

S V E U Č I L I Š T E U S P L I T U
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA
I BRODOGRADNJE - SPLIT

PETAR GUGIĆ

TEORIJA AUTOMATSKOG
REGULIRANJA

I DIO



SPLIT, 1981.

S V E U Č I L I Š T E U S P L I T U
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA
I BRODOGRADNJE - SPLIT

PETAR GUGIĆ

TEORIJA AUTOMATSKOG REGULIRANJA

I DIO



SPLIT, 1981.

Recenzenti:

Dr Juraj Božićević, red. prof.

Dr Vlasta Zanchi, doc.

Lektor:

Ante Matković, dipl. prof.

Odobreno rješenjem Sveučilišta u Splitu

Broj: 013-505/2 od 07. prosinca 1981.

Izdavač: Fakultet elektrotehnike, strojarstva i
brodogradnje u Splitu. R. Boškovića bb

Tisak: Sveučilišna naklada Liber, Zagreb

PREDGOVOR

Veliki napredak automatizacije u zadnjih nekoliko desetljeća odrazio se i u školstvu. Započelo se sa skromnim osnovama, često u okviru nekog srodnog tehničkog predmeta, a danas na fakultetima već postoje opširni programi za potpuno usmjerenje automatizacije. Najopširniji programi su još uvijek na elektrotehničkim fakultetima, gdje je i započela nastava iz automatike. Međutim, u zadnje vrijeme toj tehničkoj disciplini poklanja se sve više pažnje i na ostalim tehničkim školama, posebno strojarskog i tehnološkog smjera.

Nastavno iskustvo na ovom području u usporedbi s klasičnim predmetima (kao što su npr. fizika i kemija) je prilično oskudno, tako da još uvijek postoje razmimoilaženja, kako u pogledu izbora nastavnog gradiva, tako i u pogledu njegovog redoslijeda. Općenito je ipak usvojeno da se nastava započinje linearnim sustavima, s tim da se na školama elektro i strojarskog smjera naglasak daje na regulaciju servomehanizama, a na školama tehnološkog smjera na vođenje tehnoloških procesa. U stvari u jednom i u drugom slučaju osnovna teorija je ista, ali zbog primjene na sustave različitih fizičkih stanja, javljaju se izvjesne razlike u načinu provedbe. Budući da je ovo gradivo namijenjeno prvenstveno električarima i strojarima, primjeri su uzeti iz područja servomehanizama.

Što se tiče redoslijeda nastavnog gradiva, neki autori obradjuju analizu i sintezu linearnih sustava najprije s prijenosnom funkcijom, a potom uvode obradbu s varijablama stanja. Drugi autori paralelno primijenjuju obradbu s prijenosnom funkcijom i s varijablama stanja. U obradbi ovog gradiva prihvaćen je drugi način, jer smatramo da pruža cjelovitiji uvid u problematiku automatskog reguliranja, a inženjera osposobljava da u ovisnosti o naravi problema izabere obradbu koju smatra najprikladnijom. Pri tome se nastojalo sve primjere prikazati na ograničenom broju dobro poznatih objekata, da se pažnja ne bi rasipala na upoznavanje objekta, nego da se u potpunosti može posvetiti obradbi regulacijskog problema.

Možda je ovdje potrebno dati objašnjenje za neuobičajeno opširno obradjeno poglavlje o modeliranju. Neosporno je da uspješnost automatičara podjednako ovisi o vještini modeliranja kao i o poznavanju teorije automatskog reguliranja. A budući da sam u svojoj višegodišnjoj nastavnoj praksi došao do zaključka da velikom broju studenata i nakon završenog pripremnog dijela studija nedostaje primijenjivo znanje iz područja osnovnih fizičkih zakonitosti, smatrao sam da je prije prijelaza na modeliranje dinamičkih sustava nužno potrebno to znanje utvrditi. Da bi što više došla do izražaja analogija među sustavima, uz električke i mehaničke sustave sažeto su iznešene i zakonitosti fluidičkih i toplinskih sustava.

U postavljanju iznešene koncepcije mnogo su mi pomogle konstruktivne kritike dr V.Zanchi i dr J.Božičević. Posebno moram maglasiiti pomoć koju mi je pružio dr J.Božičević u razradi i prečišćavanju gradiva i A.Matković, dipl.prof., u jezičnoj obradbi. Za izgled prikazanog gradiva zaslužni su daktilografkinja I.Rogošić i crtač I.Mravak. Za njihov nesebičan trud svima najljepše zahvaljujem.

III

SADRŽAJ

	str.
1. UVODNI OSVRT	1
2. MATEMATIČKI IZRAZI ELEMENTARNIH FIZIČKIH SVOJSTAVA	4
2.1. Uvod	4
2.2. Električki sustavi	7
2.3. Mehanički sustavi	16
2.3.1. Translacijski mehanički elementi	19
2.3.2. Rotacijski mehanički elementi	26
2.4. Fluidički sustavi	33
2.5. Toplinski sustavi	47
2.6. Pretvornici	57
2.7. Zaključak	59
3. IZLAZNO-ULAZNI OPIS SUSTAVA	60
3.1. Uvod	60
3.2. Izlazno-ulazni opis sustava u vremenskom području	60
3.3. Izlazno-ulazni opis sustava u Laplaceovom području ...	63
3.4. Blokovski prikaz	66
3.5. Modeliranje s prijenosnom funkcijom	72 ✓
3.6. Konvencionalne pobudne funkcije za istraživanje ponašanja sustava	80
3.7. Zaključak	86

IV

4. OPIS SUSTAVA S VARIJABLAMA I STANJA	87
4.1. Uvod	87
4.2. Matrice	88
4.2.1. Matrična algebra	90
4.3. Varijable stanja	96
4.3.1. Opis s varijablama stanja	100
4.3.2. Odnos opisa s prijenosnom funkcijom i s varijablama stanja	109
4.3.3. Fazne varijable stanja	115
4.3.4. Fizičke varijable stanja	124
4.3.5. Linearne transformacije varijabli stanja	134
4.4. Zaključak	146
5. NEGATIVNA POVRATNA VEZA	147
5.1. Uvod	147
5.2. Učinci negativne povratne veze	148
5.3. Jednostavni slučaj linearnе regulacije s varijablama stanja	155
5.4. Opći slučaj linearnog reguliranja s varijablama stanja	169
5.5. Svojstvo linearne povratne veze s varijablama stanja	180
5.6. Izračunavanje rezolventne matrice blokovskom algebrom	185
5.7. Zaključak	198
6. VREMENSKI ODZIV	199
6.1. Uvod	199
6.2. Razlaganje na parcijalne razlomke	200
6.3. Odskočni odziv sustava drugog reda	216
6.4. Općeniti vremenski odziv	227
6.5. Računanje općenitog vremenskog odziva s integralom konvolucije	239
6.6. Zaključak	245
7. FREKVENCIJSKI ODZIV	247
7.1. Uvod	247
7.2. Funkcije frekvencijskog odziva	247

7.3. Bodeovi dijagrami	251
7.4. Dijagrami frekvencijskog odziva funkcije neminimalne faze	276
7.5. Identifikacija dinamičkih sustava s pomoću frekvencijskog odziva	282
7.6. Zaključak	291
8. STABILNOST	292
8.1. Uvod	292
8.2. Definicije	294
8.3. Algebarski pristup provjeri stabilnosti	297
8.3.1. Hurwitzov kriterij stabilnosti	300
8.3.2. Routhov kriterij stabilnosti	306
8.4. Grafički pristup provjeri stabilnosti	308
8.4.1. Nyquistov kriterij stabilnosti	309
8.4.2. Mjere relativne stabilnosti	319
8.4.3. Mihajlovljen kriterij stabilnosti	324
8.5. Zaključak	328
Pogovor	329
Literatura	330
Kazalo	332

1. UVODNI OSVRT

U težnji da na što brži i lakši način dodje do potrebnih materijalnih dobara čovjek je od pamtiviljeka nastojao prozreti prirodne zakonitosti i iskoristiti ih za svoju dobrobit. S vremenom su se tako razvile brojne znanstvene discipline koje, izučavajući određene segmente životne sredine, svaka na svoj način doprinose tom zajedničkom cilju.

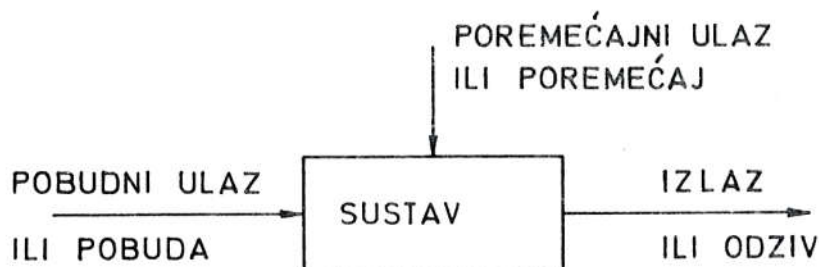
Do važnih znanstvenih otkrića na područjima mnogih znanosti došlo je posebno u zadnjih stotinjak godina. Taj napredak se očitovalo i u spoznaji da su zanemarene informacijske veze koje bi trebale povezivati pojedine znanstvene discipline. Naime, djelujući u svojim povijesnim okvirima pojedine znanosti su toliko razvile svoje vlastite metode, i čak svoj vlastiti stručni žargon, da je to ne samo otežavalo prenošenje i korištenje spoznaje iz jednog znanstvenog područja u drugo, nego je otežavalo i osnovno međusobno sporazumijevanje. Uvidjevši da takvo stanje koči napredak, stvorene su nove, tzv. sintetičke znanstvene discipline, sa zadatkom da unapređuju pojedine oblasti djelovanja, koristeći se pri tome dostignućima tzv. specifičnih znanstvenih disciplina.

Jedna od tih novih sintetičkih znanstvenih disciplina je automatika. Ova disciplina bavi se izučavanjem zakonitosti funkcioniranja dinamičkih sustava, ne ulazeći u gradju njihovih sastavnih dijelova. Radi sistematičnosti savladavanja gradiva automatika se obično dijeli na linearne i nelinearne sustave. Premda su nelinearni sustavi u prirodi daleko mnogobrojniji od linearnih sustava, lako se može pokazati da se veliki dio nelinearnih sustava u širem smislu, ponašaju u užem smislu kao linearni sustavi. Zbog toga, a i zbog relativno jednostavne matematičke obradbe, koja os-

novnu teoriju dinamičkih sustava čini dostupnijom, linearni dinamički sustavi se uzimaju kao neprijeporni uvod u izučavanje dinamike automatskih sustava.

Tvorevina koju karakterizira *zakovitost stanja* naziva se *sustav* ili *sistem*. On može biti statički ili dinamički. Dinamički je ako se barem jedna od veličina sustava mijenja, a statički je ako su sve veličine sustava konstantne.

Pod *stanjem* podrazumijeva se uzročno-posljedični odnos među veličinama sustava. Određena uzročna promjena jedne veličine izaziva određenu posljedičnu promjenu druge veličine. Posljedična veličina se naziva *izlaz* ili *odziv*, a uzročna veličina se naziva *ulaz* ili *pobuda*. Ako je pri promatranju ovisnosti dviju veličina neizbježno uzeti u obzir i nepoželjni utjecaj treće veličine, ta nepoželjna veličina obično se naziva *poremećaj*. Koje od veličina sustava predstavljaju odziv, pobudu i poremećaj ovisi o svrsi istraživanja. Za ilustraciju može poslužiti električki motor. Ako nas zanima ovisnost brzine motora o promjeni napona napajanja, uz nepoželjni utjecaj opterećenog momenta, brzina je izlaz, napon je ulaz, a opteretni moment je poremećaj. Ako nas, međutim, zanima promjena temperature motora u ovisnosti o promjeni opterećenog momenta, uz nepoželjnu promjenu napona napajanja, temperatura predstavlja izlaz, opteretni moment predstavlja ulaz, a napon napajanja predstavlja poremećaj. Na Sl.1.1. nacrtan je blokovski prikaz sustava s ulazno-izlaznim veličinama.



Sl.1.1. Blokovski prikaz sustava

Na ponašanje određene izlazne veličine može utjecati više ulaznih veličina, a isto tako više ulaznih veličina može utjecati na ponašanje jedne ili više izlaznih veličina. Kada na jednu izlaznu veličinu djeluje jedna ulazna veličina govorimo o *jednostrukim stazama*, a kada bilo na ulazu bilo na izlazu imamo više veličina, govorimo o *višestrukim stazama*. Ovdje će se, u pravilu, govoriti o jednostrukim stazama, s kojima se, međjutim, kod linearnih sustava mogu rješavati i mnogi problemi višestrukih staza.

Postupak kojim se traži odziv sustava na određenu pobudu naziva se *analiza*. Rezultat analize je jednoznačan, tj. na jednu određenu pobudu dobije se jedan određeni odziv.

Ako je zadan odziv i pobuda, a traži se sustav koji će na zadanu pobudu dati zadani odziv, takav se postupak naziva *sinteza*. Dok je rezultat analize jednoznačan, rezultat sinteze je višeznačan, tj. postoji više različitih sustava koji na zadanu pobudu reaguju s istim odzivom. Da bi se problem jednoznačno definirao, potrebno je u zadacima sinteze osim odziva i pobude zadati i *kriterije provedbe*.

Analiza i sinteza mogu se provesti na fizičkom objektu, ako je on dostupan. Ako nije dostupan, bilo da je zauzet u pogonu ili da je još u fazi konstruiranja problem se može riješiti primjenom *apstraktnog objekta*. Pod apstraktnim objektom se podrazumijeva njegov matematički opis, odnosno *matematički model*. Budući da se radi o dinamičkim objektima, odnosno o objektima kojih je jedna ili više veličina vremenski promjenljiva, njihov se matematički model može postaviti jedino diferencijalnim jednadžbama, koje su u stanju opisati vremenski promjenljivo stanje sustava.

2. MATEMATIČKI IZRAZI ELEMENTARNIH FIZIČKIH SVOJSTAVA

2.1. UVOD

Kad se radi o matematičkom modeliranju u inženjerskoj praksi, odmah treba reći da se uvijek radi o strogo određenoj svrsi. Model se postavlja zato da bi se pomoću njega dobio uvid u ponašanje neke određene veličine sustava u ovisnosti o nekoj određenoj pobudi. A budući da se u inženjerskoj praksi svaka djelatnost mora temeljiti na ekonomičnosti, najbolji je onaj matematički model, koji istraživanu ovisnost veličina sustava dovoljno točno opisuje na najjednostavniji način.

Promatra li se ponašanje dinamičkih sustava u dovoljno velikom rasponu promjena njihovih veličina, dolazi se do zaključka, da su sve to u pravilu nelinearni sustavi s rasporedjenim i vremenski promjenljivim parametrima. Opis takvih sustava provodi se s nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama s promjenljivim koeficijentima. Rješavanje takvih diferencijalnih jednačbi je općenito vrlo složeno, a često i nemoguće bez izvjesnih pojednostavljenja. U inženjerskoj praksi, međjutim, vidimo da je raspon promjena veličina sustava ograničen, tako da se rad sustava u stvarnim uvjetima dađe aproksimirati linearnom ovisnošću ili u najgorem slučaju s nekoliko linearno ovisnih segmenata koji se matematički mogu opisati linearnim diferencijalnim jednačbama.

Na sličan se način parcijalne diferencijalne jednačbe dađu aproksimirati s običnim diferencijalnim jednačbama. Naime, ako nas ne zanima stanje u svakoj točki dotičnog rasporedjenog parametra nego samo u nekim diskretnim točkama, onda se i sam pa-

rametar dade diskretizirati, odnosno aproksimirati s usredotočnim vrijednostima između pojedinih točaka.

Što se tiče vremenske promjenljivosti parametara, i za taj se slučaj u inženjerskoj praksi našla zadovoljavajuća aproksimacija. Naime, u najvećem broju slučajeva te su promjene dovoljno spore da ih se u dovoljno malom vremenskom razmaku može uspješno nadomjestiti konstantama, pa stoga i u matematičkom opisu diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima.

Spoznaja da se velika većina fizičkih sustava, koji su u osnovi nelinearni s rasporedjenim i vremenski promjenljivim parametrima, može u inženjerskoj praksi zadovoljavajuće nadomjestiti običnim linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima, znatno je doprinijela naglom razvoju teorije automatske regulacije u zadnjih nekoliko desetljeća.

Treba međjutim, naglasiti da standardnog postupka za modeliranje nema. To je i za očekivati, ako se ima na umu, da ne samo što postoji ogroman broj različitih sustava, nego i svaki sustav može imati više matematičkih modela, što ovisi o zahtjevu koji se na model postavlja. Zbog toga modeliranje spada u vještinu koja se stječe praktičnim radom, uz neophodno poznavanje matematičkog aparata, i objekta koji se želi modelirati.

Modeliranje se može provesti na temelju poznatih prirodnih zakonitosti, na temelju mjerenja i kombinacijom teorije i mjerenja. Prvi se način pretežno primjenjuje pri konstrukciji novih uređaja, npr. u slučaju kada se želi ispitati kako će se zamišljeni most ponašati pri najnepovoljnijim udarcima vjetrova. Mjerni pristup se pretežno primjenjuje pri istraživanju ponašanja nepoznatih sustava, npr. kad se želi ispitati dinamičke osobine živih bića. Kombinirani teorijsko-mjerni pristup je, osim u slučajevima kad se objekt sastoji djelomično od postojećih, a djelomično od nepostojećih dijelova, preporučljivo primjenjivati i u svim ostalim slučajevima kadgod je to moguće, jer se na taj način ujedno i provjerava valjanost postupka modeliranja.

Jednom kad je svrhoviti matematički model postavljen i njegova dinamička svojstva ispitana, postoji mogućnost da ta svojstva

zadovoljavaju ili ne. Ako zadovoljavaju, modeliranje je završeno, a ako ne zadovoljavaju, treba sintezom, tj. dodavanjem korekcijskih elemenata model dopuniti, tako da zadovolji postavljene dinamičke kriterije. Kad je i to obavljeno, slijedi obrnuti proces izvedbe objekta prema postavljenom modelu. Ovaj dio posla, poput modeliranja, spada u inženjersku vještinu koja se stječe radom. Dok je istraživanje dinamike sustava pomoću modela metodički razradjeno i standardizirano, dobivanje modela iz objekta i objekta iz modela su postupci koji se ne mogu standardizirati, jer su rješenja višeznačna.

Za izučavanje dinamike sustava temeljno je važno spoznati svojstva sustava koja utječu na njegovu dinamiku. Pri tome treba imati na umu da je svojstvo apstraktan pojam pridijeljen objektu, i da objekt može imati više svojstava, a da pažnju možemo obratiti na samo jedno od njih. Uzmimo npr. spiralno namotanu čeličnu žicu koja treba poslužiti kao opruga. Jedno od svojstava takve naprave jest da se može elastično deformirati, čemu je i namijenjena, ali ona ima i svoju masu, koju ćemo takodjer uzeti u obzir ako je dovoljno utjecajna. Da bi pokazali da se ne misli na materijalnu oprugu, već na jedno od njezinih svojstava kao što su elastičnost ili masa, neki autori upotrebljavaju termin idealna opruga, idealna masa itd. Budući da smo mi svojstvo definirali kao apstraktni pojam pridijeljen objektu, pod elementarnim svojstvom ili elementom i ne može se podrazumijevati ništa drugo nego idealni element. Stoga ćemo u daljnjim razmatranjima elementarna svojstva nazivati jednostavno elementima.

Obradba dinamičkih sustava pomoću modela, prema iznešenom, je jednaka bez obzira na gradju sustava (mehanički, električki, monetarni, kemijski, saobraćajni i dr.), a za postupak modeliranja objekta i izradbe objekta iz modela potrebno je između ostalog i temeljito poznavanje zakonitosti funkcioniranja predmeta modeliranja. Budući da je ovo gradivo namijenjeno prvenstveno studentima i inženjerima elektrotehnike i strojarstva, koji su pretežno zaokupljeni problematikom električkih, mehaničkih i toplinskih sustava, postupak modeliranja će se ovdje razmatrati na tim sustavima. Razmatranje ćemo započeti s električkim sustavima,

i to stoga što su parametri u njima relativno najlakše uočljivi, pa se postupak modeliranja i postupak realizacije objekta iz zadanog modela mogu relativno najjednostavnije provesti.

2.2. ELEKTRIČKI SUSTAVI

Električki napon ili razlika električkog potencijala je, po definiciji, potrebna energija ili rad što ga treba obaviti da se jedinica pozitivnog električkog naboja prenese iz jedne točke u drugu. Uz $v_2 - v_1 = v_{21} = u$ definicija u analitičkom obliku glasi:

$$u = \frac{dW}{dq} \quad (2.1.)$$

U Međunarodnom sustavu jedinice (MSJ) napon u se mjeri u voltima $|V|$, rad W u jouleima (džul) $|J|$ i naboj q u coulombima (kulon) $|C|$.

Električka struja je, po definiciji, brzina protjecanja električkog naboja:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.2.)$$

Jakost struje se u MSJ mjeri u amperima $|A|$.

Snaga je brzina obavljanja rada:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (2.3.)$$

U MSJ snaga se mjeri u wattima (vat) $|W|$. Ako se desna strana jednadžbe (2.3.) pomnoži i podijeli s dq , dobije se:

$$P = \frac{dq}{dt} \frac{dW}{dq} \quad (2.4.)$$

što primjenom jednadžbi (2.1.) i (2.2.) daje:

$$P = i \cdot u \quad (2.5.)$$

Energija je integral snage po vremenu:

$$E = \int u \cdot i \, dt \quad (2.6.)$$

Električki krug je dinamički sustav kojeg se dinamika održava protjecanjem električke struje.

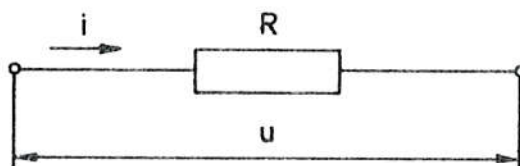
Parametri električkog kruga su ohmske otpornosti, kapacitivnosti, induktivnosti, transformatori i izvori.

Ohmska otpornost. Svaka tvar pruža prolazu električke struje izvjestan otpor. Tvari relativno malog otpora nazivaju se vodičima (srebro, bakar, aluminijski i dr.), a tvari relativno velikog otpora nazivaju se izolatorima (staklo, pertinaks, plastika i dr.).

Ohmska otpornost je element koji troši snagu, pa se stoga naziva i *disipacijski* element. Prema Ohmovom zakonu ohmska otpornost predstavlja konstantni odnos napona i struje:

$$R = \frac{u}{i} \quad (2.7.)$$

a simbolički se prikazuje pačetvorina s izvodima na kraćim stranicama (Sl.2.1.). Namjenski izrađena otpornost naziva se *otpornik* ili *otpornička komponenta*. Dosljedno tome, sva fizička svojstva nazivamo *elementima*, a njihove namjenske realizacije nazivamo *komponentama*. Otpornik ili otpornička komponenta je, prema tome,



Sl.2.1. Simbol ohmske otpornosti

tvorevina namjenski izrađena, da u električkom krugu predstavlja element ohmske otpornosti.

Električka snaga se na otpornosti pretvara u toplinsku snagu koja je zadana relacijom:

$$P = i \cdot u = \frac{u^2}{R} = i^2 R \quad (2.8.)$$

Taj učinak može u izvjesnim primjenama biti koristan a u drugim slučajevima štetan, pa u ovisnosti o svrsi kojoj je dotični električki sustav namijenjen, nekad se nastoji da se što veći dio električke snage pretvori u toplinu, a nekad se poduzimaju mjere da nastale topline bude što manje.

Induktivnost. Protječući kroz vodič električka struja stvara oko njega magnetsko polje. Mijenjanjem jakosti struje mijenja se i jakost nastalog magnetskog polja. Posljedica mijenjanja magnetskog polja oko vodiča jest induciranje razlike napona među krajevima vodiča, po smjeru suprotnog naponu koji tjera struju kroz vodič. Razlika napona izazvana promjenom jakosti magnetskog toka ϕ dana je relacijom:

$$u = \frac{d\phi}{dt} \quad (2.9.)$$

ili:

$$\phi = \int_0^t u \, dt + \phi_0 \quad (2.10.)$$

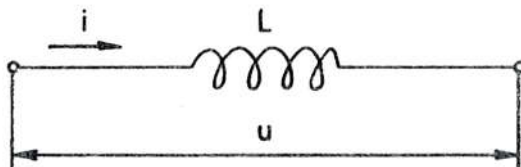
U MSJ magnetski se tok ϕ mjeri u weberima $|\text{Wb}|$.

Osobina vodiča kroz koji prolazi struja, da se razlikom napona protivi promjeni jakosti struje, naziva se *induktivnost* (L).

Ako je nastali magnetski tok linearna funkcija struje, induktivnost takovg vodiča naziva se *linearna induktivnost*, i određena je relacijom:

$$\phi = L \cdot i \quad (2.11.)$$

U MSJ induktivnost (L) se mjeri u henryima $[H]$.



Sl.2.2. Simbol induktivnosti

Uvrštenjem relacije (2.11.) u (2.9.) dobije se:

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (2.12.)$$

ili:

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t u \, dt + i_0 \quad (2.13.)$$

Induktivnost je spremnik električne energije u magnetskom polju. Ova energija naziva se energija magnetskog polja i određena je relacijom:

$$E_m = \int u \cdot i \cdot dt = \int i \, d\phi \quad (2.14.)$$

U slučaju idealne (čiste i linearne) induktivnosti iz jednažbi (2.12.) i (2.14.) dobije se:

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}, \quad (2.15.)$$

iz čega proizlazi da je energija magnetskog polja uvijek pozitivna, bez obzira na smjer struje ili toka:

$$E_m \geq 0 \quad (2.16.)$$

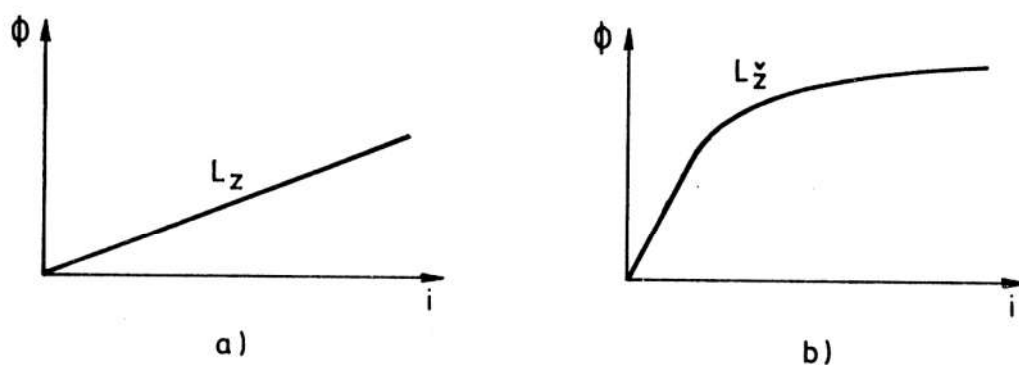
Induktivna komponenta se najčešće izrađuje u obliku svitka vodljive žice i naziva se *prigušnica*. Induktivnost takve prigušnice se izračunava po relaciji:

$$L = \frac{\pi \cdot n \cdot \mu \cdot d^2}{4\ell} \quad (2.17.)$$

gdje je n -broj zavoja, d promjer, ℓ dužina, a μ magnetska permeabilnost materijala na kojem je žica namotana. Vrijednost permeabilnosti za vakuum, a u praksi i za zrak, jest:

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Induktivnost prigušnice sa zračnom jezgrom je praktički linearna, ali je zbog male permeabilnosti zraka i vrijednost induktivnosti takve prigušnice relativno vrlo mala. S pomoću željezne jezgre induktivnost prigušnice se može povećati i do 10^6 puta, ali se u tom slučaju gubi linearnost i pri određenim vrijednostima struje dolazi do zasićenja magnetskog toka. Grafički prikaz linearne i nelinearne induktivnosti dan je na Sl. 2.3.

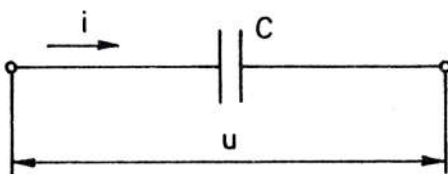


Sl. 2.3a) induktivnost prigušnice sa zračnom jezgrom;
b) induktivnost prigušnice sa željeznom jezgrom

Kapacitivnost. Ako se na dvije vodljive međusobno izolirane ploče dovede električki naboj, među pločama će se uspostaviti električko polje. Posljedica toga će biti razlika napona među pločama koja ovisi o veličini vezanog naboja. Svojstvo takvog sustava da veže određenu količinu naboja i tako uspostavi razliku napona na njegovim izvodima naziva se *kapacitivnost*. Ako se pretpostavi da je vodljiva tvar bez ohmske otpornosti, te da je ohmska otpornost izolatora beskonačna, i da je učinak magnetskog polja te tvorevine zanemariv, takva kapacitivnost naziva se *čista kapacitivnost*. U slučaju čiste kapacitivnosti vezani naboj je funkcija samo razlike potencijala:

$$q = f(u) \quad (2.18.)$$

Kapacitivna komponenta, koja se naziva *kondenzator*, najčešće se izrađuje od dvije metalne folije međusobno odvojene izolacijskom folijom.



Sl. 2.4. Simbol kapacitivnosti

Ako je odnos naboja i napona linearan takva kapacitivnost se naziva *idealna kapacitivnost*, a određena je relacijom:

$$q = C \cdot u \quad (2.19.)$$

U MSJ kapacitet C se mjeri u faradima $[F]$.

Primjenom (2.3.), relacija (2.19.) za idealnu kapacitivnost dobija oblik:

$$i = C \frac{du}{dt} , \quad (2.20.)$$

ili

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + u_0 \quad (2.21.)$$

I kapacitivnost je poput induktivnosti, spremnik energije. Primjenom relacija (2.6.) , (2.2.) i (2.18.) izraz za tu energiju glasi:

$$E_e = \int u \, dq, \quad (2.22.)$$

a budući da je akumulirana u električkom polju, naziva se *energija električkog polja*. Energija idealne kapacitivnosti izračunava se po relaciji:

$$E_e = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (2.23.)$$

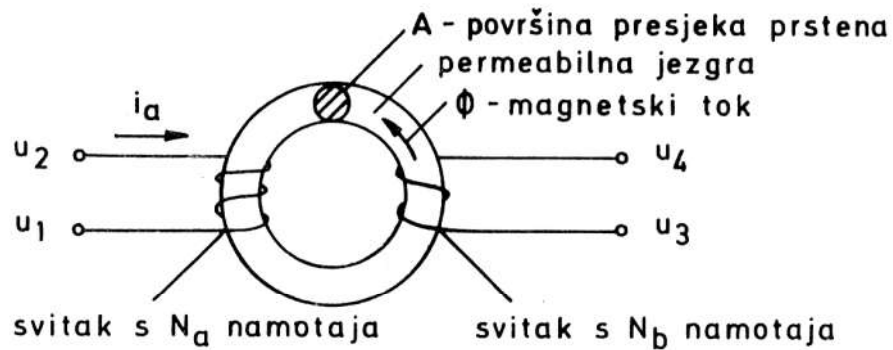
odakle proizlazi da je energija električkog polja uvijek pozitivna, bez obzira na predznak napona, odnosno struje. Kapacitet pločastog kondenzatora izračunava se po relaciji:

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}, \quad (2.24.)$$

gdje je ϵ dielektrička konstanta, a za zrak iznosi:

$$\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

Transformator. Naprava koja induktivnim putem prenosi električku energiju naziva se *električki transformator*. Ako se pretpostavi da pri tom transformator ne akumulira niti troši energiju, onda je to čisti transformator. Ako je k tome odnos ulaznog i izlaznog napona linearan, takav transformator naziva se *idealni transformator*.



Sl.2.5. Električki transformator

Na Sl.2.5. prikazan je prsten od permeabilne tvari na kojem su namotani svitak a s N_a zavoja i svitak b s N_b zavoja. Poteče li struja i_a kroz svitak a, u prstenu će se uspostaviti magnetsko polje toka ϕ .

Označi li se vezni tok sa:

$$\lambda = \phi \cdot N$$

vezni tok desnog namotaja bit će:

$$\lambda_{43} = \phi \cdot N_b$$

a vezni tok lijevog namotaja:

$$\lambda_{21} = \phi \cdot N_a$$

Odnos izlaznog (desnog) i ulaznog (lijevog) veznog toka stoga izlazi da je:

$$\frac{\lambda_{43}}{\lambda_{21}} = \frac{N_b}{N_a} \quad (2.25.)$$

Pretpostavivši idealni transformator i primijenivši relaciju (2.9.) dobije se:

$$\frac{\lambda_{43}}{\lambda_{21}} = \frac{u_{43}}{u_{21}} = \frac{N_b}{N_a} = n, \quad (2.26.)$$

gdje n predstavlja odnos broja zavoja izlaznog i ulaznog svitka. Budući da se radi o idealnom transformatoru koji ne troši energiju, zbroj izlazne i ulazne snage jednak je nuli:

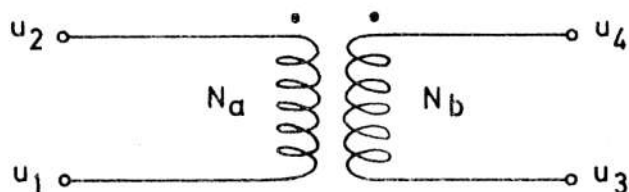
$$P_b + P_a = 0, \quad (2.27.)$$

ili

$$u_{43} \cdot i_b = -u_{21} \cdot i_a \quad (2.28.)$$

što primjenom (2.26.) daje:

$$\frac{i_b}{i_a} = -\frac{u_{21}}{u_{43}} = -\frac{1}{n} \quad (2.29.)$$

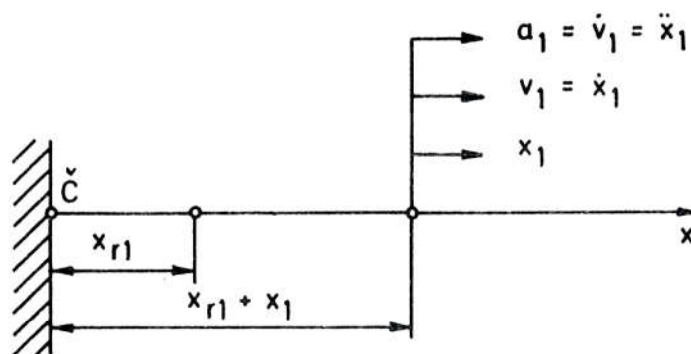


Sl. 2.6. Simbol transformatora

Na Sl.2.6. prikazan je simbol idealnog transformatora. Točke na ovoj slici označavaju predznak transformacije, što u prikazanom slučaju znači: kada je u_2 u odnosu na u_1 pozitivan, tada je i u_4 u odnosu na u_3 također pozitivan.

2.3. MEHANIČKI SUSTAVI

Translacijsko gibanje krutog tijela u prostoru, jednako je za svaku njegovu točku, pa se stoga može proučavati na gibanju samo jedne od njegovih točaka. Pod gibanjem podrazumijeva se vremenska promjena položaja jedne točke u prostoru u odnosu na drugu točku, a po analogiji odgovara naboju u električkom sustavu. Ako je ta druga točka nepomična, takvo se gibanje naziva *apsolutno* gibanje. Usprkos činjenici da je "nepomična točka u prostoru" samo hipotetična pokazalo se da je za proučavanje gibanja vrlo korisna.



Sl.2.7. Apsolutno gibanje

Uzmimo jednu točku na udaljenosti x_{r1} od nepomične točke Č i pustimo da se pomakne za vrijednost x_1 , tako da njena udaljenost od točke Č u trenutku t_1 iznosi $x_{r1} + x_1$. Apsolutna brzina točke u tom trenutku bit će derivacija apsolutne udaljenosti po vremenu, dakle:

$$v_1 = \frac{d(x_{r1} + x_1)}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \quad (2.30.)$$

a ubrzanje derivacija po vremenu, odnosno druga derivacija puta po vremenu

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (2.31.)$$

Iz izvedenih relacija za put, brzinu i ubrzanje u slučaju apsolutnog gibanja proizlazi da položaj nepomične ili čvrste točke nije utjecajan, pa o njemu u daljnjim razmatranjima nećemo ni voditi računa.

Ako se promatra gibanje jedne točke u odnosu na drugu točku u pokretu, takvo se gibanje naziva *relativno gibanje*. Pretpostavimo da su početni položaji točaka određeni s x_{r1} i x_{r2} i da potom slijede pomaci x_1 i x_2 respektivno. Relativni put točaka će stoga biti:

$$x_{21} = x_2 - x_1, \quad (2.32.)$$

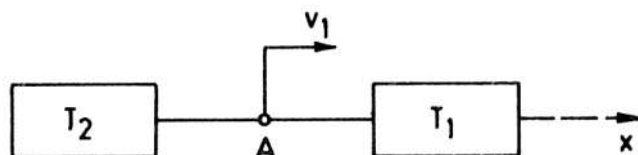
a relativna brzina:

$$v_{21} = v_2 - v_1 = \dot{x}_{21}, \quad (2.33.)$$

i relativno ubrzanje:

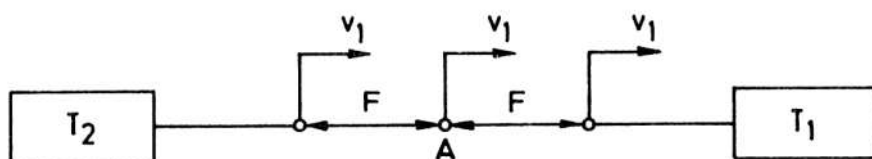
$$a_{21} = a_2 - a_1 = \ddot{x}_{21} = \dot{v}_{21} \quad (2.34.)$$

Gibanje u prostoru se opisuje vektorskim veličinama puta, brzine i ubrzanja. Budući da je takvo gibanje složenije, a da se do istih zakonitosti dolazi i promatranjem točke u ravnini, mi ćemo se u daljnjim razmatranjima ograničiti na proučavanje gibanja točke u ravnini. Razmotrimo stanje dvaju tijela u gibanju, koja su spojena u točki A, kako je prikazano na Sl.2.8.



Sl.2.8. Stanje gibanja dvaju spojenih tijela

Da bi se mogla provesti analiza stanja, potrebno je najprije postaviti *dijagrame slobodnih tijela*. U ovom slučaju to će biti tri dijagrama: dijagram tijela T_1 , dijagram točke A i dijagram tijela T_2 (Sl.2.9.)



Sl.2.9. Dijagrami slobodnih tijela

U stanju gibanja konstantnom brzinom v_1 , na tijelo T_1 djeluje vektor sile F . Da bi ostao zadovoljen Newtonov zakon akcije i reakcije, tijelo T_1 treba djelovati istom silom F na točku A. S druge strane, da bi se zadržalo pretpostavljeno jednolično gibanje, mora vrijediti I Newtonov zakon, da je zbroj sila koje djeluju na točku A jednak nuli. To će biti zadovoljeno ako tijelo T_2 djeluje na točku A silom F u pozitivnom smjeru. Reakcija na tu silu bit će sila F u negativnom smjeru na tijelo T_2 .

Djelovanje sila na kruto tijelo je identično djelovanju tih sila na jednu njegovu točku. Stoga će sila F koja djeluje na kruto tijelo s lijeve strane biti jednaka sili F koja djeluje na tijelo s desne strane. Zato se kaže da sila prolazi ili protječe kroz kruto tijelo nepromijenjena.

Snaga se definira kao brzina obavljanja rada. Mehanička snaga predana točki u gibanju silom koja djeluje na tu točku u smjeru brzine jest skalarni umnožak brzine i sile, odnosno umnožak brzine i komponente sile u smjeru brzine:

$$P = F \cdot v \quad (2.35.)$$

Rad što ga jedan mehanički element predaje drugom mehaničkom elementu preko spojne točke jednak je vremenskom integralu snage:

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F \cdot v \cdot dt \quad (2.36.)$$

Mehanička energija predana jednom elementu jednaka je zbroju rada na tom elementu izvršenog od svih sila koje na njega djeluju:

$$E = \sum_{k=1}^n (W_{ab})_k \quad (2.37.)$$

Prvi zakon termodinamike: energija predana jednom sustavu mora biti ili pohranjena u sustavu ili iz njega emitirana.

2.3.1. TRANSLACIJSKI MEHANIČKI ELEMENTI

Mehanički sustavi se sastoje od tri osnovna elementa. To su masa, popustljivost i trenje. Neki od njih može biti dominantan, a neki zanemariv. U jednostavnijim sustavima relativno ih je lako identificirati, ali u složenijim sustavima to može predstavljati ozbiljan problem. Identificiranje pojedinih osnovnih elemenata sustava i načina njihove međusobne povezanosti u stvari predstavlja *modeliranje*. Što god je identifikacija elemenata preciznije obavljena i njihova međusobna povezanost točnije utvrđena, model je vjernija slika izvornog sustava.

Translacijska masa. Svako tijelo ima određenu masu, pa se stoga, prema prvom Newtonovom zakonu, protivi promjeni stanja mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja.

Radi olakšanja analize mehaničkih sustava, uveden je pojam *količine gibanja* p , koji se izvodi iz relacije:

$$F = \frac{dp}{dt} = \dot{p} \quad (2.38.)$$

i dobije se definicijska jednačba:

$$p = \int_0^t F \, dt + p_0 \quad (2.39.)$$

Zanimljivo je primjetiti da su sila i količina gibanja vektori koji se međusobno odnose kao brzina i pomak.

Prema II. Newtonovom zakonu sila F , koja mora djelovati u smjeru osi x , da bi u istom smjeru proizvela gibanje centra mase, definirana je relacijom:

$$F = M \cdot a_2 = M \frac{dv_2}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.40.)$$

što se može pisati i u obliku:

$$v_2 = \frac{1}{M} \int_0^t F \, dt + (v_2)_0 \quad (2.41.)$$

Usporedom jednačbi (2.38.) i (2.40.) izlazi da je količina gibanja definirana relacijom:

$$p = M \cdot v_2, \quad (2.42.)$$

gdje je M ukupna masa tijela, a v_2 je brzina centra mase. Po definiciji izlazi da je $p=0$ kad je $v_2=0$.

Prema jednačbi (2.35.), ako na translacijsku masu djeluje sila F , masa će akumulirati ili osloboditi snagu. Uzmimo da na masu,

koja u početnom položaju ima brzinu jednaku nuli, djeluje sila F u smjeru brzine u vremenskom intervalu od $t = t_a$ do $t = t_b$. Rad koji u tom vremenu masa akumulira je prema jednadžbi (2.36.):

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F v_2 dt, \quad (2.43.)$$

ili izraženo s količinom gibanja:

$$W_{ab} = \int_0^{p_b} v_2 dp \quad (2.43a)$$

gdje je p_b količina gibanja u trenutku t_b . Ako na masu brzine v_b djeluje sila suprotna brzini, iz mase će "istjecati" snaga, a ako sila djeluje sve dok količina gibanja ne spadne na nulu, iz mase će "isteći" sav rad W_{ab} koji je prethodno bio akumuliran u vremenu od t_a do t_b .

Iz toga proizlazi da masa u sebi akumulira energiju. Ta se energija naziva *translacijska kinetička energija*, a njen matematički oblik glasi:

$$E_k = \int_{t_a}^{t_b} F v_2 dt = \int_0^{p_b} v_2 dp \quad (2.44.)$$

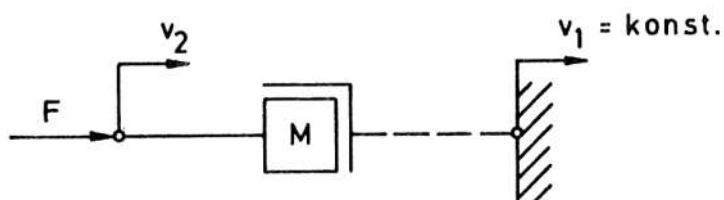
Za Newtonovsku masu (brzina mnogo manja od brzine svjetlosti), tj. kada je $M =$ konstanta, kinetička energija izračunana po jednadžbi (2.44.) jest:

$$E_k = \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} \quad (2.45.)$$

Iz jednadžbe (2.45.) se vidi da je kinetička energija mase neposredno ovisna o brzini, a o sili tek posredno. Stoga se može zaključiti da masa akumulira energiju pomoću brzine. Pri tome treba imati na umu da je kinetička energija, bez obzira na pred-

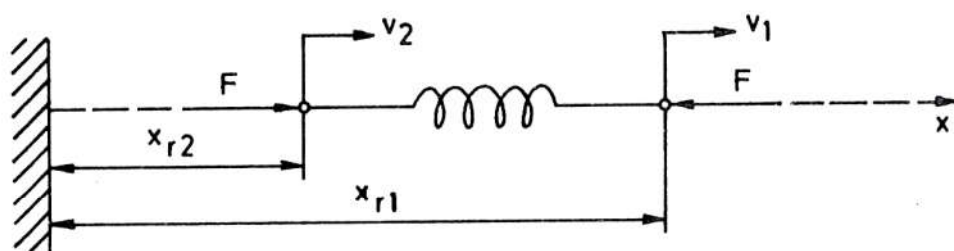
znak brzine, uvijek pozitivna:

$$E_k \geq 0$$



Sl.2.10. Simbolički znak za masu

Translacijska elastična popustljivost. Ako se tvar podvrgne izvjesnom opterećenju, ona će se u izvjesnoj mjeri deformirati. Ako je deformacija prolazna, ta pojava se naziva *elastična popustljivost*. Najizrazitije ponašanje te vrsti pokazuje žičana spirala, pa se stoga uzima za simbol elastične popustljivosti (Sl.2.11.)



Sl.2.11. Simbolički znak za elastičnu popustljivost

Odnos relativne brzine krajeva opruge na Sl.2.11. i deformacije, odnosno promjene dužine opruge, određen je relacijom:

$$v_{21} = \frac{d x_{21}}{d t} = \dot{x}_{21}$$

ili:

$$x_{21} = \int_0^t v_{21} dt + (x_{21})_0 \quad (2.46.)$$

Ovdje je vrijedno primjetiti analogiju, da je *brzina derivacija puta* kao što je *sila derivacija količine gibanja*, odnosno da je *put integral brzine* kao što je *količina gibanja integral sile*.

Kod *linearne* elastične popustljivosti sila F , koja djeluje na oprugu, i deformacija x_{21} , koju ona izaziva, međusobno su upravo proporcionalne:

$$F = k \cdot x_{21} \quad (2.47.)$$

gdje je k konstanta elastične popustljivosti. Obično se osnovna jednadžba linearne opruge izražava relacijom:

$$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}, \quad (2.48.)$$

ili:

$$F = k \int_0^t v_{21} dt + F_0 \quad (2.49.)$$

S pomoću jednadžbe (2.36.) može se izračunati rad uložen u deformaciju:

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F v_{21} dt = \int_{x_a}^{x_b} F dx_{21} = \int_0^{F_b} F \frac{\partial f(F)}{\partial F} dF, \quad (2.50.)$$

gdje je F_b sila koja djeluje na oprugu u trenutku t_b . Pusti li se da se sila F smanji na nulu, opruga će predati prethodno akumulirani rad W_b . Iz toga zaključujemo da je elastična propustljivost element koji akumulira energiju. Ta se energija

naziva *translacijska potencijalna energija* a izražava se relacijom:

$$E_p = \int_{x_a}^{x_b} F \, dx_{21} = \int_0^{F_b} F \frac{\partial f(F)}{\partial F} \, dF \quad (2.51.)$$

U slučaju linearne opruge kada je:

$$dx_{21} = \frac{1}{k} \, dF \quad (2.52.)$$

izlazi da je:

$$E_p = \frac{1}{2k} F^2 = \frac{1}{2} k (x_{21})^2 \quad (2.53.)$$

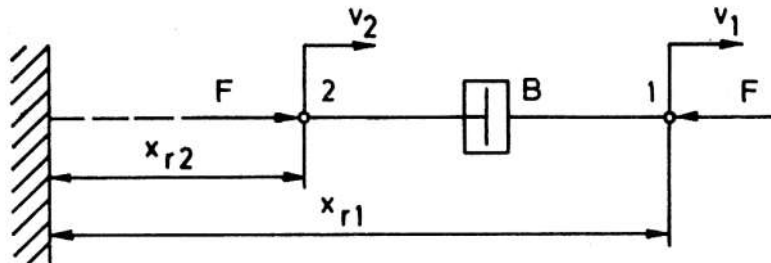
Budući da energija akumulirana u opruzi direktno ovisi o sili kroz oprugu, a ne o razlici brzina, može se zaključiti da elastična popustljivost akumulira energiju pomoću sile. Ova energija je uvijek pozitivna, bez obzira na predznak sile i deformacije:

$$E_p \geq 0$$

Translacijsko prigušenje. Kad materijalne čestice mijenjaju svoj međusobni položaj, javljaju se sile koje se protive toj promjeni. Ove sile su funkcije relativnih brzina čestica. Svojstvo tekućine da se protivi promjeni oblika naziva se viskoznost, a svojstvo tvari da prigušuje relativne brzine čestica naziva se trenje ili frikcija. Ako su sile izazvane međusobnim pomakom čestica proporcionalne relativnim brzinama, takvo trenje se naziva *viskozno ili linearno trenje*.

Osnovna relacija za prigušenje glasi:

$$E = f(v_2 - v_1) = f(v_{21}) \quad (2.54.)$$



Sl.2.12. Simbolički znak prigušenja

Ako je sila upravo proporcionalna relativnoj brzini čestica, takvo se prigušenje naziva *linearno prigušenje*, a izraženo je relacijom:

$$F = B(v_2 - v_1) = B v_{21} \quad (2.55.)$$

gdje je B koeficijent prigušenja.

Osim linearnog trenja koje izaziva linearno prigušenje, postoje još tri vrsti nelinearnog trenja, a to su: kvadratično trenje, kinetičko trenje (suho ili Coulombovo) i statičko trenje (stiction). Kod kvadratičkog trenja sila je upravo proporcionalna kvadratu brzine, a javlja se kad kruto tijelo vrlo velikom brzinom prolazi kroz tekućinu. Kod kinetičkog trenja sila je praktički konstantna za određeni smjer brzine, a javlja se kad se dva kruta tijela međusobno taru. Kod statičkog trenja, koje se javlja pri prijelazu iz stanja mirovanja u stanje gibanja, sila se ponaša vrlo slično kao i kod kinetičkog trenja, samo joj je apsolutna vrijednost nešto veća.

Ako na element prigušenja djeluje sila koja određenom brzinom izaziva stezanje ili rastezanje, obavlja se izvjestan rad. Taj rad, obavljen u vremenskom razmaku od t_a do t_b , prema jednadžbi (2.36.) je:

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F v_{21} dt$$

Primjenom jednadžbe (2.54.) može se eliminirati sila i dobije se:

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} v_{21} f(v_{21}) dt \quad (2.56.)$$

Vrijeme se, međjutim, ne može eliminirati, iz čega proizlazi da se obavljeni rad s vremenom neprestano povećava, i nikad se ne može dobiti natrag. Prigušni element, dakle, troši rad, pa je to stoga *disipacijski element*. Snaga P privedena prigušnom elementu.

$$P = F v_{21} = v_{21} f(v_{21}),$$

a za linearni prigušni element prema jednadžbi (2.55.):

$$P = B v_{21}^2 = \frac{F^2}{B} \quad (2.57.)$$

Ova snaga je, kao što se vidi iz (2.57.), bez obzira na smjer brzine uvijek pozitivna i uvijek ulazi u prigušni element:

$$P \geq 0$$

2.3.2. ROTACIJSKI MEHANIČKI ELEMENTI

Poput translacijskog sustava i rotacijski sustav se opisuje s tri osnovna elementa; rotacijska masa (ili inercija), rotacijska (ili torzijska) popustljivost i rotacijsko (ili torzijsko) trenje. Translacijskom gibanju je analogno rotacijsko gibanje, a sili u translacijskom gibanju odgovara moment u rotacijskom gibanju. Sve zakonitosti za rotacijski sustav su analogne zako-

nitostima izvedenim za translacijski sustav.

Snaga koja nastaje djelovanjem momenta Γ na osovinu koja rotira brzinom ω u smjeru momenta određena je relacijom:

$$P = \Gamma \cdot \omega \quad (2.58.)$$

Obavljeni rad je integral snage po vremenu:

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} \Gamma \cdot \omega \, dt \quad (2.59.)$$

Predana energija je zbroj rada obavljenog na svim točkama gdje postoji moment i kutna brzina.

Rotacijska masa. Moment inercije J rotacijske mase M , usredotočene u jednoj točki, određen je relacijom:

$$J = M r^2 \quad (2.60.)$$

Ako je masa raspoređena na m točaka, moment inercije je određen relacijom:

$$J = \sum_{k=1}^m M_k r_k^2, \quad (2.61.)$$

a u slučaju ravnomjerno raspoređene mase:

$$J = \int r^2 \, dM \quad (2.62.)$$

Pri tome se polazi od pretpostavke da sve točke rotiraju oko jedne osi, tako da sve čestice mase pri rotaciji opisuju kružni luk.

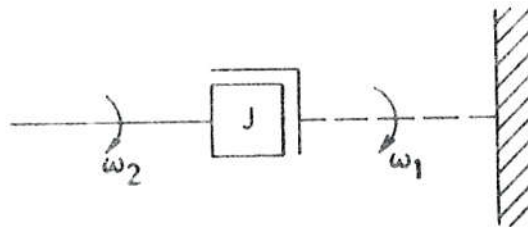
Pojmu translacijske količine gibanja analogan je pojam rotacijske količine gibanja, a određen je relacijom:

$$\Gamma = \frac{d\hbar}{dt} \quad (2.63.)$$

Drugi Newtonov zakon vrijedi i za rotacijsko gibanje, s razlikom što translacijskoj sili odgovara rotacijski moment:

$$\Gamma = J \left. \frac{d\omega_{21}}{dt} \right|_{\omega_1 = \text{konst.}} = J \left. \frac{d\omega_2}{dt} \right|_{\omega_1 = 0} \quad (2.64.)$$

Kutna brzina $\omega_{21} = \omega_2$ je brzina u odnosu na referentni položaj kojeg je brzina ω_1 konstantna ili je jednaka nuli (Sl.2.13.)



Sl.2.13. Simbol za rotacijsku masu

Ako se rotacijska masa ubrzava, u njoj se akumulira kinetička energija E_k , koja je određena relacijom:

$$E_k = \int_0^h \omega_2 dh \quad (2.65.)$$

Uvrštenjem Γ iz (2.64.) u (2.63.) i rješenjem po h dobije se:

$$h = J \omega_2, \quad (2.66.)$$

a zatim uvrštenjem diferencijala dh u (2.65.) izlazi:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{h^2}{J} \quad (2.67.)$$

Usporavanjem rotacijske mase oslobadja se energija, kao i kod translacijskog gibanja. Vrijedno je obratiti pažnju da se kinetička energija akumulira s pomoću kutne brzine i da ne ovisi o

zakretnom momentu Γ , a uvijek je pozitivna:

$$E_k \geq 0 \quad (2.68.)$$

Rotacijska elastična popustljivost. Rotacijska elastična popustljivost određena je relacijom:

$$\phi_{21} = \frac{1}{K} \Gamma \quad (2.69.)$$

gdje je ϕ_{21} relativna kutna deformacija, a K - *koeficijent rotacijske elastične popustljivosti*.

Jednadžba (2.68.) se može izraziti i u obliku:

$$\omega_{21} = \frac{1}{K} \frac{d\Gamma}{dt}, \quad (2.70.)$$

odnosno:

$$\Gamma = K \int_0^t \omega_{21} dt + \Gamma_0 \quad (2.71.)$$

Potencijalna energija koja se elastičnom deformacijom akumulira u deformiranom objektu određena je relacijom:

$$E_p = \int_0^{(\phi_{21})_b} \Gamma d\phi_{21} \quad (2.72.)$$

Uvrštenjem diferencijala kuta iz (2.68.) u (2.71.) i rješenjem jednadžbe dobije se izraz za akumuliranu potencijalnu energiju:

$$E_p = \frac{1}{2K} \Gamma^2 = \frac{1}{2} K (\phi_{21})^2 \quad (2.73.)$$

Ova energija je uvijek pozitivna i oslobadja se smanjenjem primijenjenog zakretnog momenta, a ovisna je o momentu, a ne o brzini:

$$E_p \geq 0$$

Rotacijsko prigušenje. Rotacijsko prigušenje određeno je relacijom:

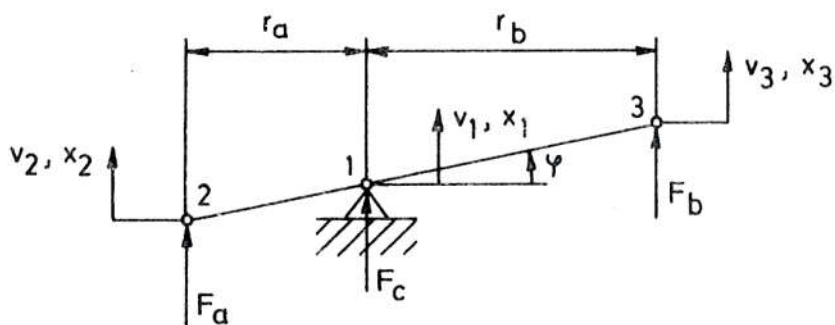
$$\Gamma = D \omega_{21}, \quad (2.74.)$$

gdje je D koeficijent rotacijskog prigušenja. Poput translacijskog prigušenja, i rotacijsko prigušenje troši energiju kad god se brzina ω_{21} razlikuje od nule. Brzina kojom energija pritječe u linearno rotacijsko prigušenje je:

$$P = D (\omega_{21})^2 = \frac{\Gamma^2}{D} \quad (2.75.)$$

Mehanički transformatori. Snaga, odnosno brzina pritjecanja mehaničke energije, prema jednažbi (2.36.) i (2.58.) jednaka je umnošku sile i brzine, odnosno zakretnog momenta i kutne brzine. Naprave koje mijenjaju međusobni odnos sile i brzine, odnosno momenta i kutne brzine a da pri tome ne akumuliraju niti troše energiju, nazivaju se *transformatori*. Postoje dvije vrste transformatora: translacijski i rotacijski.

Translacijski transformatori. Poluga je primjer translacijskog transformatora, a shematski je prikazana na Sl.2.14.



Sl.2.14. Shema poluge

U stanju ravnoteže zbroj sila i zbroj momenata treba biti jednak nuli:

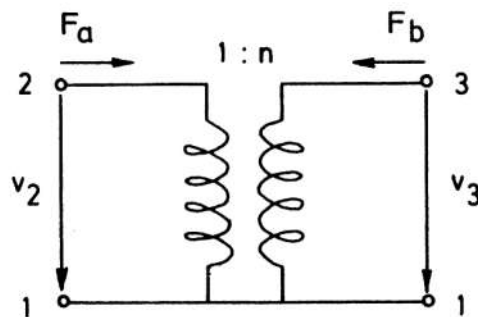
$$F_a + F_b + F_c = 0 \quad (2.76.)$$

$$F_a \cdot r_a + F_b \cdot r_b = 0, \quad (2.77.)$$

gdje:

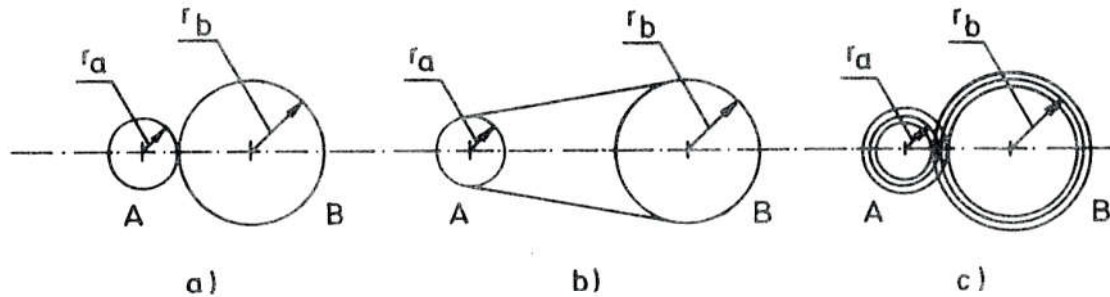
$$-\frac{r_a}{r_b} = n = \frac{v_{21}}{v_{31}} = \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1} \quad (2.78.)$$

predstavlja omjer poluge odnosno omjer transformacije. r_a i r_b su udaljenosti hvatišta sila F_a , odnosno F_b od smjera sile F_c . Kao što se na Sl.2.14. može vidjeti, njihove vrijednosti ovise o kutu ϕ , ali omjer n pri tome ostaje konstantan. Za dovoljno male vrijednosti promjene kuta ϕ , promjene r_a i r_b su zanemarive.



Sl.2.15. Simbol translacijskog transformatora

Rotacijski transformatori. Primjeri rotacijskih transformatora su tarni prijenos (Sl. 2.16.a), remenski prijenos (Sl. 2.16.b) i zupčasti prijenos (Sl. 2.16.c)



Sl. 2.16. a) tarni prijenos, b) remenski prijenos, c) zupčasti prijenos

U sva tri slučaja dužina kružnog luka za koju se pomakne disk A jednaka je po veličini i suprotna po smjeru dužini kružnog luka za koju se pomakne disk B:

$$r_a \omega_a dt = -r_b \omega_b dt \quad (2.79)$$

a odatle je:

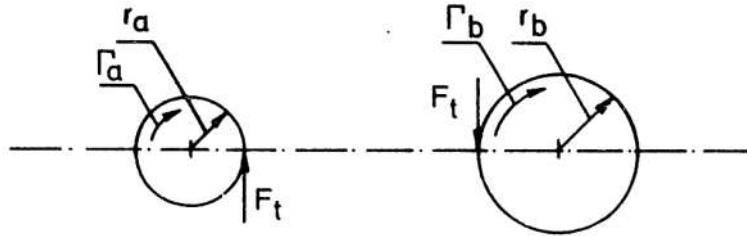
$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{r_a}{r_b} = n \quad (2.80)$$

gdje je n omjer transformacije.

U slučaju zupčastog prijenosa omjer transformacije se može izraziti brojevima zubaca na zupčaniku:

$$\frac{r_a}{r_b} = \frac{N_a}{N_b} = -n \quad (2.81)$$

gdje N_a i N_b predstavljaju broj zubaca na zupčaniku A, odnosno zupčaniku B.



Sl. 2.17. *Dijagram slobodnih tijela rotacijskog transformatora*

Iz dijagrama slobodnih tijela na Sl. 2.17. mogu se postaviti relacije:

$$F_t \cdot r_a = \Gamma_a \quad (2.82)$$

$$F_t \cdot r_b = \Gamma_b \quad (2.83)$$

a dijeljenjem jednadžbe (2.82) s (2.83) dobije se:

$$\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \frac{r_a}{r_b} = \frac{N_a}{N_b} = - \frac{\omega_b}{\omega_a} = - n \quad (2.84)$$

Iz (2.84) vidi se da je omjer kružnih zakretnih momenata upravo proporcionalan omjeru polumjera i omjeru broja zubaca, a obrnuto proporcionalan kutnim brzinama. Negativni predznak znači da kutne brzine imaju suprotan smjer okretanja.

2.4. FLUIDIČKI SUSTAVI

Sustavi u kojima je kapljevima ili plin prijenosni medij energije nazivaju se *fluidički sustavi*. Za razliku od krutih medija koje karakterizira stalan međusobni odnos materijalnih čestica, kod kapljevina i plinova je međusobni odnos materijalnih čestica funkcija vremena. Ta činjenica otežava aproksimaciju ras-

poredjenih parametara s njihovim usredotočenim nadomjescima, što se ne smije zanemariti, jer fluidički sustavi mahom imaju rasporedjene parametre. Stanje postaje još složenije spoznajom da su fluidički sustavi u pravilu nelinearni. Međutim, usprkos svim tim otežavajućim okolnostima, pokazalo se da je i u slučaju fluidike postupak obradbe s običnim linearnim diferencijalnim jednažbama ipak najekonomičniji.

Budući da se radi o dinamičkim sustavima, zaključak je da i kod fluidičkih sustava postoji poprečna i protječna varijabla. Pogledajmo stoga koje su to varijable. Jedna je *tlak* p koji je definiran kao sila F (odnosno pritisak) na jedinicu površine:

$$p = \frac{d F_n}{d A} \quad (2.85)$$

Iz (2.85) proizlazi izraz za ukupnu silu koja djeluje okomito na jedinicu površine A :

$$F_n = \int_A d F_n = \int_A p \, dA \quad (2.86)$$

Ako fluid prodje kroz površinu A u smjeru sile F , ili tlaka p , rad obavljen silom F pokrećući fluid na putu dx je:

$$dW = F_n \, dx = p \, A \, dx \quad (2.87)$$

i odatle

$$p = \frac{dW}{dV} \quad (2.88)$$

gdje $dV = A \, dx$ predstavlja diferencijal volumena.

Iz (2.88) proizlazi druga definicija tlaka koja glasi: tlak je rad obavljen prolazom fluida jediničnog volumena kroz površinu na koju taj tlak djeluje. Budući da je i električki potencijal

definiran kao rad po jedinici naboja, a električki potencijal je poprečna varijabla, po analogiji zaključujemo da tlak u fluidičkim sustavima predstavlja poprečnu varijablu.

Druga varijabla je *tok* koji je definiran kao volumen fluida koji u jedinici vremena protječe kroz površinu njegovog poprečnog presjeka:

$$q = \frac{dV}{dt} \quad (2.89)$$

Budući da je i električna struja, prema jednadžbi (2.3) definirana kao naboj koji u jedinici vremena proteče kroz presjek vodiča, a električka struja je protječna varijabla, i ovdje po analogiji zaključujemo da tok u fluidičkim sustavima predstavlja protječnu varijablu.

Iz jednadžbe (2.36) proizlazi da je snaga brzina obavljanja ("protjecanja") rada:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (2.90)$$

a uvrštavanjem dW iz (2.88) i $\frac{dV}{dt}$ iz (2.89) u (2.90), proizlazi:

$$P = \frac{dW}{dt} = p \frac{dV}{dt} = p \cdot q \quad (2.91)$$

Usporedbom jednadžbe (2.91) s jednadžbom (2.9) vidimo i analogiju električkog i fluidičkog sustava. U jednom i drugom slučaju snaga je umnožak poprečne i protječne varijable. Pri protoku nestišljivog fluida kroz krutu cijev, tok na ulazu u cijev jednak je toku na izlazu iz cijevi, što je shematski prikazano na Sl. 2.18.



Sl. 2.18. Prolaz nestišljivog fluida kroz krutu cijev

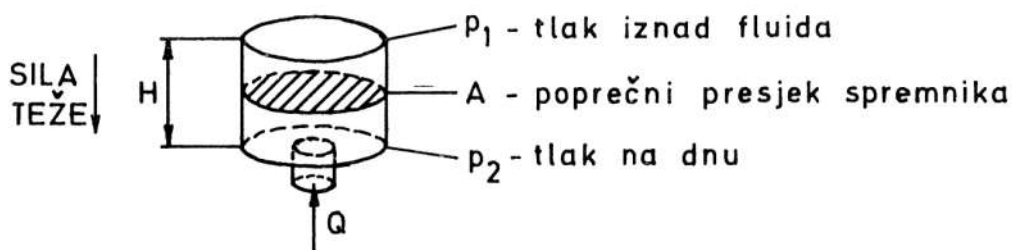
Snaga na tom elementu je stoga:

$$P = q (p_2 - p_1) = q p_{21} , \quad (2.92)$$

a energija

$$E = \int P \, dt = \int q p_{21} \, dt$$

Fluidička kapacitivnost. I fluidički sustavi, poput električkih i mehaničkih, sastoje se od elemenata koji akumuliraju ili troše energiju. Element u kojem je akumulirana energija funkcija tlaka, naziva se fluidička kapacitivnost, analogno električkoj kapacitivnosti u kojoj je akumulirana energija funkcija napona. Za primjer može poslužiti otvoreni spremnik fluida koji se puni kroz cijev na dnu spremnika (Sl. 2.19.). Punjenjem se akumulira energija, jer se fluid podiže suprotno djelovanju sile teže.



Sl. 2.19. Punjenje otvorenog spremnika

Primjenom zakona o očuvanju mase dobije se jednačba:

$$\rho q = \frac{d}{dt} (\rho A H) ,$$

gdje je ρ $[\text{kg}/\text{cm}^2]$ masena gustoća, q $[\text{m}^3/\text{s}]$ tok, A $[\text{m}^2]$ poprečni presjek spremnika i H $[\text{m}]$ visina fluida u spremniku.

Za nestišljivi fluid $\rho = \text{const}$, pa (2.94) prelazi u:

$$q = A \frac{dH}{dt} \quad (2.95)$$

Ako se isključi svako drugo ubrzanje, osim sile teže, tlak na dnu spremnika odgovarat će težini fluida, pa uz p_1 - vanjski tlak i p_2 - tlak na dnu spremnika izlazi:

$$p_2 - p_1 = p_{21} = \frac{\text{težina}}{\text{površina}} = \frac{\rho g H A}{A} = \rho g H \quad (2.96)$$

gdje je $g = 9,86 \text{ m/s}^2$ konstantna gravitacija. Uvrštenjem H iz (2.96) u (2.95) i uz $p_1 = \text{atmosferski tlak}$, izlazi:

$$q = \frac{A}{\rho g} \frac{d p_{21}}{dt} = \frac{A}{\rho g} \frac{d p_2}{dt} \quad (2.97)$$

Usporedbom s električkom jednačbom:

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (2.98)$$

uočava se potpuna strukturna analogija, pa budući da je protječna varijabla q analogna protječnoj varijabli i , a poprečna varijabla u analogna poprečnoj varijabli p , logično je da se član $\frac{A}{\rho g}$ nazove kapacitivnost spremnika:

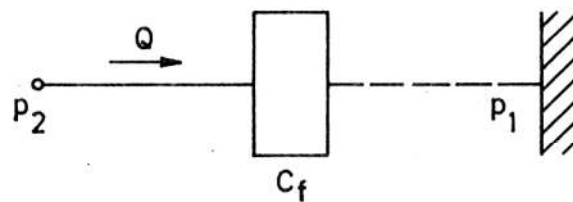
$$C_f = \frac{A}{\rho g} \quad (2.99)$$

Zamjenom $H A = V$ u jednadžbi (2.96) i sredjenjem dobije se:

$$V = \frac{A}{\rho g} p_{21} = C_f p_{21} \quad (2.100)$$

što upućuje na definiciju: fluidička kapacitivnost je element u kojem je tlak upravno proporcionalan volumenu.

Iz dosadašnjih razmatranja proizlazi da je fluidička kapacitivnost element sa samo jednim ulazom kroz koji protječe fluid. Tlak p_2 na tom ulazu se mjeri u odnosu na referentni tlak koji je obično atmosferski. Simbol za fluidičku kapacitivnost prikazan je na Sl. 2.20, a predstavlja spremnik s jednim otvorom za protjecanje fluida; kroz crtkani spoj na referentnu točku nema toka.



Sl. 2.20. Simbol fluidičke kapacitivnosti

Uvrštenjem jednadžbe (2.98) u (2.97) dobije se:

$$q = C_f \frac{d p_{21}}{dt} ; \quad (2.101)$$

a odatle tlak:

$$p_{21} = \frac{1}{C_f} \int_0^t q dt + (p_{21})_0 \quad (2.102)$$

Energija dobijena podizanjem fluida u spremnik je potencijalna energija, a određena je jednadžbom (2.93). S obzirom da je $dV = q dt$, (2.93) se može pisati u obliku:

$$E_p = \int_0^{t_b} p_{21} q \, dt = \int_0^{p_{21}} p_{21} \, dV \quad (2.103)$$

Diferencijal volumena iz jednadžbe (2.100) glasi:

$$dV = c_f \, dp_{21} \quad (2.104)$$

Uvrštenjem dV iz (2.104) u (2.103) dobije se:

$$E_p = \int_0^{p_{21}} c_f p_{21} \, dp_{21} = \frac{c_f p_{21}^2}{2} = \frac{v^2}{2c_f} \quad (2.105)$$

Pusti li se da fluid isteče iz spremnika (Sl. 2.19), energija se vraća. Po tome zaključujemo da je spremnik kapljevina fluidički element, sa svojstvom spremnika energije. Iz jednadžbe (2.105) vidi se da se energija akumulira pomoću poprečne varijable p_{21} i da direktno ne ovisi o toku q .

Fluidička inertnost. Ako kroz cijev dužine ℓ i poprečnog presjeka A , u stanju nultog ubrzanja protječe nestišljivi homogeni fluid, može se uzeti da su brzina i ubrzanje svih čestica fluida jednake. Sila koja stvara ubrzanje fluidičke mase, prema II Newtonovom zakonu, je:

$$F = M a = \rho A \ell \frac{dv}{dt} = A (p_2 - p_1) \quad , \quad (2.106)$$

a budući da je:

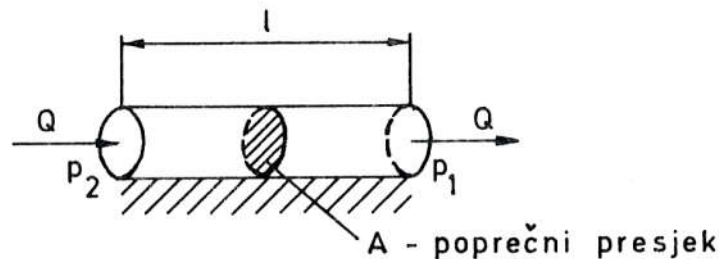
$$v = \frac{q}{A} \quad (2.107)$$

uvrštenjem (2.107) u (2.106) i sredjenjem dobije se:

$$p_2 - p_1 = p_{21} = \frac{\rho \ell}{A} \frac{dq}{dt} = I \frac{dq}{dt} \quad (2.108)$$

gdje je:

$$I = \frac{\rho \ell}{A} \quad (2.109)$$



Sl. 2.21. Protjecanje nestišljivog homogenog fluida kroz cijev s nulnim ubrzanjem

Usporedbom jednačbe (2.13) koja glasi:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

s jednačbom (2.108) uočava se puna međusobna analogija, tj. da je poprečna varijabla jednaka umnošku jedne konstante i derivacije protječne varijable. Ta se konstanta u električkim sustavima naziva induktivnost, a u fluidičkim sustavima inertnost.

Po ugledu na električki sustav, gdje je električka struja jednaka derivaciji naboja:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i na mehanički sustav, gdje je sila jednaka derivaciji količine gibanja:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

uvodimo i kod fluidičkih sustava odnos:

$$p_{21} = \frac{dr_{21}}{dt} \quad (2.110)$$

gdje je tok p_{21} jednak derivaciji *količine protjecanja* r , koja se može izraziti kao

$$r_{21} = \int_{t_a}^{t_b} p_{21} dt + (r_{21})_0 \quad (2.111)$$

U slučaju idealne inertnosti količina protjecanja je linearna funkcija toka:

$$r_{21} = I q \quad (2.112)$$

Za konstantni I :

$$p_{21} = I \frac{dq}{dt} \quad (2.113)$$

ili

$$q = \frac{1}{I} \int_0^t p_{21} dt + q_0 \quad (2.114)$$

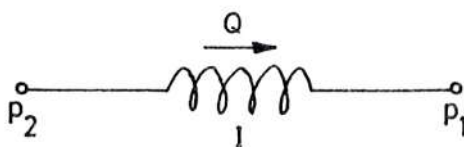
Energija akumulirana u čistoj inertnosti naziva se fluidička kinetička energija E_k , a izražena je relacijom:

$$E_k = \int_{t_a}^{t_b} q p_{21} dt = \int_{r_a}^{r_b} q dr_{21} = \int_{q_a}^{q_b} q \frac{\partial f(q)}{\partial q} dq \quad (2.115)$$

Po relaciji (2.115), E_k za idealnu inertnost izlazi

$$E_k = \frac{1}{2} I q^2 = \frac{1}{2} \frac{(r_{21})^2}{I}, \quad (2.116)$$

odakle proizlazi da je u idealnoj inertnosti energija akumulirana s pomoću protječne varijable q . Simbol za označivanje inertnosti prikazan je na Sl. 2.22.



Sl. 2.22. Simbol fluidičke inertnosti

Fluidička otpornost. S obzirom na ponašanje fluida pri protjecanju kroz različite otvore pokazalo se da se fluidička otpornost u svim slučajevima može dovoljno točno opisati sa zakoni-
tošću ponašanja u četiri karakteristična stanja i to pri pro-
lazu kroz

- a) poroznu sredinu
- b) cijev s laminarnim protjecanjem
- c) cijev s turbulentnim protjecanjem i
- d) rupu na dovoljno tankoj stijeni.

U svim slučajevima ponašanje nestišljivog fluida će se razlikovati od ponašanja stišljivog fluida. U stvari, apsolutno nestišljivog fluida nema, ali je stišljivost kapljevina tako mala da je u mnogim problemima inženjerske prakse možemo zanemariti i kapljevini pridjeliti osobinu nestišljivosti. Ovdje ćemo se ograničiti samo na razmatranje otpornosti kapljevina tj. nestišljivih fluida.

- a) Otpornost porozne sredine. D'Arcy-jev zakon za protjecanje kapljevina kroz poroznu sredinu glasi:

$$p_{21} = R_f q \quad (2.117)$$

gdje je p_{21} - razlika tlaka na krajevima poroznog objekta,

R_f - fluidički otpor poroznog objekta i q -tok.

Fluidička otpornost porozne sredine R_f za određeni fluid ovisi o geometriji objekta, o veličini pora i o razlici tlaka.

Vrijednost R_f se može izračunati, ali se u tehničkoj praksi najčešće dobije mjerenjem.

- b) Otpornost cijevi s laminarnim protjecanjem. Laminarno protjecanje karakterizira paralelnost strujnica fluida u protjecanju, za razliku od turbulentnog protjecanja koje je karakterizirano vrtložnim strujnicama. Eksperimentalno je ustanovljeno da je narav strujanja (laminarno ili turbulentno) popraćena jednim određenim odnosom utjecajnih veličina dotičnog dinamičkog sustava. Taj se odnos naziva *Reynolds*-ov broj, a određen je izrazom:

$$Rey = \frac{4\rho q}{\pi d \mu} \quad (2.118)$$

gdje je Rey - *Reynolds*-ov broj, ρ - gustoća, d - promjer cijevi i μ - apsolutna viskoznost fluida.

Kada je brzina strujanja fluida dovoljno mala, tako da vrijednost *Reynoldsovog* broja ne prelazi 2000, strujnice fluida su paralelne i strujanje je laminarno. Kada je brzina strujanja dovoljno velika, tako da vrijednost *Reynoldsovog* broja prijeđe 5000, strujnice fluida poprime vrtložni oblik i strujanje je turbulentno.

U slučaju laminarnog strujanja odnos između tlaka i toka je jednak kao i kod porozne sredine:

$$p_{21} = R_f \cdot q$$

s razlikom što se u ovom slučaju otpornost R_f izračunava iz *Hagen-Poiseuille*-vog zakona i glasi:

$$R_f = \frac{128 \mu \ell}{\pi d^4} \quad (2.119)$$

gdje je μ - apsolutna viskoznost fluida, ℓ - dužina cijevi i d - promjer cijevi. Cijev mora biti dovoljno dugačka u odnosu na promjer, da bi se izbjegao učinak nejednolikog toka koji izaziva ulaz i izlaz cijevi. Osim toga promjena brzine protjecanja treba biti dovoljno mala, da bi se utjecaj inercije mogao zanemariti.

- c) Otpornost cijevi s turbulentnim protjecanjem. U slučaju turbulentnog protjecanja tlak se može dovoljno dobro aproksimirati relacijom:

$$p_{21} = a_1 q |q|^{3/4} \quad (2.120)$$

gdje je a_1 - konstanta, koja ovisi o toku kod kojeg dolazi do turbulentnog stanja, o promjeni i dužini protočne cijevi, o gustoći i viskoznosti fluida, te o glatkoći unutarnje površine cijevi. Vrijednost a_1 najčešće se dobije mjerenjem. Usporedbom (2.120) sa (2.117) dobije se relacija za otpornost turbulentnog protjecanja, a glasi:

$$R_f = a_1 |q|^{3/4} \quad (2.121)$$

- d) Otpornost rupe na dovoljno tankoj stijeni. Ako je stijena s rupom kroz koju prolazi fluid dovoljno tanka da se dužina rupe u odnosu na promjer može zanemariti, razlika tlaka ispred i iza rupe može se dovoljno dobro aproksimirati relacijom:

$$p_{21} = a_o q |q| \quad , \quad (2.122)$$

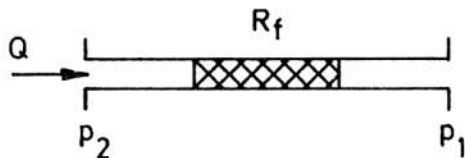
uz

$$a_o = \frac{\rho}{2c_d^2 A_o^2} \quad (2.123)$$

gdje je A_o - površina rupe, a c_d - koeficijent pražnjenja (koji za rupe s oštrim rubovima iznosi 0,62). Usporedbom (2.122) sa (2.117) dobije se otpornost rupe, a glasi:

$$R_f = a_o |q| \quad (2.124)$$

Iz dosadašnjih razmatranja proizlazi da se tlak u svim opisanim slučajevima može predložiti kao umnožak otpornosti i toka, čime je sačuvana opća zakonitost da je poprečna varijabla umnožak otpora i protječne varijable. Simbol za oznaku fluidičke otpornosti R_f prikazan je na Sl. 2.23.



