

S V E U Č I L I Š T E U S P L I T U
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA
I BRODOGRADNJE - SPLIT

PETAR GUGIĆ

TEORIJA AUTOMATSKOG
REGULIRANJA

II DIO



SPLIT, 1982.

S V E U Č I L I Š T E U S P L I T U
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA
I BRODOGRADNJE - SPLIT

PETAR GUGIĆ

TEORIJA AUTOMATSKOG REGULIRANJA

II DIO



SPLIT, 1982.

RECENZETNI:

Dr Juraj Božičević, red. prof.

Dr Vlasta Zanchi, doc.

LEKTOR:

Ante Matković, dipl. prof.

IZDAVAČ: Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje
u Splitu, R. Boškovića bb

TISAK: Sveučilišna naklada Liber, Zagreb

PREDGOVOR

Zajedno s I dijelom Teorije automatskog reguliranja, istog autora i izdavača, od 1981. god, ova knjiga čini jednu tematsku cjelinu, koja obuhvaća nastavno gradivo iz analize i sinteze linearnih dinamičkih sustava. Formalno je to naglašeno i s numeriranjem poglavlja, koja se s početnim 9. poglavljem II dijela nastavljaju na završno 8. poglavlje I dijela. Razlog zašto oba dijela nisu izdana odjedanput i u jednoj knjizi bila je težnja da studenti što prije dobiju u ruke nastavno gradivo u pisanom obliku.

Zadaci za vježbanje gradiva iz ove knjige posebno su izdani u dvije zbirke zadataka. Prva zbirka, I.Mandić:Metode GMK u analizi i sintezi regulacijskih sustava, Sveučilište u Splitu, 1979., sadrži zadatke za 9. poglavlje, a druga zbirka, D.Stipaničev:Zadaci iz sinteze regulacijskih sustava, Sveučilište u Splitu 1982., sadrži zadatke za ostala poglavlja.

Ovdje obradjena analiza i sinteza dinamičkih sustava radjena je po tekućem nastavnom planu i programu VI i VII semestra Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, za studente elektronike i elektroenergetike u opsegu od 90 sati predavanja i 90 sati vježbi. Obradjeno gradivo, stoga, ne obuhvaća sve postupke analize i sinteze koje se može naći u literaturi, već samo jedan dio tog opsežnog gradiva, i to onaj koji po mišljenju autora daje dovoljno dobru teorijsku osnovu za daljnji studij automatskog reguliranja, a u rješavanju inženjerskih problema najbrže dovodi do rezultata.

Za studente koji budu zainteresirani za opširniji uvid u ovo područje preporučuje se literatura navedena na kraju knjige. Čitatelja neka ne smeta što su neke od navedenih knjiga starijeg datuma,

II

jer su to sve više-manje klasična djela automatike, kojih je veći dio gradiva još i danas aktuelan. Činjenica da se ipak jedan dio tog gradiva ne nalazi u ovoj knjizi, uglavnom je zbog ograničenog broja nastavnih sati, a ne zbog njegove zastarjelosti.

Na ovom mjestu izražavam zahvalnost dr Jurju Božičević, red.prof., na dugogodišnjoj suradnji i brojnim stručnim raspravama koje smo u tom razdoblju vodili, jer mi je to mnogo pomoglo prilikom postavljanja koncepcije ovog udžbenika. Zahvalnost dugujem i Anti Matković, dipl.prof. na nesebičnom zalaganju prilikom lektoriranja rukopisa, te Nadi Stipaničev za izradu crteža i daktilografinji Ankici Martinis što su svojim trudom doprinijele izgledu edicije.

U Splitu, 1982.

A u t o r

SADRŽAJ

	str.
9. GEOMETRIJSKO MJESTO KORIJENA	1
9.1. Uvod	1
9.1. Evansov postupak	4
9.3. Pravila crtanja GMK	8
9.4. Primjena GMK na osnovnom sustavu drugog reda	22
9.5. Određjivanje frekvencijskog odziva s pomoću GMK	30
9.6. Faktoriziranje polinoma s pomoću GMK	40
9.7. Ispitivanje osjetljivosti s pomoću GMK	46
9.8. Zaključak	51
10. SPECIFIKACIJE I NJIHOVI MEDJUSOBNI ODNOSI	52
10.1. Uvod	52
10.2. Točnost	52
10.2.1. Pogreška ustaljenog stanja pomaka	54
10.2.2. Pogreška ustaljenog stanja brzine	58
10.2.3. Pogreška ustaljenog stanja ubrzanja	61
10.3. M i α kružnice	62
10.4. Nicholsov dijagram	67
10.5. Korelacija vremenskog i frekvencijskog odziva osnovnog sustava drugog reda	69
10.5.1. Sustav prve vrsti	70
10.5.2. Sustav nulte vrsti	74
10.5.3. Korelacija fazne pričuve i stupnja prigušenja	77
10.6. Korelacija vremenskog i frekvencijskog odziva općenitog sustava drugog reda	81
10.6.1. Grafički prikazi	90
10.7. Zaključak	94

IV

11. SINTEZA U PROSTORU STANJA	94
11.1. Uvod	95
11.2. Najjednostavniji slučaj	96
11.3. Općeniti slučaj	102
11.3.1. Eliminiranje nula	104
11.3.2. Povećanje viška polova	107
11.3.3. Pomicanje nula	118
11.3.4. Dodavanje nula	122
11.4. Sinteza uz djelomično dostupne varijable stanja	126
11.4.1. Rješenje s minornom petljom	126
11.4.2. Rješenje sa serijskom vezom.	134
11.5. Zaključak	139
12. SINTEZA TEMELJENA NA PRIJENOSNOJ FUNKCIJI	141
12.1. Uvod	141
12.2. Kompenzatori	143
12.2.1. PI kompenzatori i kompenzatori s faznim zaostajanjem	143
12.2.2. PD kompenzatori i kompenzatori s faznim prethodjenjem	148
12.2.3. PID kompenzatori i kompenzatori s faznim zaostajanjem i prethodjenjem	153
12.3. Grafički postupci sinteze	156
12.3.1. Specificiranje željene prijenosne funkcije	156
12.3.2. Kompenzacija s faznim zaostajanjem	162
12.3.3. Kompenzacija s faznim prethodjenjem	182
12.3.4. Kompenzacija s faznima zaos- tajanjem i prethodjenjem	189
12.3.5. Paralelna kompenzacija	195
12.3.5.1. Inverzni Nyquistov dijagram	196
12.3.5.2. M i α krivulje IND	200
12.3.5.3. Ugađanje statičke osjetljivosti petlje s pomoću IND	204
12.3.5.4. Osnovne kombinacije sinteze s paralelnom kompenzacijom	205

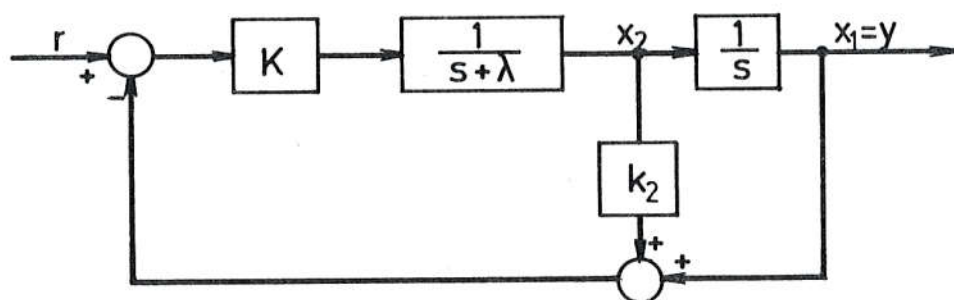
12.4. Algebarski postupak sinteze	216
12.4.1. Odredjivanje željene prijenosne funkcije iz zadanih specifikacija	216
12.4.2. Reduciranje reda prijenosne funkcije	221
12.4.3. Izbor načina kompenzacije i odredjivanje parametara kompenzatora	229
12.5. Zaključak	238
Pogovor	239
Literatura	242
Kazalo	243

9. GEOMETRIJSKO MJESTO KORIJENA

9.1. UVOD

Postupci analize služe da se na što ekonomičniji način dodje do podataka o ponašanju dinamičkih sustava. U ovisnosti o podacima koji nas zanimaju, primjenjuju se i odgovarajući postupci.

Jedan od mogućih načina da se dobije uvid u ponašanje dinamičkog sustava jest da se izračunaju sve singularne točke njegovog matematičkog modela. Još bolji uvid se dobije ako se istraže i odstupanja singularnih točaka od njihovih nazivnih vrijednosti, u ovisnosti o promjenama parametara sustava. Primjenom principa superpozicije svaka se promjena može promatrati odvojeno i na taj način za svaku singularnu točku može se dobiti funkcija njene promjene u ovisnosti o promjeni određenog parametra. Grafički prikaz tih promjena u s ravnini, koji se obično naziva *geometrijsko mjesto korijena (GMK)*, na pregledan način daje vrlo dobar uvid u ponašanje sustava.



Sl. 9.1. Regulacijski sustav drugog reda s koeficijentom povratne veze $k_1=1$

Ilustrirajmo to na sustavu drugog reda (Sl.9.1.), kojeg funkcija petlje izražena s $H_{eq}(s)$ glasi:

$$K G_p(s) H_{eq}(s) = \frac{K(k_2 s + 1)}{s(s + \lambda)} \quad (9.1.)$$

Najprije razmotrimo slučaj kad je pojačanje K promjenljivo, $k_2=0$, a svi ostali parametri su konstantni. Uz $k_2=0$ prijenosna funkcija regulacijskog sustava je:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K}{s^2 + \lambda s + K} \quad (9.2.)$$

a korijeni karakteristične jednadžbe su:

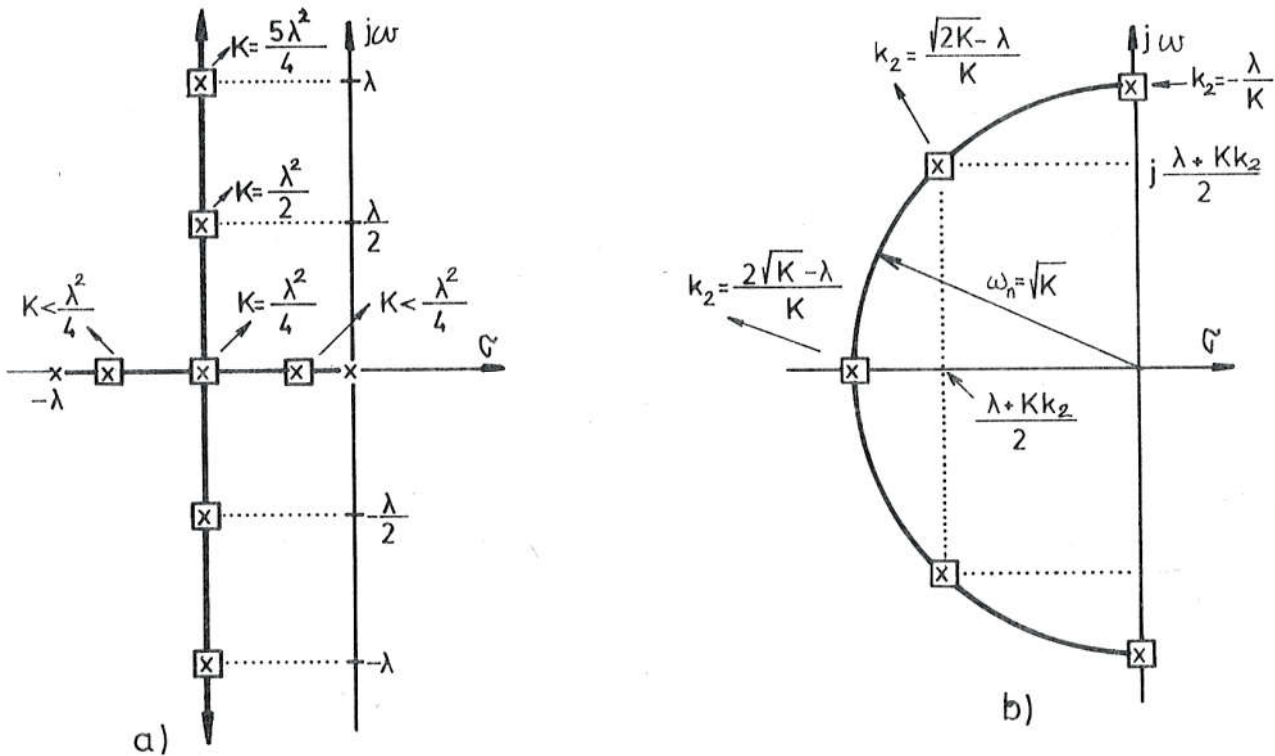
$$s_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - K} \quad (9.3.)$$

Promjenom K od nula do beskonačnosti, mijenjaju se vrijednosti korijena, kako je prikazano na Sl.9.2.a. Sa slike se lijepo vidi zakonitost promjene korijena u ovisnosti o promjeni pojačanja K . Za $K < \frac{\lambda^2}{4}$ korijeni su realni negativni i različiti, iz čega proizlazi da će vremenski odziv biti aperiodički prigušen. Za $K = \frac{\lambda^2}{4}$ korijeni su realni negativni i jednaki, a vremenski odziv će biti kritički aperiodičan. Za $K > \frac{\lambda^2}{4}$ korijeni su konjugirano kompleksni, a vremenski odziv će biti periodički prigušen.

Zornost GMK vrlo dobro pomaže i pri izračunavanju raznih parametara. Uzmimo da treba naći pojačanje kojim se postiže stupanj prigušenja $\zeta = 0,707$. Iz $\psi = \arccos \zeta$ nalazimo da je $\psi = 45^\circ$. Pod tim kutom povučemo poluzraku od ishodišta do presjeka s GMK i u presjecištima očitamo korijene $s_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm j \frac{\lambda}{2}$. Uvrštenjem dobijenih korijena u karakterističnu jednadžbu:

$$s^2 + \lambda s + K = (s-p_1)(s-p_2) = 0 \quad (9.4.)$$

i rješenjem dobije se:



Sl.9.2. Geometrijsko mjesto korijena sustava drugog reda sa Sl. 9.1.

- a) uz promjenljivi K i $k_2=0$
b) uz promjenljivi k_2

$$\begin{aligned}(s-p_1)(s-p_2) &= (s + \frac{\lambda}{2} - j \frac{\lambda}{2})(s + \frac{\lambda}{2} + j \frac{\lambda}{2}) = \\ &= s^2 + s\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\end{aligned}\quad (9.5.)$$

Izjednačenjem odgovarajućih koeficijenata jednadžbi (9.4.) i (9.5.) dobije se da traženo pojačanje koje odgovara stupnju prigušenja $\zeta=0,707$ iznosi $K = \frac{\lambda^2}{2}$.

Za drugi primjer uzmimo da se mijenja koeficijent povratne veze k_2 , a da su ostali parametri konstantni. Karakteristična jednadžba u tom slučaju glasi:

$$s^2 + s(\lambda + K k_2) + K = 0 \quad (9.6.)$$

a njeni korijeni su:

$$s_{1,2} = -\frac{\lambda + K k_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda + K k_2)^2}{4} - K} \quad (9.7.)$$

Izjednačenjem odgovarajućih koeficijenata karakteristične jednadžbe (9.6.) i karakteristične jednadžbe općenitog sustava drugog reda izražene parametrima kompleksnog područja dobije se:

$$\lambda + K k_2 = 2\zeta\omega \quad \text{i} \quad K = \omega^2 \quad (9.8.)$$

a odatle, budući da je pojačanje K konstantno, proizlazi da je i neprigušena kružna frekvencija konstantna. Promjene k_2 utječu stoga samo na stupanj prigušenja ζ , tako da GMK ispada polukružnica polumjera $\sqrt{K}$, kako je pokazano na Sl. 9.2.b.

Prikladnost ovakvih grafičkih prikaza je očita. Iz njih se na prvi pogled može vidjeti kako će se sustav ponašati pod utjecajem promjena pojedinih parametara. Nedostatak im je da zahtijevaju suviše vremena za izračunavanje korijena, posebno kad se radi o sustavima višeg reda. U ovom poglavlju ćemo vidjeti kako se taj nedostatak može otkloniti.

9.2. EVANSOV POSTUPAK

Kanonski oblik regulacijskog sustava izražen s pomoću $H_{eq}(s)$ glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s)H_{eq}(s)} \quad (9.9.)$$

što uz:

$$G_p(s) = K_p \frac{B_p(s)}{N_p(s)} \quad (9.10.)$$

i

$$H_{eq}(s) = K_h \frac{B_h(s)}{N_h(s)} = K_h \frac{B_h(s)}{B_p(s)} \quad (9.11.)$$

izlazi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K K_p B_p(s) / N_p(s)}{1 + [K K_p K_h B_p(s) B_h(s) / N_p(s) B_p(s)]},$$

a uredjenjem se dobije:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K K_p B_p(s)}{N_p(s) + K K_p K_h B_h(s)} = \frac{K K_p B_p(s)}{N_p(s) + K_u B_h(s)} \quad (9.12.)$$

gdje je $K_u = K K_p K_h$

Iz jednadžbe (9.12.) proizlazi da, čak i ako su $G_p(s)$ i $H_{eq}(s)$ zadani u faktoriziranom obliku, do polova regulacijskog sustava može se neposredno doći samo rješenjem karakteristične jednadžbe:

$$N_p(s) + K_u B_h(s) = 0, \quad (9.13.)$$

a znamo da za sustave veće od trećeg reda to nije jednostavno.

Duhovito rješenje problema pruža *Evansov postupak*, poznatiji pod nazivom *postupak geometrijskog mjesta korijena*. Zasniva se na svojstvima karakteristične jednadžbe (9.13.), koja se može izraziti u obliku:

$$\frac{N_p(s)}{B_h(s)} = -K_u,$$

odnosno:

$$\frac{N_p(s)}{B_h(s)} = K_u e^{j\Pi} \quad (9.14.)$$

Iz jednadžbe (9.14.) proizlazi *jednadžba modula karakteristične jednadžbe*:

$$\left| \frac{N_p(s)}{B_h(s)} \right| = K_u, \quad (9.15.)$$

odnosno:

$$\frac{\prod_{j=1}^n (s-p_j)_p}{\prod_{i=1}^m (s-z_i)_h} = K_u \quad (9.16.)$$

i jednađžba argumenta karakteristične jednađžbe:

$$\arg N_p(s) - \arg B_h(s) = (1 + 2k)\pi \quad (9.17.)$$

odnosno:

$$\sum_{j=1}^n \arg(s-p_j)_p - \sum_{i=1}^m \arg(s-z_i)_h = (1+2k)\pi \quad (9.18.)$$

Ideja Evansovog postupka zasniva se na svojstvu karakteristične jednađžbe prema kojem svaka točka koja predstavlja pol odredjenog regulacijskog sustava mora neovisno zadovoljiti obje prethodne jednađžbe, tj. posebno jednađžbu modula (9.16.) i posebno jednađžbu argumenta (9.18.). Vidjet ćemo da se na temelju tog svojstva može nacrtati GMK i bez izračunavanja korijena. Budući da je pojačanje K najvažniji promjenljivi parametar regulacijskog sustava, taj ćemo slučaj najprije obraditi.

Obradu slučaja s promjenljivim pojačanjem počinjemo razmatranjem karakteristične jednađžbe pisane u obliku (9.13.). Za $K_u=0$ jednađžba (9.13.) poprima oblik:

$$N_p(s) = 0, \quad (9.19.)$$

a za $K_u=\infty$, nakon dijeljenja sa K_u dobije se:

$$B_h(s) = 0 \quad (9.20.)$$

Budući da $N_p(s)$ predstavlja nazivnik, a $B_h(s)$ brojnik prijenosne funkcije petlje, iz jednađžbi (9.19.) i (9.20.) proizlazi da se za $K=0$ točke GMK podudaraju s polovima prijenosne funkcije petlje, a za $K=\infty$ s nulama prijenosne funkcije petlje. To znači

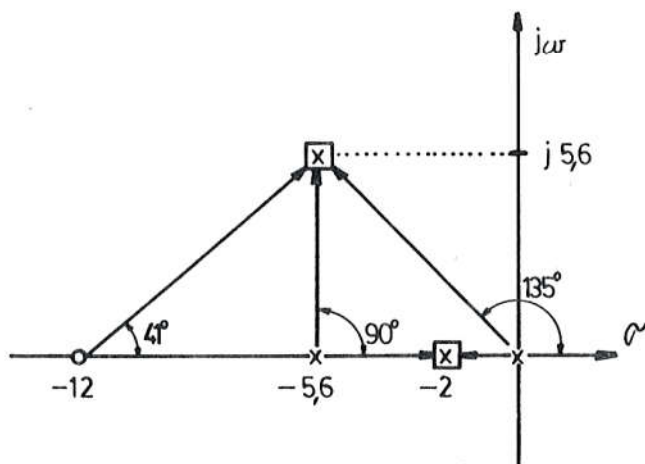
da crtanje GMK možemo započeti ucrtavanjem polova i nula prijenosne funkcije petlje u s ravninu. Ako $B_h(s)$ i $N_p(s)$ imaju zajednički faktor, oni se ne smiju poništiti. Razlog za to vidjet će se kasnije.

Nakon unošenja polova $G_p(s)$ i nula $H_{eq}(s)$ u s ravninu, pristupa se određivanju krivulja GMK za $0 < K < \infty$. Točke tih krivulja provjeravaju se s pomoću jednadžbi modula ili argumenta, koje moraju biti zadovoljene.

Pokažimo to na sustavu sa Sl.9.1. uz $\lambda=5,6$ i $k_2=0,083$, kojeg prijenosna funkcija petlje glasi:

$$KG_p(s)H_{eq}(s) = \frac{KB_h(s)}{N_p(s)} = \frac{Kk_2(\frac{k_1}{k_2} + s)}{s(s+\lambda)} = \frac{K \cdot 0,083(s+12)}{s(s+5,6)} \quad (9.21.)$$

a polno nulti dijagram je prikazan na Sl. 9.3.



Sl.9.3. Polno nulti dijagram funkcije petlje sustava sa Sl.9.1. s pokusnim verzorima za određivanje točaka GMK

Za točku $s=-5,6 + j \ 5,6$ primjenom jednadžbe (9.18.) dobije se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \arg(s-p_j)_p - \sum_{i=1}^m \arg(s-z_i)_h &= \\ &= \arg(s-0) + \arg(s+5,6) - \arg(s+12) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \arg(-5,6 + j5,6) + \arg(-5,6 + j5,6 + 5,6) - \arg(-5,6 + j5,6 + 12) = \\
 &= \arctg \frac{5,6}{-5,6} + \arctg \frac{5,6}{0} - \arctg \frac{5,6}{6,4} = \\
 &= \arctg(-1) + \arctg(\infty) - \arctg(0,875) = \\
 &= 135^\circ + 90^\circ - 41^\circ = 184^\circ
 \end{aligned}$$

Ovaj rezultat, koji se mogao dobiti i neposrednim mjerenjem kutova na Sl. 9.3., očitito ne zadovoljava jednadžbu argumenta (9.18.), pa stoga zaključujemo da se točka $s = -5,6 + j5,6$ ne nalazi na GMK i da stoga ne može predstavljati korijen karakteristične jednadžbe regulacijskog sustava kojeg je polno nulti dijagram petlje prikazan na Sl. 9.3.

Ako razmotrimo točku $s = -2 + j0$ primjenom jednadžbe argumenta (9.18.), dobije se:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^n \arg(s - p_j)_p - \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i)_h = \\
 &= 180^\circ + 0^\circ - 0^\circ = 180^\circ,
 \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da se točka $s = -2 + j0$ nalazi na GMK, pa da stoga predstavlja korijen karakteristične jednadžbe istraživanih regulacijskog sustava za određeno pojačanje K .

Kad bi se ovako nasumce nastavilo tražiti pripadne točke GMK u s ravnini, to bi bio vrlo mučan posao, koji u inženjerskoj praksi ne bi bio ekonomičan. Na svu sreću, *Evans* je pronašao način na koji se GMK može nacrtati relativno brzo i jednostavno.

9.3. PRAVILA CRTANJA GMK

Upute za crtanje GMK izražena su u nizu pravila, koja se kod raznih autora donekle razlikuju po broju i redoslijedu, iako ne i po sveukupnom sadržaju. Ovdje ćemo ih obuhvatiti s dvanaest pravila.

Prvo pravilo - broj grana GMK ima onoliko grana koliko funkcija petlje $K G_p(s) H_{eq}(s)$ ima polova.

Dokaz: Poznato je da je broj polova funkcije regulacijskog sustava jednak broju polova funkcije petlje. Njihove se vrijednosti, međutim, razlikuju u ovisnosti o promjeni pojačanja K .

Prema jednadžbi (9.19.) za $K=0$, polovi funkcije regulacijskog sustava se podudaraju s polovima funkcije petlje, a kada K raste, svaki pojedinačni korijen slijedi neprekinutu krivulju. Prema tome, koliko polova ima funkcija petlje, toliko mora biti neprekinutih krivulja, koje nazivamo *grane GMK*. Ovo je ujedno razlog zašto se polovi funkcije $G_p(s)$ ne smiju kratiti s nulama funkcije $H_{eq}(s)$.

Drugo pravilo - krajnje točke. *Grane GMK* izvire iz polova funkcije $G_p(s)$ i poniru u nulama funkcije $H_{eq}(s)$.

Dokaz: Iz jednadžbe (9.20.) proizlazi da se za $K=\infty$ korijeni karakteristične jednadžbe regulacijskog sustava podudaraju s nulama funkcije petlje, čime je gornje pravilo dokazano. *Grane* koje ne završavaju u konačnim nulama, završavaju u nulama koje se nalaze u beskonačnosti.

Treće pravilo - mjesta na realnoj osi. Točka na realnoj osi pripada *GMK* samo ako joj se s desne strane nalazi neparan broj singularnih točaka funkcije petlje.

Dokaz: Odaberimo jednu točku na realnoj osi i povucimo na nju verzore iz svih singularnih točaka funkcije petlje, pa onda provjerimo da li zadovoljavaju jednadžbu argumenta. Obratimo najprije pažnju na verzore koji dolaze iz singularnih točaka izvan realne osi. Te se točke mogu pojavljivati samo u konjugirano kompleksnim parovima, a kutovi verzora takvih parova se međusobno poništavaju. Iz toga proizlazi da na jednadžbu argumenta mogu utjecati samo verzori onih singularnih točaka koje se nalaze na realnoj osi.

Obratimo li i ovdje najprije pažnju na verzore singularnih točaka koje se nalaze s lijeve strane odabrane točke, dolazimo do zaključka da svaki od njih leži na realnoj osi s orijentacijom u desno, pa da stoga s realnom osi zatvara kut jednak nuli. Prema tome ni kutovi tih verzora neće utjecati na jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe. Još su ostali samo verzori singularnih

točaka koje se nalaze s desne strane odabrane točke. Oni će zadovoljiti jednadžbu argumenta samo ako ih ima neparan broj, čime je gornje pravilo dokazano.

Četvrto pravilo - simetričnost. GMK je uvijek simetrično u odnosu na realnu os.

Dokaz: Polovi se mogu nalaziti na realnoj osi, ili izvan nje. Oni koji su izvan osi mogu biti samo konjugirano kompleksni, a budući da su konjugirano kompleksni parovi simetrično postavljeni prema realnoj osi, proizlazi da i GMK mora biti simetrično u odnosu na realnu os za sve vrijednosti pojačanja K .

Peto pravilo - kutovi priklona asimptota prema realnoj osi. Asimptote GMK čine s realnom osi kut:

$$\psi = \frac{(1 + 2k)}{n - m} , \quad (9.22.)$$

gdje je n broj polova, a m broj nula funkcije petlje.

Dokaz: Granična vrijednost karakteristične jednadžbe glasi:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} KG_p(s)H_{eq}(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[K_u \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[K_u \frac{s^m \prod_{i=1}^m (1 - \frac{z_i}{s})}{s^n \prod_{j=1}^n (1 - \frac{p_j}{s})} \right] = \frac{K_u}{s^{n-m}} = -1 , \end{aligned} \quad (9.23.)$$

a odatle jednadžba modula:

$$|-K_u| = |s^{n-m}| \quad (9.24.)$$

i jednadžba argumenta:

$$\arg(-K_u) = \arg(s^{n-m}) = (1+2k)\pi \quad (9.25.)$$

Budući da je argument umnoška kompleksnih brojeva jednak zbroju njihovih argumenata, jednačbu (9.25.) se može pisati u obliku:

$$(n-m) \arg s = (1 + 2k)\pi ,$$

a za $s \rightarrow \infty$

$$\psi = \frac{1 + 2k \pi}{n - m} ,$$

Ovim je gornje pravilo dokazano.

Šesto pravilo - presjek asimptota s realnom osi. Asimptote GMK sijeku realnu os u *centroidu* polno nultog dijagrama koji je dan relacijom:

$$\sigma_o = \frac{\sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(p_j) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(z_i)}{n - m} \quad (9.26.)$$

Dokaz: Prisjetimo se najprije da se polinom:

$$a_{n+1} s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a s + a_1 = 0 \quad (9.27.)$$

može pisati u faktoriziranom obliku:

$$a_{n+1} (s-r_1)(s-r_2) \dots (s-r_n) = 0 , \quad (9.28.)$$

a da množenjem i sredjenjem opet poprma izvorni oblik koji glasi:

$$\begin{aligned} a_{n+1} s^n - a_{n+1} \sum_{i=1}^n (r_i) s^{n-1} + a_{n+1} (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 + \dots) s^{n-2} \\ - a_{n+1} (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots) s^{n-3} + a_{n+1} (-1)^n \prod_{i=1}^n (r_i) = 0 \end{aligned} \quad (9.29.)$$

Usporedbom izraza uz odgovarajuće potencije izvorne relacije (9.27.) i izvedene relacije (9.29.) dobiju se korijenima izraženi koeficijenti polinoma.

Na temelju toga karakteristična jednadžba:

$$1 + KG_p(s) H_{eq}(s) = 0 \quad (9.30.)$$

odnosno:

$$\frac{1}{G_p(s) H_{eq}(s)} = -K \quad (9.31.)$$

se može pisati u obliku:

$$\frac{s^{n-s^{n-1}} \sum_{j=1}^n (p_j) + \dots + (-1)^n \prod_{j=1}^n (p_j)}{s^m - s^{m-1} \sum_{i=1}^m (z_i) + \dots + (-1)^m \prod_{i=1}^m (z_i)} = -K \quad (9.32.)$$

a dijeljenjem brojnika s nazivnikom izlazi:

$$s^{n-m} + s^{n-m-1} \left[\sum_{i=1}^m (z_i) - \sum_{j=1}^n (p_j) \right] + \dots = -K, \quad (9.33.)$$

dakle jednadžba oblika:

$$s^{n-m} + as^{n-m-1} + bs^{n-m-2} + \dots = -K \quad (9.34.)$$

Vratimo se trenutno na peto pravilo gdje je izvedena jednadžba:

$$s^{n-m} = -K, \quad (9.35.)$$

a predstavlja pravac u s ravnini koji siječe realnu os pod kutom:

$$\psi = \frac{(1 + 2k)\Pi}{n-m}$$

Medjutim, taj pravac prolazi kroz ishodište, a stvarna asimptota će od ishodišta biti udaljena za $-z_0$, ili može se uzeti da je ishodište pomaknuto za $-z_0$ u točku $s=s_1+z_0$. Jednadžba (9.35.) u

tom slučaju glasi:

$$s_1^{n-m} = -K, \quad (9.36.)$$

a supstitucijom $s=s_1+z_0$ u jednadžbu (9.34.) i razvojem po Newtonovoj formuli dobije se:

$$s_1^{n-m} + \left[(n-m)z_0 + a \right] s_1^{n-m-1} + \dots = -K \quad (9.37.)$$

Usporedbom jednadžbi (9.36.) i (9.37.) izlazi da svi članovi na lijevoj strani jednadžbe (9.37.), osim s_1^{n-m} moraju biti jednaki nuli. To znači da je i koeficijent uz s_1^{n-m-1} jednak nuli, pa stoga izlazi da je:

$$z_0 = \frac{-a}{n-m}, \quad (9.38.)$$

a uvrštenjem vrijednosti za a iz (9.33.) izlazi:

$$z_0 = \frac{\sum_{j=1}^n (p_j) - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (9.39.)$$

Budući da se svi kompleksni polovi i nule javljaju u konjugiranom obliku, z_0 će uvijek biti realni broj pa je stoga:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(p_j) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(z_i)}{n-m} \quad (9.40.)$$

gdje je σ_0 točka presjeka asimptote s realnom osi, a naziva se *centroid polno nultog dijagrama*.

Sedmo pravilo - točke loma GMK na realnoj osi. Ako između dvaju polova ili dviju nula na realnoj osi postoji GMK, između polova mora postojati točka izlaznog loma, a između nula točka ulaznog loma.

Dokaz: Ako je ispunjen uvjet postojanja GMK između dva pola na realnoj osi, grane koje s porastom pojačanja K idu jedna prema drugoj, moraju na jednom mjestu izaći iz realne osi da bi se uputile prema nulama u kojima trebaju završiti. Te točke na re-

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\varepsilon}{5,6 - y}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon}{12 - y}$$

Pusti li se da $\varepsilon \rightarrow 0$ dobije se:

$$\gamma_1 = 180 - \frac{\varepsilon}{y} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{\varepsilon}{5,6 - y} \quad i \quad \delta = \frac{\varepsilon}{12 - y}$$

Uvrštenjem izračunanih kutova u jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe, izlazi:

$$\Pi - \frac{\varepsilon}{y} + \frac{\varepsilon}{5,6 - y} - \frac{\varepsilon}{12 - y} = \Pi$$

a odatle:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5,6 - y} - \frac{1}{12 - y}$$

što sredjenjem daje kvadratnu jednadžbu:

$$y^2 - 24y + 67,2 = 0$$

s rješenjima:

$$y_1 = 20,75 \quad i \quad y_2 = 3,25$$

Budući da y_2 pada između dva pola i da s desne strane ima neparan broj singularnih točaka, zaključujemo da je to tražena točka izlaznog loma, a y_1 je točka ulaznog loma.

Drugi način određivanja točaka loma temelji se na primjeni jednadžbe modula karakteristične jednadžbe. Račun ćemo provesti na istom primjeru sa Sl.9.4. Karakteristična jednadžba regulacijskog sustava glasi:

$$1 + \frac{K(s + 12)}{s(s + 5,6)} = ,$$

a jednadžba modula:

$$\frac{|s| |s + 5,6|}{|s + 12|} = K$$

Budući da pojačanje K na realnoj osi poprima maksimalnu vrijednost u točki izlaznog loma, a minimalnu vrijednost u točki ulaznog loma, do tih točaka se može doći izračunavanjem vrijednosti u kojima K poprima ekstremne vrijednosti. Račun se izvodi standardnim postupkom, tako da funkciju modula deriviramo po s , i izjednačimo s nulom. Nakon provedenog računa i sredjenja, u ovom slučaju dobijemo kvadratnu jednadžbu:

$$s^2 + 24s + 67,2 = 0$$

s korijenima:

$$s_1 = -3,25 \quad i \quad s_2 = -20,75$$

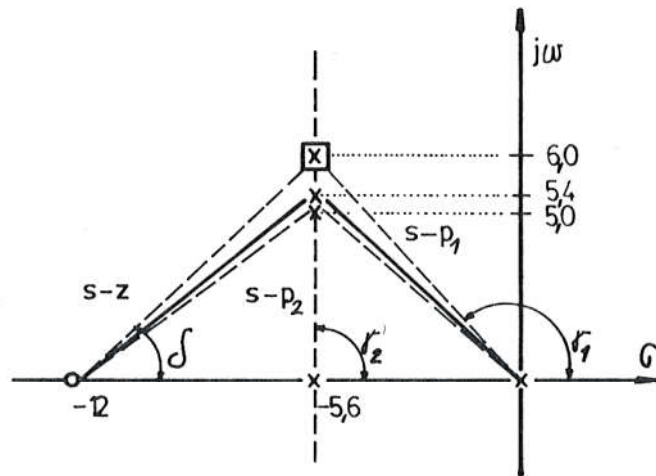
Vidimo da smo u oba slučaja dobili iste rezultate. Uvrštenjem $s_1 = -3,25$ i $s_2 = -20,75$ u jednadžbu modula karakteristične jednadžbe dobiju se vrijednosti pojačanja K u točkama izlaznog i ulaznog loma. U ovom slučaju u točki izlaznog loma pojačanje $K=0,873$, a u točki ulaznog loma $K=35,9$.

Osmo pravilo - točke na GMK. Svaka točka u s ravnini koja se nalazi na GMK mora zadovoljavati jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe.

Dokaz: Ako točka u s ravnini pripada GMK, ona je pol regulacijskog sustava za određeno pojačanje K , a kao pol sustava, mora zadovoljiti jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe. Time je gornje pravilo dokazano.

Postupak određivanja točke na GMK pokazat ćemo na istom sustavu kojeg je polno nulti dijagram za ovu priliku nacrtan na Sl.9.5.

Na mjestu gdje predviđamo da prolazi GMK povucimo okomicu i na njoj izabavimo jednu točku na koju povucimo verzore iz svih singularnih točaka funkcije petlje. Zatim izmjerimo kutove tih verzora i uvrstimo u jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe. Ako je jednadžba zadovoljena, znači da se točka nalazi na



Sl.9.5. Određjivanje točke na GMK

GMK i problem je time riješen. Ako jednađžba nije zadovoljena, izaberemo drugu točku na istoj okomici i ponovimo postupak, pa ako smo dobili veću pogrešku nego u prethodnom pokušaju, znači da se udaljujemo od tražene točke, te stoga idući pokušaj treba izvesti na točki koja se nalazi na suprotnoj strani prethodne točke. Ako je pogreška manja nego u prethodnom pokušaju, znači da se približavamo traženoj točki i stoga slijedeći pokušaj treba izvesti na točki koja se po okomici u istom smjeru udaljava od prethodne točke.

Pogledajmo kako bi to išlo na dijagramu sa Sl.9.5. Već smo u stvari jedan pokušaj izveli na Sl.9.3., izabравši točku $s=5,6 + j5,6$. Uvrštenjem kutova verzora u jednađžbu argumenta karakteristične jednađžbe dobili smo da razlika polnih i nultih argumenata ne zadovoljava, jer rezultat iznosi 184° , a ne 180° , kako bi trebalo biti kad bi se točka nalazila na GMK.

Za drugi pokušaj ostajemo na istoj okomici i izabiremo točku $s=-5,6 + j5$, kojoj kutovi verzora iznose $\gamma_1=138,3^\circ$ te $\gamma_2=90^\circ$ i $\delta=38^\circ$, što uvršteno u jednađžbu argumenta karakteristične jednađžbe daje:

$$138,3 + 90 - 38 = 190,3^\circ \neq 180^\circ$$

Budući da je pogreška veća nego u prethodnom pokušaju, za slijedeći pokušaj odabiremo točku $s = -5,6 + j6$. Povučemo li na nju verzore i njihove kutove unesemo u jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe dobit ćemo:

$$133,2^{\circ} + 90 - 43,2 = 180^{\circ}$$

Budući da je jednadžba argumenta zadovoljena, znači da se točka $s = -5,6 + j6$ nalazi na GMK.

Deveto pravilo - kut napuštanja kompleksnog pola i kut ulaska u kompleksnu nulu. Kut napuštanja kompleksnog pola i kut ulaska u kompleksnu nulu moraju zadovoljavati jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe.

Dokaz: Tangenta na GMK u točki kompleksnog pola (ili kompleksne nule) podudara se s verzorom povučenim iz te točke na točku GMK udaljenu od kompleksnog pola (ili kompleksne nule) za dužinu ϵ , ako $\epsilon \rightarrow 0$. Budući da GMK napušta kompleksni pol (ili ulazi u kompleksnu nulu) u pravcu tangente, a tangenta se podudara s verzorom, slijedi da je kut napuštanja kompleksnog pola (ili ulaska u kompleksnu nulu) ujedno i kut verzora, pa stoga mora zadovoljiti jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe.

Pokažimo to na primjeru kuta napuštanja kompleksnog pola GMK sustava sa Sl.9.6.

Uvrštenjem kutova u jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe dobije se:

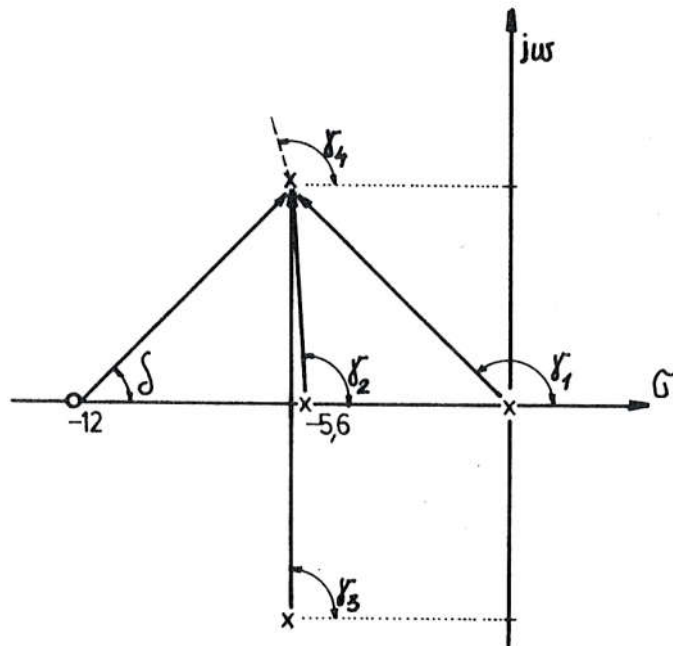
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - \delta = 180,$$

a odatle traženi kut napuštanja kompleksnog pola:

$$\gamma_4 = 180 + \delta - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$$

Budući da su:

$$\gamma_1 = 135^{\circ} ; \quad \gamma_2 = 94,8^{\circ} ; \quad \gamma_3 = 90^{\circ} \quad \text{i} \quad \delta = 45^{\circ} \quad \text{izlazi:}$$



Sl.9.6. Odredjivanje kuta napuštanja kompleksnog pola

$$\gamma_4 = 180 + 45 - 135 - 94,8 - 90 = -94,8^\circ$$

što predstavlja kut izlaska GMK iz konjugirano kompleksnog pola. Na sličan način odredjuje se i kut ulaska GMK u konjugirano kompleksnu nulu.

Deseto pravilo - presjecište s imaginarnom osi. Ako neka od grana GMK siječe imaginarnu os, točka presjeka mora zadovoljiti jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe.

Dokaz: Budući da se točka presjeka nalazi na GMK, dokaz je trivijalan.

Postupak odredjivanja točke presjeka GMK s imaginarnom osi jednak je kao i postupak odredjivanja bilo koje točke na GMK prema pravilu osmom, s razlikom što se u ovom slučaju pokušaji vrše na imaginarnoj osi. Za sustav sa Sl.9.6. uzastopnim pokušajima se odbije da se GMK s imaginarnom osi siječe u točki $s = \pm j 2,8$.

Jedanaesto pravilo - odredjivanje pojačanja za točku na GMK. Točka koja se nalazi na GMK mora zadovoljiti jednadžbu modula karakteristične jednadžbe.

Dokaz: Budući da se točka za koju se traži pojačanje nalazi na GMK, dokaz je trivijalan.

Postupak za određivanje pojačanja za određenu točku na GMK sastoji se u tome da se na dotičnu točku povuku verzori iz svih singularnih točaka, i njihove vrijednosti uvrste u jednadžbu modula karakteristične jednadžbe.

Pokažimo to za točku $s = -5,6 + j6$ sustava na Sl.9.5. Dužine verzora iznose:

$$|s - p_1| = 8,2 \quad ; \quad |s - p_2| = 6 \quad i \quad |s - z| = 8,8 ,$$

a uvrštenjem u jednadžbu modula karakteristične jednadžbe dobije se:

$$\frac{\prod_{j=1}^n |(s-p_j)|}{\prod_{i=1}^m |(s-z_i)|} = \frac{|s-p_1| |s-p_2|}{|s-z|} = \frac{8,2 \cdot 6}{8,8} = 5,6 = K$$

Prema tome, traženo pojačanje u točki $s = -5,6 \pm j6$ iznosi 5,6.

Dvanaesto pravilo - konstantnost zbroja polova. Ako je broj polova funkcije petlje barem za dva veći od broja nula, tj.

$P - Z \geq 2$, zbroj polova funkcije regulacijskog sustava ostaje konstantan, tj. neovisan o pojačanju K , a jednak je zbroju polova funkcije petlje. Analitički izraženo:

$$\sum_{j=1}^v p_j = \sum_{j=1}^v r_j \quad \text{za} \quad P - Z \geq 2 \quad (9.41.)$$

gdje su p_j polovi funkcije petlje, r_j polovi funkcije regulacijskog sustava, P broj polova funkcije petlje i Z broj nula funkcije petlje.

Dokaz: Funkcija petlje u faktoriziranom obliku glasi:

$$KG_p(s)H_{eq}(s) = \frac{K \prod_{m=1}^w (s-z_m)}{s^n \prod_{c=1}^u (s-p_c)} \quad (9.42.)$$

Budući da se radi o razlomljenoj racionalnoj funkciji, vrijedi nejednakost:

$$w \leq v = u + n$$

Uvrštenjem funkcije petlje u karakteristični polinom regulacijskog sustava, dobije se:

$$1 + KG_p(s) H_{eq}(s) = \frac{\prod_{c=1}^u (s-p_c) + K \prod_{m=1}^w (s-z_m)}{s^n \prod_{c=1}^u (s-p_c)} \quad (9.43)$$

Karakteristični polinom regulacijskog sustava se može pisati i u obliku:

$$1 + KG_p(s) H_{eq}(s) = \frac{\prod_{j=1}^v (s - r_j)}{s^n \prod_{c=1}^u (s-p_c)} \quad (9.44)$$

Izjednačenjem desnih strana jednadžbi (9.43) i (9.44), izlazi:

$$s^n \prod_{c=1}^u (s-p_c) + K \prod_{m=1}^w (s-z_m) = \prod_{j=1}^v (s - r_j)$$

a razvojem u red dobije se:

$$(s^v - \sum_{c=1}^u p_c s^{v-1} + \dots) + K(s^w - \sum_{m=1}^w z_m s^{w-1} + \dots) = s^v - \sum_{j=1}^v r_j s^{v-1} + \dots \quad (9.45)$$

Ako funkcija petlje ima barem dva pola više nego nula, tj. $w \leq v-2$, koeficijenti uz s^{v-1} mogu se izjednačiti, pa izlazi:

$$\sum_{c=1}^u p_c = \sum_{j=1}^v r_j$$

Budući da je $v=u+n$ i da su vrijednosti svih polova u ishodištu jednaki nuli, može se pisati:

$$\sum_{j=1}^v p_j = \sum_{j=1}^v r_j, \quad (9.46)$$

Ovim je gornje pravilo dokazano.

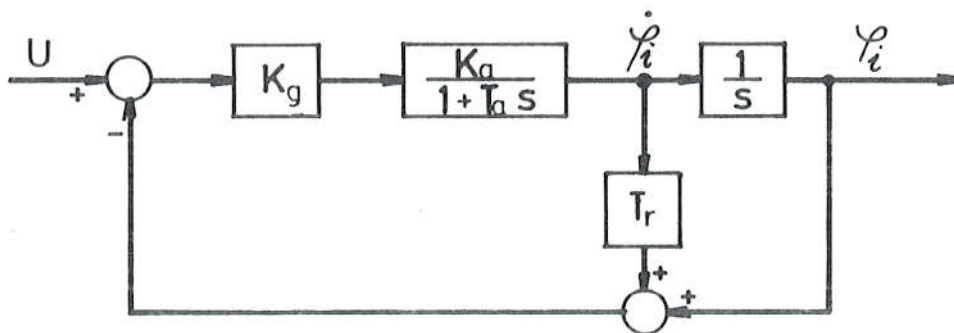
Iz ovog pravila proizlazi poučak: Ako su u regulacijskom sustavu s barem dva pola više od broja nula u funkciji petlje, neke od grana GMK usmjerene u jednu stranu, druge grane moraju biti usmjerene u suprotnu stranu, da bi pravilo konstantnosti korijena ostalo zadovoljeno.

9.4. PRIMJENA GMK NA OSNOVNOM SUSTAVU DRUGOG REDA

Ilustrirajmo to na GMK istosmjernog servomotora s linearnim regulatorom, prema Sl.9.7. Vrijednosti nepromjenljivih parametara su:

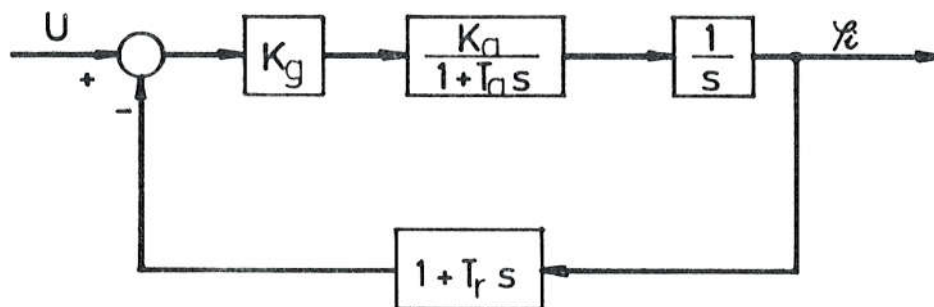
- statička osjetljivost motora $K_a=335$
- vremenska konstantnost motora $T_a = 0,179$ s i
- vremenska konstanta tahogeneratora $T_r=0,083$ s,

a traži se GMK za promjenu pojačanja K_g od nule do beskonačnosti.



Sl.9.7. Istosmjerni servomotor s linearnim regulatorom stanja

Budući da za crtanje GMK polazimo od polova i nula funkcije petlje, blokovski prikaz s vremenskim konstantama i varijablama stanja sa Sl.9.7. najprije transformiramo u blokovski prikaz sa singularnim točkama i H_{eq} , na Sl.9.8.



Sl.9.8. Nadomjesni blokovski prikaz s H_{eq} servomotora sa sl.9.7.

Karakteristična jednađba prijenosne funkcije regulacijskog sustava sa Sl.9.8. glasi:

$$KG_p(s)H_{eq}(s) = \frac{K(s - z)}{s(s - p)} = 1, \quad (9.47.)$$

gdje su:

$$z = -\frac{1}{T_r} = -\frac{1}{0,083} = -12$$

$$p = -\frac{1}{T_a} = -\frac{1}{0,179} = -5,6 \quad i$$

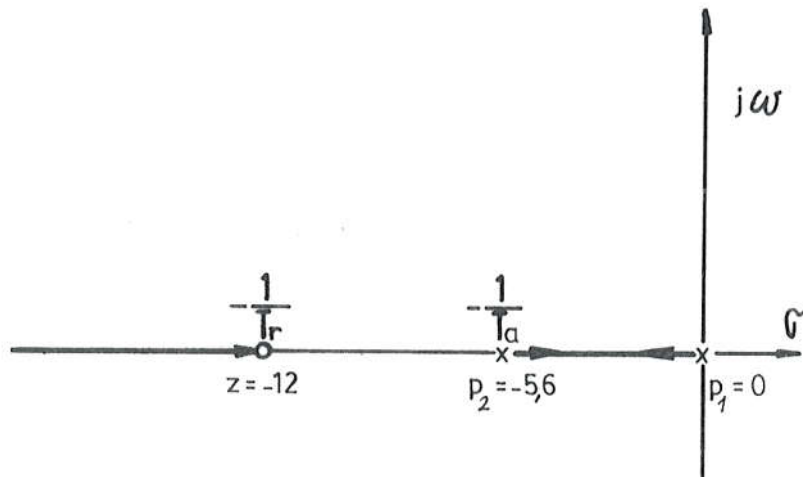
$$K = K_g K_s T_r/T_a, \quad (9.48.)$$

tako da funkcija petlje s numeričkim vrijednostima izlazi:

$$\frac{K(s + 12)}{s(s + 5,6)} \quad (9.49.)$$

Prema postupku crtanja GMK najprije u s ravninu ucrtavamo singularne točke funkcije petlje kako je to učinjeno na Sl.9.9., a potom se crta GMK primjenjujući pravila za crtanje, u pravilu po redoslijedu kako su navedena.

Budući da postoje dva pola funkcije petlje, prema prvom pravilu zaključujemo da postoje i dvije grane GMK.



Sl.9.9. Singularne točke petlje u s ravlini servomotora sa Sl.9.8.

Prema drugom pravilu zaključujemo da grane izvire iz polova $p_1=0$ i $p_2=5,6$, a budući da trebaju završiti u nulama, jedna će grana završiti u konačnoj nuli $z=-12$, a druga u beskonačnosti.

Prema trećem pravilu zaključujemo da će se GMK na realnoj osi nalaziti između točaka 0 i -5,6 i lijevo od točke -12, jer se u tim slučajevima s desne strane istraživane točke na GMK nalazi neparan broj singularnih točaka.

Prema četvrtom pravilu, zaključujemo da će se druga nula u beskonačnosti nalaziti na negativnom dijelu realne osi, jer je jedino u tom slučaju moguće zadovoljiti simetričnost GMK u odnosu na realnu os.

Prema petom pravilu kut asimptota prema realnoj osi zadan je relacijom:

$$\psi = \frac{(1 + 2k)\Pi}{n - m},$$

a budući da je u ovom slučaju $n-m=2-1 = 1$, izlazi da je:

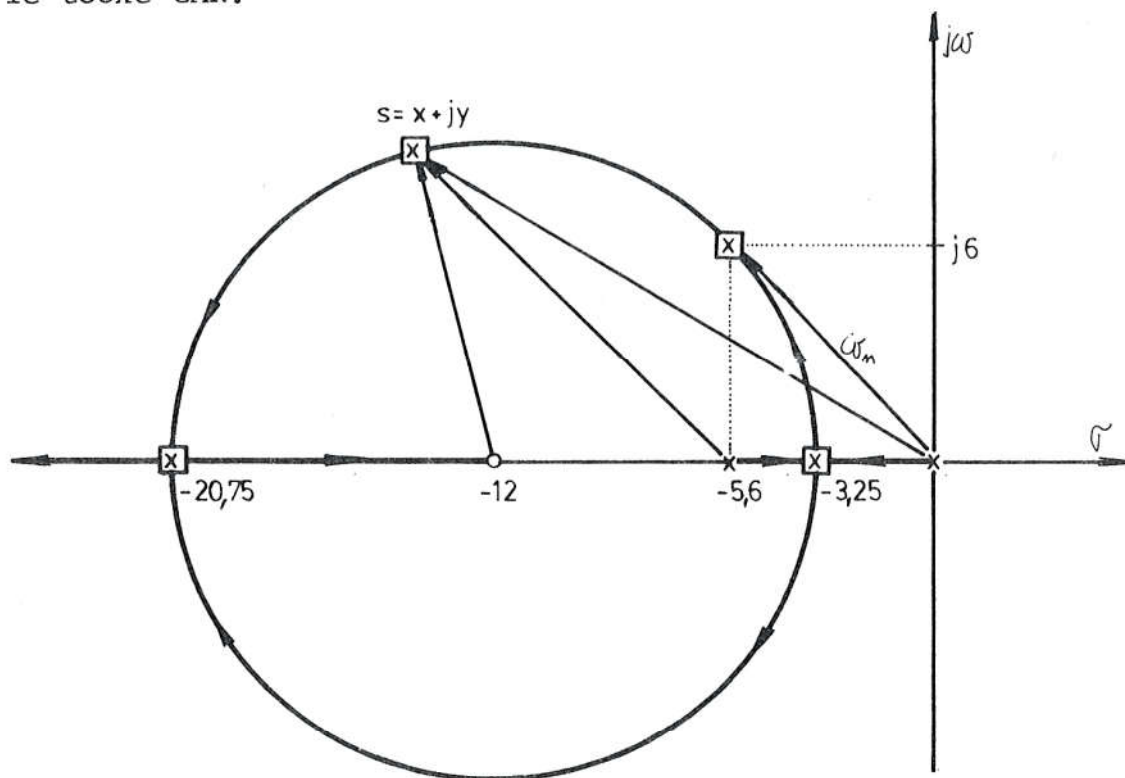
$$\psi = (1 + 2k)\Pi = \Pi, \quad 3\Pi, \dots$$

tj. asimptota leži na realnoj osi s usmjerenjem na lijevo.

Prema šestom pravilu određuju se točke presjeka asimptota s realnom osi, a budući da u ovom slučaju asimptota leži u realnoj osi, točka presjeka ne postoji.

Sedmo pravilo govori o točkama izlaznog i ulaznog loma. U objašnjenju je rečeno da postoje dva načina za njihovo određivanje, i to primjenom jednadžbe modula i primjenom jednadžbe argumenta. Budući da su već tamo rezultati izračunani ovdje ih samo radi cjelovitosti navodimo. Vrijednost točke izlaznog loma iznosi $s=-3,25$, a točke ulaznog loma $s=-20,75$.

Redom smo tako došli do osmog pravila, koje kaže da svaka točka u s ravnini mora zadovoljiti jednadžbu argumenta karakteristične jednadžbe. Budući da su nam već poznati segmenti GMK i točke loma na realnoj osi, očito je da GMK mora biti krivulja koja ide od točke izlaznog loma $s=-3,25$ do točke ulaznog loma $s=-20,75$. U tom području povuče se okomica na realnu os i primjenom postupka uzastopnih pokušaja odredi se točka GMK na njoj, kako je to u osmom pravilu već učinjeno za točku $s=-5,6+j6$. Na isti način se može nastaviti provjeravanjem te tako naći i ostale točke GMK.



Sl.9.10. Određjivanje segmenta GMK izvan realne osi

Postoji, međutim, i drugi način koji je za sustave s jednom nulom i dva pola, kao što je ovaj, još prikladniji. On je usmjeren na dobijanje matematičkog izraza određenog segmenta krivulje GMK. Polazi se od karakteristične jednačbe regulacijskog sustava, koja za sustav s jednom nulom i dva pola glasi:

$$(s - p_1)(s - p_2) + K(s - z) = 0 \quad (9.50.)$$

Pokusnu točku se može izraziti sa $s=x+jy$, kao na Sl.9.10. Uvrštenjem $s=x+jy$ u jednačbu (9.50.), dobije se:

$$(x^2 + 2jxy - y^2) - (p_1 + p_2 - K)(x + jy) + p_1 p_2 - Kz = 0$$

Da bi gornja jednačba bila zadovoljena, njen realni i imaginarni dio moraju biti jednaki nuli, iz čega proizlaze jednačbe:

$$x^2 - y^2 - (p_1 + p_2 - K)x + p_1 p_2 - Kz = 0 \quad \text{i} \quad (9.51.)$$

$$2xy - (p_1 + p_2 - K)y = 0 \quad (9.52.)$$

a odatle:

$$K = \frac{(x^2 - y^2) - (p_1 + p_2)x + p_1 p_2}{z - x} \quad \text{i} \quad (9.53.)$$

$$K = (p_1 + p_2) - 2x \quad (9.54.)$$

Izjednačenjem desnih strana jednačbi (9.53.) i (9.54.) dobije se:

$$x^2 - y^2 - (p_1 + p_2)x + p_1 p_2 = [(p_1 + p_2) - 2x](z - x)$$

što sredjenjem daje:

$$x^2 + y^2 = p_1 p_2 - (p_1 + p_2)z + 2xz \quad (9.55.)$$

a dopunom članova $(x^2 - 2xz)$ s kvadratom z^2 izlazi:

$$(x-z)^2 + y^2 = (p_1 - z)(p_2 - z) \quad (9.56.)$$

U izrazu (9.56.) prepoznamo jednadžbu kružnice sa središtem u točki z i polumjerom:

$$r = \sqrt{(p_1 - z)(p_2 - z)} \quad (9.57.)$$

U našem slučaju središte kružnice se nalazi u točki $z = -12$, s polumjerom:

$$r = \sqrt{12(-5,6 + 12)} = \sqrt{76,7} = 8,75$$

Točnost rezultata može se provjeriti usporedbom s rezultatima za točke izlaznog i ulaznog loma, iz sedmog pravila. Naime, ako je segment GMK između točaka loma predstavljen kružnicom, udaljenost točaka loma predstavlja promjer kružnice, a njeno središte se treba nalaziti na sredini između točaka loma. Budući da su točke loma $s = -3,25$ i $s = -20,75$, njihova udaljenost iznosi $20,75 - 3,25 = 17,50$, a to upravo odgovara izračunanom dvostrukom polumjeru $2r = 2 \cdot 8,75 = 17,50$. Nadalje, ako apsolutnoj vrijednosti izlaznog loma pribrojimo polumjer kružnice, dobije se apsolutna vrijednost središta: $3,25 + 8,75 = 12$. Na taj način smo i numeričkim provjerama potvrdili ispravnost postupaka.

Deveto pravilo govori o kutu napuštanja konjugirano kompleksne singularne točke, a deseto o presjecištu GMK s imaginarnom osi. Budući da prijenosna funkcija petlje ovog sustava nema kompleksnih singularnih točaka i da GMK ne presijeca imaginarnu os, u ovom slučaju ta dva pravila preskačemo.

Prema jedanaestom pravilu pojačanje točke na GMK određuje se s pomoću jednadžbe modula. Nas posebno zanima pojačanje točke u kojoj tangenta povučena iz ishodišta dodiruje GMK, odnosno u kojoj stupanj prigušenja ζ poprima svoju minimalnu vrijednost. Na sl.9.10 vidimo da je to točka $s = -5,6 + j6$. Za nju smo već pri- likom objašnjavanja jedanaestog pravila mjerenjem verzora sa

Sl.9.5. i uvrštenjem u jednađbu modula dobili da pojačanje iznosi $s=5,6$.

U specifičnom slučaju sustava s jednom nulom i dva pola, pojačanje za konjugirano kompleksne korijene može se izračunati s pomoću jednađbe (9.54.), a za točke loma s pomoću jednađbe (9.53.). Potražimo na ovaj način pojačanje za točku $s=-5,6 + j6$. Iz jednađbe (9.54.) izlazi:

$$K = (p_1 + p_2) - 2x = -5,6 - 2(-5,6) = 5,6$$

Što se, kako vidimo, podudara s već izračunanim pojačanjem. Za točku izlaznog loma iz jednađbe (9.53.) izlazi:

$$K = \frac{(x^2 - y^2) - (p_1 + p_2)x + p_1 p_2}{z - x} =$$
$$= \frac{3,25^2 - (-5,6)(-3,25)}{-12 + 3,25} = \frac{10,6 - 18,2}{-8,75} = 0,868$$

Na jedan ili na drugi način može se naći pojačanje za bilo koju točku na GMK. Time je GMK ovog sustava i bez dvanaestog pravila u potpunosti određeno. Prisjetimo se, naime, da je dvanaesto pravilo primjenljivo samo na sustavima kod kojih višak broja polova nad brojem nula funkcije petlje iznosi najmanje dva, a kod ovog sustava taj višak iznosi samo jedan.

Vrijedno je uočiti pet značajnih područja dobijenog GMK na Sl.9.10.

Prvo područje: Za dovoljno malo pojačanje K postoje dva negativna realna pola funkcije regulacijskog sustava, od kojih je jedan smješten između 0 i $-3,25$, a drugi između $-3,25$ i $-5,6$.

Drugo područje: Za pojačanje K koje odgovara točki izlaznog loma postoje dva negativna realna i jednaka pola $s_{1,2} = -3,25$ a stupanj prigušenja $\zeta=1$.

Treće područje: Za srednje vrijednosti pojačanja postoje dva konjugirano kompleksna pola kojih se neprigušena kružna frekvencija kreće od 3,25 do 20,75, a stupanj prigušenja od 1 do 0,68. Minimalni stupanj prigušenja od $\zeta=0,68$ odgovara točki u kojoj poluzraka iz ishodišta tangira kružnicu GMK.

Četvrto područje: Za pojačanje K koje odgovara točki ulaznog loma oba korijena ponovno postaju negativna, realna i jednaka s vrijednošću $s_{1,2}=-20,75$ i sa stupnjem prigušenja $\zeta=1$.

Peto područje: Za pojačanje K veće od pojačanja koje pripada točki ulaznog loma, postoje ponovno dva negativna, realna i različita korijena od kojih se vrijednost jednog kreće od -20,75 do -12, a drugog od -20,75 do $-\infty$.

Budući da iz provedene analize proizlazi da obradživani sustav ni u kom slučaju ne može biti nestabilan, odlučujemo se za režim rada s minimalnim prigušenjem. Tada je, naime vremenski odziv najbrži, a nema opasnosti od nestabilnosti. Na temelju toga može se sada izračunati pojačanje pojačala K_g iz jednadžbe (9.48.), koja u preuredjenom obliku glasi:

$$K_g = \frac{K T_a}{K_a T_r}$$

Uvrštenjem zadanih vrijednosti $T_a=0,179$ s, $T_r=0,083$ s i $K_a=335$, te izračunane vrijednosti pojačanja $K=5,6$ u gornju jednadžbu, dobije se:

$$K_g = \frac{5,6 \cdot 0,179}{335 \cdot 0,083} = 0,036$$

Vrijednost neprigušene kružne frekvencije dobije se mjerenjem verzora točke $s=-5,6 + j6$ u kojoj tangenta iz ishodišta dodiruje kružnicu, a iznosi $\omega_n=8,2$ rad/s. Na isti način mogu se naći parametri sustava za bilo koju točku na GMK. Tako će, npr. pojačanje za točku izlaznog loma u kojoj se nalaze dva negativna realna pola, iznositi:

$$K = \frac{\Pi(s-p_j)}{\Pi(s-z_i)} = \frac{3,25 \cdot 2,35}{8,75} = 0,87$$

a za točku ulaznog loma:

$$K = \frac{20,75 \cdot 15,15}{8,75} = 35,95$$

Za točku izlaznog loma pojačanju K odgovara pojačanje pojačala:

$$K_g = \frac{K \cdot T_a}{K_a \cdot T_r} = \frac{0,87 \cdot 0,179}{335 \cdot 0,083} = 0,56 \cdot 10^{-2},$$

a za točku ulaznog loma:

$$K_g = \frac{35,95 \cdot 0,179}{335 \cdot 0,083} = 0,232$$

Vrijedno je još za ovaj sustav napomenuti da, ako je $T_r > T_a$, odnosno $z=1/T_r < p=1/T_a$, GMK neće napustiti realnu os ni za najveće vrijednosti pojačanja K , pa stoga ni polovi ne mogu postati kompleksni.

9.5. ODREĐIVANJE FREKVENCIJSKOG ODZIVA S POMOĆU GMK

U poglavlju o frekvencijskom odzivu rečeno je da se frekvencijski odziv može grafički dobiti iz polno nultog dijagrama funkcije regulacijskog sustava tako da se verzori povučeni iz svih singularnih točaka regulacijskog sustava do frekvencijskih točaka na imaginarnoj osi uvrste u jednadžbu:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)} \quad (9.58.)$$

Budući da je jednadžba regulacijskog sustava kompleksan broj, može se rastaviti na jednadžbu modula:

$$M(s) = \left| \frac{y(s)}{r(s)} \right| = \frac{K \prod_{i=1}^m |s-z_i|}{\prod_{j=1}^n |s-p_j|}, \quad (9.59.)$$

i jednadžbu argumenta:

$$\arg \frac{y(s)}{r(s)} = \sum_{i=1}^m \arg (s-z_i) - \sum_{j=1}^n \arg (s-p_j) \quad (9.60.)$$

Uvrštenjem posebno modula i posebno argumenata verzora za svaku pojedinu frekvenciju u jednadžbe (9.59.) i (9.60.) dobiju se vrijednosti modula i argumenta funkcije frekvencijskog odziva na toj frekvenciji. Ponavljanjem postupka za niz frekvencija u frekvencijskom pojasu sustava, dolazi se do funkcije modula i funkcije argumenta frekvencijskog odziva regulacijskog sustava. U nastavku ćemo vidjeti kako se pri tome GMK može korisno primijeniti.

Znamo, ako je $G_p(s)$ zadan u faktoriziranom obliku da su u tom slučaju poznate i nule funkcije regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$. Ako još nadjemo i polove funkcije $y(s)/r(s)$ imamo sve podatke za crtanje polno nultog dijagrama funkcije regulacijskog sustava, a s tim i osnovu za grafičko dobijanje amplitudnog i faznog dijagrama frekvencijskog odziva.

Iako se frekvencijski odziv dobija iz polno nultog dijagrama u s ravnini, a i GMK se crta u s ravnini, potrebno je koristiti poseban dijagram za crtanje GMK, a poseban za grafičko odredjivanje frekvencijskog odziva. Zbog toga je prikladno lučiti tri vrste polno nultih dijagrama i to funkcije petlje, karakteristične jednadžbe i funkcije regulacijskog sustava.

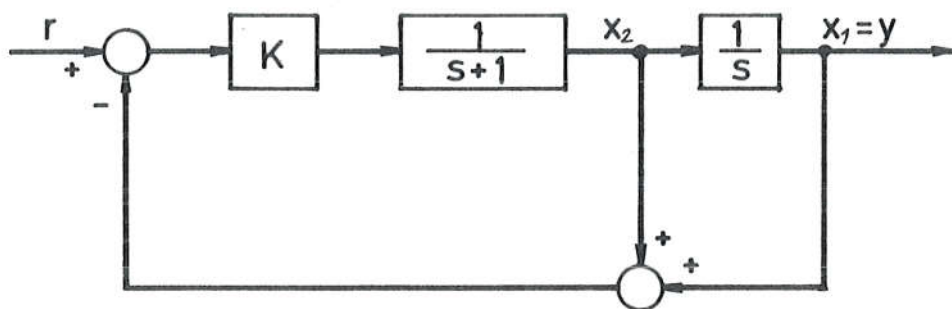
Da bi pokazali prikladnost primjene posebnih dijagrama razmotrimo podrobnije osobine funkcije petlje $KG_p(s) H_{eq}(s)$ i funkcije regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$. Budući da se nule funkcije objekta $G_p(s)$ i polovi funkcije $H_{eq}(s)$ podudaraju, u funkciji petlje ih se može skratiti tako da funkcija petlje izlazi:

$$KG_p(s) H_{eq}(s) = K K_p K_h \frac{B_h(s)}{N_p(s)} \quad (9.61.)$$

Nadalje znamo da su nule objekta ujedno i nule funkcije regulacijskog sustava, koja se stoga može pisati u obliku:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K K_p^B(s)}{N_k(s)} \quad (9.62.)$$

Budući da se GMK dobije iz polno nultog dijagrama funkcije $KG_p(s) H_{eq}(s)$ iz tog se dijagrama ne može dobiti odziv regulacijskog sustava, jer na tom dijagramu nema nula objekta. One su skraćene s polovima funkcije $H_{eq}(s)$. Potrebno je, stoga, polno nulti dijagram karakteristične jednadžbe prebaciti na drugi dijagram na kojem se nalaze i nule objekta. Tek iz takvog dijagrama, koji smo nazvali polno nulti dijagram regulacijskog sustava, može se dobiti odziv sustava.



