonski kabel s papirnom izolacijom ima faktor gubitaka 1,2 %, pri frekvenciji 120 kHz, a to se smatra velikim iznosom. Međutim, odvod je još toliko malen, da se smije zanemariti pri određivanju stanja napona i struja na vodu.

5.3.3. Kapacitet voda

Kapacitet, C, po jedinici duljine voda je sastavljen od *parcijalnih kapaciteta* pojedinih vodiča u vodu. Parcijalni kapaciteti se sastavljaju u pogonski kapacitet prema uvjetima pogona voda. Oni predstavljaju kapacitete među pojedinim vodičima i pojedinog vodiča prema plohi nultog potencijala. Tako dvožični vod iznad zemlje, koja je beskonačno vodljiva i na nultom potencijalu, ima tri parcijalna kapaciteta. Oni formiraju tri različita pogonska kapaciteta prema pogonskim uvjetima. Isto takvi trofazni, energetski vod, ima šest različitih parcijalnih kapaciteta, koji mogu biti različito spojeni u pogonski kapacitet. To su kapaciteti C_{11}, C_{12}, C_{13} C_{22}, C_{23}, C_{33}, a oni formiraju kvadratnu, simetričnu, kapacitivnu matricu, koja ulazi u jednadžbu voda. Poglavlje 3.10. je posvećeno parcijalnim kapacitetima općenito, te može poslužiti da se oni odrede u bilo kojem električnom vodu. Prethodno je potrebno poznavanje potencijalnih i kapacitivnih koeficijenata, a tek s pomoću njih se dobivaju parcijalni kapaciteti. Već je tamo kao zadana veličina upotrijebljen potencijal pojedinog vodiča, a razlike potencijala su definirale parcijalne kapacitete.

Potencijalni koeficijenti su osnova pri određivanju kapaciteta. Klasični vodovi imaju svi jednaku konstrukciju potencijalnih koeficijenta, tj. njihov je oblik

$$|a_{ik} = \frac{1}{K_0} \ln\left(\frac{\mathrm{d}_i}{d_k}\right), \qquad K_0 = 2\,\pi\,\varepsilon$$

Dobar stacionarni pogon zahtijeva izvršeni uvjet da su kapaciteti C_{ik}, $i \neq k$ međusobno jednaki, a da su jednaki i svi C_{ii}. Na primjer, u trofaznom vodu mora biti zadovoljeno $C_{12} = C_{13} = C_{23} = C_{21} = C_{31} = C_{32}$, a isto tako $C_{11} = C_{22} = C_{33}$ Ta se jednakost postiže u kratkih vodova međusobnim *prepletom* vodiča. Svaki vodič mora zauzeti položaje svih ostalih vodiča. Pojedini kapacitet postaje sada aritmetička sredina kapaciteta pojedinih sektora voda. Dimenzije d_i i d_k u potencijalnim koeficijentima postaju geometrijske sredine odgovarajućih dimenzija u pojedinim sektorima. To su tzv. **srednje geometrijske udaljenosti** u vodova. Takav način proračuna znatno olakšava rad i analizu. Treba naglasiti da je to moguće kod kratkih vodova i stacionarnih pogona cijelog voda.

Najčešće se u blizini vodova nalaze vodljive plohe na nultom potencijalu, na kojima se odslikavaju vodiči voda. Vodljiva ploha mora zadovoljavati kriterij za vodiče, tj. pomačne struje moraju biti zanemarive u njima u odnosu na provodne struje. Može se dogoditi da to nije zadovoljeno. Tada je potreban poseban proračun kapaciteta voda.

Kapaciteti vodova su konstantni u najvećoj mjeri. Oni su konstantni koliko su dimenzije konstantne i koliko je dielektričnost okolnog izolatora konstantna. Pojava korone utječe u stanovitoj mjeri na kapacitet.

5.3.4. Induktivitet voda

Induktivitet, L, po jedinici duljine voda, sastavljen je također od *parcijalnih induktiviteta*. Oni su prikazani već u poglavlju 3.11. Induktivitet je definiran ulančenim magnetskim tokom petlje na koju se odnosi. Prema tome se može govoriti samo o induktivitetu petlje ili o međuinduktivitetu među petljama. Petlju sačinjavaju u vodova dva vodiča. Čim je to vod sa tri vodiča ili više, jedan njegov vodič pripada većem broju petlji. Zato je potrebno računati sa strujom petlji, a struja vodiča je jednaka sumi struja pripadnih petlji. Proračun induktiviteta petlji, kakve se susreću u vodova, prikazan je u drugom poglavlju o statičkom polju.

Određivanje induktiviteta zračnog voda ne stvara teškoća. Dovoljno je točna pretpostavka da struje teku po osi vodiča, te se tako određuje vanjski induktivitet. Unutarnji induktivitet je manjeg iznosa prema vanjskom, a određuje se uz zanemarenje utjecaja skinefekta. Takve pretpostavke teško se mogu prihvatiti kad se radi o kabelu. Vodiči su u njemu nablizu jedan drugome, te unutarnji induktivitet ima značajniji iznos, a utjecaj skinefekta dolazi više do izražaja.

Induktivitet voda smije se odrediti iz kapaciteta. Kad ne bi bilo gubitaka u vodu, elektromagnetsko polje bi bilo oblikovano kao u ravnom valu, jer vektori polja leže u ravnini okomitoj na duljinu voda, a međusobno su okomiti. Zato se mora očekivati da vrijedi odnos

$$L\,C = \mu\,\varepsilon \tag{5.31}$$

Taj je odnos to više zadovoljen što je vod manjih gubitaka, odnosno što je elektromagnetsko polje sličnije polju ravnog vala. Djelovanjem vodiča pojavljuje se aksijalna komponenta električnog polja, koja unosi odstupanje od ravnog vala. Zato se pojavljuje i odstupanje od odnosa (5.31). Taj odnos služi u vrlo mnogo slučajeva pri određivanju induktiviteta, ako je poznat kapacitet. Produkt permeabilnosti i dielektričnosti iznosi u praznom prostoru

$$\mu_0\,\varepsilon_0 = 11{,}1 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{s^2/m^2}$$

Produkt induktiviteta i kapaciteta iz drugog primjera u prethodnom poglavlju je iznosio $L\,C = 11{,}7 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{s^2/m^2}$, što je iznos za 5 % veći od produkta $\mu_0\,\varepsilon_0$. Taj vod ima još razmjerno velike gubitke u vodičima. Neke vrijednosti konstanti voda su navedene u tablici 5.2.

Konstante voda

TABLICA 5.2.

Vod \ Konstante	R 20°C (mΩ/km)	L (mH/km)	C (nF/km)
Trofazni vod, 700 kV, 60 Hz Kanada	11,7	0,91	12,2
Trofazni vod, 380 kV, 50 Hz Italija	19,0	0,84	13,2
Trofazni vod, 220 kV, 50 Hz Split — Zagreb	82,0	1,34	8,6
Telefonski vod u uzduhu	—	1,7	6,6
Telefonski kabel, papir	—	0,6	45
Trofazni kabel, 35 kV, 50 Hz, 3 × 150, dielektričnost izolacije 3,7	117	0,315	260

5.4. DUGI VOD

Kratki vod ima jednostavnu teoriju, koja se vrlo često primjenjuje u analizi stacionarnog pogona vodova. Ona pomaže pri uvodu u teoriju dugog voda. Dugi vod se sastoji od mnoštva kratkih vodova, spojenih u seriji, no to čak ne mora biti ni mnoštvo kratkih vodova. Može se dogoditi da su dovoljna samo dva kratka voda, da se nadomjesti jedan dugi vod. Uvijek se teži tome da se u analizi nekog voda primijeni teorija kratkog voda. Zato je potrebno da se prethodno ustanovi da li zadani vod odgovara kriteriju za kratke vodove, izraženom nejednakošću (5.25.)

$$\left|\frac{\gamma l}{2}\right|^2 \ll 1$$

Tek ako zadani vod ne odgovara kriteriju za kratke vodove, na njega se mora primijeniti teorija dugog voda. Teorija dugog voda opće je valjanosti, tj. ona se odnosi i na najkraće vodove, samo što je teorija kratkog voda jednostavnija i preglednija.

Dugi vod treba predstaviti serijskim spojem mnoštva kratkih vodova, koji su vrlo kratki, do diferencijalnih razmjera. U tome slučaju razlike napona na tako kratkom vodu postaju diferencijalne razlike.

Prema tome postaju pad napona i gubitak struje po jedinici duljine takvog voda

$$\lim_{l\to 0}\left(\frac{u_t - u_g}{l}\right) = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \lim_{l\to 0}\left(\frac{i_t - i_g}{l}\right) = \frac{\partial i}{\partial z}$$

Jednadžbe voda (5.22) prelaze u oblik

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial z} &= R\,i + L\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial z} &= G\,u + C\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Ovdje se smiju uvesti simboličke impedancije i admitancije kao u kratkog voda

$$\begin{aligned} Z &= R + L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \\ Y &= G + C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{5.33}$$

što olakšava daljnje rješavanje diferencijalnih jednadžbi. One poprimaju oblik

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2} &= \gamma^2\, U \\ \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}z^2} &= \gamma^2\, I \\ \gamma &= +\sqrt{Z\,Y} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Rješenje tih jednadžbi jednostavno je i glasi

$$\begin{aligned} U &= U_1\, e^{\gamma z} + U_2\, e^{-\gamma z} \\ I &= I_1\, e^{\gamma z} + I_2\, e^{-\gamma z} \end{aligned} \tag{5.35}$$

5.4.1. Sekundarne konstante voda

Konstante U_1, U_2, I_1 i I_2 su integracione konstante, koje se dobivaju iz graničnih uvjeta. Međutim, napon i struja na vodu su vezani odnosom u (5.32), te se konstante ne mogu izabirati samo poštivajući granične uvjete. Dvije jednadžbe (5.32) eliminiraju dvije integracione konstante. Napon na vodu se dobiva iz druge jednadžbe (5.32) i izjednačuje s naponom u (5.35), te je

$$U = -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = -\frac{\gamma}{Y}\,I_1\, e^{\gamma z} + \frac{\gamma}{Y}\,I_2\, e^{-\gamma z}$$

Sad se dobiva odnos integracionih konstanti

$$\frac{U_2}{I_2} = -\frac{U_1}{I_1} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_v = \left(\frac{R + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}{G + C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\right)^{1/2} \tag{5.36}$$

Taj odnos ima karakter impedancije, te je nazvan **karakteristična impedancija voda** ili još češće **valna impedancija voda.** Sada rješenja diferencijalnih jednadžbi voda glase

$$\begin{aligned} U &= U_1 e^{\gamma z} + U_2 e^{-\gamma z} \\ I &= -\frac{U_1}{Z_v} e^{\gamma z} + \frac{U_2}{Z_v} e^{-\gamma z} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Sad je vidljivo da su preostale samo dvije integracione konstante. Dovoljna su dva podatka na vodu da se ustanove integracione konstante. Jednadžbe napona i struje pokazuju da je vod okarakteriziran sa dvije nove konstante, Z_v i γ, umjesto dosadašnjih R, L, C i G. Konstante voda Z_v i γ zovu se još i **sekundarne konstante voda,** koje nadomještaju u potpunosti primarne konstante R, L, C i G, a njima se lakše izražavaju odnosi na vodu.

Veća preglednost stanja na vodu se dobiva primjenom harmoničkih veličina. Za taj slučaj je *valna konstanta* γ već prikazana izrazima (5.29) do (5.33). Ona je kompleksna karaktera, te se tako i prikazuje

$$\gamma = \alpha + j\beta = [(R + j\omega L)(G + j\omega C)]^{1/2} \tag{5.38}$$

Konstante α i β imaju ulogu kao u ravnog vala. Prva se nalazi u eksponentu eksponencijalne funkcije, te ukazuje na prigušenje dotične veličine. Zato se ona zove **prigušna konstanta.** Druga konstanta ostaje u fazi dotične veličine, te djeluje mijenjajući njezinu fazu. Odatle joj ime **fazna konstanta.** Kad se uvedu pomoćne konstante

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \omega\sqrt{L\,C} \\ \operatorname{tg}\varepsilon &= \frac{R}{\omega L}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{G}{\omega C} \end{aligned} \tag{5.39}$$

dobiju se iznosi pojedinih konstanti

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta_0} &= \left[\frac{1 - \cos(\delta + \varepsilon)}{2\cos\delta\cos\varepsilon}\right]^{1/2} && \text{prigušna konstanta} \\ \frac{\beta}{\beta_0} &= \left[\frac{1 + \cos(\delta + \varepsilon)}{2\cos\delta\cos\varepsilon}\right]^{1/2} && \text{fazna konstanta} \\ \frac{|\gamma|}{\beta_0} &= (\cos\delta\cos\varepsilon)^{-1/2} && \text{valna konstanta} \end{aligned} \tag{5.40}$$

Valna impedancija se prikazuje istim pomoćnim konstantama iz (5.39), te iznosi

$$Z_v = \left(\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}\right)^{1/2} = |Z_v| e^{j\varphi}$$

$$|Z_v| = Z_{v0} \left(\frac{\cos\delta}{\cos\varepsilon}\right)^{1/2}, \qquad Z_{v0} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{5.41}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta - \varepsilon)$$

Gubici u vodu se pokazuju kroz kutove gubitaka δ i ε. Ravni val sadrži samo gubitke u izolatoru, koji se prikazuju kutom δ. Faktor gubitaka tg δ mogao bi se prikazati kao u ravnog vala, kao omjer $\varkappa/(\omega\varepsilon)$, kad ne bi bilo i površinskih efekata na izolatorima voda. Takvi se efekti ne prikazuju silocijevima, te se ne može pisati $\varkappa/(\omega\varepsilon)$ umjesto odnosa $G/(\omega C)$. Kad ne bi bilo površinskih efekata, takva bi zamjena bila moguća. Faktor gubitaka u izolaciji je obično toliko malen, da se njegov utjecaj najčešće zanemaruje.

Novi element u vodova je faktor gubitaka tg ε, koji se pojavljuje zbog gubitaka u vodičima voda. Kad su gubici u vodičima zanemarivi u odnosu na induktivnu snagu voda, zanemaruje se i faktor gubitaka. Grafički je prikazana na sl. 5.11. ovisnost valne konstante, prigušne i fazne konstante, o kutu gubitaka u vodičima.

5.4.2. Karakteristične konstante vala

Uloga prigušne i fazne konstante je slična ulozi u ravnog vala. Tamo se one odnose na vektore polja, a u vodova se odnose na napon i struju. Prigušnom konstantom se definira **doseg vala** na vodu

$$d = \frac{1}{\alpha} \tag{5.42}$$

Vodovi služe u prijenosu energije, te se ne dozvoljava velika prigušna konstanta. Doseg vala mora biti mnogostruko veći od duljine voda. Vodovi u kućnim instalacijama imaju velik kut gubitaka. Vod iz primjera 5.1., primijenjen na kućne instalacije, ima prigušnu konstantu $\alpha = 11{,}1 \cdot 10^{-6}$ 1/m. Tome odgovara doseg vala $d = 90$ km, a to je mnogo veće, nego što su primijenjene duljine vodova u kućnim instalacijama. Treba uzeti u obzir da je ovdje spomenut vod s izrazito velikim prigušenjem.

Fazna konstanta pomiče fazu napona i struje na vodu. **Valna duljina**, λ, je duljina voda na kojoj se faza mijenja za puni kut 2π radijana ili 360°. Zato je duljina vala

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{5.43}$$

kao u ravnog vala, jer je ista i njezina definicija.

Ista je definicija i **vremenske periode**, T. Napon i struja se mijenjaju na nekom mjestu na vodu harmonički **kutnom brzinom** ili **kružnom frekvencijom** ω. Vremenska perioda, T, je vrijeme da se faza promijeni za puni kut, te je prema tome

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5.44}$$

Sad se dolazi na **faznu brzinu** kao u ravnog vala. Fazna brzina je brzina gibanja promatrača duž voda, da se održi konstantna faza napona i struje. Ona iznosi

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\beta} \tag{5.45}$$

To su nekoliko karakterističnih veličina za ponašanje napona i struje na vodovima:

d doseg vala

λ duljina vala, prostorna perioda

T vremenska perioda

v fazna brzina

Doseg vala i duljina vala ovise jedno o drugom prema odnosu

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{\beta}{2\pi\alpha} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right) \tag{5.46}$$

Prema tome je doseg vala uvijek veći od duljine vala, ako su gubici maleni, ali može postati manji od duljine vala, čim gubici poprime veće iznose. Sličnu pojavu se nalazi u ravnog vala. Odnos dosega i duljine vala bi mogao poslužiti da se pojave na vodu razdijele na valne i difuzione pojave. Mogla bi se usvojiti nejednakost kao mjerilo uvrštavanja pojava

$$d < \lambda, \quad \delta + \varepsilon > 18^\circ \qquad \text{difuzija}$$

$$d > \lambda, \quad \delta + \varepsilon < 18^\circ \qquad \text{valovi}$$

Oba primjera, 5.1. i 5.2. u poglavlju 5.2. o kratkom vodu, odnose se na vodove na kojima se ne mogu razviti valovi pri 50 Hz, već se govori o difuziji napona i struje, jer su gubici na njima još razmjerno veliki. Tek vodovi vrlo malih gubitaka omogućuju da se pojavljuju na njemu valovi.

5.4.3. Vod bez distorzije

Valna impedancija, Z_v, dovodi u vezu napon i struju istovjetnog vala, pozitivnog ili negativnog. Općenito, valna impedancija uzrokuje fazni pomak između naponskog i strujnog vala, što dovodi do distorzije vala. Ako nema gubitaka na vodu, nema niti faznog pomaka od valne impedancije, a ona se izražava čistim otporom, $Z_v = Z_{v0}$. Ona se tada zove i *valni otpor*. Ona je približno takva i za malih gubitaka na vodu. Posebno je interesantan vod *bez distorzije*. Takav je vod onaj, čija su oba kuta gubitaka međusobno jednaka

$$\delta = \varepsilon, \quad \frac{G}{C} = \frac{R}{L} \qquad \text{vod bez distorzije} \tag{5.47}$$

Spomenuti uvjet je neovisan o frekvenciji napona i struje. Valna impedancija postaje jednaka valnom otporu, $Z_v = Z_{v0}$, a fazni kut iščezava, $\varphi = 0$. Zbog toga je oblik vala napona jednak obliku vala struje, odnosno nema distorzije. Osim toga i fazna konstanta nije više ovisna o gubicima, ona je naprosto $\beta = \beta_0$. Fazna brzina nije više ovisna o frekvenciji. Prigušenje postoji, ali više nije ovisno o frekvenciji Prigušna konstanta je naprosto jednaka

$$\alpha = R\left(\frac{C}{L}\right)^{1/2} = G\left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} \qquad \text{vod bez distorzije} \tag{5.48}$$

Vod bez distorzije je vrlo interesantan za upotrebu u komunikacijama. Već je rano uočen uvjet (5.47), u počecima razvoja komunikacione tehnike, i njegovo značenje za kvalitet prijenosa signala kabelima. Prvi je na to naišao Mihajlo Pupin istraživajući ponašanje telegrafskog kabela između Amerike i Evrope. On je predložio i rješenje koje je po njemu dobilo ime *pupinizacija* kabela. Kabeli imaju vrlo malen induktivitet, a velik kapacitet. Zato je on predložio da se na kratkim odsječcima uključuje u vod koncentrirani induktivitet, koji se smije promatrati kao jednoliko raspoređen induktivitet po vodu. Tako se zadovoljava uvjet (5.47), te se dobiva vod bez distorzije. Ipak nije jednostavno zadovoljiti uvjet (5.47), jer moderni kabeli imaju vrlo malen odvod, čak i zanemariva iznosa. Zato se isti učinak postizava uključivanjem pojačala na kraćim odsječcima vodova. Međutim, moderna komunikaciona tehnika ne traži niti takve metode, već traži općenito vod malih gubitaka. Tako se došlo i do upotrebe koaksijalnog kabela.

Ovaj kratki prikaz sekundarnih konstanti voda, valne konstante γ i valne impedancije Z_v, pokazuje koliko su one korisnije od primarnih konstanti R, L, C i G. Zato su one neophodne u analizi ponašanja napona i struje na vodu. One se ustanovljavaju na gotovu vodu s dva pokusa. To su *pokus praznog hoda* i *pokus kratkog spoja* na vodu.

5.4.4. Pokus praznog hoda

Pokus praznog hoda na vodu postiže se kad je teretna strana voda »otvorena«, tj. ne postoji nikakav teret, $I_t = 0$, a vod je priključen na generatorskoj strani. Tako se ustanovljava impedancija Z_0 voda u praznu hodu. Neka je duljina voda l. Jednadžbe (5.37) pomažu da se ustanovi impedancija praznog hoda. Za $z = l$ mora biti struja voda $I = 0$. Odatle slijedi odnos integracionih konstanti

$$\frac{U_2}{U_1} = e^{2\gamma l}$$

Impedancija praznog hoda je impedancija na početku voda

$$Z_0 = \frac{U_2 + U_1}{U_2 - U_1} Z_v = Z_v \operatorname{cth}(\gamma l) \tag{5.49}$$

Kad se uzme u obzir kompleksni karakter valne impedancije i valne konstante, impedancija praznog hoda se može prikazati u obliku

$$\begin{aligned} Z_0 &= |Z_0| e^{j(\varphi - \psi)} \\ |Z_0| &= |Z_v| \left[\frac{\operatorname{ch}(2\alpha l) + \cos(2\beta l)}{\operatorname{ch}(2\alpha l) - \cos(2\beta l)}\right]^{1/2} \\ \operatorname{tg}\psi &= \frac{\sin(2\beta l)}{\operatorname{sh}(2\alpha l)} \end{aligned} \tag{5.50}$$

ako su

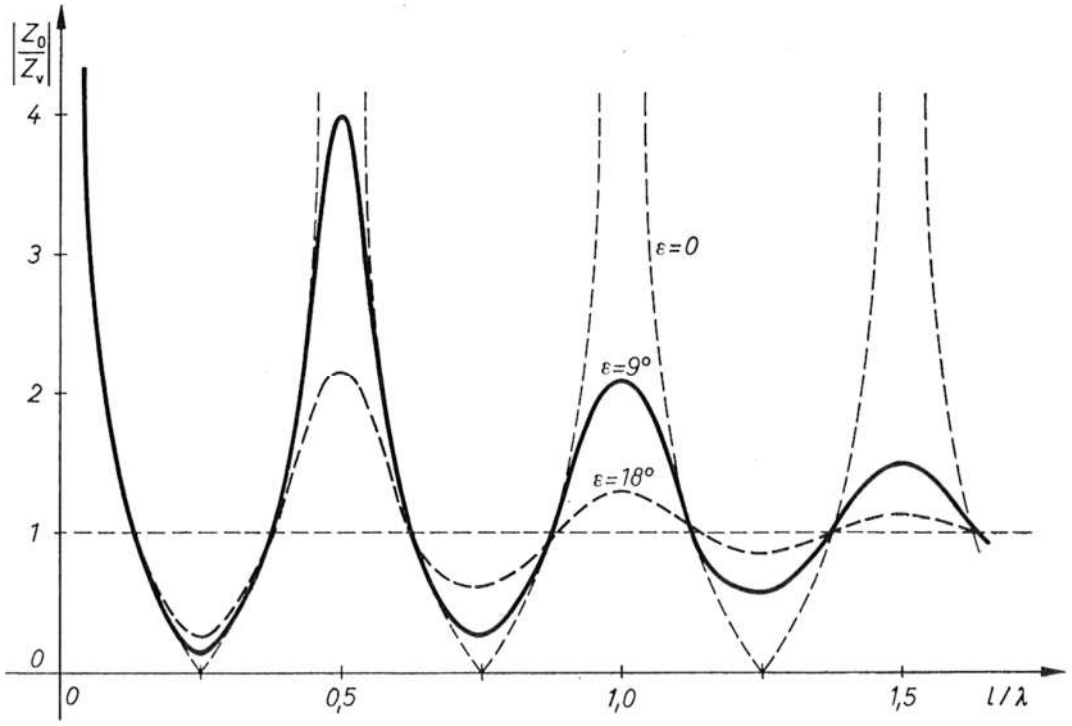
$$Z_v = |Z_v| e^{j\varphi} \quad \text{i} \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

Iznos impedancije praznog hoda se mijenja mnogo s duljinom voda l.

Sl. 5.13. prikazuje ovisnost odnosa $|Z_0/Z_v|$ o odnosu duljine voda prema duljini vala, $|Z_0/Z_v| = f(l/\lambda)$ za tri slučaja gubitaka na vodu, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0°$, $9°$, $18°$. Impedancija praznog hoda nekog voda se mijenja između najveće i najmanje vrijednosti u ovisnosti o l/λ. Najmanju impedanciju praznog hoda ima tzv. **četvrtvalni vod,** $l = \lambda/4$. Kad vod ne bi imao gubitaka, djelovao bi na ulazu kao kratki spoj, iako je na izlazu otvoren, ako mu je duljina $l = \lambda/4$. Čak i u slučaju gubitaka na vodu, njegova je impedancija na ulazu vrlo malena. Četvrtvalni vod malih gubitaka, $\varepsilon < 10°$, u praznu hodu djeluje kao otpor približnog iznosa

$$Z_0 = \frac{\lambda}{8} R, \qquad l = \lambda/4$$

Četvrtvalni vod u praznu hodu ima vrlo važnu ulogu u komunikacionoj tehnici. On je tada u strujnoj rezonanciji, te se tako postižu maksimalni strujni učinci.



Sl. 5.13. Normirana impedancija $|Z_0/Z_v|$ praznog hoda dugog voda u ovisnosti o duljini voda. Duljina voda je normirana duljinom vala karakterističnom za vod, tj. kao l/λ. Ona je prikazana za tri slučaja kutova gubitaka na vodu, $\varepsilon = \delta = 0°$, $\varepsilon = 9°$, $\delta = 0°$ i $\varepsilon = 18°$, $\delta = 0°$.

Fazni kut $(\varphi - \psi)$ impedancije praznog hoda se mijenja također u ovisnosti o duljini voda, odnosno u ovisnosti o odnosu l/λ. Vod bez gubitaka ima fazni kut $\varphi = 0$, a kut ψ ima iznos $-\pi/2$ ili $\pi/2$, prema tome koliki je l/λ.

Tako je za

$$0 < \frac{l}{\lambda} < \frac{1}{4}, \qquad \psi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{vod je kapacitivan}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{l}{\lambda} < \frac{2}{4}, \qquad \psi = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{vod je induktivan}$$

5.4.5. Pokus kratkog spoja

Pokus kratkog spoja na vodu se vrši kratko spajajući teretnu stranu, tj. napon tereta je nula, $U_t = 0$. Na generatorskoj strani se mjeri *impedancija kratkog spoja* voda, Z_k. Vod ima određenu duljinu l kao i prije, a jednadžbe (5.37) pomažu da se ustanovi tražena impedancija Z_k. Na kraju voda za $z = l$ mora biti $U_t = 0$, te je odnos integracionih konstanti

$$\frac{U_2}{U_1} = -e^{2\gamma l}$$

Impedancija kratkog spoja iznosi sada

$$Z_k = \frac{U_2 + U_1}{U_2 - U_1} Z_v = Z_v \operatorname{th}(\gamma l) \tag{5.51}$$

Sličnim postupkom kao kod praznog hoda dobiva se iznos impedancije kratkog spoja i njezin fazni kut, te je

$$\begin{aligned} Z_k &= |Z_k| \, e^{j(\varphi+\psi)} \\ |Z_k| &= |Z_v| \left[\frac{\operatorname{ch}(2\alpha l) - \cos(2\beta l)}{\operatorname{ch}(2\alpha l) + \cos(2\beta l)}\right]^{1/2} \\ \operatorname{tg}\psi &= \frac{\sin(2\beta l)}{\operatorname{sh}(2\alpha l)} \end{aligned} \tag{5.52}$$

Impedancija kratkog spoja voda, Z_k, slično se mijenja u ovisnosti o l/λ kao i u praznu hodu, samo postoji pomak za 1/4 ili za četvrtinu vala po vodu. To se najbolje vidi na četvrtvalnom vodu bez gubitaka. On ima na ulazu beskonačnu impedanciju, dakle kao da je u praznu hodu, iako je na kraju kratko spojen. Slika je ista kao sl. 5.13., samo ishodište treba pomaknuti u točku $l/\lambda = 1/4$.

Četvrtvalni vod u kratku spoju ima također značajnu ulogu u komunikacionoj tehnici. Njime se postiže naponska rezonancija koja je značajna kad se žele postići naponski učinci. Vod bez gubitaka ne bi primao nikakvu struju iz izvora. Njegovi gubici djeluju da ipak teče neka struja. Ulazna impedancija prelazi u otpor približnog iznosa

$$Z_k = \frac{Z_{v0}^2}{\frac{\lambda}{8} R}, \qquad l = \frac{\lambda}{4}$$

Fazni kut ψ ima isti iznos u oba pokusa, samo se u kratkom spoju pribraja kutu φ. Zato vod u kratku spoju djeluje induktivno do duljine $\lambda/4$, a kapacitivno djeluje za veće duljine.

Vod bez gubitaka ima obje impedancije čiste reaktancije, koje se izmjenjuju svakih pola duljine vala između kapacitivne i induktivne reaktancije. Ta se izmjena odvija bez obzira na duljinu voda. Zato se govori samo o *ulaznoj reaktanciji* voda bez gubitaka. Ona se mijenja od $-\infty$ do $+\infty$.

Vodovi imaju uvijek gubitke. Zbog njih se ulazna impedancija sve manje mijenja kako vod postaje dulji, a nestaje razlike između praznog hoda i kratkog spoja. Kad duljina voda l prijeđe iznos trostrukog dosega vala d, ulazna je impedancija jednaka valnoj impedanciji, bez obzira da li se radi o praznom hodu ili kratkom spoju. To se lako postiže u vodovima velikih gubitaka, jer oni imaju mali doseg vala.

Opisana dva pokusa su važna u analizi vodova. Često se primjenjuju vodovi u praznom hodu ili kratkom spoju u komunikacionoj tehnici ili je to jedno od njihovih pogonskih stanja. Ta dva pokusa omogućuju da se odrede konstante voda. Primijene li se jednadžbe (5.49) i (5.51) za obje impedancije, dobivaju se valna impedancija i valna konstanta jednostavnim postupkom. One naprosto iznose

$$Z_v = (Z_0 Z_k)^{1/2}$$

$$\gamma l = \operatorname{arth}\left(\frac{Z_k}{Z_0}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{Z_0}+\sqrt{Z_k}}{\sqrt{Z_0}-\sqrt{Z_k}}\right) \tag{5.53}$$

5.4.6. Vod pod zadanim teretom

Jednadžbe (5.37) napona i struje na vodu vrijede općenito za bilo koji homogeni vod. Preostaje samo da se ustanove integracione konstante. One su već upotrijebljene pri određivanju impedancija praznog hoda i kratkog spoja. Najčešći je slučaj zadanog tereta ili zadanog generatora.

Neka je *teret zadan* naponom i strujom, a traže se generatorski napon i struja. Napon i struja generatora slijedi iz jednadžbe (5.37) uz $z = 0$, tj.

$$U_g = U_1 + U_2$$

$$I_g = -\frac{U_1}{Z_v} + \frac{U_2}{Z_v}$$

Integracione konstante se određuju iz zadanog tereta za $z = l$ koliko iznosi duljina voda. One su

$$U_1 = \frac{1}{2}(U_t - Z_v I_t)\, e^{-\gamma l}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(U_t + Z_v I_t)\, e^{\gamma l} \tag{5.54}$$

Kad se upotrijebe dobivene integracione konstante, slijede jednadžbe koje određuju generatorske veličine, napon i struju

$$\begin{aligned} U_g &= U_t \operatorname{ch}(\gamma l) + Z_v I_t \operatorname{sh}(\gamma l) \\ I_g &= I_t \operatorname{ch}(\gamma l) + \frac{U_t}{Z_v} \operatorname{sh}(\gamma l) \end{aligned} \tag{5.55}$$

To su poznate jednadžbe generatorskih veličina, ako su zadane veličine tereta za zadani vod. One slijede posve općenito, dakle nisu vezane samo uz harmoničke veličine. Valna impedancija i valna konstanta imaju ovdje najopćenitije značenje, kao što je dano definicijom u jednadžbama (5.34) i (5.36). Međutim, ovo promatranje se odnosi na harmoničke veličine.

PRIMJER 5.3. Zadan je **trofazni vod,** koji ima po fazi zadane konstante $R = 82$ mΩ/km, $L = 1{,}34$ mH/km, $C = 8{,}6$ nF/km, $G = 0$. Vod ima na teretnoj strani fazni napon 127 kV, 50 Hz i struju tereta 158 A, koja zaostaje za naponom 37°. Vod je dug 300 km. Traže se napon i struja na generatorskoj strani. Faktori gubitaka iznose

$$\operatorname{tg} \varepsilon = 0{,}195 \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \delta = 0$$

te taj vod ulazi u kategoriju vodova malih gubitaka. Osnovna fazna konstanta iznosi

$$\beta_0 = \omega \sqrt{L C} = 1{,}065 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}$$

Prema tome su prigušna i fazna konstanta

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{(\cos \varepsilon)^{1/2}} \beta_0 = 0{,}103\,2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/km}$$

$$\beta = \frac{\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{(\cos \varepsilon)^{1/2}} \beta_0 = 1{,}07 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}$$

Odatle je za cijeli vod $\alpha l = 0{,}031$, $\beta l = 0{,}321$ rad. Osnovni valni otpor iznosi

$$Z_{v0} = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} = 395 \text{ oma}$$

te valna impedancija

$$Z_v = Z_{v0} \frac{1}{(\cos \varepsilon)^{1/2}} e^{j\varphi} = 400 \cdot \exp(-j\,5{,}5°) \text{ oma}$$

Sad se mogu odrediti iznosi hiperbolnih funkcija

$$\operatorname{ch}(\gamma l) = \operatorname{ch}(\alpha l) \cos(\beta l) + j \operatorname{sh}(\alpha l) \sin(\beta l) = 0{,}95 \exp(j\,0°)$$
$$\operatorname{sh}(\gamma l) = \operatorname{sh}(\alpha l) \cos(\beta l) + j \operatorname{ch}(\alpha l) \sin(\beta l) = 0{,}315 \exp(j\,84{,}7°)$$

Konačno su generatorske veličine iz (5.55)

$$U_g = 135{,}4 \exp(j\,5{,}6°)\ \text{kV}$$
$$I_g = 120 \exp(j\,4{,}8°)\ \text{A}$$

Ovaj primjer se odnosi na vod koji se više ne može nazivati kratak vod. Zato nije dozvoljeno da se proračun provede kao na kratkom vodu, ali to može poslužiti kao gruba kontrola.

Karakteristično je opterećenje na vodu kad je impedancija tereta jednaka valnoj impedanciji

$$Z_t = \frac{U_t}{I_t} = Z_v \qquad \text{prirodni teret}$$

Generatorske veličine napona i struje iznose

$$U_g = U_t e^{\gamma l}, \quad I_g = I_t e^{\gamma l}, \quad Z_t = Z_v$$

Impedancija na generatorskoj strani postaje jednaka impedanciji tereta, odnosno valnoj impedanciji.

5.4.7. Vod na zadanom generatoru

Sada je *zadano stanje na generatorskoj strani*, a traži se stanje na teretnoj strani. Stanje na teretnoj strani je zadano koordinatom $z = l$

$$U_t = U_1 e^{\gamma l} + U_2 e^{-\gamma l}$$
$$I_t = -\frac{U_1}{Z_v} e^{\gamma l} + \frac{U_2}{Z_v} e^{-\gamma l}$$

Integracione konstante se određuju iz podataka na generatorskoj strani

$$U_1 = \frac{1}{2}(U_g - Z_v I_g)$$
$$U_2 = \frac{1}{2}(U_g + Z_v I_g) \qquad (5.56)$$

Sada je stanje na teretnoj strani

$$U_t = U_g \operatorname{ch}(\gamma l) - Z_v I_g \operatorname{sh}(\gamma l)$$
$$I_t = I_g \operatorname{ch}(\gamma l) - \frac{U_g}{Z_v} \operatorname{sh}(\gamma l) \qquad (5.57)$$

Te su jednadžbe jednako oblikovane kao i jednadžbe (5.55) generatorskih veličina, samo se promijenio predznak drugog pribrojnika.

5.4.8. Spoj dvaju vodova

Jednadžbe (5.55) i (5.57) su podesne kad se traže podaci na početku ili na kraju jednog voda. Teškoće bi nastale ako treba kombinirati različite vodove. Rješavanje takvog problema se znatno olakšava primjenom matrica. Veličine napona i struje na generatorskoj ili teretnoj strani se prikazuju stupčanom matricom

$$\mathbf{V}_g = \begin{vmatrix} U_g \\ I_g \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{V}_t = \begin{vmatrix} U_t \\ I_t \end{vmatrix}$$

Jednadžbe (5.55) se sada prikazuju matričnom jednadžbom u znatno jednostavnijem obliku

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{T}\,\mathbf{V}_t \tag{5.58}$$

T je *transmisiona matrica* voda, a glasi

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}(\gamma l) & Z_v \operatorname{sh}(\gamma l) \\ \dfrac{\operatorname{sh}(\gamma l)}{Z_v} & \operatorname{ch}(\gamma l) \end{vmatrix} \tag{5.59}$$

Kratki vod je karakterističan po tome da je (γl) dovoljno maleno, te se smije staviti $\operatorname{ch}(\gamma l) = 1$ i $\operatorname{sh}(\gamma l) = \gamma l$. Sada transmisiona matrica dobiva oblik karakterističan za *kratki vod*

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & (R + j\omega L)\, l \\ (G + j\omega C)\, l & 1 \end{vmatrix} \tag{5.60}$$

Da bi se smjela pisati transmisiona matrica na taj način, mora biti

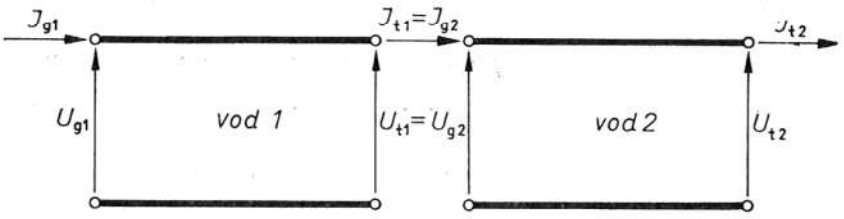
$$\frac{1}{2} |\gamma l|^2 \ll 1$$

To je stroži uvjet nego što je postavljen u kratkih vodova nejednakošću (5.25). U suštini nema u tome razlike, te je dopušteno usvojiti oba uvjeta. Transmisionom matricom za kratke vodove dolazi se na jednadžbe stanja kratkih vodova. Karakteristika je transmisione matrice da njezina determinanta mora biti jednaka jedinici. Matrica kratkog voda (5.60) ne zadovoljava taj uvjet, jer njezina determinanta iznosi

$$\det \mathbf{T} = 1 - \gamma^2 l^2 \approx 1$$

Drugi pribrojnik je zanemariv prema jedinici po definiciji za kratke vodove, te je uvjet zadovoljen samo približno.

Dva voda u seriji je problem koji se lako rješava primjenom transmisione matrice. Treba uzeti u obzir da je teretna strana jednog voda ujedno generatorska



Sl. 5.14. Shema spoja dvaju vodova u seriju.

strana voda koji nailazi u smjeru toka energije, tj. $\mathbf{V}_{t1} = \mathbf{V}_{g2}$. Jednadžbe obaju vodova, kako su skicirani na sl. 5.14., glase u matričnom obliku

$$\mathbf{V}_{g1} = \mathbf{T}_1 \mathbf{V}_{t1}, \qquad \mathbf{V}_{g2} = \mathbf{T}_2 \mathbf{V}_{t2} = \mathbf{V}_{t1}$$

Kad se iskoristi jednakost na spojnom mjestu, slijedi jednadžba cijelog voda

$$\mathbf{V}_{g1} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{V}_{t2} = \mathbf{T} \mathbf{V}_{t2}$$

$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$ je zajednička transmisiona matrica. Tako se jednostavnim postupkom dobiva da je jednadžba i ovako složenog voda slično oblikovana kao i jednadžba jednostavnog voda. Sad je vidljivo da se jednostavno rješava zadatak spajanja više vodova u seriju. Zajednička matrica se naprosto dobiva množenjem transmisionih matrica pojedinih vodova, po redu kako nailaze jedan iza drugog, u smjeru rasprostiranja energije.

Matrica (5.60) je predviđena za kratke vodove, ali ne zadovoljava uvjet za transmisionu matricu $\det \mathbf{T} = 1$. Da bi ona formalno zadovoljila, treba je pisati u obliku

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{(\gamma l)^2}{2} & \gamma l Z_v \\ \dfrac{\gamma l}{Z_v} & 1 + \dfrac{(\gamma l)^2}{2} \end{vmatrix} \tag{5.61}$$

Kao što je rečeno, u kratkih vodova se iznos $(\gamma l)^2/2$ zanemaruje prema jedinici, te se dolazi na matricu (5.60).

PRIMJER 5.4. Trofazni zračni vod spojen je na generator preko **kabela**. Kabel je za 220 kV, 50 Hz, a sastavljen je od tri monofazna kabela, jer se radi o visokom naponu. Pojedinačni kabeli su međusobno razmaknuti s osima na 300 mm udaljenosti, smješteni na podlogu koja električki izolira. Njihovi plaštevi su međusobno dobro spojeni na početku i na kraju, a svi su zajedno dobro uzemljeni, te su im plaštevi na nultom potencijalu. Oni su ujedno prepleteni, te svaki kabel poprima sva tri položaja. Tako se postiže da svaka faza ima konstante jednake ostalim fazama. Plaštevi su od slabo vodljivog metala, ali ipak doprinose povećanju otpora kabela kao voda, jer

se u njima induciraju struje. Isto tako oni doprinose induktivitetu voda. Plašteve treba svakako uzeti u obzir. Proizvođači takvih kabela odmah daju i podatke o njima za propisanu njihovu ugradnju. Ovaj konkretni kabelski vod dug je 16 km. Njegove konstante iznose po jednoj fazi

$$R = 94\ \text{m}\Omega/\text{km}, \quad L = 0{,}60\ \text{mH/km}, \quad C = 230\ \text{nF/km}, \quad G = 0$$

za 300 mm razmaka među osima kabela smještenih u ravnini, a okolni prostor nije vodljiv.

Na kabel je priključen zračni, trofazni vod, koji ima konstante kao u primjeru 5.3, tj. one su po fazi

$$R = 82\ \text{m}\Omega/\text{km}, \quad L = 1{,}34\ \text{mH/km}, \quad C = 8{,}6\ \text{nF/km}, \quad G = 0$$

Neka je zračni vod duljine 200 km. Na njegovu kraju se priključuje teret koji ima fazni napon 127 kV, 50 Hz i faznu struju 316 A pri njezinu faznom zaostajanju za kut 26°, kojemu odgovara faktor snage 0,9, induktivni.

Kabel ima razmjerno velik faktor gubitaka vodiča

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = 0{,}5, \quad \varepsilon_1 = 26{,}6°$$

a osnovna fazna konstanta iznosi $\beta_0 = 3{,}68 \cdot 10^{-3}$ rad/km. Odatle su prigušna i fazna konstanta kabela

$$\alpha_1 = 0{,}897 \cdot 10^{-3}\ 1/\text{km}, \quad \beta_1 = 3{,}79 \cdot 10^{-3}\ \text{rad/km}$$

Cijela duljina kabela ima konstante za $l_1 = 16$ km

$$\alpha_1 l_1 = 14{,}4 \cdot 10^{-3}, \quad \beta_1 l_1 = 60{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$$

Za osnovni valni otpor $Z_{v01} = 51{,}0\ \Omega$ iznosi valna impedancija kabela

$$Z_{v1} = 54 \exp(-j\,13{,}3°)\ \text{oma}$$

Zadani kabelski vod se tretira kao kratki vod, te je njegova transmisiona matrica (5.60), a pojedini članovi matrice iznose

$$T_{111} = T_{122} = 1$$
$$T_{112} = l_1 (R_1 + j\,\omega L_1) = 1{,}50 + j \cdot 3{,}01 = 3{,}36 \exp(j\,63{,}4°)\ \Omega$$
$$T_{121} = l_1 (G_1 + j\,\omega C_1) = j \cdot 1{,}15 \cdot 10^{-3} = 1{,}15 \exp(j \cdot 90°)\ \text{mS}$$

Zračni vod ne ulazi više među kratke vodove, te se njegova transmisiona matrica računa po (5.59). Prethodno treba utvrditi konstante voda

$$\alpha_2 l_2 = 20{,}6 \cdot 10^{-3}, \quad \beta_2 l_2 = 0{,}214\ \text{rad}$$

Valna impedancija ostaje kao u primjeru 5.3, tj. $Z_{v2} = 400 \exp(-j\,5{,}5°)$ oma. Sada su dalje

$$\operatorname{ch}(\gamma_2 l_2) = 0{,}977 \exp(j\,0°), \quad \operatorname{sh}(\gamma_2 l_2) = 0{,}214 \exp(j\,84{,}6°)$$

Pojedini članovi transmisione matrice zračnog voda iznose

$$T_{211} = T_{222} = \operatorname{ch}(\gamma_2 l_2) = 0{,}977$$
$$T_{212} = Z_{v2} \operatorname{sh}(\gamma_2 l_2) = 85{,}6 \exp(j\,79{,}1°)\ \text{oma}$$
$$T_{221} = \frac{\operatorname{sh}(\gamma_2 l_2)}{Z_{v2}} = 0{,}535 \cdot 10^{-3} \exp(j\,90{,}1°)\ \text{simensa}$$

Zajednička matrica nastaje množenjem pojedinih matrica, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$, a pojedini njezini članovi iznose

$$T_{11} = T_{111} T_{211} + T_{112} T_{221} = 0{,}975 \exp(j\,0°)$$
$$T_{12} = T_{111} T_{212} + T_{112} T_{222} = 88{,}8 \exp(j\,78{,}5°) \text{ oma}$$
$$T_{21} = T_{121} T_{211} + T_{122} T_{221} = 1{,}66 \exp(j\,90°) \text{ milisimensa}$$
$$T_{22} = T_{121} T_{212} + T_{122} T_{222} = 0{,}880 \exp(j\,1{,}2°)$$

Generatorske veličine su zadane jednadžbom $\mathbf{V}_g = \mathbf{T}\,\mathbf{V}_t$, a odatle su napon i struja na generatorskoj strani

$$U_g = T_{11} U_t + T_{12} I_t = 143 \exp(j\,9°) \text{ kV}$$
$$I_g = T_{21} U_t + T_{22} I_t = 269 \exp(j\,20{,}3°) \text{ A}$$

Složeni vod se ne može predstaviti jednim vodom. On ostaje uvijek složeni vod. Homogeni vod ima članove T_{11} i T_{22} u transmisionoj matrici međusobno jednake, $T_{11} = T_{22}$. Matrica složenog voda ne zadovoljava taj uvjet, te takav vod nije homogeni vod.

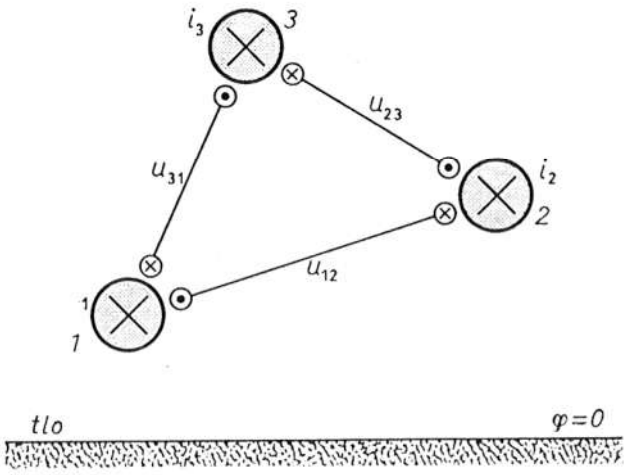
5.5. VOD S MNOGO VODIČA

Vod sa dva vodiča jednostavan je u svojoj analizi, jer nema vanjskih utjecaja. Vodičima teče jednaka struja, samo je suprotno usmjerena, a nije važan potencijal pojedinog vodiča, već samo napon među njima. Situacija je već drukčija čim postoje tri vodiča. Više se ne mogu ispustiti njihovi potencijali, a raspodjela struja je uvjetovana i teretom i izvorom. Teorija *mnogožičnog voda* iskorištava u potpunosti teoriju dvožičnog voda. Dapače, treba nastojati da se ona upotrijebi u potpunosti. To bi bilo moguće ako je dopušteno da se mnogožični vod pretvori u mnoštvo dvožičnih vodova, a pri tome se ne zaboravi na elektromagnetsku spregu među njima.

Elektromagnetska sprega među dvožičnim vodovima u mnogožičnom vodu novi je element koji nije postojao u teoriji dvožičnog voda. Poznate konstante voda uzimaju u obzir sve faktore koji su mjerodavni u ponašanju voda, bez obzira kakav on bio. Otpor, R, uzima u obzir gubitke u vodovima izazvane protokom struje. On uzima u obzir i pasivne vodiče u okolišu voda, ako u njima nastaju gubici induciranim vrtložnim strujama. Odvod, G, predstavlja također gubitke, samo su oni u okolnom izolatoru. Može se desiti da postoje gubici za koje nije jasno da li ih treba obuhvatiti otporom ili odvodom. Vodiči visokonaponskog voda su obješeni na izolatorske lance, koji su sastavljeni od porculanskih »tanjura«. Tanjuri se drže međusobno čeličnim zglobovima. Površinom tanjura teku struje čiji se gubici uzimaju u obzir odvodom. Električno polje inducira u zglobovima struje, čiji su gubici uključeni također u odvod. Metalni zglobovi izolatora u električnom polju imaju jednaku ulogu kao i vodljive nečistoće u izolatoru. Međutim, magnetskim poljem se induciraju u zglobovima struje, čiji su gubici uključeni u otpor voda. Ovako prikazano ima fizikalne logike, ali je stvarno teško razlučiti jedne gubitke od drugih. Osnovna fizikalna činjenica ostaje da su svi gubici bilo kakva voda obuhvaćeni otporom R i odvodom G, te nema potrebe uvoditi još neku konstantu.

Tokovi elektromagnetskog polja i njegova energija predstavljeni su induktivitetom i kapacitetom. I ovdje se može dogoditi da treba razlučiti induktivne efekte od kapacitivnih, ali to u suštini nije važno, već je važno da nema potrebe uvoditi nove konstante. Bilo kakvi vodovi uvijek se mogu prikazati sa četiri konstante: R, G, L, C.

Kad se govori o sprezi, uvijek se misli na *induktivnu* ili *kapacitivnu spregu*, iako u tome može sudjelovati i odvod, što bi bila *konduktivna sprega*. Kapacitivna i konduktivna sprega djeluju zajedno. Koja je sprega dominantna, ocjenjuje se od



Sl. 5.15. Presjek trožičnog voda čiji su vodiči smješteni paralelno vodljivom poluprostoru. To je slučaj trofaznog voda iznad vodljivog tla.

slučaja do slučaja. Induktivna sprega prevagava u nižefrekventnoj oblasti do tonskih frekvencija. Kapacitivna sprega dolazi do izražaja u višefrekventnoj oblasti. Telefonski kabeli imaju vodiče postavljene u četvorke. Dva i dva vodiča u njima leže u okomitim ravninama. Tako je spriječena induktivna sprega među parovima, ali nije spriječena kapacitivna sprega. Ona nije važna dok se radi o tonskoj frekvenciji. Jedna i druga sprega se predstavljaju induktivitetima i kapacitetima voda u cjelini.

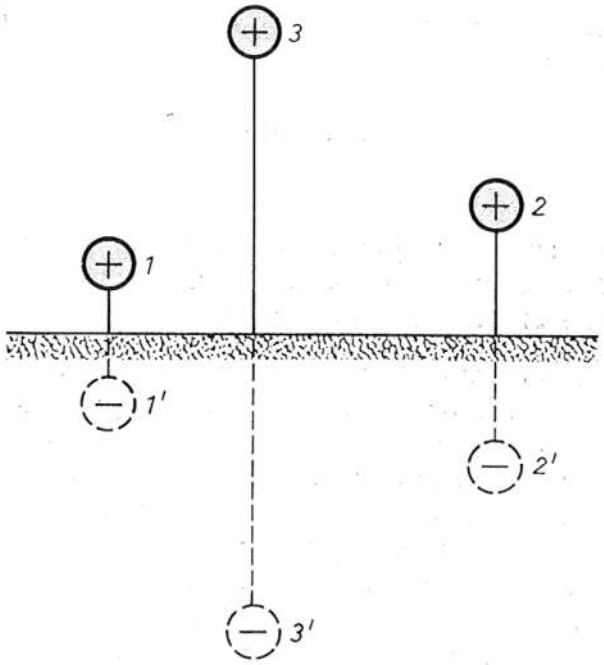
Neka posluži u prikazu teorije **vod od tri vodiča** smještena paralelno vodljivom poluprostoru, kao što je prikazano na sl. 5.15. Vod je priključen na generatorskoj strani na izvor koji održava napone među vodičima U_{12}, U_{23}, U_{31}, odnosno napone prema vodljivom poluprostoru U_{11}, U_{22}, U_{33}, koji su ujedno potencijali pojedinih vodiča. Vodičima voda teku struje i_1, i_2, i_3, koje diktiraju teret na kraju voda i sam vod. Takvo je stvarno stanje napona i struja na vodu. Treba uzeti u obzir da vrijedi odnos

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0$$

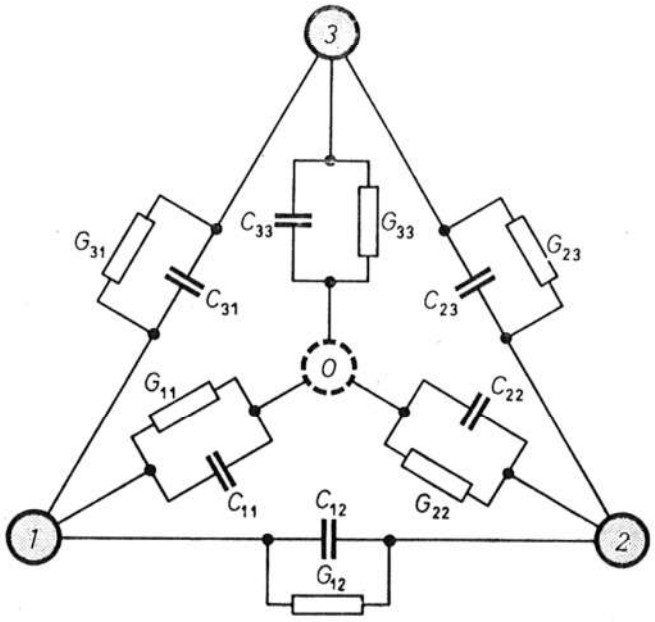
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

koji se uspostavlja načinom pogona zadanog voda. Dovođenje vodiča na određeni potencijal i protok struje vodičima inducira u vodljivu poluprostoru naboje i vrtložne

struje, koji sudjeluju u oblikovanju elektromagnetskog polja i doprinose povećanju gubitaka voda.



Sl. 5.16. Linijski naboji i struje koji su mjerodavni u oblikovanju polja trožičnog voda sa sl. 5.15.



Sl. 5.17. Shema poprečnih admitancija, odvoda i kapacitivnih susceptancija trožičnog voda sa sl. 5.15.

Poluprostor je ispunjen materijalom koji je vodič po kriteriju za vodiče, tj. pomačne struje su zanemarene. Naboji vodiča 1, 2, 3 induciraju na graničnoj ravnini poluprostora isto tolike naboje suprotna predznaka, koji se odslikaju u vodiče 1′, 2′, 3′, prema sl. 5.16. Električno polje se uspostavlja kako zahtijevaju naboji vodiča

i njihove slike. Tako nastaje sustav električnih silocijevi koje sve imaju baze na vodičima i vodljivom poluprostoru. Silocijevima prolazi električni tok i strujni tok. Električni tok se uzima u obzir kapacitetima, a strujni tok — odvodom. Ekvivalentna shema kapaciteta i odvoda prikazana je na sl. 5.17. Tako je nastao sustav odvodnih admitancija

$$Y = G + C\frac{\partial}{\partial t}$$

koje ulaze u jednadžbe voda prema rasporedu napona i struja. Poglavlje 3.10. je poslužilo u prikazu parcijalnih kapaciteta koji ovdje služe u shemi voda. Odvodi se jednako obrađuju kao parcijalni kapaciteti, a prema tome i odvodne admitancije.

Struje voda induciraju struje u vodljivom poluprostoru koje djeluju na njih reaktivno. One se odslikavaju u iste vodiče 1′, 2′, i 3′ prema sl. 5.16. u iznosima i'_1, i'_2 i i'_3 i suprotnim predznacima. Pri tome nije uzet u obzir feromagnetski efekt zbog lakše preglednosti. Inducirane struje u poluprostoru djeluju na magnetsko polje voda, a doprinose povećanju gubitaka. Jednostavna slika nastaje kod idealno vodljivog poluprostora. Odslikane inducirane struje imaju isti iznos kao i struje voda, samo što suprotno teku, a nemaju bilo kakvih dodatnih gubitaka. Zadatak postaje složen čim nije poluprostor idealno vodljiv. Takav je slučaj najčešći. To su plaštevi kabela ili tlo ispod zračnih vodova. Tlo ispod zračnih vodova je razmjerno daleko od vodiča u odnosu na razmak među njima, te se njegov utjecaj smije zanemariti. Tako nije u kabela, gdje je njihov plašt vrlo blizu vodičima kabelskog voda, a izrađen je od nekog metala.

5.5.1. Naponske jednadžbe

Jednadžbe voda se utvrđuju na isti način kao što je već učinjeno za dvožični vod. Naponi među vodičima U_{jk} su zadani. Zadani su i naponi prema vodljivu poluprostoru kod trofaznog voda navedenog u ovom primjeru. *Pad napona* se može odrediti tek kad je poznata integraciona petlja. Najviše fizikalnog smisla ima petlja koja prolazi površinom dvaju vodiča j i k. Kad se usvoji sistem petlji, nužno je uvesti veličinu *struje petlje*. Struje vodiča voda sastoje se od zbroja struja petlji koje prolaze dotičnim vodičima. Zadani vod sa sl. 5.15. ima tri vodiča u vodu i tri petlje. Smjer struja u vodičima je označen, a isto tako je označen smjer obilaska petlji. Vodičem 1 teku struje petlji 1 i 3, te su obje struje mjerodavne za pad napona u vodiču 1. Tako je i s ostalim vodičima. Obuhvaćeni tok pojedine petlje je sastavljen djelovanjem svih petlji, a osim toga i djelovanjem vrtložnih struja u vodljivu poluprostoru. Zbog jednostavnosti neka je zanemareno magnetsko djelovanje poluprostora. Neka je zadana unutarnja impedancija Z_{uk} k-tog vodiča po jedinici njegove duljine, za harmoničke veličine

$$Z_{uk} = R_k + j\omega L_{uk}$$

sastavljena od njegova otpora i unutarnjeg induktiviteta.

Padovi napona vodiča po jedinici duljine iznose

$$\begin{aligned} U_{v1} &= Z_{u1} I_{v1} = Z_{u1} (I_3 - I_1) \\ U_{v2} &= Z_{u2} I_{v2} = Z_{u2} (I_1 - I_2) \\ U_{v3} &= Z_{u3} I_{v3} = Z_{u3} (I_2 - I_3) \end{aligned} \tag{5.62}$$

Neka su unutarnje impedancije svih vodiča međusobno jednake

$$Z_{u1} = Z_{u2} = Z_{u3} = Z_u$$

Sad su I_1, I_2, I_3 struje petlji 1, 2, i 3, a struje I_{v1}, I_{v2} i I_{v3} se odnose na vodiče 1, 2, 3. Magnetski tokovi ulančeni pojedinim petljama definirani su vanjskim induktivitetima i strujama petlji prema odnosu

$$\psi_k = L_{vk1} I_1 + L_{vk2} I_2 + L_{vk3} I_3$$

Sad se mogu napisati naponske jednadžbe pojedinih petlji

$$\begin{aligned} -\frac{dU_1}{dz} &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 \\ -\frac{dU_2}{dz} &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + Z_{23} I_3 \\ -\frac{dU_3}{dz} &= Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 \end{aligned} \tag{5.63}$$

Naponske jednadžbe (5.63) pišu se matrično u jednostavnijem obliku

$$-\frac{d\mathbf{U}}{dz} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I} \tag{5.64}$$

Ona je u tome obliku jednaka jednadžbi dvožičnog voda. Napon **U** je jednostupčana matrica napona među vodičima voda ili napona petlji. Struja **I** je jednostupčana matrica struja petlji. Matrica impedancija petlji **Z** je kvadratna simetrična matrica

$$\mathbf{Z} = [Z_{kj}]_p^p \tag{5.65}$$

ako je *p broj petlji voda.*

Naponska jednadžba (5.64) u matričnom obliku je polazna jednadžba u teoriji vodova s mnogo vodiča.

5.5.2. Strujne jednadžbe

Strujna jednadžba se izvodi također postupkom kakav je primijenjen na dvožični vod. Gubitak struje vodiča ide na struju odvoda zbog loše izolacije i na pomačnu struju zbog promjene električnog toka koji izlazi s dotičnog vodiča. Odvodne struje, provodna i pomačna, su razmjerne odvodnoj admitanciji i pripadnom naponu. U konkretnom trofaznom vodu su odvodne admitancije spojene kao na sl. 5.17. Njih ima ukupno šest, od kojih su tri spojene u trokutu, a tri su u zvijezdi. Da bi se ustanovila ukupna odvodna struja vodiča, potrebno je poznavanje potencijala vodiča. Gubitak struje k-tog vodiča jednak je

$$-\frac{\mathrm{d}I_{vk}}{\mathrm{d}z} = \sum_{j=1}^{3} Y_{kj}\, U_{kj} \tag{5.66}$$

što je ujedno strujna jednadžba voda. Dobivenu jednadžbu treba prevesti na veličine petlji koje su primijenjene u naponskoj jednadžbi. Struje vodiča se jednostavno prikazuju strujama petlji. Prijelaz od struja vodiča na struje petlji izvodi se i matrično, ako se primijeni **spojna matrica M**. Spojna matrica ima isti broj stupaca koliko je petlji, a broj redaka jednak je broju vodiča voda.

$$\mathbf{M} = \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{redni broj petlje}} \\ \downarrow \text{redni broj vodiča} \end{array} \quad \text{spojna matrica}$$

Elementi spojne matrice su 1, —1, 0, prema tome da li struja petlje prolazi promatranim vodičem, te da li se smjer struje vodiča i smjer obilaska petlje podudaraju. Element spojne matrice iznosi

1, smjer struje vodiča je jednak smjeru obilaska petlje

— 1, „ „ „ nije „ „ „ „

0, struja petlje ne prolazi promatranim vodičem

$$\mathbf{I}_v = \mathbf{M}\,\mathbf{I} \tag{5.67}$$

ako je **I** matrica struja petlji.

Da bi se moglo primijeniti samo napone petlji, treba odvodne admitancije svesti na petlje. Odvodne admitancije tvore prema sl. 5.17. trokut i zvijezdu. Zvijezdu admitancija treba pretvoriti u trokut, te se zatim smije primjenjivati samo napone

petlji. Ta je pretvorba izvršena u poglavlju 3.10. o parcijalnim kapacitetima. Admitancija petlje se dobiva, prema tome, iz vlastitih admitancija vodiča prema odnosu

$$Y'_{kj} = \frac{Y_{kk}\, Y_{jj}}{Y_0}, \qquad Y_0 = Y_{11} + Y_{22} + Y_{33} \tag{5.68}$$

Tako dobivene admitancije se dodaju postojećim admitancijama među vodičima, te se dobiju ukupne admitancije petlji

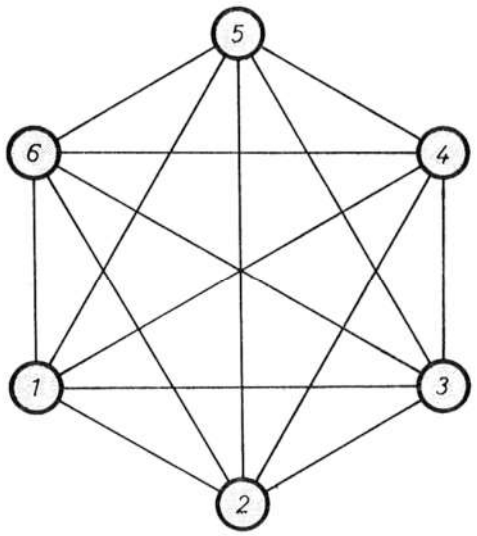
$$Y_{kj\,\text{ukupni}} = Y_{kj\,\text{stvarni}} + Y'_{kj}$$

5.5.3. Vod sa n vodiča

Ovdje se iskorištava trofazni vod da bi se prikazao višežični vod. Općenito se pokazuje da vod sa n vodiča ima p petlji koje prolaze uvijek po površini dvaju vodiča. Broj petlji p je ovisan o broju vodiča n odnosom

$$p = \frac{1}{2} n\,(n - 1) \tag{5.69}$$

Na sl. 5.18. je skiciran presjek voda sa šest vodiča, a odmah su označene petlje. Slika prikazuje opći mnogokut koji ima toliko vrhova, koliko ima vodiča u vodu.



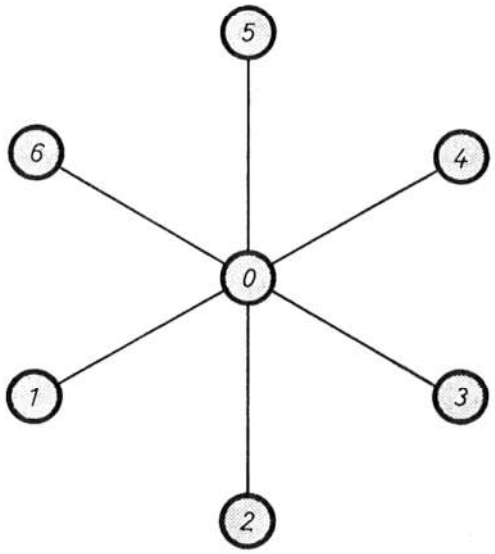
Sl. 5.18. Petlje šesterožičnog voda koje sačinjavaju opći šesterokut.

Broj stranica mnogokutnika jednak je broju petlji promatranog voda. Konkretni vod sa šest vodiča na sl. 5.18. ima 15 petlji. Vod s više vodiča ima vlastitih odvodnih

admitancija vodiča, koliko ima vodiča. Te admitancije sačinjavaju zvijezdu admitancija, koja se može transformirati u mnogokutnik admitancija. Obratna transformacija nije moguća. Vod sa šest vodiča ima zvijezdu admitancija kao na sl. 5.19. Admitancije mnogokutnika se dobiju iz zvijezde admitancija po odnosu

$$Y_{kj} = -\frac{Y_{kk}\, Y_{jj}}{Y_0}, \qquad Y_0 = \sum_{k=1}^{n} Y_{kk} \tag{5.70}$$

Ove se admitancije dodaju stvarnim admitancijama među vodičima, te su to tada obračunske admitancije petlji, koje ulaze u strujne jednadžbe voda.



Sl. 5.19. Zvijezda admitancija šesterožičnog voda.

Strujna jednadžba (5.66) postaje jednostavna čim se uvedu odvodne admitancije petlji. Gubitak struje petlje ide samo na račun odvoda dotične petlje

$$-\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}z} = Y_k\, U_k \tag{5.71}$$

Indeks k označava da se dotična veličina odnosi na k-tu petlju. Ova jednadžba s naponskom jednadžbom (5.64) su jednadžbe stanja voda s mnogo vodiča. Strujna jednadžba (5.71) bi mogla navesti na mišljenje da ostale petlje ne sudjeluju u odvodu struje promatrane petlje. Međutim, ne smije se zaboraviti da je admitancija petlje nastala pretvorbom zvijezde admitancija u mnogokut, te se tamo pokazao međusobni utjecaj svih vodiča. Odvodna admitancija je također kvadratna matrica.

Budući da nema međusobnog utjecaja petlji, matrica admitancija je dijagonalna

$$\mathbf{Y} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Y_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & Y_2 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & Y_3 & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline \end{array} = [Y_k]_p^p \tag{5.72}$$

Zato se strujna jednadžba smije pisati matrično, u obliku

$$-\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}z} = \mathbf{Y}\,\mathbf{U} \tag{5.73}$$

Sada su konačne diferencijalne jednadžbe napona i struje petlji u matričnom obliku

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}z^2} &= \mathbf{Z}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{U} \\ \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{I}}{\mathrm{d}z^2} &= \mathbf{Y}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{I} \end{aligned} \tag{5.74}$$

To je isti oblik jednadžbi voda kakav je i u dvožičnog voda, ako se ispusti matrična oznaka. One se odnose na petlje kao što su već definirane. Integracija ovih jednadžbi je moguća u matričnom obliku, ako su $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Y}$ regularne matrice. One su regularne matrice, jer predstavljaju impedanciju. Tada se smije uvesti *valna konstanta* u matričnom obliku

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\gamma}^2 = \mathbf{Y}\,\mathbf{Z} \\ \det[\mathbf{Y}\,\mathbf{Z}] \neq 0 \end{gathered} \tag{5.75}$$

Ako se uvede pomoćna nepoznata veličina $\mathbf{S} = \mathbf{Y}\,\mathbf{U}$, slijedi rješenje diferencijalnih jednadžbi (5.74). Osim toga treba voditi računa o strujnoj i naponskoj jednadžbi. Sad se uvodi *valna impedancija* kao u dvožična voda, samo je ona ovdje matrica

$$\mathbf{Z}_\mathrm{v} = \mathbf{Y}^{-1}\,\boldsymbol{\gamma} \tag{5.76}$$

Rješenje diferencijalnih jednadžbi glasi za veličine struja i napona petlji u matričnom obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= e^{\boldsymbol{\gamma} z}\,\mathbf{I}' + e^{-\boldsymbol{\gamma} z}\,\mathbf{I}'' \\ \mathbf{U} &= -\mathbf{Z}_\mathrm{v}\,e^{\boldsymbol{\gamma} z}\,\mathbf{I}' + \mathbf{Z}_\mathrm{v}\,e^{-\boldsymbol{\gamma} z}\,\mathbf{I}'' \end{aligned} \tag{5.77}$$

Veličine $\mathbf{I}'$ i $\mathbf{I}''$ su integracione konstante koje se dobiju iz graničnih uvjeta kao u dvožična voda. Valna konstanta i valna impedancija su sekundarne konstante koje nadomještavaju primarne konstante, impedanciju petlji $\mathbf{Z}$ i admitanciju petlji $\mathbf{Y}$. Način pisanja vodi računa o pravilima matričnog računa.

5.5.4. Simetrični vod

Oblik jednadžbi napona i struje prema (5.77) izgleda kao u dvožična voda, ako se ispuste matrične oznake. To bi se dogodilo čim bi matrice **Y** i **Z** postale brojevi. Matrica admitancija **Y** može postati broj u potpuno simetrična voda. Tada su admitancije među pojedinim vodičima međusobno jednake. Svaki vod se može učiniti *simetričnim* tako, da pojedini vodiči zauzmu položaje svih ostalih vodiča. Simetriranje se postiže prepletom vodiča. Matrica admitancija petlji, **Y**, je dijagonalna matrica, a pri simetriji voda svi elementi matrice postaju međusobno jednaki. Ona prelazi u broj. Matrica impedancije petlji **Z** je simetrična. Ona dobiva sve elemente dijagonale, međusobno jednake, a svi elementi izvan dijagonale postaju međusobno jednaki, ako je vod simetričan. Ona je za konkretni trofazni vod

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_1 \\ Z_1 & Z_0 & Z_1 \\ Z_1 & Z_1 & Z_0 \end{vmatrix} \tag{5.78}$$

Takva se matrica može pretvoriti u dijagonalnu $\mathbf{Z}_s$, tako da je odnos među njima

$$\mathbf{S}\,\mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}\,\mathbf{S} \tag{5.79}$$

Transformaciona matrica **S** je regularna, a elementi su joj sastavljeni od potencija veličine a, koja je treći korijen iz jedinice za konkretni slučaj u (5.78)

$$a = \sqrt[3]{1} = \exp\left(j\frac{2\pi}{3}\right)$$

Ona je kod matrice (5.78) jednaka, prema tome

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \tag{5.80}$$

Sada je dijagonalna matrica impedancija, kad se upotrijebi odnos (5.79)

$$\mathbf{Z}_s = \begin{vmatrix} Z_0 + 2Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 - Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 - Z_1 \end{vmatrix} \tag{5.81}$$

Ovaj prikaz pokazuje da se simetrični trofazni vod može tako transformirati, da pojedine petlje nemaju nikakve sprege međusobno. U tome slučaju veličine napona

i struje se mijenjaju također uz pomoć iste transformacione matrice. Odgovarajući naponi i struje imaju sada iznose

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{U}, \qquad \mathbf{I}_s = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{I} \tag{5.82}$$

Transformirani naponi i struje ulaze u jednadžbe voda. Ovdje se pojavljuje inverzna transformaciona matrica, koja iznosi za trofazni sustav

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & a & a^2 \\ \hline 1 & a^2 & a \\ \hline \end{array} \tag{5.83}$$

Prikazani postupak transformacije trofaznog sustava je rastavljanje na **simetrične komponente.** On se smije primijeniti prema rečenome *samo na simetrični vod,* ali onda matrica admitancija prelazi u broj, a matrica impedancija može postati dijagonalna matrica.

Ako je broj petlji simetričnog voda veći od 3, $p > 3$, postoji transformaciona matrica koja dovodi matricu impedancija na dijagonalan oblik. Karakteristični element matrice iznosi

$$a = \sqrt[p]{1} = \exp\left(j\frac{2\pi}{p}\right) \tag{5.84}$$

a sama matrica slijedećeg je oblika

$$\mathbf{S} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & a^{p-1} & a^{p-2} & a^{p-3} & \dots & a \\ \hline 1 & a & a^{p-1} & a^{p-2} & \dots & a^2 \\ \hline 1 & a^2 & a & a^{p-1} & \dots & a^3 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline 1 & a^{p-2} & a^{p-3} & a^{p-4} & & a^{p-1} \\ \hline \end{array} = [S_{jk}]_p^p \tag{5.84}$$

Ona je regularna. Njezina determinanta iznosi

$$\det \mathbf{S} = (-1)^{p-1}\,p\,a\,(a-1)^{p-2} \neq 0$$

Inverzna matrica $\mathbf{S}^{-1}$ transformacione matrice slijedećeg je oblika

$$\frac{1}{p}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^{p-1} \\ \hline 1 & a^{p-1} & a & a^2 & \dots & a^{p-2} \\ \hline 1 & a^{p-2} & a^{p-1} & a & \dots & a^{p-3} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline 1 & a^2 & a^3 & a^4 & & a \\ \hline \end{array} = \mathbf{S}^{-1} \tag{5.85}$$

Naponi i struje transformiraju se prema jednadžbama (5.82), te se tako dobiva p nezavisnih sustava, koji se smiju svaki za sebe analizirati. Transformirana impedancija ima dijagonalan oblik

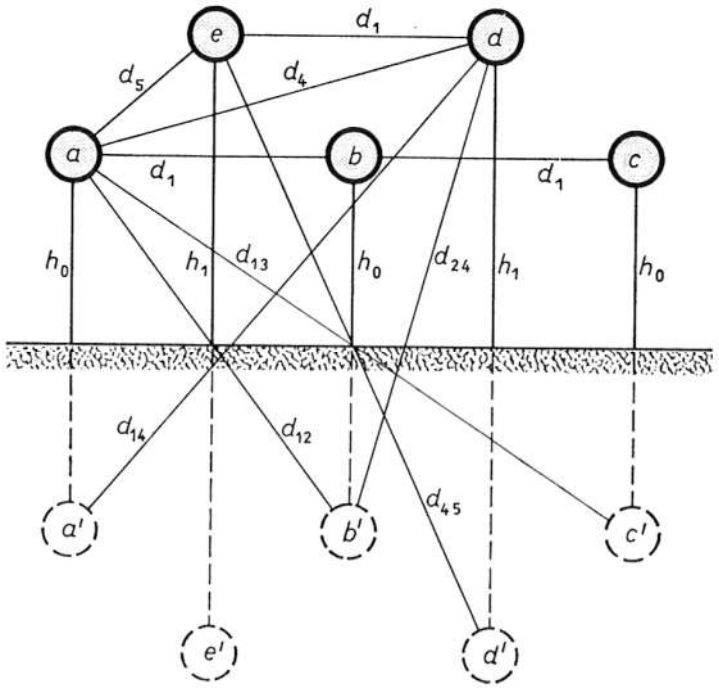
$$\mathbf{Z}_s = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline Z_0 + (p-1)\,Z_1 & 0 & 0 & \dots & \\ \hline 0 & (Z_0 - Z_1) & 0 & \dots & \\ \hline 0 & 0 & (Z_0 - Z_1) & \dots & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline & & & & (Z_0 - Z_1) \\ \hline \end{array} \tag{5.86}$$

Svi dijagonalni elementi su međusobno jednaki i iznose $(Z_0 - Z_1)$, osim prvog elementa koji iznosi $Z_0 + (p-1)\,Z_1$. Ako je zbroj struja svih petlji i svih napona jednak nuli, nije interesantan prvi element, već samo ostali elementi. To pak znači da sve simetrične komponente napona i struja imaju istu impedanciju $(Z_0 - Z_1)$. Ona se naziva **pogonska impedancija** za simetrične napone i struje petlji. Jednako se i zajednička admitancija Y_1 naziva **pogonska admitancija.**

Ova analiza višežičnog voda pokazuje da simetrični vod omogućuje da ga se jednostavno prikaže, a na njega se smije primijeniti direktno teorija dvožičnog voda. Ako višežični vod nije simetričan, nije moguće primijeniti jednostavne metode dvožičnog voda, niti se može uvesti pogonska impedancija, niti pogonska admitancija, već se rješava petlja po petlja.

Višežični vodovi se pojavljuju u prijenosu energije. Oni su tamo trofazni vodovi ili dvostruki trofazni vodovi. Rijetko se javlja koji drugi broj faza. Višežični vodovi postoje u komunikacionoj tehnici. U njima sprega među vodičima ima štetne posljedice, te se ona poništava dodatnim sredstvima.

PRIMJER 5.5. Zadan je **trofazni vod sa dva zaštitna užeta.** Raspored vodiča je prikazan na sl. 5.20. Vodiči užeta pojedinih faza a, b, c smješteni su na istoj visini od vodljiva tla. To su bakrena užeta nominalnog presjeka 185, a stvaran im je presjek 182 mm². Zaštitna užeta su smještena simetrično poviše faznih užeta na istoj visini. Ona su od bakra, nominalnog presjeka 120, a stvaran im je presjek 117 mm². Vodljivost bakra je 56 MS/m, pri 20° C.



Sl. 5.20. Naboji trofaznog voda s dva zaštitna užeta iznad vodljivog tla. Slika služi u proračunu poprečne admitancije voda.

Vod je dug 120 km. Da bi se vidio utjecaj nesimetričnog postavljanja vodiča, nije predviđen njihov preplet. Vodiči zadržavaju svoj položaj na cijeloj duljini voda. Vod je priključen na generatorskoj strani na izvor bez unutarnje impedancije konstantnog napona i frekvencije. Iznos međufaznog napona jednak je između sve tri faze. Generatorski napon tvori istostrani trokut napona, a iznos napona je 125 kV, 50 Hz. Teret na vodu je simetričan i tvori trokut impedancija istog iznosa između svih faza. Treba promatrati dva pogonska stanja. Jednom neka je vod u praznu hodu, a drugi put je opterećen impedancijom 1200 oma, pri faktoru snage 0,8 induktivno.

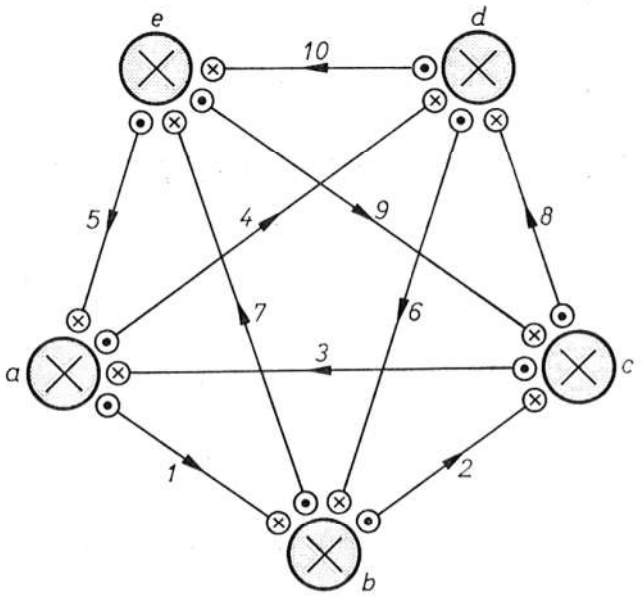
Zaštitna užeta su položena na vrhove stupova. Ona trebaju štititi vod od direktnih udaraca groma u fazne vodiče. Njihov je spoj dobro izveden s armaturom stupova i njihovim uzemljenjem. Zaštitna užeta su međusobno kratko spojena konstrukcijom stupova, a to je dobar spoj, jer o njemu ovisi njihovo funkcioniranje. Ona su na nultom potencijalu, a pojedine faze su prema njima na faznom naponu.

Raspored vodiča je naznačen na sl. 5.20. Pojedine mjere iznose

$R_0 = 8{,}75$ mm polumjer faznog vodiča
$R_1 = 7{,}0$ mm polumjer vodiča zaštitnog užeta
$d_1 = 4{,}5$ m razmak među fazama $a - b$ i $b - c$ i među zaštitnim užetima
$2\,d_1 = 9{,}0$ m razmak među fazama $a - c$
$d_4 = 8{,}0$ m razmak među vodičima $a - d$ i $c - e$
$d_5 = 4{,}8$ m razmak među vodičima $a - e$, $b - e$, $b - d$, $c - d$.
$h_0 = 10$ m visina vodiča a, b, c nad tlom

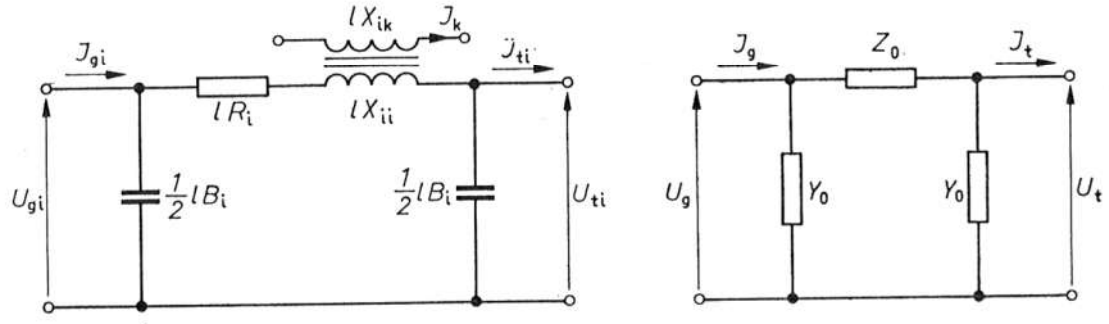
h_1	= 14,2 m	visina vodiča d i e nad tlom
$2h_0$	= 20 m	razmak između vodiča i slike $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$
$2h_1$	= 28,4 m	razmak između vodiča i slike $d - d'$, $e - e'$
d_{12}	= 20,5 m	razmak između vodiča i slike $a - b'$, $b - c'$, $c - b'$, $b - a'$
d_{13}	= 21,9 m	razmak između vodiča i slike $a - c'$, $c - a'$
d_{14}	= 25,1 m	razmak između vodiča i slike $d - a'$, $e - c'$
d_{24}	= 24,3 m	razmak između vodiča i slike d $- b'$, $d - c'$, $e - b'$, $e - a'$
d_{45}	= 28,8 m	razmak između vodiča i slike $d - e'$, $e - d'$

Ove su mjere dovoljne da se mogu odrediti konstante voda. Na vodu treba odrediti napone i struje na teretnoj strani voda u oba pogonska slučaja.



Sl. 5.21. Petlje trofaznog voda s dva zaštitna užeta. One čine opći peterokut.

Ovaj vod se još može ubrojati u kategoriju kratkih vodova, sa shemom kakva je nacrtana na sl. 5.22. Takva je shema bila i na sl. 5.10, samo što je u ovoj označeno i međuinduktivno djelo-



Sl. 5.22. Električna shema trofaznog voda s dva zaštitna užeta. Lijeva shema se odnosi na i-tu petlju, a desna shema pripada simetriranom vodu.

vanje. Ona se odnosi na pojedinu strujnu petlju. Ovaj sustav od *pet vodiča* ima *deset petlji*. Petlje su označene na sl. 5.21. brojevima od 1 do 10. Odmah su označeni obilasci pojedinih petlji, te

smjerovi struja pojedinih vodiča. Prema tome je spojna matrica koja povezuje struje petlji i vodiča kao u shemi

Redni broj petlji

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	a	+1	0	+1	−1	+1	0	0	0	0	0	
	b	+1	−1	0	0	0	+1	−1	0	0	0	
M =	*c*	0	+1	−1	0	0	0	0	−1	+1	0	Redni broj vodiča
	d	0	0	0	+1	0	−1	0	+1	0	−1	
	e	0	0	0	0	−1	0	+1	0	−1	+1	

U *otporu vodiča* ne treba uzeti u obzir skinefekt, jer promjer vodiča nije još tako velik da bi se pojavio primjetan skinefekt. Vodič faze ima otpor 98 mΩ/km, a otpor vodiča zaštitnog užeta je 153 mΩ/km; oba su na 20° C.

Zadatak će se znatno pojednostavniti ako se zanemare struje u petljama 4 do 9. Te petlje nisu opterećene na kraju voda, jer ne postoji nikakav priključak između faza i zaštitnih užeta. Tim petljama ipak teku stanovite struje, koje se zatvaraju kapacitivno. Postoje kapaciteti između faza i zaštitnih užeta, a napon petlji tjera preko njih kapacitivnu struju. Ukupna struja u petlji 10 zaštitnih užeta se sastoji od svih kapacitivnih struja i induktivne struje nastale zajedničkim djelovanjem faznih struja. Petlja zaštitnog užeta je kratko spojena, te u njoj ne mogu teći struje nastale kapacitivnim djelovanjem. Preostaje samo induktivna struja. Fazne petlje 1, 2 i 3 stoje simetrično prema petlji zaštitnih užeta 10, te su odgovarajući međuinduktiviteti međusobno jednaki. Zato ne postoji struja u petlji 10 dok god je zbroj faznih struja jednak nuli. Prema tome, zbog

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \text{ slijedi } I_{10} = 0$$

Zaštitna užeta u ovom zadatku djeluju samo na kapacitet voda, a ne djeluju na njegov induktivitet.

Tlo iznad kojeg prolazi vod je vodljivo. Njegova je vodljivost tolika, da se pomačne struje u njemu zanemaruju. Dielektričnost tla je oko 10^{-10} F/m, a vodljivost je oko 10^{-4} S/m, kad je ono naročito slabo vodljivo. I tada su provodne struje oko hiljadu puta veće od pomačnih struja. Za električno polje se takvo tlo smatra vodičem. Prema tome je opravdano odslikavanje vodiča kako je to označeno na sl. 5.20., kad se određuje kapacitet voda.

Tlo ne utječe na induktivitet voda. Ono je toliko slabo vodljivo, da se ne mogu inducirati značajnije struje koje bi induktivno djelovale na vod. U proračunu induktiviteta voda ne treba voditi računa o utjecaju tla.

Prema rečenome slijedi da je dovoljno promatrati stanje samo triju faznih petlji. Konstante treba odrediti za te tri petlje. Kapacitete se određuje uz pomoć potencijalnih i kapacitivnih koeficijenata, kako je to opisano u trećem poglavlju. Matrica potencijalnih koeficijenata glasi, uzevši u obzir oznake sa sl. 5.20.

$$\frac{1}{K_0}$$

a	*b*	*c*	*d*	*e*	
$\ln\left(\frac{2h_0}{R_0}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{12}}{d_1}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{13}}{2d_1}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{14}}{d_4}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{24}}{d_5}\right)$	*a*
$\ln\left(\frac{d_{12}}{d_1}\right)$	$\ln\left(\frac{2h_0}{R_0}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{12}}{d_1}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{24}}{d_5}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{24}}{d_5}\right)$	*b*
$\ln\left(\frac{d_{13}}{2d_1}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{12}}{d_1}\right)$	$\ln\left(\frac{2h_0}{R_0}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{24}}{d_5}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{14}}{d_4}\right)$	*c* = **a**
$\ln\left(\frac{d_{14}}{d_4}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{24}}{d_5}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{24}}{d_5}\right)$	$\ln\left(\frac{2h_1}{R_1}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{45}}{d_1}\right)$	*d*
$\ln\left(\frac{d_{24}}{d_5}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{24}}{d_5}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{14}}{d_4}\right)$	$\ln\left(\frac{d_{45}}{d_1}\right)$	$\ln\left(\frac{2h_1}{R_1}\right)$	*e*

Matricu treba rastaviti na četiri dione matrice, kako je označeno masnim crtama, te je sada

$$\mathbf{a} = \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right|$$

To je učinjeno zato, da bi se olakšalo određivanje kapaciteta faza. Vodiči užeta d i e su na nultom potencijalu. Matrica naboja faza je $\mathbf{Q}_f$, a zaštitnog užeta $\mathbf{Q}_z$. Matrica potencijala faza je φ_f. Sad je potencijal pojedinih vodiča dan jednadžbama

$$\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{Q}_f + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{Q}_z = \varphi_f$$

$$\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{Q}_f + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{Q}_z = \mathbf{O}$$

Ove jednadžbe omogućuju da se eliminira naboj vodiča zaštitnog užeta, a dovodi se u vezu samo naboj faza i njihov potencijal prema jednadžbi

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21})\,\mathbf{Q}_f = \varphi_f$$

Tako se formiraju novi potencijalni koeficijenti a'_{fk}, koji se odnose samo na tri vodiča faza. Prema tome je

$$\mathbf{a}'\,\mathbf{Q}_f = \varphi_f$$

a tu je

$$\mathbf{a}' = \left|\begin{array}{c|c|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ \hline a'_{12} & a'_{22} & a'_{12} \\ \hline a'_{13} & a'_{12} & a'_{11} \end{array}\right|$$

Postoje samo četiri različita potencijalna koeficijenta. Nakon inverzije matrice $\mathbf{a}'$ dobivaju se po definiciji parcijalni kapaciteti, koji iznose za navedene dimenzije voda

$$C_{ab} = C_{bc} = \frac{a'_{11}\,a'_{12} - a'_{12}\,a'_{13}}{\det \mathbf{a}'} = 1{,}093 \text{ pF/m}$$

$$C_{ac} = \frac{a'_{13}\,a'_{22} - a'^{2}_{12}}{\det \mathbf{a}'} = 0{,}413 \text{ pF/m}$$

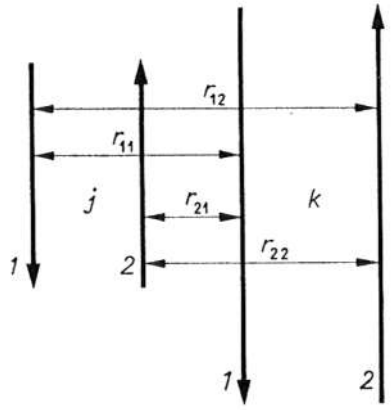
$$C_{aa} = C_{cc} = \frac{(a'_{11} - a'_{13})\,(a'_{22} - a'_{12})}{\det \mathbf{a}'} = 6{,}25 \text{ pF/m}$$

$$C_{bb} = \frac{(a'_{11} + a'_{13})\,(a'_{11} - 2\,a'_{12} - a'_{13})}{\det \mathbf{a}'} = 5{,}48 \text{ pF/m}$$

Ovdje ima šest parcijalnih kapaciteta, od kojih tri tvore trokut, a tri zvijezdu kapaciteta. Zvijezda kapaciteta se pretvori u trokut i dobiju se konačno kapaciteti triju petlji

$$C_1 = C_2 = 3{,}00 \text{ pF/m}, \qquad C_3 = 2{,}58 \text{ pF/m}$$

Induktiviteti se određuju samo za tri fazne petlje. Oni se svi odnose na magnetsko polje izvan vodiča. Svi oni imaju iznos koji se osniva na sl. 5.23., gdje se predviđa proračun toka kroz



Sl. 5.23. Strujne petlje *j* i *k*. Ustanovljenje međuinduktiviteta.

petlju *j* proizveden strujom petlje *k*. Uz pomoć udaljenosti stranica, kako je označeno na slici, međuinduktivitet iznosi

$$L_{jk} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_{jk\,12}\, r_{jk\,21}}{r_{jk\,22}\, r_{jk\,11}} \right)$$

Prema tome je matrica vanjskih induktiviteta faznih petlji 1, 2, 3

$$\mathbf{L_v} = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

1	2	3	
$\ln\left(\frac{d_1}{R_0}\right)^2$	$\ln\left(\frac{d_1}{2R_0}\right)$	$\ln\left(\frac{2d_1}{R_0}\right)$	1
$\ln\left(\frac{d_1}{2R_0}\right)$	$\ln\left(\frac{d_1}{R_0}\right)^2$	$\ln\left(\frac{2d_1}{R_0}\right)$	2
$\ln\left(\frac{2d_1}{R_0}\right)$	$\ln\left(\frac{2d_1}{R_0}\right)$	$\ln\left(\frac{2d_1}{R_0}\right)^2$	3

Numerički iznosi vanjskih induktiviteta su uneseni u matricu u mikrohenriima po metru

$$\mathbf{L_v} =$$

1	2	3	
2,50	1,11	1,39	1
1,11	2,50	1,39	2
1,39	1,39	2,77	3

μH/m

Unutarnji induktivitet vodiča se odnosi na magnetsko polje u vodiču. To magnetsko polje proizvode svi vodiči, ali se ne uzima u obzir kod zračnih vodova, već samo kad je polje proizvedeno od vlastite struje u vodiču. Onda je unutarnji induktivitet po jednoj petlji neovisan o promjeru vodiča, a iznosi

$$L_u = \frac{\mu_0}{4\pi} = 0{,}1 \ \mu\text{H/m}$$

Otpor vodiča po petlji iznosi

$$R = 0{,}196 \text{ m}\Omega/\text{m pri } 20^\circ \text{ C}$$

Sad je moguće ustanoviti poprečne admitancije, odnosno kapacitivne susceptancije i uzdužne impedancije prema sl. 5.22. za cijeli vod. Iznosi su navedeni u obliku matrice, vodeći računa da je

$$Y_0 = j B_0 = j \frac{1}{2} \omega C l$$

$$Z_0 = R_v + j X_0 = R_v + j \omega (L_u + L_v)$$

Matrice za fazne petlje 1, 2, 3 glase

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{vmatrix} j\,0{,}0565 & 0 & 0 \\ 0 & j\,0{,}0565 & 0 \\ 0 & 0 & j\,0{,}0486 \end{vmatrix} \text{ milisimensa (mS)}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{vmatrix} 23{,}5 + j\,98{,}0 & j\,41{,}8 & j\,52{,}3 \\ j\,41{,}8 & 23{,}5 + j\,98{,}0 & j\,52{,}3 \\ j\,52{,}3 & j\,52{,}3 & 23{,}5 + j\,108{,}0 \end{vmatrix} \text{ oma } (\Omega)$$

Shema na sl. 5.22. se iskorištava da bi se odredile struje i naponi u petljama. Budući da je zadan trokut napona na generatorskoj strani voda

$$\mathbf{U}_g = U_0 \begin{vmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{vmatrix} = 125 \begin{vmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{vmatrix} \text{ kV}, \qquad a = \exp\left(j \frac{2\pi}{3}\right)$$

i admitancija tereta u dva slučaja tereta između faza, simetričnih iznosa

$$Y_t = 0 \qquad \text{prazni hod}$$

$$Y_t = 0{,}667 - j\,0{,}5 \text{ mS} \qquad \text{teret}$$

mogu se odrediti napon i struja na teretnoj strani i struja na generatorskoj strani. Napon na teretnoj strani slijedi iz jednadžbe

$$[\mathbf{1} + \mathbf{Z}_0 (\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_t)]\, \mathbf{U}_t = \mathbf{K}\, \mathbf{U}_t = \mathbf{U}_g$$

Matrica $\mathbf{K} = \mathbf{1} + \mathbf{Z}_0 (\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_t)$ je kvadratna matrica trećeg stupnja oblika

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{31} & K_{33} \end{vmatrix}$$

Ona više nije simetrična matrica, niti se može pretvoriti u dijagonalnu matricu. Proračun napona i struja se provodi najprije za opterećeni vod, a tek zatim se isto učini za prazni hod.

Naponi na strani tereta su izračunati i iznose po pojedinim petljama, odnosno između pojedinih faza

$$U_{t1} = U_{ab} = [1 - 0{,}0403 \exp(j\,15{,}2°)]\, U_{g1}$$
$$U_{t2} = U_{bc} = [1 - 0{,}0308 \exp(j\,43{,}4°)]\, U_{g2}$$
$$U_{t3} = U_{ca} = [1 - 0{,}0410 \exp(j\,24{,}5°)]\, U_{g3}$$

Struje tereta po petljama su $\mathbf{I}_t = \mathbf{Y}_t\,\mathbf{U}_t$, a one su u pojedinim fazama iz sheme petlji na sl. 5.21.

$$I_{at} = I_{3t} - I_{1t} = 172{,}9 \exp(j\,172{,}3°)\ \text{A}$$
$$I_{bt} = I_{1t} - I_{2t} = 173{,}7 \exp(-j\,68{,}2°)\ \text{A}$$
$$I_{ct} = I_{2t} - I_{3t} = 175{,}3 \exp(j\,52{,}2°)\ \text{A}$$

Struja na generatorskoj strani po petljama iznosi

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{Y}_0\,(\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_t) + \mathbf{I}_t$$

Ona je tada po fazama na istoj strani

$$I_{ag} = I_{3g} - I_{1g} = [1 + 0{,}130 \exp(j\,124{,}8°)]\, I_{at}$$
$$I_{bg} = I_{1g} - I_{2g} = [1 + 0{,}139 \exp(j\,127{,}6°)]\, I_{bt}$$
$$I_{cg} = I_{2g} - I_{3g} = [1 + 0{,}075 \exp(j\,209{,}4°)]\, I_{ct}$$

Impedancija tereta je priključena na kraju voda u obliku trokuta. Teret troši snagu koja je naprosto dana izrazom

$$P_t = (U_{t1}^2 + U_{t2}^2 + U_{t3}^2)\, Y_t \cos\varphi_t$$

Admitancija ima isti iznos u svakoj stranici trokuta. Ona je jednaka u sve tri petlje

$$Y_t = 0{,}833 \exp(-j\,36{,}9°)\ \text{milisimensa}$$

Prema tome je snaga tereta

$$P_t = 29{,}2\ \text{MW}$$

Naponi na kraju voda iznose u praznu hodu

$$U_{t10} = [1 - 2{,}45 \cdot 10^{-3} \exp(j\,3{,}5°)]\, U_{g1}$$
$$U_{t20} = [1 - 2{,}45 \cdot 10^{-3} \exp(-j\,3{,}5°)]\, U_{g2}$$
$$U_{t30} = [1 - 2{,}96 \cdot 10^{-3} \exp(j\,0°)]\, U_{g3}$$

Simetrirani vod ima poprečnu admitanciju

$$Y_0 = j\,0{,}053\,9\ \text{mS}$$

Njegova, pogonska, uzdužna impedancija iznosi prema izrazu (5.86)

$$Z_0 = 23{,}5 + j\,52{,}5 = 57{,}5 \exp(j\,65{,}8°)\ \Omega$$

Budući da je $Y_0 + Y_t = 0{,}80 \exp(-j\,33{,}8°)$ mS, napon tereta u petlji izlazi iz jednadžbe

$$[1 + 0{,}046\,1 \exp(j\,32{,}0°)]\, U_t = U_g$$

Prema tome je međufazni napon tereta na simetriranom vodu

$$U_t = [1 - 0{,}042\,8 \exp(j\,32{,}0°)]\, U_g$$

Impedancija tereta je simetričan trokut, te je struja vodiča naprosto $\sqrt{3}$-struki iznos struje petlje, tj. njezin je iznos

$$|I_f| = 173{,}9\ \text{A}$$

To je pogonska, fazna struja, tereta simetričnog voda.

5.6. STACIONARNI VAL NA VODU

Uvod u teoriju dugog voda je prikazan u prethodnom poglavlju. Jednadžbe voda su u svojoj osnovi valne jednadžbe. Harmoničke veličine u stacionarnu stanju proizvode na vodu dva vala od kojih je jedan pozitivan, a drugi je negativan. Takva je situacija bila kod ravnog vala u slobodnom prostoru. Negativni val nastaje refleksijom na mjestu diskontinuiteta. To može biti kraj voda ili drugi vod. Negativni val vraća jedan dio energije, koju nosi sobom pozitivni val. To je razlog zašto se izbjegavaju refleksije na vodu, bez obzira kako se vod iskorištava. Refleksija na energetskom vodu unosi stanoviti element neekonomičnosti prijenosa energije. Ona pogoršava kvalitet prijenosa u komunikacionoj tehnici, ili čak onemogućuje prijenos. Refleksija se ne može uvijek spriječiti, ili se ne isplati njeno sprečavanje.

Rješenja telegrafskih diferencijalnih jednadžbi voda (5.37) pokazuju postojanje obaju valova. Zbog kompleksnog karaktera valne konstante oba su vala prigušena. Valna impedancija unosi fazni pomak između naponskog i strujnog vala. Ne može se reći koji od njih zaostaje za drugim, jer to ovisi o odnosu gubitaka vodiča i izolatora. U ravnog vala magnetski val fazno zaostaje uvijek za električnim valom. Jednadžbe napona i struje (5.37) glase u realnom području, rastavljene na pozitivni i negativni val

$$\begin{aligned} u_+ &= U_{m2}\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi_2) \\ i_+ &= I_{m2}\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_2) \\ u_- &= U_{m1}\, e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \psi_1) \\ i_- &= I_{m1}\, e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_1) \end{aligned} \tag{5.87}$$

Amplituda pozitivnog i negativnog vala je određena graničnim uvjetima. Značenje prigušne i fazne konstante je vidljivo iz jednadžbi. One definiraju doseg vala na vodu i njegovu faznu brzinu, kako je već prikazano. Jednadžbe pokazuju direktno valni karakter napona i struje. Puno značenje valnog karaktera napona i struje izlazi podrobnijom analizom tih veličina na vodu. Valna impedancija se uključuje u odnos napona i struje pozitivnog, odnosno negativnog vala.

5.6.1. Faktor refleksije

Teret voda predstavlja granične uvjete iz kojih se određuju nepoznate integracione konstante. Mjesto na vodu treba odrediti od kraja voda, od tereta, te se uvodi nova koordinata

$$s = l - z$$

Treba uvesti nove veličine za jednadžbe (5.37) napona i struje

$$\begin{aligned} U_{1s} &= U_1\, e^{\gamma l} \\ U_{2s} &= U_2\, e^{-\gamma l} \end{aligned} \tag{5.88}$$

One služe da se definira *faktor refleksije*

$$\varrho = \frac{U_{1s}}{U_{2s}} = |\varrho| e^{j\psi} \tag{5.89}$$

On nije više ovisan o vremenu, a pomaže da se napon i struja prikažu na drugi način, prikladniji u analizi valova na vodu

$$\begin{aligned} U &= U_{2s} e^{\gamma s} (1 + \varrho e^{-2\gamma s}) \\ I &= \frac{U_{2s}}{Z_v} e^{\gamma s} (1 - \varrho e^{-2\gamma s}) \end{aligned} \tag{5.90}$$

Veličine u zagradi na desnoj strani ovise isključivo o mjestu na vodu, a nisu ovisne o vremenu. One su osnovne veličine koje upravljaju iznosom napona i struje na vodu. Kvadrat njihova apsolutnog iznosa dobije se iz izraza

$$\begin{aligned} K_u^2 &= 1 + |\varrho|^2 e^{-4\alpha s} + 2|\varrho| e^{-2\alpha s} \cos(\psi - 2\beta s) \\ K_i^2 &= 1 + |\varrho|^2 e^{-4\alpha s} - 2|\varrho| e^{-2\alpha s} \cos(\psi - 2\beta s) \end{aligned} \tag{5.91}$$

Faktor refleksije se mijenja između nule i jedinice. Zato se konstante K_u i K_i nalaze između ništice i dvojke. Njihov je najmanji iznos jednak ništici, a najviše mogu doseći dvojku. Ako se zanemari utjecaj prigušenja, njihovi ekstremi za određeni faktor refleksije ovise o cos funkciji. Ekstremi nastaju na vodu, na mjestima

$$\begin{aligned} s_k &= \left(\frac{\psi}{\pi} - 2k + 1\right)\frac{\lambda}{4}, && K_u \text{ minimum} \\ & && K_i \text{ maksimum} \\ s_k &= \left(\frac{\psi}{\pi} - 2k\right)\frac{\lambda}{4}, && K_u \text{ maksimum} \\ & && K_i \text{ minimum} \end{aligned} \tag{5.92}$$

gdje je $k = 1, 2, 3, \ldots$

Minimum i maksimum napona se smjenjuju na vodu svakih $(\lambda/4)$ njegove duljine. Isto se događa sa strujom, samo što je u nje maksimum na mjestu gdje je inače minimum napona. Mjerenje prvog minimuma napona na vodu od njegova kraja služi da se ustanovi fazni kut ψ faktora refleksije, ako je poznata duljina vala λ

$$\psi = \left(\frac{4 s_1}{\lambda} + 2k - 1\right)\pi \tag{5.93}$$

Duljina vala λ izlazi direktno iz fazne konstante. Prema tome, mjesto minimuma napona utvrđuje odmah i fazni kut faktora refleksije.

Njegov iznos je pak ovisan o odnosu iznosa maksimuma i minimuma napona

$$|\varrho| = \frac{M-1}{M+1}, \qquad M = \left| \frac{U_{max}}{U_{min}} \right| \tag{5.94}$$

Prostim mjerenjem mjesta ekstrema napona i odnosa njihova iznosa ustanovljava se faktor refleksije, a on je dovoljan da se zna raspored napona po vodu, te da se poznaje koliki je teret na vodu. Pri tome se smatra da je poznata duljina vala.

S druge strane, faktor refleksije je posljedica tereta voda. Impedancija voda je na bilo kojem mjestu iz jednadžbi (5.90)

$$Z_s = \frac{U}{I} = Z_v \frac{1 + \varrho\, e^{-2\gamma s}}{1 - \varrho\, e^{-2\gamma s}} \tag{5.95}$$

Posebno je interesantno mjesto $s = 0$, kad je impedancija voda jednaka impedanciji tereta, $Z_s = Z_t$. Tada je odatle faktor refleksije

$$\varrho = \frac{Z_t - Z_v}{Z_t + Z_v} \tag{5.96}$$

$$|\varrho|^2 = \frac{z_t^2 + 1 - 2 z_t \cos(\varphi_t - \varphi)}{z_t^2 + 1 + 2 z_t \cos(\varphi_t - \varphi)}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2 z_t \sin(\varphi_t - \varphi)}{z_t^2 - 1}$$

$$\frac{Z_t}{Z_v} = z_t\, e^{j(\varphi_t - \varphi)}$$

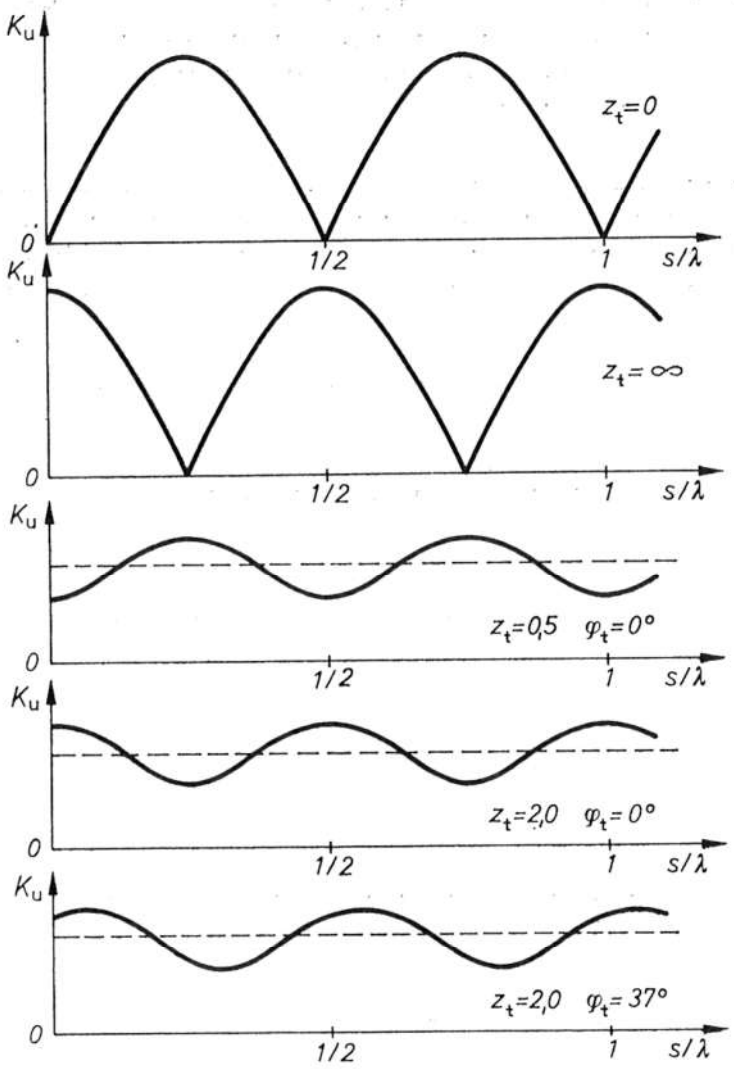
Faktor refleksije se mijenja od -1 do 1, prema tome da li je impedancija tereta nula ili je beskonačna. Dobiveni iznos pokazuje također da nema refleksije čim je impedancija tereta jednaka valnoj impedanciji

$$Z_t = Z_v, \qquad \varrho = 0, \qquad M = 1$$

Onda je napon na vodu svuda istog maksimuma. Impedancija na vodu je svuda jednaka valnoj impedanciji, $Z_s = Z_v$, ako vod nema gubitaka ili je zanemarivih gubitaka. Već je spomenuto da se uvijek teži da nema refleksije na vodu.

5.6.2. Valovi na vodu bez gubitaka

Vodovi su obično malih gubitaka, tako da se katkada smiju zanemariti gubici, kako bi se dobilo na preglednosti. Tako je i sa konstantama K_u i K_i iz jednadžbe (5.91), koje postaju preglednije čim se zanemari prigušenje. Konstanta K_u predstavlja anvelopu napona duž voda. Ona, prikazana u ovisnosti o mjestu na vodu, daje granične točke do kojih doseže napon uopće. Na sl. 5.24. je prikazano nekoliko



Sl. 5.24. Konstanta naponskog vala K_u u ovisnosti o mjestu na vodu za različite slučajeve tereta na vodu, $z_t = 0$, $z_t = \infty$, $z_t = 0{,}5$ i $z_t = 2$ sa $\cos \varphi_t = 1$ i $z_t = 2$, $\cos \varphi_t = 0{,}8$. Mjesto na vodu se postavlja od kraja voda, s teretne strane, normirano duljinom vala.

krivulja K_u u ovisnosti o mjestu na vodu, s/λ. Pretpostavljeno je da vod nema gubitaka. Vod je opterećen s nekoliko karakterističnih impedancija, u koje su uključena i dva krajnja slučaja, $Z_t = 0$, kratki spoj i $Z_t = \infty$, prazan hod. Krivulje K_u (s/λ) kao anvelope napona predstavljaju valove koji stoje, tj. nisu pomične po vodu. Zato se one katkad zovu *stojni val*, iako nisu pravi stojni valovi. Pravi stojni valovi

su samo u kratkom spoju i praznom hodu kad nema prijenosa energije duž voda. Čim nastupi prijenos energije, ne mogu se napon i struja predstavljati kao stojni val.

Razmatranje rasporeda napona i struje duž voda može biti interesantno u komunikacionoj tehnici, kad je duljina voda u redu veličine duljine vala ili je čak mnogo veća od duljine vala. Energetski vodovi su mnogo kraći od duljine vala. Dapače, oni su i znatno kraći od četvrtine vala, koja je toliko karakteristična za vod. Faktor refleksije ostaje nadalje karakteristična veličina za stanje na vodu. Kako se najčešće propisuje stanje na kraju voda, pri teretu i u energetskih vodova, korisno je usvojiti mjerenje mjesta na vodu od njegova kraja. Stanje na energetskim vodovima nije interesantno u točkama između početka i kraja voda. Ono je interesantno samo na njegovu početku i kraju.