Sl. 2.23. Simbol fluidičke otpornosti

Vrijedno je prisjetiti se da su sve relacije od (2.117) do (2.124) izvedene pod pretpostavkom da je promjena toka, odnosno ubrzanje fluida, dovoljno mala, tako da se utjecaj inercije može zanemariti.

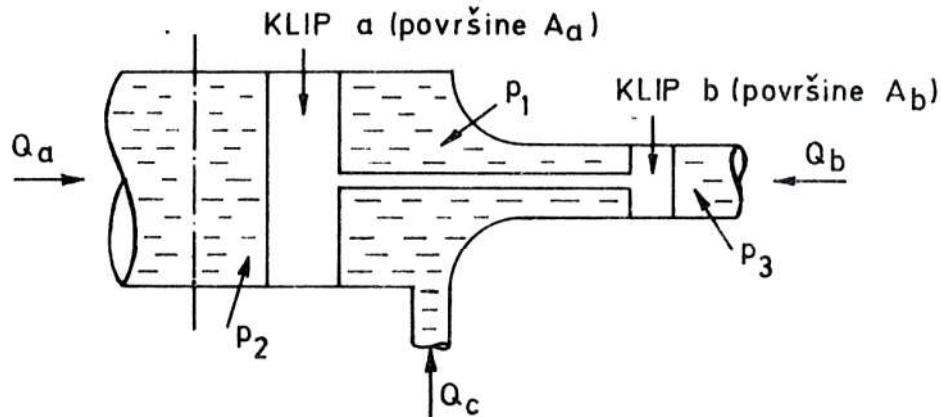
Otpornost je ovdje disipacijski element, a disipirana snaga izračunava se po relaciji:

$$P = p_{21} q = R_f q^2 = \frac{(p_{21})^2}{R_f} \quad (2.125)$$

uz

$$P \geq 0 \quad (2.126)$$

Fluidički transformatori. Za transformatore općenito već je rečeno da su naprave koje mijenjaju međusobni odnos poprečne i protječne varijable, a da pri tome njihov umnožak ostane konstantan, tj. da pri tome ne troše i ne akumuliraju energiju.



Sl. 2.24. Fluidički transformator

Jedan takav fluidički transformator je prikazan na Sl. 2.24. Sastoji se od dvije spojene cijevi različitih promjera u koje su umetnuta dva odgovarajuća klipa, međusobno spojena krutom šipkom. Prostor u cijevima između klipova je otvoren prema okolnoj sredini i ima tlak sredine, p_1 .

Sila koja djeluje na klip određena je izrazom:

$$F_a = (p_2 - p_1) A_a \quad (2.127)$$

Budući da su klipovi kruto spojeni, ta sila mora biti u ravnoteži sa silom F_b , koja djeluje na klip b i koja glasi:

$$F_b = (p_3 - p_1) A_b \quad (2.128)$$

Izjednačenjem (2.127) i (2.128) dobije se:

$$\frac{p_{31}}{p_{21}} = \frac{A_a}{A_b} = n \quad (2.129)$$

gdje je $p_{31} = p_3 - p_1$ i $p_{21} = p_2 - p_1$; omjer n naziva se omjer površina.

Primjenom brzine klipova:

$$v_a = \frac{q_a}{A_a} \quad (2.130)$$

i

$$v_b = \frac{q_b}{A_b} \quad (2.131)$$

uz

$$v_a = - v_b$$

omjer površina se proširuje na tok i obujam:

$$\frac{q_b}{q_a} = \frac{v_b}{v_a} = - \frac{A_b}{A_a} = - \frac{1}{n} \quad (1.132)$$

Grafički simbol fluidičkog transformatora prikazan je na Sl. 2.24.

2.5. TOPLINSKI SUSTAVI

Poput svih do sada razmatranih dinamičkih sustava i toplinski sustavi imaju svoju poprečnu i protječnu varijablu. Veličina koja se mjeri termometrom i koju nazivamo temperatura, predstavlja poprečnu varijablu, a veličina koja teče između dvije točke različitih temperatura težeći njihovom izjednačenju i koju nazivamo toplinski tok predstavlja protječnu varijablu. Temperatura određene točke materijalne sredine upravo je proporcionalna srednjoj kinetičkoj energiji molekula u toj točki. Ako dva medija različitih temperatura dovedemo u dodir, npr. uronimo komad metala temperature θ_1 u kapljevину, tempe-

rature Θ_2 , poteći će toplina kroz dodirnu plohu, i nakon nekog vremena temperature jednog i drugog medija će se izjednačiti.

U prošlosti je primjenjivano više jedinica za mjerenje temperature, a međunarodni sustav jedinica je zadržao samo dvije, i to su stupanj Celziosa $^{\circ}\text{C}$ i kelvin K . Stupanj Celziosa ili centigrad je stoti dio dužine razmaka između točke ledišta i točke vrelišta vode na živinom termometru. Na Celziusovoj ljestvici ledište se označava nulom, pa su stoga temperature ispod nule negativne, a iznad nule pozitivne. Jedan kelvin je po apsolutnoj vrijednosti jednak jednom centigradu, ali je nula Kelvinove ljestvice postavljena na apsolutnu nulu, tako da se točka smrzavanja vode odnosno nula Celziusove ljestvice nalazi na $273,16 \text{ K}$.

Količina energije, odnosno toplinska energija H , mjeri se u Jouleima $|\text{J}|$, a toplinski tok q u watima i definiran je kao derivacija toplinske energije po vremenu

$$q = \frac{dH}{dt} \quad (2.133)$$

Za razliku od svih do sada razmatranih dinamičkih sustava, kod kojih je snaga bila definirana kao umnožak poprečne i protječne varijable, protječna varijabla kod termičkih sustava sama za sebe predstavlja snagu

$$P = q \quad (2.134)$$

Toplinska energija H koja prelazi kroz određenu plohu s jednog tijela na drugo, ili iz jednog dijela tijela ili sredine u drugu, izračunava se po relaciji:

$$H = \int_0^t q \, dt \quad (2.135)$$

Prema prvom zakonu termodinamike, toplina koja u tijelo ulazi jednaka je sumi energija koja iz tijela izlaze plus energija koja je ostala akumulirana u tijelu.

Toplinska kapacitivnost. Osobina tijela da u sebi akumulira toplinu naziva se toplinska kapacitivnost a analitički predstavlja koeficijent proporcionalnosti između topline i temperature:

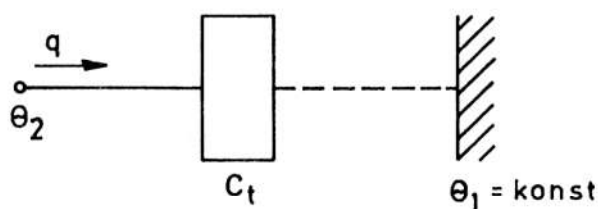
$$C_t = \frac{H}{\theta_{21}} \quad (2.136)$$

gdje je C_t izraženo u J/K.

Toplinska kapacitivnost je ovisna o masi tijela M i njegovoj specifičnoj toplini i stoga se može izraziti relacijom:

$$C_t = c M$$

gdje je c izražen u J/kg K. Simbol za toplinsku kapacitivnost prikazan je na Sl. 2.25.



Sl. 2.25. Simbol toplinske kapacitivnosti

Poput mase i fluidičke kapacitivnosti i toplinska kapacitivnost se jednim krajem uvijek vezuje za referentnu veličinu, u ovom slučaju temperaturu, koja može biti nula ili konstanta, tako da kroz referentni spoj ne teče toplina.

Ako nema potroška energije, akumulirana toplinska energija tijela jednaka je toplini koja mu je privedena:

$$E_t = H = f(\theta_{21}) \quad (2.138)$$

Sva dosadašnja razmatranja o toplinskoj kapacitivnosti vrijede uz pretpostavku da je temperatura u svim točkama promatranog medija jednaka.

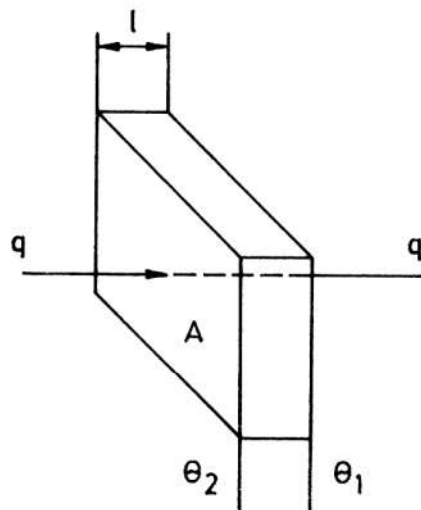
Toplinska otpornost. Protječući kroz prostor, prazan ili ispunjen nekom materijom, toplinski tok nailazi na otpor. To se očituje po padu temperature u smjeru toplinskog toka. Mediji koji toplinskom otporu pružaju veliki otpor nazivaju se toplinski izolatori, a mediji kroz koje toplinski tok prolazi relativno slobodno nazivaju se toplinski vodiči.

Protjecanje toplinskog toka se odvija na tri načina: *kondukcijom, konvekcijom i radijacijom.*

Kondukcija. Kroz čvrstu tvar ili fluid u mirovanju, toplinski tok teče prijelazom kinetičke energije s atoma na atom, a s temperaturom je vezan Fourierovim zakonom.

$$q = \frac{\sigma A (\theta_2 - \theta_1)}{\ell} \quad (2.139)$$

gdje je, prema Sl. 2.26., A - površina okomita na smjer toplinskog toka, ℓ - dužina u smjeru toka, $(\theta_2 - \theta_1) = \theta_{21}$ - temperaturna razlika uz $\theta_2 > \theta_1$, a σ je *toplinska vodljivost*.



Sl. 2.26. Prolaz toplinskog toka kroz čvrstu tvar

Relacija (2.139) povezuje protječnu i poprečnu varijablu i može se pisati u obliku:

$$q = \frac{1}{R_{kd}} \theta_{21} , \quad (2.140)$$

gdje je R_{kd} toplinska otpornost kondukcije:

$$R_{kd} = \frac{l}{\sigma A} \quad (2.141)$$

Konvekcija. Ako toplinski tok prolazi kroz plin ili kapljevину u gibanju, prijenos topline obavlja se *konvekcijom*. I u ovom slučaju vrijedi relacija (2.140), sada za R_{kv} - toplinsku otpornost konvekcije:

$$R_{kv} = \frac{1}{C_h A} \quad (2.142)$$

gdje je C_h - koeficijent konvekcije.

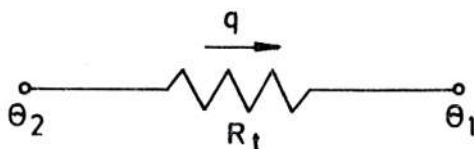
Radijacija. Osim kondukcijom i konvekcijom toplina se prenosi još i radijacijom. Toplinski tok u slučaju radijacije definiran je *Stefan-Boltzmannovim* zakonom, koji glasi:

$$q = C_r (\theta_2^4 - \theta_1^4) \quad (2.143)$$

gdje je C_r - konstanta ovisna o obliku, veličini, obradjenosti i materijalu predajne i prijemne površine kao i o valnoj duljini radijacije. U relaciji (2.143) temperatura se izražava u kelvinima. U slučaju radijacije, kako proizlazi iz (2.143), ne može se govoriti o otpornosti u uobičajenom smislu riječi, jer toplinski tok nije linearno ovisan o razlici temperature, kako to iz konvencionalne definicije proizlazi. Valja napomenuti da prijenos topline radijacijom dolazi do izražaja samo u slučaju

vrlo niskih temperatura, jer je konstanta C_r relativno vrlo mala.

Zahvaljujući činjenici da je radijacijski dio prijenosa topline na uobičajenim radnim temperaturama praktički zanemariv, preostala toplinska otpornost uslijed kondukcije i konvekcije ispada linearna. Grafički simbol toplinske otpornosti prikazan je na Sl. 2.27.



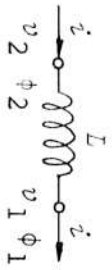
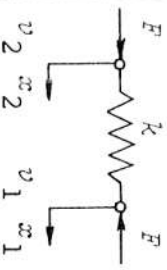
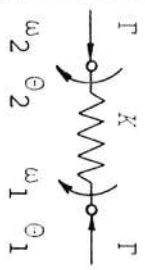
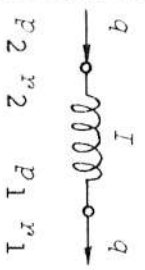
Sl. 2.27. Simbol toplinske otpornosti

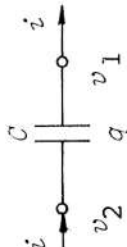
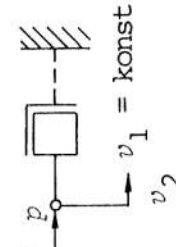
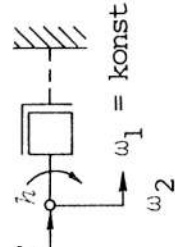
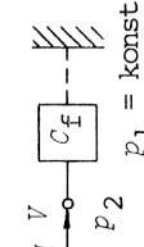
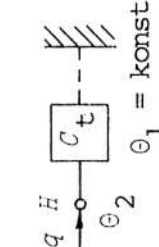
Specifična je zanimljivost, koju treba posebno uočiti kod toplinske otpornosti, da ona ne troši energiju. To je implicite već izraženo relacijom (2.134), koja kaže da snaga nije umnožak protječne i poprečne varijable već je identički jednaka protječnoj varijabli q .

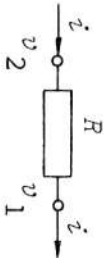
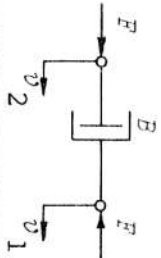
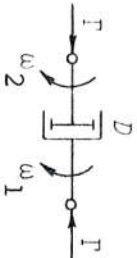
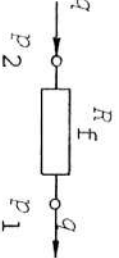
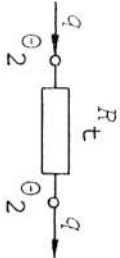
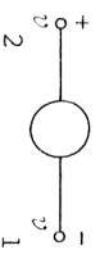
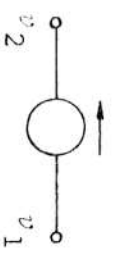
PREGLED PROPUŠČNIH I POPREČNIH VARIJABLI FIZIČNIH SUSTAVA

Variable	S U S T A V I				
	Električki	Mehanički		Fluidički	Toplinski
		Translacijski	Rotacijski		
Protječna	Struja i	Sila F	Moment Γ	Tok fluida q	Tok topline q
Integral prot- ječne varijable	Naboj q	Količina gibanja p	Količina gibanja h	Obujam V	Toplinska energija H
oprečna	Razlika napona v_{21}	Razlika brzine v_{21}	Razlika brzine ω_{21}	Razlika tlaka p_{21}	Razlika temperature Θ_{21}
Integral pop- rečne varijable	Magnetski tok ϕ_{21}	Razlika pomaka x_{21}	Razlika kuteva Θ_{21}	Količina gibanja tlaka r_{21}	Ne definira se

GRAFIČKI SIMBOLI I MATEMATIČKI OPISI FIZIČKIH ELEMENATA

VRSTA ELEMENTA	NAZIV ELEMENTA	GRAFIČKI SIMBOL	RELACIJA ZA ENERGIJU ILI SNAGU NA ČISTOM ELEMENTU	OSNOVNA RELACIJA ELEMENTA	RELACIJA ZA ENERGIJU ILI SNAGU NA IDEALNOM ELEMENTU
1	2	3	4	5	6
PROTJEČNA VRST ENERGETSKIH SPREMNIKA	INDUKTIVNOST		$E = \int_0^i i \, d\phi_{21}$	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} L i^2$
	TRANSLACIJSKA POPUSTLJIVOST		$E = \int_0^F F \, d\alpha_{21}$	$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$
	ROTACIJSKA POPUSTLJIVOST		$E = \int_0^T T \, d\Theta_{21}$	$\omega_{21} = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{K}$
	INERTNOST FLUIDA		$E = \int_0^q q \, d\pi_{21}$	$p_{21} = I \frac{dq}{dt}$	$E = \frac{1}{2} I q^2$

1	2	3	4	5	6
POPREČNA VRST ENERGIJSKIH SPREMNIKA	ELEKTRIČKA KAPACITIVNOST		$v_{21} = \int_0 v_{21} dq$	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v_{21}^2$
	TRANSLACIJSKA MASA		$v_2 = \int_0 v_2 dp$	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} M v_2^2$
	ROTACIJSKA INERCIJA		$\omega_2 = \int_0 \omega_2 dh_2$	$\Gamma = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J \omega_2^2$
	FLUIDIČKA KAPACITIVNOST		$p_2 = \int_0 p_2 dV$	$q = C_f \frac{dp_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f p_2^2$
	TOPLINSKA KAPACITIVNOST		$\Theta_2 = \int_0 q dt = H$	$q = C_t \frac{d\Theta_2}{dt}$	$E = C_t \Theta_2$

1	2	3	4	5	6
DISCIPLINSKI ELEMENTI	ELEKTRIČKA OTPORNOST		$P = i v_{21}$	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$P = \frac{1}{R} v_{21}^2$
	TRANSLACIJSKO PRIGUŠENJE		$P = F v_{21}$	$F = B v_{21}$	$P = B v_{21}^2$
	ROTACIJSKO PRIGUŠENJE		$P = \Gamma \omega_{21}$	$\Gamma = D \omega_{21}$	$P = D \omega_{21}^2$
	FLUIDIČKA OTPORNOST		$P = q p_{21}$	$q = \frac{1}{R_f} p_{21}$	$P = \frac{1}{R_f} p_{21}^2$
	TOPLINSKA OTPORNOST		$P = q$	$q = \frac{1}{R_t} \Theta_{21}$	$P = \frac{1}{R_t} \Theta_{21}^2$
ENERGIJSKI IZVORI	POPREČNI IZVOR		$P = f v_{21}$		
	PROTJEČNI IZVOR		$P = f v_{21}$		

2.6. PRETVORNICI

Pretvornicima nazivamo naprave koje pretvaraju jedan oblik energije u drugi a da pri tome ne akumuliraju niti troše energiju. U stvari, oni su napravljeni tako da pretvorba energije bude dominantna, a akumulacija i disipacija energije da bude zanemarivo mala.

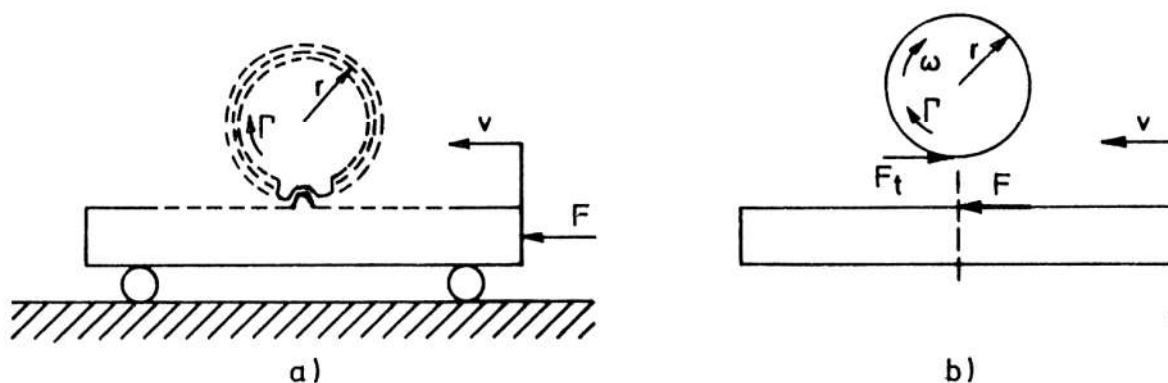
Ilustrirajmo to s pretvornikom translacijske energije u rotacijsku (Sl. 2.28.). Pretvornik se sastoji od pravčastog i kružnog zupčanika. Pod djelovanjem sile F pravčasti zupčanik se giba brzinom v u smjeru sile i tako okreće kružni zupčanik kružnom brzinom ω , stvarajući pri tome zakretni moment Γ .

Izjednačenjem dužine pravčastog pomaka s dužinom lučnog pomaka dobije se relacija:

$$v dt = \omega r dt \quad (2.144)$$

i odatle

$$\frac{v}{\omega} = r = n = \text{prijenosni omjer} \quad (2.145)$$



Sl. 2.28. a) pretvornik translacijskog gibanja u rotacijsko gibanje
b) dijagram slobodnih tijela pretvornika

Iz dijagrama slobodnih tijela mogu se postaviti relacije

$$F_t = - F \quad (2.146)$$

i

$$F_t \cdot r = \Gamma \quad (2.147)$$

a odatle

$$- \frac{F}{\Gamma} = \frac{1}{r} = \frac{1}{n} \quad (2.148)$$

Negativni predznak pokazuje da su sila i zakretni moment suprotnog smjera. Snaga koja ulazi u pretvornik izračunava se iz relacije:

$$P = \Gamma \omega + Fv = \Gamma \omega + \left(-\frac{\Gamma}{r}\right) r\omega = 0 \quad (2.149)$$

čime je potvrđeno polazno svojstvo pretvornika da pretvara energiju iz jednog oblika u drugi, ali da je ne troši.

Pretvornici zauzimaju vrlo opsežno područje tehničkih znanosti i susrećemo ih doslovce na svakom koraku. Za ilustraciju navodimo neke najpoznatije: termometar, kao pretvornik toplinske energije u mehaničku; ampermetar, kao pretvornik električke energije u mehaničku; električki generator, kao pretvornik mehaničke energije u električku; električki motor, kao pretvornik električke energije u mehaničku; termočlanak, kao pretvornik toplinske energije u električku itd. Izrađuju se u rasponu snage od ispod miliwata do iznad megawata, a primijenjuju se u mjerenjima, u konverziji signala, u prijenosu i proizvodnji energije itd.

2.7. ZAKLJUČAK

Poznavanje zakonitosti ponašanja dinamičkih sustava omogućuje da ih se matematički opiše, odnosno modelira. Potom se matematički model primijenjuje za istraživanje ponašanja sustava u određenim uvjetima.

Da bi se moglo prići matematičkom modeliranju, potrebno je prije svega utvrditi način obilježavanja elementarnih svojstava sustava i zakonitosti njihovih međusobnih ovisnosti. To je učinjeno u ovom poglavlju za električke, mehaničke, fluidičke i toplinske sustave.

Pri tome se pokazalo da među sustavima postoje korisne analogije. Naime, u svim opisanim sustavima postoje analogne protječne i poprečne varijable, kojih umnožak daje snagu; osim kod toplinskog sustava, gdje je protječna varijabla ujedno i snaga. Osim toga postoje analogne poprečne vrsti energijskih spremnika, tj. elemenata koji akumuliraju energiju. U svim sustavima, osim toplinskog, postoje i protječne vrsti energijskih spremnika. Još treba dodati i analogne disipacijske elemente, tj. elemente koji troše energiju.

Postojanje utvrđenih analogija omogućuje opisivanje različitih fizičkih sustava jednakim diferencijalnim jednadžbama i istraživanje ponašanja jednog sustava na analognom modelu bilo kojeg drugog sustava.

3. IZLAZNO-ULAZNI OPIS SUSTAVA

3.1. UVOD

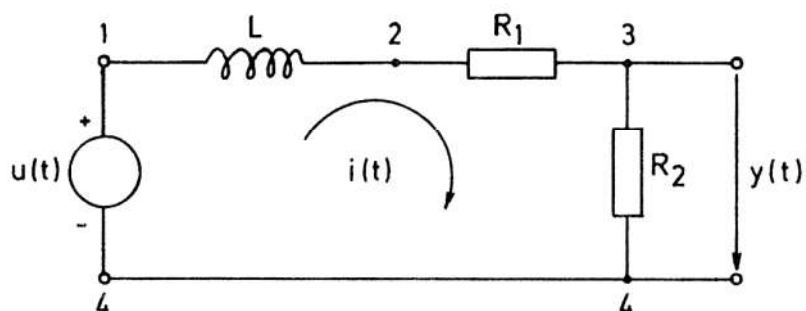
Poznavajući elemente fizičkog sustava možemo pristupiti opisu sustava koji se od tih elemenata sastoji. Dinamički sustavi, tj. sustavi kojih je ponašanje funkcija vremena, opisuju se diferencijalnim jednažbama. Da bi brže došli do rješenja tih jednažbi služimo se Laplaceovom transformacijom i konvencionalnim pobudnim funkcijama.

U ovom poglavlju ćemo se ograničiti na razmatranje ovisnosti izlazne varijable o ulaznoj varijabli. Taj slučaj je najjednostavniji, ali na svu sreću, i najčešći u inženjerskoj praksi, a naziva se izlazno-ulazni opis sustava.

3.2. IZLAZNO-ULAZNI OPIS SUSTAVA U VREMENSKOM PODRUČJU

Povezivanjem elemenata sustava dobije se *mreža* u kojoj se poprečna i protječna varijabla ponašaju po određenim zakonitostima. U električkim sustavima su to *Kirchoffovi* zakoni, a u mehaničkim sustavima *D'Ambertov* princip. Sustavnom primjenom odgovarajućih zakona na mrežu sustava dobije se matematički opis u obliku sustava diferencijalnih jednažbi. U stvari to je polazišni matematički model sustava.

Budući da inženjera zanimaju uzročno-posljedični odnosi, pokazalo se da je za primjenu prikladno formirati matematički opis u obliku jedne diferencijalne jednačbe, u kojoj je posljedica prikazana zavisnom nepoznanicom, a uzrok nezavisnom nepoznanicom. Ilustrirajmo to na jednoj električkoj mreži (Sl. 3.1.):



Sl. 3.1. Električka R-L mreža s naponskim izvorom

Na Sl. 3.1. shematski je prikazana jedna električka mreža napajana naponskim izvorom $u(t)$. Nas zanima ponašanje pada napona na otporniku R_2 u ovisnosti o promjeni napona napajanja $u(t)$.

Napon $y(t)$ na otporniku R_2 naziva se izlazni napon ili *odziv*, a predstavlja istraživanu posljedicu zadanog uzroka. Pri tom napon napajanja $u(t)$ predstavlja zadani uzrok, a naziva se ulazni napon, *upravljačka pobuda* ili jednostavno *pobuda*.

Uz drugačije postavljene problem, uzrok i posljedica tj. pobuda i odziv, mogla bi biti bilo koja druga dva parametra zadane mreže.

Mreža je sastavljena od *čvorova* i *petlji*. Čvorovi su točke mreže u kojima se spajaju krajevi ili *izvodi* dvaju ili više elemenata. Točke od 1 do 4 na Sl. 3.1. su čvorovi, a zatvoreni serijski spoj $u(t)$, L , R_1 i R_2 predstavlja petlju. Električka mreža koja se može sastojati od jedne ili više petlji često se naziva i *električki krug*.

Primjenom II Kirchhoffovog zakona, koji kaže da je zbroj padova napona unutar petlje jednak nuli, dobije se jednačba:

$$L \frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2) i(t) = u(t) \quad (3.1)$$

Primjenom Ohmovog zakona dobije se izraz za izlazni napon:

$$y(t) = R_2 i(t) \quad (3.2)$$

Uvrštavanjem $i(t)$ iz (3.2) u (3.1) dobije se:

$$\frac{L}{R_2} \dot{y}(t) + \frac{R_1 + R_2}{R_2} y(t) = u(t) \quad (3.3)$$

Izraz (3.3) je po obliku *nehomogena linearna diferencijalna jednačba prvog reda s konstantnim koeficijentima*, a predstavlja matematički opis ili matematički model električkog sustava sa Sl. 3.1. Uvidom u strukturu jednačbe (3.3) vidi se da su u koeficijentima ugrađeni elementi sustava: zavisna nepoznanica na lijevoj strani jednačbe $y(t)$ predstavlja odziv, a nezavisna nepoznanica $u(t)$ na desnoj strani jednačbe predstavlja pobudu. Red diferencijalne jednačbe ovisi o broju spremnika energije.

U prikazanom slučaju jedini spremnik energije je električki induktivitet L , pa je stoga i odgovarajuća diferencijalna jednačba prvog reda. Jednačba (3.3) može se pisati u obliku:

$$a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = u(t) , \quad (3.4)$$

a u slučaju sustava s n spremnika energije sustav će opisivati linearna diferencijalna jednačba n -tog reda:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 y(t) &= \\ &= c_{m+1} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + c_m \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots \\ &+ c_1 u(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3. IZLAZNO-ULAZNI OPIS SUSTAVA U LAPLACEOVOM PODRUČJU

Premda je postupak za rješavanje običnih linearnih diferencijalnih jednadžbi u potpunosti razredjen, tako da se korektnom primjenom tog postupka može riješiti svaki linearni sustav, pokazalo se da takvo rješavanje u *vremenskom području* zahtijeva mnogo vremena. Pogotovo taj postupak postaje složen kada treba rješavati sustav diferencijalnih jednadžbi višeg reda. Uloženo je mnogo truda da se do rezultata dodje na neki brži i lakši način.

Prvi uspio pokušaj u tom smislu učinio je engleski fizičar *O. Heaviside*, zamijenivši operator $\frac{d}{dt}$ operatorom s , i na taj način postigao da uz nulte početne uvjete može s diferencijalnim jednadžbama postupati kao s običnim algebarskim jednadžbama. Kasnije su *T.J. Bromwich* i *K.W. Wagner* primjenom *linearne integralne transformacije*, koju je stotinjak godina prije njih razradio *P.S. Laplace*, dokazali matematičku osnovanost operatorskog računa.

Danas se taj postupak pod nazivom *Laplaceova transformacija* uspješno primjenjuje za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi. Uobičajilo se da se rješavanje diferencijalnih jednadžbi s Laplaceovim operatorom naziva rješavanje u *donjem području* ili *Laplaceovom području* za razliku od *gornjeg* ili *vremenskog područja*.

Primjenom Laplaceove transformacije uz nulte početne uvjete jednačba (3.5) dobija oblik:

$$\begin{aligned} s^n y(s) + a_n s^{n-1} y(s) + \dots + a_1 y(s) \\ = c_{m+1} s^m u(s) + \dots + c_1 u(s) \end{aligned} \quad (3.6)$$

ili:

$$\begin{aligned} (s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1) y(s) = (c_{m+1} s^m + \\ + \dots + c_1) u(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

a odatle

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{c_{m+1} s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (3.8)$$

Izraz (3.8) predstavlja opći oblik matematičkog modela sustava n -tog reda u obliku *prijenosne funkcije*, koja je definirana kao odnos Laplaceove transformacije izlaza i Laplaceove transformacije ulaza uz nulte početne uvjete.

Vrijedno je odmah obratiti pažnju na neke bitne osobine prijenosne funkcije. U prvom redu, za realne fizičke sustave polinom u nazivniku je uvijek višeg reda od polinoma u brojniku, pa stoga prijenosna funkcija uvijek ima oblik *razlomljene racionalne funkcije*.

Nadalje, prijenosna funkcija sadržava sve informacije o sustavu kao i izvorna diferencijalna jednačba, pa je stoga uvijek moguća transformacija kako iz gornjeg u donje područje, tako i obrnuto. Osim toga, prijenosna funkcija ovisi samo o sustavu, a ne o ulazu. Ona je definirana kao odnos izlaza i ulaza i

stoga sadržava punu informaciju o tome kako sustav djeluje na bilo koji ulaz transformirajući ga u odgovarajući izlaz.

Faktoriziranjem brojnika i nazivnika prijenosna funkcija poprima oblik:

$$G(s) = c_{m+1} \frac{(s + n_1)(s + n_2) \dots (s + n_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = c_{m+1} \frac{\prod_{j=1}^{j=m} (s + n_j)}{\prod_{k=1}^{k=n} (s + p_k)}$$

$$= \frac{K B(s)}{N(s)}, \quad (3.9)$$

gdje je $B(s) = \prod_{j=1}^m (s + n_j)$

$$N(s) = \prod_{k=1}^n (s + p_k)$$

$$K = c_{m+1}$$

Korijeni brojnika nazivaju se *nule*, a korijeni nazivnika nazivaju se *polovi* prijenosne funkcije. Prema primijenjenim oznakama izlazi da u općem slučaju prijenosna funkcija ima m nula i n polova.

Na temelju učinjenih razmatranja jednadžba (3.3) u donjem ili Laplaceovom području glasi:

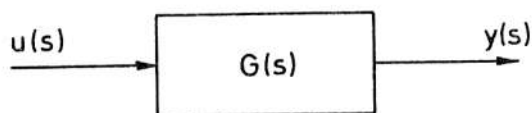
$$\left(\frac{L}{R_2} s + \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) y(s) = u(s) \quad (3.10)$$

a u obliku prijenosne funkcije:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{R_2}{Ls + (R_1 + R_2)} = \frac{R_2/L}{s + \frac{R_1 + R_2}{L}} \quad (3.11)$$

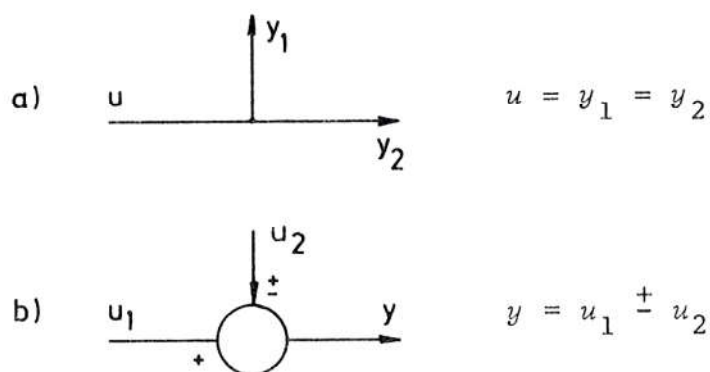
3.4. BLOKOVSKI PRIKAZ

Nakon uvođenja prijenosne funkcije nameće se misao da se sustav može prikazati i grafički, nekim simbolom koji se sastoji od ulazne informacije, sustava koji djeluje na ulaznu informaciju i konačno od izlazne informacije. Realizacija takvog prikaza navedena je na Sl. 3.2.



Sl. 3.2. Blokovski prikaz sustava

Da bi se sustavi mogli slagati u složenije cjeline potrebno je postaviti simbol za račvanje i simbol za zbrajanje signala.

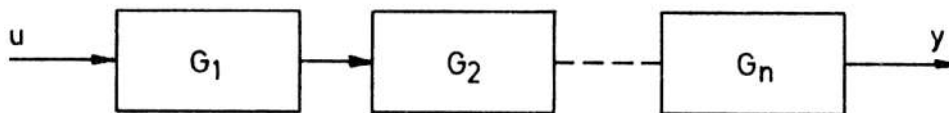


Sl. 3.3. a) Simbol za račvanje,
b) simbol za zbrajanje signala

U slučaju račvanja svaki pojedini izlazni signal jednak je ulaznom signalu. U slučaju zbrajanja izlazni signal iz zbrajala (sumatora ili komparatora) jednak je zbroju (ili razlici) ulaznih signala.

Dva ili više blokova mogu se vezati serijski ili paralelno. U slučaju serijskog spoja ukupni prijenos je jednak umnošku prijenosa pojedinih blokova.

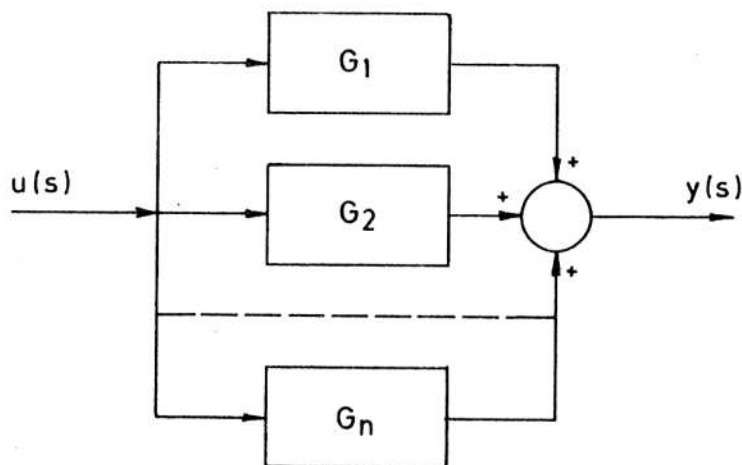
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \dots G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) \quad (3.12)$$



Sl. 3.4. *Serijski spoj blokova*

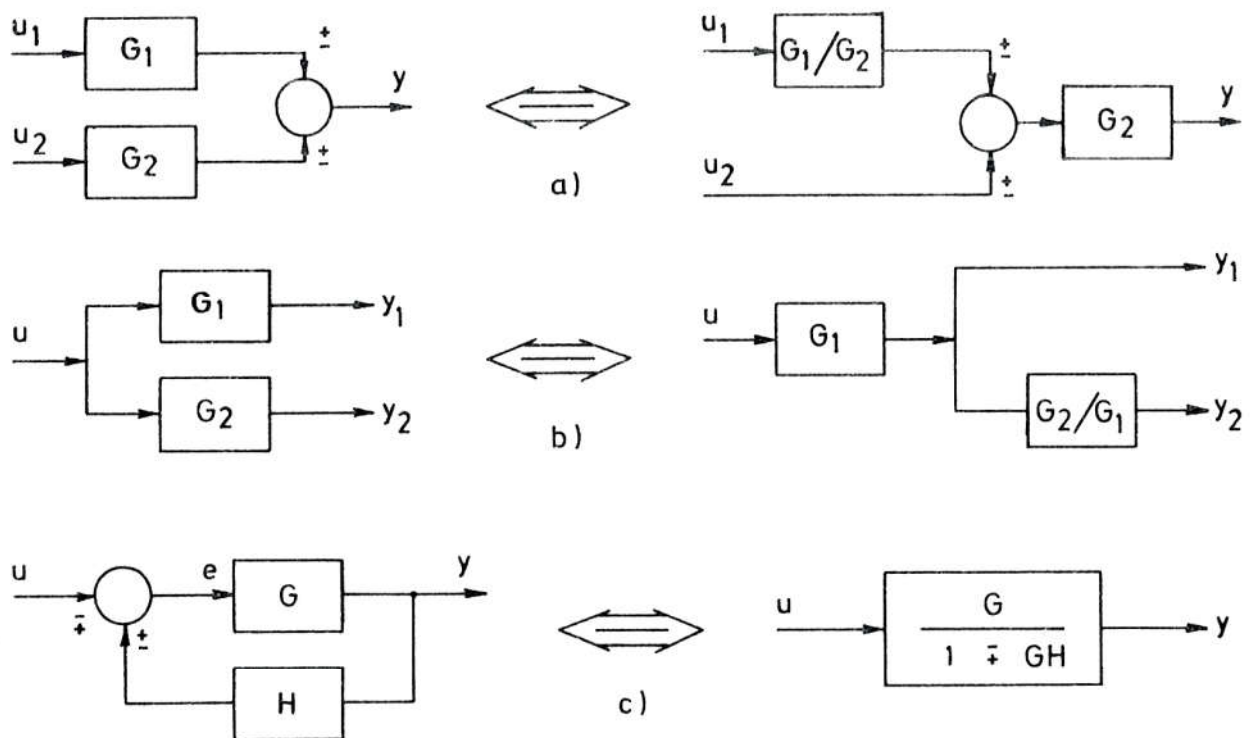
U slučaju paralelnog spoja ukupni prijenos je jednak zbroju prijenosa pojedinih blokova:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = G_1(s) + \dots + G_n(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s) \quad (3.13)$$



Sl. 3.5. *Paralelni spoj blokova*

U blokovskom prikazu informacijski signal ide samo u jednom smjeru, kako je to prikazano na slikama 3.2, do 3.5. tj. nema *protudjelovanja* idućeg bloka na prethodni. O tome treba voditi računa pri modeliranju fizičkih sustava, jer ako između dvije cjeline jednog dinamičkog sustava postoji protudjelovanje, onda ih se ne može prikazati kao dva odvojena bloka, a ako se to želi učiniti, prethodno ih je nužno odvojiti tzv. *razdvojnim pojačalom*. To pojačalo ima osobinu da sprječava međusobno protudjelovanje.



Sl. 3.6. *Identičnosti blokovskih prikaza*

Na Sl. 3.6. prikazane su tri karakteristične identičnosti blokovskih prikaza, promatrane s gledišta izlazno-ulaznih odnosa. Dokazi identičnosti pod a i b su očiti, pa se u njih nećemo upuštati, nego ćemo samo izvući zaključak.

Iz identičnosti pod a , gledano s lijeva na desno proizlazi da se zbrojište pomiče u protivnom smjeru od smjera toka informacije, tako da se blok u pomaknutoj grani podijeli s blokom preko kojeg je pomak izvršen; gledano s desna na lijevo proizlazi da se zbrojište pomiče u smjeru toka informacije, tako da se blok pomaknute grane pomnoži s blokom preko kojeg je pomak izvršen. Iz identičnosti pod b , gledano s lijeva na desno proizlazi da se blok pomaknute grane podijeli s blokom preko kojeg je pomak izvršen; gledano s desna na lijevo proizlazi da se čvorište pomiče u protivnom smjeru od toka informacije, tako da se blok pomaknute grane pomnoži s blokom preko kojeg je pomak izvršen.

Identičnost pod c se bitno razlikuje od prethodnih, jer lijevi blokovski prikaz sadrži zatvorenu informacijsku petlju. Prema oznakama na lijevom bloku možemo postaviti relacije:

$$e = u \pm yH$$

i

$$y = eG$$

Uvrštenjem e iz druge jednadžbe u prvu dobije se

$$\frac{y}{G} = u \pm yH$$

a odatle sredjenjem

$$\frac{y}{u} = \frac{G}{1 \pm GH} \quad (3.14)$$

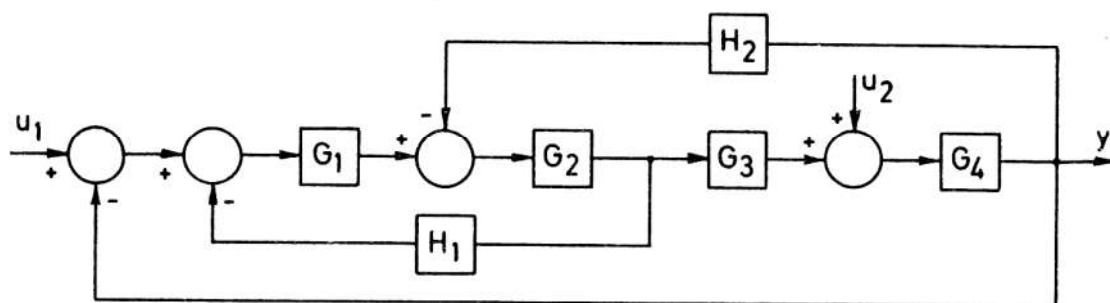
čime je postavljena identičnost dokaza.

Za ilustraciju opisane *blokovske algebre* razmotrimo sustav na Sl. 3.7.a . Zadatak je da se primjenom blokovske algebre nadju prijenosne funkcije $\frac{y}{u_1}$ i $\frac{y}{u_2}$.

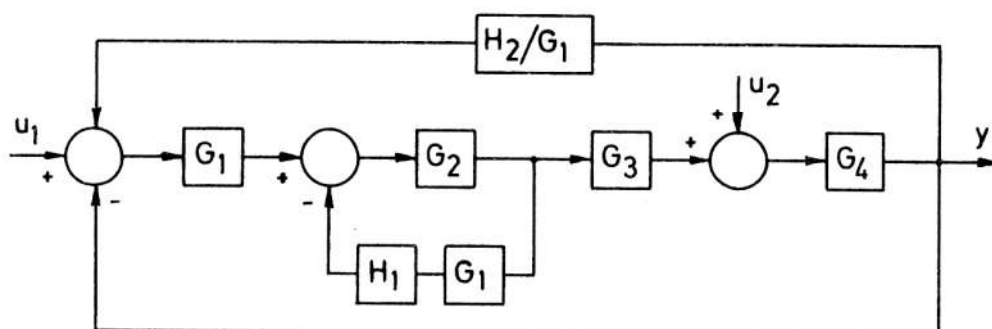
Pomaknimo najprije zbrojište grane H_1 u smjeru toka informacije preko bloka G_1 . U tom slučaju množimo granu H_1 s preskočenim blokom G_1 . Zbrojište grane H_2 pomaknimo protivno toku informacije preko bloka G_1 . U tom slučaju dijelimo granu H_2 s preskočenim blokom G_1 . Rezultat učinjenih transformacija je prikazan na Sl. 3.7.b. Kao idući korak mogu se paralelne grane H_2/G_1 i jedinična grana $1 + (H_2/G_1)$, a potom pobudu u_2 pomaknuti na zajedničko zbrojište u_1 . Ovaj potonji pomak činimo protivno toku informacije, pa stoga pobudu u_2 dijelimo s preskočenim blokovima G_1 , G_a i G_3 , gdje je

$$G_a = \frac{G_2}{1 + \frac{H_1}{H_1} G_1 G_2} \quad \text{kako je prikazano na Sl. 3.7.c.}$$

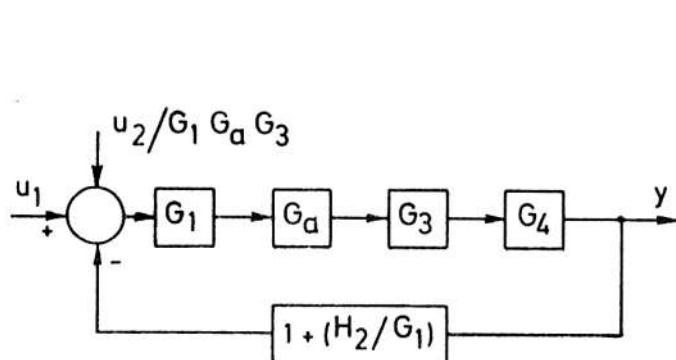
Idući korak može biti da se svi blokovi unaprijedne grane spoje u jedan, kako je prikazano na Sl. 3.7.d, te konačno primjenom *principa superpozicije*, koji kaže da je u linearnim sustavima zbroj odziva jednak odzivu zbroja, dobije se prijenos $\frac{y}{u_1}$ na Sl. 3.7.e i prijenos $\frac{y}{u_2}$ na Sl. 3.7.f.



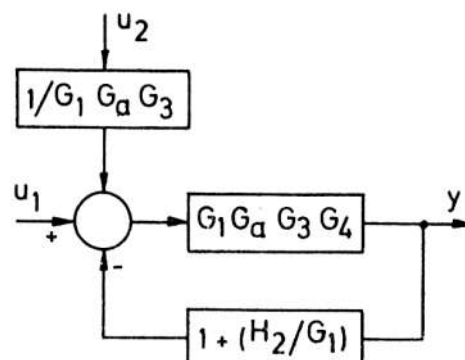
d)



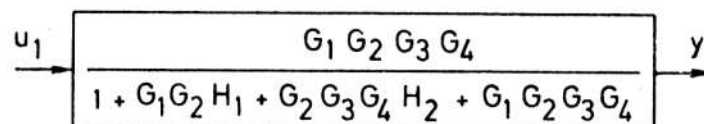
b)



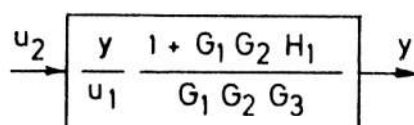
c)



d)



e)

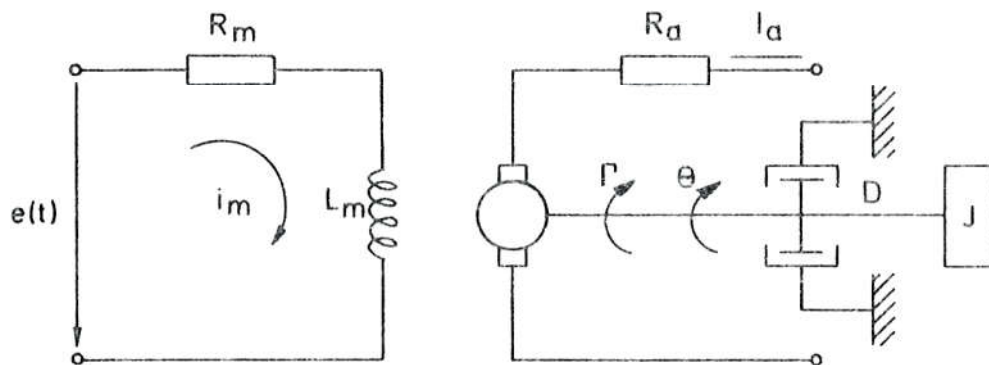


f)

Sl. 3.7. Blokovo rješenje izlazno-ulazne ovisnosti

3.5. MODELIRANJE S PRIJENOSNOM FUNKCIJOM

Na temelju učinjenih razmatranja sada već možemo pristupiti modeliranju složenijih sustava. Izaberimo za početak *istosmjerni servomotor upravljen strujom magnetiziranja*, kojeg je shema prikazana na Sl. 3.8.



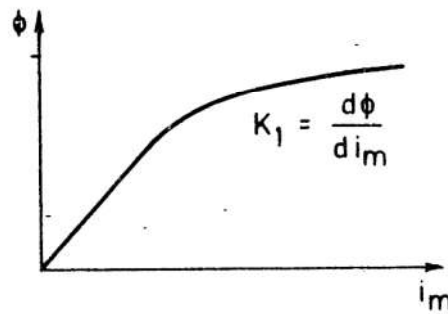
Sl. 3.8. *Istosmjerni servomotor upravljen strujom magnetiziranja*

Nas zanima ovisnost kuta izlazne osovine $\theta(t)$ o naponu napajanja $e(t)$, pa stoga tražimo prijenosnu funkciju kao odnos $\theta(s)$ i $e(s)$. Na temelju II Kirchhoffovog zakona jednačba za ulaznu petlju glasi:

$$L_m \frac{di_m(t)}{dt} + R_m i_m(t) = e(t) \quad (3.15)$$

Ograničimo li se na linearni dio krivulje magnetiziranja (Sl. 3.9), za ovisnost magnetskog toka ϕ o struji magnetiziranja i_m vrijedi relacija

$$\phi = K_1 i_m \quad (3.16)$$



Sl. 3.9. Krivulja magnetiziranja feromagnetske tvari

gdje je K_1 faktor proporcionalnosti, a na grafičkom prikazu predstavlja nagib krivulje magnetiziranja. Magnetski tok ϕ i struja armature I_a proizvode zakretni moment Γ_p na osovini motora:

$$\Gamma_p = K_2 \phi I_a \quad (3.17)$$

gdje je K_2 konstrukcijski faktor motora, koji ovisi prvenstveno o broju polova i broju zavoja. Uvrštenjem jednadžbe (3.16) u (3.17) dobije se proizvedeni zakretni moment:

$$\Gamma_p(t) = K_1 K_2 I_a \cdot i_m = K_\gamma \cdot i_m \quad (3.18)$$

Proizvedeni zakretni moment Γ_p treba savladati moment uslijed inercije $J\ddot{\theta}$, moment uslijed frikcije $D\dot{\theta}$ i opteretni moment $\Gamma(t)$:

$$K_\gamma i_m = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + \Gamma(t) \quad (3.19)$$

gdje je θ kut zakreta izlazne osovine. Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbu (3.15) i (3.19), uz nulte početne uvjete, dobijemo sustav diferencijalnih jednadžbi u donjem području

$$(L_m s + R_m) i_m = e(s) \quad (3.20)$$

$$- K_Y i_m + (Js^2 + Ds) \theta = - \Gamma(s)$$

U jednađbama (3.20) $e(s)$ je pobuda, a $\Gamma(s)$ je poremećaj. Budući da smo se ograničili na linearni dio krivulje magnetiziranja, i da je stoga naš sustav linearan, možemo se pri rješavanju jednađbi (3.20) poslužiti principom superpozicije. Na temelju tog principa rješavamo sustav posebno za pobudu, kao da nema poremećaja, a posebno za poremećaj, kao da nema pobude. Potražimo najprije prijenosnu funkciju kao odnos izlaznog kuta θ i pobudnog napona $e(s)$, uz nulti opteretni moment Γ . Primjenom Cramerovog pravila na sustav jednađbi (3.20) dobije se:

$$\frac{\theta(s)}{e(s)} = \frac{D_{12}}{D} = \frac{K_Y}{(Js^2 + Ds)(L_m s + R_m)} = \frac{\frac{K_Y}{JL_m}}{s(s + \frac{D}{J})(s + \frac{R_m}{L_m})} \quad (3.21)$$

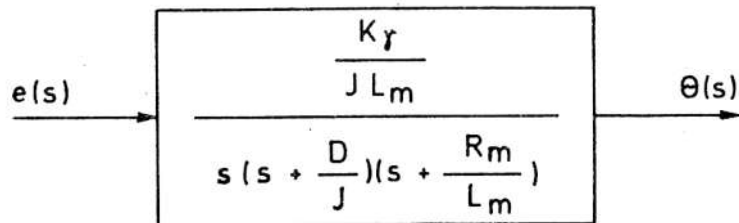
ili:

$$\frac{\theta(s)}{e(s)} = \frac{K_Y}{JL_m s^3 + (L_m D + R_m J) s^2 + DR_m s} \quad (3.22)$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom dobije se opis u gornjem području:

$$JL_m \ddot{\theta}(t) + (L_m D + R_m J) \dot{\theta}(t) + DR_m \theta(t) = K_Y e(t) \quad (3.23)$$

a direktno iz (3.21) blokovski prikaz na Sl. 3.10.



Sl. 3.10. Blokovski prikaz istosmjernog servomotora napajanog strujom magnetiziranja

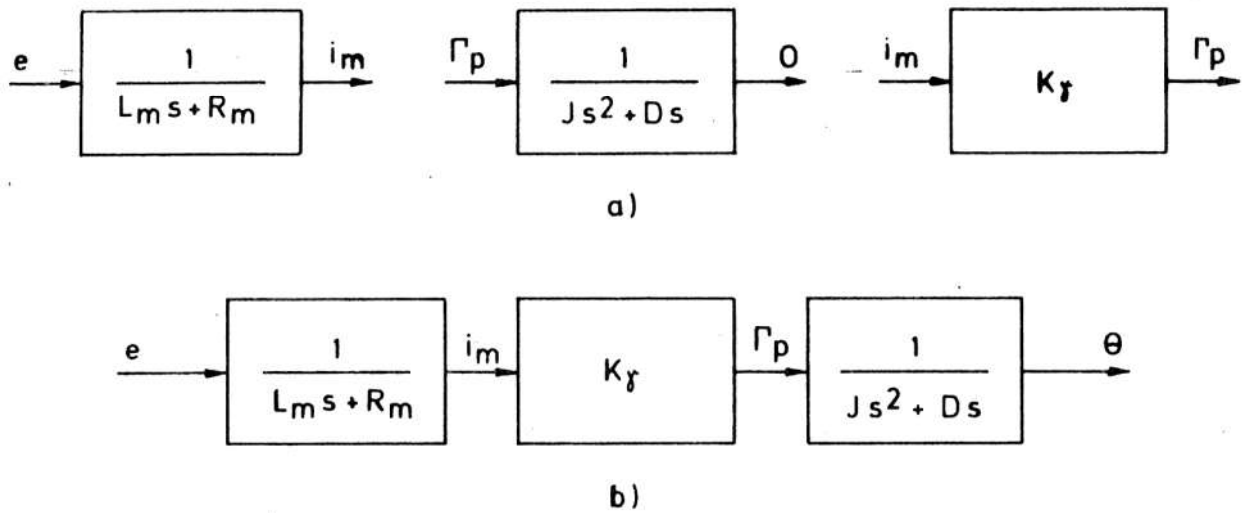
Uz zanemarenje opteretnog momenta jednačba (3.15), (3.19) i (3.18) u donjem području glase:

$$(sL_m + R_m) i_m(s) = e(s)$$

$$(Js^2 + Ds) \theta(s) = \Gamma_p(s) \quad (3.24)$$

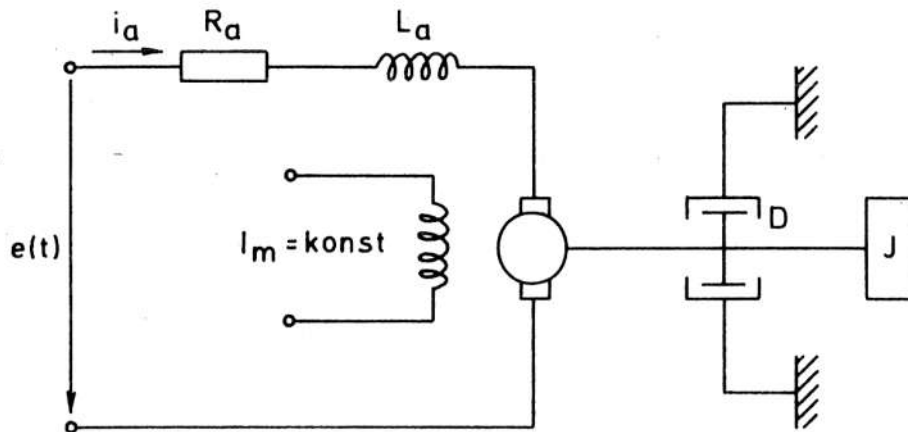
$$\Gamma_p(s) = K_{\gamma} i_m(s)$$

Za svaku pojedinu od ovih jednačbi može se nacrtati blokovski prikaz kako je učinjeno na Sl. 3.11.a . Spoje li se dobijeni blokovi u seriju, vodeći računa o ulazno-izlaznim varijablama, dobije se blokovski prikaz na Sl. 3.11.b , koji primjenom blokovske algebre prelazi u blokovski prikaz na Sl. 3.10. dobijen iz sustava jednačbi (3.20).



Sl. 3.11. Blokovski izvod prijenosne funkcije istosmjernog servomotora upravljanog strujom magnetiziranja

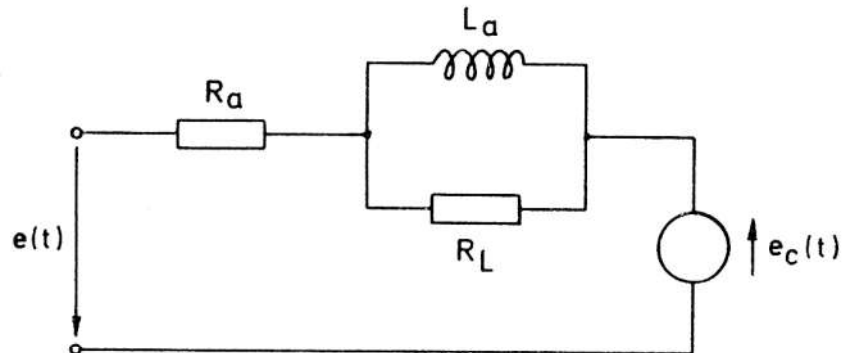
Za idući primjer uzmimo istosmjerni servomotor upravljan strujom armature, koji je shematski prikazan na Sl. 3.12.



Sl. 3.12. Istosmjerni servomotor upravljen strujom armature

Zakoči li se motor i izmjeri njegova impedancija, može se ustanoviti da se ona sastoji od otpora R serijski vezanog s paralelnom kombinacijom induktiviteta L_a i otpora R_2 . Pusti li se da se motor okreće, može se ustanoviti pojava elektromotorne sile (EMS) $e_c(t)$ suprotno polarizirane naponu koji je okretanje

proizveo. Na temelju toga zaključujemo da ulazni krug motora izgleda kao na Sl. 3.13.



Sl. 3.13. Ulazni krug električnog servomotora upravljanog strujom armature

Otpor R_a je ohmski otpor namotaja armature, L_a je induktivitet namotaja armature, a R_L je omski otpor izazvan gubicima magnetskog kruga. Budući da je otpor R_L oko 5 - 10 puta veći od otpora R_a , u proračunima se R_L može zanemariti, što je i učinjeno na Sl. 3.12. Što se tiče EMS e_c , ona nastaje kad vodiči armature presijecaju silnice konstantnog magnetskog polja.

Uz zanemarenje otpora R_L ulazna električka jednadžba motora prema drugom Kirchhoffovom zakonu, glasi:

$$e(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R i_a + e_c(t) \quad (3.25)$$

Interno proizvedena EMS $e_c(t)$ je proporcionalna kutnoj brzini ω :

$$e_c(t) = K_e \omega \quad (3.26)$$

gdje je K_e električka konstanta motora. Uz konstantni magnetski tok motora, struja armature proizvodi zakretni moment:

$$\Gamma_p = K_Y i_a \quad (3.27)$$

gdje je K_Y - magnetska konstanta motora. Vrijedno je imati na umu da u Međunarodnom sustavu jedinica (MSJ) numeričke vrijednosti K_e i K_Y izlaze jednake.

Proizvedeni zakretni moment Γ_p savladava opterećenje uslijed inercije, frikcije i vanjski opteretni moment $\Gamma(t)$:

$$K_Y i_a = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + \Gamma(t) \quad (3.28)$$

gdje je θ kut zakreta izlazne osovine. Ograničimo li se i ovdje na promatranje odnosa izlaznog kuta i ulaznog napona, primjenom principa superpozicije možemo zanemariti opteretni moment $\Gamma(t)$, pa jednadžba (3.28) glasi:

$$K_Y i_a = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} \quad (3.29)$$

Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbe (3.25), (3.26), (3.27) i (3.29) dobiju se jednadžbe:

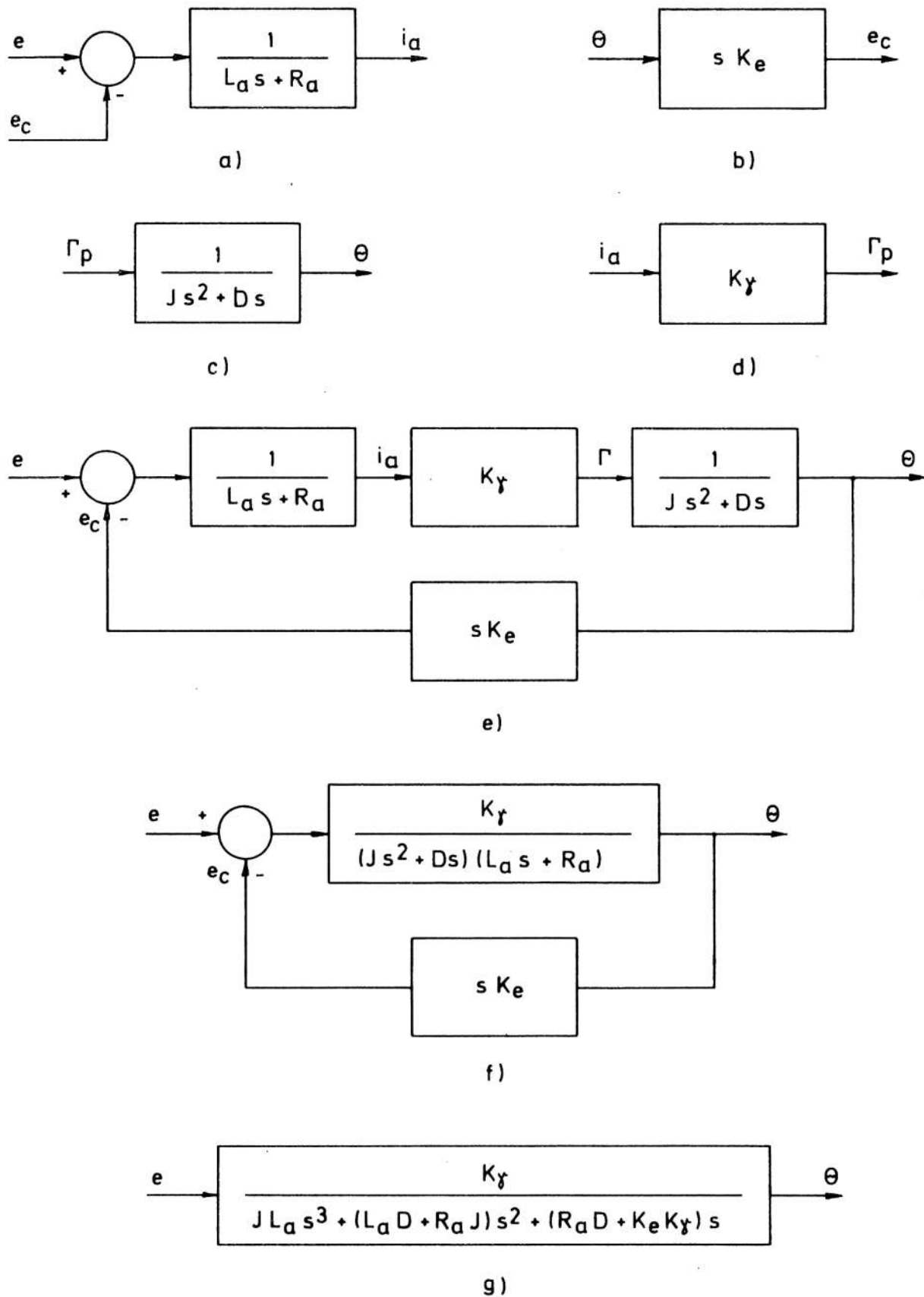
$$(sL_a + R_a) i_a(s) = e(s) - e_c(s)$$

$$e_c(s) = K_e s \theta(s)$$

(3.20)

$$\Gamma_p(s) = K_Y i_a(s)$$

$$\Gamma_p(s) = (Js^2 + Ds) \theta(s)$$



Sl. 3.14. Blokovski izvod prijenosne funkcije istosmjernog servomotora upravljanog strujom armature

Na Sl. 3.14. pokazano je kako se blokovskim pristupom može doći to traženog odnosa izlaznog kuta i ulaznog napona. Najprije su na slikama 3.14.a do d prikazani blokovi svakog pojedinog podsustava. Zatim su na Sl. 3.14.e spojeni svi podsustavi u jednu cjelinu, vodeći računa o ulazno-izlaznim varijablama. Na Sl. 3.14.f sjedinjeni su blokovi unaprijedne grane, a povratna grana je ostala samostalna, i konačno na Sl. 3.14.g, primjenom identičnosti c na Sl. 3.6., sjedinjena je unaprijedna i povratna grana u jedinstveni blok, s izlazom θ i ulazom e .

Iz prethodnih razmatranja i prikazanih primjera proizlazi zaključak da se matematički model u obliku prijenosne funkcije, ili blokovski prikaz koji predstavlja odnos izlazne i ulazne varijable, može vrlo uspješno primjenjivati ako nam nije potrebna informacija o ponašanju ostalih varijabli. Ako nas zanima i ponašanje ostalih varijabli, onda se moramo poslužiti matematičkim modelom varijabli stanja.

3.6. KONVENCIONALNE POBUDNE FUNKCIJE ZA ISTRAŽIVANJE PONAŠANJA SUSTAVA

Ponašanje dinamičkog sustava sadržano je u njegovu matematičkom modelu, a eksplicite je dano odzivom na određenu pobudu. Budući da ponašanje sustava ne ovisi o pobudi, logično je zaključiti da odziv na bilo koju pobudu sadrži punu informaciju o ponašanju sustava. Za matematičku obradbu, međjutim, nije svejedno kakav je matematički izraz pobude, jer to može znatno utjecati na težinu problema. I u eksperimentalnoj obradbi treba voditi računa o pobudnoj funkciji, radi mogućnosti njenog generiranja. S druge strane poželjno je da se odziv može što lakše interpretirati tj. da se iz njega na što jednostavniji način može dobiti što više relevantnih podataka o ponašanju sustava.

Pokazalo se da većinu postavljenih zahtjeva zadovoljavaju:

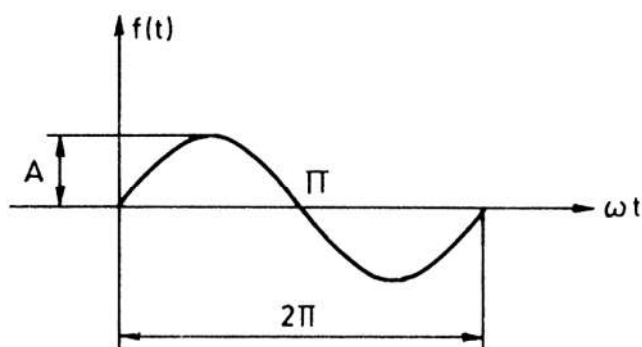
- sinusna funkcija
- odskočna funkcija
- uzlazna pravčasta funkcija
- parabolična funkcija i
- impulsna funkcija .

Odziv svake od navedenih funkcija daje punu informaciju o ponašanju sustava. Pokazalo se, međutim, da u određenim okolnostima pojedine funkcije mogu imati određenu prednost pred ostalima.

Sinusna funkcija je zadana relacijom:

$$f(t) = A \sin (\omega t + \phi) \quad (3.31)$$

gdje je $\omega = 2 \pi f$, a f je frekvencija u Hz. U jednadžbi (3.31) se pretpostavlja da je $t = 0$ bilo davno u prošlosti tj. da je u trenutku promatranja $t \gg 0$, i da su stoga prošle sve prijelazne pojave te da se funkcija nalazi u ustaljenom stanju.

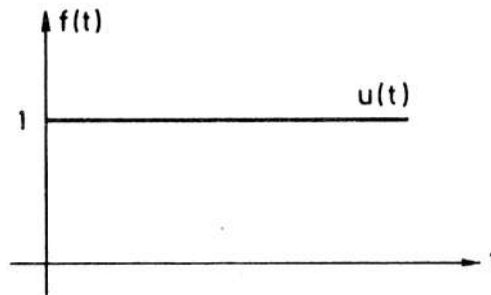


Sl. 3.15. Sinusna funkcija

Sinusna funkcija se relativno lako može generirati, pa je stoga vrlo prikladna za eksperimentalna istraživanja.

Odskočna ili Heavisideova funkcija do vremena $t < 0$ ima vrijednost nula. U vremenu $t = 0$ skokovito poprima konačnu vrijednost i na toj vrijednosti ostaje za sve $t > 0$. Ako je konačna vrijednost jedinica, funkcija se naziva *jediničan odskočna funkcija* i obilježava se sa $u(t)$, a analitički opis glasi:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ 1 & \text{za } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

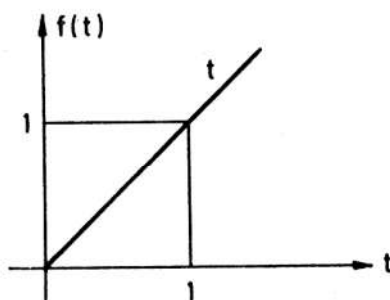


Sl. 3.16. Jedinična odskočna funkcija

Idealnu odskočnu funkciju je nemoguće ostvariti s realnim sustavima, zbog svuda prisutnih spremnika energije koji se protive skokovitoj promjeni stanja. Za inženjersku praksu, međjutim, to i nije bitno. Dovoljno je da vremenska konstanta odskočne funkcije bude bar deset puta manja od vremenske konstante ispitivanog sustava, a to se u najvećem broju slučajeva može postići.

Uzlazna pravčasta funkcija do vremena $t < 0$ ima vrijednost nula. U vremenu $t = 0$ počinje jednolično rasti, i tako raste za sve $t > 0$. Ako je tangens nagiba pravca jedinica, funkcija se naziva *jedinična uzlazna pravčasta funkcija*, a njen analitički izraz glasi:

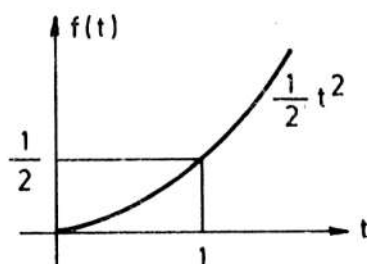
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ t & \text{za } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.33)$$



Sl. 3.17. Jedinična uzlazna pravčasta funkcija

Parabolična funkcija do vremena $t < 0$ ima vrijednost nula, a u vremenu $t = 0$ počinje kvadratično rasti, i tako raste za sve $t > 0$. Njen analitički izraz glasi:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{za } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.34)$$



Sl. 3.18. Parabolična funkcija

Pažljivim motrenjem izraza za odskočnu, uzlazna i paraboličnu funkciju lako se može uočiti sličnost s pojedinim članovima polinoma:

$$f(t) = a_1 t^0 + a_2 t + a_3 t^2 + \dots \quad (3.35)$$

Prvi član polinoma (3.35) odgovara odskočnoj funkciji, drugi član polinoma odgovara uzlaznoj funkciji, a treći član odgovara paraboličnoj funkciji. Nadalje, uzlazna pravčasta funkcija je u stvari derivacija parabolične funkcije:

$$f_{uz}(t) = \frac{d f_{pa}(t)}{dt} \quad (3.36)$$

a odskočna funkcija je derivacija uzlazne pravčaste funkcije:

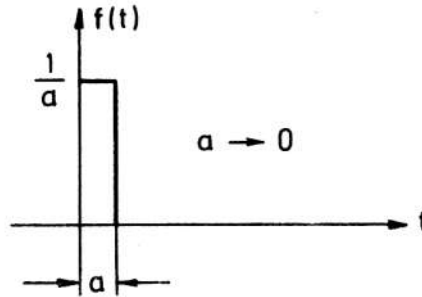
$$u(t) = \frac{d f_{uz}(t)}{dt} \quad (3.37)$$

Razmišljajući tim slijedom dolazi se do funkcije koja je derivacija odskočne funkcije:

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{dt} \quad (3.38)$$

a naziva se *impulsna, Diracova ili delta funkcija*. Njen analitički izraz glasi:

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ \infty & \text{za } t = 0 \\ 0 & \text{za } t > 0 \end{cases} \quad (3.39)$$



Sl. 3.19. Jedan od mogućih prikaza impulsne funkcije; $a \rightarrow 0$

Jedan od mogućih prikaza impulsne funkcije, koji se u inženjerskoj praksi često primjenjuje, naveden je na Sl. 3.19., a njen analitički izraz u tom slučaju glasi:

$$f(t) = \delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} |u(t) - u(t - a)| \quad (3.40)$$

Integriranjem impulsne funkcije od $-\varepsilon$ do ε uz $\varepsilon \rightarrow 0$ dobije se obuhvaćena površina:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d u(t) = u(t) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 1 - 0 = 1 \quad (3.41)$$

što odgovara i prikazu na Sl. 3.19., jer je u tom slučaju površina obuhvaćena krivuljom također jednaka jedinici.

Već smo spomenuli tehničke poteškoće oko generiranja odskočne funkcije, a poteškoće za δ funkciju su mnogo veće, jer se radi o uzastopnom generiranju pozitivne i negativne odskočne funkcije, a uz to i vrijeme uzastopnosti teži k nuli. Ipak se ova funkcija vrlo mnogo primjenjuje u inženjerskim postupcima, zbog pogodnosti koju pruža u matematičkoj obradbi. U eksperimentalnom radu uspješno se nadomješta pulsom konačne visine i vrlo malog trajanja. Tako se u mehaničkim sustavima može nadomjestiti snažnim udarcem malim čekićem po objektu kojeg je masa barem deset puta veća od mase čekića. U električkim sustavima to može biti puls kojeg trajanje nije veće od jedne desetine najmanje vremenske konstante sustava.

3.7. ZAKLJUČAK

Da bi se moglo uspješno provesti modeliranje dinamičkih sustava, potrebno je prije svega poznavati zakonitosti funkcioniranja objekta modeliranja. Do njih se može doći teorijskim razmatranjem ili praktičkim mjerenjem. Te zakonitosti su temelji za postavljanje izlazno-ulazne diferencijalne jednadžbe. Primjenom Laplaceove transformacije, odnosno prijelazom u donje ili Laplaceovo područje, moguće je uz nulte početne uvjete izvesti prijenosnu funkciju i za rješavanje problema koristiti blokovsku algebru. Raki lakšeg računanja i mjerenja te tumačenja i uspoređivanja rezultata, za pobudjivanje sustava u cilju istraživanja izlazno-ulaznih ovisnosti primjenjuju se konvencionalne pobudne funkcije.

4. OPIS SUSTAVA S VARIJABLAMA STANJA

4.1. UVOD

Prijenosna funkcija i *opis s varijablama stanja* dva su različita načina matematičkog modeliranja dinamičkih sustava. Na prvi pogled bi se moglo pomisliti da se radi o rješavanju istog problema na dva različita načina, pa bi odatle bilo logično da se ocijeni koji je od tih dvaju načina bolji. Međutim, pažljivim uvidom se otkriva da, čak i ako se radi o istom objektu, ne radi se i o istom problemu. Prijenosna funkcija daje podatak o odnosu neke od varijabli sustava, koju nazivamo izlaznom varijablom ili odzivom, i neke druge varijable sustava koju nazivamo ulaznom varijablom ili pobudom, i to uz nulte početne uvjete. Opis s varijablama stanja daje podatak o ponašanju cjelokupnog skupa varijabli koje određuju stanje sustava.

S inženjerskog gledišta ta dva načina rješavaju dva različita problema: prijenosna funkcija daje odnos dviju varijabli uz nulte početne uvjete, ne vodeći računa o ostalim odnosima unutar sustava, a opis s varijablama stanja daje podatak o ponašanju čitavog skupa minimalnog broja varijabli kojima je sustav određen, pa stoga i o njihovim međusobnim odnosima uz zadane početne uvjete. Izlazno-ulazni model, ili kako se još naziva prijenosna funkcija, relativno je jednostavniji i zahtijeva manje vremena za obradu, što je i za očekivati, jer kao što je već kazano, svaki od njih je bolji u svom području primjene. Tu činjenicu se ne smije smetnuti s uma, pa ih s tim u vezi treba svrsishodno i primjenjivati.

Budući da se uobičajilo opis s varijablama stanja izražavati u matričnom obliku, uvodno ćemo, radi jednoznačnosti terminologije, sažeto navesti osnovne pojmove i definicije matrične algebre.

4.2. MATRICE

Matrica je pravokutni raspored elemenata poredanih u m vodoravnih redaka i n okomitih stupaca, koji se pokoravaju zakonima *matrične algebre*. Matrica $\underline{A}$ je stoga:

$$\underline{A} = [a_{if}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.1.)$$

U skraćenom, odnosno simboličkom obliku matrice se označavaju s $\underline{A}$ ili $[a_{ij}]$, a ako se pišu svi elementi onda ih se stavlja u uglate zagrade, prema rasporedu u jednadžbi (4.1.). Elementi matrice se označavaju malim slovom i dvostrukim subskriptom. Za izračunavanje konačnog rezultata matrice treba pisati u rasporedjenom obliku, što je i razumljivo, jer simboličko pisanje ne rješava problem, već samo olakšava postupak kojim se dolazi do rezultata.

Pod (4.2.) navedene su tri tipične matrice iz kojih se vidi da elementi matrice mogu biti realni ili kompleksni brojevi te funkcije s vremenskom ili s frekvencijskom varijablom:

$$\begin{bmatrix} 2+j & 4 \\ 0 & 6 \\ 9+j & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{s+j} & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{s+2}{s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.2.)$$

a) b) c)

Klasifikacija matrica vrši se prema broju redaka i stupaca. Matrica sa m redaka i n stupaca naziva se *pravokutna matrica*, $m \times n$ *matrica*, ili *matrica reda* $m \times n$. Ako je $m = n$, takva se matrica naziva *kvadratična matrica*. Ako matrica ima m

redaka, a samo jedan stupac, naziva se *stupčana matrica* ili *stupčani vektor*, a ako ima samo jedan redak i n stupaca naziva se *redna matrica* ili *redni vektor*. Za razliku od pravokutne matrice koja se označava velikim slovom i ima članove s dvostrukim subskriptom, vektori se označavaju malim slovom i imaju članove s jednostrukim subskriptom npr.:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \text{stu } (x_1, x_2 \dots x_m) = [x_i] \quad (4.3.)$$

$$\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] = [x_j] \quad (4.4.)$$

Karakteristična matrica kojoj su svi $x_{ij}=0$ za sve $i \neq j$ naziva se *dijagonalna matrica*, npr.:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & s+4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad (4.5.)$$

a dijagonalna matrica kojoj su svi dijagonalni članovi $a_{ij}=1$ za sve $i=j$, naziva se *jedinična matrica* ili *matrica identičnosti*, Ovakva matrica obično se označava $\underline{I}$, npr.:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6.)$$

Transponiranje matrice izvodi se međusobnom zamjenom redaka i stupaca, a označava se superskriptom T, npr.:

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \hline a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.7.)$$

Tako se redna matrica može napisati kao transponirana stupčana matrica, npr.:

$$\underline{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m] \quad (4.8.)$$

4.2.1. MATRIČNA ALGEBRA

Jednakost između dvije matrice može postojati samo ako su istog reda, i ako su elementi matrice $\underline{A}$ jednaki odgovarajućim elementima matrice $\underline{B}$, tj.:

$$\underline{A} = \underline{B} \text{ samo i samo ako } a_{ij} = b_{ij} \text{ za sve "i" i "j"} \quad (4.9.)$$

Zbrojiti se mogu samo matrice istog reda. Matrica $\underline{C}$ predstavlja sumu matrica $\underline{A}$ i $\underline{B}$ samo ako su $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za sve "i" i "j". Matrično zbrajanje je komulativno $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$, i asocijativno $\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$.