Sl.9.11. Sustav za ilustraciju primjene polno nultog dijagram regulacijskog sustava

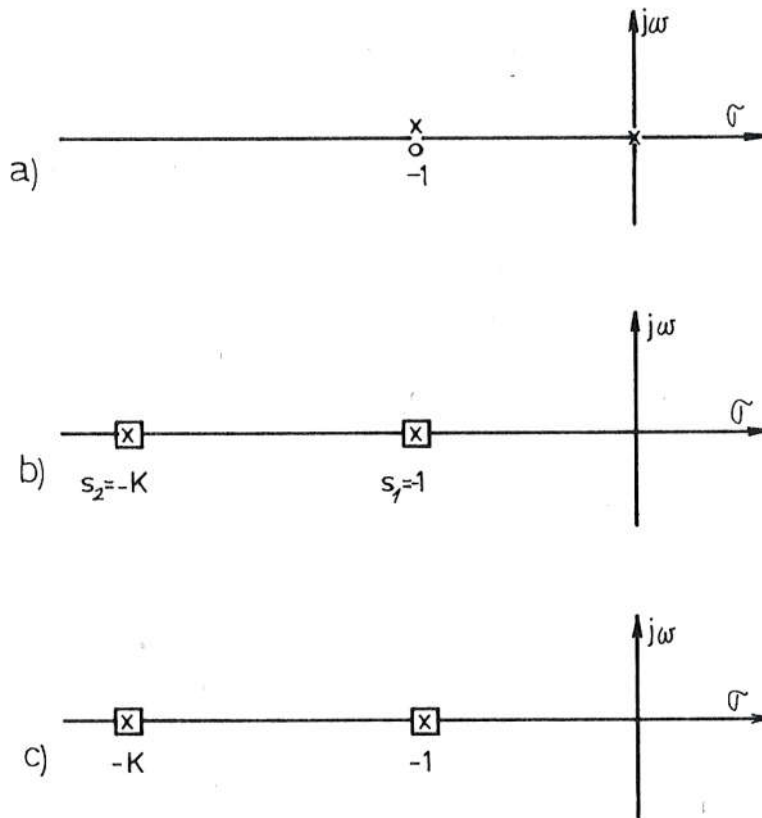
Za ilustraciju razmotrimo sustav sa Sl.9.11., iz koje neposredno proizlazi da je:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad i \quad H_{eq}(s) = s + 1, \quad (9.63.)$$

a funkcija petlje glasi:

$$KG_p(s) H_{eq}(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s + 1)} \quad (9.64.)$$

Otprije znamo da se nule $H_{eq}(s)$ ne smiju kratiti s polovima $G_p(s)$ jer bi time jedan pol regulacijskog sustava bio izgubljen. Polno nulti dijagram funkcije petlje koji treba poslužiti za crtanje GMK prikazan je na Sl.9.12.a.



Sl.9.12. Polno multi dijagrami

- a) prijenosne funkcije petlje prema jednađbi (9.61.)
- b) karakteristične jednađbe (9.65.)
- c) regulacijskog sustava sa Sl.9.11.

Budući da se jedna nula i jedan pol nalaze u istoj točki, na prvi pogled izgleda da bi se GMK mogao crtati i bez njih, jer moduli i argumenti pripadnih verzora daju suprotne učinke. To bi se međjutim, kosilo s već poznatim pravilom da se nule funkcije $H_{eq}(s)$ ne mogu kratiti s polovima funkcije $G_p(s)$. Naime, u tom slučaju bi ispalo da karakteristična jednađba ima samo jedan pol, koji za pojačanje K poprima vrijednost $s = -K$, kao što proizlazi iz njenog rješenja:

$$1 + \frac{K}{s} = 0$$

i odatle:

$s = -K$, a to očito nije točno.

Prema tome, pri crtanju GMK, makar na prvi pogled izgleda suviše, treba uzeti u obzir i podudarne polove i nule, kako je učinjeno na Sl.9.12.b. U tom slučaju za pojačanje K dobijemo dva pola s vrijednostima $s_1 = -1$ i $s_2 = -K$, što odgovara korijenima karakteristične jednačbe:

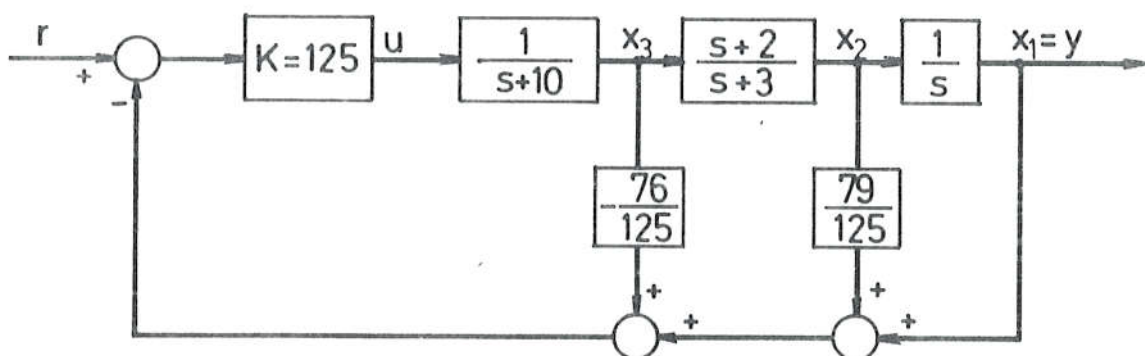
$$s(s + 1) + K(s + 1) = 0 ,$$

odnosno:

$$s^2 + s(K + 1) + K = (s + 1)(s + K) = 0 \quad (9.65.)$$

Tako dobijeni polno nulti dijagram karakteristične jednačbe, dopunjen nulama objekta, daje polno nulti dijagram regulacijskog sustava, s pomoću kojeg se može grafičkim putem doći do frekvencijskog odziva.

Budući da objekt (9.63.) nema nula, polno nulti dijagram regulacijskog sustava, prikazan na Sl.9.12.c., podudara se s polno nultim dijagramom karakteristične jednačbe na Sl.9.12.b.



Sl.9.13. Regulacijski sustav s varijablama stanja objekta s jednom nulom i tri pola

U nastavku ćemo razmotriti malo složeniji regulacijski sustav sa Sl.9.13. s jednom nulom i tri pola. Prijenosne funkcije:

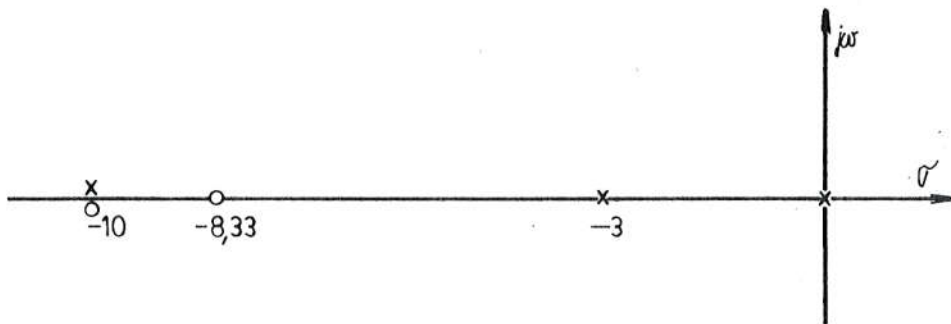
objekta $G_p(s)$, ekvivalentne povratne grane $H_{eq}(s)$ i petlje glase:

$$G_p(s) = \frac{s + 2}{s(s+3)(s+10)}$$

$$H_{eq}(s) = \frac{3}{125} \frac{s^2 + 18,3s + 83,3}{s + 2} = \frac{3}{125} \frac{(s+10)(s+8,33)}{s + 2}$$

$$KG_p(s) H_{eq}(s) = \frac{3K}{125} \frac{(s+8,33)(s+10)}{s(s+3)(s+10)} \quad (9.66.)$$

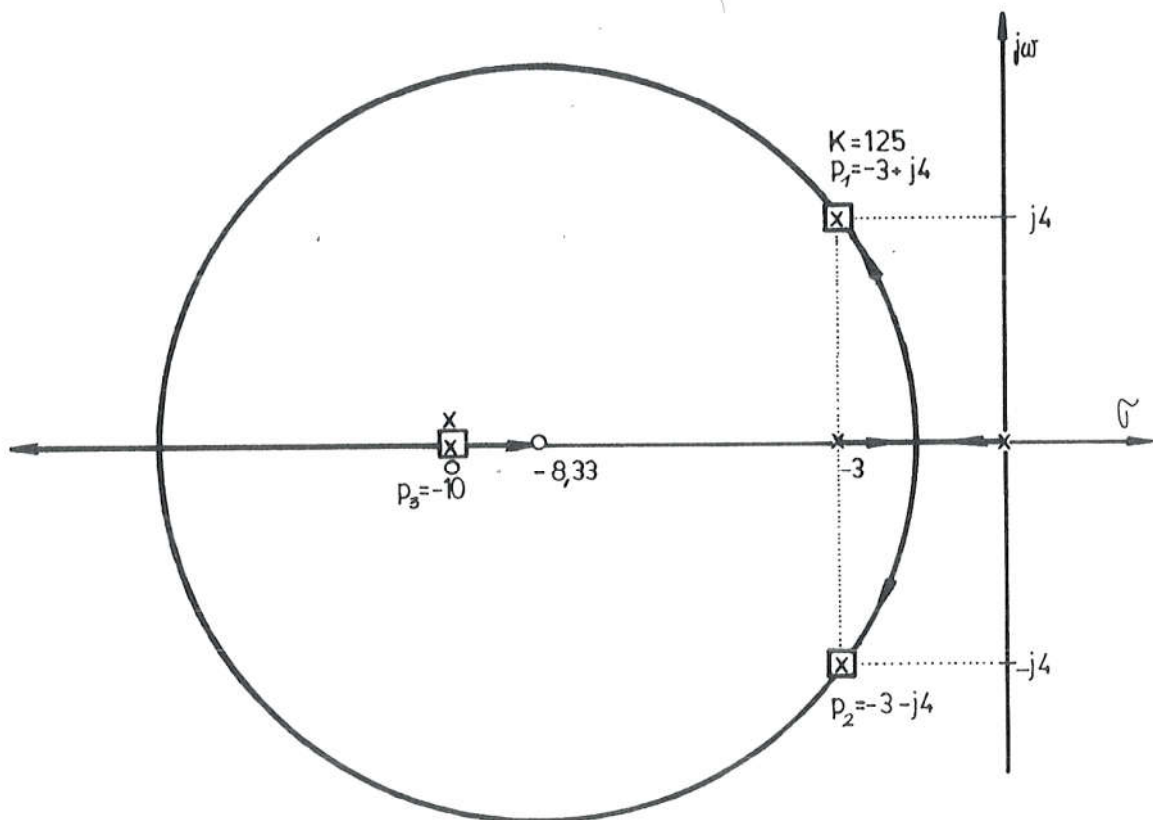
Vrijedno je zapaziti da smo pri formiranju funkcije petlje kratili nulu objekta $z=-2$ s polom $p=-2$ ekvivalentne povratne grane, ali nismo kratili pol objekta $p=-10$ s nulom $z=-10$ ekvivalentne povratne grane, što je u skladu s prethodno deklariranim pravilima. Polno nulti dijagram funkcije petlje, koji je osnova za crtanje GMK, prikazan je na Sl.9.14., a GMK na Sl.9.15.



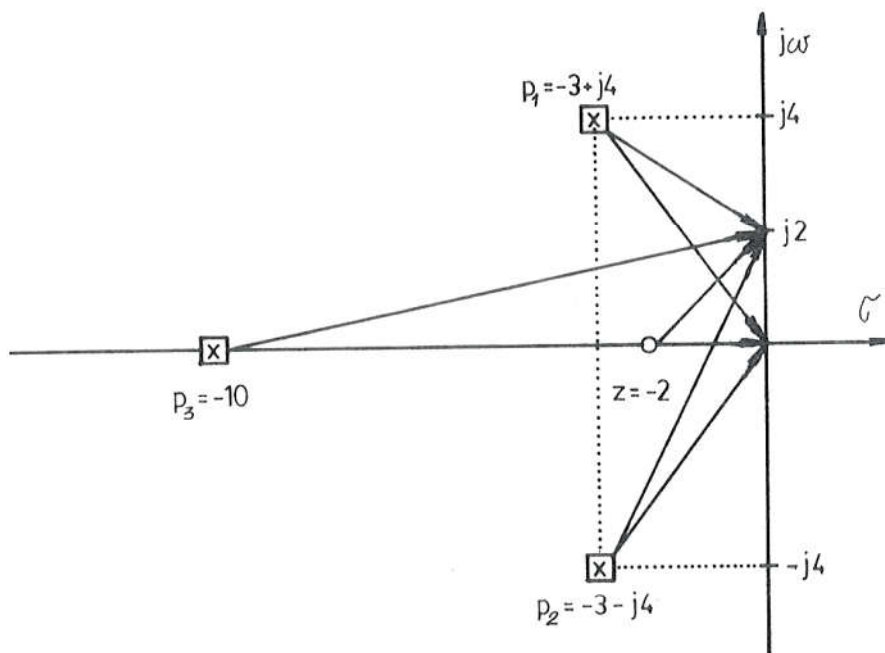
Sl.9.14. Polno nulti dijagram funkcije petlje (9.66.)

Na GMK sa Sl.9.15. određeni su korijeni karakteristične jednadžbe uz pojačanje $K=125$, a iznose $p_{1,2}=-3 \pm j4$ i $p_3=-10$. Ti polovi predstavljaju singularne točke polnog dijagrama karakteristične jednadžbe.

Polno nulti dijagram regulacijskog sustava potreban za konstrukciju frekvencijskog odziva dobije se tako da se u s ravninu ucrtaju korijeni karakteristične jednadžbe regulacijskog sustava i



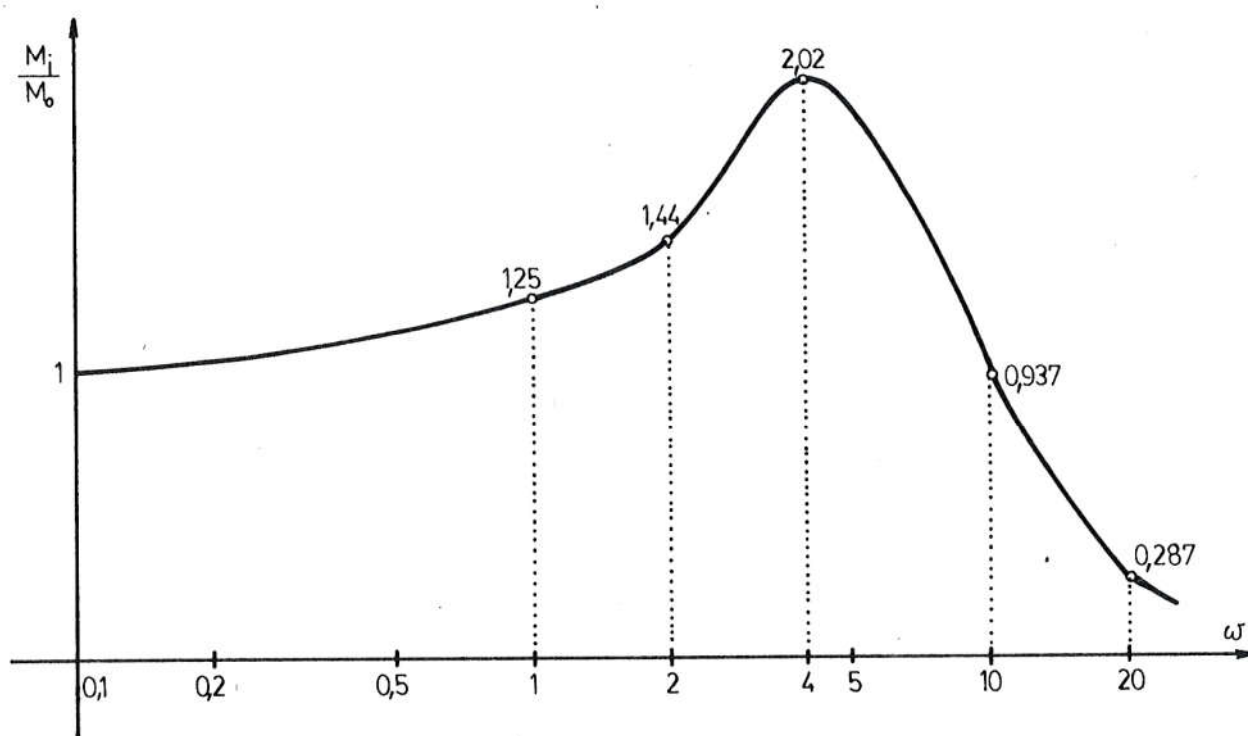
Sl.9.15. GMK regulacijskog sustava sa Sl.9.13. i polni dijagram karakteristične jednačbe za pojačanje $K = 125$



Sl.9.16. Polno nulti dijagram regulacijskog sustava sa Sl.9.13. za $K=125$ s vektorima za konstruiranje frekvencijskog odziva

nule objekta kako je učinjeno na Sl.9.16. Vrijedno je uočiti da se na polno nultom dijagramu regulacijskog sustava ne nalaze nule $H_{eq}(s)$, odnosno nule prijenosne funkcije petlje.

Normalizirani oblik amplitudnog dijagrama frekvencijskog odziva, koji se najčešće primjenjuje, crta se tako da se na apscisu nanese frekvencija u logaritamskom mjerilu, a na ordinatu odnos M_i/M_0 u linearnom mjerilu, kako je prikazano na Sl.9.17. M_0 je modul za frekvenciju $\omega=0$, a M_i za frekvenciju ω_i .



Sl.9.17. Normalizirani amplitudni dijagram frekvencijskog odziva, dobijen iz polno nultog dijagrama sa Sl.9.16.

Račun se provodi pojedinačno za svaku vrijednost frekvencije, i to tako da se iz svih singularnih točaka polno nultog dijagrama regulacijskog sustava povuku verzori na dotičnu frekvencijsku točku na imaginarnoj osi. Potom se izmjere njihove apsolutne vrijednosti i unesu u jednadžbu modula regulacijskog sustava, te tako dobijemo vrijednost modula za tu frekvenciju.

Pokažimo to na polno nultom dijagramu sa Sl.9.16. Povucimo najprije verzore na frekvenciju $\omega_0=0$, a potom mjerenjem njiho-

vih dužina dobit ćemo:

$$|s - p_1| = 10$$

$$|s - p_2| = 5$$

$$|s - p_3| = 5$$

$$|s - z| = 2$$

Uvrštenjem izmjerenih veličina u jednadžbu (9.59.) izlazi:

$$M_o = \frac{K |s - z|}{|s - p_1| |s - p_3| |s - p_3|} = K \frac{2}{5 \cdot 5 \cdot 10} = K \frac{2}{250}$$

Za frekvenciju $\omega_1=2$ vrijednosti verzora iznose:

$$|s - p_1| = 10,2$$

$$|s - p_2| = 3,60$$

$$|s - p_3| = 6,70$$

$$|s - z| = 2,83$$

a modul:

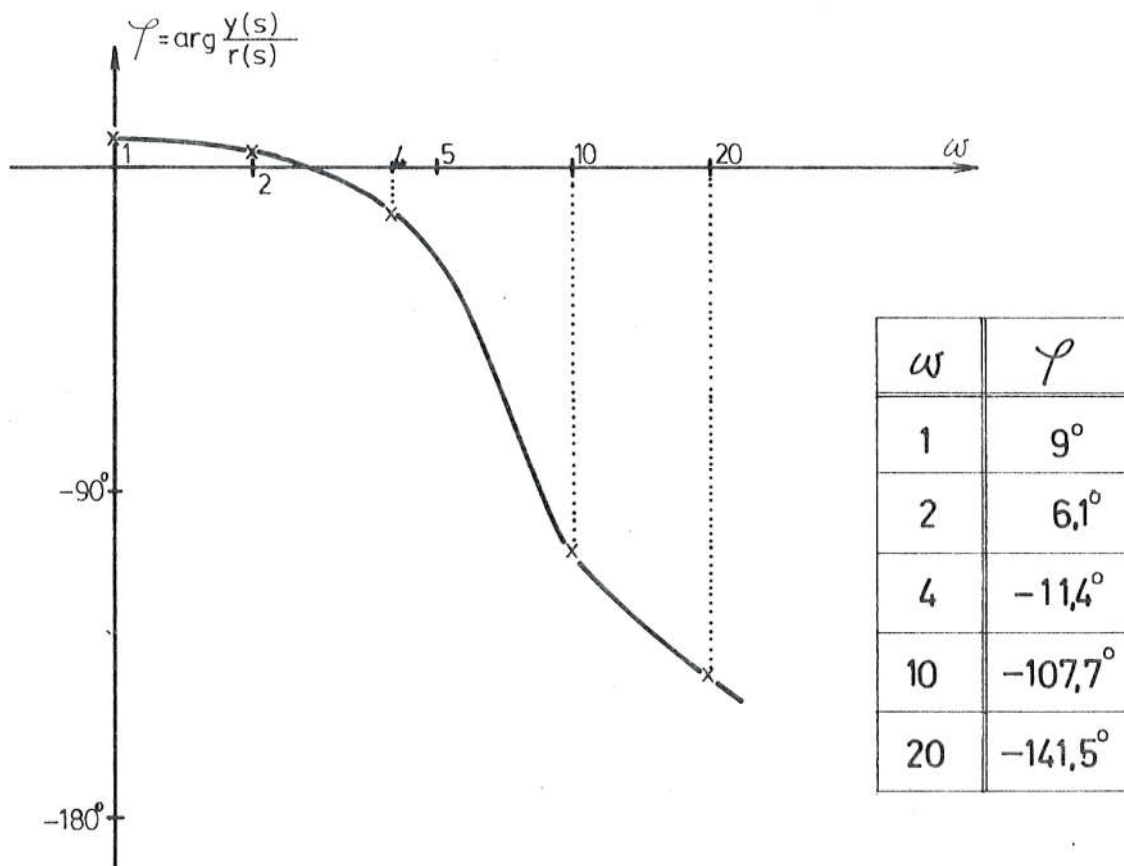
$$M_1 = K \frac{2,83}{10,2 \cdot 3,6 \cdot 6,7} = K \frac{2,83}{246}$$

Na temelju vrijednosti M_o i M_1 dobije se točka *normaliziranog amplitudnog dijagrama* frekvencijskog odziva za frekvenciju $\omega_1=2$ rad/s, a iznosi:

$$\frac{M_1}{M_o} = \frac{K \frac{2,83}{246}}{K \frac{2}{250}} = \frac{2,83 \cdot 250}{2 \cdot 246} = 1,44$$

Na isti način dobijene su i ostale točke za crtanje dijagrama koji je prikazan na Sl.9.17.

Mjerenjem kutova verzora za pojedine frekvencije i uvrštenjem njihovih vrijednosti jednađbu (9.60.) dobijene su vrijednosti argumenta za crtanje faznog dijagrama frekvencijskog odziva prikazanog na Sl.9.18.



Sl.9.18. Fazni dijagram funkcije frekvencijskog odziva

9.6. FAKTORIZIRANJE POLINOMA S POMOĆU GMK

GMK je po definiciji slijed korijena karakteristične jednačbe u ovisnosti o promjeni jednog od parametara. U dosadašnjim razmatranjima taj parametar je bio pojačanje K , a u nastavku ćemo vidjeti kako to izgleda u slučaju promjene drugih parametara, i kako se takav GMK može korisno primijeniti i za faktoriziranje polinoma.

Karakteristična jednačba:

$$KG_p(s)H_{eq}(s) = -1 = 1 e^{j\Pi}$$

može se pisati i u obliku:

$$\alpha \cdot W(s) = -1 = 1 e^{j\Pi}, \quad (9.67.)$$

tj. lijeva strana jednačbe je izražena kao umnožak *pseudo-pojačanja* α i prijenosne funkcije *pseudopetlje* $W(s)$, koja je neovisna o parametru α .

U dosadašnjoj obradbi GMK, često se pretpostavljalo da su $G_p(s)$ i $H_{eq}(s)$ zadani u faktoriziranom obliku. Međutim, to ne mora uvijek biti. Posebno to nije slučaj kad se regulacija provodi s varijablama stanja. Tada je $B_h(s)$ polinom $n-1$ reda, kojeg korijeni nisu poznati. A budući da ti korijeni predstavljaju nule funkcije petlje, koje su potrebne za crtanja GMK, u takvim slučajevima potrebno je najprije naći korijene polinoma $B_h(s)$. Vrlo je prikladno i to obaviti s pomoću GMK. Temeljnu ideju za izračunavanje korijena polinoma s pomoću GMK objasniti ćemo na jednom polinomu trećeg reda, koji glasi:

$$s^3 + as^2 + bs + c = 0 \quad (9.68.)$$

Svaki polinom se može pisati u obliku jednačbe (9.68.), ali ga se može pisati i razdvojeno, tj. da se jedan dio članova polinoma napiše na jednoj strani jednačbe, a ostali članovi na drugoj. Tako se jednačba (9.68.) može razdvojiti na tri načina.

Prvi način razdvajanja

$$s^3 = -(as^2 + bs + c), \quad (9.69.)$$

što se može pisati i u obliku:

$$-1 = a \frac{[s^2 + (b/a)s + (c/a)]}{s^3} \quad (9.70.)$$

Drugi način razdvajanja:

$$s^3 + as^2 = -(bs + c), \quad (9.71.)$$

odnosno:

$$-1 = b \frac{[s + (c/b)]}{s^2 (s + a)} \quad (9.72.)$$

Treći način razdvajanja:

$$s^3 + as^2 + bs = -c, \quad (9.73.)$$

odnosno:

$$-1 = c \frac{1}{s(s^2 + as + b)} \quad (9.74.)$$

Izrazi (9.70.), (9.72.) i (9.74.) po obliku odgovaraju karakterističnoj jednačbi (9.67.) s negativnom jedinicom na jednoj strani jednačbe i s umnoškom jednog od parametra sustava s razlomljenom racionalnom funkcijom na drugoj strani jednačbe. Stoga za sva tri slučaja možemo nacrtati GMK mijenjajući vrijednost izlučenog parametra.

Odatle dolazimo do zaključka da za izvorne vrijednosti pseudopojčanja α , tj. u prvom slučaju za $\alpha=a$, u drugom slučaju za $\alpha=b$ i u trećem slučaju za $\alpha=c$, sva tri GMK moraju imati iste korijene.

Drugim riječima sva GMK koja potječu iz iste izravne jednadžbe, u ovom slučaju iz jednadžbe (9.68.), moraju za izvorne vrijednosti pseudopojačanja prolaziti kroz iste točke, koje u stvari predstavljaju korijene zadanog polinoma.

Za primjer neka posluži opet sustav trećeg reda samo sada u aritmetičkom obliku:

$$s^3 + 2a^2 + 2a + 2 = 0 \quad (9.75.)$$

Primjenom drugog načina razdvajanja dobije se:

$$b \frac{s + \frac{c}{b}}{s^2(s+a)} = 2 \frac{s+1}{s^2(s+2)} = -1, \quad (9.76.)$$

a odatle zamjenom posebnog broja 2 s općim brojem α dobije se standardni oblik karakteristične jednadžbe:

$$\alpha \frac{s+1}{s^2(s+2)} = -1, \quad (9.77.)$$

koje je GMK prikazano na sl.9.19.

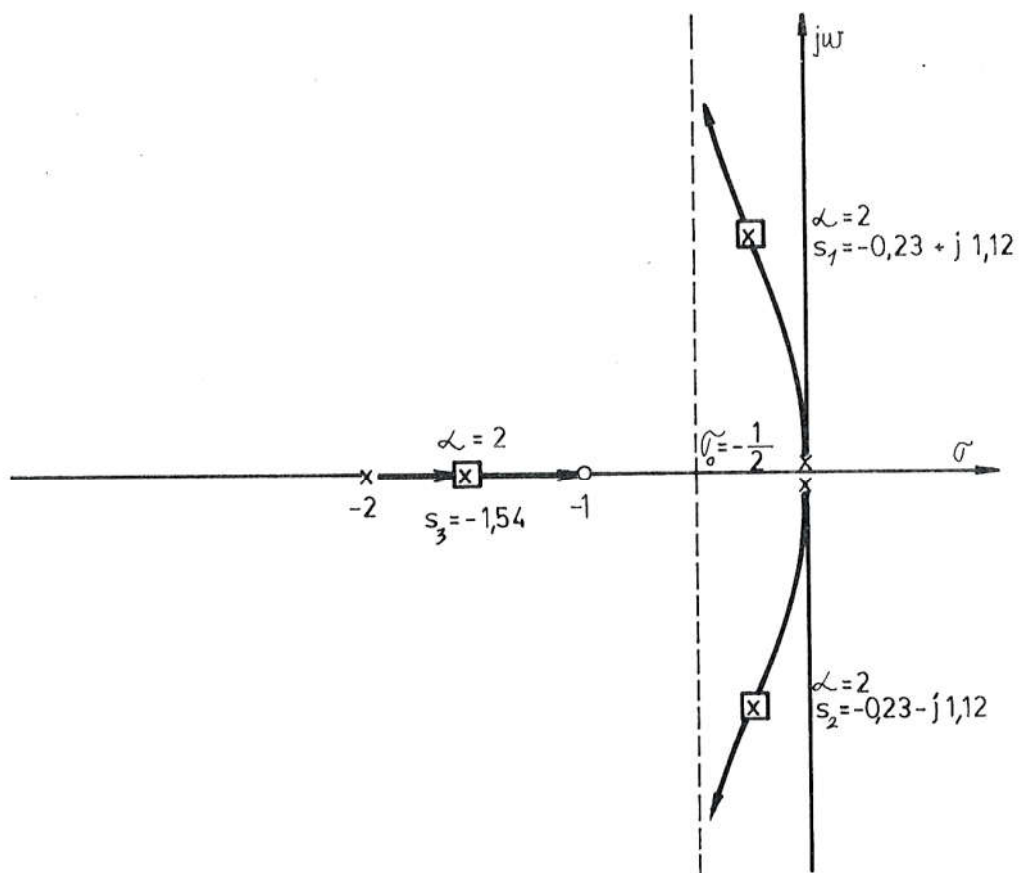
Za drugo GMK uzmimo karakterističnu jednadžbu dobijenu trećim načinom razdvajanja:

$$c \frac{1}{s(s^2+as+b)} = 2 \frac{1}{s(s^2+2s+2)} = -1, \quad (9.78.)$$

koja zamjenom posebnog broja 2 s općim brojem α i rješenjem karakteristične jednadžbe u nazivniku, postaje:

$$\alpha \frac{1}{s(s+1-j1)(s+1+j1)} = -1 \quad (9.79.)$$

Primjenom pravila za crtanje GMK na jednadžbu (9.79.) dobije se da je kut priklona asimptota prema realnoj osi:



Sl.9.19. GMK jednađbe (9.77.)

$$\psi = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

centroid polno nultog dijagrama:

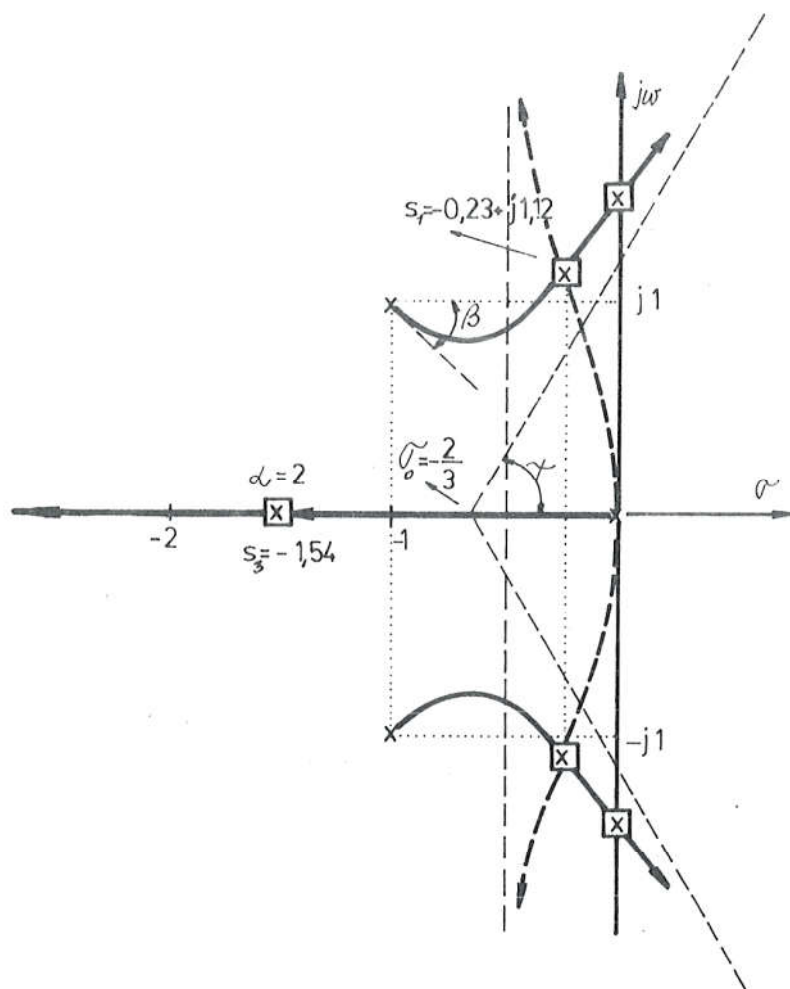
$$\sigma_o = -\frac{2}{3}$$

izlazni kut iz kompleksnog pola:

$$\beta = \pm 45^\circ$$

i presjek GMK s imaginarnom osi:

$$s = \pm j \sqrt{2}$$



Sl.9.20. Faktoriziranje polinoma (9.75.) presjekom
GMK jednađžbi (9.77.) i (9.79.)

S tim podacima nacrtano je na Sl.9.20. GMK jednađžbe (9.79.) i iz-
vučeno punom linijom, a crtkanom linijom je izvučeno GMK jedna-
đžbe (9.77.). U presjeku jednog i drugog GMK nalaze se korijeni
 $s_{1,2} = -0,23 \pm j 1,12$. Treći korijen se dobije tako da se izvorna
jednađžba (9.75.) podijeli s umnoškom već dobijenih korijena.

$$(s+0,23+j 1,12)(s+0,23-j 1,12) = s^2+0,46s + 1,29$$

$$(s^3+2s^2+2s+2):(s^2+0,46s+1,29) = s + 1,54$$

S pomoću verzora povučenih iz singularnih točaka jedne ili dru-
ge funkcije petlje, i njihovim uvrštenjem u jednađžbu modula od-
govarajuće funkcije, može se provjeriti provedena faktorizacija
za $\alpha=2$.

POLINOM

RAZDVAJANJE

$s^3 + as^2 + bs + c$	$a \frac{s^2 + \frac{b}{a}s + \frac{c}{a}}{s^3} = -1$	$b \frac{(s+c/b)}{s^2(s+a)} = -1$	$c \frac{1}{s(s^2+as+b)} = -1$
$s^4 + as^3 + bs^2 + cs + d$	$b \frac{s^2 + \frac{c}{b}s + \frac{d}{b}}{s^3(s+a)} = -$	$c \frac{s + \frac{d}{c}}{s(s^2+as+b)} = -1$	
$s^5 + as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e$	$\frac{s^2 + \frac{d}{c}s + \frac{e}{c}}{s^3(s^2+as+b)} = -1$		
$s^6 + as^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + f$	$d \frac{s^2 + \frac{e}{d}s + \frac{f}{d}}{s^3(s^3+as^2+bs+c)} = -1$		

Tablica 9.1. Razdvajanje polinoma u cilju oblikovanja funkcije pseudopetlje

Obratimo li pažnju na strukturu funkcija dobijenih razdvajanjem, vidimo da su to sve faktorizirane razlomljene racionalne funkcije s faktorima ne većim od drugog reda, što se razdvajanjem htjelo i postići. Naime trebalo je razlomljenu racionalnu funkciju izraziti polinomima koji se mogu riješiti standardnim algebarskim postupkom. Na Tablici 9.1. prikazani su načini razdvajanjem za polinome do šestog reda.

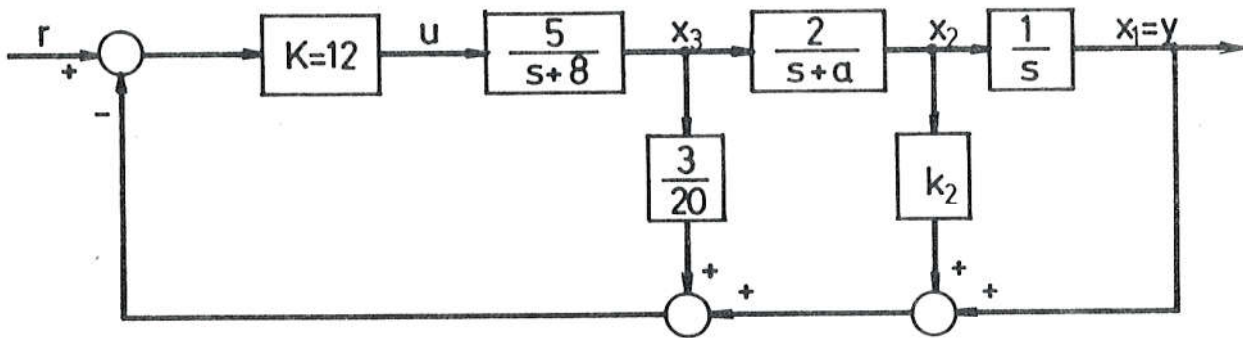
Iz Tablice 9.1. se vidi da se do funkcije pseudopetlje, kojoj su brojnik i nazivnik umnošci polinoma do najviše drugog reda, može neposredno doći: za polinom trećeg reda na tri načina, za polinom četvrtog reda na dva načina i za polinom petog reda na jedan način. To znači da se s jednim razdvajanjem (na prvi, drugi ili treći način) može u slučaju polinoma trećeg reda neposredno doći do tri faktorizirane funkcije pseudopetlje, iz kojih se mogu nacrtati tri GMK. U slučaju polinoma četvrtog reda to su samo dva neposredna GMK, a u slučaju polinoma petog reda samo jedno neposredno GMK.

Za polinome veće od petog reda ne može se neposredno doći do funkcije pseudopetlje kojoj su brojnik i nazivnik izraženi umnoškom polinoma do najviše drugog reda, što je na Tablici 9.1. i prikazano. Stoga, budući da se u takvim slučajevima ne može s jednim razdvajanjem nacrtati GMK, primjenjuje se ista metoda razdvajanja za faktoriziranje polinoma koji su se pojavili u funkciji pseudopetlje iz prethodnog razdvajanja. Za polinome od šestog do osmog reda potrebna su dva takva razdvajanja, od devetog do jedanaestog potrebna su tri razdvajanja, i tako redom za svaka daljnja tri stupnja po jedno razlaganje više, da bi se došlo do GMK kojih presjeci daju korijene zadanog polinoma.

9.7. ISPITIVANJE OSJETLJIVOSTI S POMOĆU GMK

Na smještaj polova sustava u s ravnini, poput pojačanja K , utječu i drugi parametri. Njihov utjecaj na ponašanje sustava, odnosno osjetljivost sustava na njihove promjene, može se zorno ispitati s pomoću GMK. U tu svrhu se karakteristična jednadžba izražava u obliku jednadžbe (9.67.) u kojoj pseudopojačanje α predstavlja do-

tični parametar. Mijenjanjem vrijednosti parametra dobije se GMK, koji vrlo pregledno pokazuje utjecaj promjene parametra na ponašanje sustava.



Sl.9.21. Sustav s promjenljivim parametrima za ispitivanje osjetljivosti

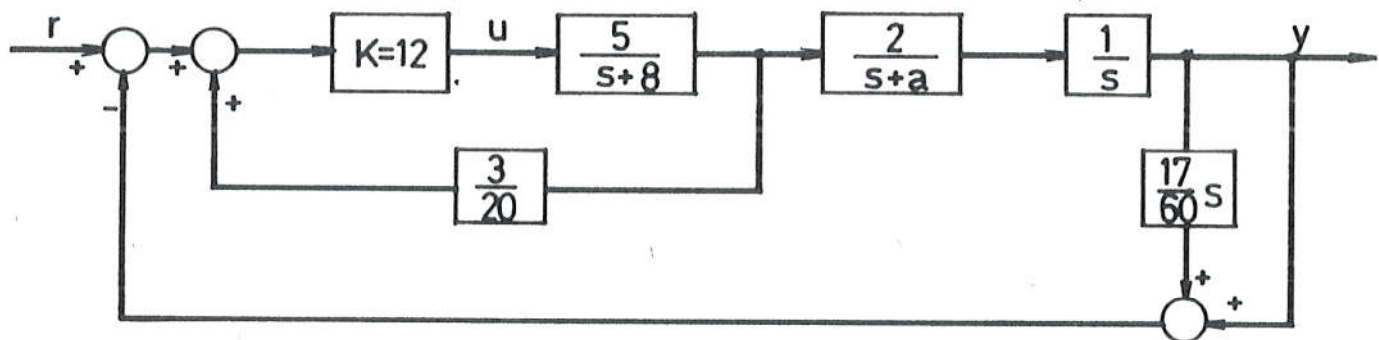
Ilustrirajmo to na sustavu sa Sl.9.21. kod kojeg treba ispitati utjecaj promjene parametara α i k_2 na promjene polova i funkcije regulacijskog sustava. Najprije ćemo ispitati utjecaj promjene parametara α uz $k_2=17/60$.

Da bi na što jednostavniji način karakterističnu jednadžbu regulacijskog sustava izrazili s pseudopojacanjem $\alpha=a$, treba tako transformirati blokovski prikaz sa Sl.9.21., da se član s pseudopojacanjem pojavi u karakterističnoj jednadžbi što manji broj puta. Da bismo to postigli, prebacimo zbrojište koeficijenata $k_3=3/20$ ispred bloka za pojačanje K , a čvorište koeficijenta $k_2=17/60$ na čvorište koeficijenta k_1 , kako je prikazano na Sl.9.22. Na taj način u osnovnoj grani, tj. grani u kojoj se nalazi objekt, dobijemo minornu petlju, koje prijenosna funkcija glasi:

$$G_1(s) = \frac{\frac{60}{s+8}}{1 + \frac{3}{20} \frac{60}{s+8}} = \frac{60}{s+17}, \quad (9.80.)$$

a u povratnoj grani, funkciju:

$$H_1 = \frac{17}{60} s + 1 = \frac{17}{60} (s + \frac{60}{17}) \quad (9.81.)$$



Sl.9.22. Sustav sa Sl.9.21. preinačen za obradbu s pseudopojačanjem a

S učinjenim preinakama prijenosna funkcija sustava sa Sl.9.22. glasi:

$$W(s) = \frac{\frac{60}{s+17} \cdot \frac{2}{s+a} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{60}{s+17} \cdot \frac{2}{s+a} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{17}{60} (s + \frac{60}{17})} \quad (9.82.)$$

a karakteristična jednačba je:

$$s(s+17)(s+a) + 34(s+3,53) = 0, \quad (9.83.)$$

koja se može pisati i u obliku:

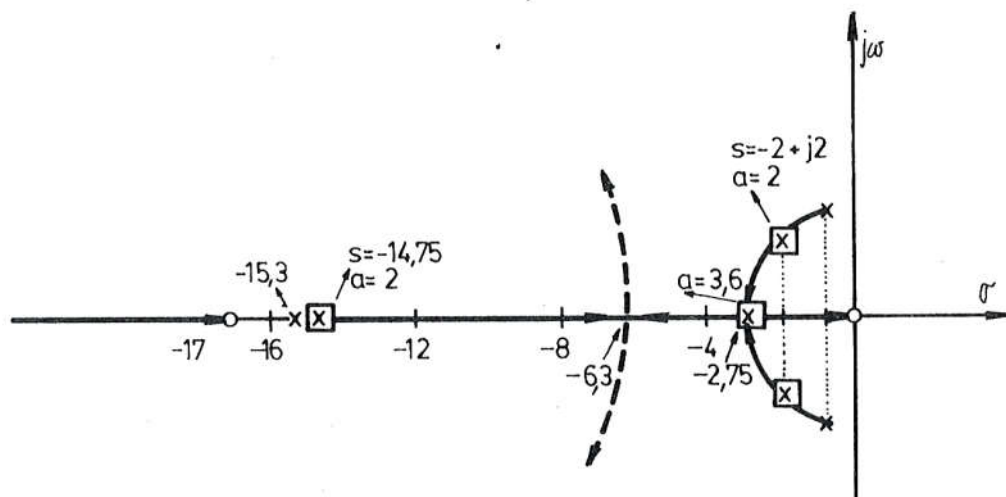
$$a \frac{s^2 + 17s}{s^3 + 17s^2 + 34s + 120} = -1 \quad (9.84.)$$

Da bismo nacrtati GMK jednačbe (9.84.), moramo najprije faktori-
zirati nazivnik funkcije na lijevoj strani. Standardnim postupkom
s pomoću GMK izlazi da je:

$$s^3 + 17s^2 + 34s + 120 = (s + 15,3) \left[(s + 0,85)^2 + 2,7^2 \right],$$

tako da jednađžba (9.84.) u faktoriziranom obliku glasi:

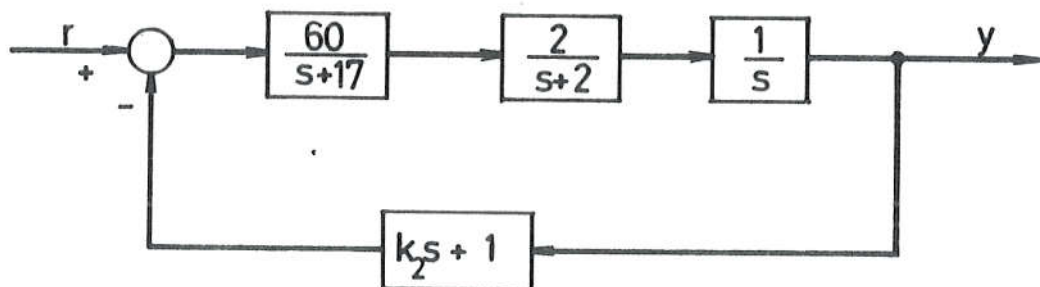
$$\alpha \frac{(s + 17)}{(s+15,3)(s+0,85-j2,7)(s+0,85+j2,7)} = -1 \quad (9.85.)$$



Sl.9.23. GMK karakteristične jednađžbe (9.85.) s pseudopojacanjem α

GMK jednađžbe (9.85.) s pseudopojacanjem α prikazano je na Sl.9.23. Iz slike se vidi da je za nazivnu vrijednost pseudopojacanje $\alpha=2$, stupanj prigušenja $\zeta=0,707$. Smanjenjem α do vrijednosti nula, stupanj prigušenja se smanjuje do svoje minimalne vrijednosti $\zeta=0,314$, a povećanjem α , stupanj prigušenja raste, tako da za $\alpha=36$ poprima jediničnu vrijednost, odnosno sustav dolazi u kritično aperiodično stanje. Vrijedno je uočiti da promjene parametra α ni u kom slučaju ne mogu sustav dovesti u nestabilno stanje. Budući da nije za očekivati da će realna vrijednost bilo kojeg parametra u normalnim okolnostima odstupati više od $\pm 10\%$ od svoje nazivne vrijednosti, dovoljno je analizu ponašanja sustava provesti u rasponu te promjene.

Za ispitivanje utjecaja promjena koeficijenta k_2 na ponašanje sustava uzmimo da je vrijednost parametra α konstantna i da iznosi 2. Nazivna vrijednost parametra k_2 ostaje $17/60$, ali uz pretpostavku da postoji odstupanje od zadane nazivne vrijednosti.



Sl.9.24. Sustav sa Sl.9.21. preinačen za obradbu s pseudopojačanjem k_2

Najprije pristupimo preinačenju sustava sa svrhom da se minimizira broj pojavljivanja pseudopojačanja k_2 u karakterističnoj jednadžbi. Poslije preinačenja prikazanog na Sl.9.24. karakteristična jednadžba glasi:

$$\frac{120 (k_2 s + 1)}{s(s+2)(s+17)} = -1, \quad (9.86.)$$

a za potrebe obradbe s pseudopojačanjem k_2 može se pisati u obliku:

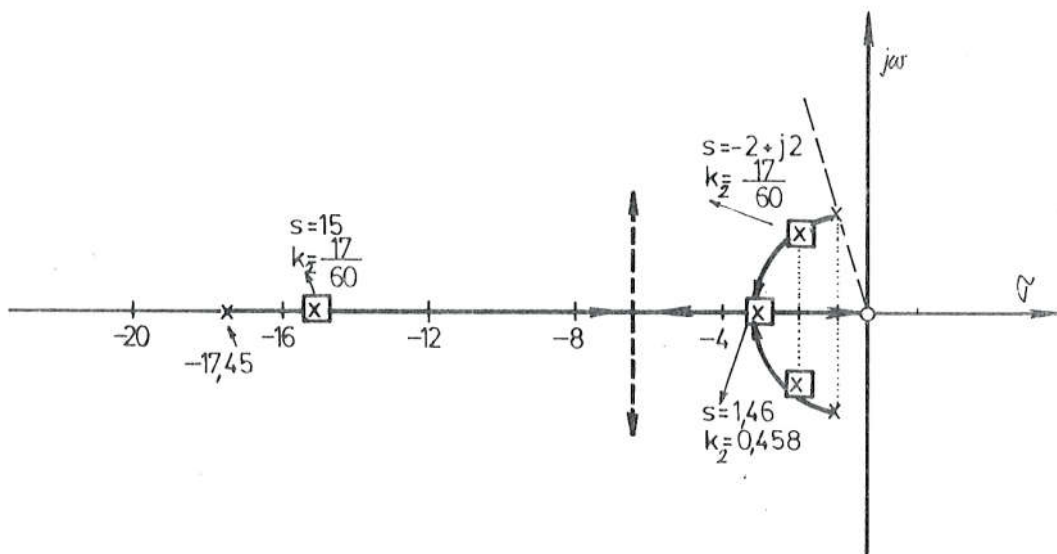
$$k_2 \frac{120 s}{s^3 + 19s^2 + 34s + 120} = -1 \quad (9.87.)$$

Budući da je nazivnik funkcije trećeg reda, treba ga najprije standardnim postupkom faktorizirati. Nakon toga funkcija glasi:

$$k_2 \frac{120 s}{(s+17,45)(s+0,775-j2,54)(s+0,775+j2,54)} = -1, \quad (9.88.)$$

a njeno GMK nacrtamo je na Sl.9.25.

Iz GMK funkcije (9.88.) vidimo da se smanjenjem koeficijenta k_2 smanjuje i prigušenje, tako da za $k_2=0$ stupanj prigušenja iznosi $\zeta=0,29$, a za $k_2=0,458$ ζ poprima jediničnu vrijednost. Ako se brzinska povratna veza poveća preko $k_2=0,458$, realni pol bliže ishodištu postaje dominantniji, a odziv sustava je aperiodično prigušen.



Sl.9.25. GMK karakteristične jednačbe (9.88.) s pseudopojačanjem k_2

9.8. ZAKLJUČAK

Slijed korijena karakteristične jednačbe nacrtan u s ravnini u ovisnosti o promjeni nekog od parametara sustava naziva se *geometrijsko mjesto korijena* (GMK), a pokazao se vrlo prikladnim za analizu dinamičkih sustava. Najčešće se primjenjuje u analizi sustava kad se mijenja pojačanje, ali to može biti i za promjenu bilo kojeg od parametara. Promjenljivi parametar se u tom slučaju naziva pseudopojačanje.

GMK se crta s pomoću niza uputa, koje su u ovoj knjizi obuhvaćene s dvanaest pravila. Ispravna primjena tih pravila omogućuje da se nacrtaju GMK bilo kojeg dinamičkog sustava. Redoslijed pri tome nije bitan, a neka od pravila u jednostavnijim slučajevima nisu ni potrebna.

Osim za analizu osjetljivosti uz promjenu pojačanja ili uz promjenu nekog drugog parametra, GMK se može primijeniti i za druge svrhe. Jedna od tih primjena je grafičko određivanje frekvencijskog odziva iz polno nultog dijagrama prijenosne funkcije regulacijskog sustava, a druga za faktoriziranje polinova. U sintezi se vrlo uspješno promjenjuje za provjeravanje dinamike sustava.

10. SPECIFIKACIJE I NJIHOVI MEDJUSOBNI ODNOSI

10.1. UVOD

Obradba dinamičkih sustava može se u potpunosti provesti u jednom od tri konvencionalna područja: vremenskom, kompleksnom ili frekvencijskom. Međutim, budući da svako od spomenutih područja ima svojih prednosti i nedostataka, u inženjerskoj primjeni se upravo njihovim međusobnim dopunjavanjem postižu najbolja rješenja. Nije rijedak slučaj da je sustav zadan sa specifikacijama iz različitih područja, kao npr. s vremenskom konstantom K_v iz vremenskog područja, sa stupnjem prigušenja ζ iz kompleksnog područja i s frekvencijom kritične amplitude ω_I iz frekvencijskog područja. U izvjesnim pak slučajevima je, radi jednostavnosti, pojedine dijelove obradbe prikladnije provesti u različitim područjima. Da bi se određene prednosti pojedinih područja mogle što djelotvornije iskoristiti i da bi se olakšao prijelaz iz jednog područja u drugo, u ovom poglavlju ćemo obraditi neka istaknutija svojstva pojedinih područja i izvesti neke korisne međusobne relacije.

10.2. TOČNOST

Točnost je jedna od *mjera valjanosti* regulacijskih sustava, a konvencionalno se mjeri odstupanjem odziva od standardne determinističke pobude oblika.

$$t^n \underset{s}{0} \longrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{uz} \quad n = 0, 1 \text{ i } 2 \text{ kad } t \rightarrow \infty$$

Poimenično, to su odskočna pobuda:

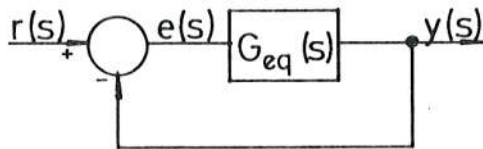
$$r(t) = t^0 = u(t) \quad 0 \rightarrow \infty \quad r(s) = \frac{1}{s} ,$$

uzlazna pravčasta pobuda:

$$r(t) = t = t u(t) \quad 0 \rightarrow \infty \quad r(s) = \frac{1}{s^2}$$

i parabolična pobuda:

$$r(t) = t^2 = t^2 u(t) \quad 0 \rightarrow \infty \quad r(s) = \frac{2}{s^3}$$



Sl.10.1. Kanonski oblik regulacijskog sustava s $G_{eq}(s)$

Obradba točnosti se može provesti s oba ekvivalentna oblika, G_{eq} i H_{eq} , a mi ćemo ovdje primijeniti postupak s G_{eq} , jer je on jednostavniji a i ekonomičniji. Na temelju oznaka sa Sl.10.1. mogu se postaviti relacije:

$$e(s) = r(s) - y(s) \quad (10.1.)$$

$$y(s) = e(s) G_{eq}(s), \quad (10.2.)$$

a odatle uvrštenjem $y(s)$ iz jednačbe (10.2.) u jednačbu (10.1.) izlazi:

$$e(s) = r(s) - e(s) G_{eq}(s) \quad (10.3.)$$

i, konačno, sredjenjem dobije se:

$$e(s) = \frac{r(s)}{1 + G_{eq}(s)} \quad (10.4.)$$

Budući da nas zanima pogreška u ustaljenom stanju, tj. $e(t)$ kada $t \rightarrow \infty$, primjenom teorema konačne vrijednosti dobije se:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s), \quad (10.5.)$$

odnosno uvrštenjem jednadžbe (10.4.) u jednadžbu (10.5.):

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{r(s)}{1 + G_{eq}(s)} \quad (10.6.)$$

U nastavku ćemo obraditi pogreške ustaljenog stanja kod servo-uredjaja. Vidjet ćemo da sve ovise o vrsti sustava, koja je po definiciji određena eksponentom od s koji se može izlučiti iz karakterističnog polinoma. Za sustav s karakterističnim polinomom $s^l \sum_{i=1}^n a_i s^{i-1}$ kažemo da je l -te vrsti.

10.2.1. Pogreška ustaljenog stanja pomaka

Za odskočnu pobudu $r(t)=u(t)$, odnosno u donjem području $r(s)=1/s$, pogreška ustaljenog stanja se naziva *pogreška pomaka*, i glasi:

$$e_{po}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s}{1 + G_{eq}(s)},$$

$$e_{po}(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_{eq}(s)} = \frac{1}{1 + K_{po}} \quad (10.7.)$$

Član:

$$K_{po} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{eq}(s)$$

naziva se *konstanta pogreške pomaka*. Za sustave l -te vrsti konstanta pogreške pomaka glasi:

$$K_{po} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_{st} Q(s)}{s R(s)},$$

a budući da je:

$$\lim_{s \rightarrow 0} Q(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \prod_{i=1}^m \left(\frac{s}{z_i} + 1 \right) = 1 \quad (10.8.)$$

i:

$$\lim_{s \rightarrow 0} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \prod_{j=1}^n \left(\frac{s}{p_j} + 1 \right) = 1 \quad (10.9.)$$

izlazi da je:

$$K_{po} = \frac{K_{st}}{s} \quad (10.10.)$$

Za nulte vrsti konstanta pogreške pomaka jednaka je statističkoj osjetljivosti petlje:

$$K_{po} = K_{st},$$

pa stoga pogreška pomaka glasi:

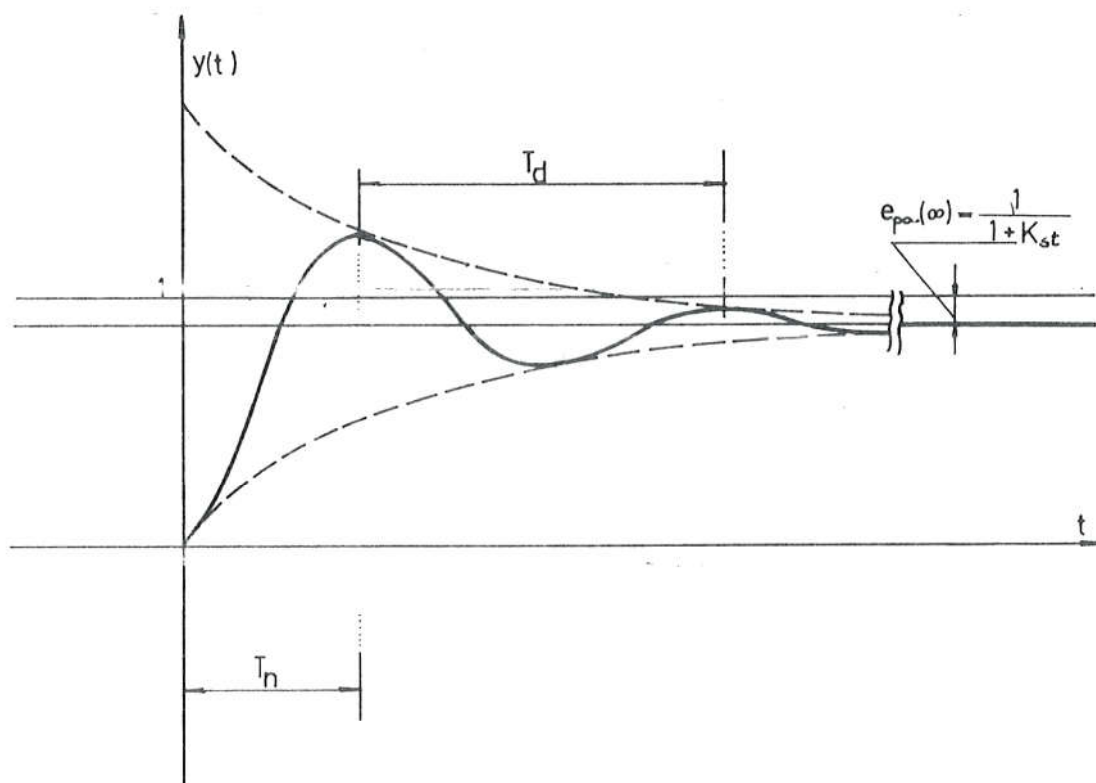
$$e_{po}^{(\infty)} = \frac{1}{1 + K_{st}} \quad (10.11.)$$

Iz jednadžbe (10.11.) proizlazi da za nultu pogrešku pomaka konstanta K_{po} treba biti beskonačna, a to se postiže ako je funkcija $G_{eq}(s)$ prve ili više vrsti.

Katkada je prikladnije nultu pogrešku ustaljenog stanja izračunati iz prijenosne funkcije regulacijskog sustava odnosno zatvorene petlje, pa stoga pogledajmo kako se u tom slučaju postupa. Ako se $G_{eq}(s)$ izrazi u obliku:

$$G_{eq}(s) = \frac{K(c_{m+1}s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1)}{s^{n+b_n} s^{n-1} + \dots + b_2 s + b_1}$$

jednadžba (10.4.) u preuredjenom obliku glasi:



Sl.10.2. Pogreška ustaljenog stanja pomaka sustava nulte vrsti

$$\frac{e(s)}{r(s)} = \frac{s^n + b_n s^{n-1} + \dots + b_1}{s^n + b_n s^{n-1} + \dots + b_1 + K(c_{m+1} s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1)}$$

$$= \frac{b_1 + b_2 s + \dots + b_n s^{n-1} + s^n}{b_1 + Kc_1 + (b_2 + Kc_2)s + \dots + s^n}$$

a odatle se dijeljenjem brojnika s nazivnikom dobije:

$$\frac{e(s)}{r(s)} = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots \quad (10.12.)$$

$e(s)$ se za odskočnu pobudu, prema tome, može izraziti i relacijom:

$$e(s) = \frac{y_0}{s} + \alpha_1 s^0 + \alpha_2 s^1 + \dots \quad (10.13.)$$

Primjenom teorema konačne vrijednosti na jednadžbu (10.13.) dobije se:

$$e_{p0}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots) = \alpha_0 \quad (10.14.)$$

Iz jednadžbe (10.14.) proizlazi da za nultu pogrešku pomaka treba biti jednako nuli.

Potrebno je još funkciju $y(s)/r(s)$ izraziti funkcijom $e(s)/r(s)$. U tom smislu jednadžbu (10.1.) napišimo u obliku:

$$y(s) = r(s) - e(s)$$

i podijelimo obje strane jednadžbe sa $r(s)$, pa ćemo dobiti:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = 1 - \frac{e(s)}{r(s)} \quad (10.15.)$$

a odatle uvrštenjem jednadžbe (10.12.) u jednadžbu (10.15.) izlazi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = 1 - \alpha_0 - \alpha_1 s - \alpha_2 s^2 \quad (10.16.)$$

Iz jednadžbe (10.14.) znamo da je za nultu pogrešku pomaka $\alpha_0=0$, pa stoga u tom slučaju jednadžba (10.16.) poprima oblik:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = 1 - \alpha_1 s - \alpha_2 s^2, \quad (10.17.)$$

a za $s=0$:

$$\frac{y(0)}{r(0)} = 1 \quad (10.18.)$$

Izrazi li se prijenosna funkcija regulacijskog sustava u faktoriziranom obliku:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K K_p (s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (10.19.)$$

primjenom jednadžbe (10.18) na jednadžbu (10.19), dobije se uvjet za nultu pogrešku ustaljenog stanja pomaka izražen nulama i polovima funkcije regulacijskog sustava, odnosno funkcije zatvorene petlje, a glasi:

$$1 = \frac{K_p \frac{z_1 z_2 \dots z_m}{p_1 p_2 \dots p_n}}{p_1 p_2 \dots p_n},$$

odnosno:

$$K_p = \frac{\prod_{j=1}^n p_j}{\prod_{i=1}^m z_i} \quad (10.20.)$$

Iz učinjenih razmatranja proizlazi da se nulta pogreška, izražena parametrima $G_{eq}(s)$, može postići ako je $G_{eq}(s)$ prve ili više vrsti, a izražena parametrima prijenosne funkcije regulacijskog sustava, ako je odnos umnoška polova i umnoška nula jednak ukupnom pojačanju sustava.

10.2.2. Pogreška ustaljenog stanja brzine

Za ulaznu pravčastu pobudu $r(t)=t \cdot u(t)$, odnosno u donjem području $r(s)=1/s^2$, pogreška ustaljenog stanja se naziva *pogreška brzine* i glasi:

$$e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^2}{1 + G_{eq}(s)},$$

odnosno:

$$e_v(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_{eq}(s)} = \frac{1}{K_v} \quad (10.22.)$$

Član:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{eq}(s) \quad (10.23.)$$

naziva se *konstanta pogreške brzine*.

Za sustave l -te vrsti konstanta pogreške brzine glasi:

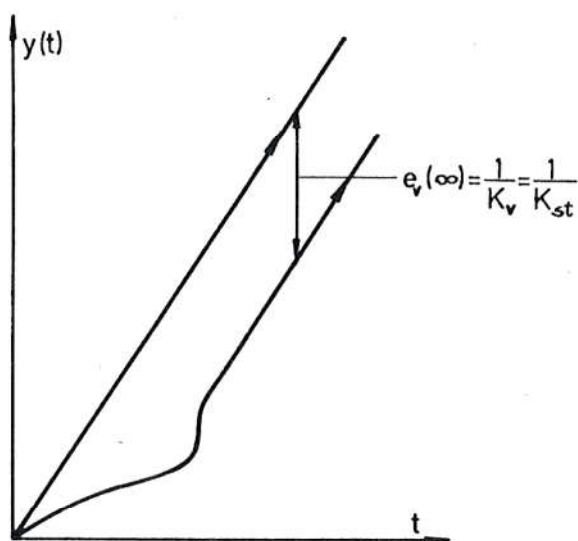
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_{st} Q(s)}{s^l R(s)}$$

što uzevši u obzir jednačbe (10.8.) i (10.9.) izlazi:

$$K_v = \frac{K_{st}}{s^{\ell-1}}$$

Za nultu pogrešku brzine konstanta pogreške treba biti beskonačna, a to je ispunjeno ako je $G_{eq}(s)$ druge ili više vrsti tj. $\ell \geq 2$. Na Sl.10.3. prikazan je odziv na uzlaznu pravčastu funkciju sustava prve vrsti, u kom slučaju je $K_v = K_{st}$.

Pogledajmo kako se parametrima funkcije regulacijskog sustava može izraziti uvijet za nultu pogrešku brzine. U komentaru jednačbe (10.14.) rečeno je, da za nultu pogrešku pomaka član α_0 treba biti jednak nuli. Uz pretpostavku da je taj uvijet ispunjen, pogreška sustava na uzlaznu pravčastu funkciju glasi:



Sl.10.3. Pogreška ustaljenog stanja brzine sustava prve vrsti

$$e_v(s) = \frac{1/s^2}{1+G_{eq}(s)} = \frac{\alpha_1}{s} + \alpha_2 + \dots, \quad (10.24.)$$

a za ustaljeno stanje:

$$e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \alpha_1 \quad (10.25.)$$

Usporedbom jednađžbi (10.22.) i (10.25.) izlazi:

$$\alpha_1 = \frac{1}{K_v} \quad (10.26.)$$

a uvrštenjem (10.26.) u (10.17.) uz $\alpha_0=0$ dobije se:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = 1 - \frac{1}{K_v} s - \alpha_2 s^2 \quad (10.27.)$$

Deriviranjem jednađžbe (10.27.) uz $s=0$ dobije se:

$$\left. \frac{d}{ds} \frac{y(s)}{r(s)} \right|_{s=0} = - \frac{1}{K_v} , \quad (10.28.)$$

a budući da je pretpostavljena nulta pogreška ustaljenog stanja pomaka i ovdje vrijedi jednađžba (10.18.) prema kojoj je za $s=0$ prijenosna funkcija regulacijskog sustava jednaka jedinici, pa ako s tako izraženom jedinicom podijelimo jednađžbu (10.28.) dobit ćemo:

$$\left. \frac{\frac{d}{ds} \frac{y(s)}{r(s)}}{y(s)/r(s)} \right|_{s=0} = \frac{-1/K_v}{y(0)/r(0)} \quad (10.29.)$$

Prisjetimo li se relacije:

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (10.30.)$$

jednađžba (10.29.) se može pisati u obliku:

$$\frac{1}{K_v} = - \frac{d}{ds} \ln \left. \frac{y(s)}{r(s)} \right|_{s=0} , \quad (10.31.)$$

ili u faktoriziranom obliku:

$$\frac{1}{K_v} = - \frac{d}{ds} \ln \frac{K_p (s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_m)} , \quad (10.32.)$$

što logaritmiranjem postaje:

$$\frac{1}{K_v} = - \frac{d}{ds} \left[\ln K_p + \sum_{i=1}^m \ln(s+z_i) - \sum_{j=1}^n \ln(s+p_j) \right] \Big|_{s=0} \quad (10.33.)$$

Derivacijom svakog pojedinog člana, jednačba (10.33.) poprima oblik:

$$\frac{1}{K_v} = - \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{s+z_i} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{s+p_j} \right) \Big|_{s=0} ,$$

odnosno uz $s=0$:

$$\frac{1}{K_v} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} \quad (10.34.)$$

Budući da je uvjet za nultu pogrešku brzine $K_v = \infty$, iz jednačbe (10.34.) taj uvjet se može izraziti i relacijom:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} , \quad (10.35.)$$

gdje su z_i nule, a p_j polovi prijenosne funkcije regulacijskog sustava.

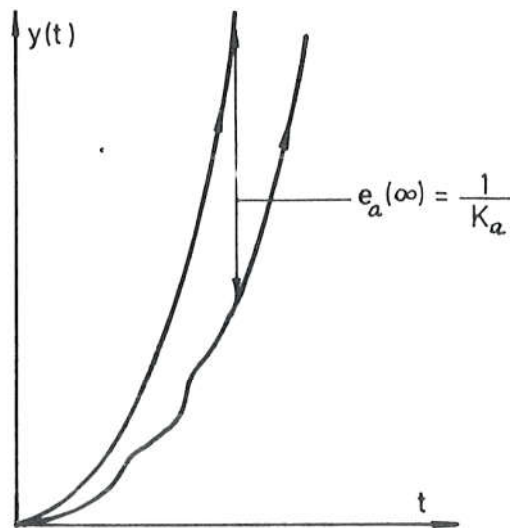
Iz svega proizlazi da za nultu pogrešku brzine K_v treba biti beskonačno, a to se postiže samo ako je $G_{eq}(s)$ druge ili više vrsti ili ako je zbroj recipročnih vrijednosti nula jednak zbroju recipročnih vrijednosti polova prijenosne funkcije regulacijskog sustava.

10.2.3. Pogreška ustaljenog stanja ubrzanja

Primijeni li se na ulaz regulacijskog servosustava parabolična pobuda $r(t)=t^2$, odnosno u donjem području $r(s)=2/s^3$ i postupi kao u prijašnjim slučajevima, dobije se izraz za konstantu pogreške ubrzanja koja glasi:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_{eq}(s) , \quad (10.36.)$$

a pogreška $e_a(\infty)=1/K_a$ je za sustav druge vrsti prikazana na Sl.10.4.



Sl.10.4. Pogreška ustaljenog stanja ubrzanja sustava druge vrsti

Ako se polazi od parametara regulacijskog sustava, konstanta pogreške ubrzanja se daće izraziti relacijom:

$$\frac{1}{K_a} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j^2} - \frac{1}{K_v^2} \right) \quad (10.37.)$$

gdje su p_j polovi, a z_i nule prijenosne funkcije regulacijskog sustava, tj. sustava zatvorene petlje.

Na isti način se mogu naći pogreške i njihove konstante za pobude oblika t^n s višim eksponentom, ali se to ne radi jer nisu potrebne. Štoviše, pokazalo se da i od obradjenih konstanti najveću količinu informacija sadrži konstanta pogreške brzine, pa se stoga nju najviše i primjenjuje.

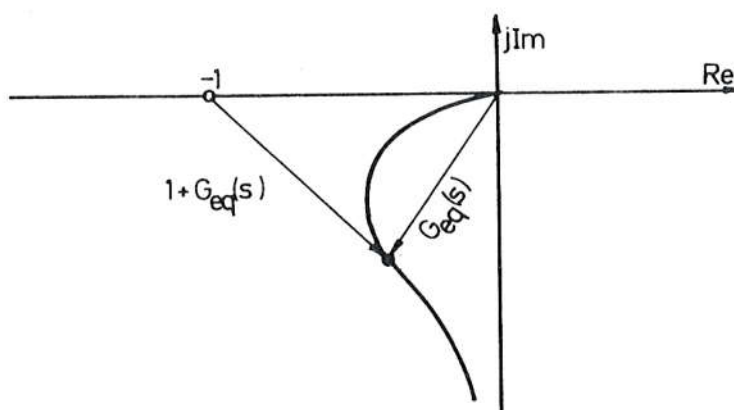
10.3. M I α KRUŽNICE

Osim za provjeravanje stabilnosti sustava Nyquistov dijagram može poslužiti i za proučavanje frekvencijskog odziva regulacijskog sustava.

Uz primjenu $G_{eq}(j\omega)$ prijenosna funkcija frekvencijskog odziva glasi:

$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{G_{eq}(j\omega)}{1 + G_{eq}(j\omega)} \quad (10.38.)$$

Obratimo li pažnju na Nyquistov dijagram, i imajući u vidu jednadžbu (10.38.), lako je uočiti da se prijenosna funkcija frekvencijskog odziva može dobiti grafički iz Nyquistovog dijagrama dijeljenjem dvaju verzora: onog koji spaja u ishodište s određenom frekvencijom, s onim koji spaja kritičnu točku $-1+j0$ s istom frekvencijskom točkom na dijagramu.