Posebno je korisno promatranje *voda bez gubitaka*, jer on pruža znatno pregledniju sliku stanja. Takvi su vodovi značajni u komunikacionoj tehnici. Kako je već rečeno, takvi vodovi nemaju gušenja, a valna impedancija prelazi u čisti valni otpor. Konstante rasporeda napona i struje nešto su jednostavnijeg oblika

$$K_{u,i}^2 = 1 + |\varrho|^2 \pm 2|\varrho| \cos(\psi - 2\beta s) \tag{5.97}$$

Napon i struja su raspoređeni po vodu po zakonu kosinusa

$$u = U_{2m} K_u \cos[\omega t - \beta(l - s) + \varphi_u + \varphi_2]$$

$$i = \frac{U_{2m}}{Z_v} K_i \cos[\omega t - \beta(l - s) + \varphi_i + \varphi_2]$$

Tjemeni iznos napona i struje na bilo kojem mjestu na vodu je konačno

$$U_m = U_{2m} K_u, \qquad I_m = \frac{U_{2m}}{Z_v} K_i \tag{5.98}$$

Kutovi φ_u i φ_i su fazni kutovi konstanti K_u i K_i, a ovisni su o mjestu na vodu, samo što to nije linearna ovisnost. Napon je ipak raspoređen po vodu sinusoidno u određenom trenutku. To je fizikalno posve točno, jer se napon sastoji od dva naponska vala koji se gibaju jedan nasuprot drugome, ali su iste valne duljine. Pozitivni i negativni val su prikazani jednadžbama (5.87) s uključenim prigušenjem. Oni zbrojeni daju opet sinusoidu u određenom, istom trenutku. Kad bi se napon na vodu moglo promatrati kao valove na vodi, činilo bi se da naponski val stoji, a gibaju se pozitivni i negativni val. Amplituda stojnog vala zadana je izrazom u (5.98).

5.6.3. Vod kao transformator impedancije

Impedancija voda bez gubitaka iznosi na bilo kojem mjestu iz (5.95), normirana valnim otporom

$$\frac{Z_s}{Z_v} = z_s = \frac{1 + \varrho\, e^{-j2\beta s}}{1 - \varrho\, e^{-j2\beta s}} \tag{5.99}$$

Odatle se dobiva i faktor refleksije kao u izrazu (5.96), gdje se impedancija tereta također normira valnim otporom, $z_t = Z_t/Z_v$. Ovdje je otpao fazni kut valne impedancije, jer je vod bez gubitaka. Kad se uzme u obzir da je u faktoru refleksije sadržana impedancija na kraju voda, impedancija tereta, pokazuje se da vod može poslužiti kao *transformator impedancije*. Tako četvrtvalni vod transformira impedanciju z_t na njegovu izlazu u impedanciju $1/z_t$, koja kao da je priključena na njegovu ulazu. Četvrtvalni vod djeluje kao transformator impedancije. To je često potrebno, da bi se teret prilagodio vodu, jer se želi imati prijenos bez refleksije. To je uobičajeni postupak prilagođenja u mikrovalnoj tehnici.

5.6.4. Vod kao kompenzator reaktancije

Vod u kratkom spoju predstavlja reaktanciju

$$z_{lk} = j \operatorname{tg}\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)$$

Ovisi o odnosu njegove duljine prema duljini vala, da li djeluje kao induktivna ili kapacitivna reaktancija. On može poslužiti da kompenzira reaktanciju tereta, odnosno da se impedancija tereta transformira na iznos valnog otpora. Na sl. 5.25. prikazan je shematski takav spoj. Teret z_t je priključen na prijenosni vod. Jedan dio voda duljine s_t služi kao transformator impedancije tereta. Taj dio voda je priključen na stezaljke AB. Na iste stezaljke priključen je paralelno vod u kratkom spoju u duljini l, koji treba da kompenzira reaktanciju voda — transformatora. Oba voda su paralelno spojeni u odnosu na stezaljke AB, te se zato zbrajaju njihove admitancije. Zbog veće preglednosti se uzima da je impedancija tereta čisti otpor, što se postizava kompenzacijom reaktancije tereta na kraju voda. Prema tome treba uzeti da je $z_t = r_t + j\,0$. U tome slučaju je faktor refleksije realan, a njegov je fazni kut ili nula ili π, već prema tome da li je $r_t > 1$ ili je $r_t < 1$. Da bi se otpor tereta r_t transformirao na jedinicu, potrebna je duljina voda — transformatora s_t, koja slijedi iz odnosa

$$\cos\left(4\pi \frac{s_t}{\lambda}\right) = \frac{1 - r_t}{1 + r_t} \tag{5.100}$$

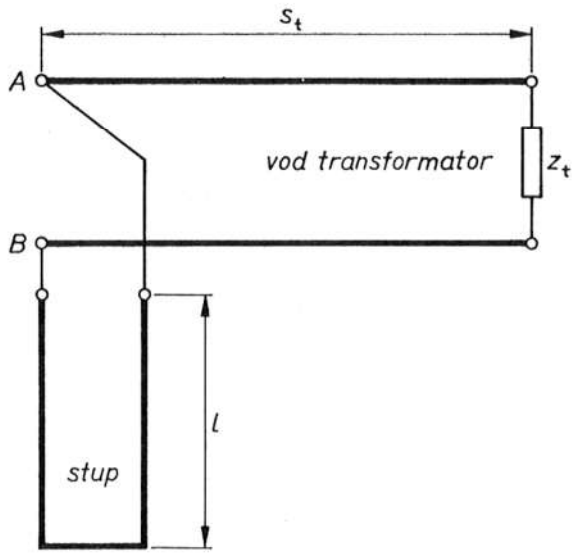
Na taj način se na stezaljkama AB ujedno dobiva susceptancija

$$b_s = \frac{r_t - 1}{\sqrt{r_t}} \tag{5.101}$$

Nju treba kompenzirati vodom u kratkom spoju, koji mora imati duljinu l, što slijedi iz odnosa

$$\operatorname{ctg}\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) = \frac{r_t - 1}{\sqrt{r_t}} \tag{5.102}$$

pri čemu njegova susceptancija ima isti iznos, ali suprotan predznak. Takav se vod u kratkom spoju zove još i *stup* ili kratkospojeni ogranak.



Sl. 5.25. Shema dvožičnog voda kao transformatora s povoljnim teretom i s kompenzacionim stupom na ulazu u vod.

Neka kao primjer posluži teret $r_t = 2$. Tada je duljina voda — transformatora u odnosu na duljinu vala $s_t/\lambda = 0{,}152$, a duljina stupa mora iznositi $l/\lambda = 0{,}152$, što je slučajno ista duljina. Sad je na stezaljkama AB na sl. 5.25. ulazna impedancija $z_u = 1 + j\,0$, dakle je čisti otpor jednak valnom otporu voda. Takav način transformiranja tereta se primjenjuje u mikrovalnoj tehnici. Ako su veličine napona i struje većih duljina valova, taj je način neekonomičan i nespretan.

5.6.5. Smithov dijagram

Impedancija voda dana je jednadžbom (5.99) na bilo kojem mjestu na vodu, koja se također jednostavnije piše

$$z = \frac{1 + w}{1 - w} \tag{5.103}$$

gdje su i z i w kompleksni brojevi. Oni se prikazuju kao

$$z = r + j x$$

$$w = u + j v = |\varrho| \exp\left[j\left(\psi - 4\pi \frac{s}{\lambda}\right)\right]$$

Kad se izjednače realni i imaginarni dijelovi lijeve i desne strane u (5.103), dobiva se odnos

$$\begin{aligned} \left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + v^2 &= \frac{1}{(r+1)^2} \\ (u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 &= \frac{1}{x^2} \end{aligned} \tag{5.104}$$

U (w) kompleksnoj ravnini krivulje r = konst. i x = konst. predstavljaju kružnice kao na sl. 5.26. Kružnice r = konst. su kružnice konstantnog normiranog otpora voda na nekom mjestu s od kraja voda. Treba uzeti u obzir da je moguće samo $r \geqslant 0$. Te kružnice imaju središte na realnoj osi u, a sve prolaze kroz točku $u = 1$ i $v = 0$. Najveća je kružnica $r = 0$, a sve ostale, $r > 0$, se nalaze unutar nje.

Kružnice x = konst. su kružnice konstantne normirane reaktancije voda na bilo kojem mjestu s na vodu, a vod je pri tome opterećen povoljnom normiranom impedancijom z_t. Sve kružnice imaju središte na pravcu $u = 1$, paralelnom s imaginarnom osi $j v$. One sve prolaze kroz točku $u = 1$ i $v = 0$ na realnoj osi.

Tako nastaje takozvani **Smithov dijagram**. On je osnovni lokus dijagram u mikrovalnoj tehnici, koji se mnogo upotrebljava pri rješavanju vodova, odnosno linija. Budući da je apsolutni iznos funkcije w jednak iznosu faktora refleksije

$$|\varrho|^2 = u^2 + v^2 = |w|^2$$

to su kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava (w) ravnine i ujedno geometrijsko mjesto konstantnog faktora refleksije. Fazni kut od broja w jednak je $(\psi - 4\pi s/\lambda)$. Prvi minimum naponskog stojnog vala nalazi se na udaljenosti prema (5.92)

$$s_{\min} = \left(\frac{\psi}{\pi} - 1\right) \frac{\lambda}{4}$$

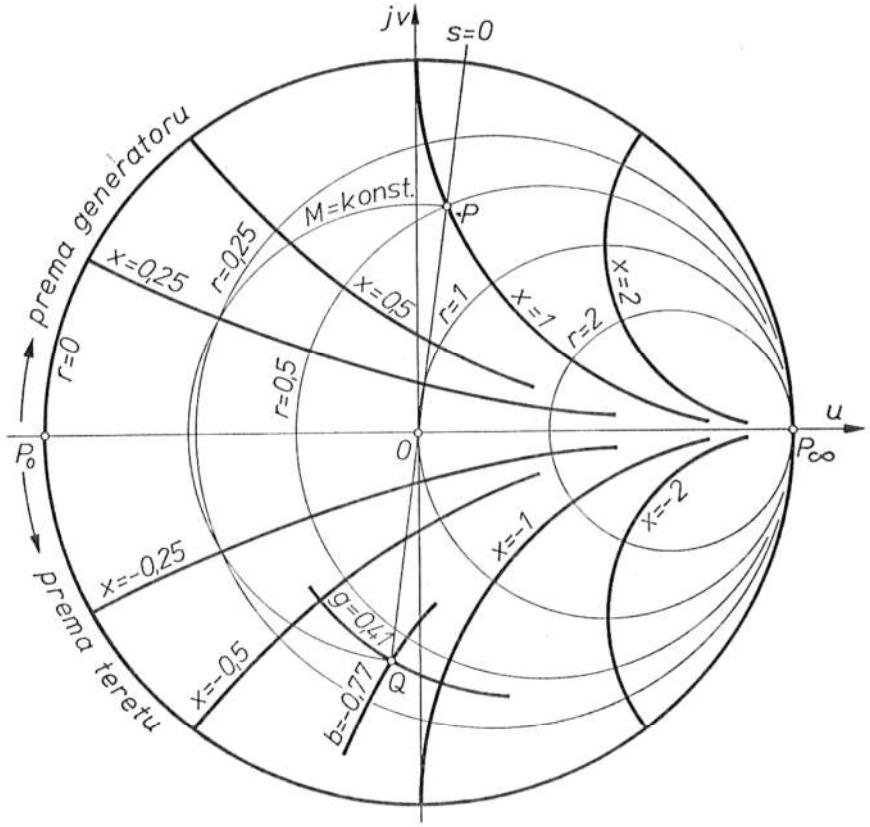
a njegov je maksimum dalje udaljen za $\lambda/4$

$$s_{max} = s_{min} + \frac{\lambda}{4}$$

Ako se vodi računa o spomenutom odnosu, onda je fazni kut faktora refleksije jednak nuli u točki na vodu, koja izlazi iz uvjeta

$$\psi - 4\pi \frac{s_0}{\lambda} = 0 \rightarrow s_0 = s_{max}$$

Točka $u = 1$, $v = 0$ u (w) ravnini odgovara ujedno mjestu na vodu $s_0 = s_{max}$. Polovica kružnice ili kut π je udaljenost od četvrtine vala. To znači da je točka



Sl. 5.26. Smithov dijagram.

s_{min} minimuma stojnog, naponskog vala, upravo dijametralno suprotna točki $s_0 = s_{max}$. Gibanje po vodu od tereta prema generatoru je istovetno smjeru gibanja kazaljke na satu.

Kružnica $r = 0$ nultog otpora voda ograničava ujedno prostor u kojemu se prikazuje bilo koje stanje pogona voda. Ta kružnica odgovara ujedno odnosu stojnog vala $M = \infty$, uvedenog jednadžbom (5.94). Ona odgovara i faktoru refleksije

jedinici, $\varrho = 1$, što predstavlja totalnu refleksiju i prestanak prijenosa energije. Mjesto na vodu se nanosi na toj kružnici u relativnim iznosima prema duljini vala. Točka P_0 odgovara mjestu na vodu gdje je minimum stojnog vala napona. Mjesto početka voda ovisi o karakteru impedancije tereta. Impedancija voda se sastoji od nekog otpora r i reaktancije x, te je $z = r + j\,x$, sve normirano valnim otporom Z_v voda. Impedancija tereta je ujedno impedancija voda na mjestu $s = 0$. Njoj odgovara u dijagramu točka P, koja se nalazi u sjecištu kružnice $x =$ konst. i $r =$ konst. Radijusvektor točke P siječe vanjsku kružnicu $r = 0$ upravo na mjestu gdje je kraj voda $s = 0$. Točki P na sl. 5.26. odgovara impedancija tereta $z_t = 0{,}5 + j \cdot 1$, a on daje faktor refleksije 0,62 i njegov fazni kut $\psi = 82{,}9°$, prema izrazima u (5.96) za vod bez gubitaka. Polovica duljine vala odgovara punom kutu 360°. Ishodište koordinatnog sustava u O odgovara vodu opterećenom valnim otporom, tj. $z_t = 1 + j\,0$. Tu je faktor refleksije jednak nuli, $\varrho = 0$, a omjer stojnog vala jest jedinica, $M = 1$. Vod u praznu hodu ima beskonačnu impedanciju tereta, te je to točka P_∞ za $u = 1$ i $v = 0$ u ravnini (w). Tu maksimum napona pada zajedno s krajem voda $s = 0$. Kratko spojeni vod ima impedanciju tereta nula, a to je točka P_0 s koordinatama $u = 1$, $v = 0$. Minimum napona se nalazi upravo na tome mjestu. Svi vodovi imaju u dijagramu minimum napona u točki P_0, a njegov je maksimum u točki P_∞. Kraj voda, $s = 0$, se ustanovljava prema teretu.

Isti dijagram služi ujedno i kao dijagram admitancije voda $y = 1/z = g + j\,b$. Iznosi admitancije su normirani valnim provodom $Y_v = 1/Z_v$. Istim postupkom kao za impedanciju voda dobivaju se kružnice konstantnog provoda. Pokazuje se da je mjerodavan isti dijagram u ravnini (w), samo koordinatni sustav treba okrenuti za kut π. Isto se postiže ako se radijusvektor impedancije voda okrene za kut π da bi se dobila ista admitancija. Ako se radijusvektor točke P na sl. 5.26. okrene u dijametralno suprotan položaj, u točku Q, u istoj točki se čita admitancija voda, $y = 1/z$, na istom mjestu na vodu kojemu odgovara impedancija voda točke P. Pri tome se ne mijenja faktor refleksije, koji je samo funkcija tereta voda. Točka P na sl. 5.23. ima impedanciju $z = 0{,}5 + j \cdot 1$, a točka Q ima admitanciju $y = 1/z = 0{,}41 - j \cdot 0{,}77$.

PRIMJER 5.6. Kanada je prva zemlja koja je pustila u pogon **energetski trofazni vod** nominalnog napona 700 kV. On povezuje Montreal i Quebec City na udaljenosti 600 km. Pogonska frekvencija je 60 Hz. Konstante voda iznose: otpor voda 11,65 mΩ/km, pri 20°C, induktivna reaktancija 341 mΩ/km i kapacitivna susceptancija 4,59 μS/km; odvod je zanemaren. Kut gubitaka je vrlo malen, iznosi $\varepsilon = 2°$, te se vod smije tretirati kao vod bez gubitaka. Fazna konstanta iznosi

$$\beta = \omega \sqrt{L\,C'_k} = 0{,}001\,255 \text{ rad/km}$$

Valni otpor je

$$Z_v = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} = 272 \text{ oma}$$

Ukupni fazni pomak iznosi po cijeloj dužini voda $\beta\,l = 0{,}753$ rad $= 43{,}1°$. Ukupno prigušenje je $a\,l = 0{,}0129$ nepera. Ako su zadane prilike na kraju voda U_t i I_t, pojavljuju se u jednadžbama za stanje na početku faktori

$$\operatorname{ch}(\gamma\,l) = \operatorname{ch}[(a + j\,\beta)\,l] = 0{,}732 \exp(j \cdot 0{,}7°) = 0{,}732 + j \cdot 0{,}009$$

$$\operatorname{sh}(\gamma\,l) = \operatorname{sh}[(a + j\,\beta)\,l] = 0{,}684 \exp(j \cdot 89{,}2°) = 0{,}0095 + j \cdot 0{,}684$$

Tada su napon i struja na početku voda normirani nominalnim naponom, koji je ujedno napon na teretnoj strani U_t, i valnom impedancijom ili valnim otporom u ovom primjeru

$$u_g = \operatorname{ch}(\gamma l) + \frac{1}{z_t} \operatorname{sh}(\gamma l)$$

$$i_g = \frac{1}{z_t} \operatorname{ch}(\gamma l) + \operatorname{sh}(\gamma l) = I_g \cdot \frac{Z_v}{U_t}$$

Korisnost prijenosa energije η se definira kao omjer korisne snage ili snage tereta i utrošene snage ili snage generatora. *Stupanj gubitaka* je pak

$$1 - \eta = \frac{P_g - P_t}{P_t} = |u_g\, i_g\, z_t| \frac{\cos \varphi_g}{\cos \varphi_t} - 1$$

Kutovi φ_g i φ_t su fazni pomak struje prema naponu na generatorskoj, odnosno teretnoj strani. Ovdje je primijenjen način proračuna normiranim veličinama. Impedancija tereta z_t ima fazni kut φ_t, jer je vod praktički bez gubitaka. Teškoća nastaje u proračunu stupnja gubitaka kad je impedancija tereta jednaka valnom otporu, tj. $z_t = 1$. Tada je stupanj gubitaka naprosto $1 - \eta = e^{2\alpha l} - 1 = \varepsilon\, \beta\, l = 0{,}026 = 2{,}6\ \%$, jer je to vod malih gubitaka. Taj se teret voda zove **prirodni teret voda**. On iznosi 1810 megavata za zadani vod. Prema tome su ukupni gubici 47 MW u pogonu prirodnom snagom. U tome slučaju je pad napona praktički zanemariv, odnosno on iznosi $\exp(\alpha l) - 1 = 1{,}3\ \%$. Vod djeluje da se faza napona promijeni za iznos $\beta l = 43{,}1°$, a isto toliko se mijenja i faza struje.

Ovaj način ustanovljavanja gubitaka je prilično netočan, jer je vod malih gubitaka. Opisani način se osniva na razlici snaga generatora i tereta, odakle se javljaju netočnosti. Gubici vodova malih gubitaka se moraju ustanovljavati direktno integrirajući ih duž voda. Ako vod nema gubitaka u izolaciji, već samo u vodičima, ukupni gubici u njemu iznose

$$P_{gub} = \int_0^l R\, I^2\, \mathrm{d}z = \int_0^l R\, I^2\, \mathrm{d}s$$

Struja je duž voda raspoređena kao stojni val. Gubitke treba prikazati strujom tereta I_t, te oni iznose

$$P_{gub} = R_g\, I_t^2 = \frac{R\, l}{Z_v} P_n \cdot \frac{K_R}{z_t^2}$$

Tu je P_n prirodna snaga prenesena vodom. Koeficijent otpora

$$K_R = \frac{1 + |\varrho|^2 - 2\,|\varrho| \cos(\psi - \beta l) \dfrac{\sin \beta l}{\beta l}}{1 + |\varrho|^2 - 2\,|\varrho| \cos \psi}$$

Faktor refleksije $|\varrho|$ i njegov fazni kut ψ dani su izrazima (5.96). Sad je stupanj gubitaka

$$1 - \eta = \frac{P_{gub}}{P_t} = \frac{P_{gub}}{P_n} \frac{z_t}{\cos \varphi_t}$$

U tablici 5.3. navedeno je nekoliko iznosa normiranih napona i struja generatora, te gubitaka u odnosu prema normiranom iznosu impedancije tereta i faktora snage tereta.

TABLICA 5.3.

z_t	0,5	0,75	1,0	1,0	1,5	1,5
$\cos \varphi_t$	1	1	1	0,8	1	0,8
$\lvert u_g \rvert$	1,56	1,17	1,013	1,27	0,995	1,073
$\lvert i_g \rvert$	1,61	1,17	1,013	0,81	0,84	0,61
K_R	0,878	0,930	1,0	0,628	0,906	0,655
(P_{gub}/P_n) %	9,03	4,25	2,57	1,61	1,035	0,75
$(1 - \eta)$ %	4,52	3,19	2,57	2,02	1,55	1,40
P_t/P_n	2,0	1,33	1,0	0,8	0,67	0,53

U tablici se pojavljuje snaga tereta P_t u odnosu na prirodnu snagu

$$\frac{P_t}{P_n} = \frac{\cos \varphi_t}{z_t}$$

Iz tablice je vidljiv značaj prirodnog tereta voda. To je jedini pogonski slučaj kad je koeficijent otpora K_R jednak jedinici, jer nema refleksije na vodu, a vodom teče struja svuda jednakog iznosa. Vod je također svuda pod istim naponom, što je vrlo značajno, jer za njega postoji naponska granica.

PRIMJER 5.7. Ovaj primjer treba da pokaže kako nastaje **naponski stojni val** na vodu. Neka je vod bez gubitaka, a duljina mu je jednaka $(2 + 1/18)\ \lambda$. Duljina prelazi jednu osamnaestinku duljine vala. Vod je na kraju opterećen admitancijom jednakom polovici valnog provoda, a faktor snage tereta iznosi 0,8, što odgovara faznom zaostajanju struje za 36,8°. Treba odrediti dijagram napona na vodu u ovisnosti o mjestu na vodu za različita vremena promatranja.

Napon na vodu je raspoređen prema jednadžbi

$$U = U_1 e^{j\beta z} + U_2 e^{-j\beta z}$$

Konstante U_1 i U_2 izlaze iz uvjeta opterećenja voda. Normirani iznos admitancije tereta jednak je

$$\frac{Y_t}{Y_v} = y_t e^{-j\varphi}$$

Normirani iznos naponskih konstanti je sada jednak

$$\frac{U_1}{U_m} = \frac{1}{2} e^{j\omega t} (1 - y_t e^{-j\varphi}) e^{-j\beta l} = \frac{1}{2} C_1 e^{j(\omega t + \psi_1)}$$

$$\frac{U_2}{U_m} = \frac{1}{2} e^{j\omega t} (1 + y_t e^{-j\varphi}) e^{j\beta l} = \frac{1}{2} C_2 e^{j(\omega t + \psi_2)}$$

Normiranje napona je izvršeno tjemenim iznosom napona na kraju voda. Nove konstante iznose odavde

$$C_{1,2}^2 = 1 + y_t^2 \mp 2 y_t \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = \frac{\mp \sin (\beta l) \pm y_t \sin (\varphi \pm \beta l)}{\cos (\beta l) \mp y_t \cos (\varphi \pm \beta l)}$$

Ove konstante iznose u ovom primjeru

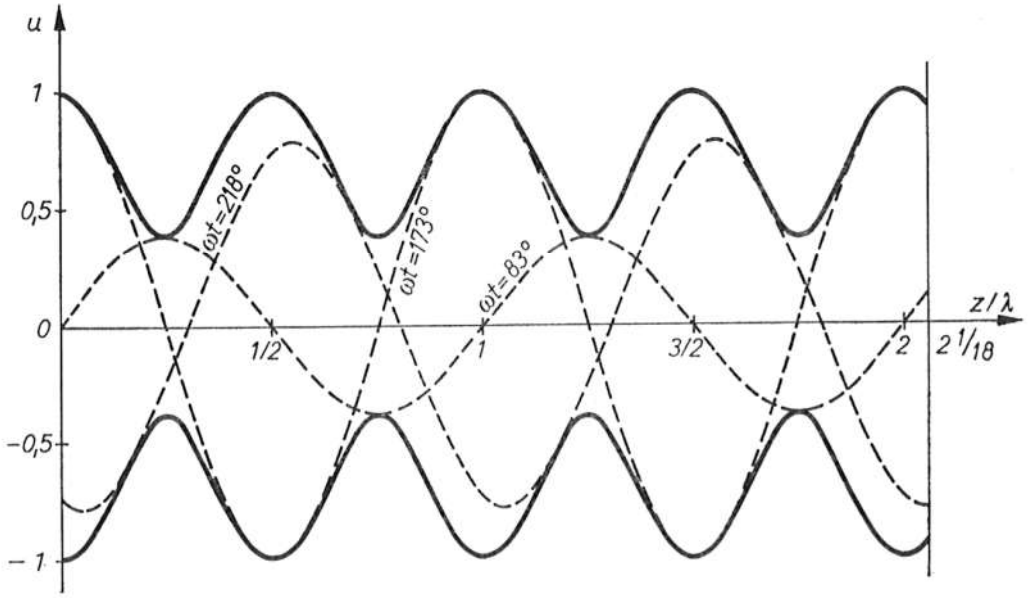
$$C_1 = 0{,}671, \qquad C_2 = 1{,}432$$

$$\psi_1 = 6{,}55°, \qquad \psi_2 = 7{,}9°$$

Napon na vodu se sastoji od dva vala, pozitivnog i negativnog. Normirani iznosi valova su

$$u_+ = \frac{1}{2} C_2 \cos(\omega t + \psi_2 - \beta z)$$

$$u_- = \frac{1}{2} C_1 \cos(\omega t + \psi_1 + \beta z)$$



Sl. 5.27. Raspodjela napona po vodu u različitim vremenima promatranja. Izabran je vod opterećen normiranim teretom 0,5 faznog kuta −36,8°. Vod je dug 37/18 duljine vala. Anvelopa naponskih sinusoida je naponski stojni val.

U ovom primjeru se traži napon na vodu u određenom trenutku promatranja. Zato se napon na vodu smije prikazati jednom sinusoidom

$$u = u_+ + u_- = C \cos(\omega t + \psi_3 - \beta z)$$

Nova naponska konstanta je određena izrazom

$$C^2 = \frac{1}{2}(1 + y_t^2)\left\{1 + \left[1 - \left(\frac{2\, y_t \cos\varphi}{1 + y_t^2}\right)^2\right]^{1/2} \cos(2\,\omega t + \psi_1 + \psi_2)\right\}$$

a njezin fazni kut slijedi iz

$$\omega t + \psi_3 = \beta l + \psi_0$$

$$\operatorname{tg}\psi_0 = y_t \cos\varphi \operatorname{tg}(\omega t) - y_t \sin\varphi = 0{,}4 \operatorname{tg}(\omega t) - 0{,}3$$

Fazni kut $(\psi_1 + \psi_2)$ u konstanti C dobiva se direktno iz zadanih uvjeta na vodu iz izraza

$$\operatorname{tg}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{y_t^2 \sin(2\varphi)}{1 - y_t^2 \cos(2\varphi)}$$

Taj fazni kut je neovisan o duljini voda, a iznosi u ovom primjeru

$$\psi_1 + \psi_2 = 14{,}5°$$

Kvadrat naponske konstante iznosi u ovom primjeru

$$C^2 = 0{,}625\,[1 + 0{,}768 \cos (2\,\omega\, t + 14{,}5°)]$$

Kako je duljina voda

$$l = \left(2 + \frac{1}{18}\right) \lambda$$

iznosi fazni pomak napona na cijelom vodu

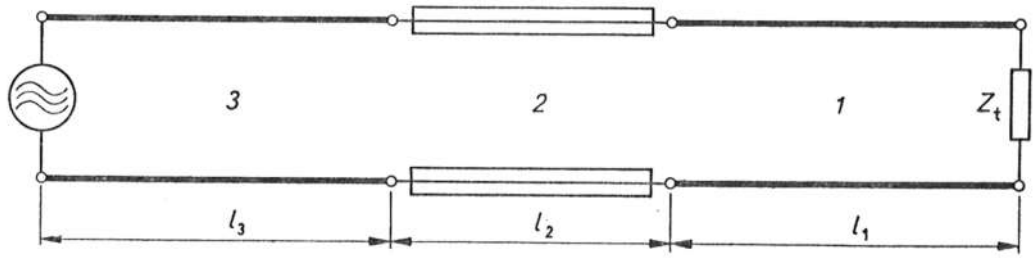
$$\beta\, l = 2\,\pi \frac{l}{\lambda} = 4\,\pi + \frac{\pi}{9} = 720° + 20°$$

Sl. 5.27. prikazuje krivulje napona, sinusoide, po duljini voda za različita vremena t/T. Vrijeme je normirano vremenskom periodom

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

Anvelopa naponskih sinusoida predstavlja naponski stojni val.

PRIMJER 5.8. Četvrtvalni vod može poslužiti kao **transformator impedancije.** On transformira impedanciju tereta u ulaznu impedanciju. To se iskorištava u prilagođenju tereta generatoru. Generator daje najveću snagu na teret kad je njegova unutarnja impedancija jednaka impedanciji tereta.



Sl. 5.28. Shema opterećenog voda s uključenim četvrtvalnim vodom kao transformatorom impedancije.

Na sl. 5.28. je skiciran vod malih gubitaka, opterećen impedancijom koja nije jednaka njegovoj valnoj impedanciji. Vod nije prilagođen teretu. Zbog prilagođenja se uključuje u njega četvrtvalni vod 2, čije su konstante inače drukčije nego one zadanog voda. Dio 1 zadanog voda duljine je l_1, a dio 3 duljine je l_3. Ukupna duljina $l_1 + l_3 = l$ ostaje konstantna. Treba ustanoviti duljinu l_1 i valni otpor Z_{v2} četvrtvalnog voda.

Zadani vod ima valni otpor 200 oma i faznu konstantu $\beta = 7{,}5$ rad/m, pri frekvenciji 200 MHz. Njegova je prigušna konstanta 0,8 nepera na 100 m duljine ili 7 decibela na 100 m. Pripadna duljina vala je $\lambda = 2\,\pi/\beta = 0{,}84$ m, a njegov je doseg $d = 1/\alpha = 125$ m. Neka se radi o duljinama voda koje ne doprinose značajnijem gušenju. Impedancija tereta je normirana valnim otporom voda

$$z_t\, e^{j\varphi} = \frac{|\,Z_t\,|}{Z_{v1}}\, e^{j\varphi}$$

Postoji uvijek jedna duljina l_1 odsječka 1 zadanog voda gdje je njegova impedancija

$$z_1 = r_1 + j \cdot 0$$

svedena na čisti otpor r_1, koji je općenito različit od jedinice, $r_1 \neq 1$. Njegovo transformiranje na jedinicu treba izvršiti umetnuti četvrtvalni vod. Otpor r_1 djeluje kao teret na četvrtvalnom vodu u obliku otpora normiranog iznosa.

$$r_{2t} = \frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} r_1$$

Na početku četvrtvalnog voda taj otpor ima iznos

$$r_2 = \frac{1}{r_{2t}} = \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} \frac{1}{r_1}$$

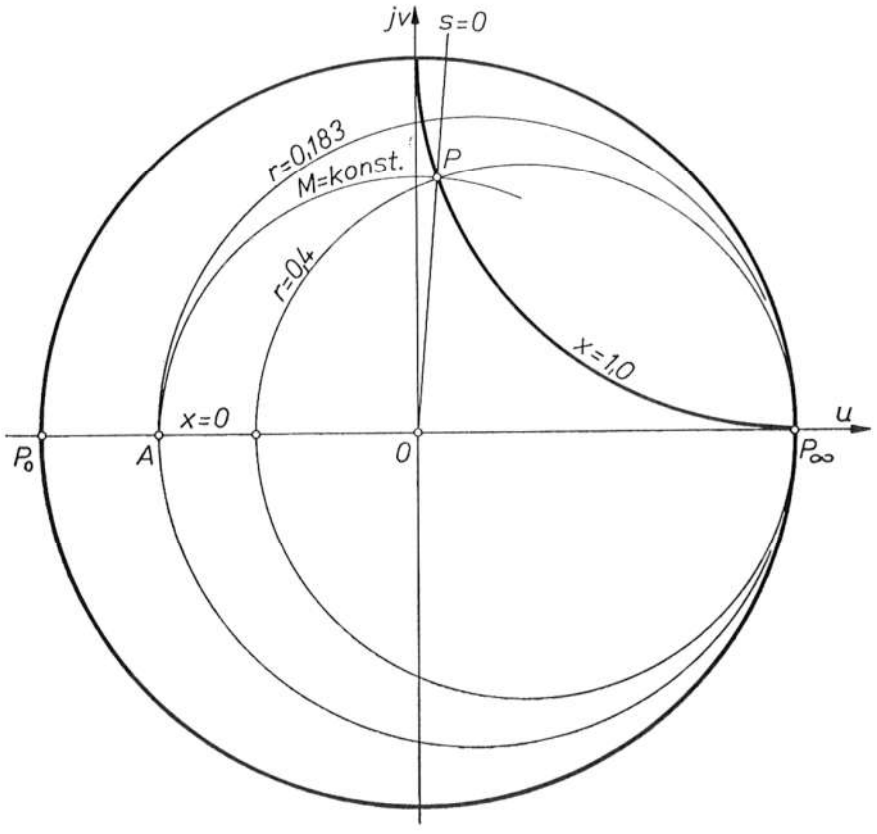
On se mora normirati na odsječak 3 zadanog voda, koji ima ponovo valni otpor Z_{v1}, te djeluje na njega kao teret

$$r_{3t} = \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} r_2 = \left(\frac{Z_{v2}}{Z_{v1}}\right)^2 \frac{1}{r_1}$$

Prilagođeni vod ima teret $r_{3t} = 1$, te je odnos valnih otpora četvrtvalnog umetnutog voda i zadanog voda

$$\frac{Z_{v2}}{Z_{v1}} = \sqrt{r_1} < 1$$

Obično je $Z_{v2} < Z_{v1}$, te se duljina l_1 tako odabire da bude zadovoljena nejednakost $r_1 < 1$. To je uvijek moguće provesti. Traženje dujline l_1 je najjednostavnije primjenom Smithova dijagrama koji se prikazuje normiranim veličinama, a vrijedi za sve vodove.



Sl. 5.29. Smithov dijagram uz vod sa sl. 5.28. Teret na vodu je 0,4 + *j* 1,0.

Neka je teret na vodu takav, da su $r_t = 0{,}4$ i $x_t = 1{,}0$. Sl. 5.29. prikazuje Smithov dijagram na kojemu je teret unesen u točki P. Točkom P prolazi kružnica konstantnog omjera stojnog vala M = konst. koja siječe os u u točki A. Točkom A prolazi kružnica otpora $r_1 = 0{,}1833$, koliko

iznosi otpor voda na tome mjestu, gdje je ujedno reaktancija $x_1 = 0$. Četvrtvalni vod transformira taj otpor na iznos $r_{3t} = 1$, ako je njegov valni otpor

$$Z_{v2} = \sqrt{r_1}\, Z_{v1} = 85{,}7 \text{ oma}$$

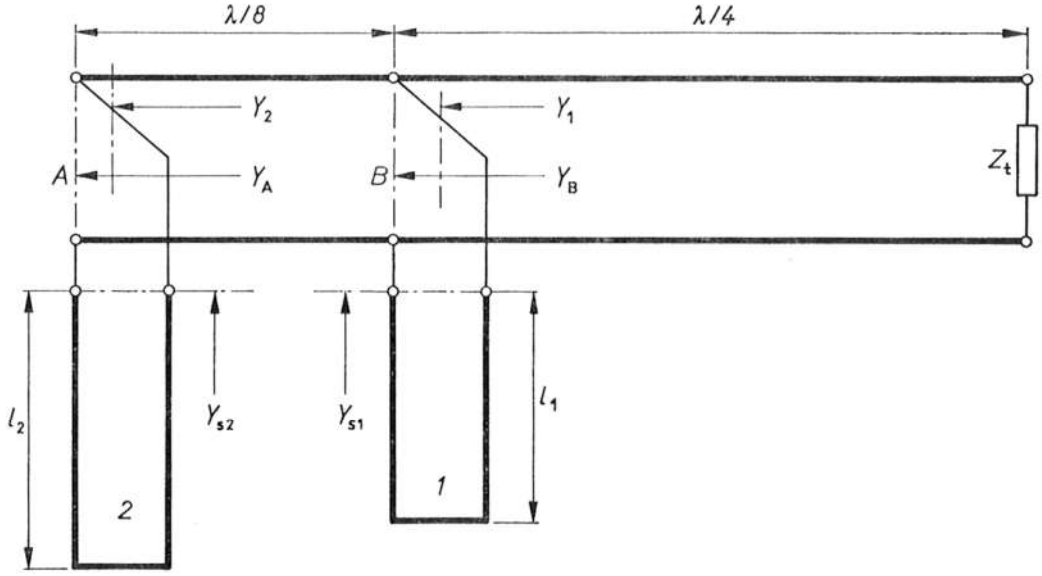
Puni okret u smjeru kazaljke na satu po kružnici konstantnog omjera stojnog vala predstavlja gibanje po vodu za $\lambda/2$. Da bi se stiglo iz točke P u točku A u smjeru kazaljke na satu, treba prijeći po vodu za duljinu

$$l_1 = (k + 0{,}738)\frac{\lambda}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zadani vod upotrebljava se za priključak televizijske antene na prijemnik. Ako antena ne odgovara točno valu na kojem radi televizijski predajnik, ona nije prilagođena kabelu, te je potrebno poduzeti mjere za prilagođenje. To je potrebno učiniti čim je prijem slab. Prilagođenje kabela se postiže umetanjem četvrtvalnog dijela odgovarajućeg valnog otpora, koji je manji od valnog otpora zadanog voda. Smanjenje valnog otpora se postiže na istom kabelu tako, da mu se približi metalna ploha u četvrtvalnoj duljini. To se može učiniti tako, da se antenski kabel omota metalnom folijom. Na taj način se povećaju istodobno gubici, odnosno prigušenje, ali to ne utječe značajnije na ponašanje kabela. S nekoliko pokusa može se postići optimalan prijem.

Ovaj način prilagođenja je valjan samo za određenu frekvenciju. Čim se frekvencija promijeni, može se dogoditi da je prijenos kabelom lošiji nego za pogona bez četvrtvalnog umetka. On je prikladan kad se spajaju u seriju dva voda različitih valnih otpora, te je potrebno prilagođenje voda na strani generatora.

PRIMJER 5.9. Prilagođenje tereta na vod vrši se uz pomoć dva kratko spojena stupa ili ogranka koji su priključeni kao na sl. 5.30. Presjeci priključaka A i B su na čvrstoj udaljenosti od tereta, tj. udaljenost je nepromjenljiva. U ovom primjeru stup 1 je $\lambda/4$ udaljen od tereta, a stup



Sl. 5.30. Shema opterećenog voda kompenziranog s dva stupa.

2 je od stupa 1 daleko za $\lambda/8$. Mijenja se samo duljina stupova, odnosno mijenja se samo mjesto kratkog spoja vodova koji služe kao stupovi. Svi vodovi i njihovi dijelovi imaju iste konstante: valnu konstantu i valni otpor.

Stup 2 dodava susceptanciju četvrtvalnog dijela voda s teretom. Stup 2 vrši konačnu kompenzaciju, te preostaje u točki A samo čisti otpor jednak valnom otporu voda. Zadatak se rješava jednostavno Smithovim dijagramom. Budući da su stupovi uključeni u vod paralelno, treba raditi s admitancijama. Admitancija tereta y_t postaje na četvrtvalnom vodu admitancija y_1 u presjeku B.

Tu je priključen stup 1, koji ima admitanciju $y_{s1} = 0 + j\,b_{s1}$. One obje sačinjavaju admitanciju kompenziranog voda u presjeku B

$$y_B = y_1 + y_{s1} = g_1 + j\,(b_1 + b_{s1}) = g_1 + j\,b_B$$

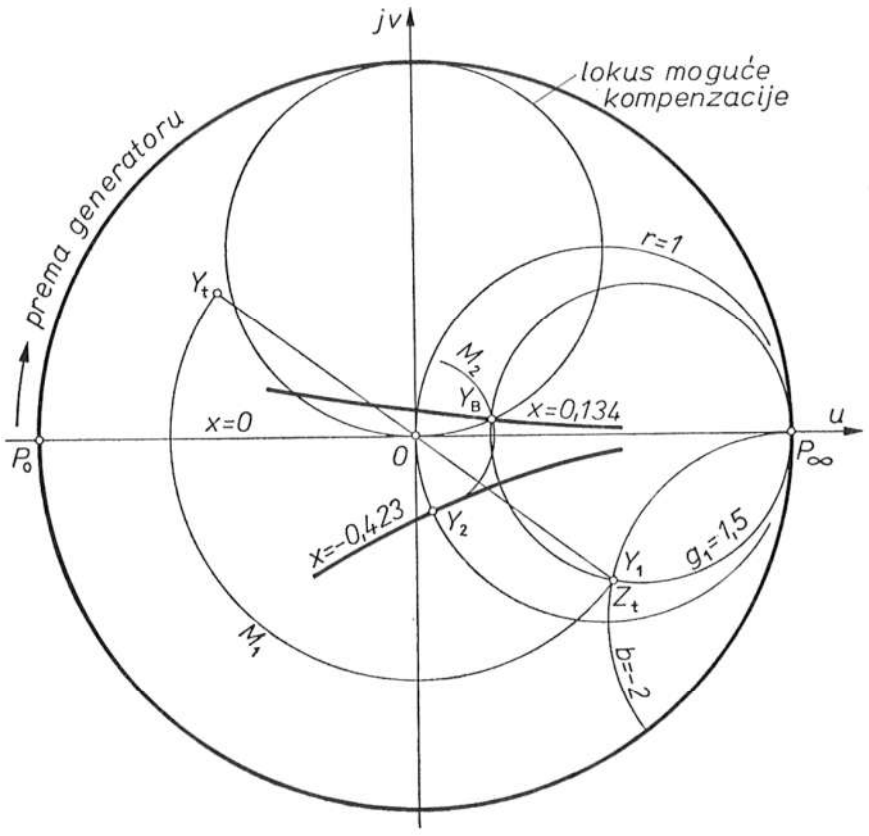
Stup ne mijenja odvod voda g_1, već samo njegovu susceptanciju. On okreće radnu točku y_t voda po kružnici g_1 u točku Y_B na Smithovu dijagramu. Stup 2 ne mijenja odvod g_2 voda. To znači da odvod g_2 mora biti jednak jedinici, $g_2 = 1$, da bi vod bio kompenziran, a njegova bi admitancija bila

$$y_A = y_2 + y_{s2} = 1 + j \cdot 0$$

Postupak proračuna je proveden na Smithovu dijagramu na sl. 5.31. Impedancija tereta ima otpor i reaktanciju

$$r_t = 1{,}5, \quad x_t = -\,2{,}0$$

a unesena je u točku Z_t u Smithovu dijagramu. Pripadna admitancija je u dijametralnoj točki Y_t na kružnici konstantnog omjera stojnog vala M_1. Pomicanje po vodu za četvrtinu vala prema



Sl. 5.31. Smithov dijagram uz vod sa sl. 5.30.

generatoru je okretanje po kružnici M_1 za kut 180°, čime se stiže u točku Y_1 admitancije voda u presjeku B. Točka Y_1 pada zajedno sa Z_t, te je admitancija voda

$$y_1 = 1{,}5 - j \cdot 2{,}0$$

Stup 1 dodaje susceptanciju b_{s1} toliko, da se admitancija kompenziranog voda svede na povoljan iznos. Pri tome odvod $g_1 = 1{,}5$ ostaje zadržan. Dodavanje susceptancije stupa 1 u dijagramu je pomicanje po kružnici odvoda g_1 iz točke Y_1 u točku Y_B.

Razmak između presjeka B i A na vodu iznosi $\lambda/8$, što znači u dijagramu pomicanje za 90° po kružnici M_2 konstantna omjera stojnog vala karakterističnog za presjek B kompenziranog voda. Pomicanje je prema generatoru. Na taj se način stiže u točku Y_2, koja daje admitanciju voda u presjeku A. Ta točka ima admitanciju

$$y_2 = 1 - j \cdot 0{,}423$$

Ona već ima odvod jednak jedinici, tj. jednak prilagođenom vodu. Kompenzacija se vrši stupom 2, koji mora imati susceptanciju

$$b_{s2} = 0{,}423$$

Točka Y_B mora tako ležati, da je njezino okretanje za 90° po kružnici M_2 dovodi u Y_2, koja je na kružnici konstantnog odvoda $g = 1$. Da bi se to postiglo, treba kružnicu $g = 1$ u cjelini okrenuti prema teretu za 90°. Ta okrenuta kružnica je lokus moguće kompenzacije, kao što je označeno na sl. 5.31. Sjecište kružnice $g_1 = 1{,}5$ i kružnice lokusa moguće kompenzacije daje točku Y_B. Njezina je admitancija

$$y_B = 1{,}5 + j \cdot 0{,}134$$

Razlika u susceptanciji točaka Y_B i Y_1 postiže se kompenzacijom, stupom 1. Prema tome stup 1 mora imati susceptanciju

$$b_{s1} = b_B - b_1 = 2{,}134$$

Njegova duljina slijedi iz odnosa

$$b_s = \operatorname{ctg}\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)$$

odatle je potrebna duljina stupa 1 za susceptanciju b_{s1}

$$l_1 = 0{,}07\ \lambda$$

Stup 2 treba kompenzirati admitanciju $y_2 = 1 - j \cdot 0{,}423$, te mora imati susceptanciju

$$b_{s2} = 0{,}423$$

čemu odgovara njegova duljina

$$l_2 = 0{,}186\ \lambda$$

Kad su poznate duljine stupova, zadatku je odgovoreno. Ovaj primjer pokazuje da se može kompenzirati teret voda i prilagoditi ga generatoru primjenom dvaju stupova, odnosno ogranaka vodova u kratkom spoju, koji su čvrsto vezani na vod, na određenim udaljenostima od kraja voda. Prilagođenje i kompenzacija postižu se prostom promjenom mjesta kratkog spoja na stupovima. Ovaj način kompenzacije je naročito prikladan kad se upotrebljava koaksijalni kabel kao vod. Njegove su mogućnosti neograničene, jer kompenzacija nije uvijek moguća. Kad kružnica odvoda g_1 na sl. 5.31. ne siječe više kružnicu lokusa moguće kompenzacije, nije više moguća kompenzacija sa dva stupa priključena na vod, kao na sl. 5.30.

5.7. PUTUJUĆI VAL NA VODU

Prolazna stanja na vodu su razlog da nastaju nova stanja koja se rasprostiru po vodu. Oni su nazvani putujući valovi. Takvi su tipični primjeri ukapčanje voda na generator, promjena opterećenja voda, promjena napona i struje generatora i sl. Kad se gleda energetski vod, to su putujući valovi prenapona, naročito kao posljedica atmosferskih izbijanja. U komunikacionoj tehnici je to prijenos impulsa. Vrlo često se nailazi u praksi na potrebu da se analizira ponašanje rasprostiranja uzbuđenog stanja po vodu i njegovi učinci na uređaje uključene u vodove.

Kad se govori o putujućem valu, redovno se pomišlja na atmosferska izbijanja, iako su njegova osnova impulsi općenito. Električki nabijeni oblak se nalazi iznad električnog voda. On na njemu inducira naboj, koji postaje slobodan čim se oblak izbije. Inducirani naboj postaje slobodan i putuje po vodu u obliku naponskog i strujnog vala. On je dovoljnog intenziteta i nosi dovoljno energije da je sposoban za razorno djelovanje na aparate i uređaje. Katkad se poduzimaju složene mjere da bi se spriječilo njegovo štetno djelovanje.

Komunikaciona tehnika upotrebljava sve više impulse koji se šalju po vodovima do prijenosnog mjesta. Oni se moduliraju da zadovolje zadatku u komunikacijama. Novija tehnika upotrebljava sustav kodiranja, od kojih je najčešći binarni sustav, kao najjednostavniji. On traži samo da signal postoji ili ne postoji, dok njegov oblik ne igra značajnu ulogu. Oblik signala je utoliko važan, što smije imati ograničenu duljinu, da se ne prekriva signalom koji slijedi iza njega. Rasprostiranje takvih signala je u obliku putujućeg vala na vodu, te za njega vrijede pravila putujućih valova.

Ovdje se prikazuju putujući valovi koji se mogu prikazati kao *regularni signali.* Oni imaju prethodno zadanu vremensku ovisnost, te su ujedno i vremenski signali. Regularni signali su periodički, kvaziperiodički i neperiodički. To u osnovi ne mijenja njihovo ponašanje na vodu, već utječe donekle na matematičku interpretaciju. *Periodički signal* se rastavlja na harmoničke članove prema pravilima Fourierove harmoničke analize. Dok je sustav linearan, smije se promatrati harmonik po harmonik kao što je već prikazano, te se konačna veličina dobiva sintezom harmonika. Promatranje ponašanja periodičkog signala nije nov zadatak, već se primjenjuje teorija prikazana u prethodnim poglavljima. *Neperiodički signal* se prikazuje svojom spektralnom karakteristikom, primjenom Fourierove transformacije. Često je moguća i Laplaceova transformacija, a ona daje i dobre rezultate.

Uvod u poglavlje 5.4. o dugom vodu je valjan u teoriji putujućih valova. Valna konstanta i valna impedancija iz izraza (5.34) i (5.36) ostaju nadalje u važnosti, samo imaju posve simboličan karakter. Rješenje valnih jednadžbi ima nadalje oblik kao u (5.37), tj. ono glasi

$$U = U_1 e^{\gamma z} + U_2 e^{-\gamma z}$$

$$I = -\frac{U_1}{Z_v} e^{\gamma z} + \frac{U_2}{Z_v} e^{-\gamma z}$$

Prema tome, općenito postoje dva vala, pozitivni i negativni, te je stanje na vodu nastalo superpozicijom obaju valova. Zadatak se znatno pojednostavnjuje ako se

usvoji promatranje voda *malih gubitaka*. Treba primijeniti Laplaceovu transformaciju. Operator d/dt se nadomješta kompleksnom varijablom p u Laplaceovu području, ako su valovi putujući. Vod malih gubitaka zadovoljava uvjet

$$\left|\frac{R}{Lp}\right| \ll 1, \qquad \left|\frac{G}{Cp}\right| \ll 1 \tag{5.105}$$

U tome se slučaju konstante voda, valna konstanta i valna impedancija, prikazuju dovoljno točno izrazima

$$\gamma = \alpha + \frac{p}{c}$$

$$Z_v = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} \tag{5.106}$$

$$\alpha = \frac{R}{2Z_v} + \frac{G}{2}Z_v, \qquad c = (L\,C)^{-1/2}$$

Uz pomoć takvih konstanti rješenja valnih jednadžbi glase

$$u = u_1\left(t + \frac{z}{c}\right)e^{\alpha z} + u_2\left(t - \frac{z}{c}\right)e^{-\alpha z}$$

$$i = -\frac{u_1}{Z_v}e^{\alpha z} + \frac{u_2}{Z_v}e^{-\alpha z} \tag{5.107}$$

Naponski i strujni val imaju isti oblik. Oni ne mijenjaju svoj oblik gibajući se vodom, samo im se smanjuje amplituda koliko utječe prigušenje. Prema tome se vod malih gubitaka ponaša kao vod bez gubitaka, ako se uzme u obzir stalno smanjenje amplitude.

Čelo vala se giba kao i u ravnog vala. Ono se giba kao da nema gubitaka, tj. brzinom svjetla c, koja odgovara materijalu izolacije. Često nije potrebno uzeti u obzir prigušenje vala kad se promatra samo jednostruk prolaz vala. Ono se mora uzeti u račun za višestrukog prolaza vala, kad se njihovo djelovanje zbraja. Tek točnija analiza putujućeg vala ne smije ispustiti pravi utjecaj gubitaka. To se ponekad pokazuje u analizi rasprostiranja impulsa.

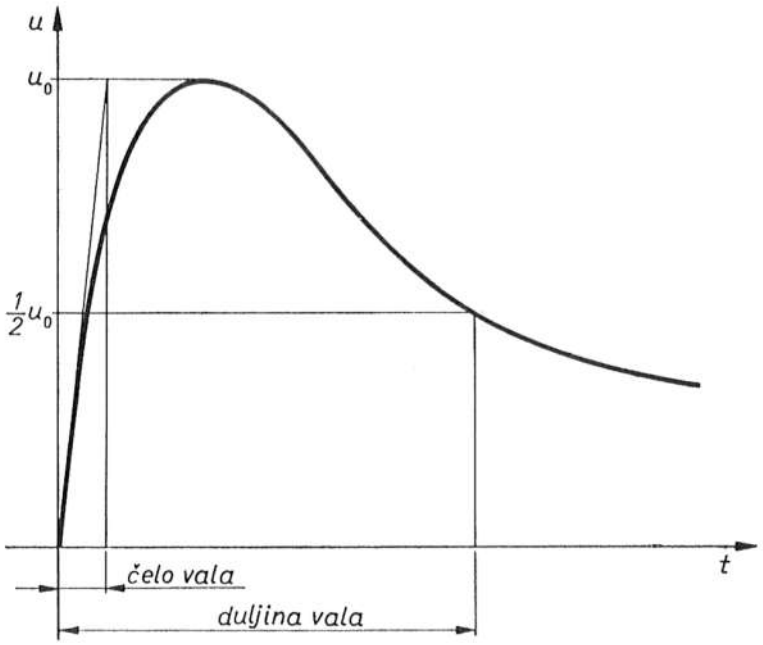
5.7.1. Oblici impulsa

Oblik impulsa je važan u ponašanju vala na vodu. Najčešći oblici su sistematizirani.

1. *Eksponencijalni impuls* je sastavljen od dvije eksponencijalne funkcije

$$u = u_1 (e^{-at} - e^{-bt})$$

Prikazan je na sl. 5.32. To je karakterističan impuls, koji se može jednostavno prikazati matematički. Njegove su karakteristične veličine trajanje čela vala i duljina vala, a obje se mjere vremenom kako je označeno u slici. To je kratko vrijeme, pa je



Sl. 5.32. Eksponencijalni impuls, definicija trajanja čela vala, duljine vala i tjemena.

uobičajena mjera mikrosekunda. Još je važno i tjeme vala, u_0, koje se mjeri kilovoltima. Tako je val 1000/1,5/40 iznosa tjemena 1000 kV, čela 1,5 mikrosekunda i dužine 40 mikrosekunda. Iznos tjemena se dobiva iz odnosa

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{b-a}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b-a}}$$

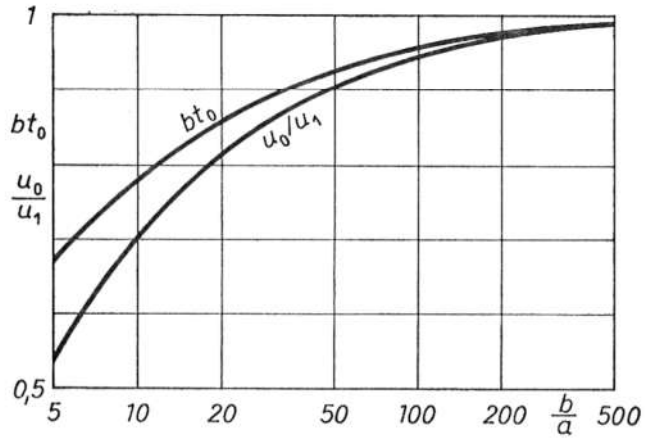
koji je unesen u sl. 5.33. za omjer $5 \leqslant b/a \leqslant 500$. Trajanje čela vala je približno jednako $1/b$. Ovisnost bt_0 o b/a je prikazana u istoj sl. 5.33. Duljina vala je približno $1/a$. Kad se gledaju približni iznosi, sve tri konstante u eksponencijalnom impulsu imaju svoje značenje.

Eksponencijalni impuls degenerira u nove karakteristične impulse

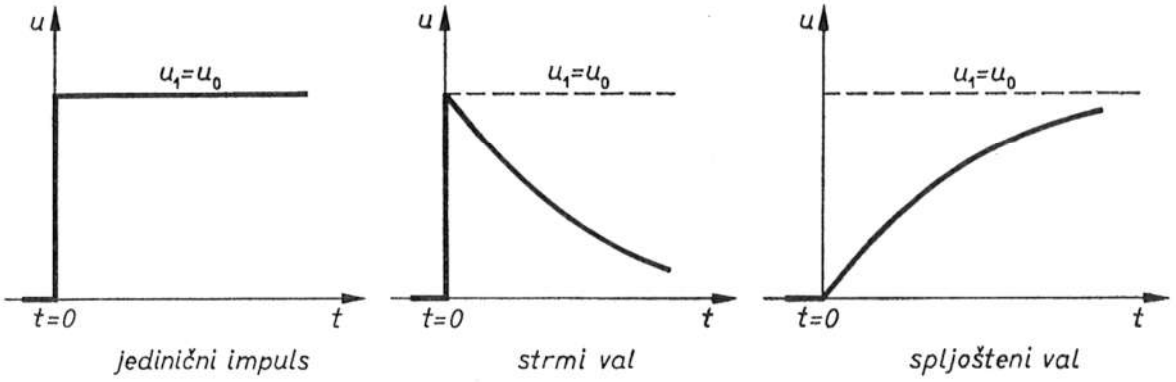
$a = 0, \quad b = \infty, \quad u = u_1 \cdot 1(t),$ udarna funkcija

$a \neq 0, \quad b = \infty, \quad u = u_1 e^{-at}$ val strmog čela

$a = 0, \quad b \neq 0, \quad u = u_1 (1 - e^{-bt})$ val spljoštenog čela



Sl. 5.33. Dijagram ovisnosti tjemena i čela vala o omjeru konstanti b/a eksponencijalnog impulsa sa sl. 5.32. Tjeme u_0 se unosi u odnosu na konstantni napon u_1. Čelo vala je kao produkt bt_0. Vrijeme t_0 je trajanje čela vala.

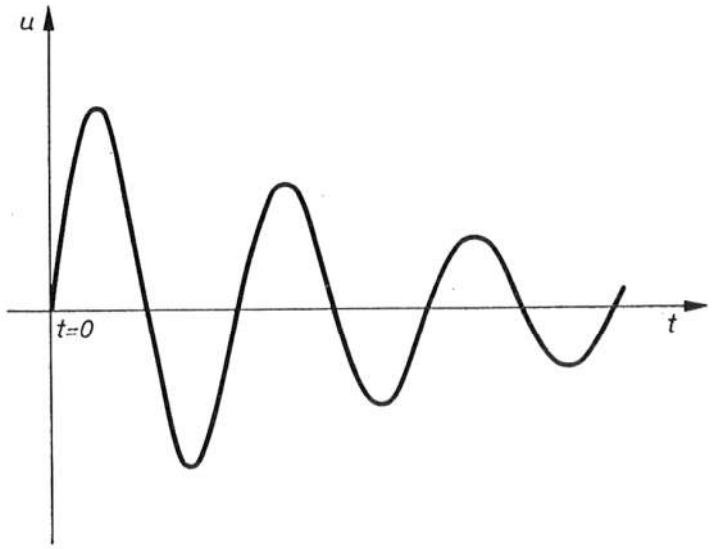


Sl. 5.34. Degeneracije eksponencijalnog impulsa, jedinični impuls, strmi val i spljošteni val.

Na sl. 5.34. su prikazana sva tri degenerirana impulsa. Eksponencijalni impuls se primjenjuje u visokonaponskoj tehnici.

2. *Prigušeni titraj* je kombinacija eksponencijalnog impulsa i harmoničke promjene

$$u = u_0 e^{-at} \sin(\omega t), \qquad \frac{2\pi}{\omega} \ll \frac{1}{a}$$



Sl. 5.35. Prigušeni titraj.

Prikazan je na sl. 5.35.

3. *Radio-impuls* je jednokratni impuls kao na sl. 5.36., koji je nastao amplitudnom modulacijom harmoničke veličine

$$u = A(t) \cos(\omega t - \varphi), \qquad 0 < t < \tau$$

$$u = 0, \quad \text{za} \quad t < 0, \quad t > \tau, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \ll \tau$$

Amplituda $A(t)$ može biti bilo kakva funkcija vremena u propisanom intervalu. Taj se impuls mnogo upotrebljava u komunikacionoj tehnici, jer se proizvodi na jednostavan način. On ima dvije važnije degeneracije, koje su prikazane na sl. 5.37. Jedna je *pravokutni impuls* kad frekvencija teži k nuli i amplituda je konstantna, a druga je *poluval sinusa* ili *videoimpuls*

$$\omega = 0, \quad A(t) = u_0, \quad u = u_0, \quad 0 < t < \tau \qquad \text{pravokutni impuls}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad A(t) = u_0, \quad u = u_0 \sin(\omega t),$$

$$0 < t < \tau = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{videoimpuls}$$

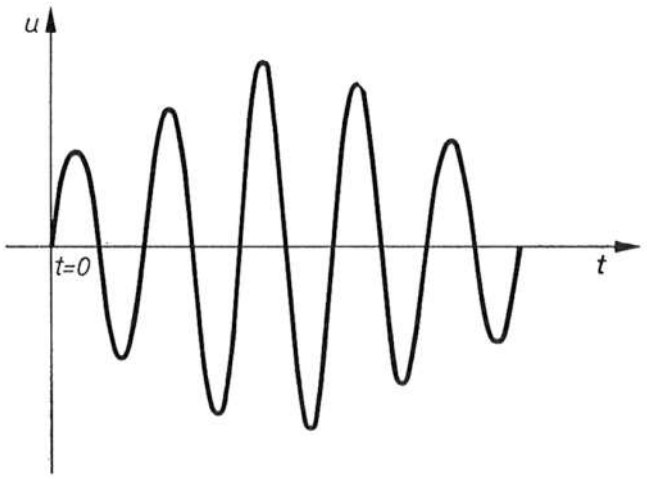
Pravokutni impuls se pretvara u *Diracovu funkciju* $\delta(t)$, ako je $u_0 = 1/\tau$, a τ teži k nuli

$$\lim_{\tau \to 0} u(t) = \delta(t)$$

Svojstvo je Diracove funkcije da je zadovoljen integral

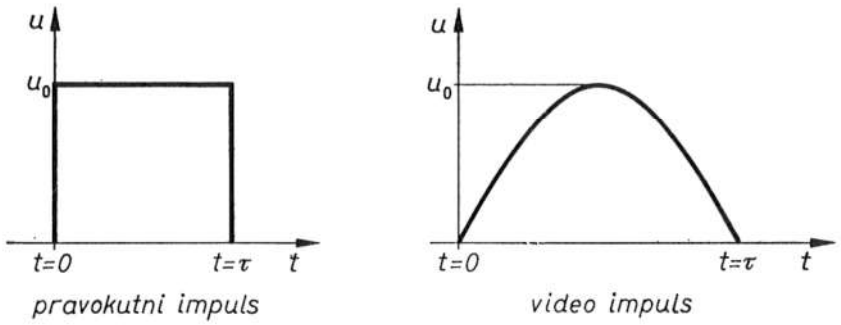
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

Diracova funkcija nalazi primjenu u teoriji stvaranja i rasprostiranja valova.



Sl. 5.36. Radio impuls.

Svi se impulsi mogu skupiti u dvije skupine, u skupinu eksponencijalnih impulsa i skupinu radioimpulsa. Prigušeni titraj se uključuje među eksponencijalne impulse. Prva je skupina karakteristična za prolazna stanja na vodovima, a druga



Sl. 5.37. Degeneracija radio impulsa, pravokutni impuls i videoimpuls.

je zastupana u komunikacionoj tehnici. One nisu jedini oblici impulsa, ali su najjednostavniji i daju jasnu fizikalnu sliku onoga što se događa na vodu kad se oni pojave. Dapače, moglo bi se reći da su najjednostavniji udarna funkcija i pravokutni

impulsi, jer se najjednostavnije interpretiraju matematički, a omogućuju dobivanje dovoljno jasne fizikalne slike. Ovdje će biti prikazana teorija putujućih valova baš na primjerima tih dvaju impulsa.

5.7.2. Granični uvjeti

Egzaktna teorija putujućih valova ili gibanja impulsa po vodovima vrlo je zamršen zadatak. Čelo vala je izvor zračenja prostornih valova, te tako i izvor gubitaka energije, što se ne uzima u obzir. Gubici vodiča su nelinearan proces, a uzima se u račun kao da su odnosi linearni. Gubici u vodiču čela vala ne mogu se predstaviti kao gubici u stacionarnom stanju na nekoj dovoljno visokoj frekvenciji. Ako su valovi visokonaponski, često nastaje korona na vodičima, koja je izvor dodatnih gubitaka. Dvožični vod je najjednostavniji u promatranju putujućeg vala. I on se promatra kao da je vod od jednog vodiča iznad vodljivog poluprostora, koji je ujedno povratni vodič. Tako se zadatak pojednostavnjuje, a ne gubi se fizikalna slika.

Ovom teorijom neće biti prikazano ponašanje vala u gibanju po vodu. Teorija će obuhvatiti ponašanje vala na mjestima diskontinuiteta, gdje se val reflektira i prolazi kroz njega. Reflektirani val se superponira na dolazeći val, te se i njihovi efekti zbrajaju. To su efekti prolaznog stanja na vodu, te nisu interesantni u komunikacionoj tehnici. Vodovi komunikacione tehnike ne smiju imati takve diskontinuitete koji bi štetili kvalitetu prijenosa. Njihovi impulsi smiju mijenjati oblik, ali ne toliko da se ošteti kvalitet. Raspostiranje komunikacionih signala ne predstavlja poseban zadatak prema rečenom u prethodnom poglavlju o vodu u stacionarnom pogonu. Tako je ovom teorijom obuhvaćeno prolazno stanje na vodovima, koje nastupa različitim perturbacijama u prijenosu impulsa, u teretu voda, u vanjskim utjecajima i sl.

Granični uvjeti su jednostavni na mjestu diskontinuiteta na vodu. Naponi su jednaki s obje strane mjesta diskontinuiteta, a isto je i sa strujama

$$U_1 = U_2, \quad I_1 = I_2$$

Naponski val koji je naišao na takvo mjesto, reflektira se jednim dijelom, a njegov ostatak prolazi. Isto se događa sa strujnim valom. Mjesto diskontinuiteta ima dvije strane. Ono ima stranu dolazećeg vala i stranu prolaznog vala. Na strani dolazećeg vala su dolazeći i reflektirani val, a na drugoj strani je samo prolazni val. Dolazeći valovi imaju indeks d, reflektirani valovi — indeks r, a prolazni je val s indeksom p. Prema tome mora biti zadovoljen uvjet na mjestu diskontinuiteta

$$\begin{aligned} U_d + U_r &= U_p \\ I_d + I_r &= I_p \end{aligned} \tag{5.108}$$

Kako su to vodovi malih gubitaka, njihova je impedancija jednaka valnom otporu. Ovdje će se valni otpor pisati bez indeksa v, dakle će imati oznaku z. Veliko slovo Z je oznaka za koncentrirane impedancije uključene u vod.

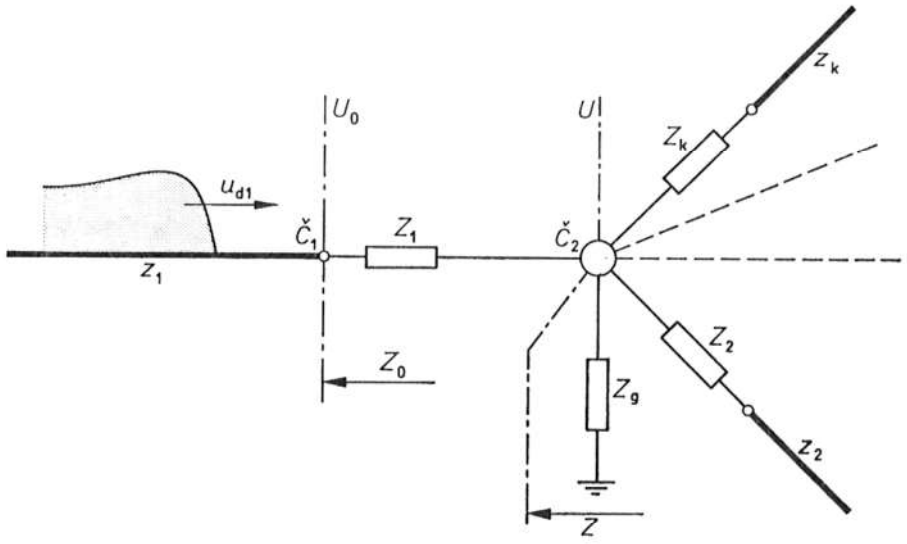
Odnos između naponskog i strujnog vala glasi kao i prije po definiciji valne impedancije

$$\frac{U_d}{I_d} = z_1, \qquad \frac{U_r}{I_r} = -z_1, \qquad \frac{U_p}{I_p} = z_2$$

Valni otpor z_1 se odnosi na vod s dolazeće strane, a z_2 je valni otpor voda s prolazne strane. Time je u osnovi sve spremno da se prikaže ponašanje vala na složenim vodovima.

5.7.3. Val na čvorištu u vodu

Čvorište u vodu je prikazano na sl. 5.38. Vodom 1 dolazi val U_{d1}. On nailazi preko impedancije Z_1 na čvorište $Č_2$, gdje se vod račva u nekoliko vodova. Isto čvorište je uzemljeno impedancijom Z_g. Time se hoće prikazati opće čvorište,



Sl. 5.38. Shema električnog čvorišta vodova kojima prolazi putujući val. Čvorište je uzemljeno preko impedancije. Vodovi ulaze u čvorište preko impedancije.

a vodovi nemaju međusobne sprege. Val nailazi samo jednim vodom. On susreće u čvorištu $Č_1$ koncentriranu impedanciju. Val se reflektira na njoj, a jednim dijelom prolazi i stiže u čvorište $Č_2$, gdje se račvaju vodovi. Svi su vodovi vezani na čvorište $Č_2$ preko koncentriranih impedancija, a ono je uz to i uzemljeno preko impedancije. Čvorište sa svojim impedancijama djeluje na nailazeći val kao cjelina, kao jedna koncentrirana impedancija Z_0. Pri tome vod djeluje kao valni otpor na nailazeći val. Impedancije u čvorištu $Č_2$ su spojene međusobno paralelno, te se admitancije zbrajaju, a izuzima se vod nailazećeg vala.

Tada je admitancija čvorišta $\check{C}_2$ jednaka

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_g} + \frac{1}{Z_2 + z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_k + z_k}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_g} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k + z_k} \tag{5.109}$$

ako se u čvorištu sastaje n vodova.

Impedancija u čvorištu $\check{C}_1$ je ujedno cjelokupna impedancija čvorišta $\check{C}_2$, a zadana je sa

$$Z_0 = Z_1 + Z$$

Ta impedancija djeluje na nailazeći val, koji se na njoj reflektira, a jednim dijelom prolazi kroz nju. Struja I_0, koja prolazi njime, vezana je na napon U_0 čvorišta $\check{C}_1$ odnosom

$$U_0 = Z_0 I_0$$

Napon U_0 i struja I_0 su sastavljeni od nailazećeg i reflektiranog vala

$$U_0 = U_{d1} + U_{r1}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_0} = I_{d1} + I_{r1} = \frac{U_{d1}}{z_1} - \frac{U_{r1}}{z_1}$$

Navedene jednadžbe omogućuju da se odredi reflektirani val U_{r1}. Treba iskoristiti *faktor refleksije* ϱ, kao u stacionarnog vala iz prethodnog poglavlja. On iznosi iz tih jednadžbi

$$\varrho = \frac{U_{r1}}{U_{d1}} = \frac{Z_0 - z_1}{Z_0 + z_1} \tag{5.110}$$

što je točno isti izraz kao i u stacionarnog vala. Impedancija Z_0 je teret voda 1 nailazećeg vala. Faktor reflekcije ima opći značaj za vodove, bez obzira o kakvom se valu radi. Čim je impedancija čvora Z_0 jednaka valnom otporu voda 1, z_1, nema refleksije. To je opće pravilo za vodove.

Jedan dio vala je prošao kroz impedanciju Z_1. Kako je impedancija koncentrirana, govori se o padu napona. Napon čvorišta $\check{C}_2$ je naprosto

$$U = U_0 - Z_1 I_0$$

Faktor transmisije, τ, se definira kao odnos napona prolaznog vala i nailazećeg vala

$$\tau = \frac{U}{U_{d1}} = \frac{2\,Z}{Z_0 + z_1} \tag{5.111}$$

Poznavajući oba faktora, faktore refleksije i transmisije, rješavaju se svi problemi putujućih valova na vodovima, ako oni nemaju međusobne sprege.

5.7.4. Koncentrirana impedancija

Koncentrirana impedancija je ostvarena tehnički nekim aparatom ili uređajem. Da li se priključeni uređaj smije prikazati impedancijom, kao što je to učinjeno za kratki vod, treba ispitati od slučaja do slučaja. Budući da se ovdje radi o impulsima, upotrebljava se trajanje čela vala kao mjerilo veličine uređaja. Trajanje čela vala ovisi o strmini čela i tjemenu vala. Strmine čela dosižu i preko 10^{12} V/sek. Tjeme vala je vrlo različito i ovisi o namjeni vala. Visokonaponska ispitivanja upotrebljavaju valove i preko milijun volta, a u komunikacionoj tehnici su oni tek nekoliko volti. Strmi visokonaponski valovi imaju čelo i do 0,5 mikrosekunda, što odgovara duljini 150 m u uzduhu. Strmi valovi nanosekundne tehnike imaju čelo 0,1 nanosekundu ili je to u uzduhu duljina 3 cm. Granična dimenzija uređaja mora biti mnogo manja od duljine čela vala, npr. ona je jedna stotinka duljine čela. Ta je granica 1,5 m u primjeni visokonaponskih, vrlo strmih valova, a ona je 0,3 mm za kratke nanosekundne impulse. Uvjeti mogu postati vrlo strogi, da bi se smio prikazati neki uređaj koncentriranom impedancijom. Takav je uređaj i kratki vod koji se prikazuje koncentriranim impedancijama. Može se dogoditi da zadatak postane težak, ako se neki uređaj prikaže koncentriranim impedancijama. U teoriji putujućih valova na vodovima računa se koncentriranim impedancijama, a one se zamišljaju smještene u geometrijskoj točki. Analiza sheme uređaja je posebna teorija.

5.7.5. Jednostavni prijelazi u vodu

Općenito postavljanje diskontinuiteta na vodu pomaže da se riješe pojedinačne zadaće. Ekstremni su slučajevi pogona voda *prazan hod* i *kratak spoj*. Faktori refleksije iznose 1, odnosno — 1. Prvi se odnosi na *pozitivnu totalnu reflekciju*, a drugi na *negativnu totalnu refleksiju*. Napon se podvostručuje na vodu u praznom hodu nakon refleksije, a poništava se na vodu u kratkom spoju. Navedeni su neki jednostavni prijelazi, ako je dolazeći val jediničan. Impedancije se izražavaju u Laplaceovu području, te se umjesto operatora d/dt stavlja operator p, a umjesto vremenskog integrala se pojavljuje dijeljenje sa p. Prema tome su reaktancije

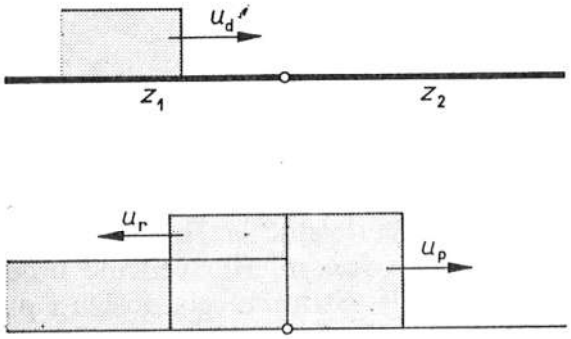
$$X_L = L\,p \qquad \text{induktivna reaktancija}$$

$$X_C = \frac{1}{C\,p} \qquad \text{kapacitivna reaktancija}$$

1. **Dva voda.** Sastaju se dva voda kao na sl. 5.39. valnih otpora z_1 i z_2, a val nailazi vodom 1. Faktori refleksije i transmisije iznose

$$\varrho = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}, \qquad \tau = \frac{2 z_2}{z_2 + z_1}$$

Neka su to zračni vod $z_1 = 400$ oma i kabel $z_2 = 50$ oma. Faktori refleksije i transmisije iznose $\varrho = -0{,}78$, $\tau = 0{,}22$. Kabel preuzima na sebe val znatno nižeg

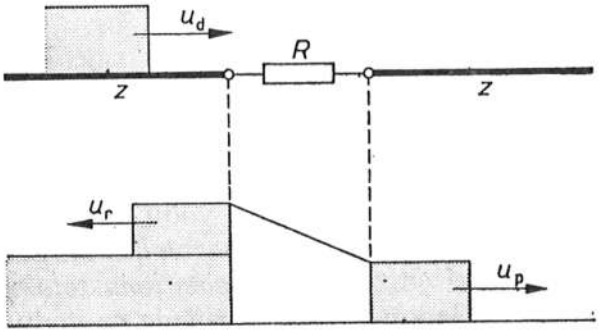


Sl. 5.39. Čvorište s dva voda. Ponašanje putujućeg vala je na donjoj slici.

napona, ovdje svega 22 %. Zato kabel djeluje povoljno u zaštiti postrojenja od visokog napona putujućih valova. To se iskorištava u praksi.

2. **Otpor u seriji.** Sl. 5.40. prikazuje takav sklop. Vod valnog otpora z je razrezan na jednom mjestu, te je tu uključen otpor R. Faktori refleksije i transmisije iznose

$$\varrho = \frac{R}{R + 2 z}, \qquad \tau = \frac{2 z}{R + 2 z}$$



Sl. 5.40. Shema čvorišta s dva voda koji su spojeni otporom. Ponašanje putujućeg vala je na donjoj slici.

a na slici su odmah skicirani valovi nakon refleksije. Refleksija je uvijek pozitivna. Pad napona na otporu iznosi

$$U_R = (1 + \varrho - \tau)\ U_d = \frac{2 R}{R + 2 z}\ U_d$$

3. **Induktivitet u seriji.** Sl. 5.41. prikazuje takav sklop. Opet je vod valnog otpora z razrezan na jednom mjestu i tu je uključen induktivitet L. Faktori refleksije i transmisije iznose u Laplaceovu području

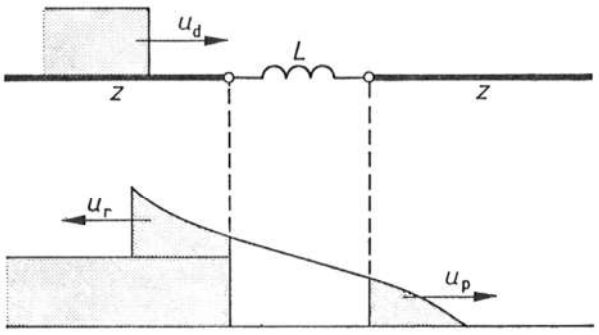
$$\varrho = \frac{p}{p + a}, \qquad \tau = \frac{a}{p + a}, \qquad a = \frac{2z}{L}$$

Kad je dolazeći val u Laplaceovu području, $U_d = u_d/p$, jedinični val, iznose reflektirani i prolazni val u originalu

$$u_r = u_d\, e^{-at}$$

$$u_p = u_d\,(1 - e^{-at})$$

Valovi su skicirani na sl. 5.41. Reflektirani val je odrezani, a prolazni val je postao spljošten. Induktivitet ne dopušta u prvi trenutak prolaz vala, te nastaje pozitivna totalna refleksija kao na vodu u praznom hodu. Kako struja počinje postepeno



Sl. 5.41. Shema čvorišta od dva voda koji su spojeni induktivitetom. Ponašanje putujućeg vala je na donjoj slici.

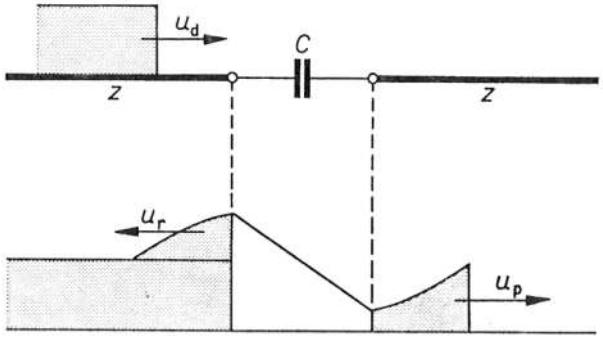
prolaziti induktivitetom, tako se ublažava efekt refleksije. Induktivitet ne predstavlja »otpor« u stacionarnom stanju za istosmjernu struju, te val prolazi kao da on nije uključen u vod. Induktivitet zaštićuje priključeni vod od strmih valova. Spljošteni val nije opasnost za postrojenje. Njegovo čelo iznosi oko 50 mikrosekunda, a strmina je nešto iznad 10^{10} V/s ili ispod 100 V po metru duljine voda u uzduhu. Uz ovu strminu ne mogu nastati opasne razlike potencijala u postrojenju, čije se dimenzije mjere s nekoliko desetaka metara. Čak i nekoliko stotina metara nisu opasne dimenzije. Zračni vod valnog otpora 400 oma treba induktivitet u seriju od 13 mH da bi se postigla strmina 100 V/m pri dolazećem valu 500 kV.

4. **Kapacitet u seriji** kao na sl. 5.42. se uključuje u seriju u vod valnog otpora z. Faktori refleksije i transmisije iznose

$$\varrho = \frac{a}{p + a}, \qquad \tau = \frac{p}{p + a}, \qquad a = \frac{1}{2z\,C}$$

To daje valove refleksije i u prolazu za $U_d = u_d/p$

$$u_r = u_d\,(1 - e^{-at}), \qquad u_p = u_d\,e^{-at}$$

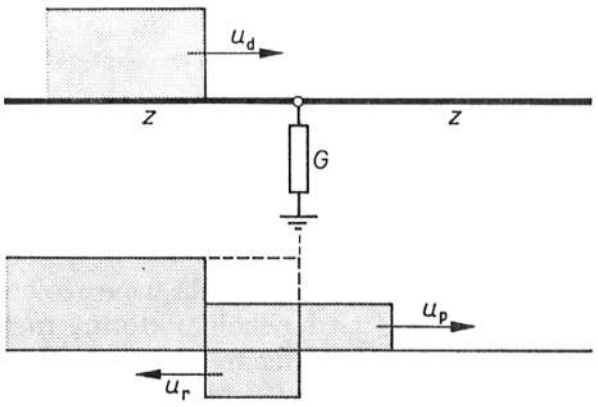


Sl. 5.42. Shema čvorišta od dva voda spojena kapacitetom. Na donjoj slici je ponašanje putujućeg vala.

Na sl. 5.42. se vidi stanje valova nakon refleksije.

5. **Odvod na vodu** se priključuje kao na sl. 5.43. Vod ima valni otpor z, a na jednom se mjestu priključuje koncentrirani odvod G. Faktori refleksije i transmisije iznose

$$\varrho = -\frac{G}{2y + G}, \qquad \tau = \frac{2y}{2y + G}, \qquad y = \frac{1}{z}$$

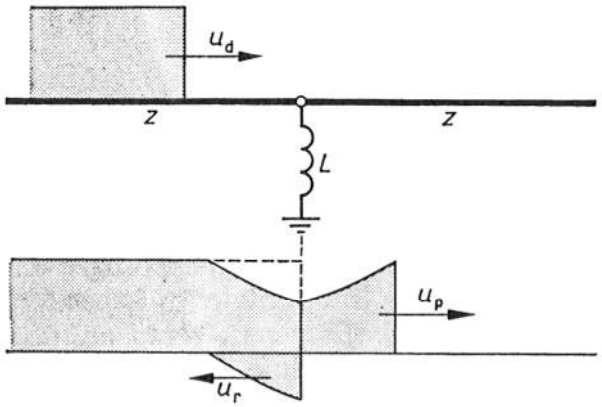


Sl. 5.43. Shema čvorišta od dva voda, koje je uzemljeno provodom. Na donjoj slici je ponašanje putujućeg vala.

Refleksija je uvijek negativna, te je prolazni val uvijek manji od dolazećeg. Tako djeluju odvodi na izolatorima i stupovima visokonaponskih dalekovoda.

6. **Induktivitet paralelno** kao na sl. 5.44. priključuje se na vod valnog otpora z između njega i zemlje, koja se smatra da je nultog potencijala. Faktori refleksije i transmisije iznose

$$\varrho = -\frac{a}{p+a}, \qquad \tau = \frac{p}{p+a}, \qquad a = \frac{z}{2L}$$



Sl. 5.44. Shema čvorišta od dva voda uzemljenog induktivitetom. Na donjoj slici je ponašanje putujućeg vala.

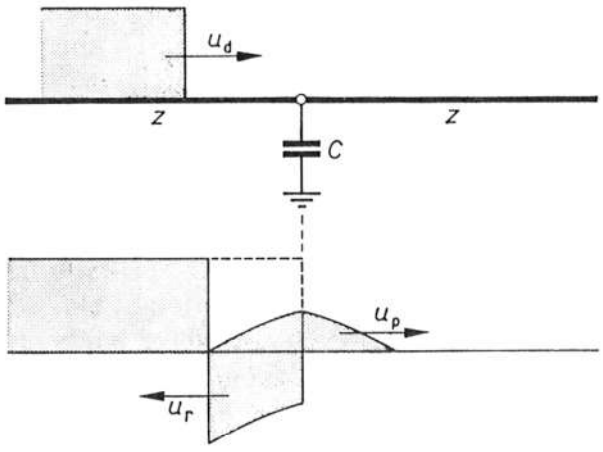
Reflektirani i prolazni val iznose za dolazeći val $U_d = u_d/p$

$$u_r = -u_d(1 - e^{-at}), \qquad u_p = u_d\, e^{-at}$$

a prikazani su na sl. 5.44.

7. **Kapacitet paralelno** kao na sl. 5.45. priključuje se između voda valnog otpor z i zemlje. Faktori refleksije i transmisije iznose

$$\varrho = -\frac{p}{p+a}, \qquad \tau = \frac{a}{p+a}, \qquad a = \frac{2}{zC}$$



Sl. 5.45. Shema čvorišta od dva voda, uzemljenog kapacitetom. Na donjoj je slici ponašanje putujućeg vala.

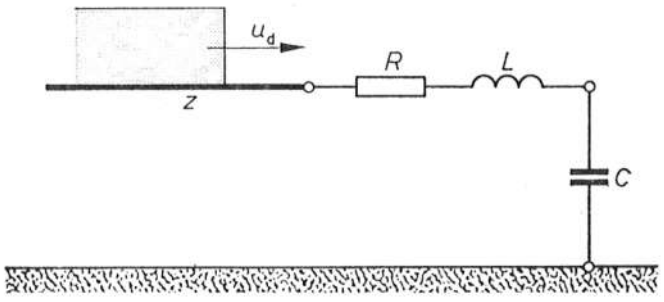
Odatle slijede reflektirani i prolazni valovi za $U_d = u_d/p$

$$u_r = -u_d e^{-at}, \qquad u_p = u_d (1 - e^{-at})$$

Oni su prikazani na sl. 5.45. Tako djeluju kapacitivni provodnici u razvodnim energetskim postrojenjima.

5.7.6. Priključivanje transformatora preko zaštitne prigušnice

Ovo nekoliko osnovnih čvorišta u vodovima pomaže da se vidi utjecaj uključivanja osnovnih elemenata, otpora, induktiviteta i kapaciteta, u vodove. Kao primjer neka posluži *priključivanje transformatora preko zaštitne prigušnice*. Transformator ima tako veliki induktivitet, da djeluje na čelo vala kao otvoren vod. Namot



Sl. 5.46. Shema voda zaključenog serijskom kombinacijom otpora, induktiviteta i kapaciteta. Shema nadomješta priključak transformatora na vod preko prigušnice. Transformator se ponaša u prvi čas kao kapacitet.

transformatora ima kapacitet prema zemlji, te se transformator ponaša za čelo vala kao kapacitet. Shema je prikazana na sl. 5.46. Ta shema je mjerodavna u zoni čela vala za priključak transformatora na vod preko zaštitne prigušnice, koja bi trebala štititi transformator od putujućih valova. Faktor transmisije kroz prigušnicu iznosi

$$\tau = \frac{2\,\omega_0^2}{p^2 + 2\,a\,p + \omega_0^2}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad 2\,a = \frac{R + z}{L}$$

Budući da je dolazeći val $U_d = u_d/p$ jedinični val, napon na kapacitetu u Laplaceovu području iznosi

$$U_c = \tau\, U_d = 2\,u_d \left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\,a}{p^2 + 2\,a\,p + \omega_0^2}\right]$$

Rješenje u originalu glasi za napon na kapacitetu

$$u_c = 2u_d\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)\right]$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\omega}$$

To je ujedno u prvo vrijeme napon na transformatoru, koji je nastao nailaskom jediničnog vala nakon prolaza kroz zaštitnu prigušnicu. U posebnim okolnostima taj napon može biti veći od trostrukog iznosa napona dolazećeg vala, a osim toga i strmog čela. Strmina ovisi o frekvenciji ω. Neka je vod valnog otpora 400 oma, a prigušnica ima induktivitet 2 mH. Njezin je otpor zanemariva iznosa. Kapacitet transformatora iznosi 1200 pF. Osnovna frekvencija iznosi $\omega_0 = 0{,}65 \cdot 10^6$ rad/s, a konstanta gušenja je $\alpha = 10^5$ Np. Ispravljena frekvencija je približno jednaka osnovoj frekvenciji, $\omega = \omega_0$. Maksimum napona nastaje nakon 5,1 mikrosekunda nakon dolaska čela vala do zaštitne prigušnice, a on iznosi 3,2 u_d. Tako visok napon može biti opasan za transformator. Pri tome treba uzeti u obzir da je čelo vala, koji je prošao kroz prigušnicu, oko 5 mikrosekundi, a to se ubraja među strme valove. Ovdje zaštitna prigušnica ne štiti transformator.

5.7.7. Priključivanje voda u praznom hodu

Ponašanje vala na mjestu diskontinuiteta pomaže da se riješi ponašanje vala, ako postoje *dva i više mjesta diskontinuiteta*. Naročito je jednostavan zadatak, ako je zadan vod na kojem se traži stanje na kraju, a zadano je stanje na početku ili obrnuto. Val titra između početka i kraja voda frekvencijom koja je propisana duljinom voda i brzinom vala po njemu. Da je vod bez gubitaka, titranje bi bilo neprigušeno. Tipičan je primjer *priključenje voda u praznom hodu na izvor* koji je beskonačno izdašan, jer nema unutarnjeg otpora. Izvor je akumulatorska baterija, tj. daje istosmjeran napon. Val se pozitivno, totalno reflektira na kraju voda. Izvor napona i struje nema unutarnjeg otpora, te se vod na početku ponaša kao da je kratko spojen, a val se negativno, totalno reflektira. Takav je vod skiciran na sl. 5.47. Vod je duljine l, valnog otpora z. Čelu vala je potrebno vrijeme $T = l/c$ da bi stiglo od početka do kraja voda. Ako je jedna etapa jedan prolaz vala cijelom duljinom voda, potrebne su četiri etape da bi se stanje na vodu ponovilo. Napon na kraju voda je prikazan na sl. 5.47. On je nula za vrijeme $2T$, a onda je $2u_0$ za isto vrijeme. Napon na početku voda je uvijek u_0, kako uvjetuje izvor. Napon se neće nikada stabilizirati na kraju voda, ako nema gubitaka. Frekvencija $1/(2T)$ se zove katkad i frekvencija voda u praznom hodu. Vod duljine 3 m u uzduhu ima tu frekvenciju 50 MHz. To ne može registrirati obični mjerni instrument.

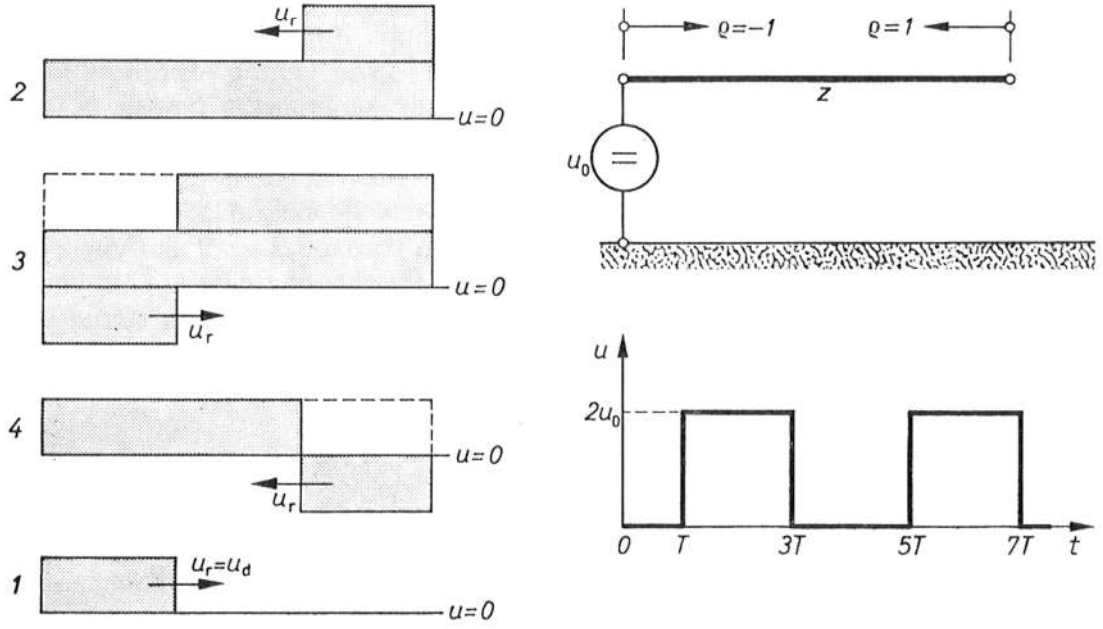
Isti zadatak se može riješiti i analitički. Za to su potrebne jednadžbe dugog voda (5.57)

$$U_t = U_g \operatorname{ch}(\gamma l) - Z_v I_g \operatorname{sh}(\gamma l)$$

$$I_t = I_g \operatorname{ch}(\gamma l) - \frac{U_g}{Z_v} \operatorname{sh}(\gamma l)$$

Vod je malih gubitaka, te je $Z_v = z$ i $\gamma = \alpha + p/c$ prema (5.106). On je u praznom hodu, što znači $I_t = 0$. Zato je napon na kraju voda uz $T = l/c$

$$U_t = \frac{U_g}{\operatorname{ch}(\gamma l)} = \frac{u_0}{p[\operatorname{ch}(\alpha l)\operatorname{ch}(Tp) + \operatorname{sh}(\alpha l)\operatorname{sh}(Tp)]}$$



Sl. 5.47. Shema priključivanja voda u praznom hodu na izvor. Lijeve slike su ponašanje putujućeg naponskog vala za vrijeme četiri prolaza vodom. Donja desna slika je napon na kraju voda u ovisnosti o vremenu.

Ova se funkcija ne može na jednostavan način vratiti u original. Zato se jednostavno može vidjeti početak procesa kad je kompleksna veličina p vrlo velika, te vrijedi približni odnos

$$\operatorname{ch}(\gamma l) = e^{\alpha l} \operatorname{ch}(Tp), \qquad |Tp)| \gg 1$$

Ako je slika funkcije

$$U_t = u_0 e^{-\alpha l} \frac{1}{p \operatorname{ch}(Tp)}$$

original je funkcija upravo na sl. 5.47., samo što amplituda nije $2u_0$, već je $2u_0 e^{-\alpha l}$. Time je uzeto u obzir prigušenje na vodu. Međutim, napon na kraju voda teži konačnom iznosu stacionarnog stanja, i to je istosmjerni napon.

Stacionarno stanje se određuje direktno iz valnih jednadžbi, uzevši u obzir da se radi o istosmjernoj struji. Ako nema odvoda, valna konstanta iščezava. Vod u praznom hodu ne uzima nikakvu struju, pa tada nema niti pada napona. Napon voda u praznom hodu je svuda jednak naponu izvora u stacionarnom stanju. Prijelaz na stacionarno stanje uz pomoć slike funkcije vodi do pogrešnog rezultata

$$u_{10} = \frac{u_0}{\operatorname{ch}(\alpha\, l)}$$

ako se doslovno interpretira prigušna konstanta. Prigušna konstanta je nula, $\alpha = 0$, u stacionarnom pogonu istosmjernom strujom, a tada se dobiva ispravan rezultat. Ovaj primjer treba da upozori na oprez u analizi pojava vezanih za putujuće valove. Prigušna konstanta nije konstantna, već je ovisna o frekvenciji struje koja protječe vodičima voda. U ovom primjeru se može stvoriti pogrešan zaključak zadržavajući prigušnu konstantu konstantnom.

5.7.8. Shema refleksije

Shema refleksije pomaže da se rasprostiranje valova rješava korak po korak. Ona pomaže da se val prati sustavno od trenutka promatranja do bilo kojeg vremena. Jedna shema je prikazana na sl. 5.48. Odabran je vod sa tri čvora. Vod između dva susjedna čvora je homogen, karakteriziran svojim konstantama i duljinom. Svaki čvor ima karakteristične faktore refleksije i transmisije. Oni su ovisni o smjeru dolazećeg vala. Svaka shema mora imati označen *pozitivni smjer*. Pozitivni smjer na sl. 5.48 je 1 — 2 — 3. Faktori refleksije i transmisije, ϱ, τ, su bez zareza za pozitivni smjer dolazećeg vala. Isti su faktori, ϱ', τ', sa zarezom za negativni smjer dolazećeg vala. Faktori su uneseni na sl. 5.48. kod pojedinih čvorova.

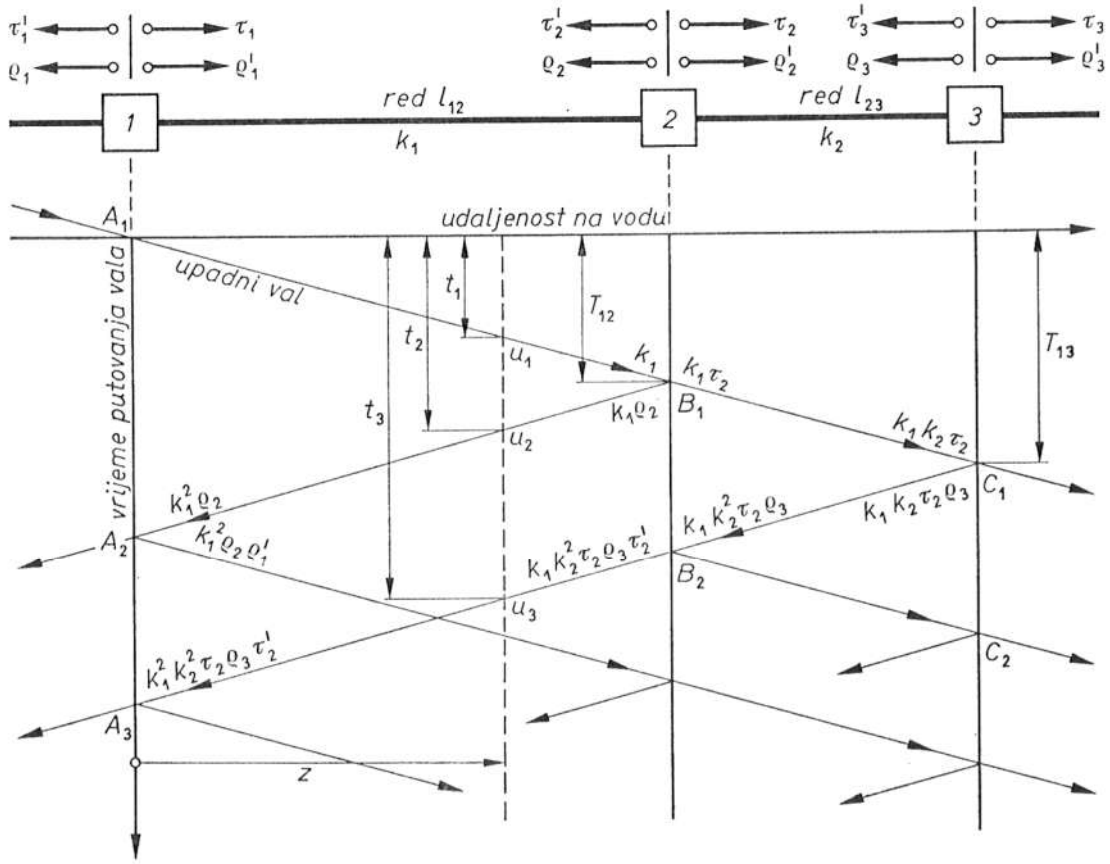
Shema refleksije sadrži koordinatni sustav gdje se na apscisi nanosi udaljenost na vodu, a na ordinati je vrijeme putovanja čela vala. Pravac $A_1 C_1$ je tako postavljen, da njegove koordinate kazuju koliko je vremena prošlo dok je čelo vala stiglo na dotično mjesto. Da bi to bio pravac, iako se radi o različitim vodovima, morala bi brzina vala biti ista na svim vodovima. To obično nije tako. Zato se u shemu unose *reducirane duljine* vodova. Mora biti poznato vrijeme T_k, koje je potrebno da bi val prošao udaljenost između dva susjedna čvora ili njegova brzina c_k. Također treba zadati odsječak voda na koji se reduciraju sve udaljenosti. Tada je reducirana duljina

$$l \text{ reducirano} = \frac{c_1}{c_k}\, l \text{ stvarno} \qquad (5.112)$$

c_1 je brzina vala na odsječku voda na koji se reduciraju sve duljine, a c_k je brzina vala na reduciranu vodu. Nagib α pravca AB se odabire po volji.

Pravac $C_1 A_3$ jednako je nagnut prema osi apscisa, a odnosi se na dolazeći val u negativnom smjeru. Dolazeći val se jednim dijelom reflektira na čvoru 1, točka A_1,

a ostatak prolazi kroz čvor 1. Prolazni val u čvoru 1 ima iznos jedinicu, a to se smatra početkom promatranja putovanja vala. Val prođe udaljenost između čvorova 1 i 2, te se pri tome priguši $k_1 = \exp(-\alpha_1 l_{12})$ puta. Kad val stigne do čvora 2, njegov je iznos k_1. On se tamo reflektira u iznosu $k_1 \varrho_2$ i prolazi kroz čvor 2 u iznosu $k_1 \tau_2$. Prolazni val napreduje dalje prema čvoru 3, te se na putu prigušuje $k_2 = \exp(-\alpha_2 l_{23})$ puta. Kad stigne do čvora 3, njegov je iznos $k_1 k_2 \tau_2$, a to je u točki C_1. Taj se val ovdje reflektira u iznosu $k_1 k_2 \tau_2 \varrho_3$, a prolazi kroz čvor u iznosu $k_1 k_2 \tau_2 \tau_3$.



Sl. 5.48. Shema refleksije.

Reflektirani val u C_1 kod čvora 3 putuje prema čvoru 2 u negativnom smjeru. On se prigušuje i stiže do čvora 2 u iznosu $k_1 k_2^2 \tau_2 \varrho_3$. On se reflektira u iznosu $k_1 k_2^2 \tau_2 \varrho_3 \varrho_2'$ i prolazi kroz čvor 2 u iznosu $k_1 k_2^2 \tau_2 \varrho_3 \tau_2'$. Ponovno se prigušuje gibajući se od čvora 1, gdje stiže u iznosu $k_1^2 k_2^2 \tau_2 \varrho_3 \tau_2'$, a to je točka A_3. On se reflektira u iznosu $k_1^2 k_2^2 \tau_2 \varrho_3 \tau_2' \varrho_1'$, a ostatak prolazi. Tako se nastavlja s praćenjem putovanja vala.

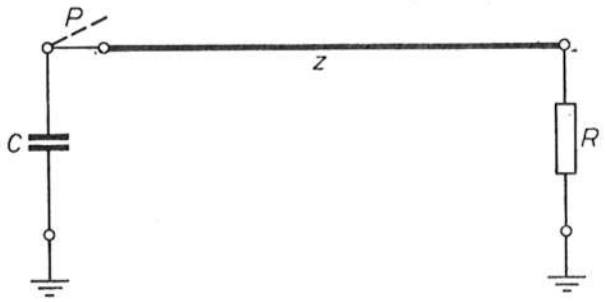
Točke A_1, A_2, A_3, ... u shemi refleksije na ordinati predstavljaju ujedno vrijeme kad stižu pojedini valovi do čvora 1. Isto tako su točke B_1, B_2, B_3, ... na ordinati čvora 2, a one daju vremena dok stignu valovi do tog čvora bilo s lijeve, bilo s desne strane. Jednako se tumače točke C_1, C_2, C_3, ... na ordinati čvora 3. Kako se dalje napreduje, točke stizanja vala postaju sve gušće, a treba paziti da se neka točka ne ispusti.

Napon na vodu na pojedinom mjestu i u zadanom vremenu se dobije zbrajanjem napona svih pristiglih valova do tog vremena. Tako su naponi kod čvora 1 na vodu 1 slijedeći

$$u_1 = 1, \quad t \geqslant 0$$
$$u_1 = 1 + k_1^2 \varrho_2 (1 + \varrho_1'), \quad t > 2 T_{12}$$
$$u_1 = 1 + (k_1^2 \varrho_2 + k_1^2 k_2^2 \tau_2 \varrho_3 \tau_2')(1 + \varrho_1'), \quad t > 2 (T_{12} + T_{23})$$
$$\vdots$$

Shema refleksije pomaže praćenju stanja putujućih valova na vodu. Ona pomaže također u proračunu stanja metodom korak po korak.

PRIMJER 5.10. Nabijeni kondenzator izbija se preko voda na otpornik. Kondenzator se predstavlja samo kapacitetom C, jer su mu gubici zanemarivi, a otpornik se predstavlja samo otporom R. Vod je zanemarivih gubitaka, valnog otpora z i duljine l. Početni napon kondenzatora iznosi u_0. Spoj je prikazan na sl. 5.49. Traži se struja izbijanja. Zadaća izbijanja kapaciteta



Sl. 5.49. Shema izbijanja kapaciteta na otpor preko voda.

na otpor rješava se jednostavno teorijom strujnog kruga. Ovdje treba uzeti u obzir djelovanje voda. Neophodno je da nastupe uzajamne refleksije od otpora i kapaciteta, te da se pojavi u prvo vrijeme titranje struje. Utjecaj titranja struje na proces izbijanja ovisi o odnosu vremenskih konstanti voda $T = l/c$ i kapaciteta $T_c = R\,C$. Vremenska konstanta voda je vrijeme koje je potrebno da val prođe vodom od kapaciteta do otpora. Vremenska konstanta kapaciteta je karakteristična za izbijanje kapaciteta na otpor, kad se zanemari utjecaj voda.

Napon na otporu je ujedno i struja kroz otpor. Valja upotrijebiti jednadžbe voda, ako su zadani napon i struja generatora, a traže se veličine na teretnoj strani po jednadžbi (5.57). One glase

$$U_t = U_g \operatorname{ch}(\gamma l) - Z_v I_g \operatorname{sh}(\gamma l)$$

$$I_t = I_g \operatorname{ch}(\gamma l) - \frac{U_g}{Z_v} \operatorname{sh}(\gamma l)$$

Vod nema gubitaka, te je valna konstanta naprosto jednaka $\gamma = p/c$, a valna impedancija jednaka je valnom otporu $Z_v = z$. Napon generatora je napon na kapacitetu kad se od njega odbije pad napona, tj. u Laplaceovu području

$$U_g = \frac{u_0}{p} - \frac{I_g}{C p}$$

Osim toga je struja otpora jednaka $I_t = U_t/R$. Prema tome je napon otpora R

$$U_t = \frac{u_0}{(p + a_c)\,\mathrm{ch}\,(T p) + \left(\frac{a_c}{a_v} p + a_v\right)\mathrm{sh}\,(T p)}$$

Tu je $a_c = 1/T_c = 1/(R\,C)$ i $a_v = 1/(z\,C)$. Odavde je odmah vidljivo da je izbijanje kapaciteta sasvim normalno kad je otpor prilagođen na vod. Onda je $a_v = a_c$, a napon na otporu je

$$u_t = u_0\, e^{-a_c(t-T)}, \qquad t > T$$

Brojanje vremena je pomaknuto za T, koliko je potrebno da val stigne od kapaciteta do otpora.

Nabijeni kondenzator se priključuje prekidačem P na vod, te se on odmah počinje izbijati. Njemu se kao otpor postavlja vod svojim valnim otporom, a njegov se napon smanjuje po eksponencijalnom zakonu

$$u_c = u_0\, e^{-a_v t}, \qquad a_v = \frac{1}{z\,C}$$

To je odrezani val koji putuje prema kraju voda, stiže do otpora u vremenu $T = l/c$, te se na njemu reflektira uz faktor refleksije

$$\varrho = \frac{R - z}{R + z}$$

Ako se zanemari vremensko opadanje napona, val izgleda kao na sl. 5.47., samo je njegova amplituda $2\,R\,u_0/(R + z)$. Takav se rezultat dobiva kad je veličina p u slici funkcije U_t vrlo velika, a funkcija se vrati u original. Po tome izgleda da je slika funkcije U_t ispravna.

Druga je kontrola funkcije U_t da se pogleda njezino ponašanje kad veličina p postaje vrlo malena. Takvo stanje odgovara dovoljno dugom vremenu, kad proces već teži k stacionarnom stanju. Slika funkcije U_t dobiva približni oblik

$$U_t = \frac{a_v\,u_0}{T\,a_c}\,\frac{1}{p^2 + \frac{a_v}{a_c}\left(\frac{1}{T} + a_v\right)p + \frac{a_v}{T}} = \frac{a_v\,u_0}{T\,a_c}\,\frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Original funkcije U_t iznosi

$$u_t = \frac{a_v}{T\,a_c\,(p_1 - p_2)}\,u_0\,(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \qquad a_c = \frac{1}{R\,C}$$

Korijeni p_1 i p_2 funkcije u nazivniku su općenito realni ili konjugirano kompleksni. To ovisi o odnosu konstanti a_v, a_c i T, odnosno o međusobnom odnosu valnog otpora, brzine vala, duljine voda i otpora i kapaciteta. Tu postoje mnoge ovisnosti i zato proces postaje nepregledan.

Vod ima svoj kapacitet C_v i induktivitet L_v, izraženi po jedinici duljine. Izbijanjem kondenzatora nabija se kapacitet voda, a pri tome induktivitet voda samo sudjeluje u usporenju procesa izbijanja. Kombinacija induktiviteta i kapaciteta je sposobna da titra kao što se i pojavljuje titranje prilikom ovog procesa izbijanja. Takvo titranje može biti periodično prigušeno ili aperiodično. Tako se može desiti da je napon na otporu prigušeno periodičan ili aperiodičan. Kad nema voda, izbijanje kondenzatora na otpor je tipično aperiodičan proces. Uključivanje voda može izazvati da je napon na otporu prigušen periodičan proces. Takav se proces može očekivati kod dovoljno dugog

voda bez gubitaka i otpora tereta manjeg od valnog otpora voda. Ako se uvedu nove karakteristične konstante

$$c_0 = T\,a_v = \frac{l\,C_v}{C}$$

$$r_0 = \frac{a_v}{T\,a_c} = \frac{R}{l\,L_v}$$

korijeni se prikazuju u obliku

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2}\,r_0\,(1 + c_0)\left\{1 \mp \left[1 - \frac{4\,c_0}{(1 + c_0)^2}\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

Periodični slučaj nastaje sigurno kad je otpor otpornika znatno manji od valnog otpora voda. U protivnom je izbijanje aperiodično.

Ovdje je zanimljiv proces izbijanja kad je otpor otpornika znatno veći od valnog otpora voda. Tada je proces izbijanja sigurno aperiodičan, a korijeni p_1 i p_2 su realni i negativni. Osim toga neka vod bude dovoljno kratak, te je $c_0 \ll 1$ i $r_0 \gg 1$. Približni iznosi korijena su

$$p_1 = -a_c, \qquad p_2 = -r_0$$

a napon na otporu iznosi približno

$$u_t = u_0\,e^{-\alpha_c t}$$

što je uobičajeni izraz za napon kondenzatora koji se izbija. Prema tome. izbijanje kondenzatora na otpor odvija se kao po teoriji strujnih krugova, ako je vod dovoljno kratak i otpor otpornika dovoljno velik prema valnom otporu voda.

Neka se izbijanje vrši preko koaksijalnog kabela duljine 110 m i valnog otpora 70 oma. Njegov kapacitet i induktivitet je 65 pF/m i 320 nH/m. Kondenzator je kapaciteta $C = 0{,}05$ mikrofarada, a otpornik je otpora $R = 7{,}0$ kilooma. Kako je $z/R = 10^{-2}$, zadovoljen je uvjet aperiodičnosti, jer je

$$\frac{4\,c_0}{(1 + c_0)^2} < 1$$

Osim toga je $c_0 = 0{,}143$ i $r_0 = 2{,}0 \cdot 10^8$ 1/s. Korijeni približno iznose

$$p_1 = -\frac{r_0\,c_0}{1 + c_0}\left(\frac{z}{R}\right)^2 = -2{,}5 \cdot 10^3\ 1/\mathrm{s}$$

$$p_2 = -r_0\,(1 + c_0) = -2{,}3 \cdot 10^8\ 1/\mathrm{s}$$

Napon na otporu iznosi

$$u_t = \frac{r_0\,u_0}{p_1 - p_2}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$

Budući da je $|p_2| \gg |p_1|$, zanemaruje se drugi pribrojnik u zagradi, te s ostalim približenjima napon otpora glasi približno

$$u_t = \frac{u_0}{1 + c_0}\,e^{-\frac{\alpha_c}{1 + c_0}\,t}$$

Kad se uzme u obzir da je $1 + c_0 = (C + l\,C_v)/C$, vidi se da u približnom rješenju izbijanja kondenzatora na otpor preko voda treba kapacitetu kondenzatora dodati ukupni kapacitet voda. S takvim se kapacitetom računa kao s koncentriranim kapacitetom.