Množenje matrice skalarnom obavlja se tako da se svaki element matrice pomnoži sa skalarnom, npr. ako je:

$$\underline{C} = h \underline{A} \quad (4.10.)$$

onda se $c_{ij} = h a_{ij}$ za sve "i" i "j", tj.:

$$h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 & h \\ 2h & 5h & h \end{bmatrix}$$

Integracija i derivacija, kao i svi skalarni operatori poput

Laplaceove transformacije, obavljaju se po istom principu, npr.:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} t^2 & 1 \\ \sin t & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ \cos t & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11.)$$

Umnožak matrica $\underline{A}$ $\underline{B}$ definiran je samo ako je broj stupaca matrice $\underline{A}$ jednak broju redaka matrice $\underline{B}$. Ako je taj uvjet ispunjen kaže se da su matrice *konformne*. Ako su matrice $\underline{A}$ i $\underline{B}$ konformne, umnožak matrice $\underline{A}$ reda $m \times r$ i matrice $\underline{B}$ reda $r \times n$ daje matricu $\underline{C}$ reda $m \times n$ kojoj su elementi:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} \quad (4.12.)$$

Vrijedno je zapaziti da je broj redaka matrice $\underline{C}$ jednak broju redaka matrice $\underline{A}$, a broj stupaca matrice $\underline{C}$ je jednak broju stupaca matrice $\underline{B}$, npr.:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 41 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$$

gdje je npr. član

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 9 + 30 + 2 = 41$$

Iz zahtjeva konformnosti slijedi:

1. (kvadratična matrica) $\times$ (kvadratična matrica) = (kvadratična matrica)
2. (redna matrica) $\times$ (kvadratična matrica) = redna matrica
3. (kvadratična matrica) $\times$ (stupčana matrica) = (stupčana matrica)
4. (redna matrica) $\times$ (stupčana matrica) = (skalar)
5. (stupčana matrica) $\times$ (redna matrica) = (kvadratična matrica)

Još treba imati na umu slijedeća svojstva matričnog množenja:

1. Matrično množenje ne mora biti komutativno, tj. $\underline{A} \underline{B}$ ne mora biti jednako $\underline{B} \underline{A}$, pa je stoga položaj multiplikanda i multiplikatora u pravilu nezamjenljiv.
2. Matrično množenje je asocijativno, tj.:

$$\underline{A} (\underline{B} \underline{C}) = (\underline{A} \underline{B}) \underline{C} \quad (4.13)$$

3. Matrično množenje je distributivno s obzirom na zbrajanje, tj.:

$$\underline{A} (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \underline{B} + \underline{A} \underline{C} \quad (4.14)$$

4. Ako je matrični umnožak jednak nuli: $\underline{A} \underline{B} = 0$, to ne mora značiti da je bilo matrica $\underline{A}$ bilo matrica $\underline{B}$ jednaka nuli.
5. Ako je $\underline{A} \underline{B} = \underline{A} \underline{C}$, to ne mora značiti da je $\underline{B} = \underline{C}$

Inverzija matrice je po definiciji *adjungat* matrice podijeljen s njenom determinantom. Da bi objasnili pojam adjungata matrice prisjetimo se nekih elementarnih definicija matrične algebre.

Determinanta kvadratične matrice $\underline{A}$ n -tog reda jednoznačni je skalar koji je s matricom $\underline{A}$ povezan točno utvrđenim načinom računanja. Označava se $\det \underline{A}$ ili stavljanjem čitavog matričnog rasporeda u ravne zagrede. Ako je npr. zadana matrica:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

njena determinanta će biti:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Vrijednost determinante matrice drugog reda se dobije tako da se član a_{11} pomnoži s a_{22} i od tog umnoška odbije umnožak $a_{12} a_{21}$. Prema tome je:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Kod matrica višeg reda isti je postupak izračunavanja determinante, samo što više članova ulazi u račun. Npr. za matricu trećeg reda izlazi:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \\ - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Ovaj postupak računanja determinante naziva se *Sarrusovo* pravilo.

Minor elementa a_{ij} je po definiciji determinanta matrice $\underline{A}$ kojoj je prikrižen i -ti redak i j -ti stupac, npr.:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a minor elementa a_{11} ili $|M_{11}|$ jest:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (4.15)$$

Kofaktor je po definiciji minor $|M_{ij}|$ pomnožen s faktorom $(-1)^{i+j}$. Označava se malim grčkim slovom α_{ij} , a naziva se *označeni minor*. Osim Sarrusovim pravilom determinante se mogu izračunavati i primjenom kofaktora. U tom slučaju se izabere jedan redak (ili stupac) matrice, a zatim se svaki član tog retka pomnoži s njegovim kofaktorom i sve se to zbroji. Ako se izabere redak i , determinanta matrice $\underline{A}$ glasi:

$$\det \underline{A} = a_{i1} \alpha_{i1} + a_{i2} \alpha_{i2} + \dots + a_{in} \alpha_{in}$$

Za izračunavanje determinante u pravilu se bira prvi redak. Međutim, ako neki drugi redak ima nule, bira se onaj koji ih ima najviše, jer su u računu svi članovi s nulama jednaki nuli.

Ako je matrica skupa simultanih nehomogenih jednadžbi nesingularna, tj. matrica kojoj je determinanta nenulta, nepoznanice toga skupa se mogu riješiti s pomoću Cramerovog pravila. Uzmimo da je zadan skup simultanih nehomogenih algebarskih jednadžbi

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad \text{uz} \quad \det \underline{A} \neq 0$$

Označi li se s $\underline{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) matrica dobijena zamjenom stupca i s vektorom $\underline{b}$, izraz za nepoznanicu x_i glasi:

$$x_i = \frac{\det \underline{A}_i}{\det \underline{A}}$$

Ovaj postupak je poznat pod nazivom *Cramerovo pravilo*. Radi cjelovitosti izlaganja spomenimo da se drugi, općenito poznati način rješavanja simultanih algebarskih jednažbi pod imenom *metoda eliminacije* često naziva i *Gaussova eliminacijska metoda*.

Kofaktorska matrica $\underline{A}$, $\text{kof } \underline{A}$, je matrica kojoj su elementi kofaktori matrice $\underline{A}$, npr.:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \text{kof } \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Adjungat matrice $\underline{A}$ je po definiciji transponirana kofaktorska matrica $\underline{A}$, npr.:

$$\text{adj } \underline{A} = (\text{kof } \underline{A})^T = \begin{bmatrix} \text{kof } a_{11} & \text{kof } a_{21} & \dots & \text{kof } a_{m1} \\ \text{kof } a_{12} & \text{kof } a_{22} & \dots & \text{kof } a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{kof } a_{1n} & \text{kof } a_{2n} & \dots & \text{kof } a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Na temelju već postavljene definicije inverzija matrice $\underline{A}$ glasi:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \underline{A}}{\det \underline{A}} \quad (4.18)$$

Iz definicijske jednadžbe (4.18) proizlazi da inverziju može imati samo *nesingularna* matrica. *Singularna* matrica, tj. matrica koja ima nultu determinantu, ne može imati inverziju.

Kvadratična matrica $\underline{A}^{-1}$ je definirana kao inverzija kvadratične matrice $\underline{A}$ ako je:

$$\underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{I} \quad (4.19)$$

Inverzija umnoška dviju nesingularnih matrica jednaka je obrnutom umnošku inverzije matrica, tj.:

$$(\underline{A} \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1} \quad (4.20)$$

Transpozicija umnoška dviju matrica jednaka je obrnutom umnošku transpozicije matrica, tj.:

$$(\underline{A} \underline{B})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T \quad (4.21)$$

4.3. VARIJABLE STANJA

Pojam stanja se prvenstveno odnosi na fizički svijet i u širem smislu predstavlja ponašanje fizičkih veličina. Opišu li se odnosi i svojstva fizičkog svijeta matematičkim relacijama, ponašanje fizičkih veličina tj. njihova *stanja* možemo proučavati na njihovim matematičkim modelima. Kod dinamičkih fizičkih sustava ti su modeli izraženi diferencijalnim jednadžbama.

S tim u vezi razmotrimo jednu diferencijalnu jednadžbu n -tog reda.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 y(t) = c_{m+1} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + c_1 u(t) \quad (4.22)$$

Poznato je da je za rješenje takve diferencijalne jednadžbe potrebno poznavati pobudu u vremenu $t \geq t_0$ i još k tome n početnih uvjeta. Za početne uvjete se obično uzimaju vrijednosti odziva y i njegovih $n - 1$ derivacija u vremenu t_0 , tj. $y(t_0)$; $\dot{y}(t_0)$; ... $d^{n-1} y(t_0)/dt^{n-1}$. Međutim to nije i jedini skup početnih uvjeta koji može biti upotrijebljen. Mogu se, naime, upotrijebiti i vrijednosti bilo kojeg skupa *linearno neovisnih nepoznanica* dinamičkog sustava u vremenu t_0 , tj. $x_1(t_0)$; $x_2(t_0)$; ... ; $x_n(t_0)$.

Za skup od n varijabli $x_1(t)$, ... $x_n(t)$ kaže se da je *linearno neovisan* ako ne postoji ni jedan skup konstanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, osim nula, koji zadovoljava jednadžbu:

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) = 0 \quad \text{za sve } t \geq t_0 \quad (4.23)$$

Inače se za dotični skup kaže da je *linearno ovisan*.

Vrijednosti u vremenu t_0 bilo kojeg skupa linearno neovisnih varijabli dinamičkog sustava naziva se *stanje sustava u vremenu t_0* . Preciznije rečeno, *stanje* u vremenu t_0 , sustava n -tog reda opisano je skupom brojeva $x_0(t), \dots, x_n(t)$ i pobudom u vremenu $t \geq t_0$, što je dovoljno da odredi ponašanje sustava za sva vremena $t \geq t_0$.

Drugim riječima, stanje sustava predstavlja minimalnu količinu informacija o sustavu u vremenu t_0 , dovoljnu da se odredi njegovo buduće ponašanje bez osvrtanja na pobudu prije t_0 . Poznavanje stanje je dovoljno da bi se mogla odrediti bilo koja varijabla sustava.

Varijable $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ nazivaju se *varijable stanja*, a općenito uzevši to je bilo koji skup od n varijabli koje u potpunosti opisuju ponašanje sustava u bilo kom trenutku vremena t . Za primjer navedimo sustav trećeg reda u kojem varijable

$y(t)$, $\dot{y}(t)$ i $\ddot{y}(t)$ predstavlja varijable stanja. S druge strane, skup $y(t)$, $\dot{y}(t)$ i $y(t) + \dot{y}(t)$ ne predstavlja varijable stanja, jer skup nije linearno neovisan. Naime, treći član je kombinacija prvih dvaju, pa stoga ne posjeduju novu informaciju.

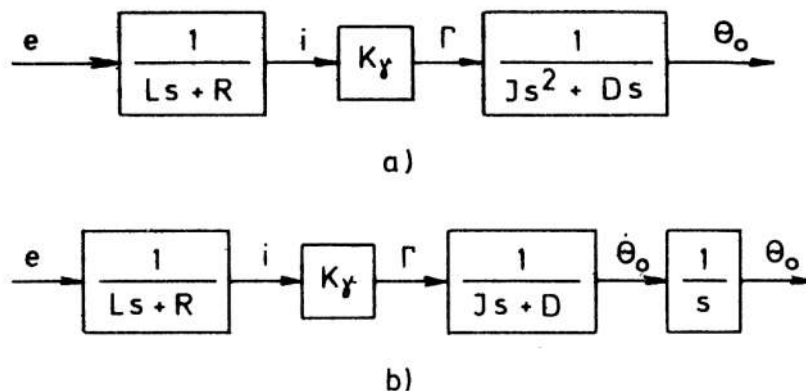
Odredjivanje ponašanja sustava s različitim skupovima varijabli stanja može se usporediti s računanjem fizičkih veličina s različitim jedinicama ili u različitim koordinatnim sustavima. Isto kao što se narav fizičke veličine ne mijenja bez obzira u kojim je jedinicama ili u kom koordinatnom sustavu računa, isto tako ni narav dinamičkog sustava se ne mijenja, bez obzira kojim je skupom varijabli stanja opisan. Za ilustraciju provodimo izbor skupa varijabli koji određuje stanje istosmjernog servomotora upravljanog strujom magnetiziranja. Opis motora određen je relacijom:

$$JL \ddot{\theta}_0(t) + (LD + RJ) \dot{\theta}_0 + DR \theta_0(t) = K_Y e(t)$$

Jedan od mogućih skupova varijabli stanja za ovaj sustav je $\theta_0(t)$, $\dot{\theta}_0(t)$ i $\ddot{\theta}_0(t)$. Ovaj skup varijabli je matematički dovoljan da opiše sustav u potpunosti, jer su sve tri varijable linearno neovisne. Osim toga ovaj skup varijabli stanja ima fizičko značenje, jer $\theta_0(t)$ predstavlja položaj, $\dot{\theta}_0(t)$ predstavlja brzinu, a $\ddot{\theta}_0(t)$ predstavlja ubrzanje sustava.

Uzmimo da zbog nekog razloga ovaj skup varijabli stanja nije prihvatljiv i da stoga treba izabrati drugi. Uvidom u blokovski prikaz na Sl. 4.1. otkrivamo druge tri varijable: $i(t)$, $\Gamma(t)$ i $\theta_0(t)$, za koje pretpostavljamo da bi mogle poslužiti za varijable stanja. Da bi to bilo, one moraju prije svega biti linearno neovisne. U tom smislu treba provjeriti sve njihove eventualne međusobne veze. Iz prijašnjih razmatranja znamo da je

$$\Gamma(t) = K_Y i(t)$$



Sl. 4.1. Razradba blokovskog prikaza istosmjernog servomotora upravljanog strujom magnetiziranja

pa stoga jednađžba (4.23) može biti zadovoljena s $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ i $\alpha_3 = -K$, tako da izlazi

$$(\emptyset) \quad \theta_o(t) + (1) \quad \Gamma(t) - K_Y i(t) = K_Y i(t) - K_Y i(t) = 0$$

Vidimo da se varijable $\Gamma(t)$ i $i(t)$ međusobno isključuju jer poznavanje jedne potpuno određuje drugu. Taj skup varijabli, stoga, nije linearno neovisan, pa prema tome ne može predstavljati varijable stanja.

Druga mogućnost je da krajnji desni blok na Sl. 4.1.a razdvojimo kako je pokazano na Sl. 4.1.b. U tom slučaju dolazimo do nove varijable $\dot{\theta}_o(t)$, koju možemo uzeti kao treću varijablu skupa. Za novi skup uzmimo $\theta_o(t)$, $\dot{\theta}_o(t)$ i $i(t)$. Provjerom se može ustanoviti da je ovaj skup linearno neovisan, pa da stoga može biti primijenjen kao skup varijabli stanja. Osim ovog, linearno su nezavisni i skupovi:

$$\begin{aligned} & - \theta_0(t), \quad \dot{\theta}_0(t) \text{ и } \Gamma(t) \\ & - \theta_0(t), \quad \dot{\theta}_0(t) + \alpha \dot{\theta}_0(t) \text{ и } \Gamma(t) \text{ и } i(t) \\ & - \theta_0(t), \quad \dot{\theta}_0(t) + \beta i(t) \text{ и } \Gamma(t) \end{aligned}$$

gdje su α i β proizvoljne konstante s pomoću kojih je moguće postaviti beskonačan broj skupova varijabli stanja.

4.3.1. OPIS S VARIJABLAMA STANJA

Opis objekta s varijablama stanja izvodi se sa skupom od n linearnih diferencijalnih jednađžbi prvog reda, koje se nazivaju *jednađžbe objekta*. Te jednađžbe u općem obliku glase:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) + b_2 u(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) + b_n u(t)\end{aligned}\tag{4.24}$$

U sustavu jednađbi (4.24) ima n varijabli $x_i(t)$, a nazivaju se *varijable stanja*. Za potpuni opis dinamičkog sustava, osim sustava jednađbi (4.24), potrebno je još poznavati i odzivni izraz, koji u obliku linearne algebarske jednađbe povezuje odziv s varijablama stanja. U općem obliku ta jednađba glasi:

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) \quad (4.25)$$

Primjenom matrične simbolike jednadžbe osnovnog sustava se pišu u obliku

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \quad (\underline{A} \quad \underline{b})$$

Ovdje $\underline{x}(t)$ predstavlja n - dimenzijski vektor, a naziva se *vektor stanja*. Elementi vektora stanja su varijable stanja, koje u općem obliku glase:

$$\underline{x}(t) = \text{st} [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (4.26)$$

Vektor $\dot{\underline{x}}(t)$ je derivacija vektora stanja, pa su stoga i njegovi elementi derivacije varijabli stanja, tako da je

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \frac{d}{dt} \text{st} [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \\ &= \text{st} [\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)] \end{aligned}$$

Matrica $\underline{A}$ reda $m \times n$ naziva se *matrica objekta* a u općem obliku glasi:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Vektor $\underline{b}$ je n - dimenzijski vektor, a naziva se *upravljački vektor*, i u općem obliku glasi:

$$\underline{b} = \text{st } (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (4.28)$$

Upravljački vektor opisuje način na koji *upravljačka pobuda* $u(t)$ djeluje na sustav.

Simbolički oblik jednadžbe ($\underline{A} \underline{b}$) u razvijenom obliku glasi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \quad (\underline{A} \underline{b})$$

Kada se obave sve matrične operacije na razvijenom obliku jednadžbe ($\underline{A} \underline{b}$) dobije se izvorni sustav jednadžbe (4.24). Odzivni izraz se isto tako može izraziti u matričnom obliku:

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad (\underline{c})$$

Vektor $\underline{c}$ je n - dimenzijski vektor i naziva se *izlazni vektor*. U razvijenom obliku jednadžba ($\underline{c}$) poprima oblik:

$$\begin{aligned} y(t) &= [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \\ &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) \end{aligned} \quad (\underline{c})$$

koji je identičan s izvornom jednađžbom (4.25). Ako se uzme da je $y=x_1$, svi elementi $\underline{c}$ osim c_1 poprimaju vrijednosti nula, a $c_1=1$.

Matrična simbolika je kako vidimo vrlo prikladna, jer omogućuje da se dinamički sustav opiše sa svega dvije jednađžbe

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \quad (\underline{A} \ \underline{b})$$

i

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad (\underline{c})$$

Ovakav kompaktni opis omogućuje proučavanje zakonitosti ponašanja dinamičkih sustava u različitim režimima rada, bez zadržavanja na nebitnim detaljima pojedinih specifičnih slučajeva. Međutim, ako nas zanima konkretna brojčana vrijednost, računanje se mora provesti s izvornim jednađžbama (4.24.) i (4.25.), jer samo ti oblici sadrže konkretne podatke o razmatranom slučaju.

Matrični prikaz varijabli stanja u frekvencijskom području se dobije Laplaceovom transformacijom jednađžbi $(\underline{A} \ \underline{b})$ i $(\underline{c})$. Rezultat te transformacije uz nulte početne uvjete glasi:

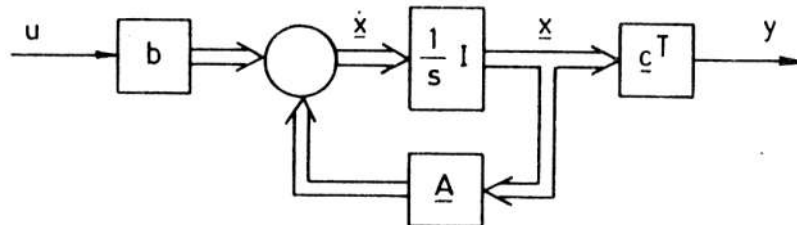
$$s \underline{x}(s) = \underline{A} \underline{x}(s) + \underline{b} u(s) \quad (4.29.)$$

$$y(s) = \underline{c}^T \underline{x}(s) \quad (4.30.)$$

Dijeljenjem jednađžbe (4.29.) sa s dobije se jednađžba:

$$\underline{x}(s) = \frac{1}{s} \underline{I} [\underline{A} \underline{x}(s) + \underline{b} u(s)] , \quad (4.31.)$$

koja pruža osnovu za crtanje *općenitog blokovskog prikaza regulacijskog sustava s varijablama stanja* (Sl.4.2.). Široke strelice na slici predstavljaju vektore, a uske skalare.



Sl. 4.2. Općeniti blokovski prikaz regulacijskog sustava s varijablama stanja

Ako je zadan sustav određenog reda, kao npr. sustav drugog reda:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \text{ i } y = [c_1 \ c_2] \underline{x}$$

može se nacrtati *elementarni blokovski prikaz* sustava određenog reda ili konkretnog sustava s varijablama stanja, kakav je za sustav drugog reda prikazan na sl.4.3.

Za ilustraciju opisanog prikaza dinamičkog sustava s varijablama stanja ponovno razmotrimo istosmjerni servomotor upravljani strujom magnetiziranja. Zadatak je da se sustav prikaže s dva skupa varijabli stanja o čemu je prethodno bilo govora.

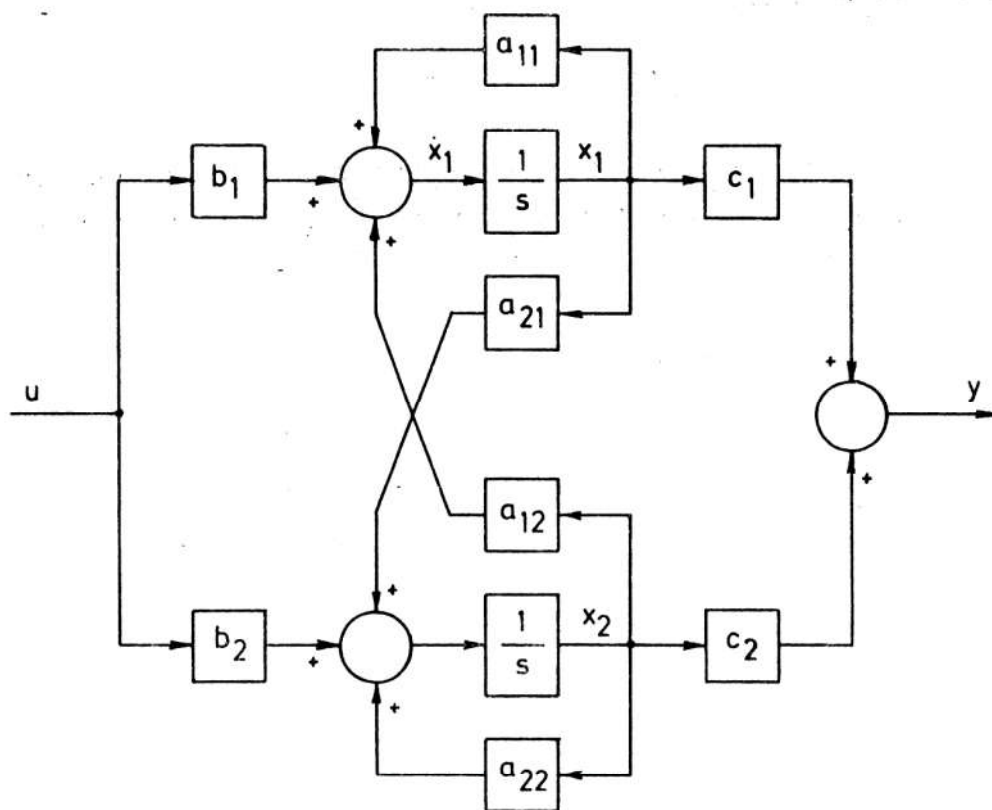
Počnimo sa skupom $\theta_0(t)$, $\dot{\theta}_0(t)$ i $\ddot{\theta}_0(t)$ uz definicije:

$$x_1(t) = \theta_0(t)$$

$$x_2(t) = \dot{\theta}_0(t)$$

$$x_3(t) = \ddot{\theta}_0(t) \quad \text{i}$$

$$u(t) = e(t)$$



Sl.4.3. Elementarni blokovski prikaz sustava drugog reda s varijablama stanja

Primjenom ovih definicija opisna diferencijalna jednačba sustava glasi:

$$JL\dot{x}_3(t) + (LD + RJ)x_3(t) + DRx_2(t) = K_Y u(t)$$

ili:

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{DR}{JL} x_2(t) - \frac{LD + RJ}{JL} x_3(t) + \frac{K_Y}{JL} u(t)$$

Ostale dvije jednačbe proizlaze iz definicije $x_1(t)$ i to su:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \text{i} \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

Budući da je kut izlazne osovine izabran za varijablu stanja, izlazni izraz glasi:

$$y(t) = \theta_O(t) = x_1(t)$$

Na taj način su dobijene sve jednađbe za izabrani skup varijabli stanja i sada se mogu definirati matrica $\underline{A}$ i vektori $\underline{b}$ i $\underline{c}$ iz jednađbi ($\underline{A} \underline{b}$) i ($\underline{c}$).

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{DR}{JL} & -\frac{(LD+RJ)}{JL} \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_Y}{JL} \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na sl.4.4. nacrtan je elementarni blokovski prikaz za izabrani skup varijabli stanja

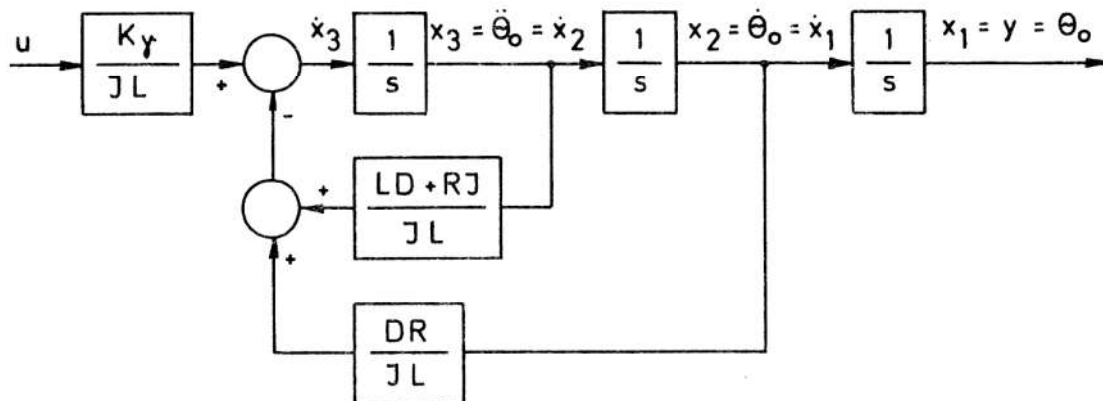
Za drugi skup varijabli stanja uzimamo varijable $\theta_O(t)$, $\dot{\theta}_O(t)$ i $i(t)$ uz definiciju:

$$x_1(t) = \theta_O(t)$$

$$x_2(t) = \dot{\theta}_O(t)$$

$$x_3(t) = i(t) \quad \text{i}$$

$$u(t) = e(t)$$



Sl.4.4. Elementarni blokovski prikaz s varijablama stanja $\theta_0(t)$, $\dot{\theta}_0(t)$ i $\ddot{\theta}_0(t)$ istosmjernog servomotora upravljanog strujom magnetiziranja

ombinacijom prve i druge definicijske jednađbe dobijemo jednu ednađbu sustava:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

stale dvije jednađbe se mogu dobiti kombinacijom naponske momentne jednađbe sustava; one glase:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = e(t)$$

$$J \frac{d^2\theta_0(t)}{dt^2} + D \frac{d\theta_0(t)}{dt} = \Gamma(t)$$

vrštenjem definicijskih jednađbi u naponsku i momentnu jednađbu dobije se:

$$L \dot{x}_3(t) + R x_3(t) = u(t)$$

i

$$J \dot{x}_2(t) + D x_2(t) = \Gamma(t)$$

A budući da je proizvedeni zakretni moment jednak umnošku momentne konstante i struje magnetiziranja:

$$\Gamma(t) = K_Y i(t) = K_Y x_3(t),$$

momentna jednažba se može pisati u obliku:

$$J \dot{x}_2(t) + D x_2(t) = K_Y x_3(t)$$

Na taj način smo dobili tri jednažbe koje u standardnom obliku glase:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{D}{J} x_2(t) + \frac{K_Y}{J} x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{R}{J} x_3(t) + \frac{1}{L} u(t)$$

Izlazni izraz je kao i prije:

$$y(t) = x_1(t)$$

Matrice $\underline{A}$, $\underline{b}$ i $\underline{c}$ sada glase:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K_Y/J \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vrijedno je zapaziti da je u ovom slučaju u usporedbi s matricama prijašnjeg skupa varijabli stanja ostala nepromijenjena samo matrica $\underline{c}$; ali ni to nije općenito pravilo.

Prijenosna funkcija objekta $y(s)/u(s)$ izvodi se iz matričnih jednažbi opisa s varijablama stanja u frekvencijskom području uz nulte početne uvjete, koje glase:

$$s \underline{x}(s) = \underline{A} \underline{x}(s) + \underline{b} u(s) \quad (4.32)$$

$$y(s) = \underline{c}^T \underline{x}(s) \quad (4.33)$$

Prebaci li se član $\underline{A} \underline{x}(s)$ u jednažbi (4.32) na lijevu stranu i sredi, dobije se:

$$(s \underline{I} - \underline{A}) \underline{x}(s) = \underline{b} u(s)$$

Matrica identičnosti $\underline{I}$ u ovoj jednažbi je uvedena radi održavanja dimenzionalnosti. Ako se obje strane jednažbe pomnože s matricom:

$$(s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \quad \text{dobije se}$$

$$\underline{x}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} u(s) \quad (4.34)$$

Matrica $(s \underline{I} - \underline{A})^{-1}$ naziva se *rezolventna matrica*, a označava se s $\underline{\phi}(s)$, tj.:

$$\underline{\phi}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \quad (4.35)$$

Na temelju ove definicije jednažba (4.34) postaje:

$$\underline{x}(s) = \underline{\phi}(s) \underline{b} u(s) \quad (4.36)$$

Ako se $\underline{x}(s)$ iz jednađbe (4.36) uvrsti u jednađbu (4.33) dobije se:

$$y(s) = \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} u(s) \quad (4.37)$$

a odatle dijeljenjem s $u(s)$ dobije se prijenosna funkcija osnovnog sustava:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G_p(s) = \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} \quad (4.38)$$

Budući da izraz za rezolventnu matricu glasi:

$$\underline{\phi}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} = \frac{\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})}{\det (s \underline{I} - \underline{A})}$$

izraz za $G_p(s)$ postaje:

$$G_p(s) = \frac{\underline{c}^T [\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})] \underline{b}}{\det (s \underline{I} - \underline{A})} \quad (4.39)$$

Brojnik i nazivnik jednađbe (4.39) su skalarne vrijednosti, a predstavljaju polinome po s , pa se stoga jednađba (4.39) može pisati u obliku:

$$G_p(s) = \frac{K_p B_p(s)}{N_p(s)}, \quad (4.40)$$

gdje je:

$$K_p B_p(s) = \underline{c}^T |\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})| \underline{b} \quad (4.41)$$

$$N_p(s) = \det (s \underline{I} - \underline{A}) \quad (4.42)$$

Iz jednađbe (4.42) proizlazi da vrijednosti s koje zadovoljavaju jednađbu:

$$\det (s \underline{I} - \underline{A}) = 0 \quad (4.43)$$

zadovoljavaju i jednađbu:

$$N_p(s) = 0$$

pa su to stoga polovi $G_p(s)$. U matričnoj terminologiji ove se vrijednosti nazivaju *svojstvene vrijednosti* matrice $\underline{A}$, a jednađba (4.43) naziva se *karakteristična jednađba* matrice $\underline{A}$. Odatle se vidi da svojstvene vrijednosti $\underline{A}$ odgovaraju polovima funkcije $G_p(s)$.

Za ilustraciju primjene jednađbe (4.38) razmotrimo opis električkog servomotora upravljanog strujom magnetiziranja pomoću varijabli $\theta_o(t)$, $\dot{\theta}_o(t)$ i $i(t)$, kojeg smo već obradjivali. Opis koji smo prije postavili glasi:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta/y & K_Y/y \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Matrica $(s \underline{I} - \underline{A})$ glasi:

$$(s \underline{I} - \underline{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s + (\beta/J) & -K_Y/J \\ 0 & 0 & s + (R/L) \end{bmatrix}$$

a njena inverzija:

$$\underline{\phi}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s[s + (\beta/J)]} & \frac{K_Y}{s(Js + \beta)[s + (R/L)]} \\ 0 & \frac{1}{s + (\beta/J)} & \frac{K_Y}{(Js + \beta)[s + (R/L)]} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s + (R/L)} \end{bmatrix}$$

Stoga je prijenosna funkcija odredjena izrazom

$$G_p(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s[s + (\beta/J)]} & \frac{K_Y}{s(Js + \beta)[s + (R/L)]} \\ 0 & \frac{1}{s + (\beta/J)} & \frac{K_Y}{(Js + \beta)[s + (R/L)]} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s + (R/L)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{K_Y}{s(Js + \beta)(Ls + R)} = \frac{K_Y/JL}{s(s + \frac{\beta}{J})(s + \frac{R}{L})}$$

što se slaže s prije dobijenim rezultatom.

Postupak kojim se s pomoću jednadžbe (4.38) iz opisa s varijablama stanja prelazi na prijenosnu funkciju je neposredan, ali zahtijeva mnogo vremena, posebno zbog inverzije matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Stoga se taj postupak u pravilu primjenjuje kad su u pitanju složeni sustavi. Ako se radi o manje složenim sustavima, ekonomičnije je iz opisa s varijablama stanja načiniti blokovski prikaz, a iz blokovskog prikaza se potom neposrednim uvidom dobije prijenosna funkcija kako je to u prijašnjim primjerima i učinjeno.

Primjer: Istosmjerni servomotor upravljjen strujom magnetiziranja treba opisati s dva skupa varijabli stanja:

$$\text{a) } \theta_0(t), \dot{\theta}_0(t) \text{ i } \Gamma(t)$$

$$\text{b) } \theta_0(t), \theta_0(t) + \dot{\theta}_0(t) \text{ i } i(t)$$

i pokazati da u oba slučaja izlazno-ulazna prijenosna funkcija $y(s)/u(s)$ ostaje nepromijenjena.

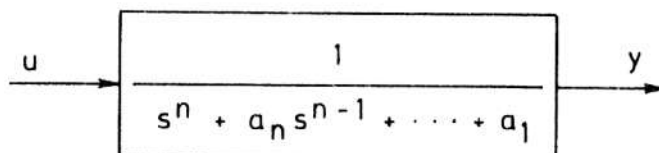
Rješenje:

$$\text{a) } \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta/J & 1/J \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_Y/L \end{bmatrix} u ; \quad y = x_1$$

$$\text{b) } \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \beta/J - 1 & 1 - \beta/J & K_Y/J \\ 0 & 0 & R/L \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u ; \quad y = x_1$$

4.3.3. FAZNE VARIJABLE STANJE

Problem prijelaza s prijenosne funkcije na opis s varijablama stanja znatno je složeniji, jer je rješenje višeznačno; naime, iz jedne prijenosne funkcije može se dobiti neograničen broj opisa s varijablama stanja. U cilju što lakšeg savladavanja problematike, konvencionalno su se ustalila dva standardna pristupa: jedan s *faznim varijablama*, a drugi s *fizičkim varijablama*. Pristup s faznim varijablama vodi prvenstveno računa o matematičkoj prikladnosti obradbe, a pristup s fizičkim varijablama o fizičkom značenju varijabli stanja. Najprije ćemo se upoznati s faznim varijablama stanja.



Sl. 4.6. Osnovni sustav s jediničnim brojnikom

Po definiciji, fazne varijable su poseban skup varijabli stanja koji se sastoji od izlazne varijable i njenih $n - 1$ derivacija. U cilju upoznavanja s ovim pristupom razmotrimo opis s faznim varijablama sustava n -tog reda, kojeg je blokovski prikaz nacrtan na Sl. 4.6. Iz blokovskog prikaza se vidi da prijenosna funkcija glasi:

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} ,$$

a ona predstavlja diferencijalnu jednadžbu n -tog reda:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d y(t)}{dt} + a_1 y(t) = u(t) \quad (4.44)$$

Da bi ovu jednađžbu izrazili s faznim varijablama, uzimamo da je $x_1(t) = y(t)$, a odatle prema definiciji izlazi da je:

$$x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$x_3(t) = \ddot{y}(t) = \ddot{x}_1(t)$$

$$x_n(t) = d^{n-1} y(t) dt^{n-1} = \dot{x}_{n-1}(t)$$

Uvrštenjem ovih definicijskih jednađžbi u jednađžbu (4.44) dobije se:

$$\dot{x}_n(t) + a_n x_n(t) + a_{n-1} x_{n-1}(t) + \dots + a_2 x_2(t) + a_1 x_1(t) = u(t) \quad (4.45)$$

Osim toga imamo definiranu $n - 1$ jednađžbu:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$$

(4.46)

i izlaznu jednađžbu koja glasi:

$$y(t) = x_1(t) \quad (4.47)$$

Ove jednađžbe imaju oblik varijabli stanja, kojih matrice $\underline{A}$, $\underline{b}$ i $\underline{c}$ glase:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \dots -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix}; \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Pogledajmo kako izgleda opis s faznim varijablama sustava trećeg reda s jediničnim brojnikom, koji je zadan prijenosnom funkcijom

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1}$$

Na temelju jednadžbe (4.45), (4.46) i (4.47) fazne varijable tog sustava glase:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) - a_3 x_3(t) + u(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

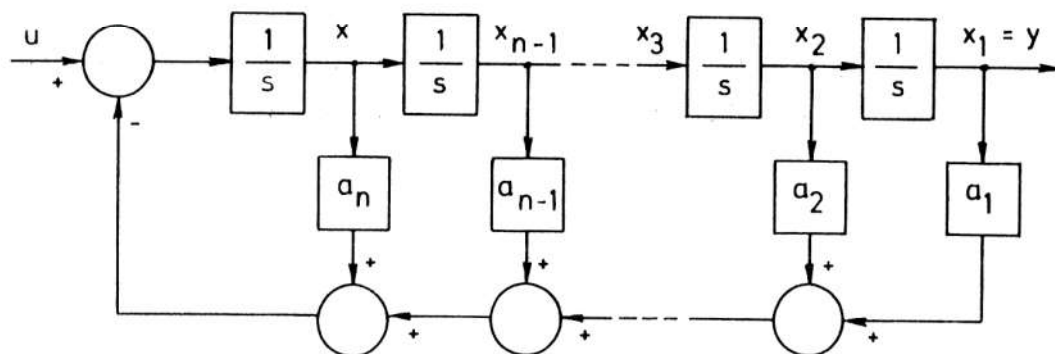
i izlazni izraz:

$$y(t) = x_1(t) \quad (4.50)$$

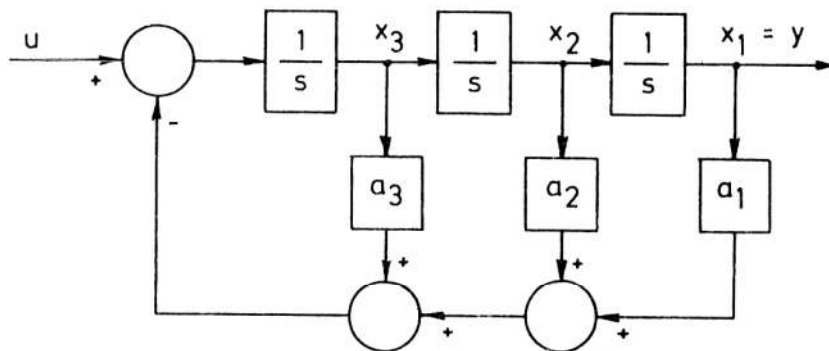
Matrice $\underline{A}$, $\underline{b}$ i $\underline{c}$ stoga glase:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}; \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Blokovski prikazi s varijablama stanja n -tog i trećeg reda nacrtani su na Sl. 4.7.a i b. Pažljivim uspoređivanjem ovih blokovskih prikaza, te opisa s prijenosnom funkcijom odnosno diferencijalnom jednačbom i opisa s faznim varijablama stanja, dolazi se do zaključka da bilo koji od ovih načina opisa može biti određen iz drugog neposrednim uvidom. Ova osobina formalne jednoznačnosti postupka u kojem je svakom parametru u matričnom opisu njegovo mjesto jednoznačno određeno, čini opis s faznim varijablama preglednim i stoga omogućuje lagani prijelaz iz jednog načina opisa u drugi.



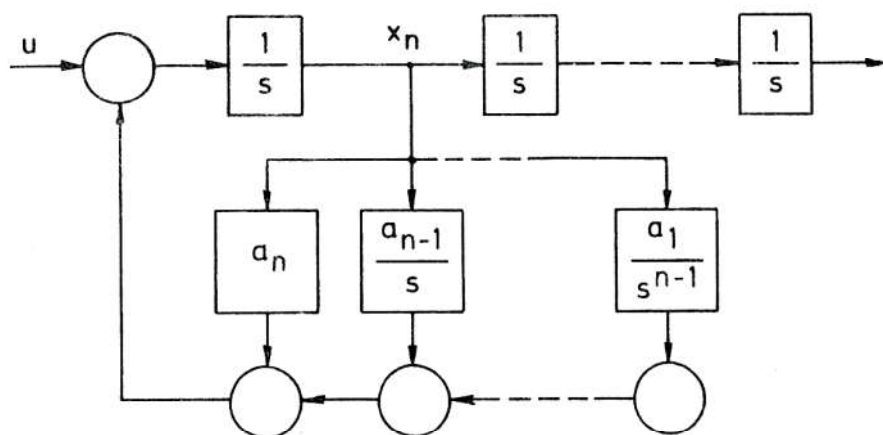
a)



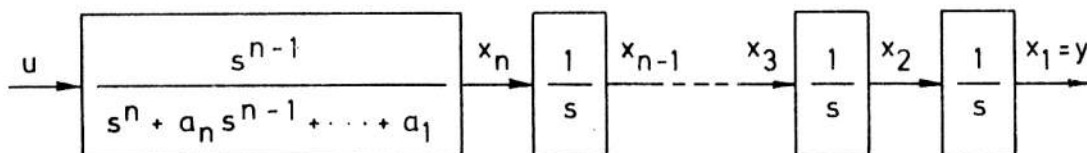
b)

Sl. 4.7. Blokovski prikaz s faznim varijablama:
a) osnovni sustav n -tog reda;
b) osnovni sustav trećeg reda

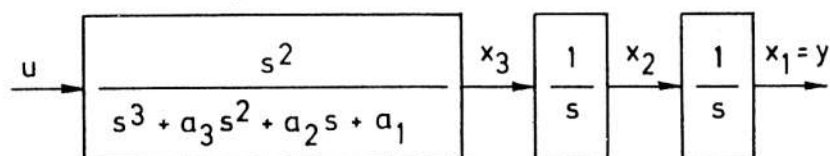
Ako se na blokovskom prikazu sa Sl. 4.7.a čvorišta svih povratnih grana premjeste na čvorište fazne varijable najvišeg subskripta, dobije se blokovski prikaz na Sl. 4.8.a, a iz njega alternatnivi blokovski prikazi za sustav n -tog reda na Sl. 4.8.b, i za sustav trećeg reda na Sl. 4.8.c. Prednost se ovdje daje blokovskom prikazu na Sl. 4.7.



a)



b)



c)

- Sl. 4.8. Alternativni blokovski prikaz opisa s faznim varijablama:
 a) prijelazni blokovski prikaz;
 b) sustav n-tog reda;
 c) sustav trećeg reda

Sustav s jediničnim brojnikom specifičan je slučaj, a poslužio nam je samo kao uvod u opću problematiku. Da bi se moglo prijeći na opći slučaj, postupak treba nadopuniti. Pokazat ćemo to na primjeru objekta trećeg reda s jednom nulom:

$$G_p(s) = \frac{c_2 s + c_1}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1}$$

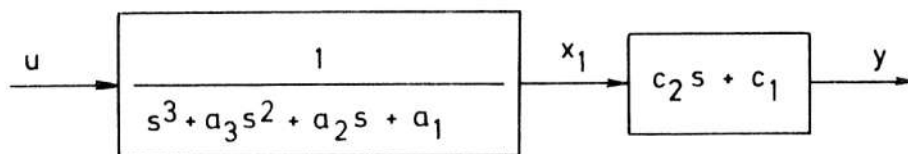
Ako započnemo kao ranije kod sustava s jediničnim brojnikom, tj.:

$$x_1(t) = y(t) \quad , \quad x_2(t) = \dot{y}(t) \quad \text{ i } \quad x_3(t) = \ddot{y}(t)$$

tada jednačba (4.44) postaje:

$$\dot{x}_3(t) + a_3 x_3(t) + a_2 x_2(t) + a_1 x_1(t) = c_2 \dot{u}(t) + c_1 u(t)$$

U ovakvom bi obliku prikaz s faznim varijablama na desnoj strani sadržavao član $\dot{u}(t)$, što nije u skladu s postavljenim oblikom jednačbe (A b).



Sl. 4.9. Prijelazni blokovski prikaz za savladavanje problema nula

Za rješenje ovog problema prijenosnu funkciju podijelimo na dva dijela, kao je prikazano na Sl. 4.9. U tom slučaju prijenosnu funkciju možemo pisati u obliku:

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{x_1(s)}{u(s)} \cdot \frac{y(s)}{x_1(s)}$$

gdje je:

$$\frac{x_1(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1}$$

i

$$\frac{y(s)}{x_1(s)} = c_2 s + c_1$$

Prijenosna funkcija $x_1(s)/u(s)$ odgovara prijenosnoj funkciji s jediničnim brojnikom, pa je stoga to već napisana jednačba (4.49). Iz druge prijenosne funkcije proizlazi da je:

$$y(t) = c_2 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1(t) = c_2 x_2(t) + c_1 x_1(t) ,$$

gdje je drugi izraz napisan koristeći relaciju $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$. Na temelju toga potpuni opis s faznim varijablama za sustav trećeg reda s jednom nulom glasi:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Usporedba ovog rezultata s opisom sustava s jediničnim brojnikom, kao je prikazano jednačbama (4.49) i (4.50), pokazuje da je promjena nastala jedino u izlaznom izrazu. Budući da je postupak za sve sustave identičan, mogu se, po analogiji, postaviti matrice za opći slučaj n -tog reda s m nula, gdje je $n > m$, a glase:

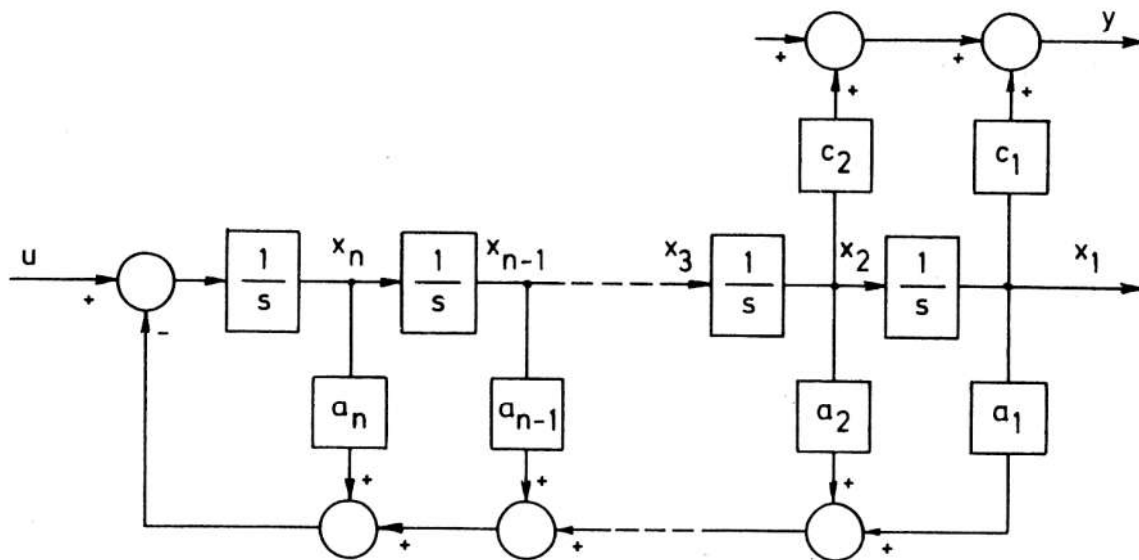
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ - \\ c_{m+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.52)

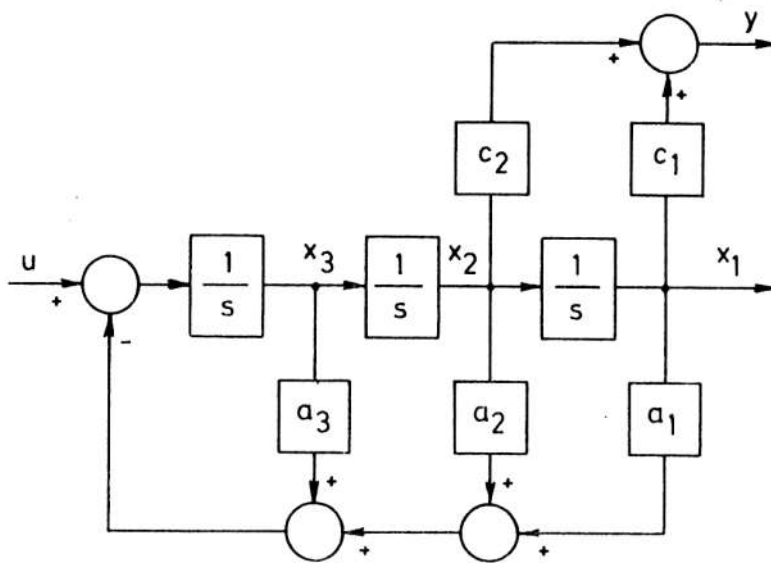
Ovaj oblik opisa s faznim varijablama poznat je pod nazivom *normalni oblik opisa s varijablama stanja*.

Na Sl. 4.10.a) prikazan je normalni oblik opisa s varijablama stanja sustava n-tog reda, a na Sl. 4.10.b) normalni oblik sustava trećeg reda s jednom nulom. Vrijedno je zapaziti da su svi koeficijenti karakterističnog polinoma poredani u n-tom retku matrice $\underline{A}$ po rastućem subskriptu, te da su svi elementi matrice $\underline{b}$ jednaki nuli osim zadnjeg koji je jednak jedinici, a da isti takav oblik ima i n - 1 redak matrice $\underline{A}$.

Zbog svoje prikladnosti za matematičku obradbu i osobine da u pravilu ne predstavljaju fizički dostupne varijable stanja, fazne varijable se primjenjuju u obradbi matematičkih postupaka. Kad obradba treba poslužiti za stvarnu izvedbu regulacije, fazne varijable ne zadovoljavaju, jer, budući da nisu dostupne, ne mogu se u regulaciji ni primjeniti. Tada u obzir dolaze jedino fizičke varijable.



a)



b)

Sl. 4.10. Blokovski prikaz normalnog oblika opisa s varijablama stanja:
 a) sustav n -tog reda;
 b) sustav trećeg reda s jednom nulom

4.3.4. FIZIČKE VARIJABLE STANJA

Pristup matematičkom modeliranju s faznim varijablama se u samoj osnovi razlikuje od pristupa s *fizičkim varijablama*. Kod faznih varijabli dovoljno je slijediti definirana pravila matematičkog postupka da bi se došlo do korektnog matematičkog modela. Međutim, kod fizičkih varijabli u stvari i nema postupka u smislu jednoznačno definiranih pravila koja neposredno vode do rezultata, već postoje dva zahtjeva: da odabrani skup varijabli bude linearno neovisan, i da bude fizički dostupan. Za ostvarenje tih dvaju zahtjeva nije nažalost moguće postaviti pravila koja bi u svim slučajevima vodila do rezultata. Naprotiv, svaki slučaj zahtijeva poseban tretman, pa je stoga nužno potrebno fizičko shvaćanje objekta da bi se njegov model s fizičkim varijablama mogao postaviti. Dosljedno tome ovaj se pristup često naziva *inženjerski pristup*, za razliku od pristupa s faznim varijablama, koji se naziva *formalni pristup*.

Započnimo razmatranje inženjerskog pristupa, odnosno pristupa s fizičkim varijablama, na jednom sustavu trećeg reda kojeg prijenosna funkcija glasi:

$$G_p(s) = \frac{c_1}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1}$$

Zadana prijenosna funkcija može predstavljati bilo koji sustav trećeg reda bez nula, kao npr. istosmjerni servomotor upravljani strujom armature ili istosmjerni servomotor upravljani strujom magnetiziranja. U slučaju pristupa s faznim varijablama poznavanje prijenosne funkcije je bilo dovoljno za postaviti model s varijablama stanja, jer nas fizičko značenje varijabli nije zanimalo. Kod inženjerskog pristupa, kad nas prvenstveno zanima fizičko značenje varijabli, poznavanje prijenosne funkcije nije dovoljno; potrebno je poznavati i fizičku naravu sustava.

Trebamo stoga poći, ne od prijenosne funkcije, već od stvarnog sustava koji, u ovom slučaju, neka bude istosmjerni servomotor upravlján strujom armature. U prvom poglavlju izvedene su osnovne relacije tog sustava [jednadžbe (3.25), (3.26), (3.27) i (3.29)] od kojih ovdje polazimo, a koje glase:

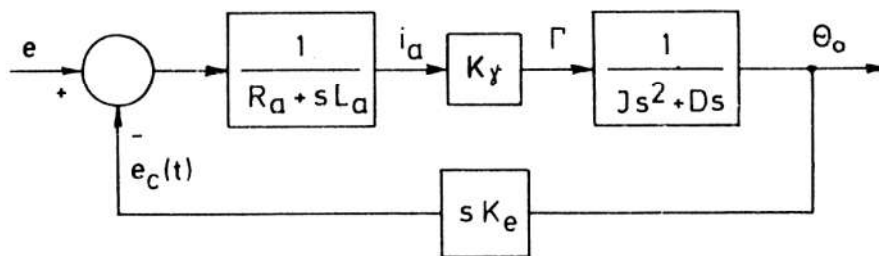
$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) = e(t) - e_c(t)$$

$$e_c(t) = K_e \dot{\theta}_o(t)$$

$$J \ddot{\theta}_o(t) + D \dot{\theta}_o(t) = \Gamma(t)$$

$$\Gamma(t) = K_\gamma i_a(t)$$

Njihov zajednički blokovski prikaz predóčen je na Sl. 4.11.



Sl. 4.11. Istosmjerni servomotor upravlján strujom armature

U gornjim relacijama definirano je pet varijabli $i_a(t)$, $\theta_o(t)$, $\dot{\theta}_o(t)$, $\Gamma(t)$ i $e_c(t)$, pa na prvi pogled može izgledati da sustav ima pet varijabli stanja. Međutim, ako pogledamo pažljivije,

vidimo da su neke od njih linearno ovisne, npr. $\Gamma(t)$ i $i_a(t)$. Budući da se $i_a(t)$ lakše mjeri, uzmimo nju za varijablu stanja. Za drugu varijablu stanja uzmimo kut izlazne osovine $\theta_o(t)$, koji je isto tako dostupan i lako se mjeri.

Za treću varijablu stanja mogli bismo uzeti $e_c(t)$ ili $\dot{\theta}_o(t)$. Budući da su i $e_c(t)$ i $\dot{\theta}_o(t)$ neposredno fizički nedostupne, ali se do $\dot{\theta}_o(t)$ lakše dolazi (derivacijom izlaznog kuta tahometrom), za treću varijablu stanja odabiremo derivaciju izlaznog kuta $\dot{\theta}_o(t)$. Odabrane varijable stanja su stoga:

$$x_1(t) = i_a(t)$$

$$x_2(t) = \theta_o(t)$$

$$x_3(t) = \dot{\theta}_o(t) \quad ,$$

koje nazivamo *fizičke varijable stanja*, jer su *fizički dostupne* odnosno *mjerljive*. Izraz upravljačke pobude glasi:

$$u(t) = e(t)$$

Ako odabrane varijable stanja uvrstimo u osnovne relacije sustava, dobijemo:

$$L_a \dot{x}_1(t) + R_a x_1(t) = u(t) - e_c(t)$$

$$e_c(t) = K_e x_3(t)$$

$$J \ddot{x}_3(t) + D \dot{x}_3(t) = \Gamma(t)$$

$$\Gamma(t) = K_Y x_1(t)$$

Gornje četiri jednačbe mogu se međusobno kombinacijom reducirati na dvije koje glase:

$$L_a \dot{x}_1(t) + R_a x_1(t) = u(t) - K_e x_3(t)$$

$$J \dot{x}_3(t) + D x_3(t) = K_Y x_1(t)$$

ili

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R_a}{L_a} x_1(t) - \frac{K_Y}{L_a} x_3(t) + \frac{1}{L_a} u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{K_Y}{J} x_1(t) - \frac{D}{J} x_3(t)$$

Treća jednažba proizlazi iz definicijskih jednažbi, a glasi:

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

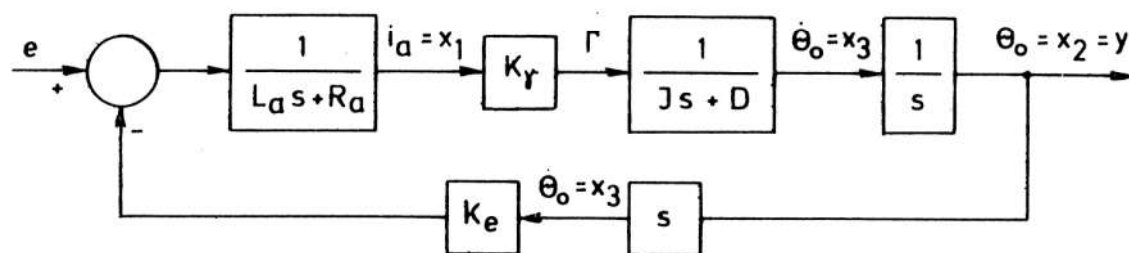
U obliku matrične jednažbe (A b) rezultat poprima oblik:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & 0 & -K_Y/L_a \\ 0 & 0 & 1 \\ K_Y/J & 0 & -D/J \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

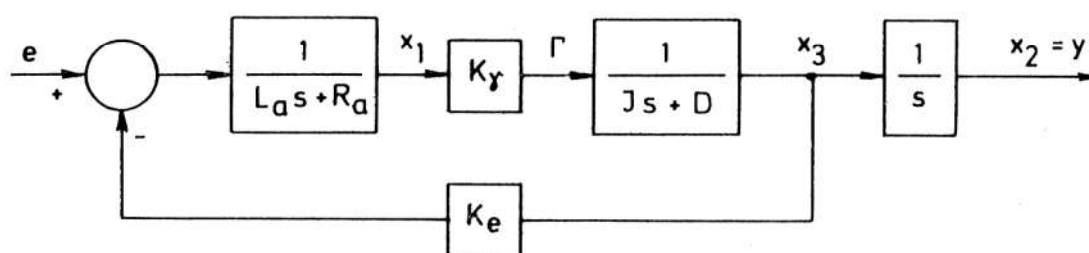
Budući da je izlaz $y(t) = \theta_o(t) = x_2(t)$, izlazni izraz u matričnoj formi glasi:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Da bi varijabla $\dot{\theta}_o(t) = x_3(t)$ postala uočljiva, učinjena je preinaka blokovskog prikaza na Sl. 4.11., i to najprije u blokovski prikaz na Sl. 4.12.a, a potom na Sl. 4.12.b.



a)



b)

Sl. 4.12. Blokovski prikaz istosmjernog servomotora upravljanoj strujom armature preinačen za opis sa skupom fizičkih varijabli stanja $i_a(t)$, $\theta_o(t)$ i $\dot{\theta}_o(t)$

Iz učinjenih preinaka vidljivo je da se opis s fizičkim varijablama može izvesti iz općenitog blokovskog prikaza, ali da je za to potrebno poznavanje fizičke naravi objekta. Vrijedno je uočiti da varijable nisu ni u kakvom posebnom redoslijedu, kako je to bilo kod faznih varijabli. Fizičke varijable mogu biti označene proizvoljno, te u prijašnjem primjeru možemo uzeti da su:

$$x_1(t) = y(t) = \theta_o(t)$$

$$x_2(t) = \dot{\theta}_o(t)$$

$$x_3(t) = i_a(t)$$

S tako označenim varijablama matrice

$$\underline{A}^*, \underline{b}^* \text{ i } \underline{c}^*$$

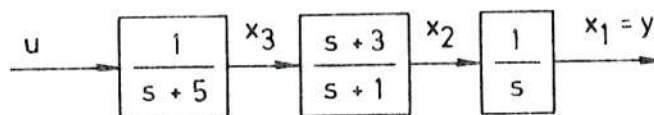
glase:

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K_Y/J \\ 0 & -K_e/L_a & -R_a/L_a \end{bmatrix}; \quad \underline{b}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_a \end{bmatrix}; \quad \underline{c}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

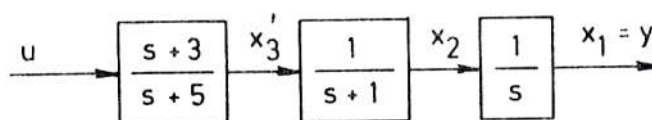
Premda se matrice $\underline{A}^*$, $\underline{b}^*$ i $\underline{c}^*$ razlikuju od matrice $\underline{A}$, $\underline{b}$ i $\underline{c}$ (za prvotni izbor varijabli stanja), prijenosne funkcije ostaju iste:

$$G_p(s) = \underline{c}^T (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} = \underline{c}^{*T} (s \underline{I} - \underline{A}^*)^{-1} \underline{b}^*$$

Razmatranje fizičkih varijabli na sustavima s konstantnim brojnikom bio je uvod u razmatranje te problematike na sustavima kojima je brojnik polinom od s . U općem slučaju, tj. kad sustav posjeduje nule i polove, obradba je složenija, a osim toga se i razlikuje od slučaja do slučaja. Najbolje se to može vidjeti na usporedbenoj obradbi dvaju sustava na Sl. 4.13. s jednakim prijenosnim funkcijama, ali s različitom strukturom unutarnjih blokova. U sustavu na Sl. 4.13.a nula se ne pojavljuje u krajnjem lijevom bloku, pa stoga nema poteškoće da se prema već poznatom postupku napiše jednadžba stanja oblika $(\underline{A} \underline{b})$.



a)



b)

Sl. 4.13. Dva različita sustava trećeg reda s jednom nulom, i s jednakim prijenosnim funkcijama, ali s različitim unutarnjim strukturama

Počinjemo s prijenosnim funkcijama svakog pojedinog unutarnjeg bloka:

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$\frac{x_2(s)}{x_3(s)} = \frac{s+3}{s+1} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \dot{x}_3 + 3x_3$$

$$\frac{x_3(s)}{u(s)} = \frac{1}{s+5} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_3 = -5x_3 + u$$

Nakon eliminiranja $\dot{x}_3$ iz druge jednadžbe dobije se:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - 2x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = -5x_3 + u$$

Treba uočiti da vektor $\underline{b}$ sada ima dva nenulta elementa :

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prisjetimo se da se kod faznih varijabli efekt nule očituje dodatnim nenultim članom izlaznog vektora $\underline{c}$. Kod fizičkih varijabli dodatni nenulti član se dodaje vektoru $\underline{b}$, a vektor $\underline{c}$ ostaje nepromijenjen. Matrica $\underline{A}$ se mijenja.

Ako bi se na isti način napisala jednačba stanja za osnovni sustav na Sl. 13.b , rezultirajuće jednačbe bi sadržavale član $\dot{u}$, što nije kompatibilno s oblikom jednačbe $(\underline{A} \ \underline{b})$. Član $\dot{u}$ proizlazi iz krajnjeg lijevog bloka koji sadrži nulu, što se može vidjeti ako se napiše diferencijalna jednačba koja odgovara prijenosnoj funkciji $x_3'(s)/u(s)$. Ta jednačba glasi:

$$\dot{x}_3 = -5x_3 + \dot{u} + 3u$$

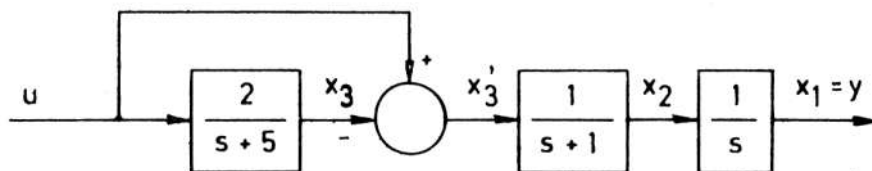
Nastali problem se može riješiti dijeljenjem kritične prijenosne funkcije s njenim nazivnikom, tako da se dobije:

$$\frac{s+3}{s+5} = 1 - \frac{2}{s+5}$$

Blokovski prikaz s učinjenom izmjenom nacrtan je na Sl. 4.14., gdje je uvedena nova varijabla x_3 .

Uvodjenjem nove varijable izlazi da je:

$$x_3' = u - x_3 \quad ,$$



Sl. 4.14. Preinaka bloka sa Sl. 4.13.b) s ciljem da se eliminira član u

a varijabla stanja:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_3' = -x_2 - x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = -5x_3 + 2u$$

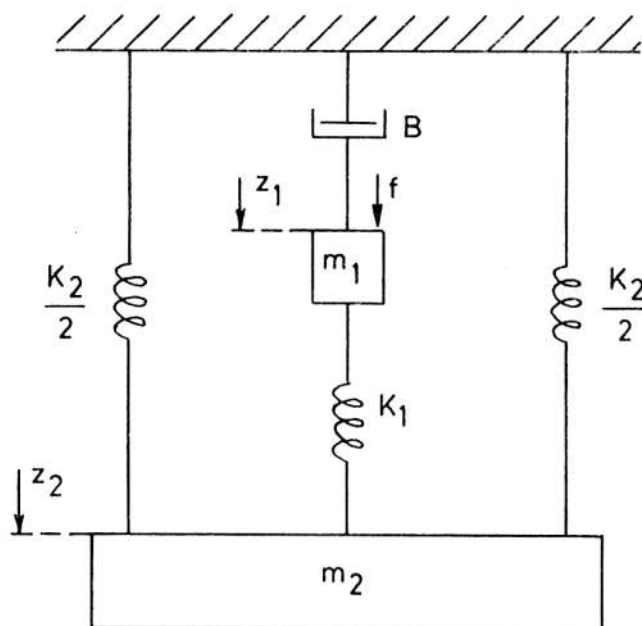
Vektor $\underline{b}$ sada ima oblik:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Budući da je x_3' realna fizička varijabla, a da x_3 u pravilu to nije, rezultati dobijeni s varijablom x_3 se za fizičku interpretaciju moraju konvertirati u x_3' . To se može učiniti korištenjem jednadžbe $x_3' = u - x_3$, ili inverznim prijelazom s blokovskih prikaza sa Sl. 4.14. na Sl. 4.13.b. Na temelju učinjenih razmatranja može se izvesti zaključak da pristup s faznim varijablama pruža jednostavnu, neposrednu, sustavnu i jednoznačnu metodu prijelaza od prijenosne funkcije na varijable stanja. Nedostatak tog pristupa je u tome što faznim varijablama nedostaje fizičko značenje.

Prijelaz s prijenosne funkcije na model s fizičkim varijablama ne može se, na žalost, šablonizirati, jer različiti objekti, koji mogu imati jednaku prijenosnu funkciju, ne moraju imati i jednake varijable stanja. Stoga, u ovom slučaju svaki prijelaz s jednog opisa na drugi zahtijeva i posebnu obradbu.

Primjer: Treba opisati osnovni sustav sa Sl.4.15. s fizičkim varijablama koristeći varijable $z_1(t)$, $\dot{z}_1(t)$, $z_2(t)$ i $\dot{z}_2(t)$ uz $z_2(t) = y(t)$ i $f(t) = u(t)$. Iz dobijenog opisa s varijablama stanja treba nacrtati elementarni blokovski prikaz i naći prijenosnu funkciju $y(s)/u(s)$.



Sl. 4.15. Mehanički sustav

Rješenje: Ako je $x_1 = z_1$, $x_2 = \dot{z}_1$, $x_3 = z_2$ i $x_4 = \dot{z}_2$

tada je:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_1/m_1 & -B_1/m_1 & K_1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1/m_1 & 0 & -(K_1+K_2)/m_2 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_3$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K_1}{(m_1 s^2 + B_1 s + K_1)(m_2 s^2 + K_1 + K_2) - K_1^2}$$

itd.

4.3.5. LINEARNA TRANSFORMACIJA VARIJABLI STANJA

Ponekad se javlja potreba da se s jednog opisa s varijablama stanja prijedje na drugi. Ovdje ćemo iznijeti jedan postupak takvog prijelaza poznatog pod nazivom *linearna transformacija*. Razmatrat ćemo već postavljene opise istosmjernog servomotora upravljanog strujom magnetiziranja.

Opis sa skupom faznih varijabla θ_o , $\dot{\theta}_o$ i $\ddot{\theta}_o$ glasi:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -DR/JL & -(LD+RJ)/JL \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_Y/LJ \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

gdje je $x_1(t) = \theta_O(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}_O(t)$, $x_3(t) = \dot{\theta}_O(t)$ i $u(t) = e(t)$. Drugi opis koji je zadan sa skupom fizičkih varijabli $\theta_O(t)$, $\dot{\theta}_O(t)$ i $i(t)$, glasi:

$$\dot{\underline{x}}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D/J & K/J \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix} \underline{x}^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}^*(t)$$

gdje je $x_1^*(t) = \theta_O(t)$, $x_2^*(t) = \dot{\theta}_O(t)$, $x_3^*(t) = i(t)$ i $u(t) = e(t)$.

Da bi se razlikovale od faznih varijabli, fizičke varijable su označene zvjezdicama.

Postavljaju se dva pitanja na koja treba dati odgovor. Prvo je, u kakvom su odnosu skupovi varijabli, a drugo, u kakvom su odnosu opisi objekta. Pokazat ćemo da jedan odgovor zadovoljava oba pitanja.

Počnimo s prvim pitanjem. Iz definicije obaju skupova varijabli stanja vidimo da je:

$$x_1(t) = x_1^*(t) = \theta_O(t)$$

$$x_2(t) = x_2^*(t) = \dot{\theta}_O(t)$$

Odnos trećih varijabli skupova nije tako očigledan. Da bi našli taj odnos, razmotrimo drugu jednadžbu opisa s fizičkim varijablama:

$$\dot{x}_2^*(t) = -\frac{D}{J} x_2^*(t) + \frac{K}{J} x_3^*(t)$$

Budući da je $x_2^*(t) = x_2(t)$ i $\dot{x}_2^*(t) = \dot{x}_2(t) = x_3(t)$, gornja jednačba se može pisati u obliku:

$$x_3(t) = -\frac{D}{J} x_2^*(t) + \frac{K_Y}{J} x_3^*(t)$$

Na taj način smo došli do slijedeće tri jednačbe:

$$x_1(t) = x_1^*(t)$$

$$x_2(t) = x_2^*(t)$$

$$x_3(t) = -\frac{D}{J} x_2^*(t) + \frac{K_Y}{J} x_3^*(t) \quad ,$$

koje predstavljaju odnos između jednog i drugog skupa varijabli. Sve tri jednačbe su linearne, pa se stoga mogu pisati u obliku:

$$\underline{x}(t) = \underline{P} \underline{x}^*(t) \quad (4.52)$$

gdje je:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{J} & \frac{K_Y}{J} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Matrična jednačba (4.52) koja pokazuje odnos dvaju skupova varijabli naziva se *linearna transformacija*, a matrica $\underline{P}$ naziva se *transformacijska matrica*. Stoga odgovor na prvo pitanje glasi: Bilo koja dva skupa varijabli stanja jednog linearnog sustava povezana su linearnom transformacijom.

Da bi odgovorili na drugo pitanje koje se tiče odnosa cjelokupnih opisa objekta, razmotrimo problem u općenitom obliku. Uzmimo dva skupa varijabli stanja; skup $\underline{x}(t)$ s opisom:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \quad (\underline{A} \ \underline{b})$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad (\underline{c})$$

i skup $\underline{x}^*(t)$ s opisom

$$\dot{\underline{x}}^*(t) = \underline{A}^* \underline{x}^*(t) + \underline{b}^* u(t) \quad (\underline{A}^* \ \underline{b}^*)$$

$$y(t) = \underline{c}^{*T} \underline{x}^*(t) \quad (\underline{c}^*)$$

Varijable $\underline{x}(t)$ i $\underline{x}^*(t)$ povezane su linearno transformacijom

$$\underline{x}(t) = \underline{P} \underline{x}^*(t)$$

gdje je $\underline{P}$ opća konstantna nesingularna matrica. Sada je naš problem, kao odgovor na drugo pitanje, kako naći odnos među matricama $\underline{A}$, $\underline{b}$ i $\underline{c}$ i $\underline{A}^*$, $\underline{b}^*$ i $\underline{c}^*$.

Derivirajmo najprije jednadžbu (4.52). Budući da matrica $\underline{P}$ ima konstantne elemente, ona nije uključena u derivaciju, a rezultat glasi:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{P} \dot{\underline{x}}^*(t) \quad (4.54)$$

Uvrštenjem jednadžbe (4.52) i (4.54) u $(\underline{A} \ \underline{b})$ i $(\underline{c})$ dobije se

$$\underline{P} \dot{\underline{x}}^*(t) = \underline{A} \underline{P} \underline{x}^*(t) + \underline{b} u(t) \quad (4.55)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{P} \underline{x}^*(t)$$

Množenjem jednađbe (4.55) s $\underline{P}^{-1}$ izlazi:

$$\dot{\underline{x}}^*(t) = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \underline{x}^*(t) + \underline{P}^{-1} \underline{b} u(t)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{P} \underline{x}^*(t)$$

Usporedbom ovih jednađbi s jednađbama ($\underline{A} \underline{b}$) i ($\underline{c}$) otkriva se da je:

$$\underline{A}^* = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \quad , \quad \underline{b}^* = \underline{P}^{-1} \underline{b} \quad , \quad \underline{c}^* = \underline{P}^T \underline{c} \quad (4.56)$$

Odatle odgovor na drugo pitanje. Matrica $\underline{P}$ ne povezuje samo skupove varijabli stanja, već i odgovarajuće opise objekta.

Množenjem jednađbe (4.55) s $\underline{P}^{-1}$ pokazuje da matrica $\underline{P}$ ne može biti singularna. Medjutim, to može biti bilo koja nesingularna matrica. Stoga objekt opisan bilo kojim skupovom varijabli stanja može se transformirati u neograničeno mnogo alternatnih opisa.

Da bismo došli do matrice $\underline{P}$ koja je definirana matričnim jednađbama (4.56), prve dvije jednađbe pomnože se s $\underline{P}$ i dobije se:

$$\underline{P} \underline{A}^* = \underline{A} \underline{P} \quad ; \quad \underline{P} \underline{b}^* = \underline{b} \quad \text{ i } \quad \underline{c}^* = \underline{P}^T \underline{c} \quad (4.57)$$

Matrične jednađbe (4.57) daju skup od $n^2 + 2n$ linearnih algebarskih jednađbi za izračunavanje matrice $\underline{P}$. Matrica $\underline{P}$ ima n^2 elemenata, pa je stoga dovoljno i n^2 jednađbi za njeno izračunavanje, a ostatak $2n$ su redundantne jednađbe.

Primjer: Treba odrediti transformacijsku matricu $\underline{P}$ koja povezuje dva opisa s varijablama stanja istosmjernog servomotora upravljano strujom magnetiziranja. Rezultat je već zadan jednađbom (4.53), a ovdje ćemo provjeriti postupak dobivanja matrice $\underline{P}$ preko jednađbi (4.57). Znamo da matrica $\underline{A}$ s faznim varijablama glasi:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{DR}{JL} & -\frac{(LD+RJ)}{JL} \end{bmatrix},$$

a matrica $\underline{A}^*$ s fizičkim varijablama glasi:

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K_Y/J \\ 0 & 0 & -R/J \end{bmatrix}$$

Uvrštenjem matrica $\underline{A}$ i $\underline{A}^*$ u jednažbu $\underline{P} \underline{A}^* = \underline{A} \underline{P}$ dobije se

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K_Y/J \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{DR}{JL} & -\frac{LD+RJ}{JL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

Ova matrična jednažba predstavlja devet jednažbi s devet nepoznanica. Izjednačenjem elemenata rezultatne matrične jednažbe dobije se devet jednažbi koje glase:

$$1. \quad 0 = p_{21}$$

$$2. \quad p_{11} - \frac{D}{J} p_{12} = p_{22}$$

$$3. \quad \frac{K_Y}{J} p_{12} - \frac{R}{L} p_{13} = p_{23}$$

$$4. \quad 0 = p_{31}$$

$$5. \quad p_{21} - \frac{D}{J} p_{22} = p_{32}$$

$$6. \quad \frac{K_Y}{J} p_{22} - \frac{R}{L} p_{23} = p_{33}$$

$$7. \quad 0 = -\frac{DR}{JL} p_{21} - \frac{1}{JK} (LD + RJ) p_{31}$$

$$8. \quad p_{31} - \frac{D}{J} p_{32} = -\frac{DR}{JL} p_{22} - \frac{1}{JL} (LD + RJ) p_{32}$$

$$9. \quad \frac{K_Y}{J} p_{32} - \frac{R}{L} p_{33} = -\frac{DR}{JL} p_{23} - \frac{1}{JL} (LD + RJ) p_{33}$$

Zbog prve i četvrte jednačbe sedma jednačba je redundantna.
Iz jednačbe $\underline{p} \underline{b}^* = \underline{b}$ izlazi:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_Y/LJ \end{bmatrix}$$

a nakon množenja dobiju se slijedeće tri jednačbe:

$$1. \quad p_{13}/L = 0$$

$$2. \quad p_{23}/L = 0$$

$$3. \quad p_{33}/L = \frac{K_Y}{LJ}$$

Na temelju ovih jednađžbi zaključujemo da su osim p_{21} i p_{31} još i p_{13} i p_{23} jednaki nuli, i da je $p_{33} = K_Y/J$. Devet jednađžbi je reducirano na:

$$p_{11} = p_{22}$$

$$(K_Y/J) p_{12} = 0$$

$$(-D/J) p_{22} = p_{32}$$

$$(K_Y/J) p_{22} = K_Y/J$$

a odatle izlazi:

$$p_{22} = 1 = p_{11}$$

$$p_{32} = -D/J$$

$$p_{12} = 0$$

Na taj način su svi elementi matrice $\underline{P}$ određeni i slažu se s već poznatim elementima iz jednađžbe (4.53). Već smo ustanovili da je sedma jednađžba redundantna, a na temelju gornjih rezultata izlazi da su isto tako osma i deveta jednađžba redundantne, što do sada iznosi tri redundantne jednađžbe. I tri jednađžbe koje se dobiju iz $\underline{c}^* = \underline{P}^T \underline{c}$ su takodjer redundantne, pa to ukupno daje šest, odnosno $2n$ redundantnih jednađžbi, kao što je uvodno i ustanovljeno.

Opisani postupak dobijanja transformacijske matrice $\underline{P}$ je formalno besprijekoran i zadovoljava u svim mogućim slučajevima. Mana mu je što zahtijeva relativno mnogo vremena za rješavanje velikog broja jednađžbi. Stoga se preporučuje, do što većeg broja nepoznanica doći inženjerskim pristupom, a ostatak riješiti opisanim načinom.

Transformacija jednog opisa s varijablama stanja u drugi vrši se jednostavnom primjenom matričnih jednažbi (4.56). Pri tome najviše vremena zahtijeva inverzija matrice $\underline{P}$.

Primjer: Zadan je opis s faznim varijablama stanja istosmjernog servomotora upravljanog strujom magnetiziranja i transformacijska matrica $\underline{P}$ za prijelaz na fizičke varijable. Treba naći opis s fizičkim varijablama.

Inverzija matrice $\underline{P}$ koja je zadana jednažbom (4.53) izlazi:

$$\underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/K_Y & J/K_Y \end{bmatrix}$$

Poznavajući sada $\underline{P}$ i $\underline{P}^{-1}$ primjenom jednažbi (4.56) dobije se:

$$\begin{aligned} \underline{A}^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & D/K & J/K_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{DR}{JL} & -\frac{LD+RJ}{JL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K_Y/J \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K_Y/J \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

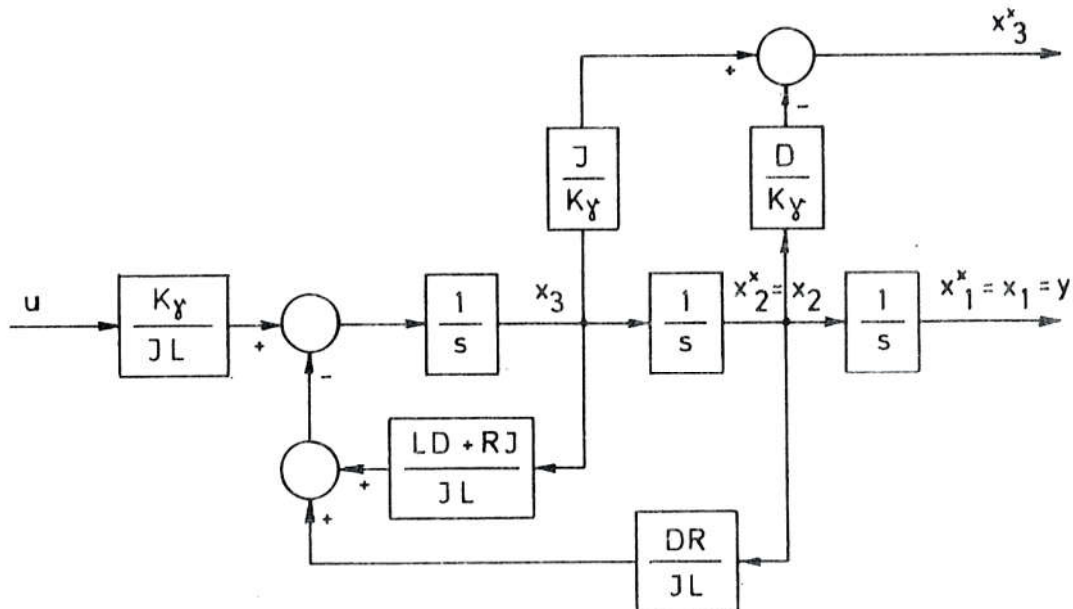
$$\underline{b}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & D/K_Y & J/K_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_Y/LJ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -D/J \\ 0 & 0 & K_Y/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usporedbom sa zadanim opisom s fizičkim varijablama stanja, na početku govora o linearnoj transformaciji, vidi se da su dobijeni rezultati točni.