Sl.10.5. Odredjivanje prijenosne funkcije frekvencijskog odziva regulacijskog sustava iz $G_{eq}(s)$

Pokazalo se da se odredjivanje modula i argumenta iz Nyquistovog dijagrama može ubrzati ako se u kompleksnu ravninu ucrtaju krivulje konstantnih modula i konstantnih argumenata. Da bismo našli relacije za te krivulje, izrazimo najprije $G_{eq}(j\omega)$ u obliku kompleksnog broja:

$$G_{eq}(j\omega) = x + jy \quad (10.39.)$$

Uvrštenjem jednadžbe (10.39.) u (10.38.) dobije se:

$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{x+jy}{1+x+jy} \quad (10.40.)$$

a odatle modul:

$$M(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} \right| = \left(\frac{x^2 + y^2}{1 + 2x + x^2 + y^2} \right)^{1/2} \quad (10.41.)$$

Kvadriranjem lijeve i desne strane jednadžbe (10.41.), te sredjenjem, slijedi:

$$x^2(M^2-1) + 2xM^2 + y^2(M^2-1) = -M^2,$$

a dijeljenjem s (M^2-1) i kompletiranjem kvadrata s $M^4/(M^2-1)^2$ izlazi:

$$x^2 + \frac{2xM^2}{M^2-1} + \frac{M^4}{(M^2-1)^2} + y^2 = \frac{M^4}{(M^2-1)^2} - \frac{M^2}{M^2-1}$$

i odatle:

$$\left(x + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{M^2}{(M^2-1)^2} \quad (10.42.)$$

U jednadžbi (10.42.) prepoznamo jednadžbu kružnice s koordinatama centra:

$$x = \frac{M^2}{1-M^2} \quad i \quad y = 0 \quad (10.43.)$$

i polumjerom:

$$r = \frac{M}{M^2-1} \quad (10.44.)$$

Da bi našli relacije za krivulje konstantnih argumenata, krenimo od argumenta prijenosne funkcije frekvencijskog odziva regulacijskog sustava, koji glasi:

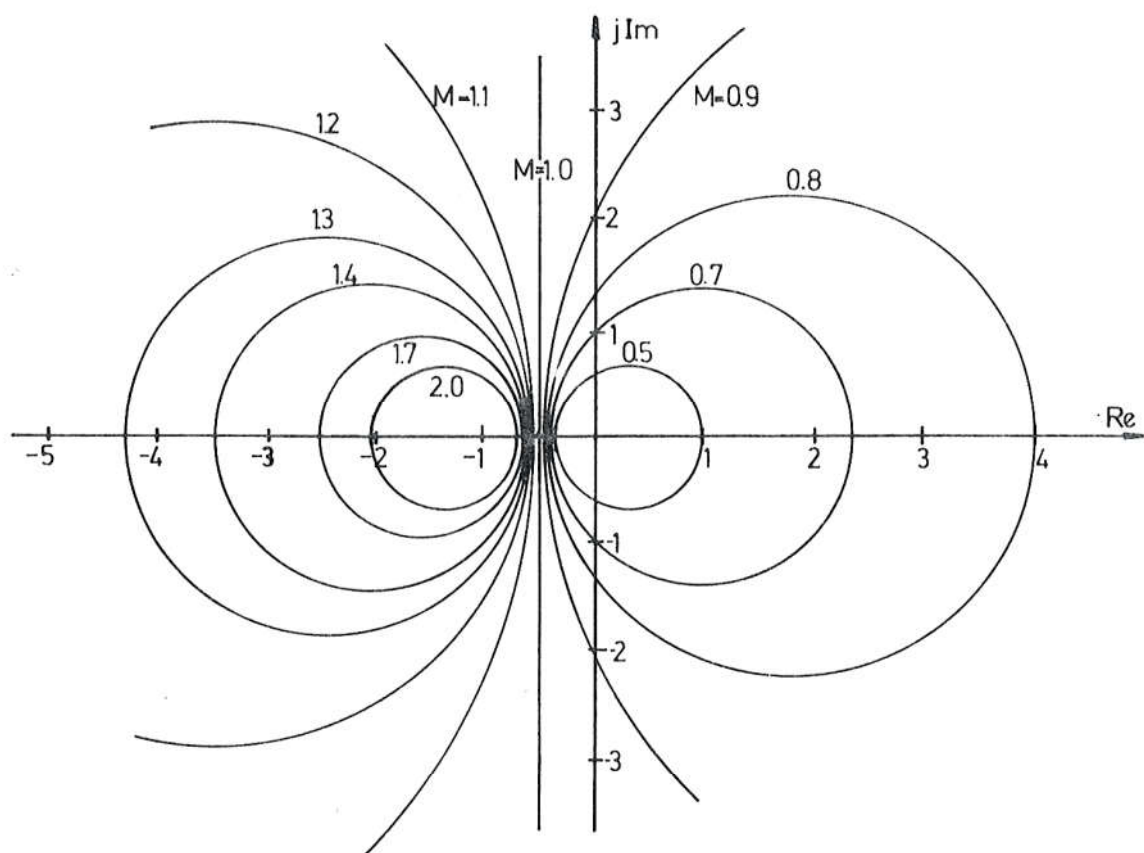
$$\alpha = \arg \frac{x + jy}{1+x+jy} \quad (10.45.)$$

a odatle množenjem brojnika i nazivnika s konjugatom brojnika dobije se:

$$\alpha = \arg \frac{x^2 + x + y^2 + jy^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

i konačno:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x^2 + x + y^2} = N \quad (10.46.)$$



Sl.10.6. Konstantne M kružnice

Jednadžba (10.46.) može se pisati u obliku:

$$x^2 + x + y^2 - \frac{y}{N} = 0 ,$$

koja svedena na opći oblik jednadžbe kružnice glasi:

$$(x^2 + x + \frac{1}{4}) + (y^2 - \frac{y}{N} + \frac{1}{4N^2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} ,$$

ili u sažetom obliku:

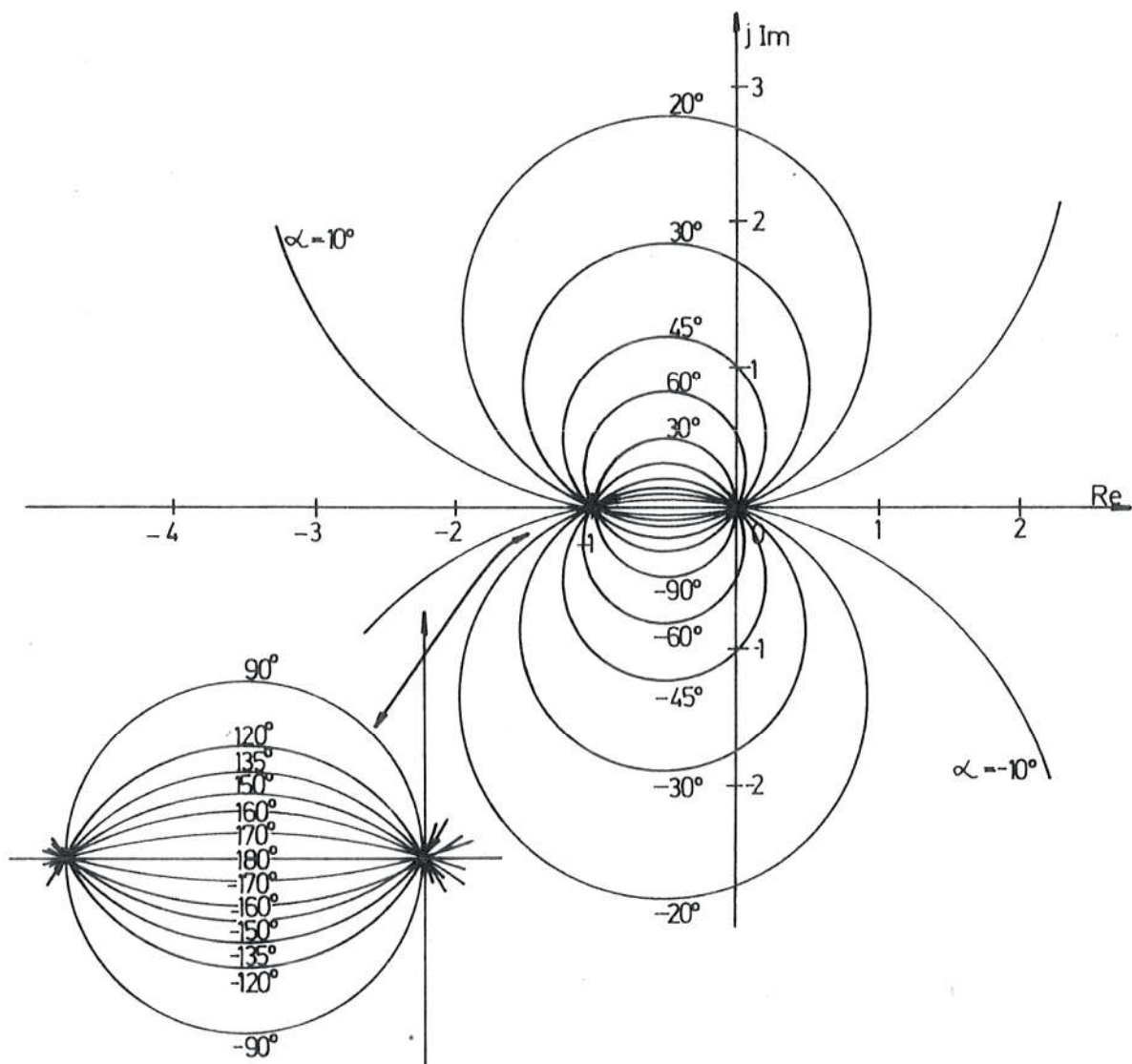
$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2N})^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2} \quad (10.47.)$$

Jednadžba (10.47.) predstavlja kružnicu s koordinatama centra:

$$x = -\frac{1}{2} \quad i \quad y = \frac{1}{2N} \quad (10.48.)$$

i polumjerom:

$$r = \frac{1}{2N} \sqrt{N^2 + 1} \quad (10.49.)$$



Sl.10.7. Konstantne α kružnice

10.4. NICHOLSOV DIJAGRAM

Informacija o modulu i argumentu prijenosne funkcije regulacijskog sustava, koja je u Nyquistovom dijagramu dana s pomoću M i α kružnica, može se prikazati grafički i u ravnini kojoj je na apscisi nanešena fazna pričuva, a na ordinati modul prijenosne funkcije $G_{eq}(j\omega)$. Takav dijagram se naziva *Nicholsonov dijagram*.

Da bismo izveli jednadžbe Nicholsonovog dijagrama krenimo od prijenosne funkcije:

$$G_{eq}(j\omega) = |G_{eq}(j\omega)| e^{j \arg G_{eq}(j\omega)} = |G_{eq}(j\omega)| e^{j(\Pi + \gamma)}, \quad (10.50.)$$

gdje je γ fazna pričuva. Uz primjenu jednadžbe (10.50.) prijenosna funkcija regulacijskog sustava glasi:

$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = M e^{j\alpha} = \frac{G_{eq}(j\omega)}{1 + G_{eq}(j\omega)} = \frac{|G_{eq}(j\omega)| e^{j(\Pi + \gamma)}}{1 + |G_{eq}(j\omega)| e^{j(\Pi + \gamma)}} \quad (10.51.)$$

Uvrštenjem $e^{j\Pi} = \cos \Pi + j \sin \Pi$ u jednadžbu (10.51.) i sredjenjem slijedi:

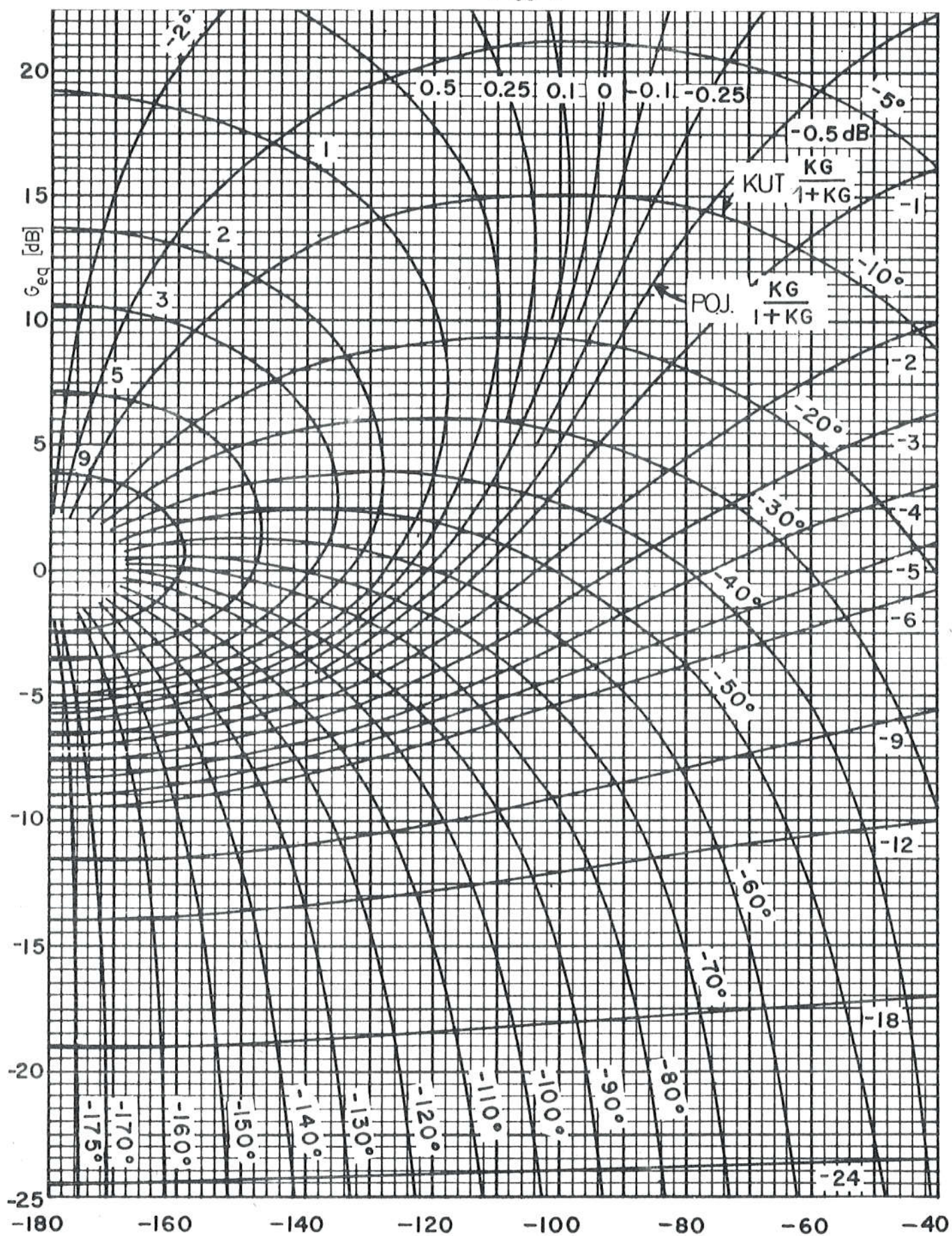
$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{|G_{eq}(j\omega)| e^{j\gamma}}{|G_{eq}(j\omega)| e^{j\gamma} - 1},$$

a odatle dijeljenjem brojnika i nazivnika s $|G(j\omega)| e^{j\gamma}$ dobije se:

$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \left[1 - \frac{e^{j\gamma}}{|G_{eq}(j\omega)|} \right]^{-1}$$

Konačno, zamjenom eksponencijalnog izraza s trigonometrijskim, dolazi se do relacije:

$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \left[1 - \frac{\cos \gamma}{G_{eq}(j\omega)} + j \frac{\sin \gamma}{G_{eq}(j\omega)} \right]^{-1} \quad (10.52.)$$



FAZNI KUT, U STUPNJEVIMA

Sl.10.8. Nicholsov dijagram

Prijenosna funkcija (10.52.) ima modul:

$$M(\omega) = \left\{ 1 + \frac{1}{|G_{eq}(j\omega)|^2} - \frac{2ccos \gamma}{G_{eq}(j\omega)} \right\}^{1/2} \quad (10.53.)$$

i argument:

$$\alpha(\omega) = \arctg \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma - |G_{eq}(j\omega)|} \quad (10.54.)$$

Na Sl.10.8. prikazan je izgled Nicholsovog dijagrama. Može ga se vrlo korisno primijeniti za analizu i sintezu regulacijskih sustava. Budući da se na njemu točka $-1+j0$ podudara s nulom decibela na ordinati i s nulom fazne pričuve na apscisi, sustav će biti stabilan ako Nicholsova krivulja prolazi desno od ishodišta.

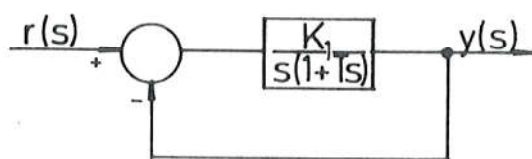
Nicholsov dijagram može dobro poslužiti za crtanje frekvencijskog odziva iz Bodeovog dijagrama. Radi se tako da se najprije nacrtaju Bodeovi dijagrami, a potom se za odgovarajuće frekvencije vrijednosti modula i faze iz Bodeovog dijagrama unose u Nicholsov dijagram. Za crtanje frekvencijskog odziva uzimaju se presjecišta tako dobijene Nicholsove krivulje sa M konturama, i vrijednosti nanose na log-log papir, s modulom prijenosne funkcije frekvencijskog odziva regulacijskog sustava u dB na ordinati i log ω na apscisi.

10.5. KORELACIJA VREMENSKOG I FREKVENCIJSKOG ODZIVA OSNOVNOG SUSTAVA DRUGOG REDA

Već je više puta spomenuto da se sustavi višeg reda mogu, više ili manje uspješno, nadomjestiti sustavima nižeg reda, a sada ćemo se upoznati s jednim od načina određivanja parametara nadomjesnog sustava. Upravo radi toga potrebno se najprije upoznati s međusobnim odnosima vremenskog i frekvencijskog odziva. Da u daljnjim izlaganjima ne bi došlo do zabune, dogovorno ćemo sustave drugog reda bez nule u buduću nazivati *osnovni sustavi drugog reda*, a sustave drugog reda s nulom *općeniti sustavi drugog reda*. Ovdje će

za sada biti uzeti u obzir samo sustavi prvog reda i osnovni sustavi drugog reda.

10.5.1. Sustav prve vrsti



Sl.10.9. Osnovni sustav drugog reda prve vrsti

Uz:

$$G_{eq}(s) = \frac{K_1}{s(1+Ts)} \quad (10.55.)$$

prijenosna funkcija regulacijskog sustava glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K_1/T}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K_1}{T}}, \quad (10.56.)$$

odnosno:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (10.57.)$$

Usporedbom koeficijenata jednadžbi (10.56.) i (10.57.) dobiju se relacije:

$$\omega_n^2 = \frac{K_1}{T} \quad (10.58.)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}, \quad (10.59.)$$

a odatle:

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{K_1 T}} \quad (10.60.)$$

Da bismo došli do ovisnosti parametara vremenskog i frekvencijskog odziva potražimo najprije modul frekvencijskog odziva. Uvrštenjem $s=j\omega$ u jednadžbu (10.57.) izlazi:

$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 - j 2\zeta\omega\omega_n} \quad (10.61.)$$

a odatle modul:

$$M(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} \right| = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2}} \quad (10.62.)$$

Maksimum krivulje $M(\omega)$ predstavlja *nadvišenje frekvencijskog odziva*. Da bismo do njega došli derivirajmo izraz (10.62.) i izjednačimo ga s nulom. Uz $a = \omega^2/\omega_n^2$ izlazi:

$$\frac{dM}{da} = a^2 + (2\zeta^2 - 1) = 0 \quad ,$$

a odatle:

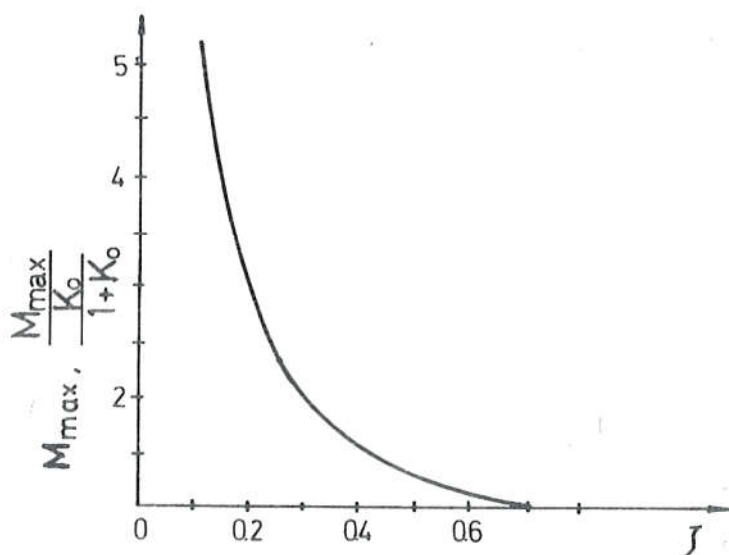
$$a = \frac{\omega_{max}^2}{\omega_n^2} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (10.63.)$$

Uvrštenjem jednadžbe (10.63.) u (10.62.) konačno se dobije izraz za frekvencijsko nadvišenje koji glasi:

$$M_{max} = \frac{1}{1\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (10.64.)$$

Pogledajmo sada kako se s pomoću M kružnica i Nyquistovog dijagrama određuju parametri nadomjesnog sustava. U dijagram sa M kružnicama nacrtana se Nyquistova krivulja sustava kojeg se hoće nadomjestiti osnovnim sustavom drugog reda. Potom se odredi kružnica koju Nyquistova krivulja dodiruje i frekvencija na kojoj dolazi do dodira. Te dvije vrijednosti predstavljaju frekvencijsko nadvišenje M_{max} i frekvenciju nadvišenja ω_{max} . Poznavajući te

dvije vrijednosti može se iz jednačbe (10.64.) ili dijagrama na Sl.10.10. odrediti ζ , a potom iz jednačbe (10.63.) nepri-
gušenu kružnu frekvenciju ω_n nadomjesnog osnovnog sustava dru-
gog reda.



Sl.10.10. Ovisnost frekvencijskog nadvišenja o stup-
nju prigušenja osnovnog sustava drugog reda

Ako stupanj prigušenja ispadne veći od $1/\sqrt{2}$ tj. od 0,707, znači
da frekvencijski odziv nema nadvišenja. U tom slučaju se dotični
sustav može nadomjestiti sustavom prvog reda.

Da bismo odredili parametre nadomjesnog sustava prvog reda kre-
nimo od prijenosne funkcije regulacijskog sustava prvog reda:

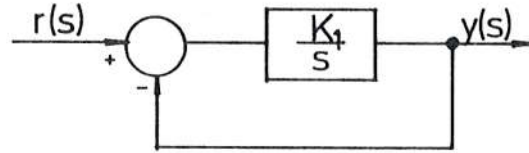
$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{1+T_1 s} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_1} s} = \frac{K_1}{K_1 + s} , \quad (10.65.)$$

a odatle:

$$G_{eq}(s) = \frac{K_1}{s} , \quad (10.66.)$$

odnosno:

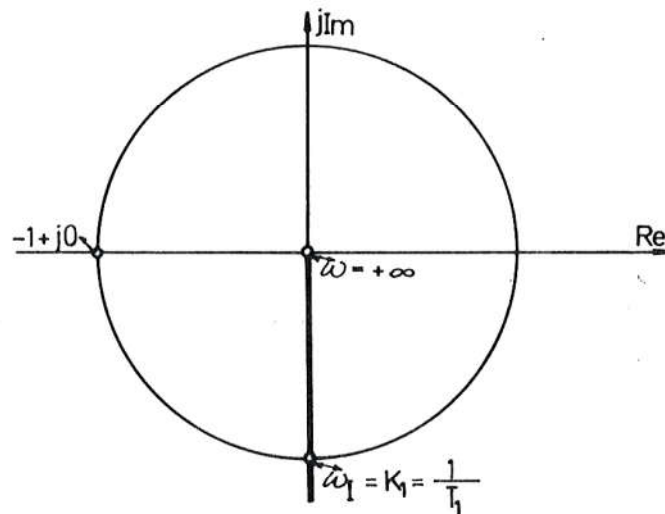
$$G_{eq}(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega} \quad (10.67.)$$



Sl.10.11. Osnovni sustav prvog reda i prve vrste

Za jediničnu vrijednost modula jednačba (10.67.) poprima vrijednost:

$$\left| G_{eq}(j\omega_I) \right| = \frac{K_1}{|j\omega_I|} = \frac{K_1}{\omega_I} = 1 \quad (10.68.)$$



Sl.10.12. Nyquistov dijagram funkcije

$$G_{eq}(j\omega) = K_1 / j\omega$$

Iz toga zaključujemo da se sustav višeg reda koji nema frekven-
cijskog nadvišenja može nadomjestiti sustavom prvog reda kojem
je vremenska konstanta recipročna vrijednost frekvencije kritič-
ne amplitude originalnog sustava.

10.5.2. Sustav nulte vrsti

Ako $G_{eq}(s)$ predstavlja sustav drugog reda nulte vrsti:

$$G_{eq}(s) = \frac{K_O}{1 + a_2 s + a_3 s^2} \quad (10.69.)$$

prijenosna funkcija regulacijskog sustava glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K_O/a_3}{s^2 + (\frac{a_2}{a_3})s + (\frac{1+K_O}{a_3})} \quad (10.70.)$$

Usporedbom s prijenosnom funkcijom u standardnom obliku:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (10.71.)$$

izlazi:

$$\frac{K_O}{a_3} = K \omega_n^2 ,$$

$$2\zeta \omega_n = \frac{a_2}{a_3} ,$$

$$\frac{1 + K_O}{a_3} = \omega_n^2 ,$$

a odatle:

$$K = \frac{K_O}{1 + K_O}$$

pa stoga standardni oblik prijenosne funkcije s K_O glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\frac{K_O}{1 + K_O} \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (10.72.)$$

Da bismo došli do korelacije vremenskog i frekvencijskog odziva za ovaj slučaj, potražimo najprije modul funkcije (10.72.).

$$M(\omega) = \left| \frac{y(s)}{r(s)} \right| = \frac{\frac{K_O}{1 + K_O}}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad (10.73.)$$

a zatim izjednačenjem derivacije $dM(\omega)/d\alpha$ s nulom, gdje je $\alpha = (\omega/\omega_n)^2$, dobije se izraz za frekvenciju nadvišenja:

$$\omega_{max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{za} \quad \zeta \leq 0,707 \quad (10.74.)$$

i nadvišenje:

$$M_{max} = \frac{\frac{K_O}{1 + K_O}}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (10.75.)$$

ili:

$$\frac{M_{max}}{\frac{K_O}{1 + K_O}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (10.76.)$$

Do M_{max} i ω_{max} dolazi se s pomoću M kružnica i Nyquistovog dijagrama kao i u prijašnjem slučaju, a zatim se iz jednadžbi (10.74.) i (10.75.) izračunaju ζ i ω_n . Ako se služimo dijagramom poput onog na Sl.10.10., na ordinati treba uzeti u obzir vrijednost $M_{max}/(K_O/(1+K_O))$ kao što i proizlazi iz jednadžbe (10.76.).

Ako se računom dobije da je $M_{max}/(K_O/(1+K_O)) < 1$ znači da dotični sustav nema frekvencijskog nadvišenja. U tom slučaju može ga se aproksimirati sa sustavom prvog reda. Da bismo odredili parametre nadomjesnog sustava prvog reda polazimo od prijenosne funkcije regulacijskog sustava:

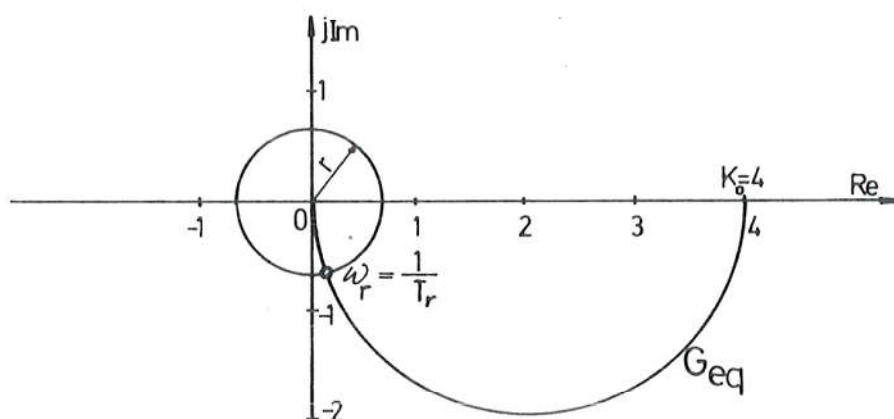
$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K_O}{1 + K + T_s} = \frac{\frac{K_O}{1 + K_O}}{1 + T_r s} \quad (10.77.)$$

gdje je:

$$T_r = \frac{T}{1 + K_0} \quad (10.78.)$$

Iz jednadžbe (10.77.) dobije se:

$$G_{eq}(j\omega) = \frac{K_0}{1 + j\omega T} \quad (10.79.)$$



Sl.10.13. Određjivanje vremenske konstante nadomjesnog sustava

Nacrta li se Nyquistov dijagram funkcije (10.79.) i iz ishodišta opiše kružnica polumjera r , presjecište kružnice i dijagrama određuje frekvenciju ω_r , a verzor koji spaja ishodište s točkom presjeka ima vrijednost:

$$\left| G_{eq}(j\omega_r) \right| = \left| \frac{K_0}{1 + j\omega_r T} \right| = r \quad (10.80.)$$

Frekvencija ω_r se može izraziti s pomoću relacije (10.78.) i dobije se:

$$\omega_r = \frac{1}{T_r} = \frac{1 + K_0}{T} \quad (10.81.)$$

a uvrštenjem tog izraza u jednadžbu (10.80.) izlazi:

$$K_0^2 = r^2 [1 + (1 + K_0)^2] \quad (10.82.)$$

i odatle:

$$r = \frac{K}{\sqrt{1 + (1 + K_O)^2}} \quad , \quad (10.83.)$$

Vrijedno je zapaziti da za velike vrijednosti K_O polumjer $r \rightarrow 1$, dakle za granični slučaj izlazi isto rješenje kao i za:

$$G_{eq}(s) = \frac{K_1}{s} .$$

Ilustrirajmo to na jednom sustavu nulte vrsti, prema Sl.10.11., za koji treba odrediti T_r nadomjesnog sustava.

Iz dijagrama očitavamo da je $K_O = 4$, pa stoga prema jednažbi (10.83) izlazi:

$$r = \frac{K_O}{\sqrt{1 + (1 + K_O)^2}} = \frac{4}{\sqrt{26}} = 0,784$$

Nacrtamo li kružnicu polumjera $r = 0,784$, iz presjeka kružnice i dijagrama nalazimo da je $\omega_p = 2,5$, a odatle $T_r = 1/2,5 = 0,4$.

10.5.3. Korelacija fazne pričuve i stupnja prigušenja

Na temelju Sl.10.9. napisana je jednažba (10.55.), koja u frekvencijskom području glasi:

$$G_{eq}(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega(1 + j\omega T)} \quad , \quad (10.84.)$$

a njen modul na frekvenciji kritične amplitude:

$$\left| G_{eq}(j\omega_I) \right| = \frac{K_1}{\omega_I \sqrt{1 + T^2 \omega_I^2}} = 1 \quad (10.85.)$$

Kvadriranje jednažbe (10.85.) dobije se:

$$T^2 \omega_I^4 + \omega_I^2 - K_1^2 = 0 ,$$

ili:

$$\left(\frac{\tau}{K_1}\right)^2 \omega_I^4 + \frac{1}{K_1^2} \omega_I^2 - 1 = 0 \quad (10.86.)$$

Primjenom jednadžbi (10.58.) i (10.59.) nalazi se izraz za statičku osjetljivost:

$$K_1 = \omega_n^2 T = \frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n} = \frac{\omega_n}{2\zeta}, \quad (10.87.)$$

a uvrštenjem K_1 u (10.86.) izlazi:

$$\left(\frac{\omega_I}{\omega_n}\right)^4 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_I}{\omega_n}\right)^2 - 1 = 0 \quad (10.88.)$$

Na taj način smo došli do kvadratne jednadžbe koje rješenje glasi:

$$\left(\frac{\omega_I}{\omega_n}\right)^2 = \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2 \quad (10.89.)$$

Fazna pričuva dana je izrazom:

$$\gamma = 180^\circ + \arg G_{eq}(j\omega_I), \quad (10.90.)$$

a argument od $G_{eq}(j\omega_I)$ za:

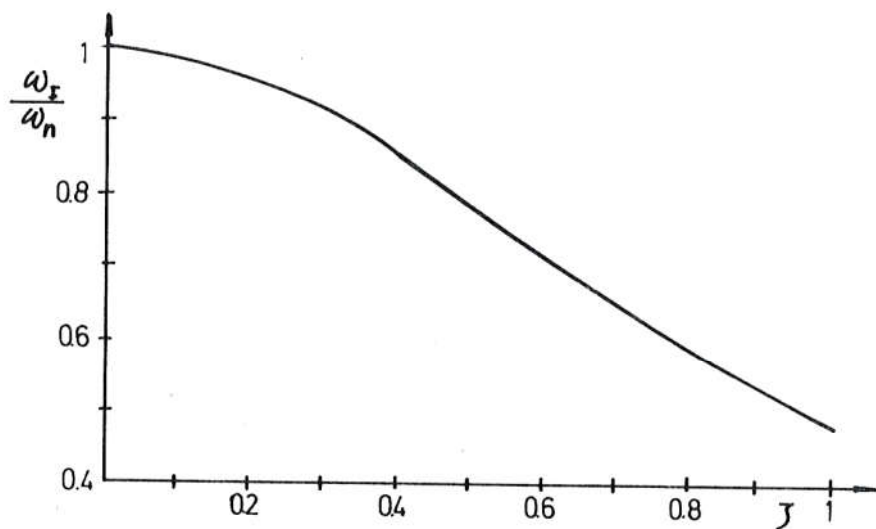
$$G_{eq}(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega(1 + j\omega T_1)}$$

glasi:

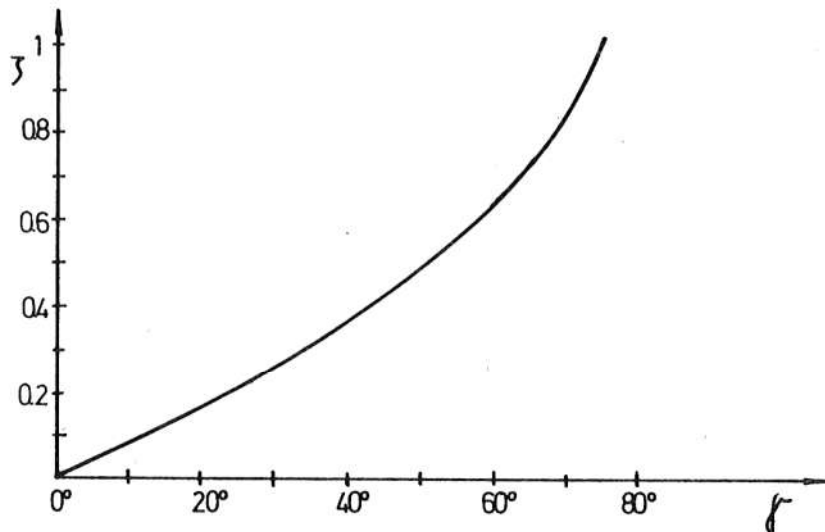
$$\arg G_{eq}(j\omega_I) = -90^\circ - \arctan \omega_I T_1 \quad (10.91.)$$

Uvrštenjem (10.59.) i (10.91) u (10.90) dobije se:

$$\gamma = 90^\circ - \arctan T_1 \omega_I = \arctan \frac{2\zeta}{\omega_I/\omega_n}$$



Sl.10.14. Ovisnost normalizirane frekvencije kritične amplitude o stupnju prigušenja prema jednađbi (10.89.)



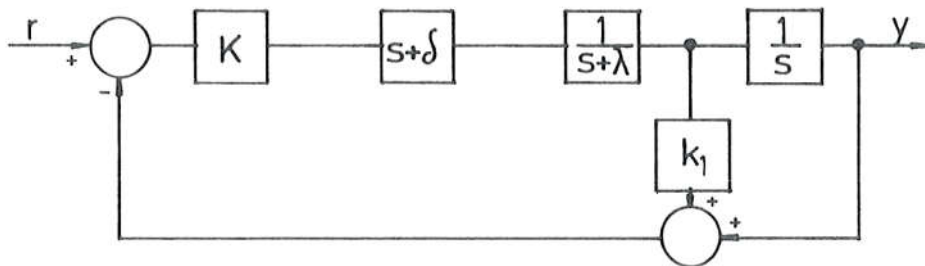
Sl.10.15. Ovisnost stupnja prigušenja o faznoj pričuvi prema jednađbi (10.92.)

a odatle primjenom jednađbe (10.89.)

$$\gamma = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}} \quad (10.92.)$$

10.6. KORELACIJA VREMENSKOG I FREKVENCIJSKOG ODZIVA OPĆENITOG SUSTAVA DRUGOG REDA

U prethodnom poglavlju je pokazano kako se sa sustavom prvog reda i s osnovnim sustavom drugog reda mogu aproksimirati sustavi višeg reda. Međutim, iako takvi slučajevi postoje, oni su ograničeni na mali broj specifičnih slučajeva, a proučavaju se prvenstveno kao uvod u aproksimaciju za složenijim sustavima. Mnogo veću primjenu u aproksimaciji pruža općeniti sustav drugog reda tj. sustav s jednom nulom i dva pola. Naime, s tri stupnja slobode (jedna nula i dva pola) moguće je neovisno ugoditi tri parametra kao npr. širinu frekvencijskog područja, vrijeme nadvišenja i vremensku konstantu, a s tolikim brojem nezavisnih parametara moguće je u velikom broju slučajeva dovoljno točno aproksimirati i složenije sustave. U ovom poglavlju ćemo se stoga detaljnije upoznati s ponašanjem općenitog sustava drugog reda i s korelacijama njegovog vremenskog i frekvencijskog odziva.



Sl.10.16. Općeniti sustav drugog reda

Prijenosna funkcija općenitog sustava drugog reda tj. sustava s jednom nulom i dva pola prema oznakama na Sl.10.16. glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1 + \frac{s}{\delta}}{1 + s \left(\frac{\lambda + K + k_1 \delta}{K \delta} \right) + s^2 \left(\frac{1 + K k_1}{K \delta} \right)}, \quad (10.93.)$$

odnosno:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1 + b_2 s}{1 + a_2 s + a_3 s^2} \quad , \quad (10.94.)$$

a može se pisati i u obliku:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1 + \alpha \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right) s}{1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right) s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (10.95.)$$

Zbog *konstrukcijskog faktora* α , prijenosna funkcija općenitog sustava drugog reda ima veliku primjenu u analizi i sintezi. Pogledajmo najprije kako α , može poslužiti kao pokazatelj točnosti. Za $\alpha=0$ prijenosna funkcija regulacijskog sustava glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad ,$$

a prijenosna funkcija $G_{eq}(s)$ će biti:

$$G_{eq}(s) = \frac{y(s)/r(s)}{1 - (y(s)/r(s))} = \frac{1}{s\left(\frac{s}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\right)}$$

Konstanta pogreške ustaljenog stanja pomaka glasi:

$$K_{po} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{eq}(s) \quad , \quad (10.97.)$$

a uvrštenjem (10.96.) u (10.97.) dobije se:

$$K_{po} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s\left(\frac{s}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\right)} = \infty \quad (10.98.)$$

pa stoga pogreška ustaljenog stanja pomaka:

$$e_{po} = \frac{1}{1 + K_{po}} = 0 \quad (10.99.)$$

Iz toga proizlazi da je pogreška ustaljenog stanja pomaka jednaka nuli kada je $\alpha=0$.

Da bi se otkrila povezanost α s pogreškom ustaljenog stanja brzine, primijenimo jednadžbu (10.34.) pa ćemo dobiti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_v} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} = \\ &= \frac{1}{-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{1}{-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{2\alpha\zeta}{\omega_n} = \\ &= \frac{2\zeta}{\omega_n} (\alpha - 1) \end{aligned} \quad (10.100)$$

Iz jednadžbe (10.100.) vidimo da će za $\alpha=1$ konstanta pogreške brzine biti jednaka beskonačnosti, odnosno da će pogreška ustaljenog stanja brzine biti jednaka nuli.

Prijenosna funkcija s jednom nulom i dva pola može se izvesti na više načina, a ovdje ćemo pokazati dva prikladna načina sa servomehanizmima. U oba slučaja se radi o regulaciji kutnog pomaka servomotora.

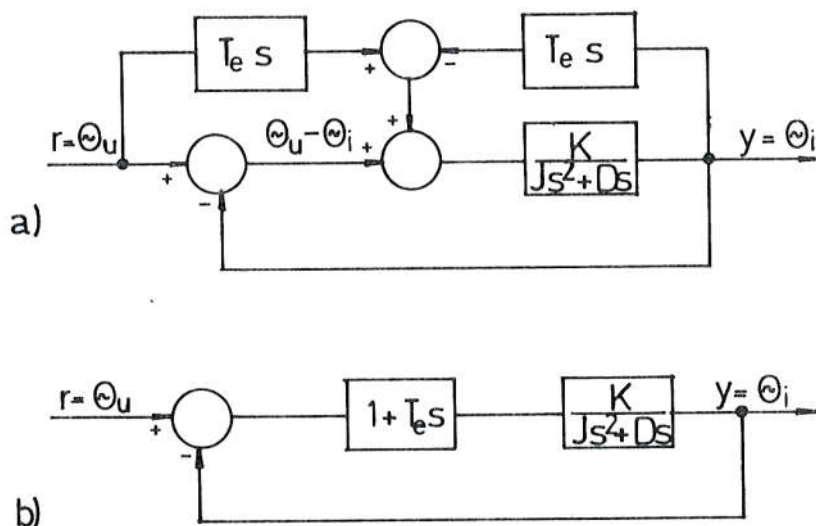
U prvom slučaju koji je prikazan na Sl.10.15. primijenjena su dva jednaka tahogeneratorsa. Jedan od njih je priključen na ulaznu osovinu, tako da derivira ulazni kutni pomak, a drugi je priključen na izlaznu osovinu tako da derivira izlazni kutni pomak.

Ako se zbroje negativna derivacija izlaza i pozitivna derivacija ulaza, dobije se:

$$\theta_u T_e s - \theta_i T_e s = T_e s (\theta_u - \theta_i)$$

kako je pokazano na Sl.10.17. Taj signal zbrojen sa signalom iza ulaznog komparatora daje:

$$T_e s (\theta_u - \theta_i) + (\theta_u - \theta_i) = (\theta_u - \theta_i) (1 + T_e s)$$



Sl.10.17. Izvedba prijenosne funkcije općenitog sustava drugog reda s pomoću dva jednaka tahogeneratora od kojih jedan derivira ulazni, a drugi izlazni kutni pomak

Na taj način se u osnovnoj grani dobije funkcija:

$$\frac{\Theta_i}{\Theta_u - \Theta_i} = \frac{K(1 + T_e s)}{Js^2 + Ds},$$

koja zatvorena s jediničnom povratnom vezom daje:

$$\frac{\Theta_i(s)}{\Theta_u(s)} = \frac{1 + T_e s}{1 + (T_e + \frac{D}{K})s + (\frac{J}{K})s^2} \quad (10.101.)$$

Usporedbom koeficijenata jednadžbi (10.94), (10.95) i (10.101) izlazi:

$$\frac{J}{K} = a_3 = \frac{1}{\omega_n^2}$$

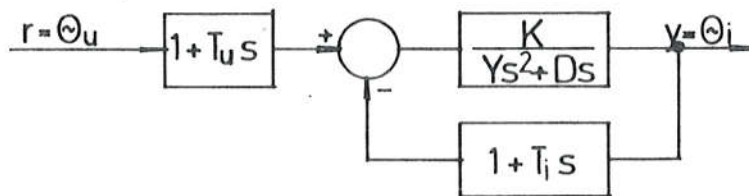
$$\frac{D}{K} + T_e = a_2 = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

(10.102.)

$$T_e = b_2 = \alpha \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$\alpha = \frac{b_2}{a_2} = \frac{T_e}{\frac{D}{K} + T_e}$$

Iz jednađbi (10.102.) proizlazi da su u ovom slučaju ostale samo dvije varijable za ugadjanje sustava i to T_e i K , pa da stoga s njima možemo postaviti samo dva neovisna parametra. Naime, ako K primijenimo za ugadjanje ω_n , a T_e za ugadjanje ζ , onda trećeg stupnja slobode za ugadjanje α više nema. Iz ovog slučaja izvlačimo zaključak da postojanje prijenosne funkcije s jednom nulom i dva pola predstavlja nužan, ali ne i dovoljan uvjet da se postignu tri stupnja slobode.



Sl.10.18. Izvedba prijenosne funkcije s jednom nulom i dva pola s pomoću dva različita tahogeneratora od kojih jedan derivira ulazni, a drugi izlazni kutni pomak

U drugom slučaju koji je prikazan na Sl.10.18. primijenjena su dva različita tahogeneratora od kojih i ovdje jedan derivira ulaz, a drugi izlaz, ali u drugačijem spoju. Prijenosna funkcija takvog spoja prema oznakama na Sl.10.18. glasi:

$$\frac{\Theta_i(s)}{\Theta_u(s)} = \frac{1 + T_u s}{1 + (\frac{D}{K} + T_i)s + (\frac{J}{K})^2} \quad (10.103.)$$

Usporedbom jednađbi (10.94.), (10.95.) i (10.103.) izlazi:

$$\frac{J}{K} = a_3 = \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$\frac{D}{K} = T_i = a_2 \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$T_u = b_2 = \alpha \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \right)$$

$$\alpha = \frac{b_2}{a_2} = \frac{T_u}{\frac{D}{K} + T_i}$$

(10.104.)

Kao što se vidi iz jednadžbi (10.104.), u ovom slučaju postoje tri stupnja slobode, i to su K , T_n i T_i , s pomoću kojih se mogu odrediti tri neovisna parametra: ζ , ω_n i α .

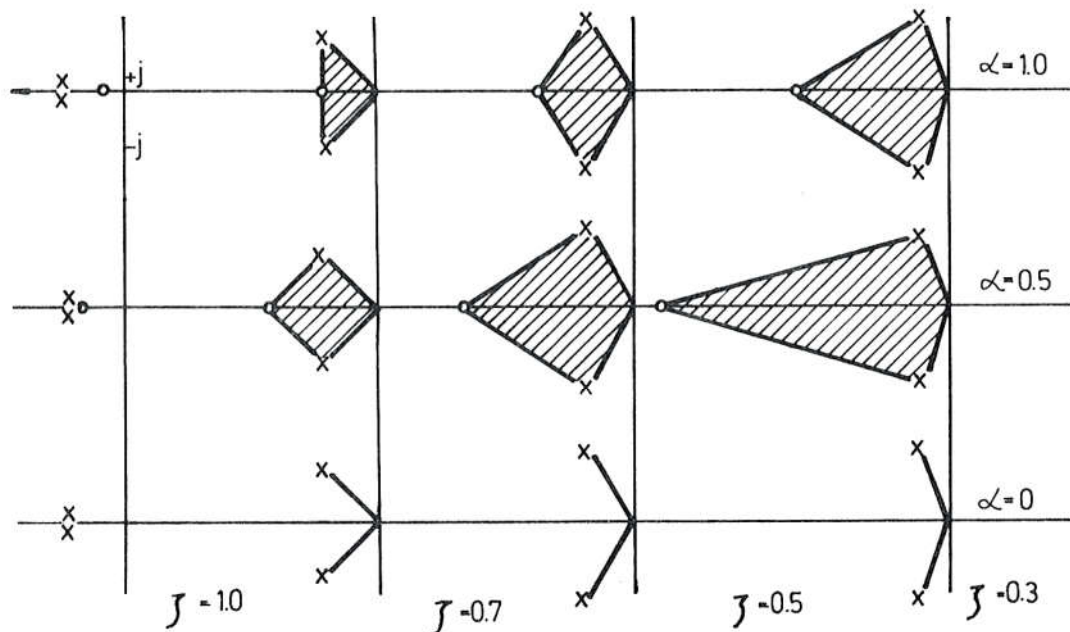
Za uvid u ponašanje sustava posebno je važan apsolutni i relativni položaj singularnih točaka u s ravnini. Prema jednadžbi (10.95.) nula prijenosne funkcije općenitog sustava drugog reda ima vrijednost:

$$z_1 = -\frac{\omega_n}{2\zeta\alpha}, \quad (10.105.)$$

a polovi su:

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad i$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (10.106.)$$



Sl.10.19. Smještaj singularnih točaka općenitog sustava drugog reda u ovisnosti o ζ i α

Na Sl.10.19. prikazan je smještaj nule i polova u ravnini za nekoliko vrijednosti ζ i α . Pokazalo se da relativni odnos

udaljenosti nule i polova od imaginarne osi može poslužiti kao dobar pokazatelj utjecaja nule na ponašanje sustava. Izražen s ζ i α taj odnos glasi:

$$\frac{z_1}{\sigma} = \frac{\omega_n / 2\zeta\alpha}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{2\zeta^2\alpha}, \quad (10.107.)$$

a izražen s a_2 i a_3 poprima vrijednost:

$$\frac{z_1}{\sigma} = \frac{2a_3}{a_2 b_2} \quad (10.108.)$$

Ako se npr. traži da nula bude pet puta udaljenija od imaginarne osi nego polovi, prema jednadžbi (10.107) treba biti zadovoljen uvjet:

$$5 = \frac{1}{2\zeta^2\alpha},$$

a prema jednadžbi (10.108.):

$$5 = \frac{2a_3}{a_2 b_2}$$

Još se bolji uvid u ponašanje općenitog sustava drugog reda može postići promatranjem njegovog odskočnog odziva uz mijenjanje parametara α i ζ . Relacija odskočnog odziva u donjem području glasi:

$$y(s) = \frac{1 + \alpha \frac{2\zeta}{\omega_n} s}{s(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2)}, \quad (10.109.)$$

a iz tablica nalazimo njegov transformat u gornjem području:

$$y(t) = 1 + \frac{A^{1/2}}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi), \quad (10.110.)$$

gdje je:

$$A = 1 - 2 b_2 \zeta \omega_n + b_2^2 \omega_n^2$$

i:

$$\phi = \arctg \frac{b_2 \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-b_2 \zeta \omega_n} - \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta},$$

što uz $b_2 = \alpha \frac{2\zeta}{\omega_n}$ izlazi:

$$A = 1 - 4\alpha\zeta^2 + 4\alpha^2\zeta^2$$

i:

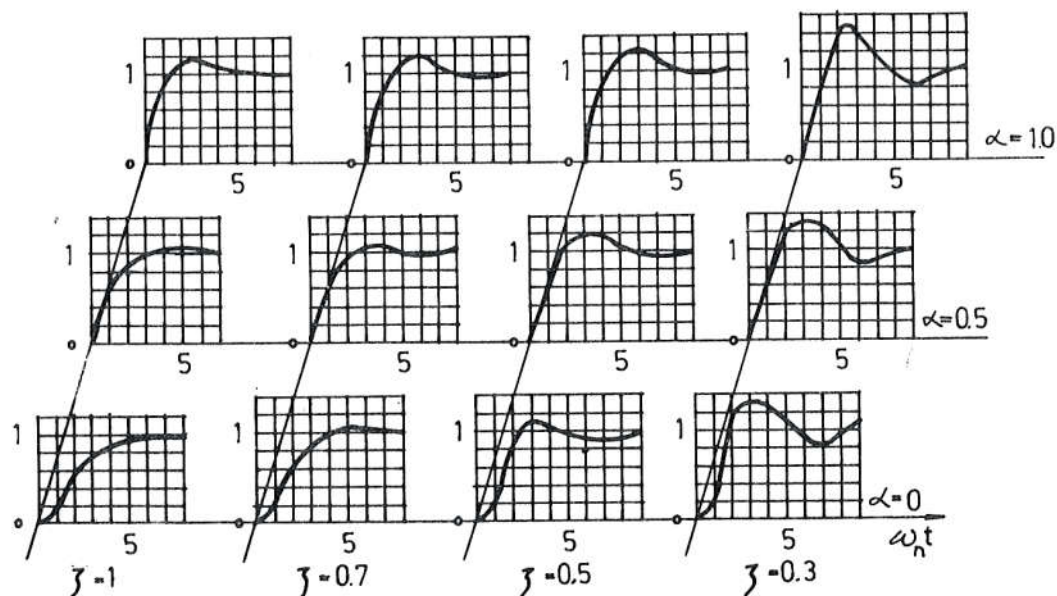
$$\phi = \arctg \frac{\alpha 2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}{1-\alpha 2\zeta^2} - \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$$

Mijenja li se α uz npr. $\omega_n=10$ i $\zeta=0,5$, dobije se odziv u funkciji parametra α . Tako npr. za $\alpha=0$ izlazi:

$$y(t) = 1 - 1,16 e^{-5,0 t} \cos (8,66 t - 30^\circ),$$

a za $\alpha=1$:

$$y(t) = 1 - 1,16 e^{-5,0 t} \cos (8,66 t + 30^\circ)$$



Sl.10.20. Odskočni odziv općenitog sustava drugog reda s normaliziranim vremenom

Na Sl.10.20. prikazani su odzivi na odskočnu pobudu za nekoliko vrijednosti ζ i α , a podudaraju se s razmještajem singularnih točaka na Sl.10.19. Sa slike vidimo da za $\alpha=0$ i $\zeta=1$ odskočni odziv nema nadvišenja, međutim za $\alpha > 0$ i $\zeta=1$ nadvišenje postoji. Promatrajući slike 10.19. i 10.20. dolazi se do zaključka da se dodavanjem nule osnovnom sustavu drugog reda povećava nadvišenje i smanjuje vrijeme nadvišenja. U usporedbi s relacijama osnovnog sustava drugog reda za postotno nadvišenje:

$$y(T_n) \% = 100 e^{-\frac{\zeta \Pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (10.113.)$$

i za vrijeme nadvišenja:

$$T_n = \frac{\Pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (10.114.)$$

proizlazi da se dodavanjem nule postiže jednak učinak kao da smo osnovnom sustavu povećali neprigušenu kružnu frekvenciju ω_n i smanjili stupanj prigušenja ζ .

Zanimljivo je nadalje pogledati kako će se promjena konstrukcijskog faktora α odraziti na ponašanje frekvencijskog odziva. Uvrštenjem $s=j\omega$ u prijenosnu funkciju (10.95.) dobije se prijenosna funkcija frekvencijskog odziva:

$$W(j\omega) = \frac{1 + j\alpha \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + j \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega} \quad (10.115.)$$

s modulom:

$$M(\omega) = \sqrt{\frac{1 + (\frac{2\alpha\zeta}{\omega_n})^2 \omega^2}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (\frac{2\zeta}{\omega_n})^2 \omega^2}} \quad (10.116.)$$

i argumentom:

$$\phi(\omega) = \arg W(j\omega) =$$

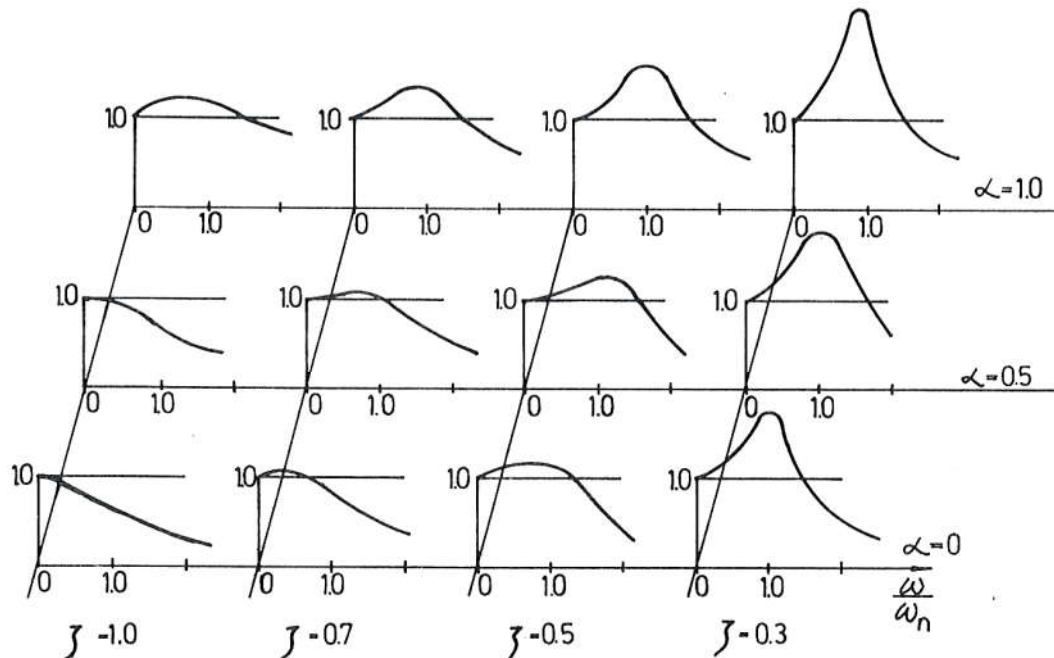
$$= \arctg \frac{2\alpha\zeta}{\omega_n} - \arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (10.117.)$$

Uz iste vrijednosti za α i ζ kao na Sl.10.19. i 10.20. nacrtani su na Sl.10.21. frekvencijski odzivi u ovisnosti o normaliziranoj frekvenciji ω/ω_n . Sa slike se vidi da se frekvencijsko nadvišenje smanjuje s povećanjem ζ i raste s povećanjem α . U usporedbi s relacijama osnovnog sustava drugog reda za nadvišenje:

$$G(j\omega_{max}) = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (10.118.)$$

i frekvenciju nadvišenja:

$$\omega_{max} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (10.119.)$$



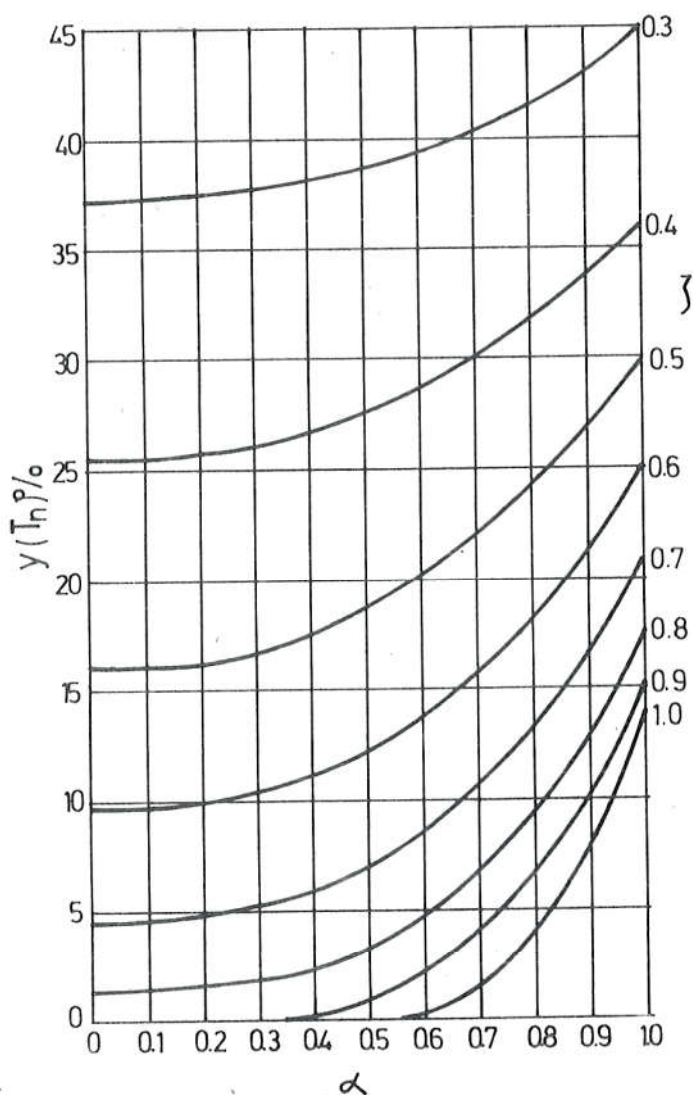
Sl.10.21. Frekvencijski odziv općenitog sustava drugog reda s normaliziranom frekvencijom

proizlazi da se dodavanjem nule može postići frekvencijsko nadvišenje i za $\zeta > 0,707$. Osim toga dodavanjem nule može se pove-

ćati frekvencija nadvišenja, za što je u osnovnom sustavu trebalo ili povećati neprigušenu kružnicu ili smanjiti stupanj prigušenja.

10.6.1. Grafički prikazi

U inženjerskog praksi grafički se prikazi obilno primjenjuju zbog svoje preglednosti, koja može znatno utjecati na djelotvornost rada. Pokazalo se da se u postupcima aproksimacije složenih sustava s općenitim sustavom drugog reda posebno korisno mogu primijeniti grafički prikazi nekih relevantnih parametara u ovisnosti o konstrukcijskom faktoru α , pa ćemo se stoga s nekima od njih ovdje upoznati.

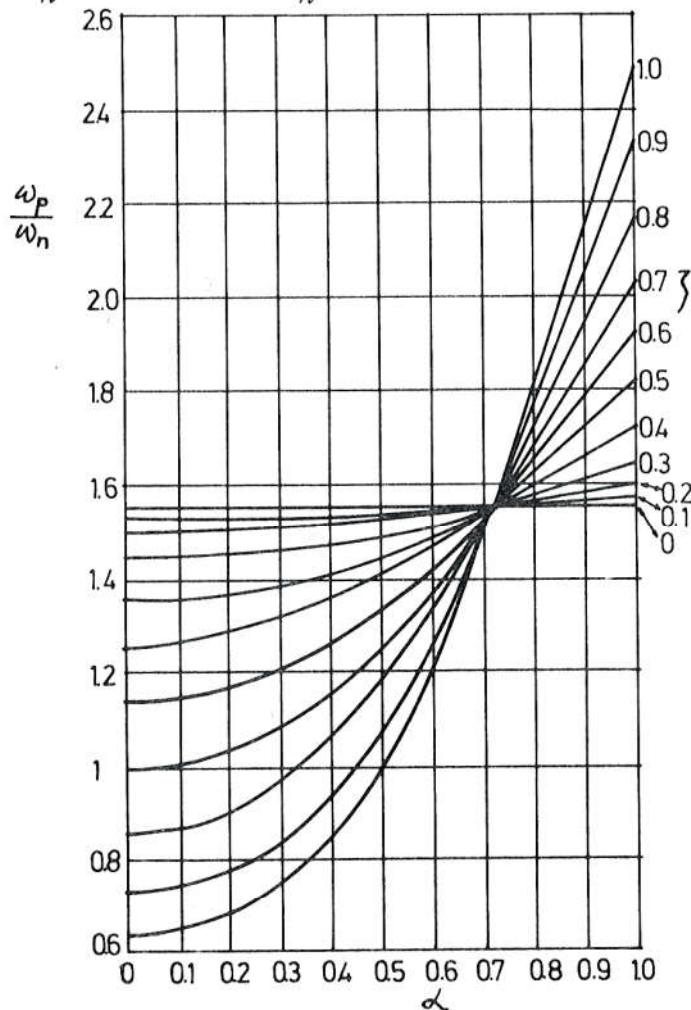


Sl.10.22. Postotno nadvišenje općenitog sustava drugog reda

Jedan od važnih parametara je vremensko nadvišenje, a za osnovni sustav drugog reda se izračunava s pomoću jednadžbe (10.113.). Kada sustav posjeduje nulu algebarski postupak postaje suviše složen pa je stoga preporučljivije koristiti grafički prikaz na Sl.10.22. gdje je već izračunano postotno nadvišenje u ovisnosti o α uz ζ kao parametar.

Širina frekventijskog pojasa ω_n se izračunava iz definicijske jednadžbe prema kojoj je to frekvencija na kojoj amplituda odziva poprima $1/\sqrt{2}$ svoje vrijednosti na nultoj frekvenciji, a glasi:

$$\sqrt{\frac{1 + 4\alpha^2 \zeta^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (10.120)$$



Sl.10.23. Normalizirana širina frekventijskog pojasa općenitog sustava drugog reda

Da bismo dobili ovisnost konstante pogreške ustaljenog stanja brzine o faktoru α , polazimo od relacije:

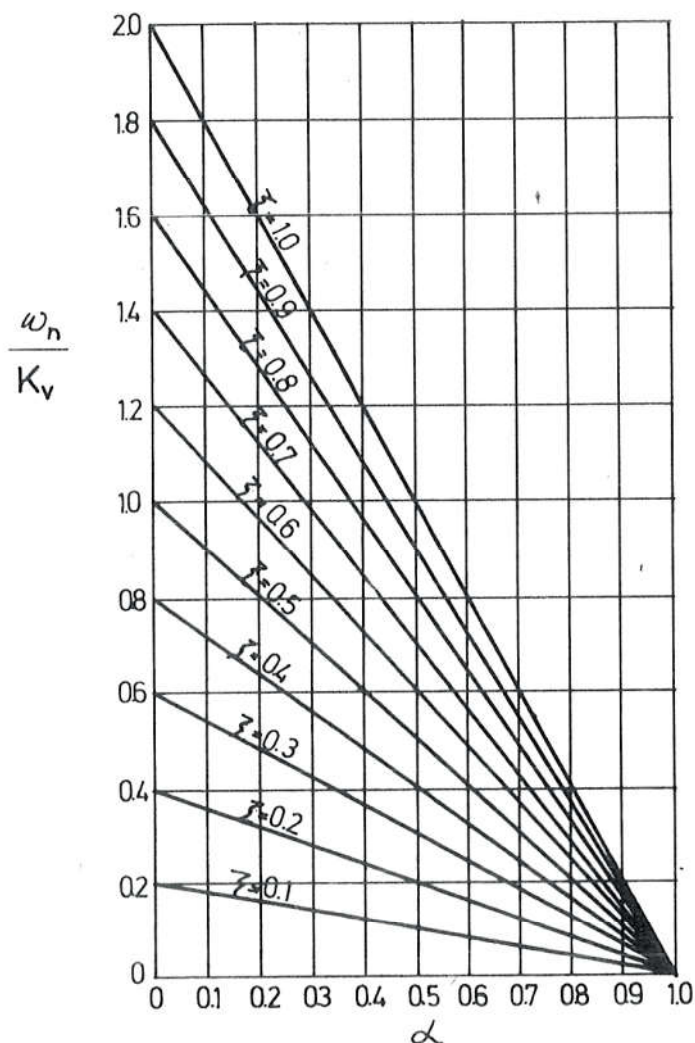
$$G_{eq}(s) = \frac{y(s)/r(s)}{1-(y(s)/r(s))} = \frac{1 + b_2 s}{(s_2 - b_2)s + a_3 s^2}, \quad (10.121.)$$

odakle, prema jednadžbi (10.23.) dobijemo:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 + b_2 s}{(a_2 - b_2)s + a_3 s^2} = \frac{1}{a_2 - b_2} \quad (10.122.)$$

Izrazi li se a_2 i b_2 sa ζ i ω_n jednadžba (10.122.) poprima vrijednost:

$$K_v = \frac{\omega_n}{2 \zeta (1 - \zeta)}, \quad (10.123.)$$



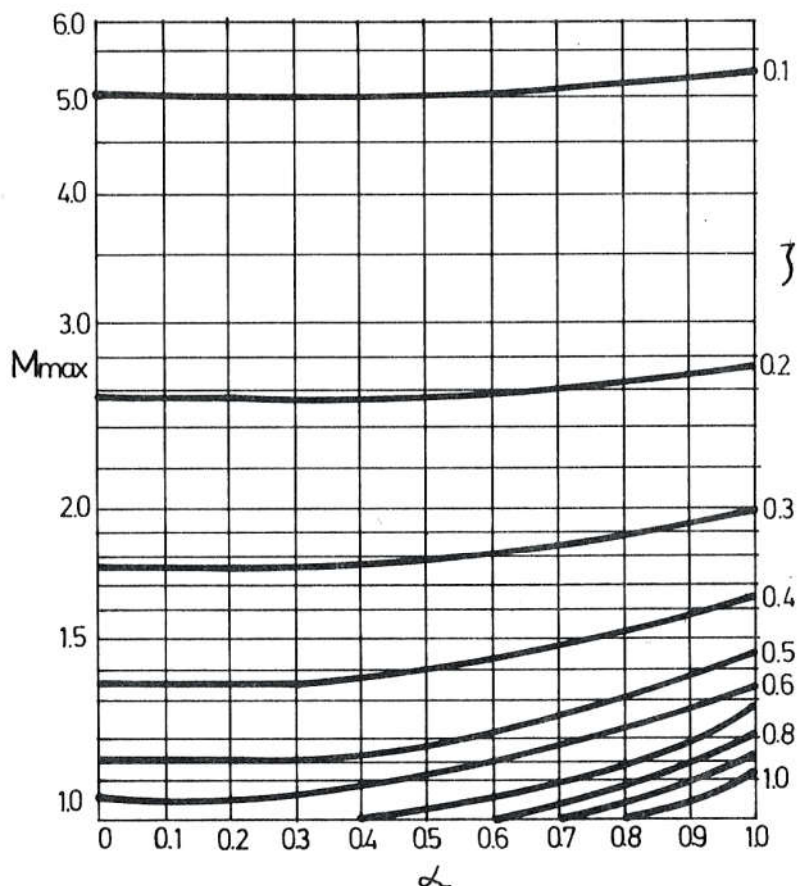
Sl.10.24. Normalizirana konstanta brzine općenitog sustava drugog reda

a odatle:

$$\frac{\omega_n}{K_v} = 2\zeta (1 - \alpha) \quad (10.124.)$$

Na temelju jednadžbe 10.124.) nacrtan je grafički prikaz na Sl.10.24.

Do frekvencijskog nadvišenja M_{max} dolazi se računanjem maksimuma jednadžbe (10.116.), a u grafičkom obliku u ovisnosti o faktoru α za neke diskretne vrijednosti ζ je prikazan na Sl.10.25.



Sl.10.25. Frekvencijsko nadvišenje općenitog sustava drugog reda

10.7. ZAKLJUČAK

Točnost je jedna od mjera valjanosti sustava, a mjeri se odstupanjem odziva od referentnog signala. To odstupanje, odnosno pogreška, u prijelaznom dijelu odziva naziva se dinamička pogreška i funkcija je vremena, a u ustaljenom dijelu odziva naziva se pogreška ustaljenog stanja i ima konstantan iznos. Vrlo korisni parametri za određivanje pogrešaka ustaljenog stanja su tzv. konstante pogrešaka ustaljenog stanja, a među njima se najviše ističe konstanta pogreške brzine.

Za određivanje frekvencijskog odziva iz Nyquistovog dijagrama vrlo se uspješno mogu primijeniti tzv. M i α kružnice, koje predstavljaju krivulje konstantnih modula i argumenata u $F(j\omega)$ ravni.

Nicholsonov dijagram je grafički prikaz s modulom prijenosne funkcije petlje na ordinati i faznom pričuvom na apscisi. Uspješno se primjenjuje za crtanje frekvencijskog odziva regulacijskog sustava iz Bodeovih dijagrama.

Budući da se sustavi višeg reda mogu nadomjestiti sustavima nižeg reda, poznavanje ponašanja nadomjesnih sustava i korelacija njihovih parametara iz različitih područja od osnovne je važnosti za uspješno provodjenje aproksimacije. Lako se može pokazati da se s povećanjem broja nevisno ugodivih parametara nadomjesnih sustava povećava njihova mogućnost aproksimacije sustava višeg reda. Tako će dodavanje nule sustavu drugog reda znatno povećati njegove aproksimacijske mogućnosti. Budući da algebarske relacije sustava s povećanjem singularnih točaka postaju znatno složenije, u inženjerskoj praksi se najčešće izbjegavaju i nadomještaju normaliziranim grafičkim odnosima među parametrima.