Kompletno rješenje ovog zadatka je složeno. Vraćanje slike funkcije U_t u original nije jednostavno. Tu pomaže rješavanje korak po korak, kako to omogućuje shema refleksije. Sl. 5.50. prikazuje shemu refleksije. Faktori refleksije iznose

$$\varrho_1 = \frac{a_v - p}{a_v + p} \qquad \text{kod kondenzatora}$$

$$\varrho_2 = \frac{R - z}{R + z} \qquad \text{kod otpornika}$$

Napon na otporniku iznosi iz sheme refleksije

$$U_1 = (1 + \varrho_2)\, U_C \qquad \text{pri 1. refleksiji,} \quad t \geqslant 0$$

$$U_2 = (1 + \varrho_2)\, \varrho_1\, \varrho_2\, U_C \qquad \text{pri 2. refleksiji,} \quad t \geqslant 2T$$

$$\vdots$$

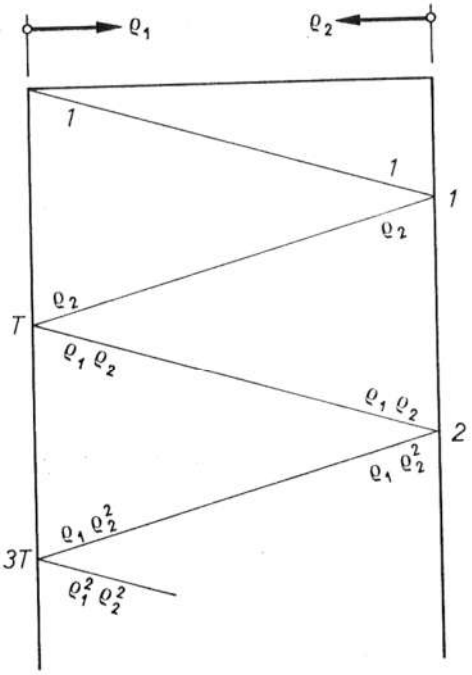
$$U_{1+n} = (1 + \varrho_2)\, \varrho_1^n\, \varrho_2^n\, U_C \qquad \text{pri } (1+n) \text{ refleksiji,} \quad t \geqslant 2nT$$

Treba uzeti u obzir da je napon kondenzatora u Laplaceovu području

$$U_C = u_0 \frac{1}{p + a_v}$$

te je napon na otporniku pri $(1 + n)$-toj refleksiji u Laplaceovu području

$$U_{1+n} = (1 + \varrho_2)\, \varrho_2^n\, u_0 \frac{(a_v - p)^n}{(p + a_v)^{1+n}}$$



Sl. 5.50. Shema refleksije sustava na sl. 5.49.

Ovdje je brojenje vremena počelo prilikom prve refleksije na otporniku, što je dozvoljeno, jer nema gubitaka na vodu.

Napon pri $(1 + n)$-toj refleksiji iznosi u originalu

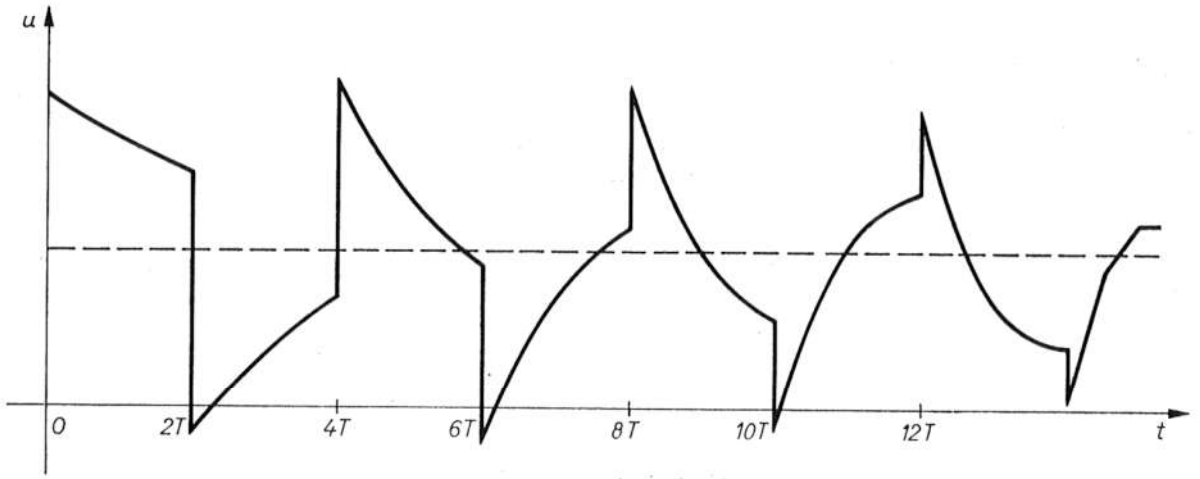
$$u_{1+n} = (1 + \varrho_2)(-\varrho_2)^n e^{-\alpha_v t} L_n(2\alpha_v t) u_0, \qquad t \geqslant 2nT$$

$$L_n(2\alpha_v t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2\alpha_v t)^k}{k!}$$

Veličina $L_n(2\alpha_v t)$ se zove Laguerreov polinom, a računa se preko navedenog zbroja. Napon na otporniku nakon $(1 + n)$-te refleksije jednak je zbroju pojedinih napona

$$u_t = \sum_{1}^{n} u_k$$

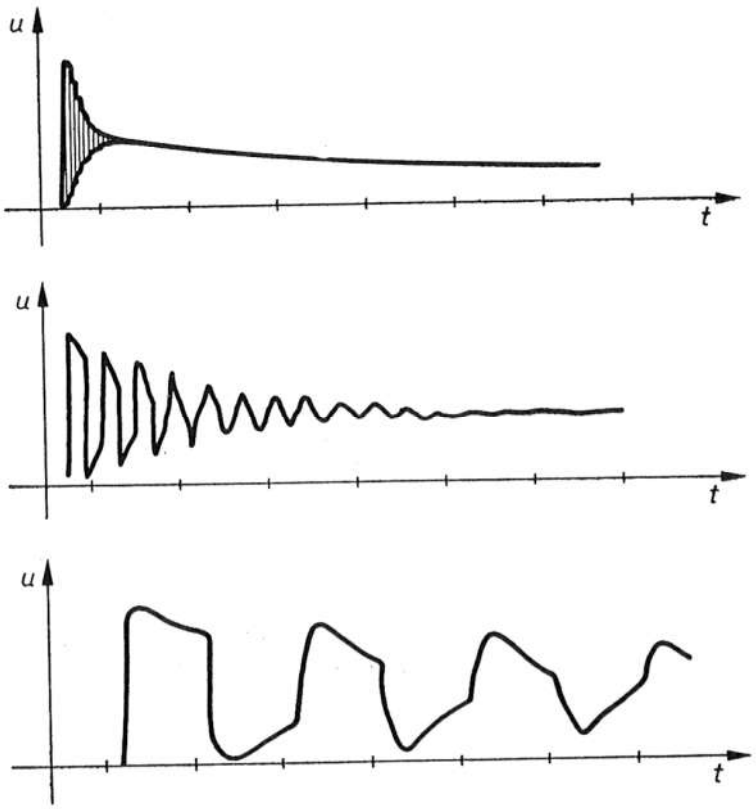
Prilikom zbrajanja napona treba voditi računa o vremenu za koje je pojedini napon različit od nule. Sl. 5.51. prikazuje napon na otporniku u_t za konkretne podatke kondenzatora, otpornika i voda u ovome primjeru. Isti primjer je provjeren u visokonaponskom laboratoriju Tvornice »Rade Končar« u Zagrebu. Mjerenja je proveo voditelj laboratorija ing. Milan Cvjetičanin, te su dobiveni rezultati kao što je prikazano na sl. 5.52. Upotrijebljen je koaksijalni kabel 110 m duljine, s izolacijom koja



Sl. 5.51. Napon na otporu na kraju voda u ovisnosti o vremenu za sustav sa sl. 5.49.

omogućuje brzinu vala $2{,}2 \cdot 10^8$ m/s. Vrijeme jednog prolaza vala iznosi $T = 0{,}5$ mikrosekundi. Prikazana su tri oscilograma u tri različita mjerila, da se dobije utisak pojava izbijanja kondenzatora preko voda. Vremenska konstanta izbijanja kondenzatora iznosi $T_c = R\,C = 350$ mikrosekundi, što je 700 T, tj. mnogo puta veće od vremena prolaza vala vodom. Oscilogram na sl. 5.52. pokazuje da se razmjerno brzo prigušuje titranje vala zbog učešća voda. Ono traje približno 25 mikrosekundi, što je oko 50 prolaza vala po vodu. Kvalitativno se grubo slažu sl. 5.51. dobivena proračunom, i

oscilogram, donja slika. Razlika je nastala zbog zanemarenja gubitaka u vodičima voda i u izolaciji kabela. Ti su gubici značajni, jer se radi o vrlo strmom valu i o visokoj frekvenciji titranja. Ovaj



Sl. 5.52. Oscilogrami napona na otporu po shemi na sl. 5.49. Upotrijebljen je kondenzator kapaciteta 0,05 μF zanemarivih gubitaka, koaksijalni kabel duljine 110 m i valnog otpora 70 oma i otpornik otpora 7000 oma i zanemariva induktiviteta. Vrijeme jednog prolaza vala je 0,5 μs. Sve tri slike su isti oscilogram, samo različitog mjerila za vrijeme. Snimanje izvršio ing. Milan Cvjetičanin u Visokonaponskom laboratoriju Tvornice »Rade Končar«.

primjer pokazuje ujedno da je potreban mnogo veći ulog pomagala u proračunu pojava na vodovima. Moderna računska tehnika to omogućuje. Isti pokus je pokazao da se izbijanje odvija kao da nema voda, čim je vod prilagođen.

5.8. NEHOMOGENI VOD

Nehomogeni vod nema konstante voda konstantne duž voda, već se one mijenjaju u ovisnosti o mjestu na vodu. Homogeni vod ima primarne konstante konstantne po svojoj duljini. To se postiže postavljanjem vodiča po paralelnim pravcima, a vodiči su konstantna presjeka. Može se zamisliti da se vodiči jednako postavljaju, ali se njihov presjek mijenja. Takav bi vod bio nehomogen. Kad bi se dva vodiča-užeta postavila tako, da se razmak među njima mijenja, dobio bi se opet nehomogen vod.

Vodiči mijenjaju svoj presjek i međusobni položaj toliko, da se to ne može zvati homogen vod. Tipični primjer nehomogenog voda je antena. Nehomogeni vod

se nalazi u upotrebi kad se želi postići posebne učinke prijenosom. Konstruktivni razlozi zahtijevaju katkad da se učini vod nehomogenim. On se susreće u primjeni, te je potrebno upoznati njegovu teoriju.

Jednadžbe (5.32) i (5.33) su osnovne naponske i strujne jednadžbe voda, koje kao takve vrijede i u nehomogenog voda.

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = ZI$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = YU$$

Uzdužna impedancija Z i poprečna admitancija Y su ovisne o koordinati z na vodu. Derivacijom naponske jednadžbe po z omogućuje se supstitucija struje iz strujne jednadžbe, te se dobiva konačni oblik naponske i strujne jednadžbe nehomogenog voda

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} &= \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} + ZYU \\ \frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}z^2} &= \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} + ZYI\end{aligned} \qquad (5.113)$$

U jednadžbama se pojavio još jedan član, koji je posljedica promjenljivosti konstanti voda. Da bi se mogle riješiti ove diferencijalne jednadžbe, potrebno je poznavanje funkcionalne ovisnosti konstanti o mjestu na vodu

$$Z = Z(z), \qquad Y = Y(z)$$

Odmah treba usvojiti neke pretpostavke:

1. vod je zanemarivih gubitaka,
2. polje u neposrednom okolišu je karakteristično za ravni val.

Ove pretpostavke vode do zaključka da je brzina rasprostiranja vala konstantna i jednaka brzini svjetla za upotrijebljeni materijal izolacije. Prema tome je

$$ZY = \gamma^2 = -\omega^2 LC = -\omega^2 L_0 C_0 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = -\beta^2 \qquad (5.114)$$

Valni otpor voda se jednako definira kao u homogenog voda

$$Z_v = \left(\frac{Z}{Y}\right)^{1/2} = \frac{Z}{\gamma} = cL = \frac{1}{cC} \qquad (5.115)$$

Treba usvojiti **eksponencijalni vod** čiji se induktivitet i kapacitet mijenjaju po eksponencijalnom zakonu

$$L = L_0\, e^{\zeta z}, \qquad C = C_0\, e^{-\zeta z} \tag{5.116}$$

Taj vod ima stvarno konstantnu brzinu vala, jer je $L\,C = L_0\,C_0$, a valni otpor se mijenja po eksponencijalnom zakonu

$$Z_v = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} = Z_{v0}\, e^{\zeta z} \tag{5.117}$$

Kad se uzme u obzir promjenljivost induktiviteta i kapaciteta, slijede jednostavnije telegrafske jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2} - \zeta \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} + \beta^2\, U &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}z^2} + \zeta \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} + \beta^2\, I &= 0 \end{aligned} \tag{5.118}$$

To su homogene diferencijalne jednadžbe drugog stupnja, a njihova rješenja glase

$$\begin{aligned} U &= U_1\, e^{q_1 z} + U_2\, e^{q_2 z} \\ I &= I_1\, e^{p_1 z} + I_2\, e^{p_2 z} \end{aligned} \tag{5.119}$$

gdje su faktori $q_{1,2}$, i $p_{1,2}$ korijeni karakterističnih jednadžbi

$$\begin{aligned} q^2 - \zeta q + \beta^2 &= 0 \\ p^2 + \zeta p + \beta^2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.120}$$

Dvije integracione konstante se eliminiraju odnosima između struja i napona kako je prikazano u uvodu

$$I = -\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}, \qquad U = -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}$$

Sad je odnos integracionih konstanti

$$\frac{U_1}{I_1} = -\frac{j\omega L_0}{q_1} = -\frac{p_1}{j\omega C_0}, \qquad \frac{U_2}{I_2} = -\frac{j\omega L_0}{q_2} = -\frac{p_2}{j\omega C_0} \tag{5.121}$$

Interesantno je da su omjeri napona i struje za pozitivni i negativni val različiti.

Eksponencijalni vodovi u upotrebi imaju konstantu ζ obično vrlo malenu prema faznoj konstanti, tj. $\zeta \ll \beta$. Onda se korijeni karakteristične jednadžbe pojednostavne, a napon i struja se prikazuju izrazima

$$U = (U_1 e^{j\beta z} + U_2 e^{-j\beta z}) e^{\zeta z/2}$$
$$I = \left(-\frac{U_1}{Z_v} e^{j\beta z} + \frac{U_2}{Z_v} e^{-j\beta z}\right) e^{\zeta z/2} \qquad (5.122)$$

$$\zeta < 0{,}02\,\beta \quad \text{ili} \quad \zeta < \frac{1}{8\,\lambda}$$

Jednadžba napona i struje na eksponencijalnom vodu ima oblik jednak obliku jednadžbe u homogenog voda, samo se pojavljuje faktor $\exp(\zeta z/2)$.

Kad je takav vod opterećen valnim otporom, on radi u pogonu bez refleksije. Otpor tereta mora biti

$$Z_t = Z_v = Z_{vo} e^{\zeta l}$$

Odmah slijedi iz jednadžbi (5.122) da je $U_1 = 0$, tj. nema refleksije. Otpor voda na generatorskoj strani iznosi

$$Z_g = Z_{vo}$$

Time se pokazuje da eksponencijalni vod djeluje kao transformator otpora. On pretvara otpor $Z_{vo} \exp(\zeta l)$ na kraju voda u otpor Z_{vo} na početku voda. Faktor transformacije iznosi $\exp(\zeta l)$. Treba uzeti u obzir da je konstanta ζ malena, te se može desiti da je i mogućnost transformacija malena, ako je duljina voda manja od duljine vala. Konstanta ζ smije iznositi najviše 0,004 1/m, pri duljini vala 30 m. Vod duljine 30 m transformira otpor za 12 %.

Ako nije izvršen uvjet $\zeta \ll \beta$, ne može biti prijenosa eksponencijalnim vodom bez refleksije. Takav vod se primjenjuje samo kad to dirigiraju konstruktivni razlozi. Koaksijalni vod je naročito prikladan da postane eksponencijalan.

PRIMJER 5.11. Koaksijalni vod ima uključen na jednom mjestu **eksponencijalni odsječak** duljine $l = 1$ m, kako je prikazano u presjeku na sl. 5.53. Eksponencijalni odsječak ima s obje strane homogeni koaksijalni vod. Na strani 2 valni otpor iznosi Z_{v2}. Unutarnji vodič nije istog promjera. Njegov je promjer 100 mm na strani 1, te linearno prelazi u promjer 160 mm na strani 2. Vanjski vodič je promjera 200 mm na strani 1, a promjera 600 mm na strani 2. Prijelaz od jednog na drugi promjer je takav, da se valni otpor mijenja eksponencijalno. Kapacitet i induktivitet koaksijalnog voda iznose

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r_v}{r_u}\right)}, \qquad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_v}{r_u}\right)$$

ako se zanemari unutarnji induktivitet vodiča. Oni se tako računaju i za eksponencijalni odsječak

Kad se uvrste vrijednosti za r_v i r_u jedne i druge strane, dobiju se kapaciteti i induktiviteti uz uzduh kao izolator

$$C_1 = 80{,}0 \text{ pF/m}, \qquad C_2 = 42{,}0 \text{ pF/m}$$

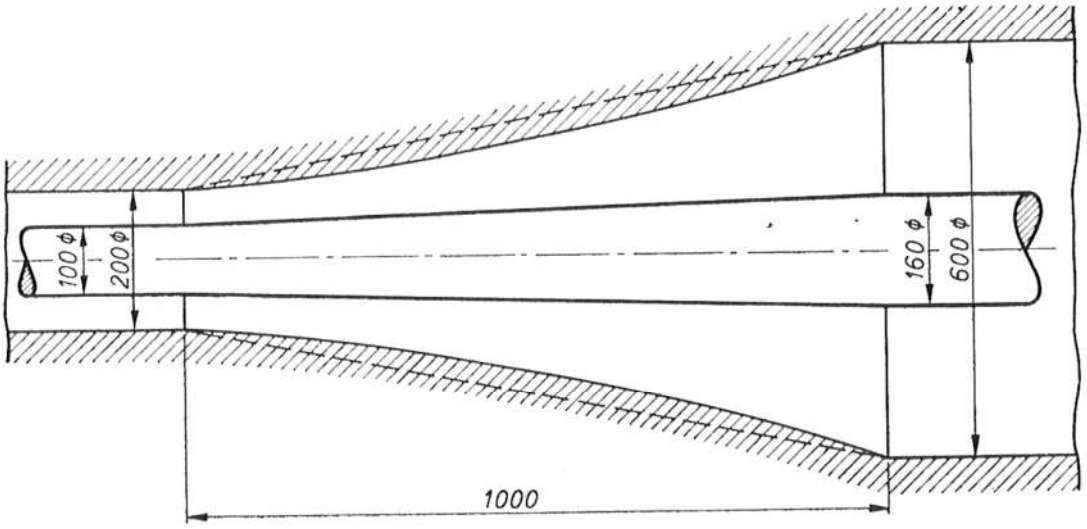
$$L_1 = 0{,}139 \ \mu\text{H/m}, \qquad L_2 = 0{,}264 \ \mu\text{H/m}$$

Gubici voda se zanemaruju, te su valni otpori homogenih vodova na jednoj i drugoj strani

$$Z_{v1} = 41{,}5 \ \Omega, \qquad Z_{v2} = 79{,}3 \ \Omega$$

Prijelaz se vrši u duljini $l = 1000$ mm od jednih konstanti na druge konstante. Konstanta ζ slijedi iz odnosa

$$e^{\zeta l} = \frac{C_1}{C_2} = 1{,}90 = \frac{L_2}{L_1} = \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}}$$



Sl. 5.53. Presjek eksponencijalnog voda, odsječka uključenog između dva koaksijalna voda.

Ona iznosi $\zeta = 0{,}642$, te je razmjerno velika u odnosu na duljinu prijelaza. Izvodnica vanjskog cilindra u prijelaznom odsječku se lako odredi čim je poznata konstanta ζ, te je prema tome ucrtana na sl. 5.53.

Neka se vod upotrebljava na frekvenciji 12 MHz. Fazna konstanta sad iznosi

$$\beta = \omega (L\,C)^{1/2} = 0{,}252 \text{ rad/m}, \qquad \omega = 75{,}4 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

Duljina vala 25 m odgovara faznoj konstanti. Korijeni karakteristične jednadžbe iz jednadžbe napona (5.120) iznose

$$q_1 = 0{,}520 \text{ 1/m}, \qquad q_2 = 0{,}122 \text{ 1/m}$$

$$p_1 = -\,0{,}122 \text{ 1/m}, \qquad p_2 = -\,0{,}520 \text{ 1/m}$$

te su oba realni. To je novi moment u dosad rečenom o vodovima. To bi značilo da na eksponencijalnom odsječku nema gibanja valova. Taj se odsječak ponaša kao koncentrirani element, bez dimenzija. On se prikazuje shematski kao na sl. 5.54., samo induktivitetima i kapacitetima, jer nema gubitaka.

Veličine L_0, C_u i C_l se dobiju uspoređujući jednadžbe nadomjestne sheme i jednadžbe eksponencijalnog odsječka voda. Takvim postupkom slijede pojedine veličine u shemi sl. 5.54. iz izraza za uzdužni induktivitet

$$L_0 = l L_1 e^{\zeta l/2} \frac{\operatorname{sh}(q_0 l)}{q_0 l} = 1{,}38\, l L_1 = 0{,}192\ \mu\text{H}$$

$$q_0^2 = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^2 - \beta^2 \rightarrow q_0 = 0{,}199$$

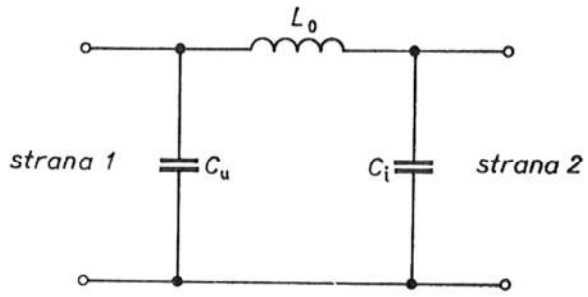
za poprečne kapacitete

$$\omega^2 C_u L_0 = 1 - e^{\zeta l/2}\left[\operatorname{ch}(q_0 l) - \frac{\zeta l}{2}\frac{\operatorname{sh}(q_0 l)}{q_0 l}\right] = 0{,}0351$$

$$\omega^2 C_l L_0 = 1 - e^{-\zeta l/2}\left[\operatorname{ch}(q_0 l) + \frac{\zeta l}{2}\frac{\operatorname{sh}(q_0 l)}{q_0 l}\right] = 0{,}0272$$

Prema tome su poprečni kapaciteti

$$C_u = 32{,}2\ \text{pF}, \qquad C_l = 25{,}0\ \text{pF}$$



Sl. 5.54. Električna shema eksponencijalnog voda sa sl. 5.53. Gubici su zanemareni.

Veličine reaktancija na sl. 5.54. se dobiju iz konačne jednadžbe eksponencijalnog voda (5.119). Ako su zadani napon i struja na izlazu iz voda, U_l, L_l, iznose napon i struja na ulazu u vod

$$\begin{aligned} U_u &= T_{11} U_l + T_{12} I_l \\ I_u &= T_{21} U_l + T_{22} I_l \end{aligned} \tag{5.123}$$

Članovi transmisione matrice iznose

$$\begin{aligned} T_{11} &= \left[\operatorname{ch}(q_0 l) + \frac{\zeta l}{2}\frac{\operatorname{sh}(q_0 l)}{q_0 l}\right] e^{-\zeta l/2} \\ T_{22} &= \left[\operatorname{ch}(q_0 l) - \frac{\zeta l}{2}\frac{\operatorname{sh}(q_0 l)}{q_0 l}\right] e^{\zeta l/2} \\ T_{12} &= j\,\omega L_1 l \frac{\operatorname{sh}(q_0 l)}{q_0 l} e^{\zeta l/2} \end{aligned} \tag{5.124}$$

Determinanta transmisione matrice jednaka je jedinici, te se iz toga uvjeta dobiva T_{21}.

U ovom primjeru iznose članovi transmisione matrice

$$T_{11} = 0{,}9728, \qquad T_{22} = 0{,}9649,$$
$$T_{12} = j\,14{,}48\ \Omega, \qquad T_{21} = j\,4{,}37\ \text{mS}$$

Kad ne bi bilo eksponencijalnog voda, nastavljao bi se direktno vod 2 valnog otpora Z_{v2} na vod 1 valnog otpora Z_{v1}. Umetanjem eksponencijalnog voda, vod 1 je opterećen ulaznom impedancijom eksponencijalnog dijela, čiji je odnos prema valnom otporu Z_{v2} jednak

$$\frac{Z_u}{Z_{v2}} = \frac{T_{11} + \dfrac{T_{12}}{Z_{v2}}}{T_{22} + T_{21} Z_{v2}} = 0{,}933 \exp(-j\,9{,}1°)$$

Ulazna impedancija ima manji iznos od valnog otpora drugog voda, a dobiva neznatan kapacitivni karakter. Impedancija tereta prvog voda je postala manja djelovanjem eksponencijalnog voda. Faktor refleksije je također postao manji. Eksponencijalni vod ublažava prijelaze od jednog voda na drugi vod.

6. VALOVOD I REZONATOR

6.1. UVOD

Elektromagnetski valovi se totalno reflektiraju na površinama predmeta od metala kao električnih vodiča. To nije prava totalna refleksija, jer jedan dio vala ipak prodire u vodič, da bi se pokrili gubici u njemu. Tek vodič bez gubitaka bi djelovao kao pravi reflektor. Utjecaj gubitaka toliko je malen na cjelokupni tok energije, da se ipak govori o totalnoj refleksiji. Gubici u vodiču rastu s frekvencijom vala. Oni su najveći pri najvećim frekvencijama vala. I pored toga oni iznose manje od desetinke promila snage upadnog vala, pri frekvencijama vala od nekoliko gigaherza. Nije velika greška ako se govori o totalnoj refleksiji vala na metalnim površinama.

Svojstvo totalne refleksije na metalnim površinama se iskorištava u valovodima. Metalne cijevi se iskorištavaju da bi se val vodio na bilo koje mjesto prema potrebi. To se vođenje odvija uz vrlo male gubitke, dakle i vrlo ekonomično. Električni vodovi, prikazani u prethodnom poglavlju, su svojevrsni valovodi. Njima se također energija dovodi na mjesto prema potrebi. I taj prijenos energije je povezan s gubitkom. Posebno je karakterističan koaksijalni kabel koji se upotrebljava kao vod, ali može poslužiti i kao valovod. Ipak, njegova upotreba kao voda je tipična. Bitna je razlika između voda i valovoda. Vodiči voda su aktivni sudionici u prijenosu energije, a metalna cijev valovoda je pasivni sudionik. Odatle nastaje velika razlika u gubicima prijenosa energije.

Prijenosnici energije mogli bi se poredati po gubicima koji prate prijenos. Oni su

1. usmjereni val iz antene,
2. valovod,
3. koaksijalni kabel,
4. vod.

Usmjereni val prenosi energiju praktički bez gubitaka. Vod pak troši najviše energije da bi poslužio svojoj svrsi. Sve četiri grupe prijenosnika energije se upotrebljavaju u komunikacionoj tehnici. Energetska tehnika upotrebljava samo vodove u prijenosu energije. Odlučnih faktora ima mnogo u izboru prijenosnika energije, ali je najodlučnija među njima cijena prijenosa energije, pa kvalitet prijenosa.

Valovod se upotrebljava u komunikacionoj tehnici, adekvatno današnjem stanju upotrebe prijenosnika energije. On dolazi u obzir pri vrlo visokim frekvencijama. Ako se govori o metalnim cijevima kao valovodima, njihova je neophodna primjena vezana uz vrlo usku traku frekvencija. To su duljine vala ispod 10 cm do praktički jednog milimetra. Ti se valovi zovu *centimetarski i milimetarski valovi*. Područja primjene se dijele prema duljini vala

$$\lambda > 10 \text{ cm} \quad \text{koaksijalni vod}$$

$$10 \text{ cm} < \lambda < 270 \text{ cm} \quad \text{koaksijalni vod ili metalni valovod}$$

$$\lambda < 10 \text{ cm} \quad \text{valovod}$$

Valovod ima razmjerno manje gubitke od koaksijalnog voda. To je razlog zašto se upotrebljava valovod umjesto koaksijalnog voda. Konstruktivni razlozi su daljnji uvjet koji određuje isključivu oblast primjene valovoda za centimetarske valove. Standardi pojedinih tipova valovoda predviđaju najnižu frekvenciju valova 110 MHz, što odgovara razmjerno dugim valovima. Takve frekvencije primjenjuje televizija.

Budući da su to vrlo visoke frekvencije, dubina prodiranja vala je vrlo malena, te je dovoljna vrlo tanka metalna stijenka da se zadovolji zahtjevima valovoda. Cijev ne mora biti u cjelini od metala predviđenog za stijenku, već je ona izrađena od neplemenitog metala, kao što je čelik ili je od nekog polimera, a unutarnjost joj je metalizirana nekim plemenitim metalom kao što je srebro ili zlato. Dubina prodiranja vala duljine 10 cm iznosi u zlatu 1,41 mikrometara, a u srebru 1,16 mikrometara. Dovoljna je debljina stijenke 7 mikrometara od zlata ili srebra, pa da valovod zadovoljava svojoj namjeni.

Valovod se katkad ispunjava dielektrikom koji mora imati u tome slučaju vrlo male dielektrične gubitke. Onda se i metalne stijenke ispuštaju, te preostaje *dielektrični valovod* koji se upotrebljava za milimetarske valove.

Presjek cijevi valovoda je najčešće pravokutnik. Iznimno se primjenjuju cijevi kružnog presjeka, te i posebnog presjeka u obliku **П** ili **H**. Valovodi su ušli u primjenu kad se počeo upotrebljavati radar i komuniciranje ultravisokim frekvencijama. Pojedini oblici su standardizirani ili postoje prijedlozi standarda. Standarde imaju, ili imaju prijedloge standarda, SAD, Velika Britanija, SSSR i Međunarodna elektrotehnička komisija IEC. Standardni oblici presjeka su prikazani na sl. 6.1. To su pravokutni, kružni, **П** i **H** presjeci. Ako se izuzme kružni presjek, ostala tri presjeka su u suštini pravokutni presjeci. Presjeci **П** i **H** proširuju područje primjene frekvencija u osnovnom obliku polja kakvo se pojavljuje u običnom pravokutnom valovodu.

Cijevi valovoda su izrađene vrlo precizno, te su tolerancije dimenzija vrlo malene. Ne može se tražiti da presjeci budu geometrijski pravokutnici. Oni imaju zaobljene uglove, s malim polumjerom r zakrivljenosti. Većinom se propisuje i debljina stijenke s, iako ta mjera nije značajna. Materijal cijevi je bakar, iako se upotrebljava i mjed ili aluminij.

Međunarodna elektrotehnička komisija (IEC) je donijela preporuke standardnih presjeka valovoda od metalnih cijevi. Prvo izdanje je izašlo 1964. godine.

To su bile slijedeće preporuke

International Electrotechnical Commission.

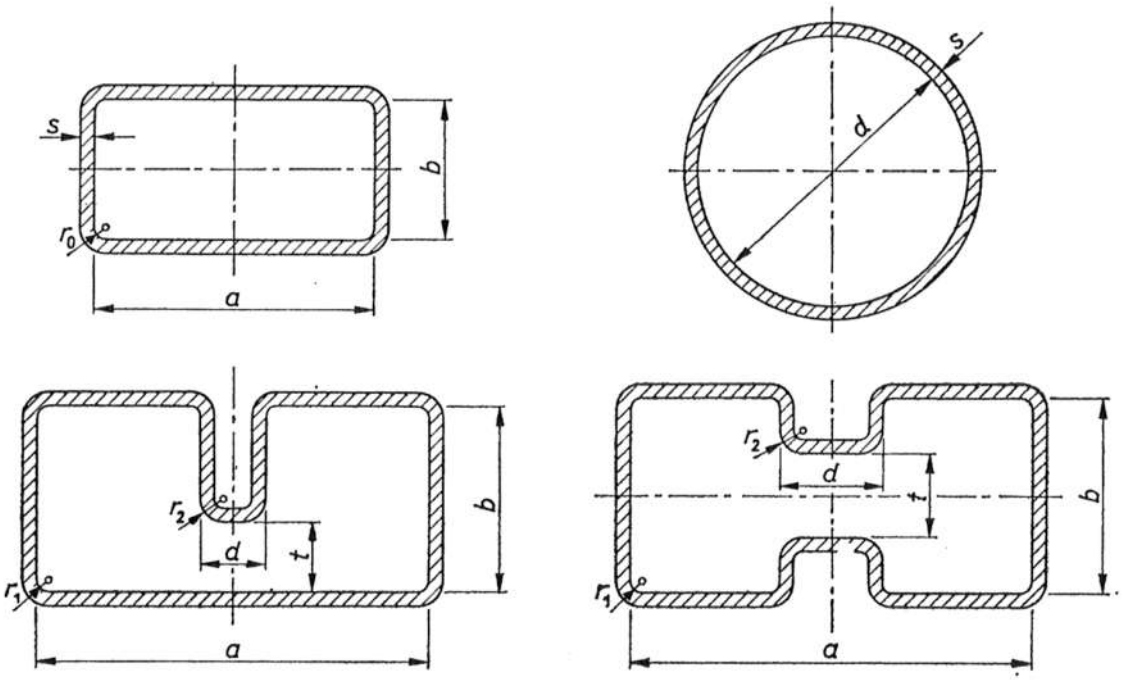
Hollow metallic waveguides.

Part 2: Relevant specifications for ordinary rectangular waveguides. Publication 153 — 2

Part 3: Relevant specifications for flat rectangular waveguides. Publication 153 — 3

Part 4: Relevant specifications for circular waveguides. Publication 153 — 4.

Valovodi oblika **II** i **H** nemaju standarda, već su prijedlog dali T. N. Anderson i L. I. Kent u časopisu The Microwave Journal, 1961. godina, april, vol. 4., No 4, u radu pod naslovom Standardization of Ridged Waveguides.



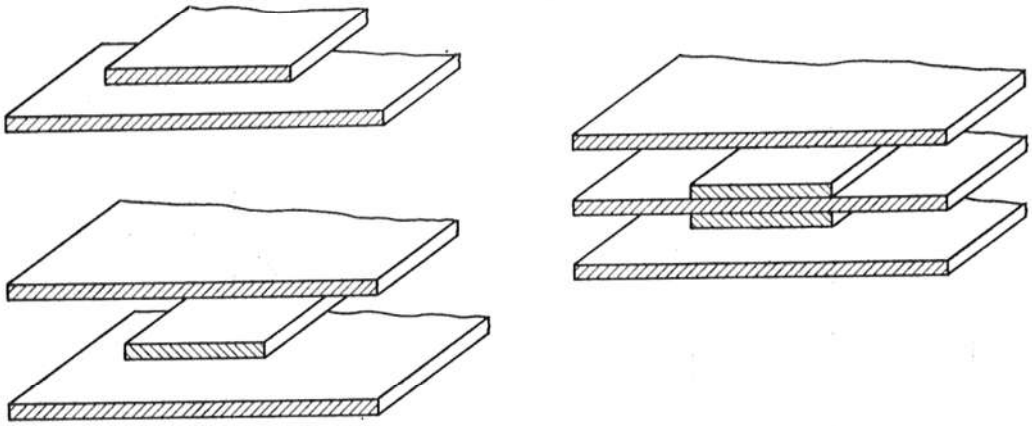
Sl. 6.1. Presjeci cijevi valovoda. Najčešće su oblici pravokutni i kružni, te **II** i **H** oblik.

Kad bi se htjelo upotrijebiti valovod za prijenos vala duljine 10 cm u uzduhu, kome odgovara frekvencija 3 gigaherca, mogli bi se upotrijebiti svi oblici valovoda. Ako bi se upotrijebio valovod prema citiranim standardima, tada bi morao imati dimenzije ovisne o izabranom tipu valovoda.

Tip 153 IEC R 26 običnog pravokutnog valovoda omogućuje prijenos frekvencijama od 2,17 do 3,30 gigaherca. Njegove su dimenzije prema sl. 6.1: $a = 86{,}36$ mm i $b = 43{,}18$ mm uz toleranciju $\pm$ 0,17 mm. Zakrivljenost u uglu je najveća $r =$ $= 1{,}2$ mm, a debljina stijenke $s = 2{,}030$ mm. Taj valovod ima teoretsku prigušnu konstantu 13,8 db/km = 1,59 nepera po km duljine valovoda, pri frekvenciji 2,61 gigaherca, a dopušten je prema standardu najveći iznos 18 db/km.

Tip 153 IEC F 26 plosnatog pravokutnog valovoda omogućuje prijenos frekvencija od 2,17 do 3,30 gigaherca, kao i tip R 26. Njegove su dimenzije $a = 86{,}36$ mm i $b = 10{,}400$ mm, uz toleranciju $\pm$ 0,086 mm. Polumjer zakrivljenosti uglova je najviše 1,2 mm, a debljina stijenke je 2,030 mm. Teoretska prigušna konstanta iznosi 43,93 db/km = 5,06 Np/km , pri frekvenciji 2,61 gigaherca, ali je dozvoljen najveći iznos 56 db/km.

Tip 153 IEC C 30 okruglog valovoda promjera je cijevi 71,42 mm, uz toleranciju $\pm$ 0,07 mm. Stijenka cijevi je debela 1,65 mm. Taj valovod ima teoretsku prigušnu konstantu 18,4 db/km = 2,12 Np/km, pri frekvenciji 2,952 gigaherca, ali je najveća dozvoljena 24 db/km.



Sl. 6.2. Tračni električni vodovi ili tračni valovodi, tri najčešća oblika.

II valovod za zadanu frekvenciju 3 GHz ima dimenzije $a = 83{,}210$ mm i $b = 37{,}440$ mm, uz tolerancije $\pm$ 0,102 mm. Polumjeri zakrivljenosti uglova iznose $r_1 = 1{,}19$ mm i $r_2 = 5{,}41$ mm. Dimenzije rebra su $d = 12{,}903$ mm i $t = 15{,}621$ mm, uz tolerancije $\pm$ 0,064 mm. Taj valovod se predviđa za frekvencije od 1,5 do 3,6 gigaherca. Njegova je teoretska prigušna konstanta 19,4 db/km = 2,23 Np/km, pri frekvenciji 2,201 gigaherza. Debljina stijenke iznosi 2,03 mm.

H valovod za istu frekvenciju 3 GHz ima osnovne dimenzije $a = 87{,}757$ mm i $b = 40{,}818$ mm, uz toleranciju $\pm$ 0,102 mm. Rastojanje među rebrima je $t = 17{,}348$ mm, a debljina rebara je $d = 21{,}946$ mm. Polumjeri zakrivljenosti uglova smiju biti najviše $r_1 = 1{,}27$ mm i $r_2 = 3{,}48$ mm. Debljina stijenke je 2,03 mm. Taj je valovod predviđen za frekvencije od 1,5 do 3,6 gigaherca, a njegova teoretska prigušna konstanta iznosi 19 db/km = 2,19 Np/km, pri frekvenciji 2,201 gigaherca.

To su standardni tipovi valovoda koji svi zadovoljavaju u prijenosu energije pri frekvenciji 3 GHz. Tek posebni zahtjevi odlučuju koji od navedenih valovoda

služi najbolje postavljenim uvjetima prijenosa. Među svim valovodima najjednostavniji je pravokutni, te se nastoji uvijek njega izabrati. Ovaj primjer valovoda pokazuje koliko mora biti precizna izradba cijevi koja se može upotrijebiti.

Jedan oblik valovoda je opisan u poglavlju o ravnom valu. To su bile dvije paralelne vodljive ravnine razmaknute na neku zadanu udaljenost. Prostor među njima je bio izolator bez gubitaka, a one su bile beskonačno vodljive. Val se rasprostire u cikcaku u ploči između vodljivih ploha. Samo specijalno polarizirani val može se rasprostirati pločom bez obzira na duljinu voda. Općenito ploča propušta valove samo do neke duljine, koja je uvjetovana njezinom debljinom. Tamo je prikazana već osnovna teorija rasprostiranja valova valovodom.

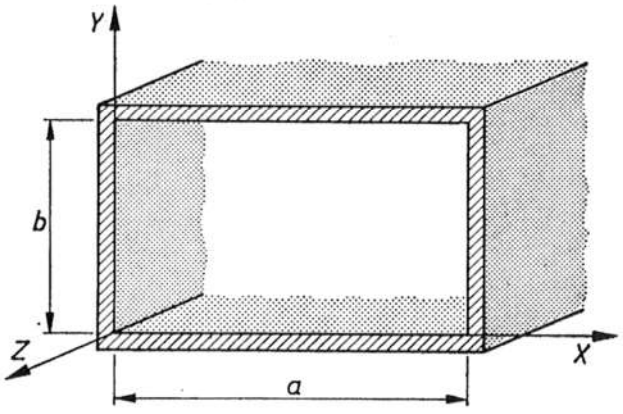
Koaksijalni vod se ubraja u kategoriju vodova, ali bi mogao poslužiti i kao valovod. On se ne upotrebljava kao valovod, jer ne posjeduje njegovu osnovnu prednost. Pravi valovod ima manje gubitke od koaksijalnog voda.

Slične uvjete prijenosa kao u koaksijalnom vodu postiže se stavljanjem voda među dvije paralelne, vodljive plohe. Postoji cijela kategorija vodova nazvana *tračni električni vodovi* ili *tračni valovodi*. Sl. 6.2. prikazuje tri osnovna presjeka takvih valovoda. Tračni vodiči se stavljaju nasuprot drugih, širih, tračnih vodiča. Prostor između njih se ispunja trakama od izolatora ili je bez njih. Tračni valovodi nalaze primjenu u uređajima sa štampanim krugovima u oblasti ultravisokih frekvencija. Dielektrični valovodi su u kategoriji tračnih valovoda.

Ova teorija prikazuje valovode na primjerima pravokutnih i okruglih valovoda.

6.2. PRAVOKUTNI VALOVOD

Cijev valovoda pravokutna je presjeka. Presjek cijevi je konstantan po njezinoj duljini. Stijenke cijevi su idealno vodljive, te se valovi totalno reflektiraju bez gu-



Sl. 6.3. Pravokutni valovod.

bitaka. Unutarnjost cijevi je ispunjena izolatorom bez gubitaka, a u njoj se ne nalaze razasuti naboji. Na taj način su idealizirani uvjeti širenja valova valovodom.

Veličine polja se mijenjaju harmonički. Treba postupiti na sličan način kako je prikazano širenje valova izolatorskom pločom ograničenom vodljivim plohama u poglavlju o ravnom valu. Pravokutni valovod dobiva još dvije paralelne vodljive plohe, te nastaje izolatorski štap umjesto ploče. Sl. 6.3. prikazuje isječak valovoda. Njegov se presjek nalazi u ravnini X-Y, a duljina cijevi je u osi Z. Stranice pravokutnika su a i b. Kako se veličine polja mijenjaju harmonički, može se očekivati da je rasprostiranje polja u svim smjerovima u obliku sinusoidnih valova kojima se smije pripisati valna duljina i fazna brzina. Prema tome postoji valno rasprostiranje u smjeru osi Z, a pripadna valna duljina je λ_z, koja je zadana faznom konstantom β_z u istom smjeru

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z}$$

Sve veličine polja pokazuju funkcionalnu ovisnost

$$\psi(x, y, z, t) = \psi'(x, y)\, e^{j(\omega t - \beta_z z)} \tag{6.1}$$

Veličina ψ znači bilo koju veličinu polja. D'Alembertov operator iz poglavlja 4.2. o retardiranim potencijalima ovdje iznosi

$$\begin{aligned} \Delta - \gamma^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \\ k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta_z^2 &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Jednadžbe polja valovoda se dobiju na jednostavan način primjenom Hertzova vektora, koji je prikazan u poglavlju 4.2. o retardiranim potencijalima. Prostor u unutarnjosti valovoda odgovara uvjetima da se smije izabrati električni ili magnetski Hertzov vektor prema potrebi analize polja. Valove u valovodu treba raščlaniti na pojedinačne valove, da bi njihov proračun bio jednostavniji.

6.2.1. Oblici valova

Prva podjela valova se odnosi na longitudinalnu komponentu polja koja je usmjerena duž osi Z. Val koji ima uzdužnu komponentu magnetskog polja, $H_z \neq 0$, zove se *magnetski val* ili *transverzalni električni val*. On nosi oznaku *val* H ili *val* TE, a druga je oznaka više u upotrebi, te će biti ovdje upotrijebljena. Val s uzdužnom komponentom električnog polja, $E_z \neq 0$, zove se *električni val* ili *transverzalni magnetski val*. Njegove su oznake *val* E ili *val* TM. Ova posljednja oznaka je češća i ovdje će biti ona upotrijebljena. Ova prva podjela valova pomaže, da se iskoristi jednom magnetski Hertzov vektor $\mathbf{\Pi}_m$, a drugi put električni Hertzov vektor $\mathbf{\Pi}_e$.

Vektori polja se dobiju iz Hertzova vektora uz pomoć jednadžbi iz poglavlja 4.2. o potencijalima, a one glase

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H} = \text{graddiv}\,\boldsymbol{\Pi}_m + \omega^2 \mu\,\varepsilon\,\boldsymbol{\Pi}_m \\
&\mathbf{E} = -j\,\omega\,\mu\,\text{rot}\,\boldsymbol{\Pi}_m, \quad \text{TE val}, \quad E_z = 0 \\
&\mathbf{E} = \text{graddiv}\,\boldsymbol{\Pi}_e + \omega^2 \mu\,\varepsilon\,\boldsymbol{\Pi}_e \\
&\mathbf{H} = j\,\omega\,\varepsilon\,\text{rot}\,\boldsymbol{\Pi}_e, \quad \text{TM val}, \quad H_z = 0
\end{aligned} \tag{6.3}$$

D'Alembertov operator se primjenjuje sada na Hertzov vektor. Ovakva primjena Hertzova vektora pokazuje da je dovoljna samo njegova uzdužna komponenta, dok poprečne iščezavaju

$$\Pi_z = \Pi \neq 0, \qquad \Pi_x = \Pi_y = 0$$

Indeksi se smiju ispustiti, te se s njime postupa kao sa skalarom. Treba još uzeti u obzir da je

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -j\,\beta_z\,\Pi$$

Sad jednadžbe (6.3) poprimaju pregledniji oblik

$$\begin{array}{ll}
\text{TE val}, \quad E_z = 0 & \text{TM val}, \quad H_z = 0 \\
H_z = k^2\,\Pi & E_z = k^2\,\Pi \\
\mathbf{H}_t = -j\,\beta_z\,\text{grad}_t\,\Pi & \mathbf{E}_t = -j\,\beta_z\,\text{grad}_t\,\Pi \\
\mathbf{E}_t = -\dfrac{\omega\,\mu}{\beta_z}(\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_t) & \mathbf{H}_t = \dfrac{\omega\,\varepsilon}{\beta_z}(\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_t)
\end{array} \tag{6.4}$$

Ovdje se pojavljuje operacija

$$\text{grad}_t = \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y}$$

Vektori $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$ su jedinični vektori u smjeru osi X, Y, Z.

Ostaje da se riješi diferencijalna jednadžba Hertzova vektora

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -k^2 \Pi$$

Njezino rješenje glasi

$$\Pi = \Pi_1 \sin(p\,x)\cos(q\,y) + \Pi_2 \cos(p\,x)\cos(q\,y) + \\ + \Pi_3 \sin(p\,x)\sin(q\,y) + \Pi_4 \cos(p\,x)\sin(q\,y)$$

$$p^2 + q^2 = k^2 \tag{6.5}$$

Ovo rješenje je valjano bez obzira o kojem se valu radi. Granični uvjeti odlučuju kakve su integracione konstante. Sl. 6.3. prikazuje pravokutni valovod smješten u koordinatni sustav. Granični uvjeti glase

$$\begin{aligned} &x = 0, \quad x = a, \quad E_y = E_z = 0 \\ &\qquad\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \text{TE val} \\ &\qquad\qquad \Pi = 0, \quad \text{TM val} \\ &y = 0, \quad y = b, \quad E_x = E_z = 0 \\ &\qquad\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \quad \text{TE val} \\ &\qquad\qquad \Pi = 0, \quad \text{TM val} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Kad se primijene granični uvjeti na jednadžbu (6.5) Hertzova vekora, ona se znatno pojednostavnjuje i glasi

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_2 \cos(p\,x)\cos(q\,y), \quad \text{TE val} \\ \Pi &= \Pi_3 \sin(p\,x)\sin(q\,y), \quad \text{TM val} \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$p = \frac{m\pi}{a}, \qquad q = \frac{n\pi}{b}, \qquad \begin{aligned} m &= 0, 1, 2, \ldots \\ n &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Val u valovodu je razdijeljen na mnoštvo pojedinačnih valova. Oni su najprije razdijeljeni na TE i TM valove, koji imaju različite oblike, određene brojevima m i n. Svaki pojedini val se označava sa TE_{mn} ili TM_{mn}. Zbroj svih pojedinih valova daje ukupni val u valovodu. Treba izuzeti kombinacije $m = 0$ i $n = 0$ istovremeno. *Ne postoji* val TE_{00} niti TM_{00}. Jednako nije moguć val TM_{0n} niti TM_{m0}. Svi ostali oblici valova su mogući.

6.2.2. Kritična frekvencija

Val se rasprostire duž valovoda faznom brzinom

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_z}$$

za koju je mjerodavna fazna konstanta u smjeru osi Z. Val ima valnu duljinu u smjeru osi Z

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{v_z}{f}$$

Fazna konstanta se dobije iz jednadžbe (6.2), uz pomoć definicije konstante vala k iz (6.5) i (6.7)

$$\beta_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$$

Treba uvesti *kritičnu valnu duljinu* valovoda prema jednadžbi

$$\frac{1}{\lambda_k^2} = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 \tag{6.8}$$

Onda se dobije valna duljina u smjeru osi Z iz jednadžbe

$$\frac{1}{\lambda_z^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_k^2} \tag{6.9}$$

Da bi se neki oblik vala mogao rasprostirati valovodom, mora kritična valna duljina *biti veća* od duljine vala u slobodnom prostoru, $\lambda_k > \lambda$. Kritičnoj valnoj duljini odgovara *kritična frekvencija* $f_k = c/\lambda_k$, te se kaže da frekvencija vala mora biti veća od kritične frekvencije, $f > f_k$. Spomenuta ograničenja u rasprostiranju pojedinih oblika vala se odnose na obje skupine vala, TE i TM.

6.2.3. Valni otpor

Jednadžbe (6.4) vektora polja u valovodu imaju opću vrijednost bez obzira na koordinatni sustav, odnosno presjek cijevi valovoda. Uzdužne komponente polja su posebno istaknute. One imaju značajnu ulogu u rasprostiranju vala u valovodu, a direktno nadomještaju Hertzov vektor, koji ima također samo uzdužnu komponentu. Hertzov vektor bi se mogao ispustiti u istim jednadžbama, a umjesto njega bi se stavila uzdužna komponenta polja. Transverzalne komponente polja $\mathbf{E}_t$ i $\mathbf{H}_t$ doprinose direktno prijenosu energije valovodom. Njihov odnos je karakterističan

venciji vala, da je doseg viših oblika valova što manji. Valovodi sadrže uvijek diskontinuitete u obliku različitih umetaka, priključaka ili odvojaka, te je važno da viši oblici valova nestaju na što kraćem putu.

Prostor u valovodu nema gubitaka, te valna konstanta upoznata kod ravnog vala nije kompleksna veličina. Ona je imaginarna veličina u obliku valova koji se gibaju valovodom, a realna je kod prigušenih oblika. Gubici u valovodu će uvjetovati pojavu kompleksne valne konstante. Time analiza polja postaje zamršen zadatak, te se zato rješava približnim postupkom.

Ukupno polje u valovodu se prikazuje iskorištavajući uzdužnu komponentu koja nastaje zbrojem istih komponenti od svih oblika valova

$$H_z = \sum H_{zr}, \qquad E_z = \sum E_{zr}$$

Indeks r označava pojedini oblik vala $m\,n$. Jednako nastaju i transverzalne komponente polja

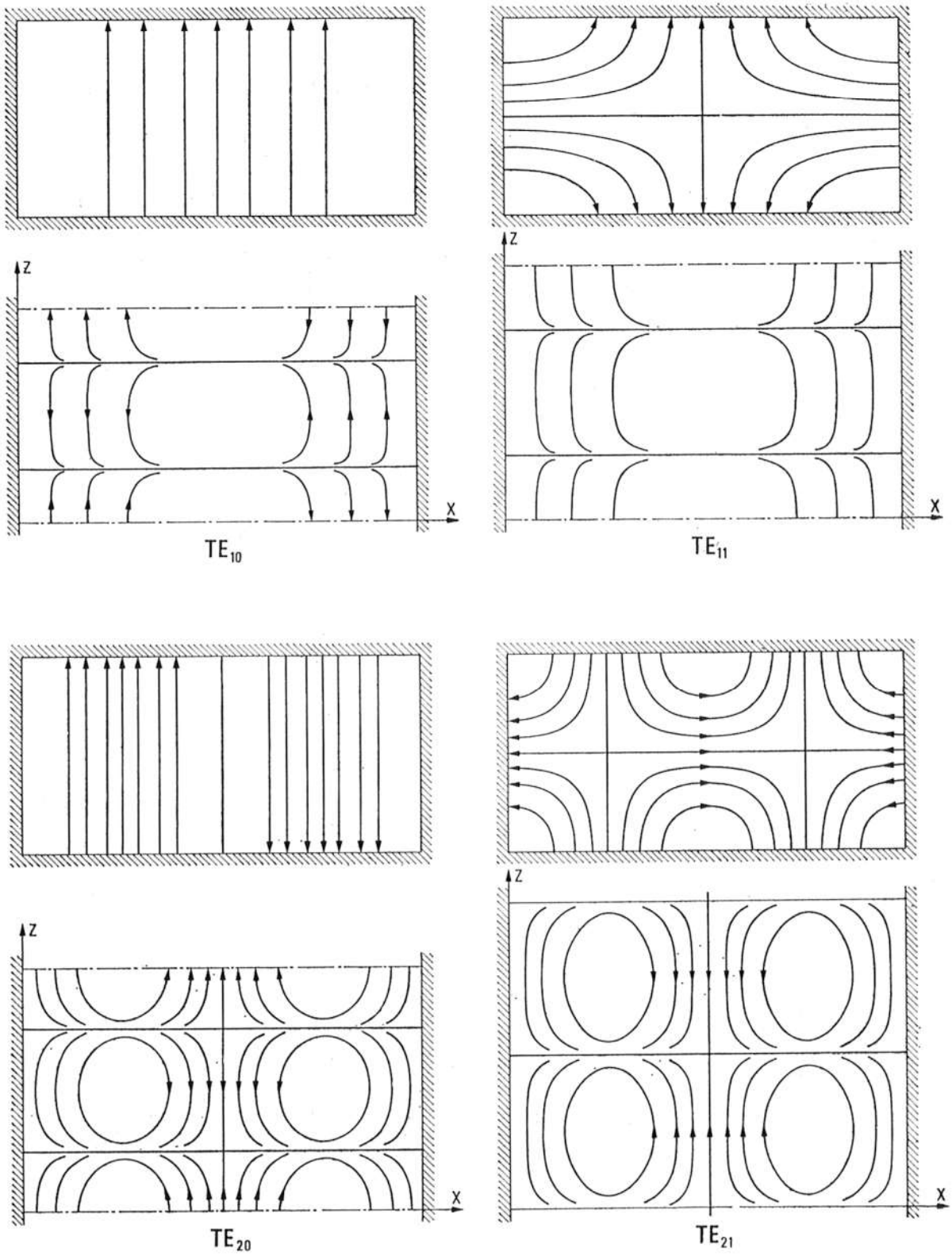
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \sum \mathbf{H}_{tr}, \quad \mathbf{E}_t = \sum \mathbf{E}_{tr} \\ \mathbf{H}_{tr} &= -j\frac{\beta_{zr}}{k_r^2}\left(\operatorname{grad}_t H_{zr} + \frac{1}{Z_{vr}}\,\mathbf{z}_0 \times \operatorname{grad}_t E_{zr}\right) \\ \mathbf{E}_{tr} &= -j\frac{\beta_{zr}}{k_r^2}\left(\operatorname{grad}_t E_{zr} - Z_{vr}\,\mathbf{z}_0 \times \operatorname{grad}_t H_{zr}\right) \end{aligned} \tag{6.13}$$

Zbrajanje se provodi preko svih pojedinačnih valova. To su prigušeni i neprigušeni valovi na mjestima diskontinuiteta, gdje može biti važna jednadžba polja. Polje postaje vrlo zamršeno, te je potreban opsežan rad da riješi neki zadatak nejednolikosti u valovodu. Mjesta diskontinuiteta se rješavaju jednostavnije, ako se pretpostavi statička raspodjela polja na takvim mjestima. To je približni postupak, ali se pokazao dovoljno točan.

Standardni valovod 153 IEC R 26 ima dimenzije presjeka $a = 86{,}36$ mm i $b = 43{,}18$ mm, a smije se upotrijebiti za vođenje vala slobodne duljine 10 cm. Njegove kritične duljine vala u centimetrima računaju se izrazom (6.8), a unesene su u tablicu 6.1. za različite m i n. Val 10 cm prolazi tim valovodom u obliku TE_{10}.

TABLICA 6.1. 153 IEC R 26, $\lambda_k(m, n)$ cm, $a = 86{,}36$ mm, $b = 43{,}18$ mm

m \ n	0	1	2	3	4
0	—	8,64	4,32	2,88	2,16
1	17,27	7,72	4,19	2,84	2,14
2	8,64	6,11	3,86	2,73	2,10
3	5,76	4,79	3,45	2,57	2,02
4	4,32	3,87	3,05	2,40	1,93



Sl. 6.5. Električne i magnetske silnice u pravokutnom valovodu. Izabrana je slobodna duljina vala 4,5 cm, a prikazano je polje valova oblika TE_{10}, TE_{20}, TE_{11}, TE_{21}. Donje slike pojedinih oblika su magnetske silnice.

6.2.5. Gibanja vala

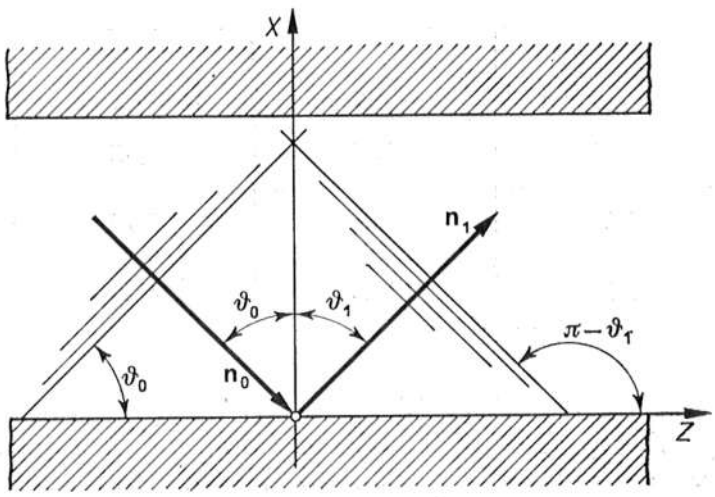
Val se uzajamno reflektira od stijenka valovoda, te tako napreduje po njegovoj duljini. Jednostavno tumačenje širenja valova postiže se za najjednostavniji oblik vala, a to je TE_{10} val. Taj val ima slijedeće komponente

$$H_z = H_0 \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right)$$

$$H_x = -\frac{\lambda_k}{\lambda_z} H_0 \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right) \tag{6.15}$$

$$E_y = \frac{\lambda_k}{\lambda} Z_0 H_0 \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right)$$

Ostale komponente polja ne postoje. Kritična valna duljina jednaka je naprosto $2a$. Silnice polja su prikazane na sl. 6.5. Taj val ima najjednostavniju sliku polja. Komponente sadrže produkte kosinusa i produkte sinusa, a oni se pretvaraju u



Sl. 6.7. Smjerovi vala u pravokutnom valovodu pri refleksiji na stijenki. Izabran je TE_{10} val i polarizacija $\mathbf{E} \perp$. Val se giblje u cikcak liniji.

zbrojeve kosinusa. Tako se dobiju nove komonente koje pokazuju kako se valovi rasprostiru u valovodu. Svaka komponenta se sastoji od dva vala, koji imaju fazu

$$\omega t - 2\pi \left(\frac{z}{\lambda_z} \pm \frac{x}{2a}\right) = \text{faza}$$

Svaka komponenta sadrži dva istovrsna vala. Ravnine konstantne faze prikazane su tragovima na sl. 6.7. koji su pravci.

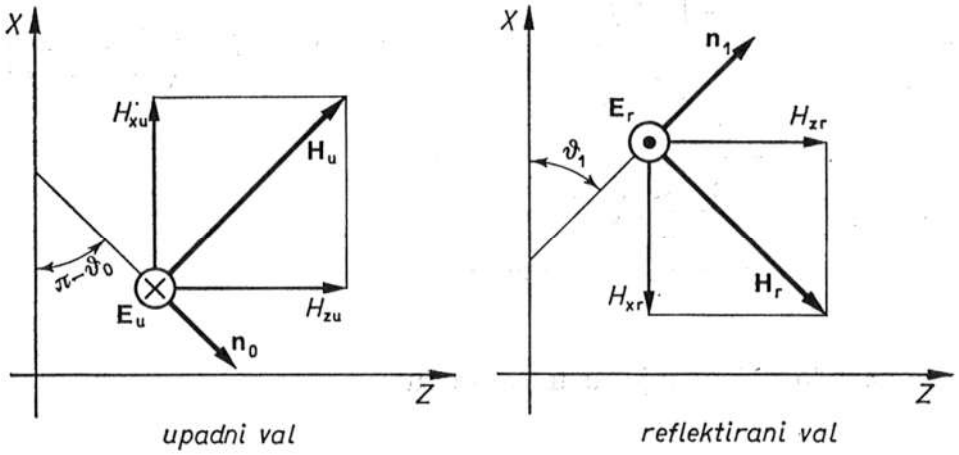
Oni imaju nagib prema osi Z, koji slijedi iz odnosa

$$\operatorname{tg}(\pi - \vartheta_0) = \operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{2a}{\lambda_z} = \left[\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2 - 1\right]^{1/2} \tag{6.16}$$

Komponente polja su prikazane valovima koji se gibaju u smjeru $\mathbf{n}_0$ i $\mathbf{n}_1$, kako je označeno na sl. 6.7. Stijenka valovoda koja pada u ravninu Y-Z reflektira totalno ravni val koji nailazi pod kutom ϑ_0 prema osi X. Ravnina upadnog i reflektiranog vala je ravnina X-Z. On je tako polariziran da je vektor električnog polja okomit na ravninu vala, $\mathbf{E}_0 \perp$. Prema tome vektor magnetskog polja mora biti u ravnini vala. Upadni i reflektirani val se gibaju faznom brzinom, koja je jednaka brzini svjetla. Zato je fazna brzina vala u smjeru osi Z

$$v_z = \frac{c}{\sin\vartheta_0} = c\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2\right]^{-1/2}$$

kao u iznosu (6.14). Val napreduje valovodom gibajući se u cikcak-liniji. Valovod mora imati takve dimenzije presjeka da se val može gibati u cikcak-liniji.



Sl. 6.8. Vektori polja upadnog i reflektiranog vala u X-Z ravnini.

Valovi se dijele na upadni i reflektirani val u odnosu na ravninu Y-Z, odnosno $x = 0$. Vektori polja za oba vala su prikazani na sl. 6.8.

Oni iznose iz jednadžbi (6.15)

upadni val

$$\begin{array}{|c|} \hline H_{zu} \\ \hline H_{xu} \\ \hline H_{u} \\ \hline E_y = E_u \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{1}{2} H_0 \\ \hline \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2 - 1\right]^{1/2} H_0 \\ \hline \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_k}{\lambda} H_0 \\ \hline -\frac{1}{2}\,\frac{\lambda_k}{\lambda} Z_0 H_0 \\ \hline \end{array} \cos\left[\omega t - 2\pi\left(\frac{z}{\lambda_z} + \frac{x}{2a}\right)\right]$$

reflektirani val

$$\begin{array}{|c|} \hline H_{zr} \\ \hline H_{xr} \\ \hline H_{r} \\ \hline E_y = E_r \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{1}{2} H_0 \\ \hline -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2 - 1\right]^{1/2} H_0 \\ \hline \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_k}{\lambda} H_0 \\ \hline \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_k}{\lambda} Z_0 H_0 \\ \hline \end{array} \cos\left[\omega t - 2\pi\left(\frac{z}{\lambda_z} + \frac{x}{2a}\right)\right]$$

Polje iznosi na bilo kojem mjestu u valovodu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_u + \mathbf{E}_r, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_u + \mathbf{H}_r$$

tj. ono je nastalo superpozicijom vektora upadnog i reflektiranog vala. Odnos vektora električnog i magnetskog polja jednog vala jednak je valnom otporu Z_0 slobodnog prostora, kao u ravnog vala. To pokazuje još jednom da se u valovodu rasprostire ravni val u cikcak-liniji.

Bilo koji oblik vala prema jednadžbi (6.11) rasprostire se u valovodu na sličan način kao i osnovni oblik TE_{10}. Postoje četiri ravnine konstantne faze, čije su jednadžbe

$$\frac{z}{\lambda_z} \pm m\frac{x}{2a} \pm n\frac{y}{2b} = \frac{\omega t}{2\pi} + \text{konst.}$$

One se svode na normalni, Hesseov oblik jednadžbe ravnine, primjenom karakteristične konstante koja je u ovom slučaju upravo jednaka recipročnom iznosu duljine vala

$$\left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

Normala na ravninu zatvara s pojedinim koordinatnim osima kutove čiji su kosinusi

$$\cos\alpha_x = \pm m\frac{\lambda}{2a}, \qquad \cos\alpha_y = \pm n\frac{\lambda}{2b}, \qquad \cos\alpha_z = \frac{\lambda}{\lambda_z}$$

Duljina normale, tj. udaljenost ravnine od ishodišta koordinatnog sustava iznosi

$$\left(\frac{\omega t}{2\pi} + \text{konst.}\right)\lambda = l$$

Ona pokazuje da se ravnina giba u smjeru normale brzinom $\omega\lambda/(2\pi) = c$, što je brzina ravnog vala u slobodnom prostoru. Nagibi ravnine ovise o obliku vala. To je razlog što se ne može cijelo polje prikazati jednim valom, već samo mnoštvom valova. Četiri ravnine refleksije uzrok su da postoji mnoštvo valova, a ukupno polje je posljedica njihove superpozicije.

Opće jednadžbe valova (6.11) pomažu da se dobiju amplitude vektora polja pojedinih faznih ravnina. Oni su jednaki po iznosu u sve četiri ravnine za val TE

$$E_u = \frac{1}{4}\frac{\lambda_k}{\lambda} Z_0 H_0,$$

$$H_u = \frac{1}{4}\frac{\lambda_k}{\lambda} H_0$$

a njihov je odnos opet jednak valnom otporu Z_0 slobodnog prostora. Oni se samo mijenjaju od oblika vala do oblika vala. Pokazuje se da bitnu ulogu ima odnos kritične valne duljine i slobodne valne duljine.

6.3. OKRUGLI VALOVOD

Valovod kružnog presjeka je također standardiziran, ali se upotrebljava samo u posebnim slučajevima. Rješavanje polja u pravokutnom valovodu pomaže da se riješi polje okruglog valovoda. Vektori polja su zadani kao u pravokutnom valovodu izrazima (6.4.) Ostaje da se ustanove Hertzovi vektori koji sada imaju diferencijalnu jednadžbu u cilindričkom koordinatnom sustavu zbog graničnih uvjeta

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vartheta^2} = -k^2 \Pi$$

Njezino rješenje glasi

$$\Pi = \Pi_1 J_m(kr)\cos(m\vartheta) + \Pi_2 N_m(kr)\cos(m\vartheta) + \\ + \Pi_3 J_m(kr)\sin(m\vartheta) + \Pi_4 N_m(kr)\sin(m\vartheta)$$

$J_m(kr)$ i $N_m(kr)$ su Besselova i Neumannova funkcija m-tog reda. Budući da je to cijev u kojoj je polje konačno na njezinoj osi, a Neumannova funkcija je beskonačna za $r = 0$, integracione konstante $\Pi_2 = \Pi_4 = 0$ moraju biti nula. Hertzov vektor se smije izraziti po volji funkcijom sinusa ili kosinusa. Neka se upotrijebi kosinus, te je Hertzov vektor

$$\Pi = \Pi_1 J_m(kr)\cos(m\vartheta) \qquad (6.18)$$
$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

6.3.1. Kritična frekvencija

Granični uvjeti pomažu da se odredi nepoznati broj k. Osnovni je uvjet što tangencijalna komponenta na stijenki valovoda mora iščezavati. To znači da mora biti zadovoljen uvjet

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = 0 \quad \text{za} \quad r = r_0, \quad \text{val TE}$$
$$\Pi = 0 \quad \text{za} \quad r = r_0, \quad \text{val TM} \qquad (6.19)$$

To s druge strane znači da se broj k dobiva iz jednadžbi

$$J'_m(kr_0) = 0, \quad \text{val TE}$$
$$J_m(kr_0) = 0, \quad \text{val TM} \qquad (6.20)$$

Prema tome je potrebno ustanoviti nultočke Besselovih funkcija. Sve Besselove funkcije imaju nultočku u nuli, osim funkcije nultoga reda, koja je u nuli jednaka jedinici. Zbog toga brojenje nultočaka počinje kod prve nultočke za argument veći od nule. Nultočke funkcija $J'_m(k_n r_0)$ i $J_m(k_n r_0)$ su navedene u tablicama 6.3. i 6.4. za nekoliko m, a n je redni broj nultočke.

Nultočke χ_{mn}

Val TE_{mn} $J'_m(k r_0) = J'_m(\chi_{mn}) = 0$

TABLICA 6.3.

m \ n	1	2	3	4	5
0	0,00	3,83	7,02	10,2	13,3
1	1,84	5,33	8,54	11,7	14,9
2	3,05	6,71	9,97	13,2	16,3
3	4,20	8,02	11,3	14,6	17,8
4	5,32	9,28	12,7	16,0	19,2

Nultočke η_{mn}

Val TM_{mn} $J_m(k r_0) = J_m(\eta_{mn}) = 0$

TABLICA 6.4.

m \ n	1	2	3	4	5
0	2,40	5,52	8,65	11,8	14,9
1	3,83	7,02	10,2	13,3	16,5
2	5,14	8,42	11,6	14,8	18,0
3	6,38	9,76	13,0	16,2	19,4
4	7,59	11,1	14,4	17,6	20,8

Nultočke nisu jednake za obje grupe valova, te ih treba razlikovati. Transverzalni električni val je magnetski val. Neka se na njega odnose nultočke

$$\chi_{mn} = k r_0$$

iz tablice 6.3. Transverzalni magnetski val je električni val. Neka se na njega odnose nultočke

$$\eta_{mn} = k r_0$$

iz tablice 6.4. Konstanta k pomaže da se odredi fazna konstanta vala β_z, odnosno valna duljina λ_z u smjeru osi Z prema jednadžbi (6.2). Ona ujedno definira *kritičnu duljinu* λ_k koja je karakteristična za valovod, a ovisi još i o obliku mn vala.

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi r_0}{\chi_{mn}}, \quad \text{val TE}$$

$$\lambda_k = \frac{2\pi r_0}{\eta_{mn}}, \quad \text{val TM} \tag{6.21}$$

Sad je uzdužna valna duljina zadana istim izrazom (6.9), tj.

$$\frac{1}{\lambda_z^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_k^2}$$

što znači da zadana duljina vala, koji treba da prođe valovodom, mora biti manja od kritične duljine vala. Isto je kad se kaže da frekvencija zadanog vala mora biti veća od *kritične frekvencije* $f_k = c/\lambda_k$.

6.3.2. Jednadžbe polja

Valni otpor valovoda, Z_v, definira se posve jednako kao kod pravokutnog valovoda, iskorištavajući jednadžbe (6.10). Sad se napušta Hertzov vektor, a primjenjuje se uzdužna komponenta polja, te su jednadžbe polja konačno

val TE

$$H_z = H_0 J_m\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right)\cos(m\vartheta)\, e^{j(\omega t-\beta_z z)}$$

$$\mathbf{H}_t = -j\frac{\beta_z}{k^2}\operatorname{grad}_t H_z$$

$$\mathbf{E}_t = -Z_v(\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_t)$$

(6.22)

val TM

$$E_z = E_0 J_m\left(\eta_{mn}\frac{r}{r_0}\right)\cos(m\vartheta)\, e^{j(\omega t-\beta_z z)}$$

$$\mathbf{E}_t = -j\frac{\beta_z}{k^2}\operatorname{grad}_t E_z$$

$$Z_v \mathbf{H}_t = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_t$$

Transverzalna operacija gradijenta iznosi u cilindričkim koordinatama

$$\text{grad}_t = \mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{t}_0 \frac{\partial}{r\,\partial \vartheta}$$

Jedinični vektori $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{t}_0$ gledaju radijalno i tangencijalno. Transverzalne komponente polja nastaju iz uzdužne komponente na isti način kako je to iskorišteno kod pravokutnog valovoda. Razlikuju se samo uzdužne komponente polja u obje vrste valovoda. Kad ne odgovara uvjet odnosa zadane frekvencije i kritične frekvencije, ti se oblici valova prigušuju kao u pravokutnog valovoda. Prigušna konstanta slijedi iz iste jednadžbe (6.12) koja je iskorištena u pravokutnom valovodu.

Okrugli valovod promjera 71,42 mm je standardni tip 153 IEC C 30. Njegove su kritične valne duljine unesene u tablicu 6.5. za obje grupe valova, TE i TM.

Kritične duljine vala λ_k

$2\,r_0 = 71{,}42$ mm, C 30 valovod

TABLICA 6.5.

m \ n		1	2	3	4
0	TE	—	5,87	3,20	2,20
	TM	9,37	4,07	2,60	1,91
1	TE	12,22	4,22	2,64	1,92
	TM	5,87	3,20	2,20	1,69
2	TE	7,37	3,35	2,25	1,70
	TM	4,37	2,67	1,94	1,52
3	TE	5,35	2,80	1,99	1,54
	TM	3,52	2,30	1,73	1,39

Val duljine 10 cm prolazi tim valovodom kao val TE_{11}, jer je njegova kritična duljina 12,22 cm veća od zadane. Svi su ostali oblici prigušeni. Najbliži je oblik TM_{01}, čija je kritična valna duljina 9,37 cm. On je prigušen prigušnom konstantom 0,234 Np/cm, kojoj odgovara doseg vala 4,27 cm. Taj je oblik vala najmanje prigušen, dok su viši oblici prigušeni samo jače.

Val od 8 cm prolazi sa dva oblika, TM_{01} i TE_{11}. Svaki valovod ima osnovni oblik vala najveće kritične valne duljine. Preporučuje se da zadani val ne prelazi 85 % kritičnu valnu duljinu osnovnog vala. To je kod zadanog valovoda 10,4 cm,

te zadani val od 10 cm upravo još zadovoljava postavljenu granicu. Donja granica se postavlja samo na 2 % udaljenosti od kritične valne duljine slijedećeg oblika vala. To je u ovom slučaju val TM_{01} sa 9,37 cm kritične valne duljine koji postavlja donju granicu na 9,6 cm. Prema tome upotrijebljeni valovod C 30 propušta valove u obliku TE_{11} samo u granicama duljina od 9,6 cm do 10,4 cm. To je vrlo uska granica.

Val TE_{01} ne može postojati, jer je prvi korijen funkcije $J_0'(k r_0)$ jednak nuli. Kad se taj korijen ne bi računao, već bi se uzeo kao prvi korijen iznos 3,83 iz tablice 6.3. iste funkcije, moglo bi se dozvoliti postojanje vala TE_{01}. Korijeni Besselovih funkcija su uzeti iz priručnika Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1965. Tamo je kao prvi korijen funkcije $J_0'(x)$ navedena nula. Tako je i ovdje usvojeno, te zato ne postoji val TE_{01} nego tek slijedeći TE_{02}, koji ima istu kritičnu valnu duljinu kao i TM_{11}.

Osnovni oblik vala ostaje TE_{11}, jer on ima najveću kritičnu duljinu vala 1,7 d, tj. 1,7-struki promjer valovoda, odnosno najmanju kritičnu frekvenciju. Pojedine komponente polja iznose iz (6.22)

$$H_z = H_0 J_1(\varrho) \cos\vartheta \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right)$$

$$H_r = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2 - 1\right]^{1/2} H_0 [J_0(\varrho) - J_2(\varrho)] \cos\vartheta \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right)$$

$$H_\vartheta = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2 - 1\right]^{1/2} H_0 [J_0(\varrho) + J_2(\varrho)] \sin\vartheta \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right)$$

$$E_\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda} Z_0 H_0 [J_0(\varrho) - J_2(\varrho)] \cos\vartheta \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right)$$

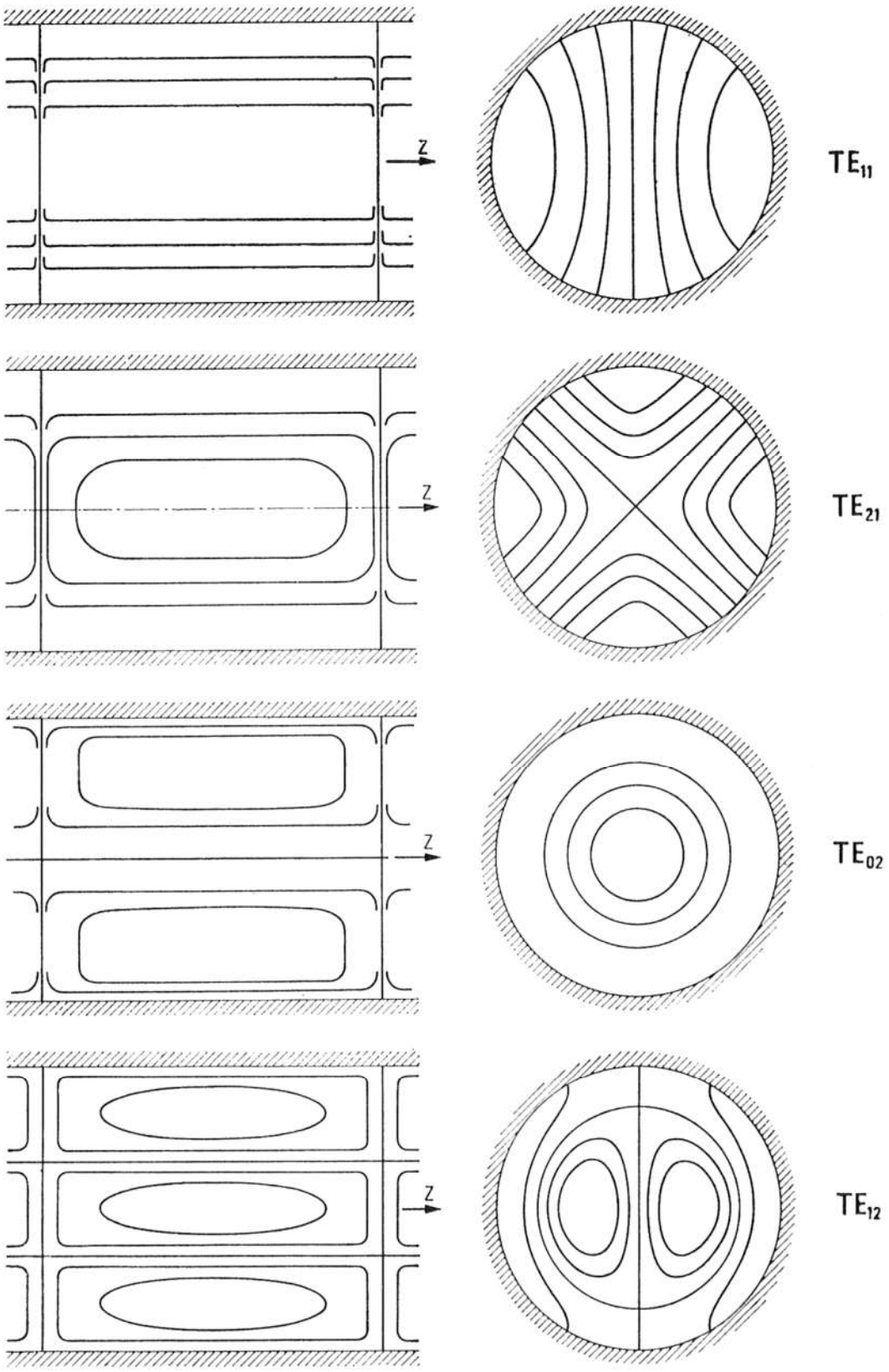
$$E_r = \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda} Z_0 H_0 [J_0(\varrho) + J_2(\varrho)] \sin\vartheta \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right)$$

$$\varrho = 2\pi \frac{r}{\lambda_k}, \qquad \lambda_k = 3{,}41\, r_0, \qquad 0 \leqslant \varrho \leqslant \chi_{11} = 1{,}84$$

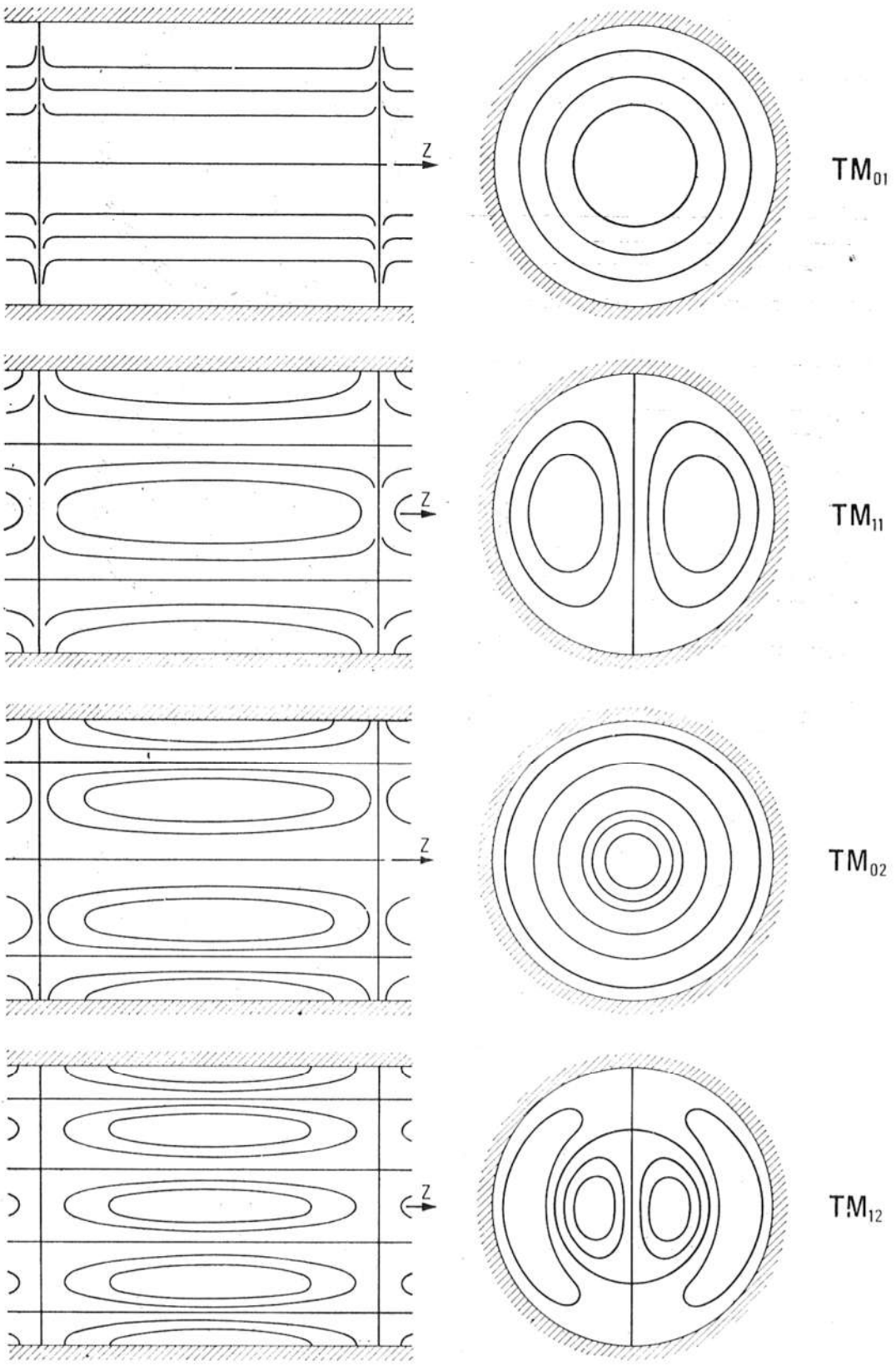
Jakosti polja su ograničene električnim probojem izolacije. Prema tome se postavlja granica jakosti električnog polja. Najveća jakost električnog polja nastaje za $\varrho = 0$ i $\vartheta = \pi/2$ i ona iznosi

$$E_{\max} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda} Z_0 H_0$$

Valovod C 30 se upotrebljava u prijenosu vala 10 cm. On ima $\lambda_k/\lambda = 1{,}222$ i $Z_0 = 377$ oma, te je $E_{\max} = 230\, H_0$. Tako je dovedena u direktnu vezu najveća jakost električnog polja i najveća jakost magnetskog polja. Jakost električnog polja smije doseći 3 kV/mm da ne dođe do opasne ionizacije. Najveća jakost električnog polja na stijenki valovoda iznosi 65 % najveće jakosti u njegovoj osi. Konstanta jakosti



Sl. 6.9. Magnetske i električne silnice u okruglom valovodu za oblik valova TE_{11}, TE_{21}, TE_{02} i TE_{12}. Izabrana je slobodna duljina vala 36 mm, a valovod je tipa C30. Desne slike su električne silnice.



Sl. 6.10. Električne i magnetske silnice u okruglom valovodu za oblike valova TM_{01}, TM_{11}, TM_{02}, i TM_{12}. Izabrana slobodna duljina vala 27,5 mm i valovod C30. Lijeve slike su električne silnice,

magnetskog polja iznosi $H_0 = 13{,}0$ kA/m. Najveća transverzalna jakost magnetskog polja je u osi valovoda i iznosi 4,58 kA/m. Najveća uzdužna jakost magnetskog polja je na stijenki valovoda i iznosi 7,57 kA/m. Te su dvije jakosti polja međusobno razmaknute po osi za $\lambda_z/4 = 17{,}4/4 = 4{,}35$ cm.

Slika polja je prikazana na valovodu C 30 za obje grupe valova. Grupa valova TE je na sl. 6.9. za valnu duljinu 3,6 cm i oblike valova TE_{11}, TE_{21}, TE_{02}, i TE_{12}. Oni imaju redom uzdužne valne duljine 3,76 cm, 4,12 cm, 4,55 cm i 6,90 cm. Grupa valova TM prikazana je na sl. 6.10. za valnu duljinu 2,75 cm i oblike valova TM_{01}, TM_{11}, TM_{02} i TM_{12}. Njihove su uzdužne valne duljine redom 2,88 cm, 3,06 cm, 3,74 cm i 5,36 cm.

Rasprostiranje valova u okruglom valovodu ne može se prikazati preglednije, kao ono u pravokutnom valovodu. Najjednostavniji oblik vala je TE_{11}, no niti njegov val se ne može rastaviti na jednostavnije elemente. Njegova slika polja sa sl. 6.9. se giba duž valovoda faznom brzinom v_z za taj oblik vala, a pri tome se ne zaokreće oko osi. Pravokutni valovod je jednostavniji, jer se njegovi valovi prikazuju ravnim valom. Tako nije kod okruglog valovoda.

6.4. ENERGETSKI ODNOSI

Prethodna poglavlja su poslužila da se prikaže teorija valovoda koji nema gubitaka. Stijenke cijevi su beskonačno vodljive, a njihova unutarnjost je ispunjena dielektrikom bez gubitaka. Takav pristup je znatno olakšao zadatak, a samu teoriju je učinio preglednijom. Energija se rasprostire u takvu valovodu po njegovoj duljini.

Poyntingov vektor pokazuje kako je raspoređen tok energije po presjeku valovoda. Strujanju energije duž valovoda doprinose samo transverzalne komponente polja. Polje je nastalo superpozicijom svih oblika valova TE i TM, koji su uvedeni samo zbog preglednije analize. Svi oblici valova sudjeluju u transportu energije u isto vrijeme. Ovdje nastaje sretna okolnost da samo električno i magnetsko polje istobrojnih oblika valova sudjeluju u transportu energije. Svi oblici valova sadrže faktor

$$\sin(\omega t - \beta_z z)$$

u transverzalnim komponentama polja. U tome faktoru se razlikuje fazna konstanta β_z od oblika do oblika vala. Budući da se u prenesenoj snazi pojavljuje produkt tih faktora, doprinos srednjoj snazi daju samo oni vektori električnog i magnetskog polja koji imaju istu faznu konstantu. Snagu prenose samo oni valovi električnog i magnetskog polja, koji imaju istu uzdužnu valnu duljinu.

Ukupna prenesena snaga valovoda jednaka je zbroju snaga pojedinih oblika valova koji se rasprostiru valovodom.

6.4.1. Prenesena snaga

Jednadžbe (6.4) daju vektore polja svih oblika valova bilo kakvog valovoda. Vektori transverzalnih komponenti električnog i magnetskog polja su vezani međusobno valnim otporom. Uzdužna komponenta Poyntingova vektora je za sve oblike valova

$$\Gamma_z \mathbf{z}_0 = \mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t$$

Transverzalne komponente vektora polja se upotrijebe iz jednadžbi (6.4), a iskoristi se i valni otpor iz izraza (6.10), te je uzdužna komponenta Poyntingova vektora

$$\begin{aligned} \Gamma_z \mathbf{z}_0 &= Z_v \mathbf{H}_t \times (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_t) = Z_v H_t^2 \mathbf{z}_0 \qquad \text{val TE} \\ \Gamma_z \mathbf{z}_0 &= \frac{1}{Z_v} \mathbf{E}_t \times (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_t) = \frac{E_t^2}{Z_v} \mathbf{z}_0 \qquad \text{val TM} \end{aligned} \tag{6.23}$$

Poyntingov vektor se izražava na jednostavan način, kao u ravnog vala. Ovdje je uzeto u obzir da ne postoji fazni pomak između električnog i magnetskog polja. Osim toga se Poyntingov vektor odnosi samo na valove koji prolaze valovodom. Nisu uzeti u obzir prigušeni oblici valova, jer oni ne doprinose prijenosu energije.

Konačni oblik izraza (6.23) se odnosi na prosječni iznos Poyntingova vektora, jer je on interesantan u prijenosu energije. Za njega su važni tjemeni iznosi jakosti polja, $E_{t\,\max}$ i $H_{t\,\max}$. Njihovom primjenom iznosi *prosječni Poyntingov vektor* u smjeru osi Z

$$\Gamma_z = \frac{1}{2} Z_v H_{t\,\max}^2, \qquad Z_v = \frac{\lambda_z}{\lambda} Z_0 \qquad \text{val TE}$$

$$\Gamma_z = \frac{1}{2} \frac{E_{t\,\max}^2}{Z_v}, \qquad Z_v = \frac{\lambda}{\lambda_z} Z_0 \qquad \text{val TM}$$

On je još ovisan o transverzalnim koordinatama u valovodu, što treba uzeti u obzir pri određivanju ukupne prenesene snage. Njega treba odrediti za svaki oblik vala koji sudjeluje u prijenosu, a ukupna je snaga jednaka zbroju snaga pojedinih valova.

Prenesena snaga se može izraziti općenito za svaki valovod. Transverzalnu komponentu polja treba izraziti Hertzovim vektorom iz jednadžbe (6.4). Odatle je za val TE

$$\begin{aligned} H_t^2 = \beta_z^2 \operatorname{grad}_t^2 \Pi &= \beta_z^2 \operatorname{div}_t (\Pi \operatorname{grad}_t \Pi) - \beta_z^2 \Pi \Delta_t \Pi = \\ &= \beta_z^2 \operatorname{div}_t (\Pi \operatorname{grad}_t \Pi) + k^2 \beta_z^2 \Pi^2 \end{aligned}$$

Prenesena snaga valovodom prikazana je plošnim integralom Poyntingova vektora, odnosno integralom H_t^2.

Pravila vektorske analize pomažu da se plošni integral pojednostavni u obliku za snagu vala TE

$$P = \int_S \Gamma_z \, \mathrm{d}S = \frac{1}{2} Z_v \int_S H_{t\,\max}^2 \, \mathrm{d}S = \frac{1}{2} Z_v \, k^2 \, \beta_z^2 \int_S \Pi^2 \, \mathrm{d}S$$

Kad se izvrši odgovarajuća supstitucija Hertzova vektora, dobiva se prosječna snaga prenesena valovodom

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_k^2}{\lambda \lambda_z} Z_0 \int_S H_{z\,\max}^2 \, \mathrm{d}S, \qquad \text{val TE} \\ P &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_k^2}{\lambda \lambda_z} \frac{1}{Z_0} \int_S E_{z\,\max}^2 \, \mathrm{d}S, \qquad \text{val TM} \end{aligned} \tag{6.24}$$

Daljnja analiza prijenosa energije treba da se odnosi na pojedine valovode. Najčešće se upotrebljava *pravokutni valovod*. Prenesena snaga slijedi iz jednadžbe (6.24) kad se provede integracija. Vektori polja u pravokutnom valovodu su zadani jednadžbom (6.11). Kad se provede integracija po presjeku valovoda, dobije se ukupna *prenesena snaga pojedinog oblika vala*

$$\begin{aligned} P &= C_1 \, S_v \frac{\lambda_k^2}{\lambda \lambda_z} Z_0 \, H_0^2 \qquad \text{val TE} \\ P &= C_1 \, S_v \frac{\lambda_k^2}{\lambda \lambda_z} \frac{E_0^2}{Z_0} \qquad \text{val TM} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Prenesene snage obiju grupa valova izražavaju se jednako, samo je razlika u posljednjem faktoru $Z_0 H_0^2$ i E_0^2/Z_0. Z_0 je valni otpor slobodnog prostora, te je on isti za sve oblike valova. Prema tome ostaje jedina razlika u upotrebi tjemenog iznosa uzdužne komponente polja. Val TE je magnetski val, a u njemu uzdužna komponenta polja pripada magnetskom polju tjemenog iznosa H_0. Val TM je električni val, a njegova uzdužna komponenta električnog polja je tjemenog iznosa E_0. Izrazi (6.25) predstavljaju prenesenu, prosječnu snagu pojedinih oblika m, n valova, samo što je indeks m, n ispušten zbog jednostavnijeg pisanja.

Prenesena snaga sadrži konstantu C_1. Ona uzima u obzir raspodjelu polja u nekom presjeku valovoda. Polje se mijenja vremenski sinusnim zakonom, te se u snazi pojavljuje faktor 1/2, ako se računa s tjemenim iznosima polja, a ne s efektivnim iznosima. Polje je raspoređeno u nekom presjeku sinusno u oba smjera, što vodi na nova dva faktora u snazi po 1/2. Odatle je konstanta $C_1 = 1/8$. Oblici valova sa $n = 0$, tj. valovi TE_{m0}, imaju sinusnu raspodjelu polja samo u jednom smjeru, te je konstanta $C_1 = 1/4$. Prema tome je konstanta C_1

$$\begin{aligned} C_1 &= 0{,}25 \quad \text{za } \mathrm{TE}_{m0},\ \mathrm{TE}_{0n}, \\ C_1 &= 0{,}125 \quad \text{svi ostali oblici valova} \end{aligned}$$

Veličina $S_v = a\,b$ je površina presjeka valovoda. Ukupna prenesena snaga jednaka je zbroju snaga svih oblika valova koji sudjeluju u prijenosu. Samo se λ_k, kritična duljina vala, H_0, tjemeni iznos uzdužne komponente magnetskog polja i E_0, tjemeni iznos uzdužne komponente električnog polja, mijenjaju u ovisnosti o obliku vala.

Prenesena snaga valovodom ne može se odrediti, a da se ne poznaju pojedini oblici valova. Koji oblici valova postoje, ovisi o načinu njihova uspostavljanja. Granični uvjeti na stijenkama u valovodu traže, zbog općenitosti rješenja diferencijalnih jednadžbi, da postoje različiti oblici valova. Dimenzije valovoda ograničavaju ukupni broj oblika valova. Taj broj oblika valova je najveći mogući broj, ali to nije neophodan broj. Prema tome je moguće da se prijenos vrši osnovnim oblikom vala, iako valovod omogućuje postojanje više oblika valova. Tek detaljna analiza uspostavljanja valova na ulazu u valovod i analiza diskontinuiteta duž valovoda bi omogućila da se odrede pojedini oblici valova.

Prenesena snaga sadrži faktor

$$\frac{\lambda_k}{\lambda}\left[\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2 - 1\right]^{1/2} = \frac{\lambda_k^2}{\lambda\,\lambda_z} = K \tag{6.26}$$

koji je u obje grupe valova isti. Ako valovod omogućuje da se uspostave viši oblici valova, tada spomenuti faktor K opada iznosom kako se prelazi na više oblike valova. To govori za prijenos energije osnovnim oblikom vala. Da bi se mogle usporediti snage valova TE i TM, treba oboje svesti na električno polje. *Najveća jakost električnog polja* iznosi iz jednadžbi (6.11)

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{\lambda_k}{\lambda} Z_0\, H_0\, C_0 \qquad \text{val TE} \\ E_{\max} &= \frac{\lambda_k}{\lambda_z} E_0\, C_0 \qquad\quad \text{val TM} \end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\frac{1}{C_0^2} = 1 + \left(\frac{n\,a}{m\,b}\right)^2 < 2 \quad \text{ili} \quad \frac{1}{C_0^2} = 1 + \left(\frac{m\,b}{n\,a}\right)^2 < 2$$

Konstanta C_0 se odabire tako, da iznosi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant C_0 < 1$$

Ona ne može biti izvan navedenih granica, te je treba provjeriti da li zadovoljava postavljenom uvjetu. Kod vala TM mora biti održan uvjet

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_z} C_0 \geqslant 1$$

Taj produkt smije biti najmanje jednak jedinici.

Kad se snaga svede na istu najveću jakost električnog polja, iznosi prenesena snaga iz izraza (6.25) za pravokutni valovod

$$P = \frac{C_1 S_v}{C_0^2} \frac{\lambda}{\lambda_z} \frac{E_{max}^2}{Z_0} \qquad \text{val TE}$$

$$P = \frac{C_1 S_v}{C_0^2} \frac{\lambda_z}{\lambda} \frac{E_{max}^2}{Z_0} \qquad \text{val TM} \tag{6.28}$$

Obje snage se razlikuju samo faktorom λ/λ_z, a oblik vala se vidi samo u valnoj duljini λ_z. Iako su obje snage svedene na istu jakost električnog polja, ne mogu se uspoređivati prenesene snage pojedinih oblika valova ako ih nekoliko sudjeluje u prijenosu. Najveća jakost električnog polja je mjerodavna u naprezanju izolatora koji ispunja cijev valovoda. Kad električno polje prijeđe električnu čvrstoću izolatora, počinje proboj izolacije. Da bi se prenijele što veće snage valovodom, jakost električnog polja treba povećati koliko dozvoljava čvrstoća izolacije. Povećanje presjeka valovoda je ograničeno ako se želi ostati na osnovnom obliku vala. Po tome je ograničena snaga prijenosa za određene oblike valovoda i određeni oblik vala. Povećanje presjeka valovoda izaziva povećanje kritične valne duljine. Time se postiže veći efekt u prijenosu snage valom TE, nego u prijenosu valom TM. Međutim, valom TM se prenosi veća snaga, nego valom TE za istu jakost električnog polja i isti oblik vala m, n.

Pravokutni valovod R 26 ima dimenzije presjeka $a = 86{,}36$ mm i $b = 43{,}18$ mm. Njime prolazi val 10 cm u obliku TE_{10}, a drugi oblici nisu mogući. Kritična valna duljina iznosi 17,27 cm, prema tablici 6.1. za TE_{10}. Slijedeća kritička valna duljina je 8,64 cm, a pripada oblicima TE_{20} i TE_{01}. Valovodom R 26 se mogu prenositi valovi duljine 9,0 cm do 13,8 cm u obliku TE_{10}, a da ne sudjeluju ostali oblici. Prenesena snaga je to veća, što je kraća duljina vala, jer je manji odnos λ/λ_k. Prema tome, najveća snaga bi se prenosila valom 9 cm. Neka je dopuštena najveća jakost električnog polja $E_{max} = 1{,}5$ kV/mm za normalni uzduh. Valni je otpor $Z_0 = 377$ oma. Prenesena snaga dosiže iznos 4,54 megavata, pri duljini vala 10 cm.

Val duljine 4,5 cm prolazi valovodom R 26 u nekoliko oblika. To pokazuje tablica 6.1. Mogući su valovi oblika TE_{10}, TE_{20}, TE_{30}, TE_{01}, TE_{11}, TE_{21}, TE_{31}, TM_{11}, TM_{21}, TM_{31}. Prema tome ima deset oblika valova. Za ilustraciju su izračunate prenesene snage nekoliko oblika vala, a uzdužne valne duljine su uzete iz tablice 6.2.

TABLICA 6.6.

	TE_{10}	TE_{11}	TE_{21}	TM_{11}	TM_{21}
λ_z (cm)	4,66	5,54	6,66	5,54	6,66
C_0^2	1,0	0,8	0,5	0,8	0,5
P (MW)	10,8	11,3	15,0	17,2	33,0

Najveća jakost električnog polja je zadržana 3 kV/mm, a valni otpor slobodnog prostora je 377 oma.

Val TE_{10} prenosi veću snagu ako je slobodna valna duljina 4,5 cm, nego ako je 10 cm. Zatim, viši oblici valova prenose veću snagu nego niži, a valovi TM prenose veću snagu nego isti valovi TE. Osnovni oblik vala prenosi najmanju snagu, dok svi ostali oblici prenose samo veću snagu, ako se usvoji ista, najveća jakost električnog polja.

Prigušeni oblici valova nisu sposobni da prenose energiju. Transverzalne komponente električnog i magnetskog polja su međusobno fazno pomaknute za 90°. Ovi oblici valova su prigušeni bez gubitaka energije. Slična pojava prigušenja susreće se pri totalnoj refleksiji ravnog vala. Svi oblici valova se pojavljuju na nejednolikostima u valovodu. Većina oblika se prigušuje, a preostaju samo oni koje valovod propušta i koji prenose energiju.

Okrugli valovod prenosi približno jednaku snagu kao i pravokutni valovod. Prenesena snaga pravokutnim valovodom dana je izrazima (6.28). Prenesena snaga okruglim valovodom jednako se izražava, samo sudjeluje nešto manji dio površine presjeka nego u pravokutnog valovoda. Izraz (6.28) može ostati nadalje mjerodavan, samo se umjesto površine $a\,b$ stavlja $\pi\, r_0^2$. Mjesto faktora C_1 se pojavljuje neki drugi faktor, koji se određuje posebno. Konstanta C_0 je posljedica iznosa i mjesta maksimuma jakosti električnog polja u valovodu.

6.4.2. Gubici u stijenkama

Stijenke stvarnog valovoda su izvor gubitaka. One nisu od idealnog vodiča, već od realnog, koji ima konačnu vodljivost. U njima se induciraju vrtložne struje kao što se induciraju u graničnoj plohi na granici izolator — vodič. Inducirane vrtložne struje djeluju reaktivno na polje valovoda, te ono nije više oblika kakav je dosad pretpostavljen. One su razlogom da se na stijenki pojavljuje i tangencijalna komponenta električnog polja, koje do sada nije bilo.

Utjecaj vrtložnih struja se uzima približno u obzir. To je dovoljno točno, jer su gubici u stijenkama mali prema prenesenoj snazi. Taj približni postupak sastoji se u tome da se zadrže jednake komponente polja kao da nema gubitaka, a uvodi se prigušna konstanta α_s u smjeru osi Z. Treba sve amplitude komponenata polja množiti faktorom $\exp(-\alpha_s z)$, a pri tome ne treba uzeti u obzir eksponencijalno opadanje polja duž osi Z, već se kao dosad polje mijenja harmonički. To vrijedi dotle dok je

$$\frac{1}{\alpha_s} \gg \lambda_z$$

što je redovito kod realnih valovoda

Prenesena snaga valovodom se izražava prema (6.28) novim izrazom

$$P = \frac{1}{2} S_v\, Y_v\, E_m^2\, e^{-2\alpha_s z} \tag{6.29}$$

Y_v je admitancija valovoda, ovisna o tipu valovoda i obliku vala, S_v je površina presjeka valovoda, a E_m je najveća jakost električnog polja. Dobiveni izraz pomaže da se definira prigušna konstanta, koja je posljedica gubitaka u stijenkama. Ona prema tome iznosi

$$a_s = -\frac{1}{2P}\frac{\Delta P}{\Delta z} \tag{6.30}$$

ako je ΔP gubitak snage na malom rastojanju Δz. Rastojanje Δz je dovoljno maleno da se prenesena snaga P smije smatrati konstantom. Gubitak snage ΔP jednak je gubicima u stijenki valovoda na maloj duljini Δz.

Zadatak se svodi na traženje gubitaka u stijenkama. Na stijenkama postoji tangencijalna komponenta magnetskog polja H_s kojom se odredi Poyntingov vektor gubitaka koji gleda normalno na stijenku

$$\Gamma_s = \frac{\sqrt{2}}{4} |Z_s| H_s^2 \tag{6.31}$$

To je prosječni iznos Poyntingova vektora, ako je H_s tjemeni iznos jakosti magnetskog polja na stijenki, a $|Z_s|$ je apsolutni iznos valne impedancije materijala stijenke

$$|Z_s| = \left(\frac{\omega \mu_s}{\varkappa_s}\right)^{1/2} \tag{6.32}$$

Tu je $\varkappa_s$ vodljivost materijala stijenke, a μ_s njegova permeabilnost. *Gubici u stijenkama* se utvrđuju na jedinicu duljine valovoda. Oni su jednaki integralu Poyntingova vektora po obodu valovoda

$$P_s = \oint_s \Gamma_s \, ds \tag{6.33}$$

Zatvorena krivulja s je kontura presjeka valovoda, odnosno obod valovoda. Prigušna konstanta je prema izrazu (6.30)

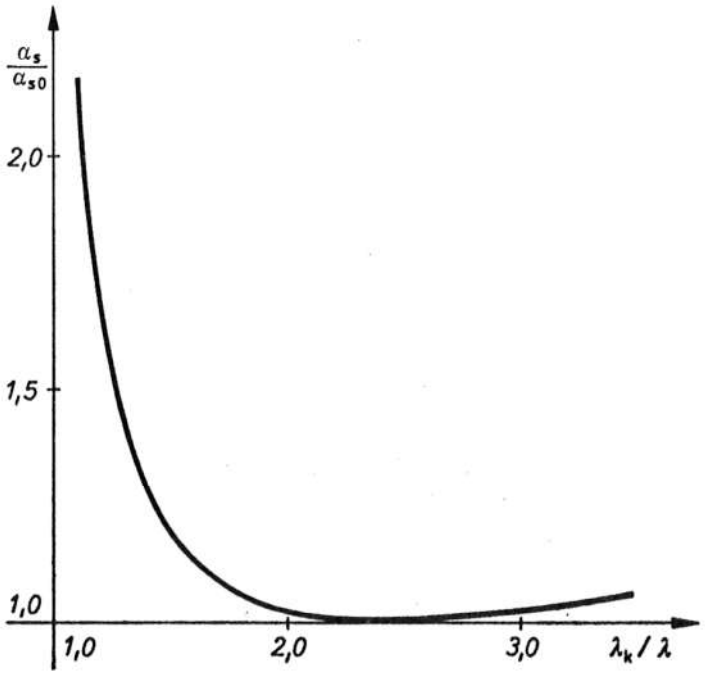
$$a_s = \frac{P_s}{2P} \tag{6.34}$$

Da bi se dobila prigušna konstanta, iskorišten je prikazani postupak na *valu* TE_{10} *u pravokutnom valovodu.* Ona iznosi

$$a_s = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi Y_0}{\lambda \varkappa_s}\right)^{1/2} \frac{1 + \frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{6.35}$$

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}$$

Prigušna konstanta ima minimum za određeni odnos λ_k/λ, kritične valne duljine i duljine radnog vala. Osnovni val TE_{10} pravokutnog valovoda ima najmanju prigušnu konstantu za omjer $\lambda_k/\lambda = 2{,}41$, ako je $a = 2\,b$. Prigušna konstanta prema minimalnom iznosu $\alpha_s = \alpha_{s0}$ prikazana je na sl. 6.11., u ovisnosti o omjeru λ_k/λ za valni oblik TE_{10} i odnos stranica $a = 2\,b$. Krivulja na slici pokazuje da postoji izraziti minimum. Preporučljivo je da je radni val valovoda u minimumu prigušne konstante ili u njegovoj blizini. Radni val ne prelazi duljinom 80 % kritične valne duljine, a prema dolje je ograničen kritičnom valnom duljinom slijedećeg, višeg oblika vala.



Sl. 6.11. Dijagram prigušne konstante valovoda α_s u ovisnosti o kritičnoj valnoj duljini λ_k. Upotrijebljeni su relativni iznosi prigušne konstante prema minimalnom iznosu, α_s/α_{s0} i kritične valne duljine prema slobodnoj valnoj duljini λ_k/λ. Izabran je pravokutni valovod omjera stranica $a/b = 2$ i oblik vala TE_{10}.

Pravokutni valovod R 26 ima stranice $a = 86{,}36$ mm i $b = 43{,}18$ mm. Val TE_{10} ima kritičnu valnu duljinu $\lambda_k = 17{,}27$ cm. Da bi bila prigušna konstanta minimalna, mora biti duljina radnog vala 7,15 cm ili frekvencija vala 4,19 gigaherca. Ako je valovod od bakra vodljivosti 58 MS/m, iznosila bi najmanja prigušna konstanta $\alpha_{s0} = 1{,}33$ Np/km = 11,6 db/km. Valovod R 26 ima kritičnu valnu duljinu 8,64 cm, koja pripada već slijedećim višim oblicima valova. Ovaj valovod ima radno područje za valove od 9,0 cm do 13,8 cm. Prigušna konstanta je $1{,}03 \cdot 1{,}33 = 1{,}37$ Np/km = 11,9 db/km pri valu 9 cm, a ona je $1{,}53 \cdot 1{,}33 = 2{,}04$ NP/km = 17,8 db/km pri valu od 13,8 cm. Uopće nije moguće da zadani valovod R 26 radi s frekvencijama u optimumu. On se upotrebljava za valnu duljinu 10 cm, a tada je prigušna konstanta samo 7 % iznad minimalnog iznosa.

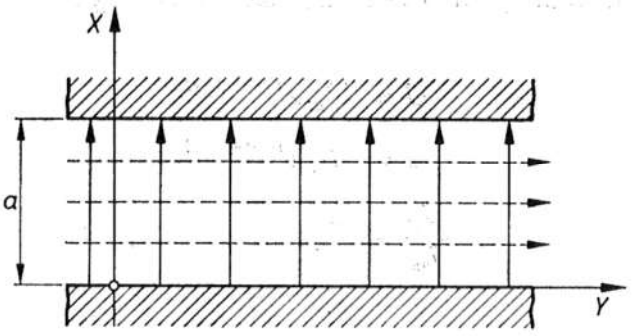
Okrugli valovod ima osnovni oblik vala TE_{11}. On ima najmanju prigušnu konstantu za omjer $\lambda_k/\lambda = 3{,}14$. To je vrlo velik iznos odnosa kritične i radne duljine vala za optimum gubitaka. Prigušna konstanta se izražava sa

$$\alpha_s = \frac{0{,}84}{2\,r_0}\left(\frac{\pi\, Y_0}{\lambda\, \varkappa_s}\right)^{1/2} \frac{1 + 2{,}39\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{6.36}$$

Tu je $2\,r_0$ promjer valovoda. Okrugli valovod C 30 ima promjer 71,42 mm, a kritična mu je valna duljina 12,22 cm, za val TE_{11}. Najmanja prigušna konstanta nastaje za radni val 3,89 cm. Taj je val daleko u području kad se pojavljuje veći broj viših oblika vala. Najmanja prigušna konstanta bi iznosila 0,94 Np/km. Radni val 10 cm se može prenositi valovodom C 30 u obliku TE_{11} bez prisustva ostalih oblika valova. Prigušna konstanta iznosi 1,83 Np/km = 15,9 db/km. Ona je približno dvostruka prema minimalnom iznosu.