Transformacija jednog opisa s varijablama stanja u drugi može se provesti i primjenom blokovske algebre. Razmotrimo npr. blokovski prikaz istosmjernog servomotora upravljaniog strujom magnetiziranja (Sl. 4.16), na kojem su prikazane fazne i fizičke varijable.

Da bi se transformirao blokovski prikaz sa Sl. 4.16. u konvencionalni blokovski prikaz s fizičkim varijablama potrebno je eleiminirati varijablu $x_3(t)$. To je učinjeno korištenjem blokovske algebre, postupnim prijelazima na Sl. 4.17. od a do d. Prikaz na Sl. 4.17.a dobijen je pomakom čvorišta s $x_2 = x_2^*$ na x_3 ; prikaz na Sl. 4.17.b dobijen je sjedinjenjem paralelnih blokova; prikaz na Sl. 4.17.c dobijen je primještanjem čvorišta x_3 na x_3^* i konačno je skraćivanjem dobijen konačni blokovski prikaz s fizičkim varijablama na Sl. 4.17.d.



Sl. 4.16. Istosmjerni servomotor upravljan strujom magnetiziranja s naznačenim faznim i fizičkim varijablama stanja

Zaključujući razmatranje o linearnoj transformaciji naglasimo dva njezina važna svojstva:

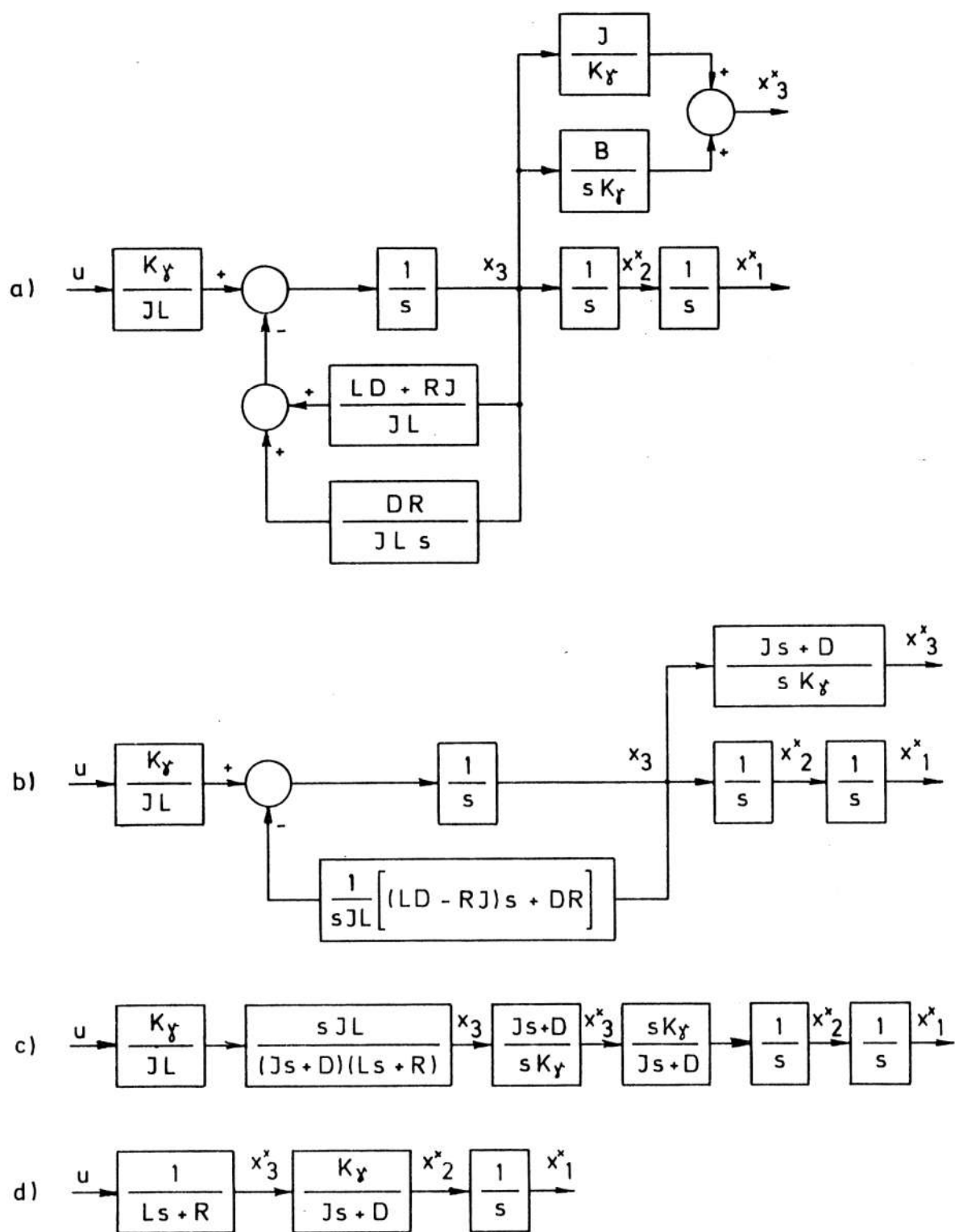
1. budući da je prijenosna funkcija neosjetljiva na izbor varijabli stanja sustava izlazi da je:

$$\underline{c}^{*T} (s \underline{I} - \underline{A}^*)^{-1} \underline{b}^* = \underline{c}^T (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} \quad (4.58)$$

2. budući da je $\det (s \underline{I} - \underline{A})$ jednaka nazivniku $G_p(s)$, koji je isto tako neosjetljiv na izbor varijabli stanja, izlazi:

$$\det (s \underline{I} - \underline{A}^*) = \det (s \underline{I} - \underline{A}) \quad (4.59)$$

Iz tih svojstava proizlazi da linearna transformacija varijabli stanja ne utječe na svojstvene vrijednosti sustava.



Sl. 4.17. Primjena blokovske algebre za dobijanje blokovskog prikaza u kojem su naznačene samo fizičke varijable stanja

Primjer: Treba naći transformacijsku matricu $\underline{P}$ koja povezuje fazne varijable istosmjernog servomotora upravljanog strujom armature s fizičkim varijablama koje su odabrane pri razmatranju fizičkih varijabli, i to npr. pomoću inženjerskog pristupa, a zatim rezultat provjeriti jednadžbama (4.57).

Rješenje: Ako se s $\underline{x}$ označe fizičke varijable, a s $\underline{x}^*$ fazne varijable, dobije se:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & D/JL_a & 1/L_a \\ K/JL_a & 0 & 0 \\ 0 & K_Y/JL_a & 0 \end{bmatrix} \underline{x}^*$$

4.4. ZAKLJUČAK

S pregledom osnova matričnog računa, koji je razmotren u uvodnom dijelu ovog poglavlja, definirana je konvencionalna terminologija potrebna za razmatranje varijabli stanja. U nastavku je razradjen pojam varijabli stanja i prikazan način opisa osnovnog sustava s varijablama stanja u matričnom obliku i u obliku blokovskog prikaza. Pokazan je odnos varijabli stanja i prijenosne funkcije. Posebno je razradjen pojam i međusobni odnos faznih i fizičkih varijabli. Na kraju je obradjena linearna transformacija za prijelaz s jednog na drugi skup varijabli stanja odnosno za prijelaz s jednog opisa s varijablama stanja na drugi.

5. NEGATIVNA POVRATNA VEZA

5.1. UVOD

U dosadašnjim razmatranjima je pokazano da se u postupku modeliranja, polazeći od poznatih zakonitosti ili mjerenja, najprije dolazi do skupa simultanih diferencijalnih jednačbi, najčešće prvog ili drugog reda. Ovisno o vrsti modeliranja ustalila su se dva standardna modela. Ako se traži ponašanje izlazne varijable u ovisnosti o ponašanju ulazne varijable, a ponašanje ostalih varijabli sustava nas ne zanima, sustav se opisuje jednom diferencijalnom jednačbom n -tog reda, odnosno radi lakšeg računanja s odgovarajućom prijenosnom funkcijom. Ako se osim izlazno-ulaznog odnosa traži i ponašanje drugih varijabli sustava, prelazi se na skup od n diferencijalnih jednačbi prvog reda koje formiraju model varijabli stanja.

U jednom i drugom slučaju služimo se blokovskim prikazima koji predstavljaju Laplaceove transformate određenih diferencijalnih jednačbi uz nulte početne uvjete. Objekt, odnosno osnovni sustav, modeliran s varijablama stanja, u dosadašnjim razmatranjima je opisan jednačbom oblika (A b) i (c) tj.:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \quad (\underline{A} \underline{b})$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (\underline{c})$$

Kod sustava s automatskom regulacijom, tj. kad se na objektu uspostavi povratna veza od reguliranih veličina prema ulazu, opis sustava i dalje predstavljaju jednadžbe (A b) i (c); samo u novim uvjetima vezu varijabli stanja s ulazom sustava *definira upravljački ulazni signal* u , a zadan je relacijom:

$$u = K(r - \underline{k}^T \underline{x}) = K(r - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n) \quad (\underline{k})$$

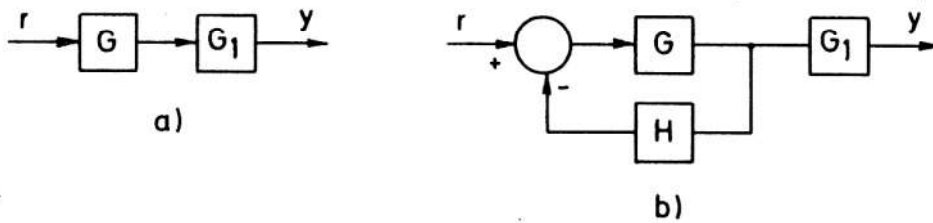
Signal r u jednadžbi (k) naziva se *referentni ulazni signal*, a predstavlja veličinu koju bi trebao slijediti izlaz reguliranog sustava. Koeficijenti k_i određuju utjecaj svake pojedine varijable stanja u povratnoj petlji.

5.2. UČINCI NEGATIVNE POVRATNE VEZE

Glavni učinci negativne povratne veze su:

1. smanjenje osjetljivosti na promjene parametara osnovnog sustava
2. smanjenje osjetljivosti na vanjske poremećaje
3. mogućnost utjecaja na frekvencijski odziv
4. mogućnost utjecaja na prijelazni odziv

Smanjenje osjetljivosti na promjene parametara osnovnog sustava. Da bisno uočili učinak negativne povratne veze na osjetljivost, uzmimo dva frekvencijski neovisna linearna pojačala vezana u seriju. Na Sl. 5.1.a) prikazano je upravljanje s *otvorenom petljom*, tj. bez povratne veze; na Sl. 5.1.b) prvo pojačalo je upravljano sa *zatvorenom petljom*, tj. s negativnom povratnom vezom.



- Sl. 5.1. a) serijski vezana pojačala bez povratne veze;
 b) serijski vezana pojačala s negativnom povratnom vezom na pojačalu G

Prijenosna funkcija sustava na Sl. 5.1.a je:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = M_O(s) = G G_1 \quad (5.1)$$

a prijenosna funkcija sustava na Sl. 5.1.b je:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = M_C(s) = \frac{G G_1}{1 + GH} \quad (5.2)$$

koja se može pisati u obliku:

$$M_C = \frac{G_1}{\frac{1}{G} + H} \quad (5.3)$$

Uz pretpostavku da je pojačanje G vrlo veliko, jednadžba (5.3) prelazi u:

$$M_C = \frac{G_1}{H} \quad (5.4)$$

U jednadžbi (5.4) više nema pojačanja G , tj. promjena pojačanja G u slučaju primjene negativne povratne veze ne utječe na prijenosnu funkciju M_C .

Da bi osjetljivost u pokazanom primjeru mogli i matematički izraziti, potrebno je najprije definirati osjetljivost. U našim razmatranjima usvojiti ćemo definiciju da je osjetljivost S prijenosne funkcije M po parametru α određena odnosom relativne promjene prijenosne funkcije i relativne promjene parametra α , tj.:

$$S_{\alpha}^M = \frac{\frac{dM}{M}}{\frac{d\alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha}{M} \frac{dM}{d\alpha} \quad (5.5)$$

Minimizacijom funkcije osjetljivosti smanjuje se utjecaj promjene parametra na prijenosnu funkciju.

Primijenimo sada jednadžbu (5.5) na sustave Sl. 5.1a i b.

U slučaju sustava na Sl. 5.1.a osjetljivost glasi:

$$S_G^{M_O} = \frac{G}{M_O} \frac{d M_O}{d G} = \frac{1}{G_1} = G_1 = 1 \quad (5.6)$$

a za sustav na Sl. 5.1.b):

$$S_G^{M_C} = \frac{G}{M_C} \frac{d M_C}{d G} = \frac{1}{1 + GH} \quad (5.7)$$

Usporedbom rezultata pod (5.6) i (5.7) vidimo da se promjenom povratne veze smanjila osjetljivost $\frac{1}{1 + GH}$ i da se povećanjem vrijednost *prijenosne funkcije otvorene petlje* GH osjetljivost može po volji smanjiti.

Pogledajmo sada kako se ponaša funkcija osjetljivosti u odnosu na promjenu parametra H . U tom slučaju osjetljivost glasi:

$$S_H^{M_C} = \frac{H}{M_C} \frac{d M_C}{d H} = - \frac{GH}{1 + GH} \quad (5.8)$$

a uz $G \gg 1$:

$$\frac{M}{G_H}^C = - \frac{H}{\frac{1}{G} + H} = - 1 \quad (5.9)$$

Iz jednadžbe (5.9) izlazi da je osjetljivost sustava na promjene parametra H , tj. na promjene parametara u povratnoj grani, jednaka kao i na promjene parametra G bez povratne veze. Ovaj rezultat na prvi pogled proturiječi jednadžbi (5.7), da se s povratnom vezom smanjuje osjetljivost. U stvari osjetljivost sustava u cjelini nije se promijenila, već je samo s unaprijedne grane "prebačena" na povratnu granu, a budući da se povratna grana može sačuvati od utjecaja vanjskih poremećaja, problem osjetljivosti je na taj način s negativnom povratnom vezom ipak riješen.

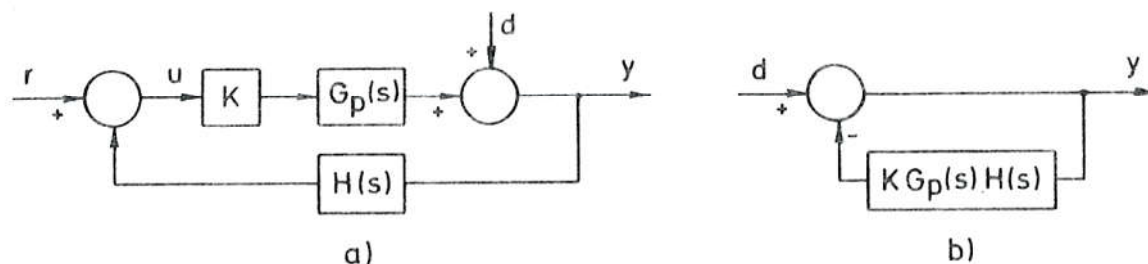
Radi jednostavnijeg razmatranja, na početku su pretpostavljena frekvencijski neovisna pojačala. Sada se problem može proširiti i na slučaj kad su pojačala frekvencijski ovisna. U tom slučaju jednadžba (5.7) glasi:

$$\frac{M}{S_G}^C = \frac{1}{1 + G(s) H(s)} \quad (5.10)$$

iz čega proizlazi da osjetljivost postaje funkcija frekvencije, a bit će manja od jedinice sve dok je apsolutna vrijednost karakteristične jednadžbe veća od jedinice:

$$|1 + G(s) H(s)| > 1 \quad (5.11)$$

Smanjenje osjetljivosti na vanjske poremećaje. Da bismo dokazali ovaj učinak, razmotrimo sustav na Sl. 5.2.a, koji predstavlja radarsku antenu; K je frekvencijski neovisno pojačalo, $G_p(s)$ je servomotor, a $H(s)$ je kompenzator u povratnoj grani. Ulazni referentni signal označen je s r , a d je poremećajni ulaz koji u ovom slučaju predstavlja vjetar.



Sl. 5.2. Utjecaj negativne povratne veze na posljedice vanjskih poremećaja

Na temelju principa superpozicije uzmimo da je r jednak nuli. U tom slučaju sustav se može predložiti blokovskim prikazom na Sl. 5.2.b, kojeg prijenosna funkcija glasi:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + K G_p(s) H(s)} \quad (5.12)$$

Kad ne bi bilo povratne veze prijenosna funkcija $\frac{y(s)}{d(s)}$ bila bi jednaka jedinici, tj. promjena $d(s)$ bi se neposredno odrazila na $y(s)$, ili:

$$\Delta y(s) = \Delta d(s) \quad (5.13)$$

S povratnom vezom dobije se:

$$y(s) = \frac{\Delta d(s)}{1 + K G_p(s) H(s)} \quad (5.14)$$

odakle proizlazi da je utjecaj $\Delta d(s)$ na $y(s)$ sada umanjen za faktor:

$$\frac{1}{1 + K G_p(s) H(s)}$$

čime je postavljena tvrdnja dokazana.

Mogućnost utjecaja na frekvencijski odziv. Ovisnost prijenosne funkcije o frekvenciji sinusnog ulaznog signala naziva se *frekvencijski odziv*. Širina mu je od nulte frekvencije do frekvencije na kojoj modul prijenosne funkcije spadne na $1/\sqrt{2} = 0,707$ svoje vrijednosti na nultoj frekvenciji. Pogledajmo kako na tu širinu utječe negativna povratna veza. Na Sl. 5.3.a prikazan je jednostavni sustav prvog reda, kojeg prijenosna funkcija glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = M_O(s) = \frac{1}{s + 1}$$

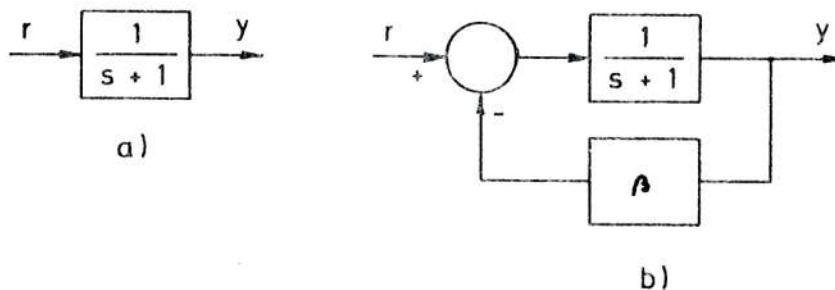
Uvrštenjem $s = j\omega = j0$ izlazi:

$$|M_O(j0)| = 1$$

a uz $s = j\omega = j1$ dobije se

$$M_O(j1) = \frac{1}{|j1 + 1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

Na frekvenciji $\omega = 0$ vrijednost modula je jedinica, a već na $\omega = 1$ vrijednost modula spadne na 0,707, odakle po definiciji izlazi da je širina frekvencijskog odziva jednaka jedinici.



Sl. 5.3. Utjecaj negativne povratne veze na širinu frekvencijskog odziva

Na Sl. 5.3b prikazan je isti sustav prvog reda samo s negativnom povratnom vezom. Prijenosna funkcija sada glasi:

$$M_C(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{s}{s+1}} = \frac{1}{s + 1 + \beta}$$

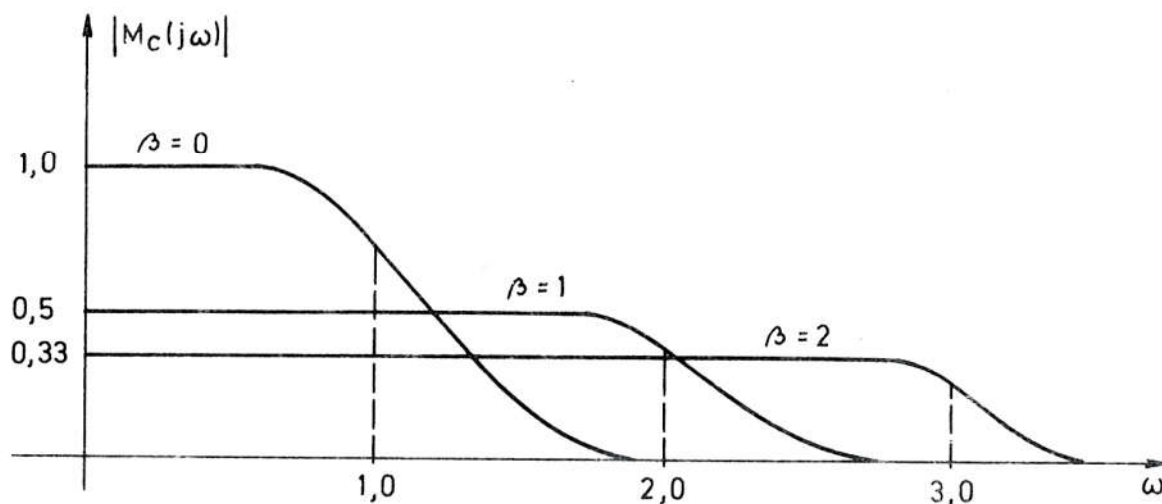
Uz $s = j\omega = j0$:

$$|M_C(j0)| = \frac{1}{1 + \beta},$$

a uz $s = j\omega = j(1 + \beta)$:

$$|M_C[j(1 + \beta)]| = \frac{1}{|j(1 + \beta) + 1 + \beta|} = \frac{1}{(1 + \beta)\sqrt{2}}$$

Iz dobijenih izraza za modele na nultoj frekvenciji i na frekvenciji $(1 + \beta)$ vidimo da negativna povratna veza u nazivnik modula unosi član $(1 + \beta)$, gdje je β promjenljivi član u povratnoj grani. Povećanjem β prigušuje se modul na nultoj frekvenciji za faktor $\frac{1}{1 + \beta}$, ali se zato širina frekvencijskog odziva povećava za faktor $(1 + \beta)$.



Sl. 5.4. Frekvencijski odziv za tri različite vrijednosti negativne povratne veze

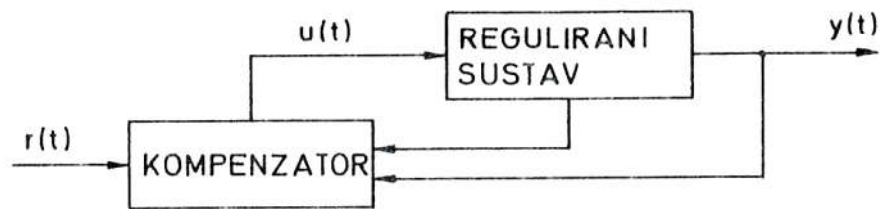
Na Sl. 5.4 ilustriran je frekvencijski odziv sustava prvog reda sa Sl. 5.3 za tri različite vrijednosti β . Time je mogućnost utjecaja na frekvencijski odziv s negativnom povratnom vezom dokazana.

Mogućnost utjecaja na prijelazni odziv. Ne upuštajući se u dokazivanje (koje će biti kasnije navedeno), zadovoljimo se ovdje tvrdnjom da se primjenom linearne povratne veze s varijablama stanja, funkcija $\frac{y(s)}{r(s)}$ može izjednačiti s bilo kojom prijenosnom funkcijom $G_p(s)$. Ako sve varijable stanja nisu dostupne, pa ih se stoga mora nadomjestiti izvjesnim aproksimacijama, i u riješenju možemo očekivati izvjesna odstupanja od idealnog rezultata.

Po svemu se može zaključiti da su sva četiri spomenuta učinka pri automatskom reguliranju dobro došla. A kako to obično u životu biva da svaka stvar ima svoju cijenu, ni automatska regulacija nije mogla proći, a da ne plati cijenu za te pozitivne učinke. Naime, povratna veza unosi mogućnost da se faza signala u petlji okrene, tako da povratna veza ispadne pozitivna. U tom slučaju sustav dolazi u stanje raspirenih oscilacija, odnosno u stanje nestabilnosti. Pri proučavanju automatske regulacije najveći dio vremena posvećuje se izučavanju postupka, kako u što većoj mjeri iskoristiti pozitivne učinke, a da sustav ostane što dalje od područja nestabilnosti.

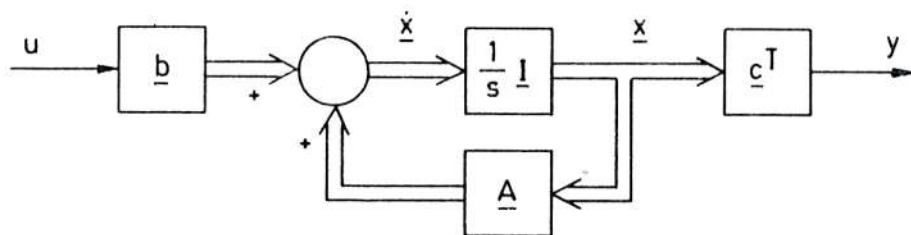
5.3. JEDNOSTAVAN SLUČAJ LINEARNE REGULACIJE S VARIJABLAMA STANJA

Na Sl. 5.5. prikazan je načelni blokovski dijagram objekta, odnosno reguliranog sustava s pridodanom povratnom vezom. Objekt, odnosno regulirani sustav s povratnom vezom u cjelini, nazivat ćemo regulacijski sustav.



Sl. 5.5. Regulacijski sustav

Primjenom blokovskog prikaza s varijablama stanja objekt ili regulirani sustav se u općem slučaju može prikazati kao na Sl. 5.6.

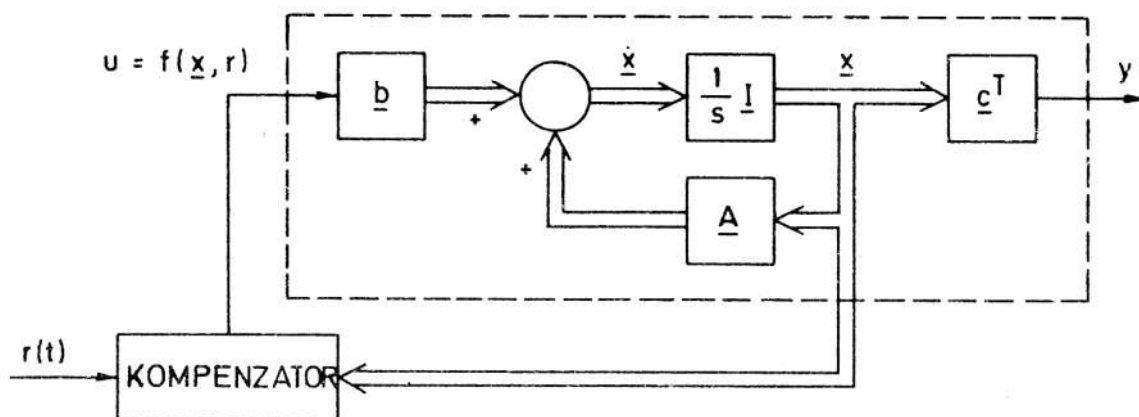


Sl. 5.6. Objekt prikazan s varijablama stanja

Primjenom povratne veze s varijablama stanja na objekt, dobije se blokovski prikaz regulacijskog sustava na Sl. 5.7., na kojem je tok skalarnih informacija prikazan tankim strelicama, a tok vektorskih informacija debelim strelicama.

Povratnu vezu regulacijskog sustava definira regulator koji generira *upravljajući signal* u na temelju informacije o varijablama stanja i o *referentnom ulazu* $r(t)$. Grana povratne veze od izlaza $y(t)$ koja postoji na Sl. 5.5. u obradbi s varijablama stanja (Sl. 5.7.) nije potrebna, jer varijable stanja sadrže punu informaciju o sustavu, tako da se izlaz može izračunati pomoću relacije:

$$y = \underline{c}^T \underline{x}$$



Sl. 5.7. Regulacijski sustav prikazan s varijablama stanja

Općenito, izlaz kompenzatora je funkcija varijabli stanja i referentnog signala, a budući da ovdje izučavamo samo linearne sustave, odabiremo i specifički regulator nazvan *linearni regulator s varijablama stanja*. Upravljački signal u se u linearnom regulatoru s varijablama stanja dobije tako da se razlika referentnog signala i linearnog težinskog zbroja varijabli stanja pomnoži s pojačanjem K . Matematički izraz glasi:

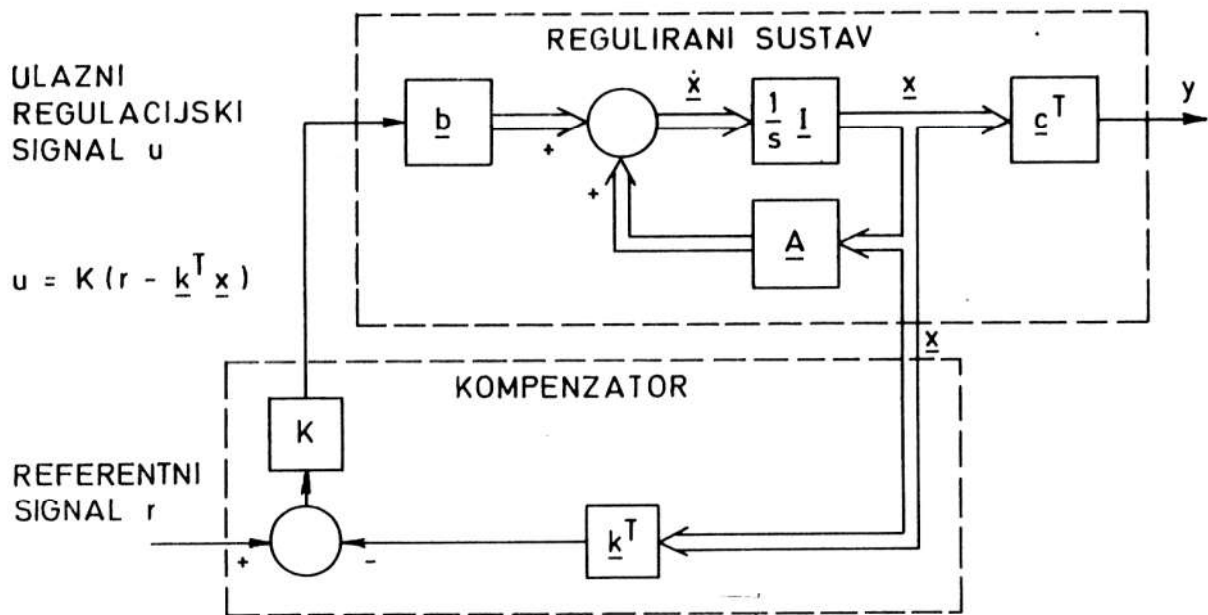
$$u = f(\underline{x}, r) = K[r - (k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)] \quad (\underline{k})$$

Koeficijenti k_i nazivaju se *koeficijenti povratne veze*, a K je *pojačanje regulatora*. U pojednostavljenom obliku jednačba $(\underline{k})$ se može pisati kao:

$$u = K(r - \underline{k}^T \underline{x}) \quad , \quad (\underline{k})$$

gdje je:

$$\underline{k} = \text{st } (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (5.15)$$

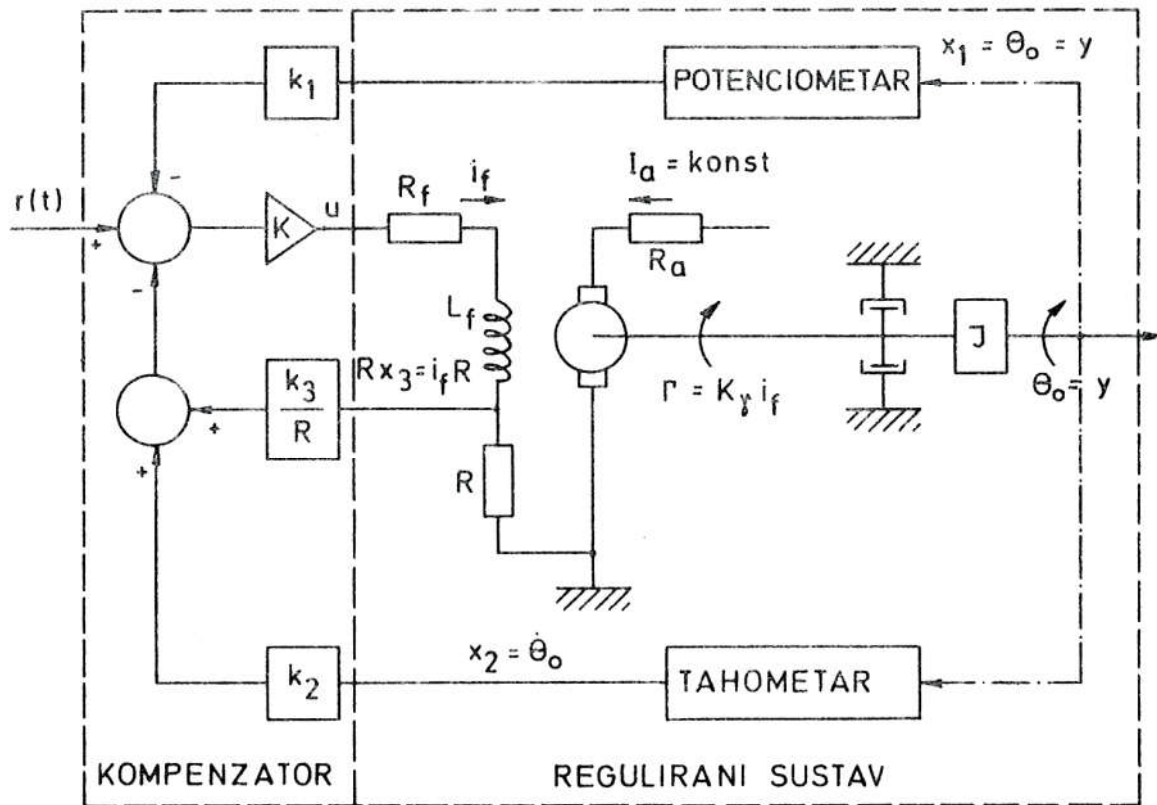


Sl. 5.8. Linearni regulacijski sustav s varijablama stanja

Na linearnom regulacijskom sustavu s varijablama stanja, kojeg je blokovski prikaz naveden na Sl. 5.8., bit će razmotreni svi problemi i učinci regulacije. Linearni je sustav izabran zato što on u obradbi omogućuje primjenu vrlo korisnog transformacijskog postupka, a osim toga direktno se može primijeniti u obradbi najvećeg broja praktičkih problema.

Za početak, pogledajmo kako se taj postupak primjenjuje u obradbi jednog pozicijskog sustava za namještanje teleskopa koji se sastoji od teleskopa i istosmjernog servomotora upravljanog strujom magnetiziranja. Uloga motora je da putem zakretnog momenta privede sustavu energiju potrebnu za pozicioniranje inercijskog opterećenja koje predstavlja teleskop. Izvedba povratne veze s varijablama stanja prikazana je na Sl. 5.9.

Za opis sustava s varijablama stanja upotrijebljene su ove varijable: izlaz $x_1 = \theta_0$, derivacija izlaza $x_2 = \dot{\theta}_0$ i struja magnetiziranja $x_3 = i_f$. Izlazni kut je pretvoren u napon s pomoću potencijometra, a za mjerenje brzine izlazne osovine upotrijebljen je tahometar. Struja magnetiziranja se dobije mjerenjem napona na serijskom otporu R_0 .



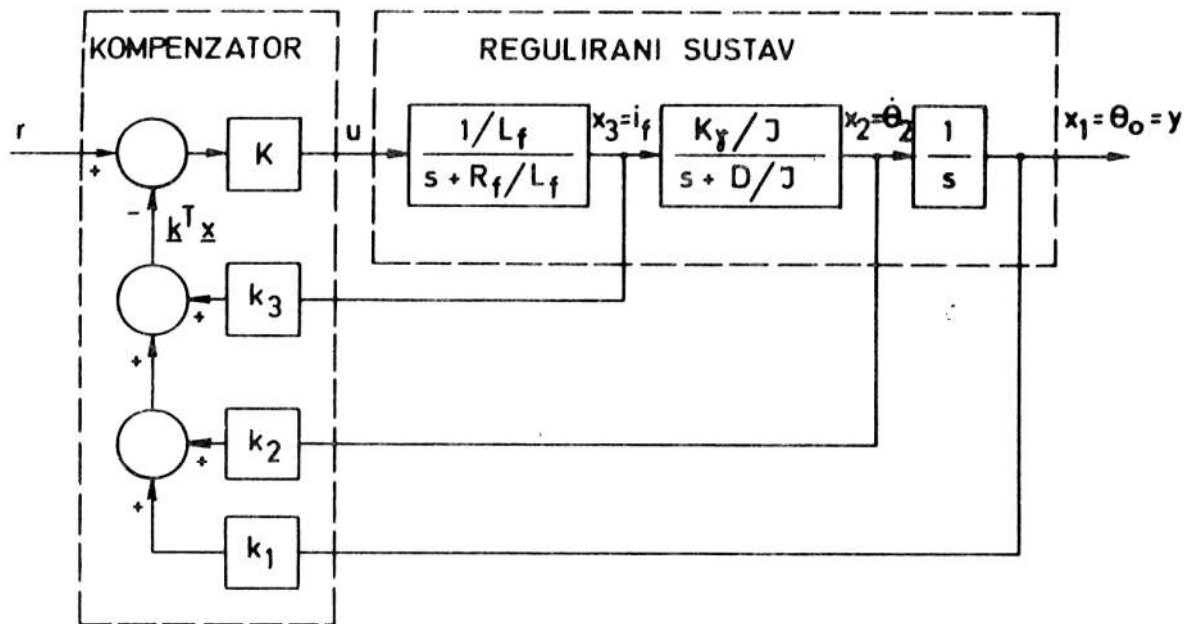
Sl. 5.9. Pozicijski sustav s istosmjernim servomotorom upravljanim strujom magnetiziranja

Na Sl. 5.10.a' prikazan je blok prikaz pozicijskog sustava sa Sl. 5.9., na kojem su objekt i kompenzator jasno odvojeni. Budući da u stvarnosti dijelovi kompenzatora ne moraju biti sakupljeni na jednom mjestu, na Sl. 5.10.b, gdje su navedene već i numeričke vrijednosti motora, dijelovi kompenzatora nisu grupirani zajedno, što je i konvencionalno usvojen način prikazivanja.

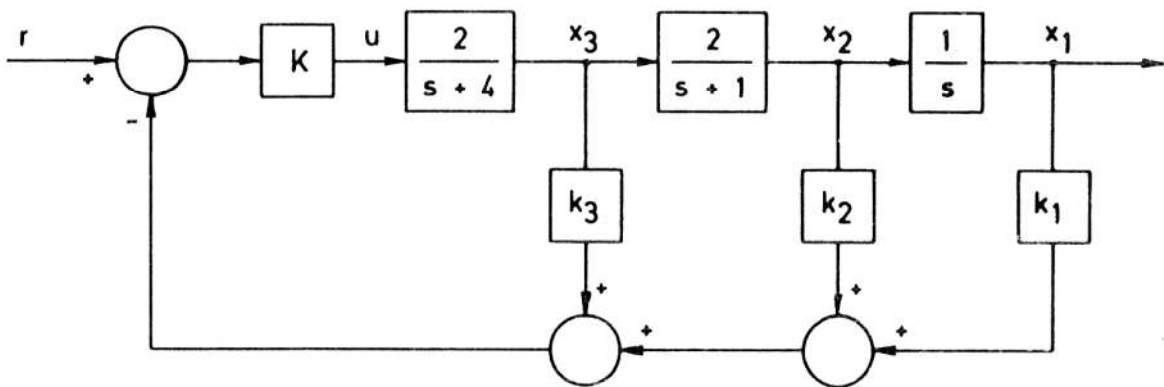
Iz bokovskog prikaza na Sl. 5.10.b opis objekta s varijablama stanja glasi:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad (5.16)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \underline{x} \quad (5.17)$$



a)



b)

Sl. 5.10. a) blokovski prikaz pozicijskog sustava sa Sl. 5.9. s odvojenim kompenzatorom; b) blokovski prikaz pozicijskog sustava sa Sl. 5.9. u konvencionalnom obliku

Prijenosna funkcija može se dobiti direktno iz Sl. 5.10.b , ili iz opisa s varijablama stanja primjenom jednadžbe:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G_p(s) = \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} \quad ,$$

gdje je $\phi(s)$ rezolventna matrica. Odatle izlazi prijenosna funkcija objekta:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G_p(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)} \quad (5.18)$$

Na Sl. 5.10.b se vidi da su pojačanje kompenzatora K i prijenosna funkcija $G_p(s)$ serijski vezani, pa je stoga:

$$K G_p(s) = K \frac{y(s)}{u(s)} \quad (5.19)$$

Umnožak $KG_p(s)$ naziva se *unaprijedna prijenosna funkcija*, koja se može definirati i kao odnos izlaznog i referentnog signala s otvorenom povratnom granom ili uz $\underline{k} = 0$, pa se stoga može pisati i u obliku:

$$K G_p(s) = \left. \frac{y(s)}{r(s)} \right|_{\underline{k}=0} \quad (5.20)$$

Da bi se postavio opis s varijablama stanja za čitav regulacijski sustav, potrebno je još u opis objekta unijeti izraz za u . Kad se to učini dobije se:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} K(r - [k_1 \ k_2 \ k_3] \underline{x}) ,$$

ili

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Kr - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} K [k_1 \ k_2 \ k_3] \underline{x}$$

Množenjem matrica trećeg člana, te izlučivanjem $\underline{x}$ i sredjenjem dobije se:

$$\dot{\underline{x}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2Kk_1 & -2Kk_2 & -2Kk_3 \end{bmatrix} \right\} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} Kr ,$$

ili u reduciranom obliku:

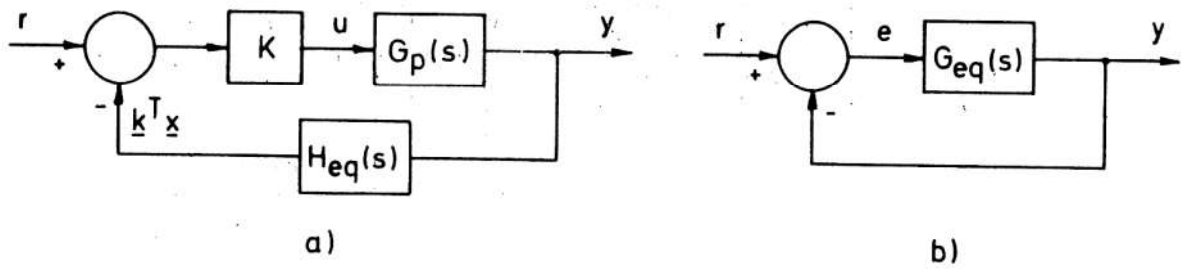
$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2Kk_1 & -2Kk_2 & -4-2Kk_3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} Kr \quad (5.21)$$

Opis izlaza ostaje isti:

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \underline{x} \quad (5.22)$$

Jednadžbe (5.21) i (5.22) predstavljaju potpuni opis regulacijskog sustava s varijablama stanja. Vrijedno je zapaziti dvije različitosti između opisa objekta i regulacijskog sustava. Prva različitost je u tome da je upravljački signal u zamijenjen s umnoškom Kr , a druga da je matrica $\underline{A}$ modificirana s povratnom vezom varijabli stanja. Vektori $\underline{b}$ i $\underline{c}$ su ostali nepromijenjeni.

Prijenosna funkcija zatvorene petlje $y(s)/r(s)$ može se na već poznati način dobiti iz jednadžbi (5.21) i (5.22), ali ćemo radi vježbe ovdje pokušati na drugi način doći do rezultata. Taj način se sastoji u tome da se regulacijski sustav svede na jedan od oblika sa Sl. 5.11.



Sl. 5.11. Dvije osnovne konfiguracije zatvorene petlje:
a) oblik H ekvivalentno;
b) oblik G ekvivalentno

Konfiguracija pod a) naziva se *oblik H ekvivalentno*, a pod b) *oblik G ekvivalentno*. Takvi su nazivi uzeti zbog toga što ni $H_{eq}(s)$ ni $G_{eq}(s)$ nisu fizičke prijenosne funkcije. Usprkos tome ovaj način prikazivanja regulacijskog sustava pokazao se vrlo dobar za obradbu velikog broja različitih sustava s negativnom povratnom vezom. Osim toga ovi oblici služe da se na različite načine pokažu učinci negativne povratne veze s varijablama stanja.

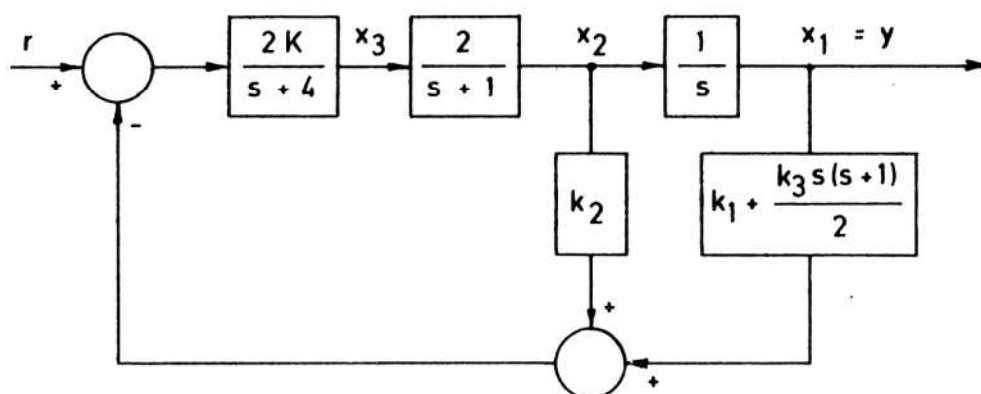
Svede li se regulacijski sustav na oblik H_{eq} , prijenosna funkcija zatvorene petlje glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K G_p(s)}{1 + K G_p(s) H_{eq}(s)} \quad (5.23)$$

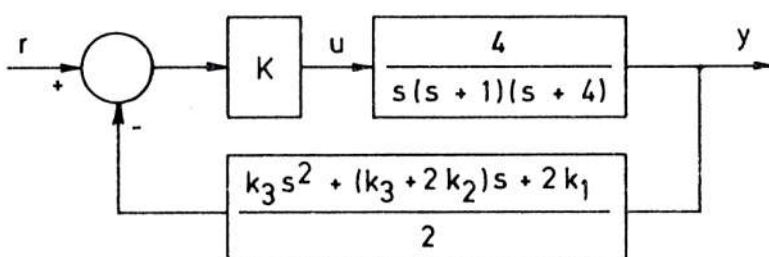
a kada se svede na oblik G_{eq} , onda je:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_{eq}}{1 + G_{eq}} \quad (5.24)$$

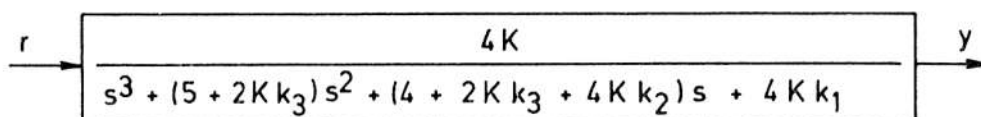
Zbog važnosti koju će ovi ekvivalenti imati tijekom daljnjih razmatranja, pokazat ćemo najprije kako se do njih dolazi. Izvedimo najprije izraz za H_{eq} . U ovom slučaju (Sl. 5.12.) primjenjujemo identifikaciju pomicanja čvorišta u smjeru toka informacije. Počinjemo s unutarnjom petljom i nastavljamo tako postupno sve dok ne ostane samo vanjska petlja.



a)



b)



c)

- Sl. 5.12. Postupno sredjenje regulacijskog blok prikaza s varijablama stanja sa Sl. 5.10.b) na oblik H_{eq} :
- a) pomak čvorišta s x_3 na y ;
 - b) pomak čvorišta s x_2 na y ;
 - c) konačni blok dijagram prijenosne funkcije

Na Sl. 5.12.a prikazan je rezultat pomaka čvorišta unutarnje petlje s x_3 na y ; potom je na Sl. 5.12.b prikazan rezultat daljnjeg pomaka čvorišta s x_2 na y ; i konačno Sl. 5.12.c prikazuje funkciju cjelokupnog regulacijskog sustava. Već se na Sl. 5.12.b nalazi traženo rješenje za H_{eq} , koje glasi:

$$H_{eq}(s) = \frac{k_3(s)^2 + (k_3 + 2k_2)s + 2k_1}{2} \quad (5.25)$$

Vrijedno je zapaziti da je brojnik H_{eq} kvadratični polinom od s , oblika $As^2 + Bs + C$ i da položaj nula može biti po volji određen prikladnim izborom koeficijenata k_1 , ali da je položaj nula neovisan o veličini pojačanja regulatora K .

Prijenosna funkcija cjelokupnog regulacijskog sustava prema Sl. 5.12.c) izlazi:

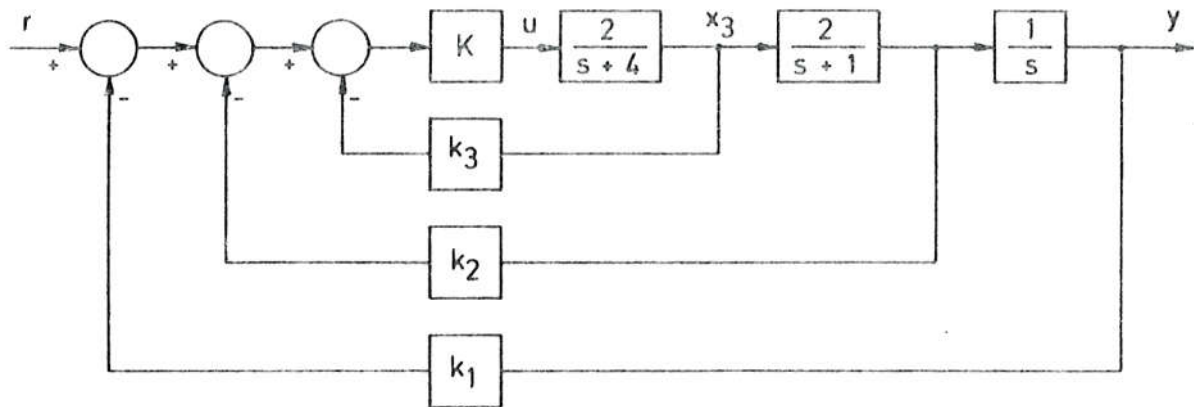
$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{4K}{s^3 + (5 + 2Kk_3)s^2 + (4 + 2Kk_3 + 4Kk_2)s + 4Kk_1} \quad (5.26)$$

Nazivnik prijenosne funkcije je polinom trećeg stupnja po s , kojeg koeficijenti mogu biti određeni izborom vrijednosti k_1 i K , što znači da mjesta polova prijenosne funkcije mogu biti po volji izabrana. Izborom triju koeficijenata karakteristične jednadžbe, mogu se postaviti tri jednadžbe za odrediti četiri nepoznanice; K , k_1 , k_2 i k_3 . Da bi se problem mogao riješiti, potrebno je jednu od nepoznanica izabrati nasumce, ili postaviti još jednu uvjetnu jednadžbu poput npr. maksimalne pogreške ustaljenog stanja.

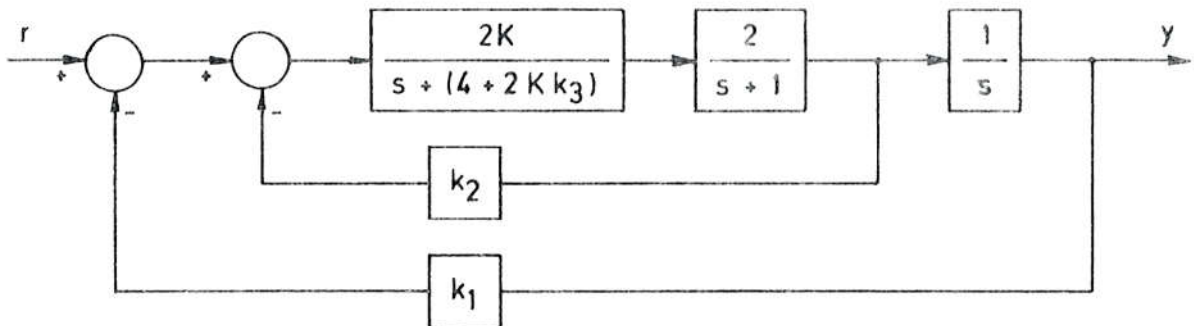
Prijedjimo sada na izvod redukcije blokovskog prikaza sa Sl. 5.10.b na blokovski prikaz na Sl. 5.11b, koji prikazuje $G_{eq}(s)$. Za rješenje ovog zadatka prikladno je blokovski prikaz sa Sl. 5.10.b nacrtati u obliku navedenom na Sl. 5.13.a.

Rješenje počinje svodjenjem unutarnje petlje u jedan blok, kako je prikazano na Sl. 5.13.b. Iz rezultata se vidi da se pol premjestio s položaja -4 na položaj $-(4 + 2Kk_3)$. Ovdje nije bilo nula, ali da ih je i bilo, njihov položaj bi ostao nepromijenjen. Odatle izvlačimo važan zaključak da element čistog pojačanja u povratnoj grani utječe samo na položaj polova, i to bez obzira na složenost prijenosne funkcije objekta.

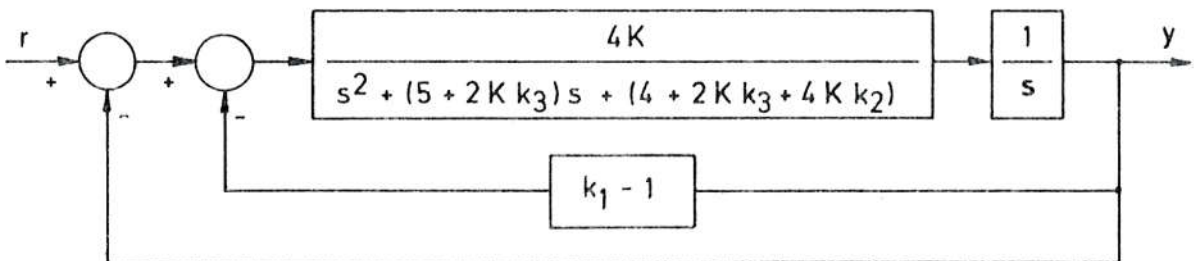
Idući korak u rješavanju je svodjenje slijedeće petlje u jedan blok, a zatim pretvaranje krajnje vanjske petlje u dvije paralelne grane, od kojih je jedna jedinična negativna povratna veza.



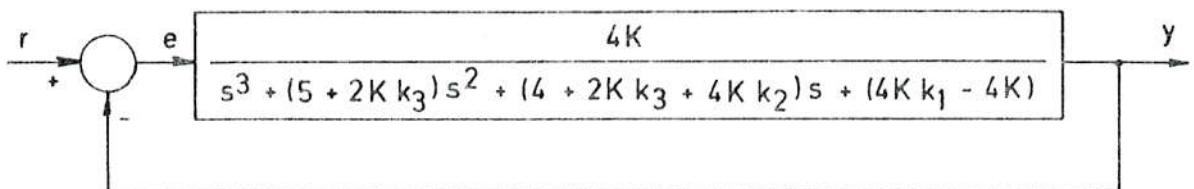
a)



b)



c)



d)

Sl. 5.13. Postupno svodjenje blokovskog prikaza s varijablama stanja na blokovski prikaz oblika G_{eq}

Svodjenjem unutarnje petlje blokovskog prikaza na Sl. 5.13.c u jedan blok dolazi se konačno od oblika G_{eq} , kako je prikazano na Sl. 5.13.d, s vrijednošću:

$$G_{eq}(s) = \frac{4K}{s^3 + (5 + 2Kk_3)s^2 + (4 + 2Kk_3 + 4Kk_2)s + (4Kk_1 - 4K)} \quad (5.27)$$

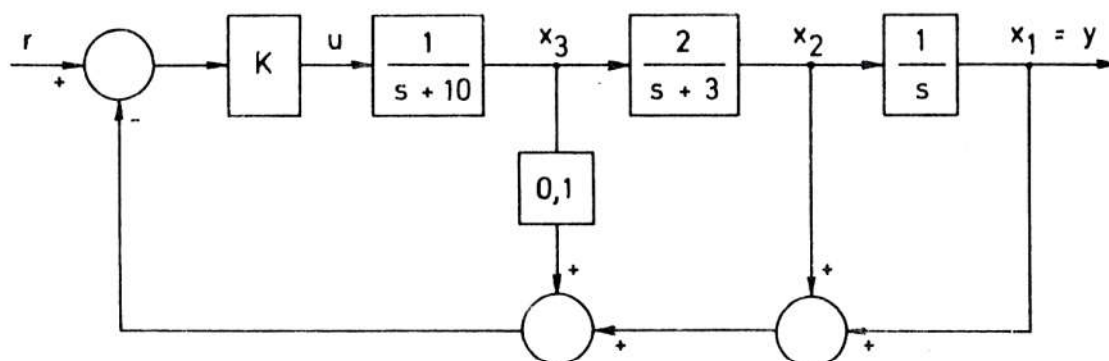
Na prvi pogled se može ustanoviti da prijenosna funkcija zatvorene petlje izračunana s pomoću H_{eq} po jednadžbi (5.23) ili s pomoću G_{eq} po jednadžbi (5.24), ima istu vrijednost, jer se uvrštenjem (5.27) poništavaju zadnja dva člana u nazivniku, tj. $-4K + 4K = 0$, i tako se dobije isti izraz za $y(s)/r(s)$ kako je prikazano izrazom (5.26).

Vrijedno se prisjetiti da se na Sl. 5.13.d' iza komparatora dobije signal pogreške e kao čista razlika između referentnog signala i izlaznog signala:

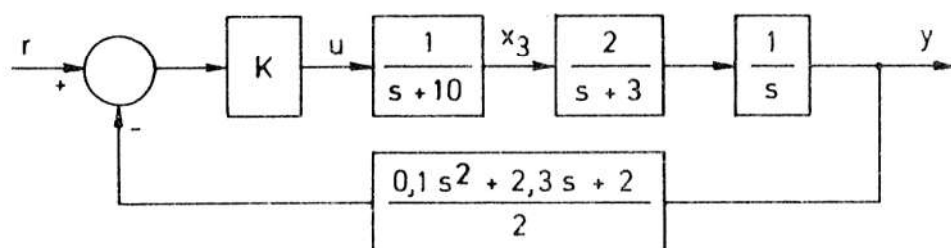
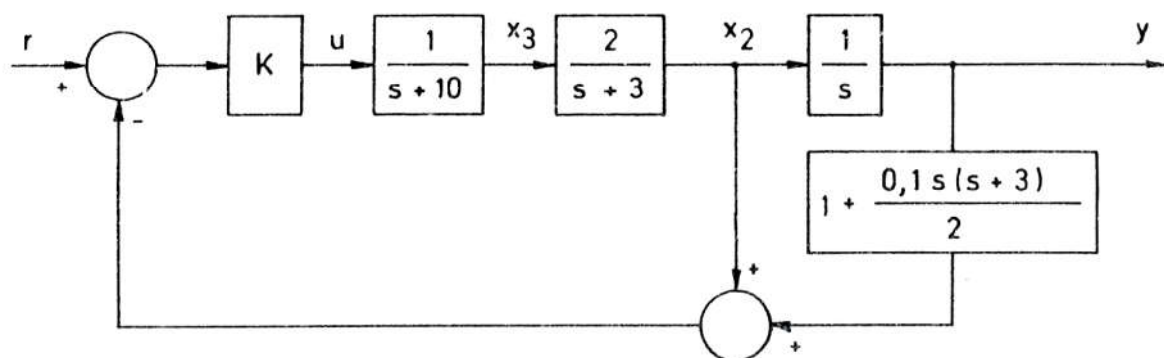
$$e(s) = r(s) - y(s) \quad (5.28)$$

Iz učinjenog razmatranja zaključujemo da nule prijenosne funkcije objekta ostaju iste i u prijenosnoj funkciji regulacijskog sustava, a da se polovi prikladnim izborom koeficijenta k_i i pojačanja kompenzatora K mogu po volji mijenjati.

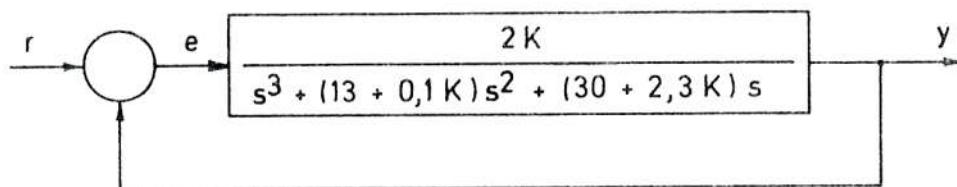
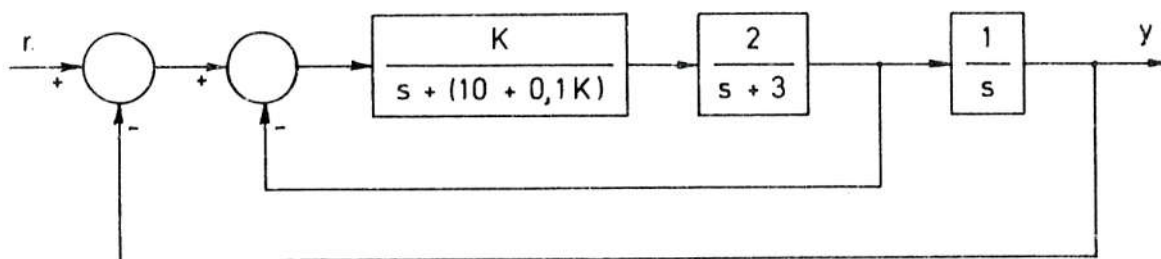
Primjer: Naći H_{eq} i G_{eq} za sustav na Sl. 5.14.



Sl. 5.14. Zadani sustav za koji treba naći H_{eq} i G_{eq}



Sl. 5.15. Rješenje za H_{eq}



Sl. 5.15. Rješenje za G_{eq}

5.4. OPĆI SLUČAJ LINEARNOG REGULIRANJA S VARIJABLAMA STANJA

Pokazalo se da su konfiguracije H_{eq} i G_{eq} vrlo prikladne za razrješavanje zadataka automatskog reguliranja. U jednostavnijim slučajevima svodjenje sustava na jedan od ekvivalenata može se relativno jednostavno obaviti s pomoću blokovskog dijagrama, što je pokazano u prethodnom poglavlju. U složenijim slučajevima primjena blokovske algebre bi jako oduljila rješavanje problema, pa je stoga u takvim slučajevima mnogo prikladnije primijeniti matičnu algebru.

Iz poglavlja o varijablama stanja prisjetimo se relacije:

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} \quad ,$$

gdje je prijenosna funkcija $G_p(s)$ zadana rezolventnom matricom objekta. Sam objekt n -tog reda opisan je relacijama:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \quad , \quad (\underline{A} \quad \underline{b})$$

i

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad , \quad (\underline{c})$$

a linearni regulator relacijom

$$u = K (r - \underline{k}^T \underline{x}) \quad (\underline{k})$$

Uvrštenjem $(\underline{k})$ u $(\underline{A} \quad \underline{b})$ dobije se izraz:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} - K \underline{b} \underline{k}^T \underline{x} + K \underline{b} r, \quad (5.29)$$

a grupiranjem dvaju izraza s $\underline{x}$ u jedan, potpuni opis s varijablama stanja regulacijskog sustava glasi:

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - K \underline{b} \underline{k}^T) \underline{x} + K \underline{b} r \quad , \quad (5.30)$$

i

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (5.31)$$

Označi li se izraz u zagradama na desnoj strani jednadžbe (5.30) s $\underline{A}_k$, tj.:

$$\underline{A}_k = \underline{A} - K \underline{b} \underline{k}^T \quad (5.32)$$

opis regulacijskog sustava u *kanonskom obliku* glasi:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}_k \underline{x} + K \underline{b} r \quad (\underline{A}_k \quad \underline{b})$$

i

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (\underline{c})$$

Usporedbom $(\underline{A} \quad \underline{b})$ s $(\underline{A}_k \quad \underline{b})$ vidi se da su oblici jednadžbi objekta i regulacijskog sustava jednaki, samo što je matrica $\underline{A}$ objekta zamijenjena matricom $\underline{A}_k$ regulacijskog sustava i što je upravljački signal u izražen s Kr .

U nastavku priprema za dobijanje H_{eq} i G_{eq} matričnim postupkom primijenimo već otprije poznati postupak dobijanja prijenosne funkcije objekta iz $(\underline{A} \quad \underline{b})$ i $(\underline{c})$ na $(\underline{A}_k \quad \underline{b})$ i $(\underline{c})$ za dobijanje prijenosne funkcije regulacijskog sustava. U tom cilju prijedjimo s $(\underline{A}_k \quad \underline{b})$ i $(\underline{c})$ u Laplaceovo područje:

$$s(\underline{x})(s) = \underline{A}_k \underline{x}(s) + K \underline{b} r(s) \quad (5.33)$$

$$y(s) = \underline{c}^T \underline{x}(s) \quad (5.34)$$

Rješenje po $\underline{x}(s)$ jednažba (5.33) prelazi u oblik:

$$\underline{x}(s) = K(s \underline{I} - \underline{A}_k)^{-1} \underline{b} r(s) \quad (5.35)$$

Otprije znamo da je izraz $(s \underline{I} - \underline{A})^{-1}$ definiran kao rezolventna matrica objekta, pa je stoga po analogiji:

$$\underline{\phi}_k(s) = (s \underline{I} - \underline{A}_k)^{-1} = (s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)^{-1} \quad (5.36)$$

rezolventna matrica regulacijskog sustava. Uvrštenjem $\underline{\phi}_k(s)$ u (5.35) dobije se:

$$\underline{x}(s) = K \underline{\phi}_k(s) \underline{b} r(s) \quad (5.37)$$

a uvrštenjem (5.37) u (5.34) izlazi:

$$y(s) = K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b} r(s) \quad (5.38)$$

a odatle dijeljenjem lijeve i desne strane jednažbe (5.38) s $r(s)$ dolazimo do izraza za prijenosnu funkciju regulacijskog sustava, koji glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b} \quad (5.39)$$

Koristeći činjenicu da je:

$$\underline{\phi}_k(s) = (s \underline{I} - \underline{A}_k)^{-1} = \frac{\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A}_k)}{\det (s \underline{I} - \underline{A}_k)},$$

relacija (5.39) se može pisati u obliku:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\underline{c}^T |\text{adj}(s \underline{I} - \underline{A}_k)| \underline{b}}{\det(s \underline{I} - \underline{A}_k)} \quad (5.40)$$

U jednadžbi (5.40) izraz $\underline{c}^T |\text{adj}(s \underline{I} - \underline{A}_k)| \underline{b}$ predstavlja polinom brojnika, a $\det(s \underline{I} - \underline{A}_k)$ predstavlja polinom nazivnika ili karakteristični polinom prijenosne funkcije regulacijskog sustava. Karakteristična jednadžba prijenosne funkcije regulacijskog sustava, prema tome, glasi:

$$\det(s \underline{I} - \underline{A}_k) = 0 \quad (5.41)$$

Korijeni karakteristične jednadžbe (5.41) predstavljaju *polove* ili *svojstvene vrijednosti* regulacijskog sustava. Budući da ti polovni, odnosno svojstvene vrijednosti, određuju narav odziva regulacijskog sustava, polinom i jednadžba koje su ti polovi korijeni, dobili su naziv *karakteristični polinom*, odnosno *karakteristična jednadžba regulacijskog sustava*. Vrlo je važno razlikovati polove objekta, odnosno reguliranog sustava prije primjene regulacije, od polova regulacijskog sustava, odnosno cjelokupnog sustava sa zatvorenom petljom u kojoj se nalaze i svi regulacijski elementi.

Prijedjimo sada najprije na izvodjenje $H_{eq}(s)$. Sa Sl. 5.11.a može se postaviti relacija:

$$H_{eq}(s) = \frac{\underline{k}^T \underline{x}(s)}{y(s)},$$

koja primjenom jednadžbe (c) poprima oblik:

$$H_{eq}(s) = \frac{\underline{k}^T \underline{x}(s)}{\underline{c}^T \underline{x}(s)} \quad (5.42)$$

a uz

$$\underline{x}(s) = \underline{\phi}(s) \underline{b} u(s) \quad (5.43)$$

postaje

$$H_{eq}(s) = \frac{\underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}} \quad (5.44)$$

Za naći prijenosnu funkciju *otvorene petlje* regulacijskog sustava, ili jednostavno *petlje* regulacijskog sustava, prisjetimo se da je:

$$G_p(s) = \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} \quad (5.45)$$

a prijenosna funkcija unaprijedne grane:

$$KG_p(s) = K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} \quad (5.46)$$

Prijenosna funkcija petlje regulacijskog sustava je definirana kao umnožak prijenosne funkcije unaprijedne grane i prijenosne funkcije povratne grane, što primjenom (5.45) i (5.46) daje:

$$KG_p(s) H_{eq}(s) = K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} \frac{\underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}} = K \underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} \quad (5.47)$$

Skraćenje je moguće, jer se, prema (5.45), skraćuju skalarne veličine. Prisjetimo li se prijenosne funkcije regulacijskog sustava svedenog na oblik H_{eq} (jednadžba (5.23)), koja glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s) H_{eq}(s)} ,$$

pa brojnik zamijenimo izrazom iz jednačbe (5.46), a drugi pri-
brojnik izrazom iz jednačbe (5.47), dobije se novi oblik gor-
nje jednačbe, koji glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{1 + K \underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}} \quad (5.48)$$

Vrijedno je zapaziti da jednačba (5.48) predstavlja prijenosnu
funkciju regulacijskog sustava izraženu rezolventnom matricom
objekta $\underline{\phi}(s)$.

$G_{eq}(s)$ se može dobiti na dva načina. Učinimo to najprije počevši
s jednačbom:

$$\frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s) H_{eq}(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1 + G_{eq}(s)} \quad (5.49)$$

koja se može pisati u obliku:

$$KG_p(s) [1 + G_{eq}(s)] = G_{eq}(s) [1 + KG_p(s) H_{eq}(s)] \quad ,$$

a odatle se množenjem i sredjenjem dobije:

$$G_{eq}(s) = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s) H_{eq}(s) - KG_p} \quad (5.50)$$

Uvrštenjem (5.46) i (5.47) u (5.50) dobije se:

$$G_{eq}(s) = \frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{1 + \underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} - K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}} \quad ,$$

a odatle

$$G_{eq}(s) = \frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{1 + K(\underline{k} - \underline{c})^T \underline{\phi}(s) \underline{b}} \quad (5.51)$$

Na drugi način se $G_{eq}(s)$ dobije iz jednačbe:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1 + G_{eq}(s)} \quad (5.52)$$

koja se može pisati u obliku:

$$\frac{y(s)}{r(s)} [1 + G_{eq}(s)] = G_{eq}(s) ,$$

a odatle množenjem i sredjenjem

$$G_{eq}(s) = \frac{\frac{y(s)}{r(s)}}{1 - \frac{y(s)}{r(s)}} \quad (5.53)$$

Uvrsti li se jednačba (5.48) u (5.53) izlazi već izvedeni izraz (5.51), a ako se uvrsti jednačba (5.39) u (5.53) dobije se:

$$G_{eq}(s) = \frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{1 - K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}} \quad (5.54)$$

Na taj način smo za $y(s)/r(s)$ i za $G_{eq}(s)$ izveli po dva izraza: po jedan s rezolventnom matricom objekta $\underline{\phi}(s)$ [jednačbe (5.48) i (5.51)] i po jedan s rezolventnom matricom regulacijskog sustava $\underline{\phi}_k(s)$ [jednačbe (5.39) i (5.54)].

Da bismo i $H_{eq}(s)$ izrazili s $\underline{\phi}_k(s)$, dovoljno je u izraz (5.42) umjesto $\underline{x}(s)$ iz (5.43) s $\underline{\phi}(s)$ uvrstiti $\underline{x}(s)$ iz (5.37) s $\underline{\phi}_k(s)$ i izlazi:

$$H_{eq}(s) = \frac{\underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}} \quad (5.55)$$

Budući da $H_{eq}(s)$ i $y(s)/r(s)$ već imamo izraženo s $\underline{\phi}_k(s)$, lako možemo i $G_p(s)$ izraziti s $\underline{\phi}_k(s)$. U tom cilju uvrstimo jednadžbu (5.55) i (5.39) u jednadžbu (5.23), pa ćemo dobiti:

$$\frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s) \left[\frac{\underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}} \right]} = K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b} \quad ,$$

a odatle:

$$KG_p(s) = \frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{1 - K \underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}} \quad (5.56)$$

te konačno:

$$G_p(s) = \frac{\underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{1 - K \underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}} \quad (5.57)$$

Primjenom izraza (5.56) i (5.55) dobije se i prijenosna funkcija petlje regulacijskog kruga, koja glasi:

$$KG_p(s) H_{eq}(s) = \frac{K \underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{1 - K \underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}} \quad (5.58)$$

Primjer: Za pozicijski sustav s istosmjernim servomotorom upravljanim strujom magnetiziranja, sa Sl. 5.10, zadani su koeficijenti povratne veze $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{13}{40}$ i $k_3 = \frac{7}{20}$. Treba matricnim postupkom naći prijenosnu funkciju reguliranog sustava $G_p(s)$ i $H_{eq}(s)$.

Pregled prijenosnih funkcija u matričnom obliku

	Izraženo s $\underline{\phi}(s)$	Izraženo s $\underline{\phi}_k(s)$
$G_p(s)$ Prijenosna funkcija objekta odnosno reguliranog sustava	$\underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}$ jednadžba (5.45)	$\frac{\underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{1 - K \underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}$ jednadžba (5.57)
$H_{eq}(s)$ Ekvivalent povratne grane	$\frac{\underline{k}^T(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}$ jednadžba (5.44)	$\frac{\underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}$ jednadžba (5.55)
$K G_p(s) H_{eq}(s)$ Prijenosna funkcija petlje oblika $H_{eq}(s)$	$K \underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}$ jednadžba (5.47)	$\frac{K \underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{1 - \underline{k}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}$ jednadžba (5.58)
$G_{eq}(s)$ Ekvivalent unaprijedne grane	$\frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{1 + K(\underline{k} - \underline{e})^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}$ jednadžba (5.51)	$\frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}{1 - K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}}$ jednadžba (5.54)
$\frac{y(s)}{r(s)}$ Prijenosna funkcija regulacijskog sustava	$\frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{1 + K \underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}$ jednadžba (5.48)	$K \underline{c}^T \underline{\phi}_k(s) \underline{b}$ jednadžba (5.39)

Rješenje: Za naći $G_p(s)$ i $H_{eq}(s)$ treba najprije dobiti matricu $\underline{A}$ ili matricu $\underline{A}_k$ s pomoću kojih se dobije $\underline{\phi}(s)$ ili $\underline{\phi}_k(s)$. Mi ćemo potražiti matricu $\underline{A}$ i rezolventnu matricu $\underline{\phi}(s)$. Izabrane varijable stanja na Sl. 5.10. su:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= -4x_3 + 2u\end{aligned}$$

pa prema tome:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iz tih podataka se izračunava rezolventna matrica:

$$\begin{aligned} \underline{\phi}(s) &= (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} = \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+4)} \begin{bmatrix} (s+1)(s+4) & (s+4) & 2 \\ 0 & s(s+4) & 2s \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Poznavajući rezolventnu matricu možemo izračunati prijenosne funkcije objekta

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} = \\ &= [1 \quad 0 \quad 0] \frac{1}{s(s+1)(s+4)} \begin{bmatrix} (s+1)(s+4) & s+4 & 2 \\ 0 & s(s+4) & 2s \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= 2\phi_{13}(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)} \end{aligned}$$

Još se u zadatku traži da se matričnim postupkom nadje $H_{eq}(s)$.
To ćemo učiniti primjenom jednadžbe:

$$H_{eq}(s) = \frac{\underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}$$

Nazivnik nam je već poznat, jer se podudara s izrazom $G_p(s)$, a brojnik je:

$$\begin{aligned} \underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{40} & \frac{7}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{40} & \frac{7}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\phi_{13} \\ 2\phi_{23} \\ 2\phi_{31} \end{bmatrix} = \frac{4 + \frac{13s}{10} + \frac{7s(s+1)}{10}}{s(s+1)(s+4)} \end{aligned}$$

Dijeljenjem brojnika s nazivnikom dobije se:

$$H_{eq} = \frac{\underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}} = \frac{4 + (13s/10) + (7s/10)(s+1)}{4} = \frac{7s^2 + 20s + 40}{40}$$

Sa slike 5.12b može se vidjeti da se tu blokovskog algebrom došlo do rezultata:

$$H_{eq} = \frac{k_3 s^2 + (k_3 + 2k_2)s + 2k_1}{2}$$

Uvrštenjem zadanih vrijednosti za k_1 , k_2 i k_3 dobije se:

$$H_{eq} = \frac{\frac{7}{20} s^2 + (\frac{7}{20} + 2 \frac{13}{40}) s + 2}{2} = \frac{7s^2 + 20s + 40}{40} ,$$

što dokazuje postavljenu tvrdnju da se blokovskom algebrom i matričnom algebrom dolazi do istog rezultata.

5.5. SVOJSTVA LINEARNE POVRATNE VEZE S VARIJABLAMA STANJA

Svojstva linearne povratne veze s varijablama stanja ispitat ćemo na jednom općenitom objektu s m nula i n polova, koji je zadan prijenosnom funkcijom:

$$G_p(s) = \frac{c_{m+1} s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1} \quad (5.59)$$

Budući da se radi o teorijskom ispitivanju svojstva linearne povratne veze s varijablama stanja u općem slučaju, svejedno nam je da li ta ispitivanja obavimo s fizičkim ili s faznim varijablama stanja. U našem slučaju radi jednostavnosti primjenjujemo fazne varijable, pa stoga opis reguliranog sustava glasi:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{vmatrix} \underline{x} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{vmatrix} u ,$$

$$y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{m+1} \ 0 \ \dots \ 0] \underline{x}$$

Ispitajmo najprije svojstva $H_{eq}(s)$ jednačbi (5.44). Uzevši u obzir da je:

$$\underline{\phi}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} = \frac{\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})}{\det (s \underline{I} - \underline{A})}, \quad (5.60)$$

jednadžba (5.44) poprima oblik:

$$\begin{aligned} H_{eq}(s) &= \frac{\underline{k}^T [\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})] \underline{b} / \det (s \underline{I} - \underline{A})}{\underline{c}^T [\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})] \underline{b} / \det (s \underline{I} - \underline{A})} = \\ &= \frac{\underline{k}^T [\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})] \underline{b}}{\underline{c}^T [\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})] \underline{b}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Prema jednadžbi (5.45):

$$G_p(s) = \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b} = \frac{\underline{c}^T [\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})] \underline{b}}{[\det (s \underline{I} - \underline{A})]},$$

gdje je

$$\det (s \underline{I} - \underline{A}) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1 \quad (5.62)$$

i

$$\underline{c}^T [\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})] \underline{b} = c_{m+1} s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1 \quad (5.63)$$

Po analogiji možemo pisati:

$$\underline{k}^T [\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})] \underline{b} = k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_1 \quad (5.64)$$

Razlika između (5.63) i (5.64) je jedino u tome što je $c_i = 0$ za $i > m + 1$, dok za k_i to ne vrijedi. Uvrštenjem (5.64) i (5.63) u (5.61) dobije se:

$$H_{eq}(s) = \frac{k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_1}{c_{m+1} s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1} \quad (5.65)$$

Iz jednadžbe (5.65) proizlazi da je brojnik $H_{eq}(s)$ polinom $(n-1)$ -ovog reda po s -u i da mu se svi koeficijenti mogu postaviti po volji, prikladnim izborom koeficijenata k_i . To znači da $H_{eq}(s)$ ima $(n-1)$ nulu, kojih se mjesta u s ravnini mogu izabrati po volji. Usporedbom $H_{eq}(s)$ iz jednadžbe (5.65) i $G_p(s)$ iz jednadžbe (5.59) vidi se da je brojnik $G_p(s)$ identičan nazivniku $H_{eq}(s)$.

S pomoću izraza za $G_p(s)$ [jednadžba (5.59)] i $H_{eq}(s)$ [jednadžba (5.65)] može se dobiti izraz prijenosne funkcije petlje:

$$KG_p(s) H_{eq}(s) = \frac{K(k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^n + \dots + k_1)}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (5.66)$$

Naročito je važno uočiti da su nule prijenosne funkcije petlje ujedno i nule $H_{eq}(s)$, a da su polovi prijenosne funkcije petlje ujedno i polovi prijenosne funkcije objekta $G_p(s)$. Polovi su stoga preuzeti iz $G_p(s)$ nepromijenjeni, a $(n-1)$ položaj nula se može po volji odabrati s pomoću k_i .