Poznavanje svojstava pojedinih parametara i njihovih međusobnih odnosa znatno doprinosi smanjenju vremena potrebnog za analizu i sintezu, a time i poboljšanju ekonomičnosti regulacijskih postupaka.

11. SINTEZA U PROSTORU STANJA

11.1. UVOD

S analizom je završen elementarni dio naukovanja o automatskoj regulaciji, koji se može usporediti sa savladavanjem zanatskog dijela umjetničke djelatnosti. Naime, kao što je poznavanje zanatskog umijeća nužan, ali ne i dovoljan uvjet za izvedbu dobrog umjetničkog djela, tako je i poznavanje analize nužan, ali ne i dovoljan uvjet za izvedbu određenog regulacijskog sustava. Da bi se takva izvedba mogla ostvariti, potrebno je osim postupaka analize poznavati i postupke sinteze. Usporedbu sa zanatstvom i umjetnošću umjesno je i ovdje primijeniti, jer kao što umjetnik na temelju svojih osobnih sklonosti može određenu poruku izraziti na različite načine, tako i automatičar na različite načine može ostvariti određeni dinamički sustav. Pri tome su metode analize nerazdvojno utkane u potku sinteze i čine s njom jedinstvenu harmoničku cjelinu.

Zadatak sinteze je da se uz zadani odziv i pobudu nadje takav sustav, koji će djelujući na zadanu pobudu dati zadani odziv. Općenito, traži se da odziv zadanog objekta zadovolji određene zahtjeve. Već prema tome o kom je odzivu riječ, podaci mogu biti zadani u vremenskom, frekvencijskom ili kompleksnom području, ali to može biti i niz zahtjeva koji se odnose na parametre različitih odziva.

Provedba sinteze se stoga u općem slučaju sastoji se od dva dijela. Problem prvog dijela je da se od zadanih podataka oblikuje željena prijenosna funkcija $y(s)/r(s)$, a drugog da se nadje konfiguracija sustava za realizaciju te prijenosne funkcije.

I u prvom i u drugom dijelu se susrećemo s višeznačnim rješenjima. Naime, zadani podaci se mogu zadovoljiti različitim prijenosnim funkcijama, a isto tako se i pojedine prijenosne funkcije mogu realizirati različitim konfiguracijama. Odluka s kojom funkcijom zadovoljiti zadane podatke i kojom konfiguracijom realizirati tu funkciju, ovisi o utjecajnim okolnostima. Što je procjena njihovog utjecaja bolje učinjena, postoji veća vjerojatnost da se donesu i bolje odluke.

Općenito uzevši, objekti koje treba regulirati mogu se podijeliti na dvije vrste. U prvu vrstu spadaju sustavi s dostupnim varijablama stanja, a u drugu sustavi kod kojih je dostupna samo izlazna varijabla. Na temelju takve podjele i ovdje će biti posebno obradjena sinteza s objektima kad su dostupne varijable stanja, a posebno s objektima kad nisu dostupne varijable stanja.

11.2. NAJJEDNOSTAVNIJI SLUČAJ

Prije prijelaza na postupak sinteze prisjetimo se nekih svojstava linearne regulacije s varijablama stanja. U vezi s $H_{eq}(s)$ ustanovljeno je:

1. prikladnim izborom koeficijenata povratne veze k_i , nule funkcije $H_{eq}(s)$ mogu biti smještene bilo gdje u s ravnini;
2. funkcija $H_{eq}(s)$ nije funkcija pojačanja K ;
3. polovi funkcije $H_{eq}(s)$ su nule objekta $G_p(s)$.

Važno je imati na umu da za ispunjenje treće tvrdnje, regulacijski sustav treba biti opisan jednažbama (Ab) i (c). Čak i u slučaju da se samo signal s izlaza koristi za negativnu povratnu vezu, tako da $H_{eq}(s)$ poprima vrijednost k_1 , vrijedi općeniti izraz:

$$H_{eq}(s) = \frac{\underline{k}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{\phi}(s) \underline{b}} \quad (11.1.)$$

Budući da se polovi i nule funkcije $H_{eq}(s)$ u ovom specifičnom slučaju podudaraju, izraz na desnoj strani jednažbe (11.1.)

je zaista k_1 , a tvrdnja da se polovi $H_{eq}(s)$ podudaraju s nulama $G_p(s)$ ostaje na snazi. Tako funkcija petlje $KG_p(s) H_{eq}(s)$ ima $n-1$ nulu, i n polova. Nule funkcije petlje, od kojih neke mogu biti u beskonačnosti, su nule funkcije $H_{eq}(s)$, a polovi funkcije petlje su polovi funkcije $G_p(s)$.

Prisjetimo se još i svojstava funkcije regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$:

1. brojnik funkcije $y(s)/r(s)$ je ujedno i brojnik funkcije $KG_p(s)$, a negativna povratna veza varijabli stanja na nj uopće ne utječe;
2. prikladnim izborom koeficijenta povratne veze k_i , polovi funkcije $y(s)/r(s)$ mogu biti smješteni bilo gdje u s ravni;
3. ako treba zadovoljiti još jedan pomoćni uvjet u vezi s koeficijentima k_i , mogućnost smještaja n polova funkcije $y(s)/r(s)$ ostaje i dalje na snazi sve dok se može ugađjati pojačanje u osnovnoj grani.

Pomoćni uvjet, naveden u trećem svojstvu, najčešće proizlazi iz zahtjeva da sustav treba imati pogrešku ustaljenog stanja na odskočni odziv jednaku nuli.

Iz navedenih svojstava proizlaze samo dva ograničenja funkcije $y(s)/r(s)$ i to su:

1. nule funkcije $y(s)/r(s)$ moraju biti ujedno i nule objekta $G_p(s)$;
2. višak broja polova nad brojem nula funkcije $y(s)/r(s)$ mora biti jednak kao i kod funkcije $G_p(s)$.

Prvo ograničenje se dađe potpuno eliminirati, a drugo samo u smislu povećanja, ali nikako smanjenja viška broja polova nad brojem nula.

Za uvođenje u problematiku sinteze obradit ćemo najprije slučaj kad ni $G_p(s)$ ni $y(s)/r(s)$ nemaju nula. Takav se slučaj obično naziva *najjednostavniji slučaj*.

Iz dosadašnjih izlaganja proizlazi da se za najjednostavniji slučaj uvijek mogu naći takve vrijednosti k_i i K s kojima se može

postići željena funkcija $y(s)/r(s)$. Pokazat ćemo to na jednom konkretnom primjeru, koji će nam ujedno poslužiti da izvučemo općenite zaključke.

Uzmimo da je zadan objekt s jednažbama:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (11.2.)$$

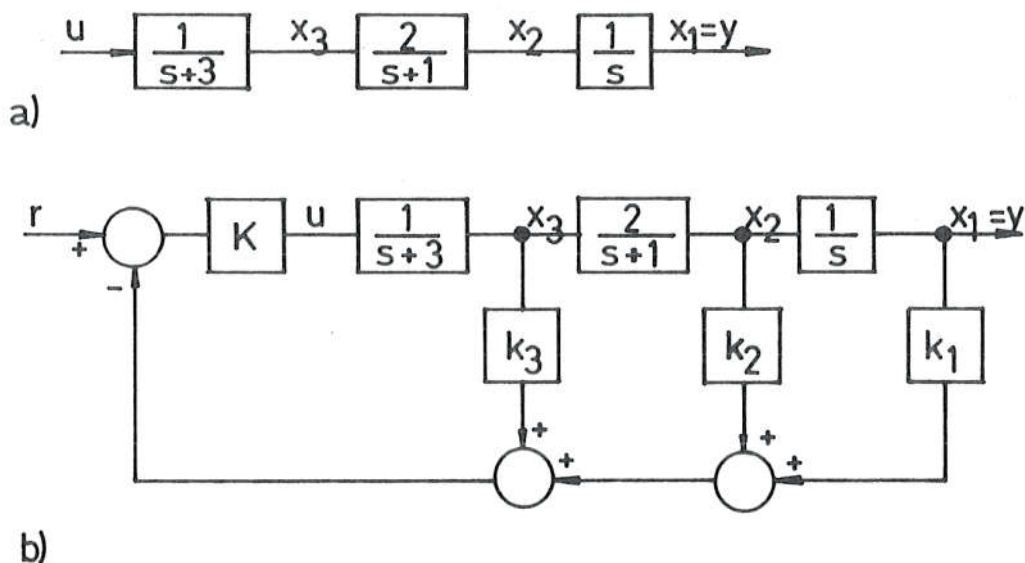
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x},$$

kojeg je blokovski prikaz predložen na Sl.11.1.a., a regulacijski sustav s varijablama stanja na Sl.11.1.b.

Željena prijenosna funkcija glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{20}{[(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2](s+5)} = \frac{20}{s^3 + 7s^2 + 14s + 20} \quad (11.3.)$$

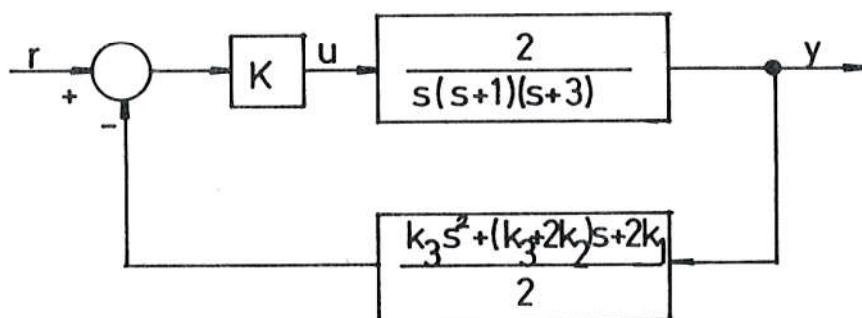
Treba obratiti pažnju da je funkcija $y(s)/r(s)$ tako zadana da joj je pogreška ustaljenog stanja pomaka jednaka nuli. Treba naći takve vrijednosti k_i i K da prijenosna funkcija regulacijskog sustava sa Sl.11.1.b. bude jednaka željenoj prijenosnoj funkciji.



Sl.11.1. Najjednostavniji slučaj sinteze s varijablama stanja,
a) objekt, b) regulacijski sustav

Postupak za izračunavanje vrijednosti k_i i K je neposredan, a sastoji se u tome da se izjednače zadana i željena prijenosna funkcija i izračunaju nepoznanice.

Da bismo našli prijenosnu funkciju regulacijskog sustava sa Sl.11.1.b. prijeći ćemo najprije na oblik $H_{eq}(s)$ kao što je pokazano na Sl.11.2.



Sl.11.2. Sustav sa Sl.11.1b preinačen na oblik $H_{eq}(s)$

Prijenosna funkcija regulacijskog sustava nakon prijelaza na $H_{eq}(s)$ glasi:

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s)H_{eq}(s)} = \\ &= \frac{2K}{s^3 + (4 + Kk_3)s^2 + (3 + Kk_3 + 2Kk_2)s + 2Kk_1} \end{aligned} \quad (11.4.)$$

Izjednačenjem željene prijenosne funkcije (11.3.) i prijenosne funkcije regulacijskog sustava zadane konfiguracije (11.4.), dobije se:

$$\frac{20}{s^3 + 7s^2 + 14s + 20} = \frac{2K}{s^3 + (4 + Kk_3)s^2 + (3 + Kk_3 + 2Kk_2)s + 2Kk_1} \quad (11.5.)$$

a odatle izjednačenjem odgovarajućim koeficijenata:

$$2K = 20$$

$$4 + Kk_2 = 7$$

$$3 + Kk_3 + 2Kk_2 = 14$$

$$2Kk_1 = 20$$

(11.6.)

Značajno je za skup gornjih jednačbi da prva jednačba sadrži samo K , i to u linearnom obliku, a da su ostale nelinearne u odnosu na k_i i na K , ali su linearne u odnosu na umnožak $k_i \cdot K$. Iz tog skupa linearnih simultanih algebarskih jednačbi dobije se:

$$\underline{k} = st(1,0; 0,4; 0,3) \quad i$$

(11.7.)

$$K = 10$$

Iako je time u osnovi problem riješen vrijedno je s pomoću GMK ispitati ponašanje sustava uz promjenu pojačanja K . U tom cilju treba najprije izračunati $H_{eq}(s)$ da bi se mogla postaviti funkcija petlje $KG_p(s) H_{eq}(s)$. Uvrštenjem k_i u $H_{eq}(s)$ sa Sl.11.2. izlazi:

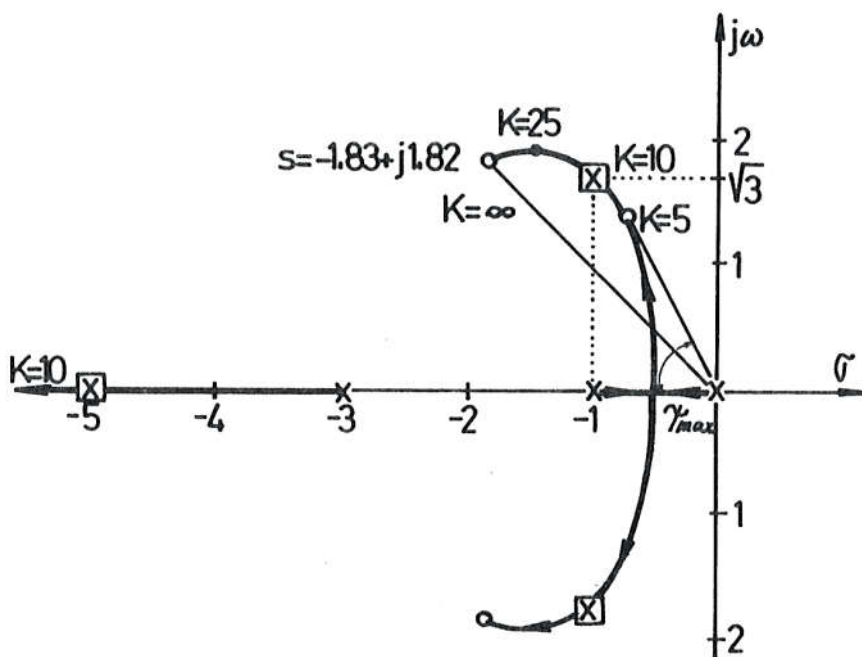
$$H_{eq}(s) = \frac{0,3s^2 + 1,1s + 2}{2} = \frac{0,3[(s+1,83)^2 + (1,82)^2]}{2} \quad (11.8.)$$

pa stoga funkcija petlje sustava sa Sl.11.2. glasi:

$$KG_p(s)H_{eq}(s) = \frac{0,3K[(s+1,83)^2 + (1,82)^2]}{s(s+1)(s+3)} \quad (11.9.)$$

a njeno GMK je prikazano na Sl.11.3.

GMK sa Sl.11.3. daje uvid u ponašanje sustava u ovisnosti o promjeni pojačanja K . Prvo po redu i po važnosti što treba uočiti jest da sustav ostaje stabilan za sve vrijednosti pojačanja K . Drugo što je vrijedno primijetiti, jest da se stupanj prigušenja ζ za pojačanje $K=10$ neznatno povećava iznad svoje minimalne vrijednosti za $K=5$. Daljnjim povećanjem pojačanja K , ζ se i dalje povećava, ali što je K veće povećanje ζ po jedinici pojačanja postaje sve manje, tako da za $K=\infty$ poprima vrijednosti $\zeta=0,71$.



Sl.11.3. GMK sustava kojeg je jednačba petlje zadana jednačbom (11.9.)

S povećanjem K treći korijen se udaljava od ishodišta, što rezultira povećanjem brzine prijelaznog odziva. Iz izvršene analize proizlazi da se sustav izvrsno ponaša, kako u pogledu stabilnosti, tako i u pogledu osjetljivosti.

Obradba koja je u ovom slučaju obavljena blokovskom algebrinom i prijenosnom funkcijom može se obaviti i matričnom algebrinom. Izbor će ovisiti o složenosti sustava. Za jednostavne slučajeve prikladnije je raditi s prijenosnom funkcijom, a što je veći međusobni utjecaj varijabli stanja, dobre strane matrične algebre sve više dolaze do izražaja.

Zbog prikladnosti oblika $H_{eq}(s)$ u provjeri stabilnosti i osjetljivosti, preporučljivo je izvršiti preinaku na ovaj oblik ne samo u slučajevima kad se radi s prijenosnom funkcijom, već i u slučajevima kad se radi s varijablama stanja.

Na temelju obavljene sinteze najjednostavnijeg slučaja, u kojem ni $G_p(s)$ ni $y(s)/r(s)$ nemaju nula, može se za taj slučaj postaviti slijedeći općeniti redoslijed postupka:

1. opisati objekt s fizičkim varijablama stanja u matričnom obliku ili u obliku blokovskog dijagrama;

2. za taj objekt postaviti regulacijski sustav s varijablama stanja;
3. na temelju zadanih podataka postaviti željenu prijenosnu funkciju $y(s)/r(s)$;
4. za regulacijski sustav sa stvarnim objektom i standardnom konfiguracijom varijabli stanja postaviti prijenosnu funkciju $y(s)/r(s)$, u kojoj su k_i i K nepoznanice;
5. izjednačiti željenu prijenosnu funkciju pod 3 i funkciju regulacijskog sustava pod 4, pa zatim naći vrijednosti k_i i K .

Da bi se provjerila stabilnost i osjetljivost dobijenog sustava, potrebno je nakon obavljene sinteze učiniti još slijedeće:

1. s pomoću poznatih koeficijenata k_i postaviti prijenosnu funkciju $H_{eq}(s)$;
2. faktorizirati brojnik $H_{eq}(s)$ i postaviti funkciju petlje $KG_p(s) H_{eq}(s)$;
3. konstruirati GMK i provjeriti ga s već poznatim polovima funkcije regulacijskog sustava;
4. analizom GMK ustanoviti ponašanje sustava u pogledu stabilnosti i osjetljivosti.

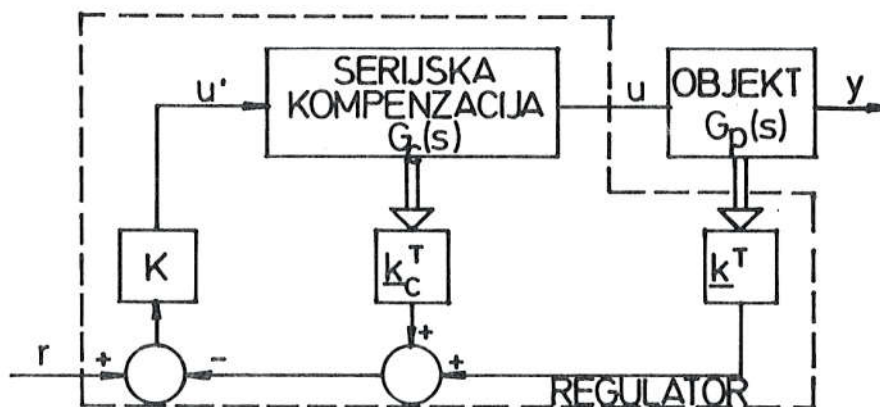
11.3. OPĆENITI SLUČAJ

U inženjerskoj praksi često se susrećemo s najjednostavnijim slučajem, tj. sa slučajem kad ni $G_p(s)$ ni $y(s)/r(s)$ nemaju nula, ali nisu mnogo rjedji ni slučajevi kad $G_p(s)$ i $y(s)/r(s)$ imaju nula. Tada govorimo o *općenitom slučaju sinteze*.

U općenitom slučaju sinteze objekt $G_p(s)$ i željena prijenosna funkcija regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$ imaju nule, ali se ni jedna nula objekta ne mora pojaviti i kao nula željene funkcije regulacijskog sustava. Budući da varijable stanja preko negativne povratne veze ne utječu na nule objekta i da negativna povratna veza s varijablama stanja ne generira ni jednu novu nulu, za generiranje takve prijenosne funkcije treba primijeniti općenitiji pristup nego što je to učinjeno u sintezi najjednostavnijem

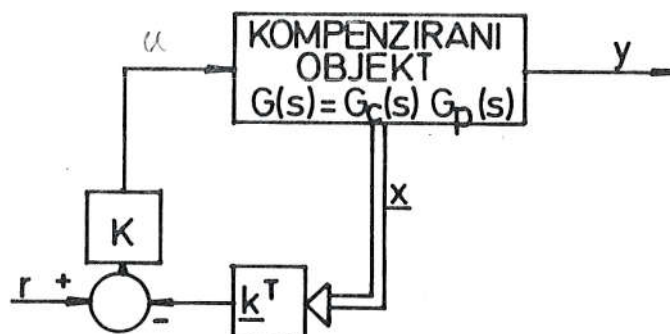
jeg slučaja.

Na Sl.11.4. prikazan je princip općenitog pristupa. Sastoji se u tome što je objektu u seriju dodan kompenzator $G_c(s)$, kojeg se varijable stanja koriste u negativnoj povratnoj vezi na isti način kao i varijable stanja objekta. U nastavku ćemo vidjeti da se s takvom konfiguracijom uspješno može riješiti problem sinteze općenitog slučaja.



Sl.11.4. Općeniti slučaj sinteze s varijablama stanja

Da bi se obradba sinteze općenitog slučaja što više pojednostavnila, preporučljivo je serijski kompenzator i objekt tretirati kao jednu cjelinu, koja se naziva *kompenzirani objekt*. U tom slučaju se red bloka u osnovnoj grani povećava za red serijskog kompenzatora, a signal u se pomiče na ulaz kompenziranog objekta. S tim izmjenama struktura općenitog slučaja prikazana je na Sl.11.5.



Sl.11.5. Općeniti slučaj s kompenziranim objektom

Osnovna ideja kojom se rješava sinteza općenitog slučaja s varijablama stanja, nakon ovih razmatranja postaje sve prepoznatljivija. Naime, budući da objekt nema svojstva potrebna za generiranje željene prijenosne funkcije, potrebno mu ih je najprije dodati. Nakon što je to učinjeno, postupak sinteze je vrlo sličan postupku najjednostavnijeg slučaja.

Jedini novi problem je izbor kompenzatora koji ima svojstva potrebna za generiranje željene prijenosne funkcije. Taj izbor karakteriziraju četiri različita zahtjeva:

1. eliminiranje nula,
2. povećanje polno-nultog viška,
3. pomicanje nula i
4. dodavanje nula.

a svaki ćemo posebno obraditi.

11.3.1. Eliminiranje nula

Ovdje se susrećemo s problemom *eliminiranja nula* koje ima objekt $G_p(s)$, a ne nalaze se u željenoj prijenosnoj funkciji regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$. To je redovit slučaj kad objekt ima nula, a željena prijenosna funkcija ih nema. A budući da je svojstvo negativne povratne veze od varijabli stanja da se sve nule objekta $G_p(s)$ pojavljuju u funkciji $y(s)/r(s)$, potrebno je potražiti način na koji eliminirati nepoželjne nule iz funkcije $y(s)/r(s)$.

Taj način je u stvari vrlo jednostavan. Treba samo u prijenosnu funkciju $y(s)/r(s)$ smjestiti polove na mjesto nula koje treba eliminirati. Pri tome treba voditi računa da se na taj način ne mogu eliminirati nule koje se nalaze na desnoj strani s ravnine i da je broj polova funkcije $y(s)/r(s)$ koji se proizvoljno mogu smjestiti u s ravninu ograničen, a iznosi $n - n_k$, gdje je n broj polova funkcije $G_p(s)$, a n_k broj nula koje treba eliminirati. Ovo posljednje ograničenje ćemo moći eliminirati kad savladamo postupak povećanja viška polova nad nulama.

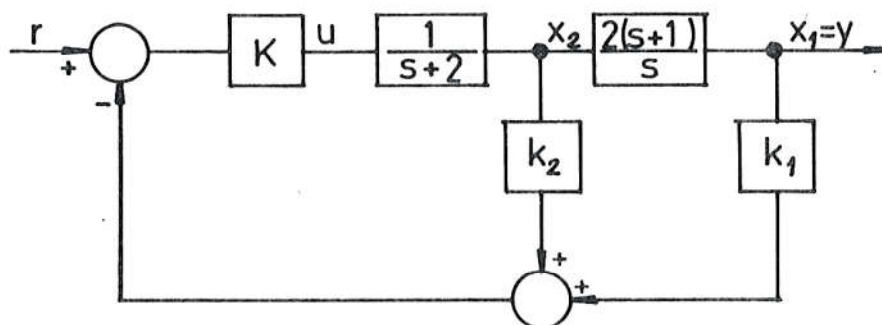
Ilustrirajmo eliminiranje nula na jednom karakterističnom primjeru. Zadan je objekt:

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2(s+1)}{s(s+2)} \quad (11.10.)$$

i željena prijenosna funkcija:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{6}{s+6} \quad (11.11.)$$

a za njenu realizaciju odabrana je standardna konfiguracija povratne veze s varijablama stanja prikazana na Sl.11.6.



Sl.11.6. Primjer za eliminaciju nula

Iz zadanih podataka proizlazi da, treba eliminirati nulu $s+1$. To se može učiniti smještajem pola $s+1$ u funkciju regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$. U tom bi se slučaju povećao višak polova nad nulama funkcije $y(s)/r(s)$, koji u funkciji objekta iznosi 1, pa stoga i u željenoj prijenosnoj funkciji ne može biti veći. Problem se ipak može riješiti na taj način da se željenoj prijenosnoj funkciji doda i jedna nula na istom mjestu. Tako dopunjena željena prijenosna funkcija glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{6(s+1)}{(s+1)(s+6)} = \frac{6(s+1)}{s^2+7s+6} \quad (11.12.)$$

Na taj način je ispunjen zahtjev za eliminiranje nule $s+1$, a nije povećan višak polova nad nulama, zadan prijenosnom funkcijom objekta.

Iz odabrane strukture na Sl.11.6. vidimo da će prijenosna funkcija

regulacijskog sustava biti drugog reda i nulte vrsti, a budući da je takva i željena prijenosna funkcija, zaključujemo da je odabrana struktura dovoljna i da još samo treba izračunati koeficijent k_i i pojačanje K . U tom cilju najprije postavljamo prijenosnu funkciju odabrane strukture sa Sl.11.6., koja glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2 + (2+Kk_2+2Kk_1)s + 2Kk_1} \quad (11.13.)$$

a potom izjednačenjem odgovarajućih koeficijenata jednadžbe (11.12.) i (11.13.) dobije se sustav od tri simultane algebarske jednadžbe:

$$2K = 6$$

$$2 + Kk_2 + 2Kk_1 = 7 \quad i \quad (11.14.)$$

$$2Kk_1 = 6$$

Vrijedno je zapaziti da su i ove jednadžbe linearne u odnosu na K , Kk_1 i Kk_2 . Njihovim rješenjem dobije se:

$$\underline{k} = st(1, -\frac{1}{3}) \quad (11.15.)$$

$$K = 3$$

Iz zadane konfiguracije povratne veze sa Sl.11.6. izlazi da je:

$$H_{eq}(s) = \frac{2k_1(s+1)+k_2s}{2(s+1)} \quad , \quad (11.16.)$$

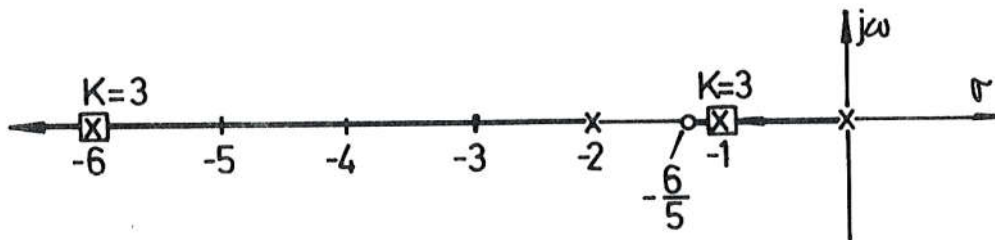
a uvrštenjem vrijednosti za k_i dobije se $H_{eq}(s)$ u numeričkom obliku, i iznosi:

$$H_{eq}(s) = \frac{5}{6} \frac{s + \frac{6}{5}}{s+1} \quad (11.17.)$$

Funkcija petlje stoga glasi:

$$KG_p(s)H_{eq}(s) = \frac{5K(s + \frac{6}{5})}{3s(s+2)} \quad (11.18.)$$

a GMK karakteristične jednačbe $1 + KG_p(s)H_{eq}(s)$ prikazano je na Sl.11.7.



Sl.11.7. GMK sustava kojeg je funkcija petlje određena jednačbom (11.18.)

11.3.2. Povećanje viška polova

Na temelju zaključka da višak polova nad nulama u funkciji $y(s)/r(s)$ ne može biti veći od tog viška u funkciji objekta $G_p(s)$, u prethodnom zadatku gdje se tražilo eliminiranje jedne nule, nismo mogli postići sustav drugog reda u funkciji regulacijskog sustava, premda je sustav objekta bio drugog reda. Naime, jedan raspoloživi slobodni pol u funkciji $y(s)/r(s)$ prema $n - n_k = 1$, morao je biti upotrijebljen za eliminiranje nule, stoga da bi funkcija $y(s)/r(s)$ mogla postati drugog reda, trebalo bi povećati višak polova nad nulama funkcije $y(s)/r(s)$ u odnosu na taj višak u funkciji $G_p(s)$.

To se postiže uvjetnim povećanjem polova nad nulama u funkciji kompenziranog objekta, tj. dodavanjem kompenzatora u seriju sa stvarnim objektom. Pretpostavimo da se traži da višak polova nad nulama funkcije $y(s)/r(s)$ bude za 1 veći od tog viška u funkciji $G_p(s)$. U tom slučaju funkciji objekta treba u seriju dodati funkciju koje višak polova nad nulama iznosi toliko koliko se povećanje traži. Ako je traženi višak 1, najjednostavnija funkcija s kojom se to može postići glasi:

$$G_c(s) = \frac{1}{s + \lambda} \quad , \quad (11.19.)$$

a funkcija kompenziranog objekta:

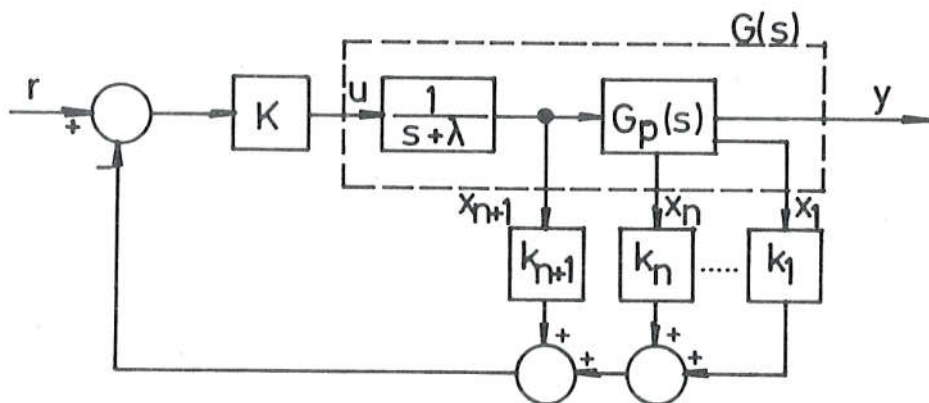
$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{1}{s + \lambda} G_p(s) \quad (11.20.)$$

Na taj način je višak polova nad nulama kompenziranog objekta povećan za 1, a dosljedno tome za 1 je povećan taj višak i u funkciji $y(s)/r(s)$.

Blokovski prikaz općenitog sustava s varijablama stanja kojem treba za 1 povećati višak polova nad nulama nacrtan je na Sl.11.8. Varijabla stanja koju unosi kompenzator označena je sa x_{n+1} , a pripadni koeficijent povratne veze sa k_{n+1} . Kompenzirani objekt je sada reda $n+1$, pa stoga vektori $\underline{x}$ i $\underline{k}$ glase:

$$\underline{x} = st(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \quad (11.21.)$$

$$\underline{k} = st(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$$



Sl.11.8. Struktura regulacijskog sustava kojem se višak polova nad nulama povećava za 1.

Za svaki pol kompenzatora $G_c(s)$ uvode se po dvije nepoznanice u problem sinteze. U ovom slučaju su to položaj dodatnog pola λ i vrijednost koeficijenta k_{n+1} . Budući da na položaj novog pola funkcije $y(s)/r(s)$ djeluje k_{n+1} i λ , proizlazi da jednu od te dvije nepoznanice možemo proizvoljno odabrati, a drugu zatim izračunati.

S matematičkog gledišta taj je zaključak korektan, ali nije i s inženjerskog. Naime, kadgod se u inženjerskoj praksi pojavi višak stupnjeva slobode u odnosu na postavljeni zadatak, to treba iskoristiti za poboljšanje onih svojstava sustava koja su u najbližoj vezi s postavljenim zadatkom. U automatskoj regulaciji to su najčešće stabilnost i točnost. Postupak za iskorištenje viška stupnjeva slobode razlikuje se od slučaja do slučaja, a mi ćemo ovdje obraditi jedan od češćih slučajeva.

Zadan je objekt:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad (11.22.)$$

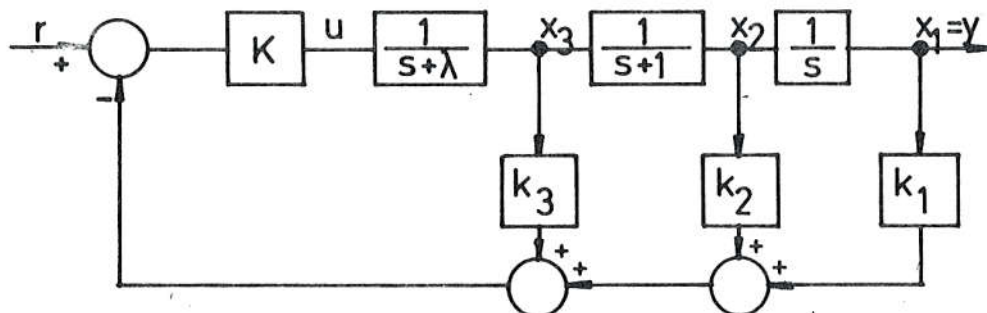
te željena prijenosna funkcija:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{8}{[(s+1)^2 + 1^2](s+4)} = \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 10s + 8} \quad (11.23.)$$

a odabrana je struktura regulacijskog sustava na Sl.11.9. Usporedbom viška polova nad nulama jednadžbi (11.22.) i (11.23.), vidi se da je taj višak u funkciji $y(s)/r(s)$ za 1 veći nego u funkciji $G_p(s)$. Zbog toga je u regulacijskog sustavu na Sl.11.9. u seriju s objektom dodan kompenzator:

$$G_c(s) = \frac{1}{s + \lambda} \quad (11.24.)$$

tako da se višak polova nad nulama u funkciji kompenziranog objekta $G(s)$ poveća za 1.



Sl.11.9. Primjer za povećanje viška polova nad nulama

Time je zadovoljen osnovni zahtjev da višak polova nad nulama funkcija $G(s)$ i $y(s)/r(s)$ bude izjednačen, i sada se može prići izračunavanju k_1 , K i λ tako da funkcija regulacijskog sustava odabrane strukture na Sl.11.9. postane jednaka željenoj prijenosnoj funkciji (11.23.). Kako je već prije spomenuto, moglo bi se proizvoljno odrediti λ , pa bi se tako problem sveo na već obradjeni slučaj u prošlom primjeru. Rekli smo, međjutim, da to ne bi bilo inženjerski korektno, pa ćemo stoga samo pretpostaviti da je λ poznat, ali ćemo ga i dalje označavati općim brojem. Iz blokovskog prikaza sa Sl.11.9. postavljamo najprije H_{eq} , koji glasi:

$$H_{eq}(s) = k_1 + (k_2 + k_3)s + k_3s^2, \quad (11.25.)$$

a prijenosna funkcija regulacijskog sustava potom izlazi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K}{s^3 + (1 + \lambda + Kk_3)s^2 + (\lambda + Kk_2 + Kk_3)s + Kk_1} \quad (11.26.)$$

Izjednačenjem željene prijenosne funkcije (11.23.) i prijenosne funkcije zadane strukture (11.26.) dobije se sustav jednadžbi:

$$K = 8$$

$$1 + \lambda + Kk_3 = 6$$

$$\lambda + Kk_2 + Kk_3 = 10 \quad (11.27.)$$

$$Kk_1 = 8$$

Budući da se u jednadžbama (11.27.) član $\lambda + Kk_3$ pojavljuje svuda kao cjelina, znači da K , k_1 i k_2 ne ovise o λ . Rješenjem jednadžbi (11.27.) izlazi:

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 5/8$$

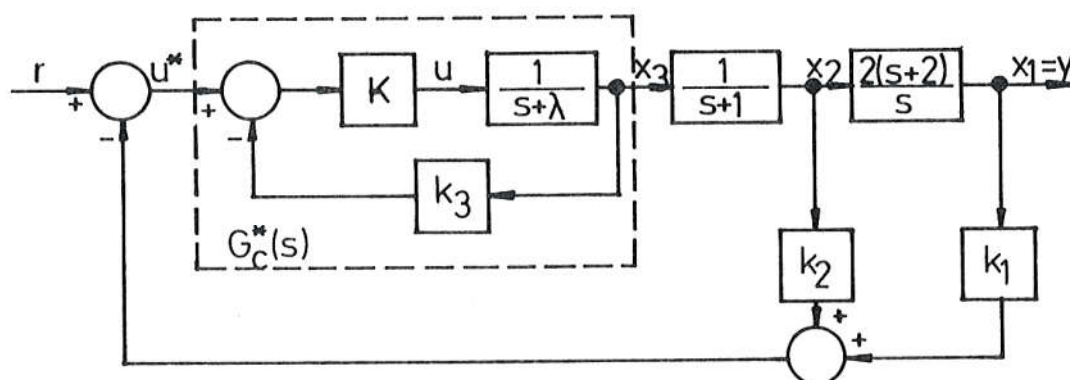
$$k_3 = (5 - \lambda)/8 \quad (11.28.)$$

$$K = 8$$

Činjenica da k_1 , k_2 i K ne ovise o λ ni o k_3 vrlo je važna, jer

to znači da se bilo λ bilo k_3 mogu proizvoljno odabrati a da to ne utječe na pojačanje K i na ostale koeficijente povratne veze. Jedna od mogućnosti je da se uzme da je $\lambda=0$, ili $k_3=0$, što može poslužiti kao dobro polazište za početak istraživanja.

Da bismo što jasnije uočili bit problematike, uzmimo kompenzator $G_c(s)$ s koeficijentom k_3 i pojačanjem K u jednu cjelinu $G_c^*(s) = x_3(s)/u^*(s)$ kao što je učinjeno na Sl.11.10. Jednom kad su λ i k_3 poznati može se izračunati $G_c^*(s)$, a isto tako sve varijacije vrijednosti λ i k_3 koje odgovaraju toj funkciji $G_c^*(s)$ i koje zadovoljavaju postavljeni problem sve dok funkcija $G_c^*(s)$ ostane nepromijenjena.



Sl.11.10. Preinaka blokovskog prikaza sa Sl.11.9. u cilju formiranja funkcije $G_c^*(s)$

Ako u vezi s tim uzmemo da je $\lambda=0$, iz jednačbi (11.28.) izlazi da je $k_3=5/8$, a s tim vrijednostima i $K=8$ dobije se da je:

$$G_c^*(s) = \frac{8}{s+\lambda+8k_3} = \frac{8}{s+5} \quad (11.29.)$$

Iz jednačbe (11.29.) je očito da će sve vrijednosti koje zadovoljavaju jednačbu:

$$\lambda + 8k_3 = 5 \quad (11.30.)$$

dati istu funkciju $G_c^*(s)$ pa da će prema tome i sve te vrijednosti biti korektna rješenja.

Ne ulazeći u dokazivanja, vrijedno je naglasiti da je rješenje problema preko $G_c^*(s)$ mnogo brže i jednostavnije nego što bi bilo preko $y(s)/r(s)$, makar to na prvi pogled nije uočljivo. Posebno to dolazi do izražaja u sintezi složenijih sustava.

Uvodno je spomenuto da se proizvoljnim izborom λ ili k_3 u inženjerskoj praksi ne možemo zadovoljiti, i da se taj stupanj slobode može iskoristiti za poboljšanje opće kvalitete sustava. Ilustrirajmo to na primjeru izbora λ . Izbor bilo koje negativne vrijednosti λ može se odmah odbaciti jer bi to imalo za posljedicu nepoželjnu nestabilnost petlje. Mogu se odbaciti i sve vrijednosti λ veće od 5, jer bi to prema jednadžbi (11.30.) dalo negativne vrijednosti za k_3 , a to bi pomaklo nule $H_{eq}(s)$ u desnu stranu s ravnine i time za velika pojačanja K moglo dovesti sustav u nestabilno stanje. Iz svega proizlazi da za izbor ostaju samo vrijednosti između nula i pet, tj. $0 \leq \lambda \leq 5$. Ispitajmo najprije stanje za krajnje vrijednosti tog područja.

Za vrijednost $\lambda=0$ već smo dobili da je:

$$\underline{k} = st(1, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}) \quad \text{i} \quad K = 8$$

Uvrštenjem tih vrijednosti u jednadžbu (11.25.) izlazi:

$$H_{eq}(s) = \frac{5}{8} (s^2 + 2s + \frac{8}{5}) = \frac{5}{8} [(s+1)^1 + (0,775)^2] \quad (11.31.)$$

a množenjem jednadžbi (11.22.) i (11.24.) za $\lambda=0$ dobije se:

$$G(s) = G_o(s) G_p(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} \quad (11.32.)$$

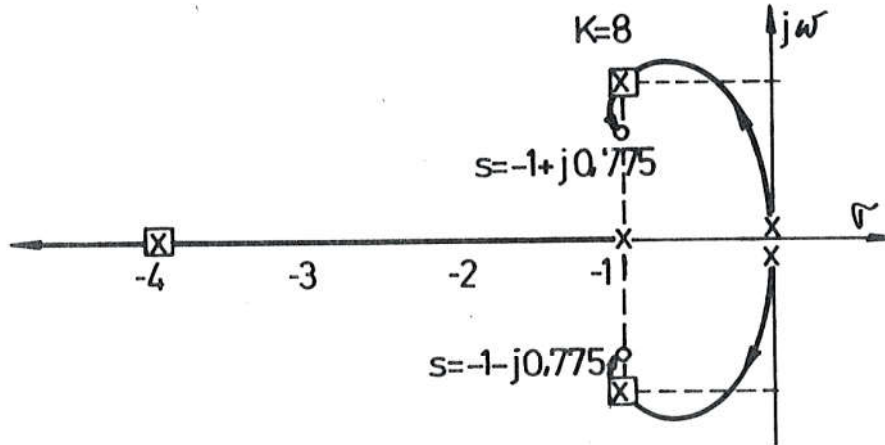
Na taj način smo došli do karakteristične jednadžbe u faktoriziranom obliku, koja glasi:

$$1 + KG(s)H_{eq}(s) = 1 + \frac{K \frac{5}{8} [(s+1)^2 + 0,775^2]}{s^2(s+1)} \quad (11.33.)$$

a njen GMK nacrtan je na Sl.11.11.

Za drugu graničnu vrijednost $\lambda=5$ izlazi da je:

$$\underline{k} = st(1, \frac{5}{8}, 0) \quad i \quad K = 8$$



Sl.11.11. GMK karakteristične jednačbe (11.33.) za $\lambda=0$

što daje:

$$H_{eq}(s) = \frac{5}{8} (s + \frac{8}{5}) \quad (11.34.)$$

Vrijedno je ovdje obratiti pažnju da $H_{eq}(s)$ ima samo jednu nulu, što je posljedica nulte vrijednosti koeficijenata k_3 . Kompenzirani objekt u ovom slučaju glasi:

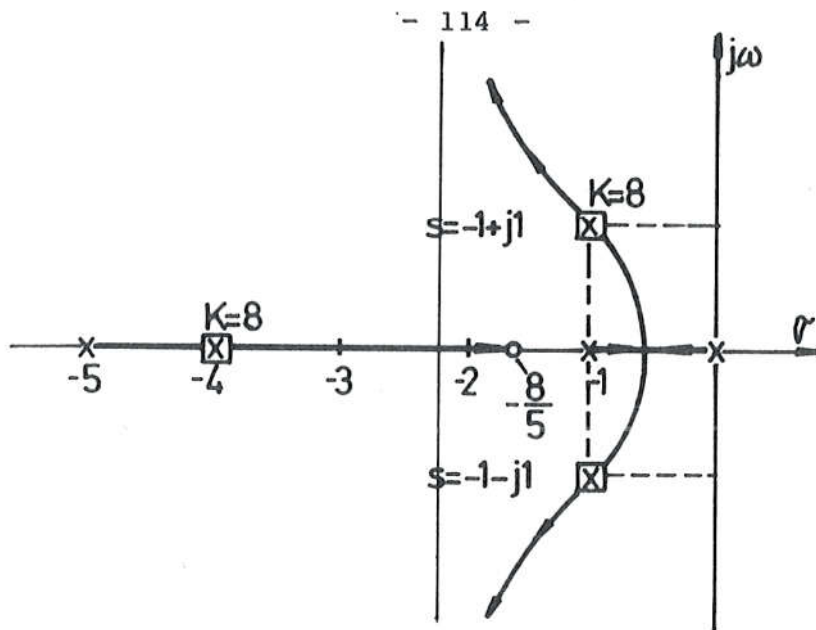
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)} \quad , \quad (11.35.)$$

a karakteristična jednačba:

$$1 + KG(s)H_{eq}(s) = 1 + \frac{K \frac{5}{8} (s + \frac{8}{5})}{s(s+1)(s+5)} \quad , \quad (11.36.)$$

koje je GMK nacrtan na Sl.11.12.

Pogledajmo sada kako se sustav ponaša u slučaju graničnih vrijednosti za λ . U slučaju $\lambda=0$ prema GMK sa Sl.11.11. sustav je teorijski stabilan za sve vrijednosti pojačanja. Međutim, zbog malog stupnja prigušenja na malim pojačanjima nepredvidjeni poremećaji mogu sustav dovesti u nestabilno stanje.



Sl.11.12. GMK jednadžbe (11.36.) za $\lambda=5$

U slučaju druge granične vrijednosti za $\lambda=5$, prema GMK sa Sl.11.12. sustav je na malim pojačanjima stabilniji, ali na većim pojačanjima zbog smanjenog stupnja pojačanja ζ postaje manje stabilan. Očito je da bi bio najbolji onaj sustav koji bi na većim pojačanjima zadržao svojstva GMK za $\lambda=0$, a na manjim pojačanjima svojstva za $\lambda=5$.

Logički se nameće misao da se takvo ponašanje može očekivati za neku vrijednost λ između 0 i 5. Ispitajmo stoga ponašanje sustava za $\lambda=2,5$. U tom slučaju izlazi da je:

$$\underline{k} = st(1, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}) \quad \text{ i } K = 8 \quad ,$$

a odatle:

$$H_{eq}(s) = \frac{5}{16} (s^2 + 3s + \frac{16}{5}) = \frac{5}{16} [(s+1,5)^2 + 0,978^2] , \quad (11.37.)$$

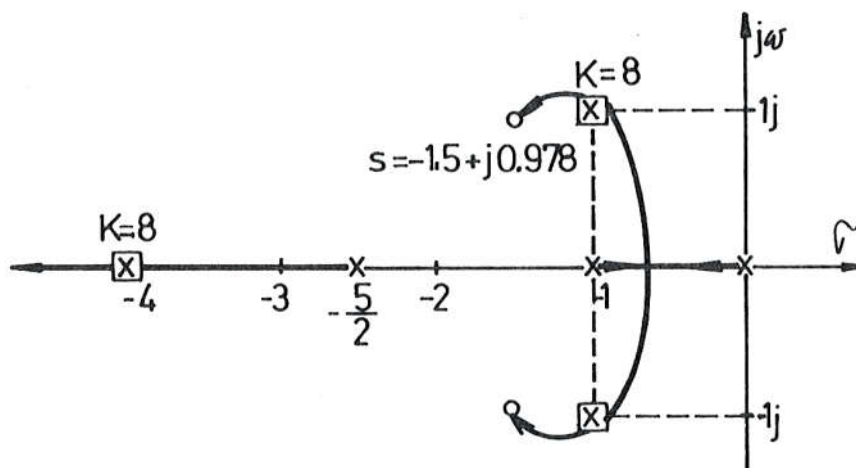
i

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2,5)}$$

pa stoga karakteristična jednadžba:

$$1 + KGH_{eq} = \frac{K \frac{5}{16} [(s+1,5)^2 + 0,978^2]}{(s+1)(s+2,5)} , \quad (11.38.)$$

koje je GMK nacrtan na Sl.11.13.



Sl.11.13. GMK jednadžbe (11.38.) za $\lambda=2,5$

Na taj način je izbor λ , a time i k_3 riješen, barem što se stabilnosti tiče. Vrijedno je još pogledati kako se takav izbor održava na osjetljivost. Budući da je kompenzator naprava koja se gradi namjenski, u mogućnosti smo sve njegove sastavne komponente odabrati tako da budu iste kvalitete. U tom slučaju kao osnova za izračunavanje λ i k_3 može poslužiti zahtjev optimalnosti da osjetljivost sustava na promjene parametra λ bude jednaka osjetljivosti sustava na promjene parametra k_3 . Osjetljivost sustava na promjene parametra λ glasi:

$$S_{x/y/r}^{\lambda} = \frac{\lambda}{y/r} \frac{d}{d\lambda} y/r = \frac{(1+KG_c^* G_p^H eq)}{KG_c^* G_p} \frac{d}{d\lambda} \frac{KG_c^* G_p}{1+KG_c^* G_p^H eq}$$

$$= \left[\frac{(1+KG_c^* G_p^H eq)}{KG_c^* G_p} \right] \frac{(1+KG_c^* G_p^H eq) KG_p \frac{dG_c^*}{d\lambda} - KG_c^* G_p KG_p^H eq \frac{dG_c^*}{d\lambda}}{(1+KG_c^* G_p^H eq)^2}$$

(11.39.)

a osjetljivost na parametar k_3 :

$$S_{k_3/y/r}^{\lambda} = \left[\frac{k_3(1+KG_c^* G_p^H eq)}{KG_c^* G_p} \right] \frac{(1+KG_c^* G_p^H eq) KG_p \frac{dG_c^*}{dk_3} - KG_c^* G_p KG_p^H eq \frac{dG_c^*}{dk_3}}{(1+KG_c^* G_p^H eq)^2}$$

(11.40.)

Izjednačenjem desnih strana jednadžbi (11.39.) i (11.40.):

$$\lambda \frac{dG_c^*}{d\lambda} = k_3 \frac{dG_c^*}{dk_3} \quad (11.41.)$$

Derivacijom G_c^* koji je zadan jednadžbom (11.29.) dobije se:

$$\frac{dG_c^*}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \frac{K}{s+\lambda+Kk_3} = \frac{-K}{(s+\lambda+Kk_3)^2} \quad (11.42.)$$

$$\frac{dG_c^*}{dk_3} = \frac{d}{dk_3} \frac{K}{s+\lambda+Kk_3} = \frac{-K^2}{(s+\lambda+Kk_3)^2} \quad (11.43.)$$

Uvrštenjem (11.42.) i (11.43.) izlazi:

$$\lambda \frac{-K}{(s+\lambda+Kk_3)^2} = k_3 \frac{-K^2}{(s+\lambda+Kk_3)^2},$$

a odatle konačno:

$$\lambda = Kk_3 \quad (11.44.)$$

Jednadžba (11.44.) dobijena iz uvjeta osjetljivosti i već prije dobijena jednadžba (11.30.) predstavljaju skup od dvije algebarske jednadžbe s dvije nepoznanice, koje rješenjem daju:

$$\lambda = 2,5 \quad \text{i} \quad k_3 = \frac{5}{16}$$

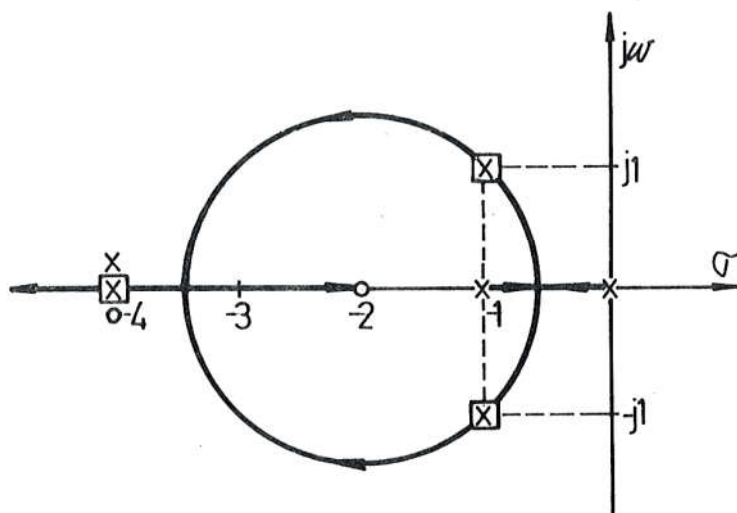
Time je potvrđen izbor učinjen s GMK, jer zadovoljava ne samo kriterije stabilnosti već i kriterij osjetljivosti.

Spomenimo još jedan zanimljiv izbor, a to je $\lambda=4$. To je mjesto pola regulacijskog sustava za pojačanje $K=8$. Budući da je u tom slučaju jedan pol kompenzatora smješten na položaj -4 , na to mjesto treba smjestiti i jednu nulu funkcije $H_{eq}(s)$. Iz jednadžbe (11.30.) za $\lambda=4$ nalazimo da je $k_3=1/8$, pa je stoga:

$$H_{eq}(s) = \frac{1}{8} (s^2+6s+8) = \frac{1}{8} (s+2)(s+4) \quad (11.45.)$$

$$KG(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)} \quad (11.46.)$$

a GMK je nacrtan na Sl.11.14.



Sl.11.14. GMK jednadžbe (11.46.) za $\lambda = 4$

U ovom slučaju treba zapaziti da zbog smještaja nule i pola petlje na istom mjestu i pol regulacijskog sustava ostaje na tom istom mjestu za sve vrijednosti pojačanja K . Osim toga budući da znamo da jedna nula $H_{eq}(s)$ treba biti na -4 , pojednostavnjuje se problem faktoriziranja $H_{eq}(s)$.

Postupak povećanja viška polova nad nulama proveden na ovom jednostavnom primjeru sasvim je općenitog značaja, a može ga se opisati slijedećim točkama:

1. odabrati željenu prijenosnu funkciju regulacijskog sustava $y(s)/r(s)$;
2. u seriju s objektom vezati dovoljni broj kompenzatora tipa:

$$G_c(s) = \frac{1}{s + \lambda} \quad (11.47.)$$

tako da višak polova nad nulama funkcije $G(s)$ odgovara višku željene prijenosne funkcije $y(s)/r(s)$. Označimo dodani broj polova kompenzatora sa n_c ;

3. prikazati kompenzirani sustav s povratnom vezom od varijabli stanja, uključujući i varijable stanja kompenzatora $G_c(s)$;
4. naći prijenosnu funkciju kompenziranog regulacijskog sustava, pa usporedbom nje i željene prijenosne funkcije postaviti jednadžbe za izračunavanje nepoznanica, te izračunati koeficijente povratne veze objekta;
5. od pojačanja K , serijskog kompenzatora $G_c(s)$ i koeficijenta povratne veze formirati *nadomjesni* serijski kompenzator $G_c^*(s)$;
6. na temelju činjenice da sva rješenja kompenzacijskih polova i koeficijenata povratne veze koja daju istu prijenosnu funkciju $G_c^*(s)$ matematički zadovoljavaju, naći područje njihovih vrijednosti koje je prihvatljivo i s inženjerskog gledišta;
7. primjenom GMK odabrati vrijednosti λ i k_i koje najbolje odgovaraju u pogledu stabilnosti, a potom ih provjeriti u pogledu osjetljivosti.

11.3.3. Pomicanje nula

Ako željena prijenosna funkcija posjeduje isti broj nula kao i funkcija objekta, ali nisu na istim mjestima potrebno je nule objekta pomaknuti na mjesta nula željene prijenosne funkcije. To se vrši tako da se za svaku nulu koju treba pomaknuti doda serijski kompenzator oblika:

$$G_c(s) = \frac{s + \delta}{s + \lambda} = 1 + \frac{\delta - \lambda}{s + \lambda} \quad , \quad (11.48.)$$

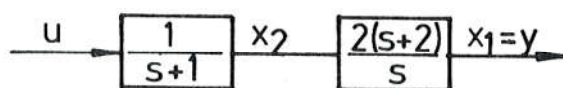
gdje je δ vrijednost nove nule, a λ vrijednost stare nule. Na taj način se nepoželjna nula objekta krati s polom $s + \lambda$ kompenzatora, a kompenzirani objekt dobije novu nulu $s + \lambda$.

Da bi se osiguralo poništenje nepoželjne nule objekta za sve vrijednosti pojačanja K , potrebno je u funkciji regulacijskog sustava osigurati jedan konstantni pol neovisan o pojačanju. Osiguranje pak konstantnog pola neovisnog o pojačanju K postiže se tako da funkcija petlje ima na tom istom mjestu nulu i pol.

Ilustrirajmo to jednim primjerom. Zadana je funkcija objekta:

$$G_p(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)}, \quad (11.49.)$$

koje je blokovski prikaz nacrtan na Sl.11.15.



Sl.11.15. Sustav (11.49.) kojem treba podmaknuti nulu

Zadana je željena prijenosna funkcija:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{(2/3)(s+3)}{(s+1)^2 + 1^2}, \quad (11.50.)$$

a traži se da ju se realizira sa standardnom konfiguracijom povratne veze od varijabli stanja.

Budući da željena prijenosna funkcija ima nulu $s+3$, a funkcija objekta ima nulu $s+2$, treba nulu $s+2$ pomaknuti na mjesto $s+3$.

To se radi dodavanjem serijskog kompenzatora:

$$G_c(s) = \frac{s+3}{s+2} = 1 + \frac{1}{s+2} \quad (11.51.)$$

Na taj način se u stvari krati pol $s+2$ funkcije $G_c(s)$ i nula $s+2$ funkcije $G_p(s)$, te se još k tome unosi nova nula $s+3$.

S druge strane, budući da je nula $s+2$ u funkciji regulacijskog sustava neprestano prisutna, treba karakterističnoj jednadžbi regulacijskog sustava dodati jedan konstantni pol $s+2$, koji će za sve vrijednosti pojačanja K poništavati nepoželjnu nulu. Željena prijenosna funkcija stoga poprima oblik:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{(2/3)(s+3)(s+2)}{\left[(s+1)^2 + 1^2 \right] (s+2)} = \frac{(2/3)(s+3)(s+2)}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} \quad (11.52.)$$

Blokovski prikaz kompenziranog objekta sa standardnom konfiguracijom povratne veze od varijabli stanja prikazan je na Sl.11.16.a. Da bi se dobilo $H_{eq}(s)$ treba taj blokovski prikaz svesti na standardni oblik kao što je učinjeno na Sl.11.16.b., c. i d.

Sa Sl.11.16.d. izlazi:

$$\begin{aligned} H_{eq}(s) &= k_1 + \frac{k_2 s}{2(s+2)} + \frac{k_3 s(s+3)}{2(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{s^2(k_3+k_2+2k_1)+s(k_3+3k_2+10k_1)+12k_1}{2(s+2)(s+3)} \end{aligned} \quad (11.53.)$$

a zatim primjenom jednačbi (11.49.), (11.51.) i (11.53.) dobije se:

$$KG(s)H_{eq}(s) = \frac{K[s^2(k_3+k_2+2k_1)+s(k_3+k_2+10k_1)+12k_1]}{s(s+1)(s+2)} \quad (11.54.)$$

Provjerom se može ustanoviti da nule funkcije kompenziranog objekta $G(s)=G_c(s) G_p(s)$ odgovaraju polovima funkcije $H_{eq}(s)$.

Poznavajući $G(s)$ i $H_{eq}(s)$ dobije se:

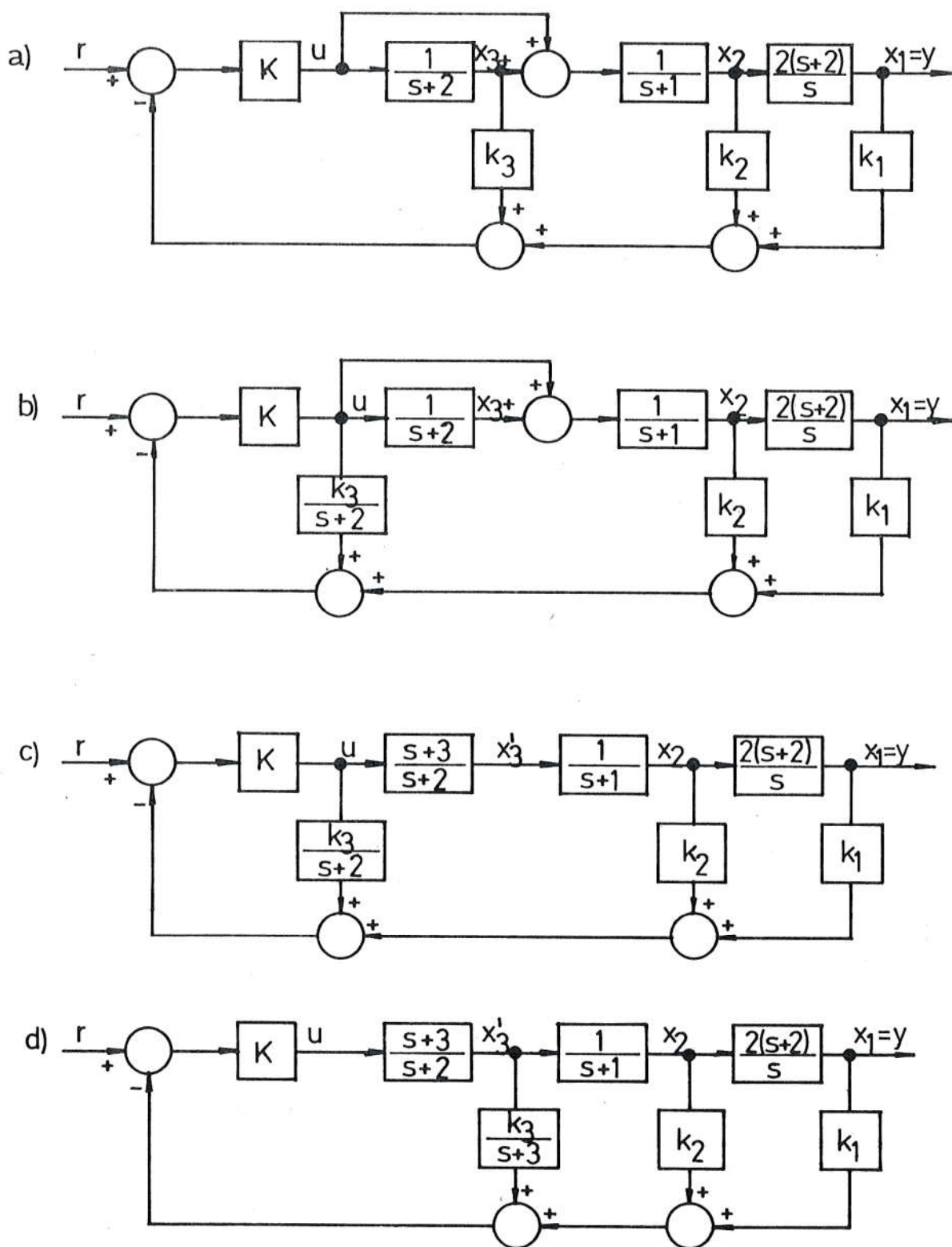
$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{2K(s+2)(s+3)}{s^3+s^2(3+Kk_3+Kk_2+Kk_1)+(2+Kk_3+3Kk_2+10Kk_1)+12Kk_1} \quad (11.55.)$$

Regulacijski sustav na Sl.11.16.d. odgovara željenoj prijenosnoj funkciji, ako je jednačba (11.52.) jednaka jednačbi (11.55.). Iz te jednakosti proizlaze jednačbe:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= 2K \\ 3 + Kk_3 + Kk_2 + Kk_1 &= 4 \\ 2 + Kk_3 + Kk_2 + 10Kk_1 &= 6 \\ 12Kk_1 &= 4 \end{aligned} \quad (11.56.)$$

Rješenjem ovih jednačbi dobije se:

$$\underline{k} = st(1,0; 0,5; 0,5) \quad i \quad K = \frac{1}{3}$$



Sl.11.16. Sredjenje blokovskog prikaza na standardni oblik,
u cilju izračunavanja $H_{eq}(s)$

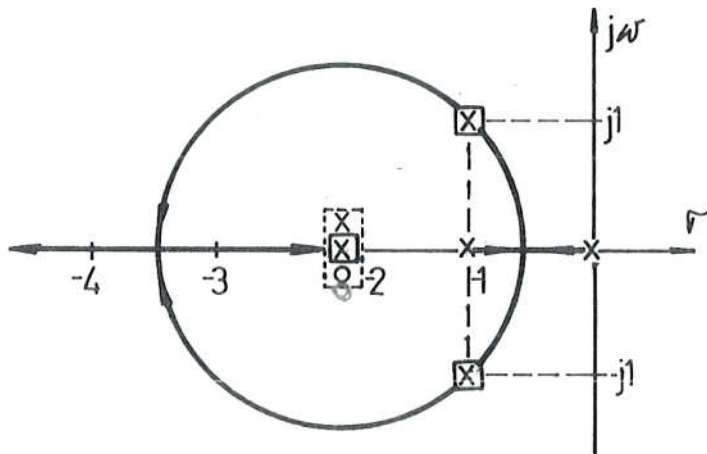
Uvrštenjem ovih vrijednosti u jednađbu (11.53.) izlazi:

$$H_{eq}(s) = \frac{3(s+2)^2}{2(s+2)(s+3)}, \quad (11.57.)$$

pa tako jednađba petlje glasi:

$$KG(s)H_{eq}(s) = \frac{3K(s+2)^2}{s(s+1)(s+2)}, \quad (11.58.)$$

a GMK nacrtano je na Sl.11.17.



Sl.11.17. GMK jednađbe (11.58.)

Vrijedno je još jednom obratiti pažnju da, osim kraćenja nula $G_p(s)$ s polovima $H_{eq}(s)$, ni jedno drugo kraćenje nula s polovima nije izvršeno. Da to nije tako učinjeno, moglo bi se lako dogoditi da se pol $s=-2$ regulacijskog sustava previdi.

11.3.4. Dodavanje nula

Ako željena prijenosna funkcija sadrži više nula nego prijenosna funkcija objekta, nove nule se dodaju s pomoću serijskog kompenzatora oblika:

$$G_c(s) = \frac{s + \delta}{s + \lambda} = 1 + \frac{\delta - \lambda}{s + \lambda} \quad (11.59.)$$

Broj δ je zadana vrijednost nove nule, a λ je u ovom slučaju pol koji nije definiran, jer u funkciji objekta ne postoji nula s kojom bi se on kratio, kako je to bilo u slučaju pomicanja nula.

Ovdje se sada javljaju dvije proizvoljno odaberive veličine λ i k_{n+1} kao što je to bilo i u slučaju povećanja viška polova nad nulama.

Pokažimo na jednom primjeru kako se vrši izbor tih dviju veličina. Zadan je objekt:

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+5)} \quad , \quad (11.60.)$$

kojeg je blokovski prikaz nacrtan na Sl.11.18.a., i željena prijenosna funkcija:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\frac{3 \cdot 10^3}{7} (s + 7)}{(s^2 + 14s + 100)(s + 30)} \quad (11.61.)$$

Budući da željena prijenosna funkcija ima nulu koju objekt nema, treba tu nulu dodati s pomoću kompenzatora:

$$G_c(s) = \frac{s + 7}{s + \lambda} = 1 + \frac{7 - \lambda}{s + \lambda} \quad (11.62.)$$

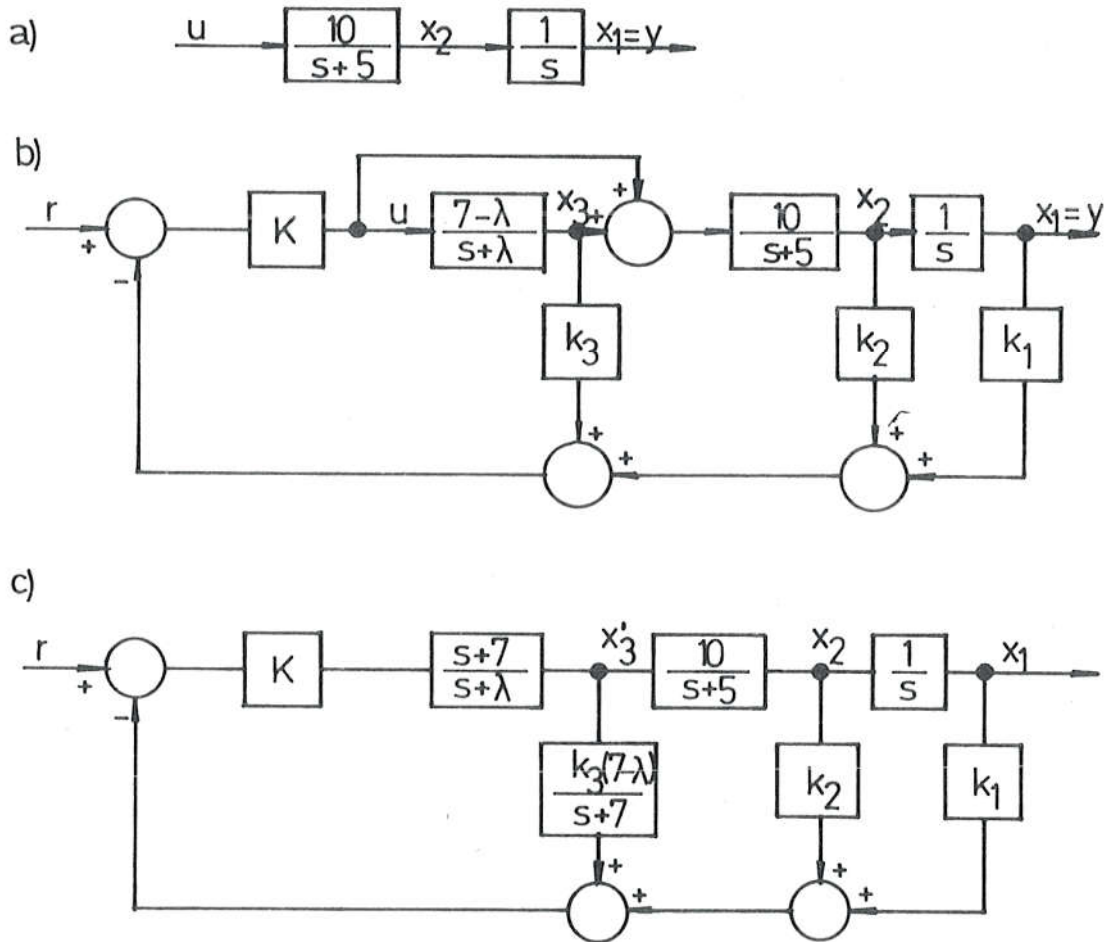
Pol $s + \lambda$ se nužno mora dodati, jer je samo nula bez pola fizički neostvariva. Standardni regulacijski sustav s negativnom povratnom vezom od varijabli stanja prikazan je na Sl.11.18.b. a preinaka za izračunavanje $H_{eq}(s)$ na Sl.11.18.c.