5.5. VALOVOD KAO ELEKTRIČNI VOD

Električni vod ima sličnosti s valovodom. Oba se upotrebljavaju u prijenosu energije. Valovi se rasprostiru u oba prijenosnika energije u uzdužnom smjeru. Njegovi vodiči služe da se usmjeri prijenos energije. Prijelazni oblik od voda na valovod je ploča opisana u poglavlju 4.8. Ploča je od izolacionog materijala, ograničena idealno vodljivim plohama. Pokazalo se da se njome rasprostiru valovi u sva tri karakteristična oblika TEM, TE i TM. Oblik vala TEM je karakterističan za vodove, a ostala dva se javljaju u valovodu.



Sl. 6.12. Silnice polja TEM vala u ploči — izolatoru, koja je između vodiča.

Kad je ploča dovoljno tanka, njome se rasprostiru valovi samo u obliku TEM. Vodljive stijenke ploče imaju ulogu vodiča dvožičnog voda. Isječak ploče je skiciran na sl. 6.12. Silnice električnog polja idu od jedne do druge stijenke, a silnice magnetskog polja su njima paralelne. Jedno i drugo polje je homogeno. Ako je debljina ploče manja od pola duljine vala, jedino se oblik vala TEM može njome rasprosti-

rati. U poglavlju 4.8. su opisani samo oblici TE i TM, koji su mogući samo pri debljini ploče većoj od pola duljine vala. Primjer ploče je interesantan, jer se polje u njoj smije promatrati kao u voda ili valovoda.

Ploča je nezgodna, jer joj je širina u smjeru osi Y beskonačna. Zato se uzima jedinična širina ploče, tj. odsječak u smjeru osi Y širine 1 m. Ravnina X-Y je ravnina ravnog vala. Električno polje ima samo komponentu X, a magnetsko polje predstavlja pak samo komponenta Y. Granični su uvjeti zadovoljeni na stijenkama. Među stijenkama nastaje razlika potencijala, napon $E_x a$, a njima teče struja u smjeru osi Z tako, da je linijska gustoća struje $K = H_y$. Duž osi Z nastaje valno gibanje polja ili pak valno gibanje napona i struje u stijenkama, što je ekvivalentno jedno drugome. Duljina vala u smjeru osi Z jednaka je duljini ravnog vala, zadana dielektričnošću i permeabilnošću materijala ploče. Ploča nema gubitaka.

Valovod nastaje iz ploče, ako se postave vodljive plohe paralelno ravnini X-Z na razmaku b. Razmak b mora biti veći od pola duljine vala, a zato nastaje oblik TE_{01} vala. Električne silnice ostaju kao u ploči na sl. 6.12., a magnetske silnice ostaju samo iste u projekciji na ravninu X-Y. Magnetsko polje dobiva uzdužnu komponentu. Polje se rasprostire duž osi X u obliku vala, duljine veće nego je duljina u ravnog vala. Tako ploča prelazi u valovod.

Sad se ne može govoriti o naponu i struji koji su inače karakteristični za električni vod. Valovod ima istu zadaću kao i vod, tj. on služi u prijenosu energije. Energija se prenosi u uzdužnoj osi u obliku valova koji imaju određenu duljinu. Razlika je u duljini vala u vodu i u valovodu. Valovod ima još jednu osobitost: različiti oblici vala imaju različitu duljinu u uzdužnoj osi. Opći slučaj prijenosa energije valovodom ne može se obuhvatiti jednom valnom duljinom, već cijelim spektrom valnih duljina.

U prijenosu energije valovodom direktno sudjeluju transverzalne komponente polja, a uz to je mjerodavna i površina presjeka valovoda. Umjesto veličina polja upotrebljavaju se napon i struja, koji se mijenjaju duž valovoda kao što se mijenjaju na vodu. Oni pokazuju valni karakter, a duljina vala iznosi λ_z, koja je karakteristična za promatrani oblik vala. Jednadžbe napona i struje glase

$$\begin{aligned} U &= U_m e^{j(\omega t - \beta_z z)} \\ I &= I_m e^{j(\omega t - \beta_z z)} \\ \frac{U_m}{I_m} &= Z_v \end{aligned} \tag{6.37}$$

One su takve za pozitivni val, a ne postoji fazni pomak između napona i struje. Valni otpor Z_v i fazna konstanta β_z ovise o obliku vala, kako je to prikazano u prednodnim poglavljima. Tjemeni iznos napona U_m ovisi također o obliku vala i o prenesenoj energiji valovodom. Prenesena snaga je zadana produktom napona i struje. Ista snaga je zadana Poyntingovim vektorom i površinom presjeka valovoda. Taj uvjet dovodi na iznos tjemenog iznosa napona U_m.

Napon i struja iz (6.37) ekvivalentnog voda ne postoje u valovodu. Oni služe samo da se valovod može prikazati jednadžbama voda. Uzdužna komponenta polja

je uzbudna komponenta. Ostale komponente se izvode iz uzdužne. Bliza je ideja da ona posluži pri uvođenju napona i struje. Zato se postavlja da je

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{m}} &= D\,H_0, \quad \text{val TE} \\ U_{\mathrm{m}} &= D\,E_0, \quad \text{val TM} \end{aligned} \tag{6.38}$$

Konverziona duljina D se dobiva iz prenesene snage koja je dana izrazima (6.24) za valove TE i TM. Ona mora iznositi

$$P = \frac{1}{2}\,U_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}$$

Faktor snage jednak je jedinici, jer ne postoji fazni pomak između napona i struje. Uzdužne komponente polja treba prikazati u obliku

$$H_z = H_0\,\psi_{\mathrm{M}}, \qquad E_z = E_0\,\psi_{\mathrm{E}} \tag{6.39}$$

Prenesena snaga iznosi iz izraza (6.24)

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_z}\right)^2 Z_{\mathrm{v}}\,H_0^2 \int_S \psi_{\mathrm{M}}^2\,\mathrm{d}S, \quad \text{val TE}$$

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_z}\right)^2 \frac{E_0^2}{Z_{\mathrm{v}}} \int_S \psi_{\mathrm{E}}^2\,\mathrm{d}S, \qquad \text{val TM}$$

Sad je konverziona duljina

$$D_{\mathrm{M,E}} = \frac{\lambda_k}{\lambda_z}\left[\int_S \psi_{\mathrm{M,E}}^2\,\mathrm{d}S\right]^{1/2} \tag{6.40}$$

Indeks M se odnosi na val TE, a indeks E pripada valu TM.

Funkcija $\psi_{\mathrm{M,E}}$ se dobiva iz poznatih izraza koji predstavljaju uzdužne komponente polja. To su izrazi (6.11) za pravokutni valovod i izrazi (6.22) za okrugli valovod. Potrebne funkcije iznose za *pravokutni valovod*

$$\psi_{\mathrm{M}} = \cos\left(m\,\pi\,\frac{x}{a}\right)\cos\left(n\,\pi\,\frac{y}{b}\right), \qquad \text{val TE}$$

$$\psi_{\mathrm{E}} = \sin\left(m\,\pi\,\frac{x}{a}\right)\sin\left(n\,\pi\,\frac{y}{b}\right), \qquad \text{val TM}$$

One su za *okrugli valovod*

$$\psi_{\mathrm{M}} = J_m\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right)\cos(m\,\vartheta), \qquad \text{val TE}$$

$$\psi_{\mathrm{E}} = J_m\left(\eta_{mn}\frac{r}{r_0}\right)\cos(m\,\vartheta), \qquad \text{val TM}$$

Konverzione duljine iznose sada iz (6.40)

$$D = \frac{\lambda_k}{\lambda_z}(2\,C_1\,S_{\mathrm{v}})^{1/2}, \qquad \text{valovi TE i TM pravokutnog valovoda}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda_k}{\lambda_z}J_m(\chi_{mn})\left[1-\left(\frac{m}{\chi_{mn}}\right)^2\right]^{1/2}\sqrt{S_{\mathrm{v}}}, \qquad \text{val TE okruglog valovoda} \quad (6.41)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda_k}{\lambda_z}J_{m+1}(\eta_{mn})\sqrt{S_{\mathrm{v}}}, \qquad \text{val TM okruglog valovoda}$$

One omogućuju da se odrede naponi i struje koji predstavljaju valovod.

Sad se mogu upotrebljavati jednadžbe napona i struje (6.37) kao što su upotrijebljene za vod bez gubitaka. Valni otpor Z_{v} i fazna konstanta β_z se odnose samo na određeni oblik vala. Prema tome se jednadžbe struje i napona odnose samo na određeni oblik vala. Kako se u prijenosu uvijek želi primjenjivati samo jedan oblik vala, opravdana je primjena jednadžbi voda. Dapače, ako u valovodu postoje gubici, ostaju nadalje valjane jednadžbe voda s uključenom prigušnom konstantom, kakva je određena u prethodnom poglavlju.

Primjena odnosa u vodu na valovod pomaže u analizi složenih valovoda s različitim prijelazima, kombinacijama, priključcima i slično. Dosada nije promatran valovod kojim se rasprostire val u pozitivnom i negativnom smjeru uzdužne osi. Takav je slučaj bio općenito u električnih vodova. Čim je izvršen prijelaz na električni vod, nije teško uzeti u obzir opći slučaj rasprostiranja vala. Jedini problem ostaje kako garantirati jedan oblik vala. To nije problem kad su dimenzije valovoda takve, da se rasprostire samo osnovni oblik vala. Kad to nije, potrebne su posebne mjere da se dobije željeni oblik vala. Ostaje još da se ustanovi kako se dobiju iznosi impedancija koje predstavljaju pojedine prijelaze u valovodu.

PRIMJER 6.1. Treba usporediti **prijenos energije pravokutnim i okruglim valovodom, koaksijalnim i dvožičnim vodom.** Profili su prikazani na sl. 6.13. Izbor valovoda i koaksijalnog voda je slobodan u svojim dimenzijama, čim je zadovoljen uvjet za propagaciju osnovnog oblika vala. Dvožični vod ne može imati bilo koje poprečne mjere. Razmak vodiča u njega mora biti mnogo manji od duljine vala. Taj uvjet ograničava njegovu primjenu do decimetarskih valova. Čak i decimetarski valovi traže koaksijalni vod.

U ovom primjeru val ima duljinu u uzduhu

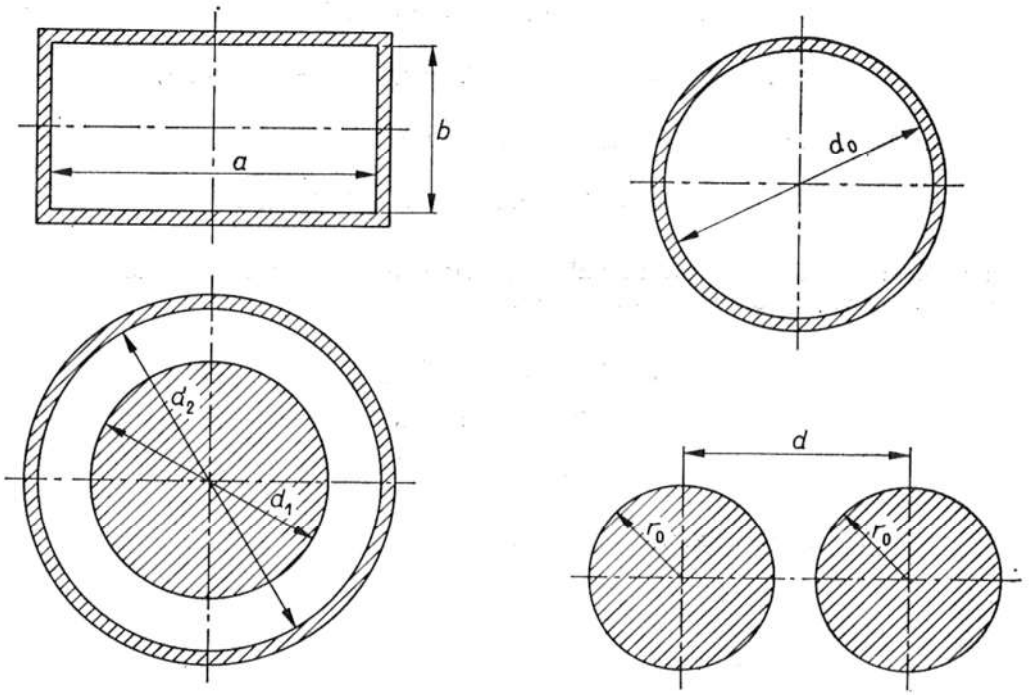
$$\lambda = 300 \text{ mm}$$

Neka je maksimalno iskorištenje električne čvrstoće uzduha, koja iznosi oko 30 kV/cm za normalno stanje uzduha, tj. tlak 760 mm st. ž. i temperaturu 0° C. Prema tome je odabrana najveća jakost električnog polja

$$E_{max} = 15 \text{ kV/cm}$$

Prijenos se predviđa osnovnim oblicima vala. To je val TE_{10} u pravokutnom valovodu i val TE_{11} u okruglom valovodu. Posebno se spominje val TM_{01} u okruglom valovodu zbog malih gubitaka. Koaksijalni i dvožični vod prenose valom TEM. Ako nema posebnih zahtjeva, presjek valovoda treba tako odabrati, da je kritična valna duljina barem za 17% veća od zadane valne duljine

$$\lambda_{k\,min} = 1{,}17\,\lambda = 350 \text{ mm}$$



Sl. 6.13. Profili električnih vodova i valovoda. Izabrani su pravokutni i okrugli valovod, te koaksijalni i dvožični vod.

Najmanji gubici u valovodu nastaju za većih omjera λ_k/λ. Zato se odabiru veći omjeri kritične i radne valne duljine. Omjer je ograničen prema gore kritičnom valnom duljinom slijedećeg oblika vala. Ako se uvede pojam gornje, λ_{kg}, i donje, λ_{kd}, kritične valne duljine, slobodna valna duljina smije biti u granicama

$$1{,}02\,\lambda_{kd} < \lambda < 0{,}85\,\lambda_{kg}$$

Spomenuti uvjet pomaže pri izboru valovoda.

Pravokutni valovod ima obično omjer stranica $a : b = 2 : 1$. Njegove kritične valne duljine iznose za val

$$TE_{10} \quad \lambda_{kg} = 2\,a$$

$$TE_{20} \quad \lambda_{kg} = a$$

Prema tome zadana, slobodna valna duljina, smije iznositi

$$1{,}02\,a < \lambda < 1{,}7\,a$$

što vodi na uvjet za veličinu dulje stranice

$$\frac{\lambda}{1{,}7} < a < \frac{\lambda}{1{,}02}$$

Kako je zadana duliina vala 300 mm, dulja stranica valovoda se nalazi u granicama

$$177 \text{ mm} < a < 294 \text{ mm}$$

Tome uvjetu odgovaraju dva standardizirana, pravokutna valovoda IEC R9 i IEC R12. Moraju postojati drugi faktori koji odlučuju o tipu valovoda. Prvi valovod prenosi veću snagu, jer mu je veći presjek. Osim toga, manja mu je prigušna konstanta, dakle ima razmjerno manje gubitke u stijenkama. U ovom primjeru je izabran *pravokutni valovod* IEC R 9, čije su stranice i površina presjeka

$$a = 247{,}65 \text{ mm}, \quad b = 123{,}82 \text{ mm}, \quad S_v = 306{,}6 \text{ cm}^2$$

Njegova je kritična i uzdužna valna duljina za TE_{10} val

$$\lambda_k = 2\,a = 495{,}3 \text{ mm}, \quad \lambda_z = 377{,}0 \text{ mm}$$

Okrugli valovod ima kritične valne duljine postavljene bliže jedna drugoj za pojedine oblike vala. One su za pojedine oblike valova po redu

$$\lambda_k = 1{,}706\, d_0 \quad \text{val } TE_{11}$$
$$\lambda_k = 1{,}306\, d_0 \quad \text{val } TM_{01}$$
$$\lambda_k = 1{,}029\, d_0 \quad \text{val } TE_{21}$$

Prema tome promjer valovoda mora biti u granicama

$$0{,}69\,\lambda < d_0 < 0{,}75\,\lambda \quad \text{za val } TE_{11}$$
$$0{,}9\ \lambda < d_0 < 0{,}95\,\lambda \quad \text{za val } TM_{01}$$

Ove granice promjera valovoda treba tako razumjeti, što je val TE_{11} moguć kao *jedini val*, samo ako su zadovoljene propisane granice za njega. Granice promjera za val TM_{01} su takve, da nije moguć istodobno i val TE_{21}, ali je moguć val TE_{11}, jer je promjer dovoljno velik.

Okrugli valovod IEC C10 odgovara uvjetu za val TE_{11}. On ima promjer, kritičnu valnu duljinu i površinu presjeka

$$d_0 = 215{,}14 \text{ mm}, \quad \lambda_k = 367{,}0 \text{ mm}, \quad S_v = 363{,}5 \text{ cm}^2$$

Uzdužna valna duljina iznosi

$$\lambda_z = 520{,}8 \text{ mm}$$

Koaksijalni vod omogućuje rasprostiranje vala TEM kao što je karakteristično za električne vodove, a istovremeno ima i sve osobine valovoda.

Njegov osnovni val ima kritičnu duljinu približno jednaku

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2}(d_1 + d_2)$$

Čim je slobodna valna duljina manja od ove kritične valne duljine, koaksijalni vod počinje djelovati kao valovod. Duljina vala mora biti veća od osnovne kritične valne duljine, te koaksijalni vod djeluje isključivo kao električni vod.

Kad se zada vanjski promjer voda, d_2, postižu se različiti optimumi promjenom promjera unutarnjeg vodiča. Ovdje se traži da je prenesena snaga najveća za zadanu najveću jakost električnog polja na nutarnjem vodiču. Najveća prenesena snaga se postiže za omjer promjera

$$\frac{d_2}{d_1} = \sqrt{e}$$

gdje je e baza prirodnih logaritama. Prema tome je kritična valna duljina osnovnog vala

$$\lambda_k = 2{,}43\, d_2$$

Koaksijalni vod djeluje samo kao električni vod s valom TEM kad je vanjski promjer

$$d_2 < 0{,}40\, \lambda$$

On smije imati i veći promjer, ali tada od njega postaje valovod, te su mogući valovi TE i TM.

Koaksijalni vod je u ovom primjeru u dvije varijante promjera za isti val od 300 mm.

$d_2 = 120$ mm samo val TEM

$d_2 = 215{,}14$ mm isti promjer kao C10

Površina presjeka izolacionog vijenca voda iznosi

$$S_v = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi d_2^2}{4}\,\frac{e-1}{e} = 0{,}632\, S_{v2}$$

Ovaj koaksijalni vod radi u visokofrekventnom području. Dubina prodiranja vala u stijenke je vrlo malena, odnosno skinefekt je vrlo izražen. Pretpostavlja se da je cjelokupno elektromagnetsko polje u izolatoru, a nema ga u stijenkama. To je ujedno vod malih gubitaka. Budući da se radi o valu TEM, vrijedi odnos za konstante voda

$$L\,C = \mu\,\varepsilon$$

te je dovoljno da se odredi samo kapacitet po jedinici duljine voda

$$C = \frac{2\pi\,\varepsilon}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \tag{6.42}$$

Tada je valni otpor voda za $Z_0 = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$

$$Z_v = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} = \frac{Z_0}{2\pi}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \tag{6.43}$$

Vod radi u pogonu bez refleksije, tj. on je opterećen valnim otporom, te je prenesena snaga

$$P = \frac{1}{2}\,\frac{U_m^2}{Z_v}$$

a U_m je tjemeni iznos napona. On je vezan na najveći iznos jakosti električnog polja koji se postiže na unutarnjem vodiču

$$U_m = \frac{1}{2}\,d_1\,E_{max}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \tag{6.44}$$

Ako se uvedu veličine

$$\Gamma_m = \frac{1}{2\,Z_0}\,E_{max}^2 \tag{6.45}$$

i površina presjeka izolacionog vijenca između vodiča

$$S_v = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)$$

iznosi prenesena snaga bez refleksije koaksijalnim vodom

$$P = \frac{2 \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 - 1} S_v \Gamma_m = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 S_{v2} \Gamma_m \tag{6.46}$$

Prenesena snaga je neovisna o duljini vala, jer se prenosi valom TEM. Ona je maksimalna pri zadanom promjeru d_2, kad je omjer promjera $d_2/d_1 = \sqrt{e}$. Najveća prenesena snaga iznosi

$$P = 0{,}582\, S_v \Gamma_m$$

Gubici u stijenkama koaksijalnog voda se izražavaju na jednostavan način, jer se pretpostavlja da je vrlo istaknut skinefekt. Gubici u stijenkama nastaju u sloju koji je jednak dubini prodiranja vala. Otpor tih slojeva po jedinici duljine voda iznosi

$$R = \frac{1}{\pi \varkappa_s \delta}\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right)$$

$\delta = (\pi f \mu_s \varkappa_s)^{-1/2}$ — dubina prodiranja vala

Gubici tada iznose

$$P_s = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{Z_v^2} R$$

Oni se iskorištavaju pri određivanju prigušne konstante voda. Gubici u izolatoru su zanemareni. Prigušna konstanta se određuje kao u valovodu, tj. smatra se da su gubici vrlo maleni u odnosu na prenesenu snagu. Ona se izražava sa

$$\alpha_s = \frac{P_s}{2P} = \frac{A_s}{d_2} \frac{\frac{d_2}{d_1} + 1}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \tag{6.47}$$

Karakteristična, bezdimenziona konstanta A_s se pojavljuje u izrazima za prigušnu konstantu valovoda i vodova, a dobiva se iz

$$A_s^2 = \frac{\pi Y_0}{\lambda \varkappa_s} \tag{6.48}$$

U njoj je pretpostavljeno da su permeabilnosti stijenke i izolatora međusobno jednake. Y_0 je valni provod slobodnog prostora, λ je valna duljina u slobodnom prostoru ili slobodna valna duljina, a $\varkappa_s$ je vodljivost stijenke. U ovom primjeru je valna duljina 300 mm, a materijal stijenki valovoda i vodova je bakar vodljivosti 58 MS/m, pri 20°C. Zato je karakteristična konstanta u prigušnoj konstanti

$$A_s = 21{,}9 \cdot 10^{-6}$$

Prigušna konstanta ima svoj minimum za određeni omjer promjera. Minimum se nalazi pri $d_2/d_1 = 3{,}59$, a on je daleko od maksimuma prenesene snage. Koaksijalni vod ima dimenzije prema maksimalnoj snazi, te je zato prigušna konstanta povećana 5,30/3,59 = 1,48 puta prema svome minimalnom iznosu.

Dvožični vod se sastoji od dva vodiča kružnog presjeka, čije su osi paralelne. Dubina prodiranja vala je vrlo malena u visokofrekventnom području primjene. Tragovi plašteva su kružnice u poprečnom presjeku, kao što je označeno na sl. 6.13. Skalarni i vektorski potencijal je na njima

konstantan. Te su kružnice ujedno magnetske silnice. Takva slika polja smije se usvojiti dok je razmak među vodičima mnogo manji od duliine vala. Tada je sustav od dva paralelna, okrugla vodiča, električni vod. Električni vod s dva vodiča počinje emitirati energiju u prostor čim se razmak među vodičima približava polovici duljine vala. Zato se obično dvožični vod ne može uspoređivati s valovodom i koaksijalnim vodom. Dvožični vod može se zasloniti nekim vodljivim cilindrom ili sa dvije dovoljno široke paralelne vodljive trake. Tada dvožični vod postaje sličan koaksijalnom vodu, te je bolje upotrijebiti obični koaksijalni vod.

Da bi se zadovoljilo uvjetima električnog voda, neka je granica razmaka osi vodiča 5 % duljine vala. Takav razmak grubo zadovoljava uvjet za vod. Prema tome je

$$d \leqslant \frac{\lambda}{20}$$

U ovom primjeru razmak među osima vodiča smije biti 15 mm. Karakterističan je odnos razmaka osi prema promjeru vodiča

$$m = \frac{d}{2 r_0} = \frac{d}{d_0}$$

On ulazi u sve izraze kojima se ustanovljava stanje na vodu. Elektrostatsko polje dvaju paralelnih okruglih vodiča je prikazano u poglavlju o statičkim poljima. Najveća jakost električnog polja nastaje na spojnici između vodiča, a na površini vodiča. Ona je vezana *na napon među vodičima* izrazom

$$U_{\mathrm{m}} = d\, E_{\max} \frac{1}{m} \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^{1/2} \ln\left[m + (m^2 - 1)^{1/2}\right] \tag{6.49}$$

Vod ima vrlo male gubitke, te je oblik vala TEM. Dovoljno je da se ustanovi kapacitet voda, te se samo s pomoću njega računa valni otpor. Kapacitet voda iznosi

$$C = \frac{\pi\, \varepsilon}{\ln\left[m + (m^2 - 1)^{1/2}\right]} \tag{6.50}$$

Valni otpor se izvodi iz kapaciteta i iznosi

$$Z_{\mathrm{v}} = \frac{1}{c\, C} = \frac{Z_0}{\pi} \ln\left[m + (m^2 - 1)^{1/2}\right] \tag{6.51}$$

Prenesena snaga se opet definira za opterećenje valnim otporom kad nema refleksije. Ona je onda dana izrazom

$$P = \frac{1}{2} \frac{U_{\mathrm{m}}^2}{Z_{\mathrm{v}}} = \pi d^2 \Gamma_{\mathrm{m}} \frac{m-1}{m^2 (m+1)} \ln\left[m + (m^2 - 1)^{1/2}\right] \tag{6.52}$$

Prenesena snaga postaje maksimalna kad je

$$m = 2{,}145, \qquad P = P_{\max}$$

a zadržava se konstantnim razmak među osima vodiča.

Gubici u vodičima su koncentrirani na njihovoj površini, jer je vrlo izražen skinefekt. Otpor voda je otpor ljuske na vodičima u debljini dubine prodiranja vala, uzevši u obzir nejednaku raspodjelu gustoće struje zbog međusobnog utjecaja vodiča. Otpor voda iznosi po jedinici njegove duljine

$$R = \frac{2}{\pi d_0} \left(\frac{\pi f \mu_{\mathrm{s}}}{\varkappa_{\mathrm{s}}}\right)^{1/2} \frac{m}{(m^2 - 1)^{1/2}} \tag{6.53}$$

Izraz za otpor voda služi da se odredi prigušna konstanta, vodeći računa o tome da su gubici vrlo maleni prema prenesenoj snazi, a permeabilnosti vodiča i izolatora su međusobno jednake. Prigušna konstanta iznosi

$$\alpha_s = \frac{P_s}{2P} = \frac{1}{2}\frac{R}{Z_v} = \frac{A_s}{d}\frac{m^2}{(m^2-1)^{1/2}\ln[m+(m^2-1)^{1/2}]} \tag{6.54}$$

Konstanta A_s je ista konstanta (6.48) kao u koaksijalnog voda. Prigušna konstanta je minimalna iznosa kad je odnos razmaka među vodičima i njihova promjera za konstantni razmak

$$m = 2{,}276, \qquad \alpha_s = \alpha_{s\,min}$$

Maksimalna prenesena snaga i minimalna prigušna konstanta nastupaju gotovo za jednaki odnos m. U ovom primjeru vod ima dimenzije prema maksimalnoj prenesenoj snazi.

Sl. 6.13. prikazuje profile četiriju osnovnih prijenosnika energije. Oni imaju dimenzije za mogućnost prijenosa najveće snage pri zadanoj, dozvoljenoj jakosti električnog polja. Prijenos se vrši osnovnim oblikom vala u valovodu i valom TEM u vodu. Prema dosadašnjim oznakama veličina i optimalnim proporcijama iznose *prenesene snage*

$P = 0{,}5\,\frac{\lambda}{\lambda_z}\,S_v\,\Gamma_m$	pravokutni valovod,	val TE_{10}	
$P = 0{,}476\,\frac{\lambda}{\lambda_z}\,S_v\,\Gamma_m$	okrugli valovod,	val TE_{11}	
$P = 0{,}27\,\frac{\lambda_k^2}{\lambda\,\lambda_z}\,S_v\,\Gamma_m$	okrugli valovod,	val TM_{01}	(6.54)
$P = 0{,}582\,S_v\,\Gamma_m$	koaksijalni vod		
$P = 0{,}347\,d^2\,\Gamma_m$	dvožični vod		

Najveći prosječni Poyntingov vektor je uveden izrazom (6.45), a pojavljuje se u svim izrazima za snagu. Za dozvoljeno polje 15 kV/cm i uzduh kao izolator, on iznosi

$$\Gamma_m = 298\ \text{kW/cm}^2$$

Prema tome, najveće snage prenesene izabranim valovodima R9 i C10 i vodovima po redu kako su navedene u (6.54) iznose, ali bez TM_{01}

$P = 36{,}4$	MW	R9	
$P = 29{,}7$	MW	C10	
$P = 39{,}9$	MW	koaks.	d_2 kao u C10
$P = 12{,}5$	MW	koaks.	$d_2 = 120$ mm
$P = 0{,}23$	MW	dvovod	$d = 15$ mm

Sve prenesene snage jednako se izražavaju. Valovod uzima u obzir različite duljine vala, a prenesena snaga ovisi o frekvenciji. Prenesena snaga vodom ne ovisi o frekvenciji. Ako se želi zadržati u prijenosu osnovni oblik vala, prenesena snaga je ograničena za određenu frekvenciju. Tako u pravokutnog valovoda njegova velika stranica može biti najviše 0,98 λ. Njime se može prenijeti najviše 55 MW, pri 300 mm duljine vala. Veće snage prenose se višim oblicima vala i većim duljinama vala.

Ovdje nije konkretno određena snaga vala TM_{01}, jer on ne prolazi zadanim valovodom C10 pri duljini vala 300 mm. Slobodna duljina vala mora biti 230 mm, te val TM_{01} prolazi zadanim valovodom. Prenesena snaga bi iznosila iz (6.54) 25,4 MW.

Dvožični vod zaostaje mnogo sa svojim mogućnostima prijenosa energije. Ovaj primjer pokazuje na drastičan način da se dvožični vod ne može iskorištavati u visokofrekventnom području za prijenos najvećih snaga. Čim se radi o visokoj frekvenciji i velikoj snazi, neophodan je koaksijalni vod i valovod.

Prigušne konstante su već određene, te ih treba samo rezimirati. One redom iznose

$$\alpha_s = \frac{A_s}{b}\frac{\lambda_z}{\lambda}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2\right] = 0{,}304 \text{ Np/km} \qquad \text{R9}$$

$$\alpha_s = 0{,}84\frac{A_s}{d_0}\frac{\lambda_z}{\lambda}\left[1 + 2{,}39\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2\right] = 0{,}387 \text{ Np/km} \qquad \text{C10}$$

$$\alpha_s = 5{,}30\frac{A_s}{d_2} = 0{,}54 \text{ Np/km} \qquad \text{koaks.}$$

$$\alpha_s = 1{,}735\frac{A_s}{d} = 2{,}54 \text{ Np/km} \qquad \text{dvovod}$$

Dvožični vod pokazuje najveće gubitke. Prigušna konstanta je nešto manja, ako je prijenos oblika TM_{01} u okruglom valovodu. Ona iznosi

$$\alpha_s = 2\frac{A_s}{d_0}\frac{\lambda_z}{\lambda} = 0{,}353 \text{ Np/km} \qquad \text{C10, } TM_{01}$$

Opet je upotrijebljen val od 230 mm. Vrijedi pravilo da se u dugim prijenosima upotrebljava oblik vala TM_{01} u okruglom valovodu.

Valni otpori iznose redom

$$Z_v = \frac{\lambda_z}{\lambda}Z_0 = 474 \text{ oma} \qquad \text{R9}$$

$$Z_v = \frac{\lambda_z}{\lambda}Z_0 = 655 \text{ oma} \qquad \text{C10}$$

$$Z_v = 30 \text{ oma} \qquad \text{koaks.}$$

$$Z_v = 168 \text{ oma} \qquad \text{dvovod}$$

Valovodi imaju valne otpore ovisne o frekvenciji, dok su valni otpori vodova konstantni. Ovi posljednji se odnose na optimalne proporcije prema izrazima (6.43) i (6.51).

Tjemeni iznosi napona su izvedeni iz najveće jakosti električnog polja, a iznose redom

$$U_m = b\,E_{max} = 185{,}7 \text{ kV} \qquad \text{R9}$$

$$U_m = 0{,}611\,d_0\,E_{max} = 197{,}3 \text{ kV} \qquad \text{C10}$$

$$U_m = 0{,}735\frac{d_2 - d_1}{2}E_{max} = 46{,}7 \text{ kV} \qquad \text{koaks.}$$

$$U_m = 0{,}736\,(d - d_0)\,E_{max} = 8{,}83 \text{ kV} \qquad \text{dvovod}$$

Vidljiva je velika prednost valovoda prema vodu. U valovodu se pojavljuju vrlo veliki naponi, a ipak ne postoji problem izolatora. Izolatori su problem kod vodova. Iako su naponi u valovodima vrlo visoki, struje nisu velike, jer su iznosi valnih otpora veliki. Tjemeni iznosi struja su redom

392 A, 302 A, 1557 A, 52,5 A. Izrazito je velik iznos struje u koaksijalnom vodu. Struja dvožičnog voda je malena, jer je prenesena snaga izrazito malena. Vodovima teku uvijek veće struje nego u stijenkama valovoda. Zato su i gubici u valovodu manji nego u vodu.

Izrazi osnovnih veličina su slični za valovode i vodove. To se moglo i očekivati, jer su obje skupine članovi velike skupine *prijenosnika električne energije*. Oni imaju prednosti svaki za sebe, a postoje oblasti primjene koje pripadaju isključivo jednom prijenosniku.

Prijenos u valovodu je ovisan o frekvenciji. Iako ne postoje gubici u njemu, uzdužna fazna brzina je ovisna o frekvenciji. Fazna brzina u ravnog vala u prostoru bez gubitaka je neovisna o frekvenciji i jednaka je brzini svjetla. Bez obzira na pojavu viših oblika vala, impuls se deformira gibajući se valovodom. Kao ilustracija neka posluži valovod R 26 IEC stranica $a = 86{,}36$ mm $= 2b$. Njime se mogu rasprostirati valovi slobodne duljine od 9,0 cm do 13,8 cm u obliku TE_{10}, te ostalih oblika. Val od 10 cm ima u njemu uzdužnu valnu duljinu 12,26 cm. Drugi harmonik ima valnu duljinu 5 cm, a njegova je uzdužna valna duljina 5,23 cm za oblik TE_{10}. Neka oba počinju na ulazu s iznosom nule. Na putu od deset valnih duljina osnovnog vala ima deset valova osnovnog vala i 23,4 valova drugog harmonika. Ovo je grubi primjer kako valovod utječe na neharmoničke veličine. Može se očekivati da nastaje snažno izražena distorzija impulsa koje se želi poslati valovodom.

Duljina vala u valovodu je veća nego u slobodnom prostoru. Razlika među njima je to veća, što je slobodna valna duljina bliža kritičnoj valnoj duljini. Dok je val u valovodu, ima veću valnu duljinu, a čim izađe iz njega u slobodan prostor, smanji mu se valna duljina. Te su razlike ovisne o frekvenciji dotične veličine.

6.6. PRIJELAZI U VALOVODU

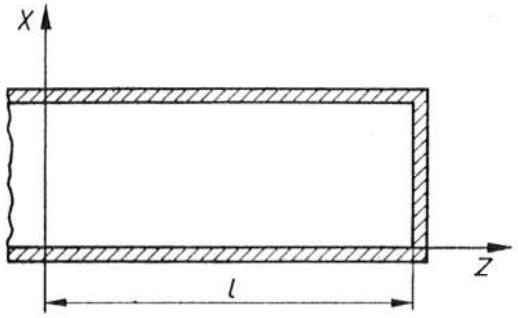
Dosadašnji prikazi su se odnosili na valovod jednakog presjeka po duljini. Val se rasprostirao samo u pozitivnom smjeru uzdužne osi. Takvo jednostavno stanje se rijetko susreće. Valovod nalazi svoju primjenu u komunikacionoj tehnici s ultrakratkim valovima, koji su sve više u upotrebi. On je prijenosnik energije od generatora do potrošača. Val treba da prolazi različitim prijelazima na svome putu od generatora do emisionog uređaja u prostor. Sam proces ubacivanja vala u valovod iz generatora je takav prijelaz. Valovod ima različite spojke, odvojke, okretnice, zavojnice i slično. Sve su to prijelazi u valovodu.

Svi prijelazi uzrokuju refleksiju vala u bilo kojem obliku. Polje u valovodu se formira od dva vala, od pozitivnog i negativnog vala. Pojava refleksije ostaje kako je prikazana u ravnom valu i na vodovima. Uvjeti na mjestu prijelaza diktiraju refleksiju. Ako prijelaz ne troši energiju, nastaje totalna refleksija. Slično je na električnom vodu prazan hod i kratak spoj. Teret prilagođen valnom otporu valovoda ne izaziva refleksiju. Tako je bilo i u električnih vodova. Prijelazi u električnim vodovima mogu se jednostavno prikazivati. Zato se i valovod prikazuje kao vod s ekvivalentnim naponima i strujama, a daljnji je postupak kao u vodova. Takav postupak traži da se prijelazi prikazuju elementima strujnog kruga, otporom, kapacitivnom i induktivnom reaktancijom.

Prijelazi su u osnovi različite zapreke, kakve su već prikazivane u teoriji ravnog vala. Vrlo često su to vodljive plohe. Na njima ne može postojati tangencijalna komponenta električnog polja i normalna komponenta magnetskog polja. Taj uvjet diktira ponašanje val kad naiđe na zapreku u valovodu.

6.6.1. Zatvoreni valovod

Najjednostavnija zapreka je *metalni poklopac* na valovodu. Valovod je zatvoren metalnom plohom, koja je u prvi trenutak idealan vodič. Slika 6.14. prikazuje takav prijelaz. Zatvor se postavlja na udaljenost l od ulaza u valovod, odnosno od ishodišta koordinatnog sustava. Transverzalna komponenta električnog polja doživljava



Sl. 6.14. Presjek kraja pravokutnog valovoda. Valovod je na kraju zatvoren vodljivom plohom.

totalnu, negativnu refleksiju, jer ona ne može tamo postojati. Transverzalna komponenta magnetskog polja se reflektira totalno pozitivno. Takva refleksija zadovoljava uvjet, da ne može postojati normalna komponenta magnetskog polja. Kako električno polje predstavlja napon, a magnetsko polje — struju, metalni poklopac na valovodu ima istu ulogu kao i kratak spoj na vodu.

Ekvivalentni napon i struja na ulazu imaju iznose kao u voda u kratkom spoju, tj.

$$U_u = j Z_v I_i \sin\left(2\pi \frac{l}{\lambda_z}\right)$$

$$I_u = I_i \cos\left(2\pi \frac{l}{\lambda_z}\right)$$

Prema tome je ulazna impedancija jednaka

$$Z_u = j Z_v \operatorname{tg}\left(2\pi \frac{l}{\lambda_z}\right) \tag{6.55}$$

Ona je beskonačna kad je duljina dotičnog ogranka valovoda jednaka četvrtini duljine vala, a ulazni napon je u maksimumu

$$l = \frac{\lambda_z}{4}, \quad Z_u = \infty, \quad I_u = 0$$

Na tome mjestu je transverzalna komponenta električnog polja maksimalna, a pojavljuje se čvor magnetskog polja.

Ulazna impedancija je nula kad je duljina ogranka upravo jednaka polovici valne duljine, a ulazna struja je u maksimumu

$$l = \frac{\lambda_z}{2}, \quad Z_u = 0, \quad U_u = 0$$

Sad električno polje ima čvor na tome mjestu.

Zatvoreni ogranci valovoda se mnogo upotrebljavaju. Oni pomažu u uzbudi željenog oblika vala. Njihovo djelovanje je ovisno o uzdužnoj duljini vala λ_z, koja je pak ovisna o frekvenciji i obliku vala. Na taj način ogranak djeluje odmah i kao filtar.

Na mjestu prijelaza se induciraju viši oblici vala, da bi se zadovoljili granični uvjeti. Viši oblici vala se brzo prigušuju, te preostaju samo oblici koji se rasprostiru valovodom. Polje na prijelazu sastoji se od zbroja svih oblika valova koji se induciraju. Svakom obliku vala odgovara vlastiti valni otpor. On postaje imaginaran, tj. *valna reaktancija*, čim se neki oblik vala prigušuje. To znači da je

$$Z_v = j X_v = -j 2\pi \frac{d_z}{\lambda} Z_0 \qquad \text{val TE}$$

$$Z_v = j X_v = j 2\pi \frac{\lambda}{d_z} Z_0 \qquad \text{val TM}$$

Duljina $d_z = 1/a_z$ je doseg dotičnog oblika vala. Valna reaktancija je kapacitivna u valova TE, a ona je induktivna u valova TM. Ako je mjesto prijelaza uzrok induciranim višim oblicima valova TE, ono djeluje *kapacitivno*. Prijelaz uzrokuje povećanu koncentraciju električnog polja, te dovod električne energije, što je karakteristika kapaciteta. Ako je mjesto prijelaza uzrok induciranim višim oblicima valova TM, ono djeluje *induktivno*.

6.6.2. Dijafragme

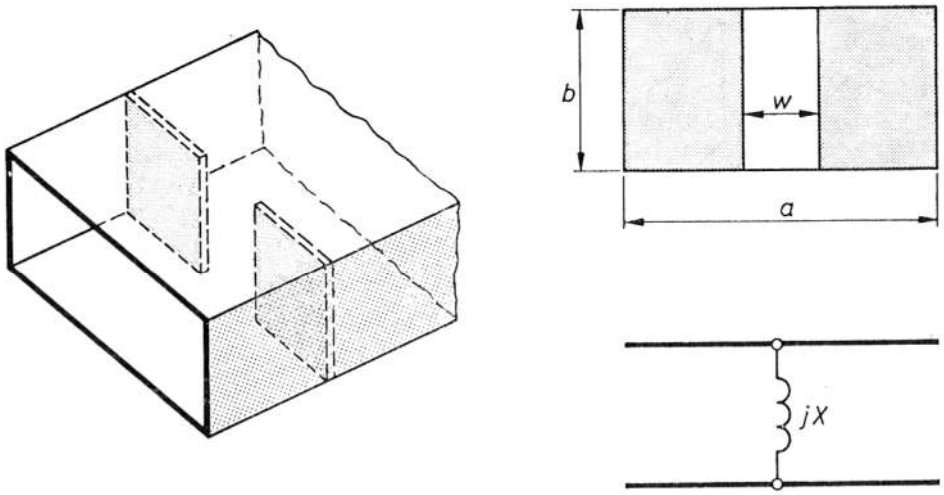
Primjer dijafragmi u valovodu pokazuje kako se induciraju viši oblici vala. Slike 6.15. i sl. 6.16. pokazuju kako se ugrađuju dijafragme u pravokutni valovod.

Prva dijafragma je *induktivna*, a druga je *kapacitivna*. Osnovni val je oblika TE_{10}. Dijafragma je metalna zapreka koja se stavlja u valovod, da bi se promijenila njegova impedancija. To je metalni list vrlo male debljine. On je postavljen simetrično u presjeku valovoda, ali to nije nužno. Debljina lista je mnogo veća od dubine prodiranja vala, a mnogo je manja od duljine vala.

Induktivna dijafragma na sl. 6.15. ne utječe na oblik silnica električnog polja vala TE_{10}. Ona uzrokuje zgušnjavanje magnetskog polja, a to znači jednako kao da je na tome mjestu uključen induktivitet ili induktivna reaktancija. Prema knjizi

A. F. Harvey, Microwave Engineering (1963) iznosi induktivna reaktancija u odnosu prema valnom otporu valovoda

$$\frac{X}{Z_v} = \frac{a}{\lambda_z} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi w}{2 a} \right), \quad \text{val } TE_{10} \tag{6.56}$$



Sl. 6.15. Induktivna dijafragma u valovodu. Njezinu električnu shemu predstavlja induktivni odvod u vodu.

Ona nadomješta djelovanje induktivne dijafragme sa sl. 6.15. Kad bi širina otvora bila jednaka polovici duže stranice, $w = a/2$, bila bi induktivna reaktancija

$$X = \frac{a}{\lambda} Z_0$$

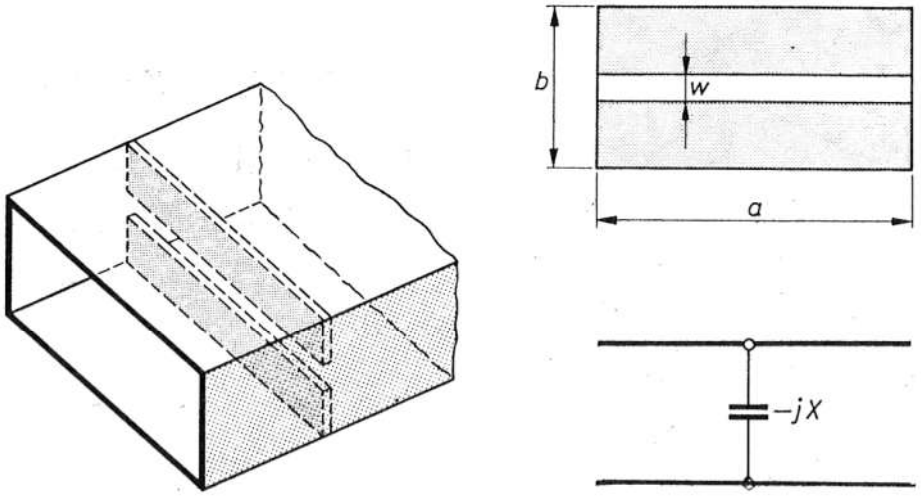
Ako je $a/\lambda = 0{,}625$, iznosi induktivna reaktancija $X = 236$ oma.

Kapacitivna dijafragma na sl. 6.16. izaziva koncentraciju električnog polja, a ne dira u magnetsko polje. Prema tome ona djeluje kao i kapacitet. Zato se ona prikazuje kao koncentrirani kapacitet ili koncentrirana kapacitivna reaktancija. U spomenutoj knjizi Harveya se nalazi izraz za kapacitivnu susceptanciju B u odnosu na valni provod Y_v valovoda

$$\frac{B}{Y_v} = \frac{4\,b}{\lambda_z} \ln \left[\operatorname{cosec} \left(\frac{\pi w}{2 b} \right) \right], \quad \text{val } TE_{10} \tag{6.57}$$

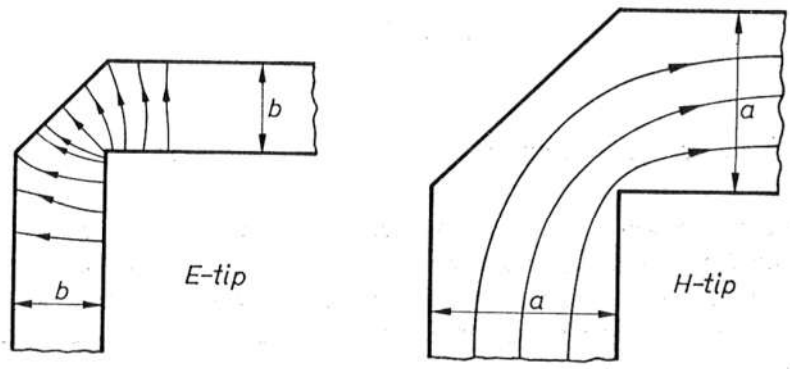
Kad bi otvor dijafragme bio $w = b/2$, a valovod standardne proporcije $b = a/2$, te odnos $a/\lambda = 0{,}625$, bila bi kapacitivna susceptancija $B = 0{,}155\ Y_0 = 0{,}41$ milisimensa.

Izrazi (6.56) i (6.57) su približni, a slijede iz približne slike polja. Dodatno akumulirana energija zbog dijafragme je mjerilo za ekvivalentni induktivitet, odnosno kapacitet. Kombinacija obiju dijafragmi se prikazuje oscilatornim sklopom induktiviteta i kapaciteta. Vodljivi poklopac u valovodu dobiva otvor, »zjenicu«. Regulacijom njezine veličine mijenjaju se uvjeti prijenosa valovodom.



Sl. 6.16. Kapacitivna dijafragma u valovodu. Kapacitivni odvod u vodu predstavlja njezinu električnu shemu.

Krivine valovoda znače koncentraciju polja. Kad se upotrebljava pravokutni valovod i TE_{10} val, razlikuju se dva osnovna tipa krivina kao na sl. 6.17. Krivina tipa **E** dovodi do koncentracije električnog polja, te ona djeluje kapacitivno. Krivina tipa **H** ne uzrokuje deformaciju električnog polja, već se pojačava magnetsko polje. Zbog krivine nastaje refleksija vala i pojava viših oblika vala. Važne su dimenzije krivine da bi se osigurao prolaz vala sa što manjom perturbacijom.



Sl. 6.17. Krivine tipa **E** i tipa **H** pravokutnog valovoda. Označeno je nekoliko električnih silnica u tipu **E** i nekoliko magnetskih silnica u tipu **H**.

Ovih nekoliko primjera pokazuje što se može očekivati unošenjem zapreka u valovod. Valovod ima iste karakteristike prije zapreke i iza nje. Zapreka se općenito predstavlja četveropolom. Navedeni primjeri dijafragmi su najjednostavniji oblici četveropola, jer sadrže samo poprečnu reaktanciju. Već se krivine predstavljaju četveropolom koji sadrži i uzdužnu reaktanciju. Valovod se predstavlja kao vod. On se postavlja na ulazu u četveropol i na njegovu izlazu.

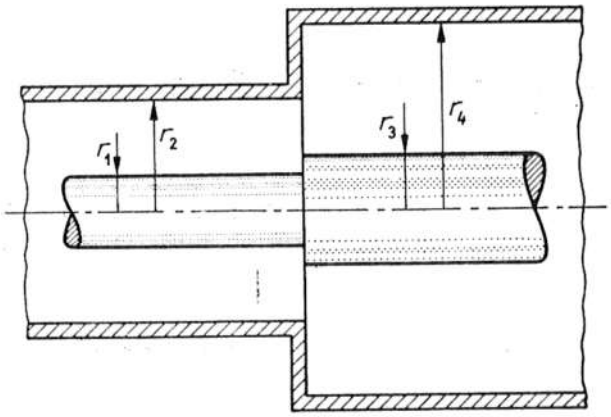
6.6.3. Spajanje valovoda

Drugi tip prijelaza se odnosi na promjenu valnog otpora izazvanog spajanjem različitih valovoda. Kad se spajaju dva voda različitog valnog otpora, nastaje na tome mjestu refleksija, a *faktor refleksije* je zadan s oba valna otpora

$$\varrho = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

Ostale veličine ne uzimaju se u obzir. Već spajanje dvaju koaksijalnih vodova može pokazati, da nije dovoljno spoj uzeti u obzir samo običnim faktorom refleksije.

Na sl. 6.18. je prikazan spoj dvaju koaksijalnih vodova. U prvi mah se pretpostavlja statička raspodjela polja, vodeći računa o graničnim uvjetima. Dozvoljeno je pretpostavljati statičku raspodjelu polja, ako su poprečne dimenzije vodiča mnogo manje od duljina vala. Tada je i koaskijalni vod zaista električni vod. Struja vodiča



Sl. 6.18. Presjek spoja dvaju koaksijalnih, okruglih kabela.

ostaje nepromijenjena prolazom kroz prijelaz s jednog voda na drugi vod. Isto tako je s naponom voda. Silnice magnetskog polja su kružnice, te one ostaju nepromijenjene pri prolazu s jednog voda na drugi vod. Silnice električnog polja se deformiraju na mjestu prijelaza. One su u homogenom vodu radijalne, a na prijelazu se pojavljuje dodatna aksijalna komponenta. Zato se očekuje da se poveća energija električnog polja, što se prikazuje dodatnim kapacitetom.

Između oba voda se uključuje paralelno kapacitet, odnosno kapacitivna susceptancija. Ona je opet poprečni element četveropola kao na sl. 6.19., koji se uključuje između dva voda.

Koaksijalni vod polumjera vodiča $r_1 = 3{,}6$ mm i $r_2 = 6{,}0$ mm ima valni otpor 30,7 oma. Na njega se nastavlja drugi vod polumjera vodiča $r_3 = 3{,}6$ mm i $r_4 = 10$ mm, prema sl. 6.18. Drugi vod ima valni otpor 61,4 oma. Proračunom se dobiva dodatni paralelni kapacitet od 0,106 pF. Neka je vod predviđen za prijenos pri valnoj duljini 10 cm u uzduhu. Toj valnoj duljini odgovara kapacitivna reaktancija

500 oma. Ona je mnogo veća od valnih otpora, te je i njezin utjecaj malen. Neka je generatorska strana na lijevoj strani slike 6.18. Kad ne bi bilo paralelnog kapaciteta, iznosio bi faktor refleksije

$$\varrho = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{1}{3}$$

Paralelni kapacitet C mijenja donekle faktor refleksije. Treba uzeti u obzir da je veličina

$$\omega C Z_2 = 0{,}123$$

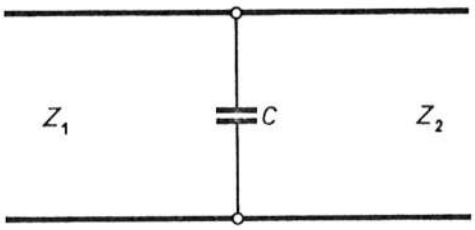
malena, te je njezin kvadrat zanemariv prema jedinici

$$(\omega C Z_2)^2 \ll 1$$

Onda je faktor refleksije približno

$$\varrho = \frac{Z_t - Z_1}{Z_t + Z_1} = \frac{1}{3}\left(1 - j\,\frac{4}{3}\,\omega C Z_2\right) = \frac{1}{3}(1 - j\,0{,}164)$$

Njegov je apsolutni iznos ostao približno isti kao da nema kapaciteta, samo nastaje fazni pomak reflektiranog napona. On zaostaje za pozitivnim naponom za kut 9,3°.



Sl. 6.19. Električna shema koja uzima u obzir utjecaj spoja dvaju koaksijalnih kabela. Između valnih impedancija vodova se uključuje kapacitivni odvod.

Interpretacija prijelaza u koaksijalnom vodu je jednostavna, jer se smiju primijeniti pravila za statička polja. Pravila statičkog polja se katkad primjenjuju u rješavanju zadataka dinamičkog polja, te se dobiva grubo približenje. Točno rješenje traži poznavanje svih oblika valova TE i TM. Prijelaz između dvaju valovoda, prijelaz između valovoda i tereta, račvanje valovoda i sl., su slučajevi kad se induciraju svi oblici valova i kad se pojavljuje refleksija osnovnog vala. Viši oblici valova se prigušuju na malim udaljenostima, a ostaje samo osnovni oblik koji je dozvoljen u valovodu. Viši oblici vala su sijelo energije, te se njihovo djelovanje uzima u obzir reaktancijom. Mjesto prijelaza se uvijek prikazuje četveropolom impedancija ili mnogopolom impedancija, ako se valovodi račvaju.

6.7. KUTIJA REZONATOR

Ravni, elektromagnetski val je poslužio da se razjasni osnovno ponašanje valova. Prikazano je njegovo ponašanje na granici između dva sredstva. Električni vod je poseban slučaj rasprostiranja vala duž vodiča. Valovod je prostor ograničen vodljivom cijevi, u kojem se rasprostire val. Konačno se manji prostor zatvara potpuno vodljivim plohama, te nastaje *kutija*. Elektromagnetsko polje je u kutiji u dinamičkom stanju. Njegovi se valovi reflektiraju od vodljivih stijenki kutije, dok se njegova energija potpuno ne potroši.

Kutija ima svojstvo **oscilatora.** Polje u njoj oscilira određenom frekvencijom koja je karakteristična za kutiju. Prema tome ona služi kao oscilator kakav se inače upotrebljava u visokofrekventnim generatorima. Kutija-oscilator se upotrebljava u generatorima ultravisokih frekvencija. Generatori nižih frekvencija upotrebljavaju *LC* oscilatore. Funkcioniranje obaju tipova oscilatora ima potpuno istu osnovu. Moraju postojati akumulatori dviju vrsta energija. Oni međusobno izmjenjuju svoje energije određenom frekvencijom, sve dok se ne istroše u gubicima. Takvi su oscilatori u mehanici različita njihala, to su različita pera opterećena utezima i slično. Svi muzički instrumenti se osnivaju na titranju takvih sustava.

6.7.1. Dobrota oscilatora

Stvarni oscilatorni sustavi imaju uvijek gubitak energije. Karakteristična veličina je *dekrement* energije titranja, koji nastaje zbog gubitaka. Dekrement energije se računa na jedan radijan promjene faze titraja. Jedan radijan odgovara (2π)-tom dijelu trajanja jedne periode titranja. Ako je prosječni iznos P_{gub} snage gubitaka u jednoj periodi titranja, a početna je energija titranja W_{osc}, dekrement po jednom radijanu iznosi

$$\text{dekrement} = 1 - \frac{T_0}{2\pi}\frac{P_{gub}}{W_{osc}} = 1 - \frac{1}{Q}$$

Na taj način je definirana **dobrota** oscilatora

$$Q = \frac{W_{osc}}{\frac{T_0}{2\pi}P_{gub}} = \frac{\omega_0 W_{osc}}{P_{gub}} \tag{6.58}$$

Dobrota oscilatora govori kolika je energija titranja na gubitak u oscilatoru po jednom radijanu. Početna energija oscilatora se potroši približno u Q titraja, tj. u broju perioda kolika je dobrota oscilatora. Utitrani oscilator titra Q titraja prepušten sam sebi, dok ne potroši svu energiju na gubitke. Tako bi se grubo mjerila dobrota oscilatora, odnosno njegovi gubici.

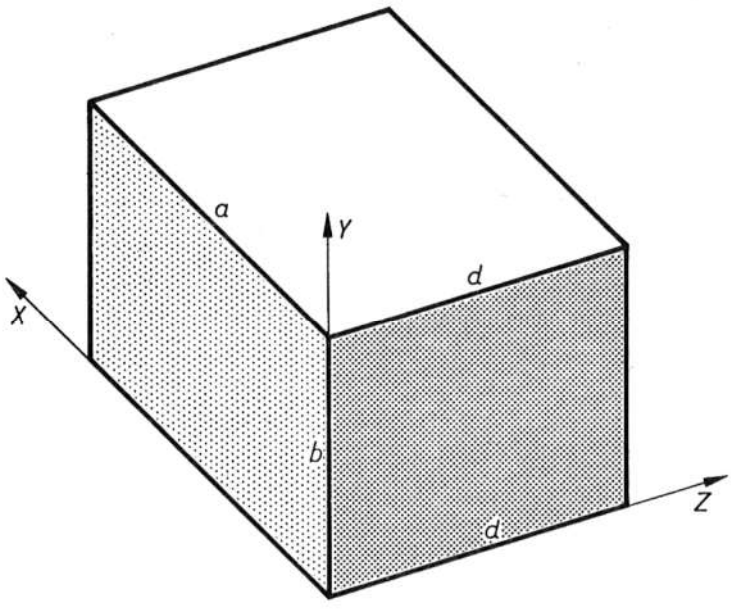
Oscilatori radiofrekventnih uređaja imaju dobrotu nekoliko stotina. Već je velik iznos $Q = 500$, ako je oscilator frekvencije 500 kHz. On će izgubiti svu svoju energiju u vremenu $Q/f = 1$ milisekunda. Linijski oscilatori, realizirani električnim vodom, postižu dobrotu od nekoliko hiljada. Kutije-oscilatori imaju dobrotu nekoliko desetaka hiljada, te su to oscilatori najmanjih gubitaka. Njihova energija titranja nestane ipak brže nego $L\,C$ oscilatora. Vrijeme nestajanja energije Q/f iznosi nekoliko desetaka mikrosekunda, jer se takvi oscilatori upotrebljavaju za vrlo visoke frekvencije, reda veličine gigaherca.

Održavanje oscilatora u titranju vrši se priključkom na stalni energetski izvor, odakle se pokrivaju gubici. Osnovni je uvjet takve veze da su izvor i oscilator u *rezonanciji*. Najjednostavniji je uvjet rezonancije da je ferekvencija izvora jednaka frekvenciji oscilatora. Kutije-oscilatori su uvijek priključene na izvore, te se najčešće zovu naprosto **rezonatori** ili kutije-rezonatori. Koji put se zovu i **endovibratori,** jer sami u sebi proizvode titraje polja.

Polje u titrajnoj kutiji, rezonatoru, podliježe utvrđenim uvjetima za polje i valove polja. Neka rezonator radi najprije bez gubitaka. Na stijenkama rezonatora ne mogu postojati tangencijalne komponente električnog polja niti normalne komponente magnetskog polja. S tim uvjetima moguće je rješenje polja u kutiji.

6.7.2. Pravokutna prizma-rezonator

Najjednostavniji oblik rezonatora je odrezak pravokutnog valovoda — *pravokutna prizma* kakva je prikazana na sl. 6.20. Njezin brid d je položen u os Z. Treba



Sl. 6.20. Pravokutna prizma, rezonator. Sve plohe prizme su vodljive.

iskoristiti ponovno Hertzov vektor. On ima, nadalje, samo jednu komponentu, a to je komponenta Z. Budući da se pojavljuje refleksija na stranama $z = 0$ i $z = d$,

Hertzov vektor ima iznos

$$\Pi = \Pi_1 e^{-j\beta_z z} + \Pi_2 e^{j\beta_z z}$$

Takvo rješenje traži pravokutan valovod, koji ima zadane uvjete na ulazu i izlazu iz njega.

Rezonator ima granične uvjete za

$$z = 0, \quad z = d, \quad E_x = E_y = 0, \quad H_z = 0$$

Takvi uvjeti traže da je Hertzov vektor za val

$$\text{TE}, \quad \Pi = 0, \quad z = 0, \quad z = d$$

$$\text{TM}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad z = d$$

Konačno je Hertzov vektor prošireni izraz (6.7), ako je $\beta_z = r$

$$\Pi = \Pi_m \cos(p\,x) \cos(q\,y) \sin(r\,z) \cos(\omega\,t) \qquad \text{val TE}$$

$$\Pi = \Pi_e \sin(p\,x) \sin(q\,y) \cos(r\,z) \cos(\omega\,t) \qquad \text{val TM}$$

$$p = \frac{m\pi}{a}, \qquad q = \frac{n\pi}{b}, \qquad r = \frac{l\pi}{d} \tag{6.59}$$

$$m, n, l = 0, 1, 2, \ldots$$

Takav rezonator oscilira frekvencijom koja slijedi iz jednadžbe

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{6.60}$$

Jednadžbe (6.3) pomažu da se odrede vektori polja u kutiji. Oblici valova su TE_{mnl} i TM_{mnl}.

Često se upotrebljava val TE_{101}. Njegova frekvencija titranja slijedi iz odnosa

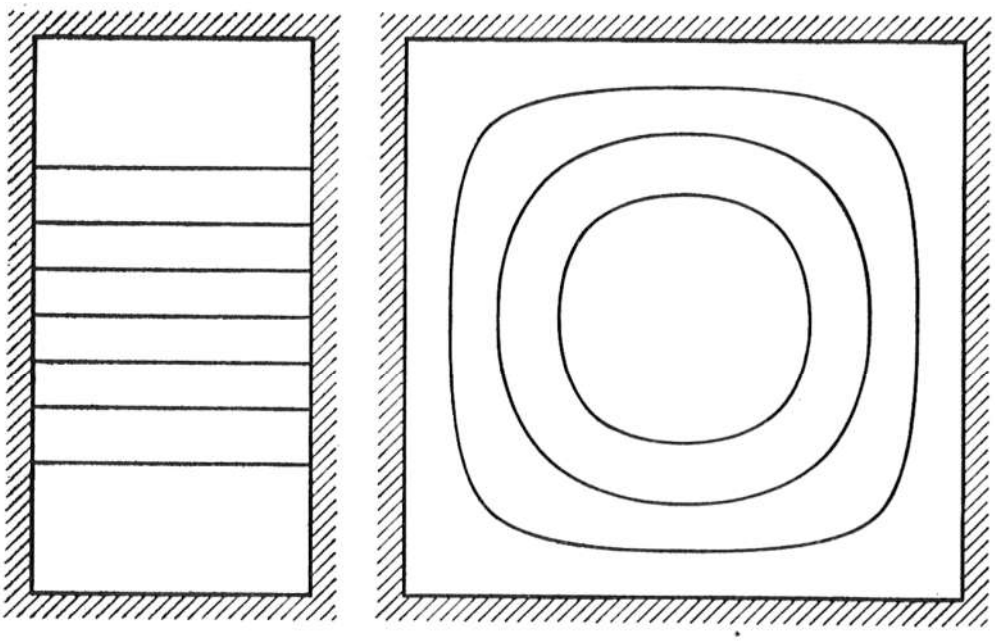
$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{6.61}$$

Ako je to val od 10 cm, dimenzije a i b stranica se određuju kao za valovod s valom TE_{10}. Stranica d se dobiva iz uvjeta titranja (6.61). Neka su $a = 70$ mm, $b = 35$ mm, onda mora biti $d = 71{,}4$ mm. Duljina stranice d se može regulirati pomičnim čepom u valovodu.

Vektori polja vala TE_{101} iznose

$$\begin{aligned} H_z &= p^2 \Pi_m \cos(p\,x) \sin(r\,z) \cos(\omega\,t) \\ H_x &= -\,p\,r\,\Pi_m \sin(p\,x) \cos(r\,z) \cos(\omega\,t) \\ E_y &= Z_0 \frac{\omega\,p}{c} \Pi_m \sin(p\,x) \sin(r\,z) \sin(\omega\,t) \end{aligned} \tag{6.62}$$

Silnice polja se vide na sl. 6.21. Električne silnice su paralelne s osi Y. One izlaze iz jedne velike plohe, a ulaze u drugu veliku plohu paralelnu prvoj. Njihova je najveća gustoća u središnjoj osi kutije, a opada prema manjim stranama. Slično je električno polje u pločastom kondenzatoru. Magnetske silnice se vide na desnoj slici 6.21. One obuhvaćaju električne silnice, a njihova je najveća gustoća uz stijenke kutije.



Sl. 6.21. Električne i magnetske silnice u prizmi rezonatoru. Izabran je val oblika TE_{101}. Lijeva slika su električne silnice, a desna slika su magnetske silnice.

Pravokutni rezonator je u osnovi zatvoren pločasti kondenzator. On predstavlja sam za sebe oscilatorni sklop, jer sadrži u sebi električnu i magnetsku energiju. Odatle mu naziv endovibrator. Strujanja energije nema u rezonatoru, jer su električno i magnetsko polje pomaknuti fazno za 90°. Iznosi ukupne električne i magnetske energije su međusobno jednaki, što je i uvjet rada oscilatora. Pravokutni rezonator ima energiju titranja

$$\begin{aligned} W_{osc.} &= \frac{1}{4} \mu \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (p^2 + q^2) \frac{a\,b\,d}{8} \Pi_m^2 \qquad \text{val TE} \\ W_{osc.} &= \frac{1}{4} \varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (p^2 + q^2) \frac{a\,b\,d}{8} \Pi_e^2 \qquad \text{val TM} \end{aligned} \tag{6.63}$$

Ona iznosi za oblik TE_{101}

$$W_{osc.} = \frac{\mu}{4}\left(\frac{2\pi^2}{\lambda a}\right)^2 \frac{a b d}{8} \Pi_m^2$$

Osnovna je karakteristika rezonatora njegova dobrota. Ona je definirana izrazom (6.58), koji se iskorištava pri njegovu određivanju. Gubici u stijenkama kutije su uvjetovani tangencijalnom komponentom magnetskog polja, H_s. Kako je svejedno koje se polje iskorištava pri određivanju energije titranja, treba uzeti magnetsko polje, te se *dobrota* definira izrazom

$$Q = \frac{2}{\delta} \frac{\int H^2 \, dV}{\oint H_s^2 \, dS} \tag{6.64}$$

Veličina δ je dubina prodiranja vala u stijenke kutije

$$\delta = \left(\frac{1}{2} \omega \mu_0 \varkappa_s\right)^{-1/2}$$

Kutija je ispunjena uzduhom. Izraz za dobrotu rezonatora je valjan za sve oblike polja i rezonatora.

Neka kao primjer posluži val TE_{101}. Kutija je izrađena u dvije varijante. Jednom je odnos bridova $a : b : d = 2 : 1 : 2$, a drugi put je kutija u obliku kocke. Kad se iskoriste vektori polja iz izraza (6.62), a uzme se u obzir da je

$$p^2 + r^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = 2p^2 = 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

dobiju se dobrote

$$Q = 0{,}177 \frac{\lambda}{\delta}, \quad a : b : d = 2 : 1 : 2$$

$$Q = 0{,}236 \frac{\lambda}{\delta}, \quad a = b = d$$

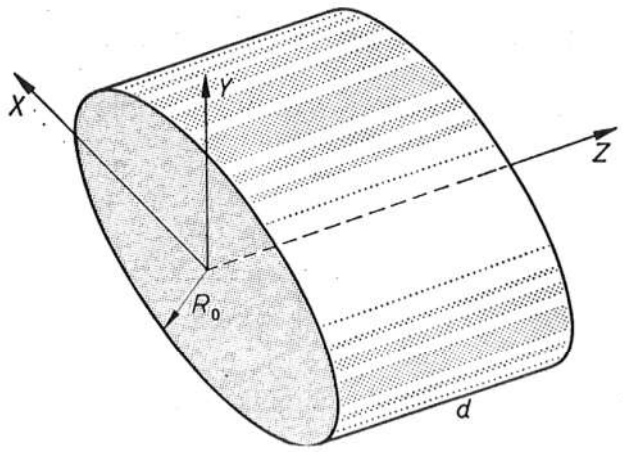
Kocka ima veću dobrotu nego pravokutna prizma. Dobrota raste s duljinom vala, tj. sa smanjivanjem frekvencije. Nekoliko iznosa je navedeno u tablici 6.7.

TABLICA 6.7.

Frekvencija, Hz		10^9	$3 \cdot 10^9$	10^{10}
Q	Prizma	25500	14700	8050
	Kocka	34000	19600	10700

6.7.3. Kružni cilindar — rezonator

Drugi osnovni oblik rezonatora je kružni cilindar koji je odsječak okruglog valovoda, kako se vidi na sl. 6.22. Jednakim postupkom kao za pravokutni valovod



Sl. 6.22. Kružni cilindar, rezonator. Sve su plohe vodljive.

dobiju se izrazi Hertzovih vektora valova TE i TM. Treba proširiti izraze u (6.18). Hertzovi vektori cilindričkog rezonatora glase

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_m J_m(k R) \cos(m \vartheta) \sin(r z) \cos(\omega t), && \text{val TE} \\ \Pi &= \Pi_e J_m(k R) \cos(m \vartheta) \cos(r z) \cos(\omega t), && \text{val TM} \end{aligned} \tag{6.65}$$

$$k = \frac{\chi_{mn}}{R_0}, \quad \text{val TE}$$

$$k = \frac{\eta_{mn}}{R_0}, \quad \text{val TM}$$

$$r = \frac{l\pi}{d}, \quad m, n, l = 0, 1, 2, \ldots$$

Taj rezonator oscilira na frekvenciji koja se dobiva iz jednadžbe

$$\begin{aligned} \left(\frac{\chi_{mn}}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2, && \text{val } \mathrm{TE}_{mnl} \\ \left(\frac{\eta_{mn}}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2, && \text{val } \mathrm{TM}_{mnl} \end{aligned} \tag{6.66}$$

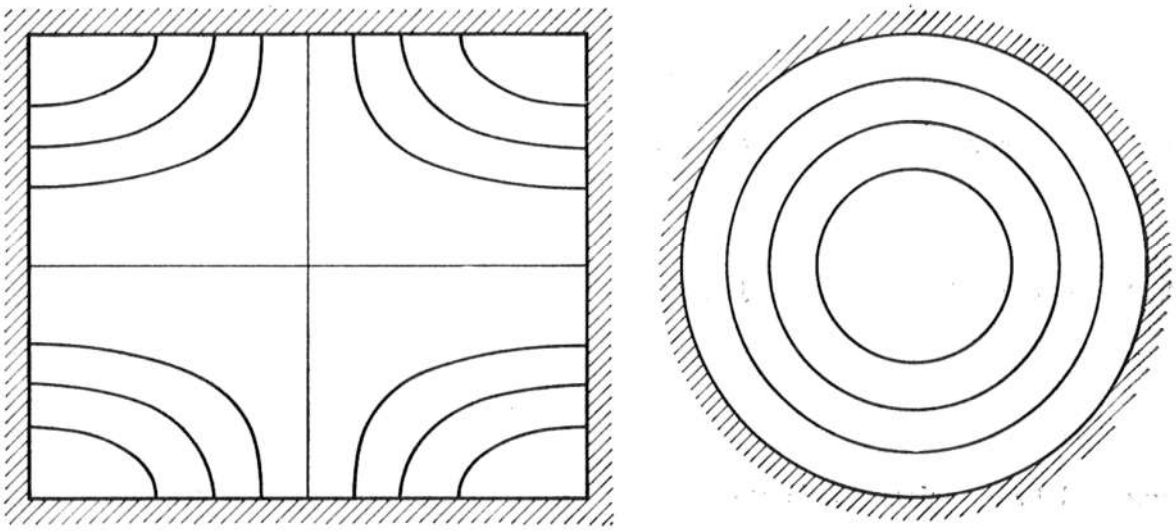
Tu su χ_{mn} i η_{mn} nultočke funkcija $J'_m(\chi_{mn}) = 0$ i $J_m(\eta_{mn}) = 0$, a navedene su u tablicama 6.3. i 6.4.

Neka posluži kao primjer cilindrički rezonator za val TM_{011}. Tablica 6.4. daje nultočku $\eta_{01} = 2{,}40$. Komponente vektora polja iznose iz Hertzova vektora

$$\begin{aligned} E_z &= k^2 \Pi_e J_0 (k R) \cos (r z) \cos (\omega t) \\ E_r &= k r \Pi_e J_1 (k R) \sin (r z) \cos (\omega t) \\ H_\vartheta &= - k \omega \varepsilon \Pi_e J_1 (k R) \cos (r z) \sin (\omega t) \end{aligned} \tag{6.67}$$

$$k = \frac{2{,}40}{R_0}, \qquad r = \frac{\pi}{d}$$

Silnice polja vala TM_{011} su prikazane na sl. 6.23. Desna slika su magnetske silnice, a lijeva su električne silnice. Dobrota oscilatora se određuje na isti način kao u pri-



Sl. 6.23. Električne i magnetske silnice u cilindru rezonatoru. Izabran je val oblika TM_{011}. Lijeva slika su električne silnice, a desna slika su magnetske silnice.

zmatičkog rezonatora. Jednostavniji izraz se dobiva ako je upotrijebljen istokračan cilindar, $d = 2 R_0$. Tada je dobrota

$$Q = \frac{1}{2} \frac{R_0}{\delta} = 0{,}228 \frac{\lambda}{\delta}$$

Istokračan cilindar kao rezonator na val TM_{011} ima dobrotu neznatno slabiju nego kocka na valu TE_{101}.

6.7.4. LC-oscilator – kvazistatički rezonator

Rezonatori ne moraju biti dijelovi valovoda. Dio valovoda, kao na sl. 6.20. i sl. 6.22., je samo oscilator sam u sebi. Elektromagnetski oscilatori pokrivaju golemo područje kombinacija. Najobičniji oscilator je sastavljen od *prigušnice i kondenzatora*, koji predstavljaju induktivitet i kapacitet. Prvi akumulira magnetsku energiju, a drugi — električnu energiju. Njihov problem je problem prigušnice i kondenzatora, koji bi trebali biti proizvedeni sa što manjim gubicima. Gubici se predstavljaju faktorom gubitaka ili tangensom kuta gubitaka. Faktor gubitaka je odnos gubitaka prema induktivnoj, odnosno kapacitivnoj snazi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{P_{gL}}{P_L} = \frac{\text{gubici prigušnice}}{\text{induktivna snaga}} \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{P_{gC}}{P_C} = \frac{\text{gubici kondenzatora}}{\text{kapacitivna snaga}} \end{aligned} \tag{6.68}$$

Kad takav sustav slobodno titra, izjednačuju se induktivna i kapacitivna snaga

$$P_L = P_C = P_{osc}$$

a ukupni su gubici zadani faktorima gubitaka

$$P_g = P_{osc} (\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \delta) \tag{6.69}$$

Kako je energija titranja oscilatora

$$W_{osc} = \frac{P_{osc}}{2 \omega}$$

iznosi dobrota takva oscilatora

$$Q = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \delta} \tag{6.70}$$

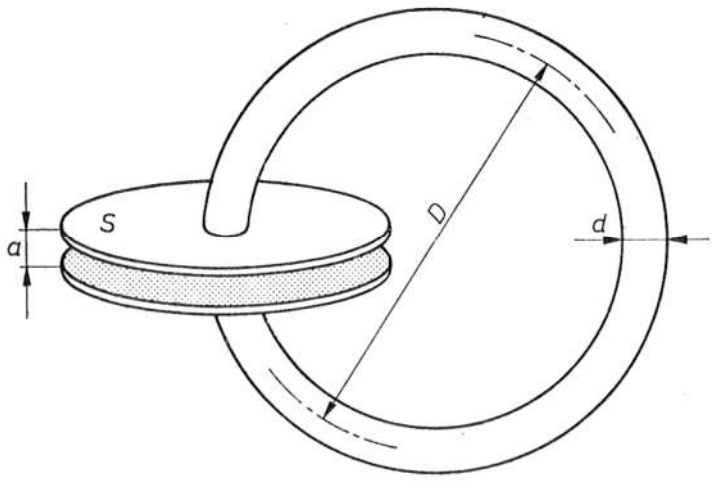
U izraz za dobrotu oscilatora ulaze samo faktori gubitaka. Taj izraz ima opći značaj, a može se primijeniti na sve oscilatore. Faktori gubitaka su mjerilo gubitaka u energetskim akumulatorima bilo kakvih oscilatora.

Frekvencija titranja *LC* oscilatora je zadana naprosto induktivitetom i kapacitetom

$$\omega = (LC)^{-1/2} \tag{6.71}$$

Na taj način se ona može mijenjati u povoljnim granicama prostim mijenjanjem induktiviteta prigušnice i kapaciteta kondenzatora. Takav oscilator ulazi također u kategoriju prostornih rezonatora. Razlika postoji prema dosada opisanim re-

zonatorima. *LC*-oscilator ima odijeljen električni akumulator od magnetskog akumulatora. U kondenzatoru postoji pored električnog i magnetsko polje, ali je njegova energija malena prema električnoj energiji. S druge strane, u prigušnici je dominantna magnetska energija, iako postoji i električno polje. Oscilator s odijeljenim energetskim akumulatorima također je rezonator, ali se zove **kvazistatički rezonator.** Tako se uzima u obzir razlika prema rezonatorima učinjenim od valovoda.



Sl. 6.24. Oscilator *LC* tipa sastavljen od pločastog kondenzatora kružnih ploča i okruglog prstena kružnog presjeka.

Sl. 6.24. prikazuje kvazistatički rezonator tipa *LC*. Induktivitet se dobiva metalnim prstenom, a kapacitet pločastim kondenzatorom. Frekvencija titranja je opet dana izrazom (6.71), tj. induktivitetom i kapacitetom. Induktivitet i kapacitet se mijenjaju neovisno jedan o drugom u stanovitoj mjeri. Dimenzije oscilatora moraju biti mnogo manje od duljine vala koja odgovara frekvenciji titranja. Induktivitet prstena i kapacitet pločastog kondenzatora iznose

$$L = \frac{\mu_0 D}{2} \ln\left(\frac{1{,}08\, D}{d}\right), \qquad C = \varepsilon_0 \frac{S}{a}$$

Usvojen je uvjet $D \gg d$. Sad je duljina vala, koja se odnosi na frekvenciju titranja za sustav u uzduhu

$$\lambda = 2\pi \left[\frac{S D}{a} \ln\left(\frac{1{,}08\, D}{d}\right)\right]^{1/2} \gg D \tag{6.72}$$

Postavljeni uvjet se zadovoljava izborom malog razmaka među pločama pločastog kondenzatora. Gubici oscilatora su u vodičima i emisije energije u prostor. Ako je oscilator malen prema duljini vala, praktički su jedini gubici u prstenu. Polje prodire u njega do dubine

$$\delta = \left(\frac{1}{2}\, \omega\, \mu_0\, \varkappa_s\right)^{-1/2}$$

te je njegov otpor samo otpor ljuske debljine δ. Prema tome on približno iznosi

$$R = \frac{1}{\varkappa_s \delta} \frac{D}{d}$$

Sad je dobrota oscilatora po definiciji nakon supstitucije odgovarajućih veličina

$$Q = \frac{1}{4 A_s} \left[\frac{a d^2}{S D} \ln\left(\frac{1{,}08\, D}{d}\right)\right]^{1/2} \tag{6.73}$$

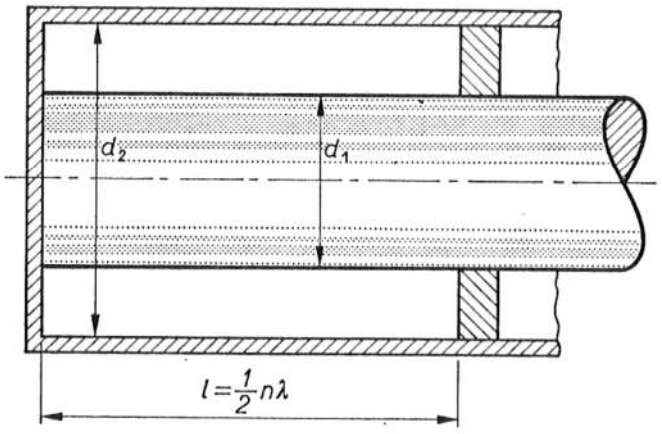
Konstanta A_s je kao u izrazu (6.48), tj.

$$A_s = \left(\frac{\pi Y_0}{\lambda \varkappa_s}\right)^{1/2}$$

Neka kao primjer posluži oscilator promjera prstena $D = 300$ mm, a promjera vodiča prstena $d = 10$ mm. Površina ploča kondenzatora iznosi $S = 314$ cm^2, a one su razmaknute na udaljenost 8 mm. Duljina vala titranja iznosi 12,7 m, a dobrota oscilatora je oko 1300, ako je prsten od bakra vodljivosti 58 MS/m. Oscilator zadovoljava uvjet da su mu dimenzije mnogo manje od duljine vala.

6.7.5. Koaksijalni vod — rezonator

Bliži je pravom rezonatoru koaksijalni vod kao kvazistatički rezonator. Na sl. 6.25. je skica koaksijalnog voda koji je na oba kraja kratko spojen. Na sl. 6.26. je



Sl. 6.25. Presjek koaksijalnog voda koji je kratko spojen na oba kraja.

koaksijalni vod koji je na jednoj strani u praznom hodu, a na drugoj strani u kratkom spoju. Oba tipa se upotrebljavaju kao valomjeri. U njima se održava elektromagnetsko polje bez obzira na frekvenciju. Kad je pripadna duljina vala veća od $\pi (d_1 + d_2)/2$,

ne može sustav djelovati kao pravi rezonator, već je kvazistatički rezonator. Da bi vod na sl. 6.25. djelovao kao oscilator, mora njegova duljina biti polovica valne duljine ili njen mnogokratnik

$$l = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{kratkospojeni vod}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Samo se duljinom voda regulira frekvencija titranja rezonatora

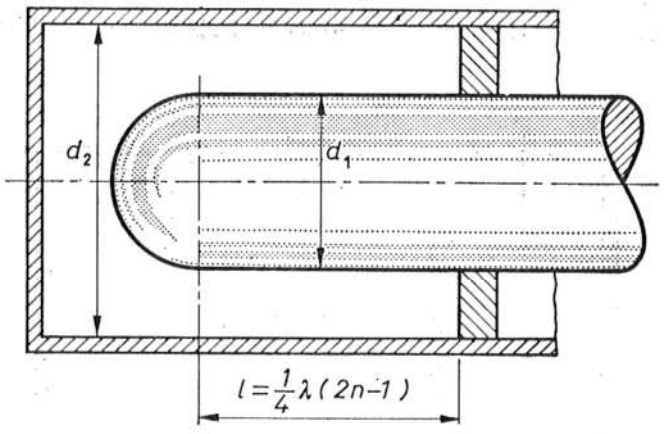
$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Drugi rezonator na sl. 6.26. ima vlastitu frekvenciju titranja karakterističnu za četvrtvalni vod. Njegova duljina je mnogokratnik četvrtine vala

$$l = (2n - 1)\frac{\lambda}{4} \qquad \text{vod u praznom hodu}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Prema tome se određuje frekvencija titranja. Oba su rezonatora jednakog djelovanja, samo u prvog se pomiče kratkospojni poklopac na cilindru, a u drugog se pomiče srednji vodič.



Sl. 6.26. Presjek koaksijalnog voda koji je na jednom kraju otvoren, a na drugom je kratko spojen.

Gubici u rezonatorima su u vodičima, a diktirani su dubinom prodiranja vala δ. Budući da su otpor i induktivitet po jedinici duljine voda

$$R = \frac{1}{\pi \varkappa_s \delta}\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right), \qquad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$$

a struja je raspoređena sinusno po duljini voda u oba slučaja, dobrota oscilatora je jednaka za oba slučaja

$$Q = \frac{d_2}{2\,\delta}\,\frac{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{1+\frac{d_2}{d_1}} \tag{6.74}$$

Ona ima najveći iznos za $d_2/d_1 = 3{,}59$, a on je

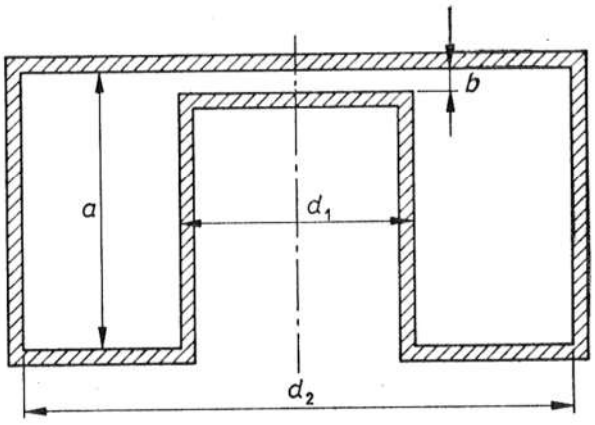
$$Q_{max} = 0{,}139\,\frac{d_2}{\delta}$$

To je gotovo polovica iznosa prema iznosu dobrote rezonatora istokračnog cilindra. Dobrota ovog oscilatora je manja, jer postoje gubici središnjeg vodiča. Još uvijek je dobrota ovog oscilatora velika.

Neka je rezonator vanjskog promjera $d_2 = 50$ mm, promjera središnjeg vodiča $d_1 = 13{,}9$ mm. Frekvenciji 300 MHz odgovara duljina četvrtvalnog voda $l = 250$ mm. Dubina prodiranja vala je 3,82 μm, a dobrota rezonatora je 1800. On nadmašuje *LC*-oscilator. Nije prikladan za veće duljine valova.

6.7.6. Torusni rezonator

Slika 6.27. je skica kvazistatičkog rezonatora, koji je vrlo blizu pravom rezonatoru kao i koaksijalni vod. Takvi se rezonatori iskorištavaju u klistronu, cijevi koja nadomješta elektronku u području vrlo visokih frekvencija, iznad jednog gigaherca.



Sl. 6.27. Presjek torusne kutije rezonatora.

Kutija je torus pravokutna presjeka, jedne stranice a, a druge $(d_2 - d_1)/2$. Vanjski promjer je d_2, a unutarnji d_1. Središnji dio ima pukotinu duljine b. U pukotini se koncentrira električno polje, a u torusu je magnetsko polje dominantno. Duljina b

središnje pukotine je mnogo manja od duljine vala primijenjenog polja. I ovdje je kapacitivni dio odijeljen od induktivnog dijela, te je takav torusni oscilator vrlo sličan običnom LC-oscilatoru.

Promjena magnetskog toka jednaka je naponu u pukotini torusa, tj.

$$j\,\omega\,\Phi = b\,E$$

Ako su dimenzije rezonatora takve, da se ne mogu razviti viši oblici valova polja, jakost magnetskog polja se jednostavno određuje prema prvoj Maxwellovoj jednadžbi

$$H = j\,\omega\,\varepsilon\,\frac{S_1}{\pi\,d_1}\,\frac{r_1}{r}\,E$$

Prema tome je duljina vala, koja odgovara frekvenciji rezonatora, zadana izrazom

$$\lambda^2 = 2\,\pi\,\frac{a\,S_1}{b}\,\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$$

a tu je $S_1 = \pi\,d_1^2/4$ površina pukotine. Dobrota rezonatora je po definiciji

$$Q = \frac{d_1}{2\,\delta}\,\frac{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{1 + \frac{d_1}{d_2} + \frac{d_1}{a}\,\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}$$

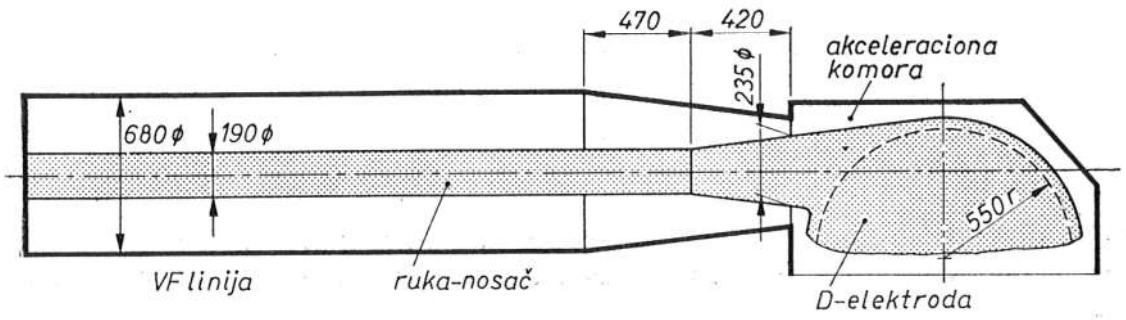
Gubici na stijenkama pukotine su zanemareni.

Zadan je torusni rezonator koji ima $d_1 = 20$ mm, $d_2 = 50$ mm, $a = 20$ mm i $b = 1$ mm. Taj rezonator ima titrajnu duljinu vala 19 cm, a dobrota mu je 2400. Duljina vala je dovoljno velika da se rezonator smije ubrojati među kvazistatičke rezonatore.

PRIMJER 6.2. Sl. 6.28. prikazuje jednu »ruku« kojom se dovodi visokofrekventna električna energija u akceleracionu komoru ciklotrona. Ciklotron je jedan od cikličkih akceleratora čestica. Stalnim magnetskim poljem se održava čestica u kruženju. Akceleracija čestice se provodi visokofrekventnim električnim poljem proizvedenim između dviju D elektroda. D elektrode se nalaze u akceleracionoj komori. Čestica se ubrzava u prostoru između D elektroda kad je ujedno napon među njima maksimalan. Pogon ciklotrona zahtijeva da su sinhronizirani ophodnja čestica i napon D elektroda.

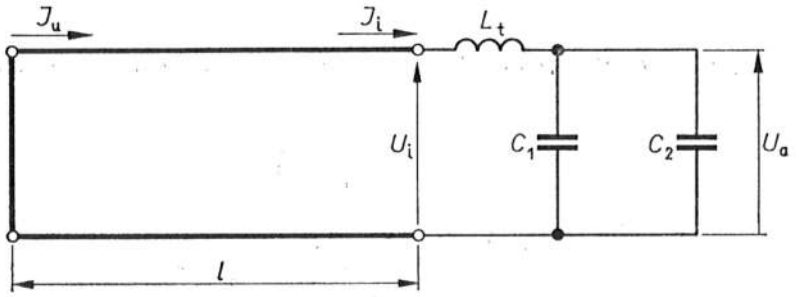
Napon se dovodi D elektrodama **električnim vodom,** koji ujedno služi kao **oscilator rezonator.** Električni koaksijalni vod kao oscilator ima frekvenciju titranja određenu duljinom. Zato se njime održava frekvencija titranja točno koliko je točna njegova duljina. D elektroda djeluje

kao kapacitivni teret voda, a njezin kapacitet također sudjeluje u iznosu frekvencije titranja. Prema tome, kapacitet D elektroda diktira točnost frekvencije titranja pored duljine voda. Najveći napon



Sl. 6.28. Presjek visokofrekventnog priključka ciklotrona koji je istovremeno oscilator. On se sastoji od koaksijalnog voda koji je na jednom kraju kratko spojen, a na drugom kraju nosi D elektrodu ciklotrona.

na teretu voda se postiže kad je vod na početku kratko spojen. Prema tome se zadatak svodi na određivanje duljine koaksijalnog voda za zadanu frekvenciju titranja, ako je vod na ulazu kratko spojen, a na izlazu je opterećen zadanim kapacitetom. Koaksijalni vod ulazi u akceleracionu komoru jednim koničnim dijelom voda koji se predstavlja kao koncentrirani teret sastavljen od induktiviteta i kapaciteta. Prema tome je sastavljena shema spoja na sl. 6.29.



Sl. 6.29. Električna shema VF priključka ciklotrona sa sl. 6.28.

Smatra se da cijeli sustav ima male gubitke, te se tretira kao vod bez gubitaka. On je također kvazistatički rezonator, gdje je primijenjena kombinacija voda i LC elemenata. Energija prenesena na čestice u ubrzavanju predstavlja se kao gubitak u rezonatoru.

Vod u kratkom spoju na ulazu ima na izlazu napon i struju

$$U_1 = -j Z_v I_u \sin(\beta l)$$

$$I_1 = I_u \cos(\beta l)$$

što slijedi iz jednadžbe voda kome je zadano stanje na njegovu ulazu. Odnos između napona i struje na izlazu glasi

$$U_1 = -j Z_v I_1 \operatorname{tg}(\beta l)$$

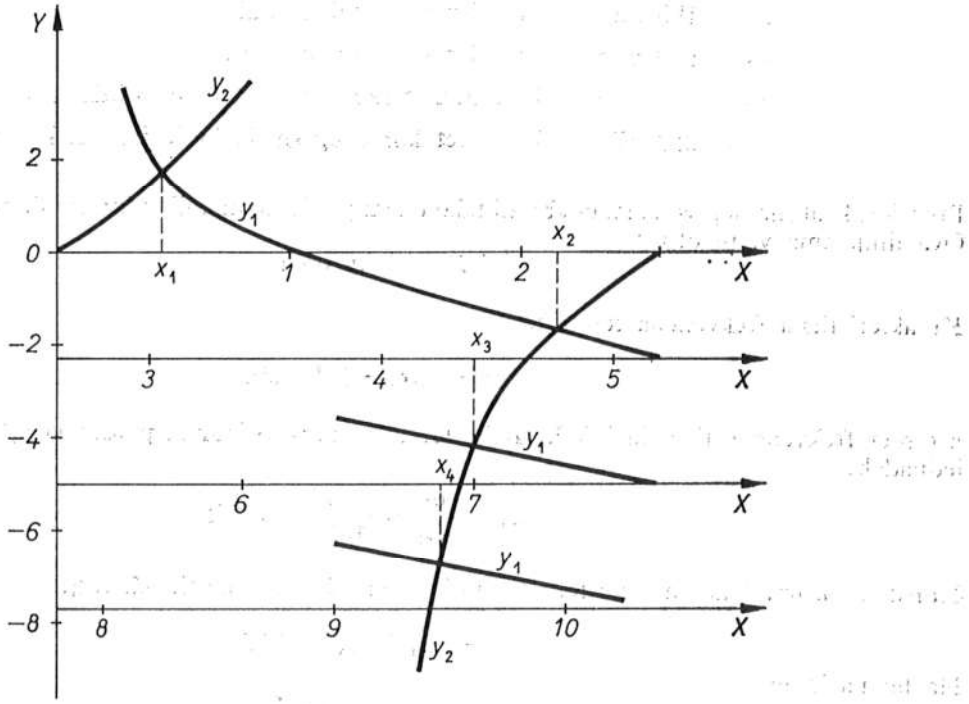
Taj se napon na izlazu troši na teret koji je sastavljen od induktiviteta L_t i kapaciteta $C_t = C_1 + C_2$ tereta.

Prema tome je

$$U_1 = j\, I_1 \left(\omega\, L_t - \frac{1}{\omega\, C_t} \right)$$

Izjednačavanjem obaju izraza za izlazni napon dobiva se uvjet titranja sustava i frekvencija titranja. Prema tome, slijedeća jednadžba daje frekvenciju titranja sustava

$$\omega\, L_t - \frac{1}{\omega\, C_t} = - Z_v \operatorname{tg} (\beta\, l) = - Z_v \operatorname{tg} \left(\omega \frac{l}{c} \right)$$



Sl. 6.30. Pomoćni dijagram krivulja u utvrđivanju frekvencije titranja VF priključka ciklotrona sa sl. 6.28. Sjecišta krivulja $y_1\,(x)$ i $y_2\,(x)$ su nultočke, frekvencije titranja oscilatora.

Dobivenu jednadžbu zadovoljava beskonačno mnogo frekvencija u zadanom sustavu. Ne postoji samo jedna frekvencija titranja rezonatora, već ih je vrlo mnogo. Zbog lakšeg prikazivanja se uvode konstante

$$\omega_t^2 = \frac{1}{L_t\, C_t}, \qquad b = \omega_t \frac{l}{c}, \qquad a = \omega_t\, C_t\, Z_v$$

a kao nepoznanica $x = \omega/\omega_t$. Onda je jednadžba frekvencije titranja

$$\frac{1}{x} - x = a \operatorname{tg} (b\, x)$$

Dijagram na sl. 6.30. prikazuje dvije skupine krivulja. Jedna je krivulja

$$y_1 = \frac{1}{x} - x$$

a druga je skupina $y_2 = a \operatorname{tg} (b\, x)$. Frekvencija titranja sustava je na mjestu x_k gdje je $y_1 = y_2$. Krivulje su crtane za

$$a = 2{,}85, \qquad b = 1{,}203$$

U tome slučaju je nekoliko nultočaka

$$x_1 = 0{,}455, \quad x_2 = 2{,}16, \quad x_3 = 4{,}41, \quad x_4 = 6{,}85$$

Obično je zadana veličina frekvencije titranja, jer je ona ujedno i frekvencija obilaska ubrzavane čestice. Pored toga je grubo zadan kapacitet D elektrode, a to je približno kapacitet tereta. Potrebna je razmjerno opsežna analiza da bi se ustanovile dimenzije koaksijalnog voda, odnosno visokofrekventnog provoda D elektrodama. U ovom primjeru su zadane veličine

$f = 10{,}8$ MHz,	$\omega = 67{,}9 \cdot 10^6$ rad/s	frekvencija titranja
$\lambda = 27{,}8$ m		pripadna duljina vala
$d_1 = 190$ mm		promjer unutarnjeg vodiča
$d_2 = 680$ mm		promjer vanjskog cilindra
$L_t = 0{,}18$ μH		induktivitet koničnog, uvodnog dijela linije
$C_t = 250$ pF		kapacitet koničnog dijela linije i D elektrode

Promjeri koaksijalnog voda su odabrani tako da su gubici najmanji, odnosno da je Q faktor najveći. Ova linija ima valni otpor

$$Z_v = 76{,}5 \text{ oma}$$

Karakteristična frekvencija tereta je

$$\omega_t = 1{,}49 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$$

a omjer frekvencije titranja i frekvencije tereta je upravo jednak prvom korijenu karakteristične jednadžbe

$$x_1 = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{0{,}679}{1{,}49} = 0{,}455$$

Konstanta a ima iznos upravo taj s kojim je crtan dijagram na sl. 6.28., tj.

$$a = \omega_t C_t Z_v = 2{,}85$$

Na taj način je

$$\operatorname{tg}(b\, x_1) = 0{,}612$$

a duljina koaksijalne linije

$$l = 2{,}43 \text{ metara}$$

Ovaj sustav ima frekvenciju titranja koja je jednaka upravo frekvenciji obilaska ubrzavanih čestica od 10,8 MHz.

Akceleracioni napon se dobiva prema shemi na sl. 6.29. dodavanjem pada napona na induktivitetu L_t izlaznom naponu. On iznosi

$$U_a = \left[1 + \frac{\omega L_t}{Z_v} \operatorname{ctg}(\beta l) \right] U_i = 1{,}26\, U_i$$

a veći je od izlaznog napona, jer je teret kapacitivan. Ako je akceleracioni napon

$$U_a = 90 \text{ kV}$$

iznosi izlazni napon na koaksijalnoj liniji

$$U_i = 71{,}5 \text{ kV}$$

Ulazna struja u liniju na kratkospojenoj strani iznosi

$$I_u = j \frac{U_i}{Z_v \sin(\beta l)} = 1\,790 \exp(j\,90°) \text{ ampera},$$

a izlazna je struja

$$I_1 = I_u \cos(\beta l) = 1\,525 \exp(j90°) \text{ ampera}$$

Struja je kapacitivna u odnosu na izlazni napon.

Dobrota rezonatora se određuje po definiciji. Energija titranja se ustanovljuje kao magnetska energija

Struja voda se mijenja po pravilu

$$I = I_u \cos(\beta z)$$

Magnetska energija voda iznosi

$$W_{osc1} = \frac{\mu_0}{2} \int_V H^2 \, dV = \frac{\mu_0}{2} \iint \frac{I_u^2}{2\pi r} \cos^2(\beta z) \, dr \, dz$$

$$W_{osc1} = \frac{\mu_0}{8\pi} l \left[1 + \frac{\sin(2\beta l)}{2\beta l}\right] \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 I_u^2 = 0{,}28 \cdot 10^{-6} I_u^2$$

Drugi dio magnetske energije je akumuliran u koničnom dijelu privoda. Konični dio iznosi 900 mm u duljinu, a oblika je koaksijalnog voda srednjeg vanjskog promjera 600 mm i srednjeg promjera unutrašnjeg vodiča 215 mm. Njegova je energija jednostavno

$$W_{osc2} = \frac{1}{2} L_t I_1^2 = \frac{1}{2} L_t \cos^2(\beta l) I_u^2 = 0{,}066 \cdot 10^{-6} I_u^2$$

Gubici u stijenkama rezonatora se određuju integracijom Poyntingova vektora po površini stijenki

$$P_g = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_s \oint H_s^2 \, dS$$

Obračunavaju se gubici na plaštu unutarnjeg vodiča i vanjskog vodiča, a ostalo se zanemaruje Valni otpor za bakar vodljivosti 56 MS/m iznosi

$$Z_s = \left(\frac{\omega \mu_0}{\varkappa_s}\right)^{1/2} = 1{,}23 \text{ milioma}$$

Prema tome su gubici u vodu

$$P_{g1} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} l Z_s \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) \left[1 + \frac{\sin(2\beta l)}{2\beta l}\right] I_u^2 = 4{,}1 \cdot 10^{-3} I_u^2$$

Slični su gubici u koničnom uvodu u komoru

$$P_{g2} = 1{,}15 \cdot 10^{-3} I_u^2$$

Dobrota rezonatora je

$$Q = \frac{\omega W_{osc}}{P_g} = \frac{67{,}9 \cdot 10^6 \cdot 0{,}346 \cdot 10^{-6}}{5{,}25 \cdot 10^{-3}} = 4470$$

Dobrota rezonatora opadne čim počne ubrzavanje čestica. Energija prenesena na čestice se manifestira kao gubitak u rezonatoru. Ovaj primjer pokazuje rezonator sastavljen od kombinacije *LC* oscilatora i koaksijalnog voda.

DODATAK

D.1. REDOVI

D.1.1. BINOMNI KOEFICIJENTI

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n$ »faktorijela«

$0! = 1$

D.1.2. TAYLOROVA FORMULA

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \qquad a < \xi < x \quad \text{ostatak}$$

Za $n > \infty$ dobiva se Taylorov red koji konvergira i jednak je funkciji na lijevoj strani, ako $R_n \to 0$.

D.1.3. REDOVI POTENCIJA

1. $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$

$|x| < 1$

Vrijedi za bilo koji realni broj a. Posebni su slučajevi

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots$ geometrijski red, $a = -1$

$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + - \cdots,$ $a = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{(1+x)^{1/2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + - \cdots,$ $a = -\frac{1}{2}$

2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots, \quad -1 < x \leqslant 1$

$\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^4} + \cdots\right), \quad |x| > 1$

$\ln(a+x) = \ln a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \cdots,\right.$

$a > 0, \quad x > -a$

3. $e^x = \exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$e = 2{,}718\,281\,828\ldots$

4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \qquad |x| < \infty$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots \qquad |x| < \infty$

$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots \qquad |x| < \pi$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5\,x^4}{24} + \frac{61\,x^6}{720} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7\,x^3}{360} + \frac{31\,x^5}{15120} + \cdots \qquad |x| < \pi$$

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\,\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\,\pi^2}\right)\cdots$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4\,x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,x^2}{25\,\pi^2}\right)\cdots$$

5. $$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{16\,x^7}{336} + \cdots \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots \qquad |x| \leqslant 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3\,x^3} - \frac{1}{5\,x^5} + - \cdots \qquad |x| \geqslant 1$$

$$= \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \cdots\right] \qquad |x| < \infty$$

6. $$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} - \frac{17\,x^7}{315} + - \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2\,x^5}{945} - + \cdots \qquad |x| < \pi$$

7. $$\operatorname{arsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} - + \cdots \qquad |x| < 1$$

$$= \ln(2x) + \frac{1}{4\,x^2} - \frac{3}{32\,x^4} + - \cdots \qquad |x| > 1$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(2\,x) - \frac{1}{4\,x^2} - \frac{3}{32\,x^4} - \cdots \qquad |x| > 1$$

$$\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad |x| < 1$$

8. $\operatorname{sh} x = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$

$$\operatorname{ch} x = \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

9. $\sin x \operatorname{sh} x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^6}{6!} + \frac{32x^{10}}{10!} - + \cdots \qquad |x| < \infty$

$$\cos x \operatorname{ch} x = 1 - \frac{4x^4}{4!} + \frac{16x^8}{8!} - \cdots \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x \operatorname{ch} x = x + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} - \frac{8x^7}{7!} + + - - \cdots \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x \operatorname{sh} x = x - \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \frac{8x^7}{7!} + - - + \cdots \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{sh} x - \sin x = \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^7}{7!} + \cdots \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{sh} x + \sin x = 2x + \frac{2x^5}{5!} + \cdots \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{ch} x - \cos x = \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{ch} x + \cos x = 2 + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^8}{8!} + \cdots \qquad |x| < \infty$$

10. Poglavlje 2.16. prikazuje uzajamno odslikavanje. **Uzajamno odslikavanje točkasta naboja** Q_0 na dvjema vodljivim ravninama, razmaknutim na udaljenost d kao na sl. 2.55., poslužilo je pri rješavanju polja točkasta naboja među takvim ravninama.

Neka je naboj u sredini između ravnina. Tada su njegove slike razmaknute međusobno na udaljenost $2d$. Njihov je predznak izmjeničan. Zadani naboj Q_0 nalazi se na kuglici, čiji je polumjer $r_0 \ll d$. Potencijal kuglice se sastoji od dva dijela. Prvi je od njezina vlastita naboja, a drugi je od svih slika naboja

$$\varphi_1 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r_0}$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{2}{1\cdot d} + \frac{2}{2\cdot d} - \frac{2}{3\cdot d} + - \cdots\right)$$

Prema tome je drugi potencijal

$$\varphi_2 = -\frac{Q_0}{2\pi\varepsilon d}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots\right)$$

Red u zagradi je red koji ima sumu jednaku ln 2, te je konačno potencijal kuglice

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r_0}\left(1 - \frac{2r_0}{d}\ln 2\right)$$

11. U poglavlju 2.16.1. je opisano **polje dvaju paralelnih vodiča** u zračnom rasporu između dvaju poluprostora, beskonačno permeabilnih. Prema sl. 2.56. vodiči su razmaknuti za a, a duljina zračnog raspora je $2d$. Jakost polja među vodičima iznosi

$$\frac{H}{H_0} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi_1^2 + n^2} + \frac{2}{\xi_2^2 + n^2}\right)$$

Tu je

$$H_0 = \frac{i}{2d}, \qquad \xi_1 = \frac{x}{2d}, \qquad \xi_2 = \frac{a - x}{2d}$$

Beskonačni red podsjeća na red

$$\operatorname{cth}(\pi\xi) - \frac{1}{\pi\xi} = \frac{2\xi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi^2 + n^2}$$

Prema tome je jakost polja

$$\frac{H}{H_0} = \frac{1}{2}\operatorname{cth}(\pi\xi_1) + \frac{1}{2}\operatorname{cth}(\pi\xi_2) = \operatorname{cth}\frac{\pi x}{2d}$$

kako je dobiveno u poglavlju 2.16.1.