Nadalje, pogledajmo osobine prijenosne funkcije regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$, a razmatranje provedimo na relaciji (5.48), koja glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K \underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{1 + K \underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}$$

Uvrštenjem izraza za $\underline{\phi}(s)$ iz jednačbe (5.60) u gornji izraz dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{K \underline{c}^T |\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})| \underline{b} / \det (s \underline{I} - \underline{A})}{1 + K \underline{k}^T |\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})| \underline{b} / \det (s \underline{I} - \underline{A})} = \\ &= \frac{K \underline{c}^T |\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})| \underline{b}}{\det (s \underline{I} - \underline{A}) + K \underline{k}^T |\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A})| \underline{b}} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Uvrštenjem (5.63), (5.62) i (5.64) u (5.67) dobije se:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K(c_{m+1}s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1)}{(s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1) + K(k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_1)}, \quad (5.68)$$

što sredjenjem daje:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K(c_{m+1}s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1)}{s^n + (a_n + Kk_n)s^{n-1} + \dots + (a_1 + Kk_1)} \quad (5.69)$$

Do istog rezultata moglo se doći opisom regulacijskog sustava s faznim varijablama stanja koji glasi:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -(a_1 + Kk_1) & -(a_2 + Kk_2) & \dots & -(a_n + Kk_n) \end{vmatrix} \underline{x} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{vmatrix} Kr$$

$$y = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{m+1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \underline{x} ,$$

iz kojeg se može direktno napisati jednačba (5.69). Iz jednačbe (5.69) proizlazi da se koeficijenti polinoma u nazivniku prikladnim izborom pojačanja K i koeficijenata k_i mogu po volji namjestiti. S obzirom da postoji $(n+1)$ namjestivi parametar, a samo n koeficijenata k_i , jedan se parametar odabire proizvoljno, a drugi se potom izračunava.

Usporedbom $y(s)/r(s)$ iz (5.69) i $G_p(s)$ iz (5.59) vidi se da su brojnici jednog i drugog izraza što se korijena tiče jednaki, a razlikuju se samo po tome što se u brojniku $y(s)/r(s)$ nalazi još i umnožitelj K . To znači da objekt i regulacijski sustav imaju jednake nule, odnosno da linearna povratna veza s varijablama stanja ne utječe na nule sustava. S druge strane, mogućnost proizvoljnog namještanja koeficijenata karakterističnog polinoma znači da se položaj polova prijenosne funkcije regulacijskog sustava u s ravnini može proizvoljno odabrati. Iz toga proizlazi da nepoželjne nule možemo poništiti namještanjem polova na njihova mjesta u s ravnini.

Rezimirajući razmatrana svojstva dolazimo do zaključka:

1. u odnosu na $H_{eq}(s)$:
 - a) polovi $H_{eq}(s)$ su nule $G_p(s)$
 - b) $H_{eq}(s)$ ima $(n-1)$ proizvoljnu nulu;
2. u odnosu na prijenosnu funkciju petlje $KG_p(s) H_{eq}(s)$:
 - a) polovi $KG_p(s) H_{eq}(s)$ su polovi $G_p(s)$
 - b) nule $KG_p(s) H_{eq}(s)$ su nule $H_{eq}(s)$; tj. postoji $(n-1)$ proizvoljna nula;
3. u odnosu na prijenosnu funkciju regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$:
 - a) polovi $y(s)/r(s)$ mogu biti proizvoljno smješteni prikladnim izborom K i k_i
 - b) nule $y(s)/r(s)$ su nule $G_p(s)$.

Zakovitosti navedene u zaključku mogu u nekim slučajevim na prvi pogled doći u pitanje. Postoje dvije vrste takvih slučajeva. Prva vrst je kad se s odabranim varijablama stanja ne može formirati model oblika $(\underline{A} \ \underline{b})$. To se često događa kad ulazni blok objekta ima nulu. Tada dolazi do člana $\dot{u}$, što je inkompatibilno s oblikom $(\underline{A} \ \underline{b})$. Druga vrst takvih slučajeva nastaje kad se do $H_{eq}(s)$ dolazi s pomoću blokovske algebre. Tada se može dogoditi da se neopazice ponište istovrijednosne nule i polovi, tako da se sve nule $G_p(s)$ kasnije ne pojavljuju kao polovi $H_{eq}(s)$. Stoga, kad se računajući blokovskom algebrom dodje do $H_{eq}(s)$ koji nema sve polove koji odgovaraju nulama $G_p(s)$, brojnik i nazivnik treba pomnožiti s tim korijenom, jer se on sigurno prilikom računanja neopazice poništio. Treba naglasiti da se ni u prijenosnoj funkciji petlje polovi $G_p(s)$ nikada ne smiju poništavati s nulama $H_{eq}(s)$, iako bi se to na temelju identičnosti moglo učiniti.

5.6. IZRAČUNAVANJE REZOLVENTNE MATRICE BLOKOVSKOM ALGEBROM

Već je pokazano kako se primjenom matrične algebre mogu izračunati elementi rezolventne matrice objekta i regulacijskog sustava. Međutim, često se događa da su nam za rad potrebni samo neki, a ne svi članovi matrice. U tom slučaju je nepotrebno gubiti vrijeme na izračunavanje svih članova, pa ćemo stoga u nastavku upoznati dva načina za izračunavanje pojedinačnih članova rezolventne matrice.

Budući da se elementi rezolventne matrice ionako računaju pojedinačno, ne moraju se izračunavati svi članovi matrice, nego se samo izračunavaju pojedinačni članovi po relaciji:

$$\phi_{ij} = \frac{\text{kof } (s \ \underline{I} - \underline{A})_{ji}}{\det (s \ \underline{I} - \underline{A})} \quad (5.70)$$

To je jedan način koji, međjutim, ipak zahtijeva izračunavanje kofaktora i determinante. Drugi način je po pristupu složeniji, ali je računanje jednostavnije. Postupak je identičan, bilo da se radi o rezolventnoj matrici objekta ili regulacijskog sustava. Mi ćemo se s tim postupkom upoznati pri dobivanju rezolventne matrice regulacijskog sustava $\underline{\phi}_k(s)$.

Pokažimo najprije da elementi $\underline{\phi}_k(s)$ ovise o odzivima početnih uvjeta varijabli stanja. Uzmimo najprije da je ulaz regulacijskog sustava $r(s) = 0$. U tom slučaju jednačba ($\underline{A}_k$ $\underline{b}$) glasi:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}_k \underline{x} \quad (\underline{A}_k \quad \underline{b})$$

Sada prijedjimo u Laplaceovo područje, samo bez zahtjeva da početni uvjeti budu jednaki nuli. U tom slučaju Laplaceov transform format jednačbe ($\underline{A}_k$) glasi:

$$s\underline{x}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}_k \underline{x}(s) \quad ,$$

a nakon sredjenja:

$$(s \underline{I} - \underline{A}_k) \underline{x}(s) = \underline{x}(0) \quad ,$$

odakle se rješenjem po $\underline{x}(s)$ dobije:

$$\underline{x}(s) = (s \underline{I} - \underline{A}_k)^{-1} \underline{x}(0) \quad ,$$

a primjenom rezolventne matrice izlazi:

$$\underline{x}(s) = \underline{\phi}_k(s) \underline{x}(0) \quad (5.71)$$

U razvijenom obliku i -ti član vektora $\underline{x}(s)$ jednačbe (5.71) glasi:

$$x_i(s) = \phi_{k(i1)}(s) x_1(0) + \phi_{k(i2)}(s) x_2(0) + \dots + \phi_{k(in)}(s) x_n(0) \quad (5.72)$$

Postavi li se da su svi početni uvjeti jednaki nuli, osim za j-tu nepoznanicu, jednadžba (5.72) poprima oblik:

$$x_i(s) = \phi_{k(ij)}(s) x_j(0) \quad (5.73)$$

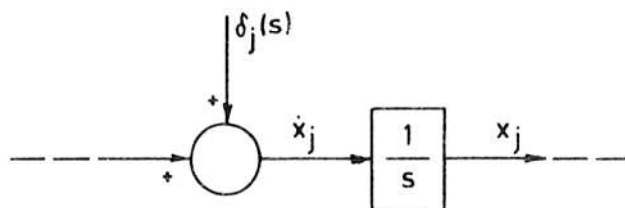
a dijeljenjem s $x_j(0)$ izlazi:

$$\frac{x_i(s)}{x_j(0)} = \phi_{k(ij)}(s) \quad (5.74)$$

Iz jednadžbe (5.74) proizlazi da je član $\phi_{k(ij)}(s)$ definiran odnosom Laplaceovog transformata i-te varijable stanja i početnog uvjeta j-te varijable stanja, uz sve ostale početne uvjete i pobude jednake nuli.

U dosadašnjim razmatranjima je rečeno da se blokovski prikaz temelji na prijenosnoj funkciji koja je definirana kao odnos Laplaceovih transformata izlaza i ulaza uz *nulte početne uvjete*. Međutim, ako želimo do $\phi_{k(ij)}(s)$ doći s pomoću blokovskog prikaza, potrebno je u njega unijeti još i početne uvjete. Jedan od načina da se to učini jest da se početni uvjeti nadomjesti s ekvivalentnim ulaznim impulsima koji se dodaju sustavu preko fiktivnih sumatora. To je za jedan izdvojeni element ilustrirano na Sl. 5.17. Ako se pretpostavi da je $\delta_j(s)$ jedini ulaz prikazanog j-tog integratora, prijenosna funkcija u tom slučaju glasi:

$$\frac{x_j(s)}{\delta_j(s)} = \frac{1}{s} \quad (5.75)$$



Sl. 5.17. Varijable stanja x_j s ekvivalentnim početnim uvjetom $\delta_j(s)$

Budući da je Laplaceova transformacija impulsa njegova visina, uzet je impuls visine $x_j(0)$, tj.:

$$\delta_j(s) = x_j(0) \quad , \quad (5.76)$$

što uvrštenjem u (5.75) i rješenjem po $x_j(s)$ daje:

$$x_j(s) = \frac{x_j(0)}{s} \quad (5.77)$$

Za naći početne vrijednosti od $x_j(t)$, ili drugim riječima vrijednosti $x_j(t)$ u vremenu $t = 0$, treba se poslužiti *teorem početne vrijednosti*, i dobije se:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_j(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s x_j(s) = x_j(0) \quad (5.78)$$

Ovo je upravo traženi početni uvjet, a već ranije smo pokazali da se za postavljanje početnih uvjeta svakog integratora u regulacijskom sustavu može primijeniti impulsna pobuda.

Pogledajmo kako blokovski dijagram stanja može poslužiti kao osnova za dobijanje elemenata rezolventne matrice. Osnovna je pretpostavka pri tome da sustav bude opisan s n diferencijalnih jednadžbi prvog reda. U tom slučaju i blokovski prikaz sadrži n integratora s jediničnim brojnikom poput j -tog integratora

na Sl. 5.17. Na temelju tih pretpostavki razradjen je postupak za dobijanje elemenata rezolventne matrice, koji navodimo u nastavku po točkama:

1. Blokovski prikaz započinje se crtanjem n blokova koji predstavljaju integratore $\frac{1}{s}$. Ulazna varijabla j -tog bloka je $\dot{x}_j$, a njegova izlazna varijabla je x_j , gdje je $j = 1, 2, \dots, n$.
2. Na ulazu svakog bloka postavlja se fiktivni sumator preko kojeg se na ulaz može dovesti impulsna pobuda $\delta_j(s)$.
3. Blokovski prikaz se nadopunjuje na temelju jednadžbi varijabli stanja. Pretpostavlja se da je ulazna pobuda jednaka nuli.
4. Za naći element rezolventne matrice $\phi_{k(ij)}(s)$ ili $\phi_{ij}(s)$ koji leži u i -tom redu i j -tom stupcu, blokovski se prikaz preuredi tako da $\delta_j(s)$ bude ulaz, a $x_i(s)$ da bude izlaz, a da svi ostali ulazi budu postavljeni na nulu.
5. Prijenosna funkcija takvog blokovskog prikaza glasi:

$$\frac{x_i(s)}{\delta_j(s)} = \frac{x_i(s)}{x_j(0)} = \phi_{k(ij)}(s) \quad (5.79)$$

Budući da je jednadžba (5.79) identična s jednadžbom (5.74), postupak se time završava.

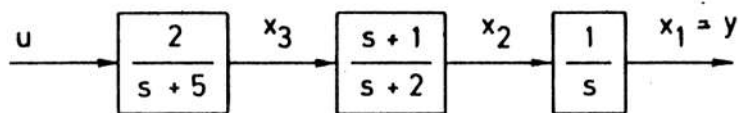
Primjenu opisanog postupka pokazat ćemo na jednom sustavu trećeg reda, i to najprije za objekt na Sl. 5.18.a, a zatim za regulacijski sustav na Sl. 5.18.b.

Premda je sustav na Sl. 5.18.a potpuno zadan blokovskim prikazom, treba se vratiti malo unatrag i postaviti tri diferencijalne jednadžbe prvog reda. One direktno proizlaze iz blokovskog prikaza na Sl. 5.18.a :

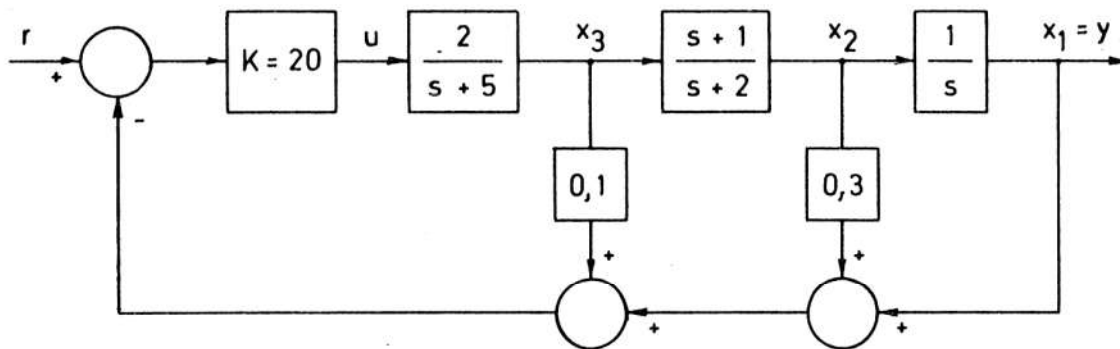
$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$\frac{x_2(s)}{x_3(s)} = \frac{s+1}{s+2} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 + \dot{x}_3$$

$$\frac{x_3(s)}{u(s)} = \frac{2}{s+5} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_3 = -5x_3 + 2u$$



a)



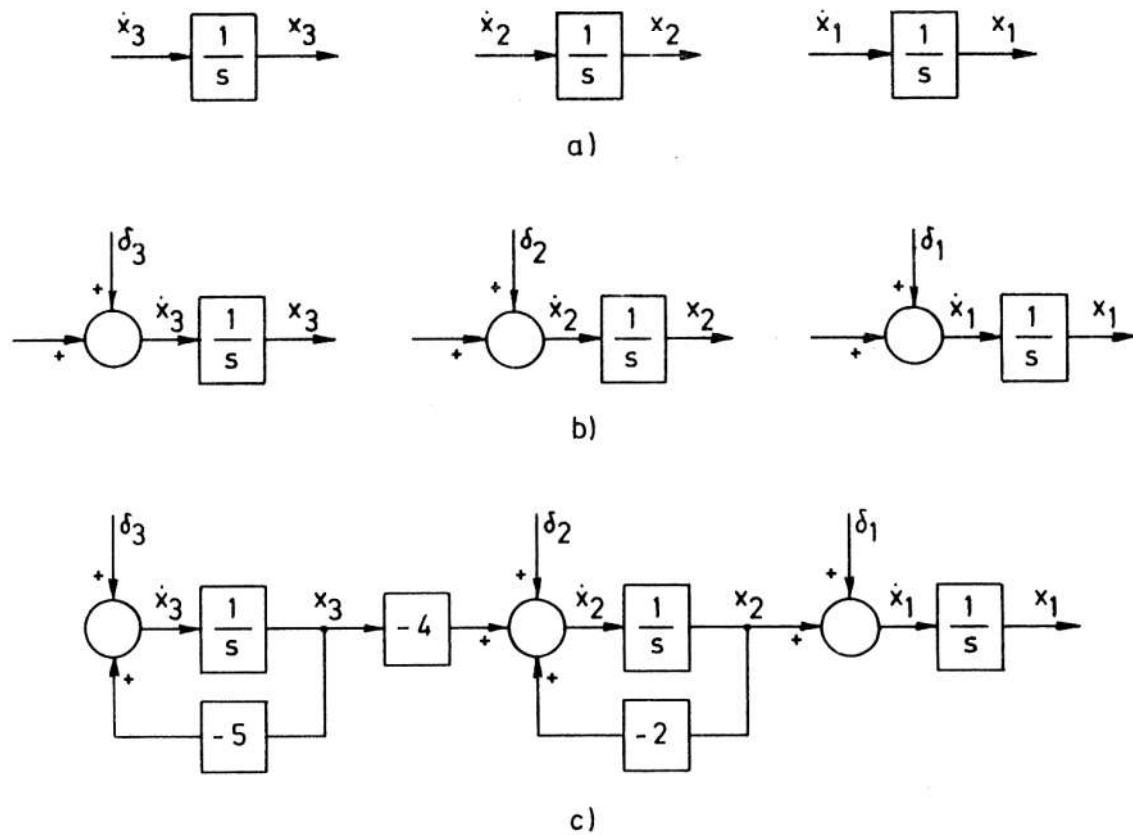
b)

Sl. 5.18. a) Objekt trećeg reda; b) regulacijski sustav reguliran varijablama stanja

Uvrštenjem $\dot{x}_3$ u drugu jednadžbu odmah se dobije sustav jednadžbi oblika (A b):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - 4x_3 + 2u \\ \dot{x}_3 &= -5x_3 + 2u \end{aligned} \quad (5.80)$$

S postavljanjem sustavom jednadžbi (5.80) ispunjen je osnovni uvjet da sustav mora biti opisan s n diferencijalnih jednadžbi prvog reda, pa se stoga može prijeći na provedbu opisanog postupka.



Sl. 5.19. Prva tri općenita koraka postupka za dobijanje elemenata rezolventne matrice blokovskog prikaza.

a) ucrtavanje integratora;

b) unošenje fiktivnih sumatora;

c) dopunjavanje blokova na temelju podataka iz diferencijalnih jednačbi i njihovo povezivanje

KORAK I: U crtaju se 3 integratora (Sl. 5.19.a), jer je sustav 3-ćeg reda;

KORAK II: Unesu se fiktivni sumatori s jedinićnim impulsnim pobudama na ulaze integratora (Sl. 5.19.b);

KORAK III: Blokovi sumatora se upotpune podacima iz diferencijalnih jednačbi i medjusobno se spoje, a ulazna pobuda u se stavi da je jednaka nuli (Sl. 5.19.c).

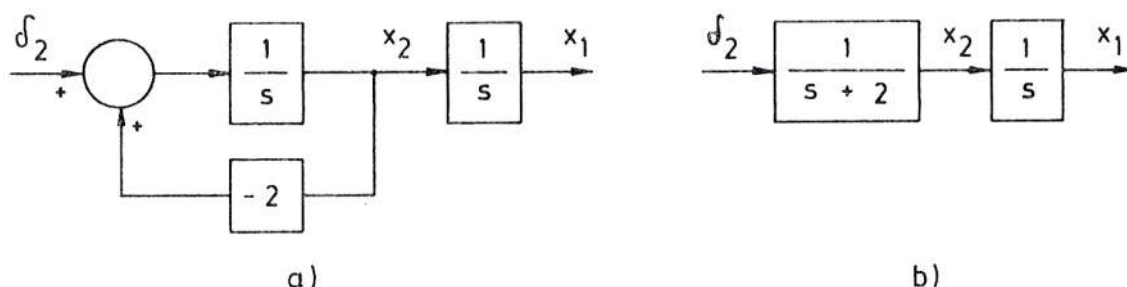
Prije nego što proslijedimo na preostala dva koraka, vrijedno je uočiti da ovaj dio postupka koji je do sada obavljen spada u opći dio koji treba svaki put provesti, bez obzira koji nam

je element rezolventne matrice potreban. Postupak slijedećih koraka razlikovat će se u ovisnosti o traženom elementu rezolventne matrice. Mi ćemo potražiti najprije član $\phi_{12}(s)$.

KORAK IV: Budući da član $\phi_{12}(s)$ predstavlja odnos Laplaceovih transformata varijable stanja $x_1(s)$ i jedinične impulsne pobude $\delta_2(s)$, treba nacrtati taj dio blokovskog prikaza uz sve ostale ulaze jednake nuli, kao što je učinjeno na Sl. 5.20.a ;

KORAK V: Rješenjem unutarnjih povratnih veza dolazi se do blokovskog prikaza na Sl. 5.20.c ,iz kojeg neposredno proizlazi da je:

$$\phi_{21}(s) = \frac{x_1(s)}{\delta_2(s)} = \frac{1}{s(s+2)} \quad (5.81)$$



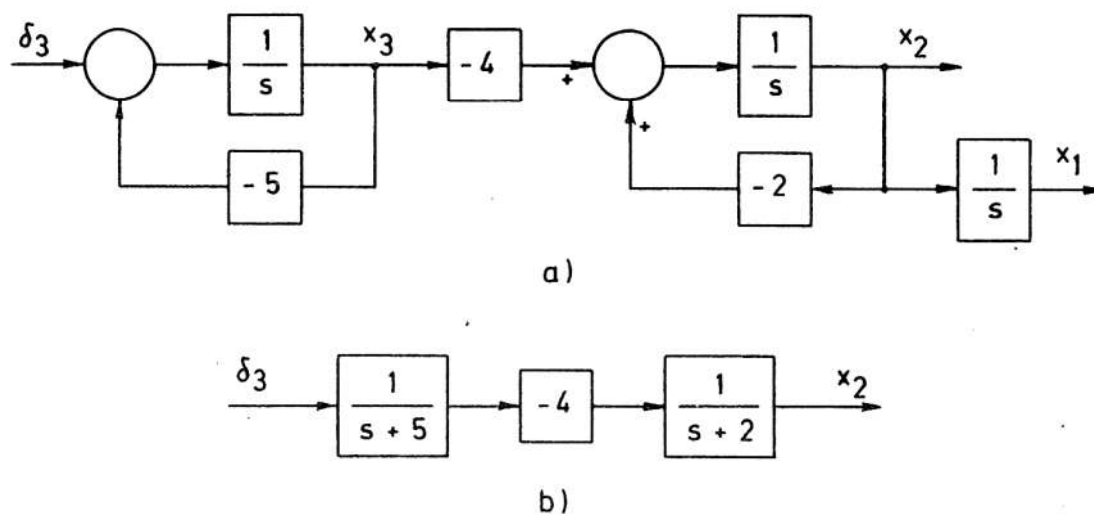
Sl. 5.20. Zadnja dva koraka postupka za dobijanje elemenata rezolventne matrice $\phi_{12}(s)$:

a) blok kojeg je x_1 izlaz i ϕ_2 ulaz;

b) isti blok s riješenim unutarnjim petljama

Na isti način se dolazi do člana $\phi_{23}(s)$, za kojeg su koraci IV i V pokazani na Sl. 5.21.a i 5.21.b , a vrijednost mu je:

$$\phi_{23}(s) = \frac{x_2(s)}{\delta_3(s)} = \frac{-4}{(s+2)(s+5)} \quad (5.82)$$



Sl. 5.21. Zadnja dva koraka za dobijanje člana $\phi_{23}(s)$

U zaključku razmatranja prikazanog postupka vrijedno je uočiti da osim što ubrzava dobijanje pojedinih članova $\phi_{ij}(s)$, pruža i neposredni fizički uvid zbog čega su pojedini članovi $\phi_{ij}(s)$ jednaki nuli. To proizlazi iz blokovskog prikaza na Sl. 5.19.c, i to stoga što impulsne pobude ne mogu utjecati na prethodne varijable stanja. Tako $\delta_1(s)$ ne može utjecati na $x_2(s)$, niti na $x_3(s)$, a $\delta_2(s)$ ne može utjecati na $x_3(s)$, pa su stoga članovi $\phi_{21}(s)$, $\phi_{31}(s)$ i $\phi_{32}(s)$ očigledno jednaki nuli. Svi dobijeni rezultati se slažu s rezultatima koji su dobijeni matričnom algebrom. Rezolventna matrica tako dobijena glasi:

$$\underline{\phi}(s) = \begin{vmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} & \frac{-4}{s(s+2)(s+5)} \\ 0 & \frac{s}{(s+2)} & \frac{-4}{(s+2)(s+5)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+5)} \end{vmatrix} \quad (5.83)$$

Usprkos svih navedenih prednosti opisanog postupka, računanje rezolventne matrice matričnom algebrom je prikladnije u slučajevima kad se ne traži samo neki, nego svi članovi rezolventne matrice.

Prema postavljenom planu sada prelazimo na primjenu postupka za dobijanje elemenata rezolventne matrice regulacijskog sustava. U našem slučaju to će biti regulacijski sustav prikazan na Sl. 5.18.b. Prema propozicijama postupka sustav treba najprije opisati s n diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Za sustav na Sl. 5.18.b to su tri jednadžbe. Do njih dolazimo na slijedeći način:

Sa Sl. 5.18. dolazimo do izraza za u :

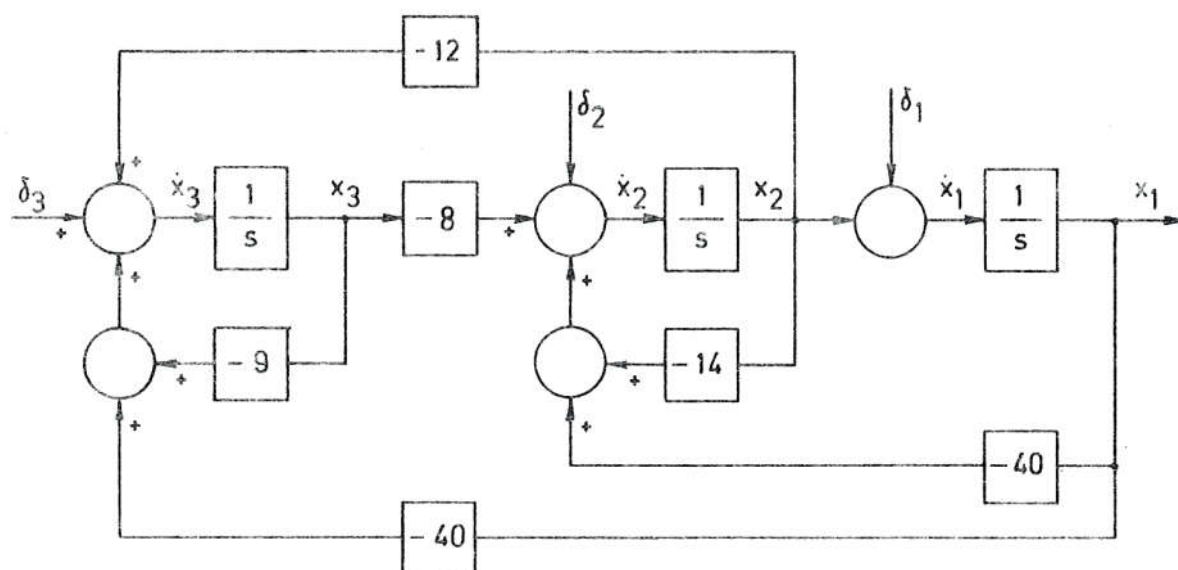
$$u = 20(r - x_1 - 0,3x_2 - 0,1x_3) , \quad (5.84)$$

koji uvrstimo u jednadžbe (5.80) i dobijemo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -40x_1 - 14x_2 - 8x_3 + 40r \\ \dot{x}_3 &= -40x_1 - 12x_2 - 9x_3 + 40r \end{aligned} \quad (5.85)$$

Primjenom prva tri koraka postupka, kako je to prethodno učinjeno pri obradbi objekta, dolazi se do blokovskog prikaza na Sl. 5.22. Zbog brojnih povratnih veza lako se može zaključiti da će sve impulsne pobude u ovom slučaju na izvjestan način djelovati na sve varijable stanja, a odatle slijedi neposredan zaključak da rezolventna matrica $\phi_k(s)$ neće imati nultih članova.

Potražimo i ovdje član $\phi_{k(12)}(s)$, kao i u prethodnom primjenu. U tom slučaju blokovski prikaz treba tako preurediti da izlaz bude x_1 , a ulaz δ_2 , a svi ostali ulazi da budu nula. To se može obaviti svodjenjem na oblik $G_{eq}(s)$ ili na $H_{eq}(s)$. Mi ćemo svesti na oblik $H_{eq}(s)$.



Sl. 5.22. Rezultantni blokovski prikaz nakon trećeg koraka postupka za dobijanje elemenata rezolventne matrice regulacijskog sustava na Sl. 5.18.b

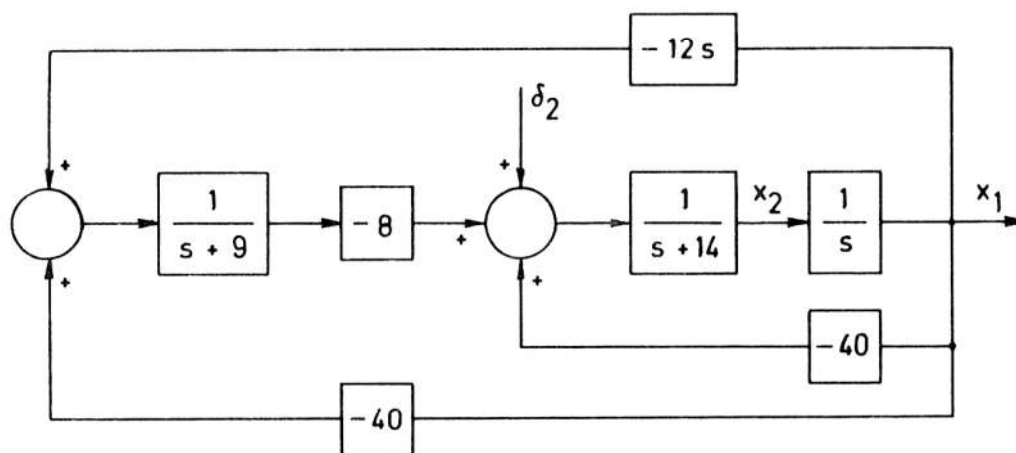
Na Sl. 5.23.a učinjena je priprema za prijelaz na korak IV, tako da su lokalne petlje oko integratora prikazane u obliku monolitnih blokova, te da je čvorište povratne grane s x_2 prebačeno na x_1 i da su svi ulazi osim δ_2 izjednačeni s nulom.

Na Sl. 5.23.b realiziran je korak IV, a na Sl. 5.23.c konačno i korak V odakle proizlazi da je:

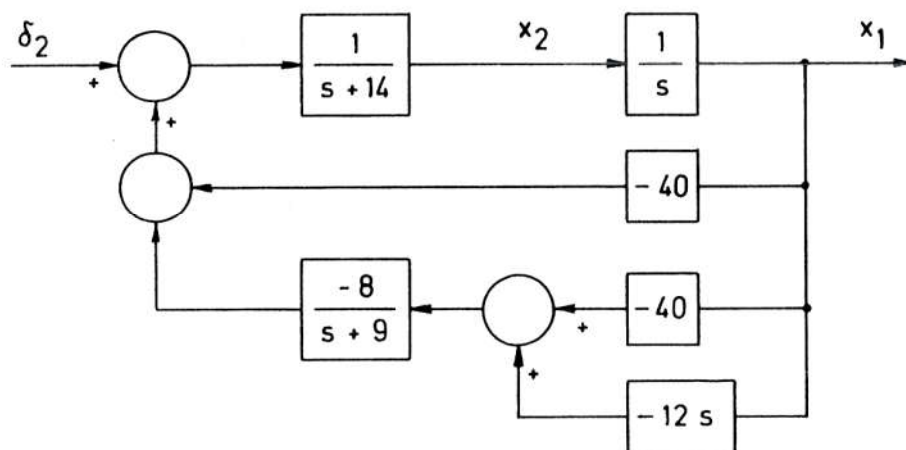
$$\phi_{k(12)}(s) = \frac{x_1(s)}{\delta_2(s)} = \frac{s + 9}{s^3 + 23s^2 + 70s + 40} \quad (5.86)$$

Drugi član koji ćemo i ovdje potražiti jest $\phi_{k(23)}(s)$. Prva tri koraka su obavljena na Sl. 5.22. Četvrti korak je prikazan na Sl. 5.24.a, a peti na Sl. 5.24.b, odakle proizlazi da je:

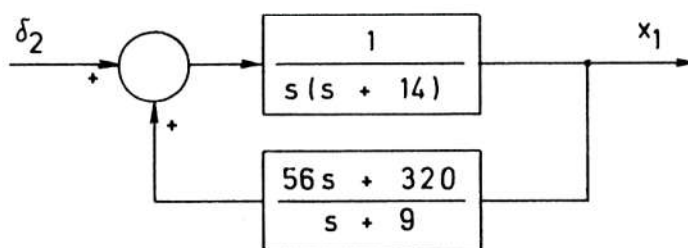
$$\phi_{k(23)}(s) = \frac{x_2(s)}{\delta_3(s)} = \frac{-8s}{s^3 + 23s^2 + 70s + 40} \quad (5.87)$$



a)

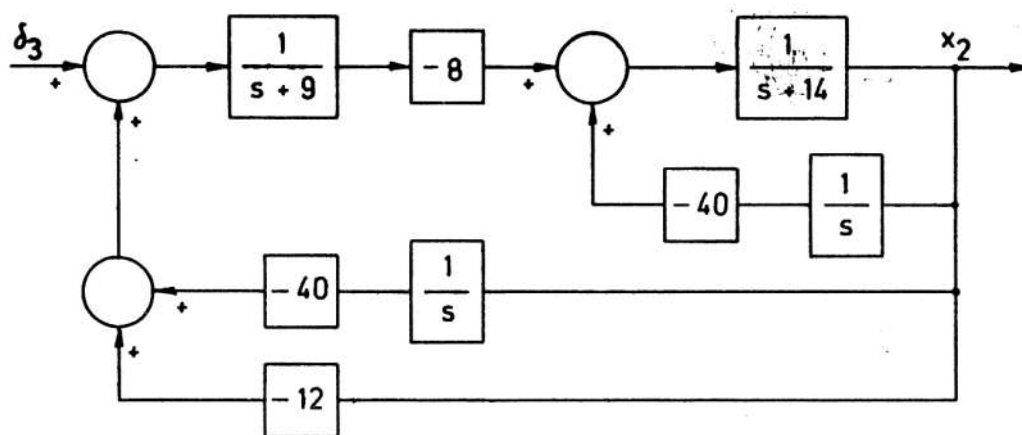


b)

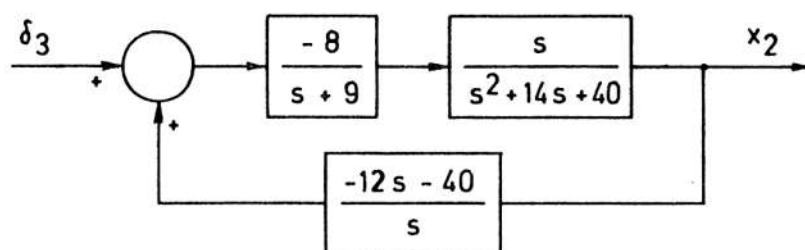


c)

Sl. 5.23. Zadnja dva koraka postupka za dobijanje elemenata $\phi_{k(12)}(s)$ regulacijskog sustava sa Sl. 5.18.b.



a)



b)

Sl. 5.24. Zadnja dva koraka postupka za dobijanje elemenata $\phi_{k(23)}(s)$ regulacijskog sustava sa Sl. 5.18.b

Radi provjere dobijenih rezultata navedimo i ovdje čitavu rezolventnu matricu $\underline{\phi}_k(s)$ izračunanu postupkom matrične algebre.

$$\underline{\phi}_k(s) = \frac{1}{s^3 + 23s^2 + 70s + 40} \begin{bmatrix} s^2 + 23s + 30 & s+9 & -8 \\ -40(s+1) & (s+9) & -8s \\ -40(s+2) & -(12s+40) & s^2 + 14s + 40 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

Usporedbom članova $\phi_{k(12)}(s)$ i $\phi_{k(23)}(s)$ dobijenih blokovskom algebrom i matričnom algebrom, vidimo da se rezultati potpuno podudaraju.

5.7. ZAKLJUČAK

Negativnom povratnom vezom vrši se ručno i automatsko reguliranje dinamičkih sustava. Korisna svojstva za reguliranje su još što smanjuje osjetljivost na vanjske i unutarnje poremećaje, te što proširuje frekvencijski pojas i poboljšava vremenski odziv sustava. Nepoželjno joj je svojstvo što sustav može dovesti u nestabilno stanje.

U jednostavnijim slučajevima problemi regulacije s varijablama stanja mogu se obrađivati primjenom nadomjesnih oblika H_{eq} i G_{eq} , a u složenijim slučajevima je preporučljivije za obradbu primijeniti matričnu algebru. Pri obradbi vrlo korisno mogu poslužiti karakteristična svojstva koja međusobno povezuju H_{eq} i G_{eq} , te prijenosnu funkciju, prijenosnu funkciju petlje i prijenosnu funkciju regulacijskog sustava.

U slučajevima kad nisu potrebni svi članovi rezolventne matrice već samo neki od njih, problem se može uspješno riješiti primjenom početnih uvjeta s pomoću blokovske algebre.

6. VREMENSKI ODZIV

6.1. UVOD

Poznavanje matematičkog modela, bilo da je izražen prijenosnom funkcijom ili varijablama stanja, omogućuje da se matematičkim putem nadje odziv sustava. Taj postupak u kojem se iz zadanog matematičkog modela i pobude dobije odziv naziva se *analiza*, a može se provesti u vremenskom ili gornjem području i u Laplaceovom ili donjem području.

U dosadašnjim razmatranjima mnogo je više korišteno donje područje. Razlog tome leži u činjenici što je računanje u donjem području mnogostruko jednostavnije i brže od računanja u gornjem području. Međutim, ponašanje se odvija u gornjem području, pa ako nas to ponašanje zanima, i konačan rezultat treba biti u gornjem području.

Već smo vidjeli da je prijelaz iz gornjeg područja u donje u najvećeg broju slučajeva trivijalan, pa se stoga na tom prijelazu nećemo ni zadržavati. Obrnuti prijelaz, međutim, nešto je složeniji, pa ćemo mu zbog njegove važnosti u analizi i sintezi, pokloniti malo više pažnje. Ovdje se javlja glavni problem: kako konačni rezultat, izražen u obliku složene razlomljene racionalne funkcije po s -u, što brže i jednostavnije razložiti na parcijalne razlomke kojih se inverzne Laplaceove transformate može naći u tablicama

6.2. RAZLAGANJE NA PRACIJALNE RAZLOMKE

Polazimo od pretpostavke da je Laplaceov transformat koji hoćemo prevesti u gornje područje, zadan u obliku razlomljene racionalne funkcije po s -u i da je nazivnik funkcije u faktoriziranom obliku, tj.:

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} \quad (6.1)$$

Polinom brojnika $B(s)$ u jednadžbi (6.1) je reda manjeg od n . Korijeni nazivnika $N(s)$ mogu biti nule, realni ili komplekni brojevi, a dva ili više njih mogu biti međusobno jednaki.

Budući da narav *vremenskog odziva* ovisi samo o nazivniku razlomljene racionalne funkcije $f(s)$, brojnik može ostati u nefaktoriziranom obliku.

S obzirom na moguće oblike korijena, $f(s)$ se može pisati u obliku:

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + s_2)^k (s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)} \quad (6.2)$$

ili

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + s_2)^k [(s + \alpha)^2 + \beta^2]} \quad (6.3)$$

Oblici (6.2) i (6.3) dovoljno su općeniti da se na njima može izvršiti općenita analiza, a drugačije napisani konjugirano kompleksni par u jednom i drugom obliku upućuje na različite pristupe rješavanju problema.

Počnimo najprije sa slučajem realnih korijena od kojih se neki ponavljaju:

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + s_2)^k} \quad (6.4)$$

I u jednadžbi (6.4) pretpostavljeno je da je $B(s)$ manjeg reda od $N(s)$. Razložena na parcijalne razlomke jednadžbe (6.4) glasi:

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{R_{11}}{s + s_1} + \frac{R_{2k}}{(s + s_2)^k} + \frac{R_{2(k-1)}}{(s + s_2)^{k-1}} + \dots + \frac{R_{21}}{s + s_2} \quad (6.5)$$

Za određivanje konstanti R_{ij} parcijalnih razlomaka postoji tri dobro poznate metode: algebarska metoda, metoda ostatka i grafička metoda. Cilj ovog razmatranja jest da se pokaže komplementarnost tih metoda i prednosti koje se postižu korištenjem tih komplementarnosti. Subskript i konstante R označava indeks kojena nazivnika, a subskript j označava potenciju dotičnog člana nazivnika.

Algebarska metoda. Ova se metoda temelji na vrlo jednostavnoj algebarskoj logici. Jednadžba (6.4) se napiše u obliku jednadžbe (6.5). Potom se desna strana jednadžbe (6.5) svede na zajednički nazivnik, pa tako nazivnici desnih strana jednadžbi (6.4) i (6.5) postanu jednaki, a da bi i čitave desene strane bile jednake uz jednake potencije trebaju biti jednaki i koeficijenti polinoma brojnika.

Pokažimo to na jednom primjeru regulacijskog sustava kojeg prijenosna funkcija glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{2,5(s + 2)}{(s + 5)(s + 1)^2} \quad (6.6)$$

Uz jediničnu odskočnu pobudu, $r(s) = \frac{1}{s}$, izraz za odziv glasi:

$$y(s) = \frac{2,5(s + 2)}{s(s + 5)(s + 1)^2} \quad (6.7)$$

Tablica Laplaceovih transformata

	$f(s)$	$f(t)$
1	1	$\delta(t)$, impulsna funkcija
2	$1/s$	1, odskočna funkcija
3	$1/s^2$	t , uzlazna pravčasta funkcija
4	$1/s^n$ ($n=1,2,3,\dots$)	$t^{n-1}/(n-1)!$
5	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$
6	$e^{-\tau s}/s$	$u(t-\tau)$
7	$n!/s^{n+1}$	t^n
8	$1/(s+\alpha)$	$e^{-\alpha t}$
9	$1/(s+\alpha)^2$	$t e^{-\alpha t}$
10	$\alpha/(s^2+\alpha^2)$	$\sin \alpha t$
11	$1/(s^2+\alpha^2)$	$\frac{1}{\alpha} \sin \alpha t$
12	$s/(s^2+\alpha^2)$	$\cos \alpha t$
13	$1/(s^2-\alpha^2)$	$\frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha t$
14	$s/(s^2-\alpha^2)$	$\operatorname{ch} \alpha t$
15	$\beta/[(s+\alpha)^2 + \beta^2]$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$
16	$1/[(s+\alpha)^2 + \beta^2]$	$\frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$
17	$(s+\alpha)/[(s+\alpha)^2 + \beta^2]$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$
18	$1/(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)$	$\frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t; \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$
19	$(s+a_0)/[(s+\alpha)^2 + \beta^2]$	$\frac{1}{\beta} (a_0-\alpha)^2 + \beta^2 ^{1/2} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi)$ $\psi = \arctg (\beta/a_0 - \alpha)$

Odziv $y(s)$ predstavlja funkciju $f(s)$ u jednadžbi (6.5), pa ako ga na isti način razložimo u parcijalne razlomke, dobije se

$$y(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{R_{11}}{s} + \frac{R_{11}}{s+5} + \frac{R_{21}}{s+5} + \frac{R_{32}}{(s+1)^2} + \frac{R_{31}}{s+1} \quad (6.8)$$

Svodjenjem na zajednički nazivnik jednađžba (6.8) prelazi u:

$$y(s) = \frac{1}{s(s+5)(s+1)^2} (\alpha_4 s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1) , \quad (6.9)$$

gdje su:

$$\alpha_1 = 4R_{11}$$

$$\alpha_2 = 11R_{11} + R_{21} + 5R_{32} + 5R_{31}$$

$$\alpha_3 = 7R_{11} + 2R_{21} + R_{32} + 6R_{31}$$

$$\alpha_4 = R_{11} + R_{21} + R_{31}$$

Budući da brojnik jednađžbe (6.7) glasi $B(s) = 2,5s + 5$, izjednačavanjem koeficijenata, uz iste potencije brojnika jednađžbe (6.9) i jednađžbe (6.7) dobiju se četiri simultane linearne jednađžbe:

$$R_{11} + R_{21} + R_{31} = 0$$

$$7R_{11} + 2R_{21} + R_{32} + 6R_{31} = 0 \quad (6.10)$$

$$11R_{11} + R_{21} + 5R_{32} + 5R_{31} = 25$$

$$5R_{11} = 5$$

Njihovim rješenjem izlazi:

$$R_{11} = 1 \qquad R_{21} = \frac{3}{32}$$

$$R_{32} = -\frac{5}{8} \qquad R_{31} = -\frac{35}{32}$$

Uvrštenjem dobijenih rješenja u jednađbu (6.8), odziv izražen parcijalnim razlomcima glasi:

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{32}}{s+5} - \frac{\frac{5}{8}}{(s+1)^2} - \frac{\frac{35}{32}}{s+1} \quad (6.11)$$

Poslužimo li se tablicama za inverznu Laplaceovu transformaciju, lako dolazimo do odziva u vremenskom području:

$$y(t) = 1 + \frac{3}{32} e^{-5t} - \frac{5}{8} t e^{-t} - \frac{35}{32} e^{-t} \quad (6.12)$$

Iz ovog primjera lako se može uočiti konceptualna jednostavnost ove metode s jedne strane, ali i računska zamršenost s druge strane. Treba naime rješavati sustav od n simultanih linearnih algebarskih jednađbi.

Metoda ostatka. Da bi objasnili ovu metodu izjednačimo desne strane jednađbi (6.4) i (6.5), tako da dobijemo jednađbu:

$$\frac{B(s)}{(s+s_1)(s+s_2)^k} = \frac{R_{11}}{s+s_1} + \frac{R_{2k}}{(s+s_2)^k} + \frac{R_{2(k-1)}}{(s+s_2)^{k-1}} + \dots + \frac{R_{21}}{s+s_2} \quad (6.13)$$

a potom lijevu i desnu stranu jednađbe (6.13) pomnožimo s članom $(s+s_1)$ i uz $s = -s_1$, izraz riješimo po R_{11} pa ćemo dobiti:

$$R_{11} = \left. \frac{B(s)}{(s+s_2)^k} \right|_{s=-s_1} \quad (6.14)$$

Na sličan način se dolazi do R_{2k} . Jednađba se pomnoži s članom $(s+s_2)^k$ i izračuna R_{2k} za $s = -s_2$ pa se dobije:

$$R_{2k} = \left. \frac{B(s)}{(s + s_1)} \right|_{s=-s_2} \quad (6.15)$$

Koeficijent R_{2k} je ujedno i jedini koeficijent koji se može dobiti na ovako jednostavan način. Za sve ostale R_{2j} , uz $j < k$, treba uz ranije opisanu operaciju primijeniti još i deriviranje. Pogledajmo kako se to radi za $R_{2(k-1)}$. Najprije se jednadžba (6.13) pomnoži članom $s (s + s_2)^k$, i dobije se:

$$\frac{B(s)}{s + s_1} = \frac{R_{11}(s + s_2)^k}{(s + s_1)} + R_{2k} + R_{2(k-1)}(s + s_2) + \dots + R_{21}(s + s_2)^{k-1} \quad (6.16)$$

Zatim se jednadžba (6.16) derivira po s -u i uz $s = -s_2$ izračunava $R_{2(k-1)}$, i dobije se:

$$\left. \frac{d}{ds} \frac{B(s)}{(s + s_1)} \right|_{s=-s_2} = R_{2(k-1)} \quad (6.17)$$

Istim postupkom dolazi se i do ostalih R_{2j} koeficijenata, a općenita relacija glasi:

$$R_{ij} = \left\{ \frac{1}{(k-j)!} \frac{d^{k-j}}{ds^{k-j}} \left[(s + s_i)^k \frac{B(s)}{N(s)} \right] \right\} \Big|_{s=-s_i} \quad (6.18)$$

Ako je $k = 1$, tj. ako su korijeni jednostruki, izraz (6.18) se svodi na već poznati izraz:

$$R_{i1} = \left. \frac{(s + s_i) B(s)}{N(s)} \right|_{s=-s_i} \quad (6.19)$$

Ako je $k > 2$, postupak koji treba provesti prema jednadžbi (6.18) oduzima mnogo vremena. Budući da se koeficijent R_{i1} u teoriji kompleksne varijable naziva *ostatak*, ova se metoda naziva *metoda ostatka*.

Za ilustraciju ove metode vratimo se prethodnom primjeru. I u ovom slučaju odziv ćemo izraziti u obliku:

$$y(s) = \frac{2,5(s+1)}{s(s+5)(s+1)^2} = \frac{R_{11}}{s} + \frac{R_{21}}{s+5} + \frac{R_{32}}{(s+1)^2} + \frac{R_{31}}{s+1}$$

Ostaci vezani uz polove $s = 0$ i $s = -5$ lako se mogu odrediti s pomoću jednadžbe (6.19):

$$R_{11} = \left. \frac{2,5(s+2)}{(s+5)(s+1)^2} \right|_{s=0} = \frac{5}{5} = 1 \quad (6.20)$$

$$R_{21} = \left. \frac{2,5(s+2)}{s(s+1)^2} \right|_{s=-5} = \frac{-7,5}{-6(16)} = \frac{3}{32} \quad (6.21)$$

Koeficijente R_{31} i R_{32} rješavamo primjenom relacije (6.18). Budući da se korijen $s = -1$ ponavlja dva puta, indeks $k = 2$:

$$R_{32} = \left. \frac{2,5(s+1)}{s(s+5)} \right|_{s=-1} = \frac{2,5}{-4} = -\frac{5}{8} \quad (6.22)$$

Vidimo da za izračunavanje R_{32} nije trebalo derivirati. Međutim, za izračunavanje R_{31} treba provesti i operaciju deriviranja:

$$\begin{aligned} R_{31} &= \left. \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \frac{2,5(s+1)}{(s+5)} \right|_{s=-1} = \\ &= \left. \frac{-2,5(s+2)(2s+5)}{s^2(s+5)^2} + \frac{2,5}{s(s+5)} \right|_{s=-1} = -\frac{35}{32} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Usporedbom s rezultatima dobijenim algebarskom metodom vidimo da se oni podudaraju.

U ovom slučaju je k bio 2, pa smo trebali samo jedanput derivirati. Međutim, ako je $k > 2$ pa treba više puta derivirati, računanje oduzima mnogo vremena. Kombinacijom algebarske metode i metode ostatka moguće je iskoristiti prednosti jedne i druge metode. Primjenom metode ostatka prva tri koeficijenta mogu se izračunati bez problema, a kad su već poznate tri od četiri nepoznanice, sustav algebarskih jednažbi iz algebarske metode zaista nije teško riješiti. Na taj način se uspješno mogu kombinirati ove dvije metode.

Problem višestrukih realnih polova o kojem je do sada bilo riječi uglavnom je teorijskog značaja, jer se takvi slučajevi rijetko susreću u inženjerskoj praksi. Za praksu je mnogo važniji problem konjugirano kompleksnih polova. Oni se uvijek javljaju u parovima, a ponavljanje je još rjedje nego u slučaju realnih polova.

Za rješenje problema razlaganja u slučaju konjugirano kompleksnih korijena krenimo od jednažbe (6.2) i (6.3) iz kojih izostavljamo korijene s ponavljanjem, odnosno stavljamo da je $k = 1$, tako da imamo:

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)} \quad (6.24)$$

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{B(s)}{(s + s_1)[(s + \alpha)^2 + \beta^2]} \quad (6.25)$$

Različitost pisanja konjugirano kompleksnog para u jednažbama (6.24) i (6.25) pruža mogućnost dvaju različitih pristupa. Označe li se kompleksni polovi sa $s_2 = \alpha + j\beta$ i $s_3 = \alpha - j\beta$, jednažba (6.24) u razvijenom obliku glasi:

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + s_2)(s + s_3)} = \frac{R_{11}}{s + s_1} + \frac{R_{21}}{s + s_2} + \frac{R_{31}}{s + s_3} \quad (6.26)$$

Činjenica da su ovdje polovi s_2 i s_3 konjugirano kompleksni, ne igra u metodi ostatka nikakvu ulogu, pa se stoga koeficijenti mogu izračunati na poznati način kako slijedi:

$$R_{11} = \frac{B(s)}{(s + s_2)(s + s_3)} \Big|_{s=-s_1} = \frac{B(s)}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)} \Big|_{s=-s_1}$$

$$R_{21} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + s_3)} \Big|_{s=-s_2} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + \alpha - j\beta)} \Big|_{s=-\alpha-j}$$

$$R_{31} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + s_2)} \Big|_{s=-s_3} = \frac{B(s)}{(s + s_1)(s + \alpha + j\beta)} \Big|_{s=-\alpha+j}$$

Budući da se kompleksni korijeni uvijek javljaju kao konjugirano kompleksni par, jednačba (6.26) se može pisati u obliku:

$$f(s) = \frac{B(s)}{N(s)} = \frac{R_{11}}{s + s_1} + \frac{R}{s + \alpha + j\beta} + \frac{\bar{R}}{s + \alpha - j\beta} \quad (6.27)$$

R i $\bar{R}$ su konjugirano kompleksni brojevi, pa je stoga dovoljno izračunati jednog, a drugi je onda evidentan.

Pogledajmo na jednom primjeru kako se metodom ostatka vrši razlaganje na parcijalne razlomke jedne funkcije s konjugirano kompleksnim polovima. Uzmimo funkciju regulacijskog sustava:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{16(s + 5)}{(s + 10)[(s + 2)^2 + 2^2]} = \frac{16(s + 5)}{(s + 10)(s + 2 + j2)(s + 2 - j2)}$$

Traži se impulsni odziv, pa stoga stavljamo $r(s) = 1$, a odziv je:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{16(s + 5)}{(s + 10)(s + 2 + j2)(s + 2 - j2)} = \\ &= \frac{R_{11}}{s + 10} + \frac{R}{s + 2 + j2} + \frac{\bar{R}}{s + 2 - j2} \end{aligned} \quad (6.28)$$

R_{11} izlazi da je $-80/68$.

$$R = \frac{16(s+5)}{(s+10)(s+2-j2)} \bigg|_{s=-2-j2} = \frac{16(3-j2)}{(8-j2)(-j4)}$$

$$= 1,75 \cdot e^{j(70,4^\circ)} = 0,588 + j 1,65$$

Poznavajući R , možemo napisati vrijednost za $\bar{R}$, $\bar{R} = 1,75 e^{-j(70,4^\circ)} = 0,588 - j 1,65$.

Odziv izražen s parcijalnim razlomcima glasi:

$$y(s) = \frac{-80/68}{s+10} + \frac{1,75 e^{j(70,4^\circ)}}{s+2+j2} + \frac{1,75 e^{-j(70,4^\circ)}}{s+2-j2} \quad (6.29)$$

Za izvršiti inverznu Laplaceovu transformaciju primjenom standardnih tablica, potrebno je zbrojiti zadnja dva člana jednadžbe (6.29), tako da imamo:

$$y(s) = \frac{-1,175}{s+10} + \frac{1,175 (s+7,60)}{(s+2)^2 + 2^2} \quad (6.30)$$

Primjenom tablica jednadžba (6.30) prelazi u:

$$y(t) = -1,175 e^{-10t} + \frac{1,175}{2} [(7,60-2)^2]^{\frac{1}{2}} e^{-2t} \sin(2t + \psi),$$

gdje je:

$$\psi = \arctg |2/(7,60-2)|,$$

ili

$$y(t) = -1,175 e^{-10t} + 3,50 e^{-2t} \sin(2t + 19,6^\circ) \quad (6.31)$$

Kako je već prije spomenuto, postoji i drugi mogući pristup i to algebarskom metodom. U tom slučaju krećemo od jednadžbe (6.25) koja u razvijenom obliku glasi:

$$y(s) = \frac{11}{s + s_1} + \frac{A s + B}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (6.32)$$

Oblik jednadžbe (6.32) je identičan jednadžbi (6.30), do koje smo došli računanjem s kompleksnim brojevima, a ovdje ćemo pokazati kako se to može obaviti na jednostavniji način.

U obradbu uzmimo isti primjer, koji u razvijenom obliku glasi:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{16(s + 5)}{(s + 10) [(s + 2)^2 + 2^2]} = \frac{R_{11}}{s + 10} + \frac{As + B}{(s + 2)^2 + 2^2} = \\ &= \frac{s^2 (R_{11} + A) + s(4R_{11} + 10A + B) + 8R_{11} + 10B}{(s + 10) [(s + 1)^2 + 2^2]} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Izjednačenjem odgovarajućih koeficijenata dolazi se do jednadžbi:

$$R_{11} + A = 0$$

$$4R_{11} + 10A + B = 16$$

$$8R_{11} + 10B = 80$$

Koeficijent R_{11} bi bilo lakše izračunati metodom ostatka, pa ako se tako i učini, do A i B se potom lako dolazi. Izračunane vrijednosti su:

$$R_{11} = -0,175 \quad A = 1,175 \quad B = 8,93 = 1,175 \cdot 7,60 ,$$

što se potpuno podudara s vrijednostima u jednadžbi (6.30).

Oba do sada obradjena postupka inverzne Laplaceove transformacije s pomoću razlaganja funkcije na parcijalne razlomke rezultirala su s analitičkim oblikom odziva. Takva informacija, makar najpreciznija, ne daje dovoljno brzo uvid u ponašanje sustava, jer da bi to ponašanje postalo evidentno, potrebno je izračunati vrijednosti odziva za dovoljno velik broj vremenskih točaka i rezultate grafički prikazati. Da bi se taj postupak skratio, obično se uzimaju članovi s najvećim koeficijentima i najvećim vremenskim konstantama i s njima se napamet vrši aproksimacija. U tom smislu za procjenu doprinosa pojedinih članova vrlo dobro može poslužiti grafička metoda.

Grafička metoda. Uzmimo da je odziv zadan u faktoriziranom obliku:

$$y(s) = \frac{K \prod (s - z_i)}{\prod (s - s_j)} \quad (6.34)$$

i da su svi polovi jednostruki. Nakon razvoja u parcijalne razlomke:

$$y(s) = \sum \frac{R_i}{(s - s_j)} \quad (6.35)$$

odnosno:

$$y(s) = \frac{R_{11}}{s - s_1} + \frac{R_{21}}{s - s_2} + \dots + \frac{R_{k1}}{s - s_k} + \dots + \frac{R_{v1}}{s - s_v} \quad (6.36)$$

Koeficijenti R_{i1} jednadžbe (6.36) se izračunavaju po relaciji (6.19) koja glasi:

$$R_{k1} = \left. \frac{(s + s_k) B(s)}{N(s)} \right|_{s=-s_k} \quad (6.37)$$

Koeficijent R_{11} prema tome glasi:

$$R_{11} = \frac{K (s_1 - z_1) (s_1 - z_2) \dots (s_1 - z_m)}{(s_1 - s_2) (s_1 - s_3) \dots (s_1 - s_v)} \quad (6.38)$$

Budući da se na identičan način dolazi i do ostalih koeficijenata, može se izvesti zaključak da je:

$$R_{k1} = K \frac{\text{umnožak verzora koja spajaju nule s polom } s_i}{\text{umnožak verzora koji spajaju polove s polom } s_i} \quad (6.39)$$

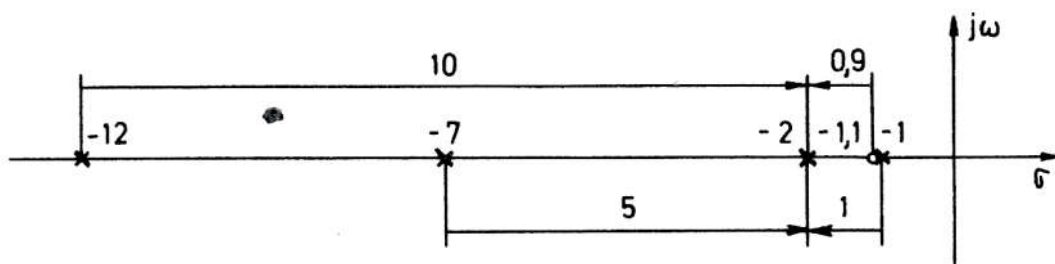
ili analitički:

$$R_{k1} = K \frac{\prod |s_k - z_i| e^{j \sum \arg(s_k - z_i)}}{\prod |s_k - s_j| e^{j \sum \arg(s_k - s_j)}}$$

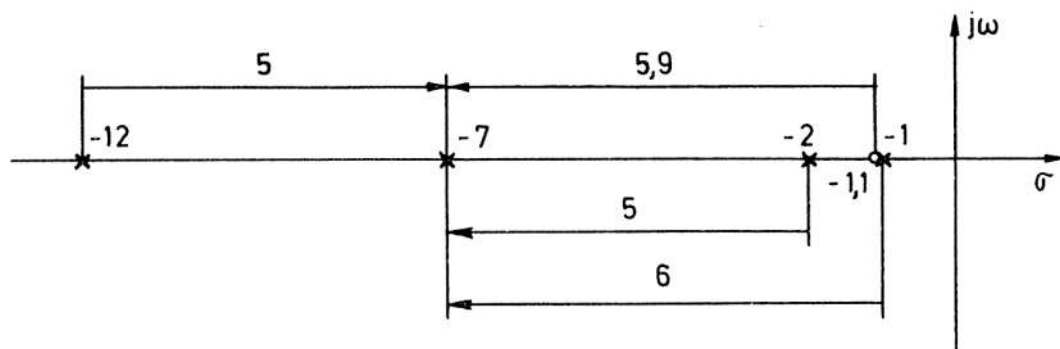
Ilustrirajmo to na odzivu:

$$y(s) = \frac{K (s + 1, 1)}{(s + 1) (s + 2) (s + 7) (s + 12)} \quad (6.40)$$

Singularne točke u s -ravnini funkcije (6.40) prikazane su na Sl. 6.1. Za kompletnu inverznu transformaciju pojačanje K treba biti poznato, ali ako se hoće samo učiniti usporedbeni procjena koji pol više doprinosi odzivu, poznavanje K nije potrebno.



a)



b)

Sl. 6.1. Singularne točke funkcije (6.40) u s-ravnini:

- a) verzori za izračunavanje ostatka za korijen $s = -2$;
b) verzori za izračunavanje ostatka za korijen $s = -7$

Na Sl. 6.1.a prikazani su verzori za izračunavanje ostatka za pol $s = -2$, što uvršteno u jednadžbu (6.38) daje:

$$R_{21} = \frac{0,9 K}{(-1)(+5)(+10)} = \frac{0,9 K}{50} \approx \frac{K}{56} \quad (6.41)$$

Sa grafa i iz jednadžbe (6.41) vidimo da se utjecaji pola $s = -1$ i nule $s = -1,1$ za približnu procjenu mogu zanemariti.

Na Sl. 6.1.b prikazani su verzori za izračunavanje ostatka za pol $s = -7$:

$$R_{31} = \frac{-5,9 K}{(-6)(-5)(+5)} = -\frac{K}{25,4} \approx -\frac{K}{25} \quad (6.42)$$

Poništavanje pola $s = -1$ i nule $s = -1,1$ u ostatku R_{31} još više dolazi do izražaja nego u R_{21} , što je i razumljivo, jer je kod R_{31} razlika pripadnih verzora svega 1,7%, a kod R_{21} je 10%.

Usporedbom ostatka R_{21} i R_{31} vidi se da je ostatak za pol $s = -2$ otprilike dvostruko manji od ostatka za pol $s = -7$. Međutim, uspoređujući vremenske konstante $1/2$ i $1/7$, dolazi se do zaključka da će ostatak pola $s = -2$ dulje vrijeme utjecati na odziv.

Ako na isti način procjenjujemo kakav doprinos odziva daje pol $s = -1$, dolazimo do zaključka da će taj doprinos usprkos vremenskoj konstanti od jedne sekunde biti vrlo mali, jer je verzor od nule $s = -1,1$ do pola $s = -1$, koji dolazi u brojnik ostatka, relativno vrlo mali u odnosu na umnožak ostalih verzora koji dolaze u nazivnik ostatka.

Cjelokupni postupak grafičkog određivanja odziva pokažimo na već obradjenom primjeru s konjugirano kompleksnim polovima:

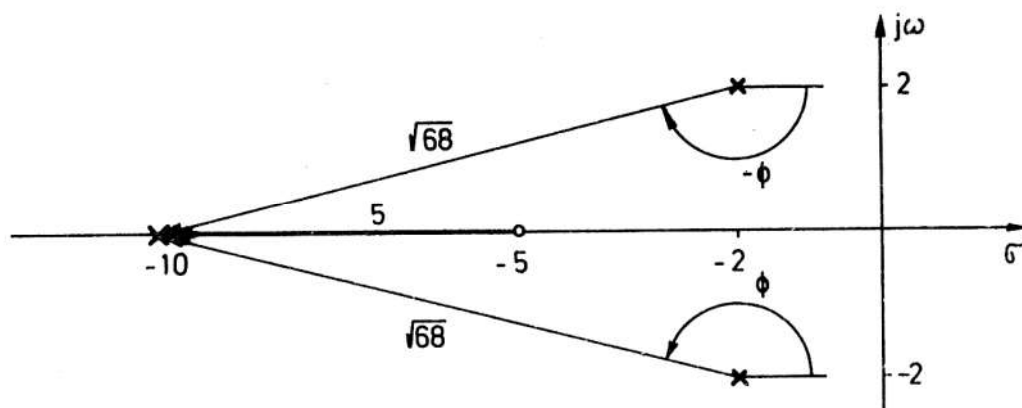
$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{16(s+5)}{(s+10)[(s+2)^2 + 2^2]} = \\ &= \frac{R_{11}}{s+10} + \frac{R}{s+2+j2} + \frac{\bar{R}}{s+2-j2} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Verzori pola $s = -10$ prikazani su na Sl. 6.2.a, a pripadni ostatak glasi:

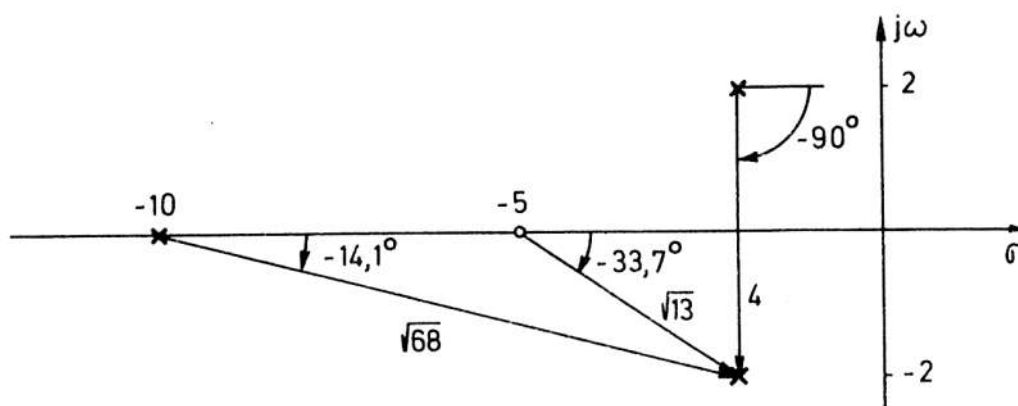
$$R_{11} = \frac{(16)(-5)}{\sqrt{68} e^{-j\phi} \sqrt{68} e^{j\phi}} = -\frac{80}{68}, \quad (6.44)$$

a verzori pola $s = -2 - j2$ prikazani na Sl. 6.2.b, daju ostatak:

$$R = \frac{16 \sqrt{13} e^{-j33,7^\circ}}{4 e^{-j90^\circ} \sqrt{68} e^{-j14,1^\circ}} = 1,75 e^{j70,4^\circ} = 0,588 + j 1,65 \quad (6.45)$$



a)



b)

Sl. 6.2. Singularne točke funkcije (6.43):

a) verzori pola $s = -10$;

b) verzori pola $s = -2 - j2$

Za odrediti ostatak $\bar{R}$, dužine svih verzora ostale bi iste, a kutovi bi samo promijenili predznake. To znači da modul kompleksnog broja ostaje isti kao i za ostatak R , a da se argumentu mijenja samo predznak, odnosno da je $\bar{R}$ konjugat ostatka R .

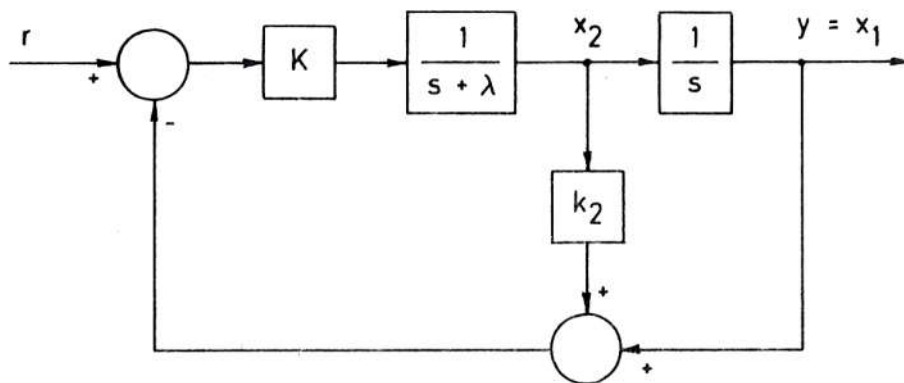
6.3. ODSKOČNI ODZIV SUSTAVA DRUGOG REDA

Poznavanje ponašanja sustava drugog reda ima fundamentalno značenje zbog tri razloga. Prvi je, što se svaki polinom može rastaviti na umnožak polinoma prvog i drugog reda. Drugi je, što se polinom prvog reda može promatrati kao specijalni slučaj polinoma drugog reda, i treći je razlog što se u inženjerskoj praksi sustavi višeg reda dovoljno točno mogu aproksimirati sa sustavom drugog reda.

Razmatranje počinjemo nehomogenom linearnom diferencijalnom jednačinom s konstantnim koeficijentima pisanom u obliku:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 r(t) \quad , \quad (6.46)$$

gdje je $r(t)$ odskočna pobuda, a početni uvjeti su jednaki nuli. Varijabla ζ (dzeta) se naziva *stupanj prigušenja*, a ω_n je *nepri- gušena kružna frekvencija*.



Sl. 6.3. Sustav drugog reda s povratnom vezom od varijabli stanja

Fizički sustavi drugog reda su svi sustavi koji imaju dva spremnika energije. Na Sl. 6.3. prikazan je jedan takav sustav s

dva spremnika energije i s negativnom povratnom vezom od varijabli stanja.

Primjenom oblika H_{eq} ili G_{eq} prijenosna funkcija regulacijskog sustava na Sl. 6.3. izlazi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K}{s^2 + s(\lambda + Kk_2) + K} \quad (6.47)$$

S druge strane, Laplaceova transformacija jednadžbe (6.46) uz nulte početne uvjete glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.48)$$

Na prvi pogled se vidi da su jednadžbe (6.47) i (6.48) strukturno identične i da im se stoga koeficijenti polinoma u brojniku i nazivniku mogu izjednačiti. Na taj način se dolazi do jednadžbi:

$$K = \omega_n^2, \quad \lambda + Kk_2 = 2\zeta\omega_n \quad (6.49)$$

iz kojih se neposredno vidi da se prikladnim izborom K i k_2 mogu postići bilo koje vrijednosti ω_n i ζ , odnosno da se s negativnom povratnom vezom može po želji ugoditi oblik odziva sustava drugog reda.

Karakteristična jednadžba prijenosne funkcije (6.48) glasi:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (6.50)$$

Rješenjem ove jednadžbe drugog reda po s -u dobiju se korijeni:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta^2 - 1)\omega_n^2} \quad (6.51)$$

Za razmatranje ponašanja odziva regulacijskog sustava drugog reda temeljno je važno shvatiti utjecaj stupnja prigušenja ζ na odziv. Neprigušenu kružnu frekvenciju ω_n se može shvatiti kao faktor skale. Pažljivom uvidom u jednadžbu (6.51) može se zapaziti pet karakterističnih slučajeva u ovisnosti u vrijednosti stupnja prigušenja :

1. $\zeta > 1$, korijeni su realni, negativni i različiti
2. $\zeta = 1$, korijeni su realni, negativni i jednaki
3. $0 < \zeta < 1$, korijeni su konjugirano kompleksni s negativnim realnim dijelom
4. $\zeta = 0$, korijeni su konjugirano imaginarni
5. $\zeta < 1$, korijeni su konjugirano kompleksni s pozitivnim realnim dijelom.

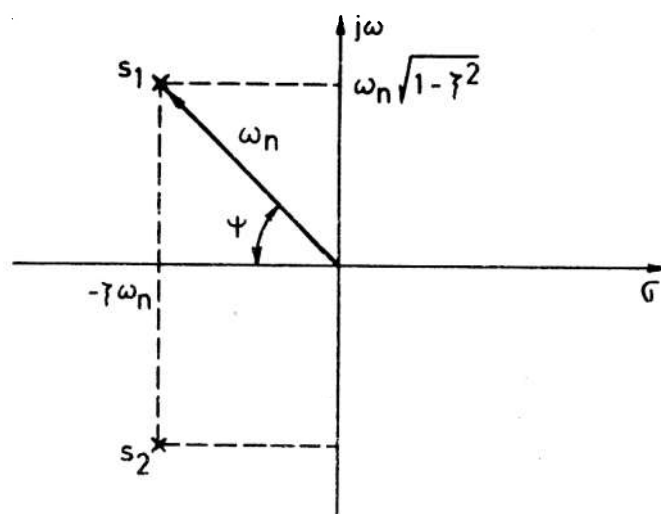
Kada je $0 < \zeta < 1$ korijeni se mogu pisati u obliku:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (6.52)$$

Ovaj slučaj je najzanimljiviji, pa ćemo se stoga s njime najprije detaljno upoznati. Za početak pogledajmo smještaj korijena u s -ravnini na Sl. 6.4. i ovisnost njihovog položaja o vrijednosti stupnja prigušenja ζ .

Za proučavanje ponašanja sustava najbolje je poslužiti se odskočnim odzivom. Prema jednadžbi (6.48) odziv u tom slučaju glasi:

$$y(s) = \frac{\omega_n^2}{s[(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2]} \quad (6.53)$$



Sl. 6.4. Polovi regulacijskog sustava drugog reda

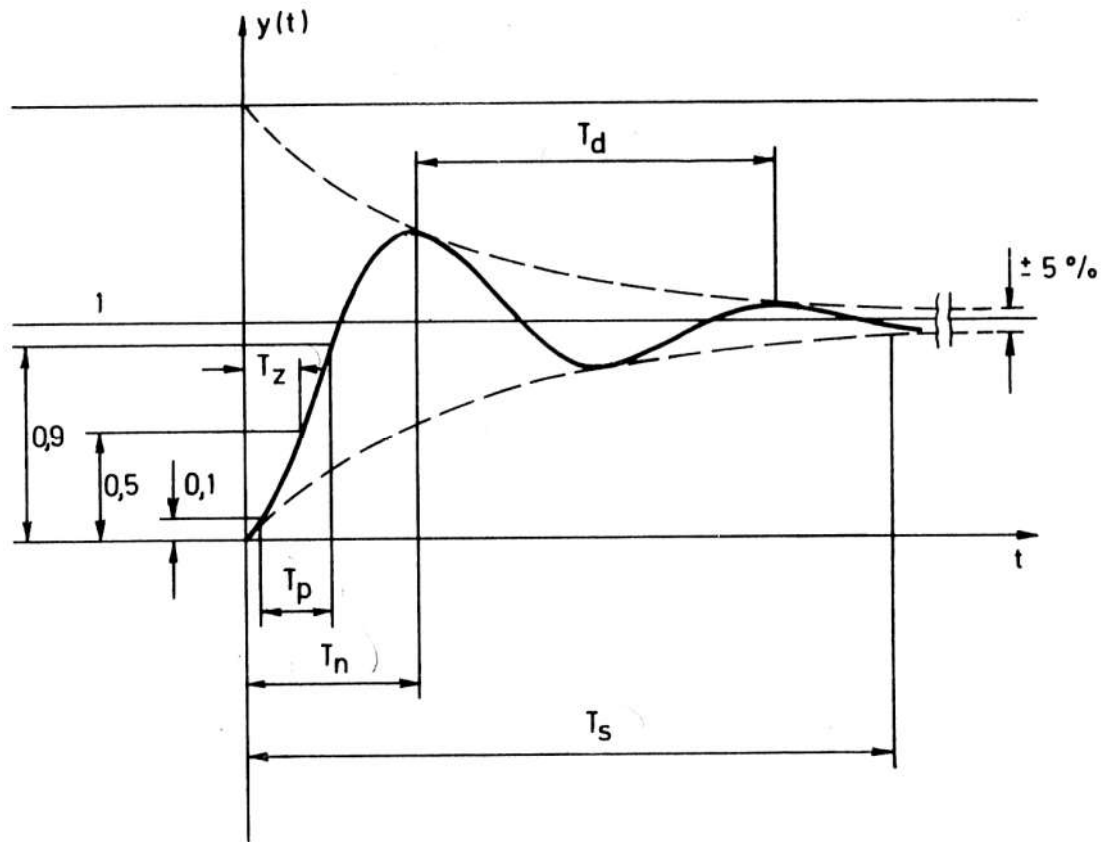
Da bismo mogli primijeniti tablicu Laplaceovih transformacija za prijelaz u gornje područje, razložimo jednadžbu (6.53) na parcijalne razlomke, i dobit ćemo:

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} \quad (6.54)$$

a od jednadžbe (6.54) primjenom tablica:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta) \quad (6.55)$$

Iz jednadžbe (6.55) vidi se da sustav prigušeno oscilira na frekvenciji $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, s anvelopom $e^{-\zeta\omega_n t}$. Frekvencija ω_d se naziva *prigušena kružna frekvencija*. Grafički prikaz odziva $y(t)$ prikazan je na Sl. 6.5.



Sl. 6.5. Parametri odskočnog odziva sustava drugog reda

Odstupanje odziva od pobude u funkciji vremena naziva se *dinamička pogreška*, a određena je relacijom:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad , \quad (6.56)$$

što uz jediničnu odskočnu pobudu $r(t) = 1$ daje:

$$\begin{aligned} e(t) &= 1 - \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta) \right] = \\ &= \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Perioda osciliranja određena je relacijom:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (6.58)$$

Vrijeme nadvišenja T_n definirano je kao vrijeme u kojem odziv postiže svoj prvi maksimum. Izračunava ga se tako da se potraži vrijeme prvog ekstrema iza $t = 0$. Da bismo to našli, najprije derivaciju $y(s)$ izjednačujemo s nulom:

$$\begin{aligned} \frac{d y(t)}{dt} &= \frac{\zeta \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos \zeta) - \\ &- \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos \zeta) = 0 \end{aligned}$$

Nakon dijeljenja s cosinusom i sredjenja dobijemo:

$$\operatorname{tg}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos \zeta) = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \quad (6.59)$$

Sa Sl. 6.4. vidimo da je:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \quad (6.60)$$

Jednadžba (6.59), prema tome, ima oblik:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \operatorname{tg} \psi \quad , \quad (6.61)$$

a budući da je:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi}$$

relacija (6.61) može biti zadovoljena samo za $\operatorname{tg} \alpha = 0$, a to je za $\alpha = k \cdot \Pi$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$, dakle:

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} T_n = k \Pi,$$

a odatle, budući da tražimo prvi maksimum iza nule:

$$T_n = \frac{\Pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{T_d}{2} \quad (6.62)$$

Uvrštenjem vremena nadvišenja T_n u $y(s)$ dobije se *nadvišenje*:

$$\begin{aligned} y(T_n) &= 1 - \frac{e^{-\left[\frac{n}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right]}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} + \arccos \zeta\right) = \\ &= 1 - \frac{e^{-\left[\frac{\xi \Pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\Pi + \arccos \zeta) = 1 + e^{-\frac{\xi \Pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{aligned} \quad (6.63)$$

a odatle *nadvišenje u postocima*:

$$y(T_n)\% = 100 e^{-\frac{\xi \Pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (6.64)$$

Vrijeme smirenja T_s definirano je kao vrijeme u kojem se anvelope odziva $e^{-\zeta\omega_n t}$ približe na 5% udaljenosti od ustaljenog stanja tj.:

$$e^{-\zeta\omega_n t} < 0,05 \quad ,$$

odnosno

$$\zeta\omega_n T_s > 3$$

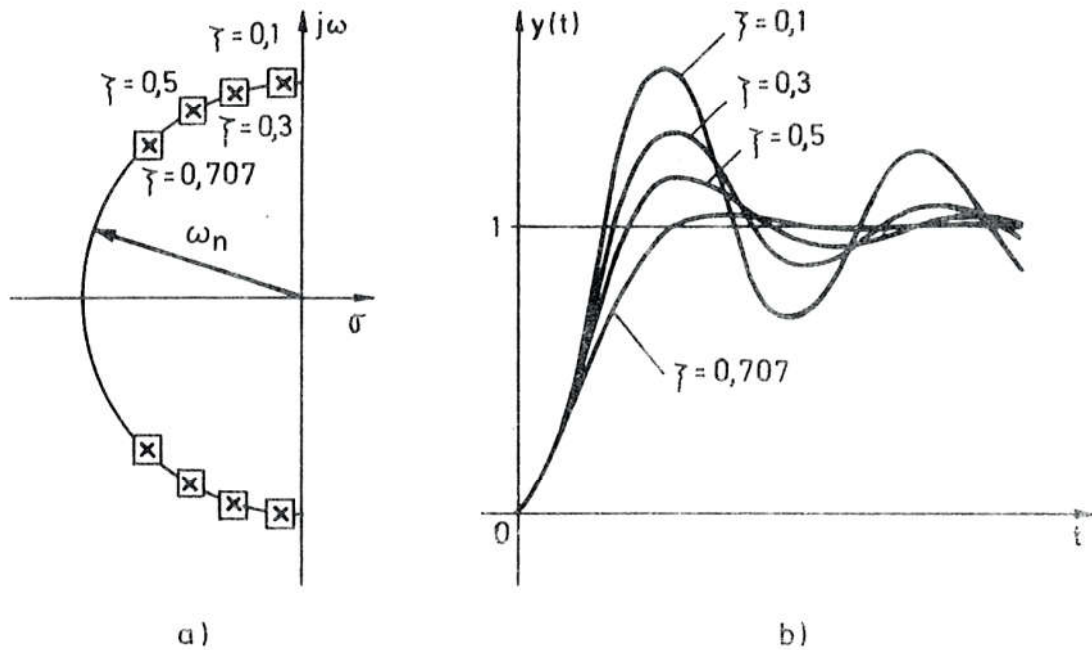
u inženjerskoj praksi se uzima:

$$T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (6.65)$$

Vrijedno je obratiti pažnju da su svi definirani vremenski parametri T_d , T_n i T_s obrnuto proporcionalni ω_n , odnosno da su veličine $T_d\omega_n$, $T_n\omega_n$ i $T_s\omega_n$ neovisne o ω_n . Iz jednadžbe (6.57) je vidljivo da će odziv, ako vremenski odziv nacrtamo u ovisnosti o bezdimenzionalnoj normaliziranoj varijabli $\omega_n t$, ovisiti samo o stupnju prigušenja ζ .