Prijenosna funkcija kompenziranog objekta, prema tome, glasi:

$$G(s) = G_c(s) G_p(s) = \frac{10(s+7)}{s(s+5)(s+\lambda)}$$

Za izbor λ i ovdje ćemo se poslužiti uvjetom osjetljivosti. Dade se dokazati da su objekt i regulacijski sustav po osjetljivosti kompatibilni ako je ispunjen uvjet:

$$\left| \frac{N_k(s)}{N(s)} \right| > 1 \quad (11.64.)$$



Sl.11.18. Primjer za dodavanje nula

U našem slučaju su:

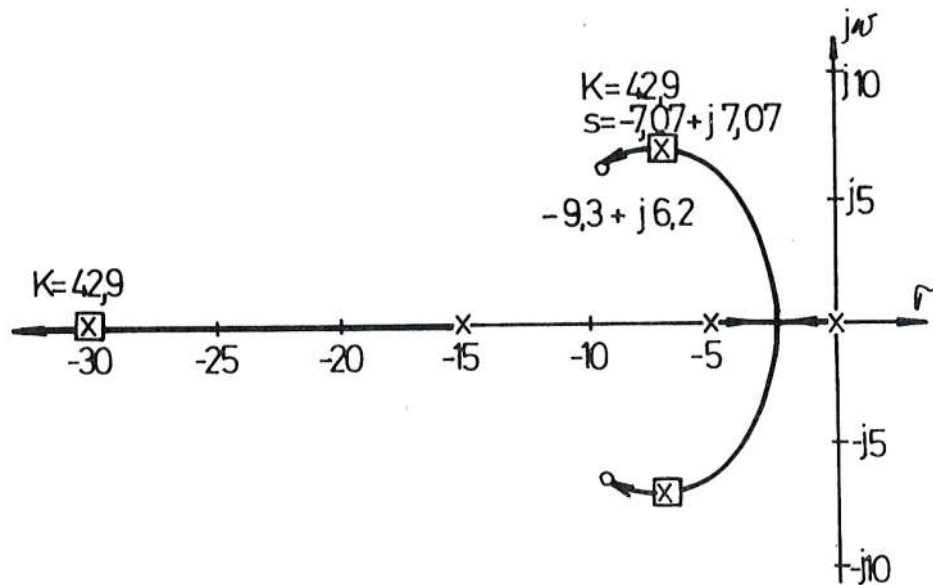
$$N_k(s) = (s^2 + 14,14s + 100)(s + 30) \quad (11.65.)$$

i:

$$N(s) = s(s+5)(s+\lambda), \quad (11.66.)$$

pa stoga:

$$\left| \frac{N_k(s)}{N(s)} \right| = \left| \frac{600}{\lambda} \frac{(\frac{s^2}{100} + \frac{14,14s}{100} + 1)(\frac{s}{30} + 1)}{s(\frac{s}{5} + 1)(\frac{s}{\lambda} + 1)} \right| \quad (11.67.)$$



Sl.11.19. GMK jednađžbe (11.63.)

Jednađžba (11.67.) predstavlja apsolutnu vrijednost razlomljene racionalne funkcije, tj. njezin modul, koji se može prikazati Bodeovim dijagramom. Ako se to učini, dobije se da je $|N_k(s)/N(s)|$ veći od 1 za $\lambda=15$.

Prijenosna funkcija kompenziranog objekta prema tome glasi:

$$G(s) = \frac{10(s+7)}{s(s+5)(s+15)} \quad (11.68.)$$

a iz Sl.11.18.c. izlazi:

$$H_{eq}(s) = \frac{s^2(k_2+0,8k_3)+s(k_1+7k_2+4k_3)+7k_1}{s+7} \quad (11.69.)$$

Usporedbom željene prijenosne funkcije (11.61.) i prijenosne funkcije regulacijskog sustava sa Sl.11.18.c. koja glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{10 K (s + 7)}{s^3 + s^2(10 + 10Kk_2 + 8Kk_3) + s(75 + 10Kk_1 + 70Kk_2 + 40Kk_3) + 70Kk_1} \quad (11.70.)$$

dobiju se vrijednosti:

$$\underline{k} = st(1,0; -0,117; 0,216) \quad i \quad K = 42,86$$

Prijenosna funkcija otvorene petlje, prema tome, glasi:

$$KG(s)H_{eq}(s) = \frac{0,563 K [(s+9,3)^2 + 6,2^2]}{s(s+5)(s+15)}, \quad (11.71.)$$

a GMK je nacrtano na Sl.11.19. Sa slike se vidi da je stabilnost i osjetljivost sustava zadovoljavajuća, pa se stoga može smatrati da je sinteza uspješno provedena.

11.4. SINTEZA UZ DJELOMIČNO DOSTUPNE VARIJABLE STANJA

11.4.1. Rješenje s minornom petljom

Dosadašnja obradba sinteze s varijablama stanja provedena je uz pretpostavku da su sve varijable stanja objekta dostupne. U ovom poglavlju ćemo vidjeti kako se osnovna ideja provedene obradbe daje primijeniti i u slučajevima kad su dostupne samo neke od varijabli stanja.

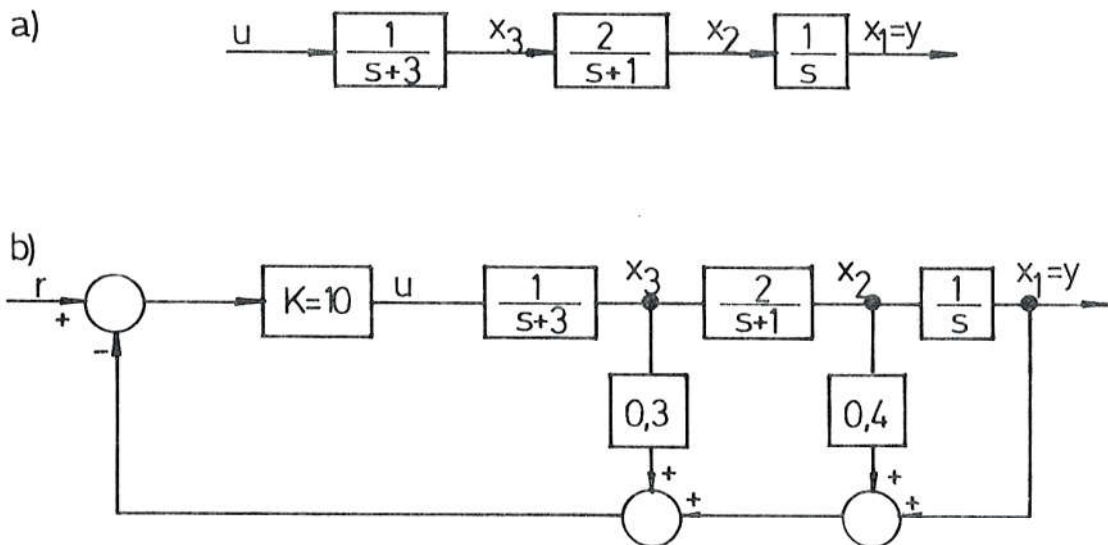
Glavni problem koji treba riješiti da bi se i u ovom slučaju mogao primijeniti već poznati postupak kompenzacije za sustave s dostupnim varijablama stanja, jest generiranje nedostupnih varijabli stanja. Način na koji se dolazi do rješenja tog problema pokazat ćemo na primjeru sa Sl.11.20., kojeg je kompenzacija provedena u prijašnjem poglavlju, s razlikom što ćemo ovdje pretpostaviti da neke od varijabli stanja nisu dostupne. Prijenosna funkcija u tom primjeru je glasila:

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{s(s+1)(s+3)} \quad (11.72.)$$

a željena prijenosna funkcija:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{20}{[(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2](s+5)} \quad (11.73)$$

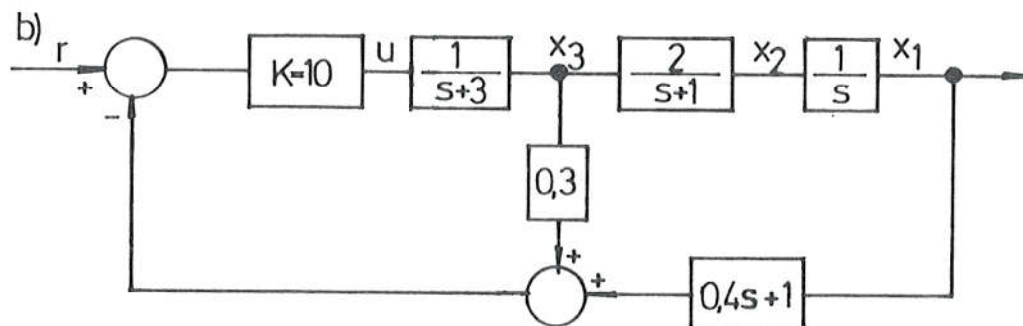
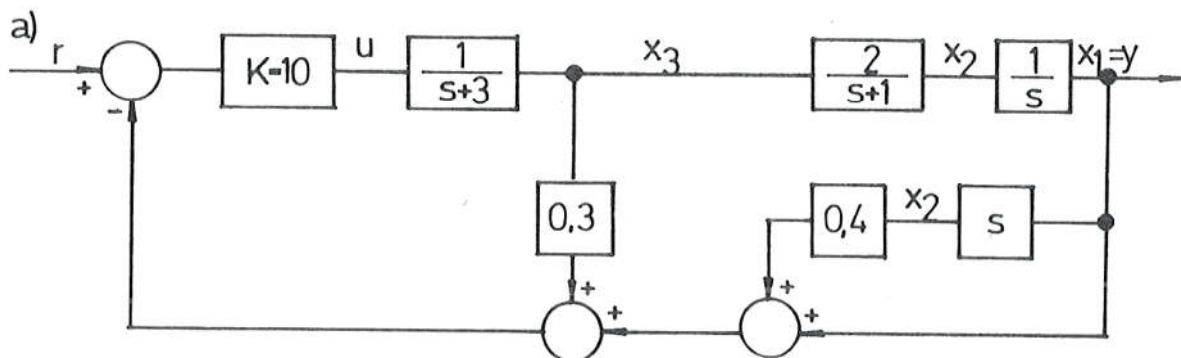
Na Sl.11.20.a. nacrtan je blokovski prikaz objekta (11.72.), a na Sl.11.20.b. blokovski prikaz željenog regulacijskog sustava (11.73.) s već izračunanim vrijednostima koeficijenata k_i i pojačanja K , uz pretpostavku da su dostupne sve varijable stanja.



Sl.11.20.a) objekt (11.72.); b) željeni regulacijski sustav (11.73.)

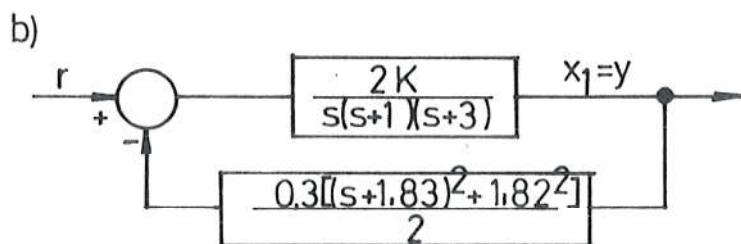
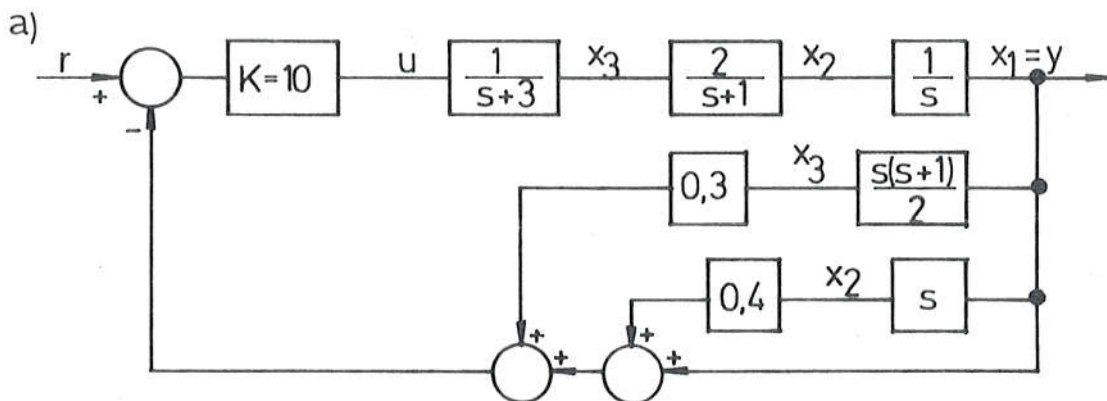
Pretpostavimo sada da varijabla stanja x_2 nije dostupna. Usput rečeno, ako matematički model objekta predstavlja električki servomotor, upravo takva može biti realna situacija, jer brzina motora nije neposredno dostupna, već se mjeri tahogeneratorom. Na Sl.11.21.a. dan je blokovski prikaz regulacijskog sustava, kad je za mjerenje brzine motora primijenjen tahogenerator. U odnosu na blokovski prikaz na Sl.11.20.b. čvorište s položaja x_2 prebačeno je na x_1 . Na Sl.11.21.b. spojene su dvije povratne grane s izlaza sustava u jednu jedinu granu.

Ako ni varijabla x_3 nije dostupna, mogu se obje nedostupne varijable stanja x_2 i x_3 generirati na isti način. U tom slučaju blokovski prikaz izgleda kao na Sl.11.22.a, što spojeno u jednu povratnu granu, kao na Sl.11.22.b., poprima poznati oblik $H_{eq}(s)$.



Sl.11.21. Generiranje jedne varijable stanja:

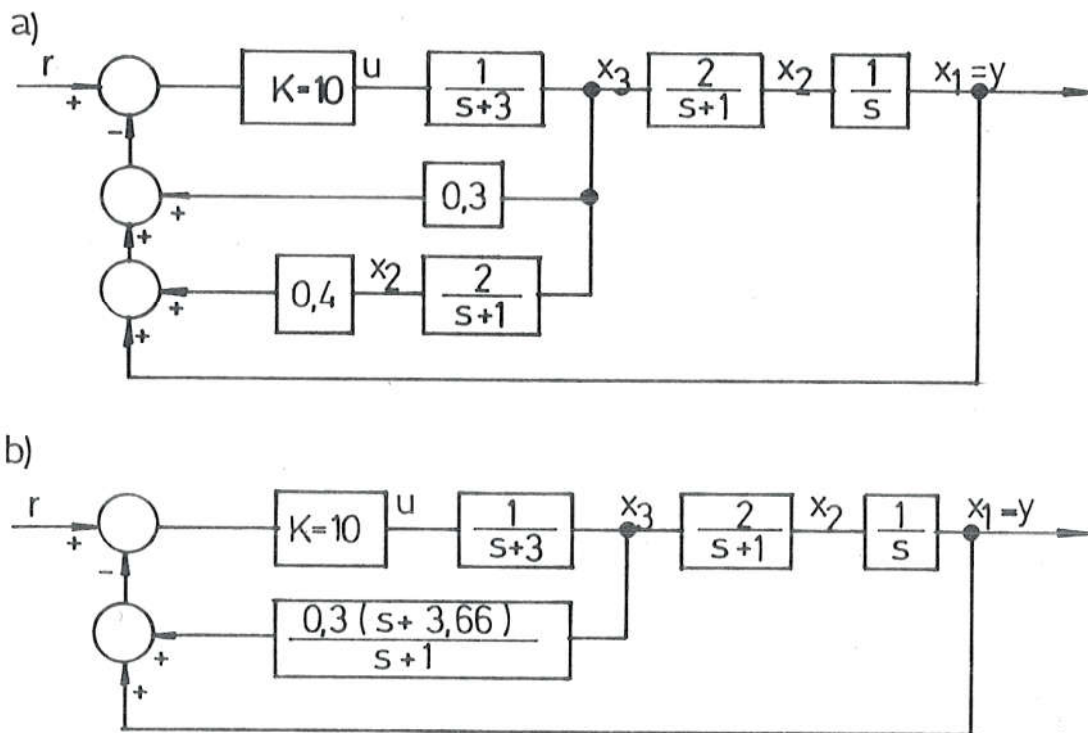
- a) pomak čvorišta s x_2 na x_1
 b) nadomjestak za varijablu stanja x_2



Sl.11.22. Generiranje dviju varijabli stanja: a) pojedinačni prikaz svake nadomjesne varijable, b) skupni prikaz svih nadomjesnih varijabli

S matematičkog gledišta problem bi time bio riješen. Pogledamo li međjutim, nadomjesni blok $H_{eq}(s)$ u povratnoj grani, vidimo da se sastoji od $n-1$ nule i z polova gdje je n red prijenosne funkcije objekta, a z je broj nula objekta. Budući da je broj polova prijenosne funkcije realnog objekta uvijek veći od broja nula proizlazi da bi funkcija $H_{eq}(s)$ u najboljem slučaju mogla imati jednak broj nula i polova, a u najvećem broju slučajeva veći broj nula od polova, kako izlazi u primjeru na Sl.11.22.b. Prisjetimo li se Bodeovog amplitudnog dijagrama, proizlazi da bi funkcija koja bi imala jednu nulu više od broja polova, imala na višim frekvencijama u Bodeovu amplitudnom dijagramu asimptotu pod jediničnim pozitivnim nagibom. To znači da bi čak sa samo jednom nulom više pojačanje viših frekvencija neprestano raslo. A budući da se šum sastoji upravo od viših frekvencija, šum bi s takvom prijenosnom funkcijom mogao biti toliko pojačan da prekrije korisni signal. U prvom trenutku se nameće misao da se dodavanjem polova funkciji $H_{eq}(s)$ od nje napravi razlomljena racionalna funkcija, i time spriječi pojačavanje šuma. To rješenje moramo odbaciti, jer bi time povećali red regulacijskog sustava. Na kraju iz svega proizlazi da je nadomještanje nedostupnih varijabli stanja na opisani način, makar matematički korektno, s inženjerskog gledišta neprihvatljivo.

Pokušajmo stoga do rješenja doći na drugi način. Krenimo opet od istog regulacijskog sustava na Sl.11.20.b. i pretpostavimo kao i prije da nije dostupna varijabla stanja x_2 . Međjutim, umjesto da nadomjesnu varijablu x_2 generiramo sa čvorišta x_1 , sada ćemo je generirati sa čvorišta x_3 . Budući da time čvorište x_2 pomičemo suprotno toku informacije, pomaknutu granu množimo s vrijednošću preskočenog bloka, u ovom slučaju s prijenosnom funkcijom $2/(s+1)$ kako je prikazano na Sl.11.23.a. Sastave li se potom dvije paralelne grane koje idu od čvorišta x_3 u jednu, dobije se blokovski prikaz na Sl.11.23.b. Iz tog blokovskog prikaza se vidi da novodobijena *prijenosna funkcija u minornoj petlji* ima normalni oblik razlomljene racionalne funkcije, pa da stoga nema problema s njenom realizacijom. Ako osim varijable stanja x_2 nije dostupna ni varijabla stanja x_3 , nastavlja se principijelno isti postupak. Nedostupno čvorište se pomiče u suprotnom smje-

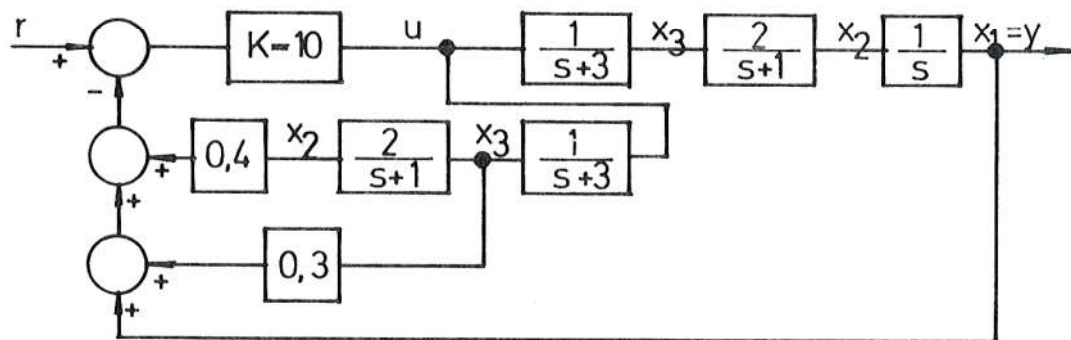


Sl.11.23. Generiranje jedne varijable stanja s minornom petljom
 a) paralelne grane za svaku varijablu posebno
 b) zajednička minorna petlja za dostupne i nedostupne varijable

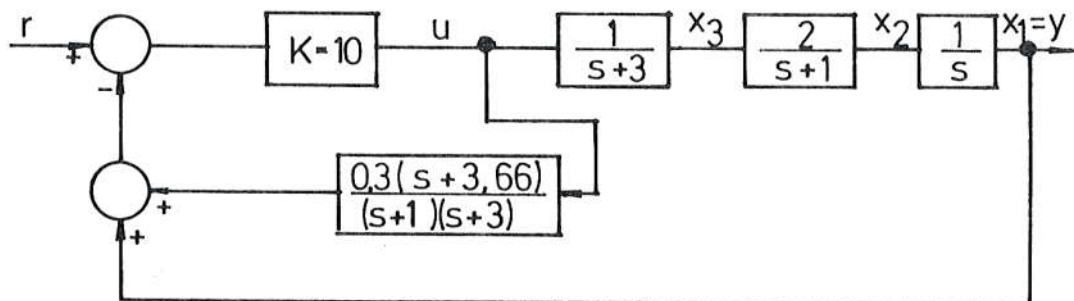
ru od toka informacije preko prethodnog bloka dok se ne stigne do dostupnog čvorišta. U našem slučaju čvorište x_3 se prebacuje na čvorište u , a pomaknuta grana se množi s prijenosnom funkcijom $1/(s+3)$ kako je pokazano na Sl.11.24.a. Na Sl.11.24.b. sve su grane za generiranje nadomjesnih varijabli stanja spojene u zajedničku prijenosnu funkciju.

U vezi s nedostupnim varijablama stanja treba spomenuti još i slučaj kad varijabla stanja po naravi stvari ne može biti dostupna. To je slučaj konjugirano kompleksnih polova kao kod sustava na Sl.11.25.a.

a)



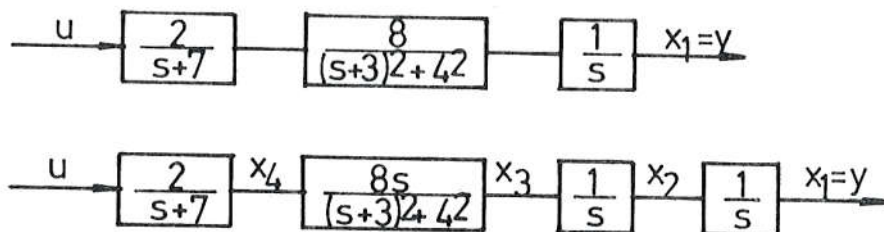
b)



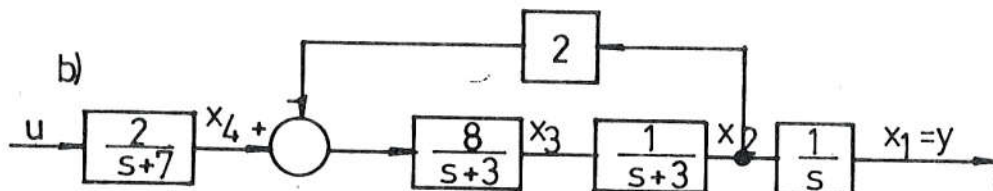
Sl.11.24. Generiranje $n-1$ varijable stanja s minornom petljom

- a) pojedinačne grane za svaku varijablu stanja
b) zajednička minorna petlja za $n-1$ varijablu

a)



b)



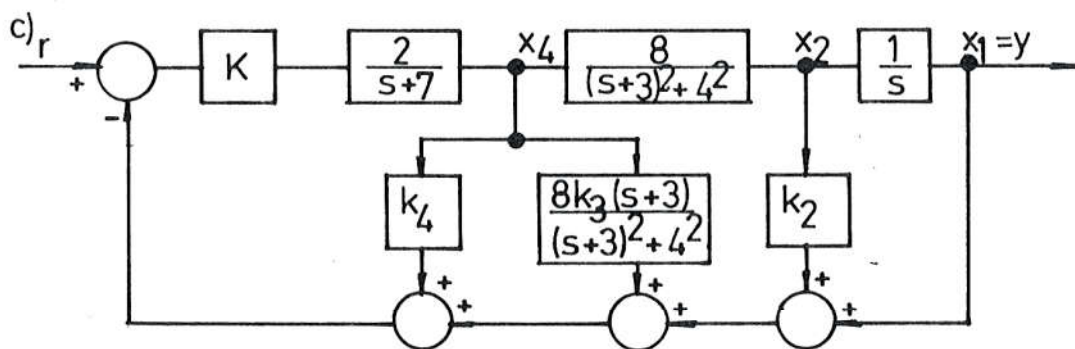
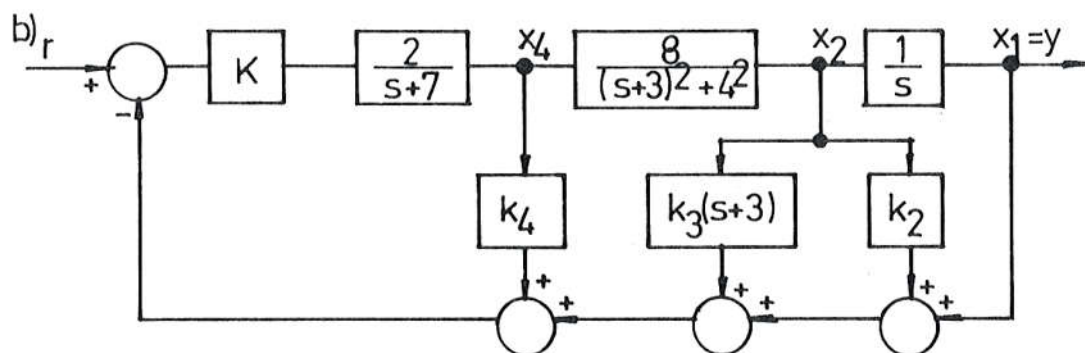
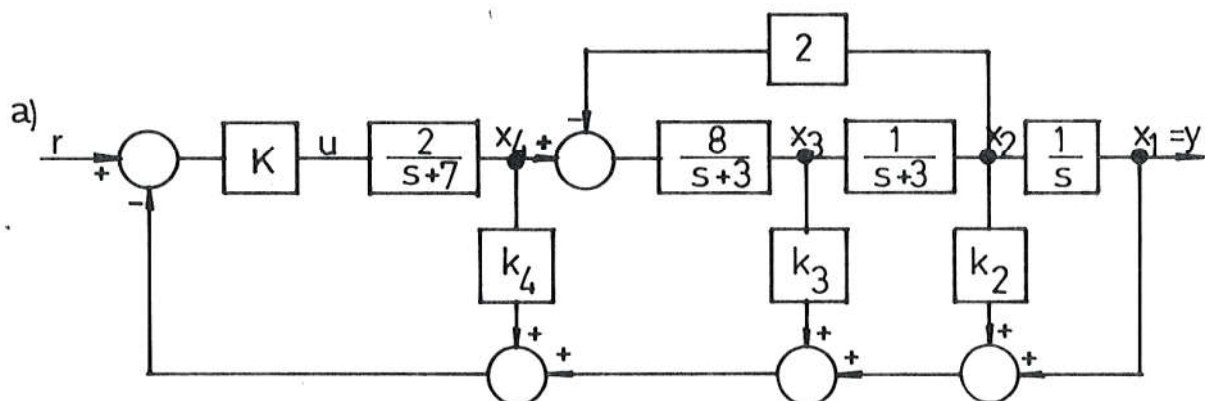
Sl.11.25. Nadomještanje nedostupne varijable stanja konjugirano kompleksnog para; a) metodom faznih varijabli, b) serijski vezanim realnim polovima zatvorenim s negativnom povratnom vezom

Budući da blok s konjugirano kompleksnim polovima predstavlja uvijek jednu cjelinu, dostupna može biti samo izlazna varijabla. Na slikama 11.25.b. i c. prikazana su dva moguća rješenja tog problema. Na Sl.11.25.b. problem je riješen metodom faznih varijabli, a na Sl.11.25.c. je blok s konjugirano kompleksnim parom nadomješten s dva serijski vezana bloka koji imaju jednake realne polove zatvorene s negativnom povratnom vezom.

Nakon što je problem varijabli stanja s pomoću nadomjesnih varijabli riješen, daljnji postupak je identičan postupku kompenzacije s dostupnim varijablama stanja, koji je prethodno već opisan. Na taj način izračunane vrijednosti za K i k_i u potpunosti određuju prijenosnu funkciju minorne petlje, a time i traženu kompenzaciju sustava.

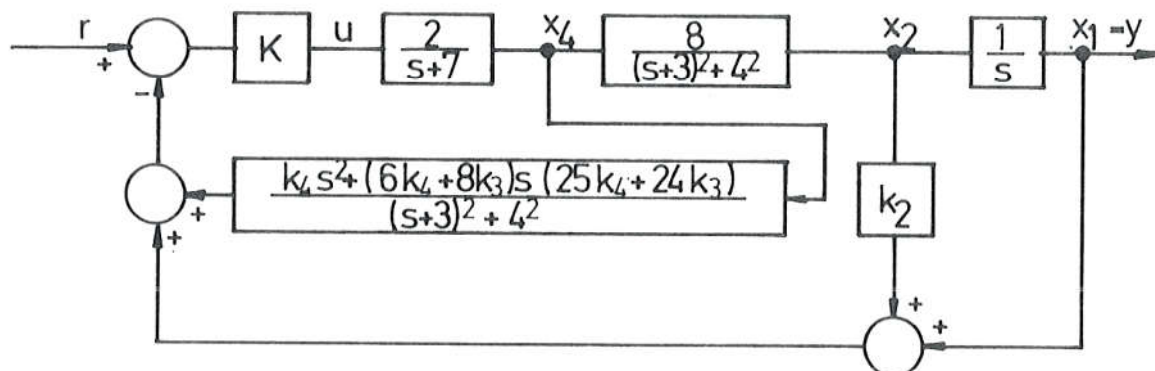
Uz pretpostavku da smo se u sustavu sa Sl.11.25. odlučili nadomjesnu varijablu stanja generirati s pomoću dva realna i ista serijski vezana pola, od svih varijabli stanja uključujući i nedostupnu varijablu x_3 povučemo grane negativne povratne veze kao što je učinjeno na Sl.11.26.a. Potom granu s koeficijentom k_3 od fiktivne točke x_3 premjestimo na položaj x_2 kao na Sl.11.26.b., i konačno granu s funkcijom $k_3(s+3)$ pomičemo preko konjugirano kompleksnog para u točku x_4 , da bismo dobili razlomljenu racionalnu funkciju, koja se s pasivnim ili aktivnim elektroničkim elementima može realizirati. Konačni blokovski prikaz predložen je na Sl.11.27.

Očito je da se prema opisanom postupku mogu s minoranom petljom oko pojačanja K generirati nadomjesne varijable stanja bez obzira na njihov broj. Na prvi pogled izgleda da bi se to moglo učiniti i s izlaznom varijablom. Međutim, to je u prvom redu nepotrebno, jer je izlazna varijabla uvijek dostupna, a s druge strane takav bi sustav radio bez povratne veze tj. u režimu otvorene petlje. To znači da bi time bila realizirana željena prijenosna funkcija, ali bi bili izgubljeni učinci negativne povratne veze, jer ona ne bi ni postojala. Radi toga se uvijek mora uzimati originalna izlazna varijabla, a ostale mogu biti nadomještene.



- Sl.11.26. Nadomjesna varijabla konjugirano kompleksnog para;
- a) rastavljanje na dva realna pola
 - b) premještanje fiktivne varijable stanja,
 - c) oblikovanje ostvarive prijenosne funkcije

Zaključujući postupak kompenzacije s pomoću pojačanja K i koeficijenata povratne veze k_i u minornoj petlji na sustavima s djelomično dostupnim varijablama stanja, važno je obratiti pažnju na dvije bitne značajke ovog postupka. Prva je, da u svim slučajevima



Sl.11.27. Generiranje nadomjesne varijable stanja konjugirano kompleksnog para s minornom petljom

ma upravljački signal uvijek ostaje nepromijenjen, bez obzira koliko je varijabli stanja nadomješteno. Druga značajka je da su regulacijski sustavi kompenzirani s fiktivnim koeficijentima k_i u minornoj petlji, samo *uvjetno jednaki* sustavima koji su kompenzirani sa stvarnim koeficijentima k_i , a uvjet je da nadomjesni parametri budu u svim okolnostima jednaki nadomještenima. Što je razlika između nadomjesnih i nadomještenih parametara veća, to je veća i razlika između izračunanih i ostvarenih učinaka kompenzacije.

11.4.2. Rješenje sa serijskom vezom

Usporkos činjenici da je ostvarenje željene prijenosne funkcije u slučaju nedostupnih varijabli stanja najtočnije s pomoću kompenzatora u minornoj petlji, u inženjerskoj praksi se, najčešće iz ekonomskih razloga, primjenjuju i rješenja sa serijskim kompenzatorima. U nastavku ćemo vidjeti kako se do njih dolazi i na koji način se primjenjuju.

Razmatranje ćemo započeti sa sustavom na Sl.11.20.a, kojeg je idealna regulacija prikazana na Sl.11.20.b. Pretpostavimo i u ovom slučaju da je nedostupna varijabla stanja x_2 i da je nadomještamo generiranjem iz točke x_3 , kako je pokazano na Sl.11.23.a. Da bi došli do serijskog kompenzatora, preinačimo blokovski prikaz sa Sl.11.23.a., kao je predloženo na Sl.11.28.a. Zajednička prijenosna funkcija crtkano označenih blokova izlazi:

$$\frac{x_3(s)}{u'(s)} = \frac{10(s+1)}{s^2 + 4s + 11} \quad (11.74.)$$

Budući da je u prijenosnoj funkciji (11.74.) uključen i prvi blok objekta $1/(s+3)$, koji je u stvari nerazdvojni dio objekta, potrebno je taj pol poništiti s nulom iste vrijednosti, tako da prijenosna funkcija kompenzatora glasi:

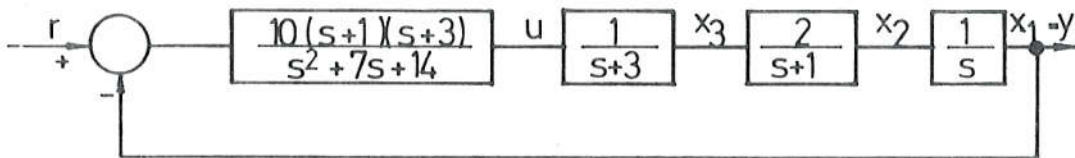
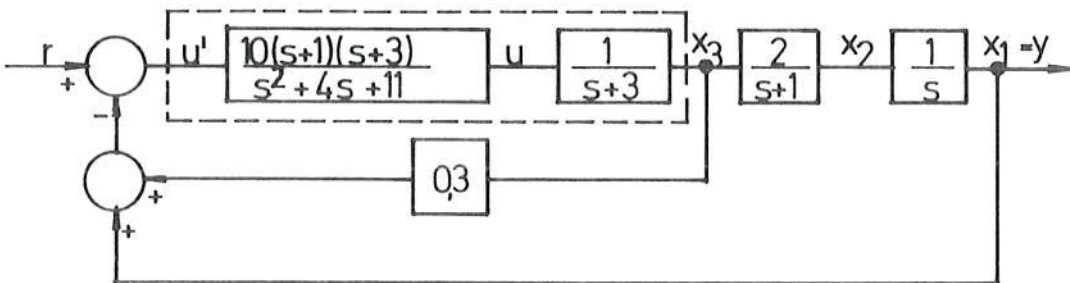
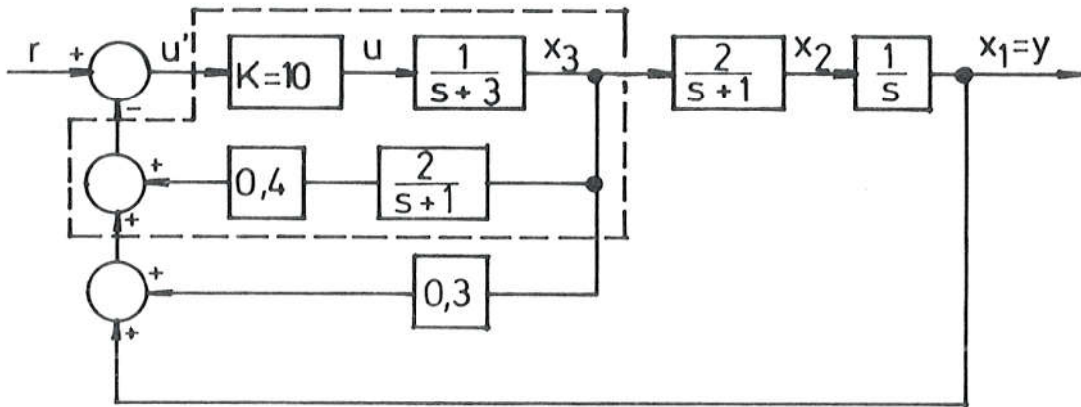
$$KG_c(s) = \frac{10(s+1)(s+3)}{s^2 + 4s + 11}, \quad (11.75.)$$

a njen blokovski prikaz je nacrtan na Sl.11.28.b. U serijski kompenzator koji nadomješta varijablu x_2 na Sl.11.28. uključeno je i pojačanje K , iako pojačanje može biti izvedeno i posebnim blokom, a da se u biti ništa ne izmijeni.

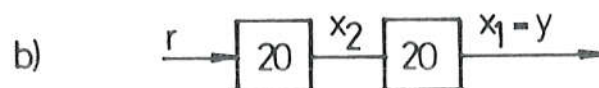
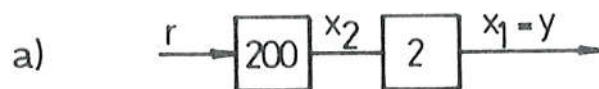
Treba obratiti pažnju da u slučaju nadomještanja varijabli stanja serijskim kompenzatorom, izlazna, referentna i sve nadomještene varijable prolaze kroz serijski kompenzator; za razliku od kompenzatora u minornoj petlji gdje sve te varijable prolaze samo preko pojačanja K .

Budući da se serijski kompenzator nalazi u osnovnoj grani, povećava se red sustava. U našem slučaju to povećanje iznosi dva, tako da je sustav od izravnog trećeg reda kompenzacijom povećan na sustav petog reda. Moglo bi se pasti u zabludu pa zaključiti, budući da se dvije nule kompenzatora poništavaju s dva pola objekta, tako da gledano u cjelini sustav ostaje i dalje trećeg reda, da se stoga u biti ništa nije promijenilo. Netočnost takvog zaključka pokažimo na sustavima sa Sl.11.29.a. i b.

S obzirom na izlazno-ulazni odnos, sustavi a i b na Sl.11.29. su jednaki. Očito je, međjutim, da će uz jednaki ulazni signal varijabla x_2 sustava a biti deset puta veća od istoimene varijable sustava b. Kad bi sustavi bili dealno linearni, to zaista ne bi imalo nikakvog utjeva na njihov rad, ali budući da su u pravilu svi realni sustavi linearni samo u ograničenom području, mnogo brži rast jedne varijable od druge, može imati za posljedicu da jedna varijabla dođe u zasićenje, dok je s drugom iskorišten samo jedan dio linearnog područja. Na taj način sustav izla-



Sl.11.28. Nadomještanje nedostupnih varijabli serijskim kompenzatorom
 a) promještanje čvorišta x_2 u točku x_3 ; b) formiranje serijskog kompenzatora za varijablu x_2 ; c) formiranje serijskog kompenzatora za varijable x_2 i x_3



Sl.11.29. Dva frekvencijski neovisna sustava istih prijenosnih funkcija ali različite unutarnje strukture

zi iz linearnog područja i ne podliježe više zakonitostima linearnog rada, iako to iz izlazno-ulaznih odnosa nije vidljivo.

Vratimo se sada svojstvima sustava s linearnim kompenzatorom. U našem slučaju kompenzator je unio još dvije varijable stanja koja mogu sustav izbaciti iz područja linearnog rada. Potrebno je stoga i o tim varijablama voditi računa, da sustav ne bi došao u stanje nelinearnosti.

Ako u sustavu na Sl.11.28. nije dostupna, osim varijable x_2 ni varijabla x_3 , treba koeficijent $k_3=0,3$ uključiti u kompenzator. U tom slučaju prijenosna funkcija serijskog kompenzatora koji nadomješta varijable x_2 i x_3 glasi:

$$KG_c(s) = \frac{10(s+1)(s+3)}{s^2 + 7s + 14} \quad (11.76.)$$

Blokovski prikaz regulacijskog sustava s tim kompenzatorom predložen je na Sl.11.28.c.

Napomenimo da se ovaj serijski kompenzator može dobiti i primjenom funkcije $G_{eq}(s)$ na idealni i regulacijski sustav sa Sl. 11.20.b. Jednostavnom blokovskom preinakom izlazi da je:

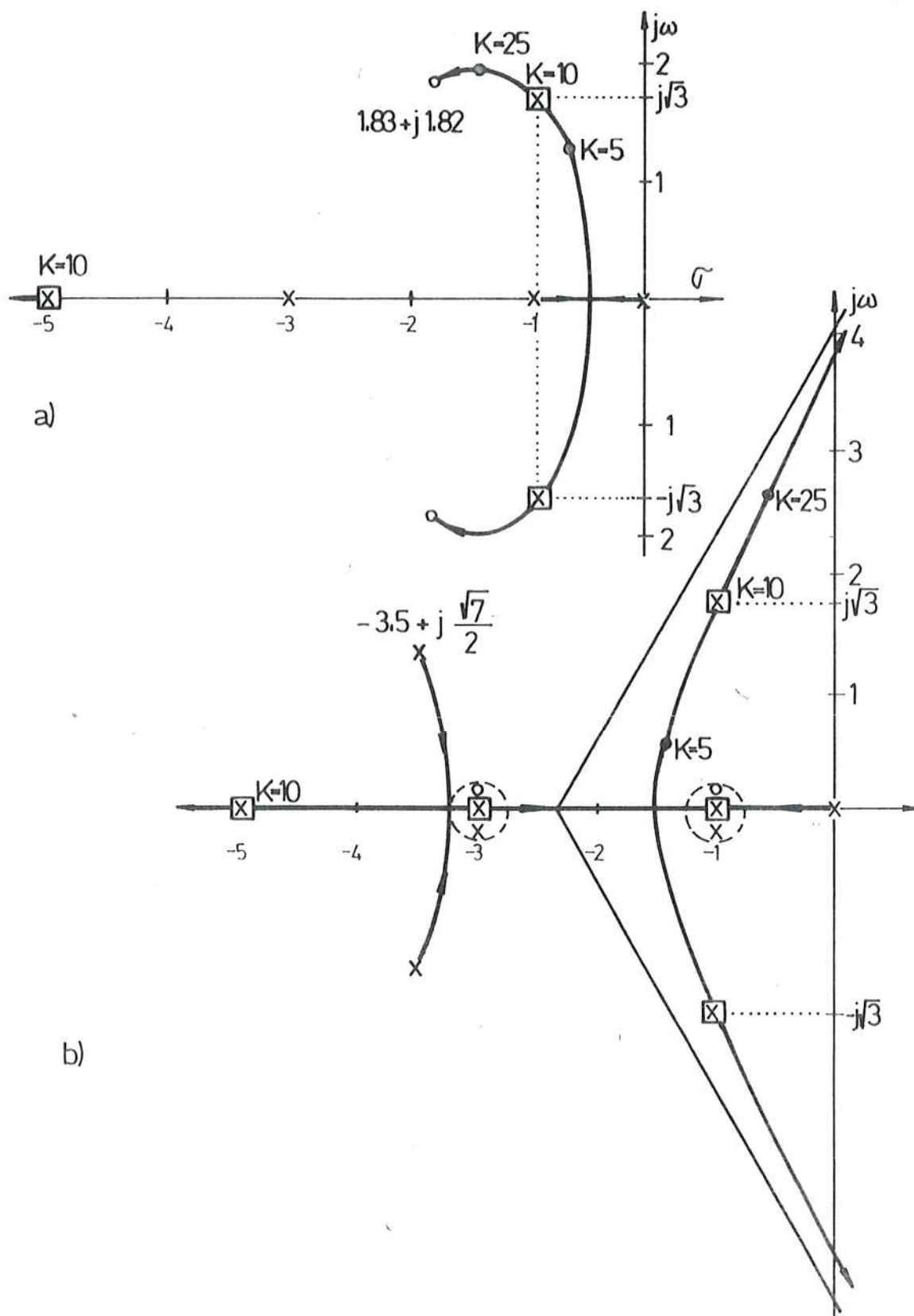
$$G_{eq}(s) = \frac{20}{s(s^2 + 7s + 14)} \quad (22.77.)$$

pa se uz poznatu prijenosnu funkciju objekta $G_p(s)$ iz relacije:

$$G_{eq}(s) = KG_c(s) G_p(s) , \quad (11.78.)$$

lako izračuna prijenosna funkcija serijskog kompenzatora $KG_c(s)$, koje je vrijednost već dana relacijom (11.76.)

Obratimo li malo pobliže pažnju na strukturu, a tim i na svojstva serijskog kompenzatora, vidimo da nule serijskog kompenzatora odgovaraju dvama polovima objekta tj. nule kompenzatora poništavaju polove objekta. S polovima kompenzatora se potom nadomještaju polovi objekta koji zadovoljavaju željenu prijenosnu funkciju. Ako bi objekt bio sedmog reda, trebalo bi sa šest nula kompenzatora poništiti šest polova objekta, da bi se mogla realizirati željena prijenosna funkcija. Općenito za



Sl.11.30. GMK regulacijskog sustava izvedenog na istom objektu s različitim kompenzacijama
 a) kompenzacija s minornom petljom
 b) kompenzacija sa serijskim kompenzatorom

objekt n -tog reda trebao bi stoga kompenzator s $n-1$ nulom i $n-1$ polom. Jedan od nedostataka serijskog kompenzatora je u tome što za kompenzaciju objekata višeg reda treba napraviti i kompenzator visokog reda, a to može osjetno poskupiti rješenje problema.

Nakon što smo se upoznali s dva načina izvodjenja kompenzatora, tj. s minornom petljom i sa serijskim kompenzatorom, potrebno ih je međusobno usporediti. U tom cilju na Sl.11.30.a. nacrtan je GMK sustava sa slike 11.24.b. za kompenzaciju s minornom petljom, a na Sl.11.30.b. GMK za kompenzaciju sustava sa Sl.11.28. sa serijskim kompenzatorom.

Primjećujemo da su nacrtani GMK upadljivo različiti, premda oba za pojačanje $K=10$ daju identično jednake vrijednosti polova regulacijskog sustava. Mijenjanjem pojačanja K od 5 do 25, stupanj prigušenja ζ na GMK sa Sl.11.30.a. mijenja se vrlo malo, a na GMK sa Sl.11.30.b. ta je promjena mnogo veća. Osim toga, GMK sustava s minornom petljom, sa Sl.11.30.a., za sve vrijednosti pojačanja ostaje na lijevoj strani s ravnine, što znači da sustav ostaje stabilan. GMK sustava sa serijskim kompenzatorom sa Sl.11.30.b., već za $K=48$ siječe imaginarnu os, što znači da sustav postaje nestabilan za sve vrijednosti $K>48$. Na temelju toga zaključujemo da je kompenzacija s minornom petljom bolja, kako u pogledu stabilnosti, tako i u pogledu osjetljivosti. Usprkos tome u mnogim slučajevima serijski kompenzatori, iako u nešto izmijenjenom obliku, nalaze svoju opravdanu primjenu.

11.5. ZAKLJUČAK

Za razliku od karakteristične jednoznačnosti analize koja isključuje izbor, sinteza zbog svoje višeznačnosti pruža neograničene mogućnosti kreativnog izbora. Jedna od brojnih mogućnosti je sinteza u prostoru stanja. U slučaju kad su sve varijable stanja dostupne, a osnovni i željeni sustav nemaju nula, sinteza se vrlo jednostavno može provesti s pomoću pojačanja K i koeficijenta povratne veze k_i . Češći je, međjutim, slučaj, da os-

novni ili željeni sustav ili oba imaju nula, ali se one ne podudaraju. U tom slučaju postoje postupci s pomoću kojih ih se eliminira, pomiče ili dodaje, a mogu se dodavati i polovi.

Zanimljivo je da se postupak sinteze u prostoru stanja može primijeniti i u slučajevima kad nisu dostupne varijable stanja i to s pomoću minorne petlje i s pomoću serijskog kompenzatora. Sinteza s minornom petljom je tehnički bolja, a sa serijskim kompenzatorom jeftinija.

12. SINTEZA TEMELJENA NA PRIJENOSNOJ FUNKCIJI

12.1. UVOD

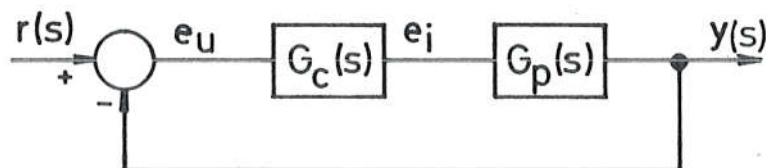
Podstrek napretka u životu općenito, pa tako i u inženjerskoj praksi, je kritički odnos prema svim dostignućima, makar na prvi pogled izgledala savršena. Nakon što smo upoznali postupke kompenzacije s varijablama stanja i u slučajevima kad varijable stanja nisu dostupne, umjesno je postaviti pitanje da li bi se ta kompenzacija mogla riješiti i na neki jeftiniji način. U nastavku ćemo pokazati da je ovo provokativno pitanje doista bilo umjesno, jer se do praktično istog rezultata zaista može doći jednostavnije i jeftinije.

Iz dosadašnjih razmatranja proizlazi da se kompenzacija s varijablama stanja može primijeniti u svim slučajevima, tj. i onda kad sve varijable stanja nisu dostupne. Međutim, pokazalo se da u mnogim slučajevima inženjerske prakse nije nužno voditi računa o svim varijablama stanja, a još češće da je dovoljno pratiti samo odnos izlaza i ulaza. U takvim slučajevima kompenzacija s varijablama stanja ispada suvišan luksuz, tim više što se na mnogo jednostavniji način može dobiti odziv, koji uistinu ne odgovara potpuno željenom odzivu, ali ga u zadovoljavajućoj mjeri aproksimira, tj. od njega odstupa u granicama dopuštene tolerancije. Jedan od načina za takvo izvodjenje kompenzacije je ugradnja kompenzatora, kod kojih se kompenzacijsko djelovanje temelji na faznom učinku. Primjenjuju se tri vrste takvih kompenzatora i to:

1. kompenzatoris faznim zaostajanjem, ili proporcionalno integracijski (PI) kompenzatori;

2. kompenzatori s faznim prethodjenjem, ili proporcionalno derivacijski (PD) kompenzatori i
3. kompenzatori s faznim zaostajanjem i prethodjenjem, ili proporcionalno integracijsko derivacijski (PID) kompenzatori.

Može ih se ugraditi u seriju ili paralelno s objektom, a mogu biti ugrađeni i paralelno samo s jednim dijelom objekta. Način ugrađnje ovisi o ekonomičnosti izvedbe. Zbog istog razloga, tj. budući da je teorijska obradba serijske kompenzacije jednostavnija pa time i ekonomičnija, navedene kompenzatore ćemo proučiti u serijskom djelovanju prema spoju na Sl.12.1.



Sl.12.1. Serijska kompenzacija s jediničnom povratnom vezom

Postupke kompenzacije se može podijeliti na grafičke i algebarske. Grafički postupci ne zahtijevaju nikakvu posebnu opremu, ali relativno dugo traju, za razliku od algebarskih postupaka koji kratko traju, ali u pravilu zahtijevaju primjenu digitalnih računala. Mogućnosti su im, međjutim, otprilike jednake, a i cijena je slična, iako po strukturi različita. Naime kod grafičkih metoda pretežni dio cijene ide na osobni rad, a kod algebarskih na rad računala.

12.2. KOMPENZATORI

12.2.1. PI kompenzatori i kompenzatori s faznim zaostajanjem

Ako prijelazni odziv sustava zadovoljava, ali je pogreška ustaljenog stanja prevelika, moguće ju je eliminirati povećanjem vrsti sustava. Pri tome treba paziti da se znatnije ne utječe na dominantne polove sustava.

To se može postići proporcionalno-integracijskim djelovanjem na signal pogreške. Ako sa e_u označimo ulazni signal pogreške, a sa e_i izlaz, kako je pokazano na Sl.12.1., analitički izraz tog djelovanja glasi:

$$e_i(t) = K_{pr} e_u(t) + K_{in} \int e_u(t) dt \quad (12.1.)$$

a u donjem području:

$$e_i(s) = (K_{pr} + \frac{K_{in}}{s}) e_u(s) \quad (12.2.)$$

Uz $1/T_i = K_{in}/K_{pr}$ prijenosna funkcija sklopa s proporcionalno integracijskim djelovanjem, odnosno *proporcionalno integracijskog (PI) kompenzatora* glasi:

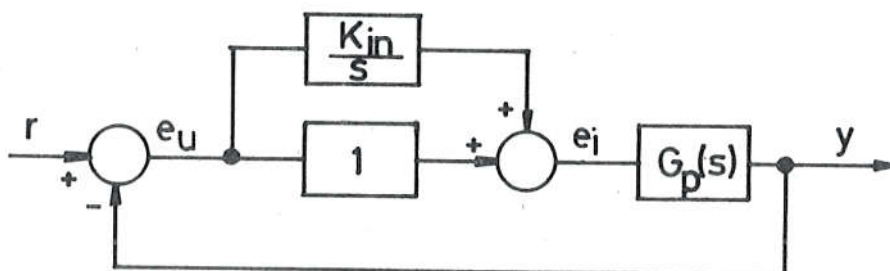
$$G_c(s) = \frac{e_i(s)}{e_u(s)} = K_{pr} (1 + \frac{1}{T_{in}s}) \quad (12.3.)$$

a za $K_{pr}=1$:

$$G_c(s) = 1 + \frac{1}{T_{in}s} = \frac{s + \frac{1}{T_{in}}}{s} = \frac{s + K_{in}}{s} \quad (12.4.)$$

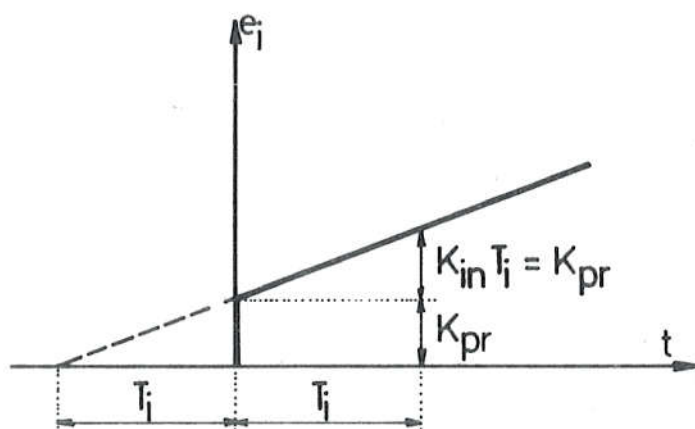
Blokovski prikaz PI kompenzatora u serijskoj kompenzaciji nacrtan je na Sl.12.2. Sam kompenzator je gradjen od aktivnih elemenata, a sastoji se od paralelnog spoja integratora i operacijskog pojačala.

K_{pr} predstavlja proporcionalnu konstantu, a K_{in} integracijsku konstantu. U slučaju odskočne pobude vremenska konstanta T_{in} predstavlja vrijeme potrebno da signal e_i pod utjecajem integra-

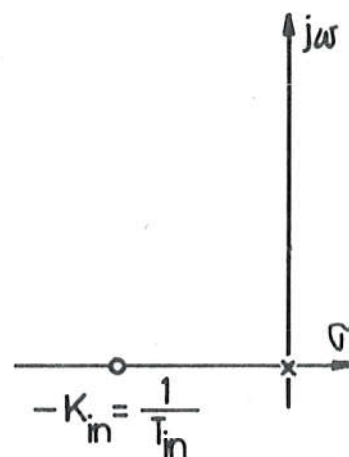


Sl.12.2. PI kompenzator u serijskoj kompenzaciji

gracijskog djelovanja naraste na dvostruku vrijednost koju je u početku pobude imao pod utjecajem proporcionalnog djelovanja. Sa Sl.12.3.a. proizlazi da se proporcionalno integracijsko djelovanje u vremenu t podudara s čistim integracijskim djelovanjem koje je započelo T_{in} ranije.



a)



b)

- Sl.12.3.a) Proporcionalno integracijsko djelovanje na odskočnu pobudu
 b) Položaj singularnih točaka PI kompenzatora u s ravni

Dodavanjem PI kompenzatora u seriji s objektom, kako je prikazano na Sl.12.1., kompenzirani objekt $G(s)=G_o(s)$ postaje sustav nenulte vrsti i, dosljedno tome, konstanta pogreške poma-
 ka poprima beskonačnu vrijednost, a pogreška ustaljenog stanja pomaka postaje jednaka nuli.

Na Sl.12.3.b. pokazan je položaj singularnih točaka PI kompenzatora. Pol u ishodištu utječe na povećanje vremena odziva. Da bi se taj sporedni štetni utjecaj sveo na što je moguće manju mjeru, nulu kompenzatora treba približiti polu, a to znači da treba izabrati veliku vremensku konstantu T_{in} .

Kompensator s faznim zaostajanjem je sličnog učinka, ali je građen s pasivnim komponentama. Njegova prijenosna funkcija prema oznakama na Sl.12.4. glasi:

$$\frac{e_i(s)}{e_u(s)} = G_c(s) = \frac{1 + R_2 C_2 s}{1 + (R_1 + R_2) C_2 s}, \quad (12.5.)$$

$$\text{koja uz } T_2 = R_2 C_2 \quad \text{i} \quad T_1 = (R_1 + R_2) C_2 \quad (12.6.)$$

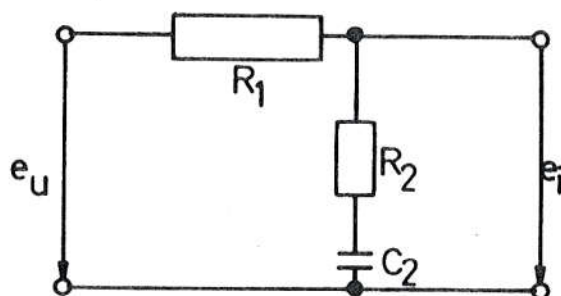
prelazi u:

$$G_c(s) = \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s} \quad (12.7.)$$

$$\text{a uz } \frac{1}{T_1} = \omega_1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{T_2} = \omega_2 \quad \text{u:}$$

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} = \frac{1 + \frac{s}{\alpha \omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \quad (12.8.)$$

Za ovaj kompenzator je značajno da je $T_1 > T_2$ odnosno $\omega_2 > \omega_1$ ili $\alpha > 1$.

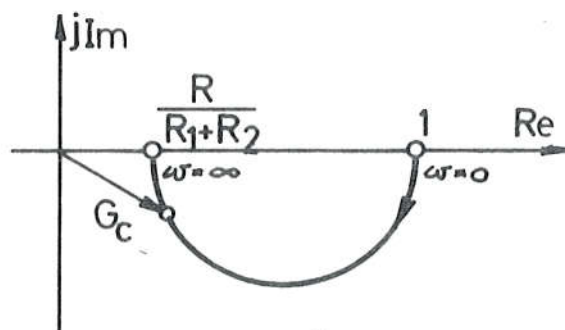


Sl.12.4. Električka izvedba kompenzatora s faznim zaostajanjem

Zamijeni li se s sa $j\omega$ u jednažbi (12.5.) dobije se:

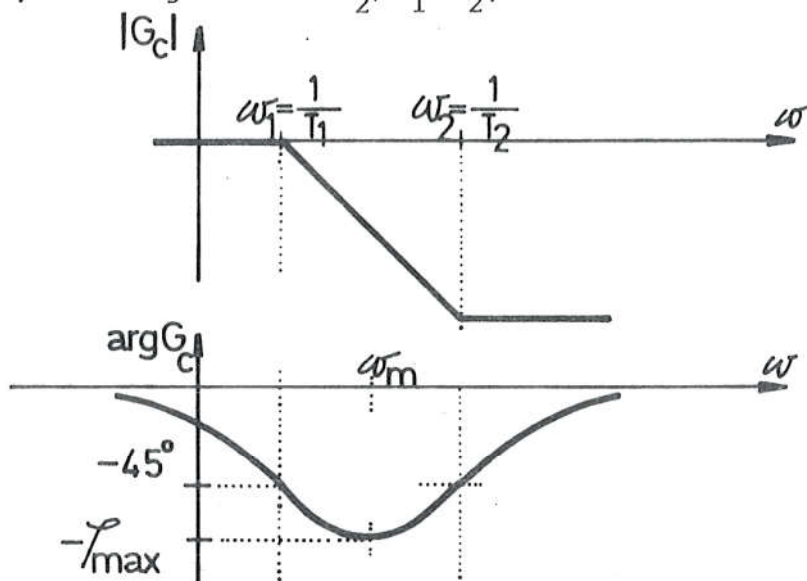
$$G_c(s) = \frac{1 + R_2 C_2 j\omega}{1 + (R_1 + R_2) C_2 j\omega} \quad (12.9.)$$

Računanjem prijenosne funkcije (12.9.) za frekvencije od 0 do ∞ , dobiju se vrijednosti za crtanje Nyquistovog dijagrama koji je prikazan na Sl.12.5.



Sl.12.5. Nyquistov dijagram kompenzatora s faznim zaostajanjem

Iz tog Nyquistovog dijagrama se vidi da je fazni kut prijenosne funkcije kompenzatora s faznim zaostajanjem za sve vrijednosti frekvencije $0 \leq \omega \leq \infty$ negativan i da mu se modul smanjuje od 1 za $\omega=0$, do vrijednosti R_2/R_1+R_2 , za $\omega=\infty$.



Sl.12.6. Bodeovi dijagrami kompenzatora s faznim zaostajanjem

Bodeovi dijagrami kompenzatora s faznim zaostajanjem prikazani su na Sl.12.6. Budući da je $\omega_2 \leq 10\omega_1$, iz amplitudnog Bodeovog dijagrama proizlazi da prigušenje koje ovaj kompenzator unosi na frekvencijama višim od ω_1 može iznositi i do 20 dB. Maksimalno fazno zaostajanje nastaje između frekvencija ω_1 i ω_2 , a može se izračunati iz izraza za fazni kut:

$$\phi = \arctan \frac{\omega}{\omega_2} - \arctan \frac{\omega}{\omega_1} \quad (12.10.)$$

To se radi standardnim postupkom traženja maksimuma, kako slijedi:

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{\frac{1}{\omega_2}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\omega_1}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} = 0 \quad (12.11.)$$

Svodjenjem na zajednički nazivnik dobije se:

$$\frac{1}{\omega_2} + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \frac{1}{\omega_1} = 0 ,$$

a odatle izraz za frekvenciju faznog maksimuma:

$$\omega_m = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (12.12.)$$

Uvrštenjem vrijednosti za ω_m u jednadžbu (12.10.) dobije se izraz za maksimum faznog kuta:

$$\phi_{max} = \arctan \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_2} - \arctan \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_1}$$

odnosno:

$$\phi_{max} = \arctan \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} - \arctan \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (12.13.)$$

Na tablici 12.1. iskazane su vrijednosti maksimalne faze za nekoliko odnosa ω_2/ω_1 .

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	1	2	4	8	10
$\gamma_{\max}$	0	-19,4	-36,9	-49,8	-55,0

Tablica 12.1. Vrijednosti maksimalne faze u ovisnosti o odnosu
lomnih frekvencija kompenzatora s faznim zaostajanjem

12.2.2. PD kompenzatori i kompenzatori s faznim prethodjenjem

Ako pogreška ustaljenog stanja zadovoljava, ali ne zadovoljava prijelazni odziv, korekcija se može izvršiti tako da se na signal pogreške utječe proporcionalno derivacijskim djelovanjem. Ako sa e_u označimo ulazni signal pogreške, a sa e_i izlazni signal pogreške, kako je pokazano na Sl.12.7. analitički izraz za to djelovanje glasi:

$$e_i(t) = K_{pr} e_u(t) + K_{de} \frac{d e_u(t)}{dt}, \quad (12.14.)$$

a u danjem području:

$$e_i(s) = (K_{pr} + K_{de} s) e_u(s) \quad (12.15.)$$

Uz $K_{de} = K_{pr} T_{de}$ prijenosna funkcija sklopa s proporcionalno derivacijskim djelovanjem odnosno proporcionalno derivacijskog (PD) kompenzatora glasi:

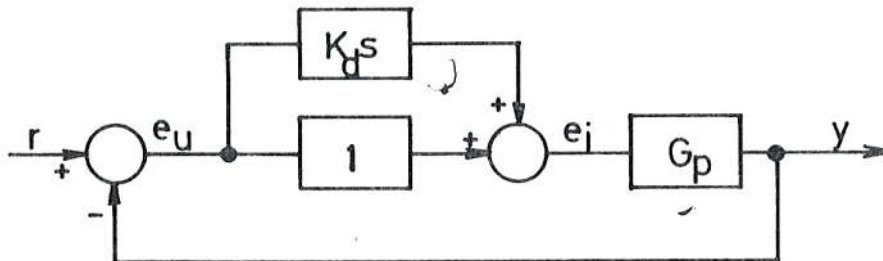
$$G_c(s) = \frac{e_i(s)}{e_u(s)} = K_{pr} (1 + T_{de} s), \quad (12.16.)$$

a uz $K_{pr} = 1$:

$$G_c(s) = 1 + T_{de} s \quad (12.17.)$$

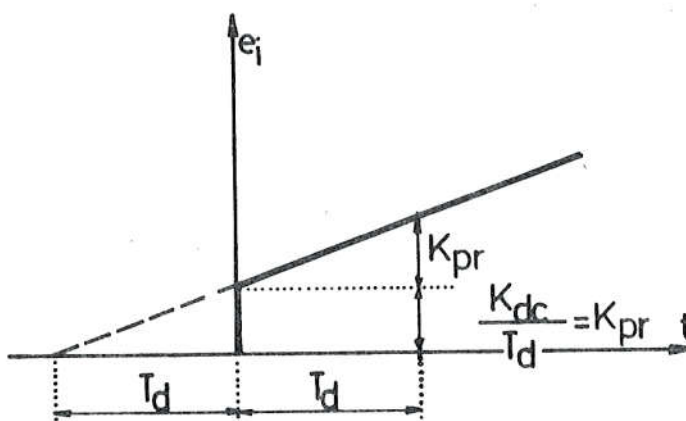
Blokovski prikaz PD kompenzatora u serijskoj kompenzaciji nacrtan je na Sl.12.7. Sam kompenzator je gradjen od aktivnih elemenata, a sastoji se od paralelnog spoja jednog derivatora i jed-

nog operacijskog pojačala.



Sl.12.7. PD kompenzator u serijskoj kompenzaciji

K_{pr} predstavlja proporcionalnu konstantu, a K_{de} derivacijsku konstantu. U slučaju uzlazne pravčaste pobude vremenska konstanta T_{de} predstavlja vrijeme potrebno da signal e_i pod utjecajem proporcionalnog djelovanja naraste na dvostruku vrijednost koju je na početku pobude skokovito poprimio pod utjecajem derivacijskog djelovanja. Sa Sl.12.8. proizlazi da se proporcionalno derivacijsko djelovanje podudara s proporcionalnim djelovanjem koje je započelo T_{de} ranije.



Sl.12.8. Proporcionalno derivacijsko djelovanje na pravčastu uzlaznu pobudu

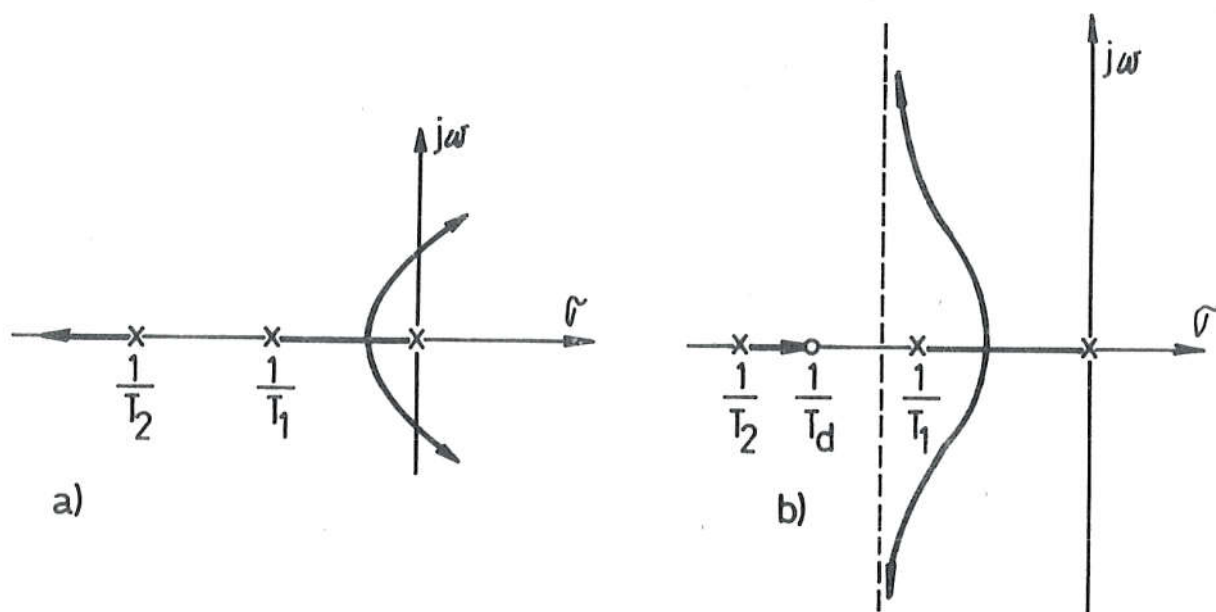
Učinak ovog kompenzatora u serijskoj kompenzaciji prema Sl.12.7. ilustrirat ćemo na jednom sustavu trećeg reda, kojeg prijenosna funkcija glasi:

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})} \quad (12.18.)$$

a GMK je prikazano na Sl.12.9.a. Sa slike se vidi da će taj sustav koji je za male vrijednosti pojačanja stabilan, ubrzo s povećanjem pojačanja postati nestabilan. Doda li se u osnovnoj grani u seriju s objektom $G_p(s)$ proporcionalno derivacijski kompenzator, prijenosna funkcija kompenziranog objekta glasi:

$$G(s) = G_e(s)G_p(s) = \frac{K(s + \frac{1}{T_d})}{s(s + \frac{1}{T_1})(1 + \frac{1}{T_2})}, \quad (12.19.)$$

a GMK poprima oblik prikazan na Sl.12.9.b. Sa slike se vidi da je PD kompenzator stabilizirao sustav za sve vrijednosti pojačanja od 0 do ∞ .

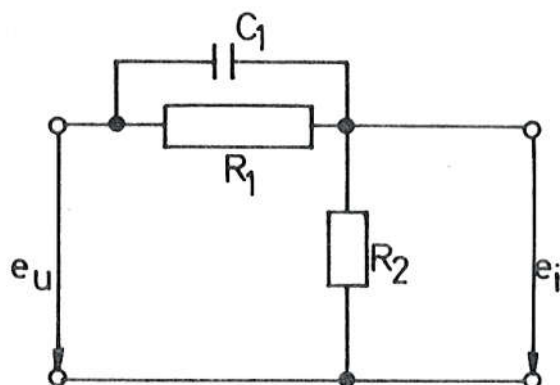


Sl.12.9.a) GMK sustava (25)

b) GMK kompenziranog sustava (19)

Kompensator s faznim prethodjenjem je sličnog učinka, ali je gradjen s pasivnim komponentama. Njegova prijenosna funkcija u električkoj izvedbi prema oznaka na Sl.12.10. glasi:

$$\frac{e_i(s)}{e_u(s)} = G_c(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) R_1 C_1 s}, \quad (12.20.)$$



Sl.12.10. Kompensator s faznim prethodjenjem

a uz: $T_1 = R_1 C_1$ i $T_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 C_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} T_1$

može se pisati u obliku:

$$G_c(s) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}, \quad (12.21.)$$

a uz: $\frac{1}{T_1} = \omega_1$ i $\frac{1}{T_2} = \omega_2 = \alpha \omega_1$

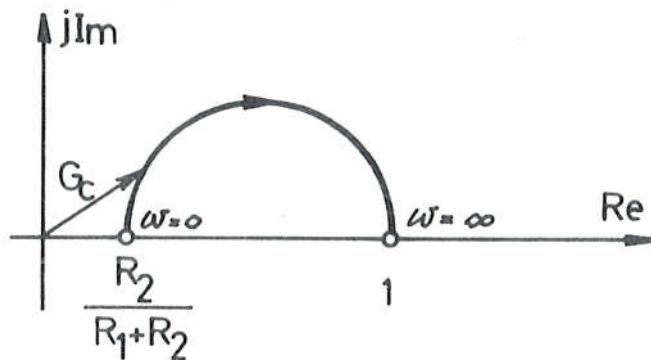
$$G_c(s) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_2}} = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\alpha \omega_1}} \quad (12.22.)$$

Za ovaj kompensator je značajno da je vremenska konstanta brojnička veća od vremenske konstante nazivnika $T_1 > T_2$ odnosno $\omega_1 < \omega_2$ i $\alpha > 1$.