12. Poglavlje 2.16.2. je posvećeno polju **dviju kugli.** Kapacitet dviju kugli se dobiva iz odnosa

$$\frac{C}{C_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k = \operatorname{sh} x \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}[(k+1)x]} = \operatorname{sh} x \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{cosech}[(k+1)x]$$

kako je izneseno u spomenutom poglavlju. Brojevi α_k se dobiju iz jednadžbe

$$\frac{1}{\alpha_k} = m\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_{k-2}}$$

uzevši u obzir da je

$$\frac{1}{a_0} = 1, \qquad \frac{1}{a_1} = m, \qquad m = \frac{d}{r_0}$$

Beskonačni red hiperbolnih kosekansa može se transformirati da brže konvengira. Uz pomoć binomnog reda dobiva se da je pojedini član reda

$$s_k = \frac{1}{\operatorname{sh}[(k+1)x]} = \frac{2}{e^{(k+1)x} - e^{-(k+1)x}}$$

$$s_k = 2e^{-(k+1)x}\left[1 + e^{-2(k+1)x} + e^{-4(k+1)x} + e^{-6(k+1)x} + \cdots\right]$$

Postoji geometrijski red eksponencijalnih funkcija

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} = \frac{1}{1 - e^{-ak}}, \qquad a > 0$$

Izlazi da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k = 2\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + 2\frac{e^{-3x}}{1 - e^{-3x}} + 2\frac{e^{-5x}}{1 - e^{-5x}} + \cdots$$

Sad se kapacitet prikazuje novim redom koji brže konvergira

$$\frac{C}{C_\infty} = 2\operatorname{sh} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(2k+1)x} - 1}$$

Tu je

$$e^x = \frac{m}{2} + \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^{1/2}$$

Ako se usvoji kao najveća greška 1 %, kapacitet se smije računati iz izraza

$$\frac{C}{C_\infty} = \frac{2\operatorname{sh} x}{e^x - 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-x}} = 1 + e^{-x} = 1 + \frac{m}{2} - \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^{1/2} \qquad \text{za } m > 5$$

$$\frac{C}{C_\infty} = 2\operatorname{sh} x\left(\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^{3x} - 1}\right) = 1 + e^{-x} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x} - 1} \qquad \text{za } m > 3$$

D.1.4. FOURIJEROVI REDOVI

Periodička funkcija se prikazuje beskonačnim redom sinusa i kosinusa. Funkcija

$$y = f(x)$$

ima period T, ako je za svaki x

$$f(x + n\,T) = f(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Period T definira *kružnu frekvenciju* funkcije $f(x)$

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T}$$

Funkcija $y = f(x)$ se prikazuje beskonačnim redom

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\,\omega\,x) + b_k \sin(k\,\omega\,x)]$$

Amplitude pojedinih članova reda iznose

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Stanovite funkcije nemaju sve članove reda. *Izmjenična funkcija* nema istosmjernog člana

$$a_0 = 0$$

Parna funkcija nema sinusnih članova

$$f(-x) = f(x), \qquad b_k = 0$$

Neparna funkcija nema kosinusnih članova

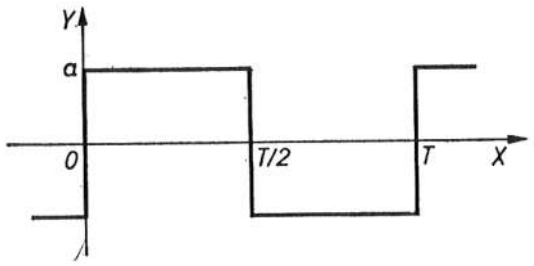
$$f(-x) = -f(x), \qquad a_k = 0$$

Simetrična funkcija nema članova parnog reda

$$f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x), \qquad a_{2k} = b_{2k} = 0$$

Primjeri funkcija

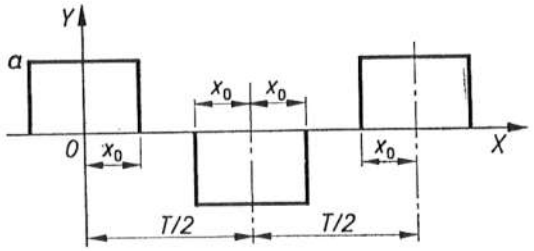
1. *Pravokutnik*



$$b_k = \frac{4\,a}{\pi\,k},$$

$$k = 1, 3, 5, \ldots$$

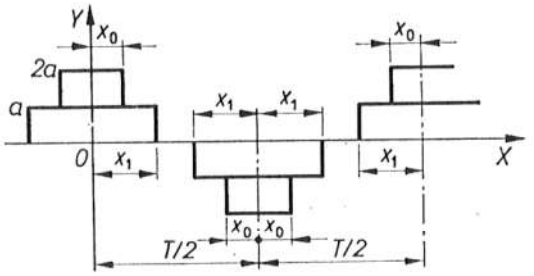
2. *Nepotpuni pravokutnik*



$$a_k = \frac{4\,a}{\pi\,k}\sin(k\,\omega\,x_0),$$

$$k = 1, 3, 5, \ldots$$

3. *Stepenasti pravokutnik*

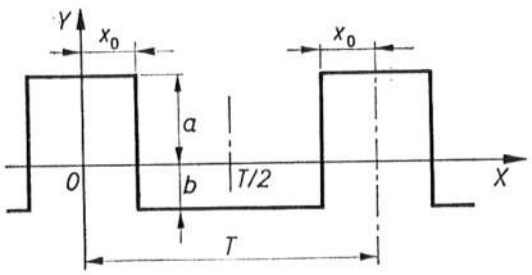


$$a_k = \frac{4\,a}{\pi\,k}\,[\sin(k\,\omega\,x_0) + \sin(k\,\omega\,x_1)],$$

$$k = 1, 3, 5, \ldots$$

$$a_k = \frac{8\,a}{\pi\,k}\sin\left(k\omega\frac{x_1+x_0}{2}\right)\cos\left(k\omega\frac{x_1-x_0}{2}\right)$$

4. *Nesimetrični pravokutnik*

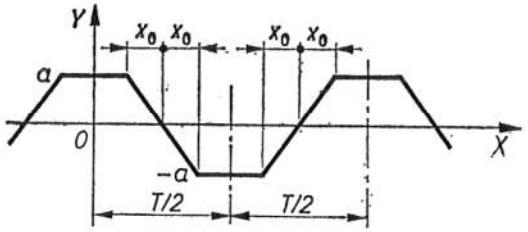


$$2\,a\,x_0 = b\,(T - 2\,x_0)$$

$$a_k = \frac{2\,(a+b)}{\pi\,k}\sin(k\,\omega\,x_0)$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

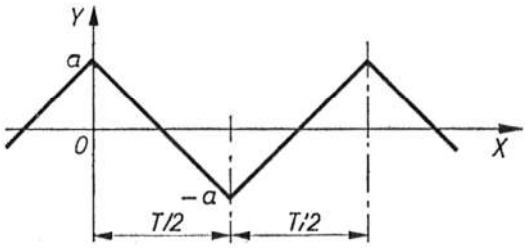
5. *Trapez*



$$a_k = \frac{4\,a}{\pi\,k}\,\frac{\sin\,(k\,\omega\,x_0)}{k\,\omega\,x_0},$$

$$k = 1, 3, 5, \ldots$$

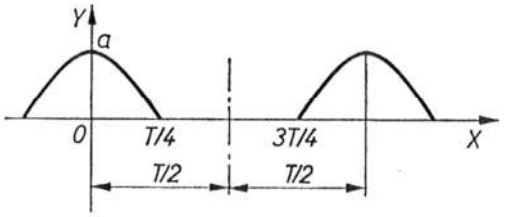
6. *Trokut*



$$a_k = \frac{8\,a}{\pi\,k^2}\sin\left(k\,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$k = 1, 3, 5, \ldots$$

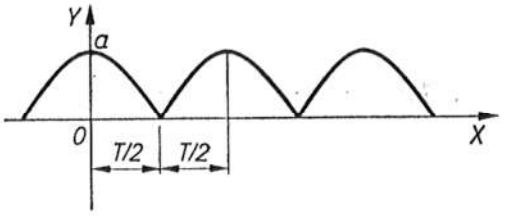
7. *Poluval*



$$a_0 = \frac{2\,a}{\pi} = 0{,}736\,a$$

$$a_k = \frac{a}{\pi}\left\{\frac{\sin\left[(k+1)\frac{\pi}{2}\right]}{k+1} + \frac{\sin\left[(k-1)\frac{\pi}{2}\right]}{k-1}\right\}$$

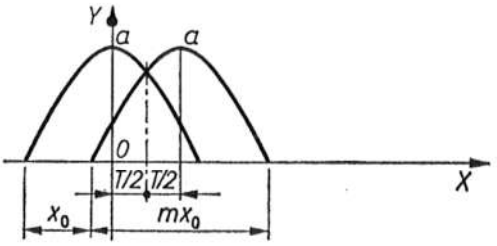
8. *Puni ispravljeni val*



$$a_0 = \frac{4\,a}{\pi} = 1{,}274\,a$$

$$a_k = -\,\frac{4\,a}{\pi}\,\frac{\cos\,(\pi\,k)}{4\,k^2 - 1}$$

9. *Preklopljeni val*



$$x_0 = T, \quad m \geqslant 1$$

$$a_0 = 2\,a\,\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}$$

$$a_k = -2a \frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \frac{\cos(\pi k)}{4m^2 k^2 - 1}$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad a_0 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} a = 1{,}654\, a, \quad a_k = -\frac{3\sqrt{3}}{\pi} a \frac{\cos(\pi k)}{9k^2 - 1}$$

$$m = 3, \quad a_0 = \frac{6a}{\pi} = 1{,}910\, a, \quad a_k = -\frac{6a}{\pi} \frac{\cos(\pi k)}{36k^2 - 1}$$

Red sinusa i kosinusa se kombinira u jedan red kosinusa

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum c_k \cos(k\,\omega\,x + \varphi_k)$$

$$c_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

Trigonometrijski red se prikazuje kao *eksponencijalni red*. Zato je potreban odnos

$$\cos(k\,\omega\,x) = \frac{1}{2}(e^{jk\omega x} + e^{-jk\omega x})$$

$$\sin(k\,\omega\,x) = \frac{1}{2j}(e^{jk\omega x} - e^{-jk\omega x})$$

Sad je

$$a_k \cos(k\,\omega\,x) + b_k \sin(k\,\omega\,x) = c_k\, e^{jk\omega x} + c_{-k}\, e^{-jk\omega x}$$

gdje je

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - j\,b_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + j\,b_k)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Članovi c_k i c_{-k} su konjugirano kompleksni. Eksponencijalni red glasi

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega x}$$

Pojedini koeficijenti c_k iznose

$$c_k = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\, e^{-jk\omega x}\, \mathrm{d}x$$

Ovaj način prikazivanja trigonometrijskog reda je kompaktniji i podesniji u analizi.

D.1.5. ORTOGONALNE I NORMIRANE FUNKCIJE

Neka je u intervalu

$$a < x < b$$

zadan niz funkcija

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

Te su funkcije u tome intervalu *ortogonalne*, ako vrijedi

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{za } m \neq n$$

Nešto je općenitiji pojam ortogonalnosti ako se traži

$$\int_a^b r(x)\,\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{za } m \neq n$$

gdje je $r(x)$ negativna funkcija, koja se često naziva *funkcija gustoće*. U tome slučaju su funkcije

$$\sqrt{r(x)}\,\varphi_n(x), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

u užem smislu ortogonalne, tj. ortogonalne po prvotno danoj definiciji. Svojstvo ortogonalnosti imaju trigonometrijske, Besselove i Legendreove funkcije. Sve ortogonalne funkcije služe u prikazivanju funkcija beskonačnim redom.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\varphi_k(x)$$

Amplitude pojedinih članova se dobiju integracijom unutar perioda T funkcije $f(x)$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\varphi_r(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} a_k\,\varphi_k(x)\,\varphi_r(x)\,\mathrm{d}x = a_k \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_k^2(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{za } r = k$$

$$a_k = \frac{1}{\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_k^2(x)\,\mathrm{d}x} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x$$

To je već iskorišteno u formiranju redova trigonometrijskih funkcija. Predstavljanje periodičkih funkcija beskonačnim redom ortogonalnih funkcija zove se *harmonička analiza*.

Funkcija $\varphi(x)$ sa svojstvom

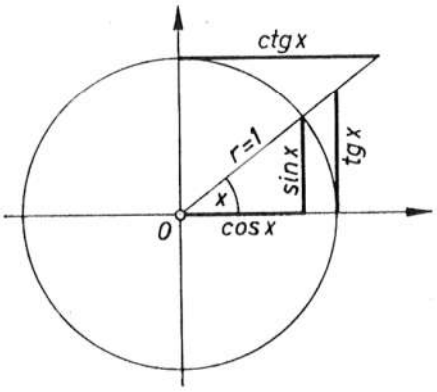
$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1$$

zove se *normirana* funkcija.

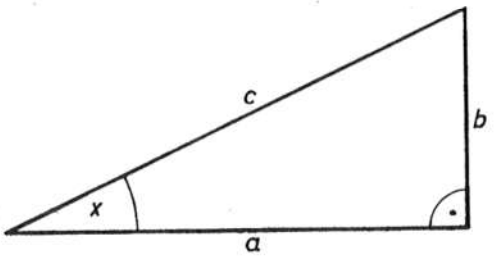
D. 1.6. CIRKULARNE ILI TRIGONOMETRIJSKE I HIPERBOLNE FUNKCIJE

Definicije

1. Geometrijska definicija *cirkularnih funkcija* sin x, cos x, tg x, ctg x na jediničnom krugu. Površina isječka iznosi $x/2$. (Sl. A)



A



B

2. Geometrijska definicija *cirkularnih funkcija* na pravokutnom trokutu (sl. B)

$$\sin x = \frac{b}{c}, \qquad \cos x = \frac{a}{c},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

$$\sec x = \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin x}$$

3. *Cirkularne funkcije* iz eksponencijalnih funkcija

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}, \quad z = x + jy$$

$$\cos z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{\operatorname{ctg} z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

4. *Arkus funkcije* su inverzne funkcije cirkularnih funkcija

$$y = \sin x, \quad x = \operatorname{arc}\sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos x, \quad x = \operatorname{arc}\cos y, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} y, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} y, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

Kutni kvadrant $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$ se određuje iz predznaka pripadnih funkcija $\sin x$ i $\cos x$ kad se traži ispravan fazni odnos analiziranih veličina.

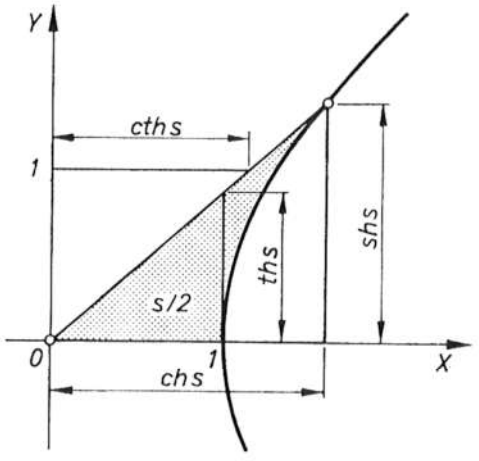
5. *Hiperbolne funkcije* — geometrijska definicija na jediničnoj hiperboli

$$x^2 - y^2 = 1$$

Površina šrafiranog sektora iznosi $s/2$.

Na slici su označeni iznosi pojedinih hiperbolnih funkcija.

Po tome su one analogne cirkularnim funkcijama, koje su definirane sličnim sektorom na jediničnom krugu.



6. *Hiperbolne funkcije* iz eksponencijalnih funkcija

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \qquad z = x + jy$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{\operatorname{cth} z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z}$$

7. *Area funkcije* su inverzne funkcije hiperbolnih funkcija

$$y = \operatorname{sh} x, \quad x = \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$y = \operatorname{ch} x, \quad x = \operatorname{arch} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad y \geq 1$$

$$y = \operatorname{th} x, \quad x = \operatorname{arth} y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}, \quad 0 \leq y^2 < 1$$

$$y = \operatorname{cth} x, \quad x = \operatorname{arcth} y = \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}, \quad y^2 > 1$$

D.1.6.1. Imaginarni broj

1. $\sin(jy) = j \operatorname{sh} y$
2. $\cos(jy) = \operatorname{ch} y$
3. $\operatorname{tg}(jy) = j \operatorname{th} y$
4. $\operatorname{ctg}(jy) = -j \operatorname{cth} y$
5. $\operatorname{arc\,sin}(jy) = j \operatorname{arsh} y = j \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$
6. $\operatorname{arc\,cos}(jy) = -j \operatorname{arch}(jy) = \frac{\pi}{2} \pm j \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$
7. $\operatorname{arc\,tg}(jy) = j \operatorname{arth} y = j\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$
8. $\operatorname{arc\,ctg}(jy) = -j \operatorname{arcth} y = -j\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}$
9. $\operatorname{sh}(jy) = j \sin y$
10. $\operatorname{ch}(jy) = \cos y$

11. $\text{th}\,(jy) = j\,\text{tg}\,y$

12. $\text{cth}\,(jy) = -j\,\text{ctg}\,y$

13. $\text{arsh}\,(jy) = j\,\text{arc sin}\,y$

14. $\text{arch}\,(jy) = j\,\text{arc cos}\,(jy) = j\frac{\pi}{2} \pm \ln\,(y + \sqrt{1 + y^2})$

15. $\text{arth}\,(jy) = j\,\text{arc tg}\,y$

16. $\text{arcth}\,(jy) = -j\,\text{arcctg}\,y$

D.1.6.2. Broj veći od jedinice

1. $\text{arc sin}\,x = \frac{\pi}{2} \pm j\,\text{arch}\,x = \frac{\pi}{2} \pm j\ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geqslant 1$

2. $\text{arc cos}\,x = \pm j\,\text{arch}\,x = \pm j\ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geqslant 1$

3. $\text{arch}\,x = j\,\text{arc cos}\,x, \quad x \leqslant 1$

4. $\text{arch}\,(-x) = \text{arch}\,x + j\pi, \quad x \geqslant 1$

5. $\text{arch}\,(-x) = j\pi - \text{arc cos}\,x, \quad x \leqslant 1$

6. $\text{arth}\,x = \text{arcth}\,x \pm j\frac{\pi}{2}, \quad x > 1$

7. $\text{arcth}\,x = \text{arth}\,x \pm j\frac{\pi}{2}, \quad x < 1$

D.1.6.3. Kompleksni broj, $z = x + jy$

1. $\sin z = \sin x\,\text{ch}\,y + j\cos x\,\text{sh}\,y$

   $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \text{sh}^2 y = \frac{1}{2}[\text{ch}\,(2y) - \cos\,(2x)]$

   $\arg \sin z = \text{arc tg}\,(\text{ctg}\,x\,\text{th}\,y)$

2. $\cos z = \cos x\,\text{ch}\,y - j\sin x\,\text{sh}\,y$

   $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \text{sh}^2 y = \frac{1}{2}\,[\text{ch}\,(2y) + \cos\,(2x)]$

   $\arg \cos z = -\,\text{arc tg}\,(\text{tg}\,x\,\text{th}\,y)$

3. $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin(2x) + j \operatorname{sh}(2y)}{\cos(2x) + \operatorname{ch}(2y)}$

$|\operatorname{tg} z|^2 = \dfrac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y) + \cos(2x)}$

$\arg \operatorname{tg} z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\operatorname{sh}(2y)}{\sin(2x)}$

4. $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\sin(2x) - j \operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}$

$|\operatorname{ctg} z|^2 = \dfrac{\operatorname{ch}(2y) + \cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}$

$\operatorname{argctg} z = -\operatorname{arc\,tg} \dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2x}$

5. $\operatorname{arc\,sin} z = \operatorname{arc\,sin} b + j \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$

$a = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + y^2]^{1/2} + \frac{1}{2}[(x-1)^2 + y^2]^{1/2}$

$b = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + y^2]^{1/2} - \frac{1}{2}[(x-1)^2 + y^2]^{1/2}$

6. $\operatorname{arc\,cos} z = \pm [\operatorname{arc\,cos} b - j \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})]$

a i b kao u 5.

7. $\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2} \operatorname{cra\,tg} \dfrac{2x}{1 - x^2 - y^2} + j \frac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2}, \qquad z^2 \neq -1$

8. $\operatorname{arc\,ctg} z = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 1} + j \frac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 + (x^2 + y^2 - y)^2}{x^2 + (x^2 + y^2 + y)^2}, \qquad z^2 \neq -1$

9. $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y$

$|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)]$

$\arg \operatorname{sh} z = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{cth} x \operatorname{tg} y)$

10. $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + j \operatorname{sh} x \sin y$

$|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x) + \cos(2y)]$

$\operatorname{argch} z = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x \operatorname{tg} y)$

11. $$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh}(2x) + j \sin(2y)}{\operatorname{ch}(2x) + \cos(2y)}$$

$$|\operatorname{th} z|^2 = \frac{\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)}{\operatorname{ch}(2x) + \cos(2y)}$$

$$\operatorname{argth} z = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin(2y)}{\operatorname{sh}(2x)}$$

12. $$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{sh}(2x) - j \sin(2y)}{\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)}$$

$$|\operatorname{cth} z|^2 = \frac{\operatorname{ch}(2x) + \cos(2y)}{\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)}$$

$$\operatorname{arg\,cth} z = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin(2y)}{\operatorname{sh}(2x)}$$

13. $$\operatorname{arsh} z = \operatorname{arch} a + j \operatorname{arc\,sin} b$$

$$a = \frac{1}{2}[x^2 + (y+1)^2]^{1/2} + \frac{1}{2}[x^2 + (y-1)^2]^{1/2}$$

$$b = \frac{1}{2}[x^2 + (y+1)^2]^{1/2} - \frac{1}{2}[x^2 + (y-1)^2]^{1/2}$$

14. $$\operatorname{arch} z = \operatorname{arch} a + j \operatorname{arc\,cos} b$$

$$a = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + y^2]^{1/2} + \frac{1}{2}[(x-1)^2 + y^2]^{1/2}$$

$$b = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + y^2]^{1/2} - \frac{1}{2}[(x-1)^2 + y^2]^{1/2}$$

15. $$\operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{arth} \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} + j \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}$$

16. $$\operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{arth} \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} + j \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}$$

D.2. DIFERENCIRANJE

1. Produkt dviju funkcija $u = u(x)$ i $v = v(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

2. Kvocijent dviju funkcija $u = u(x)$ i $v = v(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

3. Složena funkcija $u = u(v)$ i $v = v(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

4. Eksponencijalna složena funkcija u^v, $v = v(x)$, $u = u(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u^v) = u^v\left(\frac{v}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\ln u\right)$$

D.2.1. DVIJE PARALELNE STRUJNICE

Zadane su dvije paralelne strujnice prema sl. 2.38. One proizvode polje vektorpotencijala prema izrazu (2.106)

$$A = \frac{\mu i}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

Radijusvektori iznose

$$r_1 = (x^2 + y^2)^{1/2}, \qquad r_2 = [(x-a)^2 + y^2]^{1/2}$$

Komponente jakosti polja se dobiju iz odnosa

$$H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{i}{2\pi}\frac{r_2}{r_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{i}{2\pi}\frac{r_2}{r_1}\frac{r_2\dfrac{\partial r_1}{\partial y} - r_1\dfrac{\partial r_2}{\partial y}}{r_2^2}$$

$$H_x = \frac{i}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y} - \frac{1}{r_2}\frac{\partial r_2}{\partial y}\right]$$

Tu su

$$\frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\cdot 2y = \frac{y}{r_1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{y}{r_2}$$

Konačno je

$$H_x = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2}\right)$$

kao u izrazu (2.107).

D.2.2. KRUŽNA STRUJNICA

Kružna strujnica ima polje kako je prikazano u primjeru 2.23. Njezin je vektor-potencijal iz izraza (2.111)

$$A = \frac{\mu i}{\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}k\right)K(k) - \frac{E(k)}{k}\right]$$

$$k = \left[\frac{4 r_0 r}{(r_0 + r)^2 + z^2}\right]^{1/2}$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$K(k)$ i $E(k)$ su potpuni eliptički integrali prve i druge vrste, a modula k. Komponenta jakosti polja iznosi

$$H_r = -\frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r A) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z}$$

Ovdje su potrebni izrazi

$$\frac{\mathrm{d}K(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{K(k)}{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}E(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k) - K(k)}{k}$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{4 r_0 r}{(r_0 + r)^2 + z^2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{1}{k}\frac{4 r_0 r}{[(r_0 + r)^2 + z^2]^2}\,2z$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{z}{k}\frac{1}{4 r_0 r}k^4 = -\frac{z k^3}{4 r_0 r}$$

Sada je radijalna komponenta polja

$$H_r = -\frac{i}{\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left[\left(-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{z\,k^3}{4\,r_0\,r}\right)K(k)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}k\right)\left(-\frac{z\,k^3}{4\,r_0\,r}\right)\frac{\mathrm{d}K(k)}{\mathrm{d}k}+\frac{1}{k^2}\left(-\frac{z\,k^3}{4\,r_0\,r}\right)E(k)-$$

$$\left.-\frac{1}{k}\left(-\frac{z\,k^3}{4\,r_0\,r}\right)\frac{\mathrm{d}E(k)}{\mathrm{d}k}\right]$$

$$H_r = \frac{i}{4\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\frac{z\,k^3}{r_0\,r}\left[\left(-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}\right)K(k)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}k\right)\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}k\right)\frac{K(k)}{k}+\frac{1}{k^2}E(k)-\frac{1}{k^2}E(k)+\frac{1}{k^2}K(k)\right]$$

$$H_r = \frac{i}{4\pi}\,\frac{z\,k^3}{r\,(r_0\,r)^{1/2}}\left[-\frac{1}{k^2}K(k)+\frac{2-k^2}{2\,k^2\,(1-k^2)}E(k)\right]$$

Konačno je radijalna komponenta polja kao u (2.112)

$$H_r = \frac{i}{4\pi}\,\frac{z\,k}{r\,(r_0\,r)^{1/2}}\left[-K(k)+\frac{r_0^2+r^2+z^2}{(r_0-r)^2+z^2}E(k)\right]$$

Slična je aksijalna komponenta

$$H_z = \frac{1}{\mu}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,A) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{A}{r}+\frac{\partial A}{\partial r}\right)$$

Ovdje su potrebni novi izrazi

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{k}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{4\,r_0\,r}{(r_0+r)^2+z^2}\right] = \frac{1}{2\,k}\,\frac{4\,r_0\,[(r_0+r)^2+z^2]-8\,r_0\,r\,(r_0+r)}{[(r_0+r)^2+z^2]^2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{2\,k}\left[\frac{k^2}{r}-\frac{(r_0+r)\,k^4}{2\,r_0\,r}\right] = \frac{k}{2\,r}\left[1-\frac{r_0+r}{2\,r_0}k^2\right]$$

Tada je

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{1}{\mu}\,\frac{A}{2\,r}+\frac{i}{\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left[-\frac{1}{k^2}K(k)+\frac{2-k^2}{2\,k^2\,(1-k^2)}E(k)\right]\frac{\partial k}{\partial r}$$

Prema tome je aksijalna komponenta polja

$$H_z = \frac{i\,k}{2\,\pi\,r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left\{\frac{2-k^2}{2\,k^2}\,K(k) - \frac{1}{k^2}\,E(k) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{r_0 + r}{2\,r_0}\,k^2\right)\left[-\frac{1}{k^2}\,K(k) + \frac{2-k^2}{2\,k^2\,(1-k^2)}\,E(k)\right]\right\}$$

$$H_z = \frac{i\,k}{2\,\pi\,r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left[\frac{r}{2\,r_0}\,K(k) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{k^2} + \frac{2-k^2}{2\,k^2\,(1-k^2)} - \frac{r_0 + r}{4\,r_0}\,\frac{2-k^2}{1-k^2}\right)E(k)\right]$$

$$H_z = \frac{i}{4\,\pi}\,\frac{k}{(r_0\,r)^{1/2}}\left[K(k) + \frac{2\,r_0}{r}\left(\frac{1}{2\,(1-k^2)} - \frac{r_0 + r}{4\,r_0}\,\frac{2-k^2}{1-k^2}\right)E(k)\right]$$

$$H_z = \frac{i}{4\,\pi}\,\frac{k}{(r_0\,r)^{1/2}}\left[K(k) + \frac{2\,r_0 - (r_0 + r)\,(2-k^2)}{2\,r\,(1-k^2)}\,E(k)\right]$$

$$H_z = \frac{i}{4\,\pi}\,\frac{k}{(r_0\,r)^{1/2}}\left[K(k) + \frac{r_0^2 - r^2 - z^2}{(r_0 - r)^2 + z^2}\,E(k)\right]$$

Takav je iznos aksijalne komponente polja već naveden u (2.112).

D.3. INTEGRIRANJE

1. *Parcijalna integracija.* Integrirana veličina $f(x)\,\mathrm{d}x$ prikazuje se novom veličinom

$$f(x)\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}v$$

koja se integrira

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\,v - \int v\,\mathrm{d}u$$

2. *Diferenciranje integrala*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\int_{a(c)}^{b(c)} f(x, c)\,\mathrm{d}x = \int_{a(c)}^{b(c)} \frac{\partial}{\partial c} f(x, c)\,\mathrm{d}x + f(b, c)\,\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}c} - f(a, c)\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}c}$$

3. *Integrali elementarnih funkcija*

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int e^x \, dx = e^x, \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \qquad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x = -\operatorname{arc\,cos} x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg} x$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x, \qquad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arth} x = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

D.3.1. STRUJNA TRAKA

Primjer 2.22. obrađuje polje *strujne trake*. Vektorpotencijal je zadan integralom

$$A = -\frac{\mu K}{4\pi} I$$

$$I = \int_{-c}^{c} \ln \frac{(x_0 - \xi)^2 + y_0^2}{(x - \xi)^2 + y^2} \, d\xi = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_{-c}^{c} \ln [(x_0 - \xi)^2 + y_0^2] \, d\xi$$

$$I_2 = \int_{-c}^{c} \ln [(x - \xi)^2 + y^2] \, d\xi = 4c \ln y + \int_{-c}^{c} \ln \left[\left(\frac{x - \xi}{y} \right)^2 + 1 \right] d\xi$$

Prvi i drugi integral su jednaki, te je dovoljno da se proračun provede na drugom integralu. Uvodi se nova varijabla

$$\frac{x - \xi}{y} = u$$

te je

$$d\xi = -y \, du, \qquad \xi = -c, \quad u = u_1 = \frac{x + c}{y}$$

$$\xi = c, \qquad u = u_2 = \frac{x - c}{y}$$

Sada je integral

$$I_2 = 4c \ln y - y \int_{u_1}^{u_2} \ln (u^2 + 1) \, du$$

Parcijalna integracija daje

$$I_2 = 4c \ln y - y u \ln (u^2 + 1) \Big|_{u_1}^{u_2} + 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2}{u^2 + 1} \, du$$

$$I_2 = 4y \ln y - y u \ln (u^2 + 1) + 2y u + 2y \operatorname{arc\,ctg} u \Big|_{u_1}^{u_2}$$

$$I_2 = 4c \ln y - (x - \xi) \ln \left[\left(\frac{x - \xi}{y} \right)^2 + 1 \right] + 2(x - \xi) + 2y \operatorname{arc\,ctg} \frac{x - \xi}{x} \Big|_{-c}^{c}$$

Uzevši oznake iz sl. 2.42., dobiva se

$$I_2 = -2(x-c)\ln r_2 + 2(x+c)\ln r_1 - 4c + 2y(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

Prvi integral iznosi za $x_0 = 0$ i $r_{10} = r_{20}$ i $\vartheta_{10} = \pi - \vartheta_{20}$

$$I_1 = 4c\ln r_{20} - 4c + 2y_0(2\vartheta_{20} - \pi)$$

Sad je potencijal

$$A = -\frac{\mu K}{2\pi}[(x-c)\ln r_2 - (x+c)\ln r_1 + y(\vartheta_1 - \vartheta_2)] + A_0$$

a to je kao u izrazu (2.109).

D.3.2. PARALELNE STRUJNE TRAKE

Ulančeni tok paralelnih *strujnih traka* i njihov induktivitet se računaju u primjeru 2.23., prema sl. 2.43. Relativni ulančeni tok, a jednako i induktivitet, iznose

$$\frac{\Psi}{\Psi_\infty} = \frac{L}{L_\infty} = -\frac{2}{\mu\frac{d}{c}i}\int_{-c}^{c} A_1 \frac{\mathrm{d}x}{2c}$$

$$A_1 = -\frac{\mu i}{8\pi c}\left[(c+x)\ln\frac{(c+x)^2+4d^2}{(c+x)^2} + (c-x)\ln\frac{(c-x)^2+4d^2}{(c-x)^2} + 4d(\vartheta_{12} - \vartheta_{22})\right]$$

Izraz dobiva oblik

$$\frac{L}{L_\infty} = \frac{1}{4\pi c}(I_1 + I_2 + I_3)$$

$$I_1 = \int_{-c}^{c} \frac{c+x}{2d}\ln\frac{(c+x)^2+4d^2}{(c+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_{-c}^{c} \frac{c-x}{2d}\ln\frac{(c-x)^2+4d^2}{(c-x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = 2\int_{-c}^{c}(\vartheta_{12} - \vartheta_{22})\,\mathrm{d}x$$

$$\vartheta_{12} = -\operatorname{arctg}\frac{2d}{c+x} = -\operatorname{arc\,ctg}\frac{c+x}{2d}$$

$$\vartheta_{22} = -\left[\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{2d}{c-x}\right] = -\left[\pi - \operatorname{arc\,ctg}\frac{c-x}{2d}\right]$$

U prvi integral treba uvesti novu varijablu

$$\frac{c+x}{2d} = u, \qquad \mathrm{d}x = 2d\,\mathrm{d}u$$

Taj integral sad glasi

$$I_1 = 2d\int u \ln\frac{u^2+1}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Primjenjuje se postupna integracija

$$I_1 = 2d\frac{u^2}{2}\ln\frac{u^2+1}{u^2} - d\int\frac{u^4}{u^2+1}\left(-\frac{2}{u^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$I_1 = d\,u^2\ln\frac{u^2+1}{u^2} + d\ln(u^2+1)$$

Konačno je prvi integral

$$I_1 = d\left(\frac{c+x}{2d}\right)^2\ln\frac{(c+x)^2+4d^2}{(c+x)^2} + d\ln\left[\left(\frac{c+x}{2d}\right)^2+1\right]\Bigg|_{-c}^{c}$$

Isto tako se rješava drugi integral uvođenjem nove nepoznanice

$$\frac{c-x}{2d} = v, \qquad \mathrm{d}x = -2d\,\mathrm{d}v$$

te je sada

$$I_2 = -2d\int v\ln\frac{v^2+1}{v^2}\,\mathrm{d}v$$

To je isti integral kao i I_1 samo je suprotna predznaka, te je

$$I_2 = -d\left(\frac{c-x}{2d}\right)^2\ln\frac{(c-x)^2+4d^2}{(c-x)^2} - d\ln\left[\left(\frac{c-x}{2d}\right)^2+1\right]\Bigg|_{-c}^{c}$$

Treći integral se rješava uvođenjem istih novih varijabli

$$I_3 = 4\pi c - 4d \int \operatorname{arc\,ctg} u \, du + 4d \int \operatorname{arc\,ctg} v \, dv$$

Postupnom integracijom slijedi

$$I_3 = 4\pi c - 4d\,u \operatorname{arc\,ctg} u - 4d \int \frac{u}{1+u^2} du +$$

$$+ 4d\,v \operatorname{arc\,ctg} v + 4d \int \frac{v}{1+v^2} dv$$

Konačno je treći integral

$$I_3 = 4\pi c - 2(c+x) \operatorname{arc\,ctg} \frac{c+x}{2d} + 2(c-x) \operatorname{arc\,ctg} \frac{c-x}{2d} -$$

$$- 2d \ln \left[\left(\frac{c+x}{2d} \right)^2 + 1 \right] + 2d \ln \left[\left(\frac{c-x}{2d} \right)^2 + 1 \right] \Bigg|_{-c}^{c}$$

Granice se uvrste, te se dobije ukupni integral

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{c^2}{d} \ln \frac{c^2+d^2}{c^2} + \frac{c^2}{d} \ln \frac{c^2+d^2}{c^2} + 4\pi c -$$

$$- 4c \operatorname{arc\,ctg} \frac{c}{d} - 4c \operatorname{arc\,ctg} \frac{c}{d} - \ln \frac{c^2+d^2}{d^2} - d \ln \frac{c^2+d^2}{d^2}$$

$$I = 4\pi c - 8c \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{c} + 2 \frac{c^2}{d} \ln \frac{c^2+d^2}{c^2} - 2d \ln \frac{c^2+d^2}{d^2}$$

Sad je induktivitet

$$\frac{L}{L_\infty} = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{c} + \frac{c}{2\pi d} \ln \frac{c^2+d^2}{c^2} - \frac{d}{2\pi c} \ln \frac{c^2+d^2}{d^2}$$

D.3.3. SILA IZMEĐU TOČKASTA NABOJA I KUGLE

Sila između točkasta naboja i nabijene kugle je prikazana u primjeru 3.1. Ta sila iznosi

$$F = F_1 + F_2$$

$$F_1 = \frac{\pi R_0^2}{\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \sigma_1^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$F_2 = \frac{2\pi R_0^2 \sigma_2}{\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \sigma_1 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_0^2} \frac{1-k^2}{(1+k^2+2k\cos\vartheta)^{3/2}}$$

Sad su sile

$$F_1 = \frac{Q_1^2 (1-k^2)^2}{16\pi R_0^2 \varepsilon_0} I_1, \qquad F_2 = \frac{Q_1 \sigma_2 (1-k^2)}{2\varepsilon_0} I_2$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1+k^2+2k\cos\vartheta)^3} \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin\vartheta\cos\vartheta\,(1+k^2+2k\cos\vartheta)^{-3/2} \, \mathrm{d}\vartheta$$

Oba integrala se rješavaju postupnom integracijom. Prvi integral iznosi

$$I_1 = +\frac{1}{4k} \frac{\cos\vartheta}{(1+k^2+2k\cos\vartheta)^2} \Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{4k} \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{(1+k^2+2k\cos\vartheta)^2} \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$I_1 = \frac{1}{4k} \left[\frac{-1}{(1-k)^4} - \frac{1}{(1+k)^4} \right] + \frac{1}{8k^2} \frac{1}{1+k^2+2k\cos\vartheta} \Bigg|_0^{\pi}$$

$$I_1 = -\frac{1}{4k} \left[\frac{(1+k)^4 + (1-k)^4}{(1-k^2)^4} - \frac{2}{(1-k^2)^2} \right]$$

$$I_1 = -\frac{1}{4k} \frac{[(1+k)^2 - (1-k)^2]^2}{(1-k^2)^4} = -\frac{4k}{(1-k^2)^4}$$

Prva sila iznosi

$$F_1 = -\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2}\frac{k}{(k^2-1)^2}$$

Drugi integral slijedi istim postupkom

$$I_2 = \frac{1}{k}\cos\vartheta\,(1+k^2+2k\cos\vartheta)^{-1/2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,(1+k^2+2k\cos\vartheta)^{-1/2}\,\mathrm{d}\vartheta$$

$$I_2 = \frac{1}{k}\left[\frac{-1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right] - \frac{1}{k^2}(1+k^2+2k\cos\vartheta)^{1/2}\Big|_0^{\pi}$$

$$I_2 = -\frac{2k}{k(k^2-1)} + \frac{2}{k^2} = -\frac{2}{k^2(k^2-1)}$$

Sad je druga sila

$$F_2 = \frac{Q_1\sigma_2}{\varepsilon_0 k^2}$$

Takvi iznosi sila su u izrazima (3.24).

D.3.4. RASTAVLJANJE NA PARCIJALNE RAZLOMKE

Opća racionalna funkcija oblika je

$$R(x) = \frac{F(x)}{f(x)}$$

gdje su $F(x)$ i $f(x)$ polinomi.

Ona sadrži u sebi cijeli dio $E(x)$ i pravi razlomak $\varphi(x)/f(x)$

$$R(x) = E(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

Stupanj brojnika niži je od stupnja nazivnika. Pravi razlomak se rastavlja na *parcijalne razlomke*, prethodno utvrđujući nultočke funkcije $f(x)$. Njezine su nultočke općenito višestruke. Neka su nultočke $a, b, c, \ldots$, a one su $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$-struke. Tada je

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} +$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} +$$
$$+ \frac{C_\gamma}{(x-c)^\gamma} + \cdots$$

$f(x)$ ima toliko nultočaka koliki je njezin stupanj. Konstante iznose

$$A_k = \frac{\psi_1^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}, \qquad B_k = \frac{\psi_2^{(k-1)}(b)}{(k-1)!}, \qquad C_k = \frac{\psi_3^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}, \quad \ldots$$

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}(x-a)^\alpha, \quad \psi_2(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}(x-b)^\beta, \quad \psi_3(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}(x-c)^\gamma, \ldots$$

Ako funkcija $f(x)$ ima *jednostruke nultočke*, onda su parcijalni razlomci

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{K_1}{x-x_1} + \frac{K_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{K_n}{x-x_n}$$

$$K_k = \frac{\varphi(x_k)}{f'(x_k)} = (x-x_k)\frac{\varphi(x_k)}{f(x_k)}$$

Parcijalni razlomci olakšavaju integraciju.

D.3.5. SILA NA LINIJSKI NABOJ

Sila na linijski naboj u uglu vodljivih ravnina je prikazana u primjeru 3.2. Sila je zadana po komponentama

$$F_x = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0\pi^2}\int_0^\infty \left[\frac{a}{a^2+(y-b)^2} - \frac{a}{a^2+(y+b)^2}\right]^2 \mathrm{d}y$$

$$F_y = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0\pi^2}\int_0^\infty \left[\frac{b}{(x-a)^2+b^2} - \frac{b}{(x+a)^2+b^2}\right]^2 \mathrm{d}x$$

Svaka od njih sadrži po tri integrala

$$F_x = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0\pi^2 a^2}(I_1 - I_2 + I_3)$$

$$F_y = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0\pi^2 b^2}(I_4 - I_5 + I_6)$$

Ovdje su tipični samo integrali I_1 i I_2

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{\left[1 + \left(\frac{y-b}{a}\right)^2\right]^2}$$

$$I_2 = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{\left[1 + \left(\frac{y-b}{a}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{y+b}{a}\right)^2\right]}$$

U prvom integralu se uvodi nova varijabla

$$\frac{y-b}{a} = u, \qquad \mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}u$$

te je

$$I_1 = a\int_{-b/a}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} = a\int_{-b/a}^\infty \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$$

$$I_1 = a\int_{-b/a}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - a\int_{-b/a}^\infty \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$$

$$I_1 = a\int_{-b/a}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} + \frac{a}{2}\,\frac{u}{1+u^2} - \frac{a}{2}\int_{-b/a}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

Konačno je prvi integral kad se uvrste granice

$$I_1 = \frac{a}{2}\,\frac{u}{1+u^2} + \frac{a}{2}\operatorname{arc\,tg} u \Big|_{-b/a}^\infty$$

$$I_1 = \frac{a\pi}{4} + \frac{a^2}{2}\,\frac{b}{a^2+b^2} + \frac{a}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

Slično je treći integral

$$I_3 = \frac{a^2}{2}\,\frac{y+b}{a^2+(y+b)^2} + \frac{a}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y+b}{a}\Big|_0^\infty$$

$$I_3 = \frac{a\pi}{4} - \frac{a^2}{2}\,\frac{b}{a^2+b^2} - \frac{a}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

Prema tome je

$$I_1 + I_3 = \frac{a\pi}{2}$$

Slično su integrali I_4 i I_6, samo je integracija po x, a veličine a i b zamijene mjesta, te je

$$I_4 + I_6 = \frac{b\pi}{2}$$

Integrand drugog integrala I_2 treba rastaviti na parcijalne razlomke. Korijeni nazivnika su konjugirano kompleksni, te treba usvojiti oblik

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{y-b}{a}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{y+b}{a}\right)^2\right]} = \frac{1}{4b}\frac{a^4}{a^2+b^2}\left[-\frac{y-2b}{(y-b)^2+a^2} + \frac{y+2b}{(y+b)^2+a^2}\right]$$

Sad je drugi integral

$$I_2 = \frac{a^2}{2b}\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[-\int_0^\infty \frac{y-2b}{(y-b)^2+a^2}\,dy + \int_0^\infty \frac{y+2b}{(y+b)^2+a^2}\,dy\right]$$

$$I_2 = \frac{a^2}{2b}\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(y+b)^2+a^2}{(y-b)^2+a^2}\Bigg|_0^\infty + \right.$$

$$\left. + b\int_0^\infty \frac{dy}{(y-b)^2+a^2} + b\int_0^\infty \frac{dy}{(y+b)^2+a^2}\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[a\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y-b}{a} + a\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y+b}{a}\right]\Bigg|_0^\infty$$

$$I_2 = \frac{a\pi}{2}\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

Njemu je sličan peti integral, samo a i b zamijene mjesta

$$I_5 = \frac{b\,\pi}{2}\,\frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Komponente sile iznose

$$F_x = \frac{\lambda^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\left(1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2}\right) = \frac{\lambda^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,\frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

$$F_y = \frac{\lambda^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\,\frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

D.3.6. DVIJE CIJEVI

Induktivitet dviju okruglih cijevi, paralelnih osi, proračunat je u primjeru 3.14. Oznake su prema sl. 3.27. Induktivitet iznosi

$$L = \frac{\mu}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \ln\left(1 + \frac{d^2}{R_0^2} - 2\,\frac{d}{R_0}\cos\alpha_1\right) \mathrm{d}\alpha_1$$

Ovaj određeni integral izlazi iz općeg oblika

$$\int_0^{a\pi} \ln\left(1 + p^2 - 2\,p\cos x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & p^2 < 1 \\ 2\,a\,\pi\ln p, & p^2 > 1 \end{cases}$$

Prema tome je induktivitet

$$L = \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{d}{R_0}$$

kao u izrazu (3.105).

D.4. POSEBNI INTEGRALI

D.4.1. EKSPONENCIJALNI INTEGRAL

1. $\mathrm{Ei}(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{\pi} \frac{e^{t}}{t}\,dt, \qquad x < 0$

2. $\mathrm{Ei}(x) = -\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \right], \qquad x > 0$

3. $\mathrm{Ei}(x) = C + \ln x + \left(x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots \right), \quad x > 0$

$C = 0{,}577\,216\ldots$ Eulerova konstanta

4. $\mathrm{Ei}(-x) = C + \ln x + \int_{0}^{x} \frac{e^{-t} - 1}{t}\,dt, \qquad x > 0$

5. $\mathrm{Ei}(-x) = e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} - \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} - + \cdots \right) + R_n$

$$|R_n| < \frac{n!}{|x|^{n+1} \cos\frac{\varphi}{2}}, \qquad x = |x|\, e^{j\varphi}, \quad \varphi^2 < \pi^2$$

6. $\mathrm{Ei}(1) = 1{,}895\,118\ldots, \qquad \mathrm{Ei}(2) = 4{,}954\ldots,$

D.4.2. INTEGRAL LOGARITMA

1. $\mathrm{li}(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{\ln t}, \qquad x < 1$

2. $\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t} \right] = \mathrm{Ei}(\ln x), \qquad x > 1$

3. $\mathrm{li}(x) = C + \ln(-\ln x) + \left(\frac{\ln x}{1 \cdot 1!} + \frac{\ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \cdots \right), \quad 0 < x < 1$

4. $\mathrm{li}(x) = C + \ln\ln x + \left(\frac{\ln x}{1 \cdot 1!} + \frac{\ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \cdots \right), \qquad x > 1$

D.4.3. INTEGRAL SINUSA

1. $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad |x| < \infty$

2. $\mathrm{Si}(x) = x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - + \cdots, \quad |x| < \infty$

3. $\mathrm{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Si}(1) = 0{,}946\,083\ldots$
$\mathrm{Si}(2) = 1{,}605\ldots$

D.4.4. INTEGRAL KOSINUSA

1. $\mathrm{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$

2. $\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$

$C = 0{,}577\,216\ldots$ Eulerova konstanta

$C = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n\right]$

3. $\mathrm{Ci}(1) = 0{,}337\,404\ldots, \quad \mathrm{Ci}(2) = 0{,}422\,981\ldots$

4. $\mathrm{Ci}(x) = C + \ln x + \left(-\frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + - \cdots\right)$

D.4.5. EULEROV INTEGRAL, GAMA FUNKCIJA

1. $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \quad z = x + jy$

2. $\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{Cz}\left\{\left[(1+z)\,e^{-z}\right]\left[\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-z/2}\right]\left[\left(1+\frac{z}{3}\right)e^{-z/3}\right]\cdots\right\}$

$C = 0{,}577\,216\ldots$ Eulerova konstanta

3. $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) = z! = \Pi(z)$

4. $\Gamma(n+1) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$

5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\right)!$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)!$

6. $x! = \sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2} \exp\left(-x + \frac{\delta}{12x}\right), \quad x > 0, \quad 0 < \delta < 1$

Stirlingova formula

D.4.6. GAUSSOV INTEGRAL POGREŠKE, GAUSSOVA FUNKCIJA

1. $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt = \operatorname{erf} z$

2. $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{1} - \frac{1}{1!}\frac{z^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{z^5}{5} - + \cdots\right), \quad |z| < \infty$

3. $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \left(z + \frac{2}{1 \cdot 3} z^3 + \frac{2^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} z^5 + \cdots\right), \quad |z| < \infty$

4. $\Phi(-z) = -\Phi(z)$

5. $\Phi(0) = 0, \quad \Phi(1) = 0{,}842\,701 \ldots$
$\Phi(\infty) = 1, \quad \Phi(2) = 0{,}995\,322 \ldots$

D.4.7. FRESNELOVI INTEGRALI

1. $C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$

2. $S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$

3. $C(z) = z - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{z^5}{2! \cdot 5} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \frac{z^9}{4! \cdot 9} - + \cdots$

4. $S(z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{z^3}{1!\cdot 3} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{z^7}{3!\cdot 7} + - \cdots$

5. $C(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\left(z - \frac{\pi^2 z^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{\pi^4 z^9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - + \cdots\right) +$

$+ \sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\left(\frac{\pi z^3}{1\cdot 3} - \frac{\pi^3 z^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + - \cdots\right)$

6. $S(z) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\left(\frac{\pi z^3}{1\cdot 3} - \frac{\pi^3 z^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + - \cdots\right) +$

$+ \sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\left(z - \frac{\pi^2 z^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{\pi^4 z^9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - + \cdots\right)$

7. $C(1) = 0{,}7799\ldots$, $S(1) = 0{,}4383\ldots$

$C(2) = 0{,}4883\ldots$, $S(2) = 0{,}3434\ldots$

D.4.8. ELIPTIČKI INTEGRALI

1. $\int R(x, y)\,dx =$ eliptički integral, ako je

$$y = (a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4)^{1/2}$$
$$y = (a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3)^{1/2}$$

$R(x, y)$ je racionalna funkcija od x, y

2. **Kanonski oblici**

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2\vartheta)^{-1/2}\,d\vartheta = \int_0^{\sin\varphi} [(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)]^{-1/2}\,dx$$

eliptički integral prve vrste

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2\vartheta)^{1/2}\,d\vartheta = \int_0^{\sin\varphi} \left[\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}\right]^{1/2} dx$$

eliptički integral druge vrste

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^{\varphi} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \vartheta)^{-1/2}}{1 - n \sin^2 \vartheta} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{[(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)]^{-1/2}}{1 - n x^2} \, dx$$

eliptički integral treće vrste

φ amplituda
k modul
$k' = \sqrt{1 - k^2}$ komplementarni modul
n karakteristika
$\alpha = \arcsin k$ modulni kut

3. Potpuni eliptički integrali prve i druge vrste

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \, d\vartheta$$

potpuni eliptički integral prve vrste

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2} \, d\vartheta$$

potpuni eliptički integral druge vrste

4. $$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right], \quad k^2 < 1$$

5. $$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right], \quad k^2 < 1$$

6. $$K(k') = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) k'^4 + \cdots$$

7. $$E(k') = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{1 \cdot 2}\right) k'^2 + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4}\left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) k'^4 + \cdots$$

8. **Derivacija potpunog eliptičkog integrala po modulu**

$$\frac{\mathrm{d}K(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k)}{k\,k'^2} - \frac{K(k)}{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}E(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k) - K(k)}{k}$$

9. **Negativna amplituda**

$$F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k)$$

$$E(-\varphi, k) = -E(\varphi, k)$$

10. **Amplituda povoljnog iznosa**

$$n\,\pi \pm \varphi, \qquad \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$F(n\,\pi \pm \varphi, k) = 2\,n\,K(k) \pm F(\varphi, k)$$

$$E(n\,\pi \pm \varphi, k) = 2\,n\,E(k) \pm E(\varphi, k)$$

11. **Imaginarna amplituda,** *ja*

$$F(ja, k) = j\,F(\varphi, k'), \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{sh} a$$

$$E(ja, k) = -j\,E(\varphi, k') + j\,F(\varphi, k') + j \operatorname{tg}\varphi\,(1 - k'^2 \sin^2\varphi)^{1/2}$$

12. **Kompleksna amplituda,** $\varphi + j\,\psi$

$$F(\varphi + j\,\psi, k) = F(\lambda, k) + j\,F(\mu, k')$$

$$E(\varphi + j\,\psi, k) = E(\lambda, k) - j\,E(\mu, k') + j\,F(\mu, k') + \frac{b_1 + j\,b_2}{b_3}$$

$\operatorname{ctg}^2\lambda$ je pozitivni korijen jednadžbe

$$x^2 - \left[\operatorname{ctg}^2\varphi + k^2\,\frac{\operatorname{sh}^2\psi}{\sin^2\varphi} - k'^2\right] x - k'^2 \operatorname{ctg}^2\varphi = 0$$

$$k^2 \operatorname{tg}^2\mu = \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{ctg}^2\lambda - 1$$

$$b_1 = k^2 \sin\lambda \cos\lambda \sin^2\mu\,(1 - k^2 \sin^2\lambda)^{1/2}$$

$$b_2 = (1 - k^2 \sin^2\lambda)\,(1 - k'^2 \sin^2\mu)^{1/2} \sin\mu \cos\mu$$

$$b_3 = \cos^2\mu + k^2 \sin^2\lambda \sin^2\mu$$

13. **Modul veći od jedinice,** $k > 1$

$$F(\varphi, k) = \frac{1}{k} F\left(\vartheta, \frac{1}{k}\right), \quad \sin \vartheta = k \sin \varphi$$

$$E(\varphi, k) = k E\left(\varphi k, \frac{1}{k}\right) - (k^2 - 1)\varphi$$

14. **Imaginarni modul,** $j k$

$$F(\varphi, j k) = (1 + k^2)^{-1/2} K\left(\frac{k^2}{1 + k^2}\right) - (1 + k^2)^{-1/2} F\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \frac{k^2}{1 + k^2}\right)$$

$$E(\varphi, j k) = (1 + k^2)^{1/2} E\left[\varphi (1 + k^2)^{1/2}, \frac{k^2}{1 + k^2}\right] -$$

$$- k^2 \operatorname{sn}\left[\varphi (1 + k^2)^{1/2}, \frac{k^2}{1 + k^2}\right] \operatorname{cd}\left[\varphi (1 + k^2)^{1/2}, \frac{k^2}{1 + k^2}\right]$$

$\operatorname{sn} u = \sin \varphi$

$\operatorname{cd} u = \cos \varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$

15. **Posebni iznosi**

$$F(\varphi, 0) = \varphi$$

$$F(j \varphi, 0) = j \varphi$$

$$F(\varphi, 1) = \ln\left(\frac{1}{\cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi\right) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$F(j \varphi, 1) = j \operatorname{arc\,tg\,sh} \varphi$$

$$E(\varphi, 0) = \varphi$$

$$E(j \varphi, 0) = j \varphi$$

$$E(\varphi, 1) = \sin \varphi$$

$$E(j \varphi, 1) = j \operatorname{sh} \varphi$$

16. **Potpuni eliptički integral treće vrste**

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \vartheta)^{-1/2}}{1 - n \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta$$

Eliptički integral treće vrste se rješava pomoćnim funkcijama. Tu se iskorištavaju eliptički integrali prve i druge vrste.

Slučaj I: $0 < n < k^2$

$$\Pi(n, k) = K(k) + \delta_1 K(k) Z(\varepsilon, k)$$

$$\delta_1 = \left[\frac{n}{(1-n)k^2 - n}\right]^{1/2}, \qquad \varepsilon = \arcsin\frac{\sqrt{n}}{k}$$

$$Z(\varepsilon, k) = E(\varepsilon, k) - E(k)\frac{F(\varepsilon, k)}{K(k)}$$

Slučaj II: $n > 1$

$$\Pi(n, k) = K(k) - \Pi(N, k)$$

$$N = \frac{k^2}{n}, \qquad \Pi(N, k) \qquad \text{slučaj I.}$$

Slučaj III: $k^2 < n < 1$

$$\Pi(n, k) = K(k) + \frac{1}{2}\pi\,\delta_2 [1 - \Lambda_0(\varepsilon, k)]$$

$$\delta_2 = \left[\frac{n}{(1-n)(n-k^2)}\right]^{1/2}, \qquad \varepsilon = \arcsin\frac{\sqrt{1-n}}{k'}$$

$$\Lambda_0(\varepsilon, k) = \frac{2}{\pi} K(k) E(\varepsilon, k') - \frac{2}{\pi}[K(k) - E(k)] F(\varepsilon, k')$$

Slučaj IV: $n < 0$

$$\Pi(n, k) = \frac{-nk'^2}{(1-n)(k^2-n)}\Pi(N, k) + \frac{k^2}{k^2-n}K(k)$$

$$N = \frac{k^2 - n}{1-n}, \qquad \Pi(N, k) \qquad \text{slučaj III.}$$

17. **Posebni slučaj** $n = 1$

$$\Pi(1, \varphi, k) = F(\varphi, k) - \frac{1}{k'^2} E(\varphi, k) + \frac{1}{k'^2}(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2} \operatorname{tg}\varphi$$

$$\Pi(1, k) = \infty$$

D.4.8.1. Kružna strujnica

Polje *kružne strujnice* je određeno u primjeru 2.23. Oznake su prema sl. 2.44. Vektorpotencijal se dobiva iz integrala

$$A = \frac{\mu i}{2\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} k \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\beta - 1}{(1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}}\,\mathrm{d}\beta = \frac{\mu i}{2\pi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} k\, I$$

Integral I vodi na potpune eliptičke integrale prve i druge vrste. On se transformira

$$I = \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi/2} \frac{2k^2\sin^2\beta - 2 + 2 - k^2}{(1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}}\,\mathrm{d}\beta$$

$$I = \frac{2 - k^2}{k^2}\int_0^{\pi/2} (1 - k^2\sin^2\beta)^{-1/2}\,\mathrm{d}\beta - \frac{2}{k^2}\int_0^{\pi/2} (1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}\,\mathrm{d}\beta$$

$$I = \frac{2 - k^2}{k^2}K(k) - \frac{2}{k^2}E(k)$$

Takav je rezultat u izrazu (2.111).

D.4.8.2. Strujni cilindar

Polje *strujnog, okruglog cilindra* je prikazano u primjeru 2.25. Oznake su prema sl. 2.47. Vektorpotencijal iznosi

$$A = A_0 (I_2 - I_1)$$

Osnovni integral je

$$I = \frac{k^2}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(2\beta)}{(1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}\,[a + (1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}}\,\mathrm{d}\beta$$

Integral I_1 sadrži konstante k_1 i a_1, integral I_2 ima iste konstante k_2 i a_2, a inače su jednaki po obliku. Ovaj integral vodi na potpune eliptičke integrale svih triju vrsta

$$I = k^2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\beta\cos^2\beta\,[a - (1 - k^2\sin^2\beta)^{1/2}]\,\mathrm{d}\beta}{(a^2 - 1 + k^2\sin^2\beta)(1 - k^2\sin^2\beta)}$$

Karakteristika integrala iznosi

$$n = \frac{k^2}{1 - a^2}$$

Sad je integral sa supstitucijom

$$(1 - k^2 \sin^2 \beta)^{1/2} = \Delta(\beta) = \Delta$$

$$I = -\frac{k^2}{(1 - a^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \beta (a - \Delta)}{(1 - n \sin^2 \beta) \Delta} \, d\beta$$

$$I = -n \int_0^{\pi/2} \frac{a \sin^2 \beta \cos^2 \beta \, d\beta}{(1 - n \sin^2 \beta) \Delta} + n \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \beta}{1 - n \sin^2 \beta} \, d\beta$$

$$I = I' + I''$$

Parcijalni integrali iznose

$$I' = -a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta (n - n \sin^2 \beta + 1 - 1)}{(1 - n \sin^2 \beta) \Delta} \, d\beta$$

$$I' = -a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta}{\Delta} d\beta + a(1 - n) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta \, d\beta}{(1 - n \sin^2 \beta) \Delta}$$

$$I' = \frac{a}{k^2} [E(k) - K(k)] - a \frac{1 - n}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - n \sin^2 \beta - 1}{(1 - n \sin^2 \beta) \Delta} \, d\beta$$

Konačno je prvi parcijalni integral

$$I' = a \frac{1 - n}{n} \Pi(n, k) - a \frac{1 - n}{n} K(k) - a \frac{K(k) - E(k)}{k^2}$$

Drugi parcijalni integral iznosi

$$I'' = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta (n - n \sin^2 \beta + 1 - 1)}{1 - n \sin^2 \beta} \, d\beta$$

$$I'' = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \beta \, d\beta + \frac{1-n}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{-n \sin^2 \beta + 1 - 1}{1 - n \sin^2 \beta} \, d\beta$$

$$I'' = \frac{\pi}{4} + \frac{1-n}{n} \frac{\pi}{2} - \frac{1-n}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{1 - n \sin^2 \beta}$$

Ovdje se pojavljuje integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{1 - n \sin^2 \beta} = I'''$$

koji se rješava uvođenjem nove varijable

$$\operatorname{ctg} \beta = u, \qquad d\beta = -\sin^2 \beta \, du$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{1 + u^2}$$

Sad je zadani integral

$$I''' = -\int_{\infty}^{0} \frac{du}{1 - n + u^2} = \frac{1}{(1-n)^{1/2}} \operatorname{arc\,ctg} \frac{u}{(1-n)^{1/2}} \Bigg|_{\infty}^{0}$$

$$I''' = \frac{1}{(1-n)^{1/2}} \frac{\pi}{2}$$

Sad je drugi parcijalni integral

$$I'' = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1-n}{n} - \frac{(1-n)^{1/2}}{n} \right] = \frac{\pi}{4} \frac{1 - (1-n)^{1/2}}{1 + (1-n)^{1/2}}$$

Karakteristika n poprima iznos

$$n = \frac{k^2}{1 - a^2} = \frac{4 r_0 r}{(r_0 + r)^2} \leqslant 1$$

Prema tome je

$$I'' = \frac{\pi}{4} \frac{r}{r_0}$$

Konačno je traženi integral

$$I = a \frac{1-n}{n} [\Pi(n, k) - K(k)] - a \frac{K(k) - E(k)}{k^2} + \frac{\pi}{4} \frac{r}{r_0}$$

To je rezultat iz primjera 2.25.

D.5. VEKTORSKA ANALIZA

D.5.1. MNOŽENJE VEKTORA

1. $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = A\,B\cos\alpha$ skalarni produkt vektora **A** i **B**. Kut α je kut među vektorima.
2. $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektorski produkt vektora **A** i **B**. Njegov je iznos $A\,B \sin\alpha$, ako je α kut među njima. Produkt je opet vektor koji je okomit na ravninu što je tvore vektori **A** i **B**, a usmjeren je tako da vektori **A**, **B** i **C** tvore *desni* koordinatni sustav.
3. $\mathbf{A}\,(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{C} \times \mathbf{A})$
4. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$
5. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$

D.5.2. OSNOVNE VEKTORSKE OPERACIJE

D.5.2.1. Gradijent, grad

Zadana je veličina ovisna samo o *mjestu* u prostoru. Ta je veličina *skalar* $\varphi = \varphi\,(\mathbf{x})$. Varijabla **x** predstavlja sve tri koordinate u prostoru, koje definiraju veličinu φ. Jednadžba

$$\varphi\,(\mathbf{x}) = \text{konst.}$$

predstavlja jednadžbu *ekvipotencijalnih ploha*. *Najveća promjena* skalara φ je u smjeru normale na ekvipotencijalne plohe

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,\mathbf{n} = \text{grad}\,\varphi$$

s je koordinata u smjeru normale na ekvipotencijalne plohe, **n** je *jedinični* vektor normale. grad φ je vektor koji gleda u smjeru normale. To je definicija operacije gradijenta.

D.5.2.2. Divergencija, div

Zadana je veličina ovisna o položaju u prostoru, a ima i smjer. Takva veličina se zove vektorska funkcija ili *vektor*. *Tok* ili *fluks* nekog vektora **D** kroz plohu S dan je sa

$$\Phi = \int_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

n je jedinični vektor normale na plohu S.

Ploha S je zatvorena ploha, koja zatvara prostor volumena V koji se promatra. Vektor $\mathbf{n}$ gleda *iz* promatranog prostora. Tok kroz takvu plohu iznosi

$$\Phi = \oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

Sad je

$$\lim_{V\to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S}{V} = \operatorname{div}\mathbf{D}$$

definicija divergencije vektora $\mathbf{D}$. Ona predstavlja tok vektora $\mathbf{D}$ iz zadanog volumena po jedinici toga volumena. Ploha S zatvara volumen V, a pri tome V teži k nuli.

Ako je divergencija nekog vektora različita od nule, on ima na tome mjestu svoj *izvor* ili *ponor*.

D.5.2.3. Rotacija, rot

Zadana je veličina *vektor* ovisna o mjestu u prostoru. Vektor $\mathbf{A}$ ima integral po putu s, koji se predstavlja vektorom

$$\int_1^2 \mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = R_{21}$$

Vektor puta $\mathbf{s}$ se podudara s tangentom na krivulju koja predstavlja put s. R_{21} je *linijski integral* vektora $\mathbf{A}$. Kad bi vektor $\mathbf{A}$ bio sila, njegov bi linijski integral predstavljao njegov izvršeni rad.

Cirkulacija vektora je njegov linijski integral po zatvorenoj krivulji

$$\operatorname{Cir}\mathbf{A} = \oint_s \mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$$

Krivulja s je zatvorena.

Sad se definira *rotacija vektora* kao

$$\lim_{S\to 0} \frac{\operatorname{Cir}\mathbf{A}}{S} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_s \mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{s}}{S} = \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

Ploha S ima kao *konturu* krivulju s. Iznos rotacije vektora ili rotora vektora jednak je njegovoj maksimalnoj cirkulaciji po jedinici površine, ako ta površina teži k nuli, a cirkulacija se određuje na njezinoj konturi. Tada je rotor vektora vektor koji ima smjer normale na elementarnu plohu S. Obilazak konture s i normala tvore *desni* sustav.

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = | \operatorname{rot} \mathbf{A} | \, \mathbf{n}$$

D.5.2.4. Diferenciranje vektora

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\,\mathbf{A}) = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{A} + c\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$

4. $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{A}(s+h) - \mathbf{A}(s)}{h}$

D.5.2.5. Vektorski operator ∇

∇ se još zove **nabla** operator

1. $\nabla\varphi = \operatorname{grad} \varphi$

2. $\nabla\mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{D}$

3. $\nabla \times \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$

4. ∇ — *diferencijalni operator* je vektor usmjeren u smjeru diferenciranja. On je takav, da je

$$\mathbf{s}_0 \nabla = \frac{\partial}{\partial s}$$

ako je $\mathbf{s}_0$ jedinični vektor smjera diferenciranja. On djeluje samo na veličine koje slijede iza njega, a poštuje pravila diferenciranja.

D.5.2.6. Laplaceov operator Δ

On je također diferencijalni operator, a znači

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

Kad se Laplaceov operator primjenjuje na skalar, njegovo je značenje

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS}{V}$$

$\partial\varphi/\partial n$ = promjena skalara φ po jedinici duljine u smjeru normale na plohu S koja zatvara volumen V.

Operacija $\Delta\varphi$ daje rezultat koji je opet skalar.

Kad se Laplaceov operator primjenjuje na vektor, njegovo je značenje

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rotrot} \mathbf{A}$$

On vodi u tome slučaju na vektor.

D.5.3. SLOŽENE VEKTORSKE OPERACIJE

1. $\operatorname{grad} (\varphi + \psi) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi$
2. $\operatorname{div} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B}$
3. $\operatorname{rot} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B}$
4. $\operatorname{grad} (\varphi \psi) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \psi + \varphi \operatorname{grad} \psi$
5. $\operatorname{div} (\varphi \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{A} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{A}$
6. $\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A}$
7. $(\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} = A_s (\partial \mathbf{B}/\partial s)$ = produkt iznosa vektora $\mathbf{A}$ i promjene vektora $\mathbf{B}$ u smjeru vektora $\mathbf{A}$. Krivulja s je takva da je vektor $\mathbf{A}$ tangenta na nju.
8. $\operatorname{grad} (\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}$
9. $\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}$
10. $\operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}$
11. $\operatorname{grad} (c \varphi) = c \operatorname{grad} \varphi$, c = konstanta
12. $\operatorname{div} (c \mathbf{A}) = c \operatorname{div} \mathbf{A}$

13. $\operatorname{rot}(c\,\mathbf{A}) = c \operatorname{rot}\mathbf{A}$

14. $\operatorname{grad}(\mathbf{C}\,\mathbf{A}) = (\mathbf{C}\nabla)\,\mathbf{A} + \mathbf{C} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ = konstantni vektor

15. $\operatorname{div}(\mathbf{C}\,\varphi) = \mathbf{C} \operatorname{grad}\varphi$

16. $\operatorname{div}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = -\,\mathbf{C} \operatorname{rot}\mathbf{A}$

17. $\operatorname{rot}(\varphi\,\mathbf{C}) = \operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{C}$

18. $\operatorname{rot}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = -\,(\mathbf{C}\nabla)\,\mathbf{A} + \mathbf{C} \operatorname{div}\mathbf{A}$

19. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$

20. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$

21. $\operatorname{grad} f(r) = \mathrm{d}/\mathrm{d}r\ [f(r)] \cdot \mathbf{r}_0 = f'(r)\,\mathbf{r}_0$
$\mathbf{r}_0$ = jedinični radijusvektor

22. $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t = \partial\mathbf{A}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A}$, $\mathbf{v}$ = brzina promatrača vektora $\mathbf{A}$

23. $(\mathbf{A}\nabla)\,\varphi = \mathbf{A} \operatorname{grad}\varphi$

24. $\operatorname{div}[f(r)\,\mathbf{r}_0] = 2\,f(r)/r + f'(r)$

25. $\operatorname{rot}[f(r)\,\mathbf{r}_0] = 0$

26. $\Delta(\varphi\,\psi) = \varphi\,\Delta\psi + \psi\,\Delta\varphi + 2 \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi$

27. $\operatorname{grad}\operatorname{div}(\varphi\,\mathbf{A}) = \operatorname{grad}\varphi \operatorname{div}\mathbf{A} + \varphi \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{rot}\mathbf{A} + (\mathbf{A}\nabla)\operatorname{grad}\varphi + (\operatorname{grad}\varphi\,\nabla)\,\mathbf{A}$

28. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi\,\mathbf{A}) = \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\,\Delta\varphi + (\mathbf{A}\nabla)\operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\varphi \operatorname{div}\mathbf{A} - (\operatorname{grad}\varphi\,\nabla)\,\mathbf{A}$

D.5.4. ODNOSI INTEGRALA VEKTORSKIH FUNKCIJA

D.5.4.1. Gaussov stavak

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = \oint_S \mathbf{A}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

Plošni integral vektora $\mathbf{A}$ se vrši po plohi S koja zatvara prostor volumena V po kojem se integrira divergencija istog vektora.

D.5.4.2. Stokesov stavak

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A}\, \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \oint_s \mathbf{A}\, \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Konturni integral vektora **A** se izvodi po krivulji s, koja je kontura plohe S po kojoj je integriran rotor istog vektora.

D.5.4.3. Greenov stavak

Vektorska funkcija je zadana skalarnim funkcijama odnosom

$$\mathbf{A} = \varphi \operatorname{grad} \psi$$

Na takav vektor se primijeni Gaussov stavak, uzevši u obzir da je

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi\, \Delta\psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi$$

$$\mathbf{A}\, \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \varphi \operatorname{grad} \psi\, \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, \mathrm{d}S$$

$\partial\psi/\partial n$ predstavlja promjenu skalara ψ po jedinici duljine položene u normalu na plohu S, koja zatvara volumen V. Sad vrijedi odnos

$$\int_V (\varphi\, \Delta\psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi)\, \mathrm{d}V = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, \mathrm{d}S$$

To je *prvi oblik* Greenova stavka.

Ako φ i ψ zamijene svoja mjesta, dolazi se na *drugi oblik* Greenova stavka

$$\int_V (\varphi\, \Delta\psi - \psi\, \Delta\varphi)\, \mathrm{d}V = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$

D.5.5. DELTA-FUNKCIJA

Ona se još zove Diracova funkcija

1. $y = \delta(x - a)$

Njezino je svojstvo da je

2. $\delta(x - a) = 0 \quad \text{za } x \neq a$
$\delta(x - a) = \infty \quad \text{za } x = a$

Osim toga je

3. $$\int_c^d \delta(x - a)\,\mathrm{d}x = 1, \quad c < a < d$$

Neki je zovu impulsna funkcija. Pravokutni impuls prelazi u delta-funkciju ako njegova širina teži k nuli, a visina teži u beskonačnost, tako da mu površina ostaje konstantna. Delta-funkcija omogućuje uzimanje u obzir polova ostalih funkcija. Ona je definirana slijedećim izrazom

4. $$\int_c^d f(x)\,\delta(x - a)\,\mathrm{d}x = f(a), \quad c < a < d$$

Ostale karakteristike delta-funkcije su

5. $$\int_c^d f(x)\,\delta'(x - a)\,\mathrm{d}x = -f'(a), \quad c < a < d$$

Zarez znači diferenciranje po x.

6. $$\delta[f(x)] = \frac{1}{\left|\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|}\,\delta(x - x_0), \quad f(x_0) = 0$$

7. Položaj dviju točaka u prostoru zadan je radijusvektorima $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$. Bilo koji koordinatni sustav ima koordinate x_1, x_2 i x_3 i jedinične vektore u istom smjeru $\mathbf{x}_{10}$, $\mathbf{x}_{20}$ i $\mathbf{x}_{30}$. Radijusvektori su zadani sa

$$\mathbf{r} = x_1\,\mathbf{x}_{10} + x_2\,\mathbf{x}_{20} + x_3\,\mathbf{x}_{30}$$
$$\mathbf{r}' = x_1'\,\mathbf{x}_{10} + x_2'\,\mathbf{x}_{20} + x_3'\,\mathbf{x}_{30}$$

Sad je

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')\,\delta(x_3 - x_3')$$

8. $\int_{V_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,\mathrm{d}V = 1$, ako V_0 sadrži točku $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$

$\int_{V_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,\mathrm{d}V = 0$, ako V_0 ne sadrži točku $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$

Delta-funkcija se mjeri u jedinicama recipročnog volumena bez obzira koliko prostor imao dimenzija.

9. Mnoštvo točkastih naboja se prikazuje primjenom delta-funkcije prostornom gustoćom naboja

$$\varrho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} Q_k\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$$

Točkastih naboja ima n, a lokacija svakog pojedinog naboja Q_k je određena radijusvektorom $\mathbf{r}_k$.

D.5.6. ELEKTROSTATSKI POTENCIJAL

Prema Coulombovu zakonu je jakost polja raspoređenog naboja

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\varrho(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\,\mathrm{d}V$$

Radijusvektor $\mathbf{r}$ određuje položaj promatrača koji mjeri jakost polja $\mathbf{E}$, a radijusvektor $\mathbf{r}'$ određuje položaj elementa volumena $\mathrm{d}V$ i pripadne gustoće naboja $\varrho = \varrho(\mathbf{r}')$. $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{r}_0'$ su pripadni jedinični vektori. Sad je

$$\frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = -\operatorname{grad}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Običaj je da se ishodište sustava postavlja na mjesto promatrača, te je njegov radijusvektor jednak nuli.

Uvodi se novi radijusvektor koji spaja *točku promatrača* i *točku izvora*. Radijusvektor gleda *od izvora prema promatraču*. Sad je jakost polja

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\varrho\,\mathbf{r}_0}{r^2}\,\mathrm{d}V$$

Vrijedi odnos

$$\operatorname{grad}_i f(r) = -\operatorname{grad}_p f(r)$$

Indeks i znači da se gradijent primjenjuje u koordinatama točke izvora, a indeks p se odnosi na promatrača.

$$\operatorname{grad}_p \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}$$

$$\operatorname{grad}_i \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}_0}{r^2}$$

Jedinični radijusvektor $\mathbf{r}_0$ uvijek gleda od izvora prema promatraču. Sad je

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \varrho \operatorname{grad}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}V = -\operatorname{grad}\varphi$$

te je prema tome

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho\,\mathrm{d}V}{r}$$

što je integralni oblik jednadžbe skalarnog potencijala.

Diferencijalni oblik se svodi na problem primjene Δ operacije na $1/r$.

$$\int_V \Delta\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \int_V \operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}V = \oint_S \operatorname{grad}\frac{1}{r}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

Ploha S zatvara volumen V, a njezin se element izražava prostornim uglom Ω i radijusvektorom, te je

$$\mathrm{d}S = r^2\,\mathrm{d}\Omega$$

Tada je

$$\oint_S \operatorname{grad}\frac{1}{r}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \oint \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) r^2\,\mathrm{d}\Omega = -4\pi$$

Prema tome je

$$\int_V \Delta\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = -4\pi$$

To znači da je

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r})$$

tj.

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \quad r \neq 0$$

Sad je

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \varrho\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = -\frac{1}{\varepsilon}\int_V \varrho\,\delta(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V$$

Volumen V obuhvaća točku promatrača, te je zato

$$\int_V \varrho_i\,\delta(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V = \varrho_p$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

što je diferencijalni oblik jednadžbe elektrostatskog potencijala ili **Poissonova jednadžba.** Indeksi i i p se opet odnose kao koordinate izvora i promatrača.

D.5.7. BIOTOV I SAVARTOV ZAKON

I. Maxwellova jednadžba

Jednadžba (1.26) predstavlja Biotov i Savartov zakon kad postoji prostorno strujanje

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times\mathbf{r}_0}{r^2}\,\mathrm{d}V$$

Radijusvektor gleda od izvora prema promatraču. Primjenjuje se operacija rot u odnosu na koordinate promatrača

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{rot}_p\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{rot}_p\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{r}_0}{r^2}\,\mathrm{d}V$$

Treba uzeti u obzir da je

$$\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{r}_0}{r^2} = \operatorname{rot}_p\left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right)$$

Sad je

$$\operatorname{rot}_p\operatorname{rot}_p\left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right) = \operatorname{grad}_p\operatorname{div}_p\left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right) - \mathbf{J}\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\operatorname{div}_p\left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right) = \mathbf{J}\operatorname{grad}_p\left(\frac{1}{r}\right) = -\mathbf{J}\operatorname{grad}_i\left(\frac{1}{r}\right) = -\operatorname{div}_i\left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right) + \frac{1}{r}\operatorname{div}_i\mathbf{J}$$

Sad je

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \operatorname{div}_1 \left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right) \mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div}_1 \mathbf{J}}{r} \mathrm{d}V + \int \mathbf{J}\, \delta(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V$$

Prvi volumni integral iščezava, jer se pretvara u plošni, a ploha se postavi u prostoru gdje više nema struja. Drugi integral ovisi o tome kakvo se značenje daje funkciji

$$\operatorname{div} \mathbf{J}$$

U statičkim poljima je vektor $\mathbf{J}$ bezizvoran, te je $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Konačno preostaje samo treći integral, koji je naprosto jednak gustoći struje na mjestu promatrača

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

D.5.8. POLJE ELEKTRIČNOG DIPOLA

Potencijal električnog dipola je zadan jednadžbom (2.41)

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}\, \mathbf{r}_0}{4\pi\, \varepsilon\, r^2}$$

a jakost polja je

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{4\pi\, \varepsilon} \operatorname{grad} \frac{\mathbf{p}\, \mathbf{r}_0}{r^2}$$

Vektor $\mathbf{p}$ dipolnog momenta je konstantni vektor, te je

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\, \varepsilon} (\mathbf{p}\, \nabla) \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} - \frac{1}{4\pi\, \varepsilon}\, \mathbf{p} \times \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon} (\mathbf{p}\, \nabla) \operatorname{grad} \frac{1}{r}$$

jer je $\operatorname{rot} (\mathbf{r}_0/r^2) = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} 1/r = 0$.

Iznos jakosti polja sadrži operaciju koja se često javlja, a iznosi

$$(\mathbf{p}\, \nabla) \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} [3\, (\mathbf{p}\, \mathbf{r}_0)\, \mathbf{r}_0 - \mathbf{p}]$$

Tu je $\mathbf{p}$ vektor konstantnog iznosa u izvoru, a $\mathbf{r}_0$ jedinični radijusvektor koji gleda prema promatraču. Sad je jakost polja

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon\, r^3} [3\, (\mathbf{p}\, \mathbf{r}_0)\, \mathbf{r}_0 - \mathbf{p}]$$

Kao u jednadžbi (2.42).

D.5.9. POLJE MAGNETSKOG DIPOLA

Vektorpotencijal magnetskog dipola iznosi

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}_0}{4 \pi r^2}$$

kao u jednadžbi (2.126). Jakost magnetskog polja iznosi

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{4 \pi \mu} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}_0}{r^2}$$

Vektor $\mathbf{p}$ je dipolni moment, konstantan i postavljen u ishodište. Tada je

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}_0}{r^2} = - (\mathbf{p} \nabla) \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} + \mathbf{p} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}_0}{r^2}$$

Ako se radi o polju za $r \neq 0$, tada je

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} = - \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

te je kao u električnog dipola

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4 \pi \mu r^3} [3 (\mathbf{p} \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0 - \mathbf{p}]$$

što se slaže s jednadžbom (2.127).

D.5.10. DRUGA MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Ona glasi u integralnom obliku

$$\int_C \mathbf{E} \, \mathrm{d}\mathbf{s} = - \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathbf{B} \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$

Magnetski tok prolazi plohom S koja ima konturu C po kojoj se integrira vektor $\mathbf{E}$. Vremenska promjena toka se odvija, jer se

1. vremenski mijenja $\mathbf{B}$
2. promatrač giba brzinom $\mathbf{v}$ prema sustavu u kojem je $\mathbf{B}$
3. mijenja veličina plohe S

Sve tri promjene su moguće istovremeno. Prve dvije promjene se uzimaju u obzir ispravnim tretmanom totalne derivacije

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\nabla)\,\mathbf{B}$$

Budući da je

$$\text{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B}\,\nabla)\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{v}\,\text{div}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\text{div}\,\mathbf{v}$$

od čega je

$$(\mathbf{B}\,\nabla)\,\mathbf{v} = 0, \quad \text{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad \text{i} \quad \text{div}\,\mathbf{v} = 0$$

to je

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Sad je druga Maxwellova jednadžba, ako se primijeni Stokesov stavak na drugi pribrojnik

$$\oint_C \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,\mathbf{n}\,dS + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\,d\mathbf{s}$$

Ona je u diferencijalnom obliku

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Treći način promjene se ogleda u mijenjanju granica integracije plošnog integrala. Tad se diferenciranje provodi po pravilu diferenciranja integrala.

Ako se ostavi veličina magnetskog toka, promjena iznosi

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}\,\text{grad}\,\Phi$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina promatrača prema sustavu u kojem se određuje tok. Ovakav prikaz uzima u obzir sva tri tipa promjene.

D.5.11. RETARDIRANI POTENCIJAL

Integralni oblik jednadžbe potencijala glasi

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\varrho \, dV}{r}$$

Gustoća naboja je retardirana za vrijeme r/c, tj.

$$\varrho = \varrho \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Zato je derivacija po radijusvektoru

$$\frac{\partial \varrho}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{1}{c} \varrho'$$

Sad se primjenjuje operacija Δ

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \Delta\left(\frac{\varrho}{r}\right) dV$$

Tu je

$$\Delta\left(\frac{\varrho}{r}\right) = \operatorname{div} \operatorname{grad}\left(\frac{\varrho}{r}\right) = \operatorname{div}\left(\varrho \operatorname{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \operatorname{grad} \varrho\right)$$

Treba uzeti u obzir da je

$$\operatorname{grad} \varrho = -\frac{\varrho'}{c} \mathbf{r}_0$$

Prema tome je

$$\Delta\left(\frac{\varrho}{r}\right) = \varrho \, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) + \operatorname{grad} \varrho \operatorname{grad} \frac{1}{r} - \frac{1}{c} \operatorname{div}\left(\frac{\varrho' \mathbf{r}_0}{r}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{\varrho}{r}\right) = -4\pi\varrho\,\delta(\mathbf{r}) + \frac{\varrho'}{cr^2} - \frac{\varrho'}{c} \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}_0}{r}\right) - \frac{\mathbf{r}_0}{rc} \operatorname{grad} \varrho'$$

Ovdje je

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}_0}{r}\right) = \frac{2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

$$\operatorname{grad} \varrho' = -\frac{\varrho''}{c} \mathbf{r}_0$$

Te je konačno

$$\Delta\left(\frac{\varrho}{r}\right) = -4\pi\varrho\,\delta(\mathbf{r}) + \frac{\varrho''}{c^2 r}$$

Budući da je

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho''}{c^2 r}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

to je konačno jednadžba potencijala

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

Ta jednadžba uzima u obzir retardiranje veličina polja. Sličan je postupak i za vektorpotencijal.

D.5.12. SILA NA DIPOL

Sila na električni dipol iznosi prema (3.8)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\,\nabla)\,\mathbf{E}$$

Ona se prikazuje i na drugi način, uz primjenu operacije

$$\operatorname{grad}(\mathbf{p}\,\mathbf{E}) = (\mathbf{p}\,\nabla)\,\mathbf{E} + \mathbf{p} \times \operatorname{rot}\mathbf{E}$$

ako je $\mathbf{p}$ konstantni vektor. Sad je sila na dipol

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(\mathbf{p}\,\mathbf{E}) - \mathbf{p} \times \operatorname{rot}\mathbf{E}$$

Statičko polje ima $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, te je sila naprosto

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(\mathbf{p}\,\mathbf{E})$$

Veličina $(\mathbf{p}\,\mathbf{E})$ je energija dipola unesenog u polje jakosti $\mathbf{E}$. Ova jednadžba govori da je sila na dipol takva, da on nastoji povećati svoju energiju, tj. on nastoji doći u jače polje.

D.5.13. POISSONOVA JEDNADŽBA, GRANIČNI UVJETI

Diferencijalni oblik Poissonove jednadžbe skalarnog potencijala glasi

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

Treba primijeniti drugi oblik Greenova stavka. Neka je druga skalarna funkcija

$$\psi = \frac{1}{4\pi r}$$

jer se u integralnom obliku jednadžbe potencijala ona pojavljuje. Tu je

$$\Delta\psi = \frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\delta(\mathbf{r})$$

Sad je Greenov stavak

$$\int_V \left[-\varphi\,\delta(\mathbf{r}) + \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon r}\right] \mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S$$

Prvi integral na lijevoj strani predstavlja naprosto potencijal na mjestu promatrača, te je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho\,\mathrm{d}V}{r} + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S$$

Potencijal, kako ga mjeri promatrač, sastoji se od tri dijela. Prvi dio je poznati izraz za potencijal u integralnom obliku. Druga dva dijela iščezavaju ako se ploha S postavi tamo gdje više nema polja.

Ako je $\varrho = 0$, polje je određeno u prostoru volumena V stanjem na plohi S koja zatvara promatrani prostor. Odatle slijede tri skupine uvjeta na granici:

1. **Cauchyevi granični uvjeti** zadaju potencijal i njegovu promjenu normalno na graničnu plohu, φ, $\partial\varphi/\partial n$
2. **Dirichletovi granični uvjeti** zadaju potencijal na graničnoj plohi, φ.
3. **Neumannovi granični uvjeti** zadaju promjenu potencijala normalno na graničnu plohu, $\partial\varphi/\partial n$

D.6. MATRICE

D.6.1. DEFINICIJA

Matrica je shema veličina poredanih u *retke* i *stupce* po određenom pravilu. Pravilo se ustanovljava prema potrebi osnovne veličine na koju se matrica odnosi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{jk}]_m^n$$

Matrica izgleda i drukčije

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \hline \end{array} = [a_{jk}]_m^n$$

Ova matrica ima m redaka i n stupaca. Matrica je reda (m, n)

D.6.2. TIPOVI MATRICA

1. **Redna matrica,** $(1, n)$ reda, ima jedan redak.
2. **Stupčana matrica,** $(m, 1)$ reda, ima jedan stupac.
3. **Kvadratna matrica,** (m, m) reda, ima isti broj redaka i stupaca.
4. **Dijagonalna matrica,** (m, m) reda, je kvadratna matrica, koja u dijagonali ima elemente različite od nule, $a_{jj} \neq 0$. Izvan dijagonale su elementi nula

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & a_3 & 0 & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \hline \end{array}$$

5. **Jedinična matrica** (m, m) reda, **1**, je dijagonalna matrica koja ima u dijagonali jedinice

$$\mathbf{1}_n = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline \end{array} = \mathbf{1}$$

6. **Nul-matrica,** (m, n) reda, ima sve elemente nula.

7. **Transponirana matrica** ima retke sastavljene od odgovarajućih stupaca matrice koja se transponira

$$\mathbf{B} = \widetilde{\mathbf{A}}, \quad b_{jk} = a_{kj}$$

Matrica $\mathbf{B} = \widetilde{\mathbf{A}}$ je transponirana matrica **A**.

8. **Simetrična matrica,** (m, m) reda, je kvadratna matrica koja ima elemente simetrične oko dijagonale, $a_{jk} = a_{kj}$. Zato je $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}}$.

9. **Antisimetrična matrica,** (m, m) reda, je kvadratna matrica koja ima elemente simetrične oko dijagonale, ali su suprotna predznaka,

$$a_{jk} = -a_{kj}, \quad \widetilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$$

D.6.3. OSNOVNE OPERACIJE

1. **Determinanta matrice** je determinanta od elemenata kvadratne matrice, a označava se sa

$$\det \mathbf{A}$$

2. **Singularna matrica** ima determinantu nula

$$\det \mathbf{A} = 0$$

3. **Poddeterminanta** $(m-1)$-toga reda **matrice** m-tog reda je determinanta koja se dobiva ako se u kvadratnoj matrici briše redak j i stupac k, a ima oznaku

$$\det_{jk} \mathbf{A}$$

4. **Kofaktor** (j, k)-tog elementa **matrice** je

$$\mathrm{cof}_{jk} \mathbf{A} = (-1)^{j+k} \det_{jk} \mathbf{A}$$

5. **Pridružena matrica** ili **adjunktna matrica** kvadratne matrice **A** ima elemente sastavljene od kofaktora matrice **A**, samo transponirane

$$\mathbf{B} = \text{adj}\,\mathbf{A}, \qquad b_{jk} = (-1)^{j+k}\,\det_{kj}\mathbf{A}$$

6. **Jednakost matrica.** Dvije su matrice jednake ako su istog reda (m, n), a istovrsni elementi su međusobno jednaki

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad a_{jk} = b_{jk}$$

7. **Zbrajanje i odbijanje matrica** je moguće samo ako su matrice istog reda. Tada se istovrsni elementi zbrajaju, odnosno odbijaju

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}, \quad c_{jk} = a_{jk} \pm b_{jk}$$

8. **Množenje matrice brojem** se vrši tako da se svi elementi množe tim brojem

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,c, \qquad b_{jk} = c\,a_{jk}$$

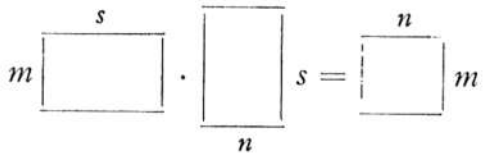
D.6.4. MNOŽENJE MATRICA

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

Uvjet: matrica **A** ima isti broj stupaca koliko matrica **B** ima redaka

$$[a]_m^s \cdot [b]_s^n = [c]_m^n$$

To se još piše simbolično



Elementi produkta iznose

$$c_{jk} = \sum_{r=1}^{s} a_{jr}\,b_{rk}$$

Element j, k produkta jednak je zbroju produkta elemenata j-tog retka od **A** i k-tog stupca od **B**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (7\cdot 1 + 10\cdot 2 + 13\cdot 3), & (8\cdot 1 + 11\cdot 2 + 14\cdot 3), & (9\cdot 1 + 12\cdot 2 + 15\cdot 3) \\ (7\cdot 4 + 10\cdot 5 + 13\cdot 6), & (8\cdot 4 + 11\cdot 5 + 14\cdot 6), & (9\cdot 4 + 12\cdot 5 + 15\cdot 6) \end{bmatrix}$$

Produkt matrica općenito *nije komutativan*

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$$

Kaže se za $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ da je $\mathbf{B}$ *predmnožen* sa $\mathbf{A}$, ili $\mathbf{A}$ je *zamnožen* sa $\mathbf{B}$.

Množenje jediničnom matricom je komutativno

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}$$

Produkt u slijedu (zakon asocijacije za množenje)

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}$$

D.6.5. INVERTIRANJE

Inverzna matrica ima svojstvo

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{1}$$

Matrica $\mathbf{A}^{-1}$ je inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$. Invertira se samo kvadratna matrica

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

$$b_{ik} = \frac{(-1)^{j+k}\,\det_{kj}\,\mathbf{A}}{\det\,\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det\,\mathbf{A} = -2\,(4 \cdot 3 - 2 \cdot 5) - 2\,(1 \cdot 2 - 3 \cdot 4) = 24$$

$$\frac{1}{24}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & -12 & 10 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

Invertirati *se može* samo *nesingularna* matrica, tj. matrica kojoj je determinanta različita od nule.

D.6.6. USITNJAVANJE, BLOK-MATRICE

Matrica **A** se usitnjava kao na primjeru na četiri podmatrice. Podmatrice služe kao elementi matrice **A**.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{array}\right]$$

D.6.7. SVOJSTVENA VRIJEDNOST

Operacija

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\,\mathbf{x}$$

predstavlja *linearnu transformaciju* stupčanog vektora **x** u novi stupčani vektor **y**. Matrica **Z** je kvadratna, a predstavlja *linearni operator* koji transformira vektor **x** u vektor **y**.

Ako se traži skalar λ i vektor **x** takav da vrijedi

$$\mathbf{y} = \lambda\,\mathbf{x}$$

tj.

$$\lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{Z}\,\mathbf{x}$$

onda se takav skalar λ zove *svojstvena vrijednost*, a pripadni vektor **x** *svojstveni vektor* matrice **Z**.

Iz jednakosti slijedi jednadžba

$$(\lambda\,\mathbf{1} - \mathbf{Z})\,\mathbf{x} = 0$$

Ova jednadžba zapravo predstavlja skup od n linearnih jednadžbi koliki je red matrice operatora. Neka je $n = 3$, te su linearne jednadžbe

$$\begin{aligned} (\lambda - z_{11})\,x_1 - z_{12}\,x_2 - z_{13}\,x_3 &= 0 \\ -z_{21}\,x_1 + (\lambda - z_{22})\,x_2 - z_{23}\,x_3 &= 0 \\ -z_{31}\,x_1 - z_{32}\,x_2 + (\lambda - z_{33})\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

To je niz homogenih jednadžbi. Komponente vektora **x** imaju iznose različite od nule, ako je *determinanta svojstvene matrice* jednaka nuli

$$\det(\lambda\,\mathbf{1} - \mathbf{Z}) = 0$$

Taj uvjet vodi na *svojstvene vrijednosti operatora*. U slučaju $n = 3$ jednadžba glasi

$$\begin{vmatrix} \lambda - z_{11} & - z_{12} & - z_{13} \\ - z_{21} & \lambda - z_{22} & - z_{23} \\ - z_{31} & - z_{32} & \lambda - z_{33} \end{vmatrix} = P_3(\lambda) = 0$$

Prema tome je polinom $P_3(\lambda)$ trećeg stupnja

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + z_1 \lambda^2 + z_2 \lambda + z_3$$

$$z_1 = -(z_{11} + z_{22} + z_{33})$$

$$z_2 = 2 z_{11} z_{22} + 2 z_{11} z_{33} + 2 z_{22} z_{33} - z_{12} z_{21} - z_{13} z_{31} - z_{23} z_{32}$$

$$z_3 = - z_{11} z_{22} z_{33} + z_{11} z_{23} z_{32} + z_{22} z_{13} z_{31} + z_{33} z_{12} z_{21} - z_{12} z_{31} z_{23} - z_{13} z_{21} z_{32}$$

Korijeni *svojstvenog polinoma* $P_n(\lambda)$ su svojstvene vrijednosti operatora $\mathbf{Z}$.

D.6.8. DIJAGONALIZIRANJE MATRICE

Svojstvena matrica $(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{Z})$ zadovoljava jednadžbu

$$(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{Z})\,\mathbf{x} = 0$$

Svakoj svojstvenoj vrijednosti λ_k odgovara po tome vektor $\mathbf{x}_k$ iz niza homogenih jednadžbi. Tako se dobiva grupa vektora koji se zovu *svojstveni vektori* operatora $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}$$

k-ti svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_k

Od svojstvenih vektora koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima sastavlja se kvadratna matrica $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = [x_{jk}]_n^n = [s_{jk}]_n^n$$

Svojstveni vektori su stupci matrice $\mathbf{S}$. Sad je

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{S}$$

Matrica $\mathbf{Z}_s$ je dijagonalna, koja ima elemente dijagonale sastavljene od svojstvenih vrijednosti operatora $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{Z}_s = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 \dots\dots\dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Matrica **S** nije singularna, te se smije invertirati u $\mathbf{S}^{-1}$. Ona *dijagonalizira* operator **Z**. To je *uvijek* moguće ako su sve svojstvene vrijednosti međusobno različite. Čim su dvije ili više svojstvenih vrijednosti međusobno jednake, nije uvijek moguće dijagonaliziranje.

Primjer matrice trećeg reda vodi na svojstvene vektore iz homogenih jednadžbi

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - z_{11})\, x_{11} - z_{12}\, x_{21} - z_{13}\, x_{31} &= 0 \\ - z_{21}\, x_{11} + (\lambda_1 - z_{22})\, x_{21} - z_{23}\, x_{31} &= 0 \\ - z_{31}\, x_{11} - z_{32}\, x_{21} + (\lambda_1 - z_{33})\, x_{31} &= 0. \end{aligned}$$

x_{11}, x_{21}, x_{31} su komponente prvog svojstvenog vektora. Oni imaju mnogo iznosa, ali svi zadovoljavaju napisane, tri homogene jednadžbe. Kad se gledaju prve dvije jednadžbe, dobiva se odnos

$$\begin{aligned} [(\lambda_1 - z_{11})(\lambda_1 - z_{22}) - z_{12}\, z_{21}]\, x_{11} &= [z_{13}(\lambda_1 - z_{22}) + z_{12}\, z_{23}]\, x_{31} \\ [(\lambda_1 - z_{11})(\lambda_1 - z_{22}) - z_{12}\, z_{21}]\, x_{21} &= [z_{23}(\lambda_1 - z_{11}) + z_{13}\, z_{21}]\, x_{31} \end{aligned}$$

x_{31} smije imati bilo koji iznos, a onda su x_{11} i x_{21} odmah zadani. Takav je postupak i s ostalim svojstvenim vrijednostima λ_2 i λ_3.

D.6.8.1. Primjer dijagonaliziranja

Zadan je operator

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2 + j\,4 & j\,2 & j\,3 \\ j\,2 & 1 + j\,3 & j\,1 \\ j\,3 & j\,1 & 3 + j\,5 \end{bmatrix}$$

Njegova je matrica simetrična, a elementi su karakteristični za mrežu od tri petlje, ako među njima postoji induktivna sprega. Svojstveni polinom iznosi

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + (-6 - j\,12)\,\lambda^2 + (-22 + j\,46)\,\lambda + 57 - j\,19$$

Rješavajući kubnu jednadžbu $P_3(\lambda) = 0$, dobiju se korijeni koji su svojstvene vrijednosti

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \quad 5{,}51 + j\,1{,}58 \\ \lambda_2 &= -\,0{,}40 + j\,5{,}46 \\ \lambda_3 &= \quad 0{,}89 + j\,4{,}96 \end{aligned}$$

Jednadžbe svojstvenih vektora glase

$$(\lambda_k - z_{11})\, x_{1k} - z_{12}\, z_{21} = z_{13}\, x_{3k}$$
$$- z_{21}\, x_{1k} + (\lambda_k - z_{22})\, x_{2k} = z_{23}\, x_{3k}$$
$$k = 1, 2, 3$$

Kad se uvrste pojedini elementi z_{jk} iz matrice operatora, iznose pojedini elementi matrice dijagonaliziranja

$$s_{1k} = j\,3\,(\lambda_k - 1 - j\,3) - 2 = j\,3\,\lambda_k + 7 - j\,3$$
$$s_{2k} = j\,1\,(\lambda_k - 2 - j\,4) - 6 = j\,\lambda_k - 2 - j\,2$$
$$s_{3k} = (\lambda_k - 1 - j\,3)(\lambda_k - 2 - j\,4) + 4$$
$$k = 1, 3, 3$$

Matrica dijagonaliziranja iznosi

$$\mathbf{S} = \begin{array}{|r|r|r|} \hline 2{,}26 + j\,13{,}53 & -9{,}38 - j\,4{,}20 & -7{,}88 - j\,0{,}33 \\ \hline -3{,}58 + j\,3{,}51 & -7{,}46 - j\,2{,}40 & -6{,}96 - j\,1{,}11 \\ \hline 16{,}88 - j\,15{,}90 & 3{,}77 - j\,7{,}95 & 2{,}24 - j\,2{,}28 \\ \hline \end{array}$$

Dijagonalizirana matrica ima elemente dijagonale jednake svojstvenim vrijednostima

$$\mathbf{Z}_s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5{,}51 + j\,1{,}58 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -0{,}40 + j\,5{,}46 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}89 + j\,4{,}96 \\ \hline \end{array}$$

D.6.8.2. Operator simetriranog voda

Vod s mnogo vodiča se simetrira da se mogu upotrijebiti simetrične komponente. Poglavlje 5.5.4. prikazuje simetrični vod. On ima uzdužnu impedanciju koja se prikazuje matricom što ima sve elemente u dijagonali međusobno jednake, a elementi izvan dijagonale su međusobno jednaki. Ona izgleda za p petlji ovako

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_1 & \cdots & z_1 \\ z_1 & z_0 & z_1 & \cdots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ z_1 & z_1 & \cdots & \cdots & z_0 \end{bmatrix}$$

To je simetrična, kvadratna matrica p-tog reda. Svojstveni polinom se formira iz determinante

$$P_p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - z_0 & -z_1 & -z_1 & \cdots & -z_1 \\ -z_1 & \lambda - z_0 & -z_1 & \cdots & -z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -z_1 & -z_1 & -z_1 & \cdots & \lambda - z_0 \end{vmatrix}$$

Ona se mijenja u oblik koji se lakše računa, a dobiva se tako da se desni stupac odbija od lijevog stupca

$$P_p(\lambda) = \begin{vmatrix} z' & 0 & 0 & \cdots & -z_1 \\ -z' & z' & 0 & \cdots & -z_1 \\ 0 & -z' & z' & \cdots & -z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -z' & -z_0 \end{vmatrix}$$

$$z' = \lambda - z_0 + z_1$$

Determinanta se računa po elementima 11 i 21, te se dobiva

$$P_p(\lambda) = (\lambda - z_0 + z_1)^{p-1}(\lambda - z_0 - 2z_1) = 0$$

Prema tome su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = z_0 + 2z_1$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_p = z_0 - z_1$$

Pojavljuju se svega dvije različite svojstvene vrijednosti, što govori da je potrebno posebno ispitivanje mogućnosti dijagonaliziranja operatora. Postoje samo dvije skupine jednadžbi svojstvenih vektora. One se sve pokrate impedancijom z_1, jer ona sama preostaje u jednadžbama, te one glase za vektor $\mathbf{x}_1$

$$\begin{aligned} 2x_{11} - x_{21} - x_{31} \cdots - x_{p1} &= 0 \\ -x_{11} + 2x_{21} - x_{31} \cdots - x_{p1} &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ -x_{11} - x_{21} - x_{31} \cdots + 2x_{p1} &= 0 \end{aligned}$$

Odbija se donja jednadžba od gornje jednadžbe, te se dobiva uvjet

$$x_{11} = x_{21} = x_{31} = \cdots = x_{p1}$$

Prema tome su sve komponente vektora međusobno jednake, a najbolje je njihov iznos uzeti jednak jedinici

$$s_{k1} = 1$$

Svi ostali vektori koji slijede iz $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots$, imaju jednu jednadžbu na primjeru $\mathbf{x}_2$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + \cdots + x_{p2} = 0$$

Zbroj komponenti jednak je nuli, a treba da budu međusobno različite. Takvo svojstvo imaju brojevi

$$s_{k2} = \exp\left(j\,2\pi\frac{k}{p}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots p$$

Oni su kompleksni, a njihovi vektori u kompleksnoj ravnini tvore pravilan poligon sa p stranica. Tako je zbroj svih vektora nula. Neka je

$$\exp\left(j\frac{2\pi}{p}\right) = a$$

te je

$$s_{k2} = a^k$$

Komponente vektora su poredane kao u shemi (5.84), jer takva matrica dijagonalizira zadani operator

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a^{p-1} & a^{p-2} & \ldots & a \\ 1 & a & a^{p-1} & \ldots & a^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a^{p-2} & a^{p-3} & \ldots & a^{p-1} \end{bmatrix} = [S_{jk}]_p^p$$

Ta je matrica regularna, tj. ona ima inverznu matricu $\mathbf{S}^{-1}$. Njezina determinata iznosi

$$\det \mathbf{S} = (-1)^{p-1}\, p\, a\, (a-1)^{p-2} \neq 0$$

Inverzija iznosi

$$\frac{1}{p}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a & a^2 & \ldots & a^{p-1} \\ 1 & a^{p-1} & a & \ldots & a^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a^2 & a^3 & \ldots & a \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{-1}$$

Sada dijagonalizirani operator ima matricu koja u dijagonali ima svojstvene vrijednosti

$$\begin{bmatrix} z_0 + 2z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_0 - z_1 & & \\ \vdots & & z_0 - z_1 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_s = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{S}$$

Takav je rezultat u poglavlju 5.5.4.

D.6.9. MATRIČNE FUNKCIJE

D.6.9.1. Diferenciranje matrice

Diferenciranje matrice se vrši tako, da se diferenciraju svi elementi matrice

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}a_{jk}}{\mathrm{d}t}\right]_m^n$$

D.6.9.2. Integriranje matrice

Integriranje matrice se vrši tako, da se integrira svaki element matrice

$$\int \mathbf{A}\,\mathrm{d}t = \left[\int a_{jk}\,\mathrm{d}t\right]_m^n$$

D.6.9.3. Polinom matrice

Matrica je kvadratna

$$P(\mathbf{A}) = c_0\,\mathbf{A}^n + c_1\,\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\,\mathbf{A} + c_n\,\mathbf{1}$$

$c_0 \ldots c_n$ koeficijenti polinoma su brojevi

n stupanj polinoma.

D.6.9.4. Funkcije matrica

Funkcije se prikazuju beskonačnim redom potencija matrica, ako za iste funkcije postoji red potencija

$$\exp \mathbf{a} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{a}}{1!} + \frac{\mathbf{a}^2}{2!} + \dots$$

$$\sin \mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}^3}{3!} + \frac{\mathbf{a}}{5!} - + \dots$$

$$\cos \mathbf{a} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{a}^2}{2!} + \frac{\mathbf{a}^4}{4!} - + \dots$$

D.6.9.5. Prikaz funkcije polinomom

Zadana je kvadratna matrica $\mathbf{a}$ n-tog reda. Njezina se funkcija prikazuje polinomom

$$f(\mathbf{a}) = \frac{D_{n-1}}{D}\,\mathbf{a}^{n-1} + \frac{D_{n-2}}{D}\,\mathbf{a}^{n-2} + \dots + \frac{D_1}{D}\,\mathbf{a} + \frac{D_0}{D}\,\mathbf{1}$$

Ovdje je D determinanta

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{a}$, međusobno različite. Determinante D_{n-k} se dobiju iz determinante D tako, da je

$$n - k = r - 1$$

te se redak r nadomjesti iznosima funkcije $f(\lambda_1), f(\lambda_2) \dots f(\lambda_n)$.

Neka je zadana dijagonalna matrica trećeg reda

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

elementi dijagonale su ujedno njezine svojstvene vrijednosti.

Treba odrediti

$$f(\mathbf{a}) = \exp \mathbf{a}$$

Karakteristične determinante glase

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1^2 - \lambda_3^2 \lambda_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_3} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{\lambda_3} - \lambda_3 e^{\lambda_2} + \lambda_3 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_3} + \lambda_1 e^{\lambda_2} - \lambda_2 e^{\lambda_1}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_3} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \lambda_3^2 e^{\lambda_2} - \lambda_2^2 e^{\lambda_3} + \lambda_1^2 e^{\lambda_3} - \lambda_3^2 e^{\lambda_1} + \lambda_2^2 e^{\lambda_1} - \lambda_1^2 e^{\lambda_2}$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_3} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = e^{\lambda_1}(\lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_3 \lambda_2^2) + e^{\lambda_2}(\lambda_3 \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3^2) + e^{\lambda_3}(\lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_2 \lambda_1^2)$$

Determinante se uvrste u polinom

$$\exp \mathbf{a} = \frac{D_2}{D} \mathbf{a}^2 + \frac{D_1}{D} \mathbf{a} + \frac{D_0}{D} \mathbf{1}$$

te se dobije konačno

$$\exp \mathbf{a} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix}$$

Vidljiva je prednost dijagonalne matrice.

Ako je **a** dijagonalna matrica, elementi dijagonale su ujedno njezine svojstvene vrijednosti. Vrijedi za bilo koju funkciju matrice bilo kojeg reda

$$f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \dots 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \dots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 \dots 0 & \dots f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

D.7. ORTOGONALNI KOORDINATNI SUSTAVI

D.7.1. POTENCIJALNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Rješavanje polja vodi na rješavanje jednadžbe potencijala

1. $(\Delta - \gamma^2)\,\varphi = 0$ skalarni potencijal
2. $(\Delta - \gamma^2)\,\mathbf{A} = 0$ vektorpotencijal
3. $(\Delta - \gamma^2)\,\mathbf{\Pi} = 0$ Hertzov vektor

Tip jednadžbe

1. **Eliptički tip** jednadžbe, Poissonova ili Laplaceova jednadžba

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \qquad \Delta\mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{J}$$

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\mathbf{A} = 0$$

To su statička polja ili potencijalna polja. Primjenjuju se ili *Dirichletovi granični uvjeti* ili *Neumannovi granični uvjeti* na zatvorenu plohu S koja zatvara promatrani prostor.

2. **Parabolički tip** jednadžbe, jednadžba vođenja topline ili difuzije

$$\Delta\varphi = \frac{1}{s}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Pirimjenjuju se *Dirichletovi* ili *Neumannovi granični uvjeti*. Potreban je i jedan *početni uvjet*, $t = 0$. Granična ploha S je *otvorena*.

3. **Hiperbolički tip** jednadžbe, valna jednadžba

$$\Delta\varphi = \frac{1}{s}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

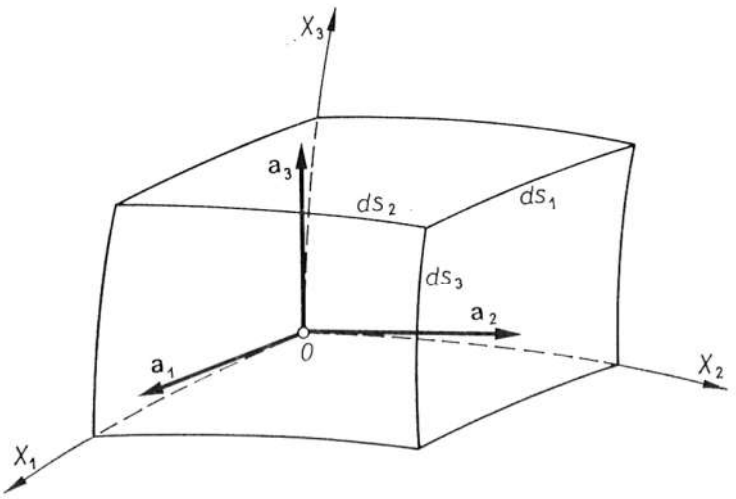
Primjenjuju se *Cauchyevi granični uvjeti*. Potrebna su i dva početna uvjeta na graničnoj plohi S u vremenu $t = 0$ za φ i $\partial\varphi/\partial t$. Granična ploha S je *otvorena*.

4. **Tri pitanja** u rješavanju diferencijalnih jednadžbi jesu

1. rješenje *postoji*
2. rješenje je *jednoznačno*
3. rješenje je *stabilno*

D.7.2. DEFINICIJE

Granični uvjeti na zadanoj plohi S predstavljaju posebni problem ovisan o primijenjenom koordinatnom sustavu. Odabrani koordinatni sustav mora biti takav, da se granični uvjeti postavljaju jednostavno. Uvode se novi koordinatni sustavi prilagođeni graničnim uvjetima.



Sl. D.1. Ortogonalni koordinatni sustav.

Korisno je da novi koordinatni sustavi budu *ortogonalni*. To znači da su jedinični vektori pojedinih koordinata međusobno okomiti. Na sl. D.1. prikazan je jedan takav ortogonalni koordinatni sustav. Jedinični vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ su međusobno okomiti. Koordinatne osi su x_1 x_2 i x_3. Redoslijed osi je takav, da je $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$. *Kartezijev* ili *Descartesov* koordinatni sustav je također ortogonalan. Običaj je da se njegove osi označavaju sa X, Y i Z, a jedinični vektori u istom redu $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$. *Desni sustav* ima takav redoslijed, da je $\mathbf{x}_0 \times \mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_0$.