Da bismo još bolje rasvijetlili ponašanje vremenskog odziva, razmotrimo tri karakteristična stanja, i to 1) da mijenjamo ζ , uz konstantu ω_n , 2) da mijenjamo ω_n uz konstantu ζ i 3) da mijenjamo ζ i ω_n uz konstantni umnožak $\zeta\omega_n$.

Pogledajmo najprije stanje kad mijenjamo ζ uz konstantu ω_n . Sa Sl. 6.5. i jednadžbe (6.47) vidimo da je to moguće izvesti mijenjanjem koeficijenta k_2 uz konstantni K . Na Sl. 6.6.a prikazana je promjena mjesta korijena u tom slučaju, a na Sl. 6.6.b prikazani su vremenski odzivi za različite vrijednosti ζ .



Sl. 6.6. a) Položaj korijena sustava drugog reda ako se ζ mijenja, a ω_n ostaje konstantna;
b) oblik vremenskog odziva za neke vrijednosti ζ ako je ω_n konstantna

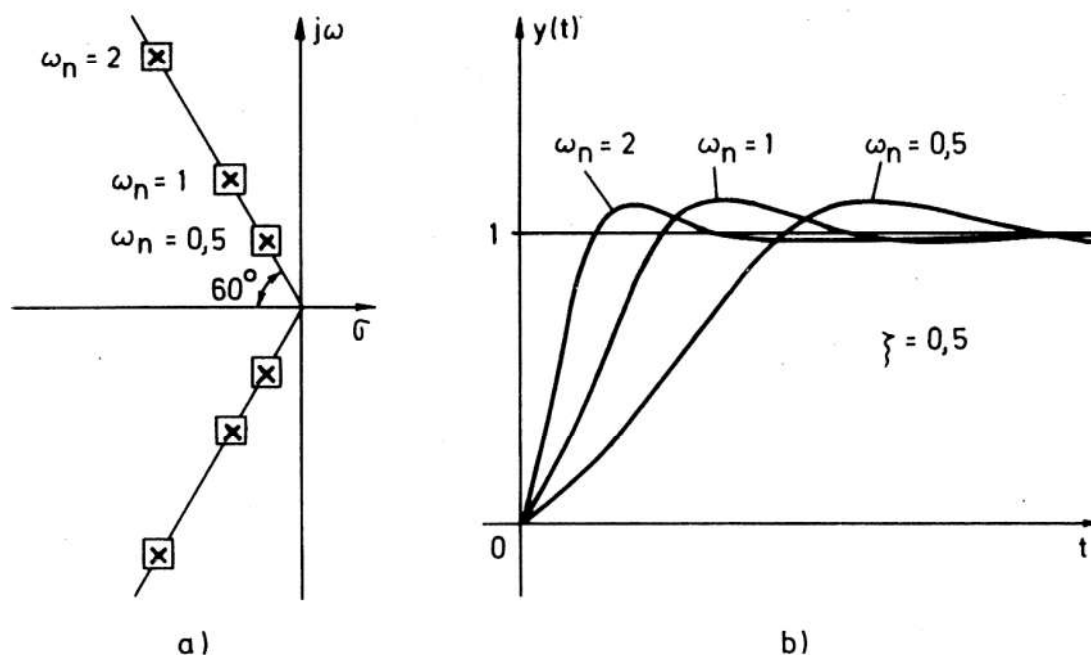
Za slučaj promjenljive ω_n uz konstantni ζ riješimo najprije jednadžbe (6.49) po k_2 i dobit ćemo:

$$k_2 = \frac{2\omega_n \zeta - \lambda}{K} \quad (6.66)$$

a budući da je $K = \omega_n^2$ jednadžba (6.66) može se pisati u obliku:

$$k_2 = \frac{2\sqrt{K}\zeta - \lambda}{K} \quad (6.67)$$

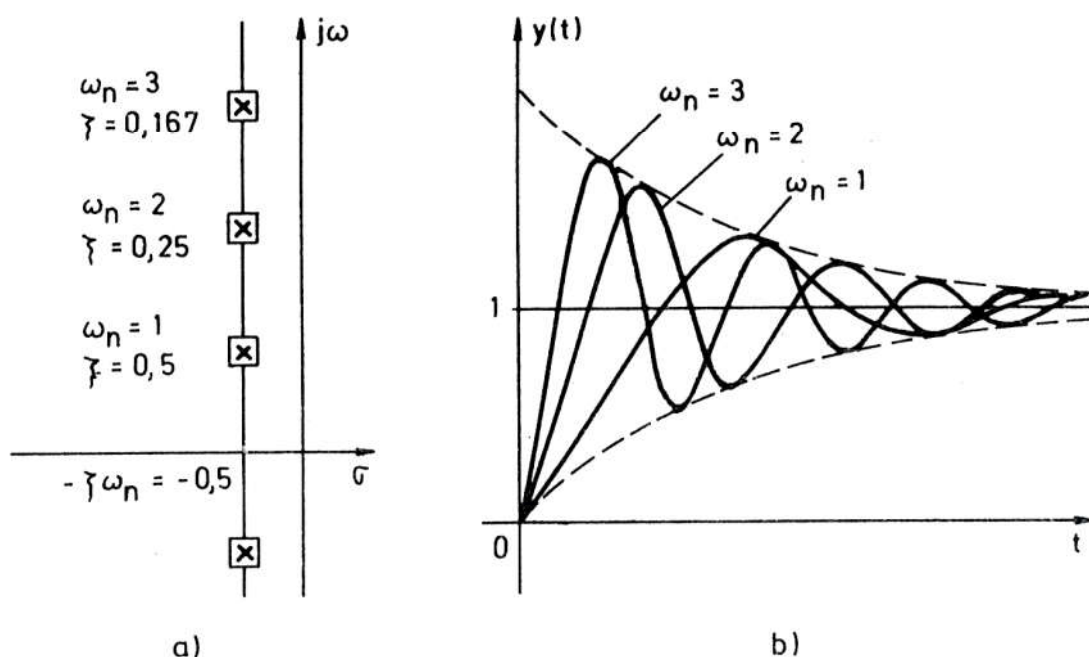
Promjena ω_n se postiže promjenom K , a k_2 se zatim izračunava uz konstantni ζ . Na Sl. 6.7.a su prikazana mjesta korijena za ovaj slučaj, a nalaze se na pravcu koji prolazi kroz ishodište. Na Sl. 6.7.b prikazani su odzivi za nekoliko vrijednosti ω_n . Vidi se da prebačaji za konstantne ζ ostaju jednaki, a svi vremenski parametri se mijenjaju obrnuto proporcionalno nepri-
gušenoj kružnoj frekvenciji ω_n .



Sl. 6.7. a) Položaji korijena uz konstantni ζ i promjenljivi ω_n
 b) oblici odziva za konstantni ζ i promjenljivi ω_n

Kad se mijenjaju ζ i ω_n , ali se njihov umnožak σ održava konstantnim, mjesta korijena se nalaze na pravcu okomitom na realnu os, kako je pokazano na Sl. 6.8.a. To se postiže mijenjanjem K i k_2 , a njihov se umnožak održava konstantnim. Na Sl. 6.8.b, koja prikazuje nekoliko odziva za razne vrijednosti ζ i ω_n uz konstantni σ , vidi se da se nadvišenja mijenjaju, ali da vrijeme smirenja T_s ostaje konstantno; ostali vremenski parametri T_d i T_n se mijenjaju.

Osim navedenih parametara često se u inženjerskoj praksi primjenjuju još i vrijeme porasta T_p (rise time). Po definiciji, to je vrijeme koje je potrebno odskočnom odzivu da se popne od 10% vrijednosti ustaljenog stanja do 90% vrijednosti ustaljenog stanja. Za ovaj parametar postoji samo aproksimativni matematički izvod pa ga ovdje nećemo ni navoditi grafički je prikazan na Sl. 6.5.



Sl. 6.8. a) Položaji korijena uz konstantni σ a promjenljivi ω_n i ζ ;
b) odzivi uz konstantni σ a promjenljivi ω_n i ζ

Sustavu s prigušenim oscilacijama koji se naziva i *potprigušeni slučaj*, za $0 < \zeta < 1$ ovdje je pridani prvorazredan značaj, jer daje najbolji uvid u ponašanje dinamičkih sustava. Osim toga, ako mijenjamo stupanj prigušenja ζ , sva ostala stanja možemo smatrati kao specijalne slučajeve.

Posebno je zanimljiv slučaj kada je $\zeta = 1$. Tada su korijeni karakteristične jednačbe:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \quad (6.68)$$

a odziv je:

$$y(t) = 1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t} \quad (6.69)$$

Ovo je *granični aperiodički slučaj*.

Radi cjelovitosti, spomenimo da za $\zeta > 1$ imamo tzv. *natprigušeni slučaj*, kada se odskočni odziv sporije približava ustaljenom

stanju od graničnog aperiodičkog slučaja. Za $\zeta = 0$ imamo *nepri-
gušeni periodički slučaj*, a za $\zeta < 1$ imamo *raspirene oscilacije*.

6.4. OPĆENITI VREMENSKI ODZIV

Za razliku od prethodnog poglavlja, gdje je razmatran odziv sustava drugog reda na odskočnu pobudu uz nulte početne uvjete, ovdje ćemo razmatrati vremenski odziv u općem slučaju, tj. odziv svih varijabli stanja sustava bilo kojeg reda na bilo koju pobudu i s bilo kakvim početnim uvjetima.

Uzmimo da je osnovni sustav koji treba regulirati opisan jednadžbom (A b):

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u, \quad (\underline{A} \quad \underline{b})$$

i da se regulacija vrši s varijablama stanja, tako da je:

$$u = K(r - \underline{k}^T \underline{x})$$

Regulacijski sustav je u tom slučaju opisan relacijom:

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - K \underline{b} \underline{k}^T) \underline{x} + K \underline{b} r = \underline{A}_K \underline{x} + K \underline{b} r, \quad (\underline{A}_K \quad \underline{b})$$

gdje je matrica regulacijskog sustava:

$$\underline{A}_K = \underline{A} - K \underline{b} \underline{k}^T,$$

a izlaz sustava je određen relacijom:

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (\underline{c})$$

Budući da nas uz $y(t)$ zanima i ponašanje svih varijabli sustava, jednačbe $(\underline{A}_k \underline{b})$ i $(\underline{c})$ treba riješiti po $\underline{x}(t)$ i $y(t)$. Rješavanje ćemo obaviti najprije u Laplaceovom području.

Laplaceova transformacija lijeve strane jednačbe $(\underline{A}_k \underline{b})$ je:

$$L [\dot{\underline{x}}(t)] = s \underline{x}(s) - \underline{x}(0) \quad ,$$

a desne strane:

$$L [\underline{A}_k \underline{x} + K \underline{b} r] = \underline{A}_k \underline{x}(s) + K \underline{b} r(s)$$

tako da ukupna transformacija glasi:

$$s \underline{x}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}_k \underline{x}(s) + K \underline{b} r(s) \quad ,$$

ili

$$\underline{x}(s) = (s \underline{I} - \underline{A}_k)^{-1} \underline{x}(0) + K(s \underline{I} - \underline{A}_k)^{-1} \underline{b} r(s) \quad (6.70)$$

Matrica identičnosti $\underline{I}$ je primijenjena u jednačbi (6.70) radi dimenzijske kompatibilnosti. Primijeni li se u jednačbi (6.70) rezolventna matrica:

$$\underline{\phi}_k(s) = (s \underline{I} - \underline{A}_k)^{-1} \quad , \quad (6.71)$$

dobije se:

$$\underline{x}(s) = \underline{\phi}_k(s) \underline{x}(0) + K \underline{\phi}_k(s) \underline{b} r(s) \quad (6.72)$$

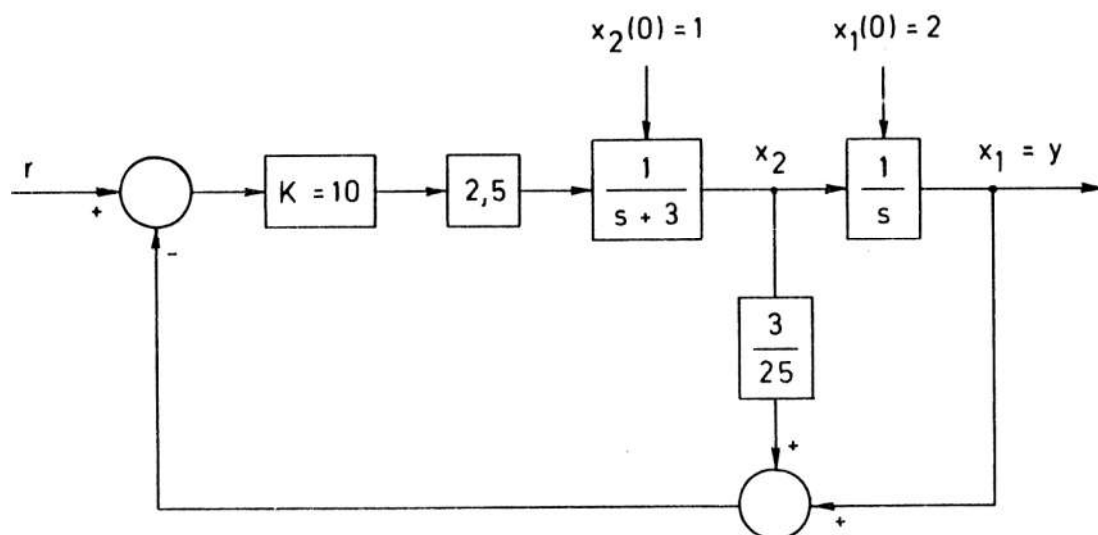
Općeniti vremenski odziv je stoga:

$$\underline{x}(t) = L^{-1} [\underline{\phi}_k(s)] \underline{x}(0) + K L^{-1} [\underline{\phi}_k(s) \underline{b} r(s)] \quad , \quad (6.73)$$

a sastoji se od dva dijela; prvi se odnosi na početne uvjete, a drugi na pobudnu funkciju.

Prikazani postupak je neosporno korektan, ali ne i jednostavan, a još manje kratak i neposredan, kako bi se na prvi pogled moglo pomisliti. Da bismo potkrijepili tu tvrdnju, obratimo pažnju da u postupku rješavanja treba najprije naći rezolventnu matricu, koja pomnožena s odgovarajućim vektorima daje, u općem slučaju, $2n^2$ članova. Da bi došli do traženih varijabli stanja $\underline{x}(t)$ i izlaza $y(t)$, treba još nakon tako opsežnog računa provesti i $2n^2$ inverznih Laplaceovih transformacija. Iz svega očito proizlazi da se do rezultata dolazi zaista vrlo složenim i opsežnim računanjem.

Za ilustraciju primijenimo ovaj postupak na jedan pozicijski servo sustav drugog reda s povratnom vezom od varijabli stanja prikazan na Sl. 6.9.



Sl. 6.9. Sustav drugog reda s povratnom vezom od varijabli stanja

Iz blokovskog prikaza na Sl. 6.9. mogu se napisati jednačbe:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + 25\left(r - \frac{3}{25}x_2 - x_1\right),\end{aligned}$$

ili u sredjenom obliku

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -25x_1 - 6x_2 + 25r\end{aligned}\tag{6.74}$$

tako da $\underline{A}_k$ i $K \underline{b}$ izlaze:

$$\underline{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad K \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}\tag{6.75}$$

Poznavajući matricu $\underline{A}_k$ možemo izračunati matricu sustava:

$$(s \underline{I} - \underline{A}_k) = \underline{\phi}_k^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+1 \end{bmatrix}\tag{6.76}$$

a rezolventna matrica je:

$$\underline{\phi}_k(s) = \frac{1}{(s+3)^2 + 4^2} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}\tag{6.77}$$

Vrijedno je zapaziti da se determinanta matrice sustava $(s \underline{I} - \underline{A}_k)$ pojavljuje u nazivniku svakog člana rezolventne matrice $\underline{\phi}_k(s)$. Determinanta matrice sustava je polinom po s -u, a

naziva se i karakteristični polinom regulacijskog sustava. Budući da će po tome sve varijable stanja imati jednake karakteristične polinome znači da će i njihovo ponašanje biti jednako. Poznavajući rezolventnu matricu $\phi_k(s)$ možemo je uvrstiti u jednadžbu (6.72) i dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \underline{x}(s) = & \frac{1}{(s+3)^2 + 4^2} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{(s+3)^2 + 4^2} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} r(s) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Uz početne uvjete $\underline{x}(0) = st \ (2,1)$ izlazi:

$$\begin{aligned} \underline{x}(s) = & \frac{1}{(s+3)^2 + 4^2} \begin{bmatrix} 2(s+6)+1+25r(s) \\ s-50+25sr(s) \end{bmatrix} = \\ = & \frac{1}{(s+3)^2 + 4^2} \begin{bmatrix} 2s+13 \\ s-50 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+3)^2 + 4^2} \begin{bmatrix} 25 \\ 25s \end{bmatrix} r(s) \end{aligned} \quad (6.79)$$

Da bismo riješili jednadžbu (6.79) poslužiti ćemo se principom superpozicije i najprije potražiti rješenje s početnim uvjetima kao pobudom uz $r(s) = 0$, a potom ćemo uzeti da su početni uvjeti jednaki nuli i riješiti uz $r(s) = \frac{1}{s}$.

Uz $r(s) = 0$ dobije se:

$$x_1(s)_{pu} = \frac{2(s + 6,5)}{(s + 3)^2 + 4^2} \quad (6.80)$$

$$x_2(s)_{pu} = \frac{s - 50}{(s + 3)^2 + 4^2} ,$$

gdje subskript pu označava da je sustav pobudjen s početnim uvjetima. Primjenom inverzne transformacije izlazi:

$$x_1(t)_{pu} = 2,65 e^{-3t} \sin (4t + 48,8^\circ)$$

$$x_2(t)_{pu} = 13,3 e^{-3t} \sin (4t + 175,7^\circ)$$

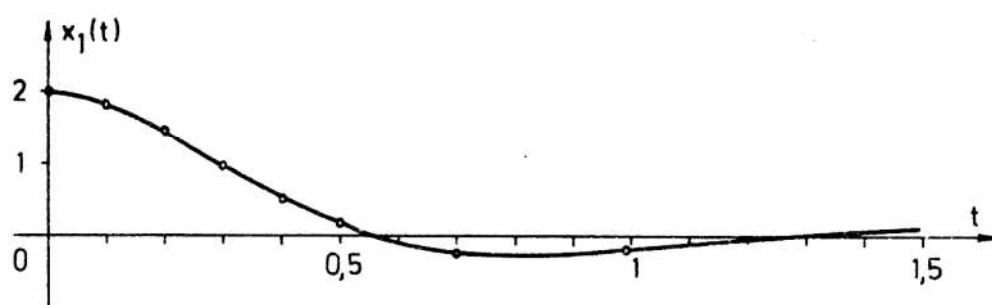
Lako se može dokazati da je $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, što i mora biti, jer je tako na početku postavljeno.

Uvidom u dobijene rezultate $x_1(s)_{pu}$ i $x_2(s)_{pu}$ vidi se da su korijeni karakteristične jednadžbe, odnosno polovi funkcije regulacijskog sustava $s_{1,2} = -3 \pm j4$, a stupanj prigušenja $\zeta = 0,6$. U funkciji vremena obje varijable su prikazane na Sl. 6.10.a i b. Na Sl. 6.10.c su varijable nanešene na koordinatama, a vrijeme je parametar, tako da se eksplicitno niti ne pojavljuje.

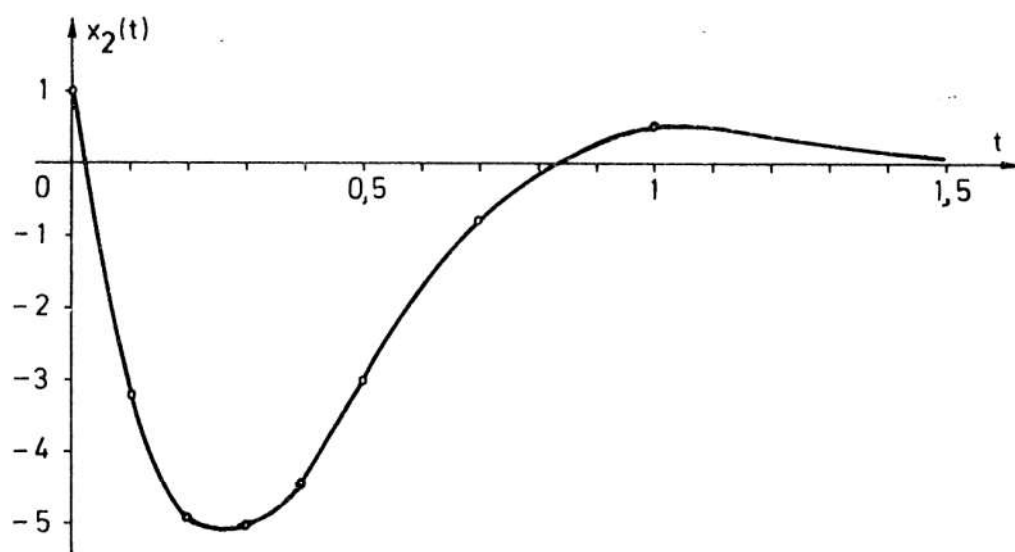
Za rješavanje drugog dijela jednadžbe (6.79) uzimamo da su početni uvjeti jednaki nuli, a za pobudu uzimamo odskočnu funkciju $r(s) = \frac{1}{s}$. Na taj način dobijemo:

$$x_1(t)_{op} = 1 - 1,25 e^{-3t} \sin (4t + 53,2^\circ) \quad (6.81)$$

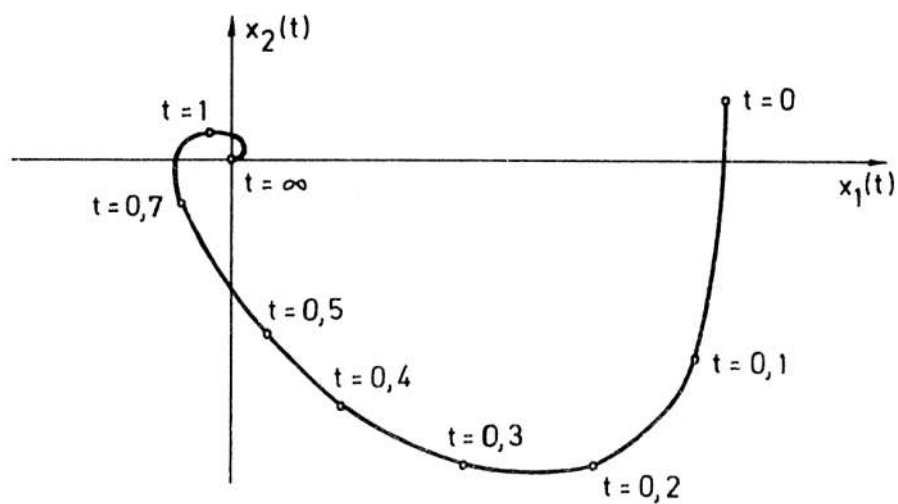
$$x_2(t)_{op} = 6,25 e^{-3t} \sin 4t$$



a)



b)



c)

Sl. 6.10. a) i b) Varijable stanja pobudjenje s početnim uvjetima, u funkciji vremena;
c) varijable stanja pobudjene početnim uvjetima, s vremenom kao parametrom

Subskript op znači odskočna pobuda.

Koristeći princip superpozicije ukupni odziv je zbroj pojedinačnih odziva pa, tako dobijemo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 - 1,25 e^{-3t} \sin(4t + 53,2^\circ) + 2,65 e^{-3t} \sin(4t + 48^\circ) = \\ &= 1 + 1,41 e^{-3t} \sin(4t + 45^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 6,25 e^{-3t} \sin 4t + 13,3 e^{-3t} \sin(4t + 175,7^\circ) = \\ &= 7,08 e^{-3t} \sin(4t + 171,9^\circ) \end{aligned} \quad (6.82)$$

I ovdje je vrijedno zapaziti da premda je ponašanje varijabli stanja analitički potpuno određeno, stvarni uvid u njihovo ponašanje može se steći tek kad se ti izrazi grafički predoče. Čak ni tada problem nije potpuno riješen, jer će se s promjenom početnih uvjeta mijenjati i njihovo ponašanje. Zbog toga se najčešće proučavaju sustavi uz nulte početne uvjete.

U prethodnom razmatranju opis ponašanja svake pojedine varijable stanja je dobijen inverznom Laplaceovom transformacijom svakog pojedinog skalara. U nastavku ćemo upoznati jednu alternativnu metodu kojom se inverzna transformacija izvodi u matričnom obliku. Pretpostavimo da je s pomoću jednadžbe (6.72) izračunan $\underline{x}(s)$ i da glasi:

$$\underline{x}(s) = \frac{\underline{n}(s)}{N(s)} = \frac{\underline{n}(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)}, \quad (6.83)$$

$\underline{n}(s)$ je vektor polinoma po s -u, koji su polinomi brojnikā varijabli stanja. Koeficijenti elemenata $\underline{n}(s)$ ovise o $\underline{x}(0)$ i o obliku pobudne funkcije $r(s)$, a $N(s)$ sadrži polove pobudnih funkcija.

Razložimo najprije $\underline{x}(s)$ na parcijalne razlomke:

$$\underline{x}(s) = \frac{\underline{r}_{11}}{(s + s_1)} + \frac{\underline{r}_{21}}{(s + s_2)} + \dots + \frac{\underline{r}_{n1}}{(s + s_n)} , \quad (6.84)$$

gdje je vektor ostatka zadan relacijom:

$$\underline{r}_{i1} = \frac{(s + s_i) \underline{n}(s)}{N(s)} \bigg|_{s=-s_i} \quad (6.85)$$

Jednadžbu (6.84) u vremenskom području možemo pisati u obliku:

$$\underline{x}(t) = \underline{r}_{11} e^{-s_1 t} + \underline{r}_{21} e^{-s_2 t} + \dots + \underline{r}_{n1} e^{-s_n t} \quad (6.86)$$

Prednost ovog načina je u tome što se računanje svih ostataka svodi na istu operaciju.

Pokažimo to na već izračunanom primjeru sa Sl. 6.9. Uzmimo iste početne uvjete $\underline{x}(0) = st(2,1)$ i odskočnu pobudu $r(s) = \frac{1}{s}$, tako da je:

$$\underline{x}(s) = \frac{1}{s[(s+3)^2 + 4^2]} \begin{bmatrix} 2s^2 + 13s + 25 \\ s^2 - 25s \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

Umjesto da računamo konjugirano kompleksne polove kao zasebne kompleksne članove, ovdje ćemo razviti $\underline{x}(s)$ na parcijalne razlomke:

$$\underline{x}(s) = \frac{\underline{r}_{11}}{s} + \frac{\underline{\alpha}s + \underline{\beta}}{(s+3)^2 + 4^2} ; \quad (6.88)$$

$\underline{r}_{11}$ izlazi:

$$\underline{r}_{11} = \frac{1}{(s+3)^2 + 4^2} \begin{bmatrix} 2s^2 + 13s + 25 \\ s^2 - 25s \end{bmatrix} \Big|_{s=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

pa se stoga jednačba (6.88) može pisati u obliku:

$$\begin{aligned} \underline{x}(s) &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\underline{\alpha}s + \underline{\beta}}{(s+3)^2 + 4^2} = \\ &= \frac{1}{s[(s+3)^2 + 4^2]} \begin{bmatrix} (1+\alpha_1)s^2 + (13+\beta_1)s + 25 \\ \alpha_2s^2 + \beta_2s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.90)$$

Izjednačenjem koeficijenata uz odgovarajuće članove polinoma iz jednačbi (6.87) i (6.90) dobije se:

$$\underline{\alpha} = \text{st } (1, 1) \quad \text{i} \quad \underline{\beta} = \text{st } (1, -25) \quad ,$$

tako da jednačba (6.88) sada izlazi:

$$\underline{x}(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+3)^2 + 4^2} \left(s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -25 \end{bmatrix} \right) \quad (6.91)$$

Odatle se inverznom transformacijom dobije:

$$\underline{x}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,41e^{-3t} \sin(4t+45^\circ) \\ 7,08e^{-3t} \sin(4t+171,9^\circ) \end{bmatrix} , \quad (6.92)$$

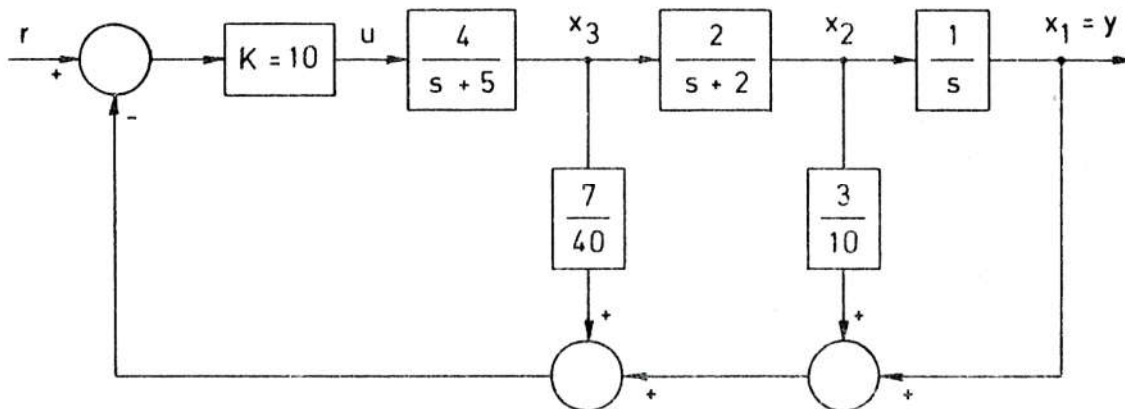
što se potpuno slaže s jednažbom (6.82).

Dosadašnja razmatranja pokazuju da je obradba varijabli stanja s pomoću rezolventne matrice najsustavniji pristup, a ujedno i najbolji kada je potrebno znati ponašanje varijabli stanja u svim početnim uvjetima, a pogotovo kad su svi elementi $\underline{b}$ nenulti. Često se, međjutim, pretpostavlja da su početni uvjeti jednaki nuli i da je samo n -ti element $\underline{b}$ nenulti. U takvim slučajevima se do rezultata može doći na lakši način, i to tako što se nađe $x_1(t)$, a iz $x_1(t)$ sve ostale varijable stanja.

Ilustrirajmo taj postupak određivanjem općenitog vremenskog odziva sustava na Sl. 6.11. uz nulte početne uvjete i s odskočnom pobudom u trenutku $t = 0$. Izlaz $y(t)$ je uzet za $x_1(t)$, a budući da je:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s) H_{eq}(s)}$$

$x_1(s)$ se lako može naći poznavajući H_{eq} i prijenosnu funkciju objekta.



Sl. 6.11. Sustav trećeg reda s povratnom vezom od varijabli stanja

Sa Sl. 6.11. nalazimo da je:

$$H_{eq} = \frac{1}{80} (7s^2 + 38s + 80) ,$$

tako da je:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{80}{s^3 + 14s^2 + 48s + 80} = \frac{80}{[(s+2)^2 + 2^2](s+10)}$$

Uz jediničnu odskočnu pobudu odziv izlazi:

$$y(s) = x_1(s) = \frac{80}{s[(s+2)^2 + 2^2](s+10)} ,$$

a odatle primjenom inverzne transformacije:

$$x_1(t) = 1 - \frac{2}{17} e^{-10t} - 1,72 e^{-2t} \sin(2t + 30,9^\circ)$$

Iz blokovskog prikaza na Sl. 6.11. izlazi:

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{1}{s} \quad \text{ili} \quad x_2(t) = \frac{d x_1(t)}{dt}$$

Prema tome deriviranjem $x_1(t)$ dolazimo do $x_2(t)$, a na sličan način i do $x_3(t)$:

$$x_3(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{d x_2(t)}{dt} + 2x_2(t) \right]$$

Tako smo na relativno lak način došli do općenitog vremenskog odziva sustava.

6.5. RAČUNANJE OPĆENITOG VREMENSKOG ODZIVA S INTEGRALOM KONVOLUCIJE

Izraz za općeniti vremenski odziv, prema jednadžbi (6.73), glasi:

$$\underline{x}(t) = L^{-1} [\underline{\phi}_k(s)] \underline{x}(0) + K L^{-1} [\underline{\phi}_k(s) \underline{b} r(s)]$$

Doprinos početnih uvjeta je sadržan u prvom dijelu gornjeg izraza, a doprinos ulazne pobude je:

$$\underline{x}_p(t) = K L^{-1} [\underline{\phi}_k(s) \underline{b} r(s)] \quad (6.93)$$

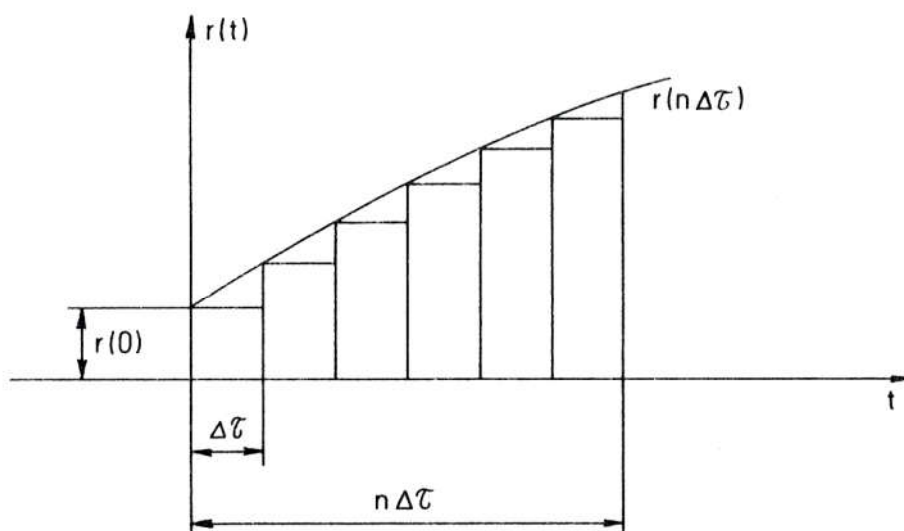
Da bismo riješili jednadžbu (6.93) treba izvršiti inverznu Laplaceovu transformaciju umnoška dvaju Laplaceovih transformata, $r(s)$ i $\underline{\phi}_k(s)$. Postoji, međjutim, i drugi pristup, tj. da se čitav problem riješi u vremenskom području. S inženjerskog gledišta važno je znati koji je od ovih postupaka kraći, a time i ekonomičniji. Da bismo to otkrili, krenimo od linearnog sustava $W(s)$ koji pobudjen funkcijom $r(s)$ daje odziv $y(s)$. Odziv u tom slučaju glasi:

$$y(s) = W(s) r(s) \quad , \quad (6.94)$$

a primjenom inverzne Laplaceove transformacije:

$$y(t) = L^{-1} [W(s) r(s)] \quad (6.95)$$

Pretpostavimo da je pobudna funkcija zadana grafički. U tom slučaju $r(t)$ možemo rastaviti na niz elementarnih pravokutnih impulsa širine $\Delta\tau$, kako je pokazano na Sl. 6.12.



Sl. 6.12. Pobudna funkcija $r(t)$ rastavljena na niz pravokutnih impulsa

Pusti li se da $\Delta\tau \rightarrow 0$, odziv sustava na elementarni impuls može se nadomjestiti odzivom sustava na jediničnu δ funkciju, kojoj je površina jednaka površini elementarnog impulsa $r(n\Delta\tau) \Delta\tau$. Na taj način izlazi da je odziv prve impulsne pobude:

$$y_1 = r(0) \Delta\tau g(t), \quad \text{gdje je} \quad g(t) = L^{-1} W(s),$$

druge impulsne pobude:

$$y_2 = r(\Delta\tau) \Delta\tau g(t - \Delta\tau),$$

a $(n+1)$ impulsne pobude:

$$y_{(n+1)} = r(n\Delta\tau) \Delta\tau g(t - n\Delta\tau)$$

Budući da radimo s linearnim sustavima, možemo primjeniti princip superpozicije, po kojem je odziv zbroja jednak zbroju odziva, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} y(t) = \sum y_i(t) &= r(0) \Delta\tau g(t) + r(\Delta\tau) \Delta\tau g(t - \Delta\tau) + \dots \\ &+ r(n\Delta\tau) \Delta\tau g(t - n\Delta\tau) \end{aligned} \quad (6.96)$$

odnosno

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=0}^t r(\tau) \Delta\tau g(t - \tau) \quad (6.97)$$

a odakle graničnim prijelazom

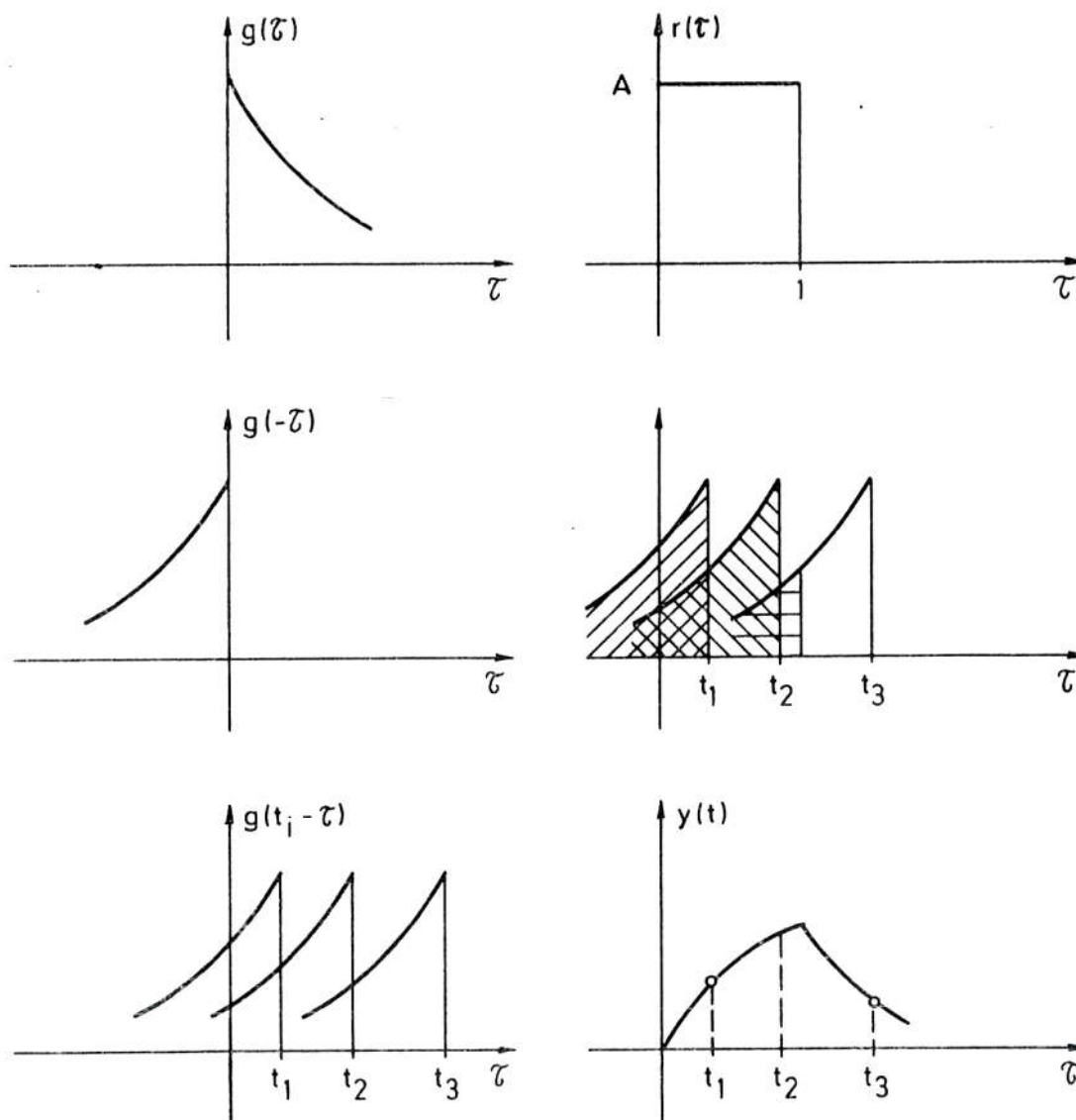
$$y(t) = \int_0^t r(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (6.98)$$

Izraz (6.98) se naziva *integral konvolucije*. Usporedbom jednačbe (6.95) i (6.98) dobije se

$$L^{-1} |W(s) r(s)| = \int_0^t r(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (6.99)$$

$g(t)$ se naziva *težinska funkcija*, a predstavlja odziv sustava na impulsnu pobudu.

Na temelju integrala konvolucije odziv se može naći i grafičkim putem. Uzmimo da su funkcije $g(t)$ i $r(t)$ zadane u grafičkom obliku kao što je prikazano na Sl. 6.13.



Sl. 6.13. Grafičko računanje odziva

Težinska funkcija $g(\tau)$ se najprije zakrene oko ordinatne osi da se dobije $g(-\tau)$, a zatim se pomakne u desno da se dobije $g(t_i - \tau)$. Potom se pomnoži $r(\tau)$ $g(t_i - \tau)$, a površina umnoška je integral za vrijeme t_i . Da bi se dobio čitav odziv u intervalu od $\emptyset$ do t , treba dovoljan broj puta ponavljati postupak za t_i . Zadnji graf u donjem desnom kutu na Sl. 6.13. prikazuje odziv u grafičkom obliku.

Koristeći integral konvolucije vratimo se sada na uvodno navedenu jednađžbu (6.73) i izvršimo inverznu Laplaceovu transformaciju:

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}_k(t) \underline{x}(0) + K \int_0^t \underline{\phi}_k(t - \tau) \underline{b} r(\tau) d\tau \quad (6.100)$$

Matrica $\underline{\phi}_k(t)$ u gornjem izrazu predstavlja inverznu Laplaceovu transformaciju rezolventne matrice:

$$\underline{\phi}_k(t) = L^{-1} | \underline{\phi}_k(s) | \quad (6.101)$$

i naziva se *matrica prijelaznog stanja* (state transition matrix). i-ti član vektora $\underline{x}(t)$ prema jednađžbi (6.100) u razvijenom obliku glasi:

$$\begin{aligned} x_i(t) = & x_i(0) \phi_{k(i1)}(t) + x_2(0) \phi_{k(i2)}(t) + \dots + x_n(0) \phi_{k(in)}(t) + \\ & + K \int_0^t \phi_{k(i1)}(t-\tau) b_1 r(\tau) d\tau + \dots \\ & + K \int_0^t \phi_{k(in)}(t-\tau) b_n r(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.102)$$

Usporedbom jednađžbi (6.73) i (6.100) vidimo da je posao oko izračunavanja prvog dijela jednađžbi jednak, dok se drugi dijelovi razlikuju. Za izračunavanje drugog dijela prema jednađžbi (6.73) treba obaviti n^2 inverznih Laplaceovih transformacija, a prema jednađžbi (6.100) treba izračunati n^2 integrala konvolucije. Postavlja se pitanje: koji od ta dva računa zahtijeva manje vremena.

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, razmotrimo jedan jednostavan primjer. Neka je zadan sustav drugog reda:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

a traži se odziv uz nulte početne uvjete. Da bismo primijenili integral konvolucije trebamo naći težinsku funkciju, odnosno vremenski odziv na impulsnu pobudu $r(s) = 1$. Uz $r(s) = 1$:

$$y(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} ,$$

a odatle:

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right] = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t ,$$

i nadalje:

$$g(t - \tau) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \beta(t - \tau)$$

Integral konvolucije stoga glasi:

$$y(t) = \int_0^t r(\tau) \left[\frac{1}{\beta} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \beta(t - \tau) \right] d\tau$$

Dobijeni integral se lako rješava samo ako se za pobudnu ulaznu funkciju primijeni odskočna ili eksponencijalna funkcija. Tada rješenje nalazimo u standardnim tablicama. U svakom drugom slučaju u tablicama nećemo naći rješenje. Međutim, ako se čitav račun provodi u Laplaceovom području, i nakon toga se

u završnici na svaki pojedini član primijeni inverzna Laplace-ova transformacija, sve teče bez poteškoća jer se inverzne transformacije svih jednostavnih izraza neposredno nalaze u tablicama.

Međutim, ako nam je na raspolaganju digitalno računalo, izračunavanje integrala ne predstavlja poteškoću pa u tom slučaju naprijed spomenuta poteškoća otpada. Integral konvolucije ima prednost i u grafičkom načinu računanja, pogotovo ako neka od funkcija ili obje nisu zadane u analitičkom obliku.

6.6. ZAKLJUČAK

Pod vremenskim odzivom podrazumijeva se odziv sustava na pobudu koja u vremenu t_0 skoči od nule na određenu konačnu vrijednost i na toj vrijednosti ostane za sve vrijeme $t > t_0$. Za servouredja je pobuda može biti položaj ili neka od njegovih viših derivacija. Nalazi ga se eksperimentalno, ili rješenjem matematičkog opisa ustava.

Zbog jednostavnosti i uštede vremena, računanje se u pravilu obavlja u donjem području. U tu svrhu opis sustava se najprije transformira u donje područje, gdje se potraži rješenje, a potom ga se inverznom Laplaceovom transformacijom transformira u gornje područje. Za inverznu transformaciju postoje tablice u kojima se nalaze transformati elementarnih članova.

Da bi se došlo do elementarnih članova, rješenje u donjem području treba razložiti na parcijalne razlomke. Za to postoji nekoliko metoda, ali se najveća ušteda vremena postiže smišljenim korištenjem dobrih osobina svake od njih.

Za razumijevanje vremenskog odziva značajan je odziv sustava drugog reda, zbog tri razloga: najprije što se svaki polinom daje rastaviti na umnožak polinoma prvog i drugog reda. Drugo, što su polinomi prvog reda samo posebni slučajevi polinoma drugog reda, i treće što se sustavi višeg reda dađu aproksimirati sustavima drugog reda.

Pod općenitim vremenskim odzivom podrazumijeva se vremenski odziv svih varijabli stanja. Njegovo izračunavanje je vrlo složeno ako se pretpostave općeniti početni uvjeti. Međutim, budući da se dovoljna informacija o sustavu dobije uz nulte početne uvjete, postoje razrađene metode kojima se do rješenja može doći relativno jednostavno. Računanje se u pravilu obavlja u donjem području s pomoću rezolventne matrice, ali se s digitalnim računalima, otprilike s istim utroškom vremena može doći i u gornjem području, i to primjenom integrala konvolucije. Osim toga integral konvolucije je posebno pogodan za grafičko računanje kada funkcije nisu zadane u analitičkom obliku.

7. FREKVENCIJSKI ODZIV

7.1. UVOD

Iako je s parametrima vremenskog odziva sustav u potpunosti određen, pokazalo se da u analizi on ima i svojih nedostataka. To se u prvom redu odnosi na primjenu u identifikaciji. Teorijski gledano njega se u identifikaciji može primijeniti, ali zbog svojstvene mu neharmoničnosti u praksi se to vrlo teško provodi. Suprotno tome harmoničke pobude daju i harmoničke odzive, koji se zbog ponovljivosti lako mogu registrirati pa stoga i uspješno primijeniti za identificiranje sustava. Odziv sustava na sinusnu pobudu naziva se *frekvencijski odziv*.

7.2. FUNKCIJA FREKVENCIJSKOG ODZIVA

Ako se na ulazu sustava dovede sinusna pobuda:

$$r(t) = A \sin \omega t \quad , \quad (7.1)$$

odziv će u ustaljenom stanju imati oblik:

$$y(t) = A R(\omega) \sin [\omega t + \phi(\omega)] \quad (7.2)$$

U nastavku ćemo pokazati da je:

$$R(\omega) = |W(s)|_{s=j\omega} = |W(j\omega)|, \quad \text{i} \quad (7.3)$$

$$\phi(\omega) = \arg W(j\omega) \quad (7.4)$$

Laplaceovom transformacijom sinusne pobude dobije se:

$$L[r(t)] = r(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (7.5)$$

pa je stoga odziv:

$$y(s) = W(s) r(s) = \frac{A\omega W(s)}{s^2 + \omega^2} = \frac{A\omega W(s)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \quad (7.6)$$

Razvojem izraza (7.6) u parcijalne razlomke dobije se:

$$y(s) = \frac{R_{11}}{s + j\omega} + \frac{R_{21}}{s - j\omega} + \text{ostali članovi}. \quad (7.7)$$

Prva dva člana jednadžbe (7.7) predstavljaju partikularno rješenje i određuju ustaljeno stanje, a "ostali članovi" predstavljaju komplementarno rješenje i određuju prijelazno stanje. Budući da se frekvencijski odziv dobije pri ustaljenom stanju, pažnju ćemo obratiti samo na prva dva člana jednadžbe (7.7), a "ostale članove" ćemo izostaviti.

Da bismo našli sinusni dio $y(s)$, kojeg ćemo označiti s $y(s)_s$ treba najprije odrediti R_{11} i R_{21} . Metodom ostatka dobit ćemo:

$$R_{11} = \left. \frac{A\omega W(s)}{s - j\omega} \right|_{s=-j\omega} = \frac{-AW(-j\omega)}{2j} ; \quad (7.8)$$

$$R_{21} = \left. \frac{A\omega W(s)}{s + j\omega} \right|_{s=j\omega} = \frac{AW(j\omega)}{2j} \quad (7.9)$$

Poznavajući koeficijente R_{11} i R_{21} , inverznom Laplaceovom transformacijom dolazimo do odziva:

$$\begin{aligned} y(t)_s &= R_{11} e^{-j\omega t} + R_{21} e^{j\omega t} \\ &= \frac{-AW(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{AW(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Kompleksnu funkciju $W(j\omega)$ možemo izraziti u obliku:

$$W(j\omega) = x(\omega) + j y(\omega) , \quad (7.11)$$

pa je stoga modul:

$$|W(j\omega)| = [x^2(\omega) + y^2(\omega)]^{\frac{1}{2}} \quad (7.12)$$

i argument:

$$\arg W(j\omega) = \arctg \frac{y(\omega)}{x(\omega)} \quad (7.13)$$

Znamo da je funkcija $W(-j\omega)$ kompleksni konjugat funkcije $W(j\omega)$. Uvrštenjem funkcije $W(-j\omega)$ i $W(j\omega)$ u jednadžbu (7.10) dobije se:

$$\begin{aligned} y(t)_s &= \frac{-A}{2j} [x(\omega) - jy(\omega)] e^{-j\omega t} + \frac{A}{2j} [x(\omega) + jy(\omega)] e^{j\omega t} = \\ &= Ax(\omega) \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + Ay(\omega) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} , \end{aligned} \quad (7.14)$$

što primjenom Eulerovih relacija daje:

$$y(t)_s = Ax(\omega) \sin \omega t + Ay(\omega) \cos \omega t \quad (7.15)$$

Podijeli li se i pomnoži jednadžba (7.15) s $\sqrt{x(\omega)^2 + y(\omega)^2}$ dobije se:

$$\begin{aligned} y(t)_s &= A \sqrt{x^2(\omega) + y^2(\omega)} \left[\frac{x(\omega)}{(x^2(\omega) + y^2(\omega))^{1/2}} \sin \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y(\omega)}{(x^2(\omega) + y^2(\omega))^{1/2}} \cos \omega t \right] , \end{aligned}$$

a odatle:

$$y(t)_s = A [x^2(\omega) + y^2(\omega)]^{1/2} \sin [\omega t + \alpha(\omega)] , \quad (7.16)$$

gdje je $\alpha(\omega) = \arctg \frac{y(\omega)}{x(\omega)}$.

Usporedbom relacije (7.2) i (7.16) vidimo da je:

$$R(\omega) = [x^2(\omega) + y^2(\omega)]^{1/2} = |W(j\omega)| \quad , \quad (7.17)$$

i

$$\alpha(\omega) = \phi(\omega) = \arctan \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = \arg W(j\omega) \quad (7.18)$$

Ovim smo dokazali tvrdnju izraženu jednažbama (7.3) i (7.4) da se funkcija frekvencijskog odziva dobije iz prijenosne funkcije zamjenom $s = j\omega$.

Iz izvedenog zaključka proizlazi da funkcija frekvencijskog odziva linearnog sustava jednoznačno određuje vremenski odziv sustava na bilo koju pobudu, i obrnuto, da je funkcija frekvencijskog odziva linearnog sustava jednoznačno određena vremenskim odzivom bilo koje pobude. To znači da se iz parametara vremenskog odziva mogu dobiti parametri frekvencijskog odziva, a iz parametara frekvencijskog odziva parametri vremenskog odziva. U daljnjim izlaganjima doći će do izražaja dobre strane ovog dualizma.

7.3. BODEOVI DIJAGRAMI

Jedan od načina grafičkog prikazivanja funkcije frekvencijskog odziva $W(j\omega)$ jest da se modul i argument prikažu u ovisnosti o promjeni frekvencije. Budući da je kompleksni broj potpuno određen modulom i argumentom, izlazi da je funkcija frekvencijskog odziva prikazana s pomoću ta dva dijagrama u potpunosti određena.

Međutim, kolikogod je grafički prikaz važan za sagledavanje problematike i inženjerskoj praksi, vrijeme koje treba utrošiti za crtanje takvih dijagrama je toliko da ih se praktički ne bi isplatilo koristiti da nije pronađen mnogo brži način za njihovo aproksimacijsko prikazivanje. To se postiže aproksimacijskim dijagramima logaritma funkcije frekvencijskog odziva.

Amplitudni Bodeov dijagram. Osim u obliku polinoma:

$$W(s) = \frac{K(s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_1)}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (7.19)$$

prijenosna funkcija se može pisati u faktoriziranom obliku, i to u faktoriziranom obliku s korijenima i u faktoriziranom obliku s vremenskim konstantama. Faktorizirani oblik s korijenima u općem slučaju glasi:

$$W(s) = \frac{K(s + n_1)(s + n_2) \dots (s + n_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + n_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}, \quad (7.20)$$

gdje su n_i i p_j korijeni brojnika odnosno nazivnika, a K je pojačanje.

Faktorizirani oblik s *vremenskim konstantama* u općem slučaju glasi:

$$W(s) = \frac{K_{st} (1 + \frac{s}{n_1}) (1 + \frac{s}{n_2}) \dots (1 + \frac{s}{n_m})}{(1 + \frac{s}{p_1}) (1 + \frac{s}{p_2}) \dots (1 + \frac{s}{p_n})} =$$

$$= \frac{K_{st} \prod_{i=1}^m (1 + \frac{s}{n_i})}{\prod_{j=1}^n (1 + \frac{s}{p_j})}, \quad (7.21)$$

gdje su $1/n_i$ i $1/p_j$ vremenske konstante brojnika odnosno nazivnika, a K_{st} je *statička osjetljivost*. Odnos pojačanja i statičke odjetljivosti glasi:

$$K_{st} = K \frac{(-n_1)(-n_2) \dots (-n_m)}{(-p_1)(-p_2) \dots (-p_n)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (-n_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} \quad (7.22)$$

Za crtanje Bodeovih dijagrama opis sustava treba prirediti u obliku faktorizirane funkcije frekvencijskog odziva s vremenskim konstantama, koja se dobije iz jednadžbe (7.21) zamjenom s sa $j\omega$, i glasi:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= K_{st} \frac{(1 + j \frac{\omega}{\omega_{a1}})(1 + j \frac{\omega}{\omega_{a2}}) \dots (1 + j \frac{\omega}{\omega_{am}})}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_{b1}})(1 + j \frac{\omega}{\omega_{b2}}) \dots (1 + j \frac{\omega}{\omega_{bn}})} = \\ &= K_{st} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j \frac{\omega}{\omega_{ai}})}{\prod_{j=1}^n (1 + j \frac{\omega}{\omega_{bj}})} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Za crtanje amplitudnog Bodeovog dijagrama potrebno je najprije naći apsolutnu vrijednost funkcije frekvencijskog odziva koja u općem slučaju glasi:

$$|W(j\omega)| = |K_{st}| \frac{\left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{a1}} \right| \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{a2}} \right| \dots \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{am}} \right|}{\left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{b1}} \right| \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{b2}} \right| \dots \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{bn}} \right|}, \quad (7.24)$$

a potom treba logaritmirati:

$$\begin{aligned}
 \log |W(j\omega)| &= \log |K_{st}| + \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{a_1}} \right| + \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{a_2}} \right| + \\
 &\quad \dots + \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{a_m}} \right| - \\
 &\quad - \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{b_1}} \right| - \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{b_2}} \right| - \dots \\
 &\quad - \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{b_n}} \right|
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

Relacija (7.25) iz koje se neposredno crta amplitudni Bodeov dijagram na prvi pogled otkriva jednu od glavnih prednosti logaritamskog prikaza. Naime, operacija množenja je u logaritamskom prikazu nadomještена operacijom zbrajanja, što je za grafičko prikazivanje prikladno.

Članovi brojnika i nazivnika u faktoriziranom obliku mogu sadržavati realne ili konjugirano kompleksne korijene. Da bi postupak bio što jasniji, posebno ćemo obraditi slučaj s realnim korijenima, a posebno slučaj s konjugirano kompleksnim korijenima.

Uzmimo najprije prijenosnu funkciju s realnim korijenima:

$$W(s) = K \frac{s + \omega_1}{s(s + \omega_2)} \tag{7.26}$$

koja preinačena u faktoriziranu funkciju frekvencijskog odziva s vremenskim konstantama glasi:

$$W(j\omega) = K_{st} \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{j \omega (1 + j \frac{\omega}{\omega_2})} \tag{7.27}$$

Logaritam njene apsolutne vrijednosti izlazi:

$$\begin{aligned} \log |W(j\omega)| &= \log |K_{st}| + \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right| - \log j\omega - \\ &\quad - \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right| \end{aligned} \quad (7.28)$$

Iz jednadžbe (7.28) zaključujemo da je logaritam funkcije $W(j\omega)$ na svakoj pojedinoj frekvenciji jednak razlici zbroja logaritama članova faktoriziranog polinoma brojnika, i zbroja logaritama članova faktoriziranog polinoma nazivnika. Grafičko zbrajanje samo po sebi ne predstavlja nikakvu poteškoću, ali je poteškoća u mnoštvu točaka koje treba prije zbrajanja izračunati. Pogledajmo kako se to opsežno računanje može na prikladan način izbjeći. Pokazat ćemo to na načinu crtanja svakog pojedinog karakterističnog člana. Počnimo s članom:

$$\log |K_{st}| = \text{konstanta} \quad (7.29)$$

To je logaritam konstante, pa je i on sam konstanta, a u grafičkom prikazu je predstavljen pravcem udaljenim od apscisne osi za vrijednosti $\log |K_s|$.

Idući je član:

$$\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right| = f(\omega) \quad (7.30)$$

Budući da je ovaj član funkcija frekvencije, pogledajmo kako će se ponašati kod relativno malih frekvencija kad je $\omega \ll \omega_1$, a kako kod relativno visokih frekvencija kad je $\omega \gg \omega_1$. U području $\omega \ll \omega_1$:

$$\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right| \approx \log 1 = 0 \quad (7.31)$$

Iz jednadžbe (7.31) proizlazi da će član $\log |1 + j \frac{\omega}{\omega_1}|$ za područje $\omega \ll \omega_1$ u grafičkom prikazu biti predstavljen pravcem koji leži na apscisnoj osi (Sl. 7.1).

Pokazalo se da je na apscisnu os prikladnije crtati $\log \omega$ nego ω , pa je tako u Bodeovim dijagramima konvencionalno i prihvaćeno. Stoga nagib asimptotičkog pravca koji predstavlja član $\log |1 + j \frac{\omega}{\omega_1}|$ za $\omega \ll \omega_1$ jest:

$$\frac{d(0)}{d(\log \omega)} = 0 \quad (7.32)$$

U području $\omega \gg \omega_1$:

$$\log |1 + j \frac{\omega}{\omega_1}| \approx \log |j \frac{\omega}{\omega_1}| \quad (7.33)$$

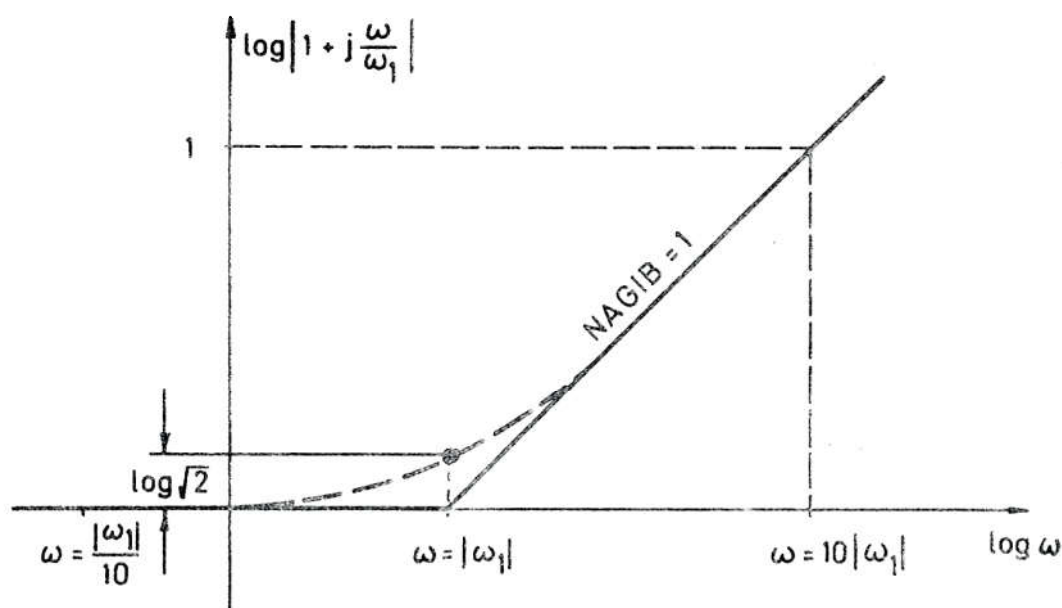
Budući da uvijek radimo s pozitivnim frekvencijama, jednadžba (7.33) se može pisati u obliku:

$$\log |1 + j \frac{\omega}{\omega_1}|_{\omega \gg \omega_1} \approx \log |j \frac{\omega}{\omega_1}| = \log \omega - \log |\omega_1| \quad (7.34)$$

Nagib asimptotičkog pravca koji predstavlja član $\log |1 + j \frac{\omega}{\omega_1}|$, za $\omega \gg \omega_1$ izlazi:

$$\frac{d}{d(\log \omega)} (\log \omega - \log |\omega_1|) = 1 \quad (7.35)$$

Na Sl. 7.1. prikazana su oba pravca: za područje $\omega \ll \omega_1$ i za područje $\omega \gg \omega_1$. To su asimptote koje se sijeku u točki $\omega = |\omega_1|$, a koja se naziva *točka loma*.



Sl. 7.1. Bodeov amplitudni dijagram člana $1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$

U toj točki se s asimptotičkim prikazom pravi najveća pogreška u odnosu na stvarno stanje. Prema asimptotičkom prikazu na Sl. 7.1. vrijednost amplitude u točki loma iznosi nula, a stvarna vrijednost amplitude u toj točki jest:

$$\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right|_{\omega=\omega_1} = \log \sqrt{1+1} = \frac{1}{2} \log 2 = 0,15 \quad (7.36)$$

Prema tome, pogreška asimptotičkog prikaza u točki loma iznosi 0,15.

U najvećem broju slučajeva u inženjerskoj praksi asimptotički Bodeov dijagram amplitude zadovoljava. Međutim, ako radi specifične naravi problema nismo u mogućnosti tolerirati pogrešku koju unosi asimptotički dijagram u području oko točke loma, vrlo se jednostavno ta pogreška može korigirati, kako je učinjeno na Sl. 7.1.

Treći član u izrazu (7.28) glasi:

$$- \log |j\omega| = - \log \omega \quad (7.37)$$

Nagib ovog člana prema apscisnoj osi iznosi:

$$\frac{d (- \log \omega)}{d (\log \omega)} = - 1 \quad (7.38)$$

Ovo je pravac koji s nagibom - 1 siječe apscisnu os u točki:

$$- \log \omega = 0 \quad ,$$

odnosno na frekvenciji $\omega = 1$.

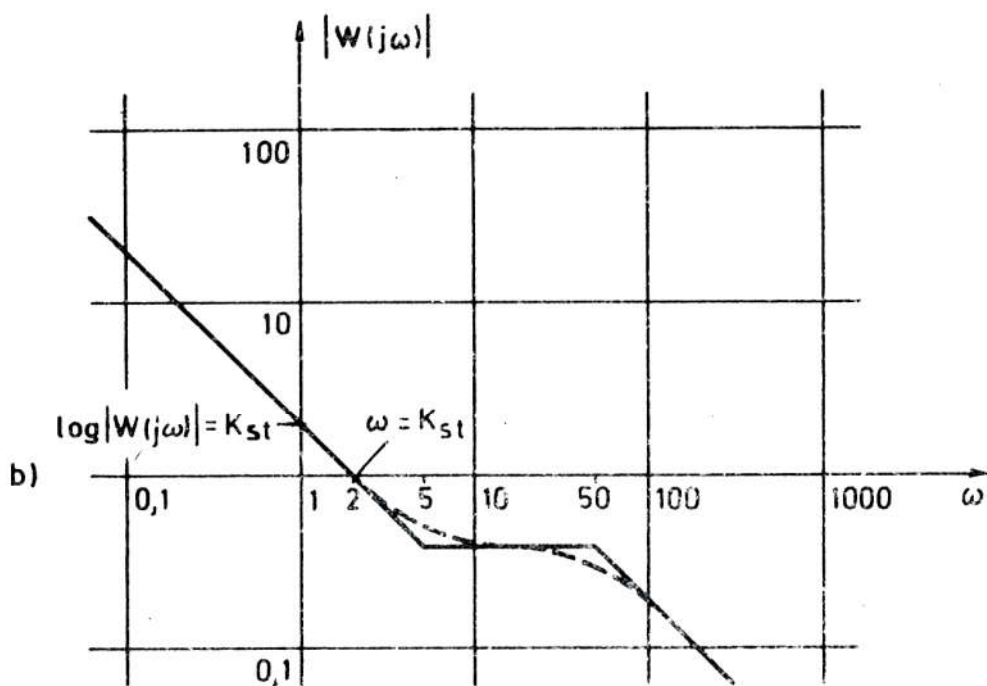
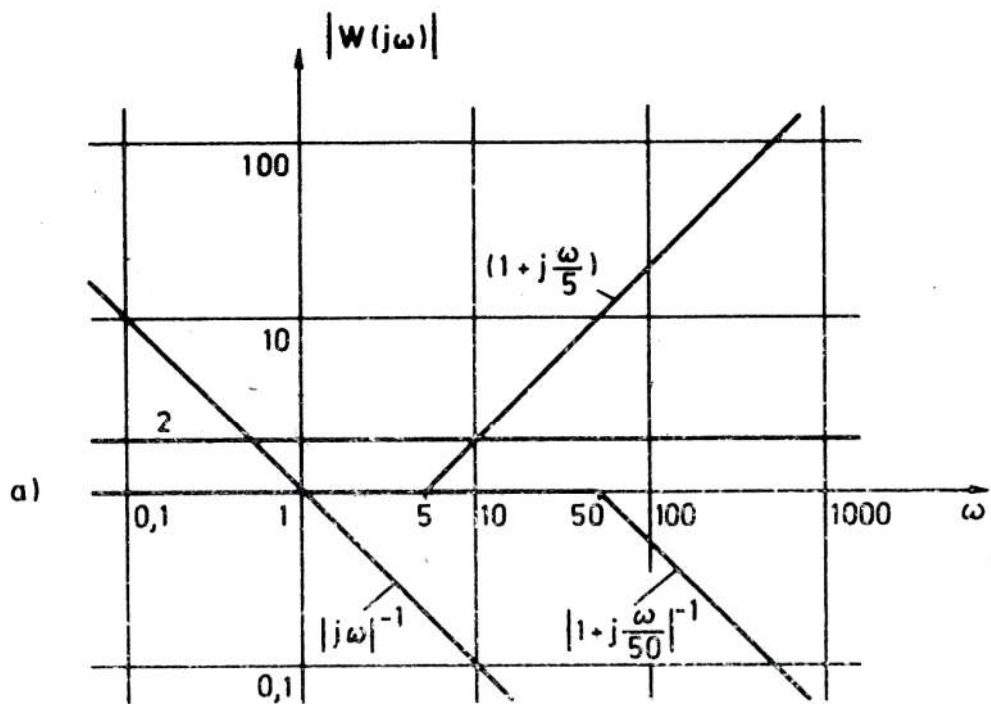
Četvrti član u izrazu (7.28) glasi:

$$- \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right| \quad (7.39)$$

Ovaj se član strukturalno razlikuje od člana u izrazu (7.30) samo po predznaku. Lako se možemo uvjeriti da će za $\omega_1 = \omega_2$ njegov asimptotički dijagram biti zrcalna slika izraza (7.30) na apscisnoj osi, tj. da im se vrijednosti za područje $\omega \ll \omega_1$ podudaraju, a za područje $\omega \gg \omega_1$ nagibi su im jednaki samo s obrnutim predznakom.

Poznavajući način crtanja svih četiriju članova prijenosne funkcije (7.26) možemo nacrtati Bodeov asimptotički amplitudni dijagram jedne specifične prijenosne funkcije iste strukture. Zadana prijenosna funkcija glasi:

$$W(j\omega) = \frac{2(1 + j \frac{\omega}{5})}{j \omega (1 + j \frac{\omega}{50})} \quad (7.40)$$



Sl. 7.2. Način crtanja amplitudnog Bodeovog dijagrama:

a) pojedinačno ucrtani članovi funkcije

$$W(j\omega) = \frac{2(1 + j\frac{\omega}{5})}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{50})} ; \text{ b) cjeloviti Bodeov dijagram}$$

Na Sl. 7.2. prikazani su na log-log papiru pojedinačni asimptotički dijagrami svih članova funkcije (7.40). Dijagram statičke osjetljivosti $K_{st} = 2,0$ predstavlja horizontalni pravac udaljen za $\log 2$ od horizontalne frekvencijske osi koja siječe ordinatnu os na visini $\log 1$.

Dijagram člana $|1 + j \frac{\omega}{5}|$ se sastoji od dva dijela. Prvi dio, za područje $\omega \ll 5$, prikazuje horizontalni pravac na frekvencijskoj osi, a proteže se od nižih frekvencija do točke $\log \omega = \log 5$. Drugi dio, za područje $\omega \gg 5$, je pravac koji izlazi iz točke loma $\log \omega = \log 5$, a prema frekvencijskoj osi stoji pod nagibom $+1$.

Dijagram trećeg člana $|j\omega|^{-1}$ predstavlja pravac koji pod nagibom -1 prema frekvencijskoj osi prolazi kroz točku $\log \omega = \log 1$.

Dijagram četvrtog člana $|1 + j \frac{\omega}{50}|^{-1}$, za područje $\omega \ll 50$ je do točke $\log \omega = \log 50$ predstavljen pravcem na frekvencijskoj osi, a za područje $\omega \gg 50$ pravcem koji izlazi iz točke $\log \omega = \log 50$, a prema frekvencijskoj osi stoji pod nagibom -1 . Cjeloviti Bodeov dijagram prikazan je na Sl. 7.2.b, a dobijen je zbrajanjem dijagrama pojedinačnih članova. Najprije je dijagram člana $|j\omega|^{-1}$ podignut za vrijednost člana $K_{st} = 2,0$. Dobijeni pravac s nagibom -1 , koji sada predstavlja dio ukupnog Bodeovog amplitudnog dijagrama funkcije $W(j\omega)$, slijedimo do frekvencije loma $\omega_1 = 5$ člana $|1 - j \frac{\omega}{5}|$. U toj točki član $|1 - j \frac{\omega}{5}|$ dobija nagib $+1$, pa je ukupni dijagram iza te točke predstavljen horizontalnim pravcem. Taj dio ukupnog dijagrama ostaje horizontalan do slijedeće točke loma $\omega_2 = 50$ člana $|1 - j \frac{\omega}{50}|^{-1}$. Od te točke ukupni dijagram poprima nagib -1 člana $|1 - j \frac{\omega}{50}|^{-1}$.

Da bi se pokazala minimalna pogreška, koju čini Bodeov dijagram u odnosu na izračunanu funkciju, na Sl. 7.2.b je crtkanim linijama naznačen točan dijagram. Vidi se da se on potpuno podudara s asimptotičkim dijagramom, osim u okolini frekvencije loma.

Ako prijenosna funkcija sadrži konjugirano kompleksne polove, njihov se dijagram jednostavno zbraja s dijagramima ostalih članova. Zbog veće složenosti taj ćemo dijagram posebno izvesti.

Uzmimo da se prijenosna funkcija $W(s)$ sastoji od jednog para konjugirano kompleksnih polova:

$$W(s) = G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad (7.41)$$

Zamjenom $s = j\omega$ dobije se:

$$|G_p(j\omega)| = \frac{1}{\left| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right|} \quad (7.42)$$

Za područje $\omega \ll \omega_n$ jedinica u nazivniku postaje dominantna, pa je stoga:

$$\log |G_p(j\omega)| \approx -\log 1 = 0 \quad (7.43)$$

Za područje $\omega \gg \omega_n$ dominantan postaje kvadratični član realnog dijela nazivnika, pa je stoga:

$$\log |G_p(j\omega)| \approx -\log \left| \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right| = -2 \log \omega + 2 \log |\omega_n| ,$$

a nagib tog dijela je

$$\frac{d (-2 \log \omega + 2 \log |\omega_n|)}{d (\log \omega)} = -2 \quad (7.44)$$

Iz učinjenog razmatranja proizlazi da se konjugirano kompleksni par u asimptotičkom Bodeovom dijagramu prikazuje s dva asimptotička pravca, od kojih jedan leži u frekvencijskoj osi od nižih frekvencija do točke loma $\omega = \omega_n$, a drugi izlazi iz točke loma pod nagibom -2 prema frekvencijskoj osi. Takav asimptotički dijagram prikazan je na Sl. 7.3. u normaliziranom obliku tj. na apscisi je umjesto ω nanešeno $\frac{\omega}{\omega_n}$.

Iz izvoda proizlazi da stupanj prigušenja ζ nigdje nije utjecao na crtanje asimptotičkog dijagrama. Međutim, on znatno utječe na pogrešku koja se u točki loma čini s asimptotičkim dijagramom. Iz rješenja jednačbe:

$$\left. \frac{d |G(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{\max}} = 0 \quad (7.45)$$

gdje je

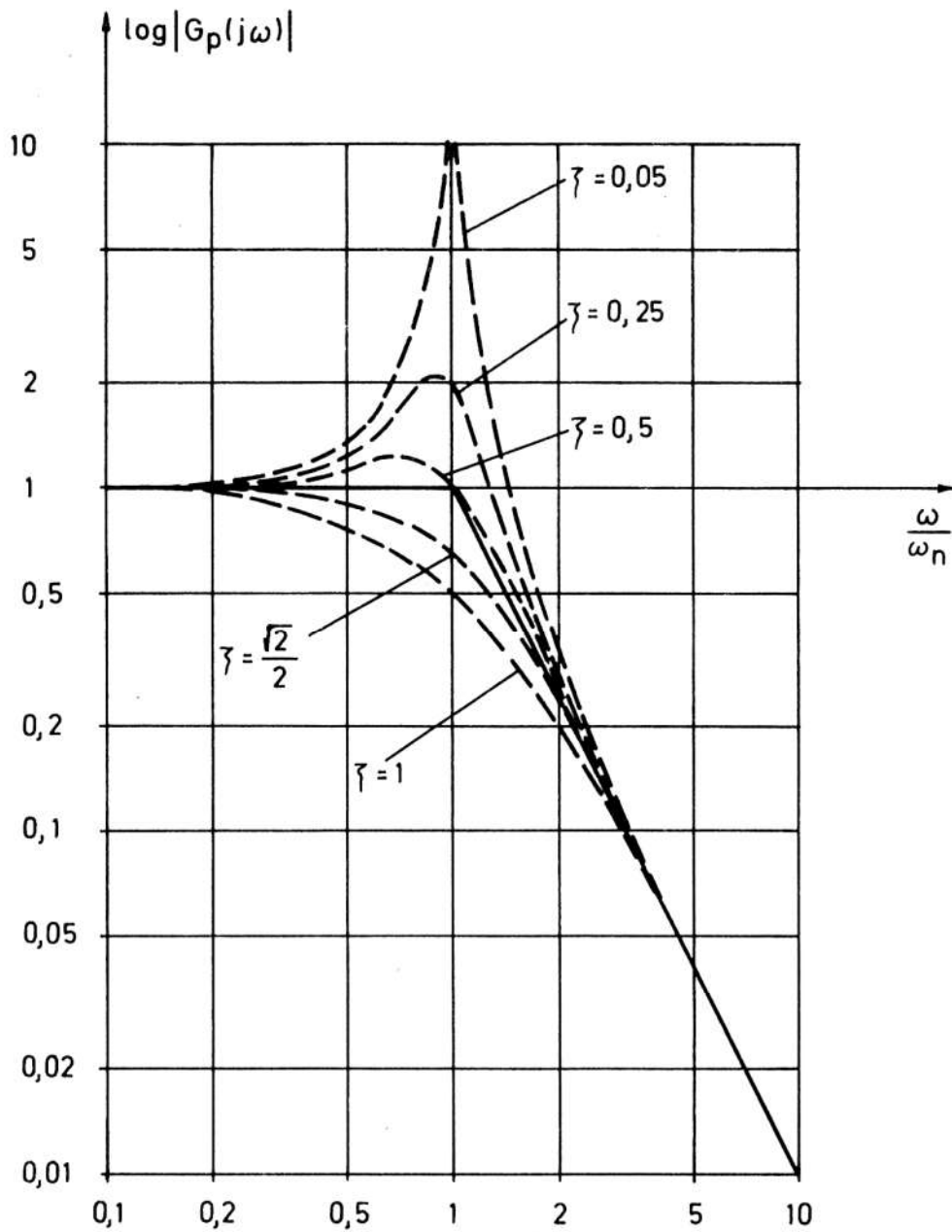
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n}},$$

izlazi da se maksimum amplitude frekvencijskog odziva konjugirano kompleksnog para polova nalazi na frekvenciji:

$$\omega_{\max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (7.46)$$

Točnije rečeno, funkcija ima maksimum samo za $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, a nadje ga se tako da se u izrazu (7.42) umjesto ω uvrsti $\omega_{\max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ pa se dobije:

$$G_p(j\omega_{\max}) = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{za} \quad \zeta \leq 0,707 \quad (7.47)$$



Sl. 7.3. Aproximacijski amplitudni dijagram i nekoliko točnih amplitudnih dijagrama za određene vrijednosti ζ konjugirano kompleksnog para polova

Ovdje je vrijedno uočiti da vremenski odziv ima nadvišenje kadgod je $\zeta < 1$, dok frekvencijski odziv ima nadvišenje tek za $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$. Na frekvenciji $\omega = \omega_n$ vrijednost amplitude iznosi:

$$|G_p(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta} \quad (7.48)$$

Za $\zeta = 1$ sustav ima dva jednaka realna pola, a asimptotički dijagram se podudara sa zbrojem dvaju pojedinačnih dijagrama jednakih polova. Na Sl. 7.3. crtkanim linijama označeni su točni frekvencijski dijagrami za neke vrijednosti ζ . Sa slike se vidi da je za $0,5 < \zeta < 1$ aproksimacija s asimptotičkim dijagramom bolja nego za realne polove. To je za inženjersku praksu posebno važno, jer se vrijednosti $\zeta < 0,5$ rijetko primijenjuju.

Konjugirano kompleksni par nula u Bodeovom dijagramu je predstavljen zrcalnom slikom na frekvencijskoj osi konjugirano kompleksnog para polova, pa se stoga na njemu nećemo ni zadržavati.