Prijelazom od s na $j\omega$ u jednadžbi (12.20.) dobije se:

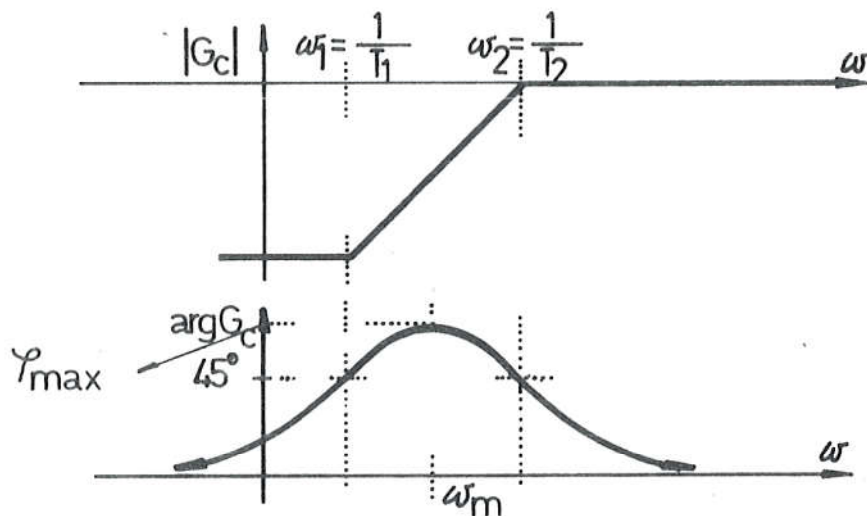
$$G_c(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1 C_1 j\omega}{1 + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) R_1 C_1 j\omega}, \quad (12.23.)$$

a odatle Nyquistov dijagram na Sl.12.11.



Sl.12.11. Nyquistov dijagram kompenzatora s faznim prethodjenjem

Iz dijagrama na Sl.12.11. se vidi da je fazni kut kompenzatora s faznim prethodjenjem za sve vrijednosti frekvencije $0 < \omega < \infty$ pozitivan i da mu se modul povećava od vrijednosti R_2/R_1+R_2 za $\omega=0$, do jedinice za $\omega=\infty$.



Sl.12.12. Bodeovi dijagrami kompenzatora s faznim prethodjenjem

Iz Bodeovih dijagrama kompenzatora s faznim prethodjenjem na Sl.12.12. proizlazi da prigušenje koje ovaj kompenzator unosi na frekvencijama manjim od ω_2 može iznositi i do 20 dB. Maksimalno fazno prethodjenje koje se i kod ovog kompenzatora nalazi u području između ω_1 i ω_2 izračunava se na isti način kao i kod kompenzatora s faznim zaostajanjem i dobije se da frekvencija maksimalne faze iznosi:

$$\omega_m = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (18.24.)$$

a maksimalni fazni kut:

$$\phi_{max} = \arctg \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} - \arctg \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \quad (12.25.)$$

Vrijednosti faze iz Tablice 12.1. za odgovarajuće odnose ω_2/ω_1 vrijede i u ovom slučaju samo s obrnutim predznakom.

12.2.3. PID kompenzatori i kompenzatori s faznim zaostajanjem i prethodjenjem

Ako se hoće izvršiti korekcija pogreške ustaljenog stanja i prijelaznog odziva može se primijeniti *proporcionalno-integracijsko-derivacijski (PID) kompenzator*. On tako djeluje na ulaznu pogrešku da je izlaz istovremeno proporcionalan veličini pogreške, njenoj derivaciji i integralu. Algebarski izraz tog djelovanja glasi:

$$e_i(t) = K_{pr} e_u(t) + K_{in} \int e_u(t) dt + K_{de} \frac{de_u(t)}{dt}, \quad (12.26.)$$

a u donjem području:

$$e_i(s) = (K_{pr} + \frac{K_{in}}{s} + K_{de} s) e_u(s), \quad (12.27.)$$

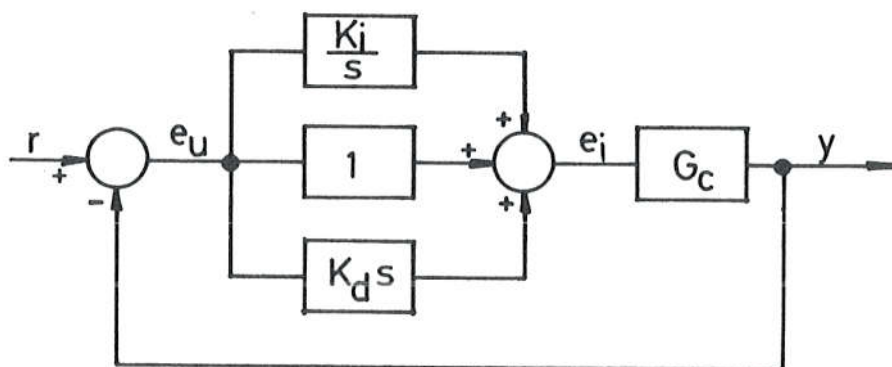
ili:

$$e_i(s) = K_{pr} (1 + \frac{1}{T_{in}s} + T_{de}s) e_u(s)$$

Uz $K_{pr}=1$ prijenosna funkcija, stoga, izlazi:

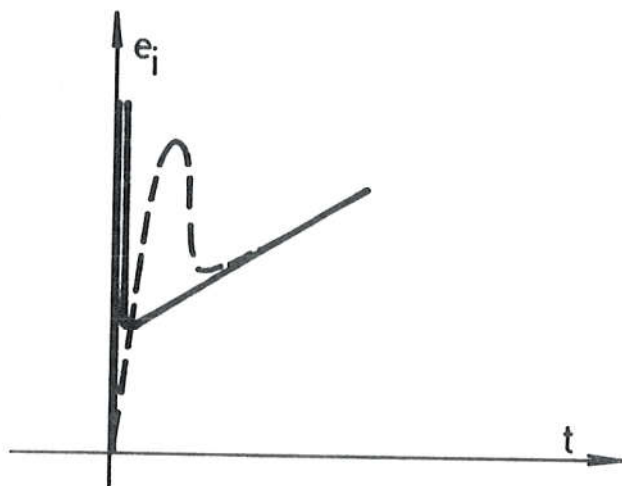
$$G_c(s) = \frac{e_i(s)}{e_u(s)} = 1 + \frac{K_{in}}{s} + K_{de} s, \quad (12.28.)$$

a blokovski prikaz serijske kompenzacije nacrtan je na Sl.12.13. Sam kompenzator je gradjen od aktivnih elemenata, a sastoji se od paralelnog spoja integratora, derivatora i operacijskog pojačala.



Sl.12.13. PID kompenzator u serijskoj kompenzaciji

Na Sl.12.14. punom linijom prikazan je idealni odziv, a crtkanom linijom realni odziv ovog kompenzatora na odskočnu pobudu. Kako se na slici može vidjeti PID kompenzator sjedinjuje u sebi osobine PI i PD kompenzatora, pa tako uspijeva eliminirati pogrešku ustaljenog stanja i istovremeno korelacijski djelovati na prijelazni dio odziva.



Sl.12.14. Odziv PID kompenzatora na odskočnu pobudu

Kompenzator s faznim zaostajanjem i prethodjenjem ima učinak sličan učinku PID kompenzatora. Gradjen je s pasivnim komponentama kao serijski spoj kompenzatora s faznim zaostajanjem i kompenzatora s faznim prethodjenjem. Njegova prijenosna funkcija u električkoj izvedbi prema oznakama na Sl.12.15.a., uz $R_1^* = \beta R_1$, $R_2^* = R_1$, $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$ i $\beta = (R_1 + R_2)/R_1$, glasi:

$$\frac{e_i(s)}{e_u(s)} = G_c(s) = \frac{(1 + \frac{R_1^* C_1}{\beta} s)(1 + R_2^* C_2 s)}{(1 + R_1^* C_1 s)(1 + \frac{R_2^* C_2}{\alpha} s)}, \quad (12.29.)$$

a uz $T_1 = C_1 R_1^*$ i $T_2 = C_2 R_2^*$:

$$G_c(s) = \frac{(1 + \frac{T_1}{\beta} s)(1 + T_2 s)}{(1 + T_1 s)(1 + \frac{T_2}{\alpha} s)}, \quad (12.30.)$$

gdje je: $\alpha > 1$, $\beta > 1$ i $\frac{T_1}{\beta} \geq T_2$

Uz $\frac{1}{T_1} = \omega_1$ i $\frac{1}{T_2} = \omega_2$ jednažba (12.30.) poprima oblik:

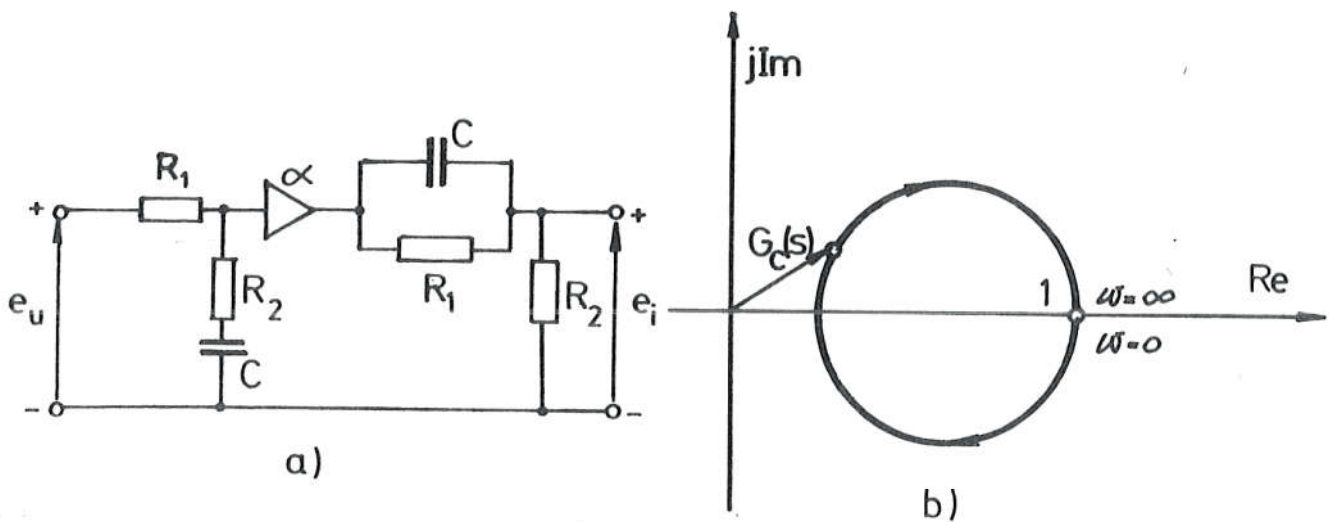
$$G_c(s) = \frac{(1 + \frac{s}{\omega \beta_1})(1 + \frac{s}{\omega_2})}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + \frac{s}{\alpha \omega_2})} \quad (12.31.)$$

Prijelazom od s na $j\omega$ u jednažbi (12.31.) dobije se:

$$G_c(s) = \frac{(1 + \frac{j\omega}{\beta \omega_1})(1 + \frac{j\omega}{\omega_2})}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})(1 + \frac{j\omega}{\alpha \omega_2})}, \quad (12.32.)$$

a odatle Nyquistov dijagram na Sl.12.15.

Iz dijagrama se vidi da izlazni signal kasni u fazi na nižim frekvencijama, a prethodi na višim frekvencijama. Vidljivo je, nadalje, da se modul smanjuje u srednjem području frekvencije u odnosu na više i više frekvencije, kada teži jediničnoj vrijednosti.



Sl.15. a) Kompenzator s faznim zaostajanjem i prethodjenjem;
b) Nyquistov dijagram kompenzatora s faznim zaostajanjem i prethodjenjem

12.3. GRAFIČKI POSTUPCI SINTEZE

12.3.1. Specificiranje željene prijenosne funkcije

Postoji nekoliko načina za određivanje vrijednosti kompenzatora u sintezi serijskom kompenzacijom. Ovdje ćemo obraditi postupak primjenom Bodeovog dijagrama. U tom slučaju se radi s prijenosnom funkcijom petlje (otvorena petlja) za razliku od do sada primijenjenih postupaka kompenzacije gdje se radilo s prijenosnom funkcijom regulacijskog sustava (zatvorena petlja). Radi toga, prije nego što se pristupi sintezi potrebno je zadane željene podatke izraziti u obliku specifikacija željene funkcije petlje. Specificirati se mogu:

1. niskofrekvencijska asimptota,
2. pojačanje na srednjim frekvencijama ili frekvencija kritične amplitude,
3. visokofrekvencijsko prigušenje i
4. fazna pričuva ili nadvišenje frekvencijskog odziva.

Niskofrekvencijska asimptota karakterizira vrst prijenosne funkcije petlje, a budući da o vrsti funkcije petlje ovisi pogreška ustaljenog stanja, visokofrekvencijskom asimptotom se specificira to svojstvo sustava. Uzmimo npr. da želimo da pogreška ustaljenog stanja pomaka regulacijskog sustava bude jednaka nuli, a da pogreška ustaljenog stanja brzine iznosi 0,2%. U tom slučaju iz relacije za pogrešku ustaljenog stanja pomaka sustava s jediničnom negativnom povratnom vezom, koja glasi:

$$e_p^{(\infty)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} KG_p(s)} \quad (12.33.)$$

za $e_p^{(\infty)} = 0$ izlazi:

$$\lim_{s \rightarrow 0} KG_p(s) = \infty, \quad (12.34.)$$

odnosno:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{KB(\infty)}{s^l N(s)} = \infty, \quad (12.35.)$$

a odatle zaključujemo da će jednadžba biti zadovoljena za sve $l \geq 1$, tj. pogreška ustaljenog stanja pomaka će biti jednaka nuli za sustave prve ili više vrsti.

Iz relacije za pogrešku ustaljenog stanja brzine koja glasi:

$$e_v^{(\infty)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s KG_p(s)}, \quad (12.36.)$$

za $e_v^{(\infty)} = 0,002$ izlazi:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s KG_p(s) = \frac{1}{0,002} = 500,$$

odnosno:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K B(s)}{s N(s)} = K_{st} = 500 \quad (12.37.)$$

Znači da za pogrešku ustaljenog stanja brzine od 0,002 sustav prve vrsti treba imati statičku osjetljivost $K_{st}=500$.

S pojačanjem na srednjim frekvencijama određuje se korisni frekvencijski pojas prijenosne funkcije regulacijskog sustava. Pretpostavimo da su u referentnom signalu zanemarive frekvencije iznad 1 rad/s, a da se traži da na frekvencijama do 1 rad/s pogreška ustaljenog stanja ne bude veća od 2 % ulaznog sinusnog signala.

Da bi ovaj zahtjev izrazili pojačanjem na srednjim frekvencijama krenimo od relacije pogreške ustaljenog stanja, koje za jediničnu negativnu povratne vezu glasi:

$$\frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + \frac{KG_p(s)}{p}} \quad (12.38.)$$

Za frekvenciju referentnog signala modul prijenosne funkcije petlje treba biti što veći, stoga za:

$$|KG_p(s)| \gg 1 \quad (12.39.)$$

vrijedi približna relacija:

$$\left| \frac{e(s)}{r(s)} \right| \approx \frac{1}{|KG_p(s)|} \quad (12.40.)$$

S obzirom na zahtjev da pogreška ustaljenog stanja sinusnog signala do 1 rad/s ne smije biti veća od 2% to znači da je:

$$\left| \frac{e(j\omega)}{r(j\omega)} \right| \approx \frac{1}{|KG_p(s)|} \leq 0,02 \text{ za } \omega \leq 1 \text{ rad/s}$$

a odatle:

$$|KG_p(s)| \geq \frac{1}{0,02} = 50 \text{ za } \omega \leq 1 \text{ rad/s}$$

Frekvencijski pojas se može odrediti i s pomoću frekvencije kritične amplitude. U tom cilju napišimo prijenosnu funkciju susta-

va s jediničnom povratnom vezom:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s)} \quad (12.41.)$$

Na frekvenciji kritične amplitude modul prijenosne funkcije petlje je jedinica:

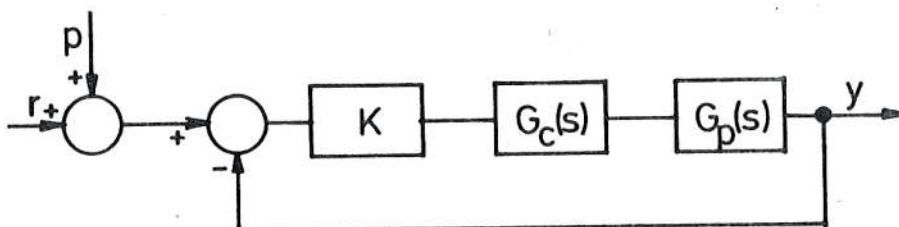
$$|KG_p(j\omega_I)| = 1 \quad (12.42.)$$

pa je stoga:

$$\left| \frac{y(j\omega_I)}{r(j\omega_I)} \right| = \frac{|KG_p(j\omega_I)|}{|1 + KG_p(j\omega_I)|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (12.43.)$$

Budući da je frekvencijski pojas određen frekvencijom na kojoj modul sustava spadne na vrijednost $1/\sqrt{2}$ svoje vrijednosti na nultoj frekvenciji, proizlazi da za sustave s jediničnom povratnom vezom krekvencija kritične amplitude zadovoljavajuće aproksimira frekvencijski pojas regulacijskog sustava.

S visokofrekvencijskim prigušenjem se sprečava da šum na izlazu ne poprimi vrijednost veću od dopuštene. Uzmimo da na ulaz regulacijskog sustava sa Sl.12.16., osim referentnog signala r djeluje i poremećajni signal šuma p , a da se traži da odziv poremećajnog signala za frekvencije iznad 1 k rad/s ne prijedje 1% svoje pobude.



Sl.12.16. Regulacijski sustav s poremećajnim signalom šuma na ulazu

Koristeći se principom superpozicije obratimo pažnju samo na učinak poremećajnog signala. Prijenosna funkcija u odnosu na signal

šuma glasi:

$$\frac{y(s)}{p(s)} = \frac{K G_c(s) G_p(s)}{1 + K G_c(s) G_p(s)} = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)}, \quad (12.44.)$$

a uz uvjet:

$$\left| \frac{y(s)}{p(s)} \right| \leq 0,01 \quad \text{za } \omega \geq 1 \text{ k rad/s},$$

odnosno:

$$\left| \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} \right| \leq 0,01,$$

izlazi da prijenosna funkcija petlje treba biti mnogo manja od jedinice, tj.:

$$|K G(s)| \ll 1,$$

pa se stoga relacija (12.44.) može aproksimirati relacijom:

$$\left| \frac{y(s)}{p(s)} \right| \approx |K G(s)|, \quad (12.45.)$$

a odatle se može zaključiti da modul prijenosne funkcije petlje ne smije biti veći od 0,01 tj.

$$|K G(s)| \leq 0,01 \quad \text{za } \omega \geq 1 \text{ k rad/s} \quad (12.46.)$$

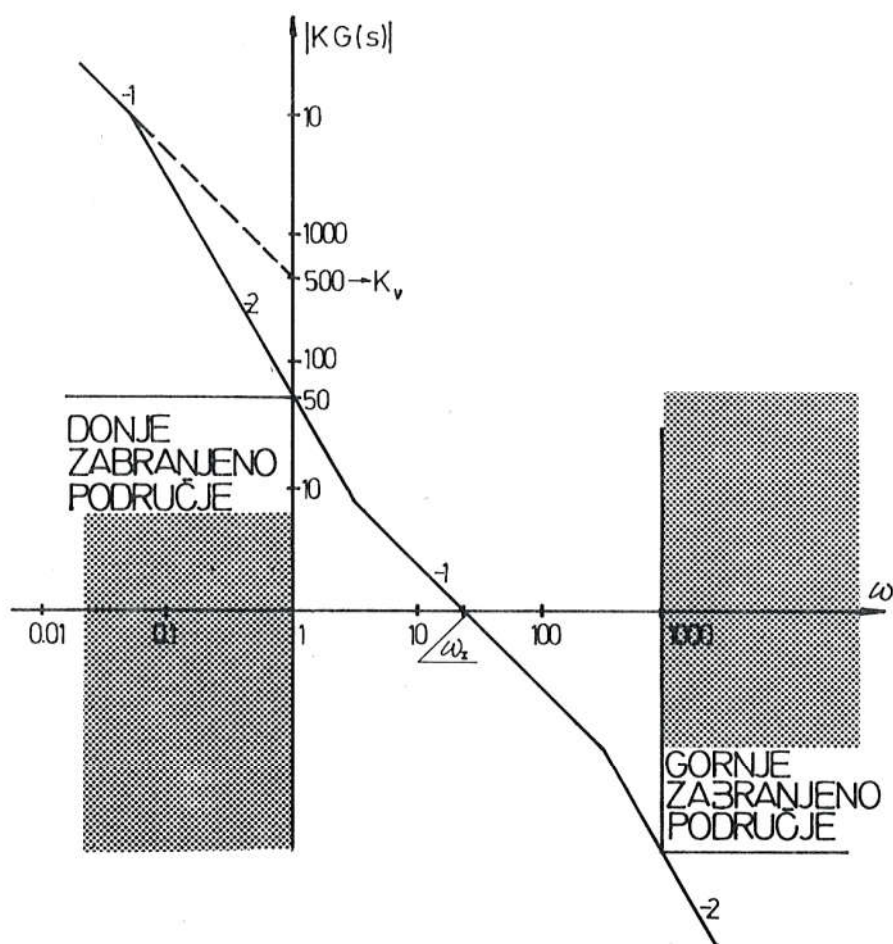
Na taj način smo zahtjev prigušenja šuma, koji se postavlja na regulacijski sustav, izrazili pojačanjem petlje.

Podaci za niskofrekvencijsku asimptotu, za pojačanje na niskim frekvencijama i za visokofrekvencijsko prigušenje, označeni su na log log papiru za crtanje amplitudnog Bodeovog dijagrama na Sl. 12.17.

Ordinata niskofrekvencijske asimptote sustava prve vrsti na jediničnoj frekvenciji predstavlja konstantu brzine. Pojačanje na srednjim frekvencijama, u našem slučaju na frekvenciji od 1 rad/s, određuje *donje zabranjeno područje*. Frekvencija kritične ampli-

tude određena je točkom presjeka Bodeove krivulje s apscisnom osi. I konačno visokofrekvencijsko prigušenje određuje *gornje zabranjeno područje*.

Budući da ucrtani Bodeov dijagram na Sl.12.17. zadovoljava sve postavljene uvjete, tj. konstantu pomaka $K_p = \infty$, konstantu brzine $K_v = 500$, i ne zadiru ni u donje ni u gornje zabranjeno područje, očito je da takav dijagram predstavlja jedno od rješenja postavljenog problema.



Sl.12.17. Podaci za konstrukciju Bodeovog dijagrama funkcije petlje

Osim s podacima ustaljenog stanja, o kojima je do sada bilo govora, ponašanje regulacijskog sustava se određuje i s podacima prijelaznog stanja. U ovom drugom slučaju se koristimo relacijama parametara prijelaznog stanja sustava drugog reda kao

što su $PN=f(\zeta)$, $\gamma=f(\zeta)$, $M_m=f(\zeta)$ itd. Budući, međjutim, da se svi sustavi višeg reda ne podudaraju jednako sa sustavom drugog reda, sve dobijene rezultate treba provjeriti, da se vidi u kojoj mjeri zadovoljavaju.

Prijelazno stanje može biti uvjetovano bilo kojim od parametara prijelaznog stanja, kao što su: perioda oscilacija T_d vrijeme nadvišenja T_n , postotno nadvišenje PN , vrijeme smirenja T_s , stupanj prigušenja ζ i fazna pričuva γ . Izvodi li se sinteza s pomoću Bodeovog dijagrama, najprikladnije je zadani podatak pretovriti u faznu pričuvu. Ako se pri tome zahtijeva određeno frekvencijsko nadvišenje, ponašanje dobijenog sustava treba provjeriti Nyquistovim dijagramom s M krugovima. Ako se sinteza izvodi s pomoću Nicholsovog dijagrama, podatke je najbolje pretvoriti u faznu pričuvu ili frekvencijsko nadvišenje.

Ponašanje u prijelaznom stanju može se aproksimirati i sa stupnjem prigušenja ζ dominantnog konjugirano kompleksnog para polova. U tom slučaju je sintezu najprikladnije izvesti s GMK. Uostalom, svaku sintezu, bez obzira na koji je način provedena, preporučljivo je na kraju provjeriti s GMK, da se vidi kako se sustav ponaša u uvjetima promjenljivih parametara.

Nakon što je provjera izlazno-ulaznog odnosa u cjelini obavljena i s GMK provjerena, treba se još uvjeriti da se i ostale varijable stanja kreću unutar linearnih ograničenja fizičkog sustava.

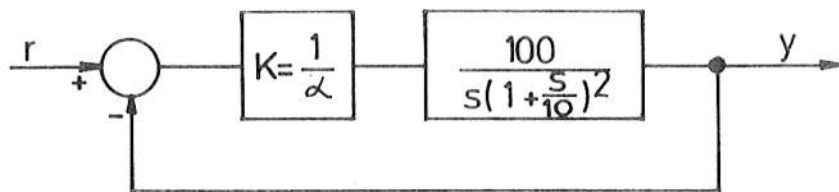
12.3.2. Kompenzacija s faznim zaostajanjem

Poboljšanje stabilnosti dinamičkih sustava može se obaviti smanjenjem pojačanja ili primjenom serijske kompenzacije s faznim zaostajanjem. Smanjenje pojačanja je jednostavnije, ali ima svojih nedostataka. Primjenom serijske kompenzacije s faznim zaostajanjem ti se nedostaci u dovoljnoj mjeri mogu otkloniti. Budući da upravo nedostaci kompenzacije s ugadjanjem pojačanja upućuju na potrebu primjene kompenzacije s faznim zaostajanjem, pogledajmo najprije kako se obavlja kompenzacija s ugadjanjem pojačanja.

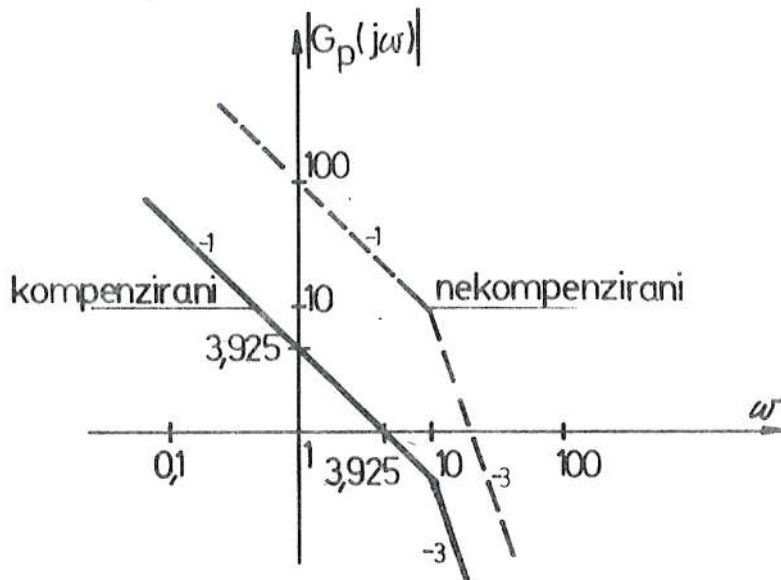
Kompensaciju ćemo provesti na sustavu:

$$G_p(s) = \frac{100}{s(1 + \frac{s}{10})^2} \quad (12.47.)$$

za koji se traži da mu fazna pričuva bude 45° . Budući da smo se odlučili za kompensaciju s ugađjanjem pojačanja, struktura regulacijskog sustava izgleda kao na Sl.12.18., a Bodeov amplitudni dijagram objekta nacrtan je na crtkano na Sl.12.19.



Sl.12.18. Struktura regulacijskog sustava kompenziranog ugađjanjem pojačanja



Sl.12.19. Bodeov dijagram prijenosne funkcije (12.47.)

Iz Bodeovog dijagrama zadanog objekta sa Sl.12.19. možemo zaključiti da je originalni sustav nestabilan, jer je frekvencija kritične faze $\omega_{\Pi}=10$ rad/s manja od frekvencije kritične ampli-

tude $\omega_T \approx 20$ rad/s. Da bi postigli faznu pričuvu od $\gamma = 45^\circ$ s pomoću pojačanja i time stabilizirali sustav, treba amplitudni dijagram spustiti tako da siječe apcisu os na frekvenciji na kojoj fazni dijagram ima vrijednost -135° . Budući da originalni sustav na frekvencijama loma $\omega_n = 10$ rad/s ima fazu od 180° , a traži se da amplitudni dijagram siječe apcisu os na frekvenciji s fazom -135° , proizlazi da frekvencija kritične amplitude treba biti manja od lomnih frekvencija tj. $\omega < \omega_n$. Općeniti izraz za fazu sustava (12.47.) glasi:

$$\arg G_p(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{\omega_n} \quad (12.48.)$$

koji aproksimacijom $\arctan \frac{\omega}{\omega_n}$ s Taylorovim redom uz $\omega < \omega_n$ prelazi u:

$$\arg G_p(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \frac{\omega}{\omega_n} \quad (12.49.)$$

Za fazu od -135° vrijedi jednačina:

$$-\frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - 2 \frac{\omega}{10}, \quad (12.50.)$$

a odatle:

$$\omega = \frac{5}{4} \pi = 3,925 \text{ rad/s} \quad (12.51.)$$

Amplituda originalnog sustava na frekvenciji $\omega = 3,925$ izlazi:

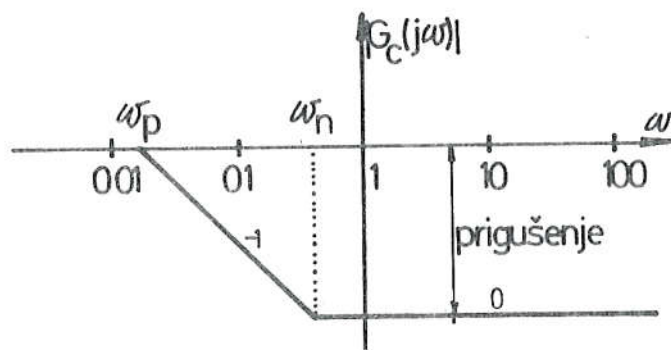
$$\begin{aligned} G_p(j \ 3,925) &= \frac{100}{|j \ 3,925| |(1 + j \frac{3,925}{10})^2|} = \\ &= \frac{100}{3,925 (\sqrt{1+0,395^2})^2} \approx \frac{100}{3,925} = 25,5 \quad (12.52.) \end{aligned}$$

To znači, da bi amplitudni dijagram sjekao apscisu os na frekvenciji $\omega_T = 3,925$, treba ga prigušiti za faktor 25,5. Prijenosna funkcija unaprijedne grane regulacijskog sustava stoga glasi:

$$KG_p(s) = \frac{1}{25,5} \frac{100}{s(1 + \frac{s}{10})^2} = \frac{3,925}{s(1 + \frac{s}{10})^2}, \quad (12.53.)$$

a kompenzirani Bodeov dijagram nacrtan je punom linijom na Sl.12.19. Osvrnemo li se kritički na postignuti rezultat, dolazimo do zaključka, da smo traženu faznu pričuvenu zaista postigli, ali da nam je pri tome konstanta brzine od $K_v=100$ spala na $K_v=100/25,5 = 3,925$ i da je time pogreška ustaljenog stanja brzine porasla od 1% na 25,5%. U stvari, lošu stabilnost smo samo zamijenili s lošom točnošću, tako da je kvaliteta sustava u cjelini ostala napromijenjena. Očito je stoga da je rješenje kompenzacije smanjenjem pojačanja neprihvatljivo.

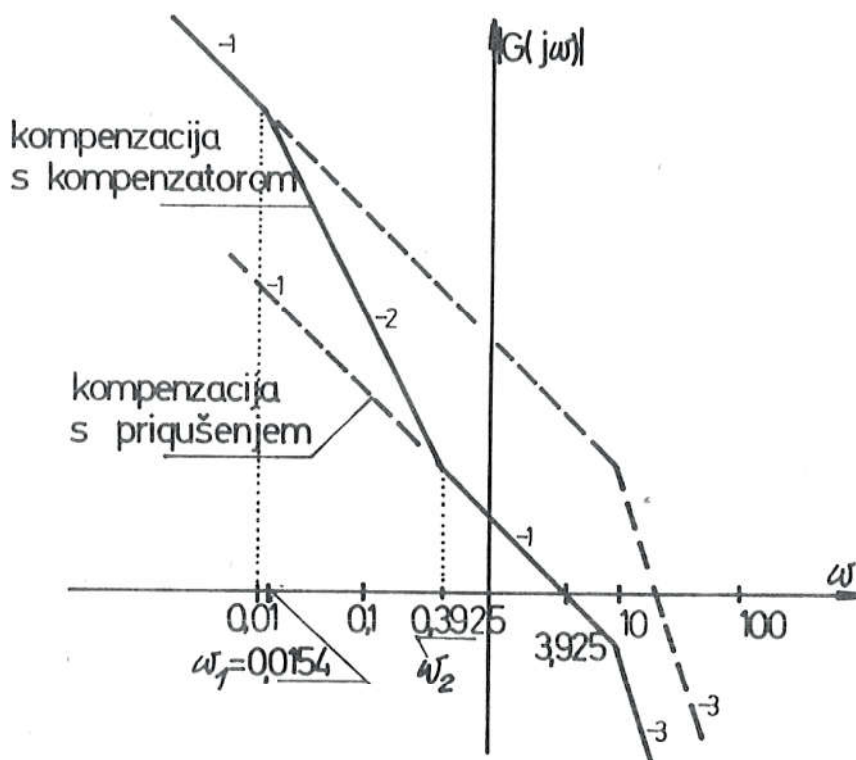
Iz razmatrane kompenzacije s ugađanjem pojačanja ipak možemo izvući jednu pouku, naime, u rezultatu nas smeta jedino prigušenje na niskim frekvencijama. Prema tome, rješenje s prigušenjem bi nas zadovoljilo, ako bi se moglo ograničiti samo na srednje i visoke frekvencije. S druge strane nam je poznato, da nenulte singularne točke utječu na pojačanje tek iznad frekvencije loma. Moguće je, stoga, s jednim polom izvan ishodišta započeti prigušenje na njegovoj frekvenciji loma, a potom ga po volji ograničiti na nekoj višoj frekvenciji s odgovarajućom nulom izvan ishodišta. Bodeov dijagram takve polno nulte kombinacije prikazan je na Sl.12.20. a predstavlja kompenzator s faznim zaostajanjem.



Sl.12.20. Kompenzator s faznim zaostajanjem

Postavlja se još pitanje faze. Naime, kompenzator s faznim zaostajanjem, osim prigušenja koje nam je potrebno, unosi i fazno zaostajanje, koje nam nije potrebno. Za rješenje tog problema vrijedno se prisjetiti njegovog faznog dijagrama (Sl.12.6.), koji ima maksimum na frekvenciji $\omega_m = \sqrt{\omega_1 \omega_3}$; ispod ω_1 i iznad ω_2 nalaze se područja minimalne faze. Na frekvenciji $10 \omega_2$ pomak faze iznosi oko -5° . Budući da se pomak od -5° može smatrati podnošljivim, kompenzator s faznim zaostajanjem se tako proračunava da mu frekvencija nule ω_2 bude deset puta manja od frekvencije kritične amplitude ω_T kompenziranog sustava, tako da frekvencija kritične amplitude dodje u područje minimalne faze kompenzatora.

Na Sl.12.21. prikazan je Bodeov dijagram prijenosne funkcije objekta (12.47.) koji je kompenziran kompenzatorom s faznim zaostajanjem, projektiranim na ranije opisani način. Frekvencija kritične amplitude je kao i prije, $\omega_T = 3,925$ rad/s, frekvencija nule kompenzatora je deset puta manja, $\omega_2 = 0,3925$ rad/s, a da bi se postiglo potrebno prigušenje, vrijednost frekvencije pola kompenzatora je ispala $\omega_1 = 0,0154$ rad/s.



Sl.12.21. Kompenzacija s kompenzatorom s faznim zaostajanjem

Da bismo provjerili utjecaj faze kompenzatora na kompenzirani sustav na frekvenciji kritične amplitude, izračunajmo fazu kompenziranog sustava na toj frekvenciji. Prijenosna funkcija petlje kompenziranog sustava glasi:

$$G(j\omega) = G_e(j\omega) G_p(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{0,3925}}{1 + \frac{j\omega}{0,0154}} \frac{100}{s(1 + \frac{j\omega}{10})^2}, \quad (12.54.)$$

a faza:

$$\begin{aligned} \arg G(j\omega) &= \arctan \frac{\omega}{0,3925} - \arctan \frac{\omega}{0,0154} - \\ &\quad - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{10} \end{aligned} \quad (12.55.)$$

Da bi usporedba s faznim kutom na frekvenciji kritične amplitude $\omega_I=3,925$ bila točnija, poslužimo se i ovdje aproksimacijom *arc tangensa*, pa ćemo za pojedine članove dobiti:

$$\arctan \frac{\omega_I}{0,3925} = \frac{\pi}{2} - \frac{0,3925}{\omega_I}, \quad \text{jer je } \omega_I > 0,3925$$

$$\arctan \frac{\omega_I}{0,0154} = \frac{\pi}{2} - \frac{0,0154}{\omega_I}, \quad \text{jer je } \omega_I > 0,0154$$

$$\arctan \frac{\omega_I}{10} = \frac{\omega_I}{10}, \quad \text{jer je } \omega_I < 10,$$

a ukupni fazni kut izlazi:

$$\begin{aligned} \arg G(j\omega) &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{0,3925}{\omega_I} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{0,0154}{\omega_I} \right) - \\ &\quad - \frac{\pi}{2} - 2 \frac{\omega_I}{10} = \\ &= - \frac{0,3771}{\omega_I} - \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_I}{5} \end{aligned} \quad (12.56.)$$

Za $\omega_I=3,925$ rad/s

$$\arg G(j\omega) = - \frac{0,3771}{3,925} - \frac{\pi}{2} - \frac{3,925}{5} = 2,451 \text{ rad} \quad (12.57.)$$

Fazna pričuva prema tome izlazi:

$$\gamma = \Pi - \arg G(j\omega) = 3,14 - 2,451 = 0,689 \text{ rad} \quad (12.58.)$$

odnosno u stupnjevima:

$$\gamma = 0,689 \text{ rad} \frac{360^\circ}{6,28 \text{ rad}} = 0,689 \cdot 57,4 = 39,5^\circ \quad (12.59.)$$

Kao što smo i predvidjeli, kompenzator je unio negativni fazni pomak od oko 5° , u našem slučaju točno $5,5^\circ$, što se u inženjerskoj praksi može tolerirati, ali se i to odstupanje može korigirati.

Uzmimo još jedan primjer u kojem je zadan objekt:

$$G_p(s) = \frac{5}{s(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{50})}, \quad (12.60.)$$

a želi se postići:

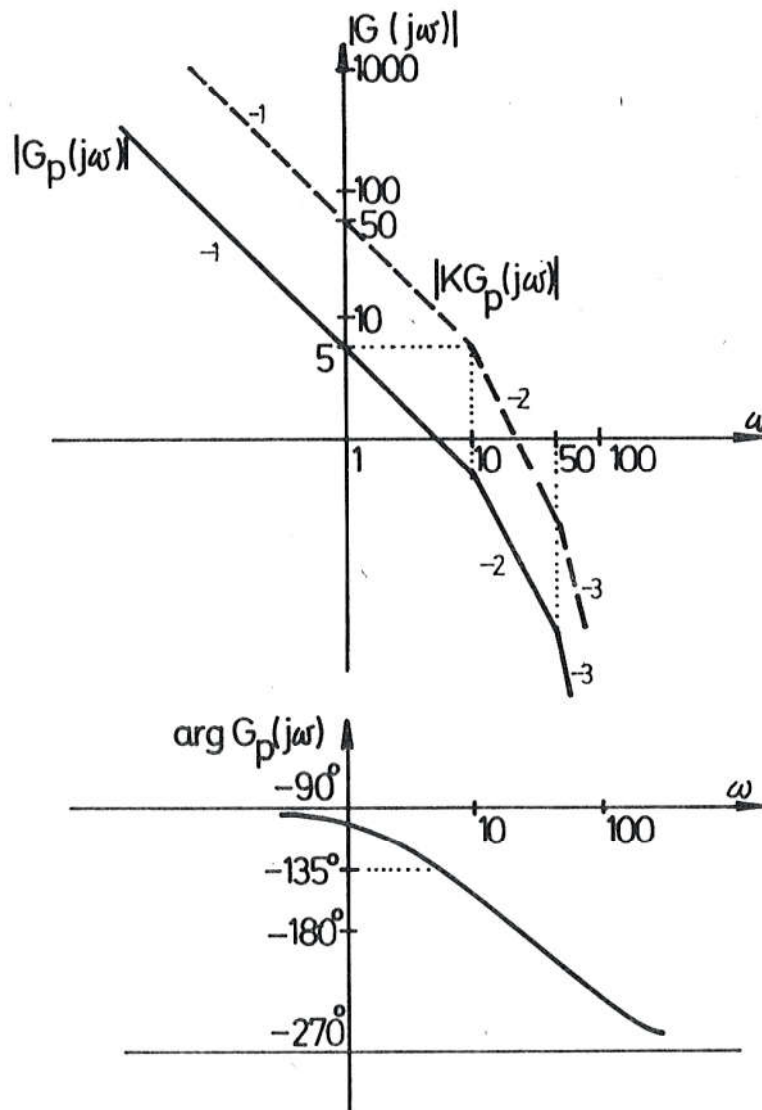
1. konstantna brzina $K_v = 50$ i
2. fazna pričuva $\gamma = 45^\circ$

Da bismo uočili značajke zadanog objekta i mogućnosti zahtijevane kompenzacije, najprije treba nacrtati Bodeov dijagram objekta kao što je punom linijom učinjeno na Sl.12.22.

Računom s pomoću $\arctg$ aproksimacije dobije se da je $\arg G_p(j\omega_I) = -121,8^\circ$, pa je odatle fazna pričuva $\gamma = 180^\circ - 121,8^\circ = 58,2^\circ$. Ta vrijednost fazne pričuve je čak veća od zahtijevane, ali je vrijednost konstante brzine svega 5, a traži se da bude 50; naime:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{50})} = 5, \quad (12.61.)$$

a ta se vrijednost može za sustav prve vrsti očitati na presjeku niskofrekvencijske asimptote i ordinatne osi. Da bismo K_v povećali na 50, treba objektu dodati u seriju pojačanje $K=10$. S takvim pojačanjem dobije se crtkani Bodeov dijagram na Sl.12.22. Spusti li se okomica od presjeka crtkanog amplitudnog dijagrama s realnom osi na fazni dijagram, dobije se da je argument u toj točki vrlo blizu -180° , tj. da je fazna pričuva skoro jednaka nuli.



Sl.12.22. Amplitudni i fazni dijagram funkcije (12.60.)

S druge strane, iz faznog dijagrama na istoj slici, koji vrijedi za oba amplitudna dijagrama, vidi se da se argument od 135° nalazi na frekvenciji od oko 7 rad/s. To znači, da osim pojačanja $K=10$, treba primijeniti kompenzaciju s faznim zaostajanjem da bi se frekvencija kritične amplitude smanjila ispod 7 rad/s.

Budući da smo s pojačanjem $K=10$ odredili položaj niskofrekvencijske asimptote, a time i zahtijevanu konstantu brzine $K_v=50$, posvetimo sa sada konstrukciji kompenzatora s faznim zaostajanjem koji neće utjecati na K_v , a dat će zahtijevanu faznu pričuvu od 45° . Frekvencija na kojoj $\arg KG_p(j\omega)$ treba imati -135° je manja

od 10 rad/s, pa stoga vrijedi aproksimacija *arc tg* za $\omega < \omega_n$:

$$\arg KG_p(j\omega) \approx -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{10} - \frac{\omega}{50} \quad , \quad (12.62.)$$

a za $\omega = 135$ izlazi:

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{10} - \frac{\omega}{50} = -\frac{3\pi}{4} \quad , \quad (12.63.)$$

i odatle:

$$\omega = \frac{50\pi}{24} = 6,55 \text{ rad/s} \quad (12.64.)$$

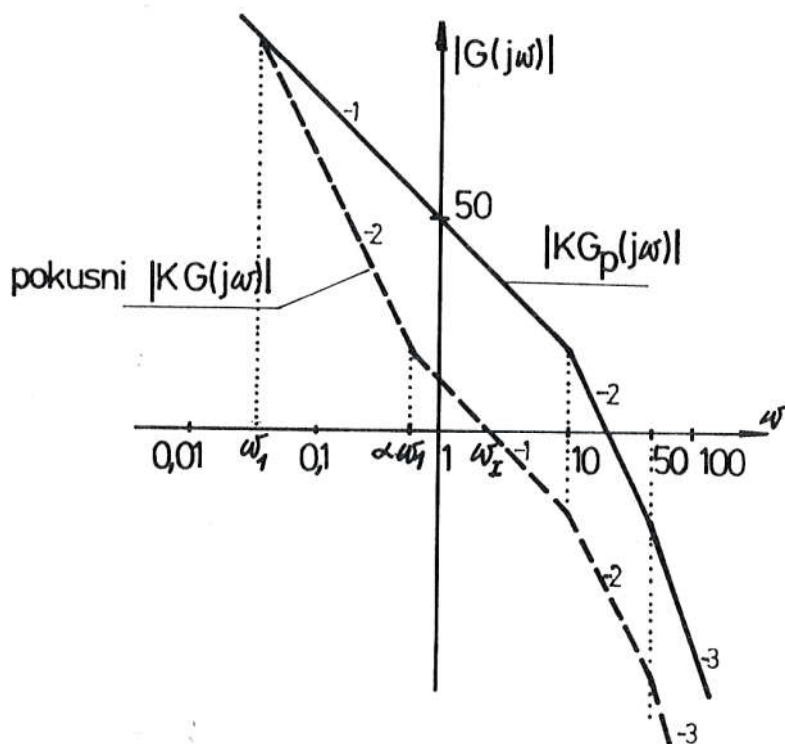
Modul na toj frekvenciji iznosi:

$$|KG_p(j 6,55)| = \frac{50}{6,55 \sqrt{1 + (\frac{6,55}{10})^2} \sqrt{1 + (\frac{6,55}{50})^2}} \approx \frac{50}{6,55} = 7,63 \quad (12.65.)$$

To znači da bi sustav s $K_v=10$ trebalo na frekvenciji kritične amplitude prigušiti za 7,63 kad bi se kompenzacija provela samo s ugađjanjem pojačanja. Ovo prigušenje određuje donju graničnu vrijednost za α kompenzatora s faznim prigušenjem, kojeg prijenosna funkcija glasi:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\alpha\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \quad (12.66.)$$

Osim toga frekvencija kritične amplitude od 6.55 rad/s, koja je dobijena za čisto prigušenje, određuje gornju graničnu vrijednost frekvencije kritične amplitude za sustav kompenziran s faznim zaostajanjem. Zbog faznog zaostajanja koje unosi kompenzator, vrijednost faktora α treba biti veća od 7.63, a dosljedno tome i frekvencija kritične amplitude treba biti manja od 6,55 rad/s. Na temelju dosadašnjih razmatranja, na Sl.12.23.



Sl.12.23. Pokusna skica za kompenzaciju s faznim zaostajanjem

punom linijom nacrtan je sustav $KG_p(j\omega)$ za $K_v=50$, a crtkanom linijom skiciran je taj isti sustav u serijskoj vezi s kompenzatorom s faznim zaostajanjem. Prijenosna funkcija petlje kompenziranog objekta glasi:

$$KG(s) = \frac{50 \left(1 + \frac{s}{\alpha\omega_1}\right)}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{50}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)} \quad (12.67.)$$

Da bismo našli tri nepoznanice ω_1, α i ω_I treba za njih najprije postaviti tri jednadžbe. Za prvu jednadžbu može poslužiti jedinična amplituda:

$$KG(j\omega_I) = \frac{50 \left(1 + \frac{j\omega_I}{\alpha\omega_1}\right)}{j\omega_I \left(1 + j\frac{\omega_I}{10}\right) \left(1 + j\frac{\omega_I}{50}\right) \left(1 + j\frac{\omega_I}{\omega_1}\right)} = \frac{50 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_I}{\alpha\omega_1}\right)^2}}{\omega_I \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_I}{10}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_I}{50}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_I}{\omega_1}\right)^2}} = 1, \quad (12.68.)$$

a budući da je $\omega_I > \alpha \omega_1$ i $\alpha > 1$, vrijedi aproksimacija:

$$|KG(j\omega_I)| = \frac{\frac{\omega_I}{\alpha \omega_1}}{\omega_I \frac{\omega_I}{\omega_1}} = \frac{50}{\alpha \omega_I} = 1, \quad (12.69.)$$

a odatle:

$$\omega_I = \frac{50}{\alpha} \quad (12.70.)$$

Za drugu jednadžbu može se primijeniti argument na frekvenciji kritične amplitude:

$$\begin{aligned} \arg KG(j\omega_I) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_I}{10} - \arctan \frac{\omega_I}{50} - \\ &\quad - \arctan \frac{\omega_I}{\omega_1} + \arctan \frac{\omega_I}{\alpha \omega_1}, \end{aligned} \quad (12.71.)$$

što uz aproksimaciju s *arc tangensom* izlazi:

$$\begin{aligned} \arg KG(j\omega_I) &\approx -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_I}{10} - \frac{\omega_I}{50} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_1}{\omega_I}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \omega_1}{\omega_I}\right) = \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{3\omega_I}{25} - \frac{(\alpha-1)\omega_1}{\omega_I} \end{aligned} \quad (12.72.)$$

Budući da se zahtijeva fazna pričuva od $\gamma = 45^\circ$, argument na frekvenciji ω_I treba biti -135° odnosno $-\frac{3\pi}{4}$ tako da jednadžba glasi:

$$-\frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{3\omega_I}{25} - \frac{(\alpha-1)\omega_1}{\omega_I} \quad (12.73.)$$

odnosno:

$$\frac{3\omega_I}{25} + \frac{(\alpha-1)\omega_1}{\omega_I} - \frac{\pi}{4} = 0 \quad (12.74.)$$

Za postavljanje treće jednadžbe postoje tri mogućnosti i to:

1. izabrati odnos $\omega_I/\alpha \omega_1$,

2. izabrati vrijednost prigušenja α , i
3. minimizirati prigušenje na srednjim frekvencijama.

Izbor odnosa $\omega_I/\alpha\omega_1$. U uvodnom dijelu kompenzacije s faznim zaostajanjem rečeno je da treba nastojati da faza kompenzatora osjetno ne utječe na fazu kompenziranog sustava u okolici frekvencije kritične amplitude. S tim u vezi je izračunano da na frekvenciji deset puta većoj od gornje lomne frekvencije fazni pomak, koji unosi kompenzator, iznosi oko 5° , što se u inženjerskoj primjeni može tolerirati, pa se stoga relacija:

$$\omega_I = 10 \alpha \omega_1 \quad (12.75.)$$

može uzeti kao treća tražena jednažba.

Na taj način smo dobili tri jednažbe, (12.70.), (12.74.) i (12.75.), iz koji možemo izračunati tri tražene nepoznanice. Uvrštenjem (12.70.) u (12.75.) dobije se:

$$\frac{50}{\alpha} = 10 \alpha \omega_1 ,$$

a odatle:

$$5 = \alpha^2 \omega_1 \quad (12.76.)$$

Uvrštenjem (12.70.) u (12.74.) izlazi:

$$\frac{3}{25} 10\alpha\omega_1 + \frac{(\alpha-1)\omega_1}{10\alpha\omega_1} - \frac{\pi}{4} = 0 , \quad (12.77.)$$

a odatle:

$$\frac{30}{25} \alpha^2 \omega_1 + \frac{\alpha-1}{10} - \frac{\alpha\pi}{4} = 0 \quad (12.78.)$$

Konačno uvrštenjem ω_1 iz (12.76.) u (12.78.) dobije se:

$$6 + \frac{\alpha-1}{10} - \frac{\alpha\pi}{4} = 0, \quad (12.79.)$$

a odatle:

$$\alpha = 8,62$$

Uvrštenjem α u (12.70.) izlazi:

$$\omega_I = \frac{50}{8,62} = 5,80 \text{ rad/s} ,$$

a uvrštenjem α i ω_I u (12.75.) dobije se:

$$\omega_1 = \frac{\omega_I}{10} = \frac{5,8}{86,2} = 0,067 \text{ rad/s}$$

Prijenosna funkcija traženog kompenzatora, stoga, glasi:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{8,62 \cdot 0,067}}{1 + \frac{s}{0,067}} = \frac{1 + \frac{s}{0,58}}{1 + \frac{s}{0,067}} \quad (12.80.)$$

Izbor prigušenja α . Kad bi se kompenzacija obavila samo ugadjanjem pojačanja, vidjeli smo da bi se frekvencija kritične amplitude mogla postići prigušenjem α , odnosno pojačanjem $K=1/\alpha$. U tom slučaju bi međjutim, smanjili konstantu brzine K_v . Da to izbjegnemo uvodimo kompenzator s faznim zakašnjenjem koji ne utječe na niskofrekvencijsku asimptotu, a na srednjim frekvencijama unosi prigušenje α , naime:

$$|G_c(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_I}{\alpha\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_I}{\omega_1}\right)^2}} \approx \frac{\frac{\omega_I}{\alpha\omega_1}}{\frac{\omega_I}{\omega_1}} = \frac{1}{\alpha} \quad (12.81.)$$

Iz toga proizlazi da je minimalna vrijednost za α upravo vrijednost prigušenja potrebnog da se s pomoću ugadjanja pojačanja postigne tražena frekvencija kritične amplitude, odnosno u konačnoj liniji tražena fazna pričuva. Poznavajući α , iz jednadžbe (12.70.) se dobije ω_I , a potom uvrštenjem α i ω_I u (12.74.) dobije se i ω_1 .

U našem slučaju smo izračunali da je za ugadjanje pojačanjem $\alpha=7,63$, pa se za tu vrijednost α dobije:

$$\omega_I = \frac{50}{\alpha} = 6,55 \quad (12.82.)$$

Rješenjem ω_1 iz (12.74.) izlazi:

$$\omega_1 = \frac{\omega_I}{\alpha-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\omega_I}{25} \right), \quad (12.83.)$$

a uvrštenjem $\alpha=7,63$ i $\omega_I=6,55$ u (12.83.) dobije se da je $\omega_1=0$, što znači da smo dobili čisto ugađanje pojačanjem bez kompenzatora, odakle smo i počeli.

Da bismo ispitali utjecaj izbora α na sintezu, izračunajmo ω_I i ω_1 za nekoliko vrijednosti α većih od minimalne. Za $\alpha=8,62$ već smo u prethodnoj točki izračunali da je $\omega_I=5,80$ i $\omega_1=0,067$. Ako račun provedemo još i za $\alpha=10,15$ i 20 dobiju se vrijednosti za ω_I , ω_1 i $\alpha\omega_1$ navedene na Tablici 12.2.

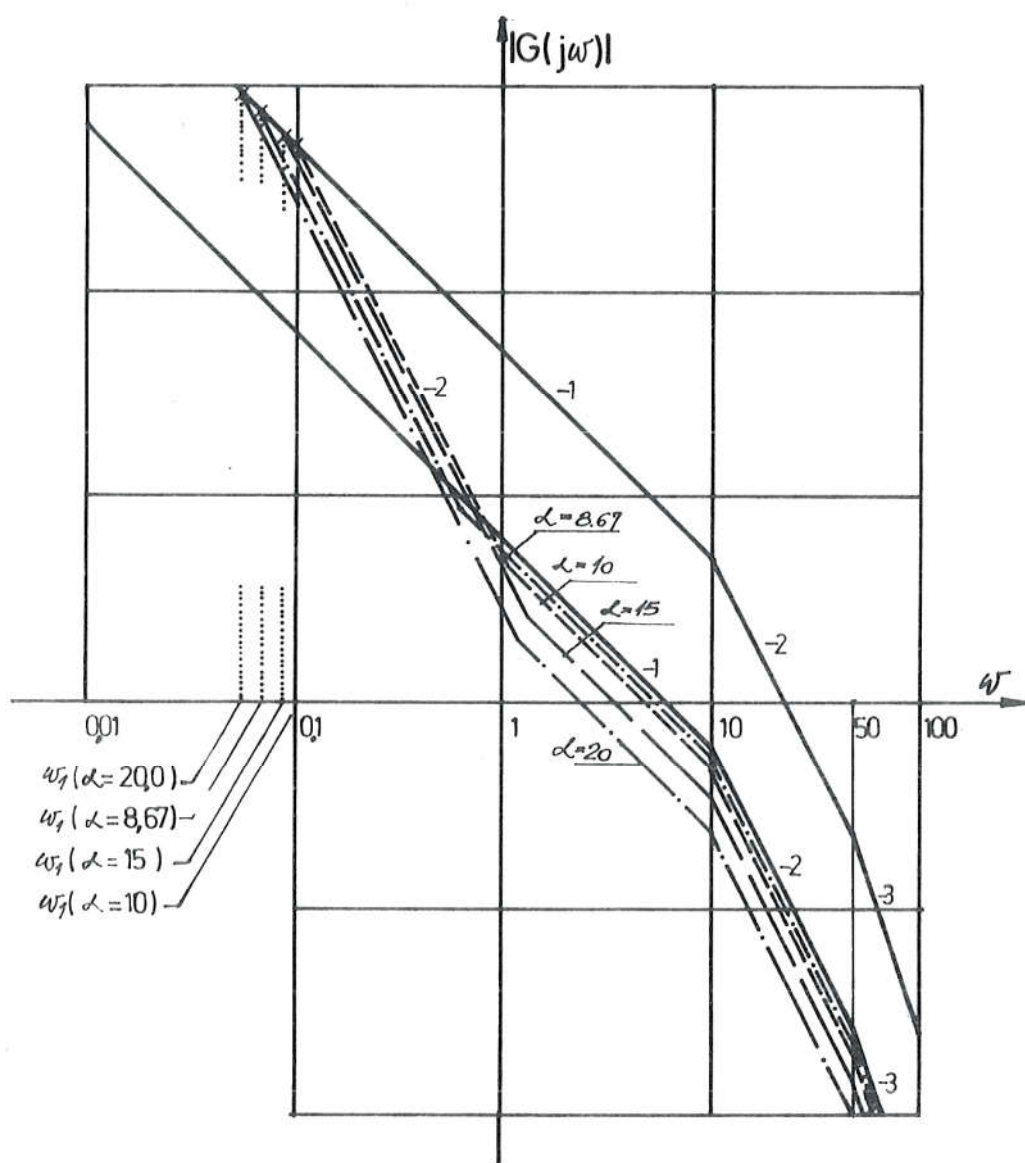
α	ω_I	ω_1	$\alpha\omega_1$
8,62	5,80	0,067	0,58
10,00	5,00	0,103	1,03
15,00	3,33	0,092	1,37
20,00	2,50	0,060	1,19

Tablica 12.2. Vrijednosti kompenzatora s faznim zaostajanjem za različite vrijednosti prigušenja α

Na Tablici 12.2. vidimo da vrijednosti ω_1 najprije rastu, a potom padaju; iz čega se može zaključiti da imaju neki ekstrem. Da bismo to bolje istražili, pogledajmo amplitudne dijagrame za različite vrijednosti α . Obratimo li pažnju na vrijednosti ω_1 , vidimo da porastom α od nule preko vrijednosti 8,62 pa do vrijednosti $\alpha=10$, vrijednost ω_1 raste od nule preko 0,067 do 0,103, da bi potom za $\alpha=15$ i $\alpha=20$ pale na 0,092 i na 0,0595. Što god prigušenje kompenzatora započne na višoj frekvenciji, rješenje je povoljnije. U našem slučaju to će biti za $\alpha=10$, jer je u tom slučaju lomna frekvencija pola kompenzatora ω_1 najviša (Sl.12.24.).

Izbor minimalnog prigušenja na srednjim frekvencijama. Iz prethodnog izlaganja proizlazi da bi optimalno rješenje, barem što se tiče prigušenja srednjih frekvencija, bila maksimalna vrijednost ω_1 . Treba, znači, izraziti ω_1 kao funkciju α i naći maksimum. U tom cilju uvrstimo ω_I iz (12.82.) u (12.83.) i dobit ćemo:

$$\omega_1(\alpha) = \frac{50/\alpha}{\alpha-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3(50/\alpha)}{25} \right),$$



Sl.12.24. Bodeovi dijagrami za različite vrijednosti prigušenja α

što sredjenjem daje:

$$\omega_1(\alpha) = \frac{25 \Pi \alpha - 600}{2\alpha^2 (\alpha-1)} \quad (12.84.)$$

Derivacijom (12.84.) dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{2\alpha^2(\alpha-1)25\Pi - (25\Pi\alpha - 600)(6\alpha^2 - 4\alpha)}{4\alpha^4(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{-100\Pi\alpha^2 + (3600+50\Pi)\alpha - 2400}{4\alpha^3(\alpha-1)^2} \end{aligned} \quad (12.85.)$$

a izjednačenjem derivacije s nulom izlazi:

$$-100\Pi\alpha^2 + (3600 + 50\Pi)\alpha - 2400 = 0 \quad (12.86.)$$

Rješenjem α iz (12.86.) dobije se:

$$\alpha_1 = 0,206 \quad \text{i} \quad \alpha_2 = 11,7$$

Vrijednost $\alpha_1 < 7,63$, tj. α_1 je manji od minimalne moguće vrijednosti, pa stoga taj rezultat odbacujemo, a za nas je važna druga vrijednost $\alpha=11,7$. Uvrštenjem te vrijednosti u (12.82.) i (12.84.) dobije se:

$$\omega_I = 4,27 \quad \text{i} \quad \omega_1 = 0,108$$

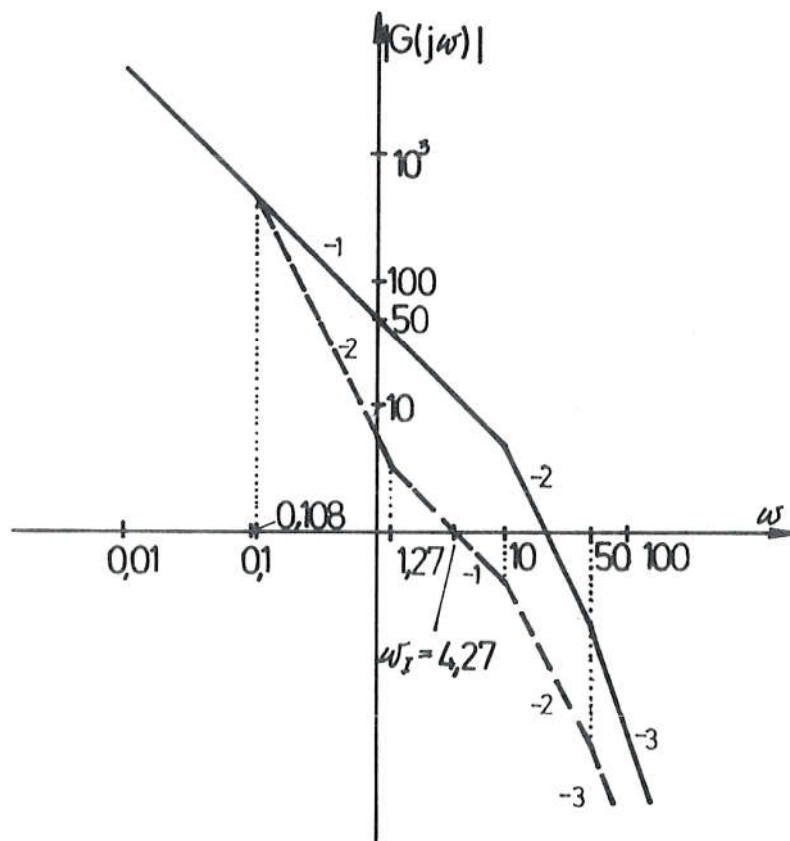
Prema tome, prijenosna funkcija kompenzatora u ovom slučaju glasi:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{1,27}}{1 + \frac{s}{0,108}} \quad (12.87.)$$

a sustav (12.60.) kompenziran s ovim kompenzatorom prikazan je Bodeovim dijagramom na Sl.12.25.

Važno je ovdje zapaziti da se vrijednost $\alpha=11,7$, dobijena maksimizacijom frekvencije ω_1 , ne razlikuje mnogo od vrijednosti $\alpha=8,62$ koju smo prethodno vrlo jednostavno dobili iz relacije

$\omega_I = 10 \alpha \omega_1$. A budući da su oba računa ipak aproksimacije, jednostavnija metoda je, barem za prvi pokušaj, djelotvornija.



Sl.12.25. Kompenzirani sustav s maksimiziranom frekvencijom ω_I

Medjutim, u posebnim slučajevima, kad su postavljeni strogi uvjeti prigušenja, postupak s maksimizacijom polne frekvencije loša može dati bolje rezultate. Ako se traži veće prigušenje šuma, tj. viših frekvencija, potrebno je izabrati veći α nego što ga daje bilo koji od ovih postupaka.

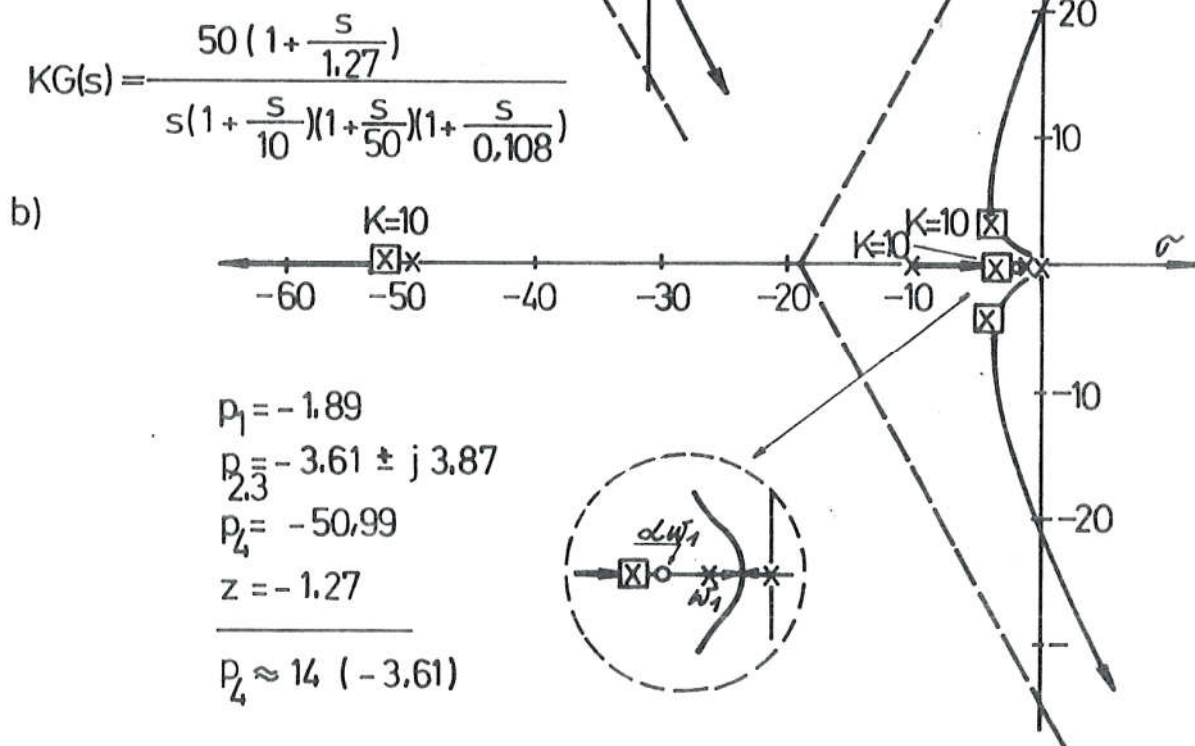
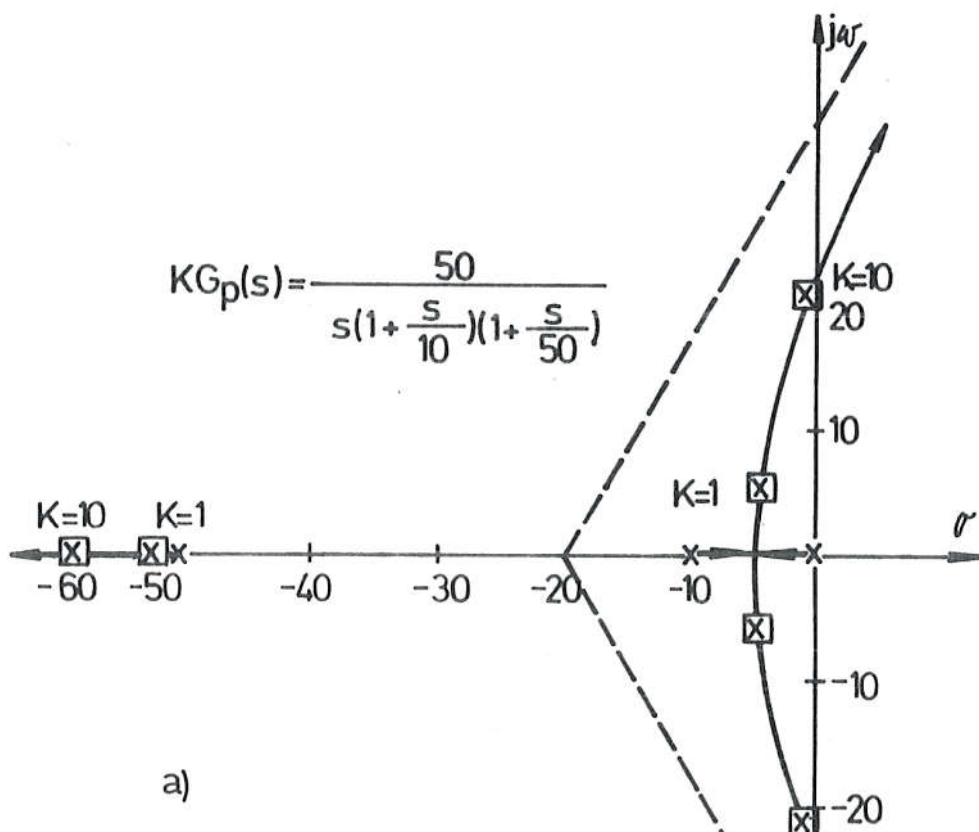
Unatoč činjenici da je ovdje kompenzacija s faznim zaostajanjem razmatrana na jednom posebnom primjeru, provedeni postupak je sasvim općenit i može ga se primijeniti u svim slučajevima. Postupak se odvija ovim redoslijedom:

1. skicirati amplitudni i fazni dijagram objekta $G_p(s)$, te provjeriti da li je kompenzacija potrebna i da li je izvediva;

2. naći pojačanje kojim se postiže tražena konstanta brzine K_v ;
3. s čistim prigušenjem odrediti granične vrijednosti kompenzacije s faznim zaostajanjem:
 - a) aproksimacijom s $\arctg$ odrediti potrebnu frekvenciju kritične amplitude ω_I , jednačba (12.63.)
 - b) izračunati α s kojim se postiže ω_I , jednačba (12.65.);
4. skicirati približni amplitudni dijagram;
5. iz jedinične ili kritične amplitude naći relaciju za frekvenciju kritične amplitude, jednačba (12.69.)
6. postaviti relaciju $KG(j\omega_I) = -\Pi + \gamma$, jednačba (12.74);
- 7.1. prvi način: odrediti odnos $\omega_I / \alpha \omega_1$:
 - a) izabrati odnos $\alpha \omega_1$ i ω_I ,
 - b) riješiti α , ω_1 i ω_I , jednačba (12.75),
- 7.2. drugi način: odrediti α :
 - a) izabrati α ,
 - b) riješiti ω_1 i ω_I iz jednačbi u točkama 4 i 5.
- 7.3. treći način: minimizirati prigušenje srednjih frekvencija:
 - a) maksimizirati ω_1 s obzirom na α ,
 - b) riješiti ω_1 i ω_I , jednačba (12.86)
8. napisati prijenosnu funkciju traženog kompenzatora s faznim zaostajanjem, jednačba (12.87);
9. provjeriti kompenzirani sustav zatvoren s negativnom jediničnom povratnom vezom, da se vidi da li postignuti rezultati u cjelini zadovoljavaju.