Ortogonalni koordinatni sustav se odabire tako, da se u njemu na jednostavan način izražavaju granični uvjeti. Budući da se jednadžbe polja prikazuju uvijek u kartezijevu sustavu, treba naći odnose odabranog ortogonalnog sustava prema kartezijevu. Općenito su koordinate x_i neke točke u ortogonalnom sustavu funkcije koordinata x, y, z, tj. $x_i = x_i(x, y, z)$. Obrnuta funkcionalnost također postoji i ona iznosi

$$x = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad z = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

Takva funkcionalna ovisnost uvjetuje i totalne diferencijale, koji bi izgledali za jednu koordinatu

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial x_i}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial x_i}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{D.1}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \tag{D.2}$$

Duljina luka mora biti u oba koordinatna sustava ista. Ona predstavlja udaljenost između dviju točaka. Duljina luka u kartezijovu sustavu slijedi iz Pitagorina poučka

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{D.3}$$

Ovdje treba diferencijale iz (D.2) supstituirati. Sada duljina luka slijedi iz

$$ds^2 = h_1^2\, dx_1^2 + h_2^2\, dx_2^2 + h_3^2\, dx_3^2$$

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_i}\right)^2 \tag{D.4}$$

Pojedine faktore h_i se određuje iz (D.4). Oni su bitni faktori za prijelaz iz novog sustava u kartezijev. Oni se dobiju i jednostavnije iz duljina lukova u smjeru pojedinih koordinata kao što je označeno na sl. D.1. Pojedini lukovi slijede iz (D.4) i oni iznose

$$ds_i = h_i\, dx_i \tag{D.5}$$

Tada je duljina luka

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$$

D.7.3. VEKTORSKE OPERACIJE

Čim je definirana duljina luka, mogu se ustanoviti vektorske operacije u odabranom ortogonalnom sustavu. Operacija *gradijenta* po definiciji iznosi

$$\operatorname{grad}_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tag{D.6}$$

Operacija *divergencije* se izvodi na osnovi Gaussova stavka koji kaže da je prostorni integral divergencije nekog vektora jednak ukupnom toku toga vektora, što izlazi iz promatranog prostora. Operaciju treba primijeniti na prizmu sa sl. D.1. Dobiva se

$$\operatorname{div} \mathbf{D} \cdot ds_1\, ds_2\, ds_3 = \frac{\partial}{\partial s_1}(ds_2\, ds_3\, D_1)\, ds_1 + \frac{\partial}{\partial s_2}(ds_1\, ds_3\, D_2)\, ds_2 + \frac{\partial}{\partial s_3}(ds_1\, ds_2\, D_3)\, ds_3$$

Kad se uzme u obzir (D.5), slijedi divergencija

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 D_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 D_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 D_3)\right]$$

Operacija *rotacije* se dobija u novom koordinatnom sustavu primjenom Stokesova stavka. Stokesov stavak kaže da je plošni integral rotacije nekog vektora jednak linijskom integralu toga vektora po konturi što omeđuje promatranu plohu. Njega treba primijeniti na strane prizme sa sl. D.1.

$$\mathrm{rot}_1 \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}s_2\, \mathrm{d}s_3 = \frac{\partial}{\partial s_2}(\mathrm{d}s_3\, A_3)\, \mathrm{d}s_2 - \frac{\partial}{\partial s_3}(\mathrm{d}s_2\, A_2)\, \mathrm{d}s_3$$

Ako se opet primijeni (D.5), iznosi rotacija

$$\mathrm{rot}_1 \mathbf{A} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 A_2)\right] \tag{D.8}$$

Ostale komponente rotacije vektora slijede cikličkom permutacijom

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}_2 \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 A_3)\right] \\ \mathrm{rot}_3 \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 A_1)\right] \end{aligned} \tag{D.8}$$

Laplaceov operator sudjeluje direktno u rješavanju potencijalne jednadžbe, a dobije se po definiciji

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right] \tag{D.9}$$

D.8. PRAVOKUTNI KOORDINATNI SUSTAV

D.8.1. OSNOVNE VEKTORSKE OPERACIJE

1. $\mathrm{grad}\,\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{x}_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{y}_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{z}_0$

2. $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \dfrac{\partial D_x}{\partial x} + \dfrac{\partial D_y}{\partial y} + \dfrac{\partial D_z}{\partial z}$

3. $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{x}_0 + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{y}_0 + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{z}_0$

4. $\Delta\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

5. $\Delta\mathbf{A} = \dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2}$

D.8.2. POISSONOVA JEDNADŽBA U JEDNODIMENZIONOM PROSTORU

Potencijal se mijenja po zakonu $\varphi = \varphi(x)$, a gustoća naboja je konstantna. Jednadžba glasi

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \qquad \varrho = \text{konst.}$$

Rješenje ove jednadžbe glasi

$$\varphi = -\frac{\varrho}{2\varepsilon}x^2 + K_1 x + K_2$$

Integracione konstante K_1 i K_2 se dobiju iz graničnih uvjeta po Dirichletu. Potencijal je zadan na dvije paralelne ravnine, koje zatvaraju promatrani prostor

$$x = 0, \quad \varphi = 0$$
$$x = d, \quad \varphi = u$$

Sad je $K_2 = 0$, $K_1 = u/d + \varrho d/2\varepsilon$, a potencijal iznosi

$$\varphi = u\frac{x}{d} + u_d\left(\frac{x}{d} - \frac{x^2}{d^2}\right), \qquad u_d = \frac{\varrho d^2}{2\varepsilon} \tag{D.10}$$

Napon u se javlja zbog prostornog naboja. Odnos x/d je uvijek manji od jedinice, $x/d < 1$, a zato je

$$\frac{x}{d} > \left(\frac{x}{d}\right)^2$$

Na sl. D.2. je prikazan odnos

$$\frac{\varphi}{u} = f\left(\frac{x}{d}\right) \quad \text{za nekoliko } u_d$$

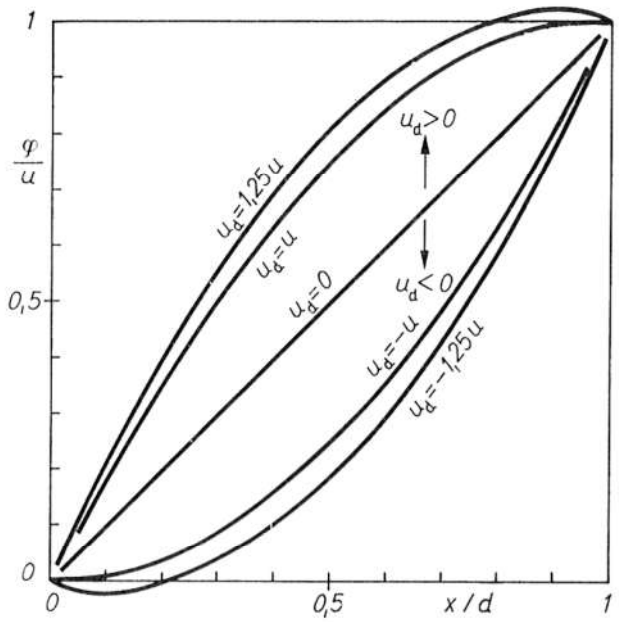
Čim u prostoru nema naboja, polje je homogeno, a potencijal se mijenja razmjerno udaljenosti od elektrode, gdje je $\varphi = 0$. Za $x = d$ mora biti $\varphi = u$. Zbog prostornog naboja potencijal se mijenja parabolično. Neka je prostorni naboj 10 μC/m^3 u vakuumu sa $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85$ pF/m. Razmak među elektrodama iznosi $d = 10$ mm. Tada je

$$u_d = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 56{,}5 \text{ V}$$

Na elektrode je narinut napon $u = 500$ V. Tada se potencijal mijenja po zakonu

$$\varphi = 556{,}5 \cdot \frac{x}{d} - 56{,}5 \left(\frac{x}{d}\right)^2 \text{ volta}$$

On postepeno raste od iznosa $\varphi = 0$ do $\varphi = u = 500$ V. Kad bi u bio manjeg iznosa od u_d, npr. $u = 30$ V, potencijal bi rastao od $\varphi = 0$ do nekog najvećeg



Sl. D.2. Dijagram potencijala pločastog kondenzatora φ/u u ovisnosti o udaljenosti od jedne elektrode, x/d. Tu je u napon kondenzatora, a d je razmak među elektrodama. Dijagram je za nekoliko iznosa prostornog napona u_d.

iznosa od 33 V, te bi pao na zadani iznos $u = 30$ V. To nastaje kad je $u < u_d$, odnosno kad je dodatni potencijal u_d zbog prostornog naboja dovoljno velik. On je dovoljno velik kad je prostorni naboj dovoljno velik.

Jakost polja iz (D.10) se mijenja po zakonu

$$E = E_0 + E_d - 2 E_d \frac{x}{d}$$

$$E_0 = -\frac{u}{d}, \quad E_d = -\frac{\varrho\, d}{2\,\varepsilon} = -\frac{u_d}{d}$$

Ona nije konstantna iznosa kao u homogenu polju, već se mijenja linearno. Ona opada, a može promijeniti i predznak ako je $u_d > u$, tj. ako je dovoljno velik prostorni naboj. To je značajna posljedica postornog naboja. Polje djeluje da se naboj

giba. Pozitivni naboj se giba u smjeru polja. Ako polje promijeni predznak, naboj se prestaje gibati u tome smjeru, te mijenja smjer, odnosno zaustavlja se. Slobodni prostorni naboj može djelovati da svoje vlastito strujanje zaustavi. Strujanje se pokreće povećanjem vanjskog narinutog napona. Razlika potencijala, nastala zbog prostornog naboja, predstavlja protunapon ili pad potencijala, suprotstavljen narinutom potencijalu.

D.8.3. STRUJA PROSTORNOG NABOJA

Naboj se dovodi zadanom prostoru i odvodi iz njega. Takav se proces odvija u elektronkama. Tamo elektroni sačinjavaju prostorni naboj, a oni su negativnog predznaka. Gustoća struje u pločastom kondenzatoru iznosi $J = -\varrho v$, ako je v brzina naboja. Naboj se općenito ubrzava u polju, tj. dobiva na kinetičkoj energiji. Naboj crpe energiju iz polja, on svladava razliku potencijala. Ovdje se mora pretpostaviti da nisu velika ubrzanja naboja, niti su njegove brzine velike. Kinetička energija je razmjerna kvadratu brzine, odnosno svladanoj razlici potencijala. Ako je jedna elektroda na nultom potencijalu, kinetička energija je razmjerna potencijalu, tj.

$$v^2 = c\varphi$$

Sada je Poissonova jednadžba za $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{J}{\varepsilon_0 \sqrt{c\varphi}}$$

Ako je za $x = 0$, $\varphi = 0$, rješenje jednadžbe glasi

$$\varphi = u\left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$$

Razlika potencijala u među elektrodama iznosi

$$u = \left(\frac{9\, d^2 J}{4\, \varepsilon_0 \sqrt{c}}\right)^{2/3}$$

Odatle slijedi odnos između gustoće struje i razlike potencijala u među elektrodama

$$J = J_0 \left(\frac{u}{u_k}\right)^{3/2} \tag{D.11}$$

Tu su J_0 i u_k konstante sustava. To je poznati 3/2-zakon, karakterističan za odnos struje i napona u sustavima gdje postoje slobodni prostorni naboj i dovoljno izdašni izvori naboja.

Umjesto gustoće struje može se pisati jakost struje, tj.

$$i = i_0 \left(\frac{u}{u_k}\right)^{3/2}$$

U takvom sustavu ne vrijedi više Ohmov zakon, tj. linearna razmjernost između napona i struje.

Potencijal postepeno raste po paraboli $(x/d)^{4/3}$ do u. Jakost polja nije konstantna, već također postepeno raste kao $E = (4/3)\, E_0 \cdot (x/d)^{1/3}$. Jakost polja poprima veći iznos nego u prostoru bez prostornog naboja u strujanju. Za $x = 0$ jakost polja je ništica. Na elektrodi nultog potencijala nema niti naboja. Na drugoj elektrodi je jakost polja $(4/3)\, E_0$, a njoj odgovara i plošna gustoća naboja $(4/3)\, \varepsilon_0\, E_0$. Time je zadan i ukupni naboj na toj elektrodi. On je za 1/3 veći za istu razliku potencijala prema iznosu kad nema prostornog naboja. Naboj suprotna predznaka se nalazi u prostoru među elektrodama, a njegov je ukupni iznos upravo jednak naboju na ovoj jednoj elektrodi tj. $(4/3)\, \varepsilon_0\, E_0$. Uz elektrodu nultog potencijala se skuplja velika količina prostornog naboja po relaciji $J = \varrho\, v$. Zato dolazi do pojave razlike potencijala suprotna predznaka, kao posljedica velike količine prostornog naboja.

D.8.4. DVODIMENZIONI PROSTOR

Potencijal polja ovisi o dvije koordinate sustava, tj. $\varphi = \varphi\,(x, y)$. Neka je polje zadano Laplaceovom jednadžbom

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Mogu se promatrati partikularna rješenja, koja su produkt dviju funkcija

$$\varphi = \varphi\,(x, y) = X\,(x) \cdot Y\,(y) \tag{D.12}$$

Karakteristika novih funkcija je da su ovisne samo o jednoj varijabli, tj. $X = X\,(x)$, a $Y = Y\,(y)$. Kad se to uvrsti, slijedi odnos

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = 0$$

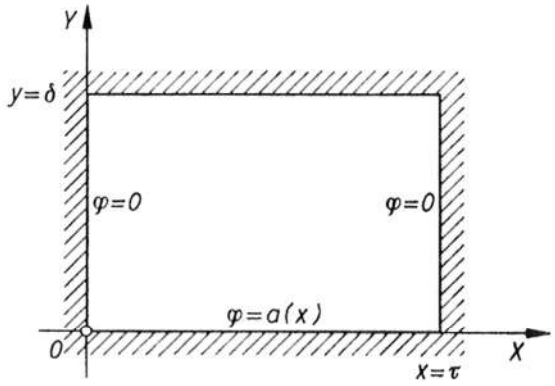
Prvi pribrojnik je ovisan samo o x, a drugi pribrojnik samo o y. Njihov zbroj može biti jednak ništici. samo ako su oba jednaka jednoj konstanti. Prema tome je

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{X}{s^2} \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = +\frac{Y}{s^2}$$

Konstanta s mora imati dimenziju duljine, ako se želi zadržati dimenzionu ispravnost. Pretpostavlja se da koordinate imaju dimenziju duljine. Poznato je da ovakve parcijalne diferencijalne jednadžbe imaju mnogo rješenja. Ona se usklađuju s graničnim uvjetima. Rješenje predstavljeno harmoničkim funkcijama zadovoljava najširi spektar problema. Najširi je spektar zadovoljen rješenjima

$$\begin{aligned} X &= C_1 \sin\left(\frac{x}{s}\right) + C_2 \cos\left(\frac{x}{s}\right) \\ Y &= D_1 \operatorname{sh}\left(\frac{y}{s}\right) + D_2 \operatorname{ch}\left(\frac{y}{s}\right) \end{aligned} \tag{D.13}$$

dakle trigonometrijskim i hiperbolnim funkcijama. Ako je potrebno, duljina s može predstavljati cijeli spektar duljina. To se događa kad se veličina iz graničnih uvjeta predstavlja Fourierovim redom.



Sl. D.3. Pravokutna cijev. Jedna stijenka je na zadanom potencijalu, a ostale su na nultom potencijalu.

Šire poopćenje se postiže dodavanjem rješenju (D.12) linearne funkcije $(K_1 + K_2 x + K_3 y)$, ako to traže granični uvjeti.

Promatrani prostor se predstavlja **pravokutnom cijevi**. Polje se mijenja u ravnini X - Y gdje cijev ima pravokutan presjek stranica τ i δ, prema sl. D.3. Polje se ne mijenja u smjeru osi Z. Na stranici $x = 0$ potencijal je $\varphi = 0$. To znači da je $X(0) = 0$. Prema tome mora biti $C_2 = 0$.

Drugi uvjet postavlja da je $\varphi = 0$, za $x = \tau$. To je moguće, samo ako je

$$\sin\left(\frac{\tau}{s}\right) = 0$$

za bilo koju ordinatu y. Da bi sinus nekog kuta bio ništica, kut mora biti mnogokratnik od π, tj.

$$\frac{\tau}{s} = n\,\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{D.14}$$

Treći uvjet potječe iz granice $y = \delta$. Neka je na njoj također potencijal $\varphi = 0$ To može biti zadovoljeno, ako je iz (D.13) $Y(\delta) = 0$, tj.

$$\frac{D_1}{D_2} = -\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\delta}{s}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\delta}{s}\right)}$$

Konačno je potencijal u presjeku pravokutnika prema sl. D.3.

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh}\left(n\pi\frac{\delta - y}{\tau}\right)}{\operatorname{sh}\left(n\pi\frac{\delta}{\tau}\right)} \sin\left(n\pi\frac{x}{\tau}\right) \tag{D.15}$$

za granične uvjete

$$\varphi = 0, \quad \text{za} \quad x = 0, \quad x = \tau, \quad y = \delta$$

Koeficijenti A_n slijede iz uvjeta $\varphi = a(x)$ za $y = 0$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(n\pi\frac{x}{\tau}\right) \tag{D.16}$$

To je samo harmonički red funkcije koja predstavlja potencijal na granici $y = 0$. Tada su A_n amplitude pojedinih harmonika reda.

D.8.4.1. Izraženi magnet električnog stroja

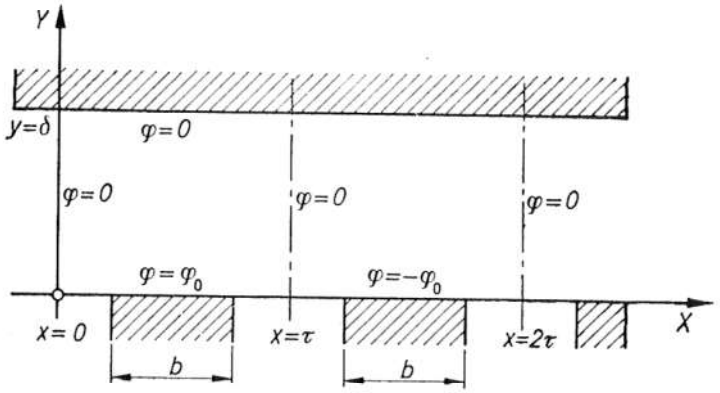
Slično se može izraziti polje u *prostoru zračnog raspora električnih strojeva s izraženim magnetima*, a konstantnom duljinom zračnog raspora ispod magneta. Površina magneta je na konstantnom skalarnom potencijalu φ_0 u odnosu na drugu stranu raspora, koja je na nultom potencijalu. Drugi magnet ima potencijal $-\varphi_0$. Širina magneta ne zauzima cijelu duljinu τ, već samo jedan dio $b < \tau$. Neka je potencijal za $y = 0$, prema sl. D.4.

$$\varphi = 0 \quad \text{za} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(\tau - b)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{za} \quad \frac{1}{2}(\tau + b) \leqslant x \leqslant \tau$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{za} \quad \frac{1}{2}(\tau - b) \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(\tau + b)$$

Za $\tau < x < 2\tau$ samo potencijal mijenja predznak. Prema tome je potencijal periodička funkcija perioda (2τ). Ona se može rastaviti na harmoničke članove. Ovdje postoje samo neparni sinus-članovi.



Sl. D.4. Zračni raspor između magneta i feromagnetskog poluprostora. Permeabilnost magneta i feromagnetika je beskonačna. Magneti imaju izmjenični potencijal, feromagnetski poluprostor je na nultom potencijalu.

Takvo predstavljanje polja u ovom slučaju je dozvoljeno samo kad se promatra polje za $y = \delta$, ili približno na tome mjestu. Stvarno nije potencijal $\varphi = 0$ za $y = 0$ u prostoru među magnetima, već se mijenja po nekom zakonu. Zato je ovo približni način prikazivanja.

Amplitude pojedinih harmonika iznose

$$A_n = \frac{4\varphi_0}{\pi n} \sin\left(n\pi \frac{b}{2\tau}\right) \tag{D.17}$$

Jakost polja za $y = \delta$ ima samo komponentu Y, a ona slijedi iz

$$H_y = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=\delta} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin\left(n\pi \frac{x}{\tau}\right)$$

$$H_n = \frac{\frac{n\pi}{\tau} A_n}{\operatorname{sh}\left(n\pi \frac{\delta}{\tau}\right)} \tag{D.18}$$

Neka je $\varphi_0/\delta = H_0$ jakost polja pod sredinom pola. Prema tome, harmonici polja su zadani sa

$$\frac{H_n}{H_0} = \frac{n\pi \frac{\delta}{\tau}}{\operatorname{sh}\left(n\pi \frac{\delta}{\tau}\right)} \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\pi \frac{b}{2\tau}\right) \tag{D.19}$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots$$

Plošni integral polja daje tok koji ulazi u drugu stranu raspora ili »armaturu«. Ako se označi sa $\Phi_0 = \mu_0 \tau H_0$ po jedinici duljine u smjeru Z osi, iznosi tok

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \sum_1^\infty \int_0^\tau \frac{H_n}{\tau H_0} \sin\left(n\pi \frac{x}{\tau}\right) \mathrm{d}x, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \sum_1^\infty \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin\left(n\pi \frac{b}{2\tau}\right) \frac{n\pi \frac{\delta}{\tau}}{\mathrm{sh}\left(n\pi \frac{\delta}{\tau}\right)} \tag{D.20}$$

Da je $\tau/\delta = 20$, a $b/\tau = 0{,}7$, iznosio bi $\Phi/\Phi_0 = 0{,}70$. U drugom primjeru neka je granični uvjet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad y = \delta$$

Iz (D.13) slijedi

$$\frac{D_1}{D_2} = -\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\delta}{s}}{\mathrm{ch}\,\frac{\delta}{s}}$$

D.8.4.2. Jaram električnog stroja

Takav se uvjet postavlja za polje u *jarmu električnih strojeva*. Sada potencijal iznosi iz (D.12) i (D.13)

$$\varphi = \sum_1^\infty A_n \frac{\mathrm{ch}\left(n\pi \frac{\delta - y}{\tau}\right)}{\mathrm{ch}\left(n\pi \frac{\delta}{\tau}\right)} \sin\left(n\pi \frac{x}{\tau}\right) \tag{D.21}$$

Neka je potencijal za $y = 0$ raspoređen sinusno sa zadanom amplitudom A_1. Tada u potencijalu nema harmonika. Jakost polja slijedi iz

$$H_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\pi \frac{A_1}{\tau} \frac{\mathrm{ch}\left(\pi \frac{\delta - y}{\tau}\right)}{\mathrm{ch}\left(\pi \frac{\delta}{\tau}\right)} \cos\left(\pi \frac{x}{\tau}\right)$$

$$H_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \pi \frac{A_1}{\tau} \frac{\mathrm{sh}\left(\pi \frac{\delta - y}{\tau}\right)}{\mathrm{ch}\left(\pi \frac{\delta}{\tau}\right)} \sin\left(\pi \frac{x}{\tau}\right) \tag{D.22}$$

Na sl. D.5. prikazane su silnice i ekvipotencijalne linije za slučaj $\tau/\delta = 4$. Jednadžba ekvipotencijalnih linija slijedi iz (D.21)

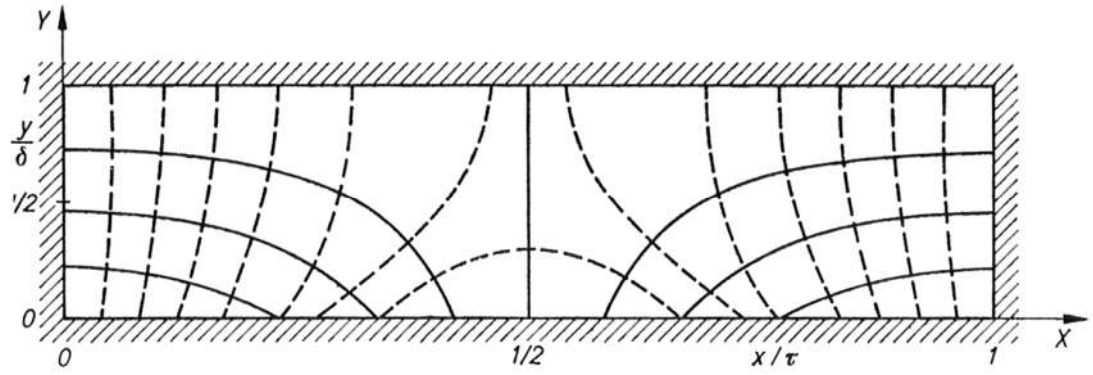
$$\operatorname{ch}\left(\pi \frac{\delta - y}{\tau}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{\tau}\right) = \text{konst.}, \quad \text{ekvipotencijalne linije}$$

Jednadžba silnica slijedi po definiciji iz odnosa

$$\frac{H_y}{H_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Kad se uvrste iznosi (D.22) za H_x i H_y, mora biti

$$\operatorname{sh}\left(\pi \frac{\delta - y}{\tau}\right) \cos\left(\pi \frac{x}{\tau}\right) = \text{konst.}, \quad \text{silnice}$$



Sl. D.5. Silnice i ekvipotencijalne linije u jarmu magnetske jezgre električnog stroja na jednom polnom koraku.

U ravnini $x = 0$ i $x = \tau$ postoji samo komponenta X polja. Ona je jednaka iz (D.22)

$$H_x = \pi \frac{A_1}{\tau} \frac{\operatorname{ch}\left(\pi \frac{\delta - y}{\tau}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\delta}{\tau}\right)}$$

Ona ima najveći iznos za $y = 0$ i najmanji iznos za $y = \delta$. Njihov je odnos

$$\frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \operatorname{ch}\left(\pi \frac{\delta}{\tau}\right)$$

ovisan samo o omjeru (δ/τ). U tablici je navedeno nekoliko vrijednosti odnosa najveće i najmanje jakosti polja

τ/δ	2,5	3	3,5	4	4,5	5
H_{max}/H_{min}	1,90	1,60	1,43	1,32	1,26	1,20

Vrijednosti τ/δ su uobičajene za proporcije jarma u električnih strojeva. Opaža se razmjerno velika neravnomjernost polja po visini jarma.

Tok polja kroz plohu $x = 0$ dobiva se iz plošnog integrala

$$\Phi = \int_0^{\delta} \mu H_x \, dy = \mu A_1 \operatorname{th}\left(\pi \frac{\delta}{\tau}\right)$$

To je najveći tok koji prolazi jarmom u smjeru osi X. S pomoću njega se odredi srednja indukcija u jarmu, odnosno srednja jakost polja u presjeku $x = 0$. Taj račun je obično pristupačan, jer su zadani magnetski tok jarma i njegove dimenzije. Da bi se protjerao taj tok, potrebna je razlika potencijala A_1 između točaka $x = \tau/2$ i $x = 0$ na ordinati $y = 0$. Uz pomoć srednje jakosti polja

$$H_{sr} = \frac{\Phi}{\mu \delta} = \frac{A_1}{\delta} \operatorname{th}\left(\pi \frac{\delta}{\tau}\right)$$

određuje se potrebni A_1 po relaciji

$$A_1 = c_j \frac{\tau}{2} H_{sr}$$

Prema tome je konstanta potencijala

$$c_j = \frac{2\delta}{\tau} \operatorname{cth}\left(\pi \frac{\delta}{\tau}\right)$$

Ona iznosi $c_j = 0{,}94$ za odnos $\tau/\delta = 2.5$. Ovo razmatranje može poslužiti samo za najgrublju ocjenu odnosa u polju jarma električnih strojeva.

D.8.5. ANALITIČKA FUNKCIJA JEDNE KOMPLEKSNE VARIJABLE

Velike mogućnosti rješavanja polja u pravokutnom sustavu pruža teorija funkcija jedne kompleksne varijable. Njezina su svojstva upravo takva da se podudaraju s osnovnim matematičkim svojstvima polja. Ako je $z = x + jy$ kompleksna varijabla, onda je

$$f(z) = w = u + jv = f(x + jy)$$

funkcija s jednom kompleksnom varijablom. U kompleksnom području se veličine predstavljaju u kompleksnoj ravnini. Spomenuta funkcija povezuje dvije kompleksne ravnine, ravninu (z) i ravninu (w). Tako npr. u ravnini (w) $u = \text{konst.}$ su pravci paralelni s imaginarnom osi. Isto tako su $v = \text{konst.}$ pravci paralelni s realnom osi. Međutim, $u = \text{konst.}$ ili $v = \text{konst.}$ su neke krivulje u ravnini (z), ovisno o funkciji $f(z)$.

Funkcija $f(z)$ je *analitička* ako ima derivaciju, tj. ako kvocijent diferencija $\Delta w/\Delta z$ ima limes koji je nezavisan od toga na koji način Δz teži k nuli.

Prema tome mora biti

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta w}{j\,\Delta y}$$

To je definicija analitičke funkcije s jednom kompleksnom varijablom. Odatle slijede *Cauchy-Riemannove jednadžbe*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{D.23}$$

Ove jednadžbe moraju biti zadovoljene da bi neka funkcija bila analitična. Pored toga ona mora biti jednoznačna, kontinuirana i diferencijabilna. Za $u = u(x, y)$ i $v = v(x, y)$ vrijedi Laplaceova jednadžba

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \tag{D.24}$$

Prema tome se $u(x, y)$ i $v(x, y)$ ponašaju kao potencijal za koji vrijedi također Laplaceova jednadžba. To je bilo odlučno da se iskoristilo analitičku funkciju pri rješavanju polja. Analitička funkcija ima svojstvo da je

$$\oint_s f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \oint_s \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \cdot f(z_0) \tag{D.25}$$

Integraciona krivulja s mora ležati u području gdje je funkcija analitična. Krivulja s obuhvaća točku z_0. To su *prvi i drugi Cauchyev integral.* Prvi integral ujedno znači da je linijski integral $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ između dviju točaka neovisan o putu integracije. Takvo svojstvo se susreće u potencijalnom polju, te je i odatle stanovita sličnost.

Ako $u(x, y)$ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, on bi mogao predstavljati potencijal. Funkcija $u(x, y)$ se još zove i *potencijalna funkcija.* Ona nema dimenzija, ali to ne smeta da se dobiju ispravna rješenja. Pitanje dimenzija se rješava pravilno odabranim dimenzionim konstantama. Ne uzimajući u obzir dimenzije, jakost polja iznosi

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

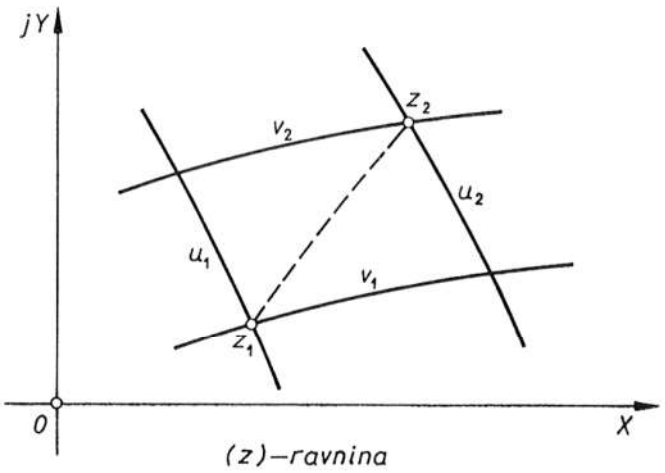
ako $u(x, y)$ predstavlja potencijal. Ukupna jakost polja slijedi tada iz

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2$$

ili odatle je

$$E = \left|\frac{dw}{dz}\right| = |f'(z)| \tag{D.26}$$

To je vrlo jednostavan izraz za jakost polja. Jakost polja je jednaka apsolutnom iznosu derivacije analitičke funkcije.



Sl. D.6. Točke z_1 i z_2 u (z) ravnini između kojih se ustanovljava tok.

Tok polja prema sl. D.6. kroz plohu s_{12}, tj. između točaka z_1 i z_2 u ravnini (z) iznosi

$$\Phi = \int_{z_1}^{z_2} (D_x\,dy - D_y\,dx) = \varepsilon \int_{z_1}^{z_2} \left(-\frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

Kad se uzmu u obzir Cauchy-Riemannove jednadžbe, iznosi tok

$$\Phi = \varepsilon (v_1 - v_2) \tag{D.27}$$

On se vrlo jednostavno izražava. Tok je jednak razlici funkcije $v(x, y)$ za točke z_1 i z_2. Dielektričnost se pojavila, jer je kao primjer poslužilo elektrostatsko polje. Jednako se adekvatno mogu pojaviti permeabilnost ili vodljivost. Ako je $u(x, y)$ potencijalna funkcija, onda se sa $v(x, y)$ dobiva tok polja, te se ona zove *strujna funkcija*. Isto tako bi moglo biti i obratno, jer obje funkcije zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu. Time je stvorena osnova da se može konkretno rješavati neko polje.

D.8.5.1. Analitička funkcija

$$w = F \ln \frac{z}{c}$$

Na sl. D.7. je prikazana ravnina (z). Neka je

$$\frac{z}{c} = \frac{r}{c} e^{j\vartheta}$$

Iz

$$w = u + j v = F \ln \frac{r}{c} + j F \vartheta$$

za realni i imaginarni dio se dobiva

$$u = F \ln \frac{r}{c}$$

$$v = F \vartheta$$

Prema tome su u ravnini (z) $u =$ konst. krivulje konstantnog radijusa, tj. kružnice, a $v =$ konst. odgovara $\vartheta =$ konst., što su radijalni pravci. Takvo polje ima *linijski naboj na pravcu*. On ima ekvipotencijalne linije kružnice, a silnice su radijalni pravci. Prema tome, polje linijskog naboja na pravcu može se predstaviti zadanom analitičkom funkcijom. Pri tome je u potencijalna funkcija, a v strujna funkcija. Ukupni tok linijskog naboja iznosi λ, tj. jednak je linijskoj gustoći naboja. Iz (D.27) iznose $v_1 = F \cdot 2\pi$, $v_2 = 0$. Odatle slijedi nepoznata konstanta F

$$\lambda = \varepsilon F \cdot 2\pi$$

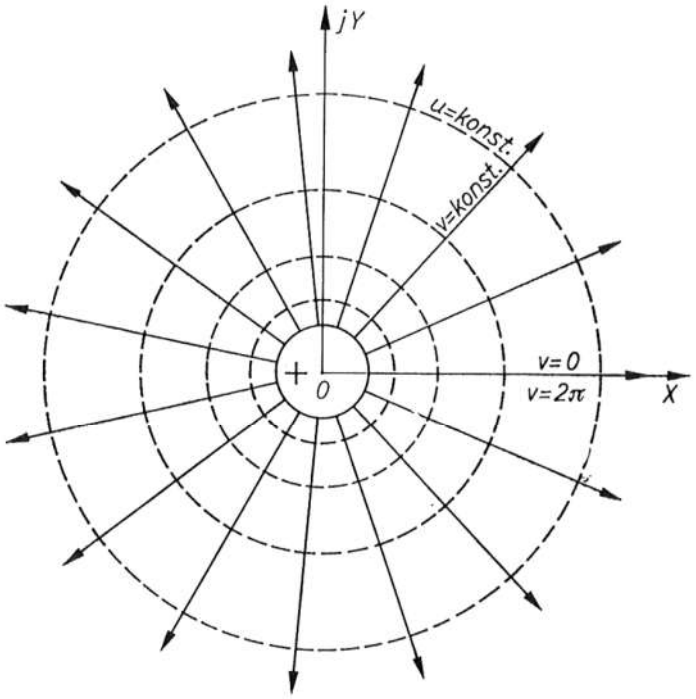
$$F = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}$$

Jakost polja slijedi iz (D.26), uzevši u obzir da je

$$|f'(z)| = \frac{E}{|z|} = \frac{F}{r}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

Dobiveni rezultati se slažu u potpunosti s dobivenim rezultatima u poglavlju o linijskom naboju.



Sl. D.7. Silnice i ekvipotencijalne linije magnetskog polja linijske struje na pravcu.

Polje sa sl. D.7. odgovara magnetskom polju linijske struje na pravcu. U tome slučaju v postaje potencijalna funkcija, a u strujna funkcija. U ravnini (z) $u =$ konst. su silnice, a $v =$ konst. su ekvipotencijalne linije. Punom kutu 2π odgovara puna razlika potencijala, tj. jakost struje i. Prema tome je sada konstanta

$$F = \frac{i}{2\pi}$$

Jakost polja je sada

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$

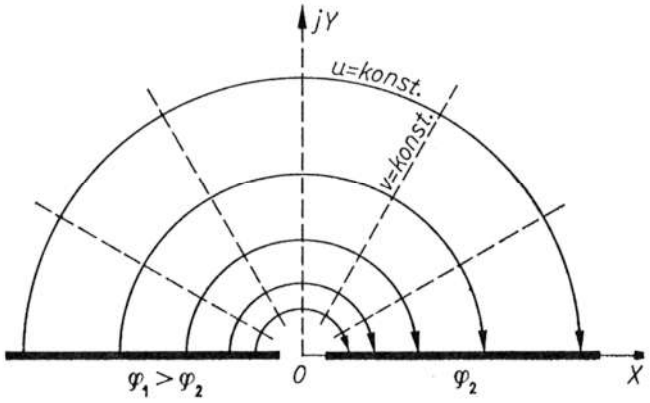
D.8.5.2. Analitička funkcija

$$w = F_1 \ln \frac{z}{c} + F_2 + j F_3$$

Ako je polje elektrostatsko, ali je v potencijalna funkcija, a u strujna funkcija, to može predstavljati polje dvaju *komplanarnih plošnih naboja*, prema sl. D.8.

$$u = F_1 \ln \frac{r}{c} + F_2$$

$$v = F_1 \vartheta + F_3$$



Sl. D.8. Silnice i ekvipotencijalne linije elektrostatskog polja komplanarnih naboja.

Budući da je za $\vartheta = 0$, $v = \varphi_2$, a za $\vartheta = \pi$, $v = \varphi_1 > \varphi_2$, iznose konstante $F_3 = \varphi_2$ i $F_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)/\pi$. Konstanta $F_2 = 0$. Funkcije u i v mogu zamijeniti svoje značenje, te bi analitička funkcija bila

$$w = j F_1 \ln \frac{z}{c} + F_3$$

Koja će funkcija biti potencijalna, ovisi o zadatku.

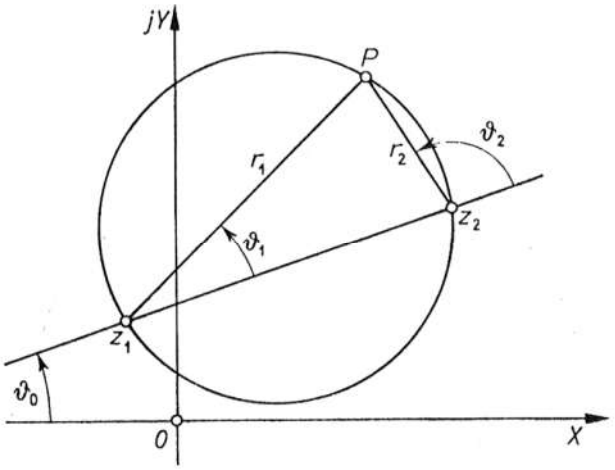
D.8.5.3. Analitička funkcija

$$w = F \ln \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)$$

Tu je $z - z_1 = r_1 e^{j\vartheta_1}$ i $z - z_2 = r_2 e^{j\vartheta_2}$. Prema tome su funkcije

$$u = F \ln \frac{r_1}{r_2}, \qquad v = F(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

Kad je u potencijalna funkcija, ekvipotencijalne linije su zadane sa $r_1/r_2 = \text{konst.}$, što predstavlja kružnice. Takvo polje proizvode *dva paralelna naboja na pravcu*, jednakih gustoća, a suprotna predznaka. Strujna funkcija je $v = \text{konst.}$, odnosno $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \text{konst.}$, što predstalja kružnice kroz točke z_1 i z_2 u ravnini (z), prema sl. D.9.



Sl. D.9. Tragovi linijskih naboja na pravcu u točkama z_1 i z_2 u (z) ravnini.

Ova analitička funkcija može poslužiti za određivanje polja *ekscentričnog kondenzatora*. Kad se vidi kakva je funkcija u naslovu, može se z_1 i z_2 odabrati da su simetrični u odnosu na ishodište. Neka je $z_1 = -jh = -z_2$. Sada je

$$w = F \ln \frac{z + jh}{z - jh}$$

prikladniji oblik opće funkcije iz naslova. Ona se može prikazati u inverznom obliku

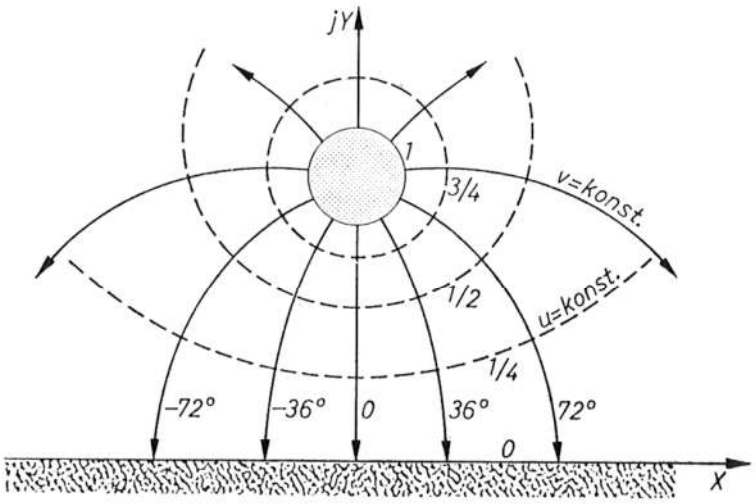
$$z = jh \operatorname{cth} \frac{w}{2F} = jh \frac{\operatorname{ch} \frac{w}{2F}}{\operatorname{sh} \frac{w}{2F}} = x + jv$$

Odatle slijedi izjednačenjem realnih i imaginarnih dijelova jednadžbe

$$x^2 + \left(y - h \operatorname{cth} \frac{u}{F}\right)^2 = \left(\frac{h}{\operatorname{sh} \frac{u}{F}}\right)^2$$

$$\left(x + h \operatorname{cotg} \frac{v}{F}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{h}{\sin \frac{v}{F}}\right)^2$$

Prva jednadžba odgovara ekvipotencijalnim linijama za $u = \text{konst.}$, a druga je jednadžba silnica za $v = \text{konst}$. Jedno i drugo su kružnice. Kao što je rečeno, to je polje dvaju linijskih naboja, λ i $-\lambda$, razmaknutih za $2h$ u (z) ravnini na imaginarnoj osi. Ekvipotencijalne kružnice su pomaknute po osi Y za $h \operatorname{cth}(u/F)$, a polu-



Sl. D.10. Silnice i ekvipotencijalne linije linijskog naboja na pravcu paralelnom s vodljivom ravninom.

mjer im iznosi $h/\operatorname{sh}(u/F)$. Silnice su kružnice pomaknute po osi X za $h \operatorname{cotg}(v/F)$, a imaju polumjer $h/\sin(v/F)$. Slika polja je prikazana u gornjoj poluravnini (z) na sl. D.10. Konstantu F se utvrđuje iz ukupnog električnog toka. Iznos strujne funkcije zadan je sa $v = F(\vartheta_1 - \vartheta_2)$, uz oznake sa sl. D.9. Kad se $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ mijenja za π, obuhvati se samo polovica toka naboja λ. Prema tome je iz (D.27) $\Phi = \lambda/2 = \varepsilon F \pi$, a konstanta iznosi $F = \lambda/(2 \pi \varepsilon)$.

Ekscentrični kondenzator se sastoji od dva kružna cilindra polumjera r_1 i r_2, $r_1 > r_2$, s osima razmaknutim na udaljenost d. Polumjeri pripadnih ekvipotencijalnih kružnica iznose

$$r_1 = \frac{h}{\operatorname{sh} \frac{u_1}{F}}, \qquad r_2 = \frac{h}{\operatorname{sh} \frac{u_2}{F}}$$

a razmak osi je

$$d = h\left(\operatorname{cth}\frac{u_1}{F} - \operatorname{cth}\frac{u_2}{F}\right)$$

Odatle je razlika potencijala

$$u_1 - u_2 = F \operatorname{arch}\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2 r_1 r_2}$$

ako je zadan naboj λ. Obratno, ako je zadana razlika potencijala, određuje se odatle linijska gustoća naboja. Prema tome je kapacitet kondenzatora

$$C = \frac{\lambda}{u_1 - u_2} = \frac{2\pi\varepsilon}{\operatorname{arch}\dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2 r_1 r_2}}$$

Kad je $d = 0$, cilindri su koaksijalni, te je kapacitet

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{r_1}{r_2}}$$

Jakost polja je zadana sa

$$E = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon}\frac{h}{|z^2 + h^2|} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon h}\left|\operatorname{sh}^2\frac{w}{2F}\right|$$

$$E = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon h}\left[\operatorname{sh}^2\frac{u}{2F} + \sin^2\frac{v}{2F}\right]$$

Cilindri su najbliži svojim površinama za $v/F = \pi$. Tada je najveća jakost polja

$$E = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon h}\operatorname{ch}^2\frac{u}{2F} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon h}\left[1 + \operatorname{ch}\frac{u}{F}\right]$$

Ako se uvrsti radijus za ekvipotencijalnu kružnicu, slijedi

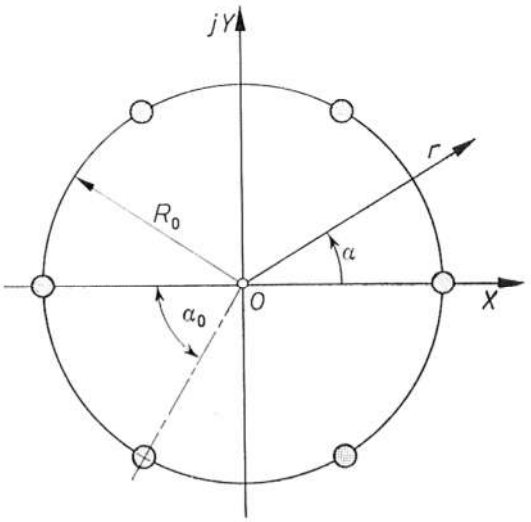
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\left[\frac{r}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\right]$$

$$h^2 = \frac{1}{4d^2}[(r_1 + r_2)^2 - d^2]\,[(r_1 - r_2)^2 - d^2]$$

Kad se želi jakost polja na unutarnjem cilindru, onda je $r = r_2$. Polje na vanjskom cilindru dobije se za $r = r_1$.

D.8.5.4. Snop vodiča

Polje se dobija na osnovi funkcije iz D.8.5.1. Vodiči u snopu su zanemariva promjera prema ostalim dimenzijama snopa. Oni su ravni i paralelni, a smješteni su na plaštu kružnog cilindra promjera $2\,R_0$. Njihov je razmještaj pravilan. Ako ih



Sl. D.11. Presjek snopa ravnih vodiča u (z) ravnini. Vodiči su na kružnom cilindru zadanog promjera.

ima ukupno n, kut među njima iznosi $\alpha_0 = 2\,\pi/n$, kao što je prikazano na sl. D.11. Vodiče treba promatrati kao linijske naboje na pravcu linijske gustoće λ_1. Može se upotrijebiti funkcija iz D.8.5.1. odmah s određenom konstantom F, te je

$$w = \frac{\lambda_1}{2\,\pi\,\varepsilon}\left[\ln\left(z - R_0\right) + \ln\left(z - R_0\,e^{j\alpha_0}\right) + \cdots + \ln\left(z - R_0\,e^{j(n-1)\alpha_0}\right]\right.$$

Nakon zbrajanja slijedi funkcija

$$w = \frac{\lambda_1}{2\,\pi\,\varepsilon}\ln\left(z^n - R_0^n\right)$$

Duljine u ravnini (z) su bez dimenzija, što treba uzeti u obzir pri obračunu veličina polja.

Vodič u snopu je polumjera r_0. On je $r_0 \ll R_0$. Da bi se dobio potencijal na njegovoj površini, mora se uvrstiti $z = R_0 + r_0$. Funkcija u je potencijalna funkcija, te je potencijal vodiča u snopu, uzevši u obzir da je ukupni naboj snopa $\lambda = n\,\lambda_1$,

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon\,n}\ln\left(n\,r_0\,R_0^{n-1}\right)$$

Kad bi bio samo jedan vodič polumjera R_0', bio bi njegov potencijal

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln R_0'$$

Snop djeluje kao jedan vodič polumjera

$$R_0' = R_0 \sqrt[n]{\frac{\overline{n r_0}}{R_0}}$$

S nadomjesnim polumjerom se računa potencijale i kapacitete.

Najveća jakost polja iznosi za $z = R_0 + r_0$

$$E = \left| \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \right|_{z=R_0+r_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon n r_0}$$

Vod se može sastojati od dva jednaka snopa na razmaku d. Kapacitet takva voda po jedinici duljine iznosi

$$C_{12} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln \frac{d}{R_0'}}$$

Ako se uzme da je $\lambda = C_{12}\varphi_{12}$, a φ_{12} je razlika potencijala među snopovima, jakost polja na vodiču snopa iznosi

$$E = E_{\max} = \frac{\varphi_{12}}{2\pi\varepsilon n r_0} \frac{\pi\varepsilon}{\ln \frac{d}{R_0'}} = \frac{\varphi_{12}}{2 n r_0 \ln \frac{d}{R_0'}}$$

Neka se vod sastoji od dva snopa razmaknuta na udaljenost $d = 6$ m. Snopovi se sastoje od $n = 2$ vodiča polumjera $r_0 = 5{,}5$ mm. Oni su na kružnom plaštu polumjera $R_0 = 75$ mm. Nadomjesni polumjer iznosi

$$\frac{R_0'}{R_0} = \sqrt{\frac{\overline{2 \cdot 5{,}5}}{75}} = 0{,}383$$

Kapacitet iznosi

$$C_{12} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{6000}{0{,}383 \cdot 75}} = 0{,}59\,\varepsilon_0 \text{ F/m}$$

Da nema snopa, nego po jedan vodič istog polumjera r_0, na istom razmaku $d = 6$ m od drugoga vodiča, bio bi kapacitet $C_{12} = 0{,}45\ \varepsilon_0$ F/m. Ako je u ovom slučaju jakost polja E', onda je njihov međusobni odnos uz istu razliku potencijala

$$\frac{E}{E'} = \frac{C_{12}}{n\,C'_{12}} = \frac{\ln \frac{d}{r_0}}{n \ln \frac{d}{R'_0}} = \frac{0{,}59}{2 \cdot 0{,}45} = 0{,}66$$

Upotrebom snopa od dva vodiča smanjuje se najveća jakost polja na iznos od 66%. Kapacitet voda se povećava za 31%. Mogla bi se postići snižena jakost polja i s jednim vodičem, samo bi trebalo povećati polumjer za 73%, tj. na iznos $r'_0 = 9{,}5$ mm. Ekonomska računica odlučuje koje će se rješenje upotrijebiti.

Snop može biti nadomješten užetom motanim s okruglim žicama. Strogo uzevši, ne bi se smjelo dobivene rezultate primijeniti na njega, jer su vodiči suviše blizu jedan drugome. Međutim, vidi se iz dobivenih rezultata da se prividni polumjer stalno povećava i teži ka R_0, kako se povećava broj vodiča u snopu. Jednako je sa jakošću polja koja se stalno smanjuje, kako broj vodiča u snopu raste. Prema tome bi se moglo zaključiti, da se polje okruglog užeta određuje kao kod punog vodiča istog promjera.

D.8.5.5. Polje u triodi

Može se odrediti na osnovi rezultata iz prethodnog primjera. Na sl. D.12. prikazan je presjek triode. Katoda je prikazana kao okrugli dugi vodič polumjera R_k. Rešetka se sastoji od snopa okruglih vodiča polumjera r_0, smještenih na plaštu okruglog cilindra polumjera R_g. Anoda je okrugli vodljivi cilindar polumjera R_a. Na polje snopa vodiča superponira se polje linijskog naboja. Prema tome analitička funkcija treba glasiti

$$w = \frac{\lambda_k}{2\pi\varepsilon_0} \ln z + \frac{\lambda_g}{2\pi\varepsilon_0 n} \ln (z^n - R_g^n) + \varphi_0$$

Potencijal φ_0 se dodaje da se mogu zadovoljiti granični uvjeti. Granični uvjeti glase

$$u = \varphi = 0 \quad \text{za katodu} \quad z = R_k$$
$$u = \varphi = \varphi_g \quad \text{za rešetku} \quad z = R_g + r_0$$
$$u = \varphi = \varphi_a \quad \text{za anodu} \quad z = R_a$$

Tada je iz analitičke funkcije

$$0 = \frac{\lambda_k}{2\pi\varepsilon_0} \ln R_k + \frac{\lambda_g}{2\pi\varepsilon_0 n} \ln (R_g^n - R_k^n) + \varphi_0$$

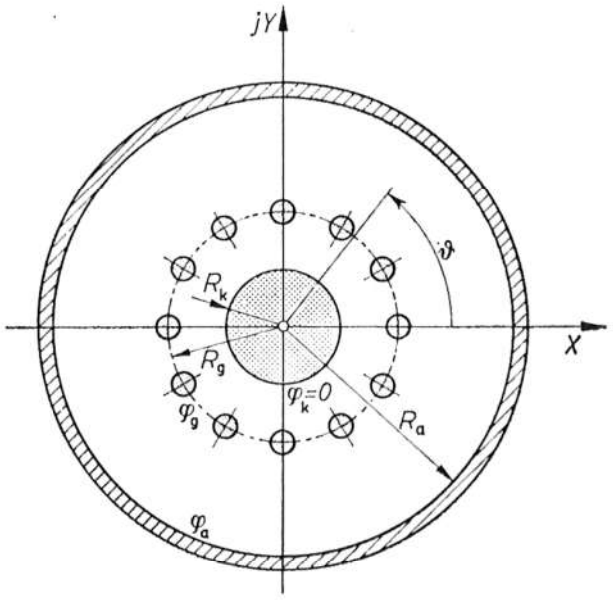
$$\varphi_g = \frac{\lambda_k}{2\pi\varepsilon_0} \ln (R_g + r_0) + \frac{\lambda_g}{2\pi\varepsilon_0 n} \ln [(R_g + r_0)^n - R_g^n] + \varphi_0$$

$$\varphi_a = \frac{\lambda_k}{2\pi\varepsilon_0} \ln R_a + \frac{\lambda_g}{2\pi\varepsilon_0 n} \ln (R_a^n - R_g^n) + \varphi_0$$

Te se jednadžbe rješavaju po nabojima. Naboj katode iznosi

$$\lambda_k = C_{kg}\varphi_g + C_{ka}\varphi_a$$

On se formira utjecajem potencijala rešetke i potencijala anode. Mjerilo utjecaja su parcijalni kapaciteti katode prema rešetki C_{kg} i katode prema anodi C_{ka}. Prema



Sl. D.12. Presjek triode. Presjek je prikazan pojednostavnjeno.

katodi osnovno je djelovanje rešetke, a tek neznatno utječe anoda kroz rešetku. Mjerilo djelovanja anode kroz rešetku definira se *prohvatom* anode D, koji iznosi iz jednadžbe potencijala

$$D = \frac{C_{ka}}{C_{kg}} = \frac{\ln \frac{R_g}{n r_0}}{n \ln \frac{R_a}{R_g}}$$

Sada je naboj katode

$$\lambda_k = C_{kg}(\varphi_g + D\varphi_a)$$

Prohvat D je važna karakteristična veličina elektronke. U izrazu za D je pretpostavljeno zbog jednostavnosti da je $R_a^n \gg R_g^n \gg R_k^n$ i $R_g \gg r_0$.

Neka trioda ima polumjer anodnog cilindra $R_a = 15$ mm, polumjer rešetke $R_g = 5$ mm. Rešetka se sastoji od $n = 20$ žica polumjera $r_0 = 0{,}05$ mm. Prohvat ove triode bi iznosio $D = 0{,}074 = 7{,}4\%$. Značajno je da prohvat ima malen iznos. Tada je utjecaj anode na katodu malen, a osnovni je utjecaj rešetke.

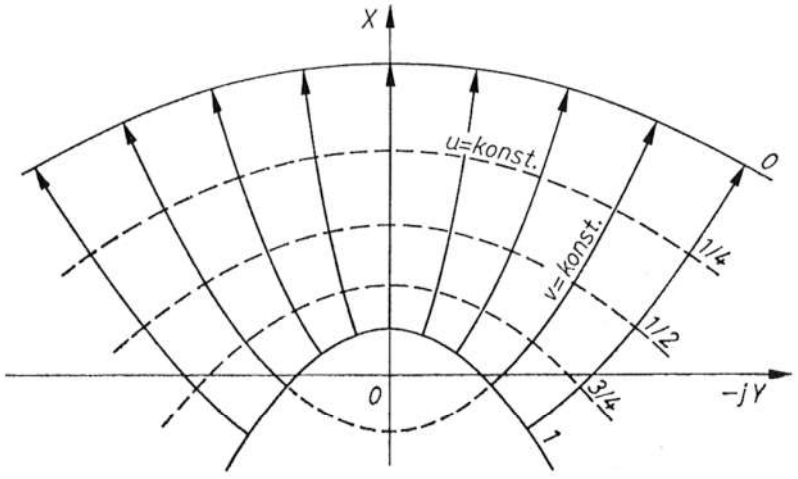
D.8.5.6. Polna funkcija

Ona glasi

$$w = F z^n, \qquad n \neq 0$$

Za $n = 1$ ona predstavlja *homogeno polje*. Za $n = -1$ ona predstavlja *polje linijskog dipola*. Funkcija

$$w = F z^{1/2}$$



Sl. D.13. Familija konfokalnih parabola u ravnini (z) analitičke funkcije $F z^{1/2}$.

može biti interesantna za utvrđivanje polja u *blizini oštrih bridova*. Lako se dobiva da su u ravnini (z) krivulje $u = \text{konst.}$ i $v = \text{konst.}$ dane jednadžbama parabola

$$x - \left(\frac{u}{F}\right)^2 = -\left(\frac{F}{2u}\right)^2 y^2$$

$$x + \left(\frac{v}{F}\right)^2 = \left(\frac{F}{2v}\right)^2 y^2$$

To su *konfokalne parabole* i imaju fokus u ishodištu koordinatnog sustava. One su prikazane na sl. D.13. Iznos parametra parabole je $p = 2\,(u/F)^2$, odnosno $2(v/F)^2$. Toliko je ujedno i ordinata u kojoj parabola siječe os ordinata. Zakrivljenost parabole u tjemenu jednaka je upravo njezinu parametru. Jakost polja u tjemenu slijedi iz (D.26) za $y = 0$, $x = (u/F)^2$ i ona iznosi $E_{max} = F/p$.

Polna funkcija ima karakteristiku da je *cijela ravnina* (w) predstavljena samo *jednim sektorom* $2\,\pi/n$ ravnine (z). To se vidi, ako se z^n predstavi kao $r^n\, e^{j\vartheta n}$. Kut $\vartheta\, n$ može biti u ravnini (w) najviše $2\,\pi$. To znači da ϑ može doseći najviše $2\,\pi/n$ u ravnini (z). Ovdje može biti interesantna funkcija za $n = 2$

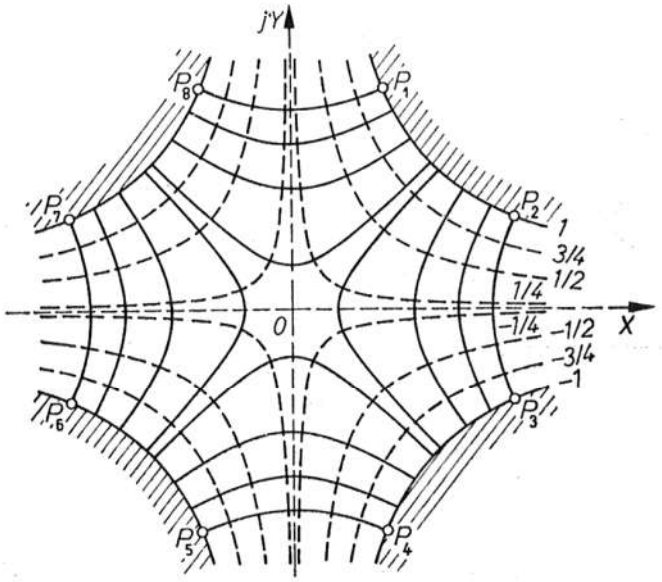
$$w = F z^2 = F(x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,j)$$

Prema tome je

$$x^2 - y^2 = \frac{u}{F}$$

$$2\,x\,y = \frac{v}{F}$$

Krivulje $u/F =$ konst. su istostrane hiperbole, te su poluosi $a = b = \sqrt{u/F}$. Asimptote imaju jednadžbu $y = \pm\, x$. Njihov je potencijal $u = 0$. Na jednu stranu



Sl. D.14. Familija istokračnih hiperbola analitičke funkcije Fz^2. Šrafirane plohe su plohe magneta kvadrupolne leće.

asimptote je $u > 0$, a na drugu je $u < 0$. Na sl. D.14. prikazano je polje u ravnini (z). Strujne krivulje $v =$ konst. su također istokračne hiperbole, samo su im asimptote okrenute za $\pi/4$. Asimptote su koordinatne osi X i Y.

Ta funkcija predstavlja polje u uglu dviju vodljivih ravnina koje se sijeku pod pravim kutom. Potencijal im je $\varphi = 0$. Linijski naboj je beskonačno udaljen od ugla. Također se može zamisliti da pojedine ekvipotencijalne plohe predstavljaju vodljive elektrode. Tada slika predstavlja polje među takvim elektrodama.

Posebno se susreću elektromagneti kojima su površine polova hiperbolni cilindri, kao što je šrafirano označeno na sl. D.14. Jezgre polova su od feromagnetskog materijala. Ako u njima nisu velike indukcije polja, njihove su površine, uz veliku točnost, ekvipotencijalne plohe magnetskog skalarnog potencijala. Razumije se, površine polova ne slijede hiperbole do beskonačnosti, već jedan dio koji je interesantan s pogonskog stanovišta. To je na sl. D.14. dio $P_1 - P_2$ prvog pola do $P_7 - P_8$ četvrtog pola. Takav se elektromagnet upotrebljava kao *kvadrupolna leća* za fokusiranje snopa električnih čestica, npr. protona. Za fokusiranje čestica bitno je kako se mijenja magnetsko polje i kolika je njegova jakost. Jakost polja u ishodištu koordinatnog sustava jednaka je ništici. Ona se povećava prema polovima i iznosi

$$H = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = 2F|z| = 2F(x^2 + y^2)^{1/2}$$

Krivulje konstantne jakosti polja su koncentrične kružnice sa središtem u ishodištu. To je značajno u primjeni kvadrupolnih leća.

Neka je udaljenost tjemena pola od ishodišta $a = 30$ mm, što je ujedno poluos odgovarajuće hiperbole. Točka P_1 ima koordinate $x_0 = 35$ mm i $y_0 = (a^2 + x_0^2)^{1/2} = 46{,}1$ mm. Ostale točke P_2 do P_8 leže simetrično. Jakost polja na tjemenu pola neka je zadana 120 kA/m, a ona iznosi $H_0 = 2Fa$. Odatle je konstanta $F = H_0/(2a) = (120/60) \cdot 10^3 = 2000$ kA/m^2. Da bi se postigla tražena jakost polja, pol mora biti na potencijalu $u_0 = -Fa^2 = -2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}03^2 = -1800$ A. Prema tome jedan pol mora sadržavati uzbudu od 1800 amperzavoja. Točka P_1 se nalazi na rubu površine pola, a njoj odgovara strujnica $v_0 = 2x_0y_0F = 2 \cdot 35 \cdot 46{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6 = 6450$ A. Tada je tok kroz površinu jednog pola $\Phi = \mu_0(v_1 - v_2) = 2v_0\mu_0 = 12\,900 \cdot \mu_0 = 0{,}0162$ Vs/m. Jakost polja u točki P_1 dosiže vrijednost $H_1 = (r_1/a)H_0 = 1{,}65 \cdot H_0$, tj. ona je za 65% veća od H_0. Razmak među točkama P_1 i P_8 i ostalima odlučan je pri određivanju dimenzija magnetske leće.

D.8.5.7. Analitička funkcija

$$w = F \arccos\frac{z}{c}$$

Krivulje $u = \text{konst.}$ i $v = \text{konst.}$ odatle slijede

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\frac{u}{F}} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\frac{u}{F}} = 1$$

$$\frac{x^2}{c^2\,\mathrm{ch}^2\frac{v}{F}} + \frac{y^2}{c^2\,\mathrm{sh}^2\frac{v}{F}} = 1$$

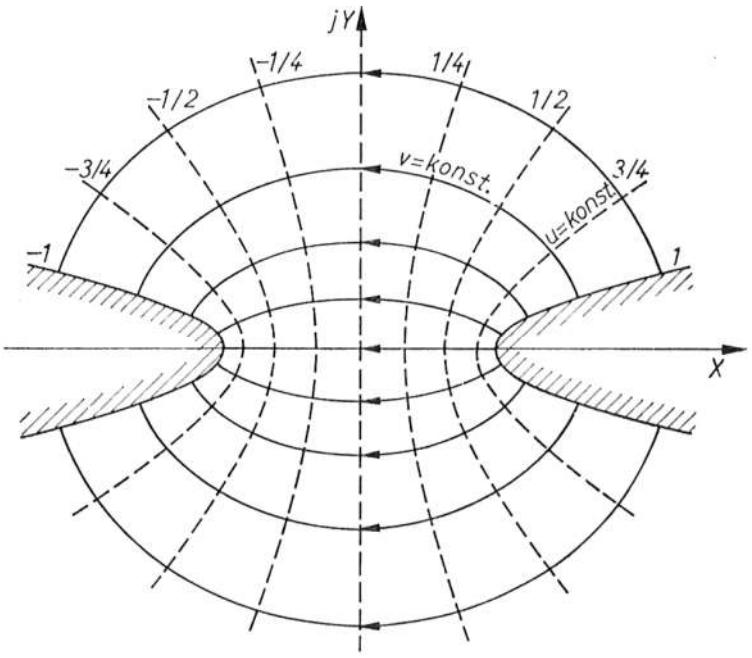
Slika funkcije je na sl. D.15. Krivulje u = konst. su *konfokalne hiperbole*, čije su poluosi

$$a = c \cos \frac{u}{F}, \qquad b = c \sin \frac{u}{F}, \qquad e = c$$

Krivulje v = konst. su *konfokalne elipse*, čije su poluosi

$$a = c \operatorname{ch} \frac{v}{F}, \qquad b = c \operatorname{sh} \frac{v}{F}, \qquad e = c$$

Prema tome, funkcija pomaže da se rješava polje elipsoidnih i hiperbolnih cilindara. Prema zadatku se odabire potencijalna, odnosno strujna funkcija.



Sl. D.15. Silnice i ekvipotencijalne linije elektrostatskog polja komplanarnih naboja razmaknutih na zadanu udaljenost.

Neka je $u(x, y)$ potencijalna funkcija. Tada su konfokalne hiperbole ekvipotencijalne linije. Jedan od *hiperbolnih cilindara* može biti promatrana elektroda kojoj je konfokalna hiperbola izvodnica. Ona je zadana poluosima a i b. Udaljenost fokusa izlazi iz $e^2 = a^2 + b^2$. Prema tome je konstanta $c = e$. Potencijal $\varphi_0 = u_0$ hiperbolnog cilindra je zadan. Na taj način se dobiva konstanta F iz $u_0/F = \arccos(a/c)$. Jakost polja u tjemenu hiperbole iznosi

$$E_0 = \left| \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \right|_{\substack{y=0 \\ x=a}} = \frac{F}{c} \left[1 - \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{F}{b}$$

Ta je jakost polja, uz poznati potencijal u_0

$$E_0 = \frac{u_0}{b \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{e}} = \frac{u_0}{b \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}}$$

Polumjer zakrivljenosti iznosi u tjemenu hiperbole $r_0 = b^2/a$. Tjemena hiperbolnih cilindara su razmaknuta na 50 mm $= 2a$. Polumjer zakrivljenosti hiperbole iznosi 1 mm čemu odgovara mala poluos $b = 5$ mm. Kad je b/a dovoljno maleno, jakost polja u tjemenu iznosi u_0/r_0. Ona je neovisna o razmaku među tjemenima. Kad bi narinuti napon bio 1.5 kV, bila bi jakost polja za $r_0 = 1$ mm, $E_0 = 1{,}5$ kV/mm. Jakost polja na okruglom vodiču bila bi $u_0/[r_0 \ln (2a/r_0)]$, da je on iznad vodljive ravnine na udaljenosti a i ima polumjer r_0. U ovom slučaju to bi bilo 0,38 kV/mm. To je znatno manje nego u hiperbolnom cilindru. Taj primjer pokazuje da se ne smije računati polje na oštrim bridovima, kao da su oni nadomješteni okruglim vodičem polumjera jednakog polumjeru zakrivljenosti brida.

Konfokalni eliptički cilindri se iskorištavaju također u primjeni. U tom slučaju $v(x, y)$ se uzima kao potencijalna funkcija. Dvije elipse neka služe kao tragovi elektroda *eliptičkog kondenzatora*. Vanjska elipsa ima poluosi a_1 i b_1, a unutarnja elipsa ima veliku poluos a_2, dok se mala poluos izračuna iz $b_2^2 = a_2^2 - c^2 = a_2^2 - (a_2^2 - b_2^2)$. Razlika potencijala slijedi iz

$$\frac{v_1 - v_2}{F} = \frac{\varphi_{12}}{F} = \operatorname{arch} \frac{a_1}{c} - \operatorname{arch} \frac{a_2}{c} = \ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}$$

Budući da je razlika potencijala φ_{12} zadana, odatle se dobiva konstanta F

$$F = \frac{\varphi_{12}}{\ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}}$$

Ukupni tok koji prolazi s jednog cilindra na drugi iznosi

$$\Phi = Q = \varepsilon (u_1 - u_2) = 2 \pi F \varepsilon$$

Prema tome je *kapacitet* takvog eliptičkog kondenzatora

$$C = \frac{Q}{\varphi_{12}} = \frac{2 \pi \varepsilon}{\ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}}$$

Najveća jakost polja nastaje na unutarnjem cilindru, te je jednaka

$$E_{2\,\max} = \frac{\varphi_{12}}{b_2 \ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}}$$

Dobiveni izrazi svode se na istovrsne izraze za cilindrični kondenzator, ako su $a_1 = b_1 = r_1$ i $a_2 = b_2 = r_2$.

D.8.5.8 Analitička funkcija

$$w = F \ln \left(2 \sin \frac{z}{c}\right)$$

Ona se iskorištava pri određivanju polja *rešetke linijskih naboja*. Treba iskoristiti

$$\sin \frac{z}{c} = \sin \frac{x}{c} \operatorname{ch} \frac{y}{c} + j \cos \frac{x}{c} \operatorname{sh} \frac{y}{c}$$

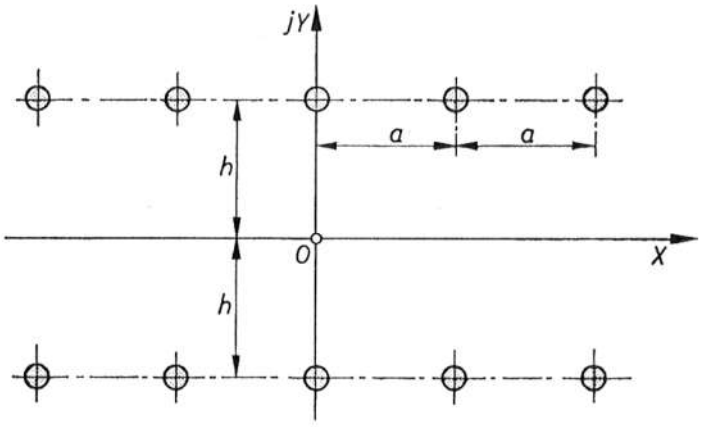
Realni i imaginarni dio iznose

$$u = F \ln \left[2 \left(\operatorname{ch}^2 \frac{y}{c} - \cos^2 \frac{x}{c}\right)^{1/2}\right]$$

$$v = F \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{th} \frac{y}{c}}{\operatorname{tg} \frac{x}{c}}$$

$u(x, y)$ je potencijalna funkcija. Ona je po x periodična s periodom $(c\,\pi)$, jer se radi o kvadratu kosinusa. Funkcija nije analitična za $z_n = n\,c\,\pi$, a to su mnogokratnici perioda potencijalne funkcije.

Potencijal u prelazi u oblik $u = F\,y/c$ za velike iznose od y. Tada se cos (x/c) zanemaruje prema ch (y/c), a isto tako je približno 2 ch $(y/c) = \exp(y/c)$. Polje prelazi u homogeno polje usmjereno po osi Y.



Sl. D.16. Presjek rešetke ravnih okruglih vodiča.

Potencijal poprima vrijednost $u = F \ln [2/c\,(x^2 + y^2)^{1/2}]$ u blizini ishodišta, tj. za male iznose y/c i x/c. To je polje linijskog naboja, jer je $(x^2 + y^2)^{1/2} = r$ udaljenost od naboja. Takvo ponašanje pokazuje i strujna funkcija $v(x, y)$. Tako se ponaša polje za $y = 0$ kod svih $x = n\,c\,\pi$. To izgleda kao da su na realnoj osi X

poredani linijski naboji na udaljenost $a = c\,\pi$. Na tim mjestima funkcija nije analitična. Budući da se radi o linijskom naboju, iznosi konstanta $F = \lambda/(2\,\pi\,\varepsilon)$. Čim $u\,(x, y)$ i $v\,(x, y)$ zamijene svoje uloge, dobiva se magnetsko polje periodičnog niza linijskih struja, razmaknutih po realnoj osi za $a = c\,\pi$. Ovo je dovoljno da se riješi rešetka naboja ili struja.

Neka je *rešetka naboja ispred vodljive ravnine* na udaljenosti h, prema sl. D.16. Ravnina je na nultom potencijalu. Rešetka linijskih naboja se odslikava na ravnini na istu udaljenost u suprotnom predznaku. U tome se slučaju zadana funkcija nešto mijenja i poprima oblik

$$w = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon}\left\{\ln\left[2\sin\left(\pi\,\frac{z - j\,h}{a}\right)\right] - \ln\left[2\sin\left(\pi\,\frac{z + j\,h}{a}\right)\right]\right\}$$

Potencijalna funkcija glasi

$$u = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon}\ln\frac{\mathrm{ch}^2\left(\pi\,\frac{y - h}{a}\right) - \cos^2\left(\pi\,\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{ch}^2\left(\pi\,\frac{y + h}{a}\right) - \cos^2\left(\pi\,\frac{x}{a}\right)}$$

Linijski naboji su raspoređeni na ravnim vodičima okrugla presjeka. Polumjer žice r_0 je dovoljno malen da se može naboj odslikati u njezinu os. Potencijal na površini žice se dobiva kad se uzme da su $x = 0$, a $y = h - r_0$. Treba uzeti u obzir da je $r_0 \ll a$. Sada potencijal vodiča iznosi približno

$$u = \varphi_0 = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon}\left(\pi\,\frac{2\,h}{a} + \ln\frac{a}{2\,\pi\,r_0}\right)$$

Kapacitet jednog vodiča je, dakle, prema vodljivoj ravnini

$$C_0 = \frac{\lambda}{\varphi_0} = \frac{2\,\pi\,\varepsilon}{\pi\,\frac{2\,h}{a} + \ln\frac{a}{2\,\pi\,r_0}}$$

Kad bi bio samo jedan vodič na istoj udaljenosti prema vodljivoj ravnini, bio bi njegov kapacitet $C_0' = 2\,\pi\,\varepsilon/\ln(2\,h/r_0)$. Omjer tih dvaju kapaciteta iznosi

$$\frac{C_0}{C_0'} = \frac{\ln\frac{2\,h}{r_0}}{\pi\,\frac{2\,h}{a} + \ln\frac{a}{2\,\pi\,r_0}}$$

Neka je upotrijebljena žica $r_0 = 1$ mm, udaljena od vodljive ravnine $h = 500$ mm, a međusobno razmaknuta za $a = 100$ mm. Omjer kapaciteta iznosi $C_0/C_0' = 0{,}2$. Kapacitet se znatno smanjuje prema iznosu kad bi ista žica bila osamljena.

Jakost polja iznosi

$$E = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{y}{\varepsilon\, a}\,\frac{\operatorname{sh}\left(2\pi\frac{h}{a}\right)}{\left|\operatorname{ch}\left(2\pi\frac{h}{a}\right) - \cos\left(2\pi\frac{z}{a}\right)\right|}$$

Jakost polja se mijenja na vodljivoj ravnini između neke najveće vrijednosti za $x = 0$ i neke najmanje vrijednosti za $x = a/2$. Odnos tih dviju jakosti polja iznosi

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{\operatorname{ch}\left(2\pi\frac{h}{a}\right) + 1}{\operatorname{ch}\left(2\pi\frac{h}{a}\right) - 1}$$

Polje je na ravnini homogeno, s točnošću od 1% već za $h/a = 0{,}84$, a s točnošću $1\,{}^{0}/_{00}$ za $h/a = 1{,}11$. Homogeno polje na ravnini se postiže vrlo brzo za umjerene odnose h/a. Ono iznosi naprosto $E_{sr} = \lambda/(\varepsilon\, a)$. Rezultat je interesantan. To je polje isto kao u pločastu kondenzatoru, tako da se u njemu linijski naboj λ jednoliko raspoređuje po cijeloj širini a. Prema tome rešetka linijskih naboja prema vodljivoj ravnini proizvodi na njoj homogeno polje praktički već za omjer $h/a = 1$, tj. ponaša se kao pločasti kondenzator.

Kad bi se rešetka paralelnih vodiča htjela upotrijebiti kao zaštitna rešetka od nekog vanjskog polja, trebalo bi na njezin potencijal superponirati potencijal homogenog polja ($E_0\, y$). Narinuti potencijal mora imati takav iznos, da potencijal rešetke padne na ništicu. Prema tome se formira naboj λ na vodičima rešetke.

Takve se rešetke pojavljuju u različitim prilikama. One mogu biti zaštitne rešetke ili Faradayev kavez, rešetke u elektronkama, elektrode u elektrofiltarima plinova i slično. Proračun je u svim slučajevima sličan.

D.8.6. KONFORMNO PRESLIKAVANJE

Primjena analitičke funkcije s jednom kompleksnom varijablom se proširuje upotrebom *konformnog preslikavanja*. Da bi se moglo govoriti o konformnom preslikavanju, mora postojati još jedna funkcija $\chi = \varphi + j\,\psi = \chi\,(w) = \chi\,[f\,(z)]$ koja je funkcija od mjesta u ravnini (w) i od mjesta u ravnini (z). Funkcija $\varphi =$ konst. predstavlja u ravnini (w) familiju krivulja, a jednako i u ravnini (z) familiju krivulja. Tako je isto i sa funkcijom $\psi =$ konst. Krivulja $\varphi =$ konst. siječe krivulju $\psi =$ konst. u točki $z = x + j\,y$ u ravnini (z), odnosno u točki $w = u + j\,v$ u ravnini (w). Ako se dz računa na krivulji $\varphi =$ konst., pomicanjem u točku z_1 u ravnini (z), prema sl. D.17., on iznosi

$$dz_1 = ds_1\, e^{j\vartheta_1}$$

Jednako dw iznosi u ravnini (w) na sl. D.17. na istoj krivulji $\varphi =$ konst.

$$dw_1 = dS_1\, e^{j\Theta_1}$$

Odgovarajući diferencijali na krivulji $\psi = \text{konst.}$ iznose

$$\mathrm{d}z_2 = \mathrm{d}s_2\, e^{j\vartheta_2} \quad \text{— u ravnini } (z)$$

$$\mathrm{d}w_2 = \mathrm{d}S_2\, e^{j\Theta_2} \quad \text{— u ravnini } (w)$$

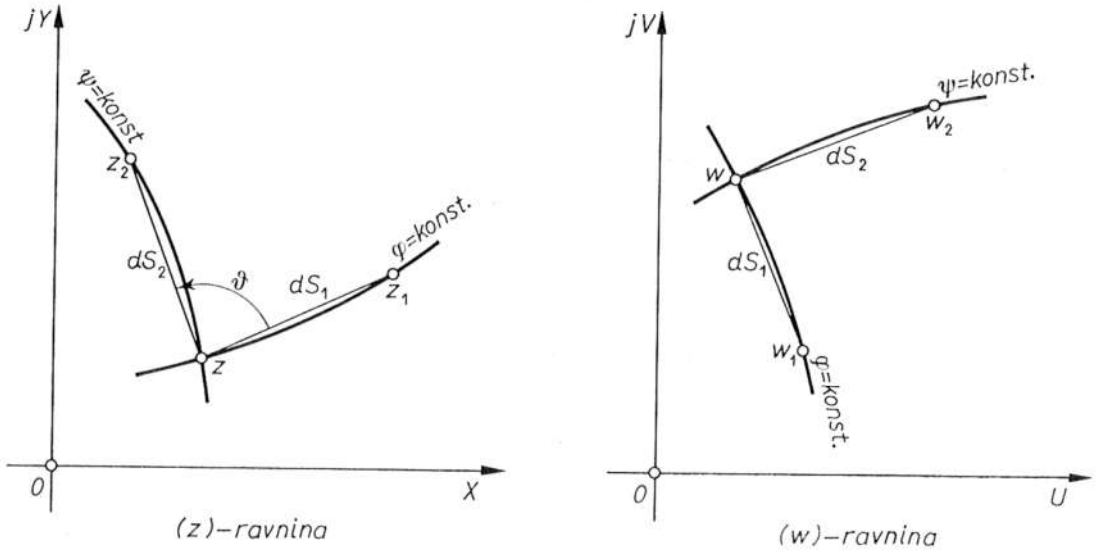
Preslikavanje funkcije $\chi = \varphi + j\,\psi$ iz ravnine (z) u ravninu (w) vrši analitička funkcija $w = f(z)$, za koju je svejedno u kojem je smjeru vršena derivacija, tj.

$$\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z_2} = \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z_1}$$

odnosno, mora biti zadovoljena jednakost

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}s_2} = \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}s_1} = M = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = f'(z) \\ \Theta_2 - \vartheta_2 = \Theta_1 - \vartheta_1 = \mu = \arg\,[f'(z)] \end{gathered} \tag{D.28}$$

Iz odnosa kutova izlazi i jednakost kuta među lukovima $(\Theta_2 - \Theta_1) = (\vartheta_2 - \vartheta_1) = \vartheta$. Prema tome, *konformnost u preslikavanju neke funkcije χ sastoji se u zadržavanju proporcija među lukovima i kuta među njima.* Ako dva luka zatvaraju pravi kut u ednoj ravnini, isto tako zatvaraju pravi kut i u drugoj ravnini.



Sl. D.17. Zadana točka z u ravnini (z), konformno preslikana u točku w u ravnini (w).

Funkcija $\chi = \chi(w)$ je analitična. Za nju vrijede svi uvjeti kao i za funkciju $f(z) = w$, što je prije rečeno. Prema tome ona zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$$

Krivulje $\varphi(u, v)$ i $\psi(u, v)$ u ravnini (w) su međusobno ortogonalne. Jedna od njih je potencijalna funkcija, a druga je strujna funkcija, već prema potrebi. Zato se funkcija $\chi(w)$ zove **kompleksni potencijal.**

Može se dokazati da isto vrijedi u ravnini (z). Vrijede Laplaceove jednadžbe

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

Funkcija $f(z) = w$ konformno preslikava kompleksni potencijal u ravninu (z). U njoj će $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ opet sačinjavati ortogonalnu mrežu. Preslikavanjem potencijal ostaje isti u točki koja je preslikana.

Jakost polja iznosi u ravnini (w), ako je $\varphi(u, v)$ potencijalna funkcija,

$$E_{(w)} = \left|\frac{d\chi}{dw}\right|, \quad E_u = -\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad E_v = -\frac{\partial\varphi}{\partial v} \tag{D.29}$$

Jakost polja u ravnini (z) iznosi

$$E_{(z)} = \left|\frac{d\chi}{dz}\right| = \left|\frac{d\chi}{dw}\right| \cdot \left|\frac{dw}{dz}\right| = E_{(w)}\,|f'(z)| \tag{D.30}$$

Čim je poznata jakost polja u jednoj ravnini, poznata je i u drugoj. Raspodjela naboja na vodljivim površinama ostaje ista u obje ravnine. Iznos naboja na vodljivoj površini jednak je

$$\begin{gathered}\varrho_{(w)}\,du\,dv = \varrho_{(w)}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dx\,dy = \varrho_{z)}\,dx\,dy \\ \varrho_{(z)} = \varrho_{(w)}\,|f'(z)|^2\end{gathered} \tag{D.31}$$

Naboj ostaje sačuvan u obje ravnine. Prema tome kapaciteti, induktiviteti ili otpori, proračunati u jednoj ravnini, ostaju valjani i u drugoj ravnini.

D.8.6.1. Funkcija preslikavanja

$$w = \frac{A\,z + B}{C\,z + D}$$

preslikava kompletnu ravninu (z) u kompletnu ravninu (w). Ona preslikava kružnicu u kružnicu, pravac u kružnicu, kružnicu u pravac i pravac u pravac. Tu su konstante A, B, C, D kompleksni brojevi. Neka je $A = D = 0$, a $C = 1$, B realna veličina. Tada funkcija

$$w = \frac{B}{z}$$

preslikava kružnice, koje prolaze ishodištem u ravnini (z), u pravce u ravnini (w), koji su paralelni s koordinatnim osima.

Posljednja funkcija se može pisati u obliku

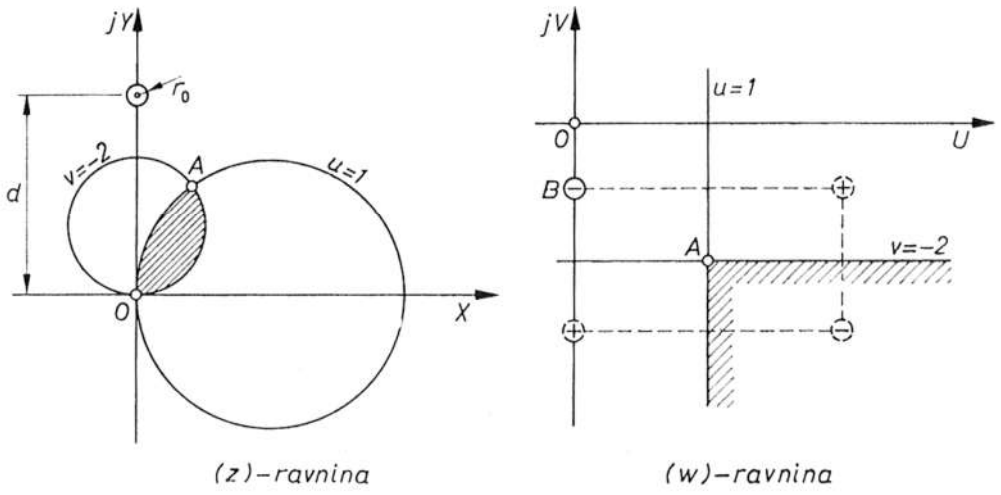
$$w = u + j\,v = B\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Odatle je

$$\left(x - \frac{B}{2u}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{B}{2u}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{B}{2v}\right)^2 = \left(\frac{B}{2v}\right)^2$$

Neka su zadana **dva kružna cilindra** čiji su tragovi kružnice promjera $d/2$ i d. Kružnici promjera d odgovara $u = 1$. Zato je $B = d$. Manjoj kružnici mora tada odgovarati $v = -2$, ako joj je središte na pozitivnoj strani imaginarne osi, kao na sl. D.18. U ravnini (z) su to dva kružna cilindra koji imaju jedan dio prostora zajednički. On je na sl. D.18. prikazan crtkano. Ta se dva cilindra preslikavaju u ravninu (w), u ravnine $u = 1$ i $v = -2$, koje se sijeku u A. Zajednički prostor je crtkan.



Sl. D.18. Presjek dvaju kružnih cilindara u ravnini (z) konformno preslikan u dvije ravnine u ravnini (w).

U ravnini (z) postavlja se u B *linijski naboj*. Njegove su koordinate $x = 0$, $y = d$. Funkcija preslikava taj linijski naboj u ravnini (w) u istom iznosu λ u točku B, s koordinatama $u = 0$, $v = -1$. Linijski naboj je predstavljen okruglim vodičem malog polumjera r_0 u ravnini (z). Linijski naboj se nalazi u ravnini (w) u točki B, koja je u uglu između dviju ravnina, $u = 1$ i $v = -2$. Poznato je da se dobiva polje takvog naboja, da se on uzajamno odslika na vodljivim ravninama ako su one nultog potencijala. Okrugli vodič iz ravnine (z) ostaje okrugli vodič u ravnini (w), jer se kružnica preslikava u kružnicu. Polumjer vodiča u ravnini (w) slijedi iz omjera

$$\frac{r_{0\,(w)}}{r_0} = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=jd} = \frac{1}{d}$$

Polumjeri su maleni, zato je njihov omjer jednak derivaciji funkcije na mjestu gdje se nalazi vodič.

Potencijal okruglog vodiča u B u ravnini (w) onda iznosi

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[-\ln\frac{r_0}{d} + 2\ln 2 - \ln(2\sqrt{2})\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{2}\,d}{r_0}$$

Taj isti potencijal i naboj ima vodič u ravnini (z). Njegov je kapacitet

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{\sqrt{2}\,d}{r_0}}$$

To je kapacitet okruglog vodiča koji se nalazi paralelno smješten prema dva kružna cilindra na nultom potencijalu, kao na sl. D.18. u ravnini (z). Takav se kapacitet računa jednostavno samo primjenom konformnog preslikavanja. Jakost polja u A mora biti jednaka ništici, jer je ona jednaka ništici, očito, u ravnini (w).

D.8.6.2. Polarizacija eliptičnog, dielektričnog cilindra

Polarizacija eliptičnog, dielektričnog cilindra se rješava uz primjenu funkcije preslikavanja

$$w = j \operatorname{arc\,cos}\frac{z}{c}$$

Ta funkcija preslikava traku $-u_0 \leqslant u \leqslant u_0$ iz ravnine (w) u unutrašnjost elipse u ravnini (z). Jednadžba elipse u ravnini (z) za u = konst. glasi

$$\frac{x^2}{c^2\operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{c^2\operatorname{sh}^2 u} = 1$$

Poluosi elipse odatle iznose za neki u_0

$$a = c\operatorname{ch} u_0, \qquad b = c\operatorname{sh} u_0$$

a udaljenost fokusa jednaka je c za sve elipse.

U ovome primjeru zadan je eliptični cilindar ispunjen dielektrikom dielektričnosti ε_1. Elipsa baze cilindra ima poluosi a i b, te se pripadni u_0 dobiva iz relacije

$$\operatorname{th} u_0 = \frac{b}{a}$$

Okolni je prostor ispunjen dielektrikom dielektričnosti ε_2. Prije unošenja zadanog cilindra vladalo je homogeno polje, koje se prikazuje kompleksnim potencijalom u ravnini (z) sa

$$\chi_0 = - E_0 z$$

Pod utjecajem homogenog polja polarizira se dielektrični eliptični cilindar. On djeluje svojim dipolom tako, da se promijeni polje u cijelom prostoru.

Jednostavnije je promatranje polja u ravnini (w), jer se tamo eliptični cilindar. prikazuje pločom debljine $2\,u_0$. Polje unutar cilindra je polje u ploči u ravnini (w), a polje izvan cilindra je polje izvan ploče u ravnini (w). Kompleksni potencijal homogenog polja u ravnini (w) glasi, uz pomoć funkcije preslikavanja

$$\chi_0 = - c\,E_0 \cos \frac{w}{j} = - c\,E_0\,[\cos v \operatorname{ch} u + j \sin v \operatorname{sh} u]$$

U unutrašnjosti cilindra vlada homogeno polje, te je kompleksni potencijal formiran kao

$$\chi_1 = - c\,E_1\,[\cos v \operatorname{ch} u + j \sin v \operatorname{sh} u], \qquad u \leqslant u_0$$

U vanjskom se prostoru superponira polje polariziranog cilindra na homogeno polje. Ono mora biti jednako formirano u odnosu na v da bi bili zadovoljeni granični uvjeti. To polje mora iščezavati ako u teži u beskonačnost. Prema tome polje polariziranog cilindra mora biti predstavljeno sa

$$\chi_c = U e^{-w} = U e^{-u} (\cos v - j \sin v), \qquad u \geqslant u_0$$

Ovdje su nepoznati E_1 i U, koji se dobiju iz uvjeta na granici. Na granici, za $u = u_0$, moraju biti potencijali jednaki, tj. realni dio kompleksnog potencijala. Nadalje moraju biti tokovi jednaki, tj. strujna funkcija množena sa dielektričnosti. Ta jednakost iznosi iz potencijala

$$- c\,E_1 \cos v \operatorname{ch} u_0 = - c\,E_0 \cos v \operatorname{ch} u_0 + U e^{-u_0} \cos v$$

$$- \varepsilon_1\,c\,E_1 \sin v \operatorname{sh} u_0 = - \varepsilon_2\,c\,E_0 \sin v \operatorname{sh} u_0 - \varepsilon_2\,U e^{-u_0} \sin v$$

Odatle su nepoznate veličine

$$E_1 = E_0 \frac{\varepsilon_2 (a + b)}{\varepsilon_2\,a + \varepsilon_1\,b}$$

$$U = c\,E_0 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,a\,b}{(\varepsilon_2\,a + \varepsilon_1\,b)(a - b)}$$

Tu je $c^2 = a^2 - b^2$. Utjecaj kružnog cilindra se dobiva uz uvjet $a = b = r_0$.

Jakost polja u ravnini (z) slijedi iz $E = |\mathrm{d}\chi/\mathrm{d}z|$. Posebno, ona je izvan cilindra zadana sa

$$E_c = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| \cdot \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(\chi_0 + \chi_c)\right|$$

Interesantna je jakost polja na cilindru na vrhu velike poluosi. To je u ravnini (z) za $x = a$, $y = 0$, a u ravnini (w) za $u = u_0$, $v = 0$. To je najveća jakost polja i ona iznosi

$$E_{c\,max} = E_0 \frac{\varepsilon_1 (a + b)}{\varepsilon_2 a + \varepsilon_1 b}$$

Kad je $a = b = r_0$, dobiva se polje na kružnom cilindru. Polje na vodljivom eliptičnom cilindru slijedi iz dobivenih odnosa kad se pusti da dielektričnost cilindra teži u beskonačnost, tj. $\varepsilon_1 \to \infty$. Jakost polja na vodljivom cilindru može postići vrlo velike iznose, što je ovisno o omjeru poluosi (a/b).

D.8.6.3. Tok jarma transformatora

Može se naći s dovoljno točnosti uz primjenu funkcije preslikavanja

$$z = \frac{c}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

Ta funkcija preslikava kružnice ravnine (w) u konfokalne elipse u ravnini (z). Da bi se to moglo vidjeti, treba prikazati $w = u + j\,v$ u obliku

$$w = r\,e^{j\vartheta} = r\cos\vartheta + j\,r\sin\vartheta$$

što predstavlja za r = konst. kružnicu. Kad se taj odnos uvrsti u funkciju preslikavanja, slijedi jednadžba elipse u ravnini (z), koja ima poluosi

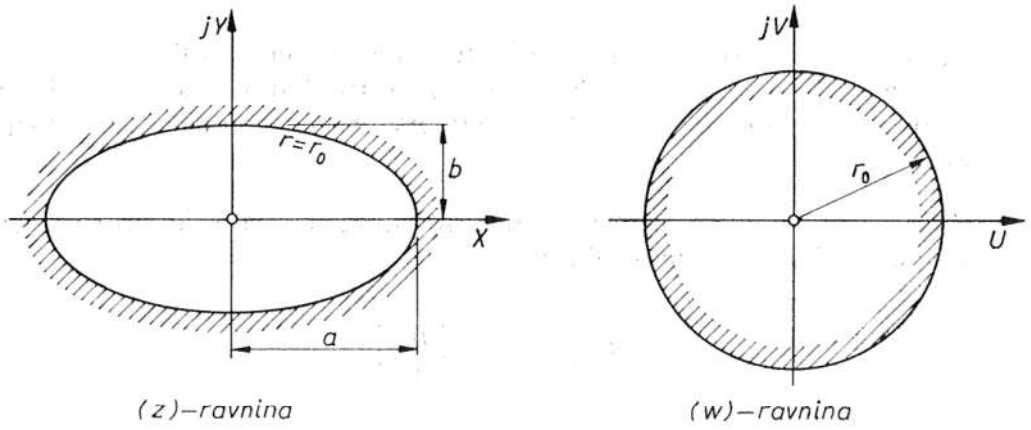
$$a = \frac{c}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \qquad b = \frac{c}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

Njezina je fokalna udaljenost uvijek c, bez obzira na polumjer kružnice r. Ako su zadane poluosi elipse a i b, dobiva se iz toga polumjer kružnice u ravnini (w)

$$r = r_0 = \sqrt{\frac{a + b}{a - b}}$$

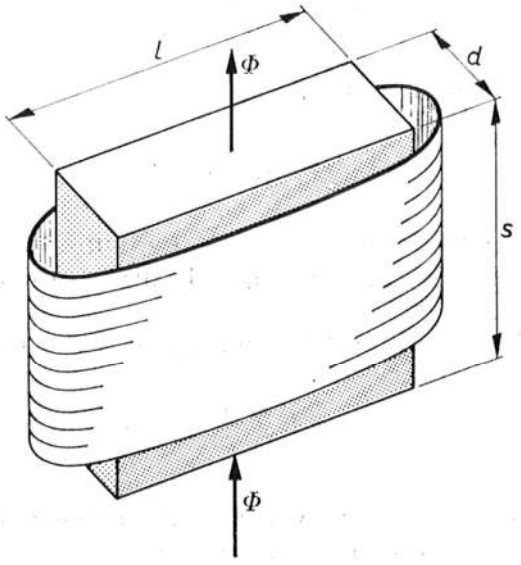
Prostor $r \leqslant r_0$ unutar kružnog cilindra u ravnini (w) odgovara prostoru izvan eliptičnog cilindra u ravnini (z). To je prikazano na sl. D.19.

Trofazni transformator ima katkad u pojedinim fazama takve struje, da se ukupna njihova uzbuda ne poništava, jer je zbroj struja različit od ništice. U takvom slučaju će postojati rezultantna uzbuda, koja djeluje kao da je jedan namot preko



Sl. D.19. Vanjski prostor eliptičnog cilindra u ravnini (z) preslikan u unutarnji prostor kružnog cilindra u ravnini (w).

sva tri stupa transformatora. Transformatorska jezgra je prikazana na sl. D.20. kao paralelepiped od feromagnetskog materijala beskonačne permeabilnosti. Magnetski tok prolazi visinom s paralelepipeda, a izlazi iz njegovih baza koje imaju površinu $d\,l$. Prividni namot oko n'ega ima N zavoja.



Sl. D.20. Pločasta magnetska jezgra beskonačne permeabilnosti s uzbudnim namotom. Takva jezgra se nadomješta eliptičnim cilindrom.

Da se može računati, feromagnetski paralelepiped se nadomješta eliptičnim cilindrom iste dužine l. Eliptična baza cilindra ima poluosi izvedene iz visine s i debljine d jezgre po relaciji $2a = s$, $2b = d$. Izvodnicama eliptičnog cilindra teku

plošne struje konstantne linijske gustoće K. Ona je pozitivna na jednoj polovici, a negativna na drugoj. Ako zavojima namota teče struja i, linijska gustoća približno izlazi iz odnosa

$$2\,a\,K = s\,K = N\,i$$

Kako je jezgra od feromagnetskog materijala beskonačne permeabilnosti, u njoj nema polja, već se ono formira samo u vanjskom prostoru. Dobiva se ista slika kao u elektrostatskom polju nabijenog vodiča. Površina jezgre je magnetska ekvipotencijalna ploha.

Preslikavanjem se iznos jakosti struje ne mijenja. Zato je linijska gustoća struje u ravnini (w) na kružnom cilindru

$$K_{(w)} = K_{(z)} \left| \frac{dz}{dw} \right|$$

Derivacija funkcije preslikavanja iznosi za $r = r_0$

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = \frac{c}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{r_0^2} \right)^2 + \frac{4}{r_0^2} \sin^2 \vartheta \right]$$

Treba uvrstiti iznos za r_0 izražen poluosima, a jednako treba uzeti u obzir da je $b \gg a$. Zato je $c \approx a, r_0 \approx 1$, te je približno

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = a \sin \vartheta$$

Sada je linijska gustoća struje u ravnini (w)

$$K_{(w)} = K_{(z)}\, a \sin \vartheta$$

Budući da je linijska gustoća struje $K_{(z)} = K$ u ravnini (z) konstantna, ona je u ravnini (w) raspoređena po obodu kružnog cilindra približno po zakonu sinusa.

Polje u kružnom cilindru mora biti homogeno. Zato je kompleksni potencijal u ravnini (w)

$$\chi = F\,w = F\,r\,e^{j\vartheta} = \varphi + j\,\psi$$

Tangencijalna komponenta jakosti polja mora biti jednaka linijskoj gustoći struje, što je u skladu s uvjetima na granici. Prema tome je

$$H_\vartheta = -\frac{\partial \varphi}{r\,\partial \vartheta} = F \sin \vartheta = K\,a \sin \vartheta$$

Nepoznata konstanta je dakle $F = K\,a$, a to je ujedno i jakost polja u kružnom cilindru. Polje u ravnini (z) slijedi uz pomoć funkcije preslikavanja. Induktivitet

namota se računa uz pomoć energije magnetskog polja. Energija je invarijantna veličina. Ona ne ovisi o koordinatama niti o prostoru u kojem je prikazana. Polje eliptičnog cilindra u ravnini (z) se preslikava u unutarnjost okruglog cilindra u ravnini (w). Ono je u ravnini (w) homogeno i iznosi

$$H_{(w)} = K\,a = \frac{N\,i}{2}$$

Energija polja u okruglom cilindru jednaka je energiji što ga sadrži induktivitet

$$\frac{1}{2}\,\mu_0\,H_{(w)}^2\,\pi\,r_0^2\,l = \frac{1}{2}\,L\,i^2$$

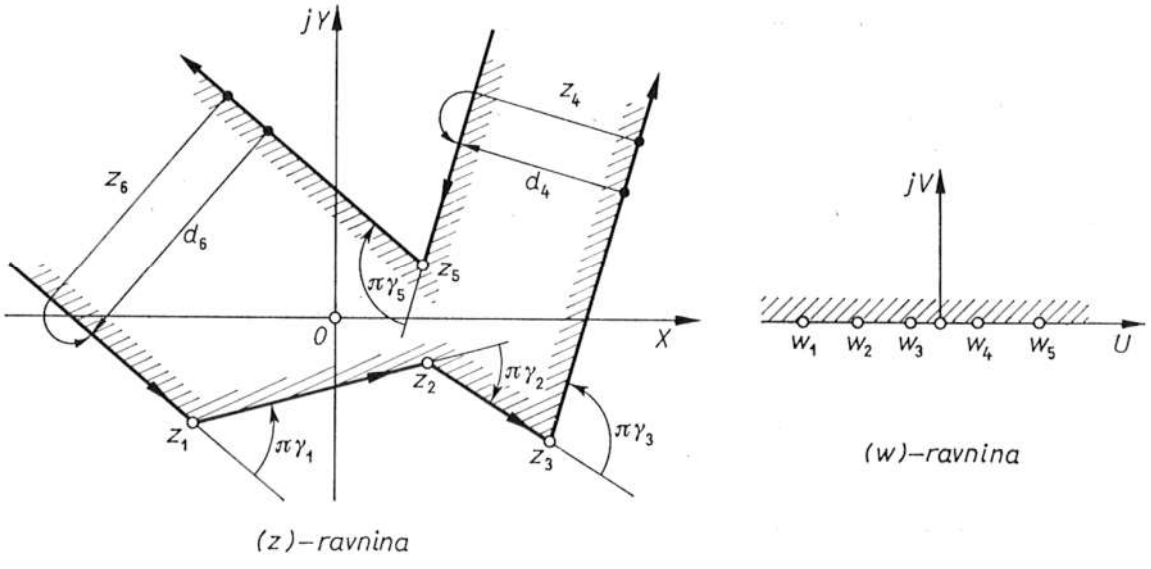
Tu je l aksijalna duljina cilindra, a iznos polumjera je $r_0 \approx 1$, te je induktivitet

$$L = \frac{\pi}{4}\,\mu_0\,l\,N^2$$

Ovdje postoji stanovito nepodudaranje u dimenzijama veličina u ravnini (w). Duljine u ravnini (w) nemaju dimenzije. To ne smeta, samo o tome treba voditi računa.

D.8.7. SCHWARZ-CHRISTOFFELOV TEOREM

Ovaj se teorem iskorištava da se *poligon* u ravnini (z) preslika u poluravninu (w). Na sl. D.21. prikazan je u ravnini (z) jedan opći poligon. Koordinate njegovih



Sl. D.21. Opći poligon sa 6 vrhova u ravnini (z) se preslikava u pozitivnu poluravninu ravnine (w). Svi su vrhovi na realnoj osi.

vrhova z_k su zadane. Konkretno na sl. D.21. zadani poligon ima šest vrhova. Dva vrha među njima se nalaze u beskonačnosti, a stranice u njih dolaze paralelno.

Promatrani prostor u slici je šrafiran. On je ograničen stranicama poligona. *Teoremu Schwarza i Christoffela pomaže da se nađe analitička funkcija koja preslikava površinu ograničenu poligonom iz ravnine* (z) *na gornju poluravninu ravnine* (w). Ista funkcija preslikava vrhove z_k u točke w_k koje se sve nalaze na realnoj osi ravnine (w). Teorem glasi

$$\frac{dz}{dw} = K(w - w_1)^{-\gamma_1}(w - w_2)^{-\gamma_2} \dots (w - w_n)^{-\gamma_n} = K \prod_{k=1}^{n} (w - w_k)^{-\gamma_k} \qquad (D.32)$$

Odatle se funkcija preslikavanja dobiva integracijom

$$z = K \int \prod_{k=1}^{n} (w - w_k)^{-\gamma_k} \, dw + K_1 \qquad (D.33)$$

Tu su K i K_1 integracione konstante.

Pravila primjene teorema

1. Poligon se obilazi stranicama tako, da promatrano područje ostaje s lijeve strane. To vrijedi i za ravnine (z) i (w).
2. Redni broj vrhova z_k mora se slagati s rednim brojem w_k na osi U.
3. Kutovi ($\pi\,\gamma_k$) na sl. D.21. broje se pozitivno kad se prelazi sa stranice na stranicu suprotno smjeru kazaljke na satu. U protivnom su kutovi negativni.
4. Tri od w_k točaka se odabiru po volji. Jedna od te tri točke može biti odabrana u beskonačnosti.
5. Ako je jedna od w_k točaka u beskonačnosti, njezin se faktor ne pojavljuje u teoremu (D.32). To je na sl. D.21. točka w_6.
6. Suma svih kutova iznosi $\sum_{1}^{n} \pi\,\gamma_k = 2\,\pi$ ili svih kutnih faktora $\sum_{1}^{n} \gamma_k = 2$.
7. Ako je neki vrh $z_i = \infty$, tj. pripadne strane su paralelne na razmaku d_i, a preslikana w_i točka je na konačnoj udaljenosti na osi U, razmak d_i među stranicama iznosi

$$d_i = -j\,\pi\,K \prod_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} (w_i - w_k)^{-\gamma_k} \qquad (D.34)$$

   Takav je vrh z_4 na sl. D.21.

8. Ako je neki vrh $z_i = \infty$, a preslikana točka također $w_i = \infty$, razmak među stranicama iznosi

$$d_i = j\,\pi\,K \qquad (D.35)$$

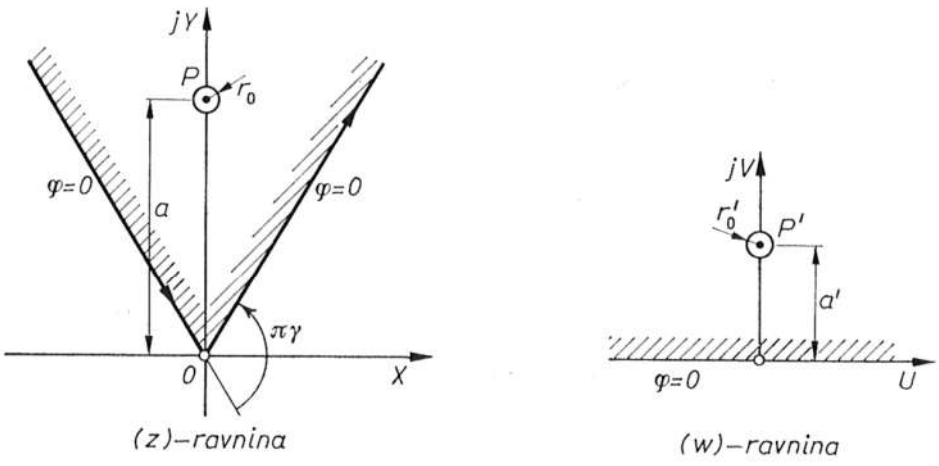
   Takav je vrh z_6 na sl. D.21.

9. Ukupno ima $(n + 2)$ konstanti, ako ima n vrhova. To su konstante K, K_1 i w_k. Tri w_k odabiru se po volji, a jedna od njih je najčešće u beskonačnosti. Prema tome, potrebno je $(n - 1)$ relacija da bi se odredile ostale konstante.

Treba imati u vidu da funkcija preslikavanja nije analitična u točkama vrhova. Kutove treba dijeliti sa π da bi se dobili kutni faktori γ_k koji se pojavljuju u teoremu (D.32). Nekoliko primjera trebaju ilustrirati primjenu teorema.

D.8.7.1. Okrugli vodič u uglu

Linijski naboj gustoće λ raspoređen je na okruglom vodiču malog polumjera r_0. On se nalazi među dvije ravnine koje se sijeku pod kutom (π/n), kao na sl. D.22.



Sl. D.22. Ravni okrugli vodič u uglu dviju vodljivih ravnina u ravnini (z) se preslikava u ravni okrugli vodič iznad vodljive ravnine u ravnini (w).

Vodič se nalazi na imaginarnoj osi u ravnini (z), a ona ujedno raspolavlja kut između obje stranice. Kutna konstanta je pozitivna i iznosi iz $\pi\gamma = \pi - \pi/n$, $\gamma = 1 - n$. Neka je $w_0 = 0$, te je derivacija iz (D.32)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = K w^{(1-n)/n}$$

Odatle je funkcija preslikavanja $z = n K w^{1/n} + K_1$. Kako je za $w_0 = 0$ također $z_0 = 0$, to je i $K_1 = 0$. Konačno se može pisati

$$w = F z^n$$

kao funkcija preslikavanja koja ugao (π/n) u ravnini (z) preslikava u gornju poluravninu (w). Krakovi ugla u ravnini (z) imaju nulti potencijal. To znači da realna os u ravnini (w) ima također nulti potencijal. Polje okruglog vodiča je sada polje takvog vodiča koji se nalazi ispred ravnine nultog potencijala. Potencijal takvog vodiča iznosi

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2a'}{r_0'}$$

Iz funkcije preslikavanja iznosi $a' = F a^n$, a polumjer vodiča u ravnini (w), uzevši da je $r_0 \ll a$,

$$r_0' = \left| \frac{dw}{dz} \right| r_0 = n F | z^{n-1} | \cdot r_0 = n F a^{n-1} r_0$$

Prema tome je potencijal vodiča

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2a}{n r_0}$$

Odatle je kapacitet po jedinici duljine

$$\frac{\lambda}{\varphi_0} = C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{2a}{n r_0}}$$

Ovaj primjer pokazuje kako se dolazi na vrlo jednostavan način do kapaciteta ravnog vodiča koji se nalazi u uglu između dvije ravnine. Kut među ravninama može biti proizvoljan, samo treba odrediti faktor n.

D.8.7.2. Pločasti kondenzator

Pločasti kondenzator po Rogowskom se rješava također primjenom opisanog teorema. U ravnini (z) prikazan je na sl. D.23. samo rub pločastog kondenzatora. Elektrode su razmaknute na udaljenost $2a$. Simetrala potencijala $\varphi_0 = 1/2\,(\varphi_1 + \varphi_2)$ dijeli prostor kondenzatora na dvije polovice. Dovoljno je promatrati samo jednu polovicu, koja je na sl. D.23. šrafirana. Koordinate vrhova i kutne konstante iznose za tri vrha, koliko ih ima poligon ukupno

$$z_1 = \begin{matrix} \infty + j\,0 \\ -\infty + j\,a \end{matrix} \qquad z_2 = 0 + j\,a \qquad z_3 = \begin{matrix} -\infty + j\,a \\ -\infty + j\,0 \end{matrix}$$

$$\gamma_1 \pi = 2\pi \qquad \gamma_2 \pi = -\pi \qquad \gamma_3 \pi = \pi$$

$$\gamma_1 = 2 \qquad \gamma_2 = -1 \qquad \gamma_3 = 1$$

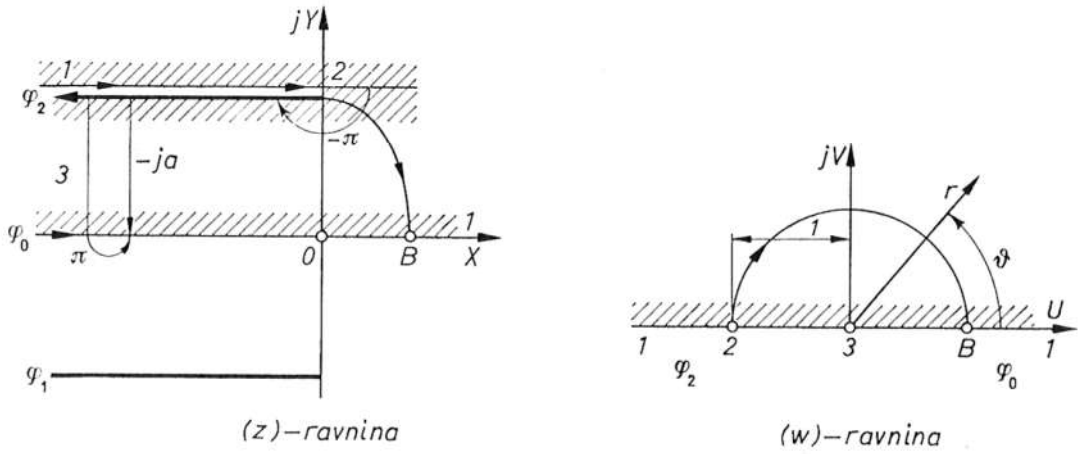
$$w_1 = \pm\infty \qquad w_2 = -1 \qquad w_3 = 0$$

Prema tome je derivacija funkcije po (D.32)

$$\frac{dz}{dw} = K(w + 1)\, w^{-1} = K\left(1 + \frac{1}{w}\right)$$

Integracija daje

$$z = K(w + \ln w) + K_1$$



Sl. D.23. Rub pločastog kondenzatora u ravnini (z) preslikava se u gornju poluravninu ravnine (w).

Prema točki 7. »Pravila« (D.34), vrh $i = 3$ je u beskonačnosti, a razmak je stranica $d_3 = -j\,a$, sa sl. D.23. u smjeru obilaženja poligona, te je

$$d_3 = -j\,a = -j\,\pi\,K$$

Odatle je konstanta $K = a/\pi$. Iz zadanih koordinata vrha $k = 2$ slijedi druga konstanta $K_1 = a/\pi$. Konačno je funkcija preslikavanja

$$z = \frac{a}{\pi}(1 + w + \ln w)$$

U ravnini (w) nastaju dva vodljiva lista, koji se sastaju u vrhu $w_3 = 0$, a jedan je potencijala φ_2 i drugi potencijala φ_0. Takvi nabijeni listovi proizvode polje slično polju linijske struje smještene u w_3. Silnice polja su koncentrične kružnice sa središtem u w_3, a ekvipotencijalne linije su radijusi iz w_3. Vrh w_3 stavljen je u ishodište da se dobije jednostavniji izraz za kompleksni potencijal. Kompleksni potencijal ima oblik analitičke funkcije D.8.5.2. koja predstavlja polje dvaju komplanarnih naboja.

Ona glasi, prilagođena ovom primjeru

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_0)\ln w + \varphi_0 = \varphi + j\,\psi \qquad \text{(D.36)}$$

Potencijal realne osi za $w > 0$ iznosi $\varphi = \varphi_0$, a za $w < 0$ on je $\varphi = \varphi_2$. To je provjera kompleksnog potencijala (D.36). Jakost homogenog polja među elektrodama iznosi $E_0 = (\varphi_2 - \varphi_0)/a$.