Amplitudni Bodeov dijagram često se primijenjuje i za kombinirano grafičko-analitičko izračunavanje izvjesnih parametra. Rezultati dobijeni na taj način točniji su od čisto grafičkih, a postupak je brži od analitičkog. Ilustrirajmo to na jednom primjeru gdje je zadana prijenosna funkcija petlje, a traži se kritična frekvencija amplitude, tj. frekvencija u kojoj amplituda prijenosne funkcije poprima jediničnu vrijednost. Zadana funkcija glasi:

$$W(s) = K G_p(s) H_{eq}(s) = \frac{5}{s(1+s)}$$

Na Bodeovom dijagramu tražena frekvencija se nalazi na mjestu gdje dijagram siječe frekvencijsku os. Točnu vrijednost je teško očitati s logaritamske ljestice, ali ako se postavi relacija Bodeovog dijagrama za područje $\omega \gg 1$, koja glasi:

$$|K G_p(j\omega) H_{eq}(j\omega)| = \frac{5}{\omega^2}$$

za jediničnu amplitudu vrijedi relacija:

$$\frac{5}{\omega^2} = 1 \quad ,$$

a odatle:

$$\omega_I = \sqrt{5} = 2,24$$

Analitičkim postupkom, koji je čak i u ovom jednostavnom primjeru mnogo dulji, točna vrijednost izlazi:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{101}}{2}} = 2,13 \quad ,$$

što daje pogrešku od svega 5,16%.

Poznavajući svojstva svakog pojedinog člana, u inženjerskoj praksi se primjenjuje jedan neposredniji način crtanja amplitudnog Bodeovog dijagrama. U tom slučaju se ne razdvajaju pojedini članovi, nego se odmah pristupa crtanju cjelokupne prijenosne funkcije. Ovdje navodimo taj postupak, a može ga se u potpunosti pratiti na Sl. 7.2.b. Poslije supstitucije $s = j\omega$ svi članovi prijenosne funkcije teže prema nuli kad s teži prema nuli, osim člana $K_{st}/j\omega$. U slučaju funkcije (7.27) jednažba glasi:

$$W(j\omega) = \frac{K_{st}}{j\omega} \quad \text{za } \omega \rightarrow 0 \quad ,$$

a nakon logaritmiranja:

$$\log |W(j\omega)| = \log \left| \frac{K_{st}}{j\omega} \right|$$

To je pravac nagiba:

$$\frac{d \left| \log \frac{K_{st}}{j\omega} \right|}{d \log \omega} = -1 ,$$

koji za $|W(j\omega)| = 1$ odnosno $\log |W(j\omega)| = 0$ siječe apscisnu os u točki $\omega = K_{st}$, a za $\omega = 1$ vrijednost ordinate mu je $|W(j\omega)| = K_{st}$. Crta ga se tako da se povuče pravac kroz točku na apscisi vrijednosti K_{st} i kroz točku na ordinati iste vrijednosti. Zatim se po rastućem redoslijedu poredaju sve frekvencije loma i po tom redoslijedu se ucrtavaju pojedini članovi.

Kod prijenosne funkcije (7.40) crtanje ide ovim redom: nakon ucrtavanja pravca kroz točku $K_{st} = 2$ na apscisi i na ordinati, poredaju se lomne frekvencije po rastućem redoslijedu i dobiju se $\omega_1 = 5$ i $\omega_2 = 50$. Zatim se crta član $(1 + j \frac{\omega}{5})$ koji ima najnižu lomnu frekvenciju $\omega_1 = 5$. Znamo da je to član kojeg asimptota ispod frekvencije loma leži u apscisnoj osi, a iznad te frekvencije je prema toj osi nagnuta pod pozitivnim jediničnim nagibom. Budući da je vrijednost ovog člana do frekvencije loma $\omega_1 = 5$ jednaka nuli, ukupni amplitudni Bodeov dijagram do te točke će predstavljati član $2/j\omega$, koji ima negativan jedinični nagib. Od te točke do slijedeće točke loma negativni jedinični nagib člana $2/j\omega$, i pozitivni jedinični nagib člana $(1 + j \frac{\omega}{5})$ se poništavaju, pa ukupni amplitudni dijagram predstavlja pravac nultog nagiba.

Slijedeća lomna frekvencija je $\omega_2 = 50$ člana $(1 + j \frac{\omega}{50})^{-1}$. Asimptota tog člana leži u apscisnoj osi do svoje lomne frekvencije, a od te frekvencije je pod negativnim jediničnim nagibom nagnuta prema toj osi. Stoga do točke $\omega_2 = 50$ ovaj član ne utječe na ukupni dijagram, a od te točke unosi negativni jedinični nagib. Budući da je ukupni dijagram od točke $\omega_1 = 5$ do točke $\omega_2 = 50$ bio pravac nultog nagiba, od točke $\omega_2 = 50$ to će biti pravac negativnog jediničnog nagiba.

S tim je crtanje amplitudnog Bodeovog dijagrama funkcije (7.40) završeno. Kad bi funkcija imala još članova s višim frekvencijama loma, crtanje bi se na isti način nastavilo.

Aproksimacija faznog dijagrama. Za crtanje faznog dijagrama postoji nekoliko prihvatljivih aproksimacijskih metoda, ali odmah možemo reći da ni jedna od njih nije tako dobra kao što je upravo opisana asimptotička metoda prikazivanja amplitudnog dijagrama.

Krenimo od relacije:

$$G_p(j\omega) = K_{st} \frac{j\omega}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{\omega}{\omega_2})^2} \quad (7.49)$$

Argument funkcije frekvencijskog odziva općenito je diferencija argumenta brojnika i nazivnika, pa je stoga:

$$\arg G_p(j\omega) = \arg |K_{st}j\omega| - \arg |(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{\omega}{\omega_2})^2| \quad (7.50)$$

Računanje argumenta za svaku pojedinu frekvenciju i ucrtavanje točaka u dijagram je trivijalno, ali oduzima suviše mnogo vremena. Skraćeni postupci su obično teorijski složeniji, ali, s druge strane, brži su pa stoga i ekonomičniji.

Pogledajmo jedan od način crtanja faznog dijagrama na primjeru jednadžbe (7.50). Svaki član se može promatrati kao kompleksan broj, koji se sastoji od realnog i imaginarnog dijela, pa se stoga argument svakog pojedinog člana može izraziti relacijom:

$$\arg (Re + j Im) = \arctg \frac{Im}{Re} \quad , \quad (7.51)$$

gdje je Re realni dio, a Im imaginarni dio svakog pojedinog člana. Na temelju toga argument K_{st} je nula ako je K_{st} pozitivan,

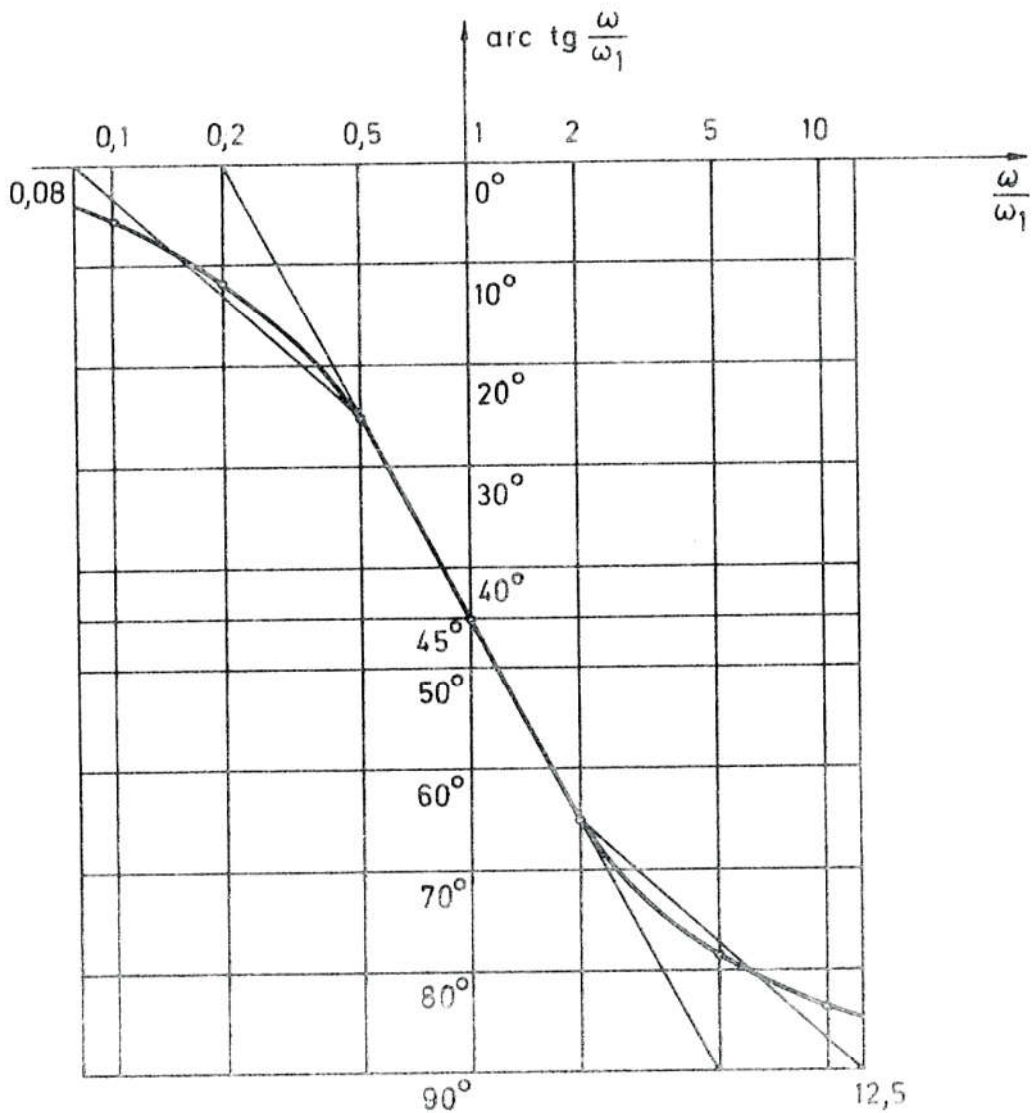
i Π ako je K_{st} negativan.

Argument člana $(j\omega)$ prema jednažbi (7.51) iznosi:

$$\arg (Re + j Im) = \arctg \frac{Im}{\phi} = \arctg \infty = \frac{\Pi}{2} \quad (7.52)$$

Argument člana s realnim polom koji nije u ishodištu iznosi:

$$\arg (1 + j \frac{\omega}{\omega_1})^{-1} = \arctg \frac{\omega}{\omega_1} \quad (7.52)$$



Sl. 7.4. Pravčasta aproksimacija faznog dijagrama realnog pola

Na Sl. 7.4. nacrtan je točni i aproksimacijski pravčasti fazni dijagram člana $(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})^{-1}$, iz koje se vidi:

$$1. \quad \arg (1 + j \frac{\omega}{\omega_1})^{-1} \Big|_{\omega=\omega_1} = - \arctg 1 = -\frac{\pi}{4} ,$$

tj. da argument u točki $\omega = \omega_1$ iznosi $-\frac{\pi}{4}$

2. Da je nagib dijagrama u okolini točke loma konstantan i iznosi 45° na pola dekade, a može ga se nadomjestiti pravcem koji ide od 0° na frekvenciji $\omega = \frac{\omega_1}{5}$ do 90° na frekvenciji $\omega = 5\omega_1$. Taj pravac, koji ćemo nazvati *središnji pravac*, dobro aproksimira fazni dijagram za jednu oktavu više i jednu oktavu niže od točke loma,

$$\text{tj. od } \omega = \frac{\omega_1}{2} \quad \text{do} \quad \omega = 2\omega_1 .$$

3. Na frekvencijama $\omega \leq \frac{\omega_1}{2}$ ostatak faznog dijagrama se može aproksimirati pravcem koji ide od nula stupnjeva na frekvenciji $\omega = \frac{\omega_1}{12,5} = 0,08 \omega_1$, do frekvencije $\omega = \frac{\omega_1}{2} = 0,5 \omega_1$ na središnjem pravcu. Ovaj pravac ćemo nazvati *donji pravac*, jer aproksimira fazni dijagram u donjem frekvencijskom području u odnosu na frekvenciju loma ω_1 .
4. Na frekvencijama $\omega \geq 2\omega_1$ fazni dijagram se može aproksimirati pravcem koji ide od frekvencije $\omega = 2\omega_1$ na središnjem pravcu do 90° na frekvenciji $\omega = 12,5 \omega_1$. Ovaj pravac ćemo nazvati *gornji pravac*, jer aproksimira fazni dijagram u gornjem frekvencijskom području u odnosu na frekvenciju loma ω_1 .

5. Pogreška koja nastaje s pravčastom aproksimacijom u području od $\omega = \frac{\omega_1}{10}$ do $\omega = 10\omega_1$ je manja od 3° .

Argument kvadratičnog člana u nazivniku iznosi:

$$\arg \left[\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right]^{-1} = - 2 \arctan \frac{\omega}{\omega_2} \quad (7.53)$$

To je dvostruki kut člana $\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right)^{-1}$, što je i razumljivo, jer je kut umnoška kompleksnih brojeva jednaku zbroju kuteva množitelja. Iz toga se može izvući i općeniti zaključak da je kut člana na n -tu potenciju jednak n - tostrukom kutu osnovnog člana, tj.:

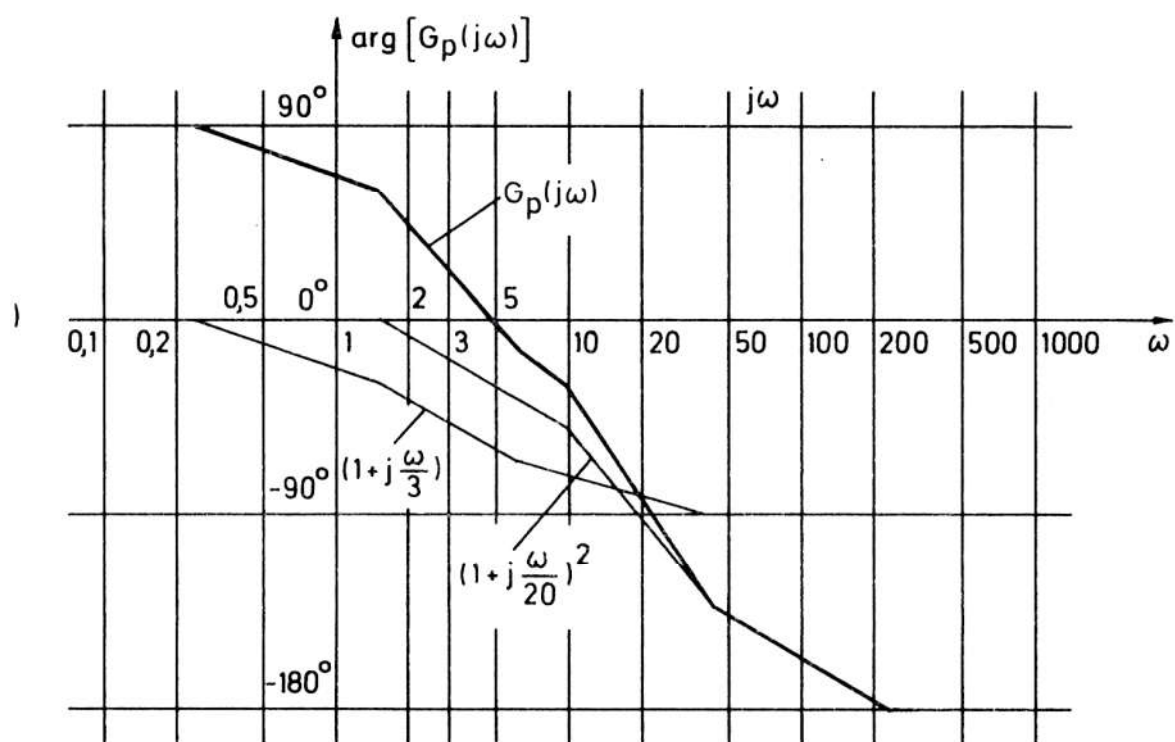
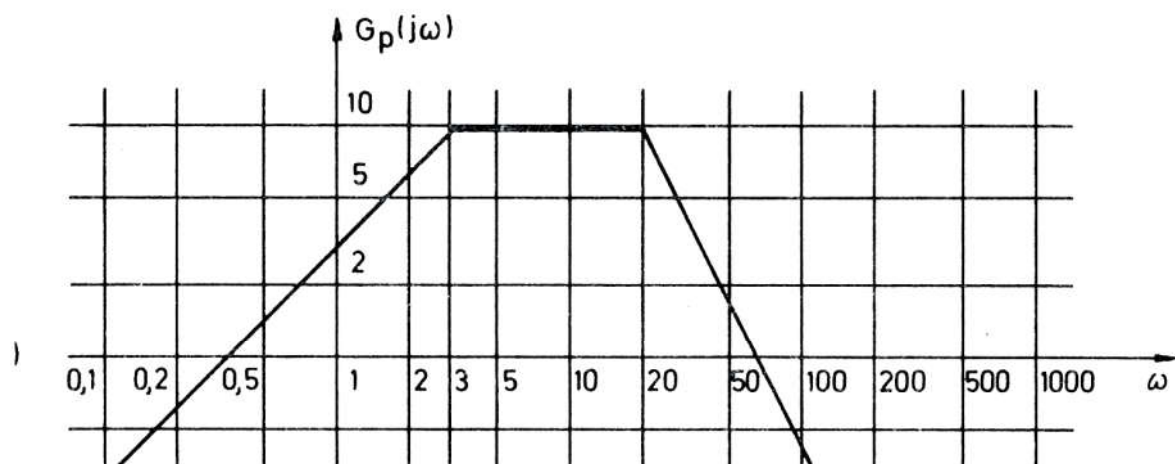
$$\arg \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right)^n = n \arctan \frac{\omega}{\omega_1} \quad (7.54)$$

Pridržavajući se svih iznešenih uputa, na Sl. 7.5. nacrtani su aproksimacijski dijagrami amplitude i faze za funkciju:

$$G_p(j\omega) = 3 \frac{j\omega}{\left(1 + j \frac{\omega}{3} \right) \left(1 + j \frac{\omega}{20} \right)^2} \quad (7.55)$$

Crtanje amplitudnog dijagrama je već proučeno, a ovdje služi samo ako referencija za crtanje faznog dijagrama.

Krenemo li od člana do člana, najprije zaključujemo da statička osjetljivost petlje $K_{st} = 3$ ne utječe na fazu. Drugi član je nula u ishodištu ($j\omega$) koja unosi konstantni fazni pomak na svim frekvencijama, veličine $\pi/2$. Treći član $\left(1 + j \frac{\omega}{3} \right)^{-1}$ aproksimiran je s tri pravca od kojih srednji na frekvenciji loma $\omega = 3$ prolazi kroz kut $\phi = 45^\circ$. Četvrti član $\left(1 + j \frac{\omega}{20} \right)^{-2}$ aproksimiran je također s tri pravca od kojih srednji na frekvenciji loma $\omega = 20$ prolazi kroz kut $\phi = 90^\circ$. Zbroj svih triju članova daje traženi fazni dijagram funkcije frekvencijskog odziva.



Sl. 7.5. a) Božev asimpotički amplitudni dijagram funkcije

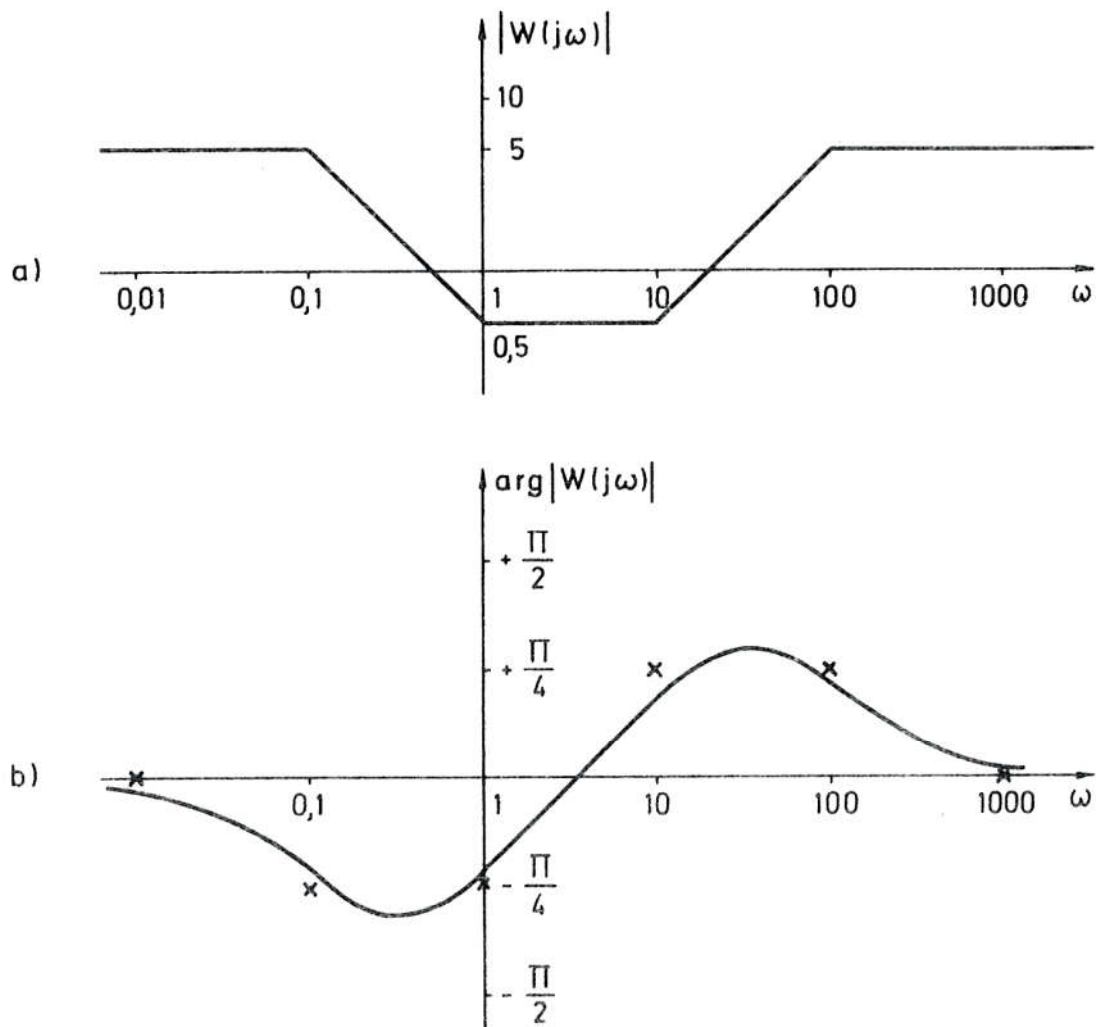
$$G_p(j\omega) = 3 \frac{j\omega}{(1 + j\frac{\omega}{3})(1 + j\frac{\omega}{20})^2} ;$$

b) pravčasti fazni dijagram iste funkcije

Druga aproksimacija faznog dijagrama (koja se naziva *Bodeova aproksimacija*, jer polazi od Bodeove matematičke obradbe) zasniva se na relaciji:

$$\arg G(j\omega) = \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (7.56.)$$

gdje α predstavlja prosječni kut Bodeovog asimptotičkog amplitudnog dijagrama na području koje se proteže po jednu dekadu s jedne i s druge strane frekvencije za koju se argument traži.



Sl. 7.6. Bodeovi dijagrami funkcije $W(s) = \frac{5(1+s)(1+s/10)}{(1+s/0.1)(1+s/100)}$

Ilustrirajmo to na funkciji:

$$W(s) = \frac{5(1+s)(1+\frac{s}{10})}{(1+\frac{s}{0,1})(1+\frac{s}{100})} \quad , \quad (7.57)$$

koje je Bodeov amplitudni dijagram prikazan na Sl. 7.6.a .

Odredimo najprije argument za frekvenciju $\omega = 0,01$. Sa Sl. 7.6.a vidi se, da kut amplitudnog Bodeovog dijagrama na području od $\frac{0,01}{10}$ do $0,01 \cdot 10$ ima vrijednost nula. Stoga prema jednadžbi (7.57):

$$\arg W(j 0,01) \approx \emptyset \frac{\pi}{2} = 0$$

Za frekvenciju $\omega = 0,1$ srednji nagib je $-\frac{1}{2}$, a argument je:

$$\arg W(j 0,1) \approx (-\frac{1}{2}) \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Na isti način su izračunane vrijednosti argumenta za frekvencije $\omega = 0,1$; 10 ; 100 i 1000 i vrijednosti unešene u Sl. 7.6.b . U usporedbi s točnim dijagramom argumenta, koji je na slici nacrtan vidi se da Bodeova aproksimacija faze daje dovoljno dobar kvalitativni uvid u ponašanje argumenata, a vrlo dobro joj je svojstvo što zahtijeva relativno malo vremena. Primjenljiva je, međjutim, samo u slučajevima kad su točke loma na frekvencijskoj osi udaljene najmanje za jednu dekadu.

Crtanje faznog dijagrama konjugirano kompleksnog para nešto je složenije, ali budući da se stupanj prigušenja $\zeta < 0,5$ rijetko primjenjuje, problem se u području $0,5 < \zeta < 1$ može relativno lako riješiti.

Već je spomenuto da je za $0,5 < \zeta < 1$ asimptotička aproksimacija amplitudnog dijagrama konjugirano kompleksnog para bolja od asimptotičke aproksimacije umnoška dvaju članova s realnim korijenima. Stoga vrijedi relacija:

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \\
 &= \frac{\frac{K}{\omega_n^2}}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \approx \frac{\frac{K}{\omega_n^2}}{(1 + \frac{s}{\omega_n})(1 + \frac{s}{\omega_n})} \text{ za } 0,5 < \zeta < 1 \quad (7.58)
 \end{aligned}$$

Odatle proizlazi da je:

$$\arg W(j\omega) \approx -2 \arctg \frac{\omega}{\omega_n} \quad (7.59)$$

za

$$\omega = \omega_n \quad \arg W(j\omega) = -2 \arctg 1 = -\frac{\pi}{2} \quad (7.60)$$

Taylorov red za $\arctg \frac{\omega}{\omega_n}$ uz $\omega < \omega_n$ glasi:

$$\arctg \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{1}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^5 - \dots, \quad (7.61)$$

a uz $\omega > \omega_n$:

$$\arctg \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^5 + \dots \quad (7.62)$$

Budući da oba ova reda naglo konvergiraju, red (7.61) se može aproksimirati s prvim članom, tako da za $\omega < \omega_n$ izlazi:

$$\arctg \frac{\omega}{\omega_n} \approx \frac{\omega}{\omega_n}, \quad (7.63)$$

a red (7.62) s prva dva člana tako da za $\omega > \omega_n$ izlazi:

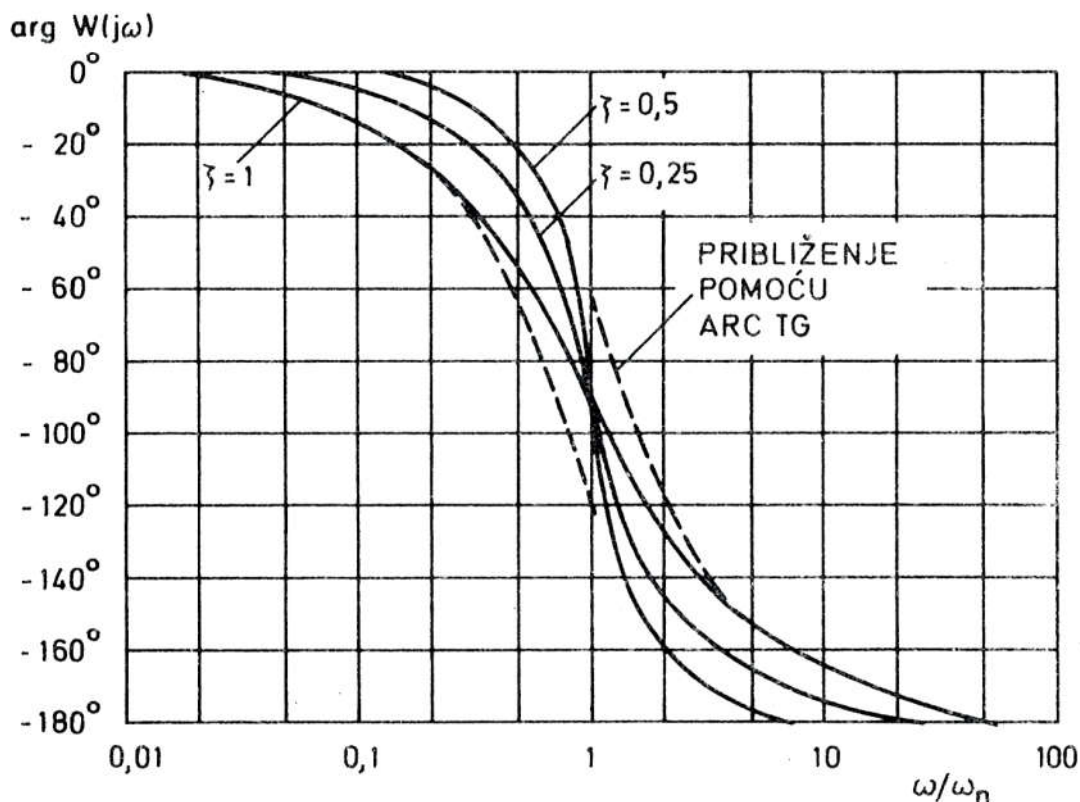
$$\arctan \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega} \quad (7.64)$$

Primjenom jednadžbi (7.63) i (7.64) na jednadžbu (7.59) izlazi:

$$\text{za } \omega < \omega_n \quad \arg W(j\omega) = -2 \frac{\omega}{\omega_n}, \quad (7.65)$$

$$\text{a za } \omega > \omega_n \quad \arg W(j\omega) = -2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) \quad (7.66)$$

Na Sl. 7.7. nacrtan je aproksimacijski fazni dijagram za konjugirano kompleksni par i tri točna dijagrama istog člana za $\zeta = 0,25$; $0,5$ i 1 . Očito je da se najbolje približenje postiže kad je $\zeta = 1$.



Sl. 7.7. Približni fazni dijagram konjugirano kompleksnog para dobijen s pomoću $\arctan \omega/\omega_n$ i točni fazni dijagram za $\zeta = 0,25$; $0,5$ i 1

7.4. DIJAGRAMI FREKVENCIJSKOG ODZIVA FUNKCIJE NEMINIMALNE FAZE

U svim dosadašnjim obradbama frekvencijskog odziva prešutno je pretpostavljeno da se radi o prijenosnim funkcijama kojih se singularne točke nalaze na lijevoj strani s ravnine. U tom slučaju, kao što je u svim dosad razmatranim slučajevima i pokazano, postoji jednoznačna ovisnost između amplitudnog i faznog dijagrama, tj. iz amplitudnog dijagrama slijedi točno određeni fazni dijagram. Ako funkcija ima singularnih točaka s desne strane s ravnine, ta se jednoznačna ovisnost gubi, tako da se fazni dijagram ne može dobiti neposredno iz amplitudnog dijagrama.

Pokažimo to na primjeru triju funkcija:

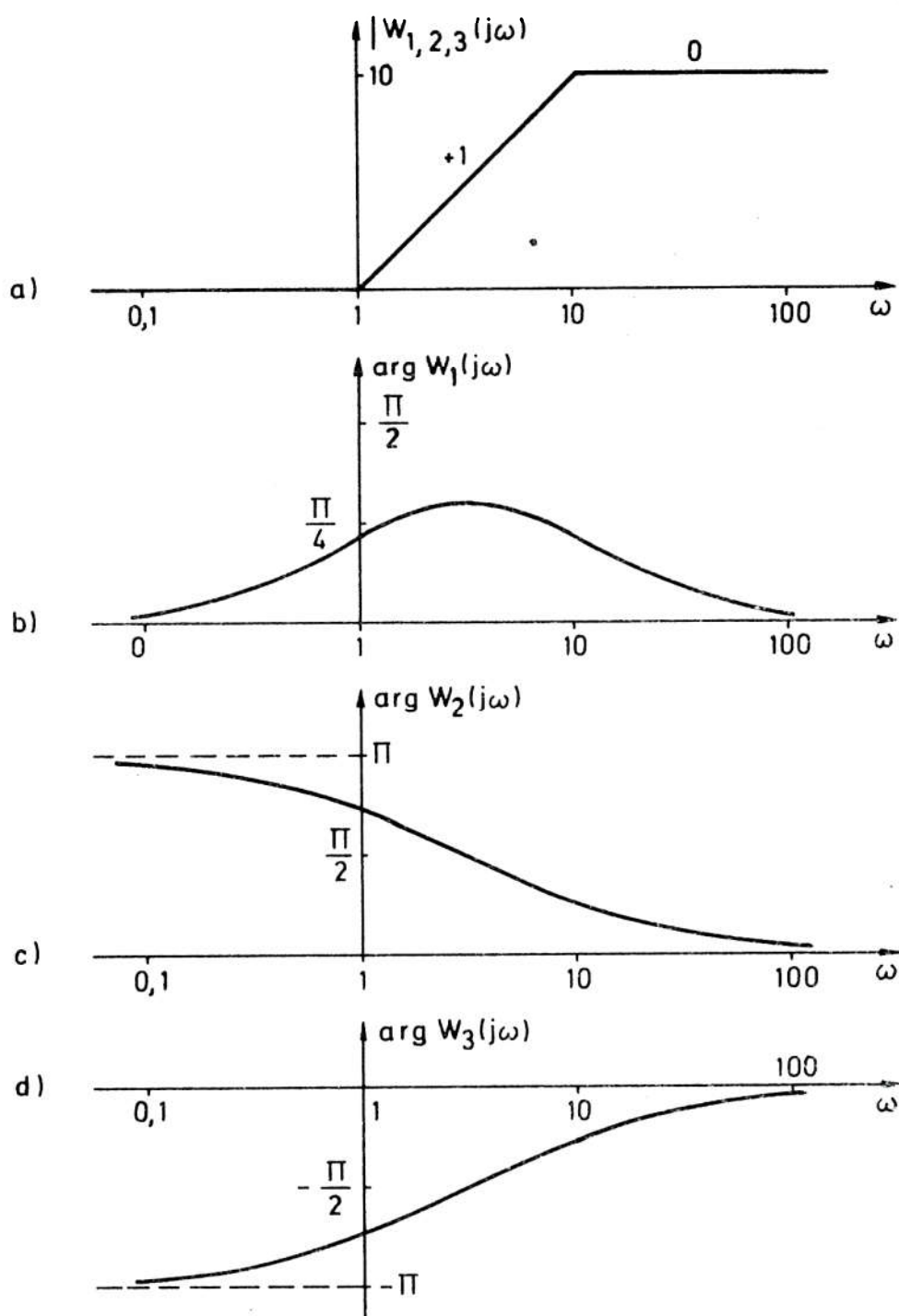
$$W_1(s) = \frac{10(s+1)}{s+10} = \frac{1 + \frac{s}{1}}{1 + \frac{s}{10}} \quad (7.67)$$

$$W_2(s) = \frac{10(s-1)}{s+10} = \frac{(1 - \frac{s}{1})}{1 + \frac{s}{10}} \quad (7.68)$$

$$W_3(s) = \frac{10(s+1)}{s-10} = \frac{-(1 + \frac{s}{1})}{1 - \frac{s}{10}} \quad (7.69)$$

Budući da se amplitudni dijagram sastoji od zbroja logaritama apsolutnih vrijednosti pojedinih članova, očito je da će taj dijagram biti jednak za sve tri funkcije, kako je pokazano na Sl. 7.8.a .

Na slikama 7.8.b, 7.8.c i 7.8.d na kojima su prikazani fazni dijagrami za funkcije W_1 , W_2 i W_3 respektivno, vidimo da se sva tri dijagrama međusobno razlikuju. Fazni dijagram sa Sl. 7.8.b, koji odgovara funkciji W_1 sa svim singularnim točkama na lijevoj strani s ravnine, ima najmanji fazni pomak, pa se stoga takve funkcije nazivaju *funkcije minimalne faze*.



Sl. 7.8. a) Bodeov amplitudni dijagram funkcija (7.67), (7.68) i (7.69);
 b) fazni dijagram funkcije (7.67); c) fazni dijagram funkcije
 (7.68); d) fazni dijagram funkcije (7.69)

Funkcije koje imaju nula na desnoj strani s ravnine poput funkcije W_2 nazivaju se *funkcije nulte neminimalne faze*, a funkcije koje imaju polove na desnoj strani s ravnine poput funkcije W_3 , nazivaju se *funkcije polne neminimalne faze*.

Vrijedno je naglasiti da i pojačanje K utječe na fazni status funkcije. Ako ima pozitivni predznak, njegov doprinos faznom pomaku je jednak nuli, ali ako mu je predznak negativan, njegov doprinos faznom pomaku je konstantan na svim frekvencijama u iznosu od 180° . Prema tome, funkcije s negativnim pojačanjem je *funkcija neminimalne faze pojačanja*.

Postavlja se pitanje: kako na što jednostavniji način doći do faznog dijagrama funkcije neminimalne faze? Ovdje ćemo iznijeti dva postupka. Jedan je s pomoću verzora, a drugi s pomoću *pseudo-minimalne faze*.

Postupak s pomoću verzora razmotrimo na funkciji:

$$W(j\omega) = \frac{K \prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{j=1}^n (j\omega - p_j)} \quad (7.70)$$

koje modul glasi:

$$M(j\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|K| \prod_{i=1}^m |j\omega - z_i|}{\prod_{j=1}^n |j\omega - p_j|} \quad (7.71)$$

a argument:

$$\arg W(j\omega) = \arg(K) + \sum \arg(j\omega - z_i) - \sum \arg(j\omega - p_j) \quad (7.72)$$

Faktori $(j\omega - z_i)$ i $(j\omega - p_j)$ su u s ravnini predloženi verzorima koji izlaze iz nula z_i , odnosno polova p_j , i završavaju u točkama ω_k na imaginarnoj osi.

Modul M_k na frekvenciji ω_k se prema jednadžbi (7.71) dobije dijeljenjem umnoška apsolutne vrijednosti pojačanja i dužine nultih verzora, a umnoškom dužina polnih verzora. Uvrštavanjem pozitivnih vrijednosti frekvencije od $\omega_k = 0$ do dovoljno velikih vrijednosti može se naći dovoljan broj vrijednosti modula M_k za crtanje amplitudnog dijagrama funkcije frekvencijskog odziva. Za crtanje *normaliziranog amplitudnog dijagrama* s ordinatom M_k/M_0 pojačanje se poništava, pa je za crtanje dijagrama dovoljno poznavati dužine verzora.

Argument na frekvenciji ω_k se prema jednadžbi (7.72) dobije tako da se od zbroja kutova nultih verzora, odbije zbroj kutova polnih verzora. U slučaju negativnog pojačanja dodaje se još 180° .

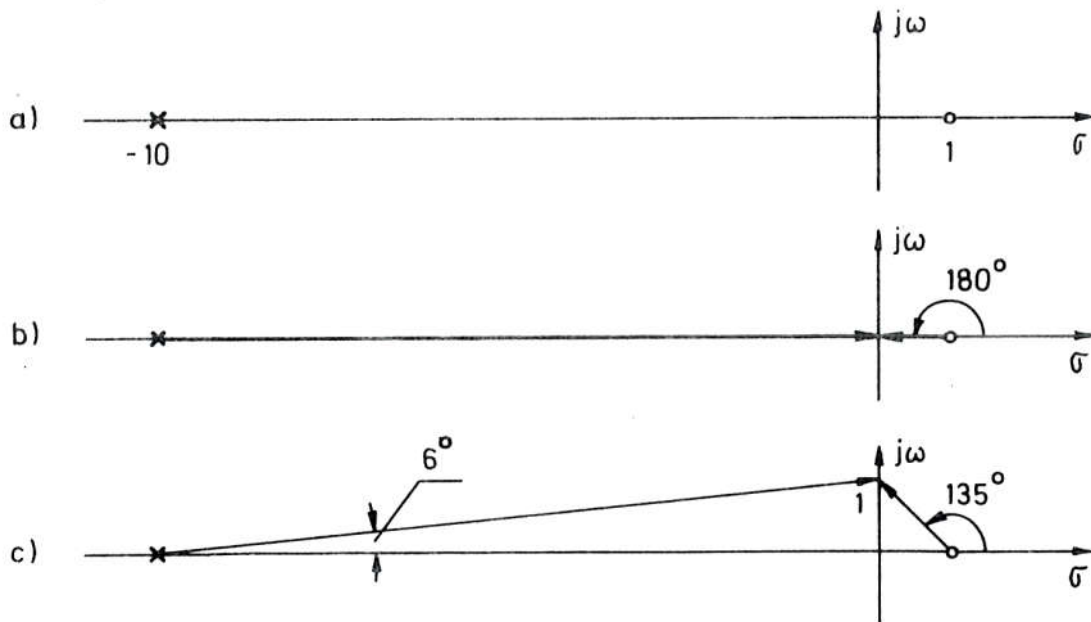
Ilustrirajmo taj postupak na funkciji:

$$W_2(j\omega) = \frac{10(j\omega - 1)}{j\omega + 10}$$

Budući da se dobijanje amplitudnog dijagrama s pomoću verzora u automatskoj regulaciji rijetko primjenjuje, jer je Bodeova aproksimacija ekonomičnija, na njemu se stoga nećemo ni zadržavati. Postupak dobijanja faznog dijagrama funkcije W_2 s pomoću verzora prikazan je na Sl. 7.9.

Na Sl. 7.9.a nacrtane su singularne točke funkcije $W_2(j\omega)$, a na slikama 7.9.b i 7.9.c verzori za $\omega = 0$ i $\omega = 1$ rad/s respektivno. Fazni kut, odnosno argument funkcije na frekvenciji $\omega = 0$, prema Sl. 7.9.b izlazi:

$$\arg W(j0) = 180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$$



Sl. 7.9. Prva faza postupka za dobijanje faznog dijagrama funkcije W_2 , iz jednačbe (7.68)

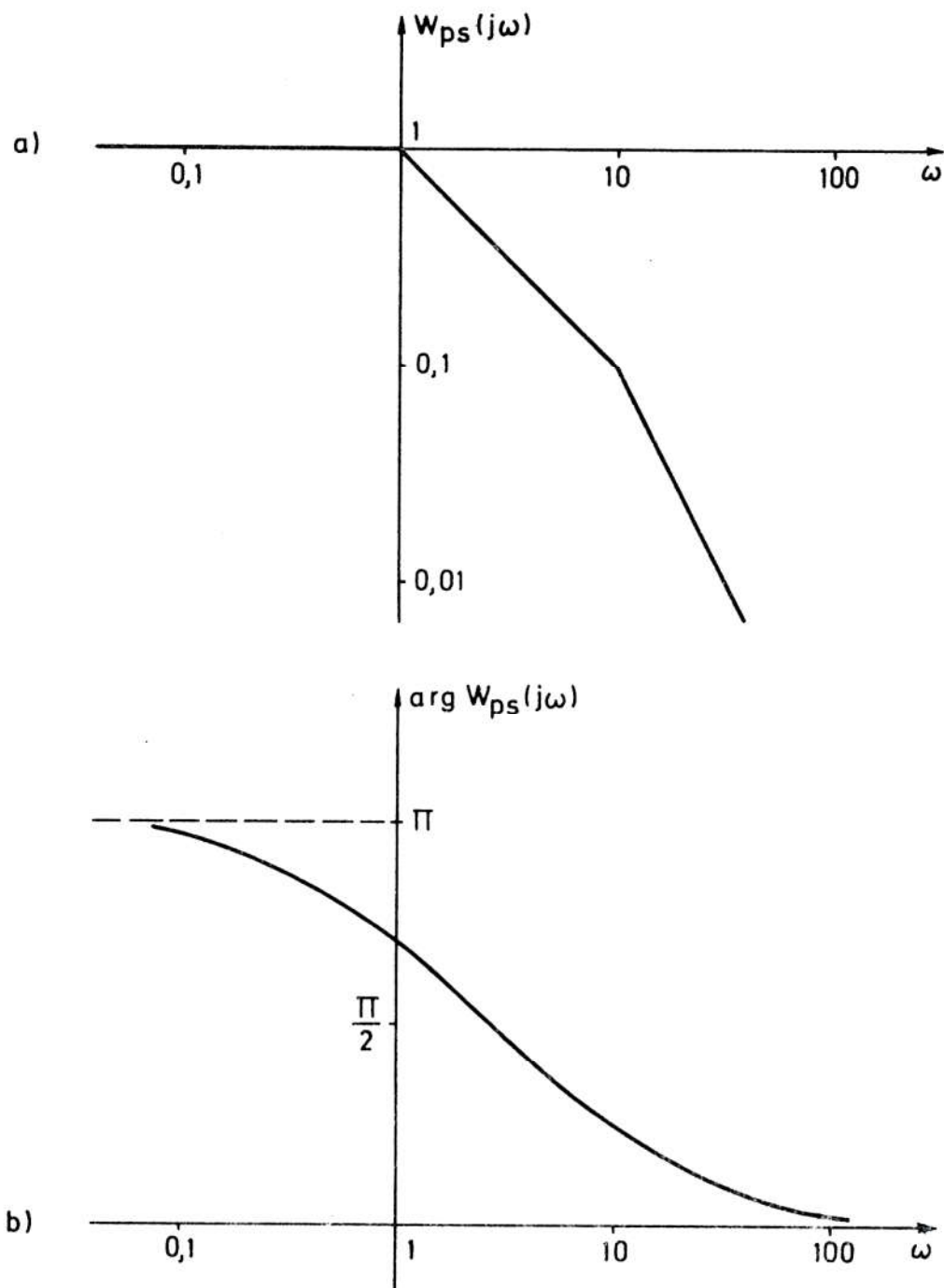
a na frekvenciji $\omega = 1$ prema Sl. 7.9.c izlazi:

$$\arg W(j1) = 135^\circ - 6^\circ = 129^\circ$$

Računajući tako za jednu po jednu frekvencijsku vrijednost dobije se fazni dijagram prikazan na Sl. 7.8.c.

Postupak s pomoću pseudominimalne faze polazi od Bodeovog amplitudnog dijagrama pseudominimalne faze. Taj se dijagram dobije tako da se u funkciji neminimalne faze zamijene nule s desne strane s ravnine sa simetrično postavljenim polovima na lijevoj strani s ravnine, a polovi s desne strane s ravnine sa simetrično postavljenim nulama na lijevoj strani s ravnine. Fazni dijagram dobijen iz takvog Bodeovog dijagrama pseudominimalne faze predstavlja fazni dijagram izvorne funkcije neminimalne faze.

Ilustrirajmo to na istoj funkciji koju pišemo u obliku:



Sl. 7.10. Amplitudni i fazni dijagram funkcije pseudominimalne faze, jednačba (7.73)

$$w_2(s) = \frac{-(1 - \frac{s}{1})}{1 + \frac{s}{10}}$$

Zamjenom nule u točki $s = +1$ sa simetrično postavljenim polom u točki $s = -1$ dobije se funkcija:

$$w_{ps}(s) = \frac{-1}{(1+s)(1+\frac{s}{10})} \quad (7.73)$$

Bodeov amplitudni dijagram funkcije pseudominimalne faze jednačbe (7.73) prikazan je na Sl. 7.10.a, a na Sl. 7.10.b, prikazan je pripadni fazni dijagram. Dodatak od 180° je zbog negativnog pojačanja. Usporedbom Sl. 7.10.b sa Sl. 7.8.c vidi se da su to dva identična fazna dijagrama, čime je dokazano da se s pomoću Bodeovog amplitudnog dijagrama funkcije pseudominimalne faze može dobiti fazni dijagram funkcije neminimalne faze.

7.5. IDENTIFIKACIJA DINAMIČKIH SUSTAVA S POMOĆU FREKVENCIJSKOG ODZIVA

U inženjerskoj praksi nije rijedak slučaj da treba izvršiti regulaciju sustava kojeg matematički opis nije poznat, ili još češće, kojeg je struktura matematičkog opisa poznata, ali vrijednosti parametara nisu poznate. Da bi se u takvom slučaju mogla provesti smisljena regulacija, potrebno je najprije *identificirati sustav*, pod čime se podrazumijeva odredjivanje prijenosne funkcije iz mjernih rezultata.

Pokazalo se da se funkcija frekvencijskog odziva, a posebno Bodeovi dijagrami, u postupku identifikacije mogu vrlo uspješno primijeniti. Za to postoje tri razloga. Prvi je što asimptotički pravci amplitudnog Bodeovog dijagrama mogu imati samo cjelobrojne nagibe, pa se stoga mjerenjima dobijeni amplitudni dijagram može s njima relativno lako aproksimirati. Drugi razlog jest,

što točke loma na amplitudnom dijagramu odgovaraju singularnim točkama prijenosne funkcije, pa ih se stoga iz asimptotičke aproksimacije neposredno može očitati. Treći je razlog što su amplitudni i fazni dijagram u slučaju funkcije minimalne fazne međusobno jednoznačno ovisni. To omogućuje da se ustanovi fazni status funkcije, kao i da se s pomoću faznog dijagrama provjeri točnost parametara dobijenih amplitudnim dijagramom.

Pogledajmo kako se odvija postupak identifikacije jedne prijenosne funkcije s realnim singularnim točkama s pomoću frekventijskog odziva i Bodeovih dijagrama. Zadan je oblik funkcije:

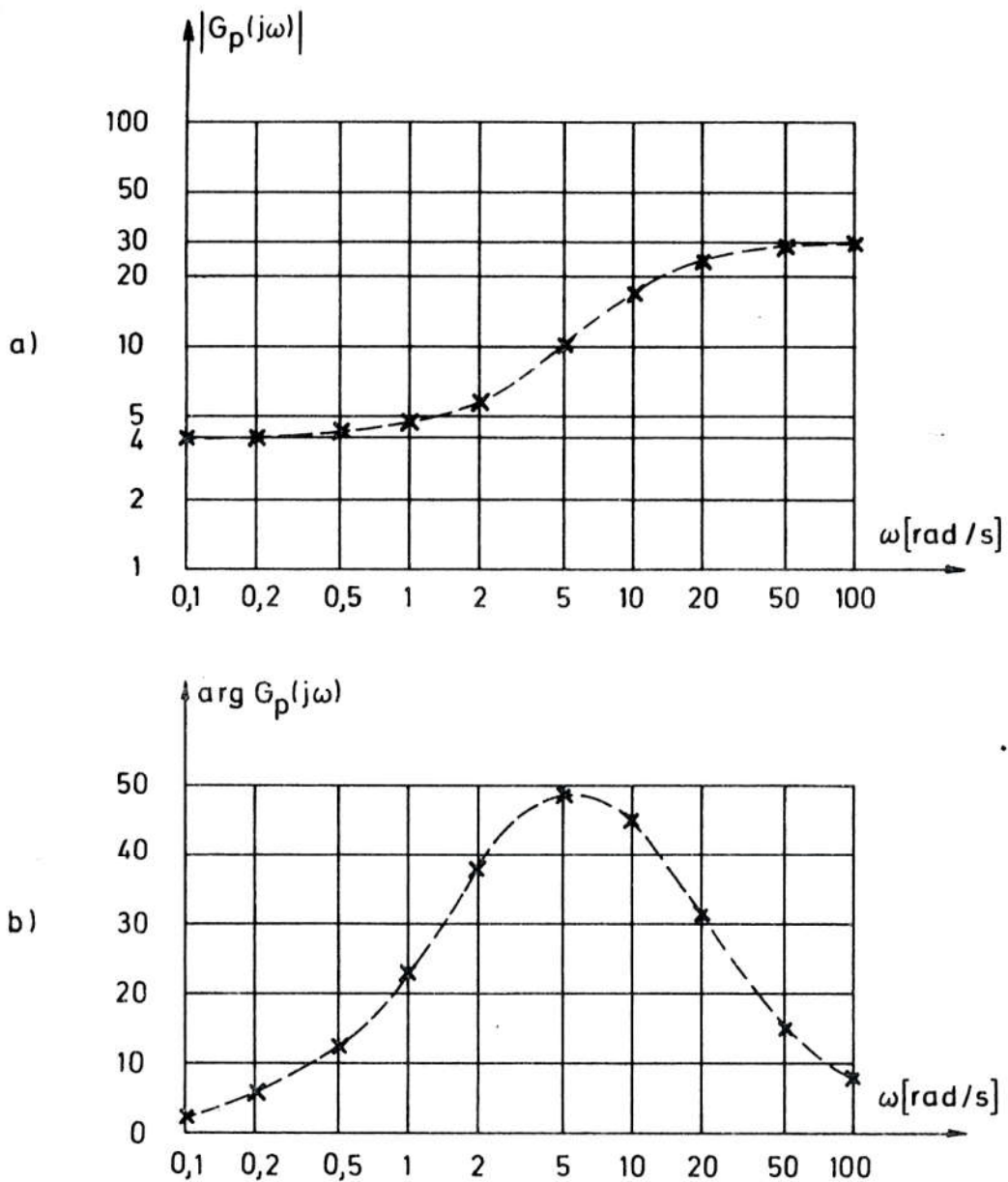
$$G_p(s) = \frac{K(s + \omega_1)}{s + \omega_2} = \frac{K \frac{\omega_1}{\omega_2} (1 + \frac{s}{\omega_1})}{1 + \frac{s}{\omega_2}}, \quad (7.74)$$

a traže se vrijednosti parametara K , ω_1 i ω_2 .

Da bi se došlo do traženih parametara, najprije treba izmjeriti amplitude i faze frekventijskog odziva zadanog sustava u području frekvencija gdje se očekuje da su smještene njegove singularne točke. Kod servouredjaja te se točke mogu očekivati u području od oko 0,15 do oko 15 rad/s. Uredjaj se postavi u normalne radne uvjete i na ulaz se dovede sinusna pobuda konstantne amplitude, a na izlazu se mjeri amplituda i faza odziva.

Na Sl. 7.11. prikazni su rezultati dobijeni mjerenjem na uredjaju kojeg je struktura prijenosne funkcije prikazana jednadžbom (7.74). Neposrednim uvidom u Sl. 7.10.b ustanovljujemo da se radi o sustavu minimalne faze, jer fazni dijagram počinje i završava u nuli, a to može biti samo u slučaju sustava minimalne faze. Postoji stoga jednoznačna ovisnost između amplitudnog i faznog dijagrama.

Na Sl. 7.11.a vidimo da je $\omega_1 < \omega_2$ tj. da je vrijednost nule manja od vrijednosti pola, jer je nagib asimptota na frekvencijama između lomnih točaka pozitivan. Usporedbom Sl. 7.11.a sa Sl. 7.11.b može se primijetiti da se točka infleksije na amplitudnom dijagramu i točka maksimalne fazne na faznom dijagramu nalaze na frekvenciji $\omega = 5$ rad/s.



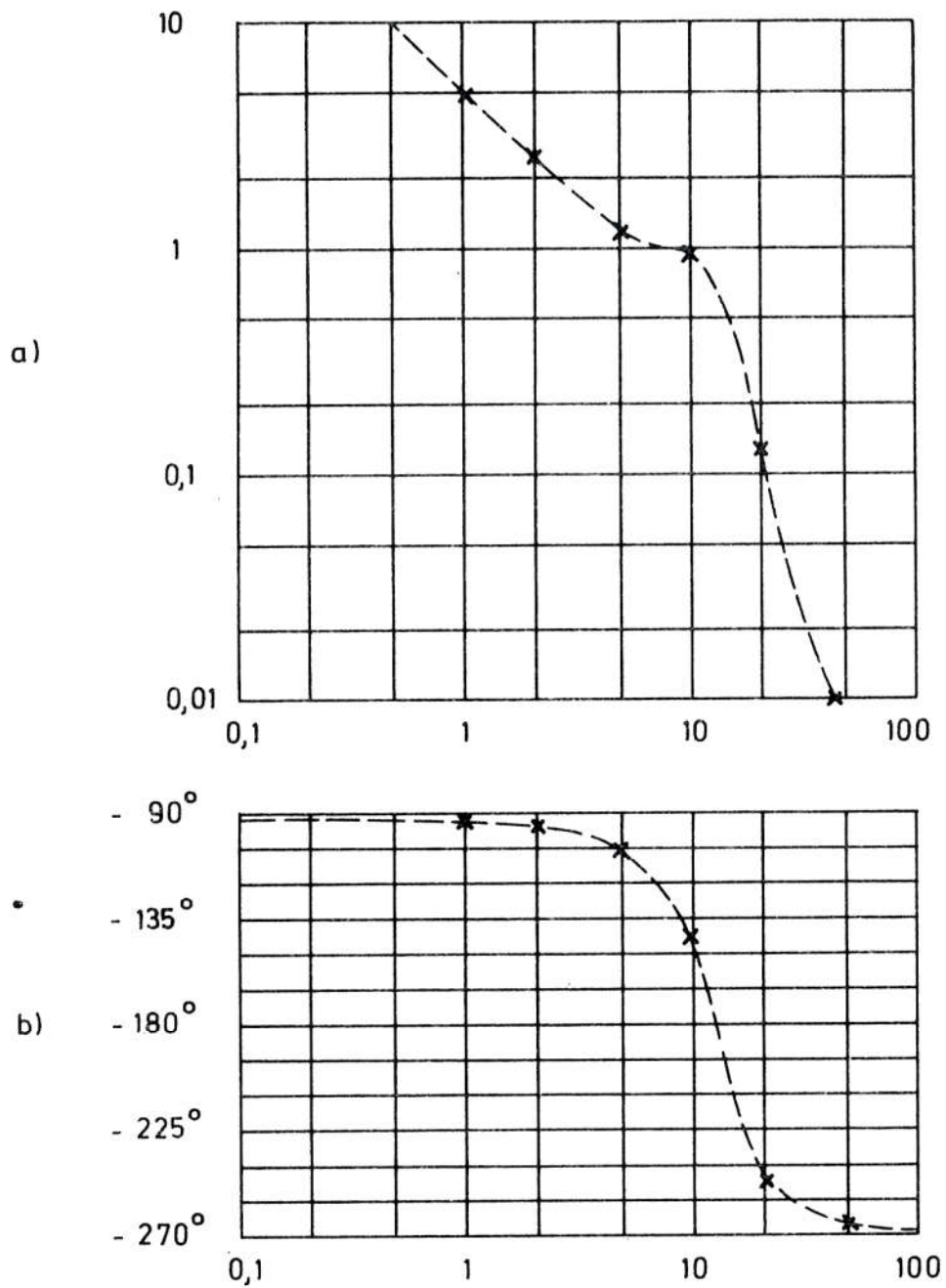
Sl. 7.11. Izmjerene vrijednosti frekvencijskog odziva sustava, jednadžbe (7.74)

Povuče li se na amplitudnom dijagramu kroz tu točku pravac nagiba $+1$ do presjeka s horizontalnim asimptotama na donjim i gornjim frekvencijama, dobije se da je $\omega_1 = 2$ rad/s a $\omega_2 = 15$ rad/s. Udaljenost horizontalne asimptote na donjim frekvencijama od apscisne osi predstavlja statičku osjetljivost koja pomnožena s $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ daje pojačanje $K = 30$. Na taj način smo došli do svih traženih parametara pa stoga prijenosna funkcija (7.74) u numeričkom obliku glasi:

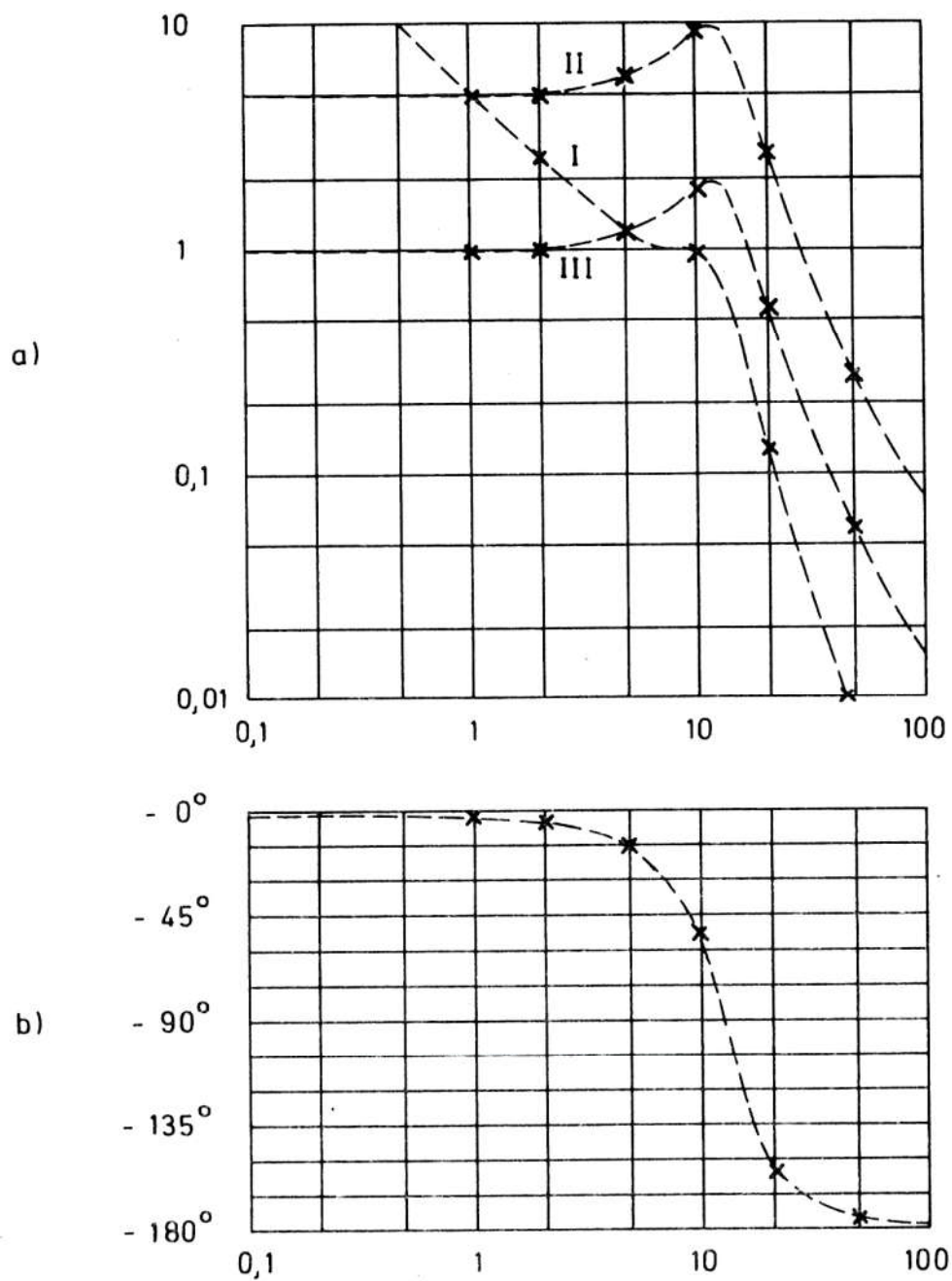
$$W(s) = \frac{4(1 + \frac{s}{2})}{s + \frac{s}{15}} = \frac{30(s + 2)}{s + 15} \quad (7.75)$$

Kod složenijih sustava, pogotovo ako su singularne točke jedna blizu druge, a još gore ako ni struktura prijenosne funkcije nije poznata, rješenje postaje sve manje očigledno. U takvim slučajevima preporučljivo je identifikaciju provesti po parcijalnim blokovima, kao npr. po blokovima između dvije susjedne varijable stanja. Na taj način se dobijaju sustavi nižeg reda na kojima se identifikacije najčešće može provesti bez problema. Identifikacija sustava s konjugirano kompleksnim parovima korijena u osnovi je složenija od identifikacije realnih korijena, jer asimptotička aproksimacija konjugirano kompleksnog para ne obuhvaća stupanj prigušenja ζ , a iz prijašnjih razmatranja je poznato da taj parametar može znatno utjecati na oblik odziva. U nastavku će taj postupak biti detaljno obradjen.

Uzmimo da treba identificirati osnovni sustav potpuno nepoznate strukture. Mjerenjem odziva na pojedine sinusne pobude različitih frekvencija dobijeni su rezultati nacrtani u dijagramima amplitude i faze na Sl. 7.12. Iz amplitudnog dijagrama vidimo da sustav na donjim frekvencijama ima nagib - 1, a na gornjim frekvencijama - 3. Iz toga zaključujemo da funkcija nepoznatog sustava posjeduje baren jedan integrator i da joj je broj polova za tri veći od broja nula. Iz faznog dijagrama vidimo da fazni kut na donjim frekvencijama iznosi - 90° , a na gornjim - 270° . Takav dijagram može predstavljati funkciju minimalne faze. Međutim; ako bi to bio sustav neminimalne faze, na desnoj strani s ravnine bi se trebao nalaziti jedan pol i jedna nula s pozitivnim realnim dijelom, a u tom slučaju bi sustav bio nestabilan pa se mjerenja ne bi mogla izvršiti na sustavu bez negativne povratne veze. Budući da je to učinjeno, znači da je sustav minimalne faze i da su dijagrami jednoznačno ovisni. Na temelju toga, usporedbom dijagrama zaključujemo da sustav može imati samo tri pola.



Sl. 7.12. Mjerni rezultati amplitude i faze izmjereni na sustavu nepoznate strukture



Sl. 7.13. a) Amplitudni prikaz izmjerenih rezultata (I), dijagram nakon uklanjanja integratora (II) i nakon uklanjanja integratora i pojačanja (III);
b) fazni dijagram nakon uklanjanja integratora

Slijedeći je korak da od ukupnog amplitudnog i faznog dijagrama odbijemo doprinos integratora. U amplitudnom dijagramu to radimo tako da kroz $\omega = 1$ na apscisnoj osi povučemo pravac negativnog jediničnog nagiba i točku po točku tog pravca dobijemo od izmjerene dijagrama. Rezultat te operacije dan je na Sl. 7.13.a, s koje se neposredno može očitati da je statička osjetljivost $K_{st} = 5$. Na faznom dijagramu se jednostavno odbije -90° , a rezultat je prikazan na Sl. 7.13.b. Bez obzira na vrijednost stupnja prigušenja ζ , točka infleksije faznog dijagrama konjugirano kompleksnog para polova nalazi se uvijek na 90° , a budući da frekvencija te točke odgovara frekvenciji loma, iz dijagrama očitavamo da je $\omega_n = 12$ rad/s.

Odbije li se od dijagrama II na Sl. 7.13.a još i statička osjetljivost $K_{st} = 5$, dobije se dijagram III koji predstavlja amplitudni dijagram konjugirano kompleksnog para polova. Iz tog dijagrama se može očitati da je vrijednost amplitude u točki loma $|G_p(s)| = 2$, a odatle na temelju jednadžbe (7.48) izlazi:

$$\zeta = \frac{1}{2|G_p(j\omega_n)|} = \frac{1}{2 \cdot 2} = 0,25$$

Time je identificiranje završeno, pa prijenosna funkcija zadanog sustava glasi:

$$G_p(s) = \frac{5}{s(1 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}) s + \frac{s^2}{\omega_n^2})} = \frac{5}{s(1 + \frac{0,5}{12} s + \frac{1}{144} s^2)}$$

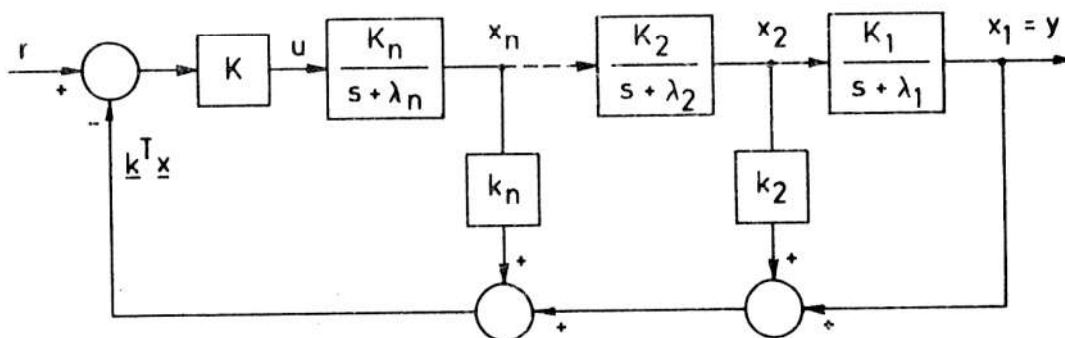
ili s polovima:

$$G_p(s) = \frac{720}{s(s^2 + 6s + 144)} \quad (7.76)$$

U dosadašnjim razmatranjima je prešutno uzeto da se parametri odziva na sinusnu pobudu mogu bez poteškoća mjeriti. Ali to, bez obzira na problem pretvornika, nije uvijek moguće. Uzmimo bilo koji sustav s integratorom u prijenosnoj funkciji, npr. istosmjerni servomotor. Izlazni kut motora obično se mjeri kružnim potenciometarskim pretvornikom, kojeg je kut u najboljem slučaju ograničen na 360° . A budući da takav sustav integrira pobudu, može se dogoditi da i najmanja amplituda sinusne pobude na dovoljno niskim frekvencijama dovede pretvornik u stanje zasićenja.

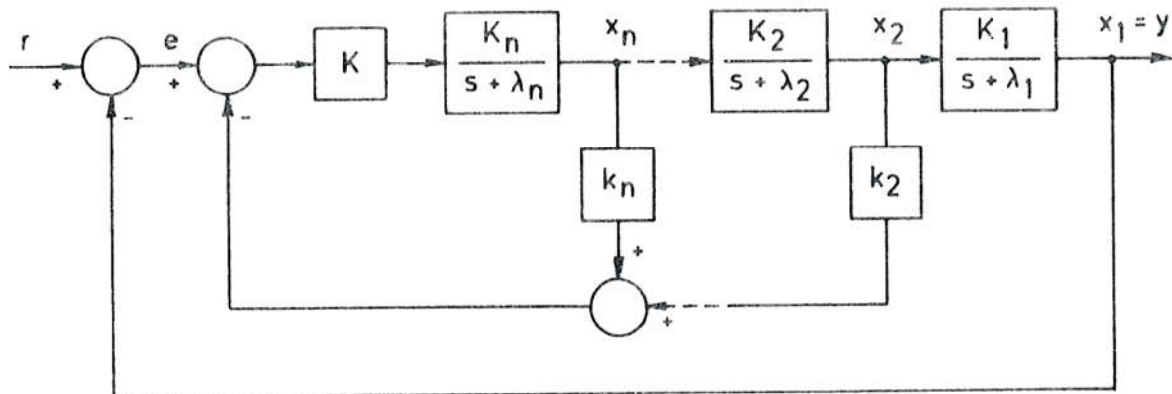
Te se poteškoće mogu izbjeći ako se mjerenje odziva provede na sustavu s negativnom povratnom vezom. U tom slučaju se na mjesto referentnog signala $r(t)$ dovodi sinusna pobuda, a mjeri se između $u(t)$ i pojedinih varijabli stanja.

Kod zatvaranja petlje povratne veze (u ovom slučaju za potrebe mjerenja frekvencijskog odziva) treba biti oprezan, jer se može dogoditi da sa zatvorenim petljom sustav postane nestabilan i da uslijed toga dodje do njegovog oštećenja. To se može izbjeći tako da se pri uključanju pojačanje K namjesti na nulu, a zatim ga se oprezno povećava toliko koliko je potrebno da bi se mogla obaviti mjerenja.



Sl. 7.14. Shema za mjerenje $H_{eq}(s)$ i $G_p(s) H_{eq}(s)$

Odredjivanje prijenosne funkcije $H_{eq}(s)$ i $[G_p(s) H_{eq}(s)]$ s pomoću mjerenja frekvencijskog odziva može se, u ovisnosti o naranavi sustava, obaviti takodjer s otvorenom i sa zatvorenom petljom. Pogledajmo to na shemi jednog općenitog sustava na Sl. 7.14. Mjerenje s otvorenom petljom se obavlja tako da se petlja otvori na mjestu $\underline{k}^T \underline{x}$ i na tom mjestu se mjeri odziv sinusne pobude koja se dovodi do upravljačkog signala u . Na taj način se dobije funkcija $[G_p(s) H_{eq}(s)]$. Ako se poznaje $G_p(s)$, iz $[G_p(s) H_{eq}(s)]$ lako se odredi $H_{eq}(s)$. Ako se petlja zatvori, pobuda se dovodi na ulaz r a mjerenje se obavlja na istim točkama.



Sl. 7.15. Shema za mjerenje $G_{eq}(s)$

Za odredjivanje prijenosne funkcije $G_p(s)$ shemu na Sl. 7.14. treba preurediti kako je pokazano na Sl. 7.15. To su u stvari identični blokovski dijagrami, samo prikazani na drugi način. Ulazno mjerenje se obavlja na točki e , a izlazno na točki y . Ako se radi s otvorenom petljom, pobuda se dovodi na y , a ako se radi sa zatvorenom petljom, pobuda se dovodi na r , ali ulazne i izlazne mjerna točka u oba slučaja ostaju iste, tj. e i y .

7.6. ZAKLJUČAK

Svojstva frekvencijskog i vremenskog odziva u analizi su komplementarna. Iako se frekvencijski odziv prikazuje s dva dijagrama, on je prikladniji za crtanje, jer postoje prikladne aproksimacijske metode s pomoću kojih se vrijeme crtanja može znatno skratiti. Posebno se to odnosi na amplitudni dijagram, za koji postoji vrlo dobra Bodeova aproksimacija.

Približne metode crtanja faznog dijagrama nisu tako dobre, ali u smišljenoj kombinaciji s Bodeovim amplitudnim dijagramom daju zadovoljavajuće rezultate.

Kod funkcija neminimalne faze amplitudni i fazni dijagram nisu jednoznačno povezani, pa stoga fazni dijagram ne proizlazi neposredno iz amplitudnog dijagrama. Međutim, primjenom verzora i funkcije pseudominimalne faze ta se poteškoća može lako otkloniti.

Svojstvo frekvencijskog odziva da se relativno lako može eksperimentalno snimiti na fizičkim objektima, primjenjuje se vrlo uspješno za identifikaciju sustava.

8. STABILNOST

8.1. UVOD

Osnovni i nužni preduvjet za funkcioniranje dinamičkih sustava jest da budu stabilni. O svim ostalim specifikacijama i zahtjevima može biti govora tek nakon ispunjenja tog osnovnog preduvjeta. Stoga se problemu stabilnosti u automatskoj regulaciji poklanja posebna pažnja.

S teorijskog gledišta problem izgleda prilično trivijalan. O njemu je već u više navrata implicite bilo govora, a posebno kad je bio razmatran utjecaj stupnja prigušenja ζ na ponašanje vremenskog odziva sustava drugog reda, i kad je bilo govora o identifikaciji sustava. Na tim mjestima stabilnost nije apostrofirana kao naročiti problem, jer je bilo očito da u komplementarnom dijelu rješenja linearne diferencijalne jednadžbe

$$y(t) = \alpha t^r e^{p_i t} \quad (8.1)$$

realni dio eksponenta p_i mora biti negativan da rješenje ne bi bilo divergentno. U modelu s prijenosnom funkcijom p_i su korišteni karakteristične jednadžbe, a u modelu s varijablama stanja predstavljaju svojstvene vrijednosti. Iz toga proizlazi da je

dovoljno poznavati korijene karakteristične jednačbe, odnosno svojstvene vrijednosti, da bi se imao uvid u stanje stabilnosti sustava.

Time je riješen teorijski dio problema stabilnosti. S inženjerskog gledišta, međutim, problem tu tek počinje. U prvom redu treba doći do korijena karakteristične jednačbe, da bi se moglo vidjeti da li neki od korijena ima pozitivan realni dio. Ako ima korijena s pozitivnim realnim dijelom, sustav je nestabilan te ga treba najprije na neki način stabilizirati. Ako pak nema korijena s pozitivnim realnim dijelom, zna se da je sustav stabilan, ali se još uvijek ne zna kako je stabilan.

Vrijedno je naglasiti da za provjeru stabilnosti nije potrebno poznavati vrijednosti korijena karakteristične jednačbe, već je dovoljno samo znati da li neki od korijena ima pozitivan realni dio. U onim rijetkim slučajevima, kad se do korijena karakteristične jednačbe lako može doći, postupak izračunavanja korijena se može i primjeniti. Međutim, za izračunavanje korijena, osim za sustav drugog reda, nema neposrednog algebarskog postupka, pa stoga to računanje može oduzeti relativno mnogo vremena. Ako izračunane vrijednosti korijena pokažu da je sustav nestabilan, treba ga prepraviti pa tek onda opet računati korijene, i taj postupak ponavljati sve dok se ustanovi da ni jedan od korijena nema pozitivan realni dio. Takav postupak provjere stabilnosti je dugačak i neekonomičan, tim više što nakon toga još preostaje da se provjeri kako je sustav stabilan.

Da bi se provjera stabilnosti skratila i time učinila ekonomičnijom, pronadjeni su postupci koji bez izračunavanja vrijednosti korijena otkrivaju da li neki od njih imaju pozitivan realni dio. Prema pristupu dijelimo ih na algebarske i grafičke. Postupci koji se zasnivaju na algebarskom pristupu relativno su kraći, ali daju uvid samo u stanje *apsolutne stabilnosti*, tj. pokazuju samo da li je sustav stabilan ili nije. Drugi postupci, koji se zasnivaju na grafičkom pristupu, relativno su

dulji, ali osim apsolutne stabilnosti daju podatak i o *relativnoj stabilnosti*, tj. pokazuju koliko je sustav stabilan.

8.2. DEFINICIJE

Za ocjenu stabilnosti konvencionalno se primjenjuju tri primarne i dvije sekundarne definicije stabilnosti. Primarne definicije stabilnosti glase:

1. Linearni sustav je stabilan ako na konačnu pobudu daje konačan odziv.
2. Linearni sustav je stabilan ako mu je težinska funkcija apsolutno integrabilna od nule do beskonačnosti, tj.

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq M \quad (8.2)$$

gdje je M konačni pozitivni broj.

3. Linearni sustav je stabilan ako svi polovi prijenosne funkcije sustava leže na lijevoj polovini s ravnine.

Prve dvije definicije se odnose na vremensko područje, a treća na frekvencijsko područje. Već se i u dosadašnjim razmatranjima pokazalo da je treća definicija u inženjerskoj praksi najčešće korištena, a u buduću će to još više doći do izražaja. Ne smije se, međutim, smetnuti s uma da su prve dvije definicije neposredan odraz stvarnosti u vremenskom području, pa su stoga one neposredne definicije, a treća je s njima vezana posredstvom Laplaceove transformacije. Sve tri su, međutim, međusobno komplementarne.

Razmotrimo njihovu međusobnu ovisnost. Pokažimo najprije da je odziv sustava na konačnu pobudu konačan, ako je težinska funkcija apsolutno integrabilna. Primjenom integrala konvolucije odziv se može pisati u obliku:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) r(t - \tau) d\tau \quad (8.3)$$

gdje je $g(\tau) = L^{-1} [y(s)/r(s)]$. U obradbu je uzeta težinska funkcija sustava kojeg stabilnost istražujemo; u ovom slučaju je to regulacijski sustav, tj. sustav sa zatvorenom negativnom povratnom vezom. Apsolutna vrijednost odziva glasi:

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau) r(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |g(\tau)| |r(t - \tau)| d\tau \quad (8.4)$$

Budući da se pretpostavlja da je ulaz konačan, mora postojati jedan konačan broj M_1 , tako da je $r(t) \leq M_1$ za sva vremena t , pa jednačba (8.4) poprima oblik:

$$|y(t)| \leq M_1 \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \quad (8.5)$$

S druge strane, ako je težinska funkcija apsolutno integrabilna, mora postojati jedan pozitivan broj M_2 koji zadovoljava relaciju:

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq M_2 \quad (8.6)$$

Stoga, apsolutna vrijednost izlaza ograničena je na konačnu vrijednost umnoška $M_1 M_2$, ili:

$$|y(t)| \leq M_1 M_2, \quad (8.7)$$

čime je ovisnost prve i druge definicije dokazana.

Pokažimo još ovisnost druge i treće definicije, tj. da je težinska funkcija $g(t)$ apsolutno integrabilna ako se svi polovi prijenosne funkcije $W(s)$ nalaze na lijevoj strani s ravnine. Krenimo od definicije da težinska funkcija predstavlja odziv sustava na jediničnu δ funkciju, a u općem slučaju se sastoji od zbroja članova oblika:

$$g_i(t) = \alpha t^r e^{p_i t}, \quad (8.8)$$

gdje su p_i polovi prijenosne funkcije $W(s)$ koji se ponavljaju $r + 1$ put. Budući da je p_i u općem slučaju kompleksan broj, jednadžba (8.8) se može pisati u obliku:

$$\begin{aligned} g_i(t) &= \alpha t^r e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} = \alpha t^r e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} = \\ &= \alpha t^r e^{\sigma_i t} (\cos \omega_i t + j \sin \omega_i t) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Za $\sigma < 0$ težinska funkcija je apsolutno integrabilna, jer za velike vrijednosti vremena t funkcije $e^{-\sigma_i t}$ brže pada nego što t^r raste. Time je dokazano da je težinska funkcija integrabilna ako se svi polovi prijenosne funkcije nalaze na lijevoj strani s ravnine.

Još je potrebno spomenuti dvije sekundarne definicije stabilnosti koje glase:

1. Linearni sustav je stabilan ako težinska funkcija teži prema nuli kada vrijeme t teži prema beskonačnosti:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (8.10)$$

2. Linearni regulacijski sustav je stabilan ako sve svojstvene vrijednosti matrice $\underline{A}_k$ leže na lijevoj strani s ravnine.