Sve točke osim devete već su napravljene, te prema tome još samo ostaje da se izvrši provjera. Treba naglasiti da je provjera nezostavni dio postupka, jer kako je već u više navrata spomenuto, čitav postupak je u konačnoj liniji aproksimativan pa stoga na kraju treba provjeriti da li su njime željeni rezultati postignuti.

GMK na Sl.26.a. predstavlja objekt (12.60) kojem je u seriji odano pojačanje $K=10$, da bi se postigla tražena konstanta brzine $K_v=50$. Kako je već zapaženo na Bodeovim dijagramima, i GMK po-



Sl.12.26. a) $KG_p(s)$, objekt (12.60) kompenziran pojačanjem K

b) $KG(s)G_c(s)$, objekt (12.60) kompenziran pojačanjem K i kompenzatorom (12.87)

kazuje da je konjugirano kompleksni par korijena toliko blizu imaginarnoj osi, da se sustav praktički nalazi u stanju marginalne stabilnosti. To je i bio razlog koji nas je naveo na primjenu kompenzatora s faznim zaostajanjem.

GMK na Sl.12.26.b. predstavlja isti objekt kompenziran pojačanjem $K=10$ i kompenzatorom (12.87). Za pojačanje $K=10$ polovi kompenziranog regulacijskog sustava su $p_1=1,89$, $p_{2,3}=-3,61 \pm j 3,87$ i $p_4=-50,99$, a nula je $z=-1,27$. Pažljivim uvidom u GMK na Sl.12.26.b. može se zaključiti da smo kompenzacijom uspjeli dovesti konjugirano kompleksni par u dominantni položaj, jer je pol p_4 skoro četrnaest puta udaljeniji od imaginarne osi, a utjecaj pola $p_1=-1,89$ se praktički poništava sa suprotnim djelovanjem nule $z=-1,27$. Osim toga, iz GMK vidimo da se promjenom pojačanja, ζ dominantnog konjugirano kompleksnog para polova vrlo malo mijenja. Iz toga zaključujemo da je kompenzacija utjecala i na smanjenje osjetljivosti sustava.

Ako kompenzacijom postignuto ponašanje sustava zadovoljava možemo prići konačnoj provjeri ponašanja varijabli stanja. Naime, na kraju još treba analizom provjeriti da li su sve varijable stanja u granicama linearnog ponašanja. Tek ako i ta provjera zadovolji, možemo smatrati da je kompenzacija objekta uspješno završena.

Na kraju je vrijedno naglasiti, da je glavna značajka kompenzatora s faznim zaostajanjem da zahtijevanu faznu pričuvu postiže naglim smanjenjem pojačanja ispred frekvencije kritične amplitude. Dobra mu je strana što je jeftin jer se može napraviti od pasivnih elemenata, i to što prigušuje šum. Loša mu je strana što se ne može primijeniti u svim slučajevima, jer nekompenzirani objekt mora imati dovoljno malo fazno zaostajanje na prihvatljivo visokoj frekvenciji da bi se mogao primijeniti. Osim toga budući da unosi prigušenje na srednjim frekvencijama, kao posljedica javlja se smanjenje neprigušene kružne frekvencije, odnosno sporiji odziv regulacijskog sustava.

12.3.3. Kompenzacija s faznim prethodjenjem

Već je spomenuto da se kompenzatorom s faznim zaostajanjem ne može izvršiti kompenzacija svih objekata. Ako se npr. traži faza pričuva od 45° , mora postojati barem jedna frekvencija na kojoj fazno zaostajanje nije veće od 135° . U slučaju, npr. objekta $G(s)=1/s^2$, taj uvjet nije ispunjen, pa se stoga taj objekt i ne može kompenzirati kompenzatorom s faznim zaostajanjem. U takvim i sličnim slučajevima kompenzacija se može postići kompenzacijom s faznim prethodjenjem.

Kompenzatori s faznim prethodjenjem djeluju na sustav unošenjem faznog prethodjenja. Za razliku od kompenzatora s faznim zaostajanjem, kod kojih se ide na minimiziranje utjecaja faze, kod kompenzatora s faznim prethodjenjem se ide na smanjenje utjecaja pojačanja. Odatle zaključak da kompenzatori s faznim zaostajanjem djeluju *prigušenjem*, a kompenzatori s faznim prethodjenjem putem *faznog prethodjenja*.

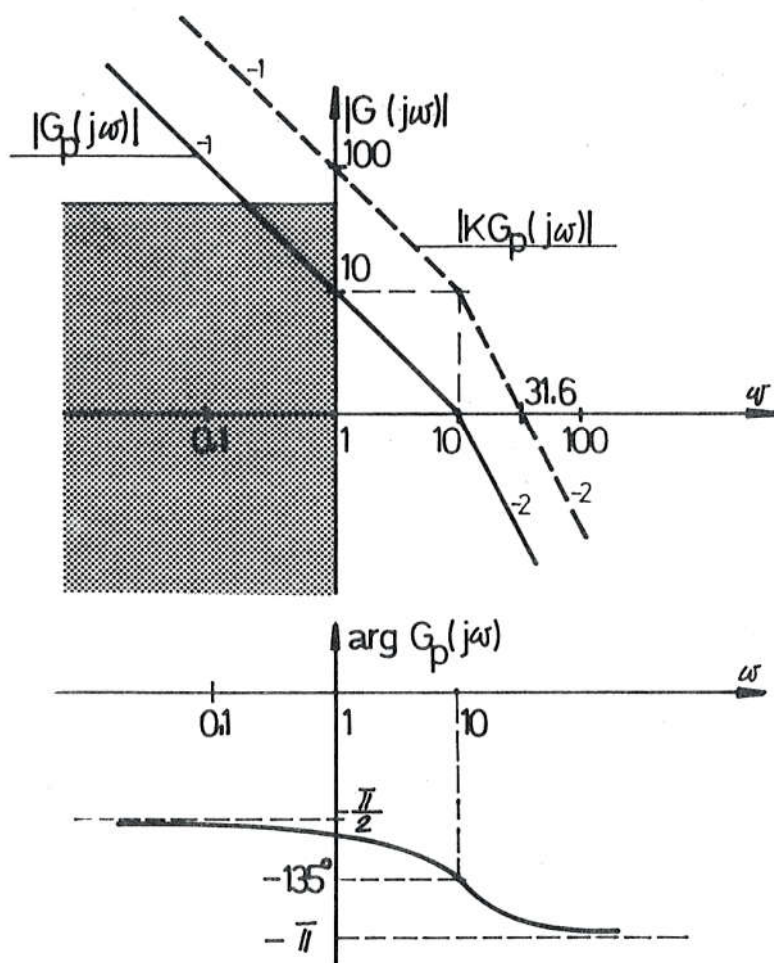
Primjenu kompenzatora s faznim prethodjenjem proučit ćemo na kompenzaciji objekta:

$$G_p(s) = \frac{10}{s(1 + \frac{s}{10})}, \quad (12.88)$$

s ciljem da se postigne:

1. konstanta brzine $K_v=100$
2. fazna pričuva oko 45° i
3. da pogreška sinusnog signala od 1 rad/s bude $e(j1) \leq 2\%$.

Iz Bodeovih dijagrama sa Sl.12.27. vidimo da zadani objekt ima traženu faznu pričuvu od 45° , ali mu je konstanta brzine deset puta manja od zahtijevane. Dodamo li objektu $G_p(s)$ u seriju pojačanje $K=10$, postizemo traženu konstantu brzine $K_v=100$, što je na slici označeno crtkanim amplitudnim dijagramom. Crtkani amplituni dijagram pokazuje ujedno da smo pojačanjem pogoršali faznu pričuvu. Najprije je pokušavano poboljšati kompenzatorom s faznim zaostajanjem. Međutim, zbog zabranjenog niskofrekventijskog područja, koje je uvjetovano maksimalnom pogreškom sinusnog signala od 1 rad/s, primjena tog kompenzatora ne dolazi u obzir.



Sl.27. Amplitudni i fazni dijagram objekta $(0,5)$

Pokušamo li problem riješiti kompenzatorom s faznim prethodjenjem, vidjet ćemo da za primjenu tog tipa kompenzacije nema prepreka. Naime, u prvom redu nisu postavljeni nikakvi zahtjevi na ponašanje visokih frekvencija, što znači da nas pojačanje kompenzatora s faznim prethodjenjem na visokim frekvencijama ne smeta, a u drugom redu fazno zaostajanje nekompenziranog sustava se polako povećava iza frekvencije kritične amplitude. Važnost ovog drugog svojstva objasniti ćemo kasnije.

Iz prijašnjih razmatranja strukture i svojstava kompenzatora s faznim prethodjenjem znamo da njegova prijenosna funkcija glasi:

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} \quad (12.89)$$

Frekvencija maksimalne faze izražena je relacijom:

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad (12.90)$$

a maksimalna faza:

$$\phi_{max} = \arctan \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \arctan \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (12.91)$$

Izraze li se vremenske konstante frekvencijama:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} \quad \text{i} \quad T_2 = \frac{1}{\alpha \omega_1} \quad (12.92)$$

izlazi da je:

$$G_c(s) = \frac{1 + (s/\omega_1)}{1 + (s/\alpha\omega_1)} \quad (12.93)$$

$$\omega_{max} = \omega_1 \sqrt{\alpha} \quad \text{i} \quad (12.94)$$

$$\phi_{max} = \arctan \sqrt{\alpha} - \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (12.95)$$

Relacija (12.95) na lijevoj strani ima jedan kut, a na desnoj razliku dvaju kutova stoga je:

$$\begin{aligned} \tan \phi_{max} &= \frac{\tan(\arctan \sqrt{\alpha}) - \tan(\arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}})}{1 + \tan(\arctan \sqrt{\alpha}) \tan(\arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}})} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + \sqrt{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{\alpha - 1}{2 \sqrt{\alpha}} \end{aligned} \quad (12.96)$$

Ako se $\sin \phi_{max}$ izrazi s $\tan \phi_{max}$ dobije se:

$$\sin \phi_{max} = \frac{\operatorname{tg} \phi_{max}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi_{max}}} = \frac{\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \quad (12.97)$$

a odatle:

$$\phi_{max} = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (12.98)$$

Već je spomenuta značajka kompenzatora s faznim prethodjenjem da se upravo unošenjem faznog prethodjenja u sustav postiže zahtijevana faza pričuva. Da bismo procijenili veličinu faznog prethodjenja potrebnu da kompenzirani objekt postigne zahtijevanu faznu pričuvu $\gamma = 45^\circ$, izračunajmo argument $KG_p(s)$ za jedinični modul. Potražimo najprije frekvenciju jediničnog modula. Budući da je $\omega_I > 10$ izlazi:

$$KG_p(j\omega_I) = \left| \frac{100}{j\omega_I(1 + j\frac{\omega_I}{10})} \right| \approx \frac{1000}{\omega_I^2} = 1,$$

a odatle:

$$\omega_I \approx 10\sqrt{10} \quad (12.99)$$

Argument na frekvenciji ω_I je stoga:

$$\arg KG_p(j\omega_I) \approx -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{10\sqrt{10}}{10} \approx -162,5^\circ \quad (12.100)$$

Na prvi pogled izgleda da bi se fazna pričuva od $\gamma = 45^\circ$ mogla postići faznim prethodjenjem od $162,5^\circ - 135^\circ = 27,5^\circ$. Međutim, budući da se dodavanjem kompenzatora povećava frekvencija kritične amplitude, potrebno je da fazno prethodjenje bude veće od $27,5^\circ$. Uzmimo da to bude 30° . U drugom načinu korekcije faznog zaostajanja izazvanog povećanjem kritične amplitude, treba izračunati α za kompenzaciju ugađanjem pojačanja, a potom ga malo povećati.

Obrati li se pažnja na amplitudni i fazni dijagram kompenzatora s faznim prethodjenjem sa Sl.12.12., vidi se da povećanje faze

kompensatora ima za posljedicu povećanje pojačanja kompensatora na višim frekvencijama. A budući da je povećanje pojačanja na višim frekvencijama nepoželjni učinak koji treba biti što manji, izlazi da fazu kompensatora treba maksimalno iskoristiti. To se postiže na taj način da se frekvencija kritične amplitude reguliranog sustava smjesti na frekvenciju maksimalne faze kompensatora.

Budući da smo se već odlučili za fazu od 30° , treba sada naći α koji toj fazi odgovara. Iz jednadžbe (12.97) dobije se:

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_{max}}{1 - \sin \phi_{max}} = \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} = \frac{1,5}{0,5} = 3,0 \quad (12.101)$$

Poznavajući α , prijenosna funkcija kompensatoraglasila:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{3\omega_1}}, \quad (12.102)$$

a oblik amplitudnog dijagrama kompenziranog sustava prikazan je na Sl.12.28.

Skica kompensatora sa Sl.12.28. temelji se na prethodnom zaključku da se frekvencija kritične amplitude ω_I treba nalaziti na geometrijskoj sredini frekvencija ω_1 i $\alpha\omega_1 = 3\omega_1$, tj.:

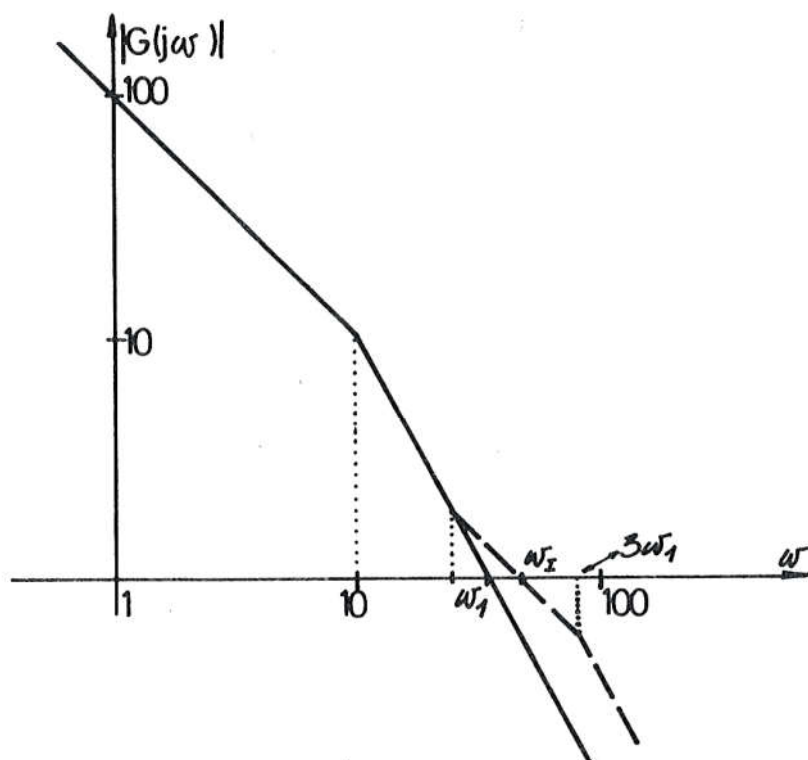
$$\omega_I = \omega_1 \sqrt{\alpha} = \omega_1 \sqrt{3} \quad (12.103)$$

S druge strane, modul p_n frekvenciji kritične amplitude je jedinica, pa stoga:

$$\left| K G_c(j\omega_I) G_p(j\omega_I) \right| = \left| \frac{1 + j \frac{\omega_I}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega_I}{3\omega_1}} \cdot \frac{100}{j\omega_I(1 + j \frac{\omega_I}{10})} \right| = 1 \quad (12.104)$$

Uzevši u obzir da je $\omega_1 < \omega_I$ i $\omega_I < 3\omega_1$, oblik jednadžbe (12.104) u aproksimacijskom obliku glasi:

$$\left| K G(j\omega_I) \right| \approx \frac{100 \left(\frac{\omega_I}{\omega_1} \right)}{\omega_I \left(\frac{\omega_I}{10} \right)} = 1, \quad (12.105)$$



Sl.12.28. Skica kompenzatora s faznim prethodjenjem
za izračunavanje frekvencija ω_I i ω_1

a odatle:

$$\omega_1 \omega_I = 1000 \quad (12.106)$$

Rješenjem simultanih jednažbi (12.103) i (12.106) dobije se:

$$\omega_I = 41,6 \text{ rad/s} \quad \text{i} \quad \omega_1 = 24 \text{ rad/s}$$

Prijenosna funkcija traženog kompenzatora s faznim zaostajanjem
stoga glasi:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{24}}{1 + \frac{s}{72}} \quad (12.107)$$

Budući da smo proračunano fazno prethodjenje otprilike podigli
s $27,5^\circ$ na 30° , dobivenu faznu pričuvu treba provjeriti, da se
vidi kolika je ipak njena stvarna vrijednost. Argument kompenzi-

ranog sustava na frekvenciji kritične amplitude glasi:

$$\arg K G(j\omega_I) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{41,6}{10} +$$
$$\arctan \frac{41,6}{24} - \arctan \frac{41,6}{72} = -136,5^\circ, \quad (12.108)$$

a fazna pričuva:

$$\gamma = 180 - \arg K G(j\omega_I) = 180 - 136,5^\circ = 43,5^\circ \quad (12.109)$$

dakle za $1,5^\circ$ manja nego što je zahtijevano. Razlog tome su aproksimacije učinjene tokom proračuna. Međutim, kako je već u više navrata spominjano, takva odstupanja se u inženjerskoj praksi najčešće mogu tolerirati, a ušteda vremena koja se aproksimacijskim postupkom računanja postiže je tolika, da čak i onda ako se odstupanje ne može tolerirati, više se isplati aproksimacijski postupak nekoliko puta ponavljati, nego ga samo jedanput matematičkom točnošću provesti. Na kraju, i ovdje slijedi provjera ponašanja regulacijskog sustava s pomoću GMK. Ako se pokaže da kompenzirani sustav iz bilo kog razloga ne zadovoljava, postupak se ponavlja uz korištenje stečenog iskustva.

Postupak kompenzacije s faznim prethodjenjem odvija se ovim redoslijedom:

1. skicirati amplitudni i fazni dijagram zadalog objekta da se vidi kakva je kompenzacija potrebna i moguća;
2. odrediti pojačanje potrebno da se postigne tražena konstanta brzine;
3. odrediti frekvenciju i fazu za $K G_p(j\omega_I)$;
4. procijeniti vrijednost faznog prethodjenja potrebnog da se postigne tražena fazna pričuva;
5. izračunati pojačanje α kompenzatora, jednačba (12.101);
6. izračunati parametre kompenzatora tako da se frekvencija kritične amplitude kompenziranog sustava podudara s frekvencijom maksimalne faze kompenzatora, jednačbe (12.103) i (12.106);

7. provjeriti dobijenu faznu pričuvu i ponoviti postupak ako je potrebno;
8. sa GMK provjeriti ponašanje regulacijskog sustava.

12.3.4. Kompenzacija s faznim zaostajanjem i prethodjenjem

Iz dosadašnjih razmatranja proizlazi da jedna i druga vrst kompenzatora ima svoje prednosti i mane, ali da se jedni i drugi mogu ekonomično primjenjivati u velikom broju praktičnih slučajeva.

Ideja kompenzacije s faznim zaostajanjem temelji se na činjenici, da se, u slučajevima kad fazno zaostajanje monotono raste s porastom frekvencije, može smanjenjem frekvencije kritične amplitude ω_I povećati fazni pričuvu γ , a time i povećati stabilnost sustava. U ovom slučaju se stoga bolja kompenzacija postiže prigušenjem u području srednjih frekvencija. Smanjenjem frekvencije kritične amplitude za koju smo rekli da prilično dobro aproksimira gornju graničnu frekvenciju, smanjuje se i frekvencijski pojas, pa stoga sustav postaje tromiji. S druge strane to ima svojih prednosti, jer prigušuje više frekvencije, a time i reducira šum. Postoji, osim toga, jedan broj slučajeva na koje se ova vrst kompenzatora ne može primijeniti.

Smisao kompenzacije s faznim prethodjenjem sastoji se u tome da se u području frekvencije kritične amplitude doda fazno prethodjenje i da se na taj način poveća fazna pričuva. Za razliku od prethodnog kompenzatora koji djeluje prigušenjem, pa se stoga može realizirati od jeftinijih pasivnih elemenata, ovaj kompenzator gubi tu prednost, jer mora imati i pojačanje. Zbog povećanja frekvencije kritične amplitude povećava se i frekvencijski pojas, pa stoga regulacijski sustav postaje hitriji. To, međutim, ima i svoju negativnu stranu, što se time povećava i šum sustava.

Ako se prisjetimo da se kod kompenzatora s faznim zaostajanjem frekvencija kritične amplitude smješta u područje minimalne faze, a kod kompenzatora s faznim prethodjenjem u područje maksimalne faze, lako je uočiti da prikladnim ugađanjem lomnih frek-

vencija ovih dvaju kompenzatora njihovi učinci postaju komplementarni. Da bi se to postiglo, lomne frekvencije treba tako izabrati da prigušuje kompenzatora s faznim zaostajanjem djeluje ispod frekvencije kritične amplitude, a fazno prethodjenje kompenzatora s faznim prethodjenjem da djeluje upravo na toj frekvenciji. Na taj način se smanjuje potrebno prigušenje, jer je povećanje fazne pričuve postignuto istovremenim djelovanjem prigušenja i faznog prethodjenja na srednjim frekvencijama.

I pojačanje na višim frekvencijama kompenzatora s faznim prethodjenjem koje je utjecalo na izdizanje šuma, u kombinaciji dvaju kompenzatora se može potpuno eliminirati, ili čak ostvariti prigušenje na tim frekvencijama.

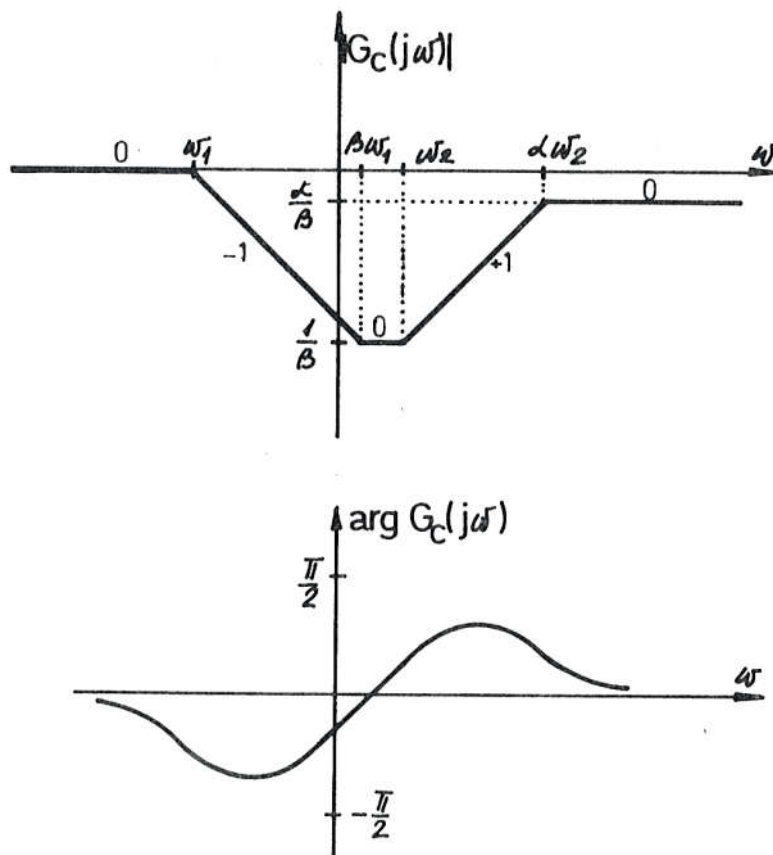
Serijskom vezom kompenzatora s faznim zaostajanjem i kompenzatora s faznim prethodjenjem dobije se kompenzator s faznim zaostajanjem i prethodjenjem, kojeg prijenosa funkcija glasi:

$$G_c(s) = \frac{(1 + \frac{s}{\beta\omega_1})(1 + \frac{s}{\omega_2})}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + \frac{s}{\alpha\omega_2})} \quad (12.110)$$

gdje je $\alpha > 1$, $\beta > 1$ i $\beta\omega_1 \leq \omega_2$. Bodeovi dijagrami ovog kompenzatora prikazani su na Sl.12.29.

Premda je kompenzacija pasiva, tj. $|G_c(j\omega)| < 1$ za sve frekvencije ako je $\alpha < \beta$, fazno prethodjenje se generira s nagibom +1 između frekvencija ω_2 i $\alpha\omega_2$. Ako se lomne frekvencije kompenzatora tako proračunaju da frekvencija kritične amplitude petlje kompenziranog sustava $K G(s)$ dodje između lomnih frekvencija ω_2 i $\alpha\omega_2$, sustavu se na tim frekvencijama dodaje fazno prethodjenje i na taj način se povećava fazna pričuva. Budući da se ovom kompenzacijom unosi prigušenje na svim frekvencijama većim od ω_1 , na taj način se smanjuje frekvencija kritične amplitude, što uz monotono povećanje faznog zaostajanja rezultira povećanjem fazne pričuve.

Iako je sintezu i ovog kompenzatora kao i ostalih moguće provesti analitički, taj postupak je toliko složen, da je ekonomičnije primijeniti postupak uzastopnih pokušaja. Treba, međjutim, naglasiti da za ovaj kompenzator ni to ne ide jednostavno, ali je



Sl.12.29. Amplitudni i fazni dijagram kompenzatora s faznim zaostajanjem i prethodjenjem

vrlo vjerojatno da se prosječno u tri pokušaja može doći do zadovoljavajućeg rezultata.

Jedan od mogućih postupaka kompenzacije s faznim zaostajanjem i prethodjenjem provest ćemo na sustavu:

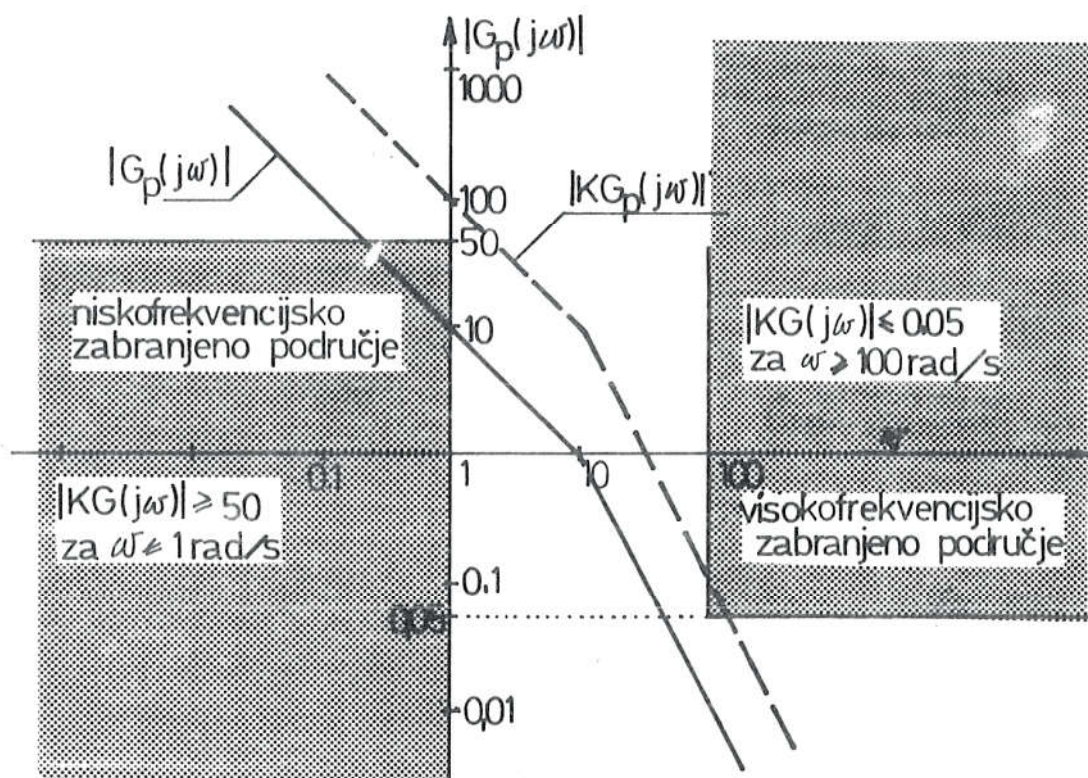
$$G_p(s) = \frac{10}{s(1 + \frac{s}{10})} \quad (12.111)$$

na kojem je prethodno primijenjen kompenzator s faznim prethodjenjem. U sadašnjem slučaju, međutim, osim zahtjeva:

1. da konstanta brzine bude $K_v=100$;
2. da fazna pričuva bude $\gamma_v \approx 45^\circ$; i
3. da pogreška sinusnog signala od 1 rad/s bude $e \leq 2\%$;

još se dodaje i zahtjev:

4. da sinusni signal, od 100 rad/s bude prigušen za 95%.



Sl.12.30. Amplitudni dijagram objekta (12.111) s ucrtanim zahtjevima kompenzacije

Puna linija na Sl.12.30. predstavlja amplitudni dijagram objekta (12.111). Na istoj slici označeno je niskofrekvencijsko zabranjeno područje koje je definirano pogreškom sinusnog signala od 1 rad/s kao i visokofrekvencijsko zabranjeno područje koje je definirano prigušenjem sinusnog signala od 100 rad/s.

Da bi se postigla zahtijevana konstanta brzine $K_v=100$, sustavu se najprije u seriju dodaje pojačanje $K=10$. Rezultantni amplitudni dijagram označen je crtkanom linijom na Sl.12.30.

Iz prijašnjih razmatranja znamo da se ovaj sustav ne može kompenzirati kompenzatorom s faznim zaostajanjem, jer je raspoloživo frekvencijsko područje preusko za primjenu tog kompenzatora. Do-

datkom zahtjeva atenuacije za signal od 100 rad/s, ne može se više primijeniti ni kompenzator s faznim prethodjenjem.

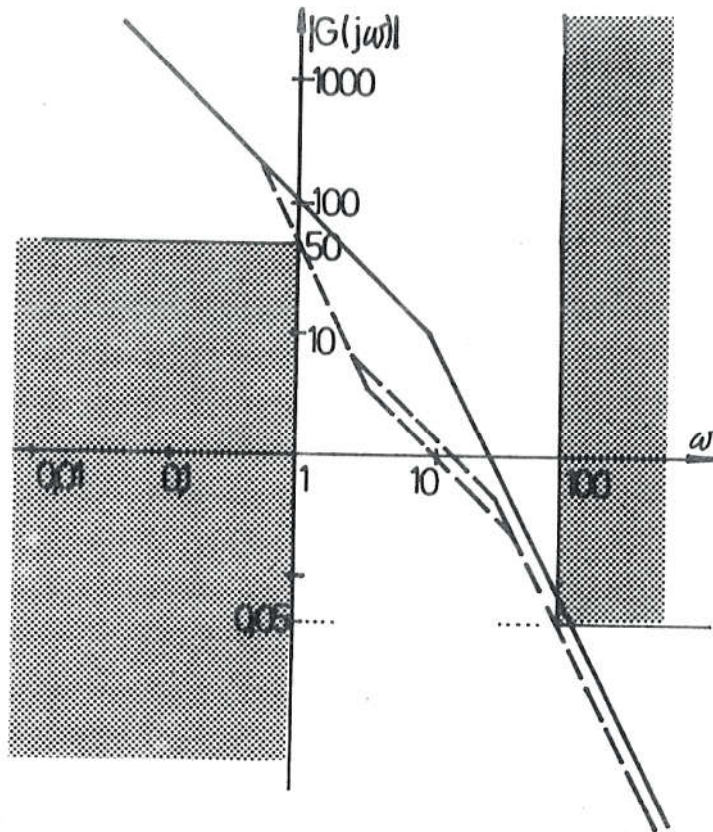
Budući da primjenom kompenzatora s faznim zaostajanjem i prethodjenjem početni i krajnji nagib amplitudnog dijagrama petlje kompenziranog sustava ostaju isti, i da je niskofrekvencijska asimptota već određena s konstantom brzine $K_v=100$, možemo od niskofrekvencijske asimptote pod nagibom -2 povući asimptotu koja dodiruje niskofrekvencijsko zabranjeno područje; a paralelno sa završnom asimptotom sustava $K G_p(s)$ možemo povući završnu asimptotu koja dodiruje visokofrekvencijsko zabranjeno područje. Sa Sl.12.31. očitavamo da u tom slučaju prva lomna frekvencija traženog kompenzatora poprima $\omega_1=0,5$ rad/s.

Ostali parametri kompenzatora trebaju biti takvi da se postigne maksimalna fazna pričuva. Ako je tako, najbolje je najprije naći maksimalnu faznu pričuvu, a potom iz dijagrama očitati parametre, odnosno lomne frekvencije kompenzatora. Za prvi pokušaj uzmimo da je frekvencija kritične amplitude $\omega_I=10$ rad/s. U tom slučaju prijenosna funkcija petlje kompenziranog sustava glasi:

$$K G(s) = \frac{100(1 + \frac{s}{5})}{s(1 + \frac{s}{0,5})(1 + \frac{s}{50})} \quad (12.112)$$

Točni fazni pomak na $\omega_I=10$ rad/s je $\arg KG(j10)=-125^\circ$, a fazna pričuva $\gamma=55^\circ$. Budući da je fazna pričuva bolja od zahtijevane, time se kompenzacija može smatrati završenom. U slučaju da fazna pričuva ispadne manja od zahtijevane treba naći veću vrijednost odnosno ako ni ta vrijednost ne zadovoljava treba pronaći maksimum. Ako ni maksimum ne zadovoljava, to znači da se kompenzacija mora provesti složenijom strukturom kompenzatora.

Pokušajmo ipak i u ovom slučaju provjeriti da li je fazna pričuva od $\gamma=55^\circ$ maksimalna. Proračunom za $\omega_I=12,5$ rad/s izlazi da je $\gamma=59,5^\circ$, a za $\omega_I=15$ rad/s izlazi da je $\gamma=56,2^\circ$. Za najveću faznu pričuvu $\gamma=59,5^\circ$ prijenosna funkcija petlje kompenziranog sustava glasi:



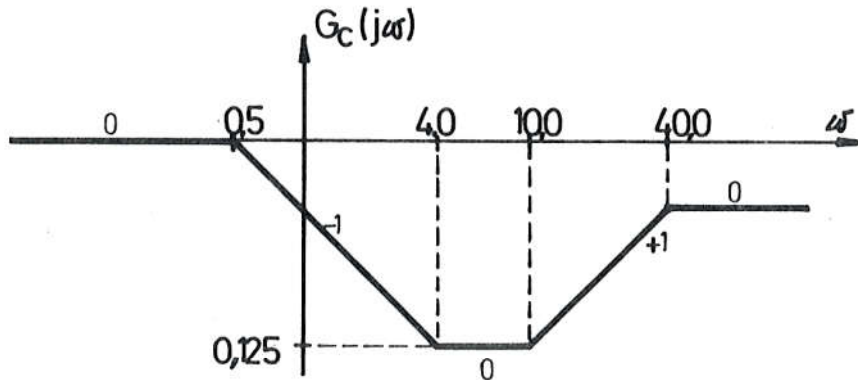
Sl.12.31. Amplitudni dijagram $K G_p(s)$ sa crtkano označenim pokušajima za sintezu kompenzatora s faznim zaostajanjem i prethodjenjem

$$K G(s) = \frac{100(1 + \frac{s}{4})}{s(1 + \frac{s}{0,5})(1 + \frac{s}{40})}$$

a prijenosna funkcija kompenzatora:

$$G_c(s) = \frac{K G(s)}{K G_p(s)} = \frac{\frac{100(1 + \frac{s}{4})}{(1 + \frac{s}{0,5})(1 + \frac{s}{40})}}{\frac{100}{s(1 + \frac{s}{10})}} = \frac{(1 + \frac{s}{4})(1 + \frac{s}{10})}{(1 + \frac{s}{0,5})(1 + \frac{s}{40})} \quad (12.113)$$

Na Sl.12.32. prikazan je amplitudni dijagram kompenzatora (12.113) s kojeg se vidi da je $\omega_1=0,5$, $\beta=8$; $\omega_2=10$ i $\alpha=4$. Da bi se vidjelo da li ovako kompenzirani sustav u cjelini zadovoljava, potrebno ga je ispitati s GMK, a potom provjeriti da li vrijednosti varijabli stanja ostaju u linearnom području. Provedeni postupak kompenzaci-



Sl.12.32. Kompenzator s faznim zaostajanjem i prethodjenjem (12.113)

je s faznim zaostajanjem i prethodjenjem odvija se ovim redoslijedom:

1. skicirati Bodeov amplitudni dijagram s označenim zabranjenim područjima na donjim i gornjim frekvencijama;
2. dodati pojačanje potrebno da se postigne zahtijevana konstanta brzine;
3. skicirati asimptotičku aproksimaciju amplitudnog dijagrama u području donjih srednjih frekvencija, vodeći računa o zabranjenom području na niskim frekvencijama;
4. skicirati asimptotičku aproksimaciju u području visokih frekvencija vodeći računa o zabranjenom području na visokim frekvencijama;
5. spojiti donju frekvencijsku asimptotu s gornjom frekvencijskom asimptotom, tako da spojena asimptota siječe apscisnu os na frekvenciji maksimalne fazne pričuve;
6. sa GMK provjeriti sintezu i obaviti potrebne korekcije.

12.3.5. Paralelna kompenzacija

Makar je sinteza sa serijskom kompenzacijom jednostavnija za obradbu, u izvjesnim slučajevima, kao npr. kad kompenzator ne smije utjecati na ostale članove serijskog lanca, paralelna kom-

penzacija postaje neizbježna. Kao i kod sinteze sa serijskom kompenzacijom, i za sintezu s paralelnom kompenzacijom postoji niz postupaka koji se po potrebi mogu naći u navedenoj literaturi. Budući da opseg ove knjige ne dopušta obradbu svih tih postupaka, ovdje ćemo obraditi samo postupak s inverznim Nyquistovim dijagramom koji se odlikuje neposrednom jednostavnošću.

12.3.5.1. Inverzni Nyquistov dijagram

Da bi ga u sintezi mogli primijeniti, najprije ćemo se upoznati s načinom crtanja i svojstvima *inverznog Nyquistovog dijagrama* (IND).

Uzme li se da je prijenosna funkcija dana izrazom:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \quad (12.114)$$

njezina inverzija glasi:

$$\frac{1}{G(s)} = G^{-1}(s) = \frac{u(s)}{y(s)} \quad (12.115)$$

Radi postupnog ulaženja u ovo gradivo, pogledajmo najprije kako izgledaju IND nekih jednostavnih funkcija. Uzmimo najprije sustav drugog reda nulte vrste sa statičkom osjetljivošću petlje $K_v \neq 1$, kojeg prijenosna funkcija glasi:

$$G(j\omega) = \frac{K_{st}}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \quad (12.116)$$

a njezina inverzija:

$$G^{-1}(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}{K_{st}} \quad (12.117)$$

Kao što smo radili i za *direktni Nyquistov dijagram* (DND) potražimo i ovdje izraze za dvije granične vrijednosti prijenosne funkcije, i to za $\omega \rightarrow 0$ i $\omega \rightarrow \infty$. Za slučaj kada $\omega \rightarrow 0$ izraz za graničnu vrijednost glasi:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G^{-1}(j\omega) = \frac{1}{K_{st}}, \quad (12.118)$$

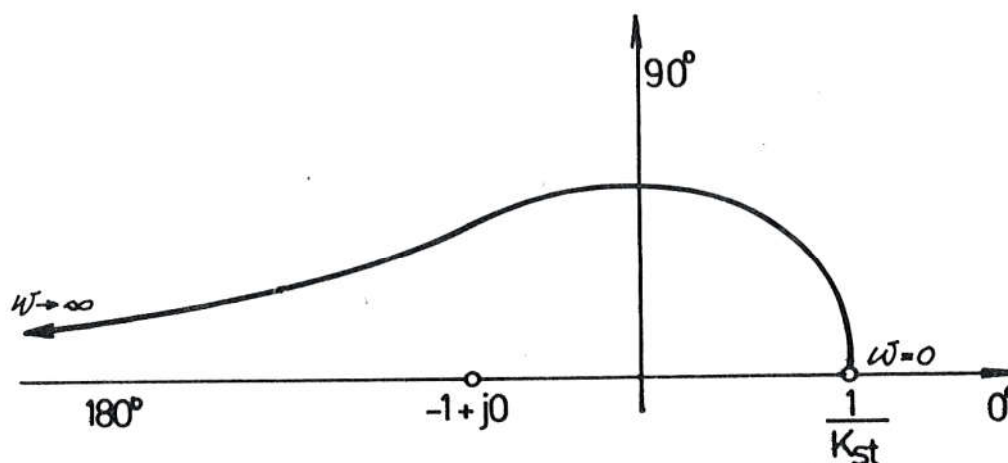
a za slučaj kada $\omega \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G^{-1}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (j\omega)^2 T_1 T_2 = -\infty e^{j180^\circ}$$

Kad se ω mijenja od nule do ∞ , fazni kut svakog pojedinog člana u brojniku inverznog prijenosa mijenja se od nule do 90° . Budući da u nazivniku nema frekvencijski ovisnog člana, promjena faznog kuta za promjenu frekvencije od nule do ∞ ovisit će samo o brojniku i kretat će se od nule do 180° . Svaki dodatni član prvog reda u brojniku zakrenut će visokofrekvencijski dio IND za daljnjih 90° . IND za sustav drugog reda nulte vrste, bez nula, prikazan je na Sl.12.33.

Pogledajmo nadalje kako će izgledati IND sustava četvrtog reda prve vrste bez nula uz $K_{st} \neq 1$. Prijenos takvog sustava glasi:

$$G(j\omega) = \frac{K_{st}}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}, \quad (12.120)$$



Sl.12.33. Inverzni Nyquistov dijagram sustava drugog reda nulte vrste, bez nula

a njegova inverzija:

$$G^{-1}(j\omega) = \frac{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}{K_{st}} \quad (12.121)$$

Granične vrijednosti sustava (12.121) su:

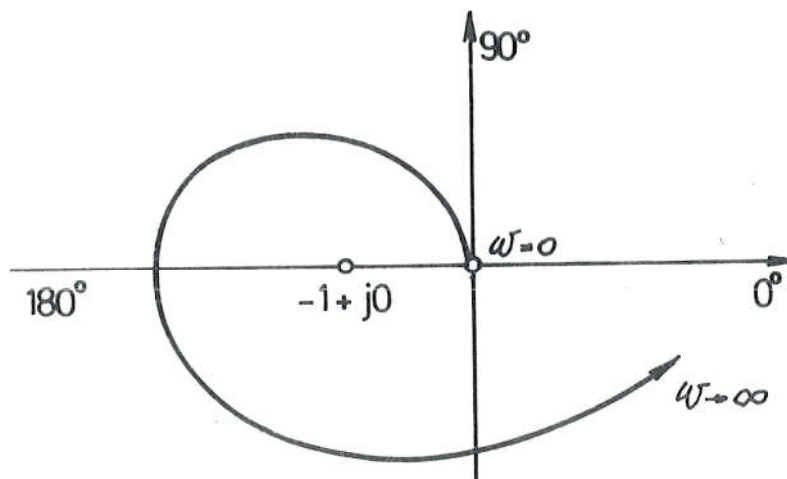
za $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G^{-1}(j\omega) = e^{j90^\circ}, \quad (12.122)$$

a za $\omega \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G^{-1}(j\omega) = \infty e^{j360^\circ} \quad (12.123)$$

IND sustava (12.120), prikazan na Sl.12.34., pokazuje kontinuirani tok krivulje, koji je svojstven sustavima bez nula.



Sl.12.34. IND sustava (12.120)

Ako sustav ima nule, tako da njegova inverzija glasi:

$$G^{-1}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 (1+\omega T_1) (1+\omega T_2) (1+j\omega T_3)}{K_{st} (1 + j\omega T_4)} \quad (12.124)$$

na krivulji IND (Sl.12.35.) pojaviti će se karakteristična mjesta infleksije.

Pri crtanju IND treba se pridržavati slijedećih pravila:

1. Za frekvenciju $\omega=0$ dijagram počinje u točki definiranoj izrazom:

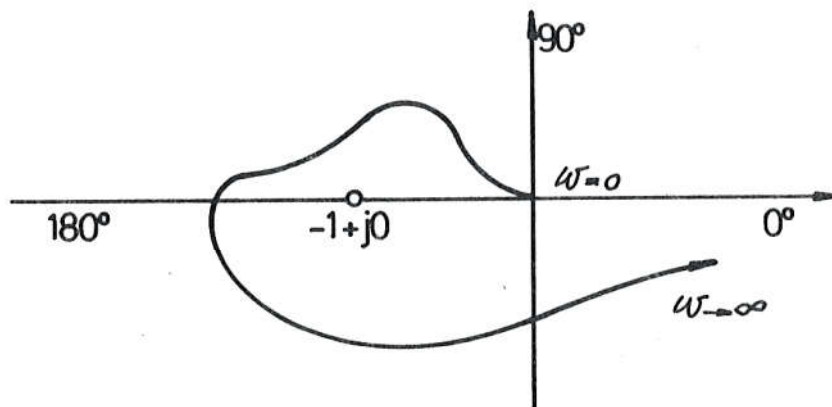
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G^{-1}(j\omega) \quad (12.125)$$

2. Za frekvenciju $\omega=\infty$ dijagram završava u točki:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{G}^{-1}(j\omega) = \infty e^{j(l+u+w)90^\circ} \quad (12.126)$$

Značenje brojeva l , u i w proizlazi iz načina pisanja prijenosne funkcije:

$$G(j\omega) = \frac{s^w \prod_{i=1}^u (1+j\omega T_i)}{s^l \prod_{j=1}^u (1+j\omega T_j)} \quad (12.127)$$



Sl.12.35. IND sustava petog reda s jednom nulom (12.124)

3. Točka presjeka s realnom osi nalazi se s pomoću relacije:

$$I_m[G^{-1}(j\omega)] = 0 \quad (12.128)$$

4. Točka presjeka s imaginarnom osi nalazi se s pomoću relacije:

$$R_e[G^{-1}(j\omega)] = 0 \quad (12.129)$$

5. Fazni kut IND za inverzne prijenose bez vremenskih konstanti u nazivniku raste kontinuirano, a za inverzne prijenose s vremenskim konstantama u nazivniku na krivulji IND pojavljuju se infleksije.

6. Niskofrekvencijski dio IND, kao i DND ovisi o vrsti sustava.

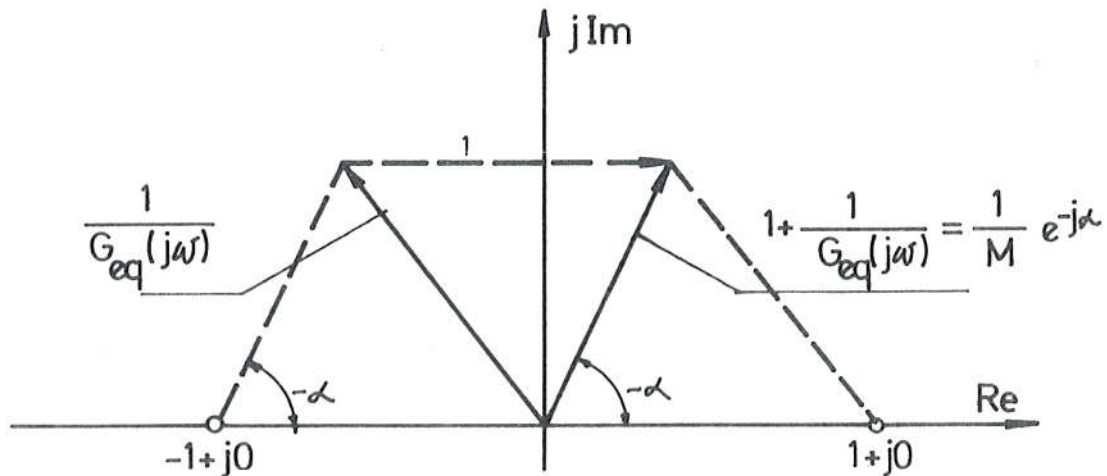
12.3.5.2. M i α krivulje IND

Odredjivanje konstantnih $1/M$ i α parametara je u IND jednostavnije nego što je to, bilo u DND. Pokažimo to na prijenosnoj funkciji opećnitog sustava izraženog s $G_{eq}(s)$

$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{G_{eq}(j\omega)}{1+G_{eq}(j\omega)} \quad (12.130)$$

koje inverzija glasi:

$$\frac{r(j\omega)}{y(j\omega)} = \frac{1}{G_{eq}(j\omega)} + 1 = \frac{1}{M} e^{-j\alpha} \quad (12.131)$$



Sl.12.36. Verzorski prikaz IND regulacijskog sustava izraženog s $G_{eq}(s)$

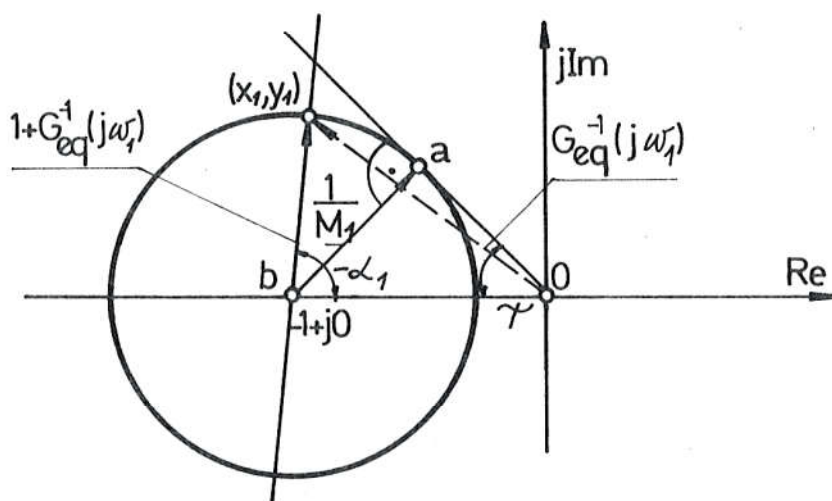
Iz verzorskog prikaza IND regulacijskog sustava izraženog s $G_{eq}(s)$ na Sl.12.36. lako se može vidjeti da segment koji spaja točku $-1+j0$ s vrhom verzora $1/G_{eq}(j\omega)$ predstavlja veličinu $1+(1/G_{eq}(j\omega))$, odnosno $\frac{1}{M} e^{-j\alpha}$.

Krivulje konstantnih vrijednosti $1/M$ su, prema tome, kružnice polumjera $1/M$ sa središtem u točki $-1+j0$, a krivulje konstantnih vrijednosti $-\alpha$ su pravci koji prolaze kroz točku $-1+j0$ pod kutom $-\alpha$, kako je to prikazano na Sl.12.37. Sa Sl.12.37., takodjer, pro-

proizlazi da je:

$$\sin \psi = \frac{ab}{Ob} = \frac{1/M}{1} = 1/M, \quad (12.132)$$

a segment koji spaja točku $-1+j0$ s točkom (x_1, y_1) predstavlja verzor $1+G_{eq}^{-1}(j\omega)$ za frekvenciju ω_q .



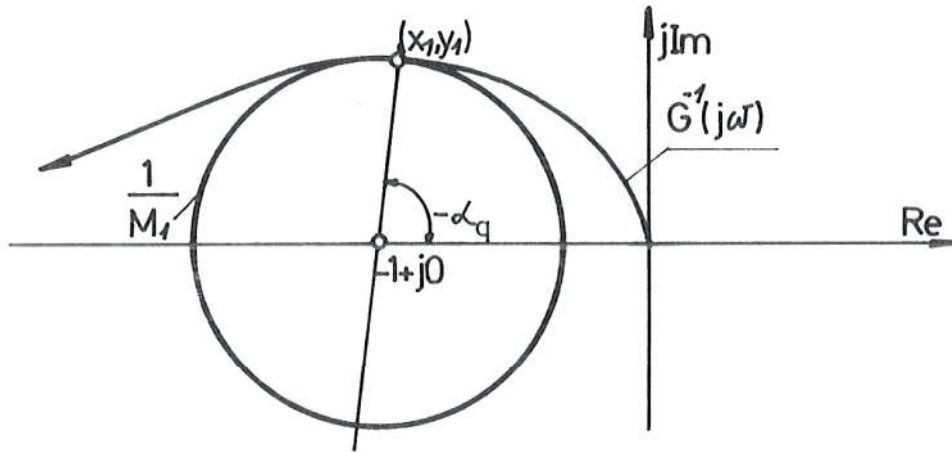
Sl.12.37. $1/M_1$ i α_1 krivulje sustava $G^{-1}(j\omega_1)$

Sa Sl.12.38. na kojoj je nacrtana čitava krivulja IND, tj. za područje od $\omega=0$ do $\omega=\infty$, vidi se da kružnica polumjera $1/M_1$ dodiruje krivulju u točki (x_1, y_1) koja predstavlja frekvenciju ω_1 . Pravac koji prolazi kroz točku (x_1, y_1) i $-1+j0$ zatvara s realnom osi kut $-\alpha_1$. Frekvencija $\omega_1=\omega_q$ je prema tome frekvencija na kojoj modul ima maksimalnu vrijednost s fazom $\alpha_1=\alpha_q$.

Ako je prijenosna funkcija sustava izražena s $H_{eq}(s)$ njen matematički model glasi:

$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega) H_{eq}(j\omega)}, \quad (12.133)$$

a inverzija:



Sl.12.38. IND sustava $G(j\omega)$ s kružnicom $1/M_q$ i kutom $-\alpha_q$

$$\frac{r(j\omega)}{y(j\omega)} = \frac{1+G(j\omega) H_{eq}(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{1}{G(j\omega)} + H_{eq}(j\omega) \quad (12.134)$$

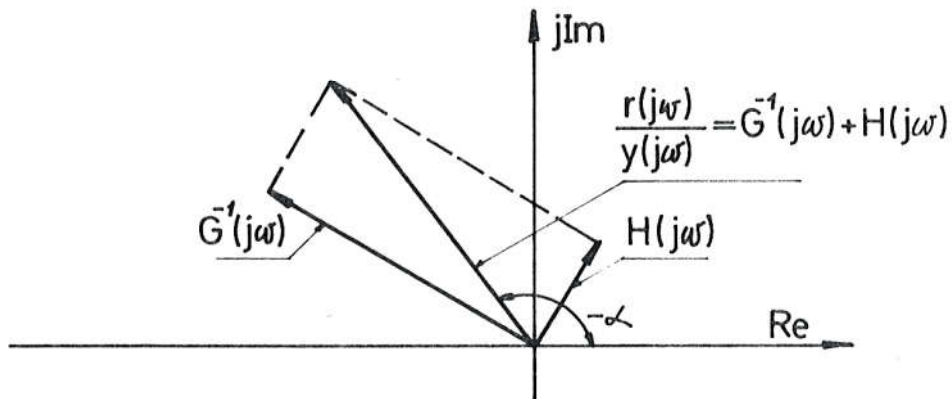
Uz pretpostavku da su svi k_i , osim k_1 , jednaki nuli, $H_{eq}(s)$ se sastoji samo od prijenosne funkcije u grani negativne povratne veze koja povezuje izlaz s ulazom sustava, pa se umjesto $H_{eq}(s)$ može pisati samo $H(s)$. U tom slučaju inverzna prijenosna funkcija glasi:

$$\frac{r(j\omega)}{y(j\omega)} = G^{-1}(j\omega) + H(j\omega) \quad (12.135)$$

Iz relacije (12.135) proizlazi da se verzori $G^{-1}(j\omega)$ i $H(j\omega)$ mogu zasebice crtati; zatim ih se može zbrojiti i tako dobiti inverznu prijenosnu funkciju regulacijskog sustava. Na taj način je nacrtan verzorski prikaz na Sl.12.39.

Za ilustraciju uzmimo regulacijski sustav kojeg funkcija objekta glasi:

$$G_p(s) = \frac{K_{st}}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \quad (12.136)$$



Sl.12.39. Vektorski prikaz inverzne prijenosne funkcije regulacijskog sustava s nejediničnom povratnom vezom

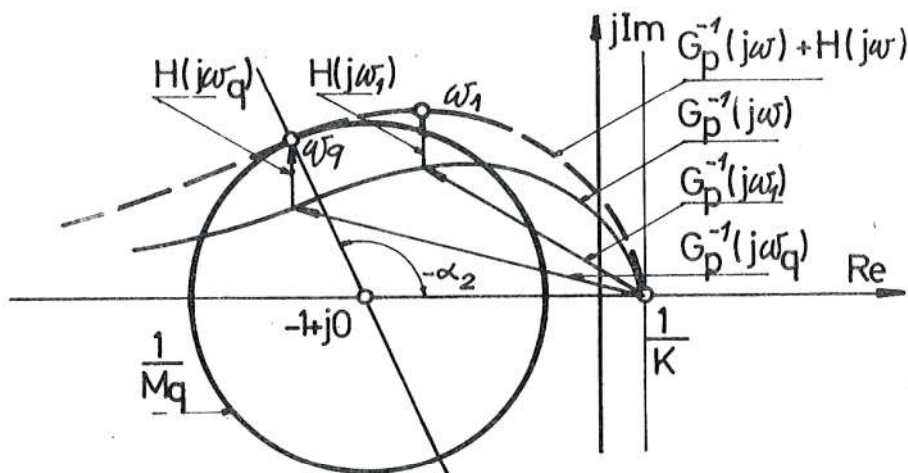
a funkcija u povratnoj grani:

$$H(j\omega) = K_t j\omega \quad (12.137)$$

Inverzna prijenosna funkcija prema jednadžbi (12.135), stoga, glasi:

$$G^{-1}(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}{K_{st}} + K_t j\omega \quad (12.138)$$

koje je IND nacrtan na Sl.12.40.



Sl.12.40. IND funkcija (12.138) s $\frac{1}{M_q}$ i α_q krivuljama

12.3.5.3. Ugadjanje statičke osjetljivosti petlje s pomoću IND

Vrijednost statičke osjetljivosti petlje koja odgovara zadanoj vrijednosti M_q može se na relativno jednostavan način odrediti s pomoću IND. S time u vezi treba najprije uočiti da, ako inverznu prijenosnu funkciju:

$$\frac{1}{G(j\omega)} = \frac{1}{K G_p(j\omega)} = G^{-1}(j\omega) = x + jy \quad (12.139)$$

pomnožimo s faktorom K , tako da izlazi:

$$\frac{K}{G(j\omega)} = \frac{1}{G_p(j\omega)} = G_p^{-1}(j\omega) = Kx + jKy = x' + jy' \quad (12.140)$$

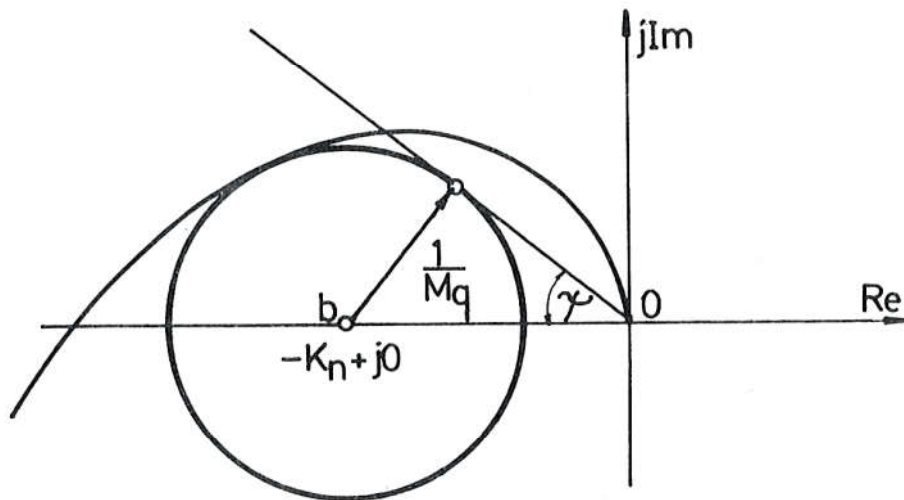
u odnosu na grafički prikaz to znači promjenu skale, tj. množenje koordinata (x, y) s K da bi se dobile koordinate (x', y') . U tom slučaju točka $-1+j0$ postaje $-K+j0$, a polumjer r_0 postaje $r_0' = Kr_0$.

Iz jednadžbe (12.132) proizlazi da kružnica $1/M$ treba dodirivati poluzraku koja je pod kutom $\arcsin(1/M)$ nagnuta prema osi x , a naravno i IND. Ako statička osjetljivost petlje ne odgovara zadanom M_q , kružnica $\frac{1}{M}$ neće dodirivati i poluzraku. Medjutim, može se nacrtati kružnica polumjera $1/M$ koja dodiruje IND i poluzraku, ali joj središte neće biti u točki $-1+j0$, nego u točki K_n+j0 . Da bi se središte pomaklo u točku $-1+j0$ statička osjetljivost treba iznositi K_n , a to znači da izravnu statičku osjetljivost K_{st} treba pomnožiti s faktorom:

$$A = K_n/K_{st} \quad (12.141)$$

Na temelju izvršenog razmatranja usvajamo slijedeći postupak odredjivanja statičke osjetljivosti za zadani M_q :

1. nacrtati IND zadane prijenosne funkcije uz jediničnu vrijednost statičke osjetljivosti, $K_{st}=1$;
2. nacrtati poluzraku pod kutom $\arcsin(1/M)$;



Sl.12.41. Određjivanje statičke osjetljivosti K_{st} za zadano frekvencijsko nadvišenje M_q

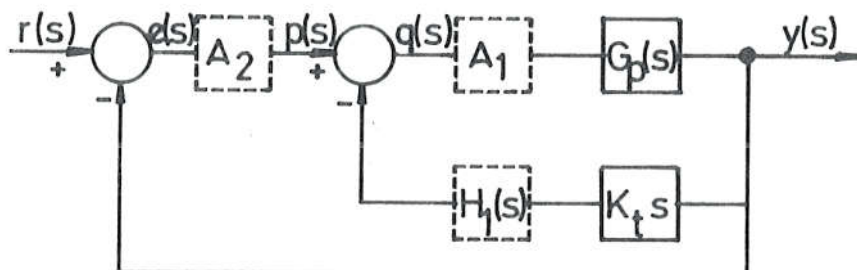
3. postupkom uzastopnih pokušaja ucrtati kružnicu polumjera $1/M$ sa središtem na realnoj osi, tako da dobijemo poluzraku i IND;
4. izmjeriti segment $\overline{Ob}$ tj. udaljenost od ishodišta do središta kružnice na realnoj osi, i označiti $K_n = \overline{Ob}$;
5. s pomoću relacije $A = K_n/K$ odrediti faktor kojim treba pomnožiti izvornu statičku osjetljivost K_{st} , da se dobije tražena statička osjetljivost K_n .

12.3.5.4. Osnovne kombinacije sinteze s paralelnom kompenzacijom

Inverzna prijenosna funkcija regulacijskog sustava se prema jednadžbi (12.135) sastoji od dva dijela, od kojih jedan predstavlja inverznu prijenosnu funkciju osnovne grane, a drugi prijenosnu funkciju povratne grane. Na temelju toga može se iz verzorskog dijagrama grafički odrediti $H(j\omega)$, kao razliku verzora IND osnovne grane i IND željene prijenosne funkcije.

Razmotimo regulacijski sustav sa Sl.12.42. na kojem se s dva pojačala, jednim tahogeneratorom i jednim filtrom dadu izvesti četiri najčešće primjenjivane kombinacije sinteze. Svaku od te

četiri kombinacije posebice ćemo obraditi.



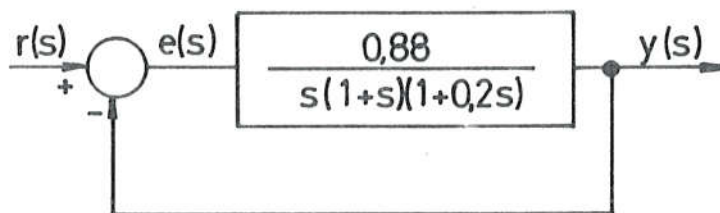
Sl.12.42. Konfiguracija za izvodjenje osnovnih kombinacija sinteze s paralelnom kompenzacijom

Zadatak sinteze koji treba riješiti sa svakom od kombinacija glasi:

Objekt s prijenosnom funkcijom:

$$G_p(s) = \frac{0,88}{s(1+s)(1+0,2s)} \quad (12.142)$$

koji je reguliran jediničnom negativnom povratnom vezom prema Sl.12.43., i ima $M_m=1,25$, $\omega_{m1}=0,72$ i $K_v=0,88$, treba tako kompenzirati da se, uz isto frekvencijsko nadvišenje i $\omega_m \approx 3$, maksimalno poveća K_v .



Sl.12.43. Regulirani sustav s $M_{max}=1,25$, $\omega_{max1}=0,72$ i $K_v=0,88$

I kombinacija: $A_2=1$, $H_1(j\omega) = e^{-j0}$

U ovom slučaju uzmimo da su pojačalo A_2 i filter $H_1(s)$ kratko spojeni, tako da se sinteza izvodi sa serijski vezanim pojačalom

A_1 i paralelno vezanim tahogeneratorom K_{st} , kako je pokazano na Sl.12.42.

Prijenosna funkcija minorne petlje glasi:

$$G(s) = \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{A_1 G_p(s)}{1 + A_1 G_p(s) K_t s} \quad (12.143)$$

a konstanta brzine sustava s jediničnom povratnom vezom:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s A_1 0,88}{(1+s)(1+0,2s) + A_1 0,88 K_t s} \\ &= \frac{A_1 0,88}{1+0,88 A_1 K_t} \end{aligned} \quad (12.144)$$

Konstantu brzine sustava poboljšavamo ako stavimo da je:

$$\frac{0,88 A_1}{1 + 0,88 A_1 K_t} > 0,88$$

odnosno:

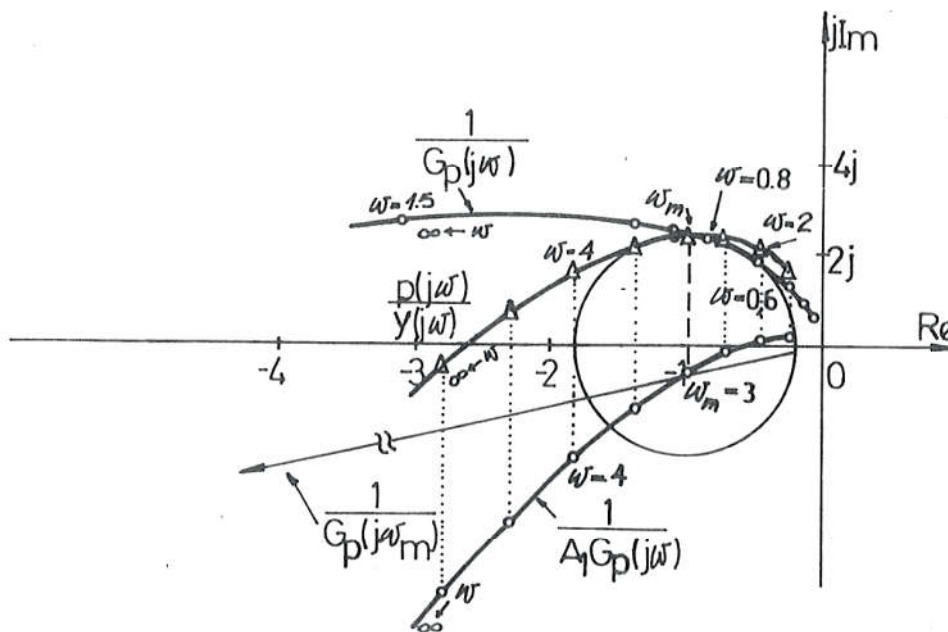
$$\frac{1}{A_1} + 0,88 K_t < 1 \quad (12.145)$$

Drugim riječima, što A_1 bude veći a K_t manji, dobit ćemo veći K_v .

Uz $\omega_m=3$ parametri A_1 i K_t se s pomoću IND određuju prema Sl.12.44. na slijedeći način:

1. nacрта se verzor $G_p^{-1}(j\omega_m)$;
2. nacрта se kružnica $1/M$ sa središtem u $-1+j0$;
3. povuče se okomica kroz točku $-1+j0$;
4. točka presjeka okomice s kružnicom uzima se da predstavlja frekvenciju ω_m željene funkcije $p(s)/y(s)$;
5. presjek verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ i okomice predstavlja vrh verzora $1/A_1 G_p(j\omega_m)$, te se stoga dijeljenjem dužine verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ s dužinom verzora $1/A_1 G_p(j\omega_m)$ dobije tražena vrijednost pojačanja A_1 ;

6. udaljenost točaka presjeka okomice s kružnicom i s verzorom $G_p^{-1}(j\omega_m)$ predstavlja dužinu verzora $K_t \omega_m$, iz koje se može izračunati vrijednost K_t ;
7. s dobijenim vrijednostima za A_1 i K_t nacрта se krivulja $G^{-1}(j\omega) = p(j\omega)/y(j\omega)$ i provjeri da li dodiruje kružnicu $1/M_m$. Ako je dodiruje, sinteza je obavljena, a ako je siječe treba korigirati ω_m i postupak ponoviti;
8. ako tako dobijene vrijednosti za A_1 i K_t ne zadovoljavaju jednadžbu (12.145), treba postupak ponoviti s drugom vrijednošću za ω_m ili izabrati drugu ω_m na kružnici $1/M_m$. U slučaju da se odlučimo za drugu točku na kružnici, postupak je nešto drugačiji od opisanog, a obradit ćemo ga u okviru III kombinacije.