Budući da je kompleksni potencijal prikazan kao u (D.36), treba uvesti polarne koordinate u ravnini (w), tj.

$$w = u + j\,v = r\,e^{j\vartheta}$$

Time je potencijalna i strujna funkcija iz (D.36)

$$\varphi = (\varphi_2 - \varphi_0)\,\frac{\vartheta}{\pi} + \varphi_0$$

$$\psi = -\frac{a\,E_0}{\pi}\ln r$$

Ekvipotencijalne linije su predstavljene sa $\vartheta = \text{konst.}$, a silnice predstavljaju linije $r = \text{konst.}$ Funkcija preslikavanja glasi, uz primjenu polarnih koordinata

$$x = \frac{a}{\pi}(1 + r\cos\vartheta + \ln r)$$

$$y = \frac{a}{\pi}(\vartheta + r\sin\vartheta)$$

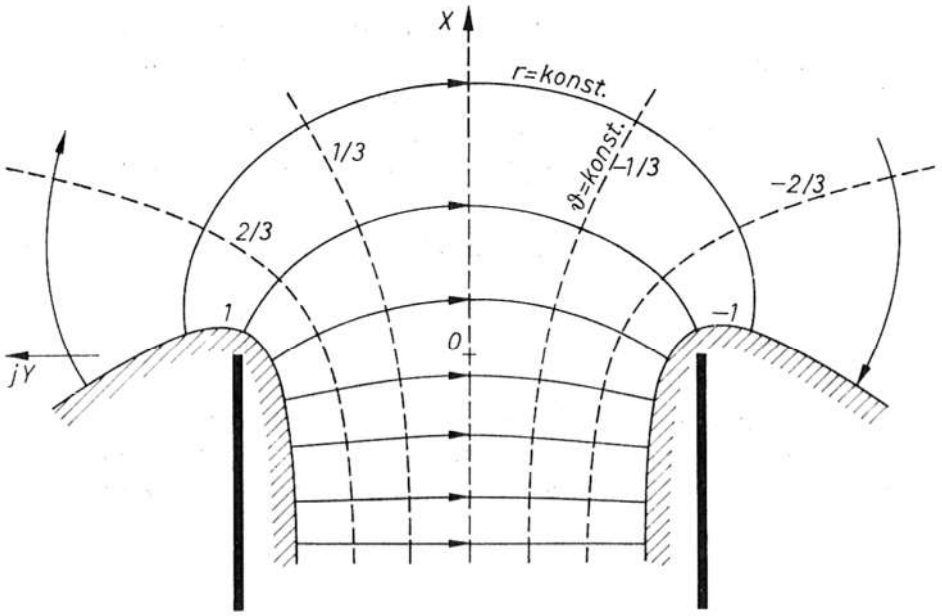
$$z = x + j\cdot y$$

Primjenom funkcije preslikavanja dobiva se slika polja u ravnini (z), kao što je prikazana na sl. D.24. Ekvipotencijalne linije su za $\vartheta = \text{konst.}$, a silnicama odgovara $r = \text{konst.}$ Jakost polja u ravnini (z) iznosi

$$E = \left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}z}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}w}\right|\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = \frac{E_0}{|1 + w|} = \frac{E_0}{(1 + r^2 + 2\,r\cos\vartheta)^{1/2}}$$

Jakost polja na osi X se dobiva kad je $\vartheta = 0$ i ona iznosi $E_0/(1 + r)$. Kako radijus raste prema beskonačnosti, ona postepeno opada prema ništici. Ona je u točki B na sl. D.23. $E_0/2$, jer je $r = 1$, a $x_B = 2a/\pi$. Prema tome je jakost polja opala na polovicu iznosa na udaljenosti od ruba elektroda, koja je jednaka približno trećini razmaka među elektrodama. Kad se ulazi među elektrode, jakost polja se približava iznosu homogenog polja. Polje je sa 1% točnosti jednako homogenom polju

za $r < 0{,}01$. Ta je točka od ruba elektroda udaljena za $1{,}15\,a$ približno. Rub elektroda počinje djelovati na dubini koja je praktički jednaka polovici razmaka među elektrodama. Djelovanje ruba praktički sasvim iščezava na dubini koja je jednaka razmaku elektroda.



Sl. D.24. Silnice i ekvipotencijalne linije polja na rubu pločastog kondenzatora sa sl. D.23. Šrafirane plohe su elektrode kondenzatora po Rogowskom.

Jakost polja na elektrodi se dobiva za $\vartheta = \pi$ i ona iznosi $E = E_0/|1 - r|$. Točka $r = 1$ je pol funkcije, a ona je upravo ugao poligona. Tamo polje postaje beskonačno jako. Zato se polje mijenja drukčije nego na osi X. Ono od iznosa E_0 najprije raste do beskonačnosti, a tek tada opada prema ništici. To se dešava približavanjem rubu elektrode.

Čim je širina b elektroda mnogo veća od raspora među njima $2\,a$, tj. $b \gg 2\,a$, električni tok među elektrodama s nutarnje strane se računa kao da je polje homogeno. Taj dio toka iznosi $\Phi_0 = \varepsilon\, E_0\, b$ po jedinici aksijalne duljine. Jedan dio toka se zatvara s vanjske strane elektroda. On se odredi iz strujne funkcije za $\vartheta = \pi$ na elektrodi. Udaljenost x na elektrodi iznosi $x = a/\pi\,(1 - r + \ln r)$. Velikim iznosima x odgovaraju veliki iznosi r, kad se može uzeti da je $r \gg \ln r$. Treba uzeti $x = -\,b/2$, te je približno $r = \pi\, b/(2a) + 1$. S tim se odredi strujna funkcija, a odatle i vanjski tok, koji približno iznosi

$$\Phi_v = \varepsilon\, E_0\, \frac{2\,a}{\pi} \ln \frac{\pi\, b}{2\,a}$$

Odnos vanjskog i unutarnjeg toka iznosi, prema tome

$$\frac{\Phi_v}{\Phi_0} = \frac{2\,a}{\pi\, b} \ln \frac{\pi\, b}{2\,a}$$

On je ovisan o odnosu $b/(2a)$ koji je normalno mnogo veći od jedinice. Ako je $b/(2a) = 100$, odnos tokova je $\Phi_v/\Phi_0 = 1{,}6\%$. Za isti omjer $b/(2a) = 1000$ već je odnos tokova malen, tj. $\Phi_v/\Phi_0 = 2{,}6\,{}^0/_{00}$. Na taj je način dobivena približna procjena električnog toka koji se zatvara s vanjske strane elektroda. Odatle se vidi koliko doprinosi kapacitetu pločastog kondenzatora vanjska površina elektroda.

Interesantna je ekvipotencijalna linija na kojoj više nema nekog porasta jakosti polja do maksimuma, već postoji njegovo stalno opadanje, kao što je na simetrali između elektroda. Da ne bi bilo porasta jakosti polja, mora biti $\vartheta \leqslant \pi/2$, ako se radijus mijenja od ništice do beskonačnosti, tj. za $0 < r < \infty$. Kad je $\vartheta = \pi/2$, jakost polja iznosi $E/E_0 = (1 + r^2)^{-1/2}$. Koordinate ove ekvipotencijalne linije iznose

$$x = \frac{a}{\pi}(1 + \ln r)$$

$$y = \frac{a}{\pi}\left(r + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{za} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

Ta se ekvipotencijalna ploha nadomješta vodljivom plohom, te tako nastaje kondenzator na čijim elektrodama nema ekstremno jakih polja. Takav je tip kondenzatora prema *Rogowskom*. On služi za ispitivanje probojne čvrstoće plinova i tekućina.

D.8.7.3. Beskonačno duboki utor

Polje beskonačno duboka utora služi da se definira **Carterov faktor.** Na sl. D.25. skiciran je u ravnini (z) presjek utora koji je beskonačno dubok, a svuda je iste širine $2\,b$. Neka su utori smješteni na rotoru električnog stroja. Stator je gladak, a zračni raspor između rotora i statora ima duljinu a. Magnetska jezgra stroja je od materijala beskonačne permeabilnosti, te su površine jezgre ujedno ekvipotencijalne plohe.

Promatrani poligon je šrafiran na sl. D.25. Vrhovi poligona idu od z_1 do z_4. Oni su u ravnini (w) preslikani na realnu os u točke w_1 do w_4. Vrhovi z_1 i z_3 su u beskonačnosti, a točka w_1 je u beskonačnosti. Tablica podataka glasi

$$z_1 = \begin{matrix}\infty + j\,0 \\ \infty - j\,a\end{matrix} \qquad z_2 = 0 + j\,0, \qquad z_3 = \begin{matrix}0 - j\,\infty \\ b - j\,\infty\end{matrix} \qquad z_4 = b - j\,a$$

$$w_1 = \pm\,\infty \qquad w_2 = -\,p \qquad w_3 = p \qquad w_4 = 1$$

$$\gamma_1 = 1 \qquad \gamma_2 = \frac{1}{2} \qquad \gamma_3 = 1 \qquad \gamma_4 = -\,\frac{1}{2}$$

Stranica poligona 1-2 ima potencijal φ_2, stranica 3-4-1 ima potencijal φ_1, a stranica 2-3 je *silnica*. Funkcija preslikavanja slijedi iz derivacije

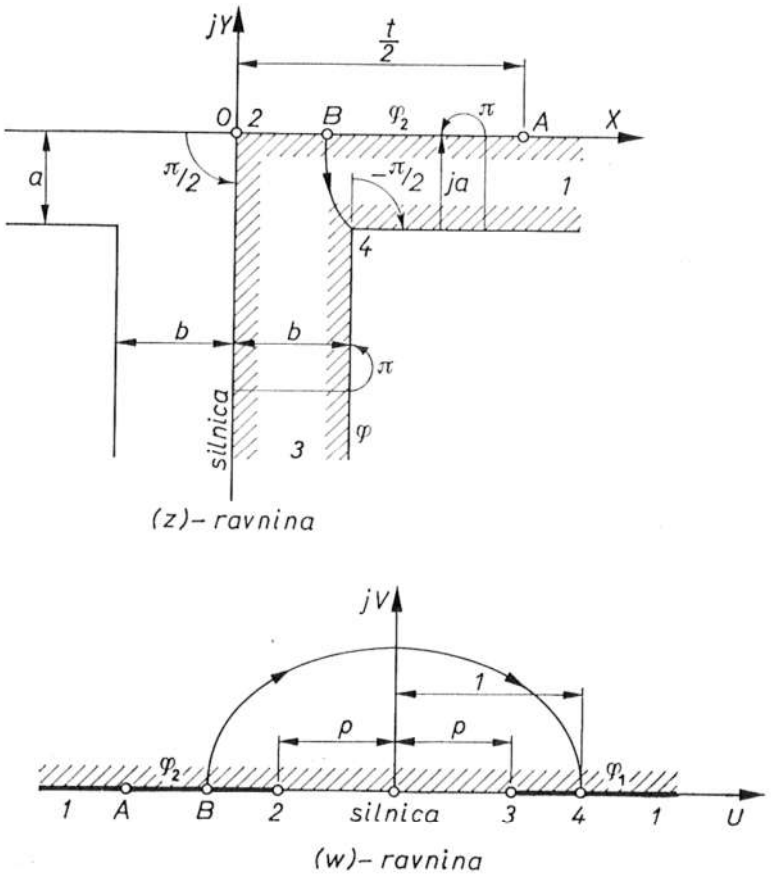
$$\frac{dz}{dw} = \frac{K}{w - p}\left(\frac{w - 1}{w + p}\right)^{1/2}$$

Po (D.35) se određuje konstanta K uz pomoć vrha $i = 1$, tj. $d_1 = j\,a = j\,\pi\,K$. Odatle je $K = a/\pi$. Jednadžba (D.34) se iskorištava uz vrh $i = 3$. Za njega je

$$d_3 = b = -j\,\pi\,K\left(\frac{p-1}{2p}\right)^{1/2}$$

Odatle je nepoznata konstanta

$$p = \frac{a^2}{a^2 + 2b^2}$$



Sl. D.25. Utor paralelnih stijenki električnog stroja u ravnini (z) preslikava se u gornju poluravninu ravnine (w). Utor je beskonačne dubine, a zračni raspor ima glatku suprotnu stijenku.

Budući da je za vrh $i = 2$, $z_2 = 0$, mora biti integraciona konstanta $K_1 = 0$. Integracija daje funkciju preslikavanja

$$z = \frac{a}{\pi}\left[\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right) + 2\,\frac{b}{a}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}R\right)\right]$$

$$R = \left(\frac{w+p}{w-1}\right)^{1/2}$$

Ovo je tipični primjer kad je jedna stranica poligona silnica. Točke w_2 i w_3 su smještene simetrično, tako da je funkcija kompleksnog potencijala jednostavnija. Potencijal za ravninu (w) glasi

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\,\mathrm{arch}\,\frac{w}{p} + \varphi_1 \tag{D.37}$$

Funkcija arch predstavlja polje dvaju komplanarnih naboja, koji su razmaknuti na udaljenost $2p$. Funkcija (D.37) i prijašnja funkcija (D.36) su najtipičnije koje se primjenjuju uz Schwarzov teorem. Jakost magnetskog polja iznosi iz (D.37) u ravnini (z)

$$H = -\left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}w}\right| \cdot \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = H_0 \left|\frac{w-p}{w-1}\right|^{1/2}$$

$$H_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a}$$

Na elektrodi 1-2 mora biti $w = -u \leqslant -p$. To je isto kao i $w = u \geqslant p$. Prema tome, jakost polja iznosi

$$H = H_0 \left(\frac{u+p}{u+1}\right)^{1/2}, \qquad u \geqslant p$$

Najmanja jakost polja je na vrhu 2, koji se nalazi upravo nasuprot sredini utora. Ona iznosi za $u = p$

$$H_{\min} = H_0 \left(\frac{2p}{p+1}\right)^{1/2} = \frac{H_0}{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Kad je otvor utora upravo jednak zračnom rasporu, tj. $b/a = 0{,}5$, najmanja jakost polja iznosi 89% iznosa H_0.

Interesantno je pogledati kolika je udaljenost x od ishodišta kad se može uzeti da je polje homogeno. U tome slučaju je $H/H_0 = 1 - \varepsilon$, gdje je $\varepsilon \ll 1$. Tada je približno $u = (1-p)/(2\,\varepsilon) - 1$, odnosno parametar približno $R = 1 - \varepsilon\,(1+p)/(1-p)$. Konačno je udaljenost x dana približno sa

$$\frac{\pi x_0}{a} = \ln \frac{2}{\varepsilon\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)} + 2\frac{b}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$$

Neka je konkretno $\varepsilon = 0{,}01$. Tada je omjer redom $x_0/a = 0{,}82;\ 1{,}32;\ 1{,}97$ za odnos otvora utora prema duljini zračnog raspora $2b/a = 0{,}5;\ 1;\ 2$. Normalno ne postoji jedan utor, već ih ima mnogo poredanih pravilno po obodu. Na svaki razmak t dolazi po jedan utor. Razmak t se zove *korak utora*. Izvedene jednadžbe

se mogu upotrebljavati dok je zadovoljeno da je $t/2 > x_0$. To znači da $t/2$ mora biti već u zoni kad se može uzeti da je polje homogeno. U protivnom se ne mogu upotrebljavati izvedene jednadžbe u proračunu polja na udaljenosti $x = t/2$.

Treba odrediti tok između točaka 2 i A sa sl. D.25. Zato je potrebno odrediti razliku strujnih funkcija iz (D.37) $\psi_2 - \psi_A = (1/\pi)\, a\, H_0 \operatorname{arch}(u/p)$. Prema tome taj tok iznosi

$$\Phi = \mu_0 (\psi_2 - \psi_A) = \frac{a}{\pi} \mu_0 H_0 \operatorname{arch} \frac{u}{p}$$

Iz prijašnjeg razmatranja slijedi uz $H/H_0 = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, da je približno za $x_0 = t/2$

$$\operatorname{arch} \frac{u}{p} = \ln \frac{1 - p}{\varepsilon p} = \frac{\pi t}{2a} - 2\frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \ln \left(\frac{2p}{1 + p} \right)$$

Kad bi polje bilo homogeno, za istu razliku potencijala $(\varphi_2 - \varphi_1)$ iznosio bi isti tok

$$\Phi_0 = \mu_0 H_0 \frac{t}{2}$$

Carterov faktor je definiran kao omjer tih dvaju tokova, tj.

$$k_c = \frac{\Phi_0}{\Phi}$$

Carterov faktor se izražava po Richteru sa

$$k_c = \frac{1}{1 - g\frac{a}{t}} \tag{D.38}$$

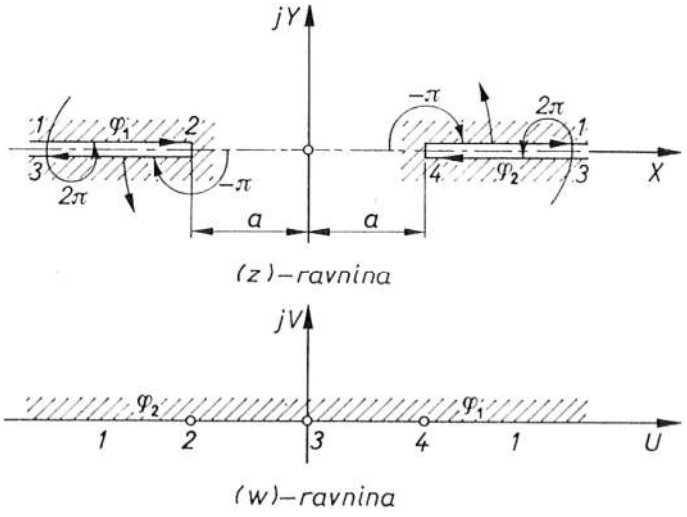
Tu je tada

$$g = \frac{t}{a} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arch} \frac{u}{p} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \ln \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} \right]$$

Za odnose $2b/a = 0{,}5;\ 1;\ 2$ iznose redom $g = 0{,}039;\ 0{,}152;\ 0{,}558$. Treba voditi računa o tome da je $t/2 > x_0$, tj. da omjer a/t mora biti ispod neke minimalne vrijednosti. Omjer a/t ne smije biti prevelik. Formula (D.38) se mnogo upotrebljava u tehnici električnih strojeva.

D.8.7.4. Primjeri poligona

1. **Komplanarne elektrode** (Sl. D.26). Elektrode su od ravna lima, zanemarive debljine prema razmaku $2a$ paralelnih rubova lima. Poligon u ravnini (z)



Sl. D.26. Preslikavanje komplanarnih elektroda.

se oblikuje prema slici s 4 vrha. Vrh 1 je u ravnini (w) u beskonačnosti. Zato su podaci

$$z_2 = -0, \qquad w_2 = -1, \qquad \gamma_2 = -1$$
$$z_3 = \pm\infty, \qquad w_3 = 0, \qquad \gamma_3 = 2$$
$$z_4 = a, \qquad w_4 = 1, \qquad \gamma_4 = -1$$

Sad je

$$\frac{dz}{dw} = K\frac{w^2 - 1}{w^2}$$

Funkcija preslikavanja izlazi iz

$$z = \frac{a}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

Kompleksni potencijal, ako su φ_1 i φ_2 potencijali elektroda, iznosi

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\ln w + \varphi_1$$

Jakost polja u ravnini (z)

$$E = \left|\frac{d\chi}{dw}\,\frac{dw}{dz}\right| = 2\left|\frac{w}{w^2-1}\right| E_0, \qquad E_0 = \frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2a}$$

jakost polja u ishodištu $z = 0$

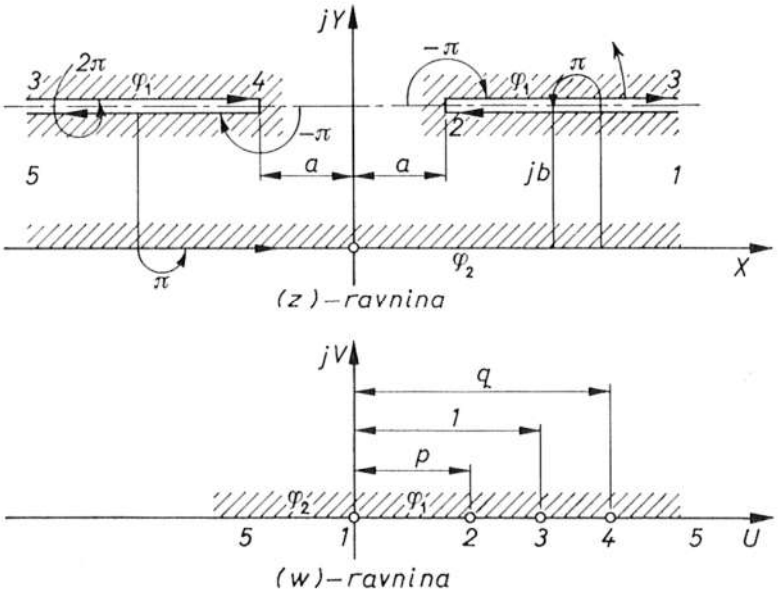
Jakost polja na osi Y za $u = 0$, $v \neq 0$

$$\frac{E}{E_0} = \left[1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Električni tok kroz ravninu $x = 0$ do $\pm y_0$

$$\Phi = 2\,\varepsilon_0\,E_0\,y_0$$

2. **Komplanarne elektrode i ravnina,** sl. D.27.



Sl. D.27. Preslikavanje komplanarnih elektroda smještenih paralelno vodljivoj ravnini.

Elektrode su na istom potencijalu φ_1, a ravnina je na potencijalu φ_2. Poligon u ravnini (z) ima 5 vrhova, a vrh 5 je u ravnini (w) u beskonačnosti. Podaci glase

$$z_1 = \infty \begin{matrix} +j\,0 \\ +j\,b \end{matrix}, \qquad w_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 1$$

$$z_2 = a + j\,b, \qquad w_2 = p, \qquad \gamma_2 = -1$$

$$z_3 = \pm\,\infty + j\,b, \qquad w_3 = 1, \qquad \gamma_3 = 2$$

$$z_4 = -a + j\,b, \qquad w_4 = q, \qquad \gamma_4 = -1$$

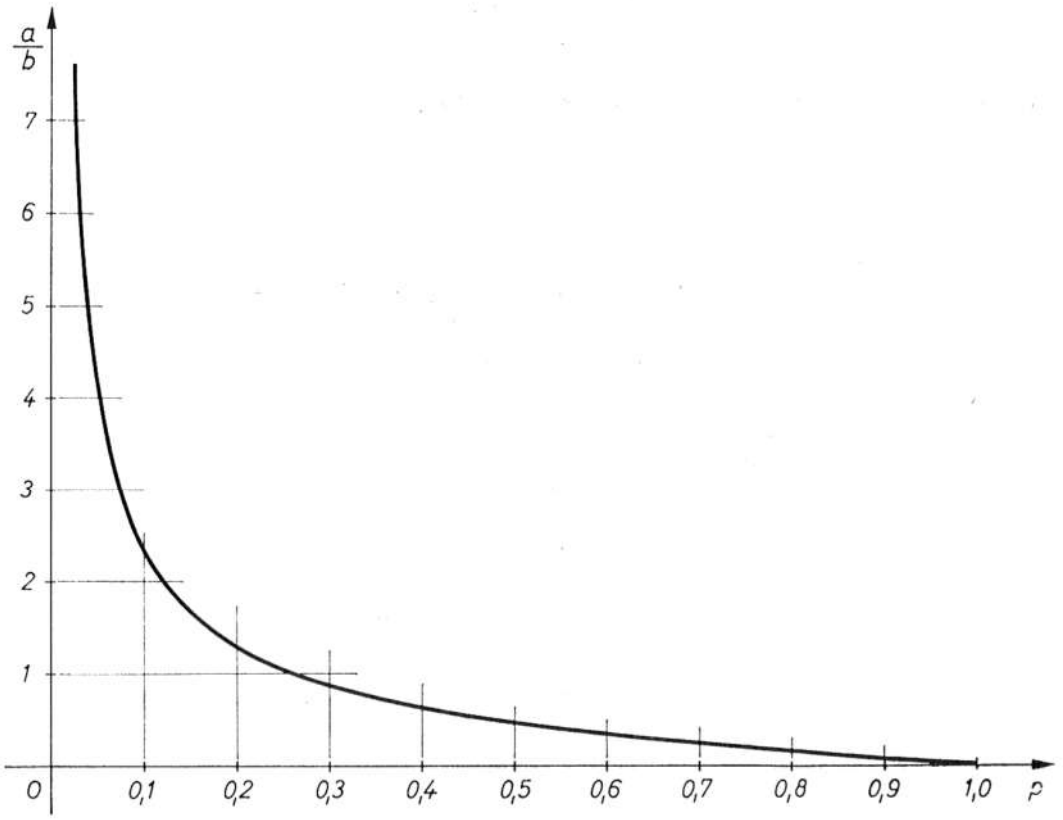
Sad je

$$\frac{dz}{dw} = K \frac{(w-p)(w-q)}{w(w-1)^2}$$

Funkcija preslikavanja glasi

$$z = \frac{b}{\pi}\left[\frac{1}{2}(1-p)\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{w+1}{w-1} - \ln w\right] + j\,b$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - p\right) + \ln\frac{1}{p} = \pi\frac{a}{b}, \quad 0 < p < 1$$



Sl. D.28. Dijagram omjera a/b u ovisnosti o parametru p uz sl. D.27.

Slika D.28. prikazuje ovisnost omjera a/b o parametru p.

Kompleksni potencijal iznosi

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\ln w + \varphi_1$$

Jakost polja u ravnini (z) iznosi

$$E = \left|\frac{d\chi}{dw}\frac{dw}{dz}\right| = E_0\left|\frac{(w-1)^2}{(w-p)(w-q)}\right|, \quad E_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{b}, \quad q = \frac{1}{p}$$

Jakost polja na vodljivoj ravnini, na osi X

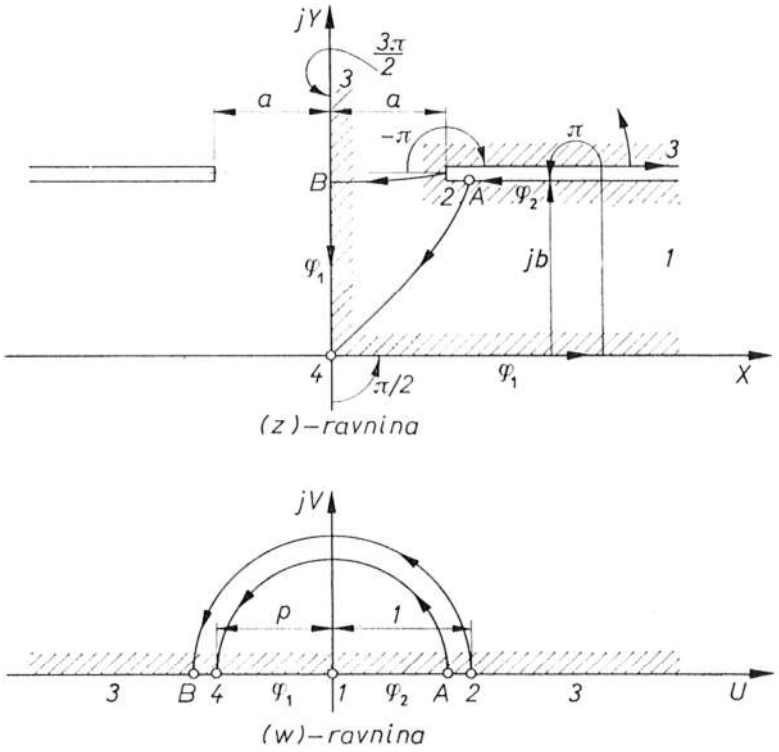
$$\frac{E}{E_0} = \frac{(u+1)^2}{(u+p)\left(u+\frac{1}{p}\right)}, \qquad u > 0$$

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(1-p)^2}{2p}\,\frac{u-1}{u+1} - \ln u\right]$$

Jakost polja na mjestu $x = 0$, $u = 1$

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{4p}{(1+p)^2}$$

3. **Ploča u pravokutnom uglu,** sl. D.29. Tanka ploča je na potencijalu φ_2, a ugao je na potencijalu φ_1.



Sl. D.29. Preslikavanje presjeka ploče u pravokutnom uglu vodljivih ravnina.

Poligon u ravnini (z) ima 4 vrha. Vrh 3 se nalazi u ravnini (w) u beskonačnosti. Podaci glase

$$z_1 = \infty \begin{matrix} +jb \\ +j0 \end{matrix}, \qquad w_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 1$$

$$z_2 = a + jb, \qquad w_2 = 1, \qquad \gamma_2 = -1$$

$$z_4 = 0, \qquad w_4 = -p \qquad \gamma_4 = \frac{1}{2}$$

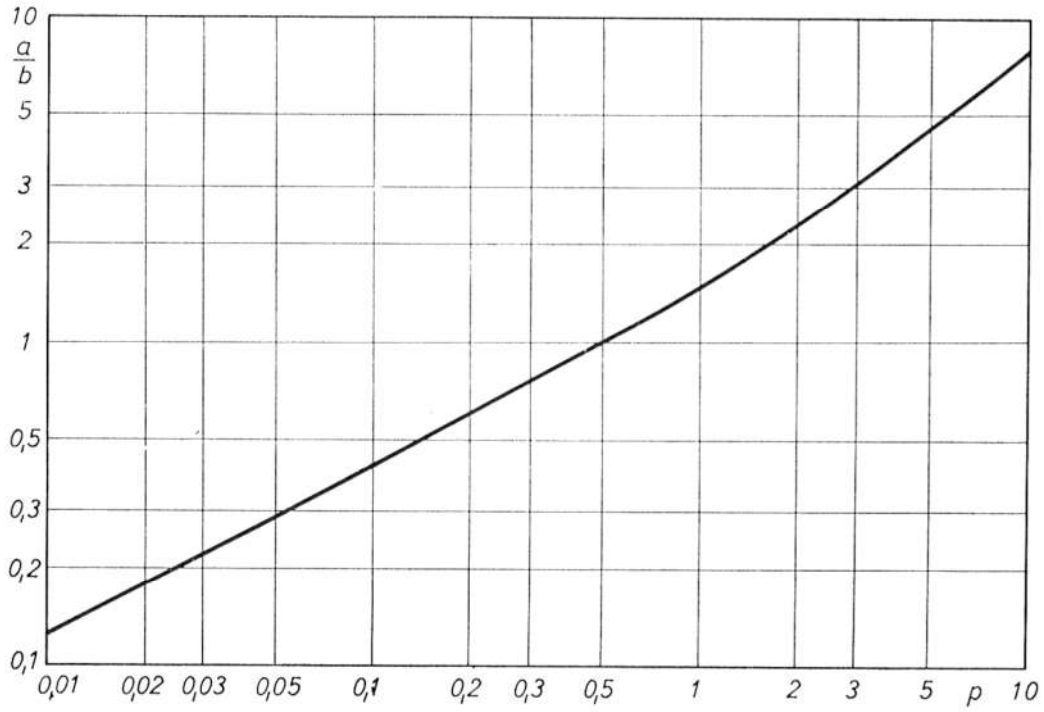
Prema tome je

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = K \frac{w - 1}{w\,(w + p)^{1/2}}$$

Funkcija preslikavanja glasi

$$z = \frac{2b}{\pi}\left[p\left(1 + \frac{w}{p}\right)^{1/2} + \operatorname{arth}\left(1 + \frac{w}{p}\right)^{1/2}\right]$$

$$p\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2} + \operatorname{arcth}\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2} = \frac{\pi a}{2b}, \qquad 0 < p < \infty$$



Sl. D.30. Dijagram omjera a/b u ovisnosti o parametru p uz sl. D.29.

Slika D.30. prikazuje ovisnost omjera a/b o parametru p. Kompleksni potencijal je ovdje

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_1 - \varphi_2)\ln w + \varphi_2$$

Jakost polja na osi X iznosi

$$E = \left| \frac{d\chi}{dw} \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1}{\sqrt{p}} \left| \frac{(w+p)^{1/2}}{w-1} \right| E_0 = \frac{\left(1 - \frac{u}{p}\right)^{1/2}}{1+u} E_0$$

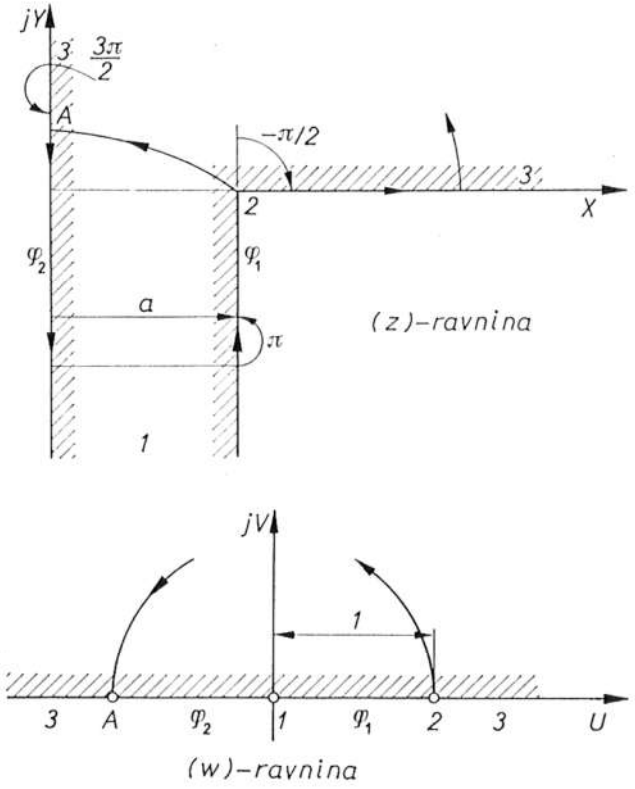
$$\frac{x}{a} = \frac{2b}{\pi a} \left[p \left(1 - \frac{u}{p}\right)^{1/2} + \operatorname{arth} \left(1 - \frac{u}{p}\right)^{1/2} \right], \qquad 0 < u \leqslant p$$

$$E_0 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b}$$

Tok što ulazi u plohu $y = 0$ (os X) iznosi

$$\Phi = \varepsilon_0 (\psi - \psi_4) = \varepsilon_0 \, b \, E_0 \ln \frac{u}{p}$$

4. **Pravokutni ugao,** sl. D.31.



Sl. D.31. Preslikavanje pravokutnog ugla ispred vodljive ravnine.

To može biti ugao magneta. Poligon ima 3 vrha, od kojih je vrh 3 u beskonačnosti u ravnini (w). Podaci su

$$z_1 = \frac{0}{a} - j\,\infty, \qquad w_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 1$$

$$z_2 = a + j\,0, \qquad w_2 = 1, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{2}$$

Sad je

$$\frac{dz}{dw} = K\frac{(w-1)^{1/2}}{w}$$

Funkcija preslikavanja iznosi

$$z = \frac{2a}{\pi}[(w-1)^{1/2} - \operatorname{arctg}(w-1)^{1/2}] + a$$

Kompleksni potencijal je

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\ln w + \varphi_1$$

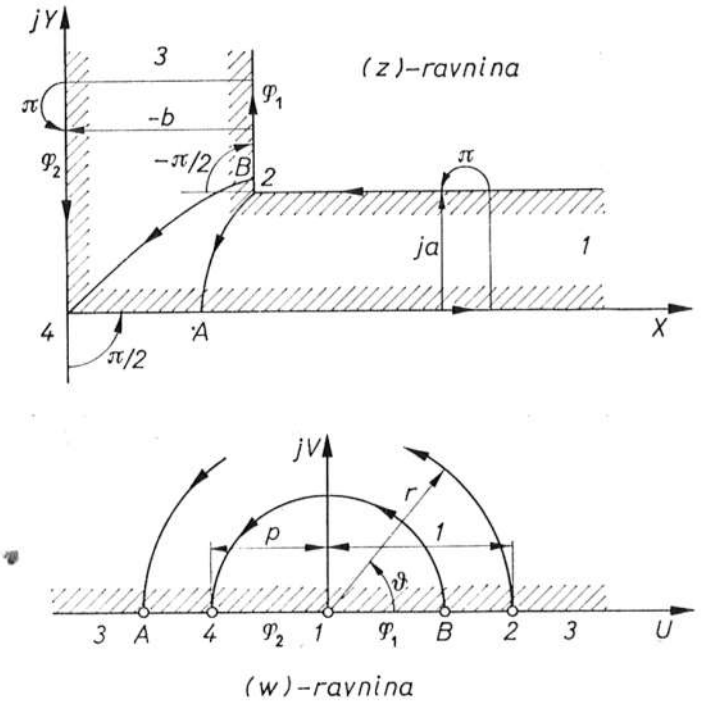
Jakost polja iznosi

$$H = \left|\frac{d\chi}{dw}\frac{dw}{dz}\right| = H_0\,|(w-1)^{-1/2}|, \quad H_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a}$$

Tok sa strane ugla, na osi X, $x > x_2$, $y = 0$, $u > 1$

$$\Phi = \mu_0(\psi_2 - \psi) = \frac{1}{\pi}\mu_0 a H_0 \ln u$$

5. **Pravokutni ugao u uglu**, sl. D. 32.



Sl. D.32. Preslikavanje pravokutnog ugla u pravokutnom uglu.

Poligon ima 4 vrha, od kojih je vrh 3 u beskonačnosti u ravnini (w).

Podaci su

$$z_1 = \infty \begin{matrix} +j\,0 \\ +j\,a \end{matrix}, \qquad w_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 1$$

$$z_2 = b + j\,a, \qquad w_2 = 1, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{2}$$

$$z_4 = 0, \qquad w_4 = -p, \qquad \gamma_4 = \frac{1}{2}$$

Sad je

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = K\frac{1}{w}\left(\frac{w-1}{w+p}\right)^{1/2}$$

Funkcija preslikavanja glasi

$$z = j\frac{2}{\pi}\left[b\ \mathrm{arth}\ R + a\ \mathrm{arctg}\left(\frac{a}{b}R\right)\right]$$

$$R = \left(\frac{w+p}{w-1}\right)^{1/2}, \qquad p = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Kompleksni potencijal glasi

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\ln w + \varphi_1$$

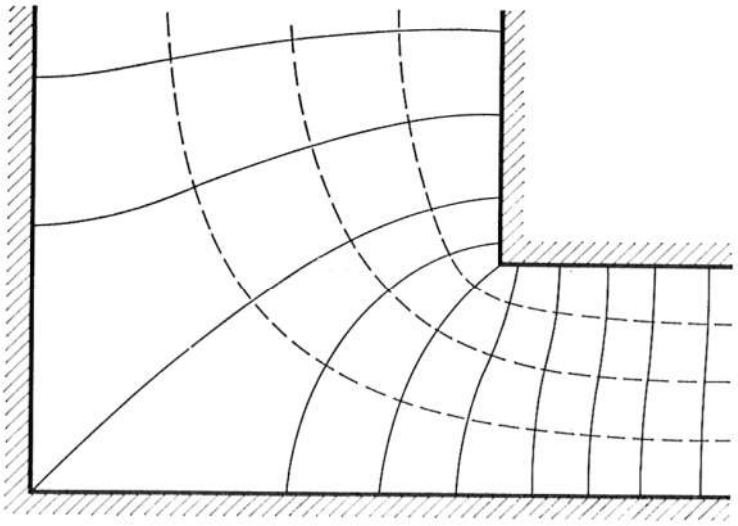
Jakost polja iznosi na osi X za $x > 0$

$$H = \left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}w}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = H_0\,\frac{a}{b}\left|\left(\frac{w+p}{w-1}\right)^{1/2}\right| = H_0\,\frac{a}{b}\left(\frac{p-u}{u+1}\right)^{1/2}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{p-u}{u+1}\right)^{1/2} + \frac{a}{b}\,\mathrm{arth}\left(\frac{1-\frac{u}{p}}{u+1}\right)^{1/2}\right], \qquad 0 < u < p$$

Slika D.33. prikazuje polje, silnice i ekvipotencijalne linije, za $b/a = 2$. U tome slučaju se uzima

$$w = r\, e^{j\vartheta}$$



Sl. D.33. Silnice i ekvipotencijalne linije magnetskog polja između dva ugla prema sl. D.32.

te su $r =$ konst. silnice, a $\vartheta =$ konst. su ekvipotencijalne linije. Kompleksni potencijal je

$$\chi = (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\vartheta}{\pi} + \varphi_1 - j\frac{1}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\ln r$$

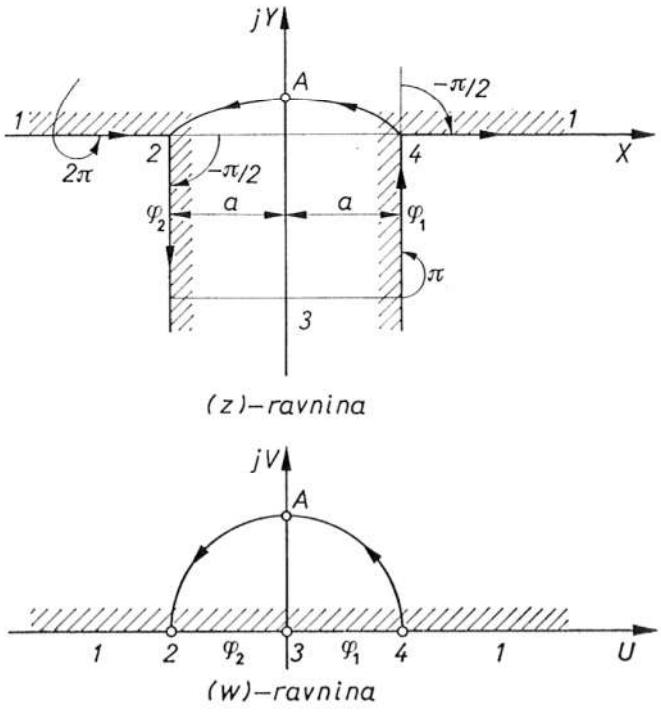
$$\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\vartheta}{\pi} + \varphi_1 \qquad \text{potencijalna funkcija}$$

$$\psi = -\frac{1}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\ln r \qquad \text{strujna funkcija}$$

Parametar funkcije preslikavanja se dobiva iz

$$R^2 = \frac{r^2 - 4 + 3\,r\cos\vartheta - j\,5\,r\sin\vartheta}{r^2 + 1 - 2\,r\cos\vartheta}$$

6. **Dva pravokutna ugla**, sl. D.34.



Sl. D.34. Preslikavanje dvaju usporednih pravokutnih uglova.

Poligon ima 4 vrha, od kojih je vrh 1 u beskonačnosti u ravnini (w). Podaci glase

$$z_2 = -a + j\,0, \qquad w_2 = -1, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{2}$$

$$z_3 = \mp a - j\,\infty, \qquad w_3 = 0, \qquad \gamma_3 = 1$$

$$z_4 = a + j\,0, \qquad w_4 = 1, \qquad \gamma_4 = -\frac{1}{2}$$

Prema tome je

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = K\,\frac{(w^2-1)^{1/2}}{w}$$

Funkcija preslikavanja je odatle

$$z = \frac{2a}{\pi}\left[(w^2-1)^{1/2} - \arcsin\frac{(w^2-1)^{1/2}}{w}\right] + a$$

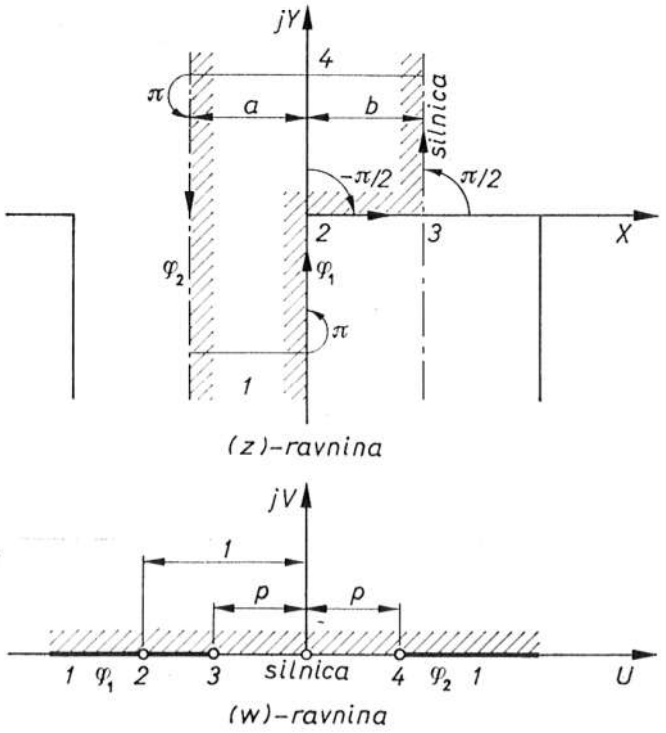
Kompleksni potencijal je

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\ln w + \varphi_1$$

Jakost polja iznosi

$$H = \left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}w}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = |(w^2-1)^{-1/2}|\,H_0, \qquad H_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2a}$$

7. **Polovi magneta**, sl. D.35., **uporedo**. Magneti su pravokutne prizme beskonačne visine, a njihove baze su polovi magneta. Širina prizme je $2b$, a one su međusobno razmaknute za $2a$. Simetrala među polovima jest jedna stranica



Sl. D.35. Preslikavanje magneta pravokutnih rubova. Magneti su smješteni usporedno.

poligona, a simetrala pola je također stranica poligona, ali je ujedno silnica koja spaja vrhove 3 i 4. Ovi se vrhovi stavljaju simetrično oko ishodišta u ravnini (w). Vrh 1 je u beskonačnosti u ravnini (w). Podaci o poligonu su

$$z_2 = 0, \qquad w_2 = -1, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{2}$$

$$z_3 = b + j\,0, \qquad w_3 = -p, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{2}$$

$$z_4 = -\frac{b}{a} + j\,\infty, \qquad w_4 = p, \qquad \gamma_4 = 1$$

Odatle je

$$\frac{dz}{dw} = K\left(\frac{w+1}{w+p}\right)^{1/2} \frac{1}{w-p}$$

Funkcija preslikavanja iznosi

$$z = \frac{2a}{j\pi}\left[\operatorname{arth} R - \frac{a+b}{a} \operatorname{arth}\left(\frac{a+b}{a} R\right)\right] + b$$

$$R = \left(\frac{w+p}{w+1}\right)^{1/2}, \qquad \frac{1}{p} = 2\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 - 1$$

Kompleksni potencijal iznosi

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_1 - \varphi_2)\,\mathrm{arch}\frac{w}{p} + \varphi_2$$

Jakost magnetskog polja iznosi

$$H = \left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = H_0\left|\left(\frac{w-p}{w+1}\right)^{1/2}\right|, \qquad H_0 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{a}$$

Magnetski tok iz pola se dobiva primjenom strujne funkcije. Polovica pola se nalazi između vrhova 2 i 3, tj. za

$$-1 \leqslant -u \leqslant -p$$

Strujna funkcija iznosi

$$\psi = -\frac{a\,H_0}{\pi}\,\mathrm{arch}\frac{u}{p}, \qquad p \leqslant u \leqslant 1$$

Odatle je za

$$w = w_3, \qquad u = p, \qquad \psi = \psi_3 = 0$$

$$w = w_2, \qquad u = 1, \qquad \psi = \psi_2 = -\frac{a\,H_0}{\pi}\,\mathrm{arch}\frac{1}{p}$$

Tok pola iznosi

$$\Phi = 2\,\mu_0\,(\psi_3 - \psi_2) = \frac{2}{\pi}\,\mu_0\,a\,H_0\,\mathrm{arch}\frac{1}{p}$$

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{b}\,\ln\left(\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1}\right)$$

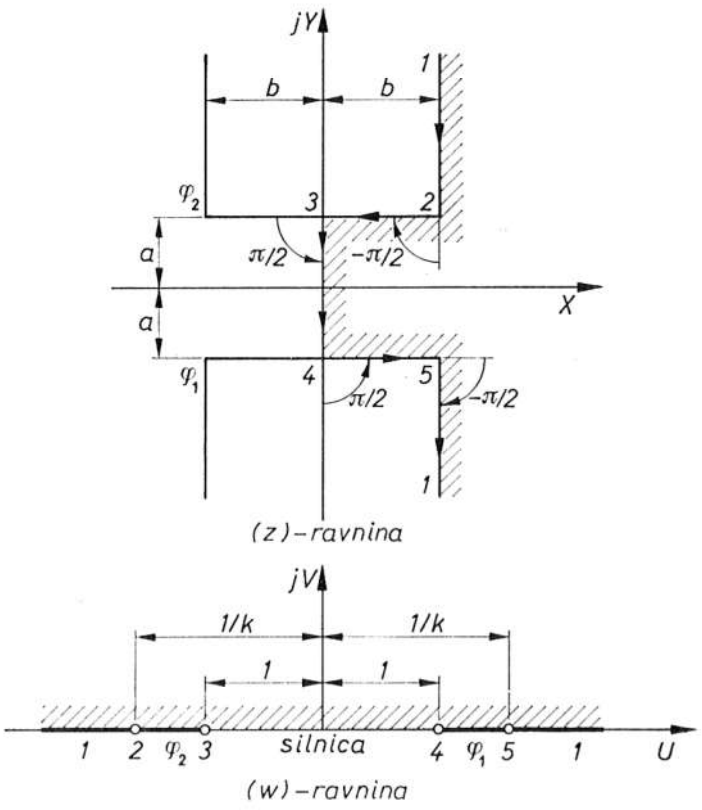
$$\Phi_0 = 2\,\mu_0\,b\,H_0$$

Tu je za

$$\frac{a}{b} = 0{,}2 \qquad 1 \qquad 5$$

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = 1{,}98 \qquad 0{,}84 \qquad 0{,}32$$

8. **Polovi magneta**, sl. D.36., **nasuprot.**



Sl. D.36. Preslikavanje dvaju magneta pravokutnih rubova. Magneti su smješteni jedan nasuprot drugomu.

Iskorištava se samo polovina magneta zbog simetrije. Između vrhova 3 i 4 prolazi silnica. Poligon ima 5 vrhova, a vrh 1 se nalazi u beskonačnosti u ravnini (w). Podaci su

$$z_2 = b + j\,a, \qquad w_2 = -\frac{1}{k}, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{2}$$

$$z_3 = 0 + j\,a, \qquad w_3 = -1, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{2}$$

$$z_4 = 0 - j\,a, \qquad w_4 = 1, \qquad \gamma_4 = \frac{1}{2}$$

$$z_5 = b - j\,a, \qquad w_5 = \frac{1}{k}, \qquad \gamma_5 = -\frac{1}{2}$$

Sad je

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = C\left(\frac{w^2 - \frac{1}{k^2}}{w^2 - 1}\right)^{1/2} = \frac{C}{k}\left(\frac{1 - k^2 w^2}{1 - w^2}\right)^{1/2}$$

Zbog simetrije dovoljna je integracija u granicama 0 do w, te je funkcija preslikavanja

$$z = \frac{C}{k} E(w, k)$$

Nepoznate konstante se dobiju iz zadanih koordinata vrhova

$$z = z_4 = -j\,a, \qquad w = w_4 = 1$$

$$-j\,a = \frac{C}{k} E(1, k) = \frac{C}{k} E(k)$$

$$z = z_5 = b - j\,a, \qquad w = w_5 = \frac{1}{k}$$

$$b - j\,a = \frac{C}{k} E\left(\frac{1}{k}, k\right) = \frac{C}{k} E(k) + j\frac{C}{k}[K(k') - E(k')]$$

Tu je

$$k'^2 = 1 - k^2$$

Iznos integrala $E(1/k, k)$ se dobiva iz poglavlja D.4.8. o eliptičkim integralima, ako je amplituda kompleksna. Amplituda iznosi

$$\arcsin\frac{1}{k} = \frac{\pi}{2} + j\,\operatorname{arch}\frac{1}{k}$$

budući da je $1/k > 1$. Isti rezultat slijedi i direktnom integracijom

$$E\left(\frac{1}{k}, k\right) = \int_0^{1/k} \left(\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}\right)^{1/2} \mathrm{d}t$$

To se mora rastaviti u dva integrala

$$E\left(\frac{1}{k}, k\right) = \int_0^1 \left(\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}\right)^{1/2} \mathrm{d}t - j\int_1^{1/k} \left(\frac{1 - k^2 t^2}{t^2 - 1}\right)^{1/2} \mathrm{d}t$$

Prvi integral je potpuni eliptički integral druge vrste, a drugi se integral rješava supstitucijom

$$\frac{1}{t^2} = 1 - k'^2 \sin^2\varphi$$

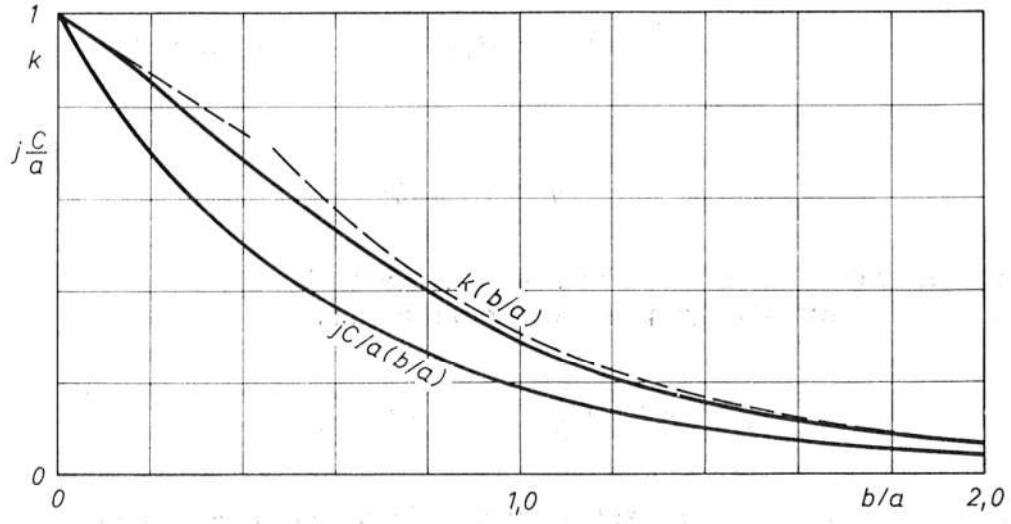
To dovodi konačno na rezultat koji je maloprije naveden. Sada se konstante dobiju jednadžbama

$$\frac{K(k') - E(k')}{E(k)} = \frac{b}{a}$$

$$C = -j\, a \frac{k}{E(k)}, \qquad 0 < k < 1$$

Funkcija preslikavanja iznosi

$$z = -j\, a \frac{E(w, k)}{E(k)}$$



Sl. D.37. Dijagrami konstanti k i $j\ C/a$ u ovisnosti o omjeru dimenzija a/b prema sl. D.36. Crtkane krivulje se odnose na konstantu k kad je a/b maleno ili veliko.

Slika D.37. predstavlja dijagram ovisnosti modula k o omjeru dimenzija b/a i integracione konstante $j\ C/a$ o istom omjeru dimenzija. Posebno u ekstremnim slučajevima dobiva se

$$k = 1 - \frac{2}{\pi} \frac{b}{a}, \qquad \frac{b}{a} < 0{,}1$$

$$j \frac{C}{a} = k = 1 - \frac{2}{\pi} \frac{b}{a}$$

$$k = 4 \exp\left[-\left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{b}{a}\right)\right], \qquad \frac{b}{a} > 1{,}7$$

$$j \frac{C}{a} = \frac{2}{\pi} k$$

Slika D.37. pokazuje da se modul k može računati iz približnih izraza. Crtkane krivulje odgovaraju približnim izrazima. Kompleksni potencijal iznosi

$$\chi = -\frac{j}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) \operatorname{arch} w + \varphi_1$$

Jakost polja iznosi na simetrali između polova

$$y = 0, \qquad w = j\,v$$

$$H = \left|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}w}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = \frac{2}{\pi} E(k) \,|\, (1 - k^2 w^2)^{-1/2} \,|\, H_0 = \frac{2}{\pi} E(k)\,(1 + k^2 v^2)^{-1/2} H_0$$

$$H_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2a}$$

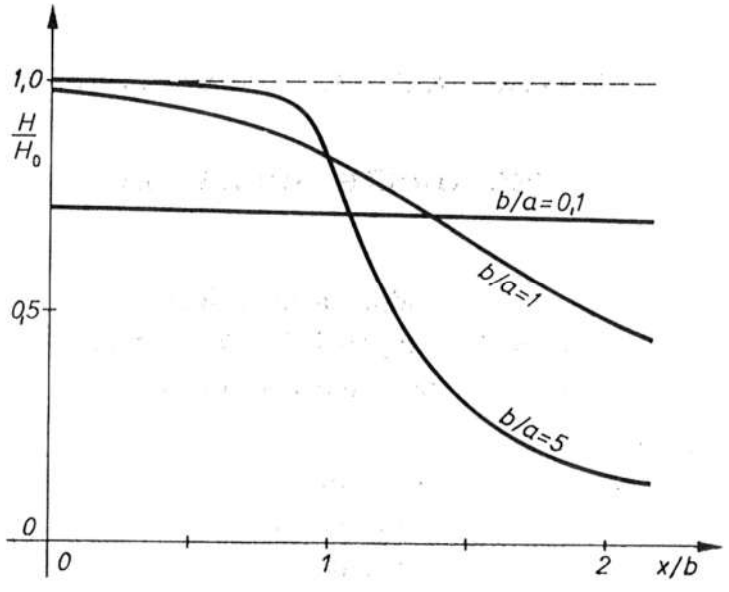
$$\frac{x}{a} = \frac{F(\delta, k') - E(\delta, k')}{E(k)} + \frac{\sin\delta}{E(k)}(1 + k^2 \operatorname{tg}^2\delta)^{1/2}$$

$$\operatorname{tg}\delta = v$$

Amplituda eliptičkog integrala iznosi

$$\arcsin w = \arcsin(jv) = j \operatorname{arsh} v$$

S tom amplitudom se dobiva izraz za x/a.



Sl. D.38. Dijagram normirane jakosti magnetskog polja H/H_0 u ovisnosti o mjestu na simetrali među magnetima, x/b. Krivulje su prikazane za različite omjere dimenzija b/a.

Slika D.38. prikazuje dijagram jakosti polja H/H_0 u ovisnosti o mjestu na osi X,

tj. u ovisnosti o

$$\frac{x}{b} = \frac{x}{a} \cdot \frac{a}{b}$$

za različite omjere b/a dimenzija polova.

Magnetski tok iz polova se računa s pomoću strujne funkcije za $1 \leqslant w = u \leqslant 1/k$. Strujna funkcija iznosi

$$\psi = -\frac{2}{\pi} a H_0 \operatorname{arch} u$$

S time je

$$\psi_4 = 0 \quad \text{za} \quad w = w_4 = 1$$

$$\psi_5 = -\frac{2}{\pi} a H_0 \operatorname{arch} \frac{1}{k}, \quad \text{za} \quad w = w_5 = \frac{1}{k}$$

Sad je tok pola

$$\Phi = 2 \mu_0 (\psi_4 - \psi_5) = \frac{4}{\pi} \mu_0 a H_0 \operatorname{arch} \frac{1}{k}$$

$$\Phi = \frac{4}{\pi} \mu_0 a H_0 \ln \frac{1 + k'}{k} = \frac{2}{\pi} \frac{a}{b} \ln \frac{1 + k'}{k} \cdot \Phi_0$$

$$\Phi_0 = 2 \mu_0 b H_0$$

D.9. CILINDRIČKI KOORDINATNI SUSTAV

D.9.1. VEKTORSKE OPERACIJE

1. **Koordinate**

$x_1 = r$ radijalna koordinata
$x_2 = \vartheta$ tangencijalna koordinata
$x_3 = z$ aksijalna koordinata

2. **Jedinični vektori**

$\mathbf{r}_0$ radijalni
$\mathbf{t}_0$ tangencijalni
$\mathbf{z}_0$ aksijalni

3. **Duljine lukova**

$$ds_1 = dr$$
$$ds_2 = r\, d\vartheta$$
$$ds_3 = dz$$

4. Lučni koeficijenti

$$h_1 = 1$$
$$h_2 = r$$
$$h_3 = 1$$

5. $$\text{grad } \varphi = \mathbf{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{t}_0 \frac{\partial \varphi}{r\,\partial \vartheta} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

6. $$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,D_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} D_\vartheta + \frac{\partial}{\partial z}(r\,D_z)\right]$$

7. $$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{r}_0 \text{ rot}_r \mathbf{A} + \mathbf{t}_0 \text{ rot}_\vartheta \mathbf{A} + \mathbf{z}_0 \text{ rot}_z \mathbf{A}$$

$$\text{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial z}(r\,A_\vartheta)\right]$$

$$\text{rot}_\vartheta \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$\text{rot}_z \mathbf{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}\right]$$

8. $$\Delta \varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

9. $$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{r}_0\,\Delta_r \mathbf{A} + \mathbf{t}_0\,\Delta_\vartheta \mathbf{A} + \mathbf{z}_0\,\Delta_z \mathbf{A}$$

$$\Delta_r \mathbf{A} = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta}$$

$$\Delta_\vartheta \mathbf{A} = \Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}$$

$$\Delta_z \mathbf{A} = \Delta A_z$$

D.9.2. CILINDRIČKE FUNKCIJE

D.9.2.1. Besselova diferencijalna jednadžba

Primjena cilindričkog koordinatnog sustava u Laplaceovoj jednadžbi dovodi na diferencijalnu jednadžbu oblika

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2}\right) R = 0$$

Supstitucija $z = k\,r$ vodi na standardni oblik

$$\frac{d^2R}{dz^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) R = 0$$

Rješenja su *cilindričke* funkcije

prve vrste $J_{\pm p}(z)$	Besselove funkcije
druge vrste $N_p(z)$	Neumannove funkcije
treće vrste $H_p^{(1)}(z), H_p^{(2)}(z)$	Hankelove funkcije

Nekad se cilindričke funkcije prve i druge vrste zovu Besselove funkcije. Funkcije $J_{+p}(z)$ i $J_{-p}(z)$ ne moraju biti nezavisne. One su nezavisne samo kad p nije cio broj. Funkcije $J_p(z)$ i $N_p(z)$ su uvijek nezavisne, a jednako su nezavisne i funkcije $H_p^{(1)}(z)$ i $H_p^{(2)}(z)$.

p red funkcije se predstavlja cijelim brojem n ili razlomkom

$z = x + j\,y$ varijabla funkcije je općenito kompleksna veličina

$R_p(z)$ označava J, N, $H^{(1)}$ ili $H^{(2)}$ ili njihovu linearnu kombinaciju koja ne sadrži p ili z.

Besselova diferencijalna jednadžba ima sada opće rješenje

$$R = C_1 J_p(z) + C_2 N_p(z)$$

$$R = C_1 H_p^{(1)}(z) + C_2 H_p^{(2)}(z)$$

C_1 i C_2 su integracione konstante

D.9.2.2. Odnosi među funkcijama

1. $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

2. $N_p(z) = \dfrac{J_p(z)\cos(p\pi) - J_{-p}(z)}{\sin(p\pi)}$, p-razlomak

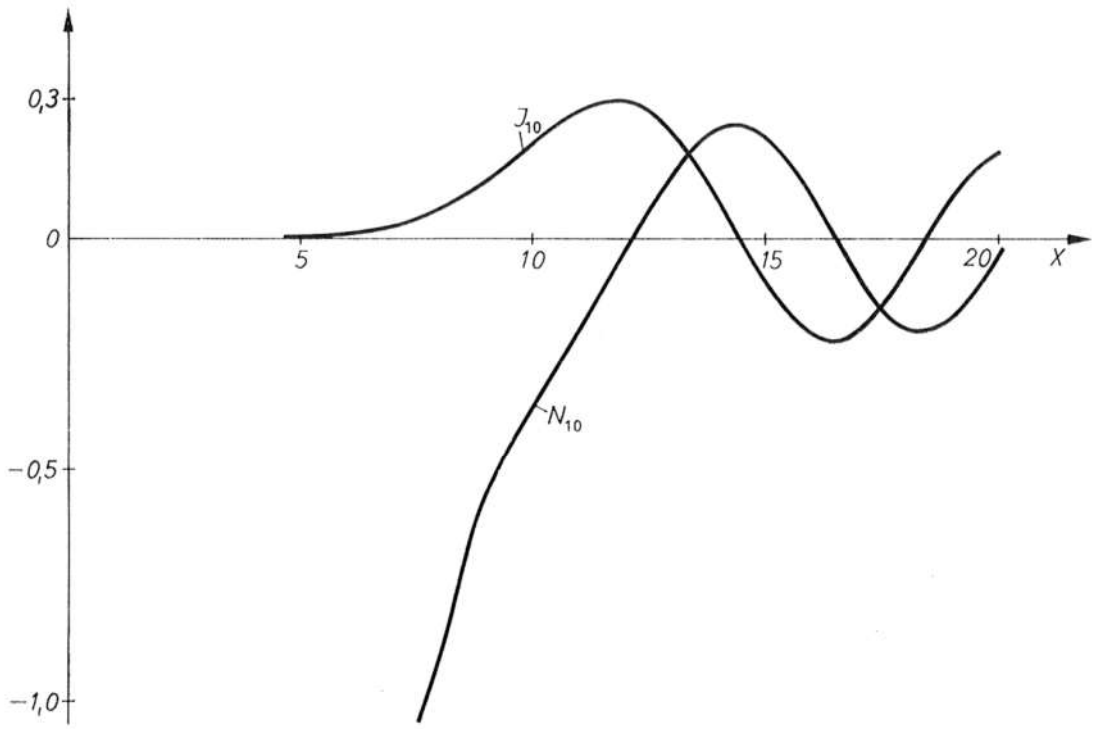
3. $H_p^{(1)}(z) = J_p(z) + j N_p(z)$

4. $H_p^{(2)}(z) = J_p(z) - j N_p(z)$

5. $N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

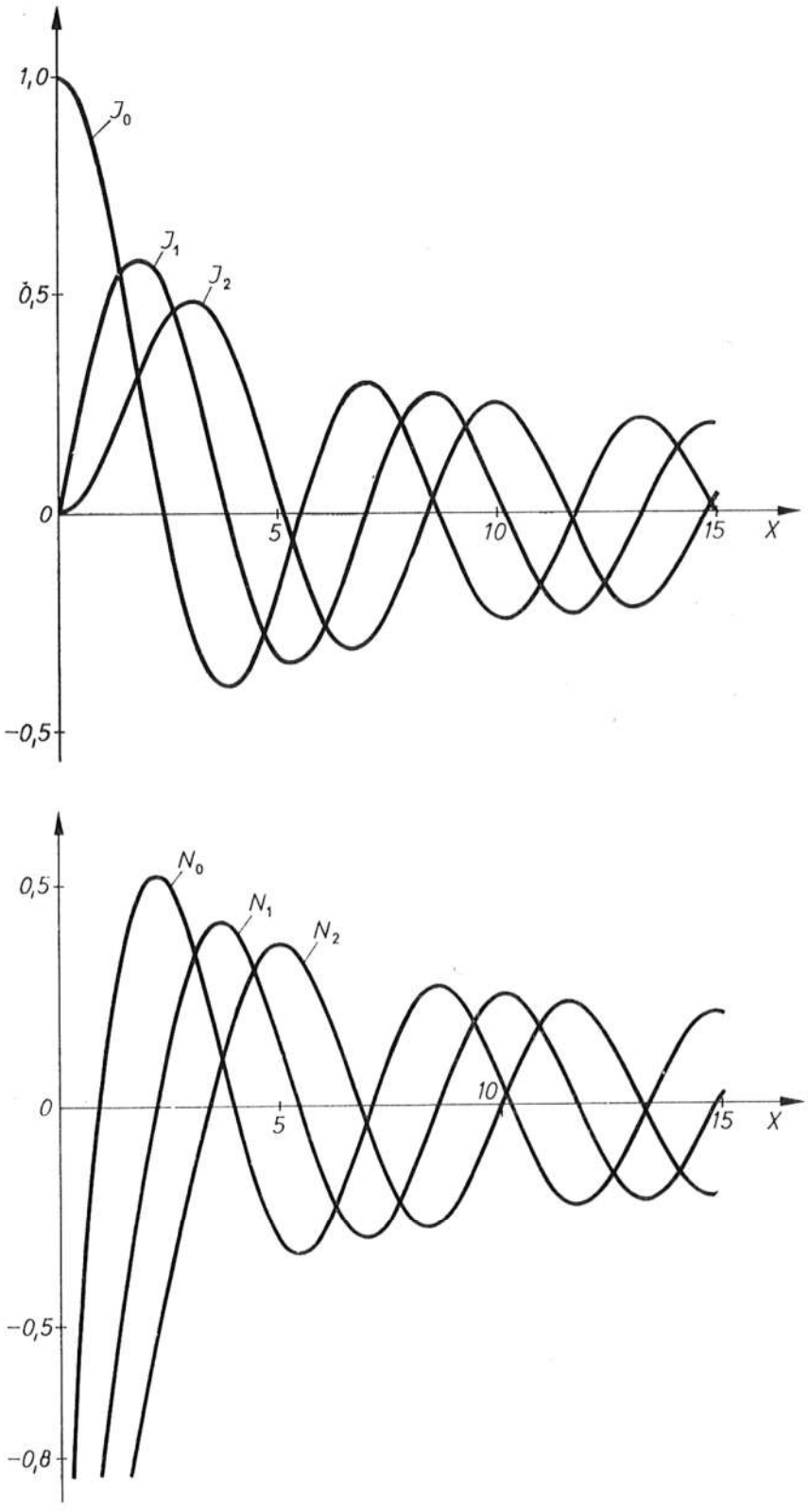
6. $H_{-p}^{(1)}(z) = e^{jp\pi} H_p^{(1)}(z)$

   $H_{-p}^{(2)}(z) = e^{-jp\pi} H_p^{(2)}(z)$



Sl. D.39. Dijagram Besselove $J_{10}(x)$ i Neumannove $N_{10}(x)$ funkcije.

Sl. 39. prikazuje dijagram $J_{10}(x)$ i $N_{10}(x)$.



Sl. D.40. Dijagram Besselovih funkcija $J_0(x)$, $J_1(x)$ i $J_2(x)$ i Neumannovih funkcija $N_0(x)$, $N_1(x)$ i $N_2(x)$.

Slika D.40. prikazuje dijagram funkcija $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, $N_0(x)$, $N_1(x)$, $N_2(x)$.

D.9.2.3. Redovi potencija

1. $$J_p(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)}$$

2. $$J_0(z) = 1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^6 + - \cdots$$

3. $$J_1(z) = \frac{z}{2}\left[1 - \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{z}{2}\right)^6 + - \cdots\right]$$

4. $$N_n(z) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{z}{2}\right) J_n(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2k} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,(n+k)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+k}\right)$$

$C = 0{,}577216\ldots$ Eulerova konstanta

Pri $k = 0$ ostaje u zagradi druge sume $(1 + 1/2 + \cdots + 1/n)$

5. $$N_0(z) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{z}{2}\right) J_0(z) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^2\left[\frac{1}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(3!)^2} - + \cdots\right]$$

6. $$N_1(z) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{z}{2}\right) J_1(z) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^3\left[\left(2 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{1!\,2!} -\right.$$

$$- \left(2 + \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 +$$

$$\left. + \left(2 + \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{2\cdot 1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - + \cdots\right]$$

D.9.2.4. Integralni prikazi

1. $$J_p(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\vartheta)\,\sin^{2p}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

2. $$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\vartheta - n\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$
$$= \frac{j^{-n}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{jz\cos\vartheta}\cos(n\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

3. $$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

4. $$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(x\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0$$

5. $$N_0(z) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \cos(z\cos\vartheta)\,[C + \ln(2z\sin^2\vartheta)]\,\mathrm{d}\vartheta$$

6. $$N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(x\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0$$

7. $$H_p^{(1)}(z) = \frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty+j\pi} e^{z\,\mathrm{sh}\,t - p\,t}\,\mathrm{d}t, \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2}$$

8. $$H_p^{(2)}(z) = -\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty-j\pi} e^{z\,\mathrm{sh}\,t - p\,t}\,\mathrm{d}t, \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2}$$

D.9.2.5. Međusobni odnosi

1. $\frac{2p}{z} R_p(z) = R_{p-1}(z) + R_{p+1}(z)$

2. $2R'_p(z) = R_{p-1}(z) - R_{p+1}(z)$

3. $R'_p(z) = R_{p-1}(z) - \frac{p}{z} R_p(z)$

4. $R'_p(z) = -R_{p+1}(z) + \frac{p}{z} R_p(z)$

5. $\frac{\mathrm{d}}{c\,\mathrm{d}z} R_p(c\,z) = R'_p(c\,z)$, c nezavisna konstanta

6. $J'_0(z) = -J_1(z)$, $N'_0(z) = -N_1(z)$

7. $N_{n-1}(z) J_n(z) - N_n(z) J_{n-1}(z) = \frac{2}{\pi z}$

8. $H_n^{(2)}(z) H_{n+1}^{(1)}(z) - H_n^{(1)}(z) H_{n+1}^{(2)}(z) = \frac{4}{j\pi z}$

D.9.2.6. Integrali cilindričkih funkcija

1. $\int_{z_0}^{z_1} z^p J_{p-1}(z)\,\mathrm{d}z = z^p J_p(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$

2. $\int_{z_0}^{z_1} z^{-p} J_{p+1}(z)\,\mathrm{d}z = -z^{-p} J_p(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$

3. $\int_0^z J_p(z)\,\mathrm{d}z = 2J_{p+1}(z) + 2J_{p+3}(z) + \cdots$

4. $\int_0^z z^m J_n(z)\,\mathrm{d}z = z^m J_{n+1}(z) - (m-n-1)\int_0^z J_{n+1}(z)\,\mathrm{d}z$, $m > n$

5. $\int_0^\infty e^{-jkx} J_0(k r)\,\mathrm{d}k = (r^2 - x^2)^{-1/2}$, r i x realni

6. $\int_0^\infty J_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$

7. $\int_0^\infty \frac{1}{x} J_n(k x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$

8. $\int_0^\infty e^{-at} J_n(b t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{n b^n}[(a^2 + b^2)^{1/2} - a]^n$

9. $\int_0^\infty e^{-at} J_n(b t)\, t^n\,\mathrm{d}t = \frac{(2b)^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(a^2 + b^2)^{n+1/2}}$

10. $\int_0^\infty e^{-at} N_0(b t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{\pi}(a^2 + b^2)^{-1/2} \ln\frac{a + (a^2 + b^2)^{1/2}}{a}$

a, b realni i pozitivni

11. $\int_0^z J_p(k z) J_p(l z)\,\mathrm{d}z = \frac{z}{k^2 - l^2}[k J_p(l z) J_{p+1}(k z) - l J_p(k z) J_{p+1}(l z)] =$

$$= \frac{z}{k^2 - l^2}[l J_{p-1}(l z) J_p(k z) - k J_{p-1}(k z) J_p(l z)]$$

$$\int_0^z z J_p^2(k z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} z^2 \left[J_p'^2(k z) + \left(1 - \frac{p^2}{k^2 z^2}\right) J_p^2(k z)\right]$$

To su Lommelovi integrali. Vrijede i za Neumannovu funkciju.

12. $\int_0^c x J_n^2(k_i x)\,\mathrm{d}x = \frac{c^2}{2} J_{n+1}^2(k_i c)$, za $J_n(k_i c) = 0$

13. $$\int_0^c x J_n^2 (k_i x)\, dx = \frac{k_i c^2 + h^2 - n^2}{2 k_i^2} J_n^2 (k_i c)$$

za $k_i c J_n' (k_i c) + h J_n (k_i c) = 0$

c, h, nezavisne konstante

14. $$\int_b^a x J_n^2 (k x)\, dx = \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2 (k a) - \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2 (k b),$$

$$J_n (k a) = J_n (k b) = 0$$

$$\int_b^a x J_n^2 (k x)\, dx = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{n^2}{k^2}\right) J_n^2 (k a) - \frac{1}{2}\left(b^2 - \frac{n^2}{k^2}\right) J_n^2 (k b)$$

$$J_n' (k a) = J_n' (k b) = 0$$

Oba integrala vrijede i za Neumannovu funkciju.

D.9.2.7. Redovi cilindričkih funkcija

Zadana je funkcija $f(x)$ koja zadovoljava Dirichletove uvjete za $0 \leqslant x \leqslant 1$. Tada se ona prikazuje redom

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_n (x_k x)$$

x_k su korijeni jednadžbe $J_n (x) = 0$

$$a_k = \frac{2}{J_n'^2 (x_k)} \int_0^1 x f(x) J_n (x_k x)\, dx$$

D.9.2.8. Veliki argument

1. $$J_p (z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi$$

2. $$N_p (z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi$$

D.9.3. MODIFICIRANE BESSELOVE FUNKCIJE

Rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2R}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dR}{dz} - \left(1 + \frac{p^2}{z^2}\right) R = 0$$

glasi

$$R = R_1 I_p(z) + R_2 K_p(z)$$

$I_p(z)$ modificirana Besselova funkcija p-tog reda prve vrste

$K_p(z)$ modificirana Besselova funkcija p-tog reda druge vrste

1. $K_p(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-p}(z) - I_p(z)}{\sin(p\pi)}$, p nije cijeli broj

2. $I_p(z) = \exp\left(-j\frac{1}{2}p\pi\right) J_p(z e^{j\pi/2})$, $-\pi < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$

3. $I_p(z) = \exp\left(j\frac{3p\pi}{2}\right) J_p(z e^{-j3\pi/2})$, $\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \pi$

4. $K_p(z) = j\frac{\pi}{2}\exp\left(j\frac{p\pi}{2}\right) H_p^{(1)}(z e^{j\pi/2})$, $-\pi < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$

5. $K_p(z) = -j\frac{\pi}{2}\exp\left(-j\frac{p\pi}{2}\right) H_p^{(2)}(z e^{-j\pi/2})$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \pi$

6. $N_p(z e^{j\pi/2}) = \exp\left(j\frac{p+1}{2}\pi\right) I_p(z) - \frac{2}{\pi}\exp\left(-j\frac{p\pi}{2}\right) K_p(z)$

$-\pi < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$

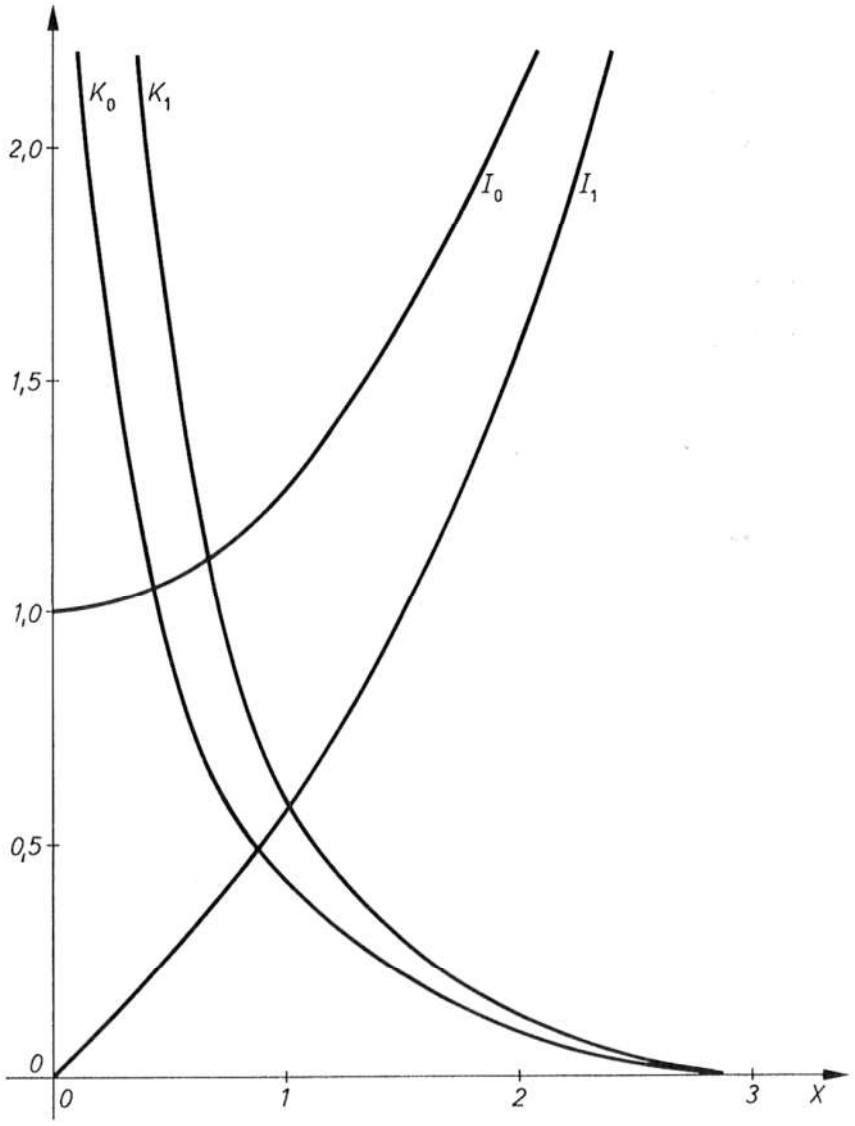
7. $I_{-n}(z) = I_n(z)$, $K_{-p}(z) = K_p(z)$

8. $I_0(z) = J_0(jz)$, $-\pi < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$

$= J_0(-jz)$, $\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \pi$

9. $K_0(z) = j\frac{\pi}{2}H_0^{(1)}(jz)$, $\quad -\pi < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$

$= -j\frac{\pi}{2}H_0^{(2)}(-jz)$, $\quad -\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \pi$



Sl. D.41. Dijagram modificiranih Besselovih i Neumannovih funkcija $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$ i $K_1(x)$.

Sl. D.41. prikazuje dijagram $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$ i $K_1(x)$.

D.9.3.1. Redovi potencija

1. $$I_p(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(p+k+1)}$$

2. $$K_n(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + (-1)^{n+1} \ln\frac{z}{2} I_n(z) +$$

$$+ (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(n+k+1)] \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,(n+k)!}$$

$$\psi(1) = -C = -0{,}577\,216\ldots$$

$$\psi(k+1) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}, \quad k \geqslant 1$$

3. $$I_0(z) = 1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \cdots$$

4. $$K_0(z) = -\left(C + \ln\frac{z}{2}\right) I_0(z) + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \cdots$$

5. $$I_p(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \qquad \text{veliko } |z|, \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2}$$

6. $$K_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}, \qquad |\arg z| < \frac{3\pi}{2}$$

D.9.4. KELVINOVE FUNKCIJE

Cilindričke funkcije iz kompleksnog argumenta se izražavaju Kelvinovim funkcijama

ber, bei, ker, kei

1. $$\mathrm{ber}_n x + j\,\mathrm{bei}_n x = J_n(x\,e^{j3\pi/4}) = e^{jn\pi} J_n(x\,e^{-j\pi/4}) =$$
$$= e^{jn\pi/2} I_n(x\,e^{j\pi/4}) = e^{j3n\pi/2} I_n(x\,e^{-j3\pi/4})$$

2. $$\mathrm{ker}_n x + j\,\mathrm{kei}_n x = e^{-jn\pi/2} K_n(x\,e^{j\pi/4}) =$$
$$= j\frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(x\,e^{j3\pi/4}) = -j\frac{\pi}{2} e^{-jn\pi} H_n^{(2)}(x\,e^{-j\pi/4})$$

Kad je $n = 0$, indeksi se ne označavaju.

D.9.4.1. Redovi potencija

1. $$\mathrm{ber}_n x = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\cos\left[\left(\frac{3n}{4} + \frac{k}{2}\right)\pi\right]}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

2. $$\mathrm{bei}_n x = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\sin\left[\left(\frac{3n}{4} + \frac{k}{2}\right)\pi\right]}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

3. $$\mathrm{ber}\, x = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - + \cdots$$

4. $$\mathrm{bei}\, x = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{(5!)^2} - + \cdots$$

5. $$\ker x = -\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)\operatorname{ber} x+\frac{\pi}{4}\operatorname{bei} x-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2}+$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2}-+\cdots$$

6. $$\operatorname{kei} x = -\left(C+\ln\frac{x}{2}\right)\operatorname{bei} x-\frac{\pi}{4}\operatorname{ber} x+\left(\frac{x}{2}\right)^2-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2}+-\cdots$$

D.9.4.2. Odnosi među funkcijama

1. $\sqrt{2}\operatorname{ber}' x = \operatorname{ber}_1 x+\operatorname{bei}_1 x$

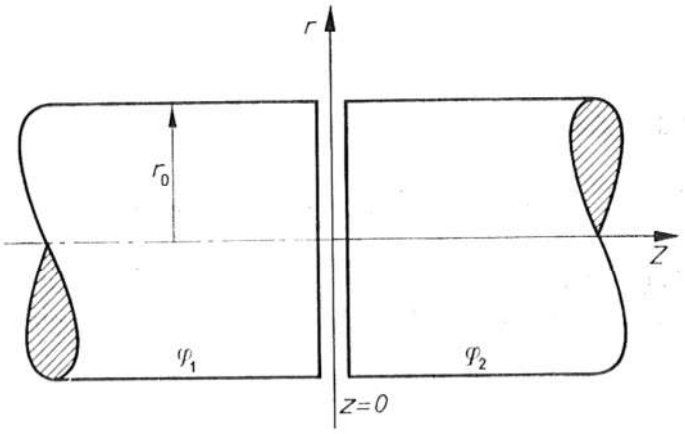
2. $\sqrt{2}\operatorname{bei}' x = -\operatorname{ber}_1 x+\operatorname{bei}_1 x$

3. $\sqrt{2}\ker' x = \ker_1 x+\operatorname{kei}_1 x$

4. $\sqrt{2}\operatorname{kei}' x = -\ker_1 x+\operatorname{kei}_1 x$

D.9.5. DVA KOAKSIJALNA CILINDRA

Zadana su dva koaksijalna cilindra, beskonačno duga, jednakog polumjera r_0. Njihove se osi podudaraju s osi Z, prema sl. D.42. Oni se sastaju na ravnini $z = 0$,



Sl. D.42. Dva koaksijalna, kružna cilindra na malom međusobnom razmaku, istoga promjera.

a međusobno su razmaknuti na zanemarivu udaljenost. Jedan je na potencijalu φ_1, a drugi na potencijalu φ_2. Može se očekivati da je polje simetrično u odnosu na ravninu $z = 0$, te je dovoljno da se ono određuje samo za $z > 0$.

Laplaceova jednadžba glasi za $\varphi = \varphi(r, z)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Rješenje glasi

$$\varphi = R(r)\, Z(z)$$

Nakon uvrštenja u diferencijalnu jednadžbu dobiva se novi oblik

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

To je moguće tako, da je

$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = m^2 \quad \text{konstantni broj}$$

Diona funkcija $Z(z)$ glasi iz te jednadžbe

$$Z = Z_1 e^{mz} + Z_2 e^{-mz}$$

Konstanta Z_1 mora biti ništica, $Z_1 = 0$, jer je $Z \to 0$ za $z \to \infty$.

Besselova jednadžba se odnosi na drugu dionu funkciju $R(r)$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + m^2 R = 0$$

Rješenje jednadžbe glasi

$$R = R_1 J_0(mr) + R_2 N_0(mr)$$

Budući da je $N_0(mr)$ beskonačno za $r \to 0$, mora biti konstanta $R_2 = 0$. Prema tome je karakteristična funkcija rješenja Laplaceove jednadžbe

$$A e^{-mz} J_0(mr)$$

Granični uvjeti traže da se rješenje prilagodi njima. Na stijenci cilindra za $r = r_0$ potencijal je svuda jednak i iznosi φ_2. Zbog toga je potrebno da se doda partikularno rješenje $\varphi = \varphi_2$. Odatle slijedi da se potencijal mora izraziti beskonačnim redom karakterističnih funkcija, jer je granični uvjet $\varphi = \varphi_2$ za $r = r_0$ zadovoljen u svim nultočkama funkcije $J_0(m r_0)$. Prema tome je rješenje

$$\varphi = \varphi_2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-m_k z} J_0(m_k r)$$

Konstante m_k se dobiju iz iznosa nultočaka funkcije $J_0(m_k r_0) = J_0(x_k) = 0$ U rješenje treba uvrstiti $m_k = x_k/r_0$, te je konačno potencijal za $z \geqslant 0$

$$\varphi = \varphi_2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-x_k z/r_0} J_0(x_k r/r_0)$$

Konstante A_k se dobiju iz graničnog uvjeta za $z = 0$, gdje je potencijal $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$. Prema tome je za $z = 0$ i $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$

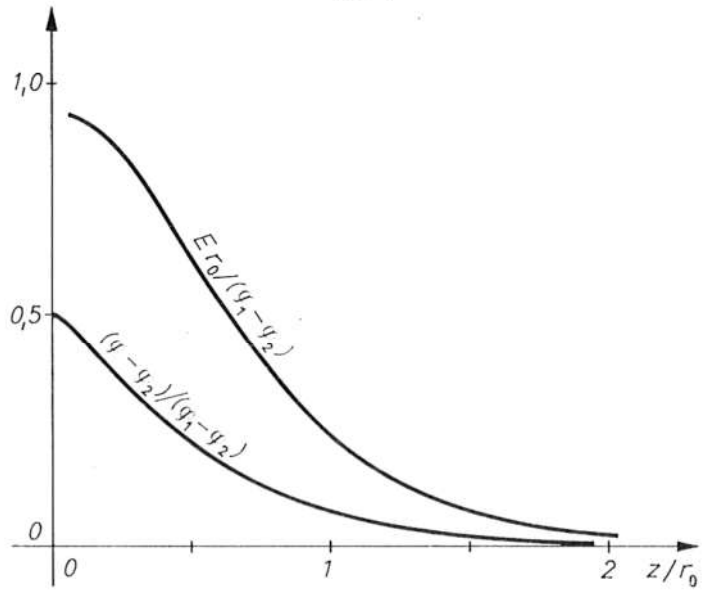
$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(x_k r/r_0) = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Ta je jednadžba red Besselovih funkcija uz $f(x) = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$ i $x = r/r_0$. Faktor A_k iznose

$$A_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{J_1^2(x_k)} \int_0^1 x J_0(x_k x)\, dx = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{x_k J_1(x_k)}$$

Nakon uvrštenja iznosi potencijal u unutarnjosti zadanih cilindara, prema sl. D.42.

$$\varphi = \varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0 (x_k\, r/r_0)}{x_k\, J_1 (x_k)}\, e^{-x_k z/r_0}$$



Sl. D.43. Dijagram normiranih iznosa jakosti električnog polja i potencijala na osi koaksijalnih cilindara prema sl. D.42. u ovisnosti o položaju na osi. Krivulja jakosti polja ne počinje od ishodišta koordinatnog sustava, jer je računato s nultim razmakom među cilindrima. Jakost polja bi bila beskonačna.

Primjer polja beskonačno dugih cilindara služi da se mogu analizirati električne leće za elektronski snop. Interesantno je polje u osi cilindara, dakle za $r = 0$. Potencijal i jakost polja u osi cilindara iznose

$$\varphi (0, z) = \varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x_k z/r_0}}{x_k\, J_1 (x_k)}$$

$$E_z (0, z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x_k z/r_0}}{J_1 (x_k)}$$

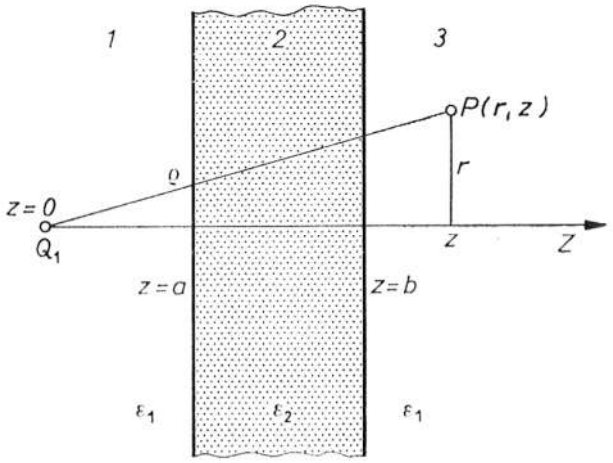
Na sl. D.43. prikazan je grafički odnos

$$\frac{[\varphi (0, z) - \varphi_2]}{(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{i} \quad \frac{E_z (0, z)\, r_0}{(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

u ovisnosti o (z/r_0).

D.9.6. NABOJ ISPRED DIELEKTRIČNE PLOČE

Zadan je točkasti naboj Q_1 ispred dielektrične ploče na udaljenosti a prema sl. D.44. Ploča ima debljinu $(b - a)$ i dielektričnost ε_2. Ona dijeli cijeli prostor na tri diona prostora 1, 2 i 3. Dioni prostori 1 i 3 ispunjeni su istim dielektrikom dielektričnosti ε_1. Točkasti naboj Q_1 smješten je na osi Z, koja probada normalno dielek-



Sl. D.44. Točkasti naboj ispred dielektrične ploče, Upotrijebljen je cilindrički koordinatni sustav s ishodištem u točkastom naboju.

tričnu ploču. Plohe ploče su $z = a$ i $z = b$, a to su ujedno granične plohe između dva sredstva. Naboj Q_1 izaziva svojim djelovanjem polarizaciju dielektrika. Ona se pokazuje na granici između dva sredstva kao vezani naboj plošne gustoće, jednake upravo iznosu razlike polarizacije u oba sredstva. Plošni je naboj razmješten na granici aksijalno simetrično. Potencijal takvog naboja može se prikazati odnosom

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty f(k)\, e^{-k|z|}\, J_0(k\, r)\, \mathrm{d}k$$

Taj odnos slijedi iz primjene Besselovih funkcija u Fourierovoj analizi, a može se upotrijebiti za aksijalno simetrično raspoređene naboje. Kad je $\varphi(r, z) = 1/\sqrt{r^2 + z^2}$, tada je $f(k) = 1$, a dobiva se odnos

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{\varrho} = \int_0^\infty e^{-k|z|}\, J_0(k\, r)\, \mathrm{d}k$$

Taj se odnos može iskoristiti da bi se prikazao potencijal točkastog naboja. Oba odnosa se iskorištavaju u rješenju polja točkastog naboja ispred dielektrične ploče. U prostoru 1 mjerodavni su naboj Q_1 i plošni naboj na granici 1 — 2. U prostoru

2 su mjerodavni plošni naboji na granicama 1 — 2 i 2 — 3, a u prostoru 3 je mjerodavan samo plošni naboj na granici 2 — 3. Prema tome su potencijali

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1}\int_0^\infty e^{-k|z|}\,J_0(kr)\,dk + \int_0^\infty f_1(k)\,e^{kz}\,J_0(kr)\,dk, \qquad -\infty < z \leqslant a$$

$$\varphi_2 = \int_0^\infty f_2'(k)\,e^{-kz}\,J_0(kr)\,dk + \int_0^\infty f_2''(k)\,e^{kz}\,J_0(kr)\,dk, \qquad a \leqslant z \leqslant b$$

$$\varphi_3 = \int_0^\infty f_3(k)\,e^{-kz}\,J_0(kr)\,dk, \qquad b \leqslant z < \infty$$

Granični uvjeti moraju biti zadovoljeni između dva sredstva, a to su

$$E_{r1} = E_{r2}, \quad \varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2}, \quad z = a$$

$$E_{r2} = E_{r3}, \quad \varepsilon_2 E_{z2} = \varepsilon_1 E_{z3}, \quad z = b$$

Tu je $E_r = -\partial\varphi/\partial r$ i $E_z = -\partial\varphi/\partial z$. Sad se dobiju nepoznate veličine $f_1(k)$, $f_2'(k)$, $f_2''(k)$ i $f_3(k)$. Debljina ploče iznosi $b - a = d$. Nepoznate veličine iznose

$$f_1(k) = c_1\,\frac{1 - e^{-2kd}}{1 - K^2 e^{-2kd}}\,e^{-2ka}$$

$$f_2'(k) = c_2'\,\frac{1}{1 - K^2 e^{-2kd}}$$

$$f_2''(k) = c_2''\,\frac{e^{-2kd}}{1 - K^2 e^{-2kd}}\,e^{-2ka}$$

$$f_3(k) = c_3\,\frac{1}{1 - K^2 e^{-2kd}}$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\,\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1}, \qquad c_2' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\,\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1}$$

$$c_2'' = -\frac{2\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}\,\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1}, \qquad c_3 = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}\,\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1}$$

$$K = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

S tim vrijednostima se odrede potencijali φ_1, φ_2 i φ_3, a odatle se dobiju i jakosti polja iz gradijenta potencijala. Potencijal φ_3 u dionom prostoru 3 izražen je najjednostavnije, te će on poslužiti kao primjer kako će konačno izgledati traženi potencijal.

Treba uzeti u obzir da je veličina $K^2 e^{-2kd} < 1$. Ona se pojavljuje u nazivniku svih nađenih faktora, pa tako i faktora $f_3(k)$. U tome slučaju faktor $1/(1 - K^2 e^{-2kd})$ predstavlja sumu beskonačnog geometrijskog reda, tj.

$$\frac{1}{1 - K^2 e^{-2kd}} = 1 + K^2 e^{-2kd} + K^4 e^{-4kd} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (K^2 e^{-2kd})^n$$

Potencijal φ_3 sada iznosi

$$\varphi_3 = c_3 \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} K^{2n} e^{-k(z+2nd)} J_0(k r)\, dk$$

$$\varphi_3 = c_3 \sum_{n=0}^{\infty} K^{2n} \int_0^{\infty} e^{-k(z+2nd)} J_0(k r)\, dk$$

Fourierov integral se lako eliminira istim putem kao što je i uveden. Zato je traženi potencijal

$$\varphi_3 = c_3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{K^{2n}}{\sqrt{r^2 + (z + 2nd)^2}} \right]$$

Sad je vidljivo da je taj potencijal formiran od beskonačno mnogo točkastih naboja smještenih na osi Z, ali promjenljiva iznosa. Neki n-ti naboj nalazi se na osi Z udaljen za $2nd$ od Q_1 na lijevu stranu od njega, tj. na negativnu stranu osi Z. Njegov je iznos jednak

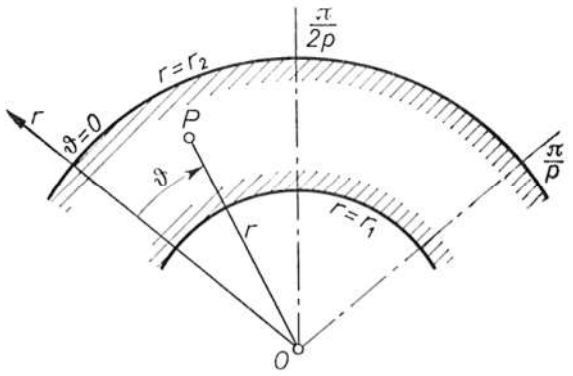
$$\frac{4 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} Q_1 K^{2n}$$

Prema tome se točkasti naboj pomiče u negativnom smislu po osi Z prema beskonačnosti kako n raste u beskonačnost. Suma svih tih naboja od $n = 0$ do $n = \infty$ iznosi Q_1, jer $\sum K^{2n}$ predstavlja beskonačni geometrijski red.

Istim se postupkom dobiju i ostali potencijali. Ove se jednadžbe mogu iskoristiti i u analizi strujnog polja točkastog izvora struje koji se nalazi u blizini jednog sloja drugačije vodljivosti. Potrebno je da se umjesto Q_1 stavi jakost struje i_1, a umjesto dielektričnosti uvede vodljivost $\varkappa_1$ i $\varkappa_2$. Istim se postupkom rješava polje s više slojeva. Drugi put rješavanja bio bi metodom uzajamnog odslikavanja na graničnim ravninama $z = a$ i $z = b$. Takav bi postupak bio nepregledan i dugotrajan.

D.9.7. JARAM ELEKTRIČNOG STROJA

Magnetsko polje u jarmu električnih strojeva problem je koji se još uvijek rješava. Zadatak je rješiv, ako je permeabilnost materijala jarma konstantna. Upotrijebljeni materijal je dinamo-lim koji ima nelinearna svojstva, te se zadaća ne može riješiti analitički. Prvi uvid u postavljeni problem pruža rješenje koje se dobiva uz pretpostavku konstantne permeabilnosti. Na sl. D.45. skiciran je vanjski jaram



Sl. D.45. Isječak jarma magnetskog kruga električnog stroja.

električnog stroja na duljini jednog polnog koraka. Uzbuda u električnom stroju je periodična s prostornim periodom od dva polna koraka. Perioda uzbude definira broj magnetskih polova. Kad se duljina oboda podijeli s polnim korakom, dobiva se broj polova. Na sl. D.45. skiciran je jaram koji pripada četvoropolnom stroju. Nutarnji rub jarma ima polumjer r_1, a vanjski rub r_2.

Magnetsko polje jarma pripada cilindričkom sustavu. Ono je ovisno o koordinatama r i ϑ, a neovisno je o koordinati z. Prema tome Laplaceova jednadžba poprima oblik

$$\Delta\varphi = r^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} = 0$$

Ona se rješava separacijom varijabla, tj. rješenje je $\varphi = R\,\Theta$, gdje su $R = R(r)$, a $\Theta = \Theta(\vartheta)$. Supstitucija dovodi na oblik koji omogućuje razbijanje na dvije diferencijalne jednadžbe vezane samo konstantom. Te su jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{k^2}{r^2}R = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\vartheta^2} + k^2\,\Theta = 0$$

Prva jednadžba je **Eulerov tip** diferencijalne jednadžbe. Njezino rješenje glasi uz $r/r_2 = x$

$$R = R_1 x^k + R_2 x^{-k}$$

Druga jednadžba vodi na trigonometrijske funkcije, te je njezino rješenje

$$\Theta = \Theta_1 \cos(k\vartheta) + \Theta_2 \sin(k\vartheta)$$

Granični uvjeti za $\vartheta = 0$, $H_r = 0$ i za $r = r_2$, odnosno $x = 1$, $H_r = 0$, vode na karakteristično rješenje

$$F(x^k + x^{-k}) \sin(k\vartheta)$$

Preostaje da se odrede konstante k i F iz drugih graničnih uvjeta. Kao što je za kut $\vartheta = 0$, $H_r = 0$, isto tako je i za kut $\vartheta = \pi/p$, $H_r = 0$. Veličina $2p$ je broj magnetskih polova u uzbudi električnog stroja. Slika polja je ista u zoni svakog magnetskog pola, samo se smjer polja mijenja naizmjenično kako se izmjenjuju polovi. Zato je za kut $\vartheta = \pi/(2p)$, $H_\vartheta = 0$. Da bi to bilo zadovoljeno, mora biti

$$\sin(k\vartheta) = 0 \quad \text{za} \quad \vartheta = \frac{\pi}{p}$$

$$\cos(k\vartheta) = 0 \quad \text{za} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2p}$$

To je moguće za $k = mp$, $m = 1, 3, 5, \ldots$ gdje je p broj pari polova, a m znači samo neparne cijele brojeve. Karakteristično rješenje sada daje konačno rješenje za potencijal polja

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} F_m (x^{mp} + x^{-mp}) \sin(mp\vartheta)$$

$$m = 1, 3, 5, \ldots$$

$$x = \frac{r}{r_2}$$

Konstante F_m slijede iz uvjeta na granici $r = r_1$. Obično se zadaje jakost polja, odnosno njezin raspored. Neka je

$$H_r = H_1 \sin(p\vartheta) \quad \text{za} \quad r = r_1$$

tj.

$$x = \frac{r_1}{r_2} = x_1$$

Budući da je

$$H_r = -\frac{\partial \varphi}{r_2\, \partial x} = -\frac{1}{r_2} \sum m\, p\, F_m\, (x^{mp-1} - x^{-mp-1}) \sin (m\, p\, \vartheta)$$

mora biti $m = 1$, te je

$$-\frac{p\, F_1}{r_2} (x_1^{p-1} - x_1^{-p-1}) = H_1$$

Iz toga je nepoznata konstanta

$$F_1 = -\frac{r_1\, H_1}{p\, (x_1^p - x_1^{-p})}$$

Potencijal polja iznosi za ovaj primjer

$$\varphi = -\frac{r_1\, H_1}{p}\, \frac{x^p + x^{-p}}{x_1^p - x_1^{-p}} \sin (p\, \vartheta)$$

Radijalna komponenta jakosti polja ne mora biti sinusno raspoređena na granici $r = r_1$. Ona može sadržavati harmonike. To mogu biti samo neparni harmonici zbog simetrije polova. Jednadžba potencijala vrijedi samo za $x_1 \leqslant x \leqslant 1$.

Ravnine $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \pi/p$ su ekvipotencijalne ravnine nultoga potencijala. Potencijal bilo koje točke u promatranom prostoru je ujedno i razlika potencijala prema ravninama $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \pi/p$. Točka $r = r_1$, odnosno $x = x_1$ i $\vartheta = \pi/(2\, p)$ ima potencijal

$$\varphi = \varphi_1 = -\frac{r_1\, H_1}{p}\, \frac{x_1^p + x_1^{-p}}{x_1^p - x_1^{-p}}$$

To je ujedno tjemeni iznos potencijala na cilindru $r = r_1$, a on se mijenja po relaciji $\varphi = \varphi_1 \sin (p\, \vartheta)$. Potencijal se mijenja po istom zakonu $\varphi = \varphi_m \sin (p\, \vartheta)$ na svim koaksijalnim cilindrima, a pojedini φ_m iznose

$$\varphi_m = \varphi_1 \frac{x^p + x^{-p}}{x_1^p + x_1^{-p}}$$

Tjemeni iznos jakosti polja H_1, odnosno indukcije na cilindru $r = r_1$ ne zadaje se obično, već iznos magnetskog toka po polu. Polni korak na cilindru $r = r_1$ ima veličinu luka na tome mjestu za kut $\vartheta = \pi/p$. On je, dakle, $\tau_1 = r_1\, \pi/p$. Karakterističan je odnos dimenzija promatranog prostora.

$$b = \frac{r_2 - r_1}{\tau_1} = \frac{p}{\pi} \left(\frac{1}{x_1} - 1\right)$$

Ako se uvede srednja jakost polja H_{sr} u presjeku $\vartheta = 0$, tjemeni iznos potencijala φ_1 može se izraziti i jednadžbom

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \tau_1 H_{sr} c$$

$$c = 2 b \frac{x_1^{-p} + x_1^p}{x_1^{-p} - x_1^p}$$

Potencijal na površini $r = r_2$ ima najveći iznos za $x = 1$, $\varphi_m = \varphi_2 = 2 \varphi_1/(x_1^p + x_1^{-p})$. Konstante c i φ_2/φ_1 su unesene u slijedeću tablicu za dvije vrijednosti $b \pi = 0{,}5$ i $b \pi = 0{,}7$ i za nekoliko brojeva pari magnetskih polova.

	p	1	2	3	5	10	∞
c	$b \pi = 0{,}5$	0,828	0,760	0,737	0,718	0,703	0,690
	$b \pi = 0{,}7$	0,917	0,830	0,800	0,775	0,756	0,739
φ_2/φ_1	$b \pi = 0{,}5$	0,923	0,908	0,900	0,896	0,892	0,887
	$b \pi = 0{,}7$	0,874	0,843	0,831	0,818	0,808	0,797

D.9.8. KOMPONENTE POLJA OKRUGLOG VALOVODA

Polje okruglog valovoda je prikazano u poglavlju 6.3.2., a komponente polja su zadane jednadžbama (6.22). One iznose za TE-val

$$H_z = H_0 J_m \left(\chi_{mn} \frac{r}{r_0}\right) \cos(m \vartheta) e^{j(\omega t - \beta_z z)}$$

$$H_r = j \frac{\beta_z}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial r}, \qquad H_\vartheta = -j \frac{\beta_z}{k^2} \frac{\partial H_z}{r \partial \vartheta}$$

$$E_\vartheta = -Z_v H_r, \qquad E_r = Z_v H_\vartheta$$

Derivacija po r se svodi na derivaciju Besselove funkcije J_m po r, tj.

$$\frac{\partial J_m \left(\chi_{mn} \frac{r}{r_0}\right)}{\partial r} = \frac{\chi_{mn}}{r_0} J_m'$$

Budući da je

$$\frac{\chi_{mn}}{r_0} = k, \qquad \frac{\beta_z}{k} = \frac{\lambda_k}{\lambda_z}$$

to su komponente polja

$$H_z = H_{z0} J_m\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right) \cos(m\,\vartheta)$$

$$H_r = H_{z0}\frac{\lambda_k}{\lambda_z} J'_{mn}\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right) \cos(m\,\vartheta)\, e^{j\pi/2}$$

$$H_\vartheta = H_{z0}\frac{\lambda_k}{\lambda_z}\frac{m\,r_0}{\chi_{mn}\,r} J_m\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right) \sin(m\,\vartheta)\, e^{j\pi/2}$$

Nešto se jednostavnije prikazuju komponente kad se uzmu u obzir međusobni odnosi među Besselovim funkcijama

$$J'_m\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right) = \frac{1}{2} J_{m-1}\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right) - \frac{1}{2} J_{m+1}\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right)$$

$$\frac{m\,r_0}{\chi_{mn}\,r} J_m\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right) = \frac{1}{2} J_{m-1}\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right) + \frac{1}{2} J_{m+1}\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right)$$

D.9.9. SNAGA PRENESENA OKRUGLIM VALOVODOM

Prenesena snaga valovodom je prikazana u poglavlju 6.4.1. Ona iznosi prema izrazu (6.24) za TE-val

$$P = \frac{1}{2}\frac{\lambda_k^2}{\lambda\,\lambda_z} Z_0 \int H_{z\max}^2 \,\mathrm{d}S$$

Tjemeni iznos uzdužne komponente magnetskog polja iznosi

$$H_{z\max} = H_0 J_m\left(\chi_{mn}\frac{r}{r_0}\right) \cos(m\,\vartheta)$$

Diferencijal površine iznosi

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$$

Osim toga treba uvesti novu varijablu

$$\frac{r}{r_0} = x$$

i referentnu prenesenu snagu

$$P_0 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_k^2}{\lambda \lambda_z} Z_0 H_0^2 \pi r_0^2$$

Sad je prenesena snaga

$$P = \frac{1}{\pi} P_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} J_m^2 (\chi_{mn} x) \cos^2 (m \vartheta) \, x \, dx \, d\vartheta$$

Nakon integracije po kutu ϑ iznosi snaga

$$P = P_0 \int_0^1 J_m^2 (\chi_{mn} x) \, x \, dx$$

Budući da je $J_m' (\chi_{mn}) = 0$, to je integral prema Lommelu

$$P = P_0 \frac{\chi_{mn} - m^2}{2 \chi_{mn}^2} J_m^2 (\chi_{mn})$$

D.10. SFERNI KOORDINATNI SUSTAV

D.10.1. VEKTORSKE OPERACIJE

1. **Koordinate**

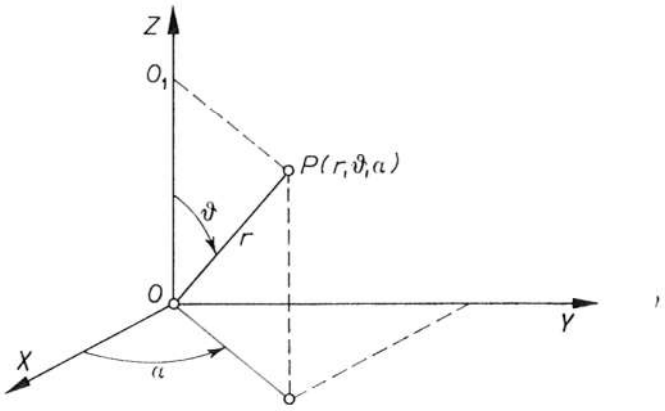
$x_1 = r$ radijalna koordinata
$x_2 = \vartheta$ tangencijalna koordinata
$x_3 = \alpha$ azimutalna koordinata

2. **Jedinični vektori**

$\mathbf{r}_0$ radijalni
$\mathbf{t}_0$ tangencijalni
$\mathbf{a}_0$ azimutalni

3. **Duljine lukova**

$$ds_1 = dr$$
$$ds_2 = r \, d\vartheta$$
$$ds_3 = r \sin \vartheta \, d\alpha$$



Sl. D.46. Sferni koordinatni sustav. Njega definiraju tri skupine ortogonalnih ploha: koncentrične kugle, ravnine položene po osi Z i kružni konusi s vrhom u ishodištu O.

4. Lučni koeficijenti

$$h_1 = 1$$
$$h_2 = r$$
$$h_3 = r \sin \vartheta$$

5. $$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{t}_0 \frac{\partial \varphi}{r\, \partial \vartheta} + \mathbf{a}_0 \frac{\partial \varphi}{r \sin \vartheta\, \partial \alpha}$$

6. $$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta\, D_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta\, D_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r\, D_\alpha) \right]$$

7. $$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{r}_0 \operatorname{rot}_r \mathbf{A} + \mathbf{t}_0 \operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{A} + \mathbf{a}_0 \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta\, A_\alpha) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right]$$

$$\operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r\, A_\alpha) \right]$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\, A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right]$$

8. $$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}$$

9. $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{r}_0 \, \Delta_r \mathbf{A} + \mathbf{t}_0 \, \Delta_\vartheta \mathbf{A} + \mathbf{a}_0 \, \Delta_\alpha \mathbf{A}$

$$\Delta_r \mathbf{A} = \Delta A_r - \frac{2 A_r}{r^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} A_\vartheta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}$$

$$\Delta_\vartheta \mathbf{A} = \Delta A_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}$$

$$\Delta_\alpha \mathbf{A} = \Delta A_\alpha + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{A_\alpha}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha}$$

D.10.2. SFERNE FUNKCIJE

D.10.2.1. Legendreova jednadžba

Rješavanje Laplaceove jednadžbe u sfernim koordinatama vodi na diferencijalnu jednadžbu oblika

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vartheta} \right) + \left(p^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) f = 0$$

Ona se dovodi na standardni oblik ako se uvrsti

$$p^2 = n (n + 1)$$

$$\cos \vartheta = z$$

Onda je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\vartheta} = - \sin \vartheta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$$

Sad jednadžba glasi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \right) + \left(p^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) f = 0$$

Budući da je $\sin^2 \vartheta = 1 - z^2$, to je konačni oblik diferencijalne jednadžbe

$$(1 - z^2) \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - 2 z \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} + \left[n (n + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] f = 0$$

n i m su brojevi, koji smiju biti i kompleksni, a z je kompleksna varijabla. Ovdje su prikazana rješenja kad su n i m cijeli brojevi, uključujući i nulu.