Prva od ove dvije definicije, je u stvari samo na drugi način izražena integrabilnost funkcije, jer $g(t)$ za $t \rightarrow \infty$ mora težiti prema nuli da bi bila integrabilna, i obrnuto, mora biti integrabilna ako teži prema nuli. Druga sekundarna definicija se podudara s trećom primarnom definicijom, jer korijeni prijenosne funkcije regulacijskog sustava odgovaraju svojstvenim vrijednostima matrice A_k .

U svim dosadašnjim definicijama stabilnosti uzimana su u obzir samo dva slučaja, i to: kad se polovi funkcije nalaze na lijevoj, i kad se polovi funkcije nalaze na desnoj strani s ravnine. Postoji, međutim, i treći slučaj, kad se pol nalazi na imaginarnoj osi. Prema postavljenim definicijama sustav s takvim polom je nestabilan, a konvencionalno se naziva *marginalno stabilan*, iako bi bilo ispravnije reći marginalno nestabilan.

8.3. ALGEBARSKI PRISTUP PROVJERI STABILNOSTI

Algebarski pristup provjeri stabilnosti polazi od karakteristične jednadžbe regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$. Ovisno o tome da li se služimo sa $H_{eq}(s)$ ili sa $G_{eq}(s)$, kako je pokazano na Sl. 8.1., prijenosna funkcija glasi:

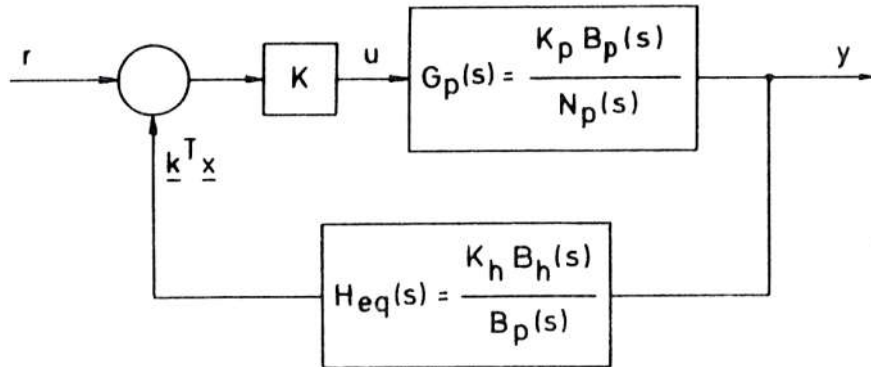
$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K K_p B_p(s)}{N_k(s)} = \frac{K G_p(s)}{1 + K G_p(s) H_{eq}(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1 + G_{eq}(s)}, \quad (8.11)$$

gdje su:

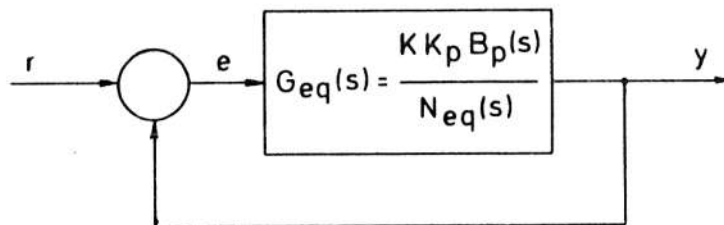
$$G_p(s) = \frac{K_p B_p(s)}{N_p(s)} \quad (8.12)$$

$$H_{eq}(s) = \frac{K_h B_h(s)}{B_p(s)} \quad (8.13)$$

$$G_{eq}(s) = \frac{K K_p B_p(s)}{N_{eq}(s)} \quad (8.14)$$



a)



b)

Sl. 8.1. Blokovski prikaz regulacijskog sustava (zatvorene petlje)
a) $H_{eq}(s)$ konfiguracija ; b) $G_{eq}(s)$ konfiguracija

Uvidom u gornje jednadžbe vidimo da se $B_p(s)$ nalazi u brojnicima funkcije $G_p(s)$, $y(s)/r(s)$ i $G_{eq}(s)$, te u nazivniku funkcije $H_{eq}(s)$. Iz $G_p(s)$ vidimo da $B_p(s)$ predstavlja nule osnovnog sustava, odnosno da je to brojnik ($K_p B_p(s)$) osnovnog sustava podijeljen s pojačanjem K_p , tj.:

$$B_p(s) = (s + n_1)(s + n_2) \dots (s + n_m) \quad (8.15)$$

Ako je sustav zadan u obliku $H_{eq}(s)$, uvrštenjem jednadžbe (8.12) i (8.13) u jednadžbu (8.11) dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{K K_p B_p(s)/N_p(s)}{1 + [K K_p B_p(s)/N_p(s)] [K_h B_h(s)/B_p(s)]} = \\ &= \frac{K K_p B_p(s)}{N_p(s) + K K_p K_h B_h(s)} = \frac{K K_p B_p(s)}{N_k(s)} \end{aligned} \quad (8.16)$$

gdje je:

$$N_k(s) = N_p(s) + K K_p K_h B_h(s) \quad (8.17)$$

Karakteristični polinom $N_k(s)$ prijenosne funkcije $y(s)/r(s)$ se, prema tome, u ovom slučaju sastoji od zbroja dvaju članova, od kojih prvi član predstavlja polinom nazivnika objekta, a drugi je umnožak $(K K_p K_h)$ i polinoma brojnika $B_h(s)$ funkcije $H_{eq}(s)$. Ako je sustav zadan u obliku $G_{eq}(s)$, uvrštenjem (8.14) u (8.11) dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{K K_p B_p(s)/N_{eq}(s)}{1 + [K K_p B_p(s)/N_{eq}(s)]} = \frac{K K_p B_p(s)}{N_{eq}(s) + K K_p B_p(s)} = \\ &= \frac{K K_p B_p(s)}{N_k(s)} \end{aligned} \quad (8.18)$$

gdje je:

$$N_k(s) = N_{eq}(s) + K K_p B_p(s) \quad (8.19)$$

Karakteristični polinomi $N_k(s)$ prijenosne funkcije $y(s)/r(s)$ se, prema tome, u ovom slučaju sastoji od zbroja dvaju članova, od

kojih prvi član predstavlja nazivnik $N_{eq}(s)$ funkcije $G_{eq}(s)$, a drugi je umnožak $(K \ K_p)$ i polinoma brojnika objekta $G_p(s)$. Iz prijašnjih razmatranja znamo da prijenosna funkcija regulacijskog sustava u matričnom obliku glasi:

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= K \underline{c}^T (s \underline{I} - \underline{A}_k)^{-1} \underline{b} = \\ &= K \underline{c}^T (s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)^{-1} \underline{b} \end{aligned} \quad (8.20)$$

a budući da je:

$$(s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)^{-1} = \frac{\text{adj } (s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)}{\det (s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)}, \quad (8.21)$$

odatle izlazi da je:

$$N_k(s) = \det (s \underline{I} - \underline{A}_k) = \det (s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T) \quad (8.22)$$

Jednadžbe (8.17), (8.19) i (8.22) predstavljaju tri način kako se može doći do karakterističnog polinoma regulacijskog sustava. U nastavku će biti obješnjeno kako se bez faktoriziranja može ustanoviti da li karakteristični polinom ima korijena s pozitivnim realnim dijelom, i na taj način zaključiti da li je sustav stabilan ili ne.

8.3.1. Hurwitzov kriterij stabilnosti

Karakteristični polinom prijenosne funkcije regulacijskog sustava glasi:

$$N_k(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (8.23)$$

a u faktoriziranom obliku:

$$N_k(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0 \quad (8.24)$$

Korijeni s pozitivnim realnim dijelom imaju jedan od oblika:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega \quad \text{ili} \quad p = \sigma \quad (8.25)$$

koji uvršteni u karakterističnu jednadžbu daju faktore:

$$(p^2 - 2\sigma p + \sigma^2 + \omega^2) \quad \text{ili} \quad (p - \sigma) \quad (8.26)$$

Naprotiv, korijeni s negativnim realnim dijelom:

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega \quad \text{ili} \quad p = -\sigma \quad (8.27)$$

uvršteni u karakterističnu jednadžbu daju faktore:

$$(p^2 + 2\sigma p + \sigma^2 + \omega^2) \quad \text{ili} \quad (p + \sigma) \quad (8.28)$$

Odatle se može izvući zaključak da svi koeficijenti karakteristične jednadžbe koja ima korijene s negativnim realnim dijelom moraju biti pozitivni, i obrnuto, da karakteristična jednadžba koja ima negativnih koeficijenata ili joj neki od koeficijenata nedostaje, mora imati korijena s pozitivnim realnim dijelom. Prema tome, ako svi koeficijenti karakteristične jednadžbe nemaju iste predznake ili neki od koeficijenata nedostaje, sustav je nestabilan.

Medjutim, ako svi koeficijenti postoje i svi imaju iste predznake, to još uvijek ne znači da je sustav stabilan. Ilustrirajmo to na karakterističnoj jednadžbi:

$$N_k(s) = s^3 + s^2 + 4s + 30 = 0 \quad (8.29)$$

kojoj su korijeni:

$$s_{1,2} = 1 \pm j3 \quad \text{i} \quad s_3 = -3 \quad (8.30)$$

dakle, dva korijena imaju pozitivan realni dio, pa je stoga sustav nestabilan, iako svi koeficijenti karakteristične jednadžbe postoje i imaju jednake predznake.

Dodatkom uvjeta marginalne stabilnosti može se dobiti potpuniji uvid u stanje stabilnosti sustava. U tom smislu razmotrimo autonomni sustav zadan diferencijalnom jednadžbom:

$$a_{n+1} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d y(t)}{dt} + a_1 y(t) = 0 \quad (8.31)$$

koji oscilira neprigušenim oscilacijama oblika:

$$y(t) = Y e^{j\omega t} \quad (8.32)$$

Uvrštenjem (8.32) u (8.31) i sredjenjem dobije se:

$$a_{n+1} (j\omega)^n + \dots + a_5 \omega^4 + j a_4 \omega^3 - a_3 \omega^3 + j a_2 \omega + a_1 = 0 \quad (8.33)$$

Jednadžba (8.33) je jednaka nuli ako su joj realni i imaginarni dijelovi jednaki nuli, pa stoga:

$$\left. \begin{aligned} \dots + a_5 \omega^4 - a_3 \omega^2 + a_1 &= 0 \\ \dots + a_6 \omega^5 - a_4 \omega^3 + a_2 \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

Rješenjem ω iz jedne jednadžbe i uvrštenjem u drugu dobije se odnos medju koeficijentima koji zadovoljava uvjet marginalne stabilnosti. Pokažimo to na jednom sustavu trećeg reda:

$$a_4 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2 \frac{d y(t)}{dt} + a_1 y(t) = 0 \quad (8.35)$$

Uvrštenjem $y(t) = y e^{j\omega t}$ u (8.35) dobit ćemo:

$$\begin{aligned} -a_3 \omega^2 + a_1 &= 0 \\ -a_4 \omega^2 + a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8.36)$$

a odatle:

$$a_2 - a_4 \frac{a_1}{a_3} = a_2 a_3 - a_1 a_4 = 0 \quad (8.37)$$

Izraz (8.37) predstavlja Hurwitzovu determinantu sustava algebarskih jednadžbi (8.36), a za opći sustav n -tog reda općenita Hurwitzova determinanta će glasiti:

$$H = \begin{array}{c|cccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n+1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n+1} & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_5 & a_3 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_6 & a_4 & a_2 \end{array} \quad (8.38)$$

Općenita Hurwitzova determinanta se sastavlja tako da se u glavnu dijagonalu upisuju koeficijenti karakteristične jednadžbe od a_n do a_2 , a zatim se u stupce iznad dijagonale upisuju koeficijenti s padajućim indeksima, a u stupce ispod dijagonale koeficijenti s rastućim indeksima. Na mjestima gdje su indeksi veći od $(n + 1)$ i manji od 1 upisuju se nule.

Na temelju učinjenih razmatranja proizlazi Hurwitzov *kriterij stabilnosti*, koji kaže da je nužan i dovojan uvjet da sustav bude stabilan da svi koeficijenti karakteristične jednadžbe budu istog predznaka i da sve dijagonalne subdeterminante Hurwitzove determinante (8.38) budu veće od nule. Prve tri dijagonalne subdeterminante su:

$$H_1 = |a_n| > 0 ; \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n+1} & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0 ;$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ a_{n+1} & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \quad (8.39)$$

Primijenimo Hurwitzov kriterij stabilnosti na karakterističnu jednažbu (8.29). Hurwitzova determinanta jednažbe (8.29) glasi:

$$H = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n+1} & a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 30 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} ,$$

a odatle:

$$H_1 = a_n = 1 > 0 ; \quad H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 30 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 30 = -26 < 0$$

Budući da druga dijagonalna determinanta nije veća od nule, nestabilnost sustava je potvrđena.

8.3.2. Routhov kriterij stabilnosti

Provjera stabilnosti po Hurwitzu za sustave iznad četvrtog reda, zbog izračunavanja dijagonalnih determinanata jako se odulji, pa se stoga u takvim slučajevima preporučuje primijeniti *Routhov kriterij stabilnosti*.

I ovaj kriterij polazi od karakteristične jednadžbe regulacijskog sustava:

$$N_k(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 = 0 \quad (8.40)$$

a stabilnost se provjerava s pomoću uvjeta *Routhovog rasporeda* u kojemu su smješteni koeficijenti karakteristične jednadžbe. Routhov raspored započinje koeficijentom a_{n+1} uz najvišu potenciju s -a i dolazi u prvi redak prvog stupca. Koeficijent a_n uz prvu nižu potenciju s -a dolazi u drugi redak prvog stupca; koeficijent a_{n-1} uz iduću nižu potenciju s -a dolazi u prvi redak drugog stupca, i tako se naizmjenično u prvom i drugom retku redaju svi ostali koeficijenti završno s a_1 , kako je pokazano rasporedom (8.41):

s^n	$\delta_{01} = 1$	$\delta_{02} = a_{n-1}$	$\delta_{03} = a_{n-3}$	...
s^{n-1}	$\delta_{11} = a_n$	$\delta_{12} = a_{n-2}$	$\delta_{13} = a_{n-4}$	...
s^{n-2}	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	...
s^{n-3}	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	
s^1	$\delta_{n-1,1}$	0	0	...
s^0	δ_{n1}	0	0	...

(8.41)

Ostali elementi rasporeda se izračunavaju po relaciji:

$$\delta_{ij} = \frac{\delta_{i-1,1} \delta_{i-2,j+1} - \delta_{i-2,1} \delta_{i-1,j+1}}{\delta_{i-1,1}} \quad (8.42)$$

uz $i = 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots$

Za ilustraciju izračunajmo dva elementa rasporeda:

$$\delta_{21} = \frac{\delta_{11} \delta_{02} - \delta_{01} \delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{a_n a_{n-1} - 1 a_{n-2}}{a_n}$$

$$\delta_{32} = \frac{\delta_{21} \delta_{13} - \delta_{11} \delta_{23}}{\delta_{21}}$$

Broj nenultih elemenata u retku ne može biti veći od $(1 + \frac{k}{2})$, gdje je k potencija s -a u tom retku. Npr. u retku s^6 ne može biti više od $(1 + \frac{6}{2}) = 4$ nenulta elementa, a u retku s^1 ne može biti više od $(1 + \frac{1}{2}) = 1,5$ tj. može biti samo jedan nenulti element. Stupac padajuće potencije s -a s lijeve strane rasporeda postavlja se radi provjere broja nenultih elemenata u svakom pojedinom retku.

Prema Routhovom kriteriju nužan i dovoljan uvjet da sustav bude stabilan je da su svi elementi prvog stupca Routhovog rasporeda nenulti i da su svi istog predznaka. Broj promjena predznaka u prvom stupcu odgovara broju korijena karakterističine jednadžbe s pozitivnim realnim dijelom.

Ilustrirajmo primjenu ovog kriterija na provjeri stabilnosti sustava kojeg karakteristični polinom glasi:

$$N_k(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 15 \quad (8.43)$$

Budući da su svi koeficijenti karakterističnog polinoma nulti i pozitivni, sustav može biti stabilan, a budući da je red sustava veći od četvrtog reda, provjeru stabilnosti ćemo nastaviti Routhovim rasporedom koji u ovom slučaju glasi:

s^5	1	2	3
s^4	1	2	15
s^3	δ_{21}	δ_{22}	
s^2	δ_{31}	δ_{32}	
s^1	δ_{41}		
s^0	0		

Prema (8.42) prvi nepoznati element u prvom stupcu je:

$$\delta_{21} = \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 2}{1} = 0$$

Budući da je jedan od elemenata prvog stupca nulti, sustav je nestabilan, i daljnja provjera je suvišna.

8.4. GRAFIČKI PRISTUP PROVJERI STABILNOSTI

Algebarska provjera stabilnosti, kao što je pokazano, relativno je kratka i jednostavna. Nedostatak joj je što za inženjersku praksu nije dovoljna, jer daje informaciju samo o apsolutnoj stabilnosti, a ne i o relativnoj stabilnosti bez koje se ne može dobiti uvid u pouzdanost sustava u odnosu na stabilnost. Naime, algebarskom provjerom stabilnosti sustava preko nazivne vrijednosti njegove prijenosne funkcije može se utvrditi da je sustav

stabilan, a da stvarna prijenosna funkcija zbog odstupanja realnih parametara od njihovih nazivnih vrijednosti bude nestabilna. To je i razumljivo, jer odstupanje parametara od njihovih nazivnih vrijednosti rezultiraju odstupanjem polova od njihovih nazivnih mjesta u s ravnini, pa ako nazivna mjesta nisu dovoljno udaljena od imaginarne osi može se dogoditi da zbog odstupanja dospiju na desnu stranu ravnine, i da tako sustav postane nestabilan. Da bi se takvo stanje izbjeglo, uvedeni su određeni pokazatelji relativne stabilnosti, koji omogućuju da se osigura pouzdanost rada sustava u realnim uvjetima.

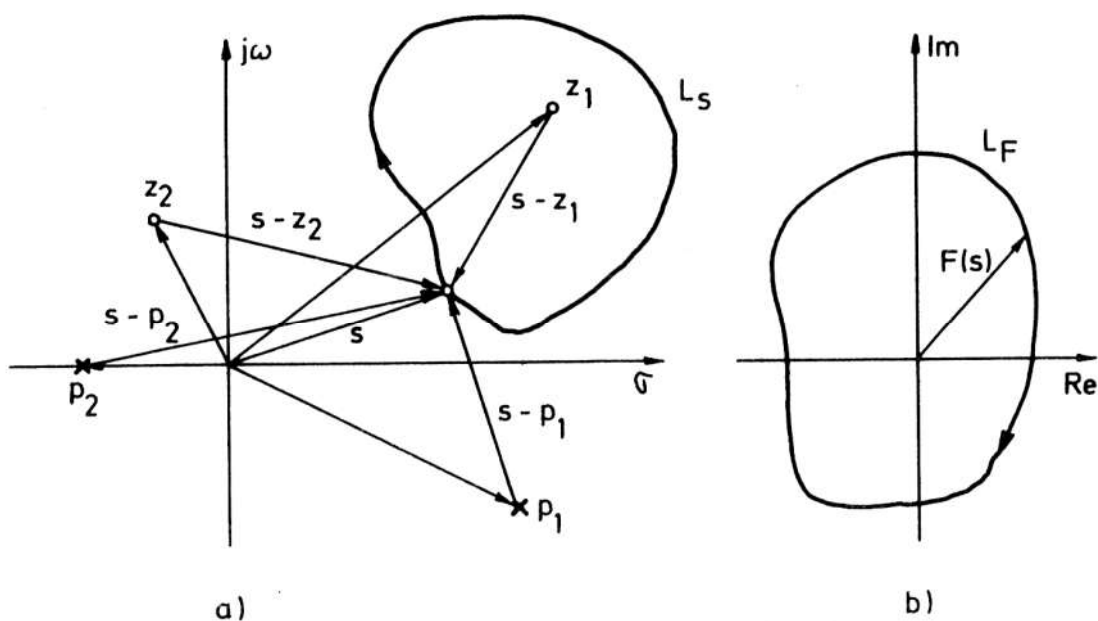
8.4.1. Nyquistov kriterij stabilnosti

Ovaj kriterij se temelji na *Cauchyjevom teoremu*, koji opisuje odnos između stanja u ravnini kompleksne varijable s i stanja u ravnini razlomljene racionalne funkcije $F(s) = 1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$ a glasi: Ako zatvorena kontura u s ravnini obuhvaća Z nula i P polova, korespondentna krivulja u $F(s)$ ravnini obići će ishodište u istom smjeru $N = Z - P$ puta.

Da bismo to dokazali obratimo pažnju na Sl. 8.2., gdje je pod a. prikazano stanje u s ravnini, a pod b. stanje u $F(s)$ ravnini. U s ravnini na Sl. 8.2.a. ucrtane su dvije nule i dva pola, te kontura L_s po kojoj se u smjeru desnog vijka giba točka s . Iz slike je vidljivo: ako točka s obidje čitavu konturu u označenom smjeru verzor $(s - z_1)$ će pri tome napraviti kut od 360° , a ostala tri verzora $(s - z_2)$, $(s - p_1)$ i $(s - p_2)$ samo će se pomaknuti u jednu pa u drugu stranu, tako da će im ukupni kut pomaka biti jednak nuli.

Kao slijedeći korak, treba izvršiti *konformno preslikavanje* konture L_s iz s ravnine u konturu L_F u $F(s)$ ravnini. Budući da se radi o kompleksnim veličinama, može se postaviti relacija:

$$F(s) = 1 + K G_p(s) H_{eq}(s) = |1 + K G_p(s) H_{eq}(s)| e^{j\angle} \quad (8.44)$$



Sl. 8.2. a) Kontura L_s u s ravnini; b) korespondentna kontura L_F u $F(s)$ ravnini

gdje je:

$$|1 + K G_p(s) H_{eq}(s)| = \frac{|s-z_1| |s-z_2| \dots |s-z_m|}{|s-p_1| |s-p_2| \dots |s-p_n|} = \frac{\prod_{i=1}^m |s-z_i|}{\prod_{j=1}^n |s-p_j|} \quad (8.45)$$

i

$$\begin{aligned} \phi &= \arg [1 + K G_p(s) H_{eq}(s)] = \arg (s-z_1) + \arg (s-z_2) + \\ &\quad \dots + \arg (s-z_m) - \arg (s-p_1) - \\ &\quad - \arg (s-p_2) - \dots - \arg (s-p_n) = \\ &= \sum_{i=1}^m \arg (s-z_i) - \sum_{j=1}^n \arg (s-p_j) \quad (4.86) \end{aligned}$$

Verzor s iz s ravnina preslikava se u verzor $F(s)$ u $F(s)$ ravnini. Za dokazivanje Cauchyjevog teorema modul funkcije $F(s)$ je irelevantan, pa se stoga na njemu nećemo ni zadržavati, nego ćemo pažnju obratiti samo na ponašanje argumenata.

Već smo prije vidjeli da će obilazak točke s po konturi L_s izazvati okret verzora $(s - z_i)$ za 360° , a da će se ostali verzori samo pomaknuti u jednu, a zatim u drugu stranju, tako da im ukupan kutni pomak bude jednak nuli. Iz toga proizlazi da će se pomak verzora s po konturi L_s u s ravnini konformno preslikati u $F(s)$ ravninu kao zaokret verzora $F(s)$ za 360° .

Pogledajmo što bi se dogodilo kad bi se unutar konture L_s nalazilo Z_0 nula. U tom slučaju bi verzor $(s - z_i)$ svake nule koja se nalazi unutar konture L_s , napravio kut od 360° , pa bi argument $F(s)$ iznosio $Z_0 \cdot 360^\circ$.

Ako bi se u konturi L_s nalazilo P_0 polova, verzor $(s - p_i)$ svakog pola unutar konture napravio bi isto tako kut od 360° , pa bi ukupni kut svih obuhvaćenih polova iznosio $P_0 \cdot 360^\circ$.

Ako bi se unutar konture nalazilo Z_0 nula i P_0 polova, ukupan kutni pomak verzora $F(s)$ iznosio bi:

$$\phi = \arg F(s) = \arg |1 + K G_p(s) H_{eq}(s)| = (Z_0 - P_0) 360^\circ, \quad (8.47)$$

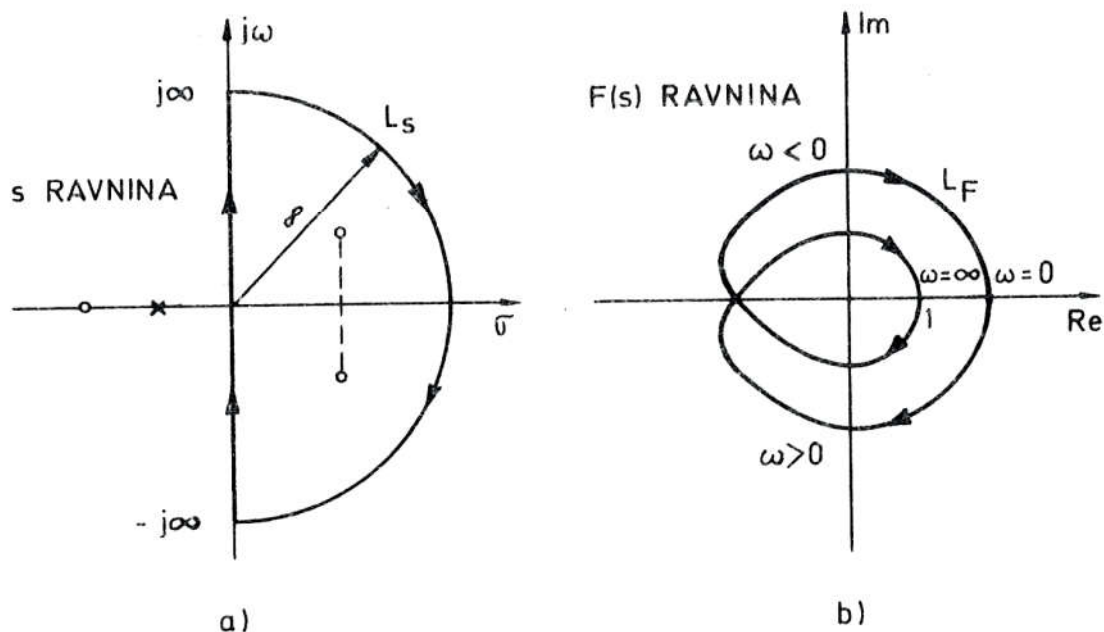
gdje je Z_0 broj nula, a P_0 broj polova obuhvaćenih konturom L_s u s ravnini. Time je Cauchyjev teorem dokazan i sada ga možemo primijeniti za provjeru stabilnosti.

U tom smislu prisjetimo se najprije treće primarne definicije stabilnosti, koja kaže da je sustav stabilan ako se svi polovi prijenosne funkcije regulacijskog sustava nalaze na lijevoj strani s ravnine. Drugim riječima, ni jedan korijen karakteristične jednadžbe ne smije se nalaziti na desnoj strani s ravnine. Ako konturu L_s proširimo na čitavu desnu polovicu s ravnine i izvršimo konformno preslikavanje, kako je pokazano na Sl. 8.3., Cauchyjevom teoremom možemo provjeriti stabilnost sustava. U tom

slučaju će broj okretaja verzora $F(s)$ oko ishodišta iznositi:

$$\phi = \arg F(s) = \arg |1 + K G_p(s) H_{eq}(s)| = (Z - P) 360^\circ ,$$

gdje je Z broj nula, a P broj polova na čitavoj desnoj strani s ravnine. Kontura L_s koja obuhvaća čitavu desnu polovicu s ravnine naziva se *Nyquistova kontura* (Sl. 8.3.a), a njoj ko-respondentna kontura L_F u $F(s)$ ravnini naziva se *polarni dija-gram* (Sl. 8.3.b).



Sl. 8.3. a) Nyquistova kontura L_s ; b) polarni dijagram L_F

Da bi preslikali polukružni dio Nyquistove konture (koji ide od $+\infty$ pa, obuhvaćajući čitavu desnu polovicu s ravnine, završava u $-\infty$) u $F(s)$ ravninu, potražimo limes funkcije $K G_p(s) H_{eq}(s)$ kada $s \rightarrow \infty$. Budući da je $K G_p(s) H_{eq}(s)$ razlomljena racionalna funkcija,

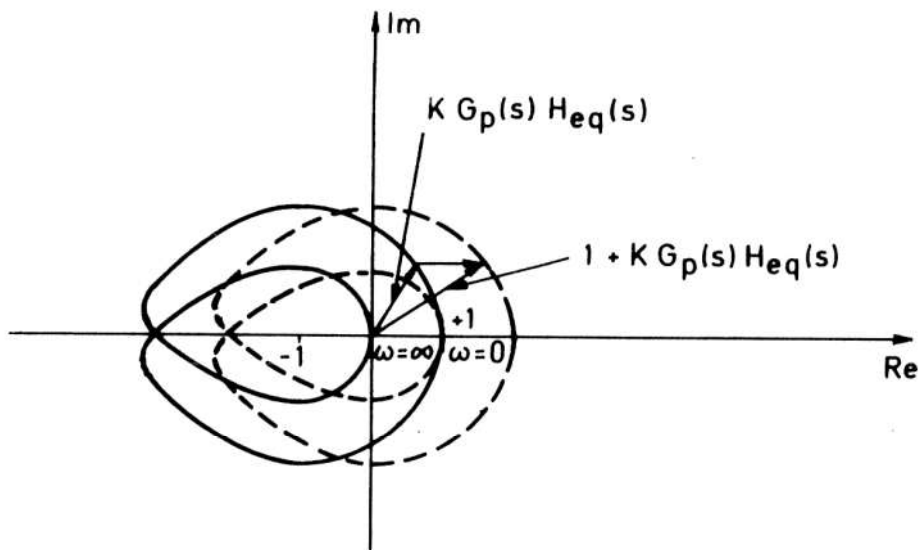
$$\lim_{s \rightarrow \infty} K G_p(s) H_{eq}(s) = 0 \quad (8.48)$$

To znači da se čitav polukružni dio Nyquistove konture preslikava u točku $s = 1 + j0$ ravnine $F(s) = 1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$.

Budući da nule funkcije $1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$ odgovaraju polovima funkcije $y(s)/r(s)$, sustav $y(s)/r(s)$ je stabilan ako vektor $F(s)$ obidje ishodište $(-P)$ puta. Naime, u tom slučaju na desnoj strani s ravnine nema nula, odnosno funkcija $y(s)/r(s)$ nema polova s pozitivnim realnim dijelom. Prema tome, da bismo provjerili stabilnost sustava $y(s)/r(s)$, potrebno je poznavati broj P , tj. broj polova s pozitivnim realnim dijelom funkcije $1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$, zatim s pomoću polarnog dijagrama naći broj N , tj. broj okretaja verzora $F(s)$ oko ishodišta, pa ako je njihov zbroj jednak nuli, $N + P = 0$, sustav je stabilan, a ako nije sustav je nestabilan.

Do broja polova s pozitivnim realnim dijelom funkcije $1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$ u najvećem broju slučajeva nije teško doći, jer su to ujedno i polovi funkcije petlje $K G_p(s) H_{eq}(s)$, a i polovi funkcije osnovnog sustava $G_p(s)$, koja je obično zadana u faktoriziranom obliku, tako da su polovi s pozitivnim realnim dijelom evidentni. U slučajevima kada osnovna funkcija nije zadana u faktoriziranom obliku, postoje standardni postupci s pomoću kojih se može izvršiti faktoriziranje.

Da bi se došlo do broja okreta (N) verzora $F(s)$ oko ishodišta, treba nacrtati polarni dijagram funkcije $1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$, a za to je potrebno poznavati nule i polove funkcije. Rekli smo da se do polova lako dolazi, ali bi nule trebalo izračunati. Pokazalo se da se to može izbjeći pomakom ravnine $1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$ za jedinicu u lijevo (Sl. 8.4), i da se onda umjesto okretaja verzora $1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$ oko ishodišta promatra okretanje verzora $K G_p(s) H_{eq}(s)$ oko točke $-1 + j0$. Da bismo to objasnili, prisjetimo se da zbroj funkcije kompleksne varijable i kompleksnog broja predstavlja pomak koordinatnog početka kompleksne ravnine u točku definiranu s negativnom vrijednošću dodanog kompleksnog



Sl. 8.4. Usporedba polarnih dijagrama funkcija $K G_p(s) H_{eq}(s)$ i $1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$

broja. Promatranjem okretaja verzora $K G_p(s) H_{eq}(s)$ oko točke -1 , umjesto okretanja verzora $1 + K G_p(s) H_{eq}(s)$ oko ishodišta, dobije se isti rezultat, ali uz mnogo manje truda uloženog u računanje.

Vrijedno je zapaziti da je točka $+1 + j0$, u koju se prije translacije preslikavala polukružnica L_s konture, poslije translacije ravnine $F(s)$ u lijevo za jednicu, došla u ishodište. Kao što je polovica konture L_s s jedne strane apscisne osi zrcalna slika polovice s druge strane apscisne osi, tako su i polovice polarnog dijagrama međusobno zrcalne slike na apscisnoj osi, pa je stoga za crtanje dovoljno izračunati jednu polovicu, a druga se zamišlja kao njezina zrcalna slika.

Polarni dijagram funkcije frekvencijskog odziva $K G_p(j\omega) H_{eq}(j\omega)$ za $-\infty \leq \omega \leq \infty$ naziva se *Nyquistov dijagram*, a kriterij stabilnosti koji se na njenu zasniva naziva se *Nyquistov kriterij stabilnosti* i glasi: Regulacijski sustav $y(s)/r(s)$ je stabilan ako Nyquistov dijagram funkcije $K G_p(s) H_{eq}(s)$ obidje točku $-1 + j0$ u smjeru lijevog vijka onoliko puta koliko funkcija petlje $K G_p(s) H_{eq}(s)$ ima polova s pozitivnim realnim dijelom.

Da bi se izbjeglo neekonomično računanje modula i argumenata funkcije za crtanje svake pojedine točke Nyquistovog dijagrama, preporučljivo je za to koristiti Bodeove aproksimacijske dijagrame. Ako takva aproksimacija u izvjenom području frekvencija ne zadovoljava, može se grafičkim ili analitičkim putem izvršiti potrebna korekcija. Čak i u tom slučaju crtanje s pomoću aproksimacijskih Bodeovih dijagrama osjetno je kraće nego ako se računa točka po točka. Pokažimo to na provjeri stabilnosti prijenosne funkcije koje funkcija petlje glasi:

$$K G_p(s) H_{eq}(s) = K G_p(s) = \frac{K}{s + 10} = \frac{50}{s + 10} = \frac{5}{1 + \frac{s}{10}} \quad (8.49)$$

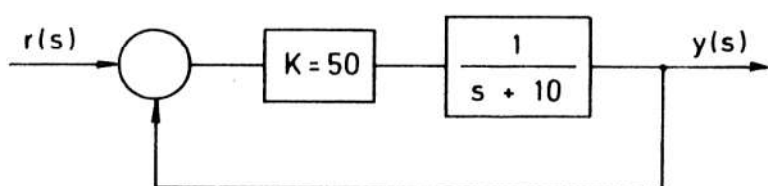
U tom smislu najprije nacrtamo aproksimacijske dijagrame koji su prikazani na Sl. 8.5. Iz tih dijagrama se očitava amplituda i faza za svaku pojedinu frekvenciju i tako crta Nyquistov dijagram prikazan na Sl. 8.6. Uzmimo za frekvenciju $\omega = 10$ rad/s; amplituda je $K/10 \sqrt{2}$, a fazni kut -45° ; za frekvenciju $\omega = -10$ rad/s, točka na dijagramu je zrcalna slika na realnoj osi frekvencije $\omega = 10$ rad/s. Zbog te zrcalne simetričnosti polovica Nyquistovog dijagrama za negativne frekvencije, kao što je već rečeno uopće se ne crta. Na Sl. 8.6. se vidi da ni za najveće vrijednosti pojačanja K Nyquistov dijagram ne može obići kritičnu točku $-1 + j0$, a budući da funkcija petlje nema polova s pozitivnim realnim dijelom, izlazi da je $N = 0$ i $P = 0$, pa se stoga može zaključiti da je ustav stabilan za sve vrijednosti K od 0 do ∞ .

Ako se singularna točka nalazi na imaginarnoj osi, nije a priori evidentno da li je ona obuhvaćena ili nije Nyquistovom konturom s ravnini. Da bismo to pitanje rasčistili razmotrimo crtanje Nyquistovog dijagrama funkcije:

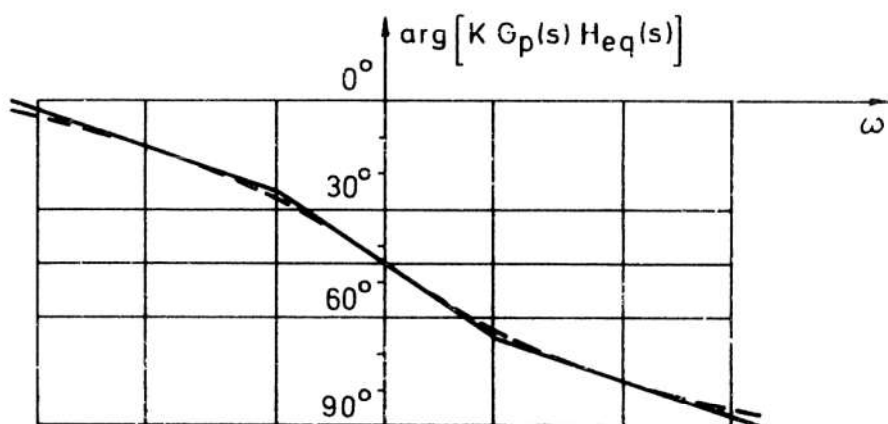
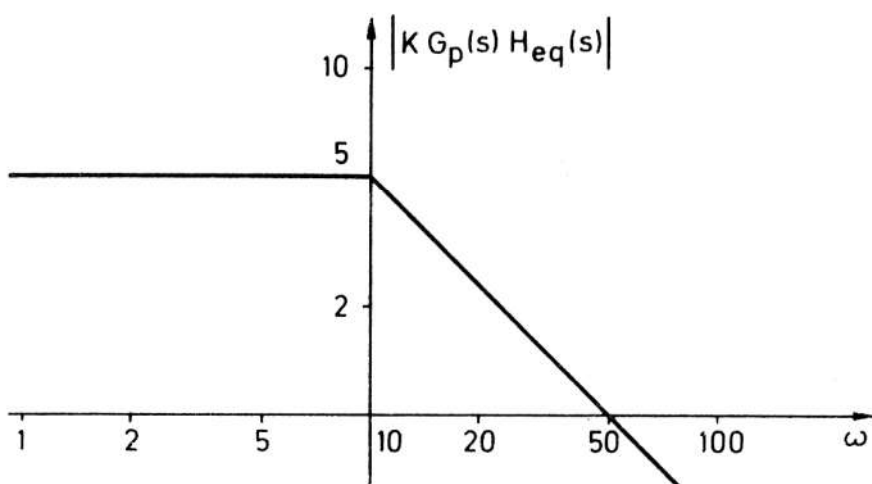
$$K G_p(s) H_{eq}(s) = \frac{K_{st}}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})} = -1 \quad (8.50)$$

koja se može pisati i u obliku:

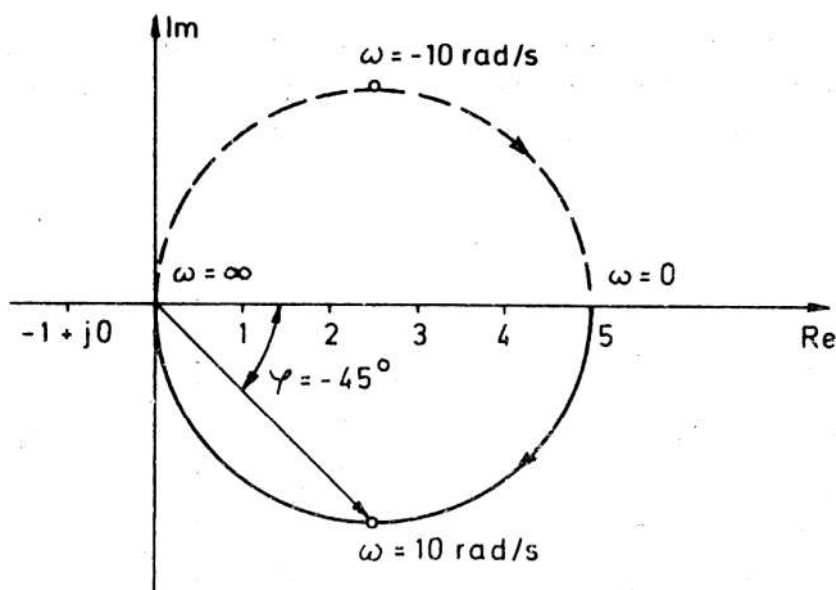
$$\frac{1}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})} = -\frac{1}{K_{st}}$$



$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K}{s+10+K}$$



Sl. 8.5. Aproximacijski dijagrami funkcije $K G_p(s) H_{eq}(s) = \frac{50}{s+10}$



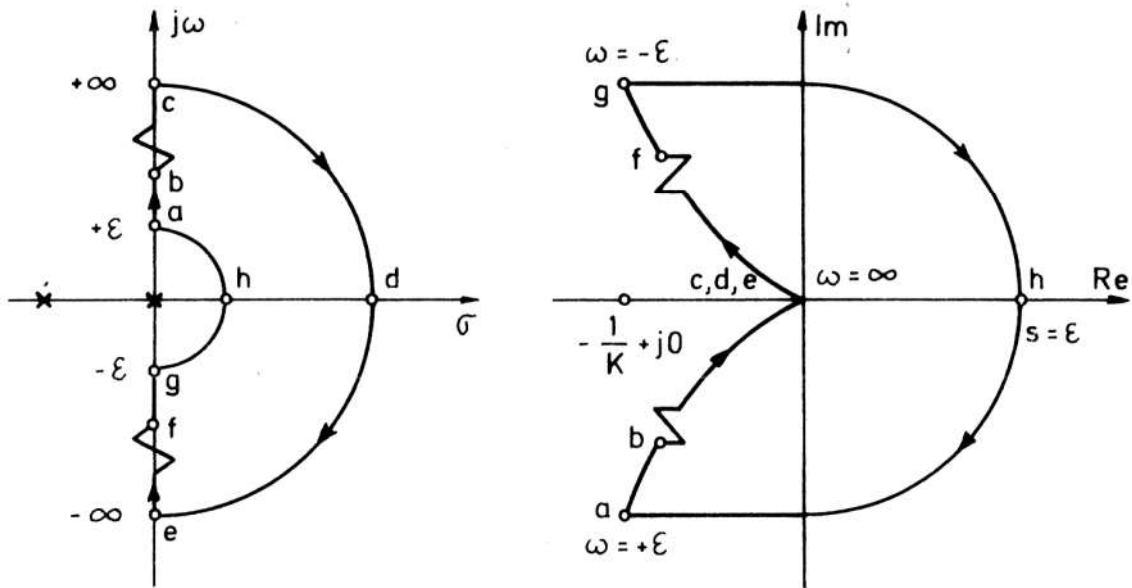
Sl. 8.6. Nyquistov dijagram funkcije $K G_p(s) H_{eq}(s) = \frac{50}{s+10}$

tako da okretanje promatramo oko točke $-\frac{1}{K_{st}} + j0$ umjesto oko točke $-1 + j0$.

Da bi ispitali utjecaj pola u ishodištu na ponašanje Nyquistovog dijagrama, započnimo preslikavati Nyquistovu konturu od točke $a = j\epsilon$, kako je pokazano na Sl. 8.7.a. Preslikavanje potom obavljamo duž konture obilazeći desnu polovicu s ravnine u smjeru desnog vijka, sve do točke $g = -j\epsilon$, a onda na udaljenosti ϵ oblilazimo ishodište preko točke $h = \epsilon$ do točke $a = j\epsilon$ sa koje smo krenuli. Mala polukružnica, g, h, a iz s ravnine preslikava se u veliku konačnu polukružnicu u $F(s)$ ravnini. Pustimo li da $\epsilon \rightarrow 0$, mala polukružnica u s ravnini se steže oko ishodišta, a velika polukružnica u $F(s)$ ravnini teži prema beskonačnosti. Pri tome, ponašanje Nyquistovog dijagrama se ne mijenja, tako da on nikada ne može obići kritičnu točku $-\frac{1}{K_{st}} + j0$.

Budući da funkcija petlje nema polova s pozitivnim realnim dijelom, pol u ishodištu je ostao izvan Nyquistove konture i sustav je stabilan. Povećanjem pojačanja K , točka $-\frac{1}{K}$ se približava ishodištu, da bi u slučaju kada K teži prema beskonačnosti ona težila prema nuli. To znači da sustav ostaje stabilan za sve vrijednosti

pojačanja od 0 do ∞ . Kada $\omega \rightarrow 0$ realni dio Nyquistove krivulje teži $-\frac{1}{\omega}$, a imaginarni dio teži $-\infty$. Kada $\omega \rightarrow \infty$, realni i imaginarni dio dijagrama teži prema 0^- .

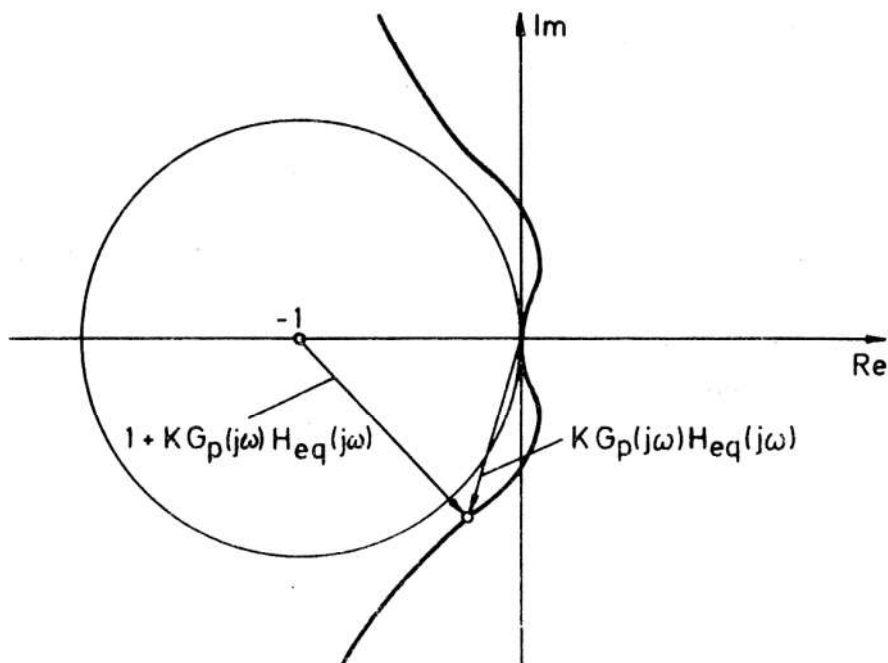


Sl. 8.7. Preslikavanje Nyquistove konture kada funkcija petlje ima pol u ishodištu

Pogledajmo na kraju neke od prednosti Nyquistovog kriterija pred Hurwitzovim i Routhovim kriterijem. Prva prednost se očituje u prikladnosti grafičkog prikaza. Pokažimo to na primjeru minimizacije osjetljivosti regulacijskog sustava na vanjske i unatarnje poremećaje. Iz prijašnjih razmatranja znamo da se osjetljivost regulacijskog sustava na poremećaje minimizira uz uvjet da je:

$$|1 + K G_p(j\omega) H_{eq}(j\omega)| \geq 1 \quad \text{za sve } \omega$$

U grafičkoj interpretaciji, na Sl. 8.8., to znači da Nyquistova krivulja ne smije ni jednim svojim dijelom ući u jediničnu kružnicu.



Sl. 8.8. Minimizacija osjetljivosti uz uvjet da je
 $|1 + K G_p(j\omega) H_{eq}(j\omega)| \geq 1$

Druga prednost je u tome što se Nyquistov dijagram može eksperimentalno snimiti i na taj način preko funkcije petlje provjeriti stabilnost regulacijskog sustava bez njegovog matematičkog opisa.

Treća prednost je u tome što Nyquistov dijagram osim apsolutne stabilnosti pruža informaciju i o relativnoj stabilnosti.

8.4.2. Mjere relativne stabilnosti

U dosadašnjim razmatranjima je rečeno da relativna stabilnost pokazuje *kako* je sustav stabilan, tj. da daje *mjeru stabilnosti*. Tih mjera ima više, a mi ćemo ovdje razmatrati dvije koje su vezane uz Nyquistov dijagram; to su: *amplitudna pričuva i fazna pričuva*.

Funkcije petlje u obliku $K G_p(s) H_{eq}(s)$ je prikladna za mjerenje amplitudne pričuve, jer se može transformirati u oblik:

$$K G_p(s) H_{eq}(s) = \frac{K_p \frac{B_p(s)}{N_p(s)}}{\frac{K_h B_h(s)}{B_p(s)}} = K \frac{K_p K_h B_h(s)}{N_p(s)}, \quad (8.51)$$

iz kojeg se vidi da pojačanje K , kojim se ugadja sustav, ne utječe na položaj polova i nula funkcije petlje pa stoga ni na oblik Nyquistovog dijagrama. Ugodivi K će utjecati samo na omjer crtanja. Ako dijagram $K G_p(s) H_{eq}(s)$ za $s = j\omega$ presijeca negativnu realnu os u točki $-a$ koja se nalazi između ishodišta i kritične točke $-1 + j0$ a amplitudna pričuva definirana je relacijom:

$$A_P = \frac{1}{a} \quad (8.52)$$

Iz jednadžbe (8.52) proizlazi da je amplitudna pričuva A_P broj s kojim treba pomnožiti amplitudu funkcije petlje na frekvenciji kritične faze da bi se dobila jedinična amplituda. Pod frekvencijom kritične faze ω_π podrazumijeva se frekvencija na kojoj argument funkcije petlje $K G_p(j\omega) H_{eq}(j\omega)$ iznosi 180° . Budući da Nyquistov dijagram kad presijeca realnu os u točki a ima pojačanje K , a kad je presijeca u točki -1 ima pojačanje $K_{\max}$, amplitudna pričuva se može definirati i kao odnos maksimalnog pojačanja $K_{\max}$ koje sustav može imati u stabilnom stanju i realnog pojačanja K , tj.:

$$A_P = \frac{K_{\max}}{K}$$

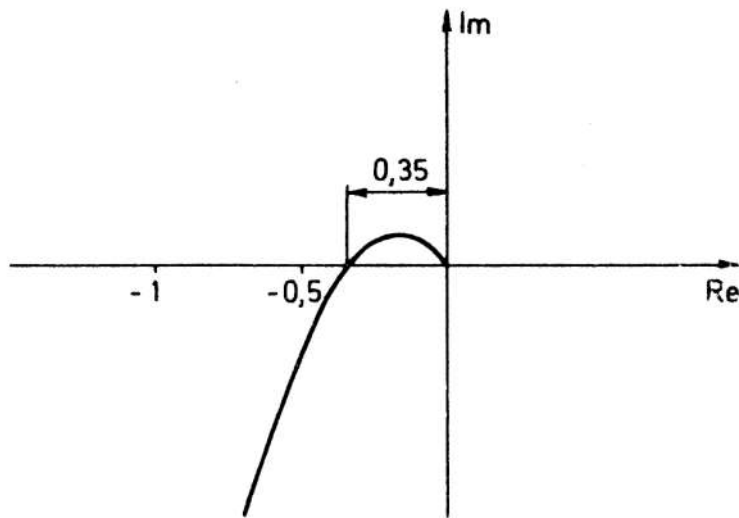
U inženjerskoj praksi se preporučuje da amplitudna pričuva ne bude manja od 3.

Ilustrirajmo amplitudnu pričuvu kao mjeru stabilnosti sustava koji je zadan funkcijom petlje:

$$K G_p(s) H_{eq}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)}, \quad (8.53)$$

uz

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} \quad \text{i} \quad H_{eq}(s) = 1$$



Sl. 8.9. Nyquistov dijagram sustava $K G_p(s) H_{eq}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)}$
s amplitudnom pričuvom $A P \approx 1/0,35$

Iz Nyquistovog dijagrama sustava (8.53) na Sl. 8.9. dobije se da dijagram presijeca realnu os u točki $-0,35$, tj. da je:

$$A P \approx \frac{1}{0,35} \approx 2,86$$

Primjenom Routhovog kriterija može se ustanoviti da maksimalno pojačanje za stabilni sustav iznosi $K_{\max} = 30$, pa stoga po drugoj definiciji:

$$A P = \frac{30}{10} = 3$$

Razlika od 4,67% je u granicama točnosti grafičkog računanja.

Druga mjera relativne stabilnosti je *fazna pričuva*. Ona se određuje iz Nyquistovog dijagrama funkcije petlje $G_{eq}(s)$, a definirana je razlikom između argumenta funkcije $G_{eq}(s)$ i -180° na frekvenciji kritične amplitude, tj.:

$$F/P = \arg G_{eq}(j\omega_I) - (-180^\circ) = 180^\circ + \arg G_{eq}(j\omega_I) \quad (8.54)$$

Pod frekvencijom kritične amplitude podrazumijeva se frekvencija na kojoj funkcija $G_{eq}(j\omega)$ poprima jediničnu vrijednost.

Ilustrirajmo to na Nyquistovom dijagramu funkcije:

$$G_{eq}(s) = \frac{2}{s(1 + \frac{s}{2})(1 + \frac{s}{5})} \quad (8.55)$$

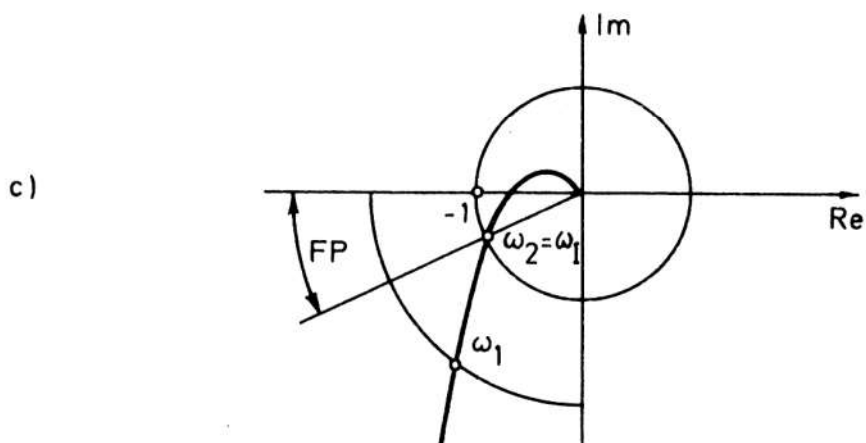
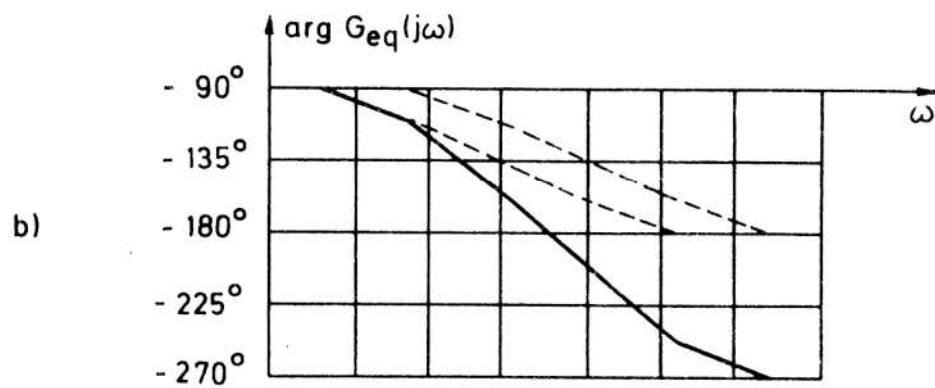
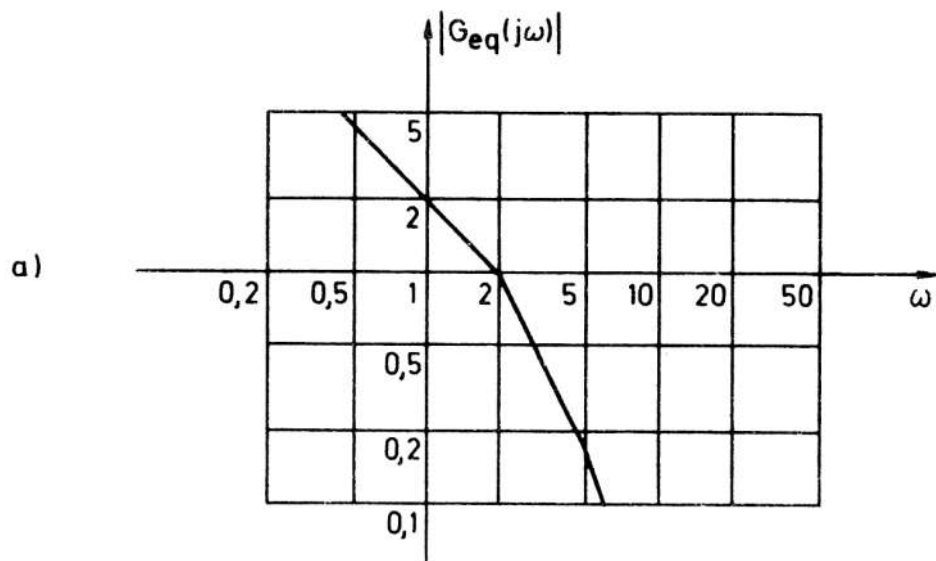
Za crtanje Nyquistovog dijagrama na Sl. 8.10.c. korišteni su aproksimacijski dijagrami sa Sl. 8.10. a i b. Kut koji na Nyquistovom dijagramu zatvara vektor $G_{eq}(j\omega_I)$ s negativnim dijelom realne osi predstavlja faznu pričuvu F/P funkcije regulacijskog sustava:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1 + G_{eq}(s)}$$

Ta se vrijednost može očitati i na aproksimacijskim dijagramima kao vrijednost faze na frekvenciji ω_I , na kojoj amplitudni dijagram siječe realnu os. U inženjerskoj praksi se preporučuje da fazna pričuva bude između 40° i 60° .

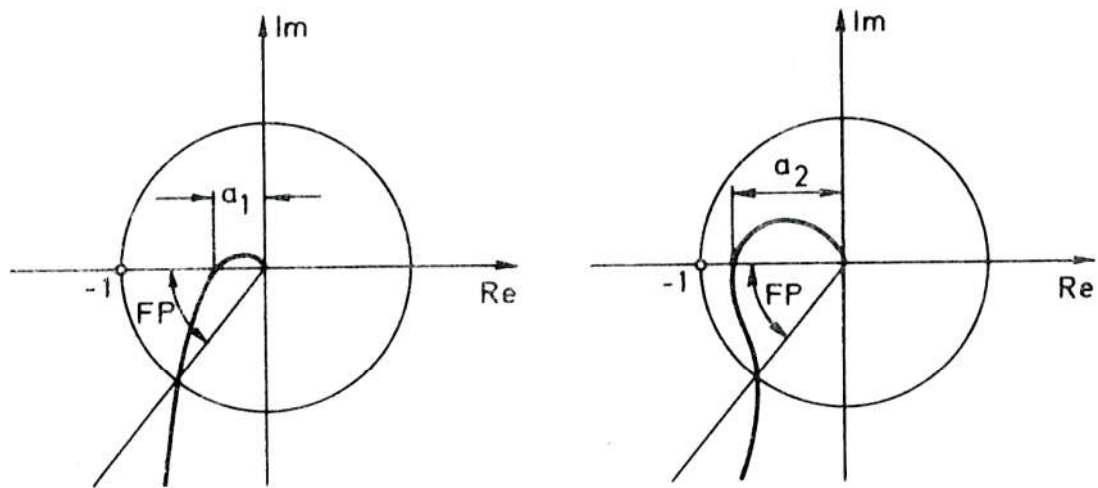
Kada je $H_{eq}(s) = 1$ izlazi da je:

$$K G_p(s) H_{eq}(s) = K G_p(s) = G_{eq}(s) \quad (8.56)$$



Sl. 8.10. Grafički prikazi funkcije $G_{eq}(s) = \frac{2}{s(1 + \frac{s}{2})(1 + \frac{s}{5})}$

a) i b) aproksimacijski dijagrami; c) Nyquistov dijagram



Sl. 8.11. Nyquistovi dijagrami dvaju različitih sustava s jednakim faznim pričuva, ali s različitim amplitudnim pričuva

pa se u tom slučaju na istom Nyquistovom dijagramu može očitati amplitudna i fazna pričuva. Na Sl. 8.11. nacrtani su Nyquistovi dijagrami za dva različita sustava kod kojih je $H_{eq}(s) = 1$. Sa slike se vidi da su fazne privuče jednog i drugog sustava jednake, ali da im se amplitudne pričuve znatno razlikuju. Slično tome mogli bi se pokazati sustavi koji imaju jednake amplitudne ali različite fazne pričuve. Stoga je očito da je relativna stabilnost određena s obje mjere stabilnosti, tj. samo onda kada su zadane i amplitudna i fazna pričuva. Podatak o samo jednoj pričuvi stabilnosti, kao što se može vidjeti sa Sl. 8.11. kod Nyquistovog kriterija stabilnosti nije dovoljan.

8.4.3. Mihajlovljev kriterij stabilnosti

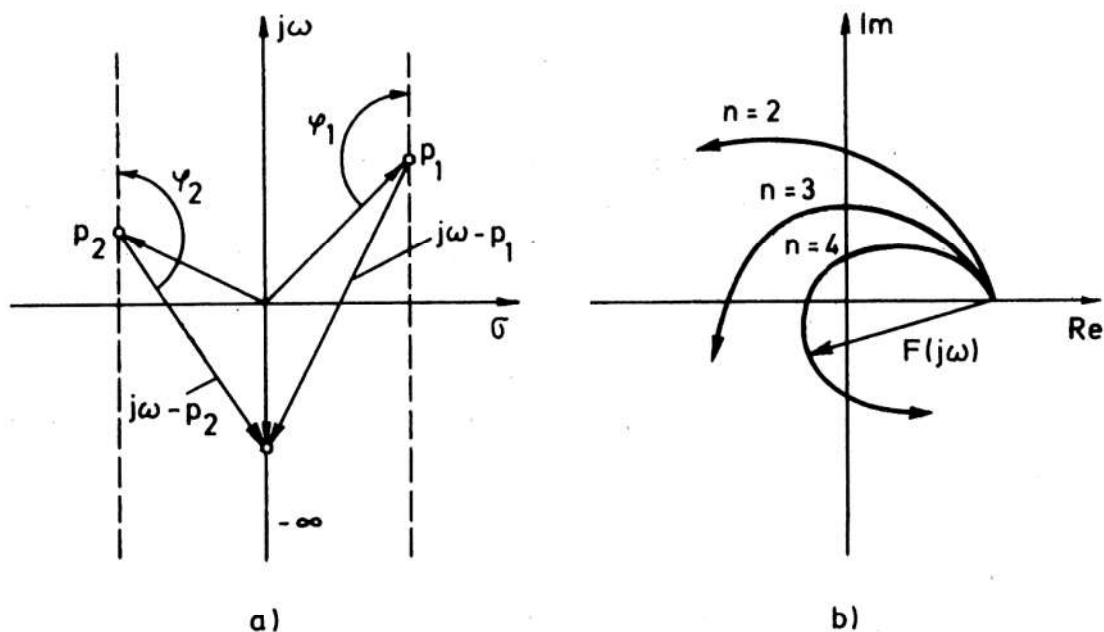
Mihajlovljev kriterij stabilnosti služi se konformnim preslikavanjem kao i Nyquistovog kriterija, ali polazi od karakteristične jednadžbe funkcije zatvorene petlje, tj. funkcije regulacijskog sustava:

$$a_{n+1} s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 = 0 \quad (8.57)$$

ili u faktoriziranom obliku:

$$a_{n+1} (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0 \quad (8.58)$$

gdje su p_i korijeni karakteristične jednadžbe.



Sl. 8.12. Dobijanje Mihajlovljevog dijagrama

Zamjenom $s = j\omega$ mogu se korijeni karakteristične jednadžbe prikazati u s ravnini, kao što je učinjeno na Sl. 8.12.a za dva korijena, p_1 i p_2 . Pustimo li da ω raste od $-\infty$ do $+\infty$ vektor $(j\omega - p_1)$ napraviti će kut od -180° , a vektor $(j\omega - p_2)$ kut od 180° . Iz toga proizlazi: ako sustav ima n korijena od kojih je k na desnoj strani a $(n - k)$ na lijevoj strani s ravnine, ukupni kut koji napravi vektor:

$$F(j\omega) = a_{n+1} (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n) \quad (8.59)$$

bit će:

$$\arg F(j\omega) = -k\pi + (n - k)\pi = (n - 2k)\pi \quad (8.60)$$

Budući da je dinamički sustav stabilan ako na desnoj strani s ravnine nema ni jednog pola, znači da je dovoljni uvjet za stabilnost sustava da k bude jednako nuli, tj.:

$$\arg F(j\omega) = n\pi \quad (8.61)$$

S obzirom na simetrično ponašanje verzora $F(j\omega)$ za pozitivne i negativne frekvencije, uvjet stabilnosti se može ograničiti samo na promjenu frekvencije od nula do beskonačnosti. U tom slučaju relacija za stabilnost glasi:

$$\arg F(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad \text{za } \omega \text{ od } 0 \text{ do } \infty, \quad (8.62)$$

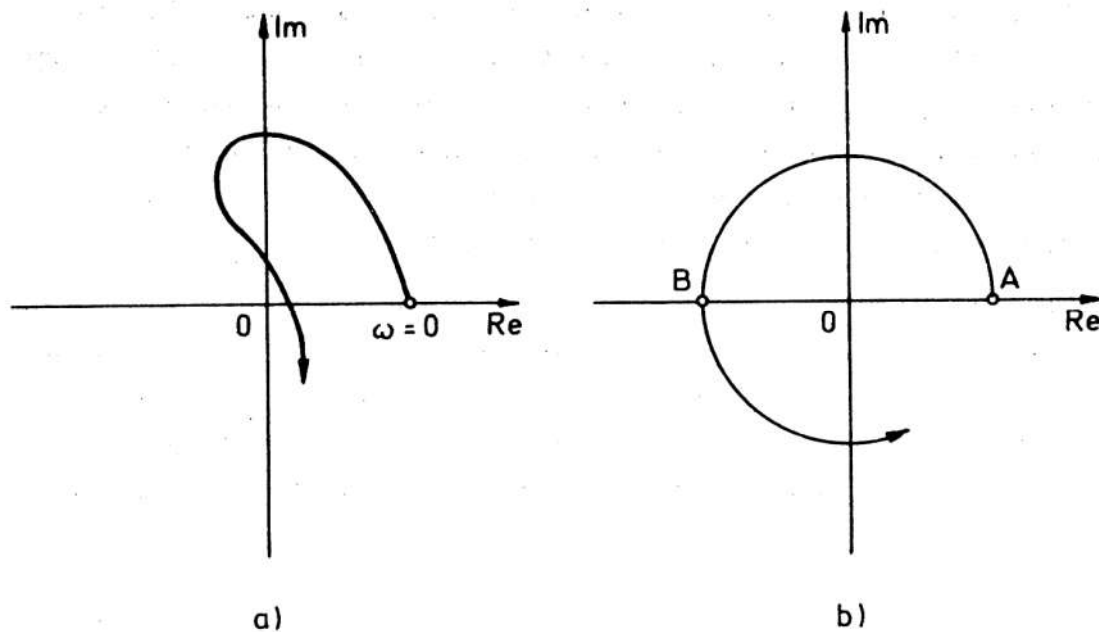
a iz toga slijedi *definicija Mihajlovljevog kriterija stabilnosti*: nužan i dovoljan uvjet da regulacijski sustav bude stabilan jest da se pri povećanju ω od 0 do ∞ , verzor $F(j\omega)$ zakrene u $F(s)$ ravnini za kut $n \frac{\pi}{2}$, gdje je n red polinoma $F(s)$.

Na Sl. 8.12.b u ravnini $F(s)$ nacrtane su krivulje za stabilne sustave od drugog do četvrtog reda. Prema slici možemo postaviti drugu, češće primjenjivanu definiciju Mihajlovljevog kriterija stabilnosti, koja glasi: regulacijski sustav je stabilan ako pri povećanju ω od 0 do ∞ Mihajlovljeva krivulja u $F(s)$ ravnini prodje po redu kroz n kvadranta u smjeru lijevog vijka.

Na Sl. 8.13.a prikazan je tok Mihajlovljeve krivulje jednog nestabilnog sustava. Krivulja u tom slučaju ne prolazi redom kroz kvadrante. Mjera stabilnosti u Mihajlovljevom dijagramu je definirana odnosom:

$$M S = \frac{O B}{O A} , \quad (8.63)$$

gdje su $O B$ i $O A$ odsječci na realnoj osi, kako je pokazano na Sl. 8.13.b . Što je omjer $O B/O A$ veći, relativna stabilnost je bolja.



Sl. 8.13. Mihajlovljev dijagram za: a) nestabilni
i b) stabilni sustav

Ako Mihajlovljeva krivulja prolazi kroz ishodište, sustav se nalazi u stanju marginalne stabilnosti. Mana ovog kriterija je u tome, što je on ograničen samo na polinome bez zakašnjenja.

8.5. ZAKLJUČAK

Osnovni i nužni uvjet za funkcioniranje dinamičkog sustava jest da bude stabilan, tj. da na konačnu pobudu daje konačni odziv. Taj uvjet je ispunjen ako korijeni karakteristične jednadžbe sustava nemaju korijena s pozitivnim realnim dijelom.

Najneposrednija, ali i najdulja provjera tog uvjeta je rješenje karakteristične jednadžbe sustava. Postoje, međutim, i drugi načini kojima se to dađe mnogo brže obaviti. U tom pogledu se naročito ističu tzv. algebarski postupci, koji, međutim, imaju nedostatak što ne daju uvid u relativnu stabilnost. Ipak, uspješno se koriste za preliminarnu provjeru; pa ako se pokaže da je sustav nestabilan provjera je završena, a ako se pokaže da je stabilan, provjera se nastavlja jednom od tzv. grafičkih metoda, da bi se ustanovilo u kojoj je mjeri stabilan.

Relativna stabilnost je u Nyquistovom dijagramu definirana s dvije mjere stabilnosti i to s amplitudnom pričuvom i s faznom pričuvom, a u Mihajlovljevom dijagramu samo s jednom koja se naziva pričuva stabilnosti. Radi sigurnosti rada, uređaje treba projektirati tako da mjere stabilnosti ne budu manje od preporučenih.

POGOVOR

Obradjeno gradivo predstavlja otprilike polovicu cjelokupnog gradiva predviđenog za obradbu teorije automatskog reguliranja linearnih sustava. U drugom dijelu, koji je u pripremi, najprije se nastavlja analiza s pomoću geometrojskog mjesta korijena i daje osvrt na usporedbene prednosti i nedostatke obradjenih metoda analize, kao i na mogućnosti njihove komplementarne primjene. Nakon toga se obrađuju razne metode sinteze, uključujući i one koje uvjetuju primjenu digitalnih računala. Time se završava ovaj program, koji je kao teorijski uvod u područje automatskog reguliranja prvenstveno manijenjen studentima elektrotehnike i strojarstva.

Pri obradbi gradiva vodilo se računa i o inženjerima koji na studiju nisu imali priliku čuti obradbu s varijablama stanja. Zbog toga je tokom čitavog gradiva modeliranje s varijablama stanja primijenjivano simultano s prijenosnom funkcijom, tako da čitaocu već stečeno znanje može pomoći da brže udje u problematiku novih metoda.

LITERATURA

1. BARBE C. EDWIN, Linear Control Systems, International Textbook Company, Scraton, Pen., 1963.
2. BARNETT STEPHEN, Matrices in Control Theory, Van Nostrand Reinhold Comp., London, 1971.
3. BOŽIČEVIĆ JURAJ, Automatsko vodjenje procesa, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
4. CANNON H. ROBERT, Dynamics of Physical Systems, McGraw-Hill Book Company, London, 1963.
5. CHEN H. WAYNE, The Analysis of Linear Systems, McGraw-Hill Book Company, London, 1963.
6. CRUZ B. JOSE, Feedback Systems, McGraw-Hill Book Company, 1972.
7. D'AZZO J. HOHN, HOUPIS H. CONSTANTINE, Feedback Control System Analysis and Synthesis, McGraw-Hill Book Company, London, 1966.
8. DeROY E. BENJAMIN, Automatic Control Theory, John Wiley and Sons, Inc., London, 1966.
9. DORF C. RICHARD, Matrix Algebra, John Wiley & Sons, Inc., London 1969.
10. ELECTRO-CRAFT CORP., DC Motors Speed Controls Servo Systems, Electro-Craft Corp., Hopkins, Minn., 1973.

11. MARTENS R. HINRICH, ALLEN R. DON, System Theory, Charles E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1979.
12. MELSA L. JAMES, SCHULTZ G. DONALD, Linear Control Systems, McGraw-Hill Book Comp., London, 1969.
13. MILIĆ R. STOJIC, Kontinualni sistemi automatskog upravljanja, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1973.
14. PFEIFFER E. PAUL, Lyneare System Analysis, McGraw-Hill Book Comp., London, 1961.
15. RAVEN H. FRANCIS, Automatic Control Engineering, McGraw-Hill Book Comp., London, 1968.
16. SCHWARZ J. RALPH, FRIEDLAND BERMARD, Lyneare Systems, McGraw-Hill Book Comp., London, 1965.
17. SHEARER J. LOWEN, MURPHY T. ARTHUR, RICHARDSON H. HERBERT, Introduction to System Dynamics, Addison-Wesley Publishing Comp., Reading, Mass., 1971.
18. SMITH J. M. OTTO, Feedback Control Systems, McGraw-Hill Book Comp., London, 1958.
19. ŠURINA TUGOMIR, Analiza i sinteza servomehanizama i procesne regulacije, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
20. TOWILL D. R., Transfer Function Techniques for Control Engineers, Iliffe Books Ltd., London, 1970.

KAZALO

algebra

- blokovska 69
- matrična 88, 90

analiza 3, 199

blokovski prikaz

- elementarni 104, 105
- općeniti 66
- s varijablama stanja 103, 104, 118

Bodeovi dijagrami 251

brzina

- translacijska 23
- rotacijska 28

Cramerovo pravilo 74, 94

čvor 61

D'Ambertov princip 60

D'Arcyjev zakon 43

diferencijalna jednačina. linearna 62

dijagram

- amplitudni 252
- amplitudni normalizirani 279
- Bodeov 251
- fazni 267
- frekvencijskog odziva 247
- frekvencijskog odziva neminimalne faze 276
- Nyquistov 314
- Mihajlovljevi 327
- polarni 312
- pseudominimalne faze 279

elastična popustljivost

- linearna 23
- rotacijska 29
- translacijska 22

električni sustavi 7

elementi

- električki 7
- fluidički 33
- općeniti 8
- regulacijski 156
- rotacijski 26
- toplinski 47
- translacijski 19

energija

- električka 8
- električkog polja 13
- fluidička kinetička 41
- magnetskog polja 10
- rotacijska kinetička 28
- rotacijska potencijalna 29
- toplinska 48
- translacijska kinetička 21
- translacijska potencijalna 24

fluidička otpornost 42

fluidički sustavi 33

frekvencija

- kritične amplitude 264, 321
- kritične faze 319
- kružna neprigušena 216
- kružna prigušena 219

frekvencijski odziv 153

funkcija

- frekvencijskog odziva 247
- impulsna, Diracova ili delta 84
- minimalne faze 276
- neminimalne faze 276
- odskočna ili Heavisideova 82
- parabolična 83
- pobudna 80
- prijenosna 64
- " objekta 177
- " otvorene petlje 150, 173, 177, 184
- " petlje 150, 173, 177, 184
- " regulacijskog sustava 150, 177, 184
- " unaprijedna 161
- " zatvorene petlje 150, 177, 184
- pseudominimalne faze 278
- razlomljena racionalna 64
- sinusna 81
- težinska 294
- ulazna pravčasta 82

G ekvivalentno 163

gibanje

- apsolutno 16

- relativno 17

Hagen-Poiseuilleov zakon 44

H ekvivalentno 163, 184

Hurwitzova determinanta 303

identifikacija 282

induktivnost 9

inertnost fluidička 39

integral konvolucije 239

izlaz 2

izvod 61

izvori energije

- poprečni 56

- protječni 56

kapacitivnost

- čista 12

- fluidička 36

- idealna 12

- toplinska 49

karakteristična (I)

- jednažba 112, 172

- polinom 172

Kirchoffovi zakoni 60, 72,

koeficijent

- povratne veze 157

- prigušenja 25

- rotacijske popustljivosti 29

količina

- gibanja 20, 27

- protjecanja 41

komponente 8

kondenzator 12

kondukcija 50

konstanta motora

- električka 77

- momentna 78

konvekcija 51

kriterij provedbe 3

krug električki 61

Laplaceova transformacija 63, 202

masa

- rotacijska 27
- translacijska 20

matematički model 3, 4

matrica

- adjungat 92, 95
- determinanta 92
- dijagonalna 89
- integracija i derivacija 90
- inverzija 92, 96
- izjednačenje 90
- jedinična 89
- klasifikacijska 88
- kofaktor 94
- kofaktorska 95
- konformne 91
- kvadratična 88
- minor 93
- množenje skalarom 90
- nesingularna 96, 137
- objekta 101
- pravokutna 88
- prijelaznog stanja 243
- redna 89
- rezolventna 110, 171, 185
- singularna 96
- stupčana 89
- transformacijska 136
- transponiranje 89, 96
- umnožak 91

mehanički sustavi 16

Mihajlovljev dijagram 325

mjere stabilnosti 319

modeliranje

- s prijenosnom funkcijom 72
- s varijablama stanja 96

moment

- inercije 27
- opteretni 73
- proizvedeni zakretni 73

nadvišenje 222

negativna povratna veza 147

nepoznanice

- linearno neovisne 97
- " ovisne 97

Newtonovi zakoni 20, 28, 39

nule 65

Nyquistov dijagram 312

objekt

- apstraktni 3
- fizički 3

odziv

- frekvencijski 153, 247
- odskočni 216
- općeniti 61
- prijelazni 155
- vremenski 199, 227

omjer

- poluge 31
- površine 47
- transformacije 31

operatorski račun 61

opis sustava

- izlazno-ulazni 60, 63
- s varijablama stanja 87, 100

osjetljivost 160

otpornička komponenta 8

otpornost

- fluidička 42
- ohmska 8
- toplinska 50

parcijalni razlomci 200

petlja

- otvorena 148
- zatvorena 148

perioda osciliranja 221

pobuda 2, 61, 74, 80, 102

područje

- donje 63
- gornje 63

pogreška dinamička 220

pojačanje 157

polovi 65, 172

poluga 30

pomak 23

poremećaj 2, 74

pretvornici 57

prigušenje

- rotacijsko 30
- translacijsko 24
- viskozno 24

prigušnica 11

prijenosna funkcija 64

princip superpozicije 70

pristup

- formalni 124
- inženjerski 124

protjecanje

- laminarno 43
- turbulentno 44

protudjelovanje 68

put 23

radijacija 51

razdvojno pojačalo 68

referentni ulazni signal 148

regulacija linearna 155, 169

regulator 157

Reynoldsov broj 43

Routhov raspored 304

Sarrusovo pravilo 93

servomotor istosmjerni

- upravljani strujom armature 76, 79, 125, 128, 144, 159
- " " magnetiziranja 72, 98, 114

signal

- pogreške 167
- poremećajni 74
- referentni 148, 156
- upravljački 148, 156

simbol

- elastične popustljivosti 22, 54
- fluidičke inertnosti 42, 54
- " kapacitivnosti 38, 55
- " otpornosti 45, 56
- induktivnosti 10, 54
- kapacitivnosti 12, 55
- mase 22, 55
- ohmske otpornosti 8, 56
- prigušenja 25
- rotacijske mase 28

- toplinske kapacitivnosti 49, 55
- " otpornosti 50, 56
- transformatora rotacijskog 15
- " translacijskog 31
- za račvanje 66
- za zbrajanje 66

sinteza 3

stabilnost

- apsolutna 292
- marginalna 294
- mjere relativne 319
- relativna 294

stanje 2, 97

statička osjetljivost petlje 252

staze

- jednostruke 3
- višestruke 3

Stefan-Boltzmanov zakon 51

stupanj prigušenja 216, 218

sustav

- električki 7
- fluidički 33
- mehanički 16, 133
- regulacijski 156, 157
- toplinski 47

svojstvene vrijednosti 112, 172

teorem

- Cauchyjev 309
- početne vrijednosti 188

tlak 34

točka loma 256

tok fluida 35

toplinski sustavi

transformator

- električki 13
- fluidički 46
- mehanički 30
- rotacijski 32
- translacijski 30

trenje

- kvadratično 25
- linearno 25
- statičko 25

ulaz 2

upravljačka pobuda 61

upravljački ulazni signal 148

varijable

- fazne 151
- fizičke 124
- fizički dostupne 126
- poprečne 53
- protječne 53

vektor

- izlazni 102
- redni 89
- stanja 101
- stupčani 89
- upravljački 102

višestruke staze 3

vodljivost toplinska 50

vrijeme

- nadvišenja 221
- porasta 225
- smirenja 223

zakovitost stanja 2