Sl.12.44. Grafičko odredjivanje A_1 i K_t sa Sl.12.42. za I kombinaciju, uz $A_2=1$ i $H_1(j\omega) = 1 e^{-j0}$

II kombinacija: $A_1=1$ $H_1(j\omega) = 1 e^{-j0}$

U ovom slučaju su pojačalo A_1 i filter $H_1(j\omega)$ kratko spojeni, a sinteza se izvodi s pojačalom A_2 u serijskoj vezi s paralelnom kombinacijom objekta $G_p(s)$ i tahogeneratora $K_t s$. Prijenosna funkcija osnovne grane glasi:

$$G(s) = \frac{y(s)}{e(s)} = \frac{A_2 G_p(s)}{1 + G_p(s) K_t s} \quad (12.146)$$

a konstanta brzine:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \frac{0,88 A_2}{1 + 0,88 K_t} \quad (12.147)$$

Poboljšanje konstante brzine se postiže uz uvjet da je:

$$\frac{0,88 A_2}{1 + 0,88 K_t} > 0,88 ,$$

odnosno:

$$1 + 0,88 K_t < A \quad (12.148)$$

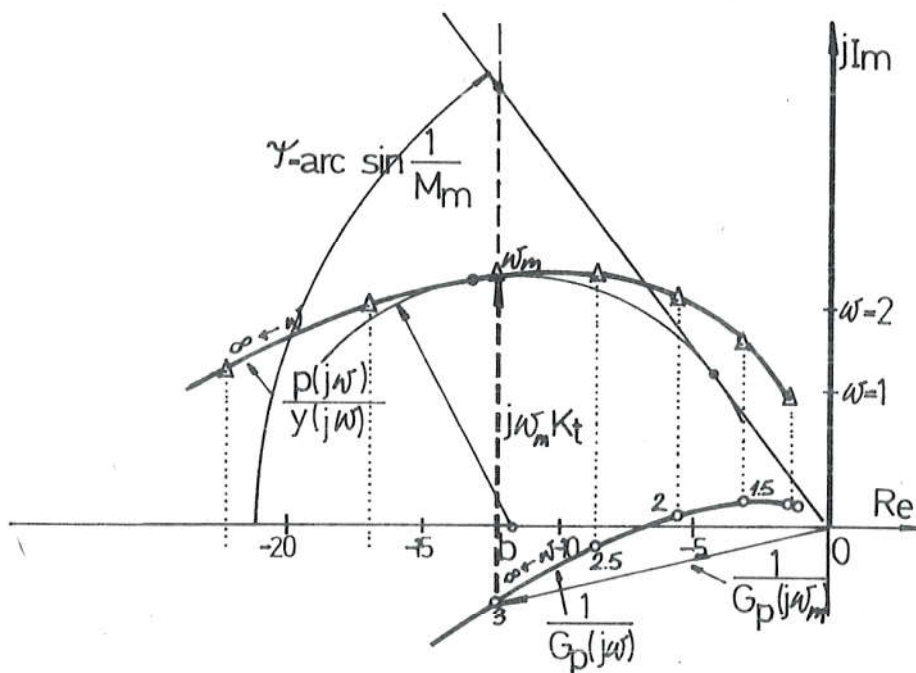
Uz $\omega_m = 3$ parametri A_2 i K_t , se prema Sl.12.45., obradjuju na slijedeći način:

1. nacрта se verzor $G_p^{-1}(j\omega_m)$;
2. nacрта se poluzraka iz točke $G_p^{-1}(j0)$ pod kutom $\psi = \arcsin 1/M$;
3. povuče se okomica kroz vrh verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$;
4. na segmentu okomice od vrha verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ do presjeka s poluzrakom izabere se jedna točka na udaljenosti između jedne polovice i tri četvrtine udaljenosti od vrha verzora, koja se uzima za vrh verzora $p(j\omega_m)/y(j\omega_m)$;
5. dužina okomice od vrha verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ do vrha verzora $p(j\omega_m)/y(j\omega_m)$ predstavlja dužinu verzora $K_t \omega_m$ iz koje se može izračunati vrijednost K_t ;
6. Koristeći sada poznatu vrijednost K_t nacрта se krivulja:

$$\frac{p(j\omega)}{y(j\omega)} = G_p^{-1}(j\omega) + j K_t \omega,$$

a potom se metodom uzastopnih pokušaja nacрта kružnica sa središtem na realnoj osi, koja dodiruje poluzraku i krivulju $p(j\omega)/y(j\omega)$ i tako nađe dužina $\overline{Ob}$ odnosno pojačanje A_2 , jer je $\overline{Ob} = A_2$.

7. ako dobijene vrijednosti A_2 i K_t zadovoljavaju jednačbu (12.148), a potom i konstantu brzine, problem je riješen, a ako ne, bira se nova ω_m i postupak ponavlja dok se problem ne riješi.



Sl.12.45. Grafičko određivanje parametara A_2 i K_t sustava sa
Sl.12.42. za drugu kombinaciju uz $A_2=1$ i $H_1(s)=1 e^{-j0}$

III kombinacija $A_2 = 1$ $H_1(s) = \frac{Ts}{1+Ts}$

U ovom slučaju je pojačalo A_2 na Sl.12.42. kratko spojeno, a kompenzacija se izvodi s pojačalom A_1 , koje je serijski vezano s objektom, te sa serijskom kombinacijom filtra $H_1(s)$ i tahogeneratora $K_t s$ u povratnoj grani minorne petlje. Prijenosna funkcija povratne grane minorne petlje glasi:

$$H(j\omega) = j\omega K_t H_1(j\omega) = \frac{T K_t (j\omega)^2}{1 + j\omega T} \quad (12.149)$$

Postupak u ovom slučaju je sličan postupku u prvoj kombinaciji. Već nam je poznato da je konstanta brzine objekta s jediničnom povratnom vezom (Sl.12.43.) $K_v=0,88$, a s dodatkom prijenosne funkcije (12.149) u minornoj petlji glasi:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A G_p(s)}{1 + A_1 G_p(s) H_1(s) K_t s}, \quad (12.150)$$

što uvrštenjem zadanih vrijednosti daje:

$$K_v = 0,88 A_1 \quad (12.151)$$

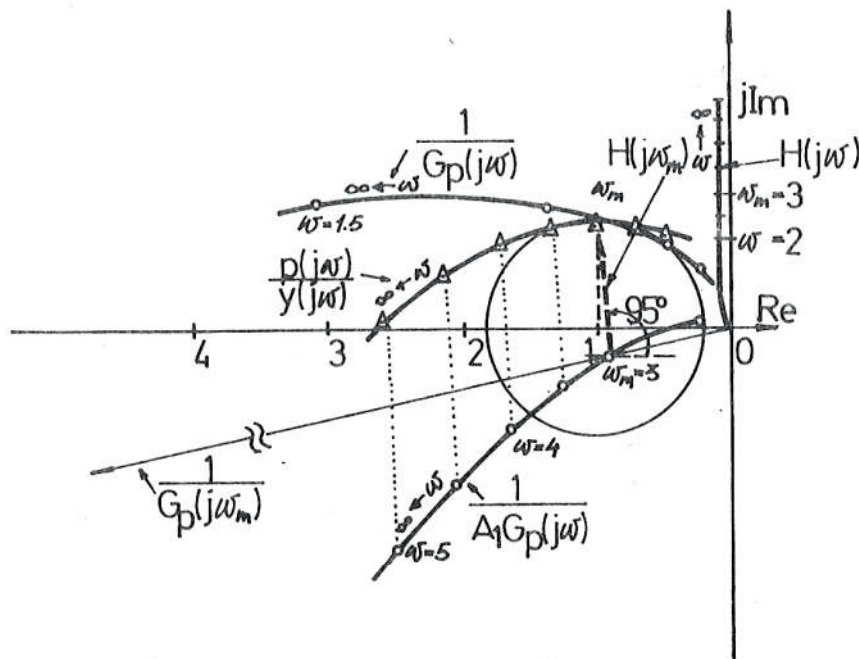
Usporedbom konstante brzine (12.151) sa (12.144) iz prve kombinacije vidi se da se u ovom slučaju postiže veće poboljšanje.

Uz $\omega_m = 3$ parametri A_1 , K_t i T se prema Sl.12.46. određuju na slijedeći način:

1. iskustvo je pokazalo da fazni kut člana u nazivniku visokonaponskog filtra $H_1(s)$ treba biti oko 85° , a odatle uz $\omega_m = 3$ izlazi:

$$\arctan \omega_m T = 85^\circ$$

$$T = \frac{\tan 85^\circ}{\omega_m} = \frac{11,43}{3}$$



Sl.12.46. Grafičko određivanje A_1 , K_t i T sustava sa Sl.12.42. za treću kombinaciju uz $A_2 = 1$ i $H_1(s) = T_s / (1 + T_s)$

2. u kompleksnoj ravnini povuče se verzor $G_p^{-1}(j\omega_m)$ i kružnica $1/M$;
3. kroz točku $-1+j0$ povuče se okomica na realnu os i uzme da točka presjeka okomice s kružnicom predstavlja dodirnu točku IND s kružnicom;
4. iz tako određene točke dodira s kružnicom, povuče se pravac pod kutom od 95° prema realnoj osi do presjeka s verzorom $G_p^{-1}(j\omega_m)$;
5. točka presjeka povučenog pravca i verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ dijeli taj verzor na dva dijela, tako da dio od ishodišta do točke presjeka predstavlja verzor $G_p^{-1}(j\omega_m)/A_1$, pa stoga dijeljenjem verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ s verzorom $G_p^{-1}(j\omega_m)/A_1$ dobija se vrijednost A_1 ;
6. segment povučenog pravca od točke na kružnici do vrha verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)/A_1$ predstavlja verzor $H(j\omega_m)$ koji je zadan relacijom (12.149). Kut člana $1+j\omega_m T$ u nazivniku uzeli smo da je 85° , a budući da kut brojnika $H(j\omega_m)$ iznosi 180° , izraz za $H(j\omega_m)$ glasi $H(j\omega_m) \approx K_t \omega_m e^{-j95^\circ}$. Iz izmjerene dužine verzora se može izračunati K_t ;
7. s tako dobijenim vrijenostima parametara A_1 , K_t i T nacrtana se krivulja:

$$\frac{p(j\omega)}{y(j\omega)} = \frac{1}{A G_p(j\omega)} + H(j\omega),$$

i provjeri da li se stvarna dodira točka krivulje s kružnicom podudara s pretpostavljenom, pa ako se podudara zadatak je riješen, a ako se ne podudara, uzima se druga vrijednost za ω_m i s njom se postupak ponavlja.

IV kombinacija $A_1=1$, $H_1(s) = Ts/(1+Ts)$

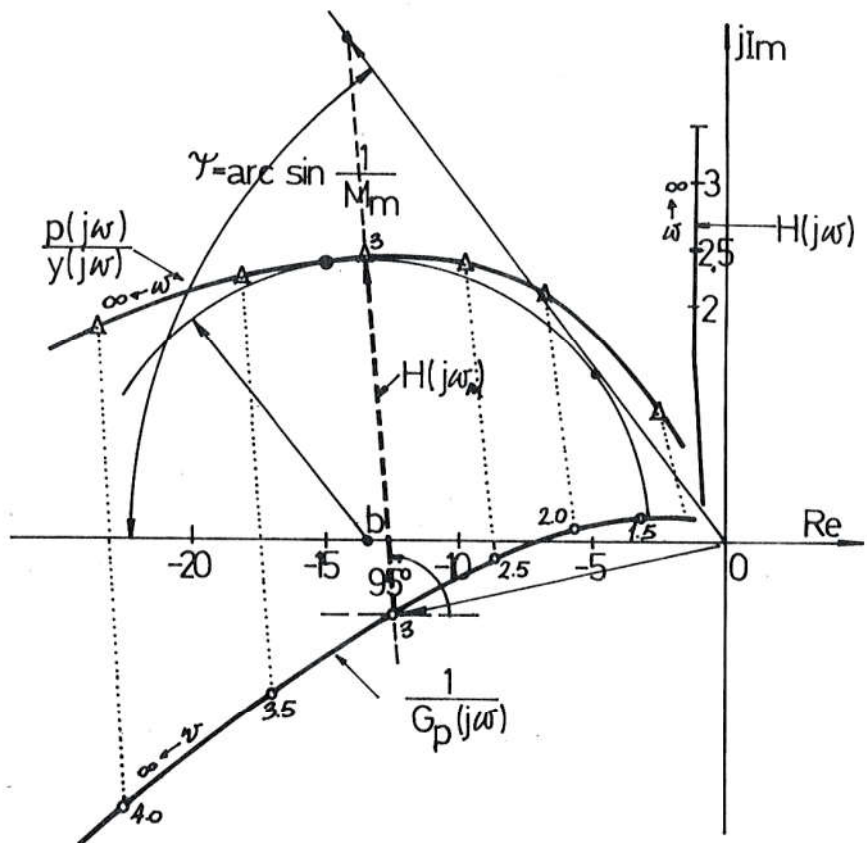
U ovom slučaju je kratko spojeno pojačalo A_1 na Sl.12.42., a kompenzacija se izvodi s pojačalom A_2 , te serijskom vezom filtra $H_1(j\omega)$ i tahogeneratorskog u minornoj petlji. Prijenosna funkcija povratne grane minorne petlje glasi:

$$H(j\omega) = j\omega K_t H_1(j\omega) = \frac{TK_t(j\omega)^2}{1+j\omega T} \quad (12.152)$$

Postupak je ovdje sličan postupku u drugoj kombinaciji, a konstanta brzine kompenziranog sustava glasi:

$$K_v = 0,88 H_2 \quad (12.153)$$

Usporedbom s konstantom brzine prema jednadžbi (12.147) u drugoj kombinaciji vidi se da se u ovom slučaju postiže veće poboljšanje.



Sl.12.47. Grafičko određivanje A_2 , K_t i T sustava sa Sl.42. za četvrtu kombinaciju uz $A_1=1$ i $H_1(s) = \frac{Ts}{1+Ts}$

Uz $\omega_m=3$ parametri A_2 , K_t i T se prema S.12.47. određuju na slijedeći način:

1. uz pretpostavku da član $1+j\omega_m T$ filtra ima fazni kut od 85° , vremenska konstanta se izračunava iz relacije:

$$T = \frac{\operatorname{tg} 85^\circ}{\omega_m} = \frac{11,45}{\omega_m} ;$$

2. u kompleksnu ravninu ucrta se verzor:

$$G_p^{-1}(j\omega_m) ;$$

3. iz točke $G_p^{-1}(j0)$ povuče se poluzraka pod kutom:

$$\psi = \arcsin 1/M_m ;$$

4. prisjetimo se da se verzor $H(j\omega_m)$ na temelju prethodnih razmatranje može opisati izrazom:

$$H(j\omega_m) \approx K_t \omega_m e^{-j 95^\circ}$$

5. poznavajući fazni kut verzora $H(j\omega_m)$ povuče se pod tim kutom pravac kroz vrh verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ do presjeka s poluzrakom kuta ψ . Između polovice i tri četvrtine udaljenosti vrha verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ i presjeka pravca s poluzrakom odabere se točka koja predstavlja vrh verzora:

$$\frac{p(j\omega_m)}{y(j\omega_m)} = G_p^{-1}(j\omega_m) + H(j\omega_m)$$

Udaljenost od vrha verzora $G_p^{-1}(j\omega_m)$ do vrha verzora $p(j\omega_m)/y(j\omega_m)$ predstavlja dužinu verzora $H(j\omega_m)$ tj.

$$H(j\omega_m) = K_t \cdot \omega_m$$

a odatle se, poznavajući ω_m , može izračunati K_t ;

6. korištenjem tako izračunane vrijednosti K_t , nacrtana se krivulja $p(j\omega)/y(j\omega)$.
7. metodom uzastopnih pokušaja u dijagramu se ucrta kružnica sa središtem na rednoj osi, koja simultano dodiruje poluzraku i krivulju $p(j\omega)/y(j\omega)$. Udaljenost središta tako dobijene kruž-

nice od ishodišta predstavlja vrijednost pojačanja A_2 , tj.
 $\overline{0b} = A_2$.

U idućoj tablici iznešene su numeričke vrijednosti kompenzacijskih parametara prema shemi na Sl.12.42., dobijene s pomoću IND. Kompenzacija je provedena na objektu:

$$G_p(j\omega) = \frac{0,88}{j\omega(1+j\omega)(1+0,2j\omega)},$$

a za sve slučajeve je izabrana rezonantna frekvencija $\omega_m = 3 \text{ rad/s}$.

	A_1	A_2	K_t	K_v	T	ω_m	$H_1(s)$
Bez komp.	-	-	-	0,88	-	0,72	-
I kombinacija	12,30	1,00	0,34	2,29	-	3,00	1,00
II kombinacija	1,00	11,40	4,00	2,21	-	3,00	1,00
III kombinac.	12,80	1,00	0,35	12,15	3,81	3,00	$1,31s^2/(1+3,81s)$
IV kombinacija	1,00	13,40	4,50	11,65	3,81	3,00	$17,2s^2/(1+3,81s)$

Tablica 1.23. Vrijednosti kompenzacijskih parametara za četiri različite kombinacije paralelne kompenzacije

Usporedbom prve i druge kombinacije vidi se da je uz približno jednaku vrijednost pojačanja A_1 i A_2 postignuta približno jednaka vrijednost konstante brzine. Međutim, zbog K_t , za koji u drugoj kombinaciji treba dodati pojačanje ($0,34 < 4,00$), prva kombinacija je s inženjerskog stajališta prikladnija. Isti učinak se primjećuje usporedbom treće i četvrte kombinacije, pa odatle i zaključak da je treća kombinacija prikladnija.

Vrijedno je zapaziti da je dodavanjem filtra $H_1(s)$ u obliku kompenzatora s faznim prethodjenjem, uz zadržavanje ω_m na istoj vrijednosti, u obje kombinacije postignuto povećanje konstante brzine; dakle isti učinak koji se u serijskoj kompenzaciji postiže kompenzatorom s faznim zaostajanjem.

12.4. ALGEBARSKI POSTUPAK SINTEZE

Sve veća dostupnost digitalnih računskih strojeva u svakodnevnoj inženjerskoj praksi utječe i na izbor postupaka sinteze regulacijskih sustava. Vrhunac uspješnosti na tom području postignut je primjenom digitalnih računskih strojeva u postupku sinteze s pomoću varijabli stanja. Međutim, djelotvornost tog neposrednog postupka sve više se gubi što je manji broj dostupnih varijabli stanja. Tako, da u slučaju kada je dostupna jedino izlazna veličina, postupak sinteze s varijablama stanja postaje manje djelotvoran od klasičnih grafoanalitičkih postupaka uzastopnim pokušajima.

Pokazalo se, međutim, da varijable stanja nisu jedini postupak sinteze gdje se uspješno mogu primijeniti digitalna računala. S njima se i klasični postupci uzastopnih pokušaja mogu ubrzati, ali se još uspješnije mogu primijeniti u tzv. algebarskim postupcima sinteze. Jedan takav postupak predložili su Chen i Shieh. Njihov postupak, kojeg ćemo u daljnjem tekstu po autorima nazvati Chen-Shiehova sinteza, u velikom broju slučajeva neposredno vodi do jednoznačnog kompenzatora i predstavlja vrlo djelotvoran i praktičan način sinteze.

Ipak predloženi postupak ima i svojih ograničenja. Pokazalo se, naime, da kadkada rezultira s nestabilnim sustavom, a kadkada s "kliznim" kompenzatorom, tj. s kompenzatorom kojem se jedan od parametara može mijenjati, a da sustav ostane u granicama zadanih uvjeta. Da bi se ovaj postupak mogao općenito primjenjivati, potrebno je utvrditi zakonitosti ponašanja u gore spomenutim kritičnim slučajevima.

12.4.1. Odredjivanje željene prijenosne funkcije iz zadanih specifikacija

Već je u više navrata spomenuto da željeno ponašanje sustava može biti zadano uprijenosnom funkcijom u eksplicitnom ili implicitnom obliku, ili samo s nekim značajkama. S prvim i trećim slučajem smo se već upoznali u prethodnim razmatranjima, a ovdje ćemo

vidjeti kako se postupa kad je prijenosna funkcija zadana u implicitnom obliku, tj. kako se dolazi do željene prijenosne funkcije iz zadanih specifikacija.

Medju osnovne podatke koji trebaju biti zadani spada struktura željene prijenosne funkcije. Iz zadane strukture proizlazi broj nepoznanica koje treba riješiti da bi se dobio njen eksplicitni oblik. Da bi problem bio jednoznačno rješiv broju nepoznanica, npr. n , treba odgovarati n linearno neovisnih specifikacija iz kojih se oblikuje sustav od n algebarskih jednažbi. Ako je dobijen sustav jednažbi linearan, do rješenja se dolazi primjenom jednog od poznatih načina za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednažbi. Ako je dobijen sustav jednažbi nelinearan, treba se poslužiti jednim od postupaka za rješavanje sustava nelinearnih algebarskih jednažbi.

Uzmimo da je zadana struktura željene prijenosne funkcije regulacijskog sustava, koja s jediničnom negativnom povratnom vezom glasi:

$$F(s) = \frac{b_1 s + a_2}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad (12.154)$$

te da su zadana tri parametra i to: konstanta brzine $K_v=20$, frekvencija kritične amplitude $\omega_T=5$ i stupanj prigušenja $\zeta=0,7$, s pomoću kojih treba odrediti nepoznanice željene prijenosne funkcije a_1 , a_2 i b_1 .

Ovako postavljen zadatak predstavlja općeniti slučaj, jer su parametri zadani iz tri različita područja; konstanta brzine iz vremenskog područja, frekvencija kritične amplitude iz frekvencijskog područja i stupanj prigušenja iz kompleksnog područja. Budući da postoje tri nepoznanice i tri neovisne specifikacije, zadatak je time jednoznačno definiran. Prvu jednažbu postavljamo iz definicije za konstantu brzine koja glasi:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \quad (12.155)$$

Budući da je u jednažbi (12.155) potrebno poznavati funkciju osnovne grane $G(s)$, a zadana je prijenosna funkcija regulacijskog

sustava $F(s)$, potrebno je najprije izraziti $G(s)$ sa $F(s)$. Uz jediničnu negativnu povratnu vezu $F(s)$ glasi:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (12.156)$$

a odatle:

$$G(s) = \frac{F(s)}{1-F(s)} \quad (12.157)$$

Uvrštenjem jednačbe (12.154) u (12.157) dobije se željena prijenosna funkcija osnovne grane:

$$G(s) = \frac{bs + a_2}{s^2 + (a_1 - b_1)s} \quad (12.158)$$

Poznavajući $G(s)$ može se izračunati konstanta brzine:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{bs + a_2}{s^2 + (a_1 - b_1)s} = \frac{a_2}{a_1 - b_1}, \quad (12.159)$$

i odatle prva jednačba:

$$a_1 - \frac{a_2}{K_v} - b_1 = 0 \quad (12.160)$$

Druga jednačba se postavlja iz definicije frekvencije kritične amplitude, koja glasi:

$$|G(j\omega_I)| = 1 \quad (12.161)$$

Uvrštenjem jednačbe (12.158) u (12.161) uz $s=j\omega_I$ izlazi:

$$\left| \frac{b_1(j\omega_I) + a_2}{(j\omega_I)^2 + (a_1 - b_1)j\omega_I} \right| = 1, \quad (12.162)$$

a odatle se sredjenjem dobije druga jednačba:

$$\omega_I^2 a_1^2 - 2\omega_I^2 a_1 b_1 - a_2^2 = -\omega_I^4 \quad (12.163)$$

Treća jednađžba se dobije usporedjenjem koeficijenata karakteristične jednađžbe sustava drugog reda u kompleksnom području:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (12.164)$$

s koeficijentima karakteristične jednađžbe željene prijenosne funkcije regulacijskog sustava (12.154).

$$s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \quad (12.165)$$

Na taj način se dobiju jednađžbe:

$$2\zeta\omega_n = a_1 \quad \text{i} \quad \omega_n^2 = a_2 ,$$

a odatle sredjenjem treća jednađžba:

$$a_1^2 - 4a_2 \zeta^2 = 0 \quad (12.166)$$

Na taj način smo dobili tri nelinearne algebarske jednađžbe s tri nepoznanice, pa je stoga problem jednoznačno određen.

Budući da su dobijene jednađžbe nelinearne, treba ih riješiti s nekim od postupaka za rješavanje nelinearnih algebarskih jednađžbi. Ovdje se odlučujemo za Newton-Raphsonov multidimenzijski postupak, pa uz uvjet da pogreška ne smije biti veća od 1%, digitalnim računalom dolazimo do rezultata već u osmoj iteraciji, kako je pokazano na Tablici 12.4.

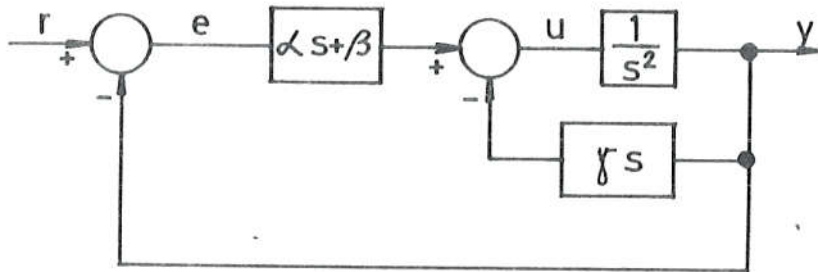
Iteracija	$x_1=a_1$	$x_2=a_2$	$x_3=b_1$
0	1,000	1,000	1,000
1	12,128	171,244	4,054
2	12,763	85,414	4,950
3	9,021	52,219	4,849
4	6,930	29,768	4,466
5	5,541	17,987	4,244
6	5,046	13,345	4,290
7	4,984	12,685	4,347
8	4,984	12,674	4,350

Tablica 12.4. Rezultati iteracijskog računanja

Time je postavljeni zadatak riješen, a željena prijenosna funkcija glasi:

$$F(s) = \frac{4,350s + 12,674}{s^2 + 4,984s + 12,674} \quad (12.167)$$

Primjer: Zadan je objekt $G_p(s) = 1/s^2$, a treba ga tako kompenzirati da se dobije prijenosna funkcija (12.167). Pri tome signal e iza ulaznog kompenzatora treba predstavljati razliku referentnog i izlaznog signala $e(s) = r(s) - y(s)$.



Sl.12.48. Objekt $G_p(s) = 1/s^2$ sa serijskim i paralelnim kompenzatorom

Da bi se došlo do rješenja treba najprije izabrati strukturu kompenzacije i strukturu pojedinih kompenzatora. Odlučujemo se za strukturu na Sl.12.48. s tahometrom u povratnoj grani minorne petlje i s paralelnom kombinacijom derivatora i pojačala u osnovnoj grani. Prijenosna funkcija regulacijskog sustava u tom slučaju glasi:

$$F_1(s) = \frac{(\alpha s + \beta) \frac{1/s^2}{1 + \frac{\gamma s}{s^2}}}{1 + (\alpha s + \beta) \frac{1/s^2}{1 + \frac{\gamma s}{s^2}}}$$

i odatle:

$$F_1(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + (\alpha + \gamma)s + \beta} \quad (12.168)$$

Budući da dvije razlomljene racionalne funkcije mogu biti identične samo ako su im koeficijenti brojnika i nazivnika jednaki

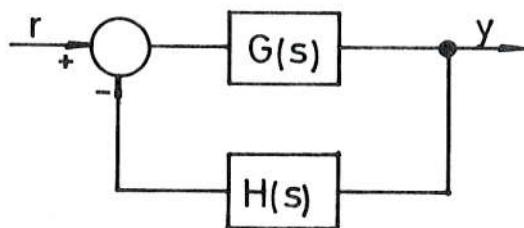
dovoljno je u ovom slučaju izjednačiti koeficijente da se dobi-
je traženo rješenje koje glasi:

$$\alpha = 4,350 \quad ; \quad \beta = 12,674 \quad \text{ i } \quad \gamma = 0,634.$$

Ovo je bio samo školski primjer, a teško se u inženjerskoj prak-
si može pojaviti. U općenitom slučaju, nakon izbora strukture
kompenzacije i kompenzatora, polinomi brojnika i nazivnika že-
ljene prijenosne funkcije i funkcije kompenziranog regulacijskog
sustava će se razlikovati, tako da neposrednu usporedbu koefici-
jenata neće biti moguće napraviti. Da bi se ipak to postiglo, pot-
rebno je najprije sustav višeg reda reducirati na red željene
prijenosne funkcije.

12.4.2. Reduciranje reda prijenosne funkcije

O smanjenju reda prijenosne funkcije postoji opsežna literatura,
a i još uvijek se na tome radi. Postupak s kojim ćemo se ovdje
upoznati temelji se na svojstvu beskonačnog razvoja razlomljene
racionalne funkcije, tzv. *Cauerovog razvoja*, da mu utjecaj viših
članova razvoja na ponašanje funkcije naglo opada. Zbog tog sma-
njenog utjecaja, dovoljno visoki članovi razvoja se mogu zane-
mariti, a da se ponašanje funkcije znatnije ne promijeni.



Sl.12.49. Kanonski oblik regulacijskog sustava

Da bismo to pokazali krenimo od kanonskog oblika regulacijskog
sustava sa Sl.12.49., kojeg prijenosna funkcija glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad (12.169)$$

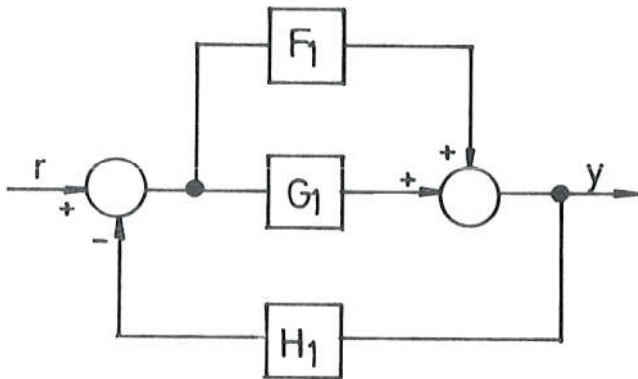
Dijeljenjem brojnika i nazivnika s $G(s)$ dobije se:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{\frac{1}{G(s)} + H(s)} \quad , \quad (12.170)$$

a uz $G(s) \rightarrow \infty$ funkcija (12.170) prelazi u:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{H(s)} \quad (12.171)$$

Relacija (12.170) se može smatrati najjednostavnijim slučajem Caurovog razvoja, pri čemu je vrijedno zapaziti da se uz dovoljno veliko $G(s)$, funkcija može aproksimirati s $1/H(s)$.



Sl. 12.50. Kanonski oblik proširen s unaprijednom granom

Proširimo sada kanonski oblik regulacijskog sustava s jednom unaprijednom granom kako je pokazano na Sl.12.50. Prijednosna funkcija tako proširenog sustava glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_1 + F_1}{1 + (G_1 + F_1)H_1} \quad (12.172)$$

koja se može pisati i u obliku:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{H_1 + \frac{1}{F_1 + G_1}} \quad (12.173)$$

Ako je podsustav G_1 isto tako složena funkcija, tako da je:

$$G_1 = \frac{1}{H_2 + \frac{1}{F_2 + G_2}}, \quad (12.174)$$

Uvrštenjem (12.174) u (12.173) dobije se:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{H_1 + \frac{1}{F_1 + \frac{1}{H_2 + \frac{1}{F_2 + G_2}}}} \quad (12.175)$$

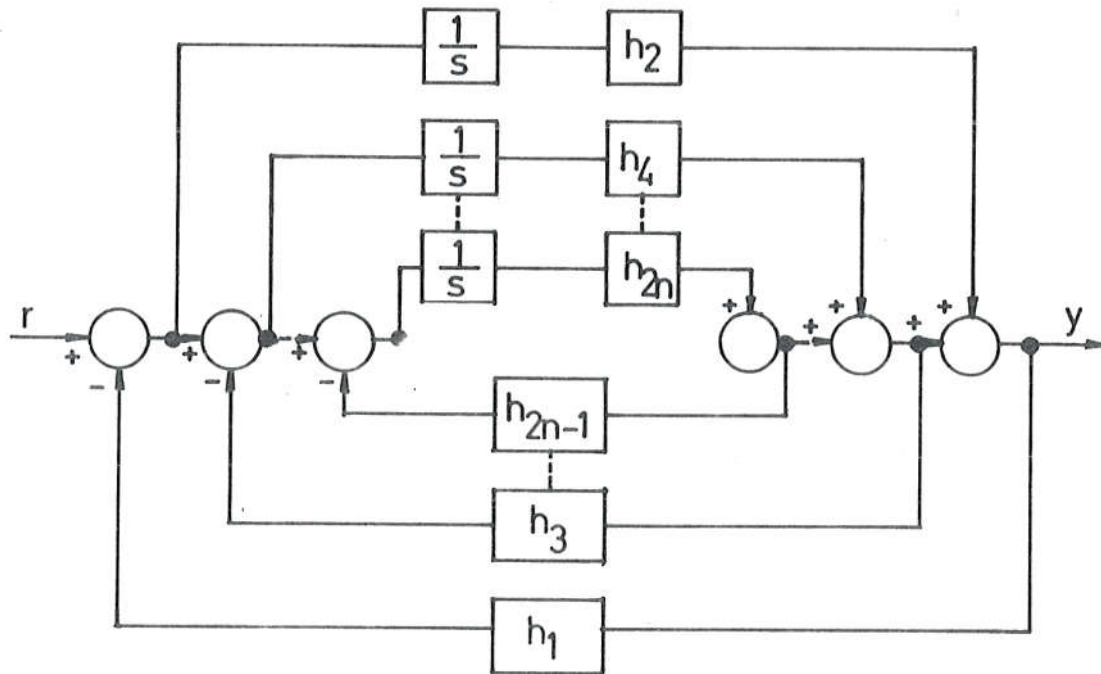
Uzme li se da je $F_i(s) = \frac{1}{s} h_i(s)$ i da su indeksi funkcija u povratnim granama neparni, a u unaprijednim granama parni, Caurov razvoj u općem slučaju glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{\frac{h_2}{s} + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\frac{h_4}{s} + \dots}}}} \quad (12.176)$$

Rezultat ovakvog razvoja je kombinacija unaprijednih i povratnih blokova, kako je pokazano na Sl.12.51. Treba obratiti pažnju da je član H_1 koji se nalazi u prvoj vanjskoj petlji povratne grane najutjecajniji. Idući, po redu utjecaja, je član H_2/s koji se nalazi u prvoj vanjskoj petlji unaprijedne grane, itd. Što su članovi višeg indeksa, tj. što su dalje od vanjskih petlji, njihov utjecaj na ponašanje sustava postaje sve manji. Ova spoznaja je je od osnovnog značaja i na njoj se temelji razmatrani način pojednostavnjivanja prijenosnih funkcija.

Regulacijski sustav je po prirodi niskopropusni filter. Stoga u postupku pojednostavnjenja sustava treba u prvom redu voditi računa o ustaljenom stanju. S tim u vezi razlomljenu racionalnu funkciju se priprema za Caurov razvoj na taj način da se pisanje polinoma u brojniku i nazivniku započinje s konstantnim članom i nastavlja nizati članove polinoma po uzlaznom redu potencije. Tako napisan opći oblik razlomljene racionalne funkcije n-tog reda glasi:

$$W(s) = \frac{A_{21} + A_{22}s + A_{23}s^2 + \dots + A_{2,n}s^{n-1}}{A_{11} + A_{12}s + A_{13}s^2 + \dots + A_{1,n+1}s^n} \quad (12.177)$$



Sl.12.51. Općeniti blokovski prikaz Caurovog razvoja

Do Caurovog razvoja se dolazi tako da se najprije brojnik i nazivnik osnovne funkcije podijele s brojnikom te funkcije. Na taj način se dobije funkcija u novom obliku s jediničnim brojnikom i s nazivnikom koji se sastoji od dva pribrojnika. Prvi pribrojnik je kvocjent konstantnih članova polinoma nazivnika i brojnika, a drugi pribrojnik je nova funkcija (nazovimo je sekundarna) koja za razliku od osnovne funkcije nema konstantnog člana.

U nastavku se sa sekundarnom funkcijom postupa isto kao i s osnovnom, tj. brojnik i nazivnik podijele se brojnikom. Rezultat te podjele je novi oblik sekundarne funkcije s jediničnim brojnikom, i s nazivnikom koji se sastoji od dva pribrojnika. Prvi pribrojnik je kvocjent prvih članova nazivnika i brojnika sekundarne funkcije, a drugi pribrojnik je nova funkcija (nazovimo je tercijalna). Na jednak način se nastavlja s obradom svake no-

ve funkcije sve dok ne dobijemo potreban broj prvih pribrojnika, koji su uvijek kvocjenti prvih članova polinoma nazivnika i brojnika prethodne funkcije.

Pokažimo taj postupak na prijenosnoj funkciji:

$$W(s) = \frac{A_{21} + A_{22}s + A_{23}s^2 + \dots + A_{2,n}s^{n-1}}{A_{11} + A_{12}s + A_{13}s^2 + \dots + A_{1,n+1}s^n} \quad (12.178)$$

Nakon dijeljenja s brojnikom dobije se:

$$W(s) = \frac{1}{\frac{A_{11}}{A_{21}} + \frac{\frac{A_{23}A_{12} - A_{11}A_{22}}{A_{21}}s + \frac{A_{21}A_{13} - A_{11}A_{23}}{A_{21}}s^2 + \dots}{A_{21} + A_{22}s + A_{23}s^2 + \dots + A_{2,n}s^{n-1}}} \quad (12.179)$$

Uz definiciju da je:

$$\frac{A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}}{A_{21}} = A_{31} \quad \text{i} \quad (12.180)$$

$$\frac{A_{21}A_{13} - A_{11}A_{23}}{A_{21}} = A_{32}$$

jednadžba (12.179) prelazi u:

$$W(s) = \frac{1}{\frac{A_{11}}{A_{21}} + \frac{A_{31}s + A_{32}s^2 + A_{33}s^3 + \dots}{A_{21} + A_{22}s + A_{23}s^2 + \dots}} \quad (12.181)$$

Daljnjim razvojem dobije se:

$$W(s) = \frac{1}{\frac{A_{11}}{A_{21}} + \frac{s}{\frac{A_{22}A_{31} - A_{32}A_{21}}{A_{31}} + \frac{A_{21}}{A_{31}} + \frac{A_{21}}{A_{31}} + A_{31} + A_{32}s + \dots}} \quad (12.182)$$

a uz definiciju da je:

$$\frac{A_{22}A_{31} - A_{32}A_{21}}{A_{31}} = A_{41} \quad , \quad (12.183)$$

jednadžba (12.182) se može pisati u obliku:

$$W(s) = \frac{1}{\frac{A_{11}}{A_{21}} + \frac{s}{\frac{A_{21}}{A_{31}} + \frac{s}{\frac{A_{31}}{A_{41}} + \dots}}} \quad , \quad (12.184)$$

odnosno:

$$W(s) = \frac{1}{\frac{A_{11}}{A_{21}} + \frac{1}{\frac{A_{21}}{sA_{31}} + \frac{1}{\frac{A_{31}}{A_{41}} + \frac{1}{\dots}}}}} \quad (12.185)$$

Radi jednostavnosti obično se kvocijenti koeficijenata označuju s h_j pa u tom slučaju jednadžba (12.185) glasi:

$$W(s) = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{\frac{h_2}{s} + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\frac{h_4}{s} + \dots}}}}} \quad (12.186)$$

Izračunavanje kvocijenta h_j višeg subskripta na ovaj način je približno složeno. Međutim, pokazalo se da se do istog rezultata može doći na mnogo jednostavniji način primjenom Routhovog rasporeda. Koeficijenti se u raspored slažu tako da u prvi redak idu koeficijenti nazivnika po rastućem subskriptu, a u drugi redak koeficijenti brojnika takodjer po rastućem supskriptu.

Članovi trećeg i ostalih redaka se izračunavaju prema relaciji Routhovog rasporeda koja u općem slučaju glasi:

$$A_{j,k} = A_{j-2,k+1} - \frac{A_{j-2,1} A_{j-1,k+1}}{A_{j-1,1}} \quad (12.187)$$

za $j=3, 4 \dots n+1$ $k=1, 2 \dots$

a prema oznakama za Routhov raspored (12.188)

$$\begin{array}{cccc} h_1 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ h_2 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ h_3 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ h_4 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \\ & & A_{51} & A_{52} & & \end{array} \quad (12.188)$$

Općeniti izraz za kvocijent h_j glasi:

$$h_j = \frac{A_{j,1}}{A_{(j+1),1}} \quad \text{za } j = 1, 2 \dots \quad (12.189)$$

Relacija (12.187) i (12.189) se primjenom Routhovog rasporeda lako pamti na slijedeći način. Pogledajmo naprije član $A_{j,k}$ za $j > 2$. Za pamćenje treba obratiti pažnju na strelice ucrtane u rasporedu (12.188). Taj se član dobije tako da se pomnoži prvi član prethodnog retka s članom u presjeku pretprethodnog retka i slijedećeg stupca, i da se od toga odbije umnožak prvog člana pretprethodnog retka i člana u presjeku prethodnog retka i slijedećeg stupca, te da se sve to podijeli s prvim članom prethodnog retka. Prateći strelice na rasporedu (12.188) za A_{31} prvi umnožak izlazi $A_{21} \cdot A_{12}$. Od toga se odbije drugi umnožak $A_{11} \cdot A_{22}$ i sve se podijeli sa članom A_{21} , pa se tako dobije:

$$A_{31} = \frac{A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}}{A_{21}} \quad (12.190)$$

Za član A_{42} izlazi:

$$A_{42} = \frac{A_{31}A_{23} - A_{21}A_{33}}{A_{31}} \quad (12.191)$$

Kad su poznati članovi Routhovog rasporeda, kvocijenti h_j se jednostavno dobiju dijeljenjem uzastopnih članova prvog stupca, kako je strelicama označeno na rasporedu (12.188). Prva dva kvocijenta tako dobijena glase:

$$h_1 = \frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \text{i} \quad h_2 = \frac{A_{21}}{A_{31}} \quad (12.192)$$

Ako se h_j višeg supskripta izražavaju članovima nižeg supskripta, prva četiri člana izlaze:

$$h_1 = \frac{A_{11}}{A_{21}}$$

$$h_2 = \frac{A_{21}}{A_{12} - h_1 A_{22}} \quad (12.193)$$

$$h_3 = \frac{A_{12} - h_1 A_{22}}{A_{22} - h_2 (A_{13} - h_1 A_{23})}$$

$$h_4 = \frac{A_{22} - h_2 (A_{13} - h_1 A_{23})}{A_{13} - h_1 A_{23} - h_3 [A_{23} - h_2 (A_{14} - h_1 A_{24})]}$$

Jednadžbe (12.193) u matričnom obliku glase:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h_2 h_4 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 + h_4 & h_2 h_3 h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{14} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_1 h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 + h_2 & h_1 h_2 h_3 & 0 \\ 0 & 1 & h_1 h_2 + h_1 h_4 + h_3 h_4 & h_1 h_2 h_3 h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{24} \end{bmatrix} \quad (12.194)$$

Kad smo na taj način došli do kvocijenata h_j , u mnogučnosti smo, na temelju činjenice da kvocijenti s višim supskriptom sve manje utječu na ponašanje sustava, zanemariti kvocijente s višim supskriptom i tako sustav višeg reda aproksimirati sa sustavom nižeg reda. Ako sustav višeg reda hoćemo aproksimirati sa sustavom drugog reda, aproksimacija izražena s h_j glasi:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{s(h_2 + h_4) + h_2 h_3 h_4}{s^2 + s(h_1 h_2 + h_1 h_4 + h_3 h_4) + h_1 h_2 h_3 h_4} \quad (12.195)$$

U općem slučaju aproksimacije sa sustavom n -tog reda, s računanjem treba ići do kvocijenta h_{2n} odnosno treba imati na raspolaganju $2n$ kvocijenata.

12.4.3. Izbor načina kompenzacije i određivanje parametara kompenzatora

Već smo se u poglavlju 12.4.2. na Sl.48. sreli s izborom načina kompenzacije ako je sustav $1/s^2$ kompenziran tahogeneratorom u minornoj petlji, i sklopom $\alpha s + \beta$ u osnovnoj grani. Tamo smo takav način kompenzacije prihvatili bez objašnjenja, a pokazalo se da je bio uspješan. Postavlja se pitanje: kako izabrati uspješni način kompenzacije, tj. smještaj i strukturu kompenzatora, koji će omogućiti izjednačenje kompenziranog sustava sa željenom prijenosnom funkcijom. Jednoznačnog odgovora na to pitanje nema, kao što i inače u sintezi nema jednoznačnog rješenja. Očito je, međjutim, da bez obzira na smještaj i strukturu kompenzatora, u njima treba postojati onoliko nezavisnih parametara koliko treba ostvariti koeficijenata željene prijenosne funkcije.

U slučaju npr. željene prijenosne funkcije (12.167) treba ostvariti tri koeficijenta: $A_{11}=A_{21}=12,674$, $A_{12}=4,983$ i $A_{22}=4,350$, pa prema tome primijenjeni kompenzatori trebaju imati tri neovisno ugodiva parametra. Ilustrirajmo to na nekoliko različitih načina kompenzacije.

1 način: *Serijsko-paralelna kompenzacija*

Zadan je sustav:

$$G_p(s) = \frac{6000}{s(s^2 + 40s + 300)} \quad , \quad (12.196)$$

a traži se da ga se kompenzira tako da parametri kompenziranog sustava s jediničnom povratnom vezom budu:

$$K_v = 20 \quad , \quad \omega_I = 5 \quad i \quad \zeta = 0,7$$

Budući da su to iste specifikacije koje smo već imali, željena prijenosna funkcija nam je već poznata, i glasi:

$$F(s) = \frac{4,34s + 12,674}{s^2 + 4,98s + 12,674}$$

Postoji mogućnost da jednadžbe postavimo usporedbom A_{ij} ili h_j . Pokazalo se da su jednadžbe sa h_j jednostavnije, pa ćemo njih i primijeniti. Razvojem željene prijenosne funkcije u Caurov razvoj dobije se:

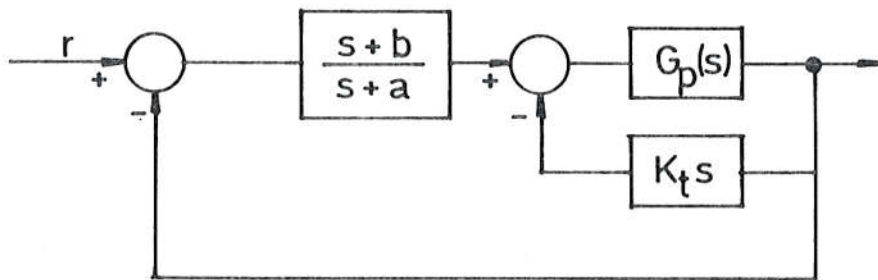
$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{20}{s} + \frac{1}{-0,0405 + \frac{1}{-\frac{15,65}{s} + \dots}}}} \quad (12.197)$$

a vrijednosti kvocijenata h_j su:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 & h_3 &= -0,0405 \\ h_2 &= 20 & h_4 &= -15,65 \end{aligned} \quad (12.198)$$

Idući korak je, da izaberemo način kompenzacije i strukturu kompenzatora, pa da zatim nadjemo izraze h_j kompenziranog sustava,

koje potom izjednačimo s h_j željenog sustava i izračunamo parametre kompenzatora. Što se načina kompenzacije i strukture kompenzatora tiče, jedini uvjet koji pri tome treba ispuniti je da dodana kompenzacija posjeduje onoliko neovisno ugodivih parametara koliko željena prijenosna funkcija ima različitih koeficijenata. Budući da željena prijenosna funkcija u ovom slučaju ima tri različita koeficijenta, kompenzacija koju dodajemo treba imati tri neovisno ugodiva parametra. Tom uvjetu udovoljava serijsko-paralelna kompenzacija na Sl.12.52., pa se stoga odlučujemo za taj način kompenzacije



Sl.15.52. Serijsko-paralelna kompenzacija s tri neovisno ugodiva parametra

Prijenosna funkcija izabrane serijsko-paralelne kompenzacije sa Sl.12.42. glasi:

$$F'(s) = \frac{A_{21} + A_{22}s}{A_{11} + A_{12}s + A_{13}s^2 + A_{14}s^2 + s^4} \quad (12.199)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 600 \, b & A_{14} &= 40 + a \\ A_{12} &= 300a + 60K_t + 600 & A_{15} &= 1 \\ A_{13} &= 300 + 6000K_t + 60a & A_{21} &= 6000 \, b \\ & & A_{22} &= 6000 \end{aligned}$$

Primjenom Routhovog rasporeda odatle se dobije:

$$\begin{aligned}
 h_1' &= 1 \quad ; \quad h_2' = \frac{6000}{300 + 6000aK_t} \\
 h_3' &= \frac{(300a + 6000aK_t)^2}{6000(300a + 6000aK_t - 300b - 6000bK_t - 400ab)} \\
 h_4' &= \frac{6000(300a + 6000aK_t - 300b - 6000bK_t - 400ab)^2}{(300a + 6000aK_t) [(300 + 6000K_t + 40a)(300a + 6000aK_t) - \\
 &\quad - 300b - 6000bK_t - 40aK_t] + b(40 + a)(300a + 6000aK_t)], \quad (12.200)
 \end{aligned}$$

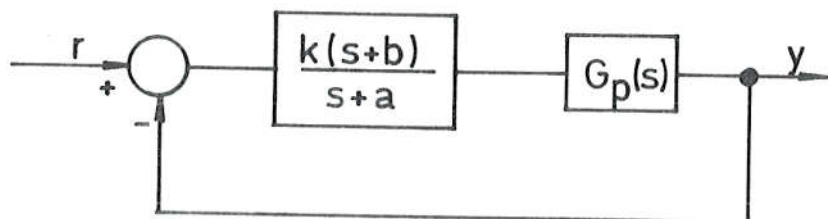
te konačno izjednačenjem h_j iz (12.198) s h_j iz (12.200) i rješenjem izlazi:

$$a = 0,634 \quad ; \quad b = 2,606 \quad \text{i} \quad K_t = 0,156$$

Tim je postavljeni problem riješen, jer $F'(s)$, aproksimirana s prva četiri kvocjenta h_j , ispada jednaka željenoj prijenosnoj funkciji.

2 način: *Serijska kompenzacija*

Budući da su tri neovisno ugodiva parametra jedini uvjet koji treba zadovoljiti, kompenzacija se može izvesti i sa serijskim kompenzatorom na Sl.12.53.



Sl.12.53. *Serijska kompenzacija s tri neovisno ugodiva parametra*

Prijenosna funkcija tako kompenziranog sustava ima istu strukturu kao i (12.199); jedino im se koeficijenti razlikuju, tako da za serijsku kompenzaciju sa Sl.12.53. iznose:

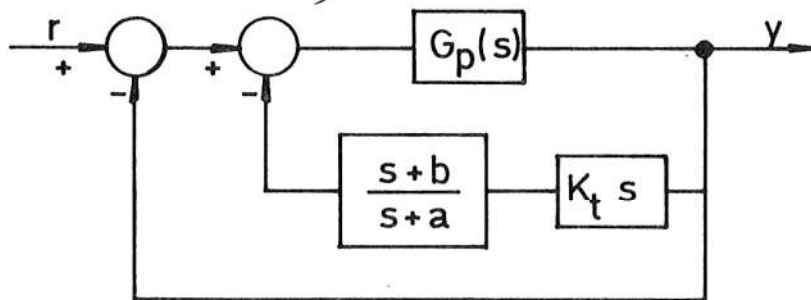
$$\begin{aligned} A_{11} &= 6000kb & A_{15} &= 1 \\ A_{12} &= 6000 + 300a & A_{21} &= 6000kb \\ A_{13} &= 300 + 40a & A_{22} &= 6000k' \\ A_{14} &= 40 + a \end{aligned}$$

Pomoću Routhovog rasporeda sada se nadju h_j' kompenziranog sustava i izjednače s h_j željene prijenosne funkcije (12.167). Rješenjem tih jednadžbi konačno izlazi:

$$k = 0,322 ; \quad a = 0,616 \quad \text{i} \quad b = 1,92$$

3 način: *Paralelna kompenzacija*

Polazeći od uvjeta triju neovisno ugodivih parametara kompenzacija se može izvesti i paralelnim kompenzatorom sa Sl.12.54.



Sl.12.54. *Paralelna kompenzacija s tri neovisno ugodiva parametra*

Prijenosna funkcija tako kompenziranog sustava ima istu strukturu kao i prijenosne funkcije u prethodna dva slučaja, a izrazi koeficijenta glase:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= 6000a & A_{15} &= 1 \\
 A_{12} &= 6000+300a+6000K_t b & A_{21} &= 6000a \\
 A_{13} &= 300+6000K_t+40a & A_{22} &= 6000 \\
 A_{14} &= 40 + a
 \end{aligned} \tag{12.202}$$

Primjenom Routhovog rasporeda, te izjednačenjem h_j^* s h_j i rješenjem dobije se:

$$a = 2,579 \quad b = 0 \quad \text{i} \quad K_t = 0,142$$

4 način: *Kompensacija s jednim redundantnim neovisno ugodivim parametrom*

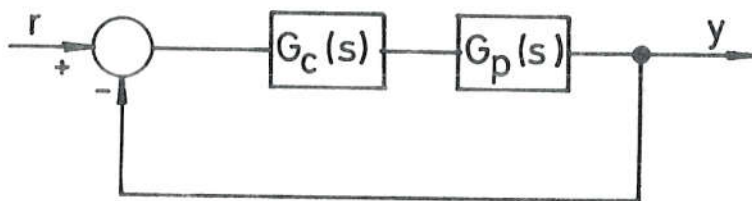
U sva tri dosadašnja načina rješavanja problema sinteze kompenzatori su imali onoliko neovisno ugodivih parametara koliko je željena prijenosna funkcija imala različitih koeficijenata, a sada ćemo vidjeti kakva situacija nastaje ako postoji još i jedan redundantni neovisno negodivi parametar.

Uzmimo ponovo u razmatranje isti zadatak, s jedinom razlikom da sada kompenzacijom unosimo četiri neovisno ugodiva parametra, umjesto tri, kao u prijašnjim slučajevima. Mogli bi izabrati bilo koji način kompenzacije, a odlučujemo se za serijsku (Sl.12.55.) kompenzatorom oblika:

$$G_c(s) = \frac{s^2+cs+d}{s^2+as+b} \tag{12.203}$$

i zadanom prijenosnom funkcijom objekta:

$$G_p(s) = \frac{600}{s(s^2+40s+300)}$$



Sl.12.55. Serijska kompenzacija s jednim redundantnim parametrom

Uvrštenjem funkcija $G_c(s)$ i $G_p(s)$ u funkciju regulacijskog sustava sa Sl.12.55 i sredjenjem dobije se:

$$F'(s) = \frac{A_{21} + A_{22}s + A_{22}s^2}{A_{11} + A_{12}s + A_{13}s^2 + A_{14}s^3 + A_{15}s^4 + A_{16}s^5} \quad (12.204)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} A_{21} &= 6000d & A_{13} &= 300a + 40b + 6000 \\ A_{22} &= 6000c & A_{14} &= 300 + 40a + b \\ A_{23} &= 6000 & A_{15} &= 40 + a \\ A_{11} &= 6000d & A_{16} &= 1 \\ A_{12} &= 300b + 6000c \end{aligned} \quad (12.205)$$

Primjenom Caureovog razvoja te izjednačenjem kvocijenata h_j i h'_j i rješenjem dobije se:

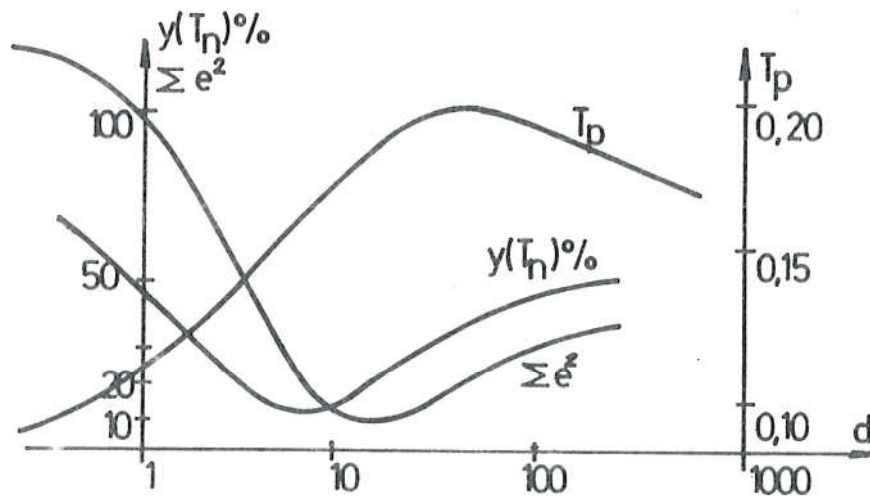
$$a = 1,620 \, d \quad ; \quad b = d \quad ; \quad c = 0,521 \, d$$

Iz rezultata se vidi da četvrti parametar nije jednoznačno određen. Drugim riječima, sve vrijednosti za d zadovoljavaju željenu prijenosnu funkciju. Uvrštenjem rezultata za a, b, c i d u jednadžbe (12.205) dobiju se koeficijenti:

$$\begin{aligned} A_{21} &= 6000 \, d & A_{13} &= 6000 + 526 \, d \\ A_{22} &= 3126 \, d & A_{14} &= 300 + 65,8 \, d \\ A_{23} &= 6000 & A_{15} &= 40 + 1,62 \, d \\ A_{11} &= 6000 \, d & A_{16} &= 1 \\ A_{12} &= 3426 \, d \end{aligned}$$

Budući da sve vrijednosti parametra d zadovoljavaju željenu prijenosnu funkciju, vrijedno je istražiti kako parametar d utječe na neke od karakterističnih parametara regulacijskog sustava.

Za ovaj slučaj u razmatranje su uzeta tri parametra, i to: vrijeme porasta T_p , nadvišenje $y(T_n)$ i suma kvadrata pogreške $\int e^2$, a njihove promjene u ovisnosti o parametru d pokazane su na Sl.12.56.



Sl.12.56. Ovisnost vremena porasta, nadvišenja i sume kvadrata pogreške o parametru d

Sa Sl.12.56. se vidi da sva tri istraživana parametra u funkciji parametra d imaju ekstreme, što nam daje mogućnost da izaberemo područje koje nam najviše odgovara odnosno da izbjegnemo područje koje nam najmanje odgovara. U ovom slučaju nam stoji na raspolaganju i mogućnost da se odlučimo za najmanje nadvišenje ili za najmanju sumu kvadrata pogreške. Odatle zaključujemo da redukcijski parametar nikako nije na odmet, nego da može vrlo korisno poslužiti za optimiranje nekih od parametara sustava.

Na kraju rezimirajmo redoslijed Chen Shiehove sinteze.

1. *Odredjivanje matematičkog modela željene prijenosne funkcije.* Na temelju zadanih specifikacija, a s pomoću Newton-Raphsonove multidimenzionalne metode, sintetizira se željena prijenosna funkcija.
2. *Izbor načina kompenzacije i strukture kompenzatora.* U ovisnosti o strukturi željene -prijenosne funkcije i prijenosne funkcije objekta, izabire se način kompenzacije i struktura kompenzatora. Uvjet koji pri tome treba zadovoljiti je da izabrani kompenzatori imaju onoliko broj neovisno ugodivih parametara, koliki je broj različitih koeficijenata željene prijenosne funkcije.
3. *Pojednostavnjenje prijenosne funkcije kompenziranog regulacijskog sustava.* Primjenom Caurovog razvoja i zanemarenjem njegovih viših čla-

nova reducira se izvorna prijenosna funkcija kompenziranog regulacijskog sustava na red željene prijenosne funkcije.

4. *Odredjivanje parametara kompenzatora.* Izjednačavanjem kvocijenata h_j ili A_{ij} željene i stvarne prijenosne funkcije formira se sustav jednažbi kojih rješenja daju tražene parametre kompenzatora.
5. *Optimiranje kritičkih parametara sustava.* U slučaju kad se hoće neki od parametara sustava optimirati, dodaje se kompenzatorima jedan redundantni parametar i njime se izvrši optimizacija kritičnog parametra sustava.

Opisana Chen-Shiehova sinteza ima svojih prednosti i mana. Prednosti su u jednoznačnosti rješenja, a mane u netočnostima usljed aproksimacije.

Budući da postupak daje jednoznačno rješenje, zadatak sinteze se na ovaj način može riješiti i bez razumijevanja problema regulacije. To spušta sintezu na razinu rutinskog posla i omogućuje da taj inače složeni zadatak koji primjenom drugih postupaka trebaju obavljati visokokvalificirani automatričari, u ovom slučaju mogu rješavati i osobe s nižim kvalifikacijama, što je dobro, jer se time povećava ekonomičnost poslovanja.

Mane se javljaju kao posljedica aproksimacije. Naime, zanemarenjem minornih petlji višeg supskripta prema Sl.12.51., odnosno viših članova Cauerovog razvoja prema relaciji (12.186), ne postiže se izjednačenje stvarnog regulacijskog sustava sa željenim, već se samo sustavnim zanemarenjem manje utjecajnih članova razvoja aproksimira stvarni regulacijski sustav s prijenosnom funkcijom kojoj se struktura podudara sa strukturom željene prijenosne funkcije. Ako su zanemarene unutarnje petlje bile stabilne, ponašanje aproksimacijskog i aproksimiranog sustava će se za inženjerske potrebe dovoljno dobro podudarati, jer je utjecaj zanemarenih petlji zaista zanemariv.

Ako su, međjutim, zanemarene petlje bile nestabilne, situacija se bitno mijenja, jer se utjecaj nestabilnih polova ne može zanemariti. Može se stoga dogoditi da aproksimirani sustav ispadne nestabilan, iako je aproksimacijski sustav stabilan. Da bi se iz-

bjegle neželjene posljedice, potrebno je stoga poslije obavljene Chen-Shiehove sinteze još i provjeriti stabilnost stvarnog kompenziranog sustava.

Gledajući u cjelini, ovaj se način sinteze usprkos navedenim nedostacima pokazao vrlo praktičan i ekonomičan uz uvjet da se izvodi na digitalnom računalu, pa ga se stoga u takvim okolnostima i preporučuje.

12.5. ZAKLJUČAK

Što su osnovni sustavi koje treba regulirati nižeg reda, provedba sinteze u prostoru stanja postaje sve manje ekonomična. Takva tendencija postaje još izrazitija u slučaju sustava sa samo djelomično dostupnim varijablama stanja. Pokazalo se da je u takvim slučajevima sintezu ekonomičnije provesti s filtrima određenih svojstava, koji se serijski, paralelno ili kombinirano dodaju osnovnom sustavu, i na taj način se postiže željeno ponašanje regulacijskog sustava.

Od spomenutih filtara najpoznatiji su kompenzatori s faznim zaostajanjem, s faznim prethodjenjem i s faznim zaostajanjem i prethodjenjem. U servomehanizmima se za kompenziranje primjenjuju i tahogeneratori.

Postoje grafički i algebarski postupci sinteze, tj. određivanje parametara odabranih kompenzatora. Grafički postupci su pregledniji, ali zahtijevaju veću inženjersku stručnost, a algebarski postupci su manje pregledni, ali ih mogu provesti i osobe niže inženjerske stručnosti.

POGOVOR

Izbor, redoslijed i način obradbe gradiva u ovom udžbeniku uvjetovan je svrhom za koju je predviđen, i brojem nastavnih sati odnosno vremenom u kojem gradivo treba obraditi. Svrha je da se studentima elektronike i elektroenergetike dađe solidna osnova za daljnje izučavanje automatskog vođenja, i to u okviru devedeset sati predavanja i devedeset sati vježbi. S obzirom na auditorij kojem je udžbenik namijenjen, izbor i način obradbe gradiva su usmjereni prema servomehanizmima. Ujedno se pri tome, a osobito u redoslijedu izlaganja gradiva, vodilo računa o suvremenom trendu razvoja automatskog vođenja.

S obzirom na te polazne osnove, odmah na početku su sažeto obrađene temeljne zakonitosti električkih, mehaničkih, fluidičkih i toplinskih sustava i pokazane njihove međusobne analogije. Na taj način se studente uvodi u područje matematičkog modeliranja i preko analogija privikava na apstraktno poimanje dinamičkih zakonitosti, neovisno o naravi fizičkog objekta na kojem se odvijaju.

U slijedeća dva poglavlja su obrađena dva načina matematičkog modeliranja, i to najprije izlazno-ulazni opis sustava, a potom opis s varijablama stanja. Tako se studenti odmah na početku bavljenja automatskom regulacijom upoznaju s dva načina modeliranja i u mogućnosti su da na svakom problemu u daljnjoj obradbi procijene koji je od njih prikladniji za primjenu u određenoj situaciji.

U petom poglavlju raspravljani su pojam i učinci negativne povratne veze, a potom slijede poglavlja u kojima su obrađeni vremenski i frekvencijski odziv. S poglavljem o stabilnosti završava se prvi dio udžbenika koji se po nastavnom planu FESB-a obrađuje

u šestom semestru.

Drugi dio udžbenika, u kojem se obrađuje gradivo predviđeno za sedmi semestar, započinje s geometrijskih mjestom korijena, a potom slijedi poglavlje o specifikacijama, koje je ujedno i zadnje poglavlje analize.

U slijedeća dva poglavlja obrađena je sinteza, i to najprije u prostoru stanja (radi što cjelovitijeg pregleda problematike), a potom s prijenosnom funkcijom. Sintezi s prijenosnom funkcijom, koja je obrađena u zadnjem poglavlju, obraćena je posebna pažnja, jer je u suvremenoj inženjerskoj praksi taj način rješavanja problema regulacije najčešći.

Izloženi pristup osnovama teorije automatskog reguliranja u okviru postavljene svrhe i raspoloživog vremena rezultat je višegodišnjeg vlastitog nastavnog iskustva, uz maksimalno uvažavanje mišljenja studenata i kolega nastavnika kojima ovo gradivo predstavlja osnovu njihovih kolegija. Iz te suradnje sa studentima i nastavnicima nastale su neke promjene starijeg načina pristupa, među kojima treba istaknuti elementarni uvod u matematičko modeliranje, maksimalnu orijentaciju na Laplaceovo područje, i simultanu primijenu opisa s prijenosnom funkcijom i s varijablama stanja već od samog početka.

Budući da ovaj udžbenik sadrži devedeset sati predavanja u okviru kojih je trebalo obraditi osnove teorije automatskog reguliranja linearnih sustava, nije se moglo obuhvatiti čitavo gradivo koje se iz ovog područja može naći u literaturi. Stoga su izostavljeni mnogi vrlo zanimljivi razvojni prikazi, a i neki poučni ali manje aktualni postupci, a izbor je ograničen isključivo na primjenjivo gradivo. Pri tome je prednost dana općoj teoriji kao osnovi za rješavanje svih posebnih slučajeva. Da složenost objekta ne bi odvlačila pažnju od teorijskih postavki, koje se na njemu demonstriraju, najveći broj ilustracija je izveden na vrlo malom broju dobro poznatih objekata.

Na kraju treba naglasiti da je čitavo ovo područje još uvijek u stanju intenzivnog razvojnog previranja i da se svakodnevno jav-

ljaju nove, a često revolucionarne ideje. Posebno se osjeća veliki utjecaj primjene digitalnog računala, od kojeg se već u najbližoj budućnosti može očekivati da će potisnuti mnoge trenutno aktualne postupke i zamijeniti ih boljima i djelotvornijima koje danas možda još niti ne naslućujemo.

U Splitu, 1982.

A u t o r

LITERATURA

1. BARBE C. EDWIN, Linear Control Systems, International Textbook Company, Scraton, Pen., 1963.
2. CANNON H. ROBERT, Dynamics of Physical Systems, McGraw-Hill Book Company, London, 1963.
3. CHEN C.F. and SHIEH L.S., An Algebraic Method for Control Systems Desing, Int. J.Control, 1970., Vol. 11, No 5. pp 717-739.
4. CHEN H.WAYNE, The Analysis of Linear Systems, McGraw-Hill Book Company, London, 1963.
5. CHUBB A. BRUCE, Modern Analytical Desing of Instrument Servomechanisms, Addison, Wesley Publishing Company, London, 1967.
6. CRUZ B. JOSE, Feedback Systems, McGraw-Hill Book Company, 1972.
7. D'AZZO J. HOHN, HOUPIS H. CONSTANTINE, Feedback Control System Analysis and Synthesis, McGraw-Hill Book Company, London, 1966.
8. DeROY E. BENJAMIN, Automatic Control Theory, John Wiley and Sons, Inc., London, 1966.
9. DESOER C.A. and VIDYSAGER, Feedback Systems: Imput-output Properties, Academic Press, London, 1975.
10. EVELEIGH W.VIRGIL, Introduction to Control Systems Desing, McGraw-Hill, Book Company, London, 1972.
11. LAUER H., LESNICK N.R. and MATSON E.L., Servomechanism Fundamentals, McGraw-Hill Book Company, London, 1960.
12. MELSA L.JAMES, SCHULTZ G.DONALD, Linear Control Systems, McGraw-Hill Book Comp., London, 1969.
13. PFEIFFER E.PAUL, Lynear System Analysis, Mc-Graw-Hill Book Comp., London, 1961.

14. RAVEN H. FRANCIS, Automatic Control Engineering, Mc-Graw-Hill Book Comp., London, 1968.
15. SCHWARTZ J. and EDGAR T.F., The Development of Simplified Adaptive Control Models Using the Continued Fraction Expansion, Proc. J.A. C.C., 1974, pp 484-494.
16. SHINNERS M. STANLEY, Control System Design, John Wiley and Sons, Inc., London, 1964.
17. TOU T. Julius, Modern Control Theory, McGraw-Hill Book Company, London, 1964.
18. TOWILL D.R., Transfer Function Techniques for Control Engineers, Iliffe Books Ltd., London, 1970.
19. WATKINS O. BRUCE, Introduction to Control Systems, The Macmillan Company, London, 1969.

K A Z A L O

broj grama GMK 8

Cauerov razvoj 222

centroid 13, 43

Chen i Shieh 217

čvorište koeficijenata k_i 47

determinističke pobude 52

direktni Nyquistov dijagram 197

dodavanje nula u sintezi 122

donje zabranjeno područje 161

eliminiranje nula u sintezi 104

Evansov postupak 4, 8

faktoriziranje polinoma 40, 44

fazni dijagram 39

fazno prethodjenje 151, 183

fazno zaostajanje 145, 166

frekvencija faznog maksimuma

- kompenzatora s faznim prethodjenjem 153

- kompenzatora s faznim zaostajanjem 147

frekvencija nadvišenja 71, 75, 93

generiranje varijabli stanja 128, 130

geometrijsko mjesto korijena 1, 5, 8

gornje zabranjeno područje 162

grane blokovskog prikaza

- osnovna 47

- povratna 48

- unaprijedna 83

grane GMK 9

inverzna prijenosna funkcija 203

inverzni Nyquistov dijagram 197

istosmjerni servomotor 22

jednadžba

- argumenta karakteristične jednadžbe 6, 10

- argumenta prijenosne funkcije 31

- modula karakteristične jednadžbe 5, 10

- modula prijenosne funkcije 30

kanonski oblik regulacijskog sustava 53, 222
klizni kompenzator 216

kompenzatori

- PI 143

- s faznim zaostajanjem 145, 166

- PD 148

- s faznim prethodjenjem 151, 182

- PID 153

- s faznim zaostajanjem i prethodjenjem 153, 190

kompenzirani objekt 103

konstanta kompenzatora

- proporcionalna 143

- integracijska 143

- derivacijska 148

konstanta pogreške ustaljenog stanja

- pomaka 54

- brzine 58, 92

- ubrzanja 61

konstantnost zbroja korijena GMK 20

konstrukcijski faktor 81

krajnje točke GMK 9

kutovi

- asimptota GMK 10, 42

- napuštanja polova 18, 43

- ulaska u nule 18, 43

linearni regulator stanja 22

maksimalni fazni kut

- kompenzatora s faznim prethodjenjem 153

- kompenzatora s faznim zaostajanjem 147

M i α kružnice 62, 65, 66

minorna petlja 47, 126, 129
mjera valjanosti 52
mjesta na rednoj osi GMK 9

nađomjesni serijski kompenzator 111, 118
nađomještene varijable stanja 131, 133
nadvišenje frekvencijskog od-
ziva 71, 75, 93
najjednostavniji slučaj sinteze 97
Newton-Raphsonov postupak 220
Nicholsov dijagram 67, 68
normalizirana frekvencija kritič-
ne amplitude 79

normalizirana konstanta brzine 92
normalizirana širina frekvencijskog
odziva 91

normalizirani amplitudni dijagram
frekvencijskog odziva 38

Nyquistov dijagram
direktni 63, 71, 198
inverzni 198

općeniti slučaj sinteze 102
općeniti sustav drugog reda 69,
80, 83
osnovni sustav drugog reda 69

pogreška ustaljenog stanja
- brzine 58, 59, 82
- pomaka 54, 56, 81
- ubrzanja 61, 62

pojačanje za točku na GMK 19
polno nulti dijagram
- funkcije petlje 33, 35
- funkcije regulacijskog sustava 33, 36
- karakteristične jednadžbe 33, 36

pomicanje nula u sintezi 118
postotno nadvišenje vremenskog odziva 88, 90
prigušenje 175, 183
prijenosna funkcija minorne petlje 129
pseudopetlja 40
pseudopojačanje 40, 46

razdvajanje polinoma 41, 45
redundantni parametar 235
Routhov raspored 228

simetričnost GMK 10
specifikacije 52
stupanj prigušenja 79

točka
- GMK 16
- izlaznog loma 13
- ulaznog loma 13

vrijeme nadvišenja 88

željena prijenosna funkcija 98, 217