Standardni oblik diferencijalne jednadžbe vodi na *Legendreove funkcije*. Postoje dvije velike skupine tih funkcija

1. $m = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

   $P_n(z)$ *Legendreova funkcija prve vrste* ili Legendreov polinom
   $Q_n(z)$ *Legendreova funkcija druge vrste*

2. $m = 1, 2, 3, \ldots\ m \leqslant n = 1, 2, 3, \ldots$

   $P_n^m(z)$ *pridružena Legendreova funkcija* ili polinom *prve vrste*
   $Q_n^m(z)$ *pridružena Lagendreova funkcija druge vrste*

Rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$f = f_1 P_n^m(z) + f_2 Q_n^m(z)$$

Točke singulariteta su $z = \pm 1$. Kad je $z = x$ uz uvjet $-1 \leqslant x \leqslant 1$, piše se također $x = \cos \vartheta$, te je rješenje

$$f = f_1 P_n^m(\cos \vartheta) + f_2 Q_i^m(\cos \vartheta)$$

D.10.2.2. Legendreovi polinomi prve i druge vrste

1. $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k}$$

   $s = \frac{1}{2}n$ ili $\frac{1}{2}(n-1)$, $s =$ cijeli broj

2. $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n$$

3. $P_0(x) = 1$

   $P_1(x) = x$

   $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

   $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

   $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

4. $P_n(0) = 0, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n}, \quad n = 0, 2, 4, \ldots$$

$$P_n(1) = 1$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$P_n'(0) = -(n+1) P_{n+1}(0)$$

$$P_n'(1) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$P_{-(n+1)}(x) = P_n(x)$$

5. $$P_n(\cos\vartheta) = 2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \Big\{ \cos(n\vartheta) +$$

$$+ \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos[(n-2)\vartheta] +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos[(n-4)\vartheta] + \ldots \Big\}$$

6. $P_0(\cos\vartheta) = 1$

$$P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$$

$$P_2(\cos\vartheta) = \frac{1}{4}[3\cos(2\vartheta) + 1]$$

$$P_3(\cos\vartheta) = \frac{1}{8}[5\cos(3\vartheta) + 3\cos\vartheta]$$

$$P_4(\cos\vartheta) = \frac{1}{64}[35\cos(4\vartheta) + 20\cos(2\vartheta) + 9]$$

7. $$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln\frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x)$$

$$W_{n-1}(x) = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(x) +$$

$$+ \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5}(x) + \cdots$$

$$W_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} P_{k-1}(x) P_{n-k}(x)$$

$$W_{-1}(x) = 0$$

8. $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$

$Q_2(x) = \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{1}{4}\right) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2} x$

$Q_3(x) = \left(\frac{5x^3}{4} - \frac{3x}{4}\right) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3}$

9. $Q_n(0) = 0, \; n = 0, 2, 4, \ldots$

$Q_n(0) = (-1)^{(n+1)/2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$

$Q_n(1) = \infty$

$Q_n(\infty) = 0$

$Q_n(-x) = -(-1)^n Q_n(x)$

$Q_{-(n+1)}(x) = -\pi \cos(n\pi) P_n(x)$

D.10.2.3. Međusobni odnosi

1. $x P_n'(x) - P_{n-1}'(x) = n P_n(x)$

2. $(x^2 - 1) P_n'(x) = n x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$

3. $P_{n+1}'(x) - x P_n'(x) = (n+1) P_n(x)$

4. $(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0$

5. $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1) P_n$

Ovi odnosi vrijede i za $Q_n(x)$.

D.10.2.4. Integrali

1. $$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$$

2. $$\int_{0}^{\pi} P_{2n}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \pi\left[\frac{(2n)!}{(2^n\,2!)^2}\right]^2$$

3. $$\int_{0}^{\pi} P_{2n+1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \pi\,\frac{(2n)!\,(2n+2)!}{[2^n n!\;2^{n+1}(n+1)!]^2}$$

4. $$\int_{0}^{\pi} P_n(\cos\vartheta)\sin(m\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = 2\,\frac{(m+n-1)(m+n-3)\ldots(m-n+1)}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m-n)},$$

$n < m$

$m+n$ neparno

$= 0$ inače

5. $$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)\,\mathrm{d}t}{x-t} = Q_n(x)$$

6. $$\int_{1}^{\infty} P_n(x)\,Q_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(m-n)(m+n+1)}, \qquad m > n$$

D.10.2.5. Pridruženi Legendreovi polinomi

1. $$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\,\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)$$

$$= \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\,\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^n$$

2. $$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\,\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}Q_n(x)$$

3. $P_1^1(x) = (1 - x^2)^{1/2}$

$P_2^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2}$

$P_2^2(x) = 3(1 - x^2)$

$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1 - x^2)^{1/2}$

$P_3^2(x) = 15x(1 - x^2)$

$P_3^3(x) = 15(1 - x^2)^{3/2}$

$Q_1^1(x) = (x^2 - 1)^{1/2}\left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

$Q_2^1(x) = (x^2 - 1)^{1/2}\left(\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} - \frac{3}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

$Q_2^2(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 1)\ln\frac{1 + x}{1 - x} - \frac{3x^3 - 5x}{x^2 - 1}$

D.10.2.6. Integrali

1. $$\int_{-1}^{1} P_k^m(x) P_n^m(x)\,dx = 0, \quad n \neq k$$

$$= \frac{2}{2n + 1}\frac{(n + m)!}{(n - m)!}, \quad k = n \geqslant m$$

2. $$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_n^r(x)\frac{1}{1 - x^2}\,dx = 0, \quad r \neq m$$

$$= \frac{(n + m)!}{m(n - m)!}, \quad r = m \leqslant n$$

D.10.2.7. Red funkcija

1. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$

$$a_k = \frac{1}{2}(2k+1)\int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2k+1}{2^{k+1}\,k!}\int_{-1}^{1} \frac{d^k f(x)}{dx^k}(1-x^2)^k\,dx$$

2. Razvoj funkcije $F(\vartheta, \alpha)$ na kuglinoj plohi

$$F(\vartheta,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n P_n(\cos\vartheta) + \sum_{m=1}^{m=n}[A_n^m \cos(m\alpha) + B_n^m \sin(m\alpha)]\,P_n^m(\cos\vartheta)\right\}$$

Razvoj u red je valjan, ako su F i njegova prva derivacija na kuglinoj plohi kontinuirani. Koeficijenti iznose

$$A_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi} P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi} F(\vartheta,\alpha)\,d\alpha$$

$$A_n^m = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi} F(\vartheta,\alpha)\cos(m\alpha)\,d\alpha$$

$$B_n^m = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi} F(\vartheta,\alpha)\sin(m\alpha)\,d\alpha$$

D.10.2.8. Udaljenost do točke na osi Z

Zadane su točke $P(r, \vartheta, \alpha)$ na sl. D.48. i O_1 $(d, 0, 0)$ na osi Z. Traži se njihova udaljenost

$$r_1 = (d^2 + r^2 - 2\,d\,r\cos\vartheta)^{1/2} = d\left[1 + \left(\frac{r}{d}\right)^2 - 2\,\frac{r}{d}\cos\vartheta\right]^{1/2}$$

Ta se udaljenost izražava redom Legendreovih polinoma prve vrste odnosom

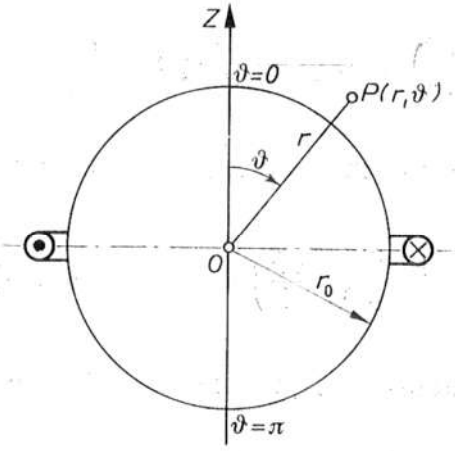
$$\frac{d}{r_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^k P_k(\cos\vartheta), \qquad r < d$$

$$\frac{d}{r_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{k+1} P_k(\cos\vartheta), \quad r > d$$

D.10.3. Polje strujne kugle

Kuglinom plohom polumjera r_0 teku struje u azimutalnom smjeru kao na sl. D.47. Linijska gustoća struje ima samo azimutalnu komponentu, koja neka iznosi

$$K = K_\alpha = K_m \sin\vartheta$$



Sl. D.47. Strujna kugla sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Kuglinom plohom teku struje azimutalno.

Ona je raspoređena po zakonu sinusa po meridijanu kugle. Takva bi se linijska gustoća realizirala namotom čiji zavoji idu po paralelama kugle, a broj zavoja se mijenja po zakonu sinusa kako se napreduje po meridijanu. Treba odrediti jakost magnetskog polja u unutarnjosti kugle i izvan nje.

Vektorpotencijal ima također samo azimutalnu komponentu kao i linijska gustoća struje.

Treba riješiti Laplaceovu jednadžbu vektorpotencijala

$$\Delta \mathbf{A} = 0$$

Ona se svodi na to da sve komponente te operacije moraju zadovoljiti istu jednadžbu.

$$\Delta_r \mathbf{A} = \Delta_\vartheta \mathbf{A} = \Delta_\alpha \mathbf{A} = 0$$

Budući da postoji samo A_α, to se dobiva uvjet

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} = 0$$

i jednadžba

$$\Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2 \sin^2 \vartheta} = 0$$

Treba ispustiti indeks α, te je jednadžba nakon uvrštenja ΔA, uzevši u obzir $\partial^2 A/\partial \alpha^2 = 0$,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{A}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial A}{\partial \vartheta} \right) - \frac{A}{r^2 \sin^2 \vartheta} = 0$$

Rješenje ima oblik $A = R(r)\, \Theta(\vartheta)$. Kad se to rješenje uvrsti, jednadžba poprima oblik

$$\frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} = 0$$

Pojavljuju se dva dijela jednadžbe. Jedan je ovisan samo o r, a drugi pak — samo o ϑ. Zato mora biti

$$\frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} \right) = p^2 = n(n+1)$$

Tu je p^2 nezavisna konstanta. To je Eulerova diferencijalna jednadžba

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \left(\frac{p}{r} \right)^2 R = 0$$

Njezino je rješenje

$$R = R_1 r^n + R_2 r^{-(n+1)}$$

Za $r \leqslant r_0$, $R_2 = 0$, odnosno za $r \geqslant r_0$, $R_1 = 0$ zbog konačnih iznosa vektorpotencijala.

Drugi dio jednadžbe vodi na Legendreove polinome

$$\Theta = \Theta_1 P_n^1(\cos\vartheta) + \Theta_2 Q_n^1(\cos\vartheta), \quad n \geqslant 1$$

Zbog konačnih iznosa vektorpotencijala mora biti $\Theta_2 = 0$, te je osnovno rješenje za $n = k$

$$A_k = c_{1k} r^k P_k^1(\cos\vartheta), \qquad r \leqslant r_0$$

$$A_k = c_{2k} r^{-(k+1)} P_k^1(\cos\vartheta), \quad r \geqslant r_0$$

Ukupni je potencijal

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

što glasi

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} r^k P_k^1(\cos\vartheta), \qquad \text{za } r \leqslant r_0$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} r^{-(k+1)} P_k^1(\cos\vartheta), \quad \text{za } r \geqslant r_0$$

Ovakva rješenja zadovoljavaju granične uvjete da je vektorpotencijal u središtu kugle ništica, a u beskonačno udaljenim točkama je također ništica. Ovdje se pojavio Legendreov polinom $P_k^1(x)$ prve vrste, k-tog reda i $m = 1$ stepena. On se dobiva iz nultog stepena relacijom

$$P_k^1(x) = \sqrt{1 - x^2}\, \frac{\mathrm{d}P_k(x)}{\mathrm{d}x}$$

Na taj se način dobiva beskonačni red za $P_k^1(x)$ ako se stavi $k = n$.

Indukcija magnetskog polja zadana je sa rot **A**, te su pojedine komponente

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r A) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) c_{1k} r^{k-1} P_k(\cos\vartheta), \quad \text{za } r \leqslant r_0$$

$$B_r = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) c_{2k} r^{-(k+2)} P_k(\cos\vartheta), \qquad \text{za } r \geqslant r_0$$

$$B_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A) = -\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) c_{1k} r^{k-1} P_k^1(\cos\vartheta), \qquad \text{za } r \leqslant r_0$$

$$B_\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} k c_{2k} r^{-(k+2)} P_k^1(\cos\vartheta), \qquad \text{za } r \geqslant r_0$$

Ovdje su nepoznate konstante c_{1k} i c_{2k} koje se određuju iz uvjeta na granici $r = r_0$. Radijalna komponenta indukcije prolazi nepromijenjena kroz tu granicu, a tangencijalna komponenta jakosti polja pravi skok za iznos linijske gustoće struje. Tada je

$$B_{r1} = B_{r2} \quad \text{i} \quad B_{\vartheta 2} - B_{\vartheta 1} = \mu K_\alpha \quad \text{za } r = r_0$$

Zato je $c_{2k} = c_{1k} r_0^{2k+1}$, te preostaje samo da se odredi c_{1k}. To se postiže iz zadane linijske gustoće struje

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k + 1) c_{1k} r_0^k P_k^1 (\cos \vartheta) = \mu r_0 K_\alpha$$

Općenito bi trebalo linijsku gustoću struje na kugli K_α razviti u red po Legendreovim polinomima prve vrste i prvog stepena, tj. za $m = 1$. Taj red glasi

$$\mu r_0 K_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k^1 (\cos \vartheta)$$

Pojedina konstanta iznosi odatle

$$c_{1k} = \frac{a_k}{(2k + 1) r_0^k}$$

Koeficijenti se dobiju iz integrala za ove Legendreove polinome

$$a_k = \frac{2k + 1}{2k(k + 1)} \int_{-1}^{1} \mu r_0 K_\alpha P_k^1 (x) \, dx$$

Najjednostavniji je slučaj kad je linijska gustoća struje raspoređena sinusno kao što je zadano, tj. $K_\alpha = K_m \sin \vartheta$. Zbog toga mora biti $k = 1$, a ostali iščezavaju, jer je $P_1^1 (x) = \sin \vartheta$. Lako se izvrši integracija, te je koeficijent

$$a_1 = \mu r_0 K_m$$

a konstanta integracije

$$c_{11} = \frac{1}{3} \mu K_m$$

Jakosti magnetskog polja konačno iznose

$$H_r = \frac{2}{3} K_m \cos \vartheta, \qquad H_\vartheta = -\frac{2}{3} K_m \sin \vartheta, \qquad \text{za } r \leqslant r_0$$

$$H_r = \frac{2}{3} K_m \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \cos \vartheta, \qquad H_\vartheta = \frac{1}{3} K_m \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \sin \vartheta, \quad \text{za } r \geqslant r_0$$

U unutrašnjosti kugle je polje homogeno i ima konstantnu jakost $H_0 = (2/3)\, K_m$. Izvan kugle polje odgovara polju dipola koji ima dipolni moment

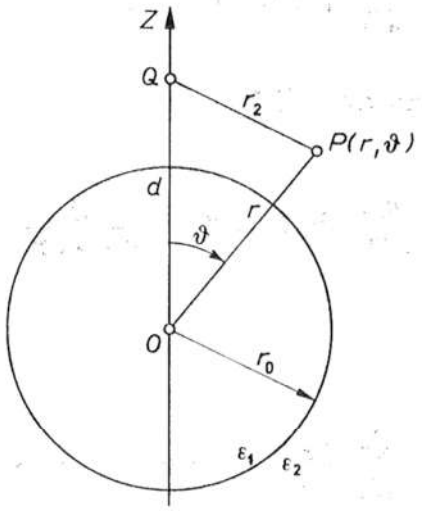
$$p = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \mu K_m = V_0 \mu K_m$$

ako je V_0 volumen kugle.

Ovaj primjer pokazuje put kako se može dobiti homogeno polje u ograničenom prostoru. Taj način dobivanja homogenog polja može biti jednostavniji nego upotrebom solenoida. On pokazuje i put kako se može riješiti polje kuglaste struje, ako je drukčija raspodjela linijske gustoće struje. Drukčije raspoređena linijska gustoća struje rastavi se na harmoničke članove, te se provede isti postupak za svaki harmonički član.

D.10.4. TOČKASTI NABOJ I DIELEKTRIČNA KUGLA

Zadana je dielektrična kugla dielektričnosti ε_1 i polumjera r_0. Točkasti naboj Q je smješten izvan kugle na udaljenosti d od njezina središta. Sferni koordinatni



Sl. D.48. Točkasti naboj i dielektrična kugla u sfernom koordinatnom sustavu.

sustav je postavljen kao na sl. D.48. Potencijal takve kombinacije se dobiva rješenjem Laplaceove jednadžbe u sfernom sustavu, uzevši u obzir ovisnost $\varphi = \varphi(r, \vartheta)$, odnosno aksijalnu simetriju polja

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) = 0$$

Budući da polje mora biti u ishodištu konačno, a u beskonačnosti iščezava, osnovno rješenje se razlikuje za unutarnjost kugle i za vanjski prostor, te je ono oblika

$$c_{1n} r^n P_n(\cos\vartheta) \qquad \text{za } r < r_0$$

$$c_{2n} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \qquad \text{za } r > r_0$$

Potencijal se sastoji od dva dijela. Prvi dio nastaje utjecajem polarizirane kugle, a drugi dio je od zadanog točkatog naboja, koji iznosi

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon r_2}$$

Ovaj drugi dio ne bi trebalo dodavati, jer on mora biti sadržan u općem rješenju Laplaceove jednadžbe. Problem nastaje u vezi s graničnim uvjetima u prostoru izvan kugle. Potencijalna funkcija je singularna na mjestu točkastog naboja. Da bi se izbjeglo uzimanje u obzir singularnosti potencijala u općem rješenju, uzima se da se potencijal izvan kugle sastoji od dva dijela. Zato je unutar kugle potencijal

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1n} r^n P_n(\cos\vartheta), \qquad r < r_0$$

a izvan kugle potencijal ima dva dijela

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r_2}, \qquad r > r_0$$

Treba uzeti u obzir da je

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos\vartheta) \qquad \text{za } r < d$$

što pojednostavnjuje zadovoljenje graničnih uvjeta. Granični uvjeti na površini kugle jesu

$$\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \qquad \text{za } r = r_0$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\vartheta} \qquad \text{za } r = r_0$$

To vodi na jednadžbe

$$\varepsilon_1 c_{1n} n r_0^{n-1} = -\varepsilon_2 (n+1) \frac{c_{2n}}{r_0^{n+2}} + \frac{Q n}{4\pi d} \frac{r_0^{n-1}}{d^n}$$

$$c_{1n} r_0^n = \frac{c_{2n}}{r_0^{n+1}} + \frac{Q}{4\pi \varepsilon_2 d} \left(\frac{r_0}{d}\right)^n$$

Odatle su nepoznate konstante

$$c_{1n} = \frac{(2n+1)\varepsilon_1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{\varphi_{10}}{d}$$

$$c_{2n} = \frac{n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} r_0^{2n+1} \frac{\varphi_{20}}{d^n}$$

$$\varphi_{10} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_1 d}, \qquad \varphi_{20} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_2 d}$$

Kad se točkasti naboj udalji na veliku udaljenost d od kugle, iščezava dio potencijala od kugle, a preostaje samo potencijal od naboja. Takvo polje je homogeno u okolišu kugle i njegov je potencijal

$$-E_0 z = -E_0 r \cos\vartheta$$

To bi značilo da je $n = 1$, a mjesto naboja Q se stavlja jakost homogenog polja u odnosu

$$\frac{Q}{4\pi \varepsilon_2 d^2} = -E_0$$

Sad su potencijali

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos\vartheta, \quad r \leqslant r_0$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos\vartheta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r_0^3 \frac{\cos\vartheta}{r^2}, \quad \text{za } r \geqslant r_0$$

Takav je rezultat već dobiven za kuglu u homogenom polju.

D.11. ELIPSOIDNI KOORDINATNI SUSTAV

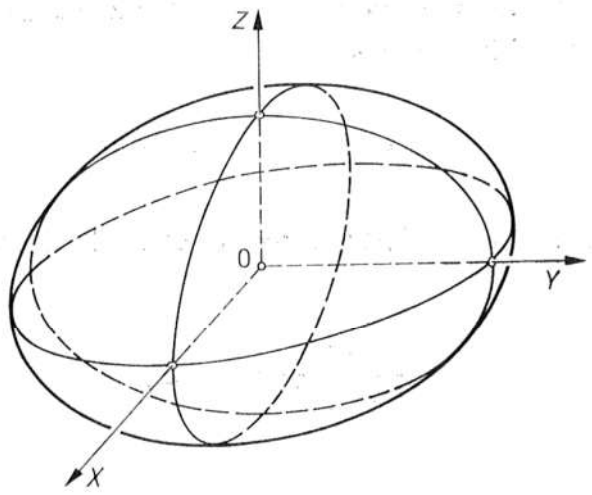
D.11.1. DEFINICIJA

Elipsoid, jednokrilni i dvokrilni hiperboloid, služe u oblikovanju ortogonalnog elipsoidnog koordinatnog sustava. Neki ga zovu i *konikoidni* sustav, jer su elipsa i hiperbola presjeci stošca ili konusa. Njihove su jednadžbe u kartezijevu koordinatnom sustavu

1. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ elipsoid, sl. D.49.

2. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ jednokrilni hiperboloid, sl. D.50.

3. $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ dvokrilni hiperboloid, sl. D.51.



Sl. D.49. Elipsoid elipsoidnog koordinatnog sustava.

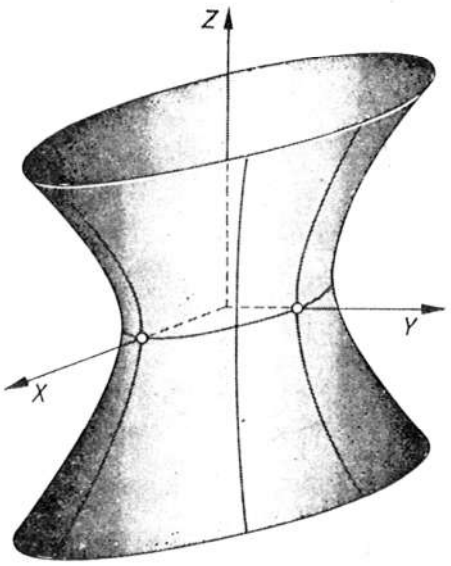
Navedene tri skupine ploha služe kao ortogonalni sustav. Krivulje sjecišta među plohama služe kao krivolinijske koordinate, a njihova zajednička točka je tražena točka u novom koordinatnom sustavu.

Poluosima a, b i c, koje zadovoljavaju uvjet $a > b > c$, dodaje se parametar na slijedeći način

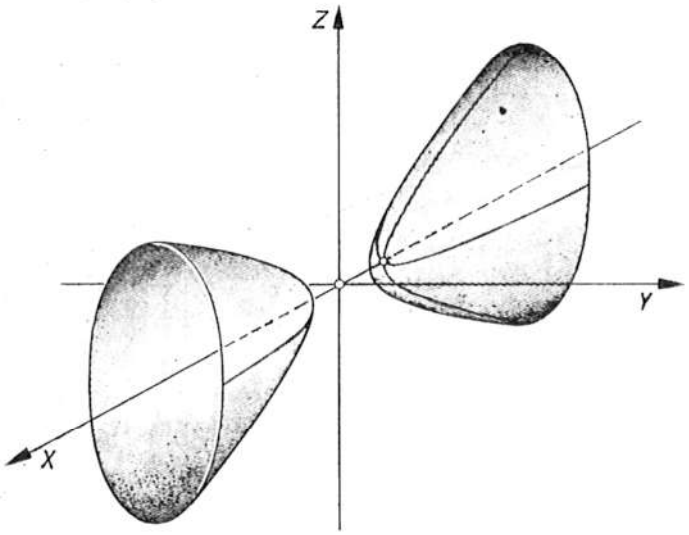
4. $\dfrac{x^2}{a^2 + x_1} + \dfrac{y^2}{b^2 + x_1} + \dfrac{z^2}{c^2 + x_1} = 1, \quad -c^2 < x_1 < \infty$ elipsoid

5. $\dfrac{x^3}{a^2 + x_2} + \dfrac{y^2}{b^2 + x_2} + \dfrac{z^2}{c^2 + x_2} = 1, \quad -b^2 < x_2 < -c^2$ jednokrilni hiperboloid

6. $\dfrac{x^2}{a^2 + x_3} + \dfrac{y^2}{b^2 + x_3} + \dfrac{z^2}{c^2 + x_3} = 1, \quad -a^2 < x_3 < -b^2$ dvokrilni hiperboloid



Sl. D.50. Jednokrilni hiperboloid elipsoidnog koordinatnog sustava.



Sl. D.51. Dvokrilni hiperboloid elipsoidnog koordinatnog sustava.

Karakteristični su presjeci u ravnini X — Y, $z = 0$, u ravnini X — Z, $y = 0$ i u ravnini Y — Z, $x = 0$. Oni su za plohu

4. svi elipse

5. hiperbole u X — Z i Y — Z, elipsa u X — Y

6. hiperbole u X — Y i X — Z, nema presjeka u Y — Z.

Osnovni presjeci u ravnini su

X — Y elipsa, elipsa, hiperbola

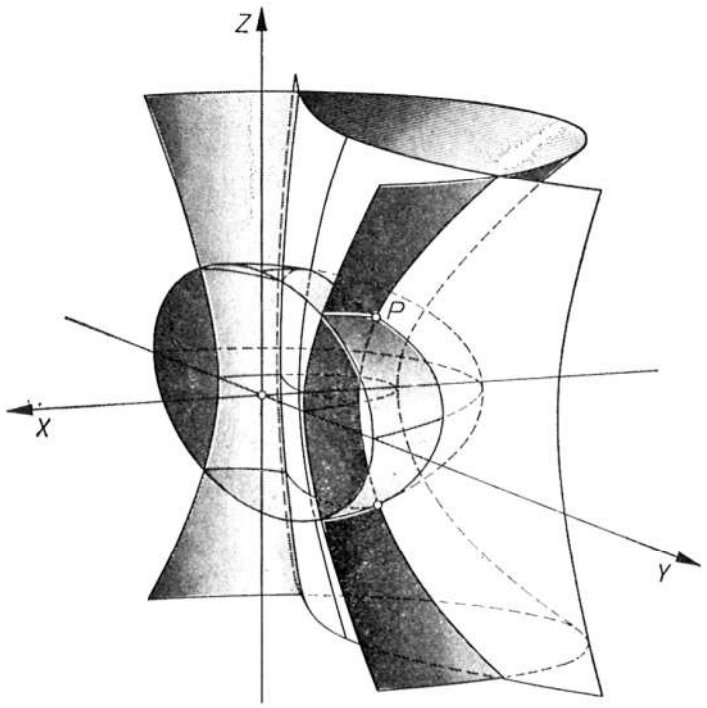
X — Z elipsa, hiperbola, hiperbola

Y — Z elipsa, hiperbola, ništa

Krivulje osnovnih presjeka su *konfokalne*, a fokusne udaljenosti se dobiju iz izraza

$$e_{12}^2 = a^2 - b^2 \text{ u ravnini } X - Y$$
$$e_{13}^2 = a^2 - c^2 \text{ u ravnini } X - Z$$
$$e_{23}^2 = b^2 - c^2 \text{ u ravnini } Y - Z$$

Skupine ploha 4, 5 i 6 su *konfokalne. Parametri* x_1, x_2, x_3 *su koordinate elipsoidnog koordinatnog sustava.* On je ortogonalan ako su karakteristični presjeci konfokalni.



Sl. D.52. Elipsoidni koordinatni sustav. On je definiran s tri skupine ortogonalnih ploha: elipsoidom, jednokrilnim i dvokrilnim hiperboloidom. One su sve konfokalne.

Koordinate u kartezijevu sustavu se dobiju rješenjem jednadžbi 4, 5 i 6 po x, y, z.

$$7. \quad x^2 = \frac{(a^2 + x_1)(a^2 + x_2)(a^2 + x_3)}{e_{12}^2 e_{13}^2}$$

$$8. \quad y^2 = -\frac{(b^2 + x_1)(b^2 + x_2)(b^2 + x_3)}{e_{12}^2 e_{23}^2}$$

$$9. \quad z^2 = \frac{(c^2 + x_1)(c^2 + x_2)(c^2 + x_3)}{e_{13}^2 e_{23}^2}$$

Konstante $a\ b\ c$ karakteriziraju ortogonalni sustav, a jednadžbe 7, 8 i 9 omogućuju da se točki $P(x_1, x_2, x_3)$ odrede koordinate u kartezijevu sustavu $P(x, y, z)$.

Jednadžbe u poglavlju D.7.2. pomažu da se odrede *lučni faktori* koji se dobiju iz izraza

10. $4 h_1^2 g_1^2 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3), \quad g_1^2 = (a^2 + x_1)(b^2 + x_1)(c^2 + x_1)$

11. $4 h_2^2 g_2^2 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3), \quad g_2^2 = -(a^2 + x_2)(b^2 + x_2)(c^2 + x_2)$

12. $4 h_3^2 g_3^2 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_3), \quad g_3^2 = (a^2 + x_3)(b^2 + x_3)(c^2 + x_3)$

Slika D.52. prikazuje elipsoidni koordinatni sustav.

D.11.2. LAPLACEOVA JEDNADŽBA

$$\Delta\varphi = \frac{4 g_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(g_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) +$$

$$+ \frac{4 g_2}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(g_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ \frac{4 g_3}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \frac{\partial}{\partial x_3}\left(g_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) = 0$$

Rješava se separacijom varijabla.

D.11.3. ELIPSOID

Zadan je vodljivi elipsoid, nabijen na potencijal φ_0. Elipsoid je zadan poluosima a, b i c. Ekvipotencijalne plohe su konfokalni elipsoidi, te je potencijal ovisan samo o x_1

$$\varphi = \varphi(x_1)$$

Laplaceova jednadžba iznosi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\left(g_1 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x_1}\right) = 0$$

Rješenje je

$$\varphi = K_1 \int \frac{\mathrm{d}x_1}{g_1} + K_2$$

$$g_1 = [(a^2 + x_1)(b^2 + x_1)(c^2 + x_1)]^{1/2}$$

Integral je eliptični integral prve vrste

$$\varphi = K_1 \frac{2}{e_{13}} F(a, k)$$

$$a = \arcsin \frac{e_{13}}{(a^2 + x_1)^{1/2}}, \qquad k = \frac{e_{12}}{e_{13}}$$

Integraciona konstanta $K_2 = 0$, jer je $\lim_{x_1 \to \infty} \varphi = 0$. U velikim udaljenostima je $x_1 \gg a^2$, a polje se ponaša kao polje točkastog naboja, tj.

$$\varphi = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon r} \qquad \text{za } x_1 \gg a^2$$

$$r^2 = a^2 + x_1 \approx x_1$$

Tu je amplituda vrlo malena, te je

$$a = \frac{e_{13}}{\sqrt{x_1}} = \frac{e_{13}}{r}, \qquad F(a, k) = a = \frac{e_{13}}{r}$$

Konstanta integracije iznosi

$$K_1 = \frac{Q}{8 \pi \varepsilon}$$

Potencijal iznosi konačno

$$\varphi = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon e_{13}} F(a, k)$$

Potencijal elipsoida je

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon e_{13}} F(a_0, k)$$

$$a_0 = \arcsin \frac{e_{13}}{a}, \qquad k = \frac{e_{12}}{e_{13}}$$

Kapacitet takvog elipsoida iznosi

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{4 \pi \varepsilon e_{13}}{F(a_0, k)}$$

Jakost polja ima samo komponentu E_{x1} u smjeru koordinate x_1

$$\mathbf{E} = E_{x1} \mathbf{x}_{10}$$

$$E_{x1} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{2 K_1}{[(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)]^{1/2}}$$

$$E_{x1} = \frac{e_{13} \varphi_0}{F(a_0, k)} [(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)]^{-1/2}$$

D.11.4. SFEROID

Sferoid je rotacioni elipsoid, ploha koja nastaje rotacijom elipse oko jedne od svojih osi. Postoje dva tipa sferoida

izduženi sferoid, $b = c, \quad e_{12} = e_{13}, \quad e_{23} = 0$

spljošteni sferoid, $a = b, \quad e_{12} = 0, \quad e_{13} = e_{23}$

Polazni elipsoid je u oba slučaja

$$a > b > c$$

Eliptički integral iznosi

$$F(\alpha, k) = F(\alpha, 1) = \ln\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)$$

$$F(\alpha, k) = \ln\frac{(a^2 + x_1)^{1/2} + e_{12}}{(a^2 + x_1)^{1/2} - e_{12}}, \quad \text{izduženi sferoid}$$

$$F(\alpha, k) = F(\alpha, 0) = \alpha = \arcsin\frac{e_{13}}{(a^2 + x_1)^{1/2}}, \quad \text{spljošteni sferoid}$$

Kapacitet iznosi, $x_1 = 0$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon e_{12}}{\ln\dfrac{a + e_{12}}{a - e_{12}}}, \quad \text{izduženi sferoid}$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon e_{13}}{\arcsin\dfrac{e_{13}}{a}}, \quad \text{spljošteni sferoid}$$

Okrugli štap je izduženi sferoid, a okrugla ploča je spljošteni sferoid. Potencijali iznose

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon e_{12}} \ln\frac{(a^2 + x_1)^{1/2} + e_{12}}{(a^2 + x_1)^{1/2} - e_{12}}, \quad \text{izduženi sferoid}$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon e_{13}} \arcsin\frac{e_{13}}{(a^2 + x_1)^{1/2}}, \quad \text{spljošteni sferoid}$$

Jakost polja na površini sferoida iznosi za $x_1 = 0$

$$E_{x1} = E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon (x_2 x_3)^{1/2}}$$

Izduženi sferoid ima $b = c$, te je za njega uvijek

$$x_2 = -b^2, \text{ izduženi sferoid}$$

Spljošteni sferoid je $a = b$, te je uvijek

$$x_3 = -a^2, \text{ spljošteni sferoid}$$

Vrh poluosi a ima kartezijeve koordinate

$$x = a, \quad y = z = 0$$

Zato je $x_3 = -b^2$, a jakost polja na tome mjestu

$$E_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon b^2}$$

Vrh poluosi b ima kartezijeve koordinate

$$x = 0, \quad y = b, \quad z = 0$$

Zato je $x_3 = -a^2$, a jakost polja na tome mjestu

$$E_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a b}$$

Ovi su rezultati dobiveni u poglavlju o kratkom linijskom naboju.

Sferoid ima nezgodno svojstvo da mu je jedna fokusna udaljenost nula, te su koordinate neodređene u kartezijevu sustavu. Kao primjer neka posluži **izduženi sferoid.** Uvodi se *nova koordinata*

$$r^2 = y^2 + z^2$$

Sad je

$$y = r\cos\alpha$$

$$z = r\sin\alpha$$

Jednadžba sferoida glasi

$$\frac{x^2}{a^2 + x_1} + \frac{r^2}{b^2 + x_1} = 1, \quad -b^2 < x_1 < \infty$$

Kako x_1 ima dimenziju, uvodi se koordinata bez dimenzije

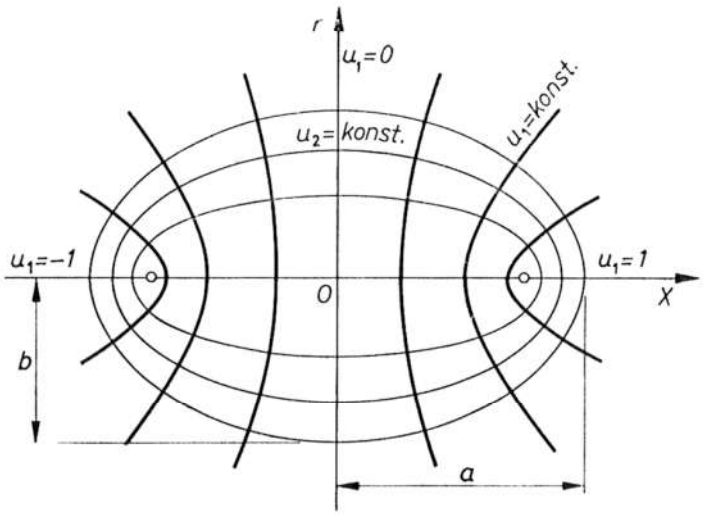
$$u_2^2 = \frac{a^2 + x_1}{e^2}, \quad e^2 = a^2 - b^2$$

Sad je izduženi sferoid

$$\frac{x^2}{u_2^2} + \frac{r^2}{u_2^2 - 1} = e^2, \quad 1 < u_2^2 < \infty$$

Pripadni, konfokalni, dvokrilni hiperboloid ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{u_1^2} - \frac{r^2}{1 - u_1^2} = e^2, \quad 0 \leqslant u_1^2 \leqslant 1$$



Sl. D.53. Familija konfokalnih elipsa i hiperbola.

Slika D.53. prikazuje familiju konfokalnih elipsa $u_2 =$ konst. i hiperbola $u_1 =$ konst.

Cilindričke koordinate iznose

$$x = e\, u_1\, u_2$$

$$r^2 = e^2\,(1 - u_1^2)\,(u_2^2 - 1)$$

Lučni faktori su zadani odnosima

$$\mathrm{d}s_1 = h_1\, \mathrm{d}u_1, \quad \mathrm{d}s_2 = h_2\, \mathrm{d}u_2, \quad \mathrm{d}s_3 = h_3\, \mathrm{d}\alpha = r\, \mathrm{d}\alpha$$

Budući da je

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}s_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{r\,\partial \alpha}\right)^2$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}s_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{r\,\partial \alpha}\right)^2$$

a uvrste se iznosi za x i r i uzme se u obzir

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} = 0$$

iznose lučni faktori

$$h_1 = e\left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{1 - u_1^2}\right)^{1/2}$$

$$h_2 = e\left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2^2 - 1}\right)^{1/2}$$

$$h_3 = r = e\,[(1 - u_1^2)\,(u_2^2 - 1)]^{1/2}$$

D.11.4.1. Laplaceova jednadžba izduženog sferoida

Lučni faktori pomažu da se napiše Laplaceova jednadžba

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial u_1}\left[(1 - u_1^2)\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[(u_2^2 - 1)\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right] + \frac{u_2^2 - u_1^2}{(1 - u_1^2)\,(u_2^2 - 1)}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

Ona se rješava separacijom varijable, te je osnovno rješenje

$$\varphi = U_1\,(u_1)\,U_2\,(u_2)\,A\,(\alpha)$$

Sad je Laplaceova jednadžba

$$\frac{1 - u_1^2}{U_1}\,\frac{\mathrm{d}^2 U_1}{\mathrm{d}u_1^2} + \frac{2\,u_1}{U_1}\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}u_1} + \frac{u_2^2 - 1}{U_2}\,\frac{\mathrm{d}^2 U_2}{\mathrm{d}u_2^2} + \frac{2\,u_2}{U_2}\,\frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}u_2} +$$

$$+ \frac{u_2^2 - u_1^2}{(1 - u_1^2)\,(u_2^2 - 1)}\,\frac{1}{A}\,\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}\alpha^2} = 0$$

Ona se razbija na tri neovisne jednadžbe, uzevši u obzir da je

$$p^2 = n\,(n+1), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Te su jednadžbe

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}\alpha^2} + m^2 A = 0$

2. $(1-u_1^2)\dfrac{\mathrm{d}^2 U_1}{\mathrm{d}u_1^2} - 2u_1\dfrac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}u_1} + \left[n\,(n+1) - \dfrac{m^2}{1-u_1^2}\right] U_1 = 0$

3. $(1-u_2^2)\dfrac{\mathrm{d}^2 U_2}{\mathrm{d}u_2^2} - 2u_2\dfrac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}u_2} + \left[n\,(n+1) - \dfrac{m^2}{1-u_2^2}\right] U_2 = 0$

Prva je jednadžba trigonometrijska, a druge dvije su Legendreove, koje vode na pridružene Lagendreove funkcije prve i druge vrste. Izduženi sferoid se postavlja u os X sa svojom dužom osi, te ne postoji ovisnost o kutu α, tj.

$$\varphi = \varphi\,(x, r)$$

Zato je $m = 0$. Prema tome je opće rješenje

4. $U_{1n} = c_1\,P_n(u_1) + c_2\,Q_n(u_1)$
5. $U_{2n} = c_3\,P_n(u_2) + c_4\,Q_n(u_2)$

Potencijal iznosi općenito

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n}\,U_{2n}$$

D.11.4.2. Vodljivi, izduženi sferoid u homogenom polju

Sferoid se postavlja sa svojom osi u os X, a homogeno električno polje djeluje u smjeru osi X. Njegov je potencijal

$$\varphi_h = -E_0\,x$$

Sferni koordinatni sustav je označen na sl. D.54. sa sfernim kooordinatama ϱ i ϑ, da je

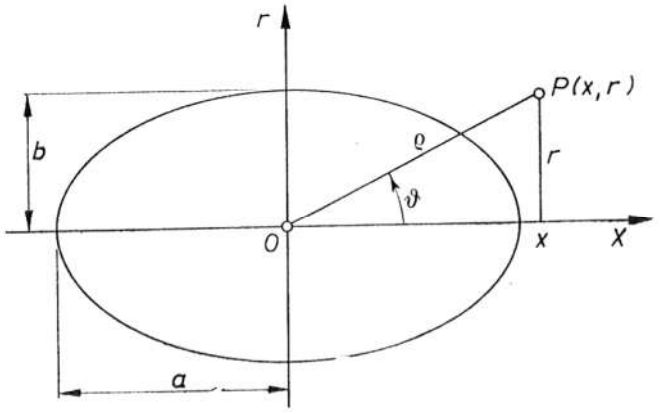
$$x = \varrho\cos\vartheta$$

$$r = \varrho\sin\vartheta$$

Utjecaj sferoida mora iščezavati u vrlo dalekim točkama, a preostaje samo homogeno polje. Vrlo dalekim točkama odgovara koordinata $u_2 \gg 1$, a tada je približno

$$x^2 + r^2 = e^2 u_2^2 = \varrho^2$$

$$u_1 = \cos \vartheta$$



Sl. D.54. Izduženi sferoid. Označene su i sferne koordinate ϱ i ϑ.

Zato funkcija $P_n(u_1)$ mora ući u potencijal kao $P_1(u_1)$ da bi se dobilo homogeno polje u velikim udaljenostima od ishodišta. Zbog istog mora i u_2 ući linearno u izraz potencijala. Kako je za $u_2 \gg 1$ približno

$$P_n(u_2) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} u_2^n$$

mora i ovdje biti $n = 1$, te funkcije $P_n(u_2)$ i $Q_n(u_2)$ ulaze u jednadžbu kao $P_1(u_2)$ i $Q_1(u_2)$. Da bi potencijal bio konačan u ishodištu, mora biti $c_2 = 0$. Sad je potencijal polja

$$\varphi = [c_3 P_1(u_2) + c_4 Q_1(u_2)] P_1(u_1)$$

Tu je

$$P_1(u_1) = u_1, \quad P_1(u_2) = u_2, \quad Q_1(u_2) = \frac{u_2}{2} \ln \frac{u_2 + 1}{u_2 - 1} - 1$$

Budući da je

$$u_1 u_2 = \frac{x}{e}$$

potencijal iznosi

$$\varphi = \frac{x}{e}\left[c_3 + c_4\left(\frac{1}{2}\ln\frac{u_2+1}{u_2-1} - \frac{1}{u_2}\right)\right]$$

Integracione konstante slijede iz polja u beskonačnosti i potencijala sferoida. U beskonačnosti je

$$\varphi = \varphi_h = -E_0 x = \frac{x}{e} c_3, \quad u_2 = \infty$$

$$c_3 = -e E_0$$

Neka je potencijal sferoida nula. Na njemu se odabere točka $x = a$, $r = 0$, odnosno $x_1 = 0$, što znači da je

$$u_2 = u_{20} = \frac{a}{e}, \quad u_1 = 1$$

Prema tome je

$$\varphi = 0 = -e E_0 + c_4\left(\frac{1}{2}\ln\frac{a+e}{a-e} - \frac{e}{a}\right)$$

$$c_4 = \frac{e E_0}{\frac{1}{2}\ln\frac{a+e}{a-e} - \frac{e}{a}}$$

Konačno je potencijal

$$\varphi = -E_0 x\left[1 - \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{u_2+1}{u_2-1} - \frac{1}{u_2}}{\frac{1}{2}\ln\frac{a+e}{a-e} - \frac{e}{a}}\right], \quad u_2 \geqslant \frac{a}{e}$$

$$e^2 = a^2 - b^2$$

Jakost polja na sferoidu iznosi

$$E_{u_2} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = -\frac{1}{e}\left(\frac{u_2^2-1}{u_2^2-u_1^2}\right)^{1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = -e E_0 u_1\left[1 - \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{u_2+1}{u_2-1} - \frac{u_2}{u_2^2-1}}{\frac{1}{2}\ln\frac{a+e}{a-e} - \frac{e}{a}}\right]$$

Ona je najveća gdje os X probada površinu sferoida, za $x = a$, $r = 0$, $u_2 = u_{20} = a/e$, $u_1 = 1$

$$E_{u2} = E_{\max} = \frac{E_0}{\frac{1}{2}\ln\frac{a+e}{a-e} - \frac{e}{a}} \frac{e^3}{a\,b^2}$$

Neka je ekscentričnost

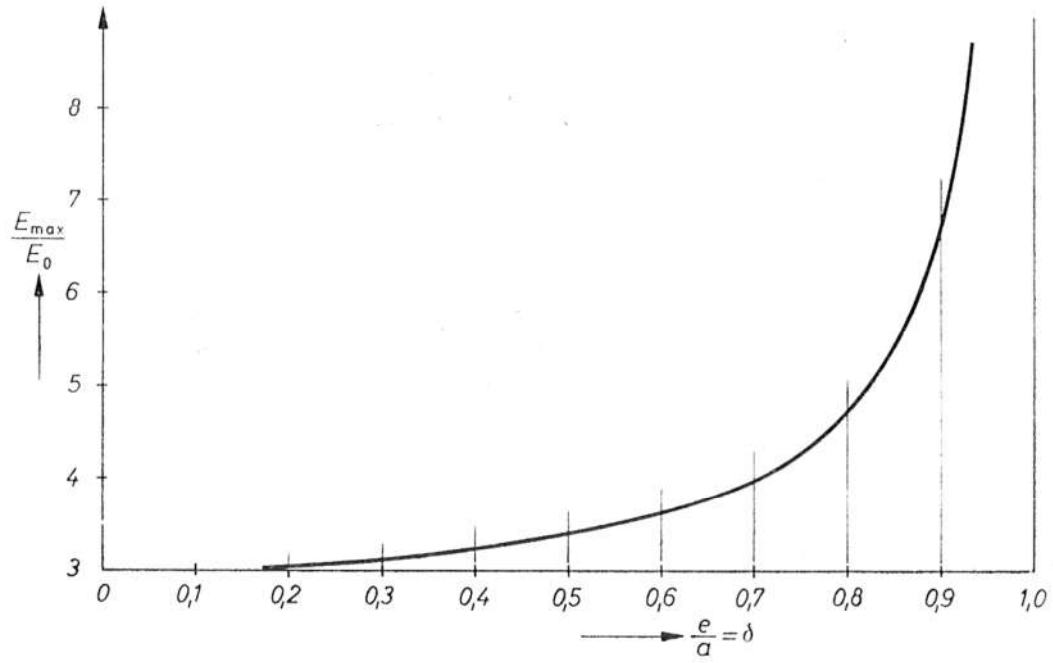
$$\delta = \frac{e}{a}$$

Tada se najveća jakost polja dobiva iz

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = \eta = \frac{\delta^3}{(1-\delta^2)\,(\operatorname{arth}\delta - \delta)}$$

Kod kugle $\delta = 0$, te je

$$\lim_{\delta \to 0} \eta = 3$$



Sl. D.55. Dijagram normirane najveće jakosti polja $E_{\max}/E_0$ u ovisnosti o ekscentričnosti izduženog, vodljivog sferoida koji se nalazi u homogenom polju jakosti E_0.

što je poznati rezultat iz promatranja kugle u homogenom polju. Slika D.55. prikazuje ovisnost $\eta\,(\delta)$, a iz nje se dobiju najveće jakosti polja u ovisnosti o proporcijama sferoida.

Ako se upotrebi red potencija za arth δ, dobije se približni iznos za E_{max}/E_0

$$\frac{E_{max}}{E_0} = \frac{3}{\left(1 - \delta^2\right)\left(1 + \frac{3}{5}\delta^2 + \frac{3}{7}\delta^4 + \cdots\right)}$$

Jakost polja na površini sferoida, $u_2 = u_{20} = a/e$, iznosi u odnosu na najveću jakost polja

$$\frac{E_{u2}}{E_{max}} = u_1 \left(\frac{u_{20}^2 - 1}{u_{20}^2 - u_1^2}\right)^{1/2}$$

gdje $u_1 = x/a$ određuje mjesto na površini sferoida. To je također

$$\frac{E_{u2}}{E_{max}} = b\, x\, (a^4 - e^2\, x^2)^{-1/2}$$

D.12. LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

D.12.1. INTEGRALI PRESLIKAVANJA

Primjenjuju se na vremenske funkcije $f(t)$

1. $$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \qquad f(t) = 0, \qquad t < 0$$

$f(t)$ originalna funkcija ili **original**
$F(p)$ funkcija slike ili **slika**
t vremenska varijabla, vrijeme
p kompleksna varijabla

$F(p)$ je jednoznačna analitička funkcija u poluravnini $\mathrm{Re}\, p > p_0$, ako postoji granična vrijednost

$$\lim_{\substack{A \to 0 \\ B \to \infty}} \int_A^B f(t)\, e^{-p_0 t}\, dt$$

gdje je p_0 realan broj.

2. $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p)\, e^{pt}\, \mathrm{d}p$ integral inverzije

3. $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ simbolična oznaka transformacije primjenom Laplaceova integrala

4. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ simbolična oznaka za inverznu operaciju

Katkad se nalazi transformacija po Carsonu ili K. W. Wagneru, koja primjenjuje integral

$$p \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$$

prema kojem su formule transformacije po Laplaceu množene sa p.

D.12.2. OPERACIJE U LAPLACEOVOJ TRANSFORMACIJI

D.12.2.1. Osnovne operacije

1. $f(t) = a f_1(t) + a f_2(t)$ original
   $F(p) = a F_1(p) + a F_2(p)$ slika

2. $\frac{1}{c} f(\tau), \quad \tau = \frac{t}{c}$ nova vremenska varijabla
   $c > 0$ nezavisna konstanta
   $F(c\,p)$ slika

3. $-t f(t)$ original
   $F'(p) = \frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p}$ slika

4. $\frac{f(t)}{t}$ original
   $\int_{x=p}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ slika

5. Periodična funkcija

$F(t+T)=f(t)$	original
$\dfrac{\int_0^T f(t)\,e^{-pt}\,dt}{1-e^{-pT}}$	slika

6.

$f(t+T)=-f(t)$	original
$\dfrac{\int_0^T f(t)\,e^{-pt}\,dt}{1+e^{-pT}}$	slika

7. Translacija

$f(t-T)$	original	$t > T,\ T > 0$
$e^{-pT}F(p)$	slika	

8. Diferencijacija

$f'(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$	original
$pF(p)-f(+0)$	slika
$f''(t)=\dfrac{d^2f(t)}{dt}$	original
$p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0)$	slika

9. Integracija

$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	original
$\dfrac{F(p)}{p}$	slika

10. Pravilo preklapanja prema Duhamelu

Zadana je slika

$$F(p)=F_1(p)\,F_2(p)$$

Poznati su originali

$$f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(p)],\quad f_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_2(p)]$$

Original funkcije glasi

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \int_{\tau=0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

11. Pravilo rastavljanja prema Heavisideu

Zadana je slika u obliku razlomka

$$F(p) = \frac{B(p)}{N(p)}$$

$B(p) = p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m$ polinom m-tog stupnja

$N(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$ polinom n-tog stupnja

Uvjet $n > m$

$N(p) = 0$ ima n jednostrukih korijena $p_1, p_2 \cdots p_n$.

Original glasi

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{B(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}$$

$$N'(p) = \frac{\mathrm{d}N(p)}{\mathrm{d}p}$$

p_k su korijeni jednadžbe $N(p) = 0$

12. Zadana je slika

$$F(p) = \frac{B(p)}{(p-\alpha)^r}$$

$B(p)$ polinom m-tog stupnja

$m < r$

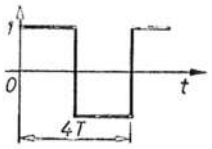
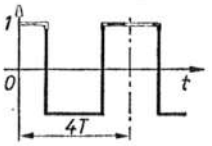
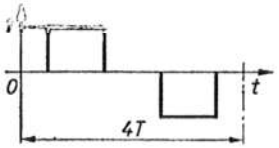
Original

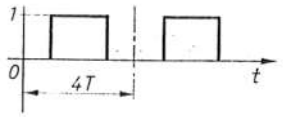
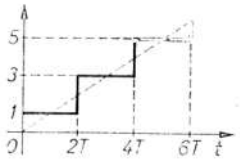
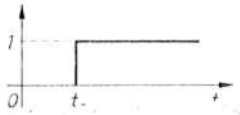
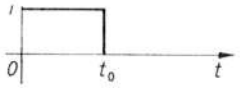
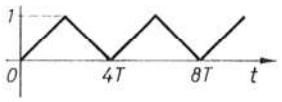
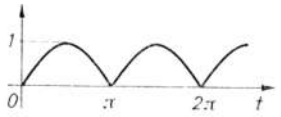
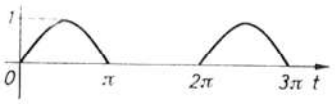
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{r} \frac{B^{(r-k)}(\alpha)}{(r-k)!} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

D.12.3. TABLICA TRANSFORMACIJA

	Original, $f(t)$	Slika, $F(p)$
1.	A	$\frac{A}{p}$
2.	t	$\frac{1}{p^2}$
3.	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
4.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
5.	$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
6.	$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$
7.	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$
8.	$\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$	$\frac{1}{p(p-\alpha)}$
9.	$\mathrm{ch}(\alpha t)$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
10.	$\mathrm{sh}(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
11.	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
12.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
13.	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
14.	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
15.	$t\,e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$

	Original, $f(t)$	Slika, $F(p)$
16.	$\frac{1}{2} e^{-\alpha t} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)]$	$\frac{\omega^3}{[(p+\alpha)^2 + \omega^2]^2}$
17.	$1 - \left(1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)^{1/2} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\alpha}$	$\frac{\omega^2 + \alpha^2}{p[(p+\alpha)^2 + \omega^2]}$
18.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^n}$
19.	$e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t}$	$\frac{p_2 - p_1}{(p+p_1)(p+p_2)}$
20.	$J_0(\alpha t)$	$(p^2 + \alpha^2)^{-1/2}$
21.	$e^{-\alpha t} J_0(j \alpha t)$	$[p(p+2\alpha)]^{-1/2}$
22.	$J_0[(t^2 - \tau^2)^{1/2}]$	$(p^2+1)^{-1/2} \exp[-\tau(p^2+1)^{1/2}]$ $f(t) = 0$ za $t < \tau$
23.	$J_n(\alpha t)$	$(p^2 + \alpha^2)^{-1/2} \left[\left(\frac{p^2}{\alpha^2} - 1\right)^{1/2} - \frac{p}{\alpha}\right]^n$ $\operatorname{Re} n > -1$
24.	$e^{-\alpha t/2} \left[j^{-n} J_n\left(j \frac{\alpha t}{2}\right)\right]$	$[p(p+\alpha)]^{-1/2} \left[\left(\frac{p}{\alpha} + 1\right)^{1/2} - \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{1/2}\right]^{2n}$, $\operatorname{Re} n > -1$
25.	$J_0(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p} e^{-1/p}$
26.	$\operatorname{ber}(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p} \cos\frac{1}{p}$
27.	$\operatorname{bei}(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p} \sin\frac{1}{p}$
28.	$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t})$	$p^{-(n+1)} e^{-1/p}$, $\operatorname{Re} n > -1$
29.	$\frac{1}{\sqrt{t}} J_{2n}(2\sqrt{2t})$	$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{1/2} e^{-1/p} I_n\left(\frac{1}{p}\right)$
30.	$J_n^2(\sqrt{2t}$	$\frac{1}{p} e^{-1/p} I_n\left(\frac{1}{p}\right)$

	Original, $f(t)$	Slika, $F(p)$
31.	$t^n J_n(t)$	$\frac{2^n \left(n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(p^2+1)^{n+1/2}}$, $\operatorname{Re} n > -\frac{1}{2}$
32.	$t^{n+1/2} J_{n+1/2}(t)$	$2^{n+1/2} \frac{n!}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(p^2+1)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} n > -1$
33.	$e^{-a^2/(4t)} t^{-3/2}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{a} \exp(-a\sqrt{p})$
34.	$1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p} \exp(-a\sqrt{p})$, $\Phi(x)$ Gaussov integral greške
35.	$(\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{p}} \exp(-a\sqrt{p})$
36.	$1 + e^t [\Phi(\sqrt{t}) - 1]$	$\frac{1}{p(1+\sqrt{p})}$
37.	$e^t [\Phi(\sqrt{t}) - 1] + (\pi t)^{-1/2}$	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$
38.	$e^t [1 - \Phi(\sqrt{t})]$	$\frac{1}{\sqrt{p}(1+\sqrt{p})}$
39.	$1 + 2e^t [\Phi(\sqrt{t}) - 1]$	$\frac{1-\sqrt{p}}{p(1+\sqrt{p})}$
40.		$\frac{1}{p} \operatorname{th}(pT)$
41.		$\frac{1}{p}\left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(pT)}\right]$
42.		$\frac{1}{p} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}pT\right)}{\operatorname{ch}(pT)}$

	Original, $f(t)$	Slika, $F(p)$
43.		$\frac{1}{2p\ \mathrm{ch}\,(pT)}$
44.		$\frac{1}{p}\,\mathrm{cth}\,(pT)$
45.		$\frac{1}{p}\,e^{-t_0 p}$
46.		$\frac{1-e^{-t_0 p}}{p}$
47.		$\frac{1}{p^2}\,\mathrm{th}\,(pT)$
48.		$\frac{n}{p^2+n^2}\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi p}{2n}$
49.		$\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}$

MJERNE JEDINICE

Deseta Generalna konferencija za utege i mjere (CGPM) usvojila je 1954. godine šest jedinica koje trebaju poslužiti kao osnova za međunarodni mjerni sustav u praktičkoj primjeni. To su:

dužina	metar	m
masa	kilogram	kg
vrijeme	sekunda	s
električna struja	amper	A
termodinamička temperatura	kelvin	K
svjetlosni intenzitet	kandela	cd

CGPM je dala ime Internacionalni sustav jedinica internacionalne oznake SI za taj sustav. Tome sustavu pripadaju još slijedeće jedinice:

DOKNADNE JEDINICE

ravni kut	radijan	rad
prostorni kut	steradijan	sr

IZVEDENE JEDINICE

Veličina	Jedinica	Simbol	Izvedeni simbol
električni naboj	kulon	C	A s
električni napon	volt	V	$kg\ m^2/A\ s^3$
otpor	om	Ω	$kg\ m^2/A^2\ s^3$, V/A
provod	simens	S	$1/\Omega$, $A^2\ s^3/kg\ m^2$
kapacitet	farad	F	C/V, $A^2\ s^4/kg\ m^2$
magnetski tok	veber	Wb	Vs, $kg\ m^2/A\ s^2$
induktivitet	henri	H	Wb/A, $kg\ m^2/A^2\ s^2$

Izvedene jedinice (nastavak)

Veličina	Jedinica	Simbol	Izvedeni simbol
gustoća magnetskog toka, magnetska indukcija	tesla	T	Vs/m^2, kg/As^2, Wb/m^2
gustoća električnog toka, električna indukcija	kulon po kvadratnom metru	—	As/m^2, C/m^2
sila	njutn	N	kgm/s^2
radnja, energija	džul	J	Nm, Ws, kgm^2/s^2
snaga	vat	W	VA, kgm^2/s^3, J/s
jakost električnog polja	njutn po kulonu	—	N/C, V/m, kgm/As^3
jakost magnetskog polja	njutn po veberu	—	N/Wb, A/m
frekvencija	herc	Hz	cikli/s, 1/s
tlak, naprezanje	njutn po kvadratnom metru	—	N/m^2

PREFIKSI

u označavanju multipla i submultipla jedinica

Iznos	Prefiks	Simbol
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hekto	h
10^{1}	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	ato	a

Usvojen je racionalizirani MKSA sustav, koji ima osnovu u osnovnim jedinicama metar, kilogram, sekunda i amper. Osnovne jedinice su definirane.

Duljina — metar — ustanovljen iz duljine vala u vakuumu zračenja pri energetskom prijelazu u kriptonu 86 od nivoa $2\,p_{10}$ na $5\,d_5$

$$1 \text{ metar} = 1\,650\,763{,}73 \text{ valnih duljina}$$

Masa — kilogram — ustanovljen internacionalnim kilogramom u Sèvresu, u Francuskoj.

Vrijeme — sekunda — ustanovljena iz frekvencije zračenja pri prijelazu između dvaju hiperfinih nivoa osnovnog stanja atoma cezija 133.

$$1 \text{ sekunda} = 9\,192\,631\,770 \text{ perioda zračenja}$$

Električna struja — amper — ustanovljava se iz sile dvaju paralelnih, beskonačno dugih vodiča, kružna presjeka zanemariva promjera, razmaknutih na 1 m udaljenosti, u vakuumu. Kad vodičima teče struja 1 amper, među njima je sila $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po metru duljine.

Termodinamička temperatura — kelvin — ustanovljava se iz trostruke točke vode koja ima temperaturu 273,16 kelvina.

Svjetlosni intenzitet — kandela — se ustanovljava kao svjetlosni intenzitet crnog tijela u smjeru okomitom na njegovu površinu od 1/160 000 kvadratnih metara, pri temperaturi crnog tijela jednakoj temperaturi ledenja platine (2046 K) i pri tlaku od 101 325 njutna po kvadratnom metru.

Posljednje dvije jedinice se ne smatra fundamentalnim, ali ipak su kao takve usvojene, jer bi se temperatura i veličine svjetla izražavale vrlo nespretno s ostalim jedinicama.

Jedinica električne struje je usvojena nakon vrlo dugih diskusija. Ona je četvrta osnovna jedinica. Električni naboj je osnovna manifestacija materije koja se ne može zamijeniti niti rastumačiti ostalim manifestacijama. On zaslužuje svoju samostalnu jedinicu. Odlučeno je za amper, a ne za kulon, jer se smatralo da je verifikacija ampera jednostavnija. Veći fizikalni smisao ima kulon za električni naboj, te se on vrlo često upotrebljava u izvedenim jedinicama. Amper je tako izabran, da je magnetska konstanta ili permeabilnost vakuuma upravo $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Takav se izbor pokazao kao najprikladniji.

Svjetlosni intenzitet, simbola I, odnosi se na izvor svjetla, a određuje se u zadanom smjeru iz svjetlosnog toka izvora. On je svjetlosni tok izvora po jedinici prostornog kuta u zadanom smjeru

$$I = d\Phi/d\Omega$$

OSTALE JEDINICE

Sustav SI je odredio jedinice svih ostalih veličina koje treba primjenjivati. Ako su jedinice prevelike ili premalene, upotrebljavaju se prefiksi. Često je jedinica amper na kvadratni metar za gustoću struje prevelika, te se smije upotrijebiti jedinica amper na kvadratni milimetar ili slična. U tehnici i fizici se mnogo upotrebljavaju neke jedinice koje će se još dugo održati u životu, ali se preporučuje da ih se postepeno napušta. One su navedene po fizikalnim i tehničkim veličinama.

Duljina

1 mikron treba da bude 1 mikrometar

1 angstrem (Å) = 10^{-10} m = 100 pm

Volumen

1 litra = 10^{-3} kubnih metara

Masa

1 tona = 1000 kg

Sila

Tehnički sustav mjera imao je jedinicu za silu *kilogramsila*. Novousvojeno ime je *kilopond* (kp). To je sila koja masi od jednog kilograma daje akceleraciju jednaku Zemljinoj gravitaciji. Zato je

1 kilopond (kp) = 9,806 65 njutna (N)

Temperatura

Termodinamička temperatura je usvojena kao apsolutna temperatura. Još je mnogo u upotrebi jedinica *Celzijusovi stupnjevi* ili *gradi*, simbola °C. Ona je ustanovljena prema ledištu 0 °C i vrelištu vode 100 °C.

1° C = 1 kelvin

Celzijusovi stupnjevi, °C = kelvini (K) — 273,15

Tlak ili *naprezanje*

Tlak ili naprezanje označavaju silu na jedinicu površine, te se mjere odgovarajućim jedinicama za silu i površinu. Pored toga su u upotrebi i toplinske jedinice za tlak

1 bar = 10^5 njutna na kvadratni metar

Ta je jedinica izabrana u sustavu MKSA, jer je najbliža tehničkoj i normalnoj atmosferi

1 normalna atmosfera = 760 tora = 1,013 25 bara

1 tehnička atmosfera = 1 kp/cm^2 = 0,980 665 bara

Pored toga je u upotrebi jedinica *milimetar stupca žive* ili *tor*

1 tor = 1 mm stupca žive = 133,32 njutna na kvadratni metar =
= 1,333 2 milibara

Normalni volumen plina se ustanovljava pri tlaku 760 tora i temperaturi 0 °C = = 273,15 K. Za taj volumen se upotrebljava katkad jedinica *normalni kubni metar* (Nm^3).

Rad, energija, toplina

Ove veličine imaju u upotrebi još uvijek najviše različitih jedinica, koje su nastale historijski.

Jedna *kalorija* (cal) je toplina potrebna da se 1 gram vode pri 15 °C ugrije za 1 °C. Njezin je odnos prema džulu

1 kalorija = 4,186 8 džula

Stariji odnos kalorije i džula je ustanovljen 1929. godine na Internacionalnoj konferenciji za paru. On je bio 1 kilovatsat = 860 kilokalorija, što daje 1 kalorija = = 4,186 0 džula. Još su u upotrebi

1 kalorija = 0,422 86 kilopondmetara
1 erg = 1 dincentimetar = 10^{-7} džula
1 kilovatsat = 3,6 megadžula = 859,86 kilokalorija
1 megavatdan = 2 400 kilovatsati
1 elektronvolt = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ džula
1 konjskasnagasat = 0,735 50 kilovatsati =
= 2,647 8 megadžula =
= 632,37 kilokalorija

Snaga

1 konjska snaga (KS) = 75 kilopondmetara u sekundi
= 735,50 vata

Magnetske jedinice

1 gilbert = 0,795 77 amperzavoja	CGS jedinica magnetomotorne sile
1 ersted (Oe) = 79,577 ampera po metru	CGS jedinica jakosti magnetskog polja
1 gaus (G) = 10^{-4} tesla	CGS jedinica magnetske indukcije
1 maksvel (M) = 10^{-8} vebera	CGS jedinica magnetskog toka

FIZIČKE KONSTANTE

Konstanta	Simbol	Iznos	Jedinica
Brzina svjetla u vakuumu	c_0	$(2{,}997\,925 \pm 0{,}000\,003) \cdot 10^{8}$	m/s
Elementarni naboj	e	$(1{,}602\,10 \pm 0{,}000\,07) \cdot 10^{-19}$	C
Avogadrova konstanta	N_A	$(6{,}022\,52 \pm 0{,}000\,28) \cdot 10^{23}$	1/mol
Magnetska konstanta, permeabilnost vakuuma	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m
Električna konstanta, dielektričnost vakuuma	ε_0	$(8{,}854\,185 \pm 0{,}000\,018) \cdot 10^{-12} = 1/\mu_0 c_0^2$	F/m
Valni otpor vakuuma	Z_0	$376{,}730\,4 \pm 0{,}000\,4 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = \mu_0 c_0$	Ω
Kapacitivna konstanta	K_0	$(55{,}632\,5 \pm 0{,}000\,1) \cdot 10^{-12} = 2\pi\varepsilon_0 = 10^7/2c_0^2$	F/m
Faradayeva konstanta	F	$96\,487{,}0 \pm 1{,}6$	C/mol
Planckova konstanta	h	$(6{,}625\,6 \pm 0{,}000\,5) \cdot 10^{-34}$	Js
„	$\hbar$	$(1{,}054\,50 \pm 0{,}000\,07) \cdot 10^{-34} = h/2\pi$	Js
Boltzmannova konstanta	k	$(1{,}380\,54 \pm 0{,}000\,18) \cdot 10^{-23}$	J/K
Masa elektrona u mirovanju	m_0	$(9{,}109\,1 \pm 0{,}000\,4) \cdot 10^{-31}$	kg
Masa protona u mirovanju	m_p	$(1{,}672\,52 \pm 0{,}000\,08) \cdot 10^{-27}$	kg
Jedinični naboj elektrona	e/m_0	$(1{,}758\,796 \pm 0{,}000\,019) \cdot 10^{11}$	C/kg
[1]Plinska konstanta	R	$8{,}314\,3 \pm 0{,}001\,2 = k\,N_A$	J/mol·K
Normalni volumen savršenog plina	V_0	$0{,}022\,413\,6 \pm 0{,}000\,003\,0$	m^3/mol
[2]Stefan-Boltzmannova konstanta	σ	$(5{,}669\,7 \pm 0{,}002\,9) \cdot 10^{-8}$	W/m^2K^4
[3]Gravitaciona konstanta	G	$(6{,}670 \pm 0{,}015) \cdot 10^{-11}$	Nm^2/kg^2
Standardna gravitacija	g_n	9,806 65	m/s^2

Navedene fizičke konstante preporučila je National Academy of Sciences, SAD, 1963. godine.

[1]Plinska konstanta je upotrijebljena u osnovnoj jednadžbi stanja idealnih plinova $pV = RT$, gdje su p tlak plina, V volumen plina po jednom molu, a T apsolutna temperatura.

[2]Stefan-Boltzmannova konstanta je upotrijebljena pri određivanju snage isijavanja crnog tijela po jedinici njegove površine

$$\Gamma_{is} = \sigma (T^4 - T_0^4)$$

T je apsolutna temperatura površine tijela, T_0 je apsolutna temperatura okoline.
[3]Gravitaciona konstanta služi u određivanju gravitacione sile između dvije točkaste mase

$$F_{12} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

m_1 i m_2 su točkaste mase, a r_{12} je njihova međusobna udaljenost.

POPIS OZNAKA

a	— duljina
$\mathbf{a}$, a	— potencijalni koeficijenti
$\mathbf{a}_0$	— jedinični vektor azimutalne koordinate
A	— atomska težina
$\mathbf{A}$, A	— vektor potencijal
b	— duljina, normirana susceptancija
$\mathbf{b}$, b	— kapacitivni koeficijenti
B	— susceptancija
$\mathbf{B}$, B	— Magnetska indukcija ili gustoća magnetskog toka
c	— duljina, brzina svjetla, konstanta
$\mathbf{c}$	— konstantni vektor
C	— kapacitet, parcijalni kapacitet
$\mathbf{C}$	— konstantni vektor
d	— duljina, promjer, dubina prodiranja vala, doseg vala na vodu
$\mathbf{D}$, D	— električna indukcija ili gustoća električnog toka
e	— elementarni naboj, baza prirodnih logaritama, fokusna udaljenost
$\mathbf{E}$, E	— jakost električnog polja
f	— frekvencija
$\mathbf{f}$, f,	— gustoća sile
F	— Faradayeva konstanta
$\mathbf{F}$, F	— sila
$\mathbf{g}$	— gustoća elektromagnetskog impulsa
g	— normirani odvod
G	— provod silocijevi, odvod na vodu
h	— duljina, visina, Planckova konstanta
$\mathbf{H}$, H	— jakost magnetskog polja
i	— redni broj, jakost električne struje
$\mathbf{I}$, I	— jakost električne struje, impuls, elektromagnetski impuls
j	— gustoća struje, imaginarna jedinica
k	— redni broj, modul eliptičkog integrala, konstanta
K	— konstanta
$\mathbf{K}$, K	— linijska gustoća struje ili strujni oblog
l	— redni broj, duljina, duljina voda
L	— induktivitet, međuinduktivitet, parcijalni induktivitet
m	— redni broj, masa, omjerni broj
M	— masa mola, međuinduktivitet, omjer maksimalnog i minimalnog napona na vodu
$\mathbf{M}$, M	— moment vrtnje, intenzitet magnetiziranja

n — redni broj, omjerni broj
$\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_0$ — jedinični vektor normale
N — Avogadrov broj, broj molekula u jedinici volumena, broj čestica, broj zavoja u zavojnici (svitku)

p — broj pari magnetskih polova, konstanta, operator, broj naponskih petlji, tlak plina
$\mathbf{p}$, p — dipolni moment
P — snaga, gubici
$\mathbf{P}$, P — polarizacija, molarna polarizacija

q — konstanta, gustoća topline
Q — naboj, količina topline

r — razmak dviju točaka, polumjer, radijalna koordinata, redni broj, normirani otpor
$\mathbf{r}$, r — radijusvektor
$\mathbf{r}_0$ — jedinični radijusvektor, jedinični vektor radijalne koordinate
R — električni otpor, rad, faktor refleksije ravnog vala, polumjer
$\mathbf{R}$ — radijusvektor

s — duljina linije, udaljenost od kraja voda prema početku, faktor induktivne sprege
$\mathbf{s}$ — vektor linije
$\mathbf{s}_0$ — jedinični vektor linije
S — površina, entropija
$\mathbf{S}$ — transformaciona matrica

t — vrijeme
$\mathbf{t}$, t — elektromagnetsko naprezanje
$\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_0$ — jedinični vektor tangente na plohu
$\mathbf{t}_0$ — jedinični vektor tangencijalne koordinate
T — vremenska perioda, vremenska konstanta, termodinamička (apsolutna) temperatura
$\mathbf{T}$ — transmisona matrica, tenzor naprezanja

u — električni napon, grupna brzina, gustoća unutrašnje energije, realna koordinata
$\mathbf{U}$, U — električni napon
U — unutrašnja energija

v — imaginarna koordinata
$\mathbf{v}$, v — brzina, fazna brzina
V — volumen
V_0 — volumen kugle

w — gustoća energije, analitička funkcija
W — energija

x, — kartezijeva koordinata, koordinata, normirana reaktancija
$\mathbf{x}_0$ — jedinični vektor kartezijeve koordinate
X — reaktancija

y — kartezijeva koordinata, normirana admitancija, koordinata
$\mathbf{y}_0$ — jedinični vektor kartezijeve koordinate
$\mathbf{Y}$, Y — admitancija
Y_v, Y_0 — valna admitancija

z — kartezijeva koordinata, aksijalna koordinata, omjerni broj, normirana impedancija, valni otpor putujućih valova na vodu
$\mathbf{z}_0$ — jedinični vektor koordinate
$\mathbf{Z}$, Z — impedancija
Z_v — valna impedancija
Z_0 — valni otpor
Z — broj protona u jezgri atoma

α — kut, azimutalna koordinata, prigušna konstanta, razmjernost dipolnog momenta i jakosti polja

β — kut, fazna konstanta

γ — valna konstanta, gustoća materijala
$\boldsymbol{\gamma}$ — valna konstanta
$\boldsymbol{\Gamma}$, Γ — Poyntingov vektor

δ — kut gubitaka u izolatoru, dubina prodiranja vala u stijenki valovoda
Δ — Laplaceov operator, mali dio

ε — dielektričnost
ε_0 — električna dimenziona konstanta
ε_r — dielektričnost, relativna dielektričnost

ζ — kartezijeva koordinata, koeficijent eksponencijalnog voda

η — kartezijeva koordinata, korisnost prijenosa

ϑ — tangencijalna koordinata, kut

$\varkappa$ — električna vodljivost

λ — linijska gustoća naboja, duljina vala

μ — permeabilnost
μ_0 — magnetska dimenziona konstanta
μ_r — permeabilnost, relativna permeabilnost

ν — kutna brzina

ξ — kartezijeva koordinata

$\boldsymbol{\Pi}$, Π — Hertzov vektor

ϱ — prostorna gustoća naboja, radijalna koordinata, faktor refleksije na vodovima

σ — plošna gustoća naboja

τ — vrijeme, faktor transimisije na vodovima

φ — skalarni potencijal, razlika potencijala, fazni pomak, potencijalna funkcija
Φ — tok, magnetski tok, električni tok

χ — susceptibilnost, kompleksni potencijal

ψ — fazni kut, valna funkcija, strujna funkcija
Ψ — ulančeni magnetski tok

ω — kružna frekvencija
Ω — prostorni kut

VAŽNIJA LITERATURA

1. ABRAMOWITZ M., STEGUN I. A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas Graphs and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, 1965
2. ADLER R. B., CHU L. J., FANO R. M., Electromagnetic Energy Transmission and Radiation, Wiley, 1960
3. ABRAHAM M., BECKNER R., Theorie der Elektrizität, I., I., Teubner, 1933
4. BARNES C. C., Power Cables, Their Design and Installation, Chapmann, 1966
5. BECKENBACH E. F., Modern Mathematics for the Engineer, Mc Graw — Hill, 1956
6. BENSON F. A., Millimetre and Submillimetre Waves, Iliffe, 1969
7. BEWLEY L. V., Traveling Waves on Transmission Systems, Wiley, 1933
8. BOZORTH R. M., Ferromagnetism, Van Nostrand, 1951
9. BRONWELL A., Advanced Mathematics in Physics and Engineering, Mc Graw — Hill, 1953
10. BUCHHOLZ H., Elektrische und magnetische Potentialfelder Springer, 1957
11. COLLIN R., Field Theory of Guided Waves, Mc Graw — Hill, 1960
12. DI BENEDETTO A. T., The Structure and Properties of Materials, Mc Graw — Hill, 1967
13. DURAND E., Electrostatique et magnétostatique, Masson, 1953
14. FELDBAUM A. A., DUDIKIN A. D. MANOVCEV A. P., MIROLJUBOV N. N. Teoretičjeskije osnovi svjazi i upravljenija, Gostehizdat, 1963
15. FINKA D. G., CARROLL J. M., Standard Handbook for Electrical Engineers, Mc Graw — Hill, 1968
16. HARRINGTON R. F., Time — harmonic Electromagnetic Fields, Mc Graw — Hill, 1964
17. HARVEY A. F., Microwave Engineering, Academic Press, 1963
18. JACKSON J. D., Classical Electrodynamics, Wiley, 1963
19. JEANS J. H., Mathematical Theory of Electricity and Magnetism Cambridge Univ. Press, 1948
20. JORDAN E. C., Electromagnetic Waves and Radiating Systems, Prentice — Hall, 1950.
21. KITTEL C., Introduction to Solid State Physics, Wiley, 1967
22. KÜPFMÜLLER K., Einführung in die theoretische Elektrotechnik, Springer, 1967
23. LANDAU L. D., LIFŠIC E. M., Teorija polja, Fizmatgiz, 1960
24. LANDAU L. D., LIFŠIC E. M., Elektrodinamika splošnih sred, Gostehizdat, 1957
25. MARCUVITZ N., Waveguide Handbook, Mc Graw — Hill, 1951
26. MAXWELL J. C. Treatise on Electricity and Magnetism I., II., Reprint, Dover 1954
27. OLLENDORFF F., Potentialfelder der Elektrotechnik, Springer, 1932

28. PANOFSKY W. R. H., PHILLIPS M., Classical Electricity and Magnetism, Addison — Wesley, 1955
29. PLANCK M., Einfuhrung in die Theorie der Electrizität und des Magnetismus, Hirzel, 1928
30. RYSHIH I. M., GRADSTEIN I. S. Summen-, Produkt- und Integral- Tafeln, VEB, 1963
31. SCHELKUNOFF S. A., Electromagnetic Waves, Van Nostrand, 1943
32. SIMONYI K. Theoretische Elektrotechnik, VEB, 1956
33. SLATER J. C., Microwave Electronics, Van Nostrand, 1950
34. SMYTHE W. R., Static and Dynamic Electricity, Mc Graw — Hill, 1950
35. STRATTION J. A., Electromagnetic Theory, Mc Graw — Hill, 1941
36. SURUTKA J., Elektromagnetika, Grad. knjiga, 1965
37. TAMM I. E., Osnovi teorii električjestva, Gostehizdat, 1949
38. VAN BLADEL J., Electromagnetic Fields, Mc Graw — Hill, 1964
39. WAGNER C. F., Electrical Transmission and Distribution, Reference Book Westinhouse El. Co., 1950
40. WAGNER K. W., Operatorenrechnung, Teubner, 1940
41. WEAST R. C., SELBY S. M., Handbook of Chemistry and Physics, Chemical Rubber Co., 1966
42. WEBER E., Electromagnetic Fields, Theory and Application I. Wiley, 1950
43. WHITTAKER E. T., Histrory of the Theories of Aether and Electricity, I., II., Nelson, 1953

KAZALO

admitancija, pogonska 402, 367, 453
— poprečna 367, 453
analitička funkcija 617
anizotropni materijali 47
anoda, prohvat, 628
arkus funkcija 543
area funkcija 544
atomska jezgra, masa 16
atomska težina 15
avansirano vrijeme 267
Avogadrov broj 15

bakar 20, 23, 269, 295, 380
Besselova diferencijalna jednadžba 674
— funkcija, modificirana 683
bezvrtložno polje 56
blizinski efekt 372
Biotov i Savartov zakon 33, 583
Brewsterov kut 310
brzina čela vala 259
— , fazna 269, 275, 380
— , grupna 276, 278
— , kutna 380
— rasprostiranja vala 42
broj, Avogradrov 15
— petlji 397

Carterov faktor 652, 655
Cauchyevi granični uvjeti 589
Cauchyev integral 618
Cauchy-Riemannova jednadžba 617
cijev, strujna 21
cilindar, dva koaksijalna 687
— , koaksijalni 108
— , kružni 112
— , strujni 216
— , strujni okrugli 152
— , vodljivi 124
cilindrička funkcija 674
cilindrički kondenzator 66
— rezonator 516
cirkulacija 575
cirkularna funkcija 542
Coulombova sila 16
Coulombov zakon 57

čelo vala, brzina, 259
— , trajanje 430
čvorište u vodu 435
čvrstoća, električna 45

decibel 274
dekrement 511
delta funkcija 580
dielektrična histereza 44
— kugla 212, 652, 711
dielektričnost 44, 129, 289, 290, 294
— , kompleksna 293, 294
dielektrik 43
diferencijalni operator 576
diferenciranje 548
difuzija 337
dijafragma, induktivna 506
— , kapacitivna 507
dijagram Smithov 417
dijamagnetizam 87
dimenziona konstanta 42
dipol 166
— , električni 28, 77
— , inducirani 44, 82
— , linijski električni 122
— , magnetski 28, 160
— , permanentni 44, 82
dipolni moment 76, 78, 161, 294
— — magneta 162
Diracova funkcija 433, 580
Dirichletovi granični uvjeti 589
distorzija vala 269
divergencija 574, 605
djelovanje, kapacitivno 247
— , induktivno 247
dobrota 515, 517
— oscilatora 511, 518, 520
doseg vala 344, 379, 649
dubina prodiranja vala 272, 301, 303
duljina, konverziona 495
— , kritična 479
— vala 269, 379, 430
dvodimenzionalni prostor 610
dvokrilni hiperboloid 714
dvožični vod 167, 358

efekt, blizinski 372
ekscentrični kondenzator 623
eksponencijalni odsječak 455
— vod 454
ekvipotencijalna ploha 56
elastična sila 293
električna čvrstoća 45
— energija 361
— indukcija 30
— sila 181
— — na površini vodiča 182
— sprega 360
— struja 21
— — , gustoća 31
električni dipol 28, 77
— — , linijski 122
— izolirani sustav 249
— kondenzator 20, 26, 199
— — , energija 199
— napon 58
— tok 29, 40
— val 464
električno polje 28
električno polje, jakost 28
— — , strujno 31
elektroda 62
— , komplanarna 656
elektroliti 17
elektromagnetski impuls 195, 244
— val 28, 253
elektromagnetsko polje 28
elektromotorna sila, inducirana 36
elektron, slobodni 23
elementarni naboj 15
elipsoid 714, 717
— , rotacioni 100
eliptički integral 566
— kondenzator 633
— polarizirani val 286
— tip jednadžbe 603
endovibrator 512
energija 198
— dipola 205
— , električna 361
— elektroničnog kondenzatora 199
— , magnetska 237, 361
— magnetskog polja 201
— mnoštva strujnica 202
— nabijenih vodiča 235
— , potencijalna 248
— sustava dipola 206
energija titranja 511, 514
— — oscilatora 518
— , unutarnja 209
— vezanja atoma 17
Eulerov integral 564
— tip diferencijalne jednadžbe 694

faktor, Carterov 652, 655
— gubitaka 374, 518
— nejednolikosti raspodjele električnog toka 115
— refleksije 327, 411, 436, 509
— transmisije 437
— zaštite 93
— — zaštitnog užeta 126
Faradayeva konstanta 16
Faradayev disk 37
— zakon 36
fazna brzina 269, 275, 380
— konstanta 268, 275, 291, 378, 467
Fermijeva kugla 23
feromagnetik 45, 88, 208
feromagnetska kugla 212
feromagnetski oklop 92
formula, Taylorova 531
Fourierov red 537
frekvencija, kritična 467, 480
— , kružna 380, 537
— oscilacija 516
— plazme 296
— titranja 513, 519
Fresnelov integral 565
Fresnelova jednadžba 306
funkcija, analitička 617
— , area 544
— , arkus 543
— , Besselova modificirana 683
— , cilindrička 674
— , cirkularna 542
— , delta 580
— , Diracova 580, 433
— , Gaussova 565
— gustoće 541
— , gama 564
— , hiperbolna 543
— , izmjenična 537
— , Kelvinova 685
— , Legendreova 701
— , matrična 600
— , neparna 537
— , normirana 542
— , ortogonalna 541
— , parna 537
— , periodička 537
— , potencijalna 618
— , sferna 700
— , simetrična 537
— , udarna 431

gama funkcija 564
Gaussova funkcija 565
Gaussov integral greške 565
— stavak 578
generatorska strana 334, 340
geometrijski red 532
gradijent 574, 605
gramatom 15
granični kut 310, 320
— uvjeti, Cauchyevi 589
— — , Dirichletovi 589
— — , Neumannovi 589
Greenov stavak 579
grupna brzina 276, 278

gubici strujnog kruga 247
— u izolatoru 363
— vrtložnih struja 331
gubitak, Jouleov 244
gustoća električne struje 31
— naboja 18
— — , linijska 19
— — , plošna 19
— — , prostorna 19
— sile 316
— struje 22
— — , linijska 24, 331
— — , plošna 22
— toka 29, 30

harmonička analiza 541
harmonički val 267
Hertzov vektor, 266, 465, 513
— — , magnetski 267
hiperbolički tip jednadžbe 603
hiperbolna funkcija 543
hiperboloid dvokrilni 714
— jednokrilni 714
histereza 208, 297
— , dielektrična 44
homogeno polje 88

impedancija, izlazna 335
— , karakteristična 258
— , koncentrirana 437
— , kratkog spoja 384
— , pogonska 402
— , ulazna 335
— , uzdužna 366, 453
— , valna 258, 268, 291, 385, 399
— voda 412
— — , karakteristična 378
— — praznog hoda 382
impuls, eksponencijalni 430
— , elektromagnetski 195, 244
— polja 278
— , pravokutni 432
— , radio 432
— rasprostiranja 279
— , video 432
inducirana elektromotorna sila 36
indukcija 30
— , električna 30
— , magnetska 30
induktivitet 130, 239, 250
— među strujnicama 151
— , parcijalni 375
— strujnog kruga 130
— , unutarnji 130, 363
— , vanjski 130
— voda 375
induktivna dijafragma 506
— sprega 360, 392
induktivno djelovanje 247
integral, Cauchyev 648
— , eksponencijalni 563
— , eliptički 566
— , Eulerov 564
— , Fresnelov 565
— greška, Gaussov 565
— kosinusa 564
— logaritma 563
— sinusa 564
integriranje 551
intenzitet magnetiziranja 86
ionizacioni rad 16
izduženi sferoid 719
izlazna impedancija 335
izmjenična funkcija 537
izolacija, prostorno vođenje 373
— , strujno vođenje 373
izolator 17, 44, 322, 323, 327
— , gubici 363
izolirani električni sustav 249
— magnetski sustav 249
— sustav 248
izraženi magnet električnog stroja 612

jakost polja 27
— električnog polja 28
— magnetskog polja 28
— plošne struje 25
— struje 21
jaram električnog stroja 614, 693
jednadžba, eliptički tip 603
— , hiperbolički tip 603
— kontinuiteta 31
— — struje 25
— , naponska 359
— , parabolički tip 603
— petlji, naponska 395
— stanja 207
— , strujna 399
— , telegrafska 254
— voda 377
— — , naponska 364
jednokrilni hiperboloid 714
Jouleov gubitak 244
— zakon 244

kabel, koaksijalni 108
kapacitet 250
— , među kuglama 173
— , parcijalni 227, 374
— , pogonski 230
— voda 374
kapacitivna dijafragma 507
— snaga 292
— sprega 360, 392
kapacitivni koeficijent 224
— provodnik 67
kapacitivno djelovanje 247
karakteristična impedancija 258
— — voda 378
Kelvinova funkcija 685
Kirchhoffov zakon za struje 25, 27, 32
koaksijalni cilindar 108
— — , dva 687
— kabel 108

koeficijent, binomni 531
— , kapacitivni 224
— , potencijalni 224, 374
kompenzator reaktancije 415
komplanarna elektroda 62
— ravnina 657
komplanarni plošni naboj 621
kompleksna dielektričnost 293, 294
— permeabilnost 297
kompleksni provod 292
komponente, simetrične 401
koncentrična vodljiva kugla 65
koncentrirana impedancija 437
kondenzator, cilindrički 66
— , ekscentrični 623
— , električni, 20, 26, 199
— , eliptički 633
— , kuglasti 69
— , pločasti 63, 246, 514, 648
— prema Rogowskom 652
konduktivna sprega 392
konformno preslikavanje 636
konstanta, dimenziona 42
— elastičnosti 293
— , fazna 268, 275, 291, 378, 467
— otpora 293
— , prigušna 260, 268, 272, 291, 299, 378, 491, 493
— , primarna 298
— rasporeda napona i struje 414
— , valna 258, 268, 275, 367, 378, 385, 399, 467
— voda, sekundarna 378
— , vremenska 46
konverziona duljina 495
koordinatni sustav, Kartezijev 604
— — , ortogonalni 604
kratki spoj 437
— — , impedancija 384
— — , pogon
— — , pokus 384
kratko spojeni ogranak 416
kritična duljina 479
— frekvencija 467, 480
— valna duljina 467
krugovi, strujni 237
kružna frekvencija 380, 537
— strujnica 146
kružne strujnice, dvije 151
kružni cilindar 112
kružno polarizirani val 284
kugla, dielektrična 212, 652, 711
— , dvije 165
— , Fermijeva 23
— , feromagnetska 212
— , vodljiva 68
— , koncentrična vodljiva 65
kuglasti kondenzator 69
kugline elektrode, dvije 165
kut, Brewsterev 310
— , granični 310, 320
— gubitaka 291, 292, 367
— totalne polarizacije 310
kutna brzina 380
kvazistatički rezonator 518

Laplaceova jednadžba 57, 717
Laplaceov operator 577, 606
Legendreova funkcija 701
— jednadžba 700
Legendereov polinom 701
— — , pridruženi 704
Lenzov zakon 36
linearni operator 594
linearno polarizirani val 283
linijska gustoća naboja 19
— — struje 24, 331
— struja na pravcu 131
linijski električni dipol 122
— naboj 19, 97
Lorentzov odnos invarijantnosti 265
Lorentzova sila 179

magnet električnog stroja, izraženi 612
magnetik 45
magnetska energija 237, 361
— indukcija 30
— polarizacija 86
— rezonancija, nuklearna 185
— sila 181
— silnica 35
— sprega 360
— susceptibilnost 87
magnetski dipol 28, 160
— potencijal, skalarni 59
— sustav, izolirani 249
— tok 40
— — ulančeni 129
— — val 464
— — , transverzalni 464
magnetsko polje 28
— — , energija 201
— — , jakost 28
— — , uzbuda 59
makroskopski način gledanja 18
masa atomske jezgre 16
— elektrona 16
materijali, anizotropni 47
matrica 590
— admitancija 399
— impedancija petlji 395
— , spojna 396
— , transformaciona 400
— , transmisiona 338, 388
matrična funkcija 600
Maxwellova jednadžba I. 34
— — II. 36, 585
— — 583
— — na granici 52
Maxwellove jednadžbe 32, 39
međuinduktivitet 130, 238
modificirana Besselova funkcija 683
modulirana sinusoida 278

molarna polarizacija 84
molekula, polarna 86
moment, dipolni 76, 78, 161, 294
— magneta, dipolni 162
— vrtnje 184

nabla operator 576
naboj 322
— , elementarni 15
— , gustoća 18
— ispred dielektrične ploče 690
— , linijski 19, 97
— , magnetski 28, 161, 166
— na dužini 100
— na paralelnim pravcima 111
— na pravcu, linijski 619
— , linijska gustoća 19
— , plošnja gustoća 19
— , plošni 19
— , prostorni 18
— , relaksacija 46
— , slobodni 82
— , točkasti 18, 20, 68, 162, 197, 198, 711
nailazeći val 436, 437
namot električnih strojeva i transformatora 355
napon, električni 58
— gibanja 37
— transformacije 37
naponska jednadžba 359
— — petlji 395
— — voda 364
naponski stojni val 421
naprezanje 187, 190
nečistoće u izolaciji 91
negativni val 259
neparna funkcija 537
neper 274
neperiodički signal 428
normirana funkcija 542

oblik vala 467
oblog, strujni 25
odsječak, eksponencijalni 455
odslikavanje naboja 75
— , uzajamno 534
odvod voda 373
ogranak, kratko spojeni 416
Ohmov zakon 45
oklop, feromagnetski 92
okrugli štap 101
operator, diferencijalni 576
— , nabla 576
— , Laplaceov 577, 606
— , linearni 594
— , valni 265
ortogonalna funkcija 541
ortogonalni koordinatni sustav 604
oscilator 511
— , dobrota 511, 518, 520
otpor 61
— , valni 258, 468
— voda 372

parabolički tip jednadžbe 603
paralelna strujna traka 143
paralelni naboj na pravcu, dva 622
— pravac, dva 134
— vodič, dva 169
— — , tri 231
paramagnetizam 87
parcijalni induktivitet 375
— kapacitet 374
— razlomak 558
perioda, vremenska 380
periodička funkcija 537
periodički signal 428
permanentni dipoli 44, 82
permeabilnost 45, 289
— , kompleksna 297
petlja, strujna 166
pločasti kondenzator 63, 246, 514, 648
ploha, ekvipotencijalna 56
plošna gustoća naboja 19
— — struje 22
— sila 183
— struja, jakost 25
plošni naboj 19
— — , komplanarni 621
pogon kratkog spoja 369
— praznog hoda 369
pogonska admitancija 367, 402, 453
— impedancija 402
pogonski kapacitet 230
Poissonova jednadžba 57, 583, 589, 607
pokus praznog hoda 382
polarizabilnost 290
polarizacija 83, 294
— dielektrika 44
— dipola 289
— kugle 213
— , kut totalne 310
— , magnetska 86
— , molarna 84
— , ravnina 283, 307
— , totalna 309, 311
polarna molekula 86
polinom, Legendreov 701
— , pridruženi 704
pol magneta 27
polje, bezvrtložno 56
— , električno 28
— , — , jakost 28
— , elektromagnetsko 28
— , homogeno 88
— , jakost 27
— , magnetsko, jakost 28
— , potencijalno 55
— , statičko 53
— , strujno 165

— u triodi 627
— , vrtložno 35
potencijal 56
— , elektrostatski 581
— , kompleksni 638
— na vodiču 133
— , retardirani 265, 587
— , skalarni 55, 262, 263
— , — magnetski 59
— , — vektorski 127, 134, 262, 263
potencijalna energija 248
— funkcija 618
potencijalni koeficijent 224, 374
potencijalno polje 55
pozitivni val 259
Poyntingov vektor, 244, 273, 312, 316 327, 486
— — upadnog vala 333
pravilo desnog vijka 25
pravokutna prizma-rezonator 512
— zavojnica 38
pravokutne petlje, dvije 157
pravokutni impuls 432
— rezonator 514
pravokutnik, strujni 24
prazan hod 437
— — , impedancija 382
— — , pogon 369
— , pokus 382
— prostor 41
preplet vodiča 234, 374
preslikavanje, komformno 636
prigušna konstanta 260, 299, 378, 491, 493
prigušeni titraj 432
prigušnica, zaštitna 442
primarna konstanta 298
prizma-rezonator, pravokutna 512
prohvat anode 628
prolazni val 304, 324, 437
— — , ravnine 305
prostor, dvodimenzionalni 610
prostorna gustoća naboja 19
prostorni naboj 18
prostorno vođenje izolacije 373
provod 61
— , kompleksni 292
provodna struja 27
provodnik, kapacitivni 67
prstenasti strujni krug 149
putujući val 428, 434
puzava struja 25

rad, ionizacioni 16
radio impuls 432
rasprostiranje impulsa 279
— val, brzina 42
ravni val 254
ravnina, komplanarna 657
— konstatne amplitude 312
— — faze 312, 474
— polarizacije 283, 307
— prolaznog vala 305
— reflektiranog vala 305
— upadnog vala 305
razlika potencijala 56
razlomak, parcijalni 558
red, Fourierov 537
— , geometrijski 532
redovi potencija 532
reducirana duljina voda 445
refleksija vala 303
— , totalna 310, 320, 322
— , — negativna 437
— , — pozitivna 437
— , shema 445
refrakcija vala 303
regularni signal 428
relaksacija naboja 46
— — , vremenska konstanta 268
rešetka naboja 635
retardirani potencijal 265, 587
retardirano vrijeme 263, 267
rezonancija, nuklearna magnetska 185
rezonator 512
— , cilindrički 516
— , kvazistatički 518
— , pravokutna prizma- 512
— , pravokutni 514
— , torusni 522
rotacija 575, 606
rotacioni elipsoid 100

Schwarz-Christoffelov teorem 645
sferna funkcija 700
sferoid 100
— , izduženi 719
— , spljošteni 719
shema refleksije 445
signal, neperiodički 428
— , periodički 428
— , regularni 428
sila, Coulombova 16
— , elastična 293
— , električna 181
— , gustoća 316
— , inducirana elektromotorna 36
— , Lorentzova 179
— , magnetska 181
— na dielektrik 214
— na dipol 183
— na granici u magnetskom polju 219
— na feromagnetik 214
— na površini vodiča 182
— na strujnicu 182
— na vodič u utoru 221
— , plošna 183
— , translatorna 184
— tromosti 293
— viskoznog trenja 293
silnica 29
— dviju paralelnih strujnica 135
— , magnetska 35

silocijev 60, 189, 290
silocijevi, otpor 61
— paralelno 62
— , provod 61
— u seriji 62
simetrična funkcija 537
simetrične komponente 401
simetrični vod 400
sinusoida, modulirana 278
skalarni potencijal 55, 262, 263
— magnetski potencijal 59
skinefekt vodiča 372
skupina točkastih naboja 69
slobodni elektron 23
— naboj 82
Smithov dijagram 417
snaga gubitaka 292, 511
— , kapacitivna 292
Snelliusov zakon 306, 310
solenoid 154
specifična vodljivost 45
spljošteni sferoid 719
spojna matrica 396
sprega, električna 360
— , induktivna 360, 392
— , kapacitivna 360, 392
— , konduktivna 392
— , magnetska 360
— , poprečna 369
srednja geometrijska udaljenost 374
statična veličina 54
statičko polje 53
stavak, Gaussov 578
— , Greenov 579
— , Stokesov 579
Stirlingova formula 565
Stokesov stavak 579
stojni val 341
strana, generatorska 334, 340
— tereta 334, 340
struja, električna 21
— , gustoća 22
— , jakost 21
— , kapacitivna 292
— , linijska, na pravcu 131
— , linijska gustoća, 24, 331
— , plošna gustoća 22
— , — jakost 25
— , pomačna 27, 32
— prostornog naboja 609
— , provodna 27, 32, 291, 292
— , puzava 25
— , vrtložna 297, 330
strujanje energije 244
strujna cijev 21
— funkcija 619
— jednadžba 359, 399
— — voda 364, 396
— kugla 707
— petlja 166
— traka, paralelna 143
strujni cilindar 216
— krug, gubici 247
— — , induktivitet 130
— — , pravokutnik 24
— — , prstenasti 149
— — , ulančeni tok 137
— krugovi 237
— oblog 25
— okrugli cilindar 152
— pravokutnik 24
strujnica 21, 33
— , kružna 146
strujnica, dvije kružne 151
strujno električno polje 37
— polje 165
— vođenje izolacije 373
stup 416
susceptancija, kapacitivna 292
susceptibilnost 83, 290
— , magnetska 87
— , molarna 87
sustav, izolirani električni 249
— , izolirani 248
— , — , magnetski 249
sustav, Kartezijev koordinatni 604
— , konikoidni 714
— , neizolirani 248, 250
— , ortogonalni koordinatni 604

Taylorova formula 531
telegrafska jednadžba 254
tenzor naprezanja 187, 195, 316
termičko stanje 207
težina, atomska 15
tlak na električnu kuglu 219
— upadnog vala 333
točka promatranja 33
— izvora 33
točkasti naboj 18, 20, 68, 162, 197, 198, 711
— — , dva 70
tok, električni 29, 40, 290
— , gustoća 29, 30
— , strujni 40
— , ulančeni — strujnog kruga 137
torus 99
torusni rezonator 522
totalna refleksija 310, 320, 322
— — , negativna 437
— — , pozitivna 437
trajanje čela vala 430
transformaciona matrica 400
transformator impedancije 415
translatorna sila 184
transmisiona matrica 338, 388
transverzalni električni val 345, 464
— magnetski val 346, 464

udarna funkcija 431
ulančeni magnetski tok 129
— tok strujnog kruga 137

unutarnja energija 209
unutarnji induktivitet 130, 363
upadni val 304
uzajamno odslikavanje 168
uzbuda magnetskog polja 59
uzdužna valna duljina 473, 480

vakuum 41
val, doseg 344, 379, 469, 649
— , distorzija 269
— , dubina prodiranja 272, 301, 303
— , duljina 269, 379, 430
— , električni 404
— , elektromagnetski 28, 253
— , eliptički polarizirani 286
— , harmonički 267
— , konstanta 467
— , kritična duljina 348
— , kružno polarizirani 284
— , linearno polarizirani 283
— , magnetski 464
— , nailazeći 436, 437
— , naponski stojni 421
— , negativni 259
— , neharmonički 274
— , nosilac 278
— , oblik 467
— , pozitivni 259
— , prolazni 304, 324, 437
— , putujući 428, 434
— , ravni 254
— , refleksija 303
— , reflektirani 304, 436
— , refrakcija 303
— spljoštenog čela 431
— , stojni 341, 413
— strmog čela 431
— , transverzalni električni 345, 464
— , — magnetski 346, 464
— , upadni 304
— u ploči 345
valna duljina, kritična 467
— — , uzdužna 473, 480
— impedancija 258, 268, 291, 378, 385, 399
— — voda 378
— konstanta 258, 268, 275, 367, 378, 385, 399, 467
valnj operator 265
— otpor 258, 381, 468
— — valovoda 480
valovod 460, 468, 696
— , okrugli 478
— , valni otpor 480
— , tračni 463
vanjski induktivitet 130
vektor, Hertzov 266, 465, 513
— , — , magnetski 267
— , Poyntingov 244, 273, 312, 316, 327, 486
— , — , upadnog vala 333
— , svojstveni 594
vektorpotencijal 127, 134, 262, 263
— strujnice 132
veličina, statična 54
video impuls 432
vod bez distorzije 381
— , četvrtvalni 382
— , dugi 376
— dvožični 167, 358
— , eksponencijalni 454
— , energetski 354, 355
— , generatorska strana 356
— , impedancija 412
— , induktivitet 375
— , izlazna strana 356
— , jednadžba 377
— , kapacitet 374
— , komunikacioni 354, 355
— , konstanta 372
— , kratki 365
— , mnogožični 391
— , naponska jednadžba 364
— , nehomogeni 452
— , odvod 373
— , otpor 363, 372
— , primarna konstanta 365
— reducirane duljine 445
— , simetrični 400
— , strujna jednadžba 364, 396
— , teretna strana 356
— , ulazna strana 356
vodič 17, 47, 298, 301, 322, 323, 327
— , odvod struje 360
— , pad napona 360
— , paralelni 230
— , preplet 374
— , skinefekt 372
vodljiva kugla, 68
— — , koncentrična 65
vodljivi cilindar 124
— ugao 176
vodljivost 45, 289, 290, 294, 301
— , kompleksna 292
— metala 295
— , specifična 45
vremenska konstanta relaksacije naboja 46, 268
— perioda 380
vrijednost, svojstvena 594
vrijeme, avansirano 267
— , retardirano 263, 267
vrtložna struja, gubici 331
vrtložno polje 35

zakon Coulombov 57
— Faradayev 36
— Jouleov 244

zakon, Kirchhoffov za struje 25, 27, 32
— , Lentzov 36
— , Ohmov 45
— o održanju električnog naboja 25
— protjecanja 35
zaslon, magnetski 94
zaštitna prigušnica 442
zaštitno uže 126
zavojnica 154
— , pravokutna 38

»TEHNIČKA KNJIGA«

IZDAVAČKO PODUZEĆE

41001 ZAGREB
Jurišićeva 10 - pošt. pret. 816

TELEFON 35-097. RAČUN KOD SDK ZAGREB BROJ 30107-601-3455

IZVOD IZ KATALOGA IZDANJA

Agroskin:
Hidraulika (izlazi u proljeće 1973.)

Andrejev:
Mehanika I — Statika 45,00
Mehanika II — Kinematika 80,00
Mehanika III — Dinamika (izlazi u proljeće 1973.)

Apsen:
Logaritamsko računalo 35,00
Repetitorij elementarne matematike 30,00
Repetitorij više matematike, I dio 60,00
Repetitorij više matematike, II dio 60,00
Repetitorij više matematike, III dio 70,00
Riješeni zadaci iz elementarne matematike 40,00
Riješeni zadaci iz više matematike I 60,00
Riješeni zadaci iz više matematike II 70,00
Riješeni zadaci iz više matematike III 50,00

Bazjanac:
Tehnička mehanika — Statika 60,00
Tehnička mehanika — Kinematika 38,00

Bego:
Mjerenja u elektrotehnici 90,00

Bek - Čatoš:
Impregnacija namota elektr. proizvoda 35,00

Blanuša:
Viša matematika I/1 60,00
Viša matematika I/2 60,00
Viša matematika II/1 45,00

Borčić:
Auto karta Jugoslavije 5,00

Bošnjaković:
Molierov i,s-Dijagram 15,00
Nauka o toplini, I dio 70,00

Božičević:
Automatsko vođenje proizvodnih procesa 85,00

Brandenberger - Konrad:
Tehnika mrežnog planiranja 50,00

Bravo:
Rečnik francusko-srpskohrvatski, srpskohrvatsko-francuski 20,00

Bronštejn - Semendjajev:
Matematički priručnik 45,00

Černe:
Nauka o toplini 60,00

Dabac:
Tehnički rječnik
I dio: Njemačko-hrvatskosrpski 140,00
II dio: Hrvatskosrpsko-njemački 140,00

Daudt:
Radio-tehnika, I dio 50,00
Radio-tehnika, II dio 75,00
Radio-tehnika, III dio 80,00

Demidovič:
Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike (s primjenom na tehničke nauke) 60,00

Dimitrijević:
Elektronika — grafički simboli 100,00

Đorđević:
Automobil 30,00

Elazar:
Nomografija 25,00

Enke:
Statika i čvrstoća u primjerima 32,00

Felbinger:
Kočnice automobila 38,00

Gnedenko - Hinčin:
Uvod u teoriju vjerojatnosti 20,00

Godler:
Projekcija uskog filma 32,00

Halasz:
Principikon, zorna elektrotehnika 54,00

Hanžek:
Sferna trigonometrija 60,00
Trigonometrija u ravnini 10,00

Ilić:
Elektrotehnički rečnik — Rusko-srpskohrvatski i srpskohrvatsko-ruski 80,00

Jablonski:
Zadaci i riješeni primjeri iz mehanike 75,00

Jelaković:
Mikrofoni 30,00
Magnetsko snimanje zvuka 20,00

Jelaković:
Uvod u elektrotehniku i elektroniku 48,00
Transformatori i prigušnice 25,00

Juzbašić:
Elektronički elementi 120,00

Kaiser:
Džepni elektrotehnički priručnik 15,00
Žepni elektrotehniški priročnik, slov. 15,00
Elektrotehnički priručnik 200,00
Elektrotehnika — osnovi 60,00

Keler, Maričević, Srb:
Elektromonterski priručnik (izlazi u jesen 1973.)

Koludrović:
Saobraćajna tehnika 40,00

Kurepa:
Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene 90,00
Uvod u matematiku 60,00
Matematička analiza I 70,00
Matematička analiza II 88,00

Kurnik - Palman - Pavković:
Zadaci iz nacrtne geometrije (izlazi u proljeće 1973.)

Lončar:
Osnovi elektrotehnike I 65,00

Machiedo:
Osnove industrijske elektrotehnike II 28,00

Meluzin:
Vježbe i zadaci iz osnova elektrotehnike I 25,00

Mesaroš:
Grafička enciklopedija 300,00

Minorski:
Zbirka zadataka iz matematike 80,00

Pal:
Nacrtna geometrija u anaglifskim slikama 50,00

Pavlić:
Statistička teorija i primjena 80,00

Perić:
Kolor fotografija u praksi 45,00

Prokopljević:
Električni uređaji na motornim vozilima 25,00

Richter:
Nova škola radio-tehnike I 18,00
Nova škola radio-tehnike II 18,00

Richter:
Nova škola radio-tehnike III 22,00
Nova škola radio-tehnike IV 22,00
Nova škola radio-tehnike V 25,00
Nova škola radio-tehnike VI 30,00
Nova škola radio-tehnike VII 35,00
Nova škola radio-tehnike VIII (izlazi u jesen 1973.)

Riello:
Uređaji za uzemljenje 20,00

Smrkić:
Uvod u televiziju 50,00

Srb:
Kabelska tehnika, priručnik 80,00
Asinhroni motori, priručnik 78,00

Strubecker:
Nacrtna geometrija 60,00

Štefanini:
Fortran — udžbenik za programiranje (izlazi u proljeće 1973.)

Šurina:
Impulsne pojave i sklopovi 46,00
Tranzistorska tehnika 45,00
Frekventna modulacija 45,00

Taboršak:
Studij rada 46,00

Tadej:
TVO — televizor 60,00
TV-servis 150,00
TVB — televizija u boji 220,00

Turk:
Elektronički sklopovi 100,00

Vistrička - Uremović:
Sheme spajanja u elektrotehnici I/1
Sheme spajanja u elektrotehnici I/2 (izlazi u jesen 1973.)

Vistrička:
Sheme spajanja u elektrotehnici II (izlazi u jesen 1973.)

Vranić:
Vjerojatnost i statistika 100,00

Vucelić:
Apollo 13 — javlja: Houston, imamo problem 100,00
Apollo 14 — javlja: Motor ugašen, mi smo na Mjesecu 100,00

Zarić:
Matematička analiza I 50,00
Matematička analiza II 60,00

UVJETI PRODAJE

Poduzećima, ustanovama i knjižarama knjige šaljemo otvoreno — plaćanje virmanom. Knjižarama odobravamo rabat od 20%.

Privatnim kupcima knjige šaljemo uz unaprijed doznačenu uplatu na naš tekući račun.

SVE KNJIGE DAJEMO NA OTPLATU DO DESET MJESECI. NAJMANJI IZNOS DIN 50.—. NAJMANJA MJESEČNA OTPLATA DIN 20.—.

Znak: 7304 SV

Izdanje:

Prof. dr ing. TOMO BOSANAC
TEORETSKA ELEKTROTEHNIKA

Stručna recenzija:
Prof. dr ing. DANILO BLANUŠA
Prof. dr ing. RADENKO WOLF

Izdavač:
TEHNIČKA KNJIGA, izdavačko poduzeće
ZAGREB Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara:
Ing. KUZMAN RAŽNJEVIĆ

Uredništvo sveučilišnih udžbenika
Glavni urednik:
ZVONIMIR VISTRIČKA

Urednik edicije:
IVAN UREMOVIĆ

Lektorirao:
ZVONIMIR VELJAČIĆ

Crteže izradio:
TOMISLAV STRUIĆ

Omot opremio:
DAVORIN BOSANAC

Korigirao:
AUTOR

Tisak:
GRAFIČKI ZAVOD HRVATSKE

Meter:
EMANUEL DRAGOJEVIĆ

Tisak dovršen:
VELJAČE 1973.

Na osnovi mišljenja Republičkog sekretarijata za prosvjetu, kulturu i fizičku kulturu SR Hrvatske broj 24/1 - 1973. od 23. siječnja 1973. ova knjiga se smatra proizvodom iz čl. 36. stava 1. točke 7. Zakona o oporezivanju proizvoda i usluga za koji se ne plaća porez na promet proizvoda u smislu odredaba tog Zakona.